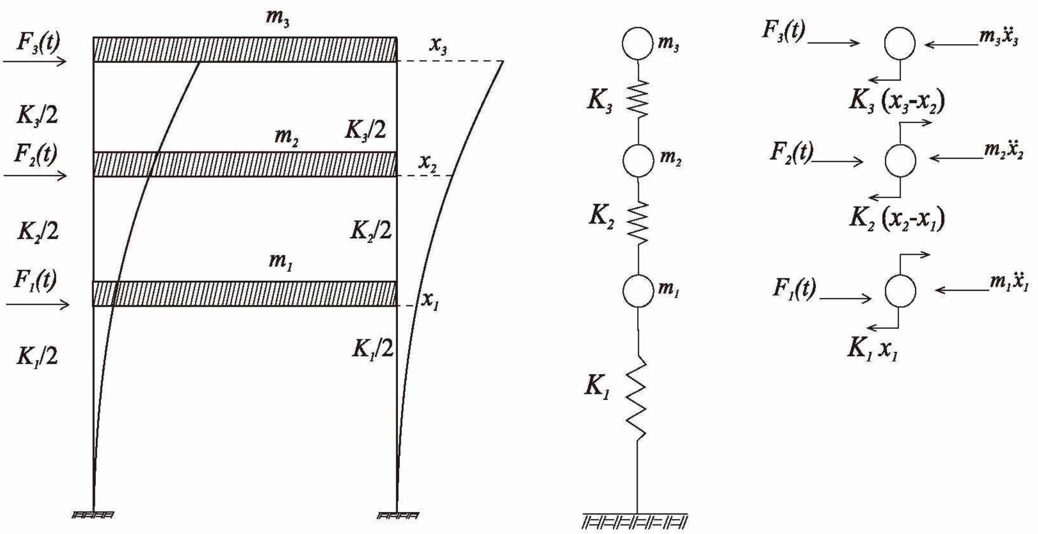
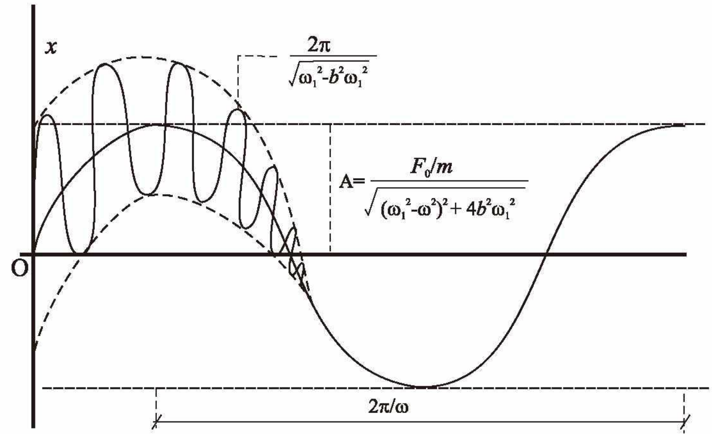
DINÁMICA ESTRUCTURAL

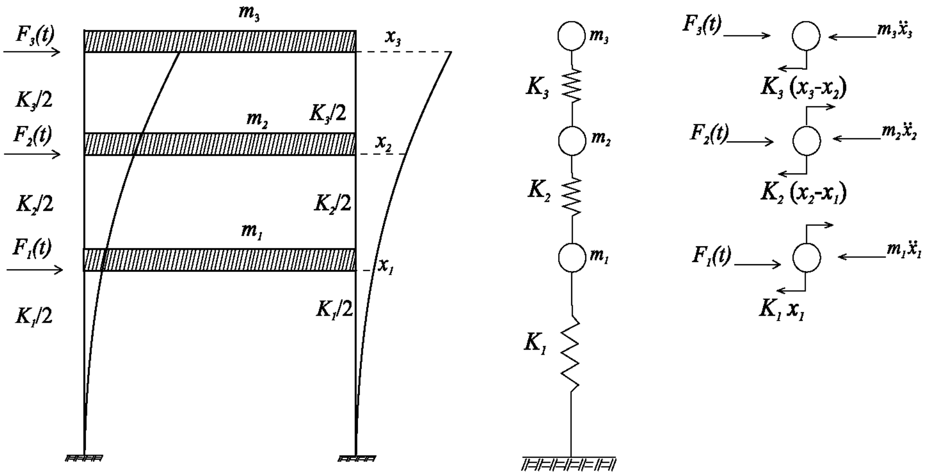


$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \\ F_{3(t)} \end{bmatrix}$$

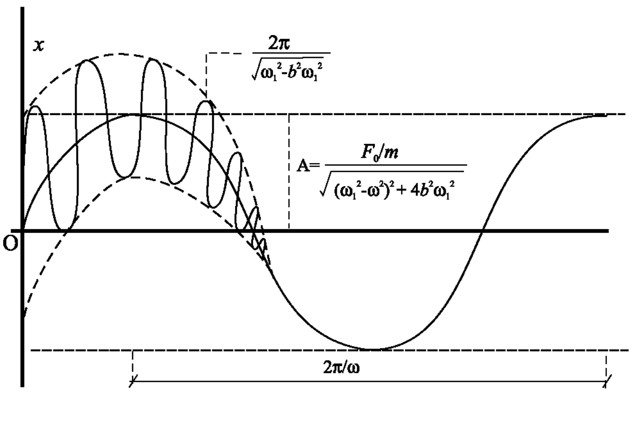


Mg. Ing. Genaro Delgado Contreras

DINÁMICA ESTRUCTURAL



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \\ F_{3(t)} \end{bmatrix}$$



Mg. Ing. Genaro Delgado Contreras

Primera Edición: Noviembre 2011

Impreso en Perú

PROLOGO

Es para el Autor una inmensa alegría publicar la presente obra titulada DINAMICA ESTRUCTURAL, esta obra permaneció inédita durante los últimos veinte años y fue a iniciativa de mis alumnos en todo el Perú que me solicitaron para poder publicar la presente obra.

Es un libro que presenta todos los principios y fundamentos de la Dinámica de Estructuras para que le sirva de base a los estudiantes en el curso básico de Dinámica y en el avanzado de Ingeniería Sismo resistente, que se llevan en las diferentes facultades de Ingeniería Civil del Perú.

Acompañamos ejemplos ilustrativos para que puedan fijar los conceptos teóricos de tan importante disciplina.

Creemos que por su presentación puede ser llevado como libro de texto en el curso de Ingeniería Sismo Resistente y como fuente de consulta para cualquier lector que desee estudiar tan apasionante tema de la Ingeniería estructural.

El segundo volumen será Análisis Sísmico de edificios que ya está en preparación.

Esperando contribuir con nuestro granito de arena en la formación de los futuros ingenieros estructurales, aprovechamos la oportunidad para invitarles a que nos hagan llegar sus comentarios y sugerencias para enriquecer esta obra en una próxima edición.

GENARO DELGADO CONTRERAS

Lima Noviembre del 2011

Dedicatoria

A mi esposa María y a mis hijos
María Elena y Genaro.

Y habrá grandes terremotos

San Lucas 21:11.

INDICE

CAPITULO 1

CONCEPTOS

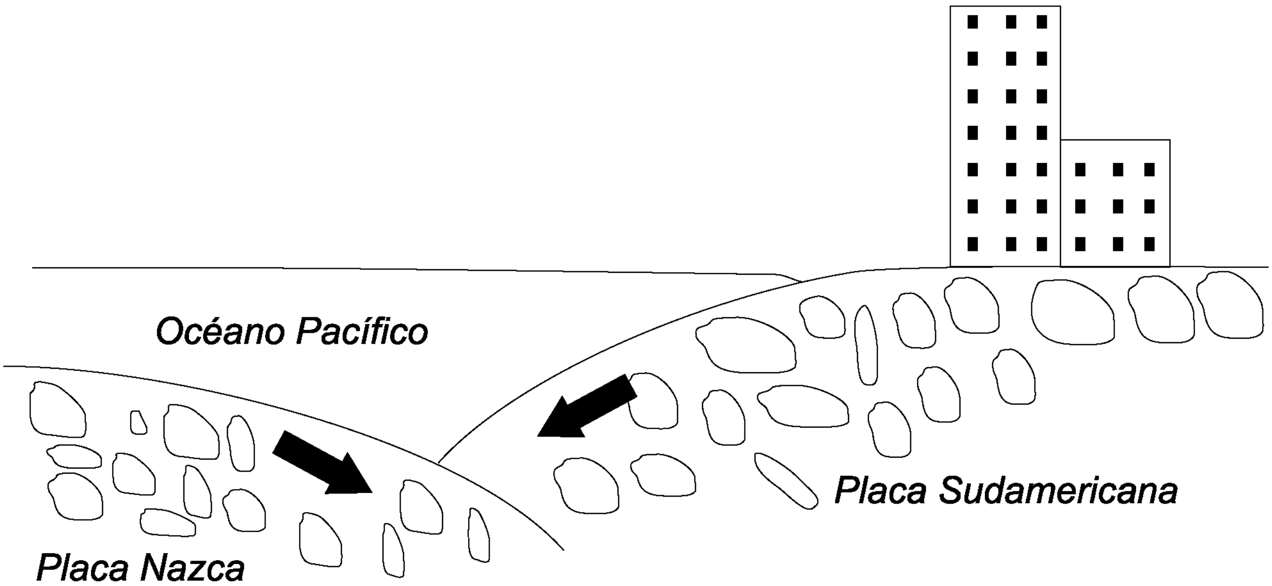
1.1 SISMO

Es todo estremecimiento de la tierra con mayor o menor violencia. Si es muy fuerte denomina terremoto, si es pequeño temblor.

1.2 ORIGEN DE LOS SISMOS

Existen varias teorías acerca del origen de los terremotos, pero la más aceptada es la teoría de las placas.

Esta teoría dice que la corteza terrestre está dividida en grandes bloques o "placas" que tiene movilidad de respuesta a los procesos convectivos que ocurren en las profundidades de la tierra. La actividad sísmica ocurre, en gran parte en los bordes de estas placas. El movimiento relativo entre placas es de separación, el material candente del interior de la tierra ya sea lava o magma, emerge y se solidifica lentamente formando nueva corteza terrestre. La continua presión de fuerzas internas, el desplazamiento de bloques de la corteza terrestre, la elasticidad de la roca y su capacidad para almacenar energía son causa de los terremotos.



El origen de los terremotos en el Perú es debido a la interacción entre la placa de Nazca y la Sud americana.

La placa de Nazca, frente a las costas del Perú, se mueven horizontalmente y se introduce por debajo de la Sudamericana como se puede ver en el siguiente esquema, la placa de Nazca presiona a la Sudamericana ocasionando deformaciones concéntricas de fuerzas.

Cuando los esfuerzos exceden cierto límite, la presión es liberada por un movimiento fuerte de la placa generándose esta forma el terremoto. Alguna de ellas puede generar también olas sísmicas altas llamados maremotos o tsunami.

1.3 NATURALEZA DE LAS ONDAS SÍSMICAS

Los movimientos de la masa rocosa de la corteza terrestre producen fuerzas y tensiones en la roca.

Si la estructura rocosa es suficientemente rígida como para no sufrir deformación, se acumulará esfuerzos hasta llegar al límite de elasticidad de la roca dando lugar a un colapso o movimiento brusco. Se genera vibraciones cuando un medio elástico súbitamente libera energía.

1.4 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS SÍSMICAS

Las ondas sísmicas son similares a las olas de mar se desplazan transmitiendo energía.

La intensidad disminuye a medida que la onda se aleja del punto de origen hasta disiparse totalmente.

Se puede hacer la analogía como cuando se sacude un mantel se hace vibrar una cuerda.

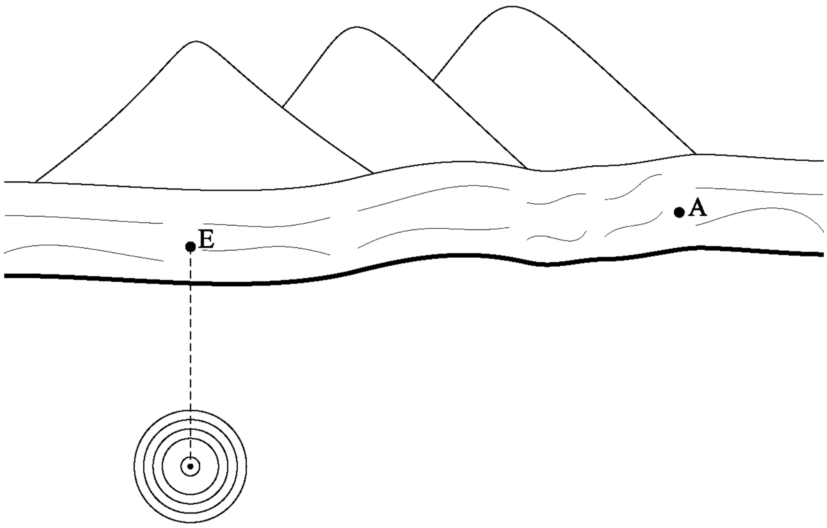
Las ondas sísmicas se propagan a través de las diversas capas de la corteza terrestre llegando a la superficie.

1.5 FOCO SÍSMICO (F).

Es el centro de la perturbación mecánica; origen desde donde se libera gran cantidad de energía sísmica que se transmite en forma de ondas.

1.6 EPICENTRO.

Es la proyección del foco sísmico en la superficie.

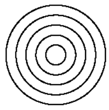


Algunos de las ondas observadas en un punto como "A" se transmiten por la superficie desde el epicentro. Otros viajan directamente dese el Foco al punto donde observamos el sismo (punto A) Estos son por lo general más fuertes.

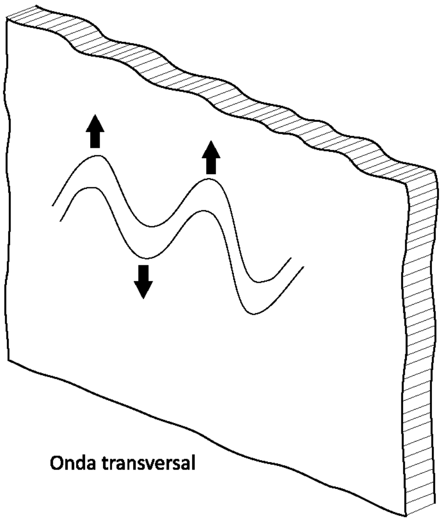
Existen dos tipos de ondas, la longitud y la transversal. La primera tiene la misma dirección en que se propaga la onda, son similares a la onda sonora también se les conoce con el nombre de punto P(preliminar); porque es la que tiene mayor velocidad de propagación y tiene periodo de vibración de 1 segundo o menos. Su velocidad de propagación varía según el medio moviéndose a 6 Km/s en la corteza y llegando hasta 12 Km/s en el interior de núcleo.

La segunda tiene vibraciones perpendiculares a la dirección de propagación. Las Ondas que se generan al sacudir una cuerda son este tipo. Son análogas a la onda de la luz pues la partícula de tierra se mueve en dirección perpendicular en que avanza la onda. A estas ondas también se les conoce con el nombre de onda S (segundo preliminar) y tienen una velocidad de 0,**6** veces de la onda P.

Las ondas P y S generan otros tipos de ondas a medida que se encuentran planos reflectantes y refractantes en la superficie de la tierra.



Onda longitudinal



Onda transversal

1.7 MAGNITUD E INTENSIDAD DE UN SISMO

Las vibraciones que produce un sismo, son detectadas registradas y medidas por instrumentos denominados sismógrafos. El registro de tales vibraciones es un sismograma y reproduce gráficamente o sobre cinta magnética las vibraciones en amplitud y en frecuencia del movimiento de la tierra durante el sismo.

No existe una distinción clara entre la palabra temblor y terremoto pero generalmente se denomina terremoto a partir de una intensidad de VI a VIII en la escala modificada de Mercalli.

La magnitud de un sismo es una medida de la cantidad de energía liberada en el foco sísmico.

La intensidad es una medida de los efectos macrosísmicos sobre objetos naturales estructuras artificiales y observadores en una localidad dada.

Para tener una idea del grado de destrucción de un sismo podemos decir que un terremoto de magnitud VI librea 6 ×1020 ergios, equivalentes a unos 14300 toneladas de TNT Un terremoto de magnitud VIII libera energía equivalente a 14 millones de toneladas de TNT.

CAPITULO 2

EFECTOS DEL SISMO EN EDIFICACIONES

2.1 TIPO DE SUELO

En terrenos duros o rocas, las ondas sísmicas de alta frecuencia se amplifican. Afecta principalmente a las estructuras rígidas.

Los terrenos blandos amortiguan las ondas de alta frecuencia y, por lo general, amplifican las ondas de baja frecuencia. En este caso las estructuras flexibles son más afectadas.

2.2 PESO DE LA EDIFICACIÓN

Cuando un sismo afecta la base de una edificación se generan fuerzas de inercia que originan esfuerzos y deformaciones en la estructura. A mayor peso de las edificaciones mayores son estas fuerzas y sus efectos. Por esta razón las edificaciones más pesadas son siempre más dañadas por los sismos.

Cuanto más alto está el centro de gravedad, mayores serán los esfuerzos en los elementos para mantener el equilibrio.

No olvidemos que el cortante es mayor cuando más pesado es la estructura debido a:

$$H = \frac{ZUSC}{Rd} P$$

Donde H es la cortante basal, P es el peso la estructura.

2.3 FORMA DE LA ESTRUCTURA

En lo posible se busca que las estructuras tengan simetría para que el centro de masas y de rigideces coincidan y no tengamos excentricidad que nos genere torsión.

Si los elementos están arriostrados. Su deformación durante el sismo será menor.

Cuando las edificaciones están unidas reaccionan como una sola de mayor rigidez.

Lo que se busca es que toda estructura tenga un material que absorba y disipe energía y que tenga la capacidad de amortiguar los efectos evitando concentraciones de esfuerzos que puedan generar una ruptura.

CAPITULO 3

ANÁLISIS DINÁMICO DE EDIFICIOS

Un problema con el que se encuentra el ingeniero es la determinación de respuestas de estructuras frente a excitaciones transitorias como terremotos o explosiones.

El problema que se encuentra es que las estructuras tienen un gran número de grados de libertad, requiriéndose un gran número de coordenadas para determinar la posición de la estructura en cualquier instante.

Las fuerzas excitadoras tampoco pueden ser definidas en forma simple.

Para simplificar el problema de las características de la estructura son estudiados por separado de las propiedades de los sismos, determinándose la respuesta de la primera frente a la segunda. Las características de la estructura vienen dados por sus frecuencias, formas de modo y grado de amortiguamiento.

El sismo se define por su espectro, que es la envolvente de las respuestas de un modo de modelo mecánica estándar de un grado de libertad con un amortiguamiento dado, contra el periodo de vibración del modelo.

3.1 FUNDAMENTO DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

3.1.1 Movimiento oscilatorio.

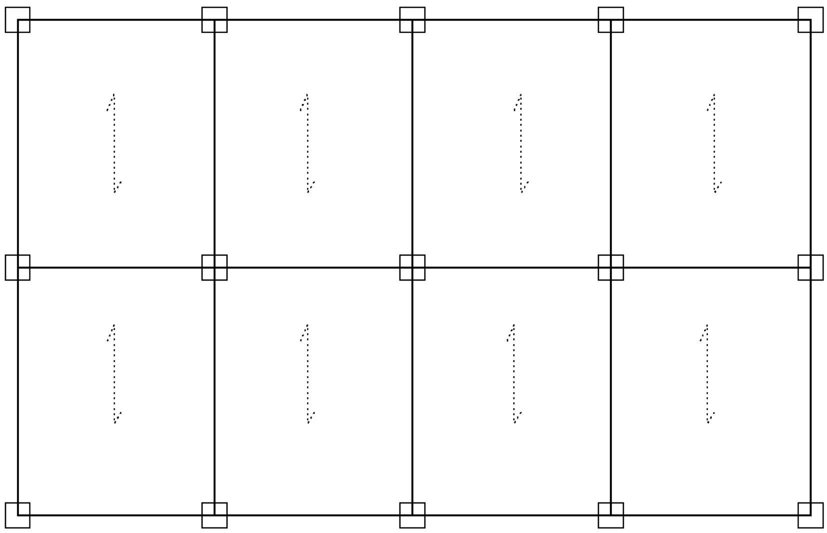
También se le conoce con el nombre de movimiento vibratorio y es uno de los más importantes movimientos que existen en la naturaleza. Un partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a su posición de equilibrio.

El movimiento de un péndulo es oscilatorio. Un cuerpo en el extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar.

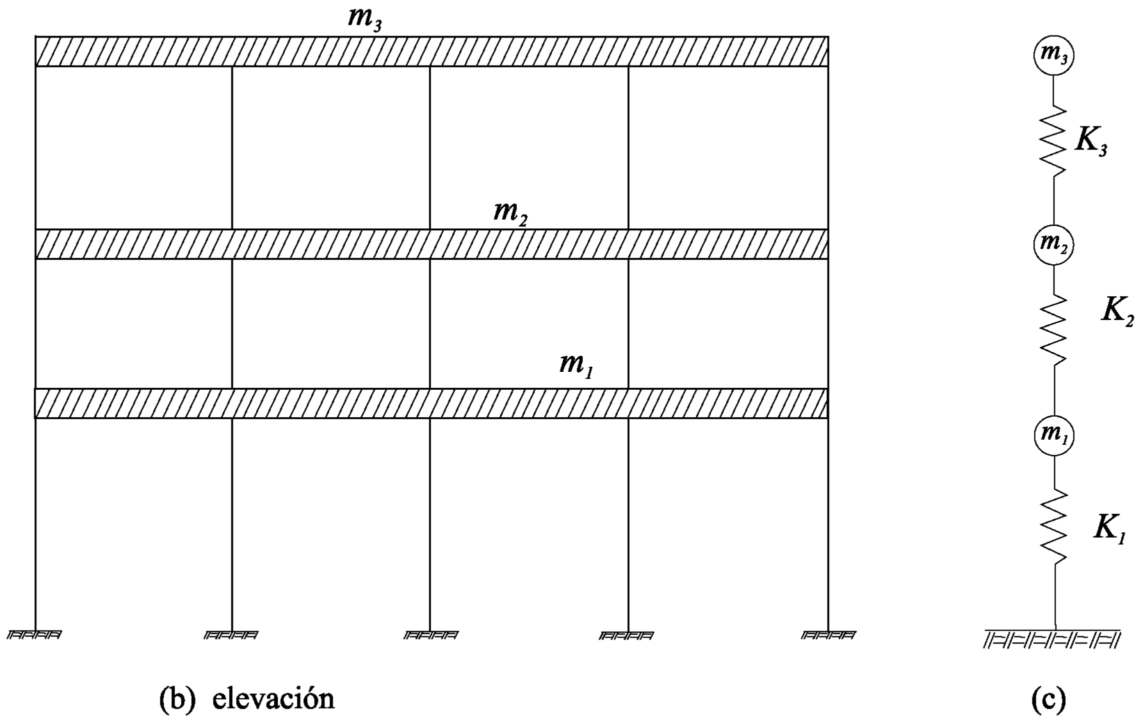
De todos los movimientos oscilatorios el más importante es el movimiento armónico simple (M.A.S.), debido a que además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cerca de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza.

3.1.2 Importancia del movimiento oscilatorio en la ingeniería estructural.

Los edificios están constituidos por pórticos como se muestra en la siguiente figura.

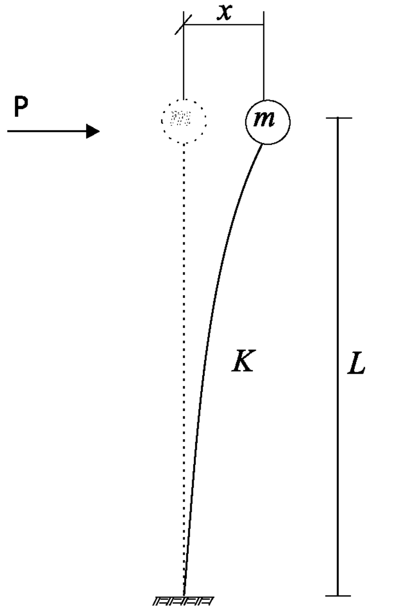


(a) planta
Figura 3.1



Un pórtico está formado por vigas y columnas.

Una de los sistemas de idealización de edificios que se usa a menudo, es llamado "péndulo invertido" mostrado en la Fig.3.2.



El resorte helicoidal se ha reemplazado por un elemento de elasticidad transversal, cuya constante de rigidez K se determina a partir de la deflexión Δ ocasionado por la fuerza lateral P.

Figura 3.2

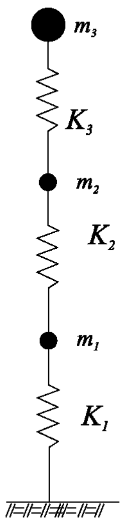
El pórtico de la Figura 3.1 (b) se idealiza de la forma mostrada en la Figura 3.1(c).

Por lo expuesto podemos ver la importancia de los fundamentos de energía y movimiento vibratorio.

Observando el pórtico de la Figura 3.1(b) podemos ver que las columnas del primer entrepiso están en paralelo. Lo mismo podemos decir de los entrepisos posteriores. Al idealizar las columnas como resortes, vemos que las columnas de cada entrepiso son resortes que están en paralelo.

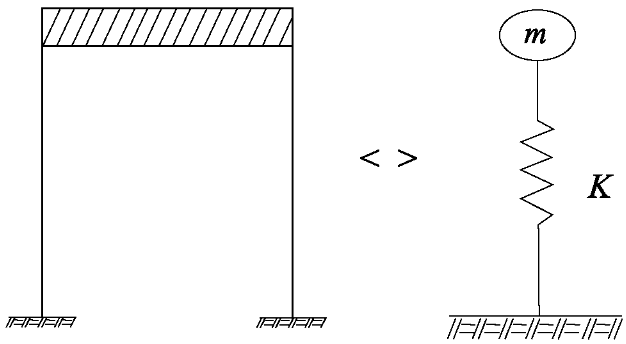
Así podemos ver que la rigidez equivalente del primer piso es K_1, y de los entrepisos posteriores K_2 y K_3.

Si las masas m1 y m2 fueran mucho menos que m3, es decir, fueran despreciables el sistema quedará de la siguiente manera:



De modo que este caso K_1, K_2, K_3 están en serie para lo cual hallaríamos su rigidez equivalente.

Si tenemos un pórtico de un piso como se muestra en la figura, la idealización será la mostrada:



de modo que tenemos un sistema masa resorte con las siguientes características:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

periodo de vibración:

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Desde el punto vista estructural nos interesa conocer el periodo de la estructura.

Por todo lo expuesto a continuación haremos el estudio de los fundamentos de trabajo y energía, así como del movimiento vibratorio.

CAPITULO 4

PRINCIPIOS ENERGÉTICOS

Al diseñar estructuras se tiene que considerar que éstas son sometidas a la excitación de fuerzas externas, tales como sismos explosiones, vientos, etc.

Vemos que tales fenómenos son liberación de energía, por tal razón la estructura se deforma llegando al caso extremo del colapso. Los ingenieros al diseñar tendrán que hacer estructuras capaces de soportar tales fuerzas y para el análisis de las mismas se basarán en los principios de trabajo y energía.

En ésta parte de la expresión centraremos nuestra atención en los fundamentos de la física, específicamente en el movimiento vibratorio que es el que tiene que ver muy especialmente con los movimientos de la tierra.

En el análisis de estructuras vemos que es muy importante el estudio de la energía de deformación ya que los métodos energéticos en el Análisis Estructural son de valiosa ayuda al diseñador.

Iniciaremos nuestro estudio presentando los fundamentos de la energía de deformación para posteriormente exponer los principios del movimiento vibratorio y su relación con la ingeniería sismoresistente.

4.1 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN.

Se considera que los cuerpos o sistemas mecánicos están formados por materia que consiste de partículas denominadas puntos materiales y cuyo conjunto constituye la configuración del sistema. Se dice que un sistema experimenta una deformación cuando cambia su configuración, es decir cuando se desplazan sus puntos materiales.

Si se supone un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo, éste se deforma hasta que el sistema de fuerzas internas equilibra al sistema de fuerzas externas. Las fuerzas externas realizan un trabajo que se transforma y acumula en el cuerpo.

