
Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Más recursos gratis Aquí](#)

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)



[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)

**ANALISIS ELEMENTAL
DE ESTRUCTURAS**

ANALISIS ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS

CHARLES HEAD NORRIS, Sc. D.

*Professor of Civil Engineering
University of Washington
Fellow, American Society of Civil Engineers*

JOHN BENSON WILBUR, Sc. D.

*Consulting Professor of Engineering
Massachusetts Institute of Technology
Fellow, American Society of Civil Engineers*

TRADUCCION Y ADAPTACION

MARIANO BARATECH ZALAMA

*Ingeniero de Construcción
Licenciado en Ciencias*

FRANCISCO BARATECH ZALAMA

*Ingeniero de Construcción
Licenciado en Ciencias*

LIBROS McGRAW-HILL

MEXICO PANAMA MADRID BOGOTA SAO PAULO NUEVA YORK
AUCKLAND DUSSELDORF JOHANNESBURG LONDRES MONTREAL NUEVA DELHI
PARIS SINGAPUR SAN FRANCISCO ST. LOUIS TOKIO TORONTO

ANALISIS ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS

Copyright © 1973, respecto a la edición en español por
LIBROS MCGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Ind. Editorial. Reg. núm. 465

0-07-091725-6

Traducido de la segunda edición en inglés de
ELEMENTARY STRUCTURAL ANALYSIS
Copyright © 1960, by MCGRAW-HILL BOOK, Co., INC., U.S.A.

1109878543

LINSA-73

7123456089

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó en enero de 1979
en Programas Educativos, S. A.,
Carretera Chabacano 66-A,
México, D. F.

Se tiraron 1 000 ejemplares

Prólogo

Desde que se publicó este libro por primera vez en 1948, se han producido muchos avances en los diversos aspectos de la ingeniería de estructuras. La mejora en las técnicas de fabricación y de construcción han permitido una mejor utilización de los materiales tradicionales como el acero, hormigón y madera. Se ha extendido el empleo del aluminio, debido principalmente al desarrollo de diversos tipos de elementos prefabricados. Se han introducido los plásticos, especialmente en la construcción de edificios. Ahora se considera el comportamiento postelástico de las estructuras y se están modificando los procedimientos utilizados en el proyecto de las mismas para utilizar este comportamiento cuando convenga. El empleo de los calculadores electrónicos en el análisis estructural y en los cálculos de proyectos se extiende a pasos agigantados.

Los principales cambios introducidos en esta segunda edición del *Análisis elemental de estructuras* reflejan la influencia de esta época de rápido desarrollo técnico. Se han añadido cuatro unidades principales: un preámbulo, en el que se comentan los diversos aspectos de la ingeniería de estructuras, y el pasado, presente y futuro de este campo en una perspectiva adecuada; el Capítulo 15, que es una breve introducción al análisis matricial de las estructuras; el Capítulo 16, que es un estudio de ciertos aspectos del comportamiento plástico de las estructuras, y el Capítulo 17, que es una introducción a la mecánica estructural avanzada.

La enseñanza de la ingeniería, como todos los demás aspectos de la tecnología, está en una época de cambio y evolución rápidos. Al nivel de los pregraduados, se presta más interés en los fundamentos y menos en los aspectos prácticos. Esta nueva edición, como el original, también se interesa más en los fundamentos que en la práctica, y relaciona los diversos procedimientos del análisis estructural con los principios de mecánica aplicada en los que se basan.

El alcance de este libro se limita al campo del análisis estructural, y debe suplementarse con un libro de proyecto de estructuras. En este punto se recalca una y otra vez que *la función de un ingeniero de estructuras es proyectar, no analizar*; y que el análisis es un medio para conseguir un fin, no el fin mismo. Hoy día existe un gran número de excelentes textos referentes a diversos aspectos del proyecto de estructuras, que se recomiendan al lector.

En la preparación de esta segunda edición ayudaron a los autores Martha M. Norris, esposa de uno de ellos, que mecanografió el manuscrito, y Harold D. Smith, que preparó las nuevas figuras. Por su valioso y leal apoyo, los autores están muy agradecidos.

Los autores desean agradecer también con aprecio las contribuciones de los que ayudaron en la preparación de la primera edición: Mrs. Grace M. Powers, que mecanografió el manuscrito; el profesor Donald R. F. Harleman, que preparó las figuras; y el profesor Myle J. Holley, Jr., que revisó el manuscrito.

Ambos autores están también profundamente agradecidos a los que contribuyeron a su formación en ingeniería de estructuras, particularmente al profesor Charles Milton Spofford, y al difunto profesor Charles Church More. También agradecen con aprecio la ayuda recibida de sus colegas, el profesor Eugene Mirabelli y los difuntos profesores W. M. Fife y J. D. Mitsch.

Charles Head Norris
John Benson Wilbur

Tabla de materias

Prólogo.....	5
Lista de símbolos.....	15
Observaciones al lector.....	18
Precámbulo.....	19
Capítulo 1. Introducción.....	49
1.1 Estructuras de ingeniería.....	49
1.2 Proyecto estructural.....	49
1.3 Cargas fijas o concargas.....	50
1.4 Sobrecargas. Generalidades.....	51
1.5 Sobrecargas para puentes de carretera.....	51
1.6 Sobrecargas para puentes de ferrocarril.....	52
1.7 Sobrecargas para edificios.....	53
1.8 Impacto.....	54
1.9 Cargas de nieve y hielo.....	55
1.10 Cargas laterales. Generalidades.....	55
1.11 Fuerzas de viento.....	56
1.12 Empujes del terreno.....	57
1.13 Presiones hidrostáticas.....	58
1.14 Acciones sísmicas.....	59
1.15 Fuerzas centrífugas.....	59
1.16 Fuerzas longitudinales.....	59
1.17 Acciones térmicas.....	60
1.18 Organización de vigas compuestas.....	60
1.19 Organización de cerchas o armaduras.....	61
1.20 Organización del piso.....	61
1.21 Sistemas de arriostramiento.....	63
1.22 Tensiones admisibles.....	63
1.23 Coeficiente de seguridad.....	66
1.24 Estructuras prácticas e ideales.....	66
1.25 Problemas para resolver.....	67
Capítulo 2. Reacciones.....	69
2.1 Definiciones.....	69
2.2 Generalidades. Apoyos.....	70

2.3	Ecuaciones del equilibrio estático. Estructuras planas.....	72
2.4	Ecuaciones de condición.....	72
2.5	Estabilidad e inestabilidad estática. Estructuras estáticamente determinadas e indeterminadas que no tienen ecuaciones de condición.....	73
2.6	Estabilidad y determinación de estructuras que tienen ecuaciones de condición.....	75
2.7	Esquemas de cuerpos libres.....	76
2.8	Cálculo de las reacciones.....	77
2.9	Cálculo de las reacciones. Estructuras que tienen ecuaciones de condición.....	79
2.10	Ejemplos para su clasificación.....	81
2.11	Ejemplos aclaratorios del cálculo de las reacciones.....	84
2.12	Superposición de efectos.....	90
2.13	Problemas para resolver.....	91
Capítulo 3. Cortante y momento flector.....		95
3.1	Generalidades.....	95
3.2	Determinación de esfuerzos en vigas.....	95
3.3	Definición de momento flector y cizallamiento. Criterio de signos.....	97
3.4	Método de cálculo del cortante y momento flector.....	98
3.5	Curvas de cortante y momento flector.....	100
3.6	Relaciones entre carga, cortante y momento flector.....	101
3.7	Trazado de las curvas de cortante y momento flector.....	103
3.8	Ejemplos aclaratorios. Vigas estáticamente determinadas.....	104
3.9	Ejemplo aclaratorio. Vigas con viguetas de tablero.....	112
3.10	Ejemplos aclaratorios. Vigas estáticamente indeterminadas.....	114
3.11	Problemas para resolver.....	117
Capítulo 4. Cerchas o vigas trianguladas planas.....		121
4.1	Generalidades. Definiciones.....	121
4.2	Cerchas ideales y reales.....	122
4.3	Disposición de las barras de una cercha.....	123
4.4	Notación y criterio de signos utilizados en el estudio de los esfuerzos en las cerchas.....	126
4.5	Teoría del análisis de esfuerzos de cerchas.....	126
4.6	Aplicación del método de los nudos y del método de las secciones.....	130
4.7	Discusión del método de los nudos y del de las secciones.....	140
4.8	Estabilidad estática y determinación estática de estructuras de cercha.....	142
4.9	Ejemplos que aclaran cómo se determinan la estabilidad y la determinación.....	145
4.10	Tipos clásicos de armaduras de puentes y de cubiertas.....	148
4.11	Ejemplos aclaratorios del análisis de esfuerzos de armaduras determinadas.....	149
4.12	Casos excepcionales.....	154
4.13	Pórticos rígidos.....	155
4.14	Problemas para resolver.....	158
Capítulo 5. Estática gráfica.....		167
5.1	Introducción.....	167
5.2	Definiciones.....	167
5.3	Composición y descomposición de fuerzas.....	168
5.4	Resultante de varias fuerzas en un plano. Polígono de fuerzas.....	170
5.5	Condiciones de equilibrio para sistemas de fuerzas coplanarios concurrentes y no concurrentes.....	170
5.6	Determinación de las reacciones por el método de las tres fuerzas.....	172
5.7	Polígono funicular (de equilibrio).....	173
5.8	Empleo del polígono funicular para determinar las reacciones.....	175
5.9	Polígonos funiculares trazados por uno, dos o tres puntos determinados.....	176

5.10	Determinación gráfica del cortante y del momento flector.....	177
5.11	Fuerzas de barra en cerchas. Diagrama de Maxwell. Notación de Bow.....	181
5.12	Algunos casos de ambigüedad. Cerchas de cubierta Fink.....	182
5.13	Reacciones y fuerzas de barras en arcos tri-articulados.....	183
5.14	Problemas para resolver.....	185
Capítulo 6. Líneas de influencia.....		190
6.1	Introducción.....	190
6.2	Ejemplos de variación de las tensiones con la posición de la carga.....	190
6.3	Línea de influencia. Definición.....	191
6.4	Propiedades de la línea de influencia.....	192
6.5	Construcción de las líneas de influencia para vigas.....	194
6.6	Líneas de influencia en vigas principales con sistemas de tablero.....	196
6.7	Interpretación de las líneas de influencia de las vigas principales con sistema de tablero.....	198
6.8	Serie de sobrecargas aisladas. Utilización del diagrama de momentos.....	200
6.9	Serie de sobrecargas aisladas. Cálculo del momento máximo.....	201
6.10	Serie de sobrecargas aisladas. Cálculo del cortante máximo.....	204
6.11	Máximo absoluto del cortante de las sobrecargas.....	205
6.12	Máximo absoluto del momento de las sobrecargas.....	205
6.13	Líneas de influencia para vigas trianguladas y cerchas. Generalidades.....	206
6.14	Líneas de influencia de una viga Pratt.....	207
6.15	Líneas de influencia para vigas trianguladas con diagonales en K.....	209
6.16	Fuerza máxima en los elementos de una armadura triangulada debida a una serie de sobrecargas aisladas.....	210
6.17	Tablas de influencia.....	211
6.18	Longitud cargada.....	213
6.19	Otro método para determinar líneas de influencia.....	213
6.20	Problemas para resolver.....	215
Capítulo 7. Cuchillos de puente y armaduras de cubierta.....		218
7.1	Introducción.....	218
7.2	Estudio general de una cercha de cubierta.....	219
7.3	Tensiones admisibles para barras por efecto del viento.....	224
7.4	Estudio general de un cuchillo de puente.....	224
7.5	Inversión de esfuerzos.....	227
7.6	Diagonales auxiliares.....	228
7.7	Puentes móviles. Generalidades.....	230
7.8	Puentes basculantes.....	230
7.9	Puentes elevables.....	232
7.10	Puentes giratorios en horizontal.....	232
7.11	Puentes oblicuos.....	233
7.12	Problemas para resolver.....	233
Capítulo 8. Estructuras para grandes luces.....		237
8.1	Introducción.....	237
8.2	Estructuras con voladizo (cantilever). Generalidades.....	237
8.3	Condición estática de las estructuras cantilever.....	238
8.4	Análisis de tensiones en cuchillos cantilever.....	239
8.5	Estructuras continuas.....	241
8.6	Arcos. Generalidades.....	243
8.7	Análisis del arco tri-articulado de celosía.....	244
8.8	Líneas de influencia de arcos de celosía tri-articulados.....	245
8.9	Arcos tri-articulados de celosía con apoyos a diferente altura.....	246

8.10	Puentes colgantes.....	248
8.11	Problemas para resolver.....	248
Capítulo 9. Armaduras tri-dimensionales.....		251
9.1	Introducción.....	251
9.2	Condición de la estática.....	251
9.3	Determinación de las reacciones.....	254
9.4	Determinación de fuerzas de barra.....	255
9.5	Caso en que no se puedan calcular las reacciones sin considerar las fuerzas de barra.....	258
9.6	Teoremas especiales.....	259
9.7	Aplicación de los teoremas especiales. Cúpula de Schwedler.....	259
9.8	Torres.....	261
9.9	Torre con pies rectos.....	263
9.10	Teoría general de las armaduras tri-dimensionales.....	263
9.11	Problemas para resolver.....	267
Capítulo 10. Cables.....		270
10.1	Introducción.....	270
10.2	Teorema general del cable.....	270
10.3	Aplicación del teorema general del cable.....	271
10.4	Forma del cable uniformemente cargado.....	272
10.5	Traacción en el cable uniformemente cargado.....	273
10.6	Ejemplos aclaratorios.....	274
10.7	Longitud de cable uniformemente cargado.....	275
10.8	Alargamiento elástico de los cables.....	276
10.9	Estructuras con contravientos.....	277
10.10	Puentes colgantes estáticamente determinados.....	279
10.11	Problemas para resolver.....	281
Capítulo 11. Estudio aproximado de las estructuras estáticamente indeterminadas.....		283
11.1	Introducción.....	283
11.2	Importancia de los métodos aproximados en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas.....	284
11.3	Número de hipótesis necesarias.....	285
11.4	Cuchillos de cordones paralelos con dos diagonales en cada entrepaño.....	285
11.5	Cuchillos de sistema múltiple.....	286
11.6	Pórticos simples.....	289
11.7	Pórticos industriales.....	291
11.8	Torres con pies rectos.....	292
11.9	Tensiones en estructuras de edificios debidas a cargas verticales.....	293
11.10	Tensiones en los pórticos de edificios debidas a cargas laterales en general.....	295
11.11	Método del pórtico simple.....	296
11.12	Método del voladizo.....	299
11.13	Método del factor.....	301
11.14	Problemas para resolver.....	306
Capítulo 12. Deformaciones de las estructuras.....		309
12.1	Introducción.....	309
12.2	Naturaleza del problema de la deformación.....	310
12.3	Principio de los desplazamientos virtuales.....	311
12.4	Fundamentos del método de los trabajos virtuales.....	313

12.5	Expresiones del trabajo virtual externo o interno.....	315
12.6	Deformación de cuchillos utilizando el método de los trabajos virtuales.....	317
12.7	Cálculo de deformaciones de vigas y pórticos utilizando el método de los trabajos virtuales.....	326
12.8	Desarrollo de los teoremas del área de momentos.....	334
12.9	Método de la carga-elástica.....	339
12.10	Aplicación del teorema del área de momentos y del método de la carga elástica al estudio de deformaciones en vigas y pórticos.....	344
12.11	Método de la viga conjugada.....	348
12.12	Método de Williot-Mohr.....	352
12.13	Aplicación del método de Williot-Mohr.....	356
12.14	Método de la cadena de barras.....	361
12.15	Segundo teorema de Castigliano.....	370
12.16	Primer teorema de Castigliano.....	373
12.17	Cálculo de corrimientos utilizando el segundo teorema de Castigliano.....	374
12.18	Deformación de armaduras espaciales.....	376
12.19	Otros problemas de deformaciones.....	378
12.20	Contraflecha de las estructuras.....	378
12.21	Ley de Maxwell de las deformaciones recíprocas. Ley de Betti.....	379
12.22	Líneas de influencia de corrimientos.....	381
12.23	Problemas para resolver.....	382
Capítulo 13. Análisis de tensiones en estructuras estáticamente indeterminadas.....		390
13.1	Introducción.....	390
13.2	Empleo de las ecuaciones de superposición en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas.....	391
13.3	Estudio general de la utilización de las ecuaciones de superposición en el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas.....	394
13.4	Ejemplos aclaratorios del método de análisis de tensiones utilizando las ecuaciones de superposición.....	396
13.5	Otros ejemplos referentes a temperatura, asientos, etc.....	407
13.6	Notas generales sobre la elección de superabundantes.....	410
13.7	Estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas utilizando el segundo teorema de Castigliano; teorema del trabajo mínimo.....	412
13.8	Ejemplos del estudio de tensiones utilizando el segundo teorema de Castigliano.....	413
13.9	Desarrollo de la ecuación de los tres momentos.....	418
13.10	Aplicación de la ecuación de los tres momentos.....	420
13.11	Desarrollo de la ecuación de la deformación angular.....	422
13.12	Aplicación del método de la deformación angular a vigas y pórticos.....	426
13.13	Fundamentos del método de distribución de momentos.....	437
13.14	Aplicación de la distribución de momentos a vigas y pórticos.....	440
13.15	El método de distribución de momentos aplicado a barras no prismáticas.....	452
13.16	Análisis de tensiones de las armaduras espaciales estáticamente indeterminadas.....	455
13.17	Deformación de estructuras estáticamente indeterminadas.....	455
13.18	Tensiones secundarias en los cuchillos.....	456
13.19	Notas suplementarias. Cargas simétricas y antisimétricas, centro elástico y analogía de la columna.....	460
13.20	Problemas para resolver.....	462
Capítulo 14. Líneas de influencia de estructuras estáticamente indeterminadas.....		475
14.1	Introducción.....	475
14.2	Líneas de influencia obtenidas por posiciones sucesivas de la carga unidad.....	475
14.3	Principio de Müller-Breslau para hallar las líneas de influencia.....	479

14.4	Obtención de líneas de influencia por superposición de efectos de los momentos de empotramiento.....	483
14.5	Problemas para resolver.....	486
Capítulo 15. Introducción a los métodos matriciales en el análisis estructural.....		487
15.1	Introducción.....	487
15.2	Clasificación de los métodos de análisis estructural.....	487
15.3	Comparación de los métodos de fuerzas y de desplazamientos para cuchillos planos.....	488
15.4	Generalización del método de desplazamiento.....	492
15.5	Análisis estructural en casos de gran número de hipótesis de cargas.....	495
15.6	Métodos matriciales de análisis estructural.....	495
Capítulo 16. Comportamiento plástico de las estructuras.....		500
16.1	Introducción.....	500
16.2	Propiedades mecánicas del acero.....	501
16.3	Comportamiento plástico de una estructura de celosía simple.....	503
16.4	Relaciones momento-curvatura en barras de flexión.....	507
16.5	Comportamiento plástico de las vigas típicas.....	511
16.6	Comportamiento plástico de las vigas continuas bajo cargas alternativas....	516
16.7	Fijación de tensiones de estructuras indeterminadas.....	519
16.8	Acción normal e híbrida de las armaduras estáticamente indeterminadas.....	521
16.9	Aplicación de los principios de la acción normal e híbrida al proyecto estructural.....	522
16.10	Proyecto plástico de estructuras de acero.....	524
16.11	Problemas para resolver.....	524
Capítulo 17. Introducción a la mecánica avanzada de estructuras.....		527
17.1	Introducción.....	527
17.2	Definiciones fundamentales y relaciones que intervienen en la teoría de la elasticidad.....	528
17.3	Formulación de la solución del problema de la elasticidad.....	534
17.4	Teoría de la deformación pequeña en losas delgadas.....	535
17.5	Teoría de placas de las deformaciones grandes.....	542
17.6	Estudio de las láminas delgadas.....	543
17.7	Análisis del comportamiento con pandeo.....	552
17.8	Cálculo de la respuesta dinámica.....	558
Capítulo 18. Análisis de modelos de estructuras.....		564
18.1	Aplicación del análisis de modelos.....	564
18.2	Métodos típicos del análisis de tensiones de modelos.....	564
18.3	Proyectos de modelos.....	565
18.4	Propiedades de los materiales de los modelos.....	565
18.5	Empleo de la balanza de resorte para evitar el cedimiento.....	567
18.6	Planteamiento del análisis de modelos.....	569
18.7	Interpretación de los resultados de los modelos.....	570
Capítulo 19. Métodos de modelos de análisis de tensiones.....		573
19.1	Generalidades.....	573
19.2	Teoría de algunos métodos indirectos.....	573
19.3	Instrumentos de medida de las deformaciones.....	574
19.4	Algunos métodos indirectos.....	576
19.5	Método de Beggs.....	578

19.6	El defórmetro de momentos.....	579
19.7	Indicador de momentos.....	583
19.8	Principios de semejanza.....	586
19.9	Deducción de los principios de semejanza utilizando las leyes establecidas de la mecánica estructural.....	586
Capítulo 20. Otros usos de los modelos de estructuras.....		590
20.1	Generalidades.....	590
20.2	Método fotoelástico. Generalidades.....	590
20.3	Repaso de algunos principios de óptica.....	591
20.4	Método fotoelástico. Teoría fundamental.....	593
20.5	Determinación de la distribución de tensiones por el método fotoelástico.....	598
20.6	Medida de las deformaciones.....	601
20.7	Determinación de la distribución de tensiones por medio de medidas de deformación superficial.....	601
20.8	Determinación de cargas de pandeo.....	604
Soluciones de los problemas.....		605
Índice de nombres.....		611
Índice de materias.....		613

Lista de símbolos

Los símbolos se definen donde aparecen. Aquí se da una relación de los más importantes. Se observará que algunos de ellos tienen varias definiciones según el texto en que se usen.

- A* área de la sección de una barra
C factor de transmisión en el método de distribución de momentos
D rigidez a flexión de placas y láminas, $EA^3/12(1 - \nu^2)$
D_m componente de desplazamiento de nudo utilizado en el método de desplazamiento de análisis estructural
DF factor de distribución en el método de distribución de momentos
E módulo de elasticidad de Young (en tracción y compresión)
E_t módulo de elasticidad tangencial
F fuerza en general; fuerza axial o fuerza resistente axial que actúa en una sección de una barra
ƒ factor de forma de la sección, Z_e/S
ME momento de empotramiento de una barra utilizado en el método de la deformación angular y en el de distribución de momentos
G módulo de elasticidad en cortante
H componente horizontal de una fuerza; cortante total que actúa en un piso de pórtico de edificio; componente horizontal de la tracción en un cable
I momento de inercia de la sección
J factor de desplazamiento lateral utilizado en el método de distribución de momentos
K factor de rigidez de barras de flexión, I/L para barras prismáticas
K^{}* factor de rigidez reducido para barras de flexión
K' factor de rigidez verdadero para barras de flexión
*K^{**}* factor de rigidez reducido verdadero para barras de flexión
K_{ef} factor de rigidez efectivo para barras de flexión
L longitud de una barra; longitud de un tramo
M momento de una fuerza (o par); momento flector; momento resistente; momento extremo de una barra; pares de tensiones de flexión o de torsión en la teoría de placas y láminas
M_f momento resistente de la sección correspondiente a condiciones de tensión en las que la tensión por flexión en la fibra extrema ha alcanzado exactamente el valor de fluencia, $M_f = S \sigma_f$

M_{pl}	momento resistente de una sección totalmente plastificada en flexión pura, $M_{pl} = Z \sigma_f$
N	tensiones resultantes de membrana utilizadas en la teoría de placas y láminas
P	carga exterior
P_m	componente de fuerza de nudo utilizada en el método de desplazamiento del análisis estructural
P_{cr}	carga crítica (para el pandeo)
P_f	carga que produce el punto de fluencia en las fibras sometidas a mayor tensión
P_u	carga de rotura (en las consideraciones sobre comportamiento plástico, para la que comienzan las deformaciones excesivas)
Q	carga exterior imaginaria utilizada en la aplicación del método de los trabajos virtuales; tensión resultante de cortante transversal de la teoría de placas y láminas
R	fuerza reactiva; resultante
S	fuerza de cizalladura (cortante) en una barra; fuerza resistente de cizalladura
S	módulo resistente de la sección
T	tracción de un cable
V	componente vertical de una fuerza
W	peso de un cuerpo
W_d	trabajo virtual interno de deformación
W_e	trabajo virtual exterior realizado por las reacciones
W_e	trabajo virtual exterior realizado por el sistema de fuerzas externas (cargas y reacciones)
W_e	trabajo exterior realizado por el sistema de fuerzas exteriores
W_i	trabajo interno (o energía de deformación) almacenado por deformación de la estructura
W_m	carga elástica (o peso) en el nudo m utilizada en el método de la carga elástica para calcular deformaciones de cuchillos
X	fuerza (o par) superabundante utilizada en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas
X, Y, Z	componentes coordenadas de una fuerza
X, Y, Z	componentes coordenadas de una fuerza de cuerpo utilizadas en la teoría de la elasticidad
X, Y, Z	componentes coordenadas de una fuerza de superficie utilizadas en la teoría de la elasticidad
Z	módulo de plasticidad de la sección que está totalmente plastificada en flexión pura
a	dimensión de longitud; radio de curvatura de lámina
b	dimensión de longitud; anchura de la sección transversal; número de barras en un pórtico o armadura
c	dimensión de longitud; distancia del centro de una sección al punto más lejano de la misma
d	dimensión de longitud; altura de la sección; corrimiento de un punto de la elástica desde la tangente
d_{mi}	coeficientes de deformación (o flexibilidad) utilizados en las ecuaciones de superposición que expresan la deformación m de una estructura
e	deformación lineal de un elemento longitudinal de barra
$e_0, e_1,$ etc.	deformación lineal de un elemento longitudinal del eje de una barra

- e_x, e_y, e_z deformaciones lineales de una roseta de deformaciones
 g aceleración de la gravedad
 h flecha de un cable en el centro de la curva; altura de piso de un edificio; espesor de placa o lámina
 k rigidez de un muelle lineal (fuerza necesaria para producir una variación unitaria de longitud de un muelle)
 k_{mtd} coeficiente de rigidez utilizado en el método de desplazamiento de análisis estructural
 l dimensión de longitud
 n número de nudos de un pórtico o armadura
 p intensidad de carga repartida por unidad de longitud en una viga
 q intensidad de carga repartida por unidad de superficie en una placa o lámina
 r número de elementos de reacción independientes de un pórtico o armadura; radio de curvatura principal de una lámina; radio de giro de una sección, $(I/A)^{1/2}$
 s dimensión de longitud axial de barra
 t variación uniforme de temperatura; tiempo
 w intensidad de carga uniformemente repartida
 u, v, w componentes de desplazamiento correspondientes a las direcciones coordenadas x, y, z , respectivamente
 x, y, z coordenadas rectangulares
 α ángulo; desplazamiento por giro; ángulo central subtendido por un elemento lineal de la superficie media de una lámina
 α_t coeficiente de dilatación térmica
 γ deformación por cortante
 Δ deformación o corrimiento; incremento de una cantidad
 δ corrimiento; deformación unitaria utilizada en el método de la ecuación de superposición para estudiar estructuras estáticamente indeterminadas
 ϵ alargamiento lineal
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ componentes coordenados del alargamiento lineal
 θ ángulo; giro de la tangente a la elástica respecto a la dirección original del eje de la barra; relación de flecha del cable, h/L
 ν relación de Poisson
 σ tensión normal
 σ_f tensión de fluencia en tracción
 τ esfuerzo cortante; giro de la tangente a la elástica con respecto a la curva de la misma
 ϕ ángulo; curvatura de barras flexadas
 χ variación de curvatura o torsión de la superficie media de una lámina
 ψ ángulo; giro de la cuerda de una elástica con respecto a la dirección original del eje de una barra
 ω frecuencia de vibración propia

Observaciones al lector

Al lector de esta segunda edición del *Análisis elemental de estructuras* le pueden ser útiles algunas sugerencias relativas a dos de las principales modificaciones introducidas en la misma.

1. Se ha incluido un Preámbulo antes de comenzar la exposición técnica detallada en el Cap. 1. En esencia, es un resumen de la evolución histórica de la ingeniería de estructuras, un breve planteamiento del estado presente de este campo y una sugerencia sobre las tendencias futuras. Se ha tratado de aclarar que el objetivo principal de un ingeniero de estructuras es proyectarlas, no analizarlas; describir la teoría del proyecto estructural, y mostrar cómo se usan los principios del análisis del comportamiento estructural dados en este libro para ayudar al ingeniero a conseguir su proyecto.

Se recomienda una lectura cuidadosa de este Preámbulo antes de comenzar el estudio de la exposición técnica detallada. En la primera ojeada se hallarán muchos enunciados y generalidades que será difícil comprender y retener. Por tanto, se aconseja releer frecuentemente este Preámbulo durante el transcurso del libro, al irse desarrollando la capacidad de analizar y entender el comportamiento estructural.

2. Se dan respuestas de aproximadamente la mitad de los problemas contenidos en el libro (los precedidos de un asterisco), con lo que se intenta ayudar al lector en su estudio, haciendo que pueda comprobar rápidamente si ha cometido un error de cálculo por descuido o quizá un error fundamental en la resolución. Se aconseja no utilizar estas respuestas como un recurso. Si se hace así y no se desarrolla la capacidad de comprobar por sí mismo, se prolongará la infancia como ingeniero de estructuras y no se será capaz de trabajar y actuar como un profesional responsable desde el primer momento. Un buen ingeniero de estructuras hace continuamente cálculos aproximados para comprobarse a sí mismo. Si se habitúa uno a realizar una estimación aproximada de la solución de un problema antes de comenzar los cálculos detallados, se verá que es una ayuda inapreciable para desarrollar el buen juicio y la intuición del comportamiento de las estructuras.

Preámbulo

Reseña histórica. Sin ninguna duda el planteamiento, proyecto y construcción de estructuras son prácticamente tan antiguos como la humanidad misma, pues la naturaleza proporciona en este planeta un ambiente apropiado para el hombre, pero raramente las formas naturales de dicho ambiente están exactamente adaptadas a sus necesidades, conveniencia y deseos. El hombre primitivo podía hallar una cueva natural, o un árbol hueco, que le proporcionara un abrigo parcial contra los elementos, pero probablemente no estaría situado convenientemente con respecto a sus suministros de alimentación y agua. Así, empezó el hombre a alterar la naturaleza para satisfacer sus necesidades —y como consecuencia realizó la primera construcción—. Esta primera construcción ¿fue un abrigo tosco, o pudo haber sido un puente formado por un tronco, una losa de piedra, o una cepa?

Las reseñas históricas que describen la evolución de la ingeniería de estructuras, desde sus más tempranos comienzos hasta el presente, son mucho más pobres que las referentes al desarrollo espiritual, filosófico, económico y artístico del hombre. Por otro lado, la exploración arqueológica nos ha dado ciertos indicios de las estructuras ejecutadas por la ingeniería primitiva, aun cuando los conceptos e ideas sobre su construcción se han perdido y solamente pueden imaginarse.

Las necesidades humanas fundamentales de alimento y comida no han cambiado evidentemente con el tiempo, pero el nivel que se acepta como satisfactorio para cubrir estas necesidades cambia continuamente con la capacidad de su civilización.

Afortunadamente para el progreso y el avance de la civilización, las ambiciones y deseos del hombre siempre exceden de sus posibilidades. A veces la diferencia entre ambos es tan grande, que le lleva a tratar de alcanzar su objetivo antes de llegar realmente a definir en qué consiste, o cómo lo desea, o qué técnicas o métodos debe usar para conseguirlo. Los puntos culminantes de la historia del hombre son el relato de sus esfuerzos más atrevidos, unas veces el relato de un avance o descubrimiento, otras veces el de un fracaso catastrófico.

A través de los siglos, los maestros constructores y los ingenieros de estructuras han practicado su arte ayudados por los conocimientos matemáticos disponibles, pero sin depender directamente de ellos. Cuando se dispone de conocimientos matemáticos y científicos, éstos se convierten en instrumentos apropiados, que utiliza el proyectista para determinar las proporciones y las dimensiones de sus construcciones. Cuando no se ha desarrollado todavía el conocimiento teórico que satisfaga sus necesidades, el proyectista debe contar con su experiencia, ensayos de campo y/o laboratorio, o su intuición e inspiración en materia de estructuras. La consecución de una obra con éxito está *realmente* sujeta solo a cuatro limitaciones; los requisitos funcionales y las necesidades de su civilización; las propiedades de los materiales de que dispone; las técnicas

de construcción que le resultan prácticas y económicas de empleo; y el poder creador e imaginación con que aplica su talento, conocimientos, experiencia e intuición.

Los siglos dieciocho y diecinueve han producido muchos e importantes avances matemáticos, científicos, materiales y mecánicos en el campo de la ingeniería de estructuras. Tan impresionante es la cantidad de conocimientos acumulados durante este periodo, que muchos ingenieros de estructuras se inclinan a limitar sus proyectos a aquellos que están respaldados por códigos, prácticas standard y fórmulas matemáticas apropiadas. En tal atmósfera profesional, los esfuerzos realmente relevantes de los maestros modernos de la construcción como Maillart, Freyssinet, Torroja y Nervi parecen aún más grandiosos en comparación con el trabajo de sus contemporáneos¹. Todos estos preeminentes ingenieros han poseído dotes de creación, imaginación e intuición en un grado no usual; pero es digno de hacer notar que todos ellos han suplementado generosamente sus conocimientos matemáticos y científicos con el uso extenso e inteligente no solo de la experiencia propia y ajena, sino también de ensayos de campo y de laboratorio.

Las carreras de estos hombres extraordinarios revelan la misma lección que puede extraerse de las reseñas históricas concernientes al desarrollo de la ingeniería de estructuras y la mecánica, esto es, que la evaluación matemática y científica de un hecho estructural o un fenómeno es anterior, más bien que precede, a la aplicación inicial de tales ideas en el proyecto real y la construcción.

Las formas constructivas más antiguas de las que tenemos conocimiento cierto son las viviendas lacustres en el fondo de algunos lagos suizos². Estas eran casas muy primitivas, elevadas sobre pilares, cuya antigüedad se remonta a la era paleolítica. Hay recuerdos megalíticos primitivos en Europa y Asia, pero no muestran casi ninguna evidencia de un verdadero arte estructural. La exploración arqueológica y la restauración nos han dado considerables testimonios de la construcción egipcia, griega y romana, así como de la de las numerosas civilizaciones de Asia y Asia Menor.

Posiblemente las formas estructurales utilizadas por los constructores primitivos que tienen un mayor interés para los actuales ingenieros de estructuras son las siguientes: la construcción de montante y dintel de la arquitectura griega clásica, que data de alrededor de 500 años antes de Jesucristo; las contribuciones romanas al desarrollo del arco, la bóveda, la cúpula, las cerchas de madera y el hormigón; la bóveda de arista y el aristón desarrollados por los constructores románicos entre los años 500 y 1000 después de Jesucristo; y los arcos apuntados y los aéreos botareles, utilizados por los constructores góticos en las magníficas catedrales construidas en Europa durante la Edad Media, entre el 1000 y el 1500. Aun en comparación con las estructuras modernas, un acueducto o puente romano, tales como el famoso Pont du Gard, o la cúpula de la catedral de Santa Sofía, de Estambul (construida alrededor del 540 d. de J. C.), son un espectáculo imprevisto e impresionante, sobre todo, cuando se comprueba el «estado del arte» al proyectarse y ejecutarse tales construcciones.

¹ Para la descripción de los trabajos de estos prominentes ingenieros, ver: Eduardo Torroja, «Fisología de las Estructuras» (con una versión inglesa de J. J. Polivka y Milos Polivka), Imprenta de la Universidad de California, Berkeley, 1958; Eduardo Torroja, «Las estructuras de Eduardo Torroja», F. W. Dodge Corporation, Nueva York, 1958; Pier Luigi Nervi, «Structures» (traducido al inglés por Giuseppina y Mario Salvadori), F. W. Dodge Corporation, Nueva York, 1956; Leonard Michaels, «Contemporary Structure in Architecture», Reinhold Publishing Corporation, Nueva York, 1950.

² Hay un cierto número de excelentes libros que relatan la historia y desarrollo de la mecánica e ingeniería de estructuras, entre los cuales están: Stephen P. Timoshenko, «History of Strength of Materials», McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953; H. M. Westergaard, «Theory of Elasticity and Plasticity», Imprenta de la Universidad de Harvard, Cambridge, Mass. (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York), 1952; David B. Steieman y Sara Ruth Watson, «Bridges and Their Builders», Dover Publications, Inc., Nueva York, 1957.



FIG. P.1. Pont du Gard. (Archivo Bettmann.)

Sin duda, los egipcios y otros antiguos constructores formularon reglas empíricas, basadas en la experiencia, que les servían al planear una nueva construcción, pero no hay indicios de que hayan desarrollado ni siquiera los principios de una teoría sobre los elementos estructurales. Los griegos avanzaron más en el arte de construir, pero su contribución a la teoría de las estructuras se limitó a las aportaciones de algunos de sus filósofos, como Arquímedes (287-212 a. de J. C.) que fijó las bases de la mecánica estructural al formular algunos principios fundamentales de estática. Los romanos eran originalmente constructores y se hicieron muy competentes al desarrollar y utilizar ciertas formas estructurales. Sin embargo, probablemente tuvieron escaso conocimiento del análisis de los esfuerzos de estas formas. Por ejemplo, parece ser que no conocían el modo de determinar la forma apropiada de los arcos y utilizaron normalmente arcos semicirculares de pequeña luz.

La mayoría de los conocimientos que acumularon los griegos y romanos referentes a la ingeniería de estructuras se perdió durante la Edad Media, y se ha recobrado solamente después del Renacimiento. Leonardo de Vinci (1452-1519) fue no solo el primer artista de su tiempo, sino también un gran científico e ingeniero. De sus libros de notas se desprende claramente que fue muy observador y que comprendió perfectamente ciertos aspectos fundamentales del comportamiento de los materiales estructurales. Esta obra de Vinci parece ser el principio real del desarrollo de la teoría de estructuras, pero no tuvo suficiente difusión, por no editarse en forma de libro. Como consecuencia, Galileo (1564-1642) está reconocido con acierto no solamente como el fundador de la ciencia moderna, sino también como el que dio origen a la mecánica de los materiales, porque, en su última publicación *De motu antiquiora*, completada en 1636 y publicada en 1638, fue el primero en estudiar la resistencia de ciertos elementos estructurales, incluyendo el fallo de una viga en voladizo.

Galileo estudió el fallo de una viga en voladizo desde un muro, viga que rompía en la sección contigua al muro. Consideró que el material era rígido y supuso que, en el fallo, la compresión estaba concentrada en el borde inferior de la sección rota y la



FIG. P.2. Cúpula de Santa Sofía. (Arquitecto Bettmann.)

resistencia a la tracción estaba uniformemente repartida en toda la profundidad de la sección. Tal distribución de tensiones no sería válida en la zona elástica de un material que sigue la ley de Hooke, pero puede ser cierta bajo alguna ley supuesta para la zona plástica de un material. Aun cuando el estudio de Galileo no conduce a un valor absoluto de la resistencia de una viga en voladizo, es interesante observar que obtenía la relación correcta entre las resistencias de dos vigas de secciones semejantes. Aún más interesante para nosotros hoy es el hecho de que Galileo (y también De Vinci) estaban interesados en predecir las resistencias de los elementos más que las tensiones y deformaciones producidas en ellos con cargas menores que la de rotura. Si todos los investigadores de los trescientos últimos años hubieran seguido teniendo un interés en la resistencia, comparable con su interés en el comportamiento elástico de las estructuras, quizá hoy el conocimiento de la mecánica estructural estaría más equilibrado entre el comportamiento elástico y la resistencia de las estructuras y los elementos estructurales.

Los investigadores posteriores, como Hooke (1635-1703), Mariotte (1620-1684), Jacobo Bernoulli (1654-1705), Juan Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Parent (1666-1716) y Coulomb (1736-1806) aportaron importantes contribuciones al desarrollo de este nuevo campo del saber. De entre ellos, las aportaciones de Coulomb fueron particularmente valiosas, y su memoria escrita en 1773 fue altamente significativa, aunque de momento no atrajo la atención, ni ejerció la influencia que merecía. En este escrito se presentaba por primera vez un análisis elástico, totalmente correcto, de la flexión de las vigas. Observó también que, bajo ciertas condiciones, en la rotura podía haberse desplazado de su posición elástica la fibra neutra y con ello demostró una apreciación del comportamiento elástico.

Hasta 1826, en que se publicó la primera edición del libro de Navier (1785-1836) sobre resistencia de los materiales, no se hicieron del conocimiento público general algunas de las correcciones hechas por Coulomb a los conceptos erróneos de su época

y entonces se estableció la moderna teoría de la resistencia de materiales. Por eso se considera a Coulomb y Navier los fundadores de este importante campo, tan fundamental para el estudio de las estructuras. Mientras sus predecesores del siglo dieciocho midieron y calcularon las cargas de rotura de los elementos estructurales, Navier estableció, al principio de su exposición, que es muy importante conocer el límite hasta el cual se comportan elásticamente las estructuras, por lo que se concentró en la consideración de este comportamiento elástico. Sugirió que las fórmulas deducidas para el



FIG. P.3. Puente de aluminio sobre el río Saguenay. (De los archivos de *Engineering News-Record*.)

comportamiento elástico habían de ser aplicables a las estructuras existentes que se comportaban adecuadamente, para establecer tensiones de seguridad, que pudieran utilizarse en el proyecto. Es una contrariedad que en este importante e influyente tratado Navier no haya prestado también la atención debida al comportamiento postelástico y las resistencias de rotura de las estructuras.

El resto del siglo diecinueve, después de la publicación del libro de Navier, puede ser considerado la «edad de oro» en lo que concierne al desarrollo de la teoría, que ahora se considera clásica, de las estructuras. Algunos de los que contribuyeron en forma importante en esta época fueron Lamé (1795-1870), Saint-Venant (1797-1886), Clapeyron (1799-1864), Clebsch (1833-1872), Rankine (1820-1872), Airy (1801-1892), Maxwell (1831-1879), Castigliano (1847-1884), Culmann (1821-1881), Mohr (1835-1918), Müller-Breslau (1851-1925), Engesser (1848-1931), Wöhler (1819-1914), A. Föppl (1854-1924), Jourawski (1821-1891), Bauschinger (1833-1893), Von Tetmajer (1850-1905) y

Jasinsky (1856-1899). Estos hombres, y sus contemporáneos, hicieron un tremendo trabajo al recopilar, desarrollar y exponer las teorías de la resistencia de materiales y el análisis estructural, en la misma forma prácticamente que la conocemos ahora. Más avanzado el libro, cuando se presenten los métodos que se desarrollan en esta época, se identificarán los nombres de estos hombres con alguna de sus importantes contribuciones. Uno de los métodos clásicos que se explican aquí, el de deformación angular, se desarrolló al principio del siglo actual, siendo los que más contribuyeron a su desarrollo Bendixen, Maney y Ostenfeld.

Desde 1900, la época moderna de la ingeniería de estructuras se ha caracterizado por los principales avances siguientes:

1. La publicación de cierto número de libros¹ excelentes, que tratan de las teorías de la elasticidad, plasticidad, pandeo, placas y membranas y vibraciones.

2. El desarrollo de máquinas perfeccionadas, instrumentos y técnicas para ensayar materiales y estructuras, y el creciente uso del análisis experimental de las estructuras en la investigación.

3. El desarrollo del método de distribución de momentos y el relacionado con él, pero generalizado, procedimiento de relajamiento.

4. El renovado interés en la resistencia de rotura y el comportamiento plástico de las estructuras y elementos estructurales, y la incorporación de estas ideas en los métodos de proyectos estructurales.

5. La aplicación de la teoría de las probabilidades y los métodos estadísticos a la reevaluación de la probabilidad de fallo o la probabilidad de quedar fuera de servicio, y una comparación de estas ideas con el «coeficiente de seguridad» clásico.

6. La reciente aparición de los calculadores analógicos y digitales y la aplicación de los métodos y procedimientos de cálculo modernos para el análisis y proyecto de estructuras.

7. El conocimiento más profundo del comportamiento del hormigón armado, el desarrollo del hormigón prefabricado y pretensado y la aplicación de estas ideas al proyecto.

8. La construcción de membranas, paneles y láminas, desarrolladas principalmente por los ingenieros de estructuras aeronáuticos, y la creciente incorporación de estas ideas al proyecto de estructuras de ingeniería civil no solo metálicas, sino también de hormigón.

9. El desarrollo de materiales estructurales perfeccionados —aceros, aluminio, plásticos, hormigones, maderas mejoradas, laminados, sandwiches y materiales cerámicos.

10. Por último —pero no el menor—, el continuo y rápido desarrollo de nuevo

¹ Entre los libros teóricos fundamentales que han tenido una influencia muy importante en el desarrollo de la mecánica estructural, el análisis y el proyecto en América en los últimos cincuenta años están: A. E. H. Love, «The Mathematical Theory of Elasticity», Imprenta de la Universidad de Cambridge, Londres, 1892, 4.ª ed., 1927; A. Föppl y L. Föppl, «Orang und Zwang», R. Oldenburg-Verlag, Múnich, 1920, 2.ª ed., 1928; H. Lorenz, «Technische Elastizitätslehre», R. Oldenburg-Verlag, Múnich, 1913; A. Nádai, «Plasticity», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1931; S. P. Timoshenko, «Theory of Elasticity», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1934, 2.ª ed. con J. N. Goodier, 1951; S. P. Timoshenko, «Theory of Elastic Stability», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1936; S. Timoshenko, «Theory of Plates and Shells», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1940, 2.ª ed. con S. Woinowsky-Krieger, 1960; R. V. Southwell, «An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists», Imprenta de la Universidad de Oxford, Londres, 1936; I. S. Sokolnikoff, «Mathematical Theory of Elasticity», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1946; F. Bleich, «Buckling Strength of Metal Structures», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1952; W. Flügge, «Statik und Dynamik der Schalen», Springer-Verlag, Berlín, 1934; K. Girkmann, «Flächentragwerke», Springer-Verlag, Berlín, 1946, 4.ª ed., 1956.

y más perfeccionado equipo de construcción, métodos y técnicas referentes a la fabricación, transporte, montaje y mantenimiento de las estructuras.

Considerando solo el campo del análisis estructural, el método de distribución de momentos presentado originalmente por el fallecido Hardy Cross y los procedimientos de relajamiento, más generales, preconizados por el profesor R. V. Southwell son, sin duda, las contribuciones más importantes de los últimos cincuenta años. Sin embargo, con el reciente desarrollo de los calculadores electrónicos y el uso rápidamente creciente de ellos para resolver los problemas de ingeniería de estructuras es difícil de prever la tendencia futura en el campo del análisis estructural. Los métodos clásicos de análisis que implican un gran número de ecuaciones simultáneas y que, como consecuencia, han sido sustituidos por los procedimientos de relajamiento, se han hecho de aplicación práctica con la ayuda de los calculadores modernos. En tales circunstancias, la importancia relativa de algunos cálculos y técnicas aproximados puede cambiar rápidamente. Pero este aspecto es solo una pequeña faceta en la exigencia del continuo desarrollo de nuevos y más perfectos métodos en el campo del análisis estructural, que serán de la máxima ayuda y orientación para el ingeniero proyectista.

La sociedad moderna se enfrenta con tremendos problemas sociológicos, políticos y económicos y exige la máxima ayuda posible de sus profesionales. Como contribución a ello, los ingenieros estructurales deben esforzarse continuamente en producir versiones mejoradas de las estructuras clásicas, y desarrollar nuevos tipos estructurales que satisfagan las necesidades cambiantes de la sociedad.

El proyecto de ingeniería de estructuras. El ingeniero de estructuras actúa normalmente como auxiliar del ingeniero proyectista funcional, que lleva la dirección en la redacción del proyecto. En el campo de la ingeniería civil, ayuda al ingeniero de transportes, o al hidráulico, o al de ingeniería sanitaria, facilitando las estructuras necesarias para llevar a cabo sus proyectos. En la construcción de edificios, es uno de los principales colaboradores del arquitecto. De un modo similar, ayuda a los ingenieros mecánico, químico o eléctrico a proyectar la maquinaria pesada, o las instalaciones necesarias para sus proyectos. Puede derivar toda su actividad hacia la arquitectura naval o la ingeniería aeronáutica y convertirse en un especialista en el proyecto de estructuras de barcos o aviones. Hoy, cuando está en pleno desarrollo la nueva era del espacio, el ingeniero estructural puede necesitar proporcionar estructuras espaciales para lanzar o servir a vehículos espaciales, o incluso puede usar sus conocimientos en ayudar al proyecto estructural del propio vehículo. A veces, ciertamente, la estructura misma puede ser el elemento principal del proyecto, y el ingeniero de estructuras tomará la dirección del trabajo, como, por ejemplo, en el caso de un largo puente o presa, o un muelle, o una gran instalación industrial.

Un proyecto de ingeniería de estructuras puede dividirse en tres fases: planteamiento, proyecto y construcción.

La *fase de planteamiento* comprende la consideración de diversos requisitos y factores que afectan a la disposición general y las dimensiones de la estructura y traen como consecuencia la elección del tipo, o quizá de varios tipos a elegir, de estructura, que ofrece la mejor solución general. La principal consideración es la función que ha de cumplir la estructura, si ha de contener o albergar, transportar, o soportar en el espacio. También intervienen muchas consideraciones secundarias, incluyendo las necesidades estéticas, sociológicas, legales, financieras o económicas.

Además, hay condiciones y limitaciones constructivas y estructurales que pueden influir también en el tipo de estructura elegido.

La *fase de proyecto* comprende una consideración detallada de las soluciones posibles, elegidas en la fase de planteamiento, y conduce a hallar las proporciones, dimen-

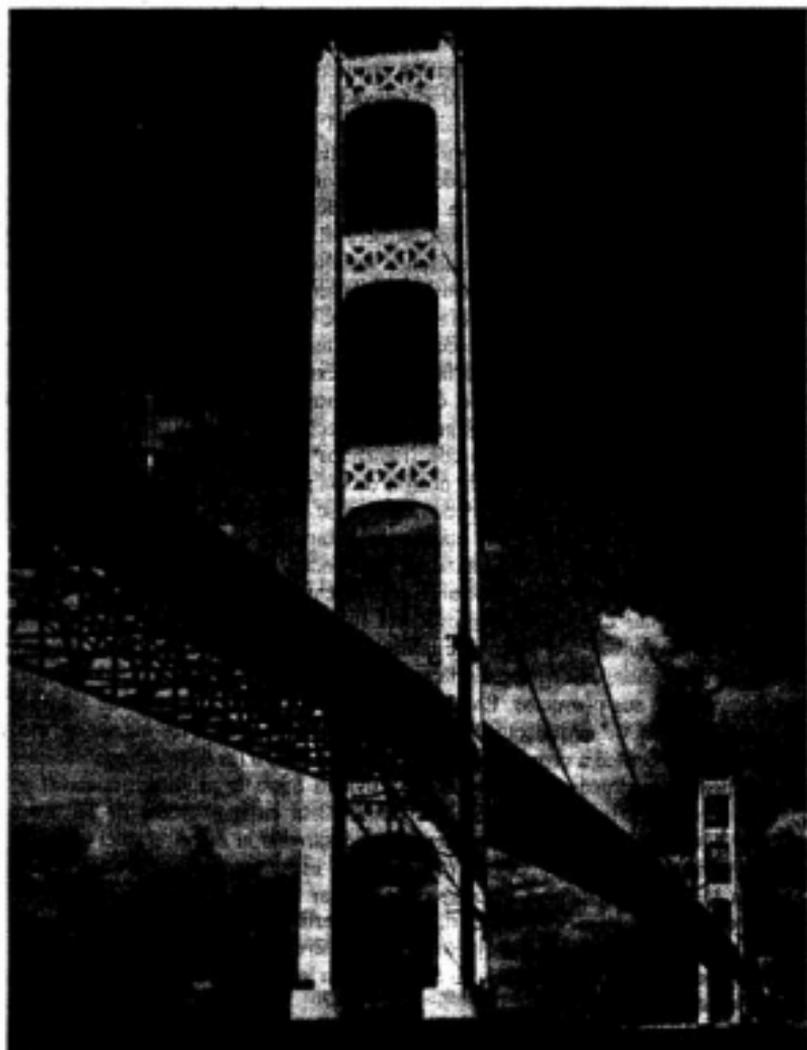


FIG. P.4. Puente del Mackinac Straits, Michigan. El puente colgante más largo, con 2.625 m; segunda luz más larga con 1.158 m. (Fotografía proporcionada y reproducida por cortesía del proyectista, doctor D. B. Steinman, ingeniero consultor, Nueva York.)

siones y detalles más convenientes de los elementos estructurales y acoplamientos que son necesarios para construir cada una de las soluciones que se consideran. Normalmente, antes de llegar a la fase final del proyecto, se ha determinado ya la mejor solución y se preparan los planos finales correspondientes a ella. A veces, la elección depende de consideraciones económicas y constructivas que no se pueden evaluar exactamente más que al comparar las ofertas, por lo que hay que preparar los planos definitivos de todas las soluciones consideradas.

La fase de construcción comprende la adquisición y contratación de los materiales, equipo y personal; fabricación de los elementos y piezas; transporte a pie de obra; y la construcción y montaje propiamente dichos. Durante esta fase se puede necesitar, evidentemente, alguna modificación del proyecto si aparecen dificultades de cimentación imprevistas, o si no se pueden conseguir los materiales presupuestados, o por otras diversas razones.

Teoría del proyecto estructural. Según se ha definido anteriormente, un *proyecto estructural* consiste en determinar las proporciones más convenientes de una estructura y en dimensionar y dar detalles de los elementos de los que está compuesta. Esta es la fase de más importancia técnica y matemática de un proyecto de estructura, pero no puede —o no debe— ejecutarse sin estar plenamente coordinada con las fases de planteamiento y construcción. El buen proyectista debe tener siempre presentes las diversas consideraciones que intervienen en el planteamiento preliminar de la estructura, y, de igual modo, los problemas varios que aparecerán posteriormente durante la construcción.

Concretamente, el proyecto de una estructura cualquiera comprende primero la determinación de las cargas y demás condiciones que debe soportar y que, por tanto, han de ser consideradas en el proyecto; luego viene el análisis (o cálculo) de los esfuerzos totales (empuje, cortantes, momentos flectores y momentos de torsión), tensiones, deformaciones, flechas, y reacciones producidas por las cargas, temperatura, cedimientos, deslizamientos y otras condiciones de proyecto; finalmente viene el dimensionado y elección de materiales de los elementos y juntas, de modo que resistan adecuadamente los efectos producidos por las solicitaciones. El criterio utilizado para juzgar si las dimensiones adoptadas darán como resultado el comportamiento deseado, se basa en un conjunto de conocimientos (teoría, ensayos de piezas reales y de modelos y experiencia práctica), intuición y buen juicio. Para la mayoría de las estructuras de ingeniería civil, tales como puentes, edificios, etc., la costumbre es proyectar tomando como base la comparación de las intensidades de tensión admisibles con las producidas por las cargas de servicio y demás condiciones de proyecto. Esta base de cálculo tradicional constituye el llamado *proyecto elástico*, pues se adoptan unas tensiones de trabajo de acuerdo con el concepto de que en los puntos de la estructura, sometidos al máximo esfuerzo, no debe sobrepasarse la tensión o la deformación correspondientes al límite elástico aparente del material. Evidentemente, puede también modificarse la elección de la tensión admisible, considerando la posibilidad de rotura debida a la fatiga, al pandeo o a rotura frágil, o considerando las flechas admisibles para la estructura.

Según el tipo de estructura, las tensiones de trabajo calculadas para las solicitaciones supuestas pueden coincidir o no con las condiciones reales a las que está sometida. El grado de coincidencia no es importante, siempre que las tensiones calculadas puedan compararse con experiencias previas. Mediante la elección de las condiciones de servicio y de las tensiones admisibles, se consigue un margen de seguridad contra la rotura. La elección de la magnitud de este margen depende del grado de incertidumbre con respecto a las cargas, el análisis, el proyecto, los materiales y la construcción y las consecuencias de la rotura. Por ejemplo, si se elige una tensión de tracción admisible de 1.400 kg por cm² para el acero de estructuras, con un límite elástico de 2.310 kg/cm², el margen de seguridad (o coeficiente de seguridad) que se tiene contra el fallo a la tracción es 1,65 (es decir, 2.310/1.400).

Hay una tendencia creciente al proyectar estructuras a basar el proyecto en la carga de rotura de la misma. Esta tendencia responde al nombre de *análisis a la rotura* o *cálculo a la rotura* en la literatura del hormigón armado y *cálculo a la rotura* o *cálculo plástico*

en la del acero. Cuando se ha hecho el dimensionado con esta base, la carga de servicio prevista se multiplica primero por un «coeficiente de mayoración de carga» apropiado (mayor de 1), cuya magnitud depende de las mismas consideraciones enumeradas para el margen de seguridad. A veces, los diversos componentes de la carga de servicio prevista se multiplican por coeficientes de carga distintos, que dependen de la certeza con que se conoce dicha componente, la frecuencia con que actúa sobre la estructura, etcétera. Entonces se dimensiona la estructura de forma que, según las condiciones predominantes, un aumento de carga 1) causaría rotura por fatiga, o 2) produciría el cedimiento de una sección interna (o la cesión simultánea de varias secciones), o 3) causaría un desplazamiento elasto-plástico de la estructura, o 4) llevaría a toda la estructura al punto de desmoronamiento.

Los partidarios de este último modo de proceder, que realmente constituye un análisis de los «estados límite», opinan que conduce a un proyecto más real, con un margen de seguridad conseguido con más precisión, sobre las condiciones de servicio previstas. Estas ventajas son consecuencia del hecho de poderse tener en cuenta los efectos no elásticos ni lineales que llegan a ser apreciables en la proximidad del momento de la destrucción de la estructura.

En los últimos años, crece entre muchos eminentes ingenieros la opinión de que no solo es inadecuado e irreal el término «coeficiente de seguridad», sino peor aún, que una teoría del proyecto estructural basada en este concepto conduce la mayoría de las veces a un proyecto injustificadamente conservador y, por tanto, antieconómico, y en algunos otros casos a un proyecto no conservador, con posibilidad de fallo demasiado elevada. Opinan que no hay en realidad fallo o seguridad de una estructura, sino solo una probabilidad de fallo, o una probabilidad de seguridad. Creen por esto que deben estudiarse las variaciones de los efectos de las cargas y de la resistencia de la estructura de un modo estadístico y considerar la probabilidad de supervivencia o de prestar servicio de una estructura¹. No resulta práctico aplicar estas ideas al proyecto de cada estructura individual. Sin embargo, se cree que será práctico hacerlo al estudiar normas de proyecto y reglamentos. Es muy de desear que las normas de edificación expongan plenamente los coeficientes y las probabilidades correspondientes implicados en ellas.

Materiales estructurales. Evidentemente, el poder disponer de los materiales estructurales apropiados es una de las principales limitaciones que se encuentra en su trabajo un ingeniero de estructuras experimentado. Los primeros constructores dependían casi exclusivamente de la madera, piedra, ladrillos y hormigón. Aunque ha sido utilizado el hierro por el hombre, al menos desde la construcción de las pirámides de Egipto, su uso como material estructural estaba limitado por las dificultades de fundido en grandes cantidades. Sin embargo, con la revolución industrial llegaron a la vez la necesidad del hierro como material estructural y la posibilidad de fundirlo en cantidad.

El ingeniero civil inglés John Smeaton fue el primero que utilizó ampliamente el hierro fundido como ingeniero de estructuras, a mediados del siglo dieciocho; pero otro inglés, Abraham Darby, construyó el primer puente de fundición en 1776-1779, el puente de arcos de Coalbrookdale, con arcos semicirculares de hierro. Las vigas de fundición no presentaban garantía y ocurrieron cierto número de fallos por fatiga y

¹ A. L. Johnson, «Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures», *Real Inst. Technol. Ser. 12 Div. Estadística e Ing. Estructural, Estocolmo*, 1953; A. M. Freudenthal, «The Safety of Structures», *Trans. ASCE*, vol. 112, pág. 125, 1947; A. M. Freudenthal, «Reflections on Standard Specifications for Structural Design», *Trans. ASCE*, vol. 113, pág. 269, 1948; A. M. Freudenthal, «Safety and Probability of Structural Failures», *Trans. ASCE*, vol. 121, pág. 1337, 1956; O. G. Julian, «Synopsis of First Progress Report of Committee on Factors of Safety», *J. Structures Div., Proc. ASCE*, vol. 83, n.º ST4, folleto 1316, julio 1957.

fragilidad, a causa de las fuertes cargas móviles. Se desarrolló el hierro maleable como material más apto y se utilizó mucho después del 1841. Se utilizaron con gran frecuencia, en puentes de pequeña luz, vigas de palastro. Como los puentes colgantes eran demasiado flexibles para puentes de gran luz de ferrocarriles, se hizo necesario desarrollar un tipo de estructura más rígido, por lo que se realizó el proyecto con elementos tubulares de hierro maleable para los famosos puentes Britannia y Conway construidos en Inglaterra poco antes de 1850. Aproximadamente en la misma época comenzó en los Estados Unidos, Inglaterra y Europa el desarrollo de la construcción con armaduras de hierro. Incidentalmente, el primer puente colgante de cadenas de hierro se construyó en Inglaterra en 1741.

Aun cuando el hierro maleable era superior al fundido, había todavía demasiados fallos estructurales y se notaba la necesidad de disponer de un material de más garantía. La respuesta a esta petición fue el acero. La invención en 1856 del convertidor Bessemer, y el subsiguiente desarrollo del proceso Martin-Siemens de fabricación de acero, hicieron posible la producción de acero para estructuras a un precio competitivo, e iniciaron el tremendo desarrollo y los éxitos conseguidos con el uso de este material durante los últimos cien años.

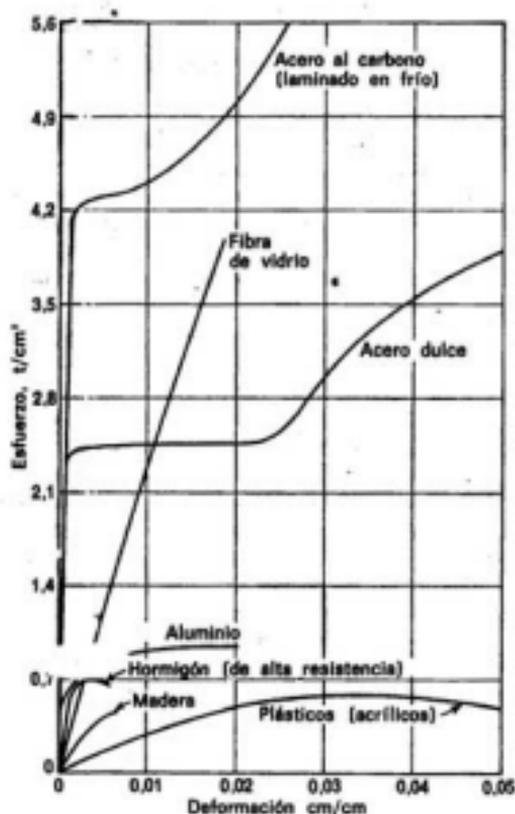


FIG. P.5. Diagramas tensión-deformación para varios metales.

El acero al carbono ordinario para estructuras es casi un material estructural perfecto. Se puede fabricar con garantía y económicamente y laminarle en una gran variedad de formas y tamaños. Puede trabajarse y montarse, mediante cierto número de técnicas y procedimientos, sin cambiar de modo apreciable sus propiedades físicas. Tiene prácticamente la misma resistencia a tracción que a compresión. Hasta aproximadamente la mitad de su resistencia tiene un comportamiento elástico, y por encima de esta zona posee un módulo de elasticidad elevado. Al final de esta zona inicial de gran rigidez, el acero cede a tensión constante para un alargamiento de 1,5 a 2 por 100, permitiendo así igualarse las tensiones en los puntos en que las cargas, o la fabricación, o el montaje han ocasionado concentración de tensiones. Siguiendo esta zona de fluencia, el material recupera parte de su rigidez original —ciertamente una pequeña fracción, pero suficiente para detener lo necesario el grado de aumento de deformación en muchos casos—. Antes de que ocurra la rotura real en un ensayo de tracción, la probeta debe haberse alargado del 15 al 25 por 100 de su longitud original. En la Fig. P.5 figuran diagramas de tensión-deformación de varios materiales.

El acero al silicio para estructuras presenta características similares al acero al carbono estructural, y además tiene aproximadamente un 50 por 100 más de resistencia. Como su precio por kilo es solo ligeramente superior al carbono, se utiliza mucho en estructuras para grandes luces. No puede disponerse de acero al silicio en todos los tamaños y formas, y comparado con el acero al carbono hay alguna diferencia importante en sus propiedades físicas. También se dispone de acero al níquel, aceros al manganeso, aceros tratados técnicamente y otros aceros especiales, vendidos de ordinario con las marcas y especificaciones del fabricante.

El inconveniente más serio del acero es que se oxida fácilmente y hay que protegerle con pintura o con algún recubrimiento apropiado. Cuando se usa el acero en un recinto en que puede producirse un fuego, los elementos de acero deben recubrirse con una protección resistente al fuego, tal como albañilería, hormigón, hormigón de vermiculita, etc. Normalmente, los elementos de acero no fallan por fragilidad si no se produce una combinación desgraciada de composición metalúrgica, baja de temperatura, y esfuerzos bi o triaxiales¹.

El aluminio para estructuras no se usa todavía con amplitud en las estructuras de ingeniería civil, aunque su uso va rápidamente en aumento. Puede obtenerse una gran variedad de características de resistencia, mediante una elección apropiada de la aleación de aluminio y su tratamiento térmico. Alguna de las aleaciones presenta características tensión-deformación análogas a las del acero de estructuras, excepto que el módulo de elasticidad para la parte elástica lineal inicial es alrededor de 7.000.000 de kg/cm², o sea aproximadamente un tercio del correspondiente al acero. La ligereza y la resistencia a la oxidación son, evidentemente, dos de las principales ventajas del aluminio. Debido a que sus propiedades son muy sensibles al tratamiento térmico, hay que tener cuidado al remachar o soldar el aluminio. En los últimos años se han desarrollado varias técnicas apasionantes de fabricación de subelementos prefabricados de aluminio que pueden montarse rápidamente y unirse por roblonado en la obra, para formar cierto número de hermosas y bien proyectadas estructuras de membrana. Este método general de prefabricación y unión en obra por roblonado parece ser el medio más prometedor de utilizar el aluminio de estructuras.

¹ La rotura por fragilidad del acero es una cuestión que no está totalmente resuelta, aunque sus fundamentos mecánicos están perfectamente detallados. Para un resumen excelente del estado de los conocimientos en este campo, ver M. E. Shank (ed.), «Control of Steel Construction to Avoid Brittle Failures», Plasticity Committee of Welding Research Council, Nueva York, 1957.

El hormigón armado y pretensado comparte con el acero de estructuras la primacía entre los materiales estructurales de la ingeniería civil. El hormigón de cemento natural se ha utilizado desde hace siglos. La construcción de hormigón moderna data de la mitad del siglo diecinueve, aunque el cemento portland artificial fue patentado por Aspidin, un inglés, en 1825. Aunque varios constructores e ingenieros experimentaron con el empleo del hormigón armado con acero en la última mitad del siglo diecinueve, su uso predominante como material de construcción data de las primeras décadas del siglo actual. El último cuarto de siglo ha visto el rápido y vigoroso desarrollo del proyecto y construcción del hormigón pretensado, basado en los primeros trabajos de Freyssinet en Francia y Magnel en Bélgica.

El hormigón en masa (no armado) no solo es un material heterogéneo, sino que tiene un defecto muy serio como material estructural, que es su muy reducida resistencia a la tracción, no siendo más que del orden de un décimo de su resistencia a la compresión. No solo sucede el fallo de tipo rotura frágil del hormigón a tracción, sino igualmente el de compresión de modo relativamente frágil, sin que vaya precedido del aviso previo de una gran deformación. (Evidentemente, en la construcción de hormigón armado se puede obtener un comportamiento dúctil mediante la elección y disposición apropiadas de las armaduras.) Si no se presta el debido cuidado a la elección de los áridos, y a la mezcla y puesta en obra, la acción del hielo puede causar serios daños a las obras de hormigón. El hormigón sufre una deformación plástica bajo cargas de larga duración, en un grado que hay que considerar cuidadosamente al elegir las condiciones de trabajo de proyecto. Durante el proceso de curado y en su primera época, el hormigón sufre una retracción apreciable que puede ser controlada hasta cierto grado por la debida proporción de la mezcla y utilizando técnicas de construcción apropiadas.

Con todas estas serias desventajas en potencia, los ingenieros han aprendido a proyectar y construir hermosas, duraderas y económicas estructuras de hormigón, prácticamente para todo tipo de necesidades estructurales.

Esto se ha conseguido mediante la elección cuidadosa de las dimensiones de proyecto y la disposición de las armaduras de acero, consecución de cementos apropiados, elección de los áridos y proporciones de mezcla convenientes, control cuidadoso de las técnicas del amasado, puesta en obra y curado, y el desarrollo inteligente de los métodos de construcción, el equipo y el modo de trabajar.

La adaptabilidad del hormigón, la fácil disponibilidad de sus materiales componentes, la facilidad única de modelar su forma para conseguir la resistencia y características funcionales correspondientes, juntamente con el apasionante potencial de nuevas mejoras y desarrollos, no solo en la moderna construcción pretensada y prefabricada, sino también en la del hormigón armado tradicional, se combinan para hacer del hormigón un poderoso competidor de los demás materiales, en gran parte de las estructuras que se prevén para el futuro. El uso de elementos de hormigón prefabricados, que pueden hacerse en condiciones de taller cuidadosamente controladas, y luego unirse en la obra utilizando técnicas de pretensado, está llamado a extenderse enormemente, particularmente en Estados Unidos con su gran proporción del coste de la mano de obra al del material.

Evidentemente, la madera fue el único material de los utilizados por los primitivos constructores que posee más o menos igual resistencia a tracción y compresión. La madera está caracterizada por su falta de homogeneidad debido a su fibra, nudos y otros defectos; por sus propiedades de resistencia anisotrópica en direcciones paralela y perpendicular a su fibra, y por su escasa durabilidad debida en gran medida a su susceptibilidad a las variaciones de humedad y a ser atacada por las bacterias, hongos e insectos. Mientras que su resistencia a la tracción y la compresión es mucho menor en

sentido perpendicular que paralelo a las fibras, el aspecto más importante de sus características de resistencia anisotrópica es su mucho menor resistencia al cizallamiento paralelamente a las fibras que perpendicularmente a ellas. La madera tiene también una resistencia considerablemente más baja a las cargas de larga duración. La madera se deforma considerablemente bajo las cargas, presentando características tensión-deformación esencialmente lineales con tensiones bajas, con un módulo de elasticidad aproximadamente la mitad que el del hormigón (y alrededor de la vigésima parte del acero). Los fallos a compresión no son bruscos, pero sí los de tracción, aunque menos que los del hormigón. El proyecto de estructuras de madera debe permitir debidamente los cambios de dimensión originados por la variación de humedad o de temperatura. Sin embargo, el principal problema para proyectar es conseguir uniones adecuadas, seguras y prácticas.

En los tiempos modernos, con el aumento del uso de la construcción de acero y de hormigón armado, la madera quedó relegada a una utilización accesoria durante la construcción en estructuras secundarias y provisionales, y en elementos secundarios de la construcción permanente. Sin embargo, la tecnología moderna ha revitalizado durante los treinta y tantos últimos años la madera como material estructural, desarrollando ampliamente uniones mejoradas para madera, varios tratamientos para aumentar la duración y maderas laminadas hechas de delgadas capas, unidas entre sí con colas sintéticas, utilizando técnicas de encolado revolucionarias. El contrachapado, con propiedades de resistencia esencialmente no direccional, es la madera laminada utilizada más extensamente, pero también se han desarrollado técnicas para construir elementos grandes de madera laminada que para ciertas estructuras pueden competir con el hormigón y el acero.

Los últimos en presentar aquí, pero lejos de ser los últimos en posibilidad futuras, son los plásticos¹ de aplicación a la ingeniería y los metales raros² tales como el berilio, tungsteno, tántalo, molibdeno, cromo, vanadio y niobio. Hay muchos plásticos disponibles, y las propiedades mecánicas que presenta este grupo de materiales varían en un amplio campo que abarca el margen de propiedades disponibles entre los materiales estructurales usados más frecuentemente. Así, en muchas aplicaciones de proyectos específicos, es posible elegir un material plástico, para utilizarlo en un proyecto que compita con él. Es limitada la experiencia en el empleo de plásticos en exteriores. Sin embargo, puede decirse en general que deben protegerse contra el agua. Por tanto, este aspecto del proyecto es de la mayor importancia en la utilización de plásticos en elementos estructurales principales. Uno de sus más prometedores usos en potencia es para paneles y estructuras laminares. Se han usado laminados o paneles sandwich en tales estructuras, con éxito alentador, que anuncia un uso incrementado de este tipo de construcción en el futuro.

Quizá nunca se utilizarán extensamente los metales raros en competencia con el acero y aluminio para estructuras terrestres. Estos materiales están siendo desarrollados normalmente para su uso en cohetes de largo alcance y en vehículos espaciales. Mientras que hace unos pocos años la idea de construir estructuras en la Luna, en el espacio o en otros planetas parecía fantástica, la era del espacio *está aquí* y podemos esperar la construcción real de una base lunar en un periodo de cinco a diez años. Las condiciones que rodeen a las estructuras del espacio no pueden definirse exactamente en el mo-

¹ Para un resumen de las propiedades aplicables a la ingeniería de los plásticos disponibles corrientemente, ver C. H. Adams, *Plastics: Engineering Materials, J. Eng. Mech. Div., ASCE*, folleto 1072, octubre 1956.

² Ver S. L. Hoyt, «Metal Properties», *ASME Handbook*, 1954, y H. R. Odgen, «Future Metals», *Chem. Eng. Progr.*, vol. 54, núm. 11, noviembre 1958.

mento presente, pero el conocimiento actual indica con precisión que para las estructuras del espacio¹ se necesitarán nuevos materiales metálicos, tales como las aleaciones de berilio.

Tipos de deficiencias y fallos de estructuras. El tipo más evidente de fallo de una estructura es el hundimiento debido a insuficiente capacidad de resistir cargas y otros efectos aplicados a ella. Sin embargo, puede ser también inservible una estructura a causa de sus características de rigidez y vibratorias. Por ejemplo, una estructura puede ser tan flexible que no pueda funcionar satisfactoriamente el equipo sensible o la maquinaria soportada por ella, o tan flexible que aparezcan grietas desagradables en el yeso u otro acabado superficial, o tan flexible que para muchos de los que la usan resulte molesta por su movimiento o el aspecto a la vista de su flecha. Por otro lado, la estructura puede tener características vibratorias que se correspondan mal con la frecuencia de las cargas dinámicas que actúan en ella.

El hundimiento de una estructura puede estar originado por cualquiera de los tipos de fallo siguientes: rotura o deformación plástica del material de un modo dúctil, rotura del material de tipo frágil, pandeo o fatiga del material.

Rara vez está originado el hundimiento de una estructura por la rotura del material en forma dúctil, pues tal rotura va precedida por alargamientos tan considerables que resultan aparentes las flechas excesivas. Bajo tipos de carga normales habría oportunidades de aliviar la estructura, bien descargándola parcialmente o apuntalándola o reforzándola de forma provisional. Evidentemente, en casos de catástrofe—tales como terremotos, vendavales, inundaciones, incendios y explosión de bombas—no hay posibilidad de reforzar la estructura y se producirá el hundimiento por rotura dúctil o excesiva deformación plástica. Muchas estructuras destruidas presentan muestras de rotura dúctil, pero esto ha tenido lugar generalmente durante el proceso de hundimiento y no provocó el fallo.

La rotura frágil es mucho más fácil que sea la causa del hundimiento que la dúctil. Muchos aceros (y quizá aleaciones de otros metales) pueden ser susceptibles de este tipo de rotura, según su composición metalúrgica y fabricación y la temperatura mínima ambiente. Esto es particularmente cierto si se ha proyectado y dimensionado el elemento de modo que en el punto del posible fallo existan unas condiciones de esfuerzo bi o triaxial, impidiendo así la fluencia elástica y permitiendo que ocurra un tipo de rotura de clivaje. En estructuras de hormigón armado puede tener lugar un comportamiento frágil cuando alguna parte está sobreamada y se alcanza la resistencia del hormigón antes de que se produzca un alargamiento apreciable del acero de tracción. En tales casos, si el acero de compresión y los estribos no están dimensionados para evitar la rotura de un trozo de la zona de compresión, puede fallar el elemento de una forma frágil. Tal comportamiento puede tener lugar también si la armadura para la tracción diagonal es inadecuada.

En las estructuras de ingeniería civil en que la carga dominante es de ordinario eminentemente estática, la causa de rotura más común es el fallo por pandeo. El pandeo puede tener lugar localmente de forma que puede o no provocar el hundimiento de toda la estructura, como en cordones importantes, o en alas o planchas de alma de barras comprimidas, o en almas o alas comprimidas de vigas, etc. Los elementos comprimidos o vigas pueden pandear como elementos sueltos o pandear las estructuras como conjunto. En ocasiones, en las estructuras de ingeniería civil el pandeo es un *pandeo elástico* por cuanto el elemento recobra su forma original al ser descargado. Tal resistencia al pandeo depende de la rigidez a flexión elástica y la longitud libre (o a veces la anchura)

¹ R. Szilard, «Structures for the Moon», *Civil Eng.*, octubre 1959, págs. 46-49.

del elemento, pero no de las intensidades del esfuerzo de que se trata. Sin embargo, más a menudo a causa de las proporciones de esbeltez usadas comúnmente, el *pandeo plástico* sucede cuando el elemento, o porción de él, está sometido a tensiones fuera del límite de proporcionalidad del material. Entonces, las intensidades de esfuerzo son un factor significativo del comportamiento, porque los alargamientos y la rigidez a flexión más allá del límite de proporcionalidad dependen del valor de las tensiones. A veces, cuando tiene lugar el pandeo elástico, se alivia la carga del elemento como resultado de los desplazamientos de pandeo. Sin embargo, en otros casos, no ocurre tal alivio y se desarrollan nuevas deformaciones bajo la acción continuada de la carga, pudiendo dar lugar a una deformación plástica considerable y el consiguiente hundimiento de la estructura.

Raramente ocurren fallos por fatiga en las estructuras de ingeniería civil clásicas. Sin embargo, cuando intervienen fuertes cargas dinámicas o vibraciones severas, debe considerarse la posibilidad de fallo por fatiga. Los fallos por fatiga elástica son del tipo de fragilidad, cuyos síntomas pueden apreciarse solamente mediante precisas técnicas de inspección. También puede ocurrir la llamada fatiga plástica, aunque es rara. Este es el fenómeno que se presenta cuando se rompe un cable o un clavo doblándole en la región plástica, primero en una dirección y luego en la otra. Naturalmente, es raro que una estructura de ingeniería civil esté sujeta a cargas reversibles grandes que puedan causar este tipo de fallo. Sin embargo, hay que estudiar y considerar tales posibilidades.

El ingeniero de estructuras debe, por tanto, proyectar sus estructuras para obtener una probabilidad conveniente de que no va a hundirse, ni resultar inservible. Debe estar preparado para analizar el comportamiento de las diversas formas estructurales que utiliza, de modo que pueda estimar las posibilidades de hundimiento o mal resultado bajo las cargas y ambiente a que están sometidas. Si la teoría es inadecuada para tales predicciones, debe hacer sus cálculos y tomar sus decisiones de proyecto a base de su experiencia y ensayos, de modelos y/o de piezas reales.

Formas estructurales. La decisión más importante a tomar por un ingeniero de estructuras referentes a un proyecto es la elección de la forma estructural más conveniente para satisfacer las diversas necesidades y objetivos de un proyecto en particular. La mayoría de las veces no puede conocer inmediatamente la mejor solución y debe seguir considerando varios tipos de estructuras posibles en todas las fases de planteamiento y proyecto hasta que pueda saber cuál es la mejor de ellas. La forma estructural más conveniente es la que satisfaga las necesidades funcionales, económicas, sociológicas, estéticas y otras, en mayor grado, y la que pueda construirse económica y fácilmente utilizando los materiales y métodos constructivos más apropiados entre los disponibles o los que se puedan prever.

Las formas estructurales pueden clasificarse dentro de uno de los dos grupos siguientes, según las condiciones de esfuerzos predominantes desarrollados bajo las cargas de proyecto y condiciones más importantes:

1. *Formas con tensiones uniformes*, en las que la tensión es uniforme en toda la profundidad del elemento, o en el espesor de un panel como, por ejemplo, cables, arcos, elementos de cerchas, membranas, láminas, etc.

2. *Formas con tensiones variables*, en las que las tensiones varían con la profundidad o espesor, normalmente desde una tensión máxima de tracción en una cara hasta una tensión máxima de compresión en la otra, como, por ejemplo, vigas, pórticos rígidos, losas, placas, etc.

Evidentemente, las formas con tensiones uniformes utilizan más eficazmente la resistencia disponible del material que las de tensiones variables en las que, bajo condiciones elásticas, el material situado entre las dos caras extremas está sometido a menores

tensiones, excepto en zonas en que hay elevadas tensiones cortantes. Por tanto, cuando las necesidades funcionales lo permiten, el proyectista de estructuras trata de utilizar una forma con tensión uniforme. Realmente, a veces las dificultades de fabricación y/o de construcción que se encuentran al dar la forma deseada a la estructura hacen que cueste más que el material ahorrado, por lo que no se consigue ninguna economía.

Las estructuras de cable de acero son un ejemplo de forma estructural muy eficaz. Los cables son casi perfectamente flexibles, esto es, puede suponerse que no tienen resistencia a la flexión y, por tanto, deben soportar sus cargas por tracción simple. Como consecuencia pueden variar de forma para adaptarse al polígono de equilibrio de las cargas aplicadas a él (ver Cap. 10). Esta adaptación en la forma es un cambio geométrico de cuantía muy considerable a diferencia de las pequeñas flechas que son consecuencia de las características tensión-deformación en los cuerpos deformables. Como muestra la posición de la línea llena de la Fig. P.6a, el cable tiene la forma de una catenaria bajo su propio peso. Si se aplica ahora al cable una carga grande P (comparada con su propio peso), su forma se desplaza sensiblemente hacia la posición de la línea

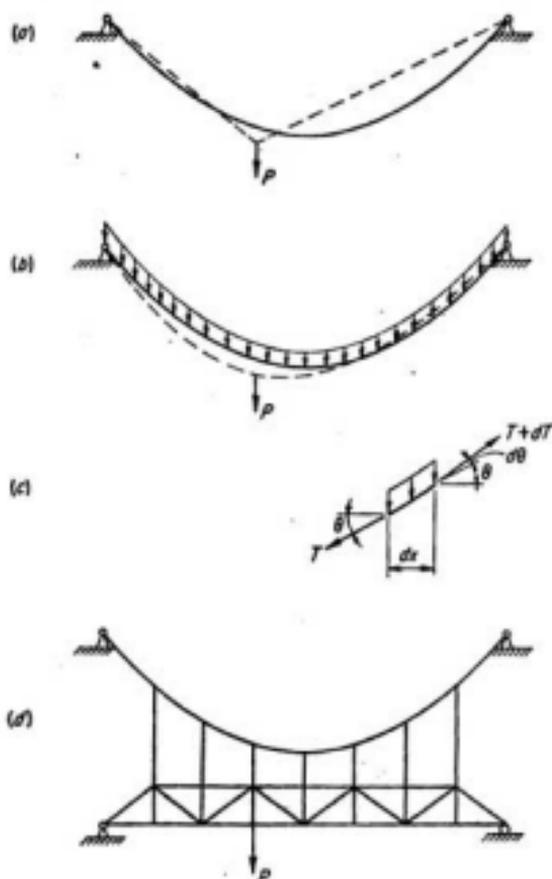


FIG. P.6. Estructuras de cable.

de trazos, formada sustancialmente por dos segmentos de recta. Por otro lado, como se ve en la Fig. P.6b, si se aplicara una carga P , pequeña comparada con el peso del cable, produciría solo un cambio muy pequeño de la forma del mismo. Sin embargo, el principio es claro, considerando el equilibrio de una porción pequeña de cable: los dos únicos modos de que un cable pueda mantener el equilibrio vertical y horizontal son: 1) variar su tensión y 2) adaptar su pendiente (esto es, su forma). En otras palabras: una incógnita (la tensión del cable) no puede en general satisfacer dos ecuaciones simultáneamente —se necesitan para ello dos incógnitas (la tensión del cable y su pendiente)—. Si por razones funcionales no son admisibles cambios sustanciales de forma en las estructuras de cable, debe unirse al cable una armadura para darle rigidez, como se ve en la Fig. P.6d con objeto de distribuir las grandes cargas concentradas.

Una *membrana flexible* como la representada en la Fig. P.7a parece a primera vista que es como un gran número de cables uno al lado de otro, y sería esencialmente éste el caso si los bordes curvos de esta membrana cilíndrica no estuvieran soportados.

Sin embargo, la generación de esfuerzos cortantes entre los elementos de cable contiguos constituye una diferencia muy importante entre el cable y la membrana, como puede verse por la consideración del equilibrio de un elemento diferencial de membrana representado en la Fig. P.7b. En el caso del elemento diferencial de membrana, hay tres condiciones de equilibrio que deben satisfacerse —la suma de las fuerzas en la dirección longitudinal, según la circunferencia y en la dirección radial, debe ser cero— en comparación con solo dos condiciones en el caso del cable. Obsérvese, sin embargo, que hay tres fuerzas, N_r , N_ϕ y $N_{\phi r}$ en el caso de la membrana, que pueden satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio del elemento mediante incrementos de su valor, sin nece-

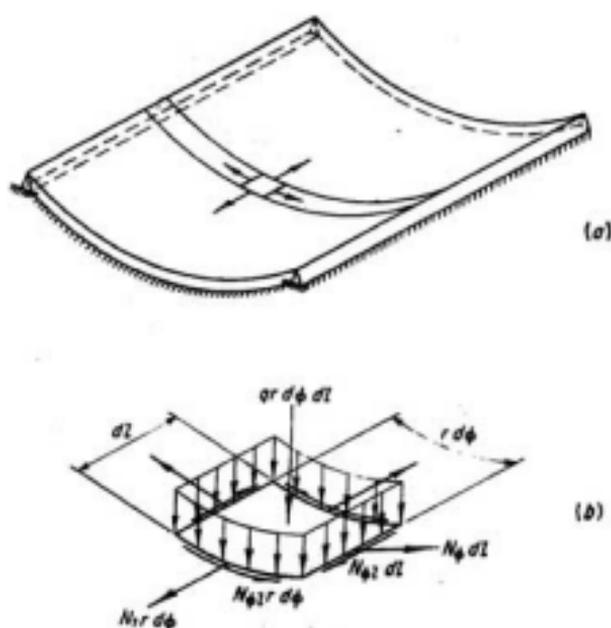
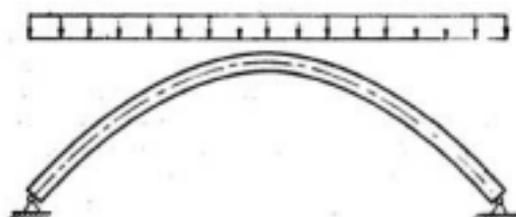


FIG. P.7. Membrana cilíndrica.

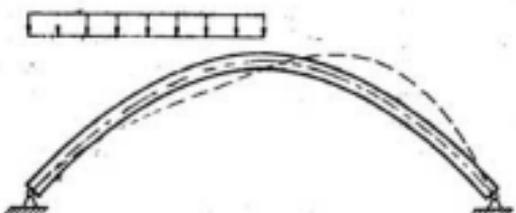
sidad de variar la forma del mismo, salvo las pequeñas deformaciones asociadas con sus tensiones. Esta característica de la superficie de membrana tridimensional la hace esencialmente diferente, desde el punto de vista estructural, del cable bidimensional. Tales superficies son realmente formas estructurales con tensiones uniformes que son estables estructuralmente y apropiadas y capaces de soportar cargas repartidas sin variación de forma, excepto las pequeñas flechas asociadas con la deformación del material.

Evidentemente, las cargas concentradas en una membrana —que son discontinuidades en la carga— solo pueden ser soportadas con fuertes cambios de forma localizados de la membrana, similares a los cambios que exige un cable.

Un arco como el representado en la Fig. P.8a es similar a un cable invertido, con tal que su forma se adapte al polígono de equilibrio de las cargas a que se le somete. Aunque el arco, al revés que el cable flexible, posee resistencia y rigidez a flexión, soportará esencialmente tales cargas en condiciones de tensión uniforme en cada sección transversal y sin ninguna flexión. Ahora, si, como se ve en la Fig. P.8b, se aplica una carga completamente diferente al arco, éste trata de cambiar de forma, como un cable, para tomar la del polígono de equilibrio del nuevo sistema de cargas. Sin embargo, debido a su rigidez a flexión, no puede cambiar de forma sin flexar. Por tanto, como consecuencia, flexa y cambia ligeramente de forma —lo suficiente para que se desarrolle un estado de tensiones variables en el arco, por lo cual soporta la carga parcialmente por



(a) Forma del eje de arco elegida para que coincide con la del polígono de equilibrio de las cargas aplicadas



(b) Arco de la misma forma que (a), pero sometido a distinta carga, que origina que el eje del arco flexe en una forma análoga a la que se representa exagerada en líneas de trazos

FIG. P.8. Arco bi-articulado.

esfuerzos de flexión y parte por compresión—. Esto es, la compresión del arco no puede, en general, satisfacer al equilibrio vertical y horizontal sin la ayuda de la tensión de flexión y la de cortante transversal asociadas con ella. En realidad, el único caso en que un arco no flexa materialmente es cuando las cargas tienen un polígono de equilibrio de su misma forma.

Desde el punto de vista del proyecto, la forma en arco puede ser una solución económica para los casos en que hay una condición de cargas predominante, cuyo polígono de equilibrio se usa para definir la forma del mismo. Para esta carga, el arco actúa sustancialmente como una forma estructural de tensiones uniformes; para otras cargas que pueden ser relativamente menos importantes y de aplicación poco frecuente, el arco actúa satisfactoriamente, pero con menos eficacia, como una forma estructural de tensiones variables.

La lámina es a la membrana como el arco al cable. Esto es, la lámina es una membrana que tiene resistencia y rigidez a flexión, lo mismo que un arco tiene igual relación respecto a un cable. Las estructuras laminares de ingeniería civil más frecuentes tienen una forma inversa a las representadas en la Fig. P.7a, de modo que soportan sus cargas principalmente por compresión, más que por esfuerzo de tracción, y, como consecuencia, se hacen muchas veces de hormigón armado. Una lámina que fuera igual a la membrana representada en la Fig. P.7a invertida, actuaría de modo diferente que una serie de arcos uno al lado de otro, exactamente por la misma razón que una membrana actuaría de forma diferente que una serie de cables, como se ha dicho antes.

La lámina, aun cuando tenga resistencia y rigidez a flexión, posee la estabilidad estructural básica y la propiedad que corresponden a su forma de membrana en lo que concierne a satisfacer las exigencias de equilibrio. Esto es, las tres fuerzas de membrana disponibles en la lámina — N_D , N_H , N_A — pueden satisfacer tres ecuaciones de equilibrio sin la ayuda de esfuerzos de flexión. Como consecuencia, mientras la carga esté distribuida, la soporta principalmente con un estado de tensiones del tipo del caso de la membrana, aun cuando la forma de la lámina pueda no corresponder con la de la superficie de equilibrio de las cargas que intervienen. A causa de la ligera tendencia de la superficie de la membrana a deformar y, por tanto, cambiar de forma, se produce alguna ligera flexión secundaria. Sin embargo, solamente se desarrollan tensiones de flexión considerables al lado de los soportes, donde normalmente es imposible proporcionar exactamente las fuerzas de sustentación exigidas por las tensiones de la membrana. Evidentemente, si se aplican a la lámina cargas concentradas, o cargas repartidas que varían bruscamente, se producen grandes tensiones de flexión locales, igual que se producen violentos cambios de forma en las membranas en tales condiciones. También se produce flexión junto a los cambios bruscos de espesor, o forma, de la lámina.

Otra forma estructural de tensión uniforme muy importante es el *cuchillo plano* (o *armadura plana*). Evidentemente, una carga sencilla concentrada P podría ser soportada por el arco de dos piezas representado en la Fig. P.9a, cuyo eje se adapta a la forma del polígono de equilibrio de tal carga. Sin embargo, si las cimentaciones no fueran capaces de proporcionar la sección horizontal necesaria H , esta resistencia podría proporcionarla en a y c una fuerza de tracción H en un tercer elemento ac , añadido para formar, como se ve en la Fig. P.9b, con los otros dos un cuchillo triangular sencillo. Se podrían soportar otras nuevas cargas concentradas en d y e , según se representa en la Fig. P.9c, utilizando dos barras para ligar cada una de estas uniones (nudos) con la armadura ya formada. Se ve inmediatamente que tal disposición permite a los elementos soportar un sistema de cargas en los nudos, por medio de condiciones de tensión uniforme en cada uno de los elementos —correspondiente a fuerzas de tracción en algunos de ellos y de compresión en otros—. Si el sistema de cargas a soportar no

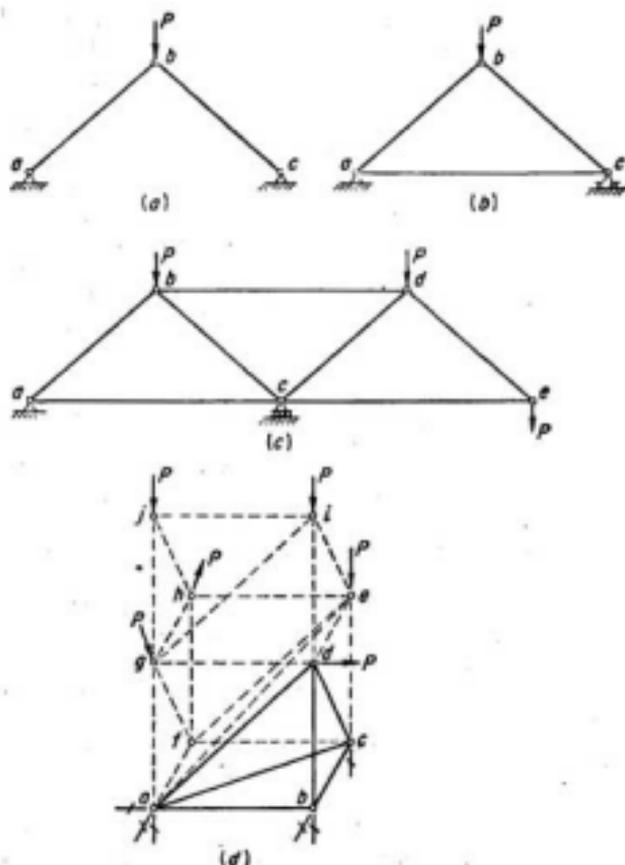


FIG. P.9. Armaduras plana y espacial.

está en un plano, sino que es de carácter tridimensional, se puede disponer una *armadura espacial* apropiada que una los puntos de carga, comenzando con un núcleo tetraédrico constituido por cuatro nudos y seis barras, como se ve en la línea llena en la Fig. P.9d. Se usan tres barras para unir cada nuevo nudo con la armadura.

En la Fig. P.9, los puntos marcados con un círculo indican juntas de pasador sin rozamiento en el cuchillo plano (o armadura plana), y juntas esféricas en la espacial. Tales juntas constituyen todo lo necesario para el buen comportamiento estructural. Realmente, es conveniente y económico en la fabricación moderna de cuchillos y en el montaje utilizar uniones fundamentalmente rígidas, empleando remaches, pernos y soldaduras. Haciéndolo se impide en realidad que la armadura soporte sus cargas por fuerzas axiales puras en sus elementos. Se ve esto claramente cuando se considera que las barras de una armadura ideal con uniones de pasador o esféricas varían ligeramente de longitud al desarrollarse sus fuerzas axiales. Como resultado, los ángulos entre las barras varían ligeramente al haber desplazamientos de las uniones, como consecuencia de estas variaciones de longitud de las barras. Sin embargo, si las barras están unidas rigidamente en los nudos, no pueden producirse las variaciones de los ángulos, y se necesita una li-

gera flexión de las barras para adaptarse a los desplazamientos de los nudos. En una armadura bien proyectada, las tensiones relacionadas con esta flexión de las barras son pequeñas comparadas con la tensión axial uniforme y, por tanto, se las conoce como *tensiones secundarias*.

Es interesante observar que, en cierto sentido, las armaduras con nudos rígidos están relacionadas muy estrechamente con las estructuras laminares. Fundamentalmente, deben pertenecer a la familia de tensiones uniformes y deben actuar como armaduras con nudos de pasador o junta esférica, pero a causa de su deformación no pueden hacerlo exactamente y se produce por ello alguna pequeña flexión. Esencialmente, las láminas deben actuar como membranas, pero a causa de su rigidez a flexión y de la disposición de la sustentación a lo largo de su contorno, no pueden deformarse como ellas, por lo que se produce una flexión que, en general, es de importancia secundaria, excepto en la región contigua a los bordes.

Se observará también que en las armaduras no se pueden cargar directamente sus barras entre los nudos sin que se produzcan considerables esfuerzos de flexión en las barras así cargadas y en las que se hallan próximas y ligadas a ellas. En otras palabras, para las armaduras son preferibles las cargas concentradas en los nudos en lugar de las repartidas; sin embargo, para las membranas y láminas son preferibles, por el contrario, las cargas repartidas y no las concentradas.

Muy a menudo, se usan, por razones basadas en el funcionamiento, economía o construcción, formas estructurales de tensiones variables como *vigas, pórticos, placas y losas*, especialmente en proyectos de puentes y edificios. La relativa incapacidad de tales formas para utilizar la resistencia potencial de todo el material puede quedar minimizada por la elección de las dimensiones adecuadas para las secciones. Por ejemplo, en el caso hipotético de flexión pura representado en la Fig. P.10a, todo el material podría repartirse entre las dos alas, pues, al no haber cortante, no se necesitaría alma. En los casos reales, evidentemente, están unidos la flexión y el cortante y es necesario el material del alma, como se ve en la Fig. P.10b. Como consecuencia, los fabricantes de vigas de acero laminado y de aluminio han desarrollado cierto número de series de secciones de vigas I y WF (ala ancha) que en muchos casos prácticos consiguen la utilización eficaz del material, al menos en las *secciones más críticas*. En los últimos años se ha prestado considerable atención al hecho de que, a causa de la utilización poco eficiente de los elementos flexados, muchas vigas y pórticos poseen una capacidad de soportar cargas superior a la carga que produce el límite de fluencia en el punto sometido a la máxima tensión. Las estructuras dúctiles hechas de acero u hormigón armado pueden estar sometidas a cargas mayores, que producen simplemente deformaciones plásticas en los puntos en que se ha alcanzado ya el límite de fluencia, mientras se ponen en acción las resistencias totales de los puntos menos críticos. La consideración y el empleo de tal comportamiento se llama de diversos modos, proyecto a la rotura, o estado plástico, según se ha dicho ya anteriormente.

Evidentemente, muchas vigas de gran luz fuertemente cargadas exceden la capacidad de las secciones de metal laminado típicas. En tales casos se obtienen las resistencias a flexión necesarias proyectando secciones especiales, constituidas por chapas, angulares y otras formas típicas, uniendo estos elementos con remaches, pernos o soldadura. Podría prestarse, y quizá fuera interesante hacerlo, mucha más atención a la evolución de las secciones de vigas de hormigón armado, madera y otros materiales. El espacio limita el presente estudio, por lo que se recomiendan al lector los textos de proyectos estructurales para una mayor información.

A veces, las vigas están en voladizo o apoyadas en los extremos, como se ve en la Fig. P.10c, b. Sin embargo, es más frecuente en la construcción moderna que sean con-

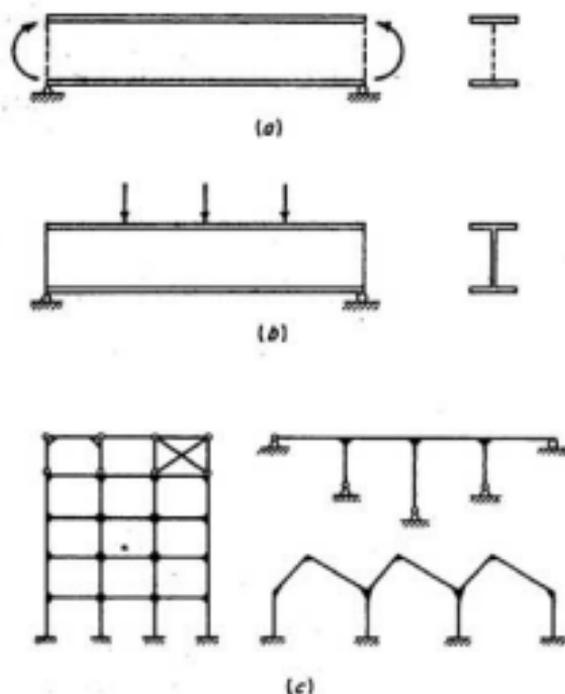


FIG. P.10. Elementos a flexión.

tinuas, con varios apoyos intermedios, o estén unidas a otros elementos para formar las llamadas *estructuras porticadas*. Todo el mundo ve a diario numerosos ejemplos de la casi infinita variedad de disposiciones utilizadas en la construcción porticada, algunas de las cuales están indicadas por los diagramas lineales de la Fig. P.10c. Casi siempre estas estructuras porticadas son conjuntos tridimensionales de elementos, aunque a veces pueden aislarse partes planas, tal como se representa en la figura, a objeto de proyecto y estudio.

A veces se estudian las uniones de estos pórticos utilizando remaches, pernos y soldaduras para que sean prácticamente *rígidas* , de tal modo que los extremos de todos los elementos unidos deben no solo trasladarse, sino también girar prácticamente una cantidad idéntica. A veces se hacen uniones más ligeras que solamente son *semirígidas*. Realmente los elementos están raramente articulados en las uniones, pero a veces las uniones remachadas o roblonadas son tan *flexibles* que solo transmiten momentos despreciables.

En tales casos puede ser necesario añadir cartelas, o diagonales, como se ve en el piso superior del pórtico de la Fig. P.10c, para dar estabilidad.

Los elementos de las estructuras porticadas son fundamentalmente elementos a flexión, sujetos principalmente a momento de flexión y cortante. Además, están sometidos a fuerzas axiales, aunque no son grandes, excepto en elementos como las columnas verticales de los pórticos.

La última forma de tensión variable a considerar es la *losa* o *elemento de placa*. El comportamiento estructural de una placa se puede ver por semejanza al de dos capas

de franjas de vigas, cada capa formada por fajas yuxtapuestas y unidas lado con lado. Las capas están orientadas de modo que las direcciones de las franjas son perpendiculares cuando se coloca una capa sobre la otra, como se ve en la Fig. P.11. Si están sustentados los bordes de tal placa y está sometida a una carga transversal (esto es, vertical), ambas capas colaborarán en resistir la carga, flexando cada una de ellas y transmitiendo la carga al par de soportes de borde en los extremos de sus franjas de vigas. (Se observará que para que sea correcto el comportamiento imaginado, se debe considerar que el espesor de cada capa es igual al espesor total de la placa.) Es interesante considerar el comportamiento de una placa relativamente larga y estrecha, en lo que concierne a la analogía con la capa de franjas de vigas. En tal caso, la capa con las franjas de vigas largas será mucho menos rígida que la de las franjas cortas, colocadas en la dirección estrecha. Como consecuencia, la mayor parte de la carga está soportada por las franjas de vigas cortas, prácticamente sin que exista una acción de placa de dos direcciones. En otras palabras, para aprovechar sensiblemente la acción de placa en dos direcciones, la relación longitud-anchura debe ser 2 o menos.

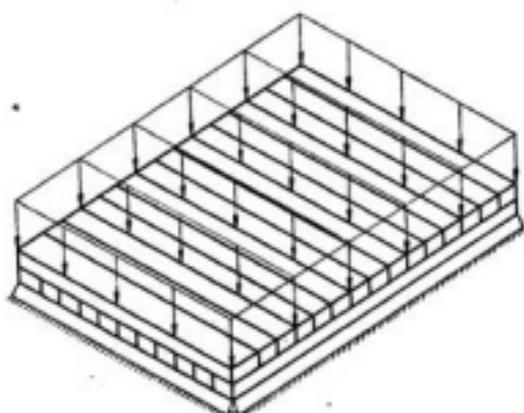


FIG. P.11. Comportamiento de placa.

Análisis del comportamiento estructural. Una de las cualidades importantes que un ingeniero ha de poseer es su capacidad de analizar matemáticamente el comportamiento de una estructura propuesta, en las condiciones específicas de proyecto. Si dispone de una teoría que esté en correlación con el caso, y comprobada por la experimentación de laboratorio y por la observación del comportamiento de estructuras existentes, tiene una base lógica y racional para extrapolar sus conocimientos y experiencias previas a nuevos casos. Evidentemente, cuando no se dispone de ninguna teoría, el buen ingeniero está preparado para utilizar una combinación de experimentación en modelos y en el terreno, experiencia previa, juicio e intuición para guiarle al ejecutar su proyecto.

El ingeniero de estructuras debe ser capaz de analizar¹ tres aspectos fundamentales del comportamiento estructural:

¹ El análisis de las características de tensión, deformación y flecha del comportamiento estructural se conoce por *análisis estructural*. El estudio solamente de las fuerzas y tensiones internas de una estructura se conoce por *estado o análisis de tensiones*.

1. Características de tensiones, deformaciones y flechas bajo cargas o condiciones de deformación, estáticas o casi estáticas.
2. Respuesta y características vibratorias bajo condiciones de cargas dinámicas.
3. Características de pandeo, normalmente bajo condiciones de cargas estáticas, y ocasionalmente bajo cargas dinámicas.

En cada uno de estos casos debe compararse las capacidades limitadoras de la estructura para cada uno de los posibles modos de fallo a que conduce, con el correspondiente comportamiento para las condiciones de proyecto.

Es obvio que la clasificación de las modalidades del comportamiento de la estructura, en la forma hecha, es algo arbitrario. Se podría argüir que los aspectos 2 y 3 estarían realmente incluidos en el 1 sin más que incluir en la descripción de 1 las condiciones de carga dinámica —lo cual es cierto—. Sin embargo, el análisis de los aspectos 2 y 3 requiere técnicas más especializadas que las utilizadas para el 1; por ello, parece aconsejable considerarlos por separado. Además, las estructuras de ingeniería civil deben proyectarse generalmente de modo que sea suficientemente pequeña la probabilidad de fallo frágil o dúctil asociada con las características del comportamiento clasificado en 1, y que sea aún menor la probabilidad de existencia de causas, de fatiga, o de vibración, o de fallo a pandeo, asociadas con los tipos clasificados en 2 y 3 respectivamente.

El análisis del pandeo y características vibratorias está fuera del presente estudio, que se centrará en el análisis de tensiones, deformaciones y flechas de una estructura, cuando está sometida a cargas o condiciones de deformación estáticas o casi estáticas. Para resolver completamente tal problema es necesario obtener las tensiones y desplazamientos desconocidos en cada parte de la estructura, de modo que satisfagan las ecuaciones, con las fuerzas y condiciones de desplazamiento en el borde conocidas. Estas incógnitas pueden obtenerse formulando un número apropiado de ecuaciones independientes, obtenidas de los tres tipos de relaciones o condiciones siguientes, que rigen el comportamiento de una estructura:

1. Condiciones de equilibrio estático de las fuerzas interiores y exteriores (y pares) que actúan sobre la estructura.
2. Relaciones entre tensiones y deformaciones del material de que se trata.
3. Relaciones geométricas entre deformaciones y desplazamientos de puntos de la estructura.

Evidentemente, es fácil combinar las relaciones 2 y 3 para eliminar las deformaciones y obtener relaciones directas entre las tensiones (o fuerzas interiores) y los desplazamientos. Algunos autores resumen este hecho diciendo que solo hay dos tipos de relaciones, es decir:

1. Condiciones de equilibrio estático.
- 2, 3. Relaciones entre tensiones (o fuerzas interiores) y desplazamientos. Realmente no importa qué punto de vista se elija, pues en cada caso hay que utilizar uno de los dos caminos fundamentales para formular la solución del problema.

Estos dos caminos fundamentales son el *método de las fuerzas*¹ y el *método de los desplazamientos*, que se definen a continuación. Estos caminos son descritos en una forma generalizada, tal como se aplicarían a una estructura tipo *por elementos*².

¹ En estos casos, las palabras *fuerza* y *desplazamiento* se usan en un sentido generalizado. Se puede interpretar *fuerza* como referida a fuerza o par. *Desplazamiento* puede referirse a un desplazamiento tanto lineal como angular.

² A efectos del análisis, puede clasificarse una estructura como *por elementos o barras*, o estructura de paneles, aunque a veces puede ser una mezcla de los dos tipos.

1. Método de las fuerzas

a) Primero se establece el número de fuerzas independientes desconocidas (interiores y exteriores) y se le compara con el número de ecuaciones independientes del equilibrio estático que se pueden escribir ligando estas incógnitas. Si el número de fuerzas incógnitas es idéntico al número de ecuaciones de equilibrio, se dice que el problema es *estáticamente determinado*, pues se pueden determinar directamente las incógnitas de estas ecuaciones de equilibrio. Por el contrario, si el número de fuerzas incógnitas excede del número de ecuaciones de equilibrio, se dice que el problema es *estáticamente indeterminado* con un grado igual a este exceso. En tal caso, un número de fuerzas desconocidas igual al grado de indeterminación se llaman *fuerzas superabundantes* y se supone que se suprimen como simplificación de la estructura real, para obtener una estructura estáticamente determinada (y estable), llamada *estructura primaria*. Puede escribirse una ecuación por cada fuerza superabundante en la que se expresa el desplazamiento de su punto de aplicación en la estructura primaria en función de las fuerzas conocidas y las desconocidas superabundantes. Resolviendo el sistema de estas ecuaciones, se hallan las superabundantes desconocidas.

b) Una vez que se han determinado todas las fuerzas que actúan en la estructura primaria, pueden calcularse los esfuerzos en toda ella. Luego se puede completar fácilmente el análisis estructural calculando las deformaciones por las relaciones tensión-deformación y los desplazamientos utilizando o las relaciones tensión-desplazamiento o las relaciones deformación-desplazamiento.

2. Método de los desplazamientos

a) Primero se identifican las componentes de los desplazamientos desconocidos que intervienen en la estructura, y se les considera como las incógnitas fundamentales del problema. Entonces pueden expresarse las fuerzas internas de la estructura en función de estos desplazamientos desconocidos, utilizando las relaciones desplazamiento-tensión. Para cada componente de desplazamiento conocida debe escribirse una ecuación de equilibrio correspondiente, en función de las fuerzas exteriores conocidas y las fuerzas internas desconocidas que se han expresado en función de los desplazamientos. Estas ecuaciones, iguales en número a los desplazamientos-incógnita, se pueden resolver para hallar sus valores.

b) Una vez se han determinado los desplazamientos, se pueden hallar las fuerzas internas. Así se calcularán todas las fuerzas, excepto las exteriores desconocidas, y éstas pueden calcularse fácilmente utilizando las condiciones de equilibrio restantes,

¹ Una estructura de barras consta de una o más barras unidas de algún modo por sus extremos, estando soportado el conjunto de alguna forma en puntos aislados. Cada barra es relativamente larga comparada con las dimensiones de su sección. Las condiciones de equilibrio o desplazamiento de una estructura de barras se pueden definir por un cierto número de ecuaciones algebraicas que incluyen las cargas y reacciones, las componentes de las fuerzas en las barras, y/o las componentes de los desplazamientos en los nudos.

² Una estructura de paneles consta de uno o más paneles unidos entre sí en forma continua a lo largo de sus bordes o partes considerables de ellos. El conjunto puede estar sustentado por puntos aislados, o en forma continua por superficies apreciables a lo largo de líneas de longitud considerable. Cada panel de tal estructura puede ser plano o curvo, pero de un espesor pequeño comparado con la longitud de sus bordes. Las condiciones de equilibrio o desplazamiento de una estructura de paneles pueden definirse por un cierto número de ecuaciones con diferenciales parciales que contienen funciones continuas, que definen las tensiones internas y los desplazamientos en las distintas partes de la estructura. La solución de estas ecuaciones debe satisfacer cualquier condición impuesta referente a las fuerzas exteriores o desplazamientos en el contorno de la estructura.

que no se usaron inicialmente al plantear las ecuaciones para hallar las componentes de los desplazamientos desconocidos.

La mayoría de los métodos del análisis estructural que se han desarrollado a lo largo del tiempo pueden clasificarse como métodos de fuerzas. Sin embargo, el método de deformación angular, y el primer teorema de Castigliano, que se estudian más adelante en los Caps. 12 y 13, son métodos de desplazamientos.

El que sea más eficaz un método de fuerzas o uno de desplazamientos depende de varias causas. Hasta el presente, se han utilizado mucho más extensamente los métodos de fuerzas en el campo de las estructuras de ingeniería civil por numerosas razones. Primeramente hay que observar que en la mayoría de los casos no se necesita, a efectos del proyecto, un análisis estructural completo de las tensiones y los desplazamientos en todos los puntos de la estructura. Puede necesitarse un cuadro completo de tensiones, pero solo se calculan unas pocas flechas representativas. Además, muchas estructuras de ingeniería civil son, en esencia, estáticamente determinadas, o si son estáticamente indeterminadas, el grado de indeterminación es considerablemente menor que el número de componentes de desplazamientos desconocidas. Hay, ciertamente, algunas estructuras tales como muchos pórticos rígidos en los que hay menos componentes de desplazamientos desconocidas que el grado de indeterminación. En tales casos, el método de deformación angular (esto es, uno de los métodos de desplazamientos) ha sido el método de resolución clásico adoptado. Lo que el futuro pueda traer con relación a los métodos de análisis estructural preferidos se discutirá más adelante, en la sección siguiente.

Hay otro axioma muy importante que es necesario considerar respecto del análisis del comportamiento estructural. La mayoría de las estructuras reales que tiene que proyectar el ingeniero de estructuras no son susceptibles de un análisis preciso. Esto es particularmente cierto para estructuras que contienen pórticos complicados en el espacio, losas, muros portantes y membranas. En tales casos, se estudian varias versiones idealizadas y simplificadas de la estructura real, para obtener una base con la que proyectar el prototipo verdadero. Cuando hay un respaldo de la experiencia para un tipo particular de estructura, tales simplificaciones están justificadas y proporcionan una base satisfactoria para un nuevo proyecto, siempre que se acompañen con el buen juicio y la intuición de un ingeniero inteligente y experto.

Al obtener los resultados del análisis, el ingeniero no debe olvidar nunca que tales resultados deben satisfacer las condiciones de equilibrio. Para ser «exactos», los resultados deben satisfacer también las relaciones tensión-desplazamiento. Una estructura proyectada a base de un análisis que satisface las condiciones estáticas, pero solo aproximadamente a las relaciones tensión-deformación, rara vez tendrá problemas si el proyectista ha sido conservador con respecto a que se satisfagan las condiciones de pandeo y vibraciones, y ha dimensionado la estructura de modo que no sea susceptible de fallo por fragilidad. Una estructura así proyectada puede flexar algo más y de diferente modo del realmente deseado. Puede incluso romperse o desarrollar deformaciones plásticas con cargas inferiores que las previstas por el análisis. Pero, si se prevé suficiente resistencia para satisfacer las condiciones de equilibrio estático para la carga de rotura, dando suficiente resistencia de ductilidad y pandeo, la estructura movilizará las resistencias necesarias antes de hundirse.

Procedimientos de cálculo. La aparición de los modernos calculadores analógicos y digitales ha tenido ya un influjo considerable en la práctica de la ingeniería de estructuras. La amplitud con que la ayuda de estos calculadores afectará a la ingeniería de estructuras es difícil de predecir. Ciertamente tendrán un enorme efecto y pueden revolucionar la práctica actual.

Al considerar el posible impacto de los calculadores modernos, debe reconocerse que el desarrollo del análisis estructural hasta muy recientemente, ha tenido lugar con las técnicas del cálculo manual (logaritmos, reglas de cálculo y calculadores de mesa). Como consecuencia los métodos que entrañan cálculos extensos (tales como la resolución de sistemas de gran número de ecuaciones) no eran de aplicación práctica, excepto en ocasiones excepcionales o muy importantes que se encontraban raras veces en la práctica. Para resolver los problemas corrientes se desarrollaron métodos de relajamiento, y otras técnicas de aproximaciones sucesivas, para obtener soluciones que convergieran hacia la solución de problemas que, si se resolvían por los métodos clásicos, necesitaban sistemas de gran número de ecuaciones. De hecho, los avances más importantes de los últimos treinta años han sido de esta clase.

Sin embargo, ahora al disponer de calculadores electrónicos «automáticos» el ingeniero cuenta con la ayuda de cálculos de varios órdenes de magnitud más rápidos que los que ha tenido nunca. Es obvio que, aun si no se desarrollasen nuevos métodos de análisis y proyecto, disfrutaría inmediatamente de estos beneficios. Utilizando estas máquinas se reduce el coste de los cálculos a una pequeña fracción (a menudo se considera un cuarto) del coste del cálculo manual. Este ahorro permite al ingeniero hacer un trabajo que tiene más de ingeniería y menos de cálculo de ayudantes. Como consecuencia, es capaz de afinar y mejorar sus proyectos. Aún más importante, es capaz de considerar posibles proyectos que anteriormente no era posible analizar, o solo hacerlo muy someramente. Si el ingeniero de estructuras no hace más que aprovechar estos beneficios evidentes, estará lejos de utilizar toda la posible ayuda que los calculadores electrónicos casi con seguridad pondrán a su disposición.

La cuestión es desarrollar métodos *completamente nuevos* de proyecto y análisis estructurales, que utilicen del modo más eficaz toda la capacidad de trabajo de estos calculadores electrónicos. En general, no puede esperarse que los procedimientos analíticos que se han usado durante años para el cálculo manual sean igualmente eficaces para el cálculo mecanizado. Lo que se necesita es que los ingenieros de estructuras miren objetivamente sus problemas futuros con el menor prejuicio posible basado en las prácticas y procedimientos utilizados en el pasado, con una idea del cálculo completamente distinta.

En la actualidad parece que la manera más sencilla de organizar los cálculos de estructuras para realizarlos con máquina es la formulación matricial de la teoría de estructuras, con las notaciones y operaciones del álgebra matricial. Los estudios y avances futuros demostrarán si éste es el camino, aunque intuitivamente parece que es demasiado tradicional y que, para utilizar al máximo el potencial que presenta el cálculo mecanizado, se necesitan conceptos y procedimientos totalmente nuevos. Muchos autores, principalmente del campo de las estructuras aeronáuticas, han contribuido al desarrollo de los métodos matriciales de análisis estructural en las dos últimas décadas. En realidad, este camino fue sugerido, al parecer, por primera vez hace muchos años por Edward Study, en 1903. Sin embargo, en esta época atrajo muy poco interés a causa de los complicados cálculos que exigía.

A pesar de que los calculadores electrónicos tendrán un efecto cada vez mayor en el desarrollo de la ingeniería de estructuras, el ingeniero del futuro necesitará aún su regla de cálculo y su calculadora de mesa, así como muchos de sus métodos de estudio y proyecto actuales. No los descartará, como tampoco descarta el mecánico sus herramientas de mano porque haya sido inventada la máquina herramienta programada automáticamente. Sin embargo, añadirá la nueva máquina calculadora a su equipo y aprenderá a usarla con eficiencia y eficacia.

Objeto de este libro. Este libro está orientado fundamentalmente a un tratamiento elemental del análisis del comportamiento estructural. De entrada, el análisis es un medio para llegar a un fin —no el fin mismo—, pues el principal objetivo del ingeniero de estructuras es proyectar, no analizar. La concentración del estudiante de ingeniería de estructuras en el análisis, hasta la eliminación del problema mayor y más importante del proyecto, le permite desarrollar su capacidad de apreciación, sentido e intuición para el comportamiento estructural. Evidentemente, nunca aprovechará totalmente su experiencia de conocimientos si no la relaciona con un estudio paralelo de proyectos estructurales. Estudiando proyectos, el estudiante desarrolla su juicio, su percepción, su imaginación y su poder creador —en resumen: su capacidad de sintetizar.

Los diez primeros capítulos de este libro están dedicados casi exclusivamente a la consideración de las estructuras estáticamente determinadas. Estas consideraciones están basadas casi completamente en conceptos fundamentales previamente introducidos en física, matemáticas, mecánica y materiales. Aquí se revisan y se insiste en estos conceptos fundamentales aplicándoles a problemas del análisis estructural. Como esta materia figura como revisión, el estudiante avanzará en esta parte muy rápidamente, según la profundidad con que haya asimilado los fundamentos en cursos anteriores.

Los Caps. 11 a 14 se dedican al cálculo de deformaciones y al análisis de tensiones de estructuras estáticamente indeterminadas. Será, sustancialmente, materia nueva para el estudiante normal, aunque haya sido introducido antes brevemente a estas ideas en sus cursos de mecánica y materiales. Aunque éste es un tratado elemental, el estudiante lo encontrará completamente riguroso y fácil de comprender, de modo que, después de aprenderlo, no tendrá dificultad particular para estudiar libros más avanzados dedicados exclusivamente a este aspecto del análisis estructural.

El Cap. 15 es una introducción muy elemental a la formulación matricial de la teoría de estructuras. Es el camino que parece en este momento el más sencillo para organizar los cálculos de estructuras para resolverlos con máquina. Se han publicado o están publicándose varios libros dedicados enteramente a este tema: Hasta ahora no está claro hasta qué punto un libro como éste debe revisarse para incluir métodos matriciales. Quizá los avances futuros exigirán una revisión más extensa en este aspecto de la que se incorpora en esta edición.

Hasta el Cap. 16 se ha prestado mayor importancia al análisis de estructuras elásticas linealmente. Con el creciente interés en el proyecto estructural a base de rotura, se hace necesario considerar el comportamiento postelástico. Por esto, el Cap. 16 está dedicado al comportamiento plástico de las estructuras. Este tratado comprende solo el análisis de este comportamiento, no los métodos y principios del proyecto plástico de estructuras.

La moderna ingeniería de estructuras se ha visto cada vez más relacionada, no solo con formas estructurales más complicadas, sino también con proyectos más perfeccionados, tanto de estas formas complicadas como de las formas estructurales típicas tradicionales. Por tanto, es importante para el ingeniero de estructuras familiarizarse con el análisis de estructuras de placas y membranas y con el análisis de pandeo, respuesta dinámica y distribución de esfuerzos para diversas estructuras y elementos estructurales. El Cap. 17 es una introducción muy breve a los principios de la mecánica estructural avanzada que intervienen en tal análisis. Se pretende simplemente que sirva de transición entre este libro elemental y otros más avanzados en estos campos.

Los Caps. 18, 19 y 20 presentan un tratamiento resumido del análisis de modelos de estructuras. Hasta ahora, el análisis de modelos se ha usado principalmente como un instrumento de investigación y educativo. Sin embargo, es uno de los importantes

instrumentos disponibles para el ingeniero proyectista, que debía usar mucho más que lo ha hecho en el pasado. Se puede utilizar el análisis de modelos como comprobación de un análisis matemático complicado de un proyecto; o en casos en que el análisis matemático no es práctico o es imposible, el análisis de modelos será el único camino analítico disponible. Los ingenieros europeos han hecho importante uso en España, Portugal, Italia y Suiza del análisis de modelos en relación con el proyecto estructural. En los Estados Unidos solo lo han hecho unas pocas organizaciones como la Oficina de Reclamación U. S. A.

1

Introducción

1.1 Estructuras de Ingeniería. Para el ingeniero civil es muy importante el proyecto de puentes, edificios, torres y otras estructuras fijas. Tales estructuras están compuestas por elementos unidos entre sí y sustentados de modo que puedan soportar en equilibrio estático las fuerzas exteriores aplicadas. Una estructura debe también mantener en equilibrio a las fuerzas de la gravedad, que le están aplicadas como consecuencia de su propio peso. Por ejemplo, sobre una torre de línea de transmisión actúan su propio peso, las cargas de viento y hielo aplicadas directamente a la torre y las fuerzas aplicadas a ella por los cables que soporta. Deben, pues, disponerse y proyectarse los elementos de la torre de modo que puedan soportar las cargas en equilibrio estático y transferir así sus efectos a la cimentación.

Además de las ya mencionadas, hay muchas clases de estructuras: presas, muelles, losas de pavimento de aeropuertos y carreteras, tuberías a presión, pipelines, depósitos reguladores, viaductos y tanques son estructuras de *ingeniería civil* típicas. No solamente hay estructuras de importancia para el *ingeniero civil*: la estructura de un avión es importante para el *ingeniero aerodinámico*, la de un barco recibe particular atención de un *ingeniero naval*, el *ingeniero químico* trabaja en el proyecto estructural de recipientes de alta presión y otro equipo industrial, el *ingeniero mecánico* debe proyectar partes de máquinas y soportes con la debida consideración de la resistencia estructural y el *ingeniero eléctrico* está ocupado de igual forma con el equipo eléctrico y sus bastidores.

Sin embargo, el análisis de todas estas estructuras está basado en los mismos principios fundamentales. En este libro, los ejemplos que se usan para mostrar la aplicación de dichos principios tratan casi siempre de estructuras de ingeniería civil, pero los métodos de análisis descritos pueden usarse para estructuras que tengan aplicación en otras ramas de la ingeniería.

1.2 Proyecto estructural. Una estructura se proyecta para que cumpla una misión determinada, para lo cual debe tener la suficiente resistencia y rigidez. Otros aspectos de gran importancia en el proyecto estructural son la economía y buen aspecto.

El proyecto completo de una estructura deberá comprender las cinco fases siguientes:

1. Establecer el planteamiento general, para determinar los requisitos funcionales de la estructura.
2. Considerar las diversas soluciones posibles que satisfagan estos requisitos.
3. Proyecto estructural preliminar de las diversas soluciones posibles.
4. Elección de la solución más satisfactoria, teniendo en cuenta consideraciones económicas, funcionales y estéticas.
5. Proyecto detallado de la solución más satisfactoria.

Tanto los proyectos preliminares de la fase 3 como el proyecto final detallado de la 5, se pueden dividir en tres amplias fases parciales, aunque en la práctica están entremezcladas. Primero deben determinarse las cargas que actúan en la estructura; luego hay que analizar las tensiones máximas en las barras y nudos de la misma, y, finalmente, hay que dimensionar estas barras y nudos; esto es, hay que determinar la composición de cada parte de la estructura.

Puede verse que estos tres pasos están entremezclados, por consideraciones como la siguiente: El peso propio de la estructura es una de las cargas que ésta debe soportar, y este peso no se conoce exactamente hasta que está totalmente proyectada; en una estructura estáticamente indeterminada, las tensiones dependen de las propiedades elásticas de los elementos, que no se conocen hasta que estén proyectados los elementos principales. Así, en cierto sentido, el proyecto de una estructura avanza por aproximaciones sucesivas. Por ejemplo, es necesario suponer los pesos de los elementos para poderlos proyectar convenientemente. Después de proyectar la estructura, deben calcularse los pesos verdaderos y salvo que sean muy aproximados a los supuestos, hay que repetir el proceso.

Al proyectar una estructura es importante darse cuenta de que cada parte debe tener suficiente resistencia para resistir las tensiones máximas a que puede estar sometida. Para calcular estas tensiones máximas es necesario conocer no solo *qué* cargas pueden actuar, sino la *exacta posición* en la estructura de las cargas que originarán que las tensiones consideradas tengan su valor máximo.

Así, cuando una locomotora de ferrocarril atraviesa un puente, una parte dada de éste sufre su tensión máxima para una posición determinada de la locomotora. Una segunda parte de la estructura puede estar sujeta a sus tensiones máximas cuando la locomotora esté en otra posición.

En este libro se presta especial atención al análisis estructural; pero para hacer un estudio más satisfactorio, se prestará también alguna atención a las cargas que actúan en una estructura y al proyecto de elementos y nudos.

En el Prólogo se señaló que a la base tradicional del proyecto estructural se le llama *proyecto elástico*. Las hipótesis de cargas, tensiones admisibles y otras características de proyecto que corresponden a este método han sido definidas de varios modos en especificaciones standard y normas de edificación, como las dadas por los siguientes conocidos organismos:

Asociación Americana de Funcionarios de Carreteras Estatales (AASHO).

Asociación de Ingeniería de Ferrocarriles Americana (AREA).

Instituto Americano de la Construcción en Acero (AISC).

Instituto Americano del Hormigón (ACI).

Algunas especificaciones y normas contienen cláusulas potestativas, según las cuales se pueden dimensionar las estructuras por métodos de *proyecto-plástico*, siempre que tales proyectos se justifiquen a satisfacción de las autoridades que conceden el permiso para la modificación. Sin embargo, hasta ahora, el autor no conoce ninguna norma americana que haya incluido los principios del proyecto plástico en sus especificaciones standard. Como estas ideas tienen gran valor cuando se las usa adecuadamente, no hay duda de que terminarán por alcanzar el reconocimiento que merecen.

1.3 Cargas fijas o concargas. La carga fija, que actúa sobre una estructura, consta del peso de la propia estructura y de todas las demás cargas inmóviles, constantes en magnitud y asignadas permanentemente a la misma. Así, para un puente de carretera, la carga fija la constituyen las vigas o pórticos principales, las vigas de piso y largueros del sistema de tablero, las losas de calzada, los bordillos, aceras, barandillas, postes de iluminación y otro equipo.

Como hay que conocer la carga fija que actúa sobre un elemento antes de proyectarle, habrá que proyectar los miembros de una estructura, en un orden tal que, hasta donde sea posible, el peso de cada elemento proyectado sea una parte de la carga fija soportada por el siguiente a proyectar. Así, para un puente de carretera, se proyectará primero la losa de pavimento, luego los largueros que transmiten las cargas de la losa a las vigas de tablero, después las vigas de tablero que llevan la carga de los largueros a los pórticos o vigas principales, y finalmente estos pórticos o vigas.

Al proyectar un elemento tal como una losa de pavimento, los esfuerzos debidos a las cargas fijas serán solo un pequeño porcentaje de los esfuerzos totales del mismo, de modo que, aun si no se toman con gran exactitud las cargas fijas, se puede predecir el esfuerzo total con suficiente aproximación y, por tanto, el primer proyecto puede ser ya enteramente satisfactorio. Sin embargo, para las vigas o pórticos principales, las cargas fijas constituyen la mayor parte de la carga total a soportar, por lo que es más importante hacer una primera estimación de los pesos razonablemente exacta. A menudo, pueden servir de guía al proyectista los pesos de otras estructuras semejantes. Se han hecho muchos estudios encaminados a presentar tales datos en forma apropiada¹. Sin embargo, hay que recalcar que la hipótesis original de pesos es solo de tanteo, cualquiera que sea la fuente de los datos. Después de proyectada la estructura, hay que calcular exactamente su peso real y se revisará, si es necesario, el análisis de tensiones y el proyecto. Esto es necesario para la seguridad y deseable para la economía.

Si se conocen las dimensiones de una estructura, se pueden calcular las cargas fijas, tomando como base los pesos unitarios de los materiales correspondientes. En muchos libros y manuales se pueden encontrar los pesos unitarios de algunos materiales usados comúnmente en estructuras de ingeniería².

1.4 Sobrecargas. Generalidades. En contraste con la concarga, que permanece tanto en magnitud como en posición, es normalmente necesario considerar sobrecargas, que pueden variar de emplazamiento. A veces es conveniente clasificar las sobrecargas en cargas móviles y cargas móviles. Cargas móviles son las que pueden cambiarse de una posición a otra en una estructura, tales como el contenido de un edificio de almacén. Generalmente, se aplican gradualmente y sin impacto. Las móviles son las que se mueven por su propia energía, tales como un tren, o una serie de camiones. Se aplican, en general, rápidamente y, por tanto, ejercen un efecto de impacto sobre la estructura.

Cuando intervienen sobrecargas, hay que prestar atención a la posición de tales cargas en la estructura para la cual las tensiones en el elemento o nudo considerado tengan su valor máximo posible. Así, mientras hablamos de tensiones fijas, producidas por cargas fijas, nos referimos a tensiones máximas debidas a las sobrecargas.

1.5 Sobrecargas para puentes de carretera. La sobrecarga para puentes de carretera consta del peso de las cargas móviles de los vehículos y peatones. Realmente, el tráfico por un puente de carretera constará de una multitud de tipos diferentes de vehículos. Sin embargo, se proyecta para un tren de camiones standard, elegido de ma-

¹ Se recomiendan al lector las págs. 79 y 91 de «Structural Theory» (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1950), por H. Sutherland y H. L. Brownson, donde hallará excelentes resúmenes de las fórmulas que dan los pesos de armaduras de cubiertas y puentes. En el cap. I de «Theory of Structures», de C. M. Spofford, 4.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1939, hay cuadros referentes a los pesos de puentes de ferrocarril, puentes de carreteras y puentes para señales.

² Se recomienda al lector, por ejemplo, la sección de Pesos y Pesos Específicos en «Steel Construction», Instituto Americano de la Construcción en Acero, Nueva York.

nera que el puente sea seguro y económico para su uso real. La sobrecarga de cada carril de carretera consiste en un tren de camiones pesados muy próximos, uno detrás de otro. El peso y la distribución de pesos de cada camión varía con las especificaciones con que se proyecta, pero un ejemplo típico es el representado por los camiones serie H especificado por la AASHO.

Estos camiones serie H están representados en la Fig. 1.1. Se designan por una H seguida de un número que indica el peso total en toneladas americanas para el camión tipo. La elección de qué camión de la serie H hay que utilizar para el proyecto de una estructura determinada depende de diversas circunstancias, tales como la importancia del puente y el tráfico esperado en él.

Se ha visto que la carga por carril de carretera consta de una serie de cargas por rue-

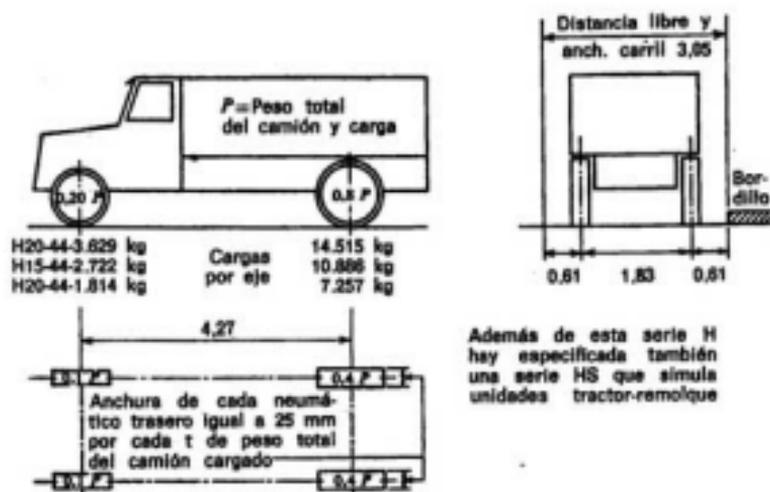


FIG. 1.1. Camión serie H-AASHO.

da concentradas. El análisis de tensiones para hallar la tensión máxima producida por una serie de sobrecargas concentradas puede ser bastante complicado. En tales condiciones, es admisible sustituirlas, al objeto del análisis, por una carga equivalente constituida por una carga uniforme por metro de carril más una carga concentrada simple. Así, para la carga H-20, la sobrecarga equivalente consta de una carga uniforme de 952 kg por metro lineal (640 lb por pie) de carril, más una carga concentrada de 8.165 kg u 11.793 kg (18.000 lb o 26.000 lb), dependiendo de si se calculan momentos o cortantes, respectivamente. Esta sobrecarga equivalente no equivale exactamente a la serie de cargas de rueda concentradas, pero permite un cálculo de las tensiones máximas más sencillo, que corresponde muy aproximadamente al que se haría a partir de las cargas reales a utilizar en el proyecto.

1.6 Sobrecargas para puentes de ferrocarril. La sobrecarga para los puentes de ferrocarril consta de las locomotoras y los coches que los cruzan. Normalmente, se toma la sobrecarga para cada tren igual a la correspondiente a dos locomotoras seguidas de una carga uniforme que representa el peso de los vagones. Para tipificar tales cargas, Theodore Cooper estableció una serie de cargas E. Estas cargas se designan por la le-

tra E seguida por un número que indica la carga en kips¹ en el eje motor. Las cargas en los otros ejes mantienen siempre la misma relación con la carga en el eje del motor. La carga uniforme que sigue a las dos locomotoras tiene siempre una intensidad por pie de riel igual a un décimo de la carga en el eje del motor, es decir, aproximadamente un tercio de dicha carga por metro lineal.

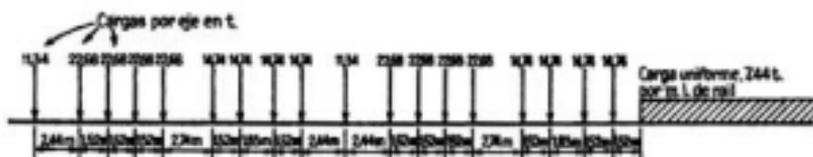


FIG. 1.2. Carga de Cooper E-50.

La separación entre ruedas no varía con el tipo. La Fig. 1.2 muestra una carga de Cooper E-50 traducida a unidades métricas (obsérvese que 50 kips = 22,68 toneladas). Los puentes de ferrocarril modernos se proyectan para una carga al menos E-60 (con 27,2 t por eje motor) y a menudo E-72 (32,7 t por eje motor). Se observará que las cargas por rueda para estas pesadas cargas de Cooper se pueden obtener de la Fig. 1.2 por una proporción directa.

A veces, en lugar de las cargas de Cooper por rueda se usan cargas simplificadas equivalentes, para representar las sobrecargas en puentes de ferrocarril.

1.7 Sobrecargas para edificios. Normalmente se consideran las sobrecargas para edificios como cargas repartidas móviles de intensidad uniforme. La intensidad de la carga de pisos a usar depende del objeto a que se destina el edificio, como se indica en la Tabla 1.1, que se ha convertido a unidades métricas, redondeando los valores.

Tabla 1.1

	Sobrecarga mínima, kg/m ²
Uso de personas:	
Habitaciones privadas, casas de viviendas, etc.	200
Oficinas, escuelas, etc.	250
Pasillos, corredores, vestíbulos, etc., de edificios públicos	500
Uso industrial o comercial:	
Almacenamiento (en general)	1.250
Fabricación (ligera)	370
Imprentas	500
Comercio al por mayor (mercancías ligeras)	500
Ventas al por menor (mercancías ligeras)	370
Garajes:	
Todo tipo de vehículos	500
Coches de pasajeros solo	400
Aceras	1.250 kg/m ² o 3.600 kg concentrados, lo que dé el mayor momento o cortante

¹ Para facilitar los cálculos, las cargas vienen dadas generalmente en unidades americanas, en kips, siendo 1 kip = 1.000 lb, y en unidades métricas, en toneladas, con 1 t = 1.000 kg.

Cuando los pisos deben soportar sobrecargas especiales de intensidad conocida, mayor que las indicadas antes, evidentemente hay que utilizar en el proyecto esas cargas especiales conocidas.

1.8 Impacto. La deformación de una estructura sometida a una sobrecarga es mayor cuando ésta se aplica gradualmente que la que se tendría si la carga fuese estática. Como la deformación es mayor, las tensiones en la estructura son mayores. El aumento de tensión debido a la sobrecarga, sobre el que se produciría si se aplicase esta sobrecarga gradualmente, se conoce como efecto de impacto. Generalmente, los efectos de impacto van asociados a las sobrecargas móviles. A efecto de proyecto de estructuras, las tensiones de impacto se obtienen multiplicando las debidas a la sobrecarga por una fracción llamada coeficiente de impacto que se da empíricamente. La determinación de una fracción racional sería muy complicada, pues depende de la función del tiempo con que se aplica y las propiedades de inercia y elásticas de la propia estructura.

Para puentes de carreteras el coeficiente de impacto I dado en las especificaciones de la AASHO se traduce en unidades métricas, aproximadamente por

$$I = \frac{50}{3,28L + 125} \quad \text{sin exceder de } 0,300 \quad (1.1)$$

donde L es la longitud en metros de la parte de vano cargada para producir la tensión máxima en el elemento considerado. Por ejemplo, supongamos que el máximo cortante positivo debido a la sobrecarga en el centro de una viga armada longitudinal de 30 m de un puente de carretera es igual a 450.000 kg y tiene lugar cuando la sobrecarga ocupa la mitad del tramo de 30 m. Entonces, la longitud cargada es de 15 m; el coeficiente de impacto $I = 50/(49 + 125) = 0,287$; el cortante de impacto se obtiene multiplicando el cortante por el coeficiente de impacto y, por tanto, es $450.000 \times 0,287 = 129.150$ kg. El efecto total de la sobrecarga, esto es, el cortante más el impacto, es igual a 450.000 kg más 129.150 kg, o sea, 579.150 kg.

Las *Especificaciones para el proyecto y construcción de puentes de ferrocarril de acero*, publicadas por el AREA, tratan el impacto como sigue (obsérvese que el porcentaje de impacto es igual a 100 veces el coeficiente de impacto antes descrito):

«A los esfuerzos máximos calculados para las sobrecargas estáticas hay que añadir el impacto que consta de:

1. Efecto de rodadura:

Un porcentaje del esfuerzo de la sobrecarga estática igual a

$$\frac{100}{3,28S}$$

S = separación, en metros, entre centros de vigas longitudinales, largueros o armaduras; o longitud, en metros, de vigas de tablero o vigas transversales.

2. Efecto vertical directo:

Con locomotoras de vapor (martillazo, irregularidades de la vía e impacto de coche) un porcentaje de la sobrecarga igual a:

a) Para vigas, largueros, pórticos, vigas de tablero:

$$\text{Para } L \text{ menor de } 30 \text{ m (100 pies)} \quad 60 - \frac{10,75L^2}{500}$$

$$\text{Para } L \text{ } 30 \text{ m o más} \quad \frac{1.800}{3,28L - 40} + 10$$

b) Para armaduras sobre vanos

$$\frac{4.000}{3,28L + 25} + 15$$

Con locomotoras eléctricas (irregularidades de la vía e impacto de coche) un porcentaje del esfuerzo de la sobrecarga estática igual a:

$$\begin{aligned} \text{Para } L \text{ menos de 24 m (80 pies)} & \quad 40 - \frac{32,27L^2}{1.600} \\ \text{Para } L \text{ 24 m o más} & \quad \frac{600}{3,28L - 30} + 16 \end{aligned}$$

L = longitud en metros, de centro a centro de soportes de largueros, vigas compuestas longitudinales y armaduras (cordones y elementos principales)

o L = longitud de vigas de tablero o vigas transversales, en metros, para vigas de tablero, soportes de vigas de tablero, diagonales de armaduras, vigas transversales y soportes para vigas transversales.»

Para aclarar la aplicación de la anterior especificación de impacto, supongamos que la viga longitudinal descrita en el ejemplo anterior es una de las dos vigas principales de un puente de ferrocarril a vapor y que estas vigas estén separadas 5,4 m entre ejes. Así, para el efecto de rodadura, como $S = 5,4$ m el porcentaje de impacto, es igual a $100/(3,28 \times 5,4) = 5,5$ por 100; para el efecto vertical directo, como $L = 30$ el porcentaje de impacto es $1.800/(3,28 \times 30 - 40) + 10 = 40$ por 100 (obsérvese que en este caso $L = 30$ por ser la luz de la viga, mientras en el ejemplo anterior se utilizaba $L = 15$ que era la longitud de la viga cargada); así, el porcentaje de impacto total es igual a $5,5 + 40 = 45,5$ por 100; el cortante de impacto será $450.000 \times 45,5 = 204.750$; el efecto total de la carga, esto es, cortante de la sobrecarga más impacto = $450.000 + 204.750 = 654.750$ kg.

Otras especificaciones dan nuevas reglas para determinar el impacto, pero los dos métodos estudiados son quizá los más importantes de los utilizados normalmente. Además, ilustran el tipo de ecuaciones de impacto que figuran en cualquier especificación.

Normalmente es innecesario considerar esfuerzos de impacto al proyectar con sobrecargas móviles tales como las aplicables a edificios. Tampoco se considera el impacto cuando se proyecta una estructura de madera, a causa de que la madera es un material que resiste mucho mejor a las cargas de corta duración que a las aplicadas permanentemente, por lo que puede utilizar esta reserva de resistencia para soportar cargas de impacto.

1.9 Cargas de nieve y hielo. A menudo, las cargas de nieve son importantes, especialmente en el proyecto de cubiertas. La nieve se considera una carga móvil, porque no es necesario que cubra toda la cubierta, y alguno de los elementos que soportan dicha cubierta puede alcanzar sus tensiones máximas cuando la nieve cubra solo una parte de ella. El peso de la nieve naturalmente varía mucho según la nevada que pueda esperarse en cada región. En una localidad determinada, la altura que puede alcanzar la nieve en una cubierta dada dependerá de la pendiente de la misma y de la rugosidad de su superficie. En cubiertas planas en zonas sometidas a grandes nevadas, la carga de nieve puede alcanzar hasta 300 o incluso 450 kg/m². Si han de considerarse o no simultáneamente cargas de nieve y viento sobre una cubierta es problemático, pues un viento fuerte quitará gran parte de la nieve.

Las cargas de hielo pueden ser también importantes, como, por ejemplo, al proyectar una torre constituida por barras relativamente pequeñas que tienen superficies considerablemente grandes en las que se puede acumular hielo. El hielo, que tiene una densidad aproximadamente igual a la del agua, puede llegar a tener un espesor de 5 cm o más en tales barras. También puede alcanzar espesores mucho mayores, pero cuando sucede así suele contener nieve o escarcha, por lo que tiene menor densidad. Cuando se forma hielo en una barra, altera la forma y la superficie proyectada de la misma, lo que debe considerarse al calcular fuerzas de viento en elementos cubiertos de hielo.

1.10 Cargas laterales. Generalidades. Las cargas estudiadas hasta ahora actúan verticalmente, aunque no es necesario que las sobrecargas y los efectos de impacto aso-

ciados a ellas actúen en tal dirección. Existen además ciertas cargas que se aplican casi siempre horizontalmente, y hay que considerarlas muy a menudo en el proyecto de las estructuras. Tales cargas son las llamadas laterales. Consideraremos ahora algunas de las clases de cargas laterales más importantes.

Bajo esta clasificación se incluyen normalmente fuerzas de viento, empujes del terreno, presiones hidrostáticas, fuerzas debidas a terremotos, fuerzas centrifugas y fuerzas longitudinales.

1.11 Fuerzas de viento. Las cargas de viento son particularmente importantes en el proyecto de estructuras grandes, como edificios altos, torres de radio y puentes de gran luz, y en estructuras tales como edificios industriales y hangares, que tienen gran luz interior y muros en los que puede haber grandes aberturas. La velocidad del viento que se suele considerar en el proyecto de una estructura depende de la situación geográfica y de la exposición de la estructura. Para la mayoría de las ciudades de los Estados Unidos es satisfactorio un proyecto que considere un viento de velocidad 160 km/h (100 mph).

Las cargas de viento recomendadas en varias especificaciones como sobrecargas de cálculo no deben considerarse como representativas de las cargas reales de viento. La experiencia ha demostrado que el uso de los valores recomendados conduce generalmente a proyecto de suficiente resistencia y de rigidez apropiada.

La AASHO especifica que la fuerza de viento en la superestructura de puentes de carretera se debe suponer como una sobrecarga móvil horizontal de 370 kg por m² para armaduras y arcos y de 250 kg por m² para vigas compuestas y vigas. Estas fuerzas corresponden a velocidades de viento de 160 km/h. La superficie expuesta es la suma de las superficies de todos los elementos, incluyendo el sistema de tablero y barandilla, según se ve en alzado a 90° del eje longitudinal de la estructura. Cuando se combina con la sobrecarga de la estructura, la intensidad de la carga de viento se reducirá al 70 por 100. Para la infraestructura, están especificadas las fuerzas de viento para diversos ángulos de dirección del viento para obtener las fuerzas longitudinales y transversales.

Para edificios, la especificación de la AISC establece que debe proyectarse el entramado de un edificio para que soporte una presión de viento no menor que 100 kg/m² sobre la proyección vertical de las superficies expuestas de la estructura acabada.

Para edificios con cubiertas a dos aguas o redondeadas, se suelen usar datos más exactos de cargas de viento. Se remite al estudiante a un informe titulado «Wind Bracing in Steel Buildings»¹, donde, por conveniencia, las presiones (y succiones) sobre la cubierta se expresan en función de q , presión de velocidad, definida por

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (1.2)$$

¹ Proc. ASCE, marzo 1936, pág. 397.

Las recomendaciones de este informe están indudablemente más de acuerdo con las fuerzas aerodinámicas que actúan realmente en una cubierta, que las fuerzas de viento utilizadas a menudo en los proyectos de cubiertas. La práctica generalmente utilizada para determinar presiones de viento en superficies que no son verticales, consiste en aplicar una fórmula tal como la de Duchemin, $P_n = P \frac{2 \sin i}{1 + \sin^2 i}$, en la que P_n es la intensidad de la presión normal a una superficie dada, P la intensidad de la presión en una superficie vertical, e i el ángulo formado por la superficie con la horizontal. Tal procedimiento da una presión de viento en la vertiente de barlovento de un tejado a dos aguas y no presta atención a la succión en la vertiente de sotavento.

donde m es la masa de un volumen unitario de aire, y V , la velocidad del aire en unidades correspondientes a m . Para condiciones medias, y cuando se expresa la velocidad del viento en metros por segundo, la presión de velocidad en kilogramos por metro cuadrado puede tomarse como

$$q = \frac{V^2}{16} \quad (1.3)$$

Para tejados a dos aguas, se recomienda que se adopten las siguientes cargas, para la vertiente de cara al viento:

1. Para pendientes de 20° o menos, una succión de $0,7q$
2. Para pendientes entre 20 y 30° , una succión de

$$p = (0,07x - 2,10)q \quad (1.4)$$

donde x es la pendiente del tejado en grados.

3. Para pendientes entre 30 y 60° , una presión de

$$p = (0,03x - 0,90)q \quad (1.5)$$

4. Para pendientes mayores de 60° , una presión de $0,90q$

Se recomienda que se tome la carga de viento en la vertiente a sotavento de un tejado a dos aguas como una succión de $0,6q$ para todas las pendientes. Todas las presiones y succiones son perpendiculares a la superficie sobre la que actúan.

La Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE), a cuyo informe se ha hecho referencia, estudia también la magnitud y distribución de las presiones de viento en techos redondeados como los usados en hangares.

En las especificaciones AISC para cargas de viento en edificios, se supone que toda la presión actúa en la superficie vertical de barlovento del edificio. Este procedimiento es satisfactorio para el proyecto de edificios altos típicos, aunque la carga lateral real debida al viento consta de presión en el lado de barlovento y succión en el de sotavento. Este tema se halla también estudiado en el informe del ASCE.

1.12 Empujes del terreno. A menudo hay que considerar cargas sobre muros de contención, muros de edificios y otras estructuras, debidas a empujes del terreno. La presión lateral originada por el terreno contra un muro varía cuando éste cede. Después de un pequeño movimiento del muro, el empuje alcanza un valor mínimo, conocido por presión activa. Por el contrario, si el muro está forzado contra el relleno, la presión entre muro y relleno aumenta hasta un máximo, llamado presión pasiva. Bajo condiciones normales, la presión activa a cualquier profundidad es alrededor de $\frac{1}{4}$ de la

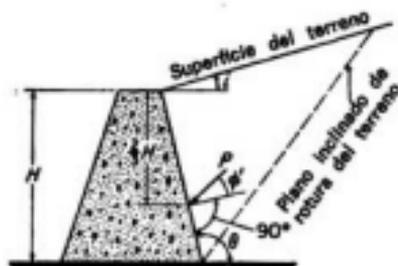


FIG. 1.3. Muro de contención.

presión vertical, y la pasiva, aproximadamente cuatro veces esta misma presión. Como la presión lateral sería igual a la vertical si el material fuese un fluido, a los valores aproximados $\frac{1}{4}$ y 4 se les llama a veces «relación de presión hidrostática» para los casos de activa y pasiva, respectivamente.

De acuerdo con lo anterior, un muro que pueda ceder sin consecuencias desfavorables puede proyectarse tomando como base la presión activa, aunque la que va a actuar realmente sobre él será superior a este valor. Además, se podrá suponer que la distribución de la presión sobre tal muro es triangular, aunque esta hipótesis no sea totalmente correcta.

Para terrenos sin cohesión, la resultante total correspondiente a la presión activa del terreno que actúa sobre una faja de muro de 1 m de anchura se puede calcular tomando como base la teoría desarrollada por Coulomb, que supone el fallo del terreno por rotura según un plano inclinado. Con referencia a la Fig. 1.3, esta resultante total se representa por P , que actúa a los dos tercios de la altura, contados desde la coronación del muro, y en una dirección que forma el ángulo ϕ' con una recta perpendicular a la cara de dicho muro, siendo ϕ el ángulo de rozamiento del terreno y la fábrica. H es la altura, en vertical, del terreno sobre la base del muro. El ángulo que forma la superficie del terreno con la horizontal se representa por i , y el talud del muro, por θ .

La fuerza total P en kilogramos, según la teoría de Coulomb, viene expresada por

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[\frac{\csc \theta \sin (\theta - \phi)}{\sqrt{\sin (\theta + \phi')} + \sqrt{\frac{\sin (\phi + \phi') \sin (\phi - i)}{\sin (\theta - i)}}} \right]^2 \quad (1.6)$$

siendo y el peso de la tierra en kilogramos por metro cúbico, ϕ el ángulo de rozamiento interno del terreno (obtenido fácilmente por ensayos de laboratorio y con valores normales de 30 a 40°) y ϕ' el ángulo de rozamiento entre terreno y fábrica, que tiene aproximadamente el mismo valor que ϕ para muros rugosos y algo menor para los lisos.

Si $i = 0$, $\theta = 90^\circ$ y $\phi = \phi'$, la Ec. (1.6) se reduce a

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[\frac{\cos \phi}{(1 + \sqrt{2} \sin \phi)^2} \right] \quad (1.7)$$

Si, por ejemplo, consideramos una arena para la cual $\phi = \phi' = 30^\circ$, y $\gamma = 1.600 \text{ kg/m}^3$, que actúa detrás de un muro vertical de 3 m de altura, el empuje resultante para una faja de muro de 1 m de longitud, por la Ec. (1.7) viene dado por

$$P = \frac{1}{2} (1.600)(3)^2 \left\{ \frac{0,867}{[1 + 1,414(0,500)]^2} \right\} = 2.145 \text{ kg}$$

Esta fuerza resultante actúa a 1 m por encima de la base del muro en dirección hacia él y hacia abajo, formando un ángulo de 30° con la horizontal.

Para un estudio más completo de los empujes del terreno se envía a los estudiantes a los libros sobre mecánica del suelo.

1.13 Presiones hidrostáticas. Las presas, tanques, etc., están sometidos a cargas hidrostáticas que, como regla general, se pueden calcular fácilmente de acuerdo con los principios elementales de la hidráulica. Las cargas hidrostáticas se considerarán en general como cargas móviles, por cuanto los esfuerzos críticos en la estructura no

ocurrirán necesariamente cuando el líquido de que se trata esté a su nivel más alto posible. En algunas estructuras, la presencia de presiones hidrostáticas disminuye realmente los esfuerzos de las mismas. Así, un tanque enterrado puede fallar más fácilmente cuando está vacío que cuando está lleno, y un tanque construido sobre el terreno puede sufrir una condición de esfuerzo crítico cuando está lleno solo parcialmente.

Es necesario a veces considerar cargas hidrodinámicas, como sucede cuando el agua que marcha a gran velocidad golpea una pila de puente o una compuerta.

1.14 Acciones sísmicas. Muchas veces hay que proyectar estructuras importantes situadas en regiones sujetas a fuertes terremotos, de modo que resistan sus efectos. Durante un terremoto puede ocasionarse un daño a la estructura por el hecho de sufrir aceleraciones su cimentación. Estas aceleraciones son fundamentalmente horizontales, y sus componentes verticales normalmente se pueden despreciar. El grado de aceleración horizontal de las cimentaciones será del orden de magnitud del décimo de la aceleración de la gravedad, esto es, $0,981 \text{ m por seg}^2$, y se representa generalmente por $0,1g$. Si se supone que la estructura actúa como un todo rígido, sufrirá una aceleración horizontal del mismo grado que sus cimentaciones. Por tanto, sobre cada parte de la estructura actuará una fuerza de inercia horizontal igual a su masa multiplicada por su aceleración horizontal, o

$$\text{Fuerza lateral} = \text{masa} \times \text{aceleración} = \frac{\text{peso}}{g} \times 0,1g = \text{un décimo de su peso}$$

A veces se proyectan las estructuras para que resistan los terremotos de acuerdo con la hipótesis anterior, aunque es solo aproximada, por cuanto el suponer que toda la estructura se acelera como un conjunto rígido normalmente no es válido. Realmente, la estructura experimentará deformaciones elásticas que afectarán a la aceleración de sus diversos elementos.

La aceleración horizontal de una estructura tal como una presa producirá no solo fuerzas de inercia horizontales debidas a la propia masa de la presa, sino también fuerzas hidrodinámicas, al moverse rápidamente en el agua que retiene.

1.15 Fuerzas centrífugas. Al proyectar un puente en el que la calzada o los ralles están en curva, hay que tener en cuenta que los vehículos que atraviesan la estructura ejercen una fuerza centrífuga que puede tener suficiente amplitud para necesitar se la considere en el proyecto. Estas fuerzas centrífugas son cargas laterales y se deben considerar como cargas móviles.

Si un peso W recorre una curva de radio R a la velocidad V , la fuerza centrífuga C (que actúa en el centro de gravedad del objeto de peso W) está expresada por

$$C = \text{masa} \times \text{aceleración circular} = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \quad (1.8)$$

1.16 Fuerzas longitudinales. En el caso de un puente, a las fuerzas horizontales que actúan en la dirección del eje longitudinal de la estructura, esto es, en la dirección de la calzada, se les llama *fuerzas longitudinales*. Estas fuerzas se aplican cuando los vehículos que recorren el puente aumentan o disminuyen su velocidad.

Como son fuerzas de inercia producidas por la aceleración o deceleración de los vehículos, actúan en los centros de gravedad de éstos. Su magnitud está limitada por los esfuerzos de rozamiento que se pueden desarrollar entre las superficies de contacto de las ruedas de los vehículos que aplican estas fuerzas a la calzada o la vía, y la superficie de éstas.

Para los puentes de ferrocarril, las especificaciones de la AREA establecen que estas fuerzas longitudinales se supone que actúan a 1,8 m (6 pies) por encima del rail y que deben considerarse aplicadas por la sobrecarga en un rail solamente. Para este rail se tomarán las fuerzas longitudinales con los valores mayores siguientes: 1) debido al frenado, el 15 por 100 de la sobrecarga total, sin impacto; 2) debido a la tracción, el 25 por 100 del peso sobre las ruedas motrices de la locomotora, sin impacto.

Para puentes de carretera, las especificaciones de la AASHO establecen que hay que prever el efecto de una fuerza longitudinal del 5 por 100 de la sobrecarga que hay sobre la estructura, aplicada a 1,2 m (4 pies) por encima de la calzada.

1.17 Acciones térmicas. Los cambios de temperatura originan tensiones en los elementos de una estructura, y, por tanto, producen deformaciones de esta estructura en conjunto. Si se limitan las variaciones de forma debidas a la temperatura, como es frecuentemente el caso en las estructuras estáticamente indeterminadas, dentro de ellas se originan tensiones. Las fuerzas producidas en una estructura como consecuencia de cambios de temperatura, se llaman a menudo fuerzas térmicas. Además de considerar las fuerzas introducidas por variaciones de temperatura, es importante tener en cuenta la dilatación y contracción de la estructura, especialmente en relación con los detalles de los soportes.

En un clima moderado se considerará una variación de temperatura de 18 a 49° C. En climas fríos se ampliará este margen de -35 a 49° C.

1.18 Organización de vigas compuestas. En una estructura construida de acero, normalmente se usan perfiles laminados tales como I de perfil normal, o vigas de ala

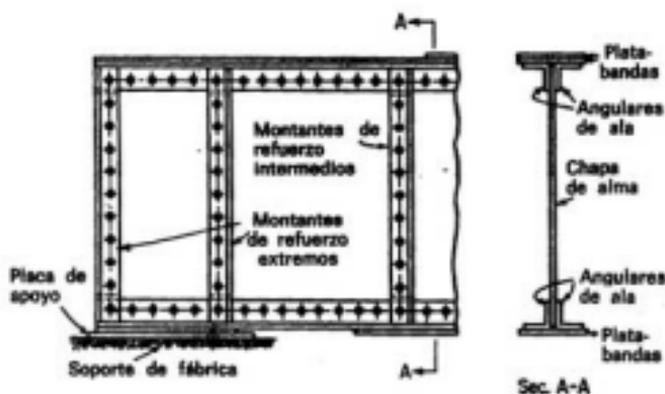


FIG. 1.4. Componentes de una viga compuesta.

ancha, para soportar cargas en un vano. Cuando se pueden usar perfiles laminados, son económicos porque requieren menos elaboración que las vigas compuestas. Sin embargo, para luces más largas y mayores cargas, se hallará que los momentos de flexión y cortantes son demasiado grandes para poderlos soportar con perfiles laminados, y hay que usar vigas compuestas. Las partes más importantes de una viga compuesta típica, como la representada en la Fig. 1.4, son la chapa de alma, el ala superior que está constituida por angulares y platabandas, y el ala inferior compuesta del mismo modo. Sobre las placas de apoyo extremas hay angulares verticales llamados montantes de refuerzo extremos, mientras que normalmente es necesario tener en otros puntos del vano más angulares verticales, llamados montantes intermedios. Los elementos

componentes de la viga representada en la Fig. 1.4 están roblonados entre sí. A menudo se usa la soldadura en lugar del roblonado, en cuyo caso los detalles de la viga difieren algo, pero las partes principales, como el alma, las alas superior e inferior y los montantes del alma, se conservan.

1.19 Organización de cerchas o armaduras. Las consideraciones de fabricación, transporte y montaje limitan generalmente la altura de las vigas compuestas a unos 3 m. Cuando los momentos y cortantes son tan grandes que no puede soportarlos una viga

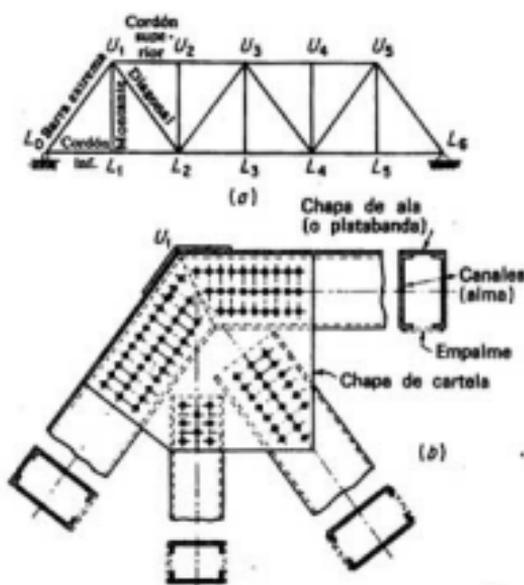


FIG. 1.5. Componentes de una cercha remachada.

de esa altura, se hace necesario el empleo de una cercha o armadura. En la Fig. 1.5a se muestra la disposición de una armadura típica. A las barras $L_0L_1, L_1L_2, \dots, L_5L_6$ se les llama cordón inferior, las $U_1U_2, U_2U_3, \dots, U_4U_5$ forman el cordón superior; las L_0L_1 y U_5U_6 son las barras extremas y se incluyen a menudo entre las de cordón; las barras $U_1L_2, L_2U_3, \dots, L_4U_5$ se llaman diagonales, y las $U_1L_1, U_2L_2, \dots, U_5L_5$, montantes verticales. La Fig. 1.5b muestra un detalle típico de unión de las barras de una cercha roblonada y la composición de barras típicas de una cercha. Las chapas a las que se unen las barras que se juntan en un nudo se llaman cartelas. Para cerchas de gran luz, a veces las barras están unidas en un nudo por un pasador que atraviesa las almas de las propias barras o las placas de pasador unidas a estas almas. Las cerchas pueden estar soldadas en lugar de roblonadas.

1.20 Organización del piso. Para un puente de ferrocarril de viga de alma llena, si estas vigas no están demasiado separadas y se coloca el rail sobre ellas, es económico hacer descansar las traviesas directamente sobre las platabandas del ala superior de las vigas, como se ve en la Fig. 1.6. Estos puentes se llaman estructuras de tablero superior. Cuando la distancia entre las vigas es mayor, esta construcción es antieconómica. También es obvio que no se puede hacer si han de colocarse los raíles más bajos que la parte alta de las vigas. En cualquiera de las circunstancias mencionadas se hace necesario

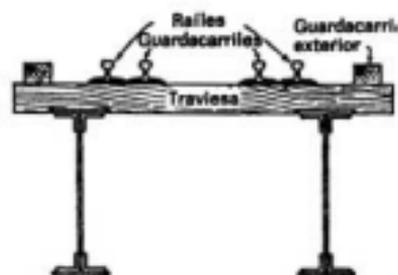


FIG. 1.6. Puente de tablero superior.

construir un sistema de tablero compuesto por largueros y vigas de tablero, como se ve en la Fig. 1.7. Si este sistema de tablero está sobre las vigas o cuchillo, el puente se llama también de tablero superior; si está en la parte baja de las vigas o cuchillos se llama

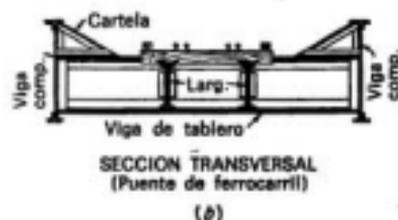
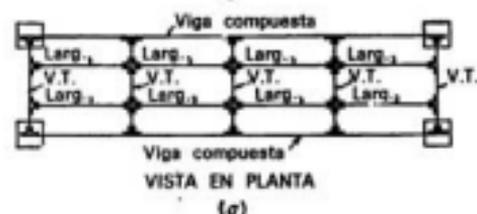


FIG. 1.7. Secciones transversales de puentes de vigas compuestas.

de tablero inferior, y si a una altura intermedia, de tablero intermedio. Las Figs. 1.7a y b representan un puente de ferrocarril de vía sencilla de tablero intermedio y muestran la organización de sistemas de pisos para estos puentes. Las traviesas descansan directamente en largueros, paralelos a las vigas principales. Estos largueros apoyan en elementos llamados vigas de tablero, que son perpendiculares a ellos y se apoyan en las vigas principales. Así, una carga aplicada a los raíles es transferida por las traviesas a los largueros, que la llevan a las vigas de tablero y éstas a las vigas, que, a su vez, la transfieren a las cimentaciones de la estructura.

La Fig. 1.7c muestra una sección transversal de un puente de carretera típico con un sistema de tablero. Este sistema es similar al descrito para el puente de ferrocarril, con la losa del piso del puente descansando sobre largueros colocados entre vigas de tablero, que, a su vez, van entre las vigas principales.

Se puede usar un entramado similar para el piso de un edificio, como se ve en la Fig. 1.8. En este caso, la losa de piso descansará sobre las vigas de piso y vigas principales, así como en los largueros (o nervios), pero las cargas aplicadas a la losa directamente sobre un nervio, éste las traslada a las vigas de piso, de allí a las principales, luego a las columnas y, finalmente, a los cimientos.

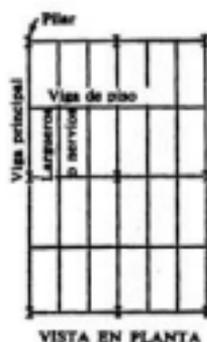


FIG. 1.8. Entramado de piso de edificio.

En puentes en los que los elementos sustentantes principales son armaduras en lugar de vigas, siempre se usan sistemas de tablero. Las vigas de tablero van colocadas en los puntos de unión (nudos) del cordón cargado, de modo que las barras no estén sometidas a cargas transversales y sufran un momento.

1.21 Sistemas de arriostramiento. Muchas veces a las vigas, vigas de tablero, largueros, columnas, etc., proyectados principalmente para soportar cargas verticales, se les llama elementos principales de la estructura. Además de estos elementos principales, muchas estructuras necesitan sistemas de arriostramiento, que sirven para una serie de objetivos, los más importantes de los cuales son el resistir las cargas laterales y evitar el pandeo. En la Fig. 1.9 se representan los sistemas de arriostramiento más importantes para puentes de tablero inferior. El sistema lateral del cordón superior está en el plano de los cordones superiores y consta de una riostra transversal en cada nudo del cordón superior y diagonales que unen los extremos de estas riostras. El sistema lateral del cordón inferior está en el plano de los cordones inferiores y consta de las vigas de tablero que hay en cada nudo del cordón inferior y sirven de riostras transversales, y diagonales que unen los extremos de las vigas de tablero. En los planos de las barras extremas está el arriostramiento llamado «de pórtico», que da rigidez a las barras finales, lateralmente.

1.22 Tensiones admisibles. Cuando se proyecta una estructura por el *método tradicional elástico*, se hace el estudio para las diversas condiciones de cargas, obteniendo los momentos de flexión y de torsión, las fuerzas cortantes y la fuerza axial en varias secciones de la estructura. Con estos datos es posible calcular las intensidades de los esfuerzos normales y cortantes en estas secciones. Para que la estructura sea satisfactoria, es necesario que estas tensiones calculadas para las cargas supuestas no excedan

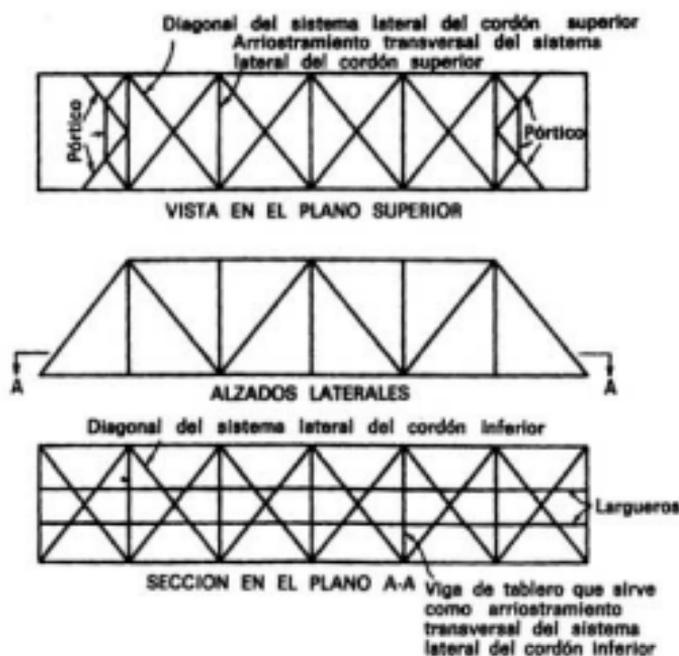


FIG. 1.9. Sistema de arriostramiento lateral de cuchillos con tablero superior.

de ciertos límites admisibles, adoptados para el material que se utilice. Estos valores límites que se admiten son los llamados *tensiones admisibles*¹.

En todo problema práctico hay siempre cierta ambigüedad en lo referente a las dimensiones físicas que se han de utilizar para los cálculos. Las varias suposiciones que pueden hacerse para solventar esta dificultad tienen, evidentemente, un marcado efecto sobre los valores calculados. Por ello, las especificaciones no solo dan valores de tensiones admisibles, sino que definen también ciertos aspectos en los que se deben comparar con los producidos por las cargas de proyecto. Por ejemplo, tomemos una sección transversal por una barra estructural que pasa por los remaches. Como un remache bien ejecutado está apretado y llena todo el agujero, se acostumbra a suponer que, al transferir esfuerzos de compresión, la barra no está debilitada por los remaches. El área de la sección transversal, sin deducir la sección de los agujeros de los remaches, se llama el «área total». Sin embargo, aunque los remaches estén bien realizados, no se acostumbra a suponer que los esfuerzos de tracción se pueden transferir a través de los agujeros. El área de la sección transversal, disminuida en la de los agujeros para los remaches que están situados en la zona en que hay tracción, se llama «área neta». Al

¹ Aquí, *tensión* (o *intensidad de esfuerzo*) significa fuerza por unidad de superficie, como kilos por centímetro cuadrado. El uso de este término no es uniforme en la literatura de la ingeniería de estructuras. A veces, por ejemplo, la fuerza total de tracción o compresión que actúa en la sección de una barra de una cercha, se conoce por *esfuerzo* en la barra. En la primera edición de este libro, para evitar la confusión, los autores decidieron usar el término *intensidad de esfuerzo* para expresar la fuerza por unidad de superficie, y *esfuerzo* para la fuerza total en una sección. Esto no demostró ser tan útil como se esperaba, por lo que en esta segunda edición se llama *tensión* a la fuerza por unidad de superficie, y *fuerza*, el total de los esfuerzos integrados sobre la superficie de la sección.

definir las tensiones admisibles, es necesario decir a cuál de las áreas (o secciones) son aplicables.

En construcciones remachadas, el agujero del remache tiene 1,5 mm aproximadamente ($\frac{1}{16}$ de pulgada) de diámetro más que el propio remache, y se supone que el material taladrado resulta perjudicado en otros 1,5 mm más que el agujero mismo. Así, al calcular las áreas netas, se toma el diámetro efectivo del agujero como 3 mm mayor que el del remache.

Las siguientes tensiones admisibles para el acero de estructuras¹ son las especificadas por la AISC para edificios de acero, traducidas a kilogramos por centímetro cuadrado:

<i>Tracción: Acero estructural, sección neta</i>	1.400	
Remaches, con el área basada en el diámetro nominal	1.400	
Pernos y otras partes roscaadas, con el área nominal del fondo de la rosca	1.400	
<i>Compresión: Columnas, área total</i>		
Para columnas cargadas axialmente con valores de l/r no mayores de 120	$1.200 - 0,034 \frac{l^2}{r^2}$	
Para columnas cargadas axialmente con valores de l/r mayores de 120	$\frac{1.260}{1 + (l^2/18.000r^2)}$	
siendo l la longitud de la columna sin arriostramientos y r el radio de giro correspondiente de la sección, ambos en centímetros		
<i>Flexión (basada en el momento de inercia total): Tracción en las fibras extremas de perfiles laminados, platabandas y barras compuestas</i>	1.400	
<i>Compresión en las fibras extremas de perfiles laminados, platabandas y barras compuestas,</i>		
con ld/bt no mayor de 600	1.400	
con ld/bt mayor de 600	$\frac{840.000}{ld/bt}$	
siendo l la longitud libre, y d la altura de la barra; b la anchura y t el espesor de la cabeza de compresión, todos en centímetros		
<i>Covariante: Remaches</i>	1.050	
Pasadores, y pernos torneados, en agujeros fresados o taladrados	1.050	
Pernos sin tornear	700	
Almas de vigas y platabandas, sección total	910	
	<i>Cizallamiento</i>	<i>Cizallamiento</i>
	<i>doble</i>	<i>sencillo</i>
<i>Apoyos: Remaches</i>		
Pernos torneados en agujeros fresados o taladrados	2.800	2.250
Pernos no torneados	2.800	2.250
Pasadores	1.750	1.400
Superficies de contacto		
Rigidizadores fresados y otras superficies fresadas		2.110
Rigidizadores ajustados		1.900

Los valores de las tensiones admisibles para el acero de estructuras de puentes de carretera y ferrocarril varían algo respecto a los anteriores. Para estos valores se envía

¹ Obsérvese que la tensión de fluencia mínima especificada para el acero al carbono (acero A-7 ASTM) es 2.300 kg/cm².

al estudiante a las especificaciones de la AASHO y la AREA, respectivamente. En varias especificaciones y manuales se encuentran las tensiones admisibles para el hormigón, madera y otros materiales para estructuras.

1.23 Coeficiente de seguridad. En el preámbulo, se ha hecho observar que se eligen los valores de las tensiones admisibles en el método elástico tradicional, de modo que se tenga un *margen de seguridad* para no exceder de los esfuerzos o deformaciones correspondientes al límite de fluencia del material que se usa. Indudablemente, se puede modificar la elección de las tensiones admisibles, hipótesis de cargas y otras limitaciones del proyecto, por la consideración de la posibilidad de fallo debida a la fatiga, pandeo o rotura frágil, o por las flechas admisibles. Si, en virtud de las hipótesis hechas, se ha proyectado una estructura para que utilice exactamente la tensión de tracción admisible de 1.400 kg/cm^2 del acero para estructuras con una tensión de fluencia de 2.300 kg/cm^2 , el margen de seguridad (o *coeficiente de seguridad*) previsto contra la fluencia de tracción es 1,65 (esto es, $2.300/1.400$).

Es obvio que en la realidad no se puede definir este margen de seguridad con tanta precisión. No pueden predecirse o definirse con mucha exactitud las cargas que actúan sobre una estructura, especialmente las de algunos tipos. Siempre se hacen ciertas hipótesis simplificadoras en el estudio de los esfuerzos, de modo que aun para las cargas supuestas las tensiones calculadas no son exactas. Aunque se ponga cuidado en la fabricación de los materiales estructurales empleados, existen algunas variaciones en sus propiedades, aun cuando sean nuevos. Con el paso del tiempo, debe esperarse una desintegración parcial. Por tanto, hay siempre alguna variación entre las tensiones supuestas para la estructura y aquellas en que comienza a ceder. Así, idealmente, debe estudiarse el margen de seguridad de un modo estadístico para asegurarse de que hay una probabilidad satisfactoriamente pequeña de que las variaciones posibles en las tensiones calculadas sobrepasen a la posible variación de la tensión de fluencia.

Tradicionalmente se define el coeficiente de seguridad en la forma ya enunciada. Esto es, el coeficiente de seguridad contra la fluencia es la relación entre la tensión de fluencia del material empleado y la tensión admisible. Esto es un modo tosco de tratar esta materia. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que los coeficientes de seguridad que intervienen en las especificaciones corrientes reflejan años de experiencia durante los cuales se han comparado los procedimientos de proyectar con el comportamiento real de las estructuras, generalmente comportamientos con éxito, pero algunas veces sin él¹.

Las magnitudes de los *coeficientes de cargas* utilizados en los métodos plásticos dependen de las mismas consideraciones hechas antes para los coeficientes de seguridad.

1.24 Estructuras prácticas e ideales. Raramente, si es que sucede alguna vez, una estructura real coincide con la idealizada que se considera en el estudio. Los materiales de que está construida no tienen las propiedades supuestas exactamente, ni corresponden totalmente las dimensiones con sus valores teóricos. Los detalles estructurales, como las barras de enlace y chapas de cartela, introducen efectos que pueden hacer que el estudio sea realmente muy complicado; pero como tienen muy poco efecto, normalmente se desprecian al estudiar las tensiones en los elementos. A causa de la anchura de las barras puede existir notable diferencia entre las luces libres y las luces entre ejes que se utilizan habitualmente en el cálculo. Los detalles de soporte pueden variar considerablemente del tipo ideal supuesto para el estudio. Puede que una barra no sea prismática, aunque se la suponga así en los cálculos.

Por ejemplo, la estructura práctica de la Fig. 1.10a se puede estudiar tomando como

¹ Ver la discusión de la pág. 28 del Preámbulo.

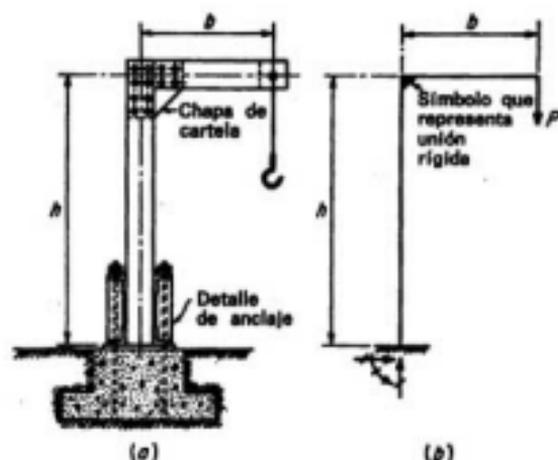


FIG. 1.10. Estructura idealizada.

base la estructura idealizada de la Fig. 1.10b, en que se supone que la zapata está perfectamente empotrada, aunque puede no ser así en la realidad; se han ignorado el área adicional de la columna en el detalle de anclaje y la chapa de cartela; se ha supuesto esta chapa como si fuera una unión verdaderamente rígida, mientras que en la realidad permitirá algún cedimiento por giro entre la columna y la viga horizontal; se ha tomado para altura de la columna la distancia entre la parte alta de la placa de apoyo y el eje de la viga, y la luz de esta viga se ha medido desde el eje de la columna al eje de la carga aplicada.

Es necesario idealizar una estructura para hacer un análisis práctico. Para determinar la estructura idealizada a utilizar en cada caso, se necesita experiencia y buen juicio. En estructuras importantes, en que existan dudas sobre los supuestos más lógicos a hacer al esquematizar la estructura, es aconsejable a veces calcular las tensiones a base de más de un tipo posible y hacer el proyecto para resistir los esfuerzos correspondientes a todos los estudios.

1.25 Problemas para resolver

Problema 1.1 Una viga apoyada en los extremos, con una luz de 15 m, tiene una carga fija de 750 kg/ml y una sobrecarga de 900 kg/ml. La carga fija actúa sobre toda la longitud de la viga, y el máximo momento, debido a la sobrecarga, en el centro, tiene lugar cuando dicha sobrecarga actúa sobre toda la luz.

a) Suponiendo que la intensidad de la carga fija varía directamente con la luz, mientras que la sobrecarga permanece constante, calcular el momento máximo (carga y sobrecarga) en el centro del vano para luces que varían de 6 a 30 m con intervalos de 3 m.

b) Suponiendo que, usando aleaciones ligeras, se reduce la carga fija en el 40 por 100, ¿cuál es el porcentaje de la reducción del momento total en el centro del vano para cada una de las luces dadas en a)?

***Problema 1.2** Calcular los momentos de impacto del Prob. 1.1a de acuerdo con las especificaciones de la AASHO.

***Problema 1.3** La Fig. 1.11 representa el pórtico de un edificio industrial. Estos pórticos están separados 6 m entre ejes. Determinar las cargas de viento para las que hay que calcular un pórtico intermedio, basando la determinación de cargas para superficies verticales en las

especificaciones de la AISC y las cargas para superficies inclinadas en las de la ASCE para una velocidad de viento de 160 km/h.

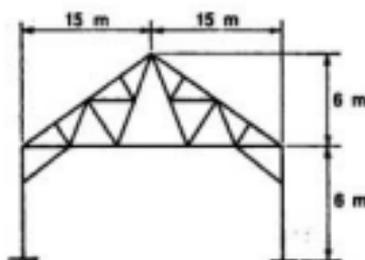


FIG. 1.11. Problema 1.3.

Problema 1.4 a) Considerando una faja de 1 m en la presa de la Fig. 1.12, determinar el momento, en el punto *a*, de la presión hidrostática total que actúa en la cara de aguas arriba de la presa.

b) La presa de la Fig. 1.12 está sometida a un terremoto que produce aceleraciones de la cimentación de 0,1*g*. Tratando la presa como un cuerpo rígido y suponiendo que el depósito está vacío, determinar el momento, en *a*, de las fuerzas laterales a que está sometida una faja de presa de 1 m.

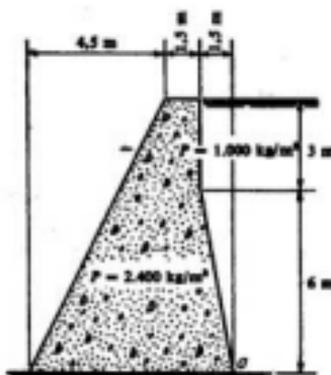


FIG. 1.12. Problema 1.4.

***Problema 1.5** La cabeza de compresión de una viga está formada por dos angulares de $120 \times 120 \times 12$ cada uno y una platabanda de 350×12 . La viga tiene 3 m de alta. Tiene una luz de 30 m, y la cabeza superior está arriostrada lateralmente a intervalos de 5 m. De acuerdo con las especificaciones AISC, ¿qué esfuerzo se admitirá para calcular su cabeza de compresión?

* Un asterisco delante del número de un problema indica que su respuesta figura en la sección de Respuestas al final del libro.

2

Reacciones

2.1 Definiciones. La mayor parte de este libro está dedicada a las llamadas *estructuras planas*, esto es, estructuras que puede considerarse que están en un plano que contiene también las líneas de acción de todas las fuerzas que actúan en las mismas. Estas estructuras son, con mucho, las más comunes. El análisis de las estructuras tridimensionales o espaciales no contiene ningún principio fundamental nuevo, respecto de los que se necesitan para el estudio de las planas, pero los cálculos numéricos resultan

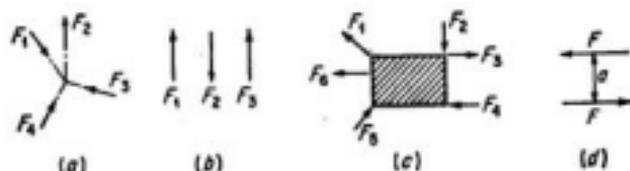


FIG. 2.1. Sistemas de fuerzas coplanarias.

mucho más complicados, por las características geométricas introducidas por la tercera dimensión. Por estas razones, se prestará atención a las estructuras planas y se dedicará un estudio limitado sobre las espaciales al final del libro.

Como la discusión de este capítulo está limitada a las estructuras planas, los sistemas de fuerzas se llamarán *sistemas de fuerzas coplanarias*, esto es, formados por varias fuerzas cuyas líneas de acción están en un plano. Algunos de estos sistemas tienen características especiales, y será conveniente clasificarlos en consecuencia, e identificarlos por medio de nombres especiales.

En la Fig. 2.1a está representado un *sistema de fuerzas coplanarias concurrentes*. Este sistema consta de varias fuerzas, cuyas líneas de acción se cortan en un punto común. Un *sistema de fuerzas coplanarias paralelas* consta de varias fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas, como se ve en la Fig. 2.1b. Un *sistema general de fuerzas coplanarias* consta de varias fuerzas cuyas líneas de acción van en varias direcciones y no se cortan en un punto común, como se ve en la Fig. 2.1c. Otro sistema importante, el par, está representado en la Fig. 2.1d. Un *par* consta de dos fuerzas iguales, paralelas y opuestas, que no tienen una línea de acción común.

Como en una estructura plana las líneas de acción de todas las fuerzas están en el mismo plano que ella, cada una de las fuerzas F puede descomponerse en dos componentes F_x y F_y , donde los ejes de referencia x y y se pueden tomar en cualquier dirección con tal que no coincidan. Es aconsejable, casi siempre, elegir ejes x e y perpendicu-

lares entre sí, en cuyo caso a F_x y F_y se les llama componentes rectangulares. Además, generalmente es más conveniente tomar el eje x horizontal y el y vertical.

2.2 Generalidades. Apoyos. La mayoría de las estructuras están obligadas, parcial o totalmente, a no poderse mover libremente en el espacio. Tales restricciones al libre movimiento de un cuerpo se llaman sujeciones y son proporcionadas por apoyos que unen la estructura a algún cuerpo estacionario. Por ejemplo, consideremos una estruc-

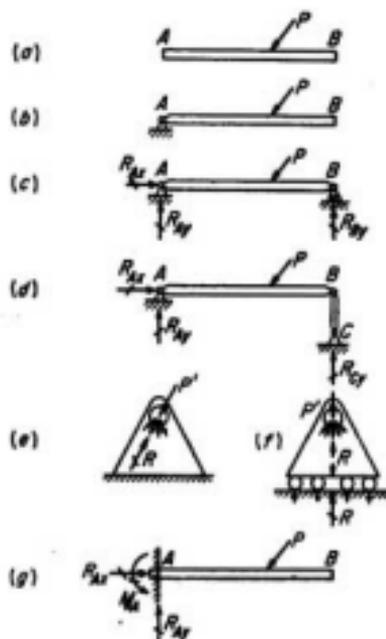


FIG. 2.2. Reacciones de apoyo.

tura plana tal como la barra AB de la Fig. 2.2. Si esta barra fuese un cuerpo libre, y actuara sobre ella una fuerza P , se movería libremente en el espacio con algún movimiento compuesto de traslación y rotación. Sin embargo, si se introduce una sujeción en forma de una articulación que una la barra a algún cuerpo fijo, en el punto A , el movimiento de la barra estará limitado parcialmente y solo podrá consistir en un movimiento giratorio alrededor de la articulación. Durante este giro, el punto B se moverá en un arco con A como centro. Instantáneamente podría considerarse que el punto B se moviera normal a la línea AB o, en este caso, verticalmente.

Por tanto, si se introdujera otra sujeción que no permitiera al punto B moverse instantáneamente en sentido vertical, se evitaría el giro alrededor de la articulación en A y se limitaría completamente el libre movimiento de la barra. Es evidente que este tipo de sujeción lo producirían los apoyos representados en B en c o d de la Fig. 2.2.

Los apoyos en A y B , al limitar el movimiento libre de la barra, deben resistir la acción que la fuerza P ejerce sobre ellos a través de la barra. Las resistencias que oponen, para contrarrestar la acción de la barra sobre ellos, se llaman reacciones. Por tanto, el efecto de los apoyos se puede sustituir por las reacciones que transmiten a la estructura.

En las discusiones futuras será necesario tratar continuamente con las reacciones

que producen distintos tipos de apoyos y, por tanto, será conveniente utilizar un símbolo convencional para describir estos distintos tipos. Un apoyo articulado como el de la Fig. 2.2e se representa por el símbolo . En este apoyo, si se supone que el pasador de la articulación no tiene rozamiento, las presiones de contacto entre el pasador y su agujero serán normales a la superficie de contacto e irán dirigidas hacia el centro del pasador. La reacción R que transmite el apoyo a la estructura debe contrarrestar totalmente la acción de la fuerza P , por lo que R y P deben ser colineales y numéricamente iguales, pero opuestas entre sí. Es evidente, por tanto, que un apoyo articulado transmite una fuerza reactiva cuya línea de acción se sabe que pasa por el centro del pasador de la articulación, pero cuya dirección y magnitud son desconocidas¹. Estos dos elementos desconocidos de dicha reacción se pueden representar también por las magnitudes desconocidas de sus componentes vertical y horizontal, R_x y R_y , respectivamente, que actúan ambas en el centro del pasador.

Un apoyo de rodillos, como el representado en la Fig. 2.2f, está representado por el símbolo  o por el . Del mismo modo que antes, puede razonarse que la fuerza reactiva de un apoyo de rodillo debe ir dirigida por el centro del pasador. Sin embargo, además, si los rodillos no tienen rozamiento, solo pueden transmitir una presión normal a la superficie en que ruedan. Por ello, un apoyo de rodillos da una fuerza reactiva resultante que actúa normalmente a la superficie en la que ruedan los rodillos, y que pasa por el centro del pasador de la articulación. Por tanto, es evidente que un apoyo de rodillos da una fuerza reactiva aplicada en un punto conocido que actúa en una dirección conocida, pero cuya magnitud es desconocida. Los apoyos de rodillos se proyectan usualmente para que puedan dar una reacción que actúe o desde o hacia la superficie de apoyo.

Consideraciones sobre el apoyo de biela BC , representado en la Fig. 2.2d, demuestran que para movimientos pequeños reproduce eficazmente la acción del soporte de rodillos que se muestra en B en la Fig. 2.2c. Por el mismo razonamiento anterior, se puede ver que si los pasadores de los extremos de la biela no tienen rozamiento, la fuerza transmitida debe actuar a través de los centros de los pasadores de cada extremo. Por tanto, un apoyo de biela da una reacción de dirección conocida, con punto de aplicación conocido, pero de magnitud desconocida. Este soporte se representa por el símbolo .

Otro tipo corriente de apoyo usado para estructuras planas es el representado en A , Fig. 2.2g, llamado empotramiento. Este apoyo empotra a la barra, de modo que se evitan la traslación y el giro del extremo. Por tanto, un apoyo de empotramiento da una reacción cuyas magnitud, punto de aplicación y dirección son desconocidos. Pueden considerarse estos tres elementos desconocidos como una fuerza que actúa en un punto específico, pero tiene una magnitud y dirección desconocidas, y un par de magnitud desconocida. Por ejemplo, se pueden elegir los tres elementos desconocidos como un par y una fuerza horizontal y una vertical, actuando estas dos últimas en el centro de gravedad de la sección extrema. Un empotramiento se representa por el signo .

Las fuerzas exteriores que actúan en un cuerpo son, por tanto, de dos tipos distintos —las fuerzas aplicadas P (representadas así: \rightarrow) y las reacciones R (representadas

¹ De acuerdo con esta terminología, la «dirección de una fuerza» define la inclinación de su línea de aplicación, mientras la «magnitud» indica no solo su valor numérico, sino también el sentido en que actúa en su línea de aplicación, esto es, si desde o hacia el cuerpo.

por \rightarrow). Una fuerza reactiva en un apoyo a se designará por R_a , mientras a sus componentes x e y se les llamará R_{ax} y R_{ay} . Un par reactivo en el apoyo a se llamará M_a .

2.3 Ecuaciones del equilibrio estático. Estructuras planas. Si se supone que se sustituyen los apoyos de una estructura plana por las reacciones que transmiten, sobre la estructura actuará un sistema general de fuerzas coplanarias, constituido por las fuerzas aplicadas conocidas y las reacciones desconocidas. En general, el efecto resultante de un sistema general de fuerzas coplanarias puede ser o una fuerza resultante que actúa en algún punto y alguna dirección del plano, o un par resultante.

Un cuerpo que está inicialmente en reposo, y permanece en este estado cuando actúa sobre él un sistema de fuerzas, se dice que está en un estado de equilibrio estático. Para que exista tal estado es necesario que el efecto resultante combinado de fuerzas no sea ni una fuerza ni un par; en otro caso habrá tendencia al movimiento del cuerpo. Para que el efecto resultante de un sistema general de fuerzas que actúa en una estructura plana no sea equivalente a una fuerza, es necesario que la suma algebraica de todas las componentes F_x sea igual a cero, y, del mismo modo, que sea igual a cero la suma algebraica de todas las componentes F_y . Para que el efecto resultante no sea equivalente a un par, es necesario que la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto a un eje normal al plano de la estructura sea también igual a cero. Por tanto, las cargas y reacciones de una estructura plana deben cumplir las tres condiciones siguientes para que permanezca en equilibrio estático:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0 \quad (2.1)$$

Estas son las llamadas *ecuaciones del equilibrio estático* de una estructura plana sometida a un sistema general de fuerzas.

En el caso particular en que sobre una estructura plana actúa un sistema de cargas y reacciones concurrentes, es imposible que el efecto resultante del sistema sea un par, porque las líneas de acción de todas las fuerzas deben cortarse en un punto. Por tanto, para que en tal caso permanezca la estructura en equilibrio estático, es necesario solamente que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.2)$$

Estas son las ecuaciones del equilibrio estático para el caso particular de una estructura sometida a un sistema de fuerzas concurrentes.

En las discusiones que siguen, muchas veces a las barras de la estructura se les llamará *cuerpos rígidos*. En sentido exacto, un cuerpo rígido es uno en el que no hay ningún movimiento relativo entre sus partículas. Evidentemente, ninguna barra de estructura es nunca absolutamente rígida, pues está hecha de materiales que se deforman ligeramente bajo las cargas que se le aplican. Sin embargo, tales deformaciones son tan ligeras que las variaciones de dimensión, las desviaciones de las líneas de acción de las fuerzas, etc., pueden despreciarse de ordinario en el estudio de las condiciones de equilibrio del cuerpo. Así, en la mayoría de los problemas, al aplicar las ecuaciones del equilibrio estático a las barras de la estructura, se supondrá que son cuerpos rígidos para todos los fines prácticos y, por tanto, que las características geométricas después de la aplicación de las cargas son esencialmente las mismas que antes.

2.4 Ecuaciones de condición. Muchas estructuras están constituidas simplemente por un cuerpo rígido —una cercha, un pórtico o una viga— inmovilizado en el espacio por un cierto número de apoyos. Sin embargo, a veces puede estar formada por varios

cuerpos rígidos parcialmente unidos entre sí de algún modo, estando montado el conjunto en un cierto número de apoyos. En cualquiera de los tipos de estructura, el sistema de fuerzas constituido por las cargas y reacciones debe satisfacer las condiciones del equilibrio estático, si ha de permanecer en reposo. En el último tipo de estructura, los detalles del método de construcción utilizado para unir entre sí los elementos separados, pueden añadir más limitaciones en el sistema de fuerzas que actúan en la estructura. Las partes separadas han de unirse de algún modo por articulaciones, bielas o rodillos, y en cada caso estos detalles pueden transmitir solo un cierto tipo de fuerza de una parte de la estructura a la otra.

La Fig. 2.3 es un ejemplo de este tipo de estructura. Está compuesta por dos barras rígidas ab y bc unidas entre sí por una articulación sin rozamiento en el punto b y sustentada por apoyos articulados en los puntos a y c . Como una articulación sin rozamiento no puede transmitir un par, su inserción impone la condición de que la acción

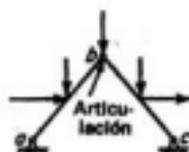


FIG. 2.3. Arco tri-articulado.

de una parte de la estructura sobre la otra, unida a ella por la articulación, solo puede consistir en una fuerza que actúe en el centro del pasador. Por tanto, la suma algebraica de los momentos de las cargas y reacciones aplicadas a cualquiera de las partes de la estructura, tomados respecto a un eje por el centro del pasador, debe ser igual a cero. Estas condiciones introducidas por el método de construcción (aparte de la forma en que estén organizados los apoyos) producen las llamadas *ecuaciones de construcción o condición*.

2.5 Estabilidad e inestabilidad estática. Estructuras estáticamente determinadas e indeterminadas que no tienen ecuaciones de condición. Consideramos primero una estructura plana sobre la que actúa un sistema general de cargas y en la que no se han introducido ecuaciones de construcción. Si se sustituyen los apoyos por las reacciones que aplican a la estructura, actuará sobre ella un sistema general de fuerzas constituido por las cargas conocidas y las reacciones desconocidas. Si la estructura está en equilibrio estático bajo estas fuerzas, pueden escribirse las tres ecuaciones del equilibrio estático en función de las cargas conocidas y los elementos desconocidos que definen las reacciones. La resolución del sistema de tres ecuaciones determinará en ciertos casos la magnitud de los elementos de reacción desconocidos. Tanto si son suficientes estas ecuaciones para la total determinación de las reacciones como si no lo son, deben ser satisfechas por la estructura para estar en equilibrio estático, y, por tanto, forman una base parcial para obtener las reacciones de cualquier estructura en este estado de equilibrio.

Si hay menos de tres reacciones independientes desconocidas, no hay suficientes incógnitas para satisfacer las tres ecuaciones del equilibrio estático simultáneamente. Por tanto, menos de tres elementos de reacción desconocidos son insuficientes para mantener en equilibrio una estructura plana cuando actúa sobre ella un sistema general de fuerzas. En estas condiciones se dice que la estructura es estáticamente inestable.

En ciertos casos particulares, una estructura plana que tiene menos de tres elementos de reacción independientes desconocidos, puede estar en equilibrio estático. Evi-

dentemente, si el sistema de cargas aplicadas que actúan sobre la estructura está en equilibrio él mismo, no se necesitan reacciones; igualmente, si las cargas y reacciones tienen ciertas características mutuas, pueden ser suficientes para el equilibrio menos tres elementos de reacción. Por ejemplo, considerando la barra de la Fig. 2.2b, si el efecto resultante de las cargas aplicadas es una fuerza cuya línea de acción pasa por el centro del pasador en el punto A , las fuerzas que actúan sobre la estructura son concurrentes y las componentes horizontal y vertical de la reacción en A serán capaces de mantener el equilibrio estático. Además, si la barra estuviera apoyada en los dos puntos A y B por medio de rodillos que rodasen sobre las superficies horizontales, las reacciones producidas por tales apoyos podrían mantener en un estado de equilibrio estático cualquier sistema de cargas aplicadas cuyo efecto resultante sea un par o una fuerza vertical. Estas estructuras, que son estables bajo tipos de carga particulares e inestables en el caso general, se dice que están en *equilibrio inestable* y se clasifican como estructuras inestables.

Como, de la resolución de un sistema de tres ecuaciones, se pueden hallar tres incógnitas, pueden obtenerse las reacciones de una estructura plana estable que tiene exactamente tres elementos de reacción, resolviendo el sistema de las tres ecuaciones del equilibrio estático. En este caso, se dice que las reacciones de la estructura son *estáticamente determinadas*. Por el contrario, si hay más de tres elementos de reacción independientes desconocidos en una estructura plana estable, no son suficientes las tres ecuaciones del equilibrio estático para determinarlas. Esto es evidente, pues pueden asignarse valores arbitrarios a todas las incógnitas menos tres y luego hallar los tres restantes resolviendo el sistema de ecuaciones. En estos casos, hay un número infinito de conjuntos de valores de las reacciones desconocidas que pueden satisfacer las condiciones del equilibrio estático. Por tanto, no pueden determinarse los valores correctos de las reacciones solamente con las tres ecuaciones, sino que deben satisfacer además ciertas condiciones de deformación de la estructura, como veremos más adelante. Si no se pueden determinar los elementos de reacción desconocidos solamente por las ecuaciones del equilibrio estático, se dice que las reacciones de la estructura son *estáticamente indeterminadas*. Entonces se dice que la estructura es *indeterminada con un grado de indeterminación igual al número en el cual las incógnitas exceden de las ecuaciones de la estática disponibles*.

De la discusión anterior puede deducirse que son necesarios al menos tres elementos de reacción independientes para satisfacer las condiciones del equilibrio estático de una estructura plana sobre la que actúa un sistema general de cargas. Pero puede demostrarse fácilmente que tres o más elementos no son siempre suficientes, por lo que una estructura plana que tiene tres o más elementos de reacción independientes puede ser aún inestable. Esta es la razón por la que se hablaba en el párrafo anterior de una estructura plana estable.

La cuestión de la suficiencia de las reacciones para la estabilidad puede estudiarse por medio de una ampliación del método utilizado en la primera parte de la Sec. 2.2. Por ejemplo, las barras representadas en la Fig. 2.2c y d son estables cuando están sustentadas por las componentes horizontal y vertical de la reacción en A y la reacción vertical en B . Estas estructuras son equivalentes a la representada en la Fig. 2.4, en que se ha sustituido el apoyo de articulación por dos bielas unidas al pasador de la articulación A . Estas dos bielas pueden estar en cualquier dirección, mientras no sean colineales. Esta estructura será estable siempre que la línea de acción de la biela de B no pase también por el centro del pasador de A . Si esta línea de acción pasa por A , la estructura estará solo parcialmente inmovilizada y, por tanto, será inestable bajo el sistema general de cargas, porque no habrá nada que evite la rotación instantánea alrededor de la articulación en A . En estos casos, en que hay un número suficiente de elementos de reacción,

pero la disposición geométrica es tal que la estructura es inestable, se dice que ésta es geoméricamente inestable.



FIG. 2.4. Estructura estable.



FIG. 2.5. Estructura geoméricamente inestable.

Vamos a ver otro caso en que no son suficientes tres elementos de reacción independientes para la estabilidad. Consideremos una barra sustentada por tres bielas paralelas, como se ve en la Fig. 2.5. Está claro que no hay limitación que evite una pequeña traslación de la estructura normal a la dirección de las bielas. Por tanto, si el efecto resultante de las cargas aplicadas tiene una componente en esta dirección, se producirá un movimiento y tal estructura se clasificará como geoméricamente inestable. Estas y otras consideraciones similares conducen a la conclusión siguiente: *Si las reacciones son equivalentes a las producidas por un sistema de tres o más apoyos de biela concurrentes o paralelos, no son suficientes para mantener el equilibrio estático de una estructura plana sometida a un sistema general de cargas aun si hay tres o más elementos de reacción desconocidos. En otras palabras, la estabilidad de una estructura está determinada no solo por el número de los elementos de reacción, sino también por su disposición.*

Se observará que las estructuras inestables que tienen tres o más elementos de reacción independientes, normalmente se pueden clasificar como estáticamente indeterminadas. Consideremos la estructura representada en la Fig. 2.5. Mientras que es inestable y comienza a trasladarse horizontalmente bajo la carga P , no está completamente sin fijar. Instantáneamente, la barra se traslada horizontalmente y las tres bielas giran alrededor de los puntos A' , B' y C' , respectivamente. Después de una rotación finita de las bielas, los puntos A , B y C se habrán movido tanto verticalmente como horizontalmente. Solo puede efectuarse un movimiento vertical de esos puntos haciendo que la barra AC flexe y se alarguen las bielas. La posición final de equilibrio está determinada no solo por las características geométricas de la estructura, sino también por su deformación elástica debida a las tensiones desarrolladas en las bielas y la barra. En esta posición final, las bielas se habrán movido en rotaciones finitas tales que la suma algebraica de las componentes horizontales de las fuerzas interiores en las bielas sea igual a la componente horizontal de la carga. Por tanto, el análisis de esta estructura en su posición final de equilibrio comprende no solo las ecuaciones del equilibrio estático, sino también sus propiedades de deformación, por lo que se puede clasificar la estructura como estáticamente indeterminada. La estructura de la Fig. 2.4 cae también en la misma categoría, si la línea de acción de la biela B pasa por la articulación en A .

Si sobre la estructura representada en la Fig. 2.5 actuase un sistema de cargas verticales, no habría tendencia a moverse horizontalmente, por lo que la estructura estaría en equilibrio inestable. En tal caso, se observará que las reacciones son también estáticamente indeterminadas.

2.6 Estabilidad y determinación de estructuras que tienen ecuaciones de condición.

Hasta aquí se ha limitado la discusión a las estructuras en las que no se ha introducido ninguna ecuación de condición especial. Sin embargo, si se introducen tales ecuaciones de condición en una estructura plana, se añade un cierto número de ecuaciones a las

de la estática. Es, pues, necesario que las cargas y reacciones que actúan en la estructura satisfagan simultáneamente a las ecuaciones del equilibrio estático y a las de condición. Si el número de elementos de reacción desconocidos es menor que el número total de ecuaciones, la estructura es estáticamente inestable o, posiblemente, está en equilibrio inestable para ciertas condiciones particulares de carga. Si el número de elementos de reacción es mayor que el número total de ecuaciones, se clasifica la estructura como estáticamente indeterminada. Por el contrario, si hay el mismo número de elementos de reacción que de ecuaciones, la estructura es estáticamente determinada, con tal que las reacciones no estén situadas de modo que sea posible la inestabilidad geométrica.

Puede verse fácilmente esta condición de inestabilidad, considerando una estructura del tipo representado en la Fig. 2.3. Esta estructura es realmente estable; pero si la articulación en b está en la recta que une los puntos a y c , no habrá limitación al giro instantáneo de las barras ab y bc alrededor de los puntos a y c , respectivamente. Después de una cierta rotación finita de las dos barras, se desarrollarán en ellas fuerzas de tracción que, teniendo en cuenta la nueva inclinación de las mismas, tendrán componentes verticales que mantendrán a la carga P en equilibrio. El cálculo de la posición de equilibrio del nudo b y las fuerzas de tracción resultantes que se han desarrollado, entraña la consideración de las propiedades de deformación de la estructura. Por tanto, esta estructura no solo es inestable en su posición original, sino también estáticamente indeterminada.

Una inestabilidad geométrica similar a la que se acaba de ver ocurrirá generalmente cuando se introduzcan ecuaciones de construcción en una estructura originalmente estable. Por tanto, es evidente que hay que tener cuidado al introducir articulaciones, etcétera, para que no se produzca inestabilidad geométrica. Tal condición podrá comprobarse siempre, porque la resolución simultánea de las ecuaciones del equilibrio estático y las de condición conducirá a valores imposibles, infinitos, o indeterminados para los elementos de reacción desconocidos¹.

2.7 Esquemas de cuerpos libres. En el estudio anterior se ha visto que los elementos de reacción desconocidos de una estructura estáticamente determinada y estable se pueden calcular por medio de la resolución del sistema de las ecuaciones de equilibrio estático, aumentadas, en ciertos casos, por las de condición. Todas las ecuaciones contienen alguna, o todas, las fuerzas que actúan en la estructura, incluyendo las cargas aplicadas y las reacciones que producen los apoyos. Para ayudar a formular estas ecuaciones es aconsejable dibujar los llamados *esquemas de cuerpos libres* de toda la estructura o de alguna de sus partes. Nunca se recalcará con exceso a los estudiantes la importancia de dibujar un número suficiente de estos esquemas. Son la base del análisis eficaz de los esfuerzos de la estructura. El estudiante debe pensar que *es imposible dibujar demasiados esquemas de cuerpos libres* y que el tiempo invertido al hacerlo no es jamás tiempo perdido.

Se dibuja un esquema de cuerpo libre de toda la estructura aislándola de sus apoyos y mostrando todas las cargas aplicadas y las componentes de reacción que pueden transmitirle los apoyos. Tal esquema está representado en la Fig. 2.7b. Del mismo modo, puede aislarse cualquier parte de la estructura trazando una sección por donde se desee, y dibujando el esquema de cuerpo libre que represente la parte aislada con las cargas y reacciones aplicadas, junto con cualquier fuerza que pueda actuar en las caras de las barras cortadas por la sección que la separa. Cualquier fuerza, cuya magnitud sea desconocida, se puede suponer que actúa en cualquier sentido, a lo largo de su línea de

¹ Para una discusión de este tema, ver W. M. Fife y J. B. Wilbur, «Theory of Statically Indeterminate Structures», art. 8, pág. 9, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1937.

acción. Cuando se haya determinado en la solución la magnitud de tal fuerza, si el signo es positivo, actúa en el sentido supuesto, y si es negativo, en el contrario.

A veces es de desear aislar varias partes de la estructura y trazar esquemas de cuerpo libre de esas partes. En tales casos es necesario mostrar las fuerzas internas que actúan en las caras interiores que aparecen al aislar la sección. Si se trazan esquemas de cuerpo libre para dos secciones adyacentes de la estructura y se ha supuesto que las fuerzas internas actúan en un cierto sentido en una cara interior de una de las partes, hay que suponer que las mismas fuerzas actúan con los mismos valores numéricos, pero en sentidos opuestos en la cara que coincide con ella, de la parte adyacente. Esto es evidente, pues la acción y la reacción de un cuerpo sobre otro deben ser iguales y de signos opuestos. En la Fig. 2.6 se muestran estos esquemas de cuerpos libres. Si no se sigue esta práctica, las ecuaciones del equilibrio estático escritas utilizando dos de estos esquemas no estarán de acuerdo entre sí y será imposible hallar soluciones correctas para

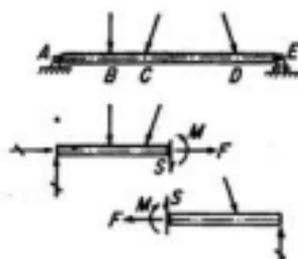


FIG. 2.6. Esquemas de cuerpos libres.

ellas. Es obvio que cualquier reacción particular que se supone que actúa en un cierto sentido en un esquema, debe figurar en el mismo sentido en los demás esquemas en que aparezca.

2.8 Cálculo de las reacciones. Si no se ha introducido ninguna ecuación de condición en una estructura estáticamente determinada, el cálculo de las reacciones no requiere más que la aplicación de las ecuaciones del equilibrio estático. Se aclaran estos cálculos considerando la viga simplemente apoyada de la Fig. 2.7a. Se pueden tomar para elementos de reacción desconocidos las componentes vertical y horizontal de la reacción en *A* y la componente vertical de la reacción en *D*, que puede suponerse que actúan como en el esquema de la Fig. 2.7b.

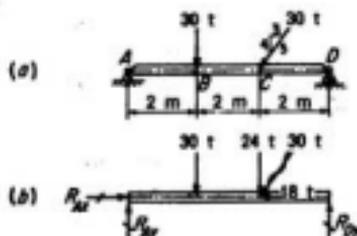


FIG. 2.7. Cálculo de las reacciones.

Para hallar estas tres incógnitas hay disponibles tres ecuaciones del equilibrio estático $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$, por lo que la estructura es estáticamente determi-

nada. Es posible escribir las tres ecuaciones siguientes del equilibrio estático y resolver el sistema, hallando las tres incógnitas R_{Ax} , R_{Ay} y R_{Dy} :

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, \rightarrow, R_{Ax} - 18 = 0 \\ \Sigma F_y &= 0, \uparrow, R_{Ay} + R_{Dy} - 30 - 24 = 0 \\ \Sigma M_C &= 0, \rightarrow, 4R_{Ay} - 2R_{Dy} - (30)(2) = 0\end{aligned}$$

Aunque tal solución es siempre posible, no es muy ingeniosa y no es eficaz, especialmente en una estructura complicada. Consideremos las ventajas de proceder como sigue: Tomando la suma de los momentos alrededor de un eje por el punto A , la única incógnita que entra en la ecuación es R_{Dy} , y será posible una solución directa.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0, \rightarrow, (30)(2) + (24)(4) - (R_{Dy})(6) = 0 \\ \therefore R_{Dy} &= 15\frac{2}{3} = 26 \text{ t } \uparrow\end{aligned}$$

Del mismo modo, puede hallarse directamente R_{Ay} de

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0, \rightarrow, (R_{Ay})(6) - (30)(4) - (24)(2) = 0 \\ \therefore R_{Ay} &= 18\frac{2}{3} = 28 \text{ t } \uparrow\end{aligned}$$

Evidentemente, estos valores deben satisfacer la ecuación $\Sigma F_y = 0$, teniéndose la comprobación siguiente:

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow, 28 + 26 - 30 - 24 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

De $\Sigma F_x = 0$ se obtiene directamente R_{Ax}

$$\Sigma F_x = 0, \rightarrow, R_{Ax} - 18 = 0 \quad \therefore R_{Ax} = 18 \text{ t } \rightarrow$$

Así, se ha facilitado el cálculo de las reacciones con el ingenio al aplicar las ecuaciones del equilibrio estático.

Para ampliar esta discusión, se observará que las tres ecuaciones clásicas del equilibrio estático $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ pueden sustituirse siempre por las ecuaciones independientes de momentos $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$ y $\Sigma M_C = 0$ cuando A , B y C son tres puntos que no están en línea recta. Esto puede comprobarse del siguiente modo: Si un sistema de fuerzas satisface alguna de estas ecuaciones de momentos, como $\Sigma M_A = 0$, el efecto resultante del sistema no puede ser un par, pero puede ser una fuerza que actúa en el punto A . Si el sistema satisface también la ecuación $\Sigma M_B = 0$, el efecto resultante del sistema puede seguir siendo una fuerza, pero en ese caso esta fuerza debe actuar según la recta que une los puntos A y B . Por el contrario, si además satisface también el sistema a la ecuación $\Sigma M_C = 0$ (no estando C en la recta que va de A a B), esto elimina la posibilidad de que exista la fuerza resultante que actúa en la recta AB . Por tanto, si el sistema satisface las tres ecuaciones de momentos, su efecto resultante no puede ser ni un par, ni una fuerza, y el sistema debe estar en una condición de equilibrio estático¹.

¹ Preguntas importantes:

1. Si se obtuvieran dos ecuaciones de momentos, primero de $\Sigma M_A = 0$ y luego de $\Sigma M_B = 0$, ¿se obtendría una tercera ecuación independiente sumando las componentes de las fuerzas perpendiculares a AB y haciendo esta suma igual a cero? ¿Por qué? Sumando las componentes de las fuerzas en cualquier otra dirección que la paralela a AB , ¿se obtendrá una ecuación independiente satisfactoria?

Este principio puede usarse a menudo con ventaja al escribir las ecuaciones del equilibrio estático, porque muchas veces es posible elegir un eje de momentos tal que solo intervenga un elemento de reacción desconocido en la suma de momentos respecto a este eje, lo que nos conduce a la resolución de esta incógnita. El estudiante debe ver los ejemplos aclaratorios de la Sec. 2.11 en relación con este artículo, pues hallará métodos para ordenar los cálculos y aplicar el método anterior general, con vistas a facilitar los cálculos numéricos.

2.9 Cálculo de las reacciones. Estructuras que tienen ecuaciones de condición. Siempre que se hayan introducido condiciones de construcción particulares en una estruc-

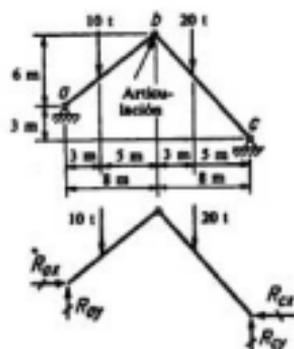


FIG. 2.8. Arco tri-articulado.

tura, el cálculo de las reacciones requiere las ecuaciones del equilibrio estático y las de condición. Aun cuando estas estructuras sean estáticamente determinadas, el cálculo de las reacciones es más difícil y necesita más ingenio que en los casos en que no se introducen ecuaciones de condición.

Para aclarar el método a seguir en tales casos, consideraremos la estructura de la Fig. 2.8. Esta estructura es de un tipo ya estudiado y puede demostrarse que es estáticamente determinado y estable. Hay cuatro elementos de reacción desconocidos, pero, además de las tres ecuaciones del equilibrio estático, está la ecuación de condición introducida por la articulación sin rozamiento en el punto b. Como se vio anteriormente (Sec. 2.4) tal articulación no es capaz de transmitir un par de la parte ab a la bc, ni viceversa. Es, pues, necesario que la suma algebraica de los momentos respecto a un eje por el punto b de todas las fuerzas que actúan en cada lado ab o bc sea igual a cero. Planteando esta condición,

$$\sum_{ab} M_b = 0 \quad \circ \quad \sum_{bc} M_b = 0$$

A primera vista, un estudiante puede deducir que esta articulación introduce dos ecuaciones de condición independientes, pero no es así. Solo se ha introducido una ecuación independiente, como puede demostrarse fácilmente por el razonamiento si-

2. Se ha visto que a veces se desea sustituir una ecuación de equilibrio de fuerzas por una de equilibrio de momentos en el caso de una estructura plana sometida a un sistema general de fuerzas. ¿Es válida la siguiente afirmación en el caso de una estructura plana sometida a un sistema de fuerzas concurrentes?

Las dos ecuaciones de equilibrio clásicas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ pueden sustituirse por las dos ecuaciones de momentos $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$, si el punto de concurrencia no está en la recta que pasa por A y B.

guiente: Una de las ecuaciones del equilibrio estático exige que para toda la estructura la suma de los momentos respecto a un eje de todas las fuerzas ha de ser cero y, por tanto, con b como eje, $\Sigma M_b = 0$. Si se escribe la ecuación de condición para la parte ab ,

$\sum_{ab} M_b = 0$, implica inmediatamente que la suma algebraica de los momentos respecto a b de todas las fuerzas restantes que actúan en el resto de la estructura bc , debe ser cero.

Por tanto, $\sum_{bc} M_b = 0$ no es una relación independiente, es simplemente igual a la

ecuación $\Sigma M_b = 0$ menos la $\sum_{ab} M_b = 0$. El estudiante deberá tener siempre presente estas ideas cuando plantee las ecuaciones de condición de la estructura. No se debe engañar pensando que tiene más ecuaciones independientes de las que realmente tiene. En este caso, se pueden utilizar independientemente dos cualesquiera de las tres ecuaciones, $\Sigma M_b = 0$, $\sum_{ab} M_b = 0$, $\sum_{bc} M_b = 0$, y la restante no es una relación independiente.

Para continuar con la solución de este ejemplo, pueden obtenerse fácilmente las reacciones si se utiliza el ingenio al plantear las ecuaciones de la estática.

