
Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Más recursos gratis Aquí](#)

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)



[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

**TEORÍA, PROBLEMAS RESUELTOS
REVISADOS**

ING. BIAGGIO ARBULLU G.
PROFESOR DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

BIAGGIO ARBULÚ

17 de Mayo del 2013

DERECHOS RESERVADOS

Editorial "WH Editores"

Lima -Perú

Prohibida su reproducción parcial o total sin la autorización del editor.

PREFACIO

Se presenta en este trabajo un resumen de la asignatura de ANÁLISIS ESTRUCTURAL que se imparte a los alumnos de la ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería, y como aspecto principal- un conjunto de problemas resueltos, con la finalidad de facilitar a los alumnos el estudio y el entrenamiento a la disciplina.

Una gran cantidad de los problemas considerados son los propuestos en el examen y prácticas en nuestra Universidad y, algunos, en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Otros problemas han sido considerados con fines pedagógicos, de grado de dificultad progresivo en cada parte del conjunto.

La obra ha sido dividida en capítulos, según las materias del actual Programa Analítico en la UNI.

En esta oportunidad se trata hasta el tema de LINEAS DE INFLUENCIA; queda por desarrollar las partes relativas a método de Kani, método de Takabeya, analogía de columna, arcos hiperestáticos, líneas de influencia, etc.

En los problemas relativos a estructuras con elementos de secciones variables se hace referencia a tablas. Ellas son las que aparecen en el volumen II de "Cálculo de Estructuras Hiperestáticas" que publique en el 2011.

Para terminar, quiero dedicar este trabajo a mis alumnos, los jóvenes que con sus inquietudes siempre estimularon mi mayor dedicación y entusiasmo por la docencia.

B.A.G

CAPITULO I
CONTENIDO

Cap 1. Hiperestaticidad	1
Cap 2. Trabajo de la Deformación Elástica	27
Cap 3. Trabajos Virtuales	47
Cap 4. Teorema de Castigliano	69
Cap 5. Teorema de Betti y Maxwell	113
Cap 6. Método de las Fuerzas	123
Cap 7. Teorema de Menabrea	177
Cap 8. Método del Área de Momentos	217
Cap 9. Método de la Viga Conjugada	229
Cap 10. Ecuaciones de Bresse	251
Cap 11. Ecuaciones de los tres Momentos	267
Cap 12. Método de las Deformaciones Angulares	289
Cap 13. Método de Cross	337
Cap 14. Método Matricial	437
Cap 15. Líneas de Influencia	461

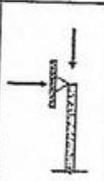
CAPÍTULO I

HIPERESTATICIDAD

OBJETIVO: La determinación del grado de hiperestaticidad de una estructura, la que está dada por la suma de la hiperestaticidad externa G_e , más la interna G_i

$$G = G_e + G_i$$

NOTACION:

b_3	Número de apoyos completos, o sea 3 incógnitas o restricciones.	
b_4	Número de apoyos con articulación fija, o sea 2 incógnitas o restricciones.	
b_1	Números de apoyos simples o deslizantes o sea de 1 incógnita.	
b	Número total de barras o elementos.	
b_5	Número de barras con seis restricciones o vínculos, o sea 3 reacciones hiperestáticas.	
b_2	Número de barras con cinco restricciones o vínculos, o sea 2 reacciones hiperestáticas.	
b_{11}	Número de barras con cuatro restricciones o vínculos, o sea 1 reacción hiperestática.	
e	Número de ecuaciones especiales.	
R	Grado de hiperestaticidad total.	
n	Número total de nudos, incluyendo los de los apoyos.	

n_3	Número de nudos con cero grados de libertad, en los que por lo menos hay continuidad entre dos elementos entre los que se transmiten 3 tipos de solicitaciones (flexión, normal y cortante).	
n_2	Número de nudos con un grado de libertad (2 tipos de solicitaciones: normal y cortante)	
n_1	Número de nudos con dos grados de libertad (1 tipos de solicitación: normal o cortante)	
N	Número de segmentos de área de la estructura aporticada, que están completamente cerrados por los miembros del pórtico.	
r	Número total de restricciones en los apoyos.	

HIPERESTATICIDAD EXTERNA.- En general, en todos los casos:

$E_e = r -$ (número de ecuaciones de equilibrio estático y de ecuaciones especiales que se puedan plantear para la estructura en conjunto, como un todo).

ESTRUCTURAS DE BARRAS.- Constituidas por elementos articulados en sus extremos.

$$g = b + r - 2n \quad \dots \quad (1.A)$$

ESTRUCTURAS APORTICADAS O CONTINUAS.-

$$g = 3b + r - 3n - e \quad \dots \quad (2.A)$$

Se considera que todos los nudos son completos. Si existieran articulaciones o rótulas intermedias o en los nudos, se considerará la cantidad "e" de ecuaciones especiales. (No se tomará "e" en los apoyos, pues la presencia de tales rótulas o articulaciones ya estará considerada en "r"). Así, en los casos siguientes:

$e = 1$	$e = 2$	$e = 1$	$e = 3$	$e = 2$	$e = 4$

Las estructuras aporticadas sin articulaciones internas:

$$g_i = 3N \quad \dots \quad (3.A)$$

ESTRUCTURAS COMPUESTAS.- Constituidas en parte por elementos continuos y en parte por elementos articulados:

$$g = 3b_3 + 2b_2 + 1b_1 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 - (3n_3 + 2n_2 + n_1) \quad \dots \quad (4.A)$$

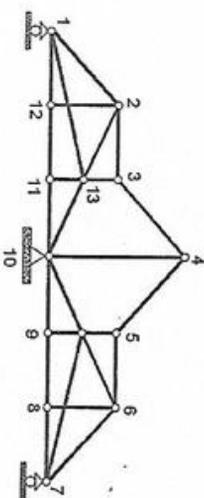
En todos los casos:

- (I) $E < 0$ La estructura es inestable e hipostática.
- (II) $E = 0$ La estructura puede ser estable e isostática.
- (III) $E > 0$ La estructura puede ser estable y estáticamente indeterminada (hiperestática).

Antes de explicar las fórmulas aquí dadas, debe observarse y analizarse la estructura con el fin de verificar su estabilidad. Las fórmulas no deben aplicarse ciegamente, pues hay casos en los que debido a la disposición u organización de los elementos, puede estar ante una estructura inestable a pesar de que las fórmulas dan un grado de hiperestaticidad igual o mayor a cero.

PROBLEMA 11.

Determinar la hiperestaticidad de la estructura que se muestra.



Restricciones de apoyo (r) = 4

Estas restricciones están uno en el apoyo 1, dos en el apoyo 10 y uno en el apoyo 7.

Al conjunto estructural pueden plantearse las 3 ecuaciones de equilibrio estático.

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0 \text{ luego:}$$

$$g_e = r - 3 = 4 - 3 = 1 \text{ Por lo tanto es de 1}^\circ \text{ Grado externamente.}$$

Para la hiperestaticidad total:

$$b = 25 \quad r = 4 \quad n = 14$$

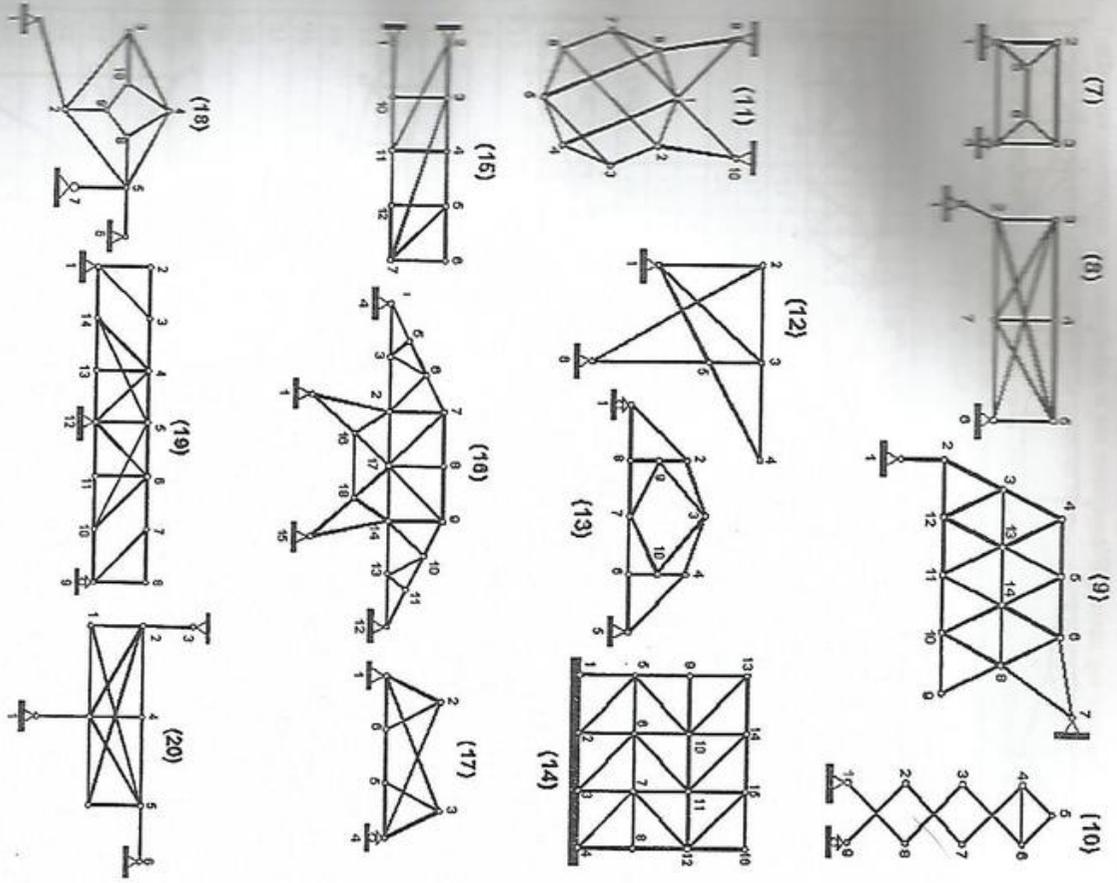
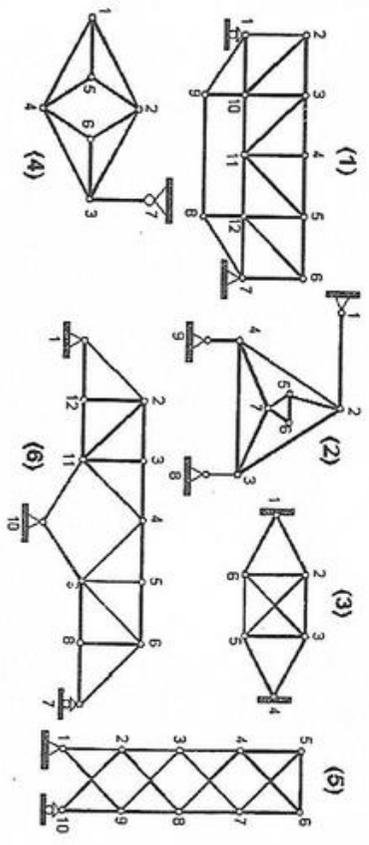
Luego según la fórmula (1.A):

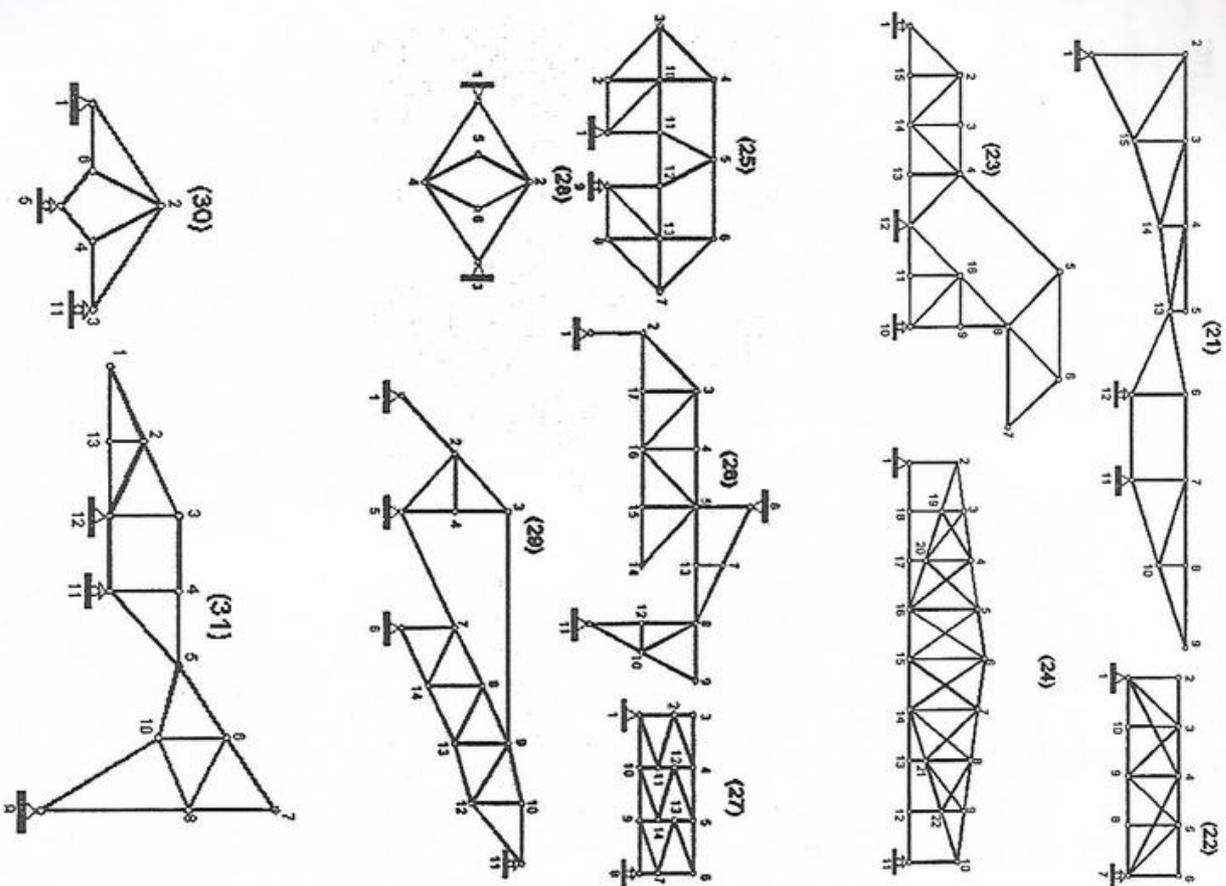
$$g = 25 + 4 - 2 \times 14 = 29 - 28 = 1 \quad \text{1}^\circ \text{ Grado de hiperestaticidad total.}$$

Por consiguiente, internamente la estructura es isostática.

PROBLEMAS 1.2.

Estudiar la hiperestaticidad de las siguientes estructuras:





Todas estas estructuras son reticuladas, o sea estructuras de barras; por consiguiente, debemos aplicar la fórmula (1.1) para determinar el grado de hiperestaticidad total.

En el siguiente cuadro se expone para cada una de las estructuras la aplicación de la indicada fórmula y, para algunas, se hacen las observaciones o explicaciones que aclare el estudio pedido.

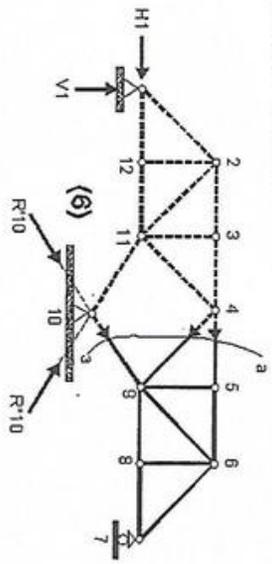
ESTRUCTURA	b	r	n	$g=b+r-2n$	Clasificación	Nota
1	22	3	12	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado interior.	
2	12	6	9	0	Isostática, estable.	
3	10	4	6	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado (1 int. + 1 ext.)	
4	11	4	7	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado interior.	
5	17	3	10	0	Isostática, estable.	
6	20	5	12	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado exterior.	(i)
7	9	3	6	0	Inestable	(ii)
8	12	4	7	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado int.	
9	26	4	14	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado int.	
10	9	4	9	-5	Hipostática, inestable.	
11	17	4	10	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado exterior.	
12	9	4	6	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado exterior.	
13	16	3	10	-1	Hipostática, inestable.	
14	30	8	16	6	Hiperestática, 6 ^{to} grado (2int. + 4ext.)	
15	15	4	10	-1	Hipostática, inestable.	
16	34	4	18	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado (1 int. + 1ext.)	
17	9	3	6	0	Isostática, estable.	
18	14	6	10	0	Inestable	(iii)
19	25	4	14	1	Hiperestática, inestable.	
20	14	6	9	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado int.	(iv)
21	25	5	15	0	Isostática, estable.	
22	19	3	10	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado int.	(v)
23	28	4	16	0	Isostática, estable.	
24	47	3	22	6	Hiperestática, 6 ^{to} grado int.	
25	23	3	13	0	Isostática, estable.	
26	28	6	17	0	Isostática, estable.	(vi)
27	25	3	14	0	Isostática, estable.	
28	8	4	6	0	Isostática, estable.	(vii)
29	23	7	14	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado int.	
30	8	4	6	0	Isostática, inestable.	(viii)
31	21	5	13	0	Isostática, estable.	(ix)

(i) Ecuaciones de equilibrio del conjunto :

1) $\sum R_v = 0$

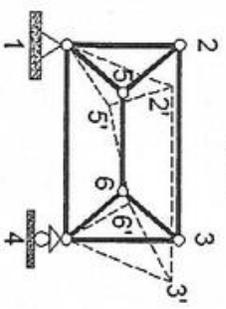
2) $\sum R_h = 0$

- 3) $\sum M_i = 0$
 4) $\sum M_{6a} = 0$ Según el corte a-a, tomando el equilibrio de la porción derecha, resulta la ecuación $f(R_{10}, R_7) = 0$
 Son pues, 4 ecuaciones para 5 incógnitas reacciones. Luego, exteriormente la estructura es hiperestática de 1^{er} grado.



- (ii) El rectángulo 1-2-3-4 es deformable, lo que hace que la estructura sea inestable. En el límite si la barra 56 es de longitud cero, se tiene la estructura con 8 barras, 3 restricciones de apoyos y 5 nudos, o sea hiperestática de 1^{er} grado interior.

(7)



- (iii) Es inestable debido a que es deformable (ver cuadriláteros 2-3-10-9, 4-8-9-10 y 2-9-8-5)
 (iv) Exteriormente es hiperestática. Interiormente hay una defectuosa ubicación de barras, resultando deformables los cuadriláteros 1-3-4-14 y 6-7-9-10. Por consiguiente la estructura es inestable.
 (v) Hay 5 incógnitas reacciones ($V_1^i, \bar{H}_1, R_{12}^i, V_{11}^i$ y \bar{H}_{11}). Se Pueden plantear las siguientes ecuaciones:
 1) $\sum F_x = 0$; 2) $\sum F_y = 0$; 3) $\sum M_1 = 0$; 4) $\sum M_{6a} = 0$; 5) $Q_{6a} = 0$ (porque no hay diagonal que absorba el cortante en este paño).
 (vi) Hay 5 incógnitas reacciones ($V_1^i, \bar{H}_6, V_6^i, H_{11}^i$ y V_{11}^i).

- Ecuaciones:
 1) $\sum F_x = 0$; 2) $\sum F_y = 0$;
 3) $\sum M_2 = 0$; 4) $\sum M_{6a} = 0$; 5) $\sum M_{6b} = 0$

- (vii) Cualquiera que sean las fuerzas aplicadas en los nudos 5 y 6, pueden determinarse los esfuerzos en las barras 52, 54, 62 y 64. Conocidos estos esfuerzos y con las cargas que puedan haber en los nudos 2 y 4, se calculan los esfuerzos en las barras 21, 23, 41 y 43, los que son, necesariamente las componentes de las reacciones en 1 y 3 según las direcciones de las barras en los apoyos.

- (viii) El cuadrilátero 2-4-5-6 es deformable; por consiguiente, la estructura es inestable.

- (ix) Hay 5 incógnitas reacciones ($\bar{V}_{12}, \bar{H}_{12}, R_{11}, \uparrow Y_6, \uparrow Y_9$)

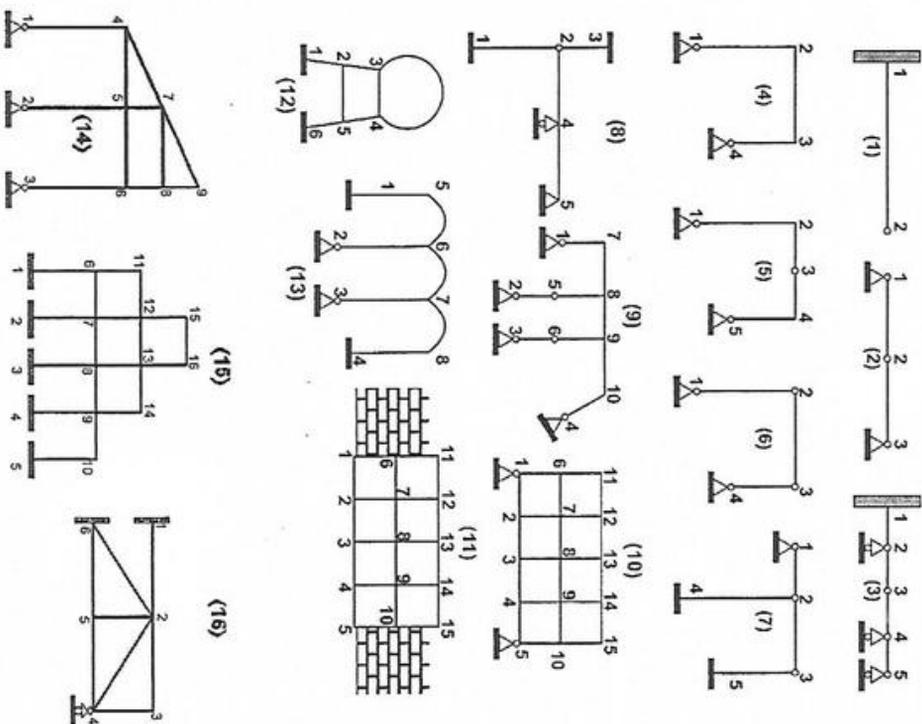
Las ecuaciones son:

- 1) $\sum F_x = 0$,
 2) $\sum F_y = 0$,
 3) $\sum M_{12} = 0$,
 4) $\sum M_{6a} = 0$,
 5) $Q_{34} = 0$

(porque no hay diagonal que absorba el cortante en el paño 3-4).

PROBLEMAS 1.3.

Estudiar la hiperestaticidad de las siguientes estructuras:



Todas las estructuras dadas en estos problemas son aporticadas o continuas, por lo tanto, aplicables las fórmulas (2.A) y (3.A) para determinar la hiperestaticidad. En el siguiente cuadro se detalla la aplicación de la fórmula (2.A) y, según el resultado, se indica la correspondiente clasificación.

ESTRUCTURA	b	r	n	e	$g=3b+r-3n-e$	Clasificación	Nota
1	1	3	2	-	0	Isostática, estable.	
2	1	3	2	1	-1	Hipostática, inestable.	
3	3	6	4	1	2	Hiperestática, 2 ^{do} grado, ext.	
4	3	4	4	-	1	Hiperestática, 1 ^{er} grado, ext.	
5	3	4	4	1	0	Isostática, estable.	
6	3	4	4	2	-1	Hipostática, inestable.	
7	4	8	5	2	3	Hiperestática, 3 ^{er} grado, ext.	(i)
8	4	9	5	2	4	Hiperestática, 4 ^{er} grado, ext.	
9	7	8	8	2	3	Hiperestática, 3 ^{er} grado, ext.	(ii)
10	22	3	15	-	24	Hiperestática, 24 ^o grado, int.	(iii)
11	22	3	15	-	24	Hiperestática, 24 ^o grado, int.	(iv)
12	7	6	6	-	9	Hiperestática, 9 ^o grado, (6int., 3exte.)	(v)
13	7	10	8	-	7	Hiperestática, 7 ^o grado, ext.	
14	11	6	9	-	12	Hiperestática, 12 ^o grado, (9int., 3exte.)	
15	19	15	16	-	24	Hiperestática, 24 ^o grado, (12int., 12 ext)	
16	8	6	6	-	12	Hiperestática, 12 ^o grado, (9int., 3exte.)	(vi)

(i) En el nudo 2 se pueden plantear dos ecuaciones especiales (por ejemplo :

$M_{25} = 0, M_{23} = 0$, que son diferentes a las de equilibrio estático $\sum M_2 = 0$, lo que significaría que $M_{21} = 0$)

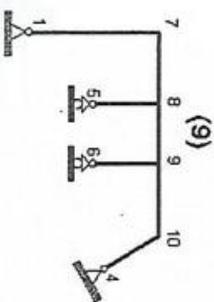
(ii) Las ecuaciones especiales se plantean en las secciones 5 y 6; así :

$M_{52} = 0$ y $M_{62} = 0$

Otra forma de analizar la hiperestaticidad de la estructura sería sustituyendo los tramos 25 y 36 (que funcionan como bielas), por apoyos simples. Tendríamos entonces:

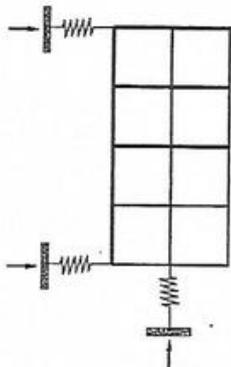
$b = 7, r = 6, n = 8, e = 0$

Luego, $g = 3 \times 7 + 6 - 3 \times 8 = 3$ (3^{er} grado de hiperestaticidad exterior.)



(iii) Podría analizarse viendo que exteriormente es isostática y no hay rótulas interiores, la hiperestaticidad puede determinarse aplicando la fórmula (3.A) en la que $N = 8$; luego, $g = 3 \times 8 - 24$

(iv) El fluido en el que está la estructura hace que ésta tenga tres grados de libertad: desplazamiento vertical, horizontal y giro del conjunto. Ose que hay tres restricciones.

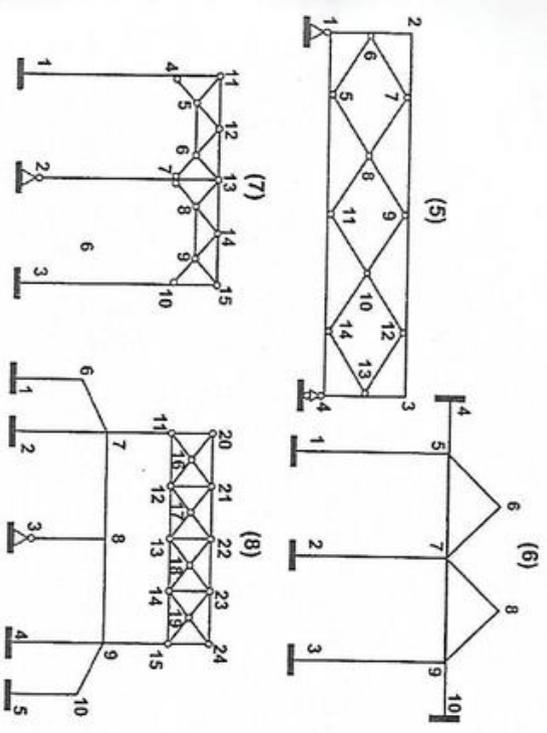
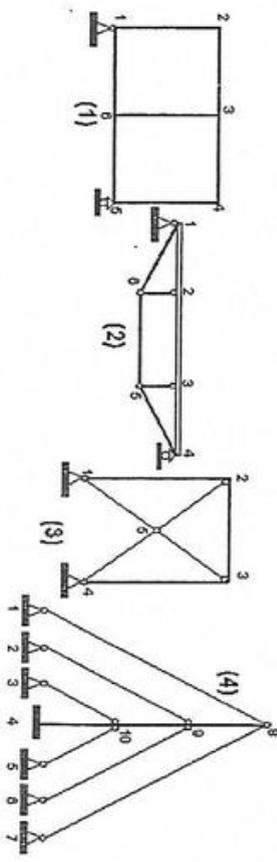


(v) Debe considerarse que un sólo elemento la pieza curva entre los nudos 3 y 4. Aplicando la fórmula (3.A), siendo $N=2$, $g_i = 3 \times 2 = 6$, 6º grado de hiperestaticidad interna. Exteriormente hay 6 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego, es de 3º grado de hiperestaticidad externa.

(vi) Como en la nota anterior, al aplicar la fórmula (3.A), $N=3$, luego $g_i = 3 \times 3 = 9$. Exteriormente hay 6 incógnitas y 3 ecuaciones; luego es de 3º grado de hiperestaticidad externa. En total es de grado 12.

PROBLEMAS 1.4.

Estudiar la hiperestaticidad de las siguientes estructuras:



Todos estos casos exceptos el (1), son estructuras compuestas. Para todas ellas aplicamos la fórmula (4.1) para calcular la hiperestaticidad total, según el siguiente cuadro:

ESTRUC-TURA	b_3	b_2	b_1	a_3	a_2	a_1	n_3	n_2	n_1	CLASIFICACION	NOTA
1	7	0	0	0	1	1	6	0	0	Hiperestática, grado, int.	6º
2	1	2	5	0	1	1	2	4	0	Hiperestática, grado, int.	1º
3	1	2	4	0	2	0	2	3	0	Hiperestática, grado. (1 ext.+2 int.)	3º
4	2	1	6	1	6	0	3	7	0	Hiperestática, grado, ext.	6º
5	8	4	12	0	1	1	10	4	0	Hiperestática, grado, int.	9º
6	0	9	2	5	0	0	7	3	0	Hiperestática, grado. (7 ext.+1 int.)	8º
7	2	3	19	2	0	1	5	9	1	Hiperestática, grado ext.	4º
8	10	3	27	4	1	0	11	13	0	Hiperestática, (11 ext.+7 int.)	18º

- (i) b_3 : Elemento 23
 b_2 : Elemento 12 y 34
 b_1 : Elemento 16,26,65,35 y 54
 n_3 : Nudos 2,3
 n_2 : Nudos 1,6,5,4

$$\left. \begin{array}{l} a_2: \text{Apoyo 1} \\ a_1: \text{Apoyo 4} \end{array} \right\}$$

- (ii) b_3 : Elemento 23
 b_2 : Elemento 12 y 34
 b_1 : Elemento 15,25,35 y 45
 n_3 : Nudos 2,3
 n_2 : Nudos 1,5,4

$$\left. \begin{array}{l} a_2: \text{Apoyo 1} \\ a_1: \text{Apoyo 4} \end{array} \right\}$$

Externamente hay 4 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones de equilibrio estático. Luego, 1 grado externamente.

- (iii) b_3 : Elementos 4-10 y 10-9
 b_2 : Elemento 98
 b_1 : Elemento 18,29,3-10,5-10,69 y 78
 n_3 : Nudos 4,10 y 9
 n_2 : Nudos 1,2,3,8,5,6 y 7

$$\left. \begin{array}{l} a_3: \text{Apoyo 4} \\ a_2: 1,2,3,5,6 y 7 \end{array} \right\}$$

- (iv) b_3 : Elementos 62,27,79,9-12,12-3,13-5-11 y 11-14
 b_2 : Elemento 16,15,4-13, 4, 14
 b_1 : Todos los elementos interiores.
 n_3 : Nudos 6,2,7,9,12,3,13,14,11 y 5
 n_2 : Nudos 1,8,10 y 4
 b_2 : Elementos 15,27,39,45,56,67,78,89 y 9-10
 b_1 : Elemento 57 y 79
 a_3 : Apoyos 1,2,3,4 y 10
 n_3 : Nudos 1,2,3,4,10,6 y 8
 n_2 : Nudos 5,7 y 9

- (v) b_3 : Elementos 14,3-10
 b_2 : Elemento 4-11, 7-13 y 10-15
 b_1 : Elemento 72,11-12,12-13,13-14,14-15,45,56,67,78,89,9-10,11-5,5-12,12-

Externamente hay 15 incógnitas reacciones (3 en cada uno de los apoyos). Las ecuaciones son las 3 de equilibrio estático, mas 5 especiales ($M_{s1} = 0$, $M_{s4} = 0$, $M_{s7} = 0$, $M_{s9} = 0$ y $M_{s,10} = 0$); en total hay 8 ecuaciones. Luego $g_e = 15 - 8 = 7$

- 6,6-13,13-8-8-14,14-9 y 9-15
 n_3 : Apoyos 1 y 3
 n_1 : Apoyo 2
 n_2 : Nudos 1,4,7,3 y 10
 n_3 : Nudos 11, 12, 13, 14, 15, 5, 6, 8 y 9
 n_1 : Nudos 2

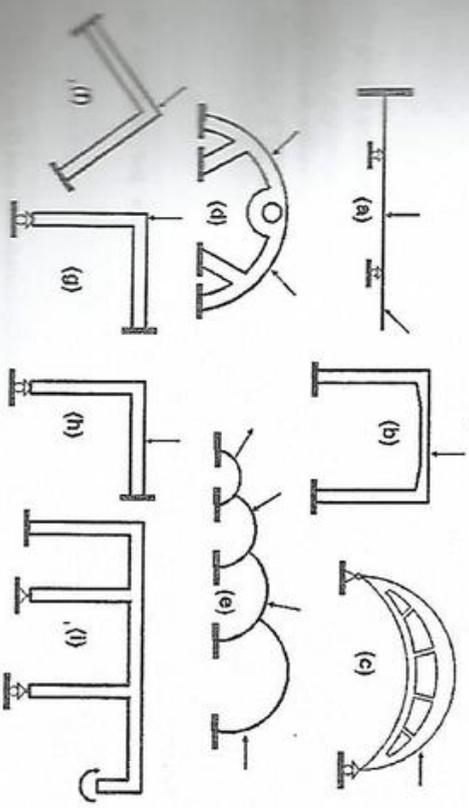
Externamente hay 7 incógnitas reacción (3 en cada uno de los apoyos 1 y 3, y uno en el apoyo 2). Las ecuaciones son las 3 de equilibrio estático. El grado de hiperestaticidad externo es: $g_e = 7 - 3 = 4$

- (vii) b_3 : Elementos 16,27,49,5-10,7-11,9-15,67,78,89 y 9-10
 b_2 : Elemento 38,11-20 y 15-24
 b_1 : Todos los elementos de la armadura (11-20-24-15-11).
 a_3 : Apoyos 1,2,4 y 5.
 a_2 : Apoyo 3
 n_3 : Nudos 1,2,4,5,6,7,8,9,10,11 y 15
 n_2 : Nudos 3,20,21,22,23,24,12,13,14,16,17,18 y 19

Externamente hay 14 incógnitas reacción (3 en cada uno de los nudos 1,2,4 y 5, y 2 en el nudo 3). Las ecuaciones son las 3 de equilibrio estático. El grado de hiperestaticidad externo es: $g_e = 14 - 3 = 11$

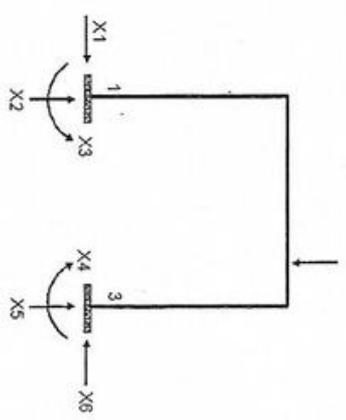
PROBLEMAS 1.5. (FIG. 21 Abril-1952)

Indicar los grados de hiperestaticidad interior, exterior y total de las siguientes estructuras. En cada caso hacer una sucinta exposición del raciocinio seguido.



- a) Para la aplicación de la fórmula (2.A):
 $b = 2$ $r = 5$ $n = 3$
 Luego, $g = 3 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 3 = 2$ Por lo tanto tenemos 2do. Grado hiperestático exterior.
 Probanos también razonar así: Externamente hay 5 incógnitas reacciones (3 en el empotramiento y 1 en cada uno de los apoyos simples); ecuaciones son solamente las 3 de equilibrio estático. La diferencia da el grado de hiperestaticidad externa:
 $g_e = 5 - 3 = 2$

- b) Externamente hay 6 incógnitas, y planteables las 3 ecuaciones de equilibrio estático. Luego,
 $g_e = 6 - 3 = 3$
 Por lo tanto tenemos 3er. Grado hiperestático ext.



- c) La estructura es isostática exteriormente (3 incógnitas reacciones, 3 ecuaciones de equilibrio estático). Para determinar la hiperestaticidad interior se puede aplicar la fórmula (3.1) en la que $N=5$. Luego,
 $g_i = 3 \times 5 = 15$. Por lo tanto 15avo. Grado. Hiperestaticidad, int.

- d) Para aplicar la fórmula (2.1):
 $b = 8$ $r = 12$ $n = 8$

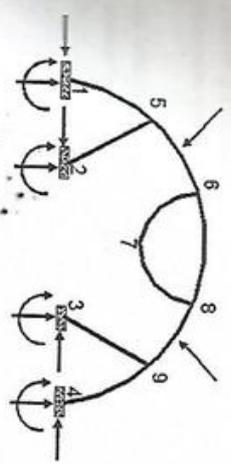
Luego:
 $g = 3 \times 8 + 12 - 3 \times 8 = 12$

Externamente hay 12 incógnitas reacciones y planteables solamente las 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego,
 $g_e = 12 - 3 = 9$

Internamente solamente hay una área completamente cerrada por miembros de la estructura (la 6-7-8); luego, según la fórmula (3.A):
 $g_i = 3 \times 1 = 3$

O sea, pues, que la estructura es de 12avo. Grado de Hiperestaticidad total (9 ext + 3 int).

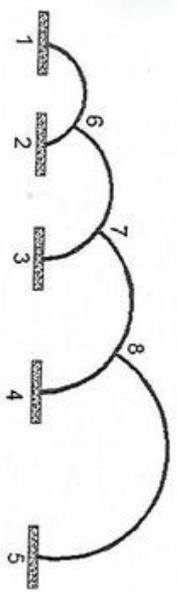
- e) La estructura es hiperestática externamente. Tiene 15 incógnitas en los apoyos y planteables solo las 3 ecuaciones de equilibrios estático; luego,
 $g_e = 15 - 3 = 12$



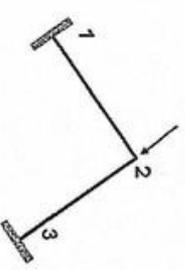
Otra forma de determinar sería aplicando la fórmula (2.A) en la que:
 $b = 7$ (16, 62, 67, 73, 78, 84 y 85)
 $r = 15$ (3 en cada uno de los apoyos)
 $n = 8$

Luego, $g = 3 \times 7 + 15 - 3 \times 8 = 12$

Por lo tanto 12avo. Grado hiperest. exte.



- f) En general esta estructura es hiperestática externamente de 3er. Grado (6 incógnitas en los apoyos y 3 ecuaciones de equilibrio estático). Para el caso particular dado, en el que la carga aplicada es colineal con el elemento 23 sólo se presenta compresión en esta pieza; no hay flexión ni cortante en la estructura. No hay, pues, incógnitas redundantes o hiperestáticas.

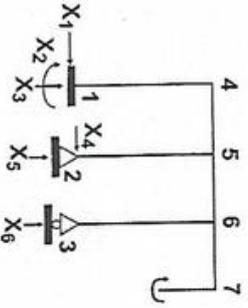


g) En este caso en general la estructura es de 1er grado de hiperestaticidad exterior, pues hay 4 incógnitas, de apoyos (1 en el apoyo simple y 3 en el empotramiento) y se pueden plantear las 3 ecuaciones de equilibrio estático; luego, $g_e = 4 - 3 = 1$. Pero para el caso particular dado (la fuerza aplicada colineal en el elemento vertical), la estructura no se muestra hiperestática, pues solo trabaja el elemento vertical, a compresión.

h) Es hiperestática exteriormente de 1er grado, según el razonamiento expuesto en g)

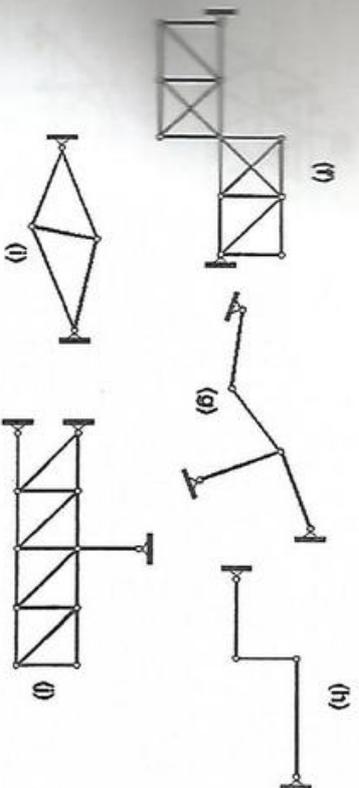
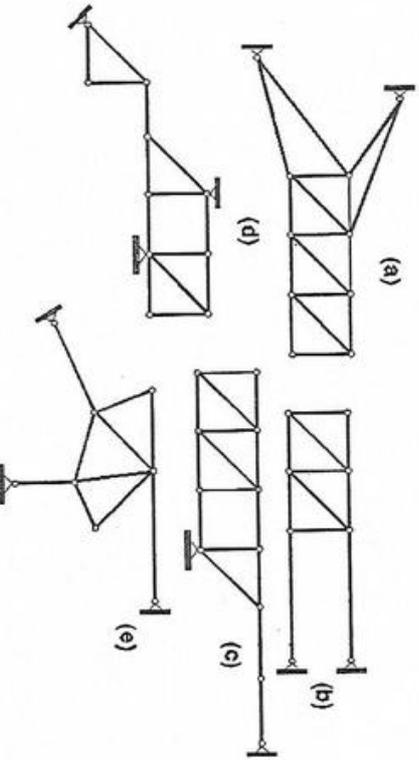
i) La estructura es hiperestática exteriormente. Hay 6 incógnitas reacciones y 3 ecuaciones planteadas (las de equilibrio estático). Luego, $g_e = 6 - 3 = 3$

Por lo tanto, es 3er grado de hiperestaticidad exterior.



PROBLEMAS I.6. (FIUC, 22 Abril-1965)

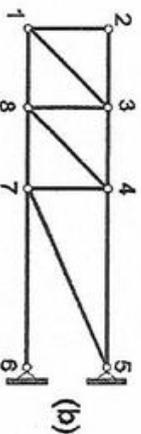
Para las siguientes estructuras de barras y nudos articulados, estudiar su estabilidad y determinación interna y externa. Si fueran inestables, indicar el método más simple de hacerlas estables.



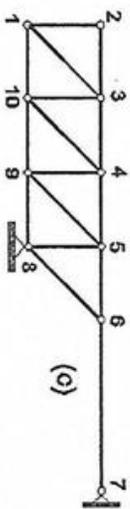
Aplicando la fórmula (1.A) tenemos los siguientes resultados:

ESTRUC- TURA	b	r	n	g	CLASIFICACION	NOTA
a	17	4	10	1	Hiperestática, 1er grado, ext.	
b	11	4	8	-1	Hipostática, inestable.	(i)
c	16	4	11	-2	Hipostática, inestable.	(ii)
d	14	6	10	0	Isostática, estable.	
e	10	6	8	0	Isostática, estable.	
f	20	4	11	2	Hiperestática, 2º grado, int.	
g	4	6	5	0	Isostática, estable.	
h	3	4	4	-1	Hipostática, inestable.	(iii)
i	5	4	4	1	Hiperestática, 1er grado, ext.	
j	17	6	11	1	Hiperestática, 1er grado, ext.	

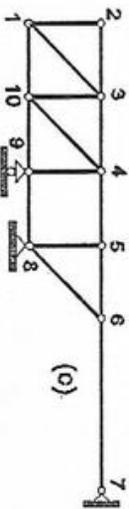
(i) La estructura se convierte en isostática estable, colocando la barra diagonal 75 ó la 46



(ii) La estructura se transforma en isostática estable, bajo cualquiera de las formas siguientes:

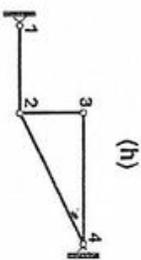


Eliminado la articulación entre 6 y 7, y colocando la barra 95.



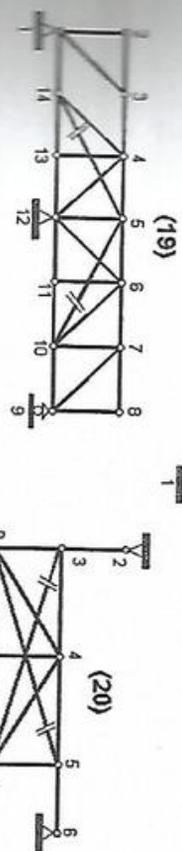
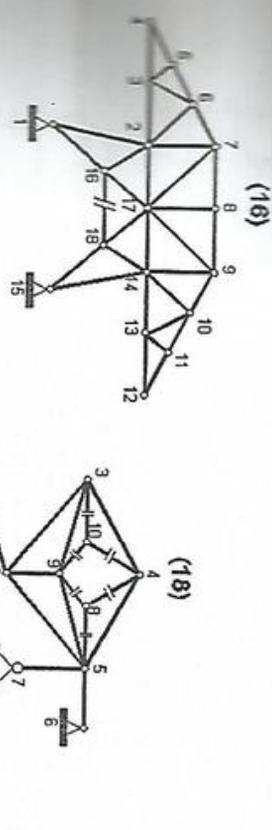
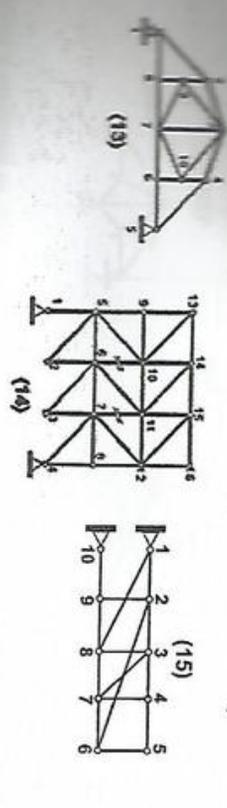
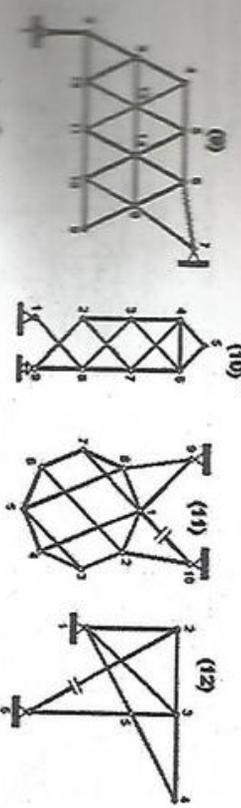
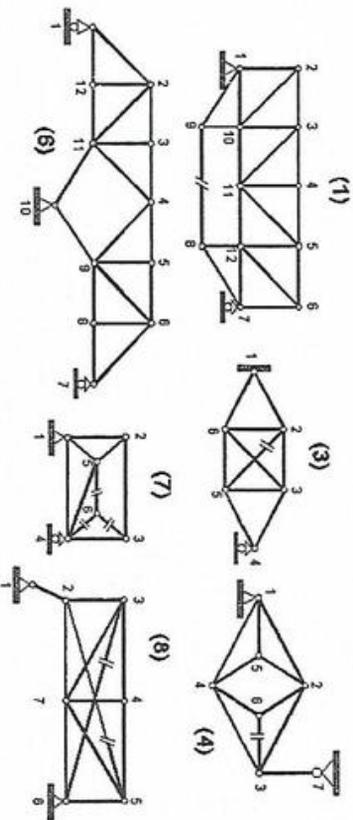
Eliminando la articulación entre 6 y 7, y colocando el apoyo simple en 9.

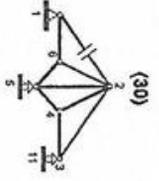
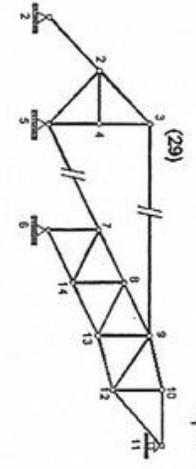
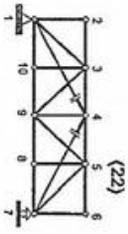
(iii) La estructura se convierte en isostática estable, colocando la barra 24 (o la 13).



PROBLEMAS I.7.

Isostatar y estabilizar las estructuras del problema I-2

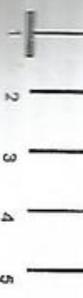
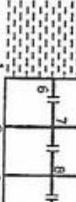
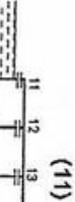
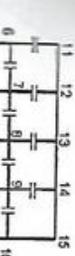
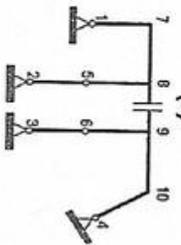
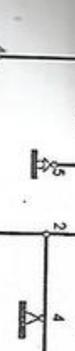




Las modificaciones introducidas en las estructuras para transformarlas en isostáticas y estables, son las siguientes:

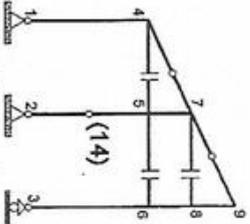
- (1) Seccionar la barra 98. (*)
 - (3) Seccionar la barra 25 y modificar el apoyo 4.
 - (4) Seccionar la barra 63.
 - (6) Modificar el apoyo 1
 - (7) seccionar las barras 56,63, y 64, y añadir la barra 54.
 - (8) Seccionar las barras 36 y 25.
 - (9) Eliminar los nudos 13 y 14 de modo que las barras 4-11, 5-10, 5-12, 6-11, y 38 son de una sola pieza.
 - (10) Adicionar las barras 23, 34, 67, 78 y 89
 - (11) Seccionar una de las barras concurrentes a los apoyos por ejemplo la 1-10.
 - (12) Seccionar la barra 26.
 - (13) Adicionar la barra 37.
 - (14) Modificar los apoyos 2 y 3, y seccionar las barras 6-10 y 7-11.
 - (15) Adicionar la barra 37.
 - (16) Seccionar la barra 16-18
 - (18) Seccionar las barras 3-10, 9-10, 4-10, 8-4, 85 y 89, adicionar las barras 39 y 95
 - (19) Seccionar las barras 5-14 y 5-10, y adicionar la 7-10
 - (20) Seccionar las barras 37 y 59
 - (22) Seccionar las barras 41 y 47.
 - (24) Seccionar las barras 4-19, 5-20, 6-16, 6-14, 7-21 y 8-22
 - (29) Seccionar la barra 39 y 57
 - (30) Seccionar la barra 12 y adicionar 25
- *) Al seccionar una barra que trabaja solamente con esfuerzo normal, se está simplificando una incógnita hiperestática.

PROBLEMAS 11.
Isostatar y estabilizar las estructuras del problema 1-3

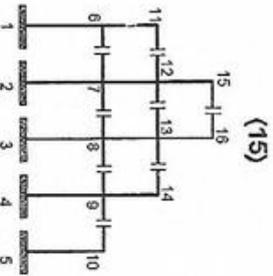


Las modificaciones introducidas en las estructuras para transformarlas en isostáticas estables son las siguientes:

- (2) Eliminar la articulación 2.
- (3) Eliminar los apoyos 2 y 4.
- (4) Modificar uno de los apoyos, por ejemplo el 4.
- (6) Eliminar una de las articulaciones interiores, por ejemplo la 3.
- (7) Modificar los apoyos 4 y 5.
- (8) Modificar los apoyos en 1 y 3, y eliminar el apoyo 5.
- (9) Seccionar el elemento 89(*) (o, también; eliminar los apoyos 2 y 3, y colocar esfuerzo simple en 1).
- (10) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13 y 9-14.
- (11) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13, y 9-14.
- (12) Modificar el apoyo 6 y seccionar los elementos 23 y 34 (o también seccionar los elementos 3 a 4, 34 y 25 sin introducciones modificaciones en los apoyos).
- (13) Eliminar los apoyos 2, 3 y 4.
- (14) Eliminar el apoyo 2, modificar el apoyo 3, y seccionar los elementos 57, 68 y 78 (o, también sin introducir modificaciones en los apoyos, seccionar los elementos 45, 56 y 78, y colocar articulaciones (**)) en los elementos 47, 79 y 25).

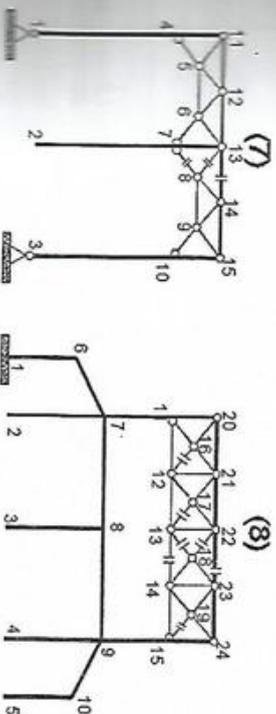
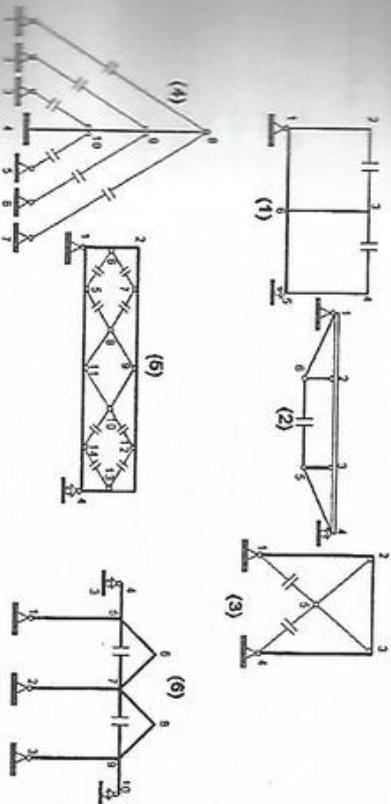


- (15) Eliminar los apoyos 2, 3, 4 y 5, y seccionar los elementos 7-12, 8-13, 9-14, 12-13 ó también sin modificar los apoyos seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 11-12, 12-13, 13-14 y 15-16).