Este trabajo o energía de deformación es el utilizada por el cuerpo para recuperar su forma cuando cesa la acción del sistema de fuerzas externas.

Si el cuerpo recupera exactamente su forma inicial se dice que es un cuerpo potencialmente elástico, e indica que el trabajo de las fuerzas externas durante la deformación del cuerpo se transformará totalmente en energía de deformación, despreciándose las pérdidas pequeñas por cambio de temperatura. En cualquier caso, se cumple siempre la ley de la Termodinámica: "El trabajo efectuado para las fuerzas externas más el calor que absorbe el sistema del exterior es igual al incremento de energía cinética más el incremento de energía interna". Por otra parte el incremento de energía cinética es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas externas e internas.

En los sistemas elásticos se deprecian las pérdidas por calor y la energía interna del sistema (energía potencial de las Fuerzas internas) es la energía o trabajo de deformación de dicho sistema.

Considerando una barra elástica de sección transversal A y la longitud L, sujeto a una carga axial P, aplicada gradualmente como se muestra en la figura:

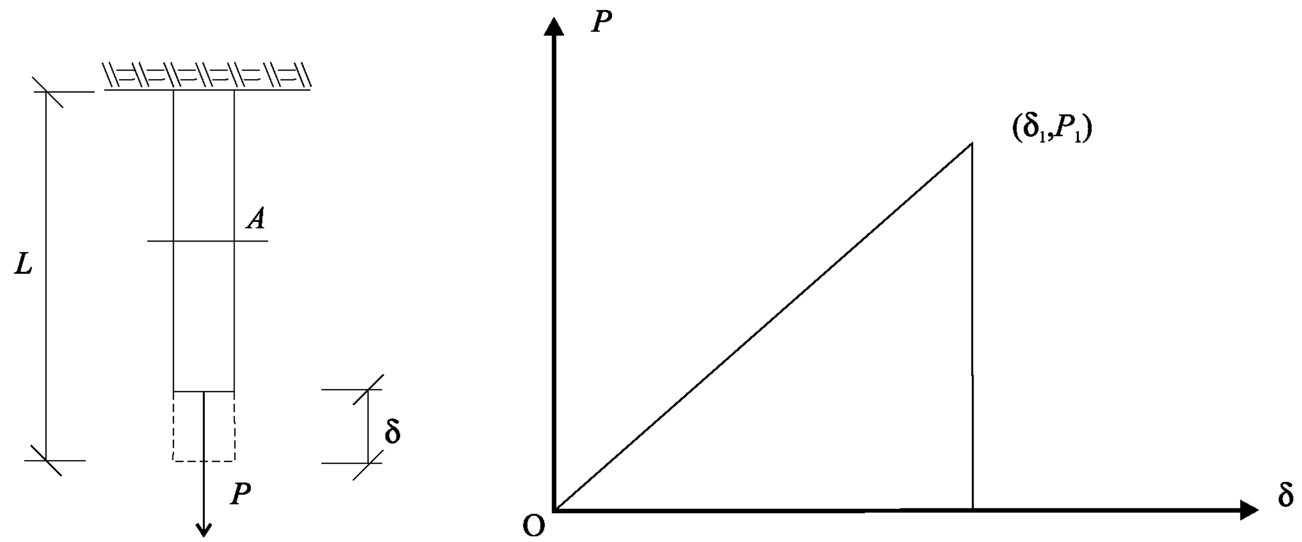


Figura 4.1

Suponiendo que se cumple la ley experimental de elasticidad lineal de Hooke, como se muestra en la figura 4.1(b) se tiene:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \text{ ....(4.1)}$$

δ: deformación de la barra

E : módulo de elasticidad de Young.

La carga *P* se aplica gradualmente y la deformación aumenta según la ecuación (4.1). El trabajo desarrollado en contra de las fuerzas internas del sistema, se expresa de la siguiente manera:

$$\omega = \int P d\delta \text{ .... (4.2)}$$

De (4.1)

$$P = \frac{EA}{L}\delta \text{ .... (4.3)}$$

Sustituyendo (4.3)

$$\omega = \int \frac{EA}{L} \delta d\delta = \frac{EA}{L}\frac{\delta^2}{2}$$

donde:

$$\omega = \frac{1}{2}P\delta$$

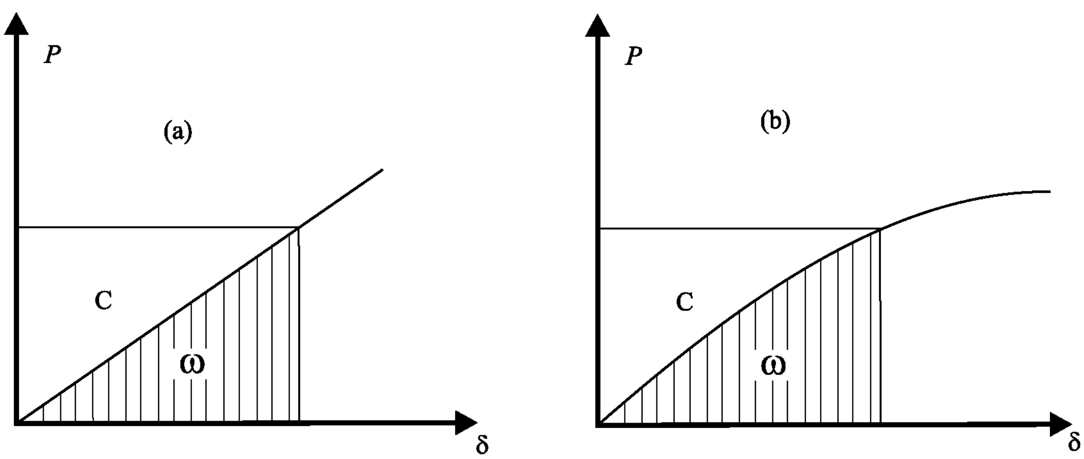


Figura 4.2

El trabajo de deformación corresponde al área sombreada del triángulo mostrado en la figura 4.2(a).

En el caso de elasticidad no lineal fig. 4.2(b), la energía de deformación es el área bajo la curva, como se puede ver de la fórmula (4.2).

4.2 ENERGÍA COMPLEMENTARIA DE DEFORMACIÓN

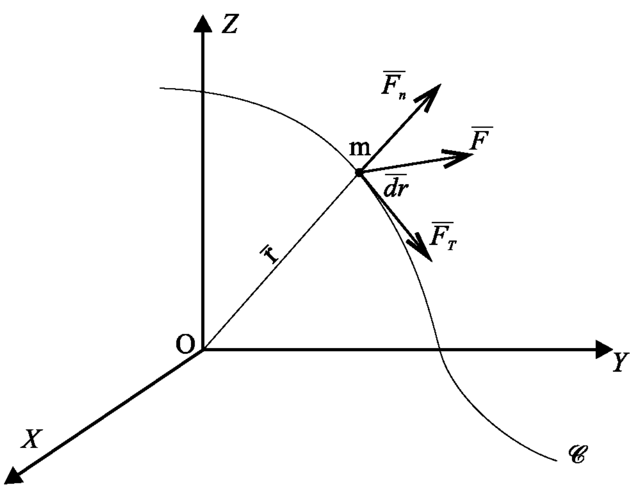
Es el área arriba de la curva carga-deformación y limitada superiormente por la recta horizontal que corresponde a la carga P. Su valor se calcula por la integral:

$$C = \int \delta dP \quad \ldots\ldots(4.4)$$

y tiene gran importancia al considerar los teoremas de Castigliano cuando la aplicación de la carga es instantánea, el trabajo de deformación es $P.\delta$, es decir el área del rectángulo que corresponde a la suma C + ω.

4.3 MÉTODO DE ENERGÍA Y TRABAJO

4.3.1 Trabajo realizado por una fuerza.



Sea una partícula de masa "*m*" sometida a la acción de la fuerza

$\overline{F}$ que recorre la curva $\mathscr{C}$.

El trabajo realizado por dicha fuerza es la integral curvilínea

$$\mathfrak{T} = \int_{\mathscr{C}} \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

$$\mathfrak{T} = \int_{\mathscr{C}} \left[\overline{F_T} \cdot \overline{dr} + \overline{F_n} \cdot \overline{dr} \right] \qquad ....(4.5)$$

donde $\overline{F_T}$ y $\overline{F_n}$ son los componentes de en la dirección tangente y normal.

Como $\overline{F_n}$ y $\overline{dr}$ forma 90º entonces $\overline{F_n} \cdot \overline{dr} = 0$ quedando la ecuación (4.5) reducida a:

$$\mathfrak{T} = \int_{\mathscr{C}} \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

donde $\overline{F_T}$ y $\overline{dr}$ son colineales, por tanto

$$\overline{F_T} \cdot \overline{dr} = \left|\overline{F_T}\right| \left|\overline{dr}\right| \text{Cos}\, 0 = \left|\overline{F_T}\right| \left|\overline{dr}\right|$$

pero $dr = ds$
donde ds : diferencial de arco

$$\mathfrak{T} = \int_{\mathscr{C}} \left|\overline{F_T}\right| \cdot dr$$

4.3.2 Trabajo y energía cinética

Sabemos que: $\overline{F} = m\overline{a}$ ....(4.6)

$\overline{F}$: resultante de todos las fuerzas exteriores
m : masa
$\overline{a}$: vector aceleración.

multiplicando por $\overline{dr}$ a ambos miembros de (4.6)

$$\overline{F}.\overline{dr} = m\ddot{\overline{r}} \cdot \overline{dr} = m\ddot{\overline{r}} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} dt$$

$$\overline{F}.\overline{dr} = m(\ddot{r}\cdot\dot{r})dt \quad ....(4.7)$$

por otro lado

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}\cdot\dot{r}) = \dot{r}\cdot\ddot{r} + \ddot{r}\cdot\dot{r} = 2\ddot{r}\cdot\dot{r}$$

donde: $\ddot{r}\cdot\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2$ ....(4.8)

(4.8) en (4.9)

$$\int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_1^2 m\frac{1}{2}\frac{dr^2}{d}dt$$

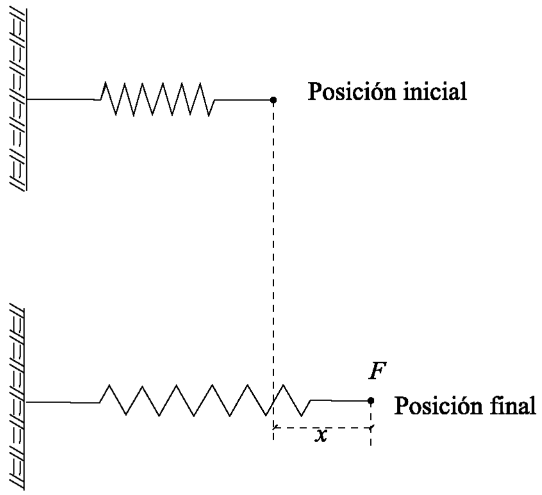
$$\int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} = \frac{1}{2}m\int_1^2 dr^2$$

$$\int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad ....(4.9)$$

donde la expresión de la izquierda representa el trabajo total y la expresión de la derecha el cambio de la energía cinética.

CAPÍTULO 5

RESORTES



Por la ley de Hooke en todo cuerpo elástico las fuerzas deformadoras son proporcionales a sus respectivas deformaciones. Si un cuerpo elástico está sometido a una fuerza deformadora este presentará una reacción contraria, llamada "fuerza recuperadora", de igual valor pero de sentido opuesto a la fuerza deformadora.

Si el resorte mostrado en la figura se alarga debido a la fuerza de una longitud x, la fuerza recuperadora será

$$F_R = -F = -Kx$$

K: constante elástica

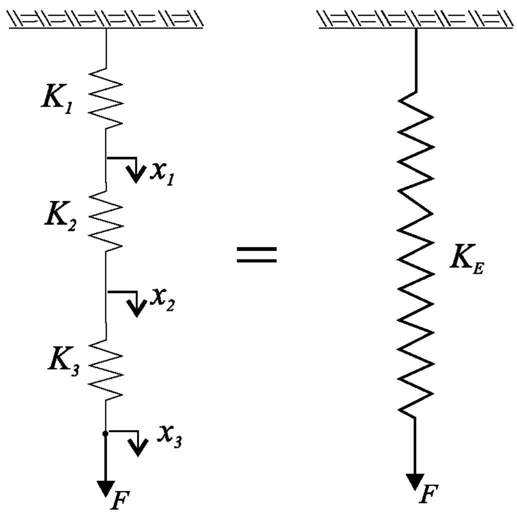
5.1 SIGNIFICADO FÍSICO DE LA CONSTANTE "K"

Si un resorte tiene una constante K = 100Kg/cm significa que para deformar dicho resorte 1cm se requiere de 100 Kg.

De lo expuesto podemos decir: La constante K de un resorte, es la fuerza que hay que aplicarle para producir una deformación unitaria.

5.2 COMBINACIÓN DE RESORTES.

Los resortes pueden estar en serie o en paralelo.



5.2.1 Resorte en serie.

El desplazamiento total (X_T) será:

$$X_T = x_1 + x_2 + x_3$$

Por Hooke $F = Kx \rightarrow x = \dfrac{F}{x}$

de modo que

$$\frac{F_T}{K_E} = \frac{F_1}{K_1} + \frac{F_2}{K_2} + \frac{F_3}{K_3} \quad ......(5.1)$$

F_T = Fuerza total.

$K_E = K$ equivalente.

pero la fuerza F es la misma para cada resorte por lo tanto

$$F_T = F_1 = F_2 = F_3$$

reemplazando en (5.1)

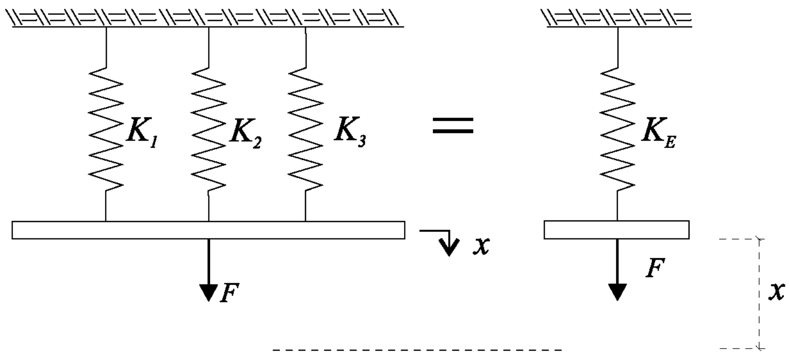
$$\frac{1}{K_E} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}$$

de modo que si tenemos n resorte en serie, el K_E del sistema será :

$$\frac{1}{K_E}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\frac{1}{K_3}+....+\frac{1}{K_{n-1}}+\frac{1}{K_n}$$

$$\frac{1}{K_E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}$$

5.2.2 Resortes en paralelo



En este caso la fuerza F hace que los resortes se estiren o comprimen por igual, de modo que:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$K_E X = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3$$

pero: $x = x_1 = x_2 = x_3$; por lo tanto $K_E = K_1 + K_2 + K_3$

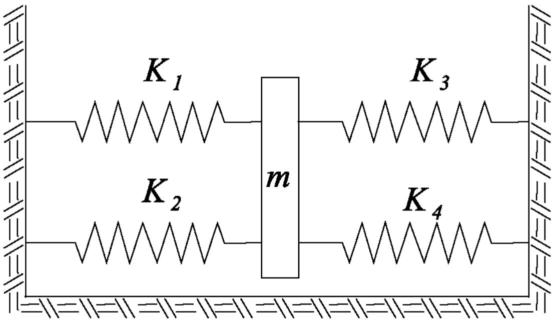
de modo que si tenemos n resortes en paralelo, el K_E del sistema será:

$$K_E = K_1 + K_2 + K_3 + ... + K_{n-1} + K_n$$

$$K_E = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

Observación:

Si tenemos el siguiente sistema:



K_1 y K_2 están en paralelo así como K_3 y K_4.

Pero K_1 y K_3 así como K_2 y K_4 no están en serie aunque a simple vista así lo parezcan.

Esto es debido a que al vibrar la masa "m" esta se desplazará un Δ igual hacia la derecha e izquierda de modo que unos se alarguen lo mismo que otros se contraen y cuando todos resortes tienen el mismo desplazamiento se dice que se encuentran en paralelo, por lo tanto la constante de elasticidad equivalente del sistema analizado será:

$$K_E = K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

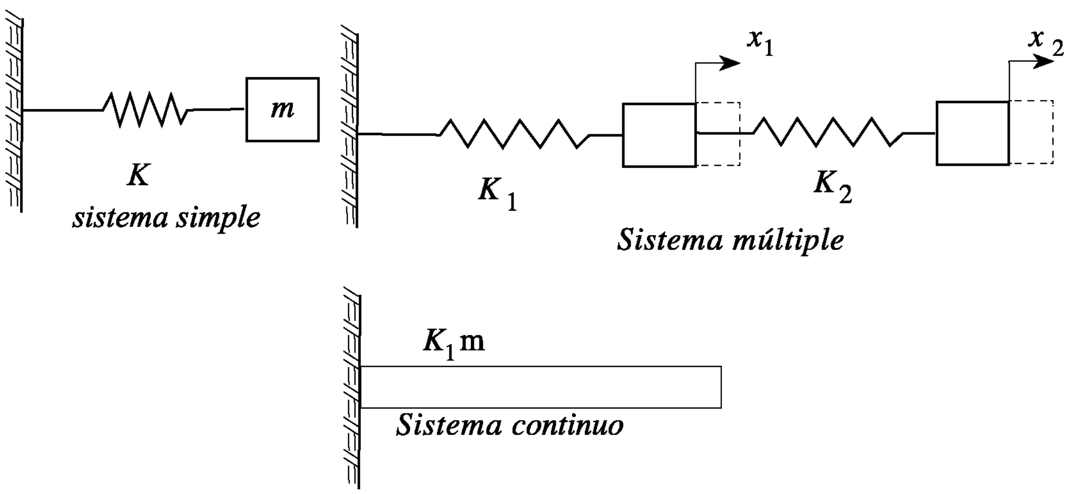
CAPITULO 6

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS VIBRATORIOS

Antes de entrar en el análisis definiremos el concepto de sistema.

Sistema.

Sistema es todo cuerpo o conjunto de cuerpos que tienen masa y elasticidad, y que es susceptible de vibrar u oscilar.
Si las masas y elasticidades están segregados y concentrados en distintos elementos el sistema es discreto.
Si las masas y elasticidades están distribuidos en alguna forma dentro del cuerpo oscilante el sistema se denomina continuo.



Los sistemas continuos tienen infinitos grados de libertad, los discretos tiene un número finitos de ellos.
A continuación presentamos el caso más general de los sistemas vibratorios que es aquel que tiene fuerza excitadora, amortiguamiento y resorte.
Todo sistema vibratorio pierde energía debido al amortiguamiento, para evitar su paralización se le inyecta energía adicional mediante la aplicación de fuerzas externas.

Las oscilaciones así obtenidas se les denomina vibraciones forzadas cuya ecuación es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$$

la función F(t) varía comúnmente con el tiempo y puede ser: excitación armónica, en la base, por impulsos o arbitraria.

Se denomina excitación armónica porque la excitación viene dada por fuerzas que tiene función seno o coseno. Al caso general se le denomina vibraciones forzadas amortiguadas y lo veremos posteriormente a los casos particulares.

CAPITULO 7

CASOS PARTICULARES DE LA ECUACIÓN GENERAL DEL MOVIMIENTO.

La ecuación general de la dinámica de los sistemas vibratorios hemos visto que viene dado por:

$$\ddot{x}+2\varepsilon\omega_1\dot{x}+\omega_1^2x=F(t)$$

Pero se pude presentar por casos particulares tales como:

- Vibración libre.
- Vibración libre amortiguada.
- Vibración forzada sin amortiguamiento.

7.1 VIBRACIÓN LIBRE.

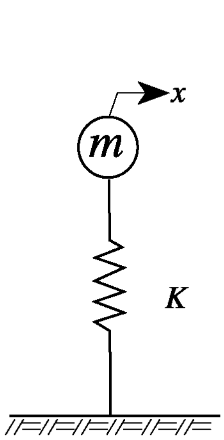
En el caso de vibración libre el sistema no tiene amortiguamiento ni fuerza excitadora de modo que la ecuación generales reducida a:

$$\ddot{x}+\omega_1^2x=0 \quad ....(7.1)$$

Es el caso mas elemental de vibración ya que el sistema vibrará indefinidamente al no tener amortiguamiento.
La solución de la ecuación diferencial 7.1 será:

$$x=C_1\,\mathrm{Sen}\,\omega_1 t+C_2\,\mathrm{Sen}\,\omega_1 t \quad ....(7.2)$$

cuyo modelo matemático será:



Trabajaremos con los siguientes condiciones iniciales para t = 0

$$x=x_0$$
$$x=x_0$$

reemplazando en la ecuación (7.2) al valor de las condiciones iniciales, obtendremos la constante C_2.

$$x_0 = C_1 \operatorname{Sen} 0 + C_2 \operatorname{Cos} 0 \rightarrow C_2 = x_0$$

derivado (7.2)

$$x = \omega_1 C_1 \operatorname{Cos} \omega_1 t - \omega_1 C_2 \operatorname{Sen} \omega_1 t \quad ....(7.3)$$

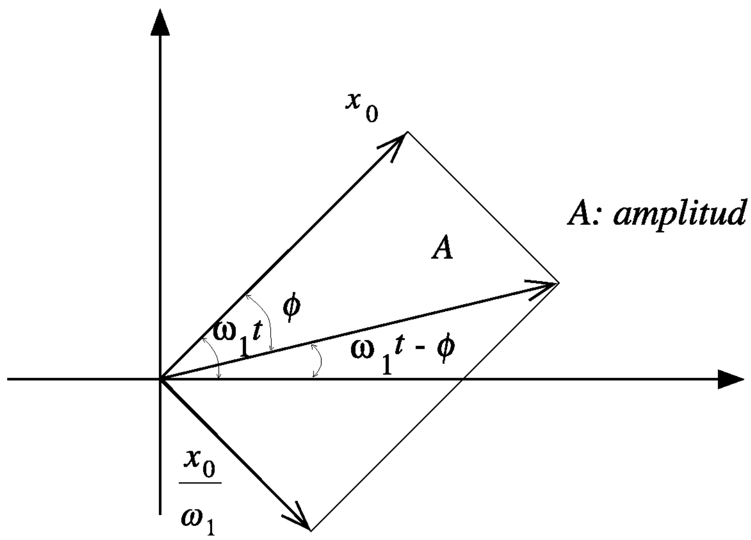
reemplazando las condiciones iniciales en (7.3) hallamos el valor de la constante C_1.

$$x_0 = \omega_1 C_1 \operatorname{Cos} 0 - \omega_1 C_2 \operatorname{Sen} 0 \rightarrow C_1 = \frac{x_0}{\omega_1}$$

reemplazando los valores C1 y C2 en (7.2) obtenemos

$$x = \frac{x_0}{\omega_1} \operatorname{Sen} \omega_1 t + x_0 \operatorname{Cos} \omega_1 t \quad ....(7.4)$$

Haciendo un arreglo geométrico e introduciendo al ángulo de fase ϕ llegamos al siguiente esquema:



del esquema obtenemos :

$$\text{Sen}\,\phi = \frac{\dot{x}_0/\omega_1}{A} \rightarrow \frac{\dot{x}}{\omega_1} = A\text{Sen}\phi \quad \text{........(a)}$$

$$\text{Cosen}\,\phi = \frac{x_0}{A} \rightarrow x_0 = A\text{Cos}\phi \quad \text{........(b)}$$

reemplazando (a) y (b) en la respuesta dinámica, tenemos:

$$x = A\,\text{Sen}\phi\,\text{Sen}\,\omega_1 t + A\,\text{Cos}\phi\,\text{Cos}\,\omega_1 t$$

expresión que se asemeja al coseno de una diferencia:

$$x = A\text{Cos}(\omega_1 t - \phi) \quad \text{.......(7.5)}$$

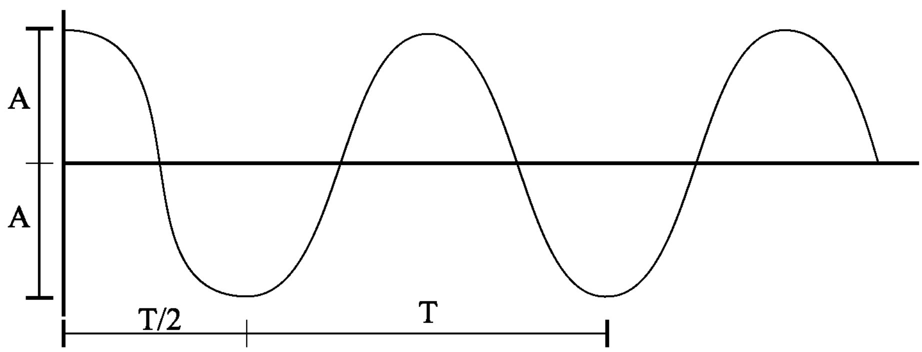
la amplitud expresada en función de las condiciones iniciales lo obtenemos directamente del esquema anterior:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_1^2}} \quad \text{.......(7.6)}$$

también podemos expresar el ángulo de fase en función de las condiciones iniciales.

$$\phi = \text{Arctg}\frac{\dot{x}/\omega_1}{x_0} \quad \text{........(7.7)}$$

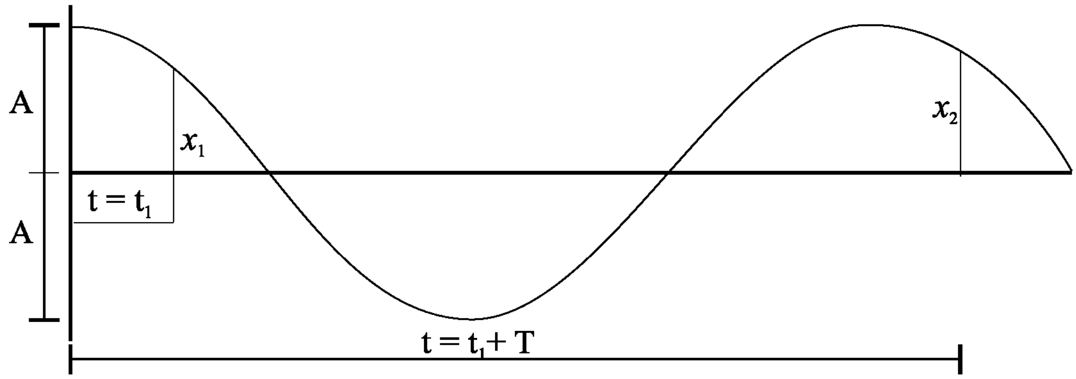
gráficamente:



T: periodo de la oscilación

Si $x=0$ $x_0=A$ (amplitud) la ecuación de la respuesta dinámica se simplifica a:

$$x = A\ \mathrm{Cos}\,\omega_1 t$$



en $t = t_1$ $x_1 = A\mathrm{Cos}\omega_1 t_1$

$t = t_1 + \mathrm{T}$ $x_2 = x_1 = A\mathrm{Cos}\omega_1(t_1 + T)$

$\omega_1(t_1 + T) - \omega_1 t_1 = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad ....(7.8)$$

La ecuación deducida nos da el periodo de la vibración.
La inversa del periodo es la frecuencia de las oscilaciones o frecuencias natural del sistema.

7.2 VIBRACIÓN LIBRE AMORTIGUADA

En la práctica, la energía del sistema no es constante, si no que se pierde paulatinamente, bien sea por fricciones externas o bien por fricciones moleculares internas en el material elástico.

De no suministrarse energía adicional al sistema, mediante la aplicación de fuerzas externas (vibraciones forzadas), la amplitud decrece gradualmente, y se dice que el movimiento es amortiguado. Existen tres tipos de amortiguamiento.

- Amortiguación viscosos.
- Amortiguación por fricción.
- Amortiguación estructural.

7.2.1 Amortiguación viscosa.

Es causada por el movimiento de un cuerpo sobre una superficie seca. La fuerza amortiguadora P_0 es, en este caso, proporcional a la velocidad del sistema.

$$P_0 = C\dot{x}$$

C: constante de proporcionalidad.

La amplitud decrece exponencialmente.

