
Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Más recursos gratis Aquí](#)

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)

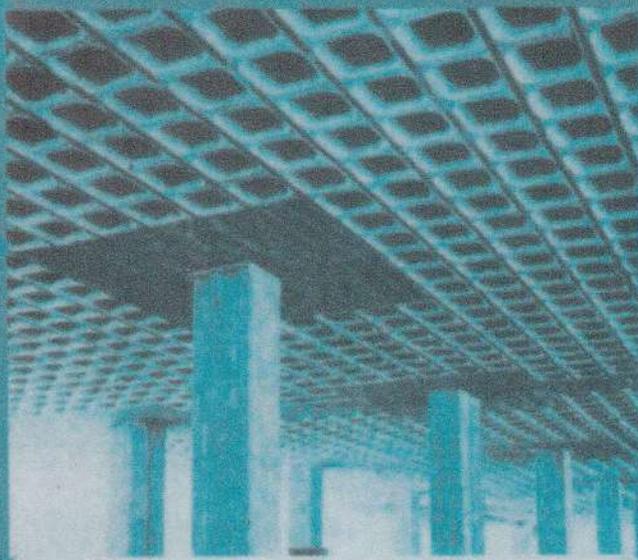


[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)

ANALISIS ESTRUCTURAL

MATRICIAL EN

3D



PARRILLAS



TRIDIMENSIONAL



SEUDOTRIDIMENSIONAL



ARMADURAS

Ing. Ronald Santana Tapia



PREFACIO

El gusto que tengo por el cálculo y el análisis de las estructuras sumado a mi vocación de docente universitario y complementado con el apoyo y las inquietudes que recibo de mis alumnos del curso de Análisis Estructural II de la FIC-UNCP, me permitieron con el favor de Dios y con el apoyo de mi familia, escribir este nuevo libro titulado "Análisis Estructural Matricial en 3D" que viene hacer el complemento del texto "Análisis Estructural en 2D – Método de las Rigideces" publicado en el año 2008.

Con el apoyo de la tecnología y el avance informático, se puede conjugar y alternar la enseñanza del análisis estructural de cálculos manuales con la enseñanza digitalizada, automatizada y entretenida mediante el uso de los programas comerciales *MATCAD* y *MATLAB* y los lenguajes de programación existentes a la actualidad que nos permiten elaborar nuestros propios programas. En efecto, en el año 2011 se elaboró con fines académicos el programa de análisis estático lineal y elástico de estructuras tipo Parrilla, Tridimensional, Seudotridimensional y Armaduras en 3D, denominado *CASTORSOFT v1.0* desarrollado en *MATLAB* y que se contó con el apoyo de los estudiantes de la FIC-UNCP, Abner Ramos Zuasnabar y Franklin Sedano Rutti y que en esta oportunidad presentamos junto con esta edición.

El análisis estructural de una edificación puede desarrollarse mediante un análisis plano (en 2D) o un análisis tridimensional (en 3D). Para el análisis por ambos procedimientos, al considerar por ejemplo el efecto de la torsión en planta de la edificación, existen diferencias en el planteamiento, en el análisis plano la torsión se analiza complementariamente e independientemente al análisis de sus pórticos o muros de ejes definidos, mientras que en un análisis espacial, todos los efectos; incluido la torsión, se incluyen conjuntamente en el análisis global de la estructura. Esta y otras ventajas presenta el análisis estructural matricial en tres dimensiones.

Esperando que este texto les sea de gran utilidad y que pueda cumplir su cometido de contribuir en la formación académica de los estudiantes y futuros profesionales de la carrera de Ingeniería Civil, me queda agradecer a todos y cada uno de ustedes amigo lector, por la acogida y preferencia que le pueda brindar a este trabajo. De igual manera expresar mi agradecimiento al estudiante de la FIC-UNCP, Heli Loardo Justo, por el diseño de la portada.

Huancayo, Agosto de 2013.

EL AUTOR

PREFACIO

El presente libro es el resultado de la experiencia de los autores en el desarrollo de los cursos de Análisis Estructural I y II de la FIC-UNICV, los permisos que el autor de Dios y con el apoyo de su familia, autoriza para que este libro "Análisis Estructural en 3D - Método de las Rigideces" publicado en el año 2008.

Con el apoyo de la tecnología y el avance científico, se han desarrollado y mejorado las técnicas de análisis estructural de edificios, puentes, torres y otras estructuras. El método de las rigideces es un método de análisis que permite el uso de los programas comerciales APTCAD y MATLAB y los lenguajes de programación existentes a la tecnología por sus ventajas. Este libro es el resultado de la experiencia de los autores en el desarrollo de los cursos de Análisis Estructural I y II de la FIC-UNICV y de la experiencia de los autores en el desarrollo de la FIC-UNICV. Autor: Rafael Zamora y Enrique Gómez Ruiz y que en esta edición se ha actualizado con la edición.

El análisis estructural de una edificación puede desarrollarse mediante un análisis plano (en 2D) o un análisis tridimensional (en 3D). Para el análisis por elementos finitos se considera por ejemplo el caso de la torsión en planta de la edificación, donde el análisis en el tratamiento de la edificación para la torsión se realiza en análisis complementarios e independientemente el análisis de sus efectos a través de los efectos, mientras que en un análisis espacial todos los efectos, incluido el torsión, se incluyen conjuntamente en el análisis global de la estructura. Este y otros aspectos relativos al análisis estructural mundial en las dimensiones.

Esperando que este libro sea de gran utilidad y que permita cumplir su cometido se consultó con la formación académica de los estudiantes y futuros profesionales de la carrera de Ingeniería Civil, que cuando egresen a nivel y cada uno de ellos se encuentre en la facultad por la tecnología y profesional que le pueda brindar a sus trabajos. De igual manera esperamos el egreso de los estudiantes de la FIC-UNICV. Hay que recordar que el método de las rigideces.

Lima, agosto de 2013.

EL AUTOR

INTRODUCCIÓN

El análisis estructural en tres dimensiones nos permite visualizar mejor el comportamiento global de la estructura ante las acciones de cargas gravitacionales y cargas laterales impuestas por el sismo. Se supone que la fuerza sísmica de inercia actúa en el centro de masas de cada nivel y la estructura resiste a través de su centro de rigidez de dicho nivel, si ambos centros no coinciden se presenta excentricidad y se produce el efecto de torsión que genera rotación de la estructura en planta por un eje vertical que pasa por su centro de rigidez debido al momento torsor generado por la excentricidad que se presenta como producto de una mala configuración, estructuración y/o construcción de la edificación.

Para el análisis de la torsión en planta de la edificación, la excentricidad directa del cálculo de un análisis plano en 2D se obtiene entre el centro de masa de cada piso y el centro de corte de cada entrepiso, mientras que en un análisis tridimensional en 3D la excentricidad se obtiene entre el centro de masa y el centro de rigidez de cada piso. Para ambos análisis, adicionalmente deberá considerarse la excentricidad accidental como producto de la incertidumbre en la localización de los centros de masa en cada nivel; en los planos la ubicación de los centros de masa tiene un cierto valor mientras en la construcción física de la estructura presenta otro valor.

Cada uno de estos aspectos se desarrollan en el presente texto, la cual contiene además la teoría necesaria y la aplicación de la misma a través de problemas resueltos así como un número determinado de problemas propuestos para que el estudiante pueda reforzar y afianzar sus conocimientos de análisis estructural matricial en tres dimensiones.

El primer capítulo, trata sobre las estructuras tipo parrilla, entendiéndose que son estructuras contenidas en un plano y cuyas cargas actúan perpendiculares a su plano que la contiene, por la que se producen solicitaciones por efectos de flexión, torsión y corte. Se toca la parte teórica, se demuestran las matrices y expresiones de cálculo y la aplicación de problemas resueltos y propuestos.

33

El segundo capítulo, trata sobre el análisis tridimensional de sistemas aporricados, cuyos elementos verticales y horizontales son ortogonales entre sí, la losa se considera como un transmisor de cargas gravitacionales y no se toma en cuenta en el aporte de resistencia ni de rigidez. Se presenta la teoría necesaria y la resolución de problemas así como se incluyen problemas propuestos.

En el tercer capítulo, se desarrolla lo relacionado al análisis pseudo tridimensional, en ella se considera el aporte de la losa como un diafragma rígido, como un elemento de acoplamiento de los elementos verticales, es un método simplificado y fácil de programar. Se considera la introducción al análisis sísmico por el método estático de fuerzas estáticas equivalentes y por el método dinámico de análisis matricial pseudo tridimensional por superposición modal espectral.

El cuarto capítulo, trata sobre el análisis de armaduras en tres dimensiones, se considera la parte teórica la parte de la resolución de problemas y el correspondiente a los problemas propuestos para que el estudiante pueda reforzar sus conocimientos del tema.

Para terminar, quiero agradecer a mis alumnos del curso de análisis estructural II de la FIC-UNCP del ciclo verano desarrollado de enero a marzo de 2012, que con su apoyo e inquietudes contribuyeron para la culminación de la presente publicación.

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para entrar en el maravilloso mundo del saber".....Albert Einstein

Ing. Ronald Santana Tapia
Docente Asociado UNCP-FIC
Profesor de Análisis Estructural

CONTENIDO

DEDICATORIA.....	i
PRÓLOGO.....	ii
PREFACIO.....	iii
INTRODUCCIÓN.....	iv

Página

CAPÍTULO I PARRILLAS

INTRODUCCIÓN.....	I-2
ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS TIPO PARRILLA.....	I-3
MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ORIENTADOS EN EL EJE X.....	I-7
MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ORIENTADOS EN EL EJE Y.....	I-14
MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ORIENTADOS ARBITRARIAMENTE.....	I-22
PROBLEMAS DE APLICACIÓN.....	I-25
PROBLEMAS PROPUESTOS.....	I-54

CAPÍTULO II TRIDIMENSIONAL

INTRODUCCIÓN.....	II-2
ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE ESTRUCTURAS APORTICADAS.....	II-4
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCIÓN X.....	II-4
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCIÓN Y.....	II-11
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCIÓN Z.....	II-12
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE.....	II-13
PROBLEMAS DE APLICACIÓN.....	II-17
PROBLEMAS PROPUESTOS.....	II-50

CAPÍTULO III SEUDOTRIDIMENSIONAL

INTRODUCCIÓN.....	III-2
DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS EN 3D.....	III-3
MODELO PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS.....	III-3
ANÁLISIS MATRICIAL SEUDO TRIDIMENSIONAL.....	III-5
ANÁLISIS POR EXCENTRICIDAD PARA CADA DIRECCIÓN PRINCIPAL.....	III-6
MOMENTOS POR TORSIÓN EN PLANTA PARA CADA DIRECCION.....	III-7
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN UN EJE PRINCIPAL Y/O ORIENTADO ARBITRARIAMENTE.....	III-7
PROBLEMAS DE APLICACIÓN.....	III-11
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO Y DINÁMICO.....	III-22
EJEMPLO ILUSTRATIVO.....	III-34
PROBLEMAS PROPUESTOS.....	III-53

CAPÍTULO IV ARMADURAS EN 3D

INTRODUCCIÓN.....	IV-2
ARMADURAS EN TRES DIMENSIONES.....	IV-3
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN EL EJE X.....	IV-3
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN EL EJE Y.....	IV-7
ROTACIÓN DE EJES EN TRES DIMENSIONES.....	IV-8
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE.....	IV-12
PROBLEMAS DE APLICACIÓN.....	IV-14
PROBLEMAS PROPUESTOS.....	IV-36

ANEXOS

- I. *INSTALACIÓN DEL PROGRAMA MATHCAD v14.0.0.163*
- II. *APLICACIÓN DEL MATHCAD EN UNA ESTRUCTURA APORTICADA EN 3D*
- III. *COMPROBACIÓN CON EL PROGRAMA CASTORSOFT*

CAPÍTULO I

PARRILLAS



Stephen W. Tsai

El Interés por la investigación del profesor Tsai, logro que desarrollara la metodología de diseño para estructuras de materiales compuestos. Fue el primer investigador en aplicar esta tecnología a las estructuras tipo parrillas. Como una tecnología emergente, los materiales compuestos ofrecen prestaciones únicas para estructuras que combinan un peso ligero y durabilidad. Claves para el éxito de la utilización de los materiales compuestos son la previsibilidad en el rendimiento y el diseño de las estructuras de costo efectivo anisotrópico, laminado. El énfasis actual está puesto en la comprensión de los modos de falla, y la simulación por ordenador para el diseño y la estimación de costos.

INTRODUCCIÓN

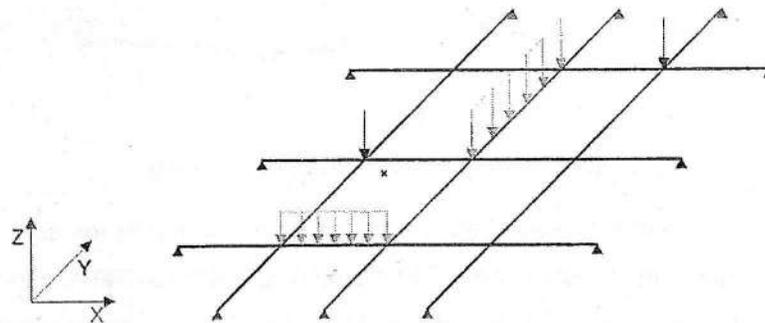
El análisis estructural de una estructura tipo parrilla al igual que las otras estructuras, tiene como fin primordial el obtener las magnitudes de las fuerzas internas en los elementos producidos por efectos de flexión, corte y torsión y los asociados a los desplazamientos; giro por flexión, desplazamiento vertical y giro por torsión, cuya magnitud solicitada es transmitida por la acción de un sistema de cargas aplicada transversalmente al plano que contiene a la estructura, resistiendo su aplicación sin perder su estabilidad, siendo esta una característica importante de una estructura tipo parrilla.

Con la llegada de las computadoras se ha hecho necesario plantear métodos matriciales, con este fin se creó uno de los métodos más completos, el método de las rigideces o de los desplazamientos. En el presente capítulo se desarrolla la parte teórica resumida, la demostración de la matriz general de elementos de parrilla y la aplicación en forma didáctica, secuencial y metodológica.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS TIPO PARRILLA

Las estructuras tipo parrilla son estructuras reticulares sometidas a cargas que actúan perpendicularmente a su plano. Podemos encontrar muchas de ellas en las estructuras industriales, en losas de entrepiso con viguetas en dos direcciones, en tableros de puentes, culatas de bodegas y fábricas sometidas a la acción del viento. Los nudos se suponen rígidos en consecuencia las acciones principales sobre sus miembros son torsión, flexión y corte.

Para la determinación de la matriz de rigidez de los elementos de la estructura, se desprecian las deformaciones axiales y de corte, en consecuencia cada nudo presentará tres grados de libertad; dos rotacionales asociados a los giros con respecto a los ejes principales X e Y, y una traslacional (deflexión vertical).



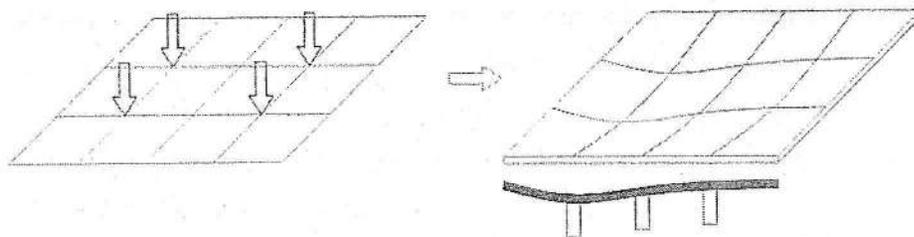
Esquema de una parrilla típica

Definición:

Los elementos estructurales considerados hasta ahora tienen en común la propiedad de transferir cargas en una sola dirección, desde el punto de vista estructural sería más eficiente tener una "transferencia bidireccional de carga". Esta dispersión se obtiene mediante entramados (parrillas o retículas de vigas) y placas, que actúan en un plano. (Salvadori y Heller, 1963). Una retícula de vigas es un sistema de vigas que se extiende en dos direcciones con las vigas en cada dirección unidas unas con otras. Las retículas están normalmente apoyadas en los cuatro lados de un bastidor aproximadamente cuadrado y el peralte total de las vigas puede ser menor que la de un sistema de vigas en una dirección.

Comportamiento:

En la retícula, las vigas individuales son parcialmente soportadas por vigas perpendiculares que se intersectan, las cuales están a su vez parcialmente soportadas en otras vigas que también se intersectan. Cuando un punto de carga se aplica en la intersección de dos vigas en una retícula, ambas vigas se flexionan junto con las otras vigas cercanas. Además de la flexión, esta interacción produce la torsión de vigas adyacentes como resultado de las conexiones fijas en las intersecciones de las vigas. Estas dos vigas perpendiculares entre sí deben sufrir en su intersección igual deformación aunque tengan distintas longitudes o distintas secciones.



Esquema del comportamiento de una parrilla.

Las cargas tienden a moverse hacia el soporte a lo largo de los senderos de acción más cortos, determinando la relación de los lados del rectángulo, llamada relación de aspecto, que debe ser menor de 1,5 para mantener la acción bidimensional.

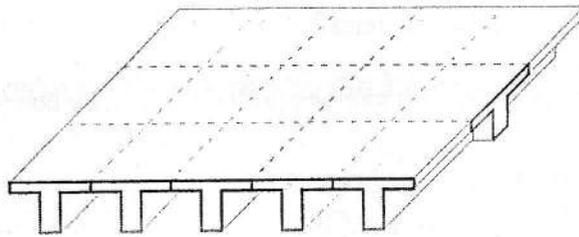
Materiales:

Las vigas en las retículas necesariamente se intersectan y su continuidad una tras otra es esencial a su característico comportamiento de flexión bidimensional. Esta continuidad es más fácil de lograr en algunos materiales que en otros. En concreto es fácil formar retículas proporcionándole el refuerzo de acero extendido de forma continua a través de las intersecciones. La sección cuadrada de vigas de acero se puede soldar en la intersección para proporcionar la continuidad necesaria. Por otra parte, las vigas de madera serían necesariamente discontinuas (al menos en una dirección) en las intersecciones y, por consiguiente,

inherentemente inadecuadas para el uso en una retícula de vigas. (Moore, 1999; Salvadori y Heller 1998)

Ventajas:

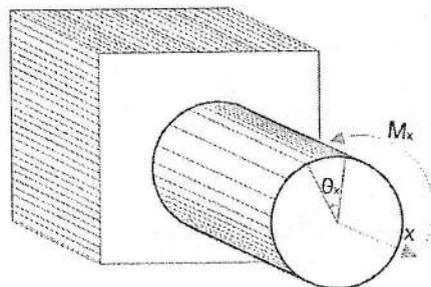
Los sistemas de entramado son particularmente eficientes para transferir cargas concentradas y para lograr que toda la estructura participe en la acción portante. Esta eficiencia se refleja no sólo en la mejor distribución de las cargas sobre los apoyos, sino en la menor relación espesor a luz de los entramados rectangulares. Las vigas de acero pueden tener menor espesor que las de concreto pretensado; las de concreto armado lo tendrán mayor, y será mayor aun el espesor de las vigas de madera; pero la relación de espesor a luz no puede ser muy inferior a 1:24, si las vigas han de ser prácticamente aceptables desde los puntos de vista de resistencia y deformación. Los sistemas de entramados rectangulares pueden proyectarse en forma económicas con relaciones espesor a luz desde uno a treinta, hasta uno a cuarenta.



Losa de nervadura en dos direcciones

Matriz de rigidez de un elemento prismático sometido a torsión y su aplicación al análisis de parrillas:

Cuando se tiene un elemento prismático sometido a torsión, se sabe que el giro producido por ella está dado por:



$$\theta_x = \frac{M_x \cdot L}{JG}$$

Dónde:

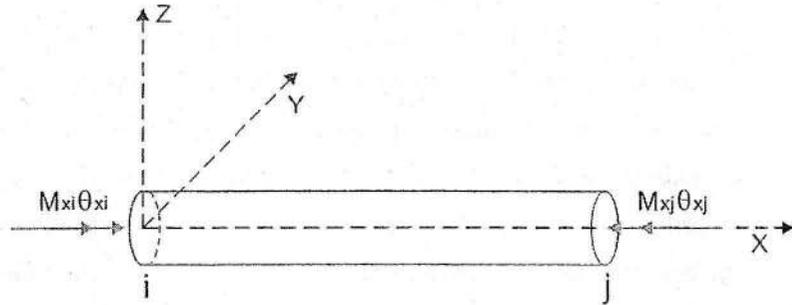
θ_x = Giro relativo entre los extremos.

M_x = Momento torsor

L = Longitud

J = Constante torsional.

G = Módulo de corte.



Representación esquemática de un elemento prismático sometido a torsión

Cuando tenemos secciones circulares macizas o huecas, la constante torsional es el momento polar de inercia.

Para secciones rectangulares, en cambio, podemos calcular con la siguiente formula:

$$J = Cbt^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \left(\frac{t}{b} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right], \text{ donde } (t < b)$$

b y t son las dimensiones transversales del elemento.

De la ecuación. $\theta_x = \frac{M_x \cdot L}{JG}$

Hallando la matriz de rigidez del elemento, tenemos: $\theta_{xi} = 1$

Podemos despejar:

$$M_{xi} = \frac{\theta_x \cdot JG}{L}$$

$$M_{xi} = \frac{JG}{L}$$

$$M_{xj} = \frac{1 \cdot JG}{L}$$

$$M_{xj} = -\frac{JG}{L}$$

Por lo que la matriz de rigidez queda de la siguiente manera:

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

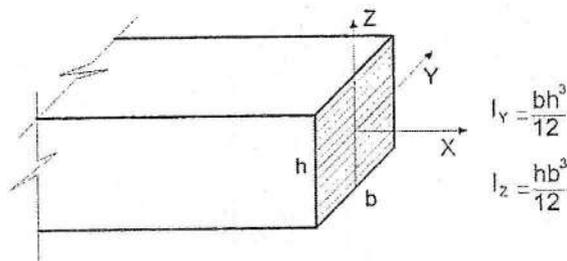
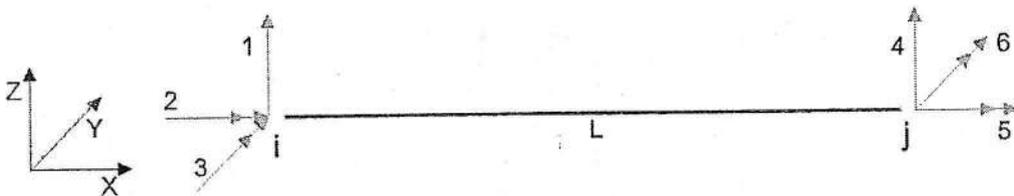
Las estructuras tipo parrilla quedan contenidas en el plano horizontal X-Y y las cargas quedan actuando verticalmente en la dirección del eje Z. Esto permite el empleo de las matrices de transformación para estructuras que no son ortogonales entre sí, como se verá más adelante.

Desarrollaremos la matriz general para las estructuras tipo parrillas el cual lo haremos en las dos direcciones fundamentales x e y, en que están orientadas los elementos estructurales.

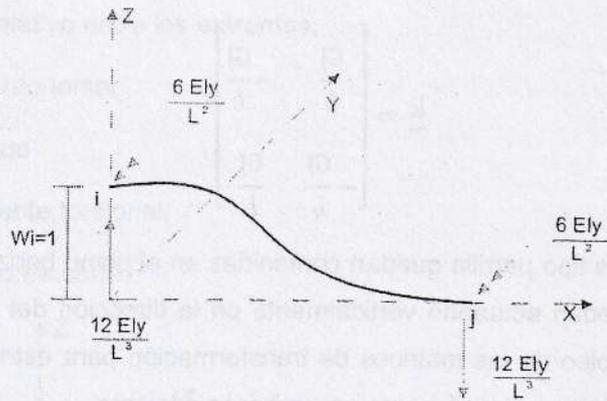
La matriz de rigidez se obtiene por el método de los desplazamientos unitarios, resolviendo los seis casos siguientes:

DEMOSTRACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ORIENTADO EN EL EJE LOCAL:

1. ELEMENTO SOMETIDO A FLEXIÓN Y TORSIÓN, ORIENTADO EN EL EJE X:



1ª Columna: $W_i = 1$



Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}(\theta_i + 2\theta_j - 3\varphi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}\left(0 + 0 - 3 \cdot \frac{1}{L}\right)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\left(0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{L}\right)$$

$$M_{ij} = \frac{-6EI}{L^2}$$

$$M_{ji} = \frac{-6EI}{L^2}$$

$$V = -\frac{-6EI}{L^2} + \frac{-6EI}{L^2}$$

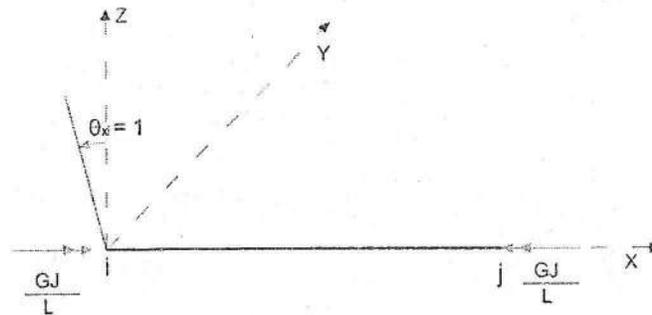
$$V_i = \frac{12EI}{L^3}$$

$$V_j = \frac{-12EI}{L^3}$$

La 1ra. columna será:

$$\therefore \begin{Bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} \end{Bmatrix}$$

2ª columna: $\theta_{xi} = 1$



Podemos despejar:

$$M_{xi} = \frac{\theta_x \cdot JG}{L}$$

$$M_{xi} = \frac{JG}{L}$$

$$M_{xj} = \frac{1 \cdot JG}{L}$$

$$M_{xj} = -\frac{JG}{L}$$

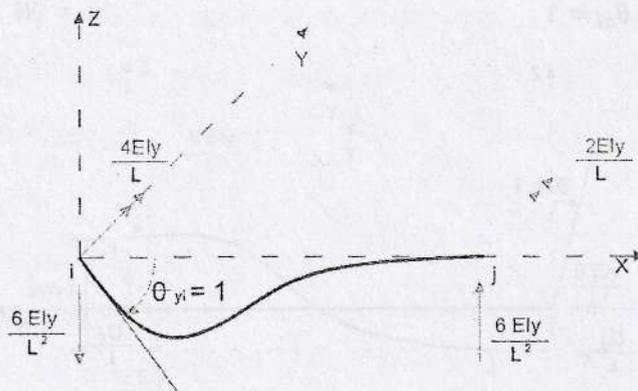
Ahora como solo hay torsión se entiende que las demás fuerzas aplicadas son igual a cero ya que no generan ningún tipo de cambio en la estructura.

La 2da. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{JG}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{JG}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3ª columna: $\theta_{yi}=1$

$$M_{xij} = \frac{GJ}{L} \theta_{xi}$$



Pero $\theta_{xi} = 0$ ya que no hay giro en el sentido x, en otras palabras no hay torsión en ese eje. Por lo tanto: $M_{xij} = -M_{xji} = 0$

Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\varphi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2 + 0 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}$$

$$V = \frac{\frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L}}{L}$$

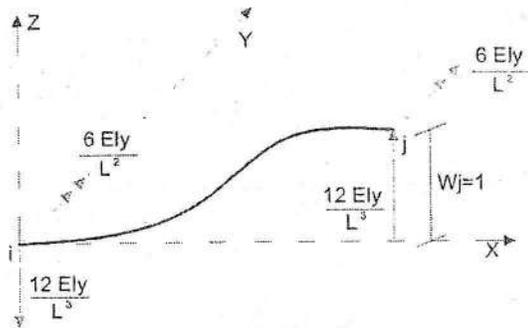
$$V_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V_j = \frac{6EI}{L^2}$$

La 3ra. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{4EI_y}{L} \\ \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{2EI_y}{L} \end{pmatrix}$$

4ª columna: $w_j = 1$



Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}(\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}\left(0 + 0 - 3 \cdot -\frac{1}{L}\right)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\left(0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot -\frac{1}{L}\right)$$

$$M_{ij} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$M_{ji} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V = -\frac{\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}}{L}$$

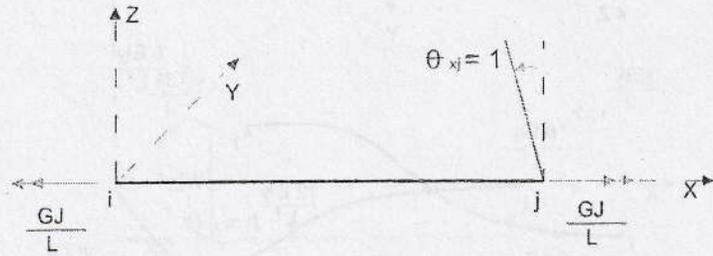
$$V_i = \frac{-12EI}{L^3}$$

$$V_j = \frac{12EI}{L^3}$$

La 4ta. columna será:

$$\therefore \begin{Bmatrix} -\frac{12EI_y}{L^3} \\ 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} \\ \frac{12EI_y}{L^3} \\ 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} \end{Bmatrix}$$

5º columna: $\theta_{xj} = 1$



$$M_{xji} = \frac{GJ}{L} \theta_{xj}$$

Entonces $M_{xji} = \frac{GJ}{L} \cdot 1$

Podemos despejar:

$$M_{xi} = \frac{\theta_x \cdot JG}{L}$$

$$M_{xi} = -\frac{JG}{L}$$

$$M_{yi} = \frac{1 \cdot JG}{L}$$

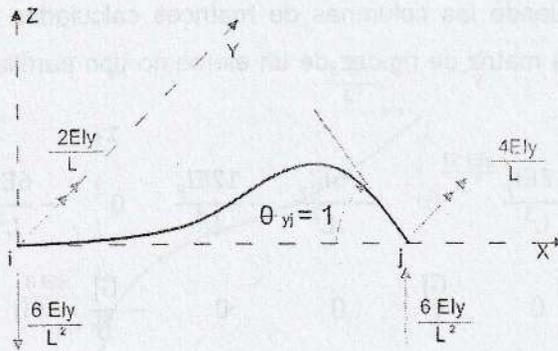
$$M_{yi} = \frac{JG}{L}$$

La 5ta. columna será:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{JG}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{JG}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6º columna: $\theta_{yj} = 1$

$$M_{xji} = \frac{GJ}{L} \theta_{xj}$$



Pero $\theta_{xj} = 0$ ya que no hay giro en el sentido x

$$M_{xji} = -M_{xij} = 0$$

Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}(\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(0 + 1 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}(0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}$$

$$M_{ji} = \frac{4EI}{L}$$

$$V = \frac{\frac{2EI}{L} + \frac{4EI}{L}}{L}$$

$$V_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V_j = \frac{6EI}{L^2}$$

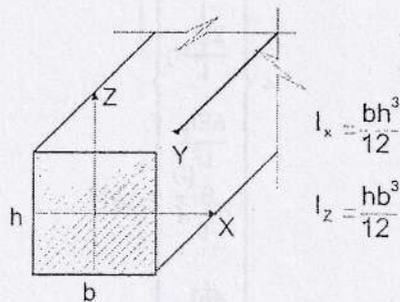
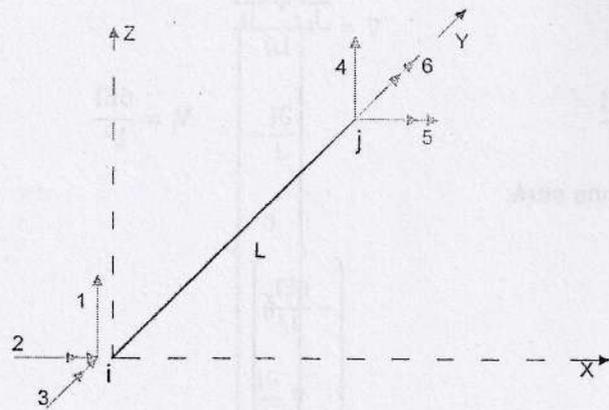
La 6ta. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{2EI_y}{L} \\ \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{4EI_y}{L} \end{pmatrix}$$

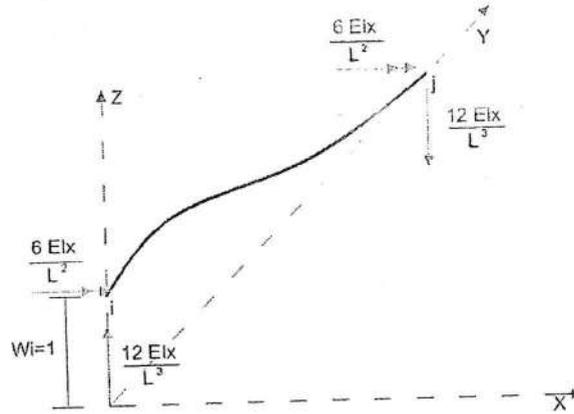
Por lo tanto uniendo las columnas de matrices calculadas anteriormente obtendríamos la matriz de rigidez de un elemento tipo parrilla orientado en el eje "X"

$$\tilde{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

2. ELEMENTO SOMETIDO A FLEXIÓN Y TORSIÓN, ORIENTADO EN EL EJE Y:



1ª Columna: $w_i = 1$



Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\varphi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 0 - 3 \cdot -\frac{1}{L} \right)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot -\frac{1}{L} \right)$$

$$M_{ij} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$M_{ij} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V = -\frac{\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}}{L}$$

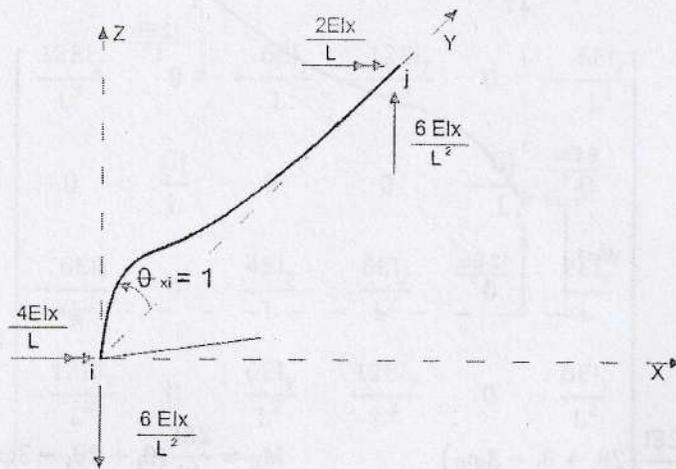
$$V_i = \frac{12EI}{L^3}$$

$$V_j = \frac{-12EI}{L^3}$$

La 1ra. columna será:

$$\therefore \begin{Bmatrix} \frac{12EI_x}{L^3} \\ \frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{12EI_x}{L^3} \\ \frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2ª columna: $\theta_{xi}=1$



$$M_{xij} = \frac{GJ}{L} \theta_{yi}$$

Pero $\theta_{yi} = 0$ ya que no hay giro en el sentido x, en otras palabras no hay torsión en ese eje.

Por lo tanto:

$$M_{yij} = -M_{yji} = 0$$

Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2 + 0 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}$$

$$V = \frac{\frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L}}{L}$$

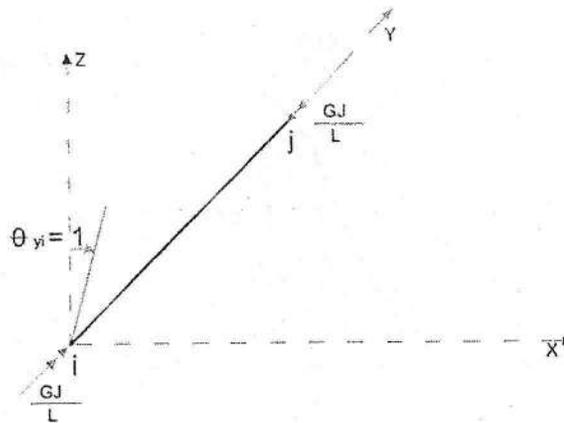
$$V_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V_j = \frac{6EI}{L^2}$$

La 2da. columna será:

$$\therefore \begin{Bmatrix} \frac{6EI_x}{L^2} \\ \frac{4EI_x}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} \\ \frac{2EI_x}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3ª columna: $\theta_{yi} = 1$



Podemos despejar:

$$M_{yi} = \frac{\theta_{yi} \cdot JG}{L}$$

$$M_{yi} = \frac{JG}{L}$$

$$M_{yj} = \frac{1 \cdot JG}{L}$$

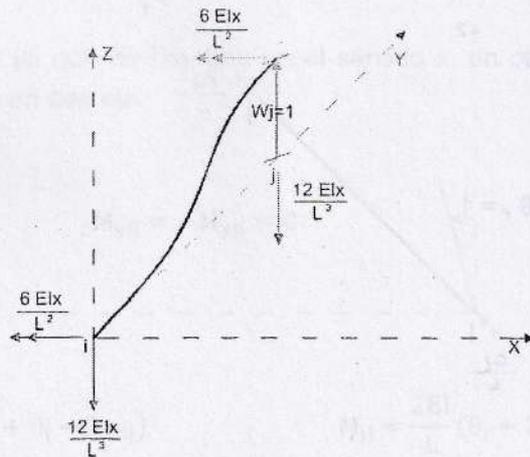
$$M_{yj} = -\frac{JG}{L}$$

Ahora como solo hay torsión se entiende que las demás fuerzas aplicadas son igual a cero ya que no generan ningún tipo de cambio en la estructura.

La 3ra. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{JG}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{JG}{L} \end{pmatrix}$$

4ª columna: $w_j = 1$



Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\varphi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 0 - 3 \cdot \frac{1}{L} \right)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{L} \right)$$

$$M_{ij} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$M_{ij} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$V = \frac{\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}}{L}$$

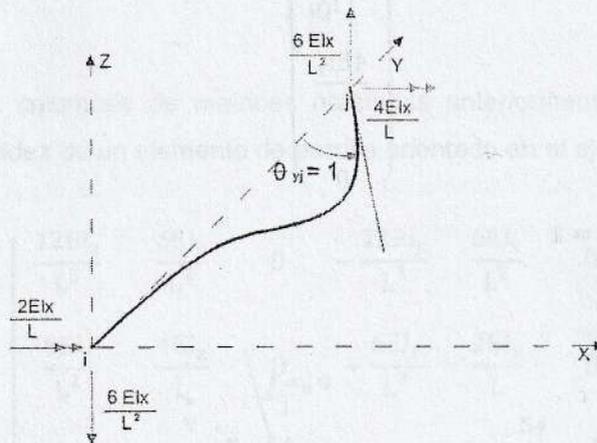
$$V_i = \frac{-12EI}{L^3}$$

$$V_j = \frac{12EI}{L^3}$$

La 4ta. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{12EI_x}{L^3} \\ -\frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 \\ \frac{12EI_x}{L^3} \\ -\frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5ª columna: $\theta_{yj} = 1$



$$M_{yji} = \frac{GJ}{L} \theta_{yj}$$

Pero $\theta_{yj} = 0$ ya que no hay giro en el sentido "x" $M_{yji} = -M_{yij} = 0$

Por Maney:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (0 + 1 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0)$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}$$

$$M_{ji} = \frac{4EI}{L}$$

$$V = \frac{\frac{2EI}{L} + \frac{4EI}{L}}{L}$$

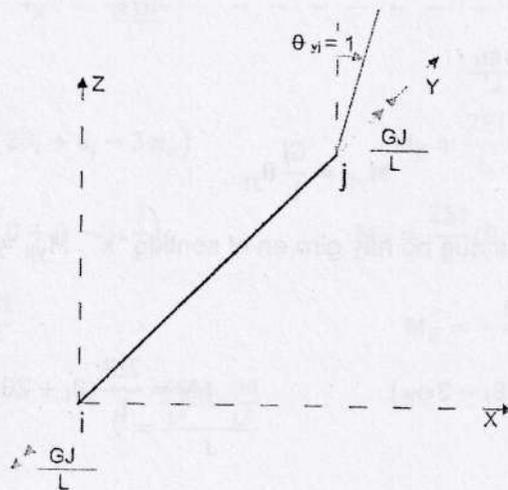
$$V_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$V_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

La 5ta. columna será:

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{6EI_x}{L^2} \\ \frac{2EI_x}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} \\ \frac{4EI_x}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6ª columna: $\theta_{yj} = 1$



$$M_{yji} = \frac{GJ}{L} \theta_{yj}$$

Entonces

$$M_{yi} = \frac{\theta_y \cdot JG}{L}$$

$$M_{yi} = -\frac{JG}{L}$$

$$M_{yj} = \frac{1 \cdot JG}{L}$$

$$M_{yj} = \frac{JG}{L}$$

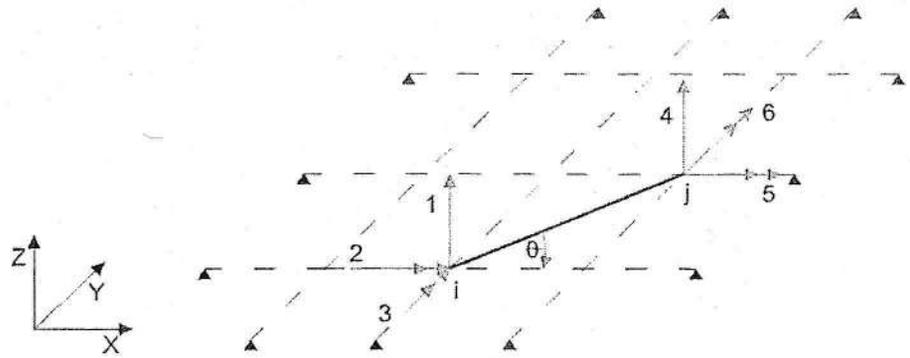
La 6ta. columna será:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{JG}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{JG}{L} \end{pmatrix}$$

Uniendo las columnas de matrices obtenidas anteriormente tenemos la matriz de rigidez de un elemento de parrilla orientado en el eje Y:

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

3. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE EN EL PLANO X-Y:



Para obtener la matriz de rigidez de un elemento de parrilla orientado arbitrariamente en el plano X-Y con grados de libertad referida a coordenadas globales, hay que efectuar el triple producto de matrices:

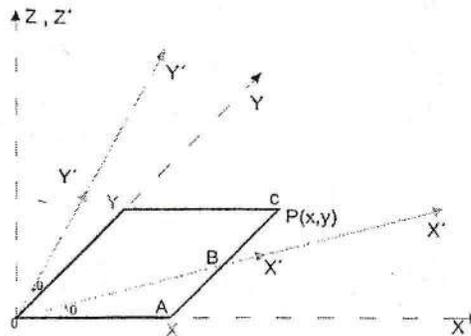
$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{K'}} \cdot \underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{K'}}$: Matriz de rigidez de un elemento orientado en la dirección X (eje local)

$\underline{\underline{T}}$: Matriz de transformación

Hallando la matriz de transformación:

En el extremo "i" del elemento estructural los vectores a rotar son los correspondientes a los grados de libertad 2 y 3 es decir "x" y "y".



Del gráfico:

(X', Y') : Vectores sistema Coordenada Local

(X, Y) : Vectores sistema Coordenada Global

$$\overline{AB} + \overline{BC} = y$$

$$x \cdot \text{tag}\theta + \frac{y'}{\cos\theta} = y$$

$$x \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{y'}{\cos\theta} = y \quad \rightarrow \quad y' = -x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta \dots \dots \dots (1)$$

$$\overline{OB} + \overline{BD} = x'$$

$$\frac{x}{\cos\theta} + y' \text{tag}\theta = x'$$

$$\frac{x}{\cos\theta} + (-x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta) \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = x'$$

$$\frac{x}{\cos\theta} - x \cdot \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} + y \cdot \text{sen}\theta = x'$$

$$x \cdot \frac{(1 - \text{sen}^2\theta)}{\cos\theta} + y \cdot \text{sen}\theta = x' \quad \rightarrow \quad x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \text{sen}\theta \dots \dots \dots (2)$$

De (1) y (2):

$$x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \text{sen}\theta$$

$$y' = -x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$$

Expresamos matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Ahora aplicando el primer grado de libertad que está orientado en el eje Z:

La matriz resultaría:

$$\begin{Bmatrix} \theta' \\ x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Para simplificar las fórmulas vamos a tomar como:

$$\cos\theta = Cx$$

$$\text{sen}\theta = Cy$$

La matriz de transformación sería:

$$\tilde{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_x & C_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Recordando que la matriz de rigidez, referida a coordenadas generales se puede obtener mediante el triple producto:

$$\tilde{K} = \tilde{T}^T \cdot K' \cdot \tilde{T}$$

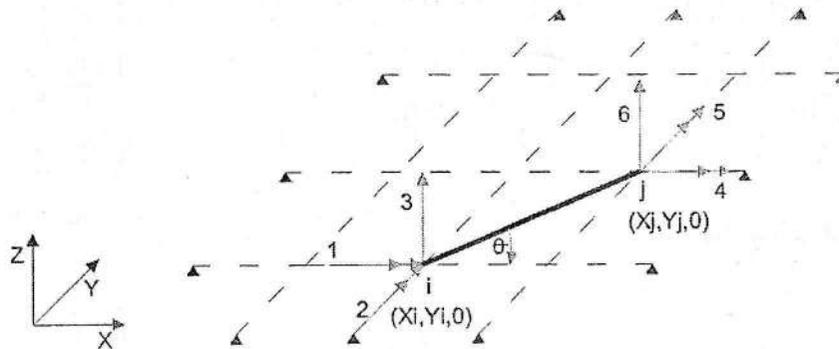
Remplazando en esta fórmula las matrices definidas por las ecuaciones se llega a la siguiente ecuación general aplicada al elemento de parrilla arbitrariamente orientado en el plano de esta, con esta matriz es posible resolver toda clase de estructuras planas.

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE EN EL PLANO X-Y

$$\tilde{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y & -\left(\frac{GJ}{L} C_x^2 - \frac{2EI}{L} C_y^2\right) & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y \\ -\frac{6EI}{L^2} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\left(\frac{GJ}{L} C_y^2 - \frac{2EI}{L} C_x^2\right) \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\left(\frac{GJ}{L} C_x^2 - \frac{2EI}{L} C_y^2\right) & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y \\ -\frac{6EI}{L^2} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\left(\frac{GJ}{L} C_y^2 - \frac{2EI}{L} C_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PROBLEMA N° 01: Encontrar la matriz de rigidez de un elemento orientado arbitrariamente en el plano X-Y, con los GDL enumerado tal como se muestra en la figura.

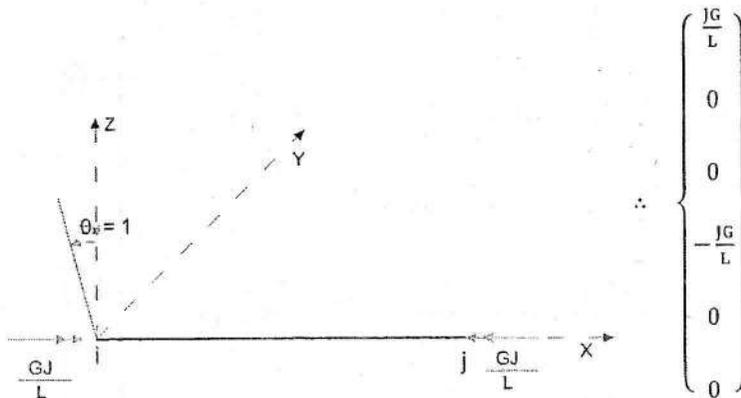


SOLUCIÓN:

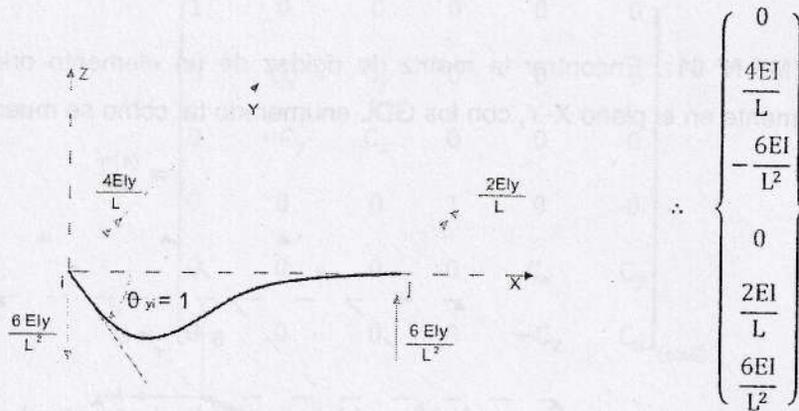
1°. Matriz de rigidez en el eje local:

La matriz de rigidez calculada debe de ser según los grados de libertad asumidos por el problema. Como se demostró anteriormente para la matriz en el eje local "X" con grados de libertad 1, 2, 3 a Z, X, Y, respectivamente, debemos determinar una nueva matriz con el nuevo orden de grados de libertad que nos da el problema de 1, 2, 3 a X, Y, Z respectivamente.

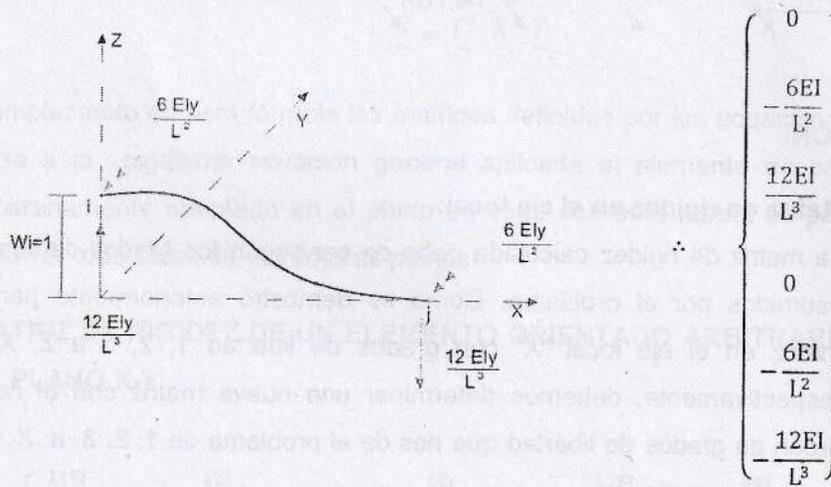
1ª Columna: $\theta_{xi} = 1$



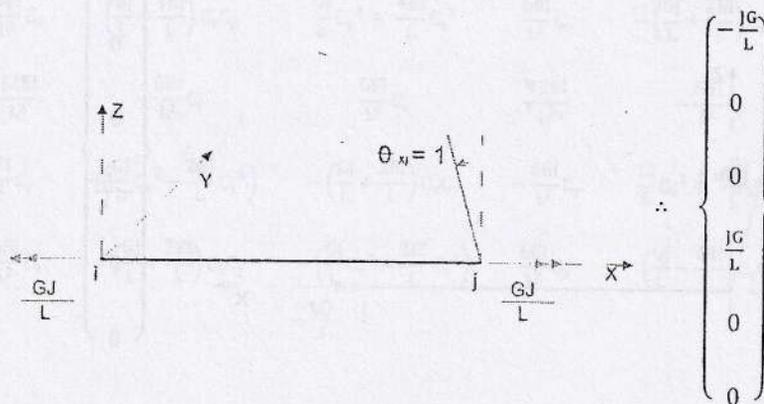
2ª Columna: $\theta_{yi}=1$



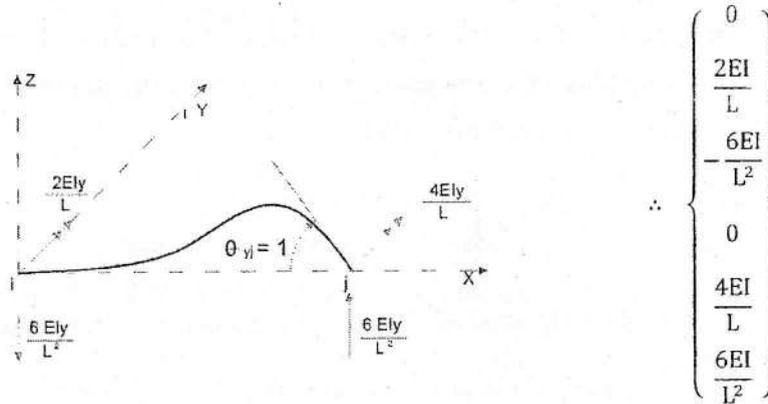
3ª Columna: $w_i=1$



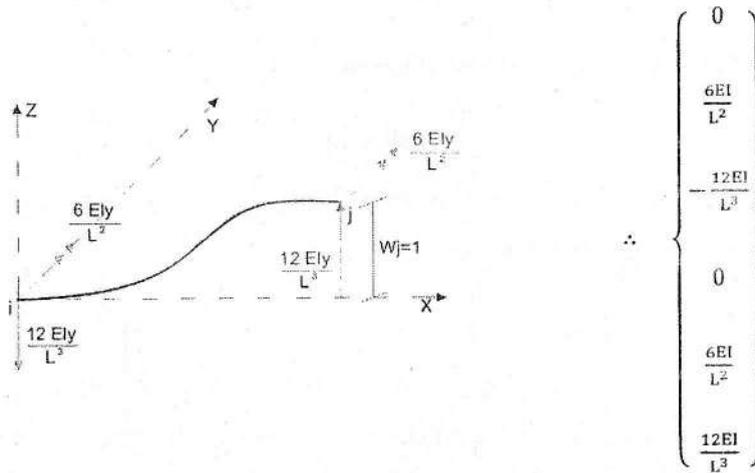
4ª Columna: $\theta_{xj} = 1$



5ª Columna: $\theta_{yj} = 1$



6ª Columna: $w_j = 1$



Por lo tanto la matriz en eje local del elemento seria:

$$k' = \begin{pmatrix} \frac{JG}{L} & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{pmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Hallando la matriz de transformación:

Hallamos la matriz de transformación como lo calculado anteriormente solo que los vectores a rotar son los correspondientes a los grados de libertad 1 y 2 es decir "x" y "y", obteniendo la siguiente matriz:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Aplicando el tercer grado de libertad que está orientado al eje "Z" resultaría:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Para simplificar las formulas vamos a tomar como:

$$\cos\theta = C_x$$

$$\text{sen}\theta = C_y$$

Y la matriz de transformación sería:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Y la matriz transpuesta sería:

$$T^{T(e)} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Por consiguiente la matriz de rigidez, referida a coordenadas generales se puede obtener mediante el triple producto:

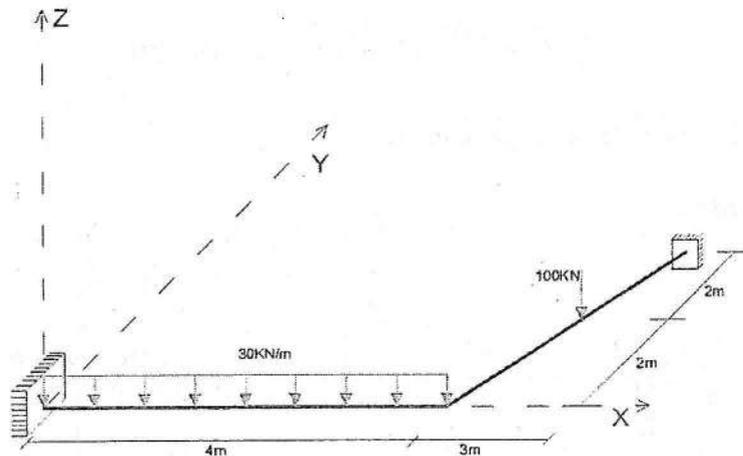
$$\tilde{k} = \tilde{T}^T \cdot k' \cdot \tilde{T}$$

Y reemplazando en esta fórmula obtendremos la matriz de rigidez en el eje global para los grados de libertad que asume el problema.

$$k^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y \\ -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (6 \times 6)$$

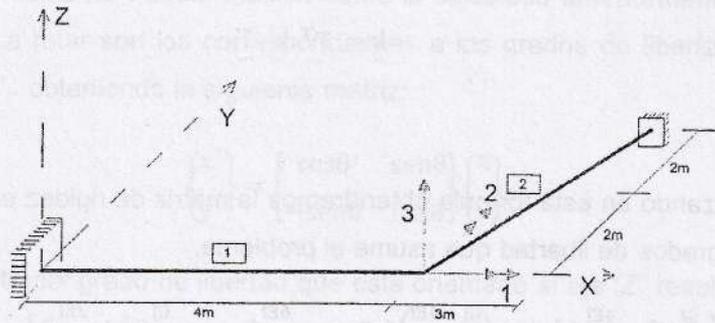
PROBLEMA N° 02:

Analice completamente la estructura de la figura, ambos elementos tienen una sección de (300x350) mm². E=19 KN/mm², G=7.5KN/mm²



Despreciar la deformación axial y de corte ($EA = \infty$, $\varnothing = 0$), y deberá considerarse la matriz obtenida en el problema 1.