- (16) Suprimir el apoyo 1, y seccionar los elementos 26, 25 y 24 (o, sin modificar los apoyos, seccionar los elementos 26, 25, 24 y 34).
- (*) Al seccionar los elementos de una estructura apuntada o continua, se suprimen tres incógnitas hiperestáticas (fuerza normal, momento flector y fuerza cortante).
- (**) Una articulación colocada en un elemento apuntado o continuo suprime una incógnita hiperestática (momento flector).

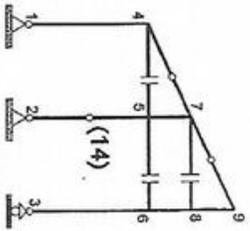
FIGURAS A-9
Eliminar las estructuras del problema I-4.



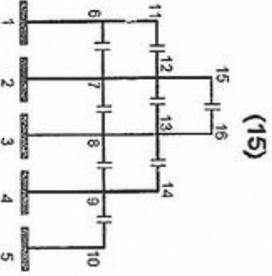
- Para localizar las estructuras, se les ha considerado las modificaciones siguientes:
- (1) Seccionar los elementos 23 y 34.
 - (2) Seccionar el elemento 65.
 - (3) Modificar el apoyo 4 y seccionar los elementos 51 y 54.
 - (4) Seccionar los elementos 18, 29, 3-10, 5-10, 69 y 78.
 - (5) Introducir una articulación en cualquier sección en 1234, tal como la a, y seccionar los elementos interiores 65, 67, 78, 58, 10-12, 10-14, 12-13 y 14-13.

Las modificaciones introducidas en las estructuras para transformarlas en isostáticas estables son las siguientes:

- (2) Eliminar la articulación 2.
- (3) Eliminar los apoyos 2 y 4.
- (4) Modificar uno de los apoyos, por ejemplo el 4.
- (6) Eliminar una de las articulaciones interiores, por ejemplo la 3.
- (7) Modificar los apoyos 4 y 5.
- (8) Modificar los apoyos en 1 y 3, y eliminar el apoyo 5.
- (9) Seccionar el elemento 89(*) (o, también; eliminar los apoyos 2 y 3, y colocar esfuerzo simple en 1).
- (10) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13 y 9-14.
- (11) Seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 6-11, 7-12, 8-13, y 9-14.
- (12) Modificar el apoyo 6 y seccionar los elementos 23 y 34(o también seccionar los elementos 3 a 4, 34 y 25 sin introducciones modificaciones en los apoyos).
- (13) Eliminar los apoyos 2, 3 y 4.
- (14) Eliminar el apoyo 2, modificar el apoyo 3, y seccionar los elementos 57, 68 y 78 (o, también sin introducir modificaciones en los apoyos, seccionar los elementos 45, 56 y 78, y colocar articulaciones (**)) en los elementos 47, 79 y 25).



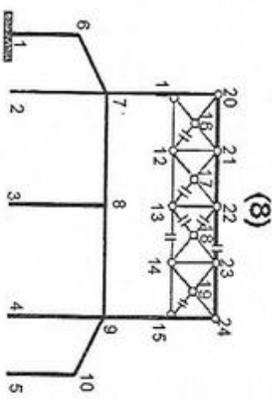
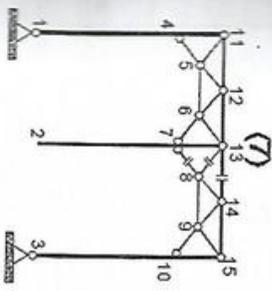
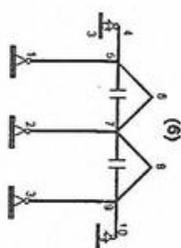
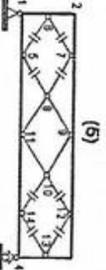
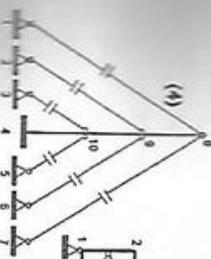
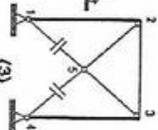
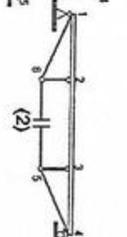
- (15) Eliminar los apoyos 2, 3, 4 y 5, y seccionar los elementos 7-12, 8-13, 9-14, 12-13 ó también sin modificar los apoyos seccionar los elementos 67, 78, 89, 9-10, 11-12, 12-13, 13-14 y 15-16).



- (16) Suprimir el apoyo 1, y seccionar los elementos 26, 25 y 24 (o, sin modificar los apoyos, seccionar los elementos 26, 25, 24 y 34).
- (*) Al seccionar los elementos de una estructura apuntada o continua, se suprimen tres incógnitas hiperestáticas (fuerza normal, momento flector y fuerza cortante).
- (**) Una articulación colocada en un elemento apuntado o continuo suprime una incógnita hiperestática (momento flector).

PROBLEMA A-9

Imaginar la estructura del problema I-4.



- Para isostaticizar las estructuras, se les ha considerado las modificaciones siguientes:
- (1) Seccionar los elementos 23 y 34.
 - (2) Seccionar el elemento 65.
 - (3) Modificar el apoyo 4 y seccionar los elementos 51 y 54.
 - (4) Seccionar los elementos 18, 29, 3-10, 5-10, 69 y 78.
 - (5) Introducir una articulación en cualquier sección en 1234, tal como la a, y seccionar los elementos interiores 65, 67, 78, 58, 10-12, 10-14, 12-13 y 14-13.

- (6) Modificar los apoyos 4 y 10, introducir articulaciones en los elementos 56 y 78 (tales como en 6 y 8) y seccionar los elementos 57 y 79.
- (7) Eliminar el apoyo 2 y seccionar los elementos 78, 13-8 y 13-14.
- (8) Eliminar los apoyos 2, 3, 4 y 5, y seccionar los elementos 16-12, 17-13, 22-23, 22-18, 13-18, 13-14 y 19-15.

PROPÓSITO: Ley de Conservación de la Energía

OBJETIVO: Hallar una expresión que nos permita hallar la deflexión de un punto cualquiera de la viga.

BIBLIOLOGÍA:

- T, F Trabajo de la deformación Elástica
- M, A Fuerza Axial aplicada paulatinamente desde un valor inicial cero.
- C Cortante o Fuerza de Cizallamiento aplicada paulatinamente desde un valor de inicial cero.
- M Momento Flector Genérico
- M, A Momento Torsor genérico.
- L, I Longitud Inicial del Elemento.
- M, A Modulo o Coeficiente de Elasticidad Normal.
- M, A Modulo o Coeficiente de Rigidez o de Elasticidad Tangencial.
- M, A Momento de Inercia de la Sección Transversal.
- M, A Momento Polar de Inercia de la sección transversal.

$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$	$0.1046a^4$	$k(ab^3)$	$\frac{a^4}{46.2}$	$\frac{21I_0(a-b)^2(b-b_1)^2}{a^2 + b^2 - b_1^2 - b_2^2}$	

$k = 1/3 = 0.33 \frac{b}{a} \left(\frac{b^4}{12a^4} \right)$, de la que

b/a	1	1.2	1.5	2	2.5	3	4	5	10	∞
k	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	1/3

S1, S2 : Inicio y Fin de donde se inicia el cálculo del Trabajo.

δ	:	Deformación.
r	:	Área de sección transversal.
μ	:	Coefficiente de forma de la sección transversal.
	:	Sección rectangular μ = 6/5
	:	Sección circular μ = 10/9
	:	Sección tipo I μ = 1

EXPRESIONES A USAR: Del trabajo de la deformación elástica:

- Debido a la tracción o compresión $\tau = \frac{1}{2} N \delta = \frac{N^2 L}{2 E r}$ (1,B)

- Cizallamiento $\tau = \frac{1}{2} Q \delta = \frac{Q^2 L}{2 G r}$... (2,B)

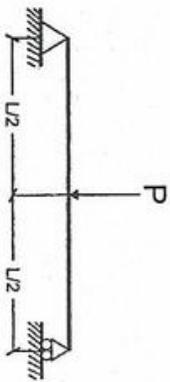
- Flexión $\tau = \int_{s_1}^{s_2} \frac{M^2}{2 E I} ds$ (3,B)

- Cortante (en flexión) $\tau = \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q^2}{2 G r} ds$ (4,B)

- Torsión $\tau = \int_{s_1}^{s_2} \frac{M_t^2}{2 G I_0} ds$ (5,B)

PROBLEMA II.1

Hallar la expresión de trabajo de deformación elástica en la viga que se muestra.



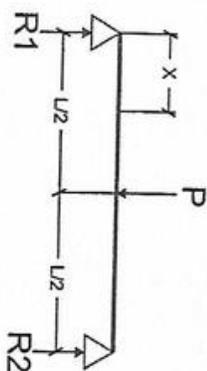
Introducción

Fórmulas a usar:

Por Flexión $\tau = 1/2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{M^2}{E I} ds$ (3.B)

Por Cortante (Sin Flexión) $\tau = \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q^2}{2 G r} ds$ (4.B)

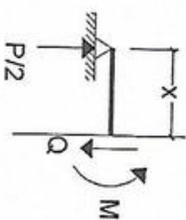
Generalizando para toda la viga:



Para $x(0 \leftarrow x \leftarrow L/2)$ tenemos:

Como la fuerza está en el centro de la viga los apoyos reciben cada uno la mitad de la fuerza P es decir $R1 = R2 = P/2$

Haciendo un corte a la distancia "x" del primer apoyo tenemos:



Momento en la posición X :

M - P/2 x = 0 Despejando M tenemos M = P/2 x

Cortante en posición X : Q = P/2

En la ecuación correspondiente a la flexión reemplazamos:

Multiplicando por 2 para todo el tramo:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \frac{M^2}{EI} ds = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \frac{(P/2 \cdot x)^2}{EI} ds = \frac{P^2}{4EI} \int_0^{L/2} x^2 ds$$

Integrando:

$$= \frac{P^2}{4EI} \int_0^{L/2} x^2 ds = \frac{P^2}{4EI} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

En la ecuación correspondiente al cortante reemplazamos:

Multiplicando por 2 para todo el tramo

$$\tau = \mu \int_0^{L/2} \frac{Q^2}{2Gr} ds = 2\mu \int_0^{L/2} \frac{(P/2)^2}{2Gr} dx = \frac{\mu P^2}{4Gr} \int_0^{L/2} x dx$$

$$\tau = \frac{\mu P^2 L}{8Gr}$$

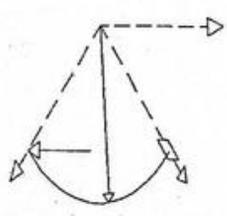
El total es la suma de ambas expresiones:

$$\tau = \frac{P^2 L^3}{96EI} + \frac{\mu P^2 L}{8Gr} = \frac{P^2 L^3}{96EI} \left[1 + \frac{12\mu E}{(L/p)^2} \right]$$

Donde $p = \sqrt{\frac{I}{r}}$ $\xi = \frac{E}{G}$

PROBLEMA II.2.

Hallar la expresión de trabajo de deformación elástica en la viga que se muestra de sección circular de diámetro "d" donde $G=0.4E$



Inducción:

Por Flexión

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} ds$$

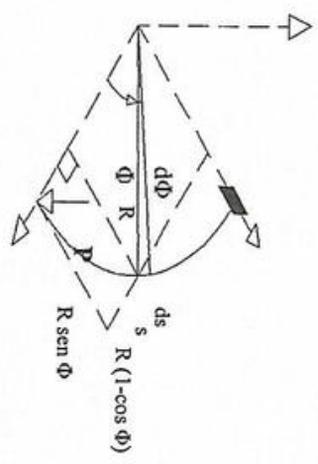
Por Cortante

$$\tau = \mu \int_0^L \frac{Q^2}{2Gr} ds$$

Por Torsión

$$\tau = \int_0^L \frac{M_t^2}{2GI_o} ds$$

De la figura hallamos una expresión genérica:



Haremos las dos componentes de momento aplicadas en el punto s, una de las componentes corresponden al momento de flexión y la otra al momento torsor así tenemos:

$M = -PR \sin(\Phi)$ y $M_t = -PR(1 - \cos(\Phi))$ y para el cortante $Q = P$ y para la longitud de arco ds tenenos $ds = R d\Phi$

Luego reemplazando en las expresiones correspondientes para cada caso tenemos:

Trabajo por flexión:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M^2}{EI} ds = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR \sin(\Phi))^2}{EI} R d\Phi = \frac{P^2 R^3 \pi}{8EI}$$

Trabajo por torsión:

$$\tau = \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q^2}{2Gr} ds = \mu \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR(1 - \cos(\Phi)))^2}{2Gr} R d\Phi = \frac{P^2 R^3}{GI_0} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right)$$

Trabajo por Cortante:

$$\tau = \mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q^2}{2Gr} ds = \mu \int_0^{\pi/2} \frac{P^2}{2Gr} R d\Phi = \frac{\mu P^2 R \pi}{4Gr}$$

Para la sección circular tenemos:

$$r = \frac{\pi d^2}{4} \quad I = \frac{\pi d^4}{64} \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \quad \mu = \frac{10}{9}$$

Sumando todas las expresiones y reemplazando tenemos:

$$\tau = \frac{P^2 R}{E d^2} \left[\frac{25 R^2}{9} + \frac{R^2}{d^2} \left(\frac{38\pi}{8} - \frac{80}{\pi} \right) \right]$$

PROBLEMA II.3. (UNI, 15-OCT-1969)

Calcular la longitud de una barra circular de acero ($E = 2 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$). De $l = 1/2$, que está sujeta a una tensión unitaria de tracción de 1800 kg/cm^2 si el trabajo de la deformación elástica es de $330 \text{ kg}\cdot\text{cm}$.

Para el caso dado, en que el elemento está sujeto a tracción, la expresión (1.B) puede escribirse así:

$$\tau = \frac{P^2 L}{2E} = \frac{(P/r)^2 \cdot L \cdot r}{2E} = \frac{\sigma^2 r l}{2E}$$

o sea que $L = \frac{2Er}{\sigma^2 r}$

En los que, para nuestro caso:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$r = 250 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$\sigma = 1800 \text{ kg/cm}^2$$

$$r = \frac{P}{A} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9\pi}{16} \ln^2 = 11.4 \text{ cm}^2$$

Entonces:

$$l = \frac{2(2 \times 10^6) \times 250}{(1800)^2 \times 11.4} = 27.07$$

$$l = 27.1 \text{ cm}$$

PROBLEMA II.4.

Que por de torsión debe aplicarse a un tubo circular de acero ($G = 8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$), de 2" y 1/8" de diámetros exterior e interior, respectivamente, para que la energía de la deformación por torsión de longitud sea de $38 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

Según la fórmula 5.B: $\tau = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_0} ds = \frac{M_t^2 L}{2GI_0}$, o sea: $M_t = \sqrt{2GI_0 \cdot \frac{T}{L}}$

Donde
 $G = 8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

$$I_0 = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} [(2)^4 - (1.5)^4] = 1.703 \text{ in}^4 = 44.66 \text{ cm}^4$$

$$T = 38 \text{ kg} \cdot \text{cm/m} = 0.38 \text{ kg} \cdot \text{cm/cm}$$

Luego $M_f = \sqrt{2(8.4 \times 10^5) \times 44.66 \times 0.38} = \sqrt{28.51 \times 10^6} = 5.34 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}$

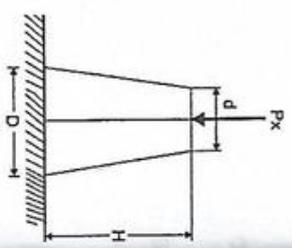
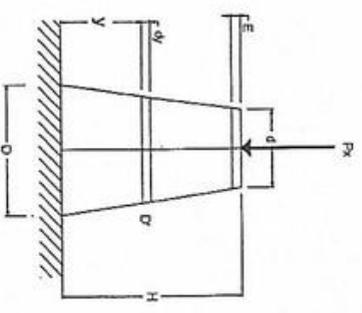
$M_f = 53.4 \text{ kg} \cdot \text{m}$

PROBLEMA II.5.

Determinar la expresión de trabajo de deformación elástica en el elemento con carga variable P_x de 0 a P , según se indica en la figura.

Solución:

Aplicaremos la Ley de Hooke de acuerdo a la figura siguiente tenemos:



Donde la ley de Hooke establece que:

$$dE = \frac{P_x(dy)}{E \cdot r} \text{ en la que } r = \frac{\pi D^2}{4}$$

Además establecemos la relación entre los diámetros de la

forma siguiente :

$$D' = d + 2 \frac{(D-d)}{2} \left(\frac{H-y}{H} \right) \text{ recordando tenemos la expresión siguiente } D' = D - \frac{y}{H} (D-d)$$

Donde también establecemos que $dy = -\frac{H}{D-d} (dD')$ luego reemplazando en la formula de Hooke tenemos:

$$dU = \frac{P_x H}{E(D-d)} \frac{dD'}{D^2} \quad e = \int_0^d de = -\frac{P_x H}{D} \int_D^d \frac{DD'}{D^2} = \frac{P_x H}{4} \frac{E dD}{D}$$

Luego con el valor de E vamos a la formula de Hooke y reemplazamos:

$$P_x = \frac{\pi E d D}{4 H} \quad \text{Para } P_x = 0 \text{ entonces } e=0 \text{ y para } P_x = P \text{ entonces } e = \delta$$

Para lo cual tenemos la expresión final: $P = \frac{\pi E d D}{4 H} e$

La ecuación final del trabajo acumulado (al pasar la fuerza de P_x a $P_x + dx$ recorriendo dE):

$$dU = (P_x + dP_x) de$$

Luego tenemos que entre diferenciales se hace una cantidad pequeña que se puede despreciar por lo que la expresión quedara finalmente:

$$dU = P_x de$$

Luego procedemos a realizar la integración correspondiente:

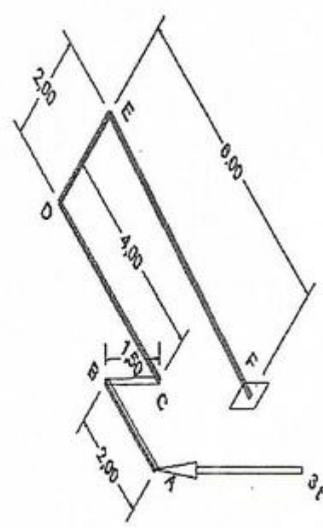
$$U = \int_0^{\delta} P_x e = \int_0^{\delta} \frac{\pi E d D}{4 H} e de$$

$$U = \frac{\pi E d D}{8 H} \int_0^{\delta} e^2 de = \frac{\pi E d D}{8 H} \left[\frac{e^3}{3} \right]_0^{\delta} = \frac{1}{2} P \delta$$

Finalmente tenemos para la expresión de trabajo:

$$U = \frac{1}{2} P \delta \quad \delta = \frac{4 P H}{\pi E d D} \quad U = \frac{2 P^2 H}{\pi E d D}$$

PROBLEMA II.6.- Calcular la energía de la deformación elástica que se acumula en la barra de la figura:



Solución:
Se presentan todos los casos de energía de deformación elástica por fuerza normal, por cortante, por momento y por torsión, luego debemos establecer las expresiones correspondientes a estas anteriormente mencionadas para cada tramo de la viga.

En el cuadro siguiente tenemos:

TRAMO	VARIABLE		M (t-m)	Q	N	Mt
	ORIGEN	INTERVALO				
AB	A	0 ≤ x ≤ 2	-3x	3	0	0
BC	B	0 ≤ x ≤ 1.5	-6	0	-3	0
CD	C	0 ≤ x ≤ 4	-3(x+2)	3	0	0
DE	D	0 ≤ x ≤ 2	-3x	3	0	18
EF	E	0 ≤ x ≤ 6	-3x+18	3	0	6

Luego reemplazamos las expresiones anteriores para cada tramo de la viga:

Trabajo por momento Flector:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{M^2}{EI} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(-3x)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^{1.5} \frac{(-6)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{(-3(x+2))^2}{EI} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(-3x)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^6 \frac{(-3x+18)^2}{EI} dx = \frac{687}{EI}$$

Trabajo por Cortante:

$$U = \mu \int_0^2 \frac{Q^2}{2Gr} ds$$

$$= \mu \int_0^2 \frac{3^2}{2Gr} dx + \mu \int_0^4 \frac{3^2}{2Gr} dx + \mu \int_0^2 \frac{3^2}{2Gr} dx$$

$$+ \mu \int_0^6 \frac{3^2}{2Gr} dx = \frac{63\mu}{Gr}$$

Trabajo por Fuerza Axial:

$$U = \frac{N^2 L}{2Er} = \frac{3^2}{2Er} * 1.50 = \frac{6.75}{Er}$$

Trabajo por Torsión:

$$U = \int_0^2 \frac{M_t^2}{2GI_0} ds$$

$$= \int_0^2 \frac{18^2}{2GI_0} dx = \int_0^6 \frac{6^2}{2GI_0} dx = \frac{432}{GI_0}$$

Si la sección es circular de diámetro 1in tenemos las siguientes características de la sección:

Área de la sección transversal $r = \frac{\pi}{4} (1)^2 = 0.7854 \text{ in}^2 = 5.07 \text{ cm}^2$

Momento Polar de Inercia $I_0 = \frac{\pi}{32} (1)^4 = 0.0982 \text{ in}^2 = 4.09 \text{ cm}^2$

$$\left. \begin{matrix} r = 0.7854 \text{ in}^2 \\ I_0 = 0.0982 \text{ in}^2 \end{matrix} \right\} \mu = 10/9$$

Momento de Inercia $I = \frac{1}{2} I_0 = 2.04 \text{ cm}^2$

Luego reemplazamos en las siguientes expresiones:

$$EI = 1.8 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 2.04 \text{ cm}^4 = 3.672 \times 10^6 \text{ kg cm}^2 = 0.3672 t \cdot \text{m}^2$$

$$Gr = 0.8 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 5.07 \text{ cm}^2 = 4.056 \times 10^6 \text{ kg} = 4056 t$$

$$Er = 1.8 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 5.07 \text{ cm}^2 = 9.126 \times 10^6 \text{ kg} = 9126 t$$

$$GI_0 = 0.8 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 4.09 \text{ cm}^4 = 3.272 \times 10^6 \text{ kg cm}^2 = 0.3272 t \cdot \text{m}^2$$

Reemplazando en las expresiones ya antes obtenidas tenemos:

Por Momento $\tau = \frac{687}{0.3672} = 1870.9150 \text{ tm}$

Por Fuerza Axial $\tau = \frac{6.75}{9126} = 0.0007 \text{ tm}$

Por Cortante $\tau = \frac{63(10/9)}{4056} = 0.0173 \text{ tm}$

Por Torsión: $\tau = \frac{432}{0.3272} = 1320.2933 \text{ tm}$

Finalmente hacemos la suma de todo y obtenemos el resultado final:

$$\tau = 3191.2263 \text{ tm}$$

Por consiguiente, la energía total acumulada en la barra es de 3191.2 T.m

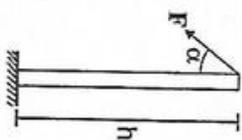
Se observa que la influencia del cortante y la normal, en éste caso, es insignificante en comparación al de la flexión y de la torsión.

PROBLEMA II.7.

Una barra de longitud h , sección transversal π y radio r , está sometida a la acción de la fuerza F inclinada con respecto de su eje. Determinar la expresión del trabajo de la deformación elástica.

En este elemento se presentan fenómenos de flexión, normal y cortante. Para obtener Q con x con h . Siendo $x = 0$ la sección de aplicación de la fuerza, tenemos:

$$M = (F \text{ sen } \alpha) x ; N = F \text{ cos } \alpha ; Q = F \text{ sen } \alpha$$



Aplicando las formulas (3.B), (1.B) y (4.B), tenemos el trabajo total:

$$T = \int_0^h \frac{(F \text{ sen } \alpha \cdot x)^2}{2EI} \cdot dx + \frac{(F \text{ cos } \alpha)^2}{2E\pi} + \mu \int_0^h \frac{(F \text{ sen } \alpha)^2}{2G\pi} \cdot dx$$

$$T = \frac{F^2 \text{ sen}^2 \alpha}{6EI} h^3 + \frac{F^2 h \text{ cos}^2 \alpha}{2E\pi} + \frac{\mu F^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2G\pi} h \quad I = \pi r^2$$

$$T = \frac{F^2 h}{2E\pi} \left[\left(\frac{I^2}{3r^2} + \frac{\mu E}{G} \right) \text{ sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha \right]$$

PROBLEMA II.8.

Un eje de transmisión de longitud l y diámetro d , experimenta un giro total de torsión φ_0 (en grados) debido a la acción de un par torsor M_t . Determinar la expresión del trabajo que absorbe el eje.

Por semejanza de materiales se conoce la relación entre par torsor y el giro φ en radianes:

$$M_t = \frac{GI_0}{l} \varphi$$

Usando la fórmula (5.13):

$$T = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_0} dx = \frac{M_t l}{2GI_0} = \left(\frac{GI_0}{l} \right)^2 \frac{l}{2GI_0} \quad \text{Por lo tanto: } T = \frac{GI_0}{2l} \varphi^2$$

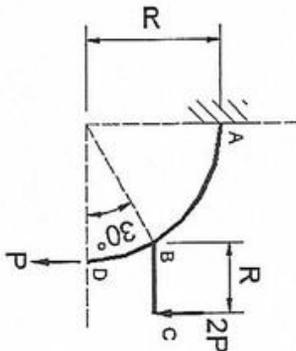
En la que: $I_0 = \frac{\pi}{32} d^4$ $\gamma = \frac{\pi}{180} \phi_0$

Luego: $\tau = \frac{G \pi d^4}{2132} \left(\frac{\pi \phi_0}{180} \right)^2$

$\tau = \frac{\pi^2 G}{2073600} \frac{d^4 \phi_0}{l}$

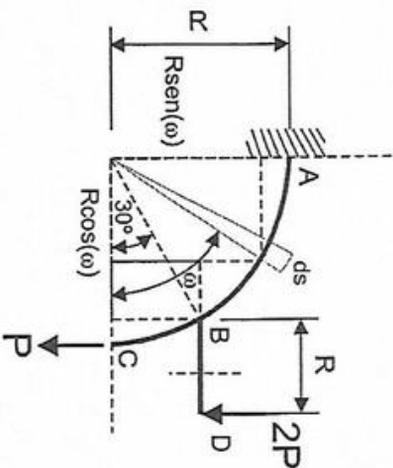
PROBLEMA II.9.

Calcular la energía de la deformación elástica que se acumula en la barra de sección transversal de radio $p=0.05R$ usar $G=0.4E$



Solución:

Se trata de una figura plana para lo cual identificamos que la energía acumulada proviene de la fuerza cortante, momento flector y fuerza axial.
Consideramos las expresiones generales antes de ingresar a las formulas previstas de acuerdo al siguiente grafico así tenemos:



TRAMO	VARIABLE	M (cm)	Q	N
AB	C	$0 \leq \omega \leq \pi/6$	$-PR(1-\cos(\omega))$	$P \text{sen}(\omega)$
BC	D	$0 \leq \omega \leq \pi/6$	$-2Px$	$2P$
CA	C	$\pi/6 \leq \omega \leq \pi/2$	$-PR(3+\sqrt{3}-3\cos(\omega))$	$3P \text{sen}(\omega)$

En base a estas expresiones usamos las formulas correspondientes para hallar el trabajo debido a las fuerzas actuantes como vemos a continuación:

$\tau = \sqrt{2} \int_0^{\pi/6} \frac{M^2}{EI} ds$

$\tau = \sqrt{2} \int_0^{\pi/6} \frac{(-PR(1-\cos(\omega)))^2}{EI} R d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{(-2Px)^2}{EI} + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(-PR(3+\sqrt{3}-3\cos(\omega)))^2}{EI} R d\omega$

Resolviendo tenemos el siguiente resultado:

$\tau = \frac{P^2 R^3}{EI} (6.1761)$

Trabajo debido a la fuerza Cortante:

$\tau = \mu \int_0^{\pi/6} \frac{Q^2}{Gr} ds = \mu \int_0^{\pi/6} \frac{(P \text{sen}(\omega))^2}{2Gr} R d\omega + \mu \int_0^{\pi/6} \frac{(2P)^2}{2Gr} dx + \mu \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(3P \text{sen}(\omega))^2}{2Gr} R d\omega$

Resolviendo tenemos la siguiente expresión:

$\tau = \frac{\mu P^2 R}{Gr} (5.3531)$

Así mismo tenemos el trabajo debido a la fuerza axial:

$\tau = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{E \gamma}$

Esta expresión puede ser transformada usando un diferencial de longitud de la forma siguiente:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{N^2}{E_r} ds = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{(-P \cos(\omega))^2}{E_r} R d\omega + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(-3P \cos(\omega))^2}{E_r} R d\omega$$

Resolviendo estas expresiones tenemos:

$$\tau = \frac{P^2 R}{E_r} (1.6211)$$

Para la sección circular según los datos tenemos:

$$p = 0.05R \quad G=0.4E \quad \mu=10/9$$

Luego de lo cual a la vez obtenemos los valores para:

$$I = \frac{\pi}{4} p^4 = \frac{\pi}{4} (625R^4) \times 10^{-8}$$

$$r = \pi p^2 = \pi (25R^2) \times 10^{-4}$$

Reemplazando estas expresiones tenemos:

$$\text{Por Momento: } \tau = \frac{P^2}{E_r} (125.82 \times 10^4)$$

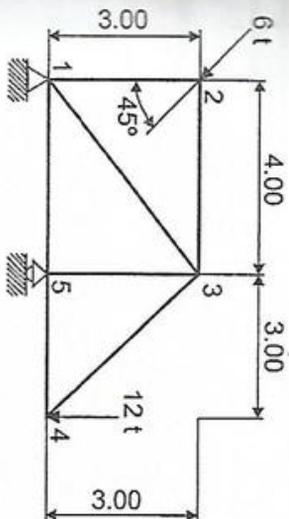
$$\text{Por Cortante: } \tau = \frac{P^2}{E_r} (0.19 \times 10^4)$$

$$\text{Por Fuerza Normal: } \tau = \frac{P^2}{E_r} (0.02 \times 10^4)$$

Luego tenemos la respuesta final: $\tau = \frac{P^2}{E_r} (126.03 \times 10^4)$

PROBLEMA II.10.

Hallar el trabajo de deformación de la estructura plantead.



Sección de las barras = 20 cm²

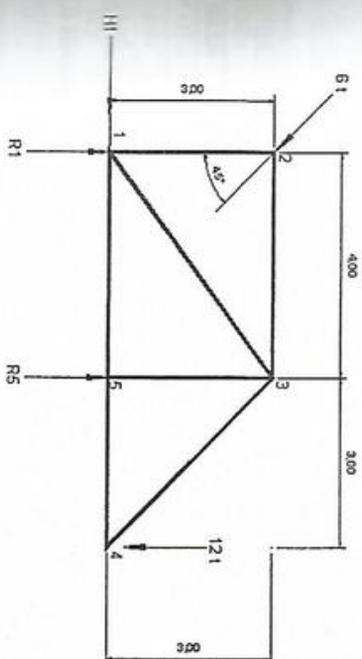
$$E = 2100 \text{ ton/cm}^2$$

solución:

Las únicas fuerzas que generan trabajo de deformación son las fuerzas axiales, de allí que debemos obtener las fuerzas en cada barra.

Aquí solo tenemos la fuerza axial en la barras como único medio de generar trabajo de deformación.

Por lo tanto debemos calcular el esfuerzo en las barras, así tenemos para lo cual comenzaremos hallando las reacciones en los apoyos de la forma siguiente:



Para el nudo 1 tenemos: $\sum M_1 = 0$

ORIGEN	FACT.	ANGULO°	SEN	COS	BRAZO	SIGNO	MOMENTO
1	6	45	0,707		3	-1	-12,73
1	12	0	0	1	7	-1	-84,00
1	R5	0	0	1	4	1	4xR5

Despejando R5 tenemos:

$R5 = 24,18 \uparrow$

Para las Fuerzas Horizontales tenemos $\sum F_H = 0(+)$ →

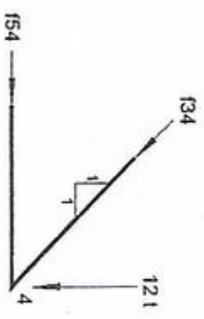
$H1 + 6 \text{sen}(45) = 0$ despejando H1 tenemos $H1 = 4,24 \leftarrow$

Para las Fuerzas Verticales tenemos $\sum F_V = 0(+)$ ↑

$R1 + R5 - 12 - 6 \text{cos}(45) = 0$ Reemplazando R5 y despejando R1 tenemos:
 $R1 = -24,18 + 12 + 6 \text{cos}(45)$ entonces $R1 = 7,94 \downarrow$

Luego procedemos a hallar las fuerzas en las barras por equilibrio:

Nudo 4: $\sum F_V = 0$



NUDO	FACT.	ANGULO°	SENO	COSENO	SIGNO	TOTAL
4	12	0		1	-1	-12,00
4	F34	45	0,71	0,71	-1	-0,71 * F34

$\sum F_V = 0 = -12 - 0,71 \times F34$

Logo $F34 = -16,97 \text{ t}$. El signo negativo indica que la fuerza debe estar orientada hacia el sentido puesto es decir que la barra esta en tracción.

Nudo 4: $\sum F_H = 0$

4

Considerando el sentido la fuerza hallado en el cálculo anterior de la fuerza F34 tenemos

ORIGEN	FACT.	ANGULO°	SENO	COSENO	SIGNO	TOTAL
4	16,97	45		0,70712	-1	-12,00
4	F34	0	0,00	1,00	1	1,00 * F34
						= 12,00 t

El sentido de esta fuerza en la barra es el correcto por lo que la barra esta en compresión.

Luego calculamos los demás nudos de la forma siguiente:

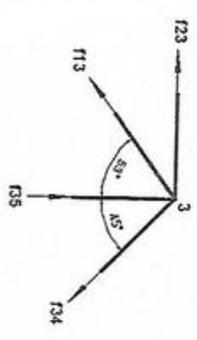
Nudo 5: $\sum F_V = 0$



Por simple inspección notamos que $F5 = R5 = 24,18 \text{ t}$ y $F15 = F54 = 12,0 \text{ t}$

Luego para el siguiente nudo.

Nudo 3: $\sum F_V = 0$

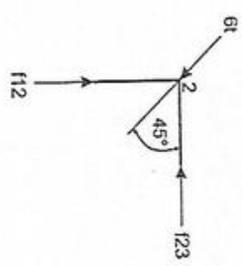


ORIGEN	FACT.	ANGULO°	SENO	COSENO	SIGNO	TOTAL
3	16,97	45		0,70712	-1	-12,00
3	24,18	0	0,00	1,00	1	24,18
3	F13	53	0,80	0,60	-1	-0,60 * F13
						= 20,24 t

NUDO	F.ACT.	ANGULO°	SENO	COSENO	SIGNO	TOTAL
3	16.97	45	0.707	0.707	1	12.00
3	20.24	53	0.80	0.60	-1	-16.16
3	F23	0	0.00	1.00	-1	-1.00 * F23
						-4.16 t

El signo negativo indica que el sentido hacia el nudo debe ser el contrario.

Luego para el nudo siguiente 2.



Nudo 2: $\Sigma F_v = 0$
f12=6cos (45) entonces f12=4.24t

Finalmente tenemos el siguiente cuadro con todas las fuerzas en las barras de la estructura.

BARRA	TRACCION	COMPRESION	LONGITUD	FUERZAS	
				TRACCION	COMPRESION
	t	t	cm	N ² L	N ² L
12		4.24	300.00	0	5393.28
23		4.16	400.00	0	6922.24
34	16.97		424.26	122179.95	0
45		12	300.00	0	43200.00
35		24.18	300.00	0	175401.72
15		12	400.00	0	57600.00
13	20.24		500.00	204828.80	0
TOTAL				327008.75	288517.24
			Suma	615525.99	

Este último valor se reemplaza en la fórmula de trabajo por fuerza normal:

$$r = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{E I} = \frac{1}{2} \frac{615525.99}{2100(20)} = 7.328t - cm$$

CAPÍTULO III TRABAJOS VIRTUALES

1.1.1.1. La determinación de deformaciones (denominadas así, en general, a los desplazamientos lineales y a los giros) en estructuras isostáticas causadas por alguna de las siguientes acciones:

a) Un conjunto de cargas (fuerzas o pares) actuando sobre la estructura.

b) Variación de la temperatura ambiente, en relación con la existente en el momento del montaje o construcción.

c) Desplazación en los apoyos, o modificaciones introducidas en las dimensiones de elementos de la estructura.

NOTACION.

Factores de primera especie en los extremos i y j, respectivamente.
Factor de forma de primera especie del elemento ij.
Factores de carga de 1era especie en los extremos i y j, respectivamente.

Deformación producida por las cargas reales aplicadas a la estructura. En el desplazamiento lineal de un punto, o el giro, rotación o deformación angular de una sección.
Esfuerzos en las barras de una armadura (estructura de barras), producidas por las cargas reales.

Esfuerzos en las barras de una armadura, producidas por una carga unitaria aplicada en el punto en el que se trate de determinar la deformación.
Longitud de un elemento geométrico.
Módulo de coeficiente de elasticidad normal.

Área de sección transversal.

Momento flector, fuerza cortante, fuerza normal y momento torsor, respectivamente, producidos en la estructura por la carga real.

Momento flector, fuerza cortante, fuerza normal y momento torsor, respectivamente, producidos en la estructura por la carga (fuerza o par) unitaria aplicada en el punto o sección en que se trate de determinar la deformación.
Momento de Inercia.
Coeficiente de la forma de la sección transversal.

G	Módulo o coeficiente de forma de rigidez o de elasticidad tangencial.
I_0	Momento polar de Inercia.
α	Coficiente de distorsión térmica.
Δt	Diferencia de temperatura ambiente.
$\Delta t'$	Diferencia de temperatura entre el exterior y el interior de la estructura.
$\Delta t''$	Diferencia de temperatura en la fibra media de la sección transversal.
\bar{L}	Longitud reducida del elemento de longitud l
J_0	Momento de inercia de comparación.

METODO.

Es necesario someter a la estructura a dos estados distintos: un estado real en el cual se producen desplazamientos o giros exteriores, y un estado virtual o ficticio caracterizado por la aplicación de fuerzas o pares exteriores, los que, en consecuencia, generan fuerzas interiores. En el estado ficticio, retiradas de la estructura las cargas reales, se aplican cargas ficticias (fuerzas o pares, preferentemente unitarios), separadamente para cada una de las deformaciones por calcular: si la incógnita es el desplazamiento lineal de un punto (según una dirección dada) se aplicara en ese punto (en la dirección dada) una fuerza unitaria; y si la incógnita fuera la rotación de una sección de la estructura, se aplicara en esa sección un par unitario.

El principio del Trabajo Virtual establece que el trabajo virtual de las fuerzas exteriores es igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores:

$$T_e = T_i$$

Siendo,

T_e = (Fuerza o par externo) x (deformación real externa producida por las acciones reales aplicadas).

T_i = (Fuerzas generadas internamente por la fuerza o par virtual externo) x (deformaciones reales generadas internamente por las acciones reales aplicadas).

FORMULAS.

Para armaduras (estructuras de barras):

Debido a las cargas aplicadas,

$$\delta = \sum \frac{S \mu l}{E \Omega} \dots\dots\dots(1.C)$$

Debido a las variaciones de temperatura,

$$\delta = - \sum \mu \alpha l \cdot \Delta t \dots\dots\dots(2.C)$$

Las estructuras deben hacerse cubriendo a todos los elementos de la estructura.

Para estructuras de alma llena (aportricadas o continuas):

Deformación teniendo en cuenta los efectos de la flexión, del cortante, del normal y de la torsión.

$$\delta = \int \frac{M m}{EI} ds + \mu \int \frac{Q q}{\Omega} ds + \int \frac{N n}{E \Omega} ds + \int \frac{M_t m_t}{GI_0} ds \dots\dots\dots(3.C)$$

Deformación causada por variaciones de temperatura:

$$\delta = \int m \alpha \frac{\Delta t'}{d} ds + \int n \alpha \Delta t'' ds \dots\dots\dots(4.C)$$

Donde d = altura de la sección transversal del elemento.

Tales estas integrales deben hacerse a lo largo de toda la estructura.

En los casos especiales en la fórmula (3.C) el primer termino es ampliamente dominante por lo que los demás términos en la generalidad de los casos no se toman en cuenta.

TABLA DE STRASSNER.

Las integrales de la fórmula (3.C) pueden calcularse haciendo uso de la tabla I y II que se dan más adelante, que permiten resolver en forma simple los dos siguientes casos:

1) Estructuras con elementos de sección constante.- Si cada elemento de la estructura tiene momento de inercia constante a lo largo de todo él, se debe aplicar la fórmula:

$$\delta = \sum \left(\frac{1}{EI} \int_0^l M m ds \right) + \sum \left(\frac{\mu EJ_c}{G \Omega} \int_0^l Q q ds \right) + \sum \left(\frac{J_c}{\Omega} \int_0^l N n ds \right) + \sum \left(\frac{E J_c}{G I_0} \int_0^l M_t m_t ds \right)$$

O sea que la longitud reducida \bar{l} que aparece en las expresiones dadas en la tabla I (*), debe calcularse así:

- Para la flexión: $\bar{l} = \frac{J_c}{I}$
- Para la cortante: $\bar{l} = \frac{HEJ_c}{G\Omega}$
- Para la normal: $\bar{l} = \frac{J_c}{\Omega}$
- Para la torsión: $\bar{l} = \frac{EJ_o}{GI_o}$

El problema C-18 muestra la aplicación de la tabla I:

2.- Estructuras con elementos de secciones variables.- Teniendo en cuenta solamente los efectos de la flexión, debe aplicarse la fórmula siguiente:

$$\delta = \sum \int_0^l \frac{Mm}{EI} ds \dots \dots \dots (6.C)$$

La tabla II (***) da las aplicaciones de $\int_0^l \frac{Mm}{EI} ds$ para determinar formas de diagramas M y m, en función de los factores de forma y factores de carga. A su vez, estos factores pueden determinarse haciendo uso de las tablas que aparecen en el Volumen II de "Cálculo de estructuras Hiperestáticas" del autor.

Los problemas C-20 y 21 aclaran la solución de estos casos.

(*) La Tabla I es una adaptación de la que aparece en "BAUSTATIK" por Kurt Hirschfeld, Editorial Springer - Verlag, Berlin 1965.

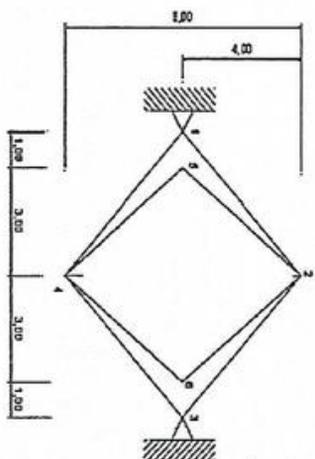
(**) La Tabla II es una adaptación y ampliación de la que aparece en "HIPERESTÁTICA PLANA GENERAL" por Aderson Moreira de Rocha, Editorial Científica, Rio de Janeiro, 1964.

PROBLEMA III.1.

Determinar el desplazamiento del punto 6 debido a los siguientes movimientos de los apoyos.

- 1. $\Delta a = 1,25$ cm (-)
- 2. $\Delta b = 0,80$ cm (+)
- 3. $\Delta y = 1,50$ cm (-)

Resolución:



Debemos determinar separadamente los desplazamientos horizontal y vertical del nudo 6 y luego sumar virtualmente estos desplazamientos.

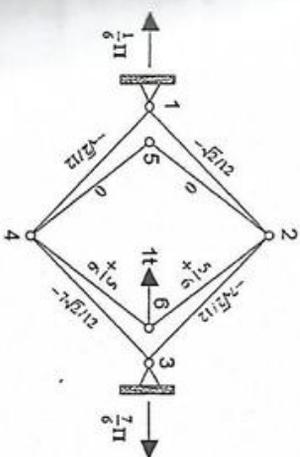
Desplazamiento horizontal.- Aplicando en 6 una fuerza virtual unitaria, se tienen las fuerzas y reacciones que se indican en el esquema.

Por ser isostática la estructura, los movimientos de los apoyos no producen esfuerzos en las barras.

Entonces el trabajo interno es nulo, puestos que las deformaciones reales internas no existen:

$$T_i = 0$$

El trabajo externo es: producido de las fuerzas virtuales externas por los desplazamientos reales:



$$T_e = (1) (\delta_6) + \left(\frac{1}{6}\right) (1.2) + (0) (1.5 \downarrow) + \left(\frac{7}{6}\right) (0.8) = \delta_6 + 0.2 + \frac{14}{15}$$

Haciendo:

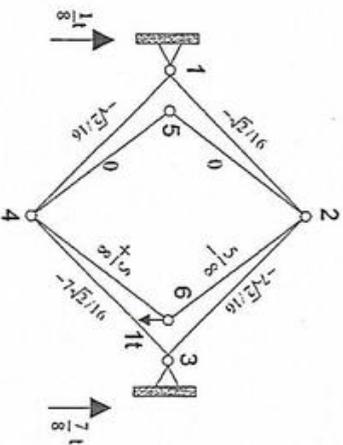
$$T_1 = T_e$$

$$0 = \delta_6 + 0.2 + \frac{14}{15}$$

$$\delta_6 = -1.13 \text{ cm}$$

$$\delta_6 = 1.13 \text{ cm}$$

Desplazamiento vertical. Aplicando en 6 una carga virtual unitaria vertical, se tienen los esfuerzos unitarios y reacciones de apoyos que se indican. Suponiendo el mismo razonamiento anterior tenemos:



$$T_1 = 0$$

$$T_e = (1 \downarrow) (\delta_6 \downarrow) + \left(\frac{7}{8}\right) (1.5 \downarrow)$$

O sea: $\delta_6 \downarrow = \frac{21}{16} = 0$

Por lo tanto $\delta_6 = 1.31 \text{ cm} \downarrow$

Desplazamiento total.

$$\delta_1 = \sqrt{(1.13)^2 + (1.31)^2} = 1.73$$

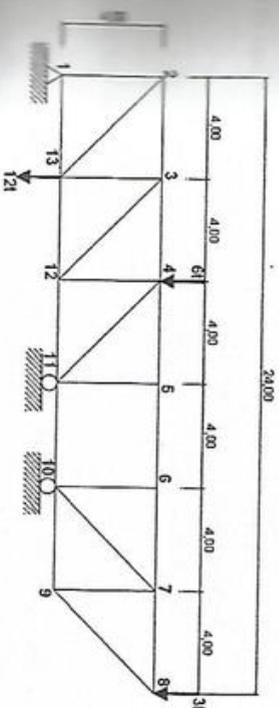
$$\delta_1 = 1.73 \text{ cm}$$

PROBLEMA III.2.

Calcular los desplazamientos verticales de la figura en el nudo 8.

Elasticidad: $E = 21 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

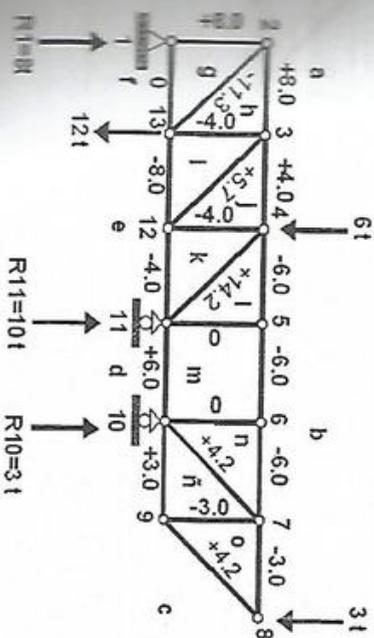
Secciónes:	
Brida Superior	20 cm^2
Diagonales	20 cm^2
Brida Inferior	15.4 cm^2
Montantes 1-2	15.4 cm^2
Resto	12.1 cm^2



La deflexión pedida es: $\delta_{v,8} = \sum \frac{S \delta l}{E \Omega}$

Reducción:

Calculando los valores de S.-



1) Por no haber diagonal en el paño 5-6-10-11, el esfuerzo cortante en este tramo tiene que ser nulo: $R_{10} - 3 = 0$ $R_{10} = 3t$

2) $\sum M = 0: 6^T (8^m) + 12(4) + 3(24) - R_{11}(12) - R_{10}(16) = 0$
(1)

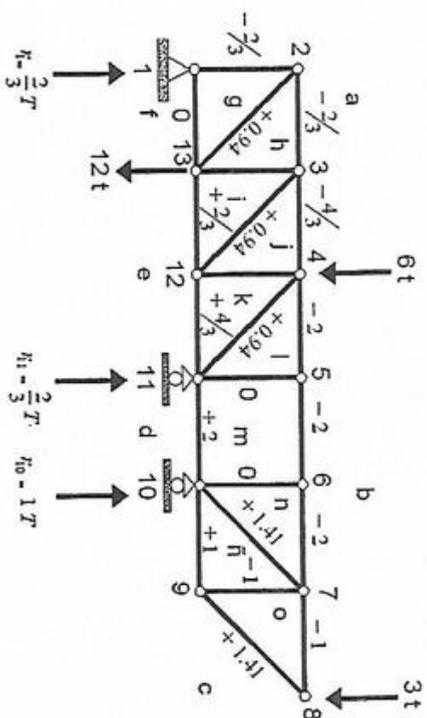
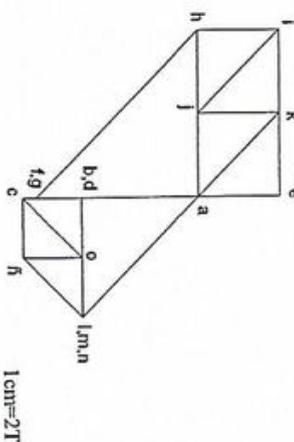
Por lo tanto: $R_{11} = 10^T$

3) $\sum F_v = 0$

$$R_1 + R_{11} + R_{10} - 12 - 6 - 3 = 0$$

$$R_1 = 8^T$$

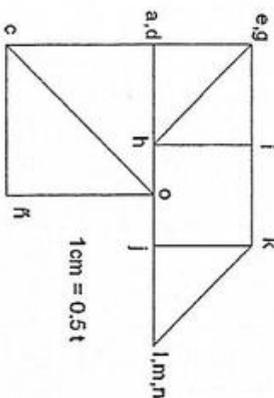
Mediante el diagrama de Cremona se determinan las fuerzas que, en T, se indican en el esquema siguiente.



El signo de los valores de μ :

Aplicando una carga unitaria vertical en el nudo 8, los esfuerzos generados en las barras son los valores μ .

Diagrama de Cremona



Reacciones de apoyos:

$$1) \quad \sum M = 0$$

$$r_{10} - 1 = 0$$

Por lo tanto $r_{10} = 1 t$

$$2) \quad \sum F_v = 0$$

$$1(24) - r_{10}(16) - r_{11}(12) = 0 \quad \text{Por lo tanto } r_{11} = \frac{2}{3} t$$

$$3) \quad \sum F_h = 0$$

$$1 + r_1 - r_{11} - r_{10} = 0$$

$$r_1 = -2/3 t$$

Hacemos la siguiente tabulación para realizar los cálculos de $s \mu l / r$

Elemento	Ω cm ²	I	S	μ	$S\mu l / \Omega$	
					+	-
1-2	15.4	4	+8	-2/3		1.39
2-3	20	4	+8	-2/3		1.07
3-4	20	4	+4	-4/3		1.07
4-5	20	4	-6	-2		2.40
5-6	20	4	-6	-2		2.40
6-7	20	4	-6	-2		2.40
7-8	20	4	-3	-1	0.60	
1-13	15.4	4	0	0		
13-12	15.4	4	-8	+2/3		1.39
12-11	15.4	4	-4	+4/3		1.39
11-10	15.4	4	+6	+2		3.12
10-9	15.4	4	+3	+1		0.78
9-8	20	4	+4.2	+1.41		1.68
3-13	12.1	4	-4	-2/3		0.88
4-12	12.1	4	-4	-2/3		0.88
5-11	12.1	4	0	0		
6-10	12.1	4	0	0		
7-9	12.1	4	-3	-1		0.99
2-13	20	5.66	-11.3	+0.94		3.01
3-12	20	5.66	+5.7	+0.94		1.52
4-11	20	5.66	+14.2	+0.94		3.78
7-10	20	5.66	+4.2	+1.41		1.68
Σ					23.11	9.32

Luego, $\sum \frac{S\mu l}{\Omega} = 23.11 - 9.32 = +13.79 \text{ m}^2 / \text{cm}^2$

y $\delta_{y,s} = \frac{1}{E} \sum \frac{S\mu l}{\Omega} = \frac{1}{2 \times 10^3} (+13.79) = +0.006895 \text{ m}$

ya que $E = 2 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$

Por lo tanto: $\delta_{y,s} = 6.9 \text{ m} \downarrow$

PROBLEMA III.3.

En la estructura de barras del esquema se indican entre paréntesis las áreas de las secciones transversales en pulgadas cuadradas. Para el cable $E = 20 \times 10^3 \text{ kp/in}^2$ y para todos los demás elementos $E = 30 \times 10^3 \text{ kp/in}^2$. Determinar la componente vertical del desplazamiento del nodo C debido a las cargas que se indican.