7.2.2 Amortiguación por fricción

Es causada por el movimiento de un cuerpo sobre una superficie seca. La fuerza de fricción es prácticamente constante y proporcional a N (fuerza normal a la superficie).

$$P_0 = \mu N$$

μ: coeficiente de fricción.

La amplitud decrece linealmente.

7.2.3 Amortiguación estructural.

La energía se disipa por fricciones internas en el material o en las conexiones entre los elementos de la estructura.

Las fuerzas amortiguadoras son proporcionales a las deformaciones de la estructura, las que a su vez, en el caso de un sistema elástico (en la cual los esfuerzos permanecen dentro de la zonas elásticas del material), son proporcionales a las fuerzas elásticas internas, P_E, es decir:

$$P_0 = i\rho P_E$$

ρ: constante de proporcionalidad

i : unidad imaginaria $(\sqrt{-1})$

lo que indica que el vector P_0 es de sentido contrario al vector velocidad $\dot{x}$; ρ puede tomar el valor de 0,05.

Amortiguación viscosa

Lo más simple de determinar matemáticamente es la amortiguación viscosa, y es lo que estudiamos a continuación .

En este caso la ecuación general se reduce a:

$$\ddot{x} + 2b\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x = 0 \quad ....(7.9)$$

la solución de la ecuación diferencial será:

$$x = Ce^{rt}$$

resolviendo (7.9) tenemos:

$$r^2 + 2b\omega_1 + \omega_1^2 = 0$$

$$r_1 = -b\omega_1 + \sqrt{b^2\omega_1^2 - \omega_1^2}$$

$$r_2 = -b\omega_1 - \sqrt{b^2\omega_1^2 - \omega_1^2}$$

$$x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \;......(7.10)$$

reemplazando los valores r_1 y r_2 en (7.10).

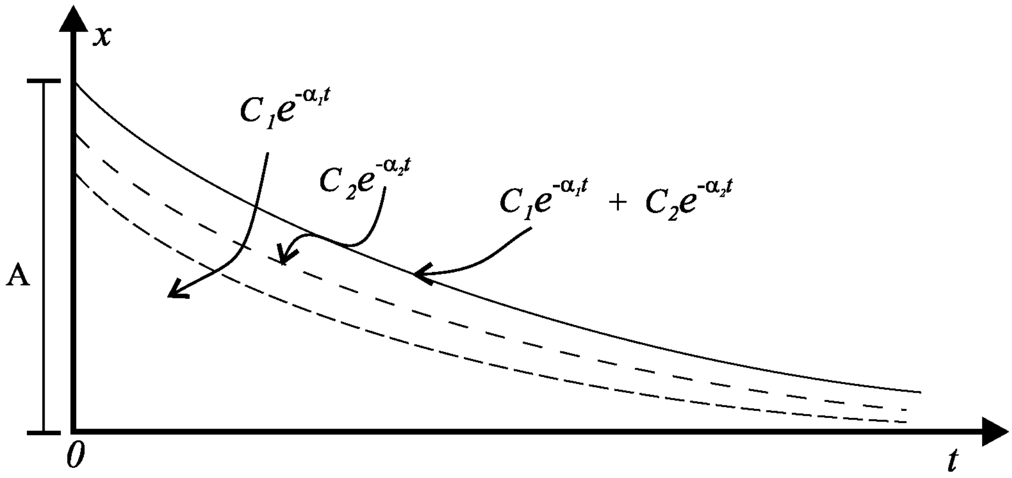
$$x = C_1e^{\left(-b\omega_1 + \sqrt{b^2\omega_1^2 - \omega_1^2}\right)t} + C_2e^{\left(-b\omega_1 - \sqrt{b^2\omega_1^2 - \omega_1^2}\right)t} \;.....(7.11)$$

El significado físico de esta solución dependen de las magnitudes realistas de $b2\omega_1^2$ y ω_1^2 que determina si los exponentes son reales o cantidades complejas.
Si el radical es mayor que cero estaremos en el caso denominado sobre amortiguado.
Físicamente significa un amortiguamiento relativamente grande, del sistema. La solución para este caso de sobre amortiguación es la siguiente.

$$x = C_1e^{-\alpha_1 t} + C_2e^{-\alpha_2 t}$$

α_1, α_2: cantidades reales.

El movimiento de la masa en esta eventualidad, no es oscilatorio, sino que tiene una marcha exponencial. Suponiendo, por ejemplo, que el movimiento comienza dando a la masa un desplazamiento A y después se le suelta desde el reposo. La curva del desplazamiento es la que se muestra a continuación:



Debido al amortiguamiento relativamente grande, la masa liberada desde la posición del reposo nunca pasa de la posición del equilibrio estático. En este caso la vibración desaparece, denominándose a este caso pulso muerto. La amplitud se aproxima a cero exponencialmente conforme crece "t" y no se efectúa ninguna oscilación.

Si el radical es menor que cero, es decir $b^2w_1^2 < w_1^2$, el amortiguamiento es pequeño y el radical es imaginario llamándose a este caso sub-amortiguado, en este caso:

$$\sqrt{b^2\omega_1^2-\omega_1^2}=i\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}$$

obteniéndose:

$$x=e^{-b\omega_1 t}\left[C_1 e^{i\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}\,t}+C_2 e^{-i\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}\,t}\right] \quad ....(7.12)$$

sabemos que:

$$e^{i\theta}=\mathrm{Cos}\,\theta+i\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$e^{-i\theta}=\mathrm{Cos}\,\theta-i\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

aplicamos este concepto a la ecuación (7.12)

$$x = e^{-b\omega_1 t}\left[(C_1' + C_2')\,\mathrm{Cos}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t + i(C_1' - C_2')\,\mathrm{Sen}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t\right]$$

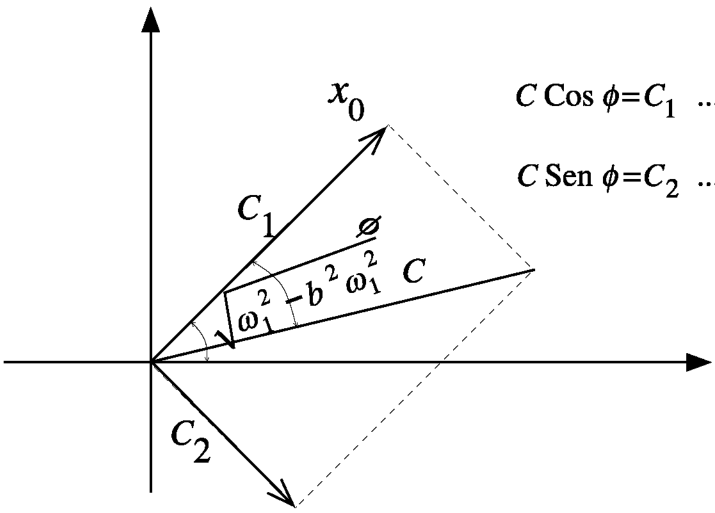
$(C_1' + C_2')$ y $(C_1' - C_2')$ deben ser reales ya que es un requisito para que el desplazamiento en un problema físico resulta real por lo tanto C_1' y C_2' deben ser números complejos conjugados.

$$C_1 = C_1' + C_2'$$
$$C_2 = i(C_1' - C_2')$$

C_1, C_2: números reales.

$$x = e^{-b\omega_1 t}\left[C_1\mathrm{Cos}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t + C_2\mathrm{Sen}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t\right] \quad \text{....(7.13)}$$

Haciendo un arreglo geométrico.



$$C\,\mathrm{Cos}\,\phi = C_1 \quad \text{......}(a)$$

$$C\,\mathrm{Sen}\,\phi = C_2 \quad \text{......}(b)$$

reemplazando (a) y (b) en 7.13

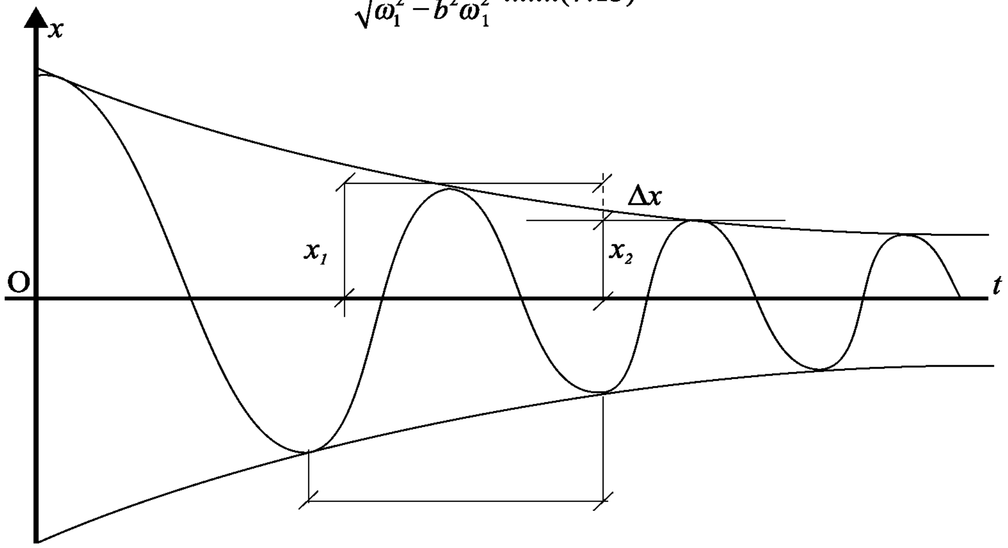
$$x = e^{-b\omega_1 t}\left[C\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t + C\,\mathrm{Sen}\phi\,\mathrm{Sen}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\right]$$

$$x = Ce^{-b\omega_1 t}(\mathrm{Cos}\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}\,t - \phi) \quad \text{.....(7.14)}$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2 - b^2\omega_1^2}}$$

En este caso el movimiento no es periódica ya que las amplitudes de ciclos sucesivas decrecen. Sin embargo como los periodos son iguales, a este movimiento se denomina movimiento con tiempo periódico.

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}} \text{ ....(7.15)}$$



$$\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}}$$

calculamos la relación de las amplitudes de los sucesivos ciclos de vibración.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{e^{-b\omega_1 t}}{e^{-b\omega_1\left(t_1+\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}}\right)}}=\frac{2\pi b\omega}{e^{\sqrt{\omega_1^2-b^2\,\omega_1^2}}}$$

la cantidad de amortiguamiento es especificada a menudo dando el decremento logarítmico δ, siendo:

$$\delta=\ln\frac{x_1}{x_2}=\ln e^{e^{\frac{2\pi n}{\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}}}}$$

$$\delta=\frac{2\pi b}{\sqrt{1-b^2}} \text{ decremento logarítmico (7.16)}$$

para sistemas que tienen pequeño amortiguamiento, una manera simple de determinar el decremento logarítmico partiendo de la curva de vibración libre es como sigue:

$$\delta = \ln(\frac{x+\Delta x}{x}) = \ln(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{x})^2 + \frac{1}{3}(\frac{\Delta x}{x})^3 + ...$$

Para $\frac{\Delta x}{x}$ pequeños, los términos de orden elevados pueden despreciarse , obteniéndose:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \quad ....(7.17)$$

De modo que el decremento logarítmico es aproximadamente igual a la fracción de decrecimiento en amplitud durante un ciclo de la vibración.

Otra importante magnitud en el análisis de las vibraciones amortiguadas es la energía perdida por ciclo a causa de la fuerza amortiguadora.

La energía total del sistema cuando se encuentra en una de sus posiciones extremas con velocidad cero, es:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}Kx^2$$

la energía un ciclo después es:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}K\left(x - \Delta x\right)^2$$

por lo tanto la energía perdida por ciclo es:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}Kx^2 + Kx(\Delta x) - \frac{1}{2}(\Delta x)^2$$

expresando esta pérdida de energía como una fracción de la energía total del sistema, tenemos:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)-\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$$

si el amortiguamiento es pequeño, el término al cuadrado puede despreciarse, obteniendo finalmente:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}\approx 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\approx 2\delta$$

de modo que para amortiguamientos pequeños la fracción de energía perdida por ciclo es aproximadamente igual al doble del decremento logarítmico.

Si $b^2\omega_1^2=\omega_1^2$ es decir $b=1$, entonces $\sqrt{\omega_1^2-b^2\omega_1^2}=0$ llamándose a este caso amortiguamiento crítico.

La ecuación (7.11) se reduce a: $x=C_1e^{-b\omega_1 t}+C_2e^{-b\omega_1 t}$

en este caso la solución de la ecuación será: $x=(A+Bt)e^{-b\omega_1 t}$

conforme $t\to\infty$ entonces $e^{-b\omega_1 t}\to 0$
como e^{-bw1t} se aproxima a cero más rápidamente que t se aproxima a ∞, el movimiento se disipa exponencialmente.

El amortiguamiento crítico es el caso límite de sobreamortiguamiento.
Designando a n_c el valor de $b\omega_1$ para el caso de amortiguamiento crítico, tenemos:

$$n_C^2=\omega_1^2\ ;\ n_C=\omega_1$$

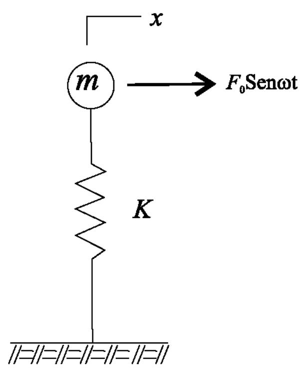
dividimos $b\omega_1$ entre n_c.

$\frac{b\omega_1}{n_C}=\frac{b\omega_1}{\omega_1}=b$ se define como el factor de amortiguamiento.

7.3 VIBRACIÓN FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO.

Cuando el sistema no tiene amortiguamiento, y está afectado por una fuerza excitadora, la ecuación general la podemos expresar así:

$$\ddot{x}+\omega_1^2 x = F\,\text{Sen}\omega t \quad ....(7.18)$$



la solución de ésta ecuación diferencial lineal no homogénea consiste de dos partes: una solución complementaria x_c y una solución particular x_P. Por lo tanto:

$$X = x_C + x_P \quad ....(7.19)$$

la solución complementaria es la solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial. Tenemos que resolver la ecuación sin segundo miembro; es decir es el caso de la solución obtenida para vibración libre que según demostramos es:

$$x_C = A\,\text{Cos}(\omega_1 t - \phi) \quad ......(7.20)$$

la solución particular tendrá que satisfacer completamente la ecuación.
Asumimos que la solución particular sea:

$$x_P = J\,\text{Sen}\,\omega t + L\,\text{Cos}\omega t \quad ;\text{ J y L constantes}$$

derivado

$$\dot{x}_P = \omega J\,\text{Cos}\,\omega t - \omega L\,\text{Sen}\,\omega t$$

$$\ddot{x}_P = -\omega^2 J\,\text{Sen}\,\omega t - \omega^2 L\,\text{Cos}\,\omega t$$

reemplazando los valores de x_P y $\ddot{x}_P$ en (7.18)

$$-\omega^2 J\,\text{Sen}\omega t - \omega^2 L\,\text{Cos}\omega t + \omega_1^2 J\,\text{Sen}\omega t + \omega_1^2 L\,\text{Cos}\omega t = F_0\,\text{Sen}\,\omega t$$

$$(\omega_1^2 - \omega^2)J\,\text{Sen}\,\omega t = F_0\,\text{Sen}\,\omega t \rightarrow J = \frac{F_0}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

$$(\omega_1^2 - \omega^2)L\,\text{Cos}\,\omega t = 0 \rightarrow L = 0$$

por lo tanto:

$$x_P = \frac{F_0}{\omega_1^2 - \omega^2}\text{Sen}\,\omega t \quad ...(7.21)$$

reemplazando (7.20) y (7.21) en (7.19)

$$x = A\,\text{Cos}(\omega_1 t - \phi) + \frac{F_0}{\omega_1^2 - \omega^2}\text{Sen}\,\omega t$$

Observamos que la solución complementaria corresponde a la vibración libre y la solución particular, a la vibración forzada.

Aquí nos interesa analizar la solución particular de la vibración forzada. Un sistema sin amortiguamiento es un caso idealizado ya que la fricción existe en todos los sistemas físicos independientemente de lo pequeño que puede ser.

Eventualmente en un sistema real la vibración libre se disipa, no sucediendo así en la expresión matemática que se ha presentado aquí y solamente se conserva la vibración forzada del estado permanente. Analizando la solución particular vemos que la vibración forzada del estado permanente sin amortiguamiento tiene las siguientes características.

- La respuesta tiene la misma frecuencia que la función de la fuerza.
- Si la frecuencia de la fuerza es menor que la frecuencia natural del sistema $\omega < \omega_1$, la respuesta está en fase con la fuerza. Si $\omega > \omega_1$ la respuesta está 180º fuera de la fase.
- Si definimos la deformación estática x_{st} como:

$$x_{st} = \frac{F_0}{K} = \frac{F_0/m}{K/m} = \frac{F}{\omega_1^2}$$

podemos escribir la amplitud A del estado constante de la vibración forzada no amortiguada.

$$A = \frac{F}{\omega_1^2 - \omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_1^2 - \omega^2} = \frac{F_0/K}{\frac{m}{K}(\omega_1^2 - \omega^2)}$$

$$A = \frac{F_0/K}{\frac{1}{\omega_1^2}\omega_1^2(1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2)} = \frac{\frac{F_0}{K}}{1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2}$$

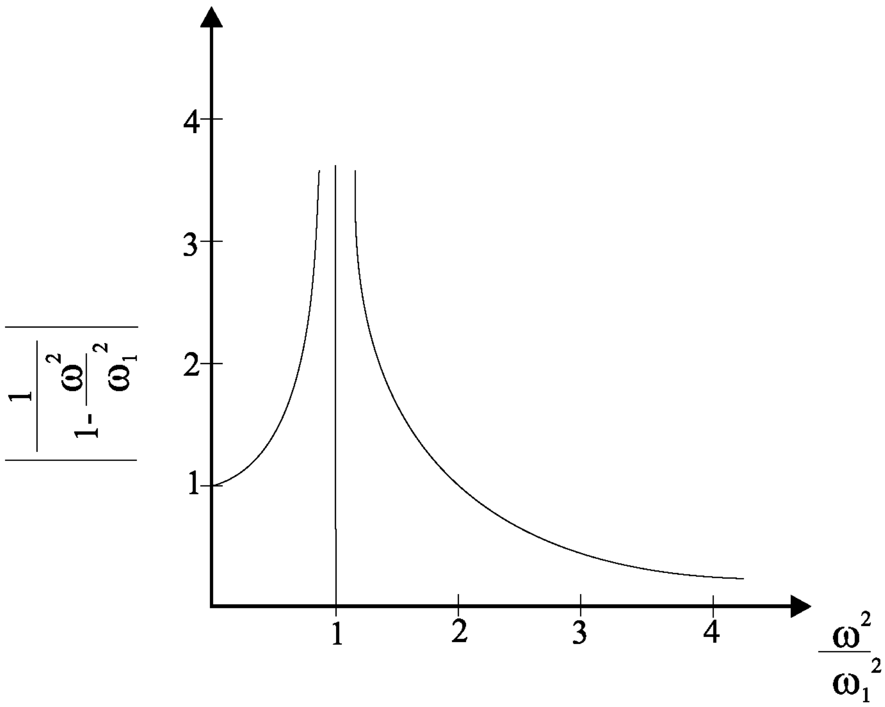
$$\frac{A}{(\frac{F_0}{K})} = \left[\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2}\right]$$ factor de amplificación dinámica.

- Cuando $\omega = \omega_1$, la amplitud A, se vuelve infinita, llamándose a este caso resonancia.

La solución particular para $\omega = \omega_1$, es:

$$x_P = Bt \,\mathrm{Sen}\, \omega t$$

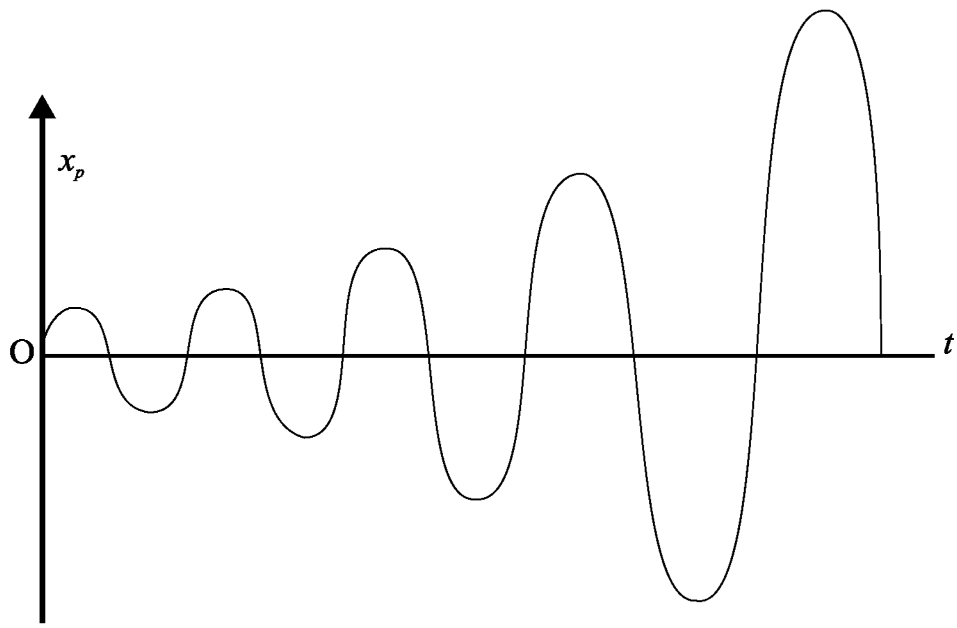
en donde $$B = \frac{F}{2m\omega}$$



entonces

$$x_P = \frac{F}{2m\omega} t \,\text{Sen}\, \omega t$$

Esta expresión revela el hecho de que la amplitud de la respuesta correspondiente al estado permanente, en el caso de resonancia crece ilimitadamente con el tiempo, es decir la amplitud no se hará inmediatamente finita cuando $\omega = \omega_1$ como indica la expresión $\frac{F}{\omega_1^2 - \omega^2}$, sino que este incremento es como se muestra en la figura

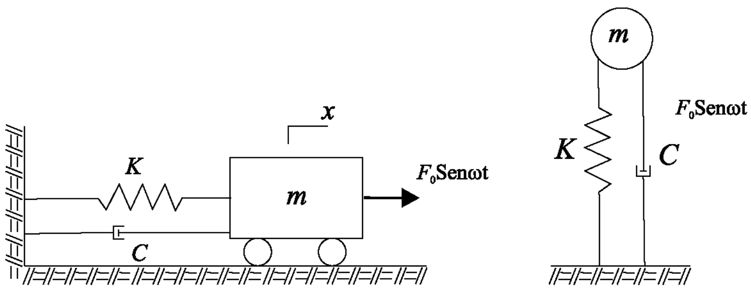


CAPITULO 8

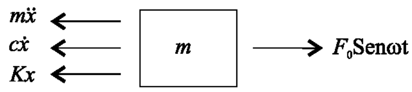
VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

8.1 VIBRACIÓN ARMÓNICA.

A continuación haremos la deducción de la ecuación general cuando el sistema es excitado por una fuerza excitadora sinusoidal F0Senwt. A éste caso general se denomina vibración forzada amortiguada.



Haciendo el equilibrio de la masa m vemos que al actuar la fuerza excitadora $F_0 Sen\omega t$ surge fuerzas que la contrarestan como son: la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y la fuerza de inercia, dándonos el siguiente diagrama de cuerpo libre.



haciendo equilibrio de fuerzas obtenemos:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \,\text{Sen}\, \omega t \; ....(8.1)$$

$$\text{ó } \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m}\text{Sen}\, \omega t \; ....(8.2)$$

la ecuación (8.1) es la ecuación general de los sistemas vibratorios.

Haremos las siguientes cambios variables:

$$\frac{c}{m} = 2\,b\omega_1$$

$$\frac{K}{m} = \omega_1^2$$

$$\frac{F_0}{m} = F$$

reemplazamos en (8.2) obteniendo la siguiente expresión:

$$\ddot{x} + 2b\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x = F\,\mathrm{Sen}\,\omega t \;........(8.3)$$

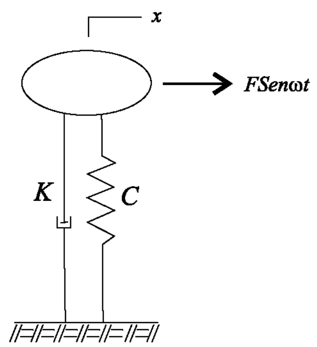
ω : frecuencia de la excitación

ω_1 : frecuencia del sistema

b : coeficiente de amortiguamiento.

como observación importante diremos que cuando la frecuencia de la excitación y del sistema coinciden, es decir $\omega = \omega_1$, el sistema entra en resonancia hasta llegar al colapso.

Solución de la vibración forzada amortiguada.



$$\ddot{x} + 2b\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x = F\,\mathrm{Sen}\,\omega t$$

$$x = x_c + x_P \;.......(8.4)$$

La solución complementaria corresponde a la solución de la ecuación (8.3) sin segundo miembro.