SOLUCIÓN:



- Número de elementos: 2
- GDL: 3

1° Cálculos previos:

$$J = C \cdot b \cdot t^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \left(\frac{300}{350} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{300}{350} \right)^4 \right] = 0.1614$$

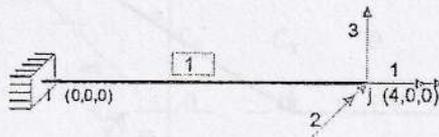
$$J = 0.1614 \cdot 350 \cdot 300^3 = 1.5255 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 7.5 \times 10^6 \times 1.526 \times 10^{-3} = 11441.25 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI = \frac{19 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.35^3}{12} = 20368 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

2° Matriz de rigidez de los elementos:

Elemento 1:



$$Dx = x_j - x_i = 4$$

$$Dy = y_j - y_i = 0$$

$$Dz = 0$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2} = 4$$

$$C_x = \frac{D_x}{L} = 1 \quad C_y = D_y/L = 0$$

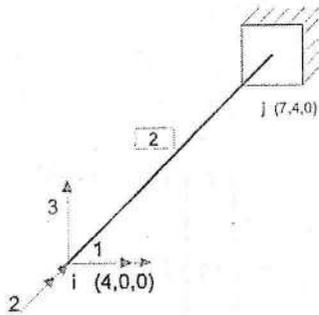
$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

① ② ③

$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} 2860.3125 & 0 & 0 \\ 0 & 20368 & 7638 \\ 0 & 7638 & 3819 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

①
②
③

Elemento 2:



$$D_x = x_j - x_i = 3$$

$$D_y = y_j - y_i = 4$$

$$D_z = 0$$

$$L = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = 5$$

$$C_x = D_x/L = 3/5 \quad C_y = D_y/L = 4/5$$

$$\tilde{k}^2 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{k}^2 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 11252.186 & -6722.952 & 3910.656 \\ -6722.952 & 7330.464 & -2932.992 \\ 3910.656 & -2932.992 & 1955.328 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \end{matrix} \quad (3 \times 3)$$

3° Matriz de rigidez de la estructura:

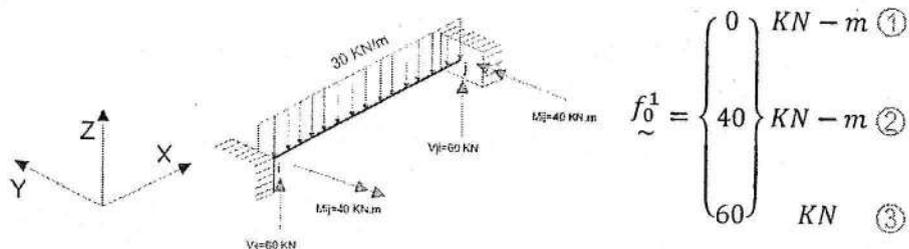
$$\tilde{k} = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 14112.4985 & -6722.952 & 3910.656 \\ -6722.952 & 27698.464 & 4705.008 \\ 3910.656 & 4705.008 & 5774.328 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \end{matrix} \quad (3 \times 3)$$

4° Vector de fuerzas externas en los nudos:

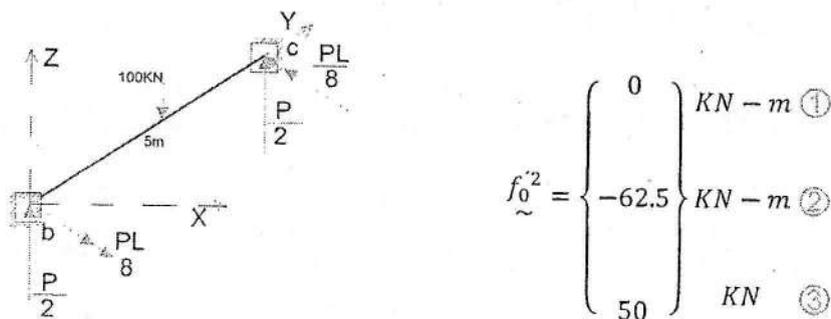
$$\tilde{f}_n = \vec{0}$$

5° Vector de fuerzas de empotramiento perfecto:

Elemento 1:



Elemento 2:



$$\tilde{T}^T = \begin{bmatrix} Cx & -Cy & 0 \\ Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Como:

$$\tilde{f}_0^2 = \tilde{T}^T * f_0^{l2} = \begin{Bmatrix} 50 \\ -37.5 \\ 50 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \text{ ①} \\ KN - m \text{ ②} \\ KN \text{ ③} \end{matrix} \quad \therefore f_0 = \begin{Bmatrix} 50 \\ 2.5 \\ 110 \end{Bmatrix}$$

6° Vector de fuerzas externas del sistema:

$$\tilde{f} = \tilde{f}_n - \tilde{f}_0$$

$$\therefore \tilde{f} = \begin{Bmatrix} -50 \\ -2.5 \\ -110 \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} \begin{matrix} KN - m \text{ ①} \\ KN - m \text{ ②} \\ KN \text{ ③} \end{matrix}$$

7° Vector de desplazamiento de la estructura:

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\therefore \tilde{u} = \begin{Bmatrix} 0.00825607 \\ 0.00707916 \\ -0.0304095 \end{Bmatrix} \begin{matrix} rad \\ rad \\ m \end{matrix}$$

8° Vector de fuerzas internas en los elementos:

$$\tilde{f}^e = \tilde{f}_0^e + k^e \cdot \tilde{u}^e$$

Elemento 1:

$$\tilde{f}^1 = \tilde{f}_0^1 + k^1 \cdot \tilde{u}^1$$

$$\tilde{f}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \\ 60 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2860.3125 & 0 & 0 \\ 0 & 20368 & 7638 \\ 0 & 7638 & 3819 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \cdot \begin{Bmatrix} 0.00825607 \\ 0.00707916 \\ -0.0304095 \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

$$\therefore \tilde{f}^1 = \begin{Bmatrix} 23.6149 \\ -48.0794 \\ -2.06326 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN - m \end{matrix}$$

En el eje local:

$$\tilde{f}'^1 = T^1 \cdot \tilde{f}^1$$

$$T^1 = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{f}'^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 23.6149 \\ -48.0794 \\ -2.06326 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23.615 \\ -48.080 \\ -2.063 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\tilde{f}^2 = \tilde{f}_0^2 + k^2 \cdot \tilde{u}^2$$

$$f_{\sim}^2 = \begin{Bmatrix} 50 \\ -37.50 \\ 50 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 11253.186 & -6722.952 & 3910.656 \\ -6722.952 & 7330.464 & -2932.992 \\ 3910.656 & -2932.992 & 1955.328 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.00825607 \\ 0.00707916 \\ -0.0304095 \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

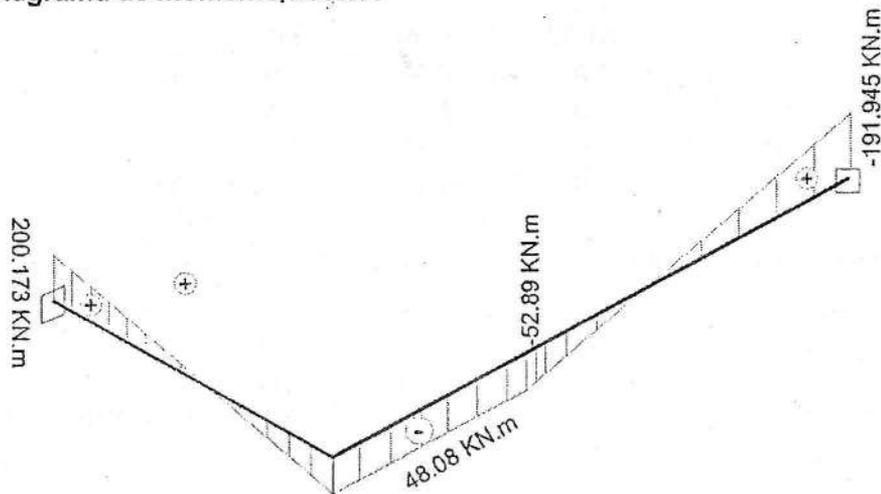
$$\therefore f_{\sim}^2 = \begin{Bmatrix} -23.61510 \\ 48.07920 \\ 2.06298 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

En el eje local:

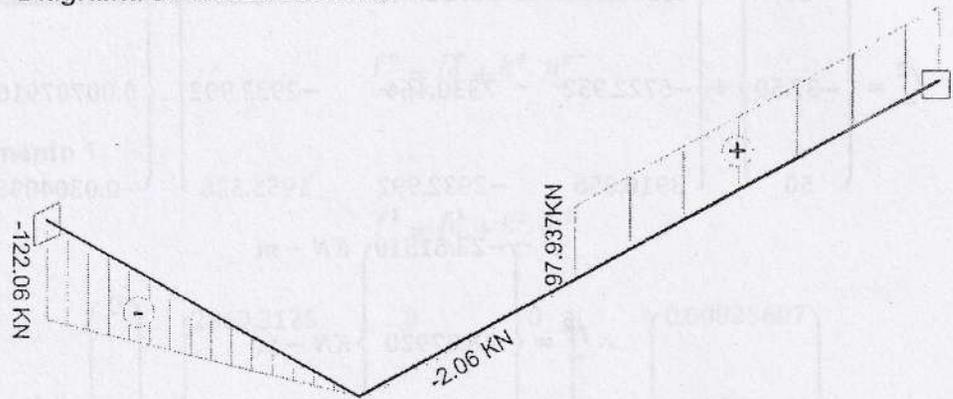
$$f_{\sim}^{\prime 2} = T_{\sim}^2 \cdot f_{\sim}^2 \quad T_{\sim}^2 = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$f_{\sim}^{\prime 2} = \begin{Bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -23.61510 \\ 48.07920 \\ 2.06298 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24.294 \\ 47.740 \\ 2.063 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

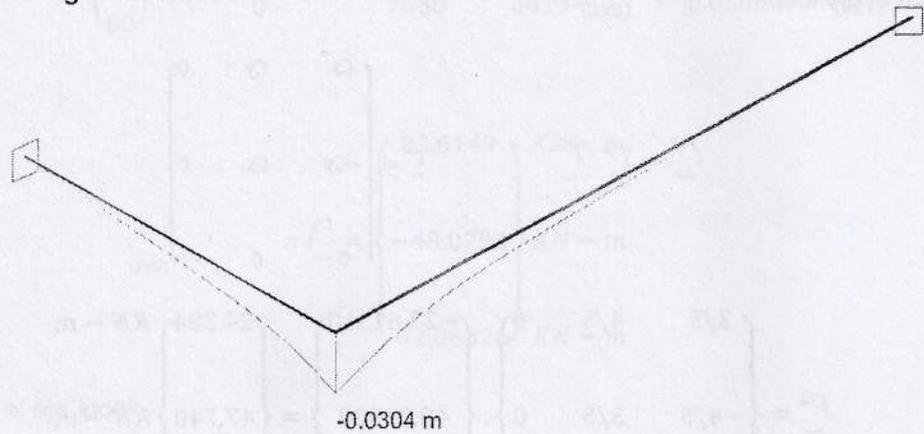
9° Diagrama de momento flector:



10° Diagrama de fuerza cortante:



11° Diagrama de la deformada:



PROBLEMA N° 03:

Considere la viga de balcón mostrada en la figura:

NUDO	X (m)	Y (m)
A	0.00	0.00
B	1.20	0.00
C	1.20	3.60
D	-1.20	3.60

Para todos los elementos:

$$I = 0.03 \text{ m}^4$$

$$J = 0.01 \text{ m}^4$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$$

$$G = 0.4E$$

Por acción de dos fuerzas verticales en B y C, resultan los desplazamientos:

$$u_1 = -1.350 \times 10^{-4} m$$

$$u_4 = -8.793 \times 10^{-4} m$$

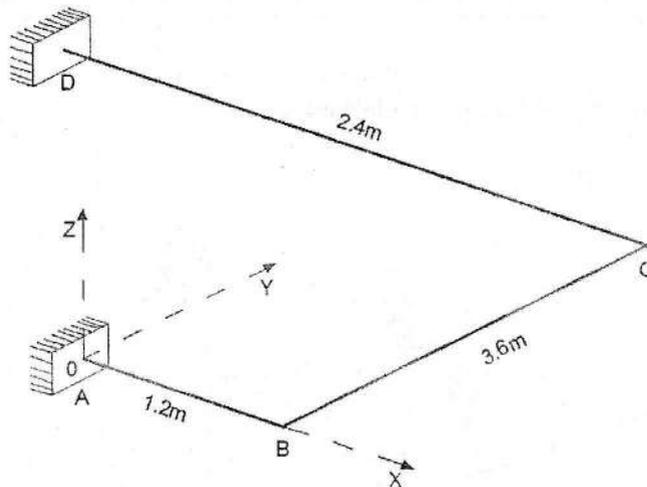
$$u_2 = -1.885 \times 10^{-4} rad$$

$$u_5 = -2.056 \times 10^{-4} rad$$

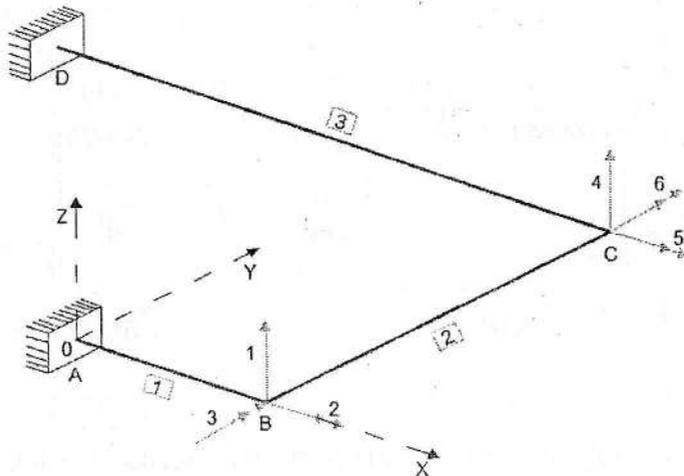
$$u_3 = 1.729 \times 10^{-4} rad$$

$$u_6 = 5.414 \times 10^{-4} rad$$

- Determine la fuerza en los extremos de cada elemento.
- Cuáles son las fuerzas aplicadas.
- Dibuje el diagrama de momentos flectores, fuerzas cortantes y deformada.



SOLUCIÓN:



- Número de elementos: 3
- GDL: 6

1° Cálculos previos:

$$I = 0.03\text{m}^4$$

$$J = 0.01\text{m}^4$$

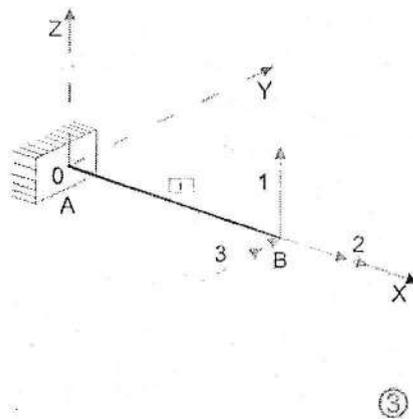
$$E = 2 \times 10^6 \text{ton/m}^2$$

$$G = 0.4E \quad G = 8 \times 10^5 \text{ton/m}^2$$

ELEMENTO	L (m)	GJ/L	2EI/L	4EI/L	6EI/L ²	12EI/L ³
AB	1.20	6666.666667	100000.00000	200000.00000	250000.00000	416666.666667
BC	3.60	2222.222222	33333.333333	66666.666667	27777.777778	15432.09877
DC	2.40	3333.333333	50000.00000	100000.00000	62500.00000	52083.333333

2° Matriz de rigidez de cada elemento:

Elemento 1 AB:



$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

① ②

③

$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} 416666.666667 & 0 & 250000 \\ 0 & 6666.666667 & 0 \\ 250000 & 0 & 200000 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix}$$

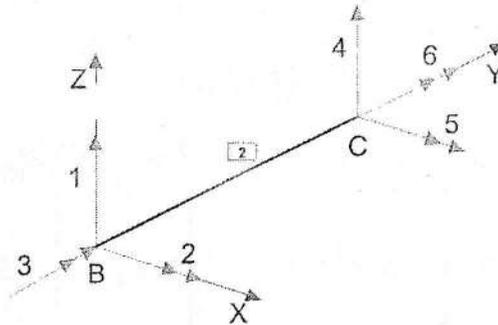
Teniendo los desplazamientos del primer elemento calculamos las fuerzas de dicho elemento:

$$\tilde{k}^1 \cdot \tilde{u}^1 = \tilde{f}^1$$

$$\begin{bmatrix} 416666.666667 & 0 & 250000 \\ 0 & 6666.666667 & 0 \\ 250000 & 0 & 200000 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \begin{Bmatrix} -1.350 \times 10^{-4} \\ -1.885 \times 10^{-4} \\ 1.729 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_B \\ M_{XB} \\ M_{YB} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{f}^1 = \begin{Bmatrix} V_B \\ M_{XB} \\ M_{YB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13.0250 \text{ tn} \text{ ①} \\ -1.2567 \text{ tnxm} \text{ ②} \\ 0.8300 \text{ tnxm} \text{ ③} \end{Bmatrix}$$

Elemento 2 BC:



$$\tilde{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

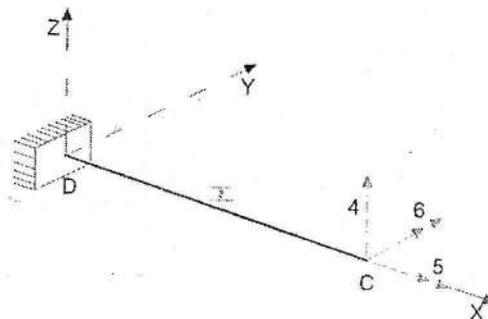
$$\tilde{k}^2 = \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \left\{ \begin{array}{l} 15432.09877 & 27777.777778 & 0 & -15432.09877 & 27777.777778 & 0 \\ 27777.777778 & 6666.666667 & 0 & -27777.777778 & 33333.333333 & 0 \\ 0 & 0 & 2222.222222 & 0 & 0 & -2222.222222 \\ -15432.09877 & -27777.777778 & 0 & 15432.09877 & -27777.777778 & 0 \\ 27777.777778 & 33333.333333 & 0 & -27777.777778 & 6666.666667 & 0 \\ 0 & 0 & -2222.222222 & 0 & 0 & 2222.222222 \end{array} \right.
 \end{matrix}$$

Teniendo los desplazamientos del segundo elemento calculamos las fuerzas de dicho elemento:

$$\tilde{k}^2 \cdot \tilde{u}^2 = \tilde{f}^2$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} -1.350 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -1.885 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.729 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ -8.793 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -2.056 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ 5.414 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad \tilde{f}^2 = \begin{Bmatrix} V_B \\ M_{XB} \\ M_{YB} \\ V_C \\ M_{XC} \\ M_{YC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.53889 \text{ tn} \textcircled{1} \\ 1.2550 \text{ tnxm} \textcircled{2} \\ -0.81889 \text{ tnxm} \textcircled{3} \\ -0.53889 \text{ tn} \textcircled{4} \\ 0.68500 \text{ tnxm} \textcircled{5} \\ 0.8189 \text{ tnxm} \textcircled{6} \end{Bmatrix}$$

Elemento 3 DC:



$$\tilde{k}^3 = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{k}^3 = \begin{bmatrix} 52083.333333 & 0 & 62500 \\ 0 & 3333.333333 & 0 \\ 62500 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix} \quad (3 \times 3)$$

Hallamos las fuerzas en el tercer elemento:

$$\tilde{k}^3 \cdot \tilde{u}^3 = \tilde{f}^3$$

$$\begin{bmatrix} 52083.333333 & 0 & 62500 \\ 0 & 3333.333333 & 0 \\ 62500 & 0 & 100000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} -8.793 \times 10^{-4} \\ -2.056 \times 10^{-4} \\ 5.414 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_c \\ M_{xc} \\ M_{yc} \end{bmatrix}$$

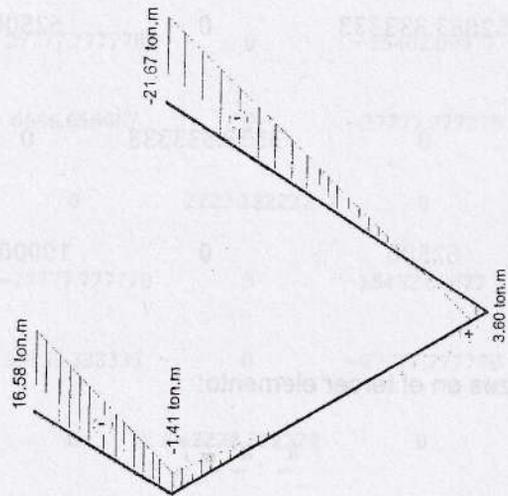
$$\tilde{f}^3 = \begin{bmatrix} V_c \\ M_{xc} \\ M_{yc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.9594 \text{ tn} \textcircled{4} \\ -0.6853 \text{ tnxm} \textcircled{5} \\ -0.8162 \text{ tnxm} \textcircled{6} \end{bmatrix}$$

3° Fuerzas aplicadas:

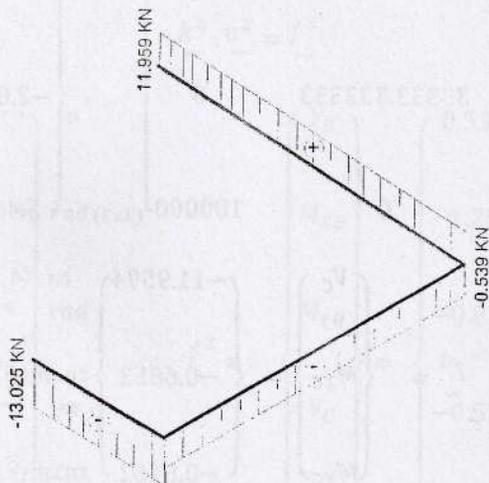
$$F_{Bz} = 12.486 \text{ ton} \downarrow$$

$$F_{Cz} = 12.498 \text{ ton} \downarrow$$

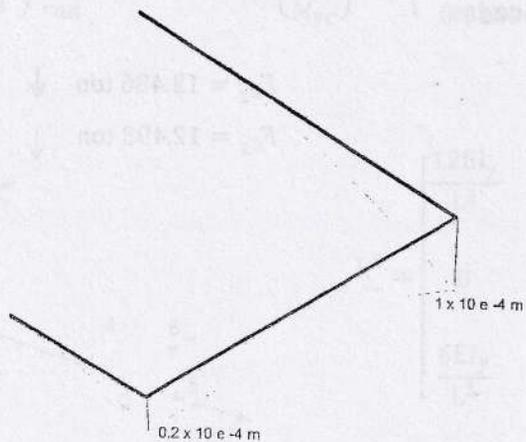
4° Diagrama de momento flector:



5° Diagrama de fuerza cortante:

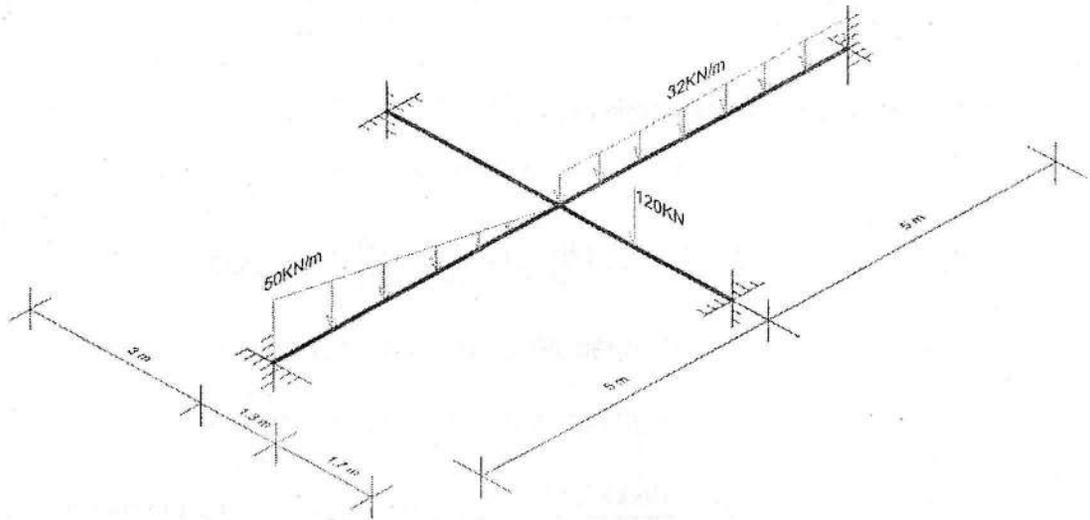


6° Diagrama de la deformada:



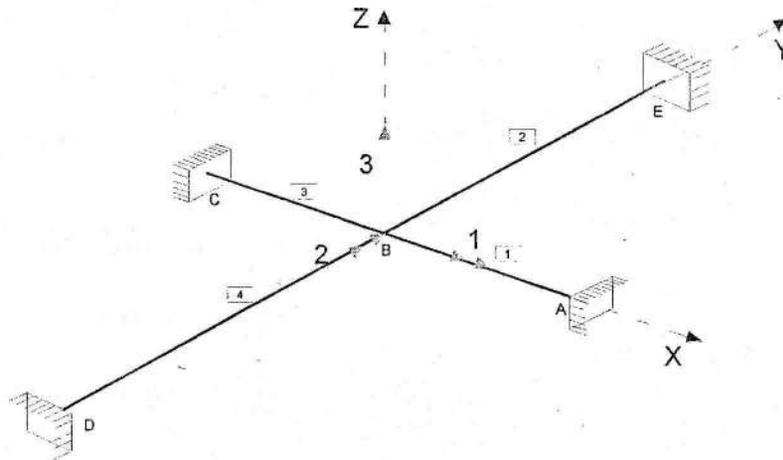
PROBLEMA N° 04:

Analice completamente la estructura de la siguiente figura, todos los elementos tienen una sección de 300mmx350mm, $E=19kN/mm^2$, $G=7.5kN/mm^2$, considere la matriz obtenida en el problema 1.



SOLUCIÓN:

Enumeramos los grados de libertad y los elementos.



$GDL = 3$

$\# \text{ ELEMENTOS} = 4$

1° Cálculos previos:

$$b = 0.30 \text{ m} \quad h = 0.35 \text{ m}$$

$$A = b \cdot h \quad I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$A = 0.105 \text{ m}^2 \quad I = 0.001071875 \text{ m}^4$$

$$E = 19 \text{ kN/mm}^2 \quad G = 7.5 \text{ kN/mm}^2$$

Momento polar de inercia (J):

$$J = C \cdot b \cdot t^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \left(\frac{300}{350} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{300}{350} \right)^4 \right] = 0.161430$$

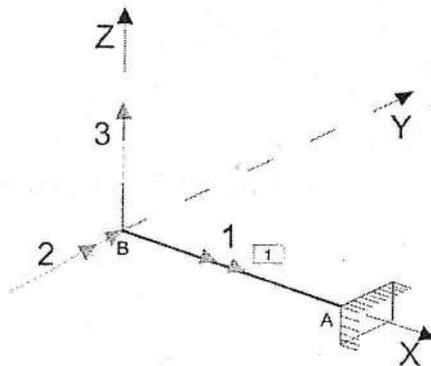
$$J = 0.161430 \cdot 350 \cdot 300^3 = 1.52551 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 7.5 \times 10^6 \times 1.52551 \times 10^{-3} = 11441.325 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI = \frac{19 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.35^3}{12} = 20365.625 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

2° Matriz de rigidez de los elementos:

Elemento 1:



$$Dx = 3$$

$$Dy = 0 \quad L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2} \quad L = 3$$

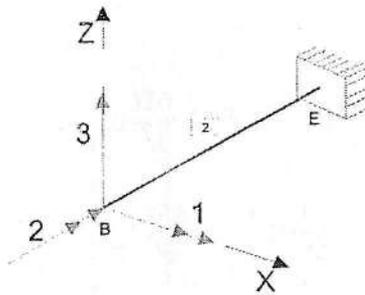
$$Cx = \frac{Dx}{L1} \quad Cx = 1$$

$$Cy = \frac{Dy}{L1} \quad Cy = 0$$

$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} 3.814 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.715 \times 10^4 & -1.358 \times 10^4 \\ 0 & -1.358 \times 10^4 & 9.051 \times 10^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 2:



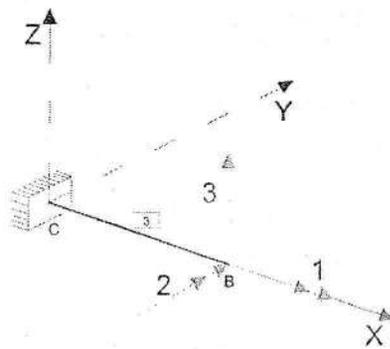
$$\begin{aligned} D_x &= 0 \\ D_y &= 5 & L &= \sqrt{D_x^2 + D_y^2} & L &= 5 \\ C_x &= \frac{D_x}{L} & C_x &= 0 \\ C_y &= \frac{D_y}{L} & C_y &= 1 \end{aligned}$$

$$\tilde{k}^2 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{k}^2 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.629 \times 10^4 & 0 & 4.888 \times 10^3 \\ 0 & 2.288 \times 10^3 & 0 \\ 4.888 \times 10^3 & 0 & 1.955 \times 10^3 \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

(3x3)

Elemento 3:



$$\begin{aligned}
 Dx &= 3 \\
 Dy &= 0 & L &= \sqrt{Dx^2 + Dy^2} & L &= 3 \\
 Cx &= \frac{Dx}{L} & Cx &= -1 \\
 Cy &= \frac{Dy}{L} & Cy &= 0
 \end{aligned}$$

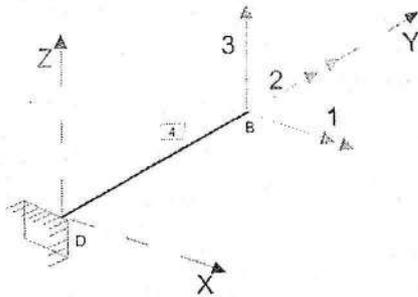
$$\tilde{k}^3 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

(3x3)

$$\tilde{k}^3 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3.814 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.715 \times 10^4 & 1.358 \times 10^4 \\ 0 & 1.358 \times 10^4 & 9.051 \times 10^3 \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

(3x3)

Elemento 4:



$$D_x = 0$$

$$D_y = 5 \quad L = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \quad L = 5$$

$$C_x = \frac{D_x}{L} \quad C_x = 0$$

$$C_y = \frac{D_y}{L} \quad C_y = -1$$

$$\tilde{k}^4 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI}{L} C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI}{L^2} C_y & \frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$\tilde{k}^4 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{bmatrix} 1.629 \times 10^4 & 0 & -4.888 \times 10^3 \\ 0 & 2.288 \times 10^3 & 0 \\ -4.888 \times 10^3 & 0 & 1.955 \times 10^3 \end{bmatrix} & \textcircled{1} \\ & \textcircled{2} \\ & \textcircled{3} \end{matrix}_{(3 \times 3)}$$

3° Matriz de rigidez de la estructura:

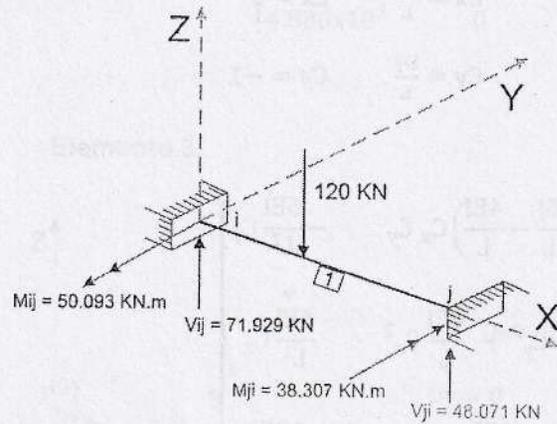
$$k = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{bmatrix} 40212.565598 & 0 & 0 \\ 0 & 58884.872692 & 0 \\ 0 & 0 & 22012.977778 \end{bmatrix} & \textcircled{1} \\ & \textcircled{2} \\ & \textcircled{3} \end{matrix}_{(3 \times 3)}$$

4° Vector de fuerzas externas en los nudos:

$$\tilde{f}_n = \bar{a}$$

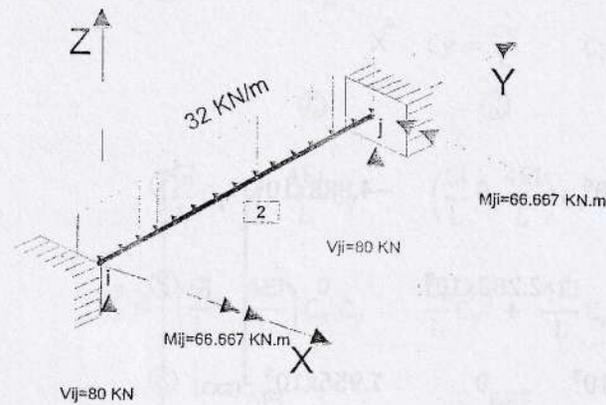
5° Vector de fuerzas de empotramiento perfecto:

Elemento 1:



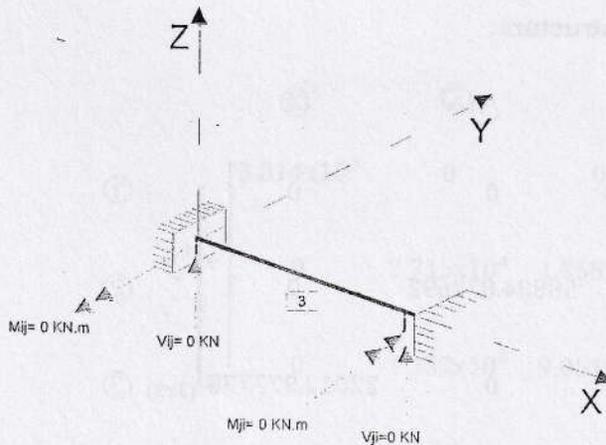
$$\tilde{f}_0^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50.093333 \\ 71.928889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 2:



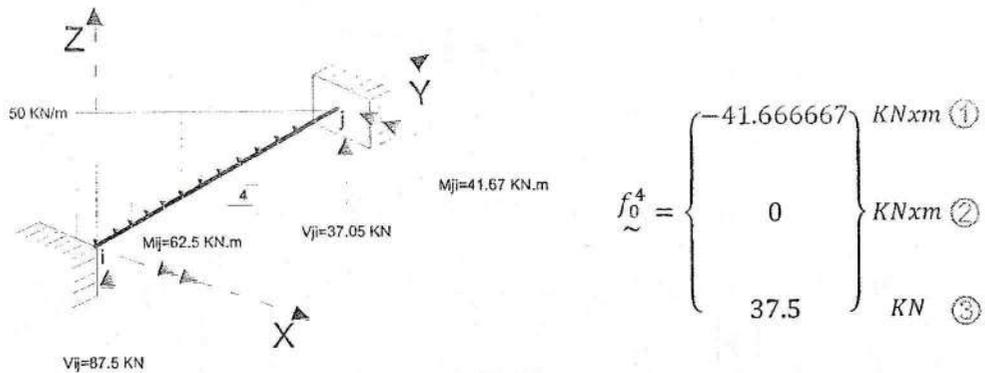
$$\tilde{f}_0^2 = \begin{Bmatrix} 66.667 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 3:



$$\tilde{f}_0^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 4:



Vector de fuerzas de empotramiento perfecto, resulta:

$$\tilde{f}_0 = \begin{Bmatrix} 25 \\ -50.093 \\ 189.428889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \text{ ①} \\ \text{KNxm} \text{ ②} \\ \text{KN} \text{ ③} \end{matrix}$$

6° Vector de fuerzas externas del sistema:

$$\tilde{f} = \tilde{f}_n - \tilde{f}_0$$

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 50.093 \\ -189.428889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \text{ ①} \\ \text{KNxm} \text{ ②} \\ \text{KN} \text{ ③} \end{matrix}$$

7° Vector de desplazamiento de la estructura:

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

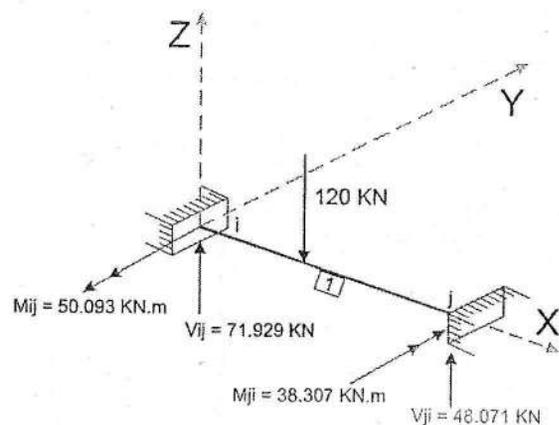
$$\therefore \tilde{u} = \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{rad} \text{ ①} \\ \text{rad} \text{ ②} \\ \text{m} \text{ ③} \end{matrix}$$

4° Vector de fuerzas externas en los nudos:

$$\tilde{f}_n = \bar{f}$$

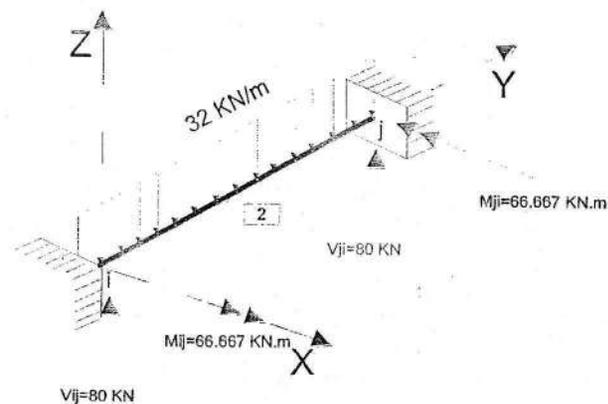
5° Vector de fuerzas de empotramiento perfecto:

Elemento 1:



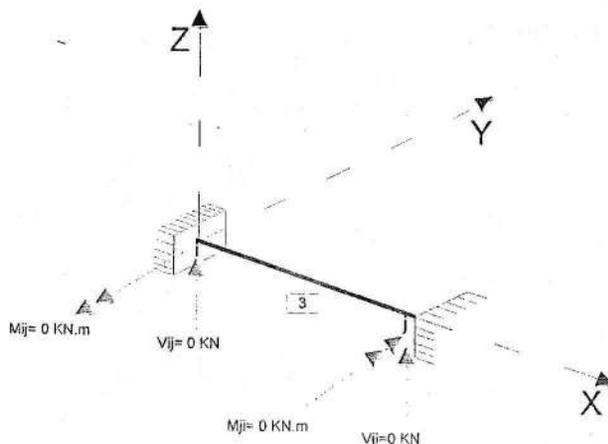
$$\tilde{f}_0^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50.093333 \\ 71.928889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 2:



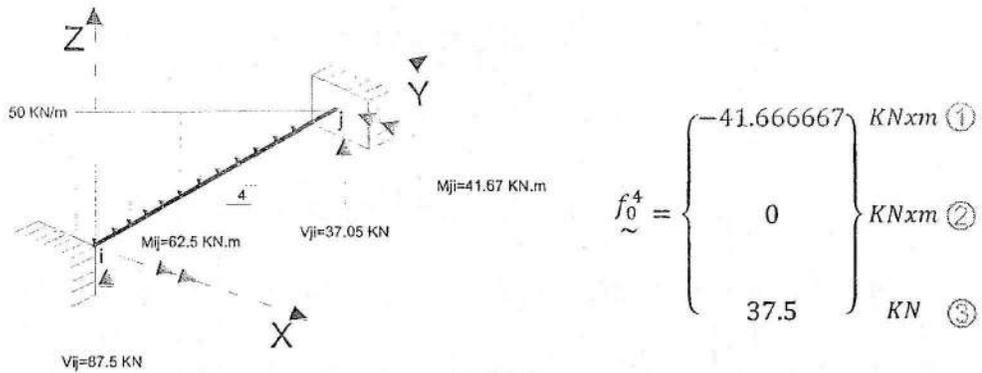
$$\tilde{f}_0^2 = \begin{Bmatrix} 66.667 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 3:



$$\tilde{f}_0^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{KNxm} \textcircled{1} \\ \text{KNxm} \textcircled{2} \\ \text{KN} \textcircled{3} \end{matrix}$$

Elemento 4:



Vector de fuerzas de empotramiento perfecto, resulta:

$$f_0 = \begin{Bmatrix} 25 \\ -50.093 \\ 189.428889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KNxm \text{ (1)} \\ KNxm \text{ (2)} \\ KN \text{ (3)} \end{matrix}$$

6° Vector de fuerzas externas del sistema:

$$f = f_n - f_0$$

$$f = \begin{Bmatrix} -25 \\ 50.093 \\ -189.428889 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KNxm \text{ (1)} \\ KNxm \text{ (2)} \\ KN \text{ (3)} \end{matrix}$$

7° Vector de desplazamiento de la estructura:

$$k \cdot u = f$$

$$\therefore u = \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} rad \text{ (1)} \\ rad \text{ (2)} \\ m \text{ (3)} \end{matrix}$$

8° Vector de fuerzas internas en los elementos:

$$\tilde{f}^e = \tilde{f}_0^e + k^e \cdot \tilde{u}^e$$

Elemento 1:

$$\tilde{f}^1 = \tilde{f}_0^1 + k^1 \cdot \tilde{u}^1$$

$$\tilde{f}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50.093 \\ 71.929 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.814 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.715 \times 10^4 & -1.358 \times 10^4 \\ 0 & -1.358 \times 10^4 & 9.051 \times 10^3 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \cdot \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{f}^1 = \begin{Bmatrix} -2.371 \\ 89.842 \\ -17.511 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\tilde{f}^2 = \tilde{f}_0^2 + k^2 \cdot \tilde{u}^2$$

$$\tilde{f}^2 = \begin{Bmatrix} 66.667 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.629 \times 10^4 & 0 & 4.888 \times 10^3 \\ 0 & 2.288 \times 10^3 & 0 \\ 4.888 \times 10^3 & 0 & 1.955 \times 10^3 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \cdot \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{f}^2 = \begin{Bmatrix} 14.477 \\ 1.947 \\ 60.137 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$\tilde{f}^3 = \tilde{f}_0^3 + k^3 \cdot \tilde{u}^3$$

$$\tilde{f}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.814 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.715 \times 10^4 & 1.358 \times 10^4 \\ 0 & 1.358 \times 10^4 & 9.051 \times 10^3 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \cdot \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{f}^3 = \begin{Bmatrix} -2.371 \\ -93.735 \\ -66.340 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

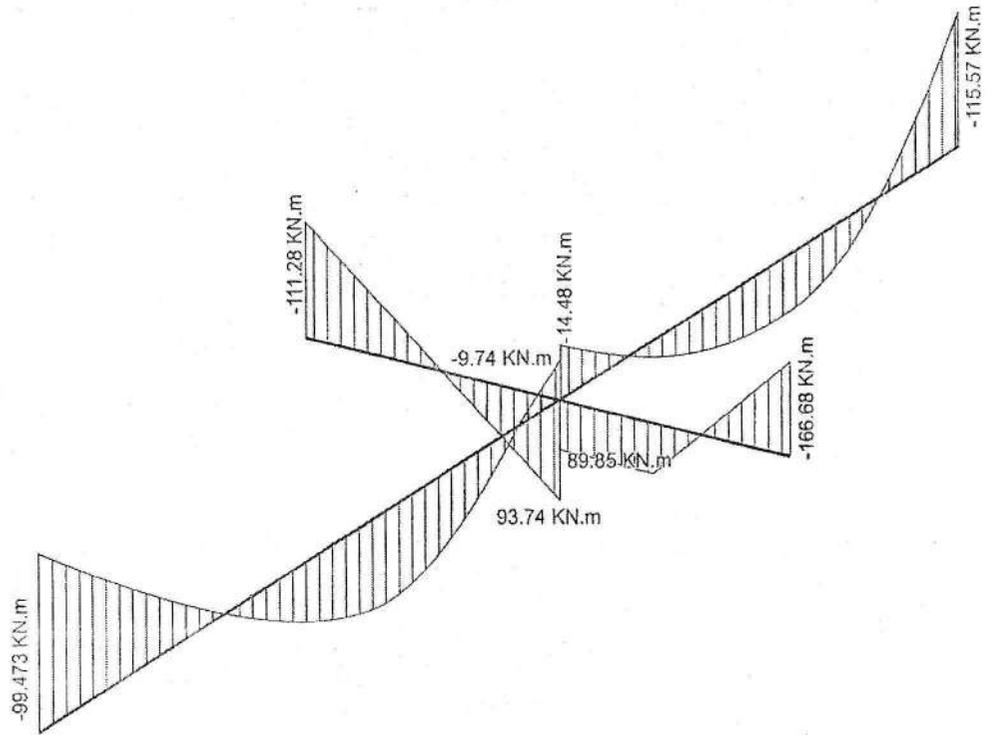
Elemento 4:

$$\tilde{f}^4 = \tilde{f}_0^4 + k^4 \cdot \tilde{u}^4$$

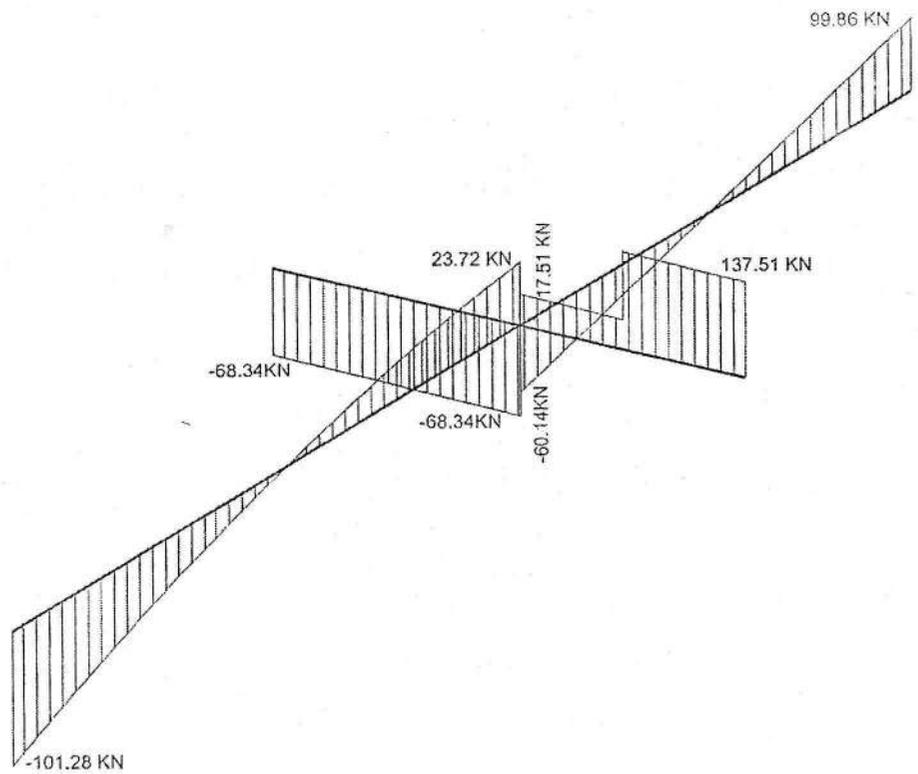
$$\tilde{f}^4 = \begin{Bmatrix} -41.67 \\ 0 \\ 37.5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.629 \times 10^4 & 0 & -4.888 \times 10^3 \\ 0 & 2.288 \times 10^3 & 0 \\ -4.888 \times 10^3 & 0 & 1.955 \times 10^3 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \cdot \begin{Bmatrix} -6.217 \times 10^{-4} \\ 8.507 \times 10^{-4} \\ -8.605 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{f}^4 = \begin{Bmatrix} -9.735 \\ 1.947 \\ 23.714 \end{Bmatrix} \begin{matrix} KN - m \\ KN - m \\ KN \end{matrix}$$

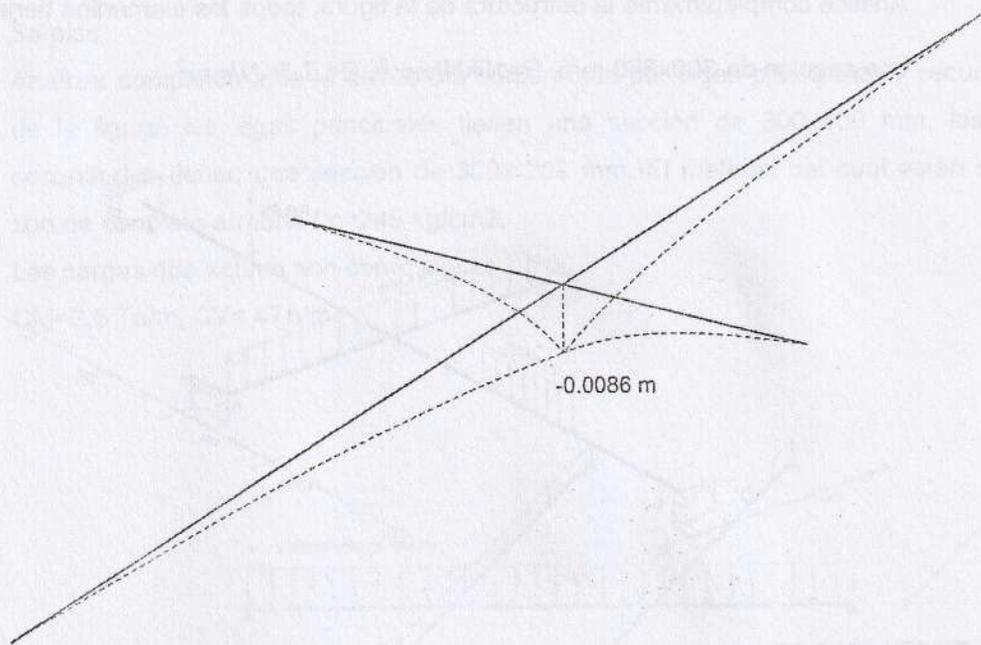
9° Diagrama de momento flector:



10° Diagrama de fuerza cortante:



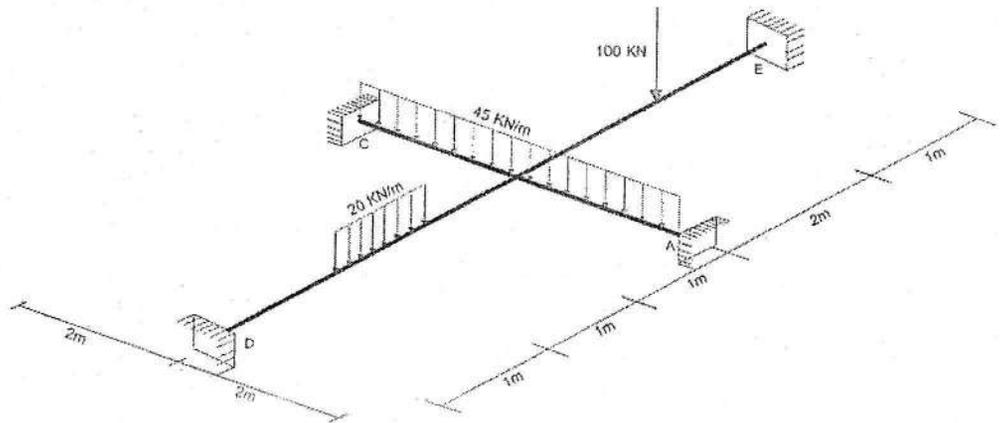
11° Diagrama de la deformada:



PROBLEMAS PROPUESTOS

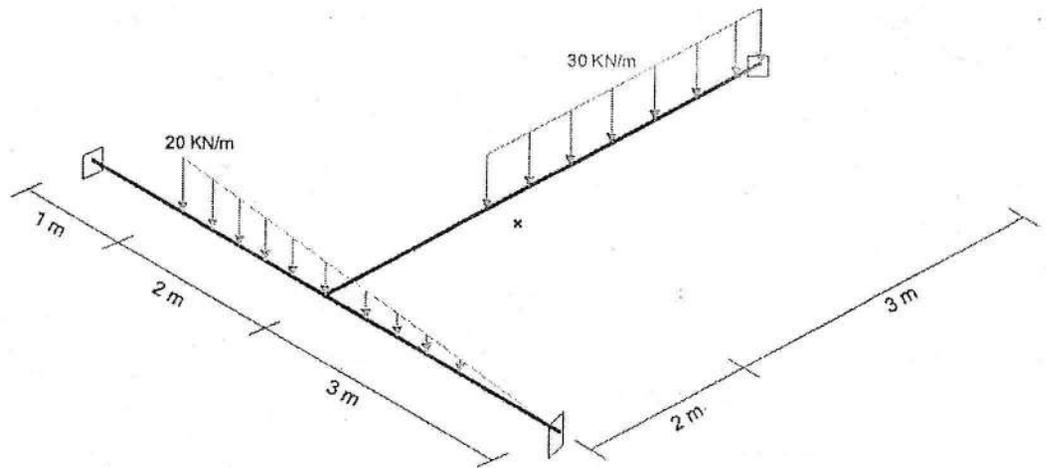
PROBLEMA N° 01:

Analice completamente la estructura de la figura, todos los elementos tienen una sección de 300x350 mm, $E=19\text{kN/mm}^2$, $G=7.5\text{kN/mm}^2$



PROBLEMA 02:

Resuelva completamente la parrilla mostrada, por el método matricial de los desplazamientos. Sección 300*350 mm, $E=19\text{KN/mm}^2$, $G=7.5\text{KN/mm}^2$.



PROBLEMA 03:

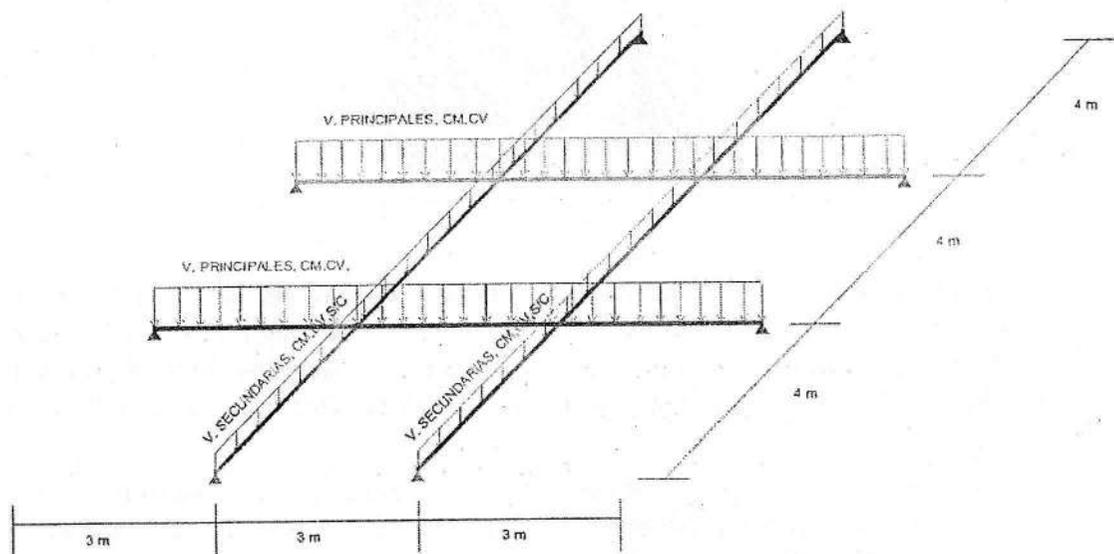
En la figura se muestra el modelo matemático simplificado de vigas que actúan en un plano.