El desplazamiento pedido será:

$$\delta = \sum \frac{S\mu l}{\Omega}$$

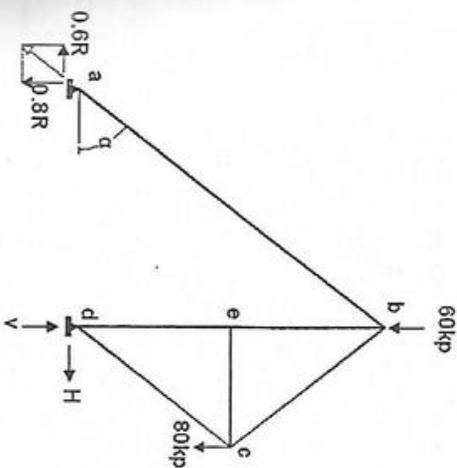
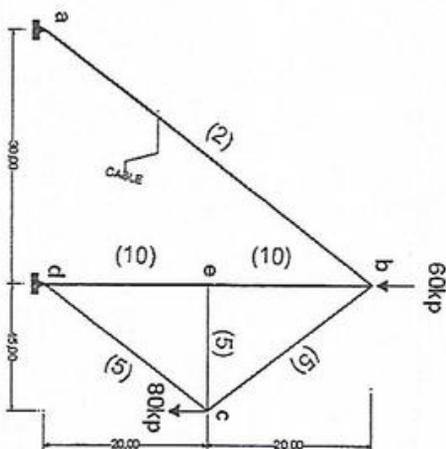
Además:

El cálculo de los valores de S:

$$1) \sum M_a = 0$$

$$v(30) - 60(30) - 80(45) = 0$$

$$v = 180 \text{ kp}$$



1) $\sum F_v = 0$

$140 + 0.8R - 180 = 0$
 $R = 50 \text{ kp}$

2) $\sum F_h = 0$

$-0.6(50) + H = 0$
 $H = 30 \text{ kp}$

$\sum F_n = 0: 50(\cos \alpha) - N''(\cos \alpha) = 0$
 $N'' = 50 \text{ kp}$

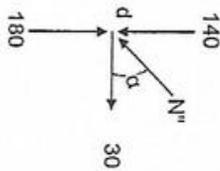
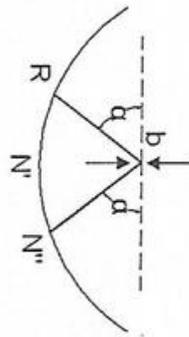
$\sum F_v = 0: 60 + [50(0.8)]2 - N' = 0$

$N' = 140 \text{ kp}$

$\sum F_n = 0:$

$N'''(0.6) - 30 = 0$

$N''' = 50 \text{ KP}$



Calculamos los valores de μ :

1) $\sum M_a = 0: 1(45) - v(30) = 0$

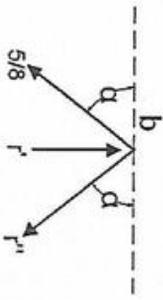
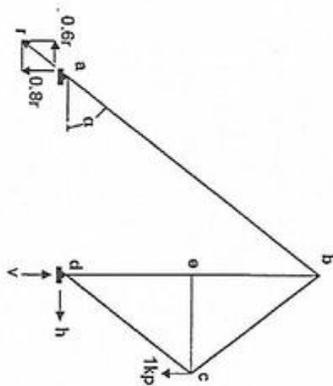
$v = 1.5 \text{ kp}$

2) $\sum F_v = 0: 1 + 0.8v - 1.5 = 0$

$v = 5/8 \text{ kp}$

3) $\sum F_n = 0: -0.6(5/8) + h = 0$

$h = 3/8 \text{ kp}$



1) $\sum F_n = 0:$

2) $\sum F_v = 0: 2(5/8)(0.8) - r' = 0$

$r' = 1 \text{ kp}$



$\sum F_v$

$\eta'''(0.6) - 3/8 = 0$

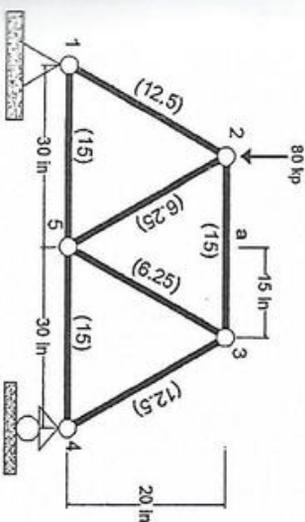
$\eta''' = 5/8 \text{ KP}$

Element	Ω in^2	1 in	E kp/in^2	S kp	μ kp	$\frac{S\mu l}{\Omega}$	$\sum \frac{S\mu l}{\Omega}$	$\frac{1}{E} \sum \frac{S\mu l}{\Omega}$
1	2	50	20×10^3	-50	-5/8	$3125/4$	$3125/4$	$0.3125/8$
2	5	25	30×10^3	-50	-5/8	$625/4$	$625/4$	
3	10	20		+140	+1	$1120/4$	$1120/4$	
4	10	20		+140	+1	$1120/4$	$1120/4$	$0.3490/12$
5	5	25		+50	+5/8	$625/4$	$625/4$	
Σ							$1.6355/24$	

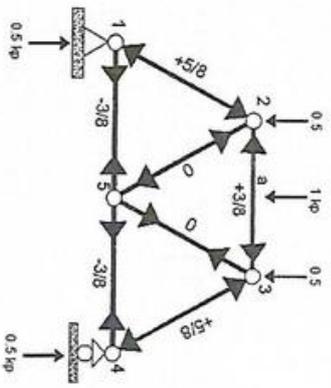
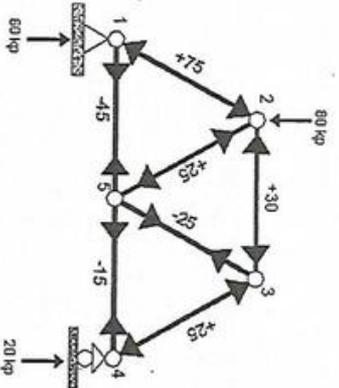
$\delta_{c,v} = \frac{1.6355}{24} \text{ pies} = 0.816'' \downarrow$

FIGURA E.M.A. III.4.

En la estructura que se muestra, calcular la deflexión vertical del punto "a" debido a la carga indicada. En cada barra, entre paréntesis, se da la correspondiente área de sección transversal, en in^2 . Para todos los elementos $E = 3 \times 10^4 \text{ kp/in}^2$



Por trabajos virtuales: $\delta_a = \int \frac{Mm}{EI} ds + \sum \frac{NnI}{E\Omega}$



Esfuerzos de N en kp.
Los momentos flectores M son nulos en todos los elementos.

Esfuerzos n debidos a la carga unitaria vertical en a (equivalente a las dos cargas de 0.5kp en los nudos 2 y 3).
Solamente hay momentos flectores en la barra 23

Elem	l	Ω	N	n	$\frac{NnI}{\Omega}$
	in	in ²	kp	kp	
12	25	12.5	+75	+5/8	+750/8
23	30	15	+30	+3/8	+180/8
34	25	12.5	+25	+5/8	+250/8
45	30	15	-15	-3/8	+90/8
51	30	15	-45	-3/8	+270/8
Σ					+1540/8

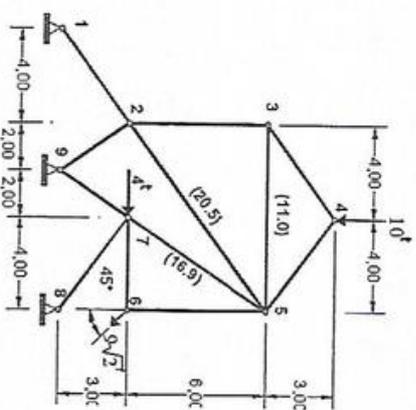
La deflexión es:

$$\delta_a = \frac{1}{E} \sum \frac{NnI}{\Omega} = \frac{1}{3 \times 10^4} \times \frac{1540}{8} = 0.00642 \text{ ft}$$

$$\delta_a = 0.00642 \text{ ft} \downarrow \quad \delta_a = 0.077 \text{ in}$$

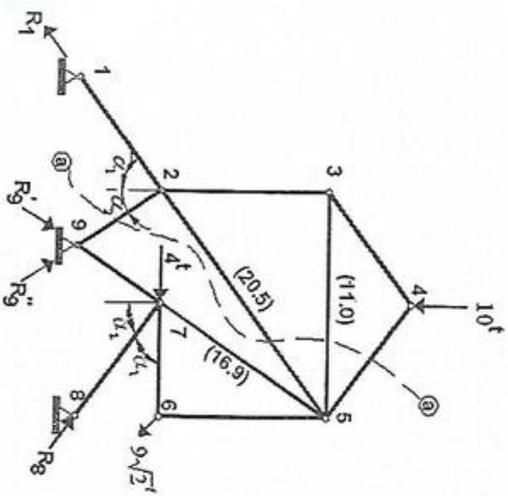
PROBLEMA III.5.
(UNL, 23 - AGOSTO - 1965)

La estructura que se muestra está hecha de elementos metálicos ($E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$), con uniones articuladas en todos sus extremos. Todos los elementos tienen 27.7 cm^2 de área de sección transversal, excepto 35, 25 y 75, cuyas áreas están indicadas entre paréntesis. Calcular cuánto desciende el nudo 4 debido a las cargas indicadas. ($E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$)



La deflexión solicitada se calcula con la fórmula: $\delta = \sum \frac{S\mu l}{E\Omega}$

Además, pues, calcular los valores de S y de μ
Cálculo de los valores de S.



Reacciones de apoyos:

1) $M_{f,s} = 0$ (corte a-a, fuerzas de la derecha)

$$-(4 + 9\sqrt{2} \cos 45^\circ (6) - R_8 (9 \operatorname{sen} \alpha_1)) = 0$$

$$R_8 = 10.83^T$$

2) $\sum M_2 = 0$

$$10(4) + (9 \operatorname{sen} 45^\circ)(8) - (R'_9 \cos \alpha_2 + R \cos \alpha_1)(4) = 0$$

$$\cos \alpha_2 = 0.6 \quad \cos \alpha_1 = 0.832$$

$$R'_9 = 25.84^T$$

3) $\sum F_x = 0$

$$(4 + 9 \cos 45^\circ) + R'_9 \operatorname{sen} \alpha_2 - R_8 \operatorname{sen} \alpha_1 - R'_9 \operatorname{sen} \alpha_2 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = 0$$

$$R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + R'_9 \operatorname{sen} \alpha_2 = 18.68 \quad \dots\dots\dots (1)$$

4) $\sum F_y = 0$

$$(10 + 9 \operatorname{sen} 45^\circ) + R_1 \cos \alpha_1 - R'_9 \cos \alpha_2 - R_9 \cos \alpha_2 - R_8 \cos \alpha_1 = 0$$

$$R_1 \cos \alpha_1 - R'_9 \cos \alpha_2 = 9 \quad \dots\dots\dots (2)$$

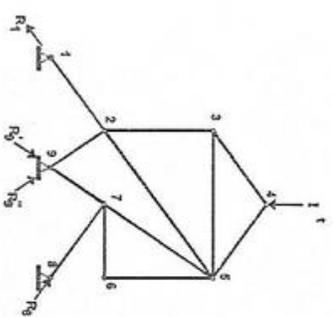
Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$R_1 = 20.56^T \quad y \quad R'_9 = 4.02^T$$

(Todas estas reacciones son de los sentidos indicados en el esquema).

Plantando las ecuaciones de equilibrio $(\sum F_x = 0, \sum F_y = 0)$ en los nudos, se obtienen los esfuerzos S que aparecen en la tabulación.

Calculo de los valores μ :-



Aplicando una carga vertical de 1^T en el nudo 4, se sigue el mismo proceso de determinación de reacciones ya expuesto anteriormente, obteniéndose:

$$R_1 = 0.56^T \quad R'_9 = 1.80^T \quad R_9 = 0.40^T \quad R_8 = 0$$

Inseguida por equilibrio de nudos, se determinan los esfuerzos los que aparecen en la siguiente tabulación:

Elemento	r cm ²	l cm	S t	μ t	$\frac{S\mu l}{r}$
1,2	27.7	500	-20.56	-0.56	+207.8
2,3	27.7	600	+5.00	+0.50	+54.2
3,4	27.7	500	+8.33	+0.83	+124.8
4,5	27.7	500	+8.33	+0.83	+124.8
5,7	46.9	721	+33.64	+1.20	+620.6
7,9	27.7	361	+25.84	+1.20	+404.1
9,3	27.7	361	+4.02	+0.40	+21.0
3,8	11.0	800	-6.67	-0.67	+325.0
2,8	20.5	1000	-23.32	-0.83	+944.2
				$\sum =$	+2826.5

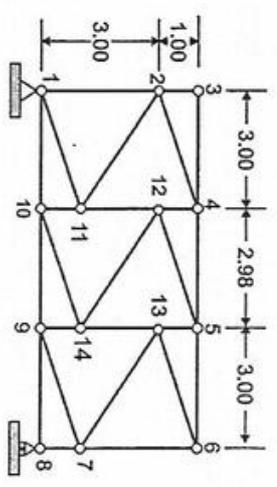
La deflexión del nudo 4 es:

$$\delta_{v,4} = \frac{2826.5}{2 \times 10^3} = 1.41 \text{ cm} = 14.1 \text{ mm} \downarrow$$

PROBLEMA III.6. (UNI, 15 - OCTUBRE - 1969)

La estructura que se muestra está sometida a una variación de temperatura de 20°C con relación a la temperatura de ejecución, determinar el desplazamiento horizontal del nudo 6.

El coeficiente de dilatación térmica es $1.08 \times 10^{-5} / ^\circ C$

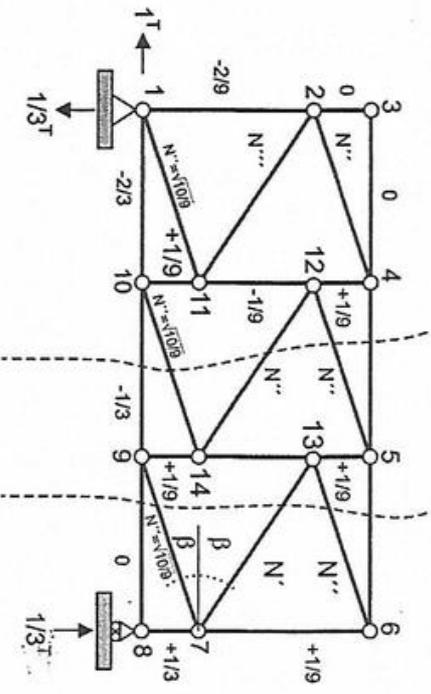


El desplazamiento pedido está dado por la fórmula (2.C):

$$\delta_{h,6} = - \sum \mu \alpha l \cdot \Delta t = - \alpha \cdot \Delta t \sum \mu l$$

α y Δt son constantes para los términos de la ecuación.

Los valores de μ son los esfuerzos en las barras, debido a la fuerza unitaria horizontal aplicada en 6.



Reacciones:

1) $\sum F_h = 0$

$-H_1 + 1 = 0$ Por lo tanto: $H_1 = 1T$

2) $\sum M_1 = 0$ Por lo tanto: $1(3) - R_8(9) = 0$

Por lo tanto: $R_8 = 1/3T$

3) $\sum F_v = 0$ $-Y_1 + 1/3 = 0$

Por lo tanto $Y_1 = 1/3T$

Esforzos en las barras.- En cada paño las barras inclinadas deben tener el mismo valor de esfuerzo (son sentidos alternados de tracciones y compresiones). Ya que en cada uno de los nudos horizontales (7 y 13 por ejemplo) sus proyecciones horizontales deben anularse entre sí. Sobre esta base, planteamos el equilibrio de la porción a la derecha del corte a-a, tomando momentos respecto del nudo 5:

$$\sum M_5 = 0: -\frac{1}{3}(3) + (N' \cos \beta)(3) = 0$$

$$N' = 1/10/9$$

Para determinar la ecuación de equilibrio $\sum F_h$ y $\sum F_v$ iguales a cero, en los nudos 12 y 13, se determinan los esfuerzos en las barras 7-6, 6-5, 9-10 y 9-14. Tomando momentos respecto a 4, de las fuerzas que conforman el equilibrio de la porción de armadura a la derecha del corte a-a, se determina el esfuerzo N'' para tres barras articuladas. Y así, masivamente, se siguen determinando los esfuerzos en μ que se indican en el esquema anterior.

Debemos calcular el valor $\sum \mu l$ para toda la estructura. Para ello hacemos la siguiente tabulación:

Barra	l m	μ	μl	
			+	-
12	2	-2/9		4/9
23	1	0	0	0
34	3	0	0	0
45	3	-1/3		9/9
56	3	-2/3		18/9
67	2	+1/9	2/9	
78	1	+1/3	3/9	
89	3	0	0	0
9-10	3	-1/3		9/9
10-1	3	-2/3		18/9
1-11	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
1-2	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
2-4	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
4-12	1	+1/9	1/9	
12-11	1	-1/9		1/9
11-10	1	+1/9	1/9	
10-14	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
14-12	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
12-5	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
5-13	1	+1/9	1/9	
13-4	1	-1/9		1/9
14-9	1	+1/9	1/9	
97	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
7-13	$\sqrt{10}$	$+\sqrt{10}/9$	10/9	
13-6	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}/9$		10/9
		Σ	19/9	120/9

O sea que, $\sum \mu l = + \frac{39}{9} - \frac{120}{9} = -9$

La variación de temperatura es de +/- 20°C (+ para aumento, - para disminución)

Reemplazando valores en la expresión (1), tenemos:

$$\delta_{h,\delta} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot \sum \mu l = (1.08 \times 10^{-8})(+/-20)(-9) = +/- 0.001944 \text{ m}$$

$$\delta_{h,\delta} = +/- 1.9 \text{ mm}$$

(1) sea que la variación de temperatura aumenta (Δt en signo +), el desplazamiento resulte positivo, es decir del mismo sentido de la carga unitaria aplicada. Luego:

(a) Δt es un aumento de temperatura: $\delta_{h,\delta} = 1.9 \text{ mm} \rightarrow$

(b) Δt es una disminución de temperatura: $\delta_{h,\delta} = 1.9 \text{ mm} \leftarrow$

CAPÍTULO IV

TEOREMA DE CASTIGLIANO

La derivada parcial del trabajo de la deformación elástica, expresado en función de las fuerzas exteriores, respecto a una de estas fuerzas, es igual al desplazamiento de su punto de aplicación, medido en la dirección y sentido de la fuerza:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P_n} = \delta_n \quad (1.E)$$

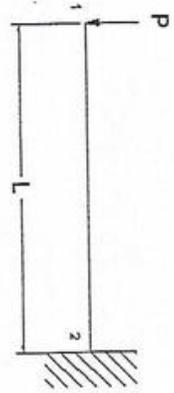
Para los diferentes tipos de solicitaciones en una estructura, el trabajo de la deformación elástica está dado por las expresiones (1.B),(3.B),(4.B) y (5.B)

Indicativamente la fuerza P_n corresponde a una fuerza concentrada o a un par. Si se trata de fuerza concentrada, el desplazamiento δ_n es lineal; y si se trata de un par, δ_n es una rotación o giro.

Si se necesitara determinar el desplazamiento (o el giro) en un punto en el que no hay aplicada carga concentrada (o par), se considerara aplicada en ese punto una carga concentrada (o un par) ficticia igual a cero.

PROBLEMA IV.1.

Para la estructura mostrada en la que EI es constante determinar la expresión del desplazamiento del extremo 1, considerando solo los efectos de flexión.

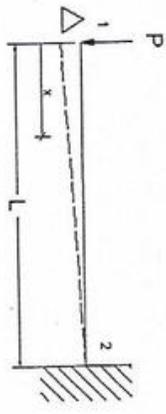


Solución

La deflexión según el teorema de Castigliano está dado por

$$\Delta = \frac{\partial \tau}{\partial P}$$

Donde $\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ de tal manera que el desplazamiento está dado por :



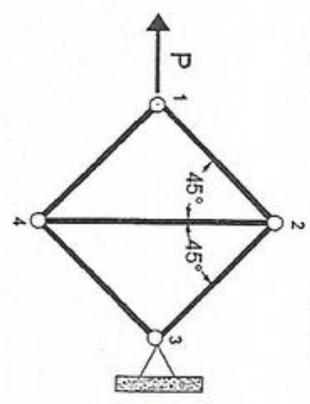
$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=L} M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Donde $M = -Px$ y $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$

Luego $\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^L (-Px)(-x) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{3} X^3 \right]_0^L = \frac{PL^3}{3EI}$ Por lo tanto $\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow$

PROBLEMA IV.2.

Determina el desplazamiento horizontal del nudo 1. Siendo EQ constante en todas las barras. El desplazamiento solicitado es, según el Teorema de Castigliano:

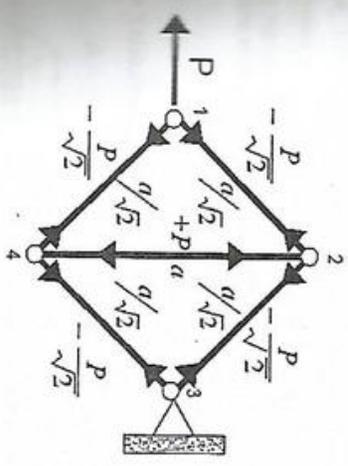


$$T = \sum \frac{S^2 l}{2EQ}$$

donde $\frac{dT}{dP} = \frac{1}{EQ} \sum S \frac{dS}{dP} l$

donde $S_{12} = S_{23} = S_{34} = S_{41} = -\frac{P}{\sqrt{2}}$

Entonces $\frac{dT}{dP} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



Entonces: $\frac{dS}{dP} = +1$

Luego,

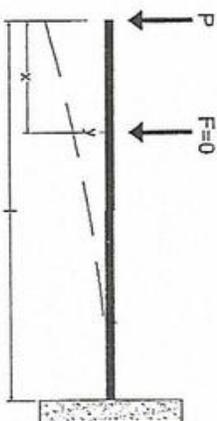
$$\delta_1 = \frac{1}{E\Omega} \left[4 \left(\frac{-P-1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{2}} \right) + (P \cdot 1 \cdot a) \right] = \frac{Pa}{E\Omega} (1 + \sqrt{2})$$

$$\delta_1 = \frac{Pa}{E\Omega} (1 + \sqrt{2})$$

$$\delta_1 = \frac{Pa}{E\Omega} (1 + \sqrt{2}) \leftarrow$$

PROBLEMA IV.3.

Determinar la expresión del eje deformado para la viga del problema E-1



Debemos determinar la ecuación:

$$y = f(x)$$

para lo que, en la sección genérica de abscisa x, aplicamos la fuerza ficticia $F = 0$

Según el Teorema de Castigliano:

$$y = \frac{dT}{dF} \Big|_{F=0}$$

Siendo $T = \int \frac{M^2}{2EI} ds$; o sea que $Y = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} ds \dots \dots \dots (i)$

Siendo, para $0 \leq s \leq x$: $M = -Ps \rightarrow \frac{dM}{dF} = 0$

$x \leq s \leq l$: $M = -Ps - F(s-x) \rightarrow \frac{dM}{dF} = -(s-x)$

Reemplazando en (i)

$$Y = \frac{1}{EI} \int_0^l [-Ps - F(s-x)] [-(s-x)] ds \Big|_{F=0} = \frac{1}{EI} \left[P \left(\frac{1}{3} s^3 - \frac{x}{2} s^2 \right) \right]_0^l$$

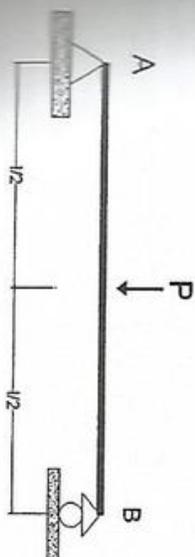
$$Y = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{3} (l^3 - x^3) - \frac{x}{2} (l^2 - x^2) \right]$$

Sea la fuerza

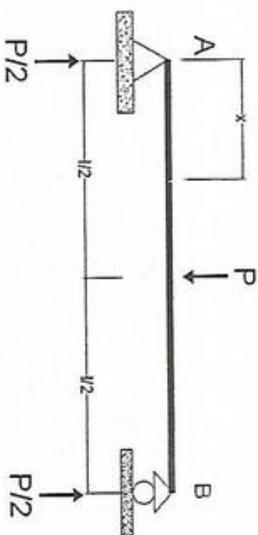
$$P = \frac{P}{6EI} (2l^3 + x^3 - 3xl^2)$$

PROBLEMA IV.4. UNI, 23-MAY-1966)

La viga AB de sección constante circular (diámetro d, coeficiente de forma $\mu = 10/9$, material con $E = 0.47$) está sujeta a las acción de la carga concentrada P. Determinar la relación entre d y l para que la deflexión en la sección media debido al cortante sea menor del 3% de la deflexión por flexión.



Según el Teorema de Castigliano la deflexión en la sección media, es decir en la que está aplicada la fuerza P, es: $\delta = \frac{dT}{dP}$



Siendo en este caso:

$$T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} ds + \mu \int_{(A)}^{(B)} \frac{Q^2}{2G\Omega} ds$$

O sea que:

$$\delta = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \frac{dM}{dP} dx + \frac{2\mu}{G\Omega} \int_0^{l/2} Q \frac{dQ}{dP} dx$$

δ_f = Desplazamiento por flexión

δ_c = Desplazamiento por cortante

En la que:

$$0 \leq x \leq l/2: M = \frac{P}{2}x \rightarrow \frac{dM}{dP} = \frac{x}{2} \quad y \quad Q = \frac{P}{2} \rightarrow \frac{dQ}{dP} = \frac{1}{2}$$

Entonces reemplazando:

$$\delta_f = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{4Pl^3}{3\pi Ed^4}$$

$$\delta_c = \frac{2\mu}{G\Omega} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x \right) \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{\mu Pl}{4G\Omega} = \frac{25Pl}{9\pi Ed^2}$$

La deflexión total s:

$$\delta = \delta_f + \delta_c = \frac{25Pl}{9\pi Ed^2} \left[\frac{12}{25} \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 1 \right]$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\delta = 0,03, \text{ o sea } \frac{1}{25} \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 1 = 0,03$$

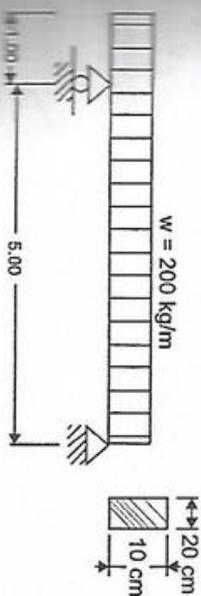
De donde:
 $l = 8,307d$

Es la relación entre d y l pedida.

PROBLEMA IV.5.

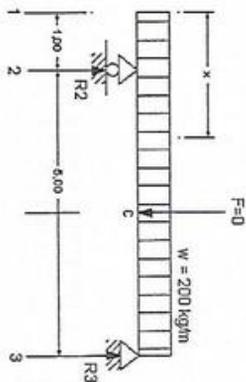
Calcular la deflexión en el centro del tramo la figura siguiente:

$E = 1,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



Para el punto donde deseamos hallar el desplazamiento aplicamos una carga ficticia de valor cero

Hallamos las reacciones en los apoyos



$$\sum F_v = 0 = R_2 + R_3 - F - 200(6) = 0, \dots (1)$$

$$\sum M_2 = 0 = 200(1)(0.5) - 200(5)(2.5) - F(2.5) + R_3(5), \dots (2)$$

Despejando R3 en (2) tenemos R3 = (100 - 2500 - 2.5F)/5 luego R3 = 480 + 0.5F

En (1) tenemos: 0 = R2 + 480 + 0.5F - F - 1200 entonces R2 = 720 + 0.5F

Los momentos flectores en los tramos correspondientes serían:

$$0 \leq x \leq 1 \quad M = -100x^2 \quad \dots \dots \dots \frac{\partial M}{\partial F} = 0$$

$$1 \leq x \leq 3.5 \quad M = -100x^2 + \left(\frac{F}{2} + 720\right)(x-1) \quad \dots \dots \dots \frac{1}{2}(x-1)$$

$$3.5 \leq x \leq 6 \quad M = -100(6-x)^2 + \left(\frac{F}{2} + 480\right)(6-x) \quad \dots \dots \dots \frac{1}{2}(6-x)$$

Para los efectos de flexión tenemos:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{s^1}^{s^2} \frac{M^2}{EI} ds \quad \dots \dots \dots (3)$$

Por Castigliano tenemos que:

$$\Delta_c = \frac{\partial \tau}{\partial F} \Big|_{F=0} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Luego (4) en (3) tenemos:

$$\Delta_c = \frac{\partial \tau}{\partial F} \Big|_{F=0} \quad \text{de (4) en (3) tenemos } \Delta_c = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial F} dx \Big|_{F=0}$$

Luego tenemos:

$$\Delta_c = \frac{1}{EI} \left\{ \int_1^{3.5} [-100x^2 + 720(x-1)] \times \frac{1}{2}(x-1) dx + \int_{3.5}^6 [-100(6-x)^2 + 480(6-x)] \times \frac{1}{2}(6-x) dx \right\}$$

$$EI \Delta_c = \left[-100 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 240(x-1)^3 \right]_1^{3.5} + \left[25(6-x)^4 - 160(6-x)^3 \right]_{3.5}^6$$

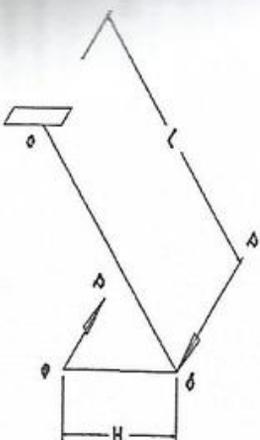
Luego tenemos para $\Delta_c = \frac{35312.5}{24EI}$

Despejando valores tenemos:

$$\Delta_c = \frac{35312.5}{24 \times 10^4} = 0.0158 \text{ m entonces } \Delta_c = 15.8 \text{ mm } \downarrow$$

PROBLEMA IV.6.

Calcular el desplazamiento de la barra en la dirección perpendicular al plano y el desplazamiento en el sentido de la fuerza F en A.



Calcular una fuerza ficticia en b a la que denominamos Q.

Calcular los desplazamientos con el teorema de Castigliano tenemos que los desplazamientos pedidos son:

Desplazamiento en a: $\Delta_a = \frac{\partial \pi}{\partial P} \Big|_{Q=0}$ si actúa P en a y b

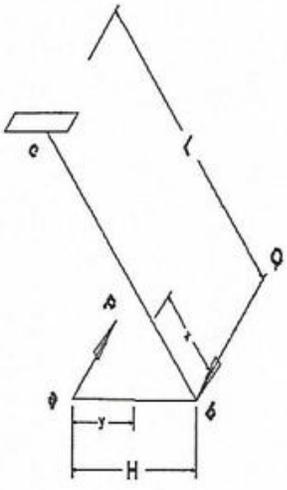
Desplazamiento en b: $\Delta_b = \frac{\partial \pi}{\partial P} \Big|_{Q=0}$ si solo actúa P en a

Para el trabajo de la deformación elástica tomando solo en cuenta la torsión y la flexión dejando de lado el cortante tenemos:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{s1}^{s2} \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_{s1}^{s2} \frac{M_t^2}{GI_t} ds$$

Por Castigliano:

$$\Delta = \frac{\partial \pi}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_0} \int M_t \frac{\partial M_t}{\partial P} ds = \dots \dots \dots (1)$$



Luego tenemos que:

$0 \leq y \leq H$ $M = Py$ entonces $\frac{\partial M}{\partial P} = y$

$M_t = 0$ entonces $\frac{\partial M_t}{\partial P} = 0$

$0 \leq x \leq L$ $M = (P-Q)x$ entonces $\frac{\partial M}{\partial P} = x$

$M_t = PH$ entonces $\frac{\partial M_t}{\partial P} = H$

llevarlo a (1) tenemos la expresión siguiente:

$$\Delta = \frac{P}{3EI} \left[H^3 + \left(1 - \frac{Q}{P}\right) L^3 \right] + \frac{PH^2 L}{GI_0}$$

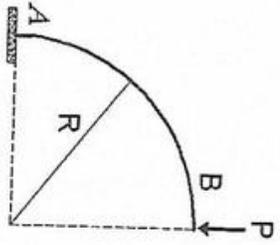
Para el primer caso de desplazamiento tenemos:

$$\Delta_a = PH^3 \left[\frac{H}{3EI} + \frac{L}{GI_0} \right] \quad \delta \quad \Delta_a = \frac{2PH^2}{\pi^2 A^4} \left[\frac{2H}{3E} + \frac{L}{G} \right]$$

Para el segundo caso de desplazamiento tenemos:

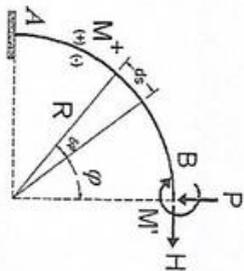
$$\Delta_b = P \left[\frac{H^3 + L^3}{3EI} + \frac{H^2 L}{GI_0} \right] \quad \delta \quad \Delta_b = \frac{2P}{\pi^2 A^4} \left[\frac{2(H^3 + L^3)}{3EI} + \frac{H^2 L}{G} \right]$$

FIGURA IV.7. (FUC, 15-DIC-1961)



El punto de forma de un cuarto de círculo, de radio medio R, momento de inercia constante, aplicado en el extremo superior una carga vertical P. Su extremo inferior está empotrado.

Determinar los desplazamientos vertical, horizontal y la variación angular del extremo superior, teniendo en cuenta solamente los efectos de flexión.



Debemos aplicar en B una fuerza horizontal ficticia $H=0$, y un par ficticio $M' = 0$. De acuerdo con el Teorema de Castigliano tendremos para el extremo B:

$$\delta_v = \frac{\partial T}{\partial P} \Big|_{H=M'=0} \quad \delta_h = \frac{\partial T}{\partial H} \Big|_{H=M'=0} \quad \vartheta = \frac{\partial T}{\partial M'} \Big|_{H=M'=0} \quad \dots (1)$$

$$\text{En la que } \tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

Para una sección genérica determinada por el parámetro ϕ

$$M = -M' - H.R(1 - \cos \phi) - P.R \text{ sen } \phi$$

De la que:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -R \text{ sen } \phi \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -R(1 - \cos \phi) \quad \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

Y, además, $ds = R.d\phi$

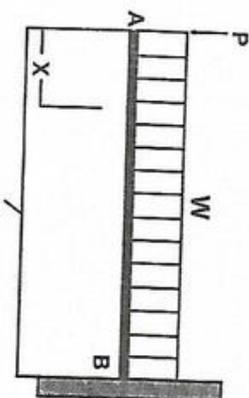
Luego, reemplazando en la expresión (1), tenemos:

$$\begin{aligned} \delta_v &= \frac{1}{EI} \int_M \frac{\partial M}{\partial P} ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \text{ sen } \phi)(-R \text{ sen } \phi) \cdot d\phi \\ &= \frac{PR^2}{2EI} \left[\phi - \frac{1}{2} \text{sen } 2\phi \right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ \delta_h &= \frac{\pi PR^3}{4EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_h &= \frac{1}{EI} \int_M \frac{\partial M}{\partial H} ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \text{ sen } \phi)[-R(1 - \cos \phi)] \cdot d\phi \\ &= \frac{PR^3}{EI} \left[-\cos^2 \phi - \frac{1}{2} \text{sen } 2\phi \right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{2EI} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\ \delta_h &= \frac{PR^3}{4EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{EI} \int_M \frac{\partial M}{\partial M'} ds \Big|_{H=M'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \text{ sen } \phi)(-1) \cdot d\phi \\ &= \frac{PR^2}{EI} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} = \frac{PR^2}{EI} \\ \vartheta &= \frac{PR^2}{EI} \end{aligned}$$

FIGURA IV.8. (UNI, 11-FEB-1966)



La viga AB, de sección rectangular $3 \times 15 \text{ cm}$ (ancho por alto), con módulos $E = 1,8 \times 10^6$ y $I = 10^4 \text{ cm}^4$, está sujeta a la acción de una carga concentrada $P = 2t$ y una carga distribuida repartida $w = 1,2 t/m$.

Se desea determinar la longitud de viga, la contribución de la deflexión vertical de A debida al momento de inercia en el punto B inferior al 1% de la deflexión total, por todo concepto.

La deflexión total δ_A en A, es la suma de las deformaciones por flexión δ_F , y la deformación por

temperatura δ_T en A, en la que, según el enunciado: $\delta_C \leq \frac{1}{100} \delta_T$

Lo que llevado a (1), da: $\delta_F \geq 99 \delta_C$

o sea $\frac{\partial \tau_F}{\partial P} \geq 99 \frac{\partial \tau_C}{\partial P}$

Es decir, $\frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx \geq \frac{99 \mu}{Gr} \int Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} dx$

En el caso dado:

$M = -Px - \frac{1}{2} wx^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$

$Q = -P \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial P} = -1$

Luego, $\frac{1}{EI} \int_0^l \left(-Px - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-x) \cdot dx \geq \frac{99 \mu}{Gr} \int_0^l (-P) (-1) \cdot dx$

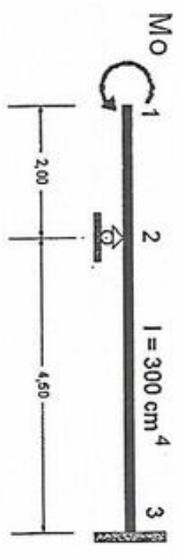
$\frac{l^3}{24EI} (8P + 3w) \geq 99 \mu \frac{Pl}{Gr}$

En la que reemplazando los valores dados en el enunciado anterior se obtiene la incuación:
 $l^3 + 4.44l^2 - 6.85 \geq 0$

De la que, finalmente, $l \geq 1.10 \text{ m}$

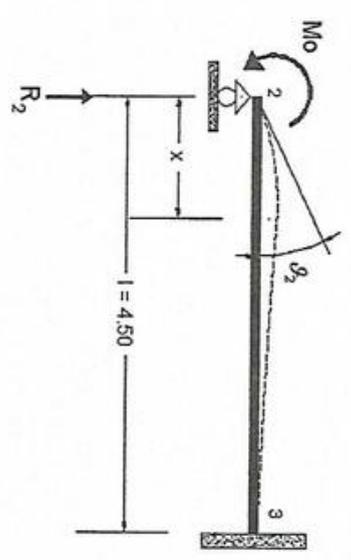
Es decir que para longitudes de viga iguales o mayores a 1.10m, la deflexión por cortante en el extremo A es igual o menor del 1% de la deflexión total en ese extremo.

PROBLEMA IV.9. (UNI, 18-DIC-1957)



Para la viga mostrada, ¿qué valor debe tener el par M_0 para que la deformación en la sección 2 sea de 10^{-3} ? Se resolverá aplicando el Teorema de Castigliano y considerando $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

En primer lugar debemos resolver la estructura dada en cuanto a sus reacciones. Considerando la reacción en el apoyo 2 como la incógnita hiperestática, podemos escribir que:



$\frac{\partial \tau}{\partial R_2} = 0$

$\frac{\partial \tau}{\partial R_2} \left[\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_2} dx = 0$

En donde: $\int M \frac{\partial M}{\partial R_2} dx = 0 \dots \dots \dots (1)$

Entonces: $M = -M_0 + R_2 x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R_2} = x$;

que reemplazando a (1) da: $\int_0^l (-M_0 + R_2 x) \cdot x \cdot dx = 0 \rightarrow R_2 = \frac{3M_0}{2l}$

La deformación angular solicitada para la sección 2 es:

$$\theta_2 = \frac{\partial T}{\partial M_0}$$

O sea

$$\theta_2 = \frac{\partial}{\partial M_0} \left[\int \frac{M^2}{2EI} dx \right] = \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} dx$$

Donde

$$M = -M_0 + R_2 x = -M_0 + \frac{3M_0}{2l} x = M_0 \left[\frac{3x}{2l} - 1 \right]_0^1$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{3x}{2l} - 1$$

Luego,

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0 \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right)^2 dx = \frac{M_0}{EI} \frac{1}{3} \frac{2l}{3} \left[\left(\frac{3x}{2l} - 1 \right)^3 \right]_0^1 = \frac{M_0 l}{4EI}$$

De donde:

$$M_0 = \frac{4EI}{l} \theta_2$$

En el caso propuesto:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, I = 300 \text{ cm}^4$$

$$\theta_2 = 10'' = \frac{10\pi}{648000} \text{ rad.}, l = 4.5 \text{ m}$$

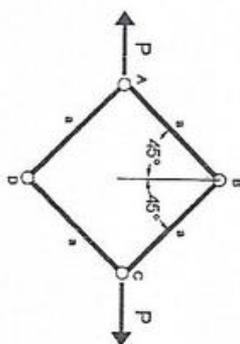
Luego:

$$M_0 = \frac{4(2 \times 10^6)(300)}{450} \frac{\pi}{64000} = 258.6$$

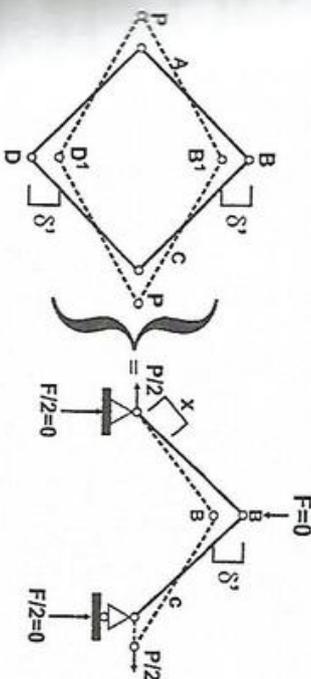
Por lo tanto:

$$M_0 = 258.6 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

PROBLEMA IV.10. (UNI, 23-MAY-1966)



ABCD es un cuadrado de lado a ; en A y C hay rótulas. Los elementos son de sección transversal circular de diámetro d , coeficiente de forma $\mu = 1.2$, material con $G = 0.4E$. El valor se aproximan entre si B y D por todo concepto? Esquema el siguiente esquema al cual puede reducirse el problema:



El valor se aproximan entre B y D:

$$\delta_{B,D} = 2 \left(\frac{\delta Z}{\delta F} \right)_{F=0} \dots \dots (1)$$

El valor se aproximan entre B y D:

$$\delta_{B,D} = 2 \left(\frac{\delta Z}{\delta F} \right)_{F=0} \dots \dots (1)$$

$$\delta_{B,D} = 2 \left(\frac{\delta Z}{\delta F} \right)_{F=0} \dots \dots (2)$$

Donde:

$$M = \left(\frac{F \cdot \sqrt{2}}{2} \right) x + \left(\frac{P \cdot \sqrt{2}}{2} \right) x = \frac{\sqrt{2}}{4} (P+F)x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} x \dots (3.1)$$

$$Q = \left(\frac{F \cdot \sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{P \cdot \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (P+F) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} \dots (3.2)$$

$$N = \left(\frac{F \cdot \sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{P \cdot \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (F-P) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial F} = \frac{\sqrt{2}}{4} \dots (3.3)$$

Para F = 0, reemplazando (3.1, 3.2, 3.3) en (2), tenemos:

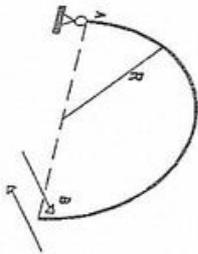
$$\delta^i = \frac{2}{EI} \int_0^d \left(\frac{\sqrt{2}}{4} P x \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x \right) dx + \frac{2}{EI} \int_0^d \left(\frac{\sqrt{2}}{4} P \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) dx$$

$$\delta^i = \frac{P d^3}{12EI} + \frac{\mu P a}{4Gr} - \frac{P a}{4Er}$$

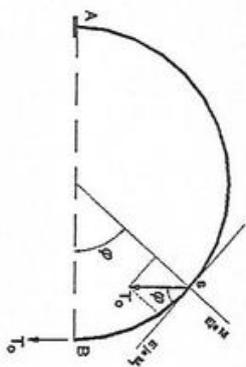
Reemplazando en esta expresión: $G=0.4E, \mu=1.2, I = \frac{\pi d^4}{64}$ y $r = \frac{\pi d^4}{4}$, y llevando a (1) tenemos finalmente:

$$\delta_{BD}^{\uparrow} = \frac{P d^3}{6EI} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{d}{a} \right)^2 \right]$$

PROBLEMA IV.11.



La barra circular AB está perfectamente empotrada en A, sujeta a la acción del par T, en el extremo B; es de sección transversal circular de radio r. Calcular la deformación angular en B. De acuerdo con el Teorema de Castigliano, la deformación angular pedida ϕ_B es:



$$\phi_B = \frac{\delta Z}{\delta T_0}$$

$$T = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_L^2}{2GI} ds \dots (1)$$

Para la sección genérica S, indicada por el parámetro ϕ , las expresiones de los momentos flexionantes y de torsión se obtienen mediante el vector representativo de T_0 según los ejes transversal y normal de la sección, respectivamente. Así:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \phi \leq \pi: \quad M &= T_0 \sin \phi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial T_0} = \sin \phi \\ M_0 &= T_0 \cos \phi \rightarrow \frac{\partial M_L}{\partial T_0} = \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Reemplazando respecto a T_0 la expresión (1), tenemos:

$$T = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M^2 ds + \frac{1}{GI} \int_0^\pi M_L^2 ds$$

De lo que reemplazamos las igualdades (2):

$$T = \frac{1}{EI} \int_0^\pi (T_0 \sin \phi)^2 (R d\phi) + \frac{1}{GI} \int_0^\pi (T_0 \cos \phi)^2 (R d\phi)$$

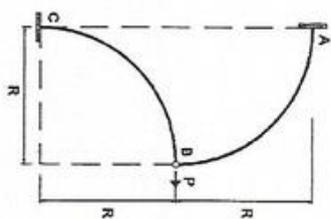
$$T = \frac{R T_0^2}{EI} \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi + \frac{R T_0^2}{GI} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi = \frac{R T_0^2 \pi}{2EI} + \frac{R T_0^2 \pi}{2GI}$$

$$\phi_B = \frac{\partial T}{\partial T_0} = \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI} \right) R T_0$$

Para la sección transversal circular $I = I/2$ $I_0 = \frac{\pi}{4} r^4$, la última expresión también se puede presentar así:

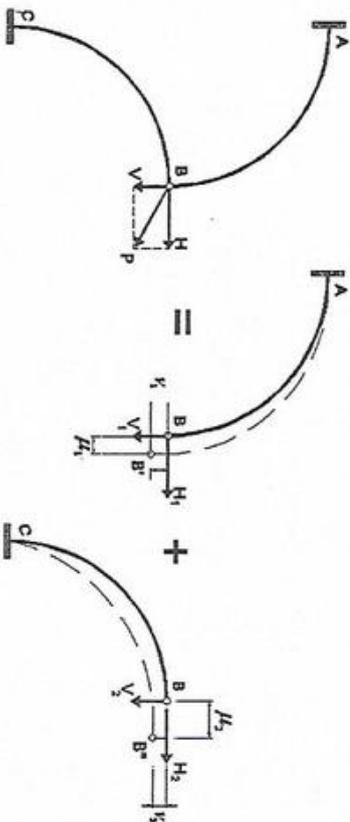
$$\phi_B = \frac{R T_0}{I} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

PROBLEMA IV. 12. (UNI, 10-ENE-1967)



La estructura ABC esta formada por dos tramos en arcos de circunferencia, unidos en B mediante una rótula. Es de $EI = \text{constante}$. Determinar el desplazamiento en B.

No pudiendo afirmar a priori si existirá o no desplazamiento vertical de la rótula B, consideramos el caso mas general: La fuerza P inclinada, con componentes H y V se reparten hacia las partes AB y BC de la estructura:



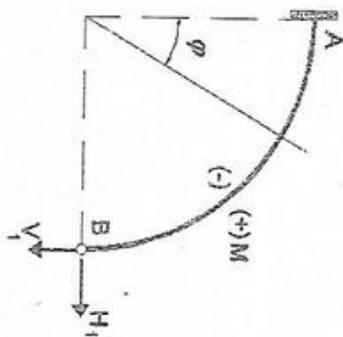
Condiciones:

$$1) H_1 = H_2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (a)$$

$$H_1 + H_2 = H \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (b)$$

$$V_1 + V_2 = V$$

Ángulo de los desplazamientos - En general, $\delta = \frac{\partial T}{\partial P}$



$$\int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H_1} \cdot d\phi$$

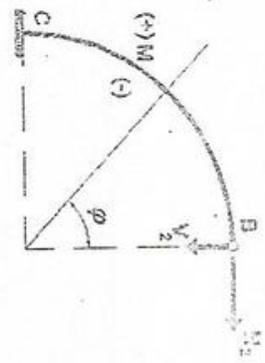
$$\int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V_1} \cdot d\phi$$

$$\int_0^{\pi/2} [H_1 \cos^2 \phi - V_1 (1 - \sin \phi)] R (1 - \sin \phi) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial H_1} = R \cos \phi \quad \frac{\partial M}{\partial V_1} = R (1 - \sin \phi) \dots \dots \dots (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} [H_1 \cos^2 \phi - V_1 (1 - \sin \phi) \cos \phi] \cdot d\phi = \frac{R^3}{2EI} \left[\frac{\pi}{2} H_1 - V_1 \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} [H_1 \cos^2 \phi (1 - \sin \phi) + V_1 (1 - \sin \phi)^2] \cdot d\phi$$

$$\int_0^{\pi/2} [H_1 \cos^2 \phi - V_1 \cos \phi] \cdot d\phi \dots \dots \dots (2)$$



$$H_2 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial H_2} \cdot d\phi$$

$$V_2 = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial V_2} \cdot d\phi$$

$$M = -H_2 R(1 - \cos \phi) - V_2 R \sin \phi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial H_2} = -R(1 - \cos \phi) \quad \frac{\partial M}{\partial V_2} = -R \sin \phi$$

$$H_2 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [H_2(1 - \cos \phi)^2 + V_2 \sin \phi(1 - \cos \phi)] \cdot d\phi$$

$$= \frac{R^3}{2EI} \left[\left(\frac{3\pi}{2} - 4 \right) H_2 + V_2 \right] \dots\dots\dots (3)$$

$$V_2 = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} [H_2 \sin \phi(1 - \cos \phi) + V_2 \sin^2 \phi] \cdot d\phi = \frac{R^3}{2EI} \left[H_2 + \frac{\pi}{2} V_2 \right] \dots\dots\dots (4)$$

Reemplazando los valores de \$H_2\$ y \$V_2\$ en las ecuaciones (3) y (4), obtenemos:

$$1) \quad \frac{\pi}{2} H_2 - V_2 = \left(\frac{3}{2} \pi - 4 \right) (H_2 - H_1) + (V_2 - V_1) \rightarrow H_2 = \frac{(3\pi - 2)H_1 - 2V_1}{4(\pi - 2)}$$

$$2) \quad \left(\frac{3\pi}{2} - 4 \right) (H_2 - H_1) + (V_2 - V_1) = \frac{\pi}{2} (V_2 - V_1) \rightarrow V_2 = \frac{8H_1 + \pi V_1}{4(\pi - 2)}$$

Llevando estos resultados a (1) y (2), obtenemos:

$$H = \frac{R^3}{16EI} \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2} \cdot H$$

$$V = \frac{R^3}{16EI} \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{\pi - 2} \cdot V$$

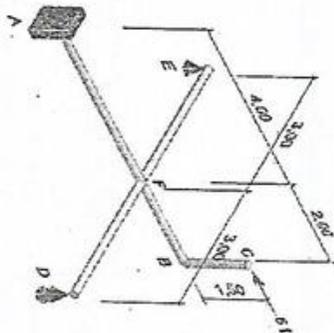
$$\frac{H}{V} = \frac{H}{V}$$

Lo que quiere decir que, en general, el desplazamiento lateral tiene la misma dirección que \$F_1\$. En el caso particular propuesto: \$H=0\$, \$V=0\$ (carga horizontal orientada), luego:

$$\begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} = \frac{PR^3}{16EI} \begin{bmatrix} 3\pi^2 - 8\pi - 4 \\ \pi - 2 \end{bmatrix}$$

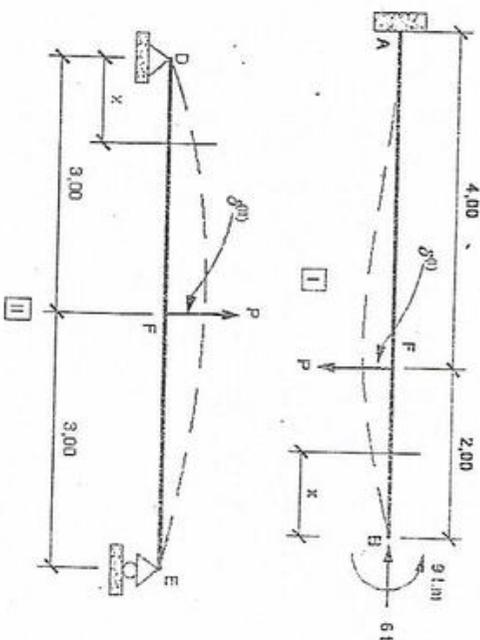
$$[P=0]$$

PROBLEMA IV.13. (UNI, FIC FEB - 1968)



La pieza ABC (sobre un plano vertical) está empotrada en A y descansa sobre la viga DE, la cual está articulada en E y simplemente apoyada en D, sobre un plano horizontal. Las partes AB y DE están en un mismo plano horizontal, y forman entre sí ángulo de 90° . Para ambas $EI = 400 \text{ cm}^2$. Considerando sólo los efectos de la flexión, resolver este sistema estructural.