Tomaremos el caso del subamortiguamiento.

$$x_c = e^{-b\omega_1 t}\left[c_1\,\mathrm{Cos}\,\omega_1\sqrt{1-b_2}t + c_2\,\mathrm{Cos}\,\omega_1\sqrt{1-b^2}t\;\right]....(8.5)$$

La solución particular tendrá la forma:

$$x_P = A\,\mathrm{Sen}\,\omega t + B\,\mathrm{Cos}\omega t$$

derivando:

$$\dot{x}_P = \omega A\,\mathrm{Cos}\omega t - \omega B\,\mathrm{Sen}\,\omega t$$

$$\ddot{x}_P = -\omega^2 A\,\mathrm{Sen}\,\omega t - \omega^2 B\,\mathrm{Cos}\,\omega t$$

reemplazando valores en (8.3)

$$-\omega^2 A\mathrm{Sen}\omega t - \omega^2 B\,\mathrm{Cos}\,\omega t + 2b\omega_1\omega A\,\mathrm{Cos}\,\omega t - 2b\omega_1\omega B\,\mathrm{Sen}\omega t$$

$$+\omega_1^2 A\mathrm{Sen}\omega t + \omega_1^2 B\,\mathrm{Cos}\,\omega t = F\,\mathrm{Sen}\,\omega t$$

agrupando los términos en forma conveniente:

$$(\omega_1^2 - \omega^2)A - 2b\omega_1\omega B = F$$

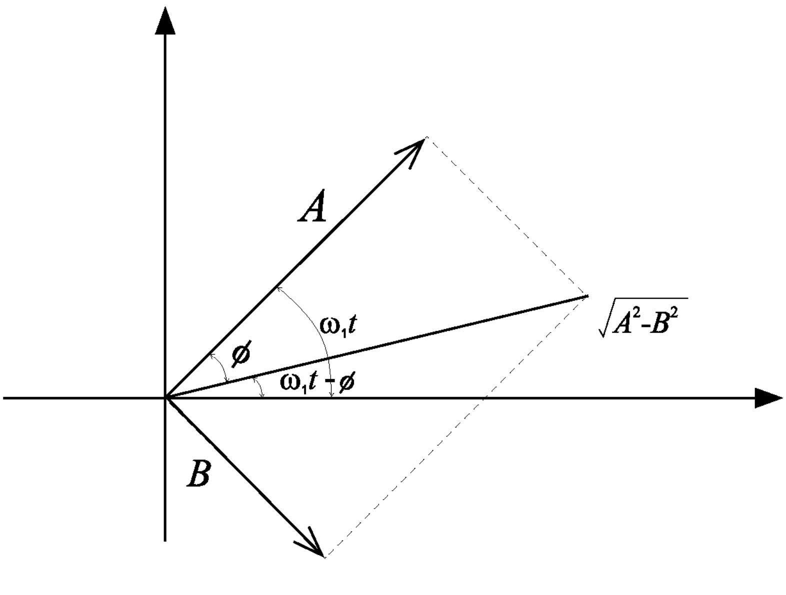
$$(\omega_1^2 - \omega^2)B + 2b\omega_1\omega A = 0$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)F}{(\omega_1^2 - \omega^2) + 4b^2\omega_1^2\omega^2}$$

$$B = \frac{-2b\omega_1\omega F}{(\omega_1^2 - \omega^2) + 4b^2\omega_1^2\omega^2}$$

Haciendo el siguiente arreglo geométrico.



$$A\,\mathrm{Sen}\,\omega t + B\,\mathrm{Cos}\,\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi)$$

$$x_P = \sqrt{\frac{F^2(\omega_1^2 - \omega^2)^2}{\left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2\right]^2} + \frac{F^2 4b^2\omega_1^2\omega^2}{\left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2\right]^2}}\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi)$$

$$x_P = \frac{F\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi)$$

$$x_P = \frac{F}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}}\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi) \qquad \text{......(8.6)}$$

reemplazando (8.5) y (8.6) en (8.4)

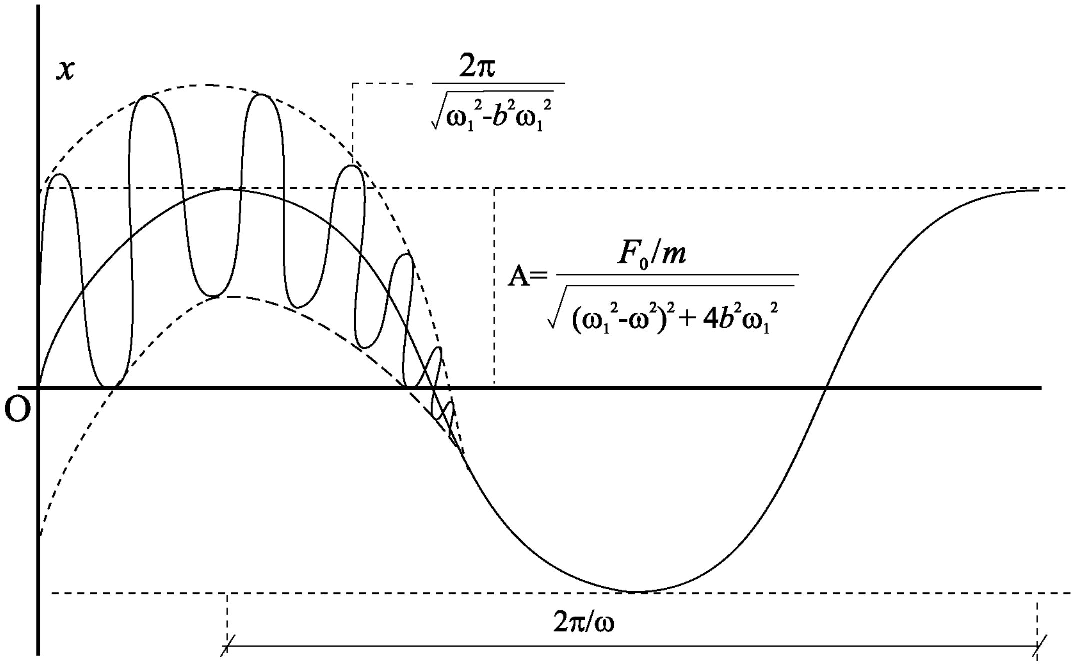
$$\underbrace{x = e^{-b\omega_1 t}(c_1\,\mathrm{Cos}\,\omega_1\sqrt{1-b^2}\,t + c_2\,\mathrm{Sen}\,\omega_1\sqrt{1-b^2}\,t +}_{\text{término transitorio}}$$

$$\underbrace{\frac{F}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}}\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi)}_{\text{término de estado constante}}$$

La respuesta dinámica nos señala una superficie de dos movimientos:

- Movimiento de periodo $\dfrac{2\pi}{\omega_1\sqrt{1-b^2}}$ cuya amplitud decrece exponencialmente con el tiempo.

- Movimiento de amplitud constante y periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Este movimiento es el que se muestra en la siguiente figura para $\omega_1 > \omega$.



Debido a $e^{-b\omega_1 t}$ el primer término de esta expresión decrece con el tiempo y transcurrido un tiempo suficiente puede considerarse que se ha amortiguado, solamente persiste el movimiento descrito por el segundo término. Por esta razón al primer término se le denomina "término transitorio" y al segundo "término de estado constante". El carácter del término transitorio depende de las condiciones iniciales del movimiento, mientras que las vibraciones del estado constante son independientes de las condiciones iniciales y están en función de la fuerza y de los parámetros del sistema.

8.1.1 Amplitud de la vibración forzada de estado constante.

Sabemos que:

$$A = \frac{F}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}} \quad ....(8.7)$$

donde:

$$F = \frac{F_0}{m} \rightarrow \frac{F_0/K}{m/K} = \frac{F_0/K}{1/\omega_1^2} \quad ....(8.8)$$

reemplazando (8.8) en (8.7)

$$A = \frac{F_0/K}{\frac{1}{\omega_1^2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega_1^2\omega^2}} = \frac{F_0/K}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2 + (2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}$$

$$\frac{A}{F_0/K} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2 + (2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}} \quad ....(8.7)$$

F_0/K es la desviación que el sistema tendría bajo la acción de la carga estática F_0; esto es, la desviación del sistema bajo una función de fuerza de frecuencia cero.

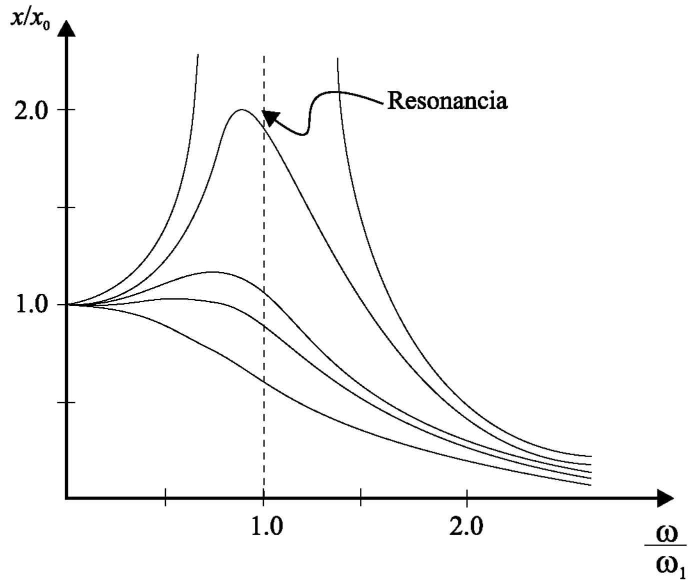
La expresión del lado derecho de la ecuación representa una amplificación dinámica o factor de magnificación con la relación de las frecuencias y la relación de los amortiguamientos se muestra en la figura siguiente.

La característica más significativa de esta figura es el hecho de que, aproxima a la relación de frecuencia $\omega/\omega_1 = 1$ el factor de amplificación llega ser muy grande si la relación de amortiguamiento es pequeña.

Cabe anotar que se acostumbra a expresar el amortiguamiento como una fracción del amortiguamiento crítico, siendo este definido como $n_c = \omega_1$. Si $n_c = b\omega_1$ entonces $n/n_c = b$ que se define como.

El valor infinito para $n/n_c = 0$, que, por lo demás no existe en la práctica, puesto que es imposible reducir el amortiguamiento a cero, requiere de un tiempo infinito para alcanzar la amplitud infinita aunque el amortiguamiento fuese cero.

La existencia de grandes desplazamientos en las proximidades de $\omega/\omega_1 = 1$ se denomina "resonancia" y la frecuencia para que $\omega = \omega_1$ se llama "frecuencia resonante".



Si el amortiguamiento es pequeño, la máxima amplitud tiene lugar muy cerca de $\omega/\omega_1 = 1$, por lo que la máxima amplitud puede muy próximamente ser establecida para $\omega/\omega_1 = 1$ teniendo así:

$$A_{\text{resonancia}} = \frac{F_0/K}{2b}$$

8.1.2. Cálculo de la relación de frecuencias que da la máxima amplificación.

De la expresión :

$$\frac{A}{F_0/K} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

haciendo:

$$\frac{A}{F_0/K}=Q \quad \text{y} \quad \frac{\omega}{\omega_1}=x$$

$$Q=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+(2bx)^2}}$$

$$Q=(1-2x^2+x^4+4b^2x^2)^{-1/2}$$

$$\frac{dQ}{dx}=-\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4+4b^2x^2)^{-3/2}(-4x+4x^3+8b^2x)$$

igualando $\frac{dQ}{dx}=0$ para calcular los puntos críticos

$$-4x+4x^3+8b^2x=0$$

factorizando:

$$x(4x^2-4+8b^2)=0$$

las soluciones serán:

$$x=0 \quad \text{y} \quad 4x^2-4+8b^2=0$$

$$\text{x}=0 \text{ y } x=\sqrt{1-2b^2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_1}=\sqrt{1-2b^2} \qquad \text{.........(8.8)}$$

8.1.3 Valor mínimo de b para que la amplificación nunca sea menor que la unidad.

$$\frac{A}{F_0/K}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}\leqslant 1$$

ó $$\left[\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^{-1/2}\leqslant 1$$

reemplazando

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{1-2b^2}$$

$$\left[\left[1-\left(\sqrt{1-2b^2}\right)^2\right]^2 + 4b^2\left(\sqrt{1-2b^2}\right)^2\right]^{-1/2} \leqslant 1$$

$$\left(4b-4b^4\right)^{-1/2} \leqslant 1 \rightarrow \left(4b^2-4b^4\right) \geqslant 1$$

$$4b^4-4b^2+1 \leqslant 0 \rightarrow \left(2b^2-1\right)^2 \leqslant 0$$

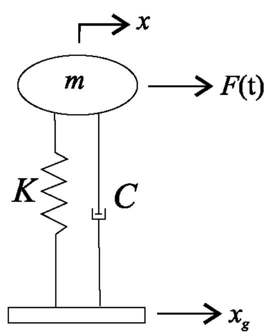
$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

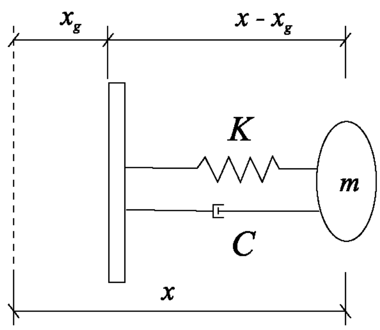
8.2 EXCITACIÓN EN LA BASE

De los casos antes mencionados estudiaremos a continuación el movimiento en la base.

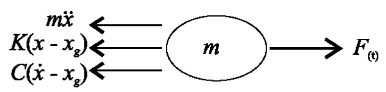
Diremos como ilustración que es un caso muy frecuente debido a que los sismos excitan la estructura en la base o cimentación.

El modelo matemático se presenta de la forma siguiente:





el diagrama del cuerpo es:



planteando el equilibrio de fuerzas:

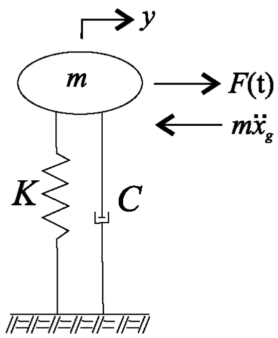
$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_g) + K(x - x_g) = F_{(t)}$$

haciendo $y = x - x_g$

$$m(\ddot{y} - \ddot{x}_g) + c\dot{y} + Ky = F_{(t)}$$

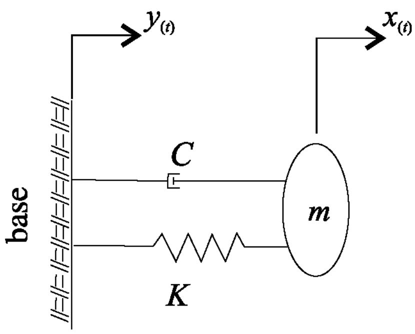
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = F_{(t)} - m\ddot{x}_g \text{ ....(8.9)}$$

a la ecuación deducida le corresponde el siguiente modelo:
De acuerdo al modelo hallado se considera el sistema como empotrado, con la fuerza $m\ddot{x}_g$ en la dirección y sentido mostrado.



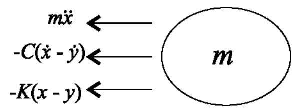
8.2.1 Transmisibilidad.

El caso de mayor interés desde el punto de vista estructural, es de los sismos, en los cuales el sistema es excitado por la cimentación. En esta parte de la expresión hallaremos una fórmula que nos proporcionará una mediad de la interacción entre la base y el sistema, es decir, de las fuerzas dinámicos que se transmiten en una u otra dirección.



A esta relación entre la cimentación y el sistema se denomina transmisibilidad. Sea $y_{(t)} = y_0 \text{ Sen } \omega t$ el movimiento de la base, calcularemos la fuerza que se transmite a la mas así como la amplitud de la vibración de la masa.

Analizando el equilibrio de fuerzas:



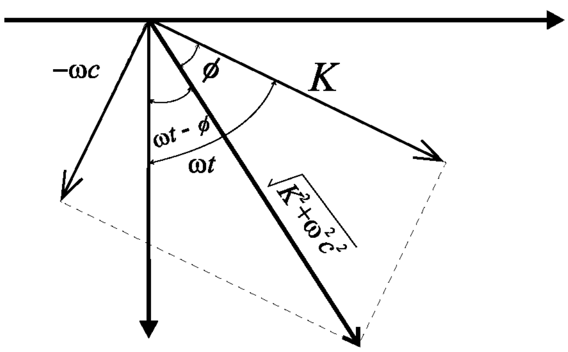
$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + K\ (x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = Ky + c\dot{y}$$

$$y = y_0 \text{ Sen } \omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = y_0(K \text{ Sen } \omega t + \omega_C \text{ Cos } \omega t)$$

Haciendo el siguiente arreglo geométrico:



$$\phi = arctg\left(-\frac{\omega c}{K}\right)$$

$$\text{Sen } \phi = \frac{\omega c}{\sqrt{K^2 + \omega^2 c^2}} \text{ ....(a)}$$

$$\text{Cos } \phi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + \omega^2 c^2}} \text{ ....(b)}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \text{ Sen } \omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = y_0(K \text{ Sen } \omega t + \omega c \text{ Cos } \omega t) \text{ ......(8.10)}$$

reemplazando:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=y_0\sqrt{K^2+\omega^2c^2}\,(\text{Sen}\,\omega t\,\text{Cos}\,\phi+\text{Cos}\,\omega t\,\text{Sen}\,\phi)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=y_0\sqrt{K^2+\omega^2c^2}\ \text{Sen}(\omega t-\phi)$$

$$A=\frac{F_0/K}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}\quad ....(8.11)$$

$$F_0=y_0\sqrt{K^2+\omega^2c^2}$$

$$\frac{F_0}{K}=\frac{y_0\sqrt{K^2+\omega^2c^2}}{K}=y_0\sqrt{1+\left(\frac{\omega c}{K}\right)^2}\quad ....(8.12)$$

también sabemos

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{m}=2b\omega_1\\[2ex] \dfrac{K}{m}=\omega_1^2\end{array}\right\}\frac{c}{K}=\frac{2b}{\omega_1}\rightarrow\frac{\omega c}{K}=2b\frac{\omega}{\omega_1}\quad ......(8.13)$$

(8.13 en (8.12)

$$\frac{F_0}{K}=y_0\sqrt{1+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}\quad ....(8.14)$$

reemplazando (8.14) en (8.11)

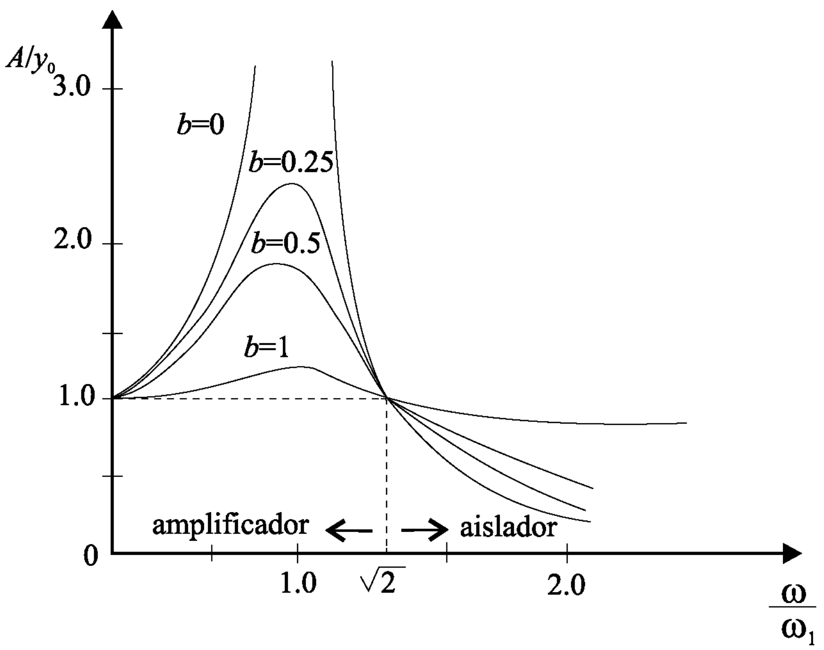
$$A=\frac{y_0\sqrt{1+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}{\sqrt{{1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2}^{\,2}+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}\quad ....(8.15)$$

finalmente obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{A}{y_0}=\frac{\sqrt{1+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2+(2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}} \quad ....(8.16)$$

donde y_0 es la amplitud de la excitación y (8.15) es la amplitud del movimiento descrito por el cuerpo oscilante A/y_0 es lo que se denomina transmisibilidad.

En la figura siguiente se muestra curvas de transmisibilidad para distintos valores de b.



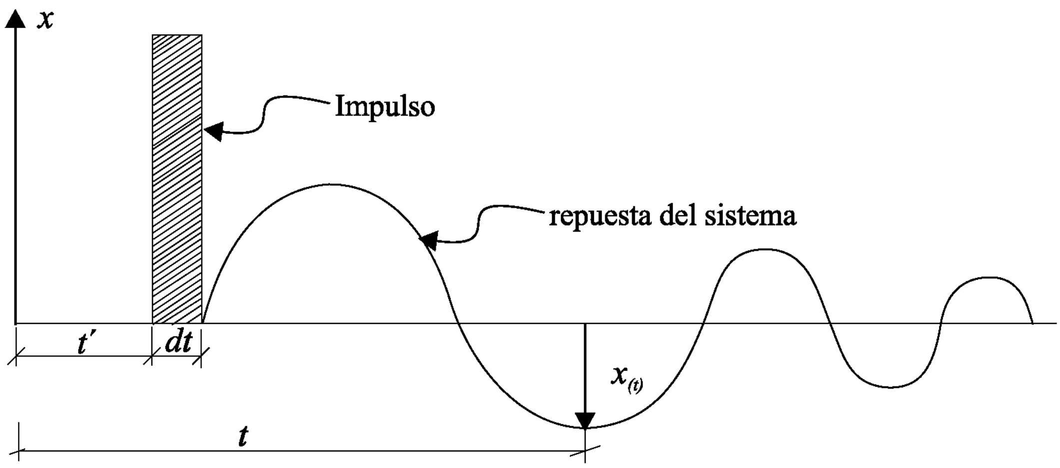
La combinación de resorte y amortiguador se convierte en un amortiguador cuando $A/y_0 > 1$, y en un atenuador u oscilador en el caso contrario.

Del gráfico se observa que las oscilaciones no se pueden aislar sino para relaciones de frecuencias mayores de $\sqrt{2}$, cuando $\omega/\omega_1 < \sqrt{2}$ el movimiento transmitido se amplifica, existiendo además, la posibilidad de que el sistema entre en resonancia. La figura nos muestra también que para $\omega/\omega_1 > \sqrt{2}$ el movimiento se aísla mejor sin amortiguadores (b=0).

El concepto de trasmisibilidad tiene aplicaciones prácticas en el diseño de aisladores para ase de máquinas, cuyas vibraciones no son convenientes en la estructura, para soportes de instrumentos que no deben ser perturbados por agentes exteriores, etc., y además es un parámetro importante en el estudio de la interacción suelo estructura.

8.3 EXCITACIÓN POR IMPULSOS.

Se entiende por impulso, una fuerza no periódica aplicad súbitamente, es decir en un tiempo muy pequeño pero finito ya que la duración de la fuerza es tan corta, que no alcanza a producir oscilaciones entretenidas y el movimiento se llama de transición. Las cargas impulsivas tienen aplicación práctica en el diseño de estructuras o prueba de explosiones.



Sabemos que el momentum es igual al impulso que lo imprime.

$$mv = Pdt$$

de donde

$$v = \frac{Pdt}{m}$$

Si un sistema parte de su lugar de equilibrio ($x_0 = 0$) y el impulso le aplica una velocidad inicial $v_0 = \frac{Pdt}{m}$ la posición x viene dada por:

$$x_{(t)} = \frac{e^{-b\omega_1 t} Pdt \,\text{Sen}\, \omega t}{\omega m\sqrt{1-b^2}} \quad ....(8.17)$$

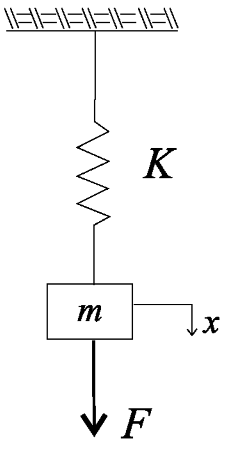
8.4 EXCITACIÓN ARBITRARIA

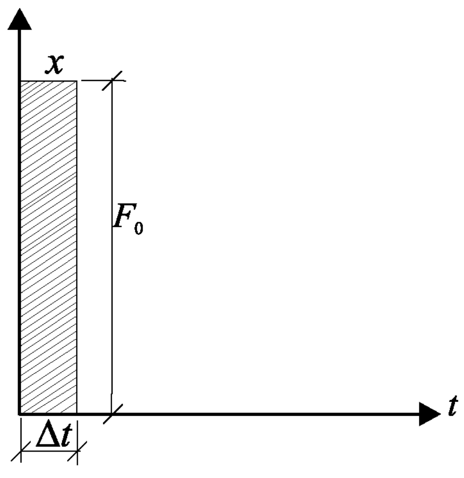
8.4.1 Integral de Duhamel.

Las fuerzas excitatrices arbitrarias, son los más comunes en el diseño de estructuras civiles ya que comprenden los sismos, mareas, explosiones, etc. y se caracterizan por tener una ley de formación o expresión algorítmica que las defina.

En nuestros análisis consideramos una fuerza excitatriz arbitraria, la cual se puede considerar compuesta por una serie de impulsos sucesivos de pequeña duración. Debido a que las ecuaciones diferenciales lineales tienen la propiedad de ser superponibles, la respuesta del sistema a la carga arbitraria, es igual a la suma de las respuestas correspondientes a cada uno de los impulsos que lo componen.

Consideraremos inicialmente el movimiento de un sistema masa resorte, no amortiguado, al que se le aplica un solo impulso.





Con respecto a la figura podemos decir que un impulso $F_0\Delta t$ producirá una velocidad inicial $\dot{x}_0$ que puede ser calculado por:

$$F_0\Delta t = m\dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_0 = \frac{F_0\Delta t}{m}$$

El desplazamiento x de un sistema no amortiguado que efectúa oscilaciones libres está dado por:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\,\mathrm{Sen}\,\omega_1 t + x_0\,\mathrm{Cos}\,\omega_1 t$$

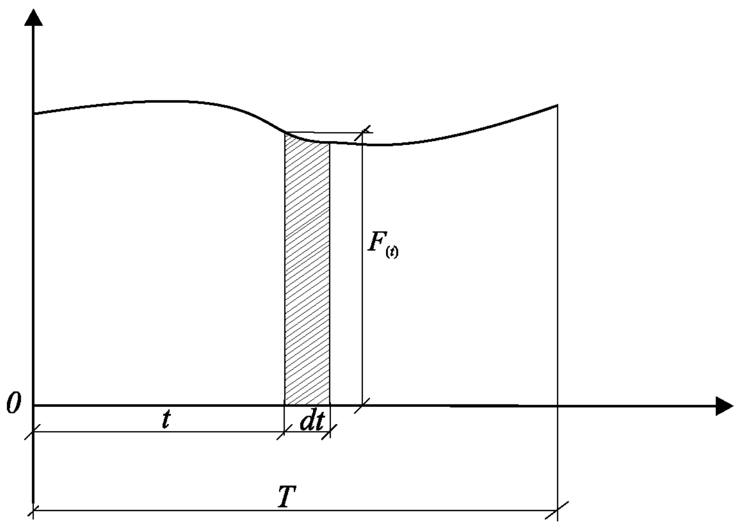
tenemos:

$$\dot{x}_0 = \frac{F_0 \Delta t}{m} \quad \text{y} \quad x_0 = 0$$

Si medimos el tiempo para el punto de deflexión cero, obtenemos:

$$x = \frac{F_0 \Delta t}{m\omega_1}\,\mathrm{Sen}\,\omega_1 \mathrm{t} \quad ....(8.18)$$

Una vez hallado el movimiento bajo la acción de un impulso, podemos por el principio de superposición, encontrar el movimiento bajo la acción de cualquier función de fuerza.
Es solamente necesario que la función arbitraria puede ser representada por un número infinito de impulsos.
Supongamos que la curva de la figura representa una fuerza excitadora que es aplicada en tiempo $t = 0$ y se desea determinar e desplazamiento en tiempo T.



Considerando que la fuerza puede ser divida en un gran número de impulsos de los cuales uno de ellos es $F(t)$dt.

El desplazamiento x en el T debido a este impulso puede calcularse por: (8.18) donde t es el tiempo que transcurre entre la aplicación del impulso y la medida del desplazamiento.
En el tiempo T, el diferencial del desplazamiento será:

$$dx = \frac{F(t)dt}{m\omega_1} \text{Sen}\omega_1(T-t) \quad ......(8.19)$$

El desplazamiento total se obtiene sumando todos los impulsos de 0 hasta T lo que significa la integración de la expresión

$$x = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^T F_{(t)} \text{ Sen } \omega_1(T-t) \quad .....(8.20)$$

expresión que es conocido como "Integral de Duhamel".
Con la expresión (8.20) se puede calcular el movimiento para cualquier sistema no amortiguado que tenga desplazamiento y velocidad cero, como condiciones iniciales.
Si $F(t)$ se da como dato gráfico o numérico la integración puede efectuarse por métodos gráficos o numéricos y una ventaja de esta ecuación es su adaptabilidad o soluciones de estos tipos.

8.4.2 Generalización de la integral de Duhamel.

Si tenemos un sistema de vibración libre amortiguado donde para $t = 0, x = 0$ y $\dot{x} = \frac{I}{m}$ la ecuación del movimiento será: $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$

donde la solución para el caso de movimiento subamortiguado es:

$$x = e^{-b\omega_1 t}(c_1 \text{ Cos } \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t + c_2 \text{ Sen} \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t)$$

reemplazando las condiciones iniciales en la ecuación (8.21)

$$0 = e^0(c_1) \qquad c_1 = 0$$

la expresión (8.21) se reduce a:

$$x = e^{-b\omega_1 t} c_2 \text{ Sen } \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t \quad ....(8.22)$$

derivado:

$$x = e^{-b\omega_1 t} c_2 \omega_1 \sqrt{1-b^2}\ \mathrm{Cos}\, \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t\ - e^{-b\omega t_1} b\omega_1 c_2\ \mathrm{Sen}\, \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t$$

en esta expresión reemplazamos las condiciones iniciales y despejamos c_2.

$$c_2 = \frac{I}{m\omega_1 \sqrt{1-b^2}}$$

reemplazando en c_2 en (8.22)

$$x = \frac{e^{-b\omega_1 t} I\ \mathrm{Sen}\, \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, t}{m\omega_1 \sqrt{1-b^2}} \quad ....(8.23)$$

donde t es el tiempo que transcurre entre la aplicación del impulso y la medida del desplazamiento. De la figura para $t = T$:

$$x = \int_0^T \frac{e^{-b\omega_1 t} F_{(t)} dt}{m\omega_1 \sqrt{1-b^2}}\ \mathrm{Sen}\, \omega_1 \sqrt{1-b^2}\, (T-t) dt$$

la expresión (8.24) es la "integral de Duhamel" cuando hay amortiguamiento.
Observamos en esta misma expresión, que cuando no hay amortiguamiento (b = 0) se obtiene la ecuación (8.20).