Se pide:

Analizar completamente la estructura conformada por vigas principales y secundarias de la figura; las vigas principales tienen una sección de 300x400 mm, las vigas secundarias tienen una sección de 300x 200 mm. El material del cual están hechas son de concreto armado $f'c=245 \text{ kg/cm}^2$.

Las cargas que actúan son como sigue:

CM=2.5 Tn/m, CV= 4Tn/m.



PROBLEMA 11: COTERROPORES SANGRENTA

En la figura se muestra el modelo estructural simplificado de un edificio de 12 pisos.

Analice completamente el comportamiento de este edificio en el momento de diseño.

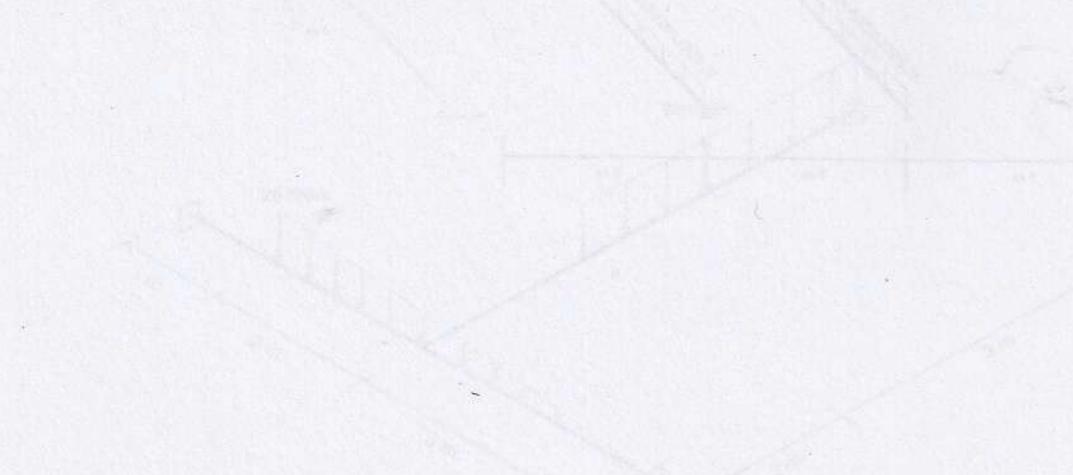
de la figura las vigas y columnas tienen una sección de 300x400 mm. Las vigas secundarias tienen una sección de 300 x 300 mm. El momento del cual están hechas son de concreto armado Clase II.

Las cargas que actúan son como sigue:



Figura 11.1

Analice completamente el comportamiento de este edificio en el momento de diseño.



CAPÍTULO II

TRIDIMENSIONAL SISTEMAS APORTICADOS



COURANT nació en la ciudad Polaca de Lublinitz, que formaba parte de la provincia de Silesia del Reino de Prusia. En su juventud residió en Glatz, Breslau y, a partir de 1905 en Berlín. Él permaneció en Breslau y fue a la Universidad de WROCLAW, pero continuó sus estudios en Zúrich y la Universidad de GOTINGA

Cabe resaltar que debido a su elevada habilidad organizativa, se le reconocen contribuciones importantes a las matemáticas. Una muestra de esto sucedió junto con David Hilbert con quien escribió el influyente "Métodos de física matemática". Así como con Herbert Robbins publicaron la obra divulgativa "¿Qué es la Matemática?", que actualmente se reimprime. COURANT está directamente asociado al método de los "Elementos Finitos", reinventado posteriormente por los ingenieros. Pero fue él quien le dio una base matemática firme. En la actualidad este método se usa para resolver ecuaciones en derivadas parciales numéricamente. Entre otros logros suyos podemos mencionar la Condición de Courant-Friedrichs-Lewy y el "Principio Mínimax de Courant"

Finalmente en 1933 Courant escapó de la Alemania Nazi, antes que muchos de sus colegas considerados como Judíos, trasladándose a Norte América, falleciendo en la Ciudad de Nueva York. Donde educó a sus 4 hijos: Ernest es un físico de partículas y un innovador en aceleradores de partículas; Gertrude es doctora en biología; Hans es un físico que participó en el "Proyecto Manhattan" y Leonore fue músico profesional.

INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se hará el análisis tridimensional para cualquier tipo de estructura comenzando con las de tipo aporticadas que en general son las más comunes al contar con elementos estructurales de vigas y columnas ortogonales entre sí, el cual es el sistema básico para cualquier tipo de construcción, para lo cual se analiza teniendo en consideración todos los efectos que puede sufrir una estructura debido a las cargas que están sometidas en cualquiera de los ejes X, Y o Z.

Para este tipo de análisis se hace uso de matrices de rigidez con la diferencia que hay una fuerza y momento en cada eje X, Y o Z en cada extremo del elemento por ello contienen 12 grados de libertad en total para cada elemento que se analiza.

Su importancia de este análisis se da cuando se ve un incremento en las reacciones que tiene la estructura ya que el análisis en un plano no se puede apreciar los efectos que está sometido como la torsión, esfuerzo biaxial que pueden causar el pandeo de las columnas o en las vigas se notará un incremento de los momentos y fuerza cortante la cual causaría una mayor deflexión que se incrementaría o podría causar una falla del elemento estructural, lo cual lo haría poco factible un análisis cuyo diseño no funcionara en su totalidad.

Cabe indicar que a partir del estudio de este análisis en tres dimensiones, se va a formar la base fundamental para el desarrollo del análisis seudo tridimensional, el cual toma como base este análisis de pórticos para poder obtener, un cálculo más simplificado, el cual se describe con más detalle en el capítulo III.

Para el tema a tratar se dio como base estudiar estructuras más complejas desde el uso de matrices y la introducción del método de elementos finitos en 1940 en el cual se dio los primeros usos en la ingeniería estructural con la idealización de vigas y columnas como elementos básicos para el análisis de estructuras.

Después en 1947 Levy desarrollo el método de flexibilidad y fuerzas para luego se desarrolle el método de rigidez y desplazamientos, pero era necesario una gran dedicación y labor para su solución a mano, por lo que para esta solución numérica se debió de usar computadoras para facilitar los cálculos y sea popular ya que los métodos energéticos el problema radica en la complejidad de las estructuras lo cual dificulta su cálculo.

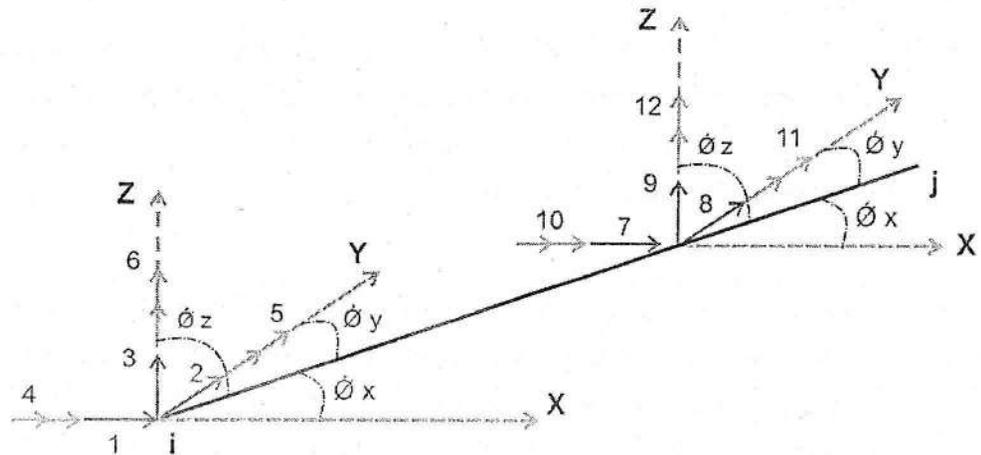
Luego en 1954 Argyris y Kelsey desarrollaron el análisis estructural por medio de matrices empleando los métodos energéticos pero de manera sistemática lo cual marcaría tendencia y ejemplificaría la importancia que juega hoy en día al momento de diseñar cualquier tipo de estructura.

El estudio de estructuras tridimensionales se da en 1961 en el cual se hacía considerando cada elemento de la estructura su propia matriz de rigidez que depende del tipo de apoyo que tiene en los extremos y la sección que tenga luego se ensambla en la matriz general de toda la estructura y se podía obtener el vector de desplazamiento.

Como se puede ver a lo largo del análisis estructural el método matricial trata de reemplazar una estructura real continuo en un modelo matemático cuyos elementos estructurales son finitos y sus propiedades se expresan matricialmente, mientras más minucioso es el análisis es más confiable los valores resultantes que depende del elemento que se analiza porque en un eje el momento puede ser flector pero para otro elemento será un momento torsionante.

ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE ESTRUCTURAS APORTICADAS

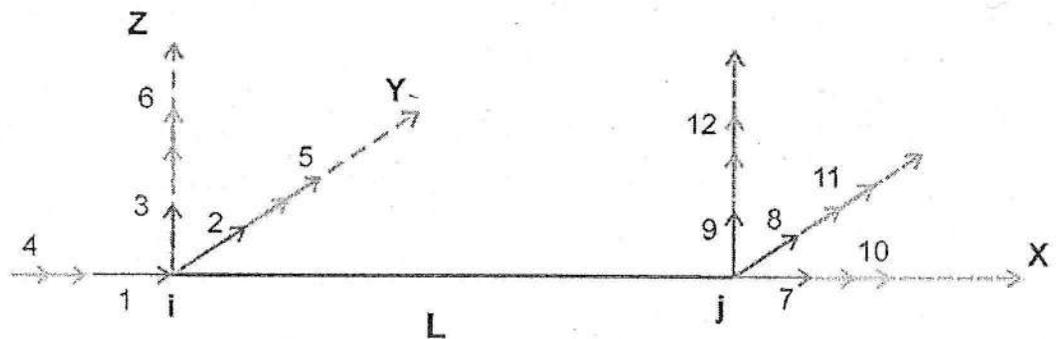
El caso general de estructuras, es el de pórticos en el espacio cuyos nudos tienen seis grados de libertad, correspondientes a tres desplazamientos y tres rotaciones. Estos resultan, a su vez, de seis solicitaciones: Fuerza Axial, Corte en dos direcciones, Flexión Biaxial y Torsión, en la cual se ha supuesto que las cargas que las originan están contenidas en los planos principales del elemento.



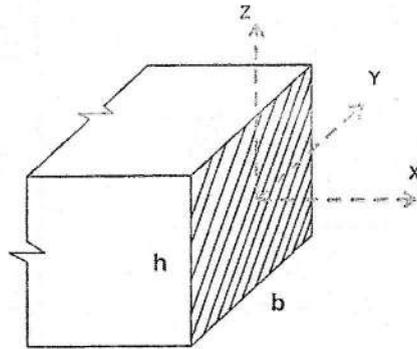
Para facilitar el cálculo manual de pórticos espaciales ortogonales, se presentan las deducciones de las matrices de rigidez de los elementos orientados en los tres ejes principales X, Y Z.

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCION X

GDL en el Eje Global:



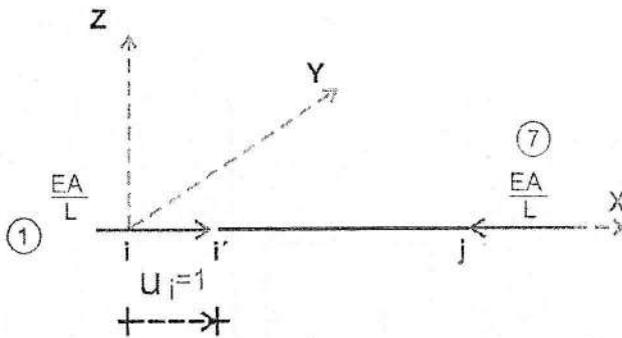
Extremo i:



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

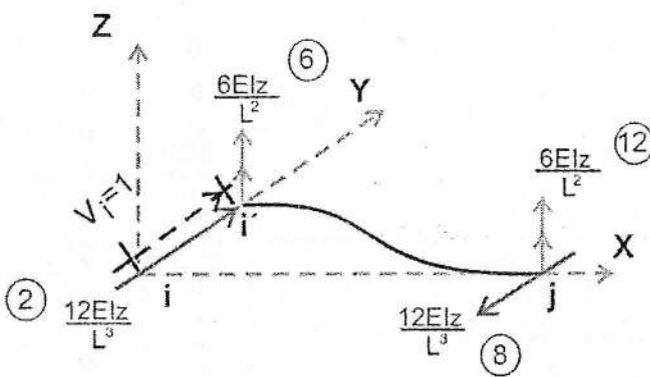
$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Para la 1ra Columna: $U_i = 1$



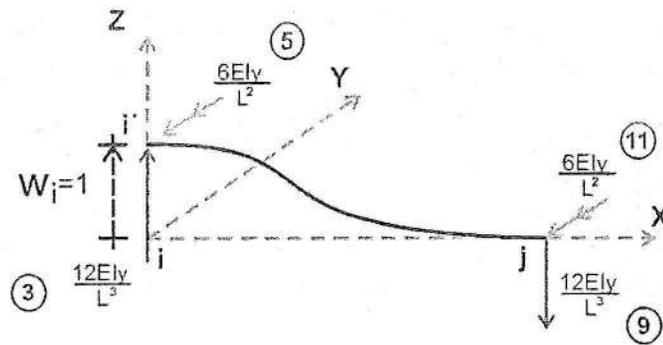
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Para la 2da Columna $V_i = 1$



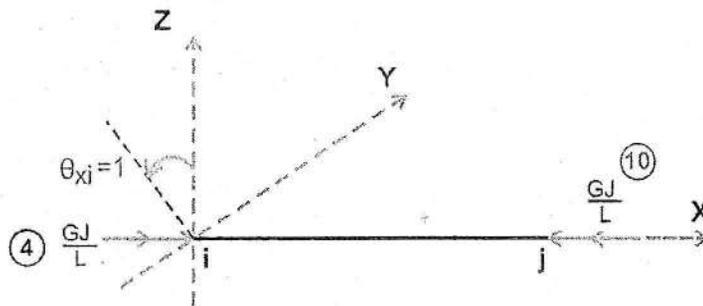
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{matrix}$$

Para la 3ra Columna: $W_i = 1$



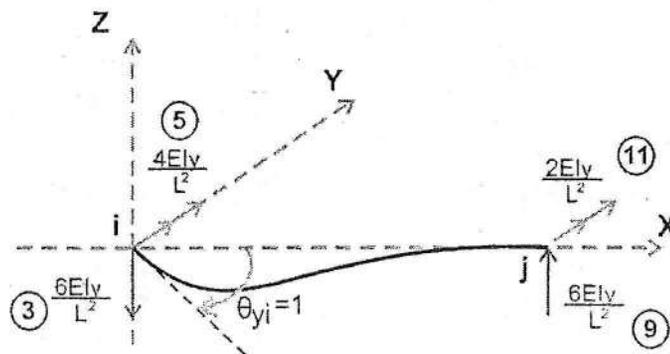
3		
0	0	0
0	0	0
$\frac{12EIy}{L^3}$	$\frac{12EIy}{L^3}$	3
0	0	0
$-\frac{6EIy}{L^2}$	$-\frac{6EIy}{L^2}$	5
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$\frac{12EIy}{L^3}$	$\frac{12EIy}{L^3}$	9
0	0	0
$-\frac{6EIy}{L^2}$	$-\frac{6EIy}{L^2}$	11
0	0	0

Para la 4ta Columna: $\theta_{xi} = 1$



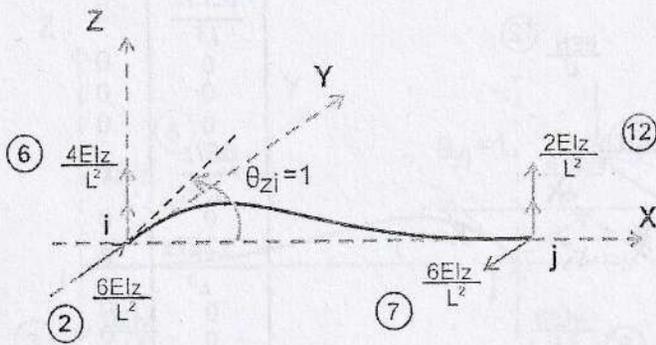
4		
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$\frac{GJ}{L}$	$\frac{GJ}{L}$	4
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$-\frac{GJ}{L}$	$-\frac{GJ}{L}$	10
0	0	0
0	0	0

Para la 5ta Columna: $\theta_{yi} = 1$



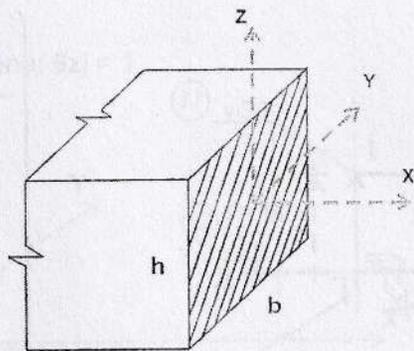
5		
0	0	0
0	0	0
$-\frac{6EIy}{L^2}$	$-\frac{6EIy}{L^2}$	3
0	0	0
$\frac{4EIy}{L^2}$	$\frac{4EIy}{L^2}$	5
$\frac{L}{L}$	$\frac{L}{L}$	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$\frac{6EIy}{L^2}$	$\frac{6EIy}{L^2}$	9
0	0	0
$\frac{2EIy}{L}$	$\frac{2EIy}{L}$	11
$\frac{L}{L}$	$\frac{L}{L}$	0
0	0	0

Para la 6ta Columna: $\theta_{zi} = 1$



$$\begin{matrix} 6 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4EIz}{L} \\ 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2EIz}{L} \end{array} \right) \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{matrix}$$

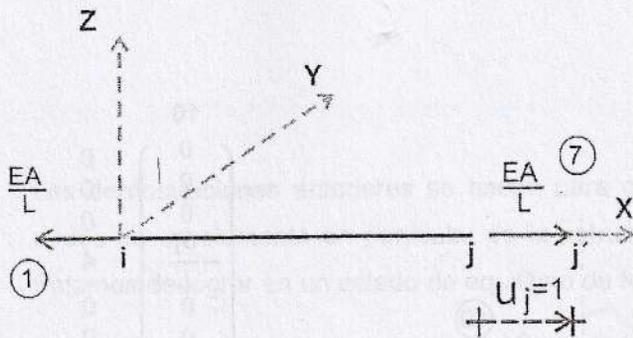
Extremo j:



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

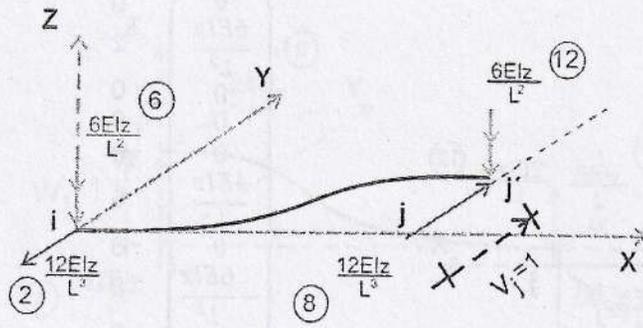
$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Para la 7ma Columna: $U_j = 1$



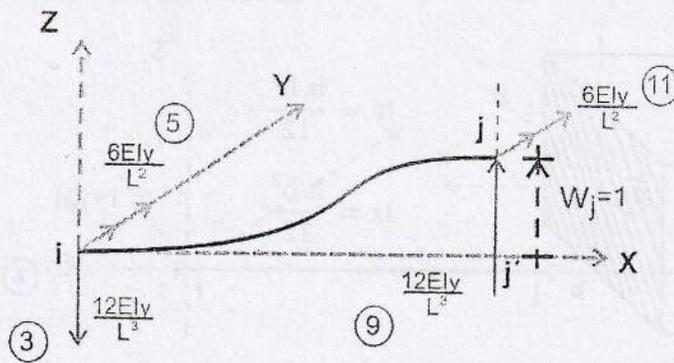
$$\begin{matrix} 7 \\ \left(\begin{array}{c} EA \\ -L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ EA \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Para la 8^{va} Columna $V_j = 1$



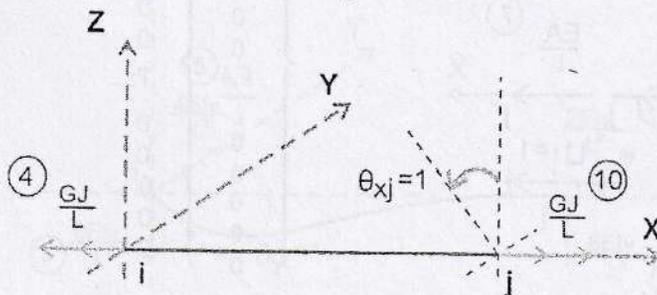
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EIz}{L^2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{matrix}$$

Para la 9^{na} Columna: $W_j = 1$



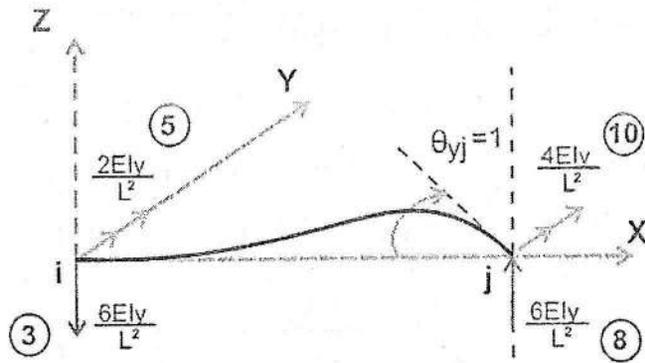
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{12EIy}{L^3} \\ 0 \\ \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{12EIy}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EIy}{L^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{matrix}$$

Para la 10^{ma} Columna: $\theta_{xj} = 1$



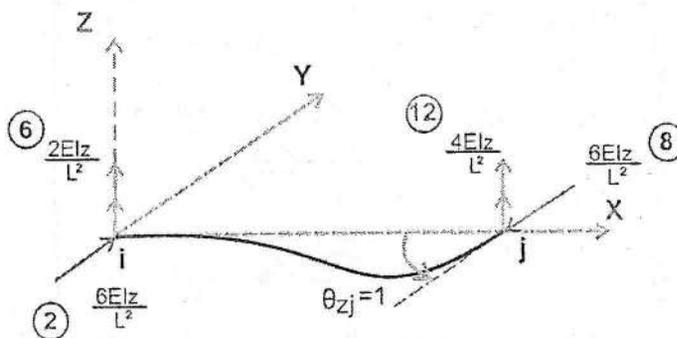
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{GJ}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GJ}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Para la 11va Columna: $\theta_{yj} = 1$



$$\begin{matrix}
 11 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 \frac{6EIy}{L^2} \\
 0 \\
 \frac{2EIy}{L^2} \\
 \frac{L}{L} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{6EIy}{L^2} \\
 \frac{L}{L^2} \\
 0 \\
 \frac{4EIy}{L} \\
 0
 \end{array} \right\} \begin{matrix}
 0 \\
 0 \\
 3 \\
 0 \\
 5 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 9 \\
 0 \\
 0 \\
 11 \\
 0
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Para la 12va Columna: $\theta_{zj} = 1$



$$\begin{matrix}
 12 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 0 \\
 \frac{6EIz}{L^2} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{2EIz}{L} \\
 0 \\
 \frac{6EIz}{L^2} \\
 \frac{L}{L^2} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{4EIz}{L} \\
 \frac{L}{L}
 \end{array} \right\} \begin{matrix}
 0 \\
 2 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 6 \\
 0 \\
 8 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 12 \\
 0
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

- Las demostraciones anteriores se hacen para cada efecto que pueda tener los nudos de un elemento en particular de la estructura como base del análisis que tratamos de lograr en un estado de equilibrio de fuerzas.
- Los esfuerzos se pueden ver que son por: Fuerza Axial, Fuerza Cortante, Momento Flector y Momento Torsor en un estado de deformación en el que se tendrá un giro o un desplazamiento $u_j = 1$ o $\theta = 1$.

Finalmente como resultado al ensamblar todos los vectores del elemento para cada condición que puede tener sus apoyos en "I" o "J", podemos obtener la matriz de rigidez de un elemento orientado en la dirección X tal como sigue:

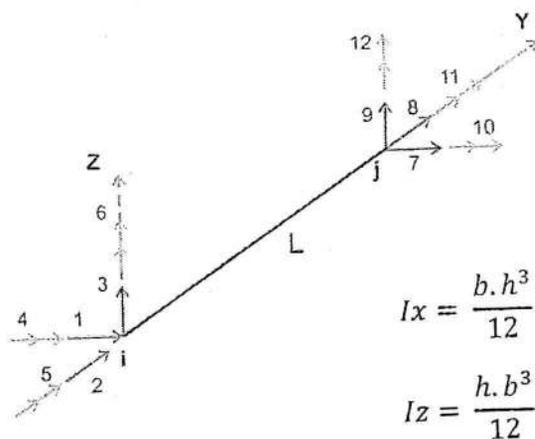
$$\tilde{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix} \quad (12 \times 12)$$

Para este tipo de análisis se considera que la estructura se comportara lineal y elástica por lo que \tilde{k} es constante y simétrico.

Además siguiendo el mismo proceso de análisis se encontraran las matrices de rigidez para elementos orientados tanto en el eje Y como Z, así como la matriz de rigidez genérica para un elemento orientado en cualquier dirección.

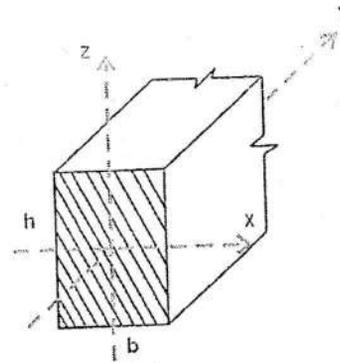
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCION Y

GDL en Eje Global:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

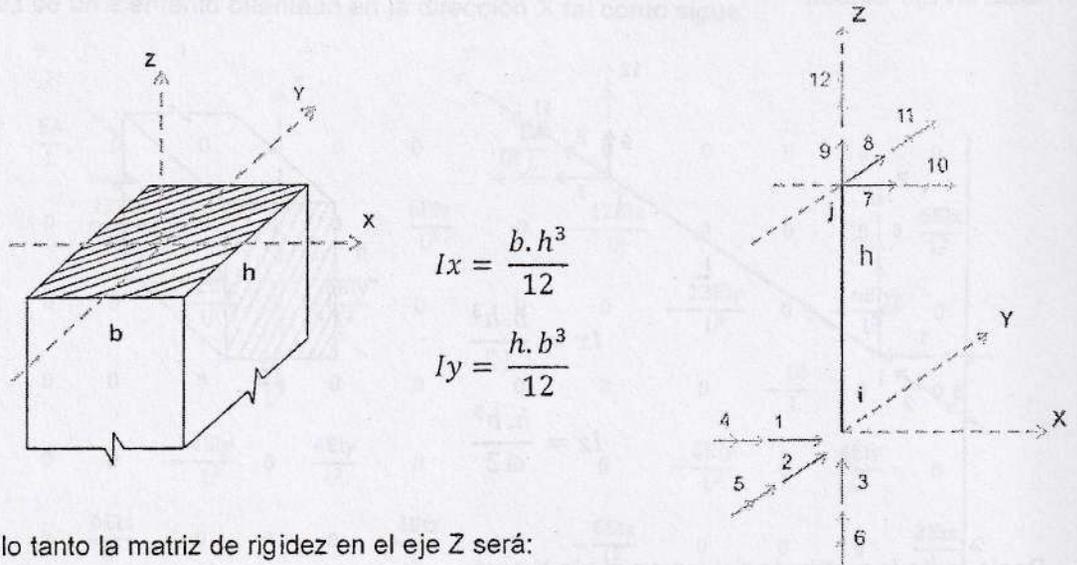


Por lo tanto la matriz de rigidez en el eje Y será:

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (12 \times 12)$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO EN LA DIRECCION Z

GDL en Eje Global:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

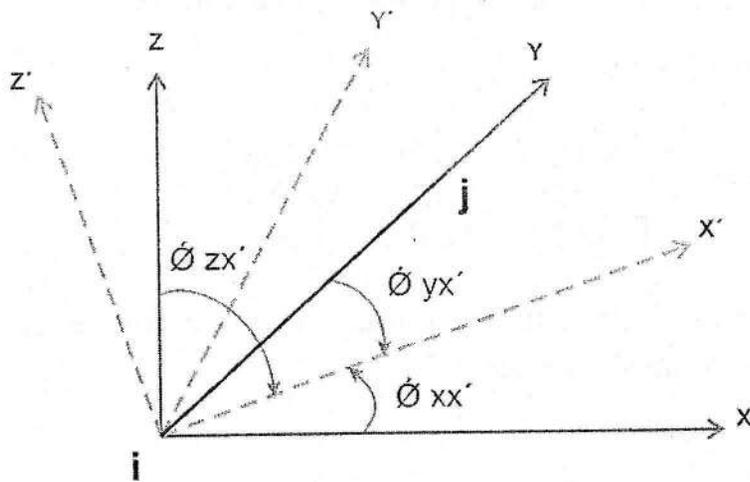
$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez en el eje Z será:

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{12Ely}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Ely}{h^2} & 0 & -\frac{12Ely}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Ely}{h^2} & 0 \\ 0 & \frac{12Elx}{h^3} & 0 & -\frac{6Elx}{h^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12Elx}{h^3} & 0 & -\frac{6Elx}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6Elx}{h^2} & 0 & \frac{4Elx}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & \frac{2Elx}{h} & 0 & 0 \\ \frac{6Ely}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4Ely}{h} & 0 & -\frac{6Ely}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2Ely}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{h} \\ -\frac{12Ely}{h^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6Ely}{h^2} & 0 & \frac{12Ely}{h^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6Ely}{h^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12Elx}{h^3} & 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12Elx}{h^3} & 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6Elx}{h^2} & 0 & \frac{2Elx}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & \frac{4Elx}{h} & 0 & 0 \\ \frac{6Ely}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2Ely}{h^3} & 0 & -\frac{6Ely}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4Ely}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{h} \end{bmatrix} (12 \times 12)$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE EN EL ESPACIO

Matriz de Rigidez General:



Los sistemas de coordenada local y global están relacionados mediante los cosenos directores, como sigue:

$\theta_{xx'}$ = Angulo entre X y X'

$\theta_{yx'}$ = Angulo entre Y y X'

$\theta_{xy'}$ = Angulo entre X y Y'

$\theta_{yy'}$ = Angulo entre Y y Y'

$\theta_{xz'}$ = Angulo entre X y Z'

$\theta_{yz'}$ = Angulo entre Y y Z'

$\theta_{zx'}$ = Angulo entre Z y X'

$\theta_{zy'}$ = Angulo entre Z y Y'

$\theta_{zz'}$ = Angulo entre Z y Z'

Las fuerzas nodales resultan relacionadas como sigue:

$$X' = X \cdot \cos \theta_{xx'} + Y \cdot \cos \theta_{xy'} + Z \cdot \cos \theta_{xz'}$$

$$Y' = X \cdot \cos \theta_{xy'} + Y \cdot \cos \theta_{yy'} + Z \cdot \cos \theta_{zy'}$$

$$Z' = X \cdot \cos \theta_{xz'} + Y \cdot \cos \theta_{yz'} + Z \cdot \cos \theta_{zz'}$$

Remplazando matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xx'} & \cos \theta_{xy'} & \cos \theta_{xz'} \\ \cos \theta_{xy'} & \cos \theta_{yy'} & \cos \theta_{zy'} \\ \cos \theta_{xz'} & \cos \theta_{yz'} & \cos \theta_{zz'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

Matriz de Transformación:

$$\tilde{T}_o = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xx'} & \cos \theta_{xy'} & \cos \theta_{xz'} \\ \cos \theta_{xy'} & \cos \theta_{yy'} & \cos \theta_{zy'} \\ \cos \theta_{xz'} & \cos \theta_{yz'} & \cos \theta_{zz'} \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

Ahora, para los doce grados de libertad, la matriz de transformación de coordenadas locales a globales del elemento, resultan:

$$\tilde{T}_o = \begin{bmatrix} T_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_o \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

Para obtener la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, referida a coordenadas global, hay que efectuar el triple producto de las matrices:

$$\tilde{k} = \tilde{T}^T \cdot \tilde{k}' \cdot \tilde{T}$$

\tilde{k}' : Es la matriz de rigidez de un elemento orientado en la dirección X.

En la siguiente página procederemos a mostrar la matriz de rigidez que se emplea para elementos orientados en cualquier dirección usando los cosenos directores que tiene el elemento con respecto a un eje principal.

Denominada **LA ULTRAMATRIZ**

La cual por efectos de facilidad visual y se muestra en 2 partes para que se pueda apreciar las variables que se usan para su cálculo.

De la matriz para un elemento orientado en cualquier dirección las columnas 1, 2 y 3:

①	②	③	①
$\frac{12.E.d^2.I_x}{L^3} + \frac{12.E.g^2.I_y}{L^3} + \frac{A.E.a^2}{L}$	$\frac{12.E.d.e.I_x}{L^3} + \frac{12.E.g.h.I_y}{L^3} + \frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.d.f.I_x}{L^3} + \frac{12.E.g.i.I_y}{L^3} + \frac{A.E.a.c}{L}$	①
$\frac{12.E.d.e.I_x}{L^3} + \frac{12.E.g.h.I_y}{L^3} + \frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.h^2.I_y}{L^3} + \frac{12.E.e^2.I_x}{L^3} + \frac{A.E.b^2}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_x}{L^3} + \frac{12.E.h.i.I_y}{L^3} + \frac{A.E.b.c}{L}$	②
$\frac{12.E.d.f.I_x}{L^3} + \frac{12.E.g.i.I_y}{L^3} + \frac{A.E.a.c}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_x}{L^3} + \frac{12.E.h.i.I_y}{L^3} + \frac{A.E.b.c}{L}$	$\frac{12.E.f^2.I_x}{L^3} + \frac{12.E.i^2.I_y}{L^3} + \frac{A.E.c^2}{L}$	③
$\frac{6.E.d.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	④
$\frac{6.E.d.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	⑤
$\frac{6.E.d.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	⑥
$\frac{12.E.d^2.I_x}{L^3} - \frac{12.E.g^2.I_y}{L^3} - \frac{A.E.a^2}{L}$	$\frac{12.E.d.e.I_x}{L^3} - \frac{12.E.g.h.I_y}{L^3} - \frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.d.f.I_x}{L^3} - \frac{12.E.g.i.I_y}{L^3} - \frac{A.E.a.c}{L}$	⑦
$\frac{12.E.d.e.I_x}{L^3} - \frac{12.E.g.h.I_y}{L^3} - \frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.h^2.I_y}{L^3} - \frac{12.E.e^2.I_x}{L^3} - \frac{A.E.b^2}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_x}{L^3} - \frac{12.E.h.i.I_y}{L^3} - \frac{A.E.b.c}{L}$	⑧
$\frac{12.E.d.f.I_x}{L^3} - \frac{12.E.g.i.I_y}{L^3} - \frac{A.E.a.c}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_x}{L^3} - \frac{12.E.h.i.I_y}{L^3} - \frac{A.E.b.c}{L}$	$\frac{12.E.f^2.I_x}{L^3} - \frac{12.E.i^2.I_y}{L^3} - \frac{A.E.c^2}{L}$	⑨
$\frac{6.E.d.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	⑩
$\frac{6.E.d.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	⑪
$\frac{6.E.d.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	⑫

De la matriz para un elemento orientado en cualquier dirección las columnas 4, 5 y 6:

④	⑤	⑥	①
$\frac{6.E.d.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	①
$\frac{6.E.d.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	②
$\frac{6.E.d.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	③
$\frac{4.E.d^2.I_x}{L} + \frac{4.E.g^2.I_y}{L} + \frac{G.J.a^2}{L}$	$\frac{4.E.d.e.I_x}{L} + \frac{4.E.g.h.I_y}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$	$\frac{4.E.d.f.I_x}{L} + \frac{4.E.g.i.I_y}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$	④
$\frac{4.E.d.e.I_x}{L} + \frac{4.E.g.h.I_y}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$	$\frac{4.E.h^2.I_y}{L} + \frac{4.E.e^2.I_x}{L} + \frac{G.J.b^2}{L}$	$\frac{4.E.f.e.I_x}{L} + \frac{4.E.h.i.I_y}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$	⑤
$\frac{4.E.d.f.I_x}{L} + \frac{4.E.g.i.I_y}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$	$\frac{4.E.f.e.I_x}{L} + \frac{4.E.h.i.I_y}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$	$\frac{4.E.f^2.I_x}{L} + \frac{4.E.i^2.I_y}{L} + \frac{G.J.c^2}{L}$	⑥
$\frac{6.E.d.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_x}{L^2} - \frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	⑦
$\frac{6.E.d.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_x}{L^2} - \frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	⑧
$\frac{6.E.d.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_x}{L^2} - \frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	⑨
$\frac{2.E.d^2.I_x}{L} + \frac{2.E.g^2.I_y}{L} - \frac{G.J.a^2}{L}$	$\frac{2.E.d.e.I_x}{L} + \frac{2.E.g.h.I_y}{L} - \frac{G.J.a.b}{L}$	$\frac{2.E.d.f.I_x}{L} + \frac{2.E.g.i.I_y}{L} - \frac{G.J.a.c}{L}$	⑩
$\frac{2.E.d.e.I_x}{L} + \frac{2.E.g.h.I_y}{L} - \frac{G.J.a.b}{L}$	$\frac{2.E.h^2.I_y}{L} + \frac{2.E.e^2.I_x}{L} - \frac{G.J.b^2}{L}$	$\frac{2.E.f.e.I_x}{L} + \frac{2.E.h.i.I_y}{L} - \frac{G.J.b.c}{L}$	⑪
$\frac{2.E.d.f.I_x}{L} + \frac{2.E.g.i.I_y}{L} - \frac{G.J.a.c}{L}$	$\frac{2.E.f.e.I_x}{L} + \frac{2.E.h.i.I_y}{L} - \frac{G.J.b.c}{L}$	$\frac{2.E.f^2.I_x}{L} + \frac{2.E.i^2.I_y}{L} - \frac{G.J.c^2}{L}$	⑫

De la matriz para un elemento orientado en cualquier dirección las columnas 7, 8 y 9:

(7)			(8)			(9)			
$\frac{12.E.d^2.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a^2}{L}$	$\frac{12.E.d.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.h.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.d.f.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.c}{L}$	(1)
$\frac{12.E.d.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.h.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.h^2.I_x}{L^3}$	$\frac{12.E.e^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b^2}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.h.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b.c}{L}$	(2)
$\frac{12.E.d.f.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.c}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.h.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b.c}{L}$	$\frac{12.E.f^2.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.i^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.c^2}{L}$	(3)
	$\frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.g.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.h.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.i.I_z}{L^2}$		(4)
	$\frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_z}{L^2}$		(5)
	$\frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_z}{L^2}$		(6)
$\frac{12.E.d^2.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a^2}{L}$	$\frac{12.E.d.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.h.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.d.f.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.c}{L}$	(7)
$\frac{12.E.d.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.h.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.b}{L}$	$\frac{12.E.h^2.I_x}{L^3}$	$\frac{12.E.e^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b^2}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.h.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b.c}{L}$	(8)
$\frac{12.E.d.f.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.g.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.a.c}{L}$	$\frac{12.E.f.e.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.h.i.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.b.c}{L}$	$\frac{12.E.f^2.I_z}{L^3}$	$\frac{12.E.i^2.I_y}{L^3}$	$\frac{A.E.c^2}{L}$	(9)
	$\frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.g.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_z}{L^2}$		(10)
	$\frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.h.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_z}{L^2}$		(11)
	$\frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.i.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_z}{L^2}$		(12)

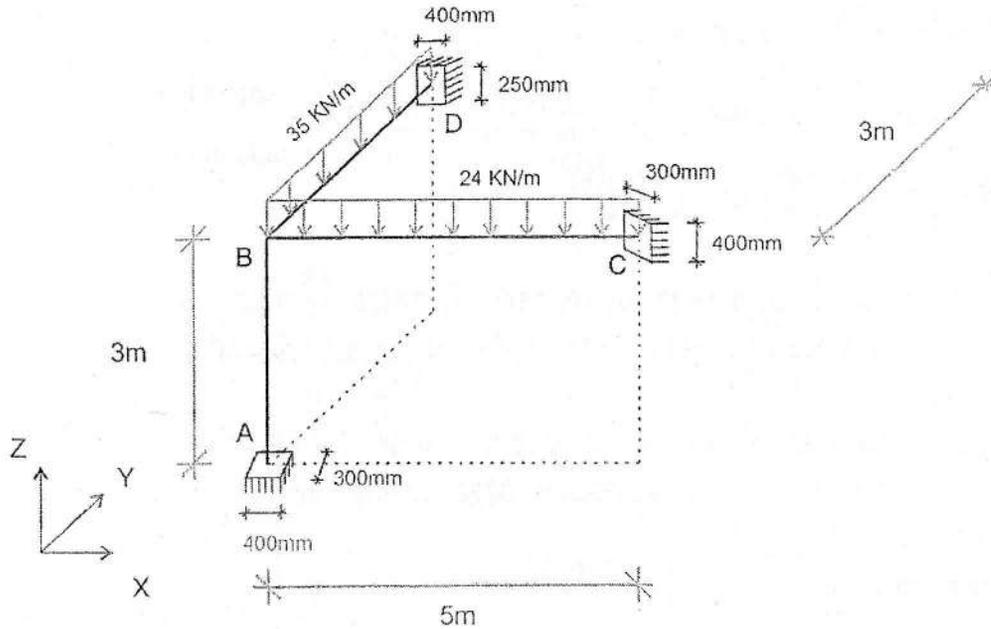
De la matriz para un elemento orientado en cualquier dirección las columnas 10, 11 y 12:

(10)			(11)			(12)			
$\frac{6.E.d.g.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.g.e.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.f.g.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$		(1)
$\frac{6.E.d.h.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.h.e.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.f.h.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$		(2)
$\frac{6.E.d.i.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.i.e.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$		$\frac{6.E.f.i.I_z}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$		(3)
$\frac{2.E.d^2.I_y}{L} + \frac{2.E.g^2.I_z}{L} + \frac{G.J.a^2}{L}$			$\frac{2.E.d.e.I_y}{L} + \frac{2.E.g.h.I_z}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$			$\frac{2.E.d.f.I_y}{L} + \frac{2.E.g.i.I_z}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$			(4)
$\frac{2.E.d.e.I_y}{L} + \frac{2.E.g.h.I_z}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$			$\frac{2.E.h^2.I_x}{L} + \frac{2.E.e^2.I_y}{L} + \frac{G.J.b^2}{L}$			$\frac{2.E.f.e.I_y}{L} + \frac{2.E.h.i.I_z}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$			(5)
$\frac{2.E.d.f.I_y}{L} + \frac{2.E.g.i.I_z}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$			$\frac{2.E.f.e.I_y}{L} + \frac{2.E.h.i.I_z}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$			$\frac{2.E.f^2.I_z}{L} + \frac{2.E.i^2.I_y}{L} + \frac{G.J.c^2}{L}$			(6)
	$\frac{6.E.d.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.g.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.g.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.h.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.g.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.d.i.I_z}{L^2}$	(7)
	$\frac{6.E.d.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.g.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.h.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.h.e.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.h.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.i.e.I_z}{L^2}$	(8)
	$\frac{6.E.d.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.g.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.i.e.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.h.I_z}{L^2}$		$\frac{6.E.f.i.I_y}{L^2}$	$\frac{6.E.f.i.I_z}{L^2}$	(9)
$\frac{4.E.d^2.I_y}{L} + \frac{4.E.g^2.I_z}{L} + \frac{G.J.a^2}{L}$			$\frac{4.E.d.e.I_y}{L} + \frac{4.E.g.h.I_z}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$			$\frac{4.E.d.f.I_y}{L} + \frac{4.E.g.i.I_z}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$			(10)
$\frac{4.E.d.e.I_y}{L} + \frac{4.E.g.h.I_z}{L} + \frac{G.J.a.b}{L}$			$\frac{4.E.h^2.I_x}{L} + \frac{4.E.e^2.I_y}{L} + \frac{G.J.b^2}{L}$			$\frac{4.E.f.e.I_y}{L} + \frac{4.E.h.i.I_z}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$			(11)
$\frac{4.E.d.f.I_y}{L} + \frac{4.E.g.i.I_z}{L} + \frac{G.J.a.c}{L}$			$\frac{4.E.f.e.I_y}{L} + \frac{4.E.h.i.I_z}{L} + \frac{G.J.b.c}{L}$			$\frac{4.E.f^2.I_z}{L} + \frac{4.E.i^2.I_y}{L} + \frac{G.J.c^2}{L}$			(12)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01: Resuelva matricialmente el pórtico de la figura. Despreciar la deformación axial y de corte ($EA = \infty$; $\phi = 0$)

$E = 22 \text{ KN/mm}^2 \leftrightarrow 22 \times 10^6 \text{ /KN/m}^2$; $G = 8.5 \text{ KN/mm}^2 \leftrightarrow 8.5 \times 10^6 \text{ /KN/m}^2$



Solución:

1. Cálculos Previos:

Elemento 1:

$$A = 0.30 \times 0.40 = 0.12 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{0.30 \times 0.40^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{0.40 \times 0.30^3}{12} = 0.0009 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

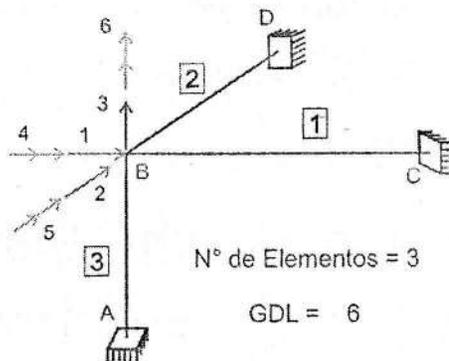
$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.40} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.40} \right)^4 \right] = 0.179986$$

$$J = 0.179986 \times (0.40) \times (0.30)^3 = 1.94385 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (1.94385 \times 10^{-3}) = 16522.725 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_y = 22 \times 10^6 \times (0.0016) = 35200 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_z = 22 \times 10^6 \times (0.0009) = 19800 \text{ KN} - \text{m}^2$$



Nº de Elementos = 3

GDL = 6

b = lado mayor

t = lado menor

Elemento 2:

$$A = 0.40 \times 0.25 = 0.10 \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{0.40 \times 0.25^3}{12} = 5.208333 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{0.25 \times 0.40^3}{12} = 1.333333 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.40} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.40} \right)^4 \right] = 0.203752$$

$$J = 0.203752 \times (0.40) \times (0.25)^3 = 1.273450 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (1.273450 \times 10^{-3}) = 10824.325 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_x = 22 \times 10^6 \times (5.208333 \times 10^{-4}) = 11458.3326 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_z = 22 \times 10^6 \times (1.333333) = 29333.326 \text{ KN} - \text{m}^2$$

Elemento 3:

$$A = 0.30 \times 0.40 = 0.12 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{0.30 \times 0.40^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$$

$$I_x = \frac{0.40 \times 0.30^3}{12} = 0.0009 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.40} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.40} \right)^4 \right] = 0.179986$$

$$J = 0.179986 \times (0.40) \times (0.30)^3 = 1.943850 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

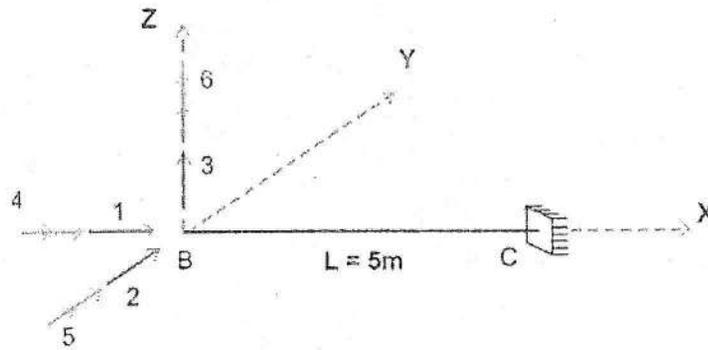
$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (1.94385 \times 10^{-3}) = 16522.725 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_y = 22 \times 10^6 \times (0.0016) = 35200 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$E I_x = 22 \times 10^6 \times (0.0009) = 19800 \text{ KN} - \text{m}^2$$

2. Matriz de Rigidez de los elementos

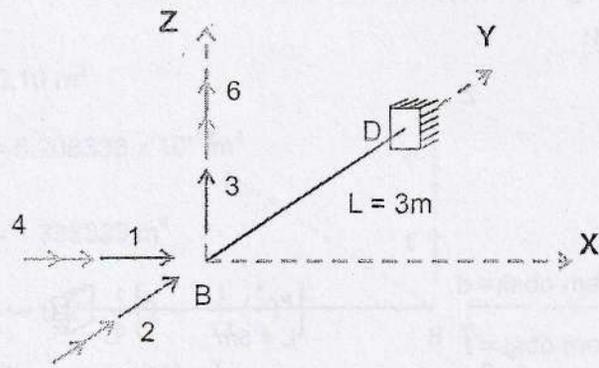
Elemento 1:



$$\tilde{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix} (6 \times 6)$$

$$\tilde{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{1} \\ 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752 & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -8448 & 0 & \textcircled{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3304.545 & 0 & 0 & \textcircled{4} \\ 0 & 0 & -8448 & 0 & 28160 & 0 & \textcircled{5} \\ 0 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 15840 & \textcircled{6} \end{bmatrix}$$

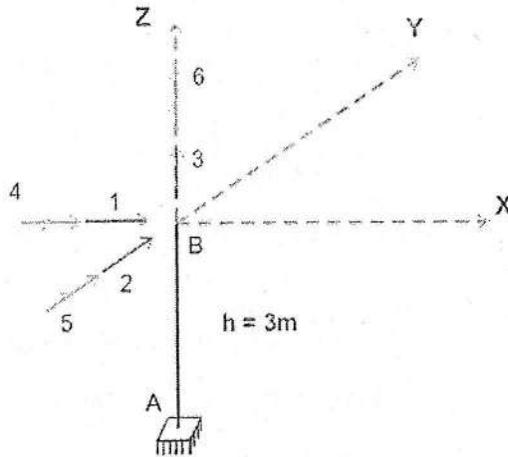
Elemento 2:



$$\tilde{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EIx}{L^3} & \frac{6EIx}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EIx}{L^2} & \frac{4EIx}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix} (6 \times 6)$$

	①	②	③	④	⑤	⑥	
①	13037.03378	0	0	0	0	-19555.55067	①
②	0	733333.3333	0	0	0	0	②
③	0	0	5092.592267	7638.8884	0	0	③
④	0	0	7638.8884	15277.7768	0	0	④
⑤	0	0	0	0	3608.108333	0	⑤
⑥	-19555.55067	0	0	0	0	39111.10133	⑥

Elemento 3:



$$\tilde{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{12Ely}{h^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6Ely}{h^2} & 0 \\ 0 & \frac{12Elx}{h^3} & 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6Elx}{h^2} & 0 & \frac{4Elx}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{6Ely}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4Ely}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{h} \end{bmatrix} (6 \times 6)$$

$$\tilde{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 15644.44444 & 0 & 0 & 0 & -23466.66667 & 0 \\ 0 & 8800 & 0 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 880000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13200 & 0 & 26400 & 0 & 0 \\ -23446.66667 & 0 & 0 & 0 & 46933.33333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5507.575 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

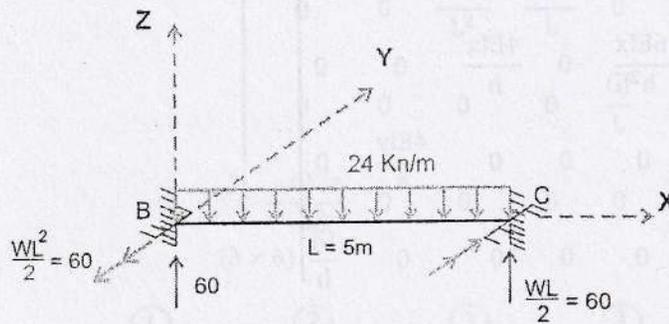
3. Matriz de Rigidez de la Estructura

$$\tilde{k}^{(T)} = \begin{bmatrix} 556681.4782 & 0 & 0 & 0 & -23466.66667 & -19555.55067 \\ 0 & 744038.1333 & 0 & 13200 & 0 & 4752 \\ 0 & 0 & 888471.7923 & 7638.8884 & -8448 & 0 \\ 0 & 13200 & 7638.8884 & 44982.3218 & 0 & 0 \\ -23446.66667 & 0 & -8448 & 0 & 78701.44166 & 0 \\ -19555.55067 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 60458.67633 \end{bmatrix} (6 \times 6)$$

4. Vector de Fuerzas Externas de Nudos: \tilde{F}

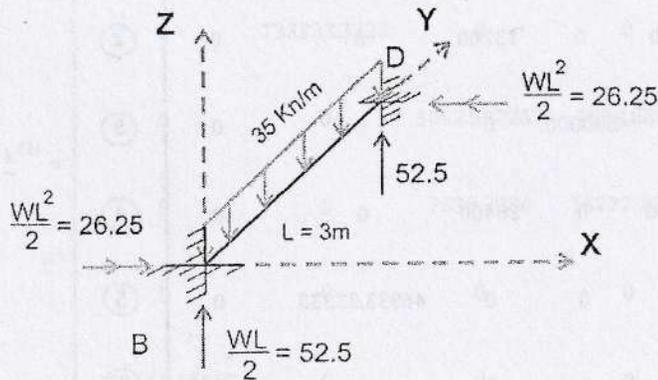
5. Vector de Fuerzas de Empotramiento Perfectos:

Elemento 1:



$$\tilde{f}_o^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

Elemento 2:



$$\tilde{f}_o^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.50 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

Ensamblando el vector de fuerzas de empotramiento de la estructura se obtiene:

$$\underline{f}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 112.50 \\ 26.25 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Vector de Fuerzas Externas del Sistema

$$\underline{f} = \underline{f}_n - \underline{f}_o$$

$$\therefore \underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -112.50 \\ -26.25 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Vector de Desplazamiento de la Estructura:

$$\underline{f} = \underline{k} \cdot \underline{u}$$

$$\therefore \underline{u} = \begin{pmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ rad \\ rad \\ rad \end{matrix}$$

8. Vector de Fuerzas Internas de los Elementos

$$\underline{f}^e = \underline{f}_o^e + \underline{k}^e \cdot \underline{u}^e$$

Elemento 1:

$$\underline{f}^1 = \underline{f}_o^1 + \underline{k}^1 \cdot \underline{u}^1$$

Después de remplazar los valores para el elemento 1 se obtiene:

$$\underline{f}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752 \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -8448 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3304.545 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8448 & 0 & 28160 & 0 \\ 0 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 15840 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