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright, (10)(3) + (20)(11) - 16R_{cy} + 3R_{cx} = 0$$

$$\therefore R_{cy} = 15,625 + \frac{3}{16}R_{cx} \quad (a)$$

$$\sum_{bc} M_b = 0, \curvearrowright, (20)(3) - 8R_{cy} + 9R_{cx} = 0$$

$$\therefore R_{cx} = \frac{8}{9}R_{cy} - 6,666^* \quad (b)$$

Sustituyendo R_{cy} de la Ec. (a) en la Ec. (b),

$$R_{cx} = \frac{8}{9}(15,625 + \frac{3}{16}R_{cx}) - 6,666 \quad \therefore R_{cx} = 8,66 \text{ t} \rightarrow$$

Y sustituyendo en (a)

$$R_{cy} = 17,25 \text{ t} \uparrow$$

De un modo similar,

$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright, 16R_{cy} + 3R_{cx} - (10)(13) - (20)(5) = 0$$

$$\therefore R_{cy} = 14,375 - \frac{3}{16}R_{cx} \quad (c)$$

$$\sum_{ab} M_b = 0, \curvearrowright, 8R_{cy} - 6R_{cx} - (10)(5) = 0$$

$$\therefore R_{cx} = \frac{8}{3}R_{cy} - 8,333 \quad (d)$$

Sustituyendo de la Ec. (c) en la Ec. (d)

$$R_{cx} = \frac{8}{3}(14,375 - \frac{3}{16}R_{cx}) - 8,333 \quad \therefore R_{cx} = 8,66 \text{ t} \rightarrow$$

* Los números tales como 6,666... se escriben a menudo 6,6̄ indicando el punto sobre la última cifra que se repite indefinidamente, o bien 6,6̄.

Y sustituyendo en (c)

$$R_{cy} = 12,75 \uparrow \neq$$

Utilizando las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para comprobar la solución,

$$\Sigma F_x = 0, \uparrow, 8,66 - 8,66 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow, 12,75 - 10 - 20 + 17,25 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

Si los apoyos *a* y *c* de esta estructura hubieran estado a la misma altura, es evidente que el cálculo de las reacciones hubiera sido mucho más fácil, porque en este caso se obtendría una solución directa para las componentes verticales partiendo de las ecuaciones $\Sigma M_a = 0$ y $\Sigma M_c = 0$. De la consideración de algunos de los ejemplos de la Sección 2.11 se verá inmediatamente que el cálculo de las reacciones de las estructuras complicadas que tienen condiciones de construcción especiales se puede simplificar en algunos casos aislando partes interiores como cuerpos libres y aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a estas partes. Se llama la atención nuevamente, sin embargo, sobre el hecho de que esta técnica no añade ninguna ecuación independiente nueva al conjunto formado por las tres del equilibrio estático de toda la estructura, más las de condición resultantes de las condiciones particulares de construcción. Las ecuaciones utilizadas pueden tener forma diferente, pero no son otras independientes.

2.10 Ejemplos para su clasificación. En esta sección se estudian ejemplos que aclaran los métodos para determinar si una estructura es estable o inestable y si es estáticamente determinada o indeterminada respecto de sus reacciones. Se observará que todas las vigas están representadas por rectas que coinciden con su eje y que en los esquemas de la Fig. 2.9 no se representa el espesor. Esto será de uso normal en el resto del libro cuando el espesor no afecte esencialmente a la solución del problema.

Consideremos la viga representada en la Fig. 2.9a. Los elementos de reacción independientes desconocidos son la magnitud y dirección de la reacción en *A* y la magnitud de la reacción en *B*, con un total de tres. También pueden considerarse la magnitud de las componentes vertical y horizontal de la reacción en *A* y la componente vertical o la horizontal en *B*. Obsérvese que, si se conocen el punto de aplicación y la dirección de una reacción, el único elemento que puede considerarse desconocido es la magnitud de la propia reacción, o la de una de sus componentes, pues cada una se puede expresar en función de la otra, conociendo la dirección de la reacción. Como la reacción que produce el apoyo *B* no pasa por el punto *A*, esta estructura es estable. Los tres elementos de reacción desconocidos pueden hallarse, pues, de las tres ecuaciones del equilibrio estático disponibles, y la estructura es estáticamente determinada.

Considerando la viga de la Fig. 2.9b se ve que hay solo dos elementos de reacción desconocidos —la magnitud de las reacciones en *A* y *B*, o bien las componentes horizontales o verticales de las mismas—. Como no se pueden satisfacer las tres ecuaciones del equilibrio estático simultáneamente por estos dos elementos de reacción independientes, esta estructura es estáticamente inestable bajo un sistema general de cargas aplicadas. Las líneas de acción de las dos reacciones se cortan en un punto *O*. Si el efecto resultante de las cargas aplicadas es una fuerza cuya línea de acción pasa también por el punto *O*, las dos reacciones serán capaces de mantener ese sistema particular de cargas en equilibrio. Mientras la estructura sigue siendo inestable estará en un estado de equilibrio inestable bajo estas cargas y se pueden determinar sus reacciones por las ecuaciones del equilibrio estático.

Si se añade en el punto *C* un apoyo de rodillos, como se muestra en la Fig. 2.9c, las

reacciones de la estructura serán equivalentes a tres bielas cuyas líneas de acción no son ni concurrentes ni paralelas. Por tanto, la estructura será estable y además estáticamente determinada, porque pueden hallarse los tres elementos de reacción desconocidos —las tres magnitudes desconocidas— de las tres ecuaciones del equilibrio estático. Por otro lado, si se aplica el soporte de biela en el punto C de la Fig. 2.9*d*, la estructura será geoméricamente inestable, pues los apoyos serán tres bielas cuyas líneas de acción se cortan todas en O . La estructura no está completamente sin limitación, evidentemente, pero girará instantáneamente alrededor del punto O un ángulo finito hasta que se alcance el equilibrio. Como la nueva posición adoptada por la estructura es función de las deformaciones de la misma, las reacciones que actúan en ella en su posición desplazada se considera que son estáticamente indeterminadas.

La estructura representada en la Fig. 2.9*g* es, evidentemente, estable y tiene seis elementos de reacción desconocidos —una componente horizontal y vertical y un par en cada apoyo—. Como solo hay disponibles tres ecuaciones del equilibrio estático,

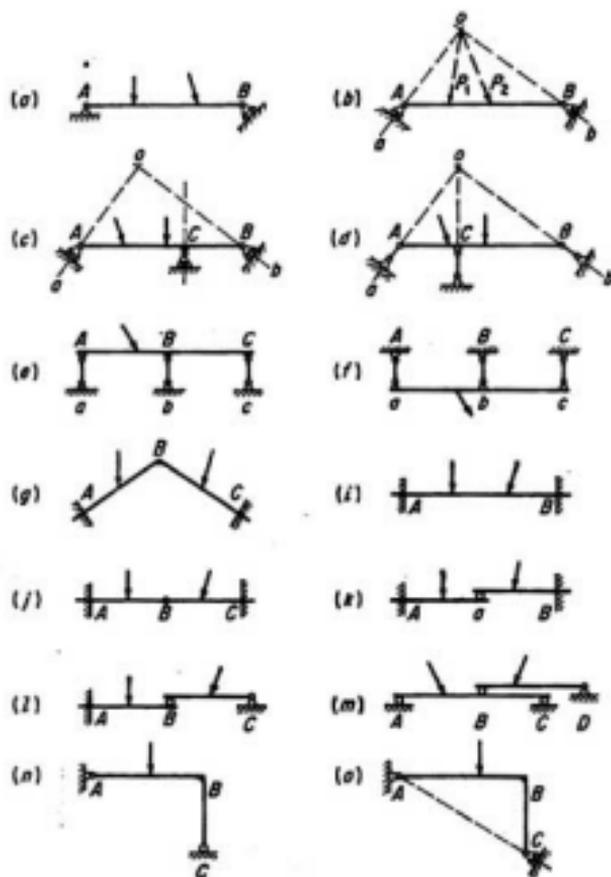


FIG. 2.9. Ejemplos para clasificación.

la estructura es indeterminada en tercer grado. La inserción de una articulación en la estructura que se muestra en la Fig. 2.9j introduce una ecuación de condición y, por tanto, hace a la estructura indeterminada en segundo grado. La inserción de un rodillo en la Fig. 2.9k hace posible transmitir solo una fuerza vertical de una parte de la estructura a otra. Esto introduce dos ecuaciones de condición, una que expresa que la suma de los momentos respecto a a de las fuerzas que actúan en cualquiera de las partes es igual a cero, y la otra que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas que actúan en cualquiera de las partes será igual a cero. Como consecuencia, la estructura es indeterminada en primer grado solamente.

En las figuras de p en adelante, todas las partes de la cercha se considerarán como cuerpos rígidos, cuyas fuerzas en las barras son estáticamente determinadas una vez que se hayan calculado las reacciones. La disposición de las barras de una cercha necesaria para la estabilidad, etc., se estudia en detalle en el Cap. 4. Para el objeto del estudio presente, las partes de cercha se pueden considerar como cuerpos sólidos. Se ve fácilmente que las estructuras de las Figs. 2.9p y q son estables y estáticamente determinadas bajo cualquier sistema general de cargas. En la Fig. 2.9r, la estructura tiene cuatro elementos de reacción desconocidos —la magnitud de las reacciones en los apoyos de biela A y B y la magnitud y dirección de la reacción en el apoyo articulado C —. Para hallar estas cuatro incógnitas hay solo tres ecuaciones del equilibrio estático. La estructura es, por tanto, estable y estáticamente indeterminada en primer grado.

En estructuras similares a la de la Fig. 2.9r, es a menudo mejor usar un camino diferente para determinar su estabilidad o determinación estática. En este caso, la evaluación de las ecuaciones disponibles puede ser difícil y confusa. Se supone, en cambio, que se ha roto la estructura en dos partes separadas y se considera el cálculo de las fuerzas que unen cada parte al resto de la estructura. Si, en este caso, se traza una sec-

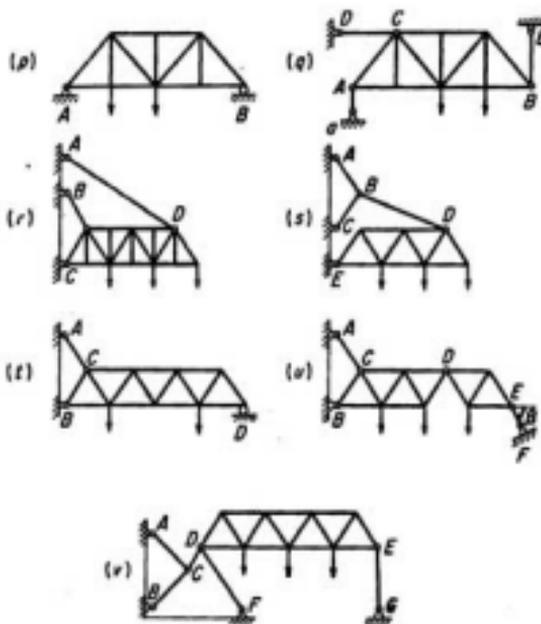


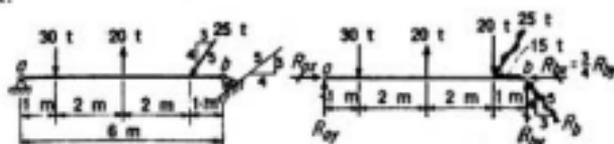
FIG. 2.9. (Continuación.)

ción por la biela BD y se sustituye el apoyo articulado E por las componentes vertical y horizontal de la reacción que produce, la parte de cercha estará aislada como un cuerpo libre sobre el que actúan las cargas aplicadas y tres fuerzas desconocidas —la fuerza de la biela y las dos componentes de la reacción en E —. Si este cuerpo libre ha de estar en equilibrio, pueden determinarse las tres incógnitas de modo que satisfagan las tres ecuaciones del equilibrio estático. Tomando $\Sigma M_E = 0$ en el cuerpo libre, se llegará a una ecuación que contiene la fuerza en la biela como única incógnita. Conociendo esta fuerza BD , podremos hallar las fuerzas en las bielas AB y BC por $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ aplicadas a la articulación B aislada como cuerpo libre. Por tanto, se puede hallar las reacciones de esta estructura por las ecuaciones del equilibrio estático, y se dice que dicha estructura es estable y estáticamente determinada.

2.11 Ejemplos aclaratorios del cálculo de las reacciones. El estudiante debe considerar detenidamente los ejemplos siguientes. Todas las estructuras son estáticamente determinadas, pero deben investigarse independientemente como práctica.

Ejemplo 2.1 Determinar las reacciones de la viga siguiente.

Método A:



$$\Sigma M_A = 0, \curvearrowright \quad (30)(1) - (20)(3) + (20)(5) - (R_{By})(6) = 0 \quad \therefore R_{By} = \frac{70}{6} = 11,6 \text{ t } \uparrow$$

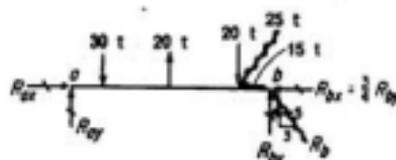
$$R_{Bx} = \frac{1}{4} R_{By} = 8,75 \text{ t } \rightarrow$$

$$\Sigma M_E = 0, \curvearrowright \quad (R_{Ax})(6) - (30)(5) + (20)(3) - (20)(1) = 0 \quad \therefore R_{Ax} = 11,6 \text{ t } \rightarrow$$

$$\Sigma F_x = 0, \rightarrow \quad R_{Ax} - 15 - 8,75 = 0 \quad \therefore R_{Ax} = 23,75 \text{ t } \rightarrow$$

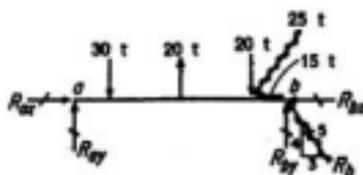
$$\text{Comprobación: } \Sigma F_y = 0, \uparrow \quad 18,3 - 30 + 20 - 20 + 11,6 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

Método B:



$\Sigma M_A = 0, \curvearrowright$	+	-	$\Sigma M_E = 0, \curvearrowright$	+	-
$-(30)(1) =$		150	$+(30)(1) =$	30	
$+(20)(3) =$	60		$-(20)(3) =$		60
$-(20)(1) =$		20	$+(20)(5) =$	100	
		$+ 60 - 170$		$+ 130 - 60$	
		$+ 60$		$- 60$	
$R_{By} = 18,3 \text{ t } \uparrow =$		$-\frac{110}{6}$	$R_{By} = + \frac{70}{6} =$	$11,6 \text{ t } \uparrow$	
			$R_{Bx} = \frac{1}{4} \times 11,6 =$	$8,75 \text{ t } \rightarrow$	

Método C:



$$\begin{array}{r} \Sigma M_a = 0: R_{ay} = \uparrow \quad | \\ 20 \times \frac{1}{6} = 3,3 \\ 20 \times \frac{3}{4} = \quad 10 \\ 30 \times \frac{3}{4} = 25 \\ \hline 28,3 \quad | \\ 10 \\ \hline R_{ay} = 18,3 \text{ t } \uparrow \\ R_{ax} = 23,75 \text{ t } \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} \Sigma M_b = 0: R_{by} = \uparrow \quad | \\ 30 \times \frac{1}{6} = 5 \\ 20 \times \frac{3}{4} = \quad 10 \\ 20 \times \frac{1}{6} = 16,6 \\ \hline 21,6 \quad | \\ 10 \\ \hline R_{by} = 11,6 \text{ t } \uparrow \\ R_{bx} = 8,75 \text{ t } \rightarrow \end{array}$$

Razonamiento:

Los tres métodos para hallar las reacciones son fundamentalmente el mismo y solo difieren en los detalles de la disposición de los cálculos. El método A es probablemente el mejor modo de organizar los cálculos para una estructura complicada y no corriente. Sin embargo, la disposición sistemática de B o C puede ser más útil para los tipos sencillos o clásicos de vigas y cerchas.

Obsérvese que de ordinario es muy conveniente sustituir las fuerzas inclinadas por sus componentes vertical y horizontal y utilizar, para escribir las ecuaciones de equilibrio, estas componentes en lugar de las fuerzas¹.

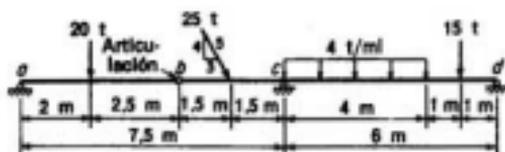
El calculista expresará claramente los resultados subrayándolos e indicando las unidades y direcciones de las fuerzas. Recuérdese que si una solución es positiva, se ha supuesto que la fuerza actuaba en la dirección correcta en el esquema de cuerpo libre; si la solución es negativa, la fuerza actúa en el sentido opuesto al considerado.

Se observará que en este problema se han utilizado para resolverlo dos ecuaciones de momentos y una de fuerzas.

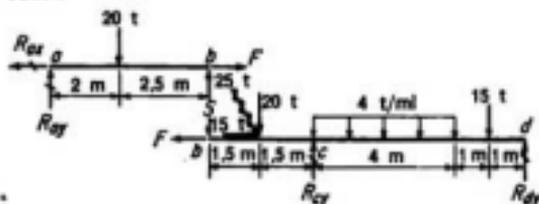
La ecuación de comprobación $\Sigma F_y = 0$ da una comprobación de las componentes verticales de las reacciones, pero no comprueba las horizontales. Si se escribiera $\Sigma M = 0$ respecto a un eje cualquiera que no esté en línea recta con a y b, se obtendría una comprobación de los valores de las reacciones horizontales.

¹ Si se representan en un esquema de cuerpo libre una fuerza y sus reacciones, debe trazarse una línea sinuosa en el eje de la flecha que representa la fuerza, para indicar que ésta se ha sustituido por sus componentes.

Ejemplo 2.2 Determinar las reacciones de esta estructura.



Solución:



Aislado ab:

$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright$$

$$(4,5)(R_{ax}) - (20)(2,5) = 0$$

$$\therefore R_{ax} = 11,1 \text{ t } \leftarrow$$

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright$$

$$(20)(2) - (S)(4,5) = 0$$

$$S = 8,8 \text{ t } \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\therefore R_{ax} = 15 \text{ t } \leftarrow$$

Aislado bd:

$$\Sigma M_c = 0 \curvearrowright$$

$$\begin{aligned} -(8,8)(9) &= -80 \\ -(20)(7,5) &= -150 \\ -(4 \times 4)(4) &= -64 \\ -(15)(1) &= -15 \\ R_{cy} &= 51,5 \text{ t } \uparrow = \frac{-309}{6} \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\therefore F = 30 \text{ t } \leftarrow$$

$$\Sigma M_d = 0, \curvearrowright$$

$$\begin{aligned} -(8,8)(3) &= 26,6 \\ -(20)(1,5) &= 30 \\ +(4 \times 4)(2) &= 32 \\ +(15)(5) &= 75 \\ +107 &= 56,6 \\ -56,6 & \\ R_{dy} &= \frac{+50,3}{6} = 8,38 \text{ t } \uparrow \end{aligned}$$

Comprobación: $\Sigma F_y = 0, \uparrow$, para toda la estructura

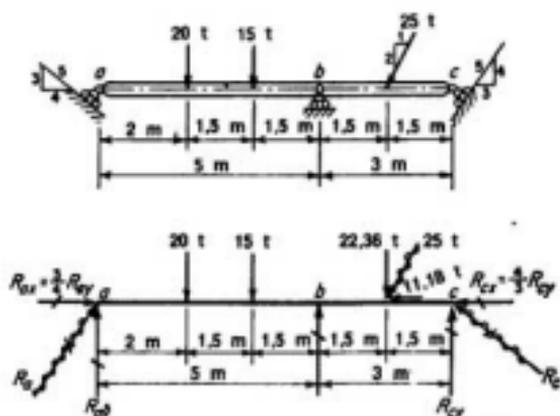
$$11,1 - 20 - 20 + 51,5 - 16 - 15 + 8,38 = 0$$

$$71 - 71 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

Razonamiento:

Al aislar las dos partes ab y bd entre sí, se supone que el pasador de la articulación se quita. La articulación puede transmitir una fuerza que actúa en cualquier dirección por el centro del pasador. Si se designan por F y S las componentes horizontal y vertical de esta fuerza y se supone que actúan como se representa en la parte ab, deben actuar en sentidos contrarios en la parte bd. Obsérvese que se puede tener una comprobación independiente tanto para las reacciones verticales como horizontales, tomando $\Sigma M = 0$ respecto a algún eje que no esté en la recta entre a y d.

Ejemplo 2.3 Determinar las reacciones de esta viga.



$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright$$

$$(R_{cy})(5) - (20)(3) - (15)(3,50) + (22,36)(3,50) - (R_{cy})(3) = 0$$

$$5R_{cy} = 3R_{cy} + 48,96$$

$$\Sigma F_x = 0, \rightarrow \quad \frac{3}{4}R_{cy} - 11,18 - \frac{3}{4}R_{cy} = 0 \quad R_{cx} = 0,5625R_{cy} - 8,385$$

$$\therefore 5R_{cy} = 1,6875R_{cy} - 25,155 + 48,96 \quad R_{cy} = + 7,185 \text{ t } \uparrow \quad R_{cx} = 5,39 \text{ t } \rightarrow$$

$$y \quad R_{cy} = 4,04 - 8,385 = -4,345 \quad R_{cy} = -4,345 \text{ t } \downarrow \quad R_{cx} = -5,795 \text{ t } \rightarrow$$

$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright$$

$$(20)(2) + (15)(3,50) - (R_{cy})(5) + (22,36)(6,50) + (4,345)(8) = 0$$

$$R_{cy} = 54,52 \text{ t } \uparrow$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma F_x = 0, \rightarrow$$

$$7,185 - 20 - 15 + 54,52 - 22,36 - 4,345 = 0$$

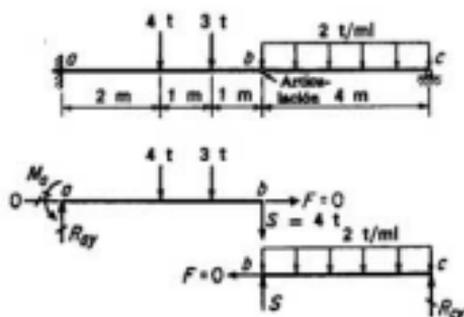
$$61,705 - 61,705 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma F_x = 0, \rightarrow$$

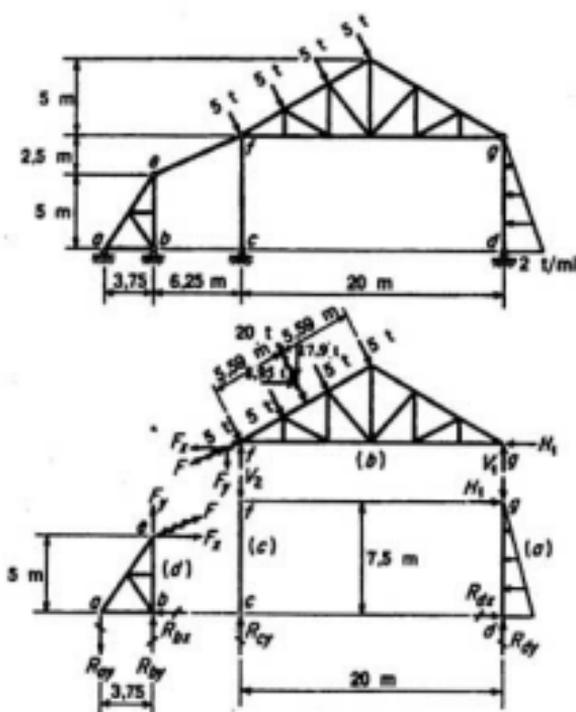
$$5,39 - 11,18 + 5,795 = 0$$

$$-11,18 + 11,185 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

Ejemplo 2.4 Determinar las reacciones de esta estructura.



Ejemplo 2.6 Determinar las reacciones de esta estructura.



Esquema de cuerpo libre a:

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright, (H_1)(7.50) - \frac{(2)(7.50)}{2} (2.50) = 0 \quad H_1 = 2.5 \text{ t} \rightarrow$$

$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright, \frac{(2)(7.50)}{2} (5) - (R_{ax})(7.50) = 0 \quad R_{ax} = 5 \text{ t} \rightarrow$$

Esquema de cuerpo libre b:

$$\Sigma M_f = 0, \curvearrowright, (20)(5.59) - (V_1)(20) = 0 \quad V_1 = 5.59 \text{ t} \uparrow \quad \therefore R_{bx} = 5.59 \text{ t} \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0, \curvearrowright, 8.95 - 2.5 - F_x = 0 \quad F_x = 6.45 \leftarrow \quad \therefore F_x = \frac{3}{5}(6.45) = 2.58 \text{ t} \leftarrow$$

$$\Sigma M_g = 0, \curvearrowright, (8.95)(2.50) - (17.9)(15) - (2.58)(20) + (V_2)(20) = 0 \quad V_2 = 14.88 \text{ t} \uparrow$$

$$\therefore R_{cy} = 14.88 \text{ t} \uparrow$$

Comprobación: $\Sigma F_y = 0, \uparrow, -2.58 + 14.88 - 17.9 + 5.59 = 0$

$$\therefore -0.01 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$$

Esquema de cuerpo libre *d*:

$$\Sigma M_a = 0, \uparrow, (6,45)(5) - (R_{ay})(3,75) = 0 \quad \therefore R_{ay} = 8,6 \text{ t } \downarrow$$

$$\Sigma M_b = 0, \uparrow, (6,45)(5) - (2,85)(3,75) - (R_{by})(3,75) = 0 \quad \therefore R_{by} = 6,02 \text{ t } \downarrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{ax} = 6,45 \text{ t } \leftarrow$$

Comprobación en la estructura en conjunto:

$$\Sigma F_x = 0, \uparrow, -6,45 + 8,95 + 5 - \frac{(2)(7,50)}{2} = 0 \quad \therefore 0 = 0 \quad \text{Comp.}$$

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow, -8,6 + 6,02 + 14,88 - 17,9 + 5,59 = 0 \quad -0,01 = 0 \quad \text{Comp.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \uparrow, & -(6,02)(3,75) - (14,88)(10) - (5,59)(30) + (8,95)(10) \\ & + (17,9)(15) - \frac{(2)(7,50)}{2} (2,50) = 0 \\ & -357,8 + 358,0 = 0 \quad \text{Comp.} \end{aligned}$$

Razonamiento:

En los problemas de este tipo, se parte la estructura en sus elementos estructurales separados, y se dibujan los esquemas de cuerpo libre. Las fuerzas que actúan entre elementos se pueden suponer con cualquier sentido, pero deben tenerlo opuesto en dos elementos adyacentes. Por ejemplo, si se supone que la fuerza *F* actúa hacia abajo y hacia la izquierda en el esquema *b*, debe actuar hacia arriba y a la derecha en el esquema *d*. Como la estructura en conjunto está en equilibrio, cada uno de sus elementos debe estarlo también. Deben satisfacerse las ecuaciones del equilibrio estático para cada elemento, por lo que constituyen una base para el cálculo de las reacciones desconocidas y las fuerzas mutuas.

Obsérvese que cuando se hayan hallado todas las reacciones desconocidas, pueden comprobarse los resultados aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a la estructura en conjunto para ver si se satisfacen o no.

2.12 Superposición de efectos. En este punto, es conveniente una breve discusión del principio de superposición. De hecho ya está implicado su uso en la resolución del Ejemplo 2.1 por el método *C*. En él se calcularon por separado las reacciones debidas a cada una de las tres cargas y se sumaron algebraicamente para obtener las correspondientes a la actuación simultánea de las tres cargas. En otras palabras, se superpusieron los efectos separados para obtener el efecto total.

Tal procedimiento es permisible en general. Sin embargo, hay dos casos importantes en los que no es válido el principio de superposición: 1) cuando las características geométricas de la estructura varían apreciablemente con la aplicación de las cargas; 2) cuando las deformaciones de la estructura no son directamente proporcionales a los esfuerzos correspondientes, aun cuando pueda desprejiciarse el efecto del cambio de características geométricas. El último caso ocurre siempre que el material de la estructura está sometido a un esfuerzo más allá del límite elástico o cuando no sigue la ley de Hooke en alguna zona de su curva tensión-deformación.

En la Sec. 2.3 se apuntaba que normalmente las deformaciones de una estructura son tan ligeras que nos está permitido considerarla como un cuerpo rígido al aplicar las ecuaciones del equilibrio estático y desprejiciar, por consiguiente, los ligeros cambios geométricos en los brazos de palanca de las fuerzas, la inclinación de las barras de la estructura, etc. Consideremos, sin embargo, la estructura de la Fig. 2.10. En este caso, las tres articulaciones están en la misma recta en la estructura no cargada. Será necesario tener en cuenta la variación geométrica originada por las deformaciones de la estructura, porque los brazos de palanca, inclinaciones de las barras, etc., han variado

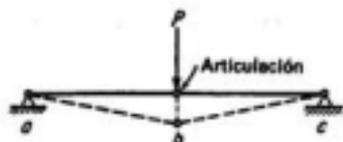


FIG. 2.10. Estructura no lineal.

en una cantidad importante. Como consecuencia, las fuerzas y deformaciones de la estructura no son directamente proporcionales a la carga P aun si el material de la estructura sigue la ley de Hooke. Por tanto, éste es un ejemplo del primer caso indicado antes en que el principio de superposición no es válido. En esta estructura, los efectos de una carga $2P$ no son dobles de los correspondientes a una carga P , ni los de una carga $P_1 + P_2$ son iguales a la suma algebraica de los efectos de P_1 y P_2 actuando por separado. En mecánica aplicada, se puede encontrar otro caso más importante en que la superposición no es válida —el caso de un puntal delgado sobre el que actúan cargas axiales y transversales—. Aquí, los esfuerzos, momentos, flechas, etc., debidos a la carga axial $P_1 + P_2$ no son iguales a la suma algebraica de los valores producidos por P_1 y P_2 cuando actúan por separado. Afortunadamente, la mayoría de los casos en que no es válido este tipo de superposición se reconocen fácilmente.

Se ha dicho antes que la superposición no es válida en los casos en que, aunque se pueda despreciar el efecto de cambio geométrico, el material de la estructura no sigue la ley de Hooke. Si estas estructuras son también estáticamente determinadas, pueden superponerse las cantidades que pueden hallarse por el análisis de esfuerzos estáticamente determinados (tales como reacciones, cortantes y momentos de flexión), pero no se pueden superponer las tensiones y flechas. Por ejemplo, en el caso de una viga de hierro apoyada en los extremos, las reacciones, la fuerza cortante y el momento flector en las secciones transversales son cantidades estáticamente determinadas y se pueden superponer. Sin embargo, las tensiones y flechas producidas por el momento flector debido a una carga $2P$ no son iguales al doble de las debidas a la carga P , por lo que tales cantidades no se pueden superponer. Si las reacciones de una viga de hierro son estáticamente indeterminadas, no se puede superponer ninguna de esas cantidades, pues el análisis de tensiones es entonces una función de la deformación de la estructura.

2.13 Problemas para resolver

***Problema 2.1** Clasificar las estructuras representadas en las Figs. 2.9c, f, i, l a o y t a v como estables o inestables y estáticamente determinadas o indeterminadas. Discutir y dar las razones para la respuesta.

*Problema 2.2 Determinar las reacciones de las vigas de la Figura 2.11.

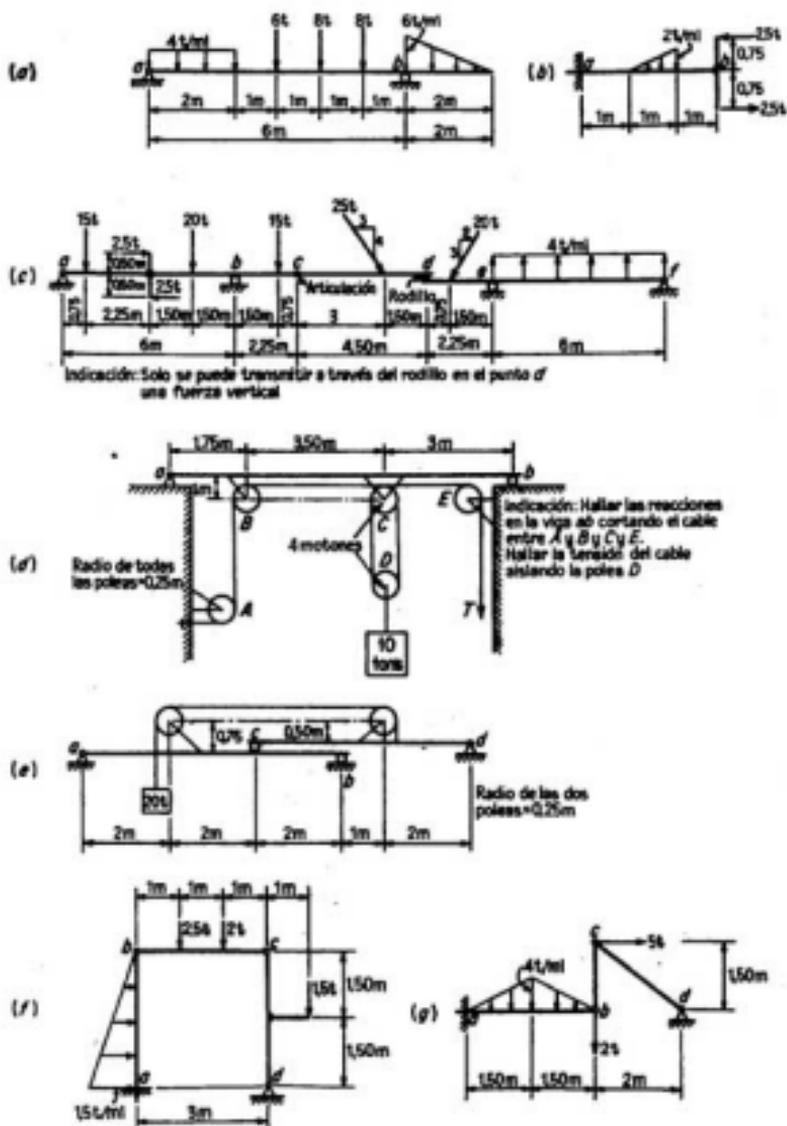


FIG. 2.11. Problema 2.2.

*Problema 2.3 Determinar las reacciones de las estructuras de la Figura 2.12.

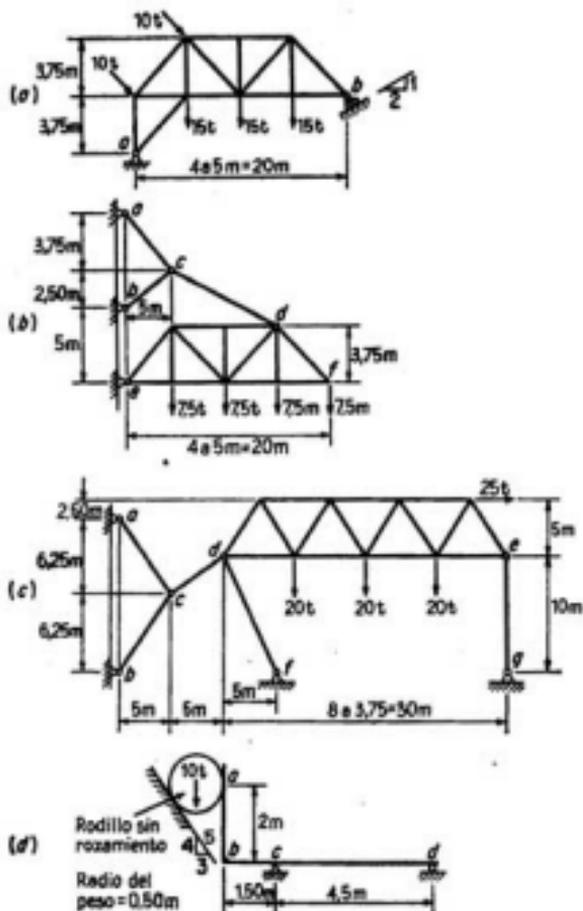


FIG. 2.12. Problema 2.3.

Problema 2.4 Es difícil a veces convencer al estudiante de que solo hay un cierto número de ecuaciones independientes. Para demostrarlo, considérese la estructura de la Fig. 2.8. Dibujar tres esquemas de cuerpo libre —uno de toda la estructura, uno de la parte ab y otro de la bc . Escribir tres ecuaciones de equilibrio estático para cada esquema. Comparar y combinar estas nueve ecuaciones que contienen seis incógnitas, y demostrar que solo hay entre ellas cuatro ecuaciones independientes con cuatro incógnitas.

Problema 2.5 Determinar las reacciones de las estructuras representadas en la Figura 2.13.

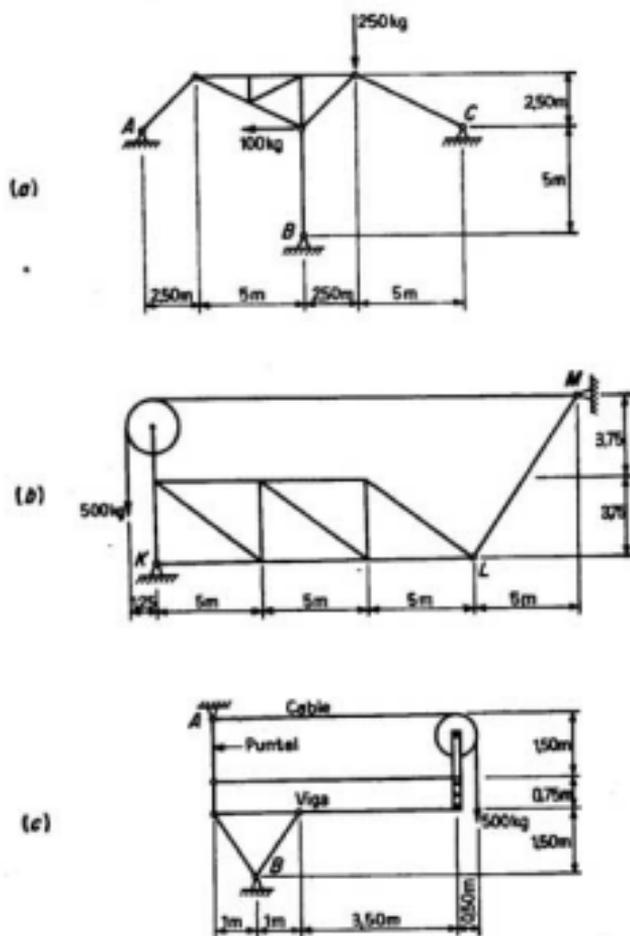


FIG. 2.13. Problema 2.5.

3

Cortante y momento flector

3.1 Generalidades. El objeto final de todo análisis de tensiones es el determinar si una estructura es adecuada para soportar las cargas para las que se proyecta. El criterio utilizado comprende la comparación de las tensiones desarrolladas por las cargas aplicadas y las admisibles para el material que se utiliza. Se pueden estudiar las tensiones que actúan en una sección transversal cualquiera, suponiendo que se corta la estructura en esta sección y se aísla cualquier parte de dicha estructura como cuerpo libre. Si se han determinado ya todas las demás fuerzas que actúan en la parte aislada, se pueden calcular fácilmente los efectos resultantes de las tensiones que actúan en la sección transversal por las ecuaciones del equilibrio estático.

Uno de los elementos que es más frecuente estudiar de este modo es la viga, esto es, una barra sometida a flexión por cargas que actúan transversalmente a su eje longitudinal y a veces por cargas transversales y paralelas a este eje simultáneamente. Las consideraciones siguientes se limitan a vigas rectas, es decir, vigas en las que el eje que une los centros de sus secciones transversales es una recta, y a vigas cuyas secciones transversales tienen tal forma que el centro del cortante¹ y el centro geométrico coinciden. Se supone también que todas las cargas y reacciones están en un solo plano, que contiene además al eje longitudinal de la barra y un eje principal en cada sección transversal. Si se satisfacen esas condiciones, la viga flexará solamente en el plano de las cargas, sin torsión.

3.2 Determinación de esfuerzos en vigas. Supongamos que, al determinar el comportamiento de la viga estáticamente determinada de la Fig. 3.1, es necesario calcular las tensiones en una sección transversal *mn*. Las reacciones necesarias para el equilibrio estático se pueden calcular fácilmente y aparecen en el esquema *a* de cuerpo libre. Se puede suponer que las partes de la viga a la izquierda y a la derecha de *mn* están aisladas una de otra, cortando la estructura en dos por esta sección. Se podrán trazar los esquemas de cuerpos libres *b* y *c* en que aparecen todas las fuerzas que actúan en estas dos partes de la viga.

Cuando se consideran las fuerzas exteriores que actúan en cualquiera de las partes *b* o *c*, se ve inmediatamente que no están en equilibrio estático bajo las fuerzas exteriores que actúan, solamente. Sin embargo, si la viga como conjunto está en equilibrio todas y cada una de sus partes deben estarlo, por lo que es necesario que haya fuerzas interiores y esfuerzos distribui-

¹ Para un estudio de la situación del centro de cortantes de una sección transversal de viga, ver los textos clásicos de resistencia de materiales tales como S. H. Crandall y N. C. Dahl, «An introduction to the Mechanics of Solids», pág. 314, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1959.

dos en las caras interiores que han quedado expuestas por el corte imaginario. Estos esfuerzos deben ser de tal magnitud que su efecto resultante compense el de las fuerzas exteriores que actúan en la parte aislada y la mantengan en equilibrio estático.

Los esfuerzos que actúan en las caras interiores expuestas pueden descomponerse en dos componentes, una normal a la cara, llamada *esfuerzos normales*, y la otra paralela a la misma,

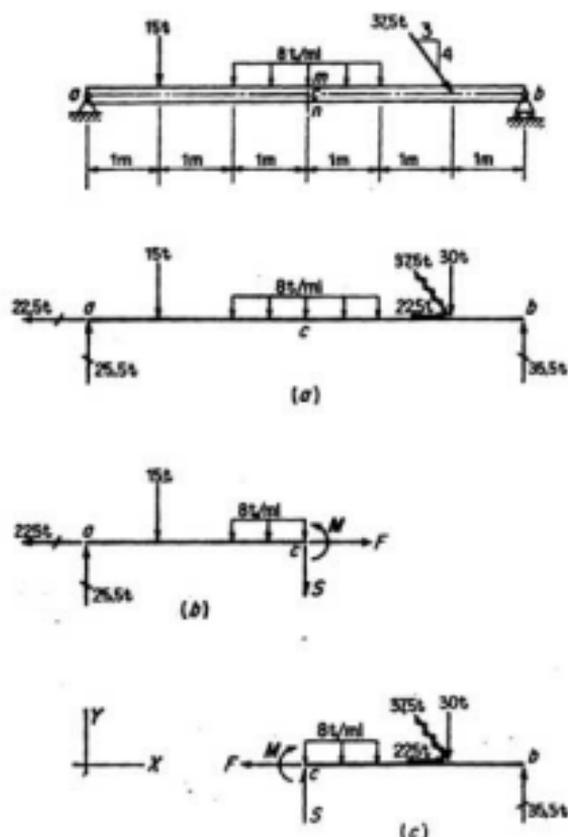


FIG. 3.1. Esfuerzos en vigas.

llamada *esfuerzos de cizallamiento*. En los esquemas de cuerpo libre *b* y *c* se han sustituido estos esfuerzos por sus resultantes, representadas por las fuerzas *S* y *F* que pasan por el centro de la sección transversal, y el par *M*. Obsérvese que los efectos resultantes *S*, *F* y *M* de los esfuerzos que actúan en la parte del esquema *b* se representan numéricamente iguales y de signo contrario a los correspondientes del esquema *c*. La razón de esto es evidente por las consideraciones siguientes:

Consideremos el esquema de cuerpo libre *a* que muestra la viga entera sobre la que actúan la totalidad de las cargas y de las reacciones. Supongamos que se ha calculado la resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas a la viga a la izquierda de la sección *m-n* en magnitud y posición, y lo mismo para la resultante de las fuerzas exteriores restantes aplicadas a la derecha de *m-n*. Si la viga en conjunto está en equilibrio bajo todas las fuerzas que actúan sobre ella, es evidente que la resultante de las fuerzas aplicadas a la izquierda de *m-n* debe ser colineal, nu-

méricamente igual, pero de signo contrario a la resultante de las fuerzas restantes aplicadas a la derecha de mn . Se deduce, por tanto, que la resultante de las fuerzas exteriores del esquema b debe ser igual y de signo contrario a la de las fuerzas exteriores del esquema c , por lo que los efectos resultantes de los esfuerzos en los esquemas b y c deben tener la misma relación.

Es conveniente asignar nombres a los efectos resultantes F , S y M de los esfuerzos que actúan en la sección transversal de una barra. La fuerza axial F actúa en el centro de la sección transversal y se llamará *fuerza resistente axial*. La fuerza transversal S se llamará *fuerza resistente de cizallamiento* y el par M *momento resistente*.

Para satisfacer las tres condiciones del equilibrio estático, tanto para la parte del esquema b como para la del c , las magnitudes de F , S y M deben ser tales que contrarresten a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en la parte considerada. Teóricamente no importa qué parte se considera. Ordinariamente se utiliza aquella que tiene el menor número de fuerzas exteriores, para simplificar los cálculos. Debe mantenerse el equilibrio estático por los valores calculados del siguiente modo: La fuerza resistente axial F y la de cizallamiento S deben ser iguales y opuestas a las componentes axial y transversal, respectivamente, de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en la parte de viga que se considera. Tomando momentos respecto a un eje por el centro de la sección transversal, esto es, el punto de intersección de las fuerzas resistentes F y S , es evidente que el momento resistente M debe ser de igual magnitud y de dirección opuesta al momento de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en esta parte.

Una vez determinados la fuerza resistente axial, la de cizallamiento y el momento resistente en cualquier sección, se pueden calcular las intensidades de las tensiones normal y de cizallamiento en un punto cualquiera de la sección transversal, utilizando las ecuaciones conocidas dadas en los textos de resistencia de materiales.

3.3 Definición de momento flector y cizallamiento. Criterio de signos. De la discusión anterior resulta evidente que, para determinar las magnitudes de las fuerzas y momentos resistentes que actúan en la sección transversal de una viga, es aconsejable calcular primero la magnitud y posición de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan en la parte de la viga a uno u otro lado de esta sección transversal. Generalmente, es conveniente representar esta resultante por su componente axial, su componente transversal y su momento respecto a un eje por el centro de la sección transversal considerada. Estos tres elementos son estáticamente equivalentes a esta resultante y se les da los tres nombres siguientes, respectivamente: *fuerza axial*, *fuerza de cizallamiento* y *momento flector*. Por tanto, se puede resumir así la definición de estos tres términos:

Fuerza axial F . *La fuerza axial en una sección transversal de una viga recta es la suma algebraica de las componentes que actúan paralelamente al eje de la viga, de todas las cargas y reacciones aplicadas a la parte de la viga a uno u otro lado de esta sección transversal.*

Fuerza de cizallamiento (cortante) S . *La fuerza de cizallamiento en una sección transversal de una viga recta es la suma algebraica de las componentes que actúan transversalmente al eje de la viga, de todas las cargas y reacciones aplicadas a la parte de la viga a uno u otro lado de esta sección transversal.*

Momento flector M . *El momento flector en una sección transversal de una viga recta es la suma algebraica de los momentos, tomados respecto a un eje por el centro de la sección, de todas las cargas y reacciones aplicadas a la parte de la viga a uno u otro lado de la sección. El eje respecto al que se toman los momentos es, naturalmente, normal al plano de las cargas.*

Aunque no es propósito de los autores fomentar el aprender de memoria principios estructurales, fórmulas, etc., estas definiciones se presentan constantemente y son tan fundamentales para la ingeniería de estructuras, que los estudiantes deben aprenderlas y entenderlas tan completamente, y con tanto interés, que se queden impresas indeleblemente en sus mentes.

Introducidas estas definiciones, se puede resumir esta discusión diciendo que la fuerza resistente axial que actúa en una sección transversal será igual y opuesta a la fuerza axial en esta sección; la fuerza resistente de cizallamiento será igual y opuesta a la fuerza de cizallamiento (o cortante); y el momento resistente será igual y opuesto al momento flector.

En los cálculos sucesivos se utilizará el criterio siguiente de signos para representar las direcciones de la fuerza axial, cortante y momento flector en una sección transversal cualquiera

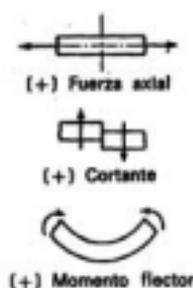


FIG. 3.2. Criterio de la viga.

de una viga. El criterio es el usado ordinariamente en la ingeniería de estructuras. Es claro y simple de empleo y se llamará *criterio de la viga*. Como se ve en la Fig. 3.2, la fuerza axial es positiva si tiende a separar las dos partes de una barra, esto es, cuando tiende a producir un esfuerzo de tracción en la sección. El cortante es positivo cuando tiende a empujar la parte de la izquierda hacia arriba con respecto a la derecha. El momento flector es positivo cuando tiende a producir tracción en las fibras inferiores de la viga y compresión en las superiores, esto es, a flexar la viga con la concavidad hacia arriba. Muchas vigas son horizontales y puede aplicarse este criterio sin confusión. Cuando una barra no es horizontal, hay que elegir un lado como «lado inferior» y aplicar el criterio como corresponde.

3.4 Método de cálculo del cortante y momento flector. El procedimiento para calcular la fuerza axial, cortante y momento flector en cada sección de la viga es directo y se puede explicar fácilmente con el problema ilustrativo representado en la Fig. 3.3. En este problema se desea calcular la fuerza axial, cortante y momento flector en las secciones en los puntos *b*, *c* y *d*. El cálculo de la fuerza axial es sencillo y no necesita explicación en este caso, como sucede respecto a la mayoría de las vigas. Si el par aplicado por la ménsula en el punto *c* se supone que está aplicado a lo largo de la sección en *c*, habrá un cambio brusco de momento flector en este punto y es necesario calcular este momento, primero en una sección a una distancia infinitesimal a la izquierda de *c* y luego en otra a una distancia infinitesimal a la derecha de *c*.

Se recordará que se deben calcular el cortante y el momento flector en cada sección considerando todas las cargas exteriores y reacciones aplicadas a la parte de la viga situada a uno u otro lado de la sección considerada. Se puede utilizar cualquier parte, pero generalmente se harán mejor los cálculos utilizando la que tiene menor número de fuerzas. Elegida una parte, en la suma de las componentes de la fuerza o momentos solo se incluyen las cargas y reacciones que actúan en esa parte.

Se eligió la parte de la izquierda de la viga para calcular el cortante y el momento flector en la sección *b* y en las secciones a la izquierda y a la derecha del punto *c*. Los esquemas de cuerpo libre *b*, *c* y *d* muestran, respectivamente, la parte utilizada en cada caso. Para aclarar la ventaja de usar una parte en vez de otra, se calculan el cortante y momento flector en la sección *d* utilizando primero la parte izquierda y luego la derecha, como se ve en los esquemas *e* y *f*, respectivamente. Obsérvese la sencillez de los cálculos del esquema *f* comparados con los del *e*.

Para explicar los cálculos típicos, consideremos los del cortante y momento flector de la sección inmediatamente a la izquierda del punto *c*, como se ve en el esquema *c*. El cortante en esta sección es la suma algebraica de la reacción de 28,5 t, la carga total uniformemente repartida con un total de 8 t y la carga concentrada de 15 t; la reacción origina un cortante positivo (tiende a empujar hacia arriba la parte izquierda) y las dos cargas originan un cortante negativo (tienden a empujar hacia abajo a la parte izquierda). Por tanto, el cortante es

$$S = +28,5 - 8 - 15 = +5,5 \text{ t}$$

con un efecto resultante positivo que tiende a empujar a la parte izquierda hacia arriba con respecto a la derecha. Para el equilibrio, evidentemente, el cortante resistente debe ser de 5,5 t hacia abajo en la sección del esquema *c*. De igual modo, el momento flector es la suma algebraica

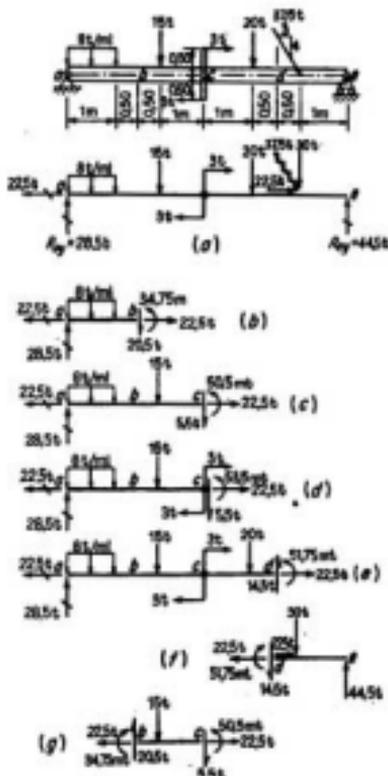


FIG. 3.3. Cálculo de la fuerza axial, cortante y momento flector.

de los momentos respecto al centro de la sección de las tres mismas fuerzas. Como la reacción tiende a producir tracción en las fibras inferiores de la sección y las dos cargas tracción en las superiores, el momento flector es

$$M = (28,50)(3) - (8)(2,50) - (15)(1) = +50,50 \text{ t m}$$

con una tendencia resultante a producir tracción en las fibras inferiores. Además, para el equilibrio, es necesario que el momento resistente sea de $50,50 \text{ t m}$ en sentido contrario a las agujas del reloj en la sección del esquema c. Los restantes cálculos se explican por sí mismos.

Es importante observar que, si se conocen la fuerza axial, el cortante y el momento flector en una sección, se pueden calcular elementos similares en cualquier otra sección utilizando estas cantidades conocidas, mejor que manejando todas las fuerzas exteriores en toda la parte de la viga a uno u otro lado de la nueva sección. Por ejemplo, la fuerza axial, cortante y momento flector en c se podrían calcular con las cantidades ya halladas en b. Esto es evidente, pues el cortante, fuerza axial y el momento flector en b son estáticamente equivalentes a la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas a la izquierda de b. Por tanto, la contribución de estas fuerzas al efecto resultante de todas las fuerzas a la izquierda de c se puede calcular utilizando su equivalente estática, mejor que con las fuerzas mismas. La ventaja de este modo de proceder aumenta con el número de fuerzas exteriores aplicadas a la izquierda del punto b. Estos cálculos figuran en el esquema g de la Fig. 3.3, en el que se representan las fuerzas que actúan en la parte aislada bc.

Esquema a:

$$\begin{aligned} \Sigma M_e = 0, \uparrow \\ (8 \times 1)(2,50) = -40 \\ (15)(3) = -45 \\ (20)(2) = -40 \\ (30)(1) = -30 \\ \hline -174 \\ (R)(1) = +174 \\ \hline -174 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Sigma M_e = 0, \uparrow \\ (8 \times 1)(0,50) = +4 \\ (15)(2) = 30 \\ (3)(1) = 3 \\ (20)(4) = 80 \\ (15)(3) = 150 \\ \hline +267 \end{aligned}$$

$$\therefore R_{ay} = \frac{174}{1} = 28,5 \uparrow \quad \therefore R_{by} = \frac{267}{6} = 44,5 \uparrow$$

Comprobación: $\Sigma F_x = 0, \uparrow$

$$28,5 + 44,5 - 8 - 15 - 20 - 30 = 0 \text{ Comp.}$$

Esquema b: $S = 28,5 - (8)(1) = +20,5 \text{ t}$

$$M = (28,5)(1,50) - (8)(2,50) = 34,75 \text{ t m}$$

Esquema c: $S = 28,5 - 8 - 15 = +5,5 \text{ t}$

(a la izquierda $M = (28,5)(3) - (8)(2,50) - (15)(1) = 50,5 \text{ m t}$ de del punto c)

Esquema d: $S = 28,5 - 8 - 15 = +5,5 \text{ t}$

(a la derecha $M = (28,5)(3) - (8)(2,50) - (15)(1) = 50,5 \text{ m t}$ del punto c)

Esquema e: $S = 28,5 - 8 - 15 - 20 = -14,5 \text{ t}$

$$M = (28,5)(4,50) - (8)(4) - (15)(2,50) - (20)(1,50) + 3 = 51,75 \text{ m t}$$

Esquema f: $S = -44,50 + 30 = -14,50 \text{ t}$

$$M = (44,50)(1,50) - (30)(0,50) = 51,75 \text{ m t}$$

Esquema g: $S = 20,5 - 15 = 5,5 \text{ t}$

$$M = 34,75 + (20,5)(1,50) - (15)(1) = 50,5 \text{ m t}$$

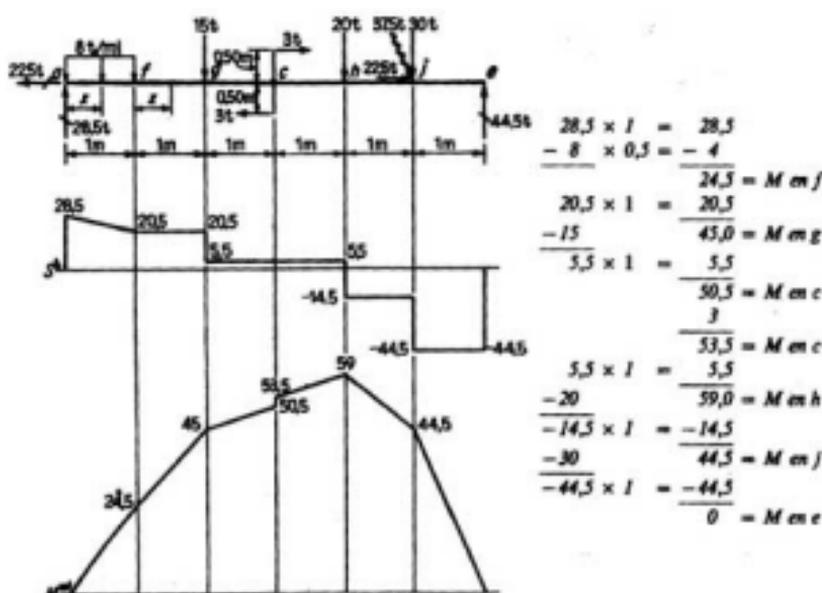


FIG. 3.4. Diagramas de cortante y momento flector.

3.5 Curvas de cortante y momento flector. Cuando se estudia o proyecta una viga para un sistema de cargas estacionarias, es útil tener disponibles curvas o diagramas de los que se pueda obtener fácilmente el valor del cortante y el momento flector, en cualquier sección. Pueden construirse estas curvas dibujando una línea de base que corresponde en longitud al eje de la viga y tomando ordenadas en los puntos de esa línea que indiquen el valor del cortante o momento flector en esos puntos. Los valores positivos del cortante o del momento se toman como ordenadas hacia arriba desde la base, y los negativos hacia abajo. Las curvas que unen los extremos de estas ordenadas a lo largo de la base se llaman curvas de cortantes y de momentos flectores. En la Fig. 3.4 se representan estas curvas para la viga de la Figura 3.3.

La construcción de estas curvas es elemental, pero necesita alguna explicación. El cortante en una sección a una distancia infinitesimal a la derecha del punto *a* es $+28,5$ t, por lo que la curva de cortantes sube bruscamente de cero a $+28,5$ t en este punto. En la parte *af*, el cortante en una sección a la distancia *x* del punto *a* es

$$C = 28,5 - 8x$$

que indica que la curva de cortante en esta parte es una recta que disminuye desde una ordenada $+28,5$ en *a* hasta $+20,5$ en el punto *f*. Como entre los puntos *f* y *g* no se aplica ninguna carga exterior más, el cortante sigue siendo $+20,5$ en cualquier sección de este intervalo y la curva es una recta horizontal, como puede verse. A una distancia infinitesimal a la izquierda del punto *g*, el cortante es $+20,5$, pero a una distancia infinitesimal a la derecha de este punto, la carga de 15 t ha hecho que éste se haya reducido a $5,5$ t. Por tanto, en el punto *g* hay un cambio brusco en la curva del cortante de $+20,5$ a $+5,5$. De igual modo puede comprobarse fácilmente el resto de la curva. Se observará, al efecto, que una carga concentrada se supone aplicada en un punto, por lo que en él la curva de cortantes cambia bruscamente en una cantidad igual a la carga. Físicamente es imposible que una carga esté aplicada en un punto sin producir una presión de contacto infinita, por lo que tales cargas deben estar distribuidas en una superficie pequeña. Sin embargo, para cálculos como los del cortante y momento flector se ig-

nora esta imposibilidad y se considera matemáticamente posible que se puedan aplicar cargas concentradas en un punto.

En la parte af , el momento flector en una sección a la distancia x del punto a es $M = 28,5x - 4x^2$. Por tanto, la curva de momentos flectores comienza en 0 en el punto a y aumenta según una curva hasta la ordenada $+24,5$ m t en el punto f . En la parte fg , el momento flector en un punto a la distancia x del f es $M = 24,5 + 20,5x$. Por tanto, la curva de momentos flectores en esta parte es una recta que crece desde una ordenada 24,5 en f hasta 45 en g . De igual modo, en la parte gc , la curva de momentos flectores es una recta que crece hasta un valor de 50,5 en

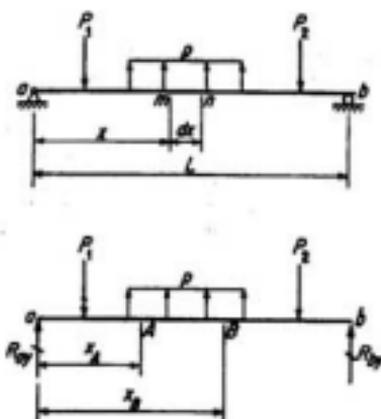


FIG. 3.5. Relaciones entre carga, cortante y momento flector.

una sección a distancia infinitesimal a la izquierda del punto c . Por el contrario, en una sección a distancia infinitesimal a la derecha de c , el momento ha aumentado en 8 m t hasta 53,5. Suponiendo que el par exterior de 8 m t está aplicado exactamente en la sección en el punto c , habrá un cambio brusco en la curva de momentos flectores similar a los cambios bruscos de la curva de cortantes ya estudiados. De modo análogo, se puede comprobar fácilmente el resto de la curva de los momentos flectores. En la Fig. 3.4 se muestran los cálculos de las ordenadas de la curva.

3.6 Relaciones entre carga, cortante y momento flector. En los casos en que una viga está sometida a cargas transversales, se puede facilitar el trazado de las curvas de cortantes y momentos flectores teniendo en cuenta ciertas relaciones que existan entre carga, cortante y momento flector. Por ejemplo, consideremos la viga de la Fig. 3.5. Supongamos que se han calculado el cortante S y el momento flector M en la sección correspondiente a un punto m . El punto m se localiza por la distancia x , medida desde el punto a , siendo positiva cuando se mide a la derecha desde ese punto. Supongamos que se calculan ahora el cortante y el momento flector en la sección en el punto n , a una distancia diferencial dx a la derecha del punto m . Suponiendo que se ha aplicado entre m y n una carga uniformemente repartida hacia arriba de intensidad p por unidad de longitud de viga, el cortante y el momento flector habrán aumentado en cantidades diferenciales hasta $S + dS$ y $M + dM$, respectivamente.

Se pueden calcular los nuevos valores del cortante y el momento flector en el punto n , utilizando los ya calculados para el m , como se dijo en la Sec. 3.4. Así,

$$S + dS = S + p \, dx \quad (a)$$

$$M + dM = M + S \, dx + p \, dx \frac{dx}{2} \quad (b)$$

Por tanto, de (a) es evidente que

$$\frac{dS}{dx} = p \quad (c)$$

y, despreciando diferenciales de segundo orden, se puede hallar de la Ec. (b) que

$$\frac{dM}{dx} = S \quad (d)$$

Se observará en particular que, además de usar el criterio usual de la viga para el cortante y momento flector, se han considerado las cargas hacia arriba como positivas y se ha supuesto que x aumenta de izquierda a derecha.

Las relaciones planteadas matemáticamente en las Ecs. (c) y (d) son de una gran ayuda al trazar las curvas de cortantes y momentos flectores. Consideremos primero la Ec. (c). Establece que la intensidad de variación de cortante en un punto es igual a la intensidad de la carga aplicada a la viga en ese punto, esto es, que la pendiente de la curva de cortantes en cada punto es igual a la intensidad de la carga aplicada a la viga en ese punto. La variación de cortante dS entre dos secciones separadas una distancia dx es

$$dS = \frac{dS}{dx} dx = p dx$$

Por tanto, la diferencia de cortante en dos secciones A y B es

$$S_B - S_A = \int_{x_A}^{x_B} p dx \quad \text{o} \quad S_B = S_A + \int_{x_A}^{x_B} p dx$$

Así, pues, la diferencia de ordenadas de la curva de cortantes en los puntos A y B es igual a la carga total aplicada a la viga entre esos dos puntos.

De acuerdo con la Ec. (c) y el criterio de los signos utilizado en su deducción, si la carga es hacia arriba o positiva en un punto de la viga, el cortante tiene una variación positiva en este punto. Esto significa que si se calcula el cortante en una sección inmediatamente a la derecha de este punto, esto es, a una distancia x ligeramente mayor del apoyo izquierdo, tenderá a ser más positivo, o algebraicamente mayor que lo era en el primer punto. Evidentemente, si la carga es hacia abajo o negativa en un punto, será cierto lo contrario. Si pensamos en esta interpretación en términos de pendiente de la curva de cortantes y utilizamos el criterio ordinario de cálculo de pendientes de una curva, si dS/dx es positivo, la curva va hacia arriba a la derecha, pues los valores positivos de S se trazan hacia arriba y x crece de izquierda a derecha. Si dS/dx es negativo, la curva de cortante baja hacia la derecha.

Para utilizar estas ideas, si se aplica una carga uniformemente repartida a una parte de una viga, p será constante, por lo que el cortante variará de modo constante y la curva será una recta en dicha zona. Por el contrario, si la carga es repartida, pero su intensidad varía continuamente, la curva de cortantes tendrá una pendiente que variará continuamente. Si no hay ninguna carga aplicada a una viga entre dos puntos, la variación del cortante será nula, esto es, el cortante permanecerá constante y la curva será una recta paralela a la línea de base en esta parte. En un punto en que hay una carga concentrada aplicada a una viga, la intensidad de la carga será infinita, por lo que la pendiente de la curva de cortantes será infinita, o vertical. En ese punto habrá una discontinuidad en la curva y la diferencia de ordenadas de un lado de la carga al otro será igual a la carga concentrada. Estas ideas están de acuerdo con la discusión de la sección anterior.

La Ec. (d) se puede interpretar de igual manera. Establece que la relación de variación del momento flector en un punto cualquiera es igual al cortante en ese punto de la viga, esto es, la pendiente de la curva de momentos flectores en un punto es igual a la ordenada de la curva de

cortantes en ese punto. La variación del momento flector dM entre dos secciones separadas una distancia diferencial dx es

$$dM = \frac{dM}{dx} dx = S dx$$

Por lo que la diferencia de momento flector en dos secciones A y B es

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = M_B - M_A = \int_{x_A}^{x_B} S dx \quad \therefore M_B = M_A + \int_{x_A}^{x_B} S dx$$

y la diferencia de ordenadas de la curva de momentos flectores en los puntos A y B es igual al área bajo la curva de cortantes entre los dos puntos.

De la Ec. (d) es evidente que, si el cortante es positivo en un punto de una viga, la relación de variación del momento flector es también positiva en ese punto. Esto significa que si se ha calculado el momento flector en una sección inmediatamente a la derecha de este punto, esto es, a una distancia ligeramente mayor x del apoyo izquierdo, tenderá a ser más positivo, o algebraicamente mayor, de lo que era en el primer punto. Si el cortante es negativo, será cierto lo contrario. En términos de pendiente de la curva de momentos flectores, se puede decir que si dM/dx es positivo (o negativo), la pendiente de la curva de momentos flectores en este punto va hacia arriba (o hacia abajo) hacia la derecha, pues los valores positivos de M se trazan hacia arriba y x aumenta de izquierda a derecha.

Si el cortante es constante en una parte de la viga, la curva de momentos flectores será una recta en esta parte. Por el contrario, si el cortante varía de alguna manera en una zona, la curva de momentos flectores será una curva. En un punto en que hay aplicada una carga concentrada, hay un cambio brusco de la ordenada de la curva de cortantes y, por tanto, un cambio brusco de pendiente de la curva de momentos flectores. En un punto en que la curva de cortantes pasa por cero y las ordenadas de la izquierda son positivas y las de la derecha negativas, la pendiente de la curva de momentos flectores variará de positiva a la izquierda del punto, a negativa a la derecha del mismo. Por tanto, la ordenada de la curva de momentos flectores será un máximo en ese punto. Si, por otro lado, la curva de cortantes pasa por cero del modo inverso, la ordenada de la curva de momentos en ese punto será un mínimo.

3.7 Trazado de las curvas de cortante y momento flector. Se pueden utilizar las ideas de la Sec. 3.6 de modo más práctico en la construcción de las curvas de cortante y momento flector para vigas sometidas a cargas transversales, si se adopta el siguiente procedimiento: Después de calcular las reacciones de una viga, se traza lo primero una curva de cargas. La curva de cargas es una curva cuyas ordenadas muestran la intensidad de la carga repartida aplicada a la viga en cada punto. Además, se indicarán todas las cargas concentradas. Las cargas hacia arriba, o positivas, se dibujarán encima de la línea de base y las negativas, debajo. Entonces, pueden construirse a su vez las curvas de cortantes y momentos flectores, siguiendo de izquierda a derecha en la viga y estableciendo la forma de las curvas utilizando los principios siguientes: resumidos de la discusión anterior:

1. La pendiente de la curva de cortantes en un punto es igual a la intensidad de la carga repartida en ese punto.
2. Los cambios bruscos en las ordenadas de la curva de cortantes tienen lugar en los puntos en que hay aplicadas cargas concentradas.
3. La pendiente de la curva de momentos flectores es igual, en cualquier punto, a la ordenada de la curva de cortantes en el mismo punto.
4. En los puntos en que hay aplicadas cargas concentradas, hay cambios bruscos de las ordenadas de la curva de cortantes, por lo que hay también cambios bruscos de las pendientes de la curva de momentos flectores.

Generalmente solo es necesario calcular los valores numéricos de las ordenadas de las curvas de cortante y momento flector en los puntos en que cambia la forma de las mismas o en los puntos en que tienen lugar los valores máximos o mínimos. Estos valores se calculan en general más fácilmente directamente como en la Fig. 3.3. Se pueden comprobar estos cálculos utilizando los principios siguientes, si se conoce el valor de una ordenada de una curva:

5. La diferencia de ordenadas de la curva de cortantes entre dos puntos es igual a la carga total aplicada a la viga entre esos puntos, esto es, el área bajo la curva entre ellos, más las cargas aisladas aplicadas en esta parte.

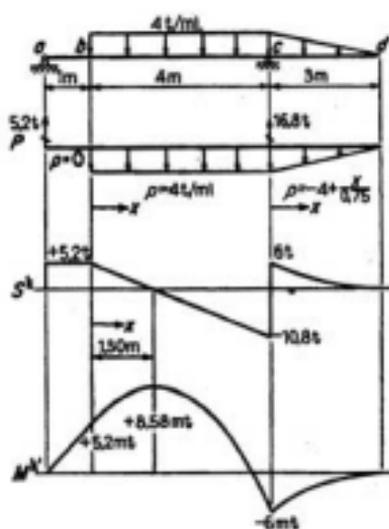
6. La diferencia de ordenadas de la curva de momentos flectores entre dos puntos cualesquiera es igual al área bajo la curva de cortantes entre esos dos puntos.

Este método de trazar curvas de cortantes y de momentos flectores se aclarará con los ejemplos que siguen.

Aunque todas estas relaciones y esta discusión se aplican específicamente al caso de una viga sometida a cargas transversales, no debe deducirse que no son aplicables al estudio de una viga sometida a una condición de carga más general. En los ejemplos que siguen se estudiará el método a emplear en esos casos. Para casos que contienen más complicación que cargas transversales, se verá que la curva de cargas pierde su utilidad y no es práctica. A pesar de que se puede utilizar alguna de las relaciones anteriores, se hallará que, en la mayoría de los casos más complicados de cargas, hay que revisarlas. Como aclaración, se verá en el Ejemplo 3.5 que tienen lugar cambios bruscos de las ordenadas de la curva de momentos en los puntos en que hay aplicados pares exteriores a la viga. Por tanto, la diferencia de ordenadas de la curva de momentos flectores entre dos puntos cualesquiera será igual al área bajo la curva de cortantes entre esos puntos, más o menos la suma de los pares exteriores aplicados a la viga en esta parte. El estudiante comprobará que la experiencia conseguida al trazar las curvas de cortantes y momentos flectores en los casos más sencillos de cargas transversales, le capacita para hacer los problemas más complicados con poca dificultad.

3.8 Ejemplos aclaratorios. Vigas estáticamente determinadas. Los ejemplos siguientes aclararán la construcción de las curvas de cortantes y momentos flectores para vigas estáticamente determinadas, utilizando las ideas y principios estudiados antes:

Ejemplo 3.1



$$\begin{aligned}\Sigma M_a &= 0, \curvearrowright \\ &-(4)(4)(2) = -32 \\ &+(4)(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}) = +6 \\ &\quad \quad \quad -26 \\ \therefore R_{ay} &= \underline{5,2 t \uparrow}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_b &= 0, \curvearrowright \\ &(4)(4)(3) = +48 \\ &(4)(\frac{3}{2})(6) = +36 \\ &\quad \quad \quad +84 \\ \therefore R_{by} &= \underline{16,8 t \uparrow}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0, \uparrow + \\ 5,2 + 16,8 - 16 - 6 &= 0 \quad \therefore \text{Comp.}\end{aligned}$$

Cortante:

$$S_x (\text{izquierda}) = 5,2 - (4)(4) = \underline{-10,8 t}$$

Situación del punto $S = 0$ entre b y c.

$$S_x = 5,2 - 4x = 0 \quad \therefore x = \underline{1,30 m}$$

Momento flector:

$$\begin{aligned}M_b &= + (5,2)(1) = +5,2 m t \\ M_c &= - \frac{(4)(3)}{2} \left(\frac{3}{3} \right) = \underline{-6 m t}\end{aligned}$$

Entre b y c,

$$M_{\max} = (5,2)(2,30) - \frac{(4)(1,30)^2}{2} = \underline{+8,58 m t}$$

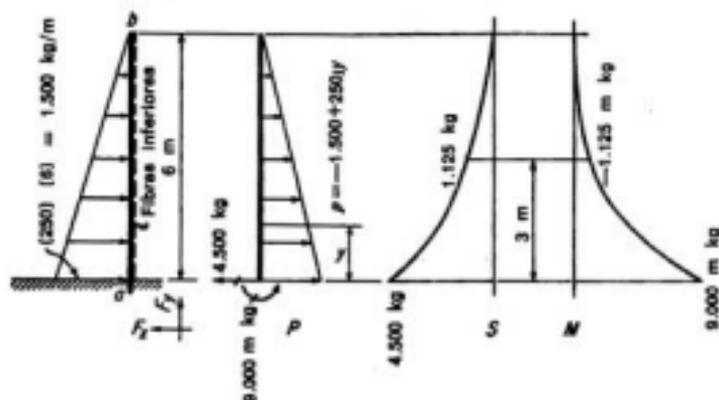
Razonamiento:

Para determinar la forma de las curvas de cortantes y de momentos flectores se siguen las ideas de la Sec. 3.7. Partiendo del extremo izquierdo de la curva de cortantes, ésta sube bruscamente hasta un valor de +5,2. Desde a a b, como $p = 0$, la curva de cortantes es horizontal. De b a c, como $p = -4$, la curva baja hacia la derecha con pendiente constante hasta un valor -10,8 inmediatamente a la izquierda de c. En c, la reacción origina un aumento brusco de la ordenada de la curva de cortantes hasta +6, inmediatamente a la derecha del punto c. De c a d, como $p = -4 + (x/0,75)$, la curva baja hacia la derecha con una pendiente que varía linealmente desde -4 en c hasta 0 en d.

Del mismo modo, la curva de momentos flectores arranca en 0 en a y va de a a b con pendiente positiva constante (hacia arriba a la derecha). A la derecha de b, la pendiente decrece linealmente desde un valor +5,2 en b hasta cero en el punto de máximo momento, y más allá hasta -10,8 en c. Hay un cambio brusco de pendiente en c hasta un valor de +6 inmediatamente a la derecha de c. Entre c y d, la pendiente desciende de +6 a 0 en d.

Se pueden calcular los valores numéricos de las ordenadas del cortante y el momento flector más fácilmente directamente, como se vio en la Sección 3.4.

Ejemplo 3.2



$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \uparrow \cdot R_{ax} - (1.500)(\frac{6}{2}) &= 0 & R_{ax} &= 4.500 \text{ kg} + \\ \Sigma M_a = 0, \curvearrowright \cdot (1.500)(\frac{6}{2})(2) - M_a &= 0 & M_a &= 9.000 \text{ m kg} \end{aligned}$$

Cortante y momento flector:

$$\begin{aligned} \text{En } y = 3 \text{ m: } p &= -1.500 + (250)(3) = -1.500 + 750 = -750 \text{ kg/m} \\ S &= +(750)(\frac{3}{2}) = 1.125 \text{ kg} \\ M &= -(750)(\frac{3}{2})(1) = -1.125 \text{ m kg} \end{aligned}$$

Razonamiento:

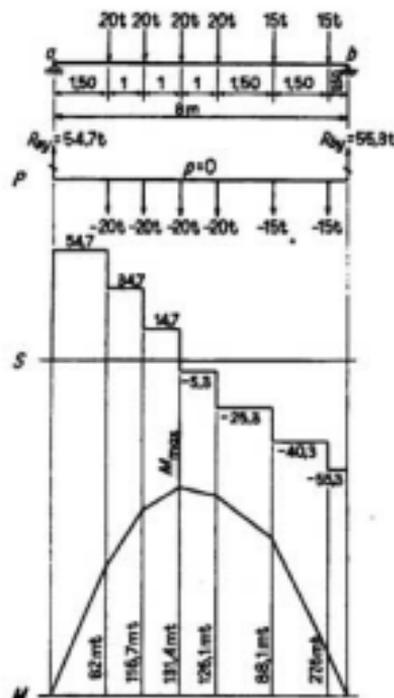
Después de determinar las reacciones, pueden trazarse las curvas de cargas, cortantes y momentos flectores, considerando las fibras del lado derecho del voladizo como «fibras inferiores», aplicando el criterio de la viga. Al dibujar la curva de cargas se considerará la uniformemente variable hacia abajo, o negativa.

La curva de cortantes sube bruscamente en *a* hasta un valor +4.500. Siguiendo hacia *b*, esta curva arranca hacia abajo con una pendiente negativa de 1.500, pero se aplana progresivamente hasta una pendiente nula, con ordenada nula, en *b*.

Por otro lado, la curva de momentos flectores comienza con una ordenada de -9.000 en *a* con pendiente positiva de +4.500. Continuando hacia *b*, la pendiente sigue siendo positiva, pero disminuye hasta que en *b*, tanto la pendiente como la ordenada de la curva de momentos son cero.

Establecida la forma de estas curvas, se puede calcular una ordenada de la curva de cortantes o de la de momentos flectores en un punto intermedio tal como $y = 9$ más fácilmente por el cálculo directo, considerando la parte de la viga entre ese punto y *b*.

Ejemplo 3.3



$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright$$

$$15 \times 0,50 = 7,50$$

$$15 \times 2 = 30$$

$$20 \times 3,50 = 70$$

$$20 \times 4,50 = 90$$

$$20 \times 5,50 = 110$$

$$20 \times 6,50 = 130$$

$$\frac{110}{110} \quad \frac{437,50}{437,50}$$

$$\therefore R_{Ay} = 54,7 t \uparrow$$

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright$$

$$15 \times 7,50 = 112,50$$

$$15 \times 6 = 90$$

$$20 \times 4,50 = 90$$

$$20 \times 3,50 = 70$$

$$20 \times 2,50 = 50$$

$$20 \times 1,50 = 30$$

$$\frac{442,50}{442,50}$$

$$\therefore R_{By} = 55,3 t \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0, \uparrow, 54,7 + 55,3 - 110 = 0$$

\therefore Comp.

$$S = \frac{54,7 \times 1,5}{-20} = \frac{82}{82} = M_{1,5}$$

$$S = \frac{34,7 \times 1}{-20} = \frac{+34,7}{116,7} = M_{2,5}$$

$$S = \frac{14,7 \times 1}{-20} = \frac{+14,7}{131,4} = M_{3,5}$$

$$S = \frac{-5,3 \times 1}{-20} = \frac{-5,3}{126,1} = M_{4,5}$$

$$S = \frac{-25,3 \times 1,5}{-15} = \frac{-38,0}{88,1} = M_6$$

$$S = \frac{-40,3 \times 1,5}{-15} = \frac{-60,5}{27,6} = M_{7,5}$$

$$S = \frac{-55,3 \times 0,5}{+55,3} = \frac{-27,6}{0} = M_8$$

$$\frac{0}{0} = M_9$$

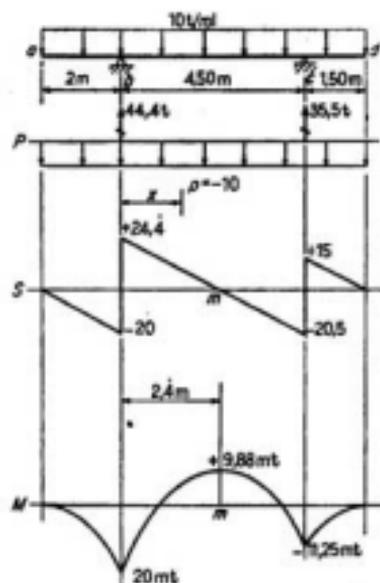
\therefore Comp. \therefore Comp.

Nota: M_{max} tiene lugar cuando el cortante pasa por cero (a 3,50 m de a).

Razonamiento:

Al calcular las ordenadas de las curvas de cortantes y de momentos flectores para sistemas de cargas aisladas, es conveniente disponer los cálculos de este modo, hallando las ordenadas sucesivamente de izquierda a derecha, por la aplicación de los principios 5 y 6 enunciados al final de la Sec. 3.7. Se observará que se obtiene una comprobación de los cálculos de ambas curvas, volviendo a cero en el punto b.

Ejemplo 3.4



$$\Sigma M_b = 0, \uparrow$$

$$(R_{ay})(4.50) - (8)(10)(2.50) = 0$$

$$\therefore R_{ay} = 44.4 \text{ t } \uparrow$$

$$\Sigma M_c = 0, \uparrow$$

$$-(R_{ay})(4.50) + (8)(10)(2) = 0$$

$$\therefore R_{ay} = 35.5 \text{ t } \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow + 44.4 + 35.5 - 80 = 0$$

\therefore Comp.

$$M_b = -(10)(2)(1) = -20 \text{ mt}$$

$$M_c = -(10)(1.50)(0.75) = -11.25 \text{ mt}$$

En la parte entre b y c.

$$S = 24.4 - 10x$$

$$\text{Cuando } S = 0 = 24.4 - 10x \quad \therefore x = 2.4 \text{ m}$$

$$\therefore M_{\max} - M_b = \frac{(24.4)(2.4)}{2}$$

$$M_{\max} = M_b + 29.88$$

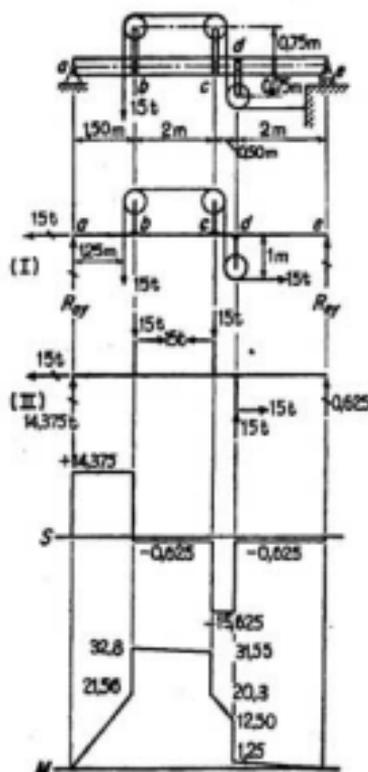
$$= -20 + 29.88 = +9.88 \text{ mt}$$

Razonamiento:

Obsérvese que la magnitud de la ordenada máxima de la curva de los momentos flectores entre b y c se puede calcular fácilmente sumando algebraicamente el área bajo la curva de cortantes entre b y m, a la ordenada M_b . En este caso, esto es particularmente sencillo, porque el área bajo la curva de cortantes es un triángulo.

Ejemplo 3.5

Todas las poleas son de 0,5 m de diámetro.



$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \curvearrowright \\ (1,25)(15) - (1)(15) - (R_{ey})(6) = 0 \\ \therefore R_{ey} = 0,625 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0, \curvearrowright \\ (R_{ey})(6) - (15)(4,75) - (15)(1) = 0 \\ \therefore R_{ey} = 14,375 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \rightarrow \\ 14,375 + 0,625 - 15 = 0 \\ \therefore \text{Comp.} \end{aligned}$$

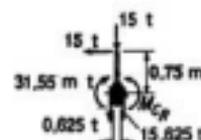
Momentos flectores:

En b (inmediatamente a la izquierda),
 $M_{b_i} = +(14,375)(1,50) = +21,56 \text{ m t}$

En b (inmediatamente a la derecha),
 $M_{b_d} = (14,375)(1,50) + (15)(0,75) = 32,8 \text{ m t}$

En c (inmediatamente a la izquierda),
 $M_{c_i} = 32,8 - (0,625)(2) = 31,55 \text{ m t}$

En c (inmediatamente a la derecha) elemento de viga aislado entre dos secciones —una inmediatamente a la izquierda y otra inmediatamente a la derecha del punto c—. Este elemento tendrá una longitud diferencial, esto es, $0 + m$.



$$\begin{aligned} \Sigma M_{c_0} = 0, \curvearrowright \\ +31,55 - (15)(0,75) - (0,625)(0+) - M_{c_0} = 0 \\ M_{c_0} = 31,55 - 11,25 - 0 = +20,3 \text{ m t} \end{aligned}$$

En d (inmediatamente a la izquierda),
 $M_{d_i} = (0,625)(2) + (15)(0,75) = +12,50 \text{ m t}$

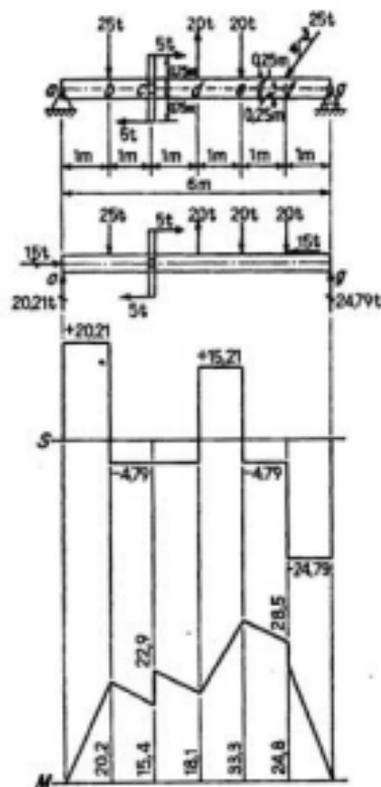
En d (inmediatamente a la derecha),
 $M_{d_d} = (0,625)(2) = +1,25 \text{ m t}$

Razonamiento:

Como resultó en el Cap. 2, el cálculo de las reacciones de estas estructuras se puede hacer sin hallar antes las fuerzas que cada polea aplica a la viga. Sin embargo, para el trazado de las curvas de cortantes y de momentos flectores y el cálculo de los esfuerzos internos en la viga, es necesario hallar la forma detallada en que las poleas transmiten las cargas. Calculadas las reacciones en el esquema I y las cargas de las poleas, se puede dibujar el esquema II, que muestra la forma precisa en que está cargada la estructura.

Como se explicó en la última parte de la Sec. 3.7, no debe intentarse dibujar una curva de cargas en estos problemas. En lugar de ello, se sustituye la curva de cargas por un esquema de cuerpo libre como el II. El estudiante debe dibujar las curvas de cortantes y de momentos flectores, utilizando las definiciones fundamentales y métodos de cálculo, e, indudablemente, usando la experiencia adquirida en los problemas sencillos como los Ejemplos 3.1 a 3.4. Todos los cálculos anteriores se pueden seguir sin dificultad.

Ejemplo 3.6



$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \uparrow \\ (25)(1) + (5)(1.50) - (20)(3) \\ + (20)(4) + (20)(5) - (15)(0.25) \\ - (R_{gy})(6) = 0 \\ 25 + 7.50 - 60 + 80 + 100 - 3.75 \\ = 6R_{gy} \\ \therefore R_{gy} = 24.79 \text{ t } \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_g = 0, \uparrow \\ (R_{ax})(6) - (25)(5) + (5)(1.50) \\ + (20)(3) - (20)(2) - (20)(1) \\ - (15)(0.25) = 0 \\ 6R_{ax} = 125 - 7.50 - 60 + 40 \\ + 20 + 3.75 \\ \therefore R_{ax} = 20.21 \text{ t } \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \uparrow + \\ 20.21 + 24.79 - 25 + 20 - 20 - 20 \\ = 0 \quad \therefore \text{Comp.} \end{aligned}$$

Momento flector:

$$\begin{aligned} M_a &= 20.21 \times 1 = 20.21 = M_a \\ -4.79 \times 1 &= -4.79 \\ &= \frac{15.42}{+7.50} = M_x \text{ (izquierda)} \\ &= \frac{+22.92}{+22.92} = M_x \text{ (derecha)} \\ -4.79 \times 1 &= -4.79 \\ &= \frac{18.13}{+33.34} = M_x \\ -4.79 \times 1 &= -4.79 \\ &= \frac{+28.55}{-3.75} = M_f \text{ (izquierda)} \\ &= \frac{+24.80}{+24.80} = M_f \text{ (derecha)} \\ -24.79 \times 1 &= -24.79 \\ &= \frac{-6.07}{0} = M_x \end{aligned}$$

Razonamiento:

Este ejemplo es similar al Ejemplo 3.5, siendo aplicables los mismos comentarios. Además, se observará que a veces se aplican cargas inclinadas a los bordes superior o inferior de una viga, como la carga de 25 t en f. En estos casos, es evidente que la componente horizontal de esas cargas producirá un par que originará un cambio brusco de las ordenadas de la curva de momentos flectores en ese punto.

3.9 Ejemplo aclaratorio. Vigas con viguetas de tablero. En todos los ejemplos anteriores, se han aplicado las cargas directamente a la misma viga. Sin embargo, muchas veces se aplican indirectamente, a través de un sistema de tablero soportado por las vigas principales. Una construcción típica de esta clase está representada en el diagrama en la Fig. 1.7 y en la Fig. 3.6. En esta estructura, las cargas P están aplicadas a los elementos longitudinales S , llamados largueros, que están apoyados en los elementos transversales llamados vigas de tablero. Estas, a su vez, están soportadas por las vigas principales G . Por tanto, aunque las cargas estén aplicadas a los largueros como carga uniformemente repartida, o según cualquier sistema de cargas aisladas, su efecto en las vigas principales es el de cargas aplicadas por las vigas de tablero en los puntos a, b, c , etc.

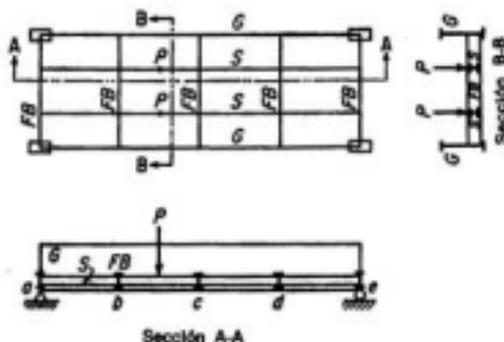
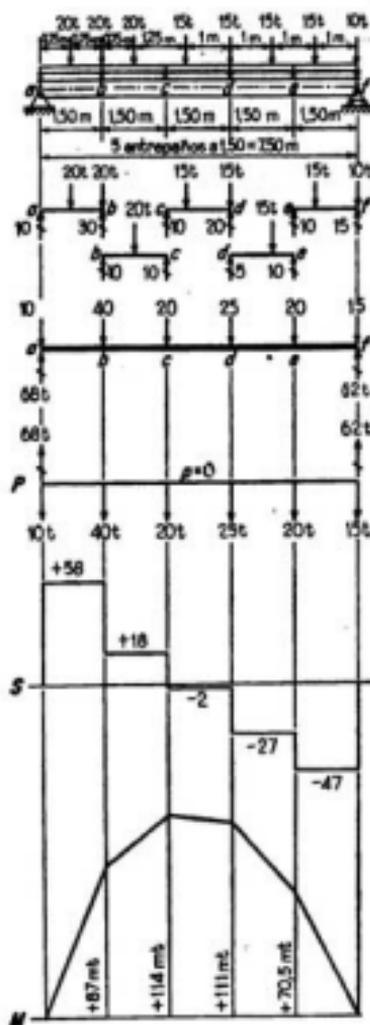


FIG. 3.6. Puente de viga armada.

Para aclarar el trazado de las curvas de cortantes y momentos flectores para vigas cargadas de este modo, consideremos el Ejemplo 3.8. Para sencillez, se supondrá que las cargas están aplicadas a largueros apoyados en el ala superior de la viga, como se ha representado. Se supondrá que los largueros y la viga están en el mismo plano. Se supondrá además que los largueros están soportados como vigas simplemente apoyadas, con una articulación en un extremo y un rodillo en el otro. Como primer paso, es necesario hallar las reacciones de los largueros y a partir de ellas, las cargas aisladas que actúan sobre la viga. A partir de este punto, el trazado de la curva de cortantes y momentos flectores de la viga es igual al de cualquier viga sobre la que actúa un sistema de cargas aisladas.

El estudiante deberá encontrar respuesta a las siguientes preguntas concernientes a este tipo de estructura: ¿En qué difieren las curvas de cortantes y momentos flectores en los dos casos, esto es, con y sin largueros? ¿Hay una semejanza notable? Si se aplica una carga uniformemente repartida a la estructura, ¿cómo serán las curvas de cortantes y momentos flectores con largueros y sin largueros? Si los largueros no están sustentados como vigas simplemente apoyadas en la viga principal, ¿variarán las respuestas a las preguntas anteriores? Los problemas del final del capítulo recalcarán alguno de estos puntos.

Ejemplo 3.8



Considerando vigas aisladas sometidas a las reacciones de los largueros,

$$\begin{aligned} \Sigma M_a &= 0, \uparrow \\ (40)(1P) &= 40P \\ (20)(2P) &= 40P \\ (25)(3P) &= 75P \\ (20)(4P) &= 80P \\ (5P)(R_{fy}) &= 235P \\ R_{fy, \text{ neta}} &= 47 t \uparrow \\ &\quad \underline{15 t} \\ R_{fy, \text{ total}} &= 62 t \uparrow \\ \Sigma M_f &= 0, \uparrow \\ (40)(4P) &= 160P \\ (20)(3P) &= 60P \\ (25)(2P) &= 50P \\ (20)(1P) &= 20P \\ (5P)(R_{fy}) &= 290P \\ R_{fy, \text{ neta}} &= 58 t \uparrow \\ &\quad \underline{10 t} \\ R_{fy, \text{ total}} &= 68 t \uparrow \end{aligned}$$

$\Sigma F_y = 0, \uparrow +$
 $62 + 68 - (3)(20) - (4)(15) - 10 = 0$
 $62 + 68 - 60 - 60 - 10 = 0 \quad \therefore \text{Comp.}$
 También pueden comprobarse estas reacciones utilizando las cargas aplicadas directamente.

Cortante y momento flector en la viga principal:

$$\begin{aligned} R_{fy, \text{ total}} &= 68 t \\ &\quad \underline{-10} \\ S_{a-b} &= \frac{-58 t \times 1.5}{+87 m t} = \frac{+87 m t}{+87 m t} = M_a \\ &\quad \underline{-40} \\ S_{b-c} &= \frac{18}{18} \times 1.5 = \frac{+27}{+114} = M_b \\ &\quad \underline{-20} \\ S_{c-d} &= \frac{-2}{-2} \times 1.5 = \frac{-3}{+111} = M_c \\ &\quad \underline{-25} \\ S_{d-e} &= \frac{-27}{-27} \times 1.5 = \frac{-40.5}{+70.5} = M_d \\ &\quad \underline{-20} \\ S_{e-f} &= \frac{-20}{-27} \times 1.5 = \frac{70.5}{0} = M_e \\ &\quad \underline{-15} \\ &\quad \underline{-62} \\ R_{fy, \text{ total}} &= \frac{+62}{0} \end{aligned}$$

Razonamiento:

Obsérvense los términos reacción «neta» y «total». La reacción total es la fuerza total que transmite el apoyo e incluye cualquier carga aplicada a la viga sobre el punto de apoyo. La reacción neta es la reacción en un apoyo debida a todas las cargas, excepto la aplicada directamente en este apoyo. Obsérvese que sólo entra en los cálculos de cortante y momento flector la reacción neta.

3.10 Ejemplos aclaratorios. Vigas estáticamente indeterminadas. De la discusión del Capítulo 2 se recordará que el análisis de esfuerzos de estructuras indeterminadas entraña el que se satisfagan no solo las ecuaciones del equilibrio estático, sino también ciertas condiciones de deformación. Más adelante se estudiará el análisis de esas estructuras. En los últimos capítulos se verá que, cuando se haya hallado alguna de las componentes desconocidas de esfuerzo (tales como reacciones, cortantes o momentos flectores), de modo que satisfagan las condiciones de deformación, se pueden hallar las restantes incógnitas para que satisfagan las condiciones de equilibrio estático. Esto es, el resto del problema es estáticamente determinado y se puede resolver por medio de las técnicas explicadas en los Caps. 2 y 3 para estructuras estáticamente determinadas.

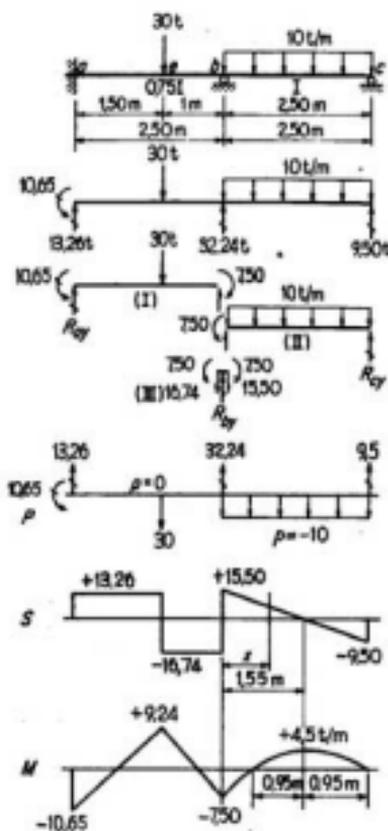
Una vez calculadas las reacciones de una viga estáticamente indeterminada, se puede calcular el cortante y el momento flector en la sección que se desee, del mismo modo que para las vigas estáticamente determinadas. También pueden seguirse los mismos principios al trazar las curvas de cortantes y momentos flectores.

Ejemplo 3.9 Sobre esta viga estáticamente indeterminada actúan no solo las cargas representadas, sino que también está sometida a ciertos movimientos de los apoyos. Los siguientes momentos flectores se han calculado utilizando los métodos estudiados más adelante para las estructuras estáticamente indeterminadas.

$$M_a = -10,65 \text{ m t}$$

$$M_b = -7,50 \text{ m t}$$

$$M_c = 0$$



Esquema I:

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0, \curvearrowright, (R_{ay})(2,50) + 7,50 - 10,65 \\ - (30)(1) = 0 \\ \therefore R_{ay} = 13,26 \text{ t } \uparrow \\ \therefore S_{bx} = 13,26 - 30 = \underline{-16,74 \text{ t}} \end{aligned}$$

Esquema II:

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0, \curvearrowright, \\ (10)(2,50)(1,25) - 7,50 - (R_{by})(2,50) = 0 \\ \therefore R_{by} = 9,50 \text{ t } \uparrow \\ \therefore S_{bx} = -9,50 + 25 = \underline{+15,50 \text{ t}} \end{aligned}$$

Esquema III:

$$\Sigma F_y = 0, R_{by} = 16,74 + 15,5 = \underline{32,24 \text{ t } \uparrow}$$

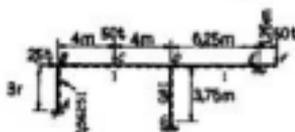
Momentos flectores:

$$\begin{aligned} M_a = -10,65 + (13,26)(1,50) = \underline{9,24 \text{ m t}} \\ \text{Entre b y c, hallar } M_{\max}. \end{aligned}$$

$$S_x = 15,50 - 10x$$

$$\begin{aligned} \text{Cuando } S_x = 0 = 15,50 - 10x, \\ \therefore x = \underline{1,55 \text{ m}} \end{aligned}$$

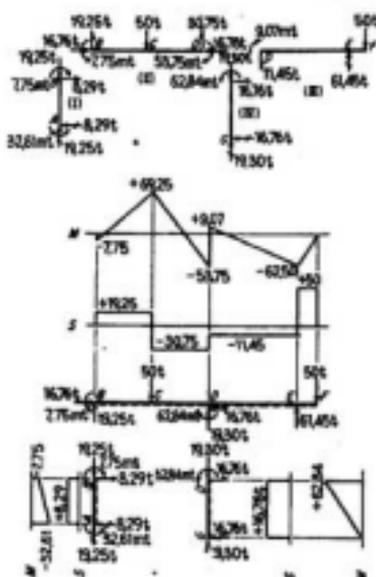
$$\begin{aligned} M_{\max} = -7,50 + (15,50) \left(\frac{1,55}{2} \right) \\ = \underline{+4,5 \text{ m t}} \end{aligned}$$



Ejemplo 3.10 Se han calculado los siguientes momentos flectores por los métodos del análisis de estructuras indeterminadas.

Se considera que son «fibras inferiores» las del lado de la barra con línea de trazos. Los momentos flectores (+) producen tracción en las fibras inferiores

En A extremo de AB: $M = -32,61$
 En B extremo de AB: $M = -7,75$
 En B extremo de BC: $M = -7,75$
 En D extremo de BC: $M = -53,75$
 En D extremo de DE: $M = +9,07$
 En E extremo de DE: $M = +62,84$



$$\begin{aligned} \Sigma M_A^{(I)} &= 0, & 32,61 \\ & & 7,75 \\ & & \frac{24,86}{3} \\ R_{Ax} &= & = 8,29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B^{(II)} &= 0, & 50 \times 4 = 200 \\ & & 7,75 \\ & & \frac{207,75}{8} \\ S_B &= 19,25 = & \frac{154,00}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C^{(III)} &= 0, & 50 \times 4 = 200 \\ & & 53,75 \\ & & \frac{253,75}{8} \\ S_C &= 30,75 = & \frac{246,00}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_D^{(IV)} &= 0, & 50 \times 7,50 = 375 \\ & & 9,07 \\ & & \frac{384,07}{6,25} \\ R_{Ex} &= 61,45 = & \frac{384,07}{6,25} \end{aligned}$$

3.11 Problemas para resolver

Problema 3.1 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores para las condiciones de carga de la viga simplemente apoyada representada en la Figura 3.7.



FIG. 3.7. Problema 3.1.

Sugerencia: ¿Cuál es el máximo momento flector en cada caso? Si en b, k es igual a 0,5, ¿cuál es el máximo momento flector?

Problema 3.2 Dibujar las curvas de cargas, cortantes y momentos flectores de la viga de la Figura 3.8.

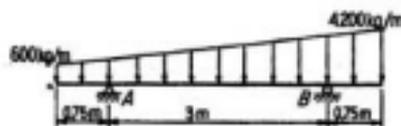


FIG. 3.8. Problema 3.2.

***Problema 3.3** Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga de la Figura 3.9.

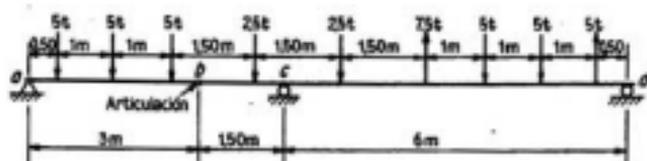


FIG. 3.9. Problema 3.3.

Problema 3.4 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga representada en los Probs. 2.2a y b.

***Problema 3.5** Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga AB de la Figura 3.10.

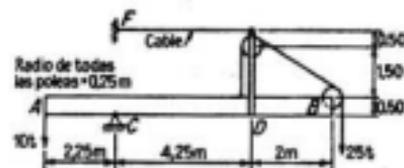


FIG. 3.10. Problema 3.5.

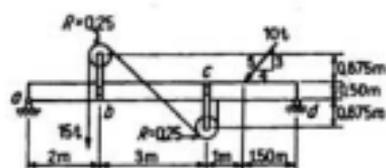


FIG. 3.11. Problema 3.6.

***Problema 3.6** Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga de la Figura 3.11.

Problema 3.7 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga ab del Problema 2.2d y de las vigas ab y cd del Problema 2.2e.

Problema 3.8 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de las barras ab y bc de la estructura de la Figura 3.12.

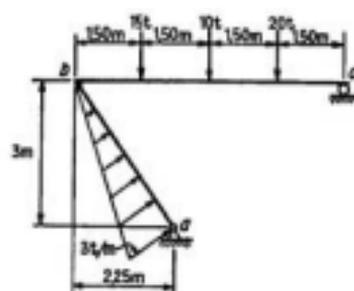


FIG. 3.12. Problema 3.8.

***Problema 3.9** Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga compuesta ab de la Figura 3.13.

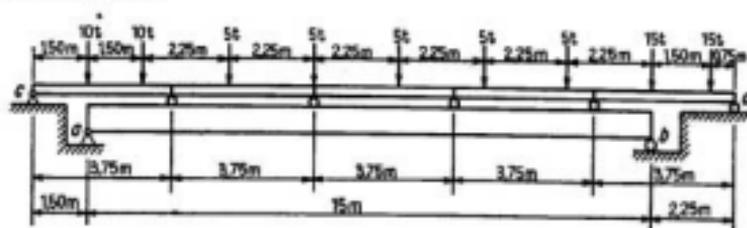


FIG. 3.13. Problema 3.9.

Problema 3.10 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la viga compuesta ab de la Figura 3.14.

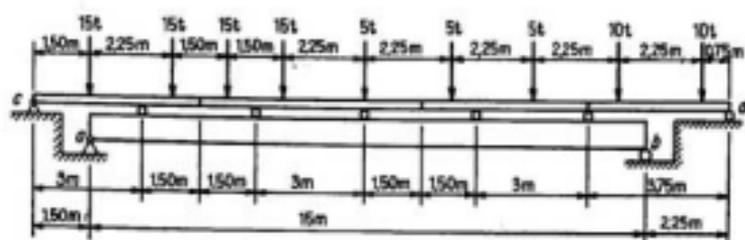


FIG. 3.14. Problema 3.10.

Problema 3.11 Dibujar las curvas de cortante y momentos flectores de las vigas de la Figura 3.15.

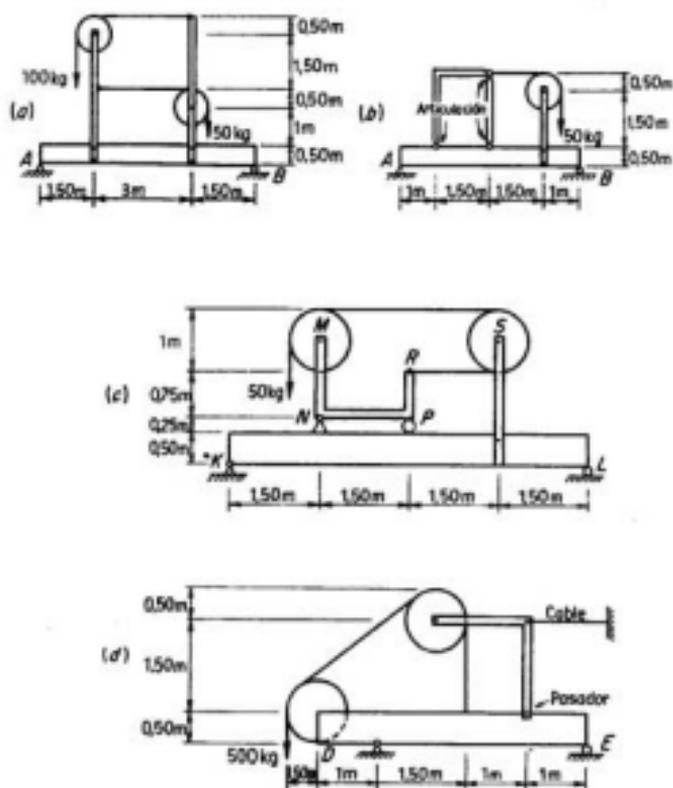


FIG. 3.15. Problema 3.11.

Problema 3.12 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de las vigas de la Figura 3.16.

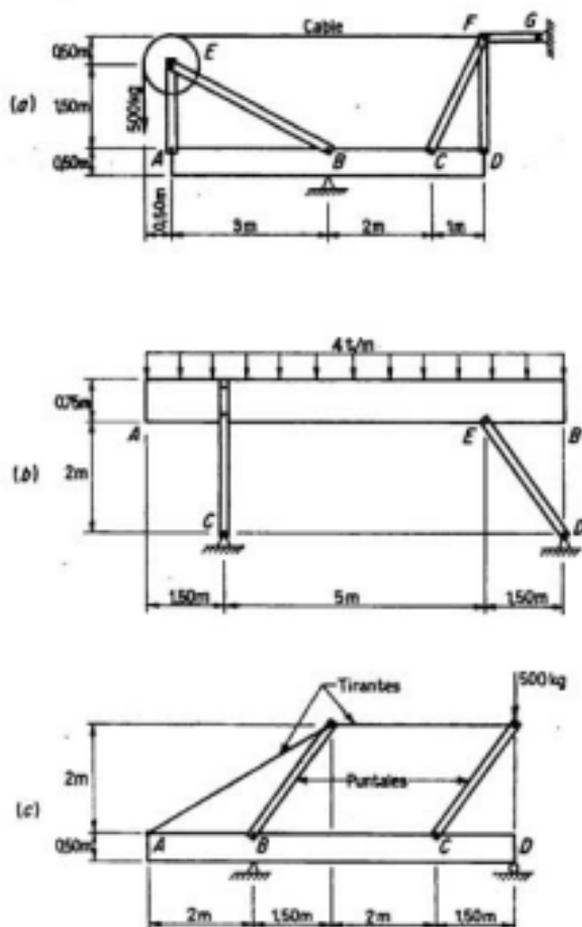


FIG. 3.16. Problema 3.12.

4

Cerchas o vigas trianguladas planas

4.1 Generalidades. Definiciones. En este capítulo se estudiará la teoría general del análisis de esfuerzos de los elementos estructurales conocidos, según su aplicación, por cerchas, vigas trianguladas o cuchillos de armadura. A pesar del diverso fin a que se destinan, el comportamiento estructural es el mismo, por lo que en el estudio nos referiremos a ellos indistintamente, con uno u otro nombre. También se tratará del modo de disponer las barras componentes para obtener una estructura estable. En un capítulo posterior se considerará en detalle el análisis de los esfuerzos de los tipos más importantes de cerchas de cubierta y de cuchillos de puentes, bajo las hipótesis de cargas normales.

Se puede definir una cercha o viga triangulada plana como una estructura compuesta por cierto número de barras, que están todas en un plano, articuladas entre sí en sus extremos de modo que se forme un entramado rígido. Para el estudio se supondrá en este capítulo que se cumplen las condiciones siguientes: 1) Las barras están unidas entre sí en sus extremos por nudos de pasador sin rozamiento. 2) Las cargas y reacciones se aplican solo en los nudos. 3) El eje de cada barra es recto, coincide con la línea que une los centros de los nudos en cada extremo de la misma, y está en el plano que contiene también a las líneas de acción de todas las cargas y reacciones. Indudablemente, es físicamente imposible que se cumplan todas estas condiciones en una cercha real, por lo que aquella en que se supone que se verifican se llama cercha ideal.

Se puede aislar cualquier barra de una cercha ideal como cuerpo libre, desconectándola de los nudos de cada extremo. Como todas las cargas exteriores y reacciones están aplicadas a la cercha solo en los nudos y no hay ninguna carga aplicada entre los extremos de las barras, sobre la barra aislada solo actuarán dos fuerzas, una en cada extremo, que representarán la acción del nudo sobre la barra en ese extremo. Como se supone que todos los nudos están articulados y no tienen rozamiento, cada una de estas dos fuerzas debe estar dirigida hacia el centro de su correspondiente nudo articulado. Para que estas dos fuerzas satisfagan las tres condiciones del equilibrio estático para la barra aislada, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$, es evidente que deben actuar según la recta que une los centros de los nudos de cada extremo de la barra y deben ser numéricamente iguales y de sentido contrario. Como los ejes de las barras de una cercha ideal son rectos y coinciden con las líneas que unen los nudos de cada extremo, toda sección transversal de una barra estará sometida a la misma fuerza axial, pero no a momento flector o fuerza cortante. *El análisis de esfuerzos de una cercha ideal se ha terminado prácticamente, por tanto, cuando se han hallado las fuerzas axiales para todas las barras de la misma, pues ya pueden calcularse fácilmente las intensidades de las tensiones en las secciones de las barras.*

Las estructuras tridimensionales compuestas de un cierto número de barras articuladas entre sí de modo que formen un entramado rígido se llaman *armaduras espaciales*. Estas estructuras se estudiarán en detalle en el Capítulo 9.

Las cerchas y las armaduras espaciales son estructuras dispuestas específicamente para soportar cargas aplicadas en sus nudos. Como consecuencia de estas cargas en los nudos, las barras de estas armaduras de celosía están sometidas principalmente a cargas axiales y a pequeños o nulos cortante y flexión. Si se aplican fuerzas transversales a las barras entre los nudos, no se cumple uno de los requisitos para el comportamiento como cercha, y se producen cortantes y momentos flectores considerables. Si los nudos son articulaciones de pasador o de rótula sin rozamiento, estos efectos de flexión se limitan a las barras sometidas a cargas entre nudos. (El Prob. 4.6 aclara este caso.) Pero si estos nudos son rígidos, la estructura actúa como si fuera una armadura rígida (ver Sec. 4.13). En este caso, los efectos de flexión en las barras cargadas transversalmente se transmiten a través de los nudos a otras barras, de modo que pueda producirse un cortante y una flexión apreciables en todas las barras de la estructura. En los Caps. 11 y 13 se estudiarán métodos para analizar entramados rígidos estáticamente indeterminados.

4.2 Cerchas ideales y reales. Aunque la cercha ideal es solo una hipótesis y nunca puede existir realmente, el análisis de esfuerzos de una cercha real, basado en la hipótesis de que actúa como una ideal, proporciona generalmente una solución satisfactoria para las fuerzas axiales en las barras. Estas fuerzas se llaman *fuerzas de barra*. Las intensidades de las tensiones debidas a las fuerzas de barra, calculadas tomando como base que la cercha actúa como una ideal, se llamarán intensidades de las *tensiones primarias*.

Los pasadores de una cercha real no están siempre verdaderamente sin rozamiento; además, las cerchas más modernas se hacen con nudos roblonados o soldados, de modo que no pueda haber cambios esenciales en los ángulos entre las barras que se juntan en un nudo¹. Como consecuencia, aun cuando las fuerzas exteriores estén aplicadas en el centro de los nudos, la acción de estos nudos en los extremos de una barra puede consistir en fuerzas axial y transversal, y un par. Por tanto, la sección transversal de una barra puede estar sometida a una fuerza axial, una fuerza cortante y un momento flector. Además, el peso propio de las barras debe estar necesariamente repartido a lo largo de las mismas y contribuye a aumentar su flexión. Si se proyecta bien y se tiene la precaución de hacer que los ejes de las barras coincidan con las líneas que unen los centros de los nudos, se puede eliminar, o reducir al mínimo, la flexión de las barras debida a una posible excentricidad.

Todas estas desviaciones de las condiciones exigidas por una cercha ideal, no solo pueden producir una flexión de las barras de una cercha real, sino causar también fuerzas de barra que sean algo diferentes de las de la cercha ideal. La diferencia entre las intensidades de las tensiones en las barras de una cercha real y las intensidades de las tensiones primarias calculadas para la cercha ideal correspondiente, se llaman *intensidades de las tensiones secundarias*. Pero se puede demostrar que, en el caso de las cerchas ordinarias, que se han proyectado de modo que los ejes de las barras se encuentren en los centros de los nudos y en las que estas barras son relativamente delgadas, las intensidades de las tensiones secundarias son pequeñas en comparación con las de las primarias². Por tanto, normalmente, las intensidades de las tensiones primarias, calculadas suponiendo que la cercha actúa como una cercha-ideal, son satisfactorias para el proyecto.

¹ Ver también los tres primeros párrafos de la Sec. 4.13, Pórticos rígidos.

² Ver J. I. Parcol y R. B. B. Moorman, «Analysis of Statically Indeterminate Structures», cap. 9, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1955.

En lo sucesivo se usará la palabra cercha para expresar una armadura que sea realmente una cercha ideal con nudos articulados, o que pueda suponerse que actúa como si lo fuera.

4.3 Disposición de las barras de una cercha. En la Sec. 4.1 se ha dicho que deben articularse entre sí las barras de una cercha para formar una armadura rígida. La palabra rígida se usa en este caso con el mismo significado que en la Sec. 2.3; esto es, se dice que una armadura es rígida, si no hay movimiento relativo entre dos de sus partículas aparte del causado por las pequeñas deformaciones elásticas de las barras del mismo. En este sentido, se puede obtener una armadura rígida disponiendo las barras de muchos modos diferentes. Cuando se han dispuesto satisfactoriamente de uno de estos modos, se puede apoyar de alguna forma toda la cercha y utilizarla para soportar cargas como una viga.

Spongamos que es necesario formar una cercha con nudos articulados en los puntos a , b , c y d . Si se quiere hacer articulando entre sí cuatro barras, como se ve en la



FIG. 4.1. Entramados: (a) no rígido; (b) rígido.

Fig. 4.1a, la armadura resultante no será rígida y se puede hundir en la forma representada, por causa de las fuerzas P , hasta que los nudos a , d y c estén en línea recta. A poco que se piense, se ve que cualquier intento como este de unir cuatro o más nudos entre sí con el mismo número de barras articuladas en sus extremos, dará lugar a una cercha que fallará con todas las condiciones de carga, excepto con algunas particulares. Por el contrario, si se unen primero los puntos a y b por una barra ab , luego se pueden articular otras dos barras de longitudes ad y bd en a y b , respectivamente. Si después se articulan entre sí los extremos d de estas barras en el punto d , se formará un triángulo rígido que une los nudos a , b y d . A los nudos d y b se pueden conectar ahora barras de longitudes dc y bc , respectivamente, haciendo coincidir los extremos c de las mismas en el punto c , y articularlas en él, uniendo así rigidamente el nudo c al triángulo abd , formando una armadura rígida de cinco barras con nudos a , b , c y d . También puede conectarse el punto c a los nudos a y b por medio de barras ac y bc o a los nudos a y d con barras ac y dc . Se pueden usar también otras varias disposiciones, formando primero un triángulo con nudos a , b y c ; o con a , d y c ; o con b , c y d . Cada una de ellas dará lugar a una armadura rígida, capaz de soportar cualquier sistema de cargas en los nudos sin hundirse, mientras no pandee ninguna de las barras o se la someta a una tensión superior al punto de fluencia del material.

De igual modo, se puede unir cualquier número de nudos articulados por medio de barras, para formar una armadura rígida. El modo de proceder es elegir primero tres nudos que no estén en línea recta. Estos tres puntos se pueden unir por medio de tres barras articuladas entre sí para formar un triángulo. Luego se puede unir a su vez cada uno de los otros nudos, utilizando dos barras para unirle a dos nudos apropiados cualesquiera de la armadura ya construida. Evidentemente, el nuevo nudo y los dos a los que se une, nunca deben estar en línea recta. Cada una de las cerchas representadas en la Fig. 4.2 se ha formado de este modo, comenzando con un triángulo rígido

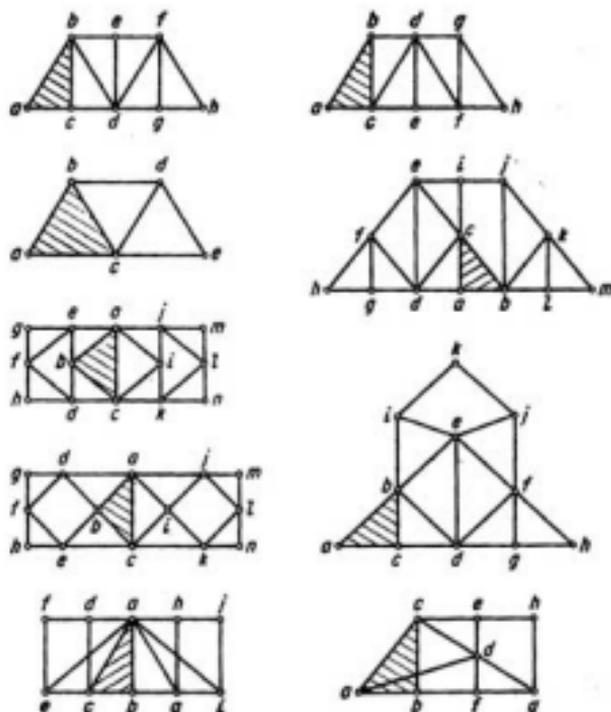


FIG. 4.2. Cerchas simples.

abc y usando dos barras más para unir cada uno de los otros nudos, en orden alfabético.

Las cerchas cuyas barras están dispuestas de este modo se llaman *cerchas simples*, porque es el tipo más sencillo y común de disposición de barras en la práctica.

En todos los diagramas de cerchas como los de la Fig. 4.2, se representarán las barras por líneas sencillas y los nudos que las unen por pequeños círculos. A veces se pueden cruzar las barras entre sí, pero deben disponerse de forma que no estén unidas una a otra por un nudo en su punto de intersección.

Cuando se han dispuesto las barras para formar una cercha simple, puede apoyarse toda la armadura como si fuera una viga. Para cumplir las condiciones de una cercha ideal, se proyectarán los apoyos de modo que las reacciones estén aplicadas en los nudos. Recordando la discusión de la Sec. 2.5, es evidente que, si se disponen los apoyos de la cercha de modo que sean equivalentes a apoyos de tres bielas, no paralelos, ni concurrentes, la estructura es estable y sus reacciones son estáticamente determinadas para una hipótesis general de cargas. En la Fig. 4.3 se muestran ejemplos de cercha simple apoyada de modo estable y estáticamente determinado.

A veces es conveniente unir dos o más cerchas simples entre sí para formar una armadura rígida. En estos casos, la armadura formada de este modo se llama *cercha compuesta*. Se puede unir rigidamente una cercha simple a otra en ciertos puntos por tres bielas no paralelas ni concurrentes, o por el equivalente de este tipo de unión. Por tanto, dos cerchas unidas de esta manera formarían una cercha compuesta completamente rígida. De igual modo, se pueden conectar más cerchas simples a la construida, para formar otra compuesta más complicada.

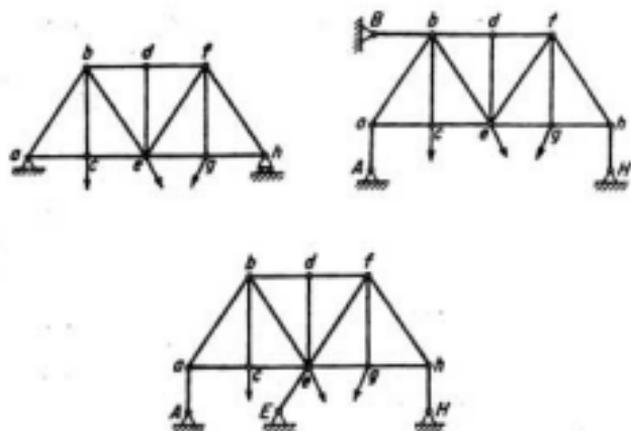


FIG. 4.3. Cerchas simples estables y estáticamente determinadas.

En la Fig. 4.4 se muestran varios ejemplos de cerchas o cuchillos compuestos. En todos los casos, se han rayado las cerchas simples que se unen entre sí. En las *a*, *e* y *f* se han unido entre sí las cerchas simples por medio de las barras 1, 2 y 3. En los casos *b* y *c* se han unido entre sí las cerchas en un nudo común, con lo que se necesita solo una barra adicional para formar una armadura rígida compuesta. En el caso *d*, la barra adicional que une las cerchas *A* y *B* entre sí se ha sustituido por una cercha simple *C*.

Dispuestas las barras para formar una cercha compuesta, se puede apoyar toda la armadura de igual forma que una cercha simple.

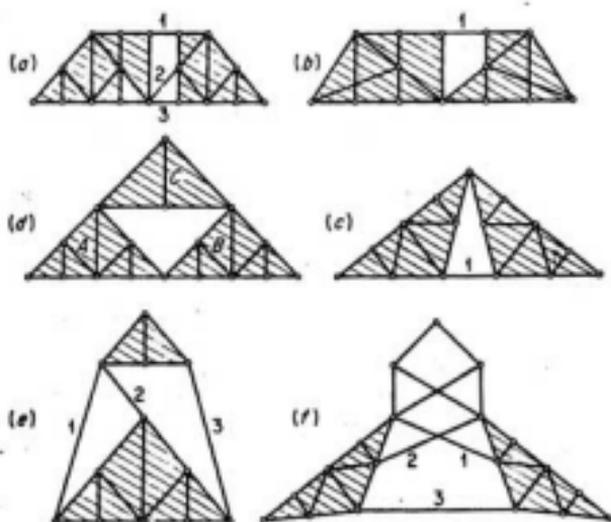


FIG. 4.4. Cerchas compuestas.

4.4 Notación y criterio de signos utilizados en el estudio de los esfuerzos en las cerchas. Antes de comenzar el estudio de los esfuerzos en las cerchas, es necesario establecer una notación y un criterio de signos para representar las fuerzas en las barras.

Se designarán las diversas barras de una cercha por los nombres de los nudos de cada extremo. Se usará la letra F para expresar la fuerza de barra; así, utilizando sub-índices para representar la barra, F_{ab} expresa la fuerza de la barra ab . A menudo se escriben los valores de las fuerzas de barra de una cercha en forma de tabla, o bien a lo largo de las distintas barras en un diagrama lineal de la cercha. A este objeto, es conveniente adoptar un criterio definido para designar el carácter del esfuerzo en una barra, esto es, si se trata de tracción o compresión. El criterio más conveniente es utilizar un signo más (+) para designar una tracción y un signo menos (-) para una compresión. Así, +10 significa una tracción de 10, y -10, una compresión de 10. Se usa el signo más para designar una tracción porque tal fuerza de barra produce un alargamiento, o un aumento de longitud de la misma. Así, una fuerza positiva produce un cambio de longitud positivo. Por el contrario, una fuerza de barra de compresión, o negativa, origina una disminución, o cambio negativo de longitud de la misma.

En el estudio de esfuerzos de las cerchas, conviene a veces trabajar con dos componentes rectangulares de una fuerza de barra en lugar de hacerlo con la fuerza misma. A este objeto se eligen dos direcciones ortogonales x e y (normalmente horizontal y vertical, respectivamente) y se designan las dos componentes en la barra ab por X_{ab} e Y_{ab} . Es especialmente importante para el estudiante el familiarizarse completamente con las diversas relaciones entre una fuerza y sus dos componentes rectangulares. Estas relaciones son tan importantes en el estudio de las cerchas, que el estudiante debe manejarlas con facilidad, por cuya razón se repasan algunas de ellas. Cuando una fuerza de barra actúa en el eje de la misma, son evidentes las siguientes proposiciones:

1. *La componente horizontal (o vertical) de una fuerza de barra es igual a dicha fuerza multiplicada por la relación de la proyección horizontal (o vertical) de la correspondiente barra a la longitud de su eje.*

2. *La fuerza de barra en un elemento es igual a su componente horizontal (o vertical) multiplicada por la relación de la longitud del eje del elemento a su proyección horizontal (o vertical).*

3. *La componente horizontal de una fuerza de barra es igual a la componente vertical multiplicada por la relación de la proyección horizontal a la vertical de la longitud del eje, o viceversa.*

El principio siguiente es importante también al tratar con cálculos de fuerzas en barras:

4. *Al objeto de escribir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo particular aislado, se puede sustituir cualquier fuerza por sus componentes rectangulares, siempre que se suponga que ambas componentes actúan en un punto apropiado de la línea de acción de la fuerza.*

4.5 Teoría del análisis de esfuerzos de cerchas. Para determinar la capacidad de una cercha de resistir una condición de cargas dadas, es necesario primeramente calcular las fuerzas de barra desarrolladas en los distintos elementos para resistir las cargas. El camino principal para estudiar las tensiones internas en un cuerpo es el mismo si se trata de una viga, una cercha o cualquier otro tipo de estructura. En el caso de una cercha este camino consiste en trazar una sección imaginaria que corte algunas de las barras y aislar una parte de la cercha como cuerpo libre. En las secciones interiores que han quedado expuestas al cortar, actuarán tensiones interiores. En el caso de una

barra de una cercha ideal, la resultante de estas tensiones es simplemente una fuerza axial, llamada la fuerza de barra del elemento.

Si la cercha en conjunto está en equilibrio estático, la parte aislada de ella debe estarlo también. Sobre cualquier parte de la cercha aislada, actuará un sistema de fuerzas que constará de ciertas fuerzas exteriores y las fuerzas de barras que actúan en las caras expuestas de los elementos que han sido cortados por la sección. A menudo, es posible aislar partes de una cercha, de modo que sobre cada una de ellas actúa un número limitado de fuerzas de barra desconocidas, que podrán determinarse para satisfacer las condiciones de equilibrio estático de esa parte.

Puede explicarse fácilmente este modo de proceder, considerando un ejemplo específico, como la cercha simple de la Fig. 4.5. Esta cercha está soportada de modo que las reacciones son estáticamente determinadas y se calculan fácilmente, como se ve en la figura. Para proceder, ahora, a la determinación de las fuerzas de barra en la cercha, supongamos que se ha hecho pasar una sección imaginaria por el nudo *a*, cortando las barras *ab* y *ac*, aislando así completamente el nudo *a* del resto de la cercha, como se ve en el esquema de cuerpo libre *a* de esta figura.

Este nudo aislado será un cuerpo libre sobre el que actuará un sistema de fuerzas concurrentes, pues las fuerzas de barra en las barras cortadas de una cercha ideal y las fuerzas exteriores son todas fuerzas cuyas líneas de acción pasan por el centro del nudo aislado. La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes no puede ser un par, por lo que el sistema estará en equilibrio si $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Por tanto, si solo hay dos fuerzas de barras desconocidas que actúan en un nudo aislado dado y no tienen la misma línea de acción¹, las dos condiciones del equilibrio estático conducirán a dos ecuaciones independientes que, resueltas, nos darán las dos fuerzas desconocidas. Si hay más de dos fuerzas de barra desconocidas, no pueden determinarse inmediatamente los valores de todas las incógnitas con solo esas dos ecuaciones.

Sin embargo, en este caso el nudo aislado *a* está sometido a la reacción desconocida y a solo dos fuerzas de barra desconocidas F_{ab} y F_{ac} . Conocidas las inclinaciones de las barras, se pueden expresar las componentes horizontal y vertical de las dos fuerzas de barra desconocidas en función de la fuerza de barra, como se ve en el esquema *a*. Pueden escribirse las dos ecuaciones del equilibrio estático, suponiendo que F_{ab} y F_{ac} son las dos tracciones

$$\Sigma F_y = 0, \quad +\uparrow, 29 + \frac{4}{5}F_{ab} = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad +\rightarrow, \frac{3}{5}F_{ab} + F_{ac} = 0 \quad (b)$$

Luego, de la Ec. (a)

$$F_{ab} = -36,25 \text{ t} \quad (\text{compresión})$$

y, por tanto, de la Ec. (b)

$$F_{ac} = -\frac{3}{5}F_{ab} = -\left(\frac{3}{5}\right)(-36,25) = +21,75 \text{ t} \quad (\text{tracción})$$

Por tanto, las componentes de F_{ab} son

$$X_{ab} = \left(\frac{3}{5}\right)(-36,25) = -21,75 \text{ t}$$

$$Y_{ab} = \left(\frac{4}{5}\right)(-36,25) = -29 \text{ t}$$

¹ Si las dos fuerzas de barras reconocidas tienen la misma línea de acción, ¿serán las dos ecuaciones compatibles e independientes?

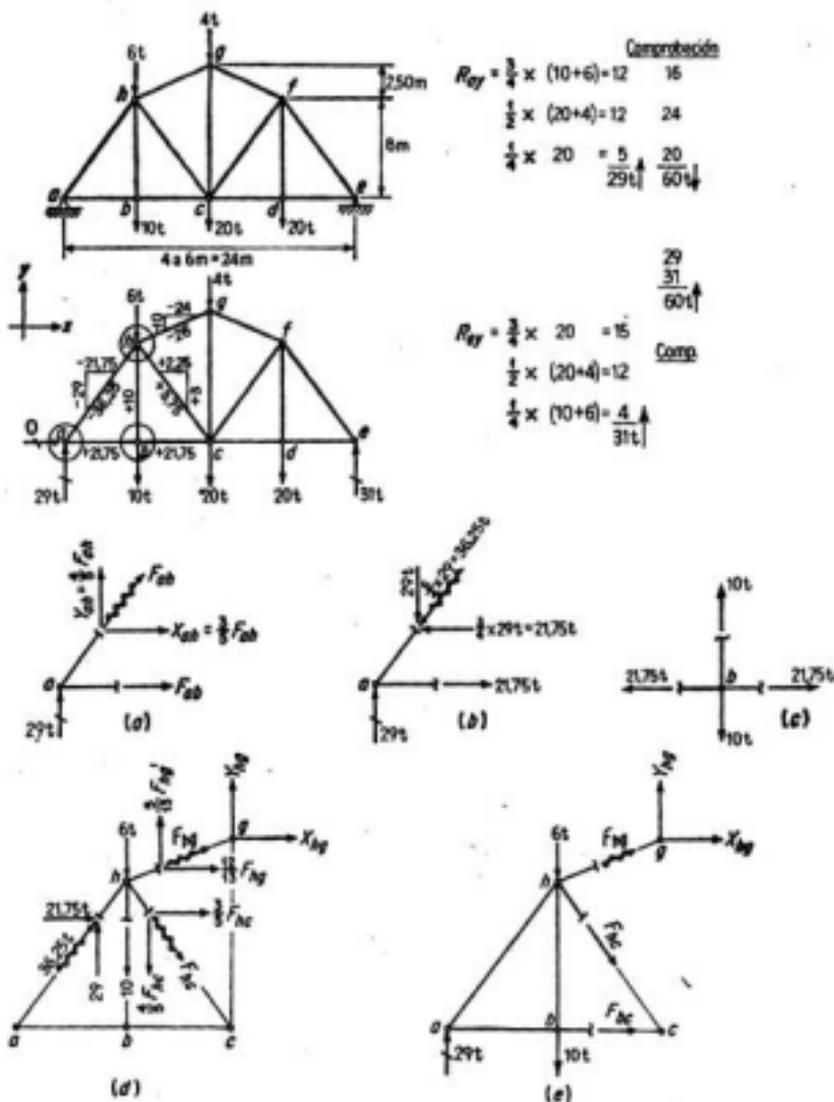


FIG. 4.5. Análisis de una cercha simple.

El signo menos indica que F_{ab} es de sentido opuesto al supuesto (una compresión), mientras que el más indica que F_{ab} tiene el sentido supuesto (una tracción). Sin embargo, el signo de los resultados está automáticamente de acuerdo con el criterio adoptado para expresar el carácter del esfuerzo. Estos resultados se pueden anotar en el diagrama de la cercha como $-36,75$ y $+21,75$, indicando los signos el carácter del esfuerzo. Se anotan las componentes de la fuerza en ab en el diagrama lineal, como se ve.

Se obtendrá esta conformidad de los signos de los resultados si, al dibujar los esquemas de cuerpo libre y plantear las ecuaciones de la estática, se supone que el sentido

de las fuerzas desconocidas de barra es tracción. Si se hace esto, un signo más en la respuesta indica que el sentido supuesto es correcto y, por tanto, tracción, mientras que un signo menos indica que el sentido supuesto es incorrecto y se trata de compresión. Así, los signos de los resultados estarán automáticamente de acuerdo con el criterio de signos establecido.

El procedimiento seguido puede aplicarse para hallar las fuerzas de barra desconocidas en cualquier nudo aislado sobre el que actúan solo dos de ellas. En esta cercha particular se pueden calcular las restantes fuerzas de barra desconocidas fácilmente, aislando los restantes nudos uno después de otro, eligiendo siempre el siguiente nudo a aislar de modo que las fuerzas en él, menos dos (o menos) de las barras cortadas, se hayan calculado previamente. Indudablemente, es necesario también que estas dos fuerzas de barra desconocidas tengan distinta línea de acción. Esta técnica de trazar una sección para aislar un nudo de una cercha se llama *método de los nudos*.

A veces es más rápido trazar una sección que aísla una parte que contiene varios nudos. Esta técnica se llama *método de las secciones*. Una parte aislada constituida por varios nudos de una cercha será un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas no concurrentes, que puede consistir en un cierto número de fuerzas exteriores y de fuerzas de barra en las barras cortadas por la sección dada. Para el equilibrio de esa parte, se deben satisfacer, por las fuerzas que actúan en ella, las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$. Por tanto, si solo actúan en esta parte tres fuerzas de barra desconocidas y esas tres barras no son ni paralelas ni concurrentes, se pueden obtener los valores de las tres fuerzas desconocidas de estas tres ecuaciones de equilibrio.

En el esquema *e* de la Fig. 4.5 se muestra una aplicación del método de las secciones. En este caso, el corte pasa por las barras *hg*, *hc* y *bc*, aislando así la parte de cercha de la izquierda. Las fuerzas desconocidas en estas tres barras cortadas se pueden determinar resolviendo las tres ecuaciones del equilibrio de la parte aislada. En las discusiones anteriores del cálculo de las reacciones, se ha demostrado que es posible muchas veces simplificar la resolución en los casos de sistemas de fuerzas no concurrentes, utilizando el ingenio al escribir las condiciones de equilibrio. Por ejemplo, para hallar F_{bc} , tomaremos momentos respecto a *c*, punto de intersección de F_{hg} y F_{hc} , y descompondremos F_{bc} en sus componentes horizontal y vertical en el punto *g*. Así, solo entra X_{bc} en la ecuación del momento, y

$$\Sigma M_c = 0, \uparrow, (X_{bc})(10,50) + (29)(12) - (16)(6) = 0$$

de donde $X_{bc} = -24$ y, por proporción, $Y_{bc} = -10$ y $F_{bc} = -26$. De un modo similar,

$$\Sigma M_b = 0, \uparrow, (29)(6) - (F_{bc})(8) = 0$$

de donde $F_{bc} = +21,75$. Luego pueden usarse $\Sigma F_x = 0$ o $\Sigma F_y = 0$ para obtener la componente horizontal o vertical, respectivamente, de F_{bc} .

$$\Sigma F_x = 0, \rightarrow, X_{bc} + 21,75 - 24 = 0$$

de donde $X_{bc} = +2,25$ y, por proporcionalidad, $Y_{bc} = +3$ y $F_{bc} = +3,75$. Indudablemente, se pueden escribir tres ecuaciones independientes cualesquiera de la estática y deducir de ellas estas tres fuerzas desconocidas. Sin embargo, si no se utiliza el ingenio, pueden contener las tres ecuaciones a las tres incógnitas y tener que resolver el sistema, mientras que, como acaba de verse, es posible escribir tres ecuaciones cada una de las cuales solo contiene una incógnita.

4.6 Aplicación del método de los nudos y del método de las secciones. En la sección anterior, las ecuaciones correspondientes a la aplicación del método de los nudos y del método de las secciones se escribieron de un modo completo. Sin embargo, muchas veces esto es innecesario. Por ejemplo, tomaremos el nudo *a* que se usó al explicar el método de los nudos en la sección anterior. Ahora, consideremos este nudo aislado como cuerpo libre, según se representa en el esquema *b* de la Fig. 4.5. A primera vista se aprecia que, para que se satisfaga $\Sigma F_y = 0$, la componente vertical en la barra *ab* debe empujar hacia abajo con una fuerza de 29 t para compensar la reacción. Luego, por proporcionalidad, la componente horizontal y la fuerza de barra misma en esta barra son iguales a 21,75 y una compresión de 36,25, respectivamente, en la dirección representada. Conocida la componente horizontal en *ab*, es evidente que, para que se satisfaga $\Sigma F_x = 0$, la fuerza en *ab* debe ser una tracción de 21,75, que actúe hacia la derecha para compensar la componente horizontal en *ab* que actúa hacia la izquierda.

Como se conoce la fuerza de barra en *ab*, es elemental hallar las fuerzas en *bc* y *bh* cortando con una sección que aisle el nudo *b*, como se ve en el esquema de cuerpo libre *c* de la Fig. 4.5. También este caso sencillo puede resolverse fácilmente de un modo especial para hallar las dos fuerzas de barra desconocidas F_{bc} y F_{bh} . Para que se satisfaga $\Sigma F_x = 0$, es evidente que F_{bc} debe ser una tracción de 21,75 y, para satisfacer $\Sigma F_y = 0$, F_{bh} debe ser una tracción de 10.

Si se aísla de la misma forma el nudo *h*, como se ve en el esquema de cuerpo libre *d*, la sección cortará cuatro barras, dos con fuerzas de barra conocidas y dos en las que son desconocidas. Nuevamente, pueden hallarse estas dos incógnitas de las condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el nudo aislado. Suponiendo que las fuerzas desconocidas son tracciones, se pueden escribir las dos ecuaciones como sigue:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0, \quad \overline{+}, \quad \frac{1}{13}F_{bc} + \frac{3}{5}F_{bh} + 21,75 = 0 \\ \Sigma F_y &= 0, \quad \overline{+}, \quad \frac{3}{13}F_{bc} - \frac{2}{5}F_{bh} - 6 - 10 + 29 = 0\end{aligned}$$

En este caso, desgraciadamente, ambas ecuaciones contienen a las dos incógnitas, y es necesario resolver el sistema. Naturalmente, se pueden hallar así las dos incógnitas muy fácilmente, pero consideremos las ventajas de proceder como sigue:

En el estudio de los cálculos de las reacciones en el Cap. 2, se recordará que muchas veces era preferible sustituir una o las dos condiciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ por una o dos ecuaciones de momentos. En el caso presente es aconsejable utilizar una técnica similar en el nudo aislado *h*. Supongamos que, en el esquema de cuerpo libre *d*, las posiciones de los nudos *a*, *c* y *g* están situadas en el espacio como se representa. Se podrá usar $\Sigma M_c = 0$ en lugar de la ecuación $\Sigma F_y = 0$ o la $\Sigma F_x = 0$. Tomando momentos respecto al punto *c*, no solo se elimina F_{bc} de la ecuación, sino que es posible simplificar el cálculo de los momentos de las fuerzas en las barras *ah* y *hg*. Ahora, pueden descomponerse estas dos fuerzas de barra en sus componentes vertical y horizontal en los nudos *a* y *g*, respectivamente, y solo entrarán en la ecuación de momentos la componente vertical de F_{ah} y la horizontal de F_{hg} y se pueden obtener fácilmente los brazos de palanca de ambas componentes. Así,

$$\Sigma M_c = 0, \quad \overline{+}, \quad (X_{ah})(10,50) + (29)(12) - (16)(6) = 0 \quad \therefore X_{ah} = -24$$

y por la proporcionalidad $Y_{ah} = -10$ y $F_{ah} = -26$.

Conocidas F_{ah} y sus dos componentes, es fácil utilizar $\Sigma F_x = 0$ o $\Sigma F_y = 0$ y hallar, respectivamente, las componentes horizontal o vertical de la fuerza en *hc*, directamente. Por ejemplo, como $X_{ah} = -24$, la componente horizontal en *hc* debe actuar hacia la

derecha con 2,25 t para compensar las 21,25 t en ah y hacer $\Sigma F_x = 0$. Esto significa que esta barra está en tracción y, por proporcionalidad, la fuerza de barra y la componente vertical son +3,75 y +3, respectivamente. Se pueden comprobar todos estos cálculos viendo si los resultados satisfacen a $\Sigma F_y = 0$.

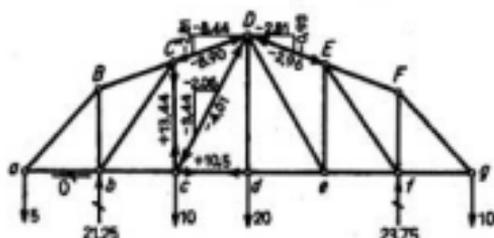
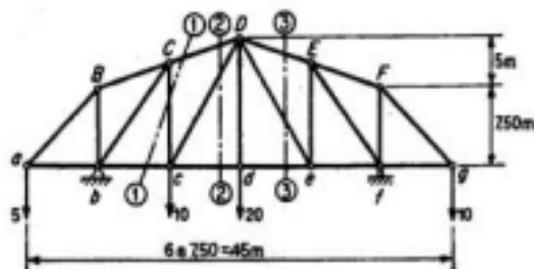
En los siguientes ejemplos aclaratorios se usarán otras técnicas y «trucos» para simplificar la aplicación del método de los nudos y del de las secciones. En los primeros ejemplos se representarán en detalle los esquemas de cuerpo libre. Para habituar al estudiante a ver los esquemas de cuerpo libre cuando sea posible, en los últimos ejemplos se omitirán tales esquemas. Cuando sea posible se llevarán los cálculos de un modo no clásico. Si el estudiante encuentra difícil seguir estas simplificaciones, dibujará los esquemas de cuerpo libre necesarios y planteará las ecuaciones de equilibrio completas. Debe reconocerse que es de desear el facilitar ver los esquemas de cuerpo libre y resolver las ecuaciones de equilibrio de modo simplificado; pero se reconocerá también que aun el experto debe volver a los métodos fundamentales —trazar esquemas y escribir ecuaciones— cuando está confuso, o se enfrenta con un problema difícil.

Debe observarse cuidadosamente la técnica de dibujar los esquemas de cuerpo libre de partes aisladas de una cercha. Se representará cualquier fuerza de barra que sea de magnitud¹ conocida por cálculos anteriores, en cualquier esquema que se dibuje posteriormente, con su magnitud. Por ejemplo, al dibujar el esquema de cuerpo libre d de la Fig. 4.5 se han calculado previamente las fuerzas en las barras ah y bh y se han anotado en el diagrama de la cercha como -36,25 y +10, respectivamente. Por tanto, las fuerzas de barra que actúan en los extremos de esas dos barras se representarán empujando el extremo de ah contra el nudo h y tirando del extremo de bh para separarle de ese nudo. Indicado así el sentido de estas fuerzas de barra conocidas, por medio de flechas, se designarán las fuerzas solo con su valor numérico, esto es, simplemente por 36,25 y 10, en lugar de -36,25 y +10. Como se indicó en la sección anterior, se completa el esquema de cuerpo libre representando las fuerzas de barra desconocidas como si fueran tracciones.

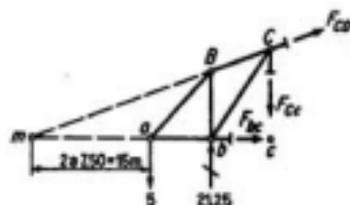
Cuando se anota el valor de una fuerza de barra en el diagrama lineal de la cercha, será también útil dibujar flechas en cada extremo de la barra, que indiquen la dirección en que la fuerza en esta barra actúa *en el nudo*. Se seguirá este modo de proceder al anotar las fuerzas de barra en los dibujos restantes de este capítulo.

¹ Obsérvese que se ha definido previamente la magnitud, de modo que incluye el sentido en que actúa la fuerza.

Ejemplo 4.1 Calcular las fuerzas de barra en los elementos Cc, CD, cd, cD y DE de este cu-chillo, producidas por las cargas indicadas.



Barra Cc Sección ① - ①
Barra CD



$$\begin{aligned}\Sigma M_b &= 0, \curvearrowright \\ 10 \times 1 &= 10 \\ 20 \times 2 &= 40 \\ 10 \times 5 &= 50 \\ &= \frac{100}{95} \\ -5 \times 1 &= -5 \\ R_{fz} &= 23,75 \uparrow\end{aligned}$$

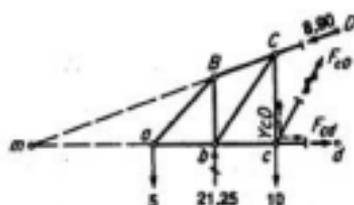
$$\begin{aligned}\Sigma M_f &= 0, \curvearrowright \\ 20 \times 2 &= -40 \\ 10 \times 3 &= -30 \\ 5 \times 5 &= -25 \\ &= \frac{-95}{83} \\ 10 \times 1 &= 10 \\ &= \frac{-83}{83} \\ R_{bz} &= 21,25 \uparrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0, \uparrow \\ 23,75 + 21,25 - 5 - 10 \\ - 20 - 10 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_a &= 0, \curvearrowright \\ 5 \times 2 &= +10 \\ 21,25 \times 3 &= -63,75 \\ &= \frac{-53,75}{4} \\ \therefore F_{ca} &= + \frac{53,75}{4} = + 13,44\end{aligned}$$

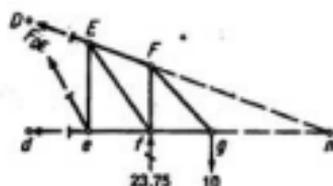
$$\begin{aligned}\Sigma M_c &= 0, \curvearrowright \\ 21,25 \times 1 &= +21,25 \\ 5 \times 2 &= -10 \\ &= \frac{+11,25}{10} \\ \therefore X_{cb} &= \frac{-(11,25)(7,30)}{10} \\ &= -8,44 \\ \therefore F_{cb} &= -(8,44) \left(\frac{7,91}{7,30} \right) \\ &= -8,90\end{aligned}$$

Barra *cd* Sección ② - ②
Barra *cD*



$$\begin{aligned}\Sigma M_a = 0, \curvearrowright \\ 5 \times 2 = +10 \\ 10 \times 4 = 40 \\ \quad +50 \\ 21,25 \times 3 = -63,75 \\ \quad -13,75 \curvearrowleft \\ \therefore Y_{cd} = \frac{-13,75}{4} = -3,44 \\ \therefore F_{cd} = -3,44 \times \frac{14,75}{12,50} \\ = -4,01\end{aligned}$$

Barra *DE* Sección ③ - ③



$$\begin{aligned}\Sigma M_d = 0, \curvearrowright \\ 10 \times 1 = -10 \\ 5 \times 3 = -15 \\ \quad -25 \\ 21,25 \times 2 = +42,5 \\ \quad +17,5 \curvearrowleft \\ \therefore F_{ed} = +17,5 \times \frac{7,50}{12,50} \\ = +10,50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_g = 0, \curvearrowright \\ 23,75 \times 1 = -23,75 \\ 10 \times 2 = +20 \\ \quad -3,75 \curvearrowleft \\ \therefore X_{de} = -3,75 \times \frac{7,50}{10} \\ = -2,81 \\ \therefore F_{de} = -2,81 \times \frac{7,91}{7,50} \\ = -2,46\end{aligned}$$

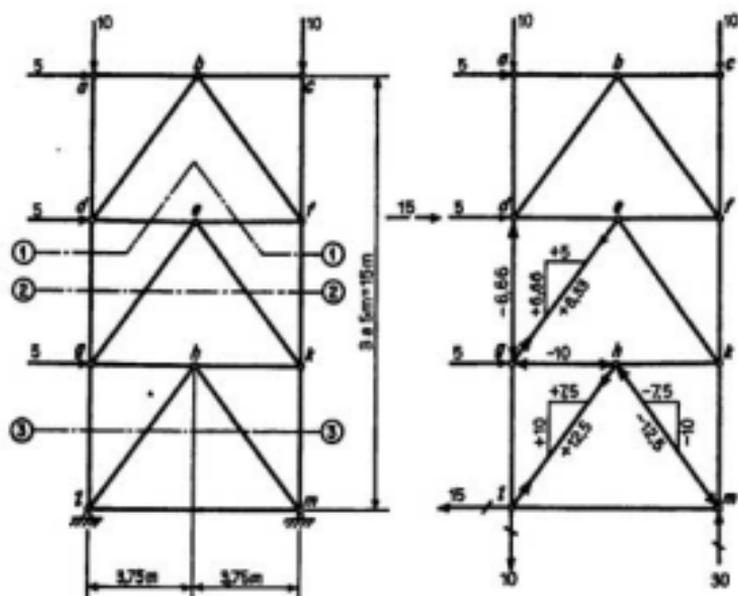
Resumen:

Obsérvese que, después de hallar la fuerza en *Cc*, se puede hallar fácilmente la componente vertical de la fuerza en *cD*, aislando el nudo *c*. Se observará también que, conocida la fuerza en *cD*, se puede hallar la componente vertical en *CD* de $\Sigma F_y = 0$, mejor que de $\Sigma M_a = 0$, para el esquema de cuerpo libre de la sección 2-2. Conocida la fuerza en *CD*, se puede hallar la fuerza en *cd* de $\Sigma F_x = 0$ aplicada a este esquema de cuerpo libre.

La fuerza en la barra *DE* se puede hallar aislando la parte de cuchillo a la derecha o la izquierda de la sección 3-3. Se ha elegido la parte de la derecha porque sobre ella actúan menos fuerzas exteriores.

En todos estos cálculos se han obtenido los momentos de las fuerzas verticales en función de la longitud del tramo. Cuando es necesario, se sustituye el tramo de 7,50 m al final del cálculo. Este ardid simplifica el trabajo numérico en los cálculos.

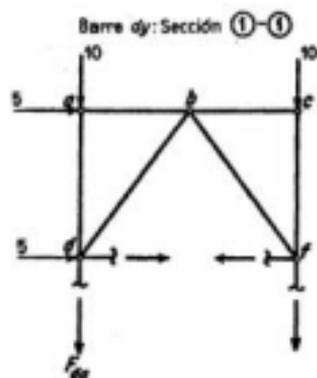
Ejemplo 4.2 Determinar la fuerza de barra en los elementos dg, eg, gh y hm.



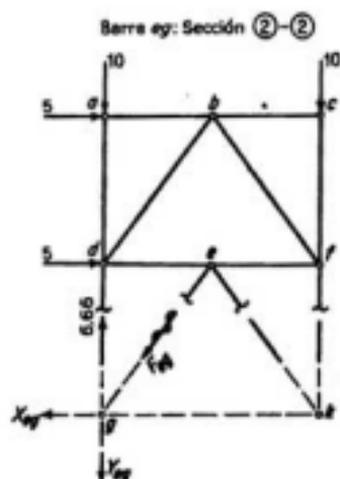
$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0, + \\ (10)(7.50) &= 75 \\ (15)(10) &= 150 \\ &= \frac{225}{3} \curvearrowright \\ \therefore R_{ax} &= 30 \uparrow \\ \Sigma M_y &= 0, + \\ (15)(10) &= +150 \\ (10)(7.50) &= -75 \\ &= \frac{+75}{3} \curvearrowright \\ \therefore R_{ay} &= 10 \uparrow \end{aligned}$$

Comprobación por $\Sigma F_x = 0, +\uparrow$.

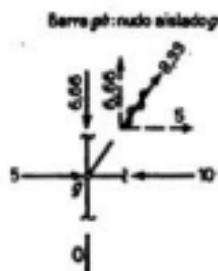
$$-10 - 10 + 30 - 10 = 0$$



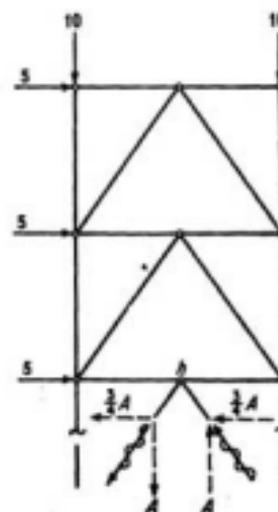
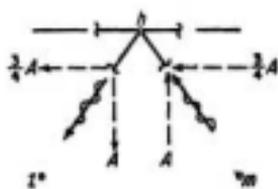
$$\begin{aligned}\Sigma M_f &= 0, \curvearrowright \\ (5)(5) &= +25 \\ (10)(7,50) &= -75 \\ &= -50 \curvearrowright \\ \therefore F_{dy} &= -\frac{50}{7,50} = \underline{\underline{-6,66}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Sigma M_b &= 0, \curvearrowright \\ (6,66)(7,50) &= +50 \\ (5)(5) &= +25 \\ (5)(10) &= +50 \\ &= +125 \\ (10)(7,50) &= -75 \\ &= +50 \curvearrowright \\ \therefore Y_{eg} &= \frac{50}{7,50} = \underline{\underline{+6,66}} \quad X_{eg} = \underline{\underline{+5}} \\ F_{eg} &= \underline{\underline{+8,33}}\end{aligned}$$



Barra am : Nudo aislado h . Consideraremos la parte aislada por la sección 3-3. De $\Sigma F_x = 0$, Y_{1h} debe ser igual y opuesta a Y_{2m} . Suponiendo que $Y_{1h} = A$, será $Y_{2m} = -A$, etc.



Entonces $\Sigma F_x = 0$, \overline{A}

$$5 + 5 + 5 - \frac{3}{4}A - \frac{3}{4}A = 0 \quad A = 10$$

$$\therefore X_{1h} = +7.5 \quad \text{y} \quad X_{2m} = -7.5$$

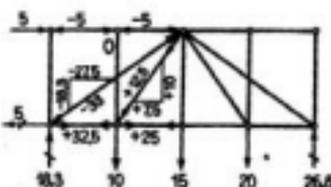
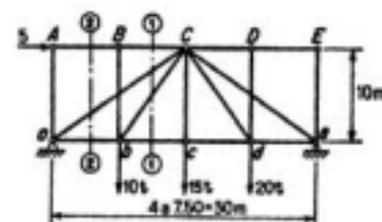
$$Y_{1h} = +10 \quad Y_{2m} = -10$$

$$F_{1h} = +12.5 \quad F_{2m} = -12.5$$

Razonamiento:

Si se quieren hallar las fuerzas en todas las barras, se debe aplicar el método de los nudos, aislando éstos sucesivamente en el orden: $a, c, b, d, f, e, g, k, h, l, m$. Este es, probablemente, el método más eficaz para hallar todas las fuerzas de barra en esta cercha particular. Si solo se quisiera hallar algunas fuerzas de barra, se podría hacer el cálculo como en este ejemplo.

Ejemplo 4.3 Calcular las fuerzas de barra en los elementos bc, BC, aC y bC.



$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \curvearrowright \\ 5 \times \frac{1}{2} p = +6,6p \\ 10 \times 1p = 10p \\ 15 \times 2p = 30p \\ 20 \times 3p = 60p \\ \quad \quad \quad +106,6p \\ \therefore R_{ay} = 26,6 \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_e = 0, \curvearrowright \\ 10 \times 3p = -30p \\ 15 \times 2p = -30p \\ 20 \times 1p = -20p \\ \quad \quad \quad -80p \\ 5 \times \frac{1}{2} p = +6,6p \\ \quad \quad \quad -73,3p \\ \therefore R_{ey} = 18,3 \uparrow \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\Sigma F_x = 0, \rightarrow +, 18,3 - 10 - 15 - 20 + 26,6 = 0$$

Barra bc: Parte a la izquierda de 1-1, $\Sigma M_c = 0, \curvearrowright$, $18,3 \times 2p = 36,6p$
 $10 \times 1p = -10,0p$

$$\frac{26,6 + 5 \times 10}{10} = F_{bc} = +25$$

Barra BC: Nudo aislado A, luego B, $F_{BC} = -5$

Barra aC: Parte a la izquierda de 2-2, $\Sigma F_x = 0$ $\therefore Y_{ac} = -18,3$

$$\therefore F_{ac} = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{2} (-18,3) = -33$$

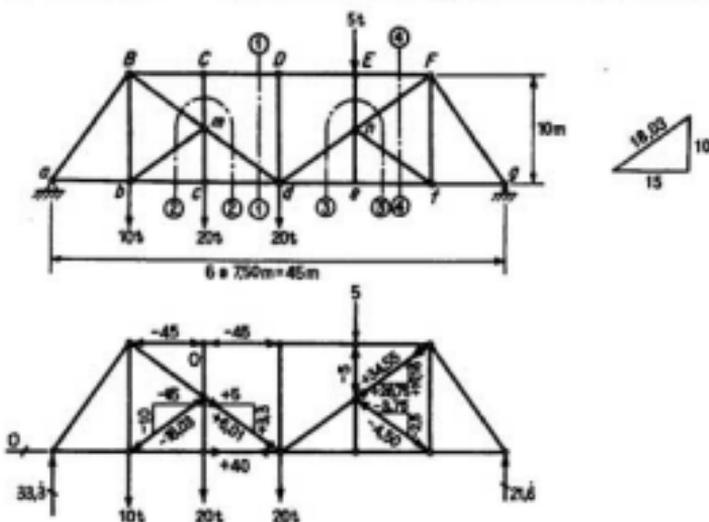
Barra bC: Parte a la izquierda de 1-1, conociendo el esfuerzo de aC, de $\Sigma F_x = 0$

$$\therefore Y_{bc} = +10$$

o, del nudo B, $F_{bc} = 0$; y del nudo b, $\Sigma F_x = 0$

$$\therefore Y_{bc} = +10$$

Ejemplo 4.4 Calcular las fuerzas de barra en los elementos cd, BC, bn, nf, nF y md.



$$\begin{array}{r}
 \Sigma M_a = 0, \curvearrowright \\
 10 \times 1 = 10 \\
 20 \times 2 = 40 \\
 20 \times 3 = 60 \\
 5 \times 4 = 20 \\
 \hline
 130 \\
 R_{ay} = 21.6 \uparrow
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \Sigma M_b = 0, \curvearrowright \\
 5 \times 2 = 10 \\
 20 \times 3 = 60 \\
 20 \times 4 = 80 \\
 10 \times 5 = 50 \\
 \hline
 200 \\
 \therefore R_{by} = 33.3 \uparrow
 \end{array}$$

Barra cd: Parte a la izquierda de 1-1, $\Sigma M_a = 0, \curvearrowright$, $33.3 \times 1p + 20 \times 1p = 53.3p$

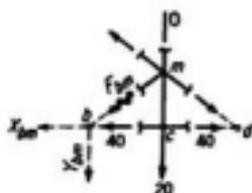
$$\therefore F_{cd} = +40$$

Barra BC: La misma parte, $\Sigma M_a = 0, \curvearrowright$,

$$33.3 \times 3p - 20 \times 1p - 10 \times 2p = 60p \quad \therefore F_{cb} = -45$$

$$\therefore \text{Nudo C aislado, } F_{bc} = -45$$

Barra bn: Aislando el nudo C se ve que $F_{cb} = 0$. De aquí, considerando la parte aislada por la sección 2-2



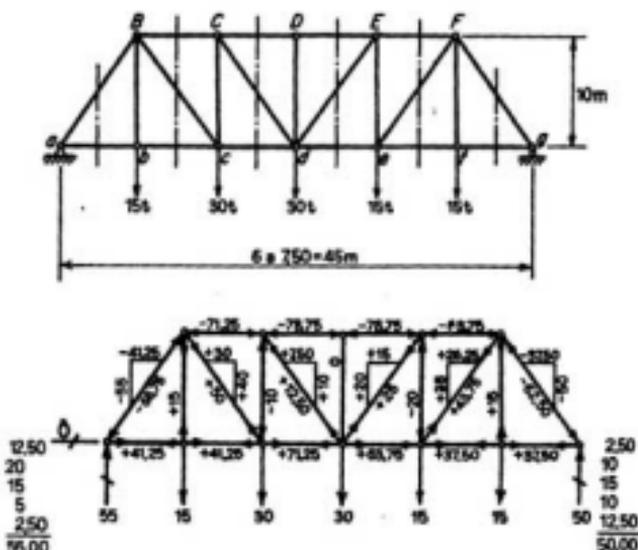
$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright, +20 \times 1p = +20p$$

$$\therefore Y_{bn} = -10$$

$$\therefore X_{bn} = -13$$

$$\therefore F_{bn} = -18.03$$

Ejemplo 4.6 Determinar las fuerzas en todas las barras de la cercha.



Razonamiento:

Al resolver este ejemplo, se puede partir de un extremo de la cercha y continuar hacia el otro, utilizando para calcular las fuerzas de barra solamente el método de los nudos. Es una cercha simple y siempre es posible hallar todas las fuerzas de barra en tal cercha de este modo, una vez conocidas las reacciones.

Se observará además que también pueden hallarse fácilmente las componentes verticales de las fuerzas de barra en las diagonales utilizando $\Sigma F_y = 0$ en la parte de la derecha o en la de la izquierda de las secciones verticales indicadas. La fuerza en las barras verticales se puede obtener de $\Sigma F_x = 0$ aplicada a los nudos, y la fuerza en los cordones de $\Sigma F_x = 0$ en los nudos, procediendo de extremo a extremo de la cercha.

4.7 Discusión del método de los nudos y del de las secciones. Los ejemplos de la sección anterior demuestran que, tanto si se usa el método de los nudos, como el de las secciones, para el estudio de los esfuerzos en una cercha, hay que aislar partes de la misma. La experiencia en estos cálculos enseña a combinar estos dos métodos para tener mayor eficacia. El objeto de esta sección es resumir y aclarar los puntos concernientes a ellos.

En la discusión anterior del método de los nudos se ha indicado que permite determinar inmediatamente todas las fuerzas de barra que actúan en un nudo aislado, con tal que no haya más de dos fuerzas desconocidas y que tengan diferentes líneas de acción. A veces sucede que solo hay una fuerza de barra desconocida en un nudo aislado. En este caso, se usará una de las dos ecuaciones de equilibrio para hallar la fuerza desconocida, y la otra servirá como comprobación. Si en un nudo aislado actúan más de dos fuerzas desconocidas, es imposible en general obtener una solución inmediata para todas las incógnitas con las dos ecuaciones de equilibrio de que se dispone en este nudo. En estos

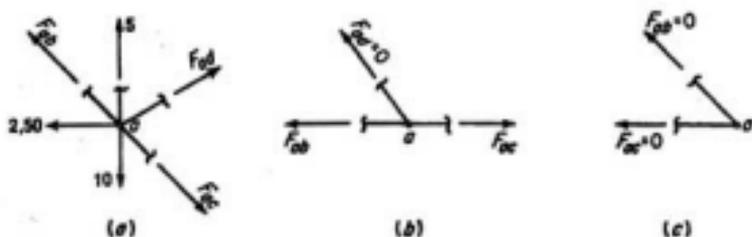


FIG. 4.6. Casos especiales.

casos, es necesario aislar otros nudos y escribir otras dos ecuaciones para cada uno de ellos. De este modo, se puede a veces obtener n ecuaciones independientes con n fuerzas de barra como incógnitas, por lo que se podrá resolver el sistema.

Hay un caso importante en que hay más de dos fuerzas desconocidas en un nudo aislado, pero están dispuestas de modo que es posible hallar el valor de una de ellas inmediatamente. Si todas las fuerzas de barra desconocidas menos una tienen la misma línea de acción, se podrá determinar inmediatamente la fuerza en esta barra particular. Este es el caso representado en el esquema *a* de la Fig. 4.6. Si se toma el eje x paralelo a la línea bac y el eje y perpendicular a ella, la componente y de la fuerza desconocida F_{ab} se podrá determinar inmediatamente de la ecuación $\Sigma F_y = 0$. No se puede obtener una solución inmediata de $\Sigma F_x = 0$ en este nudo, pues esta ecuación contiene a las dos incógnitas F_{ab} y F_{bc} . En el esquema *b* de la Fig. 4.6 se representa un caso particular de este tipo, en que sobre el nudo actúan solo las tres fuerzas de barra desconocidas. Si F_{ab} y F_{bc} tienen la misma línea de acción, es evidente que la única fuerza restante, F_{ac} , debe ser cero. Es interesante también considerar el caso del esquema *c* de la Fig. 4.6. En este caso, sobre el nudo actúan solo dos fuerzas, que no tienen la misma línea de acción; por tanto, para que se satisfagan $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ en ese nudo, tanto F_{ab} como F_{bc} deben ser nulas.

Es interesante observar también que, una vez determinadas las reacciones en una cercha simple, se pueden hallar todas las fuerzas de barra utilizando solo el método de los nudos, sin tener que acudir al de las secciones. Es evidente esto, pues solo hay dos fuerzas de barra en el nudo que se hizo el último al disponer las barras de la cercha. Cuando se han determinado estas dos fuerzas de barra aislando ese nudo, se verá que sobre los nudos de los otros extremos de estas barras solo actúan dos fuerzas de barra desconocidas. Así, pues, se puede usar el método de los nudos para hallar todas las fuerzas de barra aislando los nudos en el orden inverso al que se formaron al organizar la cercha. Esta es la explicación de por qué es posible resolver el Ejemplo 4.6 de esta manera. Sin embargo, se observará que en muchos casos de cerchas simples se puede facilitar el cálculo de las fuerzas de barra combinando el uso de los métodos de las secciones y de los nudos, como se verá en algunos ejemplos de la Sección 4.11.

Cuando se aplica el método de las secciones, si sobre la parte aislada de la cercha actúan tres fuerzas de barra desconocidas que no son paralelas ni concurrentes, se pueden determinar las tres con las tres ecuaciones del equilibrio disponibles para la parte aislada. Se supone, naturalmente, que se han determinado previamente las reacciones que actúan en esa parte. Evidentemente, si solo hay una o dos fuerzas de barra desconocidas, se pueden determinar utilizando el mismo número de ecuaciones disponibles. El resto de las ecuaciones que debe satisfacer el sistema de fuerzas que actúa en la parte aislada se puede utilizar simplemente como comprobación de los cálculos hechos hasta el momento.

A veces es posible hallar alguna de las fuerzas desconocidas por el método de las secciones, aunque haya más de tres desconocidas en la parte aislada. Por ejemplo, supongamos que las líneas de acción de todas las fuerzas desconocidas menos una se cortan en el punto a . Podrá determinarse el esfuerzo en esta barra por la ecuación $\Sigma M_a = 0$, esto es, sumando los momentos de las fuerzas respecto al punto a . Otro caso similar sería aquel en que todas las fuerzas desconocidas menos una fuesen paralelas. Se podría determinar el esfuerzo en la otra barra, sumando las componentes de las fuerzas perpendiculares a la dirección de las otras fuerzas de barra desconocidas. En cada uno de los casos anteriores, las dos ecuaciones de equilibrio restantes de la parte aislada, contienen más incógnitas que ecuaciones, por lo que no es posible su resolución inmediata.

Al aplicar el método de los nudos o el de las secciones, es importante constatar que no importa cuántas barras con fuerzas conocidas se cortan, sino que solo tiene importancia el número de barras de barra desconocidas.

4.8 Estabilidad estática y determinación estática de estructuras de cercha. Hasta ahora, se ha dado la mayor importancia a los métodos de calcular las fuerzas de barra en las cerchas, a cuyo objeto todos los ejemplos utilizados eran estáticamente determinados y estables. Ahora es ya posible estudiar la cuestión de la estabilidad estática y la determinación de las cerchas desde un punto de vista general.

Al estudiar la disposición de las barras de una cercha simple se vio que se forma una cercha rígida utilizando tres barras para unir tres nudos entre sí en forma de triángulo y, a continuación, usando dos barras para unir cada uno de los demás nudos al entramado ya construido. Así, para formar una cercha simple rígida de n nudos, es necesario emplear las tres barras del triángulo original más otras dos barras por cada uno de los $(n - 3)$ nudos restantes. Si b expresa el número total de barras,

$$b = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

Este es el número mínimo de barras que se pueden usar en una cercha simple rígida. El usar más es innecesario, y menos conduce a una cercha no rígida o inestable. Si se apoya una cercha simple con n nudos y $(2n - 3)$ barras de un modo equivalente a tres bielas ni paralelas ni concurrentes, la estructura es estable bajo una condición general de carga y las reacciones son estáticamente determinadas. En la sección anterior se indicó que, una vez halladas las reacciones, se pueden calcular todas las fuerzas de barra de una cercha simple por el método de los nudos.

Por tanto, se puede concluir que una cercha simple que tiene tres elementos de reacción independientes y $(2n - 3)$ barras, es estáticamente determinada con respecto a las reacciones y a las fuerzas de barra. Si hay más de tres elementos de reacción, la estructura es estáticamente indeterminada con respecto a sus reacciones; si hay más de $(2n - 3)$ barras y solo tres elementos de reacción, es indeterminada respecto a las fuerzas de barra; y si hay un exceso tanto de barras como de elementos de reacción, la estructura es indeterminada respecto a reacciones y fuerzas de barra.

La misma discusión, con las mismas conclusiones, se aplican a una cercha compuesta. Supongamos que una cercha compuesta está formada uniendo dos simples por medio de tres barras adicionales, ni paralelas ni concurrentes. Si las dos cerchas simples tienen n_1 y n_2 nudos, respectivamente, el número total de barras de la cercha compuesta es

$$b = (2n_1 - 3) + (2n_2 - 3) + 3 = 2(n_1 + n_2) - 3$$

o, si n expresa el número total de nudos de la cercha compuesta, esto es, si $n = n_1 + n_2$, será

$$b = 2n - 3$$

Así, pues, el número mínimo de barras que se puede usar para formar una cercha rígida es el mismo que en el caso de cercha simple. Si se siguiera del mismo modo el resto de la discusión para una cercha compuesta, se vería que las conclusiones del párrafo anterior se aplican por igual a las cerchas simples y a las compuestas.

Es aconsejable estudiar la cuestión de la determinación y estabilidad desde un punto de vista más general. Supongamos que una estructura de cercha tiene r elementos de reacción independientes, b barras y n nudos. Si la cercha en conjunto está en equilibrio, cada parte aislada debe estarlo también. El aislar una barra entera o una parte de ella no producirá nueva información, pues se consideraron las condiciones de equilibrio de las barras durante el establecimiento de la definición de la fuerza de barra. Sin embargo, es posible aislar cada uno de los n nudos sucesivamente y escribir para cada uno de ellos dos nuevas ecuaciones del equilibrio estático independiente, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. De este modo, se obtendrían $2n$ ecuaciones independientes, con los r elementos de reacción y las b fuerzas de barra como incógnitas, con un total de $(r + b)$. Estas $2n$ ecuaciones deben satisfacerse simultáneamente por las $(r + b)$ incógnitas. Comparando el número de incógnitas con el de ecuaciones independientes, es posible comprobar si una estructura de cercha es inestable, estáticamente determinada, o indeterminada. Si $r + b$ es menor que $2n$, no hay suficientes incógnitas para satisfacer simultáneamente las $2n$ ecuaciones, por lo que se dice que la estructura es estáticamente inestable. Si $r + b$ es igual a $2n$, se pueden deducir las incógnitas por la resolución del sistema de $2n$ ecuaciones, y se dice que la estructura es estáticamente determinada. Si $r + b$ es mayor que $2n$, hay demasiadas incógnitas a determinar con solo las $2n$ ecuaciones, por lo que se dice que la estructura es estáticamente indeterminada. El criterio establece el grado de indeterminación con respecto tanto a las reacciones como a las fuerzas de barra, con tal que la estructura no sea ni estática ni geoméricamente inestable. Es evidente que estas conclusiones están de acuerdo con la discusión anterior de las cerchas simples y compuestas.

A primera vista, puede parecer que el número total de ecuaciones del equilibrio estático en una estructura de cercha incluirá no solo las $2n$ ecuaciones mencionadas en el párrafo anterior, sino también las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ aplicadas a toda la estructura como cuerpo libre. Sin embargo, la demostración siguiente probará que esta opinión no es cierta, y que solo hay $2n$ ecuaciones independientes: Consideremos una cercha cualquiera como un cuerpo libre sobre el que actúan sus reacciones y las cargas aplicadas, como en la Fig. 4.7a. Supongamos que el sistema de fuerzas que aparece en la Fig. 4.7b se superpone al de la Fig. 4.7a; la combinación de los dos sistemas de cargas será como en la Fig. 4.7c. El sistema de cargas b es un sistema especial constituido por varios pares de fuerzas iguales y opuestas, un par en cada barra de la cercha. Para cada barra, las dos fuerzas del par actúan a lo largo de la misma, cada una en el nudo de un extremo. Cada fuerza es numéricamente igual a la fuerza de barra en ese elemento producida por las fuerzas del sistema a y actúa en un sentido tal que es el mismo que

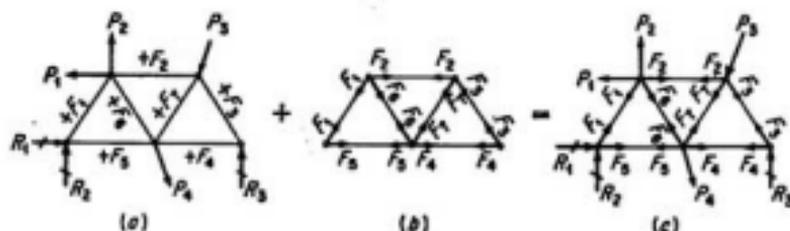
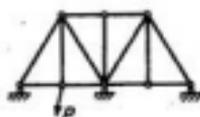


FIG. 4.7. Consideraciones sobre el equilibrio.

el de la acción de esta fuerza de barra en el nudo. Cada par de fuerzas está en equilibrio, evidentemente, por lo que todos los pares que actúan a la vez forman un sistema en equilibrio.

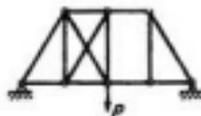
Considerando ahora el sistema combinado de c , se tiene que las fuerzas que actúan en cada nudo de la cercha son las mismas que actuarían en él si, sometido a las cargas a , estuviera aislado como cuerpo libre. Pero si las fuerzas aplicadas, las reacciones y las fuerzas de barra satisfacen el sistema de $2n$ ecuaciones de la estática, obtenidas aislando los n nudos y escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para cada uno de ellos, las fuerzas que actúan en cada nudo en c forman un sistema concurrente de fuerzas que están en equilibrio. Como en cada nudo están en equilibrio las fuerzas, el sistema combinado de c de todos los nudos está en equilibrio y satisface las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M = 0$ para toda la cercha. Por estar en equilibrio el sistema combinado de c , así como la parte del mismo representada en el esquema b , la parte restante que es la representada en a estará también en equilibrio y satisfará, por consiguiente, las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M = 0$ para toda la cercha. Se puede deducir, por tanto, que si las reacciones, las fuerzas de barra y las cargas aplicadas satisfacen las $2n$ ecuaciones de equilibrio obtenidas aislando los nudos de la cercha, las reacciones y las cargas aplicadas satisfarán automáticamente las tres ecuaciones de equilibrio de la cercha en conjunto, por lo que solo habrá $2n$ ecuaciones independientes del equilibrio estático.

Se observará que la comparación entre el número de incógnitas y el de ecuaciones independientes establece un criterio que es necesario, pero no siempre suficiente, para decidir si una cercha es estable o no. Si $b + r$ es menor que $2n$, esta comparación es suficiente para decidir que la cercha es estáticamente inestable. Pero si $b + r$ es igual o mayor que $2n$, no se deduce automáticamente que la cercha sea estable. Esto puede comprobarse considerando los ejemplos de la Fig. 4.8. En los cuatro casos, las estructuras son inestables, mientras la cuenta indica que a y b son estáticamente determinadas y c y d son indeterminadas en primer grado. a y d son inestables bajo una condición general de cargas, porque en cada caso las reacciones son equivalentes a bielas paralelas. b y c son inestables, no a causa de la disposición de las reacciones, sino por la de las barras. En b , por ejemplo, las reacciones son estáticamente determinadas, pero la cercha es inestable y se hundirá porque no hay nada para soportar el cortante en el segundo tramo de la derecha.



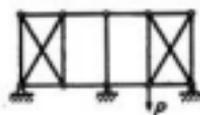
$$b=13 \quad r=3 \quad n=8 \\ b+r=16 \quad 2n=16$$

(a)



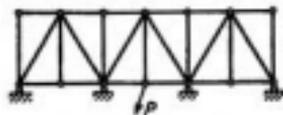
$$b=13 \quad r=3 \quad n=8 \\ b+r=16 \quad 2n=16$$

(b)



$$b=17 \quad r=4 \quad n=10 \\ b+r=21 \quad 2n=20$$

(c)



$$b=25 \quad r=4 \quad n=14 \\ b+r=29 \quad 2n=28$$

(d)

FIG. 4.8. Estructuras inestables.

Estas y otras consideraciones conducen a la conclusión de que, aun cuando el recuento indique que la estructura es estáticamente determinada o indeterminada, para que sea también estable, es necesario que se cumplan además las condiciones siguientes: 1) Las reacciones deben ser equivalentes a tres o más bielas no paralelas ni concurrentes. 2) Las barras de la cercha deben estar dispuestas de modo conveniente. A veces es difícil determinar si la disposición de las barras es apropiada o no. En estos casos, se verá claramente si es inapropiada, porque cuando se intente hacer el análisis de esfuerzos, conducirá a resultados imposibles, infinitos o indeterminados.

4.9 Ejemplos que aclaran cómo se determinan la estabilidad y la determinación. Es fácil estudiar la estabilidad y determinación de una estructura formada sustentando de alguna forma una cercha que es de por sí un cuerpo rígido. La cercha puede ser simple o compuesta, o, en ciertos casos, una cercha simple o compuesta modificada añadiendo más barras de las necesarias. En cualquier caso, pueden contarse las barras, reacciones y nudos y aplicar el criterio de la última sección para determinar si es una estructura inestable, estáticamente determinada o indeterminada. Este recuento permite clasificar la estructura respecto a las fuerzas de barra y las reacciones. Si el recuento demuestra que la estructura es estáticamente determinada o indeterminada, aún debe decidirse la cuestión de la estabilidad, porque el recuento no es prueba suficiente de que la estructura sea estable.

Es fácil también clasificar este tipo de estructura respecto a sus reacciones solamente. Si hay menos de tres elementos de reacción independientes, la estructura es estáticamente inestable bajo una condición general de cargas, independientemente del modo como estén dispuestas las barras de la cercha. Si hay tres o más elementos de

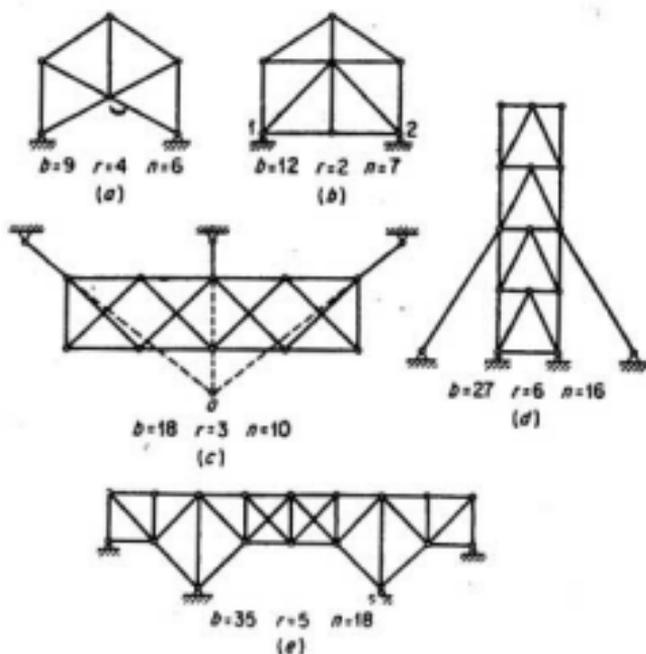


FIG. 4.9. Ejemplos para clasificar.

reacción independientes, y están dispuestos de modo que equivalgan a tres o más bielas no paralelas ni concurrentes, la estructura es estable respecto a sus reacciones. Para una estructura estable, si hay exactamente tres elementos de reacción independientes, estos elementos están estáticamente determinados; si hay más de tres elementos de reacción, la estructura es estáticamente indeterminada, respecto a sus reacciones, con un grado igual al número de elementos de reacción en exceso sobre tres. En la Fig. 4.9 se representan estructuras de este tipo general.

En cada uno de los esquemas de la Fig. 4.9 se muestra el recuento de las barras, nudos y elementos de reacción. Considerando solo las reacciones, la estructura *a* es estable y estáticamente indeterminada en primer grado. Como $b + r = 13$ y $2n = 12$, también es indeterminada en primer grado considerando las reacciones y fuerzas de barra. El recuento de la estructura *b* indica que es estáticamente determinada, pues $b + r$ y $2n$ son las dos iguales a 14. Sin embargo, considerando las reacciones, se ve que esta estructura es realmente inestable. De igual modo, el recuento indica que la estructura *c* es estáticamente indeterminada en primer grado, pero considerando las reacciones se ve que es inestable. Tanto el recuento como la consideración de las reacciones indican que la estructura *d* es indeterminada en primer grado. Respecto a las reacciones solamente, la estructura *e* es indeterminada en segundo grado, pero el recuento tanto de las barras como de las reacciones, descubre que es realmente indeterminada en cuarto grado.

Hay otro tipo de estructuras de armadura que están formadas por más de una armadura rígida. En este tipo, la estructura está compuesta de varias armaduras rígidas unidas entre sí de algún modo y luego montado todo el conjunto sobre cierto número de apoyos. En estos casos, se disponen los apoyos generalmente de forma que den más de tres elementos de reacción independientes. Sin embargo, las uniones entre las diversas armaduras no son completamente rígidas, de modo que se introducen ciertas ecuaciones de condición (o construcción) que reducen el grado de indeterminación, o que hacen, incluso, que las reacciones sean estáticamente determinadas. Este tipo de estructura es el más laborioso de analizar desde el punto de vista de la estabilidad y la determinación. No obstante, algunas de las estructuras de armadura más importantes —por ejemplo, puentes de arco tri-articulados y cantilever (voladizo)— pertenecen a esta categoría, por lo que es importante dominar los métodos para estudiarla. En la Fig. 4.10 se dan ejemplos de estructuras de este tipo general.

Se puede estudiar la estabilidad y la determinación de las estructuras del tipo representado en la Fig. 4.10 comparando el recuento de las barras y elementos de reacción con el recuento de los nudos. Con este criterio se deducirá que las estructuras *a*, *b*, *d*, *e* y *f* son estáticamente determinadas y la *c* es indeterminada en primer grado. En estructuras de este tipo es importante también considerar si son estáticamente determinadas respecto a sus reacciones solamente, lo que se puede hacer comparando el recuento de los elementos de reacción desconocidos con el número de ecuaciones disponibles del modo ya descrito en las Secs. 2.5 y 2.6. En estos casos, las ecuaciones disponibles incluyen las tres del equilibrio estático para la estructura en conjunto, más alguna ecuación de condición que puede haberse introducido por el modo en que se conectan entre sí las armaduras rígidas.

Si se articulan dos armaduras entre sí en un nudo común, como los llamados *a* en las Figs. 4.10a a *e*, se introduce una ecuación de condición, que indica que el momento flector en ese punto debe ser cero, pues la articulación no puede transmitir un par de una armadura a otra. Si se unen dos armaduras con una biela o rodillo, como la biela *l* de la estructura *d*, se introducen dos ecuaciones de equilibrio, pues se conocen la dirección y punto de aplicación de la fuerza que actúa entre ellas. Esto significa 1) que el

momento flector en ambos extremos de la biela debe ser cero, en otras palabras, 2) que la fuerza mutua entre las dos armaduras no puede tener una componente perpendicular a la biela. Si se unen dos armaduras entre sí por medio de dos barras paralelas, como se ha hecho en los tramos p de las estructuras d y e , se introduce una ecuación de condición, que indica que la acción mutua entre las dos armaduras no puede comprender una fuerza perpendicular a las dos barras. En el caso de las estructuras d y e , esto significa que el cortante que actúa en el tramo p debe ser cero.

De esta discusión resulta claro que se ha introducido una ecuación en la estructura a , dos en b , una en c , cuatro en d y tres en e . Por tanto, se deducirá que, respecto solo a las reacciones, las estructuras a , b , d y e son estáticamente determinadas y la c es indeterminada en primer grado. La f es un tipo especial de estructura llamado en Estados

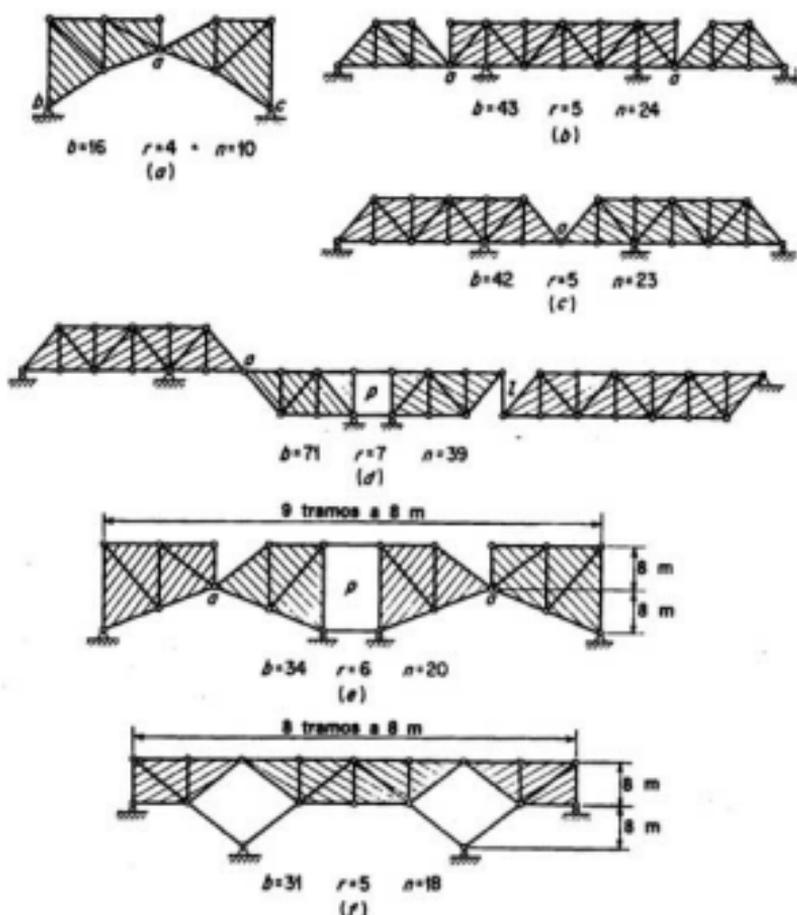


FIG. 4.10. Ejemplos para clasificar.

Unidos cercha Wichert¹, en la que solo puede hacerse el recuento considerando las barras, nudos y reacciones.

No es evidente la inestabilidad en ninguna de las estructuras de la Fig. 4.10; pero si se quiere calcular las reacciones y fuerzas de barra para las estructuras *e* o *f*, los resultados serán imposibles, infinitos o indeterminados, por lo que las estructuras son realmente inestables. En ambos casos, es posible hacer la estructura estable cambiando su forma geométrica, por lo que se dice que las estructuras *e* y *f* son *geoméricamente inestables*. Este tipo de inestabilidad se puede presentar siempre que se introducen ecu-

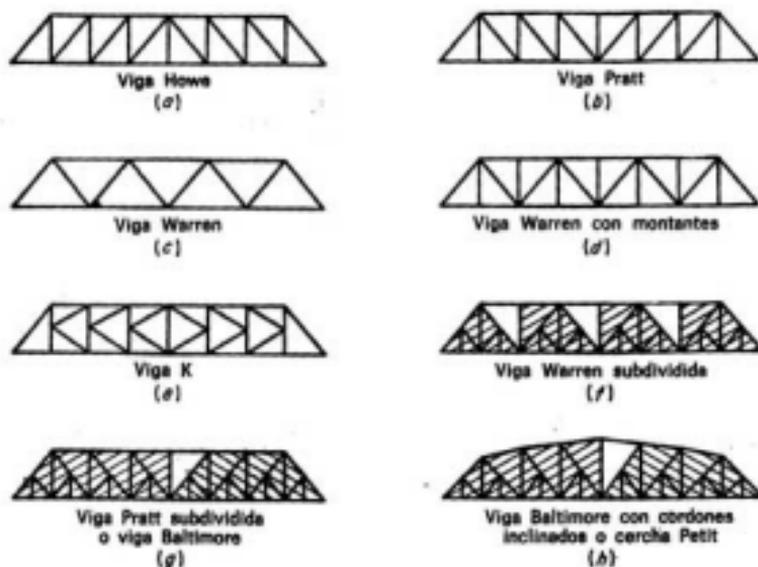


FIG. 4.11. Cuchillos de puentes clásicos.

ciones de condición por la disposición de la estructura. A veces la inestabilidad es evidente, pero generalmente no se ve hasta que se intenta calcular las reacciones, etc.²

4.10 Tipos clásicos de armaduras de puentes y de cubiertas. Se pueden disponer los elementos de una armadura casi de un número ilimitado de maneras, pero la inmensa mayoría de las armaduras que se encuentran en puentes o cubiertas pertenecen a uno de los tipos corrientes, representados en las Figs. 4.11 y 4.12. Como se encuentran con tanta frecuencia, el lector debe familiarizarse con los nombres de estos tipos clásicos.

Las armaduras *a*, *b*, *c*, *d* y *e* de la Fig. 4.11 son simples, mientras que las restantes son compuestas, formadas por varias simples (sombreadas). Para realizar un proyecto

¹ D. B. Steisman, «The Wichert Truss», D. Van Nostrand Company, Inc., Nueva York, 1932.

² Para un estudio más completo, ver W. M. Fife y J. B. Wilbur, «Theory of Statically Indeterminate Structures», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1937.

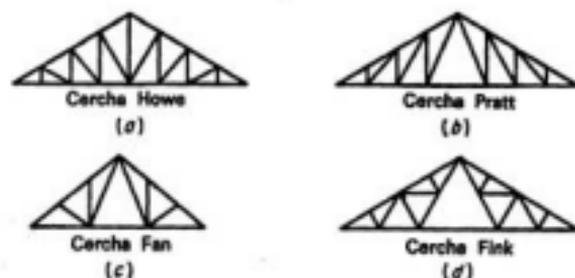


FIG. 4.12. Cerchas de tejado clásicas.

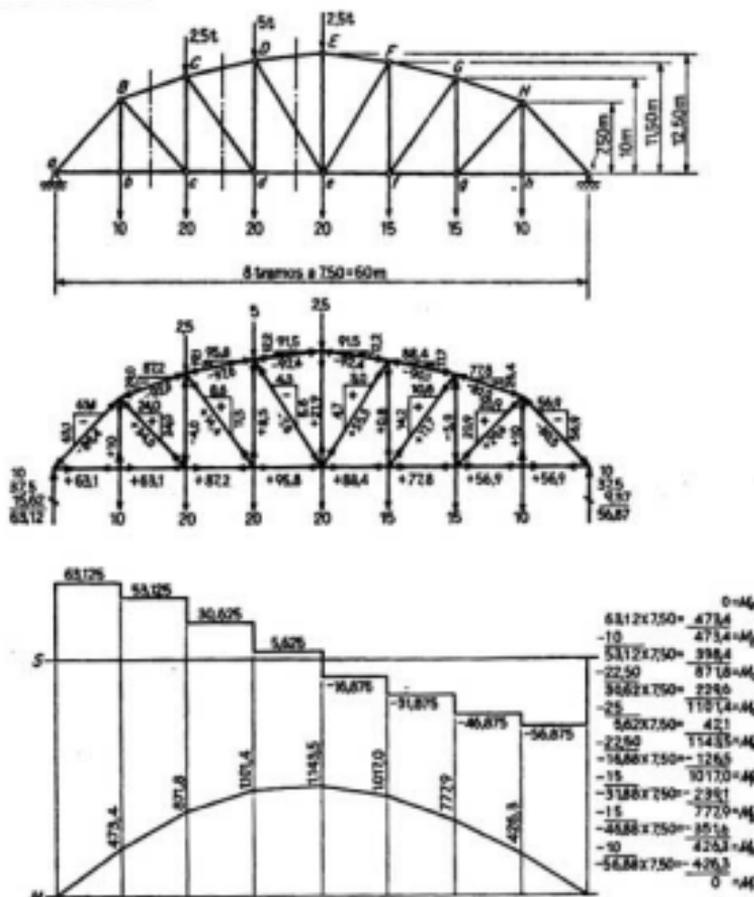
económico de puentes de armadura de acero de un tramo, es esencial que la relación entre la altura de la armadura y la luz del vano esté entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$, que las diagonales tengan una inclinación de unos 45° con la horizontal y que las longitudes de los tramos no excedan de 9 a 12 m. Las armaduras *a*, *b*, *c* y *d* pueden cumplir estos requisitos si la luz no es demasiado larga. Por el contrario, para puentes de grandes luces, es necesario usar uno de los tipos subdivididos, como *f*, *g* o *h*.

Todas las cerchas de cubierta de la Fig. 4.12 son cerchas simples, con la excepción de la cercha Fink, que es compuesta.

4.11 Ejemplos aclaratorios del análisis de esfuerzos de armaduras determinadas.

Los ejemplos siguientes aclaran la aplicación de los rozamientos anteriores al análisis de esfuerzos de varios tipos clásicos de armaduras. En el Cap. 7 se estudiará el análisis de las mismas.

Ejemplo 4.7 Determinar las fuerzas en todas las barras de esta cercha Pratt con cordón superior curvo.



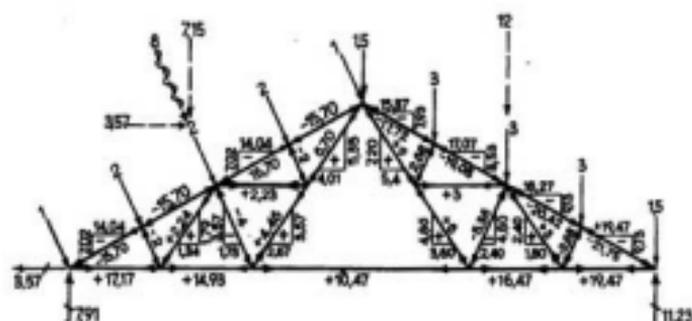
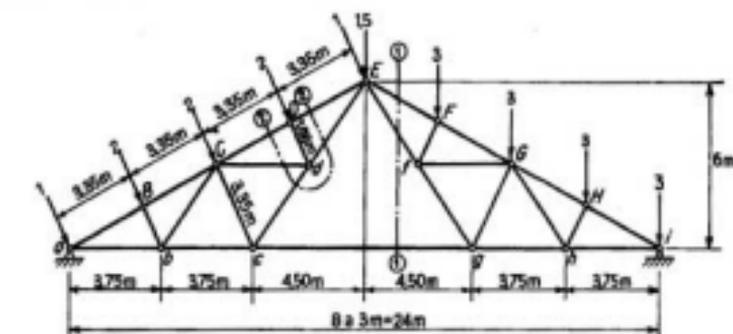
Razonamiento:

Esta cercha Pratt es una cercha simple, por lo que puede estudiarse utilizando solo el método de los nudos. Sin embargo, este procedimiento no es eficaz en el caso en que los dos cordones no sean paralelos. Probablemente, lo mejor es hallar primero las componentes horizontales en las barras del cordón curvo, lo que puede hacerse trazando una sección vertical por un tramo y tomando momentos respecto al nudo conveniente del cordón inferior. Estos cálculos se simplifican si se conocen los momentos flectores en los diversos nudos del cordón inferior.

Estos momentos flectores pueden calcularse dibujando los diagramas de cortante y momento flector, como puede verse. En este caso, en que todas las cargas y reacciones son verticales, el momento flector en cualquier nudo del cordón superior es el mismo que en el nudo del cordón inferior situado inmediatamente debajo de él. Naturalmente, si hay cargas horizontales, esto no es necesariamente cierto.

Conocidas las componentes horizontales en el cordón superior, se puede hacer el resto del estudio de esfuerzos por el método de los nudos. Se observará también que es fácil calcular las componentes verticales en las diagonales, una vez conocidos los cortantes en los tramos y las componentes verticales en el cordón superior.

Ejemplo 4.8 Determinar las fuerzas de barra de todos los elementos de la cercha Fink siguiente.



$$7,15 \times \frac{16,50}{24} = 4,91$$

$$12 \times \frac{6}{24} = \frac{3}{7,91}$$

$$F_{av} = 11,23 \times \frac{12}{6} = 22,46$$

$$-(9 \times 6 + 1,5 \times 12) \frac{1}{6} = -12$$

$$F_{av} = +10,46$$

$$8 \times \frac{6,71}{24} = 2,23$$

$$12 \times \frac{18}{24} = \frac{9}{11,23} \quad 12$$

$$\frac{11,23}{7,91} \quad 7,15$$

$$19,14 \quad 19,15$$

Comp.

Razonamiento:

Aunque esta cercha Fink es una cercha compuesta, se puede estudiar usando solo el método de los nudos. Por ejemplo, después de calcular las reacciones, se puede aplicar el método de los nudos sucesivamente a los i , H y h . Como hay más de dos fuerzas de barra desconocidas en cada uno de los nudos g y G , no es posible considerarles como el paso siguiente del análisis. Sin embargo, se puede determinar la fuerza en la barra Ff , aislando el nudo F , y la de la barra fG , aislando el f . Luego se puede completar el análisis de los esfuerzos por el método de los nudos. Pero este procedimiento solo es posible porque los nudos E , F y G e igualmente los E , f y g están en línea recta.

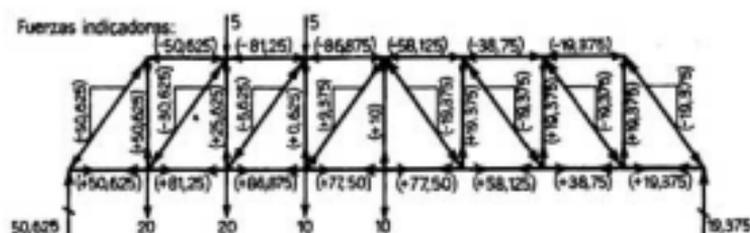
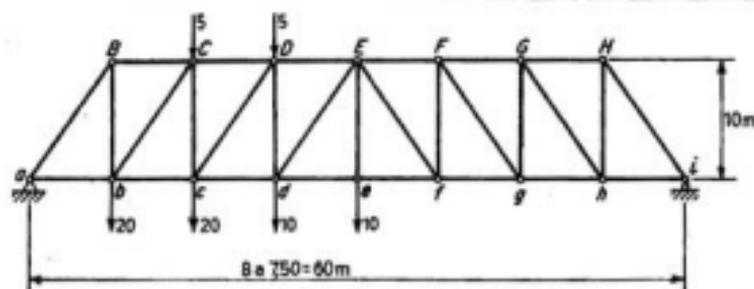
No obstante, en general es preferible proceder como sigue: Después de aplicar el método de los nudos a los i , H y h , se puede obtener la fuerza en la barra cg aislando la parte a la derecha de la sección 1-1 y tomando momentos respecto al punto E ; luego se puede completar el resto del análisis por el método de los nudos.

Obsérvese también que se puede simplificar el análisis de los esfuerzos hallando las fuerzas en las barras Cd , Cb , Gf y Gh usando secciones similares a la 2-2 y tomando momentos respecto a puntos tales como el E en el caso de la sección 2-2.

El principal punto a recordar es el considerar la aplicación de los dos métodos, de los nudos y de las secciones, y combinar ambos procedimientos de modo que se simplifiquen los cálculos.

Obsérvese que la forma geométrica de la cercha es bastante complicada, lo que sucede con frecuencia en las cerchas de cubiertas. En estos casos, muchas veces es más sencillo utilizar para el estudio métodos gráficos.

Ejemplo 4.9 Determinar las fuerzas en todas las barras de la armadura Howe siguiente.



$$40 \times \frac{6,5}{8} = 32,5$$

$$40 \times \frac{1,5}{8} = 7,50$$

$$20 \times \frac{4,5}{8} = 11,25$$

$$20 \times \frac{3,5}{8} = 8,75$$

$$10 \times \frac{5,5}{8} = 6,875$$

$$10 \times \frac{2,5}{8} = 3,125$$

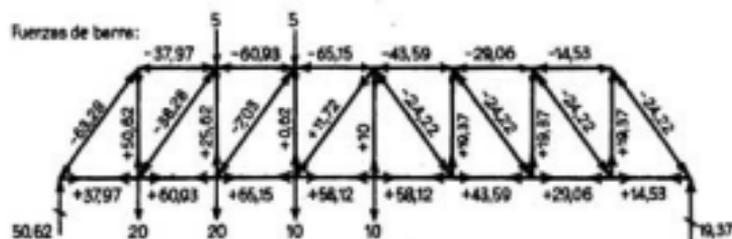
$$\underline{50,625 \uparrow}$$

$$\underline{19,375 \uparrow}$$

$$\underline{50,625}$$

$$70,000$$

∴ Comp.



Para los montantes: fuerza de barra = $l \times$ (fuerza indicadora)

Para las diagonales: fuerza de barra = $12,5/10 \times$ (fuerza indicadora)

Para los cordones: fuerza de barra = $7,5/10 \times$ (fuerza indicadora)

Comprobación: $F_{af} = 19,375 \times \frac{10}{10} = \underline{19,375}$

o indeterminada. En este caso particular, un recuento de la estructura muestra que hay nueve barras y seis nudos, lo que indica que es estáticamente determinada. Si es estable o no, no es evidente, pero un modo de hallarlo es hacer un análisis de esfuerzos y ver si los resultados son compatibles o no.

Después de calcular las reacciones, se ve que no hay ningún nudo en el que solo actúan dos fuerzas de barra desconocidas, por lo que la aplicación del método de los nudos no conducirá a soluciones inmediatas para las fuerzas de barra como en el caso de armaduras simples. Se ve también que tampoco el método de las secciones conduce a una solución inmediata para ninguna fuerza de barra. Naturalmente, es posible plantear y resolver nueve ecuaciones simultáneas con nueve fuerzas de barra como incógnitas utilizando nueve de las 12 ecuaciones que resultan de aplicar el método de los nudos a los seis nudos de la estructura. Si se han calculado las tres reacciones, se pueden usar las tres ecuaciones restantes para comprobar los resultados obtenidos para las nueve fuerzas de barra.

El plantear así nueve ecuaciones es una forma pobre de resolver el problema; hay otros varios procedimientos que son mejores, uno de los cuales es el siguiente: Después de calcular las reacciones, se supone que la componente horizontal de la fuerza de barra en el elemento FE es una tracción H . Luego, en el nudo F la componente horizontal en FA debe ser también $+H$ y la fuerza de barra en FC es $-0,5H$. Aislando el nudo C , se ve que las componentes vertical y horizontal en las barras BC y CD son $+0,5H$ y $+0,25H$, respectivamente. Una vez halladas las fuerzas en estas cinco barras en función de H , es posible trazar una sección 1-1 en la armadura y aislar la parte que queda a la derecha de ella. Sumando los momentos respecto al punto a , se obtiene una ecuación con la única incógnita H .

$$\sum M_a = 0, \uparrow, 3,75H - (7,5)(0,5H) - (2,70)(5) = 0$$

de donde $H = +30$. Conocido H , se pueden hallar todas las demás fuerzas de barra por el método de los nudos, como se ve en la Fig. 4.13b. Como, de este modo, es posible hacer el estudio de los esfuerzos de esta armadura bajo una condición de cargas cualquiera, se deduce que es estáticamente determinada y estable.

Las armaduras de este tipo, que no se pueden clasificar como simples ni como compuestas, pueden llamarse complejas. El profesor S. Timoshenko utiliza esta terminología¹. En su excelente estudio de las armaduras complejas, Timoshenko describe un método general llamado método de Henneberg².

Mientras que el estudiante debe saber reconocer una armadura compleja y algo sobre el modo de estudiar su estabilidad y análisis de esfuerzos, no encontrará este tipo lo suficientemente a menudo para justificar se le dedique aquí más espacio. Si se necesita más información, se hallará en el citado libro de Timoshenko³. Varios de los problemas del final de este capítulo recalcan el hecho de que muchas veces se pueden disponer las armaduras complejas de modo que sean geoméricamente inestables. Los casos de este tipo no son siempre evidentes y pueden no verse claros hasta que al realizar el análisis de esfuerzos se halle que conduce a resultados imposibles.

4.13 Pórticos rígidos. Antes de cerrar este capítulo sobre estructuras de armaduras, es importante llamar la atención del estudiante sobre la diferencia entre una armadura ideal y los llamados «pórticos rígidos». Los elementos de un pórtico rígido están generalmente unidos entre sí mediante nudos capaces de resistir momentos (rígidos) en lugar de estar articulados como en la armadura ideal. Así, pues, se puede definir

¹ S. Timoshenko y D. H. Young, «Engineering Mechanics», vol. I, «Statics», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1956.

² Este método fue desarrollado por L. Henneberg en su «Statik der Starren Systeme», Darmstadt, 1886.

³ Timoshenko y Young, obra citada.

un pórtico rígido como una estructura compuesta por cierto número de elementos situados todos en un plano y unidos entre sí para formar un entramado rígido por medio de nudos, algunos de los cuales, o todos ellos, son capaces de resistir momentos (rígidos) en lugar de estar articulados.

Un nudo que resiste momentos es capaz de transmitir una fuerza y un par de un elemento a los otros unidos por dicho nudo. Se pueden formar roblonando o soldando todos los elementos a cartelas de chapa. La organización de los nudos es tal que los ángulos entre los extremos de las barras permanecen esencialmente inalterables cuando el pórtico se deforma bajo las cargas, por lo cual a estos nudos se les suele llamar nudos rígidos.

Con una interpretación estricta de estas definiciones, una cercha moderna con nudos roblonados o soldados estaría clasificada como pórtico rígido. Sin embargo, como

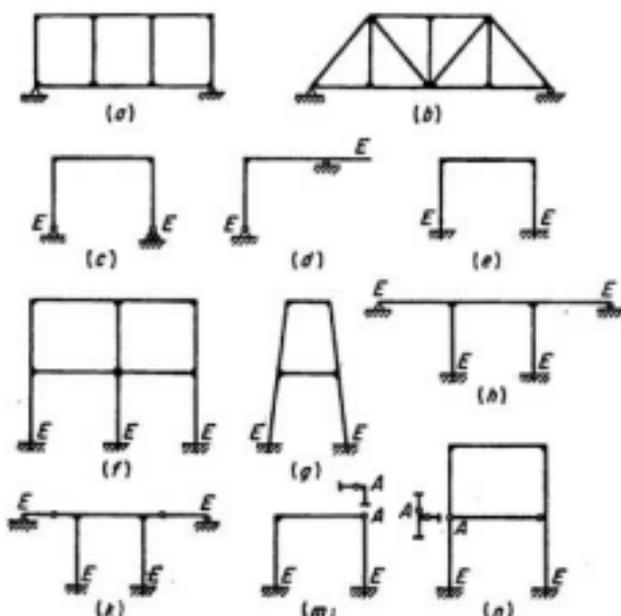


FIG. 4.14. Pórticos rígidos.

generalmente se obtiene un análisis satisfactorio de tensiones suponiendo que actúa como si estuviera articulada, a estas estructuras se les llama cerchas o armaduras, y se reserva el término pórtico rígido para designar estructuras del tipo representado en la Fig. 4.14 excepto en el esquema *b*. Cuando se representan pórticos rígidos por diagramas lineales como en esta figura, los nudos capaces de resistir momentos se representan por medio de pequeñas escuadras entre las barras que se encuentran en él. Los nudos articulados se representan del modo habitual.

Se puede estudiar la estabilidad y determinación de los pórticos rígidos por métodos similares a los utilizados para las cerchas. A este objeto, es posible establecer un criterio para comparar el número de componentes de las fuerzas interiores desconocidas y los elementos de reacción, con el número de ecuaciones independientes del equilibrio es-

tático disponibles para determinarlas. Como en el caso de las cerchas, se puede expresar el número de incógnitas y de ecuaciones en función del de barras, nudos y elementos de reacción.

El número total de incógnitas independientes es igual a la suma del número de elementos de reacción desconocidos más el número total de componentes de las fuerzas interiores en las barras desconocidas. En un pórtico con nudos rígidos, la acción de un nudo sobre una barra puede consistir en un par, lo mismo que en una fuerza. Además, esta fuerza puede tener componentes axial y transversal. Como consecuencia, la sección transversal de un elemento puede estar sometida a una fuerza axial, cortante y momento flector. Pero si se conocen la fuerza axial, el cortante y el momento flector en un extremo de la pieza, se pueden hallar las cantidades similares en las demás secciones de la misma. Por tanto, solo hay tres componentes de las fuerzas interiores para cada barra del pórtico. Si el número de elementos de reacción es r y el de barras b , el número total de incógnitas independientes en un pórtico rígido es igual a $3b + r$.

Si se aísla un nudo rígido como cuerpo libre, sobre él actuará un sistema de fuerzas y pares. Para que exista el equilibrio, este sistema debe satisfacer a tres ecuaciones del equilibrio estático $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$. Si el pórtico en conjunto está en equilibrio, lo estará cada uno de sus nudos. Si hay n nudos rígidos en el pórtico, se puede aislar cada uno de ellos como cuerpo libre y obtener un total de $3n$ ecuaciones de equilibrio estático. Como en el estudio de las cerchas, se ve que las tres ecuaciones de equilibrio para el conjunto de la estructura no son independientes de éstas, por lo que se deduce que solo hay $3n$ ecuaciones de equilibrio estático para todo el pórtico rígido.

A veces se introducen en la estructura articulaciones o condiciones especiales de construcción. Si se introducen de esta forma s ecuaciones especiales de condición, el número total de ecuaciones disponibles para hallar las incógnitas será igual a $3n + s$. El criterio de estabilidad y determinación del pórtico rígido se obtiene comparando el número de incógnitas, $3b + r$, con el de ecuaciones independientes, $3n + s$. Como antes, puede deducirse, por tanto, que

- Si $3n + s > 3b + r$, el pórtico es inestable
 Si $3n + s = 3b + r$, el pórtico es estáticamente determinado
 Si $3n + s < 3b + r$, el pórtico es estáticamente indeterminado

Si el criterio indica que el pórtico es estáticamente determinado o indeterminado, se recordará por el razonamiento similar de la Sec. 4.8 que el recuento solo no prueba totalmente que la estructura es estable, pues puede ser aun inestable estática o geoméricamente.

Este criterio establece el grado de indeterminación respecto a las reacciones y las componentes de las fuerzas internas conjuntamente. Se puede establecer el grado de indeterminación respecto a las reacciones solamente del mismo modo que se dijo en la Sec. 4.9 para las armaduras y en las Secciones 2.5 y 2.9.

La Tabla 4.1 muestra la aplicación del criterio anterior a los pórticos de la Fig. 4.14. Al aplicar este criterio debe contarse cualquier extremo del pórtico, tal como el E de la Fig. 4.14, como nudo rígido, aun cuando solo haya en él una barra. A veces es difícil de hacer el recuento de las s ecuaciones particulares de condición. En la estructura k de la Fig. 14.4 es obvio que la inserción de dos articulaciones ha introducido dos ecuaciones de condición. La inserción del nudo articulado A en la estructura m introduce una ecuación de condición, pero un nudo similar A en n introduce dos ecuaciones. En cada caso resulta más claro el recuento si se consideran los esquemas auxiliares de los nudos, que muestran la forma en que se puede conseguir la misma acción

Tabla 4.1

Pórtico	n	s	b	r	$3n + s$	$3b + r$	Clasificación
<i>a</i>	8	0	10	3	24	33	Indeterminado—9.º grado
<i>b</i>	8	0	13	3	24	42	Indeterminado—18.º grado
<i>c</i>	4	0	3	3	12	12	Determinado
<i>d</i>	4	0	3	3	12	12	Determinado
<i>e</i>	4	0	3	6	12	15	Indeterminado—3.º grado
<i>f</i>	9	0	10	9	27	39	Indeterminado—12.º grado
<i>g</i>	6	0	6	6	18	24	Indeterminado—6.º grado
<i>h</i>	6	0	5	9	18	24	Indeterminado—6.º grado
<i>k</i>	6	2	5	9	20	24	Indeterminado—4.º grado
<i>m</i>	4	1	3	6	13	15	Indeterminado—2.º grado
<i>n</i>	6	3	6	6	21	24	Indeterminado—3.º grado

estructural insertando articulaciones en los extremos de las barras que se juntan. Estas disposiciones equivalentes requieren una articulación para la estructura m y dos para el nudo \mathcal{N} de la n . Para generalizar, se puede establecer que el número de ecuaciones de condición particulares introducidas por la inserción de un nudo articulado en un pórtico rígido es igual al número de barras que se encuentran en ese nudo, menos una. Si se cuentan las r ecuaciones particulares de este modo, el criterio conduce a resultados correctos.

Después de leer el último párrafo, el lector reconocerá que es casi imposible hacer el recuento de algunas estructuras sin conocer antes la respuesta. A causa de las dificultades que aparecen en el recuento de algunas estructuras, los autores creen que, aunque los criterios como el anterior son útiles algunas veces, *el calculista ha de contar con un método más satisfactorio para determinar el grado de indeterminación de una estructura. El principal procedimiento es quitar apoyos y/o cortar barras hasta que se haya reducido la estructura a una estáticamente determinada y estable. El número de limitaciones que hay que suprimir para llegar a este resultado es igual al grado de indeterminación de la estructura real.*

4.14 Problemas para resolver

Problema 4.1 Clasificar las armaduras de la Fig. 4.15 en simples, compuestas o complejas.

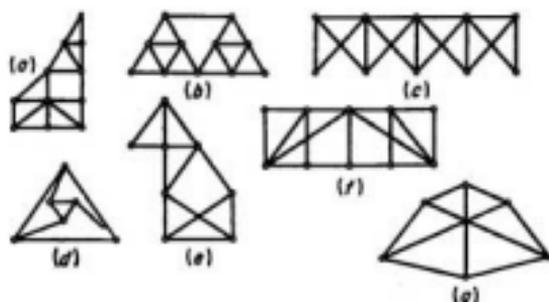


FIG. 4.15. Problema 4.1.

***Problema 4.2** Clasificar las estructuras de armadura de la Fig. 4.16 en estáticamente determinadas o indeterminadas, estables o inestables. Si la estructura es indeterminada, hallar el grado de indeterminación con respecto a las reacciones y las fuerzas de barra y respecto a las reacciones solamente. Si la estructura es inestable, decir la razón de la inestabilidad.

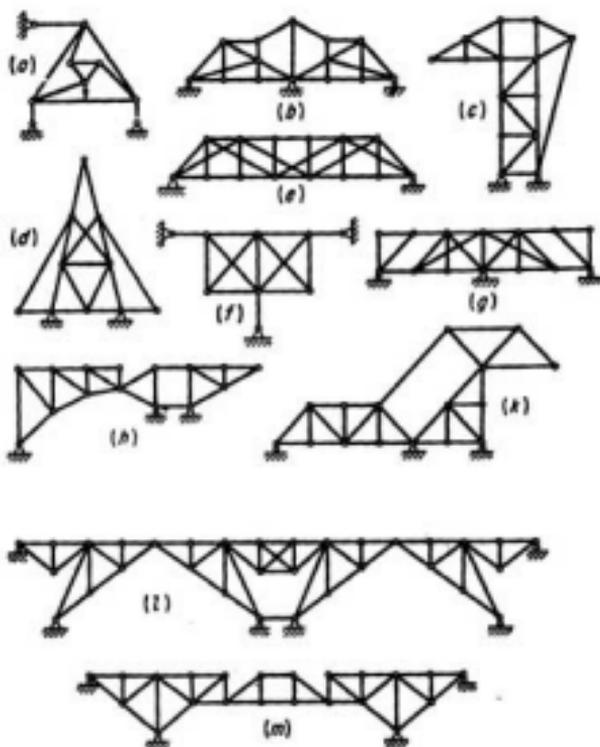


FIG. 4.16. Problema 4.2.

***Problema 4.3** Calcular las fuerzas de barra en las barras que tienen una letra, de las armaduras de la Fig. 4.17, debidas a las cargas representadas.