CAPITULO 9

FORMULACIÓN DEL MODELO DINÁMICO

9.1 MODELOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

A continuación se muestra una estructura aporticada de un piso

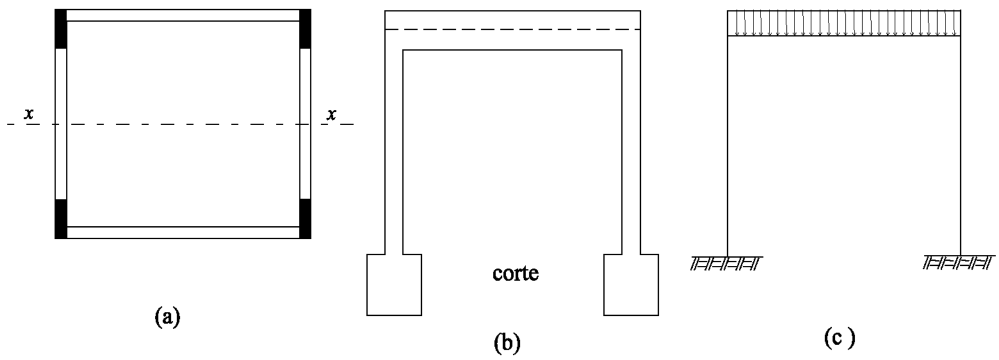


Figura 9.1

Esta misma estructura puede ser idealizada como un sistema masa - resorte.

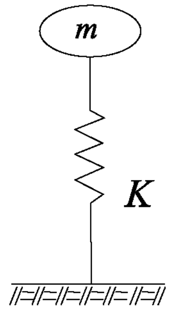


Figura 9.2

Al analizar esta estructura de tipo rectangular que se apoya en cuatro columnas y es de una sola planta, podemos ver que tiene infinitos grados de libertad pero se puede reducir a una sola teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- Que la estructura tenga simetría.
- Diseñar y construir las losas y/o vigas como elementos estructurales de rigidez infinita, de modo que el movimiento del sistema puede ser determinado en cualquier momento por la posición del centro de masa.

- Debido a que las masas de los lasos y vigas es mucho mayor que el de las columnas, se puede considerar que el peso del entrepiso se concentra al nivel de la losa y consideramos solo la mitad del peso de las columnas.

Con las hipótesis anteriores el sistema se reduce a una masa concentrada, sostenida por un resorte sin masa como se observa en la figura 9.2.

La estructura idealizada tiene seis grados de libertad: 3 traslacionales y 3 rotaciones respecto a un sistema de referencia x, y, z.

Si a la masa concentrada se le permite trasladarse en una sola dirección rotar al rededor de uno de sus ejes, bastará solo una coordenada para determinar su posición en cualquier instante obteniéndose de esta manera una estructura de un grado de libertad.

Si la estructura de la figura 9.1 (a) vibra verticalmente, es decir en la dirección z y cumple con la hipótesis antes expuestas, el periodo de vibración se calculará considerando una vibración libre.

Trabajamos con la ecuación:

$$m\ddot{z} + Kz = 0 \qquad \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{donde } \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

la masa m viene a ser la masa del entrepiso en estudio concentrado a nivel de la losa, por lo tanto es un valor conocido, sólo nos falta calcular la rigidez *K*.

Por la ley de Hooke sabemos que:

$$\Delta = \frac{Pl}{EA} \quad \text{donde} \quad \frac{P}{\Delta} = K = \frac{EA}{l}$$

por lo tanto

$$\omega_1^2 = \frac{EA}{m} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{lm}{EA}}$$

Si la estructura en lugar de moverse verticalmente, lo hace horizontalmente en la dirección x se puede representar por la figura 9.3.

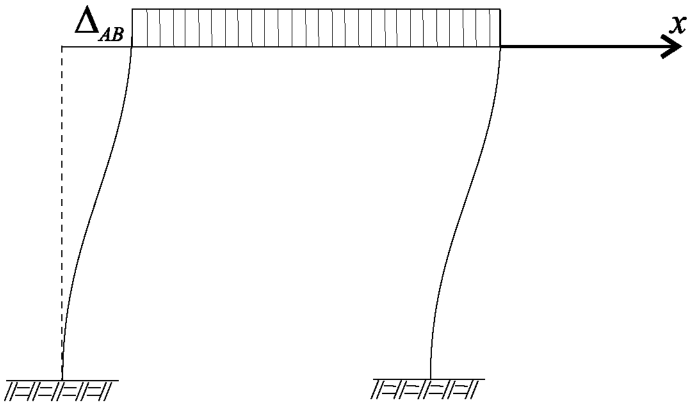


Figura 9.3

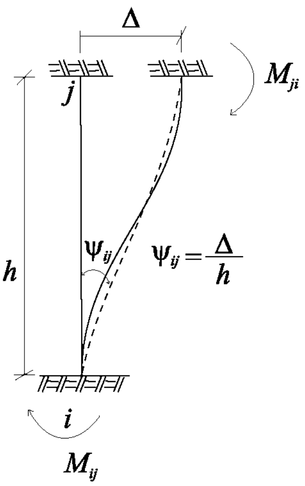
Calcularemos la rigidez K en base a las ecuaciones de pendiente y deflexión.

Debemos tener presente la hipótesis planteadas inicialmente para realizar el análisis. Si asumimos el techo como infinitamente rígido, entonces éste no rota, sólo se traslada luego, la columna estará perfectamente empotrada en su base, en la parte superior también estará empotrada pero puede desplazarse.

Las ecuaciones de pendiente y deflexión son:

$$M_{ij} = M_{ij}^{o} + 2\frac{EI}{h}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

$$M_{ij} = M_{ij}^{o} + 2\frac{EI}{h}(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij})$$



donde:

I: Suma de los momentos de inercia inercias de las secciones de los cuatro columnas en la dirección x (ver figura 9.1 (a)).

E: módulo de elasticidad del material.

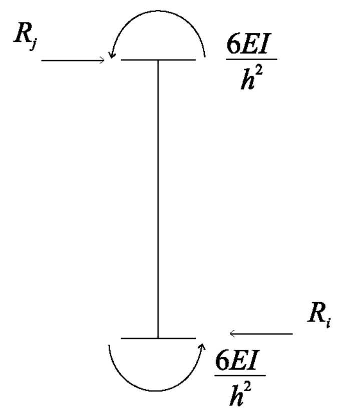
h: altura libre de las columnas.

Debido a que los puntos i y j no giran $\theta_i = \theta_j = 0$.

Los momentos de empotramiento serán: $M^o_{ij} = M^o_{ji} = 0$ debido a que no existen ara a lo largo de la columna.

$$M_{ij} = 2\frac{EI}{h}\left(-3\frac{\Delta}{h}\right); \quad M_{ji} = 2\frac{EI}{h}\left(-3\frac{\Delta}{h}\right)$$

$$M_{ij} = M_{ji} = -6\frac{EI}{h^2}$$



por equilibrio

$$\sum M_i = 0$$

$$R_i = 12\frac{EI}{h^3}\Delta$$

la rigidez es definida como la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario:

$$K = \frac{R_i}{\Delta} = \frac{12EI}{h^3}$$

$$K = \frac{12EI}{h^3}$$

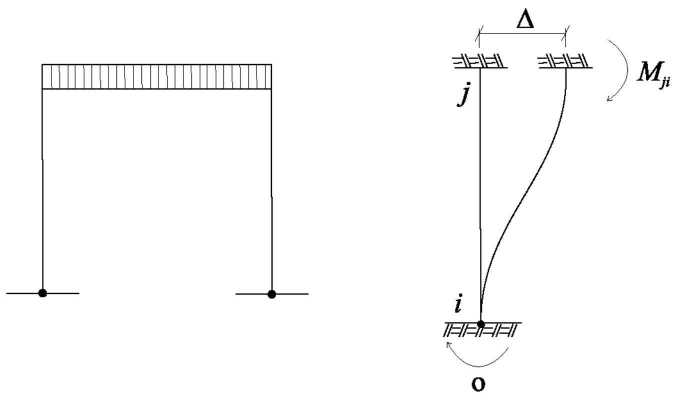
y el periodo estará expresado como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{h^3}{12EI}}$$

Si la estructura está articulada en la base, demostraremos que su rigidez es:

$$K = \frac{3EI}{h^3}$$

la demostración es lo siguiente



$$M_{ij} = M_{ij}^o + 2\frac{EI}{h}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) \text{ ......(a)}$$

$$M_{ij} = M_{ij}^o + 2\frac{EI}{h}(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij}) \text{ .....(b)}$$

En el extremo i la columna se encuentra articulada, por lo tanto el momento es cero y el nudo tiene un giro θi.

El extremo j no gira durante el desplazamiento: $\theta j = 0$

Reemplazamos los valores conocidos en (a)

$$0 = 2\theta_i - \frac{3\Delta}{h} \rightarrow \theta_i = \frac{3\Delta}{2h} \text{ ....en (b)}$$

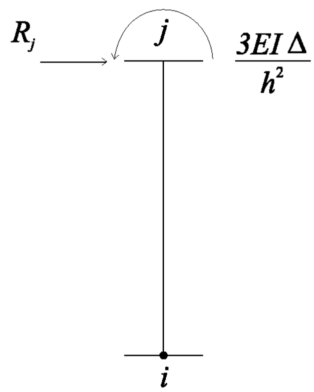
$$M_{ji} = 2\frac{EI}{h}\left(\frac{3\Delta}{2h} - \frac{3\Delta}{h}\right) = -\frac{3EI\Delta}{h^2}$$

por condición de equilibrio debe cumplir que:

$$\sum M_i = 0$$

de donde obtenemos:

$$R_j = \frac{3EI}{h^3}\Delta$$

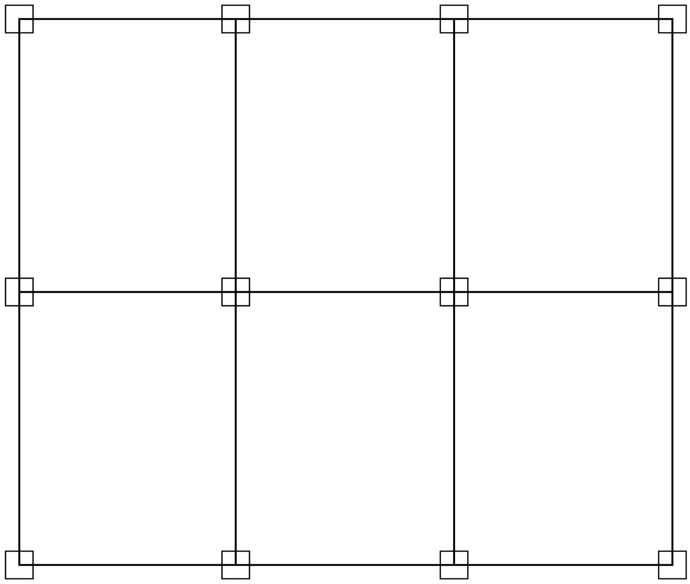


la rigidez la obtenemos dividiendo el cortante entre el desplazamiento.

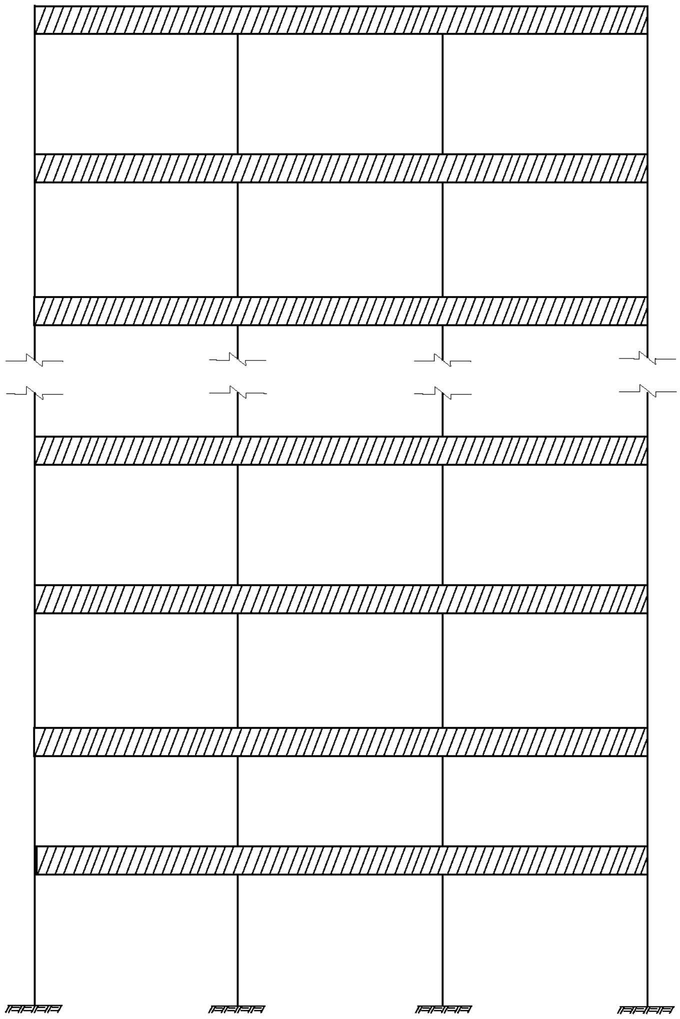
$$K = \frac{3EI}{h^3}$$

9.2 MODELOS DE VARIOS GRADO DE LIBERTAD

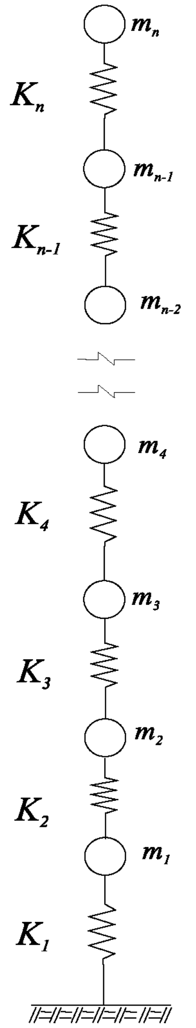
Si tenemos una estructura aporticada como la mostrada en la figura veremos que ésta puede ser idealizada como el sistema masa resorte de la figura.



Planta (a)



portico típico (b)



idealización (c)

Esta idealización la podemos realizar debido a que en nuestro análisis estas estructuras tienen grados de libertad y sus entrepisos se deforman sólo por cortante ya que los pisos no rotan sino que sólo se trasladan horizontalmente.

Para obtener el modelo por cortante se asumen las siguientes hipótesis:

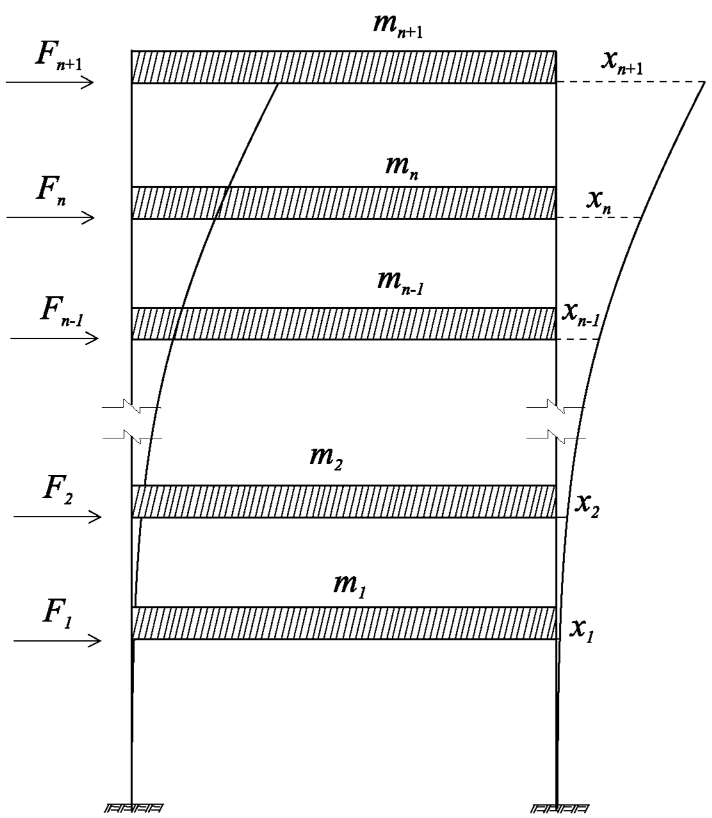
a) Las masas se concentran al nivel de cada piso.

b) El sistema de losas y vigas es muy rígido respecto a la rigidez de las columnas.

c) La deformación de la estructura no depende de la fuerza axial presente en las columnas.

Por la hipótesis a) se puede reducir los infinitos grados de libertad de la estructura a tanto grados como pisos tenga el edificio. Por la hipótesis b) podemos aceptar que los nudos no rotan manteniéndose las columnas verticales en sus uniones con las vigas en su parte superior e inferior.

Por la hipótesis c) se fija la deformada de modo que las vigas permanecen horizontales.



Donde:

i = 1,2,3...n son los pisos del edificio.

mi : masa de cada piso i.

F_i : Fuerza horizontal aplicada en el piso i.

Vi : Fuerza cortante del entrepiso i.

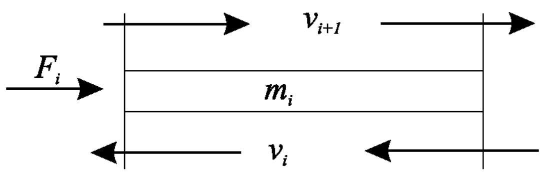
K_i : Constante de rigidez lateral del entrepiso i.

x_i : desplazamiento lateral del entrepiso.

A continuación realizaremos el análisis de un pórtico de una crujía, para facilitar el planteo de las ecuaciones. La rigidez de las dos columnas es equivalente a la rigidez de todas las columnas del entrepiso y las masas concentradas es igual a la masa total del piso mas el peso del medio entrepiso superior adyacente y el peso del medio entrepiso inmediato inferior.

donde:

Si analizamos el entrepiso m_i, el diagrama de cuerpo libre será:



donde las fuerzas que actúan sobre la masa m_i serán Fi y las cortantes que le transmiten las columnas superiores e inferiores que vienen dados por:

$$v_{i+1} = K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \quad .....(a)$$

$$v_i = K_i(x_i - x_{i-1}) \quad .....(b)$$

haciendo equilibrio de fuerza se obtiene:

$$v_{i+1} + F_i - v_i = m_i\ddot{x}_i$$

para determinar las características de la estructura, podemos hacer $F_i = 0$, ya que estas son independientes de la excitación.

Reemplazando (a) y (b) en (c)

$$K_{1+i}(x_{i+1} - x_i) + F_i - K_i(x_i - x_{i-1}) = m_i\ddot{x}_i$$

ordenando en forma conveniente:

$$m_i\ddot{x}_i - K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + K_i(x_i - x_{i-1}) = F_i$$

$$m_i\ddot{x}_i - K_{i+1}x_{i+1} + (K_i + K_{i+1})x_i - K_i x_{i-1} = F_i \quad .....(9.1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} i=1 & m_1\ddot{x}_1 - K_2x_2 + (K_2+K_1)x_1 & = F_1 \\ i=2 & m_2\ddot{x}_2 - K_3x_3 + (K_2+K_3)x_2 - K_2x_1 & = F_2 \\ i=3 & m_3\ddot{x}_3 - K_4x_4 + (K_3+K_4)x_3 - K_3x_2 & = F_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i=n & m_n\ddot{x}_n - K_{n+1}x_{n+1} + (K_n+K_{n+1})x_n - K_nx_{n-1} & = F_n \end{array}\right] \ldots 9.2$$

podemos hacer un arreglo matricial, de modo que:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix}$$

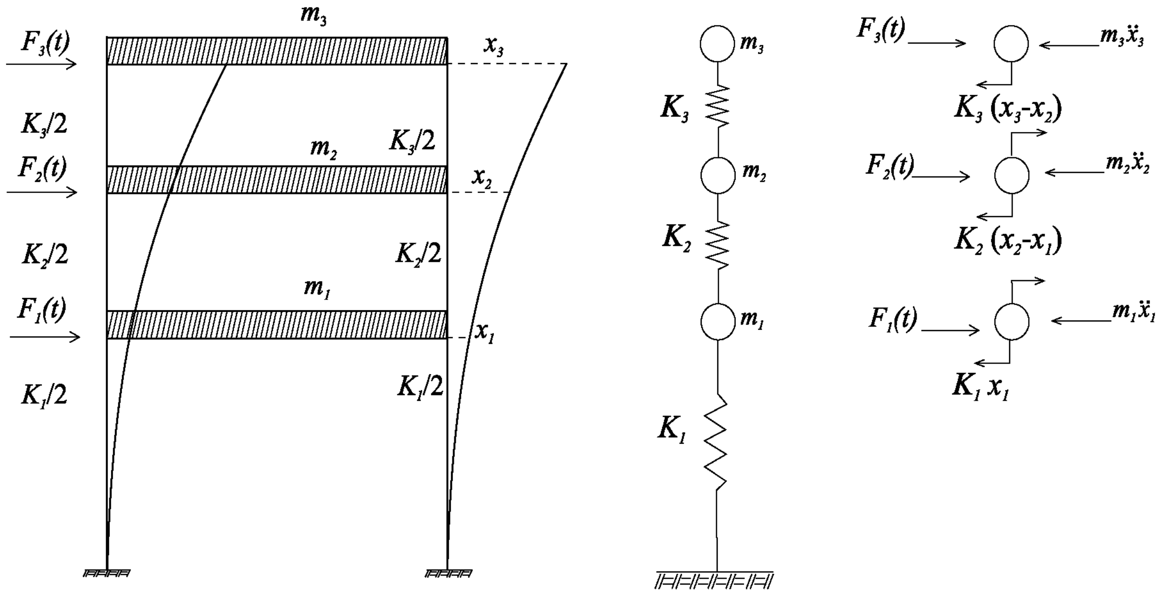
$$[K] = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & K_n \end{bmatrix}$$

$$[x] = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} \quad , \quad [F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

con la cual obtenemos la siguiente ecuación dinámica, la cual condensa las n ecuaciones planteadas (9.2)

$$\boxed{[m]\ [x] + [K]\ [x] = F} \ldots\ldots 9.3$$

A continuación plantearemos algunos ejemplo que servirán de ilustración para formular la ecuación dinámica de una estructura.



planteamos la ecuación de equilibrio para cada masa

$$m_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 - K_2(x_2 - x_1) - F_1(t) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) - K_3(x_3 - x_2) - F_2(t) = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 + K_3(x_3 - x_2) - F_3(t) = 0$$

agrupando convenientemente.

$$m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 + 0 = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - K_2x_1 + (K_2 + K_3)x_2 - K_3x_3 = F_2(t)$$

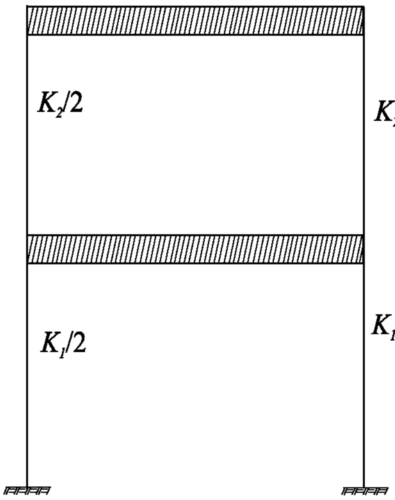
$$m_3\ddot{x}_3 - 0 - K_3x_2 - K_3x_3 = F_3(t)$$

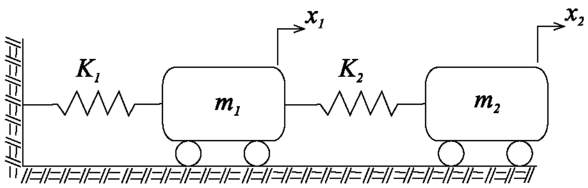
llevando a un arreglo matricial obtenemos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \\ F_{3(t)} \end{bmatrix}$$

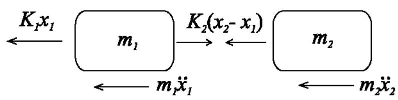
Ejemplo. Plantear

Otra forma de idealizar una estructura es de la siguiente manera:





planteamos el diagrama de cuerpo libre



analizamos el equilibrio y agrupamos convenientemente:

$$m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - K_2x_2 + K_2x_2 = 0$$

expresando en forma matricial:

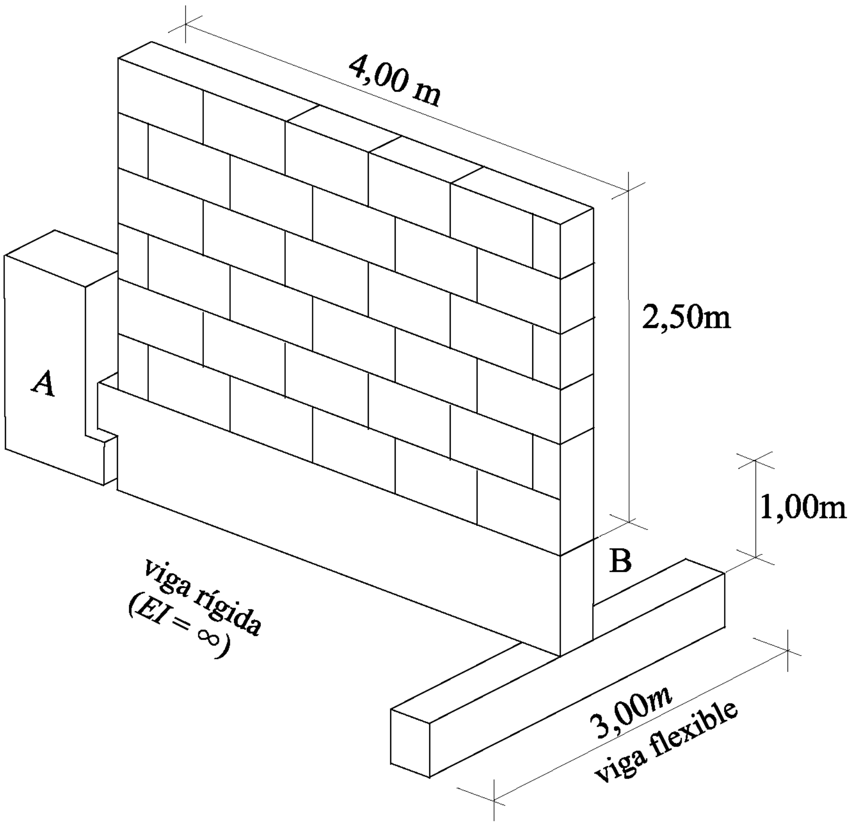
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Una viga de rigidez infinita soporta el peso de un muro de ladrillo.

   Esta viga se apoya sobre otra flexible de 0,25 x 0,50m^2 y sobre un dado de concreto en el otro extremo.

   Calcular el periodo de vibración de la viga infinitamente rígida, cuya sección es 0,15 x 1,00.



Solución:

La viga AB soporta, en forma distribuida, el peso del muro y su peso:

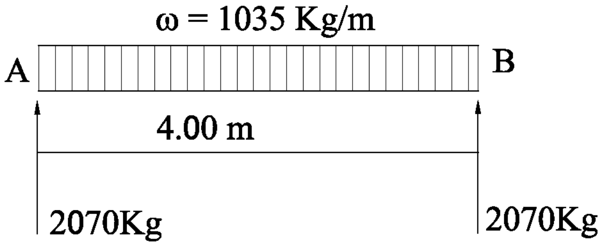
Peso del muro : 1800 x 0,15 x 400 x 2,50 = 2700,00

Peso de la viga : 2400 x 0,15 x 400 x 1,00 = 1440,00

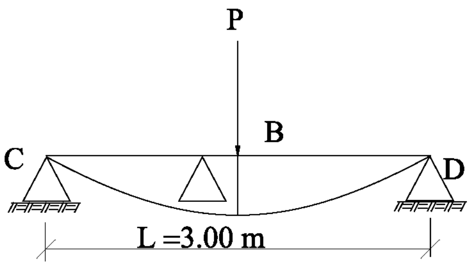
4140,00

carga distribuida que actúa sobre la viga AB:

$$\omega = \frac{4140,00}{4,00} = 1035 Kg/m$$



La reacción de 2070 Kg en el extremo B, deflexiona a la viga flexible CD, generalmente un Δ.