El vector de Fuerza Interna para el elemento 1 será:

$$\tilde{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 14.189 \\ 0.057 \\ 54.279 \\ -1.873 \\ -31.256 \\ 0.173 \end{pmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KN \\ KN - m \\ KN - m \\ KN - m \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\tilde{f}^2 = f_o^2 + k^2 \cdot u^2$$

Después de remplazar los valores para el elemento 2 se obtiene:

$$\tilde{f}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.50 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752 \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -8448 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3304.545 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8448 & 0 & 28160 & 0 \\ 0 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 15840 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

El vector de Fuerza Interna para el elemento 2 será:

$$\tilde{f}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.196 \\ 7.338 \\ 47.5805 \\ 16.706 \\ 2.276 \\ -0.216 \end{pmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KN \\ KN - m \\ KN - m \\ KN - m \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$\tilde{f}^3 = f_o^3 + k^3 \cdot u^3$$

Después de remplazar los valores para el elemento 3 se obtiene:

$$\tilde{f}^3 = \begin{bmatrix} 15644.44444 & 0 & 0 & 0 & -23466.6667 & 0 \\ 0 & 8800 & 0 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 880000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13200 & 0 & 26400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46833.33333 & 0 \\ -23466.66667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6507.575 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

El vector de Fuerza Interna para el elemento 3 será:

$$\tilde{f}^{(3)} = \begin{pmatrix} -14.385 \\ -7.394 \\ -101.859 \\ -14.833 \\ 28.980 \\ 0.044 \end{pmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KN \\ KN - m \\ KN - m \\ KN - m \end{matrix}$$

DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE (Unidades: KN)

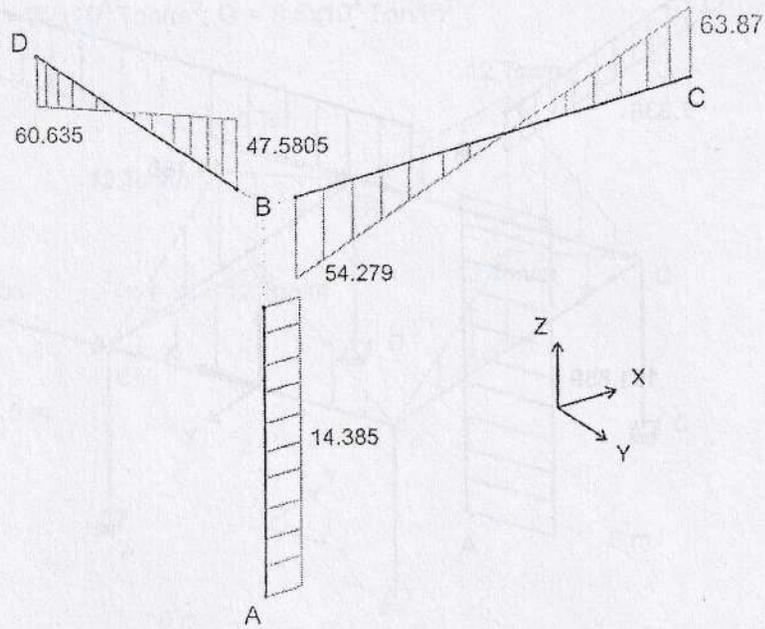


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES (Unidades: KN - m)

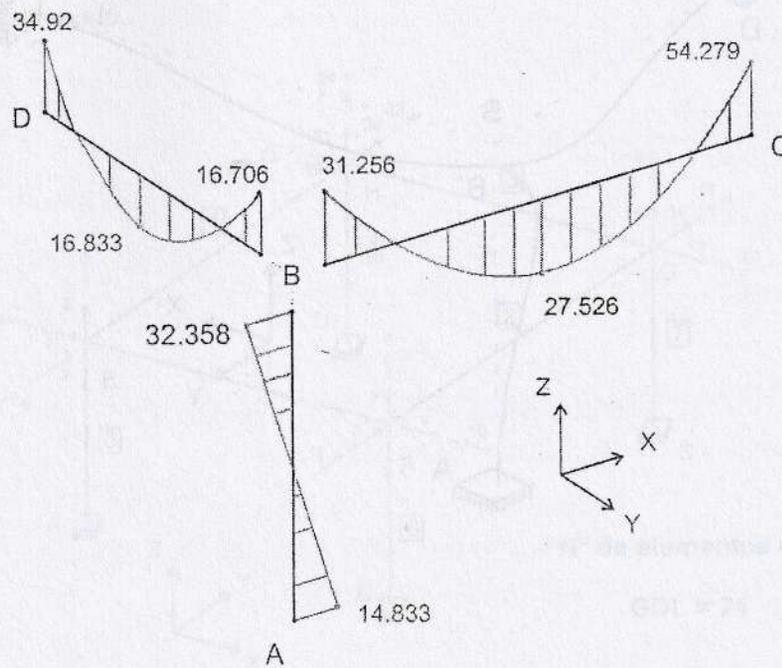


DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL (Unidades: KN)

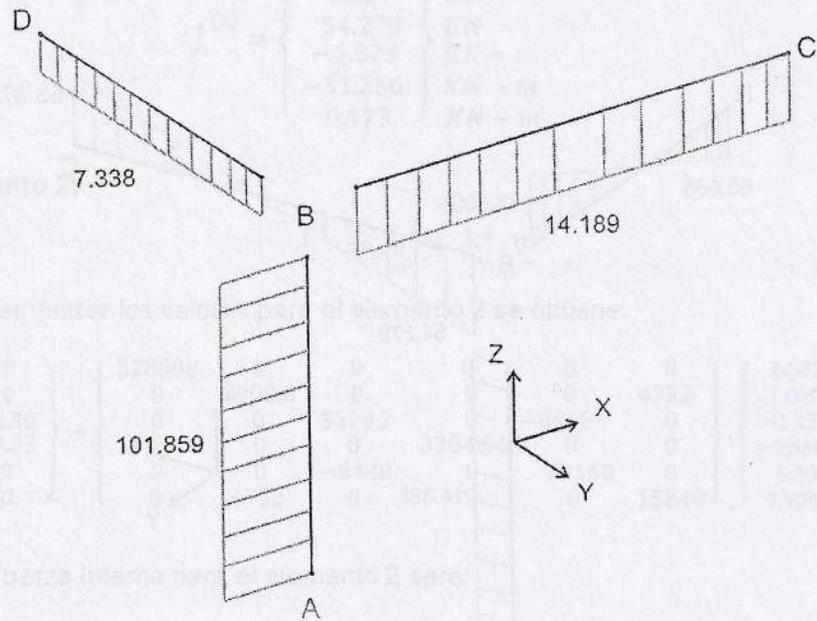
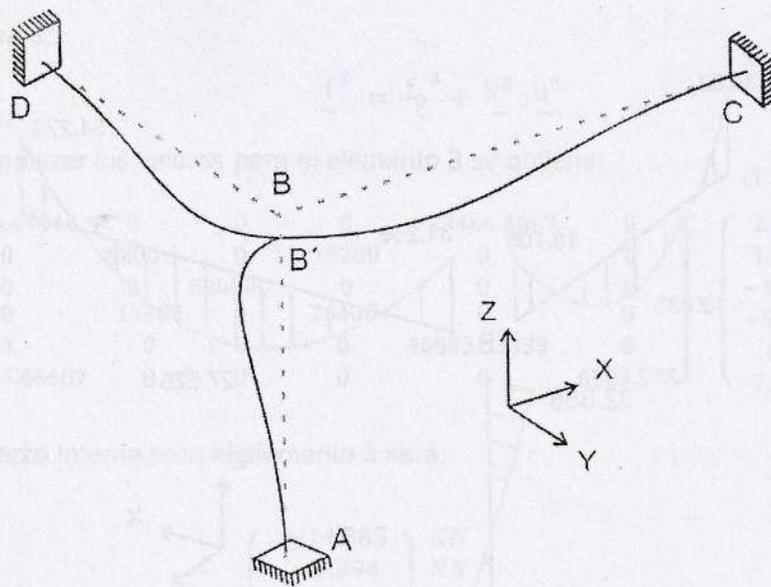
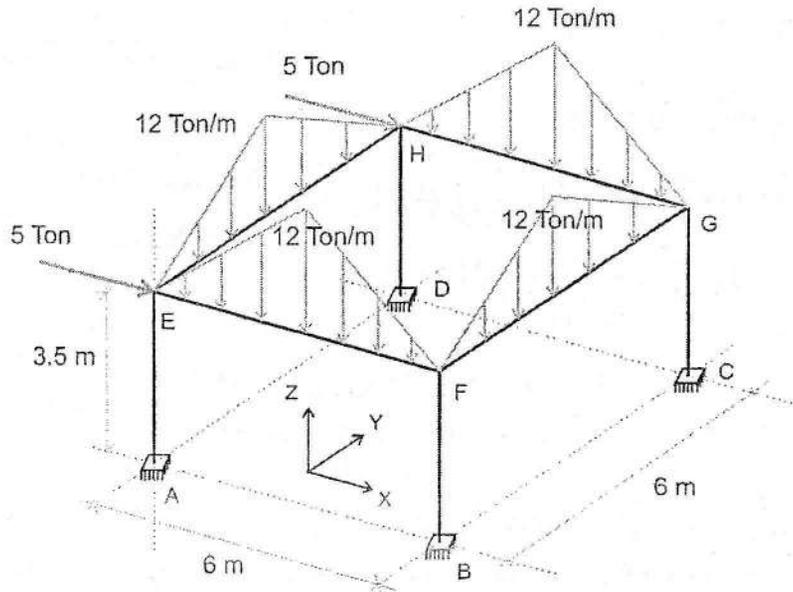


DIAGRAMA DE LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA



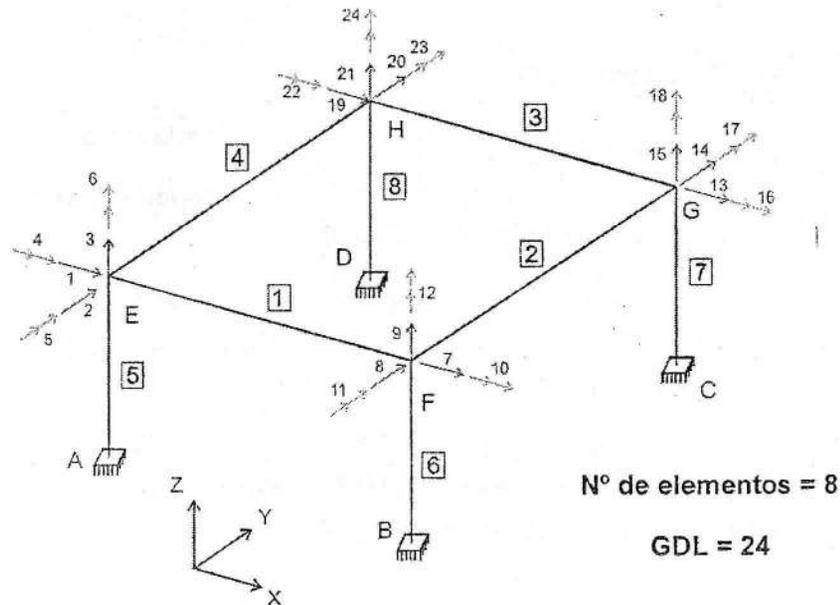
PROBLEMA 02: En el esquema siguiente se muestra el sistema aporticado, todas las columnas son de la misma altura, el cual soporta el sistema de cargas como se muestra, se pide determinar los giros y las reacciones en los extremos de los elementos. $E = 22 \times 10^6 \text{ Ton/m}^2$; $G = 8.5 \times 10^6 \text{ Ton/m}^2$



Las secciones son: Columnas: $0.30 \times 0.30 \text{ m}^2$; Vigas: $0.30 \times 0.60 \text{ m}^2$

SOLUCION:

Para la solución tendremos la siguiente configuración y numeración de elementos con sus GDL en cada nudo.



1. Cálculos Previos

Elementos 1 y 3:

$$A = 0.30 \times 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{0.30 \times 0.60^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{0.60 \times 0.30^3}{12} = 0.00135 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.60} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.60} \right)^4 \right] = 0.22888$$

$$J = 0.22888 \times (0.60) \times (0.30)^3 = 0.003708 \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (0.003708) = 31518 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$E I_y = 22 \times 10^6 \times (0.0054) = 118800 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$E I_z = 22 \times 10^6 \times (0.00135) = 29700 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

Elementos 2 y 4:

$$A = 0.30 \times 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{0.30 \times 0.60^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{0.60 \times 0.30^3}{12} = 0.00135 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.60} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.60} \right)^4 \right] = 0.22888$$

$$J = 0.22888 \times (0.60) \times (0.30)^3 = 0.003708 \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (0.003708) = 31518 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$E I_x = 22 \times 10^6 \times (0.0054) = 118800 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$E I_z = 22 \times 10^6 \times (0.00135) = 29700 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

Elementos 5 y 6:

$$A = 0.30 \times 0.30 = 0.09 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{0.30 \times 0.30^3}{12} = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$I_x = \frac{0.30 \times 0.30^3}{12} = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.30} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.30} \right)^4 \right] = 0.140833$$

$$J = 0.140833 \times (0.30) \times (0.30)^3 = 0.001141 \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (0.001141) = 9698.5 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$Ely = 22 \times 10^6 \times (0.000675) = 14850 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$Elx = 22 \times 10^6 \times (0.000675) = 14850 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

Elementos 7 y 8:

$$A = 0.30 \times 0.30 = 0.09 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{0.30 \times 0.30^3}{12} = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$I_x = \frac{0.30 \times 0.30^3}{12} = 0.000675 \text{ m}^4$$

$$J = C \cdot b \cdot t^3, C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]$$

b = lado mayor

t = lado menor

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \cdot \frac{0.30}{0.30} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.30}{0.30} \right)^4 \right] = 0.140833$$

$$J = 0.140833 \times (0.30) \times (0.30)^3 = 0.001141 \text{ m}^4$$

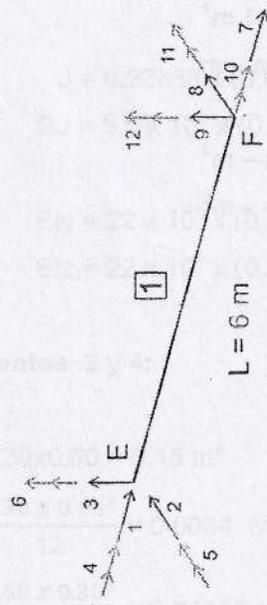
$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times (0.001141) = 9698.5 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$Ely = 22 \times 10^6 \times (0.000675) = 14850 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

$$Elx = 22 \times 10^6 \times (0.000675) = 14850 \text{ Ton} - \text{m}^2$$

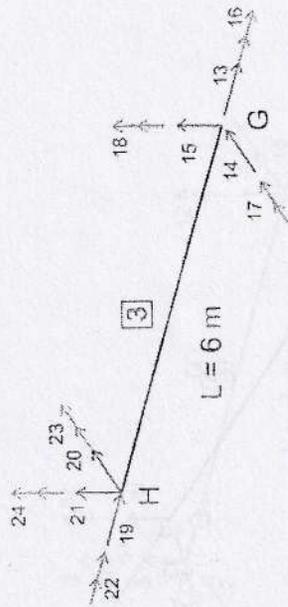
2. Matriz de Rigidez de los Elementos

Elemento 1:



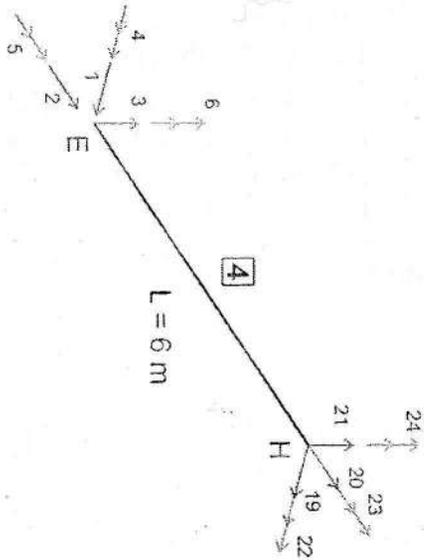
$$k^1 = \begin{bmatrix} 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6600 & 0 & -19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & -19800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5252.8008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.8008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 0 & 79200 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & -39600 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 9900 \\ -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 660000 & 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 \\ 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5252.8008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5252.8008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 0 & 39600 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & -79200 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:



$$k^3 = \begin{bmatrix} \textcircled{19} & \textcircled{20} & \textcircled{21} & \textcircled{22} & \textcircled{23} & \textcircled{24} & \textcircled{13} & \textcircled{14} & \textcircled{15} & \textcircled{16} & \textcircled{17} & \textcircled{18} \\ 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & 4950 & 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & 4950 \\ 0 & 0 & 6600 & 0 & -19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & -19800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5252.8008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.8008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 79200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & 39600 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 9900 \\ -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 & 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 \\ 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5252.8008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5252.8008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 0 & 39600 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & 79200 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 9900 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 \end{bmatrix}$$

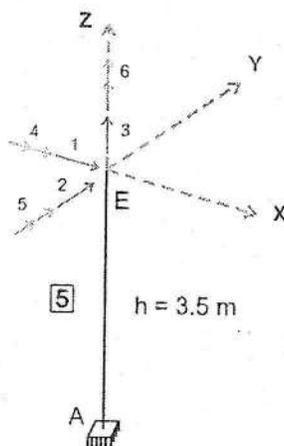
Elementos 4:



$$k^4 =$$

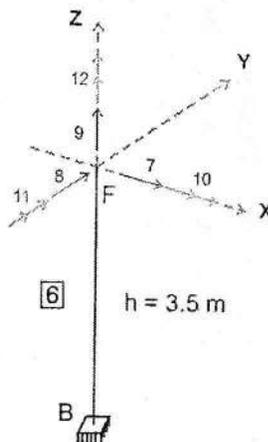
①	②	③	④	⑤	⑥	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔
1650	0	0	0	0	-4950	-1650	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4950
0	660000	0	0	0	0	-660000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	6600	19800	0	0	-6600	19800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	19800	79200	0	0	-19800	39600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	5252.80078	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4950	0	0	0	0	19800	4950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9900
-1650	0	0	0	0	4950	1650	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4950
0	-660000	0	0	0	0	660000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-6600	-19800	0	0	6600	19800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	19800	39600	0	0	-19800	79200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-5252.80078	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4950	0	0	0	0	9900	4950	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19800

Elemento 5:



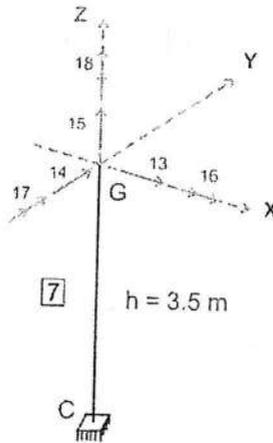
$$\tilde{k}^{(5)} = \begin{bmatrix}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\
 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\
 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\
 -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \\
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6}
 \end{bmatrix}$$

Elemento 6:



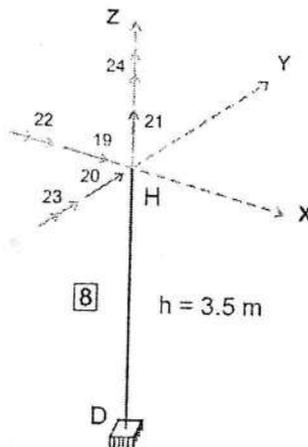
$$\tilde{k}^{(6)} = \begin{bmatrix}
 \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12} \\
 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\
 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\
 -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \\
 \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12}
 \end{bmatrix}$$

Elemento 7:



$$\tilde{k}^{(7)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{13} & \textcircled{14} & \textcircled{15} & \textcircled{16} & \textcircled{17} & \textcircled{18} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \\ \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \\ \textcircled{18} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 8:

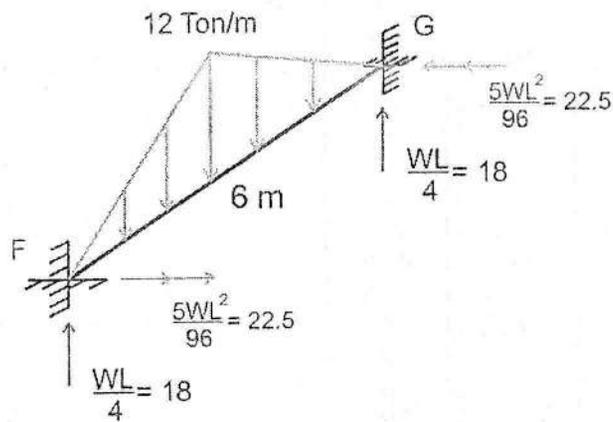


$$\tilde{k}^{(8)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{19} & \textcircled{20} & \textcircled{21} & \textcircled{22} & \textcircled{23} & \textcircled{24} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{19} \\ \textcircled{20} \\ \textcircled{21} \\ \textcircled{22} \\ \textcircled{23} \\ \textcircled{24} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Matriz de Rigidez de la Estructura

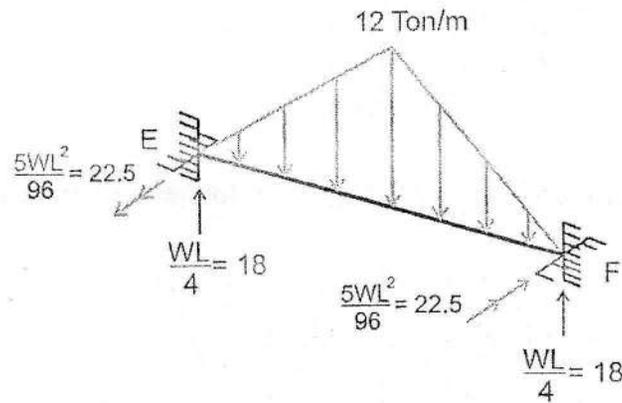
665806.268	0	0	0	-7273.46939	-4950	-654193.732	0	0	0	-7273.46939	-4950
0	665806.268	0	7273.46939	0	4950	0	662506.268	0	7273.46939	0	4950
0	0	578914.286	19800	-19800	0	0	0	565714.286	19800	-19800	0
0	7273.46939	19800	101424.229	0	0	0	7273.46939	19800	90918.6278	0	0
-7273.46939	0	-19800	0	101424.229	0	-7273.46939	0	19800	0	61824.2294	0
-4950	4950	0	0	0	42370.3929	-4950	-4950	0	0	0	32470.3929
-654193.732	0	0	0	-7273.46939	-4950	665806.268	0	0	0	-7273.46939	-4950
0	662506.268	0	7273.46939	0	-4950	0	665806.268	0	7273.46939	0	-4950
0	0	565714.286	19800	19800	0	0	0	565714.286	19800	19800	0
0	7273.46939	19800	90918.6278	0	0	0	7273.46939	19800	101424.229	0	0
-7273.46939	0	-19800	0	61824.2294	0	-7273.46939	0	19800	0	101424.229	0
-4950	4950	0	0	0	32470.3929	-4950	-4950	0	0	0	42370.3929
-657493.732	0	0	0	-7273.46939	4950	662506.268	0	0	0	-7273.46939	4950
0	-657493.732	0	7273.46939	0	-4950	0	-654193.732	0	7273.46939	0	-4950
0	0	552514.286	-19800	19800	0	0	0	552514.286	-19800	19800	0
0	7273.46939	19800	51318.6278	0	0	0	7273.46939	19800	61824.2294	0	0
-7273.46939	0	-19800	0	51318.6278	0	-7273.46939	0	19800	0	90918.6278	0
-4950	4950	0	0	0	22570.3929	-4950	-4950	0	0	0	32470.3929
662506.268	0	0	0	-7273.46939	4950	-657493.732	0	0	0	-7273.46939	4950
0	-654193.732	0	7273.46939	0	4950	0	-657493.732	0	7273.46939	0	4950
0	0	565714.286	-19800	-19800	0	0	0	552514.286	-19800	-19800	0
0	7273.46939	19800	61824.2294	0	0	0	7273.46939	19800	51318.6278	0	0
-7273.46939	0	-19800	0	90918.6278	0	-7273.46939	0	19800	0	51318.6278	0
-4950	4950	0	0	0	32470.3929	-4950	-4950	0	0	0	22570.3929

Elemento 2:



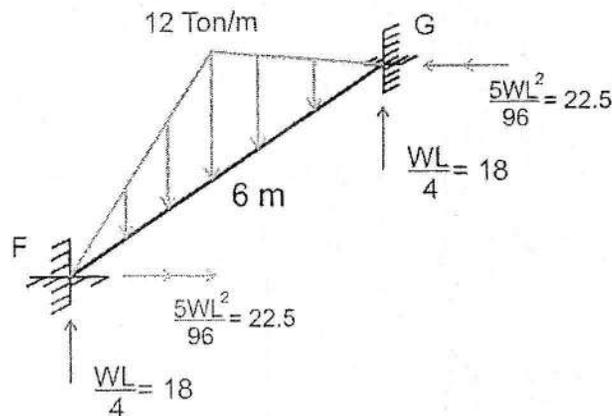
$$\tilde{f}_o^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \\ \textcircled{10} \\ \textcircled{11} \\ \textcircled{12} \\ \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \\ \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \\ \textcircled{18} \end{matrix}$$

Elemento 3:



$$\tilde{f}_o^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ 22.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{19} \\ \textcircled{20} \\ \textcircled{21} \\ \textcircled{22} \\ \textcircled{23} \\ \textcircled{24} \\ \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \\ \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \\ \textcircled{18} \end{matrix}$$

Elemento 4:



$$\tilde{f}_o^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{19} \\ \textcircled{20} \\ \textcircled{21} \\ \textcircled{22} \\ \textcircled{23} \\ \textcircled{24} \end{matrix}$$

Ensamblando todo los valores para el vector de Fuerzas de Empotramiento Perfecto de la estructura:

$$\tilde{f}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \\ 22.5 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -22.5 \\ -22.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. Vector de Fuerzas Externas del Sistema $\tilde{f} = \tilde{f}_n - \tilde{f}_0$

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \\ 22.5 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -22.5 \\ -22.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El vector resultante de Fuerzas Externas será:

$$\therefore \underset{\sim}{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -36 \\ -22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -36 \\ -22.5 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -36 \\ 22.5 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -36 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Vector de Desplazamiento de la Estructura

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{u}$$

$$\therefore \underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} 9.12 \times 10^{-5} & \text{m} \\ -2.16 \times 10^{-5} & \text{m} \\ -4.63 \times 10^{-5} & \text{m} \\ 2.59 \times 10^{-7} & \text{Rad} \\ 1.69 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ -1.42 \times 10^{-5} & \text{Rad} \\ 1.18 \times 10^{-4} & \text{m} \\ 2.16 \times 10^{-5} & \text{m} \\ 1.60 \times 10^{-5} & \text{m} \\ -5.68 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ -2.23 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ -3.62 \times 10^{-5} & \text{Rad} \\ 1.09 \times 10^{-4} & \text{m} \\ 1.41 \times 10^{-5} & \text{m} \\ 2.44 \times 10^{-4} & \text{m} \\ 5.68 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ -3.99 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ 4.81 \times 10^{-5} & \text{Rad} \\ 1.40 \times 10^{-4} & \text{m} \\ -1.41 \times 10^{-5} & \text{m} \\ -2.74 \times 10^{-4} & \text{m} \\ -2.59 \times 10^{-7} & \text{Rad} \\ 3.46 \times 10^{-4} & \text{Rad} \\ 2.61 \times 10^{-5} & \text{Rad} \end{pmatrix}$$

8. Vector de Fuerzas Internas de los Elementos

$$\tilde{f}^e = f_o^e + k^e \cdot \tilde{u}^e$$

Elemento 1:

$$\tilde{f}^1 = f_o^1 + k^1 \cdot \tilde{u}^1$$

Después de remplazar los valores para el elemento 1 se obtiene:

$$\tilde{f}^1 = \begin{bmatrix} 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & 4950 & 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & 4950 & 0 \\ 0 & 0 & 6600 & 0 & -19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & -19800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5252.801 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.800781 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 0 & 79200 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & 39600 & 0 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 9900 & 0 \\ -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 560000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 & 0 & 1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 & 0 \\ 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 0 & 19800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5252.800781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5252.800781 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19800 & 0 & 39600 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & 79200 & 0 & 0 \\ 0 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 9900 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9.1E-05 \\ -2.2E-05 \\ -4.6E-05 \\ 2.6E-07 \\ 1.7E-04 \\ -1.4E-05 \\ 1.2E-04 \\ 2.2E-05 \\ 1.6E-05 \\ -5.7E-04 \\ -2.2E-04 \\ -3.6E-05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ 22.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.812819 \\ -0.321009 \\ 18.647495 \\ 2.9872637 \\ -16.687447 \\ -0.854288 \\ 17.812819 \\ 0.321009 \\ 17.141663 \\ -2.9872626 \\ 12.802476 \\ -1.0717684 \end{bmatrix}$$

KN
KN
KN
KN - m
KN - m
KN - m
KN
KN
KN
KN - m
KN - m
KN - m

Elementos 3:

$$\tilde{f}^3 = f_o^3 + k^3 \tilde{u}^3$$

Después de remplazar los valores para el elemento 3 se obtiene:

$$\tilde{f}^3 = \begin{bmatrix} 1650 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4950 & -1650 & 0 & 0 & 0 & -4950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4950 \\ 0 & 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6600 & 19800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6600 & 19800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19800 & 79200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19800 & 39600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5252.800781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.800781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 4950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19800 \\ -1650 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4950 & 1650 & 0 & 0 & 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 660000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6600 & -19800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6600 & -19800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19800 & 39600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19800 & 79200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.800781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5252.800781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.4003E-04 \\ -1.4050E-05 \\ -2.7443E-04 \\ -2.5859E-07 \\ 3.4562E-04 \\ 2.6124E-05 \\ 1.0925E-04 \\ 1.4050E-05 \\ 2.4412E-04 \\ 5.6844E-04 \\ -3.9907E-04 \\ 4.8092E-05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ 22.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3165929 \\ -18.546242 \\ 25.827508 \\ 12.222285 \\ -18.588265 \\ 0.8410389 \\ 0.0785354 \\ 18.546242 \\ 10.172491 \\ 34.742766 \\ 18.588265 \\ 0.51771493 \end{bmatrix}$$

KN
KN
KN
KN - m
KN - m
KN - m
KN
KN
KN
KN - m
KN - m
KN - m

Elemento 5:

$$\tilde{f}^5 = k^5 \cdot \tilde{u}^5$$

Después de remplazar los valores para el elemento 5 se obtiene:

$$\tilde{f}^5 = \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9.12E-05 \\ -2.16E-05 \\ -4.63E-05 \\ 2.59E-07 \\ 1.69E-04 \\ -1.42E-05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.851068842 \\ -0.088054841 \\ -26.17772537 \\ -0.152998778 \\ 2.206875722 \\ -0.039418519 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \end{matrix}$$

Elemento 6:

$$\tilde{f}^6 = k^6 \cdot \tilde{u}^6$$

Después de remplazar los valores para el elemento 6 se obtiene:

$$\tilde{f}^6 = \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.18E-04 \\ 2.16E-05 \\ 1.60E-05 \\ -5.68E-04 \\ -2.23E-04 \\ -3.62E-05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.109894799 \\ -4.04459822 \\ 9.036062044 \\ -9.489858365 \\ -4.636604594 \\ -0.100277631 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \end{matrix}$$

Elemento 7:

$$\tilde{f}^7 = k^7 \cdot \tilde{u}^7$$

Después de remplazar los valores para el elemento 7 se obtiene:

$$\tilde{f}^7 = \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.092534E-04 \\ 1.405018E-05 \\ 2.441292E-04 \\ 5.684404E-04 \\ -3.990728E-04 \\ 4.809243E-05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.356730304 \\ 4.1929303 \\ 138.1073682 \\ 9.749439505 \\ -7.567487069 \\ 0.133234931 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \end{matrix}$$

Elemento 8:

$$\tilde{f}^8 = k^8 \cdot \tilde{u}^8$$

Después de remplazar los valores para el elemento 8 se obtiene:

$$\tilde{f}^8 = \begin{bmatrix} 4156.268222 & 0 & 0 & 0 & -7273.469388 & 0 \\ 0 & 4156.268222 & 0 & 7273.469388 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565714.2857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7273.469388 & 0 & 16971.42857 & 0 & 0 \\ -7273.469388 & 0 & 0 & 0 & 16971.42857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2770.392857 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.400304E-04 \\ -1.405018E-05 \\ -2.744301E-04 \\ -2.585981E-07 \\ 3.456222E-04 \\ 2.612475E-05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.931868737 \\ -0.060277238 \\ -155.2490316 \\ -0.106582362 \\ 4.847195881 \\ 0.072375819 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \\ \text{KN - m} \end{matrix}$$

DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE (Unidades: KN)

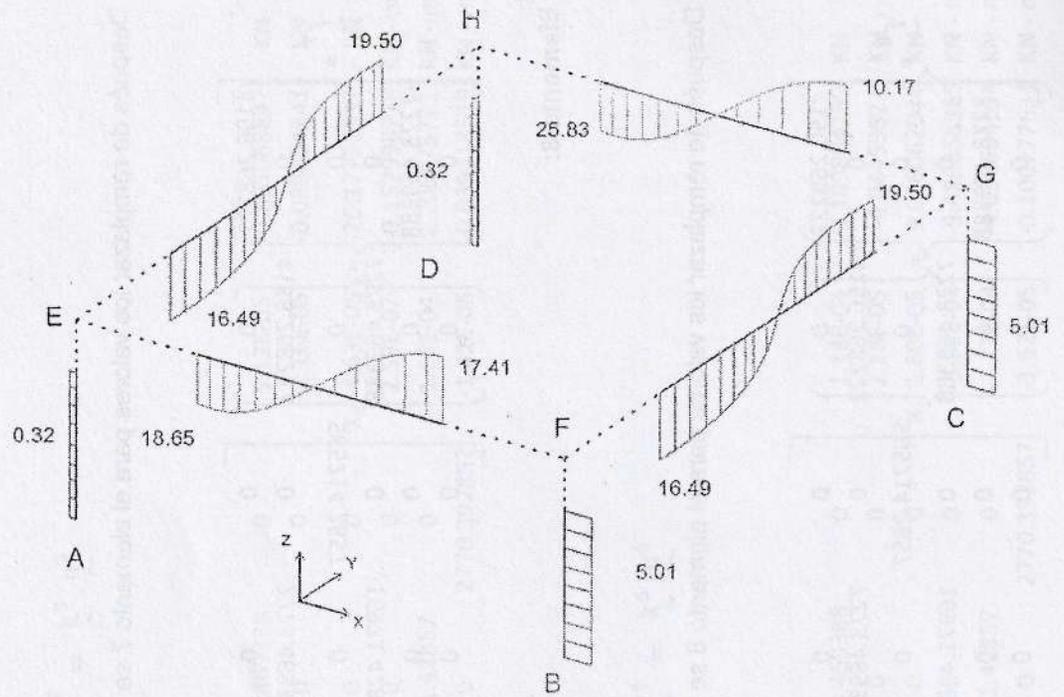


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES (Unidades: KN - m)

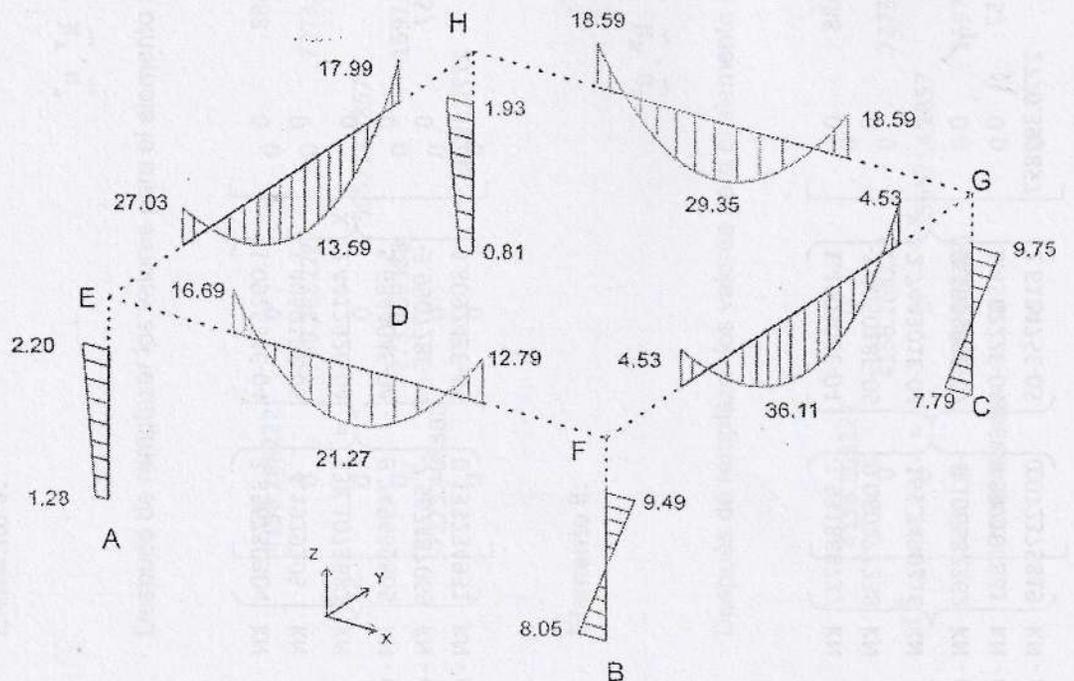


DIAGRAMA DE FUERZA AXIAL (Unidades: KN)

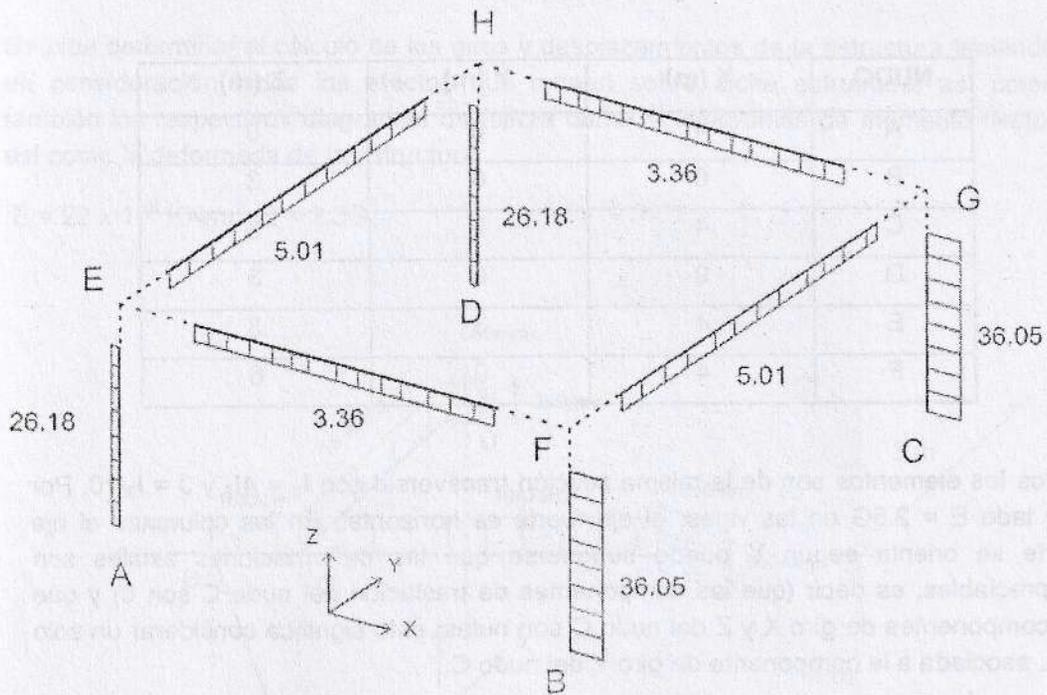
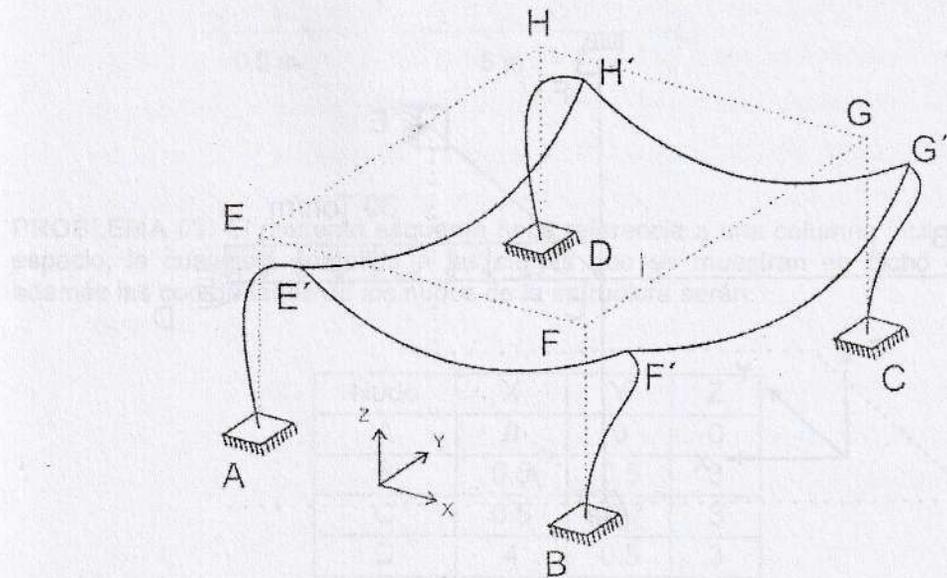


DIAGRAMA DE LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA



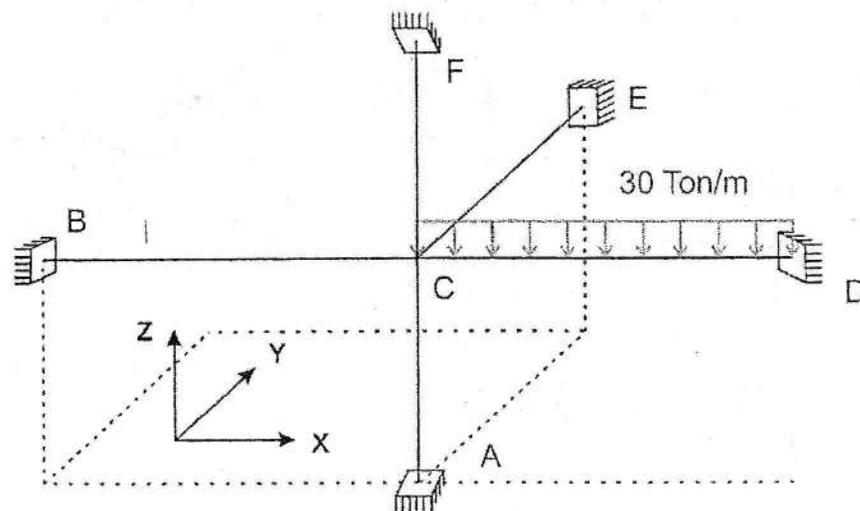
PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 01: Los nudos del pórtico mostrado en la figura, tienen las coordenadas siguientes:

NUDO	X (m)	Y (m)	Z (m)
A	4	0	0
B	0	0	3
C	4	0	3
D	9	0	3
E	4	3	3
F	4	0	6

Todos los elementos son de la misma sección transversal con $I_3 = 4I_2$ y $J = I_3/10$. Por otro lado $E = 2.5G$ en las vigas, el eje fuerte es horizontal. En las columnas el eje fuerte se orienta según Y puede suponerse que las deformaciones axiales son despreciables, es decir (que las componentes de traslación del nudo C son 0) y que las componentes de giro X y Z del nudo C son nulas, esto significa considerar un solo GDL asociada a la componente de giro Y del nudo C.

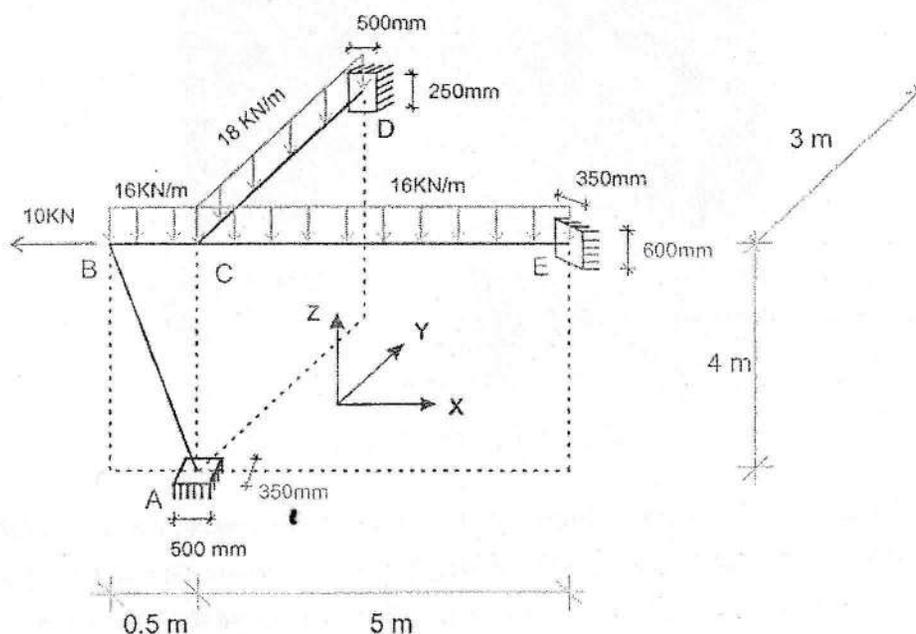
Determine los momentos flectores y torsores en cada elemento.



PROBLEMA 02: La estructura que se muestra a continuación es un pórtico conformado por una columna inclinada en el plano XZ y dos vigas horizontales empotradas como se indica en el esquema de fuerzas representado en la gráfica, incluyendo la fuerza sísmica de 10 KN en el eje X.

Se pide determinar el cálculo de los giros y desplazamientos de la estructura teniendo en consideración todos los efectos que recaen sobre dicha estructura; así como también los respectivos diagramas de fuerza cortante, diagramas de momento flector así como la deformada de la estructura.

$E = 22 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ $E = 2.5G$



PROBLEMA 03: El presente esquema hace referencia a una columna inclinada en el espacio, la cual está sometida a las cargas que se muestran en dicho esquema, además las coordenadas de los nudos de la estructura serán:

Nudo	X	Y	Z
A	0	0	0
B	0.5	0.5	3
C	0.5	-0.7	3
D	4	0.5	3
E	0.5	3	3
F	-0.5	1.5	3

Las secciones de los elementos serán:

En el eje X: $0.30 \times 0.55 \text{ m}^2$

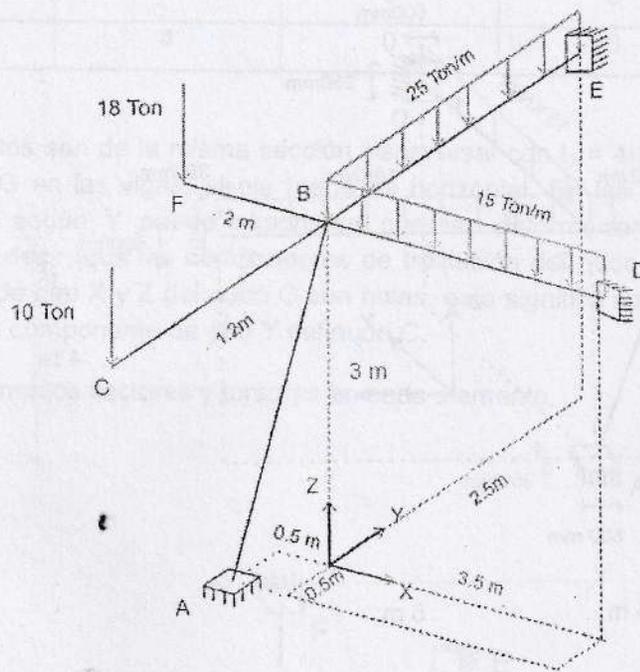
$$E = 2 \times 10^6 \text{ Ton/m}^2$$

En el eje Y: $0.30 \times 0.50 \text{ m}^2$

$\mu = 0.30$, Coeficiente de Poisson

Elemento Inclinado: $0.30 \times 0.40 \text{ m}^2$

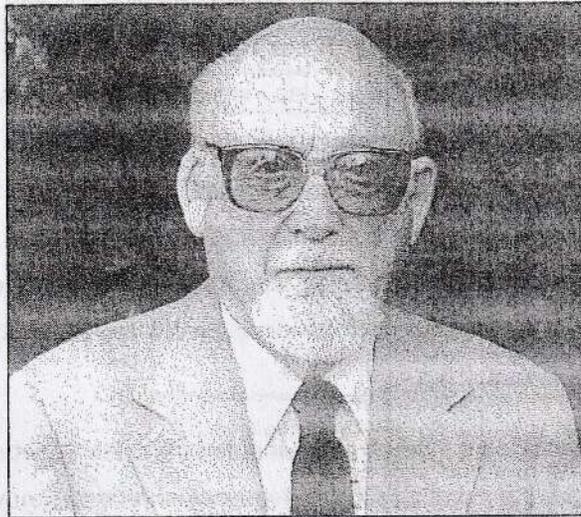
Se pide determinar las reacciones en cada elemento de la estructura así como sus respectivos diagramas de fuerza cortante, momento flector y diagrama axial, así como la respectiva deformada.



Nodo	X	Y	Z
A	0	0	0
B	3.5	3	0.5
C	0	1.2	0
D	3.5	3	3
E	3.5	3	3.5
F	2	3	0.5

CAPÍTULO III

SEUDOTRIDIMENSIONAL



Ing. ERIC REISSNER

Matemático e ingeniero desarrolló la teoría cortante-deformación de la placa, que explica matemáticamente cómo los objetos planos responden a la deformación cuando una fuerza se aplica a ellos. Esto llevó al modelamiento de fuerzas en las superficies como los suelos estructurales y la corteza metálica de las alas del avión, y permitió los adelantos significantes en la ingeniería civil y aeronáutica. Él también dirigió la importante investigación de los principales comportamientos de vigas elásticas, platos y cáscaras.

Aportes:

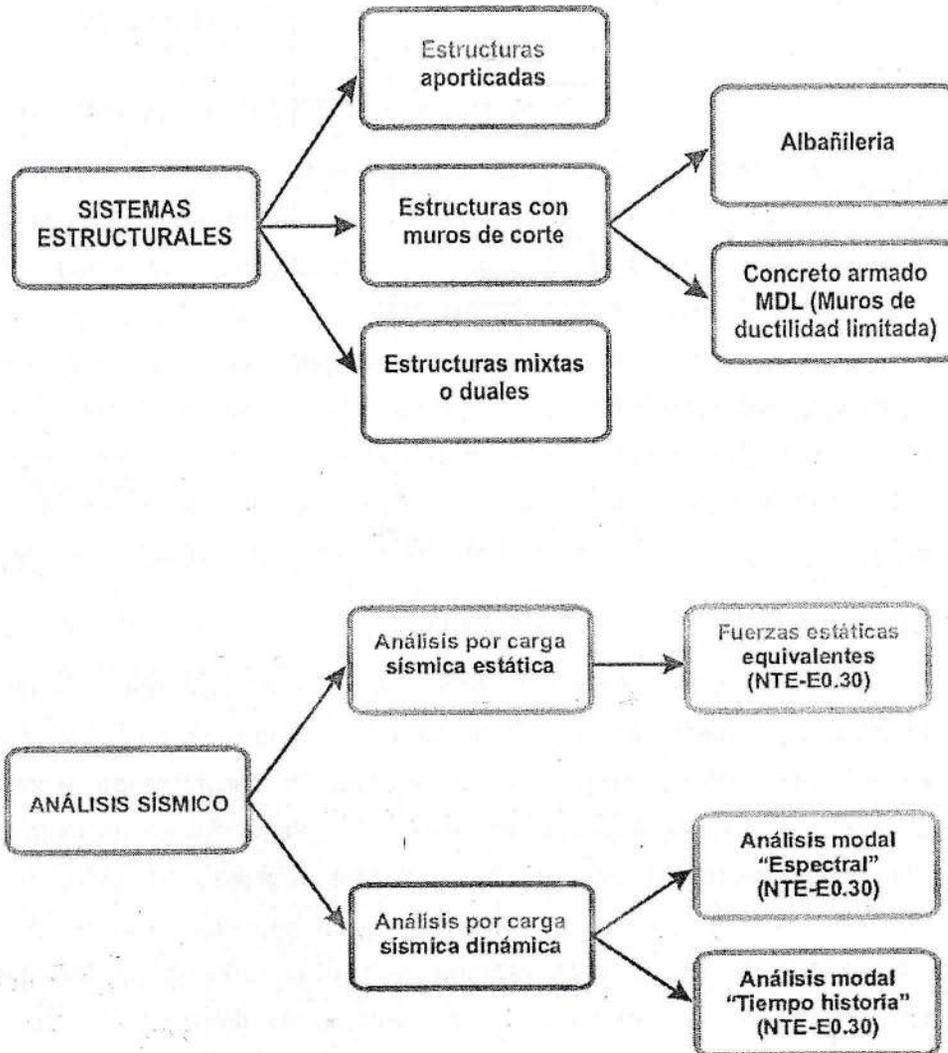
- La teoría para las placas del piso con las deformaciones transversales.
- Los principios de la variación lineal y teoría de elasticidad monolineal.
- Formulación de la ecuación simultánea para las deformaciones finitas axisimétricas de cáscaras elásticas de revolución.

INTRODUCCIÓN

Una estructura espacial puede ser modelada como un ensamble de pórticos planos, con propiedades de rigidez solamente en sus planos respectivos, admitiendo que las rigideces ortogonales a sus planos son bastante menores y pueden no ser consideradas. La hipótesis fundamental es relativa a las losas de piso, las cuales son consideradas como cuerpos rígidos que conectan a los pórticos; elementos de acoplamiento. Para fines del análisis seudo tridimensional, los grados de libertad para las losas de piso son tres: dos traslaciones horizontales y una rotación torsional en planta. De este modo, tampoco se toman en cuenta las deformaciones axiales en las columnas.

Los análisis sísmicos seudo tridimensionales pueden realizarse considerando las dos componentes horizontales del movimiento de la base y, si se trata de fuerzas estáticas equivalentes, dos fuerzas horizontales y un momento de torsión en planta por cada piso, en un punto que generalmente es el centro de masas del piso. La matriz de rigidez del sistema resulta de la suma de las rigideces laterales de cada pórtico, previamente transformadas para ser consistentes con los grados de libertad del entrepiso. El proceso en el que se realiza esta transformación se denomina Condensación Cinemática y se basa en relacionar, en un piso dado, los desplazamientos globales del entrepiso con el desplazamiento lateral de cada pórtico.