El sistema dado se puede analizar según los dos esquemas siguientes:



Establezcamos la ecuación de condición:

$$\delta^{(I)} + \delta^{(II)} = 0 \dots (1)$$

2

En (I): Para $0 \leq x \leq 2$, $M = +9 \rightarrow \partial M / \partial P = 0$

En (II): Para $2 \leq x \leq 6$, $M = +9 - P(x-2) \rightarrow \partial M / \partial P = -(x-2)$

Según el Teorema de Castigliano:

$$\delta = \partial T / \partial P = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds$$

En este caso:

$$\delta^{(I)} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (+9)(0) dx + \int_2^6 [9 - P(x-2)] [-(x-2)] dx \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} P(x-2)^3 - \frac{9}{2} (x-2)^2 \right]_2^6$$

Por lo tanto:

$$\delta^{(I)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} P - 72 \right) \dots (2)$$

En (II): $0 \leq x \leq 3$, $M = -\frac{P}{2}x \rightarrow \partial M / \partial P = -\frac{x}{2}$

Por simetría, en este caso:

$$\delta^{(II)} = \frac{1}{EI} \int_0^3 \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{P}{2}x \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx = \frac{P}{2EI} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3$$

Por lo tanto:

$$\delta^{(II)} = \frac{9P}{2EI} \dots (3)$$

Despejando (2) y (3) en (1):

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} P - 72 \right) + \frac{9P}{2EI} = 0$$

$$P = \frac{135}{133} = 2.79$$

$$P = 2.79 \text{ kN}$$

Los expresiones de los momentos flectores son:

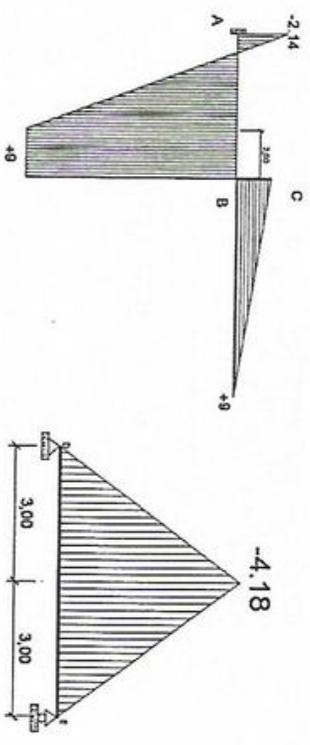
$$M^{(I)} = 9 \text{ (Válida para } 0 \leq x \leq 2)$$

$$M^{(II)} = 9 - 2.79(x-2) = 14.58 - 2.79x \text{ (Válida para } 2 \leq x \leq 6)$$

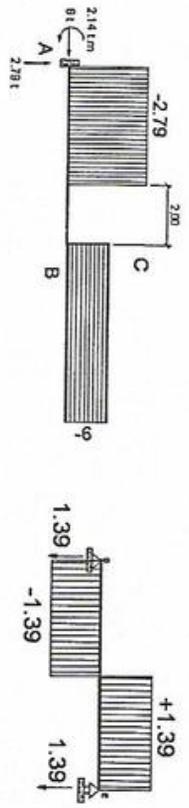
Para $x = 6, M^{(I)} = -2.14 \text{ tm}$
 $M^{(II)} = -1.39x$ (Válida para $0 \leq x \leq 3$)

Para $x = 3, M^{(II)} = -4.18 \text{ tm}$

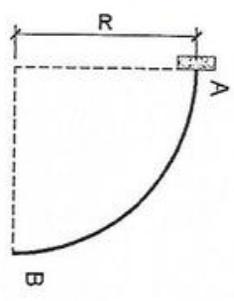
MOMENTOS FLECTORES



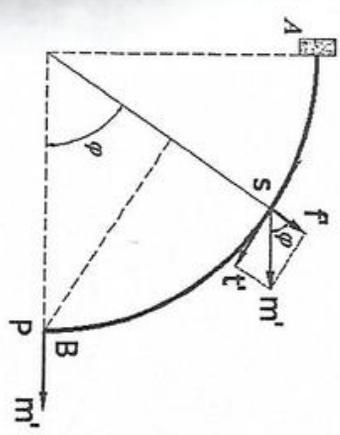
ESFUERZOS CORTANTES Y REACCIONES EN LOS APOYOS



PROBLEMA IV. 14. (UNI, FIG. 23 MAY - 1968)



La barra AB está sobre un plano horizontal y ocupa un cuadrante de radio R. En B hay aplicada una fuerza vertical P. Determinar la componente vertical de la deflexión, así como la deformación angular en el plano vertical tangente a la barra en el extremo B.



Consideramos un par ficticio m' perpendicular al plano tangente en el extremo B. De acuerdo con el Teorema de Castigliano, aplicando el sistema indicado tendremos:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial m'} \right)_{m'=0} = \delta_B \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial m'} \right)_{m'=0} = \theta_B$$

Como δ_B y θ_B son deformaciones solicitadas. En el caso que se estudia, para una sección cualquiera ψ' , definida por el ángulo ϕ , hay flexión y torsión; así:

$$\delta_B = R \sin \phi - m' \cos \phi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -R \sin \phi \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial m'} = -\cos \phi$$

$$M_I = PR(1 - \cos \phi) + m' \operatorname{sen} \phi \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = R(1 - \cos \phi) \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial m'} = \operatorname{sen} \phi$$

La expresión de trabajo es: $T = T_{\text{flexión}} + T_{\text{torsión}}$

$$T = \int \frac{M^2}{2EI} \cdot ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_0} \cdot ds$$

De la que, derivando:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{m'=0} = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds \Big|_{m'=0} + \int \frac{M_t}{GI_0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} \cdot ds \Big|_{m'=0}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial m'} \right)_{m'=0} = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial m'} \cdot ds \Big|_{m'=0} + \int \frac{M_t}{GI_0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial m'} \cdot ds \Big|_{m'=0}$$

En nuestro caso:

$$\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{EI} \int (-PR \operatorname{sen} \phi)(-R \operatorname{sen} \phi) \cdot d\phi = \frac{\pi}{4} \frac{PR^3}{GI_0}$$

$$\int \frac{M_t}{GI_0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} \cdot ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{GI_0} \int [PR(1 - \cos \phi)][R(1 - \cos \phi)] \cdot d\phi = \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) \cdot \frac{PR^3}{GI_0}$$

$$\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial m'} \cdot ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} (-PR \operatorname{sen} \phi)(-\cos \phi) \cdot d\phi = \frac{PR^2}{2EI}$$

$$\int \frac{M_t}{GI_0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial m'} \cdot ds \Big|_{m'=0} = \frac{R}{GI_0} \int_0^{\pi/2} [PR(1 - \cos \phi)](\operatorname{sen} \phi) \cdot d\phi = \frac{PR^2}{2GI_0}$$

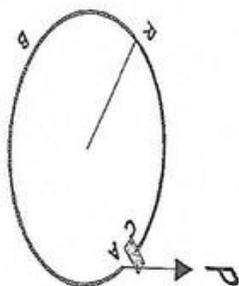
Las que llevando a las igualdades anteriores, y haciendo $\frac{EI}{GI_0} = \epsilon$,

Obtenemos:

$$\delta_B = \frac{PR^3}{EI} \left[\frac{\pi}{4} + \epsilon \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) \right]$$

$$\theta_B = \frac{PR^2}{2EI} (1 + \epsilon)$$

PROBLEMA IV.15.



El anillo ABC, de radio medio R, es de sección constante, está perfectamente empotrado en C y gira en A (considérese que es un anillo total); en el extremo A hay aplicada una fuerza P perpendicular al plano del anillo. Determinar el desplazamiento de A en la dirección P.

Indicación:

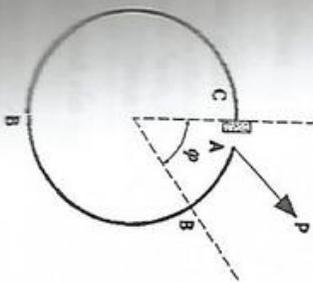
Se empieza con el Teorema de Castigliano el desplazamiento pedido es:

$$\delta_A = \frac{\partial T}{\partial P}$$

Entonces $T = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_0} ds$; o sea que:

$$\delta_A = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds + \int \frac{M_t}{GI_0} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} \cdot ds \right]$$

Para la sección genérica S ubicada por el parámetro ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$):



$$M = -PR \operatorname{sen} \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -R \operatorname{sen} \varphi$$

$$M_i = -P \cdot (R - R \cos \varphi) = PR(1 - \cos \varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_i}{\partial P} = R(1 - \cos \varphi)$$

Luego, reemplazando:

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi} (-PR \operatorname{sen} \varphi)(-R \operatorname{sen} \varphi) R d\varphi + \frac{1}{GI_0} \int_0^{2\pi} [PR(1 - \cos \varphi)] [R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi$$

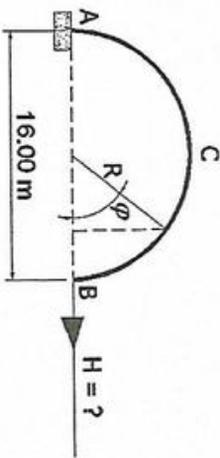
$$\delta_A = \pi \left(\frac{1}{EI} + \frac{3}{GI_0} \right) PR^3$$

Si la sección transversal del anillo fuera circular: $I = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi r^4}{4}$ siendo r el radio de la sección.

Reemplazando tendríamos:

$$\delta_A = \frac{P}{r^4} \left(\frac{2}{E} + \frac{3}{G} \right) PR^3$$

PROBLEMA IV. 16. (FIUC, 24 NOV - 1956)



Un arco semicircular AB, empotrado en A, y libre en B, tiene 16 m de luz, la que coincide con el diámetro, que es horizontal. El arco es de sección rectangular, con módulo de sección $S=120 \text{ cm}^2$, momento de inercia $I = 480 \text{ cm}^4$ y módulo de elasticidad $E=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Determinar: a) ¿Qué fuerza debe aplicarse horizontalmente en B, para aumentar la luz en 14 cm? b) ¿Cuál es la sección más castigada? c) ¿Cuál es el máximo esfuerzo unitario engendrado en el arco por esta fuerza y cuál es su signo (compresión o tracción)?

El desplazamiento horizontal del tramo B (en la dirección de la fuerza incógnita H), según el Teorema de Castigliano, es:

$$\delta_H = \frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left[\int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \frac{1}{EI} \int_B^A M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds$$

En la que:

$$M = H \cdot R \operatorname{sen} \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial H} = R \operatorname{sen} \varphi$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Entonces:

$$\delta_H = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (HR \operatorname{sen} \varphi)(R \operatorname{sen} \varphi)(R d\varphi) = \frac{\pi H R^3}{2EI}$$

Entonces:

$$H = \frac{2EI}{\pi R^3} \cdot 2(2 \times 10^6)(480)(14) = 16.7 \quad \text{Por lo tanto} \quad \boxed{H = 16.7 \text{ kg} \rightarrow}$$

El momento $M = HR \operatorname{sen} \varphi$ tiene un máximo para $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$M_{\text{máx}} = HR = (16.7)(800) = 13,360 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

La sección más castigada es, pues, la C, con el momento de 13,360 kg.cm que produce tracción en la fibra interior.

En la fibra exterior las máximas tensiones unitarias ocurren en C:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{M_{\text{máx}}}{S} = \frac{13,360}{120} = \pm 111.3 \text{ kg/cm}^2$$

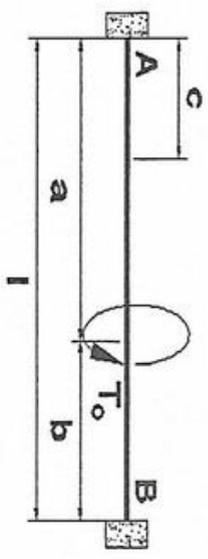
La fuerza $H = 16.7 \text{ kg}$ produce en C tensiones unitarias de tracción:

$$\sigma = \frac{H}{r} = \frac{16.7}{90} = -0.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } S &= \frac{1}{6} ab^2 = 120 \text{ cm}^3 \\ I &= \frac{1}{12} ab^3 = 480 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} \text{Por lo tanto } r = ab = 90 \text{ cm}^2$$

Luego, las tensiones finales son:
 $\sigma_1 = -0.2 + 111.3 = +111.1 \text{ kg/cm}^2$ (compresión)
 $\sigma_2 = -0.2 - 111.3 = -111.5 \text{ kg/cm}^2$ (tracción)

PROBLEMA IV. 17.



Sabiendo que un par T_0 aplicado (vectorialmente colineal con el eje de la viga) genera pares torsores reacciones en los empotramientos de valores inversamente proporcionales a sus distancias a los extremos, y con sentidos opuestos al par aplicado (ver demostración en el problema H-21), determinar la expresión del giro en una sección cualquiera, a distancia C de uno de los extremos. De acuerdo con el enunciado del problema, el par T_0 genera pares reacción en A y en B:

$$T_A' = -T_0 \frac{b}{l} \quad T_B' = -T_0 \frac{a}{l}$$

El giro de la sección genérica, ϕ_c , según el Teorema de Castigliano, es:

$$(i) \quad \dots \phi_c = \frac{\partial x}{\partial T'} \Big|_{T'=0} = \frac{\partial}{\partial T'} \int_A^B \frac{M^2}{2GI_0} dx = \frac{1}{GI_0} \int_A^B M \cdot \frac{\partial M}{\partial T'} dx \Big|_{T'=0}$$

Siendo T' un par ficticio, de valor igual a cero, aplicado en la sección genérica. Según el enunciado del problema, para los dos pares aplicados, el par torsor reacción T_A será:



$$T_A = -T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l}$$

Entonces las siguientes expresiones para los momentos torsores en las diversas secciones de la viga:

$$0 \leq x \leq c; \quad M_I = T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l} \rightarrow \frac{\partial M_I}{\partial T'} = -\frac{l-c}{l}$$

$$c \leq x \leq a; \quad M_I = -T_0 \frac{b}{l} - T' \frac{l-c}{l} + T'$$

$$= -T_0 \frac{b}{l} + T' \frac{c}{l} \rightarrow \frac{\partial M_I}{\partial T'} = +\frac{c}{l}$$

$$a \leq x \leq l; \quad M_I = -T_0 \frac{b}{l} + T' \frac{c}{l} + T_0$$

$$= T_0 \frac{a}{l} + T' \frac{c}{l} \rightarrow \frac{\partial M_I}{\partial T'} = +\frac{c}{l}$$

Reemplazando $T'=0$ en estas expresiones y reemplazando en (i):

$$\phi_c = \frac{1}{GI_0} \left\{ \int_0^c (-T_0 \frac{b}{l}) \left(-\frac{l-c}{l} \right) dx + \int_c^a (-T_0 \frac{b}{l}) \left(+\frac{c}{l} \right) dx + \int_a^l \left(\left(T_0 \frac{a}{l} \right) \left(+\frac{c}{l} \right) \right) dx \right\}$$

$$= \frac{T_0}{GI_0} \frac{1}{l^2} \{ b(l-c)c - bc(a-c) + ac(l-a) \}$$

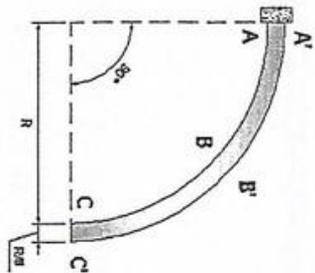
Entonces tenemos:

$$\phi_c = \frac{T_0}{GI_0} \cdot \frac{bc}{l}$$

El resultado es positivo; significa que el giro es del mismo sentido del par ficticio T' , tomado del sentido del par aplicado T_0 , es decir que ϕ_c es del mismo sentido del par aplicado T_0 .

PROBLEMA IV. 18. (UNL, 17-JUL-1970)

Una estructura plana de sección transversal constante y de radio medio R. Si a la estructura se la aplica en un plano horizontal, empujándola en A y cargándola en la línea A'B'C' (ver figura) por unidad lineal, encontrar el desplazamiento vertical del extremo libre C de la estructura las deformaciones por flexión, torsión y fuerza cortante. Supóngase conocidas las expresiones de la reacción y del material.

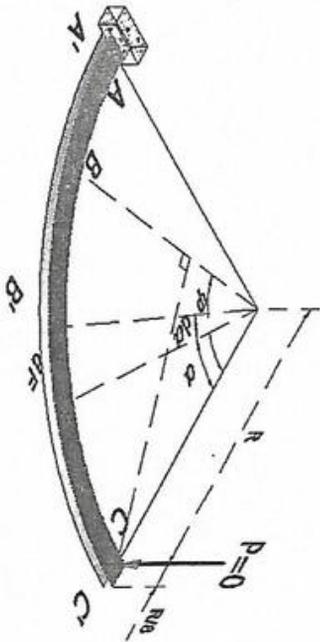


Considerando una carga concentrada $P=0$ en el extremo C con el que se puede determinar el desplazamiento, tenemos:

$$\delta_a = \frac{\partial \tau}{\partial P} \Big|_{P=0}$$

Como en este caso:

$$\tau = \int_C^A \frac{M^2}{2EI} ds + \mu \int_C^A \frac{Q^2}{2Gr} ds + \int_C^A \frac{M_t^2}{2GI_0} ds$$



Tendremos:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_C^A M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds + \frac{\mu}{Gr} \int_C^A Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_0} \int_C^A M_t \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} ds \Big|_P = 0 \dots (i)$$

En la que $ds = R \cdot d\phi$ Para la sección genérica ($S(0 \leq \phi \leq \pi/2)$)

$$M = P(R \operatorname{sen} \phi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\phi} (dF) \cdot \left(R + \frac{R}{8} \right) \operatorname{sen}(\phi - \alpha), \text{ siendo } dF = \omega \left(R + \frac{R}{8} \right) d\alpha$$

$$M = P R \operatorname{sen} \phi - \frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \phi) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -R \operatorname{sen} \phi$$

$$M \Big|_{P=0} = -\frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \phi)$$

$$M_t = P(R - R \cos \phi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\phi} (dF) \left[\left(R + \frac{R}{8} \right) \cos(\phi - \alpha) - R \right]$$

$$M_t = P R (1 - \cos \phi) - \frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \operatorname{sen} \phi - \phi \right) \rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial P} = R(1 - \cos \phi)$$

$$M_t \Big|_{P=0} = -\frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \operatorname{sen} \phi - \phi \right)$$

$$Q = P + \frac{9}{8} \omega R \phi \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial P} = 1$$

$$Q \Big|_{P=0} = \frac{9}{8} \omega R \phi$$

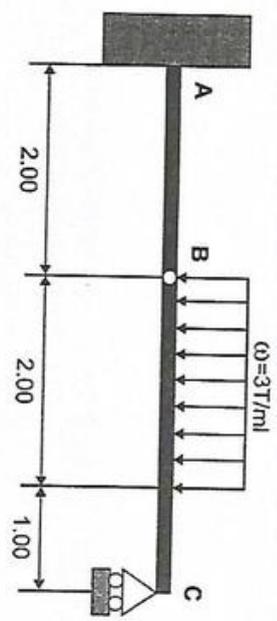
Completando estas expresiones en (i) tenemos:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{81}{64} \omega R^2 (1 - \cos \phi) \right] \left[-R \operatorname{sen} \phi \right] (R d\phi) + \frac{\mu}{Gr} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{9}{8} \omega R \phi \right] (1) (R d\phi)$$

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{9}{8} \omega R^2 \left(\frac{9}{8} \operatorname{sen} \phi - \phi \right) \right] \left[R(1 - \cos \phi) \right] (R d\phi)$$

$$\delta_c = \frac{81 \omega R^4}{128 EI} + \frac{9 \mu \omega R^2 \pi^2}{64 Gr} + \frac{9 \omega R}{128 GI_0} (7 + 2\pi - 8\pi)$$

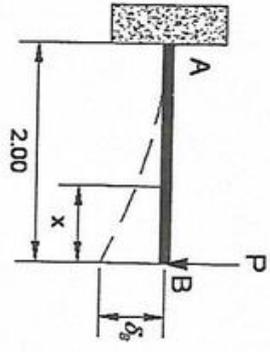
PROBLEMA IV. 19. (UNI, 10 JUL 1970)



Aplicando el Teorema de Castigliano, determinar la flecha en el punto B de la estructura mostrada. Considerar los efectos de flexión y corte.

$$I = 10\,000 \text{ cm}^4, \quad r = 100 \text{ cm}^2, \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad G = 0.84 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

La estructura es isostática. Para los efectos de calcular la deflexión de B, el problema se reduce a determinar la flecha en B de la viga en voladizo AB bajo la acción de la carga P, originada esta por la carga repartida; es decir:



$$P = (3t/m)(2m) \cdot \frac{2}{3} = 4t$$

Según el Teorema de Castigliano:

$$\delta_B = \frac{\partial \tau}{\partial P}$$

$$\text{Siendo } \tau = \int_B^A \frac{1}{2EI} M^2 dx + \mu \int_B^A \frac{1}{2Gr} Q^2 dx$$

Con que: $\delta_B = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=2} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx + \frac{\mu}{Gr} \int_{x=0}^{x=2} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} dx$

En esta expresión:

$$0 \leq x \leq 2m: \quad M = -Px \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$M = +P \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial P} = +1$$

Entonces, reemplazando:

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-Px)(-x) dx + \frac{\mu}{Gr} \int_0^2 (+P)(+1) dx = \frac{8P}{3EI} + \frac{2\mu P}{Gr}$$

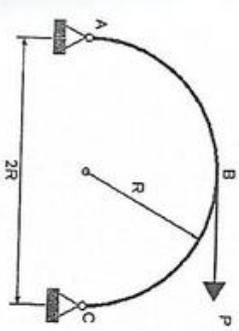
$$\delta_B = \left(\frac{2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2}{10000 \text{ cm}^2} \right) \left(10000 \text{ cm}^2 \right) = 2.1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 21000 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$\delta_B = \left(\frac{0.84 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2}{100 \text{ cm}^2} \right) \left(100 \text{ cm}^2 \right) = 84000 \text{ t}$$

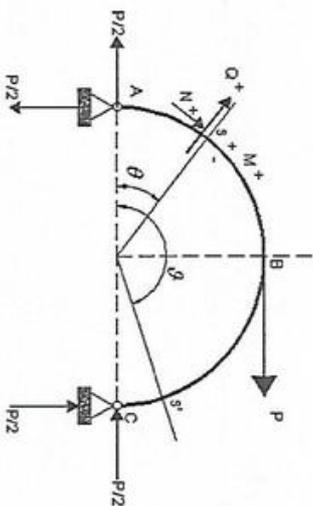
$$\delta_B = \frac{8 \times 4}{3 \times 2100} + \frac{2 \times 1 \times 4}{84000} = (5.079 + 0.095) \times 10^3 \text{ m}$$

$$\delta_B = 5.174 \times 10^3 \text{ m}$$

PROBLEMA IV. 20. UNI, 10-JUL-1970)



Por aplicación del Teorema de Castigliano, determinar el desplazamiento horizontal del punto B de la estructura plana mostrada. Características de la sección transversal (constante): I, r, H; características del material: E, G. Considerar todos los efectos existentes.



Por simetría del sistema, las componentes horizontales de las reacciones en A y C tienen que ser iguales entre sí, y sumadas contrarrestar la acción P aplicada en B. Aplicando conseguida la ecuación de equilibrio estático $\sum M = 0$, obtenemos las componentes verticales de las reacciones de apoyos tal como se indica:

El desplazamiento solicitado $\delta_{h,B}$ es, según el Teorema de Castigliano:

$$\delta_{h,B} = \frac{\partial \tau}{\partial P}$$

$$\text{Siendo: } \tau = \int_{(A)}^{(C)} \frac{M^2}{2EI} ds + \mu \int_{(A)}^{(C)} \frac{Q^2}{2GJ} ds + \int_{(A)}^{(C)} \frac{N^2}{2EJ} ds$$

En la figura se indican los sentidos positivos para la flexión, cortante y normal (para éstos dos últimos, considerando las fuerzas a la izquierda, o sea antes, de la sección).

O sea que:

$$\delta_{h,B} = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds + \frac{\mu}{GJ} \int_{(A)}^{(C)} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot ds + \frac{1}{EJ} \int_{(A)}^{(C)} N \cdot \frac{\partial N}{\partial P} \cdot ds \dots (1)$$

Para la sección genérica S tenemos:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}: M = +\frac{P}{2} \cdot R \operatorname{sen} \theta - \frac{P}{2} (R - R \cos \theta) = \frac{PR}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)$$

$$0 = +\frac{P}{2} \cos \theta - \frac{P}{2} \operatorname{sen} \theta = \frac{P}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$N = -\frac{P}{2} \operatorname{sen} \theta - \frac{P}{2} \cos \theta = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

De las que:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{1}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$\frac{\partial N}{\partial P} = -\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

$$M = \frac{PR}{2} : (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1) + P[R - R \cos(\theta - 90^\circ)]$$

$$= \frac{PR}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1)$$

$$Q = \frac{P}{2} (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) + P \cos(180^\circ - \theta) = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

$$N = -\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + P \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = +\frac{P}{2} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = -\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \quad \frac{\partial N}{\partial P} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

Reemplazando en (1) herán, reemplazando estas expresiones, siendo además, $ds = R \cdot d\theta$

$$\delta_{h,B} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)^2 \cdot \frac{R^2}{2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{2} (-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) \cdot \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{PR^3}{2} (\pi - 3)$$

$$\int_0^c \frac{\partial Q}{\partial P} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} (\cos \theta - \text{sen} \theta)^2 \cdot \frac{R}{2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{P}{2} (\text{sen} \theta + \cos \theta) \right] \left[-\frac{R}{2} \right] d\theta = \frac{PR}{4} (\pi - 2)$$

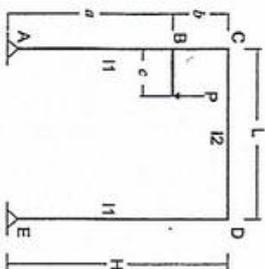
$$\int_0^c N \frac{\partial N}{\partial P} ds = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{P}{2} (\text{sen} \theta + \cos \theta)^2 \right] \left[-\frac{R}{2} \right] d\theta + \int_0^{\pi/2} \left[\frac{P}{2} (\text{sen} \theta - \cos \theta)^2 \right] \left[\frac{R}{2} \right] d\theta = \frac{PR}{4} (\pi + 2)$$

Reemplazando estos resultados en (1) tenemos:

$$\delta_{h,B} = \frac{PR^3}{2EI} (\pi - 3) + \frac{PR}{4GJ} (\pi - 2) + \frac{PR}{4EJ} (\pi + 2) \text{ el desplazamiento solicitado.}$$

PROBLEMA IV. 21. UNI, 10-JUL-1970)

Determinar las reacciones de la estructura aplicando el teorema de Castigliano



Datos:
I₂ = 1.5 I₁, a = 4m, b = 1.00 m, c = 0.50 m, H = 5.00m, L = 4.00 m, P = 50 t.

Solución:

- Sistema Hiperestático
- Reacción redundante : se tomará la componente horizontal en la base A la cual es la misma que para la base en E.

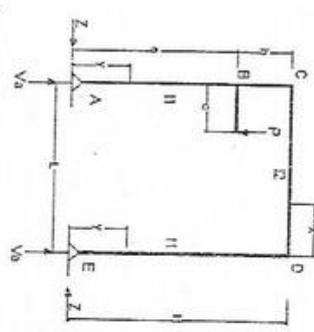
Como los apoyos no tienen desplazamiento y de acuerdo al Teorema de Castigliano deberá tenerse

que: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

Considerando únicamente los efectos de la flexión tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int \frac{M^2}{2EI} ds \right] = 0 \text{ entonces } \frac{1}{J} \int M \frac{\partial M}{\partial x} ds = 0 \dots\dots\dots (1)$$

FASE II. CALCULO DE REACCIONES.



$\delta_{h,A} = 0 \quad P c - V_e L = 0$ Luego $V_e = P c / L$ Luego $V_e = 50(0.50)/4$
(tenemos que $V_e = 6.25$ t.

$\delta_{h,E} = V_a + V_e - P$ entonces $V_a + V_e = 50$ Sabemos que $V_e = 6.25$ t
entonces luego $V_a = 50 - 6.25$ entonces $V_a = 43.75$ t.

FASE III. ESTABLECEMOS LAS EXPRESIONES DE MOMENTO PARA CADA TRAMO EN FUNCION DE LA REACCION REDUNDANTE.

En el tramo AB: $0 \leq y \leq a$

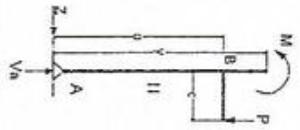


$M + Z_y = 0$

Entonces $M = -Z_y$ donde la expresión para la derivada parcial en función de Z es:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = -y$$

Tramo AB: $a \leq y \leq H$
 $\Sigma M = 0$



Tramo AB: $0 \leq z \leq H$
 $\Sigma M = 0$

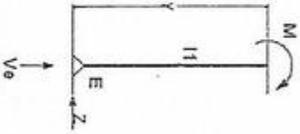
$$M + Zy - Pc = 0$$

$$M = Pc - Zy$$

La derivada parcial en función de Z es:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = -y$$

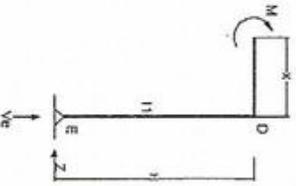
Tramo ED: $0 \leq y \leq H$
 $\Sigma M = 0$



$M + Zy = 0$
Donde $M = -Zy$
En derivada parcial en función de Z tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = -y$$

Tramo DC: $0 \leq y \leq L$
 $\Sigma M = 0$



$M - Ve x + ZH = 0$ donde $M = +Ve x - ZH$
En derivadas parciales en función de Z tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = -H$$

REEMPLAZAMOS LAS EXPRESIONES Halladas EN LA EXPRESION DE TEOREMA DE CASTIGLIANO PARA ESTE CASO

Reemplazando todas las expresiones en la ecuación (1) tenemos:

$$\int_0^H \int_0^a (-Zy)(-y)dy + \frac{1}{I_1} \int_0^H (Pc - Zy)(-y)dy + \frac{1}{I_1} \int_0^H (-Zy)(-y)dy + \frac{1}{I_2} \int_0^L (Ve x - ZH)(-H)dx = 0$$

Realizando la integración correspondiente tenemos:

$$\int_0^H \int_0^a Z y^2 dy + \frac{1}{3} \frac{I_2}{I_1} Z y^3 \Big|_0^a + \frac{1}{2} \frac{I_2}{I_1} P_c y^2 \Big|_0^H + \frac{1}{3} \frac{I_2}{I_1} Z y^3 \Big|_0^H + \int_0^L \frac{P_c H}{L} x^2 - x H^2 dx \Big|_0^L = 0$$

$$H^2 \left(\frac{2}{3} \frac{I_2}{I_1} H + L \right) = \frac{P_c}{2} \left[\frac{I_2}{I_1} (H^2 - a^2) + HL \right]$$

$$\text{Hallando } \alpha = \frac{a}{H} \quad \epsilon = \frac{L}{H} = \epsilon = \frac{I_2}{I_1} \frac{H}{L}$$

Entonces finalmente:

$$Z = \frac{3 P_c}{2 H} \frac{1 + \epsilon(1 - \alpha^2)}{2 \epsilon + 3}$$

Para el caso particular dado se tiene:

$$\epsilon = \frac{1.5L}{L} = \frac{5}{4} = 1.25 \quad \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

Entonces:

$$Z = \frac{3(50)(0.5)}{2(5)} \frac{1 + \frac{1.5}{8}(1 - 0.64)}{\frac{6.7}{8} + 3} = 1.86t$$

$$V_A = 50 \left(1 - \frac{0.5}{4} \right) = 50 \left(\frac{7}{8} \right) = 41.25t$$

$$V_B = 50 \left(\frac{0.5}{4} \right) = 50 \left(\frac{1}{8} \right) = 6.25t$$

$$Z = 1.86t \quad V_A = 41.25t \quad V_B = 6.25t$$

CAPITULO V

TEOREMA DE BETTI Y MAXWELL

NOTACION.

P_{m1}, P_n Sistemas de fuerzas que actúan separados e independientes de la estructura.

δ_{mn} Desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas P_n (en la dirección y sentido de esta fuerza) causada por la aplicación del sistema de fuerzas P_n .

δ_{nm} Desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas P_n (en la dirección y sentido de esta fuerza) causada por la aplicación del sistema de fuerzas P_m .

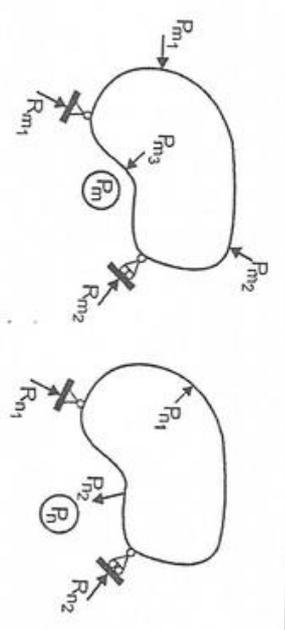
δ_{ab} Desplazamiento del punto "a" en la dirección α debido a una carga P_1 actuando en el punto "b" en la dirección β .

δ_{ba} Desplazamiento del punto "b" en la dirección β debido a una carga P_1 actuando en el punto "a" en la dirección α .

TEOREMA DE BETTI.

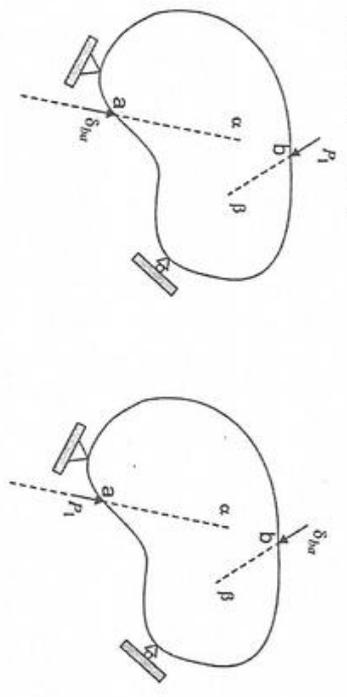
En cualquier estructura de material elástico, en apoyos indeformables y bajo temperatura constante, el trabajo virtual externo de las fuerzas del sistema P_n asociadas a los desplazamientos causados por el sistema de fuerzas P_n es igual al trabajo virtual externo de las fuerzas del sistema P_n asociadas a los desplazamientos causados por el sistema P_m :

$$\sum P_m \delta_{mn} = \sum P_n \delta_{nm} \dots\dots\dots (1.F)$$



TEOREMA DE MAXWELL DE LAS DEFORMACIONES RECÍPROCAS

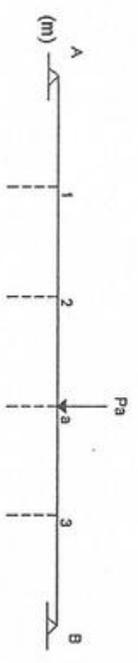
En cualquier estructura de material elástico, en apoyos indeformables y bajo temperatura constante, el desplazamiento de un punto "a" medida en una dirección α , causado por una fuerza P_1 que actúa en un punto "b" según la dirección β , causado por la fuerza P_1 actuando en la dirección α $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ (-2F)



PROBLEMA V.1.

En la los sistemas de carga mostrada se tienen los siguientes descensos:

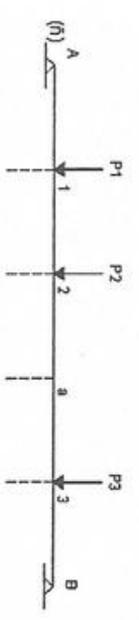
Sistema m.
Descenso Punto 1 = 4mm, punto 2= 10mm y punto 3 = 5mm, $P_a=2000$ kg



Sistema n.
Descenso Punto 1 = 3mm, punto 2= 8mm y punto 3 = 6mm, $MA=10$ t



Sistema n.
Calcular descenso Punto a deformación angular en A del sistema siguiente :



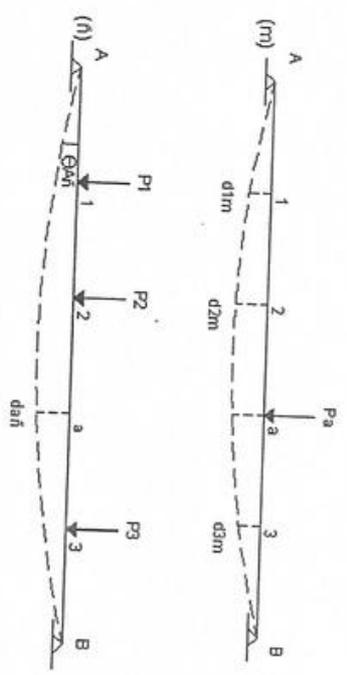
Solución

PASO 1.- APLICAMOS EL TEOREMA DE BETTI A LOS SISTEMAS m y n

De la fórmula general:

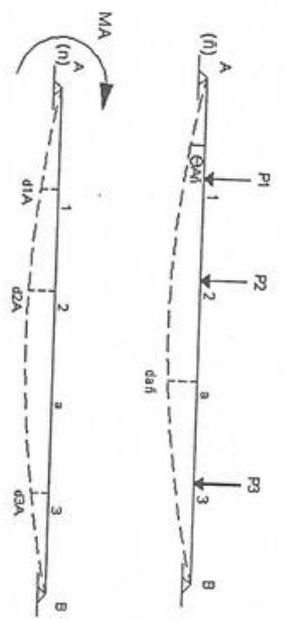
$$\sum P_n \delta_{nm} = \sum P_n \delta_{nm}$$

De la anterior expresión tenemos para los sistemas correspondientes:



$$P_a \delta_{a1} = P_1 \delta_{1a} + P_2 \delta_{2a} + P_3 \delta_{3a} \dots \dots \dots (1)$$

y para los sistemas siguientes tenemos :

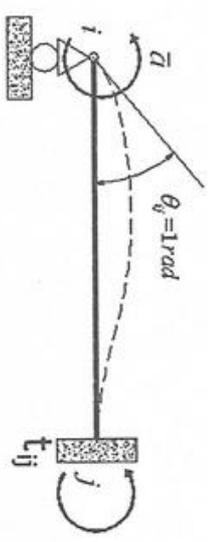


$$M_a \theta_{a1} = P_1 \delta_{1A} + P_2 \delta_{2A} + P_3 \delta_{3A} \dots \dots \dots (2)$$

Reemplazamos los valores datos del problema así tenemos:

- En (1) $2000 \delta_{a1} = 2500(4) + 1100(10) + 1200(5)$ en kg y mm
- $\delta_{a1} = 13.5 \text{ mm}$
- En (2) $1E + 07 (\theta_{a1}) = 2500(3) + 1100(8) + 1200(6)$
- $\theta_{a1} = 0.00235 \text{ rad}$

PROBLEMA V.2. (UNI, 21-OCT-1968)

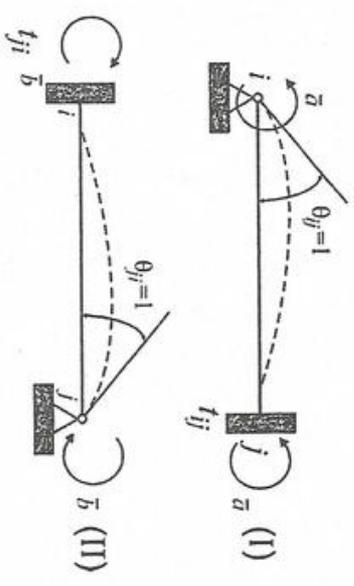


El elemento de sección variable está empotrado en j y simplemente apoyado en i; en el extremo i se aplica un par \bar{a} que produce una rotación unitaria en i; el momento que así, se genera en j es t_{ji} .

Alternativamente, si i está empotrado y j simplemente apoyado, en el extremo j se aplica un par \bar{b} que produce una rotación unitaria en ese extremo, y en el extremo i se genera un momento igual a t_{ij} .

Determinar la relación que existe entre los factores $\bar{a}, \bar{b}, t_{ij}, t_{ji}$.

De acuerdo con el enunciado del problema se tienen los dos siguientes estados de cargas y deformaciones:



Según el Teorema de Betti, aplicamos la expresión (1.F) a los sistemas I y II:

(Fuerzas del Sistema (I)) x (Deformaciones del sistema (II)) = (Fuerzas del sistema (II)) x (Deformaciones del sistema (I))

Es decir:

$$(a)(0) + (t_{ij} \bar{a})(1) = (t_{ij} \bar{b})(1) + (\bar{b})(0)$$

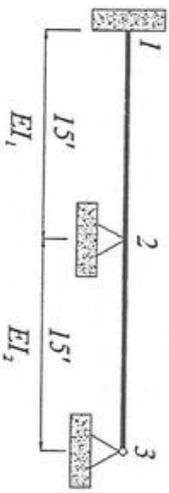
De donde: $t_{ij} \bar{a} = t_{ji} \bar{b}$

$$\frac{\bar{a}}{b} = \frac{t_{ji}}{t_{ij}}$$

O también:

Es la relación solicitada.

PROBLEMA V.3. (UNI, 17-FEB-1968)



En la viga que se muestra:

a) Si el empotramiento gira 0.005 (en el sentido horario) radianes y el apoyo 2 desciende 0.0208 pies, se generan las siguientes reacciones en los apoyos:

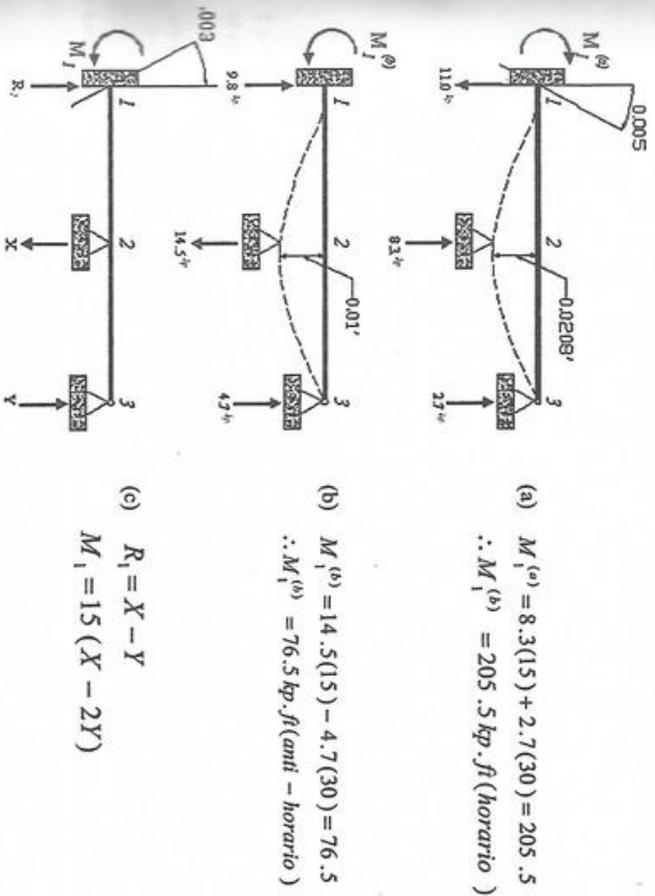
$$R_1 = 11.0 \downarrow kps \quad R_2 = 8.3 \uparrow kps \quad R_3 = 2.7 \uparrow kps$$

b) Si únicamente se asienta el apoyo e 0.01 ft, se generan las siguientes reacciones

$$R_1 = 9.8 \uparrow kps \quad R_2 = 14.5 \downarrow kps \quad R_3 = 2.7 \uparrow kps$$

Se pide resolver la estructura para cuando el empotramiento gira 0.003 (antihorario) radianes.

De acuerdo con el enunciado se tienen los siguientes estados de cargas y deformaciones:



(a) $M_1^{(a)} = 8.3(15) + 2.7(30) = 205.5$
 $\therefore M_1^{(b)} = 205.5 \text{ kp} \cdot \text{ft} \text{ (horario)}$

(b) $M_1^{(b)} = 14.5(15) - 4.7(30) = 76.5$
 $\therefore M_1^{(c)} = 76.5 \text{ kp} \cdot \text{ft} \text{ (anti - horario)}$

(c) $R_1 = X - Y$
 $M_1 = 15(X - 2Y)$

1) Aplicando el Teorema de Betti a los sistemas a y c:

$$(M_1)(0.005) + (X)(0.0208) + (Y)(0) = (M_1^{(c)})(0.003) + (8.3)(0) + (2.7)(0)$$

$$-15(x - 24)(0.005) + 0.0208 \cdot x = -205.5(0.003)$$

$$-0.0542X + 0.15Y = -0.6165 \dots\dots\dots(1)$$

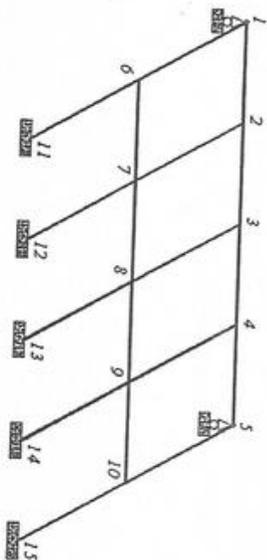
2) Aplicando a los sistemas (b) y (c):

$$(M_1)(0) + (X)(0.01) + (Y)(0) + (R_1)(0) = (M_1^{(c)})(0.003) + (9.8)(0) + 0.01X = 76.5(0.003) \longrightarrow \therefore X = 22.95 \text{ kp} \downarrow$$

Luego, de (1):
 $-0.0542(22.95) + 0.15Y = -0.6165 \longrightarrow \therefore Y = 4.18 \text{ kp} \uparrow$

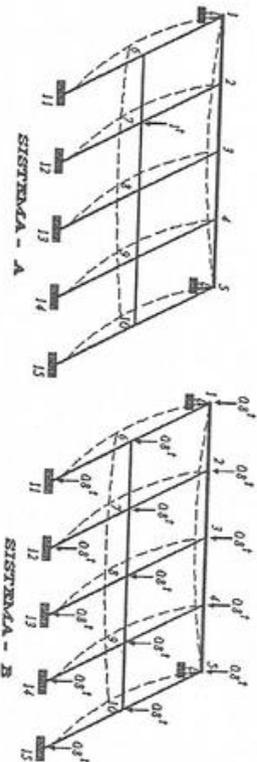
Por consiguiente:
 $R_1 = 22.95 - 4.18 = 18.77 \therefore R_1 = 18.77 \text{ kp} \uparrow$
 $M_1 = 15(22.95 - 2 \times 4.18) \therefore M_1 = 218.85 \text{ kp} \text{ (antihorario)}$

PROBLEMA V.4. (UNI, 15 - OCT - 1969)



En el esquema se muestra un conjunto de vigas cruzadas elásticas, en un plano horizontal; en 1 a 5 hay apoyos simples, y en 11,12,..., 15 empotramientos perfectos. Una carga de 1t. concentrada en 7 produce las siguientes deflexiones: 3mm en los nudos 2,4 y 10; 4mm en 3, 6 y 9; 5mm en 7; y 6mm en 8. ¿Cuál es la deflexión de nudo en 7 debido a una carga total de 12 t. dividida en partes iguales entre los 15 nudos?

La carga de 12 t dividida entre los 15 nudos, aplica 0.8t por nudo. Se tienen los dos siguientes estados de carga y deflexiones a los que aplicamos el Teorema de Betti, expresión (1.F)



$$\sum P_n \delta_{nm} = (1^t) (\delta_{7b}^1) = \delta_{7b}^1 \text{ en } t.mm$$

$$\sum P_n \delta_{nm} = 0.8(\delta_{2a}^1) + 0.8(\delta_{3a}^1) + 0.8(\delta_{4a}^1) + 0.8(\delta_{6a}^1) + 0.8(\delta_{7a}^1) + 0.8(\delta_{8a}^1) + 0.8(\delta_{9a}^1) + 0.8(\delta_{10a}^1) +$$

Donde:

$$\delta_{2a} = \delta_{4a} = \delta_{10a} = 3mm \quad \delta_{7a} = 5mm$$

$$\delta_{3a} = \delta_{6a} = \delta_{9a} = 4mm \quad \delta_{8a} = 6mm$$

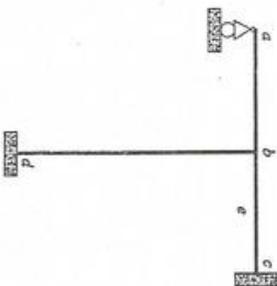
O sea que:

$$\sum P_n \delta_{nm} = 0.8 [3(3mm) + 3(4mm) + 1(5mm) + 1(6mm)] = 25.6 t \cdot mm$$

Luego, igualando: $\delta_{7b}^1 = 25.6$

$$\delta_{7b} = 25.6 mm \downarrow$$

PROBLEMA V.5.



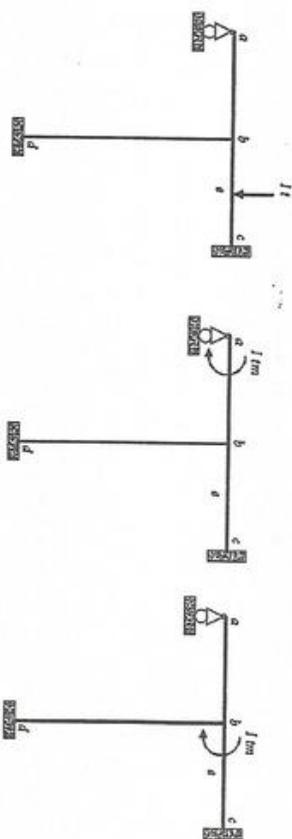
La estructura que se muestra está sujeta separadamente a las siguientes acciones:

1. Una fuerza unitaria descendiente en "e".
2. Un par unitario horario en el extremo "a".
3. Un par unitario horario en el nudo "b".

Indicar cuál de las siguientes igualdades son correctas:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| (a) $\theta_{b2} = \theta_{a3}$ | (e) $\theta_{c2} = \theta_{a1}$ |
| (b) $\delta_{a1} = \theta_{e2}$ | (f) $\theta_{b1} = \delta_{e3}$ |
| (c) $\theta_{a2} = \theta_{b3}$ | (g) $\delta_{e1} = \theta_{a3}$ |
| (d) $\delta_{e2} = \delta_{a3}$ | (h) $\delta_{e2} = \theta_{a1}$ |

Los estados de carga enunciados son:



Aplicando en todos los casos el Teorema de Maxwell de reciprocidad de las deformaciones, expresión (2.F), tenemos:

- (a) Aplicando los estados de carga (2) y (3):
 $(1r m)(\theta_{a3}) = (1r m)(\theta_{b2}) \quad \therefore \theta_{b2} = \theta_{a3}$
- (b) Entre los estados (1) y (2): se constata que es incorrecta la igualdad dada.
- (c) Entre los estados (2) y (3) se observa que la igualdad considerada es incorrecta.
- (d) Entre los estados (2) y (3), la igualdad considerada es incorrecta.
- (e) Entre los estados (2) y (1), la igualdad es incorrecta.
- (f) Entre los estados (1) y (3):
 $(1r m)(\delta_{a3}) = (1r m)(\theta_{b1}) \quad \therefore \theta_{b1} = \delta_{a3}$
- (g) Entre los estados (1) y (3), la igualdad es incorrecta.
- (h) Entre los estados (2) y (1):
 $(1r m)(\theta_{a1}) = (1r m)(\delta_{a2}) \quad \therefore \delta_{a2} = \theta_{a1}$

Por consiguiente, las únicas igualdades correctas son las (a), (f) y (h).

CAPÍTULO VI MÉTODO DE LAS FUERZAS

OBJETO: La solución de estructuras hiperestáticas, constituyendo fuerzas las incógnitas básicas. Con el término fuerzas estamos indicando, en general, a sollicitaciones exteriores o interiores; es decir, externamente fuerzas o pares reacción, e internamente fuerzas (cortante, normal), momentos flectores y momentos torsores. A las incógnitas básicas también las denominaremos incógnitas hiperestáticas o redundantes.

NOTACION:

X_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) Incógnitas redundantes

δ_{ij} Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de esta fuerza, desplazamiento debido a la fuerza $X_j = 1$. El primer subíndice indica siempre el lugar donde se mide el desplazamiento o giro, y el segundo individualiza la causa que lo origina (fuerza o par). Según el Teorema de reciprocidad de Maxwell: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

δ_{ij} X_j Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de esta fuerza, desplazamiento debido a la fuerza incógnita X_j

δ_{io} Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza X_i en la dirección de esta fuerza, desplazamiento debido al conjunto de cargas reales exteriores.

δ_{it} El mismo desplazamiento debido a la acción de la temperatura.

δ_{ia} El mismo desplazamiento debido al asentamiento del apoyo a.

S_0 Sollicitación en general (momento, cortante, normal, reacción) en el sistema principal.

S_i Sollicitación en el estado auxiliar i , es decir cuando la estructura isostática, desprovista

de las cargas reales, solo actúa la fuerza unitaria $X_i = 1$

S Sollicitación de la estructura hiperestática.

METODO

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura.
- 2) Escoger las incógnitas redundantes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ (pares y/o fuerzas).
- 3) Isostatar la estructura, para lo cual se anularán las incógnitas escogidas como redundantes. Así se tendrá el sistema principal o isostatizado.

4) Establecer los estados o modelos auxiliares, aplicando a la estructura isostatizada, primero el conjunto de cargas reales y enseguida, desprovista de las cargas reales, separadamente, las fuerzas unitarias $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots, X_n = 1, X_{n+1} = 1, \dots, X_n = 1$.
Cada uno de estos modelos origina las expresiones, o valores, o diagramas de solicitaciones. $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n$ (los que pueden ser momentos flectores, fuerzas cortantes, etc.)

5) Calcular las deformaciones $\delta_{w_0}, \delta_{w_i}, \delta_{w_n}$, etc. Estas deformaciones, son, por ejemplo según el método de los trabajos virtuales, teniendo en cuenta únicamente los efectos de la flexión:

$$\delta_{w_0} = \int \frac{m_i M_0}{EI} ds ; \quad \delta_{w_j} = \int \frac{m_i m_j}{EI} ds ; \quad \delta_{w_n} = \int \frac{m_i^2}{EI} ds$$

Ó, teniendo en cuenta solamente las fuerzas normales (caso de estructuras de barras):

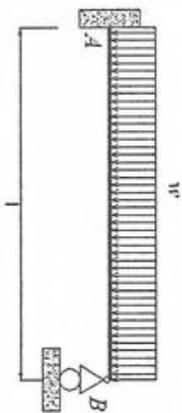
$$\delta_{w_0} = \sum \frac{S_i S_0 l}{E\Omega} \quad \delta_{w_j} = \sum \frac{S_i S_j l}{E\Omega} \quad \delta_{w_n} = \sum \frac{S_i^2 l}{E\Omega}$$

6) Plantear las ecuaciones de compatibilidad (también llamadas ecuaciones de elasticidad o de Mohr), teniendo en cuenta que las estructura hiperestática dada es la superposición de la isostatizada con el conjunto de cargas reales, más, separadamente, la isostatizada con cada una de las redundantes.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1i} X_i + \dots + \delta_{1n} X_n + \delta_{10} + \delta_{1r} + \delta_{1a} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2i} X_i + \dots + \delta_{2n} X_n + \delta_{20} + \delta_{2r} + \delta_{2a} &= 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \dots + \delta_{3i} X_i + \dots + \delta_{3n} X_n + \delta_{30} + \delta_{3r} + \delta_{3a} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \delta_{i0} + \delta_{ir} + \delta_{ia} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{ni} X_i + \dots + \delta_{nn} X_n + \delta_{n0} + \delta_{nr} + \delta_{na} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.G)$$

- 7) Resolviendo el sistema de ecuaciones de compatibilidad, se obtendrá los valores para las incógnitas redundantes X_1, X_2, \dots, X_n
- 8) Calcular los esfuerzos o solicitaciones finales:
$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \dots + S_n X_n \quad (2.G)$$

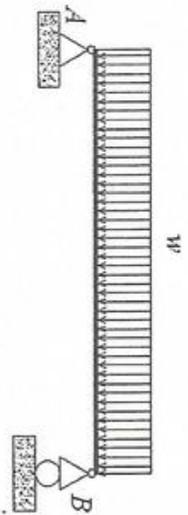
PROBLEMA VII.