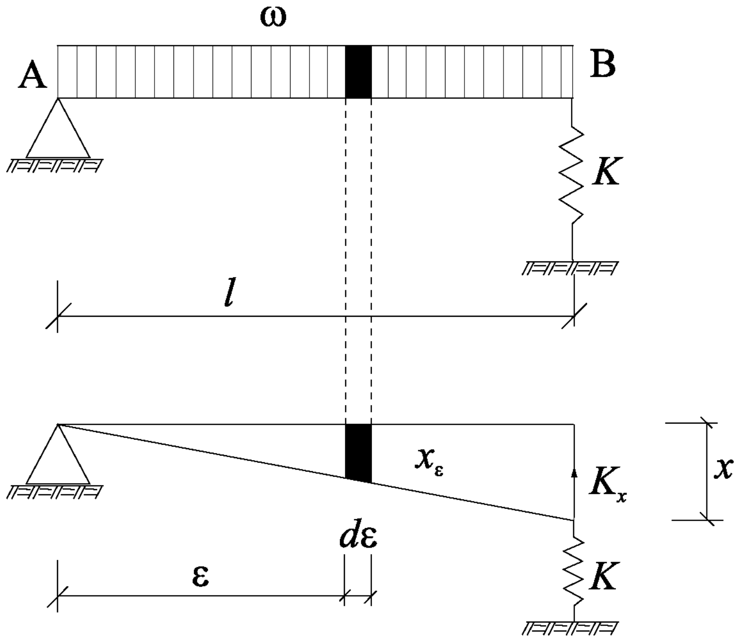
para una viga simplemente apoyada:

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

de donde la rigidez lateral se expresa como:

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{L^3}$$

Para calcular el periodo de vibración de la viga AB la idealizamos como articulada en A, debido a que el dado de concreto se comporta como rótula, y como resorte en el extremo B debido a que este punto se deforma un Δ.



$$dF = dm\ddot{x}_\varepsilon$$

$$dm = \frac{dW}{g} = \frac{\omega}{g}d\varepsilon$$

por relaciones de semejanza en la Figura:

$$\frac{x_\varepsilon}{x} = \frac{\varepsilon}{l}$$

$$x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{l}x \;\rightarrow\; \ddot{x}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{l}\ddot{x}$$

$$d\overline{F} = \frac{\omega}{gl}\varepsilon\ddot{x}d\varepsilon$$

por condición de equilibrio, debe cumplirse: $\sum M_A = 0$

$$\int_0^l \frac{\omega\varepsilon^2}{gl}\ddot{x}d\varepsilon + Klx = 0$$

$$\frac{\omega l^3}{3gl}\ddot{x} + Klx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3gK}{\omega l}x = 0$$ ecuación del movimiento

reemplazando valores:

$$K = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48 \times 210 \times 25 \times 50^3}{300^3} = 9722\,Tn/cm$$

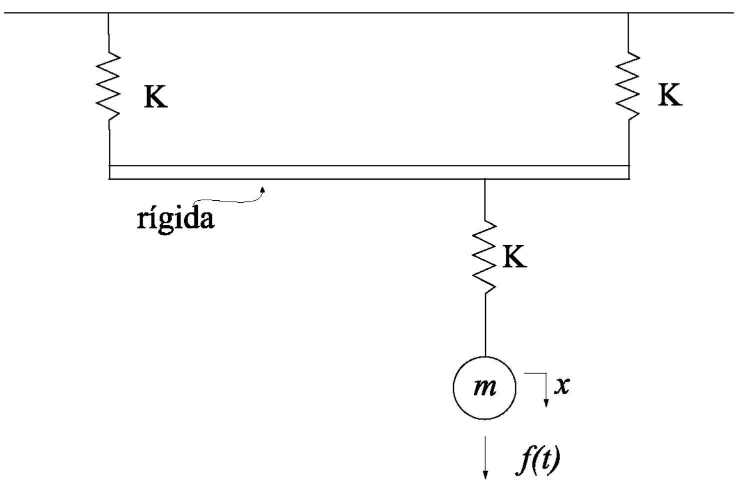
de la ecuación del movimiento:

$$\omega_1^2 = \frac{3gK}{\omega l}$$

$$\omega_1 = 302{,}092\,sg^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0{,}0208\,sg$$

2. Plantear la ecuación diferencial del movimiento de la "m".



Solución:

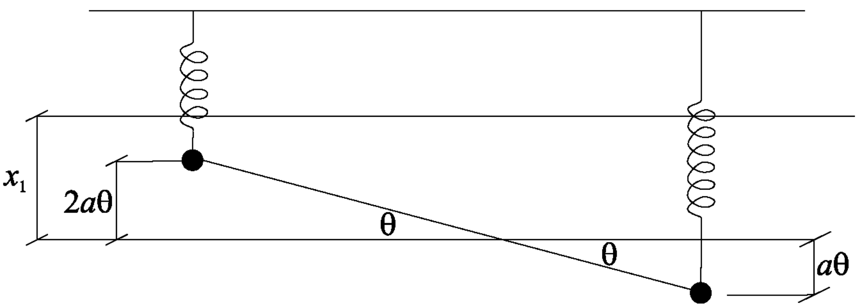
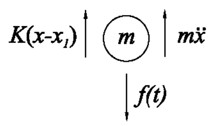
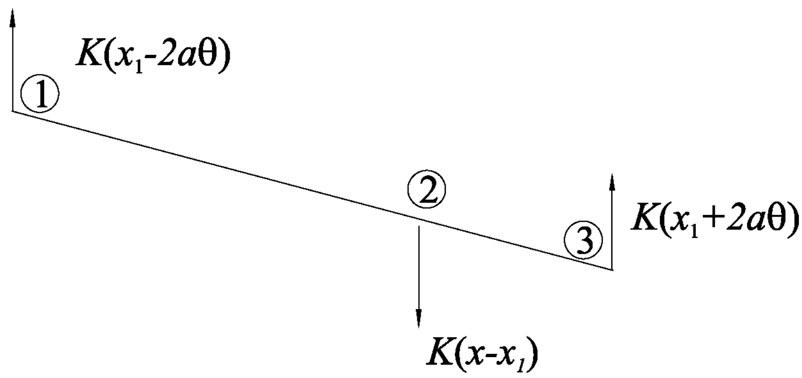


diagrama de cuerpo libre de la masa "m"



$$m\ddot{x} + K(x - x_1) = f_{(t)}$$



$$\sum M_2 = 0$$

$$K(x_1 - 2a\theta)(2a) = K(x_1 + a\theta)a$$

$$a\theta = \frac{x_1}{5}$$

por equilibrio de fuerzas: $\sum F_V = 0$

$$K(x_1 - 2a\theta) + K(x_1 + a\theta) = K(x - x_1)$$

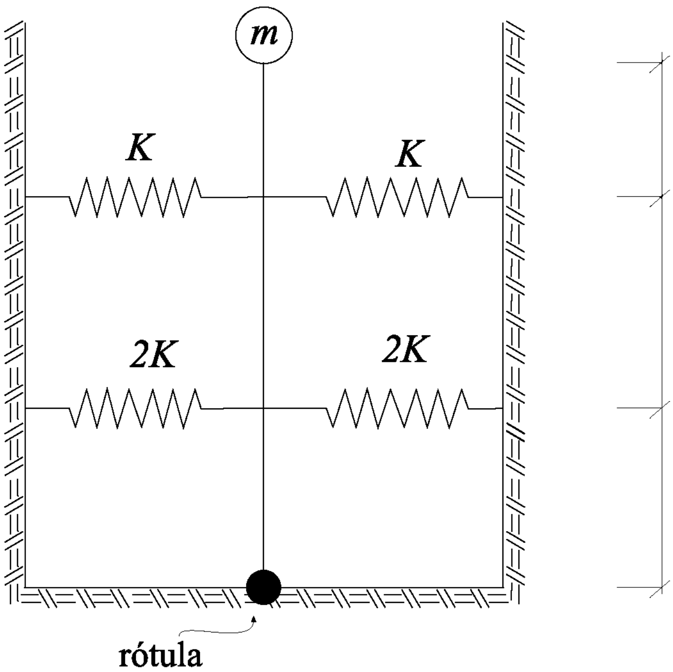
$$x_1 = \frac{5}{14}x$$

en (1)

$$m\ddot{x} + K(x - \frac{5}{14}x) = f_{(t)}$$

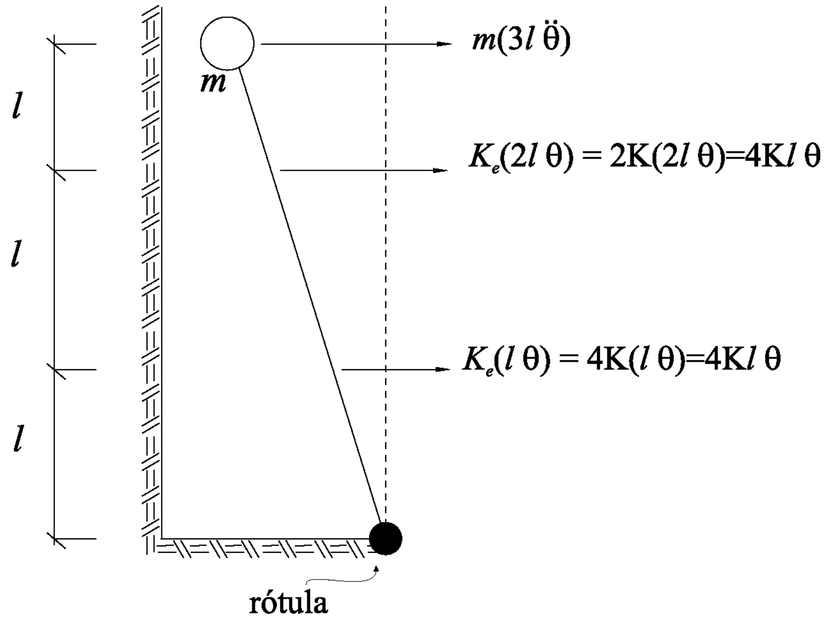
$$\ddot{x} + \frac{9}{14}\frac{K}{m}x = \frac{f_{(t)}}{m}$$

3. Hallar el periodo d la pequeñas oscilaciones del péndulo invertido rígido de la figura:



Solución:

$$\sum M_A = 0$$



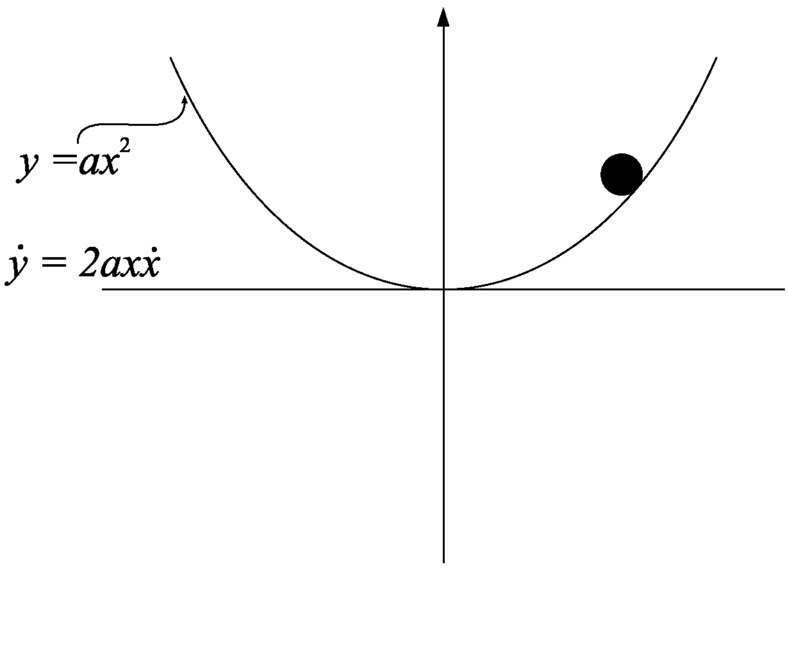
$$\sum M_A = 0$$

$$3ml\ddot{\theta}(3l) + 4Kl\theta(2l) + 4Kl\theta(l) - mg(3l\theta) = 0$$

$$\theta + \left(\frac{4K}{3m} - \frac{g}{3l}\right)\theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4K}{3m} - \dfrac{g}{2l}}}$$

4. La masa oscila por la parábola sin fricción, plantear la ecuación diferencial exacta del movimiento y luego hallar la frecuencia de las pequeñas vibraciones.



Solución:

Aplicando el método energético

$$Ep = mgy = mgax^2$$

$$Ec = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(4a^2x^2\dot{x}^2)$$

$$E = Ep + Ec$$

$$E = mgax^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2ma^2x^2\dot{x}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

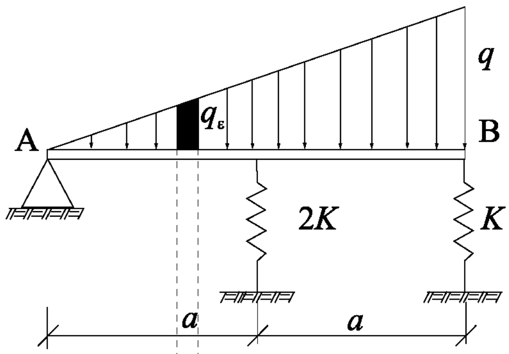
$$m(1+4a^2x^2)\ddot{x} + 4ma^2x\dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

para pequeñas oscilaciones:

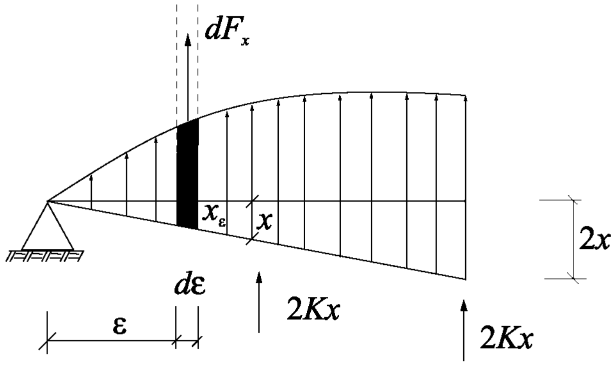
$$m\ddot{x} + \underbrace{\frac{2mga}{}}_{\omega_1^2}x = 0$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega_1 \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2ga}$$

5. Plantear la ecuación diferencial del movimiento.



Solución:



$$dF_I = dm\ddot{x}_\varepsilon \;........(1)$$

$$dm = \frac{dW}{g} = \frac{q_\varepsilon d\varepsilon}{g}, \;\; \text{pero} \;\; \frac{q_\varepsilon}{q} = \frac{\varepsilon}{2a}$$

$$dm = \frac{q\varepsilon d\varepsilon}{2ag}$$

además:

$$\frac{x_\varepsilon}{x} = \frac{\varepsilon}{a} \qquad \ddot{x}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{a}\ddot{x}$$

en (1)

$$dF_I = \frac{q\varepsilon^2 d\varepsilon}{2a^2 g}\ddot{x}$$

$$M_{dF_{I_A}} = \frac{q\varepsilon^3 d\varepsilon}{2a^2 g}\ddot{x}$$

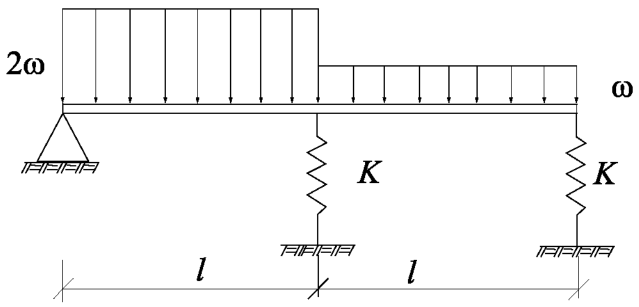
$$\sum M_A = 0$$

$$\int_0^{2a} \frac{q\varepsilon^3 \ddot{x}}{2a^2 g} d\varepsilon + 2Kx(a) + 2Kx(2a) = 0$$

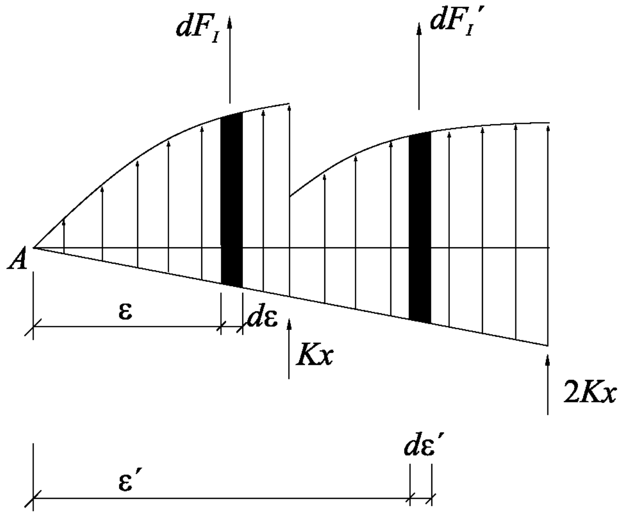
$$\frac{qa}{g}\ddot{x} + 3Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3Kg}{qa}x = 0$$

6. Plantear la ecuación diferencial del movimiento.



Solución:



a) Para 0 < ε < l .

$$dF_I = dm\ddot{x}_\varepsilon \;........(1)$$

$$dm = \frac{dW}{g} = \frac{2\omega d\varepsilon}{g}$$

además:

$$\frac{x_\varepsilon}{x} = \frac{\varepsilon}{l} \qquad \ddot{x}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{l}x$$

en (1)

$$dF_I = \frac{2\omega\varepsilon\, d\varepsilon}{gl}\ddot{x}$$

$$M_{dF_{I_A}} = \frac{2\omega\varepsilon^2 d\varepsilon}{gl}\ddot{x}$$

b) para $l < \varepsilon < 2l$.

$$dF_I' = dm'\ddot{x}_\varepsilon'$$

$$dm' = \frac{dW}{g} = \frac{\omega\, d\varepsilon'}{g}$$

$$\frac{x_\varepsilon'}{2x} = \frac{\varepsilon'}{2l} \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_\varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{l}\ddot{x}$$

$$dF_I' = \frac{\omega\varepsilon' d\varepsilon'}{gl}\ddot{x}$$

$$M_{dF_{I_A}'} = \frac{\omega\varepsilon'^2 d\varepsilon'}{gl}x$$

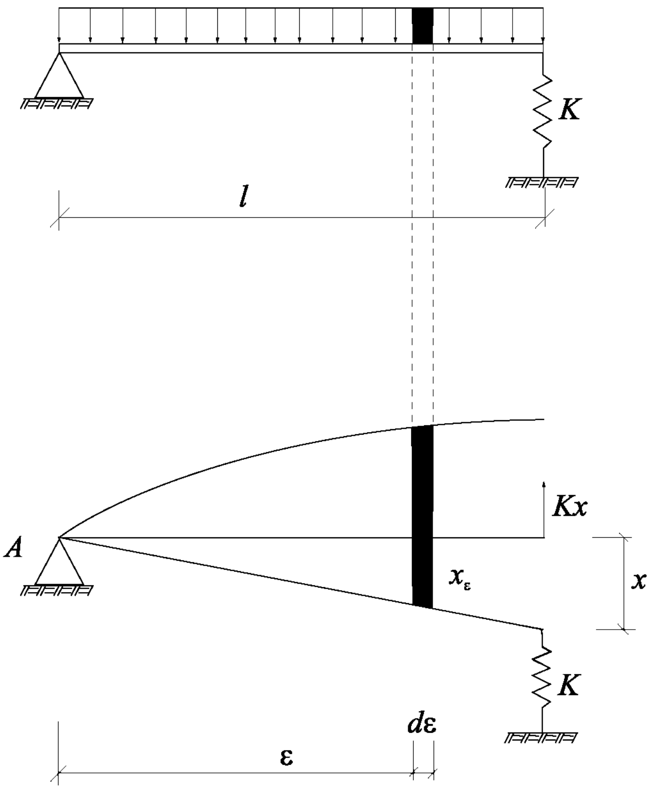
$$\sum M_A = \;\; 0$$

$$\int_0^l \frac{2\omega\ddot{x}}{gl}\varepsilon^2 d\varepsilon + \int_l^{2l} \frac{\omega\ddot{x}\varepsilon'^2}{gl} d\varepsilon + Kx(l) + 2Kx(2l)$$

$$\frac{2}{3}\frac{\omega \ddot{x} l}{g}+\frac{7\omega}{3}\frac{xl}{g}+5Kx=0$$

$$\frac{3\omega l\ddot{x}}{g}+5Kx=0$$

7. Plantear la ecuación diferencial del sistema.



Solución:

$$dF = dm\ddot{x}_{\varepsilon}$$

$$dm=\frac{dW}{g}=\omega\frac{d\varepsilon}{g}$$

por relación de semejanza:

$$x=\frac{\varepsilon}{l}x \qquad \ddot{x}_{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{l}\ddot{x}$$

$$dF=\frac{\omega\varepsilon\, x}{gl}d\varepsilon$$

por condición de equilibrio, debe cumplirse: $\sum M_A = 0$

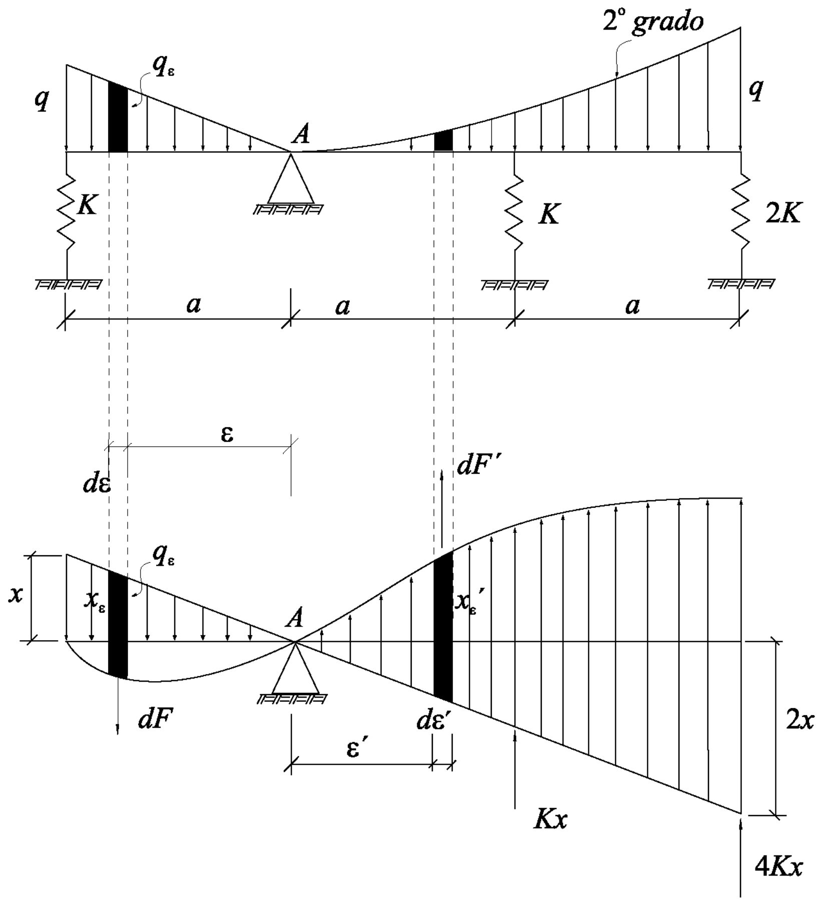
$$M_{dF_A} = \frac{\omega\varepsilon^2\ddot{x}}{gl}d\varepsilon$$

$$\int_0^l \frac{\omega\varepsilon^2\ddot{x}}{gl}d\varepsilon + Klx = 0$$

$$\frac{\omega l^3\ddot{x}}{3gl} + Klx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3Kgx}{\omega l} = 0$$

8. Plantear la ecuación del movimiento del sistema mostrado.



Solución:

$$dF = dm\ddot{x}_{\varepsilon}$$

$$dm = \frac{dW}{g} = \frac{q_{\varepsilon}d\varepsilon}{g}$$

$$q_{\varepsilon} = \frac{q\varepsilon}{a}$$

$$dm = \frac{q\varepsilon d\varepsilon}{ag}$$

$$\ddot{x}_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a}\ddot{x}$$

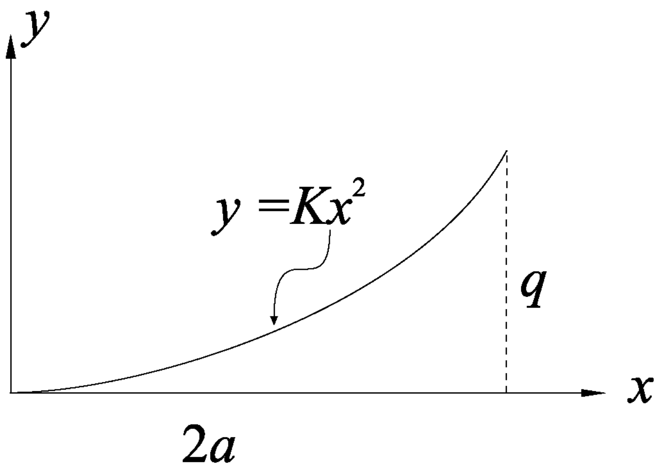
$$dF = \frac{q\varepsilon^2 d\varepsilon\ddot{x}}{a^2 g}$$

$$M_{dF_A} = \frac{q\varepsilon^3\ddot{x}d\varepsilon}{a^2 g}$$

$$dF' = dm\ddot{x}'_{\varepsilon}$$

$$x'_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon'}{a}\ddot{x}$$

$$dm = \frac{q\varepsilon'^2 d\varepsilon'}{4a^2 g}\ddot{x}$$



$$y = \frac{qx^2}{4a^2}$$ Ecuación de la parábola

$$dF\cdot = \frac{q\varepsilon\cdot^3 d\varepsilon\cdot}{4a^3}$$

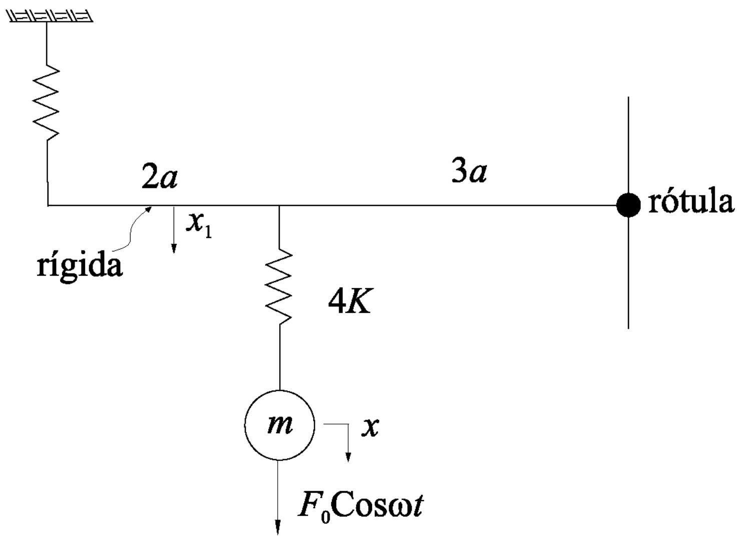
$$M_{dF'_A} = \frac{q\varepsilon'^4 \ddot{x}}{4a^3 g} d\varepsilon'$$

por condición de equilibrio $\sum M_A = 0$

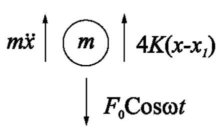
$$\int_0^a \frac{q\varepsilon^3 \ddot{x} d\varepsilon}{a^2 g} + \int_0^{2a} \frac{q\varepsilon'^4 \ddot{x} d\varepsilon'}{4a^3 g} + Kx(a) + Kx(a) + 4Kx(2a)$$

$$\frac{qa^2\ddot{x}}{4g} + \frac{8qa^2\ddot{x}}{5g} + 10Kax + \frac{200Kgx}{37qa} = 0$$

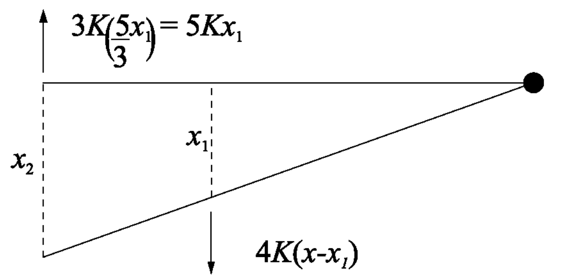
9. Plantear la ecuación diferencial del movimiento de la masa "m"