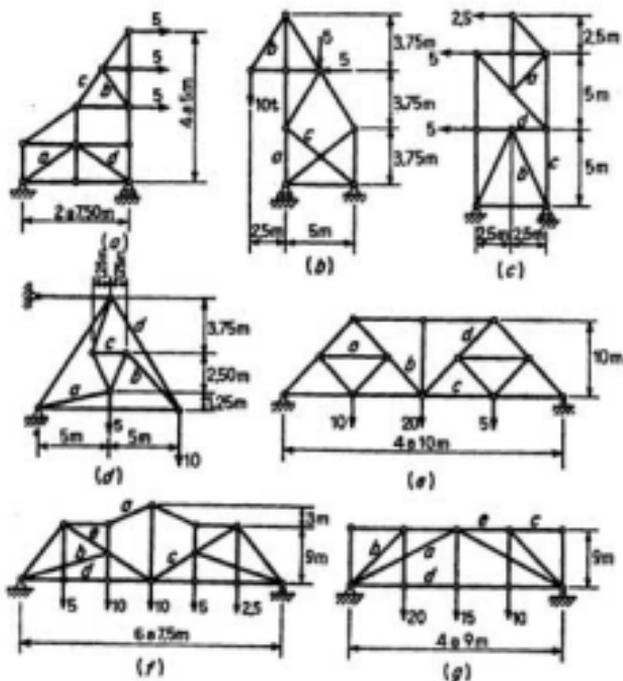


FIG. 4.17. Problema 4.3.

Problema 4.4 Calcular todas las fuerzas de barra en las armaduras de la Fig. 4.18 debidas a las cargas representadas.

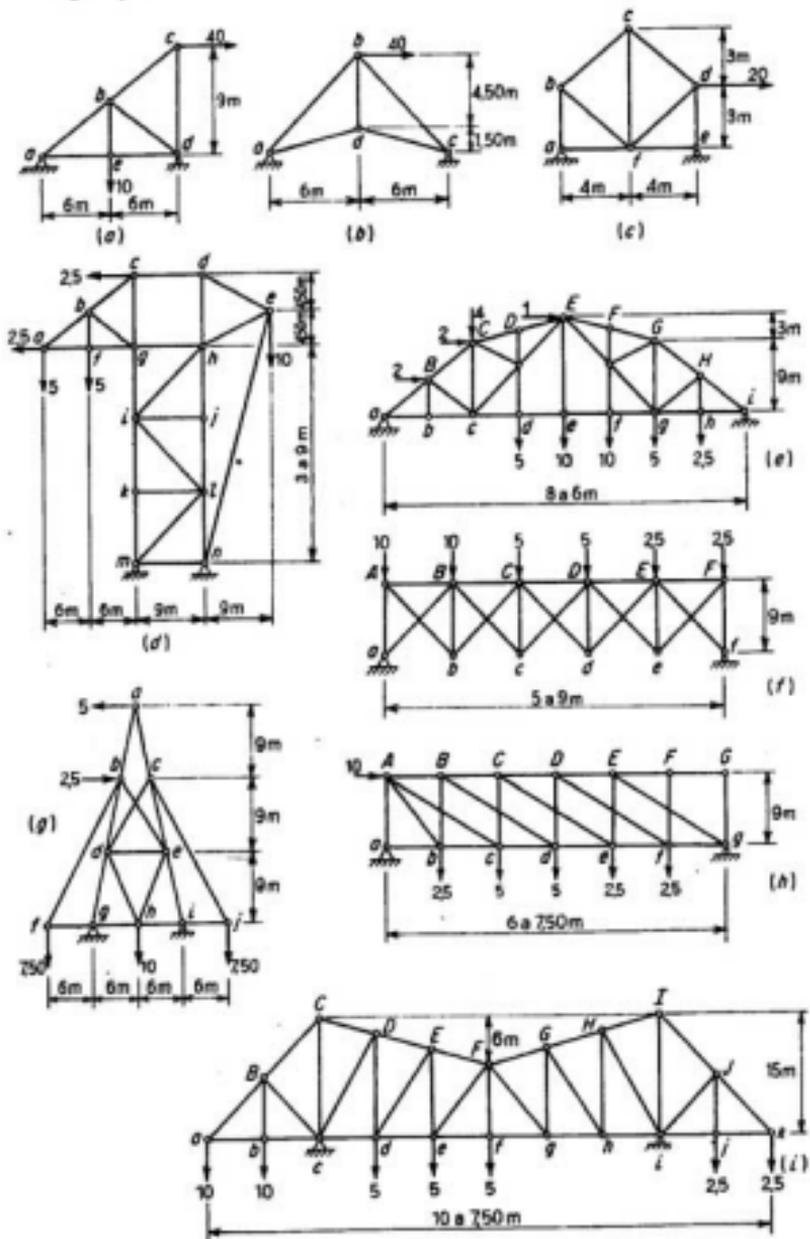


FIG. 4.18. Problema 4.4.

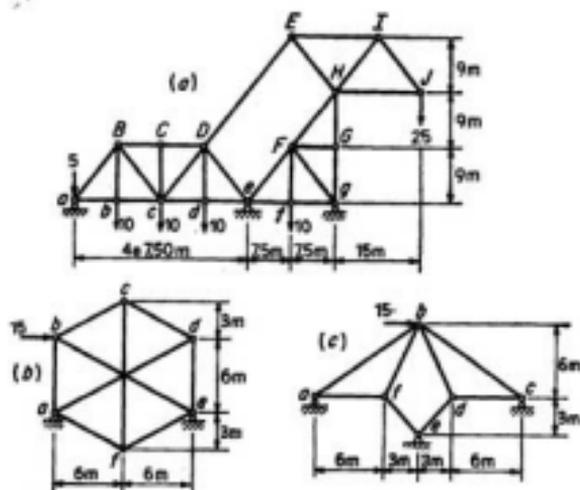
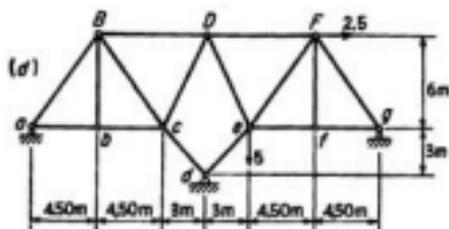


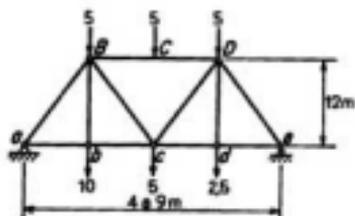
FIG. 4.19. Problema 4.5.



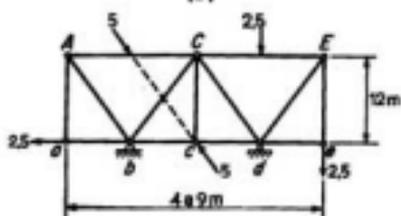
*Problema 4.5 Calcular las fuerzas de barra en las estructuras de la Fig. 4.19.

(Indicaci3n: Recordar que las estructuras de este tipo pueden ser geom3etricamente inestables.)

*Problema 4.6 Calcular las fuerzas de barra en las estructuras de la Fig. 4.20. Dibujar tambi3n las curvas de cortantes y momentos flectores para las barras en que existen esas condiciones de esfuerzo.



(a)



(b)

FIG. 4.20. Problema 4.6.

Problema 4.7 Calcular las reacciones para cada una de las estructuras de la Figura 4.21.

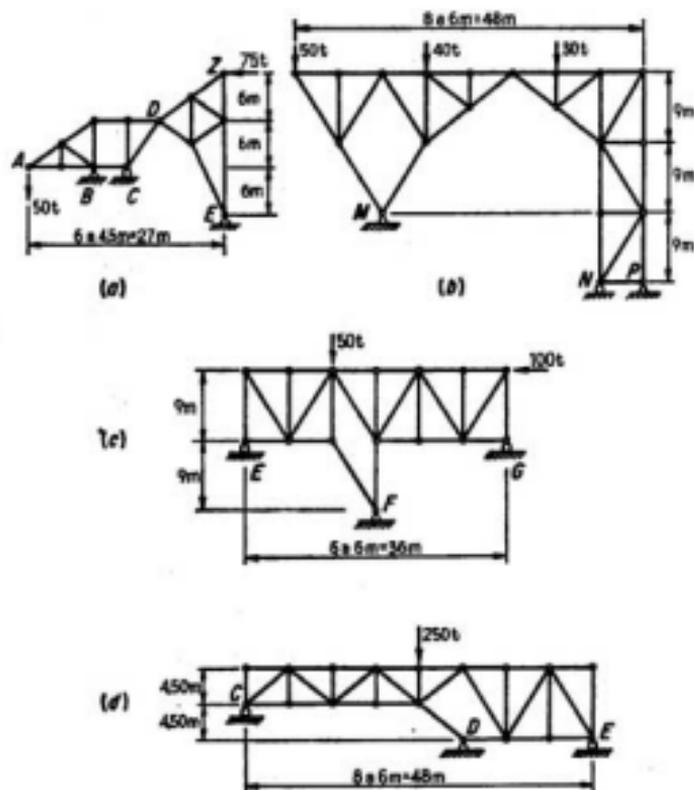


FIG. 4.21. Problema 4.7.

Problema 4.8 Calcular las reacciones para cada una de las estructuras de la Figura 4.22.

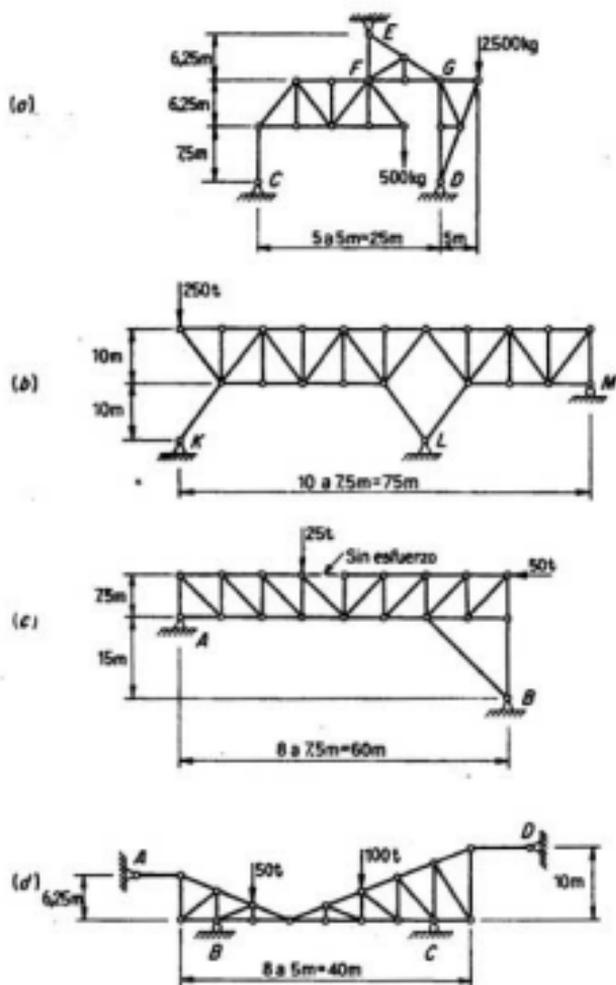


FIG. 4.22. Problema 4.8.

Problema 4.9 Calcular las fuerzas de barra indicadas en cada una de las estructuras de la Figura 4.23.

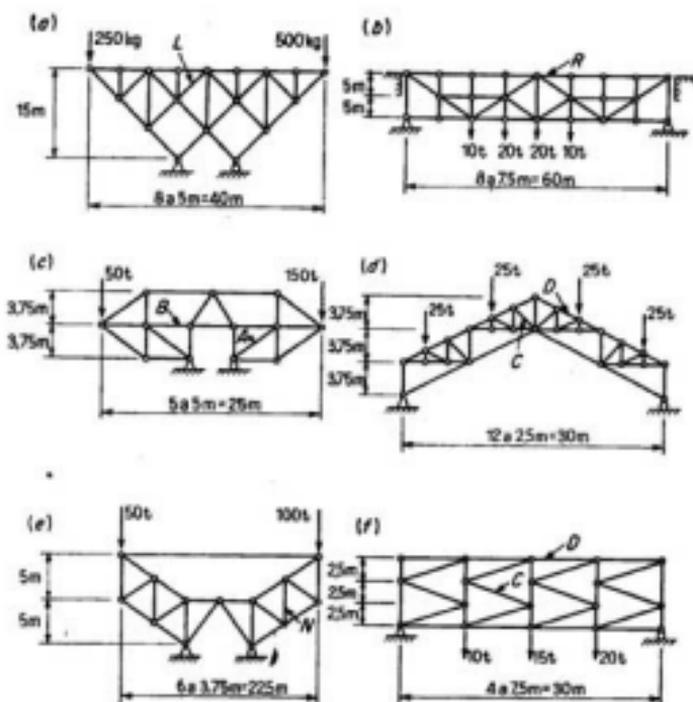


FIG. 4.23. Problema 4.9.

5

Estática gráfica

5.1 Introducción. La estática gráfica es la rama de la mecánica que trata de la resolución gráfica de los problemas de la estática. Actualmente parece haber cierta aversión hacia las soluciones gráficas, entre los estudiantes y los ingenieros. Hay diversos problemas cuya resolución gráfica es mucho mejor que la algebraica, mientras que en otros sucede lo contrario. Entre estos dos casos extremos, el elegir uno u otro método, depende de la preferencia personal del ingeniero y de su experiencia.

Entre los problemas que se pueden resolver con ventaja por los métodos gráficos están los siguientes: 1) la determinación de las fuerzas de barra en una cercha que tiene una configuración compleja y que ha de estudiarse para un número limitado de condiciones de carga; 2) los casos en que se busca la verdadera flecha en cada nudo de una cercha.

El conocimiento de los métodos gráficos no es útil solamente para resolver problemas como éstos, sino que el estudio de los principios fundamentales de estos métodos presenta ciertas ventajas educativas. La práctica de los métodos gráficos sugiere ideas que ayudan a ver y representar los fenómenos físicos, y muchas veces ayudan también a pensar sobre la solución algebraica de ciertos problemas.

En este libro se limitará el estudio de la estática gráfica a la resolución de estructuras de dos dimensiones, o planas. Evidentemente, se pueden ampliar los métodos gráficos a los problemas más generales de tres dimensiones, pero, en la mayoría de los casos, la complejidad introducida por la tercera dimensión es aún mayor para los métodos gráficos que para los algebraicos.

5.2 Definiciones. Antes de estudiar los principios fundamentales de la estática gráfica es necesario insistir sobre algunas ideas y definiciones relativas a las fuerzas y los sistemas de fuerzas. Se puede definir una fuerza como una acción que tiende a cambiar el estado de movimiento (o reposo) del cuerpo al que está aplicada. Las fuerzas aplicadas a un cuerpo se pueden clasificar en exteriores e interiores (esto es, los efectos resultantes de las tensiones en las secciones interiores expuestas por los cortes dados para aislar el cuerpo que se considera). Las fuerzas exteriores se dividirán a su vez en cargas (fuerzas activas) aplicadas a la estructura desde fuera, y reacciones (pares o fuerzas reactivas) que contrarrestan o limitan los efectos de las cargas.

Se puede identificar totalmente una fuerza por los siguientes datos: 1) su punto de aplicación; 2) su dirección; 3) su magnitud. De acuerdo con esta terminología, la «dirección de una fuerza» define la inclinación de su línea de acción, mientras que la «magnitud» indica no solo su medida numérica, sino también el sentido en que actúa en la línea de acción, es decir, si va hacia o desde el cuerpo. Por tanto, una fuerza es una cantidad vectorial, pues tiene magnitud y dirección. Por tanto, se la puede representar gráficamente por una recta trazada hacia o desde el punto de aplicación y con una longitud que indica la medida numérica de la misma, a cierta escala. La inclinación de la recta indica la dirección de la fuerza y una punta de flecha el sentido en que actúa en esta recta. De esta forma, una fuerza de 3.000 kg se representa por el vector \overline{AB} , Figura 5.1. Cuando se usa esta notación vectorial, el orden de las letras indica el sentido de la fuerza. Así, \overline{AB} significa que actúa desde A hacia B .

El empleo del término «punto de aplicación» implica que es posible concentrar la fuerza en un punto. Evidentemente, físicamente es imposible tal cosa, pues una carga finita aplicada

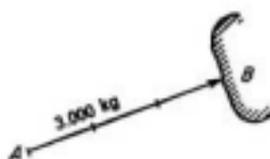


FIG. 5.1. Vector de fuerza.

a un punto, esto es, en una superficie nula, desarrollaría tensiones de contacto de intensidad infinita en el material, que ninguno de ellos podría resistir, pues se deformaría en ese punto, hasta que se produjera una pequeña superficie de contacto sobre la que estuviera distribuida la carga con unas tensiones de intensidad finita. Sin embargo, en lo que concierne a la condición de equilibrio del cuerpo, es válido sustituir la carga real repartida en una superficie pequeña, por la carga total equivalente concentrada en un punto.

Como ya se explicó en la Sec. 2.3, en general se puede suponer que las estructuras son cuerpos rígidos (no deformables) al estudiar sus condiciones de equilibrio. Así, en la mayoría de los problemas de la estática gráfica se supondrá que la estructura es un cuerpo rígido, por lo que las características geométricas son esencialmente las mismas antes y después de aplicar las cargas.

5.3 Composición y descomposición de fuerzas. A veces es conveniente sustituir dos fuerzas por una única que ejerza el mismo efecto en el equilibrio del cuerpo considerado. Esta fuerza única que producirá el mismo efecto en el movimiento se llama *resultante* de las otras. Se puede demostrar que la magnitud y dirección de la resultante de dos fuerzas concurrentes se obtiene

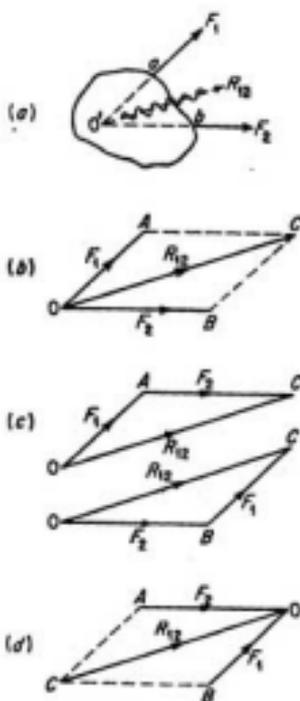


FIG. 5.2. Composición de fuerzas.

dibujando la diagonal del paralelogramo construido, con los vectores que representan las fuerzas como lados. Así, para determinar la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas F_1 y F_2 de la Fig. 5.2a, se construye un paralelogramo, como se ve en la Fig. 5.2b, tomando como lados OA y OB obtenidos trazando por el punto O dos vectores OA y OB que representan las fuerzas F_1 y F_2 , respectivamente. La magnitud y dirección de la resultante R_{12} viene dada por el vector OC , que es la diagonal de este paralelogramo.

De la Fig. 5.2d resulta evidente que se obtendría el mismo resultado de un paralelogramo construido trazando los vectores AO y BO concurrentes en O , en lugar de salir de este punto. Del mismo modo, en la Fig. 5.2c se ve claramente que también se llegaría al mismo resultado trazando uno de los triángulos de vectores OAC u OBC , en lugar del paralelogramo. Para construir estos triángulos hay que trazar primero una de las fuerzas y luego llevar la otra al extremo del primer vector. La resultante se obtiene, en magnitud y dirección, del vector que cierra el triángulo, trazado desde el origen del primer vector al extremo del segundo.

Determinadas la magnitud y dirección de la resultante R_{12} por uno de estos procedimientos, se puede considerar que su punto de aplicación está situado en cualquiera de los de su línea de acción. Esta línea debe pasar por el punto de intersección de las dos fuerzas F_1 y F_2 , o punto O' de la Fig. 5.2a, pues si no fuera así, no ejercería el mismo efecto que las dos fuerzas que sustituye, ya que el momento respecto a un eje por un punto cualquiera del plano no será igual a la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto a ese eje. Por ejemplo, los momentos de F_1 y F_2 respecto a un eje por O' son cero, mientras que el de la resultante R_{12} será también cero, tan solo si su línea de acción pasa por el punto O' .

La validez de la construcción del paralelogramo para determinar la magnitud y dirección de la resultante de dos fuerzas concurrentes se puede demostrar del modo siguiente: Consi-

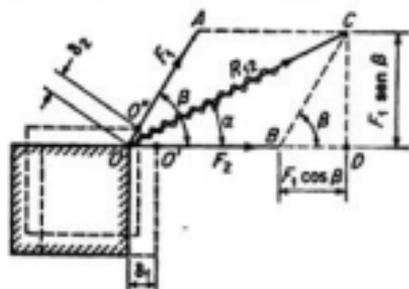


FIG. 5.3. Paralelogramo de fuerzas.

deremos las dos fuerzas F_1 y F_2 que actúan en el punto O en el cuerpo representado en la Fig. 5.3. La resultante de estas dos fuerzas R_{12} actúa también en O según una cierta línea de acción expresada por el ángulo desconocido α . La magnitud y dirección desconocidas de la resultante se pueden determinar como sigue: Si se mueve el cuerpo de forma tal que el punto O sufra un movimiento arbitrario δ , las fuerzas F_1 y F_2 desarrollarán un cierto trabajo. Si la resultante R_{12} ha de ejercer el mismo efecto que F_1 y F_2 , debe producir el mismo trabajo durante el movimiento δ . Supongamos que al cuerpo se le ha dado una traslación arbitraria, de modo que O se ha trasladado a O' ; planteando la ecuación que relaciona el trabajo de F_1 y F_2 con el de R_{12} , se obtiene la Ec. (a),

$$(R_{12} \cos \alpha)(\delta_1) = (F_2)(\delta_1) + (F_1 \cos \beta)(\delta_1)$$

$$R_{12} = \frac{F_2 + F_1 \cos \beta}{\cos \alpha} \quad (a)$$

Del mismo modo, trasladando el cuerpo de forma que el punto O se mueva hasta O'' ,

$$[R_{12} \cos (\beta - \alpha)](\delta_2) = (F_1)(\delta_2) + (F_2 \cos \beta)(\delta_2)$$

$$R_{12} = \frac{F_1 + F_2 \cos \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \quad (b)$$

De estas dos ecuaciones se puede hallar ahora R_{12} y α . Igualando los segundos miembros de las dos ecuaciones, se llega a la siguiente expresión de α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_1 \operatorname{sen} \beta}{F_2 + F_1 \cos \beta} \quad (c)$$

Por lo que
$$\cos \alpha = \frac{F_2 + F_1 \cos \beta}{\sqrt{(F_1 \operatorname{sen} \beta)^2 + (F_2 + F_1 \cos \beta)^2}} \quad (d)$$

Sustituyendo (d) en la Ec. (a) se tiene

$$R_{12} = \sqrt{(F_1 \operatorname{sen} \beta)^2 + (F_2 + F_1 \cos \beta)^2} \quad (e)$$

De la Ec. (c) se puede hallar el ángulo α gráficamente, como se indica en la Fig. 5.3, mientras que la magnitud del vector R_{12} se ve en la Ec. (e) que está dada por la hipotenusa del triángulo rectángulo ODC . Por tanto, es evidente que el vector \overline{OC} que representa la resultante, es también la diagonal del paralelogramo de fuerzas $OACB$, lo que justifica la construcción del paralelogramo anterior.

Este proceso de sustituir las fuerzas F_1 y F_2 por una sola resultante R_{12} se conoce por *composición de las fuerzas* F_1 y F_2 . El inverso de este proceso, el de sustituir una sola fuerza R por las dos fuerzas equivalentes (llamadas *componentes*) F_1 y F_2 se llama *descomposición de la fuerza* R . En este último proceso, se ha de conocer la dirección de las dos componentes y se obtiene su magnitud por el triángulo de fuerzas o el paralelogramo; también puede darse la dirección y magnitud de una componente y quererse hallar, de un modo similar, las correspondientes dirección y magnitud de la otra. Determinadas la magnitud y dirección de las dos componentes F_1 y F_2 , pueden aplicarse ambas en el punto de aplicación de la fuerza R . Indudablemente, es posible aplicar las dos componentes F_1 y F_2 en cualquier punto de la línea de acción R .

5.4 Resultante de varias fuerzas en un plano. Polígono de fuerzas. Consideremos un cuerpo sometido a un sistema coplanario de fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 como el de la Fig. 5.4a. Esta figura es simplemente un diagrama en escala que muestra el punto de aplicación y línea de acción de las fuerzas en su plano (o espacio de dos dimensiones) llamado *diagrama espacial*. Supongamos que se quiere hallar la resultante de esas fuerzas gráficamente. Como se ha dicho en la sección anterior, la resultante R_{12} de las fuerzas F_1 y F_2 se puede obtener en magnitud y dirección del triángulo de fuerzas 012. Se ha trazado la línea de acción de esta resultante paralela al vector $\overline{O2}$ por el punto de intersección de las fuerzas F_1 y F_2 . Del mismo modo, se puede obtener la resultante R_{123} de las fuerzas R_{12} y F_3 ; y luego la resultante R_{1234} de R_{123} y F_4 . La última resultante R_{1234} es, indudablemente, la de las cuatro fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 .

La figura obtenida combinando los triángulos de fuerzas 012, 023 y 034 y suprimiendo luego las líneas de trazos 02 y 03 se llama *polígono de fuerzas* de F_1, F_2, F_3 y F_4 . La resultante R_{1234} de todo el sistema puede hallarse directamente de este polígono de fuerzas sin completar los triángulos de fuerzas intermedios. La magnitud y dirección de esta resultante vienen dadas por el vector trazado desde el punto inicial al final del polígono de fuerzas, en este caso, por el vector $\overline{O4}$. Para establecer la línea de acción de esta resultante en el diagrama espacial hay que establecer las líneas de acción de las resultantes intermedias, R_{12} y R_{123} , como se ha descrito antes.

Este método de obtener la magnitud, dirección y línea de acción de la resultante es aplicable siempre que las líneas de acción de las fuerzas no sean paralelas y se corten dentro de los límites del dibujo. Cuando no es aplicable el método, es necesario recurrir al uso del llamado «polígono (funicular) de equilibrio» que se describirá en la Sección 5.7.

Se observará que no importa el orden en que se dibujen las fuerzas en el polígono y que ordinariamente se consideran en el sentido de las agujas del reloj, solo por conveniencia.

5.5 Condiciones de equilibrio para sistemas de fuerzas coplanarias concurrentes y no concurrentes. Supongamos que se añade la fuerza F_5 al sistema de fuerzas no concurrentes ya representado en la Fig. 5.4a. Imaginemos que la fuerza F_5 tiene la misma línea de acción que la resultante R_{1234} y que sea numéricamente igual a ella, pero de sentido opuesto. En este caso,

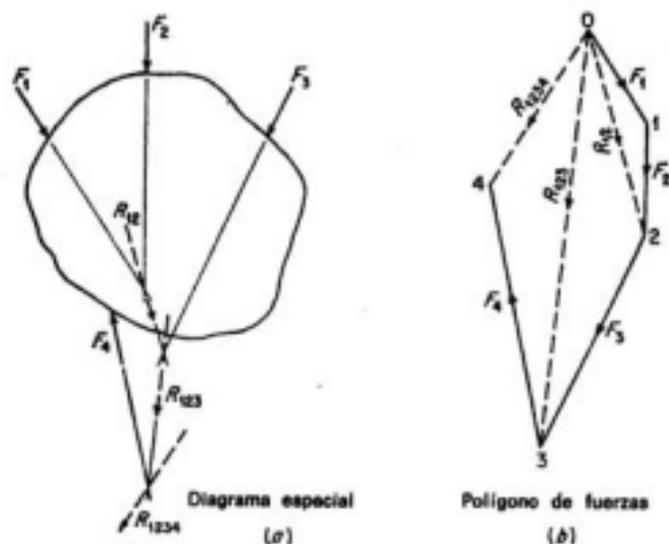


FIG. 5.4. Resultante de un sistema plano de fuerzas:

se verá que el polígono de fuerzas para las cinco existentes se cierra en el punto de partida O . El cierre del polígono de fuerzas indica que las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se satisfacen para las cinco fuerzas, por lo que su efecto resultante no puede ser una fuerza. El hecho de tener, en el diagrama espacial, F_5 y R_{1234} la misma línea de acción y ser numéricamente iguales y de sentidos opuestos, indica que, en efecto, F_5 mantiene a las otras cuatro fuerzas en equilibrio. En este caso a F_5 se llama *equilibradora* de las otras cuatro fuerzas.

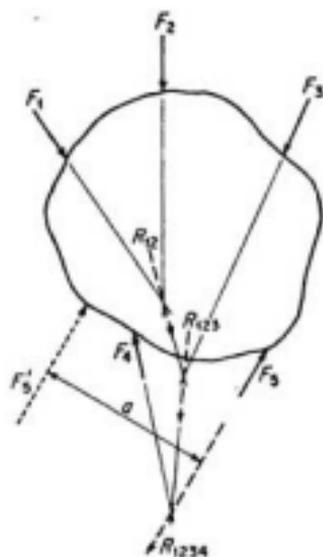


FIG. 5.5. Sistema plano de fuerzas equivalentes a un par.

Pero supongamos que F_3 , en lugar de tener la misma línea de acción que R_{1234} está desplazada lateralmente una distancia a , como se indica con la fuerza F_3' en la Fig. 5.5. Ahora, aunque F_3 cierra el polígono de fuerzas, con lo que se satisfacen las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, en el diagrama espacial las fuerzas F_3 y R_{1234} son paralelas, pero sus líneas de acción están separadas una distancia a . Es evidente, por tanto, que la resultante del nuevo sistema F_1, F_2, F_3, F_4 y F_3' es un par, igual en magnitud a $F_3 a$, y el sistema no está en equilibrio, pues $\Sigma M \neq 0$.

En el caso de un sistema de fuerzas no concurrentes es evidente, por tanto, que el cierre del polígono de fuerzas es una condición necesaria, pero no suficiente, para demostrar que el sistema está en equilibrio. Además de esta condición es necesario demostrar, en el diagrama espacial, que el sistema no es equivalente a un par, esto es, que una fuerza tiene la misma línea de acción y opuesto sentido que la resultante de las restantes.

Naturalmente, si el sistema de fuerzas es un sistema concurrente en el que las líneas de acción de todas las fuerzas se cortan en un punto común, es imposible que el efecto resultante sea un par. En este caso, el cierre del polígono de fuerzas, que indica que el efecto resultante no es una fuerza, es suficiente para demostrar que el sistema está en equilibrio.

5.6 Determinación de las reacciones por el método de las tres fuerzas. Si solo actúan en un cuerpo tres fuerzas no paralelas, es fácil demostrar que para que exista equilibrio deben ser concurrentes. Consideremos dos cualesquiera de esas fuerzas. La línea de acción de su resultante debe pasar por su punto de intersección. Para que la fuerza restante equilibre a las dos primeras, su línea de acción debe coincidir con la de la resultante de las mismas, por lo que se deduce que las líneas de acción de las tres fuerzas han de cortarse en un mismo punto, para que el sistema pueda estar en equilibrio. Esta conclusión proporciona la base del llamado «método de las tres fuerzas» para hallar las reacciones de una estructura estáticamente determinada.

Consideremos, por ejemplo, la viga representada en la Fig. 5.6, y supongamos que se desea hallar las reacciones necesarias para mantener a esta estructura en equilibrio estático. Determinaremos primero la magnitud y la línea de acción de la resultante de las cargas aplicadas, utilizando el polígono de fuerzas y el diagrama espacial. Luego se puede considerar que sobre la estructura actúan tres fuerzas —la resultante de las cargas aplicadas (R_{12} en este caso) y las dos reacciones (R_a y R_b)—. Para que esté en equilibrio la estructura, es necesario que estas tres fuerzas sean concurrentes. En este caso, se desconoce la magnitud de las dos reacciones y la dirección de R_a , pero son conocidos el punto de aplicación de R_a y la línea de acción de R_b , pues

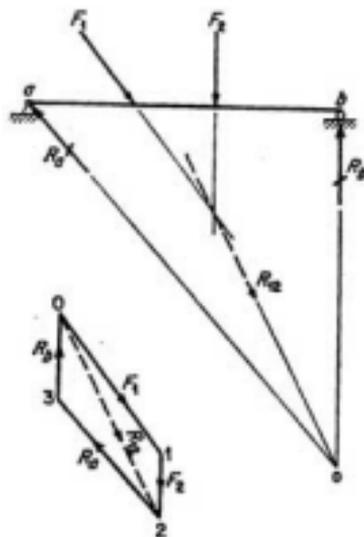


FIG. 5.6. Reacciones determinadas por el método de las tres fuerzas.

es una vertical que pasa por el punto b . Por tanto, el punto o de intersección de R_{12} y R_3 debe ser el de concurrencia de las tres fuerzas. La línea de acción de R_3 será, pues, la recta oa . Ahora, conocidas las direcciones de las dos reacciones, se pueden determinar fácilmente sus magnitudes, pues se sabe que los vectores que las representan deben cerrar el polígono de fuerzas. En este caso, trazando una recta por el punto 2 paralela a R_3 y por el O una paralela a R_2 , se halla el punto de intersección 3, que determina la longitud de los vectores $\vec{23}$ y $\vec{30}$ que representan las reacciones R_3 y R_2 , respectivamente. Indudablemente, es lo mismo que se cierre el polígono de fuerzas de esta manera, o dibujando la paralela a R_3 por el punto O y la paralela a R_2 por el 2.

Se observará que este método de las tres fuerzas no es un método completamente general para determinar las reacciones de una estructura estáticamente determinada. Se puede utilizar solamente cuando la resultante de las cargas aplicadas es una fuerza cuya línea de acción corta a la línea de acción conocida de una de las reacciones.

5.7 Polígono funicular (de equilibrio). En la Sec. 5.4 se ha estudiado un método por el que se puede hallar la resultante de varias fuerzas coplanarias. Este método no sirve cuando algún punto de intersección del diagrama espacial se sale fuera de los límites del papel, y no es aplicable a un sistema de fuerzas paralelas. Por el contrario, un método general que utiliza el polígono funicular es aplicable a cualquier sistema de fuerzas coplanarias.

Supongamos que se quiere hallar la resultante de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 de la Fig. 5.7a. La magnitud y dirección de la resultante R_{123} se obtiene del vector $\vec{O3}$ del polígono de fuerzas $O123$ y la línea de acción en el diagrama espacial se puede hallar como sigue: Supongamos que, mediante el triángulo de fuerzas $OP1$, se descompone la fuerza F_1 en dos componentes $P1$ y OP , en un punto cualquiera de su línea de acción, y que se prolonga la línea de acción de la componente $P1$ hasta que corte a la de F_2 . Descompongamos en este punto F_2 en dos componentes, una de las cuales, $1P$, sea colineal con $P1$, e igual y opuesta a ella, y la otra es igual a $P2$, obtenida del triángulo de fuerzas $1P2$. Del mismo modo, descompongamos F_3 en las componentes $2P$ y $P3$, según se representa. Se habrá sustituido así el sistema original constituido por F_1 , F_2 y F_3 por las seis componentes OP y $P1$, $1P$ y $P2$, y $2P$ y $P3$. De estas seis componentes, las parejas $P1$ y $1P$, $P2$ y $2P$ son colineales e iguales y opuestas, por lo que cada pareja está en equilibrio. La resultante de las seis componentes y, por tanto, del sistema original será, pues, la de las dos componentes restantes, OP y $P3$, y actuará pasando por su punto de intersección.

La construcción trazada así entre las líneas de acción de las fuerzas en el diagrama espacial se llama polígono de equilibrio o funicular. Los lados de este polígono, entre las fuerzas, se llaman *lados*, el punto P por el que pasan todas las componentes es el *polo* y las rectas trazadas de los vértices del polígono al polo P los *rayos*.

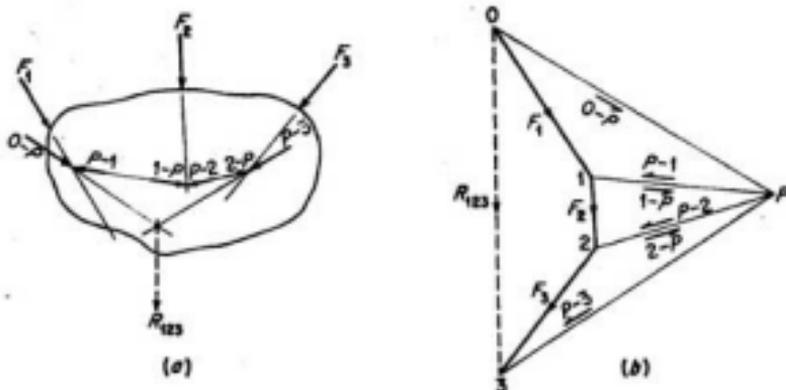


FIG. 5.7. Determinación de la resultante utilizando los polígonos de fuerzas y funicular.

En un problema real, se sitúa la línea de acción de la resultante construyendo el polígono funicular de un modo un poco diferente al descrito más arriba. Primero se elige un polo apropiado P , y se trazan los rayos desde este polo a los vértices del polígono de fuerzas. Luego se dibujan los lados del polígono funicular en el diagrama espacial paralelos a los correspondientes rayos del polígono de fuerzas. Obsérvese que se dibuja cada lado entre las líneas de acción de dos fuerzas que son concurrentes en el polígono de fuerzas, paralelamente al rayo que pasa por la intersección de los vectores que las representan. Aunque no es necesario proceder así, generalmente se elige el punto de partida en el polígono funicular en algún punto de la línea de acción de la primera fuerza dibujada en el polígono de fuerzas. Entonces, la intersección del primer lado del polígono funicular con el último (tal como los que van de F_1 a $R_{1,2}$ y de F_3 a $R_{1,2}$, respectivamente) es un punto de la línea de acción de la resultante del sistema, que ha sido determinada previamente en magnitud y dirección en el polígono de fuerzas.

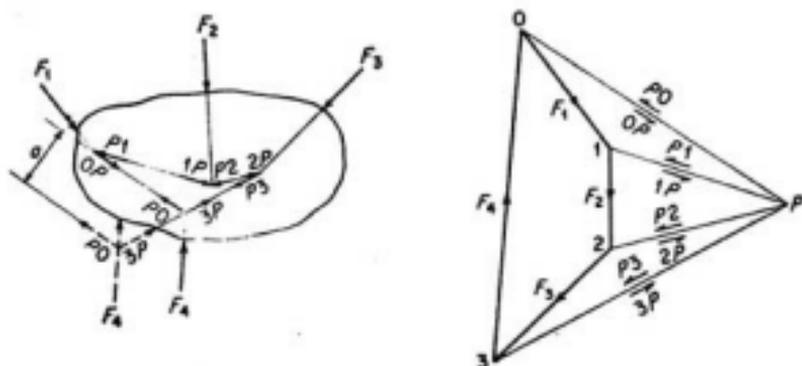


FIG. 5.8. Cierre de los polígonos de fuerzas y funicular.

Supongamos que se añade una cuarta fuerza F_4 al sistema de la Fig. 5.7, y que F_4 es colineal con $R_{1,2}$ e igual, pero opuesta a ella. El nuevo sistema será el representado en la Figura 5.8.

En este caso, el polígono de fuerzas cerrará, indicando que $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Igualmente, cuando se dibuja el polígono funicular, se ve que los lados primero y último, dibujados desde las fuerzas F_1 y F_4 , respectivamente, son ahora colineales. Indudablemente, el dibujar el polígono funicular es solo un modo de sustituir las cuatro fuerzas por las ocho componentes representadas. Es evidente que se pueden considerar estas ocho componentes como cuatro parejas, cada una de las cuales está en equilibrio, por lo que el sistema de fuerzas original estará también en equilibrio.

Supongamos que, en vez de ser F_4 colineal con $R_{1,2}$, tiene su línea de acción desplazada a la posición de trazos, siendo aún paralela e igual y opuesta a $R_{1,2}$. Entonces, el polígono de fuerzas seguirá siendo cerrado, pero el primero y último lados ya no serán colineales, sino paralelos y separados una distancia a entre sí. En este caso, las ocho componentes representadas por el polígono funicular consistirán en tres parejas iguales y opuestas en equilibrio, pero la cuarta pareja OP y PO serán paralelas, iguales y opuestas y serán equivalentes a un par igual a $(OP)(a)$. El sistema de fuerzas original será equivalente a un par $(OP)(a)$ y no estará en equilibrio.

Por tanto, se puede deducir que, para que un sistema de fuerzas no concurrentes esté en equilibrio, es necesario no solamente que el polígono de fuerzas sea una figura cerrada, sino que también lo sea el polígono funicular, esto es, que los lados primero y último han de ser coincidentes. Si el polígono de fuerzas cierra, pero no el polígono funicular, el sistema de fuerzas será equivalente a un par.

He aquí otro principio asociado con un polígono funicular que puede ser útil en muchas ocasiones. Se puede considerar que los lados de un polígono funicular representan varillas, unidas

a los vértices del polígono por pasadores sin rozamiento. Si se considera los principios fundamentales que intervienen en la construcción de un polígono funicular, es evidente que un varillaje articulado de esta forma soportará el sistema de cargas aplicado a sus nudos. Indudablemente, cuando el polígono funicular no es una figura cerrada, es necesario además proporcionar las reacciones apropiadas al varillaje, en las direcciones del primero y del último lados del polígono. Las magnitudes de estas dos reacciones vienen dadas midiendo la longitud del primero y último rayos del polígono de fuerzas.

5.8 Empleo del polígono funicular para determinar las reacciones. El empleo del polígono funicular para determinar las reacciones de una estructura estáticamente determinada se puede explicar considerando la viga y cargas de la Fig. 5.9. En este caso, son conocidos el punto de

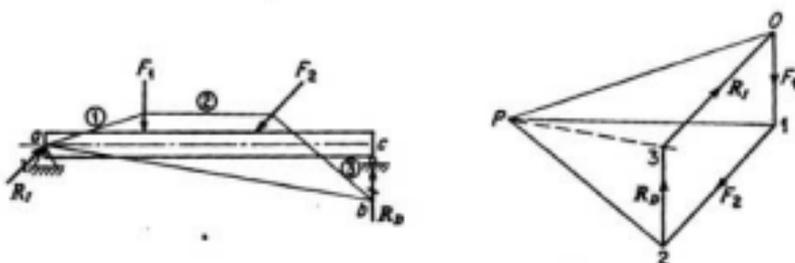


FIG. 5.9. Determinación de las reacciones utilizando el polígono funicular.

aplicación y la dirección de la reacción derecha y el punto de aplicación de la reacción izquierda, quedando como incógnitas la magnitud de las dos reacciones y la dirección de la izquierda. Se pueden hallar estas tres incógnitas sabiendo que tanto el polígono de fuerzas como el funicular deben cerrar si el sistema conjunto de cargas y reacciones está en equilibrio.

Se puede dibujar inmediatamente una parte del polígono de fuerzas, la correspondiente a los vectores $\vec{O1}$ y $\vec{12}$ que representan las cargas aplicadas. Elijamos ahora un polo P , y tracemos los rayos a los puntos O , 1 y 2 . Tracemos un lado paralelo al rayo PO entre la línea de acción de R_l desconocida y la fuerza F_1 . Aunque la dirección de R_l es desconocida, se sabe que el punto a pertenece a su línea de acción, por lo que trazaremos el lado por a hasta que corte a F_1 . De igual modo, trazaremos sucesivamente los lados entre F_1 y F_2 y luego desde F_2 hasta la línea de acción conocida de R_D . Este último lado corta a R_D en el punto b . El lado de cierre del polígono funicular será el ab . Ahora puede trazarse el rayo correspondiente en el polígono de fuerzas, paralelo a este lado de cierre. Este rayo debe pasar por el vértice de intersección de los vectores que representan a R_D y R_l . Como se trazó el lado 3 entre F_2 y R_D paralelo al rayo $P2$, un extremo del vector que representa a R_D debe estar en el punto 2 del polígono de fuerzas. Además se sabe que esta reacción es vertical, por lo que trazaremos por el punto 2 un vector vertical que representará a R_D . El otro extremo de este vector debe estar en el rayo paralelo al lado de cierre, con lo que se sitúa el vértice 3 del polígono. El vector $\vec{23}$ da la magnitud de R_D y el vector $\vec{3O}$, que cierra el polígono de fuerzas, da la dirección y magnitud de R_l .

Este procedimiento es directo, pero a veces los estudiantes dudan si deben trazar el vector de la reacción con dirección conocida, por el primero o por el último vértice de la fuerza, esto es, en este caso por el punto O o por el 2. Esta duda se aclara si se piensa que un lado trazado entre las líneas de acción de dos fuerzas, es paralelo al rayo que pasa por la intersección de los dos vectores que representan a esas fuerzas en el polígono de fuerzas. En este caso, el lado 1 es paralelo al rayo PO y el 3 al $P2$, lo que implica que un extremo del vector que representa a R_l está en el punto O del polígono de fuerzas, y un extremo del vector de R_D en el 2.

Este método para determinar las reacciones es general, y no se limita a casos particulares como el de las tres fuerzas.

* ¿Por qué no se empieza el polígono funicular por el lado 3, paralelo al rayo $P2$ desde el punto c a la línea de acción de la fuerza F_2 ?

5.9 Polígonos funculares trazados por uno, dos o tres puntos determinados. Cuando se reconsidera el procedimiento usado para dibujar un polígono funcular para un conjunto de fuerzas dado, resulta evidente que es posible dibujar un número infinito de polígonos funculares para ese conjunto particular, porque puede elegirse como polo un número infinito de puntos. Sin embargo, a veces es necesario dibujar el polígono funcular de modo que pase por ciertos puntos determinados del diagrama espacial. En esas condiciones, es necesario limitar la elección del polo a ciertos puntos determinados.

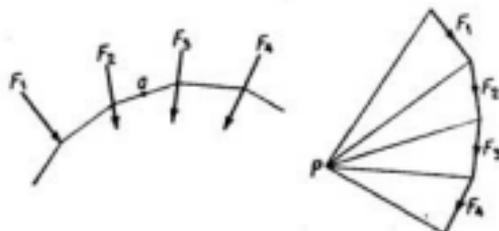


FIG. 5.10. Polígono funcular que pasa por un punto dado.

Consideremos primero el caso en que es necesario que el polígono funcular pase por un punto determinado en el diagrama espacial, como el a de la Fig. 5.10. Esto se puede conseguir trazando entre las fuerzas F_1 y F_2 cualquier lado que pase también por a . El rayo correspondiente a este lado se debe trazar paralelo a él por la intersección de los vectores de F_2 y F_3 en el polígono de fuerzas. Se puede elegir, ahora, el polo P en cualquier punto de este rayo, y completar el resto del polígono funcular. Evidentemente, se puede elegir un número infinito de polos P , por lo que se podrá dibujar un número infinito de polígonos que pasen por el punto a .

Cuando es necesario que el polígono funcular pase por dos puntos determinados, como los a y b de la Fig. 5.11, hay que modificar algo el procedimiento. Supongamos, provisionalmente, que estas fuerzas están aplicadas a una estructura apoyada en un apoyo articulado en el punto a y uno de rodillo que da una reacción vertical en b . Procediendo del modo habitual, se pueden obtener las dos reacciones imaginarias utilizando el polígono funcular rotulado con los lados 1, 2, 3 y 4 y el de cierre ab' . Este polígono funcular se ha trazado con P como polo. Indudablemente, el valor determinado así para las reacciones R_b y R_a será el mismo cualquiera que sea el punto elegido para polo P , por lo que la posición del vértice v del polígono de fuerzas es única. Si se ha elegido P convenientemente, el polígono funcular resultante pasará por los puntos a y b y el lado de cierre será el ab . El rayo correspondiente será paralelo a ab y pasará también por el vértice v del polígono de fuerzas. Este rayo se ha dibujado así, y se ha rotulado $5'$. Ahora se puede elegir cualquier punto de este rayo como polo P' , que dará lugar a un polígono funcular con rayos $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ y $5'$ que pasan por los dos puntos dados a y b en el diagrama espacial. Es evidente que también se puede elegir un número infinito de polos P' , por lo que se pueden trazar un número infinito de polígonos funculares por los dos puntos dados a y b .

Consideremos ahora un caso en que es necesario que el funcular pase por tres puntos determinados a , b y c , como se indica en la Fig. 5.12. Como antes, supongamos provisionalmente que esas fuerzas actúan en una estructura apoyada en un apoyo articulado en a y uno con rodillo que produce una reacción vertical en c . Continuando como antes, determinemos estas reacciones R_a y R_c trazando el polígono funcular con rayos 1, 2, 3, 4 y 5, situando así el vértice v del polígono de fuerzas. Como se demostró en el párrafo anterior, el polo de un polígono funcular que pase por los puntos a y c debe estar en algún punto de la recta ax paralela a la ac . Consideremos ahora solo las fuerzas situadas entre los puntos a y b y supongamos que están soportadas por un apoyo articulado en a y uno de rodillo que da una reacción vertical en el punto b . Estas reacciones R_b' y R_a' se pueden determinar utilizando el polígono funcular con lados 1, 2, 3 y 6, situando así el vértice w del polígono de fuerzas. De igual modo, el polo de

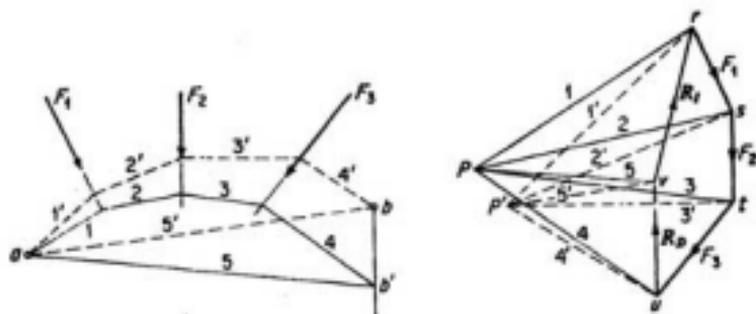


FIG. 5.11. Polígono funicular que pasa por dos puntos dados.

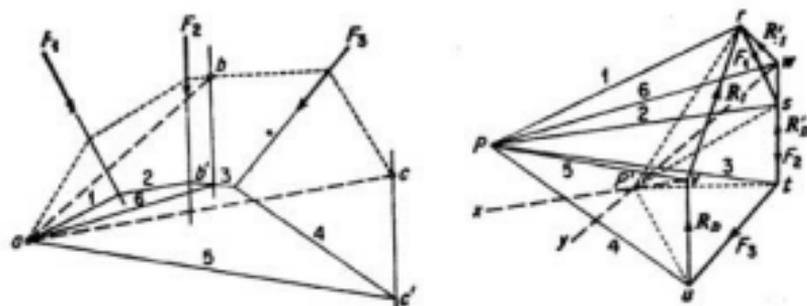


FIG. 5.12. Polígono funicular que pasa por tres puntos dados.

un polígono funicular que pase por los puntos a y b debe estar en algún punto de la recta wy paralela a la ab . Por tanto, para que el polígono pase por los tres puntos a , b y c , el polo P' ha de estar situado en la intersección de wx y wy . En este caso, solo puede haber un polo P' así situado, por lo que por tres puntos dados solo puede pasar un polígono funicular. Además, no se puede hacer que un polígono funicular pase por más de tres puntos dados.

5.10 Determinación gráfica del cortante y del momento flector. Después de hallar gráficamente las reacciones de una viga, se pueden hallar también fácilmente por métodos gráficos el cortante y el momento flector. Siendo el cortante la componente transversal de la resultante de las fuerzas aplicadas a la izquierda o a la derecha de una sección, se puede hallar fácilmente del polígono de fuerzas. Por el contrario, la determinación gráfica del momento flector requiere nuevas consideraciones sobre las técnicas ya estudiadas.

El momento flector en una sección es igual al momento de la resultante de las fuerzas aplicadas a la izquierda o a la derecha de la misma. Naturalmente, se puede determinar la magnitud y dirección de esta resultante con el polígono de fuerzas, mientras que se localiza un punto de su línea de acción por la intersección de los lados apropiados del polígono funicular. Se puede calcular el momento buscado utilizando esta información y midiendo a escala el brazo de palanca de la resultante. Sin embargo, es más sencillo calcularle utilizando el procedimiento desarrollado en las consideraciones siguientes:

Consideremos el sistema de fuerzas F_1 , F_2 y F_3 representado en la Fig. 5.13, y supongamos que se desea calcular la suma de los momentos de estas tres fuerzas respecto al punto a . Esta suma es igual al momento de su resultante respecto a a , que llamaremos M_a . Será

$$M_a = (R_{123})(m) = (\overline{OP})(m) \quad (a)$$

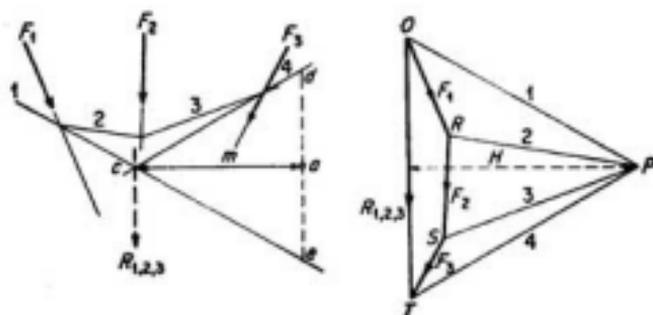


FIG. 5.13. Determinación gráfica del momento.

donde \overline{OT} está medida a escala de fuerzas y m en la de distancias. Si se traza la recta de paralela a \overline{OT} , los triángulos OPT y cae son semejantes. Por tanto, trazando H perpendicular a \overline{OT} ,

$$\frac{de}{m} = \frac{\overline{OT}}{H} \quad \text{o} \quad (H)(de) = (\overline{OT})(m) \quad (b)$$

De donde

$$M_a = (H)(de) \quad (c)$$

estando de medida en escala de distancias y H de fuerzas. A H se le llama distancia polar.

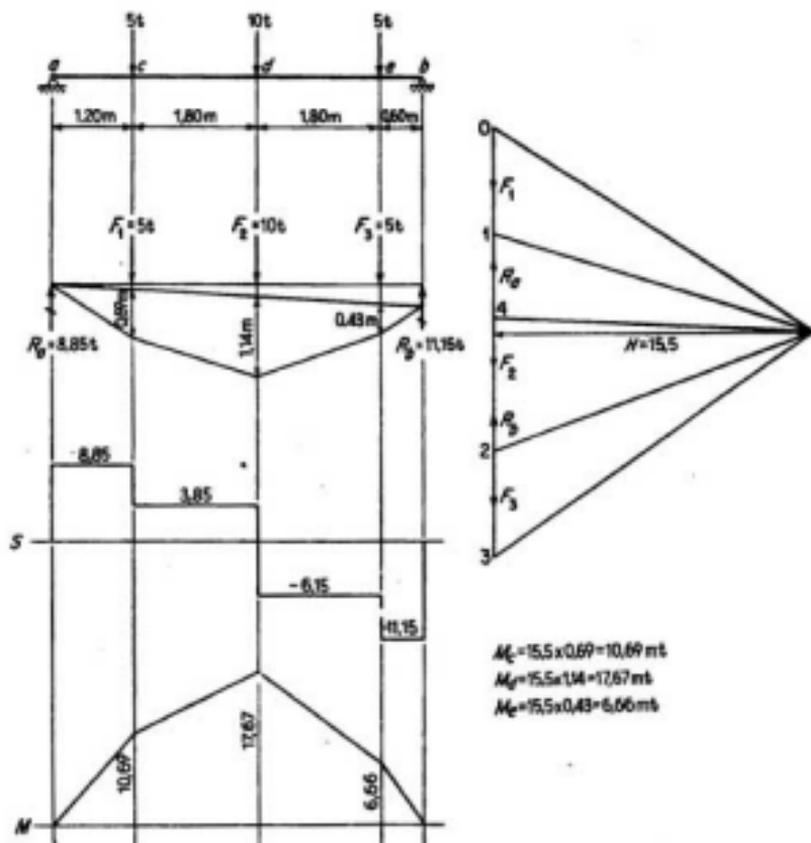
En general, la determinación de $(H)(de)$ constituye un modo apropiado para hallar el momento de la resultante (y, por tanto, de las tres fuerzas) respecto al punto a . El procedimiento siguiente resume el método gráfico para determinar el momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto dado a :

1. Se construye el polígono de fuerzas del sistema. Se elige un polo P y se dibuja el polígono funicular correspondiente.
2. Se traza por el punto a del diagrama espacial una recta paralela a la dirección de la resultante del sistema, determinada en el polígono de fuerzas.
3. Se mide la distancia a escala en esta recta entre los lados del polígono funicular, cuya intersección determina un punto de la línea de acción de la resultante.
4. Se mide también, con la escala de fuerzas, la distancia polar H , que es la distancia entre el polo P y el vector resultante del polígono de fuerzas, medida en su perpendicular.
5. El momento del sistema de fuerzas respecto al punto a es igual al producto de la distancia medida en 3 por la distancia polar obtenida en 4.

Los ejemplos siguientes aclaran lo práctico que resulta la aplicación de este procedimiento al cálculo del momento flector en varios puntos de una viga.

A menudo es necesario considerar casos en los que la carga está repartida en lugar de concentrada. En estos casos, la parte de viga así cargada se divide en una serie de trozos cortos y se supone que la carga total que actúa en cada trozo está concentrada en el centro de gravedad de la carga correspondiente al mismo. Entonces, se lleva a cabo la determinación gráfica de las reacciones, cortante y momento flector del modo habitual, considerando la carga repartida remplazada por esta serie de cargas aisladas. Los valores de las reacciones así calculados no tienen error, pero los de los cortantes y momentos flexores solo son exactos en los extremos de los diversos trozos cortos en que se ha dividido la carga repartida. Sin embargo, el error de las ordenadas de las curvas de cortantes y momentos flexores en los puntos intermedios no es apreciable, si las longitudes de los trozos son suficientemente pequeñas.

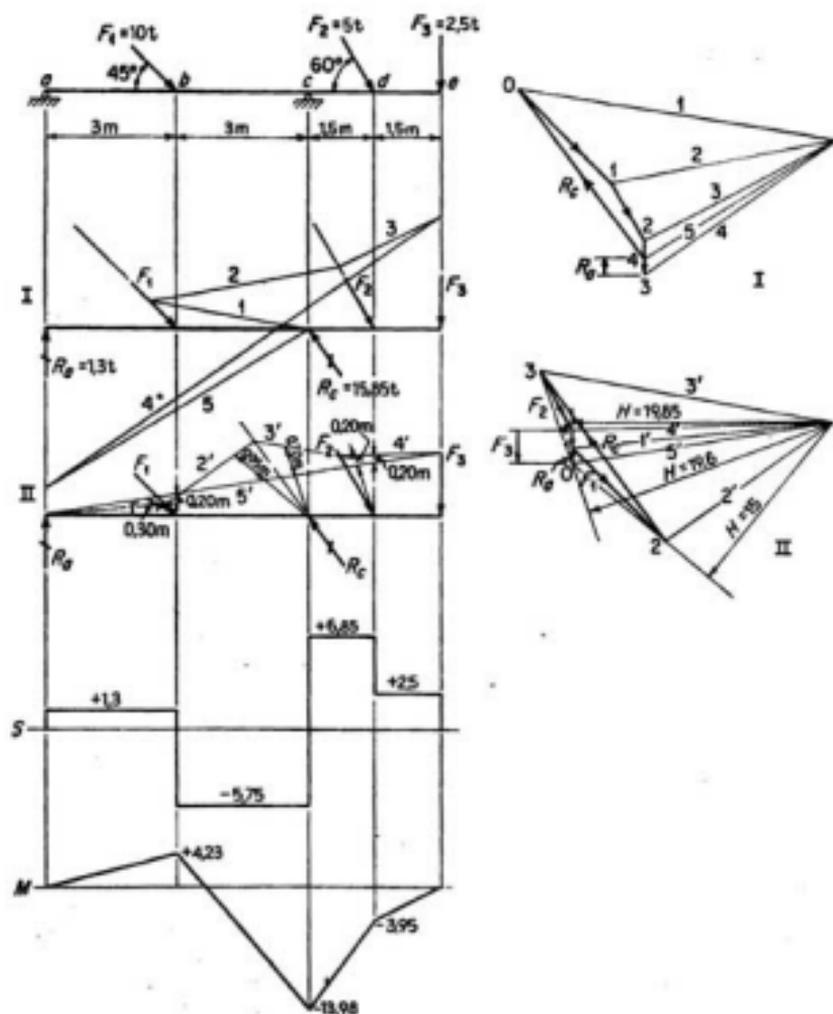
Ejemplo 5.1 Dibujar los diagramas de cortantes y momentos flectores de la viga siguiente.



Razonamiento:

En este ejemplo, todas las cargas son verticales y producen reacciones verticales. Como consecuencia, en cualquier punto de la viga, la resultante de las cargas a la derecha o a la izquierda de la sección es una fuerza vertical. Por esto, se simplifica considerablemente el cálculo del cortante y, sobre todo, del momento flector. Por ejemplo, al calcular los momentos flectores en varios puntos, la distancia polar H será constante para todos ellos y las distancias medidas en el polígono funicular lo serán en líneas verticales.

Ejemplo 5.2 Dibujar los diagramas de cortante y momento flector de la viga siguiente.



Calculadas utilizando las fuerzas en la

Izquierda

Derecha

$$M_b = 19.85 \times 0.20 = 3.97 \quad \text{o} \quad 15 \times 0.30 = 4.5$$

$$M_c = 15 \times 0.95 = 14.25 \quad \text{o} \quad 19.60 \times 0.70 = 13.72$$

$$M_d = 19.60 \times 0.20 = 3.92 \quad \text{o} \quad 19.85 \times 0.20 = 3.97$$

$$\text{Media } M_s = 4.23 \text{ m t}$$

$$\text{Media } M_f = 13.98 \text{ m t}$$

$$\text{Media } M_d = 3.95 \text{ m t}$$

Razonamiento:

En los problemas sencillos, como el Ejemplo 5.1, se puede aplicar el método gráfico sin dificultad. Cuando las cargas son inclinadas o la viga no está simplemente apoyada, el método resulta mucho más complicado.

En este caso, después de hallar las reacciones utilizando los polígonos de fuerzas y funicular 1, es necesario volver a dibujar el polígono de fuerzas para que éstas figuren en el mismo orden en que se las encuentra al recorrer la barra de un extremo a otro. Después de trazar de este modo el polígono de fuerzas II, y su correspondiente funicular, es ya posible calcular el cortante y el momento flector en los diversos puntos de la viga. Normalmente, se puede superponer el segundo polígono funicular al primero, pero aquí se han dibujado dos diagramas espaciales separados para evitar una confusión innecesaria.

Obrérese que se han calculado los momentos flectores a partir de las fuerzas a cada lado de la sección, para tener una comprobación.

5.11 Fuerzas de barra en cerchas. Diagrama de Maxwell. Notación de Bow. El método gráfico de los nudos es apropiado para determinar las fuerzas de barra de ciertas cerchas estáticamente determinadas. Suponiendo que se han determinado previamente las reacciones por métodos gráficos o algebraicos, se pueden hallar las fuerzas de barra dibujando una serie de polígonos de fuerzas, uno para cada nudo. Sin embargo, es conveniente combinar todos estos polígonos formando una figura compuesta llamada *diagrama de Maxwell*, por su inventor, Clerk Maxwell.

En cada nudo, las fuerzas de barra y las exteriores forman un sistema coplanario de fuerzas concurrentes, que para estar en equilibrio debe dar lugar a un polígono de fuerzas cerrado. El cierre de dicho polígono es equivalente al cumplimiento de las dos condiciones algebraicas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Como se conoce la dirección de todas las fuerzas que concurren en un nudo, se puede determinar la magnitud desconocida de dos fuerzas de barra, haciendo que cierre el polígono correspondiente a ese nudo. Es posible, así, determinar todas las fuerzas de barra en una cercha simple comenzando sucesivamente con los demás nudos, considerando siempre uno en que no haya más de dos fuerzas de barra desconocidas.

Al utilizar el método gráfico de los nudos, se deben identificar las fuerzas internas y externas utilizando la notación de Bow. Para aplicar esta notación, se designan los espacios entre las fuerzas exteriores por números romanos y los situados entre las barras por números árabes, como se ve en la Fig. 5.14. Así, se podrá identificar una fuerza exterior leyendo los números de cada lado en sentido de las agujas del reloj; por ejemplo, la fuerza que actúa en el nudo *B* se llamará fuerza I-II. De igual modo, la fuerza interior con la que actúa una barra en un nudo, se identifica leyendo los números situados a cada lado de la barra en sentido de las agujas del reloj, alrededor del nudo; por ejemplo, la barra *Bc* actúa sobre el nudo *B* con una fuerza de 32.

Después de rotular el diagrama espacial de acuerdo con la notación de Bow, se pueden calcular las reacciones de una cercha como la de la Fig. 5.14 por métodos gráficos o algebraicos, según convenga. Entonces, es posible aislar el nudo *a* en que hay dos fuerzas de barra desconocidas y determinarlas dibujando el polígono de fuerzas. Los vectores de este polígono deben ir en orden, según el sentido de las agujas del reloj, de las fuerzas en el nudo. Se identificarán los extremos de un vector por los mismos números que hay a cada lado de la fuerza en el diagrama espacial, dispuestos de modo que leyendo primero el de atrás y luego el de delante del vector, estén colocados en el mismo orden en que se encontraban marchando alrededor del nudo en el sentido de las agujas del reloj. Si se sigue este método, se leerán los números de los vértices del principio al fin del polígono de fuerzas, en el mismo orden en que se encontrarían siguiendo alrededor del nudo en sentido de las agujas del reloj. De este modo, se halla en el polígono de fuerzas correspondientes al nudo *a*, que las fuerzas con que actúan las barras *AB* y *ab* sobre este nudo, vienen medidas por los vectores $\overline{I-I}$ y $\overline{I-VI}$, respectivamente, lo que indica que la fuerza *aB* es de compresión y que *ab* es tracción.

Teniendo la fuerza en *ab*, es ya posible pasar al nudo *b* y construir un polígono de fuerzas del que se determinen las de las barras *Bb* y *bc*. Pasando luego al nudo *B*, solo hay dos fuerzas de barra desconocidas, en *Bc* y *BC*, que pueden determinarse por el polígono de fuerzas para

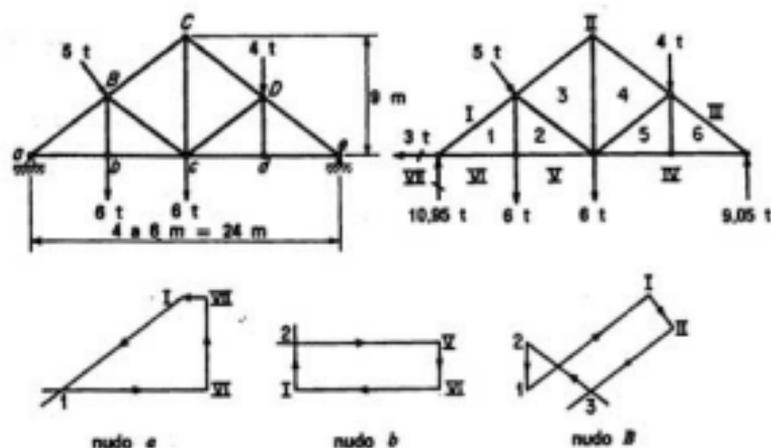


FIG. 5.14. Notación de Bow.

este nudo. Considerando sucesivamente los demás nudos, se puede completar el estudio de la cercha. Sin embargo, en lugar de dibujar un polígono diferente para cada nudo, es preferible trazar el diagrama de Maxwell que combina los polígonos de todos los nudos.

Para trazar un diagrama de Maxwell, se dibuja primero un polígono de fuerzas con todas las exteriores, colocando los vectores en el mismo orden en que se encuentran las fuerzas marchando alrededor de la estructura en el sentido de las agujas del reloj. Si se han determinado gráficamente las reacciones y no se ha trazado el polígono de fuerzas de este modo, hay que dibujar otro nuevo con los vectores ordenados así. Se rotularán los vértices de este polígono del modo descrito antes para el polígono de fuerzas de un nudo. El diagrama de Maxwell de la cercha de la Fig. 5.14, representado en la Fig. 5.15, se comenzó de esta manera. Consideremos ahora un nudo tal como *a* en que solo hay dos fuerzas de barra desconocidas, y observemos los números de los espacios que rodean este nudo. Todos, excepto el 1, tienen los vértices correspondientes en la parte del diagrama de Maxwell dibujado hasta ahora. El vértice que falta, el número 1, se situará trazando por los dos vértices contiguos, I y VI, rectas paralelas a las barras que intervienen, *aB* y *ab*, respectivamente. Ahora, considerando el nudo *b* de igual modo, el vértice 2 es el único que falta, y se determina trazando por los I y V rectas paralelas, respectivamente, a las barras *bB* y *bc*. Los vértices que faltan, 3, 4, 5 y 6, se pueden determinar, sucesivamente, considerando los nudos *B*, *C*, *c* y *d* (o *D*). Obsérvese que, cuando se considera cada uno de los nudos, solo hay un vértice que falta, de los relacionados con ese nudo.

Completada la construcción del diagrama de Maxwell, es sencillo determinar la magnitud y sentido de la fuerza con que una barra actúa sobre un nudo dado. Leyendo los números a cada lado de una barra en el sentido de las agujas del reloj alrededor del nudo, la magnitud y sentido con que esta barra actúa sobre ese nudo están dados por el vector medido desde el vértice del primer número hasta el vértice del segundo. Las fuerzas de barra determinadas así en este ejemplo están anotadas en el diagrama lineal de la cercha.

Comparando el diagrama de Maxwell con los polígonos de fuerzas para los distintos nudos, es evidente que dicho diagrama no es más que una figura compuesta en la que se han superpuesto todos los polígonos de los nudos. Es evidente, también, que el empleo en este razonamiento del sentido de las agujas del reloj es arbitrario; igual se podría haber construido todo el sistema invirtiendo todo y tomando un orden en sentido contrario.

5.12 Algunos casos de ambigüedad. Cerchas de cubierta Plana. El diagrama de Maxwell, descrito en la sección anterior, se puede trazar sin dificultad en el caso de una cercha simple. Cuando se aplican estas ideas a una cercha compuesta, se puede trazar el diagrama hasta cierto punto; luego, se descubre que en cada uno de los nudos restantes hay más de dos fuerzas de barra desconocidas y, por tanto, falta más de un vértice.

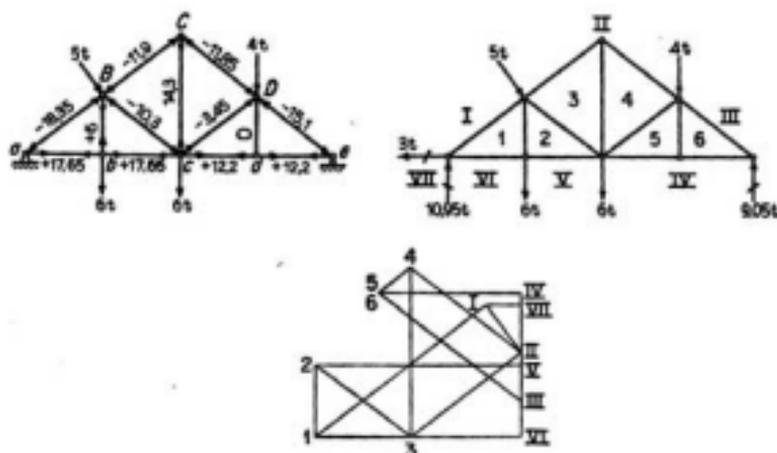


FIG. 5.15. Diagrama de Maxwell.

Consideremos una cercha compuesta como la Fink de la Fig. 5.16. Después de hallar las reacciones, se puede trazar un polígono de fuerzas con las exteriores y comenzar el polígono de Maxwell del modo clásico, considerando primero el nudo a y siguiendo sucesivamente con los B y b . Considerando ahora el nudo C o el c , hay tres fuerzas de barra desconocidas, y, por tanto, dos vértices desconocidos en cualquiera de esos nudos, por lo que es imposible continuar con el diagrama. Naturalmente, se puede pasar al nudo i y volver luego a los h y H , pero se encuentra el mismo dilema en el G o el g . A continuación se estudia uno de los varios métodos posibles para obviar esta dificultad:

Supongamos, provisionalmente, que sustituimos las barras Cd y dD por la Dc , como se indica por la línea de trazos. Al espacio comprendido en el triángulo cDE le llamaremos $6'$, y al comprendido en el cCD , $4'$. Tal sustitución no altera las fuerzas en las barras aB , ab , bB , bc , bC , BC , DE y Ed o cg de la cercha original. Esto resulta evidente considerando el cálculo de las fuerzas en estas barras utilizando las secciones indicadas. Por tanto, la situación de los vértices 1, 2 y 3 del diagrama de Maxwell sigue siendo la misma para la cercha original y la modificada, por lo que es posible conocer el vértice $4'$ de la cercha modificada considerando el nudo C , y continuar luego al nudo D para hallar el vértice $6'$. Determinado así $6'$ por la cercha modificada, coincide con 6 de la original, pues en ambos casos la fuerza en las barras DE y dE es la misma. Ahora es ya posible volver a la cercha original y, considerando sucesivamente los nudos D y C , determinar las posiciones correctas de los vértices 5 y 4, respectivamente. Luego es fácil ya continuar del modo clásico y determinar los vértices restantes, del 7 al 13.

5.13 Reacciones y fuerzas de barras en arcos tri-articulados. Una vez determinadas las reacciones de un arco tri-articulado no hay dificultad para dibujar el diagrama de Maxwell que nos dé las fuerzas de barras. Las reacciones se pueden determinar, evidentemente, analítica o gráficamente, pero la solución gráfica en el caso de un arco tri-articulado necesita algunas consideraciones suplementarias.

Un método gráfico para hallar las reacciones utiliza una característica importante del arco tri-articulado. Consideremos el arco de la Fig. 5.17. Se pueden calcular las reacciones, superponiendo los efectos separados de 1) las cargas aplicadas a la mitad izquierda solas y 2) las aplicadas a la mitad derecha. Es fácil hallar los efectos separados, porque en cada caso sobre una mitad del arco no actúa ninguna fuerza exterior. En esos casos, la reacción que actúa en la mitad no cargada, debe ir dirigida hacia el centro de la articulación del punto b , de modo que el momento flector en la articulación será nulo. En los dos casos I y II, la solución gráfica es la misma que en el de una viga apoyada en sus extremos, en el que son desconocidas la magnitud

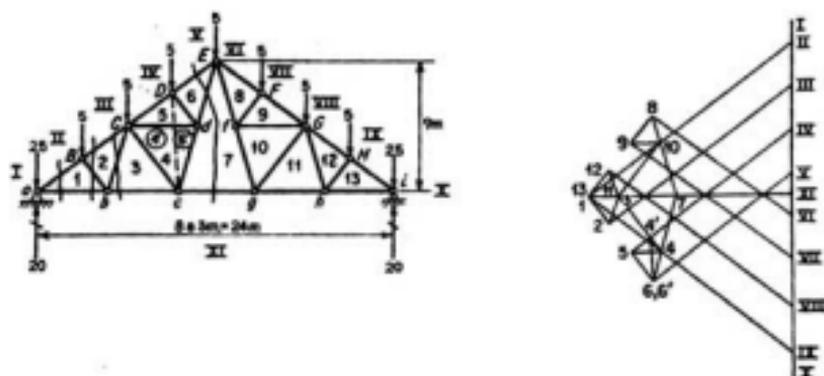


FIG. 5.16. Análisis de una cercha de cubierta Fink.

de las dos reacciones y la dirección de una sola de ellas. Las reacciones en los casos I y II se obtienen eligiendo los polos P_1 y P_2 , y dibujando los polígonos funiculares, como se representa en la figura. Si se trazan los dos polígonos juntos, como se indica, es simplemente cuestión de superponer los dos casos gráficamente y de hallar las reacciones R_x y R_y producidas por el sistema conjunto de cargas.

Un segundo método gráfico para hallar las reacciones exige el paso del polígono funicular de las fuerzas exteriores por las tres articulaciones a , b y c . En la Sec. 5.7 se ha indicado que un sistema de fuerzas exteriores puede estar sustentado por un sistema de bielas articuladas con la misma forma que el polígono funicular correspondiente. Considerando una mitad del arco cada vez, se pueden sustentar las cargas exteriores que actúan en cada mitad por medio de un varillaje con reacciones extremas correspondientes a un polígono funicular cuyos lados extre-

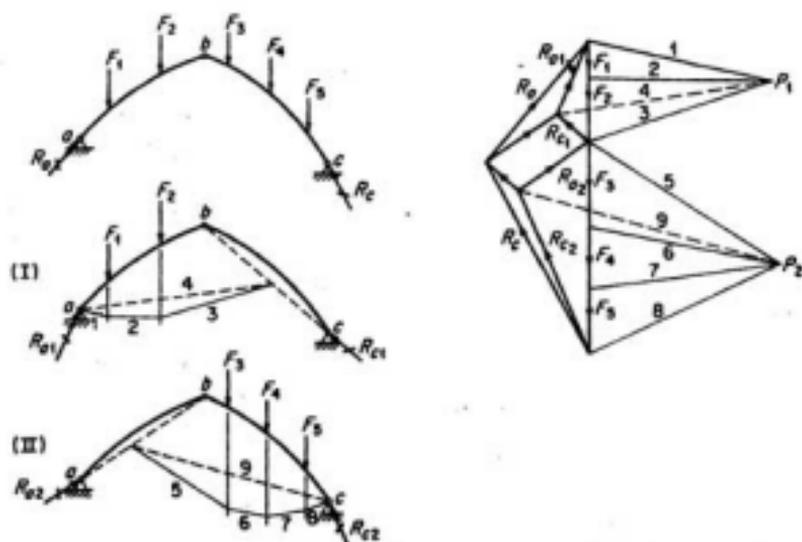


FIG. 5.17. Arco tri-articulado.

mos pasan por las articulaciones de los apoyos y del centro. Como la acción de la mitad izquierda sobre la derecha ha de ser igual y opuesta a la de la derecha sobre la izquierda, los lados extremos en la articulación del centro del polígono funicular de cada mitad deben ser colineales. Esto significa que se pueden combinar los dos polígonos separados para formar un polígono continuo para todo el arco, que pase por las tres articulaciones *a*, *b* y *c*. Si se halla un polo tal que el polígono funicular de todas las cargas exteriores pase por esos tres puntos, se podrán obtener las reacciones finales midiendo el primero y el último rayo del polígono de fuerzas.

5.14 Problemas para resolver

Problema 5.1 Hallar gráficamente la resultante de las fuerzas representadas en la Fig. 5.18. Indicar su magnitud. Mostrar su dirección, indicando las componentes horizontal y vertical. Utilizar la escala $1 t = 2 \text{ cm}$.

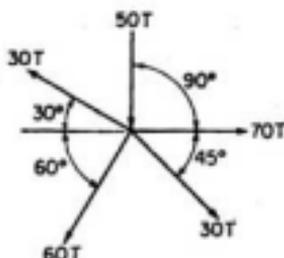


FIG. 5.18. Problema 5.1.

Problema 5.2 Hallar gráficamente las fuerzas necesarias para mantener a cada uno de los marcos de la Fig. 5.19 en equilibrio. Indicar la magnitud de la fuerza y de sus componentes horizontal y vertical. Situar la línea de acción de la resultante con referencia a los ejes horizontal y vertical trazados por el centro de cada marco.

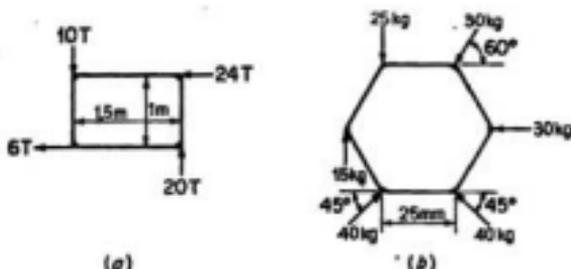


FIG. 5.19. Problema 5.2.

Problema 5.3 Hallar la resultante de las fuerzas representadas en la Fig. 5.20 usando el polígono funicular. Indicar su magnitud y dirección, y localizar la intersección de su línea de acción con la línea de base horizontal. Escalas $1 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$ y $1 \text{ cm} = 10 \text{ kg}$.

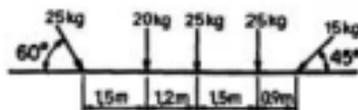


FIG. 5.20. Problema 5.3.

Problema 5.4 Hallar las componentes horizontales y verticales de las reacciones de las estructuras de la Fig. 5.21 utilizando el método de las tres fuerzas.

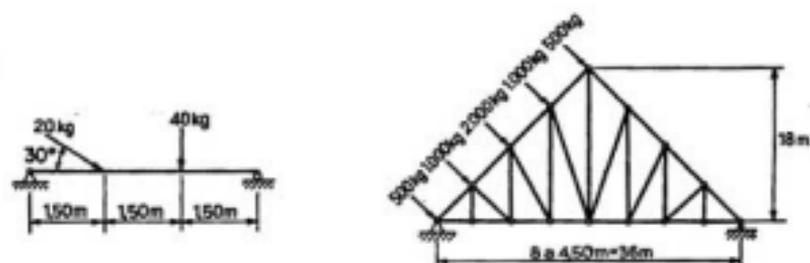


FIG. 5.21. Problema 5.4.

Problema 5.5 Hallar las componentes horizontales y verticales de las reacciones de las estructuras de la Fig. 5.22 utilizando el polígono funicular.

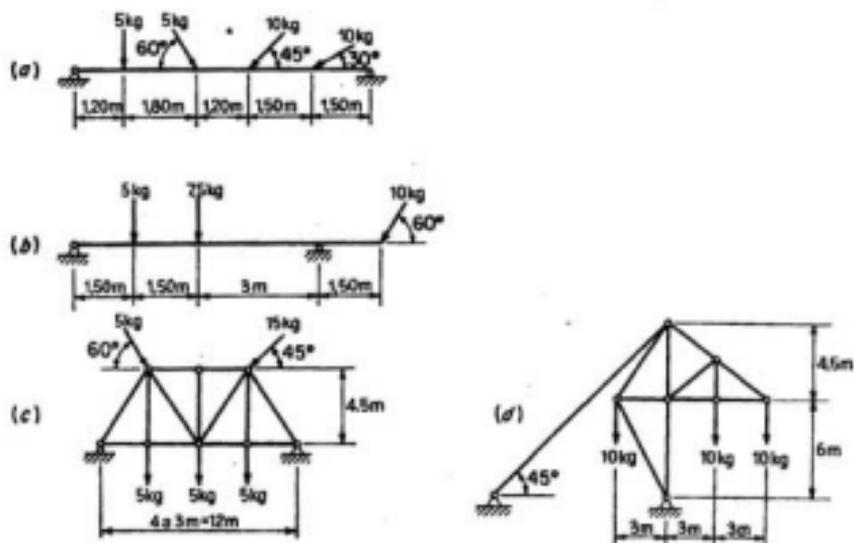


FIG. 5.22. Problema 5.5.

Problema 5.6 Hallar gráficamente las fuerzas de barra en los elementos de la cercha de cubierta Pratt de la Figura 5.23.

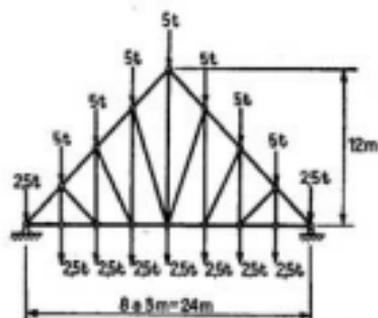


FIG. 5.23. Problema 5.6.

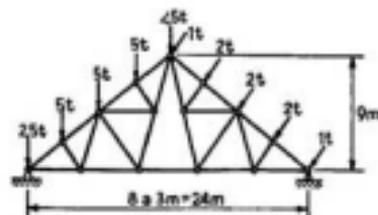


FIG. 5.24. Problema 5.7.

Problema 5.7 Hallar gráficamente las fuerzas de barra en los elementos de la cercha de cubierta Fink de la Figura 5.24.

Problema 5.8 Hallar las fuerzas de barra en los elementos de la cercha de la Fig. 5.25, usando métodos gráficos.

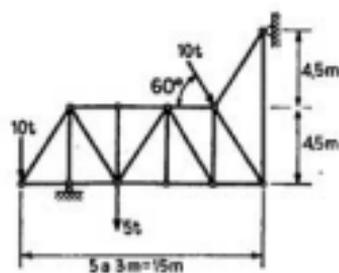


FIG. 5.25. Problema 5.8.

Problema 5.9 Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores para las vigas de la Fig. 5.26, utilizando métodos gráficos.

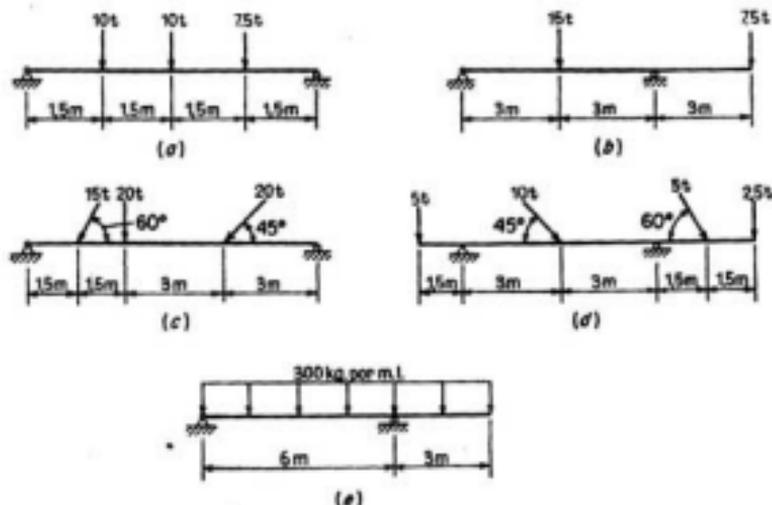


FIG. 5.26. Problema 5.9.

Problema 5.10 Dibujar el polígono funicular de la viga y cargas de la Fig. 5.27, de modo que pase por los puntos de apoyo y por otro punto 6 m por debajo del centro de la luz.

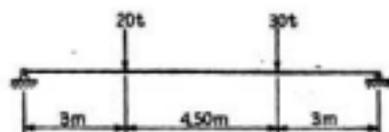


FIG. 5.27. Problema 5.10.

Problema 5.11 Un cable está suspendido de dos puntos a la misma cota y separados 6 m. El cable soporta nueve pesos de 50 kg cada uno, separados 0,60 m. El punto más bajo del cable está a 1,50 m por debajo de la línea que une los apoyos. ¿Cuál es la longitud del cable, y cuál la tensión máxima en él? Utilizar métodos gráficos.

Problema 5.12 Hallar las reacciones y fuerzas de barra de las cerchas de la Fig. 5.28, utilizando métodos gráficos.

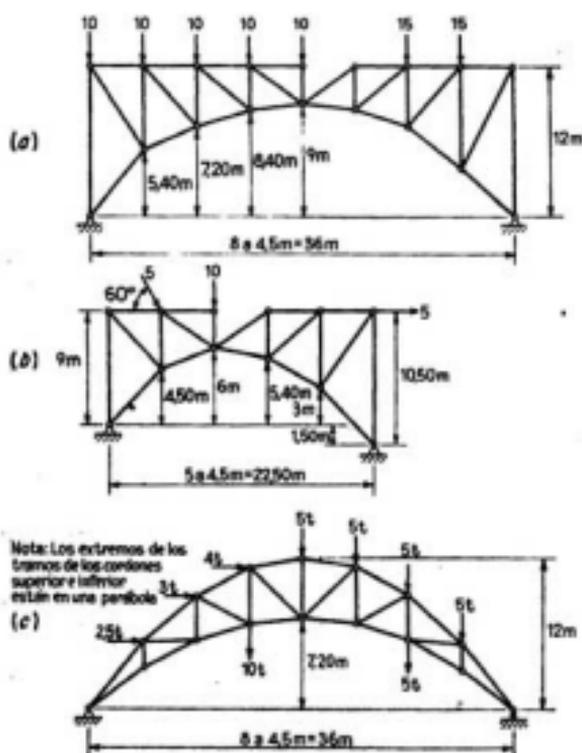


FIG. 5.28. Problema 5.12.

Problema 5.13 Utilizando métodos gráficos, hallar las reacciones y las fuerzas de barra de la cercha del Ejemplo 4.5.

6

Líneas de Influencia

6.1 Introducción. Los Caps. 2 a 5 están dedicados a la consideración de las ideas fundamentales que intervienen en el cálculo de las reacciones, cortantes, momentos flectores y fuerzas de barra de estructuras estáticamente determinadas. Antes de que se pueda calcular cualquiera de esas funciones, es necesario, naturalmente, establecer la condición de carga para la que hay que hacer el estudio. En el Cap. 1 se ha hecho distinción entre cargas fijas, tales como el peso de la propia estructura, que permanecen invariables, y las sobrecargas que pueden variar de posición en la estructura.

Cuando se está proyectando una parte determinada de una estructura, es necesario dimensionarla de modo que tenga suficiente resistencia para resistir los mayores esfuerzos a los que puede estar sometida durante su vida. Para proyectar esa parte, uno de los factores a determinar es la mayor contribución de la sobrecarga al esfuerzo total a considerar. El esfuerzo producido en una parte dada, por la sobrecarga, varía con la posición de ésta en la estructura; siempre hay una posición que produce los mayores esfuerzos en una zona determinada. Esta zona y el tipo de esfuerzos de que se trate pueden ser, por ejemplo, la reacción en un apoyo, el momento flector o el cortante en una sección de una viga, la tracción o compresión en la barra de una cercha o la carga que soporta un cierto remache. El proyecto correcto de las diversas partes dependerá en general de las diferentes posiciones de la sobrecarga.

Está claro, por tanto, que es esencial para el proyectista de estructuras entender claramente los métodos por los que se puede determinar la posición de la sobrecarga que produce las tensiones máximas en un punto.

6.2 Ejemplos de variación de las tensiones con la posición de la carga. Supongamos que se coloca una carga unidad dirigida hacia abajo en el punto A de la viga AB de la Fig. 6.1. Tomando momentos respecto a B , se halla que la reacción R_{Ay} actúa hacia arriba y es igual a 1. Llevemos, en A' sobre la base $A'B'$ inmediatamente debajo de A , la longitud $+1$ verticalmente. Si hacemos que la carga unidad aplicada se mueva hasta C y volvemos a tomar momentos respecto a B , se halla que R_{Ay} es igual a $+9/10$. Tracemos esta ordenada $+9/10$ en C' situado en la línea de base $A'B'$ inmediatamente debajo del punto de aplicación de la carga unidad. Si, ahora, se traslada la carga unidad a D , R_{Ay} es $+8/10$ y tomaremos $+8/10$ verticalmente en D' , que está inmediatamente debajo de D .

Repetimos este proceso para todas las posiciones de la carga unidad entre A y B . Los valores que se obtienen para la reacción, trazados en cada caso desde la línea de base $A'B'$ y directamente debajo de la posición de la carga, están todos en línea recta. Esto se podía haber previsto, pues cuando la carga unidad está en una sección a la distancia x de B , R_{Ay} es igual a $+x/10$. La ordenada $+x/10$ se traza a la distancia x de B' , y la curva de $x/10$ respecto a x es lineal.

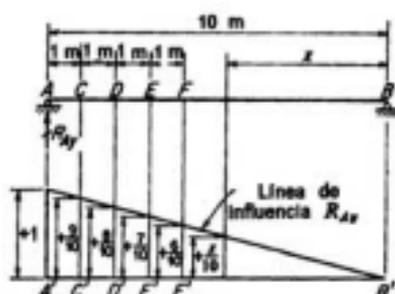


FIG. 6.1. Línea de influencia simple.

A causa de la forma de trazar esta curva desde la línea de base $A'B'$, se pueden deducir numerosas conclusiones:

1. La ordenada de cualquier punto de la curva es igual al valor de R_{Ay} si se aplica en esta sección una carga unidad. (Obsérvese que todas las ordenadas se refieren a la reacción en el punto A y que la variable para la que se traza la curva es la posición de la carga unidad que produce esa reacción.)

2. Cuando la carga unidad se mueve de B a A , la reacción en A aumenta linealmente. El valor máximo de R_{Ay} tiene lugar cuando la carga está aplicada en A .

3. Como todas las ordenadas de esta curva son positivas, se puede deducir que una carga unidad aplicada en un punto cualquiera del vano AB origina una reacción en A hacia arriba. Por tanto, si hubiera que cargar esta estructura con una sobrecarga uniforme, ésta debería extenderse en toda la luz AB para que produjera el valor máximo de R_{Ay} .

6.3 Línea de influencia. Definición. A la curva trazada en la Fig. 6.1 se le llama *línea de influencia*, porque muestra la influencia en una cierta función de una carga unidad que recorre la estructura. En este caso particular, la función considerada es la reacción vertical en A , pero puede ser cualquier valor que varíe cuando se mueve la carga a lo largo del vano, tal como el momento, o el cortante, en una sección dada de una viga, o la fuerza de barra en un elemento de una cercha, o la flecha en un punto dado de una estructura.

Se puede definir una línea de influencia como sigue: *Una línea de influencia es una curva cuya ordenada en un punto cualquiera es igual al valor de alguna función particular debida a una carga unidad (es decir, de 1 kg) que actúa en ese punto.*

La curva b de la Fig. 6.2 representa la línea de influencia del momento en C , centro de una viga apoyada en los extremos. Se puede verificar que esta curva satisface la definición de línea de influencia, comprobando la ordenada en algún punto. Si, por ejemplo, se aplica una carga de 1 kg en D , el momento en C es igual a $\frac{1}{4} \times 3 = +0,75$ m kg. Esta es la ordenada de la línea de influencia en el punto D .

La curva c de esta figura representa la línea de influencia del cortante en el punto, a la cuarta parte de la izquierda, D . Que esta curva satisface la definición de línea de influencia se puede ver también comprobando la ordenada en cualquier punto. Si, por ejemplo, se aplica la carga unidad inmediatamente a la derecha de D , el cortante en D es igual a $+3/4$ kg.

Por definición, una línea de influencia muestra el efecto de una carga unidad cuando recorre el vano. Es evidente que tal curva está relacionada con una sobrecarga que se mueve por un puente. Sin embargo, el uso de las líneas de influencia no se limita a las estructuras de puentes, pues tienen gran importancia en la determinación de los esfuerzos máximos en cualquier estructura sometida a la acción de sobrecargas. Estas

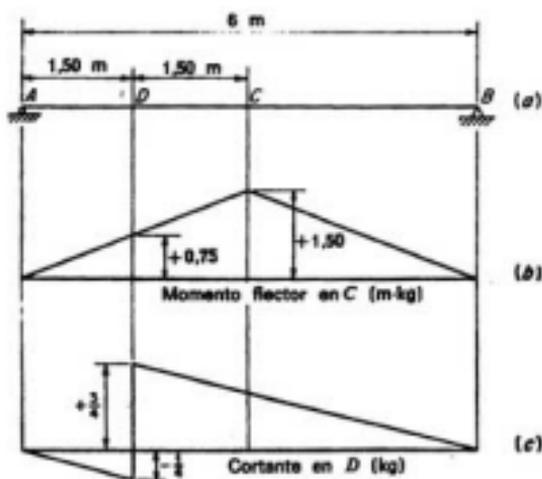


FIG. 6.2. Líneas de influencia para una viga simplemente apoyada.

sobrecargas son cargas móviles en un edificio de oficinas, o cargas aerodinámicas en el ala de un aeroplano, o la sustentación hidrostática originada por el desplazamiento de las olas en el casco de un barco.

6.4 Propiedades de la línea de influencia. Las líneas de influencia pueden usarse para dos importantes fines: 1) determinar la posición de la sobrecarga que producirá un valor máximo de la función particular para la que se construye; 2) calcular el valor de esa función con las cargas así colocadas, o bien, para cualquier condición de cargas.

Como la ordenada de una línea de influencia es igual al valor de una función determinada debido a una carga unidad que actúa en el punto en que se mide esa ordenada, es cierto el siguiente teorema:

1. *Para obtener el valor máximo de una función, debido a una sobrecarga aislada, se colocará la carga en el punto en que la ordenada de la línea de influencia de dicha función es máxima.* Es evidente que si se desea hallar el máximo valor positivo de una función, se debe colocar la carga en el punto en que la ordenada de la línea de influencia tiene su máximo valor positivo, mientras que si se quiere obtener el máximo valor negativo, la posición de la carga la determina la máxima ordenada negativa.

2. *El valor de una función, debido a la acción de una sobrecarga aislada, es igual al producto de la magnitud de la carga por la ordenada de la línea de influencia de esa función, medida en el punto de aplicación de la carga¹.* Esto se deduce del principio de su-

¹ En la definición anterior de línea de influencia, se ha dicho que se calcula la función de que se trata para una carga de 1 kg. Como consecuencia, las ordenadas de las líneas de influencia típicas tendrán las escalas siguientes: fuerzas reactivas, kilogramos; cortantes y fuerzas axiales, kilogramos; momentos flectores, metro-kilogramos; etc. Según esto, para calcular el efecto de alguna otra carga aislada, deberán multiplicarse las ordenadas por la magnitud sin dimensión de esa carga (esto es, simplemente por el número de cargas de 1 kg que representa). Por ejemplo, utilizando la Fig. 6.2b, el momento flector en C producido por una carga de 250 kg en D se ve que es

$$(0,75 \text{ m kg})(250) = 187,5 \text{ m kg}$$

Algunos ingenieros de estructuras prefieren definir una línea de influencia que represente funciones produ-

perposición. Además, el valor total de una función debido a más de una carga aislada se puede obtener superponiendo los efectos separados de cada carga aislada, determinados por el Teorema 2.

Como ejemplo de aplicación de estos dos teoremas, supongamos que se aplica una carga aislada de 1.000 kg a la viga de la Fig. 6.4a. Si se usa la línea de influencia de la Fig. 6.4c, el máximo cortante positivo que esta carga puede producir en D , tiene lugar cuando está situada inmediatamente a la derecha de D y es igual a $1.000(+\frac{7}{10}) = +700$ kg. El cortante negativo máximo en la misma sección se produce con la carga inmediatamente a la izquierda de D y es igual a $1.000(-\frac{3}{10}) = -300$ kg. De la Figura 6.4e se ve que el momento positivo máximo en D se presenta con la carga en D y es igual a

$$1.000(+\frac{21}{10}) = +1.050 \text{ m kg}$$

De la definición de línea de influencia resulta evidente el siguiente teorema, referente a las sobrecargas uniformemente repartidas:

3. Para obtener el valor máximo de una función producido por una sobrecarga uniformemente repartida, se colocará la carga en todas las zonas de la estructura para las cuales las ordenadas de la línea de influencia tienen el signo de la función deseada.

Para calcular, mediante la línea de influencia, el valor real de la función debido a una sobrecarga uniformemente repartida, se usará el siguiente teorema:

4. El valor de una función debido a una sobrecarga uniformemente repartida es igual al producto de la intensidad de la carga por el área total bajo la parte de la línea de influencia de la función considerada, correspondiente a la zona de estructura cargada.

Puede verse que este teorema es correcto con las siguientes consideraciones: Sea AB la línea de influencia de una función dada F , para una parte de la estructura, como

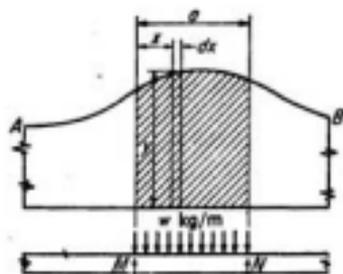


FIG. 6.3. Parte de una línea de influencia.

cidas por una carga unidad sin dimensión. En ese caso, el producto hallado se obtendría multiplicando por un número con dimensión de 250 kg o

$$(0,75 \text{ m})(250 \text{ kg}) = 187,5 \text{ m kg}$$

Otros ingenieros prefieren definir las ordenadas de una línea de influencia como la relación entre la función de que se trata y la carga de 1 kg que la produce, por lo que dicen que las ordenadas de la Fig. 6.2b tienen unidades metro-kilogramo por kilogramo. Con esta base, el producto anterior se obtendrá multiplicando por un número con dimensión de 250 kg o

$$(0,75 \text{ m kg por kg})(250 \text{ kg}) = 187,5 \text{ m kg}$$

Este último criterio tiene algunas ventajas, aunque no lo utilizaremos. De acuerdo con él, las ordenadas de las líneas de influencia se llaman *coeficientes de influencia*.

la de la Fig. 6.3, que está sometida a una carga uniformemente repartida de w kg por m aplicada en forma continua a la estructura entre los puntos M y N . La parte de la carga uniforme aplicada en la distancia dx se puede considerar como una carga aislada igual a $w dx$. Por el Teorema 2, el valor de la función F debido a esta carga diferencial está dado por $dF = w dx y$. El valor total de F debido a la carga entre M y N se obtiene integrando dF entre $x = 0$ y $x = a$, o $F = \int_0^a w y dx = w \int_0^a y dx = w$ multiplicado por el área bajo la parte de la línea de influencia que corresponde a la zona de la estructura cargada.

Como ejemplo de aplicación de los Teoremas 3 y 4, supongamos que se aplica una sobrecarga uniforme de 1.000 kg por metro a la viga de la Fig. 6.4a. Para obtener el cortante positivo máximo en D (Fig. 6.4c), la carga uniforme debe extenderse desde C a A y desde D a B . El valor de este cortante máximo positivo en D está dado por

$$1.000\left[\frac{1}{2}(2,5)\left(+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(3,5)\left(+\frac{1}{10}\right)\right] = +1.850 \text{ kg}$$

Para el cortante máximo negativo en D , la estructura debe cargarse desde A a D , produciéndose entonces un cortante en D igual a

$$1.000\left[\frac{1}{2}(1,5)\left(-\frac{3}{10}\right)\right] = -225 \text{ kg}$$

Para el momento positivo máximo en D , se verá la Fig. 6.4e. La estructura deberá cargarse de A a B ; el momento resultante es igual a

$$1.000\left[\frac{1}{2}(5)\left(+\frac{2}{10}\right)\right] = +2.625 \text{ m kg}$$

Para los valores máximos de las funciones debidos a una sobrecarga aislada y otra uniformemente repartida que actúan simultáneamente, se calculará la función máxima debida a cada uno por separado, por los métodos ya explicados, y se superpondrán los resultados. Por ejemplo, para obtener el máximo momento negativo en A , en la viga de la Fig. 6.4a, debido a una carga uniforme de 1.000 kg por metro y a una carga aislada de 5.000 kg, se verá considerando la Fig. 6.4f que la carga uniforme debe extenderse de C a A y la aislada debe estar colocada en C . El máximo momento negativo en A está dado por

$$1.000\left[\frac{1}{2}(2,5)(-2,5)\right] + 5.000(-2,5) = -15.625 \text{ m kg}$$

Supongamos que se extiende una carga uniforme de 1.000 kg por m sobre toda la longitud de la viga de la Fig. 6.4a. Las funciones se calcularán a base de la suma algebraica de las áreas parciales comprendidas en toda la línea de influencia. De la Figura 6.4e, por ejemplo, se ve que el momento resultante en D está dado por

$$1.000\left[\frac{1}{2}(2,5)(-3,5/2) + \frac{1}{2}(5)\left(+\frac{2}{10}\right)\right] = +437,5 \text{ m kg}$$

6.5 Construcción de las líneas de influencia para vigas. Consideremos la viga representada en la Fig. 6.4a. Como ejemplo del método para construir líneas de influencia, trazaremos la correspondiente al cortante inmediatamente a la izquierda del punto A , como se indica en la Fig. 6.4b. Cuando se aplica una carga unidad en una posición cualquiera a la izquierda de esa sección, el cortante inmediatamente a la izquierda de A es igual a la carga unidad y es negativo. Por tanto, la línea de influencia tiene la orde-

nada -1 desde C hasta A . Cuando se aplica una carga unidad en una posición cualquiera entre A y B , el cortante inmediatamente a la izquierda de A es cero. Por tanto, la ordenada de la línea de influencia es cero en esta parte de la viga.

Construyamos ahora la línea de influencia del cortante en D , como en la Fig. 6.4c. Si se aplica una carga unidad en C , se puede calcular el cortante en D a partir de la reacción en B , y se ve que es igual a $+\frac{1}{2}$. Cuando la carga unidad se traslada de C a A , la reacción en B y, por tanto, el cortante en D disminuye hasta anularse. Por tanto, la

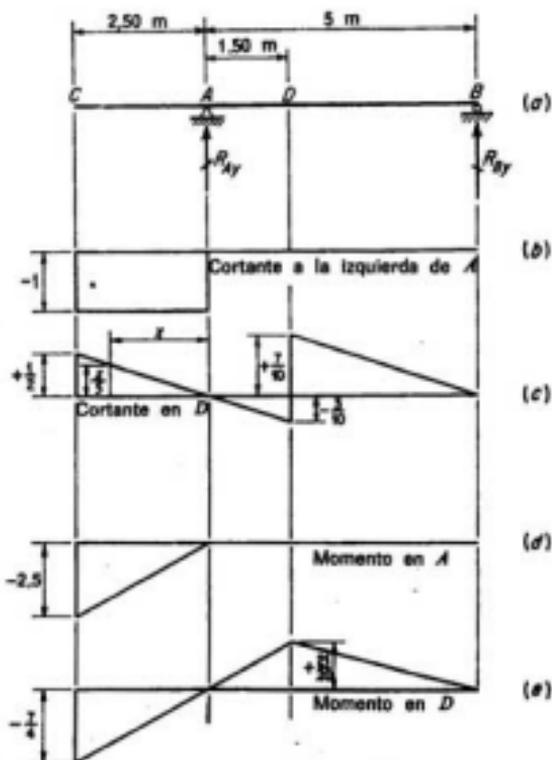


FIG. 6.4. Líneas de influencia para una viga con voladizo.

línea de influencia del cortante en D varía de $+\frac{1}{2}$ en C a cero en A . Realmente, esta variación entre C y A es lineal. El que la línea de influencia entre C y A es una línea recta se puede ver por cualquiera de los métodos siguientes:

1. Se puede aplicar la carga unidad en cualquier punto entre C y A y calcular el cortante en D . Cuando se representan estos valores en el punto de aplicación de la carga, se verá que están en línea recta.

2. Si se representa por x la distancia desde A a la carga, la reacción vertical en B actúa hacia abajo y tiene el valor $x/5$. Por tanto, el cortante en D es igual a $+x/5$. La representación de $+x/5$ en función de x es una línea recta.

Cuando la carga unidad se desplaza desde A hasta un punto inmediatamente a la izquierda de D , la reacción en B aumenta desde cero hasta $+1,5/5$, o $+\frac{3}{10}$. Por tanto,

el cortante en D va de cero a $-\frac{3}{10}$, por lo que la ordenada de la línea de influencia en un punto inmediatamente a la izquierda de D es $-\frac{3}{10}$. El que la línea de influencia es una recta que varía de cero en A a $-\frac{3}{10}$ en D se puede ver con cualquiera de los argumentos usados para deducir que era una recta entre C y A .

Consideremos ahora la carga unidad colocada inmediatamente a la derecha de D . Si se calcula el cortante en D considerando las fuerzas a la derecha de D , como se ha hecho antes, es necesario tener en cuenta dos fuerzas, la reacción en B y la propia carga unidad. Si, por el contrario, se calcula a partir de las fuerzas situadas a la izquierda, solo hay que considerar la reacción en A .

A veces es preferible, al calcular las ordenadas de las líneas de influencia, tener en cuenta las fuerzas del lado de la sección en que no está la carga unidad. Para el caso considerado, $R_A = +3.5/5 = +\frac{7}{10}$, de modo que el cortante en D es $+\frac{7}{10}$. Esta es la ordenada de la línea de influencia inmediatamente a la derecha de D . Debe observarse que, cuando la carga unidad pasa por D , al moverse de izquierda a derecha, el cortante en D aumenta bruscamente desde $-\frac{3}{10}$ a $+\frac{7}{10}$. Cuando la carga unidad se traslada desde inmediatamente a la derecha de D hasta B , la reacción en A , y, por tanto, el cortante en D , decrece linealmente de $+\frac{7}{10}$ a cero. Por consiguiente, la línea de influencia es una recta que va de $+\frac{7}{10}$ en D a cero en A .

Trazemos ahora la línea del momento en A , como en la Fig. 6.4d. Cuando hay una carga unidad en C , el momento en A es igual a -2.5 . Cuando la carga se desplaza desde C hasta A , el momento en A disminuye linealmente hasta cero. Con la carga en cualquier posición entre A y B , el momento en A es igual a cero, como puede verse considerando las fuerzas a la izquierda de A .

Para trazar la línea de influencia para el momento en D , como en la Fig. 6.4e, se puede proceder como sigue: El momento en D debido a una carga unidad en C es igual a $-\frac{7}{2}$, como puede verse fácilmente, considerando la reacción en B . Cuando la carga va de C a A , el momento en D disminuye linealmente hasta cero, por lo que la línea de influencia es una recta desde $-\frac{7}{2}$ en C hasta cero en A . Cuando la carga va de A a D , la reacción en B aumenta linealmente desde cero hasta $+\frac{3}{10}$, y el momento en D , calculado con esta reacción, aumenta linealmente de cero a $+\frac{3}{10} \times 7 = +\frac{21}{10}$, por lo que la línea de influencia es una recta que va de cero en A a $+\frac{21}{10}$ en D . Cuando la carga va de D a B , la reacción en A disminuye linealmente de $+\frac{7}{10}$ a cero y el momento en D , calculado a partir de esta reacción, disminuye linealmente desde $+\frac{7}{10} \times 3 = \frac{21}{10}$ hasta cero en B .

6.6 Líneas de influencia en vigas principales con sistemas de tablero. En la Sec. 3.9 se ha estudiado la acción estructural de los sistemas de tablero. La construcción de las líneas de influencia para vigas principales con sistemas de tablero se puede ver claramente considerando la Fig. 6.5. Se dibujará primero una línea de influencia para el cortante en el entrepaño BC , como se indica en la Fig. 6.5b. Se observará que, como solo se pueden aplicar las sobrecargas a la viga principal por intermedio de las viguetas de tablero que están situadas en los nudos A, B, \dots, G , el cortante debido a la sobrecarga tiene el mismo valor en todo el entrepaño.

Cuando se coloca una carga unidad en A , $R_{Cy} = 0$. Las reacciones de las viguetas a la derecha del entrepaño BC , esto es, las fuerzas aplicadas a la viga principal por las viguetas de tablero en C, D, E, F y G , son también cero. Por tanto, calculando el cortante en BC a partir de las fuerzas que actúan en la viga más a la derecha, se ve que es igual a cero. Cuando la carga unidad está colocada en B , $R_{Cy} = +\frac{1}{6}$; las reacciones de las viguetas en C, D, \dots, G continúan siendo nulas, por lo que el cortante en BC es igual a $-\frac{1}{6}$.

Cuando la carga unidad se traslada a lo largo de un larguero, de un extremo de en-

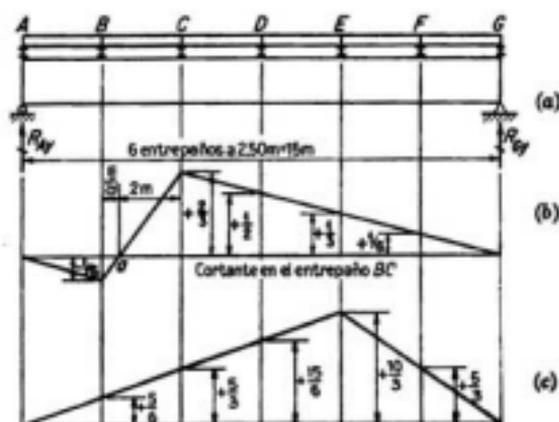


FIG. 6.5. Líneas de influencia de una viga principal.

trepaño al otro, la línea de influencia del entrepaño considerado será una recta, siempre que los largueros actúen como vigas apoyadas en sus extremos entre las viguetas de tablero contiguas. Puede verse que es cierto del siguiente modo: Cuando la carga unidad pasa de un nudo a otro, las reacciones del larguero que son las fuerzas aplicadas a la viga por las viguetas de tablero, varían linealmente, por lo que cualquier función de la viga, tal como el cortante en una sección, variará también linealmente. La línea de influencia en BC es, por tanto, recta desde cero en A hasta $-\frac{1}{6}$ en B.

Cuando hay una carga unidad en C, $R_{Ay} = +\frac{3}{5}$, mientras que las reacciones de las viguetas de tablero en A y B son cero. El cortante en BC será igual a $+\frac{3}{5}$, como puede calcularse fácilmente con las fuerzas a la izquierda. La línea de influencia es una recta desde B a C.

Las ordenadas de la línea de influencia en los nudos D, E, F y G se pueden calcular por un método semejante al usado para determinar la ordenada en C y la línea de influencia será en todos los casos una recta entre nudos. Se puede ver que es una recta que va de C a G. Pueden evitarse estos cálculos por el razonamiento siguiente: Cuando la carga va de C a G, R_{Ay} disminuye linealmente desde $+\frac{3}{5}$ a cero, como se ve fácilmente considerando las fuerzas exteriores que actúan en la estructura; como las reacciones de las viguetas de tablero en A y B siguen siendo nulas, el cortante en BC disminuye linealmente desde $+\frac{3}{5}$ hasta cero.

Se observará que se puede construir siempre una línea de influencia calculando el valor de la función considerada para sucesivas posiciones de la carga unidad, teniendo cuidado de incluir todos los puntos en que pueda cambiar la pendiente. Los nudos son puntos de éstos; pero, como se verá más adelante, es posible disponer una estructura de modo que puedan ser críticos también otros puntos. La experiencia en trazar líneas de influencia hace posible reconocer el hecho de que ciertas partes de ellas son lineales, lo que se traduce en un ahorro de cálculos, pero no es necesario.

Consideremos ahora la línea de influencia del momento en el nudo E de la viga de la Fig. 6.5a, que está representada en la Fig. 6.5c. Cuando una carga unidad se traslada de A a E, R_{By} aumenta linealmente desde cero a $+\frac{3}{5}$, como puede verse considerando las fuerzas exteriores, mientras que las reacciones de las viguetas de tablero en F y G son nulas. Por tanto, el momento en el nudo E aumenta linealmente desde cero en A

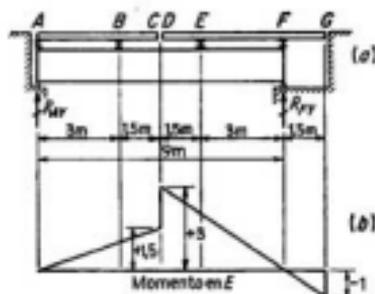


FIG. 6.6: Efecto de la disposición de los largueros.

hasta un valor igual a $+\frac{3}{5} \times 5 = +\frac{10}{5}$ en E , y la línea de influencia es una recta que va desde cero en A hasta $+\frac{10}{5}$ en E . Cuando la carga unidad se traslada de E a G , R_{Ay} disminuye linealmente desde $+\frac{10}{5}$ hasta cero; las reacciones de las viguetas de tablero en A , B , C y D son nulas; por tanto, la línea de influencia es una recta que va de $+\frac{10}{5} \times 10 = +\frac{100}{5}$ en E hasta cero en G .

No es necesario que los largueros de todos los entrepaños estén simplemente apoyados en las viguetas de piso contiguas. La Fig. 6.6a representa un caso en que están en voladizo en el entrepaño BE y el larguero del entrepaño EF vuela hasta el punto G . Se comprende fácilmente la construcción de una línea de influencia para esta estructura, considerando el momento en el nudo E de la viga principal, como en la Fig. 6.6b. Cuando la carga unidad va de A a C , la consideración de las fuerzas que actúan en el cuerpo libre constituido por la viga más el larguero AC y las viguetas de tablero que unen AC a la viga, demuestra que R_{Ay} aumenta linealmente desde cero a $+\frac{1}{2}$. Como las reacciones de las viguetas de tablero en E y F son nulas, el momento de la viga principal en E aumenta linealmente desde cero en A hasta $+\frac{1}{2} \times 3 = +1,5$ en C . Con la carga unidad en D , $R_{Ay} = +\frac{1}{2}$; las reacciones de las viguetas de tablero en A y B son nulas; por tanto, el momento en E es igual a $+\frac{1}{2} \times 6 = +3$. Cuando la carga unidad se traslada de D a G , R_{Ay} varía linealmente desde $+\frac{1}{2}$ hasta $-\frac{1}{6}$; las reacciones de las viguetas en A y B siguen siendo nulas; por tanto, el momento en E varía linealmente desde $+3$ en D hasta $-\frac{1}{6} \times 6 = -1$ en G .

6.7 Interpretación de las líneas de influencia de las vigas principales con sistema de tablero. Los cuatro teoremas de la Sec. 6.4 referentes al empleo de las líneas de influencia son completamente generales y aplicables al caso de vigas principales con sistemas de tablero. Supongamos que se aplica a la estructura de la Fig. 6.5a una sobrecarga constituida por una carga uniforme de 1.000 kg por metro y una aislada de 6.000 kg. Para obtener el máximo cortante debido a la sobrecarga en el entrepaño BC , consideraremos la Fig. 6.5b. Es necesario, primero, situar el punto a en que la línea de influencia corta a la línea de base. A este punto se le llama punto neutro, pues una carga situada en él no tiene influencia sobre la función considerada. Se le puede determinar por semejanza de triángulos, y se hallará que su distancia a B es de 0,50 m. El máximo cortante positivo de la sobrecarga en el entrepaño BC tiene lugar cuando la carga uniforme se extiende desde el punto neutro hasta el G y la carga aislada está en C ; es igual a

$$1.000\left[\frac{1}{5}\left(+\frac{1}{5}\right)(12)\right] + 6.000\left(+\frac{3}{5}\right) = 8.000 \text{ kg}$$

El máximo cortante negativo de la sobrecarga en este entrepaño tiene lugar cuando la

carga uniforme se extiende desde *A* al punto neutro y la aislada está en *B*; tiene por valor

$$1.000\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(3)\right] + 6.000\left(-\frac{1}{6}\right) = -1.250 \text{ kg}$$

En la Fig. 6.5c, el máximo momento positivo de la sobrecarga en el nudo *E* se produce cuando la carga uniforme se extiende sobre toda la luz y con la carga aislada en *E*. Su valor es igual a

$$1.000\left[\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{3}\right)(15)\right] + 6.000\left(+\frac{1}{3}\right) = +45.000 \text{ m kg}$$

El método anterior para calcular cortantes y momentos máximos debidos a la sobrecarga, basado en la determinación de los puntos neutros y el empleo de áreas exactas bajo la línea de influencia, es *exacto*. El método *aproximado* siguiente tiene gran importancia, pues muchas veces implica menos cálculos y se adapta bien a la buena organización de los mismos para estructuras complicadas. En el método aproximado, se supone que, para la sobrecarga uniforme, en cada nudo actúa o toda la carga del entrepaño o ninguna, según que la ordenada de la línea de influencia indique que la carga en ese nudo aumenta o disminuye el valor de la función para la que se quiere hallar el valor máximo. *

La carga total de un entrepaño es la máxima que puede aplicar a la viga principal una vigueta de tablero. Puede producirse solo cuando los largueros contiguos al entrepaño están totalmente cargados, y es igual (para entrepaños de la misma longitud) a *w*, siendo *w* la intensidad de la carga uniforme y *l* la longitud del entrepaño.

Consideremos de nuevo la estructura de la Fig. 6.5a sobre la que actúan sobrecargas constituidas por una carga de 1.000 kg por metro y una concentrada de 6.000 kg. Para la sobrecarga uniforme, toda la carga del entrepaño es igual a $(1.000)(2,50) = 2.500$ kg. Para calcular el cortante máximo positivo de la sobrecarga en el entrepaño *BC* por el método aproximado, se coloca esta carga total en *C*, *D*, *E* y *F*, pues la línea de influencia de la Fig. 6.5b tiene ordenadas positivas en estos nudos. No se colocará ninguna carga en *B*, en que la ordenada de la línea de influencia es negativa. La carga aislada se colocará, como en el método exacto, en *C*. El cortante máximo positivo resultante en el entrepaño *BC* es igual a

$$2.500\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + 6.000\left(\frac{3}{5}\right) = 8.166 \text{ kg}$$

El valor correspondiente fue de 8.000 kg en el método exacto, por lo que el del método aproximado está ligeramente del lado de la seguridad, esto es, es ligeramente mayor que el exacto. El método aproximado supone que sobre *C* actúa toda la carga de un entrepaño, lo que no puede ocurrir más que estando completamente cargado el larguero *BC*; la carga del larguero *BC* producirá una reacción de la vigueta en *B* igual a la mitad de la carga de un entrepaño, que originaría un cortante negativo en *BC*. Como en el método aproximado se desprecia el cortante negativo debido a la carga parcial del entrepaño aplicada en *B*, el cortante positivo resultante calculado está necesariamente del lado de la seguridad. El método aproximado para calcular valores máximos de las funciones no da nunca valores menores que los del exacto.

Para hallar el momento máximo positivo de la sobrecarga en *E* para la misma estructura y cargas, por el método aproximado, consideraremos la Fig. 6.5c. Para la carga uniforme, se aplica una carga de 2.500 kg correspondiente a un entrepaño, en todos los nudos intermedios, pues todas las ordenadas de la línea de influencia correspon-

diente son positivas. La carga aislada se coloca en *E*. El máximo momento positivo de la sobrecarga está dado por

$$2.500\left(+\frac{3}{6} + \frac{3}{5} + \frac{1\frac{1}{2}}{6} + \frac{1\frac{1}{2}}{5} + \frac{3}{5}\right) + 6.000\left(+\frac{1\frac{1}{2}}{5}\right) = +45.000 \text{ kg}$$

que es el mismo valor que se obtuvo por el método exacto.

6.8 Serie de sobrecargas aisladas. Utilización del diagrama de momentos. Los métodos que utilizan las líneas de influencia y que acaban de explicarse, se aplican a casos de sobrecargas uniformemente repartidas o a las aisladas. Por el contrario, no se pueden aplicar a una serie de cargas aisladas, de magnitud y separación dadas, como serían las aplicadas en la realidad por las ruedas de una locomotora o de una serie de camiones. Cuando hay más de una carga aislada, en general no es posible decir por simple inspección cuál de ellas ha de colocarse en la ordenada máxima de la línea de influencia para que la función dada sea máxima.

El método que se seguirá para tales sobrecargas es el de tanteos. Para abreviar éstos, es aconsejable organizar el estudio cuidadosamente, con objeto de reducir los cálculos al mínimo. Para una serie de cargas aisladas se puede usar con éxito un diagrama como el de la Fig. 6.7. Se ha calculado este diagrama particular de momentos para las siete cargas aisladas con la separación que se indica, y se entiende por sí solo. Los números de las seis filas de abajo se pueden explicar con un ejemplo sencillo: El número 285 bajo la carga 4 y en la línea horizontal llamada Suma de los momentos respecto a la carga 7, representa el momento respecto a la carga 7 de las 1 a 4; así

$$5(12) + 10(9) + 10(7,5) + 10(6) = 285$$

Para aclarar el uso del diagrama de momentos, supongamos que se desea calcular

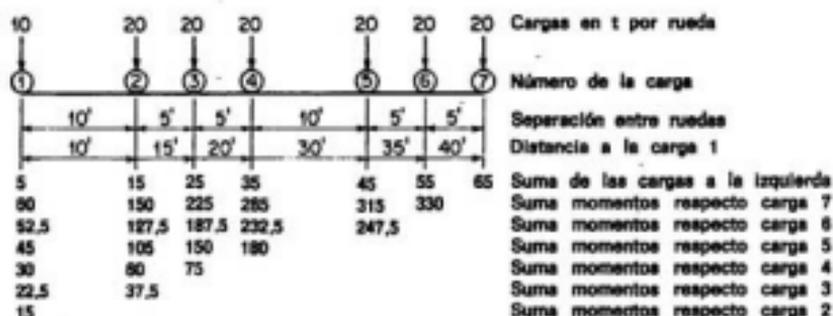


FIG. 6.7. Diagrama de momentos.

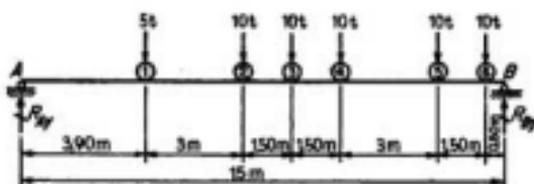


FIG. 6.8. Empleo del diagrama de momentos.

de posición de las cargas. Para ver si el momento es mayor o menor, es conveniente dividir las cargas consideradas en tres grupos: 1) las que estaban sobre la estructura antes de mover las cargas y que siguen estando después de moverlas; 2) las que estaban sobre la estructura antes de mover las cargas, pero se han salido al moverlas; 3) las que no estaban sobre la estructura, pero que lo están después de mover las cargas. Por conveniencia, llamaremos a estos tres grupos de cargas grupo 1, grupo 2 y grupo 3, respectivamente.

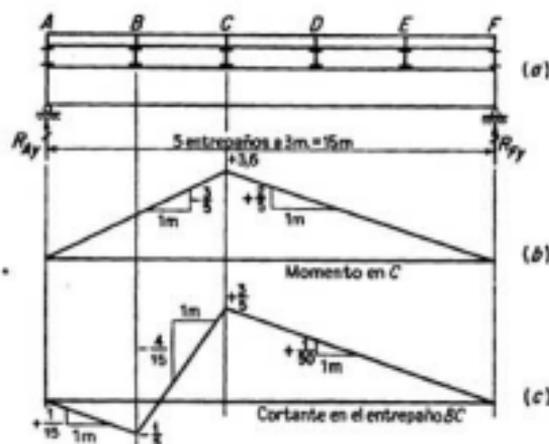


FIG. 6.10. Líneas de influencia de una viga principal.

Los cálculos siguientes determinan si el movimiento de las cargas ha aumentado o disminuido el momento en C. Se observará que, si una carga P se traslada una distancia d y la pendiente de la línea de influencia es m , la variación de momento correspondiente es Pdm .

Carga 1 en sección; traslación hasta la 2	Aumento de momento	Disminución de momento
Grupo de cargas 1—Cargas 1 a 5	$40(3)(+\frac{2}{5}) = +48$	$5(3)(-\frac{2}{5}) = -9$
Grupo de cargas 2—Ninguna	0	0
Grupo de cargas 3—Carga 6	$10(1,50)(+\frac{2}{5}) = +6$	0
Todas las cargas juntas	$+54$	-9

La variación total es de $+54 - 9 = +45$ m t, de modo que con la carga 2 en la sección (en C) el momento es mayor que con la carga 1. No obstante, puede ser que todavía haya un momento mayor con la carga 3 en la sección. Habrá que mover ahora las cargas hacia la izquierda hasta que la 3 esté en C, y hacer los cálculos para determinar si el nuevo movimiento ha aumentado o disminuido el momento en C.

Carga 2 en sección; traslación hasta la 3	Aumento de momento	Disminución de momento
Grupo de cargas 1—Todas	$50(1,50)(+\frac{3}{5}) = +30$	$15(1,50)(-\frac{3}{5}) = -13,5$
Grupo de cargas 2—Ninguna	0	0
Grupo de cargas 3—Ninguna	0	0
Todas las cargas juntas	+30	-13,5

Como 30 es mayor que 13,5, el momento ha vuelto a aumentar. Veamos si continuará aumentando cuando se traslada la carga 4 a esa sección.

Carga 3 en sección; traslación hasta la 4	Aumento de momento	Disminución de momento
Grupo de cargas 1—Todas	$40(1,50)(+\frac{3}{5}) = +24$	$25(1,50)(-\frac{3}{5}) = -22,5$
Grupo de cargas 2—Ninguna	0	0
Grupo de cargas 3—Ninguna	0	0
Todas las cargas juntas	+24	-22,5

Nuevamente ha aumentado el momento. Trasladaremos hasta la carga 5.

Carga 4 en sección; traslación hasta la 5	Aumento de momento	Disminución de momento
Grupo de cargas 1—Cargas 2 a 7	$30(3)(+\frac{3}{5}) = +36$	$30(3)(-\frac{3}{5}) = -54$
Grupo de cargas 2—Carga 1	0	0
Grupo de cargas 3—Ninguna	0	0
Todas las cargas juntas	+36	-54

Obsérvese que, aunque se consideraba cuando la carga 4 estaba en la sección que la 1 actuaba sobre la estructura, no originaba momento en C, por lo que no produce variación cuando sale. Como 36 es menor que 54, la traslación hasta la carga 5 origina una disminución del momento en C. Por tanto, el máximo de este momento se presenta cuando está en C la carga 4. Con alguna experiencia en mover las cargas, se podía haber previsto que no se producirá el momento máximo con la carga 1 en la sección y que probablemente tampoco con la 2, lo que hubiera evitado una parte de los cálculos.

Conocida la posición de las cargas que produce el máximo momento en C, se puede calcular su valor, bien directamente por las ordenadas de la línea de influencia, o bien utilizando el diagrama de momentos. Por el último procedimiento,

$$R_{Ay} = \frac{330 + 65(3)}{15} = +35 \text{ t}$$

El momento de las reacciones de las viguetas de tablero en A y B respecto a C es igual al de las cargas 1, 2 y 3 respecto a la 4, que es 75 m t. Por tanto, el momento máximo positivo de las sobrecargas en C es igual a

$$+35(6) - 75 = +135 \text{ m t}$$

6.10 Serie de sobrecargas abltadas. Cálculo del cortante máximo. El método anterior de mover las cargas, basado en la línea de influencia, es totalmente general y se puede usar para cualquier línea de influencia. Como segundo ejemplo de su aplicación, se calculará el cortante máximo positivo en el entrepaño *BC* de la estructura de la Figura 6.10a, debido a las sobrecargas de la Fig. 6.7. La resolución puede comenzar colocando la carga 1 en *C* (máxima ordenada positiva de la línea de influencia) y moviendo las cargas hasta la 2 para ver si el cortante en *BC* aumenta o disminuye. Sin embargo, este paso no es necesario, porque el simple examen de las cargas y de la línea de influencia de la Fig. 6.10c conduce a la conclusión, sin necesidad de cálculos, de que el movimiento aumentará el cortante en *BC*.

Carga 2 en sección; traslación hasta la 3	Aumento del cortante	Disminución del cortante
Grupo de cargas 1— Todas	$50(1,50)(+\frac{1}{15}) + 5*(1,50) \times (+\frac{1}{15}) = +5,5$	$10(1,50)(-\frac{2}{15}) = -4,0$
Grupo de cargas 2— Ninguna	0	0
Grupo de cargas 3— Ninguna	0	0
Todas las cargas juntas	+5,5	-4,0

* Este término corresponde a la carga 1. El cortante negativo debido a esta carga ha disminuido, produciendo un aumento del cortante positivo en el entrepaño *BC*.

Lo que muestra el aumento del cortante positivo en *BC*. Por tanto, moveremos las cargas hasta que esté la 4 en la sección.

Carga 3 en sección; traslación hasta la 4	Aumento del cortante	Disminución del cortante
Grupo de cargas 1— Todas	$40(1,50)(+\frac{1}{15}) + 5(1,50) \times (+\frac{1}{15}) = +4,5$	$20(1,50)(-\frac{2}{15}) = -8,0$
Grupo de cargas 2— Ninguna	0	0
Grupo de cargas 3— Ninguna	0	0
Todas las cargas juntas	+4,5	-8,0

Lo que demuestra que el cortante positivo en el entrepaño *BC* ha disminuido. Por tanto, el máximo cortante en *BC* se produce cuando la carga 3 está en *C*. El valor de este cortante máximo puede obtenerse como sigue, utilizando el diagrama de la Fig. 6.7:

$$R_{dy} = \frac{330 + 65(1,50)}{15} = +28,5 \text{ t}$$

La suma de las reacciones de las viguetas de tablero en *A* y *B* es igual a

$$5 + \frac{10}{2} = 10 \text{ t}$$

Por tanto, el máximo cortante positivo en el entrepaño *BC* producido por las sobrecargas es igual a

$$+28,5 - 10 = +18,5 \text{ t}$$

6.11 Máximo absoluto del cortante de las sobrecargas. Los métodos que se han dado para calcular el cortante máximo debido a las sobrecargas suponen que se conoce la sección o entrepaño en que se quiere hallar el valor de la función. Muchas veces se quiere calcular el valor máximo absoluto, en una barra, del cortante debido a la sobrecarga, es decir, el cortante máximo que la sobrecarga puede producir en cualquier sección de la barra. Para una viga simplemente apoyada en sus extremos, el cortante máximo de la sobrecarga se producirá en una sección inmediatamente contigua a una de las reacciones de los extremos. Si la viga no es un elemento simplemente apoyado, el cortante máximo absoluto de la sobrecarga tendrá lugar a un lado de una de las reacciones. El verdadero valor del cortante máximo absoluto se puede determinar solamente calculando el cortante máximo en cada una de esas secciones.

6.12 Máximo absoluto del momento de las sobrecargas. Del mismo modo, los métodos dados para calcular el momento máximo debido a la sobrecarga presuponen que se conoce la sección en la que debe calcularse tal momento. Muchas veces es necesario calcular el valor máximo absoluto del momento de las sobrecargas en una viga. Si ésta está simplemente apoyada en sus extremos, tiene lugar a la mitad de la luz, tanto para una carga uniformemente repartida como para una sobrecarga aislada. Para una viga principal simplemente apoyada en sus extremos, con sistema de tablero, el momento de la sobrecarga máximo absoluto se produce en el nudo más próximo al centro de la luz. Para una viga total o parcialmente en voladizo, debe tener lugar junto a una reacción. Si la sección en que se produce el máximo momento absoluto de la sobrecarga no se puede determinar claramente por simple inspección, es necesario comparar los momentos máximos calculados para varias secciones en las que se pueda esperar que se produzca el máximo absoluto.

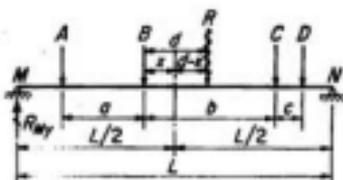


FIG. 6.11. Posición para el momento máximo absoluto.

Un caso especial importante consiste en determinar el momento máximo absoluto debido a la acción de una serie de sobrecargas aisladas sobre una viga simplemente apoyada, como se ve en la Fig. 6.11. La curva de momentos para una serie de cargas aisladas es una serie de líneas rectas que se cortan en las posiciones de las cargas, de modo que el momento máximo absoluto debe producirse directamente bajo una de éstas. Hay que contestar dos preguntas: 1) ¿Bajo qué carga se producirá el momento máximo absoluto? 2) ¿Cuál es la posición de esta carga cuando se produzca dicho momento?

La respuesta a la primera pregunta se puede hallar muchas veces por tanteos, pero la segunda es objeto de un estudio directo. Supongamos que, en la Fig. 6.11, el momento máximo absoluto de las sobrecargas tiene lugar bajo la carga B . Representemos por x la distancia desde B al centro del vano, y por d la distancia desde B a la resultante de todas las cargas A , B , C y D . Queremos determinar el valor de x que produzca un momento máximo en B . Se puede hallar R_{M_v} tomando momentos respecto a N y considerando la fuerza resultante R en lugar de las A , B , C y D . Así,

$$R_{M_v} = \frac{R \left(\frac{L}{2} + x - d \right)}{L} = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

Expresando por M_B el momento bajo la carga B ,

$$\begin{aligned} M_B &= R_{M_v} \left(\frac{L}{2} - x \right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L} \right) \left(\frac{L}{2} - x \right) - Aa \\ &= \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \end{aligned}$$

Para que el valor de M_B sea máximo,

$$\frac{dM_B}{dx} = -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

de donde $x = d/2$.

Por tanto, podemos concluir que *el momento máximo bajo una sobrecarga de una serie de ellas aisladas aplicadas a una viga simplemente apoyada, se produce cuando el centro del vano está a la mitad de la distancia entre esa carga particular y la resultante de todas las del vano.*

Si solo hay que considerar dos cargas aisladas, el momento máximo absoluto que producen tendrá lugar bajo la mayor de las dos. Tal caso está representado en la Figura 6.12, en la que la distancia de la carga de 5 t a la resultante de las dos es igual a $(2,5 \times 3)/7,5 = 1$ m. Para el momento máximo absoluto, la carga de 5 t está colocada a 0,50 m del centro del vano, y la resultante R también a 0,50 m al otro lado de dicho centro. En este instrumento se debe comprobar si las dos cargas están, o no, sobre el vano; si no, el momento máximo absoluto se produce a mitad del vano cuando está allí la carga mayor. En nuestro caso, las dos cargas están en el vano. El momento máximo absoluto de las sobrecargas se produce directamente bajo la carga de 5 t y está dado por

$$M = \frac{7,5(3 - 0,5)^2}{6} = +7,81 \text{ m t}$$

Si hay más de dos cargas aisladas, puede no ser posible decir por simple inspección bajo qué carga se producirá el momento máximo absoluto. Generalmente tendrá lugar bajo una carga grande cerca del centro del grupo de cargas. Por el método anterior se puede determinar el momento máximo que se puede producir bajo cada una de las cargas y el mayor de ellos será el momento máximo absoluto debido a la sobrecarga.

6.13 Líneas de influencia para vigas trianguladas y cerchas. Generalidades. Se pueden construir líneas de influencia para las fuerzas de barra en los elementos de una cercha o una viga triangulada, y tienen gran importancia para la determinación de la

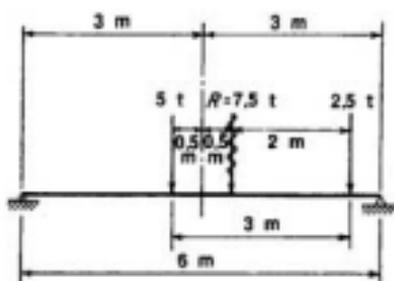


FIG. 6.12. Momento máximo absoluto para dos cargas.

situación de las sobrecargas que producen fuerzas de barra máximas, así como para calcular estas fuerzas. El procedimiento general utilizado para trazar las líneas de influencia de vigas es aplicable a las cerchas y vigas trianguladas. Siempre es posible calcular la ordenada de la línea de influencia para una carga unidad en cada nudo de la cercha. Normalmente, los largueros actúan como vigas apoyadas en sus extremos entre las viguetas de tablero, de modo que la línea de influencia entre nudos es una recta. Como en el caso de las vigas, muchas veces es posible reducir el volumen de los cálculos comprobando el hecho de que la línea de influencia es una recta para varios entrepaños sucesivos.

Una vez construida la línea de influencia para la fuerza en una barra dada, la interpretación de la curva respecto al criterio de cargas y el análisis de esfuerzos es idéntico al caso de las vigas.

Se dibujan las líneas de influencia de las vigas trianguladas correspondientes a una carga unidad que recorre el *cordón cargado*, es decir, el cordón que contiene los nudos en los que se aplica la sobrecarga.

6.14 Líneas de influencia de una viga Pratt. Se aclarará la construcción y utilización de las líneas de influencia para las cerchas considerando la viga Pratt de la Figura 6.13a. Para construir la línea de influencia de una barra de cordón, tal como la L_2L_3 , tomaremos momentos respecto a U_1 de las fuerzas que actúan a un lado de la sección $A-A$. Con la carga unidad a la izquierda de la sección, la tensión en L_2L_3 es igual a R_{6y} , multiplicado por 36 y dividido por la altura de la viga, 12 m, siendo, por tanto, proporcional a R_{6y} . Como R_{6y} varía linealmente cuando una carga unidad se traslada de L_0 a L_2 , la línea de influencia es una recta que va de cero en L_0 hasta $+\frac{1}{3}(3\frac{3}{12}) = +1$ en L_2 . Si no se hubiera reconocido esta linealidad, el valor de la ordenada de la línea de influencia en L_1 se podría haber calculado independientemente, y se habría hallado que es igual a $+\frac{1}{6}(3\frac{3}{12}) = +\frac{1}{2}$. Con la carga unidad en L_2 , o en cualquier punto a la derecha de la sección $A-A$, la tracción en L_2L_3 es igual a R_{0y} , multiplicada por 18 y dividida por 12. Como R_{0y} varía linealmente cuando una carga unidad se traslada de L_2 a L_6 , la línea de influencia es una recta desde $+\frac{3}{3}(1\frac{3}{12}) = +1$ en L_2 hasta cero en L_6 . Esta línea de influencia está representada en la Fig. 6.13b, en la que se ha dibujado la tracción sobre la línea de base.

La construcción de una línea de influencia para la fuerza de barra en un elemento de la celosía está representada en la Fig. 6.13c, en que se ha considerado el montante U_2L_2 . Cuando hay una carga unidad a la izquierda de la sección $B-B$, la tracción en esta barra es igual a la reacción R_{6y} . Por tanto, la línea de influencia es una recta desde cero en L_0 a $+\frac{1}{3}$ en L_2 . Cuando la carga unidad está a la derecha de la sección $B-B$, la compresión en U_2L_2 es igual a R_{0y} , por lo que la línea de influencia es una recta que va de $-\frac{1}{2}$ en L_3 a cero en L_6 , llevando los valores negativos por debajo de la línea de

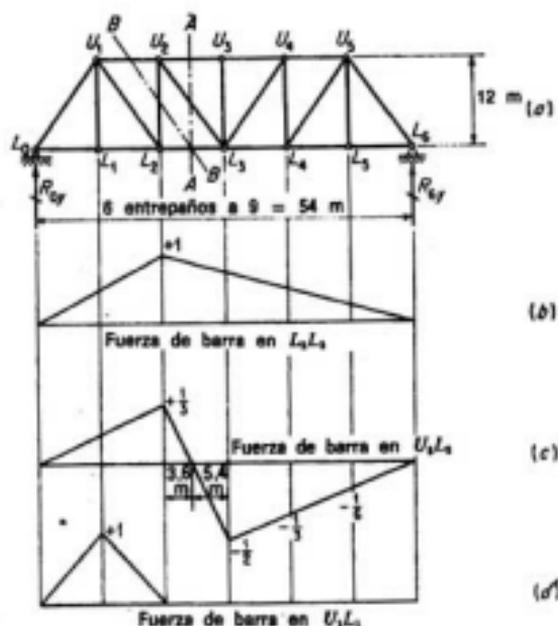


FIG. 6.13. Líneas de influencia de cuchillos Pratt.

base, para indicar compresión. Entre los nudos L_2 y L_3 , la línea de influencia es una recta, suponiendo que los largueros están contruidos de modo que actúen como vigas simplemente apoyadas entre los nudos L_2 y L_3 .

Para las dos barras consideradas, las líneas de influencia se extienden sobre toda la longitud de la cercha. A esas barras se les llama elementos *primarios* de la cercha. Consideremos ahora el montante U_1L_1 , cuya línea de influencia está representada en la Fig. 6.13d. Aplicando el método de los nudos a L_1 , se ve que la fuerza en esta barra es nula si la carga unidad está aplicada en cualquier nudo que no sea el L_1 , en cuyo caso es igual a +1. Tal elemento, que solo está sometido a esfuerzo para ciertas posiciones de la carga, se llama elemento *secundario* de la viga triangulada.

Al obtener las fuerzas de barra máximas en los elementos de una viga triangulada usando la línea de influencia, no interviene ningún principio nuevo. Por ejemplo, supongamos que se desea determinar la compresión máxima en el montante U_2L_2 , debida a una sobrecarga uniforme de 4.000 kg por metro y una carga aislada de 8.000 kg.

Por el método exacto se determina el punto neutro de la línea de influencia de la Fig. 6.13c por semejanza de triángulos, hallando que está a 3,60 m a la derecha de L_2 . Para producir la compresión máxima en U_2L_2 , la carga repartida debe extenderse desde el punto neutro hasta L_6 , mientras que la aislada debe estar colocada en L_3 . El valor de esta compresión máxima viene dado por

$$4.000\left(\frac{1}{2}\right)(32,4)\left(-\frac{1}{2}\right) + 8.000\left(-\frac{1}{2}\right) = -36.400 \text{ kg}$$

Por el método aproximado, la carga de un entrepaño para la uniformemente repar-

tida vale $4.000 \times 9 = 36.000$ kg y debe colocarse en L_3 , L_4 y L_5 . La carga aislada está colocada en L_3 . La máxima compresión de la sobrecarga está dada por

$$36.000(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}) + 8.000(-\frac{1}{2}) = -40.000 \text{ kg}$$

6.15 Líneas de influencia para vigas trianguladas con diagonales en K. Para los casos sencillos, tales como el de la viga Pratt de la Sec. 6.14, es relativamente sencillo suprimir tantos cálculos como sea posible en la construcción de las líneas de influencia, reconociendo que algunos trozos de las mismas son lineales sobre varios entrepaños sucesivos. Para vigas trianguladas o cerchas más complicadas, muchas veces es necesario o bien 1) calcular las ordenadas para cada nudo, sucesivamente, o 2) construir primero la línea de influencia para barras distintas de la considerada y luego usar los datos obtenidos al trazar la que se desea realmente. Este último procedimiento se verá más claramente considerando la diagonal U_2M_3 de la viga triangulada de la Fig. 6.14a, que tiene diagonales de tipo K, y para la cual los nudos del cordón superior están en una parábola. Esta viga triangulada es, en realidad, estáticamente indeterminada en primer grado, pero la indeterminación se reduce a los dos entrepaños centrales, y los tres de cada extremo son estáticamente determinados.

Considerando el nudo M_3 se ve que las componentes horizontales de las fuerzas de barra en U_2M_3 y L_2M_3 son siempre iguales en magnitud y de carácter opuesto. Como las dos barras tienen la misma pendiente, las componentes verticales de las fuerzas son también de igual magnitud y carácter opuesto; por tanto, actúan en la misma dirección cuando mantienen en equilibrio las fuerzas aplicadas a la parte de la estructura a un

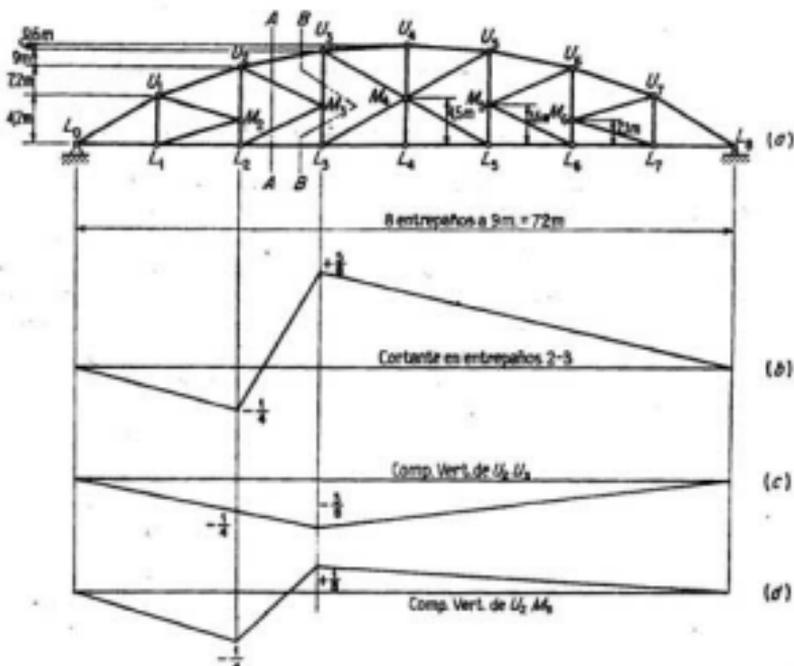


FIG. 6.14. Líneas de influencia de armaduras con diagonales K.

lado de la sección $A-A$. La barra del cordón superior U_2U_3 tiene una componente vertical que debe considerarse también en la condición de equilibrio anterior.

Se dibuja primero la línea de influencia del cortante total en el entrepaño 2-3, como se ve en la Fig. 6.14b. Luego se construye la línea de influencia de la componente vertical de la fuerza de barra en U_2U_3 , determinando esta fuerza, tomando momentos respecto a L_3 de las fuerzas que actúan a un lado de la sección $B-B$. Se ve que esta línea es un triángulo con su vértice en el nudo 3, en que la ordenada es igual a $(-\frac{1}{8})(\frac{3}{8})(1,8/9) = -\frac{3}{8}$.

Aplicado $\Sigma F_y = 0$ a la parte de viga situada a la izquierda de la sección $A-A$, se ve que la componente vertical de la tracción en la barra U_2M_3 es igual a la mitad de la suma del cortante positivo en el entrepaño 2-3 y la componente vertical de la tracción en U_2U_3 . Así, cada ordenada de la línea de influencia de la componente vertical de la fuerza de barra en U_2M_3 es igual a la mitad de la suma algebraica de las ordenadas, en la misma sección, de las líneas de influencia de las Figs. 6.14b y c. Como estas dos líneas de influencia cambian de dirección solamente en L_2 y L_3 , la correspondiente a la componente vertical de la fuerza de barra en U_2M_3 cambiará de dirección, solo en esos dos nudos. Las ordenadas críticas, es decir, aquellas en que cambia la dirección de la línea de influencia resultante, serán las siguientes:

$$\text{En } L_2, \left[+\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) \right] \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad \text{En } L_3, \left[+\frac{3}{8} + (-\frac{3}{8}) \right] \frac{1}{2} = +\frac{1}{8}$$

En la Fig. 6.14d se ha representado la línea de influencia resultante para la componente vertical de la fuerza de barra en U_2M_3 .

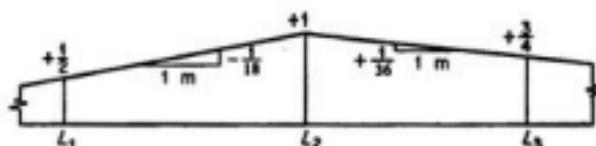


FIG. 6.15. Parte de la línea de influencia de la Fig. 6.13b.

6.16 Fuerza máxima en los elementos de una armadura triangulada debida a una serie de sobrecargas aisladas. Una vez construida la línea de influencia de la fuerza de barra en un elemento de armadura triangulada, se puede determinar la posición en que se ha de colocar una serie de sobrecargas aisladas para que un carácter de fuerza determinado en este elemento tenga un valor máximo, moviendo las cargas del modo ya descrito para las vigas. Como ejemplo, se determinará la posición de las cargas de la Fig. 6.7 que dé la máxima tracción en la barra L_2L_3 de la cercha de la Fig. 6.13a. En la Fig. 6.15 se representa la parte necesaria de la línea de influencia de este elemento (ver Fig. 6.13b para la línea completa).

Los cálculos son los siguientes (se ve por simple inspección que la carga 1 en L_2 no da el máximo):

Carga 2 en L_2 ; traslado hasta la 3	Aumento de la tensión	Disminución de la tensión
Grupo de cargas 1—Todas	$50(1,50)(+\frac{1}{8}) = +\frac{75}{2}$	$15(1,50)(-\frac{1}{8}) = -\frac{3}{4}$
Carga 3 en L_2 ; traslado hasta la 4		
Grupo de cargas 1—Todas	$40(1,50)(+\frac{1}{8}) = +\frac{75}{2}$	$25(1,50)(-\frac{1}{8}) = -\frac{45}{4}$

Por tanto, la tensión máxima en L_2L_3 se produce con la carga 3 en L_2 . Para calcular el valor de esta tensión máxima, se sugieren dos procedimientos distintos.

Método 1 (basado en el diagrama de momentos de la Fig. 6.7):

$$R_{07} = \frac{330 + 65(28,5)}{54} = 40,4 \text{ t}$$

Por tanto, la fuerza de barra en L_2L_3 está dada por

$$\frac{+40,4(18) - 37,5}{12} = 57,5 \text{ t}$$

Método 2 (basado en el cálculo de las ordenadas de la línea de influencia en cada nudo):

Nudo	Reacción de viga de tablero	Ordenada línea influencia	Incremento de fuerza en L_2L_3
1	$5(\frac{1}{4}) + 10(\frac{1}{4}) = +4,2$	$+\frac{1}{2}$	+ 2,1
2	$5(\frac{3}{4}) + 10(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = +39,2$	+1	+39,2
3	$10(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = +21,6$	$+\frac{1}{4}$	+16,2
Esfuerzo total en $L_2L_3 = \Sigma = +57,5 \text{ t}$			

6.17 Tablas de influencia. Muchas veces es conveniente expresar los datos de las líneas de influencia en forma de tablas, mejor que por medio de curvas. La tabla de influencia siguiente (Tabla 6.1) se refiere a la armadura triangulada de la Fig. 6.13a. Da la fuerza en cada barra de la cercha, debida a la carga unidad aplicada en cada nudo. Las fuerzas en las barras L_2L_3 , U_2L_2 y U_1L_1 se tomaron directamente de las Figs. 6.13b, c y d, respectivamente. El estudiante deberá comprobar las de las otras barras.

Al utilizar una tabla de influencia para calcular las fuerzas de barra máximas por

Tabla 6.1 Tabla de influencia para el cachillo de la Fig. 6.13a

Barra	Fuerza de barra debida a la carga unidad en						
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_0L_1	0,000	+0,625	+0,500	+0,375	+0,250	+0,125	0,000
L_1L_2	0,000	+0,625	+0,500	+0,375	+0,250	+0,125	0,000
L_2L_3	0,000	+0,500	+1,000	+0,750	+0,500	+0,250	0,000
L_0U_1	0,000	-1,041	-0,833	-0,625	-0,417	-0,208	0,000
U_1U_2	0,000	-0,500	-1,000	-0,750	-0,500	-0,250	0,000
U_2U_3	0,000	-0,375	-0,750	-1,125	-0,750	-0,375	0,000
U_1L_2	0,000	-0,208	+0,833	+0,625	+0,417	+0,208	0,000
U_2L_3	0,000	-0,208	-0,417	+0,625	+0,417	+0,208	0,000
U_1L_1	0,000	+1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
U_2L_2	0,000	+0,167	+0,333	-0,500	-0,333	-0,167	0,000
U_3L_3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

el método aproximado, es conveniente preparar una segunda tabla resumen de la primera, como la Tabla 6.2.

En el resumen de la tabla de influencia, se obtiene la suma de las ordenadas positivas correspondientes a una barra sumando, para ese elemento, todos los valores positivos de la tabla. El producto de esta suma por la carga del entrepaño para sobrecargas uniformemente repartidas es igual a la tracción máxima en la barra producida por la sobrecarga uniforme.

La suma de las ordenadas negativas correspondientes a una barra se obtiene sumando, para ese elemento, todas las ordenadas negativas de la tabla. El producto de

Tabla 6.2 Resumen de la tabla de influencia del cuchillo de la Fig. 6.13a

Barra	Suma de ordenadas			Ordenadas máximas		Longitud cargada para	
	Positivas	Negativas	Total	Positivas	Negativas	Tracción	Compresión
L_4L_2	+1,875	0,000	+1,875	+0,625	0,000	54	0
L_1L_2	+1,875	0,000	+1,875	+0,625	0,000	54	0
L_2L_3	+3,000	0,000	+3,000	+1,000	0,000	54	0
L_4U_1	0,000	-3,124	-3,124	0,000	-1,041	0	54
U_1U_2	0,000	-3,000	-3,000	0,000	-1,000	0	54
U_2U_3	0,000	-3,375	-3,375	0,000	-1,125	0	54
U_1L_2	+2,083	-0,208	+1,875	+0,833	-0,208	43	11
U_2L_3	+1,250	-0,625	+0,625	+0,625	-0,417	32,5	21,5
U_1L_1	+1,000	0,000	+1,000	+1,000	0,000	18	0
U_2L_2	+0,500	-1,000	-0,500	+0,333	-0,500	21,5	32,5
U_3L_3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0	0

esta suma por la carga del entrepaño para sobrecargas uniformes es igual a la compresión máxima en la barra producida por la sobrecarga uniforme.

La suma de todas las ordenadas correspondientes a un elemento se obtiene sumando algebraicamente, para dicho elemento, la suma de las ordenadas positivas y la de las negativas. Si las cargas fijas de los entrepaños son iguales, el producto de esta suma por dicha carga fija es igual a la fuerza de barra debida a las cargas fijas, para todos los elementos, excepto los montantes. Por éstos, hay que corregir aquel producto para la parte de carga fija aplicada en el tundo del cordón superior.

Se obtiene la ordenada máxima positiva para un elemento eligiendo, para dicho elemento, el valor positivo mayor en la tabla de influencia. El producto de este valor por la sobrecarga aislada es igual a la tracción máxima en la barra debida a esa sobrecarga.

La máxima ordenada negativa de una barra se obtiene eligiendo, para esa barra, el valor negativo máximo en la tabla de influencia. El producto de este valor por la sobrecarga aislada es igual a la compresión máxima en el elemento producida por esa sobrecarga.

El procedimiento para determinar la fuerza de barra total debida a la carga fija y la sobrecarga en cualquier elemento, a partir del resumen de la tabla de influencia, se verá más claro considerando la fuerza de barra en U_2L_3 y las cargas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Carga fija} &= 4.000 \text{ kg por m} & \text{Sobrecarga uniforme} &= 2.000 \text{ kg por m} \\ \text{Sobrecarga aislada} &= 5.000 \text{ kg} \end{aligned}$$

	Tracción máxima en t	Compresión máxima en t
Fija	$36(+0,625) = +22,5$	+22,5
Sobrecarga:		
Uniforme	$18(+1,250) = +22,5$	$18(-0,625) = -11,2$
Aislada	$5(+0,625) = +3,1$	$5(-0,417) = -2,1$
Fuerza de barra total	+48,1	+9,2

Por tanto, en este caso no hay inversión de esfuerzos.

6.18 Longitud cargada. La longitud cargada es la longitud de la parte de una estructura cargada con sobrecarga uniforme para producir un esfuerzo máximo de un carácter dado. Esta longitud cargada se puede determinar con la línea de influencia para el elemento considerado. Consideremos, por ejemplo, la viga de la Fig. 6.5. La longitud cargada para el momento positivo en E es de 15 m. La longitud cargada para el cortante positivo en el entrepaño BC es de 12 m; para el momento negativo en el mismo entrepaño es de 3 m. La longitud cargada es el parámetro determinante en muchas fórmulas de impacto.

Cuando se usan sobrecargas equivalentes, en lugar de una serie de sobrecargas aisladas, la sobrecarga aislada no está físicamente disociada de la uniforme, por lo que es correcto utilizar la misma longitud cargada para la sobrecarga aislada que se usaba para la uniforme; esto es, el factor de impacto de las dos componentes de la sobrecarga equivalente está basado en la longitud cargada correspondiente a la carga uniforme.

Muchas veces, para calcular longitudes cargadas, se puede admitir que el punto neutro está situado en el centro del entrepaño más próximo, lo que ahorra cálculos y no introduce errores importantes en los esfuerzos totales hallados (carga fija + sobrecarga + impacto).

Si se quiere, se pueden añadir dos columnas al resumen de la tabla de influencia (Tabla 6.2) en las que se den las longitudes cargadas para tracción y compresión. La inclusión de estos datos en el resumen de la tabla de influencia es útil para calcular fuerzas de barra de impacto en los distintos elementos.

6.19 Otro método para determinar líneas de influencia. Se puede seguir otro camino para construir líneas de influencia introduciendo una deformación imaginaria en la barra de la cercha o sección de viga considerada. Este método tiene más interés teórico que práctico, en relación con las estructuras estáticamente determinadas, pero tiene importancia para construir líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas, por procedimientos tanto analíticos como gráficos¹.

Como ejemplo del método, consideremos la viga triangulada de la Fig. 6.16a en la que se desea construir la línea de influencia de la barra L_2L_3 . Supongamos que se inserta en la barra un tensor. Si se acciona este tensor hasta que la barra se acorte una pequeña cantidad Δ , la estructura tomará la forma indicada en línea de trazos. Como la viga triangulada es estáticamente determinada, no se hallará ninguna limitación al accionar el tensor; y como no había cargas, no existirá esfuerzo en ninguna barra. Supongamos ahora que hay una carga unidad aplicada a un nudo particular, como el L_1 . Sea F la tracción en L_2L_3 debida a esta carga unidad. Cuando se acciona el tensor, será necesario realizar un trabajo en la estructura de magnitud $+F(\Delta)$, pues el tensor ejercerá una tracción de $+F$ en cada uno de sus extremos, en la barra L_2L_3 , y la distancia total

¹ Este método de obtener líneas de influencia se llama principio de Müller-Breslau y se estudiará más adelante, en la Sección 14.3.

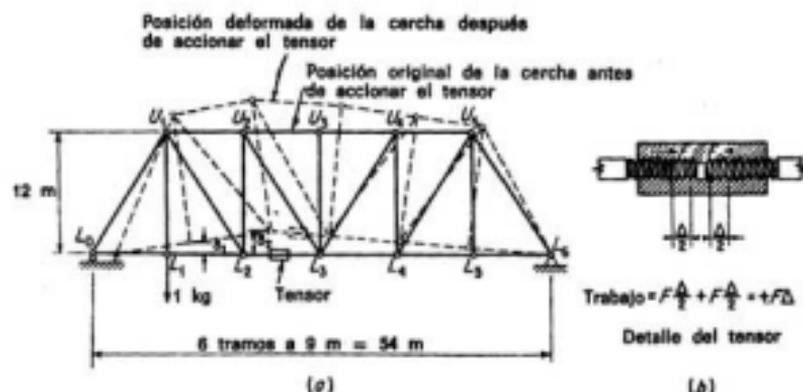


FIG. 6.16. Otro método para obtener líneas de influencia.

recorrida por las dos fuerzas F , será igual a Δ , como se ve en la Fig. 6.16b. La carga unidad en L_1 se moverá verticalmente una distancia δ_1 , realizando un trabajo $(-1)(\delta_1)$. El signo negativo es debido a que el movimiento δ_1 es en dirección opuesta a la carga unidad.

Los esfuerzos de la estructura no variarán durante esta deformación, de modo que la energía elástica de deformación almacenada en las barras de la viga triangulada, debida al hecho de que están sometidas a esfuerzo, permanecerá constante. Como la energía de deformación permanece constante, no se ha realizado ningún trabajo en la viga triangulada durante la deformación, cuando se consideran todas las fuerzas. Expresado simbólicamente,

$$+F(\Delta) - (1)(\delta_1) = 0$$

donde

$$F = + \frac{\delta_1}{\Delta}$$

Si se hubiera colocado la carga unidad en otro nudo L_n , consideraciones semejantes conducirían a la conclusión

$$F = + \frac{\delta_n}{\Delta}$$

Pero F es la fuerza de barra en L_2L_3 debida a la carga unidad en L_n ; por tanto, es la ordenada en el nudo L_n de la línea de influencia de la fuerza de barra en L_2L_3 . El valor de Δ es independiente del nudo considerado. Podemos concluir, por tanto, que el cordón inferior de la viga triangulada, representado en trazos en la Fig. 6.16a, tiene la forma de la línea de influencia de la tracción en L_2L_3 . La escala de la línea de influencia se determina dividiendo las flechas δ_n por la deformación impuesta Δ . Si se hace Δ



FIG. 6.17. Línea de influencia de fuerza en diagonal de cuchillo.

igual a la unidad, los valores δ_a son numéricamente iguales a las ordenadas de la línea de influencia.

El uso de este método de trazar líneas de influencia requiere, o un modelo de la estructura, o el conocimiento de los métodos de calcular las flechas. Sin embargo, aun sin calcular las flechas, muchas veces es posible saber a simple vista la forma que tomaría la estructura y llegar así a la forma de la línea de influencia. De este modo, se pueden situar los puntos críticos en los que hay que calcular las ordenadas de la línea. A menudo se puede decir cuál es la posición de las sobrecargas que produce esfuerzos máximos partiendo de la forma de la línea de influencia, y sin tener que calcular los valores de las ordenadas críticas.

Por ejemplo, las líneas de trazos de la Fig. 6.17 representan la posición que tomaría la armadura si se acortase la diagonal U_2L_3 . Como el cordón inferior varía de pendiente solo en L_2 y L_3 , solamente hay que calcular las ordenadas de la línea de influencia de la fuerza en U_2L_3 en esos dos nudos. Además, se puede deducir, sin calcular realmente esas ordenadas, que según el método aproximado la tracción máxima debida a la sobrecarga en U_2L_3 se producirá con la sobrecarga uniforme de un entrepaño en L_3 , L_4 y L_5 , y la carga aislada en L_2 . El valor real de esta fuerza de barra máxima debido a las sobrecargas, se puede calcular por las ecuaciones de la estática, con las cargas en las posiciones dichas.*

6.20 Problemas para resolver

***Problema 6.1** Con referencia a la Fig. 6.18, construir las líneas de influencia para a) cortante en a ; b) momento en a ; c) reacción en b .

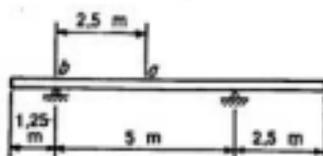


FIG. 6.18. Problemas 6.1 y 6.2.

***Problema 6.2** Con referencia a la Fig. 6.18 y utilizando una sobrecarga constituida por una carga uniforme de 1.000 kg por m y una concentrada de 2.500 kg, calcular a) la máxima reacción hacia arriba en b ; b) los momentos máximos positivo y negativo en a ; c) los cortantes máximos positivo y negativo en una sección inmediatamente a la derecha del apoyo en b . d) Si la carga fija es de 2.000 kg por m, calcular, con la línea de influencia, el momento máximo en a debido a las cargas fijas más las sobrecargas.

Problema 6.3 Para la estructura de la Fig. 6.19, construir las líneas de influencia de a) cortante en el entrepaño AB ; b) momento en el nudo C .



FIG. 6.19. Problemas 6.3 y 6.4.

Problema 6.4 Calcular, por los métodos exacto y aproximado, el cortante máximo en el entrepaño AB y el máximo momento en el nudo C de la estructura de la Fig. 6.19, producidos por una sobrecarga uniforme de 2.400 kg por m y una sobrecarga concentrada de 9.000 kg.

***Problema 6.5** Para la estructura de la Fig. 6.20, construir las líneas de influencia de a) cortante en el entrepaño DE ; b) momento en el nudo E .

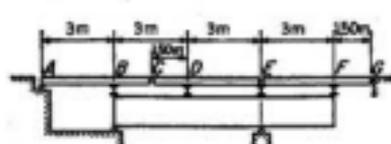


FIG. 6.20. Problemas 6.5 y 6.6.

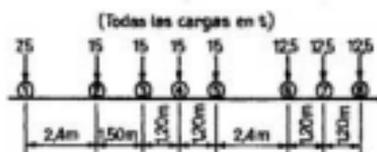


FIG. 6.21. Problemas 6.7 a 6.10.

Problema 6.6 Calcular, por el método aproximado, el cortante máximo en el entrepaño DE y el momento máximo en el nudo E de la Fig. 6.20, debidos a la sobrecarga del Problema 6.4.

Problema 6.7 Construir un diagrama de momentos para las cargas de la Figura 6.21.

Problema 6.8 Utilizando el diagrama de momentos de las cargas de la Fig. 6.21 y la estructura de la Fig. 6.19, determinar a) la reacción izquierda de la viga cuando la carga 3 está en C ; b) la reacción izquierda de la viga cuando la carga 5 está en C ; c) el cortante en el entrepaño AB cuando la carga 3 está en E ; d) el momento en el nudo D cuando la carga 2 está en D .

***Problema 6.9** Para las cargas de la Fig. 6.21, calcular el momento máximo en el nudo B de la viga de la Figura 6.10a.

***Problema 6.10** Para las cargas de la Fig. 6.21, calcular el cortante positivo máximo en el entrepaño CD de la viga de la Figura 6.10a.

Problema 6.11 Calcular el cortante máximo absoluto en la viga de la Fig. 6.4a, debido a una sobrecarga de 4.000 kg por m más una sobrecarga aislada de 2.500 kg.

***Problema 6.12** Calcular el momento máximo absoluto debido a dos cargas aisladas de 5 t cada una, separadas 2,5 m entre sí, que actúan sobre una viga simplemente apoyada de 5 m de luz.

Problema 6.13 Calcular el momento máximo absoluto producido por cuatro cargas aisladas de 6 t cada una, separadas 1,20 m entre sí, que actúan en una viga simplemente apoyada de 5 m de luz.

***Problema 6.14** Calcular las fuerzas de barra máximas en las a y b de la viga triangulada de la Fig. 6.22, debidas a una sobrecarga uniforme de 1.500 kg por m. Considerar la tracción y la compresión.

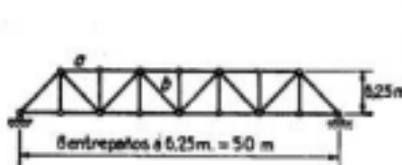


FIG. 6.22. Problema 6.14.

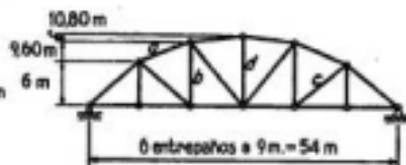


FIG. 6.23. Problemas 6.15, 6.17 y 6.18.

***Problema 6.15** Los nudos del cordón superior de la viga triangulada de la Fig. 6.23 están en una parábola. Dibujar las líneas de influencia de a) componente horizontal de la fuerza en la barra a ; b) fuerza en la barra b ; c) fuerza en la barra c ; d) fuerza en la barra d .

Problema 6.16 Construir una línea de influencia para la fuerza en la barra U_2N_2 de la viga triangulada de la Figura 6.14a.

Problema 6.17 Calcular la fuerza de barra máxima en la barra *a* de la armadura de la Figura 6.23, debida a las cargas de la Figura 6.21.

Problema 6.18 Preparar un resumen de tabla de influencia de las barras *a*, *b*, *c* y *d* de la armadura de la Fig. 6.23. Incluir en el resumen las longitudes cargadas.

Problema 6.19 Para cada una de las vigas de la Fig. 6.24, construir la línea de influencia del cortante en el entrepaño *C-D* y del momento flector en el nudo *D*.

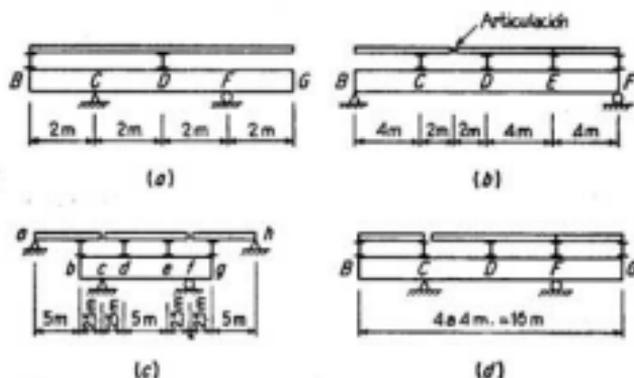


FIG. 6.24. Problema 6.19.

Problema 6.20 Para cada una de las barras señaladas en las vigas trianguladas de la Figura 6.25, construir la línea de influencia para las fuerzas de barra correspondientes.

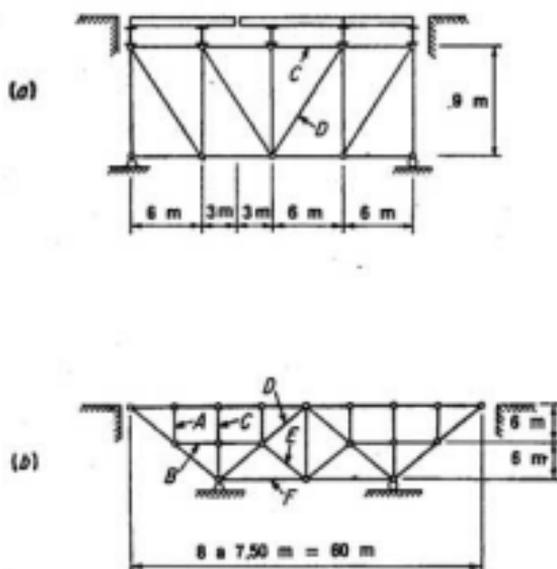


FIG. 6.25. Problema 6.20.

Cuchillos de puente y armaduras de cubierta

7.1 Introducción. En el Cap. 1 se han estudiado las cargas de los cuchillos y armaduras de cubierta (cerchas); en los Caps. 4 y 5 se trató del análisis de tensiones en los mismos por procedimientos matemáticos y gráficos, respectivamente, y en el Cap. 6 se consideraron las líneas de influencia y la determinación de las fuerzas de barra máximas debidas a las sobrecargas. En este capítulo reuniremos las ideas contenidas en los anteriores y aplicaremos estos conceptos a los aspectos más amplos del estudio de los cuchillos y cerchas. Además del estudio general de un cuchillo, o viga triangulada de puente y de una armadura o cercha típica de cubierta, consideraremos algunas otras materias específicas de importancia, tales como la inversión de tensiones y el efecto de oblicuidad de un puente respecto a sus estribos, y, finalmente, se tratará brevemente de los puentes móviles.

Los cuchillos y cerchas considerados se estudiarán como estructuras planas, pero debe entenderse bien que en realidad forman parte de entramados tridimensionales. Para ver por qué es admisible este procedimiento, nos referiremos al puente de tablero inferior de la Fig. 7.1, en el que se supondrá que solo actúan las cargas laterales P_1, P_2, \dots, P_5 , que están en el plano del sistema lateral del cordón superior. Supongamos

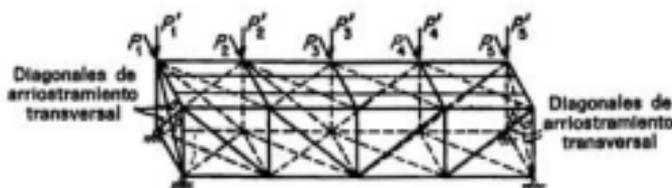


FIG. 7.1. Cuchillo de puente.

que se hace pasar un plano horizontal a cierta altura entre los cordones superior e inferior. Considerando la parte aislada de la estructura situada sobre este plano, se verá que las componentes horizontales de las fuerzas de barra en las diagonales de arriostramiento transversal de los extremos de la estructura, deben mantener en equilibrio

el sistema lateral del cordón superior, sobre el que actúan las cargas laterales¹. Estas componentes horizontales proporcionan las reacciones extremas en el sistema lateral del cordón superior, que se podrá estudiar, por tanto, como una estructura plana. Las componentes verticales de las fuerzas de barra en las diagonales de arriostramiento transversal se deben mantener en equilibrio por las fuerzas de barra en los montantes extremos de los cuchillos verticales principales. Así, pues, el arriostramiento transversal de cada extremo actúa como un cuchillo plano, que transmite una reacción del sistema lateral del cordón superior a la cimentación.

Además, consideremos la misma estructura, con solamente las cargas verticales P_1, P_2, \dots, P_5 que están en el plano del cuchillo vertical de detrás. Supongamos que se corta a la estructura con un plano vertical, paralelo a los cuchillos principales y situado entre ellos. Las diagonales de arriostramiento transversal de cada extremo serán los únicos elementos cortados que son capaces de soportar componentes verticales. Si las diagonales a pueden soportar compresión, estarán sometidas a tensión, lo que afectará a las fuerzas de barra en los montantes extremos del cuchillo vertical de detrás. Sin embargo, esta tensión es de importancia secundaria, por lo que es admisible, y está del lado de la seguridad, estudiar la armadura vertical de detrás como un cuchillo plano, sometida a las cargas P_1, P_2, \dots, P_5 .

Si se añaden arriostramientos transversales en los nudos intermedios, la situación resulta más complicada. Cuando los nudos de la armadura vertical cargada flexan verticalmente, el arriostramiento transversal de cada nudo intermedio actúa de tal modo que el nudo correspondiente del cuchillo vertical no cargado debe sufrir también un cierto movimiento vertical. Esto produce lo que se llama *esfuerzos de participación* en la armadura vertical no cargada. Sin embargo, si las dos armaduras verticales tienen las mismas cargas, no habrá esfuerzos de participación de este tipo, a causa de la simetría. En un puente real, las cargas verticales en los dos cuchillos verticales principales no son siempre las mismas, pero generalmente son tan aproximadamente iguales para las condiciones máximas de carga que determinan el proyecto, que se puede suponer que las fuerzas de barra en las diagonales del arriostramiento transversal en los nudos intermedios son nulas. Por tanto, se puede estudiar cada cuchillo vertical principal por separado, como una estructura plana.

7.2 Estado general de una cercha de cubierta. El estudio general de una cercha de cubierta incluye no solo el cálculo de las fuerzas de barra en cada elemento, debidas a diversos tipos de cargas, sino también la composición, para cada barra de las fuerzas debidas a cada tipo de carga, de modo que se obtenga la fuerza de barra máxima que puede resultar de la combinación de todas ellas. Como ejemplo, consideremos la cercha de cubierta apoyada en muros de la Fig. 7.2, que supondremos es una cercha inter-

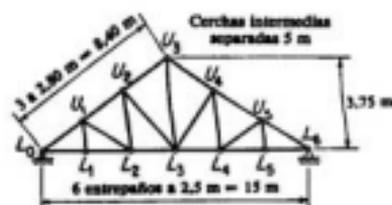


FIG. 7.2. Cercha de cubierta.

¹ Esta afirmación no es totalmente correcta, pues bajo un sistema de cargas laterales simétrico, las componentes horizontales de las fuerzas de barra en las diagonales de los cuchillos principales ayudarán a proporcionar las reacciones al sistema lateral del cordón superior.

media de una serie de ellas separadas 5 m entre ejes. Supondremos que el entramado es tal que las cargas del tejado están aplicadas solamente a los nudos del cordón superior. El tejado, incluyendo las correas entre cerchas, pesa 34,6 kg por m² de superficie de cubierta; la cercha misma pesa 150 kg por m en horizontal, con el peso repartido por igual entre los nudos de los cordones superior e inferior. Se considerará una carga de nieve de 160 kg por m² de superficie horizontal de proyección de tejado. La carga de hielo se tomará de 80 kg por m² de superficie horizontal. Las cargas de viento estarán de acuerdo con la recomendación del informe ASCE¹ estudiado en la Sec. 1.11 y se basarán en una velocidad máxima de viento de 160 km/h. Se limitará el estudio a las siguientes combinaciones de cargas: 1) peso propio más nieve sobre toda la cubierta; 2) peso propio más viento más nieve en el lado de sotavento²; 3) peso propio más hielo en toda la cubierta más viento. Hay que observar que el viento puede soplar de la derecha o de la izquierda.

Primero hay que calcular las fuerzas de barra debidas al peso propio. Para el cordón inferior, las cargas en los nudos están dadas por $\frac{150}{2}(2,5) = 187,5$ kg; para el cordón superior las cargas fijas por entrepaño están dadas por $187,5 + 34,6(2,80)(5) = 672$ kg. Estas cargas por entrepaño, junto con las fuerzas de barra que producen, están representadas en la Fig. 7.3. Como las fuerzas de barra de las cargas fijas son simétricas respecto al eje de la cercha, solo se representa la mitad de ésta. Se omiten los cálculos que conducen a la determinación de las fuerzas de barra, pues no implican nuevos métodos.

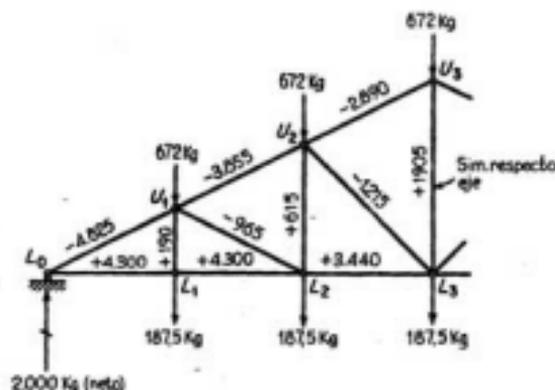


FIG. 7.3. Fuerzas de barra debidas a la carga fija.

La condición de cargas 1 exige nieve en todo el tejado; la 2, nieve solo en el lado de sotavento. Calcularemos primero las fuerzas de barra de la cercha para nieve solo

¹ Arriostramiento contra el viento en edificios de acero, *Proc. ASCE*, marzo 1936, pág. 397.

² Se considera esta combinación de cargas en el presente estudio, a causa de que es de aplicación frecuentemente. Corresponde a una condición razonable si se calculan las cargas de viento por una fórmula como la de Duchemin (ver nota a pie de página en la Sec. 1.11), pues la nieve será barrida del tejado por la presión en el lado del viento, pero se mantendrá en la vertiente de sotavento, donde no hay presión ni succión. Sin embargo, cuando se siguen las recomendaciones del informe de la ASCE, esta combinación particular de cargas no es tan fácil que ocurra, pues se puede encontrar, como en este problema particular, succión en las dos vertientes, con la mayor en el lado de sotavento. Con esta condición de carga de viento, la nieve, si se conserva en el tejado, será más fácil que lo haga en la vertiente de barlovento. Sin embargo, siempre es posible que la nieve que haya caído antes de la acción del viento se haya endurecido en la corteza de tal modo que actúe como se supone en la condición de cargas 2.

en el lado de sotavento, y luego determinaremos las de nieve en toda la cubierta por el principio de superposición, evitando así un segundo análisis de tensiones. La carga de nieve en un entrepaño está dada por

$$160 \times 2,5 \times 5 = 2.000 \text{ kg}$$

Con nieve en el lado de sotavento solamente, la carga de nieve de un entrepaño en U_3 es igual a la mitad de este valor. Estas cargas, junto con las fuerzas de barra que producen, están representadas en la Fig. 7.4. Como es una condición de carga asimétrica, se calculan las fuerzas para todas las barras de la cercha.

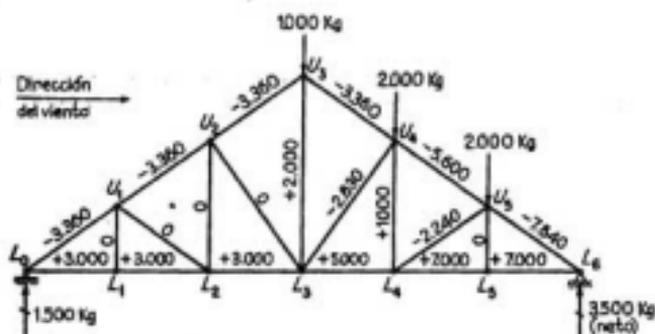


FIG. 7.4. Fuerzas de barra debidas a nieve en el lado de sotavento.

Para obtener las fuerzas de barra debidas a la carga total de nieve, usaremos el principio de superposición, como se indica en la Fig. 7.5, pues las fuerzas de barra debidas a las cargas a (ya calculadas en la Fig. 7.4) superpuestas a las producidas por las cargas b

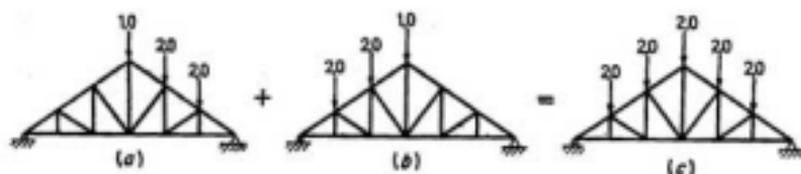


FIG. 7.5. Superposición de cargas.

(que se pueden obtener de la Fig. 7.4 por simetría) son iguales a las debidas a las cargas c que corresponden a la carga total de nieve. Por ejemplo, la fuerza en la barra L_0U_1 debida a la carga total de nieve es igual a

$$-3.360 - 7.840 = -11.200$$

para la barra U_2L_3 es igual a $0 - 2.830 = -2.830$; etc. Como es una condición de carga simétrica, se ha representado solo media cercha. Las fuerzas de barra de la Figura 7.6 se podrían haber obtenido, indudablemente, por medio de un análisis de esfuerzo independiente para la condición de carga total de nieve.

La condición de cargas 3 exige hielo sobre todo el tejado. Como la intensidad de

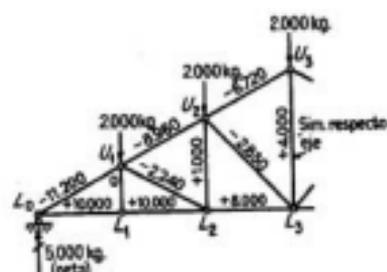


FIG. 7.6. Fuerzas de barra debidas a carga total de nieve.

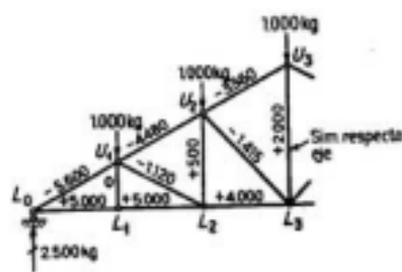


FIG. 7.7. Fuerzas de barra debidas a carga total de hielo.

la carga de hielo es la mitad de la de nieve, las fuerzas de barra debidas a la carga total de hielo se pueden obtener de la Fig. 7.6 por proporcionalidad, pues son iguales a la mitad de las debidas a la carga total de nieve. Están representadas en la Figura 7.7.

Para una velocidad de viento de 160 km/h, la Ec. (1.3) da

$$q = \frac{1}{16}(160/3,6)^2 = 124 \text{ kg/m}^2$$

Para el tejado, $\text{tg } \alpha = 4,5/9 = 0,5$, $\alpha = 26,6^\circ$, de donde, por la Ec. (1.4), la pendiente del lado de barlovento está sometida a una succión de

$$p = [0,07(26,6) - 2,10](124) = 30 \text{ kg/m}^2$$

La succión en la vertiente de sotavento es igual a $0,6(124) = 75 \text{ kg/m}^2$. Así, pues, para el lado expuesto al viento, la carga de viento del entrepaño será igual a

$$30(2,80)(5) = 420 \text{ kg}$$

Para el estudio, es preferible utilizar las componentes vertical y horizontal de la carga de viento por entrepaño, que son iguales a 375 kg hacia arriba y 188 kg hacia el viento, respectivamente. Para el lado de sotavento, la carga del entrepaño es igual a

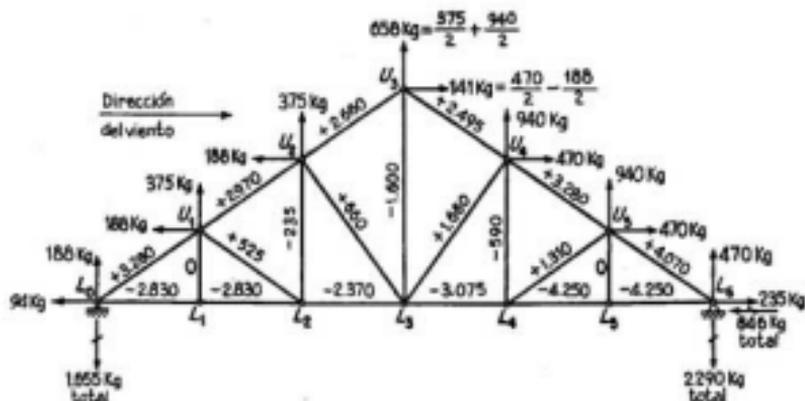


FIG. 7.8. Fuerzas de barra debidas a carga de viento.

75(2,80)(5) = 1.050 kg. Esta carga tiene una componente vertical de 940 kg y otra horizontal a favor del viento de 470 kg. La Fig. 7.8 muestra la cercha sometida a las componentes verticales y horizontales de las cargas de viento en el entrepaño y las fuerzas de barra para esta condición de cargas. Las cargas de medio entrepaño en L_0 y L_6 se incluyeron en el estudio, pues la componente horizontal de la carga aplicada en L_0 origina esfuerzos en la cercha. Como la carga de viento es asimétrica, se calculan las fuerzas de barra para toda la cercha.

En la Tabla 7.1 se relacionan las fuerzas de barra dadas en las Figs. 7.3, 7.4 y 7.6 a 7.8. Luego se han combinado estas fuerzas para tener la fuerza total en cada barra,

Tabla 7.1 Fuerzas de barra de la cercha de cubierta de la Fig. 7.2

Barra	P	N	N_s	H	V	(1) P + N	(2) P + V + N_s	(3) P + V + H	Fuerza de barra máxima	Combinación de cargas
L_0L_2	+4.300	+10.000	+3.000 +7.000	+5.000	-2.830 -4.250	+14.300	+4.470 +7.050	+6.470 +5.050	+14.300	1
L_1L_2	+4.300	+10.000	+3.000 +7.000	+5.000	-2.830 -4.250	+14.300	+4.470 +7.050	+6.470 +5.050	+14.300	1
L_0L_3	+3.440	+ 8.000	+3.000 +5.000	+4.000	-2.570 -3.075	+11.440	+4.070 +5.365	+5.070 +4.365	+11.440	1
L_0U_1	-4.825	-11.200	-3.360 -7.840	-5.600	+3.280 +4.075	-16.025	-4.905 -8.595	-7.145 -6.355	-16.025	1
U_1U_3	-3.855	- 8.960	-3.360 -5.600	-4.480	+2.975 +3.280	-12.810	-4.245 -6.175	-5.365 -5.055	-12.810	1
U_2U_3	-2.890	- 6.720	-3.360 -3.360	-3.360	+2.660 +2.495	- 9.610	-3.590 -3.755	-3.590 -3.755	- 9.610	1
U_1L_2	- 965	- 2.240	0 -2.240	-1.120	+ 525 +1.310	- 3.205	- 440 -1.895	-1.500 - 775	- 3.205	1
U_2L_2	-1.215	- 2.830	0 -2.830	-1.415	+ 660 +1.660	- 4.045	- 555 -2.385	-1.970 - 970	- 4.045	1
U_1L_1	+ 190	0	0 0	0	0 0	+ 190	+ 190	+ 190	+ 190	1, 2, 3
U_2L_2	+ 615	+ 1.000	0 +1.000	+ 500	- 235 - 590	+ 1.615	+ 380 +1.025	+ 880 + 525	+ 1.615	1
U_3L_2	+1.905	+ 4.000	+2.000	+2.000	-1.600	+ 5.905	+2.695	+2.305	+ 5.905	1

correspondiente a las tres combinaciones dadas. Finalmente, se elige para cada barra la fuerza máxima de cada carácter que se produce con cualquiera de las tres condiciones de cargas, siendo estas fuerzas de barra máximas las que determinan el proyecto de las barras. Las abreviaturas utilizadas en el encabezamiento de las columnas son las siguientes: P = fuerza de barra debida al peso propio; N = fuerza de barra debida a la carga de nieve en los dos lados; N_s = fuerza de barra debida a nieve en el lado de sotavento solamente; H = fuerza de barra debida a hielo en ambos lados; V = fuerza de barra debida al viento. Se han relacionado en la tabla solamente las barras de media

cercha; pero, al anotar las fuerzas de barra en las columnas encabezadas N_5 y V , se han llevado primero las fuerzas en la propia barra debidas a la carga considerada y luego las correspondientes al elemento situado simétricamente, debidas a la misma carga¹. Esta segunda anotación cubre el caso que se produciría si la dirección del viento se invirtiese, condición que hay que prever en el proyecto. Al hallar los totales que incluyen N_5 o V se han calculado las sumas correspondientes a las dos anotaciones.

7.3 Tensiones admisibles para barras por efecto del viento. Cuando las barras están sometidas a esfuerzos producidos por cargas de viento, se suele admitir para el proyecto tensiones algo mayores que en los otros casos. Por ejemplo, algunas especificaciones determinan que las barras sometidas a esfuerzos producidos por una combinación de viento y otras cargas, se pueden dimensionar para intensidades de esfuerzo $33\frac{1}{3}$ por 100 mayores de las especificadas en la Sec. 1.22, con tal que la sección así hallada no sea menor que la necesaria para la combinación de otras cargas que no contienen el viento. Además establecen que este aumento del $33\frac{1}{3}$ por 100 es admisible también para barras sometidas solo a esfuerzos producidos por cargas de viento.

En lugar de proyectar barras que soportan cargas de viento a base de tensiones incrementadas iguales a $\frac{1}{3}$ de las admisibles normalmente, es obvio que se obtendrán los mismos resultados proyectando con las tensiones admisibles usuales, pero considerando solo los $\frac{3}{4}$ de las fuerzas de barra totales calculadas en esas barras, pues $F/\frac{3}{4}f = \frac{3}{4}F/f$. Por tanto, al preparar una tabla de fuerzas de barra como la Tabla 7.1, se puede colocar en la columna llamada Fuerza de barra máx. la mayor de las siguientes: $P + N$; $\frac{3}{4}(P + V + N_5)$; $\frac{3}{4}(P + V + H)$, y proyectar la barra con los esfuerzos admisibles normales.

7.4 Estudio general de un cuchillo de puente. El estudio general de un cuchillo de puente consiste en calcular la fuerza de barra en cada elemento, debida a cada tipo de carga, y la combinación de todas ellas para hallar la máxima total que ha de determinar el proyecto. Como ejemplo, consideremos el cuchillo de carretera tipo Warren de la Fig. 7.9, que estudiaremos para carga fija, sobrecarga y cargas de impacto. Se supondrá

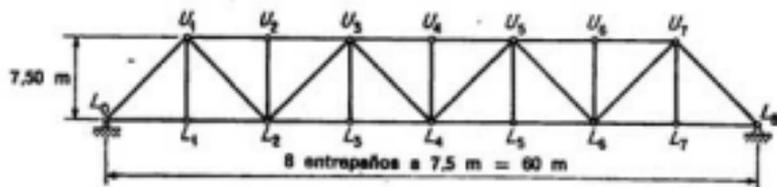


FIG. 7.9. Cuchillo de puente de carretera.

que el cuchillo, incluyendo todos los detalles y arriostramiento secundario, pesa 1 t por m, con este peso repartido por igual entre los nudos del cordón superior y el inferior. Se tomará como peso de la parte del sistema de piso soportado por este cuchillo, 1,6 t por m, sobre los nudos del cordón inferior. Para sobrecarga, se usará un sistema de sobrecargas equivalentes constituido por una carga uniforme de 1,3 t por m y una carga aislada de 10 t. El impacto se calculará de acuerdo con la Ec. (1.1). Se hallarán las fuerzas de barra máximas por el método aproximado, obteniéndose las de cada carácter para todas las barras de la mitad izquierda del cuchillo.

Calcularemos primero las ordenadas de la línea de influencia para cada barra de la mitad izquierda, considerando el efecto de una carga unidad en cada nudo del cordón

¹ No se siguió este procedimiento para las barras del cordón inferior. ¿Por qué?

inferior de toda la cercha. Estas ordenadas se han resumido en la tabla de influencia (Tabla 7.2). Como no se encuentran condiciones fuera de lo usual al calcular estos valores, se omiten los detalles del cálculo.

Tabla 7.2. Tabla de influencia del cuchillo de la Fig. 7.9

Barra	Fuerza de barra debida a la carga unidad en								
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
$L_0L_1^*$	0	+0,875	+0,750	+0,625	+0,500	+0,375	+0,250	+0,125	0
L_1L_4	0	+0,625	+1,250	+1,875	+1,500	+1,125	+0,750	+0,375	0
L_0U_1	0	-1,238	-1,060	-0,885	-0,708	-0,530	-0,354	-0,177	0
U_1U_4	0	-0,750	-1,500	-1,250	-1,000	-0,750	-0,500	-0,250	0
U_1L_4	0	-0,500	-1,000	-1,500	-2,000	-1,500	-1,000	-0,500	0
U_1L_2	0	-0,177	+1,060	+0,885	+0,708	+0,530	+0,354	+0,177	0
L_2U_2	0	+0,177	+0,354	-0,885	-0,708	-0,530	-0,354	-0,177	0
U_2L_4	0	-0,177	-0,354	-0,530	+0,708	+0,530	+0,354	+0,177	0
U_1L_1	0	+1,000	0	0	0	0	0	0	0
U_2L_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U_3L_3	0	0	0	+1,000	0	0	0	0	0
U_4L_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Luego se ha preparado un resumen de la tabla de influencia (Tabla 7.3).

Tabla 7.3. Resumen de la tabla de influencia del cuchillo de la Fig. 7.9

Barra	Suma de ordenadas			Ordenadas máximas		Longitud cargada para	
	Positivas	Negativas	Total	Positivas	Negativas	Tracción	Compresión
L_0L_1	+3,500	0	+3,500	+0,875	0	60	0
L_1L_4	+7,500	0	+7,500	+1,875	0	60	0
L_0U_1	0	-4,952	-4,952	0	-1,238	0	60
U_1U_4	0	-6,000	-6,000	0	-1,500	0	60
U_1L_4	0	-8,000	-8,000	0	-2,000	0	60
U_1L_2	+3,714	-0,177	+3,537	+1,060	-0,177	52	8
L_2U_2	+0,531	-2,654	-2,123	+0,354	-0,885	17	43
U_2L_4	+1,769	-1,061	+0,708	+0,708	-0,530	34	26
U_1L_1	+1,000	0	+1,000	+1,000	0	15	0
U_2L_2	0	0	0	0	0	0	0
U_3L_3	+1,000	0	+1,000	+1,000	0	15	0
U_4L_4	0	0	0	0	0	0	0

Antes de la construcción de una tabla de fuerzas de barra para los elementos considerados, calcularemos las cargas por entrepaño. Para la carga fija, la carga del entrepaño en el cordón superior es igual a $7,5(0,5) = 3,75$ t; la del cordón inferior, $3,75 + 7,5(1,6) = 15,75$ t. Para la sobrecarga uniforme, la carga por entrepaño es igual a $7,5(1,3) = 9,75$ t; la sobrecarga aislada, que está expresada ya como carga por entrepaño, es igual a 10 t.

En la tabla de esfuerzos (Tabla 7.4), las fuerzas de barra de las cargas fijas se han calculado por el principio de superposición, como se ve en la Fig. 7.10. Primero se calcu-

* Por el método de los nudos se ve que el esfuerzo en L_0L_1 es igual al de L_1L_2 si solo se aplican cargas verticales al nudo L_1 . Por esto, para ahorrar espacio en esta tabla y en las siguientes, se tratarán estas dos barras como una sola.

lan las correspondientes a las cargas de la Fig. 7.10c. Esta hipótesis de carga supone que la carga fija total está aplicada al cordón inferior, por lo que la carga en cada uno de sus nudos es igual a $15,75 + 3,75 = 19,5$. Como la tabla de influencia está basada

Tabla 7.4 Tabla de fuerzas de barra del cordón de la Fig. 7.9
(todas las esfuerzos en toneladas)

Barra	P = fuerza de barra del peso	S = fuerza de barra de la sobrecarga			Fracción de impacto	I = fuerza de barra de impacto	S + I	Total = P + S + I
		Uniforme	Aislada	Total				
L_0L_1	+ 68,25	+ 34,15	+ 8,75	+ 42,9	0,155	+ 6,65	+ 49,55	+ 117,8
L_1L_2	+ 146,25	+ 73,1	+ 18,75	+ 91,85	0,155	+ 14,25	+ 106,1	+ 252,35
L_0U_1	- 96,5	- 48,25	- 12,35	- 60,6	0,155	- 9,4	- 70	- 166,5
U_1U_2	- 117,0	- 58,5	- 15,0	- 73,5	0,155	- 11,4	- 84,9	- 201,9
U_2U_3	- 156,0	- 78,0	- 20,0	- 98,0	0,155	- 15,2	- 113,2	- 269,2
U_1L_1	+ 69,0	+ 36,25	+ 10,6	+ 46,85	0,169	+ 7,9	+ 54,75	+ 123,75
L_1L_2	-	- 1,75	- 1,75	- 3,5	0,300	- 1,05	- 4,55	-
L_2U_2	-	+ 5,2	+ 3,55	+ 8,75	0,277	+ 2,4	+ 11,15	-
U_2U_3	- 41,5	- 25,9	- 8,85	- 34,75	0,188	- 6,5	- 41,25	- 82,75
U_3L_3	+ 13,8	+ 17,25	+ 7,1	+ 24,35	0,211	+ 5,15	+ 29,5	+ 43,3
L_3L_4	-	- 10,35	- 5,3	- 15,65	0,238	- 3,70	- 19,3	- 5,5
U_1L_1	+ 15,75	+ 9,75	+ 10,0	+ 19,75	0,287	+ 5,65	+ 25,4	+ 41,15
U_2L_2	- 3,75	-	-	-	-	-	-	- 3,75
U_3L_3	+ 15,75	+ 9,75	+ 10,0	+ 19,75	0,287	+ 5,65	+ 25,4	+ 41,15
U_4L_4	- 3,75	-	-	-	-	-	-	- 3,75

en la aplicación de las cargas a los nudos del cordón inferior, las fuerzas de barra para esta condición de cargas se obtienen multiplicando, para cada elemento, la suma de todas las ordenadas de la línea de influencia por la carga fija total del entrepaño de 19,5 t. Luego se calculan las fuerzas de barra debidas a las cargas de la Fig. 7.10b, siendo el valor 3,75 el de la carga fija por entrepaño del cordón superior. Este análisis de tensiones es extremadamente sencillo, y da como resultado, según se ve en la figura, una

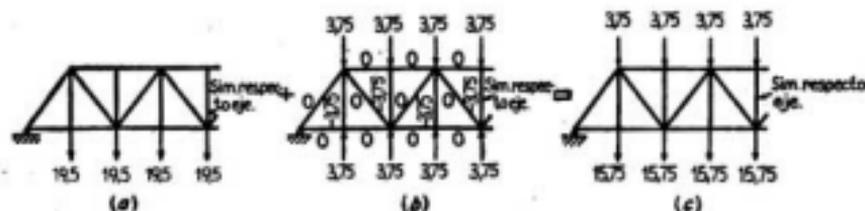


FIG. 7.10. Cálculo de fuerzas de barra de las cargas fijas.

fuerza de barra de $-3,75$ en todos los montantes y fuerza nula en los demás elementos. Si se superponen las cargas de las Figs. 7.10a y b, se hallan las de la Fig. 7.10c, que coinciden con la carga real. Por tanto, se pueden hallar las fuerzas de barra correspondientes a las cargas fijas superponiendo las calculadas para las Figs. 7.10a y b. Para resumir, se pueden hallar las fuerzas de barra de las cargas fijas para un elemento dado, como sigue: 1) Se multiplica la carga fija *total* de un entrepaño por la suma de las ordenadas de la línea de influencia. 2) A las fuerzas halladas en el paso 1, se resta, *solo para los montantes*, la magnitud de la carga fija del entrepaño del cordón superior.

Si la carga no estuviera uniformemente repartida, para hallar las fuerzas de barra de la Fig. 7.10a hubiéramos tenido que recurrir a la tabla de influencia, obteniendo las fuerzas de barra sumando los productos de cada carga de entrepaño por las correspondientes ordenadas de la tabla de influencia. Evidentemente, es posible, y a veces deseable, obtener las fuerzas de las barras debidas a las cargas fijas por un estudio separado para estas cargas, sin hacer uso de los datos de influencia.

En la columna siguiente se han anotado la compresión y la tracción máximas debidas a la sobrecarga uniforme. Estos valores se obtienen multiplicando la sobrecarga por entrepaño (9,75) por la suma de las ordenadas positivas y negativas, respectivamente, de la línea de influencia. En la siguiente columna se han llevado la máxima tracción y compresión debidas a la sobrecarga aislada. Estos valores se han obtenido multiplicando la carga aislada por entrepaño (10,0) por las ordenadas máximas positiva y negativa, respectivamente, de la línea de influencia. Luego se han obtenido las fuerzas totales debidas a la sobrecarga de cada carácter sumando los efectos de las sobrecargas uniforme y aislada.

A continuación se llevan las fracciones de impacto, calculadas de acuerdo con la Ec. (1.1); estas fracciones, multiplicadas por la fuerza *total* debida a las sobrecargas, dan las fuerzas de barra de impacto, que se suman a las totales de las sobrecargas, hallándose así las fuerzas de barra totales debidas a sobrecarga e impacto. En la columna final se escriben las fuerzas de barras totales debidas a la carga fija más la sobrecarga más impacto. Hay que observar que se han seguido anotando en la tabla las fuerzas debidas a la sobrecarga y al impacto de los dos caracteres, hasta estar seguros definitivamente de que no puede haber inversión de esfuerzos (ver Sec. 7.5). En el proyecto real de un cuchillo, hay que considerar fuerzas de barra debidas a otras causas, tales como cargas de viento, combinándolas con las de las cargas fijas, sobrecargas e impacto en nuevas columnas de la tabla de esfuerzos. En este ejemplo se han suprimido las fuerzas debidas al viento, porque se ha dejado para un capítulo posterior el estudio de los sistemas laterales.

7.5 Inversión de esfuerzos. En el cuchillo de carretera estudiado en la Sec. 7.4 se supuso que todos los elementos eran capaces de soportar lo mismo tracción que compresión, y se obtuvo la fuerza de barra máxima de cada carácter. Al preparar la Tabla 7.4, se obtuvo la fuerza total debida a carga fija más sobrecarga más impacto, sumando simplemente las fuerzas de barra de $S + I$ algebraicamente a las de la carga fija. Solo en el caso de un elemento, U_3L_4 , las de sobrecarga e impacto excedían de la carga fija, cuando eran de carácter opuesto entre sí.

Para U_3L_4 , la interpretación de esta condición es la siguiente: Según la posición de la sobrecarga en la estructura, la fuerza de barra total debida a peso + sobrecarga + impacto puede ser tracción o compresión. Este cambio de esfuerzos cuando la sobrecarga recorre el vano, se llama inversión de esfuerzos. Cuando los elementos están sometidos a inversión de esfuerzos, se suele usar un método de proyecto más conservador que si se usaran los esfuerzos admisibles normales con las cargas totales $P + S + I$ de la Tabla 7.4. Por ejemplo, una especificación establece que «si los esfuer-

zos alternados (inversiones de esfuerzos) tienen lugar sucesivamente durante un paso de la sobrecarga, se incrementará cada uno en un 50 por 100 del menor... Si los esfuerzos de la sobrecarga y de las cargas fijas son de signo opuesto, solo se considerará el 70 por 100 de los esfuerzos de la carga fija para contrarrestar a los de la sobrecarga». Consiguientemente con esa especificación es necesario proceder al cálculo de las fuerzas de barra totales para las que hay que proyectar un elemento sometido a inversión de esfuerzos. Como se usan los esfuerzos normales con estas cargas aumentadas, se obtiene un proyecto más conservador que en otros casos.

Como ejemplo de aplicación de la anterior especificación, consideraremos U_3L_4 :

Carga fija	+13,8	$0,7(+13,8) = + 9,65$
Sobrecarga + impacto	+29,5	-19,3
	+43,3	- 9,65
	+ 4,8 = 9,65(0,50)	- 4,8 = 9,65(0,5)
	+48,1 t	-14,45 t

Se proyectará el elemento para resistir estas dos fuerzas de barra.

7.6 Diagonales auxiliares. Un elemento con una relación de esbeltez grande (longitud dividida por radio de giro) pandeará cuando esté sometido a fuerzas de compresión relativamente pequeñas. Tal elemento puede soportar una tracción satisfactoriamente, pero solo una compresión de magnitud despreciable. Se pueden proyectar las diagonales de un cuchillo de modo que actúen de tal forma, en cuyo caso se llaman diagonales de tracción. Si el cuchillo solo tuviera que soportar cargas fijas, como se ve en la Fig. 7.11a, serían satisfactorias las diagonales de tracción en todos los entrepaños, pues se podría elegir la inclinación de tal modo que esas cargas fijas produjeran

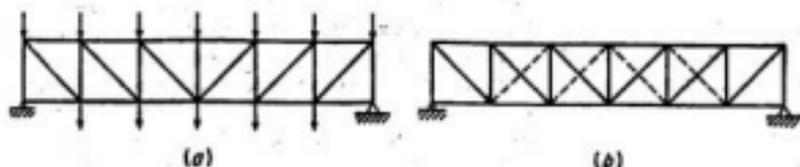


FIG. 7.11. Empleo de diagonales auxiliares.

solamente tracción en las diagonales. Cuando se consideran sobrecargas, siempre es posible que, para alguna posición de éstas, el cortante máximo en un entrepaño debido a las sobrecargas más impacto, de carácter opuesto al de las cargas fijas, sea mayor que éste. Esto produciría compresión en la diagonal de tracción, lo que debe evitarse si no se añade en el entrepaño una segunda diagonal de tracción, llamada *auxiliar*, con inclinación opuesta a la diagonal principal. La auxiliar no tendrá tensión con solo las cargas fijas, pues pandeará ligeramente bajo la acción del cortante fijo. Cuando el cortante en el entrepaño cambia de signo por causa de las sobrecargas e impacto, la diagonal principal pandea y tiene tensión nula, entrando en acción la auxiliar que soporta el cortante resultante de la carga fija, las sobrecargas y el impacto, como un elemento de tracción.

Al proyectar un cuchillo con diagonales de tracción, hay que determinar primero los entrepaños en que se necesitan diagonales auxiliares. Suelen ser más necesarias en los entrepaños más cercanos al centro del cuchillo, pues el cortante de la carga fija es menor en ellos que en los extremos, mientras que el de la sobrecarga, de carácter opues-

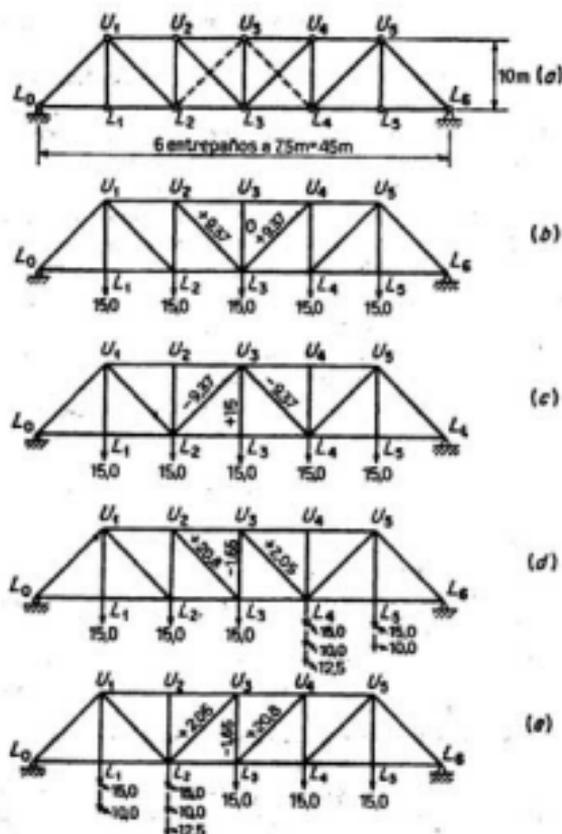


FIG. 7.12. Estado de cuchillo con diagonales auxiliares.

to, es mayor que en los extremos y, por tanto, es más fácil que le supere. En la Figura 7.11b se muestra un cuchillo típico con diagonales auxiliares, en el que dichas diagonales figuran en líneas de trazos en los cuatro entrepaños centrales.

Para aclarar la determinación de las fuerzas de barra máximas en un elemento de un cuchillo con diagonales auxiliares, consideraremos el cálculo de la compresión máxima en U_3L_3 de la estructura de la Fig. 7.12a. Se puede trazar una línea de influencia que muestre cómo varía la fuerza en U_3L_3 cuando una carga unidad recorre el vano. Sin embargo, no se puede usar esa línea de influencia para determinar cómo hay que colocar las sobrecargas para tener la máxima compresión en U_3L_3 por la razón siguiente: El cálculo de cada ordenada dependerá de si está en acción la diagonal principal o la auxiliar en cada uno de los dos entrepaños centrales. Esta condición variará para distintas posiciones de la carga unidad. Por ejemplo, con la carga unidad en L_2 , estarán en acción L_2U_3 y L_3U_4 , mientras que U_2L_3 y U_3L_4 tendrán tensión nula, mientras que con la carga unidad en L_3 , estarán en acción U_2L_3 y L_3U_4 y no tendrán tensión L_2U_3 y U_3L_4 . Por tanto, las distintas ordenadas de la línea de influencia corresponderán a la acción de estructuras diferentes, y en tales circunstancias no se cumple el principio de superposición. La compresión máxima en U_3L_3 debida a las cargas fijas y sobrecarga más

impacto, depende de qué diagonales estén en acción bajo la carga *total* que produce esta compresión.

Para simplificar este ejemplo, supongamos que las cargas fijas por entrepaño están aplicadas solo al cordón inferior y son iguales a 15,0 t, que la sobrecarga uniforme por entrepaño es de 10,0 t y que la sobrecarga aislada es de 12,5 t y se desprecia el impacto.

En las Figs. 7.12b a e se muestran las cuatro maneras en que pueden actuar las diagonales de los dos entrepaños centrales. Si actúan como en la Fig. 7.12b, U_3L_3 no puede estar sometida a esfuerzo, como se ve aplicando el método de los nudos al U_3 . Si actúan como en la Fig. 7.12c, no puede colocarse la sobrecarga de modo que produzca compresión en U_3L_3 , como se vería aplicando el método de los nudos a L_3 . Aun con las cargas fijas es un caso imposible, pues es necesario que L_2U_3 y U_3L_4 tengan compresión. Si las diagonales actúan como en la Fig. 7.12d, las sobrecargas deberán colocarse como se representa para producir la compresión máxima en U_3L_3 . Este caso es posible, pues U_2L_3 y U_3L_4 tienen las dos tracción, y conduce a una compresión resultante de -1,65 t en U_3L_3 . Si las diagonales actúan como en la Fig. 7.12e, se obtiene la misma compresión de -1,65 t en U_3L_3 y es también un caso posible, pues L_2U_3 y L_3U_4 están sometidas las dos a tracción.

Por tanto, podemos deducir que la compresión máxima que puede producirse en U_3L_3 es de -1,65 t.

Cuando una cercha tiene diagonales auxiliares, hay que hacer la determinación de las fuerzas de barra máximas en los elementos influenciados por la acción de estas diagonales por tanteos. Se debe ensayar cada posición de la sobrecarga que pueda producir razonablemente la fuerza máxima buscada. Si se ha supuesto que están en acción las diagonales capaces de soportar solo tracción, los resultados de cualquier caso ensayado no son válidos hasta que las fuerzas calculadas para esas barras indiquen que soportan realmente tracción.

7.7 Puentes móviles. Generalidades. Cuando la topografía del emplazamiento de un puente es tal que se quiere tener la calzada próxima a la superficie del agua, las necesidades de altura libre para la navegación bajo el puente pueden hacer necesario que éste sea móvil. Un puente móvil es aquel que se puede mover para permitir el paso de la navegación. Los tres tipos más importantes de puentes móviles son: 1) puentes basculantes, 2) puentes elevables, 3) puentes giratorios. El tipo a usar depende de las necesidades de luz libre en vertical y horizontal de la navegación. Normalmente, solo se puede determinar si en un emplazamiento dado conviene construir un puente móvil de poca altura, o uno elevado fijo, por un estudio económico cuidadoso.

7.8 Puentes basculantes. Un puente basculante puede resultar económico cuando

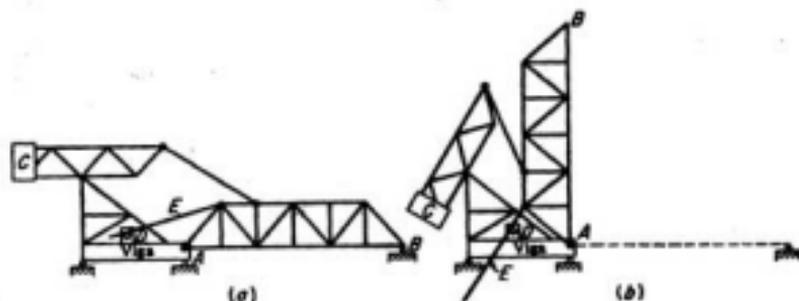


FIG. 7.13. Puente basculante.

las necesidades de la navegación en horizontal no exigen una luz demasiado larga, mientras que la altura libre en vertical ha de ser grande. En la Fig. 7.13 se representa un puente basculante típico. La maquinaria mueve un piñón en *D*, que engrana con la cremallera *E*, que abre o cierra el vano. La potencia motriz necesaria se reduce por el efecto del contrapeso *C*.

Las fuerzas de barra debidas al peso propio en un tramo basculante cambian cuando se abre o se cierra el puente, y es posible que en ciertos elementos, durante tal operación, excedan a los correspondientes al puente cerrado y sometido al tráfico.

Para hallar las fuerzas de barra máximas debidas a la carga fija que se produce cuando se sube o se baja el tramo¹, sea F_H la fuerza en una barra con el tramo en horizontal, y F_V la correspondiente a la misma barra después de que se ha colocado vertical (esto es, después de girar 90° desde su posición de cerrado), siendo fáciles de calcular los dos valores por los métodos ordinarios. Cuando el puente está parcialmente abierto y el cordón inferior forma un ángulo α con la horizontal, como se ve en la Fig. 7.14, se

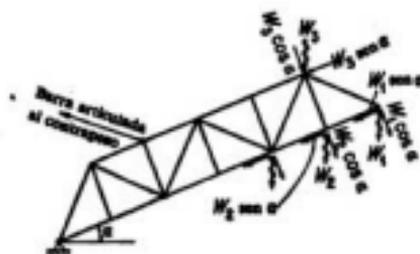


FIG. 7.14. Puente basculante, parcialmente abierto.

puede descomponer cada carga fija por entrepaño en dos componentes, una perpendicular y otra paralela al cordón inferior. Las componentes perpendiculares al cordón inferior producirán fuerzas de barra iguales a $F_H \cos \alpha$, mientras que las componentes paralelas a este cordón originarán fuerzas iguales a $F_V \sin \alpha$. Por tanto, para un ángulo α cualquiera, la fuerza de barra total de las cargas fijas F_P en cada elemento estará dado por

$$F_P = F_V \sin \alpha + F_H \cos \alpha \tag{a}$$

Haciendo la derivada de F_P respecto a α igual a cero,

$$\frac{dF_P}{d\alpha} = F_V \cos \alpha - F_H \sin \alpha = 0$$

de donde $\text{tg } \alpha = F_V/F_H$. Sustituyendo este valor de α en la Ec. (a),

$$\text{Max } F_P = F_V \frac{F_V}{\sqrt{F_V^2 + F_H^2}} + F_H \frac{F_H}{\sqrt{F_V^2 + F_H^2}} = \sqrt{F_V^2 + F_H^2} \tag{7.1}$$

Quando está el puente cerrado, la reacción de las cargas fijas en el extremo libre será nula, pues el contrapeso mantiene las cargas fijas en equilibrio, pero las sobre-

¹ Ver O. E. Hovey, «Movable Bridges», vol. I, pág. 219, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1926.

cargas producen reacciones en ese extremo, del mismo modo que para un tramo simplemente apoyado.

7.9 Puentes elevables. Cuando la distancia libre necesaria en horizontal es mayor que la vertical para las necesidades de la navegación, suele ser económico el empleo de un puente elevable verticalmente, del tipo representado en la Fig. 7.15. El tramo AB

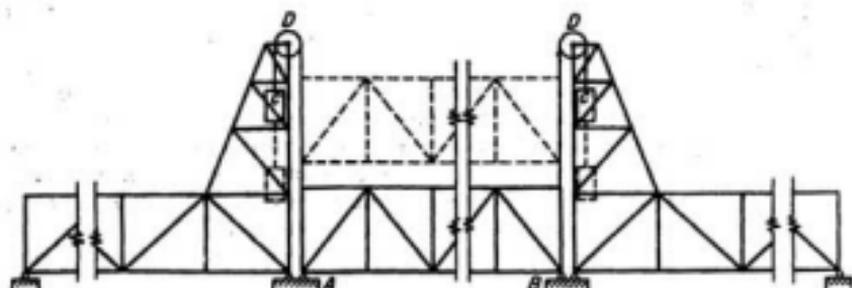


FIG. 7.15. Puente elevable en vertical.

se levanta o se baja verticalmente por medio de cables que corren por poleas en D apoyadas en lo alto de torres. La potencia motriz necesaria para este movimiento se reduce por los contrapesos C . Estos contrapesos se proyectan generalmente para contrarrestar todo el peso del tramo móvil, de modo que las reacciones de la carga fija las soportan los cables. Por el contrario, las sobrecargas del tramo móvil producen reacciones en las pilas A y B , respectivamente.

7.10 Puentes giratorios en horizontal. Los puentes giratorios en horizontal proporcionan una distancia libre en vertical ilimitada, pero la pila central constituye un obstáculo para el tráfico. Para este tipo de puente móvil se necesita una gran superficie en horizontal. Pueden ser del tipo de apoyo central representado en la Fig. 7.16a, o del tipo de apoyo circular de la Fig. 7.16b. En los dos casos, el puente se abre haciéndole girar horizontalmente alrededor del eje vertical. Cuando está abierto, los dos tramos vuelan desde la pila central y son estáticamente determinados. Cuando está cerrado, las armaduras son continuas y, por tanto, estáticamente indeterminadas. El análisis de tensiones para el caso de puente cerrado depende de principios estudiados en la parte de este libro que trata de estructuras estáticamente indeterminadas.