DESCRIPCION DEL ANÁLISIS EN 3D



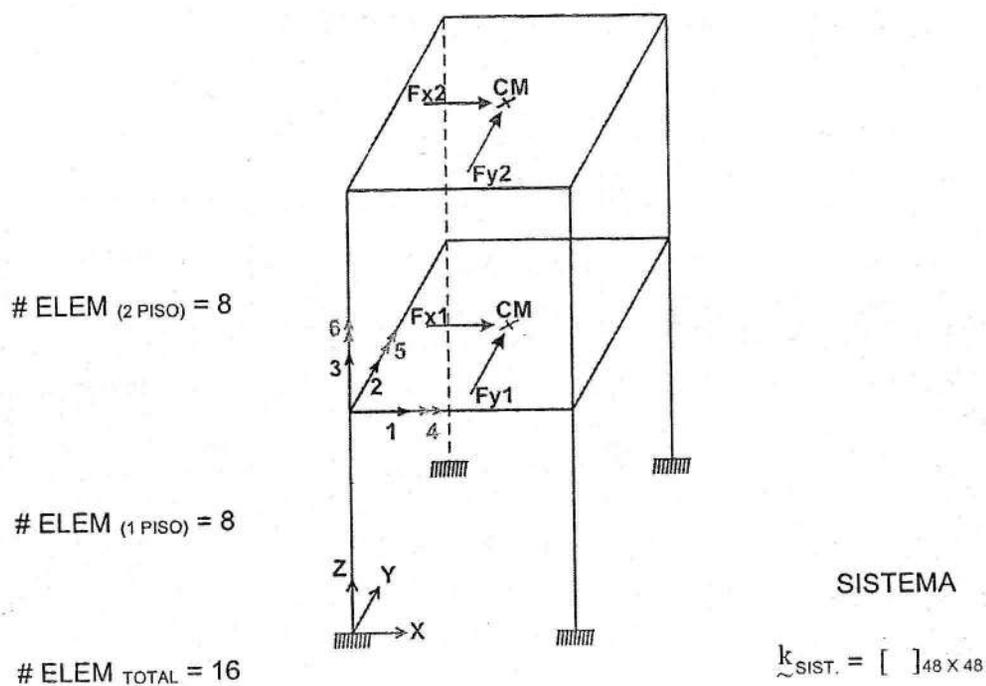
MODELO PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

El modelo para el análisis deberá considerar una distribución espacial de masas y rigidez que sean adecuadas para calcular los aspectos más significativos del comportamiento dinámico de la estructura.

Se tiene un edificio de 2 pisos, aporticado:

$$\tilde{k}_{VIG}^{(e)} = [\quad]_{12 \times 12}$$

$$\tilde{k}_{COL}^{(e)} = [\quad]_{12 \times 12}$$



Si pretendemos analizar el sistema considerando los 48 GDL que presenta la estructura, nos enfrentaríamos a un análisis de cálculo engorroso, por lo que para efectos prácticos simplificaremos el análisis considerando hipótesis razonables como el considerar a las losas como elementos de acoplamiento rígidos (diafragma rígido), así como despreciar las deformaciones axiales de los elementos verticales. En efecto, para edificios en los que se pueda razonablemente suponer que los sistemas de piso funcionan como diafragmas rígidos, se podrá usar un modelo con masas concentradas y 3 GDL por diafragma, asociados a dos componentes ortogonales de traslación horizontal y una rotación en su plano. En tal caso, la distribución en planta de las fuerzas horizontales deberá hacerse en función a las rigideces de los elementos resistentes.

Deberá verificarse que los diafragmas tengan la rigidez y resistencia suficientes para asegurar la distribución mencionada, en caso contrario, deberá tomarse en cuenta su flexibilidad para la distribución de las fuerzas sísmicas.

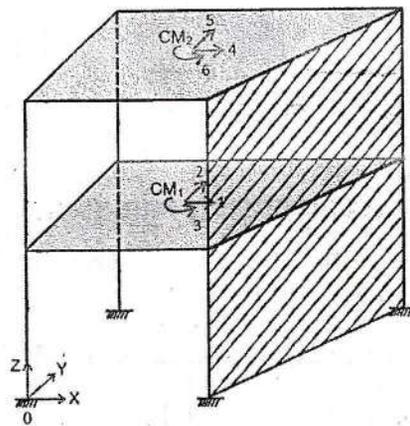
Para los pisos que no constituyan diafragmas rígidos, los elementos resistentes serán diseñados para las fuerzas horizontales que directamente les corresponde.

Bajo estas condiciones de diafragma rígido y de 3 GDL por piso en el modelo estructural o modelo matemático, desarrollaremos lo que se llama el *análisis matricial seudo tridimensional*.

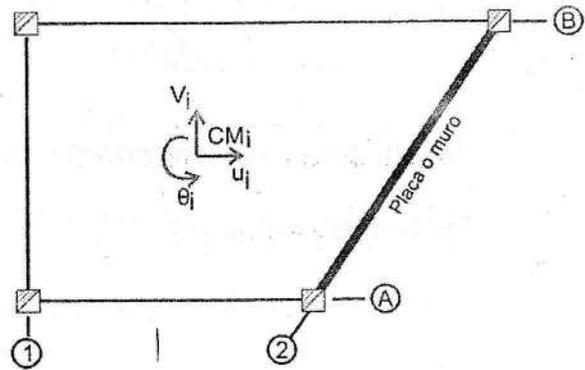
ANÁLISIS MATRICIAL SEUDO TRIDIMENSIONAL

El análisis sísmico seudo tridimensional se realiza para cada dirección independientemente. Se considera diafragma rígido en cada piso y tres grados de libertad por diafragma correspondiente a dos componentes de traslación y una de rotación. Para el análisis sísmico deberá considerarse además de la fuerza de inercia la correspondiente al momento torsor debido a la presencia de la excentricidad directa y el exigido por la norma E-030 como la excentricidad accidental. La matriz de rigidez de la estructura resulta del ensamble de las rigideces de cada piso y estas a su vez serán la suma de las rigideces de los elementos (pórticos que definen los ejes) de cada piso.

- a. Para este caso, se toman como elementos a los pórticos, muros o mixtos, orientados en X-X, Y-Y o X-Y.
- b. Se consideran 3 GDL por piso o diafragma.



ELEVACIÓN

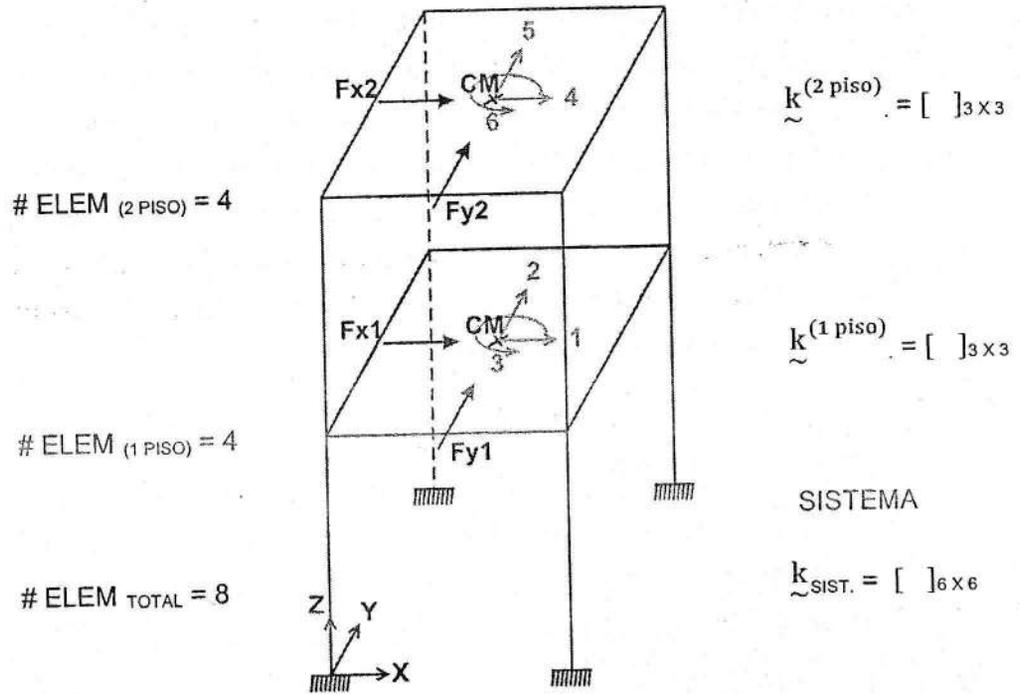


PLANTA TÍPICA

- c. Los GDL están asociados a los desplazamientos laterales y a las fuerzas sísmicas de inercia.
- d. La fuerza sísmica actúa en el centro de masa de cada piso.
- e. Para cada piso, si el centro de masa no coincide con el centro de rigidez, se origina una excentricidad real, produciéndose un momento de torsión el cuál

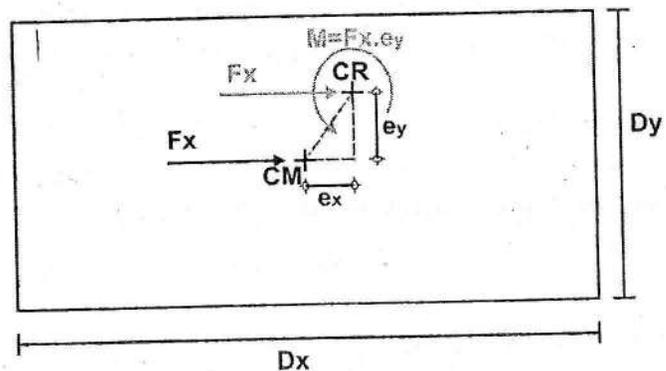
produce un incremento en los cortantes de los elementos verticales, estos incrementos deben ser considerados para efectos de diseño.

- f. Asimismo, la incertidumbre en la localización de los centros de masa en cada piso, se considerará mediante una excentricidad accidental perpendicular a la dirección del sismo igual a ± 0.05 veces la dimensión del edificio en la dirección perpendicular a la dirección de análisis.



ANÁLISIS POR EXCENTRICIDAD PARA CADA DIRECCIÓN PRINCIPAL:

Dirección de análisis X-X:

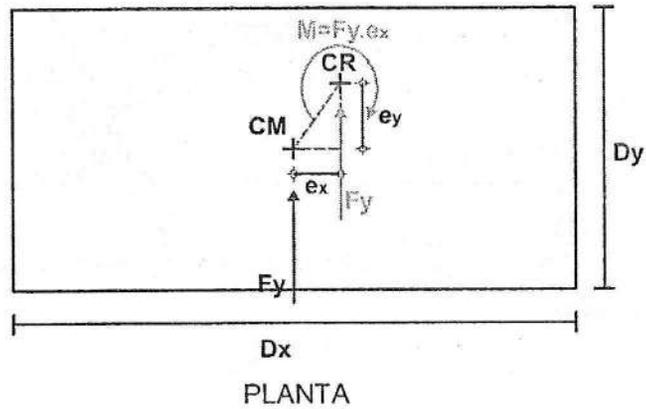


PLANTA

Excentricidad directa $e_y = y_{CM} - y_{CR} = e$ (eje de rotación CR)

Excentricidad accidental $e_{acc} = \pm 0.05 D_y$

Dirección de análisis Y-Y:



Excentricidad directa $e_x = x_{CM} - x_{CR} = e$ (eje de rotación CR)

Excentricidad accidental $e_{acc} = \pm 0.05 D_x$

MOMENTO POR TORSIÓN EN PLANTA PARA CADA DIRECCIÓN

En cada piso además de la fuerza actuante directa, se aplicará el momento torsor bajo dos condiciones siguientes:

Condición 1 : $M_{ti} = F_i(1.5e \pm e_{acc})$; Cuando ambas excentricidades tienen el mismo signo.

Condición 2 : $M_{ti} = F_i(e \pm e_{acc})$; Cuando ambas excentricidades tienen signos diferentes.

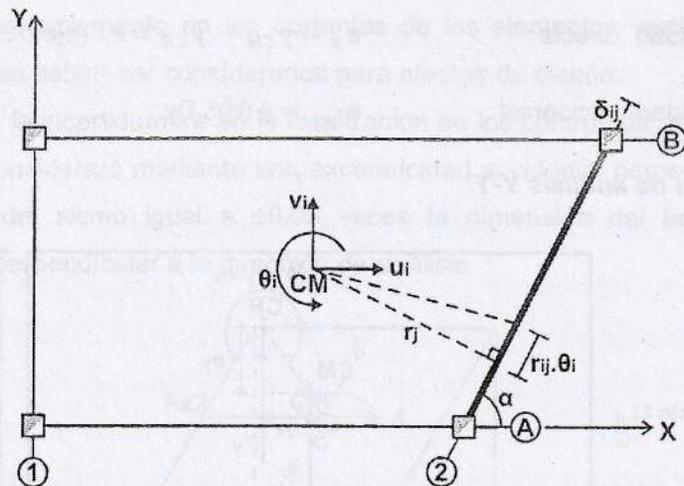
Dónde: F_i : fuerza horizontal sísmica en el nivel "i"

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO: $\tilde{k}^{(e)}$

Compatibilizando la deformación del elemento con el diafragma rígido (losa):

$$\delta_{ij} = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha + r_{ij} \theta_i$$

Expresando matricialmente: $\delta_{ij} = [\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r_{ij}] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$



En forma concisa:

$$\delta_{ij} = \underline{T} \cdot \underline{u}$$

En donde:

δ_{ij} : Desplazamiento local; lateral, del elemento

$[T]$: Matriz de transformacion del sistema global a eje local

$\{u\}$: Vector de desplazamientos de piso a nivel global

$$\underline{u}' = \underline{T} \cdot \underline{u} \quad \dots (1)$$

En el sistema local:

$$\underline{f}' = \underline{k}' \cdot \underline{u}' \quad \dots (2)$$

(1) en (2):

$$\underline{f}' = \underline{k}' \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}$$

Por: \underline{T}^T

$$\underline{T}^T \cdot \underline{f}' = \underline{T}^T \cdot \underline{k}' \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}$$

Pero: $\underline{f} = \underline{T}^T \cdot \underline{f}'$

$$\underline{f} = \underline{T}^T \cdot \underline{k}' \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}$$

En el sistema global:

$$\underline{f} = \underline{k} \cdot \underline{u} ,$$

$$\therefore \underline{k} = \underline{T}^T \cdot \underline{k}_L \cdot \underline{T}$$

En donde:

$$k_L = \underline{k}' ; \text{ Rigidez lateral del elemento}$$

Desarrollando:

$$[K_{xy}^e] = K_L \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{Sen} \alpha & r_{ij} \cdot \text{Cosa} \\ \cos \alpha \cdot \text{Sen} \alpha & \text{Sen}^2 \alpha & r_{ij} \cdot \text{Sena} \\ r_{ij} \cdot \text{Cosa} & r_{ij} \cdot \text{Sena} & r_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

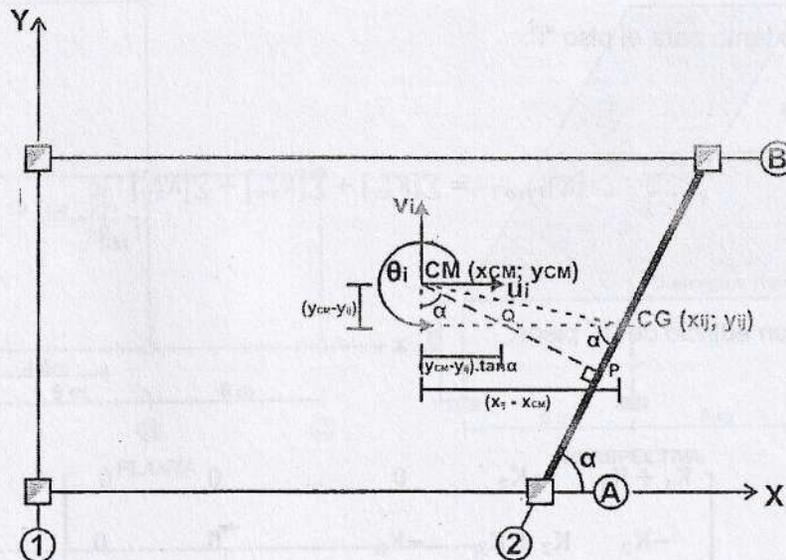
Asimismo, fácilmente se puede demostrar que:

$$r_{ij} = (x_{ij} - x_{CMi}) \cdot \text{Sena} - (y_{ij} - y_{CMi}) \cdot \text{Cosa}$$

Dónde:

(x_{ij}, y_{ij}) : Un punto cualquiera del elemento o del alineamiento del mismo.

Demostración de: r_{ij}



$$r_{ij} = \overline{CMQ} + \overline{PQ}$$

$$r_{ij} = (y_{CM} - y_{ij}) \text{seca} + [(x_{ij} - x_{CM}) - (y_{CM} - y_{ij}) \text{tana}] \text{sena}$$

$$r_{ij} = (y_{CM} - y_{ij}) \frac{1}{\text{cosa}} - (y_{CM} - y_{ij}) \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cosa}} + (x_{ij} - x_{CM}) \text{sena}$$

$$r_{ij} = (y_{CM} - y_{ij}) \text{cosa} + (x_{ij} - x_{CM}) \text{sena}$$

$$r_{ij} = (x_{ij} - x_{CM}) \text{sena} - (y_{ij} - y_{CM}) \text{cosa}$$

Elementos orientados en X-X: ($\alpha = 0^0$)

$$[K_{xx}^e] = K_L \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_{ij} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{ij} & 0 & r_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

Elementos orientados en Y-Y: ($\alpha = 90^0$)

$$[K_{yy}^e] = K_L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{ij} \\ 0 & r_{ij} & r_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto para el piso "i":

$$[K]_{Piso "i"} = \sum [K_{xx}^e] + \sum [K_{yy}^e] + \sum [K_{xy}^e]$$

Para un edificio de "n" pisos:

$$K_n = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n-1} + K_n & -K_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -K_n & K_n \end{bmatrix} (3n \times 3n)$$

Para el sistema genérico "i":

$$K_i = [K_i]_{(3 \times 3)}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

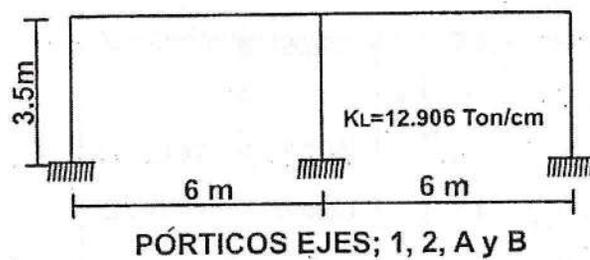
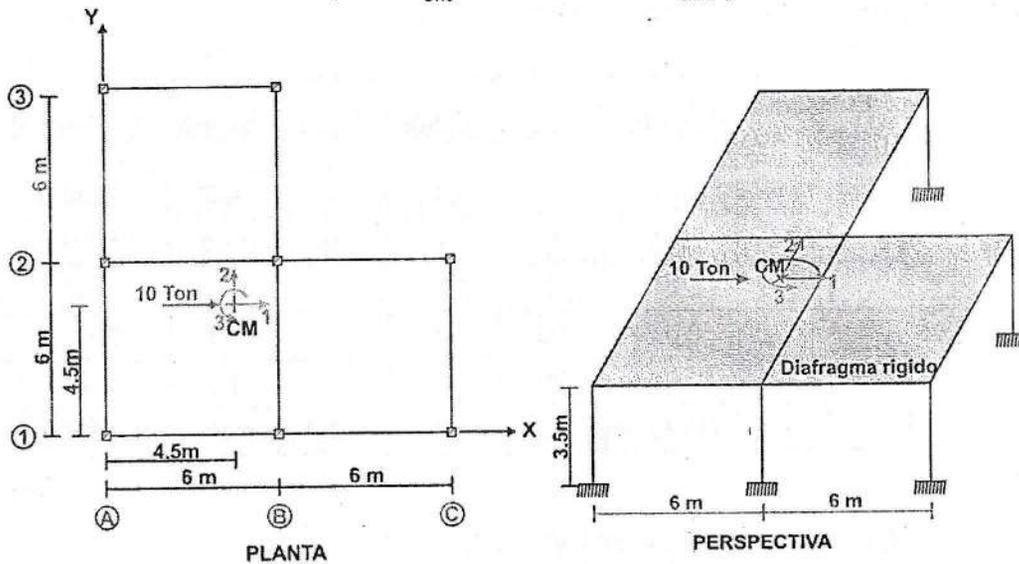
PROBLEMA 01:

Para la estructura aporcionada de un piso mostrada en la figura (ver planta y elevación) realizar un análisis matricial seudo tridimensional por el método de la rigidez al actuar una fuerza horizontal de 10 ton aplicada en el centro de masas.

Se pide calcular:

- El desplazamiento horizontal a nivel de losa.
- La distribución de la fuerza horizontal en cada elemento.
- Verificar el equilibrio.

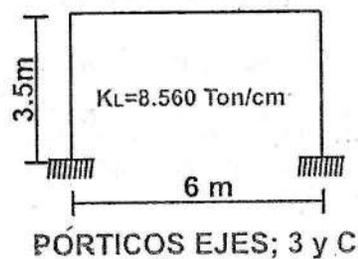
Concreto Armado: $f'_c = 280 \frac{kg}{cm^2}$; $E = 15000 \sqrt{f'_c} \left(\frac{kg}{cm^2} \right) = 2.5 * 10^6 \text{ Ton/m}^2$



Vigas: $(0.30 \times 0.6) \text{ m}^2$

Columnas: $(0.30 \times 0.3) \text{ m}^2$

$K_L: 1290.6 \text{ Ton/m}$



Vigas: $(0.30 \times 0.6) \text{ m}^2$

Columnas: $(0.30 \times 0.3) \text{ m}^2$

$K_L: 856 \text{ Ton/m}$

SOLUCIÓN:

1) Matriz de rigidez de cada elemento: $\tilde{k}^{(e)}$

$$\tilde{k}^{(e)} = K_L \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & r \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & \text{sen}^2 \alpha & r \cdot \text{sen} \alpha \\ r \cdot \cos \alpha & r \cdot \text{sen} \alpha & r^2 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

$$r_{ij} = (x_{ij} - x_{CMi}) \cdot \text{Sen} \alpha - (y_{ij} - y_{CMi}) \cdot \text{Cos} \alpha$$

$$CM(x, y) = (4.5, 4.5)m$$

Elemento o pórtico	(x _i , y _i) m.	α	cos α	sen α	r _i (m)	K _L (Ton/m)
1	(0,0)	0	1	0	4.5	1290.6
2	(0,6)	0	1	0	-1.5	1290.6
3	(0,12)	0	1	0	-7.5	856
A	(0,0)	90	0	1	-4.5	1290.6
B	(6,0)	90	0	1	1.5	1290.6
C	(12,0)	90	0	1	7.5	856

Elementos orientados en X-X:

$$\tilde{k}^{(1)} = 1290.6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & (4.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1290.6 & 0 & 5807.7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5807.7 & 0 & 26134.65 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(2)} = 1290.6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & (-1.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1290.6 & 0 & -1935.9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1935.9 & 0 & 2903.85 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(3)} = 856 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7.5 & 0 & (-7.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 856 & 0 & -6420 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6420 & 0 & 48150 \end{bmatrix}$$

Elementos orientados en Y-Y:

$$\tilde{k}^{(A)} = 1290.6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4.5 \\ 0 & -4.5 & (-4.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1290.60 & -5807.7 \\ 0 & -5807.7 & 26134.65 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(B)} = 1290.6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & (1.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1290.6 & 1935.9 \\ 0 & 1935.9 & 2903.85 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(C)} = 856 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7.5 \\ 0 & 7.5 & (7.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 856 & 6420 \\ 0 & 6420 & 48150 \end{bmatrix}$$

2) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 3437.2 & 0 & -2548.2 \\ 0 & 3437.2 & 2548.2 \\ -2548.2 & 2548.2 & 15437.7 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

3) Vector de fuerzas externas del sistema: \tilde{f}

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (3 \times 1)$$

4) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 2.94584 \times 10^{-3} \\ -3.64952 \times 10^{-5} \\ 4.92275 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

5) Desplazamiento Lateral de cada elemento. δ^e

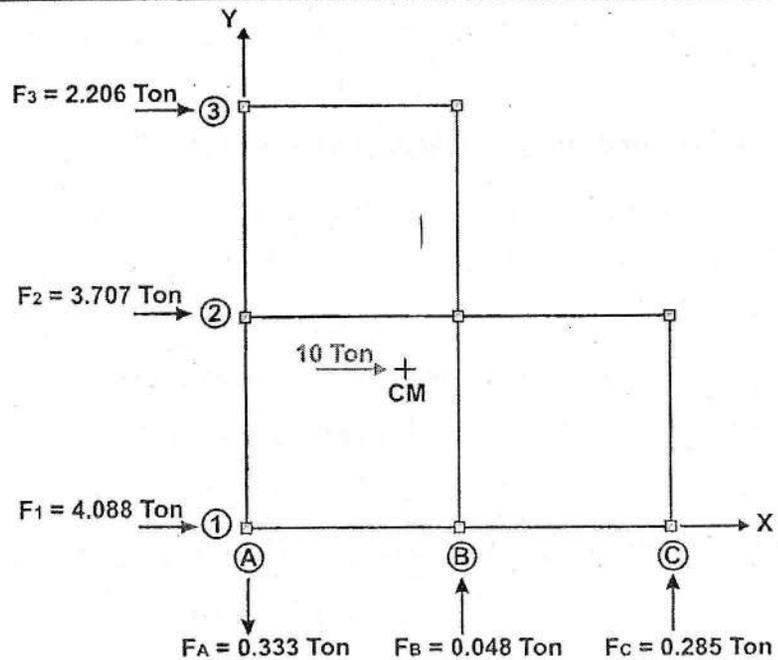
$$\delta^e = u_i \cdot \cos \alpha + v_i \cdot \sin \alpha + r_i \cdot \theta_i$$

Elemento o pórtico	α	Sen α	Cosa	r_i (m)	δ^e (m)
1	0°	1	0	4.5	3.167363×10^{-3}
2	0°	1	0	-1.5	2.871998×10^{-3}
3	0°	1	0	-7.5	2.576633×10^{-3}
A	90°	0	1	-4.5	-2.580189×10^{-4}
B	90°	0	1	1.5	3.734605×10^{-5}
C	90°	0	1	7.5	3.327110×10^{-4}

6) Fuerza cortante y fuerza lateral de cada elemento. F^e

$$F^e = K_L \cdot \delta^e$$

Elemento o pórtico	K_L (Ton/m)	δ^e (m)	F^e (ton)
1	1290.6	3.167363×10^{-3}	4.088
2	1290.6	2.871998×10^{-3}	3.707
3	856	2.576633×10^{-3}	2.206
A	1290.6	-2.580189×10^{-4}	-0.333
B	1290.6	3.734605×10^{-5}	0.048
C	856	3.327110×10^{-4}	0.285



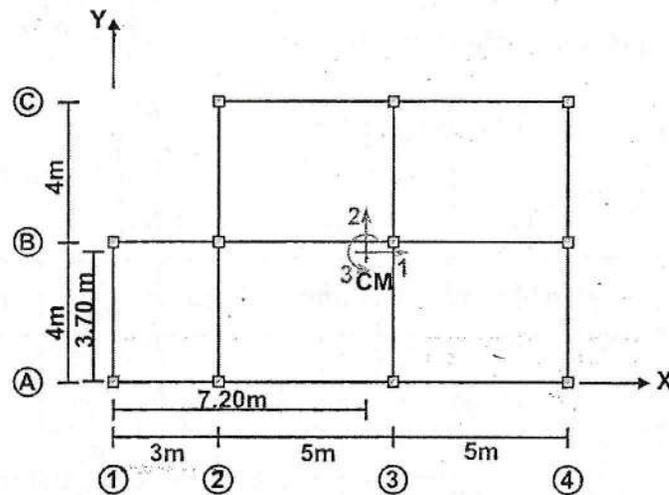
PROBLEMA 02:

En la figura se presenta la planta de una estructura de concreto armado de un piso, compuesta por siete pórticos ortogonales entre sí, unido en su parte superior por una losa que puede considerarse como infinitamente rígida para acciones en su plano. La altura de los pórticos, desde la cara superior de las zapatas a los ejes de las correspondientes vigas es de 3.5m.

- i. Las columnas son todas de sección cuadrada de 0.30m de lado. Las vigas son de sección transversal rectangular de 0.30m x 0.60m. Para todos los elementos: $E = 2.4 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$. Las inercias de las columnas pueden considerarse como $bt^3/12$. Para las vigas, considere el 70 % de la inercia correspondiente a la sección bruta, excepto donde se indica, desprecie las deformaciones axiales y de corte.

Para los pórticos se han obtenido las siguientes rigideces laterales:

Ejes	$K_L(\text{ton/m})$
1	823.9
2, 3, 4	1237
A, B	1668
C	1213



1. Determine la matriz de rigidez para la estructura con los tres grados de libertad indicados en la planta, correspondiente al punto de coordenadas (7.20m, 3.70m).

Por acción de una fuerza horizontal de 15 ton en correspondencia al grado de libertad 2, se obtienen los desplazamientos:

$$u = -0.64709 \times 10^{-5} \text{ m} \quad v = 0.33502 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\theta = 0.65154 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

2. Calcule el desplazamiento horizontal (a nivel de la losa) para cada pórtico.
3. Determine las correspondientes fuerzas laterales y verifique el equilibrio.

II. Si en lugar del pórtico en el eje 1 se construye una placa de 20cm de espesor, la correspondiente rigidez lateral sería $K_L = 90490 \text{ ton/m}$ (en los cálculos se han incluido las deformaciones de corte en la placa). Para la misma fuerza horizontal antes considerada se tendrían los desplazamientos:

$$u = -0.30568 \times 10^{-4} \text{ m} \quad v = 0.22782 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\theta = 0.30780 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

4. Calcule el desplazamiento horizontal (a nivel de la losa) para cada pórtico.
5. Determine las correspondientes fuerzas laterales y verifique el equilibrio.

SOLUCIÓN:

I PARTE:

1º) Matriz de rigidez de cada elemento: $\tilde{k}^{(e)}$

$$r_{ij} = (x_{ij} - x_{CMi}) \cdot \text{Sen}\alpha - (y_{ij} - y_{CMi}) \cdot \text{Cos}\alpha$$

$$CM(x,y) = (7.20, 3.70) \text{ m}$$

ELEMENTO	(x,y) m	α	Sen α	Cos α	r (m)	K_L (ton/m)
1	(0,0)	90°	1	0	-7.20	823.9
2	(3,0)	90°	1	0	-4.20	1237.0
3	(8,0)	90°	1	0	0.80	1237.0
4	(13,0)	90°	1	0	5.80	1237.0
A	(0,0)	0	0	1	3.70	1668.0
B	(0,4)	0	0	1	-0.30	1668.0
C	(3,8)	0	0	1	-4.30	1213.0

Elementos orientados en Y-Y: ($\alpha = 90^\circ$)

$$\tilde{k}^{(1)} = 823.9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7.2 \\ 0 & -7.2 & (-7.2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 823.9 & -5932.08 \\ 0 & -5932.08 & 42710.976 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(2)} = 1237 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4.2 \\ 0 & -4.2 & (-4.2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1237 & -5195.4 \\ 0 & -5195.4 & 21820.68 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(3)} = 1237 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & (0.8)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1237 & 989.6 \\ 0 & 989.6 & 791.68 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(4)} = 1237 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5.8 \\ 0 & 5.8 & (5.8)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1237 & 7174.6 \\ 0 & 7174.6 & 41612.68 \end{bmatrix}$$

Elementos orientados en X-X: ($\alpha = 0^\circ$)

$$\tilde{k}^{(A)} = 1668 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3.7 & 0 & (3.7)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1668 & 0 & 6171.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6171.6 & 0 & 22834.92 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(B)} = 1668 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & (-0.3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1668 & 0 & 6171.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6171.6 & 0 & 22834.92 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(C)} = 1213 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4.3 & 0 & (-4.3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1213 & 0 & -5215.9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5215.9 & 0 & 22428.37 \end{bmatrix}$$

2º) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 4549 & 0 & 455.3 \\ 0 & 4534.9 & -2963.28 \\ 455.3 & -2963.28 & 152349.426 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

3°) Vector de fuerzas externas del sistema: \tilde{f}

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} (3 \times 1)$$

4°) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} * \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} -0.64709 \times 10^{-5} \\ 0.33502 \times 10^{-2} \\ 0.65154 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

5°) Desplazamiento lateral de cada elemento: δ^e

$$\delta^e = u_i \cdot \cos\alpha + v_i \cdot \text{sena} + r_i \cdot \theta_i$$

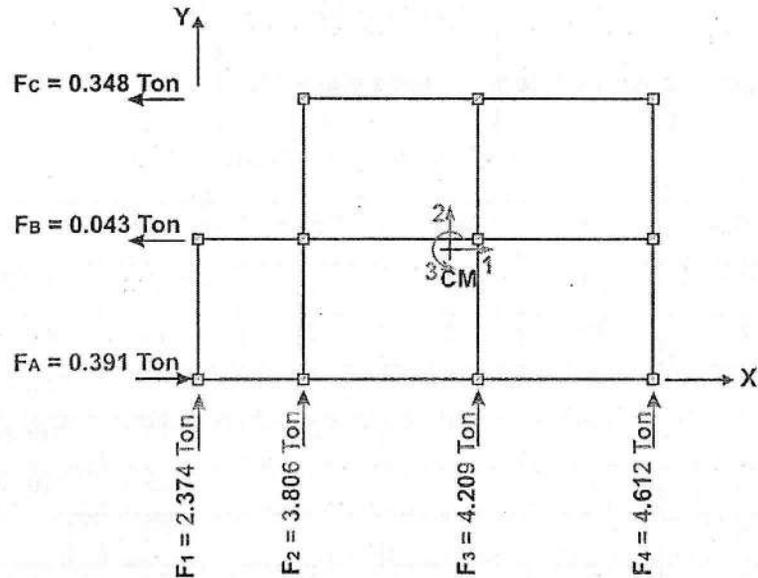
ELEMENTO	α	Sena	Cosa	r (m)	δ^e (m)
1	90°	1	0	-7.20	2.881091 x 10 ⁻³
2	90°	1	0	-4.20	3.076553 x 10 ⁻³
3	90°	1	0	0.80	3.402323 x 10 ⁻³
4	90°	1	0	5.80	3.728093 x 10 ⁻³
A	0°	0	1	3.70	2.345989 x 10 ⁻⁴
B	0°	0	1	-0.30	-2.601710 x 10 ⁻⁵
C	0°	0	1	-4.30	-2.866331 x 10 ⁻⁴

6°) Fuerza lateral o cortante en cada elemento: F^e

$$F^e = K_L^e \cdot \delta^e$$

ELEMENTO	K_L (ton/m)	δ^e (m)	F^e (ton)
1	823.9	2.881091 x 10 ⁻³	2.374
2	1237.0	3.076553 x 10 ⁻³	3.806
3	1237.0	3.402323 x 10 ⁻³	4.209

4	1237.0	3.728093×10^{-3}	4.612
A	1668.0	2.345989×10^{-4}	0.391
B	1668.0	-2.601710×10^{-5}	-0.043
C	1213.0	-2.866331×10^{-4}	-0.348



II PARTE:

7°) Matriz de rigidez del muro: $\tilde{k}^{(1)}$

$$\tilde{k}^{(1)} = 90490 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7.2 \\ 0 & -7.2 & (-7.2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90490 & -651528 \\ 0 & -651528 & 4691001 \end{bmatrix}$$

8°) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 4549 & 0 & 455.3 \\ 0 & 94201 & -648559.2 \\ 455.3 & -648559.2 & 4800640.05 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

9°) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} -0.30568 \times 10^{-4} \\ 0.22782 \times 10^{-2} \\ 0.30780 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

10°) Desplazamiento lateral de cada elemento: δ^e

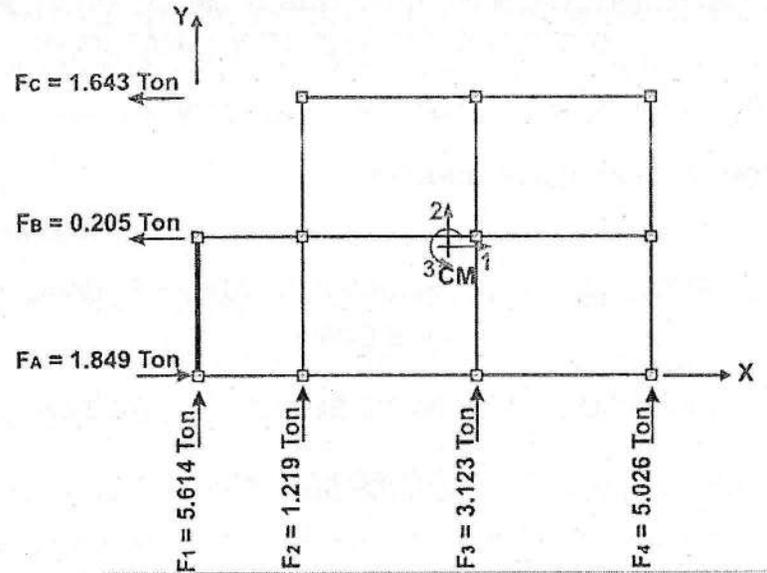
$$\delta^e = u_i \cdot \cos \alpha + v_i \cdot \sen \alpha + r_i \cdot \theta_i$$

ELEMENTO	α	Sen α	Cos α	r (m)	δ^e (m)
PLACA : 1	90°	1	0	-7.20	6.204 x 10 ⁻⁵
2	90°	1	0	-4.20	9.8544 x 10 ⁻⁴
3	90°	1	0	0.80	2.52444 x 10 ⁻³
4	90°	1	0	5.80	4.06344 x 10 ⁻³
A	0°	0	1	3.70	1.108292 x 10 ⁻³
B	0°	0	1	-0.30	-1.22908 x 10 ⁻⁴
C	0°	0	1	-4.30	-1.354108 x 10 ⁻³

11°) Fuerza lateral o cortante en cada elemento: F^e

$$F^e = K_L^e \cdot \delta^e$$

ELEMENTO	K_L (ton/m)	δ^e (m)	F^e (ton)
PLACA : 1	90490.0	6.204 x 10 ⁻⁵	5.614
2	1237.0	9.8544 x 10 ⁻⁴	1.219
3	1237.0	2.52444 x 10 ⁻³	3.123
4	1237.0	4.06344 x 10 ⁻³	5.026
A	1668.0	1.108292 x 10 ⁻³	1.849
B	1668.0	-1.22908 x 10 ⁻⁴	-0.205
C	1213.0	-1.354108 x 10 ⁻³	-1.643



Cabe mencionar que el análisis matricial seudotridimensional se encarga de distribuir la carga lateral (fuerzas de sismo) que actúa en el centro de masa de cada piso a través del elemento de acople (diafragma rígido), este análisis deberá realizarse para cada dirección principal independientemente tal como especifica la norma E-030.

El análisis complementario entonces se realizará para cada pórtico plano 2D considerando además del estado de carga por sismo, los estados de carga gravitacional (carga muerta más carga viva con los daderos de cargas alternadas) con las combinaciones correspondientes que especifica la norma E-060.

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS SÍSMICO POR CARGAS SÍSMICAS ESTÁTICAS Y DINÁMICAS

MÉTODOS DE ANÁLISIS SÍSMICO:

- ESTÁTICO { - FUERZAS ESTÁTICAS EQUIVALENTES
(NTE E-030)
- DINÁMICO { - MODAL ESPECTRAL (NTE E-030)
- TIEMPO HISTORIA

ANÁLISIS SÍSMICO:

El análisis sísmico tiene como objetivo calcular los esfuerzos y deformaciones de las estructuras causadas por las fuerzas de sismo (generalmente horizontales), para ello usamos los espectros de aceleraciones de la norma E-030 que nos permite calcular las aceleraciones espectrales a través de los parámetros sísmicos y el tipo de estructura a analizar. El análisis sísmico lo podemos realizar de dos formas, cada uno de ellas con sus propias ventajas y desventajas. Para nuestro trabajo se ha realizado de las dos formas, es decir se ha realizado un análisis sísmico estático y dinámico.

Las deformaciones que se producen en las edificaciones obviamente están relacionadas con las características de la misma, una característica importante que definirá el comportamiento de una edificación en caso de sismo es si está cuenta con diagramas rígidos o no.

DIAFRAGMA RÍGIDO:

Se denomina diafragma rígido a la losa que sirve como techo para cada piso, generalmente son de concreto y tenemos 3 tipos: las losas macizas, son de concreto en su totalidad, las losas nervadas, que presentan nervaduras que tienen entre si huecos que no son llenados o rellenados con ningún material, y finalmente tenemos las losas aligeradas que presenta un espesor de losa 5 cm de concreto en la parte superior, la viguetas sobresalen hacia debajo de ellas en

una altura que varía (12cm, 15cm, 20cm, ...) y son rellenas con bloques o con otro material (este relleno no cumple función estructural). Para que una losa sea considerada como rígida el porcentaje de huecos no debe ser mayor al 50 % del área bruta.

DIAGRAMA FLEXIBLE:

Son losas de concreto las cuales tienen un porcentaje de área hueca mayor al 50% del área bruta.

DIAFRAGMA NO RÍGIDO:

Son los techos metálicos o de madera, los cuales no pueden distribuir la fuerza aplicada al centro de masa a los elementos, en este caso los elementos absorben la fuerza sísmica en proporción a su peso.

ESTRUCTURA SIMPLE

Una estructura simple es aquella que se puede idealizar como un sistema que está constituido por una masa concentrada en la parte superior soportada por un elemento estructural de rigidez K en la dirección considerada. Es importante entender la vibración de este tipo de estructuras, las cuales están sometidas a fuerzas laterales en el tope o a movimientos horizontales del suelo debido a sismos, para así facilitar la comprensión de la teoría dinámica.

PARÁMETROS DE DISEÑO SISMORRESISTENTE (NORMA E-030):

Los parámetros para el diseño sismorresistente de la norma E-030 vigente, son los siguientes:

1. PESO DE LA EDIFICACIÓN (P)

El peso P , se calculará adicionando a la CARGA MUERTA un porcentaje de la CARGA VIVA o SOBRECARGA que se determinará de la siguiente manera:

$$P = P_{CM} + \alpha\% P_{CV}$$

$\alpha = 50\%$	Para EDIFICACIONES de las categorías A y B.
$\alpha = 25\%$	Para EDIFICACIONES de la categoría C.
$\alpha = 80\%$	Para DEPOSITOS DE ALMACENAJE.
$\alpha = 100\%$	Para estructuras como TANQUES, SILOS y SIMILARES.

CATEGORIA DE LAS EDIFICACIONES

CATEGORIA	DESCRIPCION
A EDIFICACIONES ESENCIALES	Cuya función no debería interrumpirse inmediatamente después que ocurra un sismo: - Hospitales - Centrales de Comunicaciones - Cuarteles de Bomberos y Policías - Subestaciones Eléctricas - Reservorios de Agua - Centros Educativos También se incluyen edificaciones cuyo colapso puede representar un riesgo adicional, como grandes hornos, depósitos de materiales inflamables o tóxicos.
B EDIFICACIONES IMPORTANTES	Donde se reúnen gran cantidad de personas como: - Teatros - Estadios - Centros Comerciales - Establecimientos Penitenciarios O como edificios que guardan patrimonios valiosos: - Museos - Bibliotecas y Archivos Especiales También se considerarán: - Depósitos de Granos - Otros almacenes importantes para el abastecimiento
C EDIFICACIONES COMUNES	Cuya falla ocasionaría pérdidas de cuantía intermedia como: - Viviendas - Oficinas - Hoteles - Restaurantes - Depósitos e Instalaciones Industriales, cuya falla no acarree peligros adicionales de incendios, fugas de contaminantes.

2. FUERZA CORTANTE EN LA BASE (V)

La fuerza cortante total V, en la base de la estructura, se determinará por la siguiente expresión

$$V = \frac{ZUSC}{R} P$$

En donde:

V = Fuerza Cortante en la Base de la Estructura

Z = Factor de Zona

U = Factor de Uso e Importancia

S = Factor de Suelo

C = Coeficiente de Amplificación Sísmica

R = Coeficiente de Reducción de Solicitaciones Sísmicas

P = Peso Total de la Edificación

Debiendo considerarse para: $C/R \geq 0.125$

Como el análisis puede hacerse independientemente en cada dirección del sismo, se tomará el valor total de la fuerza cortante V , tanto para la dirección X como para la dirección Y .

ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS SÍSMICOS

FACTOR DE ZONA (Z)

Es un parámetro de sitio, que involucra la zonificación sísmica territorial nacional, el mismo que está dividido en TRES ZONAS, según se muestra en la figura adjunta:

La zonificación propuesta se basa en:

- La distribución espacial de la sismicidad observada.
- Las características generales de los movimientos sísmicos
- La atenuación con la distancia epicentral y,
- Información Neotectónica.

FACTORES DE ZONA

ZONA	FACTOR Z(g)
3	0.4
2	0.3
1	0.15



FACTOR DE USO E IMPORTANCIA (U)

Cada estructura debe ser clasificada de acuerdo a las categorías indicadas en la siguiente tabla; según la clasificación que se haga se usará el coeficiente de uso e importancia U.

CATEGORIA DE LAS EDIFICACIONES

CATEGORIA	DESCRIPCION	FACTOR U
A EDIFICACIONES ESENCIALES	Cuya función no debería interrumpirse inmediatamente después que ocurra un sismo: - Hospitales - Centrales de Comunicaciones - Cuarteles de Bomberos y Policías - Subestaciones Eléctricas - Reservorios de Agua - Centros Educativos También se incluyen edificaciones cuyo colapso puede representar un riesgo adicional, como grandes hornos, depósitos de materiales inflamables o tóxicos.	1.5
B EDIFICACIONES IMPORTANTES	Donde se reúnen gran cantidad de personas como: - Teatros - Estadios - Centros Comerciales - Establecimientos Penitenciarios O como edificios que guardan patrimonios valiosos: - Museos - Bibliotecas y Archivos Especiales También se considerarán: - Depósitos de Granos - Otros almacenes importantes para el abastecimiento	1.3
C EDIFICACIONES COMUNES	Cuya falla ocasionaría pérdidas de cuantía intermedia como: - Viviendas - Oficinas - Hoteles - Restaurantes - Depósitos e Instalaciones Industriales, cuya falla no acarree peligros adicionales de incendios, fugas de contaminantes.	1.0
D EDIFICACIONES MENORES	Cuyas fallas causan pérdidas de menor cuantía y normalmente la probabilidad de causar víctimas es baja: - Cercos de menos de 1.50 m de altura - Depósitos Temporales - Viviendas Temporales - Construcciones similares temporales	(*)

(*) En estas edificaciones, a criterio del proyectista, se podrá omitir el análisis por fuerzas sísmicas, pero deberá proveerse de la resistencia y rigidez adecuadas para acciones laterales.

FACTOR DE SUELO (S)

Es un parámetro de sitio, que involucra la Microzonificación Sísmica, Estudios de Sitio y Condiciones Geotécnicas locales.

Para la elección del factor de suelo **S**, y su correspondiente periodo T_p de vibración, deberá considerarse las propiedades del suelo y el tipo de perfil que mejor describa las condiciones locales, según la tabla siguiente:

PARAMETROS DE SUELO

TIPO	DESCRIPCION	T_p (Seg)	S
S1	Roca o suelo muy rígidos	0.4	1.0
S2	Suelos intermedios	0.6	1.2
S3	Suelos flexibles o con estratos de gran espesor	0.9	1.4
S4	Condiciones excepcionales	(*)	(*)

(*) Los valores de T_p y **S** para este caso serán establecidos por el especialista, pero en ningún caso serán menores que los especificados para el perfil tipo S3.

En los sitios donde las propiedades del suelo sean poco conocidas se podrán usar los valores correspondientes al perfil tipo **S3**. Solo será necesario considerar un perfil tipo **S4** cuando los estudios Geotécnicos así lo determinen.

COEFICIENTE DE AMPLIFICACIÓN SÍSMICA (C)

De acuerdo a las condiciones de sitio, se define el factor de amplificación sísmica **C**. Este coeficiente se interpreta como el factor de amplificación de la respuesta estructural respecto a la aceleración en el suelo.

$$C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T} \right) ; C \leq 2.5$$

En donde:

T_p = Período de vibración del suelo (Tabla anterior)

T = Período fundamental de la estructura

El período fundamental para cada dirección se estimará con la siguiente expresión:

$$T = \frac{h_n}{CT}$$

En donde:

- h_n = Altura total de la edificación en metros.
- $C_T = 35$ Para edificios cuyos elementos resistentes en la dirección considerada sean únicamente pórticos.
- $C_T = 45$ Para edificios de concreto armado cuyos elementos sismorresistentes sean pórticos y las cajas de ascensores y escaleras.
- $C_T = 60$ Para estructuras de mampostería y para todos los edificios de concreto armado cuyos elementos sismorresistentes sean fundamentalmente muros de corte.

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN POR DUCTILIDAD (R)

Los sistemas estructurales se clasificarán según los materiales usados y el sistema de estructuración sismorresistente predominante en cada dirección tal como se indica en la tabla. Asimismo, según la clasificación que se haga de una edificación se usará un coeficiente de reducción de fuerza sísmica R, según se indica en la misma tabla.

COEFICIENTE DE REDUCCION DE FUERZA SISMICA

Sistema Estructural	Coeficiente de Reducción, R Para estructuras regulares (*) (**)
Acero	
Pórticos dúctiles con uniones resistentes a momentos.	9.5
Otras estructuras de acero	
Arriostres Excéntricos	6.5
Arriostres en Cruz	6.0
Concreto Armado	
Pórticos ⁽¹⁾ .	8
Dual ⁽²⁾ .	7
De muros estructurales ⁽³⁾ .	6
Muros de ductilidad limitada ⁽⁴⁾ .	4
Albañilería Armada o Confinada⁽⁵⁾.	3
Madera (Por esfuerzos admisibles)	7

1. Por lo menos el 80% del cortante en la base actúa sobre las columnas de los pórticos que cumplan los requisitos de la NTE E.060 Concreto Armado. En caso se tengan muros estructurales, éstos deberán diseñarse para resistir una fracción de la acción sísmica total de acuerdo con su rigidez.

2. Las acciones sísmicas son resistidas por una combinación de pórticos y muros estructurales. Los pórticos deberán ser diseñados para tomar por lo menos 25% del cortante en la base. Los muros estructurales serán diseñados para las fuerzas obtenidas del análisis según Artículo 16 (16.2)
3. Sistema en el que la resistencia sísmica está dada predominantemente por muros estructurales sobre los que actúa por lo menos el 80% del cortante en la base.
4. Edificación de baja altura con alta densidad de muros de ductilidad limitada.
5. Para diseño por esfuerzos admisibles el valor de R será 6
- (*) Estos coeficientes se aplicarán únicamente a estructuras en las que los elementos verticales y horizontales permitan la disipación de la energía manteniendo la estabilidad de la estructura. No se aplican a estructuras tipo péndulo invertido.
- (**) Para estructuras irregulares, los valores de R deben ser tomados como $\frac{3}{4}$ de los anotados en la Tabla.

3. DISTRIBUCIÓN DE LA FUERZA SÍSMICA EN ALTURA (Fi)

Una vez obtenida la fuerza horizontal en la base del edificio V , se distribuye en cada nivel según la siguiente expresión:

$$F_i = \frac{P_i h_i}{\sum P_j h_j} V$$

En donde:

- F_i = Fuerza sísmica en el nivel i
- P_i = Peso del nivel i
- h_i = Altura del nivel i , con respecto al nivel del terreno.
- V = Cortante basal en la base del edificio

Si el periodo fundamental T , es mayor que 0,7 seg, una parte de la fuerza cortante V , denominada F_a , deberá aplicarse como fuerza concentrada en la parte superior de la estructura. Esta fuerza F_a se determinará mediante la expresión:

$$F_a = 0,07 \cdot T \cdot V \leq 0,15 \cdot V$$

Donde el periodo T en la expresión anterior será el mismo que el usado para la determinación de la fuerza cortante en la base.

El resto de la fuerza cortante, es decir $(V - F_a)$ se distribuirá entre los distintos niveles, incluyendo el último, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F_i = \frac{P_i \cdot h_i}{\sum_{j=1}^n P_j \cdot h_j} \cdot (V - F_a)$$

4. ANÁLISIS DINÁMICO

Para edificaciones convencionales podrá usarse el procedimiento de superposición espectral; y para edificaciones especiales deberá usarse un análisis tiempo-historia.

A. *Aceleración Espectral*

Para cada una de las direcciones analizadas se utilizará un espectro inelástico de pseudo-aceleraciones definido por:

$$S_a = \frac{ZUSC}{R} g$$

Para el análisis en la dirección vertical podrá usarse un espectro con valores iguales a los 2/3 del espectro empleado para las direcciones horizontales.

B. *Criterios de Superposición*

La respuesta máxima elástica esperada (r) correspondiente al efecto conjunto de los diferentes modos de vibración empleados (r_i) podrá determinarse usando la siguiente expresión:

$$r = 0.25 \sum_{i=1}^m |r_i| + 0.75 \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2}$$

En cada dirección se considerarán aquellos modos de vibración cuya suma de masas efectivas sea por lo menos el 90% de la masa de la estructura, pero deberá tomarse en cuenta por lo menos los tres primeros modos predominantes en la dirección de análisis.

5. DESPLAZAMIENTOS LATERALES PERMISIBLES

Los desplazamientos laterales se calcularán multiplicando por $0.75R$ los resultados obtenidos del análisis lineal y elástico con las Solicitaciones Sísmicas Reducidas.

El máximo desplazamiento lateral relativo de entrepiso, no deberá exceder la fracción de la altura de entrepiso que se indica en la siguiente tabla:

LIMITES PARA DESPLAZAMIENTO LATERAL DE ENTREPISO

MATERIAL PREDOMINANTE	DESPLAZAMIENTO MAXIMO
Concreto Armado	0.007 * hei
Acero	0.010 * hei
Albañilería	0.005 * hei
Madera	0.010 * hei

hei : Altura del entrepiso i

6. EFECTOS DE TORSIÓN

Si el centro de masas no coincide con el centro de rigideces se produce un momento torsor el cuál produce un incremento en los cortantes, estos incrementos deben ser considerados para efectos de diseño.

El momento torsor se evalúa en cada nivel y en cada dirección de análisis del sismo.

A. Cálculo de excentricidadesDirección de análisis X:

Excentricidad directa : $e_y = y_{CM} - y_{CR} = e$

Excentr. accidental : $e_{acc} = \pm 0.05 DY$

Dirección de análisis Y:

Excentricidad real : $e_x = x_{CM} - x_{CR} = e$

Excentr. accidental : $e_{acc} = \pm 0.05 DX$

B. Cálculo de Momentos Torsores

En cada nivel además de la fuerza cortante directa, se aplicará el momento torsor bajo dos condiciones siguientes:

Dirección de análisis X:

Condición 1 : $M_{t1x} = V_i (1.5 e \pm e_{acc})$

Condición 2 : $M_{t2x} = V_i (e \pm e_{acc})$

Dirección de análisis Y:

Condición 1 : $M_{t1y} = V_i (1.5 e \pm e_{acc})$

Condición 2 : $M_{t2y} = V_i (e \pm e_{acc})$

Dónde:

V_i = Fuerza cortante del piso "i".

C. Incremento de fuerza cortante por torsión:

Dirección de análisis X:

$$\text{Condición 1 : } \Delta V_{ix} = \frac{Mt_{1x} \cdot K_{xi} \cdot (y_i - y_{CR})}{E J}$$

$$\text{Condición 2 : } \Delta V_{ix} = \frac{Mt_{2x} \cdot K_{xi} \cdot (y_i - y_{CR})}{E J}$$

Dirección de análisis Y:

$$\text{Condición 1 : } \Delta V_{iy} = \frac{Mt_{1y} \cdot K_{yi} \cdot (x_i - x_{CR})}{E J}$$

$$\text{Condición 2 : } \Delta V_{iy} = \frac{Mt_{2y} \cdot K_{yi} \cdot (x_i - x_{CR})}{E J}$$

$$J = \sum \left(\frac{K_{xi}}{E} \bar{y}^2 \right) + \sum \left(\frac{K_{yi}}{E} \bar{x}^2 \right); \quad \bar{x} = x_i - x_{CR} \quad ; \quad \bar{y} = y_i - y_{CR}$$

Dónde:

J = Momento polar de inercia.

x_i, y_i = Ubicación del elemento respecto a un sistema de referencia.

7. ELEMENTOS NO ESTRUCTURALES

- Se consideran como elementos no-estructurales, aquellos que estando o no conectados al sistema resistente a fuerzas horizontales, su aporte a la rigidez del sistema es despreciable.