Solución:



$$m\ddot{x} + 4x(x - x_1) = F_0 \,\mathrm{Cos}\omega t$$



$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5} \rightarrow x_2 = \frac{5}{3}x_1$$

$$\sum M_A = 0$$

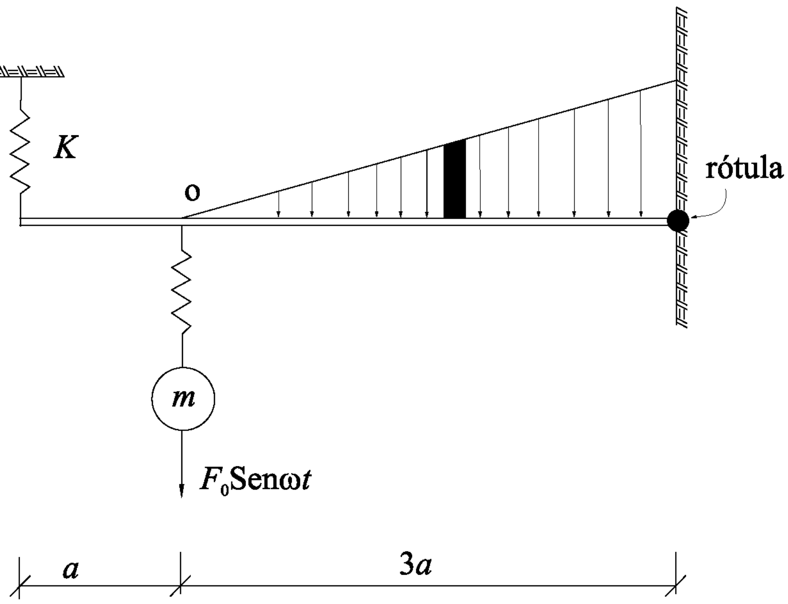
$$5Kx_1(5a) = 4K(x - x_1)(3a)$$

$$x_1 = \frac{12}{37}x$$

$$m\ddot{x} + 4K(x - \frac{12}{37}x) = F_0 \,\mathrm{Cos}\,\omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{100Kx}{37m} = \frac{F_0 \,\mathrm{Cos}\,\omega t}{m}$$

10. Plantear la ecuación del movimiento para la masa "*m*".



Solución:

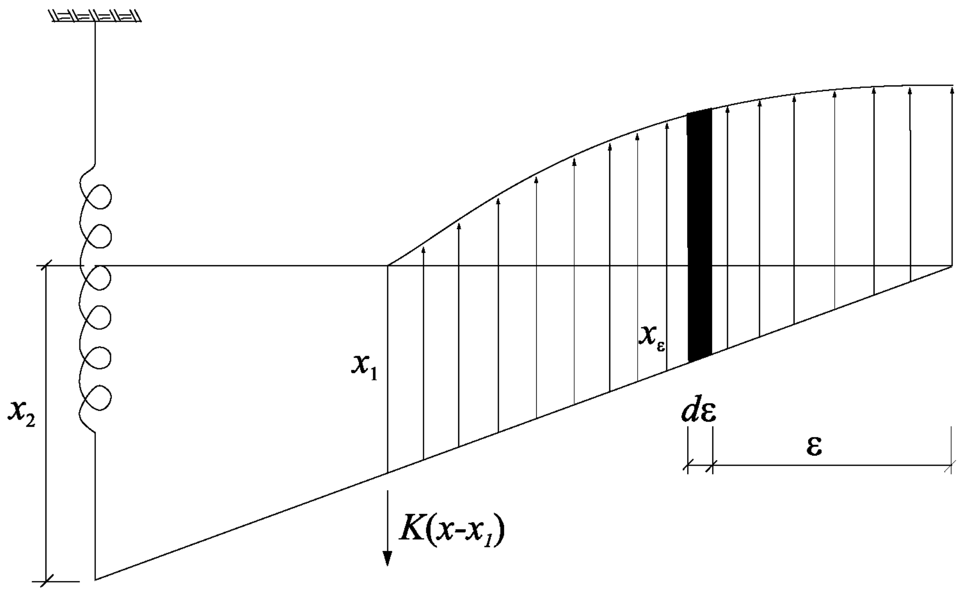
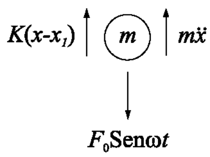


diagrama del cuerpo libre de la masa "*m*"



$$m\ddot{x} + K(x - x_1) = F_0 \,\text{Sen}\,\omega t \;........(1)$$

$$dF_I = dm\ddot{x}_\varepsilon \;......(2)$$

$$dm = \frac{dW}{g} = \frac{q_\varepsilon d\varepsilon}{g}$$

además:

$$\frac{q_\varepsilon}{3a - \varepsilon} = \frac{q}{3a}; \quad \frac{x_\varepsilon}{x_1} = \frac{\varepsilon}{3a}$$

de donde $\quad q_\varepsilon = (1 - \dfrac{\varepsilon}{3a})q$

$$\ddot{x}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3a}\ddot{x}_1$$

reemplazando estos valores en (2)

$$dF_I = \frac{q\varepsilon d\varepsilon}{3ag}\ddot{x}_1 + \frac{q\varepsilon^2 d\varepsilon}{9a^2 g}\ddot{x}_1$$

$$\sum M_{rotula} = 0$$

$$\int_0^{3a} \frac{q\ddot{x}_1}{3ag}\varepsilon^2 d\varepsilon + \int_0^{3a} \frac{q\ddot{x}_1}{9a^2 g}\varepsilon^3 d\varepsilon + Kx_2(4a) + K(x - x_1)(3a) = 0$$

también se cumple que:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4a}{3a} \rightarrow x_2 = \frac{4}{3}x_1$$

$$\frac{3}{4}\frac{qa^2}{g}\ddot{x}_1 + \frac{16}{3}Kax_1 - 3Ka(x - x_1) = 0$$

despejamos x_1.

$$x_1 = \frac{q}{25}x - \frac{9qa}{100Kg}\ddot{x}_1 ....(3)$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$\int \frac{q\ddot{x}_1}{3ag}\varepsilon^2 d\varepsilon + \int \frac{q\ddot{x}_1}{9ag}\varepsilon^3 d\varepsilon + Kx_2(4a) - K(x - x_1)(3a) = 0$$

$$\frac{12qa^2}{4g}\ddot{x}_1 + \frac{9qa^2}{4g}x_1 + \frac{4}{3}Ka\ddot{x}_1 = 0$$

$$\frac{qa}{Kg}\ddot{x}_1 = \frac{16}{9}x_1 .....(4)$$

(4) en (3)

$$x_1 = \frac{9}{25}x - \frac{9}{100}\left(\frac{16}{9}x_1\right)$$

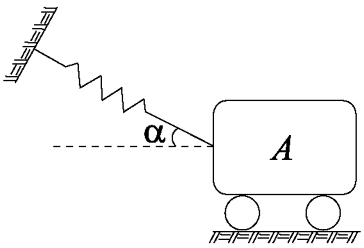
$$x_1 = \frac{9}{29}x$$

en (1)

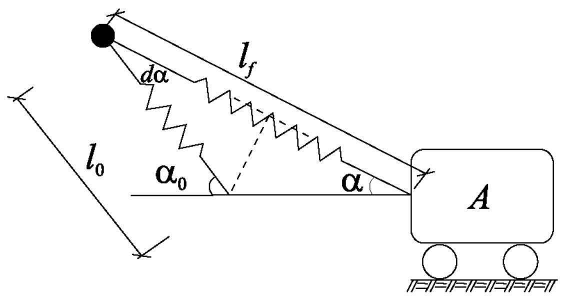
$$m\ddot{x}+K\left(x-\frac{9}{29}x\right)=F_0\,\text{Sen}\,\omega t$$

$$\ddot{x}+\frac{20}{29}\frac{K}{m}x=\frac{F_0}{m}\text{Sen}\,\omega t$$

11. Un cuerpo A de masa "m" puede desplazarse sobre una recta horizontal. Para $\alpha = \alpha_0$ el resorte no está deformado.
Plantear la ecuación del movimiento para pequeñas oscilaciones.



Solución:



$$\alpha_0=\alpha + d\alpha$$

$$\Delta_{resorte}=l_f-l_0\,.........(1)$$

$$l_f=l_0\,\text{Cos}\,d\alpha+x\text{Cos}\alpha\;=l_0\,\text{Cos}\,d\alpha+x\text{Cos}(\alpha_0-d\alpha)\,.....(2)$$

(2) en (1)

$$\Delta_{resorte}=l_0\,\text{Cos}\,d\alpha+x\text{Cos}(\alpha_0-d\alpha)$$

$$\Delta_{resorte}=x\text{Cos}(\alpha_0-d\,\alpha)+l_0(1-\text{Cos}\,d\alpha)$$

la ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{x}+K\Delta_{resorte}\,\mathrm{Cos}\,\alpha=0$$

$$m\ddot{x}+K\Delta_{resorte}\,\mathrm{Cos}(\alpha_0-d\,\alpha)=0$$

$$m\ddot{x}+K\left[x\,\mathrm{Cos}(\alpha_0-d\,\alpha)-l_0(1-\mathrm{Cos}\,d\alpha)\right]\mathrm{Cos}(\alpha_0-d\alpha)=0$$

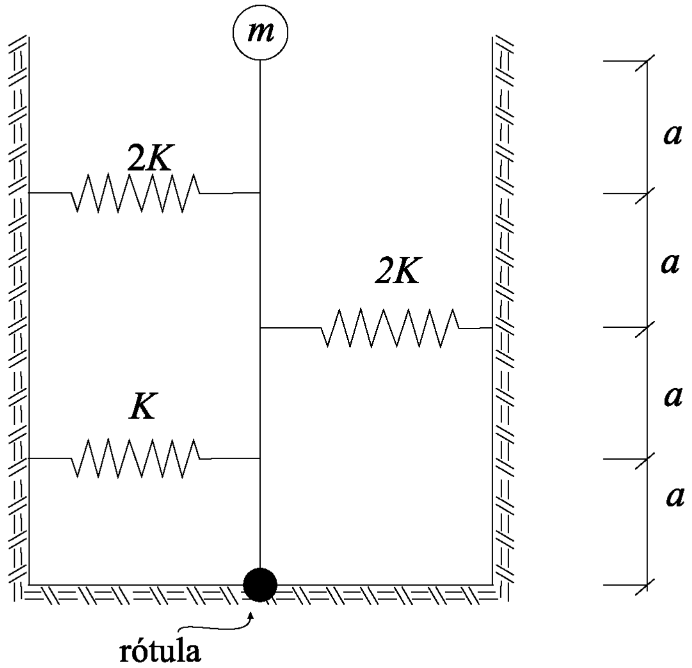
para pequeñas oscilaciones:

$$d\alpha\rightarrow 0\ ;\quad \mathrm{Cos}\,d\alpha=1$$

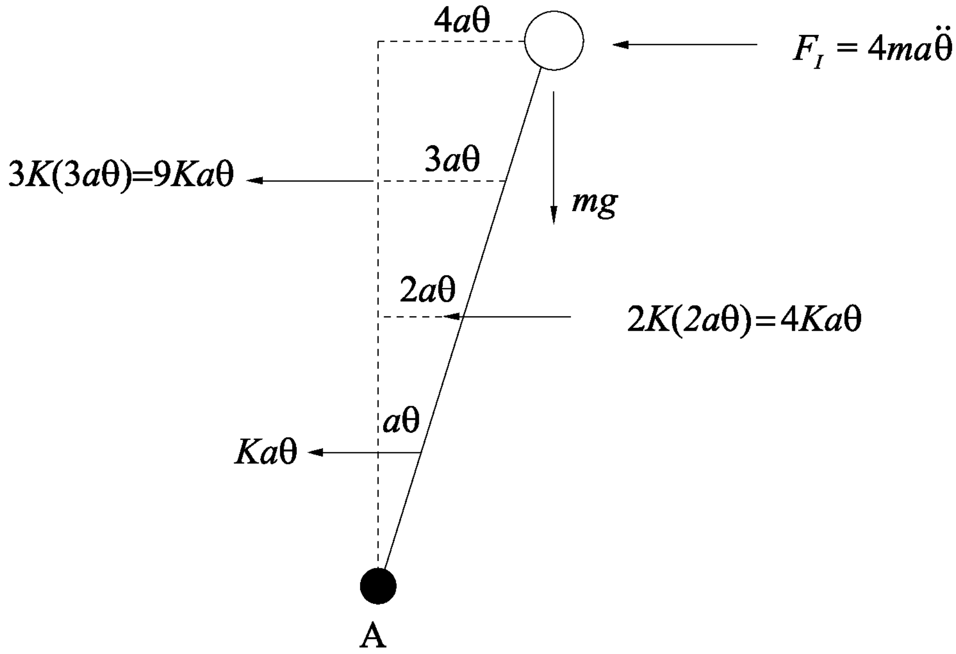
$$m\ddot{x}+K\left[x\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0\right]\mathrm{Cos}\alpha_0=0$$

$$\ddot{x}+\left[\frac{K}{m}\mathrm{Cos}^2\,\alpha_0\right]x=0$$

12. Para el péndulo invertido de la figura calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones de la masa "*m*".



Solución:



$$\sum M_A = 0$$

$$4ma\theta(4a)+9Ka\theta(3a)+4Ka\theta(2a)+Ka\theta(a)-mg(4a\theta)=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{4}\left[\frac{9K}{m}-\frac{g}{a}\right]\theta = 0$$

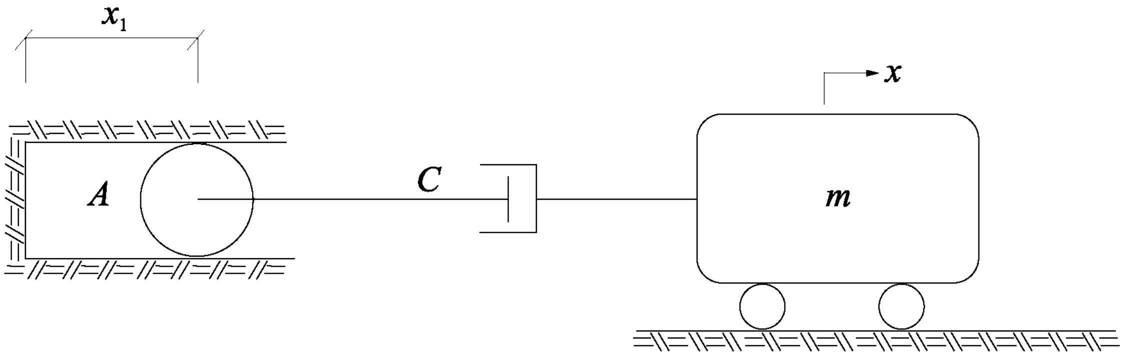
$$T=\frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$T=\frac{4\pi}{\sqrt{\frac{9K}{m}-\frac{g}{a}}}$$

13. El bloque B representado en la figura se conecta al cuerpo A mediante el amortiguador viscoso. La masa B es de 2Kg y el valor "C" es 40 N.seg/m. El movimiento del cuerpo A es armónico simple definido por la ecuación x_1 = e Sen ωt donde e =50mm y ω = 20rad/seg.

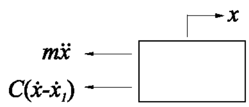
a) La amplitud del movimiento estable de B.

b) El ángulo de fase del movimiento de B con respecto del movimiento de A.



Solución:

planteamos la ecuación diferencial del sistema.



$$m\ddot{x}+C(\dot{x}-\dot{x}_1)=0$$

$$m\ddot{x}+C\dot{x}=C\dot{x}_1$$

pero $\dot{x}_1=e\omega\,\mathrm{Cos}\,\omega t$

$$mx+C\ddot{x}=Ce\omega\,\mathrm{Cos}\,\omega t$$

reemplazando valores:

$$2\ddot{x}-40\dot{x}\ =40\,\mathrm{Cos}\,\omega t\ \ldots\ldots(1)$$

la solución general de esta ecuación es:

$$x=x_C+x_P$$

pero nos interesa solamente la solución particular x_P.

$$x_P=A\,\mathrm{Sen}\,\omega t+B\,\mathrm{Cos}\,\omega t$$

$$\ddot{x}_P=A\omega\,\mathrm{Cos}\,\omega t-B\omega\,\mathrm{Sen}\,\omega t\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\ddot{x}_P=-A\omega^2\,\mathrm{Sen}\,\omega t-B\omega^2\,\mathrm{Cos}\,\omega t\ \ldots\ldots.(3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1)

$$2(-A\omega^2 \operatorname{Sen}\omega t - B\omega^2 \operatorname{Cos}\omega t) + 40(A\omega \operatorname{Cos}\omega t - B\omega \operatorname{Sen}\omega t) = 2\omega \operatorname{Cos}\omega t$$

agrupando e identificando términos tenemos:

$$-2B\omega^2 \operatorname{Cos}\omega t + 40A\omega \operatorname{Cos}\omega t = 2\omega \operatorname{Cos}\omega t$$

$$A - B = \frac{1}{20} \text{.......}(\alpha)$$

$$-2A\omega^2 \operatorname{Sen}\omega t - 40B\omega \operatorname{Sen}\omega t = 0$$

$$A = -B \text{ ....}(\beta)$$

de α y β obtenemos

$$A = \frac{1}{40} \;\; ; \;\; B = \frac{1}{40}$$

$$x_P = \frac{1}{40}\operatorname{Sen}\omega t - \frac{1}{40}\operatorname{Cos}\omega t$$

$$x_P = \sqrt{A^2 + B^2}\,\operatorname{Sen}(\omega t - \phi)$$

de donde la amplitud es:

$$\sqrt{(\frac{1}{40})^2 - (-\frac{1}{40})^2} = 0{,}0354$$

La amplitud del movimiento estable de cuerpo B es 35,4mm y el ángulo de fase del movimiento del cuerpo B con respecto al movimiento del cuerpo A es igual a ϕ, pero sabemos que:

$$\phi = arctg\,\frac{A}{B}$$

$$\phi = arctg\,\frac{1/40}{1/40} = 45^\circ$$

el ángulo de fase es 45°.

14. Una viga simplemente apoyada soporta un motor de peso 200lb en el centro de la luz. La rigidez de la viga es tal que la deflexión estática de su punto medio es 0,12 pulg y su amortiguamiento viscoso es tal que después de 10 ciclos de vibración libre la amplitud es reducida a 1/10 de su valor original. El motor gira a 600RPM y debido al desbalanceo del rotor se origina F_0 = 500lb para esa velocidad. Despreciando la masa del peso propio de la viga, hallar la amplitud de las vibraciones de estado constante para el punto medio de la viga.

Solución:

$$\delta_{st} = 0{,}12\text{pulg} = \frac{mg}{K}$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} = \frac{g}{0{,}12}$$

$$\omega = 600\frac{rev}{\min} = 600\frac{2\pi\, rad}{60seg} = 20\pi\frac{rad}{g}$$

$$\omega^2 = 3947{,}8418$$

$$\delta = \frac{2\pi b}{\sqrt{1-b^2}}$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = 10\delta$$

$$\ln 10 = 10\delta$$

$$\delta = 0{,}23026$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2 + (2b\frac{\omega}{\omega_1})^2}} \quad ....(1)$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 1{,}2260378 \quad ....(2)$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad ; \quad K = \omega_1^2 m = 16{,}666.667$$

$$\frac{F_0}{K} = \frac{500}{16{,}666.67} = 0{,}0299999 \quad ....(3)$$

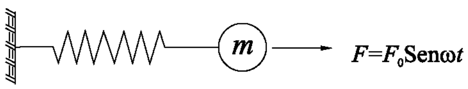
(2) y (3) en (1)

$$A = 0{,}12497 \ \text{pulg}$$

15. Una masa "m" frenada por un resorte de constante "K" se encuentra inicialmente en reposo. En el tiempo $t = 0$ se encuentra bajo la acción de una fuerza excitada $F(t) = F_o$ Cosωt. Suponiendo que no hay amortiguamiento y dado que $\omega/2\pi$ =10 ciclos/seg, "m" pesa 4,534Kg, K = 2,7 Kg/m, F_o = 45,359Kg, encontrar:

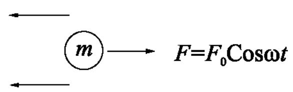
   a) La amplitud de las vibraciones forzadas.
   b) La amplitud de las vibraciones libres.

Solución:



$W = 4{,}534$ Kg $\qquad m = \dfrac{4.534}{9.8} = 0{,}462$UTM

$K = 2{,}7$ Kg m $\qquad F_0 = 45{,}339$ Kg



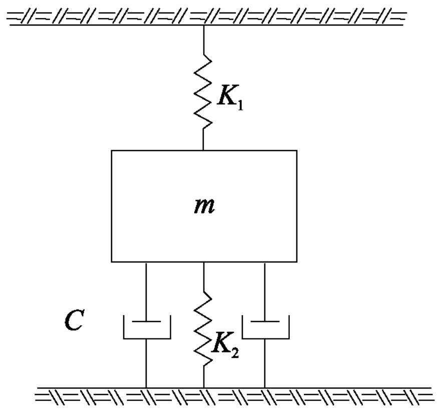
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}7}{0{,}462}}$$

$$\omega_1 = 2{,}417 \, rad/seg$$

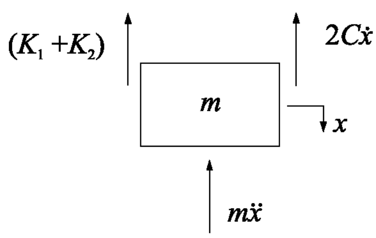
$$A = \frac{\frac{45{,}359}{2{,}7}}{\left|1-\left(\frac{20\pi}{2{,}417}\right)^2\right|}$$

$$A = 0{,}02489\,m$$

16. Plantear la ecuación del movimiento para el bloque y luego hallar el coeficiente de amortiguamiento crítico.



Solución:



$$m\ddot{x} + 2C\dot{x} + (K_1 + K_2)x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2C}{m} + \frac{K_1 + K_2}{m} = 0$$

para el amortiguamiento crítico $b = 1$

$$\frac{2C}{m} = 2b\omega_1 \quad ; \quad C_{crit} = m\omega_1$$

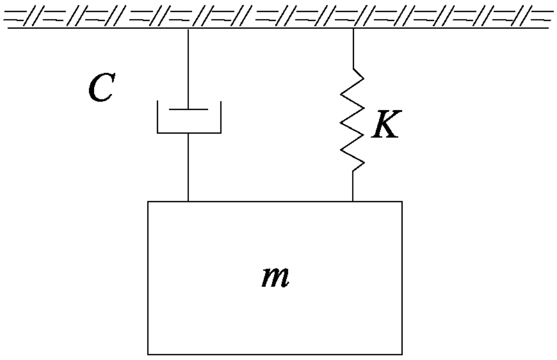
$$C_{crit} = \sqrt{(K_1 + K_2)\, m}$$

17. Una masa que pesa 10lbs esta sujeta por un resorte de K = 15lbs/pie y se mueve experimentad la acción de un fuerza de amortiguamiento viscoso.

Se observa que la final de 4 ciclos de movimiento la amplitud se ha reducido a la mitad. Hallar

a) El decremento logarítmico.

b) El periodo.



Solución:

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \delta$$

$$\delta = \frac{2\pi b}{\sqrt{1-b^2}}$$

$$\delta = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{4}\ln 2 = 0{,}173287$$

despejando

$$b = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2\delta^2}} = 0{,}027568$$

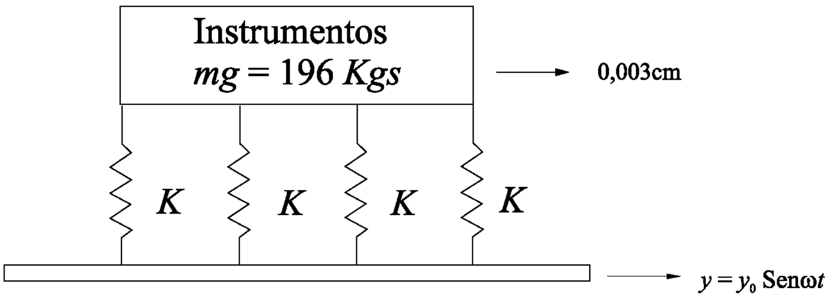
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1\sqrt{1-b^2}}$$

$$T = 0{,}908\ seg$$

17. El piso de un edificio vibra con una amplitud de 0,0003cm y con una frecuencia de 10 rad/seg. Se desea aislar un instrumento sensible por medio de 4 resortes iguales. La máxima amplitud de vibración permisible para el instrumento es de 0,0003 cm. Hallar la constante necesaria para cada resorte. El instrumento pesa 196Kg. Considerar el sistema sin amortiguamiento (b = 0).

Solución:



$$\frac{A}{y_0} = \frac{\sqrt{1+\left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2+\left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$y_0 = 0{,}015cm$$

$$\omega = 10\frac{rad}{seg}$$

$$\frac{0{,}003}{0{,}015} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{7} = \frac{10}{7}$$

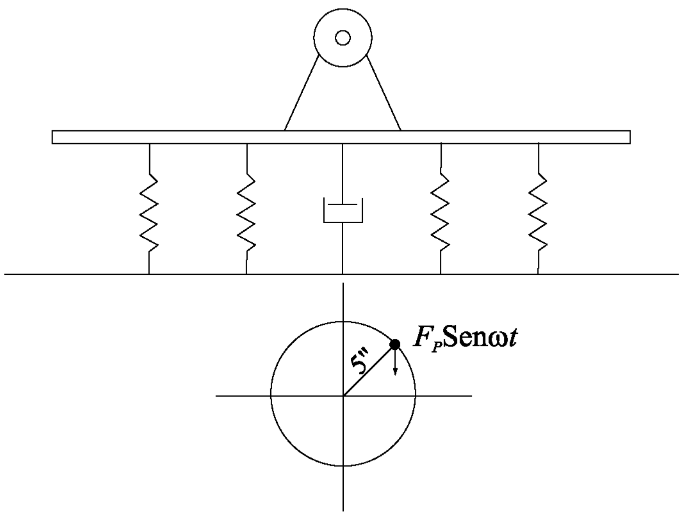
$$\sqrt{\frac{K_e}{m}} = \frac{10}{7} \rightarrow \sqrt{\frac{4K}{196 \times 9{,}8}} = \frac{10}{7}$$

$$K = 10{,}2\ Kg/m$$

18. Un motor que pesa 50 lbs esta soporta por 4 resortes cada uno de constante K=100lbs/pulg.

El desequilibrante del rotor es equivalente a un peso de una onza localizado a 5pulg del eje de rotación. El amortiguamiento viscoso es tal que después de 10ciclos de vibración libre la amplitud es reducida a la mitad de su valor inicial. Sabiendo que el motor está obligado a moverse verticalmente. Hallar la amplitud de la vibración de estado estable del motor a 1800RPM.

Solución



$$F_P = \frac{W}{g}\omega^2 r$$

$$F_P = \frac{1/16\,lbs}{386{,}4\ \frac{\text{pulg}}{\text{seg}^2}\ \text{g}}(60\pi)^2\ \tfrac{rad}{seg^2}\ 5\text{pul}$$

$$F_P = F_0 = 28{,}75\, lbs$$

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{1+n}}$$

$$\delta = \frac{1}{10}\ln 2$$

$$\delta = 0{,}069 = \frac{2\pi b}{\sqrt{1-b^2}}$$

$$b{=}0{,}01103$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_e}{m}} = \sqrt{\frac{4\times 1000}{\frac{50}{386{,}4}}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{30{,}912}$$

reemplazando estos valores en la ecuación.

$$A{=}\frac{\frac{28{,}735}{4000}}{\sqrt{\left[1-\frac{60\pi}{175{,}82}\right]^2+(2\cdot\ 0{,}01103\cdot\ \frac{60\ \pi}{175{,}82})^2}}$$

$$A{=}0{,}0475$$

19. Un instrumento cuyo peso es 20lbs se encuentra montada sobre una superficie vibratoria que tiene un movimiento sinusoidal 1/64´´ y frecuencia de 60ciclos/seg. Si el instrumento se encuentra montada rígidamente sobre la superficie. ¿Cual es lo máxima fuerza con lo que debe estar sujeta?.