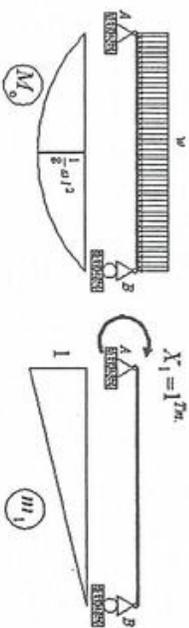
Resolver la viga empotrada y apoyada que se muestra, siendo EI constante.

solución:

- 1) Es una estructura hiperestática de primer grado.
- 2) Escogemos como incógnita redundante el momento en el empotramiento: $M_1 = X_1$
- 3) La estructura se isostatiza transformando el empotramiento en apoyo articulado fijo; es decir haciendo $X_1 = 0$



4) Los modelos auxiliares, y los correspondientes diagramas de momentos flectores son:



- 5) Cálculo de las deformaciones δ : Haciendo uso de la tabla II (Hoja C-3), combinando primero los diagramas M_0 y m_1 , y enseguida el diagrama m_1 con el mismo, podemos escribir:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int m_1 M_0 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (1) \left(\frac{1}{8} \omega l^2 \right) l \right] = \frac{\omega l^2}{24 EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int m_1^2 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (1) (1) l \right] = \frac{l}{3 EI} \quad (i)$$

- 6) La ecuación de compatibilidad está basada en que la deformación de la estructura real (la hiperestática dada) en la dirección de la incógnita X_1 , es nula; o sea que:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

Reemplazando los valores (i) se tiene la ecuación:

$$\frac{l}{3EI} X_1 + \frac{\omega l^2}{24EI} = 0 \text{ de la que: } X_1 = -\frac{\omega l^2}{8} \quad \curvearrowright$$

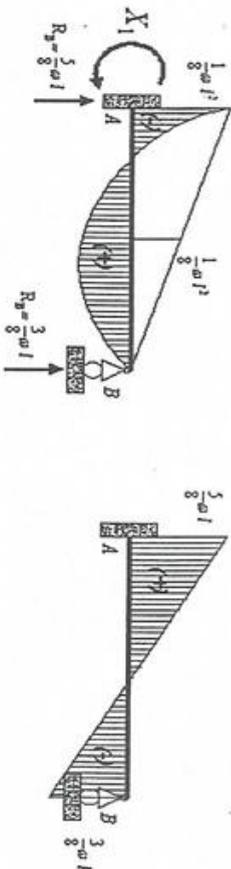
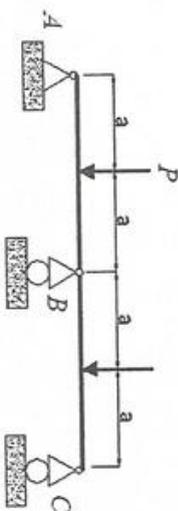


Diagrama de momentos flectores

Diagrama de fuerzas cortantes

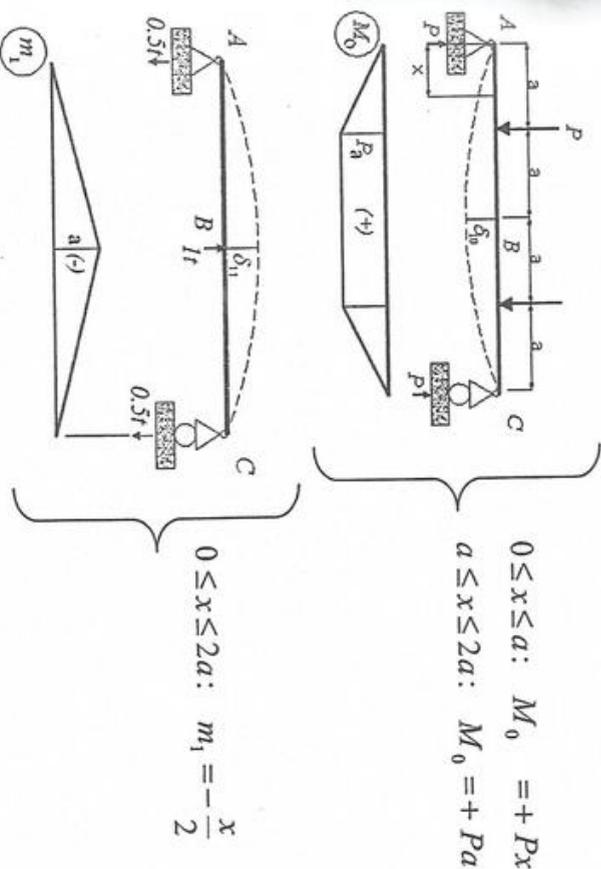
PROBLEMA VI.2.



Resolver la viga de sección constante que se muestra.

Solución:

Es hiperestática de primer grado. Consideramos como incógnita redundante la reacción en B: $R_B = X_1$. Isostatizamos la estructura eliminando el apoyo B, y tendremos:



$$0 \leq x \leq a: M_0 = +Px$$

$$a \leq x \leq 2a: M_0 = +Pa$$

$$0 \leq x \leq 2a: m_1 = -\frac{x}{2}$$

La ecuación de estabilidad es: $\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$ O sea que:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \dots (i)$$

Determinamos δ_{10} y δ_{11} por trabajos virtuales.

$$\delta_{10} = \int \frac{m_1 M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left\{ \int_0^a (+Px) \left(\frac{-x}{2} \right) dx + \int_a^{2a} (+Pa) \left(\frac{-x}{2} \right) dx \right\} = -\frac{11Pa^3}{6EI}$$

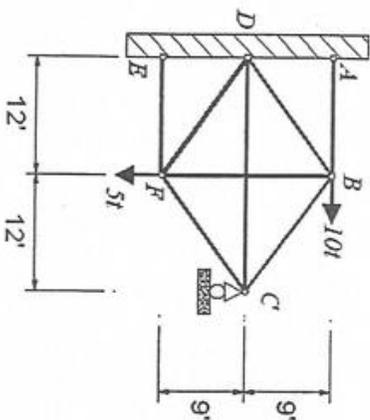
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left\{ \int_0^a \left(\frac{-x}{2} \right)^2 dx + \int_a^{2a} \frac{4a^3}{3EI} \right\} = +\frac{4a^3}{3EI}$$

Que reemplazando en la expresión (1), da:

$$X_1 = \frac{-\frac{11Pa^3}{6EI}}{\frac{4a^3}{3EI} + \frac{11}{8}} P \quad \therefore \quad X_1 = +\frac{11}{8} P \quad \uparrow$$

El resultado positivo indica que la reacción incógnita X_1 tiene el mismo sentido de la fuerza unitaria considerada.

PROBLEMA VI.3. (UNI, 23-SET-1968)



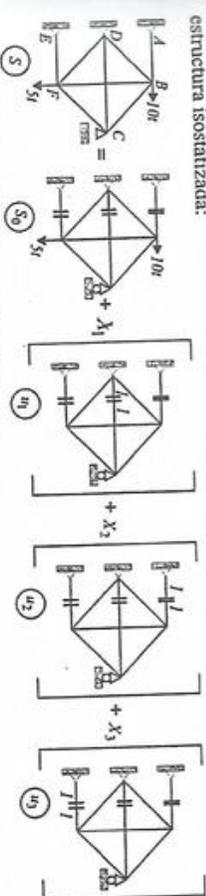
Todos los elementos de la estructura mostrada tienen la misma área de sección transversal y son del mismo material. Indicar esquemáticamente como se determinarían las reacciones de apoyo y los esfuerzos en las barras.

Solución:

En esta estructura se presentan 5 componentes de reacciones en los apoyos: en A, una colineal con AB; en D, dos componentes (que tomaremos una horizontal y otra vertical); en E, una colineal con EF; y en C, una vertical, o sea perpendicular al plano de desplazamiento del apoyo. Como sólo disponemos de las tres ecuaciones de equilibrio estático, hay, pues 5-3=2 incógnitas hiperestáticas externas.

Internamente por simple observación, se constata que hay una barra redundante; es, pues, hiperestática de 1er. orden internamente.

En total hay 3 incógnitas hiperestáticas que denominaremos: X_1 para el esfuerzo en la barra DC, X_2 para la reacción en A (o sea el esfuerzo en la barra AB), y X_3 para la reacción en E (o sea el esfuerzo en EF). Podemos entonces plantear la siguiente igualdad de modelo, en base a la estructura isostatizada:



En la que para cada barra o reacción de apoyo:

$$S = S_0 + X_1 \mu_1 + X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3$$

Las ecuaciones de condición o de compatibilidad para el modelo mostrado son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En la que, siendo $\lambda = 1/l$ (EQ2):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \sum S_0 \mu_1 \lambda & \delta_{20} &= \sum S_0 \mu_2 \lambda & \delta_{30} &= \sum S_0 \mu_3 \lambda \\ \delta_{11} &= \sum \mu_1^2 \lambda & \delta_{12} &= \sum \mu_1 \mu_2 \lambda & \delta_{13} &= \sum \mu_1 \mu_3 \lambda \\ \delta_{21} &= \sum \mu_2 \mu_1 \lambda & \delta_{22} &= \sum \mu_2^2 \lambda & \delta_{23} &= \sum \mu_2 \mu_3 \lambda \\ \delta_{31} &= \sum \mu_3 \mu_1 \lambda & \delta_{32} &= \sum \mu_3 \mu_2 \lambda & \delta_{33} &= \sum \mu_3^2 \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(Recuerde que según el método de los trabajos virtuales en estructuras de barras, la

$$\text{Deflexión está dada por } \delta = \sum \frac{S \mu l}{EQ}.$$

Deberá calcularse los coeficientes (3) según la siguiente tabulación:

Elem	L	r	s_0	μ_1	μ_2	$S_0 \mu_1 \lambda$	$S_0 \mu_2 \lambda$	$S_0 \mu_3 \lambda$	$\mu_1^2 \lambda$	$\mu_2^2 \lambda$	$\mu_3^2 \lambda$
AB											
BC											
...											
...											
Σ											

$\mu_1, \mu_1 \lambda$	$\mu_1, \mu_1 \lambda$	$\mu_2, \mu_2 \lambda$	X_1, μ_1	X_2, μ_2	X_3, μ_3	S

Reemplazando en las ecuaciones (2), se resuelve este sistema de ecuaciones y se obtienen los valores de las incógnitas hiperestáticas $X_1, X_2, + X_3$; las que reemplazadas en la expresión (1) da los valores finales de los esfuerzos para cada barra de la estructura (esta operación se realiza según las 4 últimas columnas de tabulación).

(La solución numérica aparece en el problema VI.8)

PROBLEMA VI.4. (UNI, 20-ENE-1969)

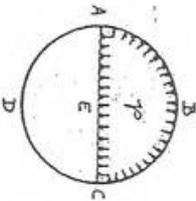
Indicar paso a paso, como se resolverá el anillo mostrado, en el que todas sus partes son de sección constante. El anillo guarda continuidad con el elemento diametral. Está sujeto a una presión (carga uniformemente repartida) constante p (t/m^2) en solamente una de las porciones diametrales. Se aplicará el método de fuerzas.

Solución:

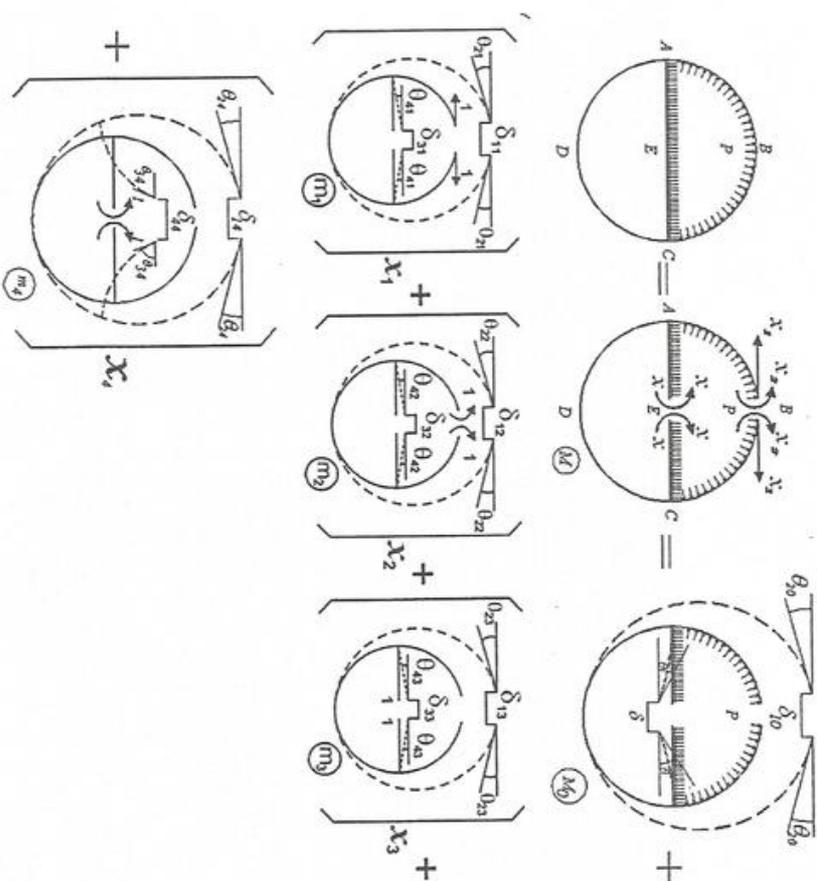
En primer lugar debemos isostatar la estructura. Ello se logra si la cortamos mediante el eje vertical de simetría, en las secciones B y E. Así tendremos las siguientes incógnitas hiperestáticas:

X_1 = fuerza normal en B; X_2 = par o momento flector en B; X_3 = fuerza normal en E;

X_4 = par o momento foraltec en E. Por simetría, en estas secciones las fuerzas cortantes son nulas.



Podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:



Para una sección cualquiera, en general, el momento flector es:

$$M = M_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 \quad (1)$$

Las ecuaciones de condición o compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} &= 0 \\ \theta_{20} + X_1 \theta_{21} + X_2 \theta_{22} + X_3 \theta_{23} + X_4 \theta_{24} &= 0 \\ \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} &= 0 \\ \theta_{40} + X_1 \theta_{41} + X_2 \theta_{42} + X_3 \theta_{43} + X_4 \theta_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

En las que:

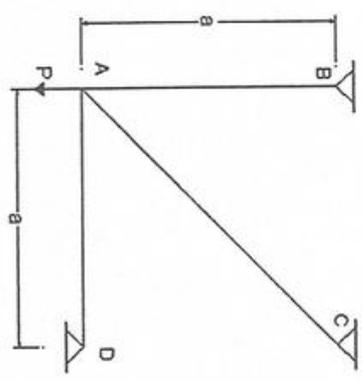
$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_0 m_1}{EI} ds & \theta_{20} &= \int \frac{M_0 m_2}{EI} ds & \delta_{30} &= \int \frac{M_0 m_3}{EI} ds & \theta_{40} &= \int \frac{M_0 m_4}{EI} ds \\ \delta_{11} &= \int \frac{m_1^2}{EI} ds & \theta_{21} &= \int \frac{m_2 m_1}{EI} ds & \delta_{31} &= \int \frac{m_3 m_1}{EI} ds & \theta_{41} &= \int \frac{m_4 m_1}{EI} ds \\ \delta_{12} &= \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds & \theta_{22} &= \int \frac{m_2^2}{EI} ds & \delta_{32} &= \int \frac{m_3 m_2}{EI} ds & \theta_{42} &= \int \frac{m_4 m_2}{EI} ds \\ \delta_{13} &= \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds & \theta_{23} &= \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds & \delta_{33} &= \int \frac{m_3^2}{EI} ds & \theta_{43} &= \int \frac{m_4 m_3}{EI} ds \\ \delta_{14} &= \int \frac{m_1 m_4}{EI} ds & \theta_{24} &= \int \frac{m_2 m_4}{EI} ds & \delta_{34} &= \int \frac{m_3 m_4}{EI} ds & \theta_{44} &= \int \frac{m_4^2}{EI} ds \end{aligned} \right\} (3)$$

Por la simetría existente solo será necesario calcular los ángulos θ indicados en los esquemas, efectuando las integrales correspondientes a nuestra estructura (la mitad derecha, por ejemplo). Igual procedimiento se puede seguir para calcular los valores δ al efectuar la integración en media estructura, en realidad, se estará calculando la mitad de los valores de δ indicados en los esquemas.

Calculados los coeficientes según la expresión (3), se resolverá el sistema de ecuaciones (2), obteniéndose los valores de las incógnitas hiperestáticas X_1, X_2, X_3, X_4 . Reemplazando estos resultados en (1), tendremos el momento flector para las diversas secciones de la estructura así como los correspondientes esfuerzos cortantes.

(La solución completa de este problema aparece en la hoja VI-7)

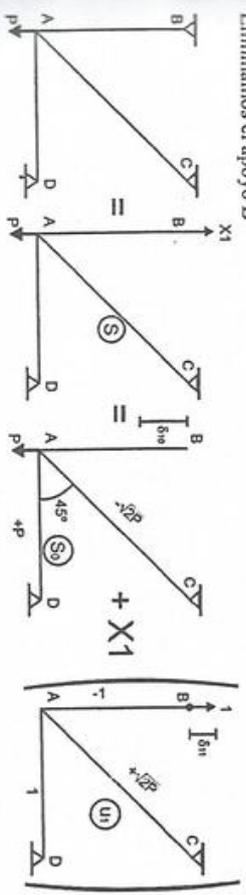
PROBLEMA VI.5. (UNI, 11-FEB-1966)
Determinar las reacciones en los apoyos si todos los elementos son de la misma sección y el material.



Solución:

PASO 1: ISOSTATIZAMOS LA ESTRUCTURA

Eliminamos el apoyo B



En la figura anterior

$$S = S_0 + X_1 u$$

Ecuación de compatibilidad o condición

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

Donde:

$$\delta_{10} = \sum \frac{SuL}{Er} \quad \delta_{11} = \sum \frac{u^2 L}{Er} \quad \text{donde } Er \text{ es constante.}$$

Luego:

Donde en el siguiente cuadro tenemos las características de estos elementos:

Item	L	So	u	So u L	$\mu^2 l$	$X_i \mu$	S
AB	a	0	-1	0	a	-0.793 P	-0.793 P
AC	1.4142 a	-1.4142 P	1.4142	-2(1.4142)Pa	2(1.4142)a	1.121 P	-0.293 P
AD	a	P	-1	-P a	a	-0.793 P	+0.207 P

$\sum S_0 u L = -Pa (1 + 2(1.4142))$ También tenemos que $\sum \mu^2 L = a(2 + 2(1.4142))$

$$X_1 = \frac{-Pa(1 + 2(1.4142))}{a(2 + 2\sqrt{2})} = 0.793 P$$

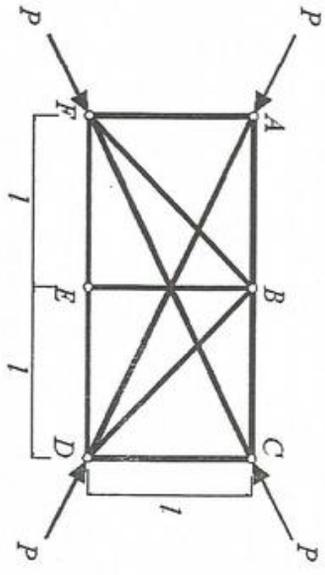
Las reacciones son colineales con los esfuerzos en las barras; luego:

$$R_B = 0.793 P \uparrow$$

$$R_C = 0.293 P \nearrow$$

$$R_D = 0.207 P \leftarrow$$

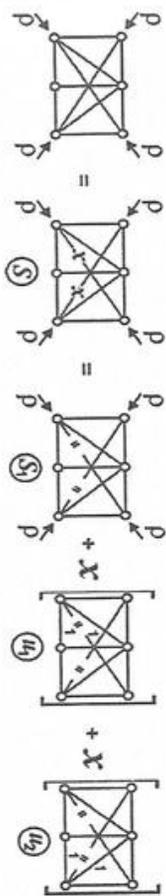
PROBLEMA VI.6. (UNI, 13-SET-1968)



Todos los elementos de la estructura mostrada tienen el mismo valor $l/E\Omega$. Indicar paso a paso como se determinarían los esfuerzos en todas las barras, indicando el procedimiento a seguir y las expresiones o fórmulas a emplear, sin necesidad de realizar las operaciones.

$$S_{AD} = S_{FC} = X$$

Podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:



En los que, para cualquier barra: $S = S_0 + X(\mu_1 + \mu_2) \dots (1)$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones son, para cada una de las barras cortadas:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{10} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{En las que,} \\ \text{conforme se} \\ \text{ha indicado} \end{aligned} \left. \begin{aligned} X_1 &= X_{AD} \\ X_2 &= X_{FC} \end{aligned} \right\} X_1 = X_2 = X$$

o sea que, simplemente, en este caso tenemos:

$$\delta_{10} + X (\delta_{11} + \delta_{12}) = 0$$

En la que

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \delta_{12}} \dots (2)$$

Dónde:

$$\delta_{10} = \sum \frac{S_0 \mu_1 l}{E\Omega} = \lambda \sum S_0 \mu_1$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\mu_1^2 l}{E\Omega} = \lambda \sum \mu^2$$

$$\delta_2 = \sum \frac{M_1 M_2}{EI} = \lambda \sum M_1 M_2$$

Luego, reemplazando estas expresiones en (2), tenemos finalmente el valor de la incógnita hiperestática:

$$X = - \frac{\sum S_0 M_1}{\sum M_1^2 + \sum M_1 M_2}$$

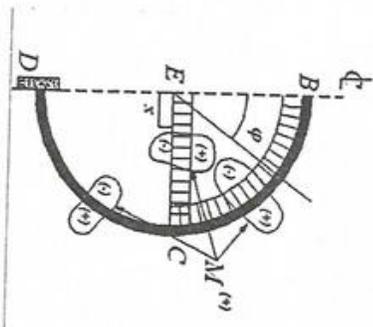
..... (3)

PROBLEMA VI.7.

Completar la solución del problema VI-4. Se determinarán las expresiones de las incógnitas hiperestáticas y se trazarán los diagramas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes.

Solución:

Para poder calcular los coeficientes dados por las expresiones (3), determinamos M_0 , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , para los tres tramos de la estructura (mitad derecha): \overline{BC} con variable φ , intervalo $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; \overline{CD} , variable φ , intervalo $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$; y \overline{EC} , variable x , origen en E, intervalo $0 \leq x \leq R$. Así:



Me:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$M'_0 = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (p \cdot R) d\alpha \cdot \text{sen}(\theta - \alpha) = pR^2 \cdot [\cos(\theta - \alpha)]_0^{\varphi}$$

$$\therefore M'_0 = pR^2 (1 - \cos \varphi)$$

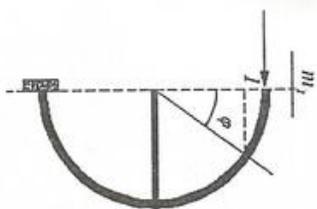
$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi,$$

$$M'_0 = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} (p \cdot R) d\alpha \cdot R \text{sen}(\theta - \alpha) - pR \cdot \left[R \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{R}{2} \right]$$

Momento de la carga en BC Momento de la carga en EC

$$pR^2 [\cos(\theta - \alpha)]_0^{\pi/2} - pR^2 (\text{sen } \theta - 0.5)$$

$$\therefore M'_0 = pR^2 (0.5 - \cos \varphi)$$

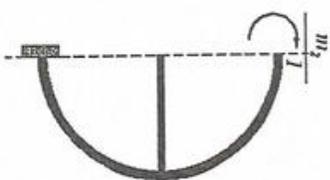


$$0 \leq X \leq R: \quad M''_0 = -\frac{1}{2} pX^2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: \quad m_1 = R(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi: \quad m_1 = R(1 - \cos \varphi)$$

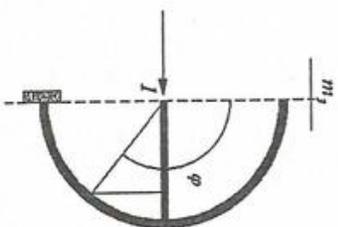
$$0 \leq X \leq R: \quad m_1 = 0$$



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: \quad m_2 = 1$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi: \quad m_2 = 1$$

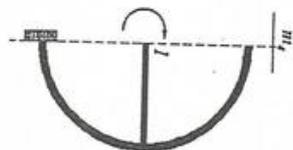
$$0 \leq X \leq R: \quad m_2 = 0$$



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: \quad m_3 = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi: \quad m_3 = 1 \cdot R \text{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -R \cos(\varphi)$$

$$0 \leq X \leq R: \quad m_3 = 0$$



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; m_1 = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi; m_4 = 1$$

$$0 \leq X \leq R; m_4 = 1$$

Resumiendo tenemos:

Tamaño	Intervalo	M_0	m_1	m_2	m_3	m_4
BC	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$PR^2(1 - \cos \varphi)$	$R(1 - \cos \varphi)$	1	0	0
CD	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$	$PR^2(0.5 - \cos \varphi)$	$R(1 - \cos \varphi)$	1	$-R \cos(\varphi)$	1
EC	$0 \leq X \leq R$	$-\frac{1}{2} pX^2$	0	0	0	1

Ahora ya podemos determinar las expresiones de las deformaciones y desplazamientos dados en (3):

$$EI\delta_{00} = \int M_0 m_1 ds = \int_0^{\pi/2} pR^2(1 - \cos \varphi)^2 \cdot R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi) \cdot R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{10} = pR^4 \left(\frac{5\pi - 2}{4} \right)$$

$$EI\theta_{20} = \int M_0 m_2 ds = \int_0^{\pi/2} pR^2(1 - \cos \varphi) \cdot R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos \varphi) R d\varphi$$

$$\therefore EI\theta_{20} = pR^3 \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$EI\delta_{30} = \int M_0 m_3 ds = - \int_0^{\pi/2} pR^3(0.5 - \cos \varphi) \cdot \cos \varphi R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{30} = pR^4 \left(\frac{\pi + 2}{4} \right)$$

$$EI\theta_{40} = \int M_0 m_4 ds = \int_{\pi/2}^{\pi} pR^2(0.5 - \cos \varphi) \cdot R d\varphi - \frac{1}{2} p \int_0^R x^2 dx$$

$$\therefore EI\theta_{40} = pR^3 \left(\frac{3\pi + 10}{12} \right)$$

$$EI\delta_{11} = \int m_1^2 ds = - \int_0^{\pi} R^2(1 - \cos \varphi)^2 \cdot R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{11} = R^3 \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$EI\delta_{12} = EI\theta_{21} = \int m_1 m_2 ds = \int_0^{\pi} R^2(1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{12} = R^3 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = EI\theta_{21} = R^2(\Pi)$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = \int m_1 m_3 ds = -R^3 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = R^3 \left(\frac{\pi + 4}{4} \right)$$

$$EI\delta_{14} = EI\theta_{41} = \int m_1 m_4 ds = \int_{\pi/2}^{\pi} R^2(1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{14} = EI\theta_{41} = R^2 \left(\frac{\pi + 2}{2} \right)$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^{\pi} m_2^2 ds = \int_0^{\pi} R \int_0^{\pi} d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{22} = R(\pi)$$

$$EI\theta_{23} = EI\delta_{32} = \int m_2 m_3 ds = -R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\theta_{23} = EI\delta_{32} = R^2$$

$$EI\theta_{24} = EI\theta_{42} = \int m_1 m_4 ds = \int_{\pi/2}^{\pi} ds = R \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi$$

$$\therefore EI\theta_{24} = EI\theta_{42} = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$EI\delta_{33} = \int m_3^2 ds = R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi R d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{33} = R^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$EI\delta_{34} = EI\theta_{43} = \int m_3 m_4 ds = -R^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \varphi d\varphi$$

$$\therefore EI\delta_{34} = EI\theta_{43} = R^2$$

$$EI\theta_{44} = \int m_4^2 ds = \int_0^R dx + \int_{\pi/2}^{\pi} R d\varphi$$

$$\therefore EI\theta_{44} = R\left(\frac{\pi+2}{2}\right)$$

Reemplazando estos valores en el sistema de ecuaciones (2), se tiene:

$$pR^4 \left(\frac{5\pi-2}{4}\right) + R^3 \left(\frac{3\pi}{2}\right) X_1 + R^2(\pi) X_2 + R^3 \left(\frac{\pi+4}{4}\right) X_3 + R^2 \left(\frac{\pi+2}{2}\right) X_4 = 0$$

$$pR^3 \left(\frac{3\pi}{4}\right) + R^2(\pi) X_1 + R(\pi) X_2 + R^2 X_3 + R \left(\frac{\pi}{2}\right) X_4 = 0$$

$$pR^4 \left(\frac{\pi+2}{4}\right) + R^3 \left(\frac{\pi+4}{4}\right) X_1 + R^2 X_2 + R^3 \left(\frac{\pi}{4}\right) X_3 + R^2 X_4 = 0$$

$$pR^3 \left(\frac{3\pi+10}{10}\right) + R^2 \left(\frac{\pi+2}{2}\right) X_1 + R \left(\frac{\pi}{2}\right) X_2 + R^2 X_3 + R \left(\frac{\pi+2}{2}\right) X_4 = 0$$

De las que resolviendo se obtienen:

$$X_1 = -\frac{3\pi^2 + 12\pi - 3}{3\pi^2 + 12\pi + 24} pR = -0.8153pR \quad X_2 = -\frac{8-2\pi}{3\pi^2 + 12\pi - 24} pR^2 = -0.0396pR^2$$

$$X_3 = 0 \quad X_4 = \frac{3\pi^2 + 4\pi - 24}{2(3\pi^2 + 12\pi - 2)} pR^2 = 0.2098 pR^2$$

Llevando estos resultados a la expresión (1), se tiene:

$$0 \leq \varphi \leq \pi: M = pR^2 (1 - \cos \varphi) - 0.8153 pR^2 (1 - \cos \varphi) - 0.0396 pR^2$$

$$\therefore M = pR^2 (0.1451 + 0.1847 \cos \varphi) \dots \dots \dots \begin{cases} \text{para } \varphi = 0 & M = -0.0396 pR^2 \\ \text{para } 30^\circ & = -0.0149 pR^2 \\ \text{para } 60^\circ & = +0.0527 pR^2 \\ \text{para } 90^\circ & = +0.1451 pR^2 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi: M = pR^2 (0.5 - \cos \varphi) - 0.153 pR^2 (1 - \cos \varphi) - 0.0396 pR^2 + 0.2098 pR^2$$

$$\therefore M = -pR^2 (0.1451 - 0.1847 \cos \phi) \dots\dots$$

para $\phi = 90^\circ$	$M = -0.1451 pR^2$
para 120°	$= -0.0527 pR^2$
para 150°	$= +0.0149 pR^2$
para 180°	$= +0.0396 pR^2$

$$0 \leq x \leq R: M = -\frac{1}{2} px^2 + 0.2098 pR^2 \rightarrow \text{para } x=0 \quad M = +0.2098 pR^2$$

$$R = -0.2092 pR^2$$

Para los esfuerzos cortantes, como $Q = \frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\phi}$, se tienen:

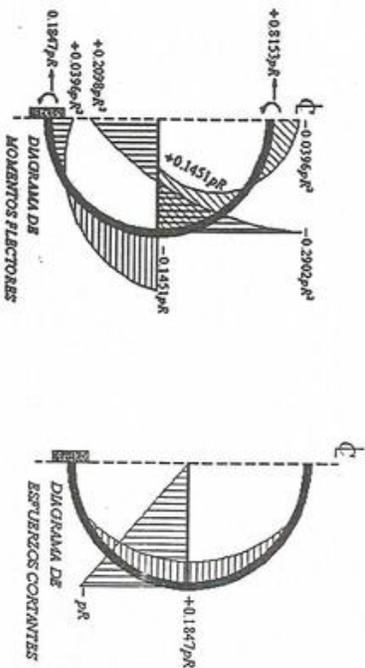
$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}: Q = pR(0.1847 \sin \phi) \dots \text{para } \phi = 0, Q = 0$$

$$\phi = 90^\circ Q = 0.1847 pR$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi: Q = pR(0.1847 \sin \phi) \dots \text{para } \phi = 180^\circ, Q = 0$$

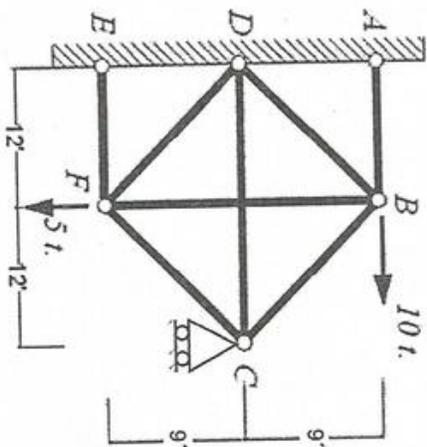
$$0 \leq x \leq R: Q = -px \dots \text{para } x=0, Q=0$$

$$x=R, Q=-pR$$

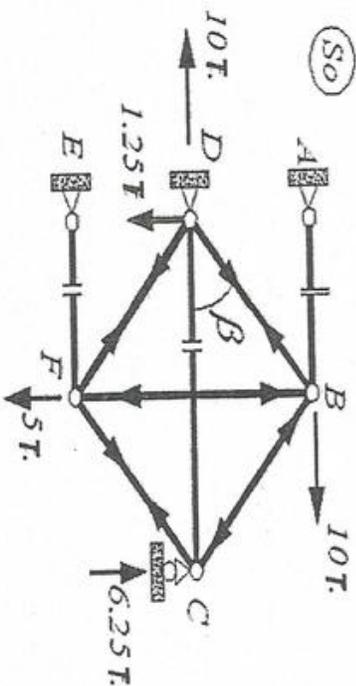


PROBLEMA VI.8.

Todos los elementos de la estructura mostrada tienen la misma área de sección transversal y son del mismo material. Calcular los esfuerzos en todos los elementos y las reacciones en los apoyos.



La solución de este problema está expuesta en el problema VI-3 siguiendo el método de las fuerzas, y calculando los desplazamientos relativos por trabajos virtuales. De acuerdo con el desarrollo que allí se indicó, debemos calcular en primer lugar los esfuerzos en las barras en la estructura isostaticizada para 4 estados de carga; es decir, debemos determinar los esfuerzos S_0, H_1, H_2 y H_3 . Así:



$$\sum M_D = 0: 10(9) + 5(12) - R_C(24) \longrightarrow R_C = 6.25 \uparrow l.$$

$$\sum F_V = 0: -5 + 6.25 - V_D = 0 \longrightarrow V_D = 1.25 \downarrow T$$

$$\sum F_h = 0: -H_D + 10 = 0 \longrightarrow H_D = 10 \longrightarrow T$$

En D:

$$\sum F_h = 0: (\overline{DB} + \overline{DF})0.8 - 10 = 0 \rightarrow \overline{DB} + \overline{DF} = 12.5$$

$$\sum F_V = 0: (\overline{DB} - \overline{DF})0.6 - 1.25 = 0 \rightarrow \overline{DB} - \overline{DF} = \frac{12.5}{6}$$

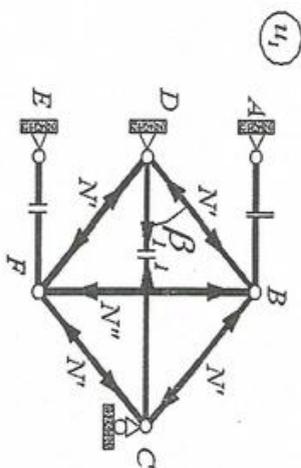
$$\therefore \overline{DB} = 175/24l, \overline{DF} = 125/24l$$

$$\text{En } \overline{C}: \overline{BC} = \overline{FC} \text{ (para } \sum F_h = 0)$$

$$\sum F_V = 0: (\overline{BC} + \overline{FC})0.6 - 6.25 = 0 \left. \begin{array}{l} \longrightarrow \overline{BC} = \overline{FC} = \frac{125}{24}l \end{array} \right\}$$

En E:

$$\sum F_V = 0: 2 \left(\frac{125}{24} \right) \text{sen } \beta - 5 - \overline{FB} = 0 \rightarrow \overline{FB} = \frac{5}{4}l$$



Por simple inspección:

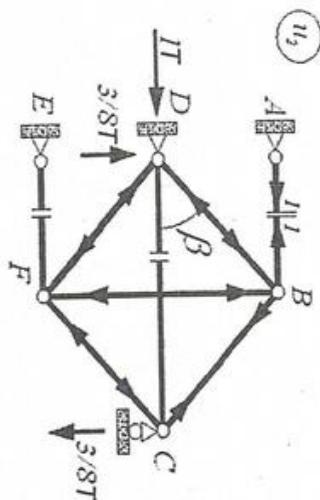
- 1.- Las reacciones en los apoyos es 0;
- 2.- Los esfuerzos en \overline{BC} , \overline{CF} , \overline{FD} y \overline{DB} son iguales entre sí.

Luego, en C, por $\sum F_h = 0$

$$2N' \cos \beta - 1 = 0 \rightarrow N' = 5/8l$$

En B:

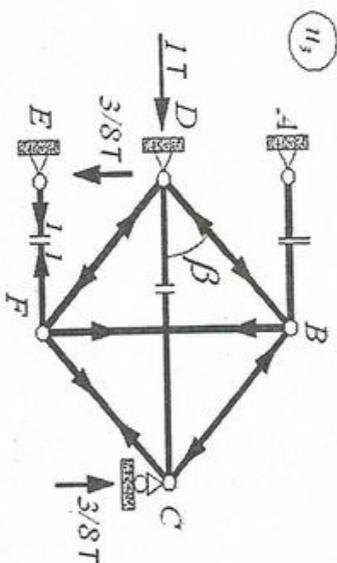
$$\sum F_V = 0: 2N' \text{sen } \beta - N'' = 0 \rightarrow N'' = 3/4l$$



Aplicamos la ecuación de equilibrio estático al conjunto y a los nudos como en los casos anteriores, se obtiene:

$$\overline{BC} = \overline{FC} = 5/16l, \overline{DB} = 15/16l$$

$$\overline{BF} = 3/8l, \overline{DF} = 5/6l$$



Igualmente en este caso se obtienen:

$$\overline{BC} = \overline{FC} = 5/16l$$

$$\overline{DB} = 5/16l, \overline{BF} = 3/8l$$

$$\overline{DF} = 15/16l$$

Como en la ecuación (2) del problema VI-3 debemos reemplazar los desplazamientos relativos (3), o valores proporcionales a ellos, en vez de λ tomaremos para cada elemento su valor l , ya que EQ es el mismo para todas las barras. Hacemos los cálculos según la siguiente tabulación:

Elem.	l	$S_0(t)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$\mu_3(t)$	$S_0 \mu_1 l$	$S_0 \mu_2 l$	$S_0 \mu_3 l$	$\mu_1^2 l$	$\mu_2^2 l$	$\mu_3^2 l$	$\mu_1 \mu_2 l$
AB	12	0	0	-1	0	0	0	0	0	$\frac{3072}{256}$	0	0
BC	15	$+\frac{125}{24}$	$+\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{5}{16}$	$+\frac{3125}{64}$	$-\frac{3125}{128}$	$+\frac{3125}{128}$	$+\frac{375}{64}$	$+\frac{375}{256}$	$+\frac{375}{256}$	$-\frac{375}{128}$
CF	15	$-\frac{125}{24}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3125}{64}$	$-\frac{3125}{128}$	$+\frac{3125}{128}$	$+\frac{375}{64}$	$+\frac{375}{256}$	$+\frac{375}{256}$	$+\frac{375}{128}$
FE	12	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	$\frac{3072}{256}$	0
FD	15	$-\frac{125}{24}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{16}$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{3125}{64}$	$-\frac{3125}{128}$	$-\frac{9375}{128}$	$+\frac{375}{64}$	$+\frac{375}{256}$	$+\frac{3375}{256}$	$+\frac{375}{128}$
DB	15	$-\frac{175}{24}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{16}$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{4375}{64}$	$-\frac{13125}{128}$	$-\frac{4375}{128}$	$+\frac{375}{64}$	$+\frac{3375}{256}$	$+\frac{375}{256}$	$+\frac{1125}{128}$
DC	24	0	-1	0	0	0	0	0	$+\frac{1536}{64}$	0	0	0
BF	18	$+\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1080}{64}$	$-\frac{1080}{128}$	$-\frac{1080}{128}$	$+\frac{648}{64}$	$+\frac{648}{256}$	$+\frac{648}{256}$	$+\frac{648}{128}$
Σ						$-\frac{8580}{64}$	$-\frac{23580}{128}$	$-\frac{8580}{128}$	$+\frac{3684}{64}$	$+\frac{8220}{256}$	$+\frac{8220}{256}$	$+\frac{2148}{128}$

Elem.	$\mu_1 \mu_2 l$	$\mu_2 \mu_3 l$
AB	0	0
BC	$+\frac{375}{128}$	$-\frac{375}{256}$
CF	$-\frac{375}{128}$	$-\frac{375}{256}$
FE	0	0
FD	$+\frac{1125}{128}$	$+\frac{1125}{256}$
DB	$+\frac{375}{128}$	$+\frac{1125}{256}$
DC	0	0
BF	$+\frac{648}{128}$	$+\frac{648}{256}$
Σ		
	$+\frac{2148}{128}$	$+\frac{2148}{256}$

Elem.	$S_0(t)$	$\mu_1 x_1(t)$	$\mu_2 x_2(t)$	$\mu_3 x_3(t)$	$S(t)$
AB	0	0	-5.29	0	-5.29
BC	+5.21	+0.43	-1.65	+0.11	+4.10
CF	-5.21	+0.48	+1.65	-0.11	-3.24
FE	0	0	0	-0.35	-0.35
FD	-5.21	+0.43	+1.65	+0.33	-2.80
DB	-7.29	+0.43	+4.96	+0.11	-1.79
DC	0	-0.69	0	0	-0.69
BF	+1.25	-0.52	-1.98	-0.13	-1.38

De esta tabulación de obtiene en primer lugar:

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= -\frac{8580}{64E\ell} & \delta_{20} &= -\frac{23580}{128E\ell} & \delta_{30} &= -\frac{8580}{128E\ell} \\ \delta_{11} &= +\frac{3684}{64E\ell} & \delta_{22} &= +\frac{8220}{256E\ell} & \delta_{33} &= +\frac{8220}{256E\ell} \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = +\frac{2148}{128E\ell} \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = +\frac{2148}{128E\ell} \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = +\frac{2148}{256E\ell} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (2) los valores proporcionales de estos desplazamientos relativos, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -34320 + 14736X_1 + 4296X_2 + 4296X_3 &= 0 \\ -47160 + 4296X_1 + 8220X_2 + 2148X_3 &= 0 \\ -17160 + 4296X_1 + 2148X_2 + 8220X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Que resolviendo da los siguientes resultados:

$$X_1 = 0.69 \quad X_2 = 5.29 \quad X_3 = 0.35$$

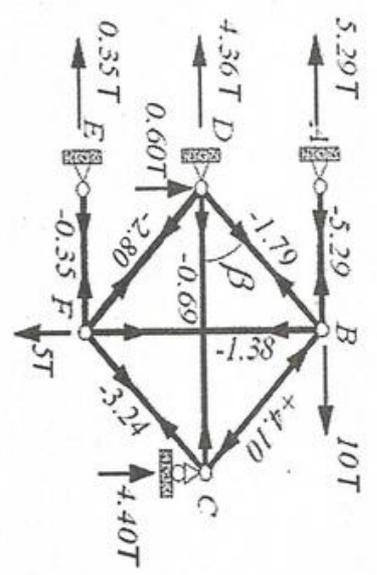
Los tres positivos, lo que significa que los esfuerzos en las barras AB, DC y EF son del signo o sentido considerado; es decir, los tres esfuerzos de tracción.

Con estos resultados se pueden calcular los esfuerzos finales S dados por la expresión (1) del Problema G-3. Para esto se ha trabajado en la tabulación de la página anterior en su 5 últimas columnas.

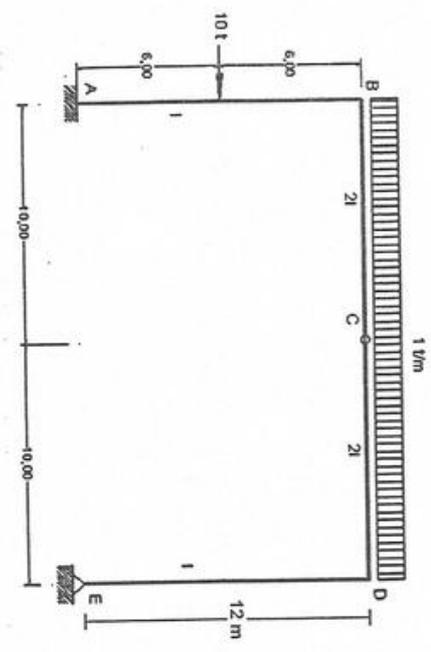
Con la misma expresión (1), se calcula las reacciones de apoyo. Así:

$$\begin{aligned} R_C &= 6.25 \uparrow + 0 + \left(\frac{3}{8}\downarrow\right)(5.29) + \left(\frac{3}{8}\uparrow\right)(0.35) = 4.40 \uparrow t \\ H_D &= \bar{1}0 + 0 + \bar{1}(5.29) + \bar{1}(0.35) = 4.36 t \\ V_D &= 1.25 \downarrow + 0 + \left(\frac{3}{8}\uparrow\right)(5.29) + \left(\frac{3}{8}\downarrow\right)(0.35) = 0.60 \uparrow t \end{aligned}$$

Finalmente, en el siguiente esquema de ejes de la estructura se indican las reacciones de apoyos y los esfuerzos resultantes en las barras:



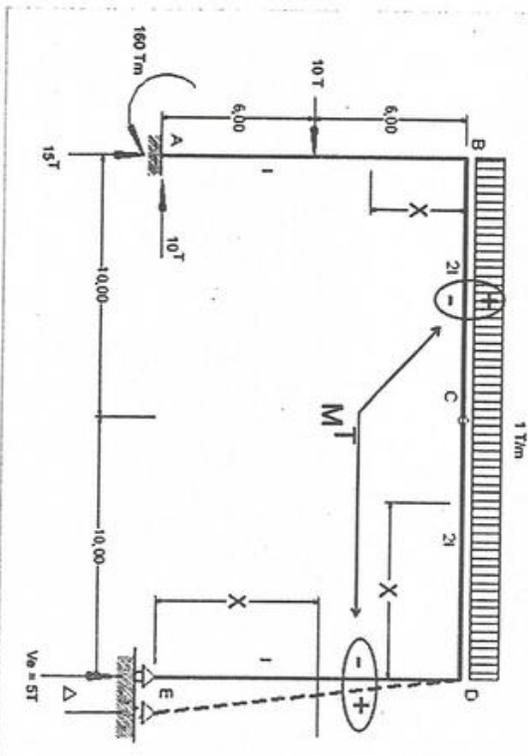
PROBLEMA VI.9. (UNI, 23-SET-1968)
Resolver la estructura plantada de acuerdo al gráfico hallando los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores.



Solución:

PASO 1: ISOSTATIZAMOS LA ESTRUCTURA MODIFICANDO EL APOYO E DE LA ESTRUCTURA

Así tenemos en la siguiente figura la isostatización en base al apoyo E a quien se le ha dado un desplazamiento d.



Calculamos las reacciones en la base de la isostatización.

Donde $H_a = 10\text{ t}$

$$\sum F_v = 0 \quad V_a + V_c - 1(20) = 0 \text{ entonces } V_a = 20 - V_c \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_a - 10(6) - 1(20)(10) + V_c(20) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M_C = 0 \quad -1(10)(5) + V_c(10) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

Entonces $V_c = 5\text{ t}$

Reemplazando en (1) tenemos que $V_a = 15\text{ t}$

Reemplazando en (2) tenemos que $M_a = 60 + 200 - 5(20)$ luego $M_a = 160\text{ t-m}$

PASO 2: OBTENEMOS LAS EXPRESIONES DE MOMENTO PARA CADA TRAMO DEL PORTICO ISOSTATICO

TRAMO ED: $0 \leq x \leq 12$ luego $M = 0$

TRAMO DB: $0 \leq x \leq 20$ luego $M + 1(x)(x/2) - V_c(x) = 0$

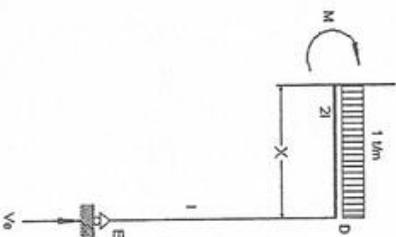
Luego $M = 5x - \frac{x^2}{2}$

TRAMO BA: $0 \leq x \leq 6$

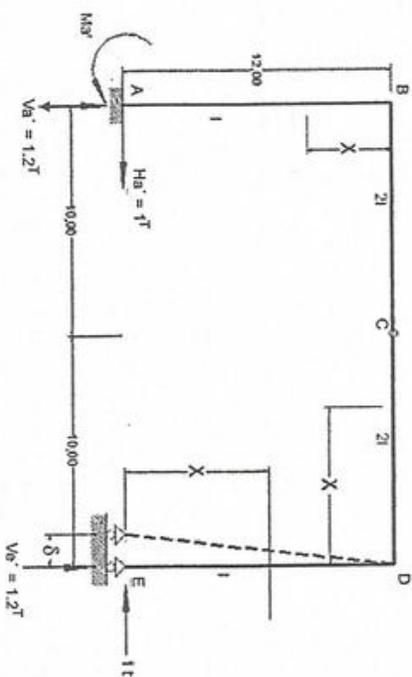
$M = 100 - 20(10) = -100$

$6 \leq x \leq 12$

$M = -100 - 10(x-4) = -10(x+4)$



PASO 3: APLICANDO LA CARGA UNITARIA EN EL APOYO MODIFICADO.



Calculamos las reacciones:

Donde $H a' = 1 t$

$$\Sigma F_v = 0 \quad V a' + V e' = 0 \text{ entonces } V a' = - V e' \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma M A = 0 \quad M a' + V e'(20) = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma M C = 0 \quad -1(12) + V e'(10) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

Entonces $V e' = 1.2 t$

Reemplazando en (1) tenemos que $V a' = -1.2 t$

Reemplazando en (2) tenemos que $M a' = -1.2(20)$ luego $M a = -24 t \cdot m$ (Sentido contrario al asumido).

PASO 4: HALLAMOS LAS EXPRESIONES DE MOMENTO

TRAMOED: $0 \leq x \leq 12$ luego $m = -x$

TRAMODB: $0 \leq x \leq 20$ luego $m = -12 + 1.2x = 1.2(x - 10)$

TRAMOBA: $0 \leq x \leq 12$ luego $m = -(12 - x) + 1.8(20) = 18 + x$ M

PASO 4: RESOLVEMOS LA ECUACION DE COMPATIBILIDAD COMO SE MUESTRA

$$H \delta + \Delta = 0$$

Dónde: $H = -\frac{\Delta}{\delta} \dots\dots\dots(1)$

Donde resolvemos para Δ

$$\Delta = \int \frac{M m}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{20} [5x - 1x^2](1.2(x - 10)) dx + \frac{1}{EI} \int_0^6 [-100](12 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_6^{12} [-10](x + 4)(12 + x) dx = -27,560 / EI \dots(2)$$

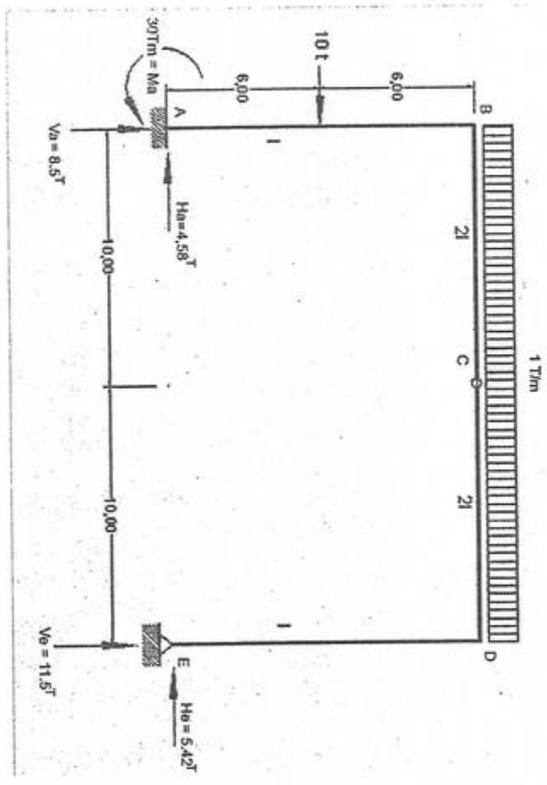
$$\delta = \int \frac{m^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{12} (-x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^{20} (1.2(x - 10))^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^{12} (12 + x)^2 dx = \frac{5088}{EI} \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando en (1)

$$H = -\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{-27,560 / EI}{5,088 / EI} = +5.42 t \leftarrow$$

El valor positivo indica que va en el sentido supuesto de la carga unitaria.