- En el caso que los elementos no estructurales estén aislados del sistema estructural principal, éstos deberán diseñarse para resistir una fuerza sísmica (V) asociada a su peso (P) tal como se indica a continuación.

$$V = Z \cdot U \cdot C_1 \cdot P$$

Los valores de C_1 se tomarán de la siguiente Tabla.

VALORES DE C_1	
<ul style="list-style-type: none"> - Elementos que al fallar puedan precipitarse fuera de la edificación en la cual la dirección de la fuerza es perpendicular a su plano. - Elementos cuya falla entrañe peligro para personas u otras estructuras. 	1,3
- Muros dentro de una edificación (dirección de la fuerza perpendicular a su plano).	0,9
- Cercos.	0,6
- Tanques, torres, letreros y chimeneas conectados a una parte del edificio considerando la fuerza en cualquier dirección.	0,9
- Pisos y techos que actúan como diafragmas con la dirección de la fuerza en su plano.	0,6

- Para elementos no estructurales que estén unidos al sistema estructural principal y deban acompañar la deformación de la misma, deberá asegurarse que en caso de falla, no causen daños personales.
- La conexión de equipos e instalaciones dentro de una edificación debe ser responsabilidad del especialista correspondiente. Cada especialista deberá garantizar que estos equipos e instalaciones no constituyan un riesgo durante un sismo y, de tratarse de instalaciones esenciales, deberá garantizar la continuación de su operatividad.

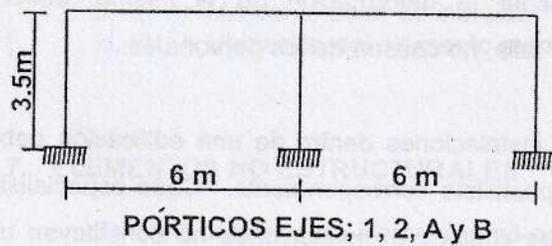
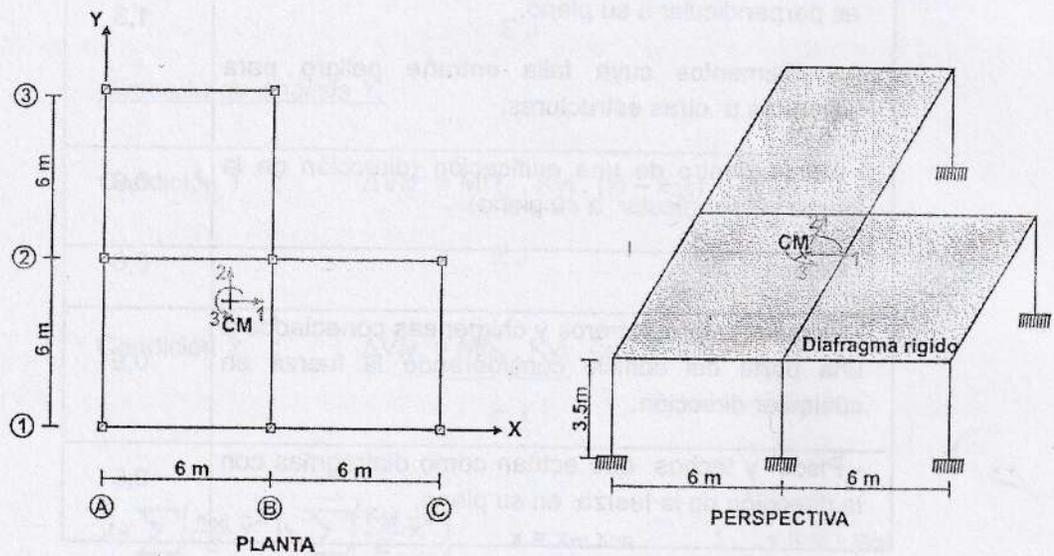
PROBLEMA DE APLICACIÓN

PROBLEMA ÚNICO: Para el edificio aporricado de concreto armado de un piso mostrado en la figura, se pide realizar el análisis sísmicoseudotrídimensional usando el método de las rigideces. (Considerar $g=9.80\text{m}/\text{seg}^2$)

Aplicar los métodos de análisis siguientes:

- Análisis sísmico estático (fuerzas estáticas equivalentes).
- Análisis sísmico dinámico (modal espectral).

Para ambos análisis se hará uso del código peruano de diseño sismorresistente. (N.T.E. E-030)



Vigas : $(0.30 \times 0.6) \text{ m}^2$

Columnas : $(0.30 \times 0.3) \text{ m}^2$

DATOS GENERALES:

- Ubicación : Lima, Pueblo Libre
- Uso : Vivienda
- Sistema estructural : Aporticado
- Suelo de cimentación : Tipo s₁ (suelo rígido)

DATOS DE DISEÑO:

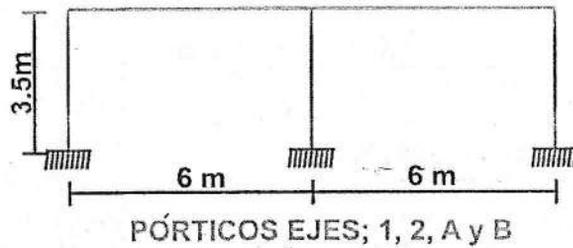
$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 15000\sqrt{f'_c} = 217.371 \text{ ton/cm}^2$$

SOLUCION:

1°) Rigidez lateral local de los elementos: K_L



Por Wilbur: (Base Empotrada)

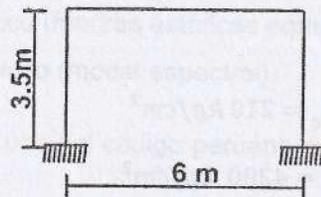
$$K_L = \frac{48E}{h_1} \left[\frac{4h_1}{\sum \left(\frac{I_c}{h}\right)_1} + \frac{h_1 + h_2}{\sum \left(\frac{I_v}{h}\right)_1 + \frac{1}{12} \sum \left(\frac{I_c}{h}\right)_1} \right]^{-1}$$

$$I_c = \frac{30 \times 30^3}{12} = 67500 \text{ cm}^4 \quad \left(\frac{I_c}{h}\right) = 192.857 \text{ cm}^3$$

$$I_v = \frac{30 \times 60^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4 \quad \left(\frac{I_v}{L}\right) = 900 \text{ cm}^3$$

$$K_L = \frac{48 \times 217.371}{350} \left[\frac{4 \times 350}{3 \times 192.857} + \frac{350 + 0}{2 \times 900 + \frac{3 \times 192.857}{12}} \right]^{-1}$$

$$K_L = 11.426 \text{ ton/cm}$$



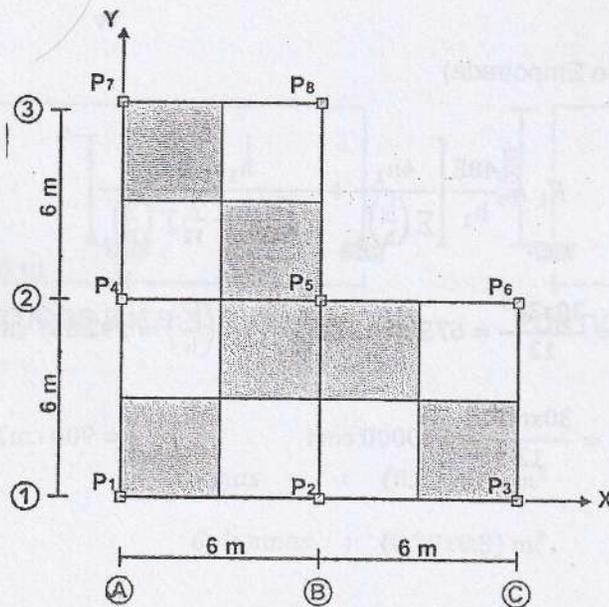
PORTICOS EJES; 3 y C

$$K_L = \frac{48 \times 217.371}{350} \left[\frac{4 \times 350}{2 \times 192.857} + \frac{350}{900 + \frac{2 \times 192.857}{12}} \right]^{-1}$$

$$K_L = 7.443 \text{ ton/cm}$$

2°) Centro de masas: CM (X₀, Y₀)

$$X_0 = \frac{\sum P \cdot X}{\sum P} \qquad Y_0 = \frac{\sum P \cdot Y}{\sum P}$$

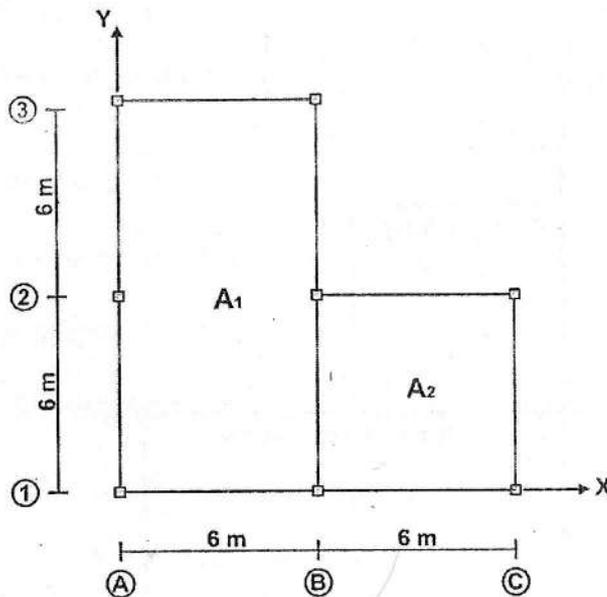


$$X_0 = \frac{0.P_1 + 6.P_2 + 12.P_3 + 0.P_4 + 6.P_5 + 12.P_6 + 0.P_7 + 6.P_8}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8}$$

$$Y_0 = \frac{0.P_1 + 0.P_2 + 0.P_3 + 6.P_4 + 6.P_5 + 6.P_6 + 12.P_7 + 12.P_8}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8}$$

VALOR APROXIMADO: Centro geométrico del área en planta.

$$X_0 = \frac{\sum A.X}{\sum A} \quad ; \quad Y_0 = \frac{\sum A.Y}{\sum A}$$



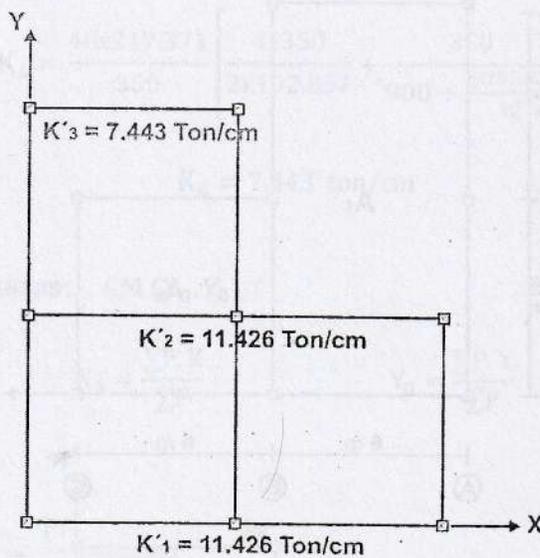
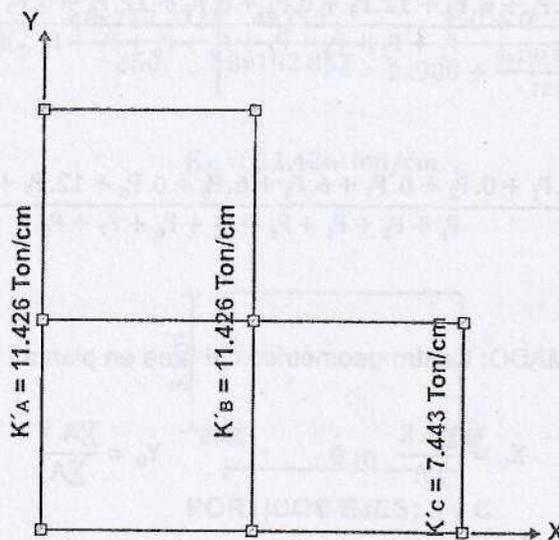
$$X_0 = \frac{(6 \times 12) \times 3 + (6 \times 6) \times 9}{(6 \times 12) + (6 \times 6)} = 5\text{m}$$

$$Y_0 = \frac{(6 \times 12) \times 6 + (6 \times 6) \times 3}{(6 \times 12) + (6 \times 6)} = 5\text{m}$$

3º) Centro de rigidez: $CR(X_R, Y_R)$

$$X_R = \frac{\sum K'_y \cdot X}{\sum K'_y}$$

$$Y_R = \frac{\sum K'_x \cdot Y}{\sum K'_x}$$

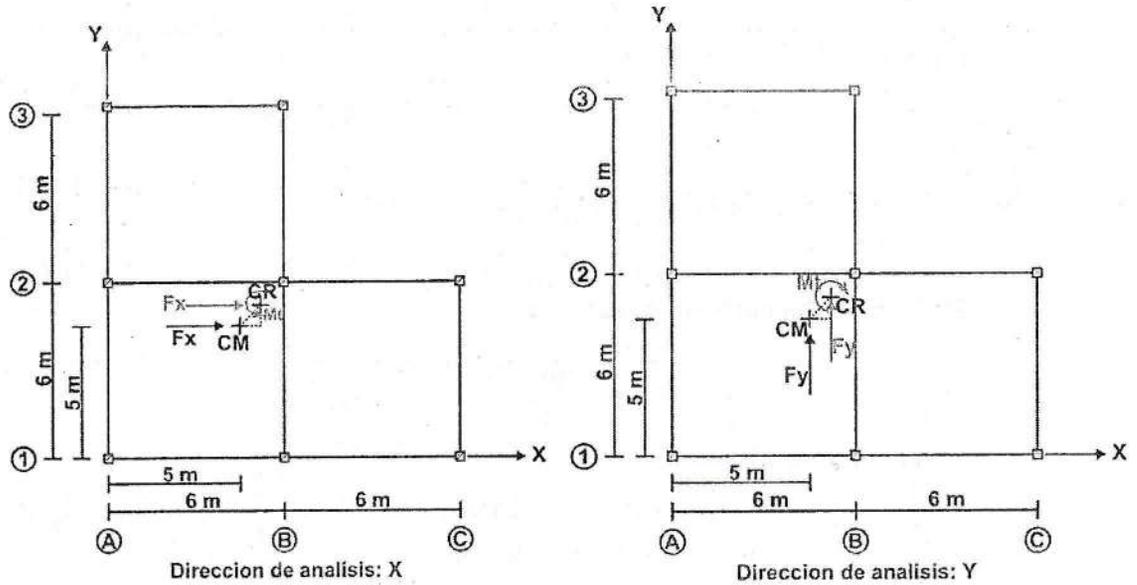


$$X_R = \frac{K'_A(0) + K'_B(6) + K'_C(12)}{K'_A + K'_B + K'_C} = 5.211\text{m}$$

$$Y_R = \frac{K'_1(0) + K'_2(6) + K'_3(12)}{K'_1 + K'_2 + K'_3} = 5.211\text{m}$$

$\therefore \text{CR } (5.211, 5.211)$

4°) Excentricidad: e



Excentricidad directa:

$$e_y = Y_0 - Y_R = -0.211\text{m}$$

$$e_x = X_0 - X_R = -0.211\text{m}$$

Excentricidad accidental:

$$e_{acc} = \pm 0.05D_y = \pm 0.6\text{m}$$

$$e_{acc} = \pm 0.05D_x = \pm 0.6\text{m}$$

Excentricidad real:

Condición 1: $e = 1.5e_{dir} \pm e_{acc}$

$$e_1 = 1.5(-0.211) - 0.6 = -0.9165\text{ m}$$

$$e_1 = 1.5(-0.211) - 0.6 = -0.9165\text{ m}$$

Condición 2: $e = e_{dir} \pm e_{acc}$

$$e_2 = -0.211 + 0.6 = 0.389\text{ m}$$

$$e_2 = -0.211 + 0.6 = 0.389\text{ m}$$

5°) Momentos torsores: M_t

Dirección De Análisis: X

Dirección De Análisis: Y

Condición 1:

$$M_{t1} = F_x \cdot e_1$$

$$M_{t1} = F_y \cdot e_1$$

Condición 2:

$$M_{t2} = F_x \cdot e_2$$

$$M_{t2} = F_y \cdot e_2$$

I. ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO

6°) Cálculo del cortante basal: V

$$V = \frac{ZUSC}{R} \cdot P_T \quad \dots (1)$$

Parámetros Sísmicos:

$$Z = 0.4 \quad (\text{Lima})$$

$$U = 1.0 \quad (\text{Vivienda})$$

$$S = 1.0 \quad (\text{Suelo Rígido}) \Rightarrow T_p = 0.40 \text{ seg}$$

$$R = 6.0 \quad (\text{Sistema aporcionado e irregular})$$

$$C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T}\right), \quad C \leq 2.5$$

Periodo fundamental de la estructura.

$$h_n = 3.50 \text{ m.}$$

$$C_T = 35 \quad (\text{Sistema Aporcionado}).$$

$$T = \frac{h_n}{C_T}$$

$$T = \frac{3.50}{35} = 0.10 \text{ seg}$$

$$C = 2.5 \times \left(\frac{0.4}{0.1}\right) = 10 > 2.5, \quad \therefore C = 2.5$$

Peso total del edificio:

$$P_T = 1 \frac{\text{Ton}}{\text{m}^2} \times (6 \times 6 \times 3) = 108 \text{ ton}$$

Reemplazando en (1):

$$V = \frac{0.4 \times 1.0 \times 2.5 \times 1.0}{6} \times 108 = 0.167 (16.7\%) P_T$$

$$\therefore V = 18.04 \text{ ton.}$$

Análisis en la dirección del sismo: X-X7º) Cálculo del vector de fuerzas externas: \tilde{F}

Para el sismo en X-X:

CASO - 1: $\tilde{F} = \tilde{F}_{\text{directo}}$

CASO - 2: $\tilde{F} = \tilde{F}_{\text{directo}} + F_{\text{cond.-1}}$

CASO - 3: $\tilde{F} = \tilde{F}_{\text{directo}} + F_{\text{cond.-2}}$

CASO 1:
$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} 18.04 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (3 \times 1)$$

CASO 2:

$$M_{t1} = F_x \cdot e_1$$

$$M_{t1} = 18.04 \times (-91.65)$$

$$M_{t1} = -1653.366 \text{ ton - cm.}$$

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} 18.04 \\ 0 \\ -1653.366 \end{Bmatrix} (3 \times 1)$$

CASO 3:

$$M_{t1} = F_x \cdot e_2$$

$$M_{t1} = 18.04 \times (38.9)$$

$$M_{t1} = 701.756 \text{ ton - cm.}$$

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} 18.04 \\ 0 \\ 701.756 \end{Bmatrix} (3 \times 1)$$

8º) Cálculo del vector desplazamiento: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{F}$$

$$\text{CASO 1: } \tilde{u} = \begin{pmatrix} 5.96087 \times 10^{-1} \\ -6.08960 \times 10^{-4} \\ 2.88392 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{cm} \\ \text{cm} \\ \text{rad.} \end{matrix}$$

$$\text{CASO 2: } \tilde{u} = \begin{pmatrix} 5.93444 \times 10^{-1} \\ 2.03416 \times 10^{-3} \\ -9.63338 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{cm} \\ \text{cm} \\ \text{rad.} \end{matrix}$$

$$\text{CASO 3: } \tilde{u} = \begin{pmatrix} 5.97209 \times 10^{-1} \\ -1.73081 \times 10^{-3} \\ 8.19678 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{cm} \\ \text{cm} \\ \text{rad.} \end{matrix}$$

Se eligen los de mayor valor: $\therefore \tilde{u} = \begin{pmatrix} 5.97209 \times 10^{-1} \\ 2.03416 \times 10^{-3} \\ -9.63338 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{cm} \\ \text{cm} \\ \text{rad.} \end{matrix}$

DESPLAZAMIENTO LATERAL: $\Delta_u \leq 7\%_0 h_i$

NORMA: NTE - E030:

Los desplazamientos obtenidos del análisis deberán ser corregidos por 3/4R.

$$\Delta_u = \frac{3}{4}R * u = \frac{3}{4} \times 6 \times 5.97209 \times 10^{-1} = 2.687 \text{ cm} \leq 7\%_0 h_i = 2.45 \text{ cm, NO PASA!}$$

Por lo que deberá reestructurarse (aumentar la rigidez en X-X) y recalcularse la estructura.

9º) Cálculo del desplazamiento de cada elemento: δ_i

$$\delta_i = u_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha + r_i \theta_0$$

($\alpha = 0^\circ$):

$$\delta_i = u_0 + r_i \theta_0$$

($\alpha = 90^\circ$):

$$\delta_i = v_0 + r_i \theta_0$$

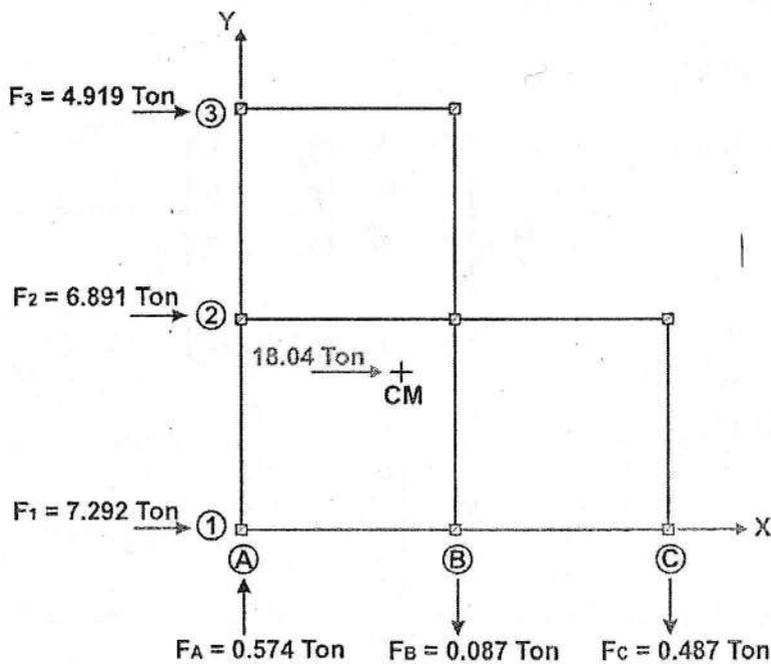
ELEMENTO	α	cos α	Sen α	r_i (cm)	δ_i (cm)		
					CASO 1	CASO 2	CASO 3
1	0°	1	0	500	0.610507	0.545277	0.638193
2	0°	1	0	-100	0.593203	0.603077	0.589012

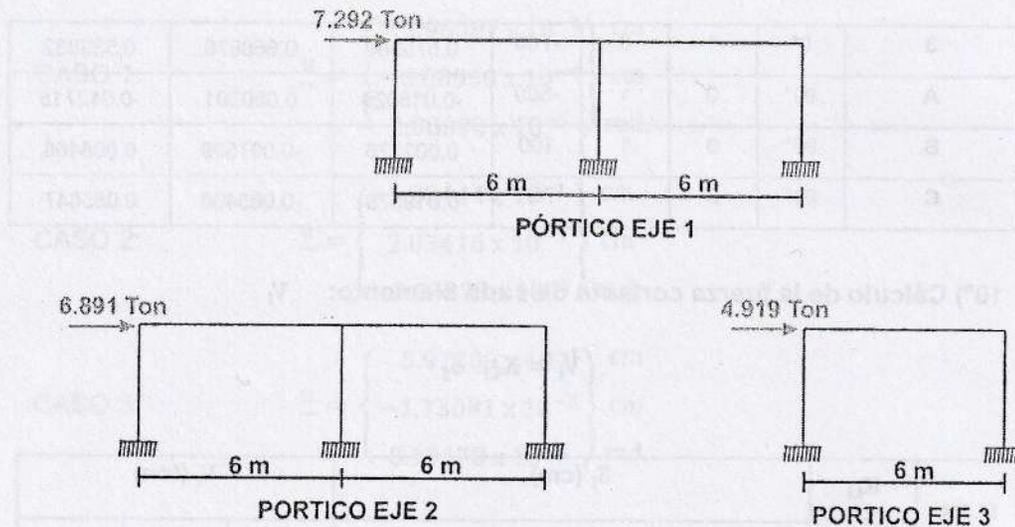
3	0°	1	0	-700	0.575900	0.660878	0.539832
A	90°	0	1	-500	-0.015029	0.050201	-0.042715
B	90°	0	1	100	0.002275	-0.007599	0.006466
C	90°	0	1	700	0.019578	-0.065400	0.055647

10°) Cálculo de la fuerza cortante de cada elemento: V_i

$$V_i = K_{Li} \cdot \delta_i$$

ELEM.	K_{Li} (ton/cm)	δ_i (cm)			V_i (ton)		
		CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 1	CASO 2	CASO 3
1	11.426	0.610507	0.545277	0.638193	6.976	6.230	7.292
2	11.426	0.593203	0.603077	0.589012	6.778	6.891	6.730
3	7.443	0.575900	0.660878	0.539832	4.286	4.919	4.018
A	11.426	-0.015029	0.050201	-0.042715	-0.172	0.574	-0.488
B	11.426	0.002275	-0.007599	0.006466	0.026	-0.087	0.074
C	7.443	0.019578	-0.065400	0.055647	0.146	-0.487	0.414





Análisis en la dirección del sismo: Y - Y

Se seguirá el mismo procedimiento y se obtendrán los mismos resultados que el de la dirección X-X.

II. ANALISIS SÍSMICO DINÁMICO:

1º) Cálculo de la matriz de masas de la estructura: \tilde{M}

Para "n" pisos:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix}$$

Para el piso "i":

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix}$$

Cálculo de m_1 :

Considerando el peso igual a 1 ton/m^2 de área techada se tiene:

$$w = (1 \text{ ton/m}^2)(6 * 6) * 3 = 108 \text{ ton}$$

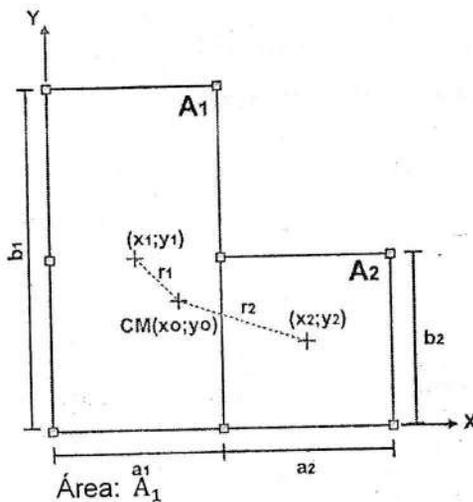
$$m_1 = \frac{w}{g} = \frac{108}{980} = 0.11020408 \text{ ton.seg}^2/\text{cm}$$

Cálculo de J_1 : (Momento polar de inercia)

$$J' = \bar{J} + m' \cdot d^2$$

$$J' = \sum m'_i * \left[\frac{a^2 + b^2}{12} \right] + \sum m'_i [(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2]$$

Para el cálculo del momento polar de masas, es frecuente aproximarlo considerando que las masas de cada piso están aproximadamente uniformemente distribuidas, y por consiguiente los momentos polares de inercia pueden determinarse a partir de las dimensiones del área de losa en planta, suponiendo que el radio de giro de las masas es el mismo que el de las áreas.



$$CM (X_0, Y_0) = (500, 500) \text{ cm}$$

Área: A_2

$$(X_1, Y_1) = (300, 600) \text{ cm}$$

$$(X_2, Y_2) = (900, 300) \text{ cm}$$

$$m'_1 = \frac{2}{3} * (0.1102040816)$$

$$m'_2 = \frac{1}{3} * (0.1102040816)$$

$$m'_1 = 0.073469387 \text{ ton.seg}^2/\text{cm}$$

$$m'_2 = 0.036734693 \text{ ton.seg}^2/\text{cm}$$

$$a_1 = 6m \langle \rangle 600cm$$

$$a_2 = 6m \langle \rangle 600cm$$

$$b_1 = 12m \langle \rangle 120cm$$

$$b_2 = 6m \langle \rangle 600cm$$

$$J'_1 = 14693.8774 \text{ ton.cm. seg}^2$$

$$J'_2 = 9551.0298 \text{ ton.cm. seg}^2$$

$$\therefore J_1 = J'_1 + J'_2 = 24244.89758 \text{ ton.cm. seg}^2$$

Por lo tanto:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0.11020408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11020408 & 0 \\ 0 & 0 & 24244.89758 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

2º) Cálculo de la matriz de rigidez de la estructura: \tilde{k}

Piso j:

$$\tilde{k}_j = \sum_{i=1}^p \tilde{k}^i$$

p = Número total de elementos del piso "j"

En donde para el elemento "i":

$$\tilde{k}^{(i)} = K'_L \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & r \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & \text{sen}^2 \alpha & r \cdot \text{sen} \alpha \\ r \cdot \cos \alpha & r \cdot \text{sen} \alpha & r^2 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

$$r_{ij} = (x_{ij} - x_{cmi}) \cdot \text{Sen} \alpha - (y_{ij} - y_{cmi}) \cdot \text{Cos} \alpha$$

$$CM (x_0, y_0) = (500, 500) \text{ cm}$$

Elemento	$K_L(\text{ton/cm})$	$(x_i, y_i) \text{ cm}$	α	$\text{sen} \alpha$	$\text{cos} \alpha$	$r_i \text{ (cm)}$
Pórtico 1	11.426	(0,0)	0^0	0	1	500
Pórtico 2	11.426	(0,600)	0^0	0	1	-100
Pórtico 3	7.443	(0,1200)	0^0	0	1	-700
Pórtico A	11.426	(0,0)	90^0	1	0	-500
Pórtico B	11.426	(600,0)	90^0	1	0	100
Pórtico C	7.443	(1200,0)	90^0	1	0	700

Elementos direccionados en X-X: ($\alpha = 0^0$)

$$\tilde{k}^{(1)} = 11.426 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 \\ 500 & 0 & 250000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.426 & 0 & 5713 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5713 & 0 & 2856500 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(2)} = 11.426 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.426 & 0 & -1142.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1142.6 & 0 & 114260 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(3)} = 7.443 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -700 \\ 0 & 0 & 0 \\ -700 & 0 & 490000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.443 & 0 & -5210.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5210.1 & 0 & 3647070 \end{bmatrix}$$

Elementos direccionados en Y-Y: ($\alpha = 90^0$)

$$\tilde{k}^{(A)} = 11.426 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -500 \\ 0 & -500 & 250000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.426 & -5713 \\ 0 & -5713 & 2856500 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(B)} = 11.426 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 100 & 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.426 & 1142.6 \\ 0 & 1142.6 & 114260 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^{(C)} = 7.443 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 700 \\ 0 & 700 & 490000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.443 & 5210.1 \\ 0 & 5210.1 & 3647070 \end{bmatrix}$$

Ensamblando: $\tilde{k} = \sum \tilde{k}^{(i)}$

$$\therefore \tilde{k} = \begin{bmatrix} 30.295 & 0 & -639.7 \\ 0 & 30.295 & 639.7 \\ -639.7 & 639.7 & 13235660 \end{bmatrix} (3 \times 3)$$

3º) Cálculo de los periodos y formas de modo de vibración:

De la ecuación dinámica:

$$\tilde{k} \cdot \tilde{\phi}^i = w_i^2 \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{\phi}^i$$

Resolviendo:

$$w_1 = 16.546 \text{ rad/seg} \quad , \quad T_1 = 0.380 \text{ seg} \quad , \quad \tilde{\Phi}^1 = \begin{pmatrix} 2.1256386942 \\ -2.1256432205 \\ 4.121741 \times 10^{-4} \end{pmatrix} (3 \times 1)$$

$$w_2 = 16.580 \text{ rad/seg} \quad , \quad T_2 = 0.279 \text{ seg} \quad , \quad \tilde{\Phi}^2 = \begin{pmatrix} 2.1300344424 \\ 2.1300299253 \\ 0 \end{pmatrix} (3 \times 1)$$

$$w_3 = 23.389 \text{ rad/seg} \quad , \quad T_3 = 0.269 \text{ seg} \quad , \quad \tilde{\Phi}^3 = \begin{pmatrix} -0.1367026874 \\ 0.1367026874 \\ 6.4090486 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} (3 \times 1)$$

4º) Cálculo de los factores de participación modal: FPM_i

Recuérdense que al momento de desacoplar las ecuaciones de movimiento mediante la descomposición modal, estas ecuaciones se plantean por separado para cada dirección del sismo. Por consiguiente, se tomara en cuenta si el sismo es la dirección x en cuyo caso solo las u_i contribuyen en el cálculo del FPM_i y en el resto no contribuye, es decir $v_i = 0$ y $\theta_i = 0$. O si el sismo es en la dirección y, sola las v_i contribuyen y el resto no, esto es $u_i = 0$ y $\theta_i = 0$. De igual forma para determinar el FPM_i del efecto torsión solo θ_i contribuye el resto no.

Para nuestro caso, como nuestro edificio es de un solo nivel los factores de participación modal serán:

$$FPM_i = \frac{\tilde{\Phi}^{iT} \cdot \tilde{m}}{\tilde{\Phi}^{iT} \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{\Phi}^i}$$

Las formas de modo $\tilde{\Phi}^i$ han sido normalizadas de manera que el producto:

$$\tilde{\Phi}^{iT} \cdot \tilde{M} \cdot \tilde{\Phi}^i = 1$$

$$\sum m_k \cdot \phi_k^i{}^2 = 1.0$$

$$\therefore FPM_i = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \phi_k^i$$

FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL DE LA ESTRUCTURA

(FPM_i)

MODO:i	k	m _k	φ _k	m _k φ _k ²	u _i	v _i	θ _i	NIVEL
1	1	1.1020 x 10 ⁻¹	2.1256	4.9794 x 10 ⁻¹	2.1256	-2.1256	4.1217 x 10 ⁻⁴	1
	2	1.1020 x 10 ⁻¹	-2.1256	4.9794 x 10 ⁻¹				
	3	2.4245 x 10 ⁴	4.1217 x 10 ⁻⁴	4.1189 x 10 ⁻³				
		SUMA=		1.0000				
		FPM ₁ =			2.3425 x 10 ⁻¹	-2.3425 x 10 ⁻¹	9.9931	
2	1	1.1020 x 10 ⁻¹	2.1300	5.0000 x 10 ⁻¹	2.1300	2.1300	4.3794 x 10 ⁻¹⁰	1
	2	1.1020 x 10 ⁻¹	2.1300	5.0000 x 10 ⁻¹				
	3	2.4245 x 10 ⁴	4.3794 x 10 ⁻¹⁰	4.6499 x 10 ⁻¹⁵				
		SUMA=		1.0000				
		FPM ₂ =			2.3474 x 10 ⁻¹	2.3474 x 10 ⁻¹	1.0618 x 10 ⁻⁵	
3	1	1.1020 x 10 ⁻¹	-1.3670 x 10 ⁻¹	2.0595 x 10 ⁻³	-1.3670 x 10 ⁻¹	1.3670 x 10 ⁻¹	6.4090 x 10 ⁻³	1
	2	1.1020 x 10 ⁻¹	1.3670 x 10 ⁻¹	2.0595 x 10 ⁻³				
	3	2.4245 x 10 ⁴	6.4090 x 10 ⁻³	9.9588 x 10 ⁻¹				
		SUMA=		1.0000				
		FPM ₃ =			-1.5065 x 10 ⁻²	1.5065 x 10 ⁻²	1.5539 x 10 ⁻²	

5°) Cálculo de la aceleración espectral: Sa_i

NORMA: NTE E030

$$Sa_i = \frac{ZUSC}{R} \cdot g$$

Parámetros Sísmicos:

$$Z = 0.4 \text{ (Lima, Pueblo Libre)}$$

$$U = 1.0 \text{ (Vivienda)}$$

$$S = 1.0 \text{ (Suelo Rígido)} \rightarrow T_p = 0.40 \text{ seg}$$

$$R = 6.0 \text{ (Sistema aporricado e irregular)}$$

$$C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T}\right); \quad C \leq 2.5; \quad \text{Además: } C/R \geq 0.125$$

Para estructuras en general:

Tomar: $R = R$: Para estructuras regulares

$R = \frac{3}{4} R$: Para estructuras irregulares.

$$T_1 = 0.380 \text{ seg} \rightarrow C_1 = 2.5 \rightarrow \therefore Sa_1 = 163.333 \text{ cm/seg}^2$$

$$T_2 = 0.319 \text{ seg} \rightarrow C_2 = 2.5 \rightarrow \therefore Sa_2 = 163.333 \text{ cm/seg}^2$$

$$T_3 = 0.269 \text{ seg} \rightarrow C_3 = 2.5 \rightarrow \therefore Sa_3 = 163.333 \text{ cm/seg}^2$$

6°) Cálculo del vector desplazamiento: \tilde{u}

$$\tilde{u}^i = FPM_i \cdot \frac{Sa_i}{w_i^2} \cdot \tilde{\phi}^i$$

Dirección del sismo: X-X

MODO: 1

$$u^1 = 2.3425 \times 10^{-1} \times \frac{163.333}{16.546^2} \times (2.1256387) = 0.297 \text{ cm}$$

MODO: 2

$$u^2 = 2.3424 \times 10^{-1} \times \frac{163.333}{16.580^2} \times (2.1200344) = 0.297 \text{ cm}$$

MODO: 3

$$u^3 = -1.5065 \times 10^{-2} \times \frac{163.333}{23.389^2} \times (-0.1367026874) = 6.149 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

COMBINACIÓN MODAL:

$$u = 0.25 \sum |u| + 0.75 \sqrt{\sum |u|^2}$$

$$\sum |u| = 0.595 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\sum |u|^2} = 0.420 \text{ cm}$$

$$\therefore u = 0.464 \text{ cm}$$

NORMA: NTE - E030 $\Delta_u \leq 7\%_o h_i$

Los desplazamientos obtenidos del análisis deberán ser corregidos por 3/4R.

$$\Delta_u = \frac{3}{4} R \cdot u = \frac{3}{4} \times 6 \times 0.464 = 2.088 \text{ cm} \leq 0.007 \times 350 = 2.45 \text{ cm, OK!}$$

Dirección del sismo: Y - Y

MODO: 1

$$v^1 = -2.3425 \times 10^{-1} \times \frac{163.333}{16.546^2} \times (-2.1256472205) = 0.297 \text{ cm}$$

MODO: 2

$$v^2 = 2.3474 \times 10^{-1} \times \frac{163.333}{16.580^2} \times (2.130029925) = 0.297 \text{ cm}$$

MODO: 3

$$v^3 = 1.5065 \times 10^{-2} \times \frac{163.333}{23.389^2} \times (0.1367026874) = 6.149 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

COMBINACIÓN MODAL:

$$v = 0.25 \sum |v| + 0.75 \sqrt{\sum |v|^2}$$

$$\sum |v| = 0.595 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\sum |v|^2} = 0.420 \text{ cm}$$

$$\therefore v = 0.464 \text{ cm}$$

NORMA: NTE - E030

$$\Delta_u = \frac{3}{4} R \cdot v = \frac{3}{4} \times 6 \times 0.464 = 2.088 \text{ cm} \leq 0.007 \times 350 = 2.45 \text{ cm, OK!}$$

EFFECTO DE TORSIÓN

MODO: 1

$$\theta^1 = 9.9931 \times \frac{163.333}{16.546^2} \times (4.121741 \times 10^{-4}) = 2.4648 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

MODO: 2

$$\theta^2 = 1.0618 \times 10^{-5} \times \frac{163.333}{16.530^2} \times (0) = 0 \text{ rad.}$$

MODO: 3

$$\theta^3 = 1.5539 \times 10^2 \times \frac{163.333}{23.389^2} \times (6.4050486 \times 10^{-3}) = 2.9824 \times 10^{-1} \text{ rad.}$$

COMBINACIÓN MODAL:

$$\theta = 0.25 \sum |\theta| + 0.75 \sqrt{\sum |\theta|^2}$$

$$\sum |\theta| = 3.007048 \times 10^{-1} \text{ rad.}$$

$$\sqrt{\sum |\theta|^2} = 2.982501 \times 10^{-1} \text{ rad.}$$

$$\therefore \theta = 2.988638 \times 10^{-1} \text{ rad.}$$

POR LO TANTO:

$$\tilde{u} = \left\{ \begin{array}{l} 0.464 \\ 0.464 \\ 2.988638 \times 10^{-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cm} \\ \text{cm} \\ \text{rad} \end{array}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA N° 01: En la siguiente figura de planta de una estructura de un piso, compuesta por pórticos ortogonales unidos por una losa que se supone infinitamente rígida para acciones en su plano. Se han obtenido las rigideces laterales.

Eje	$K_L(\text{ton/cm})$	Eje	$K_L(\text{ton/cm})$
A	6000	1	2000
B	20000	2	50000
C	4500	3	1500
D	3000	4	1000

Suponga que el origen de coordenadas está en la intersección de los ejes 1 y A. En el punto de coordenadas (4.7; 4.25) actúa una fuerza de 15 ton., en la dirección Y.

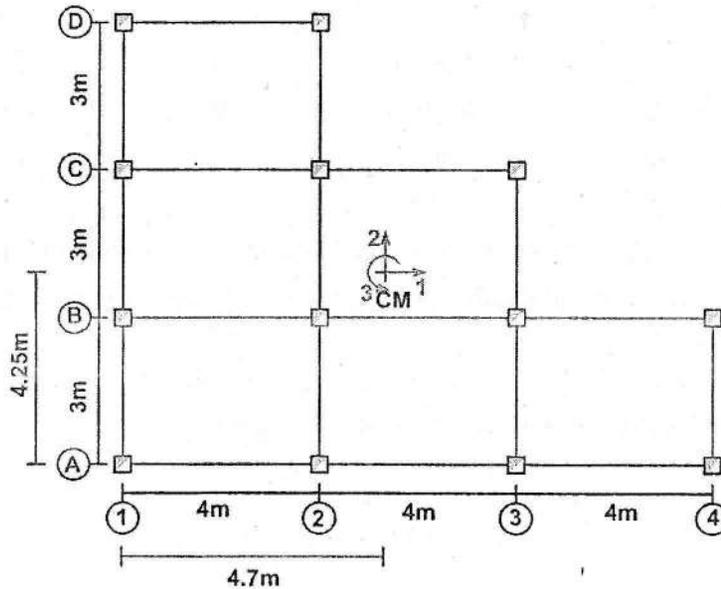
a) Determine las coordenadas del centro de rigidez.

$$X_{cr} = \frac{\sum K_y \cdot X}{\sum K_y}$$

$$Y_{cr} = \frac{\sum K_x \cdot Y}{\sum K_x}$$

- b) Determine las fuerzas estáticamente equivalentes a la antes mencionadas, pero aplicadas en el centro de rigidez.
- c) Escriba un sistema de ecuaciones que relacione las tres componentes de desplazamiento en el centro de rigidez con las correspondientes componentes de fuerza.
- d) Calcule el giro en planta y las componentes de traslación del centro de rigidez.
- e) Obtenga el desplazamiento horizontal en la parte superior de cada pórtico (más precisamente, la componente según el alineamiento del pórtico) ¿Cuál es la razón entre el desplazamiento lateral en el alineamiento del eje 4 y aquel en el alineamiento del eje 1?

- f) Determine la fuerza lateral que toma cada pórtico.
- g) Verifique el equilibrio para los 3 GDL considerados en el módulo pseudo tridimensional.
- h) Suponiendo que se pudiera modificar el pórtico del eje 4: ¿Cuál debería ser su rigidez lateral para que al aplicar la referida fuerza de 15 Ton., el punto (4.7; 4.25) no tenga rotación en planta?



PROBLEMA N° 02: En la siguiente figura se muestra la planta de una estructura de un piso, compuesta por pórticos ortogonales unidos por una losa que se supone infinitamente rígida para acciones en su plano. Se han obtenido las rigideces laterales:

Eje	$K_L(\text{ton/cm})$	Eje	$K_L(\text{ton/cm})$
A	600	1	400
B	2500	2	600
C	500	3	1500
		4	500

Suponga que el origen de coordenadas está en la intersección de los ejes 1 y A. Las coordenadas del centro de masas son: $X_m=7\text{m}$; $Y_m=3.75\text{m}$. Suponga que

sobre la estructura actúa una fuerza horizontal de 30 Ton, en dirección X (paralela a los ejes literales), aplicada en el centro de masas.

a) Determine las coordenadas del centro de rigidez.

$$X_{cr} = \frac{\Sigma K_Y \cdot X}{\Sigma K_Y}$$

$$Y_{cr} = \frac{\Sigma K_X \cdot Y}{\Sigma K_X}$$

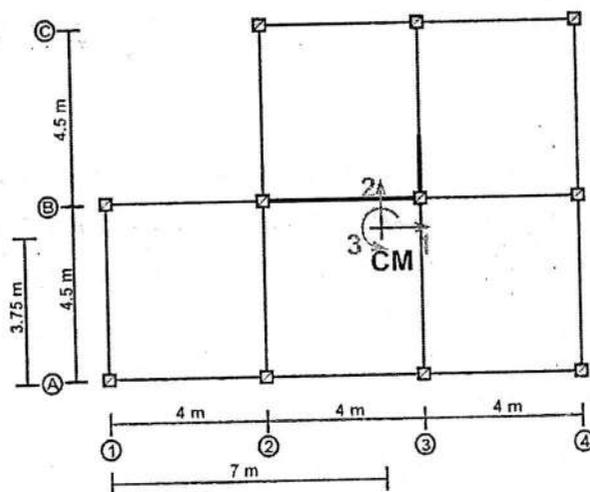
b) Determine las fuerzas estáticamente equivalentes a la antes mencionadas, pero aplicadas en el centro de rigidez.

c) Escriba un sistema de ecuaciones que relacione las tres componentes de desplazamiento en el centro de rigidez con las correspondientes componentes de fuerza.

d) Calcule el giro en planta y las componentes de traslación del centro de rigidez.

e) Obtenga el desplazamiento horizontal de cada pórtico (en su plano).

f) Determine la fuerza lateral que toma cada pórtico.



PROBLEMA N° 03: En la siguiente figura que se muestra la planta de una estructura de un piso, compuesta por una placa y seis pórticos ortogonales, unidos en la parte superior por una losa que puede suponerse infinitamente rígida para acciones en su plano. La altura de los pórticos, desde la parte superior de la zapata hasta el eje de las correspondientes vigas, es 3.6m. Las columnas son todas de sección circular, de 0.30 m de diámetro. Las vigas son de sección rectangular, de 0.30mx0.60m. En el eje 4 hay una placa de 0.20mx6.30m que, al igual que las columnas, se supondrá empotrada en la base. Para todos los elementos: $E = 2.4 \times 10^6 \text{ Ton/m}^2$ y $G=0.4E$. Las inercias de la placa y de las columnas pueden determinarse como $bt^3/12$. Para las vigas considere el 70% de las inercias de la sección bruta. Desprecie deformaciones axiales y de corte, excepto estas últimas en la placa.

Para los pórticos se ha obtenido las rigideces laterales que se indican a continuación:

Eje	$K_L(\text{ton/cm})$
1, 2, 3	681
4	?
A, B	928
C	689

Al hacer los cálculos para obtener la rigidez lateral de los pórticos 1, 2 y 3, se han determinado las siguientes relaciones entre el desplazamiento lateral y los giros de los nudos.

$$\theta_1 = \theta_3 = -5.95031 \cdot 10^{-2} u \quad \theta_2 = -6.22655 \cdot 10^{-3} u$$

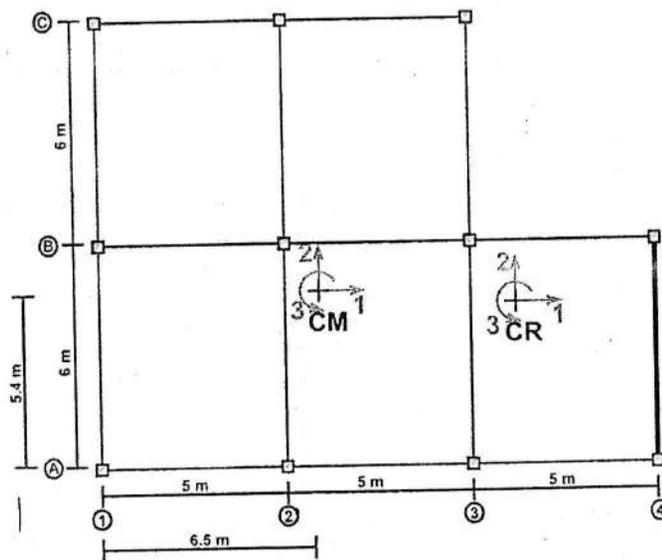
Donde u es el desplazamiento lateral.

Suponga el origen de coordenadas en la intersección de los ejes A y 1. En el centro de masas, cuyas coordenadas son (6.50m, 5.40m), actúa una fuerza de 12ton en la dirección Y (es decir, en correspondencia al GDL 2 indicado).

Se pide:

- La rigidez lateral del eje 4 (no olvide considerar las deformaciones de corte).
- Las coordenadas del centro de rigidez.

- c) Con referencia al centro de rigidez determine una matriz que relacione las componentes de desplazamiento para los GDL (1 2 3) indicados con las correspondientes fuerzas.
- d) Traslade la fuerza aplicada al centro de rigidez y calcule las componentes de desplazamiento en ese punto.
- e) Obtenga las correspondientes componentes de desplazamiento en el centro de masas.
- f) Calcule los desplazamientos a lo largo de cada uno de los ejes resistentes.
- g) Determine las correspondientes fuerzas y verifique el equilibrio (incluyendo el equilibrio de momentos).
- h) Obtenga los giros en los tres nudos del pórtico del eje 1.
- i) Determine los momentos flectores y fuerzas cortantes en los elementos del pórtico del eje 1.
- j) Dibuje los correspondientes diagramas, indicando los valores más importantes.



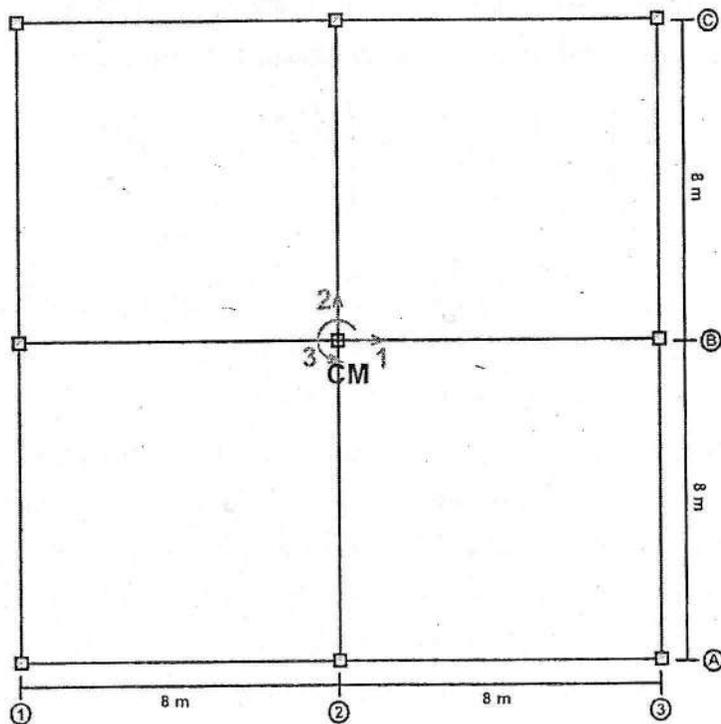
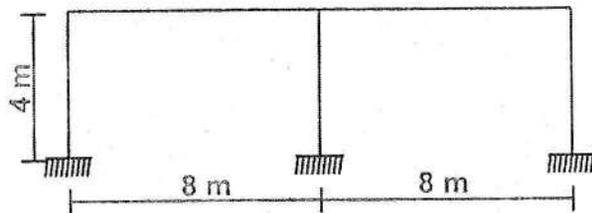
PROBLEMA N° 04: La siguiente figura muestra la planta de una estructura de un piso, compuesta por seis pórticos ortogonales, de concreto armado, unidos en su parte superior por una losa que puede considerarse como infinitamente rígida para acciones en su plano. Las columnas son todas de sección circular, de 0.30 m de diámetro. Las vigas son de sección transversal rectangular, de 0.30m x 0.65m para todos los elementos: $E=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Considere como inercias de las columnas $\pi D^4/64$. Para las vigas, considere el 70% de la inercia correspondiente a la sección bruta, $bh^3/12$. Desprecie deformaciones axiales y de corte en todos los elementos.

La rigidez lateral del pórtico típico es: $K_L = 415.359 \text{ ton/m}$.

Para fuerzas que actúan sobre el conjunto: $H=12 \text{ ton}$; $V=0$; $M=6 \text{ ton-m}$, se pide:

- Determine la matriz de rigidez para la estructura con los tres grados de libertad indicados en la planta.
- Calcule el desplazamiento horizontal (a nivel de losa) para los pórticos de cada eje.
- Determine las correspondientes fuerzas laterales y verifique el equilibrio.

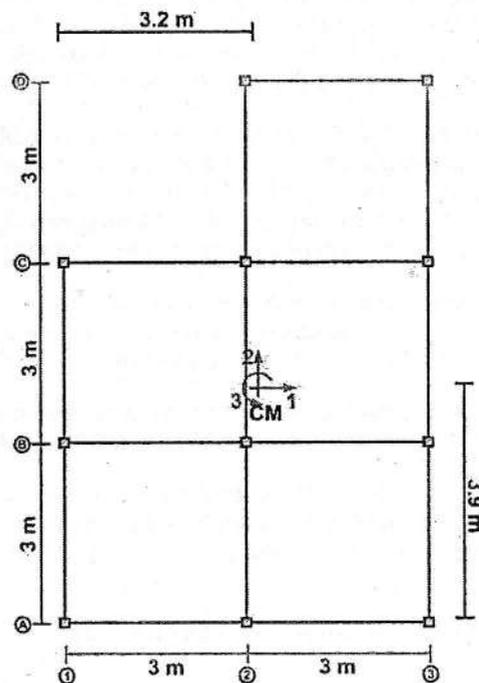


PROBLEMA N° 05: La siguiente figura muestra la planta de una estructura de un piso, compuesta por muros de albañilería ortogonales, unidos entre sí por una losa que puede considerarse como infinitamente rígida para acciones en su plano. Se han obtenido las rigideces laterales de los muros: ejes 1, 2, B: $K_L=60\text{ton/m}$; eje 3: $K_L = 90\text{ton/m}$; ejes A, D: $K_L = 30\text{ton/m}$; eje C: $K_L= 40\text{ton/m}$.