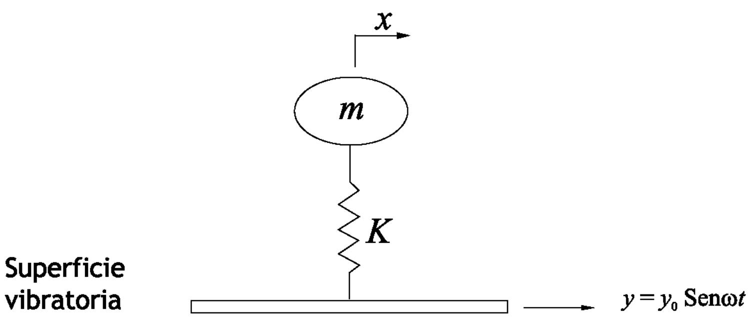
Por otro lado calcular la constante del resorte para el sistema de soporte que limitará la máxima aceleración del instrumento a la mitad de la aceleración de la gravedad.

Solución:

Peso del instrumento W = 20lbs

$$y_0 = 1/64"$$

$$\omega = 60\frac{ciclos}{seg} = 120\pi\frac{rad}{seg}$$



que el instrumento se encuentre montado rígidamente sobre la superficie significa que la masa tiene el desplazamiento de la base.

$$x = y_0\,\text{Sen}\,\omega t$$

$$F_{\max} = m\ddot{x}_{\max} \;.......(1)$$

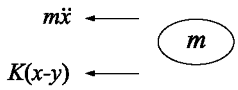
$$\dot{x} = \omega y_0\,\text{Cos}\,\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 y_0\,\text{Sen}\,\omega t$$

$$\ddot{x}_{\max} = -\omega^2 y_0 \;......(2)$$

(2) en (1)

$$F_{ma} = -m\omega^2 y_0 = \frac{20}{386,4}(120\pi)^2\frac{1}{64} = 115lbs$$



$$m\ddot{x} + (x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + Kx = \underbrace{Ky_0}_{F_0} \text{Sen}\,\omega t$$

$$x = A\,\text{Sen}(\omega t - \phi)$$

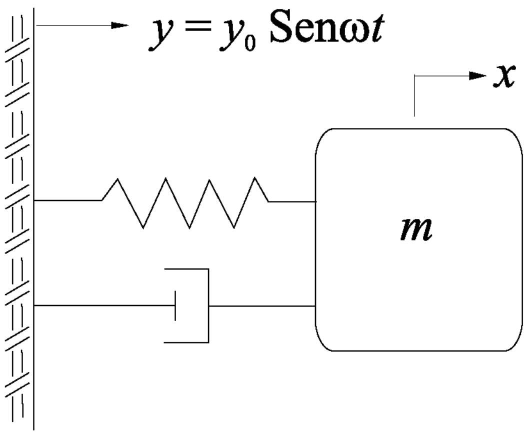
$$\ddot{x} = -\omega^2 A\,\text{Sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x}_{\max} = -\omega^2 A = -\omega^2 \frac{y_0}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2} = \frac{g}{2}$$

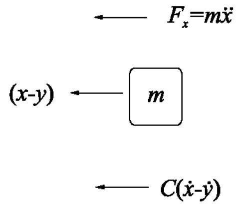
$$K = 588{,}8\ \frac{lbs}{\text{pulg}}$$

20. Para medir las vibraciones verticales de la cimentación de un máquina se utiliza un instrumento del tipo que se muestra en la figura. El sistema resorte -masa del instrumento ha sido diseñado para que la deflexión estática sea de 3/4". La frecuencia de la vibración corresponde a la velocidad de un motor que marcha a 1500RPM.

La amplitud del movimiento relativo entre la masa del instrumento y la cimentación se ha medido por medio de la lectura en el cuadrante de un instrumento de aforo, resultando es de 0,008". Hallar la amplitud de la cimentación. El amortiguamiento en el instrumento es de 70% del amortiguamiento crítico.



Solución



haremos : $x - y = z$

$$m\ddot{x} + (\dot{x} - \dot{y}) + K\ (x - y) = 0$$

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + Kz = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = -m\ddot{y}$$

$$y = y_0 \operatorname{Sen} \omega t$$

$$\dot{y} = y_0 \omega \operatorname{Cos} \omega t$$

$$\ddot{y} = -y_0 \omega^2 \operatorname{Sen} \omega t$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = m y_0 \omega^2 \operatorname{Sen} \omega t$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{K} = \frac{3}{4}$$

$$\omega = 1500RPM = 50\,\pi \tfrac{rad}{seg} \quad ; \ \omega_1^2 = \frac{K}{m}$$

$$x_{st} = \frac{F_0}{K} = \frac{3}{4} = y_0 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \rightarrow \omega_1^2 = 263{,}189$$

$$A = \frac{y_{st}}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2 + \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$y_{st} = \frac{3}{4}; \ \ b = 0,7; \ \ \omega = 50\pi; \ \omega_1{}^2 = 263{,}189$$

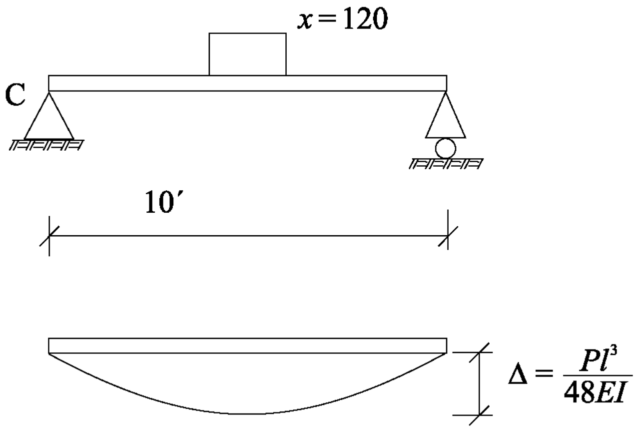
$$A = 00{,}08 \ ''$$

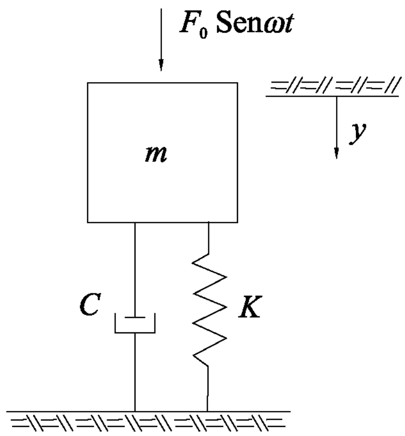
21. Una máquina de W =3860 lbs de peso es montada sobre una viga. Un pistón que se mueve de arriba hacia abajo produce una fuerza armónica de F_0 = 7000lbs y frecuencia w =60 rad/seg. Desperdicia el peso de la barra y asumiendo el 10% de amortiguamiento crítico. Hallar:

a) La amplitud en el movimiento de la máquina.

b) La fuerza transmitida a la viga.

Solución:





Rigidez de la viga:

$$K = \frac{48EI}{l^3}$$

$$K = \frac{48(30\times10^6)120}{(10\times12)^3} = 10^5\ lb/\text{pulg}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{\frac{3860}{386.4}}} = 100{,}05\ {}^{rad}\!/_{seg}$$

$$\text{b} = 0{,}1$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{K} = \frac{7000}{10^5} = 0,07\text{pulg}$$

amplitud del movimiento :

$$\frac{A}{y_0} = \frac{y_{st}}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2 - \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\text{A} = 0,1075$$

transmitibilidad

$$\frac{A}{y_0} = \frac{\sqrt{1-\left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{\left[1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2\right]^2 + \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\frac{A}{y_0} = 1,5467$$

amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación.

$$A_T = F_0\frac{A}{y_0} = 7000\times 1,5467 = 10827lbs$$

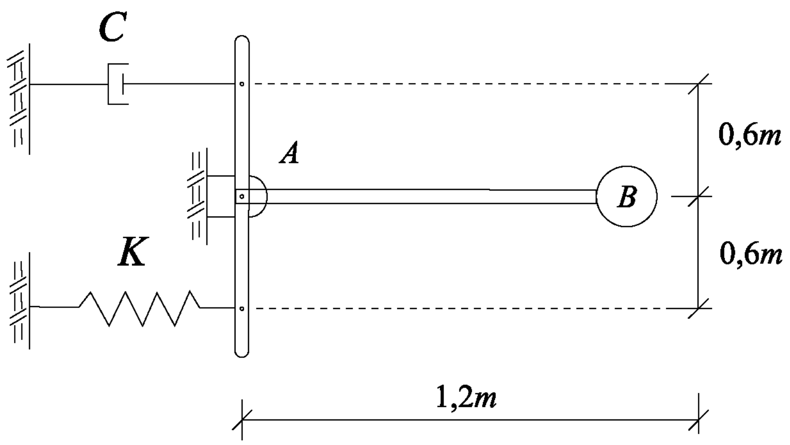
22. La masa del cuerpo en forma T es despreciable y la masa del cuerpo *B* es de 30Kg, K=1200Newt/m, C=270 *Newtxseg/m.*

El sistema está en equilibrio cuando AB se encuentra horizontal. Calcular para el movimiento que se produce al perturbar el equilibrio:

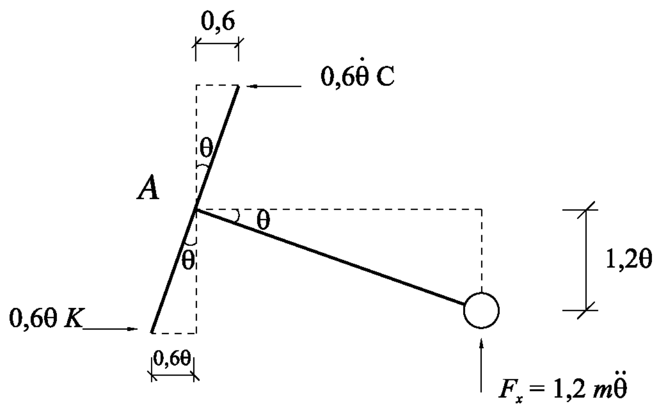
a) El tipo de movimiento que se desarrolla.

b) La frecuencia de la oscilación (si el movimiento tiene este carácter)

c) El valor de b.



Solución:



$$\sum M_A = 0$$

$$4m\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C\dot{\theta}}{4m} + \frac{K\theta}{4m} = 0$$

$$\frac{C}{4m} = 2b\omega_1 \,........(1)$$

$$\frac{K}{4m} = \omega_1^2$$

de (2)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1200}{4\times 30}} = \sqrt{10}$$

en (1)

$$b = \frac{270}{8\times 30\sqrt{10}}$$

$$b = 0{,}356$$

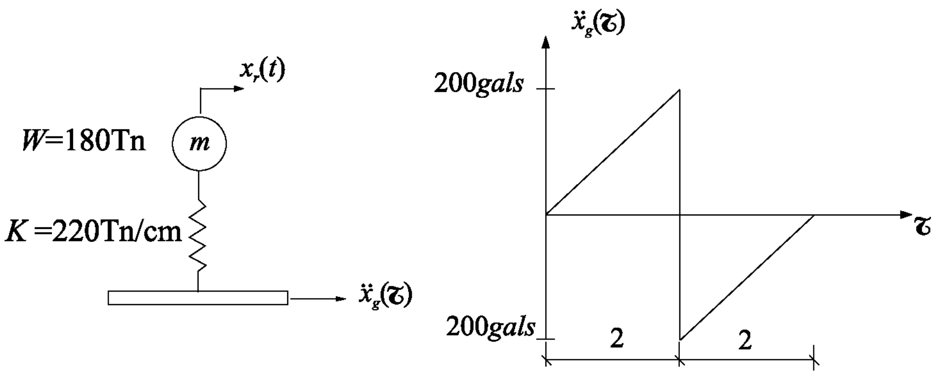
b<1 movimiento subamortiguado.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1\sqrt{1-b^2}}$$

$$T = 2{,}126 seg$$

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}47 Hertz$$

23. Para el sistema mostrado determine el desplazamiento en función de t.



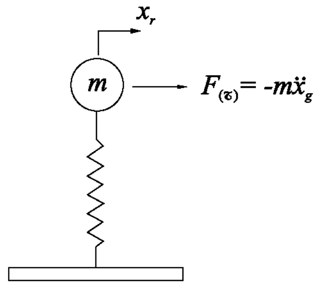
Solución:

$$x_{r(t)} = \frac{-1}{\omega_1\sqrt{1-b^2}}\int_0^t \ddot{x}_{g(\tau)} \operatorname{Sen}\omega_1(t-\tau) = d\tau$$

como $\quad b=0$

$$x_{r(t)} = \frac{-1}{\omega}\int_0^t \ddot{x}_{g(\tau)}\,\mathrm{Sen}\,\omega_1(t-\tau) = d\tau$$

sistema equivalente



para $\quad 0 \leq t \leq 2$

$$x_{r(t)} = \frac{-1}{\omega_1}\int_0^t 100\tau\ \mathrm{Sen}\omega_1(t-\tau)d\tau$$

$$x_{r(t)} = -\frac{100}{\omega_1}\left[\frac{t}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_1^2}\mathrm{Sen}\,\omega_1 t\right]$$

Como

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{220}{180/980}} = 34{,}61\ rad/seg$$

$$x_{r(t)} = -2{,}89\left[\frac{t}{34{,}61} - \frac{1}{34{,}61^2}\mathrm{Sen}\,34{,}61\ t\right]$$

Para $\quad 2 \leq t \leq 4$

$$x_{r(t)} = -\frac{1}{\omega_1}\left[\int_0^2 100\tau\,\mathrm{Sen}\omega_1(t-\tau)d\tau + \int_2^t (100\tau - 400)\,\mathrm{Sen}\omega_1(t-\tau)d\tau\right]$$

$$x_{r(t)} = 0{,}334 - 0{,}0835t + 0{,}0024\,\mathrm{Sen}\,34{,}61t - 0{,}334\,\mathrm{Cos}\,34{,}61(t-2)$$

24. Un sistema masa resorte no amortiguado, que bajo la acción de la gravedad tiene una deflexión de una pulgada (2,54cm) se encuentra además bajo la acción de una fuerza excitadora sinosoidal que tiene una frecuencia de 4 *ciclos/seg.*

¿Que factor de amortiguamiento *"n"* se requiere para reducir la amplitud de las vibraciones de estado constante a la mitad de la amplitud de las vibraciones forzadas no amortiguadas?

Solución:

$$F = mg = Kx \qquad x_{st} = 1" = 0,0254m$$

$$\frac{K}{m} = \frac{g}{x} = \omega_1^2 \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{9,8}{0,0254}}$$

$$\omega_1 = 19,64 rad/seg$$

la fuerza excitadora $\omega = 4ciclos/seg$

$$\omega = 8\pi \; rad/seg$$

si no hay amortiguamiento

$$A_1 = \frac{F_0 / K = x_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

si hay amortiguamiento

$$A_2 = \frac{F_0 / K = x_{st}}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2\right] + \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

por condición del problema $A_1 = 2A_2$

$$\frac{F_0 / K}{1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2} = \frac{2F_0 / K}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2\right] + \left(2b\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

reemplazando valores y resolviendo la ecuación obtenemos:

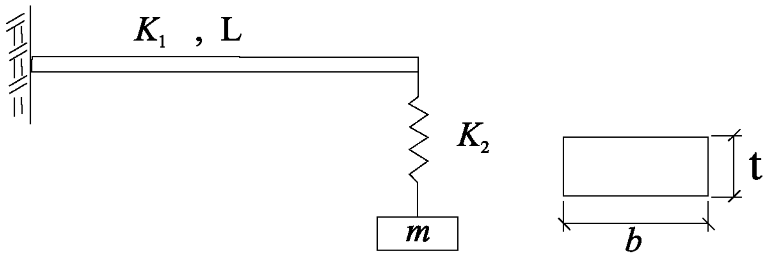
$$b = 0,43$$

factor de amortiguamiento $b = \frac{n}{n_c}$

$$n = b \cdot n_c = 0,43\,\omega_1 = 8,44 seg^{-1}$$

$$n = 8,44 seg^{-1}$$

25. Un sistema vibratorio consiste en una masa *"m"* unida al extremo libre de un voladizo mediante un resorte *"K"*. El voladizo que actúa como resorte tiene una longitud L=12,5", espesor t = 1/4", b =2/3", E = 30 x 10^6 *lb/pulg*^{2}. Hallar la frecuencia del sistema si *"m"* peso 32,2lbs $K_1 = 60 lbs/pulg$.



Solución:

$$K \underset{2}{=} \frac{3EI}{L^3} = \frac{3\times 30\times 10^6\, \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3}{(12,5)^3} = 40\, lb/pulg$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad m = \frac{w}{g}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{40} + \frac{1}{60}$$

$$K = 24\ lb/pu\lg$$

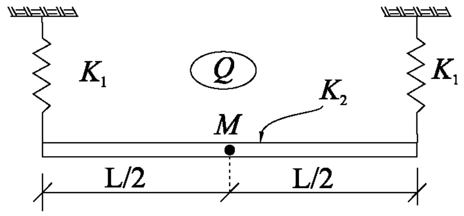
$$\frac{32,2}{386}\ddot{x} + 24x = 0$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

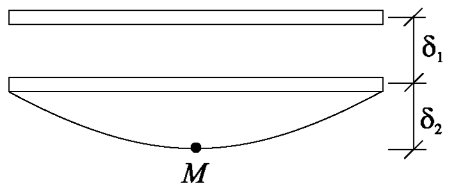
$$f = 2,69cps$$

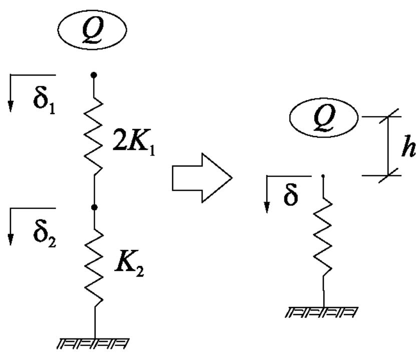
$$T = \frac{1}{2\pi}$$

26. Se deja caer un peso Q = 180Tn. Sobre una viga como se muestra en la figura. Hallar el desplazamiento de las vigas y de los resortes.



Solución:





$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{K_2} \Rightarrow K_e = 90\,Kg/cm$$

Desplazamiento vertical del punto M:

$$\int \overline{F} \cdot d\overline{r} = mg(h+\delta) = \frac{1}{2}K\delta^2$$

$$Qh - Q\delta - \frac{1}{2}K_e\delta^2 = 0$$

$$\delta^2 - \frac{2Q}{K_e}\delta - \frac{2Qh}{K_e} = 0$$

Reemplazando valores:

$$\delta^2 - 4\,\delta - 32 = 0$$

$$\delta = 8 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 8$$

$$\frac{F}{2K_1} + \frac{F}{K_2} = 8 \Rightarrow F = 720Kg$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{720}{180} = 4cm$$

$$\delta_{st} = \frac{Q}{K_e} = \frac{180}{90} = 2cm$$

Factor de amplifcación dinámica para la viga:

$$\delta = \delta_{st}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 2$$

27.

a) Hallar la ecuación del movimiento del sistema mostrado.

b) El periodo de vibración del sistema.

c) Si el y (t) = 0,15cm encontrar el desplazamiento máximo de la masa m.

d) Encontrar las fuerzas dinámicas máximas en la columna.

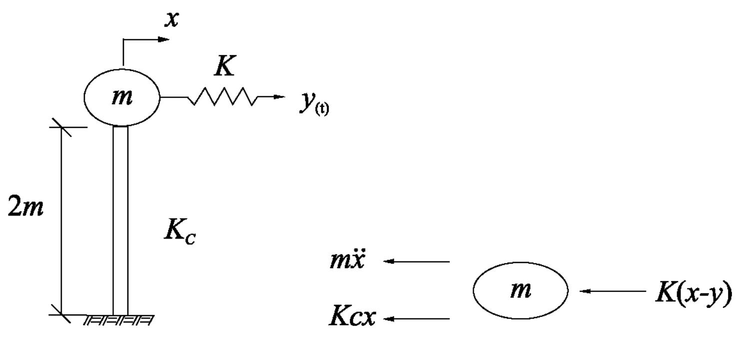
$W = 40\ Tn$

$K = 10\ Tn/cm$

Columna de concreto = .30 x .30

$E = 210\ T/cm^2$

$I = 67{,}5 \times 103\ cm^4$



Solución:

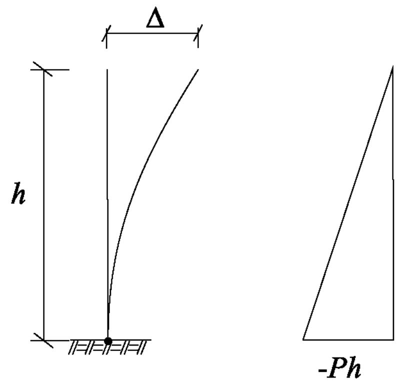
a)

$$m\ddot{x} + K_c x + K(x-y) = 0$$

$$m\ddot{x} + (K_c + K)x = Ky$$

b)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K_c + K}{m}}$$



$$EI\Delta = -Ph\frac{h}{2}\frac{2h}{3}$$

$$\Delta = -\frac{Ph^3}{3EI}$$

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{h^3} \qquad I = \frac{1}{12}(.3)(.3)^4$$

$$K = \frac{3\times 210T/cm^2 \times 67{,}5\times 10^3 cm^4}{2^3 \times 100^3 cm^3} = 5{,}31T/cm$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5{,}31+10}{40/980}} = 19{,}36\, rad/seg$$

$$T = \frac{2\pi}{19{,}36} = 0{,}324\,seg$$

c) $m\ddot{x} + K_e x = Ky_0$

$$x = x_c + x_P$$

$$x_P = A \quad \dot{x}_P = 0 \quad \ddot{x}_P = 0$$

$$K_e A = Ky_0 \Rightarrow A = \frac{Ky_0}{K_e}$$

$$x = C_1 \operatorname{Sen} \omega_1 t + C_2 \operatorname{Cos} \omega_1 t + \frac{Ky_0}{K_e}$$

$$\dot{x} = C_1\omega_1 \operatorname{Cos} \omega_1 t - C_2\omega_1 \operatorname{Sen} \omega_1 t$$

en

$$t = 0 \quad \dot{x}_0 = x_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{Ky_0}{K_e}$$

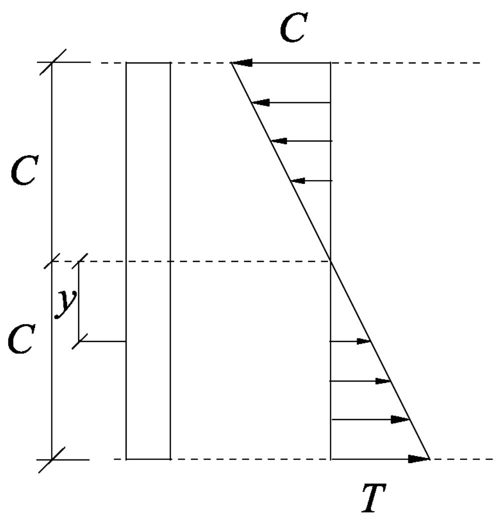
reemplazando estos valores

$$x = \frac{Ky_0}{K_e} - \frac{Ky_0}{K_e} \operatorname{Cos} \omega_1 t$$

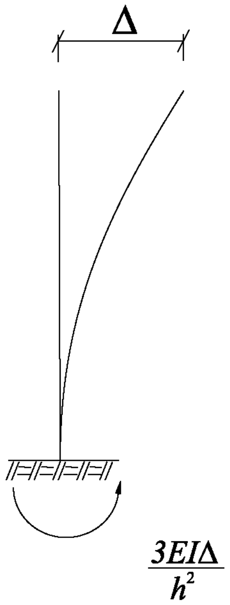
$$x = \frac{Ky_0}{K_e}(1 - \operatorname{Cos} \omega_1 t)$$

$$x_{\max} = \frac{2Ky_0}{K_e} = \frac{2\times10\times0{,}15}{15{,}32} = 0{,}196\,cm$$

d)



$$\sigma = \frac{M_y}{I} = \frac{MC}{I}$$



$$\Delta = \frac{Ph^3}{3EI}$$

$$M = Ph$$

$$\Delta = \frac{Mh^2}{3EI} \Rightarrow M = \frac{3EI\Delta C}{h^2}$$

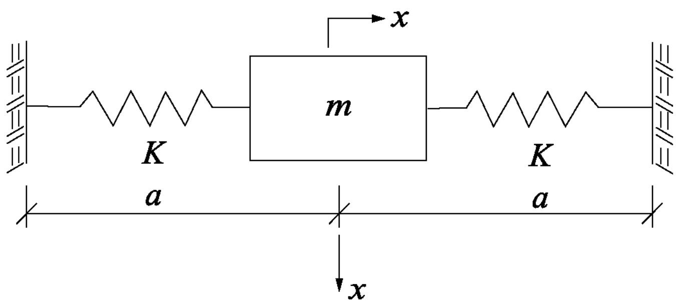
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{3EI\Delta C}{h^2}$$

$$\sigma = \frac{3 \times 210Tcm^2 \times 0{,}196cm \times 15cm}{(200cm)^2}$$

$$\sigma = 0{,}046 \ T/cm^2$$

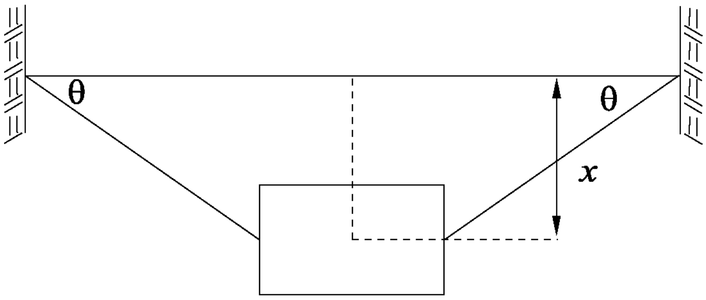
$$\sigma = 46 \ Kg/cm^2$$

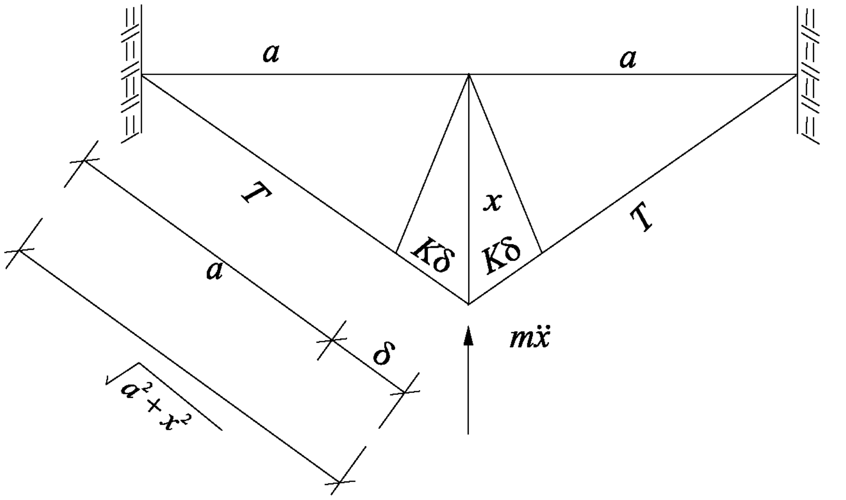
28. Una pequeña masa "m" se encuentra sostenida por dos resortes idénticos de constante "K", en el equilibrio los resortes tienen una tensión inicial T. Supóngase que el sistema es horizontal para que las fuerzas de gravedad no sean consideradas, el movimiento de la masa es perpendicular a la dirección original del resorte, considerar el sistema como de una grado de libertad. Hallar la ecuación exacta del movimiento y la frecuencia para las pequeñas oscilaciones.



vista en planta

Solución:





$$\delta = \sqrt{a^2 + x^2} - a$$

$$\sum F = 0$$

$$m\ddot{x} + 2T\,\text{Sen}\,\theta + 2K\delta\,\text{Sen}\,\theta = 0$$

$$m\ddot{x} + 2T\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + 2K(\sqrt{a^2+x^2} - a)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

para pequeñas soluciones podemos considerar: x^2 - 0

$$m\ddot{x} + \frac{2T}{a}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2T}{ma}x = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{2T}{ma}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega_1$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2T}{ma}}$$