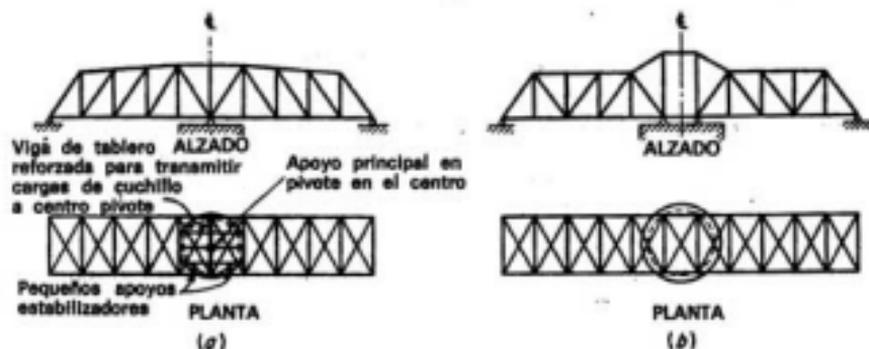


FIG. 7.16. Puentes giratorios en horizontal.

Cuando un puente giratorio está cerrado, las reacciones del peso propio producidas en los extremos exteriores de la estructura dependen del tipo de proyecto. Si estos extremos tocan justo a sus apoyos, cualquier sobrecarga en un tramo originaría una elevación en el extremo opuesto del otro, lo que se evita, generalmente, elevando un poco los extremos cuando están cerrados. Se puede calcular la reacción de la carga fija de modo que exceda de la máxima reacción debida a la sobrecarga de carácter opuesto.

7.11 Puentes oblicuos. Si los estribos no son perpendiculares al eje longitudinal de un puente, se dice que éste es oblicuo. La Fig. 7.17*b* muestra la planta de una de estas estructuras. Para evitar que las uniones sean complicadas, generalmente las vigas de tablero son perpendiculares a los cuchillos principales, lo que puede originar que estos cuchillos sean asimétricos. Los dos montantes extremos de un cuchillo tienen la misma inclinación, de forma que las dos estructuras transversales extremas estén en el mismo plano, lo que puede dar origen a una péndola (barra de suspensión) inclinada, como la *a* de la Fig. 7.17*a*.

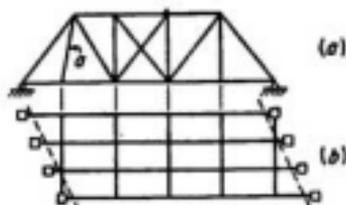


FIG. 7.17. Puente oblicuo.

Cuando se estudian las fuerzas en las barras de un cuchillo de un puente oblicuo, se puede seguir el método general empleado para un puente perpendicular a sus estribos. Sin embargo, para las sobrecargas, hay que tener en cuenta la irregularidad del sistema de tablero, que alterará los detalles del cálculo de la sobrecarga por entrepaño, que no es la misma en todos los nudos.

7.12 Problemas para resolver

Problema 7.1 Para la cercha de tejado y las cargas de la Sección 7.2:

- Calcular la fuerza de barra máxima de cada carácter para todos los elementos de la mitad izquierda de la cercha, debidas a la carga fija más la carga de viento.
- Comparando las fuerzas de barras calculadas en *a*) con las máximas de la Tabla 7.1, ¿para qué elementos, si hay alguno, las condiciones de carga del apartado *a*) son las determinantes para el proyecto? (Nota: En el apartado *b*) no se considerarán los aumentos de intensidades de esfuerzos admisibles para barras cargadas con viento.)
- ¿Es necesario anclar esta cercha en sus apoyos para evitar el vuelco? En caso afirmativo, determinar la fuerza de vuelco para la que hay que calcular cada anclaje, admitiendo un factor de seguridad del 50 por 100 en esta fuerza.

***Problema 7.2** La cercha de cubierta de la Fig. 7.18 es una intermedia de una serie de ellas separadas 4,5 m entre ejes. Las cargas fijas que actúan sobre la cercha son las representadas en la figura. La sobrecarga de nieve es de 100 kg por m² de superficie horizontal de proyección. Las cargas de viento se calcularán por la fórmula de Duchemin, basadas en una intensidad de presión de viento de 100 kg por m² de superficie vertical. Calcular la fuerza máxima en cada barra de cada carácter debida a cada una de las combinaciones de carga siguientes: 1) carga fija más nieve; 2) carga fija más viento (téngase en cuenta que el viento puede soplar de las dos direcciones). ¿Qué fuerza de barra determinará el proyecto de cada una de ellas?

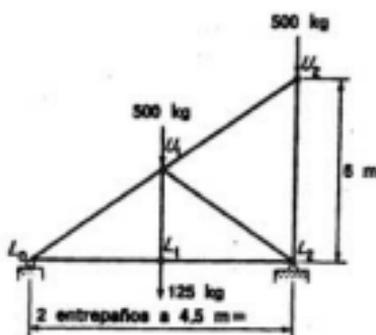


FIG. 7.18. Problema 7.2.

***Problema 7.3** En el cuchillo de puente de la Fig. 7.19 figuran las cargas fijas por entrepaño en toneladas. El cuchillo está sometido a una sobrecarga uniforme de 2,0 t por m y a una aislada de 7,5 t. Hay que considerar el impacto, de acuerdo con la Ec. (1.1). Preparar una tabla de fuerzas de barra para los elementos de la mitad de la izquierda del cuchillo, en la que se incluirán las siguientes columnas: carga fija, sobrecarga uniforme, sobrecarga aislada, sobrecarga total, impacto, sobrecarga más impacto, total fija más sobrecarga más impacto. Para las sobrecargas, usar el método aproximado. Dar las fuerzas de barra de ambos caracteres cuando existen. Combinar las fuerzas de barra de cargas fijas con las de sobrecargas e impacto a) por adición algebraica; b) de acuerdo con las especificaciones de la Sec. 7.5 para las barras sometidas a inversión de esfuerzos.

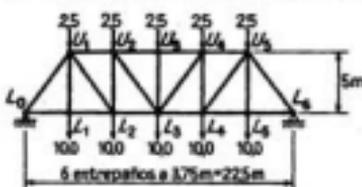


FIG. 7.19. Problemas 7.3 y 7.4.

carga total, impacto, sobrecarga más impacto, total fija más sobrecarga más impacto. Para las sobrecargas, usar el método aproximado. Dar las fuerzas de barra de ambos caracteres cuando existen. Combinar las fuerzas de barra de cargas fijas con las de sobrecargas e impacto a) por adición algebraica; b) de acuerdo con las especificaciones de la Sec. 7.5 para las barras sometidas a inversión de esfuerzos.

***Problema 7.4** Suponiendo que las diagonales del cuchillo de la Fig. 7.19 solo pueden soportar tracción, ¿en qué entrepaños se necesitan diagonales auxiliares?

Problema 7.5 Las cargas representadas en el cuchillo de la Fig. 7.20 son las cargas fijas por entrepaño en toneladas. Las diagonales solo pueden soportar tracción. Sobre el cuchillo actúan las siguientes sobrecargas: uniforme, 1,4 t por m; aislada, 10,0 t. Hay que calcular el impacto de acuerdo con la Ec. (1.1). Hallar la fuerza de barra máxima debida a la carga fija más sobrecarga más impacto en a) L_3U_4 ; b) U_3U_4 .

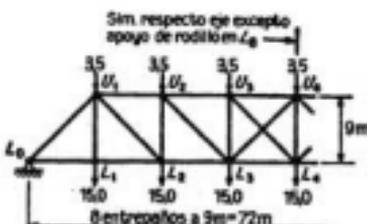


FIG. 7.20. Problema 7.5.

***Problema 7.6** La Fig. 7.21 representa un tramo basculante sobre el que actúan sus cargas fijas por entrepaño, reseñadas en toneladas.

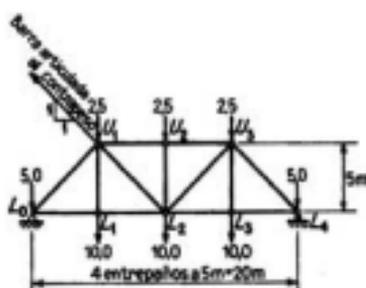


FIG. 7.21. Problema 7.6.

- Calcular las fuerzas de barra, incluyendo la tensión en la barra articulada que va al contrapeso, con el tramo en posición cerrada, como en la figura.
- Calcular la fuerza de barra máxima que se produce cuando se eleva el tramo un ángulo de 90° , para todos los elementos excepto L_0U_1 .
- ¿Es aplicable el método utilizado en *b* para determinar la fuerza máxima en la barra L_0U_1 ?

Problema 7.7 La Fig. 7.22 representa un cuchillo de puente giratorio en horizontal sobre el que actúan las cargas fijas dadas, en toneladas. Los elementos dibujados en trazos solo soportan tracción.

- Calcular las fuerzas de barra cuando el puente está en su posición abierta.
- Cuando el puente está cerrado, cada extremo está 24 mm más alto que la cota que tiene cuando está abierto. Si al aplicar una fuerza de 5 t hacia arriba en L_0 cuando el puente está abierto L_0 se eleva 24 mm y L_9 baja 6 mm, calcular las reacciones en L_0 y L_9 con el puente cerrado.
- Calcular las fuerzas de barra en el cuchillo con el puente en posición cerrada, a base de las reacciones correspondientes al apartado *b*.

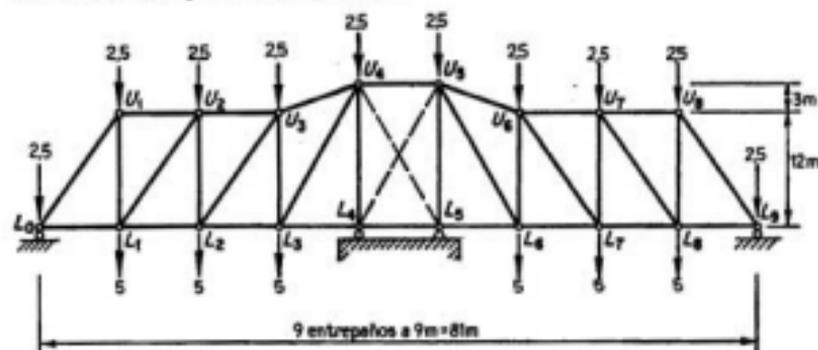


FIG. 7.22. Problema 7.7.

Problema 7.8 Para el puente oblicuo de ferrocarril de vía sencilla cuya planta se representa en la Fig. 7.23, el peso de la vía y traviesas es de 1.000 kg por m de vía; el peso de cada

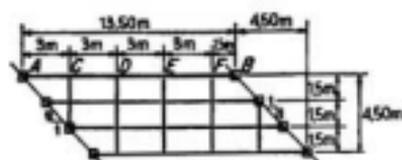


FIG. 7.23. Problema 7.8.

larguero, incluyendo accesorios de 250 kg por m, y el de cada viga de tablero, incluyendo accesorios de 350 kg.

a) Calcular la parte de los pesos por entrepaño que actúa sobre la viga principal AB , aplicados por las viguetas de tablero en los nudos C , D , E y F .

b) Si la vía está sometida a una sobrecarga uniforme de 10.000 kg por m sobre toda la estructura, ¿qué sobrecargas aplican las viguetas de tablero a la viga en los nudos C , D , E y F ?

8

Estructuras para grandes luces

8.1 Introducción. Cuando se utilizan estructuras simplemente apoyadas en sus extremos, los momentos flectores a que están sometidas aumentan rápidamente al hacerle la luz. Aun cuando la carga por metro que ha de soportar no aumentara con la luz, el momento debido a las cargas repartidas variaría con el cuadrado de dicha luz, pero en la realidad el peso aumenta al hacerla ésta, por lo que el momento crece más rápidamente que con el cuadrado. Como los esfuerzos en los cordones de los cuchillos o vigas trianguladas dependen de los momentos que soportan éstos, las consideraciones anteriores tienen gran importancia para el proyecto de cuchillos, lo mismo que en el caso de vigas.

Para que una estructura sea económica, es aconsejable, en el caso de grandes luces, adoptar algunos procedimientos constructivos que reduzcan los momentos flectores a valores menores de los que se producirían con estructuras simplemente apoyadas en sus extremos. En este capítulo se verán ejemplos de algunos de estos métodos, estudiando varios tipos de estructuras de las utilizadas para grandes luces.

8.2 Estructuras con voladizo (cantilever). Generalidades. En una estructura con voladizo se reducen los momentos flectores acortando la luz en que tiene lugar el momento positivo, apoyando una viga de longitud menor que la luz total, en tramos en voladizo que actúan con momento negativo. La estructura de la Fig. 8.1 representa una

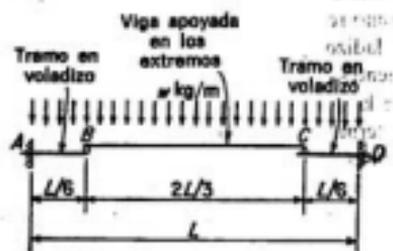


FIG. 8.1. Construcción con voladizos.

construcción cantilever y es estáticamente determinada. El momento máximo en la viga BC es igual a

$$\frac{1}{8}w \left(\frac{2L}{3} \right)^2 = \frac{wL^2}{18}$$

El momento máximo en el tramo en voladizo AB se produce en A y vale

$$-\frac{w}{2} \left(\frac{2L}{3} \right) \left(\frac{L}{6} \right) = w \left(\frac{L}{6} \right) \left(\frac{L}{12} \right) = -\frac{5wL^2}{72}$$

Si se hubiera usado un tramo simple de longitud L , el momento máximo habría sido $+wL^2/8$. Por tanto, en este caso particular, la reducción del momento máximo producido por la adopción de los voladizos es de $wL^2/8$ a $5wL^2/72$, o sea, alrededor del 45 por 100. Se puede aducir que el momento máximo no es el único criterio por el que se puede juzgar el mérito relativo de varios tipos de construcción, pero es un factor importante para determinar qué estructura conviene utilizar para un vano dado. En el proyecto real hay que tener en cuenta los momentos y cortantes a todo lo largo de la estructura, calculados para todos los tipos de cargas, incluyendo sobrecargas.

En muchos casos puede ser difícil conseguir el empotramiento en los apoyos A y D de los voladizos AB y CD de la Fig. 8.1. Sin embargo, el mismo principio de voladizo está presente en la Fig. 8.2, en la que se ha eliminado esa dificultad. Los momentos

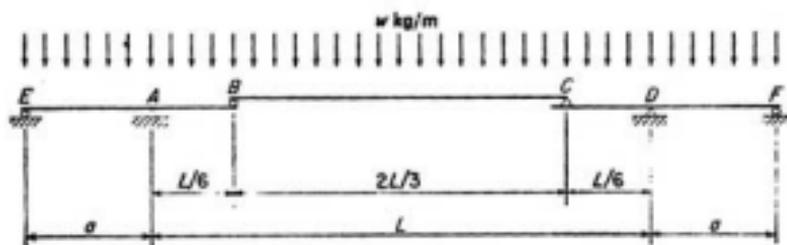


FIG. 8.2. Puente cantilever típico de viga compuesta.

en esta estructura, entre A y D , son idénticos que en la de la Fig. 8.1, pero los de A y D los resisten los tramos laterales AE y DF . Por ejemplo, la reacción en E y la carga aplicada entre E y A mantienen en equilibrio el momento en A .

8.3 Condición estática de las estructuras cantilever. Para que una estructura cantilever sea estáticamente determinada con respecto a sus fuerzas exteriores, debe disponerse de tantas ecuaciones independientes para la determinación de esas fuerzas como reacciones independientes haya en la estructura. Excepto para una viga simple en voladizo, para una estructura cantilever hay siempre más de tres reacciones independientes, pero solo se pueden aplicar a toda la estructura tres ecuaciones independientes de la estática. Para que sea estáticamente determinada, es necesario, pues, introducir determinados dispositivos de construcción que hagan posible la aplicación de las ecuaciones de la estática a ciertas partes de la estructura, obteniendo así varias ecuaciones independientes de condición. Algunos de estos dispositivos de construcción son inherentes a la construcción cantilever; otros deben colocarse ex profeso.

En la estructura de la Fig. 8.3 se ven algunos de esos dispositivos; la articulación en a es uno de ellos, pues se puede aplicar $\Sigma M_a = 0$ a todas las fuerzas que actúan en la parte de la estructura a cualquier lado del nudo a . La articulación en b tiene un efecto similar, pues permite aplicar $\Sigma M_b = 0$ a las fuerzas que actúan en la parte de estructura a uno u otro lado del nudo b .

La articulación en c permite la aplicación de $\Sigma M_c = 0$ a las fuerzas que actúan a uno u otro lado del nudo c ; pero en lugar de utilizar la articulación en c de este modo,

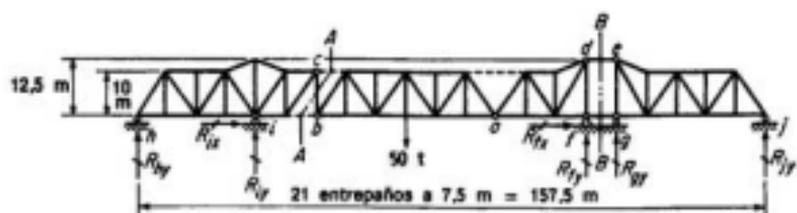


FIG. 8.3. Puente cantilever típico de viga de celosía.

generalmente es más conveniente la interpretación siguiente: Como hay articulaciones en b y en c , la barra bc soporta solo fuerza axial, por lo que no hay componente de fuerza perpendicular a bc , es decir, bc actúa como una biela. Por tanto, se puede deducir que, si se da un corte por bc , la suma de las fuerzas perpendiculares a bc que actúan en un lado o en otro del corte, es nula. Para el caso considerado esto significa que se puede aplicar la ecuación $\Sigma F_x = 0$ a las fuerzas que actúan en la parte de estructura situada a un lado de la sección $A-A$.

La supresión de la diagonal del entrepaño $defg$ constituye otro dispositivo de construcción que permite obtener otra ecuación independiente de la estática respecto a las fuerzas exteriores, pues, como consecuencia, este entrepaño no puede soportar ningún cortante, por lo que se puede aplicar la ecuación $\Sigma F_y = 0$ a las fuerzas que actúan a un lado de la sección $B-B$.

Por tanto, para determinar las reacciones de esta estructura, disponemos de las siete ecuaciones independientes que siguen:

- (1) $\Sigma M = 0$ para todas las fuerzas que actúan en la estructura
- (2) $\Sigma F_x = 0$ para todas las fuerzas que actúan en la estructura
- (3) $\Sigma F_y = 0$ para todas las fuerzas que actúan en la estructura
- (4) $\Sigma M_a = 0$ para todas las fuerzas que actúan a un lado de la articulación a
- (5) $\Sigma M_b = 0$ para todas las fuerzas que actúan a un lado de la articulación b
- (6) $\Sigma F_x = 0$ para todas las fuerzas que actúan a un lado de la sección $A-A$
- (7) $\Sigma F_y = 0$ para todas las fuerzas que actúan a un lado de la sección $B-B$

Hay también siete reacciones independientes, R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} , R_{Cx} , R_{Cy} y R_{Dy} . Se puede comprobar que la estructura es estáticamente determinada con respecto a las fuerzas exteriores e interiores, teniendo en cuenta que el número total de barras (75) más el de reacciones (7) es igual al doble del de nudos (2×41) = 82.

8.4 Análisis de tensiones en cuchillos cantilever. Para determinar las reacciones de la estructura de la Fig. 8.3 debidas a las cargas representadas, se puede proceder como sigue: Supongamos que todas las reacciones actúan en la dirección indicada en la figura.

Aplicando $\Sigma F_x = 0$ a la parte de estructura a la izquierda de la sección $A-A$; se ve que $R_{Ax} = 0$

Aplicando $\Sigma F_y = 0$ a toda la estructura; se ve que $R_{Dy} = 0$

Aplicando $\Sigma M_b = 0$ a la parte de estructura a la izquierda de la articulación b :

$$+R_{Ay}(6)(7,5) + R_{By}(2)(7,5) = 0 \quad R_{By} = -3R_{Ay}$$

Aplicando $\Sigma M_a = 0$ a la parte de estructura a la izquierda de la articulación a :

$$-(50)(3)(7,5) + R_{Ay}(12)(7,5) + (-3R_{Ay})(8)(7,5) = 0 \quad R_{Ay} = -12,5$$

$$R_{By} = -3(-12,5) = +37,5$$

Aplicando $\Sigma F_y = 0$ a la parte de estructura a la izquierda de la sección B-B:

$$-12,5 + 37,5 - 50 - R_{fy} = 0 \quad R_{fy} = +25$$

Aplicando $\Sigma F_y = 0$ a la parte de estructura a la derecha de la sección B-B:

$$+R_{gy} + R_{fy} = 0 \quad R_{gy} = -R_{fy}$$

Finalmente, aplicando $\Sigma M_a = 0$ a la parte de estructura a la derecha de a :

$$-25(3)(7,5) - (-R_{fy})(4)(7,5) - R_{gy}(9)(7,5) = 0$$

$$R_{fy} = -15 \quad R_{gy} = +15$$

Muchas veces se pueden aplicar las ecuaciones disponibles en diferente orden; pero si la estructura es estable, se obtienen los mismos resultados independientemente del orden seguido.

Una vez conocidas las reacciones, se pueden calcular las fuerzas de barra por los métodos habituales usados para los cuchillos estáticamente determinados. Como el estudio se hace para una carga unidad en cualquier nudo, la construcción de líneas de influencia de reacciones o de fuerzas de barra no contiene ninguna dificultad especial, aunque a veces conviene construir primero la correspondiente a una reacción o fuerza de barra distinta de la deseada y utilizarla luego como dato para trazar la definitiva.

Como ejemplo, se puede construir la línea de influencia de la barra a de la estructura de la Fig. 8.4a. Primero se traza la correspondiente a la fuerza en la barra FE, calculando esta fuerza tomando momentos, respecto a D, de las fuerzas que actúan

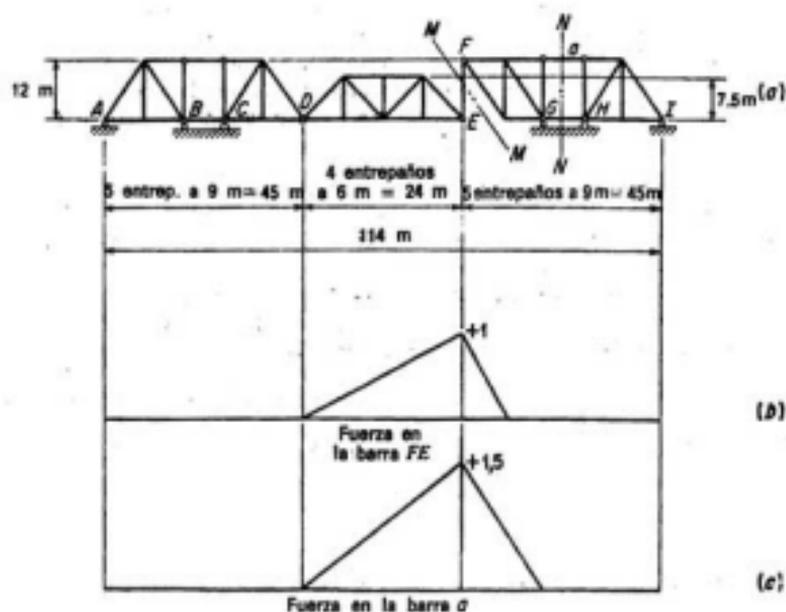


FIG. 8.4. Líneas de influencia de fuerzas de barra típicas.

en la parte de estructura entre D y la sección $M-M$. Luego se dibujará la línea de influencia de la fuerza en la barra a , calculando dicha fuerza tomando momentos respecto a G de las fuerzas que actúan en la estructura entre las secciones $M-M$ y $N-N$. Las fuerzas que intervendrán en las ecuaciones resultantes serán la de la barra FE , la carga unidad aplicada y la propia fuerza en a .

8.5 Estructuras continuas. La reducción del momento máximo que se obtiene al acortar la luz efectiva en la que existe momento positivo con la construcción con voladizo, se puede conseguir también de un modo similar por la continuidad de la estructura, aunque las estructuras continuas son, generalmente, estáticamente indeterminadas. La viga empotrada en sus extremos de la Fig. 8.5a flexará, bajo una carga uniformemente repartida, como se representa por la línea de trazo $ABCD$. En los puntos B y C , el momento cambia de carácter, con lo que la curvatura de la viga flexada se invierte. En esos puntos (llamados *puntos de inflexión*) el momento flector es nulo, por lo que la curva de momentos de la viga AD es igual que sería si hubiese articulaciones en esos puntos de inflexión. Por dificultades de construcción para conseguir los momentos de empotramiento en A y D en estructuras de largas luces, se pueden obtener limitaciones parciales al cambio de pendiente en esos puntos añadiendo tramos laterales, como se ve en la Fig. 8.5b. La situación de los puntos de inflexión B' y C' dependerá de la relación de luces a . El cuchillo continuo de la Fig. 8.5c posee las mismas ventajas de continuidad que la viga continua de la Fig. 8.5b. Con cinco reacciones independientes, este cuchillo continuo es estáticamente indeterminado de segundo grado, y su estudio se basa en métodos que tienen en cuenta las propiedades elásticas de la estructura.

Sin embargo, suprimiendo algunas barras se puede hacer un cuchillo continuo, estáticamente determinado. Este es el caso del cuchillo Wichert¹, inventado y patentado por E. M. Wichert, de Pittsburgh, Pa., en el que se suprimen las barras verticales sobre los puntos de apoyo intermedios, y que está representado en la Fig. 8.6. Esta estructura

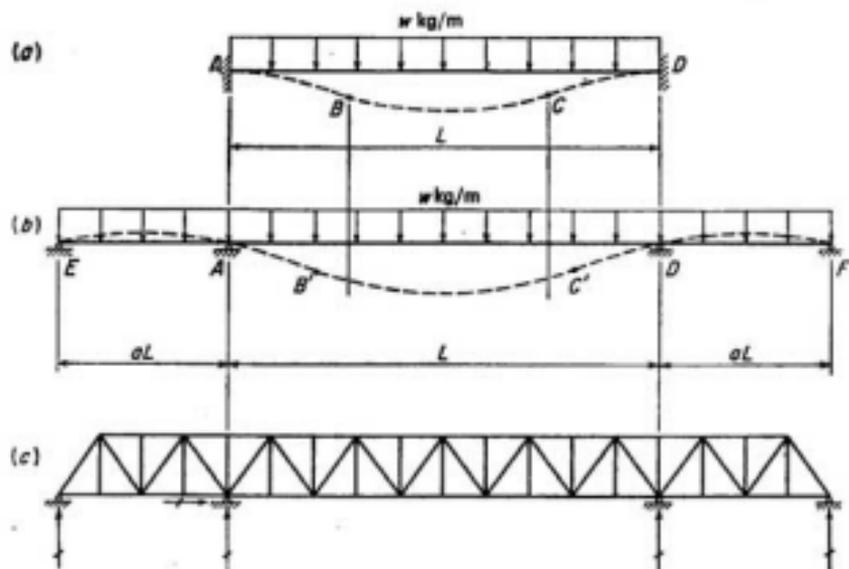


FIG. 8.5. Estructuras continuas.

¹ Véase D. B. Steinman, «The Wichert Truss», D. Van Nostrand Company Inc., Nueva York, 1932.

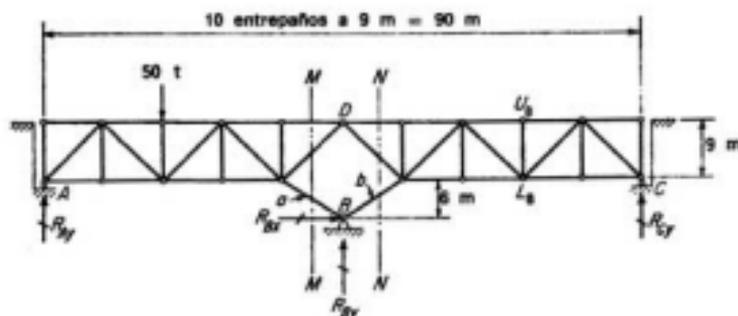


FIG. 8.6. Cuchillo Wichert.

tiene 40 barras y 4 reacciones, es decir, un total de 44 incógnitas; hay 22 nudos y, por tanto, 44 ecuaciones de la estática para determinar las fuerzas interiores y exteriores; por consiguiente, tiene el número exacto para ser estáticamente determinada y en realidad lo es, excepto cuando se dan ciertas inclinaciones a las barras α y β , en cuyo caso es posible que sea geoméricamente inestable, caso que se reconoce por los resultados incompatibles que se obtienen al aplicar las ecuaciones de la estática.

Para la estructura de la Fig. 8.6, sobre la que actúa la carga representada, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ para toda la estructura demuestra que $R_{Bx} = 0$. Para determinar las reacciones verticales se puede proceder de la forma siguiente: Tomando momentos respecto a D de las fuerzas situadas a la derecha de la sección $N-N$ y suponiendo que todas las reacciones verticales están dirigidas hacia arriba,

$$\begin{aligned} -R_{Cy}(5)(9) + X_b(15) &= 0 & X_b &= +3R_{Cy} \\ Y_b &= +\frac{3}{2}X_b = +2R_{Cy} \end{aligned}$$

Tomando momentos respecto a D de las fuerzas a la izquierda de la sección $M-M$,

$$\begin{aligned} +R_{Ay}(5)(9) - 50(3)(9) - X_a(15) &= 0 & X_a &= +3R_{Ay} - 90 \\ Y_a &= +\frac{3}{2}X_a = +2R_{Ay} - 60 \end{aligned}$$

Aplicando $\Sigma F_y = 0$ al nudo B ,

$$+R_{By} + 2R_{Cy} + 2R_{Ay} - 60 = 0$$

de donde

$$R_{By} = 60 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy}$$

Como la ecuación anterior expresa la reacción en el centro en función de las dos reacciones de los extremos, se pueden determinar éstas aplicando $\Sigma M = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ a toda la estructura. Para $\Sigma M_A = 0$,

$$+50(2)(9) - (60 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy})(5)(9) - R_{Cy}(10)(9) = 0$$

Para $\Sigma F_y = 0$,

$$R_{Ay} - 50 + (60 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy}) + R_{Cy} = 0$$

La resolución del sistema formado por estas dos ecuaciones conduce a $R_{Ay} = +20$ y $R_{Cy} = -10$, de donde $R_{By} = 60 - 2(+20) - 2(-10) = +40$.

Conocidas las reacciones, el análisis de las fuerzas de barra ya no presenta dificultad. Como se puede hacer un estudio, del modo antes dicho, para una carga unidad en un nudo cualquiera, se pueden construir las líneas de influencia de las reacciones y las fuerzas de barra.

8.6 Arcos. Generalidades. Otro método para reducir los momentos máximos en las estructuras de grandes luces consiste en adoptar una disposición estructural en la que las cargas verticales aplicadas producen reacciones horizontales, que actúan de tal modo que los momentos que producen tienden a disminuir el valor de los que existirían en otro caso. La Fig. 8.7 representa un arco, que es una estructura que produce

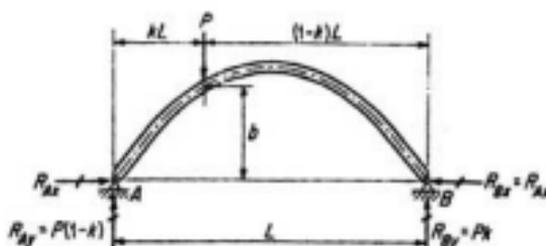


FIG. 8.7. Arco bi-articulado.

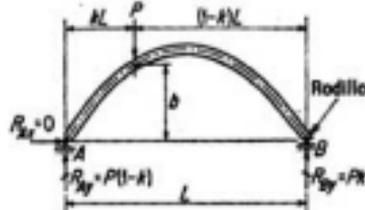


FIG. 8.8. Viga curva.

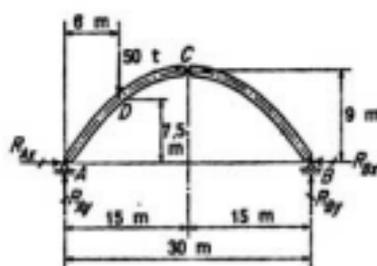


FIG. 8.9. Arco tri-articulado.

reacciones horizontales de empuje cuando está sometida a cargas verticales. Este arco particular es del tipo bi-articulado. Las reacciones verticales de esta estructura se pueden determinar por la estática, tomando momentos, respecto a la articulación de un extremo, de todas las fuerzas que actúan en el arco, cuando actúa la carga P representada, tienen los valores dados en la figura. La relación entre las reacciones horizontales R_{Ax} y R_{Bx} se puede determinar por la estática ($\sum F_x = 0$), pero solamente se pueden hallar sus valores reales con un estudio elástico, pues con cuatro reacciones independientes este arco bi-articulado es indeterminado en primer grado.

Si se sustituyera la articulación de un extremo por un rodillo, como se ve en la Figura 8.8, la estructura no sería un arco, sino una viga curva estáticamente determinada, y el momento flector en el punto de aplicación de la carga igual a $P(1 - k)L$. Sin embargo, para el arco bi-articulado de la Fig. 8.7, este momento se reduce en $R_{Ax}b$.

Se puede hacer que un arco sea estáticamente determinado colocando una tercera articulación en un punto intermedio, tal como la clave, además de las dos de los extremos. Esta estructura, representada en la Fig. 8.9, es el arco tri-articulado. Tiene cuatro reacciones independientes; se pueden aplicar tres ecuaciones de la estática a la es-

estructura en conjunto, y obtener una ecuación de condición tomando momentos respecto a la articulación C de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la misma. Así, tomando momentos respecto a A de todas las fuerzas que actúan en la estructura, se obtiene

$$R_{By} = +50\left(\frac{9}{30}\right) = +10$$

De igual modo, tomando momentos respecto a la articulación B , $R_{Ay} = +50\left(\frac{24}{30}\right) = +40$. Ahora, tomando momentos respecto a C de las fuerzas que actúan en la parte de estructura a la derecha de esta articulación,

$$+R_{Bx}(9) - 10(15) = 0 \quad R_{Bx} = +16,6$$

Aplicando $\Sigma F_x = 0$ a toda la estructura, $R_{Ax} = +16,6$.

El momento en el punto de aplicación de la carga está dado por

$$M_D = +40(6) - 16,6(7,50) = +115,5 \text{ m t}$$

Para una viga simplemente apoyada con la misma luz y carga, el momento en la carga sería igual a $+40(6) = +240 \text{ m t}$, por lo que la construcción en arco ha reducido este momento en el 52 por 100. Sin embargo, el arco debe soportar una compresión que no existe en la viga apoyada en sus extremos. Por ejemplo, la compresión en la clave C del arco de la Fig. 8.9, en que el nervio es horizontal, es igual a la reacción horizontal, por lo que para la carga considerada tiene un valor de $-16,6 \text{ t}$. No obstante, generalmente es más económico soportar cargas por medio de esfuerzos axiales uniformes que por esfuerzos de flexión, aunque si el esfuerzo axial es de compresión, hay que proporcionar estabilidad contra el pandeo elástico.

8.7 Análisis del arco tri-articulado de celosía. Los nervios AC y BC del arco de la Fig. 8.9 se pueden sustituir por armaduras, como se ve en la Fig. 8.10. Como en esta estructura hay cuatro reacciones, sería estáticamente indeterminada si no fuera por la articulación en e que existe realmente, pues la barra EF , representada de trazos, está unida en sus extremos de forma que no puede soportar fuerza axial.

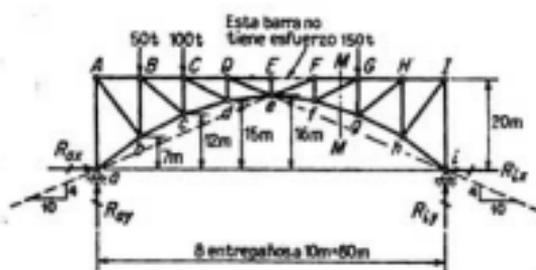


FIG. 8.10. Arco de celosía tri-articulado.

Las reacciones de esta estructura se pueden calcular como sigue: Tomando momentos respecto de a de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura,

$$+50(10) + 100(2)(10) + 150(6)(10) - R_{Iy}(8)(10) = 0$$

$$R_{Iy} = +143,75 \text{ t}$$

Haciendo $\Sigma F_x = 0$ para todas las fuerzas que actúan sobre la estructura

$$+R_{ey} - 50 - 100 - 150 + 143,75 = 0 \quad R_{ey} = +156,25 \text{ t}$$

Para obtener R_{ex} , aplicaremos $\Sigma M = 0$ respecto a la articulación e , considerando las fuerzas a la derecha de este punto.

$$+150(2)(10) + R_{ex}(16) - 143,75(4)(10) = 0 \quad R_{ex} = +172 \text{ t}$$

Como $\Sigma F_x = 0$ para toda la estructura, R_{ex} es también igual a $+172 \text{ t}$. Se podría haber calculado R_{ex} tomando momentos respecto a e de las fuerzas a la izquierda de esta articulación obteniendo

$$+156,25(4)(10) - R_{ex}(16) - 50(3)(10) - 100(2)(10) = 0 \\ R_{ex} = +172 \text{ t}$$

Al calcular fuerzas de barra, no debe omitirse el efecto de las reacciones horizontales. Por ejemplo, para calcular la fuerza en FG , tomando momentos respecto a f de las fuerzas a la derecha de la sección $M-M$,

$$+150(10) + 172(15) - 143,75(30) - F_{FG}(5) = 0 \quad F_{FG} = -46,5 \text{ t}$$

Si no hay ninguna carga entre la articulación del centro y uno de los extremos de la armadura, la reacción resultante en ese extremo debe tener una dirección tal que pase por la articulación central, porque el momento respecto a ésta de las fuerzas que actúan en ese lado de la estructura ha de ser nulo. Así, si consideramos la acción de una carga unidad vertical en B , en la estructura de la Fig. 8.10, $R_{ey} = +\frac{1}{8}$; como la reacción resultante en i actúa según la línea de trazos que pasa por i y e , se deduce inmediatamente que

$$R_{ix} = +\frac{1}{8}(\frac{19}{4}) = +\frac{19}{32}$$

Este hecho es conveniente muchas veces en el análisis, particularmente en la construcción de las líneas de influencia.

Si el arco tri-articulado de la Fig. 8.10 estuviera sometido a cargas iguales por entrepaño en todos los nudos del cordón superior (o en todos los del inferior), se producirían las siguientes condiciones de tensión: 1) La fuerza en cada barra del cordón superior sería nula. 2) La fuerza en las diagonales sería nula. 3) La fuerza en cada montante sería igual a la carga por entrepaño del cordón superior. 4) La componente horizontal de la fuerza en todas las barras del cordón inferior sería la misma e igual a las reacciones horizontales. El estudiante puede comprobar estos hechos que le resultarán útiles, por ejemplo, al calcular las fuerzas de barra debidas a las cargas fijas para una carga uniformemente repartida. Estas condiciones son ciertas por estar los nudos del cordón inferior en una parábola. Si se trazara un polígono funicular de las cargas consideradas, que pasara por las tres articulaciones, coincidiría con el cordón inferior.

8.8 Líneas de influencia de arcos de celosía tri-articulados. Se pueden construir las líneas de influencia de un arco de celosía tri-articulado considerando las posiciones sucesivas de la carga unidad, pero muchas veces es más conveniente utilizar un método similar al siguiente: Construyamos la línea de influencia de la barra FG de la estructura de la Fig. 8.10. Primero trazaremos la línea de la parte de fuerza correspondiente

solo a la carga unidad y las reacciones verticales. Como estas reacciones tienen el mismo valor que tendrían si se tratara de una viga apoyada en sus extremos, la línea de influencia de esta fracción de la fuerza es un triángulo con su valor máximo cuando la carga está sobre el centro de momentos f , en cuyo punto la ordenada es igual a $-\frac{3}{4}(\frac{19}{5}) = -3,75$, como se ve en la Fig. 8.11a. Ahora construiremos la línea de in-

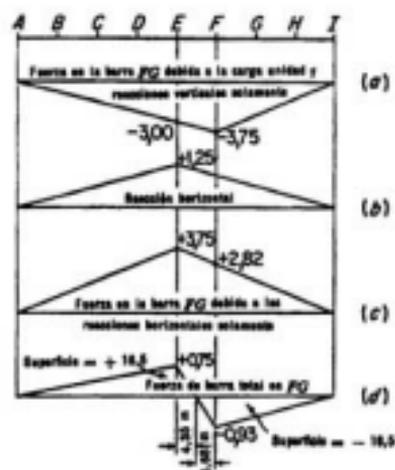


FIG. 8.11. Líneas de influencia para el arco de la Fig. 8.10.

fluencia de $R_{ax} = R_{ix}$. Cuando la carga unidad se traslada de A a E , R_{ix} y como consecuencia R_{ix} (que es igual a $\frac{3}{2}R_{ix}$) aumenta linealmente. Cuando la carga está en E , R_{ix} es igual a $\frac{3}{2}(\frac{1}{2}) = +1,25$. Por tanto, la línea de influencia de $R_{ax} = R_{ix}$ es una recta que va desde cero en A hasta $+1,25$ en E . Por un razonamiento similar, considerando las reacciones en a , se ve que la línea de influencia de $R_{ax} = R_{ix}$ es una recta que va de $+1,25$ en E a cero en I . En la Fig. 8.11b se ha representado esta línea. La fuerza en la barra FG debida a las reacciones horizontales es igual a

$$+R_{ix}(\frac{13}{5}) = +3R_{ix}$$

Por tanto, la línea de influencia para esta fracción de la fuerza en la barra FG es un triángulo con su vértice superior en E , en cuyo punto la ordenada vale $+3(+1,25) = +3,75$, como se ve en la Fig. 8.11c. La línea de influencia de la fuerza total en FG se halla ya superponiendo las de las Figs. 8.11a y c, obteniéndose la de la Figura 8.11d.

Se observará que el área total bajo esta línea de influencia es nula, como debía suceder, pues una carga uniforme sobre toda la estructura no produce fuerzas en las barras del cordón superior.

8.9 Arcos tri-articulados de celosía con apoyos a diferente altura. Los puntos de apoyo de un arco de celosía tri-articulado pueden estar a distinta altura, como se ve en la Fig. 8.12. Las reacciones verticales serán diferentes de los valores que tendrían para un cuchillo apoyado en sus extremos, pues cuando se toman momentos respecto a uno de los apoyos, interviene en la ecuación la reacción horizontal en el extremo más alejado. No obstante, se pueden hallar las reacciones por la estática. Considerando la

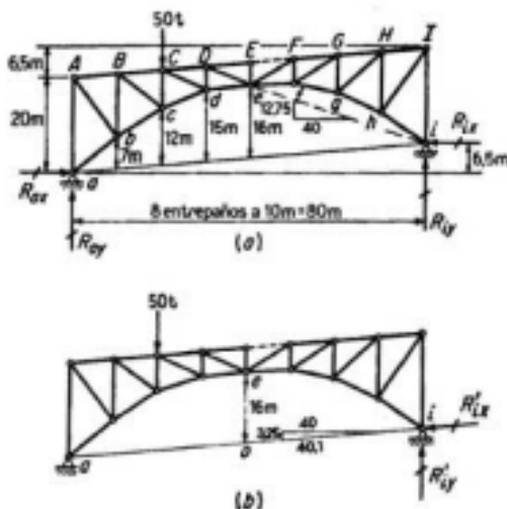


FIG. 8.12. Apoyos a distinta altura.

Fig. 8.12a y tomando momentos respecto a a de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura,

$$+50(20) - R_{ix}(6.5) - R_{iy}(80) = 0$$

de donde

$$R_{ix} = +153 - 12.3R_{iy}$$

Ahora, tomando momentos respecto a la articulación e de las fuerzas que actúan a su derecha,

$$+R_{ix}(12.75) - R_{iy}(40) = 0$$

$$R_{iy} = +12.75/40R_{ix} = +12.75/40(+153 - 12.3R_{iy})$$

de donde

$$R_{iy} = +9.9 \text{ t} \quad \text{y} \quad R_{ix} = +153 - 12.3(9.9) = +31.2 \text{ t}$$

El procedimiento anterior requiere la resolución de un sistema de dos ecuaciones, que se podría haber evitado tomando las reacciones como en la Fig. 8.12b, en la que R'_{ix} actúa según la recta que pasa por los dos puntos de apoyo, mientras que R'_{iy} , aunque es una reacción vertical, difiere de R_{iy} , pues R'_{ix} tiene una componente vertical. Tomando momentos respecto a a ,

$$+50(20) - R'_{iy}(80) = 0 \quad R'_{iy} = +12.5$$

Tomando momentos respecto a e y considerando que R'_{ix} pasa por el punto o ,

$$+ \frac{40}{40.1} R'_{ix}(16) - 12.5(40) = 0$$

de donde $R'_{ix} = +31.5 \text{ t}$. Por tanto, la reacción horizontal verdadera en i está dada por

$$R_{ix} = +31.5 \left(\frac{40}{40.1} \right) = +31.2 \text{ t}$$

mientras que la reacción vertical verdadera en i es

$$R_{iy} = +12,5 - \frac{3,25}{40,1} (31,2) = +9,9 \text{ t}$$

En el caso particular considerado, como no hay ninguna carga aplicada a la derecha de la articulación e , podríamos haber deducido inmediatamente que la resultante en i pasaría por e , de donde

$$\bar{R}_{ix} = 40/12,75 R_{iy} = +3,14 R_{iy}$$

y tomando momentos respecto a a ,

$$+50(20) - 3,14 R_{iy}(6,5) - R_{iy}(80) = 0$$

de donde

$$R_{iy} = +9,9 \text{ t} \quad \text{y} \quad R_{ix} = +9,9(+3,14) = +31,2 \text{ t}$$

8.10 Puentes colgantes. Un método importante para reducir los momentos flectores en estructuras de gran luz consiste en proporcionar apoyos parciales en puntos situados a lo largo del vano por medio de un sistema de cables, como en un puente colgante. Considerando la Fig. 8.13, un puente colgante se construye generalmente de forma

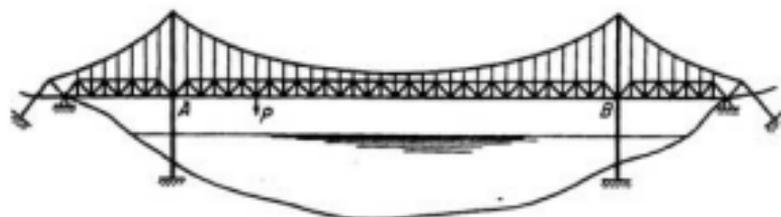


FIG. 8.13. Puente colgante.

que el cable soporte todas las cargas fijas. Cuando se aplica una sobrecarga a esa estructura, la tracción de las barras de tracción transmite al cable una gran parte de esa sobrecarga. Por ello, el cuchillo de rigidez AB no está sometido a momentos de la carga fija y los de la sobrecarga que debe soportar están considerablemente reducidos. Para estructuras de grandes luces, esto es de gran importancia, porque el cable en tracción puede soportar mucha parte de la carga, lo que es una forma muy eficaz de sustentar cargas.

Un puente colgante tal como el de la Fig. 8.13 es estáticamente indeterminado, pero introduciendo algunos dispositivos constructivos se puede hacer determinado. En la Sec. 10.10 se estudian los puentes colgantes estáticamente determinados.

8.11 Problemas para resolver

***Problema 8.1** a) Construir la línea de influencia de la reacción vertical en A de la estructura de la Fig. 8.2, tomando $a = L/2$.

b) ¿Qué relación habrá entre la reacción máxima en A debida a una sobrecarga uniforme de 1.000 kg por m y la carga máxima sobre la pila que se produciría en A si EA , AD y DF fueran tramos simplemente apoyados?

***Problema 8.2** Para el puente cantilever de la Fig. 8.3 trazar la línea de influencia de a) la fuerza en bc ; b) la reacción vertical en i ; c) la fuerza en la barra del cordón superior de . d) Calcular la fuerza máxima en la barra de debida a las cargas siguientes: carga fija, 4.000 kg por m; sobrecarga uniforme, 2.000 kg por m; sobrecarga aislada, 5.000 kg.

Problema 8.3 Determinar las fuerzas en todas las barras del cuchillo Wichert de la Figura 8.6 debidas a una carga de 50 t en D .

***Problema 8.4** Construir la línea de influencia de la reacción en A del cuchillo Wichert de la Figura 8.6.

Problema 8.5 Un cuchillo Wichert de tres tramos es igual, a cada lado de su eje de simetría, a la parte de la Fig. 8.6 situada a la izquierda de $U_3 L_3$, excepto que la pila simétrica a la B tiene un apoyo de rodillo. Calcular las reacciones debidas a una sobrecarga uniforme de w kg por m sobre toda la estructura, aplicada a los nudos del cordón superior.

Problema 8.6 Calcular el cortante y la fuerza axial en el punto D de la estructura de la Figura 8.9 debida a la carga representada, suponiendo que la pendiente del nervio del arco es en D de 30° con la horizontal.

Problema 8.7 Calcular las fuerzas de barra en todos los elementos del arco tri-articulado de la Fig. 8.10 debidas a una carga uniforme de 1.500 kg por m aplicada en toda la longitud de la estructura. Las cargas de entrepaño se aplicarán en los nudos del cordón superior.

***Problema 8.8** Construir la línea de influencia de la fuerza en la barra bc de la estructura de la Figura 8.10.

Problema 8.9 ¿Cuál es la fuerza máxima en la barra Bc de la estructura de la Fig. 8.10 debida a las siguientes cargas: carga fija, 1.500 kg por m; sobrecarga uniforme, 750 kg por m; sobrecarga aislada, 2.500 kg.

***Problema 8.10** Resolver el Prob. 8.8 para la Figura 8.12a.

***Problema 8.11** Resolver el Prob. 8.9 para la Figura 8.12a.

Problema 8.12 Construir las líneas de influencia de las reacciones de las estructuras representadas en la Figura 8.14.

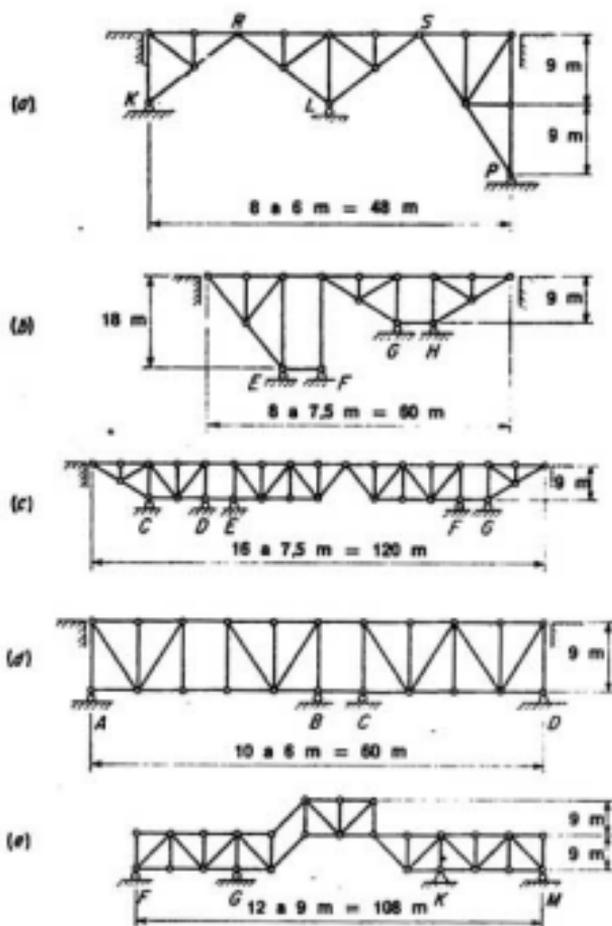


FIG. 8.14. Problema 8.12.

9

Armaduras tri-dimensionales

9.1 Introducción. Aunque casi todas las estructuras de ingeniería son tri-dimensionales, casi siempre es admisible dividir las estructuras planas y estudiar cada una de éstas para las cargas situadas en su plano. Consideremos, por ejemplo, un puente de carretera de tablero inferior de cuchillos paralelos. Es una estructura tridimensional, pero se puede dividir en seis estructuras parciales, todas ellas planas, constituidas por los dos cuchillos principales verticales, el sistema lateral del cordón superior, el sistema lateral del cordón inferior y los dos pórticos extremos. Muchas veces, algún elemento se puede considerar formando parte de más de una estructura plana parcial: por ejemplo, una barra de cordón inferior del sistema lateral. Esto no causa dificultades, pues se pueden calcular las tensiones en tales barras para cada estructura parcial en la que interviene, y superponerlas para hallar la tensión total.

No obstante, en algunas estructuras tridimensionales están relacionadas entre sí las tensiones en elementos no situados en un plano, de tal modo que no puede llevarse a cabo su estudio considerando estructuras planas parciales. Para ellas, es necesaria una consideración especial del análisis de las estructuras tridimensionales.

Entre las estructuras que entran en este último caso figuran las torres, postes con contravientos, grúas, estructuras de cúpulas y de aviones, por no citar más que algunas. Estas estructuras pueden ser estáticamente determinadas o indeterminadas. En este capítulo consideraremos las estructuras tridimensionales estáticamente determinadas, pero los métodos para estudiar las estáticamente indeterminadas que se dan en otras partes de este libro son aplicables, en principio, a las tridimensionales estáticamente indeterminadas.

En el estudio que vamos a hacer, tomaremos como referencia tres ejes coordenados. Los ejes OX y OY serán como los utilizados para las estructuras planas, esto es, el OX horizontal y el OY vertical; el tercer eje, OZ , es horizontal y perpendicular al plano XOY .

Se hace observar que el método fundamental para estudiar las estructuras tridimensionales es el mismo utilizado para las planas. Se puede aplicar cualquier ecuación de la estática a toda la estructura, o a una parte de ella. Sin embargo, hay más ecuaciones de la estática disponibles, pues se pueden sumar las fuerzas según un nuevo eje de coordenadas, y tomar momentos respecto a dos nuevos ejes.

9.2 Condición de la estática. Generalmente se supone que los elementos de una armadura tridimensional están unidos entre sí por medio de pasadores de modo que soporten solo fuerzas axiales¹. Por tanto, solo hay una componente independiente de

¹ Esta junta esférica se representará por pequeños círculos abiertos en la representación de los entramados espaciales por diagramas lineales.

la fuerza de barra en cada elemento; aunque cada uno pueda tener tres componentes de la fuerza de barra, paralelas a cada uno de los ejes coordenados, se puede hallar la relación entre esas tres componentes a partir de las proyecciones del elemento.

En un punto de apoyo de una armadura espacial, es posible tener tres componentes independientes de las reacciones, aunque pueda proyectarse la estructura de tal forma que una o más de dichas componentes sea nula. En la Fig. 9.1a el apoyo articulado representado, que en realidad es una junta universal, puede producir tres reacciones independientes, R_{ox} , R_{oy} y R_{oz} . Supongamos que se sustituye la articulación por un rodillo, como se ve en la Fig. 9.1b. Como éste no resiste más que al movimiento horizontal en la dirección Z, pueden producirse las reacciones R_{oy} y R_{oz} , pero R_{ox} es igual a cero. Si se sustituye el rodillo por una junta esférica, no puede haber reacción horizontal en ningún sentido y solo se puede producir la vertical R_{oz} . Este caso es el representado en la Fig. 9.1c. A veces puede ser conveniente representar estos tres apoyos típicos por un número equivalente de *bielas*. Por ejemplo, el apoyo de junta universal de la Fig. 9.1a

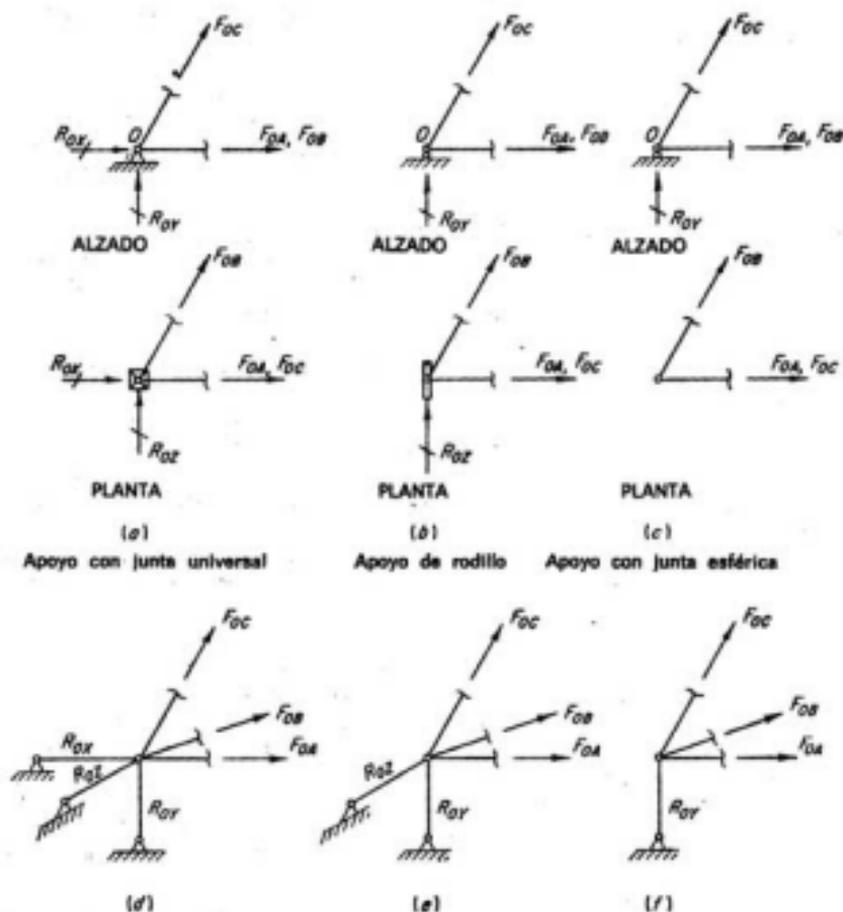


FIG. 9.1. Apoyos típicos de armaduras espaciales.

es equivalente a tres bielas concurrentes y no coplanarias, tal como se muestra en perspectiva en la Fig. 9.1d; el apoyo de rodillo de la Fig. 9.1b, a las dos bielas concurrentes en el plano YOZ, que aparecen en la Fig. 9.1e; y el apoyo de junta esférica de la Figura 9.1c, a la biela en la dirección OY de la Figura 9.1f.

Para representar en planta estos tres tipos de apoyo, se trazarán líneas de trazos gruesos según las líneas de acción en que pueden existir reacciones horizontales, como se ha hecho en la Fig. 9.2, en la que (a) representa un apoyo del tipo de articulación en el que pueden producirse reacciones horizontales en las direcciones X y Z; (b) un apoyo del tipo de rodillo, con el rodillo colocado de forma que solo pueda haber reacción horizontal en la dirección Z; (c) representa un apoyo del mismo tipo que (b) con el rodillo colocado de modo que se pueda producir reacción horizontal solo en la dirección X; y (d) un apoyo del tipo esférico, en el que no puede haber reacción horizontal.

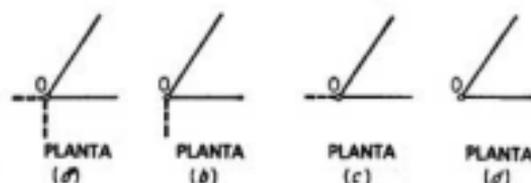


FIG. 9.2. Representación de las componentes horizontales de las reacciones.

Así, el número total de elementos de esfuerzo independientes desconocidos que aparecen en el estudio de una armadura tridimensional es igual al número de barras más el de componentes de reacción independientes (o bielas), de los que hay uno, dos o tres en cada punto de apoyo, según el tipo de construcción usado en este punto.

Para una armadura tridimensional, se pueden escribir seis ecuaciones de la estática independientes, relativas al equilibrio de las fuerzas exteriores y las reacciones que actúan en toda la estructura. Si OX, OY, OZ representan los tres ejes coordenados estas ecuaciones son $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$ y $\Sigma M_z = 0$. ΣM_x representa la suma de los momentos, respecto al eje OX, de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura, etc.

Por tanto, se puede concluir que es condición necesaria (pero no suficiente) para que una armadura tridimensional sea determinada estáticamente, con respecto a las fuerzas exteriores, que el número total de componentes independientes de reacción sea igual a seis.

Si consideramos ahora a la vez las fuerzas interiores y las exteriores, se pueden escribir tres ecuaciones de la estática independientes para cada nudo, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$. Las fórmulas de la estática aplicadas a la estructura completa no darán más ecuaciones independientes. Por tanto, se puede concluir que una condición necesaria (pero no suficiente) para que una armadura tridimensional sea estáticamente determinada, con respecto a las fuerzas interiores y exteriores, es que el número total de barras más el de componentes de reacción independientes sea igual al triple del número de nudos.

La aplicación de estos principios se ve claramente con la Fig. 9.3a. Considerando primeramente solo las fuerzas exteriores, si las reacciones horizontales están dispuestas como se ve en el plano de planta, hay un total de 9 componentes de reacción independientes, por lo que la estructura es indeterminada de $9 - 6 =$ tercer grado. Si se sustituyen las articulaciones por rodillos, de modo que las reacciones horizontales actúen como se indica en la Fig. 9.3b, el número de reacciones independientes es seis, y la estructura es estáticamente determinada. Sin embargo, supongamos que los rodillos están colocados de forma que las reacciones horizontales tengan las direcciones indi-

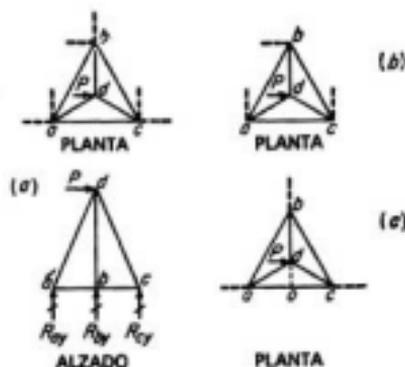


FIG. 9.3. Disposición de las reacciones para la estabilidad.

cadadas en la Fig. 9.3c. Aunque el recuento numérico indica que esta estructura es estáticamente determinada con respecto a sus fuerzas exteriores, en realidad es inestable. Por ejemplo, la reacción en Z en b, evidentemente tendrá dos valores, según se determine aplicando $\Sigma F_z = 0$ para toda la estructura (en cuyo caso es igual a cero) o se calcule aplicando la ecuación $\Sigma M_x = 0$ respecto a un eje vertical que pase por a (en cuyo caso debe tener un valor). Esto demuestra que el recuento numérico, aunque es una condición necesaria para la determinación estática, no es un criterio suficiente. Las reacciones deben estar colocadas de modo que puedan resistir una traslación a lo largo y una rotación respecto de cada uno de los tres ejes coordenados, para que una estructura tridimensional pueda ser estable. Las reacciones representadas en la Fig. 9.3c pasan todas por el punto o; no pueden resistir una rotación respecto a un eje vertical que pase por ese punto.

Considerando las fuerzas interiores y exteriores, en la Fig. 9.3a hay 15 incógnitas independientes: 6 fuerzas de barra y 9 componentes de reacción. Hay 4 nudos, y, por tanto, $4 \times 3 = 12$ ecuaciones de la estática independientes. La estructura es, pues, estáticamente indeterminada de $15 - 12 =$ tercer grado. Con las reacciones horizontales dispuestas como en la Fig. 9.3b, hay solo 12 incógnitas independientes: 6 fuerzas de barra y 6 reacciones, mientras que sigue habiendo 12 ecuaciones. Por tanto, la estructura es estáticamente determinada respecto a las fuerzas interiores y exteriores.

9.3 Determinación de las reacciones. Si una armadura tri-dimensional es estáticamente determinada respecto a las fuerzas exteriores y solo está apoyada en tres puntos, se pueden determinar fácilmente las reacciones aplicando las ecuaciones de la estática a la estructura entera. Cuando hay más de tres puntos de apoyo, generalmente es necesario determinar alguna, o todas, las fuerzas de barra antes de poder calcular las reacciones. En este artículo se considerarán las estructuras cuyas reacciones se puedan determinar directamente.

Determinemos primero las reacciones verticales de la Fig. 9.4. Si se toman momentos respecto a un eje horizontal que pase por dos puntos de apoyo cualesquiera, la única incógnita que aparece en la ecuación es la reacción vertical en el tercer punto de apoyo. Aplicando $\Sigma M_x = 0$ respecto a ac como eje, la única fuerza exterior que puede tener un momento es R_{ay} , por lo que $R_{ay} = 0$. Aplicando $\Sigma M_z = 0$ respecto a la línea de acción de R_{ay} ,

$$+5.000(6) - R_{cy}(6) = 0$$

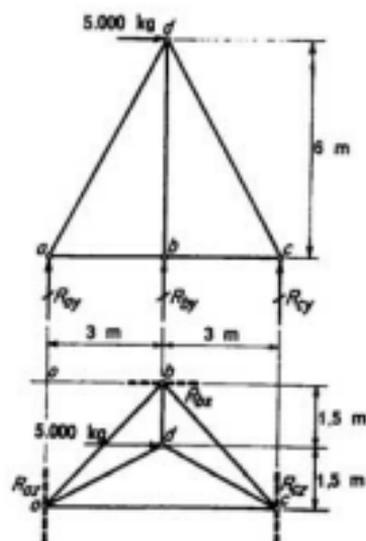


FIG. 9.4. Determinación de las reacciones.

de donde $R_{ay} = +5.000$ kg. Aplicando $\Sigma F_y = 0$ a toda la estructura,

$$R_{ay} + 5.000 = 0$$

de donde $R_{ay} = -5.000$ kg.

Para determinar las reacciones horizontales, si se aplica $\Sigma M_y = 0$ respecto a un eje vertical que pase por la intersección de las líneas de acción de dos reacciones horizontales, la única incógnita que figurará en la ecuación resultante será la tercera reacción horizontal. Tomando momentos, por ejemplo, respecto a un eje vertical que pase por el punto o y suponiendo que R_{cx} actúa hacia la parte de atrás de la estructura,

$$-5.000(1,5) - R_{cx}(6) = 0 \quad R_{cx} = -1.250 \text{ kg}$$

Aplicando ahora $\Sigma F_x = 0$ a toda la estructura y suponiendo que R_{ax} actúa hacia la parte de atrás de la estructura,

$$R_{ax} - 1.250 = 0 \quad R_{ax} = +1.250 \text{ kg}$$

Finalmente, aplicando $\Sigma F_x = 0$ a toda la estructura y suponiendo que R_{ax} actúa hacia la izquierda,

$$+5.000 - R_{ax} = 0 \quad R_{ax} = +5.000 \text{ kg}$$

Como sucedía con las estructuras planas, las ecuaciones de la estática aplicadas y el orden en que se aplican, pueden variar de acuerdo con el ingenio del calculista.

9.4 Determinación de fuerzas de barra. Una barra de una armadura tri-dimensional puede tener proyecciones según cada uno de los tres ejes coordenados. Puede verse un ejemplo en la Fig. 9.5 en la que la barra ab tiene las proyecciones ax , ay y az

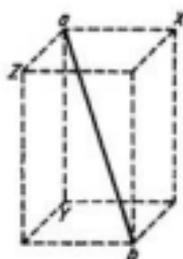


FIG. 9.5. Proyecciones de una barra.

en las direcciones de los ejes OX , OY y OZ , respectivamente. La longitud de la barra ab en función de sus proyecciones, está dada por

$$ab = [(ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2]^{1/2}$$

Como la fuerza F_{ab} es axial, sus componentes paralelas a los ejes coordenados son

$$X_{ab} = F_{ab} \frac{ax}{ab} \quad Y_{ab} = F_{ab} \frac{ay}{ab} \quad Z_{ab} = F_{ab} \frac{az}{ab}$$

Es fácil expresar una componente de una fuerza en función de cualquiera de las otras, combinando estas relaciones. Por ejemplo, $X_{ab} = Y_{ab}(ax/ay)$, etc.

En un nudo cualquiera, en el que las barras que convergen no están en el mismo plano, se dispone de tres ecuaciones de la estática para determinar las fuerzas de barra. Por tanto, si no se juntan en él más de tres barras con fuerza desconocida, éstas se pueden determinar. Este método general, que es el de los nudos ampliado a tres dimensiones, se verá más claro aplicándolo al nudo d de la estructura de la Fig. 9.4¹. Primero prepararemos la siguiente tabla de dimensiones:

Tabla 9.1

Barra	Longitud	Proyecciones		
		X	Y	Z
ad	6,87	3	6	1,5
bd	6,18	0	6	1,5
cd	6,87	3	6	1,5
ab	4,24	3	0	3
bc	4,24	3	0	3
ac	6	6	0	0

En el nudo d , suponiendo que todas las barras están sometidas a tracción, se pueden escribir las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad +5.000 - X_{ad} + X_{cd} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad -Y_{ad} - Y_{bd} - Y_{cd} = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \quad +Z_{ad} - Z_{bd} + Z_{cd} = 0 \end{aligned}$$

¹ Se observará que solo se da esta aplicación particular como ejemplo de un procedimiento de interés general. Se puede simplificar notablemente el estudio de este nudo aplicando el Teorema I de la Sección 9.6.

Se pueden expresar las nueve componentes de las fuerzas de barra que intervienen en estas tres ecuaciones en función de las tres fuerzas de barra independientes F_{ad} , F_{bd} y F_{cd} , como sigue:

$$\begin{aligned} +5.000 - \frac{3}{6,87} F_{ad} + \frac{3}{6,87} F_{cd} &= 0 \\ -\frac{6}{6,87} F_{ad} - \frac{6}{6,18} F_{bd} - \frac{6}{6,87} F_{cd} &= 0 \\ +\frac{1,5}{6,87} F_{ad} - \frac{1,5}{6,18} F_{bd} + \frac{1,5}{6,87} F_{cd} &= 0 \end{aligned}$$

La resolución de este sistema conduce a

$$F_{ad} = +5.725 \text{ kg} \quad F_{bd} = 0 \quad F_{cd} = -5.725 \text{ kg}$$

En esta estructura particular se pueden determinar primero las reacciones verticales, como se ve en la Fig. 9.3 y luego calcular más fácilmente las fuerzas en las barras ad , bd y cd aprovechando este hecho. En el nudo a , por ejemplo, la reacción vertical actúa hacia abajo y es igual a $+5.000$ kg. Aplicando $\Sigma F_y = 0$ al nudo a ,

$$\begin{aligned} -5.000 + Y_{ad} &= 0 \quad Y_{ad} = +5.000 \\ F_{ad} = +5.000 \left(\frac{6,87}{6} \right) &= +5.725^* \end{aligned}$$

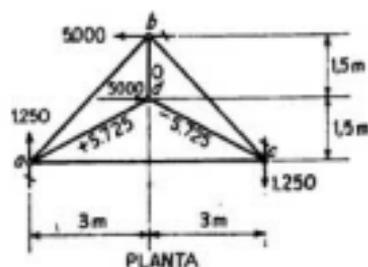


FIG. 9.6. Cálculo de la fuerza de barra por el método de los nudos.

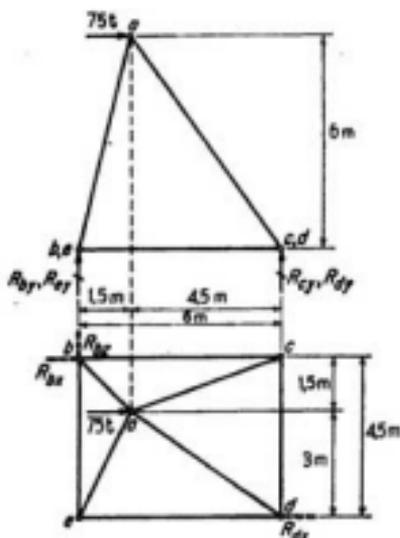


FIG. 9.7. Ejemplo.

* Obsérvese que se puede escribir directamente esta ecuación en la forma siguiente:

$$-5.000 + \frac{6}{6,87} F_{ad} = 0 \quad F_{ad} = +5.725$$

De igual forma se pueden hallar F_{bd} y F_{cd} de $\Sigma F_y = 0$ en los nudos b y c , respectivamente. Sin embargo, para comprender el método general basado en el planteamiento de un sistema de tres ecuaciones en el nudo d , que puede ser el único utilizable en estructuras tridimensionales más complicadas, es preferible escribir las ecuaciones.

Ahora se efectuará el estudio de las barras que unen los puntos de apoyo de la Figura 9.4 aprovechando el hecho de que en la Sec. 9.3 se han determinado las reacciones horizontales. Los valores de estas reacciones están representados en la Fig. 9.6. Como ejemplo, consideremos el nudo a y escribamos la ecuación $\Sigma F_x = 0$. Observando que $Z_{ad} = +5.725(1,5/6,87)$,

$$+1.250 + 5.725 \left(\frac{1,5}{6,87} \right) + F_{ab} \left(\frac{3}{4,24} \right) = 0 \quad F_{ab} = -3.535 \text{ kg}$$

Ahora puede hallarse de una forma similar la fuerza en la barra ac , aplicando $\Sigma F_x = 0$ al nudo a . F_{ac} se puede obtener aplicando $\Sigma F_x = 0$ al nudo c .

9.5 Caso en que no se pueden calcular las reacciones sin considerar las fuerzas de barra. La estructura de la Fig. 9.7 es estáticamente determinada respecto a las fuerzas interiores y exteriores juntas. Como solo hay tres reacciones horizontales, éstas pueden hallarse considerando las fuerzas exteriores solo, pero las verticales no se pueden calcular sin tener en cuenta las fuerzas de barra. Si se pueden calcular las fuerzas en ab , ac , ad y ae , se podrán obtener las reacciones verticales a partir de las componentes verticales de estas fuerzas.

En el nudo a hay 4 fuerzas de barra desconocidas, de modo que, con solo 3 ecuaciones de la estática disponibles, no se puede obtener una solución directa para las fuerzas. Sin embargo, es posible hacer un estudio de tensiones de esta estructura a base de la estática solamente, pues con 5 nudos hay 15 ecuaciones independientes, y solo 15 fuerzas independientes desconocidas —8 barras, 4 reacciones verticales y 3 horizontales.

Tabla 9.2

Barra	Proyección			Longitud
	X	Y	Z	
ab	1,5	6	1,5	6,36
ac	4,5	6	1,5	7,65
ad	4,5	6	3	8,07
ae	1,5	6	3	6,87
bc	6	0	0	6,0
cd	0	0	4,5	4,5
de	6	0	0	6,0
eb	0	0	4,5	4,5

Para esta estructura, las ecuaciones de la estática forman un sistema. Para resolverlo es conveniente tomar, como incógnita provisional, una de las fuerzas de barra, expresando las demás fuerzas y reacciones en función de ésta, y finalmente una de las ecuaciones permitirá su cálculo. Como ejemplo, tomemos F_{ad} como incógnita provisional. En el nudo c , aplicando $\Sigma F_x = 0$, tenemos

$$F_{cd} + \frac{1,5}{7,65} F_{ac} = 0 \quad F_{ac} = -5,10 F_{cd}$$

Aplicando $\Sigma F_x = 0$ en el nudo d ,

$$F_{cd} + \frac{3}{8,07} F_{ad} = 0 \quad F_{ad} = -2,69 F_{cd}$$

Suponiendo que las reacciones verticales en c y d actúan hacia arriba, y aplicando $\Sigma F_y = 0$ en el nudo c ,

$$R_{cy} + \frac{6}{7,65} F_{ac} = 0$$

$$R_{cy} = -0,784 F_{ac} = -0,784(-5,10 F_{ad}) = +4,00 F_{ad}$$

Aplicando $\Sigma F_x = 0$ en el nudo d ,

$$R_{dy} + \frac{6}{8,07} F_{ad} = 0$$

$$R_{dy} = -0,744 F_{ad} = -0,744(-2,69 F_{ad}) = +2,00 F_{ad}$$

Tomando ahora momentos respecto a bc de todas las fuerzas que actúan en la estructura

$$+75(6) - R_{cy}(6) - R_{dy}(6) = 0$$

de donde

$$+75(6) - 4,00 F_{ad}(6) - 2,00 F_{ad}(6) = 0 \quad F_{ad} = +12,5 \text{ t}$$

Como se han expresado ya R_{cy} , R_{dy} , F_{ac} y F_{ad} en función de F_{ad} , pueden calcularse ahora. Conocidas estas fuerzas, se puede estudiar sin dificultad el resto de la estructura.

9.6 Teoremas especiales. Aunque se pueden estudiar las armaduras tri-dimensionales por los métodos ya expuestos, tienen gran importancia los teoremas siguientes, porque muchas veces ahorran considerablemente los cálculos:

I. Si todas las barras que se juntan en un nudo, menos una n , están en un plano, la componente normal a este plano de la fuerza en la barra n es igual a la componente normal al plano de la carga o cargas aplicadas en dicho nudo. Se puede ver que este teorema es cierto considerando el equilibrio estático del nudo, sumando todas las fuerzas normales al plano que contiene a todas las barras menos a n . Supongamos, por ejemplo, que en la Fig. 9.4 se aplica este teorema al nudo d . Las barras ad y dc están en el plano adc ; la componente de la fuerza en la barra bd , normal al plano adc , debe ser igual a la componente normal al mismo plano de la carga aplicada. En este caso particular, la carga aplicada está también en el plano adc , por lo que no tiene componente normal a este plano. Por tanto, se deduce que la fuerza en la barra bd es nula. El darse cuenta de este hecho simplificaría el análisis del nudo d hecho en la Sec. 9.4 con un sistema de tres ecuaciones, pues solo serán necesarias dos.

Partiendo del Teorema I se pueden establecer dos corolarios:

II. Si todas las barras que se juntan en un nudo, menos una n , están en un plano y no hay ninguna carga exterior en ese nudo, la fuerza en la barra n es nula.

III. Si ninguna de las barras de un nudo excepto dos tienen fuerza de barra y esas dos no son colineales y no actúa ninguna fuerza exterior en el nudo, la fuerza en cada una de esas dos barras es nula.

9.7 Aplicación de los teoremas especiales. Cúpula de Schwedler. Se puede poner

de manifiesto la importancia de estos tres teoremas en el estudio de las armaduras tridimensionales considerando la cúpula de Schwedler representada en la Fig. 9.8 sobre la que actúa una carga vertical P aplicada al nudo A . Las barras representadas en la planta por líneas de trazos no tienen fuerza de barra, como puede deducirse de los teoremas anteriores aplicados de la siguiente manera:

En el nudo F , las barras EF , KF y LF están todas en un plano, y AF no lo está. Como no hay ninguna carga aplicada en el nudo F , la fuerza en la barra AF es nula, de acuerdo con el Teorema II. Una consideración similar de los nudos E , D , C y B conduce a la conclusión de que las barras EF , DE , CD y BC , respectivamente, tienen fuerza nula.

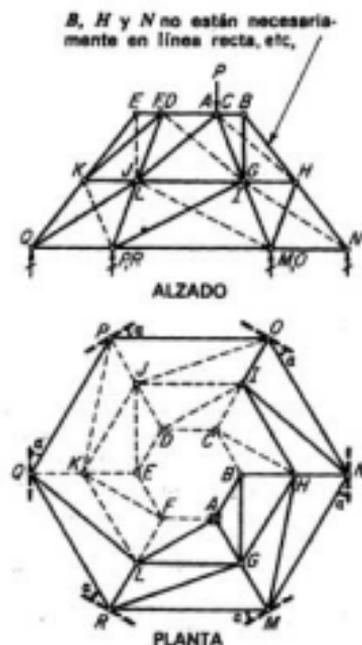


FIG. 9.8. Cúpula de Schwedler.

Considerando de nuevo el nudo F , como las fuerzas de barra en FA y FE son nulas, y las KF y LF son dos barras que se juntan con ellas en un nudo en el que no hay ninguna fuerza aplicada, las fuerzas en éstas son nulas, por el Teorema III. Una consideración similar en los nudos E , D y C nos lleva a la conclusión de que las barras KE y JE , JD e ID , IC y HC , respectivamente, tienen fuerzas nulas.

Considerando ahora el nudo K , como KE y KF tiene fuerzas nulas, KL es una barra que no pertenece al plano de las JK , PK y QK , por lo que su fuerza es cero. De igual modo, la consideración de los nudos J e I demuestra que carecen de fuerza las barras JK e IJ .

Considerando otra vez el nudo K , como las barras JK , EK , FK y LK tienen fuerza nula, las QK y PK que son dos barras que se juntan con ellas en un nudo sin cargas exteriores tienen también fuerzas nulas. Una consideración similar del nudo J demuestra que las fuerzas en las barras PJ y OJ son también cero.

Por tanto, cuando sobre esta cúpula de armazón actúa una carga vertical en A , solo

soportan fuerza las barras representadas en trazo lleno en la planta de la Fig. 9.8. Para completar el estudio de esta estructura, se puede aplicar el método de los nudos a los A, B, L, G, H e I , y determinar así las fuerzas en todas las barras excepto las del anillo de base. Luego se pueden hallar las reacciones verticales aplicando $\Sigma F_z = 0$ en cada punto de apoyo.

Para determinar las reacciones horizontales y las fuerzas de barra en las barras del anillo de base, todas las cuales están en un plano, es necesario tomar la fuerza en una de ellas como incógnita provisional. Supongamos que tomamos F_{RM} como tal incógnita. La aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_z = 0$ en el nudo R , permite expresar F_{QR} y la reacción horizontal en R en función de F_{RM} . (Obsérvese que sobre el nudo R actúan también las componentes X y Z de las fuerzas en las barras LR y GR .) Recorriendo el anillo de base en sentido de las agujas del reloj y escribiendo ecuaciones similares en los nudos Q, P, O y N sucesivamente, podemos expresar las fuerzas en todas las barras del anillo y todas las reacciones horizontales excepto la de M , en función de F_{RM} . Si se aplican ahora las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_z = 0$ al nudo M , se pueden hallar los valores de F_{RM} y de la reacción horizontal en M . Como las demás fuerzas de barra y reacciones horizontales se han expresado previamente en función de F_{RM} , se pueden calcular ya.

Es posible que una cúpula de Schwedler sea geoméricamente inestable, aunque se cumpla el criterio del recuento, si los ángulos entre las reacciones horizontales y las barras del anillo de base tienen determinados valores¹.

9.8 Torres. Aunque los pies de una torre de armazón tengan inclinación constante en toda su longitud, la estructura se analizará mediante consideraciones tridi-

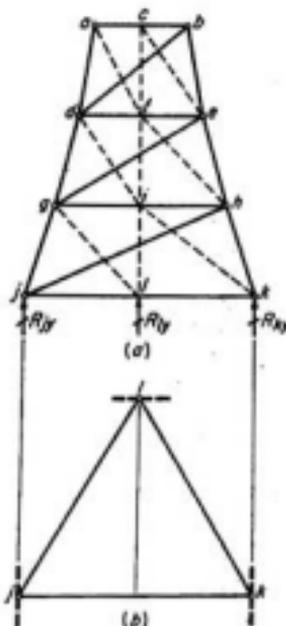


FIG. 9.9. Torre triangular.

¹ C. M. Spofford, «Theory of Structures», 4ª ed., cap. 16, Enramados espaciales, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1939.

mensionales. La Fig. 9.9a representa el alzado lateral de una torre de sección triangular en la que no es constante la inclinación de los pies. La Fig. 9.9b muestra la disposición de las reacciones horizontales. Esta estructura es estáticamente determinada, como puede comprobarse, y se puede analizar tramo por tramo, comenzando con el superior y descendiendo. Cuando, como en este caso, los pies adyacentes del tramo superior están en un plano, se pueden calcular más fácilmente las fuerzas de barra en cualquiera de las del anillo superior, utilizando los tres teoremas de la Sec. 9.6. Por ejemplo, se calculará F_{ab} observando que su componente normal a la cara $acfd$ ha de contrarrestar a la de la fuerza exterior en el nudo a , que es también normal a este plano. Una vez conocidas las fuerzas en las barras del anillo superior, se pueden calcular las de los pies y diagonales del tramo superior. Las fuerzas en estas barras, junto con cualquier carga exterior que exista en los nudos d , e y f , constituyen las cargas en el segundo tramo que hay que calcular ahora del mismo modo, etc.

Sin embargo, si los pies adyacentes del tramo superior no están en un plano, para obtener las fuerzas en las barras del anillo hay que usar un método más general. Comenzando, como antes, por el tramo superior, se puede tomar como incógnita provisional la fuerza en una barra cualquiera del anillo superior. Si se elige F_{ab} , la aplicación del método de los nudos al b permite expresar F_{bc} en función de F_{ab} . Haciendo lo mismo en c obtenemos F_{ca} en función de F_{ab} . Finalmente, se puede calcular F_{ab} aplicando el método de los nudos al a .

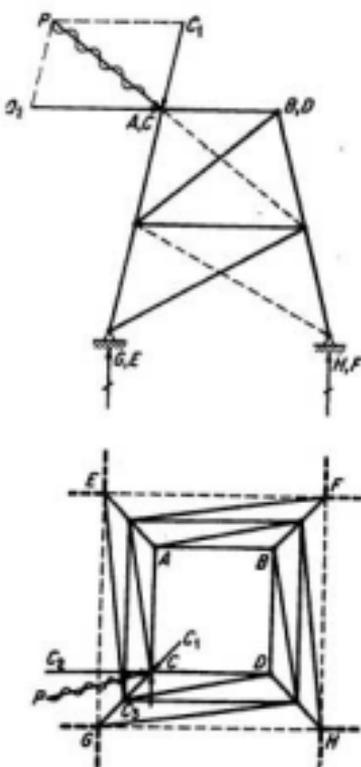


FIG. 9.10. Torre rectangular con pies rectos.

Se acostumbra disponer elementos secundarios de arriostramiento en todos los planos horizontales en que varía la inclinación de los pies de la torre y muchas veces también en los nudos en que no hay cambio de inclinación. Por ejemplo, en una torre de sección rectangular, este arriostramiento puede consistir en diagonales horizontales que unen los nudos diametralmente opuestos. La presencia de tales barras puede hacer que la torre sea estáticamente indeterminada. Sin embargo, es práctica común suponer, para analizar los elementos principales de la torre, que las fuerzas en las barras secundarias de arriostramiento son nulas, lo que permite llevar a cabo el estudio por los principios de la estática.

9.9 Torre con pies rectos. Si la inclinación de los pies de la torre es constante en toda la altura, se puede estudiar considerando los cuchillos planos componentes. Esta estructura está representada en la Fig. 9.10. Una carga P , aplicada a un nudo cualquiera, se puede descomponer en tres componentes: C_1 , paralela al pie de la torre; C_2 , horizontal en el plano de una de las caras, y C_3 , horizontal y en el plano de la otra cara adyacente de la torre.

Es fácil demostrar, por los teoremas de la Sec. 9.6, que C_1 produce fuerzas en las barras del pie GC solamente, C_2 solo en las del lado $CDGH$ de la torre y C_3 en las del lado $ACEG$.

Así, pues, se pueden obtener las fuerzas de barra producidas por cada una de las componentes C_1 , C_2 y C_3 , llevando a cabo un estudio plano separado, obteniéndose la fuerza total en cada barra debida a la carga P por superposición de los efectos de sus tres componentes. Como cada carga de entrepaña se puede tratar de la forma anterior, esto constituye un método general de análisis.

Si todas las caras de una torre son idénticas, se pueden preparar los datos de influencia, dando las fuerzas en cada barra de una de las caras para 1) una carga horizontal unidad, aplicada sucesivamente a cada uno de los nudos de la cara, y 2) una carga unidad paralela al pie de la torre, aplicada sucesivamente a los nudos de esa cara. Tales datos de influencia correspondientes a una cara de la torre serían aplicables a todas las demás. Descomponiendo las cargas por entrepaña en las componentes que se ha indicado y utilizando estos datos de influencia, se pueden obtener por superposición las tensiones en cada elemento, debidas a cualquier tipo de cargas.

9.10 Teoría general de las armaduras tri-dimensionales. Muchas de las armaduras espaciales utilizadas en las estructuras clásicas se pueden analizar aplicando los métodos estudiados anteriormente, pero para tratar con facilidad algunos de los problemas relacionados con los menos corrientes, es necesario estudiar la estabilidad y la determinación estáticas de los entramados espaciales de una forma más rigurosa¹, semejante a la utilizada en el Cap. 4 para los cuchillos (o armaduras planas). A continuación se da un breve esquema de tal método.

Disposición de los elementos de una armadura espacial simple. Un grupo de puntos que no estén todos en un plano pueden unirse entre sí por una armadura espacial rígida y no deformable, construyéndola de la siguiente forma. (Ver la Sec. 4.3 para las definiciones de los adjetivos «rígido» y «no deformable».) Primero formaremos un tetraedro como núcleo, utilizando seis barras para unir entre sí cuatro puntos que no están en un plano, como se muestra con las líneas llenas que unen los nudos 1, 2, 3 y 4 de la Fig. 9.11. Luego se puede unir el nudo 5 rígidamente a este núcleo por medio de barras que parten de los nudos 1, 3 y 4, como se indica por líneas de trazos. A conti-

¹ Para un estudio excelente de los entramados espaciales estáticamente determinados, se envía al lector a S. P. Timoshenko y D. H. Young, «Theory of Structures», cap. 4, págs. 163-212, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1945.

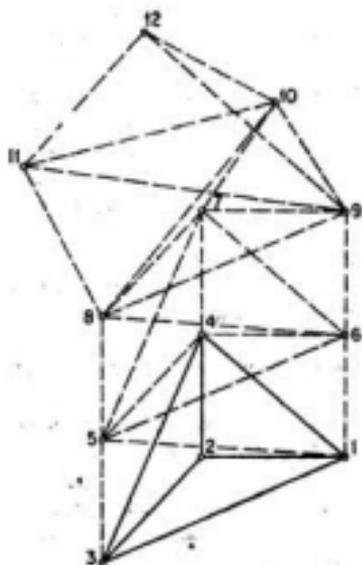


FIG. 9.11. Armadura espacial simple.

nuación se unen los 6 y 12, utilizando *tres barras que no estén en un plano* para unir cada nuevo nudo a la armadura ya formada.

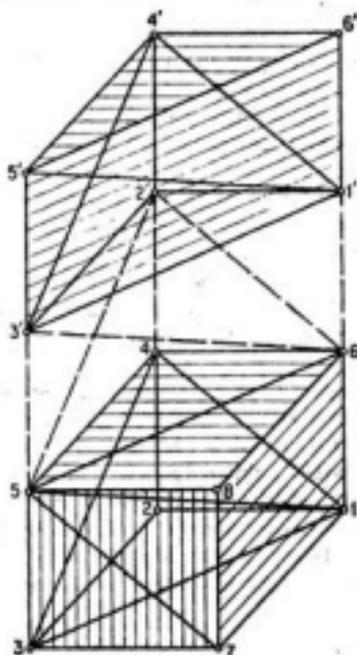


FIG. 9.12. Armadura espacial compuesta.

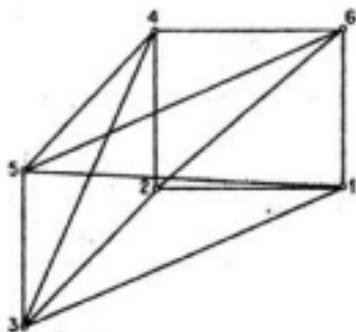


FIG. 9.13. Armadura espacial compleja.

Utilizando la misma terminología que para las cerchas, a una armadura espacial así formada se le llama *armadura espacial simple*. El número de barras b necesarias, si hay n nudos, es, evidentemente, $3(n - 4) + 6$, o $b = 3n - 6$.

Formación de armaduras espaciales compuestas. Se pueden unir entre sí varias armaduras simples para formar las llamadas *armaduras espaciales compuestas*, como se ve en la Fig. 9.12, utilizando seis barras cuyos ejes no cortan a una misma recta. En la Fig. 9.12 se han representado en rayado dos armaduras simples y con líneas de trazos las barras que las unen. Obsérvese que el número total de barras empleado en este caso es $(3n_1 - 6) + (3n_2 - 6) + 6$, o $b = 3(n_1 + n_2) - 6$, o $b = 3n - 6$, siendo n_1 y n_2 el número de nudos en cada una de las armaduras simples y n el total en la estructura.

Armaduras espaciales complejas. Muchas armaduras espaciales de las utilizadas en la práctica no pueden clasificarse como *simples* o *compuestas*, por lo que se las incluye en la categoría de *armaduras espaciales complejas*. En la Fig. 9.13 se presenta un ejemplo. Obsérvese que esta armadura sería simple si se sustituyera la barra 2-6 por una 1-4. Como antes, el número de barras necesarias para construir una armadura espacial compleja rígida y no deformable, está dado por $b = 3n - 6$ *

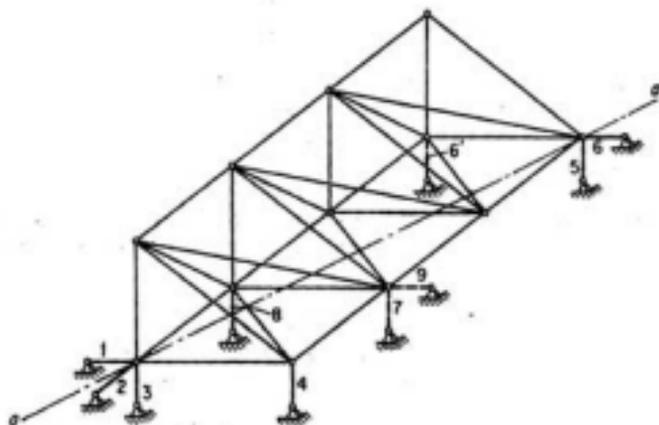


FIG. 9.14. Disposición de las reacciones.

Apoyos de las armaduras espaciales. Si se apoya una armadura espacial rígida no deformable de tal modo que las componentes de las reacciones sean equivalentes a seis bielas cuyas líneas de acción no corten a una misma recta, la estructura será estable y esas seis componentes de las reacciones son estáticamente determinadas a partir de las seis ecuaciones de la estática dadas en la Sec. 9.2 y aplicadas a toda la estructura. Tal disposición está representada en la Fig. 9.14 por las bielas dibujadas en línea gruesa y numeradas de 1 a 6.

Evidentemente, si la biela 6 tiene una línea de acción que coincide con la recta oa , la estructura estará sustentada en forma inestable, pues no habría ninguna reacción capaz de resistir la rotación de la estructura alrededor de un eje que coincida con el de

* Como ya se recaló en el Cap. 4, este criterio es una condición necesaria pero no suficiente para que el entramado sea rígido e indeformable. Aunque el número de barras sea el apropiado, si no están dispuestas adecuadamente el entramado espacial puede ser inestable geométricamente.

biela 3. Igual sucedería si se sustituyera la biela 6 por otra vertical, 6'. Obsérvese que en cada uno de estos casos los ejes de las seis bielas que intervienen cortan a una recta vertical que coincide con la número 3, pues las 4, 5 y 6' que son paralelas a la 3 cortan a esta recta en el infinito. Evidentemente, si se añadieran nuevas bielas como las 7, 8 y 9 a las primitivas —1 al 6— la estructura sería estable, pero las reacciones serían estáticamente indeterminadas, en este caso de tercer grado.

En muchas armaduras espaciales utilizadas en la práctica hay más de seis componentes de las reacciones. Muchas veces, en esos casos, si hay r componentes de reacción, se han suprimido $(r - 6)$ barras de las $(3n - 6)$ necesarias para constituir una armadura rígida e indeformable; como consecuencia,

$$b = (3n - 6) - (r - 6)$$

o $(b + r) = 3n$. En otras palabras, la supresión de $(r - 6)$ barras es equivalente a la introducción de $(r - 6)$ ecuaciones de condición (o de construcción). Cuando se hace en forma apropiada, de modo que se evite la inestabilidad geométrica, la estructura es estable y estáticamente determinada. A veces se pueden determinar directamente las reacciones con las ecuaciones de condición y las de la estática para la estructura en conjunto. Sin embargo, muchas otras no pueden hallarse sin calcular previamente alguna de las fuerzas de barra, como se ha visto en la Sección 9.5.

Estas consideraciones y otras análogas conducen a las siguientes conclusiones sobre la estabilidad de una estructura espacial de armazón y la determinación estática respecto a las componentes de las reacciones y las fuerzas de barra conjuntamente. Para una armadura espacial se dispone de $3n$ ecuaciones de la estática independientes, aislando cada nudo y escribiendo las tres ecuaciones $-\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. En esas ecuaciones intervienen un total de $(b + r)$ incógnitas, esto es, b fuerzas de barra y r componentes de reacciones. La comparación del número de ecuaciones con el de incógnitas indica que

Si $(b + r) < 3n$, la estructura es *inestable*

Si $(b + r) = 3n$, la estructura es *estáticamente determinada*

Si $(b + r) > 3n$, la estructura es *estáticamente indeterminada*

Si este criterio indica que la estructura es estáticamente determinada o indeterminada, se recordará que el recuento solo no prueba que sea también estable —puede ser estática o geoméricamente inestable si las barras o componentes de las reacciones están dispuestas inadecuadamente.

Análisis de tensiones de armaduras espaciales estáticamente determinadas. Se puede llevar a cabo el análisis de tensiones de muchas armaduras espaciales utilizando una combinación del método de los nudos y del de las secciones estudiados anteriormente en el Cap. 4 para los cuchillos (o armaduras planas). Los elementos geométricos adicionales de las estructuras tridimensionales hacen que no puedan progresar mucho los cálculos.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una armadura espacial simple soportada en una forma estáticamente determinada. En ese caso, se pueden determinar las reacciones considerando el equilibrio de toda la estructura. Una vez conocidas las reacciones, quedan definidas todas las fuerzas exteriores. Entonces puede aislarse el último nudo formado en la pseudoconstrucción de la armadura simple (como el 12 de la Fig. 9.11). En este nudo hay solo tres fuerzas de barra desconocidas, que se pueden determinar de las tres ecuaciones de equilibrio en ese punto. Si se opera recorriendo la estructura

hacia abajo, considerando los nudos en orden inverso —11, 10, 9, etc.—, habrá solo tres fuerzas de barra desconocidas en cada uno, por lo que se puede completar el cálculo de todas las fuerzas de barra de un modo sencillo por sucesivas aplicaciones del método de los nudos.

En el caso de una armadura espacial *compuesta*, aun después de haber determinado las reacciones, se puede continuar aplicando el método de los nudos solo hasta que se halle que no se puede aislar ningún nudo en el que solo haya tres fuerzas de barra desconocidas. En ese momento hay que aplicar el método de las secciones para hallar alguna de las fuerzas. En el caso de armaduras espaciales *complejas*, aun cuando se hayan determinado las reacciones, se alcanza al fin un punto de la solución en que ni el método de los nudos ni el de las secciones llevan a una solución directa. En ese caso, hay que recurrir a un procedimiento como el descrito en la Sec. 4.12 para armaduras planas o al método de Henneberg (ver la referencia en la Sección 4.12).

En los últimos años se construyen algunas armaduras espaciales extremadamente complicadas relacionadas con los receptores y transmisores de radar. Tales estructuras contienen numerosos nudos y barras y a veces tienen formas geométricas complicadas. Muchas veces determinan el proyecto las limitaciones de flecha y las vibraciones en lugar de la resistencia. En el estudio de esas estructuras se han usado ampliamente los modernos calculadores digitales, utilizando métodos de desplazamiento como el descrito brevemente en el Capítulo 15.

9.11 Problemas para resolver

Problema 9.1 Demostrar que la torre de la Fig. 9.10 es estáticamente determinada.

***Problema 9.2** Hallar las reacciones en la estructura de la Fig. 9.15 debidas a la carga de 500 kg que actúa como se muestra.

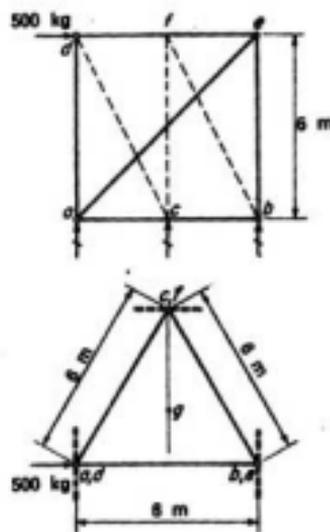


FIG. 9.15. Problemas 9.2, 9.3 y 9.4.

***Problema 9.3** Hallar las fuerzas de barra en la estructura de la Fig. 9.15 debidas a la carga de 500 kg representada.

***Problema 9.4** Hallar las reacciones y las fuerzas de barra en la estructura de la Fig. 9.15 si se aplica la carga de 500 kg en el nudo d , pero con una dirección tal que pasa por el punto g , situado en el centro del triángulo equilátero def .

***Problema 9.5** a) Demostrar que la estructura de la Fig. 9.16 es estáticamente indeterminada de primer grado.

b) Hallar las reacciones de la estructura de la Fig. 9.16 y las fuerzas en todas las barras, cuando actúa sobre ella la carga de 5.000 kg que se representa, suponiendo que la barra ef está sometida a una compresión de valor igual a la mitad de la carga aplicada.

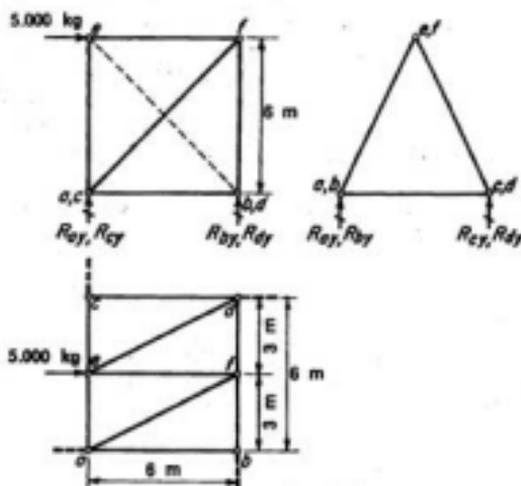


FIG. 9.16. Problema 9.5.

Problema 9.6 Si el ángulo α entre la reacción horizontal y la barra del anillo de base tiene el mismo valor en cada uno de los apoyos de una cúpula de Schwedler, como la de la Fig. 9.8, demostrar que, bajo la acción de cualquier carga vertical aplicada a la cúpula, la suma algebraica de las reacciones horizontales es nula.

***Problema 9.7** Una torre similar a la de la Fig. 9.9 tiene 10 tramos de una altura de 3 m cada uno; $ab = bc = ca = 3$ m; $de = ef = fd = 3,6$ m; en la base de la torre, $jk = kl = lj = 12$ m. En el nudo a están aplicadas las siguientes cargas exteriores: una carga horizontal de 5.000 kg hacia la derecha, en dirección paralela al eje OX ; una carga horizontal de 2.500 kg hacia atrás, en dirección paralela al eje OZ ; y una carga vertical de 10.000 kg hacia abajo.

- ¿Cuáles son las fuerzas en las barras ab , bc y ca ?
- ¿Cuáles son las componentes X , Y y Z de las fuerzas aplicadas en los nudos d , e y f , por los pies y diagonales en el tramo superior?
- ¿Cuáles son las reacciones de la torre?

Problema 9.8 La torre del Prob. 9.7 pesa 25.000 kg. La carga de viento máxima que actúa sobre la torre ejerce una presión lateral de 800 kg por m de altura de torre. ¿Contra qué vuelco hay que proyectar un punto de apoyo, si las especificaciones estipulan que han de calcularse para el 150 por 100 del esfuerzo de vuelco?

Problema 9.9 Calcular las reacciones y fuerzas de barra para cada una de las armaduras espaciales de la Figura 9.17.

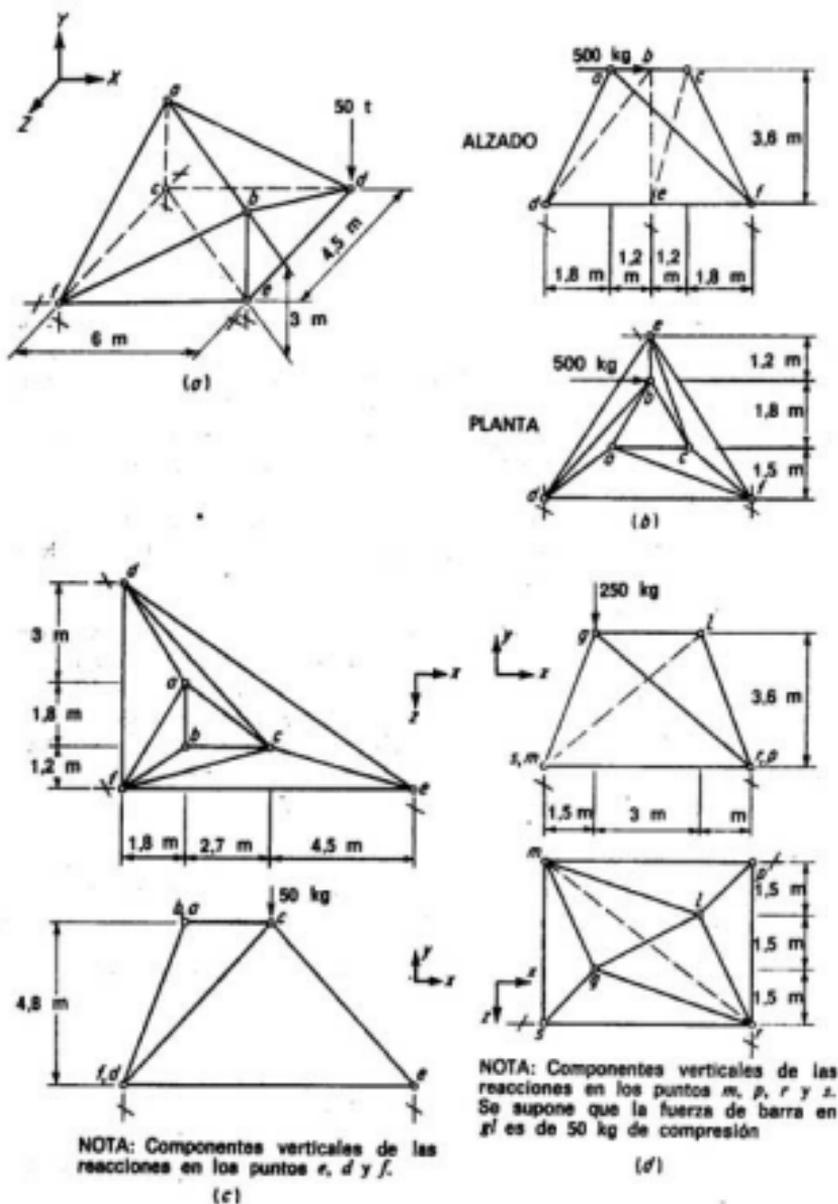


FIG. 9.17. Problema 9.9.

10

Cables

10.1 Introducción. Los cables se usan en muchos tipos importantes de estructuras de ingeniería. Constituyen los principales elementos de sustentación de las cargas en los puentes colgantes y los sistemas de teleférico. Se usan mucho como contravientos en estructuras como torres de perforación o de radio, así como contravientos durante los montajes. Aunque el estudio exacto de los cables puede requerir métodos matemáticos que se salen de este libro, en la ingeniería de estructuras interesa conocer algunas relaciones fundamentales.

Cuando un cable soporta una carga uniforme por unidad de longitud del mismo, tal como su propio peso, toma la forma de catenaria; pero excepto cuando la flecha es grande en relación con la longitud, se puede suponer que la forma es parabólica, lo que simplifica notablemente el estudio.

10.2 Teorema general del cable. Consideremos el caso general de un cable soportado en dos puntos a y b , que no están necesariamente a la misma altura, sobre el que actúa un sistema de cargas verticales P_1, P_2, \dots, P_n , como se ve en la Fig. 10.1a. Se supone que el cable es perfectamente flexible, por lo que el momento flector es nulo en cualquiera de sus puntos. Como todas las cargas son verticales, la componente horizontal de la tracción en el cable, que representaremos por H , tendrá el mismo valor en cualquier punto y las reacciones horizontales son iguales a H .

Sea ΣM_b = suma de los momentos respecto a b de todas las cargas P_1, P_2, \dots, P_n .

ΣM_m = suma de los momentos respecto a un punto cualquiera m del cable de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n que actúan a la izquierda de m .

Tomando momentos respecto a b de todas las fuerzas que actúan sobre el cable,

$$+H(L \operatorname{tg} \gamma) + R_{ay}L - \Sigma M_b = 0$$

de donde

$$R_{ay} = \frac{\Sigma M_b}{L} - H \operatorname{tg} \gamma \quad (a)$$

Tomando momentos respecto a m de las fuerzas que actúan en la parte de cable a la izquierda de m ,

$$+H(x \operatorname{tg} \gamma - y_m) + R_{ay}x - \Sigma M_m = 0$$

Sustituyendo R_{ay} por su valor en (a) y simplificando,

$$Hy_m = \frac{x}{L} \Sigma M_b - \Sigma M_m \quad (b)$$

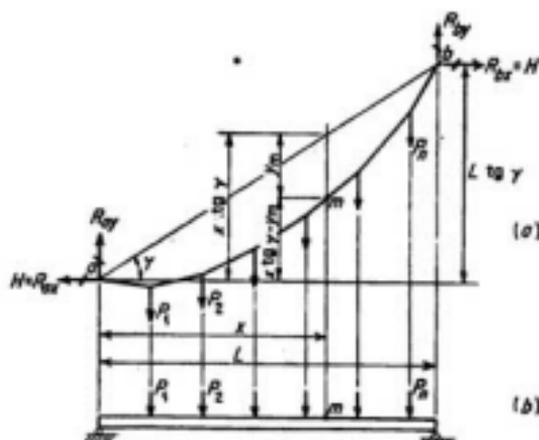


FIG. 10.1. Deducción del teorema del cable.

Para interpretar la Ec. (b) debe observarse que y_m es la distancia en vertical desde el cable, en el punto m , a la cuerda ab que une los puntos de apoyo del cable. El segundo miembro de la Ec. (b) es igual al momento flector que se producirá en m (ver Figura 10.1b) si se aplicaran las cargas P_1, P_2, \dots, P_n a una viga apoyada en sus extremos, de luz L , y m fuese un punto de esta viga imaginaria, situado a una distancia x del apoyo izquierdo.

Por tanto, podemos deducir de la Ec. (b) el siguiente teorema general del cable: *En un punto cualquiera de un cable sometido a cargas verticales, el producto de la componente horizontal de la tracción del cable por la distancia en vertical desde ese punto a la cuerda es igual al momento flector que se produciría en esa sección si las cargas que soporta el cable actuasen sobre una viga apoyada en sus extremos, de la misma luz que él.*

Hay que recalcar que este teorema es aplicable a cualquier conjunto de cargas verticales y es cierto lo mismo si la cuerda del cable es horizontal que si es inclinada.

10.3 Aplicación del teorema general del cable. Supongamos que se ha definido la carga en un cable y que se conoce la distancia en un punto desde el cable hasta la cuerda, como en el caso de la Fig. 10.2. Despreciando el peso del propio cable, el momento flector en el punto d de una viga imaginaria de igual luz es

$$1.165(6) - 500(3) = 5.490 \text{ m kg}$$

Por tanto, por el teorema general del cable, $3H = 5.490$, de donde $H = 1.830 \text{ kg}$. Para determinar la distancia de otro punto cualquiera c a la cuerda, se puede aplicar el teorema general a la sección c , obteniéndose $1.830y_c = 1.165(3)$, de donde $y_c = 1,91 \text{ m}$. El segmento de cable entre a y c está en línea recta, pues se ha despreciado el peso propio, y tiene una longitud igual a

$$\sqrt{(3)^2 + (1,91)^2} = 3,55 \text{ m}$$

Como la componente horizontal de la tracción en el cable es igual a 1.830 kg , el valor de esta tracción entre a y c valdrá $1.830(3,55/3) = 2.170 \text{ kg}$. La reacción vertical izquierda sobre el cable es igual a la componente vertical de la tracción en el segmento ac y

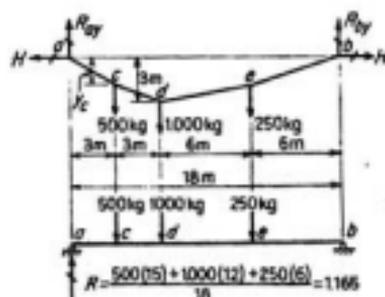


FIG. 10.2. Aplicación del teorema del cable.

está dada por $1.830(1,91/3) = 1.165$ kg. En este caso particular, este valor es igual a la reacción vertical izquierda en la viga imaginaria apoyada en sus extremos. Si la cuerda del cable hubiera estado inclinada, los valores serían diferentes para los dos.

10.4 Forma del cable uniformemente cargado. El caso de una carga uniforme por metro de proyección horizontal aplicada en toda la longitud del cable tiene gran importancia, no solo porque es esencialmente el tipo de cargas que se presenta en los puentes colgantes, sino porque en el caso de un cable sometido solo a su propio peso, puede admitirse esa hipótesis de carga. En la Fig. 10.3 el teorema general del cable conduce a

$$Hy_m = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \quad (a)$$

Expresemos por h el valor de y_m en el centro del vano. Esta distancia h se llama la flecha del cable y se mide siempre en vertical. Para el centro del vano, donde $x = L/2$ e $y_m = h$, la ecuación anterior se reduce a $Hh = wL^2/8$, de donde

$$H = \frac{wL^2}{8h} \quad (10.1)$$

Esta relación es de importancia primordial. Obsérvese que es cierta tanto si la cuerda del cable es inclinada como si es horizontal. Sustituyendo este valor de H en la Ec. (a) y despejando y_m , tenemos

$$y_m = \frac{4hx}{L^2} (L - x) \quad (10.2)$$

La Ec. (10.2) define la forma del cable, referida a la cuerda y en función de la flecha. A veces se prefiere tomar como eje de referencia la horizontal. Si se toma el origen o de los ejes en el extremo izquierdo del cable, como se ve en la Fig. 10.3, se puede utilizar la relación $y = +x \operatorname{tg} \gamma - y_m$. Sustituyendo y_m por su valor de la Ec. (10.2),

$$y = \frac{4hx}{L^2} (x - L) + x \operatorname{tg} \gamma \quad (10.3)$$

Si la cuerda es horizontal, $\operatorname{tg} \gamma = 0$, y

$$y = \frac{4hx}{L^2} (x - L) \quad (10.4)$$

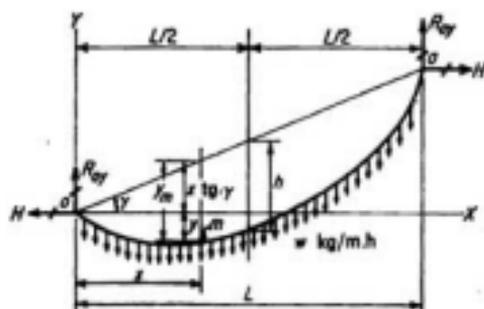


FIG. 10.3. Cable que soporta una carga uniforme por metro de proyección horizontal.

Si la cuerda es horizontal y se quiere definir la curva del cable con respecto a dos ejes con origen en c , punto más bajo del cable, que está en el centro del vano, la Fig. 10.4 demuestra que, como

$$x = \frac{L}{2} + x_c \quad y = -h + y_c$$

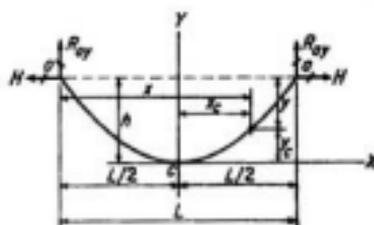


FIG. 10.4. Geometría del cable.

se pueden sustituir estas relaciones en la Ec. (10.4) obteniéndose

$$y_c = \frac{4h}{L^2} x_c^2 \quad (10.5)$$

10.5 Tracción en el cable uniformemente cargado. La fuerza en cualquier punto del cable es axial. Para un cable uniformemente cargado, se puede calcular la componente horizontal de la tracción por medio de la Ec. (10.1). Consideremos un elemento diferencial de cable de longitud ds y proyección horizontal dx . La tracción T_x en el cable a una distancia x del origen, estará dada por $H ds/dx$. En el caso de ser inclinada la cuerda, como se ve en la Fig. 10.3, diferenciando la Ec. (10.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{8hx}{L^2} - \frac{4h}{L} + \operatorname{tg} \gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L} - 4\theta + \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

donde $\theta = h/L$ es la llamada relación de flecha.

Además, como $ds = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} dx$, $T_x = H[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}$, o

$$T_x = H \left(1 + \frac{64\theta^2 x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma - \frac{64\theta^2 x}{L} + \frac{16\theta x}{L} \operatorname{tg} \gamma - 8\theta \operatorname{tg} \gamma \right)^{3/2} \quad (a)$$

La tracción máxima se produce en un extremo del cable

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0: \quad T_{\max} &= H(1 + 16\theta^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma - 8\theta \operatorname{tg} \gamma)^{3/2} \\ \text{Para } x = L: \quad T_{\max} &= H(1 + 16\theta^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma + 8\theta \operatorname{tg} \gamma)^{3/2} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Si la cuerda es horizontal, $\operatorname{tg} \gamma = 0$, mientras que en cualquier extremo del cable

$$T_{\max} = H(1 + 16\theta^2)^{3/2} \quad (10.7)$$

Para el caso particular de la cuerda horizontal, la Ec. (10.7) se puede deducir también como sigue: La máxima tracción en el cable tiene lugar en el extremo del mismo y es igual a la reacción. Para esta reacción, la componente horizontal es H , mientras que la vertical es igual a la mitad de la carga total que actúa sobre el cable, o $wL/2$, que se puede expresar también por $4Hh/L = 4H\theta$, pues $H = wL^2/8h$; por tanto,

$$\begin{aligned} T_{\max} &= (H^2 + R_v^2)^{1/2} \\ &= (H^2 + 16H^2\theta^2)^{1/2} \\ &= H(1 + 16\theta^2)^{1/2} \end{aligned}$$

10.6 Ejemplos aclaratorios

Ejemplo 10.1 Un cable sometido a una carga uniforme de 2 t por metro horizontal está suspendido entre dos puntos a igual altura, separados 500 m, con una relación de flecha tal que la componente horizontal de la tracción en el cable es de 1.250 t. ¿Cuál es la tracción máxima?

Solución: Como $H = wL^2/8h$, $1.250 = 2(500)^2/8h$, $h = 50$ m,

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$$

$$T_{\max} = H(1 + 16\theta^2)^{1/2} = 1.250(1 + 16/100)^{1/2} = 1.345 \text{ t}$$

Ejemplo 10.2 Un cable que soporta una carga uniforme de 200 kg por m de proyección horizontal está suspendido entre dos puntos separados 60 m en horizontal, con un punto de apoyo 15 m más alto que el otro. Se ajusta la tracción hasta que la flecha en el medio del vano (esto es, la distancia vertical desde el cable a la cuerda en el centro del vano) sea igual a 3,75 m. ¿Cuál es la tracción máxima del cable?

$$\text{Solución: } H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{200(60)^2}{8(3,75)} = 24.000 \text{ kg}$$

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{3,75}{60} = 0,0625 \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{15}{60} = 0,25$$

La tracción máxima del cable se produce en el punto de apoyo derecho y está dada por

$$\begin{aligned} T_{\max} &= H(1 + 16\theta^2 + 4\theta^2 \gamma + 8\theta \theta \gamma)^{1/2} \\ &= 24.000[1 + 16(0,0625)^2 + 4(0,25)^2 + 8(0,0625)(0,25)]^{1/2} \\ &= 26.800 \text{ kg} \end{aligned}$$

10.7 Longitud de cable uniformemente cargado. Si s , es la longitud total del cable,

$$s = \int_0^L ds = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (a)$$

En el caso de cuerda horizontal, de la Ec. (10.5), basada en que el origen está situado en el punto bajo del cable que está en el centro de la luz,

$$\text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2}$$

$$s = 2 \int_0^{L/2} \left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4} \right)^{1/2} dx \quad (b)$$

Integrando esta ecuación se llega a la expresión exacta:

$$s = \frac{L}{2} (1 + 16\theta^2)^{1/2} + \frac{L}{8\theta} \ln [4\theta + (1 + 16\theta^2)^{1/2}] \quad (10.8)$$

Para usar la Ec. (10.8) es necesario emplear los logaritmos naturales. Se puede obtener una aproximación muy útil para hallar la longitud de un cable cuando la cuerda es horizontal, desarrollando en serie el término

$$\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4} \right)^{1/2}$$

que aparece en la Ec. (b), por el teorema del binomio, y considerando solo los tres primeros términos de la serie. Se obtiene así

$$\begin{aligned} s = 2 \int_0^{L/2} \left[(1)^{1/2} + \frac{1}{2} (1)^{-1/2} (64) \frac{h^2x^2}{L^4} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) (1)^{-3/2} (64)^2 \frac{h^4x^4}{L^8} + \dots \right] dx \end{aligned}$$

o, simplificando,

$$s = L \left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5} + \dots \right) \quad (10.9)$$

Esta expresión converge rápidamente, dando los tres primeros términos suficiente aproximación.

Si la cuerda está inclinada, se puede obtener una ecuación que dé el valor exacto de s_e sustituyendo el valor de dy/dx obtenido de la Ec. (10.3) en la Ec. (a), pero el resultado obtenido es muy complicado. Para muchas aplicaciones resulta de suficiente exactitud el método aproximado siguiente.

Supongamos que la longitud del cable es la misma que tendría uno cuya cuerda fuera horizontal y tuviera una luz igual a la cuerda inclinada del dado, esto es, $L \sec \gamma$, siendo la flecha $h \cos \gamma$, que es una expresión aproximada de la distancia máxima en perpendicular del cable a la cuerda. Con estas hipótesis,

$$\theta' = \frac{h \cos \gamma}{L \sec \gamma} = \frac{\theta}{\sec^2 \gamma}$$

Aplicando ahora la Ec. (10.9) a este cable imaginario y quedándonos solo con los primeros términos,

$$\begin{aligned} s_e &= L \sec \gamma \left(1 + \frac{8}{3} \frac{\theta^2}{\sec^4 \gamma} \right) \\ &= L \left(\sec \gamma + \frac{8}{3} \frac{\theta^2}{\sec^3 \gamma} \right) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Para hallar la longitud aproximada del cable del Ejemplo 10.1 de la Sec. 10.6, utilizando la Ec. (10.9) ($\theta = 1/10$) será

$$\begin{aligned} s_e &= 500 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{100} \right) - \frac{32}{5} \left(\frac{1}{10,000} \right) \right] \\ &= 500(1,000 + 0,0267 - 0,0006) = 513,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Para hallar la longitud aproximada del cable del Ejemplo 10.2 de la Sec. 10.6, utilizando la Ec. (10.10), tendremos

$$\theta = 0,0625 \quad \sec^2 \gamma = 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma = 1 + (0,25)^2 = 1,0625 \quad \sec \gamma = 1,031$$

$$s_e = 60 \left[1,031 + \frac{8}{3} \frac{(0,0625)^2}{(1,031)^3} \right] = 62,4 \text{ m}$$

10.8 Alargamiento elástico de los cables. Cuando un cable soporta una carga, experimenta un alargamiento elástico que muchas veces tiene importancia al calcular la flecha y para otras aplicaciones. Por definición del módulo de elasticidad,

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad \text{de donde } \Delta L = \frac{FL}{AE}$$

Un elemento de cable de longitud ds está sometido a una tracción T_x . Un método útil para determinar el alargamiento elástico de un cable consiste en determinar primero T_{med} , que por definición puede considerarse la tracción media aplicada a la lon-

gitud del cable, que produce una variación elástica total de longitud igual a la que tiene lugar realmente. Matemáticamente se expresa por

$$\frac{T_{\max} S_0}{AE} = \int_0^{s_0} \frac{T_x ds}{AE}$$

donde A y E se suponen constantes. Por tanto,

$$T_{\max} = \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} T_x ds = \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} H \frac{ds}{dx} ds = \frac{H}{s_0} \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (a)$$

Considerando una carga uniforme por metro en horizontal, y una cuerda inclinada, se puede obtener dy/dx de la Ec. (10.3) y es igual a $(8hx/L^2) - (4h/L) + \operatorname{tg} \gamma$. Sustituyendo este valor de dy/dx en la Ec. (a) e integrando,

$$T_{\max} = \frac{HL}{s_0} \left(1 + \frac{16}{3} \theta^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma \right) \quad (b)$$

Utilizando la Ec. (10.10) para expresar s_0 ,

$$T_{\max} = H \frac{1 + (16\theta^2/3) + \operatorname{tg}^2 \gamma}{\sec \gamma + \frac{8}{3}(\theta^2/\sec^2 \gamma)} \quad (10.11)$$

Si la cuerda del cable es horizontal, $\gamma = 0$, de donde

$$T_{\max} = H \frac{1 + (16\theta^2/3)}{1 + (8\theta^2/3)} \quad (10.12)$$

Spongamos, por ejemplo, que se quiere hallar el alargamiento elástico del cable del Ejemplo 10.1, Sec. 10.6, para el que se halló en la Sec. 10.7 que s_0 era igual a 513,0 m. Tomando $E = 1.900.000 \text{ kg/cm}^2$ ($= 19.000.000 \text{ t/m}^2$), y $A = 320 \text{ cm}^2$ ($= 0,032 \text{ m}^2$),

$$T_{\max} = 1.250 \frac{1 + \frac{16}{3}(\frac{1}{100})}{1 + \frac{8}{3}(\frac{1}{100})} = 1.285 \text{ t}$$

$$\text{Alargamiento elástico} = \frac{T_{\max} s_0}{AE} = \frac{1.285(513)}{0,032(19.000.000)} = 1,08 \text{ m}$$

La longitud del cable *sin esfuerzos* sería, con aproximación de 10 cm,

$$513,0 - 1,1 = 511,9 \text{ m}$$

10.9 Estructuras con contravientos. Se puede ver la aplicación de las diversas relaciones de los cables a los contravientos, considerando la estructura de la Fig. 10.5. Spongamos que se usa un cable que pesa 8,3 kg por m como contraviento para mantener vertical un poste BC cuando se aplica la carga de 50.000 kg. Tomando momentos

respecto a C de las fuerzas que actúan sobre el poste y observando que la componente horizontal de la tracción en el cable, H , actúa hacia la izquierda del poste,

$$30H = 50.000(3) \quad H = 5.000 \text{ kg}$$

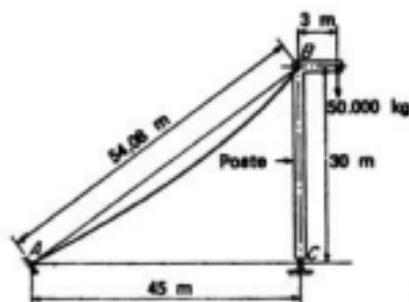


FIG. 10.5. Cable de contraviento.

Este valor de H se produce para mantener vertical el poste, por lo que la flecha debe ser

$$5.000 = \frac{wL^2}{8h} = \frac{9,97(45)^2}{8h}$$

$$h = 0,50 \text{ m}$$

pues, en esta solución aproximada, se supone que el cable es parabólico y está sometido a una carga uniforme de

$$w = 8,3(54,08/45) = 9,97 \text{ kg por metro en horizontal}$$

La tracción máxima en el contraviento se producirá en B y, según las Ecs. (10.6), será igual a

$$T_{\max} = 5.000 \left[1,000 + 16 \left(\frac{0,5}{45} \right)^2 + \left(\frac{30}{45} \right)^2 + 8 \left(\frac{0,5}{45} \right) \left(\frac{30}{45} \right) \right]^{1/2} = 6.130 \text{ kg}$$

Se observará que se puede obtener un valor muy aproximado a éste considerando que el cable actúa como un tirante recto según la cuerda AB . La longitud de esta cuerda es de 54,08 m, por lo que la tracción valdrá

$$5.000 \left(\frac{54,08}{45} \right) = 6.000 \text{ kg}$$

El único error introducido en esta solución aproximada es debido al hecho de ser la pendiente del cable en B mayor que la de la cuerda. Si no es grande la relación de flecha, esta diferencia de pendiente no tiene importancia.

Generalmente es necesario tener en un poste más de un contraviento, para evitar el vuelco en más de una dirección. En estos casos, se ajustan los vientos de modo que tengan una tensión inicial, generalmente alrededor de la mitad de la que tendrán en

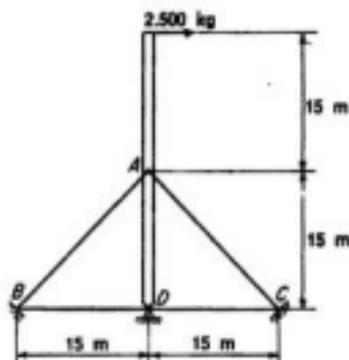


FIG. 10.6. Mástil con vientos.

carga. Supongamos, en la Fig. 10.6, que las flechas de los vientos AB y AC se han ajustado para que, cuando no haya carga horizontal en el poste, las componentes horizontales de la tracción de cada viento sean de 3.000 kg. En esas circunstancias, la tensión inicial en cada viento, siguiendo el método aproximado indicado en el estudio de la Fig. 10.5, será igual a $+3.000 \times 1,414 = +4.250$ kg.

Cuando se aplica la carga de 2.500 kg en lo alto del poste, los dos contravientos, para mantener el equilibrio, han de aplicar en A una fuerza de 5.000 kg hacia la izquierda. Por un método aproximado que conduce a resultados aceptablemente precisos, se puede suponer que esta carga de 5.000 kg se aplica aumentando la componente horizontal de la tracción en el viento AB en 2.500 kg y disminuyendo en la misma cantidad la del AC , lo que conduce a $H_{AB} = +5.500$ kg y $H_{AC} = +500$ kg. Por tanto, la tracción máxima en los vientos es igual a

$$+5.500 \times 1,414 = 7.750 \text{ kg}$$

En la realidad, cuando se aplica la carga de 2.500 kg en lo alto del poste, el punto A se mueve hacia la derecha. El viento AB permite este movimiento, pues aumenta su alargamiento elástico y disminuye su flecha. La flecha de AC aumenta, y su longitud se acorta elásticamente. Se puede hacer un estudio exacto, teniendo en cuenta las variaciones elásticas de longitud y los cambios en las flechas, pero es relativamente complicado. La solución aproximada anterior es más práctica en los proyectos normales.

10.10 Puentes colgantes estáticamente determinados. Generalmente se construyen los puentes colgantes de modo que las cargas fijas sean soportadas totalmente por los cables. Una gran parte de estas cargas proviene de la calzada y es uniforme, por lo que se suele suponer que toda ella es uniforme por metro en horizontal. Con esta hipótesis, los cables sometidos solo a la carga fija son parabólicos. Cuando se aplica la sobrecarga, con hipótesis parciales de carga para obtener las fuerzas máximas en los elementos, los cables cambian de forma. Para evitar que los cambios locales de pendiente en la calzada, por causa de las sobrecargas, sean demasiado grandes, generalmente se ensamblan las viguetas de tablero a vigas de rigidez que, a su vez, se apoyan en sustentadores que van a los cables. Estas vigas de rigidez distribuyen la sobrecarga a los diversos sustentadores, de tal modo que aun bajo la sobrecarga se puede suponer que el cable permanece esencialmente parabólico. En tanto siga siendo el cable parabólico, puede actuar sobre él una carga uniforme por metro de proyección horizontal. Puesto que los sustentadores están separados distancias iguales entre sí, esto equivale a decir que las tracciones de suspensión en un tramo dado son iguales. En la teoría «elástica»

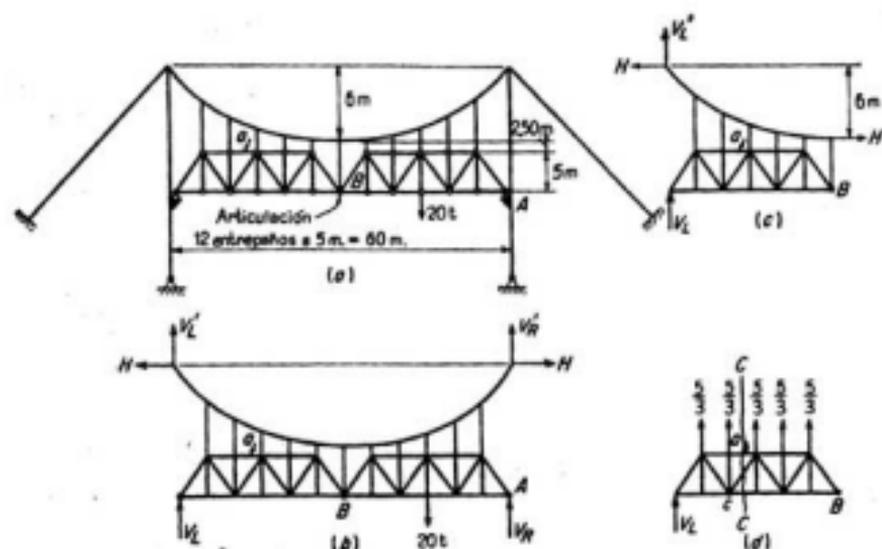


FIG. 10.7. Puente colgante.

de los puentes colgantes, se supone que todos los sustentadores de un tramo dado tienen tensiones iguales. Se puede ver que esta hipótesis no es totalmente correcta considerando la teoría de las «flechas», más exacta y más complicada. Sin embargo, a menos que un puente colgante sea largo y flexible, la teoría elástica puede conducir a resultados que no contienen gran error.

Si se disponen y apoyan las vigas de rigidez como se muestra en la Fig. 10.7a, con una articulación en algún punto intermedio, la estructura es estáticamente determinada, siempre que se suponga que todos los sustentadores de un tramo dado tienen tensiones iguales. Como ejemplo de aplicación de las diversas relaciones sobre cables a un puente colgante estáticamente determinado, consideraremos el análisis de la estructura de esa figura.

Supongamos que este puente está sometido a una sobrecarga de 20 t que actúa como se muestra en la figura. Consideremos el equilibrio de todas las fuerzas que actúan en la parte de estructura de la Fig. 10.7b. Las componentes horizontales de la reacción del cable en cada uno de sus extremos son iguales y tienen la misma línea de acción. Tomando momentos respecto al punto A,

$$(V_L + V_L')(60) - 20(15) = 0 \quad V_L + V_L' = +5 \text{ (hacia arriba)}$$

Consideremos ahora el equilibrio de todas las fuerzas que actúan en la parte de la estructura de la Fig. 10.7c, tomando momentos de esas fuerzas respecto a la articulación en B.

$$(V_L + V_L' = 5)(30) + H(7,50) - H(13,50) = 0 \quad H = 25,0 \text{ t}$$

La tracción máxima del cable en el tramo principal se produce en sus extremos y, por la Ec. (10.7), es igual a $25,0(1 + \frac{15}{100})^{1/2} = 26,9 \text{ t}$.

Sea X la tracción en cada sustentador. La carga uniforme equivalente en ellos será

de $X/5$ t por m. Para calcular X utilizaremos la relación $H = wL^2/8h$, donde $w = X/5$.

$$25,0 = \frac{X}{5} \frac{(60)^2}{8(6)} \quad X = + \frac{5}{3} \text{ t}$$

Una vez determinadas las tracciones en los sustentadores, se hallan fácilmente las fuerzas en las barras de la viga de rigidez. Por ejemplo, para hallar la fuerza en la barra a , hallamos V_L tomando momentos respecto a B de las fuerzas que actúan en la parte de estructura representada en la Fig. 10.7d.

$$+30V_L + \frac{5}{3}(5 + 10 + 15 + 20 + 25) = 0 \quad V_L = -\frac{25}{6} \text{ (hacia abajo)}$$

Tomando ahora momentos respecto a c de las fuerzas que actúan en la parte de estructura a la izquierda de la sección $C-C$ (Fig. 10.7d),

$$-\frac{25}{6}(10) + \frac{5}{3}(5) + F_a(5) = 0 \quad F_a = +6,66 \text{ t}$$

En esta estructura particular, los tramos laterales no están suspendidos, y los cables de estos tramos actúan como contravientos de las torres. La componente horizontal de la tracción del cable es la misma en los tramos laterales y central, como puede verse tomando momentos, respecto a la articulación de la base de la torre, de las fuerzas que actúan en ella. Se supone que V_L actúa en el eje de la torre.

10.11 Problemas para resolver

Problema 10.1 Un cable con una luz de 300 m soporta cargas aisladas separadas a intervalos horizontales de 60 m. La magnitud de estas cargas, de izquierda a derecha, es, en toneladas, de 50, 25, 100 y 150. El extremo derecho del cable está 30 m más alto que el izquierdo. La distancia máxima, medida verticalmente desde el cable a la cuerda, es de 15 m. Se desprecia el peso del propio cable.

- ¿Cuál es la distancia en vertical desde la cuerda al punto de aplicación de cada carga?
- ¿Cuál es la longitud del cable?
- ¿Cuál es la tracción máxima del cable?

***Problema 10.2** Un cable de puente colgante de tramo lateral tiene una luz de 125 m y una relación de flecha de $\frac{1}{40}$. La pendiente de la cuerda está dada por $\text{tg } \gamma = 0,7$. La carga en el cable es de 2.000 kg por m de proyección horizontal; $E = 1.900.000 \text{ kg/cm}^2$; la sección del cable $A = 320 \text{ cm}^2$.

- ¿Cuál es la pendiente máxima del cable?
- ¿Cuál es la tracción máxima?
- Calcular, con error de 20 cm, la longitud de este cable.
- Calcular, con error de 20 cm, la longitud sin esfuerzo de este cable.

Problema 10.3 Preparar una serie de curvas en las que figure la relación x_d/L para valores de θ entre 0 y $0,25$ y valores de $\text{tg } \gamma$ que vayan de 0 a 1, para cables con carga uniforme por metro de proyección horizontal.

Problema 10.4 Un cable con una luz de 250 m y cuerda horizontal soporta 3.000 kg por m de proyección horizontal. Se ha ajustado la tensión hasta que la fuerza máxima en el cable sea 1.000.000 de kg. La temperatura es de 10°C ; $E = 1.900 \text{ t/cm}^2$; $A = 260 \text{ cm}^2$.

- ¿Cuál es la flecha correspondiente al centro del vano?
- ¿Cuál es la longitud del cable sin esfuerzo a 38°C ?

Problema 10.5 La parte alta de una grúa está arriostrada con 12 vientos, separados 30° . Cada viento cubre un tramo de 120 m y llega a una altura de 45 m. El cable de vientos pesa 10 kg por m; la flecha de cada viento es 1,2 m.

a) ¿Qué compresión ejercen en el mástil de la grúa la suma de las reacciones verticales de los cables?

b) ¿Cuál es la fuerza máxima en cada viento?

c) El mástil en la grúa tiene 45 m de altura. Si la pluma ejerce una fuerza horizontal de 50.000 kg en lo alto del mástil, ¿cuál es el valor aproximado de la fuerza máxima en cada viento? (Se supone que cada viento participa en resistir a esta fuerza en proporción al coseno del ángulo entre el viento y la fuerza, visto en planta.)

***Problema 10.6** Un puente colgante es semejante al de la Fig. 10.7a, con 20 entrepaños de 5 m cada uno y una relación de flecha del cable de $\frac{1}{40}$. La viga de rigidez tiene 5 m de altura.

a) Si actúa una sobrecarga de 2.000 kg por m sobre todo el cordón inferior, calcular la tracción máxima en el cable en el tramo colgado y la fuerza máxima en las barras del cordón inferior de la viga de rigidez.

b) Trazar las líneas de influencia de: 1) la componente horizontal de la tracción del cable; 2) la tracción en los sustentadores; 3) la fuerza en la diagonal del segundo panel de la viga de rigidez contando desde la torre izquierda.

c) El peso de la estructura es de 10 t por m. La sobrecarga consta de una carga uniforme de 4 t por m y una aislada de 10 t. Despreciando el impacto, ¿qué sección tiene que tener cada sustentador, utilizando una tracción admisible de 3.500 kg/cm² para los cables en tracción?

11

Estudio aproximado de las estructuras estáticamente indeterminadas

11.1 Introducción. Desde un punto de vista amplio, el estudio de todas las estructuras es aproximado, pues es necesario hacer ciertas hipótesis para realizarlo. Por ejemplo, al calcular las tensiones en una cercha de nudos articulados, se supone que las articulaciones no tienen rozamiento, de modo que las barras soportan solo cargas axiales. Naturalmente, es imposible construir una unión articulada sin rozamiento, por lo que el análisis de una cercha de nudos articulados es aproximado. Puede decirse, pues, que no existe un análisis «exacto».

Sin embargo, si se tiene buen criterio al hacer las hipótesis en que se basa el estudio de una estructura dada, los errores resultantes serán pequeños. A un análisis de tensiones basado en las hipótesis habituales que sirven de fundamento a la teoría de las estructuras, se le suele llamar «exacto» aunque puede verse que, hablando estrictamente, no se usa el término correctamente. Sin embargo, es apropiado, porque conviene distinguir entre el análisis basado en las hipótesis usuales que son relativamente exactas y el fundado en otras hipótesis que introducen mayores errores y que, por tanto, debe considerarse solo aproximado.

Cuando se habla de un estudio aproximado de un problema estructural dado, no se refiere uno necesariamente a ningún conjunto particular de hipótesis y aproximaciones. El método particular a utilizar en un caso dado dependerá del tiempo disponible para el estudio y el grado de exactitud que se considera necesario.

Para los tipos de estructuras que se presentan de ordinario, se pueden aprovechar métodos aproximados creados por otros y cuya precisión está comprobada, por lo que pueden utilizarse con cierta confianza. Sin embargo, los métodos aproximados que se encuentran en los libros de ingeniería no cubren todos los casos. Un buen calculista de tensiones debe estar suficientemente familiarizado con el comportamiento de las estructuras estáticamente indeterminadas para poder establecer sus propias simplificaciones cuando encuentra casos que no están en los libros.

En este capítulo se da un cierto número de soluciones aproximadas para los tipos normales de estructuras estáticamente indeterminadas. Es importante el conocimiento de estos métodos, pero quizá es de mayor importancia aún el hecho de que los proce-

dimientos bosquejados aquí podrán servir de base para hacer hipótesis que permitan simplificar los análisis aproximados de otros tipos de estructuras estáticamente indeterminadas.

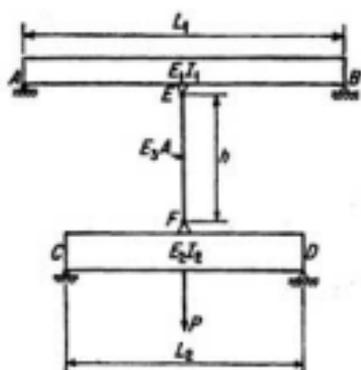


FIG. 11.1. Efecto de las propiedades elásticas en el análisis de tensiones.

11.2 Importancia de los métodos aproximados en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas. El estudio de una estructura estáticamente determinada no depende de las propiedades elásticas de sus elementos. Como consecuencia, se puede llevar a cabo un análisis de tensiones «exacto», relativamente sencillo para tales estructuras.

Por el contrario, en una estructura estáticamente indeterminada, el análisis de tensiones depende de las propiedades elásticas de los elementos. Estas propiedades elásticas incluyen el módulo de elasticidad, el área de la sección transversal, el momento de inercia de la sección, y la longitud del elemento, lo que podemos ver considerando la Fig. 11.1. Supongamos que la rigidez de la viga AB es muy pequeña en comparación con la de la CD , lo que puede conseguirse haciendo $E_1 I_1 / L_1^2$ muy pequeño en comparación con $E_2 I_2 / L_2^2$. La viga CD soportará una parte mayor de la carga P que la AB . Supongamos además que el tensor EF que une las dos vigas tiene una rigidez muy pequeña por ser $E_3 A / h$ pequeño, lo que puede conseguirse haciéndolo de goma, que tiene un valor de E muy bajo. En estas condiciones la viga CD soportará aún más parte de la carga P .

Si se conocen las cantidades que determinan las rigideces de los elementos de una estructura estáticamente indeterminada, se puede realizar un estudio llamado «exacto», que conduce a resultados con el mismo orden de precisión que se obtiene para las estructuras estáticamente determinadas. Sin embargo, en la realidad, los tres factores siguientes impiden la exactitud del estudio:

1. El calculista puede carecer de los conocimientos necesarios para realizar el estudio estáticamente indeterminado.
2. El tiempo necesario para efectuar un estudio estáticamente indeterminado puede ser tan grande que haya que abandonar la solución exacta. En algunos casos puede ser factor determinante la necesidad del tiempo. En otros, las consideraciones económicas pueden hacer aconsejable utilizar un método aproximado. Puede ser más barato usar más material, como consecuencia de basar el proyecto en tensiones aproximadas y en un mayor coeficiente de seguridad aparente respecto de las tensiones calculadas, que ahorrar material por fundar el proyecto en las tensiones exactas y un coeficiente de seguridad aparente más bajo. Esta actitud puede ser la apropiada muchas veces cuan-

do se proyectan estructuras relativamente sin importancia o partes secundarias de estructuras importantes. El calculista debe tener en cuenta, al juzgar, la magnitud de los errores que se introducirán con el método aproximado que se propone usar.

3. Cuando se comienza el estudio de una estructura estáticamente indeterminada, no se conocen las secciones ni los momentos de inercia de sus elementos. Por tanto, es necesario hacer un análisis aproximado de tensiones en la estructura para obtener una idea de las dimensiones aproximadas. Una vez asignadas estas dimensiones aproximadas, se puede hacer el estudio elástico. En general, este primer estudio elástico hará ver que esas dimensiones no son satisfactorias, llegándose a una solución apropiada por sucesivos proyectos. Por tanto, el análisis aproximado de las estructuras estáticamente indeterminadas tiene importancia para los pasos preliminares del proyecto.

11.3 Número de hipótesis necesarias. Se ha indicado anteriormente que, para que sea posible el estudio de una estructura tomando como base solamente las ecuaciones de la estática, debe disponerse de tantas ecuaciones independientes como componentes independientes de fuerza haya en la estructura. Si hay n componentes de fuerza independientes más que ecuaciones de la estática independientes, la estructura es estáticamente indeterminada de grado n . Por tanto, será necesario hacer n hipótesis independientes, cada una de las cuales dé lugar a una ecuación o relación, para que se pueda hallar una solución aproximada tomando como base la estática solamente.

Si se hacen menos de n hipótesis, no es posible la solución basada solo en la estática. Si se hacen más de n , no serán compatibles, en general, unas con otras y la aplicación de las ecuaciones de la estática conducirá a resultados incompatibles, según qué ecuaciones se utilicen y en qué orden. El primer paso en el estudio aproximado de una estructura estáticamente indeterminada es hallar el grado de indeterminación, y, por tanto, el número de hipótesis a hacer.

11.4 Cuchillos de cordones paralelos con dos diagonales en cada entrepaño. Los cuchillos de este tipo se presentan frecuentemente en la ingeniería de estructuras, como, por ejemplo, en los sistemas laterales de los cordones superior e inferior de un puente, como se vio en la Sec. 1.21. Como ejemplo del estudio aproximado de ese cuchillo, consideraremos el de la Fig. 11.2, en el que se supone que todas las barras son capaces de soportar compresión o tracción. Se observará, primero, que este cuchillo es estáticamente indeterminado en sexto grado, lo que puede verse fácilmente considerando que,

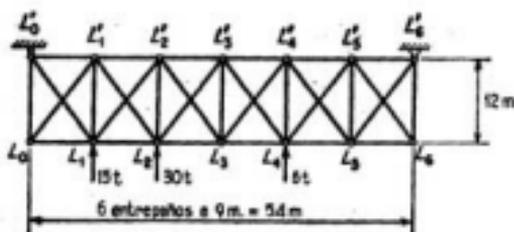


FIG. 11.2. Cuchillo con doble sistema de diagonales.

si se quitara una diagonal de cada entrepaño, las barras restantes formarían un cuchillo estáticamente determinado. Por tanto, es necesario hacer seis hipótesis independientes como condiciones de esfuerzos. Se supondrá que en cada entrepaño el cortante se divide por igual entre las dos diagonales; como hay seis entrepaños, esto supone seis hipótesis independientes. Ahora es fácil completar el estudio de la estructura utilizando solo relaciones de la estática. En la Fig. 11.3 se muestra la solución, habiéndose empleado el

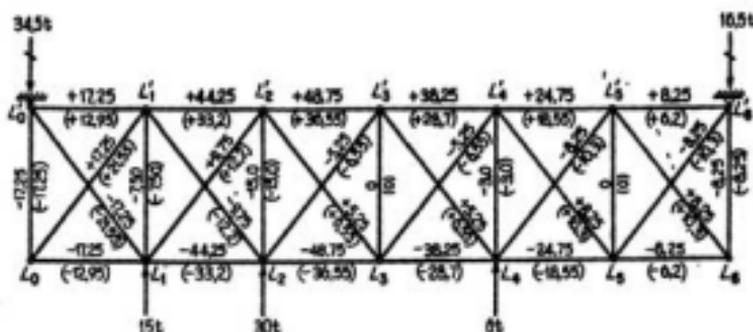


FIG. 11.3. Ejemplo.

método de las fuerzas indicadoras. Primero se calcula el cortante en cada entrepaño, a partir de las fuerzas exteriores. Como ejemplo, el correspondiente al entrepaño (1-2) es de $-19,5t$. Este cortante se divide por igual entre L_1L_2 y L_1L_2 , de modo que las fuerzas indicadoras en estas barras son $+9,75$ y $-9,75$, respectivamente. De igual modo se determinan las de todas las diagonales¹. Partiendo de ellas, se pueden hallar las de las otras barras del modo habitual. En la Fig. 11.3 se dan entre paréntesis las verdaderas fuerzas de cada barra.

En los cuchillos de este tipo, muchas veces se proyectan las diagonales como elementos de tracción solo, haciendo grande su relación de esbeltez (longitud libre dividida por radio de giro), pues así, cuando una de ellas esté sometida a compresión, pandeará ligeramente, y soportará solo una carga despreciable. Cuando se proyectan las diagonales de esta forma, el cortante de cada entrepaño lo soporta, en tracción, una sola diagonal. La consideración del cortante total en cada entrepaño nos permite decir qué diagonal pandeará y, por tanto, no llevará carga. En la Fig. 11.3, si se supone que se proyectaron las diagonales para que solo pudieran soportar tracción, todas las que en el estudio anterior tenían compresión, ahora no tendrán fuerza alguna. Esto hace que el cuchillo sea estáticamente determinado, por lo que no se halla ninguna dificultad para terminar el estudio.

11.5 Cuchillos de sistema múltiple. Los cuchillos con barras en exceso pueden, en determinados casos, ser analizados aproximadamente, suponiendo que son equivalentes a dos o más cuchillos estáticamente determinados superpuestos unos a otros. Por ejemplo, el de la Fig. 11.2 se puede construir combinando los dos de la Fig. 11.4.

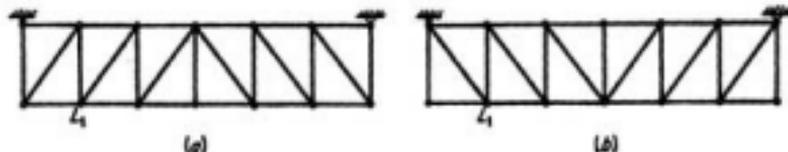


FIG. 11.4. Cuchillos componentes de la Fig. 11.2.

Pero para este tipo particular de cuchillo, una carga vertical aplicada en cualquier nudo, como el L_1 , la puede soportar cualquiera de los dos cuchillos de la Fig. 11.4, por lo que

¹ Ver Ejemplo 4.9.

no es posible asignar tal carga a uno solo de los componentes. Consideremos ahora el cuchillo de la Fig. 11.5a, que es estáticamente indeterminado de primer grado. Se puede construir superponiendo los dos de las Figs. 11.5b y c. Si se aplica una carga vertical en un nudo cualquiera, se puede suponer que la soporta solo uno de los cuchillos componentes. Supongamos, por ejemplo, que se aplica una carga vertical en L_1 , L_3 o L_5 ; se puede suponer que la soporta totalmente el cuchillo de la Fig. 11.5b, pues sus diagonales la pueden resistir. Si se aplicaran las cargas a estos nudos del de la Fig. 11.5c, no las podría soportar sin que las barras del cordón inferior estuvieran sometidas a un momento flector, lo que no es posible porque los elementos del cuchillo están proyectados para resistir solo fuerza axial. Del mismo modo, las cargas verticales L_2 y L_4 se supondrá que las sustenta totalmente el cuchillo de la Fig. 11.5c. Por tanto, las cargas aplicadas al cuchillo de la Fig. 11.5a se pueden asignar, de un modo concreto, a uno u otro de los componentes. Cada uno de éstos es estáticamente determinado y se puede estudiar fácilmente para las cargas que se supone se le aplican. Las fuerzas de barra en el cuchillo real se pueden hallar, ya, superponiendo las de los dos componentes. La de una diagonal cualquiera se obtiene del cuchillo componente en que existe esa diagonal, pero la de los montantes extremos y las de las barras de los cordones, se hallan sumando los valores obtenidos en cada cuchillo componente.

Como el cuchillo de la Fig. 11.5a es estáticamente indeterminado de primer grado, el estudio aproximado que se indica aquí está basado en una sola hipótesis, consistente en que en un entrepaño cualquiera, el cortante total exterior se divide entre las dos diagonales en la misma forma que ocurriría si pudieran actuar los dos cuchillos componentes por separado bajo las cargas aplicadas en sus nudos respectivos. Hecha esta hipótesis para la división del cortante en un entrepaño, de las ecuaciones de la estática se deduce la división de los cortantes en los demás entrepaños, de forma que no intervienen más hipótesis.

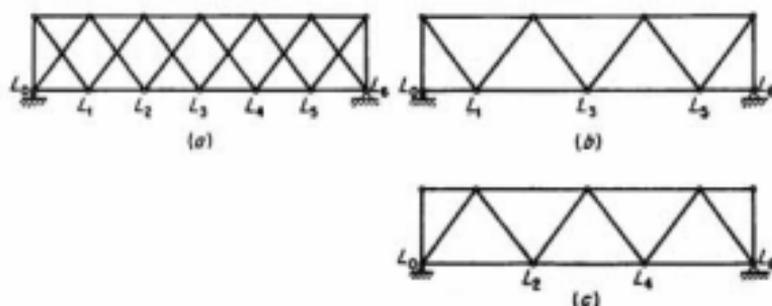


FIG. 11.5. Cuchillos de sistema múltiple.

Como ejemplo de este método aproximado para estudiar los cuchillos con múltiples sistemas de celosías, consideremos el de la Fig. 11.6a. Este cuchillo se puede considerar compuesto por los tres componentes indicados por líneas llenas, de trazos cortos y de trazos largos en las diagonales. En las Figs. 11.6b a d se dan las fuerzas de barra para cada uno de ellos. Luego se superponen estas fuerzas componentes y se obtienen las fuerzas de barras totales escritas en la Fig. 11.6a. Por ejemplo, la fuerza total en U_2L_3 se toma directamente de la Fig. 11.6b (+17,7), mientras que la de U_2U_3 se halla sumando las fuerzas obtenidas para este elemento en los cuchillos componentes, $-25,0 - 19,4 - 27,8 = -72,2$.

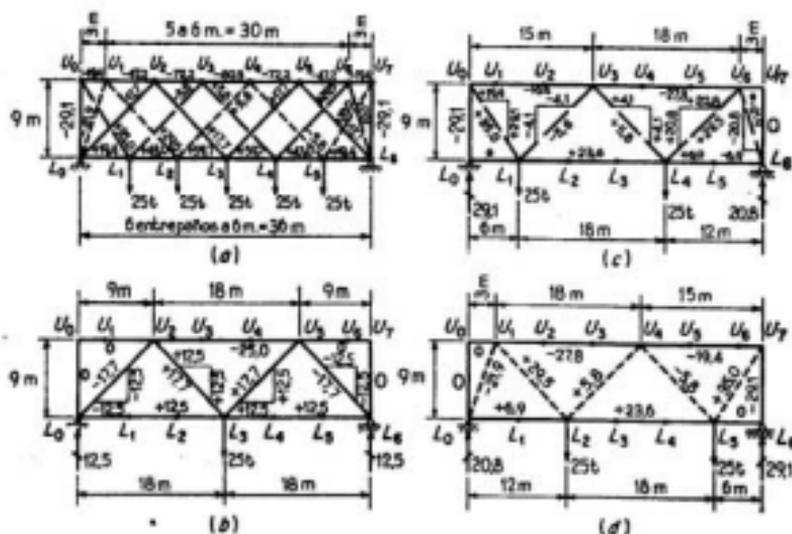


FIG. 11.6. Ejemplo.

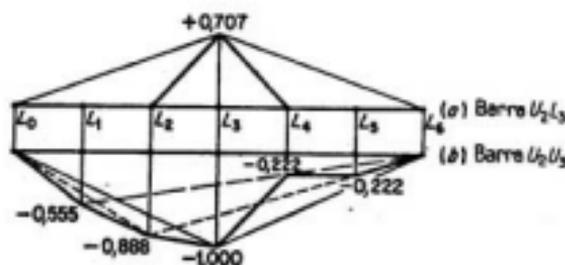


FIG. 11.7. Líneas de influencia del cuchillo de la Fig. 11.6.

Si se quieren trazar las líneas de influencia de las fuerzas de barra en cuchillos de sistema múltiple se puede usar el mismo método. En las Figs. 11.7a y b se han dibujado las líneas de influencia de las barras U_2L_3 y U_2U_3 . Como U_2U_3 es un elemento del cuchillo componente de la Fig. 11.6b, se dibuja la línea de influencia considerando primero este cuchillo solamente. La ordenada en L_3 es la única no nula en esta línea de influencia, pues cuando la carga unidad está en otro nudo del cordón inferior, la soporta otro de los cuchillos componentes, y la fuerza en U_2L_3 es nula. Como la línea de influencia es una recta entre nudos, la correspondiente a esta barra es la de línea gruesa de la Fig. 11.7a.

La barra U_2U_3 es un elemento de cada uno de los cuchillos componentes. Considerándola cada vez como perteneciente a cada uno de ellos, se han construido las líneas de influencia correspondientes en la Fig. 11.7b. La ordenada en L_3 es la única que tiene significación para la línea de influencia trazada con la Fig. 11.6b como base; las de L_1 y L_4 son las únicas que tienen significado para la línea de influencia correspondiente a la Fig. 11.6c y las de L_2 y L_5 para la Fig. 11.6d. Se han unido estos puntos significa-

tivos por una línea gruesa, hallándose así la línea de influencia resultante de la fuerza en la barra U_2U_3 .

11.6 Pórticos simples. Las estructuras de pórtico simple, semejantes a las emboaduras del puente descritas en la Sec. 1.21, tienen como objeto primordial transmitir las cargas horizontales, aplicadas en la parte alta, a las cimentaciones. Las necesidades de espacio libre conducen generalmente al empleo de estructuras con forma de pórtico simple estáticamente indeterminado, y para su estudio se utilizan frecuentemente soluciones aproximadas. Consideremos el pórtico de la Fig. 11.8a cuyos elementos son todos capaces de soportar momento y cortante, así como fuerza axial. Los pies están articulados en su base y rigidamente unidos a la viga superior. Esta estructura es indeterminada en primer grado, por lo que hay que hacer una hipótesis. Las soluciones de este tipo de estructuras basadas en consideraciones elásticas demuestran que el cortante horizontal en el pórtico se divide casi por igual entre los dos pies; por tanto, se supondrá que las reacciones horizontales en los dos pies son iguales entre sí, es decir, iguales a $P/2$ *. Ahora se puede ya terminar el resto del análisis por la estática. Se puede obtener la reacción vertical en el pie de la derecha tomando momentos respecto a la articulación de la base del pie de la izquierda. Luego puede hallarse la reacción vertical en este último pie, aplicando $\Sigma F_v = 0$ a toda la estructura. Una vez conocidas las reacciones, se calculan fácilmente las curvas de momentos flectores y cortantes, obteniéndose los valores de momentos de la Fig. 11.8b. Es conveniente ver la forma deformada del pórtico bajo la acción de la carga aplicada. Esto se representa, a escala exagerada, en la Fig. 11.8c.

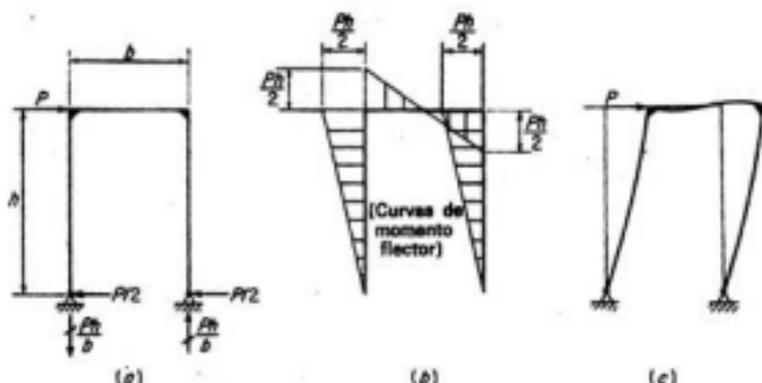


FIG. 11.8. Pórtico simple.

Consideremos ahora un pórtico similar en cierto modo al de la Fig. 11.8a, pero con los pies empotrados como en la Fig. 11.9a. Esta estructura es estáticamente indeterminada en tercer grado, por lo que es necesario hacer tres hipótesis. Como en el caso de los pies articulados, supondremos que las reacciones horizontales en los dos pies son iguales y valen, por tanto, $P/2$. La Fig. 11.9c representa la deformada del pórtico bajo la acción de la carga aplicada. Se observará que cerca del centro de cada pie hay un punto en que se invierte la curvatura. Estos son puntos de inflexión, en los que el mo-

* Esta hipótesis es razonable si el pórtico es simétrico y las rigideces de los pies son iguales. ¿Cuál sería una hipótesis razonable si las rigideces de los pies no fueran iguales?

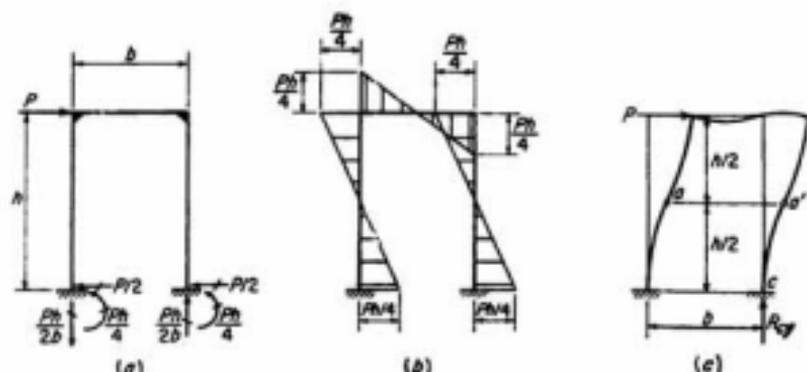


FIG. 11.9. Pórtico simple con pies empotrados.

mento flector cambia de signo, y, por tanto, tiene valor nulo. Se supondrá, en consecuencia, que hay un punto de inflexión en el centro de cada pie, lo que es estructuralmente equivalente a admitir que existen articulaciones en los puntos a y a' , como se representa en la Fig. 11.9c. Las reacciones verticales en este pórtico son iguales a las fuerzas axiales en los pies y se pueden determinar tomando momentos sucesivamente respecto a a y a' de todas las fuerzas que actúan en la parte de estructura por encima de estos puntos. Por ejemplo, tomando momentos respecto a a ,

$$+P \frac{h}{2} - R_{cv}b = 0 \quad R_{cv} = + \frac{Ph}{2b}$$

El momento reacción en la base de cada pie es igual al cortante en el punto de inflexión del pie multiplicado por la distancia del punto de inflexión a la base y, por tanto, igual a $(P/2)(h/2) = Ph/4$. Una vez conocidas las reacciones, se pueden determinar fácilmente por la estática las curvas de cortantes y momentos flectores de los elementos del pórtico. En la Fig. 11.9b se dan las curvas de momentos flectores para esta estructura y carga.

Las embocaduras de los puentes se disponen muchas veces de un modo semejante al representado en la Fig. 11.10a. En este pórtico, los pies AB y CD son continuos desde A hasta B y de C a D , respectivamente, y se proyectan de modo que sean capaces de resistir momento y cortante, lo mismo que fuerza axial. Los otros elementos que constituyen el cuchillo de la parte alta se consideran como unidos entre sí por articulaciones, y que soportan solo fuerza axial. Esta estructura es estáticamente indeterminada en tercer grado, por lo que se harán las tres hipótesis siguientes:

1. Las reacciones horizontales son iguales.
2. Existe un punto de inflexión a mitad de distancia entre la base A del pie AB y el extremo H de la cartela.
3. Existe un punto de inflexión a mitad de distancia entre la base C del pie CD y el extremo I de la cartela.

Las reacciones horizontales son, pues, iguales a $P/2$. El momento en la base de cada pie es igual al cortante en este multiplicado por la distancia desde el punto de inflexión a la base, y tiene un valor de $(P/2)(3) = 1,5P$. Las reacciones verticales se pueden obtener tomando momentos sucesivamente respecto a los puntos de inflexión a y a' de las fuerzas que actúan en la estructura por encima de ellos. Estas ecuaciones demues-

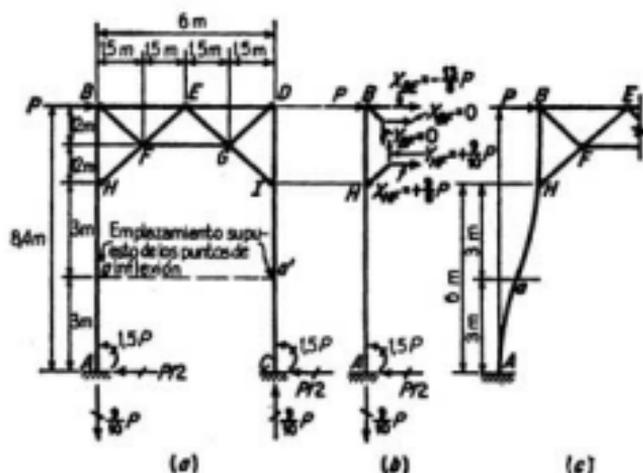


FIG. 11.10. Pórtico de acceso al puente.

tran que las reacciones verticales son iguales a $5,4P/6 = 9P/10$ cada una, y actúan en las direcciones representadas en la figura.

Para hallar las fuerzas en las barras unidas a los pies se puede proceder como sigue: Considerando el pie AB como un cuerpo rígido y tomando momentos respecto a B de las fuerzas que actúan en él,

$$\begin{aligned}
 + \frac{P}{2}(8,4) - 1,5P - X_{BF}(2,4) &= 0 & X_{BF} &= + \frac{5,7P}{2,4} = + \frac{9P}{8} \\
 \therefore Y_{BF} &= + \frac{9P}{8} \left(\frac{1,2}{1,5} \right) = + \frac{9P}{10}
 \end{aligned}$$

Para hallar la fuerza en la barra BF , aplicando $\Sigma F_x = 0$ a todas las fuerzas que actúan en el pie AB ,

$$+ Y_{BF} - \frac{9P}{10} + \frac{9P}{10} = 0 \quad \therefore Y_{BF} = 0 \quad \therefore X_{BF} = 0$$

Para hallar la fuerza en la barra BE , aplicando $\Sigma F_x = 0$ a todas las fuerzas que actúan en el pie AB ,

$$+ X_{BE} + 0 + \frac{9P}{8} + P - \frac{P}{2} = 0 \quad \therefore X_{BE} = - \frac{13P}{8}$$

Conocidas todas las fuerzas que actúan en el pie AB , como se muestra en la Figura 11.10b, se puede calcular la fuerza axial en una sección cualquiera del pie, y construir las curvas del cortante y el momento flector. De igual modo se puede estudiar el pie CD . Luego, se puede hallar sin dificultad las restantes fuerzas de barra.

11.7 Pórticos industriales. Muchas veces se construyen pórticos para edificios industriales como el de la Fig. 11.11. Se puede hacer un estudio aproximado de ese pórtico cuando está sometido a cargas laterales a base de hipótesis idénticas a las hechas

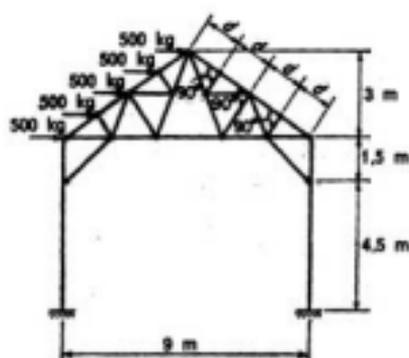


FIG. 11.11. Pórtico.

para el pórtico simple de la Fig. 11.10, esto es, que las reacciones horizontales en las bases de los pies son iguales y que existen puntos de inflexión en cada pie a una altura de 2,25 m. La aplicación de las ecuaciones de la estática, después de hacer estas hipótesis, sigue la marcha general empleada para el pórtico simple.

11.8 Torres con pies rectos. Si los pies de una torre estáticamente determinada tienen una inclinación constante en toda su longitud, cada cara de la torre está en un plano. Para esa torre, se puede llevar a cabo el análisis de esfuerzos para cargas laterales, descomponiendo todas estas cargas laterales en sus componentes situadas en los planos de las caras de la torre adyacentes a los nudos en que las cargas están aplicadas. Luego se puede ya estudiar cada cara como un cuchillo plano sometido a fuerzas en su plano. Tal estudio conduce directamente a las fuerzas en las barras de cada cara, mientras que las de los pies se obtienen superponiendo los resultantes del estudio de dos caras adyacentes.

No obstante, el cuchillo plano de cada cara puede ser estáticamente indeterminado. En este caso, el análisis de esfuerzos se puede hacer también como cuchillos planos, pero es necesario hacer ciertas hipótesis, si hay que basarlo solo en la estática. Supongamos que en la Fig. 11.12a se quiere determinar las fuerzas de barra en las diagonales del entrepaño $abcd$. Trazaremos una sección por $M-M$ en este entrepaño, a la altura de la intersección de las diagonales, y tomaremos momentos respecto a o , intersección de la prolongación de los pies, de todas las fuerzas

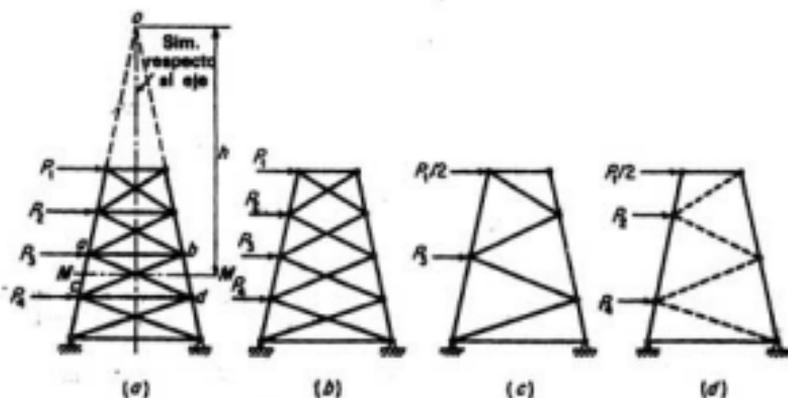


FIG. 11.12. Celosía de torre.

que actúan en el cuchillo por encima de la sección $M-M$. Como las prolongaciones de los pies pasan por el origen de momentos, los correspondientes a las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 están en equilibrio con los de las componentes horizontales de las fuerzas en las diagonales ad y bc , que actúan con el brazo de palanca h .

Si las diagonales solo pueden soportar tracción, la ad tendrá fuerza nula, de modo que en la ecuación anterior aparece solo una incógnita y se obtiene directamente la componente horizontal de la fuerza en la barra bc . Si, por el contrario, las diagonales pueden soportar tanto compresión como tracción, se puede suponer que las componentes horizontales de las fuerzas en las dos diagonales son numéricamente iguales y de signo contrario. Esto reduce el número de incógnitas independientes en la ecuación anterior a una y se pueden determinar las componentes horizontales de las fuerzas en las diagonales.

Si se suprimen las barras horizontales en los nudos intermedios, como se ve en la Fig. 11.12b, se puede considerar el cuchillo de torre como si estuviera compuesto por dos cuchillos componentes, representados en las Figs. 11.12c y d, estudiando cada uno por procedimientos estáticamente determinados para las cargas asignadas a él, obteniéndose luego las fuerzas en las barras del cuchillo real, superponiendo las de las dos componentes.

Se ha visto, pues, que se pueden aplicar al estudio aproximado de los lados de la torre, que en realidad son cuchillos planos en voladizo estáticamente indeterminados, el mismo método general utilizado para el estudio aproximado de los cuchillos indeterminados simplemente apoyados.

11.9 Tensiones en estructuras de edificios debidas a cargas verticales. Una estructura o pórtico de edificio consta, fundamentalmente, de vigas que llevan las cargas verticales a los pilares y los propios pilares. Si se construye tal pórtico como el de la Figura 11.13a, que es estáticamente determinado, tendrá poca resistencia contra las fuerzas horizontales, tales como el viento, que ha de soportar también. Por tanto, en la realidad se construye como se muestra en la Fig. 11.13b, en la que las vigas están rigidamente unidas a los pilares, de forma que todos los elementos pueden soportar momento flector, cortante y fuerza axial. A tal pórtico se le llama pórtico rígido, y a veces estructura o pórtico de edificio. A causa de la construcción rígida, un pórtico de edificio es muy

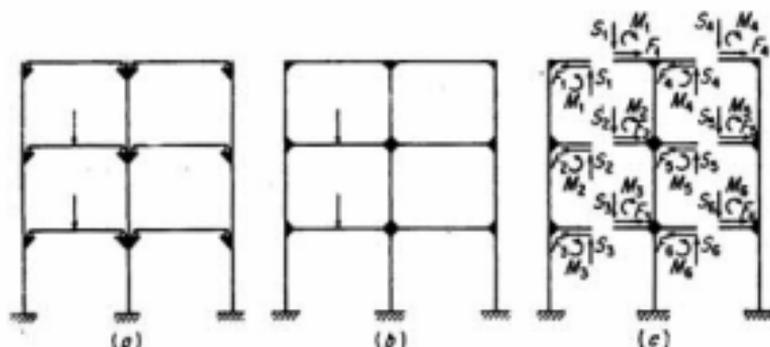


FIG. 11.13. Pórtico de edificio.

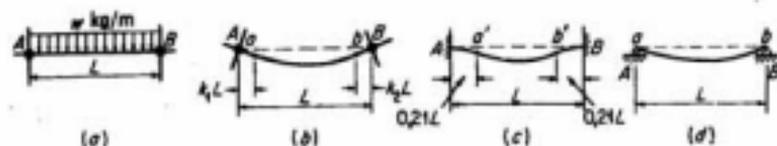


FIG. 11.14. Viga de pórtico de edificio.

indeterminado, pudiéndose hallar su grado de indeterminación considerando la Figura 11.13c. Supongamos que se corta cada viga cerca del centro, como se indica. La estructura resultante será estáticamente determinada, pues cada pilar, junto con sus cabezas de vigas, actúa como un voladizo. Sin embargo, para llegar a este caso, es necesario quitar el momento flector, cortante y fuerza axial en cada viga en el punto en que se corta. Si el número de vigas del pórtico es n , es necesario suprimir $3n$ sobrantes para que sea estáticamente determinado; por tanto, el pórtico es indeterminado en grado $3n$. Por consiguiente, el pórtico de la Fig. 11.13b es estáticamente indeterminado de grado 18. Un pórtico con 100 pisos y 8 filas de pilares contendrá 700 vigas y será estáticamente indeterminado de grado 2.100. Por tanto, es muy conveniente poder disponer de métodos aproximados para estudiar tales estructuras.

Como un pórtico de edificio del tipo que acabamos de considerar es estáticamente indeterminado de grado igual a tres veces el número de vigas, será necesario hacer tres hipótesis de tensiones por cada viga, si se quiere hacer el estudio a base solo de la estática. En la Fig. 11.14a, si una viga está sometida a una carga de w kg por m sobre toda la longitud, los nudos A y B girarán como se ve en la Fig. 11.14b, pues, como tienen limitación parcial de giro, éste no es completo. Si los apoyos A y B tuvieran un empotramiento perfecto contra el giro, como en la Fig. 11.14c, se vería fácilmente, por la consideración de los momentos en una viga empotrada, que los puntos de inflexión estarían situados a una distancia $0,21L$ de cada extremo. Si los apoyos A y B fueran articulados, como en la Fig. 11.14d, los puntos de momento nulo estarían en los extremos de la viga. Para el caso real de empotramiento parcial, se puede suponer que los puntos de inflexión están entre $0,21L$ y $0,00L$ de los extremos. Si se supone que están a un décimo de la luz, desde cada nudo, se habrá tomado una aproximación razonable.

Las soluciones de los pórticos de edificios, basados en el comportamiento elástico, demuestran que, bajo cargas verticales, la fuerza axial en las vigas es generalmente muy pequeña.

Por tanto, se harán las tres hipótesis siguientes para cada viga al estudiar un pórtico de edificio sometido a cargas verticales:

1. La fuerza axial en la viga es nula.
2. Hay un punto de inflexión a un décimo de la luz a partir del apoyo izquierdo.
3. Hay un punto de inflexión a un décimo de la luz a partir del apoyo derecho.

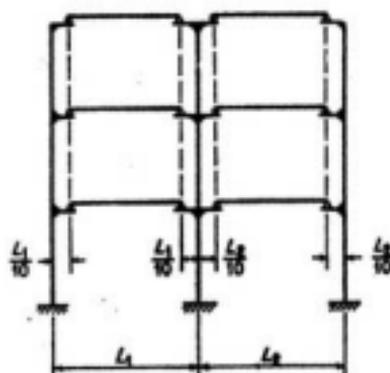


FIG. 11.15. Hipótesis referentes a las vigas.

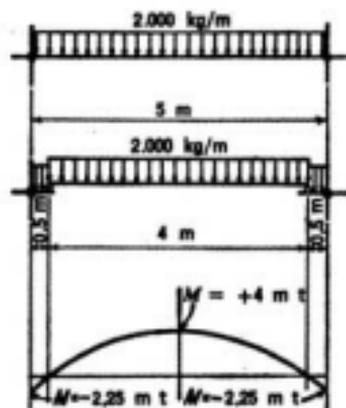


FIG. 11.16. Momentos flectores en las vigas.

Esto es equivalente a suponer que el pórtico actúa estructuralmente del mismo modo que el estáticamente determinado de la Fig. 11.15. Las vigas se pueden estudiar, ya, por la estática, como se ve en la Fig. 11.16. El momento máximo positivo se produce en el centro de la luz y está dado por

$$M = +\frac{1}{8}(2,0)(4)^2 = +4 \text{ m t}$$

El momento negativo máximo tiene lugar en los extremos de la luz y está dado por

$$M = -4,0(0,5) - 2,0(0,5)(0,25) = -2,25 \text{ m t}$$

El cortante máximo se produce en cada extremo de la luz y vale

$$S = 2,0(2) + 0,5(2) = 5 \text{ t}$$

Como los cortantes que actúan en los extremos de las vigas son iguales a las fuerzas verticales aplicadas por éstas a los pilares, se hallan fácilmente las fuerzas axiales en los pilares sumando los cortantes de las vigas desde lo alto del pilar hacia abajo, hasta llegar a la sección considerada.

Para producir la compresión máxima en un pilar, han de estar cargados los tramos de los dos lados. Para los pilares intermedios, en cada piso los momentos transmitidos por las vigas se oponen entre sí, por lo que el momento del pilar es pequeño y muchas veces se desprecia para el proyecto. Por el contrario, en los pilares exteriores, las vigas aplican momento solo a un lado, por lo que los momentos de los pilares son mayores y hay que considerarlos. Sin embargo, para calcular los momentos en los pilares, no es válida la hipótesis I. Los momentos en las vigas se suelen repartir entre los pilares en proporción a sus rigideces.

11.10 Tensiones en los pórticos de edificios debidas a cargas laterales en general.

En la Sec. 11.9 se señaló que tienen gran importancia los métodos aproximados para estudiar los pórticos, por el hecho de ser tales estructuras grandemente indeterminadas. Se ha visto que el grado de indeterminación estática de un pórtico tal como el de la Figura 11.17a es igual a tres veces el número de vigas que contiene. El número de hipótesis que hay que hacer para que permitan el estudio por la estática depende de la propia estructura, de forma que para este pórtico hay que hacer tres veces tantas hipótesis como vigas posee, independientemente del tipo de carga considerado. Sin embargo, las hipótesis hechas al estudiar los pórticos sometidos a cargas verticales no son válidas

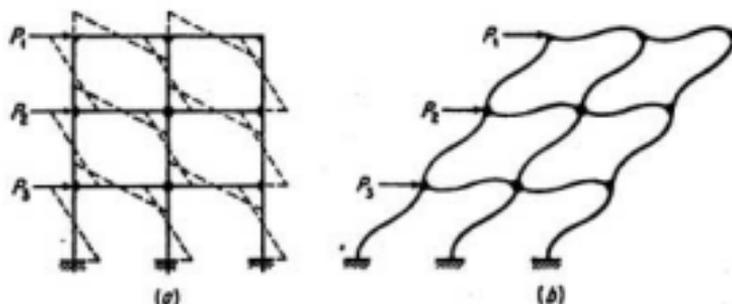


FIG. 11.17. Pórtico de edificio sometido a cargas laterales.

para el estudio con cargas laterales, porque el comportamiento estructural del pórtico es completamente diferente, como puede verse considerando la Fig. 11.17b, que representa, a escala exagerada, la forma que toma el pórtico bajo la acción de cargas laterales. Se observará que, aunque hay puntos de inflexión en los elementos, no se presentan igual que en el caso de cargas verticales. En realidad, cuando un pórtico de edificio está sometido a cargas laterales, habrá, como se ve en la Fig. 11.17b, un punto de inflexión cerca del centro de cada viga y cada pilar. Por tanto, la hipótesis de que estos puntos de inflexión están en el centro del elemento, es razonable, y es una de las que suelen hacerse para llevar a cabo el estudio aproximado de los pórticos de edificios sometidos a cargas laterales. Las curvas de momentos de la estructura de la Fig. 11.17 son del tipo de las representadas a trazos en la Figura 11.17a.

Daremos en este libro tres métodos aproximados para estudiar los pórticos de edificios sometidos a cargas laterales. Estos métodos son: 1) el método del pórtico simple, 2) el método del voladizo, 3) el método del factor.

Para que pueda considerarse la precisión relativa de estos métodos se aplicarán los tres al mismo pórtico. Este pórtico y sus cargas están representados en la Fig. 11.18.

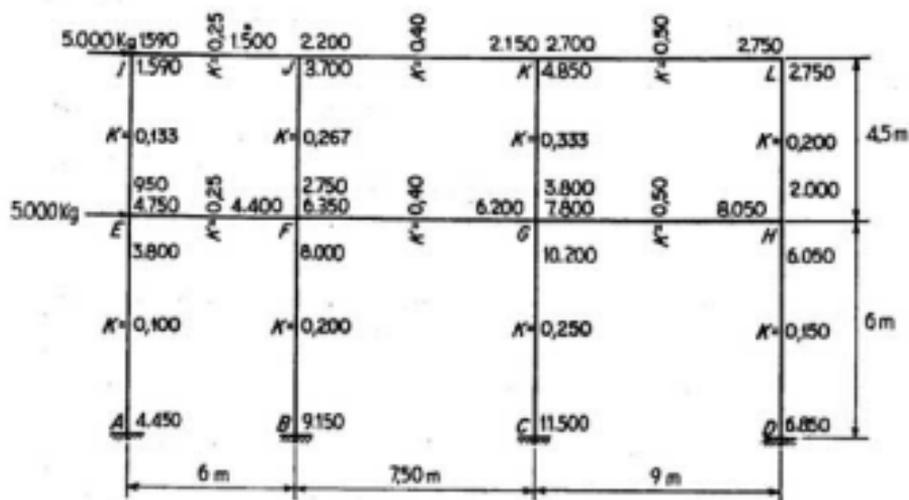


FIG. 11.18. Cálculo «exacto» de los momentos extremos originados por cargas laterales.

Es posible hallar una solución llamada «exacta» utilizando, por ejemplo, el método de «deformación angular» para estudiar estáticamente pórticos rígidos estáticamente indeterminados, que se da en el Cap. 13. Tal solución es interesante para comparar los resultados de los métodos aproximados y conduce a los valores en metros-kilogramo para las vigas y pilares que aparecen en los extremos de los elementos en la Figura 11.18.

Para aplicar este método, y lo mismo sucede con el del factor, es necesario conocer la rigidez relativa de cada elemento. Esta rigidez relativa se representa por K , y para un elemento dado se obtiene dividiendo el momento de inercia por la longitud. En cada elemento del pórtico de la Fig. 11.18; figura el valor de K .

11.11 Método del pórtico simple. En el método del pórtico simple, se hacen las siguientes hipótesis:

1. Hay un punto de inflexión en el centro de cada viga.

2. Hay un punto de inflexión en el centro de cada pilar.

3. El cortante horizontal total en cada piso se divide entre los pilares de ese piso, de tal modo que cada pilar interior soporta doble cortante que cada uno de los exteriores.

A esta última hipótesis se llega considerando cada piso como si estuviera formado por una serie de pórticos simples, como se ve en la Fig. 11.19. Así, mientras un pilar exterior corresponde al pie de un solo pórtico, uno interior corresponde a dos pies, por lo que es razonable suponer que los pilares interiores soportan doble cortante que los exteriores.



FIG. 11.19. Serie de pórticos simples equivalentes a un pórtico de edificio.

Si en un piso hay m pilares, la hipótesis 3 equivale a hacer $(m - 1)$ hipótesis por piso, respecto a las relaciones entre los cortantes en los pilares.

Con referencia al pórtico de la Fig. 11.18, la aplicación del método de los pórticos simples exige el siguiente número de hipótesis:

Puntos de inflexión en las vigas	$2 \times 3 = 6$
Puntos de inflexión en los pilares	$4 \times 2 = 8$
Relaciones de cortantes en pilares	$2 \times 3 = 6$
Total	<u>20</u>

Como en este pórtico hay seis vigas, la estructura es indeterminada en grado 18. Por tanto, el método del pórtico simple hace más hipótesis de las necesarias. Sin embargo, sucede que las hipótesis sobrantes son compatibles con las necesarias y no se obtiene incompatibilidad entre los esfuerzos calculados.

Como ejemplo de aplicación del método, lo aplicaremos al pórtico de la Fig. 11.18. La discusión siguiente se refiere a la Fig. 11.20, en la que se dan los resultados.

Cortantes en los pilares. De acuerdo con la hipótesis 3, sea x = cortante en cada pilar exterior de un piso dado; entonces, $2x$ = cortante en cada pilar interior del mismo piso. Para el primer piso,

$$x + 2x + 2x + x = 6x = 5.000 + 5.000 = 10.000$$

$$x = 1.667 \quad 2x = 3.333$$

Para el segundo piso, $6x = 5.000$; $x = 833$; $2x = 1.667$.

Momentos en los pilares. De acuerdo con la hipótesis 2, el momento en el centro de cada pilar es nulo. Por tanto, el momento en el extremo de un pilar determinado es igual al cortante en dicho pilar multiplicado por la mitad de su longitud. Por ejemplo, el momento M_{AE} en el extremo A del pilar AE es igual a $1.667 \times 3 = 5.000$ m kg; $M_{F2} = 1.667 \times 2,25 = 3.750$ m kg.

Momentos en las vigas. Observando la Fig. 11.17b, que representa el tipo de deformación que se produce en un pórtico de edificio sometido a fuerzas laterales, se ve que los momentos en las vigas y en los pilares actúan, en un nudo, en sentidos contrarios. Este hecho se ve aún más claro en la Fig. 11.21a, para la que se puede escribir la

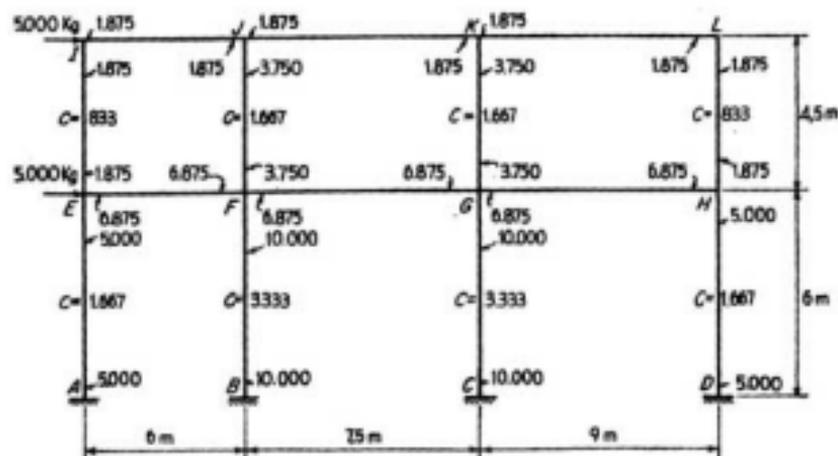


FIG. 11.20. Cálculo de los momentos extremos por el método del pórtico simple.

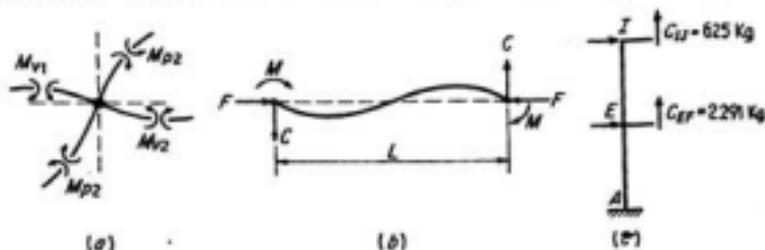


FIG. 11.21. Esquemas de cuerpo libre de partes del pórtico de la Fig. 11.20.

ecuación siguiente: $M_{p1} + M_{p2} = M_{v1} + M_{v2}$. Podemos deducir, pues, que para cada nudo la suma de los momentos extremos en los pilares es igual a la de los correspondientes en las vigas. Se puede utilizar esta relación para determinar los momentos extremos en las vigas, pues ya se han calculado los de los pilares. Por ejemplo, en el nudo E,

$$M_{EF} = +5.000 + 1.875 = +6.875 \text{ m kg}$$

Como, por la hipótesis 1, hay un punto de inflexión en el centro de la viga EF, M_{FE} es también igual a 6.875 m kg. Igualando los momentos de las vigas y los de los pilares en el nudo F, se halla $M_{FG} + 6.875 = 10.000 + 3.750$, de donde se deduce que M_{FG} es también igual a 6.875 m kg. Continuando con las vigas del primer piso del mismo modo, se verá que todos los momentos extremos de las vigas de este piso son iguales a 6.875 m kg. Los momentos en las vigas de la cubierta se pueden determinar de la misma forma; se hallará que cada uno es igual a 1.875 m kg.

Cortantes en las vigas. En la Fig. 11.21b, si se escribe $\Sigma M = 0$ para las fuerzas que actúan en una viga, tomando momentos respecto a un extremo de la misma, se ve que $CL = 2M$, de donde $C = 2M/L$. Por tanto, el cortante en la viga EF está dado por

$$C_{EF} = \frac{2 \times 6.875}{6} = 2.291 \text{ kg} \quad C_{EI} = \frac{2 \times 1.875}{6} = 625 \text{ kg} \quad \text{etc.}$$

Fuerzas axiales en los pilares. En la Fig. 11.21c se pueden obtener las fuerzas axiales en los pilares sumando, partiendo de la parte más alta, los cortantes transmitidos por las vigas. Así,

$$F_{EJ} = +625 \text{ kg} \quad F_{AE} = +625 + 2.291 = +2.916 \text{ kg} \quad \text{etc.}$$

Las fuerzas axiales en las vigas, aunque no tengan importancia para el proyecto, se pueden obtener de un modo análogo sumando, a partir de un extremo, los cortantes transmitidos por los pilares; naturalmente, hay que incluir en esa suma los efectos de las propias cargas laterales.

11.12 Método del voladizo. En el método del voladizo se hacen las siguientes hipótesis:

1. Hay un punto de inflexión en el centro de cada viga.
2. Hay un punto de inflexión en el centro de cada pilar.
3. La intensidad del esfuerzo axial en cada pilar de un piso es proporcional a la

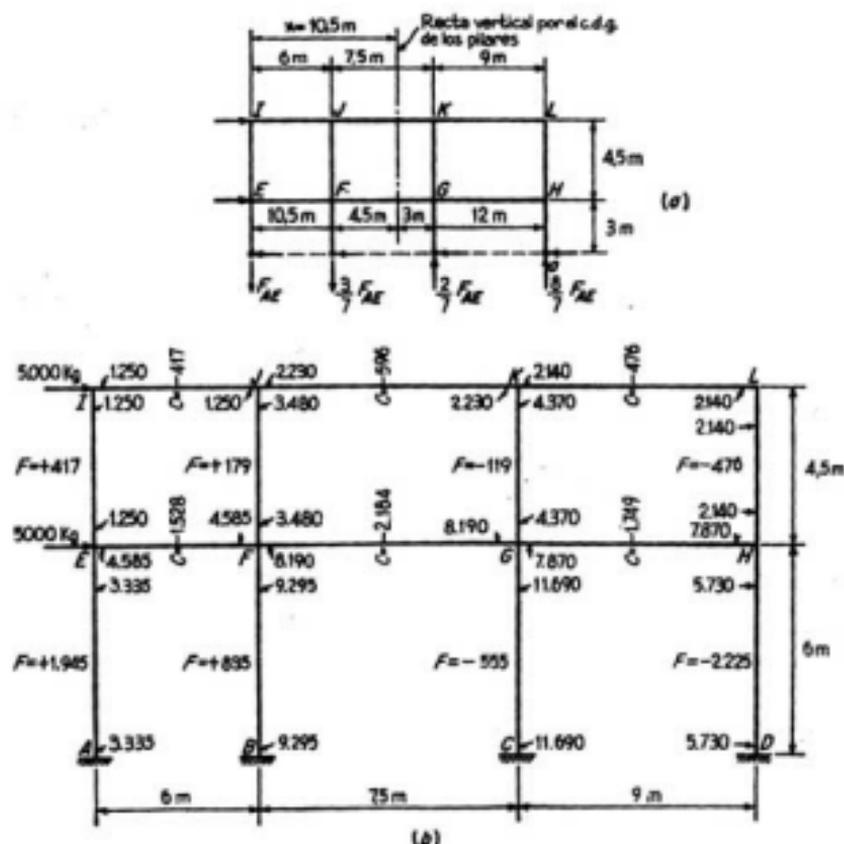


FIG. 11.22. Cálculo de los momentos extremos por el método del voladizo.

distancia horizontal desde ese pilar al centro de gravedad de todos los pilares del piso que se considera.

A esta última hipótesis se llega considerando que se pueden obtener los esfuerzos axiales en los pilares, por un método análogo al utilizado para determinar la distribución de las tensiones normales en una sección de una viga en voladizo.

Si hay m pilares en un piso, la hipótesis 3 es equivalente a admitir $(m - 1)$ relaciones entre los esfuerzos axiales de los pilares, para cada piso. Por tanto, igual que con el método de los pórticos simples, el del voladizo admite más hipótesis de las necesarias, pero aquí también las sobrantes son compatibles con las otras.

Como ejemplo del método del voladizo, lo aplicaremos ahora al pórtico de edificio de la Fig. 11.18. La discusión siguiente se refleja en la Fig. 11.22b, en la que se dan los resultados.

Fuerzas axiales en los pilares. Suponiendo que todos los pilares tienen la misma sección, el centro de gravedad de los pilares de cada piso se halla con la siguiente ecuación

$$x = \frac{6 + 13,5 + 22,5}{4} = 10,5 \text{ m desde } AEI$$

Consideremos* la Fig. 11.22a para el primer piso. Si se expresa la fuerza axial en AE por $+F_{AE}$, por la hipótesis 3, las fuerzas axiales en BF , CG y DH serían $+4,5/10,5F_{AE} = +\frac{3}{7}F_{AE}$; $-3/10,5F_{AE} = -\frac{2}{7}F_{AE}$; $-12/10,5F_{AE} = -\frac{8}{7}F_{AE}$, respectivamente. Tomando momentos respecto al punto de inflexión a del pilar DH , de todas las fuerzas que actúan en la parte del pórtico situada por encima del plano horizontal que pasa por los puntos de inflexión de los pilares del primer piso,

$$+5.000(7,50) + 5.000(3) - F_{AE}(22,5) - \frac{3}{7}F_{AE}(16,5) + \frac{2}{7}F_{AE}(9) = 0$$

de donde $F_{AE} = +1.945$; $F_{BF} = +\frac{3}{7}(1.945) = +835$, etc.

Para el segundo piso, las fuerzas axiales en los pilares están en la misma relación entre sí que las del primer piso. Se calcularán de manera similar, tomando momentos respecto al punto de inflexión de HL de todas las fuerzas que actúan sobre el pórtico por encima del plano horizontal que pasa por los puntos de inflexión de los pilares del segundo piso. En la Fig. 11.22b aparecen, en el centro de cada pilar, las fuerzas axiales correspondientes.

Cortantes en las vigas. Los cortantes en las vigas se pueden obtener a partir de las fuerzas axiales en los pilares en los diversos nudos. Por ejemplo, en el nudo E ,

$$C_{EF} = +417 - 1.945 = -1.528$$

en el nudo F , $C_{FG} = -1.528 + 179 - 835 = -2.184$; etc. En el centro de cada viga de la Fig. 11.22b se ha escrito el cortante correspondiente.

Momentos en las vigas. Como el momento en el centro de cada viga es nulo, el correspondiente a los extremos será igual al cortante en la viga, multiplicado por la mitad de la longitud de la misma. Por ejemplo,

$$M_{EF} = 1.528 \times 3 = 4.585 \text{ m kg} \quad M_{FG} = 596 \times 3,75 = 2.230 \text{ m kg} \quad \text{etc.}$$

Momentos en los pilares. Los momentos en los pilares se determinan en la cabeza de los mismos, descendiendo hacia la base como se ve en el siguiente ejemplo. En el nudo J , el momento en el pilar es igual a la suma de los momentos en las vigas, por lo que

$$M_{JF} = 1.250 + 2.230 = 3.480 \text{ m kg}$$

Como hay un punto de inflexión en el centro de FJ , M_{FJ} será también igual a 3.480 m kg. En el nudo F , $M_{FB} + 3.480 = 4.585 + 8.190$, de donde $M_{FB} = 9.295$ m kg. M_{BF} es también igual a 9.295 m kg, porque se supone que hay un punto de inflexión en el centro de BF .

11.13 Método del factor¹. El método del factor para estudiar los pórticos de edificios sometidos a cargas laterales es más exacto que el del pórtico simple y el del voladizo. Mientras que éstos dependen de ciertas hipótesis sobre los esfuerzos, que hacen posible un estudio basado en las ecuaciones de la estática, aquél depende de ciertas hipótesis referentes al comportamiento elástico de la estructura, que hacen posible un estudio aproximado de las deformaciones angulares del pórtico. Aunque está basado en este método de análisis, es posible formular un conjunto relativamente sencillo de reglas por el que se pueda aplicar sin el conocimiento de los principios de la elasticidad en que se funda el de las deformaciones angulares.

Antes de aplicar el método del factor hay que calcular el valor de $K = I/L$ para cada viga y columna. No es necesario utilizar los valores absolutos de K , pues los esfuerzos dependen de las rigideces relativas de los elementos del pórtico. No obstante, es necesario que los valores de K en los distintos elementos estén en la relación correcta entre ellos.

El método del factor se aplica siguiendo los seis pasos siguientes:

1. En cada nudo se calcula el factor v de las vigas por la relación siguiente: $v = \Sigma K_p / \Sigma K$, en la que ΣK_p representa la suma de los valores de K de los pilares que se encuentran en el nudo, y ΣK la suma de los valores de K para todos los elementos del nudo. Se escribe el valor de v obtenido así, en el extremo de cada viga contiguo al nudo para el que se ha hallado.

2. En cada nudo se calcula el factor p de los pilares por la relación siguiente: $p = 1 - v$, siendo v el factor de la viga calculado en el paso 1. Se escribe cada valor p obtenido así en el extremo de cada pilar junto al nudo en el que se ha calculado. En la base de los pilares empotrados del primer piso se toma $p = 1$.

3. Hay un número, obtenido en 1 y 2, en cada extremo de todos los elementos del pórtico. A cada uno de dichos números se le suma la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.

4. Se multiplica cada suma hallada en el paso 3 por el valor de K del elemento al que corresponde dicha suma. Para los pilares, a este producto se le llama factor de momento de pilar, P ; para las vigas, factor de momento de viga, V .

5. Los factores de momento de pilar P , hallados en el paso 4, son realmente los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos del pilar para el piso correspondiente. Por la estática se ve que la suma de los momentos extremos de los pilares en un piso determinado, es igual al cortante horizontal total en ese piso multiplicado por la altura del piso. Por tanto, los factores de momento de pilar P se pueden transformar en momentos en los extremos de los pilares, por proporción directa, en cada piso.

6. Los factores de momento de viga V , hallados en el paso 4, son realmente los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de las vigas para cada nudo. La suma de los momentos en los extremos de las vigas en cada nudo es igual, por la estática, a la suma de los momentos en los extremos de los pilares en ese nudo, que pueden obtenerse en el paso 5. Por tanto, los factores de momento de viga V se

¹ J. B. Wilbur, «A New Method for Analyzing Stresses Due to Lateral Loads on Building Frames», *Transactions Soc. Civ. Engrs.*, vol. 21, núm. 1, enero 1934.

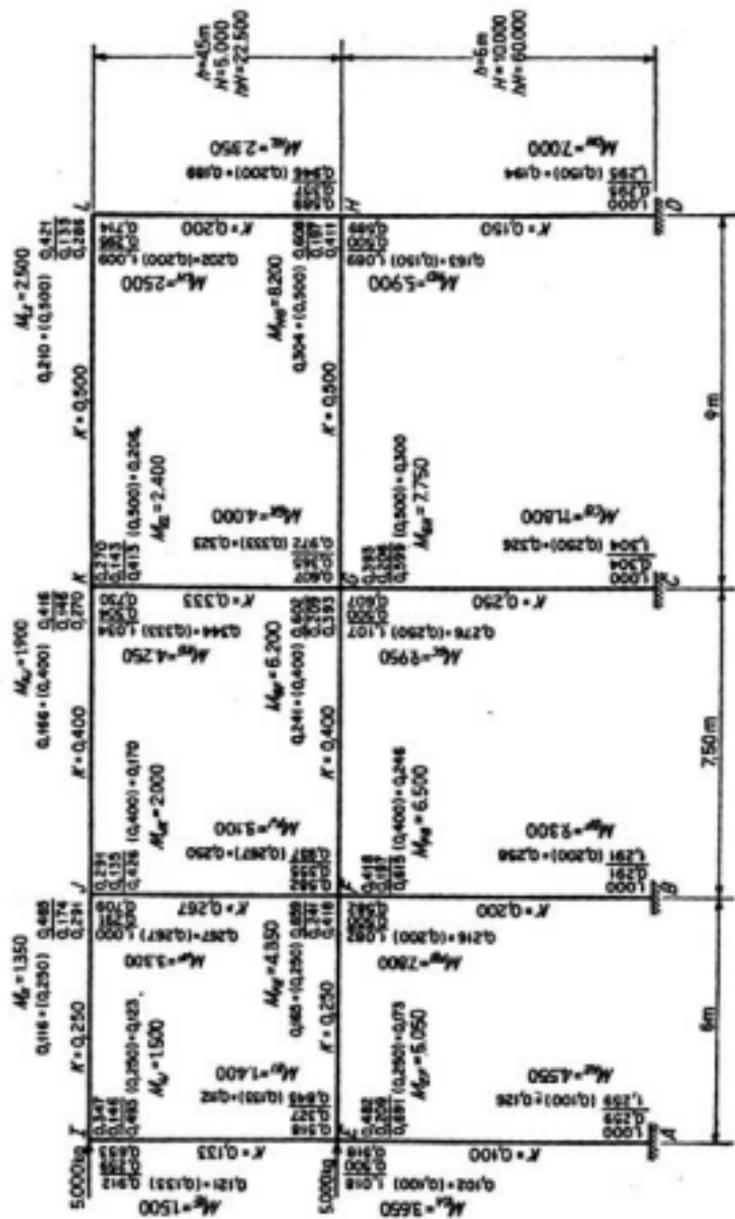


FIG. 11.23. Cálculo de los momentos extremos por el método del factor.

pueden transformar en momentos en los extremos de éstas, por proporción directa, en cada nudo.

Como ejemplo del método del factor, lo aplicaremos al pórtico de la Fig. 11.18. En la Fig. 11.23 se anotan los cálculos y resultados correspondientes. Se han escrito los valores de K en cada elemento, como parte de los datos. Para cada piso se han hallado primero, en el lado derecho de la figura, los valores del cortante total en el piso, H , y Hh , producto de H por la altura del piso h . A continuación se dan algunos detalles de la resolución:

Paso 1. Cálculo de los factores de viga

$$\text{Para el nudo } E: v_E = \frac{0,133 + 0,100}{0,133 + 0,100 + 0,250} = 0,482$$

Se escribe este número en el extremo izquierdo de la viga EF .

$$\text{Para el nudo } F: v_F = \frac{0,267 + 0,200}{0,267 + 0,200 + 0,250 + 0,400} = 0,418$$

Se escribe este número en el extremo izquierdo de la viga FG y en el derecho de EF .

$$\text{Para el nudo } I: v_I = \frac{0,133}{0,133 + 0,250} = 0,347$$

Se escribe este número en el extremo izquierdo de la viga IJ .

De igual manera se calculan los factores de vigas en los demás nudos y se escriben en el extremo de la viga correspondiente al nudo para el que se han calculado.

Paso 2. Cálculo de los factores de pilar

$$\text{Para el nudo } E: p_E = 1 - v_E = 1,000 - 0,482 = 0,518$$

Se escribe este número en la parte alta del pilar AE y en la inferior del EI .

$$\text{Para el nudo } J: p_J = 1 - v_J = 1,000 - 0,291 = 0,709$$

Se escribe este número en la parte superior del pilar FJ .

$$\text{Para el nudo } A: p_A = 1,000$$

pues es la base del pilar del piso bajo, empotrado. Este número se escribe en la parte inferior del pilar AE .

En todos los demás nudos se calculan de igual forma los factores de pilar y se escriben los valores hallados en el extremo de cada pilar junto al nudo para el que se ha calculado.

Paso 3. Aumentar el número de cada extremo de cada elemento en la mitad del número del otro extremo del mismo

$$\text{Para el nudo } A: \text{Elemento } AE: 1,000 + 0,5(0,518) = 1,259$$

Para el nudo *E*: Elemento *EF*: $0,518 + 0,5(0,653) = 0,845$
 Elemento *EF*: $0,482 + 0,5(0,418) = 0,691$
 Elemento *EA*: $0,518 + 0,5(1,000) = 1,018$

En la Fig. 11.23 se han hecho directamente cálculos similares para todos los nudos.

Paso 4. Cálculo de los factores de momentos de los pilares y de las columnas

Para el nudo *A*: Elemento *AE*: $P_{AE} = 1,259(0,100) = 0,126$
 Para el nudo *E*: Elemento *EF*: $P_{EF} = 0,845(0,133) = 0,112$
 Elemento *EF*: $P_{EF} = 0,691(0,250) = 0,173$
 Elemento *EA*: $P_{EA} = 1,018(0,100) = 0,102$

En la Fig. 11.23 se han hecho directamente cálculos similares para todos los nudos.

Paso 5. Determinación de los momentos en los pilares

Como los factores de momento de pilar son valores relativos de los momentos en los extremos de los pilares para cada piso del pórtico, esto equivale a decir que

$$M_{AE} = AP_{AE} \quad M_{EA} = AP_{EA} \quad M_{BF} = AP_{BF} \quad \text{etc.}$$

siendo M_{AE} , M_{EA} , M_{BF} , etc., los momentos reales en los extremos de los pilares y *A* tiene el mismo valor para todos los pilares de un piso. Por tanto, se puede expresar la suma de los momentos extremos por

Σ momentos extremos de pilares

$$= A(P_{AE} + P_{EA} + P_{BF} + P_{FB} + P_{CG} + P_{GC} + P_{DH} + P_{HD})$$

$$= A\Sigma P \text{ por piso} \quad (a)$$

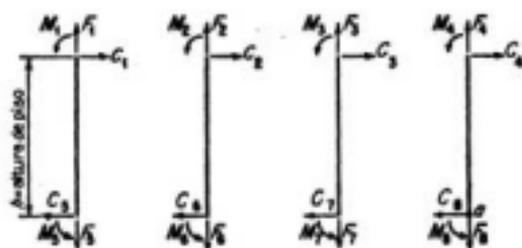


FIG. 11.24. Pilares aislados de un piso determinado.

Consideremos el equilibrio estático de todas las fuerzas que actúan en todos los pilares de un piso determinado. Con referencia a la Fig. 11.24, tomaremos momentos respecto a la base del pilar de la derecha, en el punto *a*.

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)h = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8$$

La suma $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es igual al cortante total horizontal *H* en el piso. La

suma $M_1 + M_2 + \dots + M_n$ es igual a la de los momentos en los extremos de los pilares en el piso. Por tanto,

$$\Sigma \text{ momentos extremos de pilares} = Hh \quad (b)$$

De las Ecs. (a) y (b),

$$A = \frac{Hh}{\Sigma P \text{ del piso}} \quad (c)$$

Para cada piso se puede determinar A por la Ec. (c). Luego se pueden hallar los momentos extremos de cada pilar de este piso, multiplicando el factor de momento de pilar correspondiente por A .

Como aclaración del procedimiento, veremos su aplicación al primer piso del pórtico de la Fig. 11.23.

$$A_1 = \frac{60.000}{0,126 + 0,102 + 0,258 + 0,216 + 0,326 + 0,276 + 0,194 + 0,163} = 36.000$$

$$M_{AE} = 0,126(36.000) = 4.550$$

$$M_{EA} = 0,102(36.000) = 3.650$$

$$M_{BF} = 0,258(36.000) = 9.300$$

De igual modo se hallan los momentos en los otros extremos de los pilares del primer piso, utilizando $A_1 = 36.000$. Los del segundo piso se obtienen a partir de A_2 , que se calcula aplicando la Ec. (c) al segundo piso, con lo que se halla $A_2 = 12.500$.

Paso 6. Determinación de los momentos en las vigas

Como los factores de momento de viga son valores relativos de los momentos en los extremos de las vigas en un nudo determinado, esto es otro modo de decir, con respecto a la Fig. 11.25, que $M_{AB} = B_A V_{AB}$ y $M_{AC} = B_A V_{AC}$, donde B_A tiene el mismo valor en cada una de las relaciones anteriores. Además, como en cada nudo la suma de los momentos de las vigas es igual a la de los momentos en los pilares, se puede calcular B_A por la relación siguiente:

$$B_A V_{AB} + B_A V_{AC} = M_{AE} + M_{AD}$$

de donde, en un nudo N cualquiera,

$$B_N = \frac{\text{suma de los momentos de los pilares en el nudo } N}{\text{suma de los factores de momentos de la viga en el nudo } N} \quad (d)$$

Para cada nudo se puede hallar B_N por la Ec. (d), y luego se hallarán los momentos extremos de cada viga en ese nudo multiplicando el factor correspondiente por B_N . Como aclaración, se aplica este procedimiento al nudo F del pórtico de la Figura 11.23.

$$B_F = \frac{7.800 + 3.100}{0,165 + 0,246} = 26.500$$

$$M_{FE} = 0,165(26.500) = 4.350 \text{ m kg}$$

$$M_{FG} = 0,246(26.500) = 6.500 \text{ m kg}$$

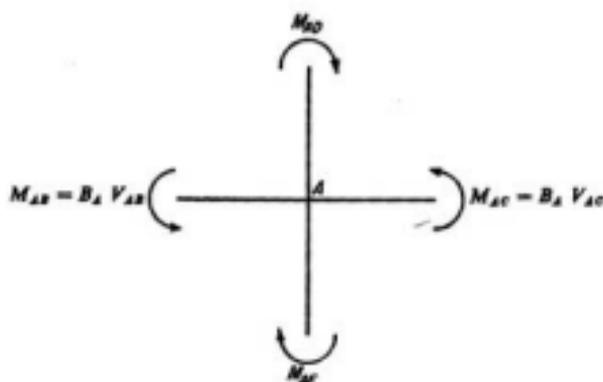


FIG. 11.25. Nudo aislado.

Se observará que la aplicación de este procedimiento en el paso 6 a los nudos exteriores de un pórtico conduce al resultado de que los momentos en los extremos de las vigas en dichos nudos son iguales a la suma de los momentos extremos de los pilares, como deben ser por la estática. Así, se pueden obtener directamente los momentos extremos de las vigas, en los pilares exteriores, a partir de los de los pilares, por la estática, por lo que no es necesario el cálculo, en esos nudos, de los factores de momento de viga.

Una vez conocidos los momentos extremos se pueden calcular, por las ecuaciones de la estática, los cortantes y las fuerzas axiales en los pilares y vigas.

11.14 Problemas para resolver

***Problema 11.1** Para una sobrecarga uniforme de 1.000 kg por m, calcular la fuerza máxima de cada carácter en las siguientes barras del cuchillo de la Fig. 11.2: a) L_3L_4 ; b) L_1L_4 . (Las diagonales pueden soportar compresión.)

***Problema 11.2** Para una sobrecarga uniforme de 2.000 kg por m y una carga aislada de 6.000 kg, calcular las fuerzas máximas en las siguientes barras del cuchillo de la Fig. 11.6a: a) U_5U_4 ; b) L_4U_4 ; c) U_5L_9 .

Problema 11.3 El pórtico simple de la Fig. 11.8a está sometido a una carga de viento uniformemente repartida de 400 kg por m en toda la longitud del pilar izquierdo. Si $h = 10$ m y $b = 7,5$ m, trazar las curvas de momentos de todos los elementos del pórtico.

Problema 11.4 Resolver el Prob. 11.3 para el pórtico simple de la Figura 11.9c.

Problema 11.5 Resolver el Prob. 11.3 para el pórtico simple de la Fig. 11.10a, con las dimensiones indicadas en la figura.

***Problema 11.6** Para el pórtico industrial de la Fig. 11.11:

- Dibujar las curvas de cortantes y de momentos flectores del pilar izquierdo.
- ¿Cuáles son las fuerzas aplicadas a la cercha de cubierta por los pilares y cartelas?

Problema 11.7 Una torre de sección rectangular, con caras similares a las de la Fig. 11.12a, tiene cinco tramos verticales, de 3 m de altura cada uno. La anchura de cada lado de la torre es de 4,5 m en la base y 2,25 m en la parte alta. Cada nudo del lado izquierdo de una cara de la torre está sometido a una carga de 500 kg hacia la derecha, en el plano de esa cara. Determinar las fuerzas en todas las barras de esa cara, suponiendo que las diagonales de cada tramo tienen fuerzas de barra iguales, pero de carácter opuesto.

Problema 11.8 Un pórtico de edificio tiene tres tramos iguales de 6 m cada uno y tres pisos de 3,60 m cada uno. Los pilares del primer piso están empotrados en la base. Para cada viga, la carga fija es de 1.000 kg por m y la sobrecarga de 600 kg por m. Determinar a) el momento positivo máximo en las vigas; b) el momento negativo máximo en las vigas; c) el cortante máximo en las vigas; d) la compresión máxima en los pilares exteriores; e) la compresión máxima en los pilares interiores; f) el momento máximo en los pilares exteriores; g) el momento máximo en los pilares interiores.

***Problema 11.9** El pórtico de edificio del Prob. 11.8 está sometido a una fuerza horizontal de 5.000 kg a la altura de cada viga en los pilares exteriores de la izquierda. Determinar el momento en los extremos de cada elemento por el método del pórtico simple.

***Problema 11.10** Resolver el Prob. 11.9 por el método del voladizo.

***Problema 11.11** Resolver el Prob. 11.9 por el método del factor, si el momento de inercia de cada viga es triple que el de cada pilar.

Problema 11.12 Calcular la fuerza en la barra *R* del pórtico de la Fig. 11.26. Hacer todas las hipótesis que se consideren razonables y necesarias.

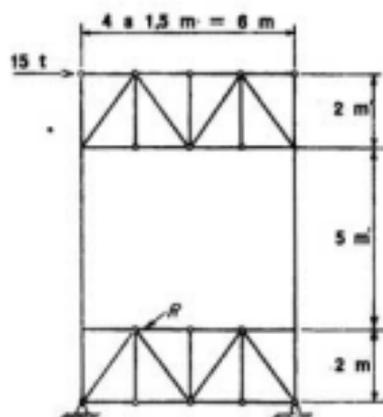


FIG. 11.26. Problema 11.12.

Problema 11.13 Calcular la fuerza en la barra *A* de la estructura representada en la Figura 11.27. Hacer todas las hipótesis razonables que sean necesarias.

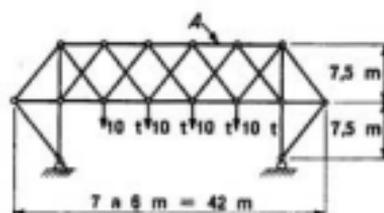


FIG. 11.27. Problema 11.13.

Problema 11.14 Todas las barras de la estructura representada en la Fig. 11.28 son capaces de soportar tracción y compresión. Los puntos de inflexión están a 1,0 m por encima de la base de cada pilar. Calcular la fuerza axial en el elemento *P*.

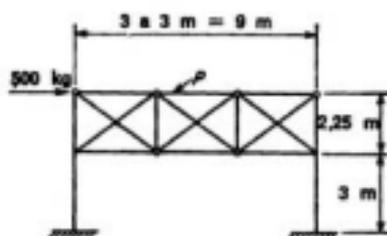


FIG. 11.28. Problema 11.14.

Problema 11.15 Utilizar el método del voladizo para determinar los cortantes y los momentos extremos en las vigas del pórtico de edificio de la Fig. 11.29. En la parte alta de la figura se indican las áreas de los pilares.

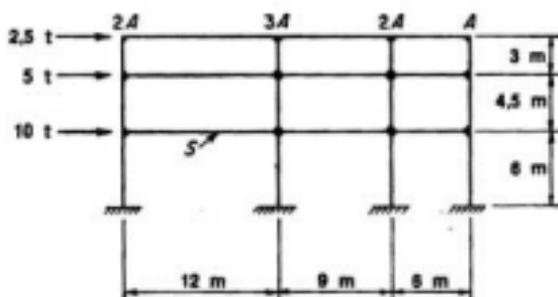


FIG. 11.29. Problema 11.15.

Deformaciones de las estructuras

12.1 Introducción. Las estructuras de ingeniería están hechas de materiales que se deforman ligeramente cuando están sometidas a esfuerzos o a cambios de temperaturas. Como consecuencia de estas deformaciones, los puntos de la estructura experimentan ciertos movimientos, llamados desplazamientos o corrimientos, y la estructura sufre a su vez una deformación general. Siempre que no se sobrepase el límite elástico del material, todas estas deformaciones y corrimientos desaparecen cuando se suprime el esfuerzo y la temperatura vuelve a su valor primitivo. Este tipo de deformación se llama *elástico* y puede ser producido por cargas que actúen sobre la estructura o por variaciones de temperatura.

A veces, la deformación de la estructura es consecuencia de asentos de los apoyos, juego en los nudos articulados, retracción del hormigón, o alguna otra causa. En estos casos, la causa permanece en acción continuamente, por lo que las deformaciones resultantes no desaparecen. Este tipo de deformación se llama *no elástico*, para distinguirlo del tipo elástico mencionado más arriba. En ambos tipos, puede verse que la deformación de la estructura se puede producir con o sin esfuerzos en la misma. Esto se estudiará en detalle más adelante.