Por la acción de una fuerza horizontal de 2ton en correspondencia al grado de libertad 1, se obtienen los desplazamientos en el punto de coordenadas (3.20m, 3.90m):

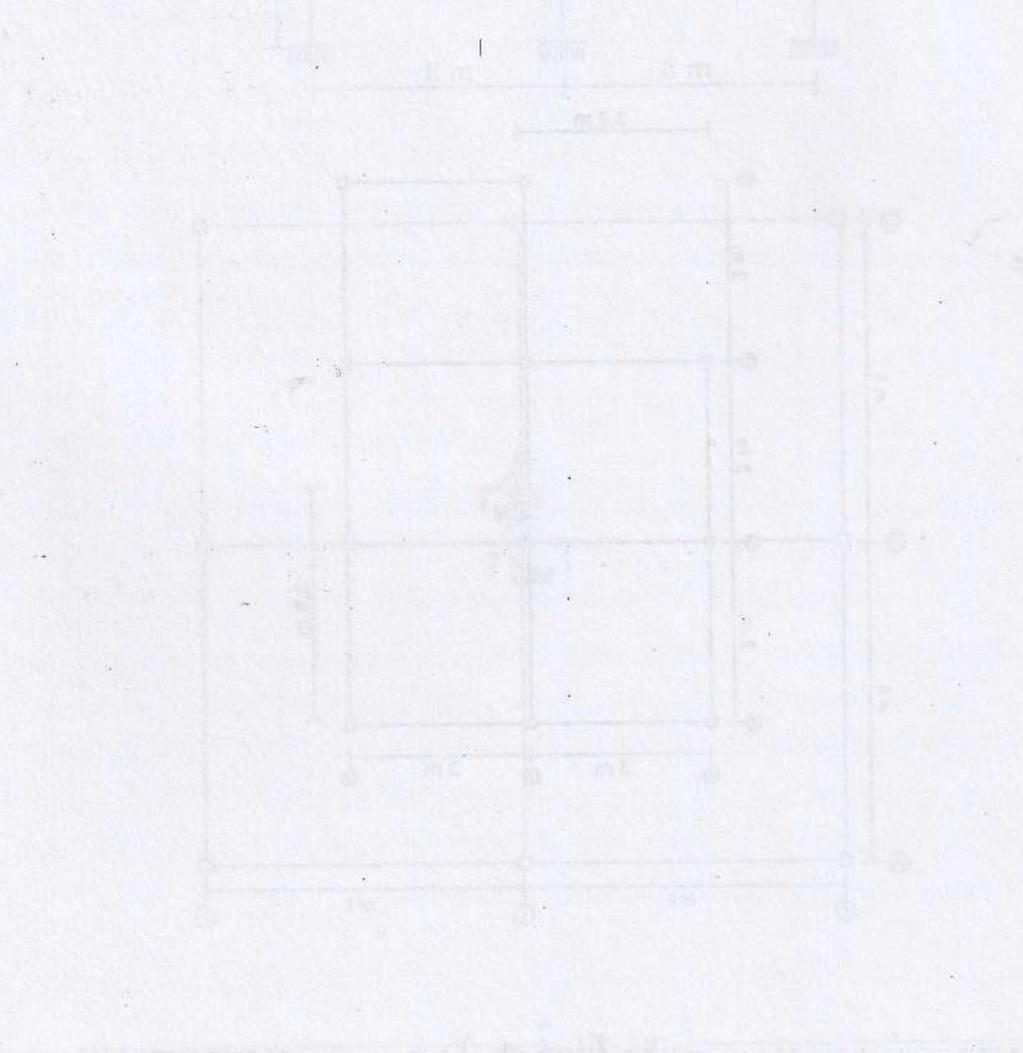
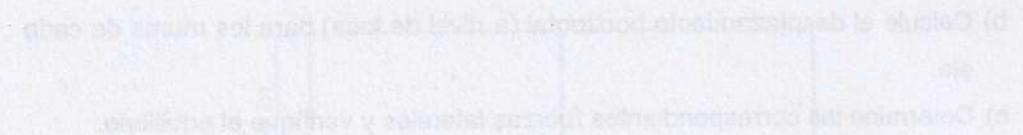
A partir de estos resultados:

- Determine la matriz de rigidez para la estructura con los tres grados de libertad indicados en la planta.
- Calcule el desplazamiento horizontal (a nivel de losa) para los muros de cada eje.
- Determine las correspondientes fuerzas laterales y verifique el equilibrio.



Se tiene un sistema de vigas y columnas en el plano horizontal de la figura. Las columnas están separadas 4 m entre sí y la viga tiene un espesor de 0.2 m. El sistema está soportado por un apoyo fijo en la columna izquierda y un apoyo móvil en la columna derecha. Se pide determinar las reacciones de apoyo y los momentos en las columnas y en la viga.

- a) Calcular las reacciones de apoyo.
- b) Determinar los momentos en las columnas y en la viga.



CAPÍTULO IV

ARMADURAS



Fuente: The History of
the Theory of Structures -
Karl-Eugen Kurrer

Squire Whipple (16 de setiembre de 1804 – 15 de marzo de 1888) fue un ingeniero civil que nació en Hardwick, Massachusetts, hijo de un agricultor, se dedicó a la ingeniería a una temprana edad. Squire Whipple estudio en el colegio de Fairfield. Después se graduó en la universidad de Schenectady (Nueva York) en 1830.

En 1841 se le concedió una patente para su armadura hecha de hierro colado y forjado, y formuló dos solicitudes de patentes en el que se especifica en hierro puro para los miembros en compresión y el hierro forjado para los miembros en tensión. En ese mismo año fue capaz de erigir una gran estructura de un puente sobre el Canal Erie en Utica, y construyó seis más los siguientes seis años entre Nueva York y Erie.

Whipple publicó sus descubrimientos en el marco de la teoría de vigas y cerchas en 1847 el cual inicio el desligue de las teorías provenientes de Europa. F. E. Griggs, Jr y A.J. DeLuzio examinaron su trabajo pionero en detalle.

Whipple fue la primera persona en desarrollar la teoría de armaduras simplemente articuladas con métodos gráficos y trigonométricos.

Basado en pruebas, encuentra una ecuación para calcular de tamaño de puntales de hierro fundido. Whipple también inicia el estudio de la teoría de viga simple y describe el fenómeno del comportamiento elástico y plástico de las vigas de hierro fundido en flexión.

F.E. Griggs Jr., con toda razón denomina a Whipple, como el "Padre de los puentes de hierro".

Principales contribuciones al análisis estructural:

- ✓ Trabajo en construcción de puentes (1847).
- ✓ Apéndice de las construcciones en puente tipo Whipple (1869).
- ✓ Tratado elemental y práctico en construcción de puentes (1873).

INTRODUCCIÓN

En el diseño de estructuras como en las armaduras es fundamental hacer un buen análisis de la estructura para luego no tener inconvenientes en el proceso de construcción de estas.

La utilidad de las matrices en el análisis de estructuras tales como las armaduras, se basa en que las matrices proporcionan un medio matemático muy cómodo para expresar y desarrollar la teoría.

La solución que expresa la teoría puede obtenerse más fácilmente mediante una secuencia de operaciones matriciales, para las que es totalmente idónea una computadora. La facilidad del estudio de la teoría de estructuras, así mismo este método matricial reduce los detalles de las operaciones numéricas a un proceso sistemático del manejo de matrices.

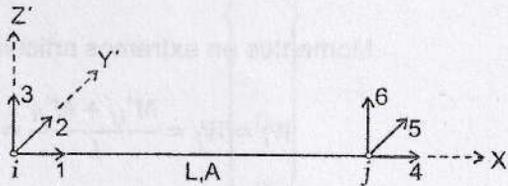
Las mayores dificultades que presentan los estudiantes se encuentran en el desarrollo de las matrices en forma manual, es por esto que también se deben utilizar algunos programas de cómputo para facilitar el proceso y desarrollo.

Este material tiene como objetivo ayudar a los estudiantes de esta asignatura en la resolución de los problemas que se presentan. Esto les permitirá asimilar mejor las bases teóricas, comprender el método de resolución de problemas como armaduras en tres dimensiones y adquirir conocimientos para resolver consiente e independientemente los problemas que se les proponen.

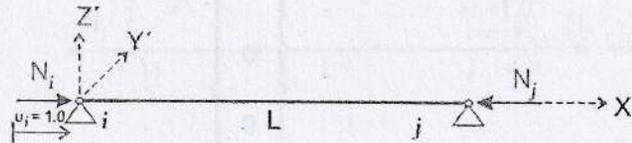
De otro lado la ausencia de textos de este capítulo en las condiciones de los problemas permite aumentar considerablemente el número de esquemas de cálculo y analizar un número suficiente de diversos criterios sin incrementar el volumen del folleto.

ARMADURAS EN TRES DIMENSIONES

MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ORIENTADOS EN EL EJE "X"



Coefficientes de la columna (1): Corresponden al 1° GDL.



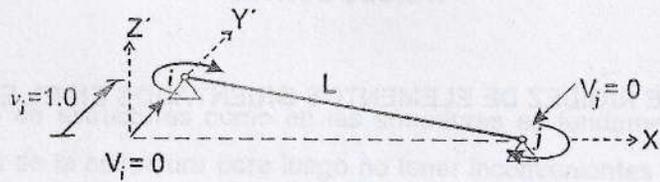
$$\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow u_i = \frac{N_i L}{EA} \Rightarrow N_i = \frac{EA}{L} \cdot u_i$$

$$\therefore N_i = \frac{EA}{L} = -N_j$$

Por lo tanto, la 1° columna será:

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la columna (2): Corresponden al 2° GDL.



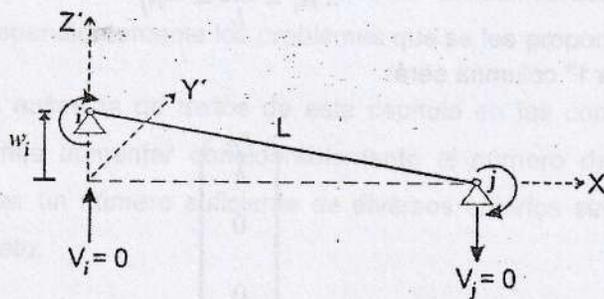
Momentos en extremos articulados = 0

$$W_i = W_j = \frac{M'_{ij} + M'_{ji}}{L} = 0$$

Por lo tanto, la 2° columna será:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la columna (3): Corresponden al 3° GDL.



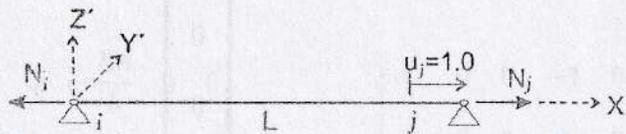
Momentos en extremos articulados = 0

$$V_i = V_j = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} = 0$$

Por lo tanto, la 3° columna será:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la columna (4): Corresponden al 4° GDL.



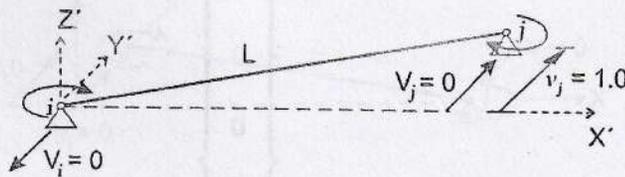
$$\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow u_j = \frac{N_j L}{EA} \Rightarrow N_j = \frac{EA}{L} \cdot u_j$$

$$\therefore N_j = \frac{EA}{L} = -N_i$$

Por lo tanto, la 4° columna será:

$$\begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la columna (5): Corresponden al 5° GDL.



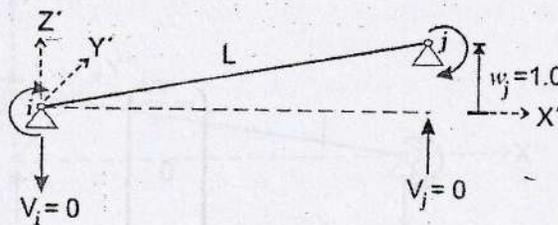
Momentos en extremos articulados = 0

$$W_i = W_j = \frac{M'_{ij} + M'_{ji}}{L} = 0$$

Por lo tanto, la 5° columna será:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coefficientes de la columna (6): Corresponden al 6° GDL.



Momentos en extremos articulados = 0

$$V_i = V_j = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} = 0$$

Por lo tanto, la 6° columna será:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por el principio de superposición de causas y efectos:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \approx \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad \dots (1)$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ORIENTADOS EN EL EJE "Y"

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \approx \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad \dots (2)$$

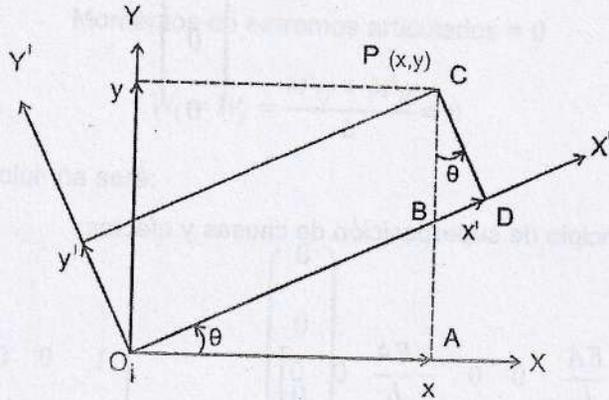
ROTACIÓN DE EJES EN TRES DIMENSIONES

1.1 ROTACIÓN EN EL PLANO:

En el extremo "i" del elemento bi-articulado:

(X,Y): vectores en el sistema de coordenada global.

(X',Y'): vectores en el sistema de coordenada local girado.



$$\overline{AB} + \overline{BC} = y$$

$$x \cdot \tan \theta + \frac{y'}{\cos \theta} = y$$

$$x \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} + \frac{y'}{\cos \theta} = y \quad \Rightarrow y' = -x \cdot \text{sen } \theta + y \cdot \cos \theta \quad \dots (3)$$

$$\overline{OB} + \overline{BD} = x'$$

$$\frac{x}{\cos \theta} + y' \cdot \tan \theta = x'$$

$$\frac{x}{\cos \theta} + (-x \cdot \text{sen } \theta + y \cdot \cos \theta) \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = x'$$

$$\frac{x}{\cos \theta} - x \cdot \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} + y \cdot \text{sen } \theta = x'$$

$$x \cdot \frac{(1 - \text{sen}^2 \theta)}{\cos \theta} + y \cdot \text{sen } \theta = x' \quad \Rightarrow x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \text{sen } \theta \quad \dots (4)$$

De (3) y (4): Expresados matricialmente:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \text{sen } \theta \\ y' = -x \cdot \text{sen } \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underset{\sim}{v}' = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{v}$$

En donde:

$\underset{\sim}{v}'$: Vector en el sistema local

$\underset{\sim}{v}$: Vector en el sistema global

$\underset{\sim}{R}$: Matriz de transformacion (ORTOGONAL)

$$\underset{\sim}{R}^{-1} = \underset{\sim}{R}^T, \quad \underset{\sim}{R}^T \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}$$

Considerando ambos extremos:

En el extremo "i": $\underset{\sim}{V}'_i = \underset{\sim}{R}_i \underset{\sim}{V}_i$

En el extremo "j": $\underset{\sim}{V}'_j = \underset{\sim}{R}_j \underset{\sim}{V}_j$

Expresando matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{V}'_i \\ \underset{\sim}{V}'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R}_i & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{R}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{V}_i \\ \underset{\sim}{V}_j \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R}_i & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{R}_j \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{T}: \text{Matriz de transformaci3n } (\underset{\sim}{R}_i = \underset{\sim}{R}_j)$$

Por extensi3n:

$$\underset{\sim}{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & m_1 \\ 0 & 0 & l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

En donde:

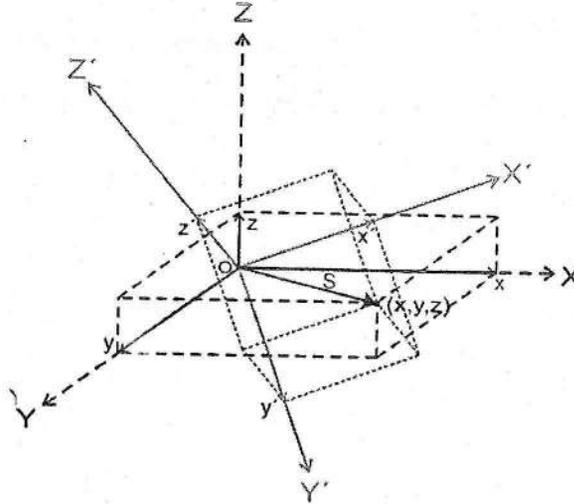
l_1 y m_1 : Coseno de X' respecto de X y Y

l_2 y m_2 : Coseno de Y' respecto de X y Y

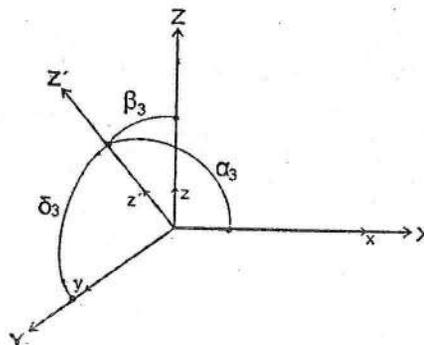
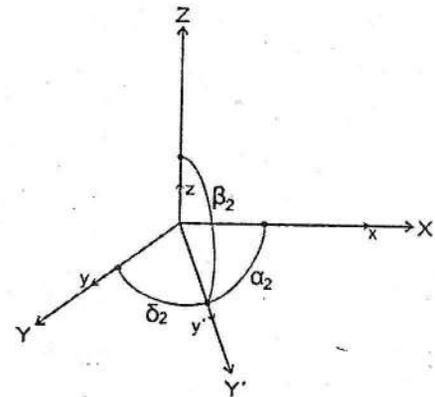
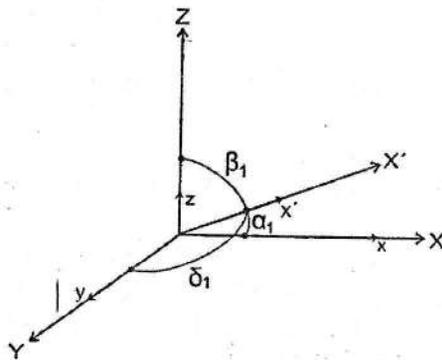
1.2 ROTACIÓN EN EL ESPACIO:

(X, Y, Z) : Vectores en el sistema de coordenada global.

(X', Y', Z') : Vectores en el sistema de coordenada local girado.



En la figura las componentes de las fuerzas en los dos sistemas son comparadas, la resultante de la fuerza "S", puede ser resuelto en los dos sistemas, en el sistema de coordenada global por las componentes (x, y, z) y en el sistema de coordenadas local por las componentes (x', y', z') . Entonces cada componente del sistema global puede su vez ser resuelto en función de las componentes del sistema local, y viceversa.



La más fácil forma de expresar un grupo de componentes en función del otro es a través de los cosenos directores. Usando las nomenclaturas de los cosenos directores definidas en la figura anterior, tenemos, para el sistema local las componentes:

$$x' = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \cos \beta_1 + z \cdot \cos \delta_1$$

$$y' = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \cos \beta_2 + z \cdot \cos \delta_2$$

$$z' = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \cos \beta_3 + z \cdot \cos \delta_3$$

Usando, respectivamente los símbolos l , m y n , con los subíndices correspondientes, para llamar a los nueve cosenos directores, tenemos:

$$x' = x \cdot l_1 + y \cdot m_1 + z \cdot n_1 \dots (5)$$

$$y' = x \cdot l_2 + y \cdot m_2 + z \cdot n_2 \dots (6)$$

$$z' = x \cdot l_3 + y \cdot m_3 + z \cdot n_3 \dots (7)$$

De (5), (6) y (7): Expresados matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \underline{v'} = \underline{R} \cdot \underline{v}$$

En donde:

$\underline{v'}$: Vector en el sistema local

\underline{v} : Vector en el sistema global

\underline{R} : Matriz de transformación (ORTOGONAL)

$$\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T, \quad \underline{R}^T \underline{R} = \underline{I}$$

Considerando ambos extremos:

En el extremo "i": $\underline{V'}_i = \underline{R} \underline{V}_i$

En el extremo "j": $\underline{V'}_j = \underline{R} \underline{V}_j$

Expresando inicialmente:

$$\begin{Bmatrix} V' \\ \tilde{i} \\ V' \\ \tilde{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ \tilde{i} & \\ 0 & R \\ & \tilde{j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \tilde{i} \\ V \\ \tilde{j} \end{Bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ \tilde{i} & \\ 0 & R \\ & \tilde{j} \end{bmatrix}, \quad T: \text{Matriz de transformación } \begin{pmatrix} R \\ \tilde{i} \\ R \\ \tilde{j} \end{pmatrix}$$

Por extensión:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 & m_2 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \approx \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z & 0 & 0 & 0 \\ C_X & C_Y & C_Z & 0 & 0 & 0 \\ C_X & C_Y & C_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_X & C_Y & C_Z \\ 0 & 0 & 0 & C_X & C_Y & C_Z \\ 0 & 0 & 0 & C_X & C_Y & C_Z \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad \dots (8)$$

En donde:

l_1, m_1 y n_1 : Coseno director de X' respectode X, Y y Z

l_2, m_2 y n_2 : Coseno director de Y' respectode X, Y y Z

l_3, m_3 y n_3 : Coseno director de Z' respectode X, Y y Z

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO ARBITRARIAMENTE

Matriz de rigidez general:

Multiplicando: $k_{\tilde{\sim}}^{(e)} = T^{T(e)} \cdot k'^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad \dots (9)$

$$K' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

$$T^{T(e)} = \begin{bmatrix} C_X & C_X & C_X & 0 & 0 & 0 \\ C_Y & C_Y & C_Y & 0 & 0 & 0 \\ C_Z & C_Z & C_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_X & C_X & C_X \\ 0 & 0 & 0 & C_Y & C_Y & C_Y \\ 0 & 0 & 0 & C_Z & C_Z & C_Z \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Multiplicando:

$$K^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z & -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z \\ C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z & -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z \\ C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 & -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 \\ \hline -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z & C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z \\ -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z & C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z \\ -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 & C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PROBLEMA 01:

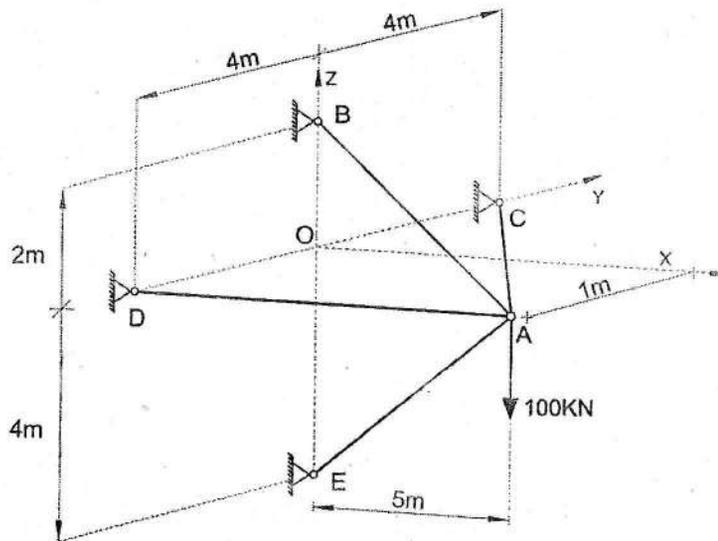
Para el reticulado espacial mostrado en la figura, determinar:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

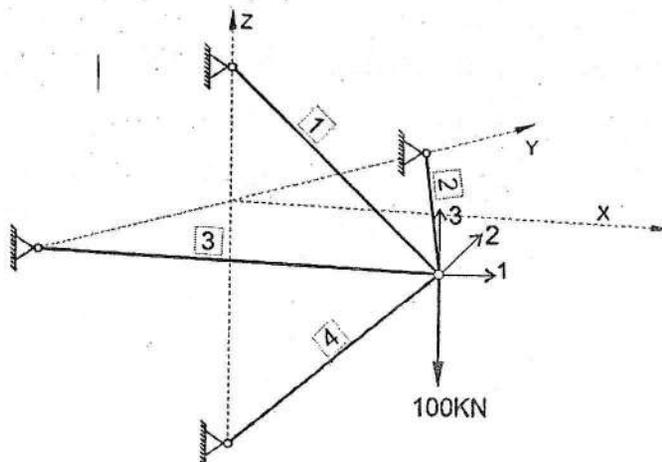
Considerar para todos los elementos:

$$E = 200000 \text{ MPa.}$$

$$A = 2000 \text{ mm}^2$$



SOLUCIÓN:



1°) Matriz de rigidez de cada elemento: \tilde{k}^e

$$E = 200000 \text{ MPa} = 2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$A = 2000 \text{ mm}^2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$EA = 4 \times 10^8 \text{ N}$$

ELEMENTO 1:

$$i(0,0,200) \text{ cm}$$

$$j(500,0,-100) \text{ cm}$$

$$Dx = Xj - Xi = 500 - 0 = 500 \text{ cm}$$

$$Dy = Yj - Yi = 0 - 0 = 0 \text{ cm}$$

$$Dz = Zj - Zi = -100 - 200 = -300 \text{ cm}$$

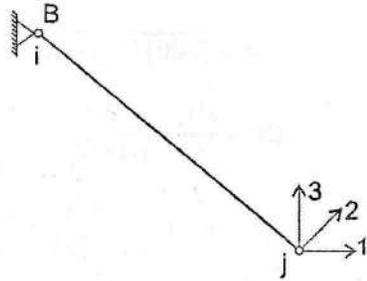
$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(500)^2 + (0)^2 + (-300)^2} = 583.095 \text{ cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{500}{583.095} = 0.857$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{0}{583.095} = 0$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{-300}{583.095} = -0.514$$



La matriz de rigidez del elemento:

$$\tilde{k}^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}^1 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 504407.6034 & 0 & -302644.5620 \\ 0 & 0 & 0 \\ -302644.5620 & 0 & 181586.7372 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

ELEMENTO 2:

$$i(0,400,0)cm$$

$$j(500,0,-100)cm$$

$$Dx = Xj - Xi = 500 - 0 = 500cm$$

$$Dy = Yj - Yi = 0 - 400 = -400cm$$

$$Dz = Zj - Zi = -100 - 0 = -100cm$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

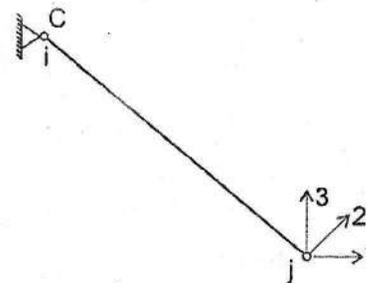
$$L = \sqrt{(500)^2 + (-400)^2 + (-100)^2} = 648.074cm$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{500}{648.074} = 0.772$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-400}{648.074} = -0.617$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{-100}{648.074} = -0.154$$

La matriz de rigidez del elemento:



$$K^2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 367388.9285 & -293911.1428 & -73477.7857 \\ -293911.1428 & 235128.9142 & 58782.2286 \\ -73477.7857 & 58782.2286 & 14695.5571 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ELEMENTO 3:

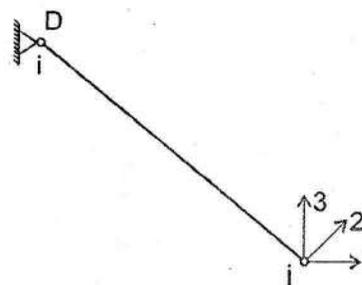
$$i(0,-400,0)cm$$

$$j(500,0,-100)cm$$

$$Dx = Xj - Xi = 500 - 0 = 500cm$$

$$Dy = Yj - Yi = 0 - (-400) = 400cm$$

$$Dz = Zj - Zi = -100 - 0 = -100cm$$



$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(500)^2 + (-400)^2 + (-100)^2} = 648.074 \text{ cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{500}{648.074} = 0.772$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{400}{648.074} = 0.617$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{-100}{648.074} = -0.154$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 367388.9285 & 293911.1428 & -73477.7857 \\ 293911.1428 & 235128.9142 & -58782.2286 \\ -73477.7857 & -58782.2286 & 14695.5571 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

ELEMENTO 4:

$$i(0,0,-400) \text{ cm}$$

$$j(500,0,-100) \text{ cm}$$

$$Dx = Xj - Xi = 500 - 0 = 500 \text{ cm}$$

$$Dy = Yj - Yi = 0 - 0 = 0 \text{ cm}$$

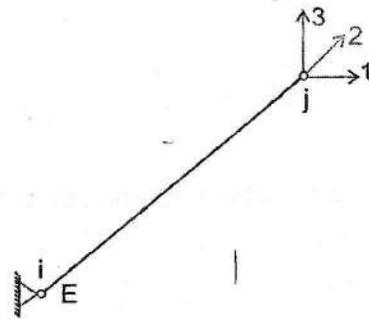
$$Dz = Zj - Zi = -100 - (-400) = 300 \text{ cm}$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(500)^2 + (0)^2 + (300)^2} = 583.095 \text{ cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{500}{583.095} = 0.857$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{0}{583.095} = 0$$



$$C_z = \frac{Dz}{L} = \frac{300}{583.095} = 0.514$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^e = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 504407.6034 & 0 & 302644.5620 \\ 0 & 0 & 0 \\ 302644.5620 & 0 & 181586.7372 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

2°) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1743593.0637 & 0 & -146955.5714 \\ 0 & 470257.8285 & 0 \\ -146955.5714 & 0 & 392564.5887 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

3°) Vector de fuerzas externas del sistema: \tilde{f}

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

4°) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\begin{bmatrix} 1743593.064 & 0 & -146955.571 \\ 0 & 0 & 0 \\ -146955.571 & 0 & 392564.589 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} -2.216936 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -2.6303419 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

5°) Vector de fuerza interna de cada elemento:

ELEMENTO 1:

1ra. Forma:

En eje global: $f^{(1)} = k^{(1)} \cdot u^{(1)}$

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 504407.6034 & 0 & -302644.5620 \\ 0 & 0 & 0 \\ -302644.5620 & 0 & 181586.7372 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.22 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -2.63 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 68.4235 \\ 0 \\ -41.0541 \end{Bmatrix}$$

En eje local: $f'^{(1)} = T^{(1)} \cdot f^{(1)}$

$$f'^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.857 & 0 & -0.514 \\ 0.857 & 0 & -0.514 \\ 0.857 & 0 & -0.514 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 68.4235 \\ 0 \\ -41.0541 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 79.795 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

2da. Forma:

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

En donde:

$$\Delta u = u_j - u_i \quad Dx = X_j - X_i$$

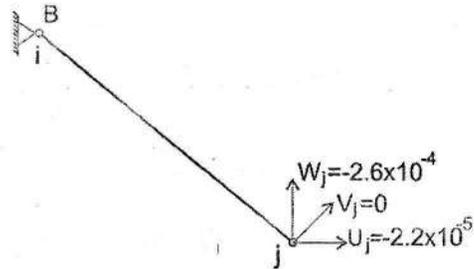
$$\Delta v = v_j - v_i \quad Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i \quad Dz = Z_j - Z_i$$

$$Dx = 500$$

$$Dy = 0$$

$$Dz = -300$$



$$N^1 = \frac{4 \times 10^8}{(583.095)^2} [(-2.2 \times 10^{-5})(500) + (0)(0) + (-2.6 \times 10^{-4})(-300)]$$

$$N^1 = 79.794 \text{ KN (Tracción)}$$

ELEMENTO 2:

1ra. Forma:

En eje global: $f^{(2)} = k^{(2)} \cdot u^{(2)}$

$$f^{(2)} = \begin{bmatrix} 367388.9285 & -293911.1428 & -73477.7857 \\ -293911.1428 & 235128.9142 & 58782.2286 \\ -73477.7857 & 58782.2286 & 14695.5571 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.22 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -2.63 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.1824 \\ -8.9459 \\ -2.2365 \end{Bmatrix}$$

En eje local: $f'^{(2)} = T^{(2)} \cdot f^{(2)}$

$$f'^{(2)} = [0.771517 \quad -0.617213 \quad -0.154303] \cdot \begin{Bmatrix} 11.1824 \\ -8.9459 \\ -2.2365 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.494 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

2da. Forma:

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

En donde:

$$\Delta u = u_j - u_i \quad Dx = X_j - X_i$$

$$\Delta v = v_j - v_i \quad Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i \quad Dz = Z_j - Z_i$$

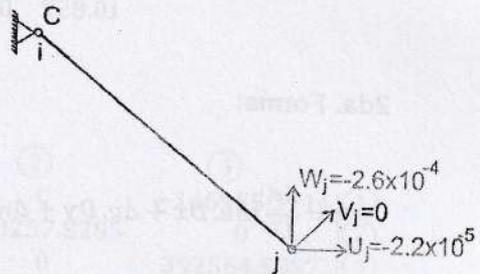
$$Dx = 500$$

$$Dy = -400$$

$$Dz = -100$$

$$N^2 = \frac{4 \times 10^8}{(583.095)^2} [(-2.2 \times 10^{-5})(500) + (0)(-400) + (-2.6 \times 10^{-4})(-100)]$$

$$N^2 = 14.494 \text{ KN (Tracción)}$$



ELEMENTO 3:

1ra. Forma:

En eje global: $f^{(3)} = k^{(3)} \cdot u^{(3)}$

$$f^{(3)} = \begin{bmatrix} 367388.9285 & 293911.1428 & -73477.7857 \\ 293911.1428 & 235128.9142 & -58782.2286 \\ -73477.7857 & -58782.2286 & 14695.5571 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.22 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -2.63 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.1824 \\ 8.9459 \\ -2.2365 \end{Bmatrix}$$

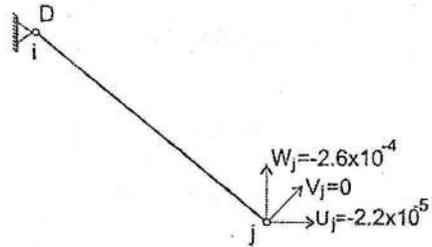
En eje local: $f'^{(3)} = T^{(3)} \cdot f^{(3)}$

$$f'^{(3)} = [0.771517 \quad -0.617213 \quad -0.154303] \cdot \begin{Bmatrix} 11.1824 \\ 8.9459 \\ -2.2365 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.494 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

2da. Forma:

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

En donde:



$$\Delta u = u_j - u_i \qquad Dx = X_j - X_i$$

$$\Delta v = v_j - v_i \qquad Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i \qquad Dz = Z_j - Z_i$$

$$Dx = 500$$

$$Dy = 400$$

$$Dz = -100$$

$$N^3 = \frac{4 \times 10^8}{(648.074)^2} [(-2.2 \times 10^{-5})(500) + (400)(0) + (-2.6 \times 10^{-4})(-100)]$$

$$N^3 = 14.494 \text{ KN (Tracción)}$$

ELEMENTO 4:

1ra. Forma:

En eje global: $f^{(4)} = k^{(4)} \cdot u^{(4)}$

$$f^{(4)} = \begin{bmatrix} 504407.6034 & 0 & -302644.5620 \\ 0 & 0 & 0 \\ 302644.5620 & 0 & 181586.7372 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.22 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -2.63 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90.78826 \\ 0 \\ -54.47296 \end{Bmatrix}$$

En eje local: $f^{(4)} = T^{(4)} \cdot f^{(3)}$

$$f^{(3)} = [0.857493 \quad 0 \quad 0.514496] \cdot \begin{Bmatrix} -90.78826 \\ 0 \\ -54.47296 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -105.876 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ KN}$$

2da. Forma:

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

En donde:

$$\Delta u = u_j - u_i \quad Dx = X_j - X_i$$

$$\Delta v = v_j - v_i \quad Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i \quad Dz = Z_j - Z_i$$

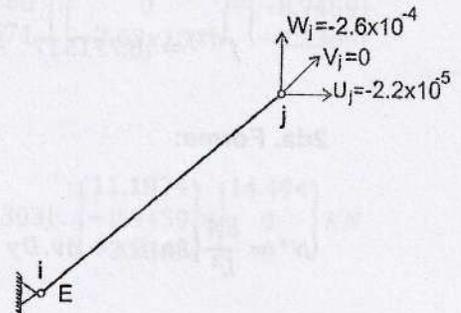
$$Dx = 500$$

$$Dy = 0$$

$$Dz = 300$$

$$N^4 = \frac{4 \times 10^8}{(583.095)^2} [(-2.2 \times 10^{-5})(500) + (400)(0) + (-2.6 \times 10^{-4})(300)]$$

$$N^4 = -105.876 \text{ KN (Compresión)}$$



PROBLEMA 02:

Para el reticulado espacial mostrado en la figura, determinar:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

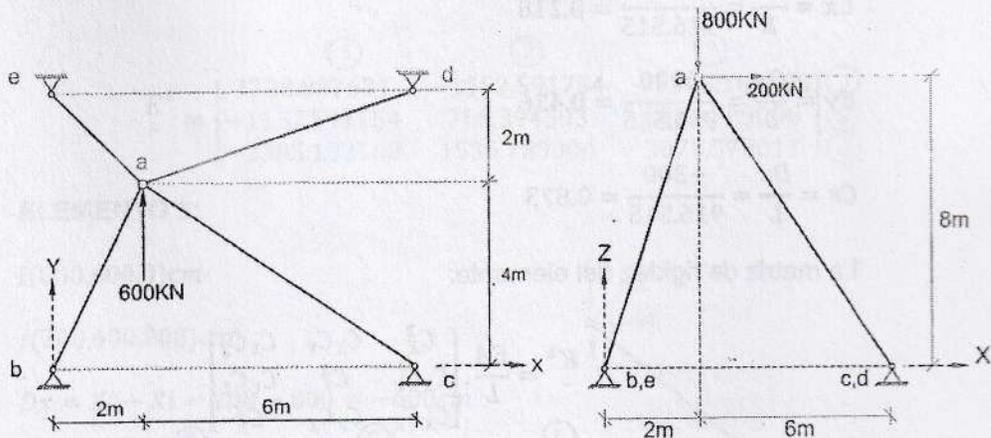
Considerar para todos los elementos:

$$E = 200000 \text{ MPa.}$$

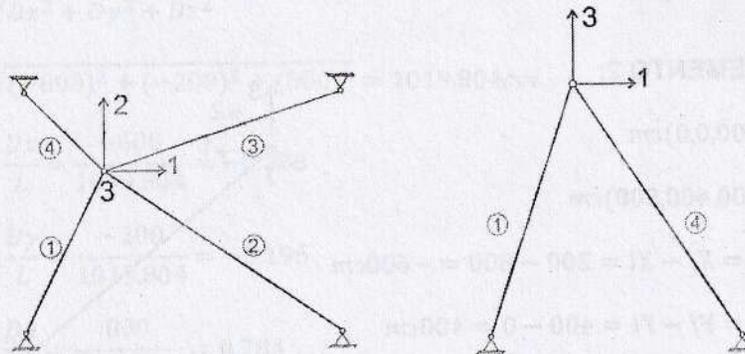
Áreas:

$$A_{ab} = 20 \times 10^3 \text{ mm}^2 ; A_{ac} = 30 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_{ad} = 40 \times 10^3 \text{ mm}^2 ; A_{ae} = 30 \times 10^3 \text{ mm}^2$$



SOLUCIÓN:



1º) Matriz de rigidez de cada elemento: k^e

ELEMENTO 1:

$$i(0,0,0)cm$$

$$j(200,400,800)cm$$

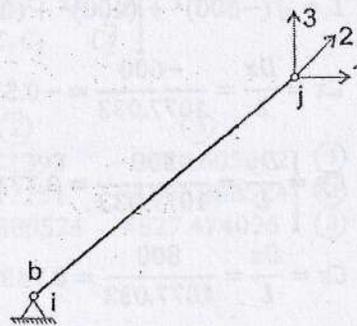
$$Dx = Xj - Xi = 200 - 0 = 200cm$$

$$Dy = Yj - Yi = 400 - 0 = 400cm$$

$$Dz = Zj - Zi = 800 - 0 = 800cm$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(200)^2 + (400)^2 + (800)^2} = 916.515cm$$



$$C_x = \frac{D_x}{L} = \frac{200}{916.515} = 0.218$$

$$C_y = \frac{D_y}{L} = \frac{4000}{916.515} = 0.436$$

$$C_z = \frac{D_z}{L} = \frac{-300}{916.515} = 0.873$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^1 = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^1 = \begin{bmatrix} 207.826562 & 415.653124 & 831.306249 \\ 415.653124 & 831.306249 & 1662.612497 \\ 831.306249 & 1662.612497 & 3325.224994 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 2:

$i(800,0,0)cm$

$j(200,400,800)cm$

$D_x = X_j - X_i = 200 - 800 = -600cm$

$D_y = Y_j - Y_i = 400 - 0 = 400cm$

$D_z = Z_j - Z_i = 800 - 0 = 800cm$

$L = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}$

$L = \sqrt{(-600)^2 + (400)^2 + (800)^2} = 1077.033cm$

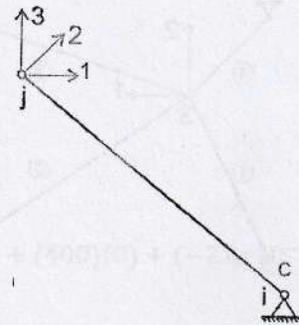
$C_x = \frac{D_x}{L} = \frac{-600}{1077.033} = -0.557$

$C_y = \frac{D_y}{L} = \frac{400}{1077.033} = 0.371$

$C_z = \frac{D_z}{L} = \frac{800}{1077.033} = 0.743$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^2 = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$



$$K^2 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1728.887631 & -1152.591754 & -2305.183508 \\ -1152.591754 & 768.394503 & 1536.789006 \\ -2305.183508 & 1536.789006 & 3073.578011 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ELEMENTO 3:

$i(800,600,0)cm$

$j(200,400,800)cm$

$Dx = Xj - Xi = 200 - 800 = -600cm$

$Dy = Yj - Yi = 400 - 600 = -200cm$

$Dz = Zj - Zi = 800 - 0 = 800cm$

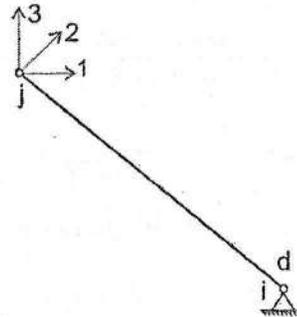
$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$

$L = \sqrt{(-600)^2 + (-200)^2 + (800)^2} = 1019.804cm$

$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{-600}{1019.804} = -0.588$

$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-200}{1019.804} = -0.196$

$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{800}{1019.804} = 0.784$



La matriz de rigidez del elemento:

$$K^3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2715.454179 & 905.151393 & -3620.605572 \\ 905.151393 & 301.717131 & -1206.888524 \\ -3620.605572 & -1206.888524 & 4827.474096 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

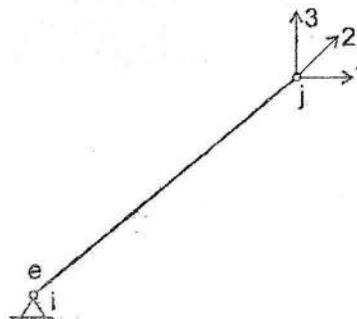
ELEMENTO 4:

$i(0,600,0)cm$

$j(200,400,800)cm$

$Dx = Xj - Xi = 200 - 0 = 200cm$

$Dy = Yj - Yi = 400 - 600 = -200cm$



$$Dz = Zj - Zi = 800 - 0 = 800\text{cm}$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(200)^2 + (-200)^2 + (800)^2} = 848.528\text{cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{200}{848.528} = 0.236$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-200}{848.528} = -0.236$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{800}{848.528} = 0.943$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$\tilde{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^e = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & & \textcircled{3} \\ 392.837101 & -392.837101 & 1571.348403 \\ -392.837101 & 392.837101 & -1571.348403 \\ 1571.348403 & -1571.348403 & 6285.393611 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

2°) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & & \textcircled{3} \\ 5045.005473 & -224.624338 & -3523.134429 \\ -224.624338 & 2294.254983 & 421.184576 \\ -3523.134429 & 421.184576 & 17511.670712 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

3°) Vector de fuerzas externas del sistema: \tilde{f}

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ -800 \end{pmatrix} \text{KN}$$

4°) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\begin{bmatrix} 50045.005473 & -224.624338 & -3523.134429 \\ -224.624338 & 2294.254983 & 421.184576 \\ -3523.134429 & 421.184576 & 17511.670712 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ -800 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0.0177867 \\ 0.2721959 \\ -0.0486521 \end{pmatrix} \text{cm}$$

5°) Fuerza axial en cada elemento: N^e

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

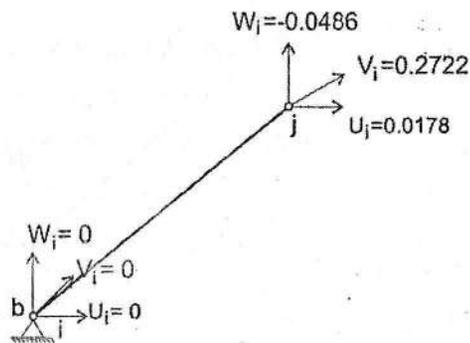
En donde:

$$\Delta u = u_j - u_i \qquad Dx = X_j - X_i$$

$$\Delta v = v_j - v_i \qquad Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i \qquad Dz = Z_j - Z_i$$

ELEMENTO 1:



$$Dx = 200$$

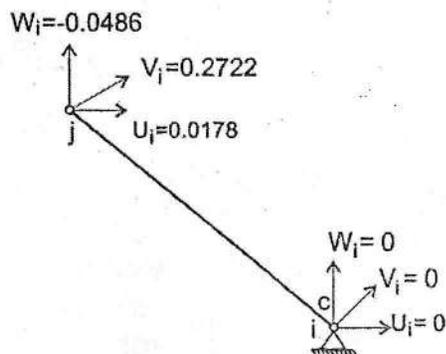
$$Dy = 400$$

$$Dz = 800$$

$$N^1 = \frac{4 \times 10^6}{(916.515)^2} [(0.0177867)(200) + (0.2721959)(400) + (-0.0486521)(800)]$$

$$N^1 = 350.067 \text{ KN (Tracción)}$$

ELEMENTO 2:



$$D_x = -600$$

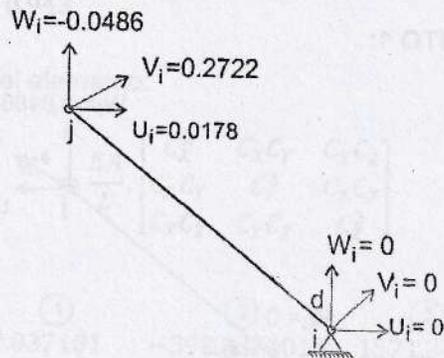
$$D_y = 400$$

$$D_z = 800$$

$$N^2 = \frac{6 \times 10^6}{(916.515)^2} [(0.0177867)(-600) + (0.2721959)(400) + (800)(-0.0486521)]$$

$$N^2 = 306.645 \text{KN (Tracción)}$$

ELEMENTO 3:



$$D_x = -600$$

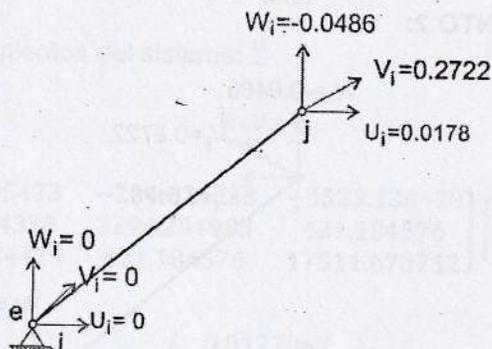
$$D_y = -200$$

$$D_z = 800$$

$$N^3 = \frac{8 \times 10^8}{(583.095)^2} [(0.0177867)(-600) + (-200)(0.2721959) + (800)(-0.0486521)]$$

$$N^3 = -800.253 \text{KN (Compresión)}$$

ELEMENTO 4:



$$D_x = 200$$

$$D_y = -200$$

$$D_z = 800$$

$$N^4 = \frac{6 \times 10^8}{(583.095)^2} [(0.0177867)(200) + (-200)(0.2721959) + (800)(-0.0486521)]$$

$$N^4 = -748.363 \text{KN (Compresión)}$$

PROBLEMA 03:

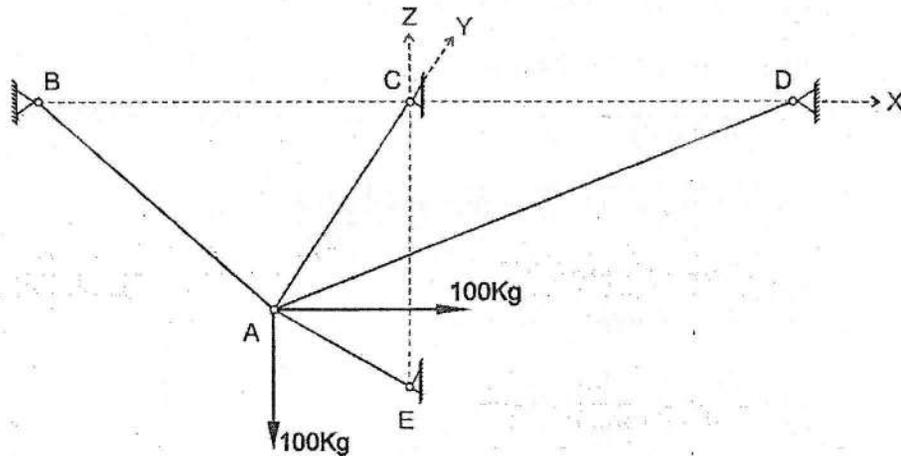
Para el reticulado espacial mostrado en la figura mostrada, determinar:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

Considerar para todos los elementos:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2.$$

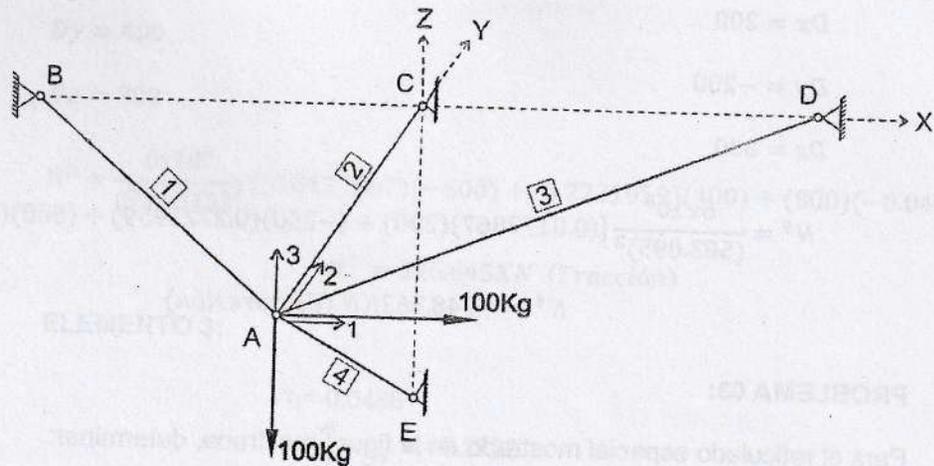
$$A = 10 \text{cm}^2$$



Coordenadas de los nudos:

NUDO	X(cm)	Y(cm)	Z(cm)
A	0	-100	0
B	-100	0	0
C	0	0	0
D	100	0	0
E	0	0	-100

SOLUCIÓN:



1°) Matriz de rigidez de cada elemento: \tilde{k}^e

ELEMENTO 1:

$$i(-100,0,0)cm$$

$$j(0,-100,0)cm$$

$$Dx = Xj - Xi = 0 - (-100) = 100cm$$

$$Dy = Yj - Yi = -100 - 0 = -100cm$$

$$Dz = Zj - Zi = 0 - 0 = 0cm$$

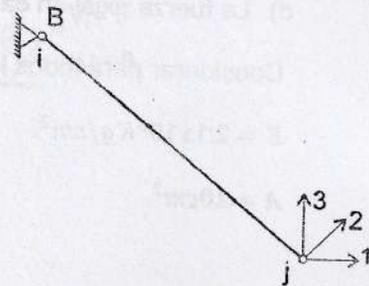
$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(100)^2 + (-100)^2 + (0)^2} = 100\sqrt{2}cm$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-100}{100\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{0}{100\sqrt{2}} = 0$$



La matriz de rigidez del elemento:

$$\tilde{k}^1 = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^1 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 74246.21202 & -74246.21202 & 0 \\ -74246.21202 & 74246.21202 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

ELEMENTO 2:

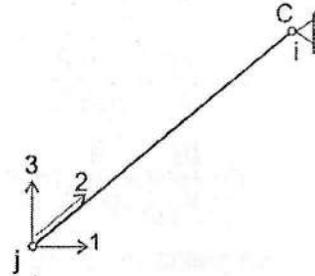
$i(0,0,0)cm$

$j(0,-100,0)cm$

$Dx = Xj - Xi = 0 - 0 = 0cm$

$Dy = Yj - Yi = -100 - 0 = -100cm$

$Dz = Zj - Zi = 0 - 0 = 0cm$



$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$

$L = \sqrt{(0)^2 + (-100)^2 + (0)^2} = 100cm$

$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{0}{100} = 0$

$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-100}{100} = -1$

$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{0}{100} = 0$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^2 = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^2 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 210000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

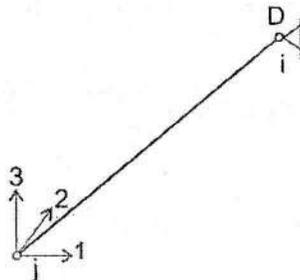
ELEMENTO 3:

$i(100,0,0)cm$

$j(0,-100,0)cm$

$Dx = Xj - Xi = -100cm$

$Dy = Yj - Yi = -100cm$



$$Dz = Zj - Zi = 0 \text{ cm}$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(-100)^2 + (-100)^2 + (0)^2} = 100\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{-100}{100\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-100}{100\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cz = \frac{Dz}{L} = \frac{0}{100\sqrt{2}} = 0$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$K^3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 74246.21202 & 74246.21202 & 0 \\ 74246.21202 & 74246.21202 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ELEMENTO 4:

$$i(0,0,-100) \text{ cm}$$

$$j(0,-100,0) \text{ cm}$$

$$Dx = Xj - Xi = 0 \text{ cm}$$

$$Dy = Yj - Yi = -100 \text{ cm}$$

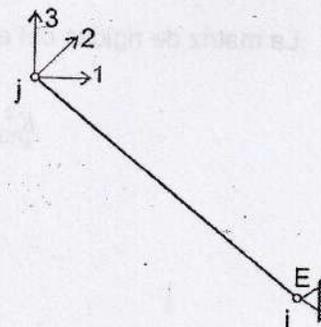
$$Dz = Zj - Zi = 100 \text{ cm}$$

$$L = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$$

$$L = \sqrt{(0)^2 + (-100)^2 + (100)^2} = 100\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$Cx = \frac{Dx}{L} = \frac{0}{100\sqrt{2}} = 0$$

$$Cy = \frac{Dy}{L} = \frac{-100}{100\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$C_z = \frac{Dy}{L} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matriz de rigidez del elemento:

$$\tilde{K}^4 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^4 = \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 74246.21202 & -74246.21202 \\ 0 & -74246.21202 & 74246.21202 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

2°) Matriz de rigidez del sistema: \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{bmatrix} 148492.424 & 0 & 0 \\ 0 & 432738.6361 & -74246.21202 \\ 0 & -74246.21202 & 74246.21202 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

3°) Vector de fuerzas externas del sistema: \tilde{f}

$$\tilde{f} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix} Kg$$

4°) Vector de desplazamientos del sistema: \tilde{u}

$$\tilde{k} \cdot \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\begin{bmatrix} 148492.424 & 0 & 0 \\ 0 & 432738.6361 & -74246.21202 \\ 0 & -74246.21202 & 74246.21202 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} 6.73435 \times 10^{-4} \\ -2.78946 \times 10^{-4} \\ -1.62582 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} cm$$

5°) Fuerza axial en cada elemento: N^e

$$N^e = \frac{EA}{L^2} [\Delta u \cdot Dx + \Delta v \cdot Dy + \Delta w \cdot Dz]$$

En donde:

$$\Delta u = u_j - u_i$$

$$Dx = X_j - X_i$$

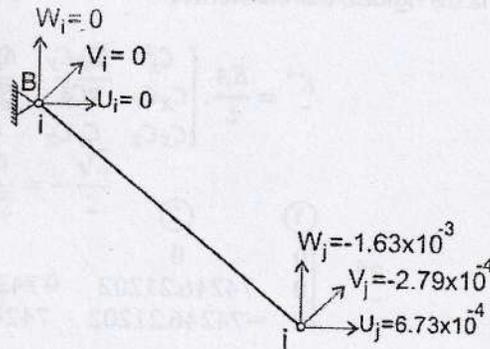
$$\Delta v = v_j - v_i$$

$$Dy = Y_j - Y_i$$

$$\Delta w = w_j - w_i$$

$$Dz = Z_j - Z_i$$

ELEMENTO 1:



$$Dx = 100\text{cm}$$

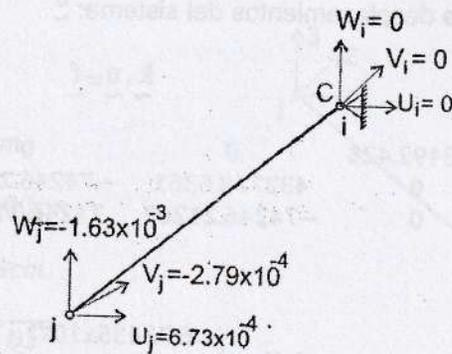
$$Dy = -100\text{cm}$$

$$Dz = 0\text{cm}$$

$$N^1 = \frac{2.1 \times 10^6 \times 10}{(100\sqrt{2})^2} [(6.7 \times 10^{-4})(100) + (-2.8 \times 10^{-4})(-100) - (1.6 \times 10^{-3})(0)]$$

$$N^1 = 100\text{Kg (Tracción)}$$

ELEMENTO 2:



$$Dx = 0\text{cm}$$

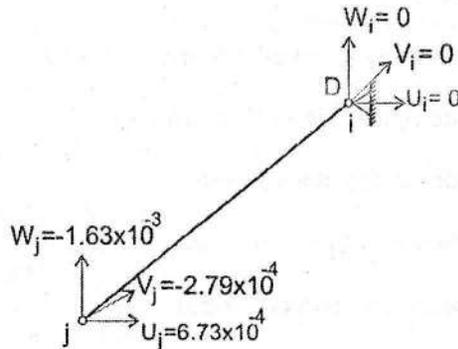
$$Dy = -100\text{cm}$$

$$Dz = 0\text{cm}$$

$$N^2 = \frac{2.1 \times 10^6 \times 10}{(100)^2} [(6.7 \times 10^{-4})(0) + (-2.7 \times 10^{-4})(-100) + (-1.6 \times 10^{-3})(0)]$$

$$N^2 = 58.579\text{Kg (Tracción)}$$

ELEMENTO 3:



$$Dx = -100cm$$

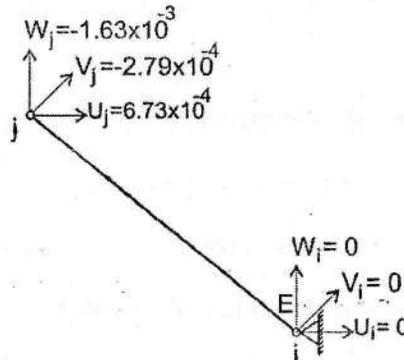
$$Dy = -100cm$$

$$Dz = 0cm$$

$$N^3 = \frac{2.1 \times 10^6 \times 10}{(100\sqrt{2})^2} [(6.73 \times 10^{-4})(-100) + (-2.79 \times 10^{-4})(-100) + 6 + (-1.63 \times 10^{-3})(0)]$$

$$N^3 = -41.421Kg \text{ (Compresión)}$$

ELEMENTO: 4



$$Dx = 0cm$$

$$Dy = -100cm$$

$$Dz = 100cm$$

$$N^4 = \frac{2.1 \times 10^6 \times 10}{(100\sqrt{2})^2} [(6.73 \times 10^{-4})(0) + (2.79 \times 10^{-4})(-100) + (-1.63 \times 10^{-3})(100)]$$

$$N^4 = -141.421Kg \text{ (Compresión)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 01:

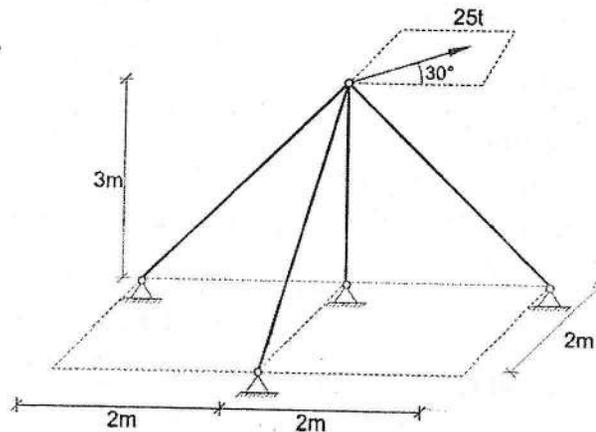
Para el reticulado espacial mostrado en la figura mostrada, determine:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

Considerar para todos los elementos:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$A = 12 \text{ cm}^2$$



PROBLEMA 02:

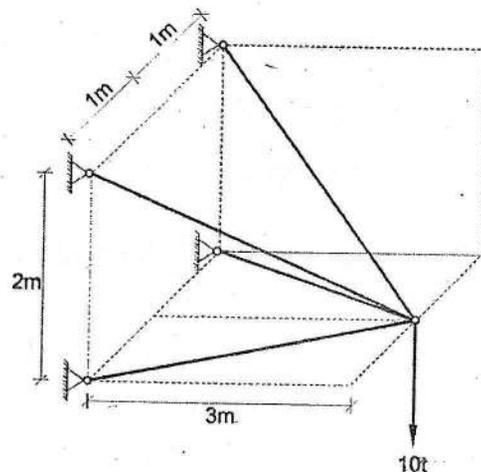
Para el reticulado espacial mostrado en la figura mostrada, determine:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

Considerar para todos los elementos:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$A = 6 \text{ cm}^2$$



PROBLEMA 03:

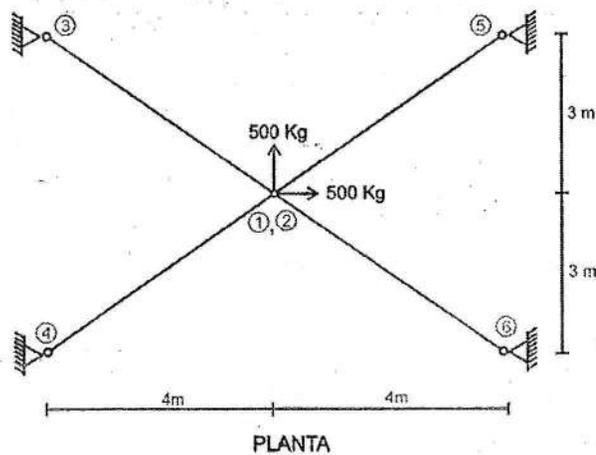
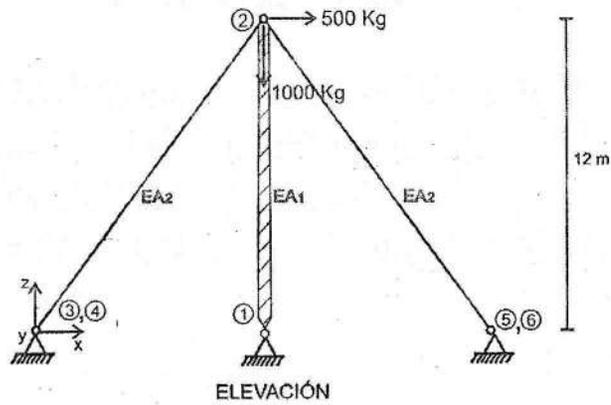
Para el reticulado espacial mostrado en la figura mostrada, determine:

- La matriz de rigidez de cada elemento.
- La matriz de rigidez del sistema.
- El vector de desplazamientos del sistema.
- La fuerza axial en cada elemento.