PASO 5: RESOLVEMOS LAS REACCIONES DE LA ESTRUCTURA



Donde $H e = H = 5.42 t$

$$\Sigma F_H = 0 \quad H a = 10 - 5.42 = 4.58 t$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad V a + V e = 20 t \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma M A = 0 \quad M a + V e(20) - 1(20)(10) - 10(6) = 0 \text{ entonces } M a = 260 - 20 V e \dots\dots\dots(2)$$

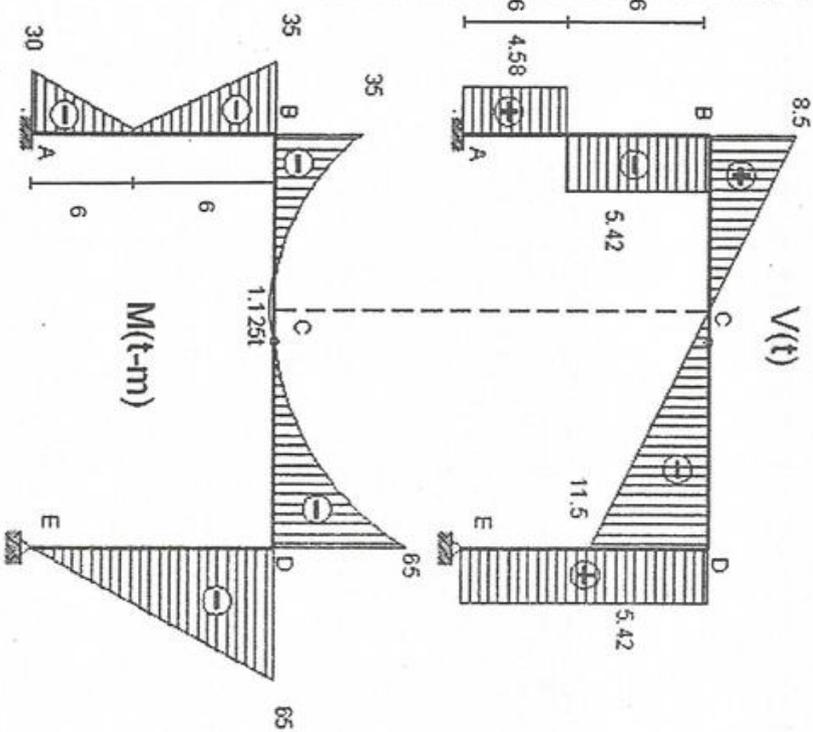
$$\Sigma M C = 0 \quad -1(10)(5) + V e(10) - H e(12) = 0 \text{ donde } V e = (50 + 5.42(12))/10$$

Luego $V e = 11.50 t$

Reemplazando en (1) tenemos $V a = 8.50 t$

Reemplazando en (2) tenemos $M a = 260 - 20(11.50) = 30 t \cdot m$

Luego tenemos los diagramas de cortantes y momentos:

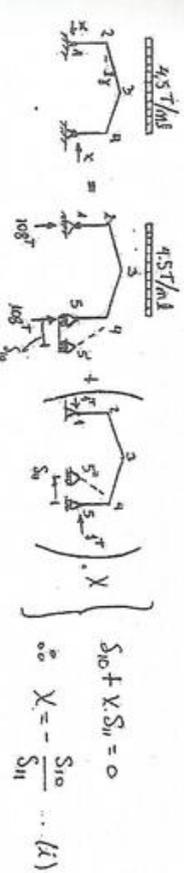
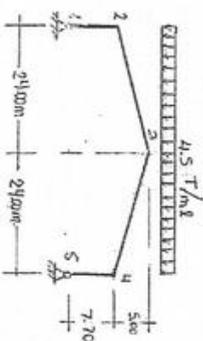


PROBLEMA VI.10. (UNI, 20-ENE-1969)

Aplicando el método de las fuerzas, calcular las reacciones en los apoyos de la estructura mostrada, en la que EI es constante para todos los elementos. Considerar solo los efectos de la flexión.

Solución

La estructura es externamente hiperestática de 1er Grado. Determinando X, la componente horizontal de las reacciones en 1 y 5 (iguales entre sí por simetría), podemos establecer la siguiente igualdad de modelos y la correspondiente ecuación de condición:



Donde:

$$\text{Donde: } \delta_{10} = \int \frac{M_0 m}{EI} ds \quad \text{y} \quad \delta_{11} = \int \frac{m^2}{EI} ds$$

En las que:

$$\text{Para el tramo 12: } 0 \leq y \leq 7.70\text{m:} \quad \left. \begin{aligned} M_0 &= 0 \\ m &= -y \end{aligned} \right\} ds = dy$$

Para el tramo 23: $0 \leq x \leq 24.00\text{m}$:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 108x - \frac{4.5}{2}x^2 \\ m &= -(7.70 + x \tan \gamma) \end{aligned} \right\} ds = \frac{dx}{\cos \gamma} = \frac{\sqrt{601}}{24} dx$$

$$\tan \gamma = \frac{5}{24}$$

Luego:

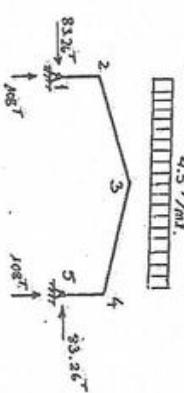
$$\delta_{10} = \frac{2}{EI} \int_0^{24} \left(108x - \frac{4.5}{2}x^2 \right) \left[-(7.70 + \frac{5}{24}x) \right] \frac{\sqrt{601}}{24} dx = -\frac{458.287}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left\{ \int_0^{7.70} (-y)^2 dy + \int_0^{24} \left[-(7.70 + \frac{5}{24}x) \right]^2 \frac{\sqrt{601}}{24} dx \right\} = -\frac{5504.4}{EI}$$

Reemplazando estos valores en (1), tenemos la reacción horizontal en los apoyos:

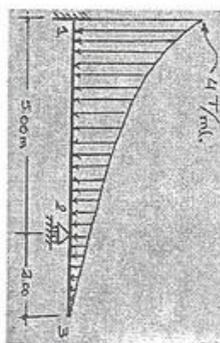
$$x = -\frac{-458.287}{5504.4} = 83.26$$

$$x = 83.26T$$

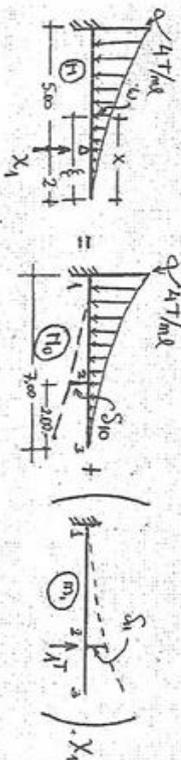


PROBLEMA VI.11. (UNI, 20-ENE-1969)

La viga de sección constante mostrada en el esquema, está sujeta a la acción de una carga repartida, variable en forma parabólica (de 2° grado), de cero en el extremo 3, a 4t/ml en 1. aplicando el método de las fuerzas, calcular las reacciones (fuerzas y pares) en los apoyos de la viga.



Solución:



Isostatazamos la estructura eliminando el apoyo 2, en el que la reacción (fuerza vertical) es nuestra incógnita hiperestática. De la igualdad de modelos mostrada, tenemos:

$$\delta_{10} + x_1 \delta_{11} = 0 \quad x_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad \dots (i)$$

$$\text{En la que: } \delta_{10} = \int \frac{M_0 m_1}{EI} ds \quad \text{y} \quad \delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds$$

El valor de la carga repartida ω en una sección cualquiera de abscisa ξ es: $\omega = \frac{4}{49} \xi^2$

Las expresiones para los momentos M_0 y m_1 , son:

$$0 \leq x \leq 7.00 \text{ m: } M_0 = - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (\omega d\xi)(x-\xi) = -\frac{4}{49} \int_0^x \xi^2 (x-\xi) d\xi = -\frac{x^4}{147}$$

$$0 \leq x \leq 2.00 \text{ m: } m_1 = 0$$

$$2.00 \leq x \leq 7.00 \text{ m: } m_1 = 1(x-2) = x-2$$

Entonces:

$$EI \delta_{10} = \int_{x=2}^{x=7} \left(-\frac{x^4}{147} \right) (x-2) dx = -\frac{1}{147} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} \right]_2^7 = -\frac{12887.5}{147} = -87.7$$

$$EI \delta_{11} = \int_2^7 (x-2)^2 dx = \frac{1}{3} \left[(x-2)^3 \right]_2^7 = +\frac{125}{3} = 41.7$$

Luego reemplazando en (i), se tiene:

$$x_1 = -\frac{-87.7}{41.7} = 2.1$$

$$x_1 = 2.1 \text{ T } \uparrow$$

La reacción en 1 es:

$$V_1 = \int_{\xi=0}^{\xi=7} \omega d\xi - 2.1 = \int_0^7 \frac{4}{49} \xi^2 d\xi - 2.1 = 9.3 - 2.1 = 7.2$$

$$V_1 = 7.2 \text{ T } \uparrow$$

Y el momento en el empotramiento es:

$$M_1 = - \int_0^7 (\omega d\xi)(7.00 - \xi) + x_1(5.00) = -16.3 + 10.5 = -5.8$$

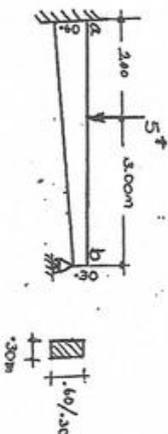
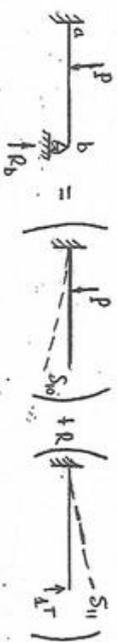
$$M_1 = -5.8 \text{ Tm}$$

PROBLEMA VI.12. (UNI, 10-DIC-1955)

Por acción de la carga indicada, determinar el momento de empotramiento, las reacciones de apoyo, la distribución de los momentos de flexión y la de los esfuerzos cortantes se prescindirá del peso propio de la viga las secciones varían entre 0.60 m en el empotramiento y 0.30 m en el apoyo simple; el ancho es constante de 0.30 m.

Solución:

De acuerdo con el método de las fuerzas se tiene el siguiente modelo:



Siendo la ecuación de compatibilidad:

$$\delta_{10} + R_b \delta_{11} = 0$$

$$R_b = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \dots \dots \dots (i)$$

Dónde:

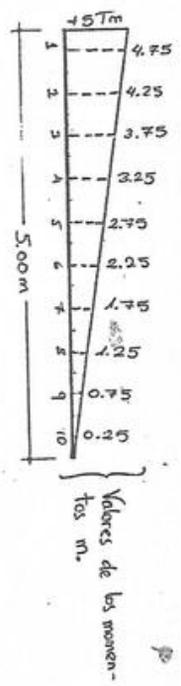
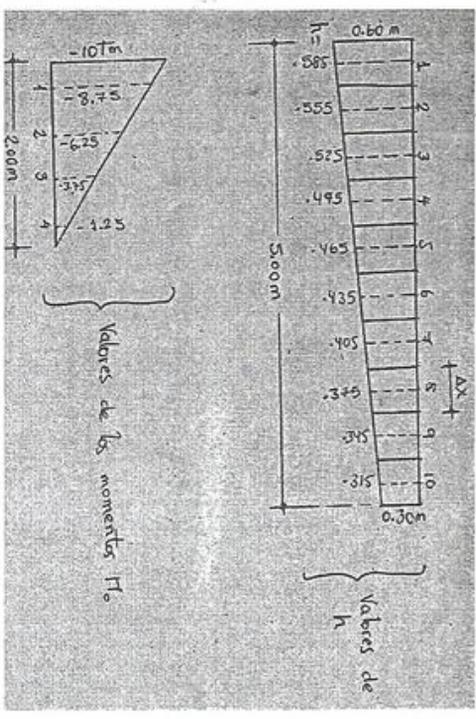
$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 m}{EI} ds \quad \gamma \quad \delta_{11} = \int \frac{m^2}{EI} ds$$

En las que $I = \frac{1}{12} a h^3$  Esto dificultara las integrales por lo que trabajaremos con valores aproximados para las integrales. Considerando secciones constantes a lo largo de la viga:

$$\Delta x = \frac{5.00 \text{ m}}{10} = 0.50 \text{ m, y eliminando los factores comunes tendremos:}$$

$$R_b = -\frac{\sum \frac{M_0 m}{h^3}}{\sum \frac{m^2}{h^3}} \dots \dots \dots (ii)$$

Debemos calcular los valores, h, M_0 y m para cada intervalo de la viga:



Con los valores calculados, podemos trabajar con la tabulación siguiente:

Secc.	h(m)	h ³ (m ³)	M ₀ (Tm)	m(Tm)	$\frac{M_0 m}{h^3}$	$\frac{m^2}{h^3}$
1	0.585	0.2002	-8.75	4.75	-207.6	112.7
2	0.555	1710	-6.25	4.25	-155.3	105.6
3	0.525	1447	-3.75	3.75	-97.2	97.2
4	0.495	1213	-1.25	3.25	-33.5	87.1
5	0.465	1005	0	2.75	0	75.2
6	0.435	823	0	2.25	0	61.5
7	0.405	664	0	1.75	0	46.1
8	0.375	527	0	1.25	0	29.7
9	0.345	411	0	0.75	0	13.7
10	0.315	313	0	0.25	0	2.0
			$\Sigma =$		-493.6	630.8

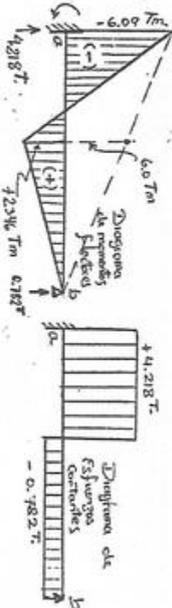
Reemplazando estos resultados en la expresión (ii):

$$R_1 = -\frac{-493.6}{630.8} = +.782 \quad \therefore R_1 = 0.782 \text{ T } \uparrow$$

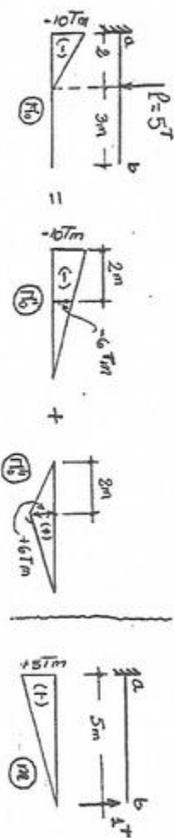
La reacción y el momento flector en "a" son:

$$R_a = 5 - 0.782 = 4.218 \quad \therefore R_a = 4.218 \text{ T } \uparrow$$

$$M_a = +0.782(5.00) - 5(2.00) = +3.91 - 10.00 = -6.09 \quad \therefore M_a = -6.09 \text{ Tm}$$



Los desplazamientos δ_{10} y δ_{11} también se pueden determinar haciendo uso de la tabla II (Hoja C-3). Para ello tenemos los siguientes modelos auxiliares:



Tendremos, combinando estos diagramas, de la mencionada tabla:

$$\delta_{10} = \int_0^l \frac{M_0 m}{EI} dx = \int_0^l \frac{M'_0 m}{EI} dx + \int_0^l \frac{M''_0 m}{EI} dx = (-10)(+5)A_a + (+5)A_a$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{m^2}{EI} dx = \int_0^l \frac{m \cdot m}{EI} dx = (+5)(+5)A_a$$

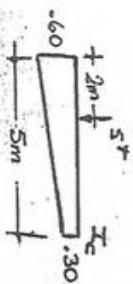
En las que:

$$A_a = \bar{A}_a \left(\frac{l}{EI_c} \right) = 0.068 \frac{5}{EI_c} = \frac{0.34}{EI_c}$$

$$A_a^0 = \bar{A}_a^0 \left(\frac{pl^2}{EI_c} \right) = 0.0161 \frac{5(5^2)}{EI_c} = \frac{2.013}{EI_c}$$

De la tabla N° 5: $\bar{A}_a = 0.068$

De la tabla N° 17: $\bar{A}_a^0 = 0.0161$



Reemplazando estos valores en (iii).

$$\delta_{10} = (-50) \frac{0.34}{EI_c} + (5) \frac{2.013}{EI_c} = \frac{-17 + 10.065}{EI_c} = -\frac{6.935}{EI_c}$$

$$\delta_{11} = (25) \frac{0.34}{EI_c} = \frac{8.5}{EI_c}$$

Llevando los resultados a la expresión (i), tenemos finalmente:

$$R_b = -\frac{-6.935}{8.5} = +0.815 \quad \therefore R_b = 0.815 T \uparrow$$

Resultado que difiere del obtenido anteriormente en 4%.

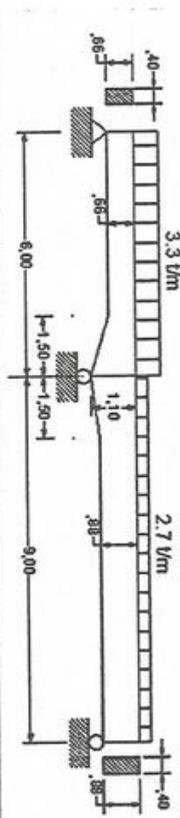
En el extremo "a" se tienen:

$$R_a = 5 - 0.815 = 4.185 \quad \therefore R_a = 4.185 T \uparrow$$

$$M_a = +0.815(5.00) - 5(2.00) = +4.075 - 10 = -5.925 \quad \therefore M_a = -5.93 Tm$$

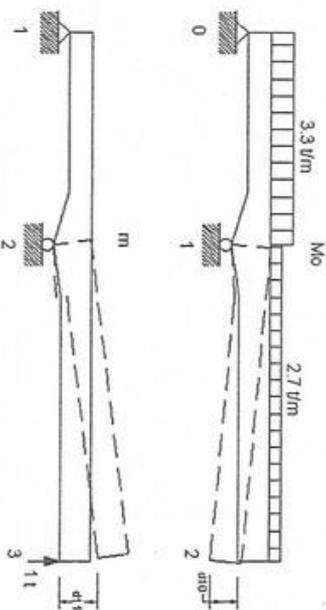
PROBLEMA VI. 13.

Resolver la estructura planteadas de acuerdo al gráfico hallando los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores.



Solución:

PASO 1: ISOSTATIZAMOS LA ESTRUCTURA ELIMINANDO EL APOYO 2
TENIENDO LOS SIGUIENTES ESTADOS.



Donde: $\delta_{10} + R_1 \delta_{11} = 0$

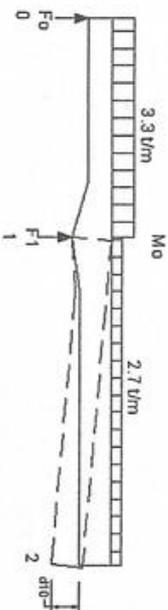
Donde: $R_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \dots \dots \dots (1)$

$$\delta_{10} = \int_0^1 \frac{M_0 m}{EI} ds = \int_0^1 \frac{M_0 m}{EI} ds + \int_1^2 \frac{M_0 m}{EI} ds$$

$$\delta_{11} = \int_0^1 \frac{m^2}{EI} ds = \int_0^1 \frac{m^2}{EI} ds + \int_1^2 \frac{m^2}{EI} ds$$

PASO 2: DETERMINAMOS LAS REACCIONES DE CADA SISTEMA

Del sistema Mo tenemos:



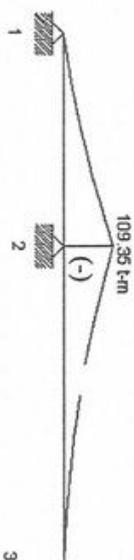
$$\sum F_v = 0 \quad F_0 + F_1 = 3.3(6) + 2.7(9) \text{ entonces } F_0 = 44.1 - F_1$$

$$\sum M_0 = 0 \quad F_1(6) - 3.3(6)(3) - 2.7(9)(6+4.5) = 0$$

entonces $F_1 = 52.425 \text{ t}$ luego $F_0 = 44.1 - 52.425 = -8.325 \text{ t}$.

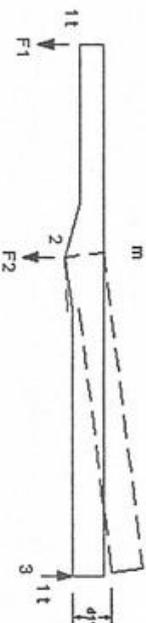
Luego el diagrama de momentos flectores de este sistema será:

$$M_1 = -8.325(6) - 3.3(6)(3) = -109.35 \text{ t-m}$$



Del sistema m tenemos:

Reacciones en los apoyos

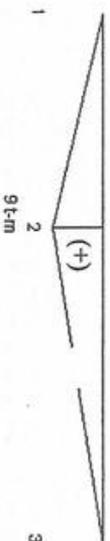


$$\sum F_v = 0 \quad -F_1 - F_2 = -1 \text{ entonces } F_1 = 1 - F_2$$

$$\sum M_1 = 0 \quad -F_2(6) + 1(6+9) = 0 \text{ entonces } F_2 = 2.5 \text{ t entonces } F_1 = -1.5 \text{ t}$$

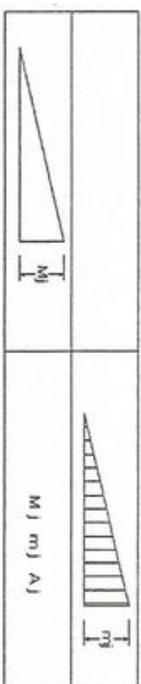
El diagrama de momentos flectores será:

$$M_2 = 1.5(6) = 9 \text{ t}$$

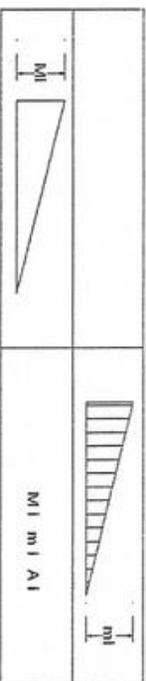


PASO 3: DETERMINAMOS LOS VALORES DE LA EXPRESIONES DE LAS INTEGRALES

De la tabla Nro.5 y 13 correspondiente tenemos:
Tramo 0-1



Tramo 1-2



Luego tenemos lo siguiente:

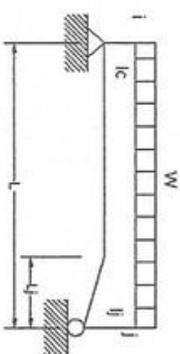
$$\int_0^1 \frac{M_0 m}{EI} ds = (-109.35)(9) A_{10} + (9) A_{10} = -984.15 A_{10} + 9 A_{10}$$

$$\int_1^2 \frac{M_0 m}{EI} ds = (-109.35)(9) A_{12} + (9) A_{12} = -984.15 A_{12} + 9 A_{12}$$

$$\int_0^1 \frac{m^2}{EI} ds = (9)^2 A_{10} = 81 A_{10} \qquad \int_1^2 \frac{m^2}{EI} ds = (9)^2 A_{12} = 81 A_{12}$$

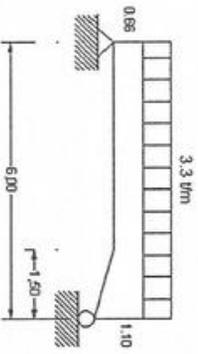
PASO 4: DETERMINAMOS LOS FACTORES DE FORMA Y DE CARGA DE PRIMERA ESPECIE DEL GRÁFICO.

De la tabla de factores de carga de primera especie con acartelamiento recto en un extremo con carga uniformemente repartida.



$$\lambda = \frac{L_j}{L} \qquad n = \frac{I_c}{I_j}$$

Para nuestro caso tenemos:



$$\lambda = \frac{1.50}{6.00} = 0.25 \qquad n = \left(\frac{0.66}{1.10} \right)^3 = 0.216$$

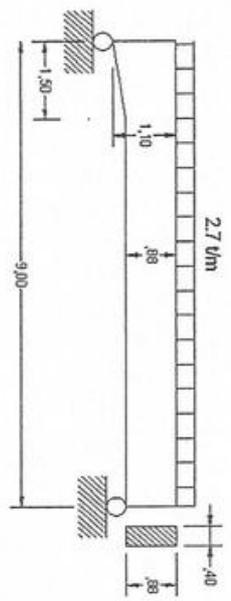
Con estos valores determinados vamos a la tabla de FACTORES DE FORMA de primera especie con acartelamiento recto en un extremo y leemos.

λ/n	0.30	0.20	0.15	0.12
0.40				
0.35				
0.25		0.223	0.332	0.155
0.20				
0.15				

Determinamos el valor de $\bar{A} = 0.226$

Luego determinamos que $A_{10} = \bar{A}_{10} \left(\frac{L}{EI_0} \right) = \frac{0.226(6)}{EI_{c,0}} = \frac{1.356}{EI_{c,0}}$

Luego del extremo consecutivo tenemos:



$$\lambda = \frac{1.80}{9.00} = 0.20 \quad \eta = \left(\frac{0.88}{1.10} \right)^3 = 0.512$$

Siguiendo el mismo procedimiento anteriormente explicado tenemos:

λ/η	0.30	0.20	0.15	0.12
0.30				
0.25		0.284		
0.25		0.333	0.163	
0.20				
0.10				

Determinamos el valor de $\bar{A} = 0.285$

Luego determinamos que $A_{12} = \bar{A}_{12} \left(\frac{L}{EI_0} \right) = \frac{0.285(9)}{EI_{c,2}} = \frac{2.565}{EI_{c,2}}$

PASO 4: DETERMINAMOS LOS FACTORES DE CARGA DE PRIMERA ESPECIE DEL GRAFICO.

De la tabla de factores de carga de primera especie con acatramiento recto en un extremo con carga uniformemente repartida.

Para el primer extremo determinamos:

Determinamos el valor de $\bar{A}_{10} = 0.0370$

Luego determinamos que $A_{10}^0 = \bar{A}_{10} \left(\frac{WL}{EI_0} \right) = \frac{0.037(3.3)(6)}{EI_{c,0}} = \frac{26.374}{EI_{c,0}}$

Para el segundo extremo determinamos:

Determinamos el valor de $\bar{A}_{12} = 0.0410$

Luego determinamos que $A_{12}^0 = \bar{A}_{12} \left(\frac{WL}{EI_0} \right) = \frac{0.041(2.7)(9^2)}{EI_{c,2}} = \frac{80.700}{EI_{c,2}}$

Donde:

$$EI_{c,0} = E \left(\frac{1}{12} \right) (0.40) (0.66^3) = K(3)^3 = 27K$$

$$EI_{c,2} = E \left(\frac{1}{12} \right) (0.40) (0.88^3) = K(4)^3 = 64K$$

Reemplazando todos los valores hallados en la expresión de las integrales tenemos:

$$\delta_{10} = \int_0^1 \frac{M_0 m}{EI} ds = \int_0^1 \frac{M_0 m}{EI} ds + \int_1^2 \frac{M_0 m}{EI} ds$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\delta_{10} = -984.15 \left(\frac{1.356}{27K} \right) + (9) \left(\frac{26.374}{27K} \right) - 984.15 \left(\frac{2.565}{64K} \right) + 9 \left(\frac{80.700}{64K} \right)$$

$$\delta_{10} = \frac{1097.14}{27K} - \frac{1798.04}{64K}$$

$$\delta_{11} = \frac{109.836}{27K} + \frac{207.765}{64K}$$

Luego reemplazamos en la expresión (1)

$$R_2 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \text{ entonces } R_2 = -\frac{-68,729}{7,314} = 9,397 \text{ t}$$

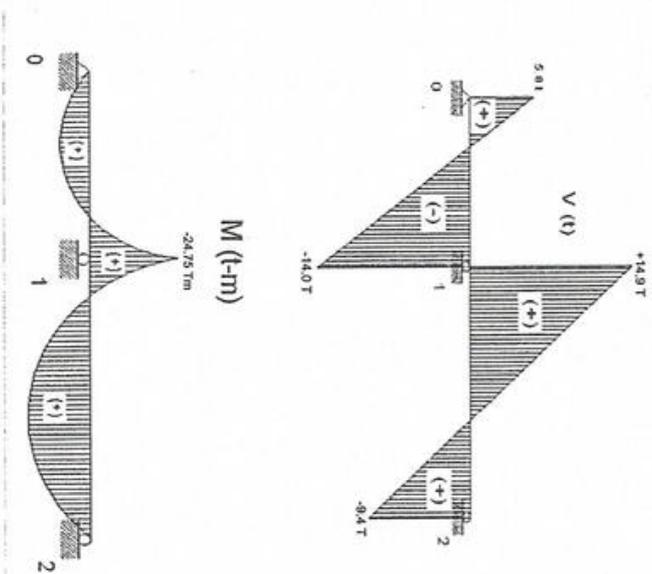
Con este valor de la reacción hallamos el resto de las reacciones.

$$M_1 = -24,75 \text{ t}$$

$$R_1 = 28,9 \text{ t}$$

$$R_0 = 5,8 \text{ t}$$

Finalmente tenemos el diagrama de cortantes y momentos flectores.



PROBLEMA VI. 14.

Resolver la viga que se muestra, para la que $EI = 1,2 \times 10^5 \text{ Tm}^2$. Los apoyos b y c son elásticos, con coeficientes 400 y 500 t/m , respectivamente.

Solución:

La estructura es hiperestática de 2º grado, considerando las reacciones x_1 y x_2 , en B y C, como las reacciones redundantes, tenemos los siguientes estados, en base a la eliminación de los apoyos en B y con el fin de isostatar la viga.

Para plantear las ecuaciones de compatibilidad (1.0) necesitamos determinarlas deflexiones $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{10}, \delta_{20}$ y las correspondientes en los asentamientos de los apoyos, o sea δ_{1a} y δ_{2a} . Para las primeras utilizaremos las tablas de Strassner (Tabla I).

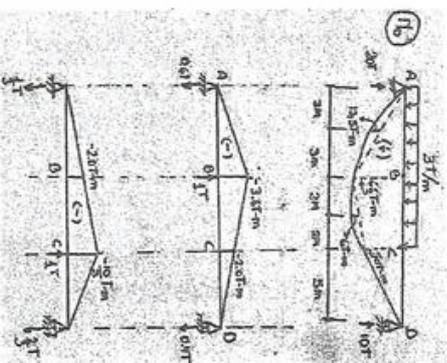
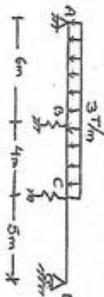
$$EI\delta_{11} = \int m_1^2 dx = \text{caso (c)(1)} = \frac{1}{3}(-3,6)^2(15,00) = +64,8$$

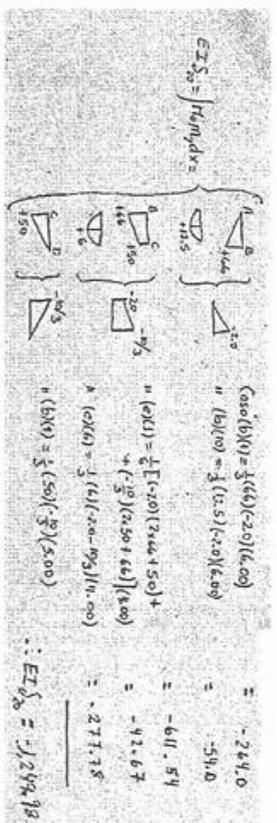
$$EI\delta_{11} = EI\delta_{21} = \int m_1 m_2 dx = \text{caso (c)(3)} = \frac{1}{63}(-3,6) \left(-\frac{10}{3}\right) \left[2 - \frac{(4,00)^2}{10,0 \times 9,0}\right] (15,00) = +18,22$$

$$EI\delta_{22} = \int m_2^2 dx = \text{caso (c)(1)} = \frac{1}{3} \left(-\frac{10}{3}\right)^2 (15,00) = +65,56$$

$EI\delta_{10} = \int r_1 \delta_1 m_1 dx =$

$\delta_{10} (b)(5) = \frac{1}{6} (16)(6)(3,6)(6,00) = -47,5,2$
 $\delta_{10} (b)(6) = \frac{1}{6} (13,5)(3,6)(6,00) = -9,7,2$
 $\delta_{10} (c)(1) = \frac{1}{6} [-3,6](3,6)(15,0)$
 $\delta_{10} (c)(2) = \frac{1}{6} (2,50)(4,4)(9,00) = -6,58,15$
 $\delta_{10} (c)(3) = \frac{1}{6} (6)(3,6)(2,0)(4,0) = -47,8$
 $\delta_{10} (c)(4) = \frac{1}{6} (5,0)(-2,0)(5,00) = -16,6,67$
 $\delta_{10} (c)(5) = -1,442,0$





Las deflexiones correspondientes a los asentamientos son:

$$\delta_{1a} = \frac{x_1}{K_B} = \frac{x_1}{400}, \text{ o sea } EI\delta_{1a} = (1.2 \times 10^5) \frac{x_1}{400} = 300x_1$$

$$\delta_{2a} = \frac{x_2}{K_C} = \frac{x_2}{500}, \text{ o sea } EI\delta_{2a} = (1.2 \times 10^5) \frac{x_2}{500} = 240x_2$$

Las ecuaciones de compatibilidad (1 G) adaptadas a este caso son:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{10} + \delta_{1a} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{20} + \delta_{2a} = 0$$

En las que multiplicando por EI, reemplazamos los valores calculados:

$$(64.8)x_1 + (18.22)x_2 - 1442.0 + 300x_1 = 0$$

$$(18.22)x_1 + (55.56)x_2 - 1249.98 + 240x_2 = 0$$

Que resolviendo dan: $x_1 = 3.75 \text{ T}$ $x_2 = 4.00 \text{ T}$

Con estos resultados podemos calcular los momentos flectores y las reacciones en los apoyos, así:

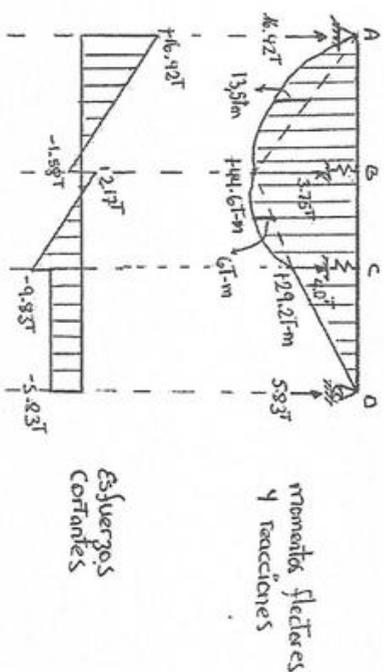
$$M_B = +66 - 3.6(3.75) - 2.0(4.00) = +44.6 \text{ Tm}$$

$$M_C = +50 - 2.0(3.75) - \frac{10}{3}(4.00) = +29.2 \text{ Tm}$$

$$R_1 = 20 \uparrow - 0.6(3.75) - \frac{1}{3}(4.00) = 16.42 \uparrow \text{ T}$$

$$R_D = 10 \uparrow - 0.4(3.75) - \frac{2}{3}(4.00) = 5.83 \uparrow \text{ T}$$

Lo que permite trazar los siguientes diagramas de momentos y de esfuerzos cortantes:

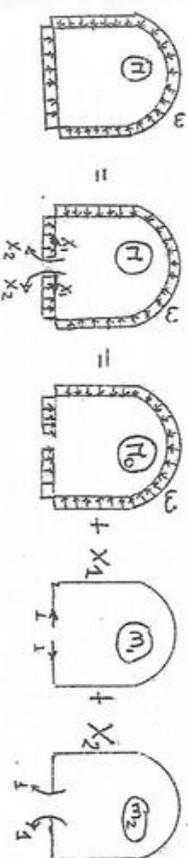


PROBLEMA VI.15.

Resolver el problema XI-9 aplicando el método de las fuerzas.

Solución:

Isostatinizamos la estructura seccionando en la sección de en medio del elemento inferior, y podemos plantear la siguiente igualdad de modelos:



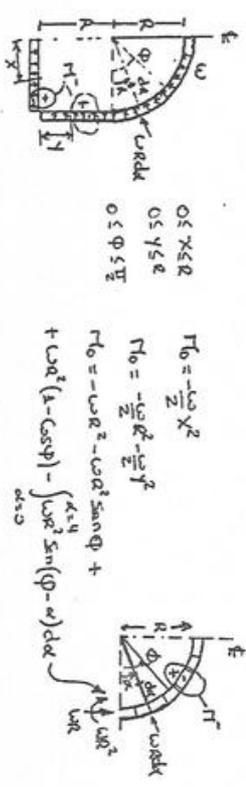
Para cualquier sección: $M = M_0 + x_1 m_1 + x_2 m_2$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

En las que prescindiendo del factor EI constante y común en todos los términos:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int M_0 m_1 ds & \delta_{20} &= \int M_0 m_2 ds & \delta_{11} &= \int m_1^2 ds & \delta_{12} &= \delta_{21} = \int m_1 m_2 ds \\ & & & & & & & & \delta_{22} &= \int m_2^2 ds \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

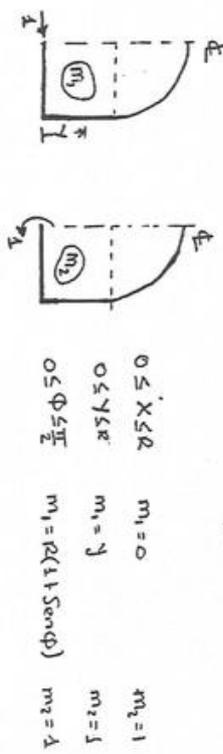


$$T_0 = -\frac{\omega R}{2} x^2$$

$$N_0 = -\frac{\omega R^2}{2} - \frac{\omega}{2} y^2$$

$$M_0 = -\omega R^2 - \omega R^2 \sin \phi + \int_{\alpha=0}^{\phi} \omega R^2 \sin(\phi - \alpha) d\alpha$$

$$= -\omega R^2 (1 + \sin \phi)$$



Reemplazando en las expresiones (ii):

$$\delta_{10} = \int M_0 m_1 ds = \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2 \right) y dy + \int_0^{\pi/2} [-\omega R^2 (1 + \sin \phi)] R (1 + \sin \phi) R d(\phi)$$

$$= -\frac{\omega R^4}{8} (19 + 6\pi)$$

$$\delta_{20} = \int M_0 m_2 ds = \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} x^2 \right) dx + \int_0^R \left(-\frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2 \right) dy + \int_0^{\pi/2} [-\omega R^2 (1 + \sin \phi)] R d(\phi)$$

$$= -\frac{\omega R^3}{6} (11 + 3\pi)$$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 ds = \int_0^R y^2 dy + \int_0^{\pi/2} [R^2 (1 + \sin \phi)^2] R d\phi = \frac{R^3}{12} (28 + 9\pi)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int m_1 m_2 ds = \int_0^R y dy + \int_0^{\pi/2} R (1 + \sin \phi) R d\phi = \frac{R^2}{2} (3 + \pi)$$

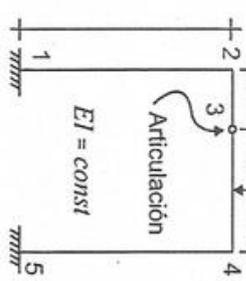
$$\delta_{12} = \int m_1^2 ds = \int_0^R dx + \int_0^R dy + \int_0^{\pi/2} R d\theta = \frac{R}{2} (4 + \pi)$$

Que llevando a las ecuaciones (i) dan:
 $(56 + 18\pi) R x_1 + (36 + 12\pi) x_2 = \omega R^2 (57 + 18\pi)$
 $(9 + 3\pi) R x_1 + (12 + 3\pi) x_2 = \omega R^2 (11 + 3\pi)$

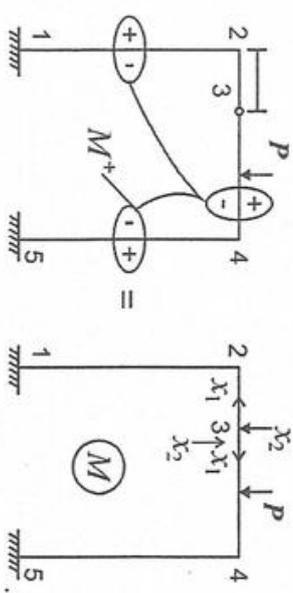
Que son respectivamente iguales a la ecuación (1^o) y (3^o) de la solución del problema XI-9, en las que M' es x_2 y N' es x_1 , lo que resta de la solución de este problema puede verse en la del indicado problema XI-9.

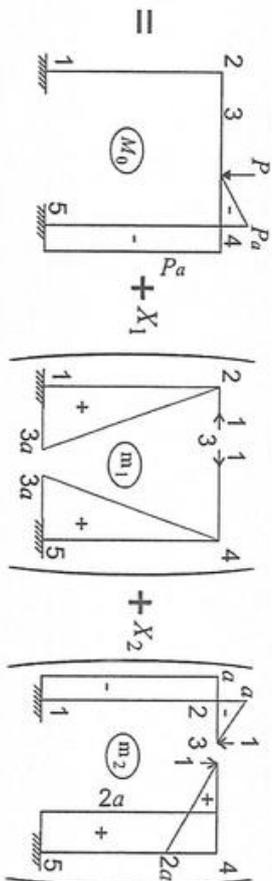
PROBLEMA VI. 16. (UNI, 6-ABR-970)

Aplicando el método de las fuerzas, resolver la estructura que se muestra problema



Solución:
 Isostaticamos la estructura eliminando la rótula, en la que están las dos incógnitas del problema: las fuerzas normales x_1 y las fuerzas transversales x_2 . Tenemos el siguiente esquema de igualdad de modelos:





Para cualquier sección de la estructura dada:

$$M = M_0 + x_1 m_1 + x_2 m_2 \quad \dots (i)$$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (ii)$$

En las que omitiendo el factor EI constante y que aparece en todos los términos de las ecuaciones, y haciendo uso de las tablas de Strassner, Hoja C-3, tenemos:

$$\delta_{10} = \int M_0 m_1 ds = \frac{1}{2} M_1 m_1 \bar{l} = \frac{1}{2} (3a) (-Pa) 3a = \frac{9}{2} Pa^3$$

$$\delta_{20} = \int M_0 m_2 ds = \frac{1}{6} (2M_1 + M_2) m_2 \bar{l} + M m \bar{l}$$

$$= \frac{1}{6} (2 \cdot 2a + a) (-Pa) a + (2a) (-Pa) 3a = -\frac{41}{6} Pa^3$$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 ds = 2 \left[\frac{1}{3} M_1 m_1 \bar{l} \right] = 2 \left[\frac{1}{3} (3a) (3a) 3a \right] = 18a^3$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int m_1 m_2 ds = \frac{1}{2} M_1 m_1 \bar{l} + \frac{1}{2} M_2 m_2 \bar{l}$$

$$= \frac{1}{2} (3a) (-a) 3a + \frac{1}{2} (3a) (2a) 3a = \frac{9}{2} a^3$$

$$\delta_{22} = \int m_2^2 ds = M m \bar{l} + \frac{1}{6} [m_1 (2M_1 - M_2) + m_2 (2M_2 - M_1)] \bar{l} + M m \bar{l}$$

$$= (-a) (-a) 3a + \frac{1}{6} [(-a) (-2a + 2a) + 2a (4a - a)] 3a + (2a) (2a) 3a = 18a^3$$

Reemplazando estas expresiones en las ec. (ii):

$$-\frac{9}{2} Pa^3 + 18a^3 x_1 + \frac{9}{2} a^3 x_2 = 0$$

$$-\frac{41}{6} Pa^3 + \frac{9}{2} a^3 x_1 + 18a^3 x_2 = 0$$

De las que, resolviendo: $x_1 = \frac{67}{405} P$ $x_2 = \frac{137}{405} P$

Los momentos en los extremos de los elementos, según (i) son:

$$M_{12} = 0 + \left(\frac{67}{405} P \right) (+3a) + \left(\frac{137}{405} P \right) (-a) = +0.158Pa$$

$$M_{23} = 0 + \left(\frac{67}{405} P \right) (0) + \left(\frac{137}{405} P \right) (-a) = -0.338Pa$$

$$M_{43} = -Pa + \left(\frac{67}{405} P \right) (0) + \left(\frac{137}{405} P \right) (+2a) = -0.324Pa$$

$$M_{54} = -Pa + \left(\frac{67}{405} P \right) (+3a) + \left(\frac{137}{405} P \right) (+2a) = +0.173Pa$$

El esfuerzo cortante en el extremo de un tramo cualquiera, en la convención de signos de análisis, es:

$$Q_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{\ell} (M_{ij} + M_{ji})$$

En este caso, asumiendo los signos de los momentos hallados a la convención de análisis, tenemos:

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{1}{3a} (+0.158Pa + 0.338Pa) = -0.165P$$

$$Q_{24} = +\frac{1}{3} P - \frac{1}{3a} (-0.338Pa + 0.324Pa) = +0.338P$$

$$Q_{42} = -\frac{2}{3} P - \frac{1}{3a} (-0.338Pa + 0.324Pa) = -0.662P$$

$$Q_{45} = Q_{54} = 0 - \frac{1}{3a} (-0.324Pa - 0.173Pa) = +0.165P$$

CAPÍTULO VII

TEOREMA DE MENABREA

TEOREMA DE MENABREA, también denominado Segundo teorema de Castigliano, o Teorema del trabajo mínimo:

En una estructura hiperestática, si no hay movimiento de los apoyos y ningún cambio de temperatura, es decir sometida solamente a fuerzas exteriores de valores dados, las incógnitas redundantes son tales que hacen mínimo el trabajo de la deformación elástica.

Si X_1, X_2, \dots, X_n son las incógnitas redundantes, la condición de mínimo hace que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} = 0 ; \quad \dots ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_n} = 0 \quad \dots \dots (1H)$$

Este teorema proporciona ecuaciones adicionales a las de equilibrio estático; lo que, en general, permite resolver todo tipo de estructuras hiperestáticas.

PROBLEMA VII.1.

Resolver el problema VI-1 aplicando el teorema de menabrea.

Solución:

Consideramos como incógnita la reacción R en el apoyo B. El trabajo de la deformación elástica, considerando solo los efectos de la flexión:

$$\tau = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds$$

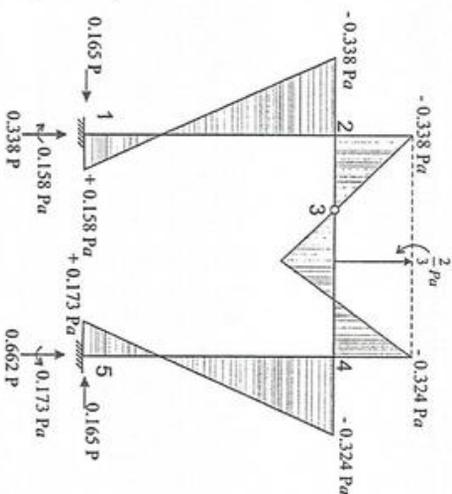
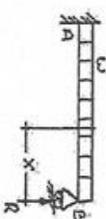


Diagrama de

Momentos

Flectores

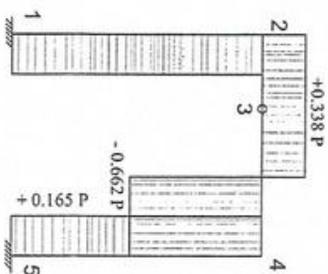


Diagrama de

Esfuerzos

Cortantes

Donde:

$$M = Rx - \frac{w}{2} x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial R} = x$$

Según el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial R} = 0; \text{ sea que } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0$$

CAPÍTULO VII

TEOREMA DE MENABREA

TEOREMA DE MENABREA, también denominado Segundo teorema de Castigliano, o Teorema del trabajo mínimo:

En una estructura hiperestática, si no hay movimiento de los apoyos y ningún cambio de temperatura, es decir sometida solamente a fuerzas exteriores de valores dados, las incógnitas redundantes son tales que hacen mínimo el trabajo de la deformación elástica.

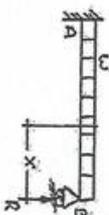
Si X_1, X_2, \dots, X_n son las incógnitas redundantes, la condición de mínimo hace que:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 ; \quad \dots ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_n} = 0 \quad \dots (1H)$$

Este teorema proporciona ecuaciones adicionales a las de equilibrio estático; lo que, en general, permite resolver todo tipo de estructuras hiperestáticas.

PROBLEMA VIII.1.

Resolver el problema VI-1 aplicando el teorema de menabrea.



Solución:

Consideramos como incógnita la reacción R en el apoyo B. El trabajo de la deformación elástica, considerando solo los efectos de la flexión:

$$\tau = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds$$

Según el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial R} = 0; \text{ sea que } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0$$

Donde:

$$M = Rx - \frac{q}{2} x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial R} = x$$

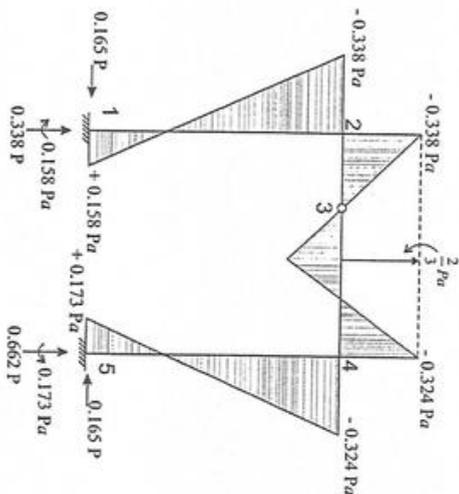


Diagrama de

Momentos

Fletores

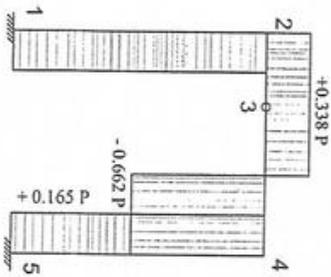


Diagrama de

Esfuerzos

Cortantes

Luego reemplazando estas expresiones:

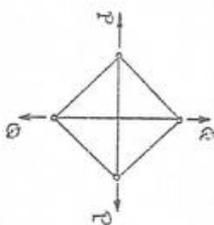
$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = \int_0^l \left(Rx - \frac{\omega}{2} x^2 \right) (x) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3} Rx^3 - \frac{1}{8} \omega x^4 \right]_0^l = 0 \rightarrow R = \frac{3}{8} \omega l$$

La solución del problema continuaria tal como aparece en el VI-1.

PROBLEMA VII.2.

La estructura de barras que se muestra está sujeta a la acción de las fuerzas P y Q iguales dos a dos. La sección y el modulo de elasticidad son los mismos para todas las barras. Determinar las expresiones de los esfuerzos en las barras.



Solución:
Consideremos como incógnita redundante el esfuerzo en las barras exteriores: $S_1 = x$. Debemos determinar los esfuerzos S_2 y S_3 en función de x . Suponiendo que todos estos esfuerzos son de compresión (+), por equilibrio de los nudos B y C tenemos:

En B: $Q - 2x \cos 45 - S_3 = 0 \rightarrow S_3 = Q - \sqrt{2}x \rightarrow \frac{\partial S_3}{\partial x} = -\sqrt{2}$

En C: $P + 2x \cos 45 - S_2 = 0 \rightarrow S_2 = -P - \sqrt{2}x \rightarrow \frac{\partial S_2}{\partial x} = -\sqrt{2}$ (1)

El trabajo de la deformación elástica en toda la estructura es:

$$\tau = \sum \frac{N^2 l}{2E\Omega} = \frac{1}{2E\Omega} [4x^2 l + S_2^2 (\sqrt{2}l) + S_3^2 (\sqrt{2}l)]$$

Derivando con respecto a x , y de acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{2E\Omega} [8xl + 2\sqrt{2}lS_2 \frac{\partial S_2}{\partial x} + 2\sqrt{2}lS_3 \frac{\partial S_3}{\partial x}] = 0$$

Reemplazando las expresiones (1):

$$4x + \sqrt{2}(-P - \sqrt{2}x)(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(Q - \sqrt{2}x)(-\sqrt{2}) = 0$$

De donde:

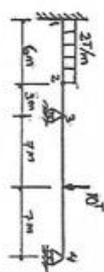
$$x = \frac{Q-P}{2(1+\sqrt{2})} \quad \therefore S_1 = \frac{Q-P}{2(1+\sqrt{2})}$$

Reemplazando este resultado en (1) se tienen:

$$S_2 = -\frac{P(1+\sqrt{2})+Q}{2+\sqrt{2}} \quad S_3 = \frac{P+Q(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$$

PROBLEMA VII.3. (UNI, 29-OCT-1951)

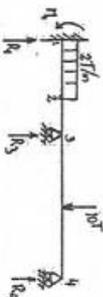
Determinar el valor del momento de empotramiento de la estructura mostrada, considerando que I es constante a lo largo de toda ella y que en 2 hay una articulación.