A veces, el ingeniero de estructuras tiene necesidad de calcular corrimientos. Por ejemplo, al montar puentes cantilever o continuos, o al calcular aparatos de elevación de puentes giratorios, es imperativo calcular el desplazamiento por deformación de diversos puntos de la estructura. En algunos casos, hay que hacer el cálculo para ver si la deformación excede de los límites impuestos. Por ejemplo, se debe limitar el corrimiento o flecha de un piso de un edificio para que las grietas en los cielos rasos sean mínimas, y se limitará la de un eje para asegurar el funcionamiento correcto de sus apoyos. También hay que calcular las deformaciones para estudiar las características de vibración y respuesta dinámica de una estructura. Quizá la razón más importante del interés del ingeniero de estructuras en los cálculos de deformaciones, proviene del hecho de que el análisis de tensiones de las estructuras estáticamente indeterminadas se basa en gran parte en el cálculo de su deformación bajo la carga.

Se han presentado numerosos métodos de calcular las deformaciones. Entre ellos se considera a los siguientes como los más importantes y útiles, por lo que los estudiaremos en este capítulo:

1. Métodos para calcular la deformación de una sola barra cada vez:
 - a) Método de los trabajos virtuales (aplicable a cualquier tipo de estructura).
 - b) Segundo teorema de Castigliano (aplicable a cualquier tipo de estructura).

2. Métodos para calcular la deformación de varias barras simultáneamente.

a) Método de Williot-Mohr (aplicable a cerchas solamente).

b) Método de la cadena de barras (aplicable a cerchas solamente).

c) Método del área de momentos (método de la carga elástica o de la viga conjugada) (aplicable a vigas y pórticos).

12.2 Naturaleza del problema de la deformación. El cálculo de la deformación de una estructura es esencialmente un problema de geometría o trigonometría. Naturalmente, primero es necesario definir la deformación de las partículas o elementos de la estructura, pero, una vez hecho esto, se pueden calcular utilizando principios geométricos o trigonométricos.

Esto es evidente, sobre todo, en el caso de una cercha simple, formada generalmente por triángulos. Se puede determinar la configuración de estos triángulos si se conoce la longitud de sus lados. Así, si se conocen las longitudes de las barras antes y después de la deformación, se puede calcular la posición de los nudos antes y después por trigonometría, determinándose fácilmente la deformación de las dos posiciones de cada nudo. Este procedimiento, aunque sencillo en teoría, es laborioso y, por consiguiente, no es aconsejable para las aplicaciones prácticas.

En el caso de una cercha, es posible también resolver el problema de la deformación gráficamente, superponiendo simplemente los trazados de la cercha deformada y sin deformar. Este procedimiento es, en teoría, obvio y sencillo, pero para tener alguna exactitud habría que utilizar una escala tan grande que sería físicamente imposible para un delineante hacer el dibujo.

El llamado «método del giro» es otro medio de calcular deformaciones de cerchas, sencillo en teoría, pero sin aplicación práctica. Este método nos da, sin embargo, algunas ideas útiles sobre la cinemática de la deformación de las cerchas. Aplicando este método, se puede determinar el corrimiento de cualquier nudo de una cercha simple, debido a una variación de longitud de cualquier barra, estudiando el giro producido de una parte de la cercha respecto a la otra, suponiendo esta última fija. Considerando el efecto de cada barra por separado y sumando los resultados, se puede determinar el corrimiento total de un nudo debido a la variación de longitud de todas las barras.

Como ejemplo de este procedimiento, consideremos primero el efecto de una variación de longitud de la barra del cordón superior U_2U_3 de la cercha de la Fig. 12.1. Como las deformaciones son pequeñas, es admisible suponer que los giros de todos los elementos son tan pequeños, que

$$\alpha \approx \text{sen } \alpha \approx \text{tg } \alpha$$

Además es admisible, para todas las aplicaciones prácticas, considerar que el arco que recorre realmente un punto, cuando el cuerpo gira un ángulo pequeño, coincide con su tangente. Para

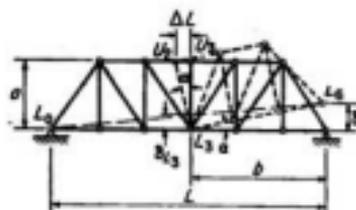


FIG. 12.1. Deformación de un cuchillo originada por una variación de longitud de una barra del cordón.

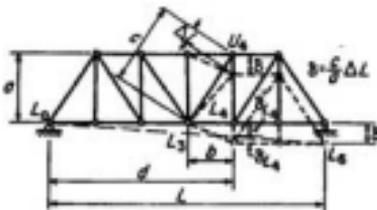


FIG. 12.2. Deformación de un cuchillo originada por una variación de longitud de una diagonal.

ver el efecto de la variación de longitud de U_2U_3 en la deformación, quitaremos primero el pasador del nudo U_3 , permitiendo que tenga lugar esta variación de longitud, ΔL . Si se considera que la parte izquierda de la cercha se mantiene fija, es necesario girar la barra U_2U_3 alrededor de U_2 y la parte de trazos de la cercha alrededor de L_3 para que los puntos U_3 coincidan nuevamente. Durante estos giros se puede considerar que el punto U_3 que forma parte de la barra U_2U_3 se mueve verticalmente, y el que corresponde a la parte de trazos, horizontalmente. En este caso, la intersección de estos dos caminos estará situada a lo largo de la posición original de U_3 , y se hallará la posición definitiva de U_3 como puede verse en la figura. Entonces:

$$\delta = ab = \frac{\Delta L}{a} b = \frac{b}{a} \Delta L$$

Ahora, si no coden los apoyos, el nudo L_4 no debe moverse verticalmente, por lo que debe girar toda la cercha en el sentido de las agujas del reloj alrededor de L_0 , hasta que L_4 vuelva a su apoyo. La línea de trazos entre L_0 y L_4 corresponde, por tanto, a la línea de corrimiento nulo, y el corrimiento vertical, hacia abajo, del nudo L_3 será, por proporción,

$$\delta_{L_3} = \frac{L - b}{L} \delta = \frac{L - b}{L} \frac{b}{a} \Delta L$$

De un modo análogo se puede calcular el corrimiento producido por la variación de longitud de una diagonal típica, procediendo como se indica en la Fig. 12.2. Estas consideraciones demuestran la impracticabilidad de este método, pero las ideas que contiene son aplicables directamente al de Williot-Mohr, que se estudia en la Sección 12.12.

Aunque los diversos métodos mencionados más arriba son impracticables, es importante conocer su existencia, porque nos hacen ver que el problema de las deformaciones se puede resolver utilizando ideas sencillas «de todos los días». Además, es evidente que debe introducirse alguna mejora en la teoría para reducir el trabajo en la resolución práctica de esos problemas.

12.3 Principio de los desplazamientos virtuales. Quizá el método más general, directo y seguro de calcular las deformaciones de las estructuras es el de los trabajos virtuales. Este método está basado en una aplicación del principio de los desplazamientos virtuales, formulado primeramente por John Bernoulli en 1717. Este principio se puede desarrollar como sigue:

Consideremos un cuerpo verdaderamente rígido en equilibrio estático bajo un sistema de fuerzas Q . Por cuerpo rígido deberá entenderse un cuerpo indeformable, en el que no puede haber ningún movimiento relativo entre sus partículas. Supongamos primero que, como se

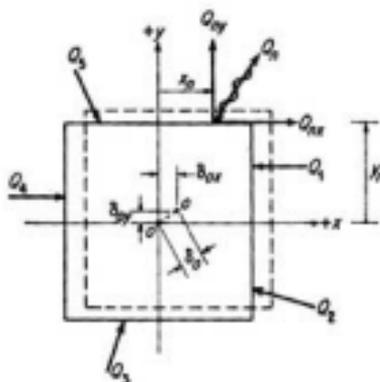


FIG. 12.3. Traslación virtual de un cuerpo rígido.

representa en la Fig. 12.3, se traslada este cuerpo rígido, sin girar, una cantidad pequeña por alguna causa distinta e independiente del sistema de fuerza Q . Eligiendo un origen o y dos ejes coordenados de referencia x e y , se puede definir esta traslación por δ_o , traslación del origen o , o por las dos componentes δ_{ox} y δ_{oy} en las direcciones x e y , supuestas positivas en el sentido que se indica. Como el cuerpo es rígido, cada uno de sus puntos se trasladará exactamente la misma distancia que el o .

Todas las fuerzas Q se pueden descomponer en sus componentes x e y , designadas por Q_{ox} y Q_{oy} para la fuerza particular Q_n y supuestas positivas cuando tienen el mismo sentido que las coordenadas positivas correspondientes. Como estas fuerzas Q están en equilibrio estático, sus componentes satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\sum Q_{ox} = 0 \quad \sum Q_{oy} = 0 \quad \sum (Q_{ox}y_n - Q_{oy}x_n) = 0 \quad (a)$$

Consideremos ahora el trabajo W_Q realizado por estas fuerzas Q mientras «caminan» cuando el cuerpo rígido sufre una pequeña traslación δ_o por alguna otra causa. Como esta traslación es pequeña, se puede suponer que todas las fuerzas Q mantienen la misma posición y dirección respecto al cuerpo, y entre ellas, por lo que permanecen en equilibrio durante la traslación. Por tanto, podemos escribir

$$W_Q = \sum (Q_{ox}\delta_{ox} + Q_{oy}\delta_{oy}) = \delta_{ox}\sum Q_{ox} + \delta_{oy}\sum Q_{oy}$$

en consecuencia, y por las Ecs. (a) el trabajo total realizado por las fuerzas Q es nulo.

De un modo análogo, podemos considerar el trabajo realizado por las fuerzas Q durante un pequeño giro α_o del cuerpo rígido alrededor del punto o . Durante una pequeña rotación, se puede suponer que un punto se mueve según la normal al radio trazado desde el centro de rotación, esto es, según la tangente, en lugar del arco. De aquí que se puedan calcular las componentes x e y del desplazamiento de un punto cualquiera n , como se ve en la Fig. 12.4. Como la rotación es pequeña, se puede suponer nuevamente que las fuerzas Q permanecen en equilibrio y podrá escribirse que

$$W_Q = \sum (Q_{ox}\alpha_o y_n - Q_{oy}\alpha_o x_n) = \alpha_o \sum (Q_{ox}y_n - Q_{oy}x_n)$$

y, por tanto, teniendo en cuenta las Ecs. (a), el trabajo total realizado por las fuerzas Q durante el giro del cuerpo rígido es también igual a cero.

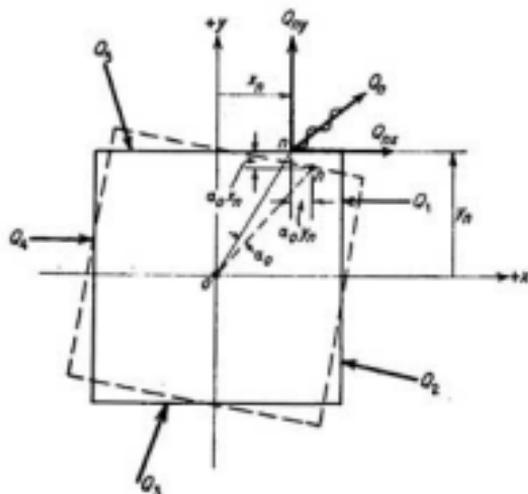


FIG. 12.4. Giro virtual de un cuerpo rígido.

Con una ligera reflexión se ve que *cualquier* desplazamiento pequeño de un cuerpo rígido se puede descomponer en una traslación de un punto dado del cuerpo más un giro de éste alrededor de dicho punto. Como, tanto en el caso de la traslación como en el del giro, el trabajo realizado por el sistema de fuerzas Q (que es un sistema en equilibrio) se ha visto que es nulo, el principio siguiente es cierto evidentemente en el caso general de que se someta a un pequeño desplazamiento de *cualquier* tipo a un cuerpo rígido:

Principio de Bernoulli de los desplazamientos virtuales: Si un sistema de fuerzas Q que actúan sobre un cuerpo rígido está en equilibrio y permanece en tal estado cuando el cuerpo sufre un desplazamiento virtual pequeño cualquiera, el trabajo virtual realizado por el sistema de fuerzas Q es igual a cero.

En este enunciado se ha utilizado la palabra *virtual* para indicar que la acción que produce el desplazamiento es ajena e independiente del sistema de fuerzas Q . El trabajo realizado por estas fuerzas cuando «caminan» durante ese desplazamiento virtual se llamará *trabajo virtual*.

12.4 Fundamentos del método de los trabajos virtuales. Se puede utilizar el principio de los desplazamientos virtuales a fin de desarrollar la base del método de los trabajos virtuales para calcular las deformaciones de las estructuras. Este método es aplicable a cualquier tipo de estructura —vigas, cerchas o pórticos; entramados planos o espaciales—. Sin embargo, para mayor sencillez, consideraremos una estructura plana cualquiera, como la de la Fig. 12.5. Supondremos que esta estructura está en equilibrio estático bajo las cargas exteriores y las reacciones del sistema de fuerzas Q representado,

Como el cuerpo en conjunto está en equilibrio puede aislarse cualquier partícula del mismo, como la rayada, y estará también en equilibrio bajo los esfuerzos internos Q producidos por las fuerzas exteriores Q . Si se aísla esta partícula y las que le rodean, estará sometida a esfuerzos Q internos en todas las caras en contacto con las partículas contiguas, y a fuerzas exteriores Q en las caras exteriores solamente. En las caras interiores de cada dos partículas contiguas, los esfuerzos internos serán iguales y de direcciones opuestas.

Supongamos ahora que el cuerpo sufre una ligera variación de forma originada por alguna causa ajena al sistema de fuerzas Q . Tal cambio de forma producirá un recorrido del sistema de fuerzas Q y se llamará *variación de forma virtual* o *deformación virtual*. A causa de esta variación de forma, cada partícula, tal como la rayada, puede deformarse, así como trasladarse y girar como una partícula rígida. Por tanto, las caras

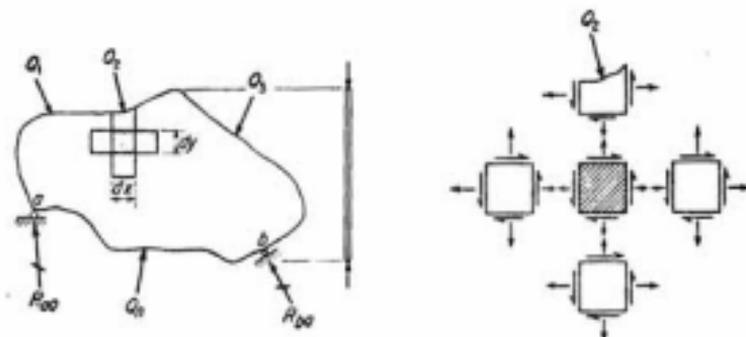


FIG. 12.5. Estructura plana en equilibrio bajo un sistema de fuerzas Q .

de esa partícula se pueden desplazar, por lo que se moverán las tensiones Q aplicadas a tales caras y, por consiguiente, realizarán un trabajo virtual. Sea dW_s el trabajo virtual realizado por las tensiones Q en las caras de la partícula diferencial. Parte de este trabajo virtual se realiza a causa de los movimientos de las caras de la partícula producidos por la deformación de la misma; a esa parte la llamaremos dW_d . El resto de dW_s será el trabajo virtual realizado por las tensiones Q durante el resto del desplazamiento de las caras y será igual a $dW_s - dW_d$. Este desplazamiento restante es originado por la traslación y giro de la partícula como *cuerpo rígido* y, de acuerdo con el principio de los desplazamientos virtuales, el trabajo realizado en ese caso es nulo. Por tanto,

$$dW_s - dW_d = 0 \quad \text{o} \quad dW_s = dW_d$$

Si se suma ahora el trabajo virtual realizado por las tensiones Q en todas las partículas del cuerpo, esta ecuación se convierte en

$$W_s = W_d \quad (12.1)$$

Para calcular W_d tendremos en cuenta que este término representa el trabajo virtual total realizado por las tensiones Q y las fuerzas en todas las caras de todas las partículas. Sin embargo, para cada cara *interior* de una partícula hay otra partícula adjunta cuya cara contigua es realmente la misma en el cuerpo como conjunto, por lo que se desplazan las dos la misma cantidad exactamente. Como las fuerzas que actúan en dos caras interiores contiguas son numéricamente iguales y de dirección opuesta, el trabajo virtual total realizado en el par de caras internas contiguas es nulo. Por tanto, como todas las caras interiores se presentan por pares de caras contiguas, no hay trabajo virtual ninguno realizado por las fuerzas en todas las caras *interiores*. Por consiguiente, W_d consta solo del trabajo realizado por las fuerzas Q *exteriores* en las caras *exteriores* de las partículas. Por ello, se puede interpretar la Ec. (12.1) del siguiente modo:

Ley del trabajo virtual. Si un cuerpo deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas Q y permanece en este estado cuando se le somete a una pequeña deformación virtual, el trabajo virtual exterior realizado por las fuerzas exteriores Q que actúan sobre el cuerpo es igual al trabajo virtual interior de deformación realizado por las tensiones internas Q .

Esta ley del trabajo virtual es el fundamento del método de los trabajos virtuales utilizado para calcular deformaciones. Antes de poder hacer tales cálculos, hay que desarrollar expresiones apropiadas para calcular el trabajo virtual exterior y el interior de deformación. Además, hay que usar ciertos «trucos» para elegir un sistema Q adecuado para poder hallar las componentes deseadas de los corrimientos. Todo esto se explicará en las secciones siguientes.

Es importante recalcar las hipótesis y limitaciones de este desarrollo, para apreciar la flexibilidad y generalidad del método de los trabajos virtuales.

1. El único requisito que han de cumplir las fuerzas exteriores Q y las tensiones interiores Q es que formen un sistema de fuerzas en equilibrio, y que permanezca en este estado durante la deformación virtual. Este requisito no se cumplirá si la deformación virtual modifica las características de la estructura de modo apreciable.

2. Las relaciones que se han deducido son independientes de la causa o tipo de deformación —son ciertas si la deformación es debida a cargas, temperatura, errores de longitud de los elementos, u otras causas, tanto si el material sigue la ley de Hooke como si no lo hace.

3. Además de pequeñas, para que las características geométricas de la estructura no se modifiquen de modo apreciable, las deformaciones han de ser *compatibles*; esto es, los elementos de la estructura se deben deformar de tal forma que ajusten entre ellos después de la deformación y satisfagan las condiciones de limitación de los apoyos.

12.5 Expresiones del trabajo virtual externo e interno. Es fácil calcular el trabajo virtual W_e realizado por un sistema de fuerzas Q que actúan sobre una estructura. Sea δ el desplazamiento del punto de aplicación de una fuerza Q durante la deformación virtual de la estructura, medido en la dirección de la línea de acción de su correspondiente fuerza. El trabajo virtual realizado por la fuerza Q_1 será, pues, Q_1 por δ_1 , por lo que el trabajo virtual exterior realizado por todas las fuerzas Q , incluyendo cargas y reacciones, será

$$W_e = Q_1\delta_1 + Q_2\delta_2 + Q_3\delta_3 + \dots$$

Esta expresión se puede representar por

$$W_e = \sum Q\delta \quad (12.2)$$

que significa simplemente que se debe calcular el producto de Q por δ para cada fuerza Q y sumar todos los productos, incluyendo cargas y reacciones. Obsérvese que, habiendo supuesto que el trabajo es positivo, debe considerarse δ positivo cuando tiene el mismo sentido que su correspondiente fuerza Q .

También es relativamente fácil calcular el trabajo virtual interno W_i de deformación. Sin embargo, en este caso se han de desarrollar expresiones de W_i para varios tipos de deformación; esto es, para variación de longitud axial, deformación por cortadura, deformación por flexión, etc. Consideremos primero el caso sencillo de un pequeño elemento que tiene una longitud no deformada s y una sección a , como se ve en la Figura 12.6. Supongamos que las intensidades σ_Q de los esfuerzos Q están uniformemente

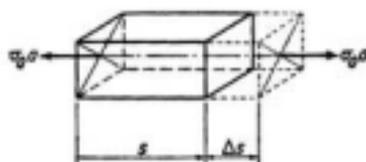


FIG. 12.6. Variación axial de longitud.

repartidas sobre la sección a , por lo que la fuerza axial es $(\sigma_Q)a$. Si la deformación virtual de este elemento es simplemente un alargamiento axial uniforme ϵ , la variación de longitud axial Δs será igual a $(\epsilon)s$. El trabajo virtual interno de deformación realizado por las tensiones Q en este caso será simplemente

$$W_i = \sigma_Q a \Delta s = \sigma_Q a \epsilon s \quad (12.3)$$

Esta expresión se puede ya usar para calcular el trabajo virtual interno de deformación de una viga o un elemento de cercha o de pórtico.

Consideremos el caso de una barra deformada por un sistema bidimensional de cargas P , o por una variación de temperatura. Supongamos que el eje de la barra es recto y que todas las secciones tienen ejes de simetría que están en el plano de las cargas P . La resultante de todos los esfuerzos internos P estará también en este plano. La fuerza axial F_P en una sección cualquiera producirá un alargamiento axial uniforme

para todas las fibras de esa sección. Supongamos que el alargamiento producido por la variación de temperatura también es uniforme en la sección. Sea ϵ_t el alargamiento axial uniforme en una sección dada, producido por estos dos efectos. El sistema de cargas P puede producir también un cortante y un momento flector en esa sección. A causa de estos dos efectos, un elemento longitudinal como el de la Fig. 12.7 estará sometido a esfuerzos de cortadura y normales, como se indica. Un estudio más detallado revela que, a no ser que la barra sea muy alta en comparación con su longitud, el efecto del esfuerzo de cortadura es pequeño en comparación con la deformación producida por el alargamiento y contracción de estos elementos bajo los esfuerzos longitudinales normales. Por ello, en este libro se despreciará el efecto de los esfuerzos de cortadura.

Despreciando el efecto de la deformación de cortadura, es fácil calcular el trabajo virtual de deformación realizado solamente como consecuencia del alargamiento y contracción de los elementos longitudinales. Supongamos que el sistema de fuerzas Q está en el mismo plano que las fuerzas P de la Fig. 12.7 y ejerce cierta fuerza axial, cortante, y momento flector en las secciones de la barra. Ahora se trata de desarrollar una expresión para el trabajo virtual interno de deformación realizado por las tensiones Q resultantes, cuando la barra está sometida a una deformación virtual del tipo descrito en el párrafo anterior. Elegiremos los ejes ortogonales $-x, y$ y z en σ de modo que el eje x coincida con el eje de la barra y el z sea normal al plano del papel. Si consideramos ahora un elemento longitudinal situado en la posición (x, y) de la barra, como se ve en la Fig. 12.8, es evidente que, en las condiciones descritas, este elemento es similar al representado en la Fig. 12.6. Por tanto, se puede calcular el trabajo virtual para un elemento longitudinal por medio de la Ec. (12.3). Haciendo esto para todos los elementos de la barra y sumando los resultados, obtendremos el trabajo virtual de deformación de toda la barra.

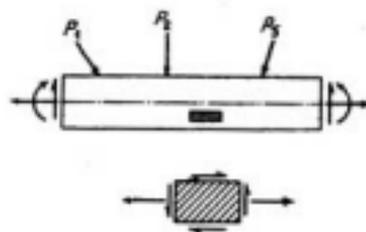


FIG. 12.7. Cortante y momento flector por las cargas P .

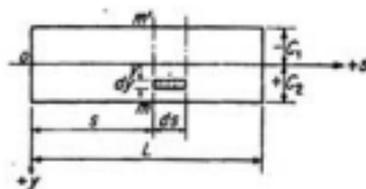


FIG. 12.8. Ejes coordenados.

Suponiendo que se puedan hallar las tensiones normales por la teoría elemental de la viga, sean

M_P = momento flector en la sección mm' debido a las cargas P (que causan la deformación virtual)

M_Q = momento flector en la sección mm' debido a las cargas Q

F_P = fuerza axial en la sección mm' debida a las cargas P

F_Q = fuerza axial en la sección mm' debida a las cargas Q

σ_P = tensión normal en el punto (x, y) debida a las cargas $P = (F_P/A) + (M_P y/I)$

σ'_P = tensión normal en el punto (x, y) debida a $F_P = F_P/A$

σ''_P = tensión normal en el punto (x, y) debida a $M_P = M_P y/I$

- σ_Q = tensión normal en el punto (x,y) debida a las cargas $Q = (F_Q/A) + (M_Q y/I)$
 ϵ = alargamiento axial de un elemento longitudinal en el punto (x,y) debido a las cargas P y variación de temperatura
 ϵ_s = alargamiento axial de un elemento longitudinal en un punto del eje debido a las cargas P y variación de temperatura
 I = momento de inercia de la sección mm' respecto al eje oz
 A = área de la sección mm'
 E = módulo de elasticidad del material
 b = anchura de la sección mm' en la fibra y

Considerando ahora el elemento longitudinal de la barra en el punto (x,y) , cuya longitud es ds , la anchura b y la altura dy ,

$$\epsilon = \epsilon_s + \frac{\sigma_P''}{E} = \epsilon_s + \frac{M_P y}{EI}$$

y el trabajo virtual de deformación para este elemento es

$$(\sigma_Q b dy)(\epsilon ds) = \left(\frac{F_Q}{A} + \frac{M_Q y}{I} \right) (b dy) \left(\epsilon_s + \frac{M_P y}{EI} \right) ds$$

Por tanto, el trabajo virtual de deformación para toda la barra será

$$\begin{aligned} W_d &= \int_0^L \int_{-c_1}^{+c_1} \left(\frac{F_Q}{A} + \frac{M_Q y}{I} \right) (b dy) \left(\epsilon_s + \frac{M_P y}{EI} \right) ds \\ &= \int_0^L \int_{-c_1}^{+c_1} \left(\frac{F_Q \epsilon_s}{A} + \frac{M_Q \epsilon_s}{I} y + \frac{F_Q M_P}{EIA} y + \frac{M_Q M_P}{EI^2} y^2 \right) b dy ds \end{aligned}$$

Observando que

$$\int_{-c_1}^{c_1} b dy = A \quad \int_{-c_1}^{c_1} y b dy = 0 \quad \int_{-c_1}^{c_1} y^2 b dy = I$$

esta expresión se reduce a

$$W_d = \int_0^L F_Q \epsilon_s ds + \int_0^L \frac{M_Q M_P}{EI} ds \quad (12.4)$$

Esta expresión se puede aplicar a los tipos ordinarios de barras que se encuentran en las estructuras planas, tales como vigas y barras de cerchas y pórticos, obteniéndose valores simplificados para cada caso.

12.6 Deformación de cuchillos utilizando el método de los trabajos virtuales. Sustituyendo en la Ec. (12.1) los valores obtenidos en las Ecs. (12.2) y (12.4) se puede obtener una expresión de la ley de los trabajos virtuales aplicada específicamente a los cuchillos. Consideremos, primero, el caso de un cuchillo ideal con nudos articulados, al que están aplicadas las cargas P que producen la deformación y las Q , en los nudos. En este caso, cada barra estará sometida solo a fuerzas axiales, sin intervenir cortantes

ni momentos flectores y desaparecerá el segundo término de la Ec. (12.4). Además, F_Q será constante en toda la longitud de una barra, pues como

$$\int_0^L \epsilon_s ds = \text{variación axial de longitud de una barra} = \Delta L$$

el trabajo virtual de deformación de cada barra del cuchillo se convierte en

$$W_d = F_Q \int_0^L \epsilon_s ds = F_Q \Delta L$$

Sumando los productos correspondientes a todas las barras del cuchillo, se puede representar el trabajo virtual interno de deformación de todo el cuchillo por

$$W_d = \Sigma F_Q \Delta L$$

por lo que la ley de los trabajos virtuales aplicada a un cuchillo ideal con nudos articulados se expresa por

$$\Sigma Q \delta = \Sigma F_Q \Delta L \quad (12.5)$$

Fácilmente se pueden desarrollar expresiones apropiadas de ΔL , según que la variación de longitud sea producida por las cargas P , por una variación de temperatura, o por alguna otra causa. Para una barra prismática con sección constante A y módulo de elasticidad constante E :

Si la deformación es debida a cargas P en los nudos del cuchillo

$$\Delta L = (\epsilon_s)(L) = \left(\frac{\sigma'_P}{E}\right)(L) = \left(\frac{F_P}{A}\right)\left(\frac{L}{E}\right) = \frac{F_P L}{AE} \quad (12.5a)$$

Si la deformación es debida a una variación uniforme de temperatura t ,

$$\Delta L = (\epsilon_s)(L) = (\alpha_1 t)(L) = \alpha_1 t L \quad (12.5b)$$

Si la deformación es debida a ambos efectos que actúan simultáneamente,

$$\Delta L = \frac{F_P L}{AE} + \alpha_1 t L \quad (12.5c)$$

donde, además de las notaciones introducidas antes,

F_P = fuerza en la barra debida a las cargas P , que producen la deformación

F_Q = fuerza en la barra debida a las cargas Q

α_1 = coeficiente de dilatación térmica del material

L = longitud de la barra

La Ec. (12.5) es la base del método de los trabajos virtuales para calcular las deformaciones en los cuchillos ideales con nudos articulados, pero hasta ahora no sabemos utilizarla para este fin. Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular la componente vertical del corrimiento del nudo c producido por las cargas P representadas en la Figura 12.9a. Elijamos como sistema de cargas Q una carga unidad vertical en el nudo c

junto con sus reacciones. Si imaginamos que aplicamos primero este sistema Q a la estructura, cuando apliquemos las cargas reales P que producen la deformación, las cargas Q sufrirán un desplazamiento y realizarán un cierto trabajo virtual exterior. De acuerdo con la ley de los trabajos virtuales, las tensiones internas Q realizarán una cantidad igual de trabajo virtual interno cuando las barras cambian de longitud a causa de las tensiones F_p . Aplicando la Ec. (12.5),

$$(1)(\delta_i) + W_x = \sum F_Q \frac{F_p L}{AE}$$

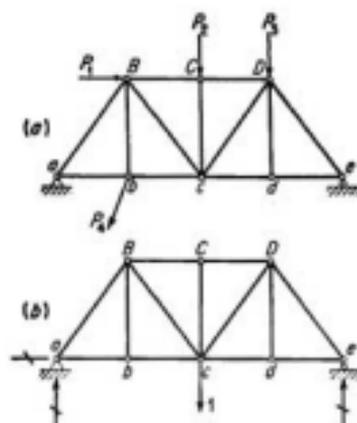


FIG. 12.9. Aplicación del método de los trabajos virtuales a un cuchillo articulado.

en la que W_x representa el trabajo virtual realizado por las reacciones Q si los puntos de apoyo se mueven y se puede calcular numéricamente, y se conocen esos movimientos. Si los apoyos no pueden ceder, $W_x = 0$ y

$$(1)(\delta_i) = \sum F_Q F_p \frac{L}{AE}$$

Se pueden calcular fácilmente las fuerzas de barra F_Q y F_p debidas a los sistemas de cargas Q y P , respectivamente. Estos datos, unidos a los valores dados de L , A y E nos proporcionan suficiente información para calcular el segundo miembro de la ecuación anterior y, por tanto, para hallar el valor desconocido de δ_i .

La Fig. 12.10 muestra el modo de elegir sistemas Q apropiados para utilizarlos en el cálculo de otros componentes de la deformación que se pueden necesitar. Obsérvese que el «truco» consiste simplemente en elegir el sistema de fuerzas Q de modo que el corrimiento buscado sea la única incógnita, δ , que aparece en el primer miembro de la ecuación. Algunos estudiantes se preocupan de la deformación producida por el sistema Q . Nosotros no nos preocupamos de cuál es, sino que queremos hallar solamente la producida por la causa de deformación dada. El sistema Q es simplemente un sistema que recorre un espacio, y realiza un trabajo virtual y, por tanto, nos permite calcular la deformación buscada. Obsérvese también que en estos cálculos no tenemos que preocuparnos nunca ni calcular el trabajo real realizado por las cargas P cuando deforman la estructura.

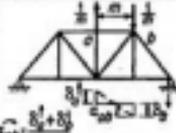
Componente del desplazamiento	Sistema Q	$\Sigma \delta Q = \Sigma F_Q \Delta L$	Observaciones
1. Componente vertical del desplazamiento del nudo		$(1)(\delta_V^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$ $W_Q =$ Trabajo virtual externo realizado por las reacciones Q	δ positivo en igual dirección que la fuerza Q correspondiente; dirección indicada por flechas; por tanto, dirección negativa opuesta a flechas; F_Q positiva al tracción; ΔL positiva al alargamiento; F_P positiva al tracción; $W_P = 0$ si apoyos no cedían; W_P calculada fácilmente conociendo cedimiento apoyos.
2. Componente horizontal del desplazamiento del nudo	 	$(1)(\delta_H^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$	
3. Cualquier componente del desplazamiento del nudo		$(1)(\delta_\alpha^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$	
4. Desplazamiento relativo de dos nudos según la línea que los une		$(1)(\delta_a^Q) + (1)(\delta_b^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$ $(1)(\delta_a^Q + \delta_b^Q) + W_Q =$ $(1)(\delta_{a-b}^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$ $\delta_{a-b}^Q =$ mov. rel. entre a y b	
5. Giro de una barra		$(\frac{1}{20})(\delta_a^Q) + (\frac{1}{20})(\delta_b^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$ $(\frac{1}{20})(\delta_a^Q + \delta_b^Q) + W_Q =$ $(1)(\alpha_{a-b}^Q) + W_Q = \Sigma F_Q \Delta L$	

FIG. 12.10. Sistemas de fuerzas Q típicos utilizados en problemas de deformación de armaduras.

Los siguientes ejemplos muestran la forma de organizar estos cálculos en algunos problemas típicos. Al utilizar la ley de los trabajos virtuales es muy importante fijarse en el criterio de signos admitido. Al establecer las fórmulas del trabajo virtual externo e interno realizado por el sistema Q , se supuso que el trabajo era positivo, lo que implica primero que hay que considerar a δ positivo cuando tiene la misma dirección que su fuerza Q correspondiente. Además, esto implica que tanto F_Q como ΔL deben considerarse positivas cuando tienen el mismo sentido. Si se considera a F_Q positiva cuando es tracción, ΔL , será positiva cuando sea alargamiento y, por tanto, F_P es positiva cuando es tracción y t cuando es aumento de temperatura.

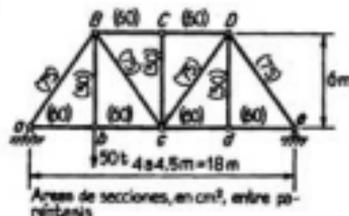
Después de estudiar los ejemplos siguientes, resultará evidente que hay dos fuentes principales de dificultades: las unidades y los signos. El principiante tendrá probablemente menos dificultad con las unidades si se asignan a las fuerzas y tensiones Q unidades de fuerza, aunque algunos autores las tratan sin dimensión. Normalmente es aconsejable utilizar en todo el problema las mismas unidades de longitud, aunque en algunos casos sea preferible usar varias para manejar números más cómodos. Por ejemplo, en este caso se medirán A y E en centímetros y L en metros. Esto es completamente cuestión de preferencias personales, pero todo el mundo debe seguir una regla: asegu-

rarse de que las unidades son homogéneas. En cuanto a los signos, no se encontrará ninguna dificultad si se tiene cuidado y se sigue el criterio expuesto más arriba. Sin embargo, hay que asegurarse de comprobar los signos de todos los productos. Obsérvese también que F_Q y F_P son fuerzas de barra *verdaderas*, no las componentes verticales u horizontales.

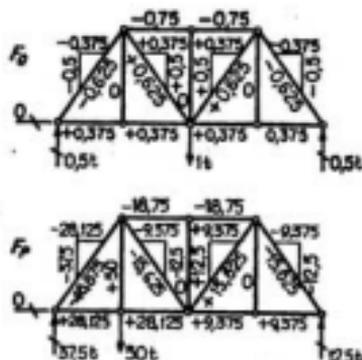
Ejemplo 12.1 a) Calcular la componente vertical del desplazamiento del nudo c, debido a la carga de 50 t representada. $E = 2,1 \times 10^3$ t por cm^2 .

b) Calcular la componente vertical del corrimiento en el nudo c, debida a un descenso de temperatura de 20°C en el cordón inferior solamente. $\alpha_t = 0,000012$ por $^\circ\text{C}$.

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum Q\delta &= \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE} \\ (1 \text{ t})(\delta \downarrow) &= \frac{1}{E} \sum F_Q F_P \frac{L}{A} \\ &= \frac{+8,146 \text{ t}^2 \text{ m/cm}^2}{2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2} \\ \therefore \delta_c &= +0,00388 \text{ m} \quad \therefore \text{hacia abajo} \end{aligned}$$

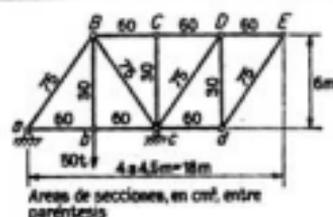


$$\begin{aligned} (b) \quad \sum Q\delta &= \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q \alpha_t L \\ (1 \text{ t})(\delta \downarrow) &= \alpha_t \sum F_Q L \\ &= (0,000012 \text{ por } ^\circ\text{C})(-135 \text{ t } ^\circ\text{C m}) \\ \therefore \delta_c &= -0,00162 \text{ m} \quad \therefore \text{hacia arriba} \end{aligned}$$



Barra	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_r	$F_Q F_r \frac{L}{A}$	t	$F_Q L$
Unidades	m	cm ²	m/cm ²	t	t	t ² m/cm ²	°C	t °C m
ab	4,5	60	0,075	+0,375	+28,125	+0,791	-20	-33,75
bc	4,5	60	0,075	+0,375	+28,125	+0,791	-20	-33,75
cd	4,5	60	0,075	+0,375	+9,375	+0,274	-20	-33,75
de	4,5	60	0,075	+0,375	+9,375	+0,274	-20	-33,75
BC	4,5	60	0,075	-0,75	-18,75	+1,055	0	0
CD	4,5	60	0,075	-0,75	-18,75	+1,055	0	0
aB	7,5	75	0,1	-0,625	-46,875	+2,930	0	0
Bc	7,5	75	0,1	+0,625	-15,625	-0,976	0	0
cD	7,5	75	0,1	+0,625	+15,625	+0,976	0	0
De	7,5	75	0,1	-0,625	-15,625	+0,976	0	0
bB	6	30	0,2	0	+30	0	0	0
cC	6	30	0,2	0	0	0	0	0
dD	6	30	0,2	0	0	0	0	0
Σ						+8,146		-135

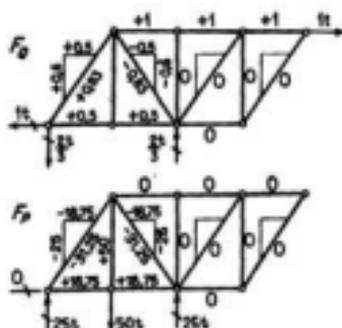
Ejemplo 12.2 Calcular la componente horizontal del corrimiento del nudo E, debida a la carga representada. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.



$$\sum Q_k = \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_r \frac{L}{AE}$$

$$(I) (\delta_x) = \frac{1}{E} \sum F_Q F_r \frac{L}{A} = \frac{+1,406 \text{ t}^2 \text{ m/cm}^2}{2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2}$$

$$\therefore \delta_x = 0,00067 \text{ m} \quad \therefore \text{hacia la derecha}$$



Barra	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_r	$F_Q F_r \frac{L}{A}$
Unidades	m	cm ²	m/cm ²	t	t	t ² m/cm ²
ab	4,5	60	0,075	+0,5	+18,75	+0,703
bc	4,5	60	0,075	+0,5	+18,75	+0,703
aB	7,5	75	0,1	+0,83	-31,25	-2,604
Bc	7,5	75	0,1	-0,83	-31,25	+2,604
Σ						+1,406

Resumen:

Obsérvese que se puede suprimir de la tabla cualquier barra en la que F_Q o F_r sean nulas, pues en ella el producto $F_Q F_r (L/A)$ será cero.

Ejemplo 12.3 Para el cuchillo del Ejemplo 12.2, calcular la componente horizontal del corrimiento del nudo E, debido a los siguientes movimientos de los apoyos:

En a, horizontal = 1 cm hacia la izquierda

En a, vertical = 1,5 cm hacia abajo

En c, vertical = 0,6 cm hacia abajo

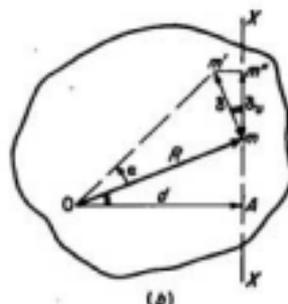
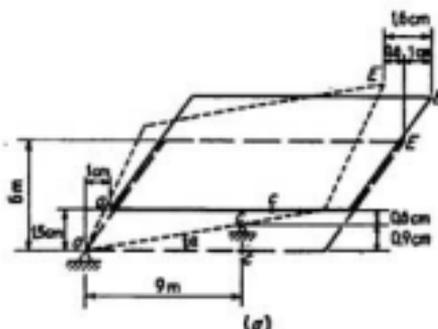
Utilizaremos el análisis de tensiones para el sistema Q del ejemplo anterior. En este ejemplo, el corrimiento está producido solo por el movimiento de los apoyos. No hay variaciones de longitud de las barras, esto es, $\Delta L = 0$ para todas ellas.

$$\begin{aligned} \Sigma Q\delta &= \Sigma F_Q \Delta L = 0 \\ (1) t(\delta_x^a) + (1) t(1,0 \text{ cm}) + (0,5) t(1,5 \text{ cm}) - (0,5) t(0,6 \text{ cm}) &= 0 \\ \therefore \delta_x &= -1,0 - 1 + 0,4 = \underline{-1,6 \text{ cm}} \quad \therefore \text{hacia la izquierda} \end{aligned}$$

Razonamiento:

Al calcular el trabajo virtual externo realizado por las reacciones Q, hay que tener cuidado de emplear el signo correcto. Cada reacción realiza un trabajo virtual positivo o negativo, según que su punto de aplicación se mueva en el mismo sentido o en el opuesto que la reacción, respectivamente.

Los corrimientos debidos a descensos de los apoyos se pueden calcular también considerando la cinemática del problema. En el esquema a, la línea llena representa el contorno del cuchillo en su posición original. Se puede trasladar, primero, el cuchillo como un cuerpo rígido hasta que el



apoyo en a esté en su posición final —la posición después del traslado está representada por la línea de trazos— y luego se girará en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de a, hasta que el apoyo c esté en la posición adecuada. En línea de puntos se representa la posición final del cuchillo. En estos esquemas se han exagerado enormemente los movimientos para aclarar el problema. Por tanto, se puede calcular el movimiento horizontal del punto E como

Debido a la traslación

1 cm hacia la izquierda

Debido al giro alrededor de a

$$\frac{0,9 \text{ cm}}{9 \text{ m}} \times 6 \text{ m} = 0,6 \text{ cm hacia la izquierda}$$

Movimiento horizontal total del punto E

$$1 \text{ cm} + 0,6 \text{ cm} = 1,6 \text{ cm hacia la izquierda}$$

El cálculo del movimiento durante el giro requiere cierta explicación y sirve de aclaración también a un teorema muy útil. Consideremos el movimiento de un punto m de un cuerpo rígido cuando

Este gira alrededor de un centro O un ángulo pequeño α . En el esquema b se ha exagerado enormemente este ángulo α para mayor claridad. En realidad, es tan pequeño que son prácticamente iguales el ángulo (en radianes), su seno y su tangente, por lo que se puede considerar que m se mueve hasta su posición m' después del giro a lo largo de la tangente, en lugar de sobre el arco. Supongamos que se quiere obtener la proyección del desplazamiento mm' según una dirección dada que pase por m como XX . Tracemos una perpendicular OA desde el punto O a XX . Se ve inmediatamente que los triángulos $mm'm''$ y OmA son semejantes. Luego

$$\frac{\delta_x}{\delta} = \frac{d}{R} \quad \delta_x = \frac{\delta}{R} d = \alpha d$$

pues $\alpha \approx \delta/R$. Por tanto, se puede enunciar el siguiente teorema:

Si se gira un cuerpo rígido alrededor de un centro O un ángulo pequeño α , la proyección del desplazamiento de un punto m según una dirección XX que pasa por este punto, es igual al ángulo α por la distancia desde O a la recta XX .

Aplicado al cuchillo anterior,

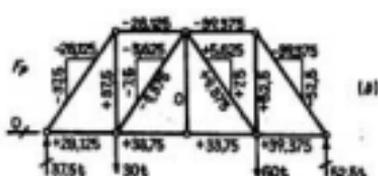
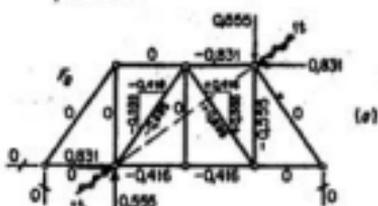
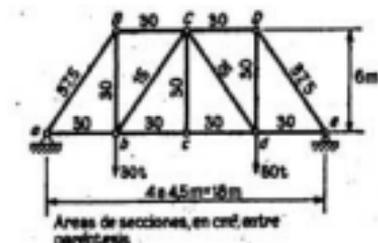
$$\alpha = \frac{0,9 \text{ cm}}{9 \text{ m}}$$

Por tanto, la componente horizontal de E durante el giro alrededor de O es

$$\frac{0,9 \text{ cm}}{9 \text{ m}} (6 \text{ m}) = 0,6 \text{ cm}$$

Ejemplo 12.4 Calcular el corrimiento relativo entre los nudos b y D según la línea que los une, debido a las causas siguientes:

- a) Las cargas representadas. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.
 b) Un aumento de temperatura de 40°C en el cordón superior; un descenso de temperatura de 10°C en el cordón inferior. $\alpha_t = 0,000012 \text{ por } ^\circ\text{C}$.



$$\begin{aligned} \sum Q\delta &= \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE} \\ (I) (\delta'_c) + (I) (\delta'_D) &= \frac{1}{E} \sum F_Q F_P \frac{L}{A} \\ (I) (\delta_{c-D}) &= \frac{+1,385 \text{ t}^2 \text{ m/cm}^2}{2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2} \\ \therefore \delta_{c-D} &= +0,00066 \text{ m} \quad \therefore \text{aproximándose} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Q\delta &= \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q \alpha_t L = \alpha_t \sum F_Q L \\ (I) (\delta_{c-D}) &= (0,000012 \text{ por } ^\circ\text{C})(-112,14 \text{ t } ^\circ\text{C m}) \\ \therefore \delta_{c-D} &= -0,00135 \text{ m} \quad \therefore \text{separándose} \end{aligned}$$

Barra	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_P	$F_Q F_P \frac{L}{A}$	t	$F_Q L$
Unidades	m	cm ²	m/cm ²	t	t	t ² m/cm ²	°C	t °C m
bc	4,5	30	0,15	-0,416	+33,75	-2,106	-10	+ 18,72
cd	4,5	30	0,15	-0,416	+33,75	-2,106	-10	+ 18,72
CD	4,5	30	0,15	-0,831	-39,375	+4,908	+40	-149,58
bC	7,5	15	0,5	-0,695	-9,375	+3,258	0	0
Cd	7,5	15	0,5	+0,695	+9,375	+3,258	0	0
dD	6	30	0,2	-0,355	+52,5	-5,827	0	0
Σ						+1,385		-112,14

Razonamiento:

Muchos estudiantes están confundidos en relación con los problemas de deformaciones de cuchillos debidas a temperatura o cedimiento de apoyos. «Venís que tienen que desarrollarse tensiones en las barras. Sin embargo, en un cuchillo estáticamente determinado no se pueden producir

reacciones sin que actúen cargas sobre la estructura, lo que puede demostrarse aplicando las ecuaciones de la estática. Si no hay reacciones ni fuerzas exteriores, no puede haber fuerzas de barras internas. Desde un punto de vista físico, puede producirse la deformación de los cuchillos como consecuencia de asentamientos de los apoyos o variaciones de longitud originadas por la temperatura, sin hallar resistencia, por lo que no se producen reacciones ni fuerzas de barra.

Todos los cuchillos estudiados hasta ahora han sido cuchillos ideales con nudos articulados, sometidos a cargas Q o P aplicadas siempre en los nudos. Si se deforma un cuchillo de nudos articulados a causa de cargas P , algunas de las cuales están aplicadas a ciertas barras entre nudos, estas barras estarán sometidas a momentos flectores M_p . No obstante, si solo se quiere hallar los corrimientos de los nudos, el sistema Q estará formado solamente por ciertas cargas en los nudos, que no producirán momentos flectores M_Q . El segundo término del segundo miembro de la Ec. (12.4) desaparece, por tanto, y la ley de los trabajos virtuales en este caso es la misma de la Ec. (12.5). Esto mismo sucede en los casos en que, para calcular el corrimiento deseado, es necesario aplicar cargas Q entre nudos, mientras que las cargas P que producen la deformación están aplicadas solo en los nudos, por lo que no hay momentos flectores M_p .

El caso de un cuchillo con nudos articulados que tienen cargas P y Q aplicadas entre nudos, se trata como el de una estructura de pórtico rígido, que se estudia en la sección siguiente. Allí se estudia también el caso de los cuchillos roblonados.

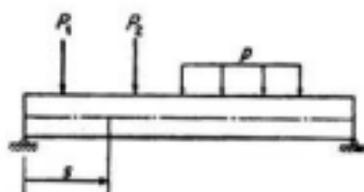


FIG. 12.11. Flexión de vigas.

12.7 Cálculo de deformaciones de vigas y pórticos utilizando el método de los trabajos virtuales. Se puede obtener una expresión de la ley de los trabajos virtuales aplicada a las vigas y pórticos sustituyendo en la Ec. (12.1) los valores de las Ecs. (12.2) y (12.4). Consideraremos primero el caso de una viga deformada por cargas transversales. En este caso, si las reacciones no tienen componentes axiales, las secciones transversales de la viga están sometidas solo a esfuerzo cortante y momento flector, sin fuerza axial. El primer término de la Ec. (12.4) desaparecerá, y la ley de los trabajos virtuales aplicada a este caso será

$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \quad (12.6)$$

Recuérdese que en el desarrollo de la Ec. (12.4) se ha despreciado la deformación por cortante. Este caso está representado en la Fig. 12.11. Para hallar la componente vertical, horizontal, u otra cualquiera, del corrimiento de un punto de la viga, se aplica una carga unidad en la dirección apropiada. Esta carga unidad, junto con sus reacciones, constituyen el sistema Q , que se traslada durante la deformación de la viga. La resolución de un problema de deformaciones de vigas es fundamentalmente análogo al del cuchillo, pero difiere en detalles del cálculo del segundo miembro de la Ecuación (12.6).

Para poder integrar el segundo miembro, hay que expresar M_Q y M_P en función de x . Generalmente, es necesario dividir la integración para toda la viga en la suma de varias integrales, correspondientes a cada una de las partes en que dicha viga queda dividida al considerar los puntos en que hay una variación de las funciones que representan a M_Q , M_P , o I en función de x . El proceso de integración se puede simplificar, a veces, eligiendo orígenes distintos para x , en cada parte de la viga. En los siguientes ejemplos se aclarará la técnica empleada para organizar los cálculos.

Obsérvese, en particular, el criterio de signos utilizado para los diversos términos de la Ec. (12.6). Se puede usar cualquier criterio que parezca apropiado para M_Q y M_P con tal de que se use el mismo para los dos. Generalmente, el más satisfactorio es el criterio ordinario de la viga. δ será positivo cuando tenga el mismo sentido que la fuerza Q correspondiente.

Muchas veces es necesario hallar la variación angular de alguna sección transversal de una viga. Para ello, elijamos como sistema Q una carga repartida como la de la Figura 12.12, y sus reacciones. Esta carga está distribuida sobre la sección transversal

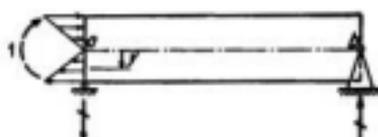


FIG. 12.12. Sistema Q utilizado para obtener la variación angular de una sección.

de tal modo que es equivalente a un par unidad. Sea q , la intensidad de esta carga a una distancia y del eje. Considerando solo el efecto de la deformación por flexión, una sección transversal que era plana antes de la flexión continua siendo plana y normal a la elástica después de flexar. Si gira una sección transversal un ángulo pequeño α , un punto situado a la distancia y del eje, recorrerá $(\alpha)(y)$. Por tanto, el trabajo virtual exterior realizado por la carga repartida q durante el giro de la sección, originado por el sistema P , será

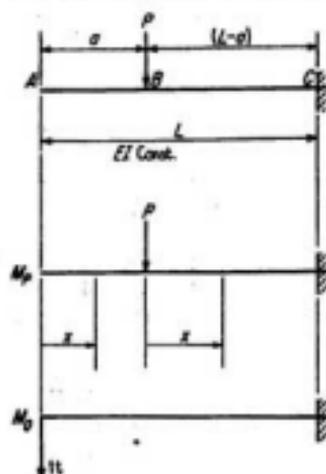
$$\int (q_y b dy)(\alpha y) = \alpha \int q_y b y dy = (1)(\alpha)$$

por ser el momento de la carga q respecto al eje $= \int q_y b y dy = 1$. Observando que el trabajo virtual externo realizado por esa carga repartida q es equivalente a su par unidad resultante por α , podemos considerar en lo sucesivo que aplicamos un par unidad a la sección, sin preocuparnos del detalle de la carga repartida. Por tanto, aplicando la Ec. (12.6) a este caso, se halla:

$$(1)(\alpha_\delta) + W_\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

Desde aquí, el resto de la resolución es similar a la de un corrimiento vertical.

Ejemplo 12.5 Calcular el corrimiento vertical de A, debido a la carga P aplicada en el punto B.



$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(I) (\delta_A) = \int_A^B M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_B^C M_Q M_P \frac{dx}{EI}$$

Desde A a B,

$$0 < x < a \quad M_Q = -x \quad M_P = 0$$

Desde B a C,

$$0 < x < (L-a)$$

$$M_Q = -(a+x) \quad M_P = -Px$$

$$(I) (\delta_A) = 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{L-a} [-(a+x)] [-Px] dx$$

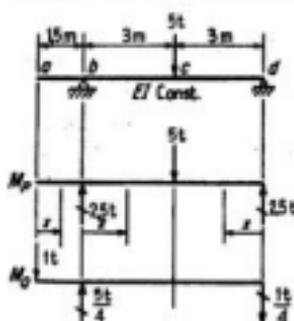
$$= \frac{P}{EI} \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^{L-a}$$

$$= \frac{P}{EI} \left[\frac{a(L-a)^2}{2} + \frac{(L-a)^3}{3} \right]$$

$$\delta_A = \frac{P}{6EI} (L-a)^2 (2L+a)$$

Ejemplo 12.6 Calcular el corrimiento vertical de a, producido por la carga representada.

$$E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 \quad I = 8.000 \text{ cm}^4$$



$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(I) (\delta_a) = \int_a^b M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_b^c + \int_c^d$$

Desde a a b,

$$M_P = 0$$

Desde b a c,

$$0 < x < 3 \quad M_Q = \frac{x}{4} - 1,5 \quad M_P = 2,5x$$

Desde d a c,

$$0 < x < 3 \quad M_Q = -\frac{x}{4} \quad M_P = 2,5x$$

$$(I) (\delta_a) = \frac{1}{EI} \left[0 + \int_0^3 \left(\frac{x}{4} - 1,5 \right) (2,5x) dx + \int_0^3 \left(-\frac{x}{4} \right) (2,5x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\left[\frac{2,5}{12} x^3 - \frac{3,75}{2} x^2 \right]_0^3 + \left[-\frac{2,5}{12} x^3 \right]_0^3 \right] = -\frac{16,875 \text{ t}^2 \text{ m}^3}{EI}$$

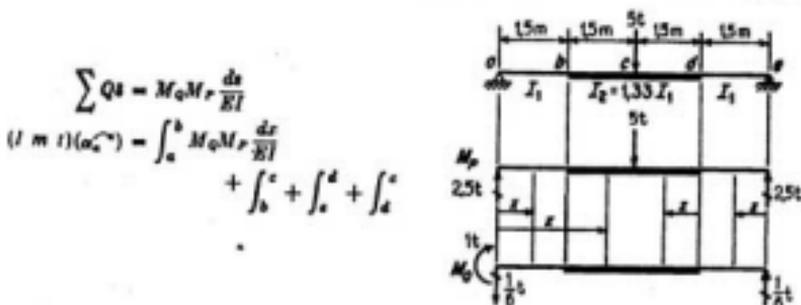
$$\therefore \delta_a = \frac{16,875 \text{ t}^2 \text{ m}^3}{(2,1 \times 10^6) \text{ t/m}^2 (8.000 \times 10^{-8}) \text{ m}^4} = -0,01 \text{ m}$$

\therefore hacia arriba

Razonamiento:

Se puede elegir arbitrariamente el origen de abscisas x para una parte de la viga, pero debe usarse el mismo origen en las expresiones de M_Q y M_F de cada una de ellas. Se elegirá el origen que haga mínimo el número de términos de las expresiones de M_Q y M_F , y que reduzca además el trabajo de sustituir los límites de integración.

Ejemplo 12.7 Calcular la variación angular de la sección transversal en el punto a , producida por la carga representada. $E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2$, $I_1 = 6.000 \text{ cm}^4$, $I_2 = 8.000 \text{ cm}^4$.



$$\sum Q\delta = M_Q M_F \frac{ds}{EI}$$

$$(1 \text{ m})(\alpha_c) = \int_a^b M_Q M_F \frac{dx}{EI} + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^e$$

Desde a hasta b ,

$$0 < x < 1,5 \quad I_1 \quad M_Q = 1 - \frac{x}{6} \quad M_F = 2,5x$$

Desde b hasta c ,

$$1,5 < x < 3 \quad 1,33I_1 \quad M_Q = 1 - \frac{x}{6} \quad M_F = 2,5x$$

Desde c hasta d ,

$$0 < x < 1,5 \quad I_1 \quad M_Q = \frac{x}{6} \quad M_F = 2,5x$$

Desde d hasta e ,

$$0 < x < 1,5 \quad 1,33I_1 \quad M_Q = \frac{1}{4} + \frac{x}{6} \quad M_F = 3,75 + 2,5x$$

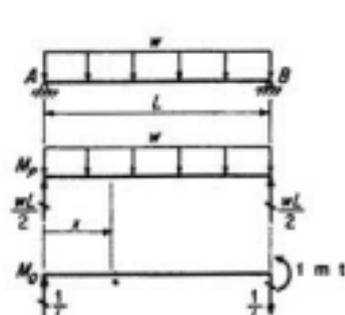
$$(1 \text{ m})(\alpha_c) = \frac{1}{EI_1} \left[\int_0^{1,5} \left(1 - \frac{x}{6}\right) (2,5x) dx + \int_{1,5}^3 \left(1 - \frac{x}{6}\right) (2,5x) \frac{dx}{1,33} \right. \\ \left. + \int_0^{1,5} \left(\frac{x}{6}\right) (2,5x) dx + \int_0^{1,5} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{6}\right) (3,75 + 2,5x) \frac{dx}{1,33} \right] = \frac{1}{EI_1} \left[\left[\frac{2,5x^2}{2} - \frac{2,5x^3}{18} \right]_0^{1,5} \right. \\ \left. + \frac{1}{1,33} \left[\frac{2,5x^2}{2} - \frac{2,5x^3}{18} \right]_{1,5}^3 + \left[\frac{2,5x^3}{18} \right]_0^{1,5} + \frac{1}{1,33} \left[\frac{3,75x}{4} + \frac{5x^2}{8} + \frac{2,5x^3}{18} \right]_0^{1,5} \right] \\ = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{2,5}{2} (2,25) + \frac{1}{1,33} \left[\frac{2,5}{2} (9 - 2,25) - \left(\frac{2,5 \times 27}{18} - \frac{2,5 \times 3,375}{18} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{1,33} \left[\frac{3,75}{4} (1,5) + \frac{5}{8} (2,25) + \frac{2,5}{18} (3,375) \right] \right] \\ = \frac{1}{EI_1} \left[2,812 + \frac{1}{1,33} (8,437 - 3,281 + 3,281) \right] = \frac{1}{EI_1} (2,812 + 6,343) = \frac{9,155 \text{ t}^2 \text{ m}^3}{EI_1} \\ = \frac{(9,155) \text{ t}^2 \text{ m}^3}{(21 \times 10^8) \text{ t/m}^2 (6.000 \times 10^{-8}) \text{ m}^4} = +0,0072 \text{ radianes}$$

\therefore sentido de las agujas del reloj

Razonamiento:

La elección de los orígenes para medir x no es, necesariamente, la mejor que se podía haber hecho, pero se ha querido poner un ejemplo de los diversos modos posibles de tratar el problema. Cuando se hagan simplificaciones antes de integrar o de sustituir los límites, hay que asegurarse de que la simplificación es correcta — compruébese que los dos términos y los límites son los mismos.

Ejemplo 12.8 Calcular la variación angular de la sección en el punto B. E e I , constantes.



$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(I \text{ m t})(\alpha_B^-) = \int_A^B M_Q M_P \frac{dx}{EI}$$

$$0 < x < L$$

Desde A hasta B, $0 < x < L$

$$M_Q = \frac{x}{L} \quad M_P = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$(I \text{ m t})(\alpha_B^-) = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}\right) \frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{w}{EI} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8L} \right]_0^L = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$\therefore \alpha_B = \frac{wL^3}{24EI}$$

\therefore sentido contrario a las agujas del reloj.

Consideremos ahora el caso más general de una viga o pórtico rígido en que las secciones de las barras están sometidas a una fuerza axial además de cortante y momento flector. En la Fig. 12.13 se muestran varios casos de este tipo. La deformación de esas

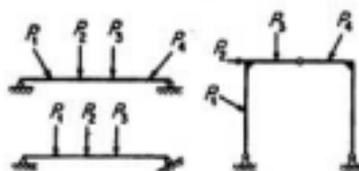


FIG. 12.13. Estructuras sometidas a variación axial de longitud y flexión.

estructuras puede ser originada también por variaciones de temperatura, tanto como por las fuerzas axiales y los momentos flectores producidos por las cargas P . Como consecuencia, hay que considerar los dos términos de la Ec. (12.4) al calcular el trabajo virtual interno. La ley de los trabajos virtuales aplicada a tales casos se puede expresar por

$$\sum Q\delta = \int F_Q \delta e_0 ds + \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \quad (12.7)$$

en que el alargamiento axial e_0 , que incluye el efecto de la fuerza axial y la temperatura, es

$$e_0 = \alpha t + \frac{F_P}{AE}$$

Generalmente, se puede descomponer la estructura en varias partes, en cada una de las cuales son constantes F_Q , F_P , A y t . Del mismo modo, para calcular el segundo término del segundo miembro de la Ec. (12.7), se puede descomponer la integración en varias partes, cada una de las cuales se refiere a una zona en que las funciones que expresan M_Q , M_P e I tienen la misma forma. Las partes utilizadas para calcular el primer término de la Ec. (12.7) no son necesariamente las mismas que se emplean para

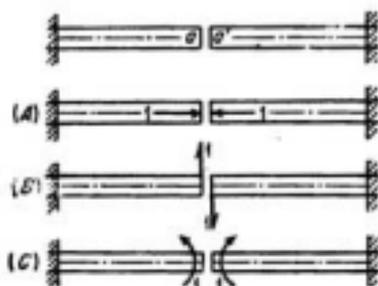


FIG. 12.14. Sistema Q para hallar corrimientos relativos.

calcular el segundo término. En todos los casos se puede expresar la Ec. (12.7) de modo más conveniente en la forma siguiente:

$$\sum Q\delta = \sum F_Q \Delta L + \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \quad (12.8)$$

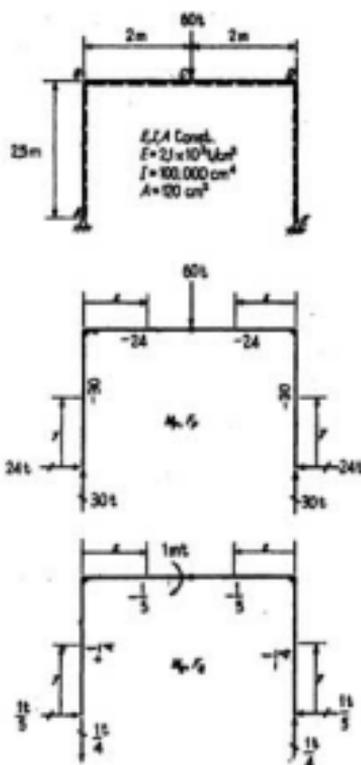
donde

$$\Delta L = \int e_0 ds = \alpha t L + \frac{F_P L}{AE}$$

El signo de sumación del segundo miembro de la Ec. (12.8) indica que se deben sumar los términos para todas las partes de todas las barras de la estructura.

La aplicación de la Ec. (12.8) a un problema determinado exige el empleo de las técnicas ya utilizadas en los Ejemplos 12.1 a 12.8. En el Ejemplo 12.9 se verá cómo deben disponerse los cálculos. La mayoría de los problemas de deformaciones de vigas y pórticos comprenden el cálculo de alguna componente del corrimiento de un punto o la variación angular de una sección. No obstante, a veces es necesario hallar los corrimientos relativos entre dos secciones contiguas, como las a y a' de la Fig. 12.14. Se pueden hallar los desplazamientos horizontal, vertical o angular relativos en los puntos a y a' eligiendo los sistemas Q representados en los esquemas A , B o C , respectivamente.

Ejemplo 12.9 Calcular la variación angular de la sección del lado izquierdo de la articulación en c, debido a la carga representada.



$$\sum Q_i = \sum F_Q F_r \frac{L}{AE} + \sum \int M_Q M_r \frac{dx}{EI}$$

$$(I \text{ m}) (\alpha_{c2}) = \int_A^B M_Q M_r \frac{dy}{EI} + \int_B^C M_Q M_r \frac{dx}{EI} + \int_D^E + \int_D^C + \sum F_Q F_r \frac{L}{AE}$$

Nota: Se puede calcular $F_Q F_r \frac{L}{AE}$ para las mismas partes AB, BC, ED y DC. Las líneas de trazos indican las fibras inferiores para aplicar el criterio de los signos de M_Q y M_r .

Desde A hasta B,

$$L = 2.5 \text{ m} \quad 0 \rightarrow y \rightarrow 2.5$$

$$F_Q = +\frac{1}{4} \quad M_Q = -\frac{y}{5}$$

$$F_r = -30 \quad M_r = -24y$$

Desde B hasta C,

$$L = 2 \text{ m} \quad 0 \rightarrow x \rightarrow 2$$

$$F_Q = -\frac{1}{3} \quad M_Q = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

$$F_r = -24 \quad M_r = -60 + 30x$$

Desde E hasta D,

$$L = 2.5 \text{ m} \quad 0 \rightarrow y \rightarrow 2.5$$

$$F_Q = -\frac{1}{4} \quad M_Q = -\frac{y}{5}$$

$$F_r = -30 \quad M_r = -24y$$

Desde D hasta C,

$$L = 2 \text{ m} \quad 0 \rightarrow x \rightarrow 2$$

$$F_Q = -\frac{1}{5} \quad M_Q = -\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

$$F_r = -24 \quad M_r = -60 + 30x$$

$$(I \text{ m}) (\alpha_{c2}) = \frac{1}{EI} \left[2 \int_0^{2.5} \left(-\frac{y}{5}\right) (-24y) dy + \int_0^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) (-60 + 30x) dx + \int_0^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) (-60 + 30x) dx \right] + \frac{2}{AE} \left(\frac{1}{5}\right) (-24)(2)$$

$$= \frac{1}{EI} \left[(3.2y^2) \Big|_0^{2.5} + 2(30x - 7.5x^2) \Big|_0^2 \right] + \frac{19.2}{AE}$$

$$(I \text{ m}) (\alpha_{\text{CL}}) = \frac{110}{EI} + \frac{19,2}{AE} = \frac{(110) \text{ t}^2 \text{ m}^3}{(21 \times 10^6) \text{ t/m}^2 (100.000 \times 10^{-6}) \text{ m}^4} + \frac{(19,2) \text{ t}^2 \text{ m}}{(120 \times 10^{-4}) \text{ m}^2 (21 \times 10^6) \text{ t/m}^2}$$

$$\therefore \alpha_{\text{CL}} = +0,005238 + 0,000076 = +0,005314 \text{ radianes} \quad \therefore \text{sentido de las agujas del reloj}$$

Razonamiento:

En los problemas que contienen deformación axial y de flexión, hay que tener mucho cuidado con las unidades. Obsérvese que la contribución del término de la deformación axial es solo de alrededor del 1 por 100 de la deformación por flexión. Esto es lo que sucede poco más o menos en todos los problemas de flechas de pórticos. Por tanto, en general, es admisible despreciar, en estos casos, el efecto de la deformación axial.

Un cuchillo con nudos roblonados es, en esencia, un pórtico rígido. En los comentarios de la Sec. 4.2 se recaló que las barras de esos cuchillos están sometidas a cortante y momento flector, así como a fuerzas axiales, aun cuando las cargas estén aplicadas en los nudos. Sin embargo, en lo que concierne a las tensiones y alargamientos en las barras, se puede considerar que un cuchillo con uniones roblonadas es equivalente a otro con nudos articulados, como se ve en la Fig. 12.15. Pero este cuchillo equivalente está cargado, no solo con las cargas en los nudos dados, sino también con pares en los extremos de cada barra, iguales a los momentos en los extremos de los elementos correspondientes del cuchillo con uniones roblonadas. Un estu-

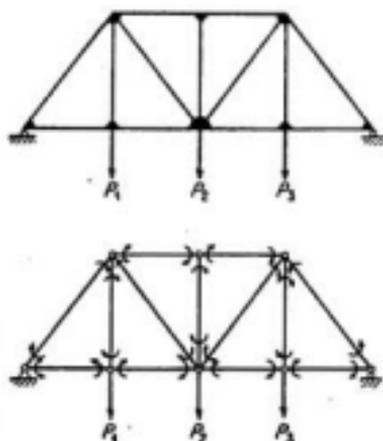


Fig. 12.15. Corrimientos de armaduras con nudos rígidos.

dio más detallado demuestra que, en la mayoría de los casos, estos pares extremos producen por sí mismos fuerzas muy pequeñas en las barras. En otras palabras, las fuerzas de barra en el cuchillo de nudos articulados equivalente, están producidas casi totalmente por las cargas en los nudos. En el artículo anterior se indicó que los corrimientos de los nudos de un cuchillo articulado son función solo de la variación axial de longitud de las barras, y no dependen de la deformación por flexión de dichas barras. Los corrimientos de los nudos del cuchillo articulado correspondiente, bajo las cargas en los nudos y los pares extremos, es, por tanto, esencialmente el mismo que para un cuchillo ideal articulado, sometido solo a las cargas en los nudos. Por tanto, un cuchillo con uniones roblonadas se asimila a uno ideal articulado, para calcular los corrimientos de los nudos. Hay que tener en cuenta que la flexión de las barras del cuchillo roblonado afecta a los corrimientos de los puntos que no son nudos.

En ningún momento de los razonamientos anteriores se ha considerado el caso de una viga o un pórtico con eje curvo, o de sección variable. La consideración detallada de tales estructuras se sale del alcance de este libro. Si la curvatura y la variación de sección no son grandes, se puede suponer que las tensiones normales están repartidas linealmente, por lo que se puede aplicar la Ec. (12.7) para hallar las deformaciones. En tales casos, raras veces se pueden calcular exactamente las integrales del segundo miembro de esta ecuación, teniéndose que hallar sus valores por métodos aproximados. A este objeto, se divide el eje de la estructura en cierto número de pequeñas partes iguales de longitud Δs , calculándose los valores de F_Q , e_s , M_Q , M_P e I para la sección del centro de cada una de las partes. Se calculan los productos $F_Q e_s \Delta s$ y $M_Q M_P \Delta s / EI$ para cada una de ellas y su suma da el valor aproximado del segundo miembro de la Ec. (12.7). La exactitud de este método aumenta cuando disminuye el tamaño de las partes.

12.8 Desarrollo de los teoremas del área de momentos. Muchas veces es más conveniente utilizar, para calcular variaciones angulares y corrimientos en vigas y pórticos, los teoremas del área de momentos, que el de los trabajos virtuales, especialmente cuando la deformación está producida por cargas aisladas. Estos teoremas están fundados en consideraciones geométricas sobre la elástica de la viga y la relación entre la variación de pendiente y el momento flector en un punto de dicha curva elástica.

Con referencia a la Fig. 12.16, consideremos una parte ACB de la elástica de una viga que era *recta inicialmente* y ocupaba la posición A_0B_0 , cuando no existían tensiones.

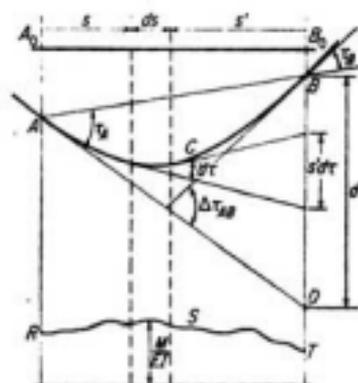


FIG. 12.16. Deducción de los teoremas del área de momentos.

Tracemos las tangentes a la elástica en A y B . La tangente en A corta a la vertical que pasa por B , en D . El ángulo $\Delta\tau_{AB}$ es la variación angular entre las tangentes en los puntos A y B . Los corrimientos y la curvatura se han exagerado enormemente. En realidad, la inclinación de las tangentes a la elástica es tan pequeña, que un ángulo como el τ_A es aproximadamente igual a su seno y su tangente, y su coseno es aproximadamente igual a la unidad.

Consideremos un elemento diferencial de esta curva, con proyección horizontal ds , y tracemos las tangentes a la elástica en cada extremo del elemento. La variación de pendiente entre las tangentes es el ángulo $d\tau$, cuyo valor puede hallarse considerando la Fig. 12.17.

$$d\tau = \frac{(\sigma_s ds)/E}{c} = \frac{Mc ds}{EI c} = \frac{M}{EI} ds$$

Es evidente que la variación angular total entre las tangentes en A y B es la suma de todos los ángulos $d\tau$ de todos los elementos ds de la elástica ABC , o

$$\Delta\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \frac{M}{EI} ds \quad (12.9)$$

Sea RST la curva de momentos flectores de la parte AB , cuyas ordenadas se han dividido por el valor de EI de la viga en cada punto, curva que llamaremos curva M/EI .

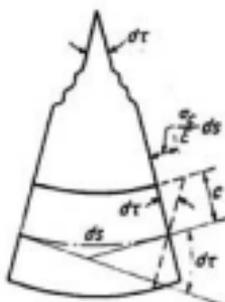
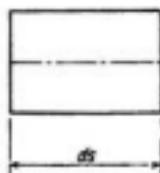


FIG. 12.17. Variación angular diferencial.



Es evidente que se puede interpretar la integral de la Ec. (12.9) como el área situada bajo la curva M/EI entre A y B . Por tanto, de la Ec. (12.9) se puede enunciar el *primer teorema del área de momentos*:

La variación angular de las tangentes de la elástica entre dos puntos, A y B , es igual al área bajo la curva M/EI entre esos dos puntos.*

En vista del hecho de que la deformación y las pendientes son pequeñas en la realidad, es evidente, considerando la Fig. 12.16, que la parte interceptada en la recta BD (normal a la posición no deformada de la viga) entre las tangentes en los extremos del elemento ds , se puede representar por $s' ds$ y, por consiguiente,

$$d = \int_A^B s' d\tau = \int_A^B \frac{M}{EI} s' ds \quad (12.10)$$

La última integral puede interpretarse como el momento estático, respecto a un eje por el punto B , del área bajo la curva M/EI entre los puntos A y B . Por tanto, se puede enunciar de la Ec. (12.10) el *segundo teorema del área de momentos*:

El corrimiento del punto B en la elástica, contado desde la tangente a esta curva en

* Siempre que en la parte de viga AB no se hayan incluido discontinuidades (tales como articulaciones).

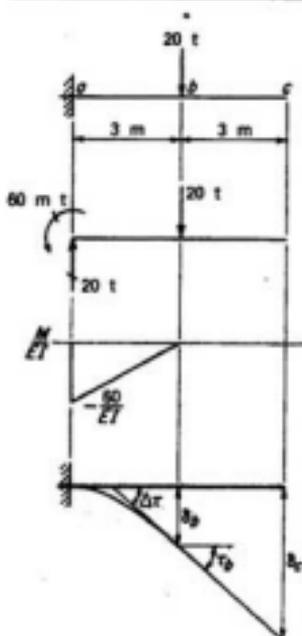
el punto A , es igual al momento estático respecto a un eje por B del área bajo la curva M/EI entre los puntos A y B^* .

Obsérvese que este corrimiento se mide en dirección normal a la posición original de la viga, y suele denominarse flecha.

Se pueden aplicar los dos teoremas directamente para hallar pendientes y corrimientos de puntos de vigas, dibujando simplemente la curva de momentos para las cargas que producen la deformación y calculando luego el área y el momento estático de toda o parte de la curva M/EI correspondiente. Como aclaración de este procedimiento, pueden verse los Ejemplos 12.10 a 12.12. Se verá con estos ejemplos que es evidente que pueden simplificarse los cálculos introduciendo algunas ideas más. La analogía basada en estas ideas se estudia en el artículo siguiente y se llamará *método de la carga elástica*.

Estos teoremas pueden ampliarse sin dificultad a barras que inicialmente no eran rectas. La consideración de tales casos está fuera del alcance de este libro.

Ejemplo 12.10 Utilizando los teoremas del área de momentos, calcular las flechas en los puntos b y c y la pendiente de la elástica en el punto b . E e I son constantes.



Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

$$\delta_b = \left(\frac{60}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2) = \frac{180}{EI} \text{ (hacia abajo)}$$

$$\delta_c = \left(\frac{60}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2+3) = \frac{450}{EI} \text{ (hacia abajo)}$$

Aplicando el primer teorema del área de momentos,

$$\Delta\tau = \left(\frac{60}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{90}{EI}$$

$$\therefore \tau_b = \frac{90}{EI}$$

Se podría formular un criterio de signos para aplicar los teoremas del área de momentos. No se ha hecho aquí, por temor a que pudiera confundirse con el que se propone en la próxima sección. Cuando se aplican los teoremas del área de momentos, se pue-

* Siempre que en la parte de viga AB no se hayan incluido discontinuidades (tales como articulaciones).

den tratar los signos como se ve en los Ejemplos 12.10 a 12.12. En ellos, se dibuja primero la elástica aproximadamente, con la curvatura indicada por el diagrama de momentos flectores. Al calcular una flecha (o ángulo) representado en este esquema, la contribución de una parte dada del diagrama M/EI (independientemente del signo de M en esta parte), se considerará positiva o negativa, según que tienda a aumentar o a disminuir, respectivamente, la magnitud del corrimiento representado en el trazado supuesto. Así, un resultado final positivo confirma el sentido tomado para el corrimiento.

Ejemplo 12.11 Utilizando los teoremas del área de momentos, calcular la pendiente de la elástica en los puntos a y m , y la flecha en m .

Cuando las pendientes son pequeñas, $\tan \tau_a = \tau_a$.

$$\therefore \tau_a = \frac{d}{6}$$

Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

$$d = \left(\frac{20}{EI} \right) \left[\left(\frac{4}{2} \right) (2 + 1.3) + \left(\frac{2}{2} \right) (1.3) \right] \\ = \frac{160}{EI} \quad \therefore \tau_a = \frac{26.6}{EI}$$

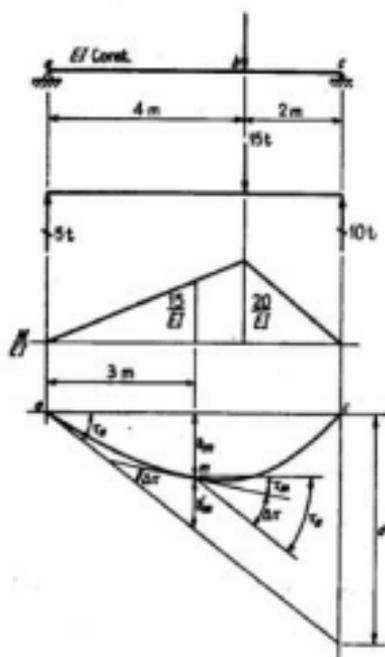
Del dibujo de la elástica, $\tau_m = \tau_a - \Delta\tau$.

Pero, por el primer teorema del área de momentos,

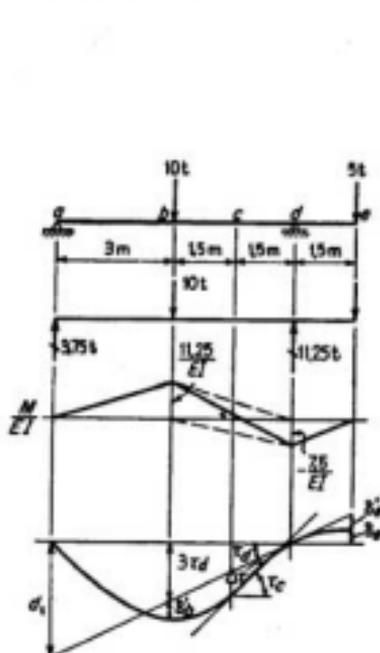
$$\Delta\tau = \left(\frac{15}{EI} \right) \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{22.5}{EI} \\ \therefore \tau_m = \frac{26.6}{EI} - \frac{22.5}{EI} = \frac{4.16}{EI}$$

También, del dibujo, $\delta_m = 3\tau_a - \delta'_m$. Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

$$\delta'_m = \left(\frac{15}{EI} \right) \left(\frac{3}{2} \right) (1) = \frac{22.5}{EI} \\ \therefore \delta_m = (3) \left(\frac{26.6}{EI} \right) - \frac{22.5}{EI} = \frac{57.5}{EI}$$



Ejemplo 12.12 Utilizando los teoremas del área de momentos, calcular las flechas en los puntos b y e y la pendiente en el c . E e I , constantes.



$$\tau_4 = \frac{d_1}{6}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[(11,25) \left(\frac{6}{2} \right) (3) - (7,5) \left(\frac{3}{2} \right) \left(3 + \frac{2}{3} \times 3 \right) \right] = \frac{45}{EI}$$

$$\therefore \tau_4 = \frac{15}{2EI}$$

$$\delta_b = 3\tau_4 + \delta'_b$$

$$\delta'_b = \frac{1}{EI} \left[(7,5) \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{6}{3} \right) - (11,25) \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{3}{3} \right) \right] = \frac{45}{8EI}$$

$$\therefore \delta_b = \frac{45}{2EI} + \frac{45}{8EI} = \frac{225}{8EI} \text{ (hacia abajo)}$$

$$\delta_e = 1,5\tau_4 - \delta'_e$$

$$\delta'_e = \frac{1}{EI} \left[(7,5) \left(\frac{1,5}{2} \right) \left(\frac{3}{3} \right) \right] = \frac{45}{8EI}$$

$$\therefore \delta_e = \frac{45}{4EI} - \frac{45}{8EI} = \frac{45}{8EI} \text{ (hacia arriba)}$$

$$\tau_c = \tau_4 + \Delta\tau$$

$$\Delta\tau = \frac{(7,5 + 3,75)(1,5)}{2EI} - \frac{(5,625)(1,5)}{2EI} = \frac{33,75}{8EI}$$

$$\therefore \tau_c = \frac{15}{2EI} + \frac{33,75}{8EI} = \frac{26,25}{8EI} = \frac{105}{32EI}$$

Razonamiento:

Obsérvese que es más difícil manejar convenientemente los signos cuando una viga tiene momentos positivos y negativos. Para atenuar estas dificultades, es aconsejable dibujar la elástica todo lo exactamente posible. Se puede dibujar correctamente la curvatura siguiendo simplemente el diagrama de momentos —los momentos positivos corresponden a elástica cóncava hacia arriba y los negativos con la concavidad hacia abajo—. Se encontrará conveniente tratar estos problemas más difíciles por el método de la carga-elástica, en el que las dificultades de signos se aclaran casi automáticamente.

Se observará también que en una parte como la bd , en la que la curva de momentos pasa de positiva a negativa, suele ser conveniente para los cálculos sustituir la curva de momentos real por las líneas de puntos que se indican. En este caso, los triángulos positivo y negativo bajo la curva real de momentos se han sustituido por el triángulo positivo con altura $+11,25$ y base 3 , y el negativo, con altura $7,5$ y base también 3 . Una ligera reflexión servirá para comprobar que este procedimiento es válido para el cálculo del área total o del momento estático del área respecto a cualquier eje vertical.

12.9 Método de la carga-elástica. Las ideas contenidas en este método se pueden desarrollar considerando la elástica ACB de una barra AB , que era recta originalmente y que ha flexado como se muestra en la Fig. 12.18. Sea RST la curva M/EI . Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

$$d = \int_A^B s' \frac{M}{EI} ds$$

De donde

$$\tau_A = \frac{d}{L} = \frac{1}{L} \int_A^B s' \frac{M}{EI} ds$$

Esta ecuación establece, simplemente, que τ_A es igual al momento estático, respecto a un eje que pasa por B del área bajo la curva M/EI entre A y B , dividida por L . Sin embargo, es interesante observar que la forma de estos cálculos para hallar τ_A nos es muy familiar. Supongamos que el diagrama M/EI , RST , representa una carga vertical repartida aplicada a una viga simplemente apoyada en los puntos A y B , como se representa con el rayado en la Fig. 12.18b. Para hallar la reacción vertical en el punto A ,

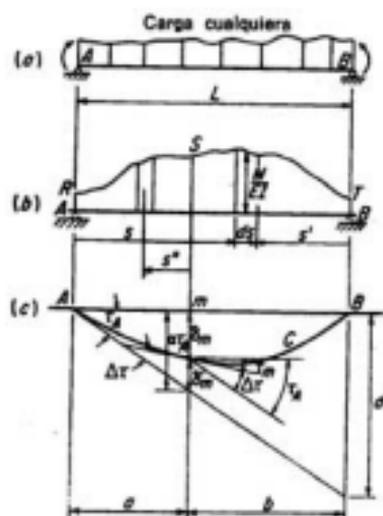


FIG. 12.18. Desarrollo del método de la carga elástica.

habrá que tomar momentos respecto a un eje por B (normal al plano del papel), y de hecho esta reacción vertical en A será exactamente igual al valor de τ_A calculado más arriba.

Se puede profundizar aún más esta analogía, si consideramos la forma de los cálculos para hallar τ_m y δ_m . Obsérvese que τ_m da la pendiente de la tangente referida a la dirección de la cuerda AB de la elástica, y que δ_m da la flecha del punto m desde la misma cuerda AB . Consideremos primero τ_m ; será

$$\tau_m = \tau_A - \Delta\tau$$

Pero, de acuerdo con el primer teorema del área de momentos, $\Delta t = \int_A^m M/EI ds$, y, por tanto,

$$\tau_m = \tau_A - \int_A^m \frac{M}{EI} ds$$

Considerando de nuevo el diagrama M/EI como la carga y τ_A como la reacción en el punto A de la viga imaginaria, vemos, en esta ecuación, que τ_m es igual a la reacción τ_A menos la carga aplicada entre A y m . En otras palabras, se puede interpretar τ_m como el cortante en el punto m de esta viga imaginaria. De igual modo,

$$\delta_m = (a)(\tau_A) - \delta'_m$$

Pero, del segundo teorema del área de momentos, $\delta'_m = \int_A^m s'(M/EI) ds$, y, por tanto,

$$\delta_m = (\tau_A)(a) - \int_A^m s' \frac{M}{EI} ds$$

Para continuar la analogía, es evidente en esta ecuación que se puede interpretar δ_m como el momento flector en el punto m de la viga imaginaria.

De estas consideraciones se deduce que la elástica de una viga AB es exactamente la misma curva que la del momento flector de una viga imaginaria simplemente apoyada, de la misma luz AB , cargada con una carga repartida igual al diagrama M/EI de la viga real. Además, la pendiente de la tangente a la elástica en un punto cualquiera es igual a la ordenada correspondiente del diagrama de esfuerzo cortante de la viga AB imaginaria cargada con el diagrama M/EI . Cuando se le usa de esta forma, al diagrama M/EI se le llama «carga elástica», por lo que a este método de calcular la flecha y la pendiente de una viga se le llama *método de la carga elástica*. Los cortantes y momentos producidos por la *carga elástica* que actúa en la viga imaginaria se suelen llamar *cortantes elásticos* y *momentos elásticos*, respectivamente.

Utilizando esta analogía, el problema de calcular flechas y pendientes de una viga se reduce al empleo de un procedimiento muy conocido del ingeniero de estructuras. Todo lo que hay que hacer es calcular las reacciones, el cortante y el momento flector de una viga imaginaria apoyada en sus extremos, cargada con una carga repartida. Los siguientes ejemplos confirman la importancia del método.

El ejemplo utilizado para desarrollar estas ideas tiene apoyos, que no pueden ceder, en los puntos A y B . Como consecuencia, estos puntos no sufren corrimientos, por lo que la cuerda de la elástica que une los puntos A y B permanece horizontal y coincide con la posición del eje de la viga sin deformar. La pendiente τ_m y la flecha δ_m dan, por tanto, los valores verdaderos respecto a la posición original de la viga. Evidentemente, se puede aplicar el método de la carga elástica a cualquier parte AB de la viga, permanezca fija o no la cuerda AB de la elástica. Sin embargo, recuérdese que el cortante y el momento flector obtenidos por este método dan la pendiente y el corrimiento *medidos con referencia a la cuerda AB* . Si se ha movido la cuerda, las cantidades obtenidas no dan el corrimiento y la pendiente verdaderos referidos a la posición original de la viga, si no se corrigen para el movimiento de la cuerda.

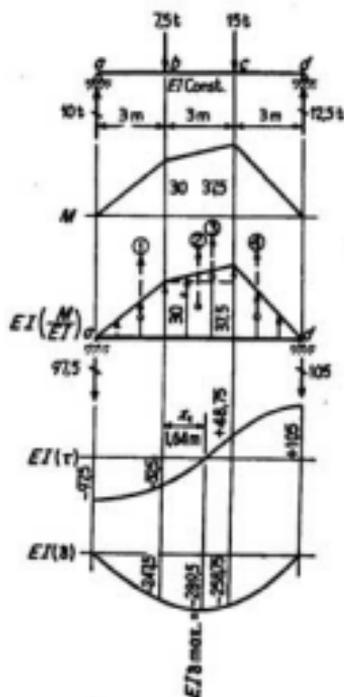
En el caso general en que la cuerda puede, o no, moverse, se puede resumir el procedimiento de aplicar el método de la carga elástica en el enunciado siguiente:

Las pendientes y flechas de una elástica medidas con referencia a una de sus cuerdas AB son iguales, respectivamente, a los cortantes (elásticos) y a los momentos (elásticos) de una viga imaginaria apoyada en sus extremos, de luz AB, cargada con una carga (elástica) repartida, consistente en el diagrama M/EI de la parte AB.*

Para sacar más provecho al método es aconsejable seguir el mismo criterio de signos y los principios utilizados en las curvas normales de cargas, cortantes y momentos flectores. Como en esos cálculos se consideran positivas las cargas dirigidas hacia arriba, las ordenadas M/EI positivas, indicarán cargas hacia arriba. Dibujando las curvas de cortante y momento flector de la viga imaginaria de acuerdo con el criterio habitual de la viga, los momentos positivos se tomarán encima del eje y los negativos debajo. Por tanto, un momento positivo de la viga imaginaria indica flechas por encima de la cuerda, y los negativos por debajo. De igual modo, un cortante positivo en la viga imaginaria indica que la elástica tiene una pendiente hacia arriba, yendo de izquierda a derecha, y el negativo hacia abajo.

* Siempre que en la parte de viga AB no se hayan incluido discontinuidades (tales como articulaciones).

Ejemplo 12.13 Calcular las pendientes y flechas de la viga de la figura, utilizando el método de la carga elástica.



$$\Sigma M_a = 0$$

$$(1) \quad (30 \times 1,5 = 45,00) \times 7 = 315$$

$$(2) \quad (30 \times 3 = 90,00) \times 4,5 = 405$$

$$(3) \quad (7,5 \times 1,5 = 11,25) \times 4 = 45$$

$$(4) \quad (37,5 \times 1,5 = 56,25) \times 2 = 112,5$$

$$\frac{202,50}{9} = \frac{877,5}{97,5} \delta$$

$$\Sigma M_b = 0$$

$$45 \times 2 = 90$$

$$90 \times 4,5 = 405$$

$$11,25 \times 5 = 56,25$$

$$56,25 \times 7 = 393,75$$

$$\frac{945}{9} = \frac{105}{0} \delta$$

$$\tau_a = -97,5 \quad -97,5 \times 3 = -292,5$$

$$+45 \quad +45 \times 1 = +45$$

$$\frac{-247,5}{9} = \delta$$

$$\tau_b = -52,5 \quad -52,5 \times 3 = -157,5$$

$$+90 \quad +90 \times 1,5 = +135$$

$$+11,25 \quad +11,25 \times 1 = +11,25$$

$$\frac{-258,75}{9} = \delta$$

$$\tau_c = +48,75 \quad +48,75 \times 3 = +146,25$$

$$+56,25 \quad +56,25 \times 2 = +112,50$$

$$\tau_d = +105 \quad 0 = \delta$$

El δ máximo se produce para $\tau = 0$, esto es, en el punto en que el cortante en la viga imaginaria es nulo, lo que sucede entre b y c , donde

$$EI\tau = -52,5 + 30x_1 + \left(\frac{7,5}{3}\right)\frac{x_1^2}{2}$$

$$= -52,5 + 30x_1 + 1,25x_1^2 = 0$$

$$\therefore x_1^2 + 24x_1 = 42$$

$$(x_1 + 12)^2 = 42 + (12)^2 = 186$$

$$x_1 + 12 = +13,64 \quad \therefore x_1 = 1,64 \text{ m}$$

En este punto,

$$EI\delta_{\max} = -247,5 - (52,5)(1,64) + (30)(1,64)\left(\frac{1,64}{2}\right) + (2,5)(1,64)\left(\frac{1,64}{2}\right)\left(\frac{1,64}{3}\right)$$

$$= -247,5 - 86,1 + 40,34 + 1,84 = 291,4 \text{ t m}^3$$

Razonamiento:

Obsérvense las unidades de los diversos números. M está en metros tonelada. Por tanto, el área bajo la curva M está en toneladas-metro². Así, si E e I se ponen también en unidades de toneladas y metro, los valores de δ estarán en metros y los de τ en radianes.

Ejemplo 12.14 Calcular las pendientes y las flechas de la viga de la figura.

$$E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2 \quad I_1 = 24.000 \text{ cm}^4 \quad I_2 = 12.000 \text{ cm}^4$$

La cuerda bd de esta viga permanece horizontal. Por tanto, las pendientes y flechas referidas a esta cuerda son las verdaderas. Utilizaremos el método de la carga elástica para obtenerlas, empleando una viga imaginaria apoyada en b y d . La reacción en b da la pendiente verdadera de la tangente a la elástica en el punto b . Conocida esta pendiente, es fácil aplicar los teoremas del área de momentos directamente para obtener las pendientes y flechas en la parte en voladizo ab .

$$\Sigma M_a = 0, \uparrow$$

$$(1) (12 \times 1,5 = -18) \times 1 = +18$$

$$(2) (9 \times 1,5 = 13,5) \times 2 = -27$$

$$(3) (18 \times 1,5 = 27) \times 4 = -108$$

$$+22,5 \quad \underline{-117}$$

$$= 19,5 \downarrow$$

$$\Sigma M_b = 0, \uparrow$$

$$-18 \times 5 = -90$$

$$13,5 \times 4 = 54$$

$$27 \times 2 = 54$$

$$\underline{18} = 3 \downarrow$$

$$v_b = -3$$

$$-18$$

$$+13,5$$

$$v_c = -7,5$$

$$+27$$

$$v_d = +19,5$$

$$0 = \delta_a$$

$$-3 \times 3 = -9$$

$$-18 \times 2 = -36$$

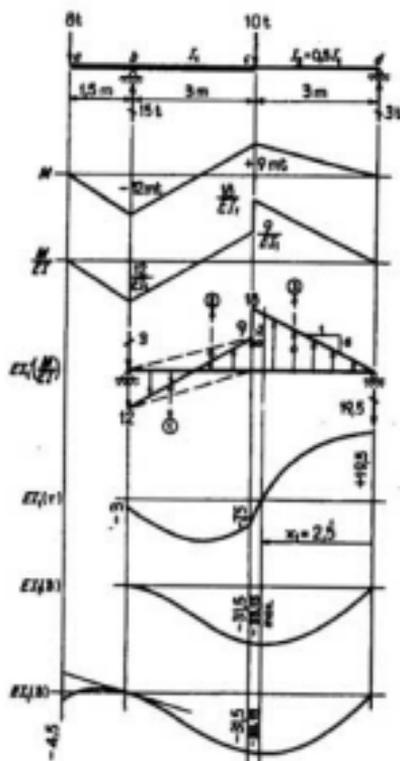
$$+13,5 \times 1 = +13,5$$

$$\underline{-31,5} = \delta_c$$

$$-7,5 \times 3 = -22,5$$

$$+27 \times 2 = +54$$

$$0 = \delta_d$$



Por tanto, en el punto a ,

$$EI_1 \delta_a = +3 \times 1,5 - 12 \times 0,75 \times 1 = -4,5 \text{ (hacia abajo)}$$

El máximo se produce inmediatamente a la derecha del punto c , donde $\tau = 0$.

$$EI_1 \tau = +19,5 - (6x_1) \left(\frac{x_1}{2} \right) = 0 \quad \therefore x_1^2 = 6,5 \quad x_1 = 2,55 \text{ m}$$

$$EI_1 \delta_{\max} = -(19,5)(2,55) + \frac{(6)(2,55)^2}{(2)(3)} = -49,72 + 16,57 = -33,15 \text{ (hacia abajo)}$$

Sustituyendo ahora los valores de E e I_x ,

$$\delta_{\max} = \frac{-(33,13) \text{ t m}^3}{(21 \times 10^6) \text{ t/m}^2 (24.000 \times 10^{-8}) \text{ m}^4} = 0,00658 \text{ m (hacia abajo)}$$

12.10 Aplicación del teorema del área de momentos y del método de la carga elástica al estudio de deformaciones en vigas y pórticos. Para utilizar el método del área de momentos con toda su eficacia, a veces es conveniente combinar la aplicación directa de los dos teoremas con el uso del método de la carga elástica. Esto se ha hecho ya en el Ejemplo 12.14 y se verá más claro en los ejemplos que siguen. Para plantear el método a seguir en un problema dado, es conveniente dibujar primero la elástica de la estructura, para lo que se necesita una cierta práctica, aunque incluso el principiante puede conseguir la curvatura correcta siguiendo simplemente el diagrama de momentos flectores de la barra y observando si el momento es positivo o negativo.

Una vez dibujada aproximadamente la elástica, es fácil plantear la solución. Para obtener corrimientos respecto a una tangente, se usarán directamente los teoremas del área de momentos. Para obtener corrimientos respecto a una cuerda, se usará el método de la carga elástica. *Al aplicar el método de la carga elástica como se ha descrito, la parte de la elástica de la viga real correspondiente a la luz de la viga imaginaria no debe tener nunca una articulación intermedia.* En tales articulaciones puede haber un cambio brusco de pendiente de la elástica, y este cambio brusco no está representado en la carga elástica que consiste solamente en el diagrama M/EI . Estos casos se pueden tratar mediante una ampliación del método de la carga elástica llamado de la viga conjugada, que se estudia en la Sec. 12.11, o por el empleo conjunto de los teoremas del área de momentos y el método de la carga elástica, como se verá en los ejemplos siguientes.

Por las razones antedichas, es cierto también que *no se pueden aplicar los teoremas del área de momentos entre dos puntos de la elástica, si en esta parte de la viga hay una articulación.*

Ejemplo 12.15 Calcular la flecha máxima de la viga de la figura.

Estudiando el dibujo de la elástica, es evidente que se puede calcular δ_b aplicando el segundo teorema del área de momentos a la parte ab. Esta flecha establece la posición de la cuerda bc. Se pueden obtener las flechas y pendientes respecto a esta cuerda, aplicando el método de la carga elástica a una viga imaginaria de la luz bc.

$$EI\delta_b = [45(1,5/2)(2,5) + 15(\frac{1}{2})(1,5)] = 118 \text{ (1)}$$

$$\text{Giro de la cuerda } bc = \frac{118}{9} = 13,1$$

$$(1) \quad 60 \times 3 = 180 \quad 180 \times 5 = 900$$

$$(2) \quad 60 \times 1,5 = 90 \quad 90 \times 2 = 180$$

$$\frac{1.080}{9}$$

$$= 120 \downarrow$$

$$180 \times 4 = 720$$

$$90 \times 7 = 630$$

$$\frac{1.350}{9} = 150 \downarrow$$

El punto de δ máximo está situado donde la tangente a la elástica es horizontal, esto es, donde la tangente baja hacia la derecha respecto a la cuerda bc, $EI\tau_m = -13,1$.

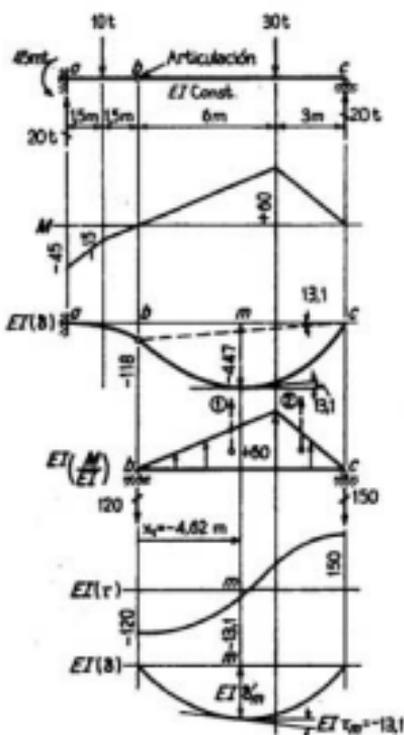
$$EI\tau_m = -120 + (10x_1) \left(\frac{x_1}{2} \right) = -13,1$$

$$x_1^2 = 21,38$$

$$x_1 = 4,62 \text{ m}$$

$$EI\delta'_m = -(120)(4,62) + \frac{(10)(4,62)^3}{6} = -390$$

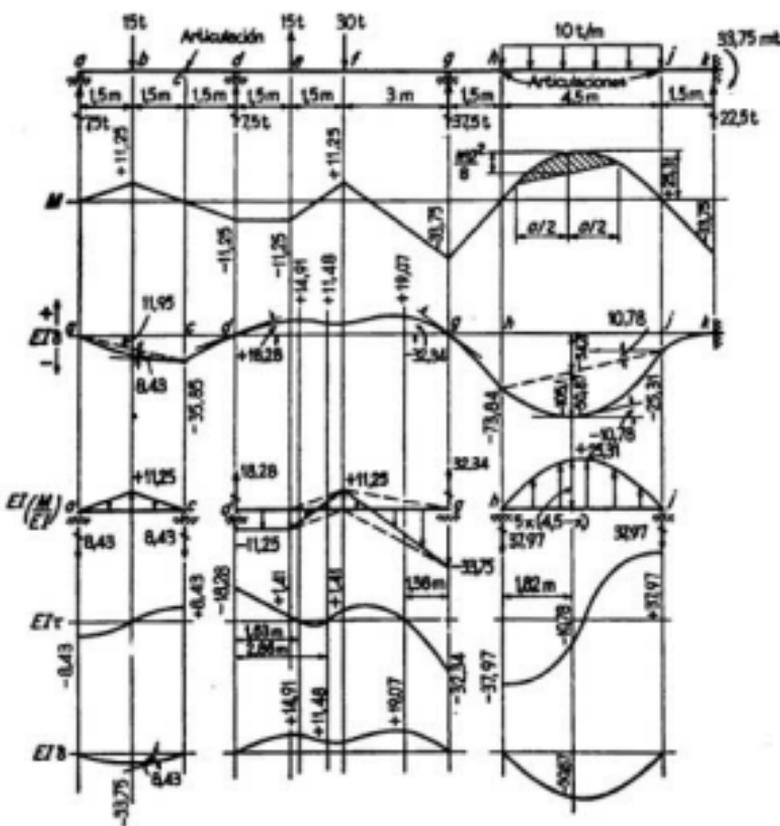
$$EI\delta_m = -390 - (13,1)(9 - 4,62) = -447$$



Razonamiento:

Obsérvese que no es admisible la aplicación del método de la carga elástica a una viga imaginaria de luz ac por la presencia de la articulación en b.

Ejemplo 12.16 Calcular las pendientes y flechas de la viga de la figura. E e I , constantes.



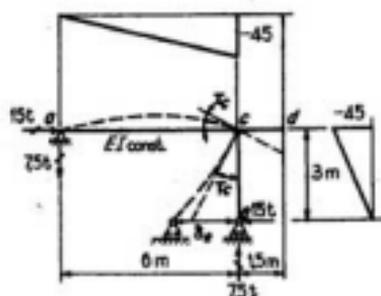
Razonamiento:

La cuerda dg de la elástica no se mueve, por lo que las tangentes y las flechas determinadas con referencia a ella, aplicando el método de la carga elástica a la viga imaginaria dg , son las verdaderas de la viga en esta parte. Estos cálculos son inmediatos y conducen a los resultados representados para la situación y magnitud de las flechas máximas en la parte dg .

Las reacciones de esta viga imaginaria dan la pendiente de la tangente a la elástica en d y g . Es fácil, luego, utilizar el segundo teorema del área de momentos para calcular la flecha adicional de las articulaciones en c y h desde esas tangentes. Se representan las flechas totales de las articulaciones desde la posición original de la viga.

También es fácil aplicar el segundo teorema del área de momentos a la parte en voladizo jk , calculando así la flecha de la articulación j .

Ejemplo 12.18 Calcular el corrimiento del punto *e* del pórtico representado.



$$EI\epsilon_c = (45)(3)(\frac{1}{6}) = 90$$

$$EI\delta_e = (90)(3) + (45)(1.5)(2) = 405$$

(←)

De estos ejemplos y de los problemas del final del capítulo se ve claramente que los métodos del área de momentos son más apropiados cuando el diagrama de momentos está compuesto por una serie de líneas rectas, esto es, cuando sobre la viga actúan cargas aisladas. En estos casos, el área bajo la curva M/EI se puede descomponer en triángulos o rectángulos, y los cálculos necesarios son muy sencillos. Sin embargo, cuando las cargas están repartidas y la curva de momentos es una línea curva, los cálculos son más difíciles. Cuando la carga está uniformemente repartida, la curva de momentos es parabólica y se puede partir el diagrama M/EI en triángulos, rectángulos y segmentos parabólicos¹. En el caso de distribuciones más complicadas, en general, es necesario dividir el diagrama M/EI en una serie de trozos cortos, cada uno de los cuales pueda dividirse en triángulos y rectángulos. A veces es aconsejable usar la regla de Simpson para mejorar los resultados de la suma aproximada.

Otras veces es preferible utilizar métodos gráficos para aplicar el método de la carga elástica. Supongamos, por ejemplo, que el diagrama M/EI es de forma muy irregular a causa de una carga complicada o de la variación del momento de inercia de la viga. En tales casos, los diagramas de cortante y momento flector originados por la carga elástica irregular que actúa sobre la viga imaginaria, se pueden obtener gráficamente del modo estudiado en la Sección 5.10.

12.11 Método de la viga conjugada. De los ejemplos de la sección anterior resulta evidente que se pueden llevar a cabo con eficacia los cálculos de flechas de una viga cualquiera, por una combinación adecuada del empleo de los teoremas del área de momentos y el método de la carga elástica. El procedimiento que supone esta combinación no es más que una ligera ampliación y variación del método de la carga elástica, llamada *método de la viga conjugada*.

Para exponer estas nuevas ideas, consideremos la viga del Ejemplo 12.15 que aparece, dibujada un poco distinta, en la Fig. 12.19. En la Fig. 12.19a se representa la viga real con sus cargas. Con línea de trazos aparece la curva de la viga flexada que tiene cier-

¹ Con referencia al diagrama de momentos flectores de la parte *bc* de la viga del Ejemplo 12.16, considerando el área rayada entre la curva parabólica y la cuerda de la curva. Si la proyección horizontal de esta cuerda es a , demostrar que 1) el segmento vertical interceptado entre la cuerda y la curva en el centro de la cuerda es $wa^2/8$, donde w es la intensidad de la carga uniformemente repartida de la viga; 2) el área de este segmento rayado es $wa^3/12$; 3) el centro de gravedad de este segmento rayado está en una vertical por el centro de la cuerda.

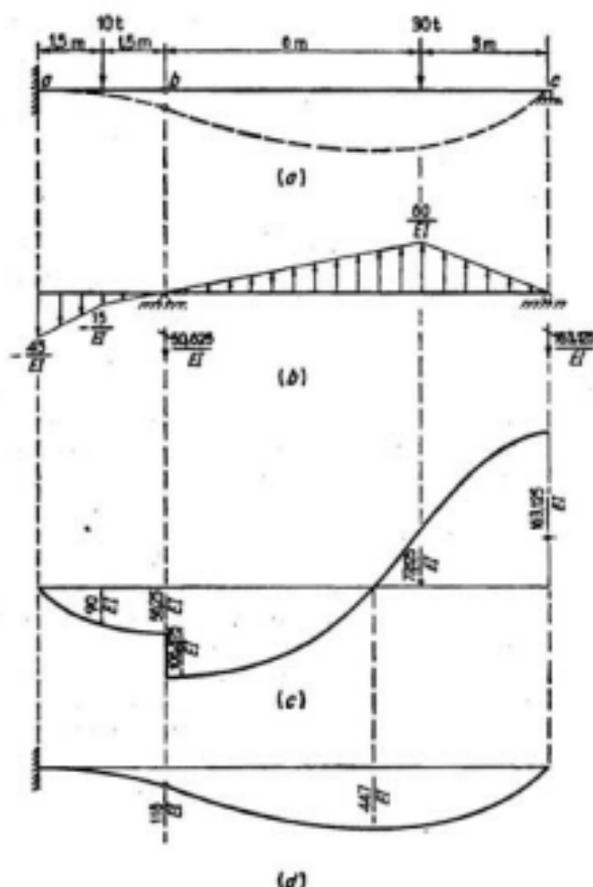


FIG. 12.19. Desarrollo del método de la viga conjugada.

tas características notables definidas por el tipo de apoyos y por la articulación en b , aun cuando en este instante se supone que se desconoce la magnitud de las flechas. 1) En el apoyo a la flecha y la pendiente son nulas; 2) en el apoyo c la flecha es nula, pero la elástica puede tener cualquier pendiente; y 3) en la articulación b puede haber una flecha, y además se puede producir un cambio brusco de pendiente entre los lados izquierdo y derecho de la articulación.

Hay que elegir una *viga conjugada* (una viga ficticia correspondiente) que tenga la misma longitud que la real, pero apoyada, y dimensionada de forma que, cuando se carga la viga conjugada con el diagrama M/EI de la viga real, el cortante (elástico) en la viga conjugada en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la viga real en el punto correspondiente y el momento flector (elástico) en la viga conjugada es igual a la flecha de la viga real. Obsérvese que estas pendientes y flechas de la viga real se miden respecto a su posición original, esto es, son las verdaderas pendientes y flechas. Siempre es posible elegir los apoyos de la viga conjugada apropiados para conseguir el objeto deseado, observando simplemente las características conocidas de la elástica de la viga real en sus apoyos, o en cualquier dispositivo especial de construcción, como la articulación en b .

Como aclaración de la elección de los apoyos de la viga conjugada, consideraremos la Fig. 12.19. En a , no hay ni pendiente ni flecha de la viga real, por lo que en este punto de la viga conjugada no habrá ni cortante ni momento flector: esto es, el punto a de la viga conjugada estará libre y no apoyado. En c hay pendiente y no flecha en la viga real, por lo que en la viga conjugada habrá cortante y no momento. Por tanto, en el punto c de la viga conjugada existirá la reacción de un apoyo de rodillo. En b hay flecha y es posible una discontinuidad en la pendiente de la viga real, por lo que en la conjugada habrá que colocar una reacción vertical para producir la variación brusca del cortante y debe ser capaz de resistir momento. Esto es, el punto b de la viga conjugada debe estar provisto también de un soporte de rodillo. Así, pues, la viga conjugada está cargada y soportada como se ve en la Figura 12.19b.

Si se calculan ahora las reacciones, cortantes y momentos flectores como para una viga estáticamente determinada cualquiera, se pueden dibujar los diagramas de cortantes (elásticos) y momentos (elásticos) como se ve en las Figs. 12.19c y d , respectivamente. Las ordenadas de estos diagramas dan, respectivamente, la pendiente y la flecha en los puntos correspondientes de la viga real, medidos respecto a la posición original sin deformar. *El criterio utilizado para los signos de la carga (elástica), el cortante (elástico) y el momento flector (elástico) es el criterio normal de la viga descrito al final de la Sec. 12.9 referente al método de la carga elástica.*

Estas consideraciones y otras similares conducen a las reglas representadas en la Fig. 12.20 para elegir los apoyos y otros detalles de las vigas conjugadas. En la Figura 12.21 se muestran ejemplos de elección de apoyos y detalles de vigas conjugadas típicas. *Obsérvese que a las vigas estáticamente determinadas corresponden siempre vigas conjugadas que son también estáticamente determinadas. Las vigas reales estáticamente indeterminadas aparecen con vigas conjugadas inestables, pero éstas vienen a estar en equilibrio puesto que se estabilizan por medio de la carga elástica correspondiente al*

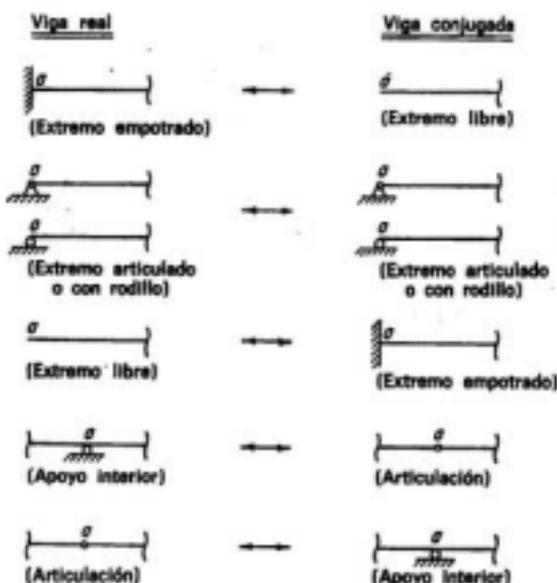


FIG. 12.20. Elección de apoyo y detalles de vigas conjugadas.

diagrama M/EI de la viga real correspondiente. Por ejemplo, el último caso representado es la viga real empotrada en los dos extremos, y la conjugada correspondiente está completamente libre y sin apoyar. Para una carga cualquiera (tal como la aislada en el centro, representada) se hallará que el diagrama M/EI corresponde a una carga elástica completamente autoestabilizada, por lo que no necesita reacciones de apoyo. De hecho, en estos casos, las condiciones necesarias de estabilidad de la carga elástica proporcionan un método para obtener las ecuaciones necesarias para hallar los momentos sobrantes de tales vigas indeterminadas.

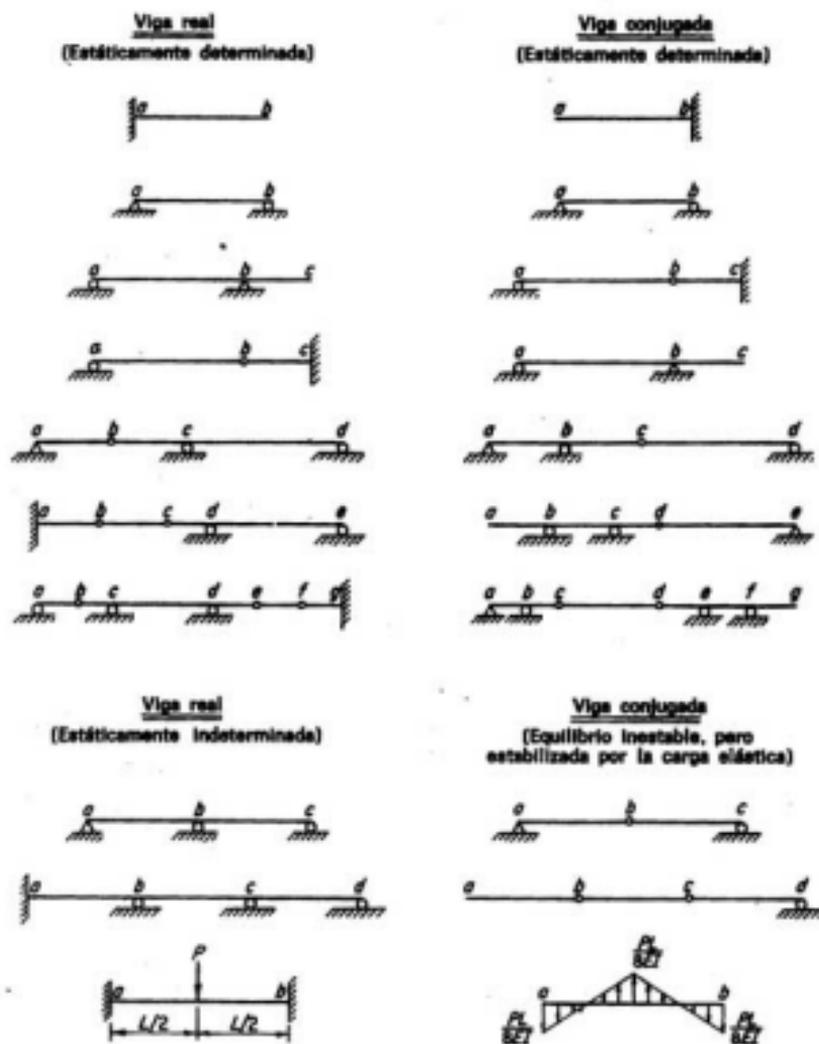


FIG. 12.21. Vigas reales típicas y vigas conjugadas correspondientes.

Si se usa el método de la viga conjugada para resolver problemas como los Ejemplos 12.14, 12.15 ó 12.16 se verá que se han hecho exactamente los mismos cálculos que si se hubieran resuelto los problemas aplicando una combinación de los teoremas del área de momentos y el método de la carga elástica. Sin embargo, el método de la viga conjugada proporciona un procedimiento directo, para el que es válido un criterio de signos sencillo. Como consecuencia, es menos fácil cometer errores cuando se sigue esta marcha.

12.12 Método de Williot-Mohr. Cuando se usa el método de los trabajos virtuales para calcular deformaciones de cuchillos, solo se puede calcular cada vez el corrimiento de un nudo. Para obtener la magnitud y dirección del movimiento absoluto de un nudo, hay que determinar las componentes horizontal y vertical de su movimiento, por lo que se necesitan en general dos aplicaciones independientes del método de los trabajos virtuales para cada nudo del cuchillo. Sin embargo, utilizando el método de Williot-Mohr, con una solución gráfica se puede determinar los corrimientos de todos los nudos del cuchillo, por lo que este método presenta una ventaja enorme en la resolución de ciertos problemas de deformaciones.

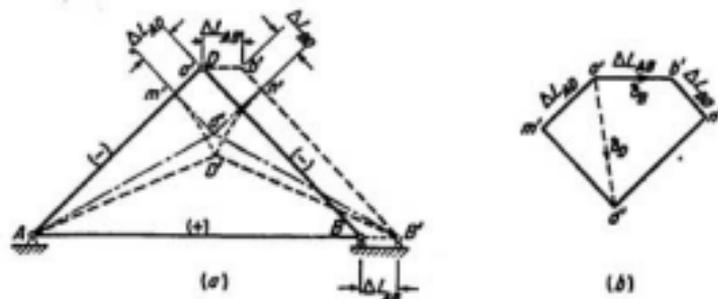


FIG. 12.22. Cinemática de la deformación de una armadura.

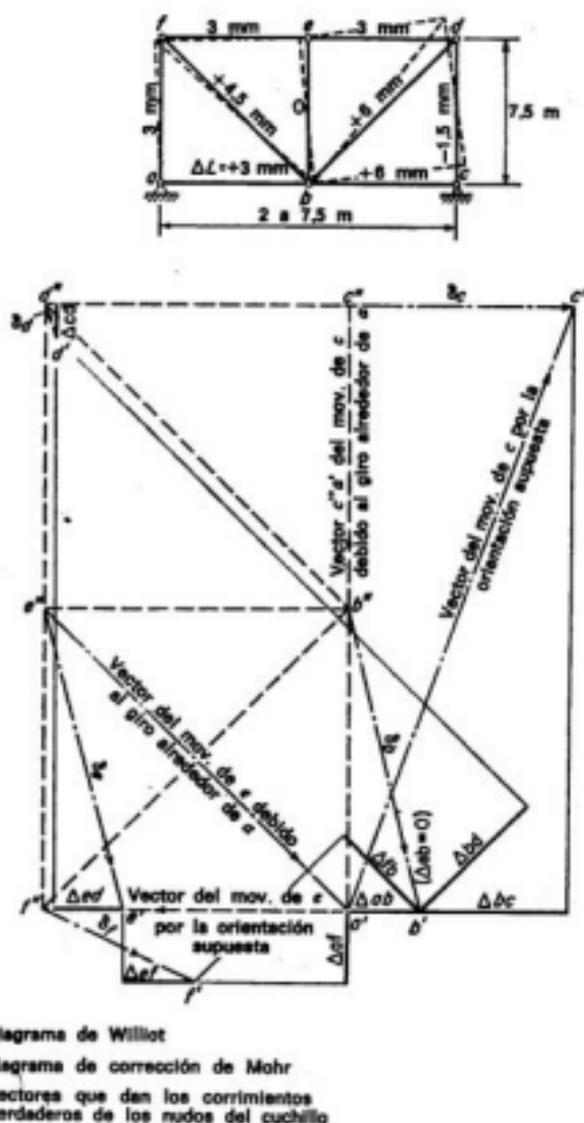
Se pueden desarrollar los fundamentos del método de Williot-Mohr considerando el cuchillo simple de la Fig. 12.22. Supongamos que se han calculado las variaciones de longitud de las barras, ΔL , para las condiciones de deformación dadas, utilizando las Ecs. (12.5a), (12.5b) o (12.5c). Se puede, ya, determinar la posición deformada del cuchillo representada por las líneas de trazos, de la siguiente manera: Quitemos, primero, el pasador del nudo D para permitir que se produzca la variación de longitud de la barra AB . Como consecuencia, la barra DB se moverá paralelamente a sí misma, como se representa, y todos sus puntos se moverán horizontalmente hacia la derecha una cantidad igual ΔL_{AB} . Permitiendo ahora cambiar de longitud a las barras AD y BD , los extremos D de cada una de ellas se moverán como se representa, si permanecen unidos a la barra AB en los puntos A y B' , respectivamente. Antes de poder colocar de nuevo el pasador en D y ensamblar otra vez el cuchillo, es necesario que vuelvan a coincidir los extremos D de las barras AD y BD , lo que puede conseguirse haciendo girar a AD alrededor de A y BD alrededor de B' hasta que se corten los arcos. Se podrá determinar ya el corrimiento de cada nudo considerando la posición original y deformada del mismo.

Este procedimiento es de aplicación directa, pero difícil de aplicar en la práctica, porque los corrimientos y las variaciones de longitud son en la realidad mucho más pequeños que los indicados en el croquis, por lo que se necesitaría un dibujo a una es-

cala muy grande para obtener alguna precisión. Sin embargo, como las deformaciones son pequeñas, la rotación angular de una barra cualquiera es tan pequeña que puede suponerse que, durante el giro de una barra, un punto se mueve según la tangente trazada perpendicularmente a la dirección original de la misma, en lugar de sobre el arco verdadero, como se representa por las líneas de puntos y rayas de la Fig. 12.22a. Si en este croquis no se hubiera exagerado ΔL enormemente, las líneas de trazos y de punto y raya coincidirían prácticamente. La introducción de esta simplificación hace posible obtener los corrimientos de los nudos, sin dibujar toda la longitud de las barras, porque ya no es necesario trazar los arcos alrededor de los centros de giro.

El diagrama simplificado de la Fig. 12.22b es similar a la parte de la Fig. 12.22a rotulada con las mismas letras. Contiene solo las variaciones de longitud de las barras y las tangentes a los arcos de giro y nos permite hallar los movimientos relativos de los diversos nudos. Es el llamado *diagrama de Williot*, por el ingeniero francés que lo propuso. Como antes, imaginemos que se quita provisionalmente el pasador de D y se permite que se produzcan los cambios de longitud de uno en uno. Eligiendo una escala apropiada para ΔL y designando los puntos de este diagrama por las mismas letras que los nudos del diagrama, pero en minúsculas, comenzaremos situando el punto a' . En este cuchillo simple el nudo A permanece fijo en posición y la barra AB sigue siendo horizontal. Por tanto, el B se mueve horizontalmente hacia la derecha, con relación a A una cantidad igual a ΔL_{AB} , como se indica por las posiciones relativas de a' y b' . A causa del acortamiento ΔL_{AD} , el extremo D de la barra AD desciende hacia la izquierda paralelamente a AD con referencia al nudo A , como se representa por el vector $\overline{a'd'}$; igualmente, a causa del acortamiento ΔL_{BD} , el extremo D de la barra BD desciende hacia la derecha paralelamente a BD con referencia al nudo B , como se representa por el vector $\overline{b'd'}$. Para hacer coincidir los extremos D , la barra AD debe girar alrededor de A y la BD alrededor de B . Durante esos giros, se supone que los extremos D se mueven a lo largo de las tangentes, lo que se representa por los vectores $\overline{m'd'}$ y $\overline{n'd'}$, respectivamente. Obsérvese que estas tangentes son perpendiculares a las barras AD y BD , respectivamente. Los vectores $\overline{a'd'}$ y $\overline{b'd'}$ representan los corrimientos de los nudos D y B , con respecto al A . En este caso, como el nudo A está fijo realmente, estos vectores representan los movimientos absolutos verdaderos de esos nudos. Indudablemente, las longitudes de estos vectores están medidas en la misma escala que se usó para trazar ΔL .

La construcción del diagrama de Williot para un cuchillo más complicado se hace, en esencia, del modo expuesto más arriba. Provisionalmente, se supone que se desconectan todas las barras. Luego, después de suponer que todas las barras experimentan sus variaciones de longitud, se vuelven a unir de una a una, y se construye el diagrama de Williot que muestra los desplazamientos resultantes de los nudos. En tales casos no se conoce el movimiento relativo verdadero de los dos extremos de una barra, como sucedía con los nudos A y B del caso simple anterior. Sin embargo, se puede trazar el diagrama de Williot haciendo la hipótesis arbitraria de que alguna barra permanece fija en dirección, esto es, que el movimiento relativo de los nudos de los extremos de esa barra es paralelo a la misma e igual a la variación de su longitud. Cuando se han situado esos dos puntos, se puede situar del modo antes descrito un tercero, que corresponde al tercer nudo del triángulo del cuchillo formado por esos tres nudos. Puede continuar el resto de la construcción de nudo en nudo, trabajando siempre con un triángulo formado por tres nudos del que se hayan situado ya dos de ellos. Si la orientación supuesta es correcta, los vectores correspondientes a ciertas condiciones de deformación conocidas estarán orientados correctamente. Si esos vectores no están de acuerdo con las condiciones conocidas, hay que añadir al diagrama de Williot el diagrama de corrección de Mohr.

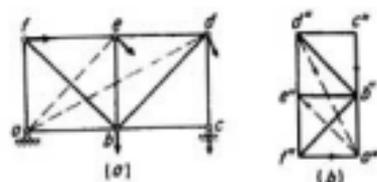


Ej. 12.23. Método de Williot-Mohr.

Se ha dibujado el diagrama de Williot del cuchillo de la Fig. 12.23 suponiendo que el nudo a está fijo en posición y la barra ab en dirección. Si esta orientación es la correcta, los vectores trazados desde el punto a' a los b' , c' , d' , etc., serán los corrimientos verdaderos de los nudos b , c , d , etc., respectivamente. Como el nudo c del cuchillo tiene un apoyo de rodillo, no puede tener corrimiento vertical y está obligado a moverse horizontalmente. Sin embargo, con la hipótesis hecha, el nudo c se mueve hacia arriba

y hacia la derecha, como indica el vector $\overline{a'c'}$, y los otros se han movido como indican, a escala exagerada, las líneas de trazos del diagrama del cuchillo. Esto significa que la hipótesis de que la barra ab permanece fija en dirección es errónea y es necesario, ahora, girar el cuchillo en conjunto, en sentido de las agujas del reloj, alrededor de a para volver c al apoyo. Se puede determinar la magnitud del giro necesario, sabiendo que la deformación verdadera de c debe ser un vector horizontal. Este corrimiento verdadero es la resultante del vector $\overline{a'c'}$ y del que representa el movimiento de c durante el giro del cuchillo alrededor de a . Durante un pequeño giro alrededor de a se puede suponer que el nudo c se mueve a lo largo de la tangente al arco verdadero y, por tanto, normalmente a la línea ac del cuchillo, o sea, en este caso, verticalmente. Si se añade este vector, que da el movimiento de c respecto a a durante el giro, al diagrama, trazando $\overline{c''a'}$, verticalmente en a' , la resultante del vector $\overline{c''a'}$ (\perp) y el $\overline{a'c'}$ (\swarrow) debe ser el vector horizontal $\overline{c''c'}$ (\rightarrow) que es el verdadero corrimiento del nudo c , con lo que queda determinado el punto c'' .

FIG. 12.24. Diagrama de corrección de Mohr.



Durante el giro del cuchillo alrededor de a , hay que suponer que no es solo el nudo c , sino que lo hacen también todos los demás, el que se mueve normalmente al radio que va del nudo al centro de rotación a una magnitud igual al radio por el ángulo de rotación. En la Fig. 12.24a, las flechas en los nudos indican la dirección de los movimientos de los mismos cuando gira el cuchillo, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de a un ángulo α pequeño. Si se dibujan todos esos vectores a escala, pasando por el punto a'' , como se ve en la Fig. 12.24b, el movimiento del nudo b durante el giro está representado por el vector $\overline{b''a''}$, el del nudo c por $\overline{c''a''}$, el del d por $\overline{d''a''}$, etcétera. Una vez unidos estos puntos con doble acento como se ve, consideremos dos partes cualesquiera correspondientes de estas figuras, como los triángulos dac y $d''a''c''$. Como $c''a''$ es perpendicular a ca y $d''a''$ lo es a da , ángulo $dac = \text{ángulo } d''a''c''$. Como $c''a'' = aca$ y $d''a'' = ada$, $c''a''/d''a'' = ca/da$. Por tanto, los triángulos dac y $d''a''c''$ son semejantes. De este modo se puede demostrar que la Fig. 12.24a es semejante a la Fig. 12.24b. Estas consideraciones conducen a la conclusión siguiente:

Si se gira un cuerpo rígido alrededor de un centro de rotación O un ángulo pequeño, y se representan los movimientos de dos puntos i y k por los vectores $O''i''$ y $O''k''$ desde o hacia un punto O'' y se dibuja el esquema del cuerpo a escala, tomando como base los puntos i'' y k'' , cada línea de este dibujo a escala será perpendicular a la línea correspondiente del cuerpo real, y la recta trazada desde un punto cualquiera del dibujo al punto O'' representará, considerada como vector, el movimiento del correspondiente punto del cuerpo real durante el giro alrededor de O .

Este principio es la base del diagrama de corrección de Mohr.

En el ejemplo de la Fig. 12.23 se ha superpuesto el diagrama de corrección de Mohr $a''b''c''d''e''f''$ al diagrama de Williot con el vector $\overline{c''a''}$ como base, estando cada una de sus líneas a 90° con la correspondiente en el diagrama del cuchillo. Los vectores que van de los puntos con doble acento al polo a'' dan los movimientos de los nudos correspondientes durante el giro del cuchillo alrededor del nudo a . Ahora puede ya determi-

narse el verdadero corrimiento de cada nudo como resultante del vector que va del punto con doble acento correspondiente hasta el punto a' y el que va desde a' al punto correspondiente con prima, esto es: *se puede hallar el corrimiento verdadero de un nudo cualquiera, en magnitud y dirección, con el vector que va desde el punto con doble acento en el diagrama de Mohr hasta el de un solo acento en el diagrama de Williot.*

12.13 Aplicación del método de Williot-Mohr. El diagrama de Williot será más reducido y necesitará un diagrama de corrección de Mohr menor, si la orientación elegida para comenzar es aceptablemente correcta. En muchos casos es casi evidente que ciertas barras no varían mucho de dirección. Por ejemplo, en el caso de un cuchillo apoyado en sus extremos, el montante central permanece prácticamente vertical, por lo que es una barra apropiada para suponerla fija en dirección al comenzar el diagrama de Williot, como puede verse en el Ejemplo 12.19.

Es interesante observar, también, que se puede suprimir totalmente el diagrama de corrección de Mohr si se calculan primero los movimientos relativos de los dos extremos de una barra por el método de los trabajos virtuales. Por ejemplo, consideremos el cuchillo de la Fig. 12.25. En este caso, el nudo a no se mueve. Tomemos una de las

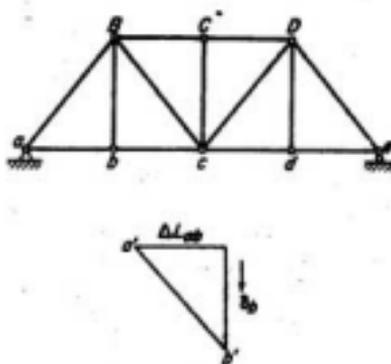


FIG. 12.25. Orientación correcta del diagrama de Williot.

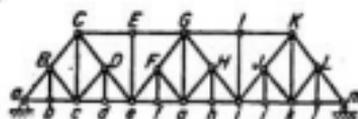


FIG. 12.26. Cuchillo compuesto.

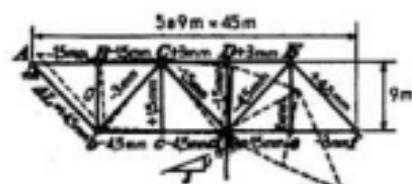
barras que pasan por el punto a , como la ab . El movimiento relativo de sus dos extremos es la resultante de los movimientos relativos paralelos y los perpendiculares a la barra. El paralelo a la barra es igual a su variación de longitud, mientras que el normal a ella se puede calcular por el método de los trabajos virtuales. En este caso, como el punto a no se mueve, solo hay que calcular el movimiento del punto b normal a la barra, o sea verticalmente. Una vez hecho esto, se pueden situar los dos vectores como se muestra, y el vector $a'b'$ da los movimientos relativos verdaderos de los nudos a y b . Ya se puede trazar el diagrama de Williot a base de las posiciones de los puntos a' y b' , situando primero el B' del triángulo abB , etc. Como se ha orientado correctamente el diagrama, se pueden obtener de él directamente los movimientos absolutos de todos los nudos, sin añadir el diagrama de corrección de Mohr. En el Ejemplo 12.20 se aplicará este procedimiento.

Para un cuchillo simple cualquiera, se dibuja sin dificultad el diagrama de Williot en la forma descrita en la Sec. 12.12. Sin embargo, debe observarse que se hallan cier-

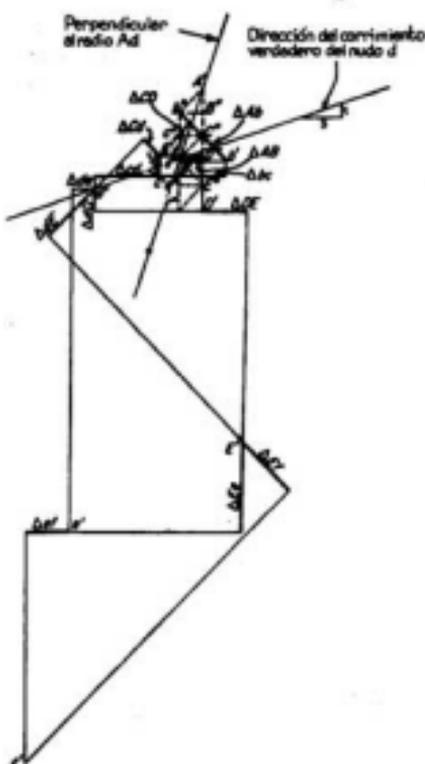
tas dificultades al aplicar estas ideas a una cercha compuesta tal como la representada en la Fig. 12.26. Supongamos que se comienza el diagrama de Williot en este caso suponiendo fijo en posición el nudo g y en dirección la barra gG . Los puntos F, f, e' y E' se pueden situar sin dificultad en el lado izquierdo y de igual modo los H, h, i e I en el derecho. Sin embargo, con los procedimientos estudiados hasta ahora es imposible llegar más lejos. Un modo de salvar la dificultad consiste en utilizar el hecho de que el movimiento relativo de los nudos C y e paralelo a la recta CDe es sencillamente igual a la suma de las variaciones de longitud de las barras CD y De , y que el movimiento relativo de los nudos c y e a lo largo de la recta cde es igual a la suma de las variaciones de longitud de cd y de . Con esta base, consideremos provisionalmente que no hay nudo en D y d , y que se han suprimido las barras cD y Dd , y procedamos del modo habitual para situar los puntos C' y c' . Una vez situados estos puntos, volvemos a incluir las barras suprimidas y retrocedemos para determinar los puntos D' y d' . Si se ha hecho correctamente, es posible ya situar e' a partir de D' y d' y ver si coincide o no con la posición del punto e' existente. Ahora se pueden situar los puntos B', b' y a' sin dificultad, pudiéndose determinar los demás puntos de la derecha de il en la forma que se acaba de describir para los de la izquierda de Ee .

La aplicación del método de Williot-Mohr al caso de los arcos tri-articulados requiere una técnica algo diferente, que puede verse en el Ejemplo 12.21.

Ejemplo 12.19 Dibujar el diagrama de Williot-Mohr del cuchillo de la figura.



Se supone el punto *c* fijo en posición.
Se supone la barra *cC* fija en dirección.



Punto	Corrimientos	
	Horizontal	Vertical
A	0	0
B	1,5 mm ←	3,12 mm ↓
C	3 mm ←	1,20 mm ↓
D	0	3 mm ↓
E	3 mm →	16,80 mm ↓
b	3 mm →	3,12 mm ↓
c	1,5 mm ←	2,69 mm ↓
d	6 mm ←	2,02 mm ↓
e	7,5 mm ←	23,1 mm ↓
f	10,5 mm ←	36,31 mm ↓

Razonamiento:

Los vectores del diagrama de Williot trazados desde *c'* hasta *A'*, *B'*, *b'*, *C'*, etc., dan los movimientos de los nudos *A*, *B*, *b*, *C*, etc., con la hipótesis de que *c* permanece fijo en posición y *cC* en dirección. En ese caso, los corrimientos resultantes de los nudos serán los representados, a escala exagerada, por las líneas de trazos en el diagrama. Evidentemente, la orientación supuesta es incorrecta, porque el nudo *A* se ha salido del apoyo articulado, y el movimiento del nudo *d* no es paralelo a la superficie de apoyo. Obsérvese, sin embargo, que la orientación supuesta no es muy errónea.

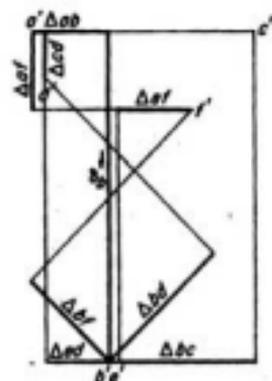
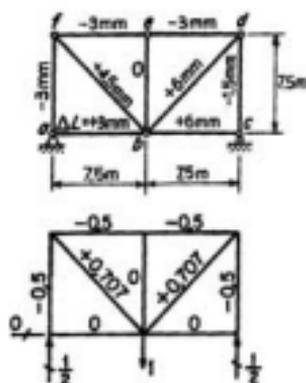
Se puede hacer volter el nudo *A* al apoyo articulado trasladando el cuchillo, como un cuerpo rígido, paralelamente al vector $\vec{A'C'}$ una distancia igual a la longitud de éste, a escala. Durante esa traslación, cada nudo se moverá una distancia representada por el vector $\vec{A'C'}$. Después de la

traslación, el movimiento resultante de un nudo cualquiera, como el E, será el vector suma del $\vec{A'E}$ y del $\vec{C'E}$ y, por tanto, el vector $\vec{A'E}$. Por consiguiente, es evidente que los movimientos resultantes de los diversos nudos después de que se ha restablecido al A en su posición correcta, están dados por los vectores trazados desde A' a B', C', c', D', d', etc. Indudablemente, el cuchillo todavía no está orientado correctamente, porque el vector $\vec{A'd}$ no indica la dirección debida para el movimiento del nudo d. Por tanto, hay que girar el cuchillo en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de A, de forma que d se mueva la magnitud dada por el vector $\vec{d'A'}$. Por consiguiente, el movimiento total del nudo d es el vector suma de los vectores $\vec{d'A'}$ y $\vec{A'd}$, esto es, el $\vec{d''d'}$, que está en la dirección correcta.

Ahora se puede completar el diagrama de corrección de Mohr, como se ve por las líneas de puntos, utilizando la recta d'A' como línea base. El corrimiento resultante final verdadero de un nudo cualquiera está dado, entonces, por el vector trazado desde el punto correspondiente con doble acento al de uno solo.

Ejemplo 12.20 Trazar el diagrama de Williot del mismo cuchillo de la Fig. 12.23. Sin embargo, en este caso se calculará primero la posición relativa verdadera de los dos extremos de una barra para poder trazar el diagrama de Williot con la orientación correcta, con lo que se eliminará el diagrama de corrección de Mohr.

En este caso, el nudo a está realmente fijo en posición. El cálculo del corrimiento vertical del nudo b nos da toda la información complementaria que se necesita para dibujar la posición relativa verdadera de los nudos a y b.



$$\begin{aligned} (I) \delta_b &= \Sigma F_Q \Delta L = +12.67 \text{ mm} \\ \therefore \delta_b &= \underline{12.67 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Barra	F_Q	ΔL	$F_Q \Delta L$
fe	-0.5	-3	+ 1.5
ed	-0.5	-3	+ 1.5
af	-0.5	-3	+ 1.5
cd	-0.5	-1.5	+ 0.75
fb	+0.707	+4.5	+ 3.18
bd	+0.707	+6	+ 4.24
Σ			+12.67

Obsérvese el tamaño tan reducido de este diagrama.

Ejemplo 12.21 Hallar los corrimientos en el arco tri-articulado de la figura, utilizando el método de Williot-Mohr.

Para la mitad izquierda:

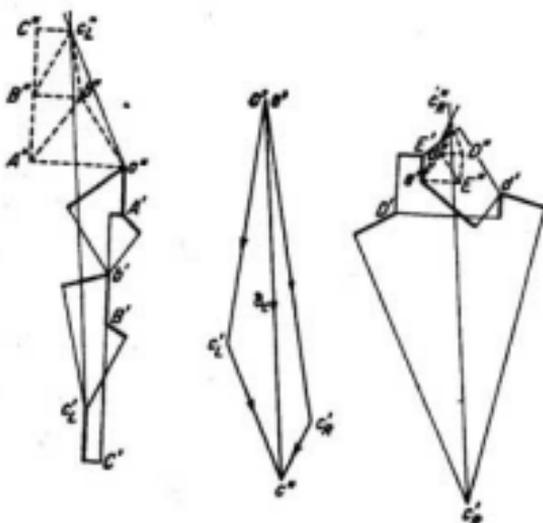
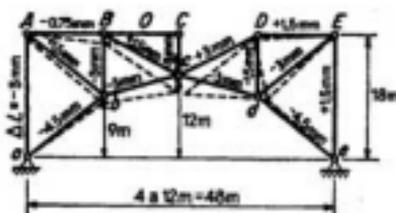
Se supone a fijo en posición.

Se supone aA fijo en dirección.

Para la mitad derecha:

Se supone e fijo en posición.

Se supone eE fijo en dirección.



Razonamiento:

La presencia de la articulación en el punto c introduce ciertas complicaciones al aplicar el método de Williot-Mohr a este problema. Después de hacer las hipótesis indicadas, se trazan los diagramas de Williot de las dos mitades por separado del modo habitual. Con esta base, el vector $\overline{a'c'_2}$ del diagrama de la izquierda representa un cierto corrimiento del nudo c , así como el vector $\overline{c'_2e}$ del diagrama de la derecha indica otro corrimiento diferente para el mismo nudo. Si las orientaciones supuestas son correctas, el corrimiento del nudo c debe ser el mismo, tanto si se determina por el diagrama de la izquierda, como si se hace por el de la derecha. Como estos sectores no son equivalentes, hay que girar la mitad izquierda alrededor de a haciendo mover el nudo c normalmente al radio ac . De igual modo, se gira la mitad derecha alrededor de e , haciendo mover al nudo c normalmente al radio ec . Estos giros han de ser tales que se produzca el mismo desplazamiento del nudo c para cada mitad. Se determinan como se indica en el diagrama vectorial, estando dados por el vector $\overline{c'_1c'_2}$ para la mitad izquierda y el $\overline{c'_2e}$ para la derecha. Estos vectores determinan las bases $\overline{c'_1a}$ y $\overline{c'_2e}$ para los diagramas de corrección de Mohr de las mitades izquierda y derecha, respectivamente. Ahora se pueden obtener corrimientos verdaderos de los diversos nudos, por los vectores trazados desde los puntos con doble acento hasta los de prima.

12.14 Método de la cadena de barras. Este método es semejante al de Williot-Mohr en cuanto que por una aplicación del mismo se puede calcular simultáneamente los corrimientos de varios nudos de un cuchillo. Este método lo propuso inicialmente H. Müller-Breslau y no es más que una adaptación del de la carga elástica, aplicado a cuchillos en lugar de vigas.

Para exponer el fundamento del método, consideremos el caso del cuchillo simple representado en la Fig. 12.27a, en el que se desea calcular la componente vertical del corrimiento en los nudos del cordón inferior. Se pueden calcular las variaciones de longitud de las barras producidas por la causa de deformación dada, mediante la Ec. (12.5a), la (12.5b) o la (12.5c).

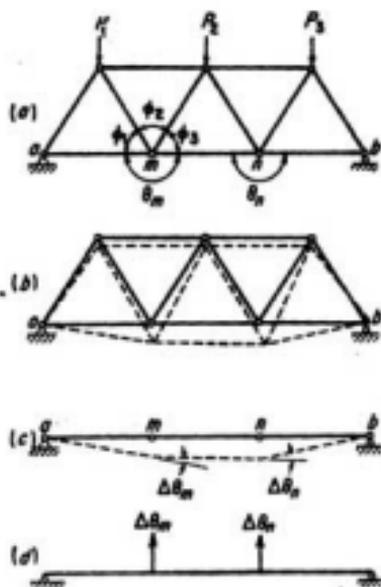


FIG. 12.27. Fundamentos del método de la cadena de barras.

Como consecuencia de estas variaciones de longitud, los ángulos de los triángulos del cuchillo varían una pequeña cantidad y el cuchillo cambiará de forma, como se indica, a escala exagerada, por las líneas de trazos de la Fig. 12.27b. Las variaciones de los ángulos de los triángulos se pueden calcular fácilmente por medio de las expresiones desarrolladas más abajo. Se puede aislar el cordón inferior de este cuchillo y dibujar su posición deformada como se ve en la Fig. 12.27c; lo que nos sugiere que el problema de calcular la forma de este cordón inferior deformado, se asemeja al de calcular la elástica de una viga recta por el método del área de momentos o de la carga elástica. Pero en el caso de una viga, la elástica es una curva suave y continua, cuya pendiente varía continuamente, mientras que la deformada de este cordón inferior está compuesta por una serie de rectas, con variaciones de pendiente solamente en los nudos del cuchillo. Esta serie de rectas se llama *cadena de barras*, de lo que toma su nombre el método.

En una viga, la variación de pendiente entre las tangentes en los extremos de un elemento diferencial de la elástica, dx , es igual a $M/EI dx$, que es el área diferencial bajo el diagrama M/EI en ese elemento. Por el contrario, en un nudo cualquiera de la cadena de barras, la variación de pendiente entre dos barras contiguas de la cadena es igual a la variación del ángulo θ_m , esto es, $\Delta\theta_m$, y entre nudos no hay cambio de pendiente. Cuando se aplica el método del área de momentos a una cadena de barras, se sustituirá, por tanto, el diagrama M/EI por una serie de ordenadas, una en cada nudo intermedio, iguales a $\Delta\theta$ en ese nudo. Por tanto, la carga elástica utilizada para la cadena de barras consiste en una serie de cargas aisladas como las representadas en la Fig. 12.27d. No obstante, la técnica de aplicación del método del área de mo-

mentos o del de la carga elástica es la misma que en el caso de vigas. Se considerará el ángulo θ comprendido en el lado inferior, entre dos barras contiguas de la cadena. $\Delta\theta$ será positivo (y por tanto, una carga elástica hacia arriba) cuando θ aumenta.

Es fácil calcular la variación de θ si se conocen las de los ángulos de los triángulos del cuchillo. Por ejemplo, en el nudo m , en este caso $\Delta\theta_m$ es igual y de sentido opuesto a la suma algebraica de las variaciones de los ángulos ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 . Ahora daremos una expresión que se utiliza para calcular esas variaciones de los ángulos de los triángulos del cuchillo.

Consideremos el triángulo representado en la Fig. 12.28 y supongamos que queremos calcular la variación del ángulo ϕ producida por los aumentos de longitud de las barras ΔL_1 , ΔL_2 y ΔL_3 . Se puede calcular el aumento $\Delta\phi$ del ángulo ϕ por el método de los trabajos virtuales, utilizando el sistema Q representado. Sea α_1 el giro, en el sentido de las agujas del reloj, de la barra 1, y α_2 el giro, en el sentido contrario, de la 2. Calculando el trabajo virtual exterior realizado por este sistema Q ,

$$\Sigma Q\delta = (1)(\alpha_1 \widehat{\phi}) + (1)(\alpha_2 \widehat{\phi}) = (1)(\alpha_1 \widehat{\phi} + \alpha_2 \widehat{\phi}) = (1) \Delta\phi$$

pues $\alpha_1 \widehat{\phi} + \alpha_2 \widehat{\phi} =$ aumento de $\phi = \Delta\phi$

Aplicando ahora la ley del trabajo virtual,

$$\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q \Delta L$$

$$(1) \Delta\phi = \left(\frac{1}{h_1}\right) \Delta L_1 + \left(-\frac{\cos \beta_2}{h_2}\right) \Delta L_2 + \left(-\frac{\cos \beta_1}{h_3}\right) \Delta L_3 \quad (a)$$

Por geometría,

$$h_2 = L_2 \operatorname{sen} \beta_2 \quad \text{y} \quad h_3 = L_1 \operatorname{sen} \beta_1 \quad (b)$$

De igual modo, $L_2 = l_1 + l_2 = h_2 \operatorname{ctg} \beta_1 + h_2 \operatorname{ctg} \beta_2 = h_2(\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2)$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2}{L_2} \quad (c)$$

Sustituyendo de las Ecs. (b) y (c) en la (a),

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L_2}{L_2} (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2) - \frac{\Delta L_2}{L_2} \operatorname{ctg} \beta_2 - \frac{\Delta L_1}{L_1} \operatorname{ctg} \beta_1$$

Lo que puede escribirse de la forma siguiente, observando que $\Delta L = eL$:

$$\Delta\phi = (e_2 - e_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (e_2 - e_2) \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (12.11a)$$

Así, pues, la variación $\Delta\phi$ del ángulo es igual a la diferencia entre los alargamientos del lado opuesto y de uno adyacente, multiplicada por la cotangente del ángulo entre dichos lados, más la diferencia entre los alargamientos del lado opuesto y del otro adyacente del triángulo, multiplicada por la cotangente del ángulo entre ellos. Cuando el alargamiento es debido a una intensidad de tensión axial σ , se puede expresar esta ecuación de un modo más conveniente por:

$$E \Delta\phi = (\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (\sigma_2 - \sigma_2) \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (12.11b)$$

Un valor positivo de $\Delta\phi$ indica un aumento de ϕ , y uno negativo, una disminución.

Después de haber calculado las variaciones de los ángulos de un cuchillo simple, utilizando las Ecs. (12.11a) o (12.11b), se puede hallar $\Delta\theta$ para cada nudo de la cadena de barras. Luego se puede aplicar el método del área de momentos o el de la carga elástica para hallar las componentes verticales del corrimiento para cualquier cadena de barras que es inicialmente recta y horizontal. Esto es lo que se ha hecho en los Ejemplos 12.22 y 12.23. Se recordará que, al apli-

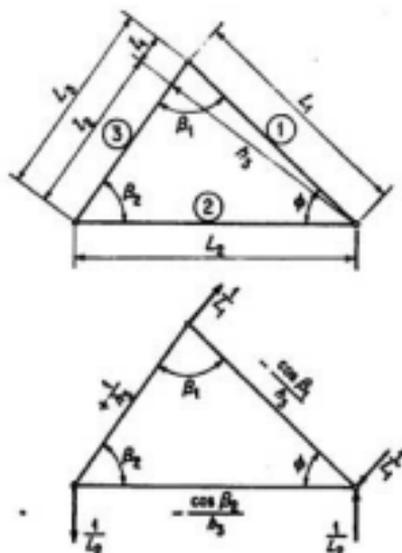
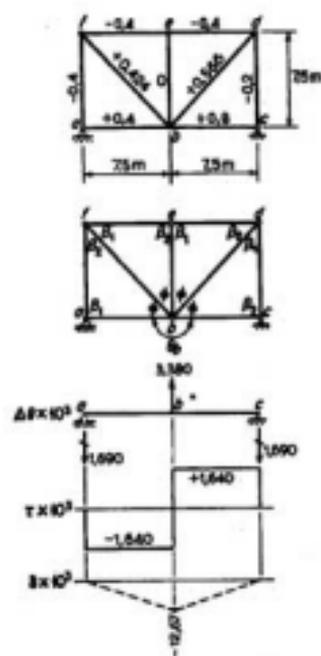


FIG. 12.28. Variaciones en los ángulos de un triángulo de cuchillo.

car el método de la carga elástica, los cortantes y momentos de la viga imaginaria dan las pendientes y los corrimientos de la curva deformada, medidas respecto a la cuerda correspondiente a los puntos de apoyo de esta viga imaginaria. Así, en el Ejemplo 12.23, en que la cuerda af gira, se pueden obtener los corrimientos verdaderos trazando la línea conocida de corrimientos nulos por los puntos a y d y corrigiendo los corrimientos medidos desde la cuerda af del modo indicado.

Ejemplo 12.22 Utilizando el método de la cadena de barras, calcular la componente vertical de la flecha del nudo *b* del cuchillo de la Fig. 12.23.



Los números que figuran en el diagrama del cuchillo corresponden a $e \times 10^3$. Se han multiplicado los alargamientos por 1.000 para obtener números más apropiados. Para tener los resultados verdaderos, se dividirán los resultados finales por 1.000.

<i>t</i>	$r_1 - r_2$	$\frac{1}{l_1}$	$r_3 - r_4$	$\frac{1}{l_2}$	$\Delta\phi$
<i>abf</i>	$-0,4 - 0,4$	0	$-0,4 - 0,424$	1	$-0,824$
<i>bcr</i>	$-0,4 - 0,424$	1	$-0,4 - 0$	0	$-0,824$
<i>bde</i>	$-0,4 - 0$	0	$-0,4 - 0,366$	1	$-0,766$
<i>bdf</i>	$-0,2 - 0,366$	1	$-0,2 - 0,8$	0	$-0,766$
$\Sigma \Delta\phi$					$-3,180$

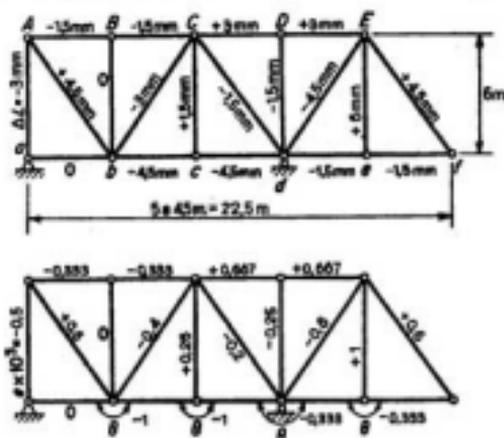
Como en este caso $\Delta\theta$ es igual y de sentido opuesto a $\Sigma \Delta\phi$ en el nudo *b,*

$$\therefore \Delta\delta_b = +3,180$$

y, por tanto, una carga elástica hacia arriba.

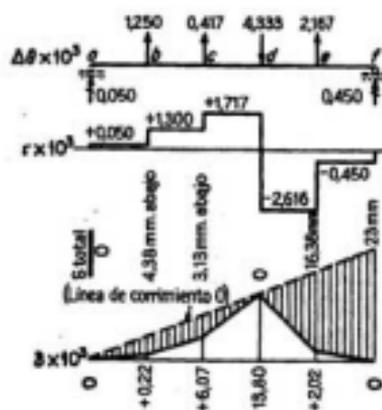
$$\begin{aligned} 1,690 \times 7,5 &= -12,67 \\ \therefore \delta_b &= 0,01267 \text{ m (hacia abajo)} \\ &= 12,67 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ejemplo 12.23 Utilizando el método de la cadena de barras, calcular las componentes verticales de la flecha de los nudos del cordón inferior.



Por conveniencia, multiplicáremos e por 10^3 y dividiremos los resultados finales por 10^3 para obtener los verdaderos.

s	$(r_2 - r_1) \times 10^3$ (f)	$\cos \beta_1$ (2)	$(l) \times$ (2)	$(r_2 - r_1) \times 10^3$ (f)	$\cos \beta_1$ (4)	$(l) \times$ (4)	$\Delta \delta \times$ 10^3	$\Delta \delta \times$ 10^3
abA	-0.5 - 0 = -0.500	0	0	-0.5 - 0.6 = -1.100	1,3	-1,467	-1,467	
abB	-0,333 - 0,6 = -0,933	0,75	-0,700	-0,333 - 0 = -0,333	0	0	-0,700	
bcC	-0,333 - 0 = -0,333	0	0	-0,333 + 0,4 = +0,067	0,75	+0,050	+0,050	-1,250
Cbc	+0,25 + 0,4 = +0,650	1,3	+0,867	+0,25 + 1 = +1,250	0	0	+0,867	
bcC	-0,4 + 1 = +0,600	0,75	+0,450	-0,4 - 0,25 = -0,650	1,3	-0,867	-0,417	
Ccd	-0,2 - 0,25 = -0,450	1,3	-0,600	-0,2 + 1 = +0,800	0,75	+0,600	0	-0,417
cdC	+0,25 + 1 = +1,250	0	0	+0,25 + 0,2 = +0,450	1,3	+0,600	+0,600	
CdD	+0,067 + 0,2 = +0,267	0,75	+0,650	+0,067 + 0,25 = +0,317	0	0	+0,650	
DdE	+0,067 + 0,25 = +0,317	0	0	+0,067 + 0,6 = +0,667	0,75	+0,950	+0,950	-4,333
Ede	+1 + 0,6 = +1,600	1,3	+2,133	+1 + 0,333 = +1,333	0	0	+2,133	
deE	-0,6 + 0,333 = -0,267	0,75	-0,200	-0,6 - 1 = -1,600	1,3	-2,133	-2,333	+2,166
Eef	+0,6 - 1 = -0,400	1,3	-0,533	+0,6 + 0,333 = +0,933	0,75	+0,700	+0,167	



Utilizando una viga imaginaria de luz af ,

$$\begin{array}{r} \Sigma M_f \\ 1,250 \times 4 = \overline{5,000} \\ 0,417 \times 3 = + 1,251 \\ -4,333 \times 2 = - 8,666 \\ 2,166 \times 1 = + 2,166 \\ \hline - 0,251 \quad 5 \\ 0,500 \downarrow \quad \underline{0,050} \quad \ddagger \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \Sigma M_a \\ 1,250 \times 1 = \overline{1,250} \\ 0,417 \times 2 = 0,834 \\ -4,333 \times 3 = -12,999 \\ 2,166 \times 4 = \underline{8,664} \\ \hline - 2,249 \quad 5 \\ \underline{0,450} \quad \ddagger \end{array}$$

$x \times 10^3$	0	$= \delta_a \times 10^3$
$+0,050$	$+0,050 \times 4,5 = + 0,225$	
$+1,250$	$+ 0,225 = \delta_b \times 10^3$	
$+1,300$	$+ 1,300 \times 4,5 = + 5,850$	
$+0,417$	$+ 6,075 = \delta_c \times 10^3$	
$+1,717$	$+ 1,717 \times 4,5 = + 7,726$	
$-4,333$	$+ 13,801 = \delta_d \times 10^3$	
$-2,616$	$- 2,616 \times 4,5 = - 11,776$	
$+2,166$	$+ 2,025 = \delta_e \times 10^3$	
$-0,450$	$- 0,450 \times 4,5 = - 2,025$	
$+0,450$	0	$= \delta_f \times 10^3$
0		

En este método se han de introducir ciertas modificaciones antes de poderlo aplicar a una cadena de barras que no sea inicialmente recta y horizontal. Supongamos que queremos calcular las componentes verticales de los corrimientos de la cadena de barras del cordón inferior del cuchillo de la Fig. 12.29a. Se puede calcular el efecto de las variaciones de los ángulos θ en los corrimientos de esta cadena de barras del mismo modo que si la cadena fuera horizontal al principio, lo que es evidente si se considera la cadena de barras del cordón inferior representada en la Fig. 12.29b. Supongamos que solo permitimos variar al ángulo θ_b y que, al mismo tiempo, mantenemos fija en posición la parte de la cadena de barras de la izquierda del nudo b. La componente vertical del movimiento del punto E será igual a $x' \Delta \theta_b$, que es el mismo valor que tendría si la cadena de barras hubiera sido recta inicialmente. Continuando de este modo, podemos demostrar que el corrimiento vertical de esta cadena de barras del cordón inferior producido solo por las variaciones de los ángulos $\Delta \theta$ se pueden calcular de la misma forma que si la cadena fuera inicialmente horizontal, utilizando la viga imaginaria representada en la Figura 12.29c.

Sin embargo, el corrimiento total de esta cadena de barras del cordón inferior se produce, no solo por las variaciones de los ángulos $\Delta \theta$, sino también por los cambios de longitud de las propias barras de la cadena. Por ejemplo, consideremos el efecto de un alargamiento de la barra cd. Si todos los nudos de la cadena de barras estuvieran sujetos de modo que no pudiera producirse ninguna variación en los ángulos y si las barras situadas a la izquierda de c estuvieran fijas en posición, el alargamiento de la barra cd haría moverse a todos los nudos a la derecha de c, verticalmente, una cantidad igual a $\Delta L_{cd} \sin \alpha$, como se indica por las ordenadas de la línea

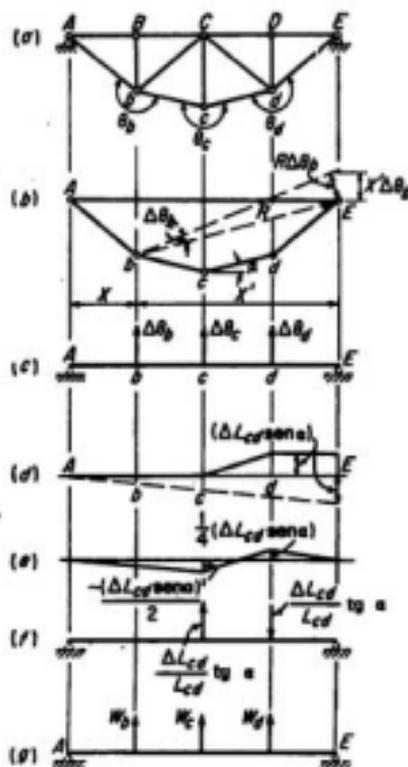


FIG. 12.29. Cadena de barras (inicialmente recta).

lleva de la Fig. 12.29d. Para que el punto E vuelva a su posición correcta, debe girarse toda la cadena de barras alrededor del punto A como un cuerpo rígido, originando los desplazamientos verticales representados por las líneas de trazos de la Fig. 12.29d. En la Fig. 12.29e se muestra el efecto total de los dos desplazamientos de la Fig. 12.29d. Este diagrama de desplazamientos es el de momentos flectores de las cargas representadas en la Fig. 12.29f. De igual manera se puede demostrar que la contribución de la variación de longitud de cualquier barra de la cadena al corrimiento vertical será igual al momento flector producido por dos cargas análogas, iguales y opuestas, que actúan en los nudos de los extremos de la barra.

Estas consideraciones nos conducen a la conclusión siguiente: Para hallar los corrimientos totales de una cadena de barras que no es recta inicialmente, hay que calcular los momentos flectores de una viga imaginaria sometida a una carga elástica modificada, como la indicada en la Fig. 12.29g. En un nudo intermedio cualquiera, m , de la cadena de barras, esta carga es igual a la variación del ángulo $\Delta\theta_m$ modificada en ciertas cantidades proporcionales a los alargamientos de las barras contiguas de la cadena de barras. Sea W_m esta carga elástica modificada, en el nudo m . Será:

$$W_m = \Delta\theta_m - e_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + e_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (12.12)$$

donde e_1 y α_1 representan el alargamiento y la pendiente inicial con la horizontal del elemento contiguo de la cadena de barras a la izquierda del nudo m

e_2 y α_2 representan las cantidades análogas a la derecha de m

$\Delta\theta_m$ representa la variación del ángulo θ_m , que, como se ha definido más arriba, es el comprendido entre dos barras contiguas de la cadena por la parte inferior

Es importante guardar bien el criterio de los signos adoptados.

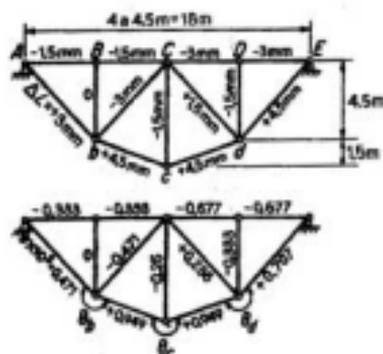
W_u es positiva cuando indica una carga elástica hacia arriba

$\Delta\theta_u$ es positivo cuando aumenta θ_u

e es positivo cuando la barra aumenta de longitud

α es positivo cuando la pendiente inicial de la barra va hacia arriba a la derecha

Ejemplo 12.24 Utilizando el método de la cadena de barras calcular las componentes verticales de los corrimientos de los nudos del cordón inferior.



e	$(r_3 - e_1) \times 10^3$ (1)	$\cos \beta_1$ (2)	$(l) \times$ (2)	$(r_3 - e_1) \times 10^3$ (3)	$\cos \beta_1$ (4)	$(l) \times$ (4)	$\Delta\theta \times$ 10^3	$\Delta\theta \times$ 10^3
AB	$-0.333 - 0.471 = -0.804$	1.0	-0.804	$-0.333 - 0 = -0.333$	0	0	-0.804	
BC	$-0.333 - 0 = -0.333$	0	0	$-0.333 + 0.471 = +0.138$	1.0	+0.138	+0.138	+0.844
Cd	$-0.250 + 0.471 = +0.221$	1.0	+0.221	$-0.250 - 0.949 = -1.199$	0.3	-0.359	-0.178	
bc	$-0.471 - 0.949 = -1.420$	0.500	-0.710	$-0.471 + 0.250 = -0.221$	1.0	-0.221	-0.931	+0.801
Cd	$+0.236 + 0.250 = +0.486$	1.0	+0.486	$+0.236 - 0.949 = -0.713$	0.500	-0.356	+0.135	
cd	$-0.250 - 0.949 = -1.199$	0.3	-0.359	$-0.250 - 0.236 = -0.486$	1.0	-0.486	-0.883	
cd	$-0.667 - 0.236 = -0.903$	1.0	-0.903	$-0.667 + 0.333 = -0.334$	0	0	-0.903	+3.163
DdE	$-0.667 + 0.333 = -0.334$	0	0	$-0.667 - 0.708 = -1.375$	1.0	-1.375	-1.375	

Luego $W_u = \Delta\theta_u - e_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + e_2 \operatorname{tg} \alpha_2$

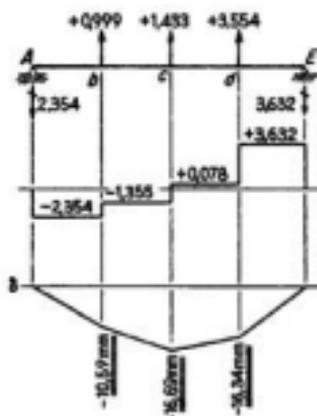
$$W_u \times 10^3 = +0.844 - (0.471)(-1.0) + (0.949)(-0.3) = +0.999$$

$$W_u \times 10^3 = +0.801 - (0.949)(-0.3) + (0.949)(0.3) = +1.433$$

$$W_u \times 10^3 = +3.163 - (0.949)(0.3) + (0.707)(1.0) = +3.554$$

Hallando las reacciones de la viga imaginaria AE ,

$$\begin{array}{r}
 \Sigma M_{A-} \\
 0,999 \times 3 = 2,997 \\
 1,433 \times 2 = 2,866 \\
 3,554 \times 1 = 3,554 \\
 \hline
 9,417 \quad 4 \\
 5,986 \uparrow \quad 2,354 \downarrow \\
 \hline
 \Sigma M_{A+} \\
 0,999 \times 1 = 0,999 \\
 1,433 \times 2 = 2,866 \\
 3,554 \times 3 = 10,662 \\
 \hline
 14,527 \quad 4 \\
 3,632 \downarrow \\
 \hline
 0 = \delta_A \times 10^3 \\
 -2,354 \quad -2,354 \times 4,5 = -10,59 \\
 +0,999 \quad -10,59 = \delta_b \times 10^3 \\
 -1,355 \quad -1,355 \times 4,5 = -6,10 \\
 +1,433 \quad -16,69 = \delta_c \times 10^3 \\
 +0,078 \quad +0,078 \times 4,5 = +0,35 \\
 +3,554 \quad -16,34 = \delta_d \times 10^3 \\
 +3,632 \quad +3,632 \times 4,5 = +16,34 \\
 -3,632 \quad 0 = \delta_E \times 10^3 \\
 0
 \end{array}$$



El Ejemplo 12.24 es una aplicación de este método a una cadena de barras que no es recta inicialmente. Es importante observar que el cortante producido en la viga imaginaria por la carga elástica no tiene ningún significado en esos casos. Naturalmente, cuando la cadena de barras es recta inicialmente y horizontal, los cortantes dan la pendiente de las barras de la cadena deformada. La carga elástica en el caso general de una cadena de barras poligonal, expresada por la Ec. (12.12), se determinó de modo que el momento flector de la viga imaginaria daba el corrimiento de la cadena de barras, pero no se atribuyó ningún significado al cortante producido por esta carga. Estas afirmaciones se pueden comprobar con los cálculos del Ejemplo 12.24. En este caso, como la barra Bb no varía de longitud, los corrimientos verticales de los nudos B y b son los mismos, por lo que el giro de la barra AB es de $0,002354$ radianes en el sentido de las agujas del reloj. El ángulo BAb se reduce en $0,000471$ radianes, por lo que se halla que la barra Ab gira, en el sentido de las agujas del reloj, $0,001883$, pero este valor no es igual al del cortante, de $0,002354$. De igual forma se hallaría que ninguno de los otros giros de las barras de la cadena son iguales a los cortantes correspondientes. Indudablemente, conocido el giro de la barra Ab , se puede hallar el de las restantes barras de la cadena siguiendo de nudo en nudo a lo largo de la misma y utilizando los valores $\Delta\theta$ ya calculados. De este modo, se halla que la barra bC ha girado $0,001039$ radianes en el sentido de las agujas del reloj; cD $0,000238$ radianes en el mismo sentido y dE $0,002925$ radianes en el contrario.

El método de la cadena de barras, aplicado de un modo similar, puede ser utilizado para cualquier cuchillo simple. Se elige una cadena de barras apropiada uniendo los nudos cuyo corrimiento vertical se busca, calculando las cargas elásticas para esa cadena por la Ec. (12.12). En los casos particulares en los que la cadena de barras es inicialmente recta y horizontal (como se ve en los Ejemplos 12.22 y 12.23), α será igual a cero para todas las barras y W_{α} igual a $\Delta\theta_{\alpha}$. Obsérvese que la Ec. (12.12) no se puede usar si la cadena de barras incluye una vertical, pues entonces $\alpha = 90^\circ$ y $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. Sin embargo, no es nunca necesario incluir tal barra, pues la diferencia del corrimiento vertical de los extremos de una barra vertical es igual simplemente a su variación de longitud.

También puede aplicarse este método a los cuchillos compuestos como el de la Fig. 12.26. No obstante, en estos casos es necesario insertar barras imaginarias entre nudos tales como D y E , E y F , etc., para dividir el cuchillo en triángulos al objeto de calcular las variaciones de los ángulos. Se pueden obtener las variaciones de longitud de cada una de esas barras, calculando el corrimiento relativo de los nudos de los extremos por el método de los trabajos virtuales. También se puede aplicar a los arcos tri-articulados como el del Ejemplo 12.21. Sin embargo, también aquí es necesario insertar una barra imaginaria entre C y D antes de poder calcular las variaciones de los ángulos. La variación de longitud de esta barra imaginaria es igual al corrimiento relativo de los nudos C y D , que se puede calcular también por el método de los trabajos virtuales.

12.15 Segundo teorema de Castigliano. En 1879, Castigliano publicó los resultados de un estudio sobre las estructuras estáticamente indeterminadas, en el que utilizó dos teoremas que llevan su nombre. El segundo teorema de Castigliano se puede enunciar como sigue:

En una estructura cualquiera cuyo material es elástico y sigue la ley de Hooke, y cuya temperatura es constante y los apoyos no pueden ceder, la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a una fuerza cualquiera es igual al desplazamiento del punto de aplicación de esa fuerza en la dirección de su línea de acción.

En este enunciado, las palabras fuerza y desplazamiento pueden interpretarse también como par y rotación angular, respectivamente. Además, está implícito que durante la deformación de la estructura no hay cambio apreciable de sus características geométricas. Por tanto, la aplicación de este teorema se limita a los casos en que es posible superponer corrimientos.

Para deducir el teorema, consideremos una estructura cualquiera que satisfaga las condiciones dichas, tal como la viga de la Fig. 12.30. Supongamos que se le carga gra-

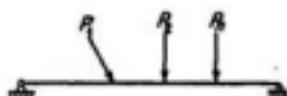


FIG. 12.30. Dedución del segundo teorema de Castigliano.

dualmente con las fuerzas P_1, P_2, \dots, P_n . El trabajo externo realizado por estas fuerzas (que llamaremos W_E) es una función de las mismas. Por el principio de conservación de la energía, sabemos que en cualquier estructura elástica en reposo y en equilibrio bajo un sistema de cargas, el trabajo interno, o energía de deformación almacenado en la misma, es igual al trabajo externo realizado por esas cargas durante su aplicación gradual. Designando el trabajo interno o energía de deformación por W_I , podemos escribir

$$W_I = W_E = f(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (a)$$

Supongamos ahora que la fuerza P_n aumenta una pequeña cantidad dP_n ; el trabajo interno aumentará, y se convertirá en

$$W_I' = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} dP_n \quad (b)$$

Sin embargo, la magnitud del trabajo interno total no depende del orden en que se apliquen las fuerzas —solo depende del valor final de dichas fuerzas—. Además, si el material sigue la ley de Hooke, la deformación y los corrimientos producidos por las cargas

P_1, P_2, \dots, P_n y, por tanto, el trabajo realizado por ellas son iguales si se aplican estas fuerzas a una estructura ya sometida a otras fuerzas o no, mientras los esfuerzos totales debidos a todas las causas permanezcan dentro del límite elástico. Por tanto, si se aplica la fuerza infinitesimal dP_n primero y las P_1, P_2, \dots, P_n después, la magnitud del trabajo interno seguirá siendo la misma, dada por la Ecuación (b).

La fuerza dP_n aplicada primero, produce un desplazamiento infinitesimal $d\delta_n$, de modo que el correspondiente trabajo externo realizado durante la aplicación de dP_n es una cantidad de segundo orden y se puede despreciar. Si se aplican ahora las cargas P_1, P_2, \dots, P_n , el trabajo externo realizado por ellas no resultará modificado por la presencia de dP_n , por lo que será igual al valor W_E dado por la Ec. (a). Sin embargo, durante la aplicación de estas fuerzas, el punto de aplicación de P_n se desplaza una cantidad δ_n en la dirección de su línea de aplicación, por lo que durante este desplazamiento, dP_n realiza un trabajo externo igual a $(dP_n)\delta_n$. Sea W'_E el trabajo externo total realizado por todo el sistema durante esta sucesión de cargas. Será:

$$W'_E = W_E + dP_n \delta_n \quad (c)$$

Pero, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, W'_E es igual a W_I y, por tanto,

$$W_E + dP_n \delta_n = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} dP_n \quad (d)$$

Pero, como W_E es igual a W_I , la Ec. (d) se reduce a

$$\frac{\partial W_I}{\partial P_n} = \delta_n \quad (12.13)$$

Esta última ecuación es la expresión matemática del segundo teorema de Castigliano.

Para utilizar el teorema de Castigliano, es necesario desarrollar previamente expresiones apropiadas de la energía de deformación almacenada, o del trabajo interno realizado por las tensiones de una barra. Consideremos, primero, el caso de la energía de deformación almacenada en una barra por una fuerza axial F cuando dicha fuerza aumenta gradualmente de cero a su valor final. Imaginemos un elemento diferencial de esa barra, limitado por dos secciones sucesivas, como el representado en la Fig. 12.31,

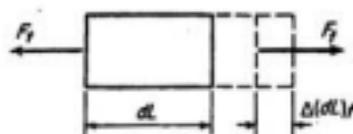


FIG. 12.31. Energía de deformación almacenada por una fuerza axial.

y supongamos que sobre él actúa una fuerza F_n con un valor comprendido entre cero y el valor final de la fuerza F . Si esta fuerza aumenta ahora una cantidad dF_n , produce una variación de longitud del elemento $\Delta(dL)_n$, donde

$$\Delta(dL)_n = dF_n \frac{dL}{AE} \quad (e)$$

Despreciando cantidades de segundo orden, el trabajo interno realizado durante la

aplicación de dF , es igual a $(F_1)(\Delta(dL)_1)$, por lo que el trabajo interno total dW_I realizado en este elemento durante el aumento de la fuerza F de cero a su valor final es

$$dW_I = \int_0^F F_1 \Delta(dL)_1 = \int_0^F F_1 \frac{dL}{AE} dF_1 = \frac{F^2}{2AE} dL \quad (f)$$

Para toda la barra, el trabajo interno será la suma de los términos dW_I , correspondientes a todos los elementos dL , o sea

$$W_I = \int_0^L \frac{F^2}{2AE} dL = \frac{F^2 L}{2AE} \quad (g)$$

Para todas las barras de la estructura, el trabajo interno será la suma de esos términos para cada una de ellas, o sea

$$\text{Energía de deformación almacenada por las fuerzas axiales, } W_I = \sum \frac{F^2 L}{2AE} \quad (12.14)$$

Ahora se puede utilizar esta ecuación para desarrollar una expresión de la energía de deformación almacenada en una viga por las tensiones producidas por un momento flector M . Consideremos un elemento diferencial de una viga, de longitud dL , como el representado en la Fig. 12.32. Se puede considerar este elemento como un haz de

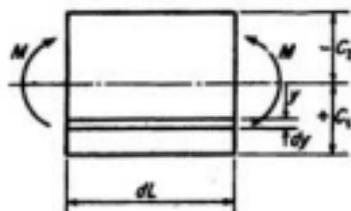


FIG. 12.32. Energía de deformación almacenada por el momento flector.

pequeñas fibras, de longitud dL cada una de ellas, con una altura dy , y una anchura normal al plano del dibujo, b . La fuerza axial en dicho haz de fibras será

$$F = \sigma b dy = \frac{My}{I} b dy \quad (h)$$

La energía de deformación almacenada en todas esas fibras de la viga se puede calcular aplicando la Ec. (12.14), sumando las contribuciones de todas las fibras del elemento dL y luego sumando todas estas cantidades para todos los elementos en la longitud de la viga, o sea

$$\begin{aligned} W_I &= \int_0^L \int_{-c_1}^{c_2} \left(\frac{My}{I} b dy \right)^2 \frac{dL}{2(b dy)E} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \int_{-c_1}^{c_2} \frac{y^2 b dy}{I} dL \\ &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dL \quad (i) \end{aligned}$$

por $\int_{-c_2}^{c_1} y^2 b dy = I$. Por tanto, para todos los elementos de viga de la estructura,

Energía de deformación almacenada por el momento flector,

$$W_I = \sum \int \frac{M^2}{2EI} dL \quad (12.15)$$

Como se vio anteriormente en la Sec. 12.5, en general es admisible despreciar la energía de deformación almacenada por el esfuerzo cortante en una viga.

12.16 Primer teorema de Castigliano¹. Para completar la discusión de los teoremas de Castigliano, se presentará aquí también el primer teorema, aunque es más un método para expresar las condiciones de equilibrio y para estudiar estructuras estáticamente indeterminadas que para calcular corrimientos. El primer teorema de Castigliano se puede enunciar como sigue:

En una estructura cualquiera, cuyo material es elástico, lineal o no linealmente y en la que la temperatura es constante y los apoyos no pueden ceder, la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a cualquier componente del corrimiento es igual a la fuerza aplicada en el punto en la dirección correspondiente a esa componente del corrimiento.

Este teorema se puede deducir de modo muy similar al segundo. Supongamos que una estructura está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas P_1, P_2, \dots, P_n . Estas fuerzas han realizado una cierta cantidad de trabajo externo W_E y una cantidad igual de energía de deformación W_I en la estructura. Han producido también ciertos corrimientos de los puntos de aplicación de esas fuerzas, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Si al variar cantidades infinitesimales las fuerzas, el corrimiento δ_n varía una pequeña cantidad $d\delta_n$, mientras los otros corrimientos $\delta_1, \delta_2, \dots$ se mantienen constantes, la energía de deformación almacenada en el sistema variará hasta alcanzar un valor W_I' , donde

$$W_I' = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial \delta_n} d\delta_n \quad (a)$$

Si se desprecia la contribución de segundo orden al trabajo externo debido a la fuerza diferencial dP_n , el trabajo externo realizado en la estructura habrá aumentado hasta W_E' como consecuencia de la introducción del desplazamiento adicional $d\delta_n$, siendo

$$W_E' = W_E + P_n d\delta_n \quad (b)$$

Como W_I' debe ser igual a W_E' , igualando los segundos miembros de las Ecs. (a) y (b), se tiene

$$\frac{\partial W_I}{\partial \delta_n} = P_n \quad (c)$$

que es la expresión matemática del primer teorema de Castigliano.

No se considerarán aquí aplicaciones del primer teorema, enviando al lector interesado el interesante libro de Matheson al que se ha hecho referencia, o a los recientes trabajos de Argyris². Para usar este teorema, es evidente que hay que desarrollar otras expresiones de la energía de deformación, que expresen esta energía en función de los corrimientos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$.

¹ Ver A. Castigliano, «Théorème de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications», traducido al inglés por E. S. Andrews como «Elastic Stresses in Structures», Scott, Greenwood, 1919. O ver J. A. L. Matheson, «Hypostatic Structures», vol. I, págs. 69 y 75, Publicaciones Científicas de Butterworth, Londres, 1959.

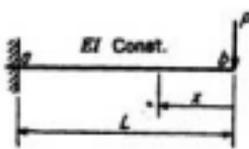
Desgraciadamente, hay una considerable confusión en la literatura referente a la nomenclatura de los teoremas de Castigliano. Castigliano llamó a sus teoremas «teorema de los coeficientes diferenciales del trabajo interno, I y II partes». En este libro, a las partes I y II se les ha llamado, respectivamente, primer teorema de Castigliano y segundo teorema de Castigliano.

² J. H. Argyris, «Energy Theorems and Structural Analysis», *Aircraft Eng.*, octubre 1954, y sig.

12.17 Cálculo de corrimientos, utilizando el segundo teorema de Castigliano. El segundo teorema de Castigliano se usa principalmente en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas, aunque se utilice a veces para resolver problemas de corrimientos. La técnica para aplicar este método en el último caso es esencialmente la misma que la utilizada para resolver esos problemas por el método de los trabajos virtuales. Los siguientes problemas demostrarán que los cálculos numéricos de cada uno de estos métodos son casi idénticos.

El Ejemplo 12.25 muestra cómo se aplica este método cuando se quiere hallar el corrimiento del punto de aplicación de una de las cargas. Si la carga tiene un cierto valor numérico, se expresará provisionalmente por un símbolo y luego, cuando se haya llevado a cabo la diferenciación parcial de la expresión del momento flector, se sustituye el símbolo por el valor numérico dado.

Ejemplo 12.25 Calcular la flecha del punto *b*, debida a la carga representada.



$W_I = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI}$

pero $\frac{\partial W_I}{\partial P} = \delta_b = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial P} \frac{dx}{EI}$

Desde *b* hasta *a*,

$0 < x < L \quad M = -Px \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$

Por tanto, $\delta_b = \int_0^L (-Px)(-x) \frac{dx}{EI} = \left[\frac{Px^3}{3EI} \right]_0^L$

de donde $\delta_b = \frac{PL^3}{3EI}$

A veces se quiere calcular el corrimiento en un punto en que no actúa ninguna carga. En esos casos, podemos introducir provisionalmente una fuerza (o un par) en ese punto y en la dirección de la componente deseada del corrimiento, y luego, cuando se ha llevado a cabo la diferenciación parcial de la energía de deformación, hacer igual a cero la fuerza introducida y continuar con los cálculos numéricos. De este modo, obtendremos el corrimiento buscado, producido solo por las cargas dadas. El Ejemplo 12.26 aclara el modo de proceder.

Introduciendo las cargas convenientes, es posible calcular de este modo cualquier componente de corrimiento. La técnica empleada para elegir las cargas imaginarias apropiadas es exactamente la misma que se usa para escoger el sistema de fuerzas *Q* conveniente para aplicar el método de los trabajos virtuales. El Ejemplo 12.27 aclara este punto y muestra la gran similitud entre la solución mediante el segundo teorema de Castigliano y la dada por el método de los trabajos virtuales.

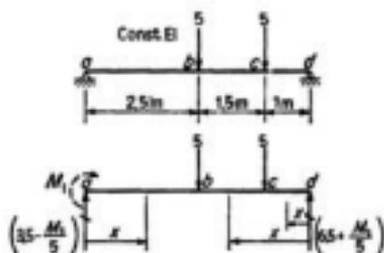
Se debe observar que el segundo teorema de Castigliano se puede aplicar a cualquier tipo de estructura, bien se trate de vigas, cuchillos o pórticos, cuyo material se comporte de una forma linealmente elástica. Su aplicación está limitada a los casos en los que la deformación está producida por cargas. Este teorema no es aplicable, por el contrario, para calcular corrimientos producidos por cesiones de apoyos o por variaciones de temperatura.

Ejemplo 12.26 Calcular la variación de pendiente de la sección transversal en a, debido a las cargas representadas.

Supongamos que se aplica provisionalmente un par M_1 en a. Considerándolo como parte del sistema de cargas, se puede proceder como sigue:

$$W_I = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$\text{Por } \frac{\partial W_I}{\partial M_1} = \alpha_a = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial M_1} \frac{dx}{EI}$$



Desde a hasta b,

$$0 < x < 2.5 \quad M = M_1 + \left(3.5 - \frac{M_1}{5}\right)x \quad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \left(1 - \frac{x}{5}\right)$$

Desde d hasta c,

$$0 < x < 1 \quad M = \left(6.5 + \frac{M_1}{5}\right)x \quad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{5}$$

Desde c hasta b,

$$1 < x < 2.5 \quad M = \left(6.5 + \frac{M_1}{5}\right)x - 5(x-1) \quad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{5}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial M_1} = EI \alpha_a &= \int_0^{2.5} \left[M_1 + \left(3.5 - \frac{M_1}{5}\right)x \right] \left(1 - \frac{x}{5}\right) dx \\ &+ \int_0^1 \left[\left(6.5 + \frac{M_1}{5}\right)x \right] \left(\frac{x}{5}\right) dx + \int_1^{2.5} \left[\left(6.5 + \frac{M_1}{5}\right)x - 5(x-1) \right] \left(\frac{x}{5}\right) dx \end{aligned}$$

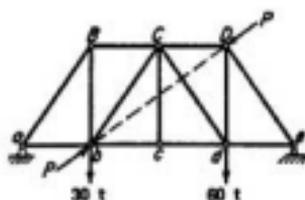
Podemos hacer ahora $M_1 = 0$ en esta ecuación, pues es una carga imaginaria. Será

$$\begin{aligned} EI \alpha_a &= \int_0^{2.5} (3.5x) \left(1 - \frac{x}{5}\right) dx + \int_0^1 (6.5x) \left(\frac{x}{5}\right) dx + \int_1^{2.5} (1.5x + 5) \left(\frac{x}{5}\right) dx \\ &= \left[\frac{3.5x^2}{2} - \frac{3.5x^3}{15} \right]_0^{2.5} + \left[\frac{6.5x^3}{15} \right]_0^1 + \left[\frac{1.5x^3}{15} + \frac{x^2}{2} \right]_1^{2.5} = \left(\frac{21.875}{2} - \frac{34.687}{15} \right) \\ &\quad + \left(\frac{6.5}{15} \right) + \left[\left(\frac{15.625}{10} + \frac{6.25}{2} \right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ \alpha_a &= \frac{11.81}{EI} \end{aligned}$$

Si $E = 2.1 \times 10^6 \text{ t/cm}^2$ e $I = 6.000 \text{ cm}^4$,

$$\alpha_a = \frac{(11.81) \text{ t m}^3}{(2.1 \times 10^6) \text{ t/m}^2 (6.000 \times 10^{-8}) \text{ t m}^4} = +0.0093 \text{ radianes}$$

Ejemplo 12.27 Resolver parte del Ejemplo 12.4 utilizando el segundo teorema de Castigliano.



Para hallar el corrimiento relativo de los nudos *b* y *D* usaremos al sistema de cargas dado las cargas *P* de la figura. Será

$$W_1 = \sum \frac{P^2 L}{2AE}$$

$$\gamma \quad \frac{\partial W_1}{\partial P} = \delta_{b-D} = \sum \frac{FL}{AE} \frac{\partial F}{\partial P}$$

Utilizando las fuerzas de barra calculadas en el Ejemplo 12.4 para las cargas de 30 y 60 t y observando que las fuerzas debidas a las cargas *P* son iguales a *P* veces las producidas por la carga unidad en ese problema, podemos proceder como sigue:

Barra	<i>L</i>	<i>A</i>	$\frac{A}{L}$	<i>F</i>	$\frac{\partial F}{\partial P}$	$F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial P}$
Unidades	m	cm ²	m/cm ²	t	t/t	t m/cm ²
bc	4,5	30	0,15	+33,75 - 0,416 <i>P</i>	-0,416	-2,106
cd	4,5	30	0,15	+33,75 - 0,416 <i>P</i>	-0,416	-2,106
CD	4,5	30	0,15	-39,375 - 0,831 <i>P</i>	-0,831	+4,908
bC	7,5	15	0,5	- 9,375 - 0,695 <i>P</i>	-0,695	+3,258
Cd	7,5	15	0,5	+ 9,375 + 0,695 <i>P</i>	+0,695	+3,258
dD	6	30	0,2	+52,5 - 0,555 <i>P</i>	-0,555	-5,827
Σ						+1,385

Antes de calcular el producto de la última columna de esta tabla haremos *P* igual a cero, pues solo hay que incluir en el producto la contribución de la parte constante de *F*. Así,

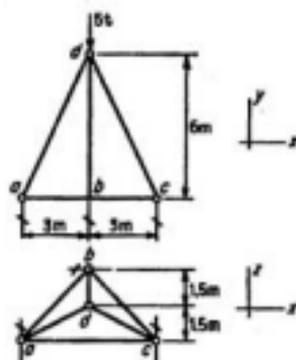
$$\delta_{b-D} = \frac{+1,385}{E} = \frac{(1,385) \text{ tm/cm}^2}{(2,1 \times 10^3) \text{ t/cm}^2} = +0,00066 \text{ m} \quad (\text{acercándose})$$

Se observará que las barras que tienen fuerza nula debida a las cargas imaginarias *P*, o a las cargas aplicadas dadas, no intervienen en los productos de la última columna, por lo que no hay que incluirlas en la tabla.

12.18 Deformación de armaduras espaciales. Se pueden calcular sin dificultad los corrimientos de los nudos de una armadura espacial por el método de los trabajos virtuales o por el segundo teorema de Castigliano. Las expresiones desarrolladas antes para aplicar estos métodos a los cuchillos planos se pueden aplicar también a las armaduras espaciales (que no son más que «cuchillos tridimensionales»), como se ve en el Ejemplo 12.28.

Ejemplo 12.28 Calcular la componente z del corrimiento del nudo d debido a la carga representada. La sección de todas las barras es de 10 cm^2 . $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

Barra	Proyección			L
	x	y	z	
ab	3	0	3	4,24
bc	3	0	3	4,24
ac	6	0	0	6
ad	3	6	1,50	6,87
bd	0	6	1,50	6,18
cd	3	6	1,50	6,87



Utilizando el método de los trabajos virtuales,

$$\sum Q\delta = \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

$$(1 \text{ t})(\delta_{dz}) = \frac{1}{AE} \sum F_Q F_P L$$

Barra	Componentes			F_Q	Barra	Componentes			F_P
	x	y	z			x	y	z	
ab	+0,25	0	+0,25	+0,354	ab	+0,3125	0	+0,3125	+0,442
bc	+0,25	0	+0,25	+0,354	bc	+0,3125	0	+0,3125	+0,442
ac	-0,75	0	0	-0,75	ac	+0,3125	0	0	+0,312
ad	+0,5	+1	+0,25	+1,145	ad	-0,625	-1,25	-0,3125	-1,432
bd	0	-2	-0,5	-2,062	bd	0	-2,5	-0,625	-2,577
cd	+0,5	+1	+0,25	+1,145	cd	-0,625	-1,25	-0,3125	-1,432

Barra	L	F_Q	F_P	$F_Q F_P L$
Unidades	m	t	t	t ² m
ab	4,24	+0,354	+0,442	+ 0,663
bc	4,24	+0,354	+0,442	+ 0,663
ac	6	-0,75	+0,312	- 1,404
ad	6,87	+1,145	-1,432	-11,264
bd	6,18	-2,062	-2,577	+32,839
cd	6,87	+1,145	-1,432	-11,264
Σ				+10,233

de donde

$$(1 \text{ t})(\delta_{dz}) = \frac{+10,233 \text{ t}^2 \text{ m}}{(10 \text{ cm}^2)(2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2)}$$

$$\delta_{dz} = +0,00049 \text{ m}$$

12.19 Otros problemas de deformaciones. Todos los ejemplos de este capítulo se han referido al cálculo de corrimientos en estructuras estáticamente determinadas. Sin embargo, todos los métodos expuestos se pueden aplicar tanto a éstas como a las estáticamente indeterminadas. Naturalmente, que hay que completar el estudio de tensiones de una estructura indeterminada antes de poder definir la deformación de sus elementos; pero una vez hecho esto, los cálculos de los corrimientos son fundamentalmente los mismos que si se tratara de una estructura estáticamente determinada. En la Sec. 13.17 se incluyen varios ejemplos que aclaran estos cálculos.

En este capítulo se ha limitado el estudio de los corrimientos de las vigas a los casos en los que el eje de éstas es recto y en los que las secciones transversales tienen los ejes de simetría en el mismo plano que las cargas. Además, no se ha incluido el estudio de los corrimientos producidos por el esfuerzo cortante. Todos estos casos caen fuera del objeto de este libro y están incluidos en tratados más avanzados. Sin embargo, debe observarse que se pueden ampliar tanto el método de los trabajos virtuales como el segundo teorema de Castigliano sin dificultad, de forma que comprendan esos casos. También se pueden aplicar esos métodos a barras sometidas a torsión.

12.20 Contraflecha de las estructuras. Dar contraflecha a una estructura consiste en variar la forma de las barras sin tensiones, de tal manera que bajo cierta hipótesis de carga la estructura adopte su forma teórica. El objeto es doble: 1) Mejora el aspecto de la estructura cargada. 2) Asegura que las características geométricas de la estructura cargada corresponden a la forma teórica empleada en el análisis de tensiones.

Como aclaración de este procedimiento, consideremos el problema de dar contraflecha a un cuchillo. En este caso, las barras del cuchillo están hechas de modo que son más largas o más cortas que su longitud teórica. Como las distintas barras soportan sus tensiones máximas bajo posiciones de la sobrecarga diferentes, no se puede dar contraflecha a un cuchillo para que adopte su forma teórica cuando cada barra soporte su máxima tensión. Como compromiso práctico, se les suele dar una contraflecha para que adopten su forma teórica bajo la carga fija o bajo la carga fija más alguna fracción determinada de la sobrecarga total en toda la estructura.

Para dar contraflecha exactamente a un cuchillo, calcularemos la variación de longitud de cada barra bajo las tensiones producidas por la carga que queremos considerar y luego construiremos las barras de compresión más largas de lo debido en la cantidad apropiada y las de tracción más cortas. Luego, cuando se monte el cuchillo y se le someta a su carga de contraflecha, flexará hasta su forma teórica. La ventaja de este método exacto es que un cuchillo tratado así se puede unir libre de tensiones iniciales. El inconveniente es que están afectadas la mayoría de las barras y son difíciles de obtener, algunas veces, las pequeñas variaciones de longitud necesarias.

Por ello, el método práctico para dar contraflecha a un cuchillo consiste en variar solo las longitudes de las barras de los cordones. Por ejemplo, si cada barra del cordón superior de un cuchillo apoyado en sus extremos se aumenta en 1,5 mm cada metro de proyección horizontal, esto equivale a variar los dos cordones, superior e inferior, la mitad de esta cantidad. Esta variación de longitud es la misma que produciría una tensión de

$$2.100.000 \times 0,75 \times 1/1.000 = 1.575 \text{ kg/cm}^2$$

Como solo se han corregido los cordones, debe hacerse en exceso para suplir la contribución de las otras barras a la flecha. Suponiendo que los cordones contribuyen a la flecha con el 80 por 100, la variación de longitud indicada antes corresponde a la producida por una carga que originaría una tensión en el cordón de

$$0,8 \times 1.575 = 1.260 \text{ kg/cm}^2$$

En otras palabras, la regla práctica propuesta más arriba corresponde a una carga de contra-

fecha aproximadamente igual a la carga fija, más toda la sobrecarga, más impacto en toda la estructura.

Este método aproximado se puede aplicar sin dificultad a los cuchillos estáticamente determinados, pero hay que aplicarle con cuidado a los estáticamente indeterminados, pues de otro modo se pueden introducir tensiones iniciales.

12.21 Ley de Maxwell de las deformaciones recíprocas. Ley de Betti. La ley de Maxwell es un caso especial de la ley de Betti, más general. Las dos son aplicables a cualquier tipo de estructura, bien sea viga, cuchillo o pórtico. Sin embargo, para simplificar el estudio se expondrán estas ideas considerando el cuchillo simple de la Figura 12.33. Supongamos que este cuchillo está sometido a dos sistemas de fuerzas se-

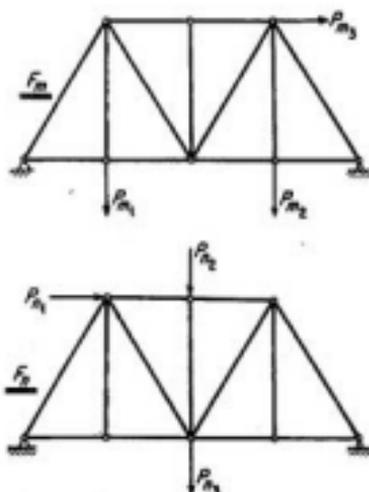


FIG. 12.33. Deducción de la ley de Betti.

paradas e independientes, el de las fuerzas P_m y el de las P_n . El sistema P_m produce las fuerzas F_m en las diversas barras del cuchillo, mientras que el P_n produce las fuerzas de barra F_n . Consideremos dos casos: Primero supongamos que el sistema P_m está en reposo en el cuchillo y que deformamos a éste aplicándole el sistema P_n . Como segundo caso, supondremos que sucede lo contrario, esto es, que actúa el sistema P_n en el cuchillo, y que por la aplicación del sistema P_m deformamos dicho cuchillo. En los dos casos, podemos aplicar la ley de los trabajos virtuales y llegar a una conclusión muy útil conocida por ley de Betti.

Para esta deducción supondremos que no pueden ceder los apoyos de la estructura y que la temperatura es constante. Además, sea

δ_{mn} = corrimiento del punto de aplicación de una de las fuerzas P_m (en la dirección y sentido de esta fuerza) producido por la aplicación del sistema de fuerzas P_n

δ_{nm} = corrimiento del punto de aplicación de una de las fuerzas P_n producido por la aplicación del sistema P_m

Consideremos ahora la aplicación de la ley de los trabajos virtuales al primer caso, cuando el sistema de fuerzas P_m hace el papel de fuerzas Q y experimentan un recorrido como consecuencia de la deformación producida por la aplicación del sistema P_n . Aplicando la Ec. (12.5),

$$\sum P_m \delta_{mn} = \sum F_n \Delta L$$

donde $\Delta L = F_n L / AE$, y así

$$\sum P_n \delta_{nn} = \sum F_n F_n \frac{L}{AE} \quad (a)$$

En el segundo caso, las fuerzas P_n hacen el papel de fuerzas Q que experimentan un recorrido como consecuencia de la deformación producida por la aplicación del sistema P_n . Aplicando la Ec. (12.5),

$$\sum P_n \delta_{nn} = \sum F_n \Delta L$$

donde $\Delta L = F_n L / AE$, y así

$$\sum P_n \delta_{nn} = \sum F_n F_n \frac{L}{AE} \quad (b)$$

De las Ecs. (a) y (b) se puede deducir que

$$\sum P_n \delta_{nn} = \sum P_n \delta_{nn} \quad (12.16)$$

que traducida a palabras es la llamada *ley de Betti*.

En una estructura cualquiera cuyo material es elástico y sigue la ley de Hooke y en la que los apoyos no pueden ceder y la temperatura es constante, el trabajo externo virtual realizado por un sistema de fuerzas P_n durante la deformación producida por un sistema de fuerzas P_n es igual al trabajo externo virtual realizado por el sistema P_n durante la deformación producida por el sistema P_n .

La ley de Betti es un principio muy útil y a veces se le llama ley de Maxwell generalizada, lo que indica que esta última ley de los corrimientos recíprocos se puede deducir directamente de aquélla.

Consideremos una estructura cualquiera, tal como el cuchillo de la Fig. 12.34. Supongamos que sobre él actúa primero una carga P en el punto 1; luego suponemos que sobre el cuchillo actúa una carga de la misma magnitud P , pero aplicada ahora en el punto 2. Sean

δ_{12} = corrimiento del punto 1 en la dirección ab , debido a una carga P que actúa en el punto 2 en la dirección cd

δ_{21} = corrimiento del punto 2 en la dirección cd , debido a una carga P que actúa en el punto 1 en la dirección ab

Aplicando la ley de Betti a este caso,

$$(P)(\delta_{12}) = (P)(\delta_{21})$$

y, por tanto,

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (12.17)$$

que expresada en palabras es la llamada *ley de Maxwell de las deformaciones recíprocas*:

En una estructura cualquiera cuyo material es elástico y sigue la ley de Hooke, y en la que los apoyos no pueden ceder, y la temperatura es constante, la deformación del punto 1 en la dirección ab , debida a la carga P en el punto 2 que actúa en una dirección cd , es numéricamente igual a la deformación en el punto 2 en la dirección cd , debida a una carga P en el punto 1, que actúa en la dirección ab .

La ley de Maxwell es totalmente general y es aplicable a cualquier tipo de estructura. Esta relación recíproca existe lo mismo entre los giros producidos por dos pares,

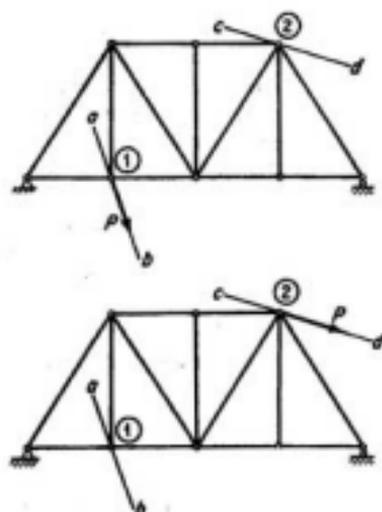


FIG. 12.34. Desarrollo de la ley de Maxwell.

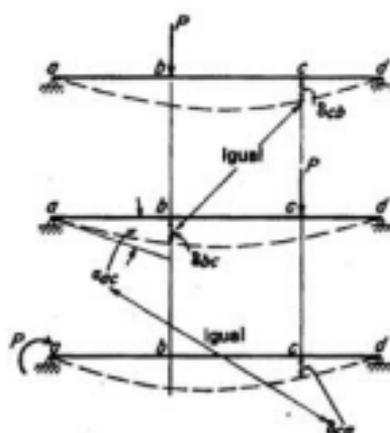


FIG. 12.35. Aplicación de la ley de Maxwell.

así como entre el corrimiento producido por un par P y la rotación producida por una fuerza P , todo lo cual está representado en la Fig. 12.35. Que $\delta_{ab} = \delta_{wa}$ es una aplicación inmediata de la ley de Maxwell. Obsérvese también que el giro α_w en radianes producido por una fuerza de P kg es numéricamente igual al corrimiento δ_{wa} en metros producido por un par de P m kg. En el último caso hay que tener cuidado con las unidades.

Es interesante familiarizarse con las notaciones de subíndices utilizadas en el estudio anterior, para expresar las deformaciones. *El primer subíndice expresa el punto en el que se mide la deformación y el segundo el punto en que se aplica la fuerza que la produce.*

12.22 Líneas de influencia de corrimientos. Supongamos que queremos dibujar la línea de influencia del corrimiento vertical del punto a de la viga de la Fig. 12.36. Se

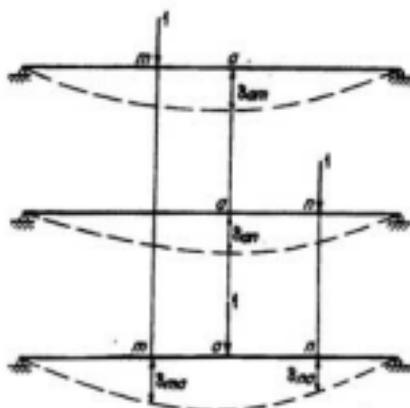


FIG. 12.36. Líneas de influencia por la flecha.

***Problema 12.3** Para la estructura de la Fig. 12.39, hallar la componente horizontal del corrimiento del nudo d , si la barra cf se acorta 25 mm.

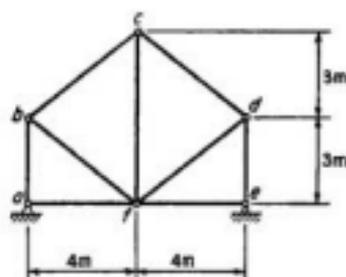


FIG. 12.39. Problema 12.3.

Problema 12.4 Para la estructura de la Fig. 12.40, determinar, por el método de los trabajos virtuales, el movimiento relativo de los nudos M_3 y U_4 a lo largo de la línea M_3U_4 a) debido a las cargas representadas; b) debido a un aumento uniforme de temperatura de 20°C en el cordón inferior. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$; $\alpha = 0,000012$ por $^\circ\text{C}$.

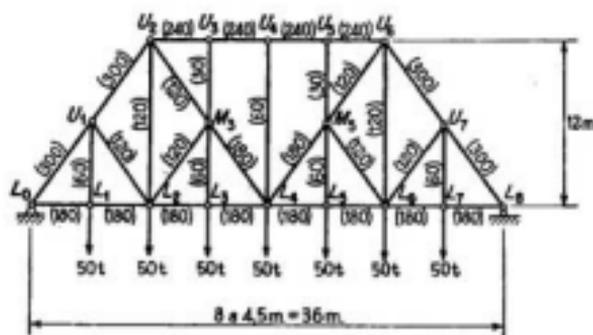


FIG. 12.40. Problema 12.4.

***Problema 12.5** Para la estructura de la Fig. 12.41, hallar por el método de los trabajos virtuales, el corrimiento vertical del punto a debido a las cargas representadas. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

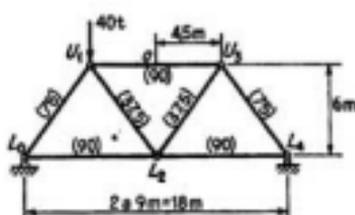


FIG. 12.41. Problema 12.5.

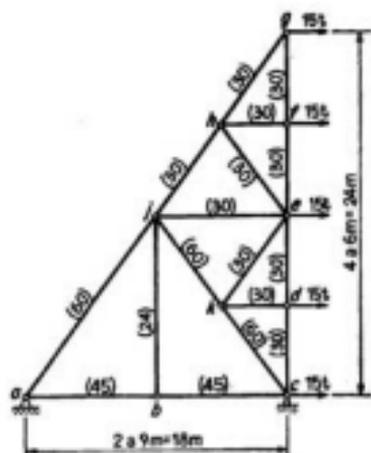


FIG. 12.42. Problema 12.6.

Problema 12.6 En la estructura de la Fig. 12.42 figuran entre paréntesis las secciones de las barras, en centímetros cuadrados. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$. Calcular la rotación angular de la barra bf , debida a las cargas representadas.

***Problema 12.7** Para la estructura de la Fig. 12.43 E_1 de la barra $gf = 1,4 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$, y E_2 de las demás barras $= 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$. Entre paréntesis figuran las secciones de las barras, en centímetros cuadrados. Utilizando el método de los trabajos virtuales,

a) Calcular la componente vertical del corrimiento del punto c , debido a la carga representada.

b) Si se ajusta un tensor en la barra gf para acortarla 12,5 mm, ¿cuáles serían las componentes vertical y horizontal del movimiento del punto c debido solo a este ajuste?

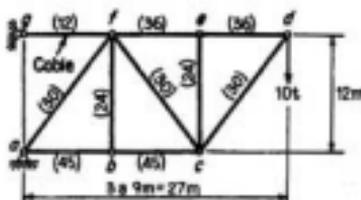


FIG. 12.43. Problema 12.7.

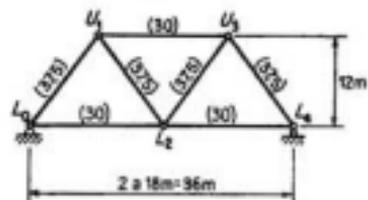


FIG. 12.44. Problema 12.8.

***Problema 12.8** Con referencia a la Fig. 12.44, durante la reparación del estribo derecho de este cuchillo, fue necesario apoyarlo provisionalmente en el nudo L_2 con un gato hidráulico. Si la reacción de las cargas fijas en L_4 es de 25 t, calcular la distancia que el gato tiene que elevar al cuchillo en el nudo L_2 para liberar el apoyo de L_4 y elevarle 5 cm por encima de su posición normal. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

***Problema 12.9** En la Fig. 12.45 aparecen entre paréntesis las secciones de las barras en centímetros cuadrados. E para la barra $ad = 1,4 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 = E_1$, y para las demás $= 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 = E_2$. Utilizando el método de los trabajos virtuales, determinar la dirección y magnitud del corrimiento resultante en el nudo d debido a las cargas representadas.

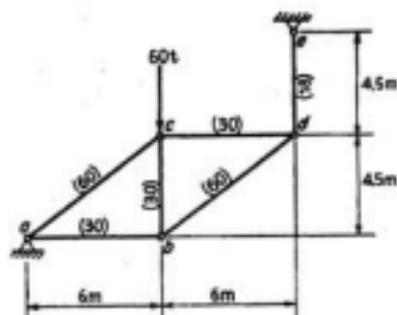


FIG. 12.45. Problema 12.9.

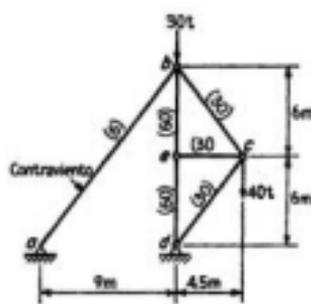


FIG. 12.46. Problema 12.10.

Problema 12.10 En la estructura de la Fig. 12.46 están representadas entre paréntesis las secciones de las barras en centímetros cuadrados. E del contraviento $= 1,4 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 = E_1$ y el E de las demás barras $= 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 = E_2$.

a) Calcular la componente vertical del corrimiento del nudo c debido a las cargas representadas.

b) ¿Cuánto debe variar la longitud del contraviento ab , ajustando un tensor, para volver al nudo c a su cota inicial?

Problema 12.11 Utilizando el método de los trabajos virtuales, determinar el corrimiento vertical y la variación de pendiente de la sección en el punto a de la viga de la Fig. 12.47. E e I son constantes.

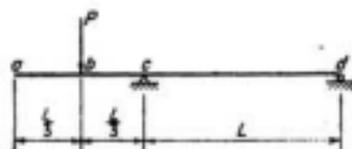


FIG. 12.47. Problema 12.11.

***Problema 12.12** Calcular para el pórtico de la Fig. 12.48, por el método de los trabajos virtuales,

a) El corrimiento vertical del punto b debido a la carga representada.

b) La variación angular de la sección en el punto d debida a una carga uniformemente repartida de 4 t por m aplicada en toda la luz.

$$E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 \quad I_1 = 12.000 \text{ cm}^4 \quad I_2 = 20.000 \text{ cm}^4$$

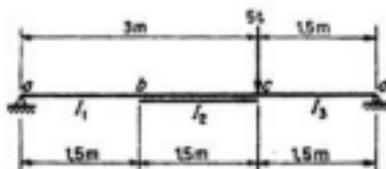


FIG. 12.48. Problema 12.12.

Problema 12.13 Calcular el corrimiento vertical del punto *a* del pórtico de la Fig. 12.49, considerando el efecto de deformación debida a las tensiones axiales y a los momentos. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

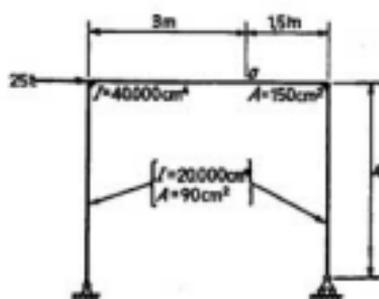


FIG. 12.49. Problema 12.13.

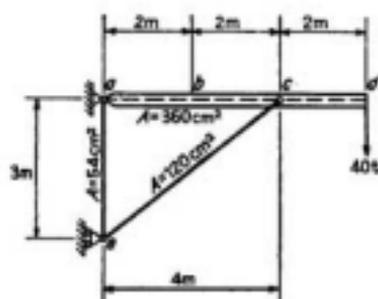


FIG. 12.50. Problema 12.14.

***Problema 12.14** En la estructura de la Fig. 12.50, I de la barra $ad = 160.000 \text{ cm}^4$, y $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

Utilizando el método de los trabajos virtuales, calcular la componente vertical del corrimiento del punto *b*.

Problema 12.15 En el cachillo de la Fig. 12.51 figuran entre paréntesis las secciones de las barras, en centímetros cuadrados. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$. Calcular el corrimiento relativo del punto *a* y el nudo L_1 , a lo largo de la recta que los une, debido a las cargas representadas.

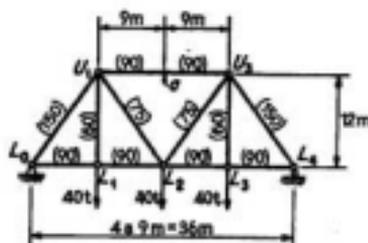


FIG. 12.51. Problema 12.15.

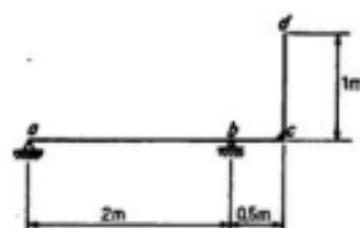


FIG. 12.52. Problema 12.16.

Problema 12.16 Con referencia a la Fig. 12.52, utilizando el método de los trabajos virtuales, calcular la componente horizontal del corrimiento del punto *d*, debido a los siguientes movimientos de los apoyos:

Punto *a*: Horizontal = 7,2 mm (a la izquierda)

Vertical = 9,6 mm (hacia abajo)

Punto *b*: Vertical = 19,2 mm (hacia abajo)

***Problema 12.17** Con referencia a la Fig. 12.53, utilizando el método del área de momentos:

- Calcular los corrimientos verticales de los puntos *a*, *c* y *d* y la pendiente de la elástica en los puntos *b* y *c*, en función de E e I .

b) Si $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 12.000 \text{ cm}^4$, calcular desde la parte *a* el corrimiento vertical de *a* en centímetros y la pendiente de *b* en radianes.

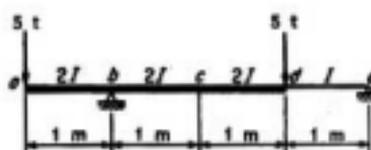


FIG. 12.53. Problema 12.17.

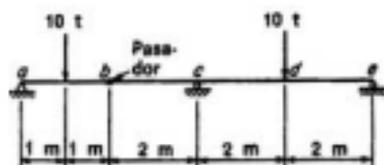


FIG. 12.54. Problema 12.18.

Problema 12.18 Con referencia a la Fig. 12.54, utilizando el procedimiento de la carga elástica y los teoremas del área de momentos,

a) Hallar el corrimiento vertical a intervalos de 1 m a lo largo de la viga, en función de E e I .
b) Hallar la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo en el vano *ce*. E e I son constantes.

Problema 12.19 Con referencia a la Fig. 12.54, hallar, utilizando el método del área de momentos, y para las cargas representadas, la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo en la barra *bc*. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

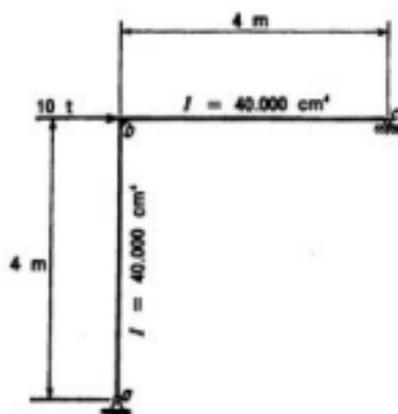


FIG. 12.55. Problema 12.19.

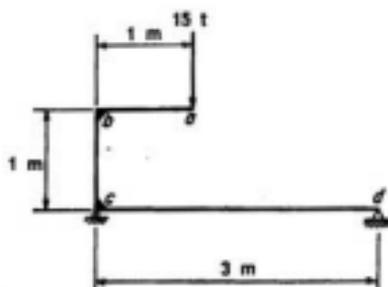


FIG. 12.56. Problema 12.20.

***Problema 12.20** Para la Fig. 12.56 con E e I constantes e iguales a $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 17.500 \text{ cm}^4$ calcular, para las cargas dadas, la componente vertical del corrimiento del punto *a* de la ménsula unida a la viga.

Problema 12.21 Para la Fig. 12.57 con E e I constantes e iguales a $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 7.600 \text{ cm}^4$, calcular la situación y la magnitud del corrimiento vertical máximo de la viga *ab*.

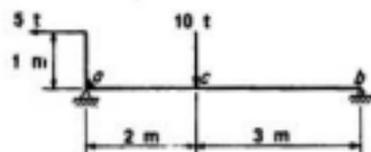


FIG. 12.57. Problema 12.21.

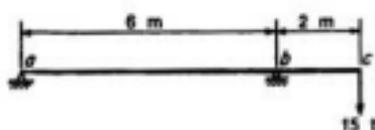


FIG. 12.58. Problema 12.22.

Problema 12.22 Con referencia a la Fig. 12.58 en la que $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 57.600 \text{ cm}^4$, si el apoyo en b cede hacia abajo 3 mm, determinar la situación y la magnitud del máximo corrimiento hacia arriba en la parte de la viga ab , producido por las cargas representadas y el cedimiento.

Problema 12.23 Para la Fig. 12.59, calcular la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo de la estructura, utilizando los teoremas del área de momentos o su adaptación de la carga elástica. E e I son constantes, $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 48.000 \text{ cm}^4$.