Considerar para todos los elementos:

$$EA1 = 2.5 \times 10^6 \text{ Kg}$$

$$EA2 = 1.25 \times 10^6 \text{ Kg}$$

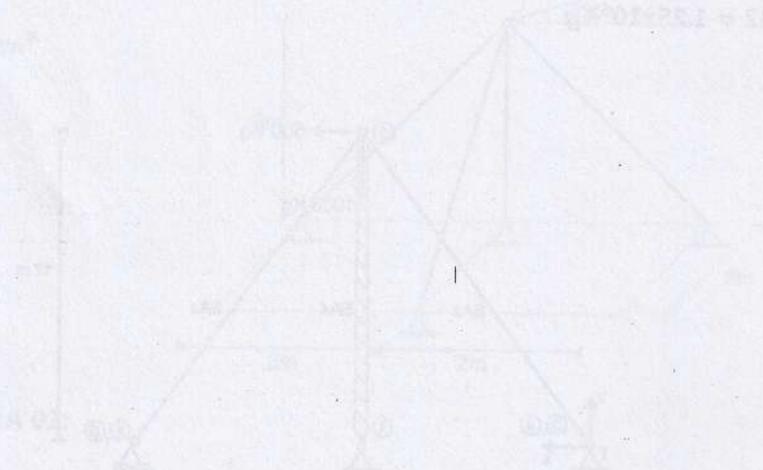


PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 03:

Para el elemento estructural mostrado en la figura a su lado, determinar:
 a) La matriz de rigidez de cada elemento.
 b) La matriz de rigidez del sistema.
 c) El vector de desplazamientos del sistema.
 d) La fuerza axial en cada elemento.
 Considere para todos los elementos $E = 200 \text{ GPa}$ y $A = 100 \text{ cm}^2$.

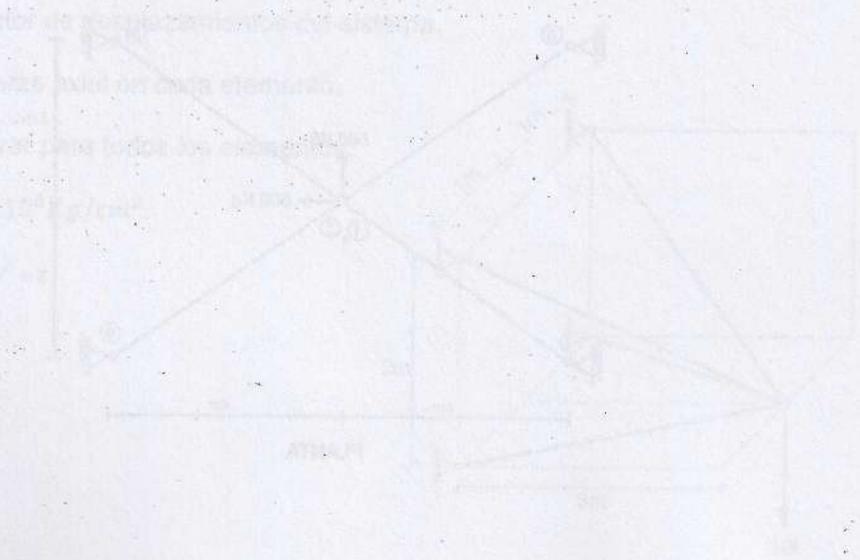
$E = 200 \text{ GPa}$
 $A = 100 \text{ cm}^2$



PROBLEMA 02:
 Para el elemento estructural mostrado en la figura a su lado, determinar:

- a) La matriz de rigidez de cada elemento.
 - b) La matriz de rigidez del sistema.
 - c) El vector de desplazamientos del sistema.
 - d) La fuerza axial en cada elemento.
- Considere para todos los elementos $E = 200 \text{ GPa}$ y $A = 100 \text{ cm}^2$.

$E = 200 \text{ GPa}$
 $A = 100 \text{ cm}^2$



$\{u\} = \{ \dots \}$

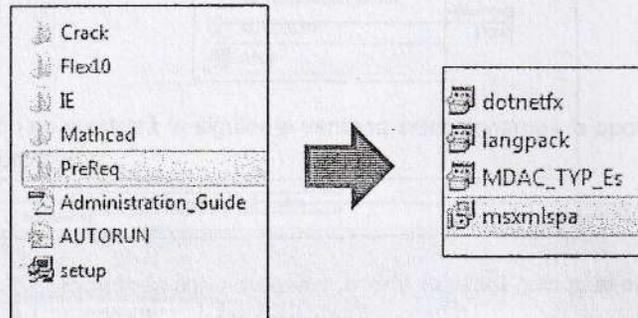
ANEXO

- I. ANÁLISIS MATRICIAL CON APLICACIÓN DEL MATHCAD
- II. RESOLUCIÓN DE EJERCICIO DE ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL CON MATHCAD
- III. COMPARACIÓN CON EL PROGRAMA CASTORSOFT

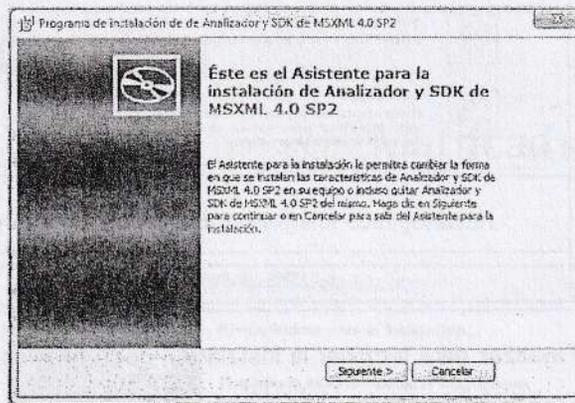
ANÁLISIS MATRICIAL CON APLICACIÓN DEL MATHCAD

I. INSTALACIÓN DEL PROGRAMA MATHCAD VERSIÓN 14.0.0.163

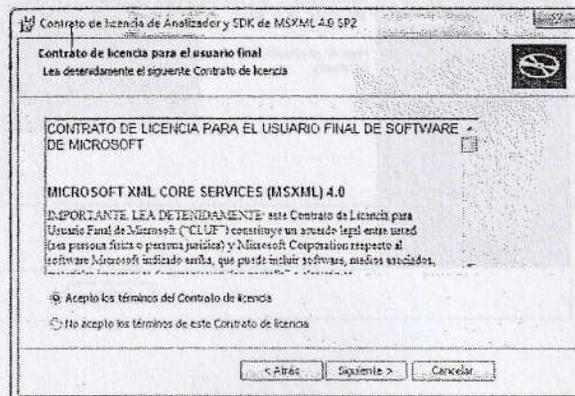
1° Antes de proceder a la instalación, se debe explorar el CD, e instalar los paquetes que están en la carpeta "PreReq".



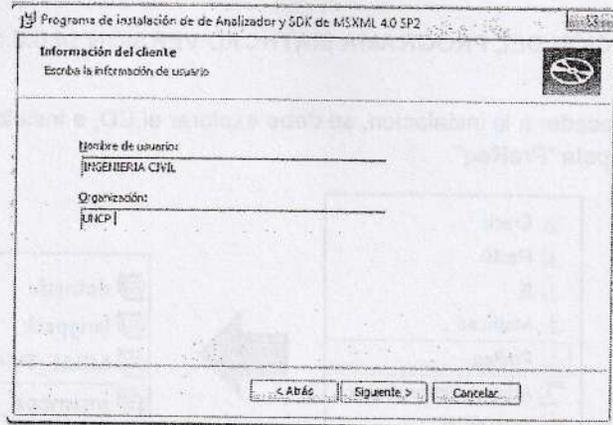
2° Se mostrará la siguiente ventana, haga clic en **siguiente** para continuar con el asistente de instalación.



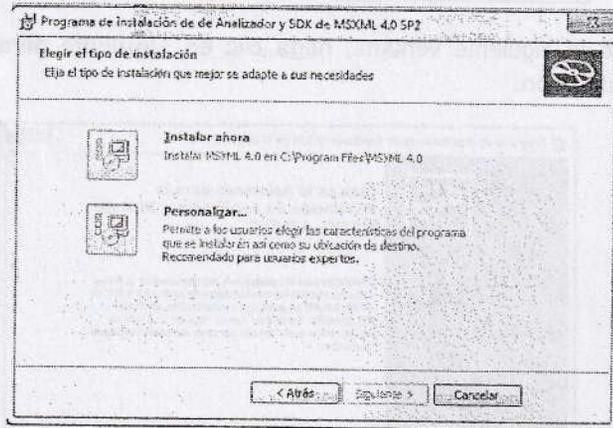
3° Luego de leer la licencia seleccione la opción **Acepto los términos del contrato de licencia** y haga clic en **Siguiente**.



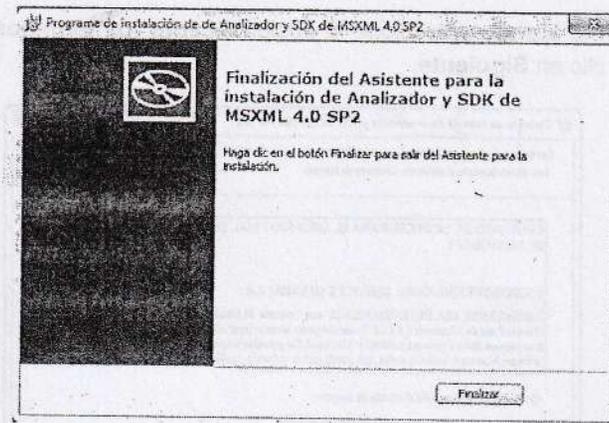
4° Rellene los espacios en blanco de Nombre de usuario y Organización, haga clic en **Siguiente**.



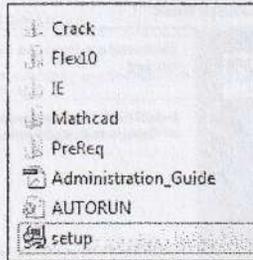
5° Seleccione la opción **instalar ahora**, y espere unos segundos.



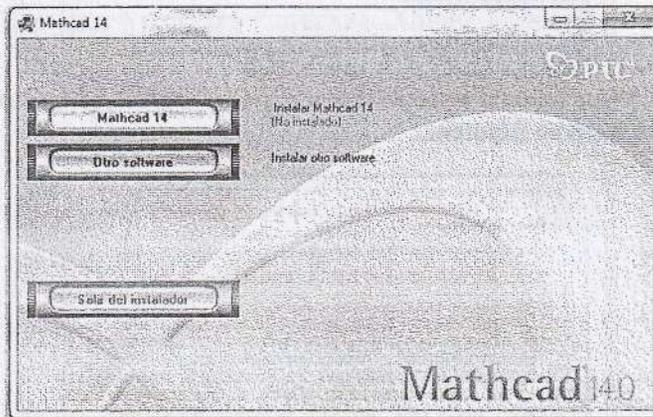
6° Haga clic en **Finalizar** para terminar la instalación del Analizador y SDK de MSXML 4.0 SP2



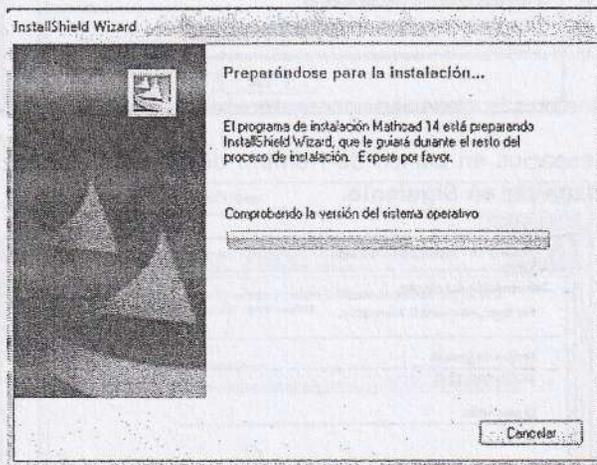
7° Ahora si procedemos a la instalación del Math CAD desde el menú autoejecutable del CD.



8° A continuación se mostrará la siguiente ventana seleccionamos la opción **Mathcad 14** para instalar el programa.



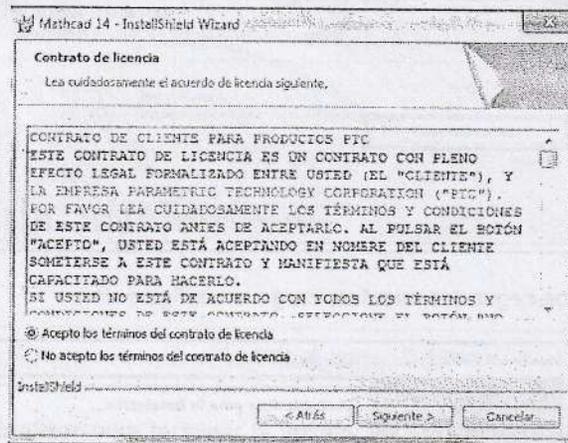
9° Esperamos unos segundos mientras carga la configuración.



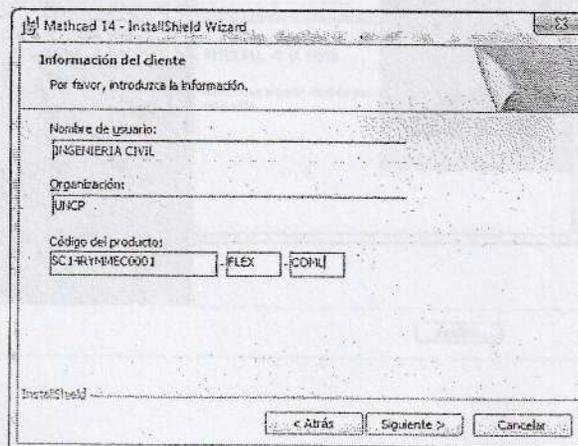
10° Se mostrará la siguiente ventana, haga clic en **siguiente** para continuar con la instalación.



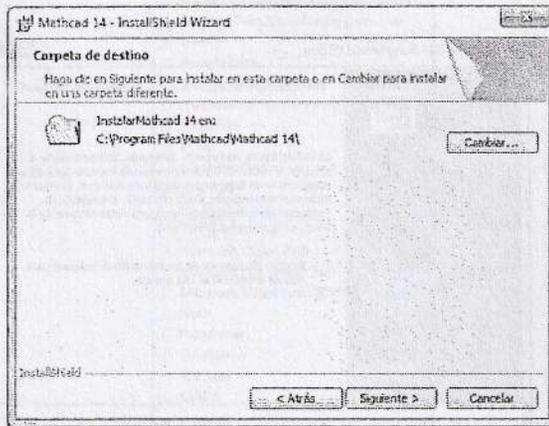
11° Luego de leer la licencia seleccione la opción **Acepto los términos del contrato de licencia** y haga clic en **Siguiente**.



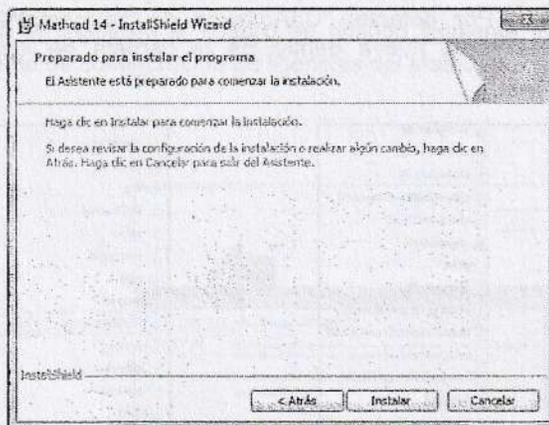
12° Rellene los espacios en blanco de Nombre de usuario, Organización y Código del producto, luego haga clic en **Siguiente**.



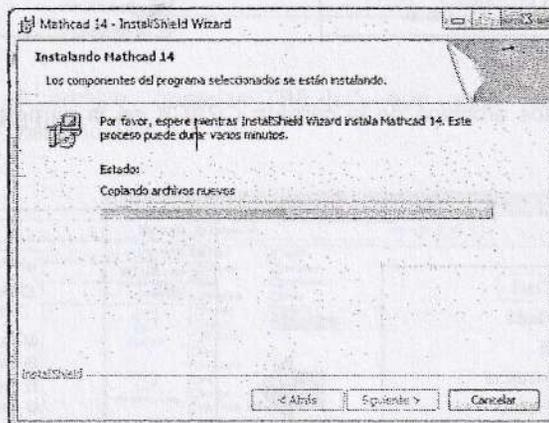
13° Haga clic en **Siguiente**, para instalar el programa en la carpeta C:\Archivos de programa\Mathcad\Mathcad 14



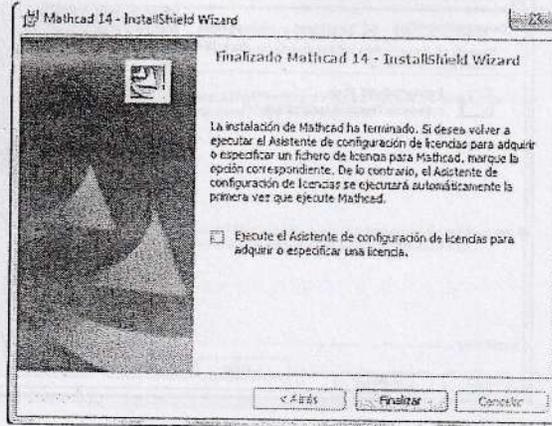
14° Luego aparecerá el cuadro de diálogo, haga clic en **Instalar**.



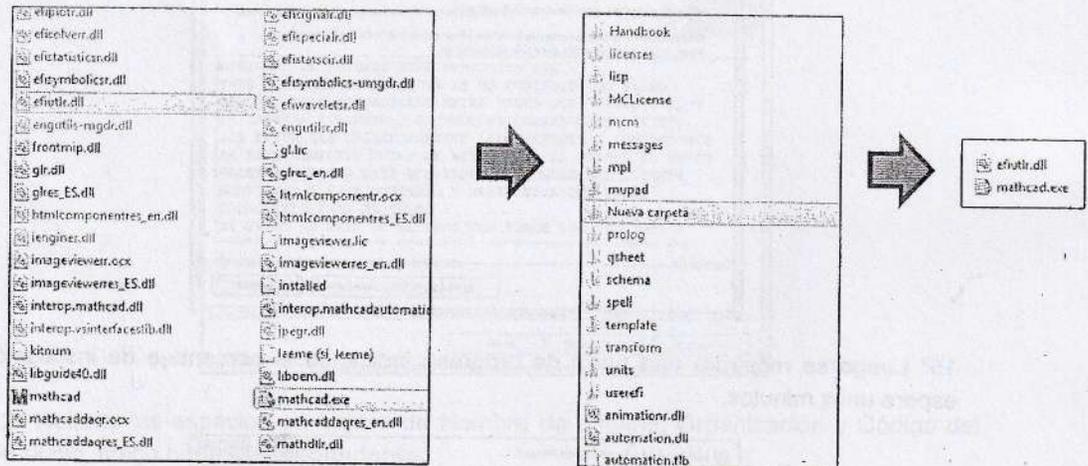
15° Luego se mostrará una barra de progreso indicando el porcentaje de instalación, espere unos minutos.



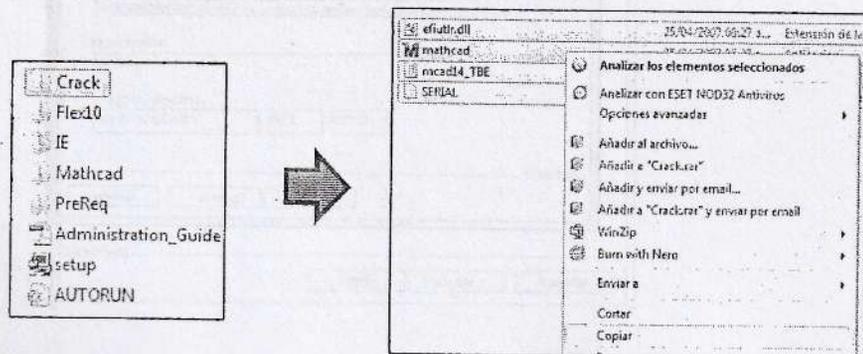
16° Antes de finalizar la instalación es importante desactivar la opción "Ejecutar el Asistente de configuración de licencias para adquirir o especificar una licencia", la especificación de licencia se hará posteriormente.



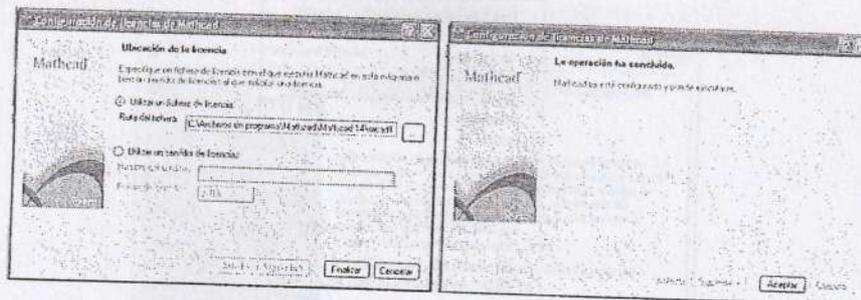
17° Hacer un respaldo de los archivos "mathcad.exe" y "efiutlr.dll" de la carpeta donde se instaló el programa. Por defecto: "C:\Archivos de programa\Mathcad\Mathcad 14". (Ponerlos en una carpeta nueva dentro de la carpeta de instalaciónserámás que suficiente).



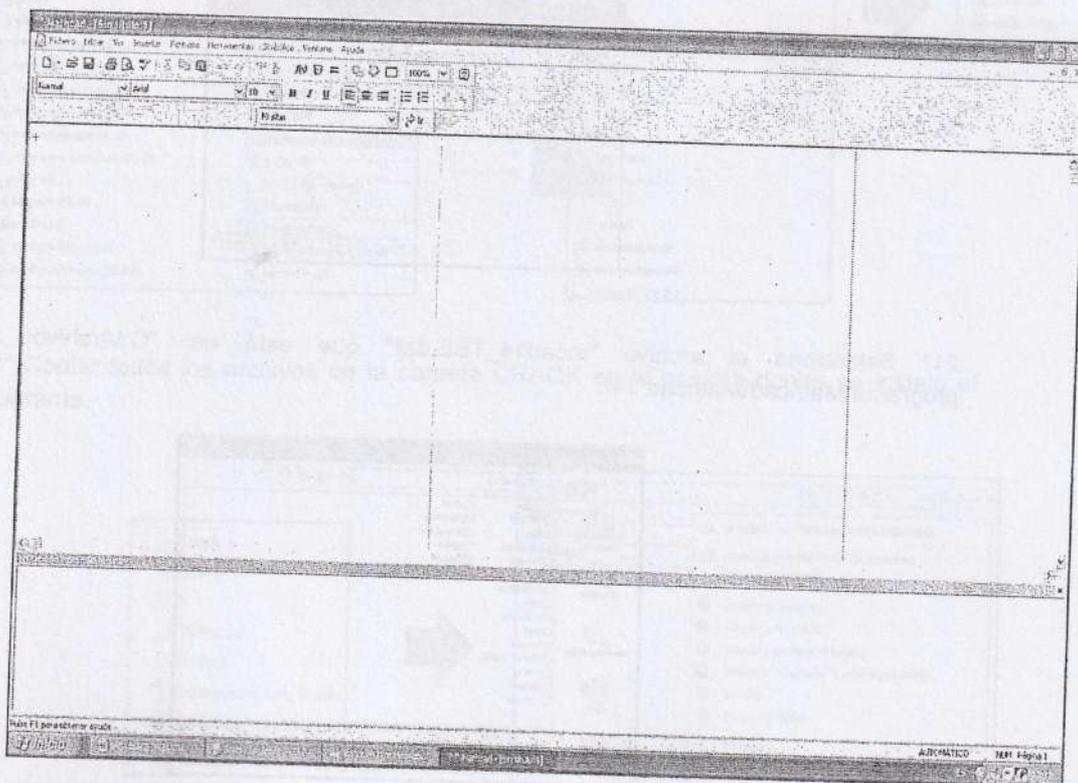
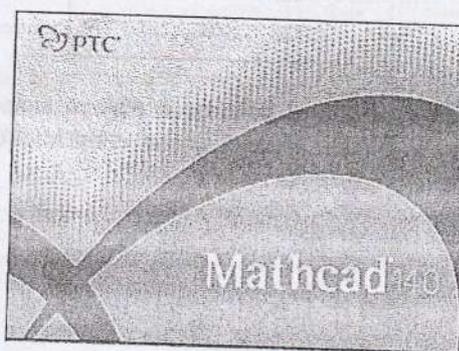
18° Copiar todos los archivos de la carpeta CRACK en la carpeta donde se instaló el programa.



22° Haga clic en Finalizar para terminar el proceso.



23° Nuevamente ejecuta el MathCAD desde el menú inicio y listo



II. RESOLUCION DE EJERCICIO DE ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL EN MATHCAD

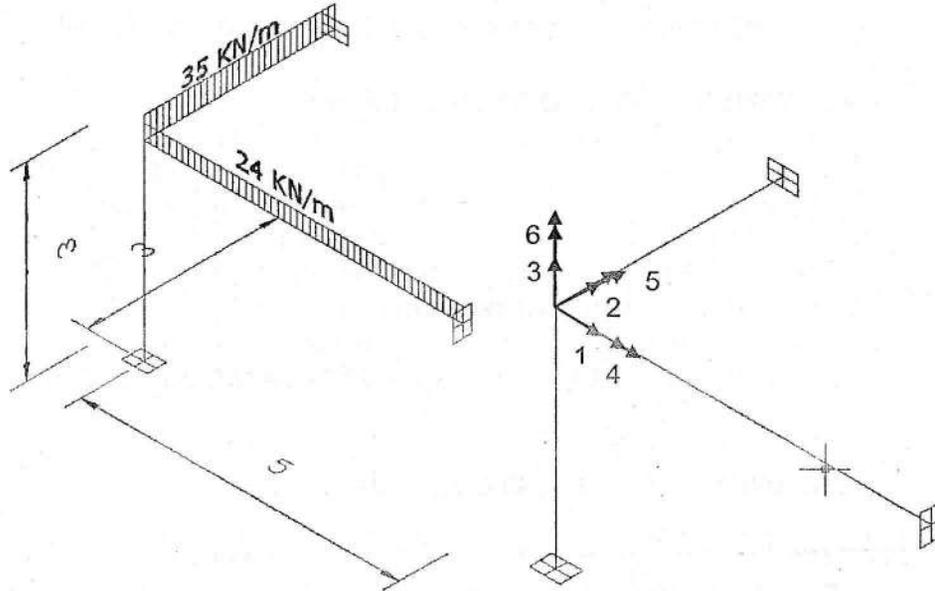
Resuelva el pórtico en 3D, despreciar la deformación axial y de corte ($EA=\infty, \theta=0$).

Datos:

Módulo de elasticidad $E = 22 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

Módulo de Poisson $\nu = 0.29$

Módulo de cortante $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.527 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$



1.-CALCULOS PREVIOS

SECCION 1: $(0.30 \times 0.40) \text{ m}^2$

AREA = 0.12 m^2 .

INERCIA Y = $0.30 \cdot 0.40^3 / 12 = 0.0016 \text{ m}^4$, INERCIA Z = $0.40 \cdot 0.30^3 / 12 = 0.0009 \text{ m}^4$

$C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^4 \right] = 0.179986$, $J = C \cdot b^3 \cdot h = 0.00194385 \text{ m}^4$

SECCION 2: $(0.40 \times 0.25) \text{ m}^2$

AREA = 0.1 m^2 .

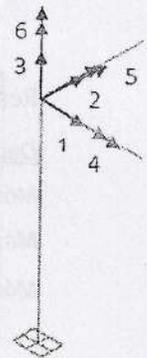
INERCIA Y = $0.40 \cdot 0.25^3 / 12 = 0.0005208 \text{ m}^4$, INERCIA Z = $0.25 \cdot 0.40^3 / 12 = 0.00133 \text{ m}^4$

$C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^4 \right] = 0.20375$, $J = C \cdot b^3 \cdot h = 0.00127345 \text{ m}^4$

2.-MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO

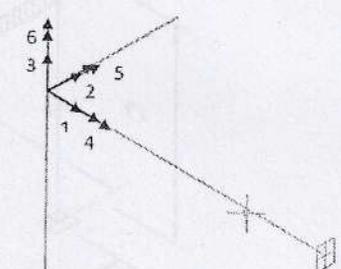
ELEMENTO 1: ORIENTADO EN EL EJE Z

$$K_{11} \rightarrow \begin{pmatrix} 15644.444444444444 & 0 & 0 & 0 & -23466.666666666667 & 0 \\ 0 & 8800.0 & 0 & 13200.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 88000.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13200.0 & 0 & 26400.0 & 0 & 0 \\ -23466.666666666667 & 0 & 0 & 0 & 46933.333333333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5525.15670421511627895055 \end{pmatrix}$$



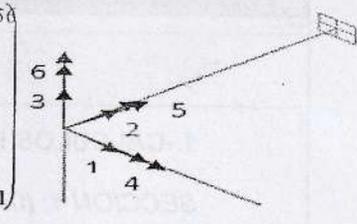
ELEMENTO 2: ORIENTADO EN EL EJE X

$$K_{22} \rightarrow \begin{pmatrix} 528000.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752.0 \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -8448.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3315.09402252906976737033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8448.0 & 0 & 28160.0 & 0 \\ 0 & 4752.0 & 0 & 0 & 0 & 15840.0 \end{pmatrix}$$



ELEMENTO 3: ORIENTADO EN EL EJE Y

$$K_{33} := \begin{pmatrix} 13037.037037 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19555.55556 \\ 0 & 733333.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5092.59259 & 7638.88889 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7638.88889 & 15277.77778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3619.63000 & 0 \\ -19555.55556 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39111.11111 \end{pmatrix}$$



3.- MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

$$K_{ww} := \begin{pmatrix} 556681.481481 & 0 & 0 & 0 & -23466.6667 & -19555.5556 \\ 0 & 744034.13333 & 0 & 13200.0 & 0 & 4752.0 \\ 0 & 0 & 888471.7926 & 7638.8889 & -8448.0 & 0 \\ 0 & 13200.0 & 7638.8889 & 44992.8718 & 0 & 0 \\ -23466.6667 & 0 & -8448.0 & 0 & 78712.9633 & 0 \\ -19555.5556 & 4752.0 & 0 & 0 & 0 & 60476.2678 \end{pmatrix}$$

4.- VECTOR DE FUERZAS EXTERNAS DE LA ESTRUCTURA EN LOS NUDOS

$$f_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.- VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

$$f_o^1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_o^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_o^3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.5 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 112.5 \\ 26.25 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.- VECTOR DE FUERZAS DE LA ESTRUCTURA

$$f := f_n - f_o \quad f \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -112.5 \\ -26.25 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

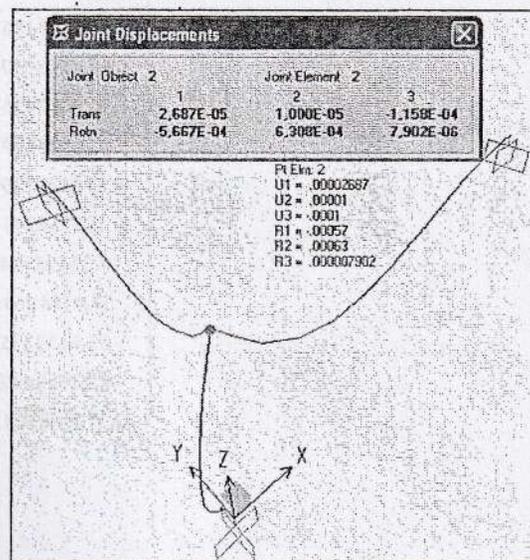
7.- VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS DE LA ESTRUCTURA

MATHCAD

SAP2000

$$des := K^{-1} \cdot f$$

$$des \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0000268689768405235469458487 \\ 0.000010003570701801721147926 \\ -0.000115751478960246541685003 \\ -0.000566708312372894729521907 \\ 0.000630806600653374780763948 \\ 0.00000790228660952056612464679 \end{pmatrix}$$



8.- VECTOR DE FUERZAS INTERNAS DE CADA ELEMENTO

$F1 := fo1 + K11 \cdot des$

$F2 := fo2 + K22 \cdot des$

$F3 := fo3 + K33 \cdot des$

F1 →	$\begin{pmatrix} -14.382578013205226476596690702 \\ -7.3925183011463552835874236 \\ -101.86130148501695668280264 \\ -14.8290523133806381402257216 \\ 28.975331134140770475306151451 \\ 0.0436613718392218966401083334864 \end{pmatrix}$	F2 →	$\begin{pmatrix} 14.1868197717964327874081136 \\ 0.05656645315842644178229928688 \\ 54.27979843997782473844420516 \\ -1.878691338864920187667340535 \\ -31.25861763134480338953231898 \\ 0.1727091878697675463093495056 \end{pmatrix}$	F3 →	$\begin{pmatrix} 0.195758241408793689296035138502 \\ 7.335951847987928841779054764 \\ 47.58150304503913194649143278 \\ 16.70774365224555832782705169 \\ 2.283286497204032914208622595 \\ -0.216370559708989442949458006432 \end{pmatrix}$
------	---	------	--	------	---

9.- REACCIONES EN CADA NUDO

$F1 := K1 \cdot DES1$

$F2 := FO2 + K2 \cdot DES2$

F1 →	$\begin{pmatrix} 14.382578013205226476596690702 \\ 7.3925183011463552835874236 \\ 101.86130148501695668280264 \\ -7.3485025900584277105365492 \\ 14.172402905474908953799376111 \\ -0.0436613718392218966401083334862 \\ -14.382578013205226476596690702 \\ -7.3925183011463552835874236 \\ -101.86130148501695668280264 \\ -14.8290523133806381402257216 \\ 28.975331134140770475306151451 \\ 0.0436613718392218966401083334862 \end{pmatrix}$	F2 →	$\begin{pmatrix} 14.1868197717964327874081136 \\ -0.0565664531584264417822992868798 \\ 54.27979843997782473844420516 \\ -1.878691338864920187667340535 \\ -31.25861763134480338953231898 \\ 0.172709187869767546309349505599 \\ -14.1868197717964327874081136 \\ -0.0565664531584264417822992868798 \\ 65.72020156002217526155579484 \\ 1.878691338864920187667340535 \\ 59.85962543145567969731129318 \\ 0.1101230779223646626021469288 \end{pmatrix}$	F3 →	$\begin{pmatrix} 0.195758241408793689296035138502 \\ 7.335951847987928841779054764 \\ 47.58150304503913194649143278 \\ 16.70774365224555832782705169 \\ 2.283286497204032914208622595 \\ -0.216370559708989442949458006432 \\ -0.195758241408793689296035138502 \\ -7.335951847987928841779054764 \\ 57.41849695496086805350856722 \\ -31.46323451712816248835275335 \\ -2.283286497204032914208622595 \\ -0.370904164517391624938682180343 \end{pmatrix}$
------	---	------	---	------	--

$F3 := FO3 + K3 \cdot DES3$

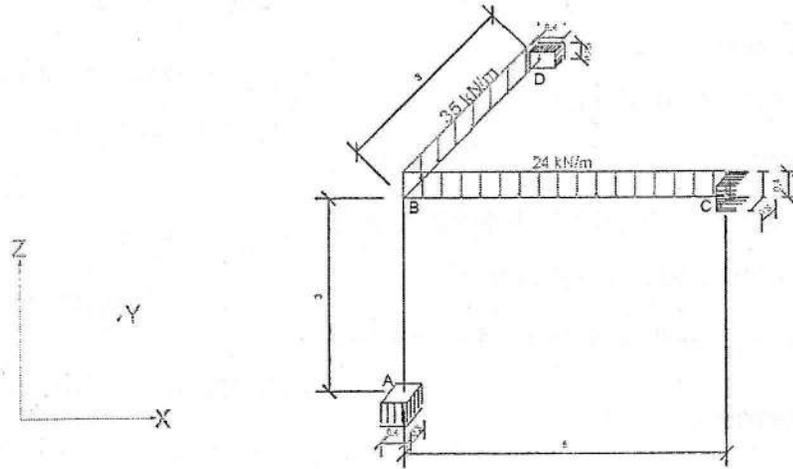
F3 →	$\begin{pmatrix} 0.195758241408793689296035138502 \\ 7.335951847987928841779054764 \\ 47.58150304503913194649143278 \\ 16.70774365224555832782705169 \\ 2.283286497204032914208622595 \\ -0.216370559708989442949458006432 \\ -0.195758241408793689296035138502 \\ -7.335951847987928841779054764 \\ 57.41849695496086805350856722 \\ -31.46323451712816248835275335 \\ -2.283286497204032914208622595 \\ -0.370904164517391624938682180343 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
------	--	--

III. COMPROBACIÓN CON EL PROGRAMA CASTORSOFT

Resuelva el pórtico en 3D, despreciar la deformación axial y de corte ($EA=\infty, \theta=0$).

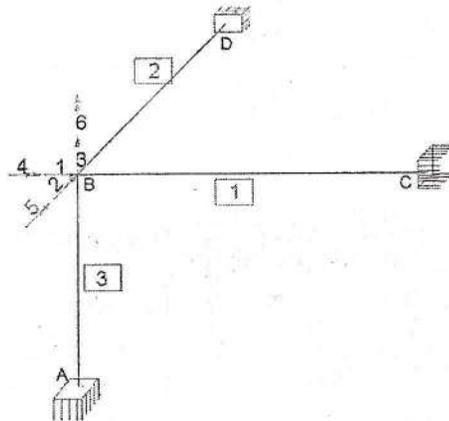
$E=22 \text{ KN/mm}^2=22 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$

$G=8.5 \text{ KN/mm}^2=8.5 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$



SOLUCIÓN:

1. CÁLCULOS PREVIOS



DE ELEMENTOS = 3

DE GDL = 6

ELEMENTO 1:

$A=0.3 \times 0.4 = 0.12 \text{ m}^2$

Momento de inercia en los ejes:

$I_y = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$

$I_z = \frac{0.4 \times 0.3^3}{12} = 0.0009 \text{ m}^4$

Momento de inercia polar:

$$J = Cbt^3; \quad C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right];$$

$$b: \text{Lado mayor} \quad C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{0.3}{0.4} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.3}{0.4} \right)^4 \right] = 0.179986$$

t: Lado menor

$$J = 0.179986 \times 0.4 \times 0.3^3 = 1.94385 \times 10^{-3} m^4$$

Rigideces:

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times 1.94385 \times 10^{-3} = 16522.725 \text{ KN-m}^2$$

$$EI_y = 22 \times 10^6 \times 0.0016 = 35200 \text{ KN-m}^2$$

$$EI_z = 22 \times 10^6 \times 0.0009 \times 10^{-3} = 29333.326 \text{ KN-m}^2$$

ELEMENTO 2:

$$A = 0.4 \times 0.25 = 0.1 m^2$$

Momento de inercia en los ejes:

$$I_x = \frac{0.4 \times 0.25^3}{12} = 5.208333 \times 10^{-4} m^4$$

$$I_z = \frac{0.25 \times 0.4^3}{12} = 1.333333 \times 10^{-3} m^4$$

Momento de inercia polar:

$$J = Cbt^3; \quad C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right]; \quad C = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{0.25}{0.40} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{0.25}{0.40} \right)^4 \right] = 0.203752$$

$$J = 0.203752 \times 0.40 \times 0.25^3 = 1.27345 \times 10^{-3} m^4$$

Rigideces:

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times 1.27345 \times 10^{-3} = 10824.325 \text{ KN-m}^2$$

$$EI_x = 22 \times 10^6 \times 5.208333 \times 10^{-4} = 11458.3326 \text{ KN-m}^2$$

$$EI_z = 22 \times 10^6 \times 1.333333 \times 10^{-3} = 29333.326 \text{ KN-m}^2$$

ELEMENTO 3

$$A = 0.3 \times 0.4 = 0.12 m^2$$

Momentos de inercia:

$$I_y = \frac{0.3 \times 0.4^3}{12} = 1.6 \times 10^{-3} m^4$$

$$I_x = \frac{0.4 \times 0.3^3}{12} = 9 \times 10^{-4} m^4$$

Momento de inercia polar:

$$J = Cbt^3 = 1.94385 \times 10^{-3} m^4$$

Rigideces:

$$GJ = 16522.725 \text{ KN}\cdot m^2 \quad ; \quad Ely = 16522.725 \text{ KN}\cdot m^2$$

$$Elx = 19800 \text{ KN}\cdot m^2$$

2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

$$K^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 \\ 0 & \frac{EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix}$$

$$K^1 = \begin{bmatrix} 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752 \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -8448 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3304.545 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8448 & 0 & 28160 & 0 \\ 0 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 15840 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS							
M.R.E.	DATOS DE ECUACION		V.F.E.P.		V. DESP.	V.F. SIMPLIFICADA	
1	VER	M.F.R.O. SISTEMA	VER	1	VER	1	VER
CALCULAR		528000	0	0	0	0	
		0	1900.8	0	0	4752	
		0	0	3379.2	0	-8448	
		1	0	0	3304.545	0	
		0	0	-8448	0	28160	
		0	4752	0	0	0	15840
LIMPIAR							
BACK							
							V.F. TOTALES
							1
							V.F. LOCALES
							1

ELEMENTO 2

$$K^2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 \\ 0 & \frac{EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 13037.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19555.6 \\ 0 & 733333.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5092.6 & 7638.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7638.9 & 15277.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3619.6 & 0 \\ -19555.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39111.1 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS									
MRE	DATOS DE SISTEMA				V.FEP	V. DEEP	V.F. SIMPLIFICADA		
2	VER	MRE/SISTEMA	VER	1	VER	1	VER	1	VER
CALCULAR		13037.04	0	0	0	0	0	-19555.6	0
LIMPIAR		0	733333.3	0	0	0	0	0	0
BACK		0	0	5092.6	7638.9	0	0	0	0
		0	0	7638.9	15277.8	0	0	0	0
		0	0	0	0	3619.6	0	0	0
		-19555.6	0	0	0	0	0	39111.1	0

ELEMENTO 3:

$$K^3 = \begin{bmatrix} 15644.4 & 0 & 0 & 0 & -23466.7 & 0 \\ 0 & 8800.0 & 0 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8800.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13200 & 0 & 26400 & 0 & 0 \\ -23466.7 & 0 & 0 & 0 & 49933.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5525.2 \end{bmatrix}$$

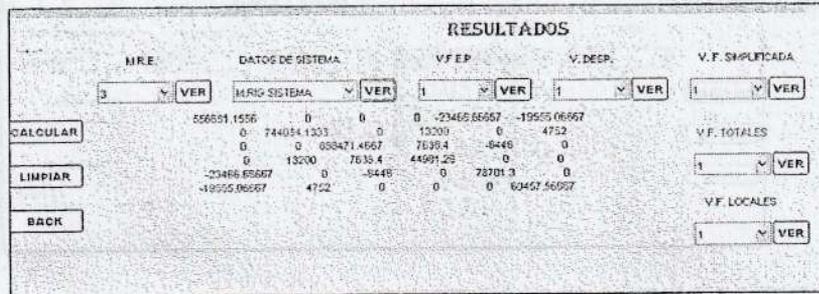
CASTORFT

RESULTADOS									
MRE	DATOS DE SISTEMA				V.FEP	V. DEEP	V.F. SIMPLIFICADA		
3	VER	MRE/SISTEMA	VER	1	VER	1	VER	1	VER
CALCULAR		15644.4	0	0	0	-23466.6667	0	0	0
LIMPIAR		0	8800	0	13200	0	0	0	0
BACK		0	0	8800	0	0	0	0	0
		0	13200	0	26400	0	0	0	0
		-23466.6667	0	0	0	49933.3333	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	5525.2	0

3. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

$$K = \begin{bmatrix} 556681.4814 & 0 & 0 & 0 & -23466.66 & 0 \\ 0 & 744034.1333 & 0 & 13200.0000 & 0 & 4752.00 \\ 0 & 0 & 888471.796 & 7638.889 & -8448.0000 & 0 \\ 0 & 13200.0000 & 7638.889 & 44992.871 & 0 & 0 \\ -23466.6667 & 0 & -8448.0000 & 0 & 78712.9633 & 0 \\ -19555.5556 & 4752.0000 & 0 & 0 & 0 & 60476.2678 \end{bmatrix}$$

CASTORFT



4. VECTOR DE FUERZAS EXTERNAS EN LOS NUDOS DE LA ESTRUCTURA

$$f_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

ELEMENTO 1:

$$f^1_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 2:

$$f^2_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO 3:

$$f^3_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.5 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. VECTOR DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO DE LA ESTRUCTURA

$$f_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 112.5 \\ 26.25 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS					
M.R.E.	DATOS DE SISTEMA		V.F.E.P.	V. DESP.	V.F. SIMPLIFICADA
3	VER	V.F.E.P. SISTEMA	VER	3	VER
1	VER			1	VER
CALCULAR			0		
LIMPIAR			0		
BACK			112.5		
			26.25		
			-50		
			0		
					V.F. TOTALES
					1
					V.F. LOCALES
					1

7. VECTOR DE FUERZAS DE LA ESTRUCTURA

$$f = f_n - f_0$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -112.5 \\ -26.25 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS DE LA ESTRUCTURA

$$K.U = f$$

$$U = \begin{bmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS					
M.R.E.	DATOS DE SISTEMA		V.F.E.P.	V. DESP.	V.F. SIMPLIFICADA
3	VER	V.F.E.P. SISTEMA	VER	3	VER
1	VER			1	VER
CALCULAR			2.68731-005		
LIMPIAR			1.00059-005		
BACK			-0.000115749		
			-0.000566842		
			0.0006309		
			7.90572-006		
					V.F. TOTALES
					1
					V.F. LOCALES
					1

9. VECTOR DE FUERZAS INTERNAS DE LOS ELEMENTOS: $f^e = f^e_o + k^e \cdot U^e$

ELEMENTO 1: $f^1 = f^1_o + k^1 \cdot U^1$

$$f^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1900.8 & 0 & 0 & 0 & 4752 \\ 0 & 0 & 3379.2 & 0 & -84480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3304.545 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8448 & 0 & 28160 & 0 \\ 0 & 4752 & 0 & 0 & 0 & 15840 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$f^1 = \begin{bmatrix} 14.189 \\ 0.057 \\ 54.279 \\ -1.873 \\ -31.256 \\ 0.173 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS					
NRE	DATOS DE SISTEMA		VFEP	V. DESP.	V.F. EMPLEADA
3	VER	V. DESP. SISTEMA	VER	3	VER
CALCULAR			14.189		
			0.056674		
			54.279		
			-1.87316		
			-31.256		
			0.172715		
			-14.189		
			-0.056674		
			0.05721		
			1.00059		
			59.0399		
			0.110162		
LINEAR					
BACK					
					VF. TOTALES
					1
					VER
					VF. LOCALES
					1
					VER

ELEMENTO 2: $f^2 = f^2_o + k^2 \cdot U^2$

$$f^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.5 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13037.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19555.6 \\ 0 & 733333.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5092.6 & 7638.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7638.9 & 15277.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3619.6 & 0 \\ -19555.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39111.1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$f^2 = \begin{bmatrix} 0.1958 \\ 7.3360 \\ 47.5815 \\ 16.7077 \\ 2.2833 \\ -0.2164 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

RESULTADOS					
NRE	DATOS DE SISTEMA		VFEP	V. DESP.	V.F. EMPLEADA
3	VER	V. DESP. SISTEMA	VER	3	VER
CALCULAR			0.195742		
			7.33767		
			47.5807		
			16.7065		
			2.27627		
			-0.210319		
			-0.195742		
			-7.23707		
			57.4193		
			-31.054		
			-2.27627		
			-0.37094		
LINEAR					
BACK					
					VF. TOTALES
					2
					VER
					VF. LOCALES
					1
					VER

ELEMENTO 3: $f^3 = f^3_0 + k^3 \cdot U^3$

$$f^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 52.5 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15644.4 & 0 & 0 & 0 & -23466.7 & 0 \\ 0 & 8800 & 0 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 132000 & 0 & 26400 & 0 & 0 \\ -23466 & 0 & 0 & 0 & 46933.3 & 0 \\ -19555.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5525.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.68731 \times 10^{-5} \\ 1.00059 \times 10^{-5} \\ -1.15749 \times 10^{-4} \\ -5.66842 \times 10^{-4} \\ 6.309 \times 10^{-4} \\ 7.90572 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$f^3 = \begin{bmatrix} -14.3825 \\ -7.3925 \\ -101.8613 \\ -14.8290 \\ 28.97533 \\ 0.0437 \end{bmatrix}$$

CASTORFT