Solución:

De acuerdo con el Teorema de Menabrea, tomando M_1 como incógnita hiperestática (supuesto M_1 como negativo):

$$\frac{\partial \tau}{\partial M_1} = 0 \rightarrow \therefore \int M \frac{\partial \tau}{\partial M_1} ds = 0 \text{ ya que EI es constante en } \tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$



Pongamos las otras incógnitas R_1, R_3, R_4 en función de M_1 :

1) $M_{r2} = 0: R_3(3) + R_4(17) - 10(10) = 0 \rightarrow \therefore R_3 = \frac{100}{3} - \frac{17}{3} R_4$ (1)

2) $\sum M_2 = 0: R_1(6) - M_1 - 12(3) = 0 \rightarrow \therefore R_1 = \frac{1}{6} M_1 + 6$ (2)

3) $\sum F_v = 0: R_1 + R_3 + R_4 - 12 - 10 = 0$ (3)

Entre estas igualdades se tienen:

$$R_1 = \frac{1}{6} M_1 + 6 \rightarrow \therefore \frac{\partial R_1}{\partial M_1} = \frac{1}{6}$$

$$R_3 = -\frac{17}{84} M_1 + \frac{86}{7} \rightarrow \therefore \frac{\partial R_3}{\partial M_1} = -\frac{17}{84}$$

$$R_4 = \frac{1}{28} M_1 + \frac{26}{7} \rightarrow \therefore \frac{\partial R_4}{\partial M_1} = \frac{1}{28}$$

as expresiones de los momentos flectores en los diversos tramos son:

Tramo 12: $0 \leq x \leq 6 \text{ m}$ $M = -M_1 + R_1 x - x^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_1} = -1 + x \frac{\partial R_1}{\partial M_1} = -1 + \frac{x}{6}$

Tramo 23: $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$ $M = (R_1 - 12)x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{6}$

Tramo 43: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \text{ m} & M = R_4 x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{28} \\ 7 \leq x \leq 14 \text{ m} & M = R_4 x - 10(x-7) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{28} \end{cases}$

emplazando estas expresiones en: $\int M \frac{\partial M}{\partial M_1} ds = 0$, tenemos:

$$\int_0^6 (-M_1 + R_1 x - x^2) \left(-1 + \frac{x}{6}\right) dx + \int_0^3 (R_1 - 12) \frac{x^2}{6} dx + \int_0^7 R_4 \frac{x^2}{28} dx + \int_7^{14} [R_4 x - 10(x-7)] \frac{x^2}{28} dx = 0$$

e la que, integrando y reemplazando R_1 y R_4 en función de M_1 , se obtiene finalmente:

$$M_1 = \frac{651}{287} = 2.268 \quad \therefore M_1 = 2.27 \text{ Tm}$$

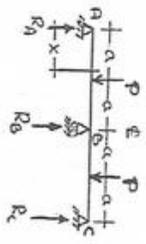
momento negativo (el resultado de la ecuaciones positivo) conforme se había supuesto. Para una solución más completa de este problema, véase el problema XIII.7)

PROBLEMA VII.4.

resolver el problema VI-2 aplicando el teorema de Menabrea.

solución: por simetría y considerando como incógnita hiperestática la reacción R_c , $R_1 = R_c = Y$. El trabajo de la deformación elástica es:

$$\tau = \int_{(A)}^{(C)} \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M^2 dx$$

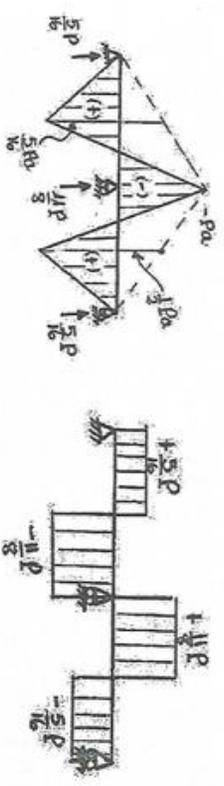


Aplicando el Teorema de Menabrea: $\int_{(A)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial Y} dx = 0 \dots \dots (1)$

Donde: $0 \leq x \leq a: M = Yx \rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = x$
 $a \leq x \leq 2a: M = Yx - P(x-a) = (Y-P)x + Pa \rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = x$

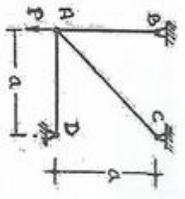
Que llevando a (1), da: $\int_0^a (Yx)(x) dx + \int_a^{2a} [(Y-P)x + Pa](x) dx = 0 \rightarrow \therefore Y = \frac{5P}{16}$

Por: $\sum F_y = 0: 2R_A + R_B - 2P = 0 \rightarrow \therefore R_B = \frac{11}{8} P \uparrow$



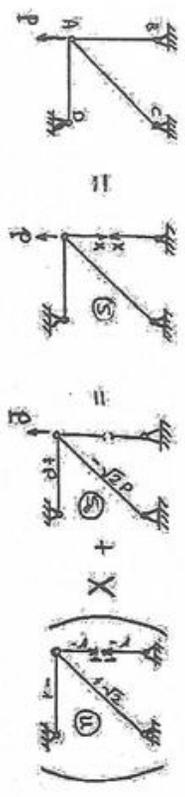
PROBLEMA VII.5. (UNI,11-FEB-1966)

En la estructura de la figura, todas las barras son del mismo material y de la misma sección transversal. Determinar las reacciones en B, C y D.



Solución: La estructura es hiperestática de primer grado. Consideremos como incógnita hiperestática el esfuerzo en la barra AB. Podemos analizar la estructura cortando la barra AB y suponiendo efectos así:

$$S = S_0 + XU \dots \dots (1)$$



Según el Teorema de Menabrea: $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$

Siendo: $r = \sum \frac{S^2 l}{2E\Omega}$ donde $E\Omega = \text{constante}$

o sea: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum \frac{S^2 l}{2E\Omega} \right) = \frac{1}{E\Omega} \sum S \frac{\partial S}{\partial x} l = 0$

$$\therefore \sum S \frac{\partial S}{\partial x} l = 0 \dots \dots (2)$$

Podemos trabajar según la siguiente tabulación:

Elem.	l	S	$\frac{\partial S}{\partial x}$	$S \frac{\partial S}{\partial x} l$	$\therefore S$
AB	a	x	1	ax	0.739 P (TRACCION)
AC	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}(x-P)$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}a(x-P)$	0.293 P (TRACCION)
AD	a	P-x	-1	$-a(P-x)$	0.207 P (COMPRESION)

$$\sum S \frac{\partial S}{\partial x} l = ax + 2\sqrt{2}a(x-P) - a(P-x) = 0 \rightarrow \therefore x = 0.793 P$$

Las reacciones son colineales con los esfuerzos en las barras, luego:

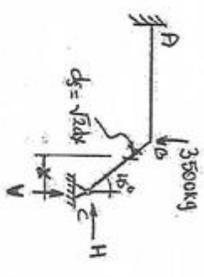
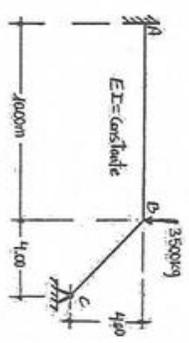
$$R_B = 0.793 P \uparrow \quad R_C = 0.293 P \nearrow \quad R_D = 0.207 P \leftarrow$$

PROBLEMA VIII.6. FIUC,22-SET-1949)

Resolver la viga mostrada.

Solución:

Consideremos como incógnitas hiperestáticas, las dos componentes (horizontal H, vertical V) de la reacción en C.



El trabajo de la deformación elástica es:

$$r = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2EI} ds + \int_{(B)}^{(C)} \frac{M^2}{2EI} \sqrt{2} dx + \int_{(C)}^{(D)} \frac{M^2}{2EI} dx$$

De la que según el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = 0 : \sqrt{2} \int_{(C)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial v} dx + \int_{(B)}^{(A)} M \frac{\partial M}{\partial v} dx = 0 \dots (i)$$

$$\frac{\partial r}{\partial H} = 0 : \sqrt{2} \int_{(C)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int_{(B)}^{(A)} M \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0 \dots (ii)$$

En las que:

$$CB : 0 \leq x \leq 4m \quad M = Vx - Hx \rightarrow \frac{\partial M}{\partial v} = x \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -x$$

$$BA : 4 \leq x \leq 14m \quad M = Vx - 4H - 3500(x-4) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial v} = x \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -4$$

Llevando estas expresiones a (i) y (ii), tenemos:

$$(i): \sqrt{2} \int_0^4 (vx - Hx)(x) dx + \int_4^{14} [vx - 4H - 3500(x-4)](x) dx = 0$$

$$v(2680 + 64\sqrt{2}) - H(1080 + 64\sqrt{2}) = 5600000 \dots \dots (iii)$$

$$(ii): \sqrt{2} \int_0^4 (vx - Hx)(-x) dx + \int_4^{14} [vx - 4H - 3500(x-4)](-4) dx = 0$$

$$v(270 + 16\sqrt{2}) - H(120 + 16\sqrt{2}) = 525000 \dots \dots (iv)$$

Resolviendo entre (iii) y (iv) se obtienen:

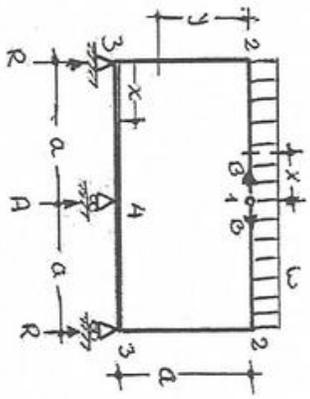
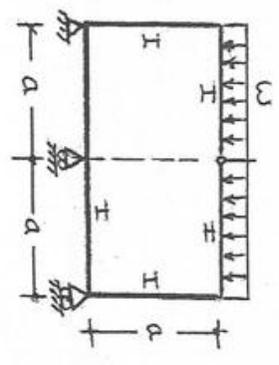
$$H = 3500 \text{ Kg } \leftarrow$$

$$v = 3500 \text{ Kg } \uparrow$$

Este resultado hace ver que la viga no trabaja a flexión, ni a esfuerzo cortante; solamente trabaja con esfuerzo normal. Al ser la componente V de la reacción igual en valor y de sentido opuesto a la carga aplicada, la componente vertical de la reacción en A tiene que ser cero.

PROBLEMA VII.7. (UNI,13-DIC-1967)

La estructura que se muestra es un marco cerrado, de sección constante, con una articulación en el punto medio del elemento superior. Considerando solo los efectos de la flexión, determinar la distribución de los momentos flectores. Para la solución se empleará el teorema de Menabrea.



$$\sum F_v = 0 : 2R + A = \omega(2a) \rightarrow \therefore R = \omega a - \frac{A}{2}$$

$$\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

Por el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial A} = 0 : \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial A} ds = 0 \quad \dots (1)$$

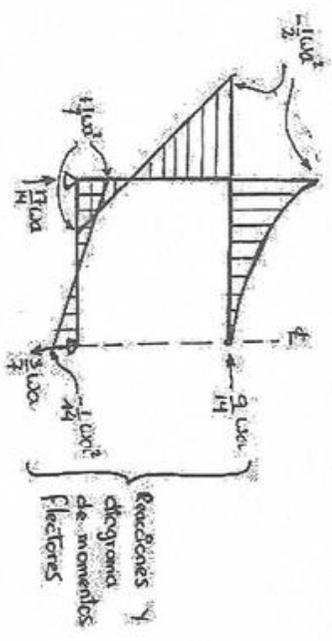
$$\frac{\partial \tau}{\partial B} = 0 : \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial B} ds = 0 \quad \dots (2)$$

Tramo	Variable		M	$\frac{\partial M}{\partial A}$	$\frac{\partial M}{\partial B}$
	Orig.	Interv.			
12	1	$0 \leq x \leq a$	$-\frac{1}{2} \omega x^2$	0	0
23	2	$0 \leq y \leq a$	$-\frac{1}{2} \omega a^2 + By$	0	y
34	3	$0 \leq x \leq a$	$-\omega a \left(\frac{a}{2} - x\right) + Ba - Rx = -\frac{1}{2} \omega a^2 + Ba - \frac{1}{2} Ax$	$\frac{x}{2}$	a

$$(1) : \int_0^a \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 + Ba - \frac{1}{2} Ax \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx \rightarrow 2A + 6B = 3\omega a \quad \dots (3)$$

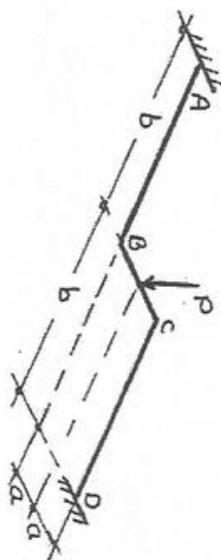
$$(2) : \int_0^a \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 + By \right) (y) dy + \int_0^a \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 + Ba - \frac{1}{2} Ax \right) (a) dx = 0 \rightarrow 3A + 16B = 9\omega a \dots (4)$$

$$\text{De (3) y (4): } A = \frac{3}{7} \omega a \quad ; \quad B = \frac{9}{14} \omega a \quad \leftarrow (\text{compresion})$$

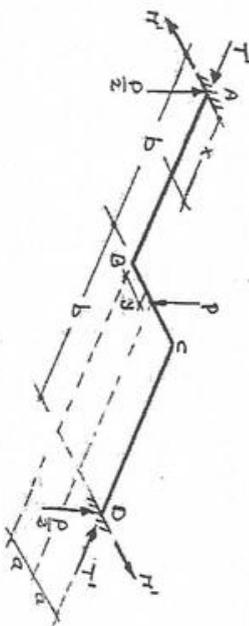


PROBLEMA VII.8. UNI,20-ENE-1969)

La estructura que se muestra es de sección constante, ubicada en un plano horizontal, perfectamente empotrada en sus extremos; está sujeta a la acción de la carga vertical P , determinar las reacciones (pares y fuerzas) en los empotramientos, prescindiendo los efectos del cortante.



Solución:
En el esquema se muestra el sistema de fuerzas y pares acciones y reacciones en la estructura. Por simetría en ambos apoyos se generan reacciones verticales iguales entre sí, e iguales a $P/2$. Se generan también los pares reacción en los empotramientos: M' (flexión) y T' (torsión), que son nuestras incógnitas hiperestáticas.



De acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$1) \frac{\partial \tau}{\partial M'} = 0 \quad y \quad 2) \frac{\partial \tau}{\partial T'} = 0$$

Siendo:

$$\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_0} ds$$

En la que:

		$\frac{\partial M}{\partial M'}$	$\frac{\partial M}{\partial T'}$	$\frac{\partial M_c}{\partial M'}$	$\frac{\partial M_c}{\partial T'}$
Para el tramo AB: $0 \leq x \leq b$	$M = -M' + \frac{P}{2}x \rightarrow$ $M_t = T' \rightarrow$	-1	0	0	1
Para el tramo BC: $0 \leq y \leq a$	$M = -T' + \frac{P}{2}y \rightarrow$ $M_t = -M + \frac{P}{2}b \rightarrow$	0	-1	-1	0

Entonces:

$$1) \frac{\partial \tau}{\partial M'} = \frac{2}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial M'} ds + \frac{2}{GI_0} \int_{(A)}^{(C)} M_t \frac{\partial M_t}{\partial M'} ds = 0$$

$$\frac{2}{EI} \int_0^b \left(-M' + \frac{P}{2}x \right) (-1) dx + \frac{2}{GI_0} \int_0^a \left(-M' + \frac{P}{2}b \right) (-1) dy = 0$$

$$M' = \frac{Pb(b + 2ea)}{4(b + ea)}$$

siendo: $\epsilon = \frac{EI}{GI_0}$

$$2) \frac{\partial \tau}{\partial T'} = \frac{2}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M \frac{\partial M}{\partial T'} ds + \frac{2}{GI_0} \int_{(A)}^{(C)} M_t \frac{\partial M_t}{\partial T'} ds = 0$$

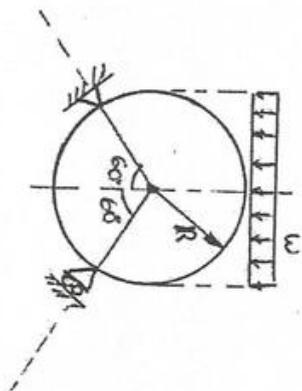
$$\frac{2}{EI} \int_0^a \left(-T' + \frac{P}{2}y \right) (-1) dy + \frac{2}{GI_0} \int_0^b \left(T' \right) (1) dx = 0$$

$$T' = \frac{Pa^2}{4(a + eb)}$$

Los resultados son positivos por consiguiente, los pares reacción son de los sentidos considerados en el esquema.

PROBLEMA VI.9. (UNI,17-FEB-1968)

Resolver el anillo que se muestra, sujeto a la acción de una carga uniformemente repartida ω en todo el diámetro.



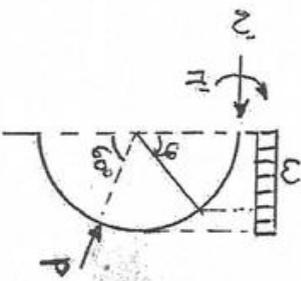
Solución:

Por simetría, en el extremo superior del anillo, el cortante $Q' = 0$.

En general $M = M' + N'R(1 - \cos \varphi) + M_e \dots (1)$

Siendo M_e el momento de todas las fuerzas externas.

$$\sum F_y = 0 : 2p \cos 60 = 2\omega R \rightarrow p = 2\omega R$$



Por el Teorema de Menabrea:

$$a) \frac{\partial T}{\partial M} = 0, \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial}{\partial M} \left[2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \frac{2R}{EI} \int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial M} d\varphi = 0 \quad \dots \dots (2)$$

$$b) \frac{\partial T}{\partial N} = 0, \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial}{\partial N} \left[2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{M^2}{2EI} ds \right] = \frac{2R}{EI} \int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial N} d\varphi = 0 \quad \dots \dots (3)$$

De (1):

$$\frac{\partial M}{\partial M} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial N} = R(1 - \cos \varphi)$$

Que llevando a (2) y (3) dan:

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = 0 \quad \dots \dots (2')$$

$$\int_0^{\pi} M(1 - \cos \varphi) d\varphi = 0 \rightarrow \int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = 0 \quad \dots \dots (3')$$

Reemplazando (1) en (2') y (3'):

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = \int_0^{\pi} [M' + N'R(1 - \cos \varphi) + M_e] d\varphi = 0 \rightarrow M' + N'R$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_e d\varphi \quad \dots \dots (4)$$

$$\int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} [M' + N'R(1 - \cos \varphi) + M_e] \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$\rightarrow N' = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\pi} M_e \cos \varphi d\varphi \quad \dots (5)$$

Expresiones para M_e :

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} : M_e = -[\omega(R \operatorname{sen} \varphi)] \frac{R \operatorname{sen} \varphi}{2} = -\frac{1}{2} \omega R^2 (\operatorname{sen} \varphi)^2$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3} : M_e = -(\omega R) \left(R \operatorname{sen} \varphi - \frac{R}{2} \right) = -\frac{1}{2} \omega R^2 (2 \operatorname{sen} \varphi - 1)$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi : M_e = -\frac{\omega R^2}{2} (2 \operatorname{sen} \varphi - 1) - \rho [R \operatorname{sen}(\varphi - 120^\circ)]$$

$$= -\frac{\omega R^2}{2} (2 \operatorname{sen} \varphi - 1) - 2\omega R^2 \operatorname{sen} \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Que reemplazando las en las integrales de (4) y (5), se tienen:

$$\int_0^\pi M_e d\varphi = -\frac{\omega R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi - \frac{\omega R^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (2 \operatorname{sen} \varphi - 1) d\varphi - 2\omega R^2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \operatorname{sen} \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) d\varphi$$

$$= -1.607 \omega R^2$$

$$\int_0^\pi M_e \cos \varphi d\varphi = -\frac{\omega R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi - \frac{\omega R^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (2 \operatorname{sen} \varphi - 1) \cos \varphi d\varphi$$

$$-2\omega R^2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \operatorname{sen} \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \varphi d\varphi = +0.742 \omega R^2$$

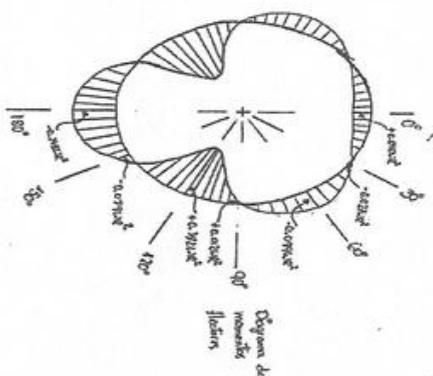
Llevando estos resultados a las expresiones (5) y (4) obtenemos:

$$(5): \quad N' = \frac{2}{\pi R} (+0.742 \omega R^2) = +0.472 \omega R \quad \therefore N' = 0.472 \omega R \rightarrow$$

$$(4)': \quad M' + 0.472 \omega R^2 = -\frac{1}{\pi} (-1.607 \omega R^2) = +0.512 \omega R^2 \quad \therefore M' = +0.04 \omega R^2 \quad \cup$$

El esfuerzo normal N' y par M' son de los sentidos opuestos inicialmente.

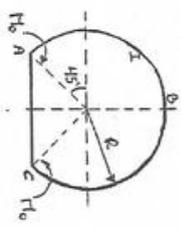
Reemplazando estos resultados y las expresiones de M_e , obtenemos para los momentos flexores:



Intervalo	M	Coeficiente de ωR^2 para φ						
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$-\omega R^2 (0.812 - 0.472 \operatorname{sen} \varphi + 0.5 (\cos \varphi)^2) \omega R^2$	+0.810	-0.021	-0.099	+0.012			
$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$	$-\omega R^2 (1.012 - 0.472 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \omega R^2$				+0.012	+0.312		
$\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$	$-\omega R^2 (1.012 + 1.236 \operatorname{sen} \varphi) \omega R^2$					+0.312	-0.07	-2.218

PROBLEMA VII.10 (UNI.21-OCT-1968)

El esquema muestra una estructura de fuselaje, con uniones rígidas en A y C, en la que $I_{AC} = 5I$, $I_{BC} = I$, considerando únicamente los efectos de la flexión, resolver esta estructura. se trazará, finalmente, en forma esquemática los diagramas de momentos flectores y de los esfuerzos cortantes.



Solución:

Por simetría física y de carga, en la sección B solo hay flexión y esfuerzo normal; el cortante allí es nulo. Tomaremos como incógnitas hiperestáticas N' y M' en la sección B.

De acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial r}{\partial M'} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial r}{\partial N'} = 0$$

Siendo $r = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

o sea que $\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} ds = 0 \quad \dots \dots (1)$

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial N'} ds = 0 \quad \dots \dots (2)$$

Para $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$: $M = M' + N'R(1 - \cos \varphi) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N'} = R(1 - \cos \varphi)$
 $ds = R d\varphi$

Para $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}R}{2}$: $M = M' - M_0 + N'R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N'} = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $ds = dx$

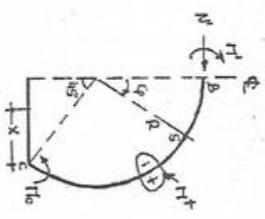
Reemplazando en las ecuaciones (1) y (2):

(1): $\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [M' + N'R(1 - \cos \varphi)](1)R d\varphi + \frac{1}{E(5I)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} [M' - M_0 + N'R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)] (1) dx = 0$

$$\therefore M' \left(\frac{15\pi}{2} + \sqrt{2}\right) + N'R \left(\frac{15\pi}{2} - 4\sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2}M_0 \quad \dots (1')$$

(2): $\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [M' + N'R(1 - \cos \varphi)] [R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi$

$$+ \frac{1}{E(5I)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} [M' - M_0 + N'R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)] [R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)] dx = 0$$



$$\therefore M' \left(\frac{15\pi}{2} - 4\sqrt{2} + 1\right) + N'R \left(\frac{45\pi}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = (1 + \sqrt{2})M_0 \quad \dots (2')$$

Resolviendo entre las ec. (1') y (2') se obtienen:

$N' = 0.158 \frac{M_0}{R}$ (compresion) y $M' = -0.063M_0$ (sentido del par \cup)

Reemplazando estos resultados en las expresiones de los momentos flectores, tenemos:

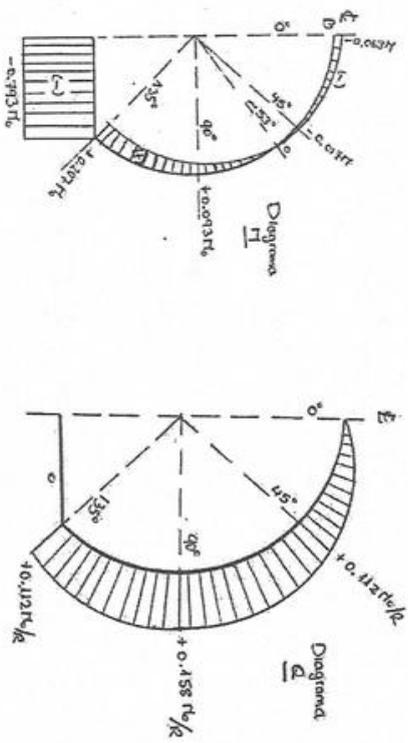
$0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, $M = (0.095 - 0.15 \cos \varphi)M_0$

y como $Q = \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$, siendo: $\frac{dM}{d\varphi} = (0.158 \cos \varphi)M_0$ y $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$

$\therefore Q = (0.158 \cos \varphi) \frac{M_0}{R}$

En las que:

φ	M	Q
0	-0.063M ₀	0
45°	-0.017M ₀	+0.112 $\frac{M_0}{R}$
90°	+0.095M ₀	+0.158 $\frac{M_0}{R}$
135°	+0.207M ₀	+0.112 $\frac{M_0}{R}$

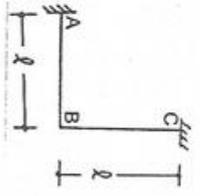
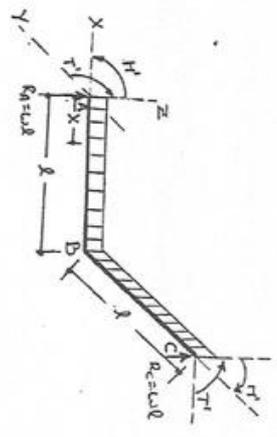


$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}R}{2}$: $M = -0.793M_0$ (constante) y $Q = 0$

PROBLEMA VII.11. (UNI,11-FEB-1966)

La barra ABC, empotrada en A y en C, con sección transversal circular de diámetro d , se encuentra en un plano horizontal. En toda su longitud actúa una carga vertical uniformemente distribuida ω . determinar las fuerzas y pares reacción en A y C.

Solución:



Por simetría ($\sum F_x = 0$):

$$R_A = R_C = \omega l$$

$$\sum M_{Az} = 0: M' + (\omega l) \frac{l}{2} - R_C(l) + T' = 0$$

$$\therefore T' = \frac{1}{2} \omega l^2 - M' \dots \dots (1)$$

$$0 \leq x \leq l: \begin{cases} M = -M' + \omega l x - \frac{1}{2} \omega x^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M'} = -1 \\ M_C = T' = \frac{1}{2} \omega l^2 - M' \rightarrow \frac{\partial M}{\partial M'} = -1 \end{cases}$$

Según el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial r}{\partial M'} = 0$$

donde:
$$r = 2 \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + 2 \int_0^l \frac{M_C^2}{2GI_C} dx$$

o sea:
$$\frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \frac{1}{GI_0} \int_0^l M_C \frac{\partial M_C}{\partial M'} dx = 0$$

Haciendo $\epsilon = \frac{GI_0}{EI}$, y reemplazando expresiones en esta ecuación tenemos:

$$\epsilon \int_0^l \left(-M' + \omega l x - \frac{1}{2} \omega x^2 \right) (-1) dx + \int_0^l \left(\frac{1}{2} \omega l^2 - M' \right) (-1) dx = 0$$

$$\epsilon \left[-M' x - \frac{1}{2} \omega l x^2 + \frac{1}{6} \omega x^3 \right]_0^l + \left[(M' - \frac{1}{2} \omega l^2) x \right]_0^l = \epsilon \left(M' l - \frac{1}{3} \omega l^3 \right) + \left(M' - \frac{1}{2} \omega l^2 \right) l = 0$$

De donde:

$$M' = \frac{\omega l^2 2\epsilon + 3}{6 \epsilon + 1}$$

Y reemplazando en (1):

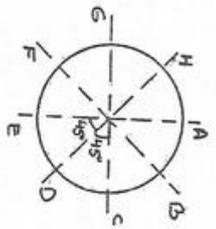
$$T' = \frac{\omega l^2 \epsilon}{6 \epsilon + 1}$$

Para el caso dado de sección transversal circular, $I_0 = 2I$ y entonces $\epsilon = 2G/E$. Luego:

$$M' = \frac{\omega l^2 3E + 4G}{6 E + 2G} \quad T' = \frac{\omega l^2 2G}{6 E + 2G}$$

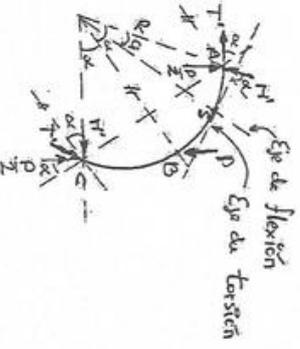
PROBLEMA VII.12. (UNI,20-ENE-1969)

La estructura que se muestra es un anillo circular de radio R, ubicado en un plano horizontal, con apoyos simples en A, C, E y G; sujeto a la acción de 4 cargas verticales concentradas en B, D, F y H, cada una de valor P. considerando solo los efectos de la flexión y de la torsión, determinar las expresiones de la flexión y de la torsión en sus diversas secciones. Para toda la estructura, EI y GI₀ son constantes.



Solución:

Por la simetría existente, el tramo AC lo tomamos como el característico; en los apoyos A y C no se producirán deformaciones angulares; por consiguiente, lo debemos considerar como empotramientos perfectos en esos apoyos. Resolvamos el caso más general, con semi ángulo central α mostrado en el esquema. Nuestras incógnitas hiperestáticas son los pares M' y T' en los apoyos. Podemos relacionar entre sí estas incógnitas, planteando la ecuación de que es cero la suma de los momentos respecto del eje AC.



$$2M' \sin \alpha - 2T' \cos \alpha - PR(1 - \cos \alpha) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

De acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial T'} = 0$$

donde: $\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{M_t^2}{2GI_0} ds$; haciendo $\frac{EI}{GI_0} = \epsilon$, tendremos:

$$\int M \frac{\partial M}{\partial T'} R d\varphi + \epsilon \int M_t \frac{\partial M_t}{\partial T'} R d\varphi = 0, \text{ o sea } \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial T'} d\varphi + \epsilon \int_0^\alpha M_t \frac{\partial M_t}{\partial T'} d\varphi = 0 \dots (2)$$

En la que:

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{2} R \sin \varphi - M' \cos \varphi - T' \sin \varphi & \rightarrow \frac{\partial M}{\partial T'} &= -\sin \varphi \\ M_t &= \frac{P}{2} R (1 - \cos \varphi) - M' \sin \varphi + T' \cos \varphi & \rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial T'} &= \cos \varphi \end{aligned} \dots (3)$$

Reemplazando en la ecuación (2):

$$\int_0^\alpha \left(\frac{PR}{2} \sin \varphi - M' \cos \varphi - T' \sin \varphi \right) (-\sin \varphi) d\varphi + \epsilon \int_0^\alpha \left(\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) - M' \sin \varphi + T' \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi = 0$$

O de la que:

$$2M'(1 - \epsilon)(\sin \alpha)^2 + T'[2\alpha(1 + \epsilon) - (1 - \epsilon)\sin 2\alpha] = PR \left[\alpha(1 + \epsilon) - \frac{1}{2}(1 - \epsilon)\sin 2\alpha - 2\epsilon \sin \alpha \right]$$

Reemplazando en esta expresión la de M' despejado de (1), obtenemos:

$$T' = \frac{PR}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \dots (4)$$

Lo que llevando a (1), da: $M' = \frac{PR}{2} \left(\csc \alpha - \frac{\cos \alpha}{\alpha} \right) \dots (5)$

Llevando (4) y (5) a la expresión (3), tenemos las variaciones de los momentos flectores y de los de torsión:

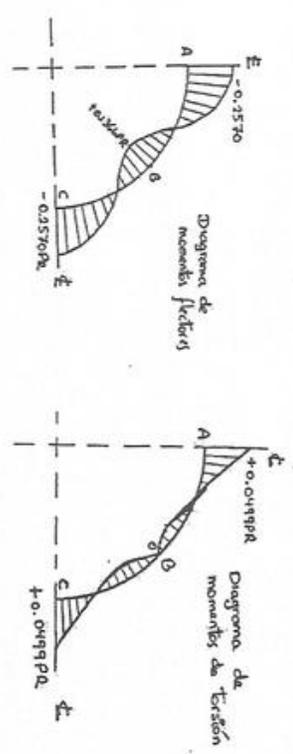
$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{PR}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right] \\ M_t &= \frac{PR}{2} \left[1 - \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\alpha} - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right] \end{aligned} \right\} \text{ validas para } 0 \leq \varphi \leq \alpha$$

En el caso particular que se nos ha dado $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$; así tendremos:

$$\begin{aligned} M &= \frac{PR}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \varphi) - \sqrt{2} \cos \varphi \right] \\ M_t &= \frac{PR}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(45^\circ - \varphi) - \sqrt{2} \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

Que son las expresiones solicitadas. Dando valores a φ entre 0 y 45° , tenemos los siguientes valores para los momentos:

φ	M	M_t
0	-0.2570 PR	+0.0499 PR
15°	-0.1317 PR	-0.0013 PR
30°	+0.0026 PR	-0.0183 PR
45°	+0.1366 PR	0



PROBLEMA VII.13. (UNI, 10-DIC-1955)
Resolver el problema VI-12 aplicando el teorema de Menabrea.

Solución:

Para la estructura dada, según el Teorema de Menabrea:

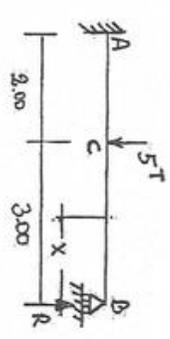
Siendo: $\frac{\partial \tau}{\partial R} = 0$

siendo: $\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

o sea que: $\int_{(A)}^{(B)} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} ds = 0$

donde: $I = \frac{1}{12} ah^3$ y E es constante. Eliminando los factores comunes tenemos:

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{M}{h^2} \frac{\partial M}{\partial R} ds \approx \sum_{(A)}^{(B)} \frac{M}{h} \frac{\partial M}{\partial R} \Delta s = 0 \dots (1)$$



Donde:

$$0 \leq x \leq 3.00 \text{ m}, M = Rx \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$$

$$3.00 \leq x \leq 5.00 \text{ m}, M = Rx - 5(x-3) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$$

Y dividiendo la longitud de la viga en 10 partes iguales, o sea: $\Delta s = \frac{5\text{m}}{10} = 0.50\text{m}$, podemos escribir la expresión (1) así:

$$\sum_{x=0}^{(C)} \frac{\partial M}{\partial R} + \sum_{x=3}^{(A)} \frac{\partial M}{\partial R} = 0 \quad \sum_{x=0}^3 \frac{Rx}{h^3} x + \sum_{x=3}^5 \frac{Rx - 5(x-3)}{h^3} x = 0$$

$$\text{o sea } R \sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3} - 5 \sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3} = 0 \rightarrow \therefore R = 5 \frac{\sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3}}{\sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3}} \dots \dots (2)$$

Se puede hacer la siguiente tabulación, en la que se ha seguido la misma numeración de secciones del problema VI-12:

Sección	h (m)	h ³ (m ³)	x (m)	x - 3 (m)	$\frac{x(x-3)}{h^3}$	$\frac{x^2}{h^3}$
1	0.585	0.2002	4.75	1.75	41.5	112.7
2	0.555	0.1710	4.25	1.25	31.1	105.6
3	0.525	0.1447	3.75	0.75	19.4	97.2
4	0.495	0.1213	3.25	0.25	6.7	87.1
5	0.465	0.1005	2.75			75.3
6	0.435	0.823	2.25			61.5
7	0.405	0.664	1.75			46.1
8	0.375	0.527	1.25			29.7
9	0.345	0.411	0.75			13.7
10	0.315	0.313	0.25			2.0
$\Sigma =$					98.7	630.9

$$\therefore \sum_{x=3}^5 \frac{x(x-3)}{h^3} = 98.7 \quad \text{y} \quad \sum_{x=0}^5 \frac{x^2}{h^3} = 630.9$$

Luego según (2):
 $R = 5 \left(\frac{98.7}{630.9} \right) = 0.782 \quad \therefore R = 0.782 \text{ T}$

PROBLEMA VII.14. (UNI,17-FEB-1968)

Considerando solamente los esfuerzos normales y la flexión, resolver la estructura que se muestra. Considerar para los elementos:

$$1,2,3,14: \Omega = 12 \text{ cm}^2 \quad E = 2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2$$

$$2345: \begin{cases} I = 800 \text{ cm}^4 & E = 123\text{T}/\text{cm}^2 \\ \Omega = 75 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Solución:

Hay una sola incógnita redundante. Pongamos las reacciones A,B y C en función de la redundante X:

$$1) \sum F_y = 0 : x + B \cos \beta + A \cos \alpha - 6 = 0$$

$$0.6A + \frac{5}{6}B = 6 - x \quad \dots \dots (1)$$

$$2) \sum M_2 = 0 : 6(6) - (A \cos \alpha)(4) - (B \cos \beta)(2) = 0$$

$$1.2A + \frac{5}{6}B = 18 \quad \dots \dots (2)$$

$$3) \sum F_h = 0 : A \sin \alpha + B \sin \beta - C = 0$$

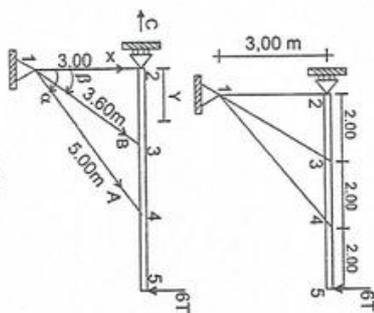
$$\frac{4}{5}A + \frac{5}{9}B = C \quad \dots \dots (3)$$

Resolviendo entre (1), (2) y (3) se obtienen:

$$\left. \begin{aligned} A &= 20 + \frac{5}{3}x \\ B &= -7.2 - 2.4x \\ C &= 12T \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Según el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$



- cos α = 3/5
- sen α = 4/5
- cos β = 5/6
- sen β = 5/9

Donde: $\tau = \tau_{flex.} + \tau_{norm.}$

Siendo: $\tau_{flex.} = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ y $\tau_{norm.} = \sum \frac{F^2 l}{2E\Omega}$

Entonces,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial x} ds + \sum \frac{F}{E\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} l = 0 \quad \dots\dots (5)$$

Donde:

Para los elementos 12,13,14: $E\Omega = \left(\frac{2 \times 10^3 T}{cm^2}\right) (12cm^2) = 2.4 \times 10^4 T$

y para el elemento 2345: $E\Omega = 123 \times 75 = 9225 T$ y $EI = \left(\frac{123 T}{cm^2}\right) (800 cm^4) = 9.84 T m^2$

Expresiones para M,F y sus derivadas:

Elem.	variable		l _m	M	F	∂M/∂x	∂F/∂x
	Orig.	Interv.					
23	2	0 ≤ y ≤ 2	2	xy	-12	y	0
34	2	2 ≤ y ≤ 4	2	xy + $\frac{5}{6}B(y-2) = xy - (2x+6)(y-2)$	-12 + B($\frac{5}{6}$) = $16 - \frac{4}{3}x$	4-y	$-\frac{4}{3}$
45	2	4 ≤ y ≤ 6	2	-6(6-y)	0	0	0
12			3	0	X	0	1
13			3,6	0	-7,2 - 2,4x	0	-2,4
14			5	0	20 + $\frac{5}{3}x$	0	$\frac{5}{3}$

Reemplazando estas expresiones en (5), así como los valores calculados para EI y EΩ, tenemos:

$$\frac{1}{9.84} \left\{ \int_0^2 (xy)(y) dy + \int_2^4 [xy - (2x+6)(y-2)](4-y) dy \right\} + \dots\dots (a)$$

$$+ \frac{1}{9225} \left[(-16 - \frac{4}{3}x) \left(-\frac{4}{3}\right) (2) \right] + \dots\dots (b)$$

$$+ \frac{1}{2.4 \times 10^4} \left[(3x - 2.4(-7.2 - 2.4x))(3.6) + (20 + \frac{5}{3}x) \frac{5}{3} (5) \right] = 0 \quad \dots\dots (c)$$

En la que efectuando operaciones se obtienen los siguientes resultados parciales y el total:

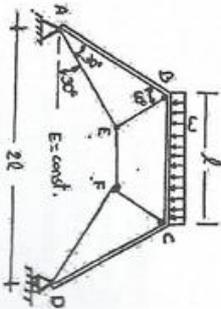
(a) Debido a la flexión en 2345:	+0.54205x-0.81301
(b) Debido al normal en 2345:	+0.00039x+0.00463
(c) Debido al normal en 12,13 y 14:	+0.00157x+0.00954
TOTAL=	+0.544401x-0.79884

De donde: +0.544401x-0.79884=0 x=1.47 T

Obsérvese que si se hubiese considerado solo la influencia de la flexión, x se determinaría haciendo igual a cero la expresión (a), es decir: +0.54205x-0.81301=0, de la cual X=1.50 T. Reemplazando x=1.47 en las igualdades (4), se obtienen: A=22.45 T. B= 10.73 T. Es decir que los esfuerzos en las barras 12 y 14 son de compresión, y en la barra 13 de tracción.

PROBLEMA VII.15. (UNI,26-DIC-1968)

La estructura simétrica que se muestra está formada por una pieza de acero ABCD, de rigidez flexora EI constante, armada con cinco barras, cada una de sección transversal Ω, capaces de absorber solo fuerzas axiales. Prescindiendo de las fuerzas cortantes y normales en ABCD, hallar la fuerza en EF.



Trabajo de la deformación elástica en toda la estructura.

$$\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \sum \frac{N^2 l}{2E\Omega}$$

Según el Teorema de Menabrea, en el caso propuesto:

$$\frac{1}{EI} \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{1}{E\Omega} \sum N \frac{\partial N}{\partial y} l = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$



para AB: $0 \leq x \leq l$, $M = \left(\frac{\omega l}{2}\right) x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y\right) \frac{x}{2} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{4} x$

para BC: $0 \leq x \leq l$, $M = \left(\frac{\omega l}{2}\right) \left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{\omega x^2}{2} - (y) \left(\frac{\sqrt{3} l}{4}\right) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{4} l$

Por simetría los términos (i) y (ii) los consideraremos solo para media estructura:

$$(i) = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l \left(\frac{\omega l}{4} x - \frac{\sqrt{3}}{4} yx \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} x \right) dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{\omega l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + x \right) - \frac{\omega x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} y l \right] \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} l \right) dx \right\}$$

$$(i) = \frac{l}{EI} (5y - 2\sqrt{3}\omega l)$$

$$(ii) = \frac{1}{EI} \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{l}{2} \sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} y \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{l}{2} + \frac{1}{2} (-y) (-1) \frac{l}{2} \right\} = \frac{3l}{8EI} (\sqrt{3} + 1)y$$

Reemplazando estos valores en (1):

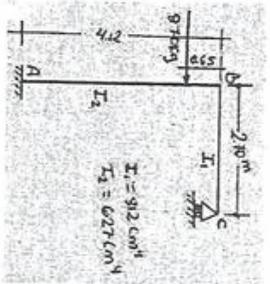
$$\frac{l}{32EI} (5y - 2\sqrt{3}\omega l) + \frac{3l}{8EI} (\sqrt{3} + 1)y = 0$$

De donde:

$$y = \frac{\sqrt{3}\omega l^3 / 21}{5l^2 / 4l + 3(\sqrt{3} + 1) / \Omega} \quad \text{Esfuerzo en EF}$$

PROBLEMA VII.16. (FIUC, 17-NOV-1959)

El semiportico ABC esta sujeto a la acción de la fuerza de 870 kg. Aplicada a 0,65m de b. trazar los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.



Solución:
Considerando la reacción R (vertical) del apoyo C como la redundante, tenemos que:

$$\frac{\partial r}{\partial R} = 0 \text{ o sea que: } \frac{1}{EI} \int_0^B M \frac{\partial M}{\partial R} dx + \frac{1}{EI} \int_0^C M \frac{\partial M}{\partial R} dy = 0$$

Siendo:

para CB, $0 \leq x \leq 2.70 \text{ m}, M = Rx \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = x$

para BA, $0 \leq y \leq 0.65 \text{ m}, M = 2.70R \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = 2.70$

$$0.65 \leq y \leq 4.12 \text{ m}, M = 2.70R - 870(y - 0.65) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial R} = 2.70$$

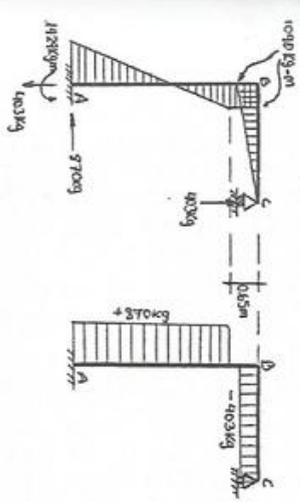
Y haciendo $\epsilon = \frac{1}{EI} \int_0^L$, reemplazando en (1), tenemos:

$$\epsilon \int_0^{2.70} (Rx)(x) dx + \int_0^{0.65} (2.70R)(2.70) dy + \int_0^{4.12} [2.70R - 870(y - 0.65)](2.70) dy = 0$$

$$\frac{EI}{R} [x]^{2.7} + (2.7)^2 R [y]^{0.65} + 2.7 [2.7R_y - 435(y - 0.65)]^{2.412} = 0$$

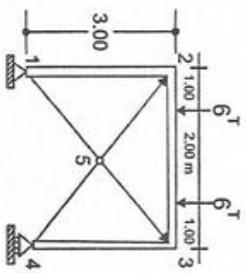
De donde: $R = +403 \quad \therefore R_c = 403 \text{ Kg } \uparrow$

Con este resultado se pueden ya trazar los siguientes diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, con indicación de las reacciones de apoyo:



PROBLEMA VII.17. (UNI, ENERO-969)

Los elementos 1-2-3-4 son de $EI = 300 \text{ Tm}^2$, y los 2-5-4 y 1-5-3 son de 11.4 cm^2 de arca transversal con $E = 2000 \text{ T/cm}^2$, resolver la estructura prescindiendo de los efectos del cortante y del normal en 1-2-3-4.



El trabajo de la deformación elástica en toda la estructura es:

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \sum \frac{N^2 L}{2EN}$$

Según el Teorema de Menabrea, en este caso:

$$\frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial p} dx + \frac{1}{EN} \sum N \frac{\partial N}{\partial y} L = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

En las que y es la única incognita hiperestática, y además:

$$(EI)_1 = 300 \text{ Tm}^2 \quad (EI)_2 = \left(2000 \frac{\text{T}}{\text{cm}^2} \right) (11.4 \text{ cm}^2) = 22800 \text{ T}$$

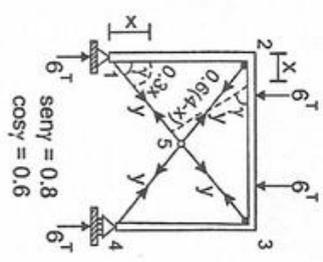
para el elemento 12: $0 \leq x \leq 3 \text{ m}, M = -yx(0.8) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -0.8x$

Para elemento 23: $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$M = +6x - y(4-x)(0,6) - yx(0,6)$$

$$M = 6x - 2.4y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2.4$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ m},$$



$$\text{sen } y = 0.8$$

$$\text{cos } y = 0.6$$

$$M = +6x - 2.4y - 6(x-1)$$

$$M = 6 - 2.4y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2.4$$

Para los elementos 15, 25, 35 y 45:

$$N = -Y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = -1$$

$$L = 2.50 \text{ m}$$

Por simetría los términos (i) y (ii) de la expresión (1) los consideraremos solo para media estructura:

$$(i) = \frac{1}{(EI)_1} \left\{ \int_0^3 [-yx(0.8)](-0.8x)dx + \int_0^1 (6x - 2.4y)(-2.4)dx + \int_1^2 (6 - 2.4y)(-2.4)dx \right\}$$

$$(i) = \frac{1}{(EI)_1} (17.28y - 21.6)$$

$$(ii) = \frac{1}{(EI)_2} [2(-y)(-1)(2.50)] = \frac{5}{(EI)_2} y$$

Reemplazando estos valores en (1):

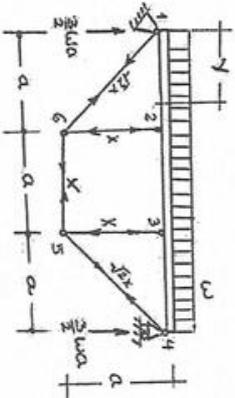
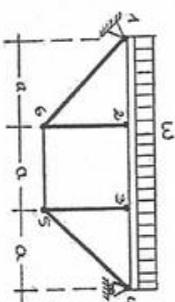
$$\frac{1}{(EI)_1} (17.28y - 21.6) + \frac{5}{(EI)_2} y = 0$$

$$O \text{ sea, } \frac{17.28y - 21.6}{300} + \frac{5y}{22800} = 0 \rightarrow \therefore y = 1.245 \text{ T}$$

Resultado positivo, que confirma la suposición hecha de que el esfuerzo en los tirantes es de tracción.

PROBLEMA VII.18. (UNI,15-JUL-1968)

La viga 1234 de momento de inercia I y área de sección transversal A, está rigidizada por las barras que se muestran, todas de sección transversal Ω y del mismo material, tanto barras como viga. Prescindiendo de los efectos del cortante, determinar los esfuerzos en las barras y la distribución de momentos en la viga.



Solución:

Por simetría física y de carga, solo hay una inógnita hiperestática; denominamos x a esta inógnita, esfuerzo en la barra inferior 65, aplicando las ecuaciones de equilibrio estático, se obtienen las expresiones de esfuerzos en las barras y reacciones de apoyo que se indican en el esquema. Además, a lo largo de todo el elemento

1234 se genera un esfuerzo normal, igual a X.

$$\text{De acuerdo con el Teorema de Menabrea: } \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \dots (1)$$

En la que $\tau = \tau_{flex} + \tau_{norm}$.

Siendo:

$$\tau_{flex} = \int \frac{M^2}{2EI} ds \quad y \quad \tau_{norm} = \int \frac{N^2}{2EA} ds + \sum \frac{N^2 l}{2E\Omega}$$

Luego según (1):

$$\frac{1}{l} \int M \frac{\partial M}{\partial x} dy + \frac{1}{A} \int N \frac{\partial N}{\partial x} dy + \Omega \sum \frac{\partial N}{\partial x} l = 0 \dots (2)$$

$$\text{Para el tramo I: } 0 \leq y \leq a, \quad \begin{cases} M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - xy \\ N = +x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = +1 \end{cases}$$

$$\text{Para el tramo II: } a \leq y \leq 2a, \quad \begin{cases} M = \frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - xa \\ N = +x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = -a \\ \frac{\partial N}{\partial x} = +1 \end{cases}$$

Que reemplazando en (2), siendo 2 los tramos I, tenemos:

$$\frac{2}{l} \int_0^a \left(\frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - xy \right) (-y) dy + \frac{1}{l} \int_a^{2a} \left(\frac{3}{2} \omega a y - \frac{1}{2} \omega y^2 - xa \right) (-a) dy + \frac{1}{l} \int_0^{3a} x(1) dy + \frac{1}{\Omega} [2\{(\sqrt{2}x)(\sqrt{2})(\sqrt{2}a)\} + 3\{(x)(1)(a)\}] = 0$$

Ecuación de la que obtenemos:

$$x = \frac{1.1}{1 + 5.2 \left(\frac{l}{a^2 \Omega} \right) + 1.8 \left(\frac{l}{a^2 A} \right)} \omega a$$

O sea, $x = \alpha \cdot \omega a$

$$\text{siendo, } \alpha = \frac{1.1}{1 + 5.2 \left(\frac{l}{a^2 \Omega} \right) + 1.8 \left(\frac{l}{a^2 A} \right)}$$

En la que:

$$5.2 \left(\frac{l}{a^2 \Omega} \right) \text{ corresponde a la influencia del esfuerzo normal en las barras, y } 1.8 \left(\frac{l}{a^2 A} \right) \text{ corresponde a la influencia del esfuerzo normal en la viga.}$$

Si se prescindiera de estas influencias, α un coeficiente muy aproximadamente igual a 1.1, para para dimensiones corrientes, tales términos influyen muy poco, siendo, pues, α un coeficiente muy aproximadamente igual a 1.1. Para trazar el diagrama de los momentos flectores:

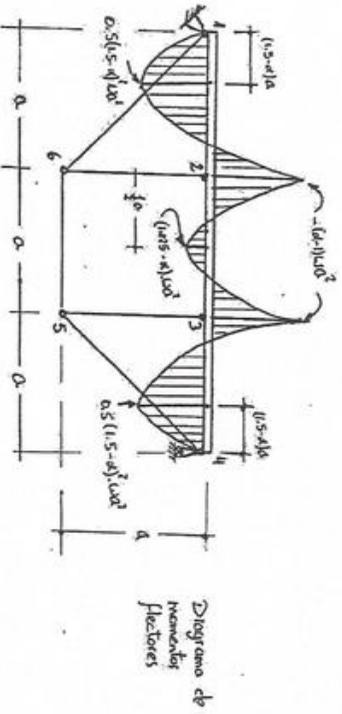
Tramo I: $M = \frac{3}{2} \alpha x y - \frac{1}{2} \omega y^2 - (\alpha \alpha x) y$

$M = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (1.5 - \alpha) a \\ y = a \end{cases} \begin{cases} M_{\max} = 0.5(1.5 - \alpha)^2 \alpha x^2 \\ M = -(\alpha - 1) \alpha x^2 \end{cases}$$

Tramo II: $M = \frac{3}{2} \alpha x y - \frac{1}{2} \omega y^2 - \alpha \alpha x^2$

$$\begin{cases} y = a, \\ y = \frac{3}{2} a \end{cases} \begin{cases} M = -(\alpha - 1) \alpha x^2 \\ M = (1.125 - \alpha) \alpha x^2 \end{cases}$$

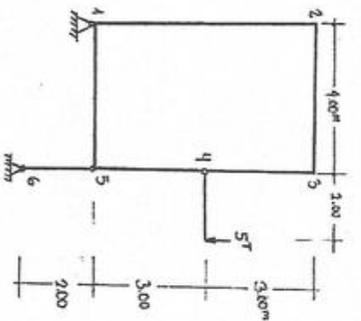


PROBLEMA VII.19. (UNI, 21-OCT-1968)

Para la estructura que se muestra, todos los elementos son de EI constante. Resolver la estructura considerando únicamente los efectos de la flexión. Se trazara, finalmente el diagrama de los momentos flectores.

Solución:

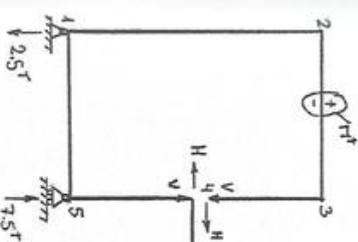
La estructura dada puede transformarse en la que aquí aparece, en la que la articulación en 4 ha sido sustituida por la interacción que allí se presenta entre las partes 34 y 54 de la estructura, o sea las fuerzas H y V, que serán las incógnitas hiperestáticas (la flexión es cero en la articulación). De acuerdo con el Teorema de Menabrea:



$$\frac{\partial \pi}{\partial H} = 0 \dots (1) \quad y \quad \frac{\partial \pi}{\partial V} = 0 \dots (2)$$

siendo $\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ luego, siendo EI constante:

$$(1): \int M \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0 \quad (2): \int M \frac{\partial M}{\partial V} ds = 0$$



Para las que:

Tramo	Variable		M=	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{\partial M}{\partial V}$
	Orig.	Intervalo			
43	4	$0 \leq x \leq 3$	+Hx	x	0
32	3	$0 \leq x \leq 4$	+3H-Vx	3	-x
21	2	$0 \leq x \leq 6$	+H(3-x)-4V	3-x	-4
45	4	$0 \leq x \leq 3$	+10-Hx	-x	0
51	5	$0 \leq x \leq 4$	+5(2+x)-(V+7.5)x-H(3)	(10-3H)-(V+2.5)x	-3

Reemplazando estas expresiones, se tienen:

$$(1): \int_0^3 (Hx)xdx + \int_0^4 (3H - Vx)(3)dx + \int_0^6 [H(3-x) - 4V](3-x)dx$$

$$+ \int_0^3 (10 - Hx)(-x)dx + \int_0^4 [(10 - 3H) - (V + 2.5)x](-3)dx = 0$$

De la que $H = \frac{35}{36}$ Ton.

$$(2): \int_0^4 (3H - Vx)(-x)dx + \int_0^6 [H(3-x) - 4V](-4)dx$$

$$+ \int_0^4 [(10 - 3H) - (V + 2.5)x](-x)dx = 0$$

De la que $V = \frac{5}{26}$ Ton.