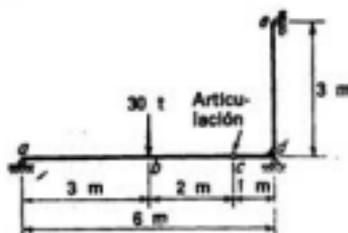


FIG. 12.59. Problema 12.23.

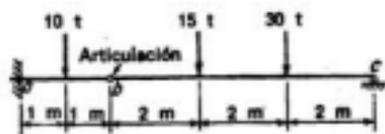


FIG. 12.60. Problema 12.24.

Problema 12.24 Para la Fig. 12.60, $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$ e $I = 23.000 \text{ cm}^4$. Calcular el corrimiento vertical máximo de esta viga, utilizando el método de la viga conjugada.

Problema 12.25 Con referencia a la Fig. 12.61, calcular la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo de la viga. E e I son constantes. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$, $I = 17.500 \text{ cm}^4$.

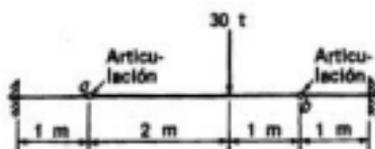


FIG. 12.61. Problema 12.25.

Problema 12.26 Para la Fig. 12.62, calcular, utilizando el método de la viga conjugada, la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo de la parte bc de la estructura. E e I son constantes, $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$, $I = 57.600 \text{ cm}^4$.

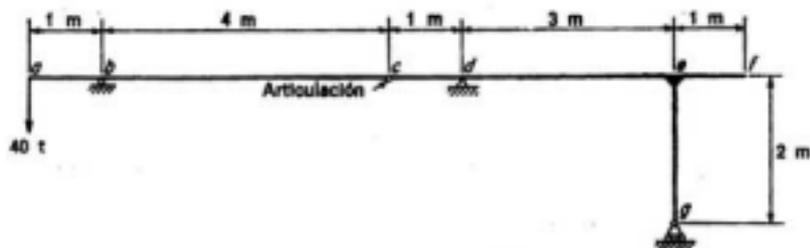


FIG. 12.62. Problema 12.26.

Problema 12.27 Con referencia a la Fig. 12.63, suponiendo que el par de 20 m t aplicado en b produce el momento de reacción de 10 m t representado en el apoyo a , calcular la posición y magnitud del corrimiento vertical máximo de la viga. $E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2$ e $I = 23.000 \text{ cm}^4$.

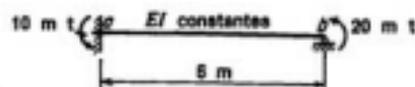


FIG. 12.63. Problema 12.27.

***Problema 12.28** Para la Fig. 12.64, hallar las componentes horizontal y vertical del corrimiento de los nudos del cuchillo, utilizando el método de Williot-Mohr. Trazar el diagrama de Williot, suponiendo el punto b fijo en posición y la barra ab en dirección. Utilizar una escala $1 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$ y colocar el punto b' en el ángulo inferior derecho de la página, aproximadamente a 2,5 cm del lado de abajo y a 7,5 cm del borde derecho. Entre paréntesis figuran las ΔL de las barras en milímetros.

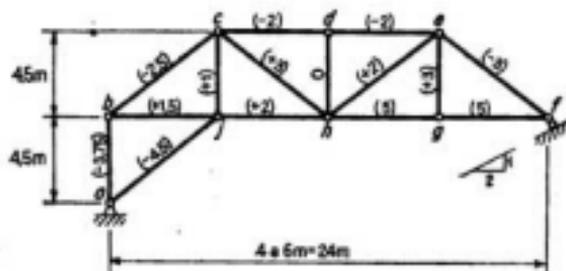


FIG. 12.64. Problema 12.28.

Problema 12.29 Utilizando el método de Williot-Mohr, hallar las componentes horizontal y vertical de todos los nudos del cuchillo en los problemas siguientes: a) Prob. 12.6; b) Prob. 12.7; c) Prob. 12.4; d) Prob. 12.9 y e) Problema 12.10.

Problema 12.30 Utilizando el método de la cadena de barras, calcular a) el corrimiento vertical de los nudos del cordón inferior del cuchillo del Prob. 12.15; b) el corrimiento vertical de los nudos del cordón superior del cuchillo del Prob. 12.7; c) el corrimiento horizontal de los nudos c, d, e, f y g del cuchillo del Prob. 12.6; d) el corrimiento horizontal de los nudos a, j, h y g del cuchillo del Prob. 12.6; e) el corrimiento vertical de los nudos de la cadena de barras $L_3 U_2 U_4 L_4$ del cuchillo del Prob. 12.4; f) el corrimiento vertical de los nudos del cordón inferior del arco tri-articulado del Ejemplo 12.21.

13

Análisis de tensiones en estructuras estáticamente indeterminadas

13.1 Introducción. En los últimos cuarenta años se ha utilizado cada vez más las estructuras estáticamente indeterminadas, debido indudablemente a su economía y a su mayor rigidez bajo las cargas móviles o movibles. La construcción de las estructuras de hormigón armado y las metálicas soldadas es tal, que dichas estructuras son generalmente total o parcialmente continuas en su acción estructural, por lo que suelen ser estáticamente indeterminadas. Por tanto, es cada vez más importante el conocimiento del análisis de las estructuras indeterminadas y cada vez se extiende más el uso de las mismas. Las vigas y cuchillos continuos, los arcos bi-articulados y sin articular, los puentes de pórticos rígidos, los puentes colgantes y las estructuras de edificios son ejemplos típicos de ellas.

Las estructuras estáticamente indeterminadas difieren de las determinadas en dos aspectos importantes:

1. En el estudio de las tensiones intervienen no solo las propiedades geométricas, sino también las elásticas, tales como el módulo de elasticidad, el área de la sección y el momento de inercia. Así, para llegar al proyecto final de una estructura indeterminada, es necesario asignar unos tamaños previos a las barras, hacer un análisis de tensiones de este proyecto, volver a proyectar los elementos para estas tensiones, hacer un nuevo análisis de tensiones para las nuevas dimensiones, continuando así hasta llegar al dimensionado final.

2. En general, en las estructuras indeterminadas se producen tensiones no solo a causa de las cargas, sino también por variaciones de temperatura, asentamientos de los apoyos, errores de fabricación, etc.

Para entender el estudio de tensiones de las estructuras indeterminadas, es necesario comprender primero la diferencia fundamental entre una estructura inestable, una estáticamente determinada y una estáticamente indeterminada. Ello justifica una ligera revisión de algunos conceptos fundamentales. Supongamos que la barra AB está sustentada solo en un apoyo articulado en A , como se ve en la Fig. 13.1a. Si se aplica la carga de 10 t a la barra, es indudable que girará libremente alrededor de la articulación A . Por tanto, una barra sustentada de esta forma es una *estructura inestable*. Sin embargo, por medio de un nuevo apoyo de rodillo en B , como se ve en la Fig. 13.1b, evitamos el giro alrededor de A y hemos hecho que la estructura sea *estable*; se ve fácilmente que es también una *estructura estáticamente determinada*.

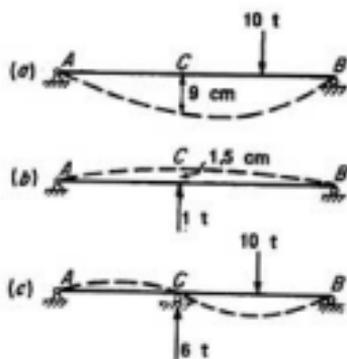
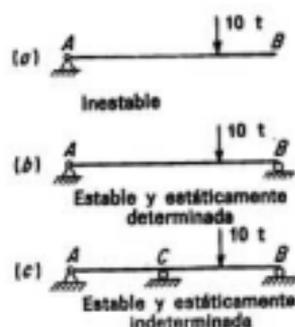


FIG. 13.1. Clasificación de estructuras.

FIG. 13.2. Superposición de efectos.

Si añadimos otro apoyo de rodillo en C, como se ve en la Fig. 13.1c, tenemos más reacciones que el mínimo necesario para el equilibrio estático y ya no será una estructura estáticamente determinada, sino una *estructura estáticamente indeterminada*. Con esta nueva disposición, no solo se evita que la barra gire o se traslade como un cuerpo rígido, sino que también, por la adición del apoyo en C, se evita que este punto se mueva verticalmente.

Pero esta observación sugiere inmediatamente un método por el que se puede calcular la reacción vertical en C. Supongamos que, si se quita provisionalmente el apoyo en C, la carga de 10 t que actúa sobre la viga simplemente apoyada en los restantes apoyos produce una flecha en C hacia abajo de 9 cm, como se ve en la Fig. 13.2a. Si se restablece ahora el apoyo, tendrá que producir una reacción hacia arriba, para hacer volver al punto C a la posición de flecha nula. La magnitud que debe tener esta reacción se puede determinar hallando primero cuánto hace descender al punto C una carga de 1 t. Si una carga de 1 t que actuase en el punto C de la viga apoyada en A y B hiciera descender este punto 1,5 cm, como se ve en la Fig. 13.2b, una carga hacia arriba de 6 t en el punto C, junto con la de 10 t, producirían una flecha total nula en este punto, como se ve en la Fig. 13.2c. La reacción vertical en el punto C de la viga representada en la Fig. 13.1c debe ser, por tanto, de 6 t hacia arriba. Una vez determinada esta reacción, se pueden calcular las otras en A y B por la estática.

13.2 Empleo de las ecuaciones de superposición en el estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas. Muchas estructuras indeterminadas sencillas se pueden estudiar del modo dicho, pero en el caso en que sean más complicadas, el método se presta a confusión. Por tanto, es necesario desarrollar un procedimiento cuya aplicación facilite la resolución de los problemas más complicados y permita tratar los sencillos con la máxima eficacia.

Se pueden desarrollar las ideas necesarias para aplicar un procedimiento más metódico, considerando un ejemplo típico como el de la viga indeterminada de la Fig. 13.3a, cuyos apoyos no pueden ceder. Esta viga es indeterminada en primer grado, esto es, hay una componente de reacción más que el mínimo necesario para el equilibrio estático. Se puede considerar una de las reacciones como extra, o *superabundante*. En este caso, consideraremos la reacción vertical en b como la reacción *superabundante*. Estas reacciones superabundantes reciben a veces también los nombres de sobrantes, superfluos, o redundantes.

Supongamos que a la estructura real le quitamos el apoyo vertical en b y la reacción vertical X_b que proporciona. La viga en voladizo estáticamente determinada y estable

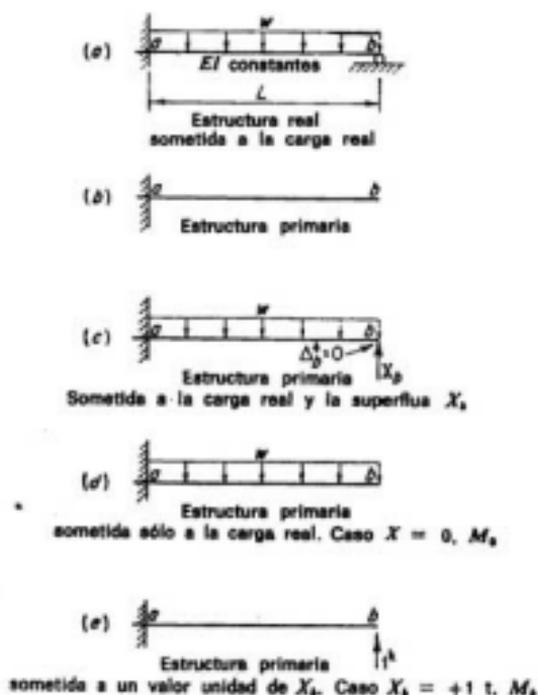


FIG. 13.3. Organización del estudio por las ecuaciones de superposición.

que queda después de quitar este apoyo superabundante se llama *estructura primaria* (ver la Fig. 13.3b). Ahora podemos someter a esta estructura primaria al efecto combinado de las mismas cargas de la estructura verdadera, más la fuerza superabundante X_b , como se ve en la Fig. 13.3c.

Si la fuerza superabundante X_b que actúa en la estructura primaria tiene el mismo valor que la reacción en b de la estructura real, el esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera y las reacciones en el punto a son las mismas para las dos estructuras. Si las condiciones de tensiones en las estructuras real y primaria son las mismas, las condiciones de deformación también serán las mismas. Si las condiciones de deformación son iguales y los corrimientos de los apoyos en el punto a de cada una de ellas son idénticos, también serán iguales los corrimientos en cualquier otro punto. Por tanto, como no hay corrimiento vertical en el apoyo b de la estructura real, el del punto b de la estructura primaria, debido a la acción conjunta de las cargas aplicadas y de X_b , debe ser también nulo.

Es posible expresar matemáticamente esta última afirmación y obtener así una ecuación mediante la que se puede determinar el valor de la incógnita superabundante X_b . Suponiendo que la dirección positiva de X_b es hacia arriba, introduciremos la notación siguiente:

Δ_b = corrimiento hacia arriba del punto b de la estructura primaria, debida a todas las causas (ver Fig. 13.3c)

Δ_{b_0} = corrimiento hacia arriba del punto b de la estructura primaria, debido sola-

mente a la carga aplicada con la superabundante quitada, lo que se llamará «caso $X = 0$ » (ver Fig. 13.3d)

Δ_{b0} = corrimiento hacia arriba del punto b de la estructura primaria, debido solamente a X_b

Es imposible calcular Δ_{b0} sin conocer antes la magnitud de X_b . Escribiendo también:

δ_{b0} = corrimiento hacia arriba del punto b de la estructura primaria, debido solamente a una carga unidad hacia arriba en b , lo que se llamará «caso $X_b = +1$ » (ver Fig. 13.3e)

podremos decir, siempre que sea válido el principio de superposición, que

$$\frac{\Delta_{b0}}{X_b} = \frac{\delta_{b0}}{1 \text{ t}} \quad (a)$$

por lo que
$$\Delta_{b0} = \frac{X_b}{1 \text{ t}} \delta_{b0} \quad \text{o} \quad \Delta_{b0} = X_b \delta_{b0} \quad (b)$$

donde, como hemos sustituido $X_b/1 \text{ t}$ por X_b , deberemos considerar en adelante que X_b no tiene dimensión y representa simplemente el valor numérico de X_b (esto es, el número de fuerzas de 1 t representadas por esta fuerza superabundante)¹. No obstante, es un hecho físico que el corrimiento total debido a todas las causas, Δ_b , es igual a la superposición de las contribuciones de los efectos separados, es decir, la carga aplicada y la superabundante X_b . Así, pues,

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + \Delta_{b1} \quad (c)$$

o, sustituyendo de la Ec. (b),

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + X_b \delta_{b0} \quad (13.1)$$

A esta ecuación se le llama *ecuación de superposición* del corrimiento del punto b en la estructura primaria.

Como Δ_b debe ser cero, podremos despejar X_b de la Ec. (13.1) y obtener

$$X_b = - \frac{\Delta_{b0}}{\delta_{b0}} \quad (13.2)$$

Evidentemente, es muy sencillo calcular el valor numérico de Δ_{b0} y δ_{b0} por cualquiera de los métodos disponibles para calcular los corrimientos de las vigas. Al sustituir estos valores en la Ec. (13.2) se les considera positivos cuando los corrimientos son hacia arriba, como se ha indicado antes. Un valor positivo de X_b indicará, pues, que actúa hacia arriba; uno negativo, que va hacia abajo. En los ejemplos de la Sec. 13.4 se expone la organización de los cálculos numéricos en los problemas como éste.

¹ También podíamos haber escrito la Ec. (a) como sigue:

$$\Delta_{b0} = X_b \frac{\delta_{b0}}{1 \text{ t}} \quad \text{o} \quad \Delta_{b0} = X_b \delta_{b0} \quad (b')$$

en la que se llama a δ_{b0} *coeficiente de flexibilidad* (o *flexión*). Este coeficiente expresa el corrimiento vertical hacia arriba del punto b por unidad de fuerza hacia arriba en b y tiene unidades de longitud por unidad de fuerza. Si hubiéramos elegido este sistema, X_b tendría en adelante dimensión de fuerza.

13.3 Estudio general de la utilización de las ecuaciones de superposición en el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas. El método propuesto en la Sec. 13.2 es el más general para el análisis de tensiones de las estructuras indeterminadas. Naturalmente que hay otros métodos que son superiores para ciertos tipos determinados de estructuras, pero no hay ningún otro tan flexible y general como el basado en el empleo de las ecuaciones de superposición. Es aplicable a cualquier estructura, bien sea viga, pórtico o cuchillo o una combinación cualquiera de estos tipos simples, lo mismo si se trata de estudiar el efecto de cargas, variaciones de temperatura, cedimiento de apoyos, errores de fabricación o cualquier otra causa.

Solo hay una limitación al empleo del método: que sea válido el principio de superposición. De los comentarios de la Sec. 2.12, se recordará que el principio de superposición es válido excepto si las características geométricas de la estructura varían sensiblemente durante la aplicación de las cargas, o el material no sigue la ley de Hooke. Sin embargo, todos los demás métodos estudiados aquí están sujetos también a la misma limitación.

Antes de presentar ejemplos numéricos de aplicación de este método a algunos problemas típicos, es aconsejable recalcar y ampliar las ideas expuestas en la Sec. 13.2. Puede que el lector encuentre alguna dificultad en entender el estudio generalizado que sigue. No obstante, si lee este artículo, asimilando lo que pueda, y luego estudia los ejemplos de las Secs. 13.4 y 13.5, podrá entender el resto cuando lo vuelva a leer.

Supongamos que queremos estudiar una estructura indeterminada en particular, para alguna o todas las diversas causas que puedan producir tensiones en la misma. La estructura puede ser de cualquier tipo, e indeterminada de cualquier grado. En todo caso, el primer paso es determinar el grado de indeterminación. Supongamos que es indeterminada de grado n . Eligiremos n sujeciones superabundantes, las quitaremos de la estructura y las sustituiremos por las n componentes de tensión superfluas que ellas proporcionan a la estructura. Estas n , X_1, X_2, \dots, X_n , actuarán conjuntamente con las cargas aplicadas en la *estructura primaria* que quede después de quitar las n sujeciones.

En la mayoría de los problemas puede hacerse una amplia elección de superabundantes, pero, generalmente, una elección juiciosa ahorra muchos cálculos. En la Sección 13.6 se estudian algunos principios a seguir para esa elección. Por ahora es suficiente decir que deben elegirse de tal modo que la estructura primaria resultante sea estable y estáticamente determinada¹.

Una vez elegidas las superabundantes, podremos ver que si las fuerzas superabundantes que actúan en la estructura primaria tienen los mismos valores que las fuerzas proporcionadas por las sujeciones correspondientes en la estructura real, todas las condiciones de tensiones en las estructuras real y primaria son las mismas. Como consecuencia, las condiciones de deformación de las dos son iguales. Si, además, los corrimientos de los apoyos de la estructura primaria son los mismos que los de los apoyos correspondientes de la real, los corrimientos en cualquier otro punto serán también idénticos en las dos estructuras. Por tanto, se puede deducir que los corrimientos de los puntos de aplicación de las n superabundantes en la estructura primaria deben ser iguales a los corrimientos de los puntos correspondientes de la real.

Si se escriben n ecuaciones de superposición para estos n corrimientos, contendrán a las n superabundantes como incógnitas. Como las n incógnitas deben satisfacer simultáneamente a las n ecuaciones, la resolución del sistema nos da los valores de las n incógnitas superabundantes.

¹ A veces es conveniente elegir una estructura primaria estáticamente indeterminada y estable (ver la Sección 14.3).

Obsérvese que los valores de X_a , X_b , etc., obtenidos carecen de dimensión. Es evidente, pues X_a , X_b , etc., deben ser simples números para que todos los términos de la Ec. (13.3) se expresen en las mismas unidades de corrimientos. Para asignar unidades a estos valores de X_a , X_b , etc., es necesario observar las unidades de los valores unitarios de estas superabundantes que se usaron en los cálculos de δ_{aa} , δ_{ab} , etc.

También debe observarse que las superabundantes elegidas pueden ser fuerzas o pares. Por tanto, los corrimientos expresados por Δ o δ pueden representar una deformación lineal o angular, según se refieran al punto de aplicación de una fuerza o un par. En los ejemplos que siguen se indica la dirección positiva de una deformación cualquiera por una flecha pequeña unida al símbolo, como $\Delta_a \uparrow$, $\Delta_b \downarrow$, $\Delta_c \rightarrow$, etc.

13.4 Ejemplos aclaratorios del método de análisis de tensiones utilizando las ecuaciones de superposición. Los ejemplos siguientes aclaran la aplicación del método de las ecuaciones de superposición al análisis de tensiones de estructuras indeterminadas típicas, sometidas a cargas exteriores dadas.

Después de determinar el grado de indeterminación, existe una gran amplitud para elegir las superabundantes. Sin embargo, *no hay que cometer nunca el error de elegir como superabundante una componente de reacción estáticamente determinada, fuerza de barra, cortante o momento. Si tal cantidad es estáticamente determinada, es necesaria para la estabilidad; y si se suprime, queda una estructura primaria inestable.* Sin embargo, un error de esa naturaleza no pasaría nunca inadvertido, pues cualquier intento de análisis de las tensiones de la estructura primaria conduciría a resultados imposibles o incompatibles.

El lector puede considerar otras elecciones de las superabundantes en los problemas siguientes y tratar de ver si en cada caso hay otra elección que exija menos cálculos numéricos que la adoptada. En la Sec. 13.6 se estudia con más detalle el asunto de la elección.

Se puede elegir arbitrariamente el sentido positivo de una superabundante, debiéndose considerar positivo el corrimiento de su punto de aplicación cuando tenga este mismo sentido. La consideración de algunos de estos ejemplos pondrá en evidencia que el resultado final obtenido para la dirección de las superabundantes no estará afectado por la elección inicial del sentido positivo.

Al aplicar el método de superposición, se puede usar cualquier procedimiento para calcular los corrimientos que intervienen. Naturalmente, hay que tener cuidado, como en todos los problemas de corrimientos, al manejar las unidades y los signos. *Obsérvese de nuevo que los valores de X_a , X_b , etc., obtenidos son simples valores numéricos, esto es, carecen de dimensión.* Tales valores numéricos indican, por ejemplo, que X_a es 10,5 veces mayor que la carga unidad en el caso $X_a = +1$ t. Así, si ésta es una carga unitaria de 1 t, habrá que considerar a X_a como 10,5 t al establecer los resultados finales o al utilizarla en cálculos sucesivos.

Si se usan siempre las mismas unidades de fuerza y distancia en un problema, no habrá dificultades, pero éstas pueden presentarse si mezclamos metros, centímetros, toneladas y kilos en los que hay más de un tipo de deformación. Lo mismo puede suceder en los casos en que intervienen variaciones de temperatura, cedimientos de apoyos, etcétera, como se estudiará en la Sección 13.5.

Se observará que el corrimiento total Δ_a del punto de aplicación de una superabundante X_a debido a todas las causas, es casi siempre igual a cero. En realidad, el único caso en que Δ_a tendrá un valor distinto de cero será cuando X_a represente una fuerza o par superabundante debidos a la reacción de un apoyo de la estructura real, que implique un movimiento en la dirección de X_a .

Ejemplo 13.1 Calcular las reacciones de la viga representada. E e I son constantes.

La estructura es indeterminada en primer grado.

Elijamos X_0 como superabundante. Será

$$\Delta_1^1 = \Delta_{00} + X_0 \delta_{00} = 0$$

Calculamos Δ_{00} por el método de los trabajos virtuales.

$$\Delta_{00} = \sum Q \delta = \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$M_Q = M_1 \quad M_P = M_0$$

$$U(1)(\Delta_{00}^1) = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI}$$

Desde b hasta a ,

$$M_1 = x \quad M_0 = -x^2$$

$$U(1)(\Delta_{00}^1) = \int_0^5 (x)(-x^2) \frac{dx}{EI}$$

$$\Delta_{00} = \frac{-156,25}{EI} \text{ m}^3$$

$$\Delta_{00} \quad M_Q = M_1 \quad M_P = M_0$$

$$U(1)(\Delta_{00}^1) = \int M_1^2 \frac{dx}{EI}$$

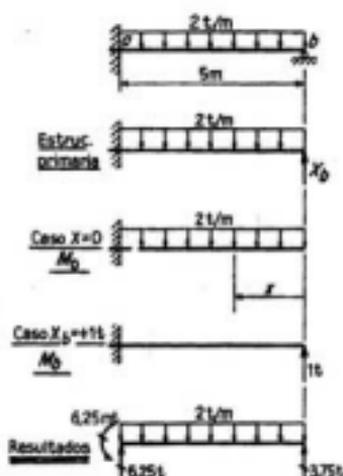
$$U(1)(\Delta_{00}^1) = \int_0^5 (x)^2 \frac{dx}{EI} \quad \delta_{00} = \frac{41,67}{EI} \text{ m}^3$$

Luego

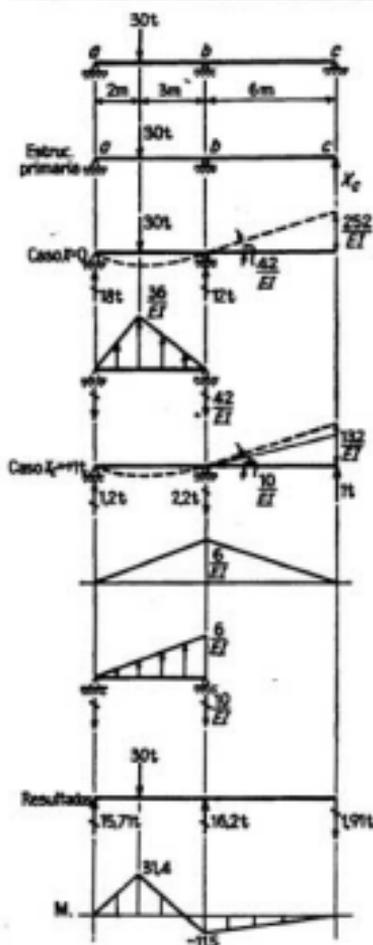
$$\frac{-156,25}{EI} + \frac{41,67}{EI} X_0 = 0$$

$$\therefore X_0 = +3,75 \quad \therefore \text{hacia arriba}$$

Luego, por la estática, se halla que las reacciones en a son las representadas.



Ejemplo 13.2 Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momento de la viga de la figura. E e I son constantes.



La estructura es indeterminada en primer grado. Elegimos a X_c como superabundante. Será

$$\Delta_c^1 = \Delta_{0c} + X_c \delta_{0c} = 0$$

Calculemos Δ_{0c} y δ_{0c} por el método de la carga elástica.

Δ_{0c} : Calcularemos primero la reacción en b de la viga imaginaria.

$$\begin{aligned} 36 \times 1 &= 36 & 36 \times 1,33 &= 48 \\ 36 \times 1,3 &= 54 & 54 \times 3 &= 162 \\ & & \frac{210}{5} &= 42 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} EI \Delta_{0c} &= 42 \times 6 = 252t \\ \therefore \Delta_{0c} &= \frac{+252 t m^3}{EI} \end{aligned}$$

δ_{0c} : Calcularemos primero la reacción en b de la viga imaginaria.

$$\frac{3}{4} \times 6 \times 2,5 = 10$$

Luego,

$$\begin{aligned} EI \delta_{0c} &= 10 \times 6 + 6 \times 3 \times 4 = 132t \\ \therefore \delta_{0c} &= \frac{+132 t m^3}{EI} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{252}{EI} + \frac{132}{EI} X_c &= 0 \\ \therefore X_c &= \frac{-191}{EI} \quad \therefore \text{hacia abajo} \end{aligned}$$

Ahora se puede calcular fácilmente la reacción en a y b por la estática. De igual modo, se puede trazar el diagrama M .

Ejemplo 13.3 Calcular las reacciones y las fuerzas de barra del cuchillo de la figura. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

Indeterminada en primer grado. Elegimos X_2 como superabundante. Será

$$\Delta_1^1 = \Delta_{10} + X_2 \delta_{10} = 0$$

Calculemos Δ_{10} y δ_{10} por el método de los trabajos virtuales.

$$\sum Q \delta = \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_r \frac{L}{AB}$$

$$\Delta_{10}: F_Q = F_b \quad F_r = F_a \quad (I) \quad (\Delta_{10}^1) = \frac{1}{E} \sum F_b F_a \frac{L}{A}$$

$$\delta_{10}: F_Q = F_b \quad F_r = F_b \quad (I) \quad (\delta_{10}^1) = \frac{1}{E} \sum F_b^2 \frac{L}{A}$$

Barras	L	A	$\frac{L}{A}$	F_a	F_b	$F_b F_a \frac{L}{A}$	$F_b^2 \frac{L}{A}$	$X_2 F_b$	F
Unid.	m	cm ²	m/cm ²	t	t	t ² m/cm ²	t ² m/cm ²	t	t
ab	9	60	0,15	-30	-0,375	+1,687	+0,021	+3,18	-26,82
bc	9	60	0,15	-30	-0,375	+1,687	+0,021	+3,18	-26,82
ad	15	75	0,2	+30	+0,625	+6,250	+0,038	-5,20	+44,71
dc	15	75	0,2	-30	+0,625	-6,250	+0,038	-5,20	-55,20
bd	12	60	0,2	0	-1,0	0	+0,200	+8,47	+8,47
						+3,374	+0,398		

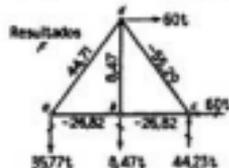
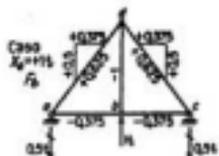
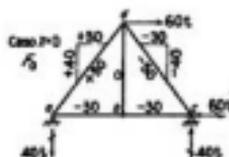
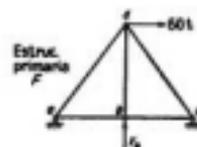
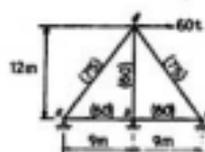
$$(I) \quad (\Delta_{10}^1) = \frac{+3,374 \text{ t}^2 \text{ m/cm}^2}{E} \quad \Delta_{10} = \frac{3,374 \text{ t m/cm}^2}{E}$$

$$(I) \quad (\delta_{10}^1) = \frac{+0,398 \text{ t}^2 \text{ m/cm}^2}{E} \quad \delta_{10} = \frac{0,398 \text{ t m/cm}^2}{E}$$

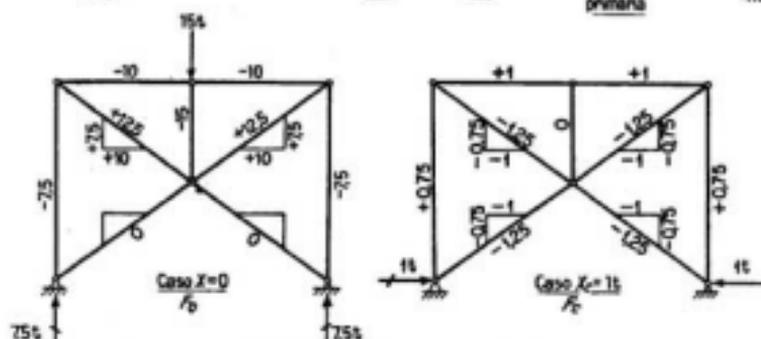
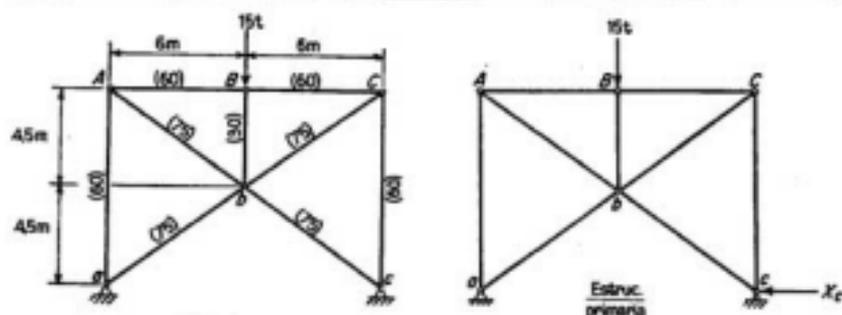
$$\therefore \frac{3,374}{E} + \frac{0,398}{E} X_2 = 0 \quad X_2 = \underline{-8,47} \quad \therefore \text{hacia abajo}$$

Ahora se pueden hallar las restantes reacciones y fuerzas de barra por la estática. También se podrían calcular las fuerzas de barra fácilmente por una tabla, observando que por superposición

$$F = F_a + X_2 F_b$$



Ejemplo 13.4 Calcular las reacciones del cuchillo de la figura. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, son las representadas entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.



Indeterminada en primer grado. Elegimos X_c como superabundante.

$$\Delta_c^- = \Delta_m + X_c k_m = 0$$

Calcularemos Δ_m y δ_m por el método de los trabajos virtuales.

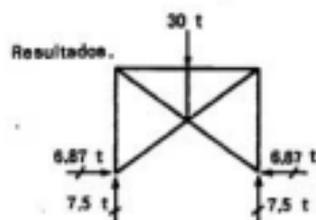
$$\Delta_m: \quad F_Q = F_s \quad F_P = F_s \quad (1) \quad (\Delta_m^-) = \frac{1}{E} \sum F_s P_s \frac{L}{A}$$

$$k_m: \quad F_Q = F_s \quad F_P = F_s \quad (1) \quad (k_m^-) = \frac{1}{E} \sum F_s^2 \frac{L}{A}$$

A causa de la simetría de la carga, estructura y superabundante, solo se han incluido en la tabla la mitad de las barras.

$$\frac{-6,812}{E} + \frac{0,992}{E} X_c = 0$$

$$\therefore X_c = +6,87 \quad \therefore +$$



Barra	L	A	$\frac{L}{A}$	F_s	F_c	$F_s F_c \frac{L}{A}$	$F_s^2 \frac{L}{A}$
Unidades	m	cm ²	m/cm ²	t	t	t ² m/cm ²	t ² m/cm ²
AB	6	60	0,10	-10	+1,0	-1	+0,100
ab	7,5	75	0,10	0	-1,25	0	+0,156
Aa	9	60	0,15	-7,5	+0,75	-0,844	+0,084
Ab	7,5	75	0,10	+12,5	-1,25	-1,562	+0,156
$\frac{1}{2} Bb$	2,25	30	0,075	-15	0	0	0
$\frac{1}{2} Cc$						-3,406	+0,496

$$\therefore \Delta_m = \frac{-6,812 \text{ t m/cm}^2}{E} \quad \delta_m = \frac{0,992 \text{ t m/cm}^2}{E}$$

Ejemplo 13.5 Calcular las fuerzas en las barras del cuchillo de la figura. E y A son constantes en todas ellas.

Este cuchillo es estáticamente determinado exteriormente, pero indeterminado en segundo grado respecto a sus fuerzas de barra. Cortamos las barras bC y Cd y elijamos sus fuerzas de barra como superabundantes. Será

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0 \quad (I) \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0 \quad (II) \end{aligned}$$

Por la ley de Maxwell, $\delta_{12} = \delta_{21}$ y por la simetría de la estructura y de la elección de las superabundantes, $\delta_{11} = \delta_{22}$. Por tanto, solo hay que calcular cuatro corrimientos: Δ_{10} , Δ_{20} , δ_{12} y δ_{11} . Utilizando el método de los trabajos virtuales, hallamos

$$\begin{aligned} (I) \quad i(EA\Delta_{10}) &= \Sigma F_i F_0 L = -306 \text{ t}^2 \text{ m} \\ (I) \quad i(EA\Delta_{20}) &= \Sigma F_i F_0 L = +114 \text{ t}^2 \text{ m} \\ (I) \quad i(EA\delta_{12}) &= \Sigma F_i F_2 L = +3,84 \text{ t}^2 \text{ m} \\ (I) \quad i(EA\delta_{11}) &= \Sigma F_i^2 L = +25,92 \text{ t}^2 \text{ m} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (I) y (II) y eliminando EA ,

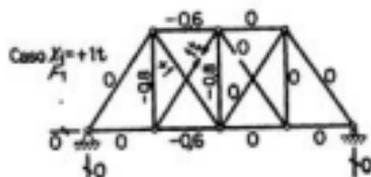
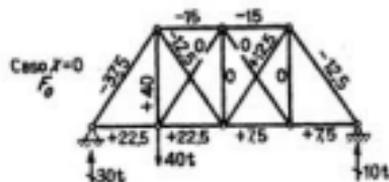
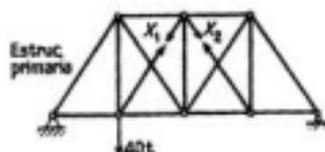
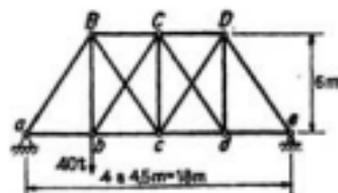
$$\begin{aligned} -306 + 25,92X_1 + 3,84X_2 &= 0 \\ +114 + 3,84X_1 + 25,92X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema,

$$X_1 = +12,7 \quad X_2 = -6,3$$

En una barra cualquiera,

$$F = F_0 + X_1 F_1 + X_2 F_2$$



Barra	L	F_2	F_1	F_2	$F_2 F_1 L$	$F_2 F_2 L$	$F_1^2 L$	$F_1 F_2 L$	$F_1 X_1$	$F_2 X_2$	F
Unidades	m	t	t	t	t ² m	t ² m	t ² m	t ² m	t	t	t
bc	4,5	+22,5	-0,6	0	-60,75	0	+1,62	0	-7,6	0	+14,9
cd	4,5	+7,5	0	-0,6	0	-20,25	0	0	0	+3,8	+11,3
BC	4,5	-15	-0,6	0	+40,50	0	+1,62	0	-7,6	0	-22,6
CD	4,5	-15	0	-0,6	0	+40,50	0	0	0	+3,8	-11,2
bB	6	+40	-0,8	0	-192	0	+3,84	0	-10,2	0	+29,8
cC	6	0	-0,8	-0,8	0	0	+3,84	+3,84	-10,2	+5,0	-5,2
dD	6	0	0	-0,8	0	0	0	0	0	+5,0	+5,0
Bc	7,5	-12,5	+1	0	-93,75	0	+7,5	0	+12,7	0	+0,2
bC	7,5	0	+1	0	0	0	+7,5	0	+12,7	0	+12,7
cD	7,5	+12,5	0	+1	0	+93,75	0	0	0	-6,3	+6,2
Cd	7,5	0	0	+1	0	0	0	0	0	-6,3	-6,3
Σ					-306	+114	+25,92	+3,84			

Razonamiento:

Al tabular los cálculos de este cuchillo no es necesario incluir las barras que no tienen fuerza de barra F_1 ni F_2 . Sin embargo, hay que asegurarse de incluir las barras superabundantes. ¿Por qué?

Puede haber alguna duda respecto al cortar las barras del cuchillo, como se ha hecho en este problema. A veces, los principiantes dudan acerca de si los dos extremos de una barra cortada son inestables, pues, como se ve en el diagrama anterior, no hay nada que les impida girar alrededor de las articulaciones. Para ser totalmente exactos, deberíamos haber representado el corte como en la Fig. 13.4. Como el cortante y el momento en una barra recta articulada en los dos extremos



FIG. 13.4. Representación de la supresión de la capacidad de transmitir fuerza axial.

son estáticamente determinados, no se pueden suprimir las sujeciones de este tipo. Así, cuando decimos que cortamos la barra, queremos significar que suprimimos su capacidad de soportar fuerza axial, pero manteniendo la de resistir al cortante y momento. Esto se puede conseguir cortando la barra e insertando luego un dispositivo telescópico como el representado.

Sin embargo, no es práctico representar este detalle cada vez que se suprime la capacidad de soportar carga axial de una barra que está articulada en sus extremos. Por ello, en estos casos, y a sabiendas de que ese detalle quede implícito, se representará el corte como se ha hecho en el diagrama de este ejemplo.

Estas observaciones son también aplicables al tirante del Ejemplo 13.8.

Sustituyendo estos valores en (1) y (2) y suprimiendo EI_1 ,

$$\begin{aligned}40 + 2,22X_b + 0,28X_c &= 0 \\41 + 0,28X_b + 1,55X_c &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema,

$$X_b = \underline{-15,00} \quad X_c = \underline{23,66}$$

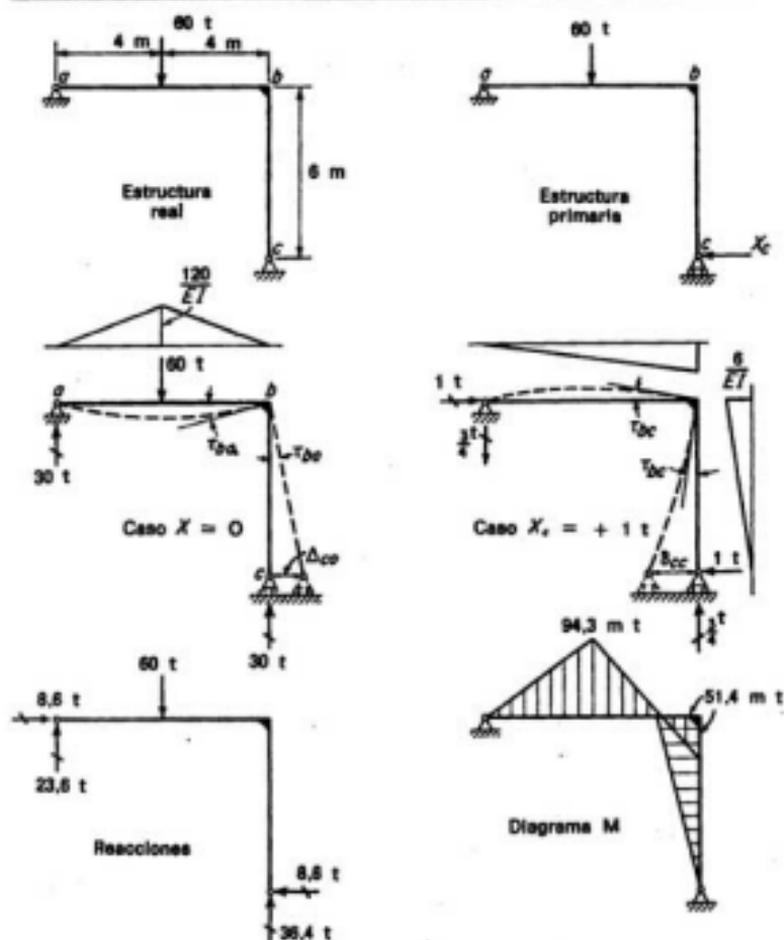
Conocidos estos momentos, es fácil aislar varias partes de la viga, y, utilizando la estática, calcular cortantes, reacciones y momentos flectores, llegando a los resultados representados.

Razonamiento:

Cuando elegimos los momentos, en los apoyos b y c , como superabundantes, suprimimos la sujeción a los momentos en esos puntos de la estructura real, esto es, insertamos en ellos articulaciones.

Obsérvese cómo se trata en este problema la variabilidad de I . Se elige una I como base y se expresan todas las demás en función de ella. Una vez hecho esto, no se necesita sustituir en el problema los valores verdaderos de las I .

Ejemplo 13.7 Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momentos flectores del pórtico de la figura. E e I son constantes. Considerar solo deformación de flexión.



Este pórtico es indeterminado en primer grado. Elegiremos X_c como superabundante. Será $\Delta_{1c} = \Delta_{1c} + X_c \delta_{1c} = 0$. Calcularemos Δ_{1c} y δ_{1c} por el teorema del área de momentos.

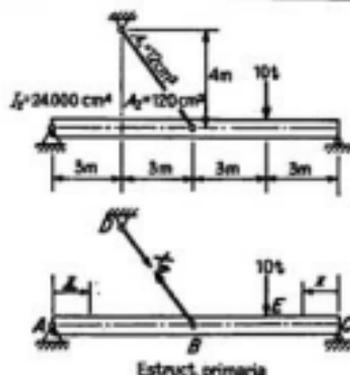
$$EI \tau_{1c} = (120)(4) \left(\frac{4}{8} \right) = 240 \quad \therefore \Delta_{1c} = - \left(\frac{240}{EI} \right) (6) = \frac{-1.440 \text{ t m}^3}{EI}$$

$$EI \tau_{1c} = (6)(4) \left(\frac{3,3}{8} \right) = 16 \quad \therefore \delta_{1c} = \left(\frac{16}{EI} \right) (6) + \left(\frac{6}{EI} \right) (3)(4) = + \frac{168 \text{ t m}^3}{EI}$$

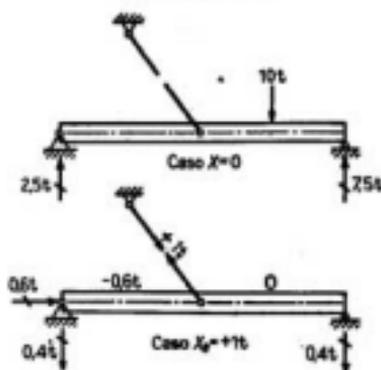
$$\text{De donde} \quad \frac{-1.440}{EI} + \frac{168}{EI} X_c = 0 \quad X_c = +8,57 \quad \therefore +$$

Los restantes cálculos se pueden hacer fácilmente por medio de la estática.

Ejemplo 13.8 Calcular la fuerza en el tirante de la estructura de la figura.



Estruct. primaria



La estructura es indeterminada en primer grado. Cortamos el tirante y elegimos su fuerza de barra como superabundante. Será

$$\Delta_{20} = \Delta_{20} + X_0 \delta_{20} = 0$$

Calcularemos Δ_{20} y δ_{20} por el método de los trabajos virtuales incluyendo la deformación debida al momento y a la fuerza axial.

$$\sum Q\delta = \sum F_0 F_1 \frac{L}{AE} + \sum \int M_0 M_1 \frac{ds}{EI}$$

Desde A a B,

$$\begin{aligned} 0 < x < 6 & \quad L = 6 \\ M_0 = 2,5x & \quad F_0 = 0 \\ M_1 = -0,4x & \quad F_1 = -0,6 \end{aligned}$$

Desde C a E,

$$\begin{aligned} 0 < x < 3 & \\ M_0 = 7,5x & \quad F_0 = 0 \\ M_1 = -0,4x & \quad F_1 = 0 \end{aligned}$$

Desde E a B,

$$\begin{aligned} 3 < x < 6 & \\ M_0 = 30 - 2,5x & \quad F_0 = 0 \\ M_1 = -0,4x & \quad F_1 = 0 \end{aligned}$$

Desde D a B,

$$\begin{aligned} L = 5 & \\ M_0 = 0 & \quad F_0 = 0 \\ M_1 = 0 & \quad F_1 = +1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (F_0 \delta_{20}) &= \sum F_0 F_1 \frac{L}{AE} + \sum \int M_0 M_1 \frac{ds}{EI} = 0 + \int_0^6 (2,5x)(-0,4x) \frac{dx}{EI_1} \\ & \quad + \int_0^3 (7,5x)(-0,4x) \frac{dx}{EI_1} + \int_3^6 (30 - 2,5x)(-0,4x) \frac{dx}{EI_1} \\ & \quad \therefore EI_1 \Delta_{20} = -198 \text{ t m}^3 \\ \int (F_1 \delta_{20}) &= \sum F_1^2 \frac{L}{AE} + \sum \int M_1^2 \frac{ds}{EI} = \frac{(-0,6)^2(6)}{EA_2} + \frac{(1^2)(5)}{EA_1} \\ & \quad + 2 \int_0^6 (-0,4x)^2 \frac{dx}{EI_2} \quad \therefore EI_2 \delta_{20} = +24,08 \text{ t m}^3 \end{aligned}$$

Pues

$$\frac{I_1}{A_2} = \left(\frac{24.000}{10^8} \right) \left(\frac{10^4}{120} \right) = \left(\frac{2}{10^2} \right) \text{ m}^2 \quad e \quad \frac{I_2}{A_1} = \left(\frac{24.000}{10^8} \right) \left(\frac{10^4}{12} \right) = \left(\frac{2}{10} \right) \text{ m}^2$$

$$\text{luego,} \quad \frac{-198}{EI_1} + \frac{24,08}{EI_2} X_0 = 0 \quad \therefore X_0 = +8,2 \quad \therefore \text{tracción}$$

Si se hubiera despreciado la deformación debida a la fuerza axial hubiéramos obtenido

$$X_0 = \frac{198}{23,04} = +8,6$$

13.5 Otros ejemplos referentes a temperatura, asentos, etc. Los siguientes ejemplos aclaran la aplicación del método de la ecuación de superposición al análisis de tensiones de estructuras indeterminadas típicas sometidas a variaciones de temperatura, movimiento de apoyos, errores de fabricación, etc.

Estos problemas no son en esencia más difíciles que los referentes solo al efecto de cargas. *Recuérdese siempre, sin embargo, que los corrimientos Δ_{aT} , Δ_{a0} , etc., se refieren a puntos de la estructura primaria, producidos por una variación de temperatura en esta estructura primaria, cedimiento de los apoyos de la misma, etc. Si se superponen estos cedimientos con las contribuciones de cada superabundante, su suma ha de ser tal que el corrimiento total del punto a de la estructura primaria sea igual al desplazamiento conocido del punto correspondiente de la estructura real.*

Ejemplo 13.9 Calcular las fuerzas de barra debidas a un aumento de 33°C de la temperatura en las barras aB, BC y Cd. En las demás barras no hay variación. $\alpha_s = 0,000012$ por $^{\circ}\text{C}$. $E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2$. Las secciones, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis.

Este cuchillo es indeterminado en primer grado. Corramos la barra bc y elegimos su fuerza de barra como superabundante. Tendremos:

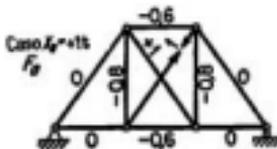
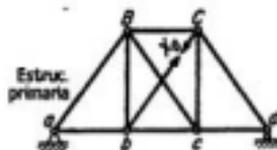
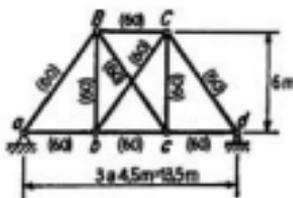
$$\Delta_{a'}^{\leftarrow} = \Delta_{aT} + X_a \delta_{aa} = 0$$

Utilizando el método de los trabajos virtuales,

$$\Delta_{aT}: F_Q = F_a$$

$$(I) (\Delta_{aT}^{\leftarrow}) = \sum F_a \alpha \Delta L = \alpha \sum F_a \Delta L$$

$$\delta_{aa}: F_Q = F_T = F_a \quad (I) (\delta_{aa}^{\leftarrow}) = \frac{1}{E} \sum F_a^2 \frac{L}{A}$$



Barras	L	A	$\frac{L}{A}$	F_a	$F_a^2 \frac{L}{A}$	t	$F_a L$	$X_a F_a$
Unid.	m	cm ²	m/cm ²	t	t ² m/cm ²	°C	t °C m	t
Bc	4,5	60	0,075	-0,6	+0,027	+33	-89,10	-3,11
bc	4,5	60	0,075	-0,6	+0,027	0	0	-3,11
ab	6	60	0,1	-0,8	+0,064	0	0	-4,15
Cd	6	60	0,1	-0,8	+0,064	0	0	-4,15
Bc	7,5	60	0,125	+1,0	+0,125	0	0	+3,19
bC	7,5	60	0,125	+1,0	+0,125	0	0	+3,19
Σ					+0,432		-89,10	

$$\Delta_{aT} = -(89,10)^{\circ\text{C}} \text{ m } (0,000012)^{\circ\text{C}} = -0,00107 \text{ m}$$

$$\delta_{aa} = \frac{0,432 \text{ t m/cm}^2}{2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2} = +0,000206 \text{ m}$$

$$-0,00107 + 0,000206 X_a = 0 \quad X_a = +5,19$$

\therefore tracción

Ejemplo 13.10 Calcular las fuerzas de barra de los dos arcos de celosía bi-articulados del Ejemplo 13.4 producidas al forzar la barra AB para llevarla a su sitio aunque se ha fabricado 3 mm demasiado corta.

En este caso,

$$\Delta_{\alpha}^* = \Delta_{\alpha X} + X_1 \delta_{\alpha X} = 0$$

Utilizando el método de los trabajos virtuales, se puede calcular $\Delta_{\alpha X}$ como sigue, utilizando la información del Ejemplo 13.4:

$$(1) \delta(\Delta_{\alpha}^*) = \sum F_i \delta L_i = (+1) (-0,003) \text{ m} \quad \Delta_{\alpha X} = -0,003 \text{ m}$$

Del Ejemplo 13.4,

$$\delta_{\alpha X} = + \frac{0,992 \text{ t/cm}^2}{E} = + \frac{0,992 \text{ t/cm}^2}{2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2} = +0,000472 \text{ m}$$

$$\therefore -0,003 + 0,000472 X_1 = 0 \quad \therefore X_1 = \underline{+6,35} \quad \therefore +$$

Luego, se puede calcular la fuerza en cada barra, pues

$$F = X_1 F_1 = 6,35 F_1$$

Ejemplo 13.11 Calcular las fuerzas de barra en el cuchillo de la figura, debidas a los siguientes cedimientos de apoyo:

Apoyo a, 6 mm hacia abajo

Apoyo c, 12 mm hacia abajo

Apoyo e, 9 mm hacia abajo

Las secciones, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis.

$$E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2$$

Eligiendo la reacción vertical en c como superabundante,

$$\Delta_c^1 = \Delta_{c0} + X_c \delta_{cc} = -0,012 \text{ m}$$

Utilizando el método de los trabajos virtuales,

$$\Delta_{c0}: \quad \Sigma Q\delta = 0$$

pues $\Delta L = 0$ (ver el Ejemplo 12.3).

$$(1) \delta(\Delta_{c0}^1) + (0,5 \text{ t})(0,006) + (0,5 \text{ t})(0,009) = 0$$

$$\therefore \Delta_{c0}^1 = -0,0075 \text{ m}$$

que coincide con el valor obtenido geoméricamente, representado en el dibujo.

$$k_{cc}: \quad (1) \delta(\delta_{cc}^1) = \frac{1}{E} \sum F^2 \frac{L}{A}$$

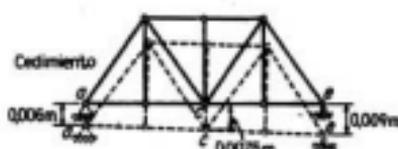
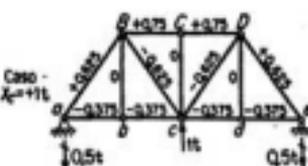
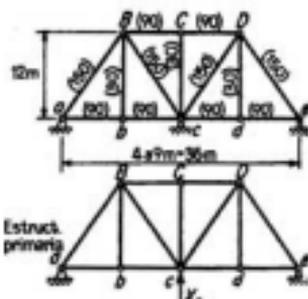
A causa de la simetría, solo hay que incluir en la tabla la mitad de las barras del cuchillo.

Barras	L	A	$\frac{L}{A}$	F_c	$F_c^2 \frac{L}{A}$	$X_c F_c$
Unid.	m	cm ²	m/cm ²	t	t ² m/cm ²	t
ab	9	90	0,10	-0,375	+0,014	+0,9
bc	9	90	0,10	-0,375	+0,014	+0,9
BC	9	90	0,10	+0,75	+0,056	-21,7
aB	15	150	0,10	+0,625	+0,039	-18,1
Bc	15	150	0,10	-0,625	+0,039	-18,1
Σ					+0,162	

$$\delta_{cc} = \frac{+0,324 \text{ t m/cm}^2}{2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2} = +0,000154 \text{ m}$$

$$\therefore -0,0075 + 0,000154 X_c = -0,012 \text{ m}$$

$$X_c = \frac{-0,0045}{0,000154} = -29 \quad \therefore \text{hacia abajo}$$



Ejemplo 13.12 Calcular las reacciones y trazar el diagrama de momentos flectores de la viga del Ejemplo 13.6, debidas a los movimientos de apoyos siguientes:

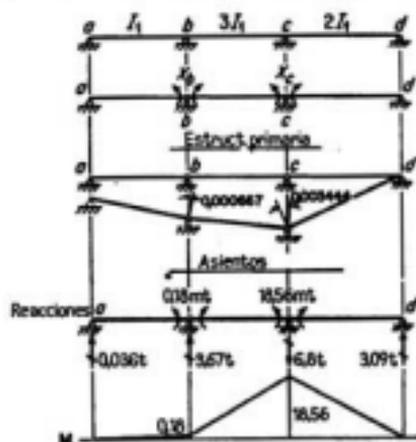
Punto a, 0,006 m hacia abajo

Punto b, 0,012 m hacia abajo

Punto c, 0,015 m hacia abajo

Punto d, 0

$$E = 2,1 \times 10^5 \text{ t/cm}^2$$



En este caso,

$$\Delta_1 \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{a2} + X_1 \delta_{a1} + X_2 \delta_{a2} = 0 \quad (1) \\ \Delta_2 \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{a2} + X_1 \delta_{a1} + X_2 \delta_{a2} = 0 \quad (2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Delta_2 \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{a2} + X_1 \delta_{a1} + X_2 \delta_{a2} = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

Utilizando el método de los trabajos virtuales, o por consideraciones geométricas sobre la figura,

$$\Delta_{a2} = -0,000667 \text{ radianes}$$

$$\Delta_{a2} = -0,003444 \text{ radianes}$$

Del Ejemplo 13.6,

$$\delta_{a1} = \frac{2,222 \text{ t m}^2}{EI_1} \quad \delta_{a2} = \frac{1,555 \text{ t m}^2}{EI_1}$$

$$\delta_{a1} = \delta_{a2} = \frac{0,278 \text{ t m}^2}{EI_1}$$

Sustituyendo estos valores en las Ecs. (1) y (2) se obtiene

$$2,222 X_1 + 0,278 X_2 = 0,000667 EI_1,$$

$$0,278 X_1 + 1,555 X_2 = 0,003444 EI_1,$$

de donde, como

$$EI_1 = (2,1 \times 10^5 \times 10^4) \text{ t/m}^2 (40,000 \times 10^{-8}) \text{ m}^4 = 8,4 \times 10^3 \text{ t m}^2$$

$$X_1 = +0,000237 EI_1 = +0,20$$

$$X_2 = +0,00221 EI_1 = +18,56$$

ya pueden calcularse fácilmente las reacciones y el diagrama de momentos.

13.6 Notas generales sobre la elección de superabundantes. De las consideraciones anteriores se ve que hay una amplitud considerable en la elección de superabundantes, siendo la única limitación el que se elijan de modo que quede una estructura primaria estable. Sin embargo, con una elección apropiada, se puede reducir al mínimo los cálculos numéricos, lo que se consigue aplicando los siguientes criterios:

1. Aprovechar cualquier simetría de la estructura.

2. Elegir la estructura primaria de modo que se localice todo lo posible el efecto de alguna de las diversas hipótesis de cargas.

La consideración de varias elecciones para las superabundantes del cuchillo de la Fig. 13.5 aclararán lo que hemos dicho. Esta estructura es indeterminada en segundo grado. Cualquier elección conduciría a dos ecuaciones de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta_a &= \Delta_{aa} + X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = 0 \\ \Delta_b &= \Delta_{ba} + X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = 0\end{aligned}\quad (a)$$

Solo intervienen los cinco términos siguientes para el corrimiento, pues δ_{ab} y δ_{ba} son iguales:

$$\begin{aligned}(1)(\Delta_{aa}) &= \sum F_a F_a \frac{L}{AE} & (1)(\delta_{aa}) &= \sum F_a^2 \frac{L}{AE} \\ (1)(\Delta_{ba}) &= \sum F_b F_a \frac{L}{AE} & (1)(\delta_{ba}) &= \sum F_b F_a \frac{L}{AE} \\ (1)(\delta_{bb}) &= \sum F_b F_b \frac{L}{AE}\end{aligned}\quad (b)$$

Antes de poder calcular estos términos, deben calcularse las fuerzas de barra F_a , F_b y F_c .

Si la estructura es simétrica y se eligen superabundantes simétricas, se pueden obtener las fuerzas F_c de las F_a por simetría. Además, δ_{ba} será igual a δ_{ab} en ese caso, quedando por calcular solo cuatro términos. El cálculo de estos términos tendrá menos operaciones si se eligen las superabundantes de modo que se limite el efecto de las diversas hipótesis de cargas al menor número posible de barras. Esto es cierto, sea simétrica, o no, la estructura.

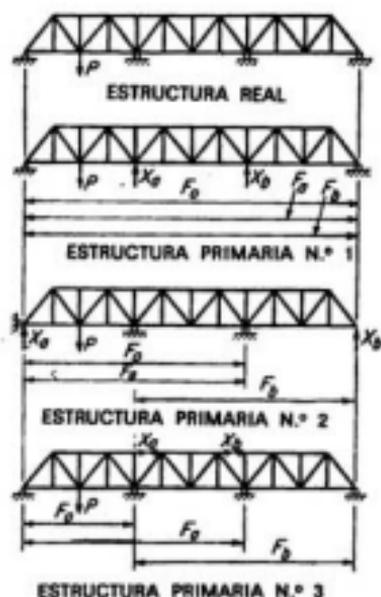


FIG. 13.5. Elección de superabundantes.

Las tres elecciones representadas en la Fig. 13.5 sacan provecho de la simetría. Las diversas hipótesis de cargas afectan a la parte de estructura indicada en cada caso. La comparación entre las estructuras primarias demuestra claramente que la elección 3 es la mejor, pues localiza más los efectos de las distintas hipótesis de cargas.

Hay otros aspectos a tener en cuenta. En los comentarios del Ejemplo 13.5 se indicó que el cortante y el momento son estáticamente determinados en una barra recta articulada en sus extremos. Si se corta esa barra, solo puede ser estáticamente indeterminada su fuerza axial y, por tanto, ser considerada como superabundante. Por otro lado, el cortante, el momento flector y la fuerza axial son muchas veces estáticamente indeterminados los tres en una barra unida rígidamente en sus extremos al resto de la estructura. Si se corta esa barra se pueden considerar como superabundantes el cortante, el momento y la fuerza axial, con tal que quede una estructura estable cuando se suprimen las sujeciones correspondientes a esos elementos (ver el Ejemplo 13.14).

13.7 Estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas utilizando el segundo teorema de Castigliano; teorema del trabajo mínimo. El método anterior para estudiar una estructura indeterminada exige escribir ecuaciones de superposición para los corrimientos de los puntos de aplicación de las superabundantes. Pero, en lugar de hacer esto, también se pueden plantear expresiones para estos corrimientos utilizando el segundo teorema de Castigliano, procedimiento que es muy similar al anterior en la práctica. Sin embargo, es algo más automático, por lo que muchos estudiantes de ingeniería lo prefieren. Como el teorema de Castigliano se limita en realidad al cálculo de los corrimientos producidos solo por cargas aplicadas a la estructura, este método no tiene la generalidad del procedimiento de las ecuaciones de superposición.

Consideremos, por ejemplo, la viga indeterminada de la Fig. 13.3. Después de establecer el grado de indeterminación, y elegir la superabundante y la estructura primaria resultante, se puede calcular la flecha del punto de aplicación de X_b utilizando el segundo teorema de Castigliano. En este caso particular, solo interviene deformación por flexión, por lo que

$$W_f = \sum \int M^2 \frac{ds}{2EI}$$

pero

$$\frac{\partial W_f}{\partial X_b} = \Delta_b \quad (a)$$

Como el punto b de la estructura real no se desplaza, Δ_b de la primaria debe ser igual a cero. Como consecuencia,

$$\frac{\partial W_f}{\partial X_b} = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_b} \frac{ds}{EI} = 0 \quad (b)$$

Sin embargo, como M es igual al momento flector total de la estructura primaria debido a todas las causas, se puede expresar por la superposición de la contribución de la carga aplicada sola y la de la superabundante X_b . Así,

$$M = M_s + X_b M_b \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = M_b \quad (c)$$

La Ec. (b) se convierte en

$$\sum \int M_s M_b \frac{ds}{EI} + X_b \sum \int M_b^2 \frac{ds}{EI} = 0 \quad (d)$$

Es fácil calcular estas integrales para la estructura primaria y despejar luego X_b .

Si se usa en este ejemplo el método de superposición, se pueden calcular Δ_{bs} y δ_{bb} por el de los trabajos virtuales, hallando que

$$(1)(\Delta_{bs}) = \sum \int M_s M_b \frac{ds}{EI} \quad (1)(\delta_{bb}) = \sum \int M_b^2 \frac{ds}{EI} \quad (e)$$

De las Ecs. (e) es evidente que la Ec. (d) indica que

$$\Delta_{20} + X_1 \delta_{20} = 0 \quad (f)$$

Así, si se usa el método de los trabajos virtuales para calcular Δ_{20} y δ_{20} en el procedimiento de las ecuaciones de superposición, los dos métodos son fundamentalmente idénticos.

El ejemplo anterior se refiere a una estructura que es indeterminada solo en primer grado. En las indeterminadas en más grados, el procedimiento es esencialmente el mismo. Después de elegir las n superabundantes y la estructura primaria resultante, se expresa el desplazamiento del punto de aplicación de cada superabundante aplicando n veces el segundo teorema de Castigliano, lo que origina n ecuaciones simultáneas entre n superabundantes, cuyos valores se pueden obtener resolviendo el sistema. En el Ejemplo 13.14 puede verse la aplicación de este procedimiento para estudiar un pórtico con múltiples superabundantes.

En los ejemplos de la Sec. 13.8 se calculan las ecuaciones comparables a la (b) de un modo ligeramente distinto. Así es posible utilizar el teorema de Castigliano un poco más automáticamente y con más eficacia, en ciertos problemas, mientras que en algunos otros es más práctico el método indicado en el ejemplo anterior. Sin embargo, en los casos del último tipo no hay ventaja en utilizar el método de Castigliano en lugar de las ecuaciones de superposición.

Si en el estudio de las estructuras indeterminadas, el corrimiento del punto de aplicación de una superabundante es nulo, la aplicación del teorema de Castigliano como en la Ec. (a) se reduce a plantear que la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a esa superabundante, debe ser nula, lo que equivale a decir que el valor de la superabundante será tal que haga mínima la energía de deformación. A este caso particular del segundo teorema de Castigliano se le suele llamar *teorema del trabajo mínimo* y se puede enunciar como sigue:

En una estructura estáticamente indeterminada, si no hay movimientos de apoyos ni variaciones de temperatura, las superabundantes deben ser tales que hagan mínima la energía de deformación.

13.8 Ejemplos del estudio de tensiones utilizando el segundo teorema de Castigliano.

Los ejemplos que siguen se han elegido principalmente para aclarar el empleo del segundo teorema de Castigliano en el estudio de las tensiones en las estructuras indeterminadas. Si, en cada caso, resolvemos el problema por el procedimiento de la ecuación de superposición utilizando el método de los trabajos virtuales para calcular los diversos términos, veremos que los cálculos efectivos son esencialmente los mismos que los que entran en la solución de Castigliano. La única diferencia entre los dos procedimientos es que, cuando se usa el de Castigliano, la resolución progresa de un modo algo más automático.

Hay una diferencia entre los dos procedimientos que es digna de ser notada: *En el método de Castigliano, las superabundantes tienen sus propias unidades durante todo el tiempo.* Por ejemplo, en la Ec. (a), X_1 debe estar en toneladas si W_1 está en metros toneladas, para que la variación de W_1 dividida por la de X_1 sea igual a Δ_1 en metros. Como consecuencia, si X_1 está en toneladas, M_1 debe tener unidades de metros toneladas por tonelada para que las cantidades de la Ec. (c) sean homogéneas. Teniendo en cuenta que, en la solución de Castigliano, las superabundantes tienen unidades en todos los pasos, las expresiones han de ser homogéneas.

Hablando con propiedad, el teorema de Castigliano solo es aplicable cuando los corrimientos de la estructura están producidos por cargas. Sin embargo, es posible hacer

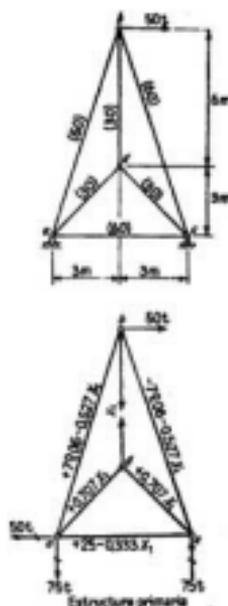
el estudio de tensiones de una estructura indeterminada producidas por las variaciones de temperatura, cedimiento de apoyos, etc., del siguiente modo: Elegimos la estructura primaria y suprimimos provisionalmente todas las superabundantes. Hacemos que actúe la variación de temperatura o el cedimiento de apoyo en la estructura primaria. Calculamos los desplazamientos producidos en los puntos de aplicación de las superabundantes, en esta estructura primaria, cálculos que pueden hacerse por el método de los trabajos virtuales o por cualquier otro que resulte apropiado. Ahora aplicamos las superabundantes, que una vez aplicadas deben hacer volver a sus puntos de aplicación a la posición correcta. Se puede usar el teorema de Castigliano para calcular los corrimientos producidos por las superabundantes. Sustituyendo, en lugar de estos valores, los obtenidos antes, obtenemos ecuaciones que contienen a las superabundantes como únicas incógnitas, cuyos valores se pueden hallar resolviendo el sistema. Aunque muchas veces este método no es tan directo como el de la ecuación de superposición, hay casos en los que es más ventajoso.

Ejemplo 13.13 Calcular las fuerzas en las barras del cuchillo de la figura. Las secciones, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

El cuchillo es indeterminado en primer grado. Elegimos la fuerza en la barra *bd* como superabundante.

$$W_1 = \sum \frac{F^2 L}{EA B} \frac{\partial W_1}{\partial X_1} - \Delta_1 \downarrow = 0$$

$$\therefore \frac{\partial W_1}{\partial X_1} = \frac{1}{E} \sum \frac{FL}{A} \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0$$



Barra	L	A	$\frac{L}{A}$	F	$\frac{\partial F}{\partial X_1}$	$F \frac{\partial F}{\partial X_1}$
Unid.	m	cm ²	m/cm ²	t	t/t	t m/cm ²
ab	9,49	60	0,158	+79,06 - 0,527X ₁	-0,527	-6,583 + 0,044X ₁
bc	9,49	60	0,158	-79,06 - 0,527X ₁	-0,527	+6,583 + 0,044X ₁
ca	6	60	0,1	+25 - 0,333X ₁	-0,333	-8,333 + 0,011X ₁
ad	4,24	30	0,141	+0,707X ₁	+0,707	+0,071X ₁
bd	6	30	0,2	+1,0 X ₁	+1,0	+0,200X ₁
cd	4,24	30	0,141	+0,707X ₁	+0,707	+0,071X ₁
Σ						-0,833 + 0,441X ₁

$$\therefore -0,833 + 0,441X_1 = 0 \quad X_1 = 1,89 \text{ t}$$

Las restantes fuerzas de barra se pueden hallar fácilmente por la estática, o ampliando la tabla anterior.

Ejemplo 13.14 Resolver el pórtico de la figura utilizando el teorema de Castiglano. Incluir el efecto de deformación debido a la fuerza axial y al momento.

Este pórtico es indeterminado en tercer grado. Cortaremos la viga en el centro de la luz y elegiremos para las tres superabundantes X_1 , X_2 y X_3 el momento, la fuerza axial y el cortante.

$$W_I = \sum \int M^2 \frac{ds}{2EI} + \sum \frac{F^2 L}{2AE}$$

$$\text{Pero } \frac{\partial W_I}{\partial X_1} = \Delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_2} = \Delta_2 = 0$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_3} = \Delta_3 = 0$$

Por tanto, diferenciando y suprimiendo E ,

$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_3} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_3} = 0 \quad (3)$$

Desde F a C ,

$$0 < x < 0,6 \quad M = X_2 - xX_3 \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -x$$

$$L = 0,6 \text{ m} \quad F = X_3 \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0$$

Desde C a B ,

$$0,6 < x < 3 \quad M = X_2 - xX_3 - 50(x - 0,6) \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -x$$

$$L = 2,4 \text{ m} \quad F = X_3 \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = \frac{\partial F}{\partial X_3} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 1$$

Desde B a A ,

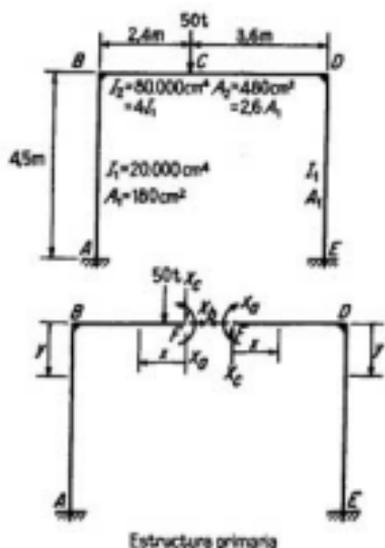
$$0 < y < 4,5 \quad M = X_1 - yX_2 - 3X_3 - 120 \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -y \quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = -3$$

$$L = 4,5 \text{ m} \quad F = -50 - X_2 \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = -1$$

Desde F a D ,

$$0 < x < 3 \quad M = X_1 + xX_2 \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = x$$

$$L = 3 \text{ m} \quad F = X_2 \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = 1$$



Desde D a E,

$$0 < y < 4,5 \quad M = X_a - yX_b + 3X_c \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = -y \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = 3$$

$$L = 4,5 \text{ m} \quad F = X_c \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = \frac{\partial F}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_c} = 1$$

Planteando la Ec. (1),

$$\int_0^{0,6} (X_a - xX_b)(l) \frac{dx}{4I_1} + \int_0^3 (X_a - xX_b - 50x + 30)(l) \frac{dx}{4I_1}$$

$$+ \int_0^{4,5} (X_a - yX_b - 3X_c - 120)(l) \frac{dy}{I_1} + \int_0^3 (X_a + xX_c)(l) \frac{dx}{4I_1}$$

$$+ \int_0^{4,5} (X_a + 3X_c - yX_b)(l) \frac{dy}{I_1} = 0$$

Simplificando e integrando, obtenemos

$$10,5X_a - 20,25X_b = 576 \quad (1)$$

Planteando ahora la Ec. (2),

$$\int_0^{4,5} (X_a - yX_b - 3X_c - 120)(-y) \frac{dy}{I_1} + \int_0^{4,5} (X_a - yX_b + 3X_c)(-y) \frac{dy}{I_1}$$

$$+ X_b \frac{(1)(3)}{2,5A_1} + X_c \frac{(1)(3)}{2,6A_1} = 0$$

Simplificando e integrando,

$$(-20,25)X_a + \left(60,75 + 2,25 \frac{I_1}{A_1}\right)X_b = -1.215$$

Pero

$$\frac{I_1}{A_1} = \left(\frac{20.000}{10^6}\right) \left(\frac{10^4}{180}\right) = 0,0111$$

será

$$-20,25X_a + 60,775X_b = -1.215 \quad (2)$$

De un modo análogo, la Ec. (3) se reduce a

$$\left(85,5 + 9 \frac{I_1}{A_1}\right)X_c = - \left(1699,2 + 225 \frac{I_1}{A_1}\right)$$

$$85,6X_c = -1.701,7 \quad (3)$$

Resolviendo las Ecs. (1), (2) y (3),

$$X_a = +45,61 \text{ m t}$$

$$X_b = -4,79 \text{ t}$$

$$X_c = -19,88 \text{ t}$$

Si se despreciara el efecto de la deformación axial, se suprimirían todos los términos que contienen A y se hallaría

$$X_a = +45,6 \text{ m t}$$

$$X_b = -4,8 \text{ t}$$

$$X_c = -19,87 \text{ t}$$

Razonamiento:

Estos resultados indican que el efecto de la deformación axial se puede despreciar en comparación con el del momento en el tipo de estructura de pórtico rígido.

Ejemplo 13.15 Calcular la fuerza en el tensor. Incluir el efecto de la fuerza axial y del momento.

Esta estructura es indeterminada en primer grado. Elegimos la fuerza en el tensor como superabundante. Serd

$$\frac{\partial W_f}{\partial X_1} = \Delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial W_f}{\partial X_1} = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{dx}{EI} + \sum F \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{L}{AE} = 0 \quad (1)$$

Desde B a C,

$$M = 0 \quad F = X_1 \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 1$$

$$L = 5 \text{ m}$$

Desde B a D,

$$M = 0,6xX_1 \quad F = -0,8X_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = 0,6x \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = -0,8$$

$$0 < x < 2 \quad L = 2 \text{ m}$$

Desde D a A,

$$M = 0,6xX_1 - 5(x-2)$$

$$F = -0,8X_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = 0,6x \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = -0,8$$

$$2 < x < 4 \quad L = 2 \text{ m}$$

Plantando la Ec. (1),

$$\int_0^2 (0,6xX_1)(0,6x) \frac{dx}{I_2} + \int_2^4 (0,6xX_1 - 5x + 10)(0,6x) \frac{dx}{I_2} + \frac{X_1(1)(5)}{A_1} + \frac{(-0,8X_1)(4)(-0,8)}{A_2} = 0$$

de donde

$$X_1 \left(7,68 + 5 \frac{I_2}{A_1} + 2,56 \frac{I_2}{A_2} \right) = 20$$

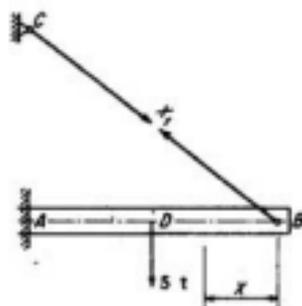
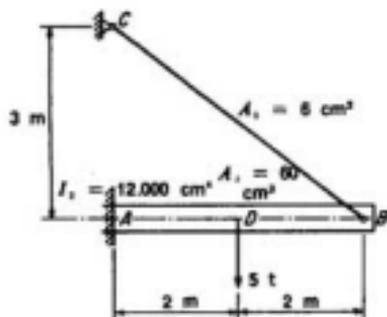
$$\frac{I_2}{A_1} = 0,2 \quad \frac{I_2}{A_2} = 0,02$$

$$\therefore 8,7312X_1 = 20$$

$$\therefore X_1 = +2,29 \text{ t}$$

y si se hubiera despreciado el término de la fuerza axial,

$$X_1 = +2,60 \text{ t}$$



Estructura primaria

13.9 Desarrollo de la ecuación de los tres momentos. La ecuación de los tres momentos fue enunciada por primera vez en 1857 por el ingeniero francés Clapeyron. Esta ecuación es una relación entre los momentos en tres puntos de una barra continua. Es especialmente útil para hallar los momentos en los apoyos en las vigas indeterminadas.

Designemos tres puntos de una barra continua por L , C y R como en la Fig. 13.6. Supongamos que el momento de inercia es constante entre los puntos L y C e igual a I_L , y también constante e igual a I_R entre C y R *. Se supone que la barra es recta inicialmente, y que los corrimientos desde la posición original son δ_L , δ_C y δ_R en los puntos

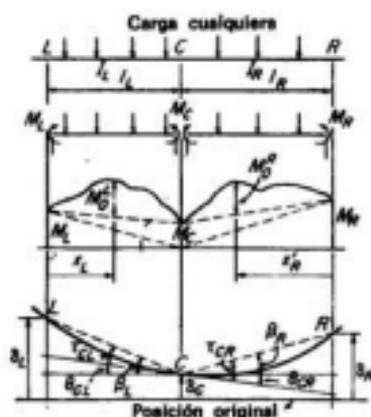


FIG. 13.6. Deducción de la ecuación de los tres momentos.

L , C y R , respectivamente —todos positivos cuando están dirigidos hacia arriba, como puede verse.

Sean los momentos en esos puntos M_L , M_C y M_R . Serán positivos cuando produzcan tracción en las fibras inferiores de una barra. Se puede considerar que el diagrama de momentos flectores de la parte LC o CR es el resultante de la superposición de tres efectos separados: la contribución de cada uno de los momentos extremos por separado, que viene dada por las ordenadas de los triángulos indicados en líneas de puntos, y la de la carga aplicada actuando sola, suprimidos los momentos extremos, que está dada por las ordenadas M_C^0 en la parte LC y las M_R^0 en la CR .

Del dibujo de la elástica,

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{y} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

Sin embargo, como la elástica es continua en el punto C ,

$$\text{Por lo que} \quad \theta_{CL} = \theta_{CR} \\ \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \quad (a)$$

Como todos los ángulos que intervienen son pequeños, es admisible considerar que

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{l_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{l_R} \quad (b)$$

* Teóricamente es posible, aunque complicado, incluir el efecto de una I variable en el desarrollo.

Si se convirtiera el diagrama de momentos flectores en un diagrama M/EI , se podrían calcular fácilmente τ_{CL} y τ_{CR} por medio del segundo teorema del área de momentos

$$\begin{aligned}\tau_{CL} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{M_L l_L^2}{6} + \frac{M_C l_L^2}{3} + \int_0^{l_L} M_x^L x_L dx_L \right) \\ \tau_{CR} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{M_R l_R^2}{6} + \frac{M_C l_R^2}{3} + \int_0^{l_R} M_x^R x_R dx_R \right)\end{aligned}\quad (c)$$

$$\text{Sea} \quad (\mathfrak{M}_s)_L = \int_0^{l_L} M_x^L x_L dx_L \quad (\mathfrak{M}_s)_R = \int_0^{l_R} M_x^R x_R dx_R \quad (13.4)$$

Sustituyendo de la Ec. (13.4) en las (c) y luego de las (b) y (c) en la (a), obtenemos la llamada *ecuación de los tres momentos*,

$$\begin{aligned}M_L \frac{l_L}{I_L} + 2M_C \left(\frac{l_L}{I_L} + \frac{l_R}{I_R} \right) + M_R \frac{l_R}{I_R} &= -\frac{\mathcal{L}_s}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_s}{I_R} \\ &+ 6E \left[\frac{\delta_L}{l_L} - \delta_C \left(\frac{1}{l_L} + \frac{1}{l_R} \right) + \frac{\delta_R}{l_R} \right]\end{aligned}\quad (13.5)$$

donde los términos de carga son

$$\mathcal{L}_s = + \frac{6(\mathfrak{M}_s)_L}{l_L} \quad \mathcal{R}_s = + \frac{6(\mathfrak{M}_s)_R}{l_R} \quad (13.6)$$

Al utilizar estas ecuaciones hay que observar que:

1. M_L , M_C y M_R son positivos cuando producen tracción en las fibras inferiores.
2. δ_L , δ_C y δ_R son positivas cuando están dirigidas hacia arriba desde la posición original.
3. \mathcal{L}_s y \mathcal{R}_s son términos de carga que dependen de la carga aplicada en las luces LC y CR , respectivamente.

4. El diagrama M_s de una barra es el diagrama de momentos flectores, trazado suponiendo que esa barra es una viga simplemente apoyada en sus extremos. $(\mathfrak{M}_s)_L$ representa el momento estático del área bajo este diagrama, tomado respecto a un eje que pasa por el extremo izquierdo, mientras que $(\mathfrak{M}_s)_R$ representa el momento estático respecto a un eje por el extremo derecho. El signo de estos dos momentos estáticos depende del de las ordenadas del diagrama M_s .

En el caso particular en que $l_L = l_R = l$, la Ec. (13.5) se simplifica, quedando

$$\begin{aligned}M_L l + 2M_C(l_L + l_R) + M_R l &= -\mathcal{L}_s - \mathcal{R}_s \\ &+ 6EI \left[\frac{\delta_L}{l} - \delta_C \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\delta_R}{l} \right]\end{aligned}\quad (13.7)$$

En la Fig. 13.7 se muestran los términos de carga en los casos de carga uniforme total y de carga concentrada.

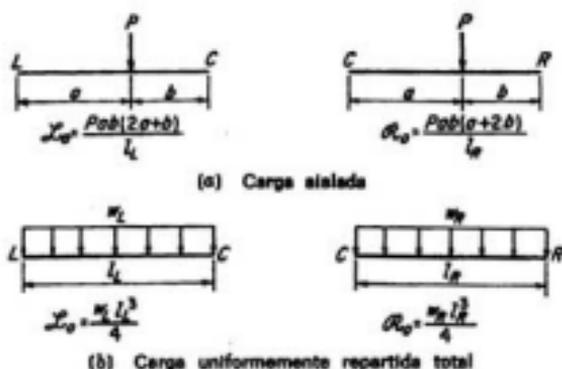


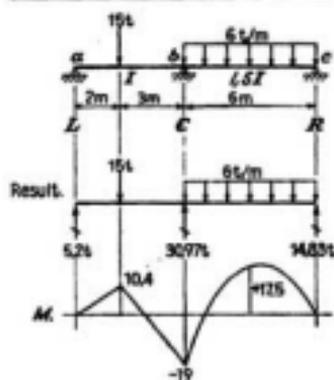
FIG. 13.7. Términos de carga.

13.10 Aplicación de la ecuación de los tres momentos. La ecuación de los tres momentos es aplicable a tres puntos cualesquiera de una viga, siempre que no haya discontinuidades, tales como articulaciones, en esa parte de la viga. Al aplicar la ecuación a una viga continua, si elegimos tres puntos de apoyo consecutivos para L , C y R , los términos del corrimiento del segundo miembro de la ecuación serán iguales a cero, o a los movimientos conocidos de los puntos de apoyo. Así obtendremos una ecuación que contiene, como únicas incógnitas, a los momentos en los apoyos.

De este modo podemos escribir una ecuación independiente para cada tres puntos de apoyo consecutivos en una viga continua. Obtendremos n ecuaciones independientes con n momentos en los apoyos como incógnitas, que se podrán obtener resolviendo el sistema. Hay una ligera ambigüedad al tratar un extremo empotrado de una viga continua, pero en los ejemplos que siguen se explicará la manera de salvarla.

El estudio de las vigas continuas por este método es elemental. Sin embargo, hay que tener cuidado de seguir el criterio de los signos de la Sec. 13.9. También hay que prestar atención al empleo de unidades homogéneas, en particular cuando hay movimientos de apoyos.

Ejemplo 13.16 Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura.



Aplicando la Ec. (31.5), tomando a , b y c como L , C y R .

$$M_a = 0 \quad M_b = 1 \quad M_c = 0$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

$$E\delta_o = \frac{(15)(2)(3)(7)}{5} = 126$$

$$R_o = \frac{(6)(6)^3}{4} = 324$$

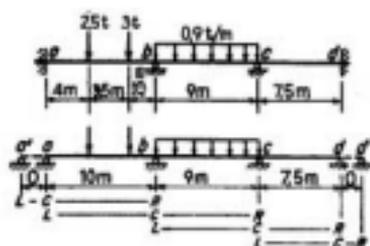
$$0 + 2M_b \left(\frac{3}{1} + \frac{6}{1.51} \right) + 0$$

$$= \frac{-126}{1} + \frac{324}{1.51}$$

$$18M_b = -342 \quad M_b = -19 \text{ m t}$$

Ejemplo 13.17 Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura. E e I son constantes.

En este caso hay cuatro momentos desconocidos, M_a , M_b , M_c y M_d , por lo que se necesitan cuatro ecuaciones. Se puede considerar el extremo empotrado, sustituyéndolo por un tramo más de longitud nula, como se representa. Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando la Ec. (13.7) cuatro veces, considerando en cada una de ellas L , C y R como se muestra.



$$\delta_a' = \delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta_d = \delta_d' = 0$$

Considerando a' , a y b como L , C , R .

$$\begin{aligned} \Sigma_0 = 0 \quad \Theta_0 = \frac{(2.5)(4)(6)(16)}{10} + \frac{(3)(7.5)(2.5)(12.5)}{10} = 166.31 \quad M_a' = 0 \\ \therefore 20M_a + 10M_b = -166.31 \end{aligned} \quad (1)$$

Considerando a , b y c como L , C y R .

$$\begin{aligned} \Sigma_0 = \frac{(2.5)(4)(6)(14)}{10} + \frac{(3)(7.5)(2.5)(17.5)}{10} = 182.44 \quad \Theta_0 = \frac{(0.9)(9)^2}{4} = 164.02 \\ \therefore 10M_a + 38M_b + 9M_c = -346.46 \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando b , c y d como L , C y R .

$$\Sigma_0 = 164.02 \quad \Theta_0 = 0 \quad \therefore 9M_b + 33M_c + 7.5M_d = -164.02 \quad (3)$$

Considerando c , d y d' como L , C y R .

$$\Sigma_0 = \Theta_0 = 0 \quad M_d' = 0 \quad \therefore 7.5M_c + 15M_d = 0 \quad (4)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. (1), (2), (3) y (4) se hallan los valores siguientes para los momentos desconocidos:

$$M_a = \underline{-4.80 \text{ m t}} \quad M_b = \underline{-7.04 \text{ m t}} \quad M_c = \underline{-3.44 \text{ m t}} \quad M_d = \underline{+1.72 \text{ m t}}$$

Ejemplo 13.18 Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura, debidos a los cedimientos siguientes de los apoyos:

El apoyo a gira 0.005 radianes en sentido de las agujas del reloj

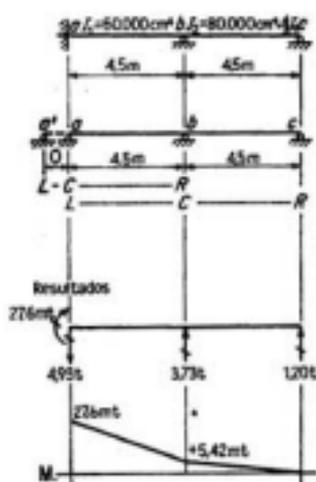
El apoyo b cede 0.00624 m hacia abajo

$E = 2.1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$

Considerando a' , a y b como L , C y R .

$$\begin{aligned} M_a' = 0 \quad \delta_a = 0 \\ \Sigma_0 = \Theta_0 = 0 \quad \delta_b = -0.00624 \text{ m} \end{aligned}$$

Como consecuencia del giro del apoyo a , δ_a'/l_c se



acercas $+0,005$. Aplicando la Ec. (13.5),

$$2M_a \left(\frac{4,5}{I_1} \right) + M_b \left(\frac{4,5}{I_1} \right) = 6E(0,005) + 6E \left(-\frac{0,00624}{4,5} \right)$$

$$\therefore 9M_a + 4,5M_b = 0,02168EI_1 \quad (1)$$

Considerando a , b y c como L , C y R .

$$M_a = 0 \quad \delta_a = -0,00624 \text{ m}$$

$$\delta_b = 0 \quad \delta_c = 0$$

Aplicando la Ec. (13.5),

$$M_a \left(\frac{4,5}{I_1} \right) + 2M_b \left(\frac{4,5}{I_1} + \frac{4,5}{2I_1} \right) = -6E(-0,00624) \left(\frac{1}{4,5} + \frac{1}{4,5} \right)$$

$$\therefore 4,5M_a + 15,75M_b = +0,01664EI_1 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. (1) y (2) y sustituyendo el valor $EI_1 = 12600 \text{ t m}^2$,

$$M_a = 0,00219EI_1 = +27,6 \text{ m t}$$

$$M_b = 0,000430EI_1 = +5,42 \text{ m t}$$

13.11 Desarrollo de la ecuación de la deformación angular. El método de la deformación angular fue presentado por el profesor G. A. Maney, en 1915, como método general para su empleo en el estudio de las estructuras con nudos rígidos. Es una ampliación del empleo de las ecuaciones propuestas por Manderla y Mohr para calcular esfuerzos secundarios en los cachillos. Es útil por sí mismo, y lo que es más importante, proporciona un medio excelente para introducir el método de la distribución de momentos.

Las ecuaciones fundamentales siguientes se deducen por medio de los teoremas del área de momentos. Consideran, pues, la deformación producida por el momento flector, y desprecian la debida al cortante y la fuerza axial. Como el efecto de la deformación del cortante y la fuerza axial en el estudio de las tensiones de la mayoría de las vigas y pórticos indeterminados es muy pequeño, el error resultante del uso de estas ecuaciones como base del método de la deformación angular es también muy pequeño (como comprobación, véanse los resultados del Ejemplo 13.14). La ecuación fundamental de la deformación angular es una expresión del momento en el extremo de una barra en función de cuatro cantidades: el giro de la tangente en cada extremo de la elástica de la barra, el giro de la cuerda que une los extremos de la elástica, y las cargas exteriores aplicadas a la barra. Al aplicar esta ecuación conviene utilizar el criterio de signos siguiente:

1. Los momentos en los extremos de una barra son positivos si actúan en el sentido de las agujas del reloj.
2. Sea θ el giro de la tangente a la elástica en el extremo de una barra, respecto

a la posición original de la misma. El ángulo θ es positivo cuando la tangente a la elástica ha girado en el sentido de las agujas del reloj desde su dirección original.

3. Sea ψ el giro de la cuerda que une los extremos de la elástica, respecto a la dirección original de la barra. El ángulo ψ es positivo cuando la cuerda ha girado en el sentido de las agujas del reloj desde su dirección original.

Se usarán dos subíndices para designar los momentos en los extremos: estos subíndices juntos expresan la barra de que se trata, y el primero de ellos indica el extremo al que se ha aplicado el momento. Por ejemplo, M_{AB} designa el momento que actúa en el extremo A de la barra AB ; M_{BA} , el momento en el extremo B de la misma barra. Los ángulos θ se designarán con un subíndice que indica el extremo de la barra. Los ángulos ψ , con dos subíndices que indican la cuerda, e, igualmente, la barra.

Con la notación y el criterio anteriores, consideremos una barra que tiene E e I constantes* en toda su longitud y que es recta inicialmente. Supongamos que sobre ella actúan los momentos extremos positivos M_{AB} y M_{BA} y una carga cualquiera, como se ve en la Fig. 13.8. Sea AB la elástica de esta viga y $A'B'$ su posición inicial sin deformación. θ_A , θ_B y ψ_{AB} son positivos como se indica.

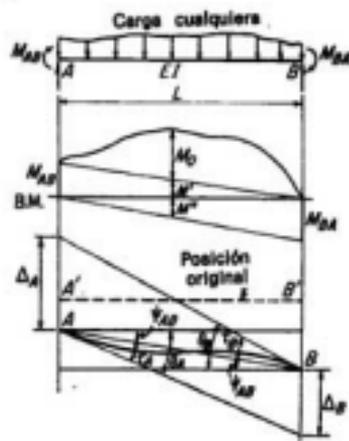


FIG. 13.8. Deducción de la ecuación de la deformación angular.

Se puede considerar que el diagrama de momentos flectores de esta barra es la superposición de tres efectos separados: la contribución de cada una de las partes triangulares M' y M'' , que corresponden a los momentos extremos actuando por separado, y la de la carga aplicada actuando sola, suprimidos los momentos en los extremos, que viene dada por las ordenadas M_0 . En otras palabras, las ordenadas M_0 son las correspondientes al diagrama de momentos de la viga simple. El momento flector total en un punto cualquiera será la suma algebraica de M_0 , M' y M'' , pero es más fácil considerar, para esta demostración, las tres partes por separado.

Si se transforma el diagrama de momentos flectores en un diagrama M/EI , se puede calcular Δ_A y Δ_B por el segundo teorema del área de momentos. Será

$$\Delta_A = -\frac{L^2}{6EI} M_{AB} + \frac{L^2}{3EI} M_{BA} - \frac{(\Sigma M_0)_A}{EI} \quad (a)$$

$$\Delta_B = \frac{L^2}{3EI} M_{AB} - \frac{L^2}{6EI} M_{BA} + \frac{(\Sigma M_0)_B}{EI} \quad (b)$$

* Teóricamente es posible, naturalmente, plantear la ecuación de la deformación angular considerando el efecto de I variable.

donde $(\mathfrak{M}_s)_A$ es el momento estático, respecto a un eje que pasa por A , del área bajo la parte M_s del diagrama de momentos y $(\mathfrak{M}_s)_B$ es el momento estático correspondiente, respecto a un eje por B .

Teniendo en cuenta que los ángulos y las deformaciones representados en la Figura 13.8 son en realidad tan pequeños que se puede considerar como iguales los ángulos, sus senos y sus tangentes, de la figura se ve que

$$\frac{\Delta_A}{L} = \tau_B = \theta_B - \psi_{AB} \quad \frac{\Delta_B}{L} = \tau_A = \theta_A - \psi_{AB} \quad (c)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. (a) y (b) para hallar M_{AB} y M_{BA} y sustituyendo en las expresiones obtenidas los valores de Δ_A/L y Δ_B/L de las Ecs. (c), obtenemos

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + \frac{2}{L^2} [(\mathfrak{M}_s)_A - 2(\mathfrak{M}_s)_B] \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}) + \frac{2}{L^2} [2(\mathfrak{M}_s)_A - (\mathfrak{M}_s)_B] \end{aligned} \quad (d)$$

Hasta ahora no se ha definido la hipótesis de carga y las Ecs. (d) son válidas para cualquiera de ellas. El último término entre corchetes de cada una de estas ecuaciones es una función del tipo de carga, y es interesante darse cuenta de su significado físico. Supongamos que θ_A , θ_B y ψ_{AB} son todos iguales a cero. Los últimos términos de las

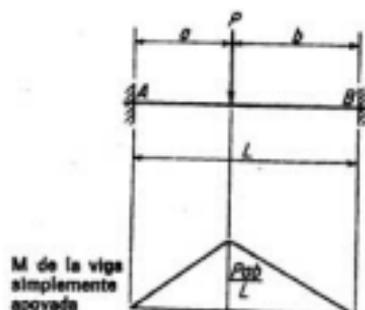


FIG. 13.9. Carga aislada.

Ecs. (d) son, respectivamente, iguales al momento en el extremo A y en el B de la barra. Pero si θ_A , θ_B y ψ_{AB} son iguales a cero, esto quiere decir que los dos extremos de la barra están completamente empotrados sin posibilidad de giro ni traslación, por lo que la barra es lo que se llama una viga empotrada en sus extremos. Por tanto, estos últimos términos de las Ecs. (d) son iguales a los llamados «momentos de empotramiento». Llamándoles ME

$$\begin{aligned} ME_{AB} &= \frac{2}{L^2} [(\mathfrak{M}_s)_A - 2(\mathfrak{M}_s)_B] \\ ME_{BA} &= \frac{2}{L^2} [2(\mathfrak{M}_s)_A - (\mathfrak{M}_s)_B] \end{aligned} \quad (13.8)$$

Sustituyendo en las Ecs. (d), obtenemos

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + ME_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}) + ME_{BA} \end{aligned} \quad (13.9)$$

Una observación más detallada de las Ecs. (13.9) revela que se pueden resumir en una sola más general, llamando al extremo más próximo de una barra P y al más lejano L . Si además hacemos

$$K_{PL} = \text{factor de rigidez de la barra } PL = \frac{I_{PL}}{L_{PL}} \quad (13.10)$$

la ecuación fundamental de la deformación angular se puede escribir como sigue:

$$M_{PL} = 2EK_{PL}(2\theta_P + \theta_L - 3\psi_{PL}) + ME_{PL} \quad (13.11)$$

Evidentemente, se puede determinar el ME para cualquier carga dada. Si además se conocen el giro de la tangente en cada extremo y el de la cuerda que une los extremos de una barra, se pueden calcular fácilmente los momentos en los extremos de la misma por la Ec. (13.11). En la Sec. 13.12 se estudia el empleo de esta ecuación en la resolución de pórticos y vigas indeterminadas.

Se puede calcular el ME para una carga dada por medio de la Ec. (13.8) del siguiente modo:

Carga concentrada (ver Fig. 13.9):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_s)_A &= \frac{Pab}{L} \left[\frac{a}{2} \left(\frac{2a}{3} \right) + \frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{3} \right) \right] = \frac{Pab}{6} (2a + b) \\ (\mathfrak{M}_s)_B &= \frac{Pab}{L} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{2b}{3} \right) + \frac{a}{2} \left(b + \frac{a}{3} \right) \right] = \frac{Pab}{6} (2b + a) \\ ME_{AB} &= \frac{2}{L^3} \left[\frac{Pab}{6} (2a + b) - 2 \frac{Pab}{6} (2b + a) \right] = - \frac{Pab^3}{L^3} \\ ME_{BA} &= \frac{2}{L^3} \left[2 \frac{Pab}{6} (2a + b) - \frac{Pab}{6} (2b + a) \right] = + \frac{Pa^3b}{L^3} \end{aligned} \quad (13.12)$$

Carga uniforme total (ver Fig. 13.10):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_s)_A &= (\mathfrak{M}_s)_B = \frac{wL^4}{24} \\ ME_{AB} &= - \frac{wL^3}{12} \quad ME_{BA} = + \frac{wL^3}{12} \end{aligned} \quad (13.13)$$

Se observará que los signos correctos del ME aparecen automáticamente en estos cálculos. En la mayoría de los casos, se ve claramente la dirección de los momentos extremos, por lo cual podemos verificar los signos de los ME.

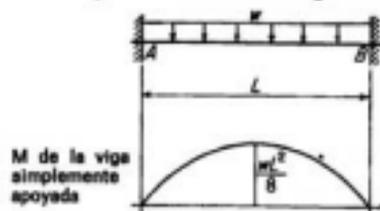


FIG. 13.10. Carga uniforme total.

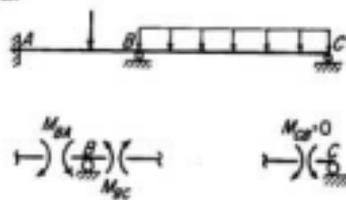


FIG. 13.11. Aislamiento de los nudos.

Obsérvese también el criterio de signos a usar al aplicar el método de la deformación angular, así como que las ecuaciones anteriores se han deducido para una barra recta inicialmente y con E e I constantes.

13.12 Aplicación del método de la deformación angular a vigas y pórticos. Consideremos primero la aplicación del método de la deformación angular a problemas de vigas continuas, tales como la representada en la Fig. 13.11, cuyos soportes se supone que no puedan ceder. Supongamos que esta viga está compuesta de dos barras AB y BC rigidamente unidas entre sí en el nudo B . Podemos escribir expresiones para los momentos en cada uno de los extremos de cada barra, utilizando la Ec. (13.11). Estos cuatro momentos M_{AB} , M_{BA} , M_{BC} y M_{CB} estarán expresados en función de los ángulos θ y ψ , y del ME, que se pueden calcular por las Ecs. (13.12) y (13.13).

Como los apoyos no pueden ceder, sabemos en este caso que θ_A , ψ_{AB} y ψ_{BC} son cero. Además, como las barras AB y BC están rigidamente unidas entre sí en el nudo B , la tangente a la elástica en el extremo B de AB debe girar con respecto a su dirección original la misma cantidad θ_B , algebraicamente, que la tangente en el extremo B de BC . Por tanto, solo son desconocidos los valores de θ_B y θ_C , que intervienen en las expresiones de los cuatro momentos extremos. Si podemos hallar de algún modo los valores de θ_B y θ_C , podríamos calcular todos los momentos extremos, y conocidos éstos, por la estática, hallaríamos cualquier otro momento, cortante o reacción que quisiéramos conocer. En otras palabras, el estudio de las tensiones de esta viga se reduciría a un problema de estática si conociéramos los valores de θ_B y θ_C .

En este caso, podemos hallar estas dos incógnitas en virtud del hecho de tener dos ecuaciones de la estática que deben satisfacer estos momentos extremos. Estas ecuaciones se obtienen aislando los nudos B y C como se ve en la Fig. 13.11 y escribiendo las ecuaciones $\Sigma M = 0$ para cada uno de ellos. Así,

$$\begin{aligned} \text{De } \Sigma M_B = 0 & \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ \text{De } \Sigma M_C = 0 & \quad M_{CB} = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas dos ecuaciones las expresiones de los momentos extremos, obtenidas aplicando la Ec. (13.11), obtendremos dos ecuaciones con las dos incógnitas θ_B y θ_C . Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones podremos calcular, con los valores hallados para las incógnitas, los momentos extremos, y completar el estudio de las tensiones de la viga.

La solución numérica del problema puede verse en el Ejemplo 13.19. En el Ejemplo 13.20 se han ampliado estas ideas, aplicándolas a un caso en que se mueven los apoyos.

Ejemplo 13.19 Calcular las reacciones y dibujar los diagramas del cortante y del momento flector de la viga de la figura. Los apoyos no ceden.

Estudiando los ángulos θ y ψ .

$$\begin{aligned} \theta_a &= 0 & \psi_{ab} &= \psi_{bc} = 0 \\ \theta_b &= ? & \theta_c &= ? \end{aligned}$$

$$K_{ab} = \frac{I}{2.5} = K \quad K_{bc} = \frac{3I}{3.75} = 2K$$

$$ME_{ab} = -\frac{(10)(1.5)(1)^2}{(2.5)^2} = -2.4 \text{ m t}$$

$$ME_{ba} = +\frac{(10)(1.5)^2(1)}{(2.5)^2} = +3.6 \text{ m t}$$

$$ME_{bc} = -\frac{(4)(3.75)^2}{12} = -4.6875 \text{ m t}$$

$$ME_{cb} = +4.6875 \text{ m t} \quad M_{cd} = -3.125 \text{ m t}$$

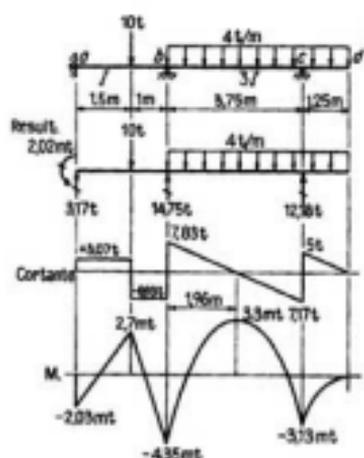
Escribiendo las expresiones de los momentos extremos, utilizando las Ecs. (13.11).

$$M_{ab} = 2EK\theta_b - 2.4$$

$$M_{ba} = 4EK\theta_b + 3.6$$

$$M_{bc} = 8EK\theta_b + 4EK\theta_c - 4.6875$$

$$M_{cb} = 8EK\theta_c + 4EK\theta_b + 4.6875$$



Aislado los nudos b y c , escribiendo las ecuaciones de los nudos y sustituyendo M_{ba} , M_{bc} , etc.

$$\begin{aligned} \uparrow \sum M_b = 0 \quad M_{ba} + M_{bc} = 0 & \quad \therefore 12EK\theta_b + 4EK\theta_c - 1.0875 = 0 \quad (1) \\ \uparrow \sum M_c = 0 \quad M_{cb} - 3.125 = 0 & \quad \therefore 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 1.5625 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo las Ecs. (1) y (2), hallamos

$$EK\theta_b = +0.1869 \quad EK\theta_c = -0.2887$$

Y, sustituyendo en las expresiones de los momentos extremos,

$$\begin{aligned} M_{ab} &= +0.37 - 2.4 = -2.03 \text{ m t} & M_{bc} &= +1.50 - 1.15 - 4.69 = -4.34 \text{ m t} \\ M_{ba} &= +0.75 + 3.6 = +4.35 \text{ m t} & M_{cb} &= -2.31 + 0.75 + 4.69 = +3.13 \text{ m t} \end{aligned}$$

Los restantes resultados se pueden hallar por la estática.

Razonamiento:

La parte cd en voladizo no aumenta la complicación, pues el momento es estáticamente determinado en ella. Sin embargo, afecta a la ecuación del nudo c . Al aislar los nudos, supondremos que los momentos desconocidos son positivos (esto es, que actúan en el sentido de las agujas del reloj en los extremos de la barra y, por tanto, en el contrario en el nudo). Los momentos conocidos se mostrarán con su valor conocido en su dirección apropiada.

Un modo útil de manejar los valores de K es elegir un K como tipo y expresar los demás en función de él.

Otro modo de tratar el efecto del voladizo es el siguiente: para el equilibrio de los momentos en un nudo cualquiera m con barras que le unen a los a, b, \dots, j se verifica

$$M_{ma} + M_{mb} + \dots + M_{mj} = 0$$

Si se conoce alguno de esos momentos extremos, se puede sustituir su valor con el signo correspondiente. Por ejemplo, en el nudo c , $M_{cb} + M_{cd} = 0$; pero $M_{cd} = -3,13$, por lo que $M_{cb} - 3,13 = 0$, lo que comprueba la Ec. (2) anterior.

Obsérvese que los resultados finales satisfacen las Ecs. (1) y (2), aunque esto no sirva de comprobación, como es natural, del trabajo anterior al planteamiento de las mismas.

Ejemplo 13.20 · Calcular los momentos en los extremos de la viga del Ejemplo 13.19 producidos solo por los movimientos de apoyos siguientes (sin cargas):

Apoyo a , verticalmente $0,0025$ m hacia abajo, gira $0,001$ radianes en el sentido de las agujas del reloj

Apoyo b , verticalmente $0,01$ m hacia abajo

Apoyo c , verticalmente $0,0044$ m hacia abajo

Suponer $E = 2,1 \times 10^3$ t/cm², $I = 40.000$ cm⁴

En este caso,

$$\theta_a = +0,001 \quad \psi_{ab} = \frac{0,01 - 0,0025}{2,5} = +0,003 \quad \psi_{bc} = -\frac{(0,01 - 0,0044)}{3,75} = -0,0015$$

pero

$$\theta_b = ? \quad \text{y} \quad \theta_c = ?$$

No hay cargas, por lo que el ME es nulo. Utilizando la Ec. (13.11) para las expresiones de los momentos extremos,

$$M_{ab} = 2EK(0,008 + \theta_b - 0,000) = 2EK\theta_b - 0,0148EK$$

$$M_{ba} = 2EK(2\theta_a + 0,001 - 0,009) = 4EK\theta_b - 0,0188EK$$

$$M_{bc} = 2E(2K)(2\theta_b + \theta_c + 0,0045) = 8EK\theta_b + 4EK\theta_c + 0,0188EK$$

$$M_{cb} = 2E(2K)(2\theta_b + \theta_c + 0,0045) = 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 0,0188EK$$

De las ecuaciones de los nudos,

$$\Sigma M_b = 0 \quad M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad 12EK\theta_b + 4EK\theta_c + 0,002EK = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad M_{cb} = 0 \quad 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 0,0188EK = 0 \quad (2)$$

Resolviendo este sistema,

$$\theta_b = +0,0007 \quad \theta_c = -0,0026$$

Por lo que, sustituyendo

$$M_{ab} = -0,0126EK = \underline{\underline{-42,3 \text{ m t}}} \quad M_{ba} = +0,0132EK = \underline{\underline{+44,3 \text{ m t}}}$$

$$M_{bc} = -0,0132EK = \underline{\underline{-44,3 \text{ m t}}} \quad M_{cb} = 0 = \underline{\underline{0}}$$

pues
$$EK = 2,1 \times 10^3 \times 10^4 \times \frac{40.000}{10^8 \times 2,5} = 3.360$$

Razonamiento:

En este tipo de problema hay que tener mucho cuidado de tomar los signos correctos para los ángulos θ y ψ conocidos. También hay que prestar atención a que las unidades sean homogéneas.

Consideremos los pórticos rígidos de las Figs. 13.12a a d. Supongamos que despreciamos la variación de longitud de las barras debido a la fuerza axial, lo que suele ser admisible en los pórticos, y consideremos solo el efecto de la deformación debida a la flexión. Con esta hipótesis, es fácil demostrar en cada uno de estos cuatro pórticos que el ángulo ψ es nulo para todas las barras (con la excepción de las partes estáticamente determinadas en voladizo, como es natural). En la Fig. 13.12b, por ejemplo, despreciando la variación axial de longitud de las barras AB y BE , es evidente que el nudo B no se puede mover si no se mueven los apoyos. Si el nudo B no se mueve, po-

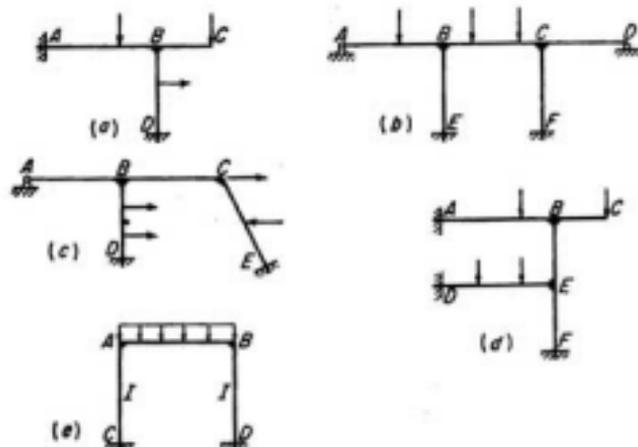


FIG. 13.12. Pórticos rígidos típicos sin desplazamiento lateral.

demostramos razonar del mismo modo que no puede moverse el C . Por tanto, los ángulos ψ deben ser nulos en las cinco barras AB , BC , CD , BE y CF .

En cualquier nudo en particular, el ángulo θ será el mismo en los extremos de todas las barras que están unidas rigidamente entre sí. Por tanto, en el caso de este pórtico solo habrá cuatro ángulos θ desconocidos, θ_A , θ_B , θ_C , θ_D . Por consiguiente, con la Ec. (13.11) obtendremos expresiones de los momentos extremos con estos cuatro ángulos θ como únicas incógnitas. Como podemos escribir una ecuación $\Sigma M = 0$ en cada nudo en que hay una incógnita θ , seremos capaces de obtener cuatro ecuaciones con los cuatro ángulos θ como incógnitas, como en el Ejemplo 13.19. Calculando los valores de θ , podremos sustituirlos para obtener los de los momentos extremos, reduciendo así el resto del análisis de las tensiones a un problema de estática.

Hemos visto que la solución por el método de la deformación angular de un pórtico cualquiera en el que no hay ángulos ψ desconocidos es, en esencia, igual que para una viga continua. La resolución del pórtico de la Fig. 13.12e es también de esta clase, siempre que la construcción y la carga sean simétricas. En este caso particular, las deformaciones serán también simétricas, por lo que no habrá corrimiento horizontal de la parte alta de los pilares. Como consecuencia, los ángulos ψ de las tres barras son nulos.

En el tipo más general de pórtico rígido, intervienen ángulos θ y ángulos ψ como incógnitas, aun cuando solo consideremos el efecto de la deformación por flexión. En otras palabras, hay giros de nudos y giros de cuerdas, o «desplazamientos laterales».

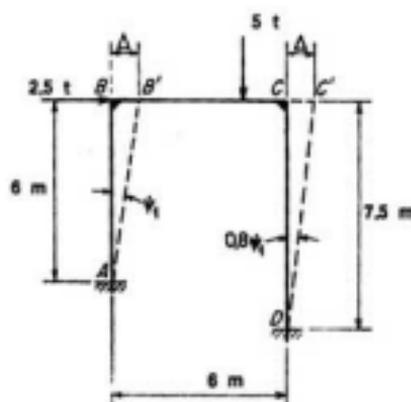


FIG. 13.13. Pórtico con desplazamiento lateral.

En la Fig. 13.15 se representan varios ejemplos de tales pórticos. Para resolver estos problemas hay que introducir algunas ideas nuevas. Para ello, consideremos el pórtico de la Figura 13.13.

Si los apoyos no ceden, solo hay dos ángulos θ desconocidos, θ_B y θ_C . Sin embargo, en este caso no hay nada que impida girar al nudo B . Como despreciamos la deformación debida a la fuerza axial y como los giros de las cuerdas de las barras son pequeños, el nudo B se mueve prácticamente en dirección perpendicular a la barra AB , o sea horizontalmente. Supongamos que este movimiento es igual a Δ . Del mismo modo, veríamos que el nudo C en lo alto del pilar CD debe moverse también horizontalmente. Como la variación axial de longitud de BC se desprecia, el movimiento horizontal de C será igual también a Δ .

La posición deformada de las cuerdas es la representada por líneas de trazos en la Fig. 13.13. Obsérvese que estas líneas de trazos indican no la elástica del pórtico, sino simplemente las cuerdas de esta elástica. Del dibujo se ve inmediatamente que

$$\psi_{BC} = 0 \quad \psi_{AB} = \frac{\Delta}{6} = \psi_1$$

y, por tanto,

$$\psi_{CD} = \frac{\Delta}{7,5} = \frac{4}{5} \psi_1$$

Por consiguiente, en este caso se pueden expresar todos los ángulos de las barras del pórtico en función de una incógnita independiente, que podemos llamar ψ_1 *.

* En el Ejemplo 13.22 se usa esta misma técnica en un problema más difícil, para estudiar los ángulos ψ de las cuerdas de las barras y las relaciones entre ellas. El mismo método se puede usar para estudiar los ángulos ψ en pórticos con cualquier complicación, tales como los representados en la Fig. 13.15, y se puede bosquejar como sigue:

1. Se considera, provisionalmente, que todos los nudos rígidos de la parte indeterminada del pórtico son nudos articulados y todos los apoyos empotrados son articulados. Ahora se mira si esta estructura modificada así es geométrica y estáticamente estable. Si uno o más nudos pueden trasladarse libremente sin encontrar resistencia inmediata, la estructura es inestable y libre de comportarse como un varillaje articulado. Si es posible ese comportamiento de la estructura modificada, las cuerdas correspondientes de las barras del pórtico real pueden girar ciertos ángulos ψ . En otras palabras, en ese caso es posible que se desplace lateralmente la estructura.

Aplicando la Ec. (13.11) en este caso, se obtienen expresiones de los momentos extremos con θ_B , θ_C y ψ_1 como incógnitas. De las ecuaciones ordinarias de los nudos B y C se pueden obtener dos de las tres ecuaciones necesarias para hallar estas incógnitas. La tercera ecuación de la estática, que ha de satisfacer los momentos extremos, se debe obtener de algún otro modo. Se puede deducir como sigue: Se aísla cada uno de los pilares cortándoles inmediatamente debajo de la viga e inmediatamente encima de la cimentación, como se ve en la Fig. 13.14. Igualmente, aislaremos la viga cortándola inmediatamente bajo la parte alta de los pilares. Tomando luego momentos respecto a la base de cada pilar aislado,

$$M_{AB} + M_{BA} + 6H_1 = 0 \quad (a)$$

$$M_{DC} + M_{CD} + 7,5H_2 = 0 \quad (b)$$

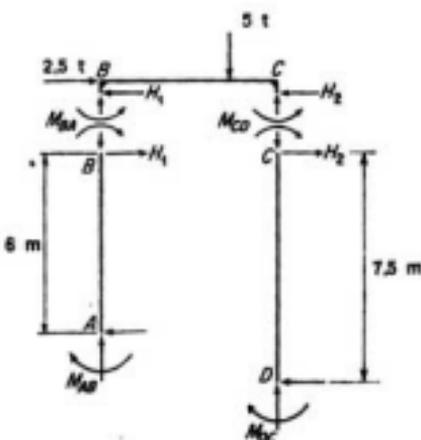


FIG. 13.14. Aislamiento de pilares y viga.

2. El grado de inestabilidad de la estructura modificada es igual al número de apoyos de rodillo (o de biela) que habría que introducir para evitar el movimiento de esta estructura como un mecanismo de varillas. Se puede localizar la situación de esos apoyos adicionales, como sigue: Supongamos que se separan las barras de los apoyos y unas de otras en los nudos. Luego se vuelve a montar la estructura barra por barra comenzando en los apoyos. Cuando se realiza este montaje, resulta evidente que, para evitar la inestabilidad como un mecanismo, hay que introducir apoyos auxiliares en cada nudo en el que no se evita la traslación por al menos dos barras no colineales que le usen a una estructura estable ya montada.

3. Hay que estudiar ahora los posibles ángulos ψ del pórtico real y las relaciones entre ellos, moviendo sucesivamente cada uno de los apoyos estabilizadores que se introdujeron en la estructura modificada descrita más arriba. Cada uno de estos apoyos puede moverse una cantidad arbitraria, pudiéndose calcular los giros de las cuerdas producidas. Se puede tomar uno de estos giros de las cuerdas producido por un movimiento de apoyo como el ángulo ψ independiente asociado con éste y expresar todos los demás giros de las cuerdas en función de él. Por tanto, el número de ángulos ψ independientes que intervienen en el pórtico real es igual al grado de inestabilidad de la estructura modificada. Se observará que los giros de las cuerdas de algunas barras de un pórtico se pueden referir a más de uno de los ángulos ψ independientes.

Se dice que un pórtico rígido tiene un grado de libertad con respecto al desplazamiento lateral asociado con cada ángulo ψ independiente. En la Sec. 13.14 se demuestra que la organización del método de distribución de momentos aplicado a un pórtico depende del reconocimiento correcto del número de grados de libertad con respecto al desplazamiento lateral.

Cuando se aplican estos procedimientos a los pórticos de la Fig. 13.15 se halla que el grado de inestabilidad de las estructuras modificadas correspondientes (o el número de ángulos ψ independientes de las estructuras reales) es el siguiente: (a) 1, (b) 1, (c) 1, (d) 3, (e) 1, (f) 3, (g) 2, y (h) 2.

De igual modo, de $\Sigma F_x = 0$ en la viga,

$$H_1 + H_2 = 2,5 \quad (c)$$

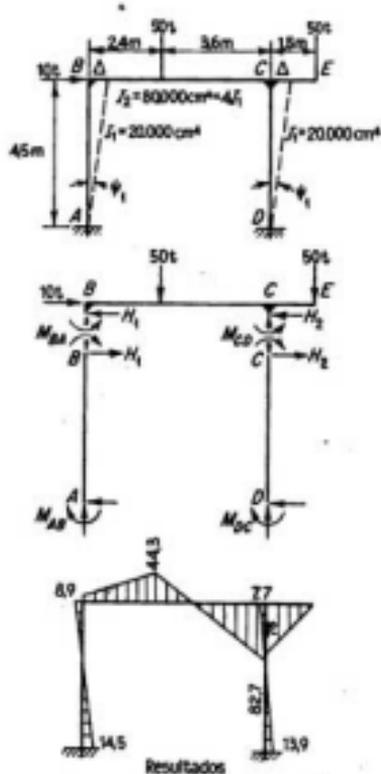
Sustituyendo H_1 y H_2 en la Ec. (c) por los valores de las Ecs. (a) y (b), obtenemos

$$M_{AB} + M_{BA} + 0,8M_{DC} + 0,8M_{CD} + 15 = 0 \quad (d)$$

que es la tercera ecuación independiente de la estática. Con las dos ecuaciones de los nudos y esta llamada «ecuación del cortante» podemos tener un sistema de tres ecuaciones de las que hallaremos θ_B , θ_C y ψ_1 , completando luego la solución como en los problemas anteriores.

Los Ejemplos 13.21 y 13.22 aclaran la aplicación del método de la deformación angular a ciertos pórticos que pueden desplazarse lateralmente.

Ejemplo 13.21 Calcular los momentos extremos y dibujar el diagrama de momentos flectores del pórtico de la figura.



Empleando los ángulos θ y ψ .

$$\theta_A = \theta_D = \psi_{BC} = 0$$

$$\theta_B = \theta \quad \theta_C = \theta \quad \psi_{AB} = \psi_{CD} = \psi_1$$

$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{I_1}{4,5} = K \quad K_{BC} = \frac{4I_2}{6} = 3K$$

$$ME_{BC} = - \frac{(50)(2,4)(3,6)^2}{(6)^2} = -13,2 \text{ m t}$$

$$ME_{CB} = + \frac{(50)(2,4)^2(3,6)}{(6)^2} = +28,8 \text{ m t}$$

Utilizando la Ec. (13.11).

$$M_{AB} = 2EK\theta_B = 6EK\psi_1$$

$$M_{BA} = 4EK\theta_B = 6EK\psi_1$$

$$M_{BC} = 18EK\theta_B + 6EK\theta_C - 43,2$$

$$M_{CB} = 18EK\theta_C + 6EK\theta_B + 28,8$$

$$M_{CD} = 4EK\theta_C = 6EK\psi_1$$

$$M_{DC} = 2EK\theta_C = 6EK\psi_1$$

Nudo B:

$$\Sigma M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\therefore 16EK\theta_B + 6EK\theta_C - 6EK\psi_1 - 43,2 = 0 \quad (1)$$

Nudo C:

$$\Sigma M_C = 0 \quad M_{CB} + M_{CD} - 75 = 0$$

$$\therefore 6EK\theta_B + 16EK\theta_C - 6EK\psi_1 - 46,2 = 0 \quad (2)$$



Ecuaciones del cortante:

$$\text{Pilar AB:} \quad M_{AB} + M_{BA} + 4,5H_1 = 0$$

$$\text{Pilar DC:} \quad M_{DC} + M_{CD} + 4,5H_2 = 0$$

$$\text{Viga:} \quad H_1 + H_2 = 10$$

$$\therefore M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} + 45 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. (1), (2) y (3).

$$EK\theta_B = +2,795 \quad EK\theta_C = +3,095 \quad EK\psi_1 = +3,347$$

$$\text{Luego,} \quad M_{AB} = \underline{-14,49 \text{ m t}} \quad M_{BC} = \underline{+8,90 \text{ m t}} \quad M_{CD} = \underline{-7,70 \text{ m t}}$$

$$M_{BA} = \underline{-8,91 \text{ m t}} \quad M_{CB} = \underline{+82,71 \text{ m t}} \quad M_{DC} = \underline{-13,89 \text{ m t}}$$

Razonamiento:

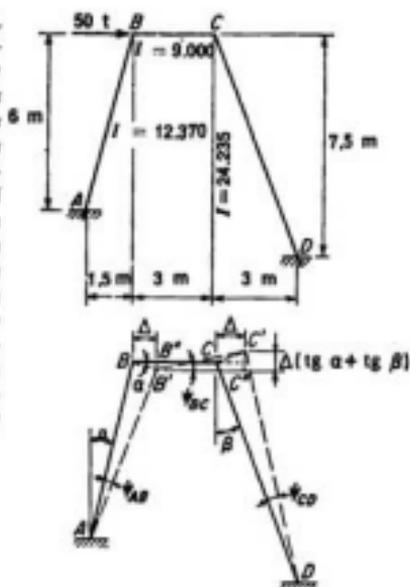
Se observará que las líneas de trazos del primer dibujo indican la posición deformada de las cuerdas de la elástica de los pilares, no la propia elástica.

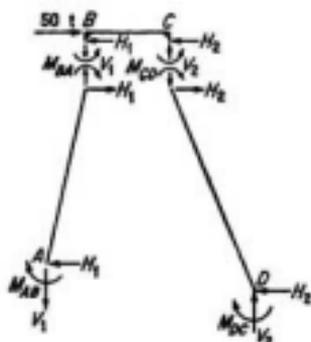
Cuando se aíslan varias partes de un pórtico, como se ve en el segundo dibujo, se suponen positivos todos los momentos extremos desconocidos, esto es, se admite que actúan en el sentido de las agujas del reloj en los extremos de las barras. Se puede suponer que los cortantes y las fuerzas axiales actúan en una dirección cualquiera; pero una vez admitido que una fuerza como la H_1 tiene una cierta dirección en una de las partes aisladas, hay que suponer que actúa en la dirección que está de acuerdo con ella en cada una de las partes aisladas siguientes.

Al dibujar los diagramas de momentos de esos pórticos, se toman las ordenadas en el lado de la barra sometido a compresión debido al momento en esa sección del pórtico.

Ejemplo 13.22 Calcular los momentos extremos y dibujar el diagrama de momentos flectores del pórtico de la figura.

Para estudiar las relaciones entre los ángulos ψ , supondremos que se desconectan provisionalmente las barras en los nudos y de los apoyos y luego se unen una por una. Primero untremos la barra AB a la base. Si girase la cuerda de esta barra una cantidad ψ_{AB} , el extremo B se movería prácticamente perpendicular a AB según el camino BB' . Traslademos la barra BC paralela a sí misma, de modo que puedan unirse entre sí los extremos B de AB y BC en el punto B'. Si gira ahora la cuerda de BC, el extremo C se movería recorriendo un camino $C'C'$ perpendicular a la dirección primitiva de BC. De igual modo, si se uniera la barra CD al apoyo D y se hiciera girar la cuerda, el extremo C tendría que recorrer un camino CC' perpendicular a CD. Se podrían unir los extremos C de las barras BC y CD en el





punto C' en que se cortan esos caminos. Entonces,

$$\psi_{AB} = \frac{BB'}{L_{AB}} = \frac{\Delta}{(\cos \alpha)L_{AB}} = \frac{\Delta}{6} = \frac{10}{13} \psi_1$$

$$\psi_{AC} = -\frac{C'C}{j} = -\frac{\Delta}{j} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = -\frac{13}{60} \Delta = -\psi_1$$

$$\psi_{CD} = \frac{CC'}{L_{CD}} = \frac{\Delta}{(\cos \beta)L_{CD}} = \frac{\Delta}{7.5} = \frac{8}{13} \psi_1$$

Por tanto, todos los ángulos se pueden expresar en función de una incógnita, ψ_1 . Como $\theta_A = \theta_D = 0$, las incógnitas independientes son θ_B , θ_C y ψ_1 .

$$K_{AB} = \frac{12.370}{618.5} = 20 = K \quad K_{AC} = \frac{9.000}{300} = 30 = 1.5K \quad K_{CD} = \frac{24.235}{807.8} = 1.5K$$

Todos los ME son nulos, pues no hay cargas entre los nudos. Aplicando la Ec. (13.11),

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2EK\theta_B - 3\frac{1}{3}EK\psi_1 & M_{CB} &= 3EK\theta_B + 6EK\theta_C + 9EK\psi_1 \\ M_{BA} &= 4EK\theta_B - 3\frac{1}{3}EK\psi_1 & M_{CD} &= 6EK\theta_C - 7\frac{1}{3}EK\psi_1 \\ M_{BC} &= 6EK\theta_B + 3EK\theta_C + 9EK\psi_1 & M_{DC} &= 3EK\theta_C - 7\frac{1}{3}EK\psi_1 \end{aligned}$$

Nudo B:

$$\Sigma M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \therefore 10EK\theta_B + 3EK\theta_C + 4.385EK\psi_1 = 0 \quad (1)$$

Nudo C:

$$\Sigma M_C = 0 \quad M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad \therefore 3EK\theta_B + 12EK\theta_C + 3.462EK\psi_1 = 0 \quad (2)$$

Ecuaciones de los cortantes:

$$\text{Pilar AB: } \Sigma M_A = 0 \quad M_{AB} + M_{BA} + 6H_1 - 1.5V_1 = 0 \quad (a)$$

$$\text{Pilar CD: } \Sigma M_D = 0 \quad M_{DC} + M_{CD} + 7.5H_2 - 3V_2 = 0 \quad (b)$$

$$\text{Viga: } \Sigma M_C = 0 \quad M_{BA} + M_{CD} + 3V_1 = 0 \quad (c)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad V_1 = V_2 \quad (d)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_1 + H_2 = 50 \quad (e)$$

Sustituyendo V_1 , V_2 y H_2 de (c), (d) y (e) en (a) y (b) y eliminando H_1 de las Ecs. (a) y (b) modificadas, tenemos

$$\begin{aligned} M_{AB} + 2.3M_{BA} + 2.1M_{CD} + 0.8M_{DC} + 300 &= 0 \\ 11.2EK\theta_B + 15EK\theta_C - 31.292EK\psi_1 &= -300 \end{aligned} \quad (3)$$

Resolviendo ahora el sistema (1), (2) y (3) en la forma tabular siguiente:

Ec.	Operación	$EK\theta_B$	$EK\theta_C$	$EK\psi_1$	$\text{const} \times 0,1$	Comprobación
1		+10	+3	+ 4,385	0	+17,385
2		+ 3	+12	+ 3,462	0	+18,462
3		+11,2	+15	-31,292	-30	-35,092
3'	$3 \times 0,89286$	+10	+13,393	-27,939	-26,786	-31,332
3''	$3 \times 0,26786$	+ 3	+ 4,018	- 8,382	- 8,036	- 9,400
4	1 - 3'		-10,393	+32,324	+26,786	+48,717
5	2 - 3''		+ 7,982	+11,844	+ 8,036	+27,862
4'	$4 \times 0,7680$		- 7,982	+24,825	+20,572	+37,414
6	5 + 4'			+36,669	+28,608	+65,277
				+ 1,0	+ 0,7802	

$$7,982EK\theta_C = 8,036 - 9,241 = -1,205 \quad EK\theta_C = -0,151$$

$$3EK\theta_B = -8,036 + 6,540 + 0,607 = -0,889 \quad EK\theta_B = -0,296$$

Los resultados anteriores corresponden a constantes iguales a 0,1 del valor real. Los verdaderos son 10 veces mayores.

$$EK\theta_B = \underline{-2,96} \quad EK\theta_C = \underline{-1,51} \quad EK\psi_1 = \underline{+7,80}$$

Los momentos extremos son, por tanto,

$$M_{AB} = -5,9 - 36 = \underline{-41,9 \text{ m t}}$$

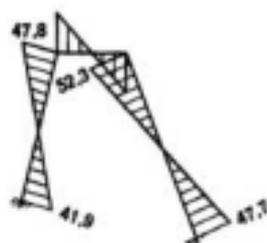
$$M_{BA} = -11,8 - 36 = \underline{-47,8 \text{ m t}}$$

$$M_{BC} = -17,8 - 4,5 + 70,2 = \underline{+47,9 \text{ m t}}$$

$$M_{CB} = -8,9 - 9,1 + 70,2 = \underline{+52,2 \text{ m t}}$$

$$M_{CD} = -9,1 - 43,2 = \underline{-52,3 \text{ m t}}$$

$$M_{DC} = -4,5 - 43,2 = \underline{-47,7 \text{ m t}}$$



Razonamiento:

Al estudiar las relaciones entre los ángulos ψ hay que asegurarse de anotar los signos correctos, indicando así si la cuerda gira en el sentido de las agujas del reloj o en el contrario.

En este problema se ha hallado la solución del sistema de ecuaciones con detalle para que sirva de ejemplo a un método tabular que es muy útil cuando hay tres o más ecuaciones. Las características principales son las siguientes:

1. Para eliminar una incógnita, se elige la ecuación que tiene el coeficiente mayor en esta columna. Se opera con esta ecuación para obtener varias versiones reducidas de ella, adaptando cada una de modo que se iguale el coeficiente de la incógnita que se elimina, en uno de los grupos originales de ecuaciones. Procediendo de este modo disminuyen los errores en lugar de aumentar.

2. Se guarda referencia de las operaciones realizadas con cada ecuación, para facilitar la comprobación.

3. En la columna de comprobación se anota la suma de todos los coeficientes y el término constante de cada ecuación. Se opera con ella lo mismo que con los demás términos de la ecuación. Después de cada operación, la nueva suma de los coeficientes y los términos constantes será igual al nuevo dato de la columna de comprobación. Se observará que esta comprobación es necesaria pero no suficiente para hallar los posibles errores que se compensan.

4. El orden de magnitud de la constante se ajustará para obtener valores que sean del mismo orden que los coeficientes de las incógnitas, para que sea más eficaz la columna de comprobación. Cuando se ha terminado la resolución del sistema hay que modificar los valores de las incógnitas para obtener las respuestas de acuerdo con las constantes reales.

En este punto, el lector habrá comenzado a comparar las ventajas e inconvenientes de los distintos métodos de estudio de tensiones. Habrá empezado a formarse alguna idea de cuándo debe usar un método u otro. Por ejemplo, estudiará las estructuras de las Figs. 13.12 y 13.15 y decidirá en cada caso si el procedimiento que utiliza las ecuaciones de superposición o el teorema de Castigliano es superior, o no, al método de la deformación angular.

La cantidad de cálculos es más o menos proporcional al cuadrado del número de ecuaciones simultáneas que intervienen en la resolución. Hablando en general, el método mejor es el que exige menos ecuaciones. Así, la comparación del procedimiento de la ecuación de superposición con el método de la deformación angular consiste esencialmente en comparar el número de componentes superabundantes de tensión, con el de ángulos θ y ψ desconocidos.

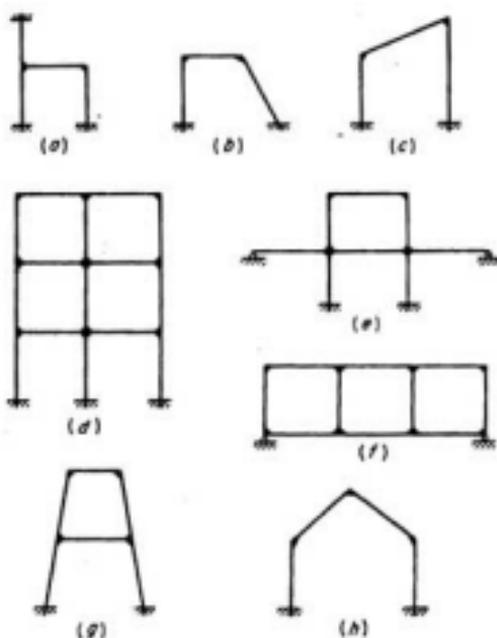


FIG. 13.15. Pórticos rígidos típicos con desplazamiento lateral.

13.13 Fundamentos del método de distribución de momentos. El de distribución de momentos es un método ingenioso y útil para tratar el estudio de tensiones de las estructuras de nudos rígidos¹. Todos los métodos estudiados antes implican la resolución de sistemas de ecuaciones, lo que constituye la mayor parte del trabajo de cálculo cuando hay más de tres o cuatro incógnitas. El de distribución de momentos, en general, no contiene tantas ecuaciones simultáneas y suele ser mucho más corto que todos los ya estudiados. Tiene, además, la ventaja de consistir en una serie de ciclos que convergen hacia el resultado final preciso; por tanto, se puede terminar la serie cuando se alcance el grado de precisión exigido por el problema de que se trata.

Refiriéndonos a la ecuación fundamental de la deformación angular [Ec. (13.11)], observaremos que el momento que actúa en el extremo de una barra es la suma algebraica de cuatro efectos separados:

1. El momento producido por las cargas aplicadas a la viga, considerándola como empotrada en sus extremos, esto es, el ME.
2. El momento producido por el giro de la tangente a la elástica en el extremo más cercano.
3. El momento producido por el giro de la tangente a la elástica en el extremo más alejado.
4. El momento producido por el giro de la cuerda de la elástica que une los dos extremos de la barra.

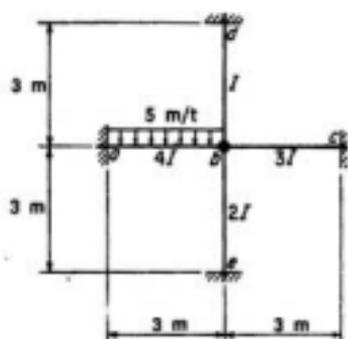


FIG. 13.16. Desarrollo de las ideas de la deformación angular (solo giro de los nudos).

Como el momento en el extremo es la superposición de estos cuatro, se prevé que será posible considerar que tengan lugar por separado y llegar así a su suma total.

Para simplificar el estudio actual, limitaremos nuestra atención a las estructuras compuestas por barras prismáticas, esto es, barras que tienen un I constante en toda su longitud, así como a las estructuras en que no hay traslación de nudos y en las que, por tanto, los ángulos ψ son todos iguales a cero.

Consideremos una de estas estructuras, como la de la Fig. 13.16. Si los apoyos no ceden, no hay giro de los nudos en a , d , c o e , pero habrá alguno en b cuando se aplique la carga. Pero supongamos que consideramos primero la estructura sin carga e imaginemos que aplicamos provisionalmente una mordaza que bloquea el nudo b impidiendo el giro. Entonces, si se aplica la carga, se producirán momentos de empotramiento en la ab y se podrán calcular por las Ecuaciones (13.13).

¹ El método de distribución de momentos fue presentado por el profesor Hardy Cross en un artículo *Trans. ASCE*, vol. 96, cuaderno 1793, 1932, y en varias publicaciones anteriores, y es, sin duda, una de las contribuciones más importantes al análisis estructural en los últimos años.

El momento ME_b produce un momento en sentido contrario a las agujas del reloj en el nudo b bloqueado. Si se suelta la mordaza, este momento hará que el nudo gire en sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando gira este nudo, se producen ciertos momentos a lo largo de las barras que se encuentran en él. El nudo continuará girando hasta que se produzcan en los extremos b de esas barras momentos suficientes para compensar el efecto de ME_b . Es evidente que se producen simultáneamente ciertos momentos en los extremos más alejados de esas barras. Cuando se ha establecido el equilibrio en el nudo b , la estructura habrá alcanzado su posición deformada final y los momentos totales en los extremos de las diversas barras serán la suma algebraica de los momentos de empotramiento y los producidos por el giro del nudo b .

El procedimiento bosquejado más arriba es, en esencia, el método de distribución de momentos. Es conveniente adoptar una cierta terminología para simplificar la descripción del procedimiento anterior. Ya estamos familiarizados con los términos usados para describir los momentos extremos producidos cuando se aplican las cargas a la estructura con todos los nudos bloqueados para impedir el giro —tales momentos se llaman *momentos de empotramiento*—. Cuando se libera un nudo, girará si la suma algebraica de los momentos de empotramiento que actúan en él no es nula; el momento resultante que actúa en el nudo se llama, por consiguiente, *momento desequilibrado*. Cuando los nudos libres giran como consecuencia de este momento desequilibrado,

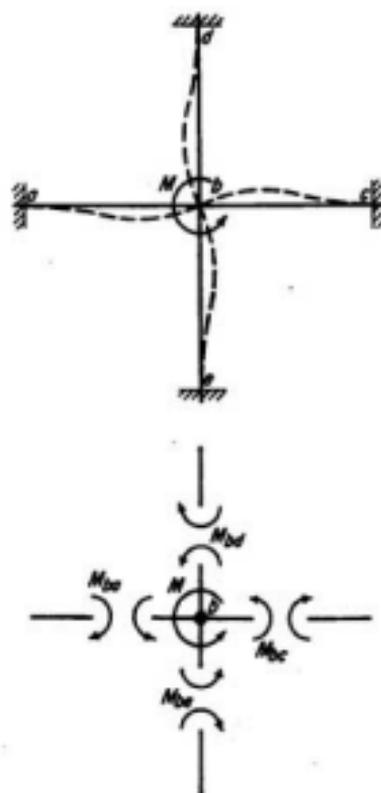


FIG. 13.17. Giro del nudo.

se producen momentos de empotramiento en los extremos de todas las barras que se juntan en él. Finalmente, éstos restablecen el equilibrio en el nudo, y se les llama *momentos repartidos, o distribuidos*. Sin embargo, cuando el nudo gira y flexaban estas barras, se producían también momentos en los extremos más alejados de cada una de ellas; son los llamados *momentos transmitidos*.

Antes de evaluar numéricamente estos diversos momentos, es conveniente adoptar un criterio de signos apropiado. En los textos se usan tres criterios distintos, pero el autor prefiere utilizar el mismo que se propuso anteriormente para el método de la deformación angular, esto es: *los momentos extremos son positivos cuando actúan en el sentido de las agujas del reloj en los extremos de las barras*.

Ya se han dado expresiones de los *momentos de empotramiento* en la Sec. 13.11. El *momento desequilibrado* que actúa en un nudo n es simplemente la suma algebraica de los momentos en los extremos n de todas las barras unidas rigidamente en ese nudo.

Para explicar cómo se calculan los *momentos repartidos* es necesario una nueva consideración. Sea la estructura de la Fig. 13.16 en las condiciones correspondientes al nudo b libre con posibilidad de girar bajo el momento desequilibrado M . La estructura se deforma como se ve en la Fig. 13.17 y produce momentos repartidos M_{ba} , M_{bc} , etc.



FIG. 13.18. Momento transmitido.

cétera, que restablecen el equilibrio del nudo b . Siendo desconocidos estos momentos repartidos, se supone que son positivos y que, por tanto, actúan en el sentido de las agujas del reloj en los extremos de las barras, y en el contrario en el nudo. El momento desequilibrado M se supone que es la resultante de momentos de empotramiento positivos, por lo que actúa también en el sentido contrario a las agujas del reloj en el nudo. Como $\Sigma M_b = 0$,

$$M_{ba} + M_{bc} + M_{bd} + M_{be} + M = 0 \quad (a)$$

Los momentos repartidos se pueden calcular por medio de la Ec. (13.11), observando en este caso que $\theta_a = \theta_c = \theta_d = \theta_e = 0$ y que todos los ángulos ψ son nulos.

$$\begin{aligned} M_{ba} &= 4EK_{ba}\theta_b & M_{bc} &= 4EK_{bc}\theta_b \\ M_{bd} &= 4EK_{bd}\theta_b & M_{be} &= 4EK_{be}\theta_b \end{aligned} \quad (b)$$

Sustituyendo en la Ec. (a) de las Ecs. (b), podemos despejar θ_b , sustituir este valor en las Ecs. (b) y obtener expresiones de M_{ba} , etc. Por ejemplo,

$$M_{ba} = \frac{-K_{ba}}{K_{ba} + K_{bc} + K_{bd} + K_{be}} M \quad \text{etc.} \quad (c)$$

o, en general, el momento repartido en una barra cualquiera bm está dado por

$$M_{bm} = - \frac{K_{bm}}{\sum_b K} M \quad (d)$$

donde la suma incluye todas las barras que se encuentran en el nudo b . Sea

$$DF_{bm} = \text{factor de reparto del extremo } b \text{ de la barra } bm = \frac{K_{bm}}{\sum_b K} \quad (13.14)$$

$$\text{Luego,} \quad M_{bm} = -DF_{bm}M \quad (13.15)$$

La Ec. (13.15) se puede interpretar como sigue:

El momento repartido producido en el extremo b de la barra bm cuando el nudo b está libre, y puede girar bajo un momento desequilibrado M , es igual al producto del factor de reparto DF_{bm} por el momento desequilibrado M con el signo invertido.

Se puede desarrollar también una expresión del momento transmitido. Consideremos una barra cualquiera, uno de cuyos extremos b ha girado un ángulo θ_b , produciendo un momento repartido M_{bm} , como se ve en la Fig. 13.18. Se observará que, cuando se liberó el nudo b y se le permitió girar, el m permaneció bloqueado, por lo que θ_m es igual a cero. Como ψ_m es también nulo, la aplicación de la Ec. (13.11) conduce a:

$$M_{bm} = 4EK_{bm}\theta_b \quad \text{y} \quad M_{mb} = 2EK_{bm}\theta_b$$

$$\text{De donde} \quad M_{mb} = \frac{1}{2}M_{bm} \quad (13.16)$$

Dicho en palabras, *el momento transmitido es igual a la mitad de su momento repartido y tiene el mismo signo.*

Hemos desarrollado ya todas las ideas fundamentales y las relaciones necesarias para resolver los problemas más sencillos de distribución de momentos. Se observará, sin embargo, que el estudio anterior se ha limitado a estructuras compuestas por barras prismáticas. En la Sec. 13.15 se ampliarán estas ideas a barras con I variable.

13.14 Aplicación de la distribución de momentos a vigas y pórticos. Como primer ejemplo de la aplicación de la distribución de momentos; consideremos la viga continua de la Fig. 13.19, cuyos apoyos no ceden. En este caso, los ángulos ψ de ambas barras son nulos, y el apoyo a está fijo permanentemente para evitar el giro. Supondremos que los nudos b y c están fijos provisionalmente y las cargas están aplicadas, produciendo los momentos de empotramiento siguientes:

$$\begin{aligned} ME_{ab} &= -1,44 \text{ m t} & ME_{bc} &= -2,70 \text{ m t} \\ ME_{ba} &= +2,16 \text{ m t} & ME_{cb} &= +2,70 \text{ m t} \end{aligned}$$

Como preparación para liberar los nudos b y c y distribuir los momentos desequilibrados, se calculan los coeficientes de rigidez K y de ellos los factores de reparto en esos nudos.

$$\text{En } b: \quad \Sigma K = I \quad DF_{ba} = \frac{1}{3} \quad DF_{bc} = \frac{1}{3}$$

$$\text{En } c: \quad \Sigma K = \frac{2I}{3} \quad DF_{cb} = 1$$

Estos coeficientes de reparto se escriben en el cuadro correspondiente en el diagrama de trabajo de la Fig. 13.19. En este diagrama se anotan todos los cálculos de los momentos extremos, escribiendo los números referentes a cada uno de ellos en una columna normal a la barra, alejándose de la barra desde el lado que se encuentra el primero al recorrer el nudo en el sentido de las agujas del reloj. Tal disposición de los cálculos no es imprescindible, como es natural, pero es muy conveniente para los pórticos.

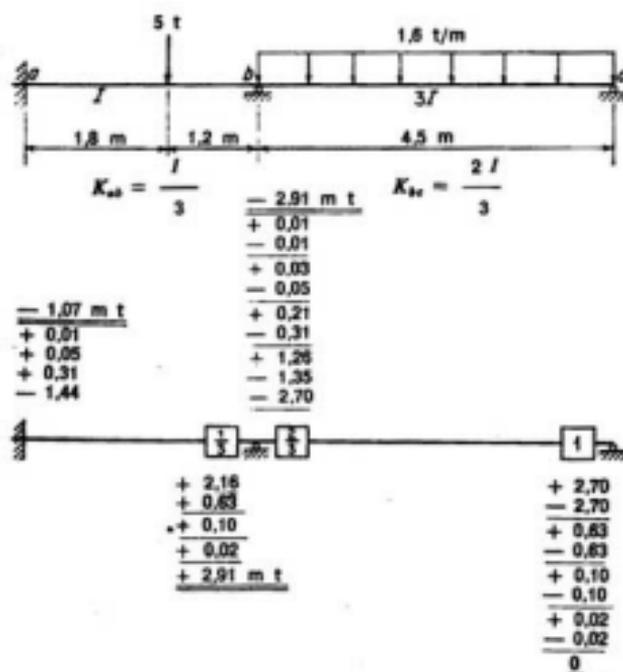


FIG. 13.19. Ejemplo aclaratorio.

Después de escribir los momentos de empotramiento, se liberan sucesivamente los nudos b y c y se les permite girar gradualmente hasta sus posiciones de equilibrio. Después de liberar el nudo c , gira bajo un momento desequilibrado de $+2,70$ hasta que se produce un momento repartido de $-2,70$ para restablecer el equilibrio. Se vuelve a fijar el nudo c en esta nueva posición y se traza una recta bajo el $-2,70$ para indicar que el nudo está en equilibrio. Cuando el nudo c giraba, se produjo un momento transmitido igual a la mitad del momento repartido, en el extremo b de la barra bc , en este caso de $-1,35$.

Si se libera ahora el nudo b , girará bajo un momento desequilibrado igual a la suma algebraica de los dos momentos de empotramiento en este nudo y del anteriormente transmitido, o sea $-1,89$. Utilizando los coeficientes de reparto apropiados, se calculan los momentos repartidos que restablecen el equilibrio y que son $+0,63$ y $+1,26$; se anotan y subrayan para indicar que el nudo está ahora en equilibrio. Volviendo a fijar este nudo en esta nueva posición se escriben los momentos transmitidos producidos en a y c por el giro del nudo b , que son $+0,31$ y $+0,63$, respectivamente.

Volviendo ahora al nudo c y liberándole por segunda vez, girará bajo un momento desequilibrado de $+0,63$, produciendo un momento equilibrador de $-0,63$. Nuevamente se transmite la mitad de este momento repartido al extremo b de esta barra. El nudo c se fija en su nueva posición. Liberando ahora el nudo b por segunda vez, girará bajo un desequilibrio de $-0,31$, produciendo momentos repartidos de $+0,21$ y $+0,10$ que, a su vez, inducen momentos transmitidos en a y c de $+0,10$ y $+0,05$.

Podemos continuar así, liberando primero el nudo c y luego el b , hasta que los efectos son tan pequeños que puedan ser despreciados. En este problema se han hecho más

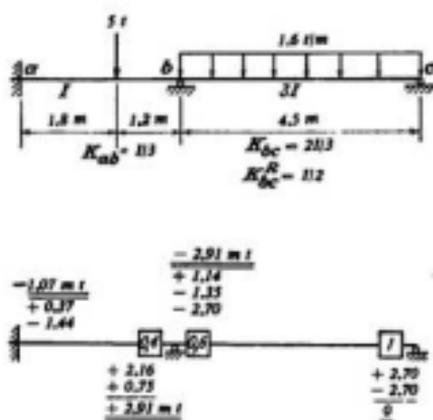


FIG. 13.20. Ejemplo utilizando el factor de rigidez reducido.

ciclos de los necesarios en la práctica, para que sirviera de ejemplo. Una vez completada la marcha de la distribución de momentos, se obtienen los momentos finales sumando algebraicamente todas las cantidades de las diversas columnas.

En el caso anterior, la convergencia era bastante lenta por el hecho de estar articulado el nudo *c* en su extremo, por lo que devuelve continuamente los momentos transmitidos al nudo *b*. Siempre que haya una articulación así al final de una estructura se puede mejorar la convergencia modificando el procedimiento anterior, como se indica en la Figura 13.20.

Comenzaremos, como antes, fijando todos los nudos para impedir el giro, aplicando las cargas y hallando los momentos de empotramiento. Como primer paso, liberamos el nudo *c* y le dejamos girar y producir el momento repartido de $-2,70$, que transmite $-1,35$ al nudo *b*. En este instante, dejamos al nudo *c* libre de modo que pueda girar y no produzca momentos extremos. En estas condiciones, cuando liberamos el nudo *b*, girará bajo el momento desequilibrado de $-1,89$ con el nudo *c* libre en lugar de fijo. Físicamente, esto significa que la barra *bc* no es tan rígida como antes, por lo que no toma tanto del momento desequilibrado. Ahora calcularemos cuánto se ha reducido su rigidez.

Refiriéndonos a las Figs. 13.16 y 13.17, supongamos que el apoyo en *c* fuera de rodillo o de charnela en lugar de un empotramiento. Habría un ángulo θ en *c* igual que en *b* bajo la acción del momento desequilibrado M , pero M_{cb} sería igual a cero. Aplicando la Ec. (13.11), el estudio anterior quedará modificado como sigue:

$$M_a = 4EK_b\theta_a + 2EK_b\theta_b = 0$$

de donde

$$\theta_c = -\frac{\theta_b}{2}$$

y

$$M_{bc} = 4EK_b\theta_b + 2EK_b\theta_c = 3EK_b\theta_b = 4E\left(\frac{3}{4}K_b\right)\theta_b = 4EK_b^R\theta_b$$

donde

$$K_b^R = \text{factor de rigidez reducido} = \frac{3}{4}K_b \quad (13.17)$$

Por tanto, en este nuevo caso se pueden usar las expresiones de los coeficientes de reparto dadas más arriba, con tal de utilizar un factor de rigidez reducido K^* para la barra en que su extremo más alejado está articulado¹.

Por ello revisaremos los coeficientes de reparto en b utilizando el factor de rigidez reducido para la barra bc :

$$\text{En } b: \quad \Sigma K \text{ ef.} = \frac{3}{8}I \quad DF_{bc} = 0,4 \quad DF_{ba} = 0,6$$

Como consecuencia, se producen momentos repartidos de $+0,75$ y $+1,14$ para compensar el momento desequilibrado de $-1,89$. Naturalmente, no hay transmisión a c , pues se dejó este nudo libre, pero hay la transmisión normal de b a a . En este caso particular, nuestra solución está completa, pues no se ha descompensado el nudo c al liberar b . Todos los nudos están, pues, en equilibrio, que no será perturbado si la fijación provisional de b se suprime definitivamente. Sumando las distintas columnas, tenemos en este caso los momentos extremos de la viga.

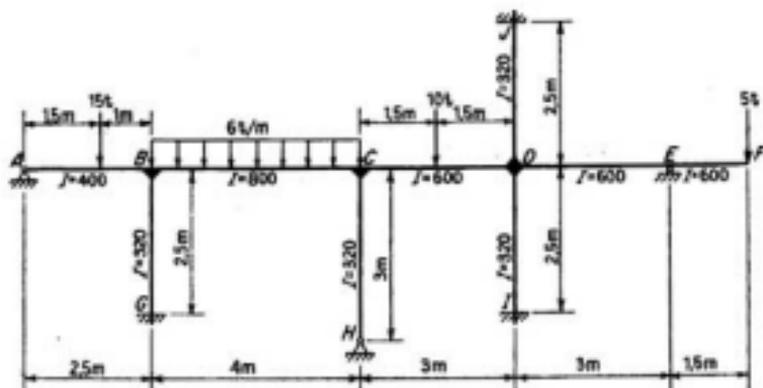
El procedimiento modificado no dará siempre los resultados exactos en un ciclo, como sucede en este problema, pero en todos los casos tendrá una convergencia más rápida que el original. Se ha pensado el Ejemplo 13.23 para aclarar la aplicación de las ideas anteriores a una estructura algo más complicada que no contiene ningún giro de cuerda desconocido. En el Ejemplo 13.24 se amplían estas ideas a un caso en que los ángulos ψ no son nulos, pero se conocen sus valores.

¹ Como el factor de rigidez efectivo en b para la barra bc puede ser K_{bc} si el extremo c está empotrado, o K_{bc}^* si está articulado, es conveniente volver a escribir la Ec. (13.14) como sigue:

$$DF_{ba} = \text{factor de distribución para el extremo } b \text{ de la barra } bc = \frac{K_{bc} \text{ ef.}}{\sum_i K \text{ ef.}} \quad (13.14a)$$

donde el símbolo $K \text{ ef.}$ designa el factor de rigidez efectivo de una barra, que puede ser igual a K o K^* , según que el extremo más alejado esté empotrado o articulado, respectivamente.

Ejemplo 13.23 Calcular los momentos extremos y dibujar el diagrama de momentos flectores del pórtico de la figura. Apoyos que no cedan.



Factores de reparto:

En B: $\Sigma K \text{ ef.} = 4,48$	En C: $\Sigma K \text{ ef.} = 4,80$	En D: $\Sigma K \text{ ef.} = 6,06$
$DF_{BA} = 0,268$	$DF_{CB} = 0,417$	$DF_{DC} = 0,330$
$DF_{BC} = 0,446$	$DF_{CD} = 0,417$	$DF_{DE} = 0,212$
$DF_{BD} = 0,286$	$DF_{CE} = 0,167$	$DF_{DE} = 0,248$
$\frac{1,000}{1,000}$	$\frac{1,000}{1,000}$	$\frac{1,002}{1,002}$

Momentos de empotramiento:

$$ME_{AB} = -\frac{(15)(1,5)(1)^2}{(2,5)^2} = -3,6 \text{ m t} \quad ME_{BA} = +\frac{(15)(1,5)^2(1)}{(2,5)^2} = +5,4 \text{ m t}$$

$$ME_{BC} = -\frac{(6)(4)^2}{12} = -8 \text{ m t} \quad ME_{CB} = +8 \text{ m t}$$

$$ME_{CD} = -\frac{(10)(3)}{8} = -3,75 \text{ m t} \quad ME_{DC} = +3,75 \text{ m t}$$

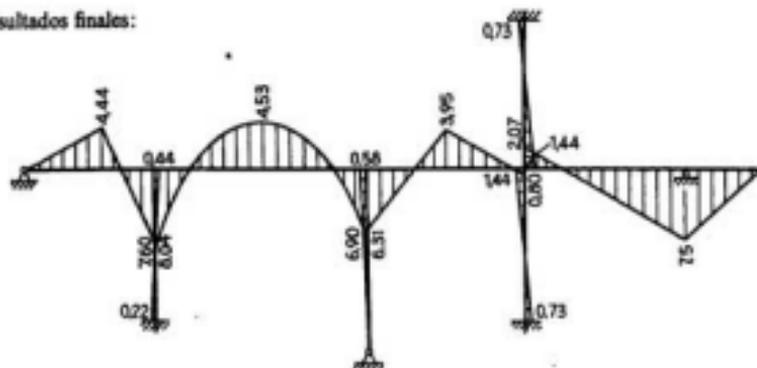
Momento del voladizo:

$$M_{EF} = -(5)(1,5) = -7,5 \text{ m t}$$

Distribución de momentos:



Resultados finales:



Razonamiento:

En esta estructura, al aplicar las cargas después de fijar todos los nudos para evitar el giro, se producirá un momento en el extremo E del voladizo, además de los momentos de empotramiento usuales en los demás puntos del pórtico. El momento de $+7.50$ m t contribuye al momento desequilibrado en el nudo E, como lo haría un momento de empotramiento.

Se observará que el brazo del voladizo no impide el giro del nudo E, por lo que su factor de rigidez es nulo. Por tanto, cualquier momento desequilibrado se soporta totalmente por las demás barras que se encuentran en ese nudo.

Siguiendo el procedimiento modificado, deben liberarse primero todos los extremos articulados. Esto incluye no solo a los nudos A y H, sino también a E.

Los restantes nudos se liberan uno a uno girando gradualmente hasta su posición de equilibrio. Si comenzamos a hacer esto por el nudo que tiene mayor momento desequilibrado, la convergencia será algo más rápida, aunque los resultados finales son independientes del orden en que se liberan los nudos.

modo, podemos aplicar todas las cargas dadas y determinar los momentos extremos resultantes por el método de distribución como haríamos para cualquier estructura que no tuviera desplazamiento lateral. Teniendo los momentos extremos, podemos hallar la fuerza R por la estática¹. Esta parte de la resolución se llama etapa A en la Figura 13.21.

En la segunda parte de la solución, o etapa B , suponemos que sujetamos los nudos para evitar el giro, empujamos el pórtico en el nudo B e introducimos un desplazamiento horizontal arbitrario, Δ . (Obsérvese que la fuerza de empuje P en el caso B debe aplicarse en el mismo punto y según la misma línea de acción que la fuerza de sustentación R de la etapa A .) Podemos estudiar ahora los ángulos ψ así introducidos en los pilares. Utilizando la Ec. (13.11) podemos calcular los momentos extremos iniciales producidos en las barras. Estos momentos estarán expresados en función de $E\Delta$; pero como Δ es arbitrario, podemos hacer $E\Delta$ igual a la unidad, o a cualquier cantidad que nos convenga, para obtener valores numéricos de los momentos extremos iniciales. Si liberamos, distribuimos y transmitimos varios ciclos en los nudos B y C , llegaremos a un conjunto de momentos extremos en el pórtico. De nuevo, podemos hallar por la estática la fuerza P que empujó al pórtico hasta su posición inicial y produjo estos momentos extremos.

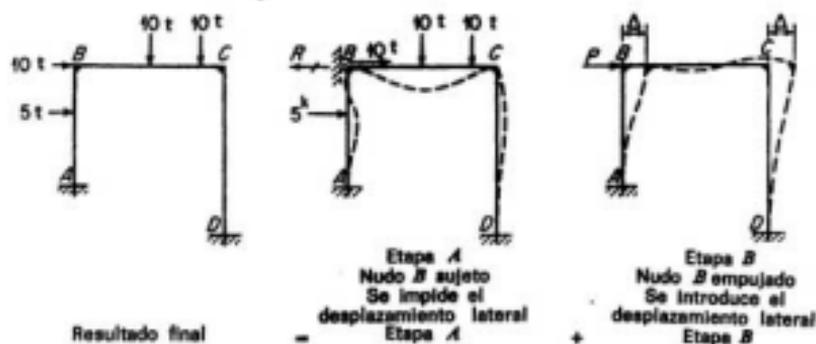
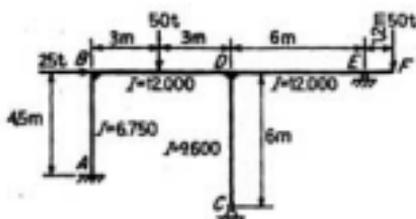


FIG. 13.21. Distribución de momentos incluyendo el efecto de desplazamiento lateral (traslación de los nudos).

Ahora estamos en condiciones de superponer la etapa A y la B para obtener las soluciones para las cargas dadas. Para simplificar el estudio de esta superposición, supongamos que se calculó que R era una fuerza de $12t$ que actuaba a la izquierda, y P una fuerza de $6t$ que actuaba a la derecha. Debemos tomar los momentos de la etapa A como son, pues las cargas exteriores de esta etapa son las dadas, pero haremos de combinar estos resultados con un múltiplo cualquiera de los resultados de la etapa B . Utilizando los valores supuestos de P y R , si tomamos cargas dobles a las de la etapa B y las superponemos a las de la A , obtendremos el sistema de cargas dado. Por tanto, se obtienen los resultados finales para los momentos extremos, sumando algebraicamente el doble de los momentos de la etapa B con los de la etapa A .

¹ Supongamos que en un problema se halló por la estática que la fuerza de sustentación R era nula. ¿Qué significa esto respecto al desplazamiento lateral? ¿Es necesario continuar con la solución del caso B ?

Ejemplo 13.25 Calcular los momentos extremos del pórtico de la figura.



$$\text{En B: } K_{AB} = \frac{6.750}{45} = 15 \quad DF_{BA} = 0,429$$

$$K_{BD} = \frac{12.000}{600} = 20 \quad DF_{BD} = 0,571$$

$$\Sigma K \text{ ef.} = 35$$

$$\text{En D: } K_{DB} = 20 \quad DF_{DB} = 0,426$$

$$K_{DE}^* = \frac{3}{4} \frac{12.000}{600} = 15 \quad DF_{DE} = 0,319$$

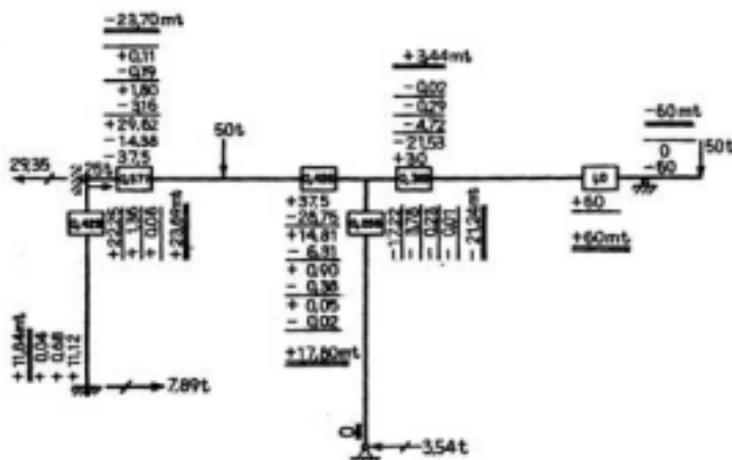
$$K_{DC}^* = \frac{3}{4} \frac{9.600}{600} = 12 \quad DF_{DC} = 0,255$$

$$\Sigma K \text{ ef.} = 47$$

Etapa A: Sin desplazamiento. Pórtico sujeto en el nudo B. Todas las cargas aplicadas a la estructura.

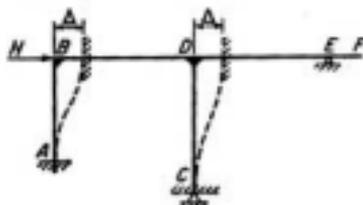
$$ME_{AD} = -37,5 \quad M_{EF} = -60$$

$$ME_{DB} = +37,5$$



Se pueden hallar las reacciones en A y C aislando los pilares. Luego, aplicando $\Sigma H = 0$ a toda la estructura, hallamos que la fuerza de sustentación en B es de 29,35 t hacia la izquierda.

Etapa B: Se introduce la deformación empujando en el punto B, habiendo fijado antes provisoriamente todos los nudos (incluso el C) para impedir el giro. Calculando los momentos extremos iniciales por la Ec. (13.11).



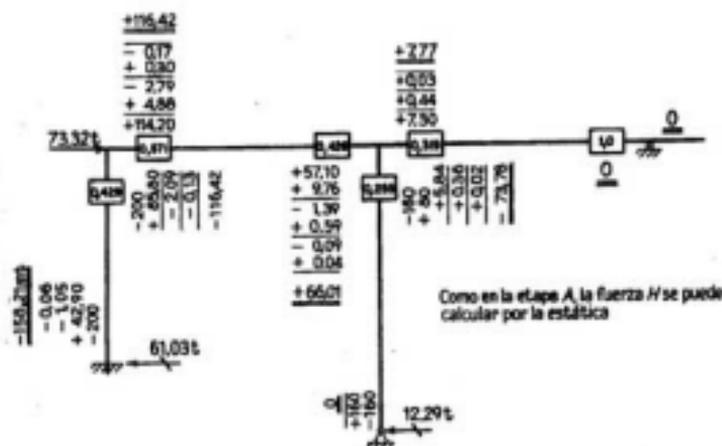
$$M_{AB} = M_{BA} = -6E(15) \left(\frac{\Delta}{4,5} \right) = -20E\Delta$$

$$M_{CD} = M_{DC} = -6E(16) \left(\frac{\Delta}{6} \right) = -16E\Delta$$

Sea $E\Delta = 10$; será

$$M_{AB} = M_{BA} = -200$$

$$M_{CD} = M_{DC} = -160$$



Combinación de la etapa A y la B: Sea B = coeficiente por el que hay que multiplicar la solución de la etapa B. La superposición de la solución de la etapa B multiplicada por B y la de la etapa A ha de ser tal, que la fuerza de empuje modificada de la etapa B anule a la fuerza de empuje de la etapa A en el nudo B, dejando así que actúen sobre la estructura solo las cargas aplicadas. Esta anulación se puede expresar en forma de ecuación, considerando positivas las fuerzas que actúan hacia la derecha del nudo B. Así,

$$-29,35 + 73,32B = 0 \quad \text{o} \quad B = 0,4000$$

∴ Resultados finales = etapa A + (B) (etapa B)

$$\begin{aligned} M_{AB} &= +11,84 - 63,28 = -51,44 \text{ m t} & M_{DC} &= -21,24 - 29,51 = -50,75 \text{ m t} \\ M_{BA} &= +23,70 - 46,57 = -22,87 \text{ m t} & M_{BC} &= +3,44 + 3,11 = +6,55 \text{ m t} \\ M_{BD} &= -23,70 + 46,57 = +22,87 \text{ m t} & M_{ED} &= +60 + 0 = +60 \text{ m t} \\ M_{DB} &= +17,80 + 26,40 = +44,20 \text{ m t} \end{aligned}$$

Razonamiento:

Cuando se calculan los momentos extremos iniciales producidos por el giro de una cuerda, todos los nudos, incluso los apoyos articulados, se supone que están fijos contra el giro. Se observará que en estos cálculos se usa el factor de rigidez K , no el reducido K^R .

El factor de rigidez reducido se usa solo para calcular los coeficientes de reparto.

Los momentos extremos producidos por una carga horizontal cualquiera, que actúe en el nudo B, se podrán calcular por proporción directa a partir de la etapa B.

Las ideas empleadas en el Ejemplo 13.25 se pueden aplicar sin modificación a cualquier pórtico que solo tenga un ángulo ψ independiente. También es fácil ampliar la aplicación de estas ideas a los pórticos que tienen más de un ángulo ψ independiente. Se dice que un pórtico que tiene n ángulos ψ independientes, posee n grados de libertad respecto al desplazamiento lateral. Para tal pórtico se puede dividir la solución por distribución de momentos en $(n + 1)$ etapas distintas: 1) una etapa A en la que se evita totalmente el desplazamiento lateral, introduciendo n fuerzas de sustentación; y 2) n etapas de desplazamiento lateral, en cada una de las cuales solo se permite un ángulo ψ independiente, manteniendo $(n - 1)$ de las fuerzas de sustentación introducidas en la etapa A y empujando en el nudo restante.

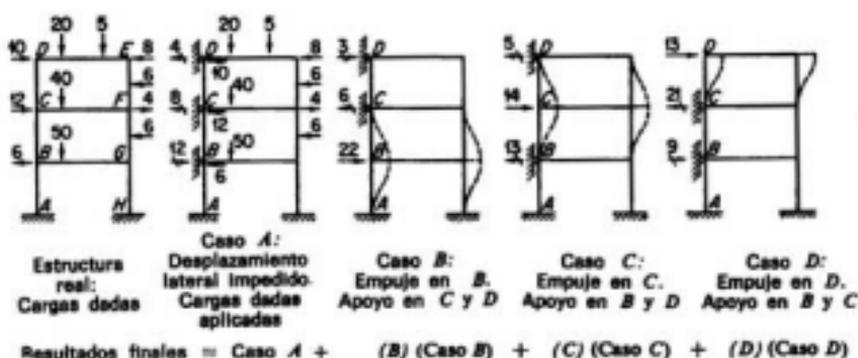


FIG. 13.22. Grados de libertad múltiples, respecto al desplazamiento lateral.

Nota: Los valores anotados antes para las fuerzas de empuje o de sustentación son supuestos, como ejemplo, pero no se han calculado como se haría en un problema real. Las formas deformadas en líneas de trazos corresponden a la posición inicial del pórtico cuando se han introducido los desplazamientos de los nudos, con los nudos fijos contra el giro. No se ha representado la elástica final después de liberar los nudos y girar éstos hasta su posición final, correspondiente a la distribución de momentos de cada caso de desplazamiento lateral.

Los resultados de estas $(n + 1)$ etapas se superponen del mismo modo que en el Ejemplo 13.25. El coeficiente por el que hay que multiplicar los resultados de cada una de las etapas de desplazamiento lateral en esta superposición, se puede hallar resolviendo el sistema de n ecuaciones obtenidas escribiendo una para cada nudo de los sujetos en la etapa A. Para un nudo j , la ecuación establece simplemente que la suma algebraica de la fuerza de sustentación de la etapa A en j , más B veces la fuerza de apoyo o empuje en j para la etapa de desplazamiento lateral B, más C veces la fuerza en j para la etapa C, y así sucesivamente para las n etapas de desplazamiento transversal, es cero.

Como aclaración de la distribución de momentos aplicada a un pórtico que tiene varios grados de libertad con respecto al desplazamiento lateral, consideremos el pórtico de la Fig. 13.22. Este pórtico tiene tres ángulos ψ independientes, correspondientes a los desplazamientos horizontales independientes de los nudos B, C y D. Se dice, por tanto, que el pórtico tiene tres grados de libertad respecto al desplazamiento lateral. Por tanto, la resolución por el método de distribución de momentos se divide en $(3 + 1)$, o cuatro, etapas separadas: la etapa A (evitado el desplazamiento lateral) y tres etapas de desplazamiento lateral (etapas B, C y D).

En la etapa A, después de introducir fuerzas de sustentación en los nudos B, C y D para evitar el desplazamiento lateral, se aplican todas las cargas dadas realizando una distribución de momentos ordinaria, sin desplazamiento, para hallar los momentos extremos. Luego se calculan las fuerzas en B, C y D por la estática. Supondremos que estas fuerzas tienen los valores 12,8 y 4, respectivamente, y que están dirigidas como se indica en la Figura 13.22.

Luego se considera por separado cada una de las tres etapas de desplazamiento lateral. Por ejemplo, en la etapa B se sujetan los nudos C y D contra el desplazamiento horizontal, mientras que el B se desplaza una cantidad arbitraria. Si los nudos están fijos contra el giro inicialmente, cuando se introduce este desplazamiento, se producen ciertos momentos extremos iniciales en las barras AB, BC, GH y GF. Estos momentos iniciales debidos al desplazamiento arbitrario se pueden calcular como se hizo en la etapa B del Ejemplo 13.25. Se hace una distribución de momentos para los momentos

extremos producidos como consecuencia de la introducción de estos iniciales. Luego se calcula por la estática la fuerza de empuje en B y las de sustentación en C y D . Para lo que sigue, supondremos también que estas fuerzas tienen el valor y dirección que aparece en la Fig. 13.22 para la etapa B . Análogamente se ha procedido para las otras dos etapas de desplazamiento lateral, llamadas etapa C y etapa D .

Ahora queda por hallar qué cantidad de estas tres etapas de desplazamiento lateral hay que superponer el caso A para obtener los resultados finales del problema. En otras palabras, debemos obtener los coeficientes B , C y D por los que hay que multiplicar las etapas B , C y D , respectivamente, para obtener sus contribuciones a los resultados finales. Estos coeficientes se obtienen resolviendo un sistema de tres ecuaciones, cada una de las cuales se plantea como sigue: Si en el nudo B , por ejemplo, se consideran positivas las fuerzas que van hacia la derecha, podemos escribir:

$$12 + 22B - 13C + 9D = 0$$

En el nudo C : $-8 - 6B + 14C - 21D = 0$

En el nudo D : $-4 + 3B - 5C + 13D = 0$

Resolviendo el sistema formado por estas tres ecuaciones se obtienen los valores de B , C y D . Si ahora multiplicamos las fuerzas exteriores de la etapa B por B , las de la C por C y las de la D por D , y superponemos estas fuerzas modificadas de las tres etapas a las de la etapa A , obtenemos las cargas dadas (y sus reacciones correspondientes). En otras palabras, tal superposición elimina todas las fuerzas de empuje y de sustentación adicionales. Evidentemente, se obtienen los resultados finales (tales como los momentos extremos en la estructura real producidos por las cargas dadas) superponiendo los resultados de las cuatro etapas, como se indica en la Figura 13.22.

Se observará que hay una opción considerable en el modo de introducir los desplazamientos arbitrarios de los nudos en cada uno de los casos de desplazamiento lateral. La única exigencia es que cada caso sea independiente de los otros. Por ejemplo, en la etapa B podríamos haber desplazado los nudos B , C y D horizontalmente, cantidades iguales. En la etapa C podríamos sujetar el nudo B y empujar C y D cantidades iguales. Estas nuevas etapas B y C se podrían combinar con las A y D anteriores, obteniéndose un nuevo sistema de ecuaciones del que se hallarían nuevos valores de los coeficientes B , C y D . Sin embargo, la superposición de las etapas de esta nueva solución conduciría a los mismos resultados finales obtenidos en la primera.

En los casos en que hay desplazamiento lateral se puede usar otro procedimiento que no exige la resolución de un sistema de ecuaciones. En este método introducimos desplazamientos de nudos al mismo tiempo que aplicamos las cargas que producen los momentos de empotramiento. Después de cada ciclo de distribución comprobamos las ecuaciones de equilibrio y hallamos las cargas en los nudos. Si estas cargas no coinciden con las dadas, introducimos desplazamientos de nudos adicionales, hacemos otro ciclo de distribución, comprobamos de nuevo las fuerzas, etc.¹

¹ Un estudio detallado de este otro procedimiento cae fuera del objeto de este libro. Para tal información, se envía al lector a tratados más extensos sobre el método de distribución de momentos que se hallan en los siguientes textos: L. E. Grinter, «Theory of Modern Steel Structures», 2.^a ed., vol. 2, The Macmillan Company, Nueva York, 1949; J. A. L. Matheson, «Hyperstatic Structures», vol. 1, Butterworth's Scientific Publications, Londres, 1959; J. I. Paroel y R. B. Moorman, «Analysis of Statically Indeterminate Structures», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1955.

Para tratamientos más extensos del estudio de las estructuras estáticamente indeterminadas en general, se envía al lector a los siguientes textos, así como a los mencionados arriba: S. F. Borg y J. J. Genasro, «Advanced Structural Analysis», D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1959; L. C. Maugh, «Statically Indeterminate Structures», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1946; S. P. Timoshenko y D. H. Young,

13.15 El método de distribución de momentos aplicado a barras no prismáticas. La idea fundamental del procedimiento de la distribución de momentos desarrollada en la Sec. 13.13 es aplicable a cualquier viga o pórtico formado por barras de E e I constantes o variables. Sin embargo, se han deducido las expresiones de los momentos de empotramiento, del factor de rigidez y del momento transmitido, para las barras con E e I constantes y no son aplicables a las no prismáticas. Ahora desarrollaremos nuevas expresiones de estas cantidades para el caso de barras originalmente rectas con E e I variables.

Factor de transmisión C . El momento transmitido es el indicado en un extremo empotrado de una barra cuando el opuesto gira a causa de un momento extremo. Es conveniente expresar el momento en B como igual al aplicado en A multiplicado por el factor (o coeficiente) de transmisión C_{AB} , cuyo orden de subíndices indica la dirección en que se transmite el efecto, esto es, de A a B en este caso, o

$$M_{BA} = C_{AB}M_{AB} \quad (13.18)$$

De esta ecuación se puede definir el factor de transmisión como el momento introducido en el extremo empotrado de una barra cuando el opuesto gira a causa de un momento extremo unidad. Para una barra prismática el coeficiente de transmisión es $1/2$. Obsérvese además que C_{AB} es igual a C_{BA} solo cuando una barra es simétrica respecto a su punto medio.

A continuación se da un esquema del procedimiento para calcular el factor de transmisión en cualquier caso dado: Consideremos una barra cualquiera AB como la de la Fig. 13.23, y apliquemos un momento unidad en A , que induce uno C_{AB} en B . El desplazamiento del punto A en la elástica desde la tangente en B es igual a cero. Aplicando el segundo teorema del área de momentos, el momento estático del diagrama compuesto M/EI , tomado respecto a un eje por el punto A ha de ser, por tanto, igual a cero. De esta ecuación puede calcularse fácilmente C_{AB} .

Factor de rigidez verdadero K . Consideremos la Sec. 13.13 en que se estudió el cálculo de los momentos repartidos y supongamos que las Figs. 13.16 y 13.17 representan ahora estructuras formadas por barras no prismáticas. Al considerar el efecto del giro del nudo B bajo el momento desequilibrado M , no podemos calcular ya los momentos repartidos por la Ec. (13.11). Pero podemos escribir

$$M_{BA} = K'_{BA}\theta_B \quad M_{BC} = K'_{BC}\theta_C \quad \text{etc.} \quad (a)$$

donde K'_{BA} , K'_{BC} , etc., son los llamados factores (o coeficientes) de rigidez verdaderos para el extremo B de la barra BA , para el extremo B de la barra BC , etc. De esta ecuación se puede definir el factor de rigidez verdadero K'_{BA} como el momento extremo necesario para hacer girar la tangente en el extremo B de la barra BA un ángulo unidad, cuando el otro extremo A está empotrado.

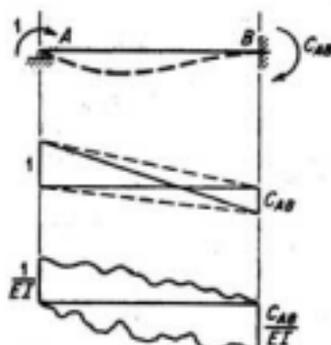


FIG. 13.23. Factor de transmisión.

«Theory of Structures», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1945; C.-K. Wang, «Statically Indeterminate Structures», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1953; F. S. Kinney, «Indeterminate Structural Analysis», Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1957.

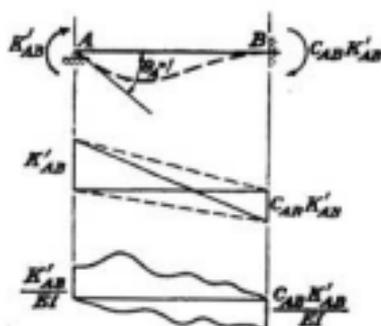


FIG. 13.24. Factor de rigidez verdadero.

Para una barra prismática, el factor de rigidez verdadero es $4EK$. Se observará que K , que antes se llamó solo «factor de rigidez» de una barra, da el valor relativo del coeficiente verdadero en las barras prismáticas. Quizá deberíamos haberle llamado «coeficiente relativo de rigidez», pero se usa tanto este término que es preferible hacerlo tan corto como sea posible. Se observará, además, que en general una barra tiene un factor de rigidez diferente en cada extremo; solo cuando sea simétrica serán los dos iguales.

El factor de rigidez verdadero K'_{AB} del extremo A de la barra AB de la Fig. 13.24 se puede calcular como sigue: Por definición, un momento extremo de valor K'_{AB} aplicado en A hará girar a la tangente en A un ángulo unidad, cuando el extremo B está empotrado. Aplicando el primer teorema del área de momentos, el área bajo el diagrama compuesto M/EI debe ser igual a la unidad. Si se ha calculado previamente C_{AB} como se ha dicho antes, se puede determinar ahora K'_{AB} de esta ecuación.

Factor de rigidez reducido verdadero K''_{AB} . Se puede definir el factor de rigidez reducido verdadero K''_{AB} como el momento extremo necesario para hacer girar la tangente en A un ángulo unidad, cuando el otro extremo está articulado. Se puede calcular fácilmente K''_{AB} procediendo como sigue, siempre que se hayan calculado ya K'_{AB} , C_{AB} y C_{BA} : Se considera una barra AB , y se supone provisionalmente que se fija en nudo B contra el giro. Un momento de K'_{AB} aplicado en el extremo A producirá un giro en este punto igual a la unidad e inducirá un momento transmitido en el extremo opuesto, de $C_{AB}K'_{AB}$. Si se fija ahora el extremo A en esta posición y se libera el B , éste girará bajo la acción del momento desequilibrado $C_{AB}K'_{AB}$ y producirá un momento de $-C_{BA}C_{AB}K'_{AB}$. Como consecuencia, se induce en A un momento transmitido $-C_{BA}C_{AB}K'_{AB}$. La barra presentará ahora la deformación de la Fig. 13.25, y el momento extremo total en A será igual al factor de rigidez reducido verdadero K''_{AB} . Por tanto,

$$K''_{AB} = K'_{AB}(1 - C_{BA}C_{AB}) \quad (13.19)$$

FIG. 13.25. Factor de rigidez reducido verdadero.



Para una barra prismática C_{AB} y C_{BA} son iguales a un medio, por lo que de la Ec. (13.19) se ve que K''_{AB} es igual a tres cuartos de K'_{AB} , como debía ser.

Relación de comprobación entre factores de rigidez y de transmisión. Se puede deducir una relación útil entre los factores de rigidez y de transmisión, para utilizarla a objeto de comprobación. Consideremos la barra AB representada en la Fig. 13.26 sometida a dos sistemas de cargas independientes I y II. Aplicando la ley de Betti, hallamos que

$$C_{AB}K'_{AB} = C_{BA}K'_{BA} \quad (13.20)$$

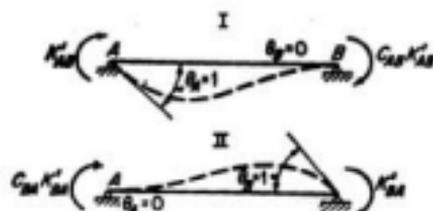


FIG. 13.26. Relación de comprobación.

Esta expresión es muy útil para usarla como comprobación de los valores de los factores de transmisión y de rigidez.

Factores de reparto y momentos repartidos. Si efectuamos el cálculo de los momentos repartidos utilizando las expresiones de las Ecs. (a) de este artículo y procediendo como en la Sec. 13.13, obtenemos expresiones de factor de reparto, que son las mismas que las Ecs. (13.14) o (13.14a), excepto que los factores de rigidez K se sustituyen por los verdaderos K .

Factor de desplazamiento lateral. También es fácil desarrollar expresiones del factor (o coeficiente) de desplazamiento lateral J , que se pueden usar para calcular los momentos extremos iniciales producidos por un giro de una cuerda. Podemos escribir las expresiones siguientes para tales momentos:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= J_{AB}\psi_{AB} \\ M_{BA} &= J_{BA}\psi_{AB} \end{aligned} \quad (13.21)$$

Se puede definir el factor de desplazamiento J_{AB} como el momento producido en el extremo A de la barra AB por un giro unidad de la cuerda, estando fijos los dos extremos de la barra contra el giro del nudo. Para una barra prismática, el factor de desplazamiento lateral es $-6EK$. Este factor es igual en cada extremo solo cuando la barra es simétrica.

El factor de desplazamiento lateral de la barra AB de la Fig. 13.27a se puede expresar en función de los factores de rigidez y de transmisión por el razonamiento siguiente: Supongamos que se liberan provisionalmente los extremos A y B y que se desplaza la barra como se ve en la Fig. 13.27b. Fijemos el extremo A y hagamos girar el B hasta que θ_B vuelva a ser nula, produciendo así momentos extremos $-K'_{BA}$ en B y $-C_{BA}K'_{BA}$ en A . Fijemos ahora el extremo B en esta posición y hagamos girar el A hasta que θ_A vuelva también a cero, produciendo así mo-

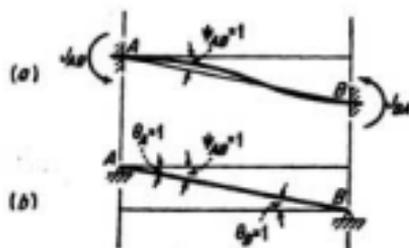


FIG. 13.27. Factor de desplazamiento lateral.

mentos $-K'_{AB}$ en A y $-C_{AB}K'_{AB}$ en B . La barra presentará la deformación que se ve en la Figura 13.27a, y los momentos extremos totales serán iguales al factor de desplazamiento lateral, o sea que

$$\begin{aligned} J_{AB} &= -(K'_{AB} + C_{BA}K'_{BA}) \\ J_{BA} &= -(K'_{BA} + C_{AB}K'_{AB}) \end{aligned} \quad (13.22)$$

Momentos de empotramiento. Los momentos de empotramiento en una barra no prismática pueden calcularse como sigue: Consideremos la barra AB sometida a una carga cualquiera.

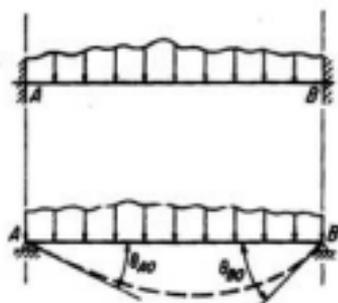


FIG. 13.28. Cálculo suplementario referente a los momentos de empotramiento.

Supongamos provisionalmente que la carga está aplicada a esta barra que actúa como una viga apoyada en sus extremos. Calcularemos los giros de las tangentes θ_{A_0} y θ_{B_0} producidos en este caso, utilizando los teoremas del área de momentos. Si imaginamos luego que fijamos el extremo B y hacemos girar el A hasta que vuelva a una desviación nula, y después fijamos A en esta posición y giramos B hasta restablecer la suya, se verá que los momentos extremos resultantes son

$$\begin{aligned} ME_{AB} &= -K'_{AB}\theta_{A_0} + C_{BA}K'_{BA}\theta_{B_0} \\ ME_{BA} &= +K'_{BA}\theta_{B_0} - C_{AB}K'_{AB}\theta_{A_0} \end{aligned} \quad (13-23)$$

Observaciones generales. Las expresiones anteriores son aplicables exclusivamente a las barras cuyos ejes son originalmente rectos. Se pueden usar con suficiente aproximación para las barras con ejes ligeramente curvos, siempre que la estructura esté dispuesta de modo que el empuje axial producido en esas barras sea relativamente pequeño. La consideración de expresiones más exactas para las barras curvas está fuera del objeto de este libro.

Existen ábacos y tablas con los que se pueden obtener fácilmente los valores de los momentos de empotramiento, factores de rigidez y de transmisión para las barras con cartelas típicas¹.

13.16 Análisis de tensiones de las armaduras espaciales estáticamente indeterminadas. Las armaduras espaciales estáticamente indeterminadas se pueden estudiar por medio del teorema de Castigliano o de las ecuaciones de superposición. Fundamentalmente, el análisis de tensiones de tales estructuras se lleva a cabo por estos métodos exactamente de la misma forma que para un cuchillo indeterminado. Naturalmente, el detalle del estudio es más pesado cuando la estructura primaria es una armadura tridimensional que si se trata de un cuchillo plano. Todas las ideas estudiadas anteriormente para los cuchillos indeterminados son aplicables aquí, pero la generalización en detalle al caso de las armaduras espaciales no entra en el objeto de este libro.

13.17 Deformación de estructuras estáticamente indeterminadas. Una vez efectuado el estudio de tensiones de una estructura indeterminada, pueden hallarse sin dificultad las deformaciones y los consiguientes corrimientos de la estructura mediante los mismos procedimientos que se han explicado y aplicado en el Cap. 12 a las estructuras estáticamente determinadas.

Supongamos, por ejemplo, que hemos calculado las fuerzas de barra y las correspondientes variaciones de longitud de las barras del cuchillo de la Fig. 13.29a debidas a unas cargas dadas, e imaginemos que queremos hallar el desplazamiento vertical resultante del nudo f por el método de los trabajos virtuales. Podríamos proceder del modo usual y aplicar una carga vertical unidad en el nudo f de la estructura real representada en la Fig. 13.29a. Esta carga produciría fuerzas F_Q en la mayoría de las barras del cuchillo indeterminado. Después de haber calculado estas fuerzas, podemos aplicar la Ec. (12.5) y hallar el desplazamiento del nudo f . Pero este procedimiento, aunque directo, es laborioso porque en los cálculos intervienen la mayoría de las barras.

Los cálculos de los desplazamientos en las estructuras indeterminadas se pueden simplificar considerablemente teniendo en cuenta que se han calculado las superabundantes de modo que las tensiones, deformaciones y desplazamientos de las estructuras primaria y real sean iguales.

¹ Por ejemplo, para vigas y pilares de hormigón con momento de inercia variable, el Boletín S. T. 41 de la Portland Cement Association.

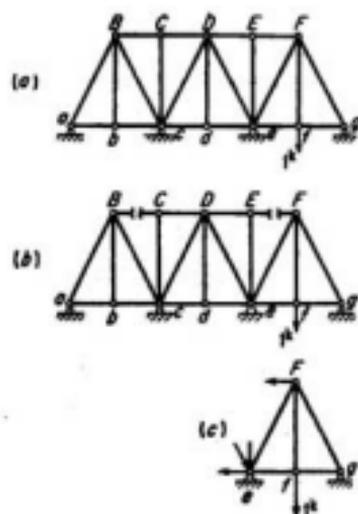


FIG. 13.29. Desplazamiento de armaduras estáticamente indeterminadas.

Se pueden calcular los desplazamientos, por tanto, usando la estructura primaria estáticamente determinada en lugar de la real, que es indeterminada. Indudablemente es mucho más fácil utilizar la estructura primaria. Por ejemplo, en la estructura anterior, supongamos que utilizamos la estructura primaria de la Fig. 13.29b y calculemos el desplazamiento vertical del nudo f por el método de los trabajos virtuales. En este caso, la carga unidad en el nudo f producirá fuerzas F_g solo en las cinco barras ef , fg , eF , fF y Fg . Como consecuencia, cuando se aplica la Ecuación (12.5) solo contribuyen cinco barras a la suma de $F_g \Delta L$, resultando los cálculos enormemente reducidos en este caso.

Para algunos no es apropiada una explicación descriptiva como la anterior, y prefieren una demostración matemática. Aunque no se hará aquí, se puede demostrar matemáticamente que los resultados son idénticos si se considera que la carga unidad Q está aplicada en la estructura indeterminada real o en la primaria estáticamente determinada.

Físicamente, parece evidente que los desplazamientos calculados para el tramo derecho de la estructura real deben ser idénticos a los de esta parte aislada como si fuera un tramo único y sobre él actuasen cargas exteriores cualesquiera dadas, y además las fuerzas exteriores correspondientes a las fuerzas en las barras cortadas al dar la sección, como se ve en la Fig. 13.29c. Estas ideas son aún más evidentes desde un punto de vista físico en el caso de los desplazamientos en una viga continua. En tal estructura, parece perfectamente natural aislar cada tramo y calcular sus desplazamientos considerándolo como una viga simple apoyada en sus extremos, sometida a las cargas que actúan en ese tramo y además a los momentos extremos equivalentes a los de flexión en los puntos de apoyo correspondientes de la viga continua real.

13.18 Tensiones secundarias en los cuchillos. En el Cap. 4 se basó el estudio elemental de las tensiones de un cuchillo en las hipótesis siguientes:

1. Las barras están unidas entre sí en sus extremos con nudos articulados sin fricción.
2. Todas las cargas exteriores y las reacciones (incluyendo el peso de las barras) están aplicadas en los nudos.
3. Los ejes de todas las barras son rectos, coinciden con las líneas que unen los centros de los nudos, y están en un plano que contiene también a las líneas de acción de todas las cargas y reacciones.

Un análisis de tensiones basado en estas hipótesis conduce a la determinación de las llamadas «tensiones primarias».

Las tensiones producidas por condiciones no consideradas en el análisis de las tensiones primarias se llaman *tensiones secundarias*. Las más importantes se producen por el hecho de ser los nudos rígidos, por lo que las barras no son libres de variar sus direcciones relativas cuan-

do se deforma el cuchillo. Hay varios métodos clásicos¹ para efectuar análisis aproximados de las tensiones secundarias. Este problema se puede resolver también muy eficazmente por medio de la distribución de momentos. Este método es el único que estudiaremos.

Un cuchillo con nudos rígidos es en realidad un pórtico rígido. Teóricamente, podemos estudiar ese pórtico por medio de las ecuaciones de superposición o por el teorema de Castigliano, considerando la deformación debida al momento y a la fuerza axial. Sin embargo, estas estructuras son tan indeterminadas que no sería práctico hacer un análisis de tensiones exacto. Ya hemos hecho observar que el desplazamiento de los nudos es principalmente una función de las fuerzas axiales en las barras, pues la flexión de las mismas tiene solo un efecto de segundo orden en su variación axial de longitud. Además, se puede demostrar que las fuerzas axiales en las barras de un cuchillo con nudos rígidos, son esencialmente las mismas que las de un cuchillo ideal de nudos articulados; esto es, que la presencia de cortantes y momentos en las barras tiene un efecto pequeño en las fuerzas axiales². Esto indica que se pueden calcular las fuerzas axiales y los desplazamientos resultantes de los nudos suponiendo que el cuchillo tiene los nudos articulados. Si se conocen los desplazamientos de los nudos, se pueden calcular todos los ángulos ϕ de las barras y resolver el resto del problema por la deformación angular o la distribución de momentos, de igual manera que para un pórtico cualquiera, en el que solo se desconocen los giros de los nudos o ángulos θ .

Se puede bosquejar la resolución de un problema de tensiones secundarias como sigue:

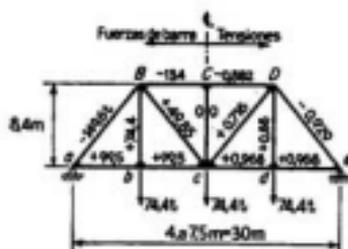
1. Se calculan las fuerzas de barra suponiendo que el cuchillo tiene los nudos articulados.
2. Se calculan los desplazamientos de los nudos y los correspondientes giros de las cuerdas de las barras. Esto puede hacerse por medio del método de Williot o el procedimiento de la variación angular utilizado en el Ejemplo 13.26.
3. Se calculan los momentos extremos iniciales que se producen si todos los nudos están fijos contra el giro y se introducen los desplazamientos de nudos y giros de cuerda indicados más arriba. Se calculan también todos los momentos desequilibrados que pueden actuar en los nudos como consecuencia de las excentricidades de la barra.
4. Se distribuye y transmite en todos los ciclos que sea necesario. Los momentos extremos finales así obtenidos serán la primera aproximación de los momentos secundarios, de los que se pueden calcular las tensiones secundarias. De estos momentos extremos se pueden hallar también los cortantes en las barras y, por la estática, nuevos valores de las fuerzas en las mismas.
5. Si estos nuevos valores de las fuerzas de barra son notablemente diferentes de los calculados en el paso 1, se repiten los 2, 3, 4, llegando así a una segunda aproximación de las tensiones secundarias.

El Ejemplo 13.26 aclarará este procedimiento.

¹ Un trabajo muy comprensible sobre estos métodos fue presentado por Cecil Vivian von Abe, *Trat. ASCE*, vol. 89, 1926.

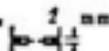
² Ver J. I. Parrel y R. B. B. Moorman, «Analysis of Statically Indeterminate Structures», cap. 9, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1955.

Ejemplo 13.26 Calcular las tensiones secundarias en las barras del cuchillo de la figura.



Barra	L	A	I	e	K	
	cm	cm ²	cm ⁴	cm	cm ³	composita
ab						
bc	750	162,8	6580	16	8,75	4 L 150.75.12
Bb	840	86,4	5400	16	3,37	4 L 150.75.10
Bc	1126	69,6	4370	16	3,68	4 L 150.75.8
Cc	840	64,6	1808	11	2,15	4 L 100.70.10
aB	1126	161	16340	9,3	14,65	2 [250.190 1 placabanda 450 x 12
BC	750	151	13710	9,7	20,95	2 [250.190 1 placabanda 450 x 10

Nota: 1. Las barras ab, bc, Bb, Bc y Cc están compuestas así:



2. Los ejes de las barras aB y BC están en el eje de las [.



Paso 1: Las fuerzas de barra primarias y las intensidades de tensión están representadas en el diagrama.

Paso 2: Se calculan los ángulos ψ utilizando las variaciones angulares calculadas por la Ecuación (12.11b).

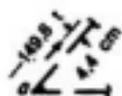
Ángulos	$f_1 - f_2$	$\text{sig } f_1$	$f_3 - f_4$	$\text{sig } f_3$	1. ^o extremo	2. ^o extremo	$E \Delta r$
a-b	+0,861 + 0,929 = +1,790	1,12		0	+2,003	0	+2,003
b-ba	+0,968 + 0,292 = +1,260	0,893		0	+1,694	0	+1,694
a-bB	-0,929 - 0,968 = -1,897	0,893	-0,929 - 0,861 = -1,790	1,12	-1,694	-2,003	-3,699
c-Bb	+0,968 - 0,716 = +0,252	0,893		0	+0,223	0	+0,223
B-bc	+0,716 - 0,861 = -0,145	1,12	+0,716 - 0,968 = -0,252	0,893	-0,162	-0,223	-0,385
b-cB		0	+0,861 - 0,716 = +0,145	1,12	0	+0,162	+0,162
C-Bc		0	0 - 0,716 = -0,716	1,12	0	-0,802	-0,802
c-CB	+0,716 - 0 = +0,716	1,12	+0,716 + 0,802 = +1,518	0,893	+0,802	+1,427	+2,229
B-c-C		0	-0,802 - 0,716 = -1,518	0,893	0	-1,427	-1,427

$$\begin{aligned} \text{Luego } E\psi_{Ca} &= 0 & E\psi_{ab} &= +3,346 \\ E\Delta_{bc} &= -1,427 & E\Delta_{ab} &= +1,694 \\ E\psi_{bc} &= +1,427 & E\psi_{ba} &= +1,652 \\ E\Delta_{ba} &= +0,162 & E\Delta_{bc} &= +0,225 \\ E\psi_{ba} &= +1,265 & E\psi_{cb} &= +1,427 \\ E\Delta_{cb} &= -0,387 & E\Delta_{ca} &= -0,802 \\ E\psi_{cb} &= +1,652 & E\psi_{cc} &= +2,229 \\ E\Delta_{cb} &= -3,699 & E\Delta_{cc} &= +2,229 \\ E\psi_{cb} &= +5,351 & E\psi_{cc} &= 0 \\ E\Delta_{cb} &= +2,005 & & \\ E\psi_{cb} &= +3,346 & & \end{aligned}$$

En este caso, se sabe por simetría que ψ_{Ca} es nulo. Por tanto, todos estos ángulos ψ están orientados correctamente. Sin embargo, se puede suponer que es nulo cualquier ángulo ψ y calcular en consecuencia los demás. Esto es admisible, pues significa que se ha girado el cuchillo como un cuerpo rígido, lo que no altera las tensiones.

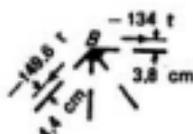
Paso 3: Se calculan los momentos extremos iniciales y los momentos excéntricos.

Nudo a:



$$M_a = +(149,6)(4,4) = \underline{658 \text{ t cm}}$$

Nudo B:



$$M_B = -(149,6)(4,4) + (134)(3,8) = \underline{149 \text{ t cm}}$$

Barra	K	$E\psi$	$-6EK\psi$
ab	8,75	+5,351	-280,9 t cm
bc	8,75	+1,265	-66,4 t cm
aB	14,68	+3,346	-294,7 t cm
BC	20,95	+2,229	-280,2 t cm
Bb	5,31	+1,652	-52,6 t cm
Cc	2,15	0	0
Bc	3,88	+1,427	-33,2 t cm

Paso 4: Se distribuyen, transmiten y obtienen los momentos extremos secundarios. Estos momentos están subrayados. Conocidas las características de las secciones, es sencillo calcular las intensidades de tensión secundarias.



Se observará que en este caso, a causa de la simetría, solo hay que considerar medio cachillo; además, se sabe que los nudos c y C no giran. Nunca habrá que liberar estos nudos.

13.19 Notas suplementarias. Cargas simétricas y antisimétricas, centro elástico y analogía de la columna. Al presentar un estudio elemental de cualquier tema, el escritor debe trazar una línea arbitraria entre los aspectos fundamentales y los más avanzados del campo de que se trata, pues hay siempre temas secundarios que puedan incluirse o no. Sin embargo, conviene mencionar alguno de estos temas brevemente como sugerencias para los que deseen seguir profundizando en su estudio.

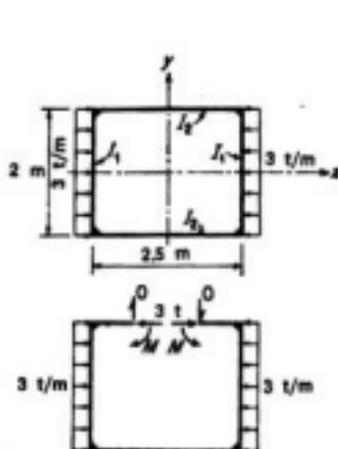


FIG. 13.30. Estructura simétrica, cargada simétricamente.

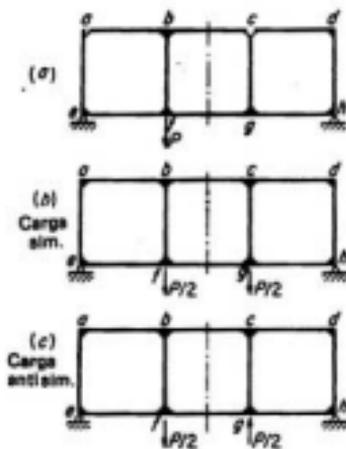


FIG. 13.31. Empleo de las cargas simétrica y antisimétrica.

En varios lugares de las explicaciones dadas hasta aquí se ha mencionado y utilizado la simetría. Cuando tratamos con una estructura simétrica, debemos procurar aprovechar la simetría al máximo. Consideremos, por ejemplo, la estructura del tipo de anillo cerrado de la Figura 13.30. Hablando con propiedad, es indeterminada en tercer grado. Pero si el pórtico y las cargas son simétricas respecto a los dos ejes x e y , podemos ver, por simetría, que el cortante es nulo y la fuerza axial es de 3 t de compresión en el punto medio del pórtico. Solo es desconocido el momento. Por tanto, a causa de la simetría, solo queda una cantidad estáticamente indeterminada.

La ventaja de la simetría en el caso anterior sugiere que se puede conseguir una simplificación notable aun cuando tengamos una carga asimétrica, que actúa en una estructura simétrica. Consideremos un caso de éstos, como el de la Fig. 13.31. Supongamos que este pórtico (llamado «cuchillo Vierendeel») es simétrico respecto al eje vertical solamente. Consideremos la resolución del pórtico bajo la carga asimétrica dada, como se ve en la Fig. 13.31a. Si se usa el método de la deformación angular hay un total de 11 incógnitas —8 ángulos θ y 3 ángulos ψ —. Supongamos que se dividen las cargas en dos sistemas distintos, uno simétrico, representado en la Fig. 13.31b, y uno antisimétrico, representado en la Fig. 13.31c. Evidentemente, la suma de los dos sistemas es igual a la carga dada, por lo que la suma de los resultados de los dos casos será igual al resultado del problema.

Comparemos el trabajo de cálculo necesario para estudiar la estructura con la carga asimétrica, con la suma de los trabajos de calcularla para las cargas simétrica y antisimétrica. En el caso de cargas simétricas, solo hay cinco incógnitas independientes —cuatro ángulos θ y un ángulo ψ —, pues, por simetría,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\theta_2 & \theta_3 &= -\theta_4 & \theta_5 &= -\theta_6 & \theta_7 &= -\theta_8 \\ \psi_{\text{col}} &= \psi_{7/2} = 0 & \psi_{\text{el}} &= -\psi_{2\text{a}} \end{aligned}$$

En el caso de las cargas antisimétricas, hay seis incógnitas independientes —cuatro ángulos θ y dos ángulos ψ —, pues, en este caso,

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \theta_3 = \theta_4 \quad \theta_5 = \theta_6 \quad \theta_7 = \theta_8 \quad \psi_{\text{el}} = \psi_{2\text{a}}$$

Como el trabajo de cálculo es aproximadamente proporcional al cuadrado del número de incógnitas, usando las cargas simétricas y antisimétricas casi se reduce a la mitad. Esta idea es muy útil cuando se trata de estructuras simétricas y merece mayor estudio¹.

El llamado «centro elástico» es otra idea útil que no hemos estudiado². La técnica del centro elástico es aplicable a las estructuras del tipo de anillo cerrado; un pórtico como el de la Fig. 13.32 será de este tipo si consideramos que el suelo es el lado de cierre del anillo. Podemos estudiar esta estructura por medio de las ecuaciones de superposición, eligiendo las superabundantes como se ve en la Fig. 13.32b, que es la misma elección hecha en el Ejemplo 13.14. Esta solución entraña un sistema de tres ecuaciones de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta_{22} + X_{21}\delta_{21} + X_{23}\delta_{23} + X_{24}\delta_{24} &= 0 \\ \Delta_{33} + X_{31}\delta_{31} + X_{32}\delta_{32} + X_{34}\delta_{34} &= 0 \\ \Delta_{44} + X_{41}\delta_{41} + X_{42}\delta_{42} + X_{43}\delta_{43} &= 0 \end{aligned}$$

Si podemos elegir las tres superabundantes de modo que δ_{21} , δ_{32} y δ_{43} sean todas nulas, cada una de estas ecuaciones contendrá solo una superabundante y podremos resolver el sistema con gran facilidad. Podemos hacerlo si aplicamos las superabundantes a algún punto o como se ve en la Fig. 13.32c, en que se eligen las dos coordenadas de o y la inclinación α del eje x para que δ_{21} , δ_{32} y δ_{43} sean iguales a cero simultáneamente. Se supone que las superabundantes que

¹ J. S. Newell, «Symmetric and Anti-symmetric Loadings», *Civil Eng.*, abril 1939, págs. 249-251. W. L. André, *Das B = U Verfahren*, R. Oldenbourg-Verlag, Munich, 1919.

² W. M. Fife y J. B. Wilbur, «Theory of Statically Indeterminate Structures», págs. 114-120, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1937.

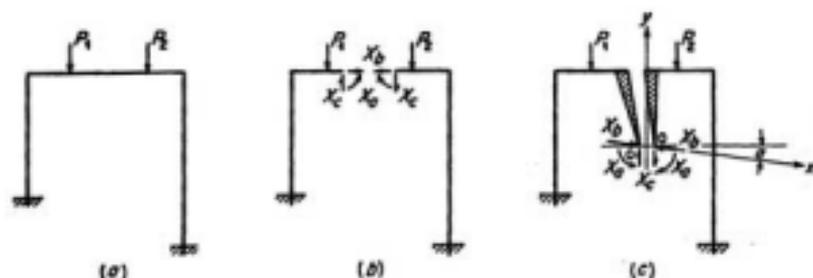


FIG. 13.32. Empleo del centro elástico.

actúan en el punto o están unidas por dos brazos rígidos (no deformables) a los dos lados del corte del pórtico. Se observará que los dos conjuntos de redundantes de las Figs. 13.32b y c son equivalentes estáticamente, pero, evidentemente, no tienen los mismos valores.

Los cálculos detallados para usar este procedimiento del centro elástico son semejantes a los de hallar momentos estáticos y productos y momentos de inercia de áreas. El profesor Hardy Cross se dio cuenta de esto y propuso organizar los cálculos como para calcular las tensiones en una columna sometida a flexión y tensión directa combinados. Llamó a este procedimiento «analogía de la columna»¹.

13.20 Problemas para resolver

*Problema 13.1 Hallar las reacciones de la estructura de la Fig. 13.33, utilizando las ecuaciones de superposición como base de la solución. $L/A = 1$ para todas las barras.

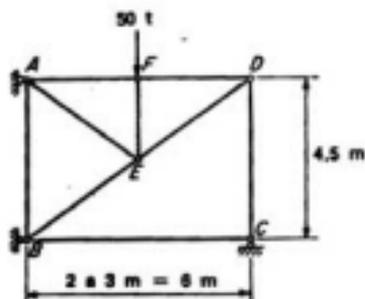


FIG. 13.33. Problema 13.1.

¹ H. Cross y N. D. Morgan, «Continuous Frames of Reinforced Concrete», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1932.

Problema 13.2 Calcular las fuerzas en las barras del cuchillo representado en la Fig. 13.34, utilizando el método de la ecuación de superposición. Las secciones de las barras, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis.

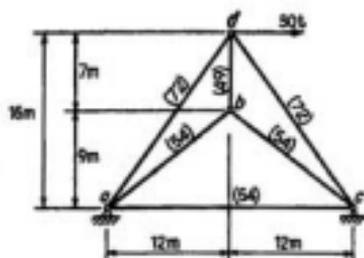


FIG. 13.34. Problema 13.2.

***Problema 13.3** Calcular, utilizando las ecuaciones de superposición, la fuerza de barra en el tirante ad de la estructura de la Fig. 13.35. Entre paréntesis figuran las secciones de las barras, en centímetros cuadrados.

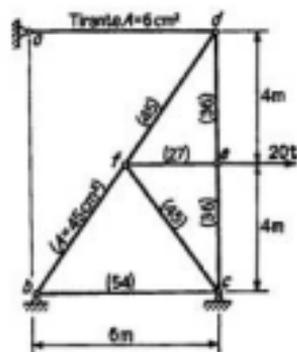


FIG. 13.35. Problema 13.3.

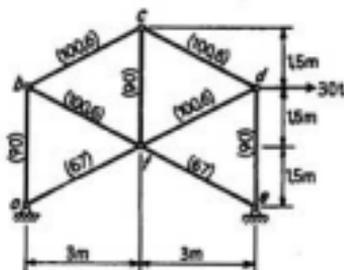


FIG. 13.36. Problema 13.4.

***Problema 13.4** Calcular, utilizando las ecuaciones de superposición, la fuerza en todas las barras del arco de la Fig. 13.36. Las secciones, en centímetros cuadrados, figuran entre paréntesis. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$, $\alpha_s = 0,000012$ por $^\circ\text{C}$.

***Problema 13.5** Hallar la componente horizontal de la reacción derecha del arco del Problema 13.4, debida a cada una de las hipótesis de carga siguiente: a) Aumento de temperatura de 30°C en las barras ab , bc , cd , de . Ningún cambio en el resto. b) Si las barras bc y cd tienen 6 mm menos de la longitud debida y la cf 3 mm de más, debido a errores de fabricación, y hay que forzarlas para llevarlas a su sitio. c) Si los apoyos asientan lo siguiente:

Apoyo izquierdo:	Vertical = 12 mm hacia abajo
	Horizontal = 6 mm hacia la izquierda
Apoyo derecho:	Vertical = 6 mm hacia abajo
	Horizontal = 9 mm hacia la derecha

Problema 13.6 Calcular las reacciones y las fuerzas en todas las barras de la estructura representada en la Fig. 13.37. Entre paréntesis figuran las secciones en centímetros cuadrados. El calibrado del muelle *de* indica que la fuerza 10 t le alarga 25 mm. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

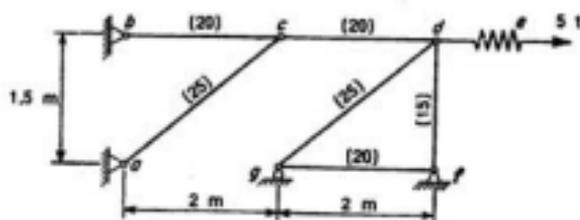


FIG. 13.37. Problema 13.6.

Problema 13.7 Calcular la componente horizontal del desplazamiento del nudo *d* debido a las cargas representadas en la Fig. 13.38. La rigidez del muelle *bc* es tal que alarga 0,9 mm bajo una tracción de 0,5 t. Para las demás barras, $A = 12 \text{ cm}^2$, $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

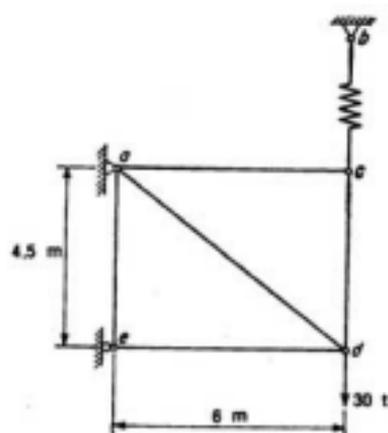


FIG. 13.38. Problema 13.7.

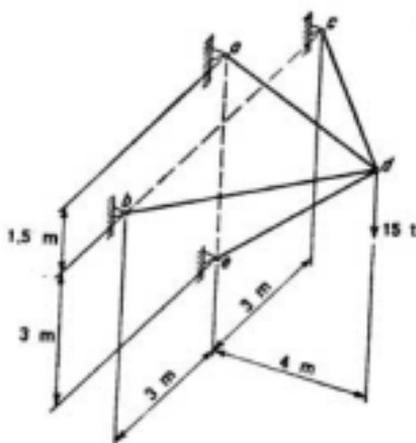


FIG. 13.39. Problema 13.8.

Problema 13.8 Todos los nudos de la estructura de la Fig. 13.39 son juntas esféricas sin rozamiento. Los *b*, *c* y *d* están en el mismo plano horizontal. Para todas las barras, $A = 18 \text{ cm}^2$ y $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$. Calcular las fuerzas en todas las barras debidas a la carga vertical de 15 t representada.

Problema 13.9 Considerando la viga representada en la Fig. 13.40:

a) Estimar de algún modo razonable (que se describirá) las reacciones producidas en esta viga por las cargas representadas. Asegurarse de que satisfacen al menos al equilibrio estable. Dibujar los diagramas de cortantes y momentos flectores y hacer un esquema de la elástica de la viga.

b) Utilizando las ecuaciones de superposición, estudiar la viga para las cargas representadas y dibujar los diagramas de cortantes y momentos flectores correspondientes a los resultados obtenidos.

c) Estudiar la viga para el efecto de un asiento vertical del apoyo b de 6 mm y un giro del apoyo a de $0,005$ radianes en el sentido de las agujas del reloj. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$.

d) Los valores estimados en la parte a para las reacciones no darán, en general, desplazamientos de la estructura compatibles. Por ejemplo, en lugar de dejarles inmóviles como se pretende en esta parte de la solución, estos valores implicarán ciertos movimientos de los apoyos además de las cargas dadas. ¿Qué movimientos implican los valores estimados?

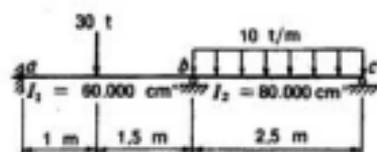


FIG. 13.40. Problema 13.9.

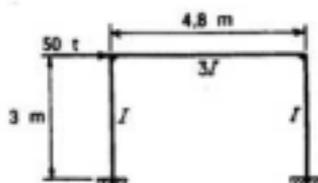


FIG. 13.41. Problema 13.10.

***Problema 13.10** Dibujar el diagrama de momentos flectores del pórtico de la Fig. 13.41. Utilizar el teorema de Castigliano como base de la solución. Considerar solo el efecto de deformación debida al momento.

***Problema 13.11** Calcular las reacciones de la estructura de la Fig. 13.42. Despreciar la deformación debida a la fuerza axial. E e I son constantes.

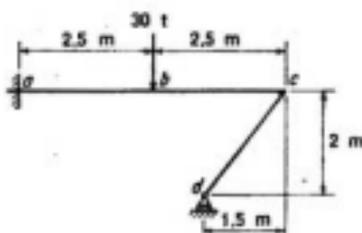


FIG. 13.42. Problema 13.11.

***Problema 13.12** Calcular las reacciones de la estructura de la Fig. 13.43. Despreciar la deformación debida a la fuerza axial. E e I son constantes.

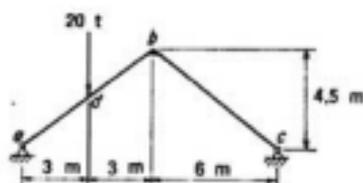


FIG. 13.43. Problema 13.12.

***Problema 13.13** Dibujar los diagramas de cortantes y de momentos flectores de la barra AB del pórtico de la Fig. 13.44. Despreciar la deformación debida a la fuerza axial.

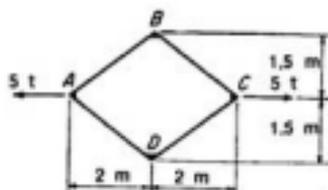


FIG. 13.44. Problema 13.13.

Problema 13.14 Estudiar la estructura de la Fig. 13.45, y trazar el diagrama de momentos flectores de la barra CD.

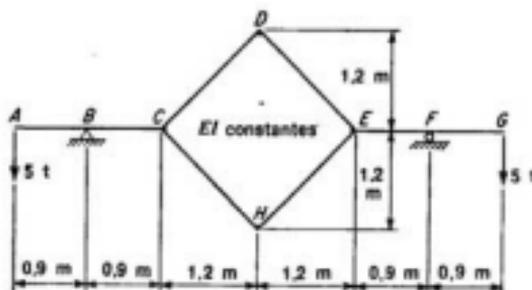


FIG. 13.45. Problema 13.14.

***Problema 13.15** Con referencia a la Fig. 13.46, dibujar la curva de momentos flectores de la viga AB, utilizando el teorema de Castigliano.

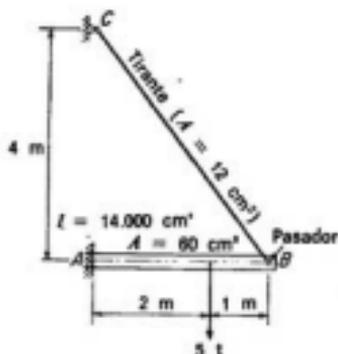


FIG. 13.46. Problema 13.15.

Problema 13.16 Con referencia a la Fig. 13.47, calcular las fuerzas axiales en las barras del cuchillo, debidas a la carga representada. Dibujar, también, la curva de momentos flectores de la barra AC.

$$\begin{aligned} \text{Barra } AC &= 60 \text{ cm}^2 & e & I = 26.000 \text{ cm}^4 \\ \text{Barra } AD &= 15 \text{ cm}^2 \\ \text{Barra } DC &= 15 \text{ cm}^2 \\ \text{Barra } BD &= 10 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

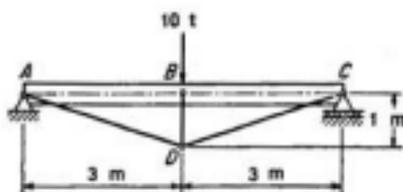


FIG. 13.47. Problema 13.16.

***Problema 13.17** En la estructura de la Fig. 13.48 figuran entre paréntesis las secciones de las barras, en centímetros cuadrados. $E = 2,1 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$, I de la viga = 240.000 cm^4 . Calcular la fuerza en el tirante, que está unido al cuchillo y a la viga con extremos articulados.

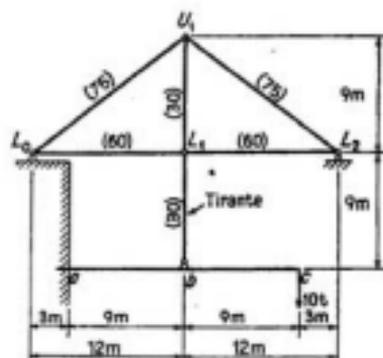


FIG. 13.48. Problema 13.17.

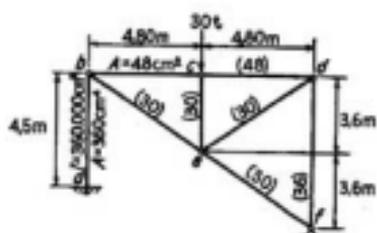


FIG. 13.49. Problema 13.18.

Problema 13.18 Calcular las reacciones de la estructura de la Figura 13.49.

Problema 13.19 Con referencia a la estructura de la Fig. 13.50:

- Calcular las reacciones debidas a la carga representada.
- Suponer que se suprimiera el tirante ec y se apoyara la viga en c con un apoyo de rodillo. Calcular las reacciones que se producirían en esta estructura modificada si estuviera descargada pero sometida a los movimientos de apoyos siguientes:

a asienta 18 mm hacia abajo

c asienta 3 mm hacia abajo

d gira 0,005 radianes en sentido contrario a las agujas del reloj

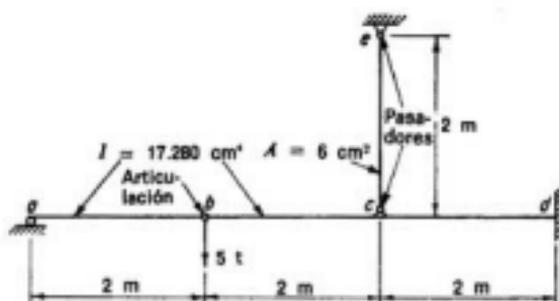


FIG. 13.50. Problema 13.19.

Problema 13.20 Comentar cada una de las estructuras de la Fig. 13.51 respecto a estabilidad y determinación estática. Si son indeterminadas, indicar qué se elegirá como superabundante.

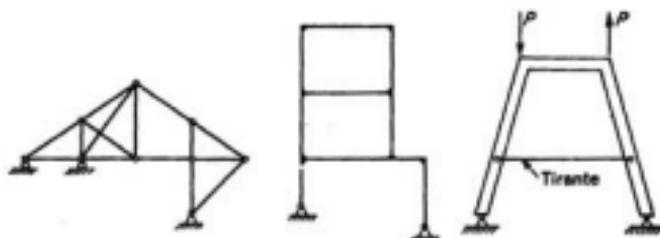


FIG. 13.51. Problema 13.20.

dante. Para la estructura de la derecha, ¿qué puede decirse sobre el estudio de tensiones aplicando los principios de la simetría y antisimetría?

Problema 13.21 Considerar la viga continua de dos tramos del Prob. 13.9. Suponer que se duplican los momentos de inercia añadiendo platabandas. ¿Qué efecto tendría esta modificación de la estructura en los resultados siguientes, calculados previamente en aquel problema?

- Los momentos flectores calculados para las cargas dadas.
- Los momentos flectores calculados para los movimientos de apoyos dados.
- Los desplazamientos calculados para los movimientos de apoyos dados.
- Las intensidades de tensiones de flexión calculadas para los movimientos de los apoyos dados.

***Problema 13.22** Con referencia a la Fig. 13.52, calcular los momentos extremos en todas las barras del pórtico, utilizando el método de la deformación angular. Dibujar las curvas de momentos de las barras AB y BD .

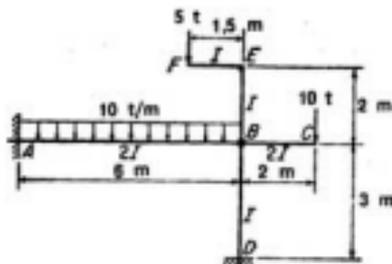


FIG. 13.52. Problema 13.22.

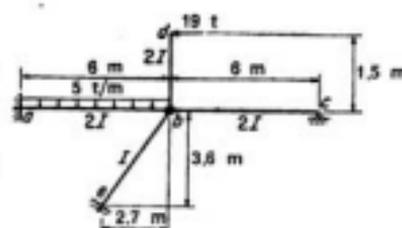


FIG. 13.53. Problema 13.23.

***Problema 13.23** Con referencia a la Fig. 13.53, calcular los momentos extremos en todas las barras del pórtico, utilizando el método de la deformación angular. Dibujar las curvas de cortantes y momentos flectores de la barra ab .

Problema 13.24 Resolver los apartados b) y c) del Prob. 13.9, utilizando el método de la deformación angular.

***Problema 13.25** Utilizando el método de la deformación angular, hallar todos los momentos extremos y las reacciones de apoyo del pórtico de la Figura 13.54.

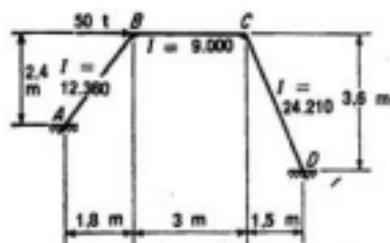


FIG. 13.54. Problema 13.25.

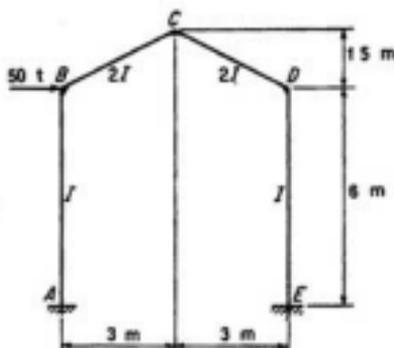


FIG. 13.55. Problema 13.26.

Problema 13.26 Utilizando el método de la deformación angular, hallar todos los momentos extremos y reacciones de apoyo del pórtico de la Figura 13.55.

Problema 13.27 No es necesaria la solución completa de la estructura de la Fig. 13.56. Sin embargo,

- Indicar los ángulos θ y ψ independientes. Si algunos ángulos ψ están relacionados entre sí, indicar las relaciones.
- Escribir las ecuaciones de la estática que son la base de la aplicación del método de la deformación angular a esta estructura.

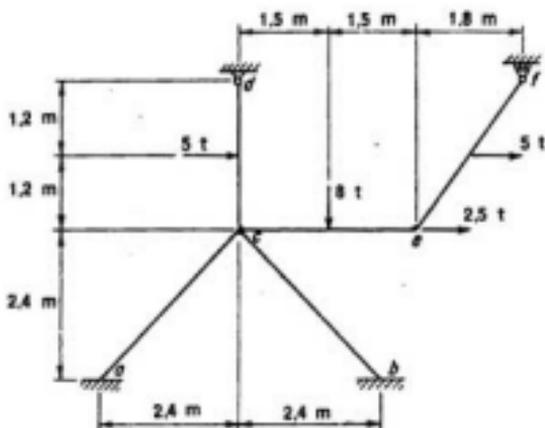


FIG. 13.56. Problema 13.27.

Problema 13.28 Suponer que la estructura de la Fig. 13.57 es simétrica respecto a su eje vertical.

- Indicar los ángulos θ y ψ independientes, y escribir las ecuaciones de la estática apropiadas, suponiendo que la carga es simétrica respecto al eje vertical.
- Hacer lo mismo para una carga antisimétrica.

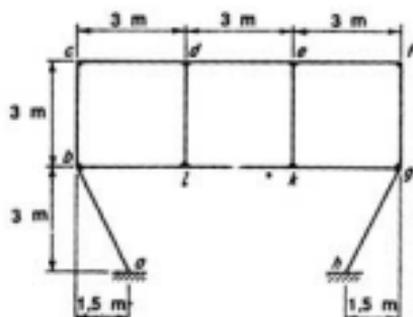


FIG. 13.57. Problema 13.28.

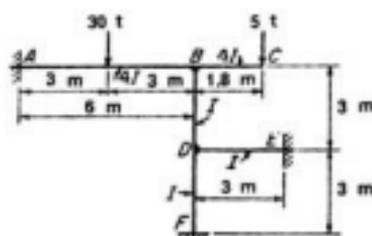


FIG. 13.58. Problema 13.29.

***Problema 13.29** Con referencia a la Fig. 13.58, utilizando la distribución de momentos, calcular los momentos extremos del pórtico, y dibujar las curvas de cortantes y momentos de la barra AB .

Problema 13.30 Resolver los apartados b) y c) del Prob. 13.9, utilizando la distribución de momentos.

***Problema 13.31** Con referencia a la Fig. 13.59, hallar los momentos extremos del pórtico, por el método de la distribución de momentos.

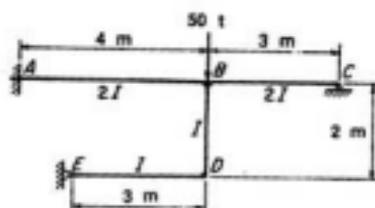


FIG. 13.59. Problema 13.31.

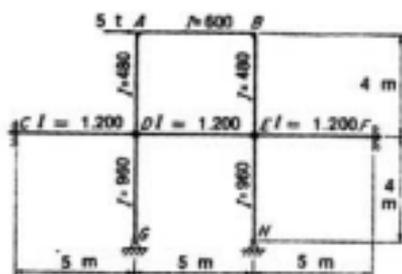


FIG. 13.60. Problema 13.32.

***Problema 13.32** Calcular los momentos extremos en las barras del pórtico de la Fig. 13.60, utilizando el método de la distribución de momentos.

Problema 13.33 Con referencia a la Fig. 13.61, hallar los momentos extremos en las barras del pórtico, utilizando el método de la distribución de momentos.

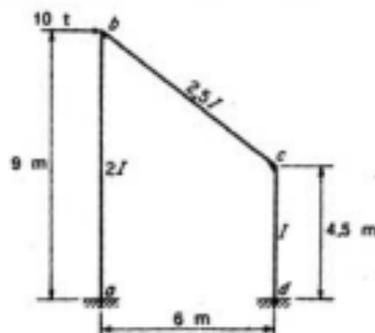


FIG. 13.61. Problema 13.33.

***Problema 13.34** Con referencia a la Fig. 13.62, hallar los momentos extremos en este pórtico, utilizando el método de la distribución de momentos.

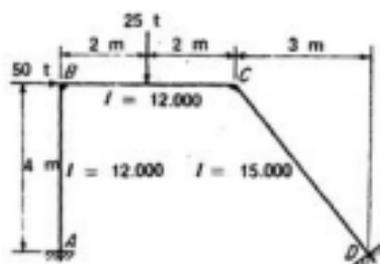


FIG. 13.62. Problema 13.34.

***Problema 13.35** Para el pórtico de la Fig. 13.63, dibujar las curvas de momentos flectores, utilizando el método de la distribución de momentos.

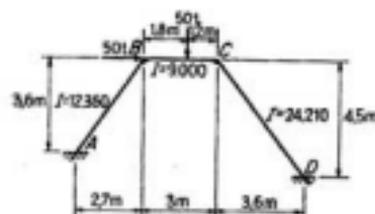


FIG. 13.63. Problema 13.35.

Problema 13.36 Considerar la estructura de la Fig. 13.64:

- Utilizando el método de la distribución de momentos, calcular los momentos extremos producidos en todas las barras por las cargas representadas.
- Utilizando los resultados del apartado a), describir cómo se calcularía el desplazamiento horizontal de C.
- ¿Qué fuerza horizontal habría que aplicar en el nudo C para hacerle volver a su posición original?

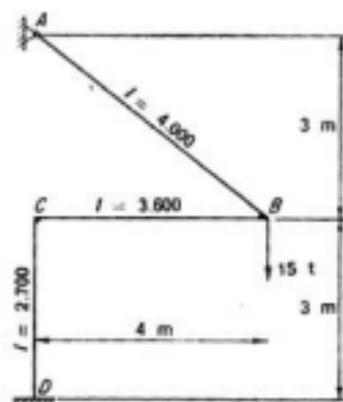


FIG. 13.64. Problema 13.36.

Problema 13.37 Considerar la estructura de la Fig. 13.65:

- Utilizando el método de la distribución de momentos, calcular los momentos extremos producidos en todas las barras por la carga representada.
- Suponer que se modifica la estructura uniendo el nudo B con pasador a un apoyo $3,6$ m más alto, por medio de un tirante. Calcular la fuerza axial producida en este tirante por la carga vertical de 5 t en el nudo C . Despreciar el efecto de la variación axial de longitud del tirante.
- Describir cómo se podría incorporar el efecto de la variación axial de longitud del tirante en la resolución de la distribución de momentos.

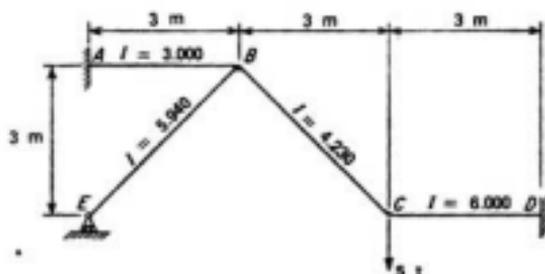


FIG. 13.65. Problema 13.37.

Problema 13.38 Suponiendo que las estructuras de la Fig. 13.66 son asimétricas y utilizando esquemas para describir las ideas, indicar las diversas etapas en que se dividiría la resolución por la distribución de momentos de cada estructura.



FIG. 13.66. Problema 13.38.

Problema 13.41 Considerar la viga de la Fig. 13.69, en la cual $I = 20.000 \text{ cm}^4$, $A = 180 \text{ cm}^2$ y $E = 2,1 \times 10^9 \text{ t/cm}^2$. Comparar la solución de este problema por el teorema de los tres momentos, la deformación angular y las ecuaciones de superposición. *Indicaciones:* ¿En qué grado es indeterminada la viga? ¿Se pueden hallar las reacciones horizontales por los tres momentos, o la deformación angular? ¿Qué método es superior? ¿Cuántas ecuaciones simultáneas intervienen en cada solución?

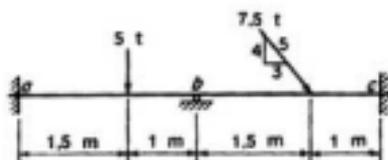


FIG. 13.69. Problema 13.41.

Problema 13.42 Determinar el número de ángulos independientes θ y ψ en cada una de las estructuras de las Figuras 13.12 y 13.15.

Líneas de influencia de estructuras estáticamente indeterminadas

14.1 Introducción. En el Cap. 13 se estudian varios métodos para analizar estructuras indeterminadas; sin embargo, en todos los casos, la estructura está sometida a alguna hipótesis de carga particular. Muchas veces es necesario estudiar una estructura indeterminada para una carga móvil o móvil. En esos casos es conveniente preparar líneas o tablas de influencia para las diversas componentes de las tensiones, pues con ellas se puede determinar cómo ha de cargarse la estructura para producir el efecto máximo, así como la magnitud de este máximo.

En el Cap. 6 se estudió la preparación y el empleo de las líneas de influencia de las estructuras estáticamente determinadas. En esos casos vimos que, con una pequeña práctica, podíamos trazar una línea de influencia entera tomando unas cuantas ordenadas clave y uniéndolas con rectas. Las líneas de influencia de las estructuras indeterminadas no se pueden hallar tan fácilmente, pues en general son curvas, o, como mucho, una serie de cuerdas de una curva.

Afortunadamente, las líneas de influencia de este último tipo tienen lugar muy frecuentemente. Cuando una estructura indeterminada está cargada en los nudos por viguetas de tablero, que a su vez soportan los largueros que actúan como vigas sencillas, es fácil demostrar que las diversas líneas de influencia de la estructura son rectas entre los nudos. Por el contrario, si los largueros son continuos sobre varias viguetas de tablero, las líneas de influencia son curvas entre nudos, aunque, en la mayoría de los casos, la separación de estas curvas de una recta entre nudos es pequeña. Si las cargas móviles no actúan a través de un sistema de viguetas y largueros y se pueden aplicar en cualquier punto de la estructura, las líneas de influencia son también curvas.

El primer paso para preparar las líneas de influencia de las diversas tensiones de una estructura indeterminada es determinar las líneas de influencia de las superabundantes. Una vez hecho esto, se pueden calcular las correspondientes a cualquier otra reacción, fuerza de barra, cortante, o momento, por la estática.

14.2 Líneas de influencia obtenidas por posiciones sucesivas de la carga unidad. En el Cap. 6 se indicó que se pueden obtener siempre las ordenadas de la línea de influencia de una cantidad particular, colocando una carga unidad sucesivamente en cada punto en que sea posible cargar la estructura, y calculando el valor de dicha cantidad para cada una de esas posiciones. Para obtener la línea de influencia de las superabundantes

de una estructura indeterminada, se puede seguir el mismo procedimiento, lo que significa resolver cierto número de problemas del mismo modo que en el Capítulo 13.

A veces esto significa un proceso largo y pesado. Sin embargo, se verá que se pueden organizar los cálculos de forma muy práctica, como en el Ejemplo 14.1. Además, una vez obtenidas las líneas de influencia de las superabundantes, se pueden hallar muy fácilmente las correspondientes a todas las demás tensiones, superponiendo simplemente cantidades ya calculadas. En el Ejemplo 14.1, cuando se hayan calculado las ordenadas de la línea de influencia de las superabundantes X_1 y X_2 , se podrán hallar las de las otras fuerzas de barra en forma tabular, por medio de la relación

$$F = F_s + X_1 F_1 + X_2 F_2$$

Se observará que es muy fácil, porque ya han sido calculadas las fuerzas de barra F_s en todas las barras y todas las posiciones de la carga unidad. Mientras que es más largo calcular las líneas de influencia de las superabundantes de un cuchillo indeterminado por este método, las de todas las fuerzas de barra y reacciones se pueden obtener prácticamente tan de prisa por este método como por otro.

Constantes de la estructura

Barra	L	F_1	F_2	$F_1 F_2 L$	$F_1^2 L$
ac	9	-0,5	0		+ 2,25
ce	9	-0,75	-0,25		+ 5,0625
eg	9	-0,25	-0,75		+ 0,5625
BD	9	+1,0	0	0	+ 9
DF	9	+0,5	+0,5	2,25	+ 2,25
aB	7,5	+0,83	0	0	+ 5,205
Bc	7,5	-0,83	0	0	+ 5,205
cD	7,5	-0,416	+0,416	-1,3035	+ 1,3035
De	7,5	+0,416	-0,416	-1,3035	+ 1,3035
eF	7,5	-0,416	+0,416	-1,3035	+ 1,3035
Fg	7,5	+0,416	-0,416	-1,3035	+ 1,3035
Σ				+0,611	+34,749

$$\therefore \delta_{11} = +34,749 \quad \delta_{12} = +0,611$$

Términos de carga:

Carga unitaria en el tramo izquierdo					Carga unitaria en el tramo central									
					En b				En d				En e	
Barra	L	F_1	F_2	$F_1 F_2 L$	Barra	L	F_1	F_2	F_3	$F_1 F_2 L$	$F_2 F_3 L$	F_3	$F_1 F_3 L$	
ac	9	-0,5	+0,375	-1,6875	ce	9	-0,75	-0,25	+0,563	-1,798	-1,266	+0,375	-2,332	
aB	7,5	+0,83	-0,625	-3,89	eg	9	-0,25	-0,75	+0,188	-0,623	-1,266	+0,375	-0,843	
Σ				-1,6875	DF	9	+0,5	+0,5	-0,375	-1,689	-1,689	-0,75	-3,373	
					cD	7,5	-0,416	+0,416	-0,938	+2,934	-2,934	-0,675	+1,930	
					De	7,5	+0,416	-0,416	-0,313	-0,978	+0,978	+0,625	+1,930	
					eF	7,5	-0,416	+0,416	+0,313	-0,978	+0,978	+0,625	-1,930	
					Fg	7,5	+0,416	-0,416	-0,313	-0,978	+0,978	-0,625	-1,930	
					Σ					-3,91	-4,221		-6,75	

Nota:
 Cuando la carga está en b, $\delta_{20} = 0$
 Cuando la carga está en e, $\delta_{20} = \delta_{20}$

Resolución de las ecuaciones:

Ec.	Operación	X_1	+	X_2	= constante, carga unidad en			Comp.
					b	d	e	
(1)		+34,749		+ 0,411	+1,6875	+5,91	+6,75	+49,5075
(2)		+ 0,411		+34,749	+0	+4,221	+6,75	+46,131
(1')	(1) \times 0,01182	+ 0,411		+ 0,0048	+0,0198	+0,0699	+0,0798	+ 0,5853
(3)	(2) - (1')			+34,7442	-0,0198	+4,1511	+6,6702	+45,5457
				+ 1,0	-0,00057	+0,1196	+0,1920	+ 1,3100
				- 0,411	+0,000234	-0,04914	-0,0783	
		+34,749			+1,6877	+5,8609	+6,6717	
		+ 1,0			+0,0486	+0,1688	+0,1920	

14.3 Principio de Müller-Breslau para hallar las líneas de influencia. El principio de Müller-Breslau proporciona un método muy útil para calcular¹ líneas de influencia y es también el fundamento de ciertos métodos indirectos de estudio de modelos. El principio se puede enunciar como sigue:

Las ordenadas de la línea de influencia de un esfuerzo cualquiera (como una fuerza axial, cortante, momento, o reacción) de una estructura, son proporcionales a las de la curva de deformación que se obtiene suprimiendo de la misma la sujeción correspondiente a ese elemento de la estructura e introduciendo en su lugar la deformación correspondiente en la estructura primaria que queda.

Este principio es aplicable a cualquier tipo de estructura, bien sea viga, cuchillo o pórtico estáticamente determinados o indeterminados. En el caso de estructuras indeterminadas, este principio se limita a aquellas cuyo material es elástico y sigue la ley de Hooke. Sin embargo, esta limitación no es muy importante, pues la inmensa mayoría de los casos prácticos están comprendidos en esta categoría.

Se puede demostrar la validez de este principio del siguiente modo: A este objeto, consideremos la viga continua de dos tramos de la Fig. 14.1a. Supongamos que se quiere hallar la línea de influencia de la reacción vertical en a . Se puede trazar esta línea después de haber calculado la reacción para una carga vertical unidad aplicada sucesivamente en varios puntos α de la estructura, llevando a cabo cada cálculo como sigue: Quitemos provisionalmente el apoyo de rodillo a de la estructura real, dejando la primaria de la Fig. 14.1b. Supongamos que sobre esta estructura primaria actúa una carga unidad en un punto α y una fuerza vertical hacia arriba R_a en el punto a . Si esta fuerza tiene el mismo valor que la reacción vertical en el punto a de la estructura real, las tensiones —y, por tanto, la deformación— de la estructura primaria serán las mismas que las de la real. La elástica de la estructura primaria bajo tales condiciones será como se indica en la Fig. 14.1b, siendo nula la deformación vertical en el punto a .

Supongamos que la estructura primaria está sometida solo a una fuerza vertical F en el punto a . En este caso, la estructura primaria flexará como se ve en la Fig. 14.1c. Así, hemos con-

¹ También es posible muchas veces dibujar, aproximadamente, aplicando el principio de Müller-Breslau, la forma de una línea de influencia y determinar así, con suficiente exactitud en la práctica, cómo hay que cargar la estructura para tener el efecto máximo.

siderado la estructura primaria bajo la acción de dos sistemas de fuerzas distintos e independientes: 1) las fuerzas del esquema *b* y 2) las del *c*. Aplicando la ley de Betti a este caso, podemos escribir:

$$(R_a)(\Delta_{aa}) + (1)(\Delta_{aa}) = (F)(0)$$

y, por tanto,

$$R_a = - \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_{aa}}(1) \quad (14.1)$$

donde se usa la misma notación para designar los desplazamientos que en el método de la ecuación de superposición.

De esta ecuación resulta evidente que la reacción R_a , cuando se aplica la carga unidad vertical en el punto *a*, es proporcional al desplazamiento Δ_{aa} en ese punto. Por tanto, la forma de

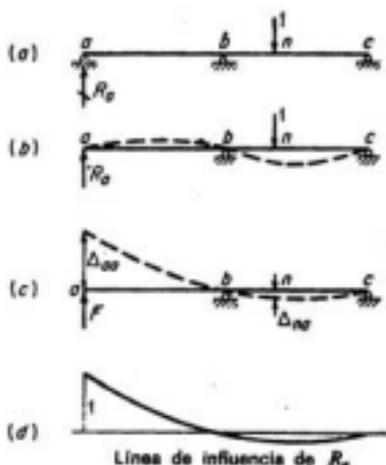


FIG. 14.1. Principio de Müller-Breslau.

la línea de influencia de R_a es la misma de la elástica de la estructura cuando está sometida a una fuerza F en el punto *a*. La magnitud de la ordenada de la línea de influencia en un punto *n* se puede obtener dividiendo el desplazamiento en ese punto de la elástica por el del punto *a*. De este modo hemos demostrado que se pueden obtener las líneas de influencia del modo indicado, por el principio de Müller-Breslau.

De análoga manera, se puede demostrar la validez de este principio para cualquier tipo de tensión de una estructura. En el caso general, se puede escribir la Ec. (14.1) como sigue, para una tensión X_a cualquiera:

$$X_a = - \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_{aa}}(1) \quad (14.2)$$

Es importante observar el criterio de signos de esta ecuación: X_a es positivo cuando tiene el mismo sentido que la deformación Δ_{aa} , y Δ_{aa} es positivo cuando tiene el mismo sentido que la carga unidad aplicada, cuya influencia está dada por las ordenadas de la línea correspondiente. Obsérvese además que X_a puede representar una fuerza o un par. Si X_a es una fuerza, la Δ_{aa} correspondiente es una deformación lineal; pero si X_a es un par, la Δ_{aa} es un giro.

Es importante observar también que la magnitud de cualquier ordenada de línea de influencia es independiente de la de la fuerza F que hay que aplicar para introducir el desplazamiento Δ_{ab} de la estructura primaria. Para el cálculo de las ordenadas de las líneas de influencia, se suele tomar F como unidad y se calculan Δ_{ab} y Δ_{ab} en consecuencia.

Los Ejemplos 14.2 y 14.3 aclaran la aplicación de este procedimiento a las vigas continuas. Se observará, cuando se aplica este método, que si la estructura real es indeterminada de grado superior al primero, la estructura primaria que queda después de suprimir una superabundante sigue siendo estáticamente indeterminada. Sin embargo, esto no es causa de dificultad. Simplemente significa que, antes de poder calcular los desplazamientos Δ_{ab} y Δ_{ab} , hay que estudiar la estructura primaria por uno de los métodos del Capítulo 13.

Ejemplo 14.2 Preparar la línea de influencia de la reacción vertical en b de la viga siguiente.

Aplicando el principio de Müller-Breslau, podemos elegir la estructura primaria representada y escribir que

$$X_b^I = - \frac{\Delta_{ab}^I}{\Delta_{bb}^I} (I \ t)$$

donde se muestra la dirección positiva de los diversos términos.

Si, por conveniencia, hacemos Δ_{ab} positivo cuando va hacia arriba, debemos invertir el signo del segundo miembro de esta ecuación y escribir

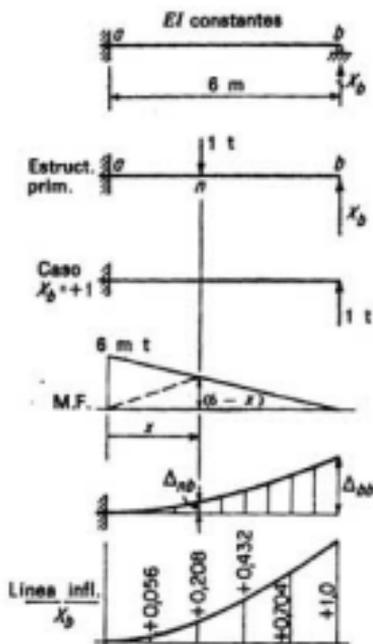
$$X_b^I = \frac{\Delta_{ab}^I}{\Delta_{bb}^I} (I \ t)$$

Por el segundo teorema del área de momentos,

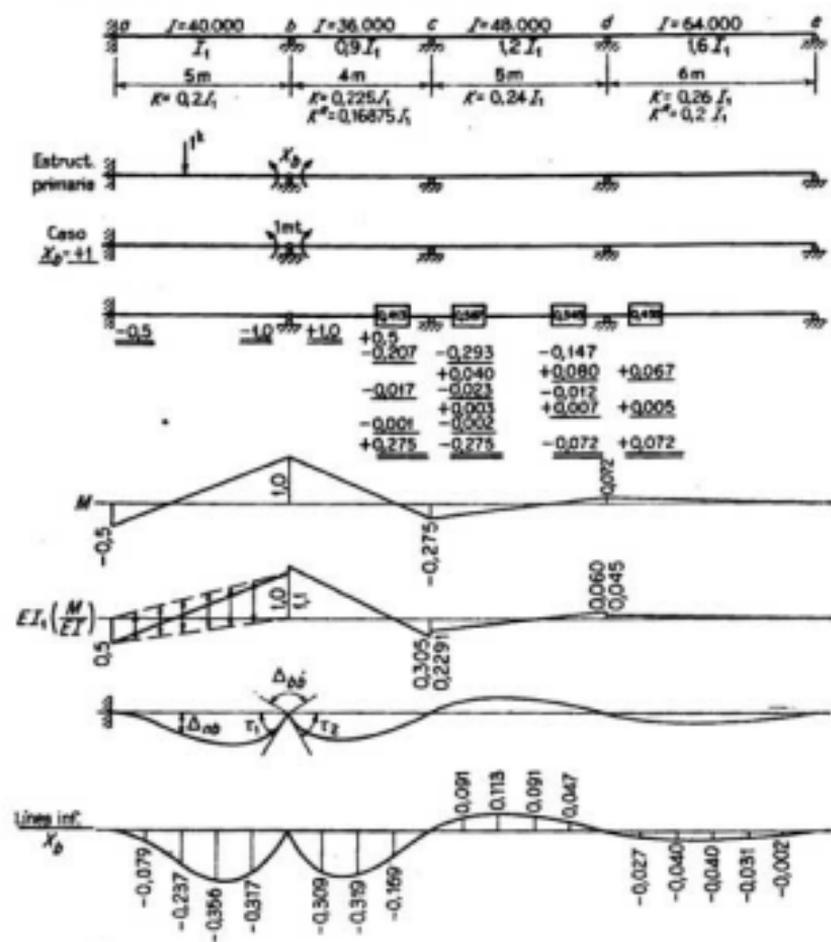
$$EI\Delta_{ab} = (6) \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{2x}{3}\right) + (6-x) \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x^3}{6} (18-x)$$

$$EI\Delta_{bb} = \frac{(6^2)}{6} (18-6) = 72$$

$$\therefore X_b^I = \frac{x^3(18-x)}{432}$$



Ejemplo 14.3 Preparar la línea de influencia del momento en el apoyo b de la viga siguiente.



Utilizando el principio de Müller-Breslau.

$$X_b^1(\zeta) = -\frac{\Delta_b^1}{\Delta_b^0}(\zeta) \quad \text{o} \quad X_b^1(\zeta) = +\frac{\Delta_b^1}{\Delta_b^0}(\zeta) \quad (II)$$

si invertimos el criterio de signos para Δ_b^0 .

Calculando Δ_{ab} y Δ_{ba} por el procedimiento del área de momentos o el de la carga elástica,

$$EI_1 \tau_1 = (0,5)(2,5) = 1,25$$

$$EI_1 \tau_2 = (1,1)(2)(\frac{1}{5}) - (0,305)(2)(\frac{1}{5}) = 1,278$$

$$\therefore EI_1 \Delta_{ab} = 1,25 + 1,278 = 2,53$$

Tramo ab:

$$EI_1 \Delta_{ab}^1 = \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{x^2}{6}\right) - \left(\frac{l}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{2x}{3}\right) - \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{10}\right) \left(\frac{x^2}{6}\right) = \frac{x^3}{20} - \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore X_a = \frac{l}{2,53} \left(\frac{x^3}{20} - \frac{x^2}{4}\right)$$

Tramo bc:

$$EI_1 \Delta_{ab}^2 = -1,278x + (1,1) \left(\frac{x^2}{3}\right) + (1,1 - 0,27x) \left(\frac{x^2}{6}\right) - (0,0762) \left(\frac{x^3}{6}\right)$$

$$= -1,278x + 0,556x^2 - 0,0590x^3$$

$$\therefore X_b = \frac{l}{2,53} (-1,278x + 0,556x^2 - 0,0590x^3)$$

etcétera, para los tramos cd y de. De estas ecuaciones se han hallado las ordenadas cada metro, y se han anotado en la figura.

14.4 Obtención de líneas de influencia por superposición de efectos de los momentos de empotramiento. Este método es muy útil para determinar las líneas de influencia de los momentos extremos de las vigas y pórticos indeterminados. Exige una distribución de momentos para determinar los efectos de cada uno de los momentos de empotramiento de las diversas barras cargadas. Luego se superponen estos efectos, para hallar los momentos extremos totales. Cuando se organiza como en el Ejemplo 14.4, es un método muy eficaz para obtener las líneas de influencia de los momentos extremos.

Este método consiste fundamentalmente en los pasos siguientes:

1. Se aplica un momento de empotramiento unidad en un extremo de la barra. Por el procedimiento de la distribución de momentos, se calculan los momentos extremos resultantes en las barras. Se repite este proceso para cada extremo de barra que puede tener un momento de empotramiento producido por las cargas aplicadas.

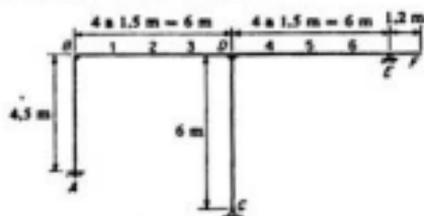
2. Se calculan los momentos de empotramiento producidos por una carga unidad colocada sucesivamente en cada uno de los puntos cargados.

3. Se combinan los datos de los pasos 1 y 2 para hallar los momentos extremos producidos por una carga unidad en cada uno de los puntos de aplicación de las cargas en la estructura.

Naturalmente, cuando se han calculado las líneas de influencia de los momentos extremos, se pueden calcular las restantes líneas por la estática.

Cuando se calcula el paso 1 del procedimiento arriba indicado, en realidad solo se necesita una distribución de momentos para cada nudo del pórtico. Puede hacerse esto para un momento de empotramiento unidad en una barra de un nudo. Una vez hecho, se puede determinar fácilmente el efecto de un momento de empotramiento unidad en cualquiera de las otras barras que se juntan en el nudo. Esto es evidente en la resolución del Ejemplo 14.4.

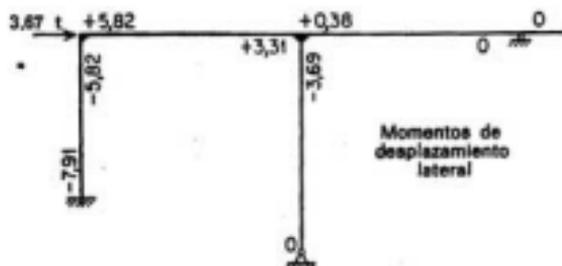
Ejemplo 14.4 Preparar una tabla de influencia para los momentos extremos del pórtico del ejemplo 13.25, superponiendo los efectos de los momentos de empotramiento. Dar las ordenadas cada 1,5 m a lo largo de la viga BDEF.



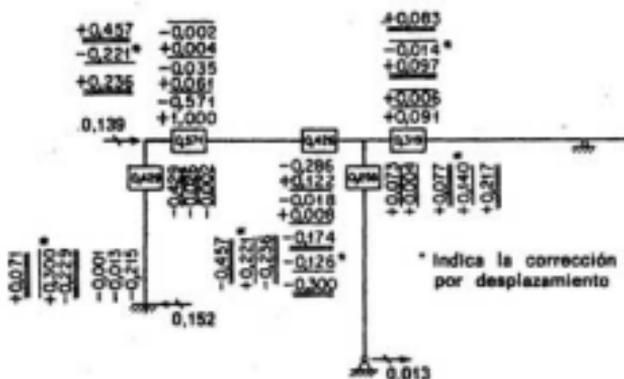
En este caso, puede haber desplazamiento lateral de los pilares. Para considerarlo necesitamos combinar una resolución tipo etapa A y otra tipo etapa B.

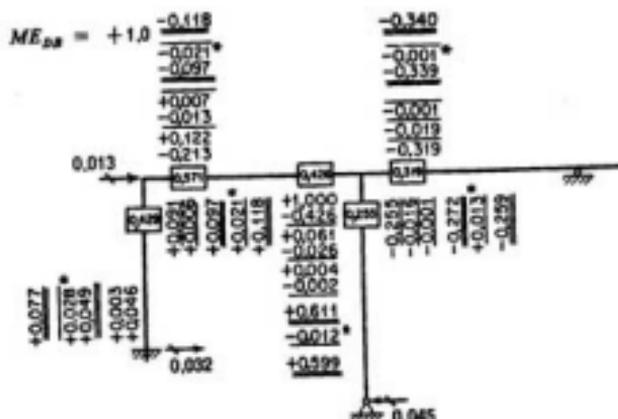
Utilizaremos los momentos extremos de la etapa B del Ejemplo 13.25 divididos por 20.

Etapa 1: Hallar los momentos extremos causados por un $ME = +1$ en los extremos de las vigas.



$$ME_{BD} = +10$$





Estas son realmente las únicas distribuciones de momentos necesarias. Los momentos extremos producidos por $ME_{DB} = +1,000$ se pueden escribir directamente trasladando el dato +1,000 de la columna DB a la DE. Igualmente, los momentos extremos debidos a $ME_{ED} = +1,0$ o $ME_{EF} = +1,0$ serán iguales a la mitad de los debidos a $ME_{DB} = +1$, con la excepción de los extremos ED y EF.

Resumen de los momentos extremos para $ME = +1$ en los diversos puntos.

$ME = +1$ en el punto	M_{AB}	M_{BD}	M_{DB}	M_{DE}	M_{DC}	M_{ED}
BD	+0,071	+0,236	-0,300	+0,083	+0,217	0
DB	+0,077	-0,118	+0,599	-0,340	-0,259	0
DE	+0,077	-0,118	-0,401	+0,660	-0,259	0
ED	-0,038	+0,059	+0,201	-0,330	+0,129	0
EF	-0,038	+0,059	+0,201	-0,330	+0,129	-1,0

Etapla 2: ME debido a la carga unidad en distintos puntos:

Carga en	ME producido en				
	BD	DB	DE	ED	EF
1	-0,84375	+0,28125			
2	-0,75	+0,75			
3	-0,28125	+0,84375			
4			-0,84375	+0,28125	
5			-0,75	+0,75	
6			-0,28125	+0,84375	
F					-1,2

Etapa 3: Tabla de influencia de los momentos extremos:

Carga en	Factor \times [momento correspondiente a $ME = 1$ en el punto (-)]	M_{AB}	M_{BD}	M_{DB}	M_{DE}	M_{DC}	M_{ED}
1	$-0,84375 \times BD$ $+0,28125 \times DB$	$-0,060$ $+0,022$ $-0,038$	$-0,199$ $-0,033$ $-0,232$	$+0,253$ $+0,168$ $+0,421$	$-0,070$ $-0,095$ $-0,165$	$-0,183$ $-0,073$ $-0,256$	0
2	$-0,75 \times BD$ $+0,75 \times DB$	$-0,052$ $+0,058$ $+0,006$	$-0,177$ $-0,088$ $-0,265$	$+0,225$ $+0,449$ $+0,674$	$-0,062$ $-0,255$ $-0,317$	$-0,163$ $-0,194$ $-0,357$	0
3	$-0,28125 \times BD$ $+0,84375 \times DB$	$-0,020$ $-0,065$ $+0,045$	$-0,066$ $-0,100$ $-0,166$	$+0,084$ $+0,505$ $+0,589$	$-0,023$ $-0,287$ $-0,310$	$-0,061$ $-0,219$ $-0,280$	0
4	$-0,84375 \times DE$ $+0,28125 \times ED$	$-0,065$ $-0,011$ $-0,076$	$+0,100$ $+0,016$ $+0,116$	$+0,338$ $+0,056$ $+0,394$	$-0,556$ $-0,092$ $-0,648$	$+0,219$ $+0,036$ $+0,255$	0
5	$-0,75 \times DE$ $+0,75 \times ED$	$-0,058$ $-0,028$ $-0,086$	$+0,088$ $+0,044$ $+0,132$	$+0,301$ $+0,150$ $+0,451$	$-0,494$ $-0,246$ $-0,740$	$+0,194$ $+0,096$ $+0,290$	0
6	$-0,28125 \times DE$ $+0,84375 \times ED$	$-0,022$ $-0,032$ $-0,054$	$+0,033$ $+0,049$ $+0,082$	$+0,113$ $+0,169$ $+0,282$	$-0,186$ $-0,276$ $-0,462$	$+0,073$ $+0,108$ $+0,181$	0
F	$-1,2 \times EF$	$+0,046$	$-0,070$	$-0,241$	$+0,396$	$-0,156$	$+1,2$

14.5 Problemas para resolver

Problema 14.1 a) Suponiendo que L/A es constante en todas las barras, preparar una línea de influencia para la fuerza en la barra CD del cuchillo de la Figura 14.2.

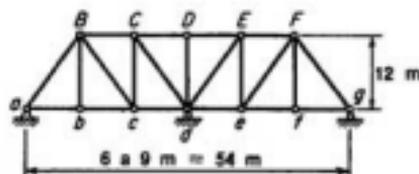


FIG. 14.2. Problema 14.1.

b) Utilizando los datos de la parte a), preparar también líneas de influencia de las fuerzas en las barras Bc y bc .

Problema 14.2 Preparar las líneas de influencia de las fuerzas en las barras bC y Cd del cuchillo del Ejemplo 13.5.

Problema 14.3 Utilizando el principio de Müller-Breslau, preparar las líneas de influencia de a) el momento en el punto c de la viga del Ejemplo 14.3; b) la reacción vertical en el punto b de esa misma viga.

Problema 14.4 Utilizando el método descrito en la Sec. 14.4 preparar las líneas de influencia de los momentos extremos de la viga del Ejemplo 14.3.

15

Introducción a los métodos matriciales en el análisis estructural

15.1 Introducción. Durante muchos años han estado los ingenieros de estructuras estudiando la aplicación de métodos y notaciones, utilizados por los matemáticos en el álgebra lineal, a la resolución de los problemas del análisis estructural. Gran parte de este trabajo ha sido realizado en los últimos veintitantos años, y se ha desarrollado de modo paralelo con el estudio de procedimientos perfeccionados para resolver sistemas de ecuaciones. Naturalmente, aún más recientemente, el disponer de los modernos calculadores digitales electrónicos ha estimulado un interés intenso en el uso de los métodos matriciales para formular la teoría de estructuras.

La formulación matricial proporciona un medio para sistematizar procedimientos generalizados, para calcular con máquina los problemas estructurales. Tales métodos son especialmente útiles cuando se trata de sistemas complicados con muchas superabundantes. La mayoría de la información publicada de este tema está en las revistas periódicas¹. Solo unos pocos textos incluyen los métodos matriciales, aunque varios más están a punto de ser publicados.

15.2 Clasificación de los métodos de análisis estructural. Es interesante estudiar los métodos de análisis estructural expuesto en los capítulos anteriores desde un punto

¹ Los ingenieros aeronáuticos de estructuras han jugado un papel primordial en la utilización de los métodos matriciales. Se han seleccionado las referencias siguientes de la literatura de la ingeniería civil principalmente, para introducir al lector en esta materia:

S. H. Crandall, «Engineering Analysis», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1956. (Breve estudio de la notación y manejo de las matrices.)

J. L. Matheson, «Hyperstatic Structures», Publicaciones Científicas Butterworth, Londres, 1959. (Ver cap. 9, Métodos matriciales, escrito por el doctor R. K. Livesley, que es una excelente introducción.)

P. B. Morice, «Linear Structural Analysis», The Ronald Press Company, Nueva York, 1959. (Texto de introducción referente al método de la flexibilidad de matrices de análisis estructural.)

S. U. Benscoter, «Matrix Analysis of Continuous Beams», *Trad. ASCE*, vol. 112, pág. 1109, 1947.

F. P. Chen, «The Matrix Analysis of Pin-connected Structures», *Trad. ASCE*, vol. 114, pág. 181, 1949.

G. Kron, «Tensorial Analysis of Elastic Structures», *J. Franklin Inst.*, vol. 238, núm. 6, diciembre 1944.

R. W. Clough, «Matrix Analysis of Beams», *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, vol. 84, núm. EMI, enero 1958.

R. W. Clough, «Use of Modern Computers in Structural Analysis», *J. Struct. Div., ASCE*, vol. 84, núm. ST3, mayo 1958.

J. H. Argyris, «Energy Theorems and Structural Analysis», *Aircraft Eng.*, vol. 27, pág. 347, 1955; y números siguientes.

J. H. Argyris, «Die Matrixtheorie der Statik», *Ingr.-Arch.*, vol. 25, núm. 3, pág. 174, 1957.

de vista más general. Este estudio suministrará una base para clasificar estos métodos, que nos proporcionará un mejor respaldo para la formulación matricial del análisis estructural.

El *análisis estructural* exige calcular no solo las reacciones exteriores y las fuerzas internas (tensiones) de la estructura, sino también sus deformaciones y desplazamientos. En las llamadas estructuras estáticamente determinadas, casi invariablemente se calculan primero las reacciones exteriores y las fuerzas internas (y las tensiones); luego, de estas tensiones se pueden determinar las deformaciones y a continuación los desplazamientos. Este mismo orden de cálculos se sigue en muchos métodos para estudiar estructuras estáticamente indeterminadas, esto es, primero se eligen las superabundantes y la estructura primaria estáticamente determinada correspondiente; luego se calculan estas fuerzas superabundantes (y/o pares) resolviendo un sistema de ecuaciones en igual número que ellas, cada una de las cuales expresa un caso de desplazamiento (etapa) conocido de la estructura primaria en función de las superabundantes; y luego, una vez conocidas éstas, se pueden calcular las tensiones, deformaciones y desplazamientos de toda la estructura como en el caso de las estáticamente determinadas. A tal método se le llama *método de fuerza de análisis estructural*, pues el primer paso de los cálculos se refiere al cálculo de las fuerzas (y/o pares) exteriores desconocidas de la estructura.

En otros casos de estructuras estáticamente indeterminadas (y, ocasionalmente, de las determinadas) se invierte completamente el orden de los cálculos anterior. Tal método se llama *método de desplazamiento de análisis estructural*. En él se expresan primero las fuerzas internas (y los pares) en función de las componentes de desplazamiento claves de la estructura; se sustituyen estas expresiones en las ecuaciones clave de equilibrio, obteniendo un sistema de ecuaciones con los desplazamientos como incógnitas; luego se sustituyen los valores de los desplazamientos obtenidos resolviendo el sistema, en las expresiones originales de las fuerzas internas (y pares) para obtener los valores de estas últimas; y finalmente, una vez conocidas las fuerzas internas (y los pares) es fácil calcular las reacciones de la estructura.

De acuerdo con esta clasificación, se pueden agrupar los métodos estudiados en el Cap. 13 como sigue. El método de la ecuación de superposición, la aplicación del segundo teorema de Castigliano y el empleo de la ecuación de los tres momentos son métodos de fuerzas. El de la deformación angular es un método de desplazamiento. El de distribución de momentos es un procedimiento de aproximaciones sucesivas, basado en las mismas ideas que los métodos de desplazamientos.

15.3 Comparación de los métodos de fuerzas y de desplazamientos para cuchillos planos. La comparación de estos dos métodos generales de análisis estructural se puede enfocar mejor considerando su aplicación a un tipo determinado de estructura. Consideremos a este objeto cuchillos planos de nudos articulados. El estudio completo de tal estructura que tiene n nudos, b barras y r reacciones, comprende en total $(2n + b)$ incógnitas, que son $(2n - r)$ componentes de los desplazamientos de los nudos (esto es, una componente horizontal y una vertical en cada nudo excepto en los de apoyo, en que se conocen las componentes de los desplazamientos correspondientes a las r componentes de reacción, y que generalmente son iguales a 0) y b fuerzas de barra y r componentes de reacción.

Si la estructura es estable y estáticamente determinada con respecto a las fuerzas extremas e internas, $(b + r)$ es igual a $2n$. Si se elige la solución por un método de fuerza, hay $2n$ ecuaciones independientes de la estática ($\Sigma H = 0$ y $\Sigma V = 0$ en cada nudo) disponibles para hallar el mismo número $(b + r)$ de fuerzas desconocidas. Se puede resolver el sistema de estas $2n$ ecuaciones, pero es preferible proceder como se indicó en detalle en el Cap. 4. Si la estructura es estable y estáticamente indeterminada, $(b + r)$

es mayor que $2n$. En ese caso, para hallar las $(b + r)$ fuerzas desconocidas es necesario suplementar las $2n$ ecuaciones de la estática con $[(b + r) - 2n]$ ecuaciones de desplazamiento —una para el desplazamiento de cada una de las $[(b + r) - 2n]$ superabundantes elegidas. Luego se puede resolver el sistema de las $(b + r)$ ecuaciones de equilibrio y de desplazamiento, hallando las $(b + r)$ fuerzas desconocidas. Sin embargo,

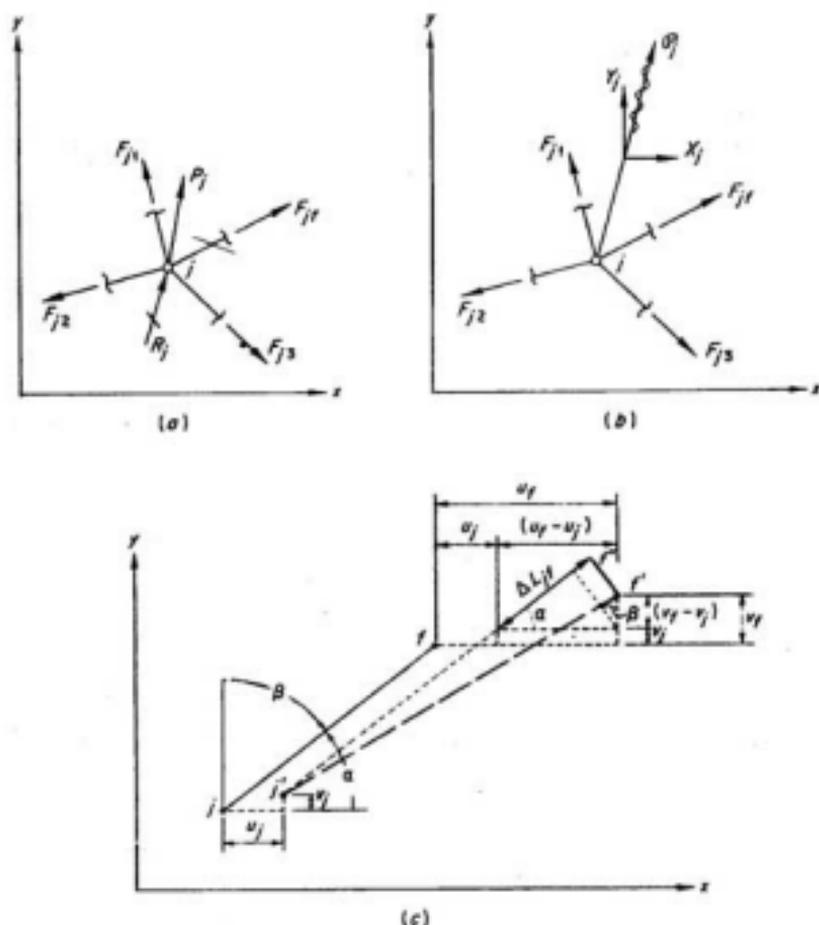


FIG. 15.1. Método de los desplazamientos para las armaduras planas.

generalmente es preferible proceder como se indicó en el Cap. 13, referente al método de la ecuación de superposición o al uso del segundo teorema de Castigliano. En este procedimiento se usan las ecuaciones de la estática como se describió en el Cap. 4, y solo hay que resolver el sistema de las $[(b + r) - 2n]$ ecuaciones de desplazamiento para hallar las $[(b + r) - 2n]$ fuerzas superabundantes contenidas en ellas como incógnitas. En resumen, al aplicar un método de fuerzas, generalmente se dispone la solución de modo que se evite tener que resolver el sistema de todas las ecuaciones de la

estática. Solo es necesario resolver el sistema de ecuaciones en las estructuras estáticamente indeterminadas; siendo el formado por las ecuaciones de desplazamiento el que se resuelve para hallar un número igual de fuerzas superabundantes desconocidas.

Hasta ahora no se ha formulado ningún método de desplazamiento para estudiar un cuchillo, pero es fácil hacerlo. Consideremos un nudo típico j de un cuchillo plano en el que se unen un cierto número de barras b_j . Este nudo puede estar también sustentado por una fuerza reactiva R_j y actuar también sobre él una carga conocida P_j . Si estuviera aislado, las ecuaciones de equilibrio de este nudo $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ contendrían el sistema de fuerzas concurrentes de la Fig. 15.1a. Sin embargo, por conveniencia, se sustituyen la carga P_j y la reacción R_j por su resultante \mathcal{P}_j y se utiliza el sistema representado en la Fig. 15.1b. Así, para el equilibrio del nudo,

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \rightarrow \quad X_j + \sum (F_{jf} \cos \alpha_{jf}) &= 0 \\ \sum F_y = 0, \uparrow \quad Y_j + \sum (F_{jf} \cos \beta_{jf}) &= 0 \end{aligned} \quad (15.1)$$

donde X_j e Y_j son, respectivamente, las componentes x e y de fuerza del nudo resultante \mathcal{P}_j y \sum indica que hay que calcular tales contribuciones de la fuerza de barra F_{jf} para cada barra jf en el nudo j y sumarlas algebraicamente.

Considerando la cinemática del desplazamiento de una barra jf , es posible hallar la relación de la variación de longitud de la barra ΔL_{jf} con las componentes x e y de los desplazamientos de los nudos j y f . En la Fig. 15.1c se han exagerado enormemente los desplazamientos, pero se ve en la siguiente deducción de la relación, que el giro de la barra es en realidad un ángulo pequeño, de modo que $f''f'$ es prácticamente normal a la dirección original de la barra. Por tanto,

$$\Delta L_{jf} = (u_f - u_j) \cos \alpha_{jf} + (v_f - v_j) \cos \beta_{jf} \quad (15.2)$$

Pero, para una barra de sección y material constantes,

$$\Delta L_{jf} = \frac{F_{jf} L_{jf}}{A_{jf} E_{jf}} \quad \text{o} \quad F_{jf} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{jf} \Delta L_{jf} \quad (15.3)$$

De donde

$$F_{jf} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{jf} [(u_f - u_j) \cos \alpha_{jf} + (v_f - v_j) \cos \beta_{jf}] \quad (15.4)$$

que es la ecuación buscada que relaciona la fuerza de barra F_{jf} con las componentes de los desplazamientos de los nudos de sus extremos, u_j y v_j , u_f y v_f .

Sustituyendo F_{jf} de la Ec. (15.4) en las Ecs. (15.1) se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 X_j &= u_j \sum^i \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{if} \cos^2 \alpha_{if} \right] + v_j \sum^i \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{if} \cos \alpha_{if} \cos \beta_{if} \right] \\
 &\quad + \sum^{if} \left[u_f \left(\frac{EA}{L} \right)_{if} (-\cos^2 \alpha_{if}) \right] + \sum^{if} \left[v_f \left(\frac{EA}{L} \right)_{if} (-\cos \alpha_{if} \cos \beta_{if}) \right] \\
 Y_j &= u_j \sum^i \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{if} \cos \alpha_{if} \cos \beta_{if} \right] + v_j \sum^i \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{if} \cos^2 \beta_{if} \right] \\
 &\quad + \sum^{if} \left[u_f \left(\frac{EA}{L} \right)_{if} (-\cos \alpha_{if} \cos \beta_{if}) \right] + \sum^{if} \left[v_f \left(\frac{EA}{L} \right)_{if} (-\cos^2 \beta_{if}) \right]
 \end{aligned} \tag{15.5}$$

En estas ecuaciones, \sum^i indica que hay que calcular esas contribuciones para cada barra del nudo j y sumarlas algebraicamente. Además \sum^{if} indica que hay que calcular esos términos para cada barra del nudo j , obteniéndose después de sumadas tantos términos como barras, conteniendo cada uno una u o v diferente según el caso. Las Ecs. (15.5) representan en cada caso las dos ecuaciones de equilibrio del nudo j , en función de los desplazamientos u y v de ese nudo y los u y v de los nudos en el otro extremo de las barras unidas en él.

Para un cuchillo plano (bien sea estáticamente determinado o indeterminado con respecto a las componentes de reacción externas o a las fuerzas de barra internas, o a ambas) se puede formular un método de desplazamientos que utilice las ecuaciones de equilibrio como las Ecs. (15.5). Aplicando la Ec. (15.5) a cada uno de los n nudos del cuchillo, se puede obtener $2n$ ecuaciones de equilibrio. Para un nudo no sustentado se conocen los valores de X_j e Y_j en las ecuaciones, que están definidos simplemente por el valor y dirección de la carga conocida P_j en el nudo, y las incógnitas son las componentes de los desplazamientos de nudo que intervienen. Para un nudo sustentado por un apoyo articulado se conocen las componentes u y v de este nudo (generalmente cero); pero como es desconocida la fuerza reactiva, X_j e Y_j son desconocidas. Para un nudo sustentado por un apoyo de rodillo se pueden escribir las dos condiciones de equilibrio para las direcciones paralela y perpendicular a la superficie de rodadura. En la ecuación correspondiente a la dirección paralela se conoce la componente de la carga del nudo, pero se desconoce su desplazamiento paralelo, mientras que en la de la dirección perpendicular se conoce la componente vertical del desplazamiento del nudo (generalmente nula), pero es desconocida la componente de la reacción.

Por tanto, se pueden dividir las $2n$ ecuaciones de equilibrio en dos grupos. De las direcciones x e y en los nudos no sustentados y la dirección paralela a la superficie de rodadura en los apoyados en rodillo, se obtienen un total de $(2n - r)$ ecuaciones de equilibrio como las Ecs. (15.5) en el primer grupo, que contienen las componentes de carga de nudo conocidas (como X_j e Y_j) y las $(2n - r)$ componentes de desplazamiento desconocidas (como u_j y v_j). Se obtiene también el segundo grupo de r ecuaciones de equilibrio aplicando las Ecs. (15.5), pero contienen r componentes de reacción desconocidas y algunas de las $(2n - r)$ componentes de desplazamiento desconocidas. Sin embargo, al resolver el sistema de las $(2n - r)$ ecuaciones del primer grupo, se hallan los

valores de las $(2n - r)$ componentes de los desplazamientos de los nudos que intervienen. Una vez obtenidos estos valores se pueden sustituir en las ecuaciones del segundo grupo, pudiendo calcular entonces las componentes de las reacciones. Cuando se dispone de estos valores, se pueden sustituir a su vez en las ecuaciones como la Ecuación (15.4) para obtener las fuerzas de barra (como F_{ij}), completando así el análisis estructural del cuchillo.

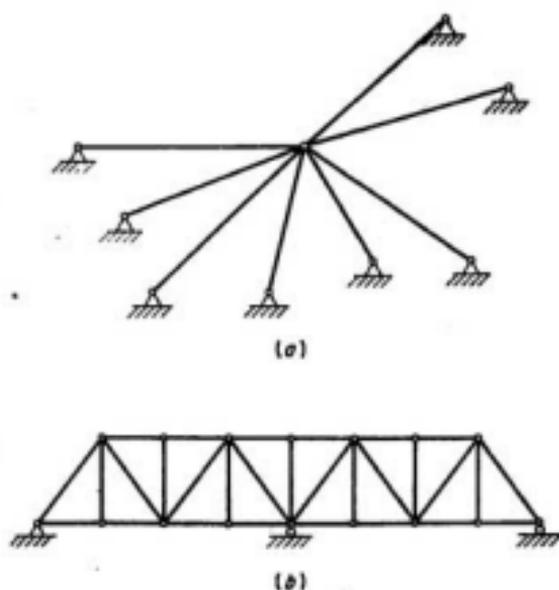


FIG. 15.2. Ejemplos de armaduras planas.

Es interesante comparar el estudio por métodos de fuerza de varios cuchillos planos típicos, como los representados en la Fig. 15.2, con el estudio por el método de desplazamiento. Esta comparación se hace solo en cuanto al número de ecuaciones simultáneas que hay que resolver, pues su solución representa muchas veces la mayor parte del trabajo de cálculo cuando se usan reglas de cálculo o máquinas de calcular. No se tiene en cuenta en la comparación el tiempo para plantear las ecuaciones, ni el de completar la solución después de resolver el sistema. Para el cuchillo (a), $n = 9$, $b = 8$ y $r = 16$. Por tanto, hay $[(b + r) - 2n]$ o seis fuerzas superabundantes desconocidas, pero solo $[2n - r]$ o dos desplazamientos de nudo desconocidos. Es preferible la resolución por el método de desplazamiento, pues solo contiene dos ecuaciones simultáneas. Para el cuchillo (b), $n = 16$, $b = 29$ y $r = 4$. Por tanto, solo interviene una fuerza superabundante y 28 desplazamientos de nudo desconocidos. La solución por un método de fuerza es notablemente superior en este caso.

15.4 Generalización del método de desplazamiento. Se puede interpretar y generalizar el método de desplazamiento desarrollado anteriormente en una forma que se pueda aplicar a cualquier estructura de barras, bien sea una armadura o un pórtico, sea bi o tridimensional.

Con referencia a la primera de las Ecs. (15.5), supongamos que $u_j = 1$, que $v_j = 0$

y que u y v son nulas en los nudos del otro extremo de todas las barras que se encuentran en el j . En este caso, la ecuación se reduce a

$$X_j = (1) \sum \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{if} \cos^2 \alpha_{if} \right]$$

O, en otras palabras, se puede interpretar que esta suma es igual a la fuerza x que debe aplicarse en j para producir un desplazamiento x unidad en j y ningún otro ni en j ni en los nudos en los otros extremos de las barras que se encuentran en j . Del mismo modo se podrían interpretar los coeficientes de las otras componentes de los desplazamientos de esta ecuación, que tendrían significados físicos semejantes.

Los coeficientes de los términos de desplazamientos del segundo miembro de las Ecs. (15.5) se llaman *coeficientes de rigidez* y se representan por k . En realidad, para k se usan dos subíndices; por ejemplo, $k_{j,if}$, expresa la fuerza que se ha de aplicar en el nudo j en la dirección x cuando se introduce en el nudo f un desplazamiento unidad en la dirección y , haciendo que todas las demás componentes de los desplazamientos de nudo sean cero. Para aclarar el empleo de esta notación, si se aplica la primera de las Ecs. (15.5) al nudo j de la Fig. 15.1b y se numeran los nudos situados en los otros extremos de las cuatro barras con 1, 2, 3 y 4, resulta la siguiente ecuación:

$$X_j = k_{j,1x}u_1 + k_{j,1y}v_1 + k_{j,2x}u_2 + k_{j,2y}v_2 + k_{j,3x}u_3 + k_{j,3y}v_3 + k_{j,4x}u_4 + k_{j,4y}v_4$$

Esta forma de expresar la primera de las Ecs. (15.5) presenta ventajas considerables sobre la original. Se obtiene una mayor simplificación de notaciones si utilizamos solo un símbolo para expresar las componentes de los desplazamientos de los nudos (bien sea una componente x , y o z de traslación, o una de giro de un nudo en el caso de un pórtico) y un solo símbolo para representar las componentes de la fuerza (o par) de un nudo. Esta notación simplificada se puede interpretar también con más generalidad.

Por tanto, se usará el siguiente sistema para formular el análisis de cualquier estructura de barra por un método de desplazamiento. Primero se designarán en un esquema de la estructura, por una serie de números, las componentes que se usarán para definir el desplazamiento de cada nudo. Así, por ejemplo, en el caso de un cuchillo plano, 1 y 2 expresan, respectivamente, las componentes x e y del nudo a ; 3 y 4, las x e y del nudo b ; etc. Luego se descomponen las fuerzas del nudo (y pares, si hay) en sus componentes en las mismas direcciones usadas para los desplazamientos, utilizando el mismo sistema de numeración para expresar estas fuerzas. Sea ahora

P_m = componente de fuerza en un nudo, en la dirección expresada por el número m

D_m = componente de desplazamiento de un nudo, en la dirección expresada por el número m

k_{ml} = coeficiente de rigidez que expresa la componente de la fuerza que actúa en el nudo en la dirección expresada por m cuando se introduce en el nudo un desplazamiento unidad en la dirección indicada por l , siendo las demás componentes de desplazamiento de nudo iguales a cero (esto es, se impiden)

Para una estructura que contiene s componentes de desplazamiento de nudo desconoci-

das, en el análisis estructural se dispone de las s ecuaciones de equilibrio siguientes para hallar esas incógnitas por el método de los desplazamientos generalizado:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_{11}D_1 + k_{12}D_2 + k_{13}D_3 + \dots + k_{1s}D_s \\ P_2 &= k_{21}D_1 + k_{22}D_2 + k_{23}D_3 + \dots + k_{2s}D_s \\ &\vdots \\ P_r &= k_{r1}D_1 + k_{r2}D_2 + k_{r3}D_3 + \dots + k_{rs}D_s \end{aligned} \quad (15.6)$$

Si la estructura tiene r componentes de reacción, hay r componentes de desplazamiento conocidas correspondientes que se supone son nulas¹. Se pueden escribir un total de $(r + s)$ ecuaciones de equilibrio, s de las cuales están representadas por las Ecs. (15.6). Las r ecuaciones de equilibrio restantes son de la forma siguiente, donde las r componentes de reacción están expresadas en función de las s componentes de desplazamiento de nudo desconocidas:

$$R_u = k_{u1}D_1 + k_{u2}D_2 + k_{u3}D_3 + \dots + k_{us}D_s \quad (15.7)$$

Una vez halladas las s componentes de desplazamiento de nudo resolviendo el sistema formado por las Ecs. (15.6), se pueden sustituir sus valores en las ecuaciones como la Ec. (15.7) para determinar los valores de las r componentes de las reacciones. Se pueden sustituir también los desplazamientos de los nudos en las relaciones tensión-desplazamiento de la estructura para definir las tensiones internas. Por ejemplo, se pueden determinar las fuerzas de barra F_{ij} sustituyendo los valores de los desplazamientos en la Ecuación (15.4).

Se ha observado antes que intervienen $(2n - r)$ componentes de desplazamiento de nudo desconocidas en el cuchillo plano (o armadura bidimensional). En una armadura tridimensional se necesitan las componentes x , y y z para expresar el desplazamiento de cada nudo, por lo que intervienen un total de $(3n - r)$ componentes de desplazamiento de nudo desconocidas en tal estructura. En el pórtico plano cuyos nudos son todos rígidos, es necesario indicar no solo las componentes x e y del desplazamiento lineal de cada nudo, sino también su giro; por tanto, hay $(3n - r)$ componentes de desplazamiento de nudo desconocidas. En el pórtico tridimensional con nudos rígidos es necesario dar las componentes x , y y z de la traslación lineal del nudo, y su giro alrededor de cada uno de los tres ejes de referencia, por lo que intervienen $(6n - r)$ componentes de desplazamiento desconocidas de nudo en esa estructura.

Hasta ahora se ha supuesto que las cargas (y/o los pares) se aplicaban solo a los nudos de la estructura. Si sobre alguna barra actúan cargas aisladas o repartidas, entre los nudos, se puede llevar a cabo el análisis de la estructura del siguiente modo:

1. Se supone provisionalmente que todos los nudos están fijos para evitar la traslación y el giro. Se aplican todas las cargas que actúan en las barras entre nudos. Es fácil calcular los momentos, cortantes y fuerzas axiales producidas en cada barra si los dos extremos están fijos contra la traslación o el giro. Se calculan las fuerzas y pares que deben actuar en cada nudo para fijar todas las barras que se encuentran en él, para evitar la traslación y el giro.

2. Se aplican a la estructura todas las cargas (y pares) de nudo dadas y además, en cada nudo, fuerzas y pares iguales en magnitud, y de signo contrario, a las fuerzas y

¹ Es posible incluir el efecto de los movimientos de apoyo, variaciones de temperatura y errores de fabricación, aunque no se ha hecho en este estudio.

pares de fijación calculados en (1). Se puede ya estudiar la estructura con todas estas fuerzas y pares, utilizando las Ecs. (15.6) como se ha dicho anteriormente.

El momento flector, el cortante y la fuerza axial totales en cada punto de la estructura serán la suma algebraica de los parciales calculados en (1) y (2).

15.5 Análisis estructural en casos de gran número de hipótesis de cargas. Si hay que hacer un análisis estructural (que incluya el cálculo de los desplazamientos de los nudos así como las tensiones internas) de una estructura complicada para un gran número de hipótesis de carga, se organizará el trabajo en forma distinta de la explicada para una sola hipótesis.

Este procedimiento exige el empleo de un conjunto de relaciones carga-deformación que son las inversas de las representadas por las Ecs. (15.6). Esas ecuaciones son expresiones de las componentes de las cargas de nudo en función de las de los desplazamientos de los nudos y contienen los coeficientes de rigidez k .

Las ecuaciones de carga-deformación siguientes son simplemente ecuaciones de superposición, que expresan las componentes de los desplazamientos de los nudos en función de las de las cargas de nudo y contienen los coeficientes de flexibilidad (o desplazamiento) d . Así,

$$\begin{aligned} D_1 &= d_{11}P_1 + d_{12}P_2 + d_{13}P_3 + \dots + d_{1s}P_s \\ D_2 &= d_{21}P_1 + d_{22}P_2 + d_{23}P_3 + \dots + d_{2s}P_s \\ &\vdots \\ D_s &= d_{s1}P_1 + d_{s2}P_2 + d_{s3}P_3 + \dots + d_{ss}P_s \end{aligned} \quad (15.8)$$

donde d_{ml} = coeficiente de flexibilidad (o de desplazamiento) que expresa la componente del desplazamiento del nudo en el punto y en la dirección indicada por m , producido por una fuerza de nudo unidad que actúa en el punto y en la dirección indicada por l .

Se podrían hallar estos coeficientes de flexibilidad por uno de los métodos de fuerza, pero son muy laboriosos de calcular comparados con los coeficientes de rigidez k . Se pueden calcular por las Ecs. (15.6) como sigue. Para obtener d_{12} , d_{22} , ..., d_{s2} , se aplica a la estructura una sola carga unidad, $P_2 = 1$; y se hallan D_1 , D_2 , ..., D_s , que son iguales a d_{12} , d_{22} , ..., d_{s2} (por definición de estos coeficientes), resolviendo el sistema de la Ec. (15.6). Así, si se resolviera el sistema de la Ec. (15.6) s veces para valores unidad de P_1 , P_2 , ..., P_s sucesivamente, las s soluciones para D_1 , D_2 , ..., D_s darían todos los coeficientes d de cada una de las s columnas de los segundos miembros de las Ecs. (15.8). (En la terminología de matrices se llama esto invertir la matriz de rigidez para obtener la de flexibilidad.)

Una vez calculados los coeficientes de flexibilidad, se pueden hallar las componentes de los desplazamientos de los nudos D_1 , D_2 , ..., D_s para cualquier hipótesis de carga dada definida por P_1 , P_2 , ..., P_s . Si se dispone de los valores de las componentes de los desplazamientos de los nudos, se pueden calcular las reacciones por la Ec. (15.7) y las fuerzas de barra, etc., de ecuaciones como la Ecuación (15.4).

15.6 Métodos matriciales de análisis estructural. Incluso el estudio abreviado de este capítulo hace ver claramente que el planteamiento y resolución de gran número de ecuaciones simultáneas resulta muy engorroso si se utiliza la notación, terminología y métodos clásicos. Las dificultades aumentan considerablemente con la complejidad y superabundancia de la estructura. Los matemáticos han desarrollado notaciones y métodos matriciales para facilitar el estudio y resolución del álgebra lineal.

No se intenta aquí resumir los fundamentos de la notación de matrices ni del álgebra

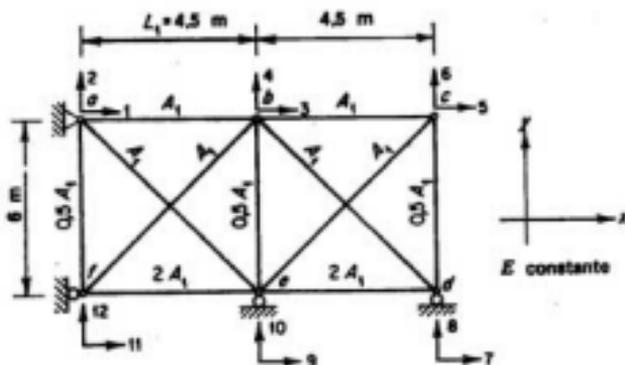


FIG. 15.3. Ejemplo aclaratorio.

matricial, ni introducir la aplicación de estos métodos al problema del análisis estructural. Los comentarios anteriores de este capítulo tienen por objeto orientar al lector para que pueda conseguirlo en otra parte, como puede ser en las referencias dadas al principio del capítulo.

No obstante, se incluye el ejemplo siguiente para que sirva de base para comparar lo dicho anteriormente con otros temas. El cuchillo plano que interviene es el de la Fig. 15.3, y, como se ve, tiene seis nudos, siete barras y cinco componentes de reacción. Por tanto, la estructura es estáticamente indeterminada en cuarto grado respecto a las fuerzas de barra y las componentes de las reacciones. Por otro lado, hay siete componentes de desplazamientos de nudo desconocidas.

A continuación se formula el estudio de este cuchillo por el método de desplazamientos. A este objeto, se indican con flechas y números al lado de los nudos de la Figura 15.3 las componentes x e y de las fuerzas y los desplazamientos de los nudos, reservando los números impares para la dirección x y los pares para la y ; por ejemplo, 1 y 2 en el nudo a , 3 y 4 en el b , etc. Se supone que hay un gran número de hipótesis de carga, para cada una de las cuales se dan los valores de las componentes de las fuerzas en los nudos ($P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ y P_{12}).

Aplicando las Ecs. (15.6) se pueden plantear siete ecuaciones de equilibrio, en las que siete componentes de las fuerzas conocidas en los nudos P_n de cada hipótesis de carga están expresadas en función de las siete componentes desconocidas de los desplazamientos de nudos D_n y de los coeficientes de rigidez k_{ni} . Se pueden representar estas siete ecuaciones utilizando la notación matricial como sigue:

$$\mathbf{P} = \mathbf{kD} \quad (a)$$

donde \mathbf{P} y \mathbf{D} representan las matrices columna (o vectores columna)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_{12} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

y \mathbf{k} representa la siguiente *matriz de rigidez* cuadrada:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{24} & k_{26} & k_{28} & k_{27} & k_{29} & k_{2,12} \\ k_{42} & k_{44} & k_{46} & k_{48} & k_{47} & k_{49} & k_{4,12} \\ k_{62} & k_{64} & k_{66} & k_{68} & k_{67} & k_{69} & k_{6,12} \\ k_{82} & k_{84} & k_{86} & k_{88} & k_{87} & k_{89} & k_{8,12} \\ k_{72} & k_{74} & k_{76} & k_{78} & k_{77} & k_{79} & k_{7,12} \\ k_{92} & k_{94} & k_{96} & k_{98} & k_{97} & k_{99} & k_{9,12} \\ k_{12,2} & k_{12,4} & k_{12,6} & k_{12,8} & k_{12,7} & k_{12,9} & k_{12,12} \end{bmatrix}$$

Se puede resolver el sistema de las Ecs. (a) y obtener los desplazamientos D_m para el vector columna \mathbf{P} asociado con cada una de las hipótesis de carga; pero cuando hay un gran número de hipótesis de carga, en general es más fácil proceder como sigue. Aplicando las Ecs. (15.8) se plantean siete ecuaciones entre cargas y desplazamientos que se pueden representar, utilizando la notación matricial, por

$$\mathbf{D} = \mathbf{dP} \quad (b)$$

donde \mathbf{d} representa la siguiente *matriz de flexibilidad* cuadrada:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{24} & d_{26} & d_{28} & d_{27} & d_{29} & d_{2,12} \\ d_{42} & d_{44} & d_{46} & d_{48} & d_{47} & d_{49} & d_{4,12} \\ d_{62} & d_{64} & d_{66} & d_{68} & d_{67} & d_{69} & d_{6,12} \\ d_{82} & d_{84} & d_{86} & d_{88} & d_{87} & d_{89} & d_{8,12} \\ d_{72} & d_{74} & d_{76} & d_{78} & d_{77} & d_{79} & d_{7,12} \\ d_{92} & d_{94} & d_{96} & d_{98} & d_{97} & d_{99} & d_{9,12} \\ d_{12,2} & d_{12,4} & d_{12,6} & d_{12,8} & d_{12,7} & d_{12,9} & d_{12,12} \end{bmatrix}$$

No obstante, como es pesado calcular los coeficientes de desplazamiento d_{mi} , es más fácil sustituir la matriz de flexibilidad \mathbf{d} por su equivalente, la inversa de la matriz de rigidez \mathbf{k}^{-1} . Así, se podrá escribir la Ec. (b) por

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{P} \quad (c)$$

La solución del problema se puede formular ahora como sigue. Se calculan primero los coeficientes de rigidez k_{mi} y se construye la matriz \mathbf{k} . Luego se invierte esta matriz de rigidez para obtener \mathbf{k}^{-1} . Se hallan las componentes desconocidas de los desplazamientos de los nudos D_m para cada una de las hipótesis de carga, utilizando la Ec. (c). Se obtienen las reacciones sustituyendo los valores de D_m en las ecuaciones como la Ec. (15.7) que se han escrito para esta estructura. Se hallan las fuerzas en las barras, sustituyendo los valores de D_m en ecuaciones como la Ec. (15.4) para cada barra.

La clave de la solución de este problema es calcular los coeficientes de rigidez y construir la matriz de rigidez \mathbf{k} . Utilizando los coeficientes de los términos apropiados de las Ecs. (15.5), se obtienen las fórmulas siguientes para los diversos coeficientes de rigidez del nudo j y de los f situados en los extremos más alejados de las barras \bar{j} , que se encuentran en j :

Si $u_j = +1$,

$$k_{i_1 i_1} = \sum_j \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} \cos^2 \alpha_{ij} \right] \quad (d)$$

$$k_{i_2 i_2} = \sum_j \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} \cos \alpha_{ij} \cos \beta_{ij} \right] \quad (e)$$

$$k_{i_3 i_3} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (-\cos^2 \alpha_{ij}) \quad (f)$$

$$k_{i_1 i_2} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (-\cos \alpha_{ij} \cos \beta_{ij}) \quad (g)$$

Si $v_j = +1$,

$$k_{i_1 v_1} = \sum_j \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (\cos \alpha_{ij} \cos \beta_{ij}) \right] \quad (h)$$

$$k_{i_2 v_2} = \sum_j \left[\left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (\cos^2 \beta_{ij}) \right] \quad (i)$$

$$k_{i_3 v_3} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (-\cos \alpha_{ij} \cos \beta_{ij}) \quad (j)$$

$$k_{i_1 v_2} = \left(\frac{EA}{L} \right)_{ij} (-\cos^2 \beta_{ij}) \quad (k)$$

En la Tabla 15.1 figuran los valores de EA/L de cada barra en función de EA_1/L_1 y, además, los valores de $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ y $\cos \alpha \cos \beta$ para cada barra. Se pueden calcular los distintos coeficientes de rigidez utilizando las fórmulas (d) a (k). Estos resultados figuran en la Tabla 15.2. La matriz de rigidez k se puede obtener multiplicando cada uno de los elementos de la Tabla 15.2 por EA_1/L_1 .

Tabla 15.1

Barra	$\frac{EA}{L} / \frac{EA_1}{L_1}$	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos^2 \alpha$	$\cos^2 \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$
ab	1	1	0	1	0	0
bc	1	1	0	1	0	0
fe	2	1	0	1	0	0
ed	2	1	0	1	0	0
af	0,375	0	1	0	1	0
be	0,375	0	1	0	1	0
cd	0,375	0	1	0	1	0
ae	0,6	0,6	-0,8	0,36	0,64	-0,48
fb	0,6	0,6	+0,8	0,36	0,64	+0,48
bd	0,6	0,6	-0,8	0,36	0,64	-0,48
ec	0,6	0,6	+0,8	0,36	0,64	+0,48

Tabla 15.2

$k / \frac{EA_1}{L_1}$	3	4	5	6	7	9	12
3	+2,432	0	-1,0	0	-0,216	0	-0,288
4	0	+1,143	0	0	+0,288	0	-0,384
5	-1,0	0	+1,216	+0,288	0	-0,216	0
6	0	0	+0,288	+0,759	0	-0,288	0
7	-0,216	+0,288	0	0	+2,216	-2,0	0
9	0	0	-0,216	-0,288	-2,0	+4,432	0
12	-0,288	-0,384	0	0	0	0	+0,759

Comportamiento plástico de las estructuras

16.1 Introducción. En los comentarios anteriores sobre el cálculo de deformaciones y el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas se prestó atención casi exclusivamente al comportamiento linealmente elástico. Sin embargo, los ingenieros de estructuras están cada vez más interesados en basar algunos de sus proyectos en las cargas de rotura de la estructura. Por tanto, tiene gran importancia el considerar el comportamiento plástico de algunos elementos de estructura típicos como respaldo de los procedimientos de proyecto plástico que se están desarrollando.

Muchos materiales estructurales son dúctiles. Entre ellos, el acero estructural presenta las mejores propiedades postelásticas desde el punto de vista de la aplicación de los principios del proyecto plástico. Evidentemente, en cuanto se producen intensidades de tensión de fluencia en la sección con mayor tensión, las estructuras de acero *estáticamente determinadas* pueden soportar una carga muy poco mayor sin sufrir deformaciones excesivas. Pero en el caso de una estructura *estáticamente indeterminada* se puede producir en esa sección deformación plástica sin pérdida apreciable de resistencia mientras se aplica a la estructura una carga adicional. Durante esta carga adicional la estructura es algo más flexible, pero no en exceso. Se puede aumentar todavía la carga hasta que se produzcan tensiones de fluencia en suficientes sitios para que la estructura esté a punto de deformarse como un mecanismo articulado y de sufrir deformaciones excesivas. En algunos casos se puede utilizar en los proyectos esta capacidad de soportar carga de una estructura de acero estáticamente indeterminada, por encima de la carga que produce primero las tensiones de fluencia.

Esta capacidad de sobrepasar la carga de fluencia P_f (esto es, la carga que produce tensiones de fluencia en el primer punto) es más importante en las estructuras en que no se ha utilizado el material con eficacia. Se observará que esto no significa necesariamente que se trate de estructuras proyectadas antieconómicamente. Por ejemplo, muchas veces es económico utilizar una viga laminada cuya capacidad se usa solo en la sección sometida a la tensión máxima. Por otro lado, si bien resulta económico variar el tamaño de las barras y proyectar un tipo de estructura de tensiones sensiblemente constantes, a las cargas solo un poco mayores que la de fluencia les corresponden deformaciones excesivas.

El proyecto plástico es más conveniente cuando la parte predominante de las cargas de proyecto es una carga inmóvil y no reversible. Bajo cargas reversibles fuertes, puede producirse *fatiga plástica*, como en el caso de un clavo o alambre que se dobla y des-

dobra varias veces en el campo plástico. Si intervienen cargas móviles fuertes, es posible producir una deformación plástica adicional en cada paso de la carga y acumular, eventualmente, deformaciones permanentes excesivas. En muchos casos de proyectos de edificios, las cargas más importantes se pueden considerar como «estáticas», y es en tales casos en los que se trata de aplicar el proyecto plástico.

Estudiaremos el comportamiento plástico de algunos casos importantes. Sin embargo, no se trata de dar un curso amplio sobre el análisis plástico ni sobre el proyecto plástico de las estructuras¹.

16.2 Propiedades mecánicas del acero. Las principales propiedades del acero estructural, desde el punto de vista del proyecto, están expresadas en las Figs. 16.1 y 16.2. En la Fig. 16.1 está representada una curva tensión-deformación completa de un acero estructural típico A7, que hace ver la excepcional ductilidad de ese acero antes de que se produzca la rotura por tracción. Desde un punto de vista práctico de proyecto, se presta el mayor interés a la parte inicial de esta curva, hasta un alargamiento de un 2 por 100. En la Fig. 16.2 se ha representado esta parte inicial idealizada, con una escala ampliada para las deformaciones.

En la curva tensión-deformación idealizada se supone que el acero estructural es linealmente elástico hasta la *tensión del límite de fluencia* σ_f de 2.400 kg/cm². Se observará que la *deformación del límite de fluencia* ϵ_f es un poco más de 0,001, ó 0,1 por 100. Realmente, el acero es elástico linealmente hasta un *límite de proporcionalidad* de unos dos tercios de la tensión del límite de fluencia. Las deformaciones siguen siendo recuperables después de suprimir la carga, hasta el *límite elástico*, que es unos tres cuartos

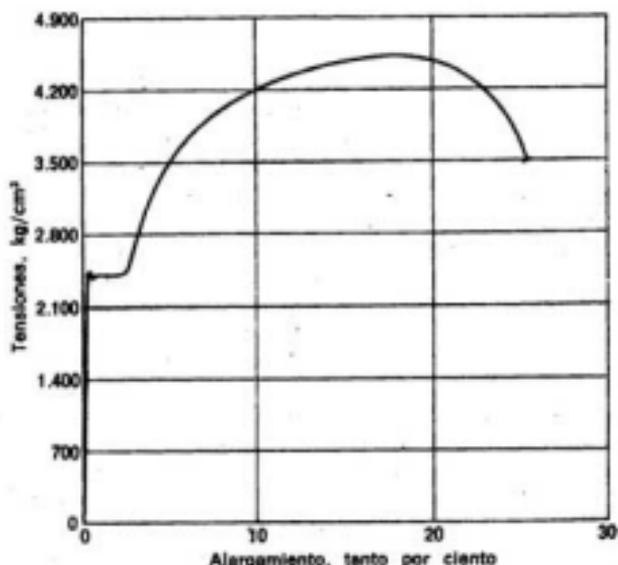


FIG. 16.1. Curva tensión-deformación típica del acero de estructuras A7.

¹ Para tal información, se envía al lector a libros como: J. F. Baker, M. R. Horne y J. Heyman, «The Steel Skeleton», vol. II, «Plastic Behavior and Design», Publicaciones de la Universidad de Cambridge, Londres, 1956; L. S. Beedie, «Plastic Design of Steel Frames», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1958; «Plastic Design in Steel», del Instituto Americano de la Construcción de Acero, Nueva York, 1958; P. G. Hodge, Jr., «Plastic Analysis of Structures», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1959.

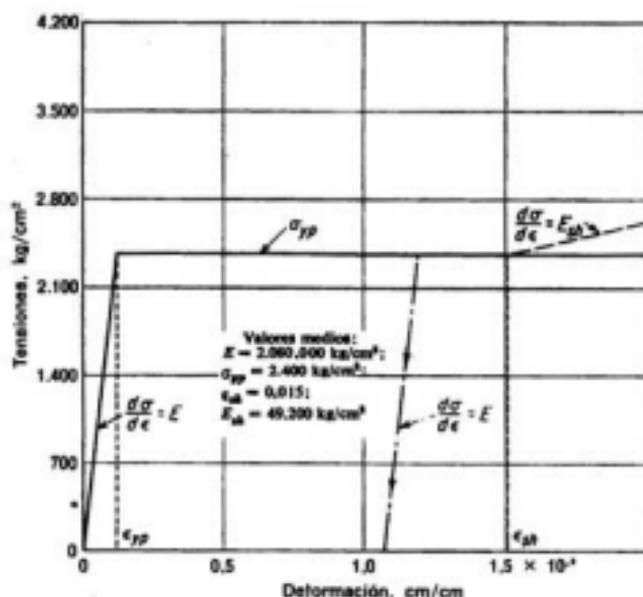


FIG. 16.2. Curva tensión-deformación ideal del acero de estructuras A7 (parte inicial idealizada de la curva tensión-deformación de la Figura 16.1).

de la tensión de fluencia. Cuando se suprime la carga del acero, después de haberle cargado más allá del límite elástico, habrá alguna deformación permanente o residual. En otras palabras, el comportamiento plástico comienza realmente en el límite elástico. Sin embargo, no se observa hasta que se alcanza el nivel de la tensión del límite de fluencia. En este momento, el acero pasa en realidad por una «fluencia superior» y a continuación por «una fluencia inferior» antes de establecerse en el nivel de tensión de fluencia del que se habla normalmente. La magnitud de la «oscilación» asociada con estos fenómenos de fluencia superior e inferior se acentúa con la velocidad de carga y está representada al comienzo de la zona plana de fluencia de la Fig. 16.1. Para cargas estáticas o casi estáticas, este fenómeno no tiene importancia, por lo que se ha suprimido en la curva idealizada de la Fig. 16.2. A objetos prácticos, cuando se alcanza el nivel del límite de fluencia, el acero estructural se deformará plásticamente sin aumento de tensión hasta un alargamiento de 1 a 1,5 por 100. En este punto comienza la llamada «acritud» y se vuelve a necesitar un aumento de tensión para producir un aumento de alargamiento. En las primeras fases de la acritud la pendiente de la curva tensión-deformación corresponde al módulo E_{ah} de unos 49.200 kg/cm² en lugar del módulo de elasticidad de Young E de 2.040.000 kg/cm² de la zona elástica.

En los comentarios siguientes se supondrá que el acero estructural es linealmente elástico hasta el límite de fluencia (tracción), y desde allí cede *indefinidamente* a las tensiones constantes del límite de fluencia (en otras palabras, se ignorará la acritud)¹. Si, después de ceder una cierta cantidad una barra, se le suprime la carga, se supondrá

¹ En el proyecto plástico, los alargamientos máximos de la estructura correspondientes a la carga para la cual se producen deformaciones excesivas, raramente exceden de 0,015. Por tanto, el despreciar la zona de endurecimiento tiene pocas veces importancia al calcular la carga de rotura. Además, el despreciar este efecto conduce a una estimación conservadora de dicha carga.

que se descarga (como se representa por las líneas de trazos) según un camino paralelo a la línea elástica inicial. Si se carga entonces la barra en sentido opuesto, se supondrá que continúa deformando, como se muestra en la línea de trazos hasta alcanzar un

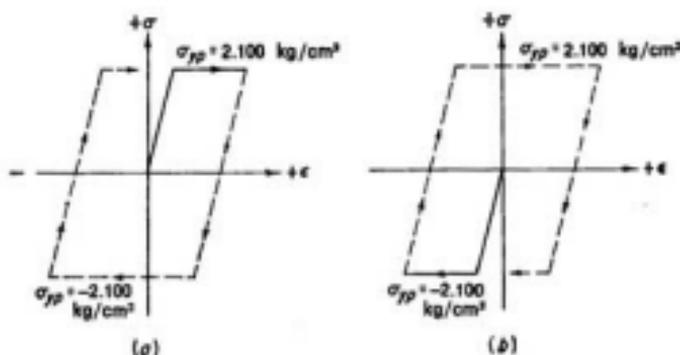


FIG. 16.3. Comportamiento supuesto del acero para el estudio del comportamiento plástico: (a) empezando con deformaciones de tracción, (b) empezando con deformaciones de compresión.

nivel de tensión de fluencia de -2.400 kg/cm^2 . En este punto, si es necesario, se supondrá que es capaz de ceder indefinidamente en compresión con este nivel de tensión constante.

En los comentarios siguientes se representa, para mayor sencillez, el comportamiento supuesto del acero por los esquemas de la Fig. 16.3. Se observará que se han redondeado las tensiones del límite de fluencia en tracción y compresión a un valor de 2.100 kg/cm^2 ,

16.3 Comportamiento plástico de una estructura de celosía simple. Para este estudio se utilizará la celosía muy sencilla de tres barras representada en la Fig. 16.4. Se supondrá que se evita el pandeo. Por tanto, estas barras de una sección de 10 cm^2 cederán indefinidamente con una fuerza de barra de $+0 -21 \text{ t}$ para una tensión de fluencia de 2.100 kg/cm^2 , como se ve en la Fig. 16.3. Las barras delgadas de compresión tienen realmente una relación F a ΔL , como se ve en las líneas de puntos de la Fig. 16.4b, en que se interpreta ΔL como el movimiento relativo de los dos extremos de una barra pandeada, en lugar de la variación axial de longitud de la barra¹. Aunque este ejemplo hipotético no es representativo de las verdaderas armaduras estructurales, proporciona un medio excelente para desarrollar los conceptos que intervienen en el comportamiento plástico de las estructuras.

Antes de comenzar el estudio de la celosía de la Fig. 16.4 es interesante observar el comportamiento de varias modificaciones estáticamente determinadas de la estructura. Supongamos que la estructura consistiera solo en dos barras, ab y ac (o ab y ad). Cuando la carga vertical P alcanzara un valor de 21 t , la fuerza en la barra ab alcanzaría su valor de fluencia de 21 t y se produciría una deformación vertical excesiva del nudo a . Por tanto, los valores de P_f y P_u son ambos de 21 t ². Por otro lado, si la estructura consi-

¹ Esta incapacidad característica de las barras de compresión para soportar indefinidamente su carga máxima en la misma zona de fluencia que una barra de tracción, es la principal razón por la que no se puede confiar en el comportamiento plástico de las armaduras para el proyecto.

² En este estudio, los subíndices F y u del símbolo de carga tienen el significado siguiente:

P_f es la carga para la que se alcanzan las intensidades de tensión de fluencia en la barra sometida a mayor tensión.

P_u es la carga para la que se produce una deformación excesiva de la estructura.

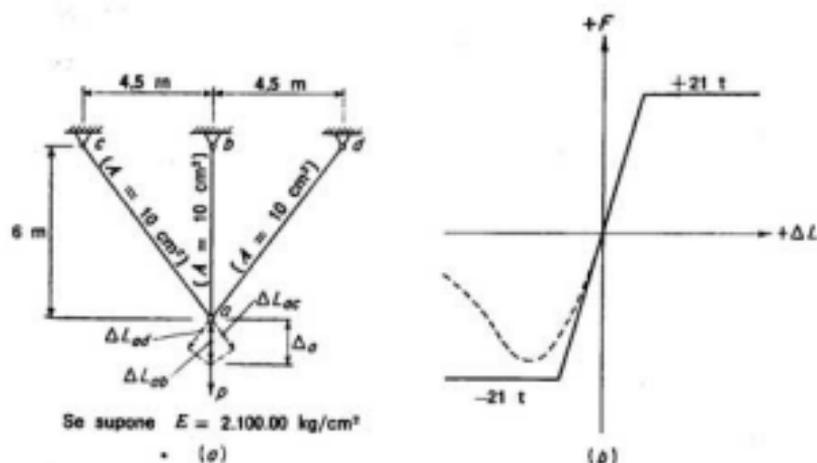


FIG. 16.4. Estructura de armadura simple.

tara solo de dos barras ac y ad , una carga vertical P de 33,7 t produciría tensiones de fluencia de 2.100 kg/cm² en cada barra, simultáneamente. Por consiguiente, los valores de P_y y P_x serían también idénticos, pero iguales a 33,7 t.

Considerando ahora la estructura indeterminada real de la Fig. 16.4, es fácil de estudiar su comportamiento durante el periodo elástico por cualquiera de los métodos típicos. En este caso sencillo, es fácil ver que, para una deformación de las tres barras,

$$\Delta L_{ac} = \Delta L_{ad} = 0,8\Delta L_{ab}$$

como se representa en líneas de trazos en la Fig. 16.4a. Por tanto,

$$F_{ac}(7,5)(10)E = (0,8)(F_{ab})(6)(10)E$$

o $F_{ac} = F_{ad} = 0,64F_{ab}$. Pero, para el equilibrio vertical del nudo a , $0,8F_{ac} + 0,8F_{ad} + F_{ab} = P$. Por tanto, $2,024F_{ab} = P$. Como la fluencia de la barra ab comienza cuando $F_{ab} = 21$ t, $P_y = 42,5$ t. Para esta carga, las barras ac y ad están todavía dentro del periodo elástico, pues

$$F_{ac} = F_{ad} = (0,64)(21) = 13,44$$

Como las barras ac y ad pueden resistir más carga de la estructura, aunque la ab esté cediendo bajo una fuerza constante de 21 t, se puede aumentar la carga P en otras 12,1 t, hasta un total de 54,6 t antes de que la fuerza en las barras ac y ad aumente en 7,56 t hasta 21 t. Como ahora están las tres barras en el límite de la fluencia, se producen deformaciones excesivas, por lo que P_x es igual a 54,6 t. Se observará que también se podía calcular este valor directamente, considerando que las deformaciones excesivas se producen cuando las tres barras alcanzan el valor de su límite de fluencia de 21 t. De aquí que, de $\Sigma V = 0$,

$$P_x = 21 + (2)(0,8)(21) = 54,6$$

Durante el periodo elástico el desplazamiento vertical, Δ_a , del nudo a es igual a la variación de longitud de la barra ab , o

$$\Delta_a = F_{ab}(6)/(10)E = P(6)/(2,024)(10)E$$

Si $E = 2.100 \text{ t/cm}^2$, $\Delta_a = P/7.084$. Así, en P_1 , $\Delta_a = 0,006 \text{ m}$. Indudablemente, durante el aumento de carga entre P_1 y P_2 solo resisten el exceso de carga ΔP las barras ac y ad y la estructura, como consecuencia, es aproximadamente doble de flexible. Así, $\Delta(\Delta_a) = (1,25)(\Delta F_{ac})(7,5)/(10)E$, o $\Delta(\Delta_a) = \Delta P/3.584$. Por tanto, para las 12,1 t últimas de carga, la deformación correspondiente es 12,1/3.584 ó 0,003375 m. Así, con P_2 la deformación total de a es (0,006 + 0,003375), o sea 0,009375 m.

El comportamiento de la estructura en esta zona se representa gráficamente por las partes iniciales de los gráficos de la Fig. 16.5. Se han dibujado las fuerzas de barra y las deformaciones del nudo a en función de P .

Supongamos que se descarga ahora gradualmente la estructura. Mientras se suprime la carga, la tensión y deformación disminuyen como indica la parte inicial de las líneas de trazos de la Fig. 16.3c. En otras palabras, la estructura se descarga de un modo linealmente elástico paralelamente a la zona de carga elástica inicial. Como consecuencia, como se ve gráficamente en la Fig. 16.5, después de suprimir totalmente la carga, hay una deformación residual del nudo a igual a 0,001668 m hacia abajo, y hay las fuerzas residuales siguientes: $F_{ac} = -5,98 \text{ t}$ y $F_{ad} = F_{ac} = +3,74 \text{ t}$.

Si ahora se volviera a cargar la estructura, se comportaría de un modo linealmente elástico. De hecho, volviendo a aplicar todas las 54,6 t, la estructura se comportará elásticamente y volverá a las mismas tensiones, alargamientos y deformaciones que había cuando actuaba P_2 de 54,6 t la primera vez. Además, se puede descargar y cargar la estructura un número indefinido de veces, sin mayor deformación plástica de la que se producía durante la carga inicial hasta 54,6 t.

El comportamiento de esta estructura sencilla aclara eficazmente el comportamiento plástico-elástico de las estructuras indeterminadas sometidas a un sistema de cargas, cuyos puntos de aplicación, distribución y direcciones no varían. Durante la aplicación inicial de esa carga se produce deformación plástica solo durante la fase en que la estructura moviliza su reserva de resistencia entre P_1 y P_2 . Como consecuencia de esta deformación permanente (que en el ejemplo es un alargamiento de 0,00337 m en la barra ab), la estructura se ha spretensado a sí misma de forma que esta carga se puede suprimir y volver a aplicar un número infinito de veces de un modo elástico sin nueva deformación plástica.

Obsérvese además el caso de esta estructura si se desconectasen las barras entre sí en el nudo a después del primer ciclo de carga y descarga. Se vería que las barras ac y ad seguirían teniendo 7,5 m, pero la ab sería 0,003375 m mayor de su longitud original de 6 m. Para volver a unir las barras en a se necesitaría que las ac y ad se sometieran a tracciones de 3,74 t y que la ab se comprimiera 0,001707 m con una fuerza de compresión de 5,98 t. Esto se corresponde, como es natural, con las tensiones residuales, que se ha indicado antes existen en la estructura descargada después de aplicar y suprimir la primera vez la carga de 54,6 t.

Consideremos ahora qué pasaría si se invirtiera la dirección de la carga y se aplicase a la estructura una fuerza hacia arriba. (Se recordará que se ha supuesto que las barras pueden soportar compresión sin pandear.) Durante las fases iniciales de esta carga dirigida hacia arriba, la estructura se comportaría elásticamente. Pero cuando se aumenta la carga hacia arriba suficientemente para que la fuerza en ab pase de su valor residual de -5,98 t a su límite de fluencia de compresión de -21 t, la estructura está a punto de sufrir una deformación plástica hacia arriba. Esta carga dirigida hacia arri-

ba será $P_f = (2,024)(-15,02) = -30,40$ t. Durante su aplicación, la fuerza en las barras ac y ad habrá cambiado desde $+3,74$ t hasta un valor de $[+3,74 + (0,64)(-15,02)]$ o $-5,87$ t. Mientras que la barra ab está ahora a punto de ser comprimida plásticamente, las ac y ad tienen todavía considerable capacidad de reserva antes de que lo sean ellas también. Antes de que estas barras alcancen su fuerza de fluencia por compresión de

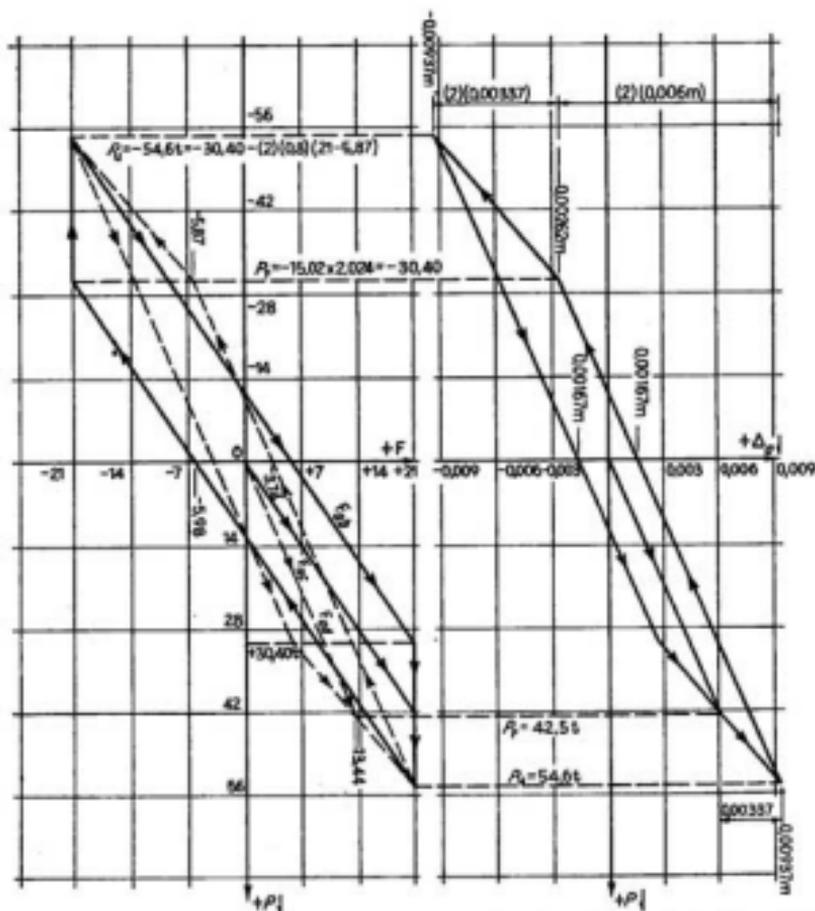


FIG. 16.5. Comportamiento de la estructura de armadura de tres barras de la Figura 16.4.

21 t, se puede aplicar un exceso de carga de $(2)(0,8)(21 - 5,87)$ o 24,21 t. Así, la fuerza hacia arriba será $P_u = -30,40 - 24,21 = -54,6$ t. Esta es, como es natural, igual a la fuerza dirigida hacia abajo P_w , por lo que se puede calcular simplemente partiendo de la estática y de la capacidad de fluencia de las tres barras.

Obsérvese que, durante la aplicación de las últimas 24,21 t de la carga hacia arriba, se comprime la barra ab plásticamente $(2)(0,003375) = 0,00675$ m. Si se desconectara dc , las demás barras del nudo a , sería $0,00337$ m más corta de su longitud original de 6 m.

Si se suprime la carga dirigida hacia arriba de 54,6 t, la estructura descargada tendrá fuerzas de barra residuales y deformaciones iguales numéricamente, pero de signo opuesto a las que quedaban después de suprimir la carga de 54,6 t dirigida hacia abajo.

Si ahora se volviera a cargar la estructura con una carga dirigida hacia abajo, las fuerzas de barra y las deformaciones variarían en forma elásticamente lineal para las primeras 30,40 t de carga. La barra *ab* tendría entonces una fuerza de +21 t y alargaría plásticamente durante la aplicación de las 24,21 t de carga adicionales que se necesitan para traer las barras *ac* y *ad* a su valor de fluencia por tracción de +21 t. Así, se puede aplicar una carga reversible de 54,6 t primero hacia abajo y luego hacia arriba sin producir deformación excesiva. En cada ciclo de carga hacia abajo y hacia arriba, la barra *ab* está sometida al caso de fatiga plástica consistente en alargarse, primero, plásticamente 0,00675 m y luego comprimirse plásticamente la misma cantidad. Una barra de acero no podría resistir muchos ciclos.

Para evitar las deformaciones plásticas alternadas con cada ciclo de cargas, la suma absoluta de las cargas hacia arriba y hacia abajo no puede exceder de $2P_f$ o $(2)(42,5) = 85$ t. Si se aplican 42,5 t hacia abajo, se podrían aplicar hacia arriba 42,5 t; si se aplicasen hacia abajo 54,6 t, solo se podrían aplicar hacia arriba 30,4 t; si se aplicaran 45 t hacia abajo, solo podrían aplicarse 40 t hacia arriba, etc. Este comportamiento es típico del efecto de las cargas reversibles en los casos en que interviene la deformación plástica.

Consideremos ahora el comportamiento de la estructura en el caso primitivo sin tensiones, pero sometida a unas cargas totalmente diferentes, por ejemplo una carga horizontal *H* a la derecha del nudo *a*. En condiciones linealmente elásticas, tal carga produciría las siguientes fuerzas de barra: $F_{ab} = 0$, $F_{ac} = -F_{ad} = 5H/6$. En este caso, $H_f = 1,2F_{ac} = 25,2$ t. Como *ac* y *ad* están las dos en el límite de fluencia, una en tracción y otra en compresión, no hay disponible ninguna reserva de soportar carga. Por tanto, $H_s = H_f = 25,2$ t. Esto confirma la propiedad de depender la reserva de resistencia sobre la carga de fluencia de las propiedades de la estructura y de la naturaleza de la carga.

Este sencillo problema ha servido para aclarar todas las características más importantes del comportamiento plástico, excepto el efecto de las cargas alternativas. Tales cargas pueden producir una acumulación de deformación plástica primero en un punto y luego en otro de la estructura. Con cada ciclo de carga, la estructura deforma cada vez más separándose de su forma original. Tal comportamiento se trata en la Sección 16.6.

16.4 Relaciones momento-curvatura en barras de flexión. Es conveniente empezar el estudio del comportamiento plástico de las barras sometidas a flexión considerando el caso de la flexión pura de una viga simple de sección rectangular, sometida a pares iguales en los extremos. Tal caso no incluye ni cortante ni fuerza axial ni cargas transversales. Por ello, las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de ella, y es fácil formular, tanto para el período elástico como para el elástico-plástico, relaciones entre σ_1 (tensión en la fibra extrema) y M (momento flector) y entre ϕ (curvatura) y M . Se observará que la curvatura ϕ es igual a $d\theta/ds$, variación de pendiente de las secciones de la viga por unidad de longitud. En otras palabras, la curvatura ϕ es igual al giro relativo de dos secciones contiguas separadas la distancia unidad.

En la Fig. 16.6 se representan varias fases de la flexión de un elemento diferencial de esta viga, comenzando por un extremo de la zona elástica donde σ_1 acaba de alcanzar el valor σ_f , y terminando por la sección totalmente en período plástico en que las fibras próximas al centro de la misma han alcanzado la deformación de fluencia ϵ_f . Se supone que el material sigue la curva ideal tensión-deformación de la Fig. 16.2. La anchura de la sección rectangular es *b* y la altura *d*.

En el periodo elástico, el momento flector M es igual a $\sigma_1 S$, donde S es el módulo de la sección, y la curvatura ϕ es igual a M/EI . En el extremo del periodo elástico, la tensión σ_1 en la fibra extrema alcanza el valor σ_f del límite de fluencia. Por tanto,

$$M_f = \sigma_f S \quad (16.1)$$

$$\phi_f = \frac{M_f}{EI} \quad (16.2)$$

Una viga es la reunión de un número infinito de elementos o fibras, y la distribución de las tensiones internas entre estos elementos debe dar lugar a una deformación com-

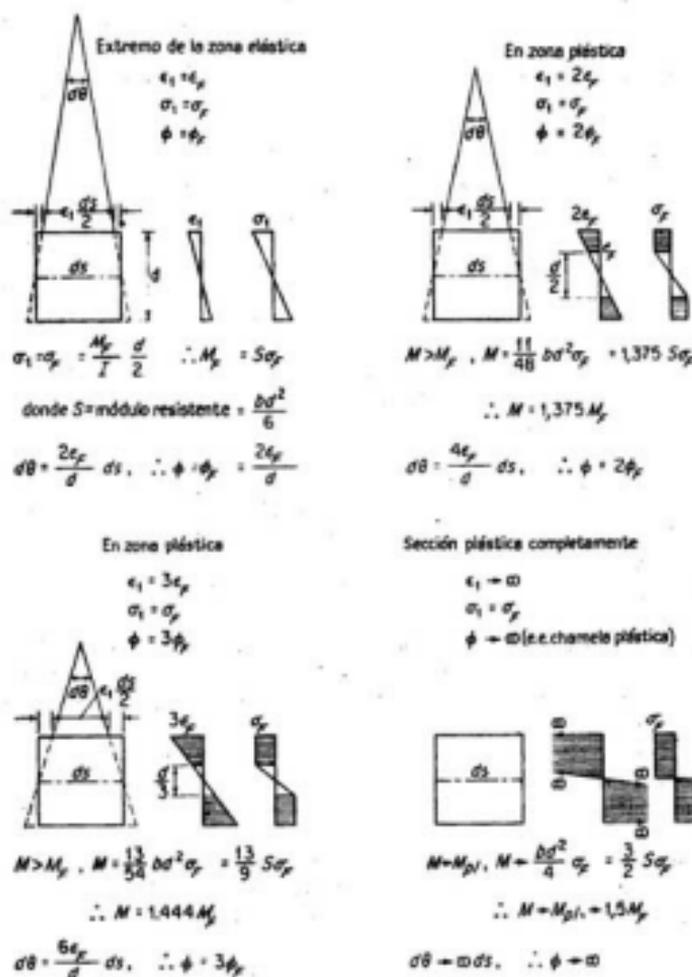


FIG. 16.6. Relaciones momento-curvatura para momento flector puro, de vigas de sección rectangular.

patible de los mismos, así como satisfacer las exigencias del equilibrio. En otras palabras, una viga es una estructura estáticamente indeterminada de grado infinito. Como en el caso de la armadura indeterminada simple estudiada en la Sec. 16.3, el hecho de estar las fibras exteriores de la viga en el límite de fluencia no significa que se produzcan inmediatamente deformaciones excesivas, porque todo el núcleo de la viga es todavía elástico y capaz de resistir más momento flector.

Se puede estudiar el comportamiento postelástico de una viga considerando varias fases de deformación, como se ve en la Fig. 16.6 para una viga de sección rectangular. En estas consideraciones, se supone que la sección continúa siendo plana, y, por tanto, que las deformaciones debidas a la flexión varían linealmente a través de la viga. Como se supone que el material sigue la curva tensión-deformación ideal, la tensión en una fibra cualquiera que se deforma más que ϵ_p , es constante e igual a σ_p . Así, en cualquier fase postelástica, hay un núcleo elástico interior en el que las deformaciones por flexión son iguales a, o menores que, ϵ_p , y sobre el cual las tensiones normales σ varían de modo lineal. Este núcleo está rodeado por encima y por debajo por capas plásticas en las que las deformaciones por flexión son iguales a, o mayores de, ϵ_p , y en las cuales las tensiones normales son constantes e iguales a σ_p . En cualquier periodo, es fácil calcular los momentos resistentes producidos por las tensiones de flexión, y, por tanto, definir los momentos flectores equivalentes. Se observará que la curvatura en un periodo cualquiera está definida por la profundidad del núcleo elástico de la viga.

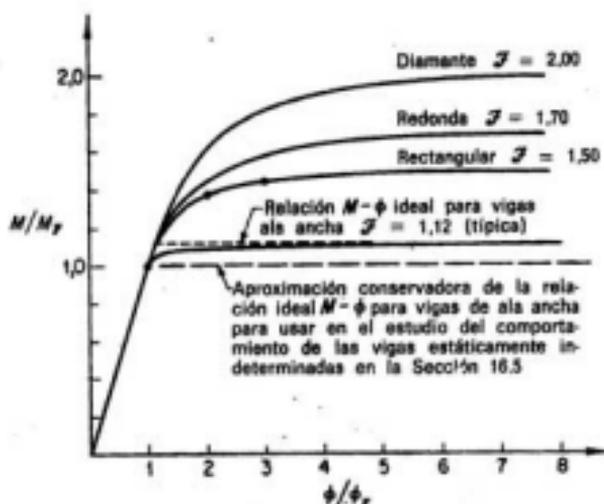


FIG. 16.7. Relaciones momento-curvatura sin dimensión, para secciones típicas de vigas.

Considerando diversos periodos de plastificación y calculando el momento flector y la curvatura asociada con ellos, es posible obtener los datos para dibujar la relación sin dimensiones momento-curvatura representada en la Fig. 16.7. En el límite, el núcleo elástico se contrae a una profundidad diferencial, la mitad superior de la viga se plastifica en compresión y la inferior en tracción. Es lo que se llama *periodo completamente plastificado* y representa la resistencia de rotura a flexión (M_{μ}) que pueda suministrar la sección.

$$M_{\mu} = \sigma_p Z \quad (16.3)$$

donde Z es el llamado *módulo plástico* de la sección. Para la sección rectangular, $Z = bd^2/4$. Se observará que

$$\frac{M_p}{M_f} = \frac{Z}{S} = \mathfrak{F} \quad (16.4)$$

donde \mathfrak{F} es el llamado *factor de forma* de la sección. Para la sección rectangular, $\mathfrak{F} = 1,5$.

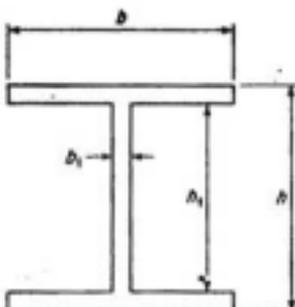


FIG. 16.8. Sección de viga de ala ancha ideal.

Las vigas con secciones de otros tipos se pueden estudiar de la misma manera descrita para las de sección rectangular. Así se obtendrían resultados como los representados en la Fig. 16.7. Entre ellos, el más importante es el de la sección ideal de vigas de ala ancha de la Fig. 16.8. Para esta sección se obtendrían los valores siguientes del módulo resistente S y el módulo de plasticidad Z :

$$S = \left[\frac{b_1 h_1^3}{6h} + \frac{b(h^3 - h_1^3)(h + h_1)}{8h} \right] \quad (16.5)$$

$$Z = \left[\frac{b_1 h_1^3}{4} + \frac{b(h^3 - h_1^3)}{4} \right] \quad (16.6)$$

Si se aplican estas fórmulas a las vigas de ala ancha típicas, se hallará que el factor de forma \mathfrak{F} varía entre 1,10 y 1,18 y para la mayoría de los tamaños en uso es alrededor de 1,12. Se observará que, en el límite, si estuviera concentrada la mitad de la superficie de la viga en una línea en el borde superior y la otra mitad en el inferior, con un alma infinitamente delgada en medio, el factor de forma \mathfrak{F} de esa viga I sería 1,0.

La relación momento-curvatura de la viga de alma llena es tan plana en la parte entre M_f y M_p , que muchas veces se usa la versión ideal representada en línea de trazos en la Fig. 16.7. A veces se utiliza la versión más conservadora representada por la línea de trazo largo, como se hace en el estudio de las vigas estáticamente indeterminadas de la Sec. 16.5. Cuando se usa una de estas versiones idealizadas, se admite que cuando el momento alcanza el nivel definido por las líneas horizontales, puede producirse una flexión o curvatura indefinidas sin aumento del momento resistente. En otras palabras, la viga actúa desde entonces como si se hubiera instalado una charnela de fricción que permitiera la flexión, resistiéndola a momento constante. En los comentarios siguientes, a este concepto se le llamará «—» se forma una *articulación o charnela plástica* con un momento resistente de «—» m kgo.

Las consideraciones anteriores están basadas en el supuesto de flexión pura. Se

podría extender este estudio de las relaciones momento-curvatura, considerando el efecto de utilizar la curva tensión-deformación real, incluyendo el efecto de la acritud, el de las tensiones residuales, el del cortante y fuerza axial combinados con el momento flector, etc. Se envía al lector a libros como los indicados en la Sec. 16.1 para un estudio más detallado. La introducción de tales detalles de cálculo no alteraría de modo importante el estudio siguiente del comportamiento plástico de las vigas, por lo que no se ha incluido.

16.5 Comportamiento plástico de las vigas típicas. El estudio siguiente del comportamiento plástico de las vigas sigue un camino paralelo al efectuado en la Sec. 16.3, referente a las armaduras, y va precedido por la consideración de una viga sustentada en forma estáticamente determinada.

Viga simplemente apoyada. Consideremos la viga simplemente apoyada sometida a una sola carga aislada P en el centro de la luz, representada en la Fig. 16.9. Se consideran una viga de sección rectangular y una I de ala ancha, perfil I B, o H. Las dos se comportan de un modo elástico hasta la carga P_p , que produce un momento M_p en el centro.

Consideremos primero que se aplican las relaciones $M - \phi$ verdaderas representadas en línea llena en la Fig. 16.7. Aunque las vigas comienzan a sufrir deformación plástica con la carga de fluencia, aceptarán más carga antes de que se produzcan deformaciones excesivas. La viga de sección rectangular puede cargarse hasta una P_p de $1,5P_p$ antes de que la sección del centro de la luz esté totalmente plastificada. Con esta carga de rotura, la zona plastificada (representada en negro) se habrá extendido un sexto de la luz a cada lado de la carga en los bordes superior e inferior de la viga. En el caso de la viga I de ala ancha, $\mathfrak{F} = 1,12$, la zona plastificada está mucho más localizada y se extenderá solo $0,0536L$ a cada lado de la carga de rotura de $1,12P_p$.

Se observará también lo plana que es la curva carga-deformación de la viga de ala ancha para las cargas mayores que P_p . Si se usara la versión conservadora de la relación $M - \phi$ ideal de la Fig. 16.7, se podría decir que se forma una articulación plástica cuando la carga alcanza P_p e inmediatamente se producen deformaciones excesivas.

Viga empotrada. En el estudio siguiente del comportamiento de una viga de ala ancha empotrada en los dos extremos, se adopta la curva $M - \phi$ ideal conservadora de la Fig. 16.7. Como ejemplo, se supondrá que para esta sección de ala ancha,

$$M_p = M_{pl} = 16 \text{ m t}$$

En la Fig. 16.10 está representada esta viga sometida a una carga uniformemente repartida de w t por m. Se observará que se proyecta el empotramiento de modo que no se puedan producir ni siquiera reacciones horizontales secundarias.

Durante la aplicación inicial de la carga dirigida hacia abajo, la viga se comporta de un modo elástico lineal, produciéndose momentos extremos de $wL^2/12$ y un momento en el centro de $wL^2/24$. Una carga de 12 t por m producirá momentos extremos de -16 m t, que es la capacidad plástica de momento de la viga. Por tanto, $w_p = 12$ t por m. En los puntos A y C están a punto de formarse charnelas plásticas si se aplica un exceso de carga hacia abajo, pero la barra es capaz de soportar un nuevo incremento Δw como si fuera una viga simplemente apoyada. Se puede aumentar la carga Δw hasta un valor tal que los momentos de la viga apoyada producidos por ella aumenten al momento en B en 8 m t, haciendo que se eleve a $+16$ m t. Ahora está a punto de formarse una charnela plástica en B , y la viga se hundirá como un mecanismo de dos barras si se añade alguna otra carga. Por tanto, $\Delta w = (8)(8)/16 = 4$ t/m, y $w_u = 12 + 4 = 16$ t/m.

Las deformaciones de la viga empotrada bajo las 12 t por m primeras y las de la

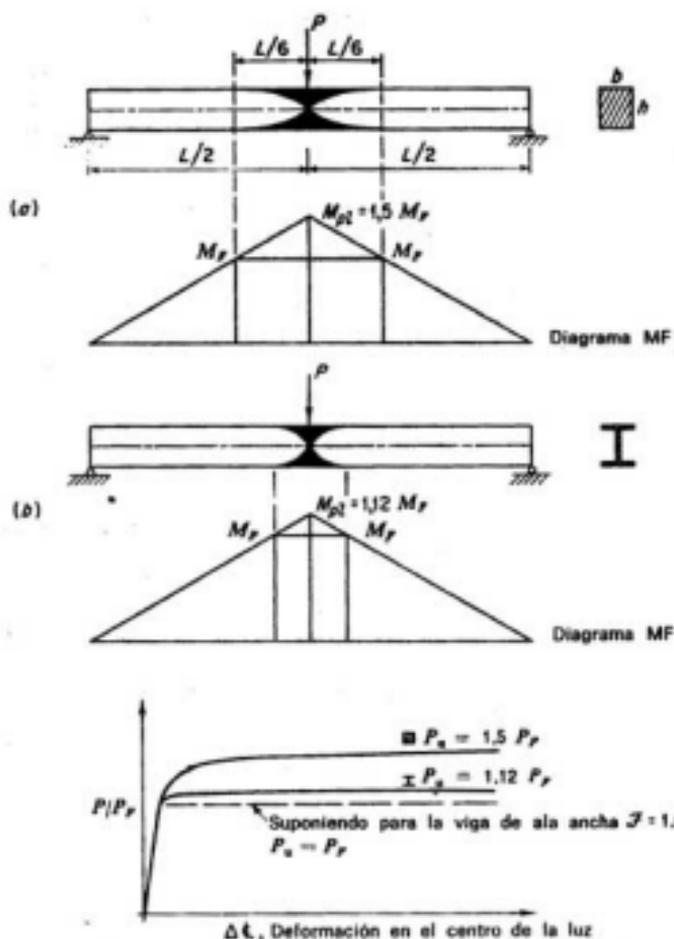


FIG. 16.9. Comportamiento plástico de una viga simplemente apoyada.

viga apoyada bajo las 4 t/m últimas están representadas en la Fig. 16.10c. También figura el giro plástico que se produce en las charnelas plásticas *A* y *C* bajo estas últimas 4 t/m de carga, actuando la viga como simplemente apoyada.

Si se quitara ahora la carga, la viga actuaría del modo elástico lineal de una viga empotrada. La variación de los momentos de flexión durante la supresión de la carga será idéntica a los momentos flectores de la viga empotrada producidos por una carga dirigida hacia arriba de +16 t/m, o sea

$$\frac{+(16)(16)}{12} = +21,3 \text{ m t}$$

en *A* y *C* y $-(16)(16)/24 = -10,7 \text{ m t}$ en *B*. Cuando se superponen estos valores a la curva de trazos de la Fig. 16.10b, se obtienen los momentos residuales de +5,3 m t re-

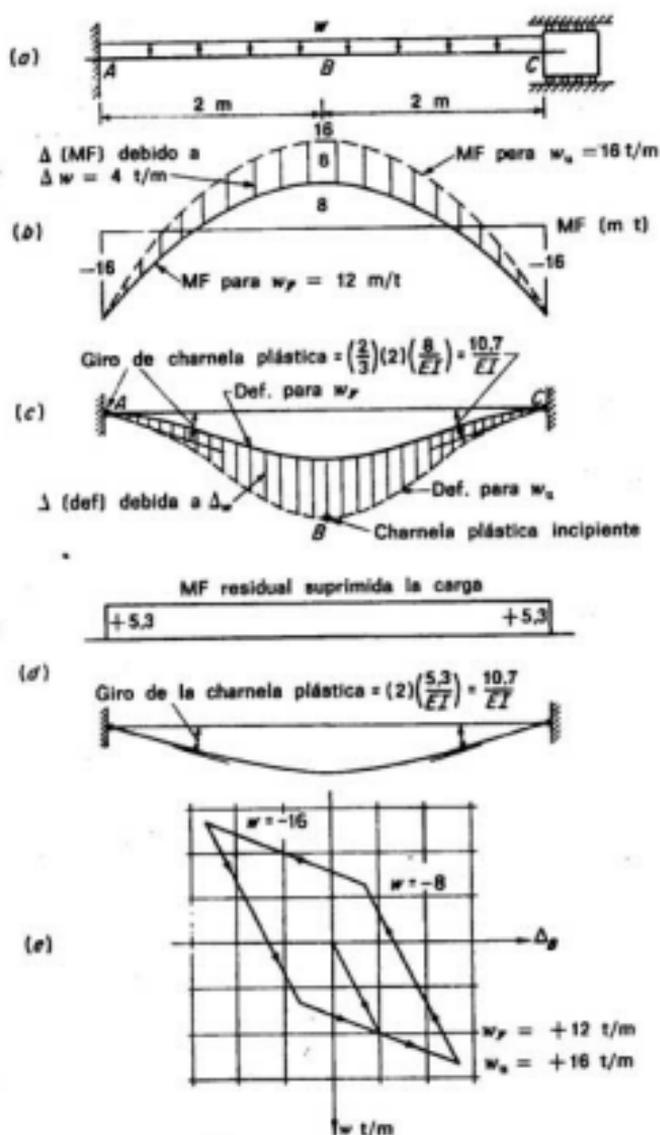


FIG. 16.10. Comportamiento de la viga empotrada en sus extremos.

presentados en la Fig. 16.10d. Estos momentos residuales y las deformaciones residuales permanecen fijos en la viga como consecuencia del giro plástico permanente que se produjo en las charnelas plásticas en A y C.

Se observará que esta viga está ahora «pretensada» de forma que se puede aplicar y suprimir w_u de 16 t por m un número de veces indefinido sin que se produzcan deformaciones plásticas mayores.

Sin embargo, si se aplicase ahora una carga dirigida hacia arriba, a la estructura

descargada, solo se podrían aplicar elásticamente 8 t por m, pues esta carga elevaría el momento en *A* y *C* hasta un valor de +16 m t. Se podría aplicar una carga adicional dirigida hacia arriba de 8 t por m, actuando chumelas plásticas en *A* y *C*, antes de que fuera inminente el hundimiento, como si fuera un mecanismo de dos barras, debido a la formación de una tercera articulación plástica en el punto *B*. Durante la aplicación

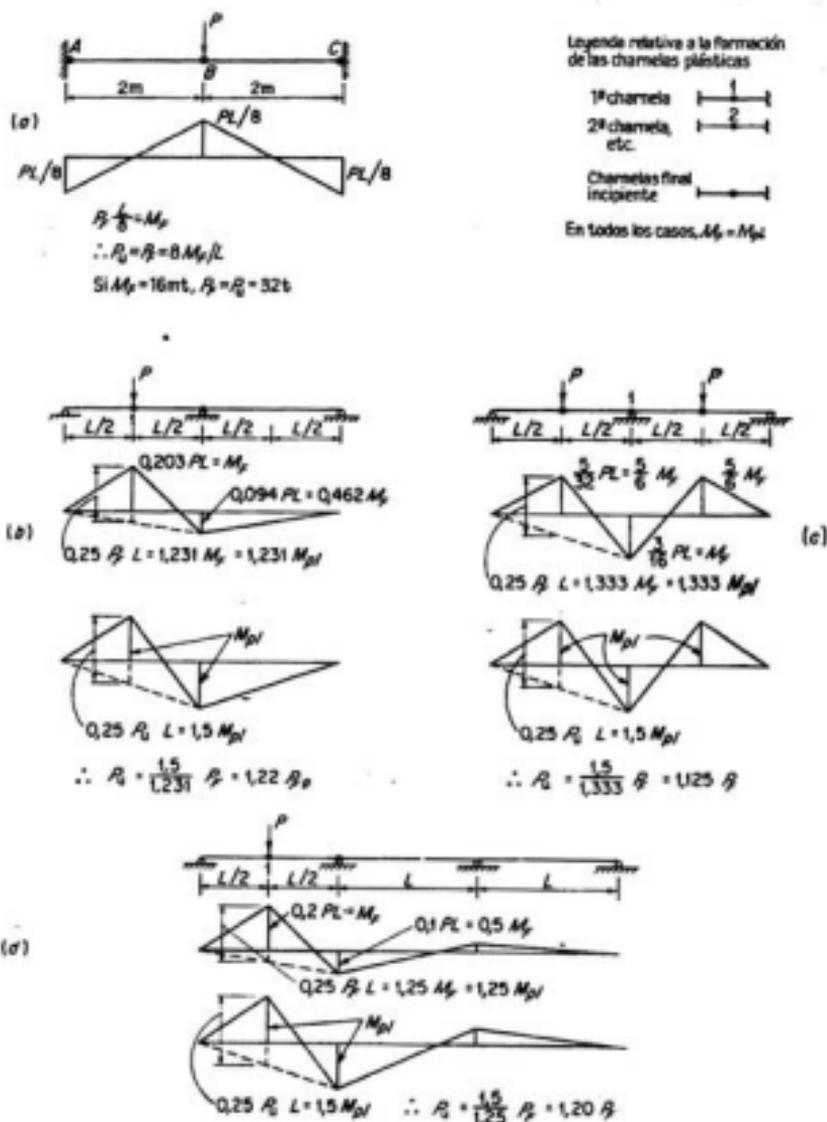


FIG. 16.11. Cargas de fluencia y de rotura para vigas continuas típicas.

de estas 8 t por m últimas se produciría un giro plástico de $21,3/EI$ (en sentido hacia arriba) en las charnelas plásticas A y C . Cuando se suprime esta carga total hacia arriba de 16 t por m quedarán en la viga momentos residuales y deformaciones iguales numéricamente y de signo opuesto a los representados en la Fig. 16.10d. Esta deformación plástica alternativa que se produciría en A y C sería igual al fenómeno utilizado para romper un cable o un clavo.

Como en el caso del ejemplo de la armadura de la Sec. 16.3, el único medio para evitar la deformación plástica alternativa es conservar la suma de los valores absolutos de las cargas dirigidas hacia arriba y hacia abajo, inferior al doble de w_p . La Fig. 16.10e muestra el comportamiento de esta viga en la misma forma utilizada en la Figura 16.5.

Comparación de las cargas de fluencia y de rotura de varias vigas típicas. Para una carga uniforme dirigida hacia abajo, la viga empotrada que acabamos de considerar presenta una capacidad de reserva de carga de $\frac{1}{12}$ o $33\frac{1}{3}$ por 100, entre la carga w_p para la que comienza la deformación plástica y la w_u para la que se producen deformaciones excesivas. Para una carga no alternativa e inmóvil, aplicada a una estructura indeterminada cualquiera, la magnitud de su capacidad de reserva de carga depende de la distribución de las características resistentes de la estructura y de la distribución de la carga en la misma. Como consecuencia, una estructura determinada puede presentar una capacidad de reserva considerable bajo un tipo de carga, y muy pequeña o ninguna bajo otro.

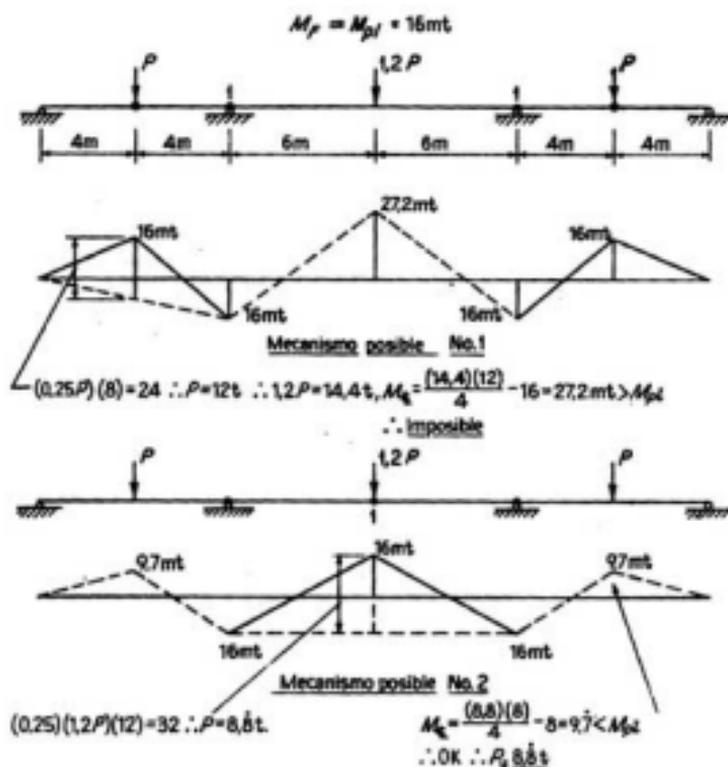


FIG. 16.12. Comparación de posibles mecanismos.

Como ejemplo de este principio, consideremos la misma viga empotrada utilizada anteriormente, pero cargada con una sola carga aislada P en el centro, como se ve en la Fig. 16.11. Para esta carga, en el período plástico, los momentos en el centro y en los dos extremos son $PL/8$. Por tanto, M_p (y en este caso M_{pl}) se produce simultáneamente en los dos extremos y en el centro bajo una carga de $(16)(8)/4$, o sea 32 t. Por consiguiente, P_f y P_r son iguales a 32 t y no hay ninguna capacidad de reserva con este tipo de carga.

En las Figs. 16.11b, c y d aparecen las cargas de fluencia y de rotura de varias vigas continuas y cargas típicas para definir la capacidad de reserva que se produce durante la plastificación de la estructura. Obsérvese que es posible calcular la carga de rotura sin hallar antes de la fluencia, como se ve en la Fig. 16.12. Para calcular la carga de fluencia, es necesario hacer un análisis elástico indeterminado de la estructura. Para hallar la carga de rotura, solo es necesario llevar a cabo un análisis plástico de la misma.

Para un estudio más completo de los diversos métodos de análisis plástico se envía al lector a «Plastic Design of Steel Frames», por L. S. Beedle. Aquí se hará notar simplemente que existen dos métodos principales: el método de los mecanismos y el estático. El método de los mecanismos, que se representa en la Fig. 16.12, consta de los pasos siguientes:

1. Se identifica la situación de las posibles charnelas plásticas (apoyos, nudos, puntos con carga aislada, y puntos de cortante nulo en las partes sometidas a cargas repartidas).

2. Se consideran varias combinaciones de estas charnelas para formar posibles mecanismos de rotura¹.

3. Se calculan las cargas asociadas con cada uno de estos posibles mecanismos. El mecanismo de fallo correcto será el asociado con la carga más baja. Esta será la carga de rotura, siempre que el momento en una sección cualquiera no exceda de M_{pl} en esa sección.

16.6 Comportamiento plástico de las vigas continuas bajo cargas alternativas. Vamos a estudiar otro aspecto del comportamiento plástico utilizando el dibujo de una viga continua de dos tramos de la Fig. 16.13. Supondremos que para esta viga de una anchura $M_f = M_{pl} = 16$ m t. En la Fig. 16.13 se han representado los valores de fluencia y de rotura para dos hipótesis de carga: 1) una carga aislada aplicada en el centro de un tramo y 2) cargas aisladas iguales aplicadas simultáneamente en el centro de los dos tramos. Las cargas de rotura se han calculado suponiendo que cada una de las cargas es no reversible e inmóvil.

Durante la aplicación del valor de rotura de la carga aislada se produce un giro plástico en una charnela plástica que se forma en la viga en el punto de aplicación de la carga d . Durante la aplicación de los valores de rotura de las dos cargas aisladas se produce giro plástico en una charnela situada sobre el apoyo central. En el caso de una sola carga, al aplicar un valor entre las fases de fluencia y de rotura se produce un giro en la charnela plástica de d y las últimas 4,31 t de carga las soporta la parte $abcd$ que está apoyada en a y c y en voladizo desde c a d . Los momentos flectores varían en la parte sombreada entre las líneas llena y de trazos. Del mismo modo, en el caso de las dos cargas iguales, las últimas 2,67 t de cada carga las soportan ac y ce como vigas apoyadas, mientras se produce el giro en la charnela plástica situada en el punto c . Naturalmente, en cada uno de estos casos, si solo intervinieran esas cargas, se podrían su-

¹ Obsérvese que se puede asociar la carga de rotura con un mecanismo que puede comprender, o no, a toda la estructura. Por ejemplo, en la Fig. 16.11d, solo está a punto de hundirse el tramo de la izquierda; los otros dos tramos están en la zona elástica.

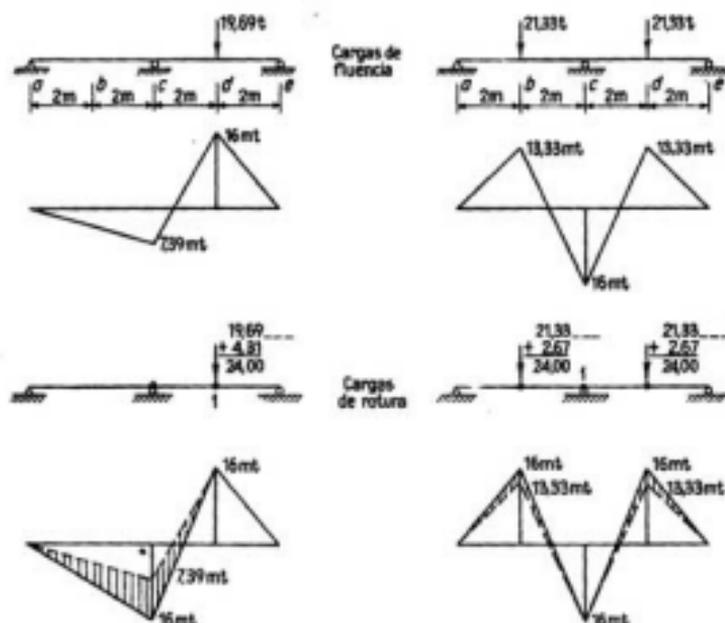


Fig. 16.13. Viga de ala ancha continua de dos tramos.

primir y volver a aplicar un número indefinido de veces sin que se produjera más deformación plástica sobre la que tenía lugar en la primera aplicación del valor de rotura de la carga.

Consideremos ahora el comportamiento de la viga si se somete a cargas alternativas de los valores de rotura, en cada una de las hipótesis de cargas. Primero se aplica la carga simple de 24 t en *d* y luego se suprime; luego se aplican las dos de 24 t, una en *b* y la otra en *d*, y se suprimen; luego se vuelve a aplicar la simple en *d* y a suprimir a continuación; etc.

En la Fig. 16.14 se reseñan estos hechos sucesivos. Como se ha dicho antes, las últimas 4,31 t de las 24 t en *d* producen el giro plástico α_1 en la charnela *d*. Cuando se suprimen estas 24 t, la viga se comporta elásticamente y produce variaciones en los momentos flectores, como se representa en línea de trazo y punto del diagrama (*d*). Estas variaciones de momento son iguales a $-24/19,69$ veces las representadas en la Fig. 16.13 para la aplicación elástica de la carga de 19,69 t en *d*. La superposición del diagrama de trazo y punto y del de línea llena de (*d*) da los momentos residuales representados en (*e*). Obsérvese que, si se suprimiera el apoyo en *c*, la barra se doblaría, como se ve en (*f*), a causa del giro plástico α_1 en *d*. Se hallaría que la fuerza dirigida hacia arriba que se necesitaría para empujar *c* hasta su posición apropiada es igual a 3,49 t, por lo que producirían los momentos residuales anotados en (*e*).

Supongamos que se aplican ahora las dos cargas iguales en *b* y *d* a la viga con esos momentos residuales, representados en línea llena en (*h*). Durante las primeras 12,01 t de esas cargas, la barra se comportará elásticamente y la variación de los momentos producida en consecuencia será 12,01/21,33 veces la representada en la Fig. 16.13 para las cargas de 21,33 t. Estas variaciones de los momentos llevarán el momento en *c* a un valor de -16 , y cuando se les superponga a los momentos residuales darán la curva

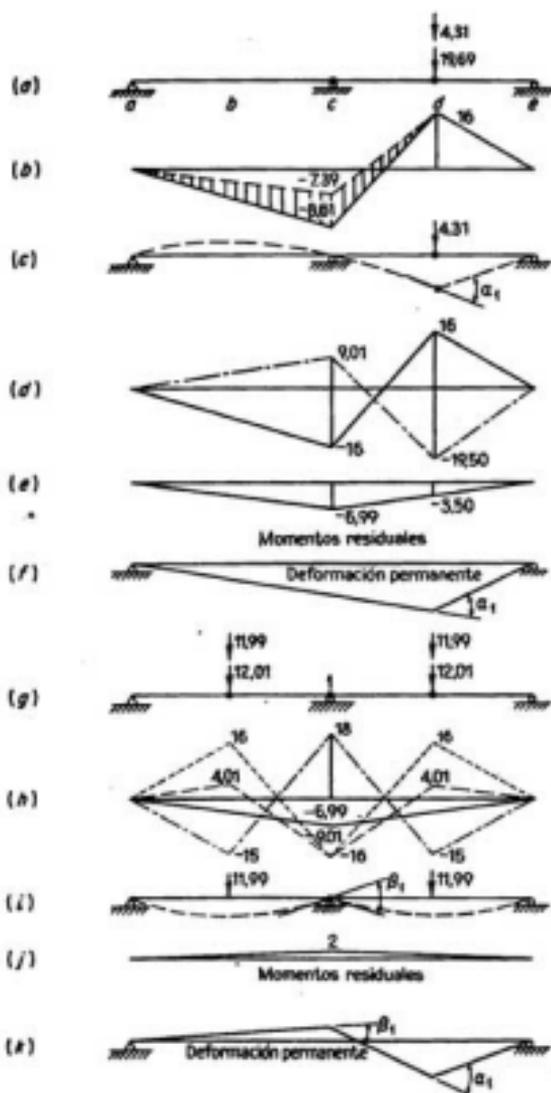


FIG. 16.14. Cargas alternadas en la viga de dos tramos de la Figura 16.13.

de tramos de (h). Se pueden aplicar en b y d otras 11,99 t, comportándose la estructura como las dos vigas apoyadas representadas en (i), y produciéndose un giro plástico β_1 en la charnela c . Cuando se suprimen, ahora, las dos cargas de 24 t, la barra se comporta elásticamente y la variación de los momentos producida durante la supresión es igual a $-24/21,33$ veces los representados en la Fig. 16.13 y está indicada en la línea de trazo y raya en (h). En (j) se representan los momentos residuales que quedan en la viga después de suprimir las dos cargas de 24 t. Se observará que, si se suprimiese

de nuevo el apoyo en c , se doblaría la barra, como se indica en (k), a causa de las deformaciones plásticas α_1 , en d , y β_1 , en c .

Si se aplicase otra vez en d la carga aislada de 24 t, la barra se comportaría elásticamente para las 18,46 t primeras, llevando el momento en d hasta 16 m t. Durante las últimas 5,54 t de la carga, se soportaría ésta de la misma forma representada en (c), pero el giro plástico en d sería α_2 , igual a 5,54/4,31 veces α_1 . La supresión de esta carga de 24 t produciría los mismos momentos residuales que se ve en (e), pero la deformación permanente tendría dos quiebras: β_1 en c y $(\alpha_1 + \alpha_2)$ en d .

Si se aplicaran las dos cargas de 24 t en b y d y luego se suprimieran, se produciría en c un giro plástico adicional de valor β_1 . Si se aplicase nuevamente la carga aislada de 24 t en d y se suprimiera, se produciría un nuevo giro plástico en d de valor α_2 . Si se sigue aplicando alternativamente las dos cargas de 24 t en b y d y la simple de 24 t en d , con cada ciclo se produciría un giro plástico adicional de β_1 en c y α_2 en d . Como consecuencia, con cada ciclo se dobla la barra cada vez más en c y d , y pronto está tan deformada que no es utilizable.

Los cálculos muestran que las deformaciones plásticas no se acumulan si se alternan una carga de no más de 20,14 t en d con dos de 20,14 t, una en b y otra en d . Durante las 19,69 t primeras de la carga simple en d , la barra se comporta elásticamente. Durante las 0,45 t siguientes se produce deformación plástica en la articulación plástica formada en d . Como consecuencia, cuando se suprime la carga de 20,14 t, quedan en la viga momentos residuales que varían triangularmente con un valor máximo de 0,90 m t en c . Cuando se aplican, ahora, las dos cargas de 20,14 t en b y d , la barra se comporta elásticamente, llevando el momento en c hasta 16 m t, pero sin producir deformación plástica en este punto. Por tanto, se pueden alternar esas cargas sucesivamente un número indefinido de veces sin producir más deformación plástica. En otras palabras, la primera aplicación de la carga de 20,14 t «pretensa» la viga, de modo que se pueden producir aplicaciones alternadas de esa carga con las dos de 20,14 t elásticamente, sin más deformación plástica. Se observará que esta carga es muy poco mayor que el valor de fluencia de una sola carga en d .

16.7 Fijación de tensiones de estructuras indeterminadas. Puede parecer inoportuno el estudiar la fijación de tensiones y la acción normal e híbrida de las estructuras estáticamente indeterminadas en este capítulo sobre el comportamiento plástico. Sin embargo, se verá que todos estos temas están muy relacionados entre sí.

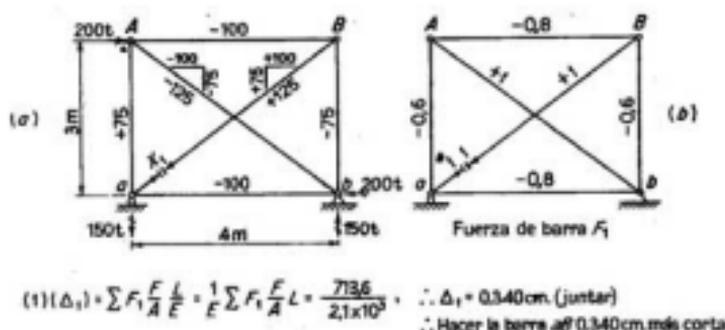
Se observará primero que se puede proyectar una estructura estáticamente determinada para que opere con una tensión dada cualquiera, pues la estructura es capaz de variar su forma en consecuencia. Por ejemplo, se pueden proyectar las barras de una armadura estáticamente determinada para funcionar a un nivel de tensiones deseado, pues la armadura es capaz de ajustar su configuración en la forma necesaria. *No obstante, en general, el nivel de tensiones (y, por tanto, el de deformaciones) no se puede dar arbitrariamente para las diversas partes de una estructura estáticamente indeterminada, pues estas diversas partes han de actuar juntas en forma compatible para que se satisfagan simultáneamente las exigencias del equilibrio y la deformación.*

Sin embargo, es posible controlar el montaje de una estructura indeterminada de tal modo que tenga lugar un *modelo dado de tensiones (y deformaciones) para una condición estática de carga determinada*. Por ejemplo, la viga continua de dos tramos de la Fig. 16.14 (supuesta sin peso en este caso) se puede montar como sigue: 1) se une la viga a los apoyos a y e , los cuales son capaces de proporcionar una reacción tanto dirigida hacia arriba como hacia abajo; 2) luego se coloca un gato bajo la viga en c y se aplica a ésta una fuerza dirigida hacia arriba de 3,5 t; 3) se calza el apoyo c hasta la posición de la viga sostenida por el gato; y 4) si se quitara entonces el gato, las reaccio-

nes en la viga serían de 3,5 t hacia arriba en c y 1,75 t hacia abajo en a y e , y los momentos iniciales serían los representados en la Fig. 16.14e. La viga ha sido pretensada de forma que se puedan aplicar 24 t hacia abajo en d , comportándose la estructura totalmente elásticamente y no habrá ninguna deformación plástica. Este proceso se llama *fijación de tensiones* de una estructura estáticamente indeterminada.

La estructura de celosía de la Fig. 16.4 proporciona otro ejemplo de fijación de tensiones. Con referencia a los comentarios de la Sec. 16.3, supongamos que se fabricasen las barras ac y ad de esa estructura con longitud exacta de 7,5 m, pero la ab se hiciera deliberadamente 0,337 cm demasiado larga. Durante el montaje se forzaría a la barra para llevarla a su sitio, creando así una fuerza de compresión de 5,98 t en ab y fuerzas de tracción de 3,74 t en ac y ad . Ahora se ha pretensado esta estructura de modo que una carga vertical de 54,6 t en a llevará la fuerza en las tres barras hasta su capacidad de tracción de fluencia de 21 t, simultáneamente.

Un tercer ejemplo de fijación de tensiones está dado por la estructura de celosía simple de la Fig. 16.15. Supongamos que se desea que las barras de compresión trabajen con 980 kg/cm^2 y las de tracción con 1.250 kg/cm^2 , y que se desea dividir la carga horizontal por igual entre las dos diagonales. Para satisfacer el equilibrio estático, esta



Barra	L (cm)	F/A (t/cm ²)	F_i	$F_i \frac{F_i L}{A}$
AB	400	-0,98	-0,8	+ 313,6
ab	400	-0,98	-0,8	+ 313,6
Aa	300	+1,25	-0,6	- 225
Bb	300	-0,98	-0,6	+ 176,4
Aa	500	-0,98	+1,0	- 490
aB	500	+1,25	+1,0	+ 625

$$\Sigma = + 713,6$$

Fig. 16.15. Ejemplo de fijación de tensiones.

elección lleva como consecuencia las fuerzas de barra representadas en la Fig. 16.15a. Supongamos que se eligen las secciones de las barras para obtener exactamente las intensidades de tensión deseadas. Eligiendo ab como barra superflua, la cortamos y aplicamos las fuerzas de tracción superabundantes de 125 t a cada lado del corte. Si hay que obtener las condiciones deseadas, no debe haber desplazamiento relativo entre los dos lados del corte. Pero los cálculos de la Fig. 16.15 muestran que los dos lados se han juntado (esto es, se han telescopado) 0,34 cm. Sin embargo, si se hubiera hecho

la barra aB 0,34 cm más corta, los dos lados del corte ajustarían perfectamente. Por tanto, si al fabricar esta armadura se hiciera la barra aB 0,34 cm demasiado corta y las demás de sus dimensiones exactas, durante el montaje se podría llevar aB a su sitio. Esto crearía una condición de pretensado en la armadura tal que, cuando se aplicara la carga de 200 t, se obtendrían exactamente las tensiones deseadas.

16.8 Acción normal e híbrida de las armaduras estáticamente indeterminadas. En la sección anterior se vio que las estructuras estáticamente indeterminadas son susceptibles de fijación de tensiones. Por medio de esta técnica se puede hacer que cualquier estructura estáticamente indeterminada actúe con una condición de tensiones predefinida (compatible con las exigencias del equilibrio) por cualquier hipótesis de carga estática dada. Para conseguirlo es necesario controlar los desplazamientos del punto de aplicación de las superabundantes de un modo apropiado, como se vio más arriba.

Si se quiere usar la fijación de tensiones, el proyectista tiene que utilizarlo generalmente para conseguir la máxima economía (que, como ejemplo, se supondrá que coincide con el volumen de material mínimo). Comenzará averiguando qué valores ha de usar como superabundantes para obtener el volumen mínimo de material. Este estudio le lleva a considerar dos tipos distintos de acción de las estructuras indeterminadas: *acción normal* y *acción híbrida*¹. Estas ideas son aplicables indudablemente a cualquier tipo de estructura estáticamente indeterminada de cualquier grado de indeterminación. Sin embargo, aquí consideraremos solo una armadura simple, indeterminada en primer grado.

Consideremos la estructura de la Fig. 16.16. Se ve que, utilizando la fijación de tensiones, la fuerza X , en la barra superflua aB , puede tener cualquier valor que se desee y se puede hacer que las barras de tracción actúen con 1,25 t/cm² y las de compresión con 0,98 t. Suponiendo que se obtienen exactamente las secciones de las barras necesarias, se puede calcular fácilmente el volumen en centímetros cúbicos de cada barra, como se ve para varios valores de X . En la Fig. 16.16 se han llevado los valores así obtenidos para cada barra, y se han sumado los volúmenes de todas ellas para obtener el volumen total de material en toda la armadura, como se ve en la línea de trazos. Se observará que la escala vertical utilizada para cada barra es doble de la del volumen total de la armadura.

El hecho más interesante consiste en que el volumen mínimo de armadura se obtiene cuando $X = 0$. En otras palabras, se obtiene el mínimo volumen cuando se reduce la armadura a la celosía de dos barras estáticamente determinada formada por aA y Ab . Esto es un ejemplo de la *acción híbrida* de una estructura estáticamente indeterminada.

Consideremos ahora la misma armadura, pero esta vez cargada en B , como se ve en la Fig. 16.17. Procediendo en la misma forma que antes, es fácil obtener las curvas de volúmenes trazadas. El hecho más interesante en este caso es el tramo mínimo de la curva de volumen entre $X = 0$ y $X = 250$ t. El volumen de material es el mismo para cualquier valor elegido para la superabundante entre esos límites. A este tramo se le llama *normal*, y la acción que representa es la *acción normal* de una estructura estáticamente indeterminada.

Por valores de las superabundantes elegidos dentro del tramo normal, es posible el proyecto normal sin utilizar la fijación de tensiones. En otras palabras, si se elige

¹ Este aspecto general ha interesado a numerosos ingenieros estructurales. Uno de los primeros fue F. H. Ciley alrededor de 1900, y muy recientemente L. M. Laushey. Ver F. H. Ciley, «The Exact Design of Statically Indeterminate Frameworks». «An Exposition of Its Possibility, but Futility», *Trans. ASCE*, junio 1900; L. M. Laushey, «Direct Design of Optimum Indeterminate Trusses», *J. Structural Div., ASCE*, vol. 84, diciembre 1958.

X en este tramo y se determinan las secciones para que satisfagan las tensiones deseadas, se hallará que los dos lados del corte en la superflua se adaptan perfectamente sin hacer ningún ajuste en la longitud de la barra. También, en este tramo, las figuras deformadas de la estructura son idénticas.

Obsérvense las estructuras definidas por los valores de las superabundantes en los extremos del tramo normal. Cuando $X = 0$, la estructura se reduce a la armadura estáticamente determinada compuesta de AB , Aa y Ab . Cuando $X = +250$, la estructura se reduce a la armadura estáticamente determinada compuesta de Ba , Bb y ab .

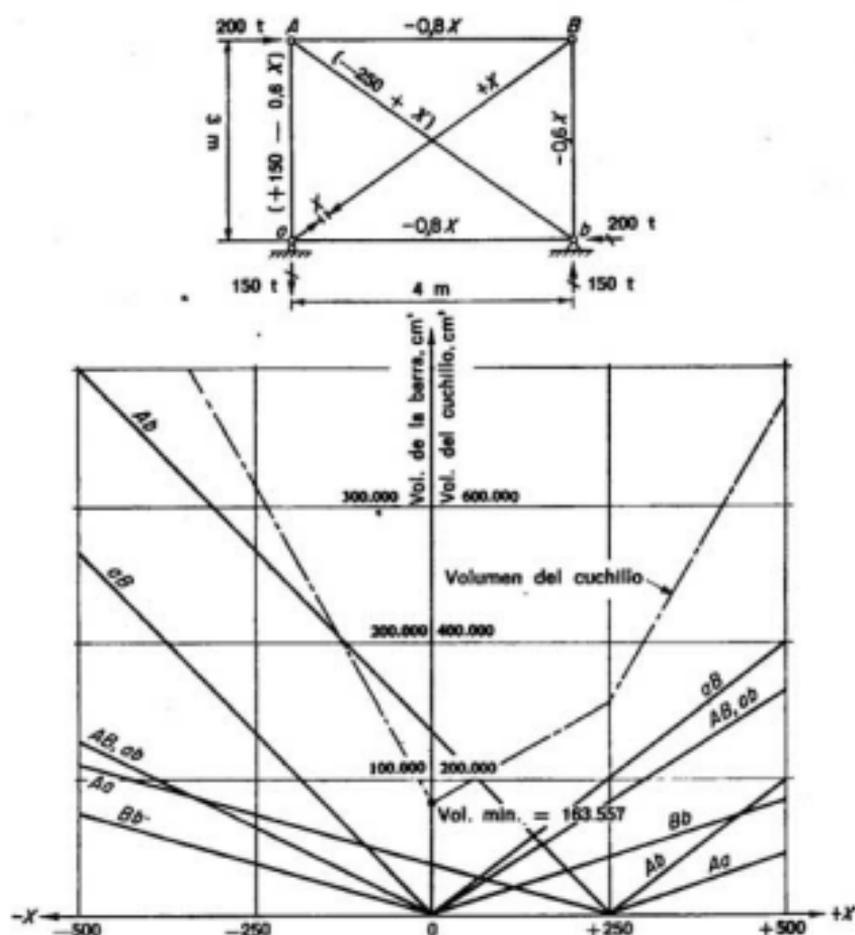


FIG. 16.16. Ejemplo de acción híbrida.

16.9 Aplicación de los principios de la acción normal e híbrida al proyecto estructural. Mientras que las consideraciones de la sección anterior se limitan a una armadura indeterminada muy sencilla, estudios más amplios indican que son válidas las siguientes conclusiones, referentes a la acción normal y a la híbrida, para cualquier tipo de estruc-

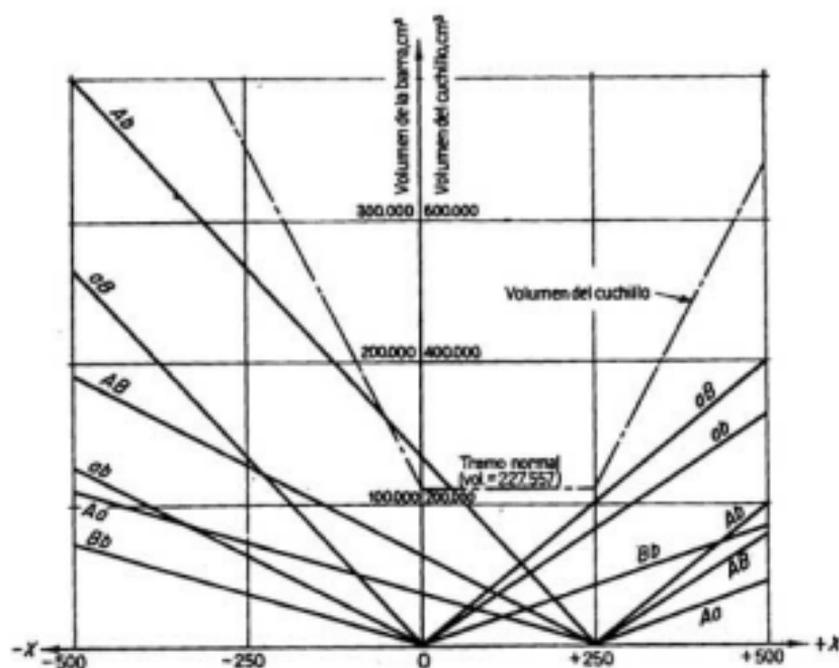
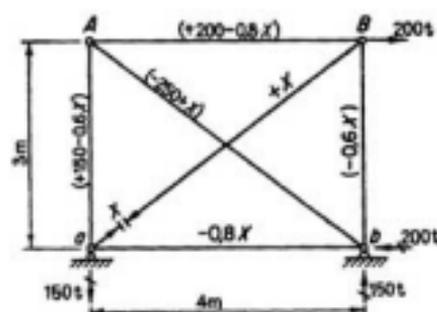


FIG. 16.17. Ejemplo de acción normal.

tura indeterminada que haya de proyectarse para un sistema de *cargas estáticas inmóviles*:

1. Para cada estructura estáticamente indeterminada, hay una versión estáticamente determinada que, si se proyecta, dará el mínimo volumen de material y, para el volumen utilizado, las deformaciones mínimas.

2. Para algunas estructuras sometidas a ciertas cargas, existe un tramo normal en el que se obtienen volúmenes mínimos de material y deformaciones idénticas.

3. En el tramo normal es posible el proyecto directo, sin recurrir a la fijación de tensiones.

4. Para cualquier estructura estáticamente indeterminada, para la que no puede obtenerse un proyecto directo, por aproximaciones sucesivas se llega al más económico,

que será estáticamente determinado si la disposición original y las cargas implican la acción híbrida.

5. Evidentemente, desde el punto de vista de la resistencia y la rigidez, no se consigue una economía teórica utilizando estructuras estáticamente indeterminadas para sistemas de cargas estáticas.

Estas condiciones no se cumplen en los casos en que el proyecto debe prever cargas móviles o movibles considerables. Para tales cargas se producen tensiones máximas en diversos puntos de la estructura para diferentes posiciones de las cargas móviles.

Es interesante observar que la práctica normal está de acuerdo con las conclusiones anteriores. Para las estructuras de luces muy largas, en que el proyecto está determinado ampliamente por el peso de la estructura (esto es, una carga estática), las estructuras más frecuentemente utilizadas son estáticamente determinadas, como cuchillos o vigas con voladizos, arcos tri-articulados, etc.

16.10 Proyecto plástico de estructuras de acero. Las consideraciones anteriores no constituyen un tratado completo del tema del análisis y proyectos plásticos. Más bien se ha intentado que este capítulo sea una introducción a alguno de los buenos textos y libros de referencia y a la extensa literatura periódica disponible actualmente.

El concepto de basar el proyecto en la carga de rotura de una estructura tiene unos cuarenta años, aunque la mayoría de los conocimientos en este campo se han desarrollado en los veinte últimos años. Actualmente hay un gran interés en incorporar estas ideas a las prácticas normales para las que sean apropiadas. Indudablemente, hay muchos ejemplos de aceptación tácita del comportamiento plástico: proyectos de nudos basados en la distribución uniforme de cargas a los remaches, pernos y soldaduras; despreocuparse de la concentración de tensiones bajo casos de concentración de cargas estáticas cuando no se prevé rotura frágil; despreocuparse de las tensiones residuales debidas al estirado u otros procedimientos de fabricación o de manipulación; etc.

Las ideas del proyecto plástico son más apropiadas para los casos de cargas esencialmente estáticas. Cuando intervienen cargas alternadas o reversibles fuertes, hay que considerar la posibilidad de fatiga plástica o la acumulación de deformación plástica. La construcción y el proyecto modernos exigen, en general, estructuras estáticamente indeterminadas, aunque las consideraciones anteriores sobre la acción normal y la híbrida sugieren que, para las exigencias de resistencia y rigidez, la construcción estáticamente indeterminada no produce economía para las cargas esencialmente inmóviles y estáticas. Se ha visto también que, para las cargas estáticas, las técnicas de fijación de tensiones conducen al mismo proyecto que los procedimientos de proyecto plástico. Sin embargo, las teorías del proyecto plástico ofrecen a la estructura la oportunidad de ejercer su propia fijación de tensiones, introduciendo deformaciones plásticas en sus charnelas plásticas.

Desde muchos puntos de vista, es importante para el ingeniero de estructuras moderno comprender el comportamiento elástico y el plástico de sus estructuras y combinar estos conocimientos en sus trabajos analíticos y de proyecto.

16.11 Problemas para resolver

Problema 16.1 Calcular los puntos clave y dibujar la curva carga-deformación ($P-\Delta_s$) de la estructura de la Fig. 16.18, para cada una de las hipótesis de la curva tensión-deformación de la barra ab siguientes: 1) la barra cede indefinidamente con una tensión de fluencia constante de 2.1 t/cm^2 en compresión; en otras palabras, la barra cede indefinidamente con un E efectivo nulo; 2) la barra cede como se ve en la línea 2, donde el E efectivo es -3.150 t/cm^2 .

Problema 16.2 En los comentarios que siguen del comportamiento y proyecto plásticos comparados con el proyecto elástico de vigas, suponer que intervienen secciones I y, en esos ca-

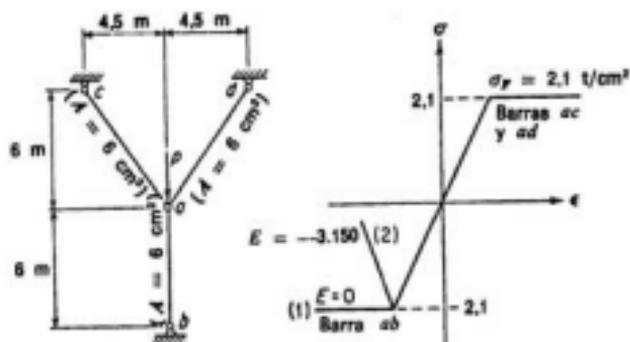


FIG. 16.18. Problema 16.1.

tos, que el factor de forma \mathfrak{F} de la sección es igual a 1,0; o que, en otras palabras, el módulo resistente y el módulo plástico de la sección son iguales. Considerar el proyecto de una viga de dos tramos de EI constante que soporta las dos cargas de 20 t representadas en la Figura 16.19. Suponer que σ_p del acero es 2,3 t/cm².

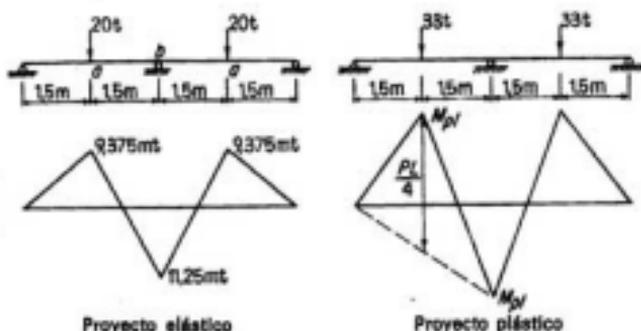


FIG. 16.19. Problema 16.2.

1. Con base de *proyecto-elástico*, utilizando un coeficiente de seguridad 1,65, la tensión por flexión admisible es 2,3/1,65 o 1,4 t/cm². Por tanto, el módulo resistente necesario para soportar el momento máximo de 11,25 m t es $S = 1125/1,4 = 803 \text{ cm}^3$.

2. Con base de *proyecto-plástico*, utilizando el coeficiente de seguridad de 1,65, se calcularía la viga para cargas de rotura de $(20)(1,65)$, o 33 t. Por tanto, $1,5M_p = P_e L/4$; o $M_p = (33)(3)/(1,5)(4) = 16,5 \text{ m t}$. El módulo plástico (y también el resistente si $\mathfrak{F} = 1,0$) necesario para soportar este M_p con σ_p de 2,3 t/cm² es $Z = 1650/2,3 = 717 \text{ cm}^3$, lo que representa un ahorro de 717 cm³ contra 803 cm³ respecto al proyecto elástico.

3. Se puede utilizar la fijación de tensiones para igualar los momentos en los puntos a y b para el proyecto elástico. Por ejemplo, durante la construcción, se pueden elevar con gatos los apoyos extremos lo suficiente para crear los momentos iniciales siguientes:

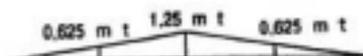


FIG. 16.20. Momentos iniciales.

Cuando se superponen a los momentos elásticos producidos por las cargas de 20 t, se obtienen los totales siguientes:

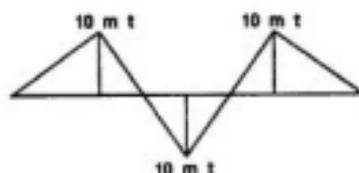


FIG. 16.21. Superposición de los momentos iniciales y elásticos.

El módulo resistente necesario para soportar los momentos máximos de 10 m t es $S = 1000/1,4 = 717 \text{ cm}^3$, lo que demuestra que el método de proyecto elástico en combinación con la fijación de tensiones conduce a la misma sección que el proyecto plástico.

Supongamos que se proyecta esta viga con una base elástica, con la intención de utilizar la fijación de tensiones para producir los momentos iniciales indicados más arriba; pero que a causa de un error se elevó la viga con los gatos diez veces la cantidad deseada.

a) Describir el comportamiento de la viga en esas circunstancias cuando se aplican las cargas de 20 t.

b) ¿Cuál será el valor de rotura de las cargas y cuál será el coeficiente de seguridad contra las deformaciones excesivas?

Problema 16.3 Considerar la viga continua de dos tramos de la Fig. 16.22, y suponer que es una viga I con factor de forma Φ igual a 1,0 y, por tanto, que $M_p = M_p = 15.000 \text{ m kg}$.

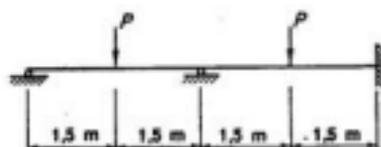


FIG. 16.22. Problema 16.3.

a) Calcular el valor de rotura de dos cargas iguales P aplicadas en el centro de cada tramo.
 b) Calcular, en función de EI de la viga, la deformación dúctil (esto es, el giro relativo de las secciones situadas a cada lado de una charnela) que se producirá en las charnelas plásticas producidas en la viga durante la primera aplicación de estas cargas de rotura.

c) En el ejemplo de la Fig. 16.13, que tiene un apoyo de rodillo en el extremo derecho en lugar de estar empotrado, el valor de rotura de las cargas aisladas era de 24 t. ¿Cuál sería este valor de rotura si el apoyo intermedio asentase 6 mm?

Introducción a la mecánica avanzada de estructuras

17.1 Introducción. En general, las estructuras están constituidas por una o más barras o paneles. Una *barr*a es un elemento relativamente largo comparado con las dimensiones de su sección, tal como una viga o un puntal. Los *paneles* se pueden definir como elementos cuya longitud y anchura son del mismo orden de magnitud, y cuyo espesor es considerablemente menor, como las placas, losas y membranas.

Las teorías elementales de la distribución de tensiones en las barras estructurales figuran en los cursos de introducción a la mecánica y la resistencia de materiales. Tales teorías son apropiadas para tratar muchos de los problemas de estructuras clásicos, referentes a las estructuras del tipo de barras. En la mayoría de dichos libros se presta poca atención al estudio de las placas y membranas o a las características de vibración o pandeo de barras o paneles.

Estos aspectos más avanzados se tratan en los cursos de mecánica superior de las estructuras. Aquí se presenta una introducción muy breve a los campos siguientes de dicha mecánica.

Teoría de la elasticidad. Este término expresa el campo de la mecánica estructural en el que se desarrollan métodos para determinar las tensiones, deformaciones y desplazamientos en los *cuerpos linealmente elásticos*. En realidad, los fundamentos relativos al equilibrio de las fuerzas y la geometría de la deformación son aplicables a los cuerpos elásticos no linealmente, o plásticos. La limitación de elasticidad lineal interviene solo cuando se introducen las relaciones tensión-deformación. Las relaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad son aplicables a las barras y a los elementos tipo panel. También intervienen en la determinación de las distribuciones de tensiones y en el análisis del comportamiento dinámico y de pandeo.

Teoría de placas y membranas. La teoría elástica de las placas y membranas se desarrolla introduciendo ciertas simplificaciones en las relaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad y adaptando estas relaciones a la resolución de los problemas típicos de placas y membranas. La teoría elástica no lineal y la teoría de placas y membranas están fuera del objeto del presente estudio.

Pandeo de elementos estructurales. Generalmente, la posición de equilibrio estático de una estructura real o un elemento estructural es una posición *estable* a la que vuelve el sistema cuando se le desvía ligeramente. Sin embargo, a veces la posición de equilibrio es *inestable* y desde ella continúa moviéndose el sistema, o *pandea*, cuando se ha desviado ligeramente. La estabilidad de la posición de equilibrio depende de la rigidez del sistema, más que de la resistencia. Muchas veces se puede estudiar el pandeo de un sistema utilizando la rigidez obtenida de las características carga-deformación aproximadas definidas en la teoría elemental.

Respuesta dinámica de las estructuras. La deformación estática de una estructura

es función solo de las cargas estáticas aplicadas y la rigidez del sistema. Sin embargo, para una carga dinámica, la respuesta es función también de la masa del sistema, pues interviene la aceleración.

Para un estudio detallado de estos temas se envía al lector a los libros reseñados en la página 23 de la Introducción.

17.2 Definiciones fundamentales y relaciones que intervienen en la teoría de la elasticidad. Se han desarrollado métodos de la teoría de la elasticidad para su aplicación a un cuerpo cuyo material está uniformemente repartido sobre un volumen de una forma específica dada y que está apoyado y posteriormente cargado y/o deformado de alguna manera determinada. Se supone que el material es *homogéneo, isotrópico y linealmente elástico* —propiedades que pueden alcanzarse aproximadamente, pero nunca cumplirse exactamente en la realidad. Para ese problema específico, se quiere calcular el estado de las tensiones, deformaciones y desplazamientos a lo largo del cuerpo.

A objeto de la resolución matemática de esos problemas, es necesario referir los puntos y partes del cuerpo respecto a algún sistema de ejes coordenados apropiado. Aunque para ciertos problemas son más convenientes sistemas de coordenadas especiales, el más general es el sistema clásico de ejes x , y , z y será el que utilizemos.

Notación y criterio. Las fuerzas exteriores que actúan en un cuerpo son de dos tipos: *fuerzas de superficie* y *fuerzas de volumen*. El aislar una parte de un cuerpo y considerar su equilibrio demuestra la existencia de las *fuerzas internas* en las caras internas en esa sección. En la Fig. 17.1 se representan la notación y el criterio utilizados para describir las fuerzas interiores y exteriores. En todos los casos, las fuerzas están representadas en sus sentidos positivos. Para los trozos diferenciales aislados, como el representado, la variación de intensidad en una superficie (o volumen) diferencial es tan pequeña que se puede representar la fuerza total en una superficie (o volumen) por la intensidad en el centro de la cara (o volumen) multiplicada por la sección de la cara (o el volumen del trozo).

Las fuerzas de superficie están repartidas sobre la superficie del cuerpo y se pueden descomponer en tres componentes coordenadas, cuyas intensidades (fuerza por unidad de superficie) se representan por X , Y y Z . Las fuerzas de volumen están repartidas en el volumen del cuerpo; pueden estar producidas por la gravedad, magnetismo o aceleración (fuerzas de inercia) y se pueden representar por tres componentes coordenadas, cuyas intensidades (fuerza por unidad de volumen) están expresadas por X , Y , Z . Se observará que el sentido positivo de las componentes de las fuerzas de superficie o de volumen es el mismo que para los correspondientes ejes coordenados.

La fuerza interna resultante repartida sobre una cara interior se puede descomponer en dos componentes: una componente *normal*, perpendicular a la cara, y una componente *tangencial* o de *cortante*, paralela a ella. Generalmente esta última se vuelve a descomponer en dos componentes en el plano de la cara. A las intensidades (fuerza por unidad de superficie) de las componentes normal y de cortante se les llama, respectivamente, *tensión normal* σ y *tensión tangencial*, o *tensión cortante*, τ . De ordinario, las tensiones en un punto se definen especificando las tensiones normal y cortante en los tres planos coordenados x , y , z que pasan por ese punto, perpendiculares a los ejes x , y , z , respectivamente.

Como σ se usa un subíndice para expresar el plano en el que actúa la tensión normal; así σ_y expresa la tensión normal en un plano perpendicular al eje y . Estas tensiones se consideran positivas cuando son tracciones.

Con τ se usan dos subíndices, el primero de los cuales indica el plano en que actúa y el segundo la dirección en este plano; así τ_{xy} indica la tensión cortante en el plano x que actúa paralelamente al eje y . Las tensiones cortantes se consideran positivas cuando

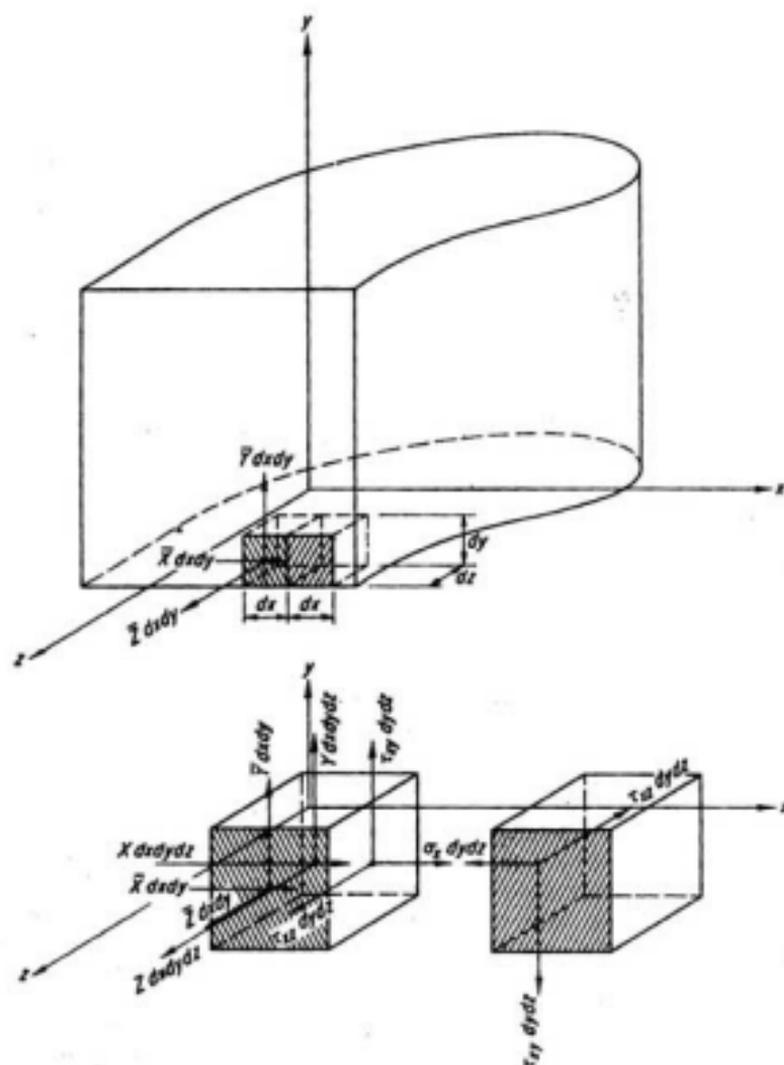
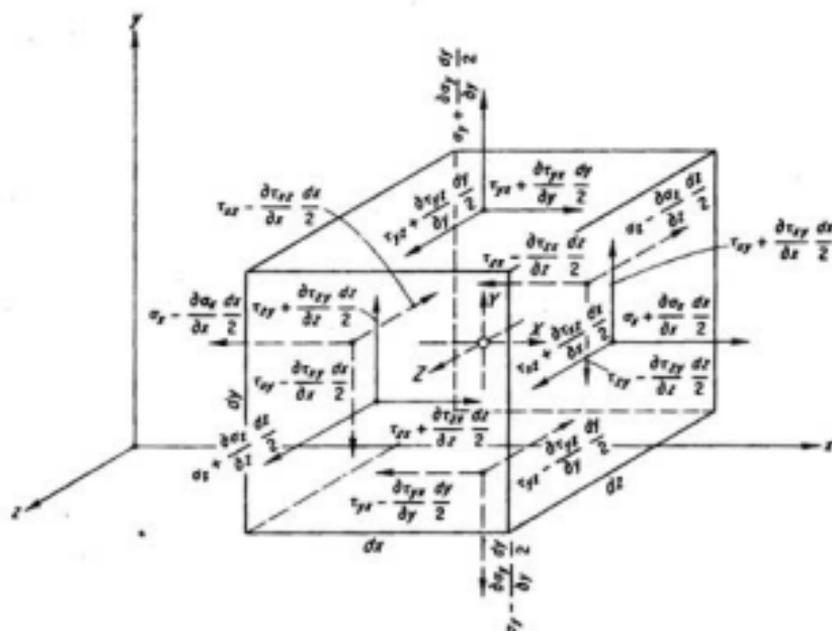


FIG. 17.1. Notaciones y criterio de intensidades de fuerzas y tensiones.

actúan en las direcciones coordenadas positivas de la cara más positiva de un elemento de volumen.

Como consecuencia de la deformación, se desplazan los puntos de un cuerpo. Los desplazamientos de un punto se pueden representar por sus tres componentes coordenadas u , v y w en las direcciones x , y , z , respectivamente. Las componentes de un desplazamiento se consideran positivas en el sentido positivo del eje coordenado correspondiente.

Una vez definidos los desplazamientos de todos los puntos, es fácil calcular las deformaciones. La *deformación lineal* de un elemento lineal se representa por ϵ y se con-



Nota: Están representadas las tensiones e intensidades de las fuerzas de volumen. Para obtener las fuerzas en las caras se multiplican las intensidades representadas por el área de la cara; para obtener las fuerzas de volumen se multiplican las intensidades de las fuerzas de volumen por el volumen de la partícula.

FIG. 17.2. Consideraciones sobre el equilibrio de una partícula diferencial.

sidera positiva cuando es un alargamiento. Con ϵ se utiliza un subíndice para expresar la dirección primitiva del elemento que interviene. La variación del ángulo recto entre dos elementos lineales originalmente perpendiculares se llama *deformación angular*, o *deformación de cortante*, entre esos elementos y se representa por γ , considerándola positiva cuando se reduce el ángulo recto original entre la prolongación positiva de estos elementos lineales. Con γ se utilizan dos subíndices para expresar la dirección original de los dos elementos lineales.

Componentes de tensión independientes. Es fácil ver que se pueden calcular las tensiones normal y cortante en cualquier plano que pasa por un punto si se conocen la tensión normal y dos componentes de la tensión tangencial en cada uno de tres planos perpendiculares entre sí (esto es, tres planos ortogonales) en un punto. Por tanto, parece que para definir el estado de tensiones en cada punto es necesario conocer nueve componentes de tensión (tres en cada uno de los tres planos). Sin embargo, es fácil demostrar que solo hay en cada punto seis componentes independientes.

Generalmente, es conveniente considerar como componentes independientes de las tensiones en un punto las que actúan en los tres planos coordenados que pasan por ese punto. Supongamos que las tensiones en tres de esos planos en el centro de la partícula diferencial de la Fig. 17.2 son σ_x , τ_{xy} y τ_{xz} ; σ_y , τ_{yx} y τ_{yz} ; σ_z , τ_{zx} y τ_{zy} . Considerando la variación de tensiones que tiene lugar entre el centro de la partícula y el de una de las caras, las tensiones en el centro de cada cara son las representadas. Supongamos ahora que se escribe la ecuación del equilibrio de momentos respecto al eje x , $\Sigma M_x = 0$.

Si solo se conservan los términos de menor orden diferencial (tercer orden), esta ecuación se convierte en

$$\tau_{yz} dz dy dz - \tau_{xy} dz dy dz = 0 \quad \text{o} \quad \tau_{yz} = \tau_{xy}$$

Del mismo modo, las ecuaciones del equilibrio de momentos respecto al eje y y respecto al z conducen a

$$\tau_{yz} = \tau_{xy} \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \tau_{xy}$$

Así, resulta evidente que *solo hay seis componentes de tensión independientes en cada punto*: tres tensiones normales, σ_x , σ_y y σ_z ; y tres tensiones cortantes, τ_{xy} ($=\tau_{yx}$), τ_{yz} ($=\tau_{zy}$) y τ_{xz} ($=\tau_{zx}$). Si se conocen esas seis componentes para los planos coordenados en un punto determinado, es fácil calcular las tensiones en cualquier otro plano que pase por ese punto, considerando el equilibrio de fuerzas de un tetraedro diferencial en ese punto formado por la intersección de este plano con tres planos coordenados. De este modo, se obtienen las llamadas *ecuaciones de transformación de tensiones*. Estas ecuaciones pueden encontrarse en cualquier texto clásico de elasticidad.

Se pueden ampliar estas consideraciones para demostrar que en un punto cualquiera hay tres planos perpendiculares entre sí en los que la tensión resultante es normal al plano (esto es, en el que no hay tensión cortante). Tales planos se llaman *planos principales*, y las tensiones en ellos, *tensiones principales*. Una de estas tensiones principales es la mayor tensión normal en cualquier plano que pasa por ese punto y se le llama *tensión principal mayor*; otra es la menor algebraicamente y se le llama *tensión principal menor*; y la tercera tiene un valor intermedio.

Es importante observar que todas estas conclusiones referentes a las componentes de las tensiones están basadas solamente en consideraciones sobre el equilibrio, por lo que son válidas para cualquier material que tenga propiedades tensión-deformación lineales o no lineales.

Definición de las componentes de la deformación. Una vez conocidos los desplazamientos por u , v y w en todos los puntos de un cuerpo, es fácil calcular por simples consideraciones geométricas cualquier aspecto de la deformación del mismo. Tales cálculos son especialmente sencillos si los desplazamientos son pequeños de modo que sean válidas las hipótesis de ángulos pequeños ($\alpha \simeq \text{sen } \alpha \simeq \text{tg } \alpha$, y $\cos \alpha \simeq 1$) y se puedan despreciar los cuadrados de las primeras derivadas, en comparación con las propias derivadas primeras.

Por ejemplo, consideremos, como se ve en la Fig. 17.3, tres elementos lineales en el punto O : OA , OB y OC . Después de la deformación, estos elementos se han movido hasta las posiciones $O'A'$, $O'B'$ y $O'C'$, habiéndose exagerado enormemente su magnitud para aclarar la figura. Obsérvese que, si los desplazamientos del punto O son u , v y w , los de A , B y C son

Punto A :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \text{y} \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

Punto B :

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad \text{y} \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

Punto C:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dz \quad v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad \text{y} \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Por la pequeñez de los desplazamientos, las verdaderas longitudes de los elementos tales como $O'A'$ y $O'C'$ y los ángulos entre ellos, se verán prácticamente en la proyección

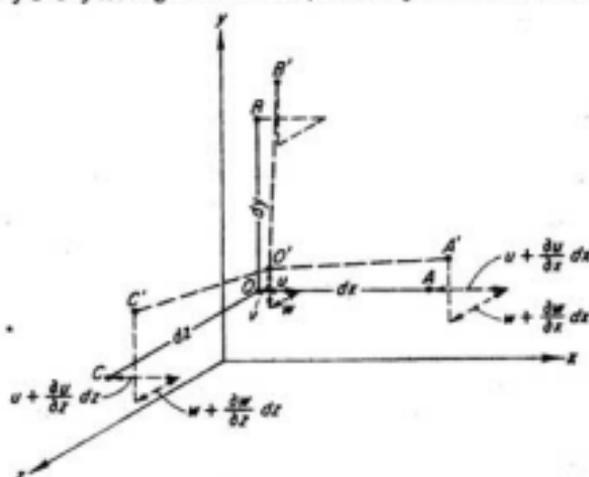


FIG. 17.3. Relaciones geométricas entre desplazamientos y deformaciones.

de esas líneas sobre el plano xz . En esa proyección, por ejemplo, es evidente que la variación de longitud de OA , $\Delta(OA)$ es prácticamente

$$\Delta(OA) = O'A' - OA = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Por tanto, el *alargamiento unitario* o *deformación lineal* de este elemento que era originalmente paralelo al eje x , se llama ϵ_x y es igual a $\partial u/\partial x$. Del mismo modo, la variación del ángulo entre los elementos OA y OC originalmente paralelos, $\Delta(\angle AOC)$, es, prácticamente,

$$\Delta(\angle AOC) = \angle AOC - \angle A'O'C' = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Esta reducción del ángulo recto primitivo, entre esos dos elementos que eran paralelos a los ejes x y z , se llama *deformación angular* γ_{xz} . Así, las seis componentes de la deformación en el punto O (tres deformaciones lineales y tres angulares) se relacionan de dicho modo con los tres desplazamientos u , v y w por medio de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (17.1)$$

Se observará que estas seis componentes de la deformación no son independientes, pues están expresadas en función solo de tres cantidades: u , v y w .

Esta interdependencia de las seis componentes de la deformación es muy importante. En la terminología de la literatura de la elasticidad se dice que *las deformaciones deben ser compatibles*. La prueba de la compatibilidad es que las seis componentes de la deformación deben satisfacer seis ecuaciones de compatibilidad —tres del tipo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (17.2a)$$

y tres del siguiente:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) \quad (17.2b)$$

Se puede comprobar la validez de estas identidades por sustitución de la Ec. (17.1). En realidad, el satisfacer a esas seis ecuaciones de compatibilidad es la única característica de una solución correcta de la elasticidad para un problema dado. *Hay un número infinito de distribuciones de tensiones que satisfacen las exigencias de la estática y las de las fuerzas de contorno, pero solo hay una que satisface también las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones y las exigencias de desplazamiento de contorno.*

Una vez calculadas las seis componentes de la deformación en un punto, para tres elementos originalmente paralelos a los ejes x , y y z , es fácil calcular las seis componentes de la deformación con respecto a otras tres direcciones ortogonales cualesquiera en ese punto. Esto puede hacerse utilizando las *ecuaciones de transformación de deformaciones* que se encuentran en los textos de elasticidad.

Como en el caso de las tensiones, se puede demostrar que hay en un punto tres direcciones que son perpendiculares entre sí antes de la deformación y que permanecen así después de ella (esto es, hay tres ejes perpendiculares entre sí para los que no hay deformación angular). A estas tres direcciones se les llama *ejes de deformación principal*. La mayor algebraicamente de estas tres deformaciones lineales se llama *deformación principal mayor*; y la más pequeña, *deformación principal menor*.

Obsérvese que estas consideraciones referentes a la deformación no están limitadas más que por las aproximaciones geométricas que se desprenden de la pequeñez de los desplazamientos, por lo que son válidas para un material con cualquier característica tensión-deformación. Se observará también que, si el material es homogéneo e isótropo, coinciden las direcciones de los ejes de deformación principal y los de tensión principal.

Ecuaciones diferenciales del equilibrio. En el estudio anterior de tensiones solo se consideraron las relaciones de tensiones en un punto. Ahora debemos considerar la variación de un punto al contiguo, para establecer las exigencias del equilibrio entre las variaciones de las seis componentes de las tensiones. Consideremos la partícula representada en la Fig. 17.2, y escribamos primero la ecuación del equilibrio de fuerzas en la dirección x , $\Sigma F_x = 0$. Esta ecuación simplificada conduce a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \text{y } \Sigma F_y = 0 \text{ a} & \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \text{y } \Sigma F_z = 0 \text{ a} & \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned} \quad (17.3)$$

Estas tres ecuaciones son las llamadas *ecuaciones diferenciales del equilibrio* y deben ser satisfechas en todos los puntos del volumen de un cuerpo. Las tensiones halladas de la Ec. (17.3) deben estar también en equilibrio con las fuerzas dadas en todos los puntos del contorno del cuerpo.

Ecuaciones tensión-desplazamiento linealmente elásticas. Hasta ahora no se han introducido relaciones tensión-deformación específicas. Estas relaciones se pueden estudiar en una forma matemática más rigurosa. Sin embargo, las siguientes se presentarán a base simplemente de la evidencia experimental concerniente a los materiales *linealmente elásticos, homogéneos e isotrópicos*. Esta evidencia muestra que una tensión normal tal como σ_x produce una deformación lineal σ_x/E en la dirección x , deformaciones lineales $-\nu\sigma_x/E$ en las direcciones y y z , y ninguna deformación angular entre los ejes x e y , x y z , o y y z . De igual modo, una tensión cortante tal como τ_{xy} produce solo una deformación angular τ_{xy}/G y ninguna otra referente a los elementos x , y y z . Así, se pueden escribir las seis relaciones tensión-deformación siguientes, superponiendo las acciones de las seis componentes de la deformación:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (17.4)$$

donde E = módulo de elasticidad longitudinal en tracción o compresión, o módulo de Young

ν = coeficiente de Poisson

$G = E/2(1 + \nu)$ = módulo de elasticidad transversal, o en cortante

Las relaciones tensión-deformación anteriores se pueden convertir en las ecuaciones tensión-desplazamiento buscadas, sustituyendo de las Ecs. (17.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (17.5)$$

17.3 Formulación de la solución del problema de la elasticidad. Ahora que disponemos de las definiciones fundamentales y las relaciones de la teoría de la elasticidad, es posible formular el método de resolución de los problemas típicos. Los datos de estos problemas son las características geométricas y del material del cuerpo considerado, junto con la definición de las fuerzas y/o los desplazamientos de la superficie contorno del cuerpo. Se quiere hallar las tensiones y desplazamientos en todo el volumen del cuerpo. Por tanto, como incógnitas hay nueve funciones desconocidas de x , y y z . Seis de esas funciones — σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} y τ_{zx} — definen las seis componentes independientes de las tensiones en el cuerpo; y tres de ellas — u , v y w — definen las tres componentes de desplazamientos.

Para determinar estas nueve incógnitas se dispone de nueve ecuaciones en derivadas parciales, tres de las cuales son las ecuaciones diferenciales del equilibrio (17.3) y seis

son las ecuaciones tensión-desplazamiento (17.5). Las nueve funciones desconocidas deben satisfacer no solo estas nueve ecuaciones, sino también las condiciones de fuerza y/o desplazamiento en el contorno, para que sean la solución verdadera de la elasticidad a un problema dado.

Se observará que, en general, el problema de la elasticidad es *estáticamente indeterminado*. Solo hay tres ecuaciones del equilibrio estático, que solas son insuficientes para determinar las seis componentes de las tensiones que intervienen en esas ecuaciones. Solo puede obtenerse una solución única cuando se consideran también las seis ecuaciones tensión-desplazamiento.

Los problemas de la elasticidad se pueden clasificar en uno de los tres tipos siguientes, según la naturaleza de las condiciones de contorno:

Tipo I. Determinar la distribución de tensiones y los desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y de contorno y no se dan desplazamientos de contorno. *Ejemplo:* Viga simplemente apoyada.

Tipo II. Determinar la distribución de tensiones y los desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y las de contorno, excepto en puntos aislados en los que, por el contrario, se dan los desplazamientos. *Ejemplo:* Viga continua de dos tramos.

Tipo III. Determinar la distribución de tensiones y desplazamientos, cuando se dan las fuerzas de volumen y los desplazamientos en todo el contorno.

Los problemas de ingeniería civil pertenecen generalmente a los tipos I y II. Además, utilizando la técnica de las estructuras primarias usual, descrita en el Cap. 13, los problemas del tipo II se pueden convertir en varios del tipo I.

Para resolver los problemas del tipo I, se resumen las nueve ecuaciones en derivadas parciales en seis, eliminando u , v y w de las ecuaciones tensión-desplazamiento. Este procedimiento conduce a seis ecuaciones, que son exactamente las mismas que se obtendrían sustituyendo las deformaciones en las ecuaciones de compatibilidad (17.2) de las relaciones tensión-deformación (17.4). Estas seis ecuaciones contendrán solo como incógnitas las seis componentes de las tensiones independientes. Cuando se hayan determinado estas componentes, de modo que satisfagan a estas seis ecuaciones y a las condiciones de fuerzas de contorno, se pueden sustituir sus valores en las Ecs. (17.5) y determinar los desplazamientos u , v y w de las ecuaciones resultantes.

Se envía al lector, para la resolución de los problemas típicos, a los textos de elasticidad. En realidad, se han resuelto relativamente pocos problemas, y los que lo han sido son muy sencillos, comparados con muchos de los problemas prácticos. Sin embargo, estas relaciones han sido muy útiles como medio de aumentar la comprensión y el conocimiento del comportamiento de las estructuras y elementos estructurales.

17.4 Teoría de la deformación pequeña en losas delgadas. En la Introducción se consideró el comportamiento de una placa como análogo al de dos capas de vigas elementales. Un método aproximado para calcular el comportamiento de las placas se basa en esta analogía, y asimila la placa a un enrejado de vigas. En este estudio se divide la carga aplicada entre los dos sistemas de vigas que se cortan, de modo que sean idénticas la flecha y la pendiente de cada sistema en todos los puntos de intersección del enrejado. Por el contrario, en los comentarios siguientes se resume la teoría clásica para estudiar el comportamiento de las placas.

Las placas están sometidas principalmente a cargas que actúan transversalmente a su plano medio original. En la mayoría de los casos las flexiones transversales de la placa son pequeñas y se pueden calcular por la llamada *teoría de las deformaciones pequeñas*. De acuerdo con esta teoría, cuando las *cargas transversales* estén acompañadas

por cargas en el plano medio (que actúan paralelamente a la posición original del plano medio de la placa), solo contribuyen a la flexión transversal de la placa las cargas transversales. Esto es comparable, en casos de trozos de viga sometidos a cargas transversales y axiales simultáneas, a suponer que la flexión transversal está producida solo por las cargas transversales y es independiente de las axiales.

Para placas más flexibles, las deformaciones por flexión aumentan y la modificación de las flexiones transversales por las cargas del plano medio se hacen relativamente más importantes. Una teoría más perfeccionada que incluye esta modificación en el cálculo de la flexión transversal de una placa es la llamada *teoría aproximada de la deformación grande*. Es comparable a los cálculos de las capas delgadas de vigas que incluyen el momento flector aportado por las fuerzas axiales que actúan con brazos de palanca, que dependen de las flexiones transversales del elemento.

La forma más exacta de la teoría de placas es la llamada *teoría de la deformación grande*. En esta teoría, no solo se considera el efecto de las cargas del plano medio en la flexión transversal, sino también los siguientes perfeccionamientos. Cuando una placa flexa, sus bordes tienden a moverse paralelamente a su plano original. Si se les impide este movimiento, se producen reacciones en el plano medio (llamadas generalmente *reacciones de membrana*). Además, en general, las placas flexan según superficies no desarrollables y, como consecuencia, se introducen nuevas modificaciones de las tensiones del plano medio (o de *membrana*). Por tanto, en la teoría de las deformaciones grandes se considera la interacción completa del comportamiento de flexión transversal y de membrana. Es una teoría no lineal difícil de aplicar, pero hay que considerarla en casos de placas delgadas que soportan grandes flexiones laterales en presencia de fuerzas de membrana grandes. Estas placas flexan tanto que se comportan más como láminas delgadas que como placas; y, en las últimas fases, sustentan la carga principalmente por fuerzas de membrana.

Hipótesis simplificadoras y relaciones aproximadas de la elasticidad. En el estudio que viene a continuación se imponen las siguientes limitaciones: 1) el espesor h de la placa es muy pequeño comparado con la longitud y la anchura; 2) si el espesor no es

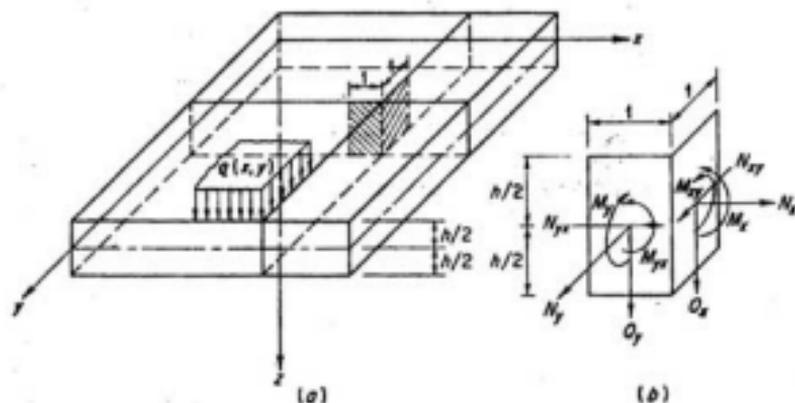


FIG. 17.4. Notación de placas delgadas y criterio.

constante, su grado de variación es pequeño; y 3) las deformaciones transversales son pequeñas comparadas con el espesor de la placa.

En realidad, el problema de hallar las tensiones y deformaciones de una placa delgada es un problema de elasticidad tridimensional. Introduciendo ciertas aproximaciones válidas, en el caso de la *teoría de las deformaciones pequeñas* es posible dividir el problema tridimensional en dos problemas de elasticidad bidimensional, cada uno de los cuales da una solución razonablemente buena para las incógnitas que contiene. Se pueden justificar estas aproximaciones considerando el orden de magnitud de las seis componentes de las tensiones independientes.

Consideremos una placa delgada como la de la Fig. 17.4a. Se pueden agrupar las seis tensiones en tres grupos: la tensión normal transversal σ_z ; las tensiones cortantes transversales τ_{xz} y τ_{yz} ; y las tensiones paralelas al plano medio de la placa σ_x , σ_y y τ_{xy} .

Se observará que σ_z es del orden de magnitud de q , estando q normalmente en el orden de 0,1 kg/cm² a 1 kg/cm², a veces de 1 kg/cm² a 10 kg/cm² y raras veces en el orden de las decenas de kg por cm². La carga transversal total es del orden de qL^2 . Para el equilibrio transversal, esta carga está equilibrada con las fuerzas transversales de cortante del orden de $\tau_{xz}Lh$ o $\tau_{yz}Lh$. Por tanto, τ_{xz} y τ_{yz} son del orden de $(q)(L/h)$. Si se considera una flexión de una faja de la placa de anchura unidad, el momento flector es del orden de qL^2 , mientras que el resistente lo es de $\sigma_x h^2$ o $\sigma_y h^2$. Por tanto, σ_x o σ_y (y se supone que τ_{xy} también) son del orden de $(q)(L/h)^2$. Así, como L/h es relativamente grande para placas delgadas, σ_x , σ_y y τ_{xy} son mayores que τ_{xz} y τ_{yz} y mucho mayores que σ_z .

Como τ_{xz} , τ_{yz} y σ_z son relativamente pequeños, se puede despreciar sus efectos en las deformaciones de la placa. Como consecuencia, las ecuaciones exactas de los desplazamientos, Ecs. (17.5), se pueden sustituir por las ecuaciones tensión-desplazamiento aproximadas siguientes para placas delgadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (17.6)$$

Aunque se han despreciado τ_{xz} , τ_{yz} y σ_z en lo referente a las deformaciones, hay que conservar las seis componentes para todas las consideraciones sobre el equilibrio. Se observará que esto es comparable con la teoría elemental de las vigas en la que se consideran para el equilibrio las tensiones cortantes transversales, pero se suelen despreciar en los cálculos de las deformaciones por flexión.

Notación y criterio. Al considerar el equilibrio de una placa, es conveniente aislar partes, cortando por medio de planos o superficies. Evidentemente, las tensiones en esas superficies σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} , varían en el espesor de la placa. Para evitar tener que tratar con esas tensiones repartidas, es conveniente representarlas por sus fuerzas y pares resultantes. A este objeto, es conveniente introducir las definiciones de *resultantes de tensiones* N_x , N_y , N_{xy} ($= N_{yx}$), Q_x y Q_y y los *pares de tensiones o momentos*

factores de tensiones M_x , M_y y M_{xy} ($= -M_{yx}$), como se han representado en sentido positivo en la Fig. 17.4b y se definen matemáticamente por las Ecs. (17.7):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \\
 M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = -M_{yx} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz
 \end{aligned} \quad (17.7)$$

En otras palabras, estas resultantes de tensiones y pares de tensiones son, respectivamente, iguales a la fuerza por unidad de longitud (kilogramos por metro) y el par por uni-

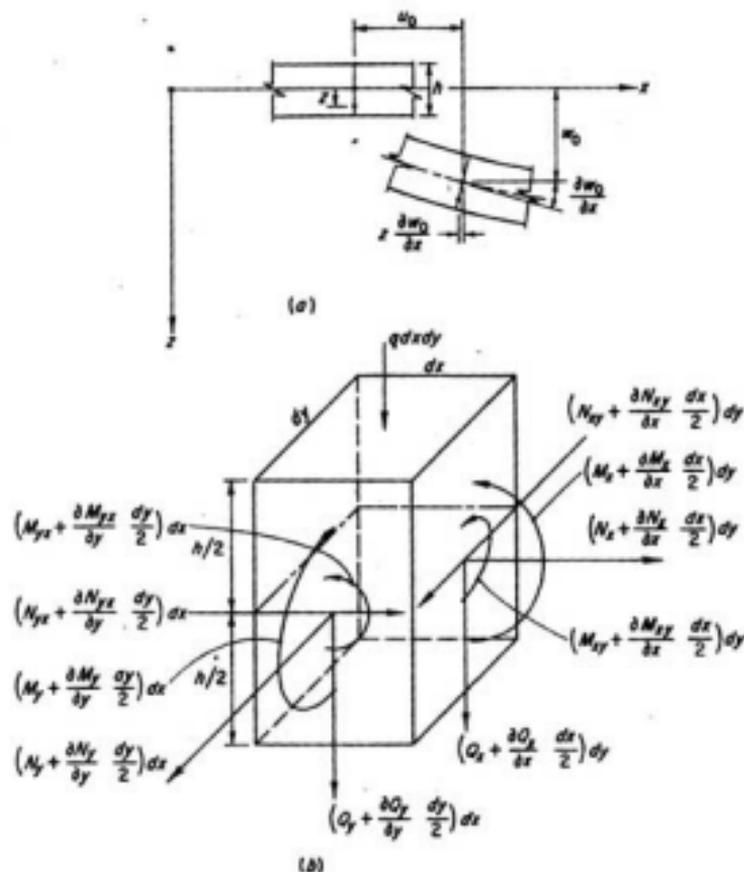


FIG. 17.5. Teoría de las deformaciones pequeñas de las placas delgadas.

dad de longitud (metros-kilogramo por metro) producidos por la tensión de que se trata. Obsérvese que $N_{xy} = N_{yx}$ y $M_{xy} = -M_{yx}$ por ser $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, y a causa del criterio de signos adoptado para esas cantidades. Cada uno de los pares de tensiones, y de las resultantes de tensiones, está definido por una función de x e y solo.

Los desplazamientos de los puntos de la superficie media de la placa en la dirección x , y o z se expresan por u , v , y w , respectivamente, todas las cuales son funciones solo de x e y .

Formulación de la teoría de la deformación pequeña. Si se representan las tensiones de una placa por las resultantes de tensiones y los pares de tensiones, se necesitará un total de 11 incógnitas independientes para definir completamente las tensiones y desplazamientos:

5 resultantes de tensiones: $N_x, N_y, N_{xy} (= N_{yx}), Q_x$ y Q_y

3 pares de tensiones: M_x, M_y y $M_{xy} (= -M_{yx})$

3 desplazamientos: u, v y w

Para despejar estas incógnitas se necesitan 11 ecuaciones. Como se verá luego, hay 6 ecuaciones tensión-desplazamiento independientes y 5 ecuaciones independientes de equilibrio.

De acuerdo con la tercera de las Ecs. (17.6), w es independiente de z . Por tanto, en cualquier punto (x, y) , el valor de w es el mismo para cualquier z , e igual al valor w_0 de w en la superficie media. Luego, integrando las dos últimas ecuaciones de (17.6),

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \quad (17.8)$$

$$y \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y)$$

Como se ve en la Fig. 17.5a, estas ecuaciones equivalen a expresar que las líneas perpendiculares a la superficie media antes de la flexión de la placa, siguen siendo perpendiculares a ella después de la flexión (es la llamada hipótesis de Bernoulli-Navier). Se pueden sustituir las Ecs. (17.8) en la primera, segunda y cuarta de las Ecs. (17.6) para obtener las relaciones siguientes;

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= G \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (17.9)$$

Entonces pueden ya obtenerse las seis ecuaciones tensión-desplazamiento sustituyendo las Ecs. (17.9) en las expresiones de las Ecs. (17.7) de las M y N , teniendo:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \\ N_{xy} = N_{yx} &= Gh \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (17.10)$$

y

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right] \\
 M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \right] \\
 M_{xy} &= -M_{yx} = -\frac{2Gh^3}{12} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \quad (17.11)$$

Las ecuaciones diferenciales del equilibrio necesarias se pueden obtener considerando el equilibrio de la porción diferencial de placa dibujada en la Fig. 17.5b. Considerando que N_x , N_y , M_x , etc., representan los pares de tensiones y las resultantes de tensiones en los planos x e y por el centro del elemento, las fuerzas y pares que actúan en las caras positivas del mismo serán las de la figura. Además, hay fuerzas y pares semejantes, no representados, en las caras negativas, tales como $\left(N_x - \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy$, etcétera. Para el equilibrio de esta porción deben satisfacerse las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 & \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \sum F_y = 0 & \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \quad (17.12)$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_z = 0 & \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \\
 \sum M_x = 0 & \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = 0 \\
 \sum M_y = 0 & \quad -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = 0
 \end{aligned} \quad (17.13)$$

Se observará que $\sum M_x = 0$ se transforma en $0 = 0$, pues $N_{xy} = N_{yx}$ y no conduce a ninguna ecuación utilizable.

La consideración de las 11 ecuaciones de las Ecs. (17.10) a (17.13) demuestra que se dividen en dos grupos: 1) las Ecs. (17.10) y (17.12), que contienen a N_x , N_y , N_{xy} ($= N_{yx}$), u_x y v_x ; 2) las Ecs. (17.11) y (17.13), que contienen a M_x , M_y , M_{xy} ($= -M_{yx}$), Q_x , Q_y y w_x . Así, la teoría de las deformaciones pequeñas para las placas delgadas divide la solución en dos partes, la primera de las cuales se llama *problema de membrana* y contiene las *tensiones de membrana resultantes* N_x , N_y y N_{xy} y los *desplazamientos de membrana*, u_x y v_x , que no volverán a considerarse, y la segunda, que se llama *problema de la flexión transversal*, y se estudiará a continuación.

Problema de la flexión transversal. En el estudio siguiente de la parte de la teoría de placas de las deformaciones pequeñas correspondiente a la flexión transversal, se supone que el espesor h de la placa es constante. Se usa el símbolo D para designar la rigidez a flexión de la placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17.14)$$

Las seis incógnitas que intervienen en el problema de la flexión transversal se designarán por

w_z	<i>deformación por flexión transversal</i>
M_x, M_y	<i>pares o momentos flectores de tensiones de flexión</i>
$M_{xy} (= -M_{yx})$	<i>pares o momentos flectores de tensiones de torsión</i>
Q_x, Q_y	<i>resultantes de tensiones cortantes transversales</i>

Para la determinación de estas incógnitas se dispone de las tres ecuaciones diferenciales del equilibrio, Ecs. (17.13), y las tres ecuaciones tensión-desplazamiento, Ecuaciones (17.11).

Se pueden reunir estas seis ecuaciones en una en diferenciales parciales que solo contiene w_z como incógnita. Se sustituye Q_x y Q_y en la primera de las Ecs. (17.13) por los valores de las dos últimas de estas ecuaciones. Luego se sustituye de las Ecs. (17.11) en la ecuación resultante y se obtiene

$$D \left[\frac{\partial^4 w_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_z}{\partial y^4} \right] = q(x, y) \quad (17.15)$$

Esta es la ecuación que rige la deformación por flexión transversal de la placa. Si se puede determinar w_z para que satisfaga la Ec. (17.15) y las condiciones de contorno referentes a ella, se puede sustituir w_z en las Ecs. (17.11) para obtener M_x , M_y y M_{xy} ($= -M_{yx}$). A continuación se sustituyen estos pares de tensiones en las dos últimas de las Ecs. (17.13) para obtener Q_x y Q_y *

Una vez conocidos los pares de tensiones y las resultantes de tensiones, es fácil calcular las intensidades de las tensiones asociadas con la flexión lateral de la placa, utilizando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12z}{h^3} M_x & \sigma_y &= \frac{12z}{h^3} M_y & \tau_{xy} &= -\frac{12z}{h^3} M_{xy} \\ \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right] & \text{y} & & \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right] \end{aligned}$$

Se pueden producir las siguientes condiciones de contorno referentes a w_z en diversos tipos de contorno:

Borde empotrado. A lo largo del borde son nulas la deformación por flexión transversal y la pendiente de la superficie media normal al borde. Por ejemplo, si el borde empotrado es paralelo al eje x en $y = b$,

$$[w_z]_{y=b} = 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial w_z}{\partial y} \right]_{y=b} = 0$$

Borde simplemente apoyado. A lo largo del eje, son nulas la deformación por flexión transversal y el par de tensiones de flexión normal al eje, lo que conduce a las condiciones siguientes para un borde paralelo al eje x en $y = b$,

$$[w_z]_{y=b} = 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right]_{y=b} = 0$$

* Se observará que este método de análisis es del tipo descrito en el Cap. 15 como método de desplazamientos.

Borde libre. Este borde debe estar totalmente libre de pares de tensiones de flexión o torsión y de resultantes de tensiones cortantes transversales. Se puede demostrar que se obtienen sensiblemente esas condiciones, si, a lo largo del eje $x = a$, por ejemplo,

$$\left[\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

y

$$\left[\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

Resolución de los problemas de flexión transversal. La aplicación de la teoría anterior a varios problemas de placas se halla en los textos clásicos sobre placas y láminas, y no se estudiará aquí. Por ejemplo, estudiando una placa rectangular simplemente apoyada en los cuatro bordes, como muestra la Fig. 17.6, se ve que la solución está dada por la serie Fourier siguiente:

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (17.16)$$

donde

$$A_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad (17.17)$$

y

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (17.18)$$

de donde se puede calcular P_{mn} para cualquier carga transversal dada $q(x,y)$. Aunque aquí no se deduce esa solución, es fácil comprobar que la expresión de w_s dada por la Ec. (17.16) satisface a la Ec. (17.15) y las condiciones de contorno de los bordes simplemente apoyados en los cuatro lados de la placa rectangular.

17.5 Teoría de placas de las deformaciones grandes. Cuando las deformaciones transversales por flexión se hacen cada vez mayores, la contribución de las fuerzas del plano medio a la flexión transversal se hace cada vez más importante. Se puede tener en cuenta este efecto considerando el equilibrio del elemento de la Fig. 17.5b en su posición deformada, en lugar de sin deformar. Como consecuencia del desplazamiento de esta partícula, las caras laterales y las resultantes de tensiones y pares de tensiones que actúan en ellas, han girado ángulos pequeños. Si se consideran estas pequeñas va-

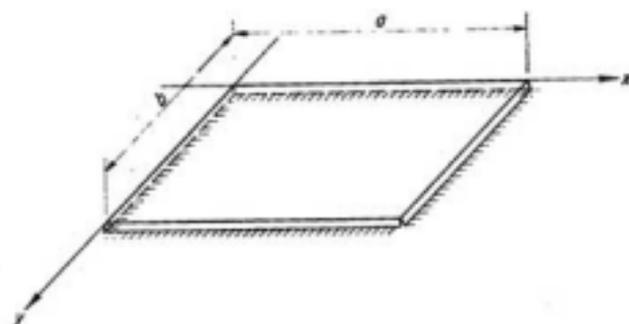


FIG. 17.6. Placa rectangular simplemente apoyada en los cuatro bordes.

riaciones de dirección al volver a escribir las ecuaciones de equilibrio, se halla que solo la primera de las Ecs. (17.13) se modifica sensiblemente y queda

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + N_x \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} = 0 \quad (17.19)$$

Las dos últimas de las Ecs. (17.13) y (17.12) permanecen invariables.

Además de esta modificación, las deformaciones por flexión transversal grandes tienen influencia sobre las deformaciones de la superficie media de la placa. Para calcular esta influencia, nos referimos a la Fig. 17.3 y supondremos que en esta figura los desplazamientos v en la dirección y y son mucho mayores que los del plano xz . Estos desplazamientos grandes modificarán la deformación de las fibras OA y OC , mientras que antes, cuando eran pequeños, se vio que solo tenían una influencia de segundo orden, que se podía despreciar. Si se incluyera esa influencia en la teoría de las placas deducida más arriba, las ecuaciones tensión-desplazamiento, Ecs. (17.10), se convertirían en

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \right] \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 + \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \right] \\ N_{xy} &= N_{yx} = Gh \left[\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (17.20)$$

No obstante, las tres restantes ecuaciones tensión-desplazamiento, Ecs. (17.11), permanecerán inalteradas.

Cuando se introducen estos perfeccionamientos para obtener la teoría de las deformaciones grandes, resulta evidente que la solución ya no se divide en dos partes independientes, el problema de la membrana y el de la flexión transversal, como en la teoría de las deformaciones pequeñas. Hay aún 11 ecuaciones con 11 incógnitas, pero su resolución es muy difícil. Por la teoría de las deformaciones grandes se han resuelto unos pocos problemas sencillos. El lector que lo desee puede recurrir a la literatura especializada, como la «Teoría de placas y láminas», de Timoshenko y Woinowsky-Krieger.

17.6 Estudio de las láminas delgadas. En el Preámbulo se describió el comportamiento de las láminas de un modo cualitativo. En el comentario siguiente se ampliarán los fundamentos de la teoría de las placas para incluir las láminas. Esta breve presentación incluye poco más que una introducción a la teoría clásica de las láminas, e intenta ayudar al lector a comenzar sus estudios en los textos y literatura periódica dedicados al análisis y proyecto de las estructuras laminares.

Limitaciones, hipótesis, notación y criterio. En lo que sigue se supondrá que el espesor de la lámina, h , es pequeño comparado con el radio de curvatura y la luz de la misma. Para las láminas delgadas se usan esencialmente las mismas hipótesis que para las placas delgadas, es decir:

1. No se consideran las tensiones normales perpendiculares a la superficie media de la lámina.
2. Se desprecian las contribuciones de las tensiones cortantes radiales a la deformación de la lámina.
3. Los puntos de las líneas normales a la superficie media de la lámina antes de la

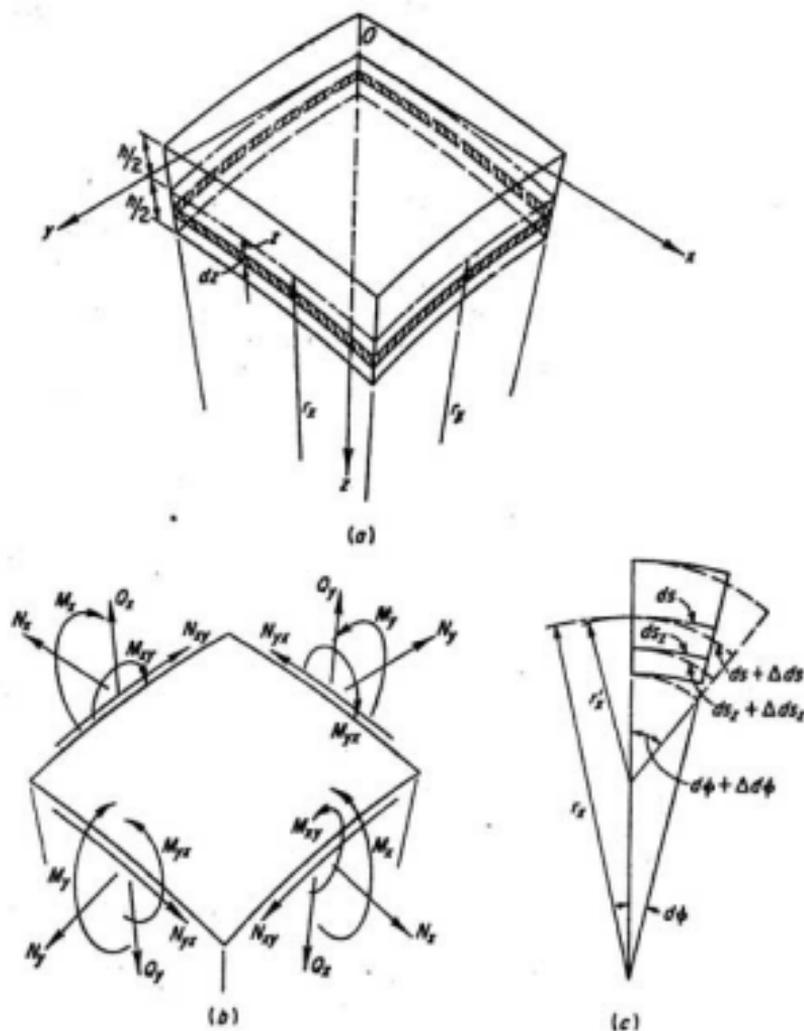


FIG. 17.7. Notación de la lámina delgada.

deformación siguen estando en líneas normales a la superficie media, después de deformar.

Se usan fundamentalmente las mismas definiciones y notaciones para las láminas delgadas que para las placas.

Las deformaciones, tensiones y desplazamientos en un lugar determinado de la lámina se refieren a ejes coordenados ortogonales con origen en un punto O de la superficie media. Se toman los ejes x y y coincidentes con las tangentes a las líneas de curvatura de la superficie media en el punto O , y el z con la normal a esta superficie. Los radios de curvatura principales de la superficie en los planos xoz e $yo z$ se llaman r_x y r_y , respectivamente. Ver la Figura 17.7a.

Las tensiones internas que actúan en un elemento diferencial de lámina, como el que aparece en la Fig. 17.7a, se pueden representar por un sistema de resultantes de tensión y pares de tensiones equivalentes, semejante al utilizado para las placas. En el caso de un elemento pequeño de una lámina, las caras laterales expuestas, a causa de la curvatura inicial de la lámina, tienen forma trapezoidal en lugar de rectangular como en el caso de las placas. Sin embargo, para las láminas delgadas en las que h es muy pequeño comparado con r_x o r_y , se puede despreciar el efecto de esta forma trapezoidal y definir los pares de tensiones y las resultantes de tensiones por las mismas Ecs. (17.7) utilizadas para las placas. Estas definiciones son por unidad de longitud de las caras laterales en la superficie media de la lámina. Los pares de tensiones y las resultantes de tensiones están representados en sentido positivo en la Figura 17.7b.

Se puede desarrollar la definición de deformaciones en una lámina delgada considerando la deformación de un elemento pequeño de la misma, como el representado en la Fig. 17.7c, en que las líneas normales a la superficie media se considera que lo son antes y después de la deformación. Sin considerar los detalles de la deducción, se pueden definir las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} para los elementos x e y que están a una distancia z de la superficie media, por

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_{xo} - z\chi_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_{yo} - z\chi_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xyo} - 2z\chi_{xy}\end{aligned}\quad (17.21)$$

donde ϵ_{xo} , ϵ_{yo} y γ_{xyo} se refieren a la deformación de los elementos x e y que están en la superficie media de la lámina, y donde

- χ_x = variación de la curvatura de la superficie media en el plano xoz
- χ_y = variación de la curvatura de la superficie media en el plano yoz
- χ_{xy} = variación de la torsión de la superficie media

Las Ecs. (17.21), expresiones de la deformación, se pueden sustituir por ecuaciones tensión-deformación aproximadas, comparables a las Ecs. (17.6). Las expresiones de las tensiones en función de las deformaciones de las ecuaciones resultantes se pueden sustituir en las Ecs. (17.7) de definición de los pares de tensiones y las resultantes de tensiones, obteniendo las relaciones siguientes:

Relaciones tensión-deformación para resultantes de tensiones de membrana:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\epsilon_{xo} + \nu\epsilon_{yo}] \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\epsilon_{yo} + \nu\epsilon_{xo}] \\ N_{xy} &= N_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{xyo}\end{aligned}\quad (17.22)$$

Relaciones tensión-deformación para pares de tensiones de flexión y torsión:

$$\begin{aligned}M_x &= -D[\chi_x + \nu\chi_y] \\ M_y &= -D[\chi_y + \nu\chi_x] \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu)\chi_{xy}\end{aligned}\quad (17.23)$$

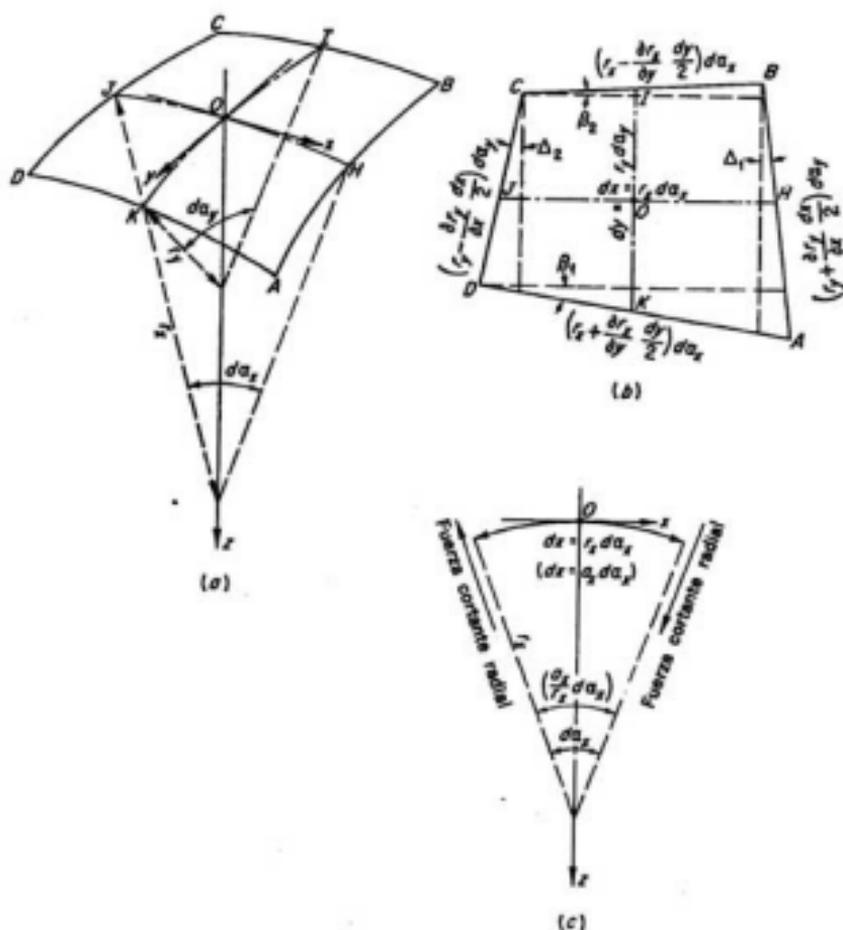


FIG. 17.8. Geometría del elemento diferencial de lámina.

En un problema determinado se pueden convertir estas ecuaciones en ecuaciones tensión-desplazamiento, sustituyendo las deformaciones y variaciones de curvatura por expresiones en función de los desplazamientos de la lámina, u_x , v_x y w_x .

Formulación del análisis de láminas. Como en el análisis de placas, el de una lámina comprende un total de 11 funciones desconocidas de x y y , que describen las tres resultantes de tensiones de membrana N_x , N_y y N_{xy} ($= N_{yx}$); los cinco pares de tensiones de flexión y resultantes de tensiones, dos de los cuales son los pares de tensiones de flexión M_x y M_y , uno el par de tensiones de torsión M_{xy} ($= -M_{yx}$) y dos las resultantes de tensiones radiales de cortante Q_x y Q_y ; y los tres desplazamientos u_x , v_x y w_x . Para hallar estas incógnitas se dispone de 11 ecuaciones en derivadas parciales: las seis ecuaciones de tensión-desplazamiento que se pueden hallar en cualquier problema transformando las seis ecuaciones tensión-deformación, Ecs. (17.22) y (17.23); y las cinco ecuaciones diferenciales del equilibrio que se deducen como se indica más adelante.

Para la siguiente deducción utilizaremos un elemento diferencial como el de la Figura 17.7a. Este elemento está aislado por pares de planos adyacentes normales a la superficie media y se supone que contienen las líneas de curvatura de la superficie media. En las Figs. 17.8 y 17.9 solo se representa la superficie media de este elemento. Se elige un origen en el centro del elemento y los ejes x e y están en el plano tangente y coinciden con las tangentes a las líneas de curvatura. Se observará que ninguno de los cuatro lados del elemento es exactamente normal o paralelo a ninguno de los tres ejes coordenados. Además, ninguna de las longitudes de la superficie media en las cuatro caras es la misma. Para escribir las tres ecuaciones fuerza-equilibrio se representan en la Fig. 17.9a las cinco resultantes de tensiones, mientras que en la Fig. 17.9b se muestran los vectores de momento que representan los pares de tensiones para hallar las ecuaciones momento-equilibrio. La intensidad de la carga resultante se expresa por q , cuyas componentes x , y , z se designan por q_x , q_y , q_z .

Se pueden escribir cinco ecuaciones de equilibrio para el elemento de lámina: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma M_y = 0$. Evidentemente, la ecuación $\Sigma M_z = 0$, que se satisface idénticamente, como en el caso de las placas delgadas, no conduce a ninguna ecuación. Para ahorrar espacio, se omite la deducción de estas ecuaciones en detalle. Esta deducción es inmediata, pero bastante laboriosa a causa de las inclinaciones de las cuatro caras. Cuando se utilizan los ángulos centrales α_x y α_y como variables independientes en la derivación, estas ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_x r_x) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_{xy} r_x) + N_{xy} \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} - N_y \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_x} - Q_x r_y + q_x r_x r_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_y r_x) + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_{xy} r_x) + N_{xy} \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_x} - N_x \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} - Q_y r_x + q_y r_x r_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (Q_x r_x) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (Q_y r_x) + N_x r_y + N_y r_x + q_z r_x r_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_{xy} r_x) - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_x r_x) - M_{xy} \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_x} + M_x \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} + Q_x r_x r_y &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_{xy} r_x) - \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_y r_x) + M_{xy} \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} + M_y \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_x} + Q_y r_x r_y &= 0 \end{aligned} \quad (17.24)$$

En la deducción anterior se supone que la superficie de la lámina está definida por las líneas de curvatura, que son dos familias de curvas ortogonales, a lo largo de las cuales se cortan las normales a la superficie de la lámina en puntos consecutivos. Se supone también que los planos osculadores (esto es, los planos que contienen tres puntos consecutivos, o dos tangentes consecutivos de una curva en el espacio) de estas líneas de curvatura son normales a la superficie. Sin embargo, en general, los planos osculadores de las líneas de curvatura no son normales a la superficie; por ejemplo, en el caso de una superficie de revolución, cuyas líneas de curvatura son los meridianos y los paralelos. El plano meridiano es normal a la superficie y el radio de curvatura del meridiano en un punto cualquiera es igual a uno de los radios principales de curvatura de la superficie en ese punto; pero el plano del paralelo no es igual al otro radio de curvatura principal de la superficie en ese punto.

En tales casos, se aísla el elemento diferencial representado en las Figs. 17.8 y 17.9 por medio de pares de curvas de las dos familias de líneas de curvatura. Las longitudes de los lados estarán definidas por los radios de curvatura de esas líneas, que se llama-

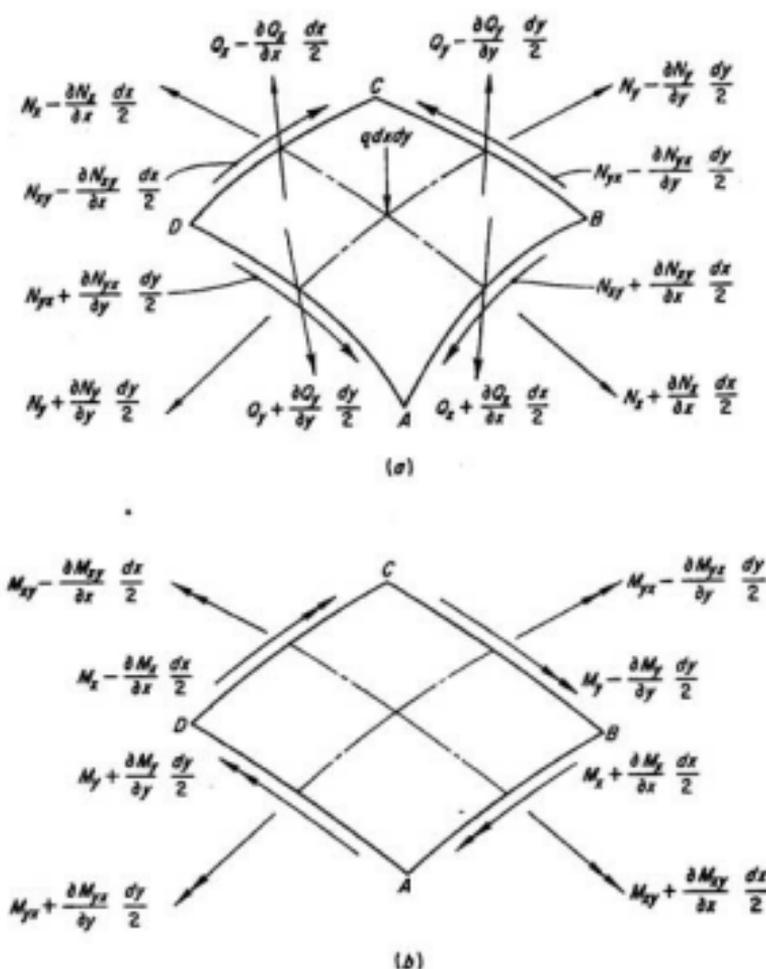


FIG. 17.9. Tensiones resultantes y pares de tensiones.

rán a_x y a_y , pero pueden no ser radios de curvatura principales de la superficie. No obstante, se seguirá tomando el eje z radialmente y normal al plano tangente a la superficie O . Los cortantes radiales Q_x y Q_y actuarán también normalmente a la superficie y en la dirección de los radios de curvatura principales. Por tanto, al calcular la componente de Q_x en la dirección x , por ejemplo, el ángulo que interviene no será de $dx/2$, sino (como se muestra entre paréntesis en la Fig. 17.8c) de $a_x dx/2r_x$. De igual manera, al plantear la ecuación $\Sigma F_x = 0$, se calcularán las componentes N_x y N_y de las tensiones normales resultantes, en la dirección z , utilizando el mismo ángulo modificado.

Así, cuando la superficie está definida por líneas de curvatura, y los planos osculadores de una o de las dos no son perpendiculares a la superficie, debe usarse la versión siguiente de las Ecs. (17.24):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_{yx} a_x) + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - Q_x \frac{a_x a_y}{r_x} + q_x a_x a_y &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_y a_x) + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_{xy} a_y) + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - Q_y \frac{a_x a_y}{r_y} + q_y a_x a_y &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (Q_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (Q_y a_x) + N_x \frac{a_x a_y}{r_x} + N_y \frac{a_x a_y}{r_y} + q_x a_x a_y &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_{xy} a_y) - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_x a_x) - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + Q_y a_x a_y &= 0 \\
-\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_{yx} a_x) - \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_y a_y) + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + Q_x a_x a_y &= 0
\end{aligned}
\tag{17.25}$$

Teoría de la membrana de las láminas. En la mayor parte de las láminas utilizadas en la ingeniería civil, no hay prácticamente ningún par de tensiones de flexión o torsión, ni resultantes de tensiones radiales de cortante. Por tanto, la carga está sustentada prácticamente por las resultantes de tensiones de membrana: N_x , N_y y N_{xy} ($= N_{yx}$). Solo son considerables los pares de flexión y torsión y los cortantes radiales en la proximidad del contorno, o cerca de las discontinuidades de la carga o de la geometría de la superficie de la lámina.

Si no hay pares de flexión o torsión ni cortante axial (esto es, si $M_x = M_y = M_{xy} = Q_x = Q_y = 0$), las cinco ecuaciones del equilibrio se reducen a tres referentes solo a las resultantes de tensiones de membrana: N_x , N_y y N_{xy} ($= N_{yx}$). O, de las Ecs. (17.25),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N'_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N'_{yx} a_x) + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + q_x a_x a_y &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N'_y a_x) + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N'_{xy} a_y) + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + q_y a_x a_y &= 0 \quad (17.26) \\
N'_x \frac{a_x a_y}{r_x} + N'_y \frac{a_x a_y}{r_y} + q_x a_x a_y &= 0
\end{aligned}$$

Los valores de las tensiones de membrana definidos por estas ecuaciones constituyen el análisis de una lámina por la llamada *teoría de las membranas*. Estos valores se designan con un acento N'_x , N'_y y N'_{xy} ($= N'_{yx}$) para indicar que son primeras aproximaciones de las resultantes de tensiones de membrana que se determinarían como parte de la solución general del problema, que incluye el efecto de los pares de flexión y torsión y los cortantes axiales.

Es interesante observar que la solución por la teoría de las membranas es estáticamente determinada y está definida simplemente por las tres ecuaciones de equilibrio dadas más arriba y las condiciones de contorno de la estructura¹. Tal estructura, a causa de su curvatura inicial, aun si no tiene rigidez a flexión puede soportar una carga repartida continua, utilizando, por tanto, solamente su resistencia de membrana. Al hacer esta afirmación se ha ignorado la posibilidad de pandeo de la lámina. Obsérvese que una placa es incapaz de comportarse así, como resulta evidente por la primera de las ecuaciones de equilibrio, Ecs. (17.13). Si los pares de flexión y torsión y los cortantes radiales son

¹ En la solución por la teoría de la membrana, se supone que los apoyos de contorno solo proporcionan las fuerzas de contorno de tipo de membrana necesarias por la teoría y que el contorno es libre de desplazarse como se necesita para las deformaciones de esta teoría.

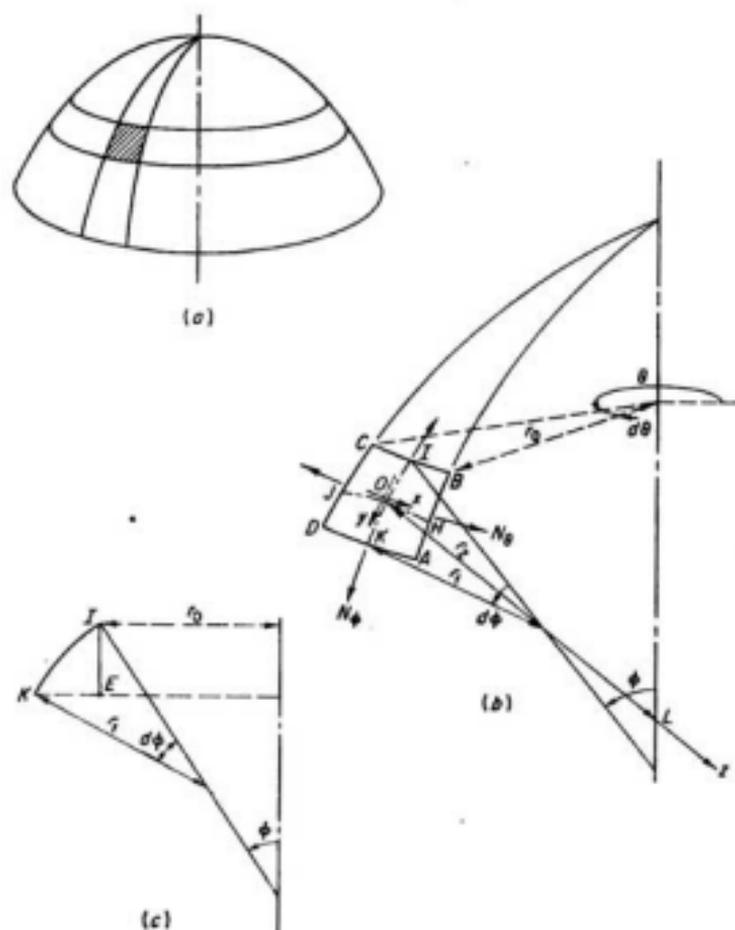


FIG. 17.10. Lámina de revolución.

nulos, no hay modo de satisfacer la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$. Solo cuando la placa ha sufrido una deformación por flexión y una curvatura considerables trabajan las fuerzas de membrana y ayudan a estabilizar la placa. (Este es uno de los factores considerados en la teoría de placas de las deformaciones grandes.)

Es interesante observar que la acción estructural de una lámina es muy semejante a la de una cercha. Una cercha *no necesita* nudos rígidos o rigidez a flexión en sus barras (si se ignora la posibilidad de pandeo) para soportar un sistema de cargas y reacciones en los nudos. Puede soportar esas cargas utilizando fuerzas axiales (esto es, «fuerzas de membrana») solamente en sus barras. Si la cercha *tiene* nudos rígidos y se considera la capacidad de las barras para soportar la flexión, *mobiliza* algo de esta resistencia para soportar cargas en los nudos, pero la mayoría de las cargas las soporta con las fuerzas axiales de las barras. En otras palabras, igual que una lámina que soporta cargas repartidas, una «solución membrana» para una cercha calculada a base de que

soporta sus cargas en los nudos como si tuviera los nudos articulados, es una buena primera aproximación para las fuerzas axiales de las barras de la cercha real con nudos rígidos.

Aplicación de la teoría de la membrana en las láminas de revolución. Las láminas de revolución como conos, esferas, etc., se pueden engendrar por la rotación de una curva plana alrededor de un eje que está en el plano de la misma, como se ve en la Figura 17.10. Las diversas posiciones de la curva generatriz se llaman meridianos de la superficie. En un punto cualquiera O de la superficie, el plano meridiano que pasa por ese punto es uno de los planos de curvatura principal y el meridiano es una de las líneas de curvatura, cuyo radio de curvatura se representa por r_1 . El otro plano de curvatura principal es normal al plano meridiano y al plano tangente, y contiene a la normal oz . La sección de este plano normal en la superficie es la curva JOH , cuyo radio de curvatura es la distancia OL , que se expresará por r_2 .

Para el estudio, es conveniente definir la superficie media de la lámina por las líneas de curvatura, una de cuyas familias son los meridianos y la otra los paralelos, intersección de la superficie con los planos normales al eje de revolución. En la Fig. 17.10b está representado un elemento diferencial de la superficie media aislado por pares de estas curvas paramétricas y está situado por los ángulos θ y ϕ . Se observará que el radio de curvatura del paralelo es r_0 .

Supongamos que la carga repartida en esta lámina es simétrica respecto al eje de revolución. Así, la componente circular de la carga q_x es nula y q_y y q_z son funciones solo de ϕ . En este caso, a causa de la simetría de las cargas y de la lámina, las tensiones en ésta son independientes de θ y varían solo con ϕ . Así, pues, no hay fuerzas cortantes $N_{\theta\theta}$ ni $N_{\phi\theta}$. Las resultantes de tensiones normales, en las direcciones circular y del meridiano, se expresan por N_θ y N_ϕ , como se indica.

La solución por la teoría de la membrana se puede obtener aplicando las Ecs. (17.26) y observando que

$$\begin{aligned} \alpha_x = \theta & & \alpha_z = r_0 & & r_x = r_2 & & r_0 = r_2 \operatorname{sen} \phi & & N'_{xy} = N'_{\theta\phi} = 0 \\ \alpha_y = \phi & & \alpha_\theta = r_1 & & r_y = r_1 & & N'_x = N'_\theta & & N'_z = N'_\phi \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} (N'_\phi r_0) - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + q_\theta r_0 &= 0 \\ N'_\theta \frac{\operatorname{sen} \phi}{r_0} + \frac{N'_\phi}{r_1} + q_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (17.27)$$

Se observará, de la Fig. 17.10c, que

$$\frac{dr_0}{d\phi} d\phi = KE \simeq KI \cos \phi \simeq r_1 \cos \phi d\phi \quad \therefore \frac{dr_0}{d\phi} \simeq r_1 \cos \phi \quad (a)$$

La segunda de las Ecs. (17.27) se transforma en

$$N'_\theta = - \frac{r_0}{\operatorname{sen} \phi} \left[\frac{N'_\phi}{r_1} + q_\phi \right] \quad (17.28)$$

Sustituyendo de (a) y de la Ec. (17.28) en la primera de las Ecs. (17.27) multiplicada por $\operatorname{sen} \phi$, e integrando entre 0 y ϕ , se obtiene la siguiente expresión:

$$N'_\theta = - \frac{1}{2\pi r_0 \operatorname{sen} \phi} \int_0^\phi (q_\theta \operatorname{sen} \phi + q_\phi \cos \phi) (2\pi r_0) r_1 d\phi$$

La integral de esta expresión puede interpretarse como la carga vertical total F aplicada por encima de una latitud ϕ . Por tanto,

$$N'_\phi = - \frac{F}{2\pi r_0 \sin \phi} \quad (17.29)$$

y de la Ec. (17.28),

$$N'_\theta = - \frac{F}{2\pi r_1 \sin^2 \phi} - q_0 \frac{r_0}{\sin \phi}$$

La solución de la teoría de la membrana para una lámina de revolución cargada simétricamente se puede hallar fácilmente sustituyendo el valor F en las Ecuaciones (17.29).

Aplicación de la teoría general al estudio de las láminas. Se ha formulado la teoría general del estudio de las láminas, cuya aplicación es difícil y solo se ha hecho con éxito en un número de casos limitado. Para la discusión de estas soluciones se envía al lector a libros como la «Teoría de placas y láminas», de Timoshenko y Woinowsky-Krieger, y «Flächentragwerke», de Girkman.

Normalmente se usa una técnica de aproximaciones sucesivas para obtener la solución. Primero se obtiene una solución por la teoría de la membrana, que da una primera aproximación de las resultantes de tensiones de membrana, y se calculan los desplazamientos correspondientes. Estos desplazamientos implican ciertos cambios de curvatura, que, a su vez, implican determinados pares de flexión y cortantes radiales. Los cortantes radiales implicarán cambios de las resultantes de tensiones de membrana, con lo que se establece una segunda aproximación para estos esfuerzos. Se pueden continuar los cálculos tantos ciclos como sea necesario para obtener una convergencia suficiente en las soluciones. Estas soluciones finales se podrán producir en la lámina solo si los apoyos proporcionan las fuerzas de borde que implican, lo que en general no sucede, por lo que hay que introducir nuevas fuerzas y pares entre la lámina y sus apoyos para solventar las discrepancias. En las secciones internas en los puntos de discontinuidad de cargas o geométricas, hay que introducir también fuerzas y pares similares, para solventar las discrepancias internas en la continuidad de las deformaciones. Estas fuerzas y pares correctores que hay que aplicar al contorno, o a las secciones interiores, son los más difíciles de calcular, y producen las principales diferencias entre las tensiones obtenidas por la teoría general y las halladas por la teoría simple de la membrana.

17.7 Análisis del comportamiento con pandeo. En el Prólogo se estudiaron distintos tipos de fallos de estructuras, y se hizo notar que el fallo por pandeo es una posibilidad muy peligrosa y puede originar el hundimiento de muchos tipos de estructuras. Por tanto, es muy importante para un ingeniero de estructuras estar capacitado para analizar el comportamiento en pandeo.

La posibilidad de pandeo existe en cualquier pieza comprimida. Puede tomar la forma de pandeo de toda la estructura, o localizado de una barra individual, o de una parte componente, que puede precipitar, o no, el fallo de toda la estructura. *La carga para la que se produce el pandeo depende de la rigidez de la estructura, o parte de la misma, más que de la resistencia del material de que se trata.* Como consecuencia, las intensidades de tensión, si intervienen, lo hacen solo para hallar el punto en que se desea conocer el módulo (o la pendiente) de la curva tensión-deformación. Por tanto, para un material hipotético linealmente elástico con límite elástico infinito, no se considera nunca la intensidad de tensión en las consideraciones del pandeo. Naturalmente, para un material elástico no linealmente, o uno elastoplástico, las tensiones intervienen al definir las características tensión-deformación.

Es interesante observar también que puede producirse el pandeo sin estar sometido el material a esfuerzos de compresión. Por ejemplo, consideremos una columna tubular de sección circular. La fuerza axial para la que pandeará la columna será la misma si se comprime el tubo con cargas axiales uniformemente repartidas aplicadas directamente en sus extremos o si se llenara de agua y se aplicaran las cargas al fluido mediante pistones insertados en cada extremo, de modo que las únicas tensiones introducidas en el tubo fueran tracciones tangenciales.

Fundamentalmente, el análisis del comportamiento al pandeo consiste simplemente en averiguar si la configuración de equilibrio de un sistema es estable o no. *La estabilidad o inestabilidad del sistema depende de la respuesta a la pregunta siguiente: Si se desplaza ligeramente un sistema de su posición de equilibrio, ¿tiende a volver a ella o a continuar desplazándose cuando desaparece la causa de perturbación? Si vuelve, el sistema es estable; si se desplaza más, es inestable.*

Métodos para calcular el comportamiento elástico con pandeo. Se pueden usar varios métodos para obtener la respuesta a la pregunta fundamental planteada más arriba, referente a la estabilidad de la posición de equilibrio. Para simplificar la discusión y los cálculos, consideremos el sistema idealizado de la Fig. 17.11a. Supongamos que la barra comprimida ab no tiene peso y es perfectamente rígida e indeformable, y que el único modo que puede flexar el sistema es alargándose el muelle ac . Inicialmente se supone que el muelle posee las características fuerza-deformación linealmente elásticas¹ de la Fig. 17.11b (aunque más tarde se considerarán las características no lineales representadas en líneas de trazos).

El comportamiento de este sistema al cortante se puede estudiar por uno de los métodos siguientes:

Método I: Método del equilibrio. Se supone que la barra está inicialmente perfectamente vertical y cargada concéntricamente con la fuerza P , de modo que no presente tendencia a girar alrededor del punto b y está en equilibrio en su posición vertical original. Sin embargo, ¿hay algún valor de P (llamado valor crítico y representado por P_{cr}) para el cual la barra estará en equilibrio en otra posición inclinada, hacia la que se inclinará cuando la mueve una causa perturbadora? Si es así, para el equilibrio en la posición inclinada, $\Sigma M_b = 0$. Por tanto, $P\Delta = FL \cos \theta \approx FL$, si θ es pequeño. Pero $F = k\Delta$, por lo que $P\Delta = (k\Delta)L$, o $P = kL$. De aquí que si $P = kL$, la posición inclinada es también una posición posible de equilibrio. Este valor de P es el valor crítico, o sea que $P_{cr} = kL$. En otras palabras, el valor de P_{cr} es independiente de Δ (esto es, de θ) y es el mismo para cualquier posición ligeramente inclinada de la barra ab . Esta solución está representada por la línea horizontal de la Fig. 17.11c. Físicamente, cuando P alcanza el valor P_{cr} , la posición vertical nominal es inestable, porque con esta carga puede estar también en equilibrio la barra en cualquiera de las infinitas posiciones ligeramente inclinadas. Esto es, con P_{cr} el sistema es inestable y es posible el pandeo.

Método II: Método de la energía. Este método considera las variaciones de energía que se producen cuando se desplaza un sistema de su posición nominal de equilibrio hasta otra posición posible cercana. Consideremos nuevamente la barra vertical de la Fig. 17.11a que está nominalmente en equilibrio en esta posición vertical cuando está sometida a una carga centrada P . Supongamos que se gira ligeramente la barra a la otra posición posible definida por θ . Durante este giro, la carga P efectúa un trabajo ΔW_E igual a $P\lambda$ o $PL\theta^2/2$. Además, se almacena en el muelle una energía de deformación ΔW_f de valor $F\Delta/2$ o $k\Delta^2/2$ o $kL^2\theta^2/2$. Si ΔW_f es mayor que ΔW_E , la causa pertur-

¹ El factor de rigidez del muelle k es igual a la fuerza necesaria para tensarle una distancia unidad y tiene unidades de kilogramo por centímetro.

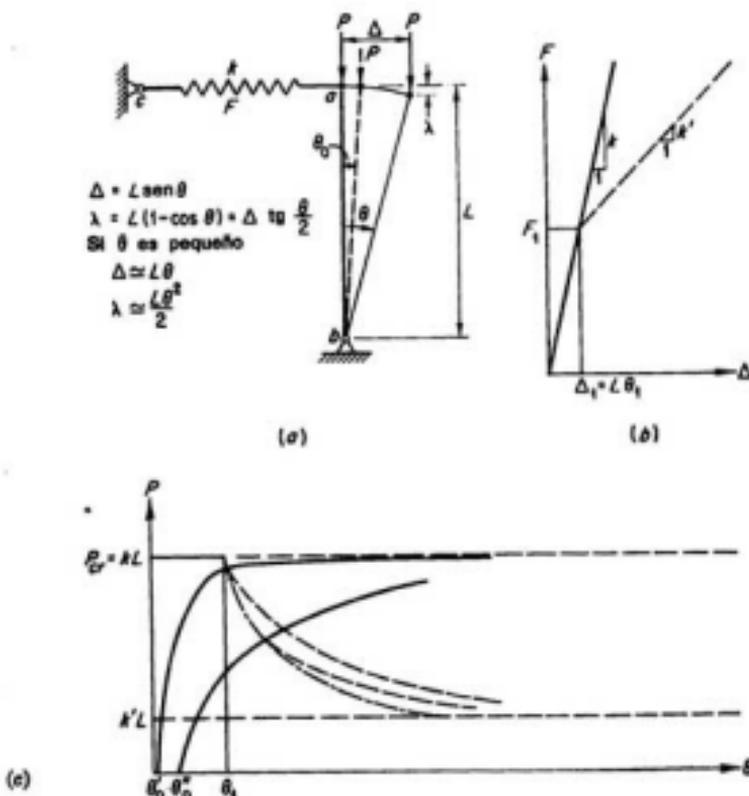


FIG. 17.11. Pandeo de un sistema elástico ideal.

badora tiene que hacer un trabajo *contra* el muelle para llevar al sistema a esta posición; por tanto, cuando se suprime esta perturbación, la energía almacenada en el muelle empujará a la barra hasta su posición original. Si ΔW_1 es menor que ΔW_E , la perturbación trabaja *con* el muelle para evitar que la barra gire cada vez más, y si se suprime, se hundiría el sistema. Si ΔW_1 es igual a ΔW_E , el sistema está en una condición *neutra e indiferente*, en la que se puede desplazar el sistema de su posición vertical sin que la perturbación realice ningún trabajo. Esta es la condición de pandeo que delimita el final de la estabilidad del sistema y el comienzo de la inestabilidad. Por tanto, cuando P es igual a P_{cr} , ΔW_E es igual a ΔW_1 , por lo que $P_{cr}L\theta^2/2 = kL^2\theta^2/2$ y, por consiguiente, $P_{cr} = kL$, lo que comprueba el valor hallado por el método I.

Método III: Método de la curva carga-deformación. Se puede identificar el valor crítico de P correspondiente al pandeo, estudiando simplemente las características de la curva carga-deformación del sistema, cuando se supone que éste tiene alguna ligera imperfección. Por ejemplo, en el caso presente se supone que la barra no está perfectamente vertical inicialmente, sino que tiene una ligera inclinación θ_0 . Sin embargo, en esta posición inicial, el muelle no tiene tensión. Ahora, cuando se aplica P , la barra gira alrededor de la base. Para que esté en equilibrio con una carga dada, $P\Delta = FL$, donde ahora $F = k(\theta - \theta_0)L$. Por tanto, $P = kL(1 - \theta_0/\theta)$. Si se sustituye kL por P_{cr} ,

$P = P_{cr}(1 - \theta_0/\theta)$. Utilizando esta ecuación se puede dibujar la curva carga-deformación de trazo lleno de la Fig. 17.11c. Se observará que, cuando P se aproxima a P_{cr} , θ aumenta indefinidamente. En otras palabras, cuando P se aproxima a P_{cr} , el sistema empieza a perder su capacidad de resistir al giro y es inminente un giro grande (o pandeo).

En las consideraciones anteriores se supone que el muelle es linealmente elástico, con un límite elástico indefinido. Es interesante considerar también el efecto de las características elásticas no lineales del muelle, como las indicadas por la línea de trazos de la Fig. 17.11b, donde se reduce la rigidez a k' cuando la fuerza en el muelle excede de F_1 o $k\Delta_1$. Para tal muelle, las soluciones anteriores son válidas solo hasta el punto en que θ es igual a $(\theta_1 + \theta_0)$, en que la expresión θ_1 es igual a Δ_1/L . La aplicación del método III a este caso conduce a los resultados siguientes: Si $\Delta_0 \leq \Delta \leq (\Delta_0 + \Delta_1)$, o $0 \leq F \leq F_1$, o $\theta_0 \leq \theta \leq (\theta_0 + \theta_1)$,

$$P = kL \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta} \right) \quad (a)$$

de donde, cuando $\theta = (\theta_0 + \theta_1)$,

$$[P]_{\theta_0+\theta_1} = kL \frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1}$$

Si $\Delta \geq (\Delta_0 + \Delta_1)$,

$$F = kL\theta_1 + k'L(\theta - \theta_1 - \theta_0)$$

Pero, para el equilibrio,

$$P\Delta = FL \quad \text{o} \quad P = \frac{F}{\theta}$$

Por tanto, si $\theta \geq (\theta_0 + \theta_1)$,

$$P = \frac{kL\theta_1}{\theta} + k'L \left[1 - \frac{\theta_1 + \theta_0}{\theta} \right] \quad (b)$$

En la Fig. 17.11c se han trazado las curvas correspondientes a las Ecs. (a) y (b) para los valores de θ_0 menores que θ_1 ; θ_0' y θ_1' . Cuando la fuerza del muelle llega a F_1 , esas curvas descienden bruscamente, como se ve en las líneas de trazos, y se hacen asíntóticas a la horizontal correspondiente a $P = k'L$.

Las características no lineales del muelle utilizadas en este problema hipotético, representan bien las características de rigidez de los elementos estructurales reales, que se caracterizan por una zona rígida inicial hasta un cierto límite elástico, por encima del cual disminuye la rigidez notablemente. Los resultados anteriores indican que solo se puede alcanzar la carga crítica kL correspondiente a la rigidez inicial k , si la imperfección θ_0 es pequeña comparada con θ_1 . Para imperfecciones mayores, es peligroso contar con que el sistema soporte más de $k'L$.

Pandeo de columnas. Se puede calcular el pandeo elástico de las estructuras y ele-

* En las revistas y textos, cierto número de autores han expuesto algunos estudios muy valiosos del fenómeno del pandeo, utilizando modelos matemáticos simplificados, como el de la Fig. 17.11. Por ejemplo, D. C. Drucker y E. T. Onat, «On the Concept of Stability of Inelastic Systems», *J. Aeronaut. Sci.*, págs. 543-548, agosto 1954; y F. R. Shanley, «Strength of Materials», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1957.

mentos estructurales por cualquiera de los tres métodos anteriores. Los detalles matemáticos son enojosos, pero los conceptos fundamentales son válidos. Como aclaración, se usará el método I para estudiar las características de pandeo de la columna simple de la Figura 17.12.

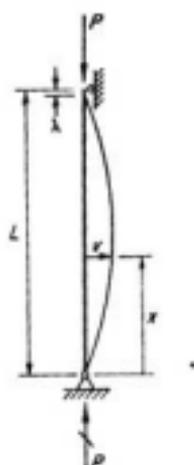


FIG. 17.12. Pandeo de una columna simple.

Esta columna, articulada en los dos extremos, se supone que es una barra perfecta comprimida, homogénea, linealmente elástica, sin curvatura inicial ni excentricidad, y no sometida a ninguna carga lateral. Se supone que está obligada a flexar en el plano del papel. Teóricamente, esta barra sufre solo deformaciones axiales y no flexa. No obstante, en ciertas condiciones, la forma recta puede no ser la única posición deformada que satisfaga las exigencias del equilibrio de la barra. Consideremos la posibilidad de la posición curvada lateralmente representada en la Fig. 17.12. Si la columna ha de estar en equilibrio en esta posición, debe satisfacerse la ecuación diferencial de la curva elástica,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Pv}{EI}$$

Por lo que

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0$$

cuya solución es

$$v = A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

Si se produce esa deformación, tendrán que satisfacerse las condiciones de contorno en a y b :

$$\text{cuando } x = 0, \quad [v]_{x=0} = 0 = A(1) + 0 \quad \therefore A = 0$$

$$\text{cuando } x = L, \quad [v]_{x=L} = 0 = 0 + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}L$$

Para que se satisfaga la última condición, o B o $\text{sen } \sqrt{(P/EI)}L$ deben ser cero. Si B es igual a cero, no será posible la flexión lateral. Pero si $\text{sen } \sqrt{(P/EI)}L = 0$, no tiene por qué ser cero B y puede tener cualquier valor, en cuyo caso

$$v = B \text{sen } \frac{\pi}{L} x$$

En otras palabras, si la carga axial P tiene un valor tal que $\sqrt{(P/EI)}L = \pi$ o si $P = (\pi^2/L^2)EI$, la forma recta de la columna ya no es la única posición de equilibrio, pues con esta carga es posible también una posición curvada lateralmente (o pandeada). A este valor de la carga se le llama carga crítica P_{cr} . A veces se le llama *carga de Euler*, por Leonhard Euler, que desarrolló el primero la teoría del pandeo elástico de las columnas flexibles, hace unos doscientos años.

Si se utilizara la forma pandeada elástica al aplicar el método II, o *método de la energía*, a este problema, se obtendría el mismo valor de la carga de pandeo crítica. Si se supusiera que la columna tenía curvatura inicial, excentricidad o carga lateral, se podría usar el método III para trazar un gráfico de la carga axial en función de la deformación lateral de la columna. Este gráfico mostraría que cuando P tiende a P_{cr} , la deformación lateral crece indefinidamente —indicando inestabilidad o pandeo cuando $P = (\pi^2/L^2)EI$.

En realidad, estas soluciones se basan en la hipótesis del comportamiento linealmente elástico y no son válidas si se excede del límite de proporcionalidad del material. Si las tensiones sobrepasan este límite, se halla que la carga de pandeo P_{cr} de una columna articulada en ambos extremos, cargada concéntricamente, y sin curvatura inicial es $(\pi^2/L^2)EI$, donde E , es el *módulo tangente* (o pendiente de la curva tensión-deformación para la tensión correspondiente a P_{cr}/A). La curva de pandeo (P_{cr}/A en función de L/r)* para esa columna está representada en la Fig. 17.13. También se representan, para comparar, las curvas de una columna en voladizo y de una que está empotrada contra el giro en ambos extremos. Si el material fuese linealmente elástico con un límite de elasticidad infinito, serían válidas las prolongaciones en línea de trazos que se

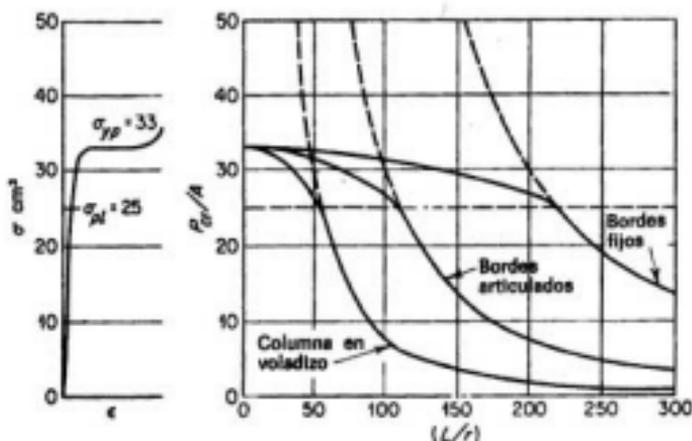


FIG. 17.13. Curvas de pandeo de columnas típicas (sin excentricidad, curvatura inicial u otras imperfecciones).

* En este sentido, r es el radio de giro de la sección transversal y es igual a $(I/A)^{1/2}$.

representan para comparar con las curvas de pandeo correspondientes a la curva tensión-deformación típica del acero de estructuras que se muestra.

17.8 Cálculo de la respuesta dinámica. En el pasado, el proyecto de la mayoría de las estructuras de ingeniería civil estaba determinado por consideraciones de carga estáticas (o prácticamente estáticas). Las cargas dinámicas que intervenían producían un efecto de menor importancia, de forma que se sustituían por una carga estática equivalente, o por un factor de impacto, o por una modificación del coeficiente de seguridad.

En los últimos años ha aumentado considerablemente el interés por un cálculo más preciso del efecto de las cargas dinámicas. Entre otros motivos que han influido están la necesidad de colocar sobre las estructuras maquinarias más pesadas y vehículos que van a velocidades mayores, la construcción de torres y edificios más altos y puentes más largos con hipótesis de cargas de viento más severas e importantes, la necesidad de ejecutar construcciones resistentes a las explosiones y el deseo de conseguir construcciones antisísmicas. El creciente interés en este campo ha estimulado la publicación de muchos trabajos en revistas y cierto número de libros¹.

La respuesta de una estructura a las cargas dinámicas depende de la definición de las cargas, la resistencia de la estructura a la deformación y, cuando intervienen aceleraciones, la masa de la misma. Naturalmente, si los apoyos de la estructura no son inmóviles, su movimiento debe definirse también en función del tiempo.

Uno de los medios mejores para desarrollar una apreciación de la respuesta dinámica, es utilizar un método numérico paso a paso para integrar las ecuaciones diferenciales del movimiento. Estos procedimientos son aplicables en general a cualquier tipo de carga y para la resistencia elástica o elastoplástica, en cuyos casos los métodos matemáticos más clásicos son poco prácticos o imposibles de aplicar. Para los sistemas de varias masas, los procedimientos numéricos paso a paso son laboriosos, pero se pueden adaptar para la utilización de las máquinas y técnicas de cálculo modernas.

Consideremos el sistema simple ideal representado en reposo por las líneas llenas en la Fig. 17.14. Este sistema puede moverse solo con un movimiento de traslación horizontal en el plano del papel. Este cuerpo rígido de peso W , está sujeto por un muelle

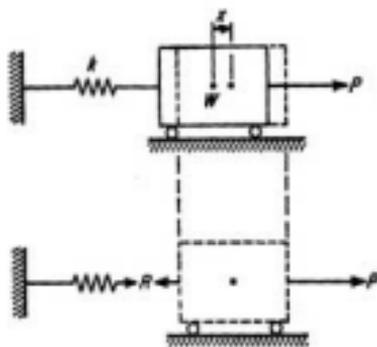


FIG. 17.14. Notación para el procedimiento paso a paso.

¹ Entre los libros recientes que tratan de la dinámica estructural están: S. Timoshenko, «Vibration Problems in Engineering», 3.ª ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1955; G. L. Rogers, «Dynamics of Frame Structures», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959; C. H. Norris, R. J. Hansen, M. J. Holley, Jr., J. M. Biggs, S. Namyt y J. K. Minami, «Structural Design for Dynamic Loads», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1959.

linealmente elástico de rigidez k . No se consideran los efectos de fricción o de amortiguamiento posibles. Consideremos la respuesta dinámica de este sistema a una fuerza dinámica P . La fuerza del muelle kx se designa por R . Si en un instante t_0 se conociera el desplazamiento x_0 , definiendo, por tanto, la fuerza del muelle R_0 , la fuerza de aceleración que actuaba en la masa sería $(P - R_0)$, y la aceleración \ddot{x}_0 en ese instante sería de

$$\ddot{x}_0 = \frac{P - R_0}{W/g}$$

Si se conociera también la velocidad \dot{x}_0 en el instante t_0 y si, durante el intervalo de tiempo siguiente Δt , se supone que la aceleración es constante y de valor \ddot{x}_0 , la velocidad \dot{x}_1 en el extremo de este intervalo (esto es, en el instante $t_0 + \Delta t$) sería

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t$$

Además, el desplazamiento x_1 al final del intervalo sería

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t + \ddot{x}_0 \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

Este desplazamiento x_1 define un nuevo valor R_1 de la fuerza del muelle y de la fuerza de aceleración $(P - R_1)$ en el extremo del intervalo. Se puede repetir el proceso para el siguiente intervalo Δt y predecir la velocidad \dot{x}_2 y el desplazamiento x_2 en el instante $(t_0 + 2\Delta t)$. Por este proceso numérico paso a paso se puede proseguir estudiando el movimiento de la masa definitivamente. Evidentemente, su exactitud depende de la longitud del intervalo de tiempo y del grado de aproximación de la aceleración en él.

La Fig. 17.15 resume el desarrollo paso a paso de la respuesta de este sistema simple a una carga aplicada bruscamente. Supongamos que, en $t = 0$, el sistema no tiene desplazamiento o velocidad. Consideremos la respuesta para una serie de intervalos Δt , cortos comparados con el periodo natural del sistema. No habiendo desplazamiento en $t = 0$, la fuerza del muelle R es 0, y la fuerza de aceleración durante el primer intervalo es P_1 . Cuando el desplazamiento aumenta, R aumenta gradualmente, y la fuerza de aceleración, y, por tanto, la aceleración, disminuyen. Cuando R sobrepasa a P_1 , el sistema comienza a decelerar. A continuación se reduce la velocidad a cero cuando el desplazamiento alcanza su valor máximo de $2P_1/k$. Entonces comienza la masa a rebotar y alcanza eventualmente la velocidad cero y la deformación mínima en su posición de partida original, completando así un ciclo completo de su respuesta periódica. Despreciando el amortiguamiento, la respuesta continúa indefinidamente, repitiendo el primer ciclo de un modo periódico con un periodo igual al del sistema.

Naturalmente, para un sistema elástico simple como éste, es fácil resolver la ecuación diferencial del movimiento para una carga dinámica general P ,

$$P = P_1 f(t)$$

donde P_1 es el valor máximo que alcanza la carga dinámica. Para deducir la ecuación diferencial del movimiento para el sistema simple no amortiguado de la Fig. 17.14, aplicaremos el principio de d'Alembert y añadiremos la fuerza de inercia $\dot{x}W/g$ al esquema de cuerpo libre, representándola en la dirección x negativa. La condición del equilibrio dinámico $\Sigma H = 0$ para el cuerpo aislado es

$$P - kx - \frac{W}{g} \ddot{x} = 0$$

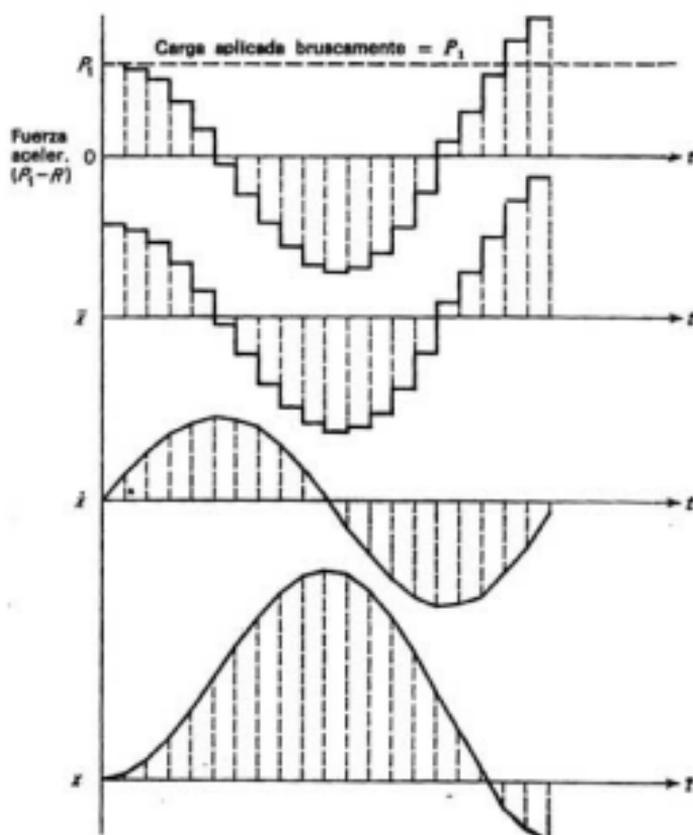


FIG. 17.15. Análisis paso a paso de la respuesta dinámica de un sistema con un grado, a una carga aplicada bruscamente.

que se puede escribir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kg}{W}x = \frac{P_1g}{W}f(t)$$

No se incluye la deducción, pero se puede expresar la solución general de esta ecuación que dé el desplazamiento x en un instante cualquiera t de la forma siguiente:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_{st} \left[\omega \int_0^t f(t') \sin \omega(t - t') dt' \right] \quad (17.30)$$

donde t' = un instante cualquiera intermedio entre 0 y t

x_0 = desplazamiento inicial en $t = 0$

\dot{x}_0 = velocidad inicial en $t = 0$

$x_{st} = P_1/k$ = deformación estática del muelle si se aplica el valor máximo de la carga dinámica, P_1 , como carga estática

$\omega = \sqrt{kg/W}$ = frecuencia natural (circular) del sistema

Obsérvese que si estuviera el sistema en reposo para $t = 0$, x_0 y \dot{x}_0 serían nulas y la Ec. (17.30) se transformaría en

$$x = x_{st}(DLF) \quad (17.31)$$

donde
$$DLF = \omega \int_0^t f(t') \operatorname{sen} \omega(t - t') dt' \quad (17.32)$$

y se llama *factor de carga dinámica*. Este factor es el valor por el que hay que multiplicar x_{st} en un instante t , para obtener el desplazamiento dinámico en este instante de un sistema que estaba inicialmente en reposo.

Se puede calcular el factor de carga dinámica para una carga dada, por la Ec. (17.32). Es una función del tiempo (esto es, varía con el tiempo). Generalmente, es más interesante el valor máximo del factor de carga dinámica DLF_{max} , pues este valor define el desplazamiento máximo del sistema. A continuación se resumen los resultados para tres cargas dinámicas típicas:

a) *Carga aplicada bruscamente*

$$0 \leq t \quad P = P_1 \quad \therefore f(t) = 1$$

$$DLF = 1 - \cos \omega t \quad DLF_{max} = 2$$

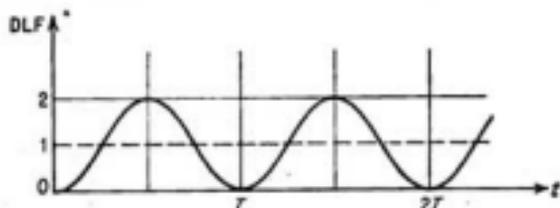
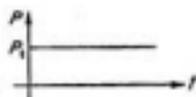


FIG. 17.16. Factor de carga dinámica para carga aplicada bruscamente.

b) *Carga aplicada gradualmente*

$$0 \leq t \leq t_1 \quad P = P_1 \frac{t}{t_1} \quad \therefore f(t) = \frac{t}{t_1}$$

$$t_1 \leq t \quad P = P_1 \quad \therefore f(t) = 1$$

$$0 \leq t \leq t_1 \quad DLF = \frac{t}{t_1} - \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega t_1} = \frac{t}{t_1} - \frac{T}{2\pi t_1} \operatorname{sen} \omega t$$

$$t_1 \leq t \quad DLF = 1 + \frac{T}{2\pi t_1} [\operatorname{sen} \omega(t - t_1) - \operatorname{sen} \omega t]$$

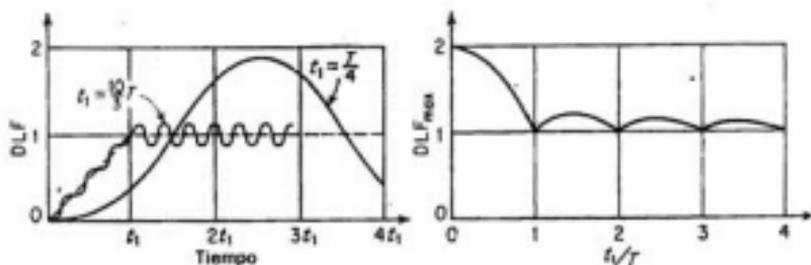
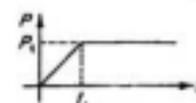


FIG. 17.17. Factor de carga dinámica para carga aplicada progresivamente.

c) Carga de impulso rectangular

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq t_1 & \quad P = P_1 & \quad \therefore f(t) = 1 \\
 t_1 \leq t & \quad P = 0 & \quad \therefore f(t) = 0 \\
 0 \leq t \leq t_1 & \quad DLF = 1 - \cos \omega t \\
 t_1 \leq t & \quad DLF = 2 \operatorname{sen} \frac{\omega t_1}{2} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{t_1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

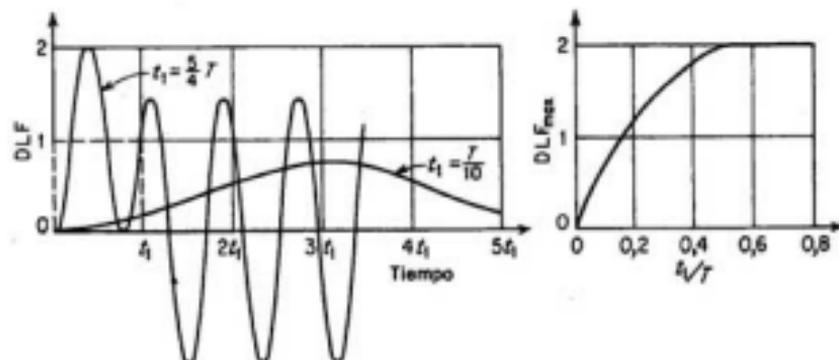
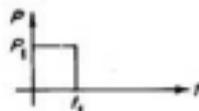


FIG. 17.18. Factor de carga dinámica para carga de impulso rectangular.

Para estudiar el comportamiento dinámico de una estructura hay que poder definir su posición en cada instante. Si se puede definir la posición de una estructura en un instante dado por un número, o una coordenada, se dice que tiene 1 grado de libertad. Un ejemplo de este caso es el sistema simple considerado antes. El sistema de dos masas de la Fig. 17.19b representa una estructura con 2 grados de libertad, pues se necesitan dos distancias x_1 y x_2 para definir la posición del sistema en cada instante. La viga representada en la Fig. 17.19c tiene un número infinito de grados de libertad, porque la definición de su posición exige enumerar un número infinito de ordenadas verticales de su curva de deformación.

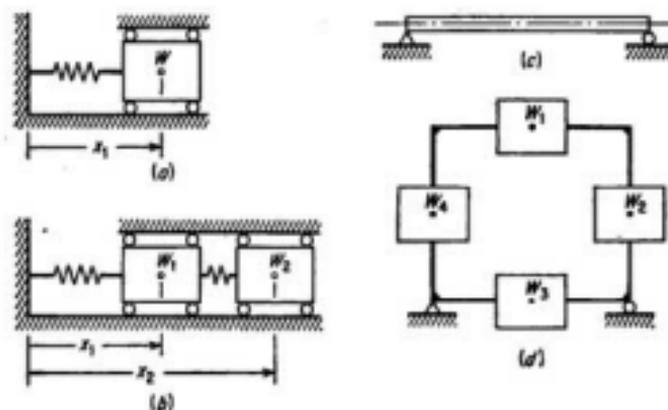


FIG. 17.19. Grado de libertad de sistemas típicos.

Consideremos el marco rígido de la Fig. 17.19d, que está obligado a deformar en el plano del papel. Supongamos que el peso de las barras es pequeño comparado con las masas representadas, que se suponen concentradas en un punto, en el centro de dichas barras. También supondremos que el giro de cada masa es pequeño, por lo que puede despreciarse. Consideremos solo el efecto de deformación por flexión de la estructura. Con estas hipótesis, cinco desplazamientos (desplazamiento horizontal de las masas 1, 2 y 4, y vertical de las 1 y 3) definen completamente la configuración del marco, por lo que se dice que la estructura tiene 5 *grados de libertad*.

No se ampliará el presente estudio para que comprenda el sistema con múltiples grados de libertad representativo de las estructuras reales. El lector deberá orientarse para este estudio en las referencias dadas. Se verá que puede hallarse un método general para calcular la respuesta dinámica de los sistemas elásticos con múltiples grados de libertad, que utiliza muchas de las ideas fundamentales estudiadas antes para el sistema simple de 1 grado. Este método exige determinar primero la frecuencia propia y la forma deformada de cada uno de los *modos propios de vibración* del sistema, habiendo tantos modos como grados de libertad del sistema. La respuesta dinámica a una carga dinámica dada se halla ya, superponiendo los efectos de cada uno de los modos propios de vibración. La contribución de cada modo depende del *factor de participación* y del *factor de carga dinámica* de ese modo. El factor de participación depende de la forma característica del modo en comparación con la distribución de la carga dinámica en la estructura. El factor de carga dinámica depende de la frecuencia propia del modo y la variación con el tiempo de la carga dinámica.

Análisis de modelos de estructuras

18.1 Aplicación del análisis de modelos. En el campo de la ingeniería de estructuras, en los últimos cuarenta años ha aumentado considerablemente el uso de modelos. Hoy, el análisis de modelos de estructuras es extraordinariamente importante, no solo como un instrumento de investigación, sino que constituye también un suplemento importante de los métodos matemáticos utilizados en el proyecto de las mismas. Los ingenieros europeos, como Nervi, Oberti, Torroja y Rocha, usan muchas veces modelos para llegar a soluciones en sus proyectos. Quizá el empleo más conocido de modelos en este último aspecto ha tenido lugar en relación con el proyecto de los puentes colgantes importantes construidos los últimos años. Otra evidencia de la importancia del análisis de modelos en el campo del proyecto de estructuras la proporcionan los laboratorios excelentemente equipados que han montado diversas oficinas estatales. Hay también muchas instituciones académicas que poseen buenos laboratorios de análisis de modelos montados principalmente para la enseñanza y la investigación.

El análisis de modelos de problemas estructurales que se encuentran en la investigación o en el proyecto se puede utilizar por alguna de las tres razones siguientes: 1) porque el análisis matemático del problema es virtualmente imposible; 2) porque, aunque sea posible, es tan pesado y complicado que el análisis de modelos representa un método mucho más corto y ventajoso; 3) porque la importancia del problema es tal que justifica la comprobación de la solución matemática con ensayos de modelos. Se puede estudiar la distribución de tensiones en una barra de forma irregular utilizando un modelo, por la primera razón; un ensayo de un modelo puede servir de base para el estudio de un pórtico de edificio complicado o de una cubierta de lámina, por la segunda razón; el estudio de un modelo del proyecto propuesto para un puente colgante puede entrar en el tercer caso.

El objeto del ensayo de un modelo estructural se puede incluir generalmente en una de las cuatro categorías siguientes: 1) análisis de tensiones del modelo, 2) determinación de la distribución de tensiones, 3) determinación de las cargas crítica o de pandeo, 4) análisis de las características de los modos propios de vibración. Tal como se usará en este capítulo, el *análisis de tensiones* significa la determinación de la fuerza axial, el cortante y el momento flector en una sección cualquiera del modelo, mientras que *distribución de tensiones* es el término usado para designar la manera en que estas tensiones varían en una sección de una barra.

18.2 Métodos típicos del análisis de tensiones de modelos. Hay ciertos métodos que se utilizan normalmente para el análisis de tensiones de un modelo, entre los cuales está el *método del alambre de latón*, el *método de Beggs*, el *defórmetero de Eney*, el *Gottschalk Continostat*, el *indicador de momentos* y el *defórmetero de momentos*. En el Capítulo 19 se estudian todos estos métodos. También se usa en pequeña escala el *método*

fotoelástico para el análisis de tensiones de modelos estructurales, pero su aplicación principal es en la resolución de problemas de distribución de tensiones.

18.3 Proyecto de modelos. Cuando se usa un modelo a escala reducida para estudiar una estructura real, es necesario, naturalmente, que el modelo esté proyectado de modo que se pueda deducir el comportamiento del prototipo a escala natural del correspondiente al modelo. Para conseguirlo, las dimensiones del modelo y las características del material utilizado en su construcción deben guardar ciertas proporciones con las dimensiones y material del prototipo. *Los principios que rigen la relación entre un modelo y su prototipo se llaman principios de semejanza.* Algunos de estos principios regulan el proyecto del modelo, y otros establecen los medios de extrapolar los resultados del ensayo del modelo para predecir las cualidades del prototipo.

En el Cap. 19 se estudia brevemente la determinación de los principios de semejanza¹.

Es de gran importancia la elección del material apropiado para la construcción del modelo. No solo debe ser tal que su acción estructural sea apropiada al uso, sino que hay que considerar también la facilidad con que pueda fabricarse un modelo pequeño. A menudo se emplea el acero, y si es suficientemente grande para colocar apropiadamente la armadura, se podrá usar el hormigón armado.

Muchas veces se prefiere utilizar un material que tenga un módulo de elasticidad más bajo que el del prototipo, para que se puedan obtener deformaciones suficientemente grandes para medirlas con precisión sin tener que aplicar fuerzas demasiado grandes. Por esta razón es conveniente usar muchas veces el duraluminio o el latón en lugar del acero. El latón tiene además la ventaja de poderse soldar fácilmente, lo que facilita la construcción del modelo.

Uno de los materiales más empleados en la construcción de los modelos utilizados en los métodos de análisis de tensiones más corrientes es el celuloide, cuyas propiedades se estudiarán con más detalle en la próxima sección.

La elección de la escala de un modelo depende de muchos factores, entre los cuales algunos de los más importantes son las propiedades de los materiales disponibles para su construcción, la capacidad del equipo a emplear para cargarle, las dimensiones de los instrumentos de ensayo, las limitaciones de la maquinaria para fabricarle y los fondos y el tiempo disponibles para el programa experimental. Cuando se reduce la escala, se hace más difícil conservar la semejanza geométrica y es físicamente imposible la reproducción de todos los detalles del prototipo. Indudablemente, algunos detalles carecen de importancia y se pueden omitir en el modelo, pero en otros casos los detalles de las uniones tienen una gran influencia en el resultado y hay que usar una escala suficientemente grande para que la acción estructural del modelo sea la apropiada.

18.4 Propiedades de los materiales de los modelos. Las propiedades de los materiales de modelos, como acero, latón, duraluminio, madera y hormigón, son bien conocidas y no necesitan detallarse aquí. Para los modelos estructurales se usa mucho el celuloide y tiene, en común con algunos otros materiales plásticos, algunas propiedades que no son muy conocidas y necesitan más explicación.

El celuloide (o nitrato de celulosa) tiene algunas propiedades como material de modelos muy ventajosas, pero también posee algunas que son muy desfavorables. Se trabaja muy fácilmente, tiene un módulo de elasticidad bajo, es homogéneo y se suelda fácilmente con acetona. Por otro lado, sus propiedades elásticas varían considerable-

¹ Ver también R. D. Conrad, «Modelos estructurales». Parte I: Teoría, *U. S. Navy Dept., Bur. Construction and Repair, C and R Bull.* 13, 1938; G. E. Beggs, R. E. Davis y H. E. Davis, «Text on Structural Models of Proposed San Francisco-Oakland Suspension Bridges», Publicaciones de la Universidad de Carolina, Berkeley, 1933.

mente con la edad, temperatura y humedad. Más grave todavía, el celuloide va cediendo bajo una carga constante; esto es, si se aplica una carga, aproximadamente el 85 por 100 de la deformación se produce en unos pocos segundos, mientras que el 15 por 100 restante lo hace más lentamente, por lo que es necesario esperar un tiempo apreciable, alrededor de los quince minutos, antes de que se complete prácticamente el movimiento. Aun entonces, todavía pueden producirse pequeños movimientos.

Este fenómeno se puede ver más fácilmente considerando la Fig. 18.1. Supongamos que se cuelga un peso W en la barra de celuloide representada. Casi instantáneamente, la barra sufrirá aproximadamente el 85 por 100 de su alargamiento total, pero el 15 por 100 restante se producirá gradualmente, como se ve en la Fig. 18.1b. Si la barra se carga con un peso $2W$, el alargamiento variará con el tiempo, como se representa también en la Fig. 18.1b. El alargamiento que se produce cierto tiempo después de la carga, como $t = 1, 2, 5, 10$, etc., se puede leer en las curvas de la Fig. 18.1b para las diversas cargas $W, 2W, 3W$, etc. Si se dibujan estos alargamientos en función de las cargas, como en la Fig. 18.1c, se ve que todos los medidos un minuto después de cargar están prácticamente en una recta. Lo mismo es cierto para los alargamientos medidos en los tiem-

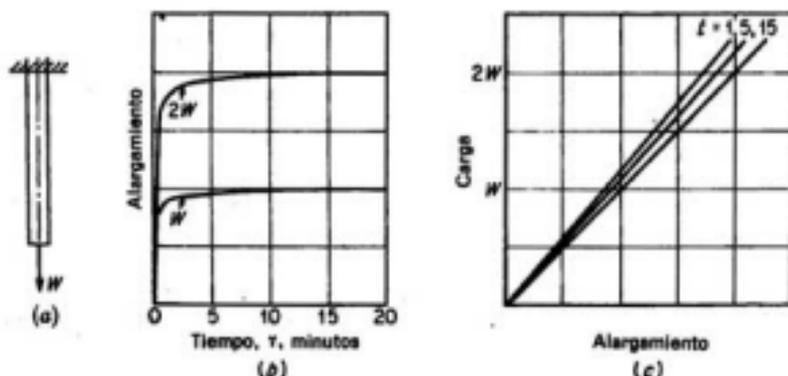


FIG. 18.1. Cedimiento del celuloide.

pos $t = 2, 5, 10$, etc. Todas estas rectas pasan por el origen. La última curva refleja una característica muy importante del comportamiento del celuloide: en cualquier instante después de cargar, el alargamiento instantáneo (deformación) es directamente proporcional a la carga (o la tensión); esto es, en cada instante el material sigue la ley de Hooke y tiene un módulo de elasticidad instantáneo E_t . El efecto de este cedimiento o deformación por fluencia es reducir este valor instantáneo del módulo con el tiempo.

Es extraordinariamente importante que el cedimiento del celuloide tenga esta característica, pues de otro modo disminuiría la utilidad del material para los modelos de estructuras. En vista del cedimiento, si se aplica una carga W constante en el extremo de una viga en voladizo, la elástica toma progresivamente distintas posiciones al aumentar el tiempo transcurrido desde la carga, como se ve en la Fig. 18.2a. Evidentemente, después de unos quince minutos, el grado de cedimiento es tan pequeño que se puede considerar que la viga ha llegado al reposo. Sin embargo, supongamos que se introduce una deformación fija Δ_0 en el extremo de la viga, como se muestra en la Fig. 18.2b. La fuerza P , aplicada a la viga por el pasador que mantiene fija esta deformación en b , disminuye con el tiempo debido al cedimiento y el descenso consiguiente del módulo instantáneo E_t . Como, en un instante dado, E_t no varía con la tensión y es constante para

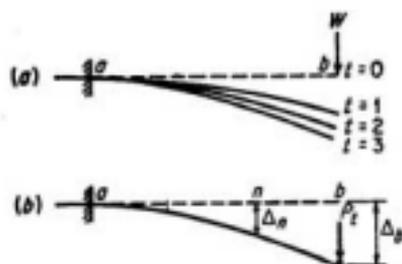


FIG. 18.2. Voladizo de celuloide sometido a (a) carga constante, (b) desplazamiento constante.

toda la viga, la deformación en el punto b se puede expresar por $\Delta_b = K_b(P_t/E_t)$, donde K_b es una constante que depende solo de las dimensiones de la viga. Por tanto, $P_t/E_t = \Delta_b/K_b = C$, constante que no varía con el tiempo. La deformación en un punto cualquiera n se puede expresar por $\Delta_n = K_n(P_t/E_t) = K_n C$, también constante e independiente del tiempo, pues K_n es una constante que solo depende de las dimensiones de la viga y la situación del punto n . Es evidente, por tanto, que no solo permanece fijo en posición el extremo del voladizo, sino también toda la elástica de la viga. Se puede deducir, pues, que la posición deformada de un modelo de celuloide no varía con el tiempo, si se le aplica una deformación fija en lugar de una carga constante.

18.5 Empleo de la balanza de resorte para evitar el cedimiento. Se ha visto en la sección anterior que la deformación de un modelo de celuloide no varía con el tiempo si se introduce una deformación fija en uno de sus puntos. Sin embargo, a causa del cedimiento, el módulo efectivo del celuloide varía con el tiempo, por lo que las fuerzas exteriores y las tensiones internas varían con él. Así, es difícil interpretar las deformaciones y flechas, aun cuando no varían con el tiempo y pueden medirse sin dificultad. En otras palabras, de las deformaciones medidas no podemos deducir sencillamente

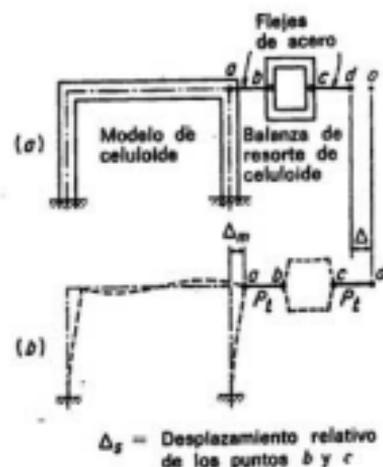


FIG. 18.3. Empleo de la balanza de resorte de celuloide.

que una cierta carga producirá ciertas tensiones en el modelo —todo lo que sabemos es que alguna carga desconocida produce ciertas deformaciones y flexiones.

Sin embargo, mediante el empleo de la llamada «balanza de resortes», podemos soslayar esta dificultad e interpretar las medidas de las deformaciones y flexiones. Esas balanzas se proyectan en gran número de formas diferentes, según el problema a tratar. Supongamos, por ejemplo, que queremos analizar el modelo en celuloide del pórtico rígido representado en la Fig. 18.3, sometido a una fuerza horizontal H en lo alto del pilar derecho. Para ello, se puede conectar el modelo a una balanza, como se ve en la Fig. 18.3a. Luego, tirando del punto d hacia la derecha, se puede aplicar un desplazamiento horizontal Δ al sistema formado por modelo y balanza.

En la hipótesis de que se puedan considerar los flejes ab y cd como infinitamente rígidos en comparación con el modelo de celuloide y la balanza de resorte, parte de esta deformación total se introduce en el modelo y el resto en la balanza. Así,

$$\Delta = \Delta_m + \Delta_s \quad (a)$$

Si se hubieran hecho modelo y balanza de la misma pieza de celuloide, sería legítimo suponer que el modelo instantáneo E_t sería el mismo para ambos. Considerando que el valor instantáneo de la tracción en los dos flejes es el mismo, e igual a P_t , y que, por tanto, la fuerza de deformación en modelo y balanza es también la misma e igual a P_t , podemos expresar los desplazamientos Δ_m y Δ_s por:

$$\Delta_m = K_m \frac{P_t}{E_t} \quad (b)$$

$$\Delta_s = K_s \frac{P_t}{E_t} \quad (c)$$

donde K_m y K_s son constantes, cuyo valor depende solo de la geometría y dimensiones del modelo y la balanza, respectivamente.

Sustituyendo en la Ec. (a) de las (b) y (c), hallamos que

$$\frac{P_t}{E_t} = \frac{\Delta}{K_m + K_s} \quad (d)$$

y deducimos que la relación de P_t a E_t permanece constante y no varía con el tiempo. En otras palabras, mientras que P_t y E_t varían con el tiempo, mantienen siempre una relación constante entre sí. Sustituyendo ahora de la Ec. (d) en las (b) y (c), hallamos que

$$\Delta_m = \frac{K_m \Delta}{K_m + K_s} \quad (e)$$

$$\Delta_s = \frac{K_s \Delta}{K_m + K_s} \quad (f)$$

Como los segundos miembros de estas ecuaciones no contienen más que constantes que no varían con el tiempo, Δ_m y Δ_s permanecen constantes. En otras palabras, uti-

lizando de este modo una balanza de resorte e introduciendo un desplazamiento fijo Δ en el sistema constituido por modelo y balanza, producimos una deformación de los dos que permanece constante en el tiempo.

Supongamos que se ha deformado el modelo de este modo y que se han medido las deformaciones resultantes, y que queremos interpretar esas deformaciones para obtener las tensiones en el modelo debidas a una fuerza horizontal H . Como las tensiones en el modelo varían con el tiempo, podemos expresar su valor instantáneo, σ_t , en función de E , y su correspondiente deformación e . Así,

$$\sigma_t = Ee \quad (g)$$

De la Ec. (c),

$$E_t = \frac{K_s}{\Delta_s} P_t \quad (h)$$

Por tanto,

$$\sigma_t = \frac{K_s}{\Delta_s} e P_t \quad (i)$$

Supongamos que se ha calculado, o determinado previamente, la constante K_s de la balanza de resorte por un ensayo de calibrado. Por tanto, se ha expresado la tensión σ_t en función de la constante conocida K_s , las cantidades e y Δ_s , y el valor de P_t , desconocido. Asignando valores a P_t , se obtienen las tensiones correspondientes. Si $P_t = H$, se halla que la tensión correspondiente σ_H es

$$\sigma_H = \frac{K_s e}{\Delta_s} H \quad (j)$$

De este modo, se puede interpretar que las medidas de las deformaciones dan las tensiones en función de una fuerza horizontal H .

En las secciones siguientes se estudia con más detalle el uso de la balanza de resorte. También se estudiará más adelante la determinación de la constante de la balanza por calibrado. El objeto del presente estudio es simplemente introducir la idea de la balanza e indicar cómo se usa para evitar las dificultades inherentes al cedimiento del celuloide.

18.6 Planteamiento del análisis de modelos. Es difícil, si no imposible, dar una lista completa de instrucciones para el planteamiento del análisis de modelos para todos y cada uno de los problemas que se pueden encontrar. Sin embargo, hay ciertos factores que son más o menos comunes a la mayoría de tales problemas, por lo que conviene estudiarlos.

El primer factor a considerar es el objeto del análisis de modelos que se propone. Si se utiliza éste para comprobar el proyecto de una estructura real, hay que establecer los principios de semejanza para el problema dado y se observarán tan estrechamente como sea posible y práctico, al proyectar y construir el modelo. En contraste con este empleo, está el caso en que se usa el modelo para desarrollar o estudiar la teoría matemática para un cierto tipo de problema. En estos casos se puede considerar el modelo como una estructura real de tamaño pequeño, para la que se pueden calcular los resultados matemáticos y compararlos con los experimentales. En otras palabras, modelo y prototipo son sinónimos y la semejanza no es un factor. Cuando se les utiliza de esta manera, se elige cierto número de modelos diferentes, de modo que varíen las di-

mensiones relativas de los distintos elementos lo suficiente para cubrir todo el campo que se puede encontrar en las estructuras de tamaño grande de este tipo.

El paso siguiente, al plantear un estudio de modelos, es elegir el método más apropiado de análisis para el problema particular de que se trata. Muchas veces esta elección viene limitada por factores como la disponibilidad de equipo y material de modelos apropiado, o la experiencia del personal de laboratorio. Suponiendo que no existen tales limitaciones, se puede elegir el método de análisis a base de las ventajas e inconvenientes de los distintos métodos aplicables al problema considerado.

Una vez elegido el método, se establecen las dimensiones límites del modelo. Para aclarar cómo se hace esto, supongamos que se ha decidido utilizar el método de Beggs para el análisis de tensiones de un problema dado. Primeramente, la anchura del modelo, en cualquier punto en que haya que acoplar el calibrador del deformómetro, no debe exceder de $\frac{3}{4}$ de pulgada (19 mm), que es la capacidad normal de la mordaza. Por otro lado, es conveniente que la anchura mínima no sea inferior a 5 mm en ningún punto del modelo, debido a la tolerancia del trabajo admisible al construir los modelos de celuloide, que pueden acabarse con una tolerancia de $\pm 0,05$ mm. Si la anchura de una barra es menor de 5 mm, la tolerancia permitirá una variación del momento de inercia de más del ± 2 por 100 , que es aproximadamente el máximo admisible. La escala de longitudes y el espesor de las barras se elegirán de modo que el modelo no sea ni demasiado rígido ni demasiado flexible. Si es demasiado rígido, los muelles del calibrador del deformómetro no tendrán suficiente fuerza para deformarlo. Si es demasiado flexible, pueden pandear algunas de las barras comprimidas.

Al establecer las dimensiones límites de cualquier modelo, intervienen factores semejantes. Hay que prestar una cuidadosa atención a las limitaciones impuestas por los métodos de medida de deformaciones propuestos, o por la técnica a usar para cargar o deformar el modelo. Naturalmente, cuanto más experiencia se tiene, es más fácil tomar una decisión.

Al plantear el estudio de un modelo, muchas veces no se tiene en cuenta el hecho de que la mayoría de los estudios para toma de datos se pueden llevar a cabo con modelos relativamente sencillos. Los complicados y caros son impresionantes, pero no conducen necesariamente a resultados mejores. Si aun con todo parece necesario hacer uso de ellos, se precederá el estudio con otros sobre modelos simplificados, para estar seguro de que el modelo y método propuestos darán resultado satisfactorio.

18.7 Interpretación de los resultados de los modelos. El primer paso para interpretar los resultados del modelo tiene lugar cuando se han medido y anotado los datos experimentales. Se estudiarán continuamente los datos según se van acumulando, asegurándose de que los de los ensayos repetidos están de acuerdo, comprobando que las medidas de un punto a otro varían en un orden y una forma razonable, tomando precauciones para ver que se conservan las técnicas y las condiciones de ensayo constantes, etc. De este modo, si se obtienen datos dudosos o inesperados, se pueden comprobar las medidas antes de modificar el montaje del ensayo. A veces es útil hacer gráficos groseros según se obtienen los datos para «localizar» rápidamente cualquier medida que no concuerde.

Después de estudiar los datos del ensayo y calculado los resultados del mismo, se lleva la información a un gráfico o a una tabla, de modo que se pueda apreciar si son razonables. El mejor modo de juzgar los resultados es, evidentemente, aplicar cualquier comprobación física. Por ejemplo, en cualquier problema estático, los resultados del ensayo deben satisfacer las leyes del equilibrio estático: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$. Naturalmente, se pueden aplicar las comprobaciones estáticas a todo el modelo o a una parte de él. Tales comprobaciones son extraordinariamente útiles. Quizá no haya

modo mejor de juzgar la fidelidad de los resultados del modelo para un problema estático.

Muchas veces es difícil cargar un modelo como se desea. Por ejemplo, supongamos que se estudia el modelo de la Fig. 18.4 para una carga vertical, por medio de un indicador de momentos. Para ello, se coloca el dispositivo para producir la deformación,

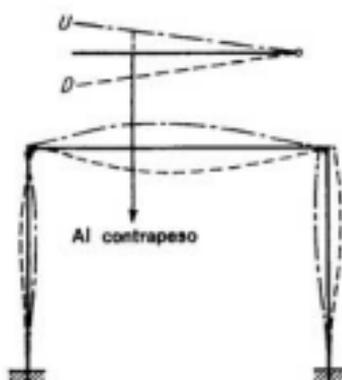


FIG. 18.4. Imperfecciones en la disposición de la carga.

como se indica. Los resultados del modelo indicarán con qué éxito conseguimos aplicar la carga vertical. Supongamos que los nudos están en equilibrio bajo los momentos extremos experimentales en las barras, pero que los cortantes en los pilares, calculados por la estática para estos momentos extremos, no son iguales y opuestos. Esto indica que la carga que se aplicó realmente al modelo tiene una componente horizontal así como una vertical. Para corregir los resultados de este error de carga, estudiamos ahora el modelo para una carga horizontal. Luego, utilizando esta información, podemos ajustar los valores del primer ensayo para suprimir el efecto de la componente horizontal no deseada de la carga. De esta manera se pueden usar muchas veces las leyes de la estática para ayudarse a corregir el efecto de los errores de carga.

Cuando hay que extrapolar los resultados obtenidos de un modelo para predecir el comportamiento de su prototipo, hay que cumplir los principios de semejanza al proyectar, construir y ensayar el modelo. Raramente se pueden encontrar exactamente las exigencias de estos principios, y en la mayoría de los casos prácticos, el comportamiento de un modelo diferirá en cierto grado de su prototipo. Se define el efecto de escala como el grado en que no se cumple en la estructura a tamaño natural una predicción hecha del ensayo de un modelo. Este efecto puede obedecer a inexactitudes inevitables en las condiciones del ensayo. Cuando la escala de un modelo es reducida, es imposible reproducir todos los detalles del prototipo, y esa eliminación contribuye también al efecto. En este caso, la perfección de la mano de obra puede contribuir a reducir estos resultados al mínimo.

Es evidente que el efecto de escala puede provenir de gran variedad de causas, algunas de las cuales son incontrolables. Hay que ser siempre desconfiado. Si el objeto del ensayo es proporcionar una indicación precisa del comportamiento a escala natural, hay que construir modelos semejantes a distintas escalas, y ensayarlos determinando las leyes del comportamiento empíricamente a partir de los resultados de la serie de ensayos.

Métodos de modelos de análisis de tensiones

19.1 Generalidades. Uno de los usos más frecuentes de los modelos de estructuras es para obtener el análisis de tensiones del modelo de una estructura estáticamente indeterminada. Se han desarrollado numerosos métodos¹ y técnicas para este objeto. En algunos de ellos se obtienen los resultados buscados cargando el modelo del mismo modo que el prototipo, con lo que la deformación elástica es semejante para los dos, y las medidas de las deformaciones conducen a los resultados. A este método se le llama *método directo de análisis de tensiones*. Generalmente, el estudio de modelos de puentes colgantes se hace de este modo; también se usa en forma directa el indicador de momentos.

En contraste con los métodos directos, están los métodos en los cuales se carga el modelo en una forma que no guarda relación directa con la carga real del prototipo. Tales métodos se llaman *métodos indirectos*. Generalmente exigen hallar primero las líneas de influencia del modelo, extrapolando los resultados para el prototipo, pudiendo calcularse las tensiones producidas en éste para las hipótesis de carga dadas, a partir de las líneas de influencia extrapoladas. Los métodos que usan el defórmeter de Beggs y el defórmeter de momentos, son ejemplos de métodos indirectos de análisis de modelos.

19.2 Teoría de algunos métodos indirectos. Algunos de los métodos indirectos de modelos de análisis de tensiones, no son más que distintas técnicas experimentales de aplicación del principio de Müller-Breslau dado en la Sec. 14.3. Ejemplos de estos métodos son el de la regla flexible, el del alambre de latón, el de Beggs y el Gottschalk Continostat.

En el caso general de un elemento de tensión cualquiera X_a , se puede enunciar matemáticamente este principio por la ecuación

$$X_a = - \frac{\Delta_{na}(1)}{\Delta_{aa}} \quad (19.1)$$

¹ C. B. McCullough y E. S. Thayer, «Elastic Arch Bridges», cap. VII, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1931; J. B. Wilbur, Structural Analysis Laboratory Research, *Man. Inst. Tech., Dept. Civil Sanitary Eng.*, Ser. 65, 1938, Ser. 68, 1939, Ser. 73, 1940, Ser. 80, 1941; C. H. Norris, «Model Analysis of Structures», *Exptl. Stress Analysis*, vol. 1, núm. 2, julio 1944; J. B. Wilbur y C. H. Norris, *Model Analysis of Structures*, «Handbook of Experimental Stress Analysis», cap. 15, John Wiley & Sons, Inc., 1950.

Es importante observar el criterio de signos en esta ecuación, es decir: X_2 es positiva cuando tiene el mismo sentido que la deformación Δ_{22} introducida, y Δ_{22} es positiva cuando tiene el mismo sentido que la carga unidad aplicada, cuya influencia dan las ordenadas de la línea de influencia. Se observará, además, que X_2 puede representar una fuerza o un par. Si X_2 es una fuerza, la Δ_{22} correspondiente es una deformación lineal; pero si es un par, es una deformación angular.

De acuerdo con el principio de Müller-Breslau, se puede obtener experimentalmente la línea de influencia de cualquier elemento de reacción X_2 aplicando el procedimiento siguiente: Se hace un modelo de la estructura y se suprime, provisionalmente, la limitación del apoyo que proporciona este elemento de reacción al modelo. Luego se introduce un desplazamiento Δ_{22} en la dirección de la limitación suprimida, lo que deformará al modelo según la forma de la línea de influencia del elemento de reacción X_2 . Para obtener la magnitud absoluta de una ordenada cualquiera, se mide la deformación Δ_{22} producida en ese punto y se divide por el desplazamiento Δ_{22} introducido. Como se puede introducir cualquier desplazamiento constante Δ_{22} apropiado y no interviene en los cálculos la fuerza necesaria para producir este desplazamiento, se pueden obtener las líneas de influencia de modelos de celuloide de este modo, si se desea, sin encontrar ninguna dificultad a causa del cedimiento.

19.3 Instrumentos de medida de las deformaciones. Prácticamente todos los métodos de modelos de análisis de tensiones exigen medir deformaciones lineales de los mismos. Estas deformaciones se suelen medir por uno de los métodos siguientes: escala metálica o papel cuadrículado, calibrador de cuadrante, tambor micrométrico, o microscopio micrométrico.

Si las deformaciones de un modelo son relativamente grandes, no hay que medirlas por métodos precisos. En estos casos se puede montar una escala de acero graduada en medios milímetros, o un papel milimetrado ordinario junto al modelo, midiendo las deformaciones con la ayuda de lentes de aumento.

Cuando las deformaciones son pequeñas, hay que usar un método de medida, o varios de ellos, más precisos. Se pueden usar calibradores de cuadrante graduados en centésimas de milímetro. Sin embargo, estos calibradores tienen el inconveniente de que el muelle unido al émbolo aplica suficiente fuerza para variar las deformaciones de un modelo flexible en una cantidad apreciable. En los casos en que por esta razón no se puede usar un calibrador de cuadrante, será necesario utilizar un micrómetro o un microscopio.

El principal inconveniente para usar un micrómetro es la dificultad de establecer el punto de contacto exacto entre el modelo y el micrómetro. Se puede evitar esta dificultad utilizando algún tipo de indicador de contacto. El tipo más sencillo es un sistema de batería y lámpara en el que el modelo y el micrómetro forman parte del circuito y el micrómetro actúa como interruptor que cierra el circuito haciendo contacto con el modelo. Se ha propuesto un indicador de contacto mucho más perfeccionado, que utiliza un tubo de radio 6E5 «ojo mágico»¹, cuyo esquema está representado en la Fig. 19.1. En este dispositivo se conectan los contactos del modelo y el micrómetro al circuito de rejilla del tubo, por lo que al juntarse se ilumina el ojo mágico. Es muy sensible y manifiesta el contacto entre superficies de acero pulidas hasta una diezmilésima de milímetro.

Teniendo todo en cuenta, quizá sea el microscopio micrométrico el instrumento más útil para medir las deformaciones de modelos. El tipo de microscopio que proporciona el defórmeter de Beggs es muy conveniente. En la Fig. 19.2 se muestra el campo de vi-

¹ B. Mills, «A Sensitive Contact Indicators», *Rev. Sci. Instr.*, vol. 12, núm. 2, pág. 105, febrero 1941.

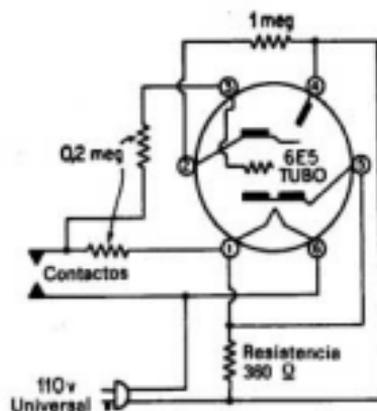


FIG. 19.1. Indicador de contacto.



FIG. 19.2. Campo del microscopio micrométrico.

sión de este microscopio, en el que aparece una retícula formada por dos cabellos perpendiculares que se pueden mover girando la cabeza del micrómetro. Hay también un índice que se mueve con la retícula, recorriendo una escala que forma un ángulo de 45° con cada uno de los cabellos. Una vuelta completa de la cabeza del micrómetro hace que el índice se mueva una división de la escala fija. Llevando la retícula para que sea tangente a dos posiciones sucesivas de la señal, se puede obtener el movimiento de ésta, por la diferencia de lecturas del micrómetro en las dos posiciones. Esta disposición de la retícula y de la escala fija hace posible leer los movimientos horizontal y vertical de la señal con una orientación del microscopio. Se puede calibrar fácilmente el valor de una de las divisiones del micrómetro, observando con el microscopio un movimiento conocido de una señal colocada en el émbolo de un calibrador de cuadrante.

Con una pequeña práctica, casi todos pueden aprender a usar un microscopio micrométrico. Sin embargo, hay ciertas reglas importantes que deben observarse:

1. Elegir señales claras, bien definidas y fácilmente identificables.
2. Ajustar el ocular cuidadosamente para evitar el paralaje.
3. Enfocar el antejo sobre la señal lo más exactamente posible.
4. Orientar la retícula exactamente.
5. No tocar sin necesidad el microscopio o la mesa en que está montado.

Si hay paralaje, la imagen de la señal no estará en el plano de la retícula, lo que producirá

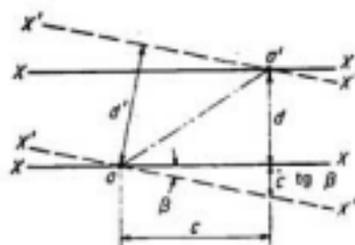


FIG. 19.3. Error de orientación.

dificultades en las lecturas. Un mal enfoque no solo hace difícil colocar los cabellos tangentes a la señal, sino que también cambia el aumento del microscopio y, por tanto, el coeficiente de calibrado.

Una mala orientación conduce a errores del tipo representado en la Fig. 19.3. Supongamos que la señal se mueve de a a a' . Para obtener la componente horizontal d de este movimiento hay que orientar la retícula XY en dirección horizontal. La diferencia entre las dos posiciones de línea lisa de la retícula XY dará la distancia correcta d . Supongamos, sin embargo, que se ha orientado mal dicha retícula y forma un ángulo β con la horizontal, como se indica por las posiciones de trazos $X'X''$. La diferencia entre las dos posiciones de $X'X''$ indicará que el movimiento supuestamente vertical es la distancia d' . Del dibujo se ve que

$$d' = \cos \beta(d + c \operatorname{tg} \beta) = d \cos \beta + c \operatorname{sen} \beta \quad (a)$$

Puede usarse esta ecuación para estudiar el efecto de la mala orientación:

Si $c = 0$ y $\beta = 1^\circ$, $d' = 0,9999d$	\therefore 0,0 por 100 de error
Si $c = 0,5d$ y $\beta = 1^\circ$, $d' = 1,0086d$	\therefore 0,9 por 100 de error
Si $c = 5d$ y $\beta = 1^\circ$, $d' = 1,0871d$	\therefore 8,7 por 100 de error

Esta comparación muestra que si el movimiento resultante de un punto está prácticamente en la misma dirección que la componente que se mide, un error de orientación no tiene mucha influencia en la medida. Pero si el movimiento es tal que la componente a medir es pequeña en comparación con la componente normal a él, un error de orientación pequeño produce un error en la medida apreciable.

19.4 Algunos métodos indirectos. Quizá el método más sencillo de utilizar el principio de Müller-Breslau es el de la regla flexible para obtener líneas de influencia de las reacciones de una viga continua. El procedimiento consiste sencillamente en elegir una regla flexible y larga de acero, bronce o madera, y apoyarla en un tablero en que se ha colocado un trozo de papel milimetrado. Se puede sujetar la regla en su sitio entre dos clavos clavados en el tablero a cada lado de la misma, en los puntos de apoyo. Se introduce entonces un desplazamiento vertical en la reacción cuya línea de influencia se busca. Se marca en el papel la elástica de la regla y se obtienen las ordenadas de la línea de influencia mirando las ordenadas de la deformación en el papel milimetrado y dividiendo cada una de ellas por el desplazamiento introducido.

Se puede obtener bastante exactitud utilizando una regla flexible de acero cuadrada de 3 mm e introduciendo deformaciones del orden de un sexto de la longitud del tramo a cada lado de su posición media. El introducir desplazamientos iguales a los dos lados de la posición sin deformar de un modelo y medir el movimiento de un punto entre esas dos posiciones deformadas, constituye una técnica utilizada en muchos métodos de análisis de modelos. No solo tiene la ventaja de producir deformaciones mayores sin posibilidad de sobretensiones en el modelo, sino que en muchos casos reduce también al mínimo los errores en las medidas debidos a las variaciones geométricas del modelo.

Sucede que esta técnica no afecta al error geométrico que se halla en el caso de las líneas de influencia de las reacciones de una viga continua. Sin embargo, es eficaz en el caso representado en la Fig. 19.4, en que se puede obtener la línea de influencia de la reacción horizontal en el punto a , introduciendo un desplazamiento horizontal a la derecha o a la izquierda de ese punto. En los dos casos, deformando la columna según una curva, se produce un pequeño descenso δ_s de su extremo superior, que se ha exagerado mucho en el dibujo. Como consecuencia, un punto n descenderá a n' a causa solo del giro de la cuerda bc de la elástica de la viga. Así, si se mediera la deformación del punto n desde n a n_s , estaría aumentada en la cantidad $n'n'$; o si se mediera de n a n_s

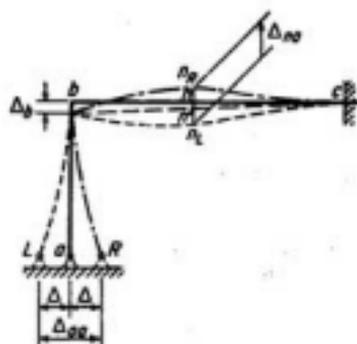


FIG. 19.4. Técnica del desplazamiento positivo y negativo.

cuando el desplazamiento introducido fuera hacia la derecha del punto a , la deformación de n estaría disminuida en la cantidad n' . Se observará, sin embargo, que si se desplazase el punto a desde L hasta R y se midiera el desplazamiento resultante de n desde n_L a n_R , se habría eliminado el error n' debido a la variación geométrica. El desplazamiento desde n_L a n_R daría, pues, el valor correcto de la deformación Δ_{nn} correspondiente a un desplazamiento Δ_{nn} introducido en a . Por tanto, la introducción de desplazamientos iguales a los dos lados de la posición media elimina ciertos errores causados por la variación geométrica de la estructura. No obstante, esta técnica no es un «cálculo todo» y no elimina todos los errores debidos a las variaciones geométricas.

El método de modelos llamado del alambre de latón¹ no es más que una versión generalizada del método de la regla flexible, en la que los modelos se fabrican de alambre de latón. De este modo se puede construir una variedad bastante grande de modelos bi y tridimensionales. Incluso las barras con momento de inercia variable se pueden simular soldando por sus extremos cierto número de pequeños trozos de alambres de latón de diversos tamaños. Normalmente se pueden obtener alambres de latón en un amplio campo de tamaños calibrados y se pueden soldar fácilmente, lo que facilita la fabricación. Para introducir los desplazamientos se pueden improvisar grifas sencillas y se miden las deformaciones resultantes utilizando una lupa en combinación con papel milimetrado o una escala de acero, con un tambor micrométrico, o con algún otro aparato.

El Gottschalk Continostat² y el defórmetro de Eney³ son otros dos métodos indirectos muy conocidos. En las referencias que se dan más abajo están descritos.

Todos los métodos mencionados más arriba utilizan modelos bastante sencillos y medios simples para introducir los desplazamientos y medir las deformaciones resultantes. Para obtener suficiente exactitud, es necesario introducir deformaciones bastante grandes para que la falta de precisión de los aparatos de medida no originen errores demasiado grandes en los resultados. Como consecuencia, en algunos casos pueden resultar importantes los errores debidos a variaciones geométricas y ser imposible hacerlos mínimos. En estos casos será necesario emplear un método que utilice instrumentos y técnicas más perfeccionados.

¹ Anders Bull, «Brass Wire Models Used to Solve Indeterminate Structures», *Eng. News-Record*, vol. 99, núm. 23, 8 diciembre 1927.

² Otto Gottschalk, «Mechanical Calculation of Elastic Systems», *J. Franklin Inst.*, vol. 202, núm. 1, páginas 61-88, julio 1926.

³ W. J. Eney, «New Deformometer Apparatus», *Eng. News-Record*, 16 febrero 1939, pág. 221; «Model Analysis of Continuous Girders», *Civil Eng.*, vol. 11, núm. 9, pág. 521, septiembre 1941.

19.5 Método de Beggs. El método de Beggs¹ es el más general y normalmente el más satisfactorio de los basados en el principio de Müller-Breslau. Fue desarrollado por el difunto profesor George E. Beggs, de la Universidad de Princeton. El equipo consiste en un conjunto de calibres de defórmetro y cuñas para introducir las deformaciones producidas. Para obtener líneas de influencia de las reacciones, se usa el calibre de defórmetro para sustituir el apoyo del modelo en ese punto, uniendo una mitad del calibre al modelo y la otra al montaje. Para obtener líneas de influencia de momentos internos, cortantes y fuerzas axiales, es necesario cortar el modelo y conectar una mitad del calibre del defórmetro a cada lado del corte. Insertando distintos tipos de cuñas entre las dos mitades del calibre, se puede introducir una deformación axial, de cortadura o angular, en el modelo, deformándolo así hasta la forma de la línea de influencia correspondiente. En la Fig. 19.5 se muestra una aplicación típica del método de Beggs.

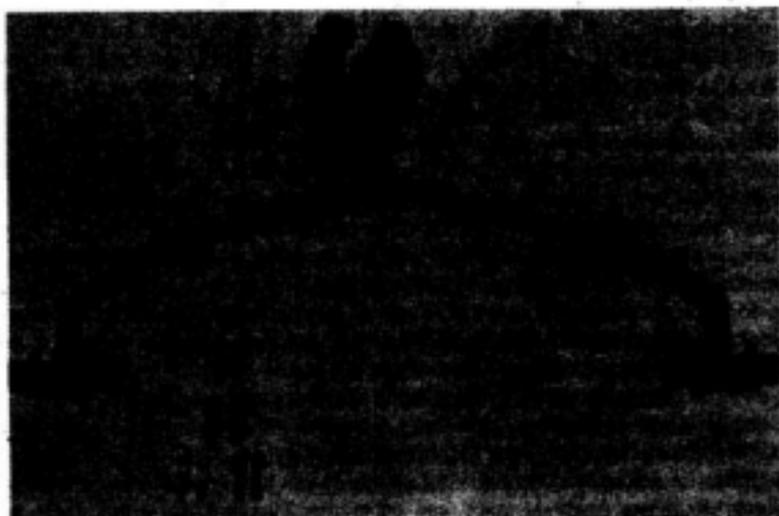


FIG. 19.5. Método de Beggs.

Este método tiene la ventaja de utilizar un medio más digno de confianza y más exacto para introducir las deformaciones y un instrumento más preciso para medirlas, lo que permite introducir deformaciones menores, reduciendo así los errores debidos a las variaciones geométricas de la estructura. Los modelos usados con el método de Beggs se hacen generalmente de celuloide o de cartón. Como los calibres del defórmetro introducen deformaciones constantes en lugar de aplicar cargas constantes a la estructura, no hay inconveniente por el cedimiento del celuloide. Se puede usar el método sin modificación para cualquier estructura plana, sin que importe si las barras son rectas o curvas, o de momento de inercia constante o variable.

¹ G. E. Beggs, «An Accurate Mechanical Solution of Statically Indeterminate Structures by Use of Paper Models and Special Gages», *Proc. ACI*, vol. 18, págs. 58-62, 1922; Discusión de «Design of a Multiple-arch System», *Trans. ASCE*, vol. 88, págs. 1298-1230, 1925; «The Use of Models in the Solution of Indeterminate Structures», *J. Franklin Inst.*, vol. 203, núm. 3, págs. 375-386, marzo 1927.

Al utilizar el microscopio en este método hay que observar las precauciones habituales. Hay que tener cuidado también al montar los calibres del defórmetro para asegurarse de que el eje mayor del calibre es normal al de la barra. Si no se monta así, los datos de la línea de influencia obtenidos para el cortante y la fuerza axial tendrán errores. En la Fig. 19.6, si se monta el calibre en la dirección indicada por la línea de trazos, los datos del ensayo darán como valor de la presión T_1 y del cortante S_1 , perpendicular

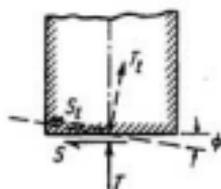


FIG. 19.6. Errores de montaje.

y paralelo a esta dirección. Para obtener la compresión T y el cortante S verdaderos es necesario medir el ángulo ϕ y transformar los datos como se indica a continuación:

$$T = T_1 \cos \phi + S_1 \sin \phi \quad S = S_1 \cos \phi - T_1 \sin \phi$$

Resulta evidente que este error de orientación no afecta a los datos obtenidos para el momento en ese punto.

Hay que tener cuidado también al sujetar el modelo al calibre, para que el eje de la barra esté en el centro del mismo. Si no se hace así, las ordenadas de la línea de influencia del momento en ese punto serán erróneas, pues la deformación angular introducida por el calibre no solo hace girar a la sección del modelo, sino que introduce además un desplazamiento axial del centro.

Se pueden calibrar las cuñas de Beggs de la manera siguiente: Se une una tira a una mitad del calibre y se fija la otra mitad a la superficie del montaje. Se insertan las distintas cuñas en el calibre, y se miden los desplazamientos producidos en una marca de la tira con el microscopio. De este modo, se pueden calibrar las deformaciones producidas por las diversas cuñas en micro-unidades y convertirlas, si se desea, en milímetros utilizando el calibrado constante del microscopio.

19.6 El defórmeter de momentos. El defórmeter de momentos¹ es un instrumento que deforma un modelo para hacerle tomar la forma de la línea de influencia del momento flector en la sección situada en el centro del aparato. Se consigue esta deformación sin cortar el modelo como en el método de Beggs.

La acción de este instrumento depende de una relación que existe entre momento flector y deformación por flexión. Consideremos un segmento ab de una barra, que es inicialmente recto y que tiene EI constante. Supongamos que se aplica una carga P en el punto a , como se ve en la Fig. 19.7. El efecto que produce es el de deformar la estructura y originar momentos flectores en ella. Los producidos en los extremos del segmento son M_a y M_b , que se supone actúan como se representa. El diagrama de momentos flectores de esta zona se puede trazar fácilmente. Se puede calcular, por medio de los teoremas del área de momentos, el corrimiento Δ_c del punto c de la elástica desde la cuerda ab , hallando después de simplificar la expresión

$$\Delta_c = \frac{M_a L^3}{8EI} - \frac{Pd^3}{12EI} \quad (19.2)$$

¹ Norris; Wilbur y Norris.

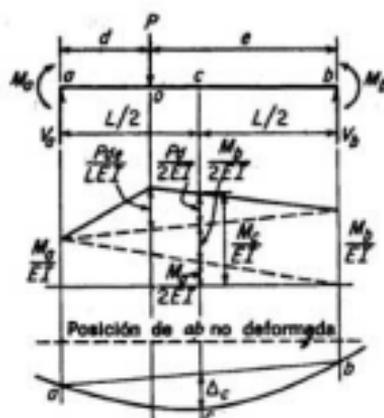


FIG. 19.7. Relación momento-deformación.

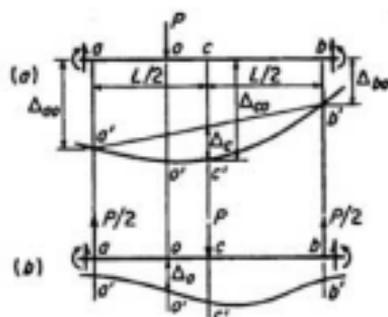


FIG. 19.8. Teoría del deformetro de momentos.

Así se halla que el momento en c debido a la carga P que actúa en un punto o cualquiera del segmento ab es

$$M_c = \frac{8EI}{L^3} \Delta_c + \frac{2Pd^2}{3L^3} \Delta_c \quad (19.3a)$$

siendo d la distancia desde el punto o hasta el extremo a o b que esté más próximo. Si la carga P está aplicada en un punto fuera del segmento ab , desaparece el segundo término de la Ecuación (19.3a) y

$$M_c = \frac{8EI}{L^3} \Delta_c \quad (19.3b)$$

Resulta así evidente que se puede calcular fácilmente el momento flexor en c si se puede medir con facilidad el corrimiento Δ_c en un modelo.

Existe un modo práctico para obtener Δ_c que puede aplicarse mediante las consideraciones siguientes: Consideremos primero que la estructura está sometida a la fuerza P aplicada en el punto o , lo que produce una deformación de la misma; en la Fig. 19.8a se representa la forma deformada del segmento ab . Ahora consideremos que sobre la estructura actúa el sistema de fuerzas especial representado en la Fig. 19.8b, en la que se muestra también la deformada de la barra ab en este caso. Aplicando la ley de Betti, sabemos que el trabajo virtual realizado por el sistema de fuerzas exteriores en el esquema a durante la deformación producida por el sistema del esquema b , es igual al trabajo virtual realizado por el sistema b durante la deformación producida por el sistema de a ; por tanto,

$$(P)(\Delta_o) = -\left(\frac{P}{2}\right)(\Delta_{ao}) + (P)(\Delta_{co}) - \left(\frac{P}{2}\right)(\Delta_{bo})$$

$$\text{o} \quad \Delta_o = \Delta_{co} - \frac{\Delta_{ao} + \Delta_{bo}}{2} \quad (a)$$

De las características geométricas de la Fig. 19.8a, es evidente que

$$\Delta_o = \Delta_{co} - \frac{\Delta_{ao} + \Delta_{bo}}{2} \quad (b)$$

y, por tanto, de las Ecs. (a) y (b) se puede deducir que

$$\Delta_o = \Delta_c \quad (19.4)$$

Así, si se aplica un sistema de cargas como el representado en la Fig. 19.8b al segmento ab , el modelo se deforma de manera que toma la forma de la línea de influencia de Δ_c .

En el desarrollo de las Ecs. (19.3a) y (19.3b), M_c indica el momento flector en c producido por una carga P que actúa en el modelo. Si m_c expresa el momento flector en c debido a un valor unidad de P , será

$$m_c = \frac{M_c}{P} \quad (19.5)$$

y, de la Ec. (19.3a), resulta evidente la relación:

$$m_c = \frac{8EI}{L^3} \frac{\Delta_c}{P} + \frac{2}{3} \frac{d^3}{L^3} \quad (19.6)$$

Si se obtienen los valores de Δ_c utilizando la hipótesis de carga de la Fig. 19.8b, por la Ec. (19.4) será

$$m_c = \frac{8EI}{L^3} \frac{\Delta_c}{P} + \frac{2}{3} \frac{d^3}{L^3} \quad (19.7a)$$

Como antes, cuando se mide Δ_c en un punto o fuera del segmento ab , desaparece el segundo término de la Ec. (19.7a) y

$$m_c = \frac{8EI}{L^3} \frac{\Delta_c}{P} \quad (19.7b)$$

Así, para la zona del modelo que cae fuera del segmento ab , si se aplican las cargas de la Fig. 19.8, el modelo deformado toma la forma no solo de la línea de influencia de Δ_c , sino también de la línea de influencia de m_c . Para obtener las verdaderas ordenadas de m_c en los puntos o fuera del segmento ab , hay que multiplicar los valores de Δ_c por $8EI/L^3P$, donde E , I , L y P se refieren al segmento ab . Para obtener las ordenadas m_c en los puntos o dentro del segmento ab , se sustituyen los valores de Δ_c en la Ecuación (19.7a).

Para determinar los valores de las ordenadas de la línea de influencia se debe conocer, además de Δ_c , los valores de E , I , L , d y P . Con la excepción de P y E , se determinan todos ellos fácilmente. Cuando se usa un modelo de celuloide, es necesario aplicar una deformación fija correspondiente al tipo de carga representado en la Fig. 19.8b en lugar de cargas constantes P y $P/2$. Se puede mostrar un defórmeter de momentos, incorporando los principios representados esquemáticamente en la Fig. 19.9, que produzca una forma deformada del modelo y la viga de balanza que no varía con el tiempo, eliminando así el cedimiento. Si se hinca una cuña con un exceso Δ de diámetro sobre la distancia no deformada entre el modelo y la viga de balanza, entre las dos piezas, producirá una forma deformada de modelo y viga que no variará con el tiempo. Esto supone que se han hecho el modelo y la balanza de la misma pieza de celuloide y tienen, por tanto, las mismas características de cedimiento. Supone también que el bastidor del instrumento está hecho de metal y es suficientemente pesado para considerarle rígido comparado con las barras de celuloide flexible. La presión P , aplicada por esta cuña al modelo y la balanza variará, como es natural, con el tiempo, proporcionalmente a la variación del módulo E_c , pero la elástica de las dos barras no varía.

Si, además de medir el corrimiento Δ_c en los distintos puntos o del modelo, se miden también los δ_c de la balanza, recordando la discusión de la Sec. 18.5 son evidentes las relaciones:

$$\delta_c = K_c \frac{P_c}{E_c} \quad \text{o} \quad \frac{E_c}{P_c} = \frac{K_c}{\delta_c} \quad (19.8)$$

donde K_c es una constante geométrica de la viga balanza que depende de sus dimensiones y del modo como está unida al bastidor. Así, si se calcula K_c y se mide δ_c , se conocerá la relación entre E_c y P_c , no solo para la viga, sino también para el modelo, siempre que ambos estén hechos de la misma hoja de celuloide.

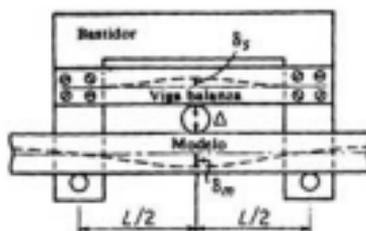


FIG. 19.9. Defórmeter de momentos con viga balanza, simplificado.

Sustituyendo de la Ec. (19.8), se pueden escribir las Ecs. (19.7a) y (19.7b) en la forma siguiente, para su utilización en un modelo de celuloide en el que se ha medido δ_s en la viga balanza del instrumento. Las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en c se obtienen de la Ec. (19.9a) para los puntos o del interior del segmento ab ,

$$m_c = \frac{8IK_s \Delta_s}{L^3} \frac{\Delta_s}{\delta_s} + \frac{2}{3} \frac{d^2}{L^2} \quad (19.9a)$$

y de la Ec. (19.9b) para los puntos o fuera del segmento ab ,

$$m_c = \frac{8IK_s \Delta_s}{L^2} \frac{\Delta_s}{\delta_s} \quad (19.9b)$$

Se puede calcular el valor de K_s , pero la precisión del resultado no será buena, a causa de la incertidumbre del empotramiento en los puntos de sujeción de la viga. Como consecuencia, es mejor obtener K_s por un ensayo de calibrado sobre una viga en voladizo, estáticamente determinada, en la que se conocen los momentos flectores por la estática.

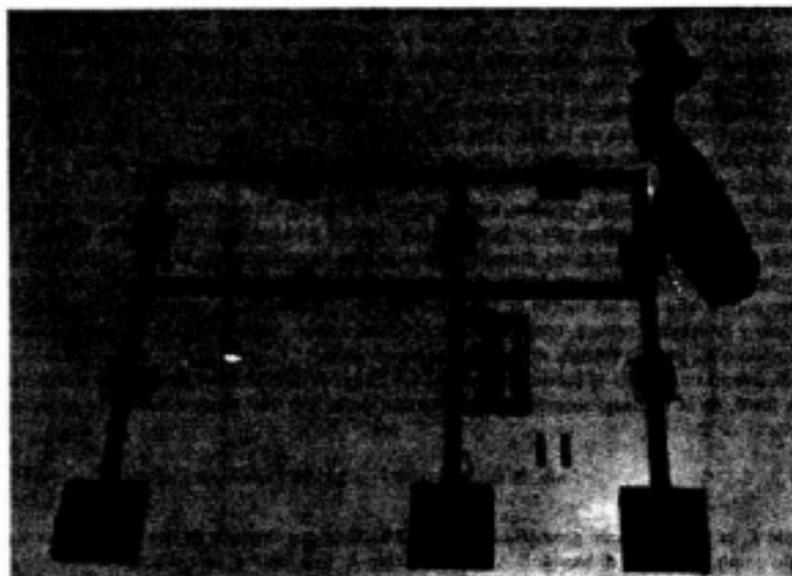


FIG. 19.10. Defórmeter de momentos.

En la Fig. 19.10 se representa el último modelo del defórmeter de momentos, montado en un modelo de celuloide. Se observará que el principio de este instrumento es esencialmente el mismo al representado en forma simplificada en la Fig. 19.9. Los corrimientos δ_s y Δ_s se miden con el mismo tipo de microscopio micrométrico utilizado en el método de Beggs.

Este instrumento proporciona un medio eficaz de obtener líneas de influencia de momentos flectores en las secciones internas de un modelo, sin necesidad de cortarle. Tiene el inconveniente de que, para utilizar la interpretación sencilla de las medidas dada más arriba, es necesario aplicar el instrumento a un segmento del modelo que sea inicialmente recto y con I constante.

19.7 Indicador de momentos. El indicador de momentos¹ es un instrumento útil, que proporciona un método directo para obtener momentos flectores de un modelo. Su teoría está basada en las ecuaciones de Manderla-Winkler, que se usan principalmente en el análisis de las tensiones secundarias de las armaduras trianguladas. Estas ecuaciones son aplicables a una barra, o una parte de barra, inicialmente recta y con E e I constantes y en la que no hay ninguna carga exterior aplicada entre los extremos del trozo considerado.

Las ecuaciones de Manderla-Winkler son simples expresiones de los momentos que actúan en los extremos de una barra en función de las pendientes de la elástica en esos dos extremos de la barra. Sea M_{AB} el momento que actúa en el extremo A de la barra AB y M_{BA} el momento en el extremo B , siendo positivos estos momentos cuando se sigue el sentido de las agujas del reloj. Sean también τ_A y τ_B las pendientes de las tangentes a la elástica en los puntos A y B , respectivamente. Estas pendientes se miden con respecto a la cuerda AB de la elástica y son positivas cuando la tangente gira en sentido de las agujas del reloj respecto a la cuerda. Las ecuaciones de Manderla-Winkler se pueden deducir por medio de los teoremas del área de momentos y se enuncian como sigue:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\tau_A + \tau_B) \quad M_{BA} = \frac{2EI}{L} (\tau_A + 2\tau_B) \quad (19.10)$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, podemos proceder a desarrollar la teoría del indicador de momentos.

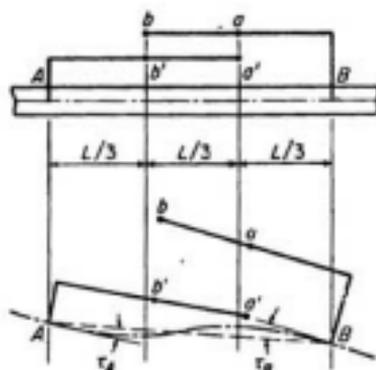


FIG. 19.11. Teoría del indicador de momentos.

¹ A. C. Ruge y E. O. Schmidt, «Mechanical Structural Analysis by the Moment Indicators», *Proc. ASCE*, octubre 1938.

Refiriéndonos a la Fig. 19.11, supongamos que se unen dos brazos a los puntos A y B de una barra. Cuando se carga y deforma el modelo con cargas aplicadas fuera de este segmento, los dos brazos girarán los mismos ángulos que las tangentes a la elástica en su punto de unión. Como los giros son en la realidad pequeños, se pueden calcular fácilmente los movimientos relativos siguientes de las marcas a y a' y b y b' . Sean Δ_a y Δ_b los movimientos relativos de las marcas, positivos cuando éstas se separan; será

$$\begin{aligned}\Delta_a &= \frac{2L}{3} \tau_A + \frac{L}{3} \tau_B = \frac{L}{3} (2\tau_A + \tau_B) \\ \Delta_b &= \frac{L}{3} \tau_A + \frac{2L}{3} \tau_B = \frac{L}{3} (\tau_A + 2\tau_B)\end{aligned}\quad (19.11)$$

Sustituyendo de las Ecs. (19.11) en las Ecs. (19.10), se obtienen las expresiones siguientes para los momentos extremos en los puntos A y B :

$$M_{AB} = \frac{6EI}{L^3} \Delta_a \quad M_{BA} = \frac{6EI}{L^3} \Delta_b \quad (19.12)$$

en las que un Δ positivo (o un movimiento relativo de separación) indica un momento extremo positivo (o en sentido de las agujas del reloj en el extremo del segmento). Por tanto, si se miden Δ_a y Δ_b con un microscopio, y se conoce E , se pueden determinar los momentos en los puntos de unión del indicador de momentos.

Nuevamente, si se usa el celuloide como material para el modelo, habrá que resolver el problema del cedimiento. Evidentemente, no se pueden aplicar cargas constantes al modelo de celuloide, porque la deformación variará con el tiempo. Sin embargo, si se aplica una deformación fija en el punto y en la dirección de la carga dada, no variará con el tiempo la posición deformada del modelo. Se podrán ya medir los movimientos de las marcas del indicador de momentos sin dificultad, con un microscopio. Sin embargo, seguirá siendo imposible calcular los momentos extremos por las Ecuaciones (19.12), porque E es desconocido y variable con el tiempo. Además, la carga correspondiente en el modelo es desconocida también y varía con el tiempo en proporción directa a la variación de E . No obstante, en este caso es posible obtener el valor relativo de los momentos, porque son proporcionales al producto de I por las deformaciones del indicador de momentos.

Muchas veces se pueden transformar estos valores relativos de los momentos extremos en valores absolutos en función de la carga, utilizando las condiciones del equilibrio estático. Consideremos, como ejemplo, el pórtico simple de la Fig. 19.12. Supongamos que se ha montado el indicador de momentos sucesivamente en cada pilar, ha-

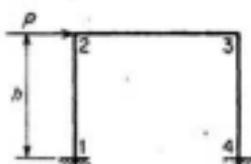


FIG. 19.12. Consideraciones de equilibrio.

llándose así los valores relativos de los momentos en dos puntos de cada pilar para algún desplazamiento horizontal fijo impuesto a la parte alta del pilar, 1-2. En este caso, se puede extrapolar el valor relativo de los momentos extremos en cada pilar de los valores relativos medidos en los puntos de unión del indicador. Sean estos valores relativos

en los extremos de los pilares m_{12} , m_{21} , etc.; los valores absolutos se pueden expresar por

$$\begin{aligned} M_{12} &= C m_{12} & M_{24} &= C m_{24} \\ M_{21} &= C m_{21} & M_{42} &= C m_{42} \end{aligned}$$

Si se aísla cada pilar como cuerpo libre, podemos calcular el cortante en cada uno de ellos en función de la constante desconocida C . Del mismo modo puede aislarse la viga como cuerpo libre separándole de los pilares inmediatamente bajo las cabezas de éstos. Como se han expresado los cortantes en los extremos de los pilares en función de C , la ecuación de la estática $\Sigma F_x = 0$ aplicada a la viga aislada nos permitirá hallar C en función de P . Con este valor de C podemos obtener sin dificultad los valores absolutos de los momentos extremos en función de P .

Muchas veces se puede aplicar fácilmente el procedimiento anterior para transformar valores relativos en absolutos. Sin embargo, hay casos en que, o no hay ninguna ecuación de la estática apropiada, o si existe, su resolución es demasiado laboriosa. En tales casos, el empleo de una balanza de resorte de celuloide en el sistema de carga conduce a una solución directa para los valores absolutos de los momentos en el modelo.

En la Sec. 18.5 se ha estudiado el empleo de una balanza de resorte para evitar el cedimiento. En la Fig. 18.3 se muestra la balanza unida al mismo tipo de modelo de la Fig. 19.12. Supongamos que se hubiera montado un indicador de momentos en el modelo de la Fig. 18.3 y se hubieran tomado lecturas en las marcas del indicador y la balanza de resorte. Respecto a la Ec. (h) de la Sec. 18.5, se recordará que, habiendo medido Δ_s , se puede expresar E por

$$E = \frac{K_s P}{\Delta_s} \quad (19.13)$$

Sustituyendo de la Ec. (19.13) en las Ecs. (19.12),

$$M_{An} = \frac{6IK_s \Delta_s}{L^3} P \quad (19.14)$$

Por tanto, utilizando la balanza de resorte de este modo, es fácil obtener los valores absolutos de los momentos en función de la carga P .

Esto presupone, naturalmente, que se conoce la constante K_s de la balanza. El valor de esta constante se puede calcular, pero puede obtenerse con más exactitud por un ensayo de calibrado en una viga en voladizo estáticamente determinada, como se representa en la Fig. 19.13. Uniendo el indicador como se muestra, se pueden medir los

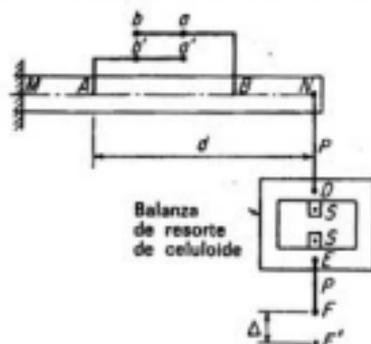


FIG. 19.13. Calibrado del indicador de momentos.

corrimientos Δ_a y Δ_b con el microscopio. Sabiendo que el momento M_{AB} es igual a P veces d , podemos hallar fácilmente K_p aplicando la Ecuación (19.14).

El indicador de momentos proporciona una solución de modelo muy satisfactoria para muchos problemas. En la Fig. 19.14 se muestra un montaje típico de indicador de momentos en combinación con una balanza de resorte de celuloide. Se recordará que la teoría del indicador de momentos está basada en las ecuaciones de Manderla-Winkler. Para utilizar la interpretación sencilla de las medidas dadas anteriormente, es necesario, por tanto, aplicar el indicador a una zona de la barra que sea inicialmente recta y tenga I constante. Es posible interpretar las lecturas del indicador en casos en que I varía en esa zona, pero los cálculos son muy complicados.

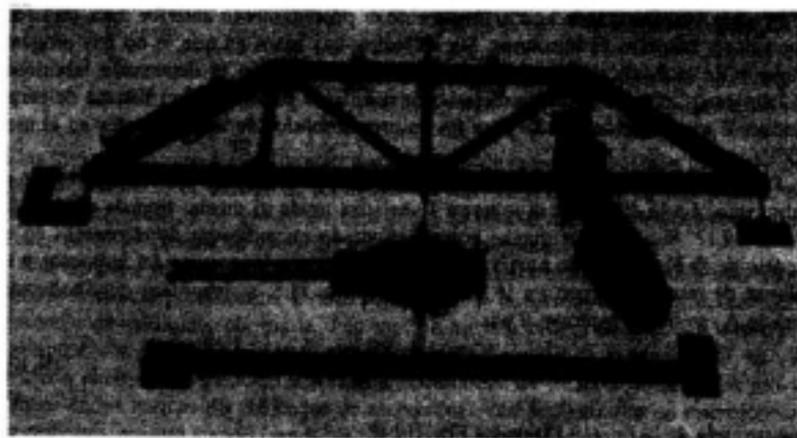


FIG. 19.14. Indicador de momentos.

19.8 Principios de semejanza. Los principios de semejanza que siguen las relaciones entre un modelo y su prototipo se pueden determinar por dos procedimientos. Pueden expresarse estas condiciones de semejanza en forma matemática por medio de las leyes de la mecánica estructural establecidas y los principios de semejanza deducidos rigurosamente de ellas; o se pueden deducir estos principios utilizando los métodos del análisis dimensional. Para los modelos de estructuras se usa generalmente el primer método, pues las leyes matemáticas que siguen éstas son generalmente bien conocidas. Por el contrario, en los casos en que no se conocen las leyes matemáticas y si los factores que afectan al fenómeno, se pueden determinar los principios de semejanza por el método del análisis dimensional.

19.9 Deducción de los principios de semejanza utilizando las leyes establecidas de la mecánica estructural. Como ejemplo de la deducción de los principios de semejanza por este método, consideremos el problema de extrapolar los datos de la línea de influencia de un modelo a su prototipo. Para ello, consideraremos una viga estáticamente indeterminada en primer grado, como la representada en la Figura 19.15.

Supongamos que queremos obtener las líneas de influencia de la reacción vertical en a , R_a , y el momento en b , M_b . En los dos casos, podemos aplicar el principio de Müller-Breslau y obtener así las líneas de influencia buscadas como se indica en la Fig. 19.15. Indudablemente, se puede aplicar este procedimiento al prototipo o al modelo. Apli-

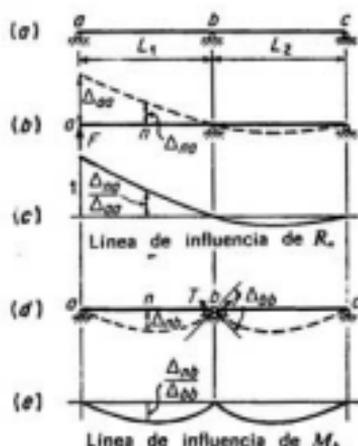


FIG. 19.15. Principios de semejanza.

cándole al prototipo, las expresiones de las ordenadas de las dos líneas de influencia son

$$R_a^P = - \frac{\Delta_{na}^P}{\Delta_{na}^P} (1) \quad (19.15)$$

y

$$M_b^P = - \frac{\Delta_{nb}^P}{\Delta_{nb}^P} (1) \quad (19.16)$$

donde el índice P indica que esas cantidades se refieren al prototipo.

Por otro lado, aplicando el procedimiento de Müller-Breslau al modelo, las ordenadas de las dos líneas de influencia son

$$R_a^M = - \frac{\Delta_{na}^M}{\Delta_{na}^M} (1) \quad (19.17)$$

y

$$M_b^M = - \frac{\Delta_{nb}^M}{\Delta_{nb}^M} (1) \quad (19.18)$$

donde el índice M se refiere al modelo. Indudablemente, si se conocen los principios de semejanza entre modelo y prototipo, se pueden medir las ordenadas de estas líneas de influencia experimentalmente en un modelo a escala reducida y extrapolarlas al prototipo. En otras palabras, para hacerlo necesitamos conocer la relación entre R_a^M y R_a^P y entre M_b^M y M_b^P .

De las Ecs. (19.15) a (19.18) se deduce que estas relaciones entre las reacciones o momentos en el modelo y en el prototipo dependen de la relación entre sus deformaciones. Esta relación se puede estudiar considerando los cálculos de dichas deformaciones por el método de los trabajos virtuales. Para calcular las deformaciones de una viga, se puede expresar la ley de los trabajos virtuales por

$$\sum Q\delta = \int M_P M_Q \frac{dx}{EI} \quad (19.19)$$

Si en el punto a de la estructura primaria del prototipo actúa una fuerza F^P , como se ve en la Fig. 19.15b, el corrimiento vertical del punto n se puede calcular de

$$(1) (\Delta_{na}^P) = \int M_P^P M_Q^P \frac{dx^P}{E^P I^P} \quad (19.20)$$

Del mismo modo, se puede aplicar la Ec. (19.19) para calcular una deformación similar del modelo debida a una fuerza F^M en a , o

$$(1) (\Delta_{na}^M) = \int M_P^M M_Q^M \frac{dx^M}{E^M I^M} \quad (19.21)$$

Supongamos que se ha construido el modelo de modo que existan las siguientes relaciones entre modelo y prototipo:

$$L^M = kL^P \quad I^M = \alpha I^P \quad E^M = \beta E^P \quad F^M = \gamma F^P \quad (19.22)$$

En vista de estas relaciones, es evidente que son ciertas las relaciones adicionales siguientes para la estructura primaria estáticamente determinada representada en la Fig. 19.15b:

$$M_P^M = k\gamma M_P^P \quad M_Q^M = kM_Q^P \quad (19.23)$$

Sustituyendo en la Ec. (19.21) de las Ecs. (19.22) y (19.23) y comparando con la Ec. (19.20),

$$(1) (\Delta_{na}^M) = \frac{k^2\gamma}{\alpha\beta} \int M_P^P M_Q^P \frac{dx^P}{E^P I^P} = \frac{k^2\gamma}{\alpha\beta} (1) (\Delta_{na}^P)$$

Por tanto,

$$\Delta_{na}^P = \frac{\alpha\beta}{k^2\gamma} \Delta_{na}^M \quad (19.24)$$

Estas relaciones son ciertas para cualquiera de los corrimientos verticales de la Figura 19.15b. Por tanto, sustituyendo en la Ec. (19.15) de la Ec. (19.24) y comparando con la Ec. (19.17),

$$R_a^P = R_a^M \quad (19.25)$$

por lo que las ordenadas correspondientes de la línea de influencia de R_a son las mismas para el modelo y el prototipo.

De igual manera, se puede estudiar el corrimiento vertical Δ_{ab} y la rotación angular correspondiente Δ_{ab}^r de la estructura primaria representada en la Fig. 19.15d, para el modelo y el prototipo. En este caso, indudablemente, los corrimientos están producidos por pares T^P en el prototipo y pares T^M en el modelo. Procediendo como antes, con la excepción de hacer

$$T^M = \gamma T^P$$

hallaremos que

$$\Delta_{ab}^P = \frac{\alpha\beta}{k^2\gamma} \Delta_{ab}^M \quad (19.26)$$

$$\Delta_{ab}^r = \frac{\alpha\beta}{k\gamma} \Delta_{ab}^r \quad (19.27)$$

Sustituyendo en la Ec. (19.16) de las Ecs. (19.26) y (19.27) y comparando con la Ec. (19.18),

$$M'_s = \frac{1}{k} M_s^M \quad (19.28)$$

por lo que habrá que multiplicar por $1/k$ las ordenadas de la línea de influencia de M_s del modelo para obtener las correspondientes al prototipo.

Se ha limitado el estudio a una viga indeterminada en primer grado, pero se podría ampliar para incluir sucesivamente vigas o pórticos indeterminados en segundo, tercero, o cualquier grado. Tales consideraciones conducirán a la conclusión general siguiente para cualquier viga o pórtico indeterminados, cuyo análisis de tensiones se puede hacer considerando solo el efecto de la deformación por flexión:

Se dimensionará un modelo de modo que las longitudes axiales de sus barras sean k veces las del prototipo, los momentos de inercia de sus secciones α veces las del prototipo y el módulo de elasticidad β veces el del prototipo. Una vez hecho esto, las ordenadas de la línea de influencia de cualquier fuerza reactiva, cortante, o fuerza axial en el prototipo, son iguales a las correspondientes ordenadas en el modelo; pero las ordenadas de la línea de influencia de un momento cualquiera del prototipo son iguales a $1/k$ veces las correspondientes ordenadas en el modelo.

De este modo, se pueden desarrollar los principios de semejanza para modelos de armaduras y otros tipos de estructuras, siempre que se pueda formular matemáticamente la solución del problema.

Otros usos de los modelos de estructuras

20.1 Generalidades. El análisis de modelos ha sido extraordinariamente útil para resolver problemas de distribución de tensiones, esto es, para determinar la manera en la que las tensiones varían en la sección de una barra. Existen varios métodos experimentales para resolver estos problemas; entre ellos, los dos más importantes en la actualidad son el fotoelástico y el basado en la medida previa de las deformaciones en la superficie.

En los últimos años se ha usado mucho el método fotoelástico, especialmente por el ingeniero mecánico, para estudiar la complicada distribución de tensiones que encuentra muchas veces en el proyecto de elementos de máquinas. El ingeniero civil ha utilizado este método en escala menor, pero aún considerable, para estudiar problemas similares de elementos de estructuras.

Desde 1938 se ha desarrollado enormemente el arte de medir deformaciones de las superficies. La investigación de guerra originó técnicas perfeccionadas para medir tales deformaciones para hipótesis de cargas tanto estáticas como dinámicas. Se han desarrollado numerosos tipos de calibres mecánicos y eléctricos. Hoy, el más usado es el llamado calibre de deformaciones de resistencia de alambre SR-4¹.

El estudio de modelos se usa de ordinario para estudiar los problemas de análisis de tensiones o de distribución de las mismas. Además, se usan muchas veces para determinar las cargas de pandeo o las características vibratorias.

20.2 Método fotoelástico. Generalidades. Los problemas de distribución de tensiones relativamente sencillos se pueden resolver con éxito por métodos matemáticos. Sin embargo, hay innumerables problemas prácticos en que los métodos matemáticos no son apropiados y es necesario recurrir a procedimientos experimentales. El método fotoelástico² es uno de los más útiles entre estos procedimientos experimentales y se usa mucho para resolver la distribución de tensiones en los puntos tales como proximidad de agujeros y entalladuras, en nudos roblonados y soldados, o en otros elementos de estructuras de forma irregular.

¹ Producido y distribuido por la Sociedad Baldwin-Lima-Hamilton.

² Usas referencias excelentes del método fotoelástico son las siguientes: E. G. Coker y L. N. G. Filon, «A Treatise on Photoelasticity», Imprenta de la Universidad de Cambridge, Londres, 1931 (este es un libro de consulta clásico sobre la fotoelasticidad); M. M. Frocht, «Photoelasticity», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1941 (este libro es un excelente texto de fotoelasticidad y contiene cierto número de valiosos ejemplos y fotografías); R. D. Mindlin, «Review of the Photoelastic Method of Stress Analysis», *J. Applied Phys.*, vol. 10, núms. 4 y 5, abril, mayo 1939 (estos dos artículos dan un resumen excelente del método fotoelástico y contienen una biblioteca muy buena sobre la materia).

El método fotoelástico se basa en el hecho de que, cuando ciertos materiales transparentes están sometidos a tensión, varían sus propiedades ópticas. Es posible medir estas variaciones, y relacionarlas con el estado de tensión del material. Así, haciendo un modelo de un material transparente apropiado, y cargándole del mismo modo que el prototipo, se pueden medir ciertos efectos ópticos e interpretarlos para obtener la distribución de tensiones en el modelo.

En un problema de tensiones planas (bidimensional), se puede definir el estado completo de tensiones en un punto cualquiera en función de las magnitudes y direcciones de las dos tensiones principales. Como estas dos tensiones principales son perpendiculares entre sí, las magnitudes de ambas y la dirección de una de ellas son suficientes para definir el estado de tensiones. Por tanto, hay que determinar tres cantidades independientes en todos y cada punto de un cuerpo sometido a un estado de tensiones planas, para definir completamente la distribución de tensiones en el cuerpo.

Cuando se utiliza el método fotoelástico en tales problemas, en general es más conveniente determinar tres cantidades ligeramente diferentes, independientes, en los distintos puntos, por ejemplo, la diferencia algebraica entre las tensiones principales, su suma algebraica y la dirección de una de ellas. Con estos datos, es fácil calcular las tensiones normal y de cortante en un plano cualquiera que pase por el punto.

El método fotoelástico es aplicable también a sistemas de tensiones tridimensionales. Sin embargo, en estos casos las técnicas experimentales y la interpretación de los resultados son bastante complicadas. Por ello se limitará la discusión a la aplicación bidimensional del método.

20.3 Repaso de algunos principios de óptica. Antes de desarrollar la teoría fundamental de la fotoelasticidad bidimensional, es necesario repasar brevemente algunas ideas de óptica física. El fenómeno fotoelástico se puede explicar por medio de la teoría ondulatoria de la luz en el éter. En esta teoría, se supone que la luz se origina de la vibración transversal, en un plano que contiene al rayo, de todas las partículas situadas en él. Se supone también que en un instante cualquiera todas estas partículas están en una curva sinusoidal, cuya amplitud es $2a$ y la longitud de onda λ . Así, se admite que una partícula m oscila entre las posiciones A y B , como se representa en la Fig. 20.1, y otra n , entre C y D . Supongamos que las partículas se hallan como se indica en la curva sinusoidal de línea llena en el instante $t = 0$ y que, en el instante t , se han movido hasta las posiciones m_1 y n_1 , estando situadas en la curva de trazos. Es claro que el efecto del movimiento transversal de las partículas ha sido el hacer que la sinusoides que las une se mueva hacia la derecha a lo largo del rayo, una distancia Δz .

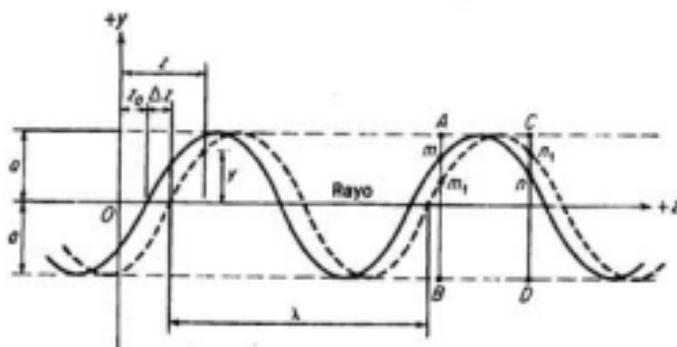


FIG. 20.1. Teoría ondulatoria de la luz.

El grado del movimiento aparente de la sinusoides a lo largo del rayo se llama *velocidad de la luz* y es constante para un medio dado a cuyo través pasa. Para que pase por un punto una

onda completa de la senoide, es necesario que las partículas cumplan un ciclo completo de la vibración transversal. Por tanto, la frecuencia de las ondas que pasan por un punto es la misma que la de la vibración transversal de las partículas. La frecuencia de la vibración de las partículas, f , determina el color de la luz y es constante para cualquier color, independientemente del medio por el que pasa el rayo. La luz blanca está compuesta de ondas de todas las frecuencias.

La velocidad de la luz es igual al producto de la longitud de una onda completa por la frecuencia con que la onda pasa por un punto dado, o

$$v = \lambda f \quad (20.1)$$

Como la frecuencia para un color de luz dado permanece constante, la longitud de onda de dicho color varía directamente con la velocidad, que a su vez depende del medio por el que pasa la luz.

La intensidad de luz es proporcional a la amplitud de la vibración transversal de las partículas. Si no hay vibración transversal, esto es, si la amplitud es cero, la intensidad de luz es nula, es decir, no hay luz.

En las discusiones siguientes será necesario utilizar una expresión de la posición transversal instantánea de una partícula que vibra en una sección situada a la distancia z del origen. En la Fig. 20.1, el desplazamiento transversal y de esta partícula en un instante cualquiera t puede calcularse por

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} [z - (z_0 + \Delta z)] \quad (a)$$

Pero Δz es la distancia que se ha movido la senoide desde $t = 0$ y, por tanto, es igual a

$$\Delta z = vt = \lambda ft \quad (b)$$

Sustituyendo en la Ec. (a) de la (b),

$$y = a \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - z_0) - 2\pi ft \right] \quad (20.2)$$

De esta ecuación resulta evidente que la vibración transversal de tales partículas es un movimiento armónico simple.

Luz polarizada es otro término que debe definirse. Un rayo de luz ordinaria consta de ondas que vibran en todos los planos que se pueden trazar por el rayo. Pero, si se controlan de algún modo las vibraciones, se dice que la luz está polarizada. Si se limitan las vibraciones a un solo plano, se dice que tiene polarización plana. Esta luz no necesita ser monocromática, y se puede producir haciendo pasar la luz ordinaria a través de un prisma de Nicol, una hoja Polaroid o algún otro dispositivo.

Por otro lado, está la luz resultante de dos ondas de igual amplitud y longitud de onda, que vibran en planos perpendiculares y con un desfase de un cuarto de longitud de onda, que se llama polarizada circularmente. Tal luz puede producirse haciendo pasar un rayo de luz monocromática con polarización plana a través de una placa cuarto de onda. La placa cuarto de onda es una hoja de mica o celofán o algún otro material doblemente refractivo permanentemente, cuyos ejes están colocados a 45° del plano de polarización del rayo incidente de luz polarizada. El espesor de la placa es tal que una de las dos ondas componentes se retrasa un cuarto de lon-

gitud de onda respecto a la otra. Las dos ondas componentes salen de la otra cara de la placa, desfasadas un cuarto de la longitud de onda, con igual amplitud y vibrando en planos perpendiculares, por lo que se combinan para formar luz polarizada circularmente.

Doble refracción es una propiedad que poseen permanentemente ciertas sustancias cristalinas como la mica. Se puede considerar que estos materiales dividen el rayo incidente de luz polarizada plana en dos componentes rectangulares. Estas dos componentes caminan a través del material a diferentes velocidades, por lo que pueden estar desfasadas al salir por el otro lado. *Otros materiales, como la baquelita y el celuloide, se hacen temporalmente doblemente refractivos cuando están sometidos a tensiones, dividiendo un rayo incidente en dos componentes que caminan a través del material en los planos de las dos tensiones principales. Esta propiedad es la base del método fotoelástico de determinación de tensiones.*

Dos ondas de luz que tienen la misma intensidad y longitud de onda y que vibran en el mismo plano, pueden, evidentemente, superponerse. Si las dos ondas están en fase, se reforzarán entre sí y producirán una onda de mayor intensidad. Pero si están desfasadas media longitud de onda, se anularán una a otra y se producirá oscuridad. Si la diferencia de fase varía desde cero hasta $\lambda/2$, hasta λ , etc., la intensidad del efecto combinado varía en distintos grados de interferencia, de brillo a oscuridad, a brillo, etc. Para la luz blanca, la diferencia de fase que elimina un color de una longitud de onda no elimina completamente los colores de otras longitudes. Por tanto, la luz compuesta tendrá un color que dependerá del eliminado.

20.4 Método fotoelástico. Teoría fundamental. El principal aparato utilizado para aplicar la fotoelasticidad a los problemas bidimensionales se llama *polariscopio*. El tipo más sencillo es el representado en esquema en la Fig. 20.2. Las partes principales de este polariscopio son la fuente de luz y dos dispositivos para producir luz polarizada plana, llamados uno *polarizador* y el otro *analizador*.

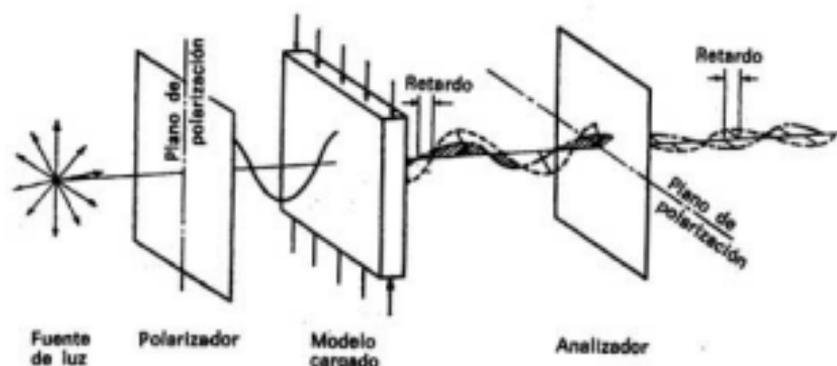


FIG. 20.2. Polariscopio.

La luz que viene de la fuente luminosa vibra en varios planos, pero después de pasar a través del polarizador se transforma en polarizada plana que vibra, en este caso, en dirección vertical. Esta luz pasa por el modelo de baquelita cargado que, como consecuencia de su estado de tensiones, se ha convertido temporalmente en doblemente refractivo. La luz polarizada plana se divide en dos componentes rectangulares que vibran en los planos de las tensiones principales y recorren el modelo a distintas velocidades. Como una de estas componentes se ha retardado respecto a la otra, pueden estar desfasadas parcial o totalmente al salir por el otro lado del modelo. La cuantía del desfase se mide haciéndolas interferir, lo que puede conseguirse haciéndolas pasar por el

analizador, que permite pasar solo las componentes horizontales de las ondas incidentes, haciéndolas interferir en un plano normal al de polarización del polarizador. Si estas componentes horizontales están en fase entre sí, habrá una luminosidad máxima, pero si están desfasadas media longitud de onda, habrá interferencia completa, u oscuridad. La salida del analizador se puede relacionar cualitativamente con el estado de tensiones del modelo.

Consideremos la partícula diferencial del modelo representado en la Fig. 20.3a. Supongamos que se ha aislado de modo que sus caras son planos de tensión principal. Es tan pequeña que se puede suponer que las tensiones principales σ_x y σ_y están uniformemente repartidas en los lados. Supongamos que choca con ella un rayo de luz polarizada plana monocromática de amplitud $2a$ que vibra en un plano OP . A causa de las propiedades de doble refracción de la baquelita sometida a tensión, en los planos de las tensiones principales, este rayo se dividirá en dos componentes rectangulares, una de las cuales atraviesa la partícula vibrando en el plano YOZ y la otra en el XOZ . Sus amplitudes serán $2a \cos \alpha$ y $2a \sin \alpha$, respectivamente.

Consideremos ahora la componente que vibra en el plano YOZ representada en la Fig. 20.3b. Supongamos primero que esta componente se mueve en el aire; en este caso, la posición instantánea de las partículas estará en la sinusoides de línea llena. Sin embargo, cuando pasa a través de la baquelita sometida a tensión, se retarda, por lo que su longitud de onda se acorta de λ a λ_y . Si todo el medio fuese baquelita, la posición instantánea de las partículas estaría en la sinusoides de trazos. En el caso real, la posición instantánea de las partículas está en la sinusoides de la línea llena hasta el modelo, en la de trazos a través de éste y en la de punto y raya a la derecha del mismo, donde la onda vuelve al aire como medio y vuelve a tener una longitud λ .

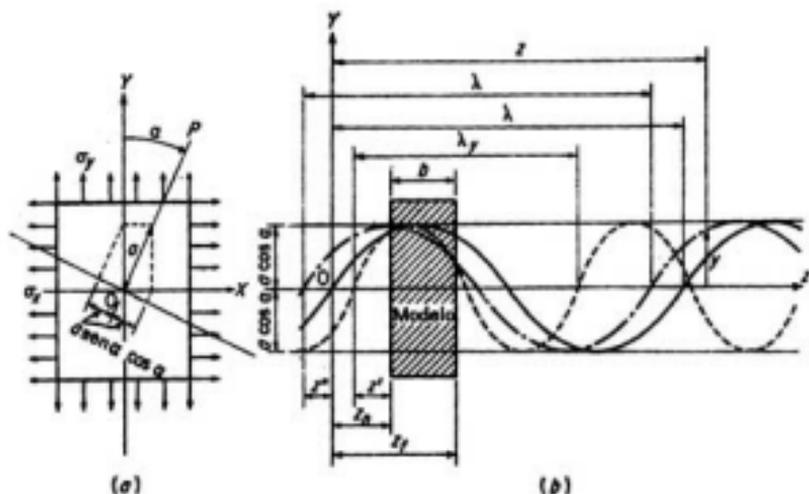


FIG. 20.3. Teoría de la elasticidad.

Para calcular el desplazamiento instantáneo y de una partícula situada a la distancia z del origen y en la sinusoides de punto y raya, es necesario primero calcular las distancias z' y z'' . Primeramente,

$$y \quad \frac{z'}{\lambda_y} = \frac{z}{\lambda} \quad \text{o} \quad z' = \frac{\lambda_y}{\lambda} z \quad (a)$$

$$y \quad \frac{z'' + z_f}{\lambda} = \frac{z' + b}{\lambda_y} \quad \text{o} \quad z'' = \frac{\lambda}{\lambda_y} (z' + b) - z_f \quad (b)$$

Sustituyendo de la Ec. (a) en la (b) y volviéndola a escribir teniendo en cuenta la Ec. (20.1),

$$x'' = \frac{b}{\lambda v_y} \lambda - b = \frac{b}{v_y} f \lambda - b = f \lambda v_x - b \quad (c)$$

donde v_y es la velocidad de la luz en la baquelita en el plano YOZ y t , el tiempo que tarda en atravesar el modelo. Pero utilizando la Ec. (20.2),

$$y = a \cos \alpha \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + x'') - 2\pi f t \right] \quad (d)$$

Sustituyendo de la Ec. (c) y simplificando,

$$y = a \cos \alpha \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - b) - 2\pi f (t - t_0) \right] \quad (20.3)$$

De un modo análogo, se halla que el desplazamiento x de la onda que vibra en el plano XOZ es

$$x = a \sin \alpha \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - b) - 2\pi f (t - t_0) \right] \quad (20.4)$$

Cuando han pasado estas dos ondas a través del analizador y se les ha puesto en interferencia entre sí, el desplazamiento resultante s obtenido de la superposición de estas dos componentes es

$$s = y \sin \alpha - x \cos \alpha \quad (20.5)$$

Sustituyendo en la Ec. (20.5) de las Ecs. (20.3) y (20.4) y simplificando

$$s = a \sin 2\alpha \sin [\pi f (t_0 - t_0)] \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - b) - 2\pi f \left(t - \frac{t_0 + t_0}{2} \right) \right] \quad (20.6)$$

De la Ec. (20.6) resulta evidente que el desplazamiento resultante es una variación armónica, cuya amplitud es

$$\text{Amplitud} = 2a \sin 2\alpha \sin [\pi f (t_0 - t_0)] \quad (20.7)$$

Esta expresión puede indicarse en forma ligeramente diferente, como

$$t_0 - t_0 = \frac{b}{v_x} - \frac{b}{v_y} = b \frac{v_x - v_y}{v_x v_y} \approx \frac{b}{v_0^2} (v_x - v_y) \quad (e)$$

Esta simplificación es admisible, pues v_x y v_y son prácticamente iguales a v_0 (velocidad de la luz en la baquelita sometida a tensión) y se puede sustituir el denominador por v_0^2 . Los experimentos

muestran que $v_x - v_y$ es proporcional a la diferencia de las tensiones principales, por lo que la Ec. (e) se puede escribir:

$$I_y - I_x = \frac{kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x) \quad (f)$$

Ahora, utilizando la Ec. (f) se puede escribir la Ec. (20.7) como

$$\text{Amplitud} = 2\alpha \sin 2\alpha \sin \left[\frac{\pi f kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x) \right] \quad (20.8)$$

Esta es la ecuación fundamental de la fotoelasticidad bidimensional, pues permite determinar la amplitud y, por tanto, la intensidad de la luz que pasa por el analizador.

La inspección de la Ec. (20.8) revela que la intensidad puede ser nula por dos razones. Primero, puede ser nula si $\sin 2\alpha$ es cero, lo que sucede cuando el plano de polarización del polarizador coincide con la dirección de cualquiera de las tensiones principales. Así, independientemente del color de la luz, o de la magnitud de las tensiones principales, todo punto del modelo en el cual coincide la dirección de una de las tensiones principales con el plano de polarización del polarizador, será negro. Habrá cierto número de puntos en los que dichas tensiones principales tienen la misma dirección, que estarán unidos entre sí por una línea negra llamada *isoclína*.

La amplitud depende también de la diferencia entre las tensiones principales, que afecta al valor de $\sin \left[\frac{\pi f kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x) \right]$. Cuando el modelo está descargado y sin tensiones, el valor de este término, y, por tanto, la amplitud, es cero; esto es, un modelo sin tensiones aparece todo negro cuando se le ve a través del analizador. Si dirigimos la atención a un punto determinado del modelo y aplicamos gradualmente la carga, vemos que este punto se ilumina cada vez más, llegando al brillo máximo cuando el valor de $\frac{\pi f kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x)$ es igual a $\pi/2$ y el seno de este ángulo es la unidad. Pero un nuevo aumento de la carga hace que se vaya oscureciendo el punto, hasta que sea otra vez negro cuando $\frac{\pi f kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x)$ es igual a π . Nuevos aumentos de carga hacen que el punto esté sometido a ciclos que le hacen pasar de negro a brillo y otra vez a negro. En todo lo dicho se supone que se ve el modelo con luz monocromática (unicolor) como se indicó al principio de esta sección.

Cuando vemos este punto determinado del modelo, hay otros puntos que pasan por el mismo número de ciclos. Cuando este punto es negro, los otros lo son también; entre todos forman una línea negra llamada *isocromática*. En todos los puntos de ella debe ser, por tanto, igual la diferencia entre las tensiones principales. Indudablemente, en este preciso instante hay otras series de puntos que han sufrido otro número de ciclos distintos, cada una de cuyas series forma otra línea isocromática negra. Así, el conjunto del modelo aparece en cada instante con varias líneas isocromáticas negras en un fondo blanco, como se ve en la Fig. 20.4. Las distintas líneas isocromáticas se dice que son isocromáticas de primer orden, de segundo, etc., según el número de ciclos de negro a brillo y a negro que han tenido lugar en dicha línea.

Es fácil calcular la diferencia en tensión principal a lo largo de la isocromática de orden n , porque sabemos que cada uno de sus puntos ha sufrido n ciclos, o

$$\frac{\pi f kb}{v_0^2} (\sigma_y - \sigma_x) = n\pi$$

De donde

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{n v_0^2}{b f k} \quad (20.9)$$

Conociendo n , el espesor del modelo b y ciertas constantes de la luz y del modelo, con esta ecuación podemos calcular $\sigma_y - \sigma_x$.

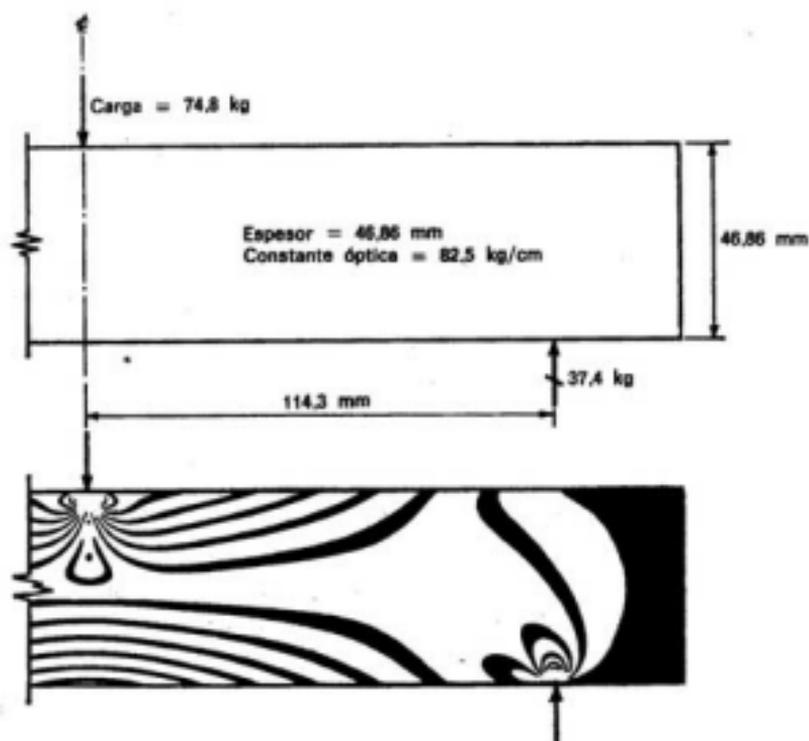


FIG. 20.4. Isocromáticas de una viga simple.

Por la teoría expuesta en esta sección, vemos cómo se puede relacionar el problema fotoelástico cuantitativamente al estado de tensiones en el modelo. En la próxima sección se indica cómo se usa esta información para resolver un problema de distribución de tensiones. Sin embargo, observaremos antes algunos hechos.

Hemos visto que, cuando observamos un modelo de baquelita a través del analizador, con luz monocromática, vemos dos tipos diferentes de líneas, isoclinas e isocromáticas, que son todas ellas negras sobre fondo iluminado. La cuestión que se plantea inmediatamente es cómo vamos a distinguir unas de otras. Si usamos luz blanca en lugar de monocromática, las isoclinas seguirán siendo negras, porque no dependen de la frecuencia de la luz. Por el contrario, las isocromáticas tomarán los colores del espectro en lugar de ser negras, porque solo puede haber interferencia completa para todas las frecuencias simultáneamente cuando la diferencia entre las tensiones princi-

pales es nula. Como este caso existe normalmente en puntos aislados, raramente existe una isocromática negra —normalmente son líneas de color—. Por tanto, usando luz blanca, es fácil generalmente identificar las isoclinas.

Generalmente, conviene fotografiar las isocromáticas, para lo cual es más conveniente usar luz monocromática para que sean líneas negras sobre fondo iluminado. Sin embargo, es conveniente eliminar de la fotografía las isoclinas, lo que puede conseguirse utilizando luz monocromática polarizada circularmente. En este caso, se puede desarrollar la teoría como antes para la luz polarizada plana, y se hallará que la amplitud de la vibración resultante que se ve por el analizador es

$$\text{Amplitud} = 2a \sin \left[\frac{\pi f k b}{v_1^2} (\sigma_y - \sigma_x) \right] \quad (20.10)$$

Esta expresión es la misma que la Ec. (20.8) excepto que ha desaparecido el término en $\sin 2\alpha$ y no hay efecto direccional. En la práctica, la luz polarizada circularmente se produce introduciendo una placa cuarto de onda en cada lado del modelo. Pero se podría producir el mismo efecto girando polarizador y analizador, manteniéndoles siempre cruzados. Si se hiciera esto, las líneas isoclinas se moverían alrededor del modelo al girar el plano de polarización. Pero podemos ver que, si giramos el polarizador y el analizador suficientemente de prisa, las isoclinas desaparecerán, en forma análoga a como lo hacen los radios de una cuerda cuando gira suficientemente de prisa. Este es un medio de ver el efecto de la luz polarizada circularmente.

20.5 Determinación de la distribución de tensiones por el método fotoelástico. En la sección anterior se mostró que el campo óptico que se ve por el analizador puede interpretarse que da la dirección de las tensiones principales y las diferencias entre ellas. Esto nos da dos cantidades independientes referentes al estado de tensiones en un punto cualquiera del modelo. En esta sección estudiamos cómo se obtiene una tercera cantidad independiente y cómo se usan estos datos para obtener la distribución de tensiones completa en un sistema bidimensional.

El polariscopio que se usa en el trabajo experimental se puede disponer de varias maneras distintas. Sin embargo, las partes esenciales son las representadas en la Figura 20.2, con algunos perfeccionamientos añadidos para que se puedan obtener fácilmente cuando se desee, luz blanca polarizada plana, luz monocromática polarizada plana, o luz monocromática con polarización circular. Para la luz monocromática se usa mucho una lámpara de vapor de mercurio con un filtro apropiado, y la misma lámpara sin filtro o una de filamento incandescente para la luz blanca. El polarizador y el analizador van provistos de placas cuarto de onda dispuestas de modo que sea fácil cambiar de luz con polarización plana a circular. Lleva un sistema de lentes para que el modelo esté en un campo de luz paralela. La máquina de cargar está dispuesta de modo que se pueda mover y alinear todo el dispositivo de carga y el modelo sin quitar ni variar la carga. La cámara utilizada con el polariscopio es del tipo plano provista de una pantalla para ver la imagen.

Con un polariscopio como éste, es sencillo colocar el modelo y fotografiar las isocromáticas (o franjas isocromáticas) usando luz monocromática polarizada circularmente. En la Fig. 20.4 se representa una fotografía de las isocromáticas de una viga simplemente apoyada cargada con una carga aislada en el centro. Se puede identificar en la fotografía el orden de las franjas observando el modelo al aplicar la carga y contando el número de ciclos en algunos puntos. Sabiendo el orden de la franja n , podemos uti-

lizar la Ec. (20.9) para calcular la diferencia entre las tensiones principales en distintos puntos del modelo.

Para tales cálculos, es conveniente variar la forma de la Ec. (20.9) y expresar las dos tensiones principales p y q , en lugar de σ_y y σ_x , o sea

$$p - q = \frac{n}{b} OC \quad (20.11)$$

donde OC = constante óptica del material del modelo = v_0^2/k . Se puede determinar la constante óptica de un material dado por un ensayo auxiliar con una tensión patrón para la que se conoce $p - q$.

Aunque, en general, las isocromáticas nos dan solo la diferencia entre las tensiones principales, este dato es suficiente para calcular las tensiones de borde de un modelo. En un borde libre no cargado, no hay esfuerzo cortante ni normal en la superficie de contorno, por lo que el contorno es un plano principal en el que la tensión principal es nula. En esos puntos, la otra tensión principal es paralela al contorno y, por tanto, es numéricamente igual al valor de borde de $p - q$ obtenido de las isocromáticas. En muchos problemas, las tensiones máximas tienen lugar en los bordes del modelo, por lo que la investigación puede limitarse a fotografiar las isocromáticas.

Las isoclinas se obtienen utilizando luz blanca polarizada plana y se pueden trazar en un trozo de papel montado en la pantalla de la cámara. Se coloca sucesivamente el plano de polarización del polarizador en varias posiciones entre la vertical y la horizontal, manteniendo todo el tiempo cruzados el polarizador y el analizador. Para cada una de estas posiciones, se dibuja la isocлина correspondiente en el papel, obteniéndose así un dibujo del que se puede determinar la dirección de las tensiones principales en cada punto del modelo, pues sabemos que en los puntos situados en una isocлина, tal como la de 20° , una de las tensiones principales está en una dirección que está a 20° con la vertical y la otra es perpendicular a ésta.

Si, además de conocer $p - q$ y la dirección de las tensiones principales en un punto del modelo, conocemos $p + q$, esto es, la suma de las tensiones principales, será fácil calcular las tensiones normal y de cortante en cualquier plano que pase por un punto

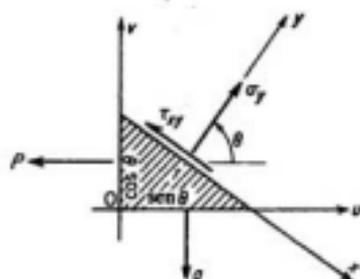


FIG. 20.5. Tensiones principales.

del modelo. Considerando el equilibrio de la pequeña partícula representada en la Fi-

gura 20.5, se pueden deducir ecuaciones que den la tensión normal σ_x y el cortante τ_{xy} en un plano cuya normal forma un ángulo θ con la dirección de la tensión principal p en el punto O . Los lados perpendiculares de este elemento son planos principales de tensión, y se supone que la longitud de la hipotenusa y el espesor de la partícula son iguales a la unidad. De $\Sigma F_y = 0$,

$$(\sigma_x)(1)(1) - (p)(\cos \theta)(1)(\cos \theta) - (q)(\sin \theta)(1)(\sin \theta) = 0$$

que simplificada da

$$\sigma_x = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \cos 2\theta \quad (20.12)$$

De igual modo, de $\Sigma F_x = 0$, hallamos que

$$\tau_{xy} = -\frac{p-q}{2} \sin 2\theta \quad (20.13)$$

De estas ecuaciones resulta evidente que se pueden calcular σ_x y τ_{xy} si se conoce también $p+q$.

Hay varios métodos para determinar $p+q$, siendo uno de los mejores el medir la variación de espesor del modelo. La variación de espesor de una placa depende de las tensiones principales en el plano de la placa, de la misma manera que la contracción de una sección de un patrón depende de la tensión axial en este patrón.

$$\Delta b = -\frac{\nu b}{E}(p+q) \quad (20.14)$$

Se han inventado varios extensómetros laterales especiales para medir Δb . El extensómetro de Forest-Anderson¹ es uno de los mejores. Con estos instrumentos se puede medir $p+q$ en algunos puntos determinados, y con estos datos se pueden trazar curvas que ayuden a la interpolación de los valores de $p+q$ en otros puntos.

También pueden hallarse los valores de $p+q$ por otros varios procedimientos experimentales o por un método iterativo propuesto por Liebmann para resolver los problemas que contienen la ecuación de Laplace. En lugar de determinar $p+q$ por uno de los métodos que se ha indicado, sería posible calcular los valores de p y q por separado con los datos que se obtienen de las isocromáticas y las isoclinas. Sin embargo, para ello se necesitan algunos cálculos gráficos y analíticos bastante pesados que no son necesarios en los otros métodos.

El empleo del método fotoelástico en los problemas de distribución de tensiones se puede resumir como sigue:

1. Para determinar las tensiones de borde solo se necesitan las isocromáticas.
2. Para determinar las tensiones de cortante en un plano cualquiera en cada punto se necesitan las isocromáticas y las isoclinas. Sin embargo, debe observarse que se pue-

¹ A. V. Forest y A. R. Anderson, «A New Lateral Extensometers», *Proc. Tenth Semi-annual Eastern Photoelasticity Conf.*, diciembre 1939.

de determinar la tensión de cortante máxima en un punto por las isocromáticas solamente, pues

$$\tau_{\max} = -\frac{p - q}{2}$$

3. Para determinar las tensiones de cortante y normal en un plano cualquiera en cada punto, además de las isocromáticas y las isoclinas, hay que determinar en cada punto el valor de $p + q$ o alguna tercera cantidad independiente.

20.6 Medida de las deformaciones. Es imposible estudiar la técnica de la medida de las deformaciones en el espacio de que disponemos¹. Se han inventado muchos dispositivos para medir deformaciones, pero los principios en que se basan son en número limitado. Los distintos instrumentos se pueden clasificar en uno de los grupos siguientes: calibres mecánicos, ópticos, de resistencia eléctrica, de inductancia eléctrica, o de capacidad eléctrica. En la actualidad, el más usado es el de alambre de resistencia SR-4.

Sin embargo, debe observarse que el tamaño mínimo de un modelo estructural viene determinado por el método de medidor de deformaciones elegido. Naturalmente, si la deformación varía linealmente, la deformación media en una cierta longitud de escala será igual a la deformación en el centro de dicha escala. Pero, si varía en forma no lineal, el valor medio puede ser notablemente diferente del correspondiente al punto medio. Por tanto, será necesario proyectar el modelo suficientemente grande para elegir un medidor de deformaciones con una longitud de escala suficientemente pequeña para que la variación de la deformación entre sus extremos se pueda considerar lineal. Si no se ha prestado suficiente atención a este punto, los resultados del estudio del modelo pueden no tener suficiente exactitud.

20.7 Determinación de la distribución de tensiones por medio de medidas de deformación superficial. Cuando se carga una placa delgada con fuerzas que actúan en su plano, se produce un estado de tensiones planas, esto es, se puede suponer que las tensiones producidas en la placa actúan paralelamente al plano de la misma y sus intensidades permanecen constantes en todo el espesor. Este estado de tensiones es uno de los que se encuentran más frecuentemente en los elementos estructurales. En estos casos, en cuanto se determina el estado de tensiones en la superficie, se conoce el del interior de la placa.

En el caso de una placa gruesa, o en el más general de un cuerpo sometido a tensiones, interviene un sistema de tensiones tridimensional, y dichas tensiones varían en el espesor de la placa. Por tanto, el determinar las tensiones en la superficie no nos permite en estos problemas definir el estado en el interior. Sin embargo, afortunadamente, en estos casos las tensiones máximas suelen tener lugar en la superficie, por lo que su determinación da la solución práctica de muchos problemas.

Las tensiones superficiales en un punto de la superficie no cargada de un cuerpo, forman un sistema bidimensional. Como se dijo en la Sec. 20.2, el estado de tensiones completo en ese punto se puede definir en función de tres incógnitas, la magnitud de las dos tensiones principales y la dirección de una de ellas. Indudablemente, no se puede medir las tensiones directamente, pero podemos medir deformaciones superficiales. Si se miden tres deformaciones lineales independientes, es posible calcular las deformaciones principales y sus direcciones. Utilizando las relaciones de la física entre tensión y deformación, se podrán transformar estas deformaciones en las tensiones principales.

¹ Se recomienda al lector M. Hetenyi (ed.), «Handbook of Experimental Stress Analysis», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1950.

Las direcciones de las tensiones principales y las deformaciones principales son las mismas. Una vez conocidas las magnitudes y direcciones de las tensiones principales, se pueden calcular las tensiones normal y de cortante en cualquier plano que pase por un punto.

Se pueden elegir las direcciones en que se miden las tres deformaciones lineales para simplificar los cálculos de las deformaciones y tensiones principales¹. Una de estas disposiciones, conocida por *roseta de deformaciones equiangular*², está representada en la Fig. 20.6. Las tres deformaciones lineales ϵ_a , ϵ_b y ϵ_c se miden a lo largo de líneas que forman ángulos de 120° entre sí. Puede demostrarse que la deformación principal ϵ_1

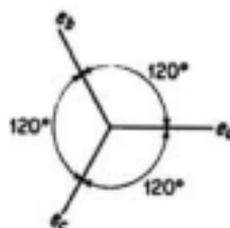


FIG. 20.6. Roseta de deformación equiangular.

mayor (algebraicamente) y la menor (algebraicamente) ϵ_2 se pueden calcular por la fórmula siguiente:

$$\epsilon_1 = A_1 + B_1 \quad \epsilon_2 = A_1 - B_1 \quad (20.15)$$

donde $A_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2 + (\epsilon_c - \epsilon_a)^2} \quad (20.16)$$

Las deformaciones se considerarán positivas cuando son alargamientos. La dirección de la deformación principal mayor ϵ_1 está dada por un ángulo α_1 , que se mide en sentido contrario a las agujas del reloj desde la línea de medida ϵ_a , donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_c - \epsilon_b)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c} \quad (20.17)$$

Se puede identificar el cuadrante en que está $2\alpha_1$, observando los signos del numerador y el denominador cuando se sustituyen en la Ec. (20.17) los valores numéricos de las deformaciones. La dirección de la deformación principal menor ϵ_2 se localiza por el ángulo $\alpha_1 + 90^\circ$, medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde la línea de medida ϵ_a .

¹ W. M. Murray, «An Adjunct to the Strain Rosettes», *Exptl. Stress Analysis*, vol. 1, núm. 1, págs. 128-133.

² R. D. Mindlin, «The Equiangular Strain Rosettes», *Civil Eng.*, vol. 8, núm. 8, págs. 546-547, agosto 1938.

Otra disposición apropiada se conoce por *roseta de deformación rectangular* y está representada en la Fig. 20.7. En este caso se pueden calcular las tensiones principales por las fórmulas siguientes:

$$\epsilon_1 = A_2 + B_2 \quad \epsilon_2 = A_2 - B_2 \quad (20.18)$$

donde
$$A_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} \quad (20.19)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (\epsilon_a - \epsilon_c)^2}$$

La dirección de la deformación principal mayor ϵ_1 está dada por el ángulo α_1 siguiente, que se mide en sentido contrario de las agujas del reloj desde la línea ϵ_a .

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c} \quad (20.20)$$

mientras que la dirección de la deformación principal menor ϵ_2 forma un ángulo $\alpha_1 + 90^\circ$ con ϵ_a .

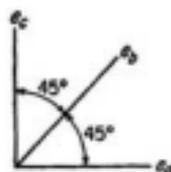


FIG. 20.7. Roseta de deformación rectangular.

Calculadas las tensiones principales a partir de las ecuaciones anteriores, se pueden calcular las intensidades σ_1 y σ_2 de las tensiones principales mayor y menor, respectivamente, por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (20.21)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y ν la relación de Poisson. Para uno u otro tipo de roseta, se pueden calcular directamente las tensiones principales sin hallar primero las deformaciones principales, utilizando las ecuaciones siguientes obtenidas sustituyendo las Ecs. (20.15) o (20.18) en las Ecs. (20.21):

$$\sigma_1 = E \left(\frac{A}{1-\nu} + \frac{B}{1+\nu} \right) \quad (20.22)$$

$$\sigma_2 = E \left(\frac{A}{1-\nu} - \frac{B}{1+\nu} \right)$$

Las direcciones de σ_1 y ϵ_1 y de σ_2 y ϵ_2 son las mismas.

En algunos casos es conveniente establecer las direcciones de las tensiones y deformaciones principales por algún medio auxiliar como la simetría, o utilizando un barniz quebradizo. Si se hace así, se pueden medir las dos deformaciones principales en esas direcciones, reduciéndose así las lecturas de deformación necesarias en cada punto, de tres a dos.

20.8 Determinación de cargas de pandeo. También pueden usarse los modelos de estructuras para determinar las cargas críticas o de pandeo de pilares, vigas y otros elementos estructurales. Estos datos se pueden obtener más fácilmente realizando ensayos con cargas menores que la de pandeo e interpretando los resultados por el método de Southwell¹ o alguna adaptación del mismo. En esos ensayos se aplica la carga en una serie de incrementos y se miden ciertas deformaciones después de cada uno de ellos. Dibujando los datos obtenidos en determinada forma, los puntos trazados están en una recta cuya pendiente da la carga crítica de pandeo. La ventaja principal de este procedimiento es que se pueden obtener los datos necesarios con las medidas tomadas con cargas menores que la de pandeo y, por tanto, al hacer el ensayo no se destruye el modelo, que puede volverse a ensayar después de hacer en él las modificaciones que se deseen.

En el trabajo original de Southwell se daba la prueba teórica de su método solo para el caso de un puntal simple. Demostraba que, si se tomaba como ordenada la relación entre la deformación lateral a la correspondiente carga axial y como abscisa la deformación misma, los puntos representados están en línea recta cuya pendiente invertida es igual a la carga crítica del puntal.

Posteriormente, Lundquist² propuso una modificación del procedimiento de Southwell. Donnell³ y otros investigadores han propuesto y aplicado variaciones del método de Southwell para tipos de pandeo más complicados. Estos estudios indican que se puede aplicar este procedimiento, o alguna variante, en todos los casos en que el pandeo no introduce tensiones de segundo orden apreciables.

¹ R. V. Southwell, «On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability», *Proc. Roy. Soc. (Londres)*, vol. 135, pág. 601, 1932.

² E. E. Lundquist, «Generalized Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability», *NACA Tech. Note* 658.

³ L. H. Donnell, «On the Application of Southwell's Method for the Analysis of Buckling Tests», *Contribuciones a la mecánica de sólidos*, dedicado a S. Timoshenko, pág. 27, The Macmillan Company, Nueva York, 1938.

Soluciones de los problemas

Las siguientes son las soluciones (o parte de las mismas) a los problemas precedidos por un asterisco.

Capítulo 1

- 1.2 Luz = 6 m $M_1 = 1,21$ m t
9 m 2,73 m t
12 m 4,86 m t
15 m 7,26 m t
18 m 9,90 m t
21 m 12,80 m t
24 m 15,90 m t
27 m 19,20 m t
30 m 22,70 m t
- 1.3 Superficies verticales: $P_N = 600$ kg/m
Superficies inclinadas: $P_N = 420$ kg/m a barlovento
 $= 444$ kg/m a sotavento
- 1.5 Esfuerzo = 534 kg/cm²

Capítulo 2

- 2.1 e) inestable; f) inestable; i) estable, indeterminada; l) estable, determinada; m) inestable; n) estable, determinada; o) inestable; r) estable, exteriormente indeterminada; u) estable, determinada; si β es tal que EF no pasa por D ; v) estable, determinada
- 2.2 a) $R_{ax} = 0$, $R_{ay} = 13,0$ t hacia arriba; $R_{by} = 23$ t hacia arriba
b) $R_{ax} = 0$, $R_{ay} = 1,0$ t hacia arriba, $M_a = 2,07$ m t
c) $R_{ax} = 15,0$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 11,46$ t hacia arriba;
 $R_{bx} = 45,21$ t hacia la derecha; $R_{by} = 27,13$ t hacia arriba;
 $R_{fx} = 11,095$ t hacia la derecha; $R_{fy} = 21,16$ t hacia abajo
d) $R_{ax} = 5$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 8,18$ t hacia arriba;
 $R_{by} = 6,82$ t hacia arriba
e) $R_{ax} = 20$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 11,83$ t hacia arriba;
 $R_{bx} = 20$ t hacia la derecha, $R_{by} = 3$ t hacia abajo;
 $R_{cy} = 11,16$ t hacia arriba
f) $R_{ax} = 2,75$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 2,3$ t hacia arriba,
 $M_a = 3,75$ m t; $R_{bx} = 0,5$ t hacia la derecha,
 $R_{by} = 3,6$ t hacia arriba
g) $R_{ax} = 0$, $R_{ay} = 4,25$ t hacia arriba, $M_a = 3,75$ m t;

- 2.3 a) $R_{ax} = 5$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 3,75$ t hacia arriba;
 $R_{bx} = 0,74$ t hacia la derecha, $R_{by} = 35,51$ t hacia arriba;
 $R_{cx} = 12,74$ t hacia la izquierda, $R_{cy} = 25,48$ t hacia arriba
- b) $R_{ax} = 28,0$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 21,0$ t hacia arriba;
 $R_{bx} = 12,0$ t hacia la izquierda, $R_{by} = 6,0$ t hacia abajo;
 $R_{cx} = 40,0$ t hacia la derecha, $R_{cy} = 15,0$ t hacia arriba
- c) $R_{ax} = 1,75$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 2,19$ t hacia arriba;
 $R_{bx} = 7,03$ t hacia la izquierda, $R_{by} = 8,79$ t hacia abajo;
 $R_{fx} = 16,21$ t hacia la izquierda, $R_{fy} = 32,42$ t hacia arriba;
 $R_{gx} = 0$, $R_{gy} = 34,15$ t hacia arriba
- d) $R_{ax} = 13,3$ t hacia la izquierda, $R_{ay} = 5,92$ t hacia abajo;
 $R_{dy} = 5,92$ t hacia arriba

Capítulo 3

- 3.2 Cortante en kg: izquierda de $A = -675$; derecha de $A = +2.700$; izquierda de $B = -4.500$; derecha de $B = +2.925$
 Momento en m kg en: $A = -225$; mitad entre A y $B = +2.025$; $B = -1.125$
- 3.3 Cortante en t en: $a = +7,5$; $b = -7,5$; derecha de $c = +2,708$; $d = +2,708$
 Momento en m t en: mitad entre a y $b = +6,25$; $c = -12,5$; $2,25$ m a la derecha de $c = -9,48$
- 3.5 Cortante en t en: $A = -10,0$; derecha de $C = +25,0$; izquierda de $D = +50,0$;
 $B = +10,0$
 Momento en m t en: $C = -22,5$, $-36,5$; $D = +76$, -15 ; $B = +5$
- 3.6 Cortante en t en: $a = 13,23$; derecha de $b = -12,28$; derecha de $c = +13,23$; $d = -7,76$
 Momento en m t en: $a = -2,0$; $b = +24,47$, $+36,5$; $c = -0,36$, $+11,67$.
- 3.9 Cortante en t en: $a = +27,65$; 5 m a la derecha de $a = +7,65$; 5 m a la izquierda de $b = -9,35$; $b = -26,35$
 Momento en m t en: $2,25$ m a la derecha de $a = +50,96$; 6 m a la derecha de $a = +79,65$;
 $2,25$ m a la izquierda de $b = 39,52$

Capítulo 4

- 4.2 a) determinada, estable; b) indeterminada en primer grado, reacciones, estable; c) determinada, estable; d) indeterminada en primer grado, reacciones; e) indeterminada en primer grado, esfuerzos de barras, estable; f) inestable; g) inestable; h) determinada, estable; k) determinada, estable; l) indeterminada en primer grado, esfuerzos de barras, estable; m) inestable
- 4.3 A) $a = +9,01$, $b = -4,15$, $c = +12,5$, $d = -9,01$
 B) $a = -21,87$, $b = +12,02$, $c = +1,041$
 C) $a = +1,77$, $b = +14,60$, $c = +8,75$, $d = -7,50$
 D) $a = -0,70$, $b = -2,94$, $c = -2,58$, $d = +14,09$
 E) $a = -10,00$, $b = +12,37$, $c = +16,25$, $d = +19,44$
 F) $a = -27,72$, $b = -20,88$, $c = -2,52$, $d = +29,92$, $e = +13,44$
 G) $a = -11,18$, $b = -28,28$, $c = 0,0$, $d = +30,00$, $e = -10,00$
- 4.5 a) Barra: $HI = -32,543$; $DE = +32,543$; $Fg = -6,508$; $cD = +22,78$
 b) Geométricamente inestable
 c) Geométricamente inestable
 d) Barra: $Be = -8,203$; $cd = -12,372$; $Dc = +2,420$, $fg = -2,578$
- 4.6 a) Barra: $BD = -14,062$; $Bc = +0,781$; $ab = +13,594$
 Barra BD : Cortante en: $B = +2,5$, $D = -2,5$
 Momento en: $B = 0$, $C = +22,5$, $D = 0$
 b) Barra: $CE = +2,812$; $bC = +4,062$; $Ab = -2,5$
 Barra AC : Cortante en: $A = +2,00$; $C = -2,00$
 Momento en: $A = 0$; bajo la carga = $+18,0$; $C = 0$

Barra CE: Cortante en: $C = +1,25$; $E = -1,25$
 Momento en: $C = 0$; bajo la carga = $+11,25$; $E = 0$

Capítulo 6

- 6.1 a) Ordenada en: extremo izquierdo = $+0,25$; izquierda de $a = -0,5$; derecha de $a = +0,5$
 b) Ordenada en: extremo izquierdo = $-0,625$; $b = 0$; $a = +1,25$; extremo derecho = $-1,25$
 c) La línea de influencia varía linealmente de $+1,25$ en el extremo izquierdo a $-0,5$ en el derecho
- 6.2 a) $7.031,25$ kg; b) $+6.250$ m kg, $-5.078,125$ m kg
 c) $+5.156,25$ kg, -1.875 kg; d) $+8.593$
- 6.5 a) La línea de influencia varía linealmente desde $-0,75$ en C a $0,0$ en E a $-0,75$ en G
 b) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en E a $-4,5$ en G
- 6.9 $+160,2$ m t
 6.10 $+14,1$ t
 6.12 $+7,03$ m t
 6.14 Barra $a = -56.250$ kg; barra $b = +15.150$ kg, -8.522 kg
- 6.15 a) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ a la izquierda, a $-1,25$ en el nudo 3, a $0,0$ en el extremo derecho, nudo 7
 b) La línea de influencia varía linealmente desde $0,0$ a la izquierda, a $+0,833$ en el nudo 3, a $-0,125$ en el nudo 4, a $0,0$ en el extremo derecho
 c) La línea de influencia varía linealmente desde $0,0$ a la izquierda, a $+0,300$ en el nudo 5, a $-0,750$ en el nudo 6, a $0,0$ en el extremo derecho
 d) La línea de influencia varía linealmente desde $0,0$ a la izquierda, a $+0,333$ en el nudo 4, a $0,0$ en el extremo derecho

Capítulo 7

- 7.2 Barra: $L_0L_1 = +1.990$; $U_1U_2 = +690, -490$; $U_2L_2 = +380, -1.740$
- 7.3 a) Barra: $L_0L_1 = +46,9$; $U_1U_2 = -75$; $U_1L_2 = +51,3$
 b) Barra: $U_2L_2 = -7,0$; $+28,4$; $U_2L_2 = -24,3, +3,0$. Ninguna otra barra tiene inversión de esfuerzos
- 7.4 Se necesitan diagonales auxiliares en L_2U_3 y U_3L_4
- 7.6 a) Barra: $L_0L_1 = -52,5$; $U_1L_2 = +42,42$; $U_2U_3 = +22,5$ t
 b) Barra: $L_2L_3 = -15,81$; $U_1U_2 = +22,5, -5,0$; $L_2U_3 = -24,75$ t
 c) No

Capítulo 8

- 8.1 a) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en E a $+1,33$ en B a $0,0$ en C
 b) Reacción del voladizo = $888,8L = R_1$
 Reacción del tramo sencillo = $750,0L = R_2, R_1/R_2 = 1,185$
- 8.2 a) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ a medio camino entre i y b hasta $1,0$ en b y $0,0$ en a
 b) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en b a $1,5$ en b y de allí a $0,0$ en a
 c) La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en b a $1,8$ en a y $0,0$ en f
 d) 373.500 kg
- 8.4 La línea de influencia varía linealmente de $1,0$ en A a $-0,5$ en B y de allí a $0,0$ en C
- 8.8 La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en a a $+0,215$ en b a $-1,720$ en e y a $0,0$ en i
- 8.10 La línea de influencia varía linealmente de $0,0$ en a a $+0,220$ en b a $-1,761$ en e y a $0,0$ en i
- 8.11 $Bc = +9.555$ kg, -8.465 kg

Capítulo 9

- 9.2 $R_{xy} = 500$ kg hacia abajo; $R_{ax} = 433$ kg hacia arriba; $R_{ay} = 500$ kg hacia arriba; $R_{bx} = 433$ kg hacia abajo; $R_{by} = 0$; $R_{cx} = 500$ kg hacia la izquierda
- 9.3 Barra: $ab = -250$; $bc = +500$; $ca = -500$; $ed = -500$; $eb = -500$; $ea = +707$; todas las demás = 0
- 9.4 $R_{xy} = 577$ hacia abajo; $R_{ax} = 125$ hacia arriba; $R_{ay} = 288$ hacia arriba; $R_{bx} = 375$ hacia abajo; $R_{by} = 288$ hacia arriba; $R_{cx} = 433$ kg hacia la izquierda
Barra: $ab = -216$; $bc = +433$; $ca = -144$; $ed = eb = -288$; $da = +288$; $dc = -407$; $ca = +407$ kg; las demás = 0
- 9.5 a) 11 barras, 8 reacciones, 6 nudos; por tanto, indeterminada en primer grado
b) $R_{xy} = 2.500$ hacia abajo; $R_{ax} = 2.500$ hacia la izquierda; $R_{ay} = 2.500$ hacia arriba; $R_{bx} = 0$; $R_{by} = 2.500$ hacia abajo; $R_{cx} = 0$; $R_{cy} = 2.500$ hacia arriba; $R_{dx} = 2.500$ hacia la izquierda
Barra: $ef = -2.500$; $ed = -3.750$; $af = +3.750$;
 $ec = +2.800$; $bf = -2.800$; $bd = +1.250$;
 $ca = -1.250$; todas las demás = 0
- 9.7 a) Barra: $ab = -4,22$ t; $bc = 0$; $ca = 0$
b) Nudo, d: $Z = -0,20$; $X = +3,17$; $Y = -3,52$; e: $Z = -0,2$; $X = +0,35$; $Y = -3,52$; f: $Z = +2,90$; $X = +1,48$; $Y = -2,96$ t
c) $R_{ax} = 5,00$ hacia la izquierda; $R_{ay} = 9,71$ hacia arriba; $R_{bx} = 1,68$ hacia arriba; $R_{by} = 11,11$ hacia abajo; $R_{cx} = 4,18$ hacia abajo; $R_{cy} = 11,39$ t hacia arriba

Capítulo 10

- 10.2 a) 0,8. b) 1.600 t. c) 152,8 m. d) 152,5 m.
- 10.6 a) Máxima tensión del cable = 269,2 t; las barras del cordón inferior no soportan esfuerzo alguno
b) 1) La línea de influencia varía linealmente desde 0,0 en cada extremo a +2,50 en el centro del vano
2) La línea de influencia varía linealmente desde 0,0 en cada extremo a +0,10 en el centro del vano
3) La línea de influencia varía linealmente desde 0,0 en el extremo izquierdo a -0,192 en el segundo nudo a +1,032 en el tercero a -0,495 en el centro del vano y a 0,0 en el extremo derecho
c) 20,3 cm²

Capítulo 11

- 11.1 a) +28.687,7 kg; b) $\mp 5.062,5$ kg. ± 2.250 kg
- 11.2 a) +28 t; b) +19,8 t; c) -19 t
- 11.6 a) Cortante en kg: desde la base a la cartela = 1.250; por encima de la cartela = -1.875
Momento en m kg en: la base = -2.810; cartela = +2.810; parte alta = 0,0
b) Fuerza axial: en el poste izquierdo, -1.423 kg; en el derecho, +1.423 kg
Cortante: en el poste izquierdo, 1.875 kg hacia la derecha; en el poste derecho, 1.875 kg hacia la derecha; fuerza en la cartela izquierda = +4.260; en la derecha = -4.260 kg
- 11.9 Momento flector en los apoyos, de izquierda a derecha: 4,5, 9,0, 9,0 y 4,5 m t
- 11.10 Momento flector en los apoyos, de izquierda a derecha: 4,05, 9,45, 9,45, 4,05 m t
- 11.11 Momento flector en los apoyos, de izquierda a derecha: 7,1, 7,6, 7,6, 7,1

Capítulo 12

- 12.2 1,39 cm hacia la derecha
- 12.3 0,937 cm hacia la derecha
- 12.5 0,229 cm hacia abajo

- 12.7 a) 0,276 cm hacia abajo; b) 1,875 cm hacia arriba, 0 cm en horizontal
 12.8 5,19 cm hacia arriba
 12.9 0,605 cm hacia abajo y a la derecha a 27,7° con la vertical
 12.12 a) 0,196 cm hacia abajo; b) 0,00486 radianes en sentido contrario a las agujas del reloj
 12.14 0,0348 cm hacia abajo
 12.17 a) En a , 2,1296/ El hacia abajo; en c , 0,3241/ El hacia arriba; en d , 0,1852/ El hacia abajo; en b , 1,2963/ El en sentido contrario a las agujas del reloj, y en e , 0,37037/ El en sentido de las agujas del reloj. b) En a , 0,0008451 m; en b , 0,0005144 radianes
 12.20 0,95 cm
 12.22 0,386 cm hacia arriba a 3,08 m de a
 12.25 0,535 cm hacia abajo a 1,7 m de a
 12.27 26,67/ El hacia abajo a 4 m de a
 12.28 Nudo h : 2,05 cm hacia abajo; 0,775 cm hacia la derecha, etc.

Capítulo 13

- 13.1 En A , 41,5 t hacia arriba y 22 t a la izquierda; en B , 22 t hacia la derecha; en C , 8,5 t hacia arriba
 13.3 $F_{ad} = +1,53$ t
 13.4 $F_{ab} = +7,2$ t; $F_{ad} = -7,8$ t; $F_{bc} = +8,05$ t, etc.
 13.5 a) 26,62 t hacia la derecha; b) 90 t a la izquierda; c) 164,34 t a la derecha
 13.10 M en la base del pilar, 40,5 m kg produciendo tracción en las fibras de la izquierda
 13.11 $R_{ax} = 0$; $R_{ay} = 15,55$ t hacia arriba; $M_a = 24,4$ m kg en sentido contrario a las agujas del reloj; $R_{bx} = 14,45$ t hacia arriba
 13.12 $R_{ax} = 9,16$ t hacia la derecha; $R_{ay} = 15$ t hacia arriba; $R_{bx} = 9,16$ t a la izquierda; $R_{by} = 5$ t hacia arriba
 13.13 Cortante constante e igual a 1,5 t. $M_A = 1,87$ m t, tracción en las fibras exteriores; $M_B = 1,87$ m t, tracción en las fibras interiores
 13.15 Cortante en A que carga = +2,64 t; carga del cortante en $B = -2,36$ t; $M_A = 2,91$ m t; M en la carga = 2,36 m t
 13.17 $F_{L,ab} = +22,7$ t
 13.22 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -34,4$ m t; $M_{BA} = +21,25$ m t; $M_{BD} = -8,75$ m t; $M_{DB} = -4,37$ m t
 13.23 Signos de la deformación angular. $M_{ab} = 24$ m t; $M_{ba} = -3$ m t; $M_{bc} = -13,5$ m t; $M_{cb} = -12$ m t; $M_{cb} = -6$ m t
 13.25 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -24,7$ m t; $M_{BA} = -22,5$ m t; $M_{BC} = +22,5$ m t; $M_{CB} = +22,1$ m t; $M_{CD} = -22,1$ m t; $M_{DC} = -24,5$ m t
 13.29 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -27,1$ m t; $M_{BA} = +13,2$ m t; $M_{BD} = -4,24$ m t; $M_{DB} = -1,5$ m t; $M_{DE} = +1,2$ m t; $M_{ED} = +1,2$ m t
 13.31 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -56,3$ m t; $M_{BA} = -56,7$ m t; $M_{BC} = +49$ m t; $M_{BD} = +7,7$ m t; $M_{DB} = +16,4$ m t; $M_{DE} = -16,4$ m t
 13.32 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = +4,5$ m t; $M_{AD} = -4,5$ m t; $M_{DA} = -5,5$ m t; $M_{DC} = +1,7$ m t; $M_{DE} = +2,5$ m t; $M_{ED} = +1,3$ m t
 13.34 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -26,3$ m t; $M_{BA} = -20,6$ m t; $M_{CD} = -37,3$ m t; $M_{DC} = -34,7$ m t
 13.35 Signos de la deformación angular. $M_{AB} = -10,4$ m t; $M_{BA} = -8,3$ m t; $M_{CD} = -35$ m t; $M_{DC} = -25,1$ m t
 13.39 Signos de la deformación angular. $M_{BA} = -M_{BC} = +1,4$ m t; $M_{CB} = +1,4$ m t; $M_{CD} = -6,2$ m t; $M_{CB} = +4,8$ m t; $M_{BC} = 4$ m t

Indice de nombres

Adams, C. H., 32
Anderson, A. R., 600
André, W. L., 461
Argyris, J. H., 373, 487

Baker, J. F., 501
Beedle, L. S., 501, 516
Beggs, G. E., 565, 578
Benscoter, S. U., 487
Bernoulli, John, 311
Biggs, J. M., 558
Bleich, F., 24
Borg, S. F., 451
Bowman, H. L., 51
Bull, Anders, 577

Castigliano, A., 371, 373
Chen, P. P., 487
Cilley, F. H., 521
Clapeyron, B. P. E., 418
Clough, R. W., 487
Coker, E. G., 590
Conrad, R. D., 505
Coulomb, C. A., 22
Crandall, S. H., 95, 487
Cross, Hardy, 25, 437, 462

Dahl, N. C., 95
Davis, H. E., 565
Davis, R. E., 565
De Forest, A. V., 600
de Vinci, L., 21
Donnell, L. H., 604
Drucker, D. C., 555

Eney, W. J., 577

Fife, W. M., 76, 148, 461
Filon, L. N. G., 590
Flügge, W., 24
Föppl, A., 24
Föppl, L., 24
Freudenthal, A. M., 28
Frocht, M. M., 590

Galileo, G., 21
Gennaro, J. J., 451
Girkmann, K., 24, 552
Goodier, J. N., 24
Gottschalk, O., 577
Grinter, L. E., 451

Hansen, R. L., 558
Henneberg, L., 155
Hetenyi, M., 601
Heyman, J., 501
Hodge, P. G., Jr., 501
Holley, M. J., Jr., 558
Horne, M. R., 501
Hovey, O. E., 231
Hoyt, S. L., 32

Johnson, A. L., 28
Julian, O. G., 28

Kinney, J. S., 452
Kron, G., 487

- Laushey, L. M., 521
 Lorenz, H., 24
 Love, A. E. H., 24
 Lundquist, E. E., 604
- McCullough, C. B., 573
 Maney, G. A., 24
 Matheson, J. A. L., 373, 451, 487
 Maugh, L. C., 451
 Maxwell, C., 181
 Michaels, L., 20
 Mills, B., 574
 Minami, J. K., 558
 Mindlin, R. D., 590, 602
 Moorman, R. B. B., 122, 451, 457
 Morgan, N. D., 462
 Morice, P. B., 487
 Müller-Breslau, H., 213, 361, 479
 Murray, W. N., 602
- Nádai, A., 24
 Namyet, S., 558
 Navier, 22
 Nervi, P. L., 20
 Newell, J. S., 461
 Norris, C. H., 558, 573
- Ogden, H. R., 32
 Onat, E. T., 558
- Parcel, J. I., 122, 451, 457
- Rogers, G. L., 558
 Ruge, A. C., 583
- Schmidt, E. O., 583
 Shank, M. E., 30
 Shanley, F. R., 555
 Sokolnikoff, I. S., 24
 Southwell, R. V., 24, 604
 Spofford, C. M., 51, 261
 Steinman, D. B., 20, 148, 241
 Sutherland, H., 51
 Szilard, R., 33
- Thayer, E. S., 573
 Timoshenko, S., 20, 24, 155, 263, 451,
 543, 552, 558
 Torroja, E., 20
- von Abo, C. V., 457
- Wang, C.-K., 452
 Watson, S. R., 20
 Westergaard, H. M., 20
 Wichert, E. M., 241
 Wilbur, J. B., 76, 148, 301, 461, 573
 Woinowsky-Krieger, S., 24, 543
- Young, D. H., 155, 263, 451

Indice

- Acción, híbrida, 521, 522
normal, 522, 521
- Acero propiedades mecánicas del, 501-503
- Ala, de viga compuesta, 60
- Alargamiento elástico de tablas, 276
- Alma, vigas compuestas, 60
- Análisis, aproximado de las estructuras estáticamente indeterminadas, 283
armaduras de, cordones paralelos, 285
sistemas múltiples, 286
hipótesis necesarias para, 285
importancia de, 284
pórticos de edificios, tensiones en, 293-307
debidas a cargas laterales, 295
debidas a cargas verticales, 293
pórticos, industriales, tensiones en, 291
simples, 289
torres con pies rectos, 292
- de modelos de estructuras, 564-572
interpretación de los resultados, 570
métodos indirectos de, 573, 576
típicos de, 564
planteamiento de, 569
- de tensiones en las armaduras, 126-142
- del comportamiento estructural, 42-45
comparación de los métodos de fuerzas y de desplazamientos, 488-492
método de, desplazamientos de, 43, 44
fuerzas de, 43, 44
tensiones, 43
(Véase también Análisis de estructuras)
- estructuras, comparación de los métodos de fuerza y desplazamiento del, 488-492
- Análisis, estructuras, definición del, 42
método, de desplazamiento de (véase Método de análisis estructural de desplazamiento)
de fuerza de, 43, 44, 488
matricial de, 495-499
(véase también Análisis de modelos de estructuras)
exactos, 283
- Analogía de la columna, 462
- Apoyos, 70, 253
- articulados, 71
de biela, 71
de rodillo, 71, 253
empotrado, 71
esférico, 252
junta universal, 252
- Arco tri-articulado, 243, 245, 246
solución gráfica, 183
- Arcos, generalidades, 37, 243
tri-articulados, 183, 244-248
de celosía, 244, 246
líneas de influencia de, 245
- Area, neta, 64
total, 64
- Armaduras, 121-122
análisis de tensiones de, 126-142, 242-247
complejas, 155
compuestas, 124
continuas, 241
estáticamente determinadas, 241
de cordones paralelos, 285
de cubierta (véase Cerchas de cubierta)
de puente (véase Cuchillos de puentes)
de sistema múltiple, 287

- Armaduras, deformación de, por los trabajos virtuales, 317-326**
 espaciales (véase Armaduras tri-dimensionales)
 estabilidad y determinación de, 142-148
 ideales, 122
 líneas de influencia de, 207
 con diagonales K, 209
 o vigas Pratt, 207
 notación y criterio de signos para las, 126
 o cuchillos de cordones paralelos aproximados, 285
 estudio, 285
 organización de, 61
 planas, 38, 121, 218
 simples, 124
 solución gráfica de las fuerzas de barra en las, 181
 tensiones, máximas en, debidas a una serie de sobrecargas aisladas, 210
 secundarias en las, 456-460
 tipos clásicos, 148
 tri-dimensionales, 38, 122, 251
 condición estática de las, 251
 deformaciones de, 376
 estáticamente, 455
 indeterminadas, 73
 fuerzas de barra de, 255
 reacciones de, 254
 teoremas especiales sobre, 259
 teoría general de las, 263-267
 Wichert, 241-242
- Arriostramiento, 218**
 transversal, 218
- Asociación, Americana de Funcionarios de Carreteras Estatales (AASHO), 50, 54, 55, 60, 66**
Americana de Ingenieros Civiles, 56
de Ingeniería de Ferrocarriles Americana (AREA), 50, 54, 60, 66
- Balanza, de resorte de celuloide, 567**
 de torsión celuloide, 567
- Cable uniformemente cargado, forma del, 272**
 longitud de, 275
- Cables, 270-281**
 alargamiento elástico, 276
 ejemplos aclaratorios de, 274
 tracción en, 278
 uniformemente cargados, forma de, 272
 longitud de, 275
- Cálculo de deformaciones (véase Deformaciones)**
- Carga, de fluencia, definición de, 503n**
 de rotura, definición de, 503n
- Cargas, 50-60**
 centrífugas, 59
 de Cooper, 53
 de hielo, 55, 221, 222
 tensiones en cerchas de cubierta debidas a, 222
 de nieve, 55
 de viento, 56, 224
 tensiones admisibles para, 224
 del terreno, 57
 fijas, 50
 o con cargas, 50
 hidrostáticas, 58
 laterales, 55, 296
 en pórticos de edificios, 295
 longitudinales, 59
 simétrica y antimétrica, 460
 sísmicas, 59
 sobrecargas, 51
 para edificios, 53
 para puentes, de carretera, 51
 de ferrocarril, 52
 térmicas, 60
 verticales, en pórticos de edificios, 293
- Centro elástico, 460**
- Cerchas, complejas, 154**
 compuestas, 125
 de cubierta, 149, 219-224
 esfuerzos en las, de la carga fija, 220, 221
 de la nieve, 221
 del hielo, 220
 del viento, 222
 tabla de, 223
 ideales, 122
 simples, 124
- Coefficiente, de forma, 528**
 de seguridad, 27, 66
- Coefficientes, de flexibilidad, 393**
 de rigidez, 493, 495

- Columnas, pandeo de, 555-557
- Comportamiento, al pandeo, análisis del, 552-558
 experimental, 604
 columna, 556
 plástico, de armaduras simples, 503-507
 de vigas continuas bajo cargas alternadas, 516-519
 de vigas típicas, 511-516
 relaciones momento-curvatura del, 507-511
- Condiciones estáticas, de estructuras cantilever, 238
 de estructuras tri-dimensionales, 251
- Constante óptica, 599
- Contraflecha de estructuras, 378
- Cordones, armaduras, 61
- Cortante, 97
 cálculo del, 98
 determinación gráfica del, 177
 líneas de influencia del, 192
 máximo absoluto de las sobrecargas, 205
- Cortantes máximo absoluto de las sobrecargas, 205
- Criterio de signos de la viga, 98
- Cuchillo Wichert, 241, 242
 tensiones en el, 242
- Cuchillos, continuos, 241
 de puentes, 224-235
 estudio general de, 224
 fuerza de barra de, carga fija, 225, 226
 impacto, 227
 sobrecarga, 227
 tabla de, fuerzas de barra de, 226
 influencia de, 225
 resumen de, 225
- Cuerpos rígidos, 72, 90, 123, 311-313
- Cúpula de Schwedler, 259
- Curvas, de cortantes, 100
 de vigas, determinadas, 104-112
 indeterminadas, 114-116
 principales, determinadas, 112
- del momento flector, 100
 para vigas compuestas, determinadas, 112
 para vigas, determinadas, 104-112
 indeterminadas, 104-112
- Charnela plástica, definición de la, 510
- Deformación elástica, 309
- Deformaciones, 309-310
 cálculo de, por el método de la cadena de barras, 361-370
 por el método, la carga elástica, 339-347
 la viga conjugada, 348-352
 Williot-Mohr, 352-361
 por los teoremas del área de momentos, 334-338, 344-348
- contraflecha, 378
- de armaduras, con nudos articulados, 318, 333
 espaciales, 376
 tri-dimensionales, 376
- de cerchas, método de los trabajos virtuales aplicado a, 317-326
- de vigas y pórticos, método de los trabajos virtuales aplicado a, 326, 334
- elástica, 309
 líneas de influencia de, 381
 naturaleza del problema, 310
 no elástica, 309
 recíprocas, ley de Maxwell de, 380
 teoremas de Castigliano, 370-376
 primero, 373
 segundo, 370
- Defórmetro de momentos, 579
- Desplazamientos virtuales, principio de los, 311-313
- Determinación gráfica del cortante, 177
- Diagonales, auxiliares, 228
 de armaduras, 61
 de cerchas, 61
- Diagrama, de Maxwell, 181
 de momentos, empleo del, 200
- Ecuación de los tres momentos, 418-422
- Ecuaciones, de condición, 72
 estructuras que contienen, 75
 de superposición, 394
 análisis de estructuras indeterminadas, 391
 simultáneas, método de resolución, 434
- Elasticidad (véase Teoría de la elasticidad)
- Empotramiento, 71
- Energía de deformación almacenada, por el momento flector, 373
 por la fuerza axial, 372

- Equilibrador de un sistema de fuerzas, 170
- Equilibrio estático, ecuaciones del, 72
- Esfuerzos, admisibles, 64
- en barras sometidas a viento, 224
 - de participación, 219
 - sísmicos, 59
 - térmicos, 60
- Esquemas de cuerpo libre, 76
- Estabilidad, de las armaduras, 142-148
- estática, 73, 81-84, 143, 144-148
 - geométrica, 75, 81-84, 143, 144-148
- Estática gráfica, 167-170
- Estructura, elemento, definición de, 43
- panel, definición de, 44
 - primaria, 392
- Estructuras, análisis de modelos de (véase Análisis de modelos de estructuras)
- cantilever o con voladizos, 237
 - con contravientos, 277
 - continuas, 241
 - contraflecha, 378
 - de cable, 35
 - de gran luz, 237-250
 - de ingeniería civil, 49
 - de tablero, inferior, 62
 - superior, 61
 - de voladizo (cantilever), 237-241
 - análisis de tensiones de, 239
 - condición estática de, 238
 - determinación de las reacciones de, 239
 - líneas de influencia de, 240
 - estáticamente, determinada, 73, 74, 81-84, 232-242
 - indeterminada (véase Estructuras estáticamente indeterminadas)
 - inestables, 73
 - geométricamente inestable, 75
 - planas, 38, 69, 72
 - ecuaciones del equilibrio estático de, prácticas e ideales, 66 [72]
 - primaria, 392
 - que contienen ecuaciones de condición, 72
- Estructuras estáticamente, determinadas, 73, 74, 81-84, 232-242
- indeterminadas, 73, 81-84, 132-142, 155-158, 266
 - análisis de tensiones de, segundo teorema de Castigliano para, 412-417
- Estructuras, indeterminadas, análisis de tensiones de, ecuación de los tres momentos para, 418-422
- ecuaciones de superposición para, 391-410
 - método de la, deformación angular para, 422-436
 - distribución de momentos para, 437-455
 - deformación de, 455
 - estudio aproximado (véase Estudio aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas)
 - líneas de influencia de, 475-586
 - proyecto preliminar de, 285
- Factor, de carga dinámica, 561-562
- de desplazamiento lateral, 454
 - de distribución o de reparto, 440, 452, 453
 - de rigidez, 425, 452
 - reducido, 442, 452
 - verdadero, 452
- Factores, de momento, de pilar, 304
- de vigas, 305
 - de pilar, 303
 - de vigas, 303
- Fallo estructural, modo de, 33-34
- Fatiga, elástica, 34
- plástica, 34
- Fijación de tensiones de las estructuras, 148-155
- indeterminadas, 519-521
- Forma de un cable uniformemente cargado, 272
- Formas estructurales, 34-42
- de tensión, uniforme, 34
 - variable, 34
- Fórmula de Duchemin para la presión de viento, 56w
- Fuerza, axial, 97
- cortante, 97
 - resistente cortante, 97
- Fuerzas, centrífugas, 59
- componentes de, 170
 - composición y descomposición de, 168-170
 - de barra, 122
 - en armaduras tri-dimensionales, 255

- Fuerzas, de barra, en cerchas, solución gráfica de, 181
 en cuchillos de puente (véase Cuchillos de puentes)
 dirección de, 167
 longitudinales, 59
 magnitud de, 167
 resultante de, 168
 térmicas, 60
- Híbrida, acción, 521, 522
- Hipótesis necesarias para el estudio aproximado, 285
- Impacto, 54
 longitudes cargadas para, 213
 tensiones en cuchillos de puente debidas a, 227
- Indicador de momentos, 583
- Instituto Americano de la Construcción de Acero (AISC), 50, 56, 65
- Inversión de esfuerzos, 227
- Isoclinas, 596
- Isocromáticas, 596
- Kips, 53
- Lámina, 38
 estudio de las, 543-552
 criterio y notación, 543
 formulación, 546-548
 hipótesis, 543
 teoría de la membrana de las, 549-551
 aplicación a la lámina de revolución, 551-552
- Largueros, 62, 112
- Ley, de Betti, 380
 de Maxwell de las deformaciones recíprocas, 381
- Líneas de influencia, 190-217, 471-486
 de arco tri-articulado de celosía, 245
 de cerchas, generalidades, 206
 de cortantes, 204
 de deformaciones, 381
 de estructuras, cantilever, 241
 estáticamente indeterminadas, 475-486
- Líneas de influencia, de momentos, 194, 200, 201
 de vigas, construcción de, 194
 de vigas, Pratt, 207
 principales con sistema de tablero, 196, 197
 trianguladas con diagonales en K, 209
 interpretación de, 198
 otro método, 213
 propiedades, 192
- Longitud, cargada, 213
 de cable uniformemente cargado, 275
- Margen de seguridad, 27, 66
- Materiales estructurales, 28-33
- Matriz, de desplazamientos, 497
 de flexibilidad, 497
- Medida de deformaciones, 601
- Membrana, flexible, 36
- Método, de análisis estructural de desplazamientos, 43, 44, 502
 generalización de, 492-495
 para armaduras planas, 488-492
 de Beggs, 578
 de la cadena de barras, 361-370
 de la carga elástica, aplicación de, 339-347
 criterio de signos para, 341
 desarrollo de, 339-341
 de la deformación angular, 422-436
 aplicación del, 419-436
 criterio de signos y notación para, 422
 desarrollo del, 422-426
 de la distribución de momentos, 437
 aplicación del, 440-451
 a barras no prismáticas, 451-455
 fundamentos del, 437-440
 de la viga conjugada, 443-445
 de las tres fuerzas, 172
 de Williot-Mohr, 352-356
 aplicación del, 356-360
 diagrama de, corrección de Mohr, 356
 Williot, 353
 del factor, 301
 del modelo de alambre de latón, 577
 del pórtico simple, 296
 del voladizo, 300
 fotoelástico, 593-601
 aplicación del, 598

- Método, fotoelástico, teoría fundamental del, 593**
 indirectos de análisis de modelos, 573
 matriciales, 46
 de análisis estructural, 495-499
- Modelos, propiedades de los materiales para, 565**
 proyectos de, 565
- Módulo, plástico, 510**
 de la sección transversal, 510
 resistente, 507
 tangente, 557
 de elasticidad, 373
- Mohr (véase Métodos de Williot-Mohr)**
- Momento, 97**
 de empotramiento, 424
 definición de, 424
 desequilibrado, 438
 flector, 97
 cálculo del, 97
 líneas de influencia del, 194, 200, 201
 máximo, absoluto de la sobrecarga, 205
 debido a una serie de cargas concentradas, 201
 resistente, 97, 507, 510
 de fluencia, 507
 plástico, 510
 trasladado, 439, 452
- Momentos, distribuidos, 439, 448**
 repartidos, 439, 454
 transmitidos, 439, 452
- Montantes, de armaduras, 60**
 de refuerzo, vigas compuestas, 60
- Nieve, esfuerzos de cerchas de cubierta debidos a, 221, 222**
- Notación de Bow, 181**
- Nudos, método de, 129, 130-142**
- Optica, repaso de los principios de la, 591**
- Pandeo, de columnas, 555, 556, 557**
 elástico, 33
 definición de, 33
 plástico, 33
- Placas, 40-42**
 de cartela, 61
- Polígono, de equilibrio (o funicular), 173**
 determinación de reacciones, utilizando, 175
 polo y rayos de, 173
 trazado por uno, dos o tres puntos, 176
 de fuerzas, 170
 funículas (véase Polígono de equilibrio)
- Pórtico (véase Pórticos rígidos)**
- Pórticos, de edificios, cargas en, laterales, 295**
 verticalés, 293
 estudio aproximado de, 293-306
 métodos de, factor, 301
 pórtico simple, 296
 voladizo, 299
- industriales, 291**
 rígidos, 34, 41, 155, 156
 estabilidad y determinación de los, 155-158
 simples, 64, 289
- Presión del viento, fórmula de Duchemin de la, 56n**
- Presiones, del terreno, 57**
 hidrostáticas, 59
- Principio de Müller-Breslau, 479**
- Probabilidad, de fallo, 28**
 de seguridad, 28
- Procedimientos de cálculos, 45-46**
- Proyecto, elástico de estructuras, 27**
 estructural, definición de, 27
 elástico, 27
 plástico, 27
 principios de la acción normal e híbrida aplicada a, 522
 teoría del, 27-28
 plástico, 27
 de estructuras de acero, 524
- Puentes, 224-236**
 basculantes, 230
 colgantes, 248, 279
 estáticamente determinados, 279
 elevables, 232
 en vertical, 232
 giratorios en horizontal, 232
 movibles, 230-232
 basculantes, 230
 elevables, 232
 giratorios en horizontal, 232
 oblicuos, 233
 sistemas de tableros de, 62

- Puentes, sobrecargas para, 51, 52
 Puntos de inflexión, 241
- Reacciones, 69, 71
 cálculo de las, 77-81, 84-90
 de estructuras tri-dimensionales, 253-254
 determinación gráfica de las, 172, 175
 líneas de influencia de, 191
 total y neta, 114
- Respuesta dinámica, cálculo de, 558-563
 Resumen de tablas de influencia de cuchillos de puentes, 225
 Revisión histórica, 19-25
 Rigidizadores de vigas compuestas, 60
 Roseta de deformaciones, equiangular, 602
 rectangular, 514
- Secciones, método de las, 126-142
 Semejanza, principios de, 586
 Serie de sobrecargas aisladas, 200
 cortante máximo debido a una, 204
 momento máximo debido a una, 201
 tensiones máximas en una armadura debida a una, 210
- Sistemas, de arriostramiento, puentes, 63
 de fuerzas, concurrentes, 69
 coplanarias, 69
 equilibrio en, condiciones gráficas para, 170
 paralelas, 69
 pares, 69
 de piso, puentes, disposición de, 61
 de pisos de edificios, 63
 sobrecargas para, 53
 laterales, 63, 218
- Sobrecarga de nieve, 55
 Sobrecargas (véase Cargas)
 aisladas (véase Serie de sobrecargas aisladas)
- Superabundantes o superfluas, 391
 elección de, 410, 461
- Superposición, 90, 221, 227, 391-396, 447, 450, 461
- Tabla de fuerzas de barra para armaduras, de cubierta, 223
 de puente, 226
- Tablas de influencia, 211-213
 de cuchillos de puente, 224, 225
 resumen de, 212
- Tensiones, admisibles, 64
 de la carga fija, en cerchas de cubierta, 219, 220
 en cuchillos de puentes, 226
 de la sobrecarga en cuchillos de puente, 227
 de temperatura, 407
 de viento de cerchas de cubierta, 222, 223
 secundarias en las armaduras, 456-460
 (intensidad de esfuerzos), admisibles, 64
 de participación, 219
 en la cubierta, debidas a nieve, 221
 permitidas, 63, 224
 primaria y secundaria, 122
- Teorema, del trabajo mínimo, 412
 general del cable, 270
 aplicación del, 271
- Teoremas, de Castigliano, 370-376
 primero, 373
 segundo, 370
 deformaciones calculadas por, 371
 del área de momentos, 334-338
 aplicación de los, 336-338
 comparación de, con el método de la carga elástica, 344
 deducción de los, 334-336
- Teoría, de placas, deformación grande, 542-543
 deformación pequeña, 535-542
 criterio y notación, 537
 formulación de la, 537
 hipótesis, 536
 problema de la flexión transversal, 540
 de la elasticidad, 528-535
 componentes independientes de tensión, 530
 definición de las componentes de tensión, 531
 ecuaciones, de compatibilidad de tensiones, 533
 diferenciales del equilibrio, 534
 tensión-desplazamiento, 534
 formulación del problema, 535
- Torres, 261
 con pies rectos, 263, 292
- Trabajo, mínimo, teorema del, 413

- Trabajo, virtual, 313-315
 definición de, 313
 deformación por el de armaduras, 317-326
 de vigas y pórticos, 326-334
 exterior, 315
 externo e interno, 315
 ley del, 314
Tracciones en los cables, 273
- Verticales, armaduras, 61
- Vigas, curvas de cortantes de, 104-111, 114-116
 deformación de, por los trabajos virtuales, 326-334
 líneas de influencia de, 194
 Prati, líneas de influencia de, 207
 principales con sistemas de tablero, curvas de cortantes de determinadas, 106
 líneas de influencia de, 196, 198
 organización de, 60
Viguetas de piso, 63, 112