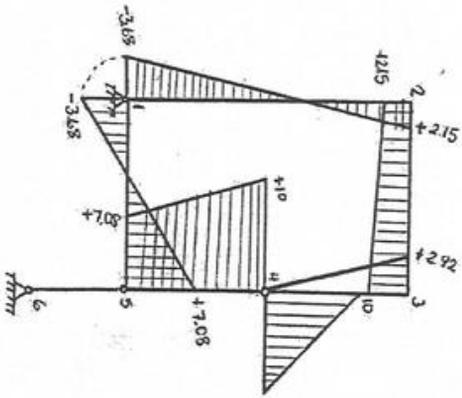


Diagrama de los momentos flectores (momentos positivos significan los momentos flectores que generan tensiones de tracción en las caras interiores de los elementos)

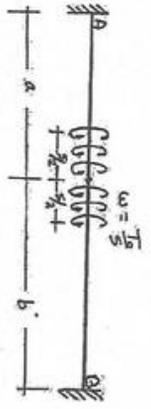
Tramo:		
43	$M = \frac{35}{36}x$	para $x = 0, M = 0$
		para $x = 3m, M = +2.927m$
32	$M = 2.92 - \frac{5}{26}x$	para $x = 0, M = +2.927m$
		para $x = 4m, M = +2.457m$
21	$M = 2.15 - \frac{35}{36}x$	para $x = 0, M = +2.157m$
		para $x = 6m, M = -3.687m$
45	$M = 10 - \frac{35}{36}x$	para $x = 0, M = +107m$
		para $x = 3m, M = +7.087m$
51	$M = 7.08 - \frac{35}{13}x$	para $x = 0, M = +7.087m$
		para $x = 4m, M = -3.687m$

Para trazar el diagrama de momentos flectores:

Diagrama de los Momentos Flectores. (Momentos positivos significan los momentos flectores que generan tensiones de tracción en las caras interiores de los elementos).

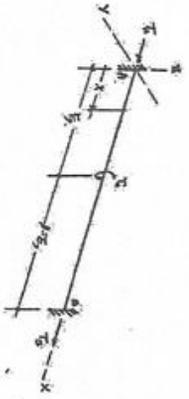
PROBLEMA VII.20.

En la viga AB perfectamente empotrada en sus dos extremos, de sección constante, actúa un sistema de pares uniformemente distribuidos a lo largo de una longitud "a", a distancias "a" y "b" de los extremos. Vectorialmente los pares son colineales con el eje de la viga. Determinar la distribución de los momentos torsores.



Solución:
En primer lugar resolveremos el caso de la viga dada, con un único par T_0 aplicado a distancia ξ del extremo A, que tomamos como origen de coordenadas. En los empotramientos se generan los pares torsores T_A y T_B , que harán equilibrio al par aplicado, es decir que:

$$T_A + T_B + T_0 = 0 \dots (i)$$



De acuerdo con el Teorema de Menabrea tendremos:

$$\frac{\partial T}{\partial T} = 0, \text{ siendo } T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M^2}{2GI_0} ds$$

Es decir: $\int_{(A)}^{(B)} M_i \frac{\partial M_i}{\partial T} dx = 0 \dots \dots \dots (ii)$

Adoptemos la siguiente convención de signos para los momentos torsores: mirando según el eje de la viga, en el sentido del crecimiento de la variable (en nuestro caso de A hacia B), el momento torsor es positivo si es del sentido horario. Así, para los sentidos considerados en el esquema, tendremos:

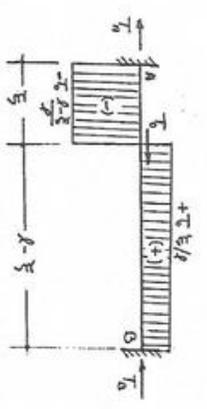
para $0 \leq x \leq \xi, M_t = +T_A \rightarrow \therefore \frac{\partial M_t}{\partial T_A} = +1$

para $\xi \leq x \leq l, M_t = +T_A + T_0 \rightarrow \therefore \frac{\partial M_t}{\partial T_A} = +1$

Reemplazando estas expresiones en la ec. (ii):

$$\int_{x=0}^{x=\xi} (+T_A)(+1)dx + \int_{x=\xi}^{x=l} (+T_A + T_0)(+1)dx = 0 \rightarrow \therefore T_A = -T_0 \frac{l-\xi}{l} \dots (1)$$

que llevando a (i) da: $T_B = -T_0 \frac{\xi}{l} \dots (2)$



Lo que quiere decir que el par aplicado T_0 se reparte en los dos empotramientos en forma inversamente proporcional a sus distancias a tales extremos, y con sentidos opuestos al de dicho par aplicado; pues los resultados negativos de (1) y (2) explican que los pares generados en los empotramientos son de sentidos opuestos a los originalmente considerados. Se obtiene enseguida el diagrama de distribución de los momentos Torsores que aquí se indica, en el que se aprecia que la distribución es semejante a la de los esfuerzos cortantes originado por una carga en la viga.

Para el problema que nos ocupa considerando un par infinitesimal $\omega d\xi$, aplicando las expresiones (1) y (2), tendemos:

$$dT_A = -\omega d\xi \frac{l-\xi}{l} \quad y \quad dT_B = -\omega d\xi \frac{\xi}{l}$$

Ecuaciones diferenciales que integradas para el total del par repartido aplicado, dan:

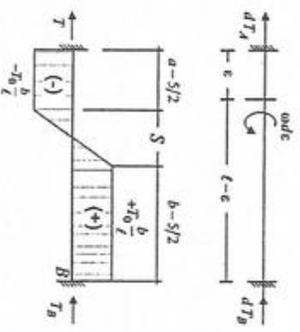
$$T_A = \int_{\xi=a-\frac{l}{2}}^{\xi=a+\frac{l}{2}} -\frac{\omega}{l} (l-\xi) d\xi = -T_0 \frac{b}{l}$$

$$\therefore T_A = -T_0 \frac{b}{l}$$

$$T_B = \int_{\xi=a-\frac{l}{2}}^{\xi=a+\frac{l}{2}} -\frac{\omega}{l} \xi d\xi = -\frac{\omega S a}{l} = -T_0 \frac{a}{l}$$

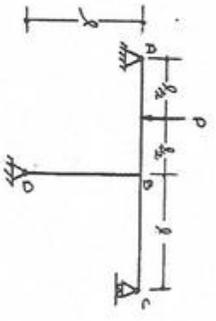
$$\therefore T_B = -T_0 \frac{a}{l}$$

Con estos resultados se puede trazar el diagrama de distribución de momentos torsores pedido.

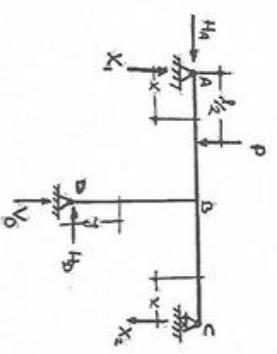


PROBLEMA VII.21. (UNI, 24-JUL-1970)

Encontrar las reacciones en A, C y D. para el pórtico mostrado en la figura considerando únicamente los efectos. De la flexión. $p=16 \text{ kp}$, $l=9'$, $E=30000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$, $I=650 \text{ m}^4$.



Solución:
Es una estructura hiperestática de 2º grado, externamente. Escogemos como incógnitas redundantes las componentes x_1, y, x_2 de las reacciones en A y C. Para poner las otras componentes de las reacciones en función de las incógnitas hiperestáticas x_1, y, x_2 , planteamos las ecuaciones de equilibrio estático:



- 1) $\sum M_A = 0 : x_1(l) + H_A(l) + x_2(l) - p\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \rightarrow H_A = \frac{p}{2} - x_1 - x_2 \dots (i)$
- 2) $\sum F_y = 0 : x_1 + V_D - p - x_2 = 0 \rightarrow V_D = p - x_1 + x_2 \dots (ii)$
- 3) $\sum F_h = 0 : H_A - H_D = 0 \rightarrow H_D = \frac{p}{2} - x_1 - x_2 \dots (iii)$

De acuerdo con el Teorema de Menabrea:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} = 0$$

siendo para los efectos de solamente la flexión $\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

En el caso dado, siendo EI =constante para todos los elementos de la estructura:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial x_1} ds = 0 \quad \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial x_1} ds = 0 \dots \dots (iv)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_2} = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial x_2} ds = 0 \quad \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial x_2} ds = 0 \dots \dots (v)$$

En estas últimas ecuaciones:

Para el tramo AB: $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$, $M = X_1 x$

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad M = X_1 x - p\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0$$

Para el tramo CB: $0 \leq x \leq l$, $M = -X_2 x$

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = -x$$

Para el tramo DB: $0 \leq y \leq l$, $M = H_0 y = \left(\frac{P}{2} - X_1 - X_2\right) y$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (vi) y (v):

$$\int M \frac{\partial M}{\partial x_1} ds = \int_0^{\frac{l}{2}} (X_1 x)(x) dx + \int_{\frac{l}{2}}^l [X_1 x - P(x - \frac{l}{2})] (x) dx + \int_0^l \left[\left(\frac{P}{2} - X_1 - X_2\right) y\right] (-y) dy = 0$$

$$= \frac{1}{3} X_1 [x^3]_0^{\frac{l}{2}} + \left[\frac{1}{3} X_1 x^3 - P \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{l}{4} x \right) \right]_{\frac{l}{2}}^l - \frac{1}{3} \left(\frac{P}{2} - X_1 - X_2 \right) [y^3]_0^l = 0 \rightarrow$$

$$\therefore 32X_1 + 16X_2 - 13P = 0 \dots (vi)$$

$$\int M \frac{\partial M}{\partial x_2} ds = \int_0^l (-X_2 x)(-x) dx + \int_0^l \left[\left(\frac{P}{2} - X_1 - X_2 \right) y \right] (-y) dy = 0$$

$$= \frac{1}{3} X_2 [x^3]_0^l - \frac{1}{3} \left(\frac{P}{2} - X_1 - X_2 \right) [y^3]_0^l = 0 \rightarrow \therefore X_1 + 2X_2 - \frac{P}{2} = 0 \dots (vii)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (vi) y (vii), tenemos:

$$X_1 = \frac{3}{8} P = \frac{3}{8} (16) = 6 \quad \therefore X_1 = 6 \text{ Kp.} \uparrow$$

$$X_2 = \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} (16) = 1 \quad \therefore X_2 = 1 \text{ Kp.} \downarrow$$

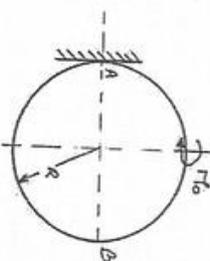
$$H_A = \frac{P}{2} - \frac{3}{8} P - \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} P = \frac{1}{16} (16) = 1 \quad \therefore H_A = 1 \text{ Kp.} \rightarrow$$

$$H_b = H_A \quad \therefore H_b = 1 \text{ Kp.} \leftarrow$$

$$V_b = P - \frac{3}{8} P + \frac{1}{16} P = \frac{11}{16} P = \frac{11}{16} (16) = 11 \quad \therefore V_b = 11 \text{ Kp.} \uparrow$$

PROBLEMA VII.22. (UNI, 23-ENER-1967)

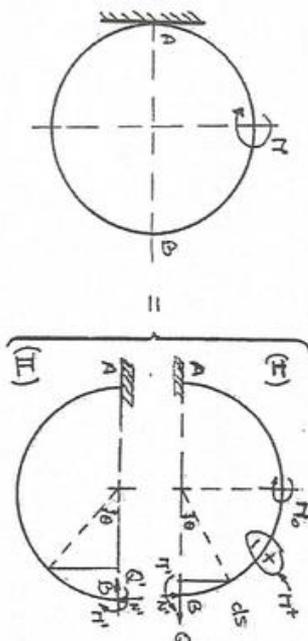
El anillo de sección constante que se muestra está perfectamente empotrado en A y sujeto a la acción del par M_0 ubicado a 90° del empotramiento. Determinar la distribución de momentos flectores en todo el anillo.



Solución:

Si seccionamos la estructura en B, aparecen tres incógnitas hipersféricas el momento flector M' , la fuerza cortante Q' y la fuerza normal N' . De acuerdo con el Teorema de Menabrea, siendo

$$\tau = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$



Tendremos las siguientes ecuaciones:

$$1) \frac{\partial \tau}{\partial M'} = 0 \quad \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial M'} d\theta = 0$$

$$2) \frac{\partial \tau}{\partial Q'} = 0 \quad \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial Q'} d\theta = 0$$

$$3) \frac{\partial \tau}{\partial N'} = 0 \quad \therefore \int M \frac{\partial M}{\partial N'} d\theta = 0$$

Las variaciones de los momentos flectores son:

$$\text{Parte (I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 : \quad M'_1 = M' + Q'R \sin \theta + N'R(1 - \cos \theta) \\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi : \quad M'_2 = M'_1 - M_0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi : \quad M'' = M' - Q'R \sin \theta + N'R(1 - \cos \theta) \end{array} \right\} \dots (a)$$

Derivando estas expresiones, tenemos:

$$\frac{\partial M'_1}{\partial M'} = \frac{\partial M'_2}{\partial M'} = \frac{\partial M''}{\partial M'} = 1 \quad \frac{\partial M'_1}{\partial Q'} = \frac{\partial M'_2}{\partial Q'} = -\frac{\partial M''}{\partial Q'} = R \sin \theta$$

$$\frac{\partial M'_1}{\partial N'} = \frac{\partial M'_2}{\partial N'} = \frac{\partial M''}{\partial N'} = R(1 - \cos \theta)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones, tenemos:

$$1) \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial M'} d\theta = \int_0^{\pi/2} M_1' d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (M_1' - M_0) d\theta + \int_0^\pi M'' d\theta = 0$$

$$= \int_0^\pi (M_1' + M'') d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^\pi d\theta = 2 \int_0^\pi [M' + N'R(1 - \cos \theta)] d\theta - M_0 [\theta]_{\pi/2}^\pi =$$

$$= 2[M'\theta + N'R(\theta - \sin \theta)]_0^\pi - M_0(\pi/2) = 0 \quad \rightarrow \therefore M' + N'R = \frac{1}{4} M_0 \quad \dots \dots (i)$$

$$2) \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial Q} d\theta = \int_0^{\pi/2} M_1' R \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (M_1' - M_0) R \sin \theta d\theta + \int_0^\pi M'' (-R \sin \theta) d\theta = 0$$

$$= \int_0^\pi (M_1' - M'') \sin \theta d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^\pi \sin \theta d\theta = 2 \int_0^\pi Q'R (\sin \theta)^2 d\theta + M_0 [\cos \theta]_{\pi/2}^\pi =$$

$$= Q'R \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi - M_0 = 0 \quad \rightarrow \therefore Q' = \frac{M_0}{\pi R} \quad \dots \dots (ii)$$

$$3) \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial N'} d\theta = \int_0^{\pi/2} M_1' R(1 - \cos \theta) d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (M_1' - M_0) R(1 - \cos \theta) d\theta$$

$$+ \int_0^\pi M'' R(1 - \cos \theta) d\theta = 0$$

$$= \int_0^\pi (M_1' + M'')(1 - \cos \theta) d\theta - M_0 \int_{\pi/2}^\pi (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= 2 \int_0^\pi [M' + N'R(1 - \cos \theta)](1 - \cos \theta) d\theta - M_0 [\theta - \sin \theta]_{\pi/2}^\pi$$

$$= [M'(\theta - \sin \theta) + N'R \left(\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right)]_0^\pi - \frac{1}{2} M_0 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = 0$$

$$2M' + 3N'R = \frac{M_0}{2\pi} (\pi + 2) \quad \dots \dots (iii)$$

Resolviendo entre las ec. (i) y (iii), tenemos:

$$M' = -\frac{M_0}{4\pi} (4 - \pi) \quad N' = \frac{M_0}{\pi R}$$

Reemplazando estas soluciones y (ii) en la expresión (a) se tienen:

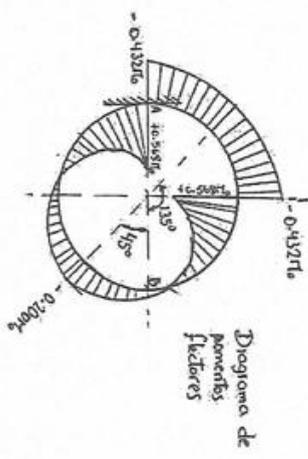
$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad M_1' = \frac{M_0}{4\pi} [\pi + 4(\sin \theta - \cos \theta)]$$

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi, \quad M_2' = \frac{M_0}{4\pi} [-3\pi + 4(\sin \theta - \cos \theta)] \quad \dots \dots (b)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad M'' = \frac{M_0}{4\pi} [\pi - 4(\sin \theta + \cos \theta)]$$

En las expresiones (b):

θ	M_1'	M_2'	M''
0°	$\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4)$
30°	$\frac{M_0}{4\pi} (\pi + 2 - 2\sqrt{3})$	$+\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 2 - 2\sqrt{3})$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 2 - 2\sqrt{3})$
45°	$\frac{M_0}{4\pi} (\pi)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4\sqrt{2})$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4\sqrt{2})$
60°	$\frac{M_0}{4\pi} (\pi + 2\sqrt{3} - 2)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 2\sqrt{3} - 2)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 2\sqrt{3} - 2)$
90°	$\frac{M_0}{4\pi} (\pi + 4)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (\pi - 4)$
90°	$\frac{M_0}{4\pi} (4 - 3\pi)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (4 - 3\pi)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (4 - 3\pi)$
120°	$\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2\sqrt{3} + 2)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2\sqrt{3} + 2)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2\sqrt{3} + 2)$
135°	$\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4\sqrt{2})$	$-\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4\sqrt{2})$	$+\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4\sqrt{2})$
150°	$\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2 + 2\sqrt{3})$	$-\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2 + 2\sqrt{3})$	$+\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 2 + 2\sqrt{3})$
180°	$\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4)$	$-\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4)$	$+\frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4)$



Este problema puede resolverse en forma más directa y sencilla si observamos que el par aplicado M_0 genera en el empotramiento A un par equilibrante igual y directamente opuesto, en la que se tiene un sistema estructural simétrico en relación al diámetro subiendo a 45° entre el par aplicado y el empotramiento. Por la simetría del sistema, seccionando según el eje de simetría, en C no habrá fuerza cortantes solo aparecerán dos incógnitas: el momento flector M'' y la fuerza normal N . Se tendrían las ecuaciones:

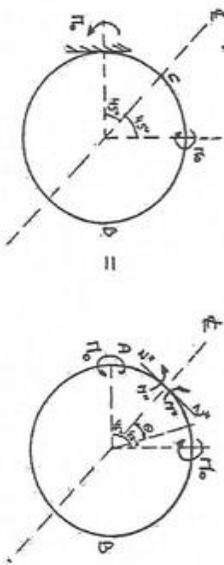
$$1) \frac{\partial T}{\partial M''} = 0 \quad \therefore \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} M \frac{\partial M}{\partial M''} d\theta = 0$$

$$2) \frac{\partial T}{\partial N} = 0 \quad \therefore \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} M \frac{\partial M}{\partial N} d\theta = 0$$

En las que:

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad M_1 = M'' - N''R(1 - \cos \theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N} = -R(1 - \cos \theta)$$

$$\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \quad M_2 = M_1 + M_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial N} = -R(1 - \cos \theta)$$



Luego:

$$1) \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial M''} d\theta = \int_0^{\pi/4} M_1(1) d\theta + \int_{\pi/4}^\pi M_2(1) d\theta - \int_0^{\pi/4} M_1 d\theta + \int_{\pi/4}^\pi (M_1 + M_0) d\theta = 0$$

$$= \int_0^\pi M_1 d\theta + M_0 \int_{\pi/4}^\pi d\theta = 0 \quad \rightarrow \quad M'' - N''R + \frac{3}{4}M_0 = 0 \quad \dots (iv)$$

$$2) \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial N} d\theta = - \int_0^{\pi/4} M_1 R(1 - \cos \theta) d\theta + \int_{\pi/4}^\pi M_2 R(1 - \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^\pi M_1 (1 - \cos \theta) d\theta + M_0 \int_{\pi/4}^\pi (1 - \cos \theta) d\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}M'' - N''R + \frac{M_0}{3\pi} \left(\frac{3}{2}\pi + \sqrt{2} \right) = 0 \quad \dots (v)$$

Resolviendo entre las ec. (iv) y (v) se obtienen:

$$N'' = \frac{\sqrt{2}M_0}{\pi R} \quad y \quad M'' = \frac{M_0}{4\pi} (-3\pi + 4\sqrt{2})$$

CAPÍTULO VIII

METODO DEL AREA DE MOMENTOS

NOTACION:-

ϕ Angulo que hace con el eje de abscisas la tangente geométrica al eje de la estructura (eje aun no deformado).

$$\bar{M} = \frac{M}{EI \cos \phi} \quad \text{Momentos reducidos.}$$

$\Delta\theta_{BA}$ Angulo que forman entre si las tangentes geométricas trazadas en los puntos B' y A' del eje deformado.

t_{BA} Distancia del punto B' del eje deformado a la tangente trazada en el punto A' del mismo eje, distancia medida perpendicularmente al eje de abscisas considerado.

$\bar{\Omega}$ Área encerrada por el diagrama de momentos reducidos, entre los extremos correspondientes a B y A.

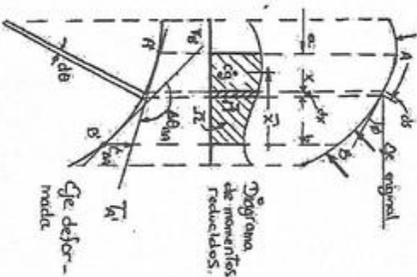
\bar{x} Abscisa del centro de gravedad del área $\bar{\Omega}$ medida desde el extremo B.

TEOREMAS DE MOHR (También denominados de GREENE):

- El ángulo entre las tangentes trazadas en dos puntos B' y A' del eje deformado, es igual al área encerrada por el diagrama de momentos reducidos entre esos dos puntos:

$$\Delta\theta_{BA} = \int_a^b \bar{M} dx = \bar{\Omega} \quad \dots (1.1)$$

- La distancia del punto B' del eje deformado a la tangente trazada en el punto A' del mismo eje, es igual al momento estático (con respecto al eje que pasa por B') del área del diagrama de momentos reducidos entre esos dos puntos:



$$t_{BA} = \int_a^b (b-x)\bar{M}dx = \bar{\Omega} \cdot \bar{x}^2 \dots (2.1)$$

REGLAS DE SIGNOS.

- Para los momentos M:
- + Si genera compresión en las capas superiores y tracción en las inferiores.
 - Si genera tracción en las capas superiores y compresión en las inferiores.

Para $\Delta\theta_{BA}$: De la tangente en B' a la tangente en A'.

- + es sentido horario \curvearrowright
 - es sentido antihorario \curvearrowleft
- Para t_{BA} : Del punto B' a la tangente trazada en A'.
- + es hacia abajo \downarrow B'
 - es hacia arriba \uparrow B'

METODO:

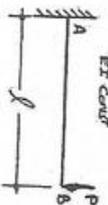
Haciendo uso de los dos Teoremas de Mohr es posible encontrar deformaciones angulares y deflexiones en elementos sujetos a flexión.

El método puede ser práctico en casos de vigas simples.

Cuando se tenga un elemento curvilíneo en la estructura, es posible tratarlo como elemento de eje recto con rigidez flexora igual a $EI \cos \phi$.

PROBLEMA VIII.1.

Determinar la deflexión en el extremo B de la viga mostrada.



Solución:

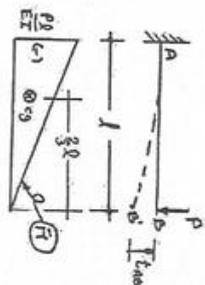
Para el diagrama de momentos reducidos:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \left(-\frac{Pl}{EI} \right) (l) = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \bar{x}^2 = \frac{2}{3}l$$

Luego,

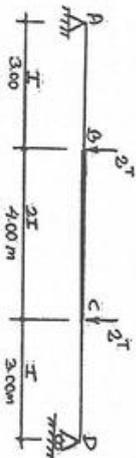
$$t_{BA} = \bar{\Omega} \cdot \bar{x}^2 = \left(-\frac{Pl^2}{2EI} \right) \left(\frac{2}{3}l \right) = -\frac{Pl^3}{3EI} \uparrow$$

$$\therefore \delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \downarrow$$



PROBLEMA VIII.2.

Para la viga que se muestra, calcular la deformación angular en A y la deflexión en C. las características de la viga son: $E = 2 \times 10^5 T/cm^2$, $I = 4000 cm^4$.



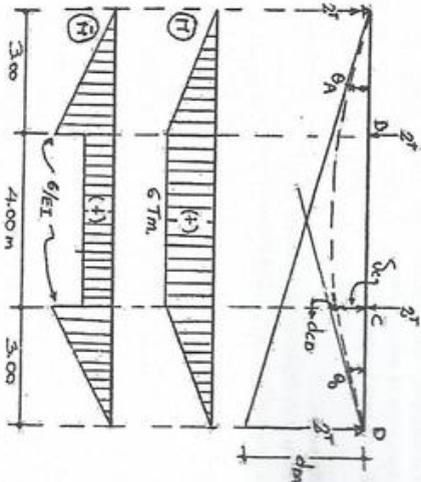
Solución:

Se trazan los diagramas M y \bar{M} de momentos flectores y de momentos reducidos, respectivamente. Por la simetría física y de cargas, las deformaciones angulares θ_A y θ_D son iguales entre sí.

Tenemos:

$$\theta_A = \frac{d_{BA}}{10}$$

Siendo, según el 2° Teorema de Mohr, d_{BA} igual al momento, respecto de D, del área del diagrama de momentos reducidos comprendidos entre A y D:



$$d_{BA} = \frac{1}{2} (3.00) \left(\frac{6}{EI} \right) (8.00) + (4.00) \left(\frac{3}{EI} \right) (5.00) + \frac{1}{2} (3.00) \left(\frac{6}{EI} \right) (2.00) = \frac{150}{EI}$$

Luego,

$$\theta_A = \frac{15}{EI} \text{ (en unidades } T y m)$$

En la figura:

$$\delta_c = \theta_B(3.00) - d_{CD}$$

Donde $\theta_B = \theta_A$, y, según el mismo 2º Teorema de Mohr, d_{CD} es igual al momento, respecto de C, del área del diagrama de momentos reducidos comprendido entre D y C:

$$d_{CD} = \frac{1}{2} (3.00) \left(\frac{6}{EI} \right) (1.00) = \frac{9}{EI}$$

Por consiguiente,

$$\delta_c = 3 \left(\frac{15}{EI} \right) - \frac{9}{EI} \quad \therefore \delta_c = \frac{36}{EI}$$

Según los datos del problema:

$$EI = (2 \times 10^3 \text{ T/cm}^2)(4000 \text{ cm}^4) = 8 \times 10^6 \text{ T} \cdot \text{cm}^2 = 800 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

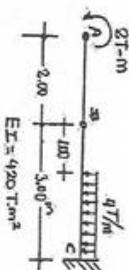
Entonces:

$$\theta_A = \frac{15}{800} = 0.01875 \quad \therefore \theta_A = 0.01875 \text{ rad. } \downarrow$$

$$\delta_c = \frac{36}{800} = 0.045 \text{ m.} \quad \therefore \delta_c = 4.5 \text{ cm. } \downarrow$$

PROBLEMA VIII.3. (UNI, 24-OCT-1968)

Aplicando el método del área de momentos, determinar la deflexión en B, para toda la estructura EI es constante.



Solución:

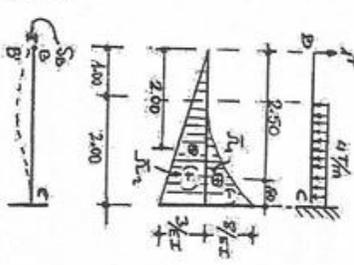
En primer lugar, el par aplicado en A tiene como efecto sobre el extremo B del tramo BC, la fuerza de $27 \text{ m}/2.00 \text{ m} = 13 \text{ T}$. Los momentos en el empotramiento C son:

1) Por la carga repartida:

$$M_c = -\frac{1}{2} (4 \text{ T/m})(2.00)^2 = -8 \text{ Tm}$$

2) Por la fuerza concentrada en B:

$$M_c = +(17)(3.00) = +37 \text{ Tm}$$



Con estos valores se trazan los diagramas de momentos reducidos. De acuerdo con el 2º Teorema de Mohr, la distancia del punto B' del eje deformado a la tangente trazada en el extremo C del mismo eje (es decir, la distancia B'B, o sea δ_B), es igual al momento respecto del extremo B del área de momentos reducidos comprendida entre B y C.

Las áreas y centros de gravedad correspondientes son:

1) Para la carga repartida:

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{-8}{EI} \right) (2.00) = \frac{-16}{3EI}$$

$$\bar{X} = 3.00 - \frac{2.00}{4} = 2.50 \text{ m}$$

2) Para la fuerza encontrada:

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{+37}{EI} \right) (3.00) = \frac{4.5}{EI}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3} (3) = 2.00 \text{ m}$$

Luego,

$$\delta_B = \left(\frac{-16}{3EI} \right) (2.50) + \left(\frac{+4.5}{EI} \right) (2.00)$$

$$\delta_B = \frac{13}{3EI}$$

Reemplazando $EI = 420 \text{ Tm}^2$

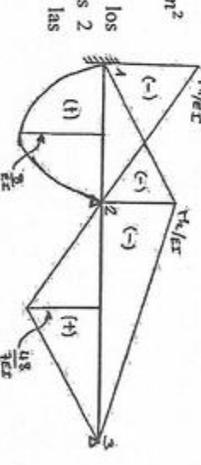
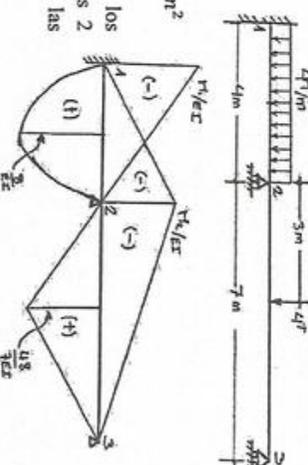
$$\delta_B = \frac{13}{3 \times 420} = 0.0103 \text{ m} \quad \therefore \delta_B = 10.3 \text{ mm } \downarrow$$

De acuerdo con las reglas de signos, el signo menos del resultado δ_B significa que la distancia de B' a B es de abajo hacia arriba. Luego para, $\delta_B \downarrow$.

PROBLEMA VII.4. (UNI, 24-JUN-1968)

Aplicando el método del área de momentos, solucionar la viga mostrada en la figura sometida a la acción del sistema de cargas indicado.

tomar: $I = 2400 \text{ cm}^4$, y $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre los puntos 1 y 2 y entre 1 y 3, se tienen las 2 ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas M_1 y M_2 :

- 1) Distancia entre el punto 2 del eje deformado y la tangente geométrica en 1 del eje = momento del área de momentos reducidos comprendida entre los puntos 2 y 1, respecto de 2:

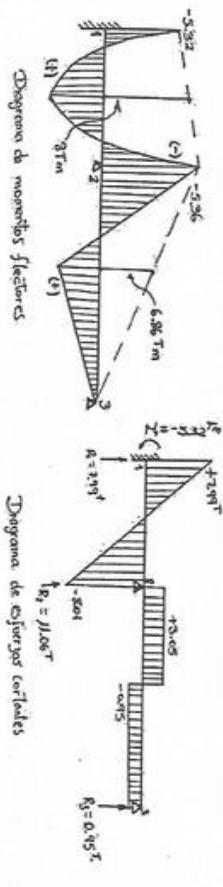
$$0 = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{1}{3} \times 4 \right) + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{8}{EI} \right) (4) \right] \left(\frac{1}{2} \times 4 \right) \rightarrow 2M_1 + M_2 = 16 \dots (1)$$

2) Distancia entre el punto 3 del eje deformado y la tangente en 1 del eje= momento respecto de 3 del area de momentos reducidos comprendida entre 3 y 1:

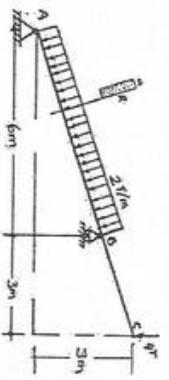
$$0 = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) (4) + \frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (4) + \frac{2}{3} \left(\frac{8}{EI} \right) (4) \right] (7) + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{M_2}{EI} \right) (7) \right] \left(\frac{2}{3} \times 7 \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{48}{7EI} \right) (3) \right] (5) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{48}{7EI} \right) (4) \right] \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) \rightarrow 42M_1 + 91M_2 = 712 \dots (2)$$

Resolviendo entre (1) y (2) se obtienen:
 $M_1 = 5.32 \text{ Tm}$ $M_2 = 5.36 \text{ Tm}$

Resultados positivos, lo que significa que los momentos son del signo supuesto, es decir, momentos negativos.



PROBLEMA VIII.5. (UNI.22-AG-1966)
 Por el método del área de momentos, determinar la deformación angular en la sección B y la deflexión en C. la rigidez flexora es constante: $EI = 810 \text{ Tm}^2$.

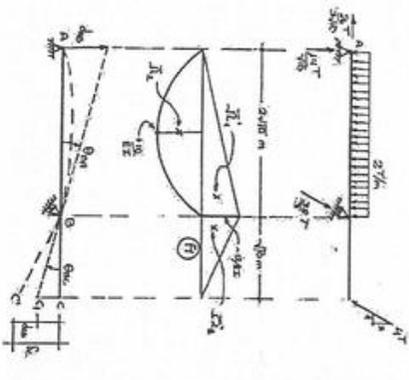


Solución:
 Podemos facilitar el análisis viendo la viga en posición horizontal. Calculadas las reacciones de apoyo que se indican, se traza el diagrama de momentos reducidos \bar{M} , en el que las áreas de sus partes o figuras simples son:

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{2} (2\sqrt{10}) \left(-\frac{12}{EI} \right) = -\frac{12\sqrt{10}}{EI}$$

$$\bar{\Omega}'_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{10}) \left(-\frac{12}{EI} \right) = -\frac{6\sqrt{10}}{EI}$$

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{10}) \left(+\frac{10}{EI} \right) = +\frac{40\sqrt{10}}{3EI}$$



Los centros de gravedad de estas figuras quedan:
 para $\bar{\Omega}'_1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{10})m$ desde A
 para $\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{3} (\sqrt{10})m$ desde B
 para $\bar{\Omega}_2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{10})m$ desde A

De acuerdo con el 2° Teorema de Mohr:

$$d_{AB} = \bar{\Omega}'_1 \left[\frac{2}{3} (2\sqrt{10}) \right] + \bar{\Omega}_2 \sqrt{10} = -\frac{12\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{10}}{EI} + \frac{40\sqrt{10}}{3EI} \sqrt{10} = -\frac{80}{3EI}$$

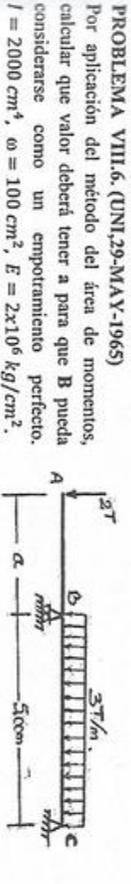
Luego,
 $\theta_{BA} = \theta_{BC} = \frac{d_{AB}}{2\sqrt{10}} = -\frac{80}{6\sqrt{10}EI}$ $\therefore \theta_B = \frac{4\sqrt{10}}{3EI} \downarrow$

Como el resultado para d_{AB} es negativo, quiere decir que este segmento es del punto A del eje deformado, hacia arriba hasta la tangente trazada en el punto B del eje deformado. Es tal como aparece en la figura.

El segmento $d_{CB} = \bar{C}'C_1$ es según el 2° Teorema:
 $d_{CB} = \bar{\Omega}'_1 \left[\frac{2}{3} \sqrt{10} \right] = -\frac{6\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{EI} = -\frac{40}{EI}$

(Siendo negativo hay que medirlo de C' hacia arriba). La deflexión en C es:
 $\delta_C = \bar{C}'C_1 + \bar{C}_1C' = \theta_{BC} (\sqrt{10}) + \frac{40}{EI} = \frac{4\sqrt{10}}{3EI} (\sqrt{10}) + \frac{40}{EI} \therefore \delta_C = \frac{160}{3EI} \downarrow$

Siendo $EI = 810 \text{ Tm}^2$:
 $\theta_B = \frac{4\sqrt{10}}{3(810)} = 0.0052 \text{ rad} \downarrow$ $\delta_C = \frac{160}{3(810)} = 0.066 \text{ m} = 6.6 \text{ cm} \downarrow$



Solución:
 Si la deformación angular en B, θ_B , es cero. Podrá considerarse esa sección como de empotramiento perfecto. De acuerdo con el 2° Teorema de Mohr, la distancia desde la sección C del eje deformado a la tangente trazada a la sección B del eje deformado es decir el segmento $\bar{C}'C''$ es numéricamente igual al momento respecto de C del diagrama de momentos reducidos comprendido entre B y C.

$$\overline{CC''} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2a}{EI} \right) (S) \left(\frac{2}{3} \times 5 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{75}{8EI} \right) (S) \left(\frac{1}{2} \times 5 \right)$$

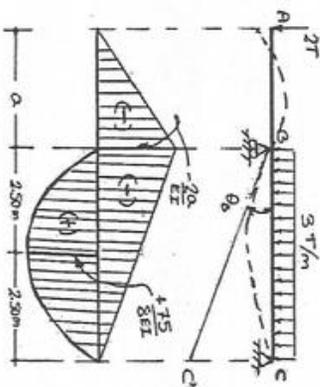
$$\therefore \overline{CC''} = \frac{25}{24EI} (75 - 16a)$$

para: $\theta_B = \frac{5C''}{S} \quad \therefore \theta_B = \frac{5}{24EI} (75 - 16a)$

Haciendo $\theta_B = 0$, se tiene la ecuación:

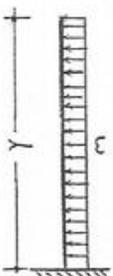
$$75 - 16a = 0 \rightarrow a = \frac{75}{16} = 4.69 \text{ m}$$

Luego, cuando el voladizo AB tenga una longitud de $\frac{75}{16}$ metros, en la sección B no habrá deformación angular del eje deformado, es decir, que esa sección se comporta como empotramiento perfecto.



PROBLEMA VIII.7.

Determinar la ecuación del eje deformado de la viga que se muestra, en la que EI es constante.



Solución:

Trazado el diagrama de momentos reducidos, podemos obtener la deflexión y en función de la abscisa x, aplicando el 2º Teorema de Mohr entre las secciones C y B: la distancia desde C' hasta la tangente trazada en B (es decir, el propio eje original de la viga) es igual al momento del área de momentos reducidos comprendido entre C y B. El área total $\bar{\Omega}$ y la parcial genérica $\bar{\Omega}_x$ son:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{3} l \cdot \frac{-\omega l^2}{2EI} = -\frac{\omega l^3}{6EI} \quad \bar{\Omega}_x = \frac{-\omega x^3}{6EI}$$

Tomando el momento de estas áreas respecto de C, tenemos:

$$\overline{CC'} = y = \bar{\Omega} \left(\frac{3}{4} l - x \right) + \bar{\Omega}_x \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$= -\frac{\omega l^3}{6EI} \left(\frac{3}{4} l - x \right) + \frac{-\omega x^3}{6EI} \left(\frac{x}{4} \right) = -\frac{\omega}{24EI} (3l^4 - 4l^3x + x^4)$$

El signo - de este resultado está indicando que el sentido de C' hacia C es hacia arriba, o sea que la deflexión y'' es de la posición original C a la posición desplazada C', midiendo hacia abajo.

$$y = \frac{\omega}{24EI} (3l^4 - 4l^3x + x^4) \quad \downarrow$$

O también:

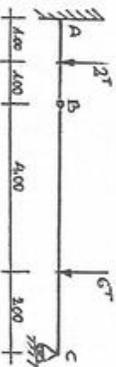
$$y = \frac{\omega l^4}{24EI} (3 - 4\xi + \xi^4) \quad \text{siendo } \xi = \frac{x}{l}$$

Así tenemos:

ξ	y	ξ	y
0	$\frac{\omega l^4}{8EI}$	0.6	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.2432)$
0.1	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.8667)$	0.7	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.1467)$
0.2	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.7338)$	0.8	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.0698)$
0.3	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.6027)$	0.9	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.0187)$
0.4	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.4752)$	1.0	0
0.5	$\frac{\omega l^4}{8EI} (0.3541)$		

PROBLEMA VIII.8. (UNI.23-ENE-1967)

Aplicando el método del área de momentos, determinar la máxima deflexión de la viga que se muestra para la que $EI = 400 \text{ Tm}^2$. En B hay una rotula.



Determinamos las reacciones de apoyos:

$$M_{A,B} = 0$$

$$-R_C(6.00) + 6(4.00) = 0 \quad \therefore R_C = 4 \text{ T}$$

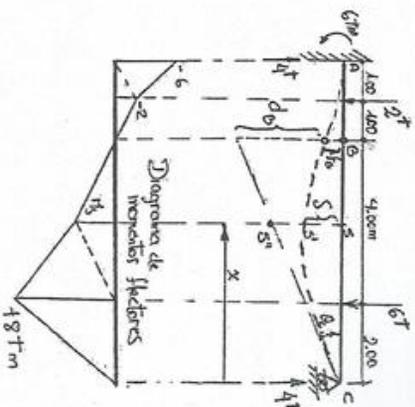
Para una sección genérica S, para la que $2 \leq x \leq 6$, tramo en el que se considera estará la máxima deflexión:

$$M_S = 4x - 6(x - 2) \quad \therefore M_S = 12 - 2x$$

Se traza el diagrama de momentos flectores para toda la viga. La deflexión para la sección genérica es:

$$\delta = \overline{SS''} - \overline{S'S''} \dots (i)$$

$$\text{en la que: } \overline{SS''} = \theta_C x = \left(\frac{f_B + d_B}{6.00} \right) x \dots (ii)$$



Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre B y A, se tiene:

$$f_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (6)(1) \left(1 + \frac{2}{3} (1) \right) + \frac{1}{2} (2)(2)(1) \right] = \frac{7}{EI}$$

Aplicando el Teorema entre B y C:

$$d_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (8)(4) \left(\frac{2}{3} (4) \right) + \frac{1}{2} 8(2) \left(4 + \frac{1}{3} (2) \right) \right] = \frac{80}{EI}$$

Luego reemplazando estos valores en (ii):

$$\overline{SS''} = \frac{7/EI + 80/EI}{6} x \quad \therefore \overline{SS''} = \frac{29}{2EI} x \quad \dots (iii)$$

Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre S y C, se tiene:

$$\overline{SS''} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (8)(2) \left(x - 2 + \frac{1}{3} (2) \right) + \frac{1}{2} (8)(x-2) \left(\frac{2}{3} \right) (x-2) + \frac{1}{2} M_4 (x-2) \left(\frac{x-2}{3} \right) \right]$$

$$\overline{SS''} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} (3x-4) + \frac{8}{3} (x-2)^2 + \frac{1}{6} (x-2)^2 (12-2x) \right] \dots (iv)$$

Reemplazando (iii) y (iv) en (i):

$$\delta = \frac{29}{2EI} x - \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} (3x-4) + \frac{8}{3} (x-2)^2 + \frac{1}{6} (x-2)^2 (12-2x) \right]$$

$$\delta = \frac{1}{6EI} (2x^3 - 36x^2 + 159x - 48) \quad \dots (v)$$

Válida para $2 \leq x \leq 6$ m

Derivando esta expresión respecto de x tenemos:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{6EI} (6x^2 - 72x + 159)$$

Iguandole a cero para determinar la posición de máximo o mínimo (el mínimo del tramo evidentemente estará en uno de sus extremos).

$$6x^2 - 72x + 159 = 0 \rightarrow x_1 = 9.08 \quad x_2 = 2.92$$

La solución $x_2 = 2.92$ es la única compatible en el intervalo $2 \leq x \leq 6$ m de validez de la ecuación.

Reemplazando este valor de x en la expresión (v) se tiene la máxima deflexión de la viga:

$$\delta_{max} = \frac{1}{6EI} [2(2.92)^3 - 36(2.92)^2 + 159(2.92) - 48] = \frac{26.52}{EI} \text{ para T. y m.}$$

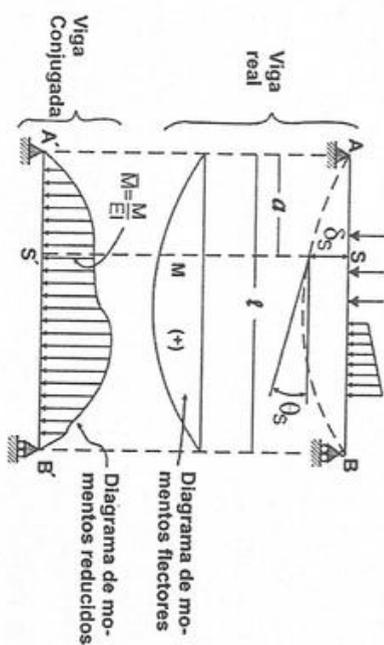
Luego,

$$\delta_{max} = \frac{26.52}{400} = 0.066 \text{ m} \quad \therefore \delta_{max} = 6.6 \text{ cm } \downarrow$$

CAPÍTULO IX

METODO DE LA VIGA CONJUGADA

DEFINICION. - Para la viga real AB, con apoyos simples en ambos extremos, de luz l , sujeta a la acción de un sistema de cargas cualquiera, hay un diagrama de momentos flectores M , y un eje deformado de ordenada δ_s y pendiente θ_s en la sección genérica S, de abscisa a . La viga conjugada A'B' que le corresponde, es también con apoyos simples, luz l , y sujeta a la acción de la "carga" representada por el diagrama de momentos reducidos $\bar{M} = M/EI$. Esta carga también es denominada pesos elásticos.



PROPOSICIONES.

Entre estas dos vigas se cumplen las siguientes proposiciones:

1ª La pendiente en la sección genérica S de la viga real es igual al cortante en la sección S' de la viga conjugada:

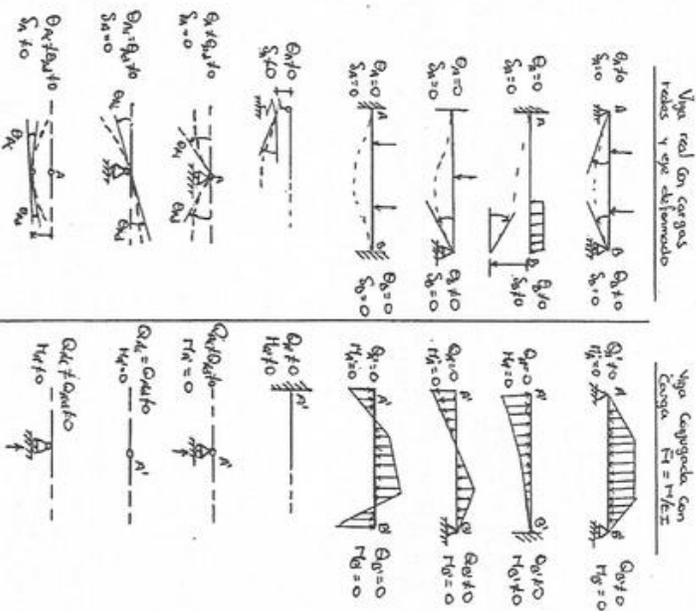
$$\theta_s = Q_{S'} \quad \dots (1.J)$$

2ª La deflexión en la sección genérica S de la viga real es igual al momento flector en la sección S' de la viga conjugada:

$$\delta_s = M_{S'} \quad \dots (2.J)$$

APOYOS EN LA VIGA CONJUGADA.

Para que, en general, las dos proposiciones indicadas se cumplan en vigas reales con otros tipos de apoyos o restricciones, la viga conjugada correspondiente debe incluir apoyos que sean congruentes con los tipos de deformaciones lineal y angular que sufrirá la viga real así:



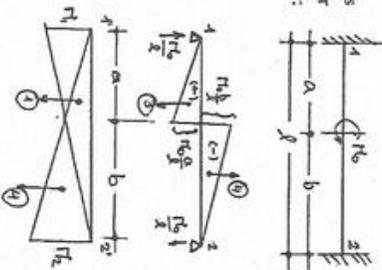
EQUILIBRIO DE LA VIGA CONJUGADA. En muchos casos la viga conjugada es inestable; siempre estáticamente determina. En ella se cumplirán las ecuaciones de equilibrio estático.

Nota: Simbología equivalente: $\oplus = \ominus$

PROBLEMA IX.1. (UNI, 17-NOV-1967)

Empleando el método de la viga conjugada, deducir las expresiones correspondientes a los momentos de empotramiento M_1 y M_2 . Dibujar luego el diagrama de momentos para el caso particular: $M_0 = 9800 \text{ Kg}\cdot\text{m}$, $l = 7 \text{ y } a = 2\text{m}$.

Si consideramos los momentos en los empotramientos son positivos (en la convención de signos de resistencia de materiales), las fórmulas que obtenemos, para el sentido del par dado (M,G), darán el verdadero signo de dichos momentos en cada caso particular. Siendo la viga de sección constante, en este caso no será necesario considerar el denominador EI en las cargas de la viga conjugada. Sobre estas gravitan las cargas 1, 2, 3 y 4, las que deben satisfacer las dos siguientes ecuaciones de equilibrio estático:



$$1) \sum F_v = 0 \quad 2) \sum M_i = 0$$

Las expresiones de las cargas son:

$$1 = \frac{1}{2}(M_1 l) \quad 2 = \frac{1}{2}(M_2 l) \quad 3 = \frac{1}{2} \left(M_0 \frac{a^2}{l} \right) \quad 4 = \frac{1}{2} \left(M_0 \frac{b^2}{l} \right)$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$1) \quad 1 + 2 + 3 - 4 = 0 \rightarrow M_1 + M_2 = \frac{M_0}{l}(b-a) \quad \dots(1)$$

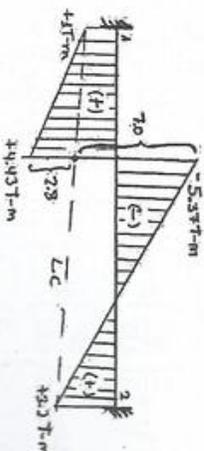
$$2) \quad 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} a - 4 \left(a + \frac{1}{3} b \right) = 0 \rightarrow M_1 + 2M_2 = \frac{M_0}{l^2} (b^2 (3a+b) - 2a^3) \quad \dots(2)$$

Resolviendo entre las Ec. (1) y (2) se obtiene: $M_1 = -\frac{M_0}{l^2} b(2l-3b)$ $M_2 = +\frac{M_0}{l^2} a(2l-3a)$

Para el caso particular dado:

$$M_1 = -\frac{9.8}{(7)^2} \times 5(2 \times 7 - 3 \times 5) = +17\text{m}$$

$$M_2 = +\frac{9.8}{(7)^2} \times 2(2 \times 7 - 3 \times 2) = +3.27\text{m}$$



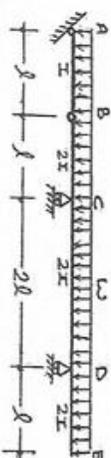
Además:

$$M_0 \frac{a}{l} = 9.8 \times \frac{2}{7} = 2.87\text{m}$$

$$M_0 \frac{b}{l} = 9.8 \times \frac{5}{7} = 7.07\text{m}$$

PROBLEMA IX.2. (UNI, 26-DIC-1968)

Para la viga que se muestra, determinar la deflexión vertical y el cambio de pendiente en B.



Solución:

Aplicamos el método de la viga conjugada. La deflexión en B será igual al momento flector en B', y el cambio de pendiente en B será la diferencia de esfuerzos cortantes (o sea reacción de apoyo) en B'.

Los momentos flectores en C y D son:

$$M_C = -\left(\frac{\omega l^2}{2}\right)l - \frac{1}{2}\omega l^2 = -\omega l^2$$

$$M_D = -\frac{1}{2}\omega l^2$$

Cargas sobre la viga conjugada:

$$E/I \text{ [1]} = \frac{2}{3} \left(\frac{\omega l^2}{8}\right) = \frac{1}{12} \omega l^3$$

$$E/I \text{ [2]} = E/I \text{ [8]} = \frac{2}{3} \left(\frac{\omega l^2}{16}\right)l = \frac{1}{24} \omega l^3$$

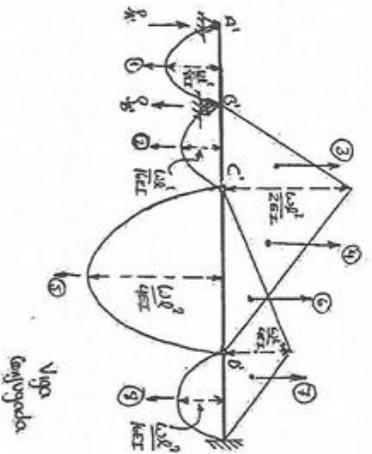
$$E/I \text{ [3]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega l^2}{2EI}\right)l = \frac{1}{4} \omega l^3$$

$$E/I \text{ [4]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega l^2}{2EI}\right)2l = \frac{1}{2} \omega l^3$$

$$E/I \text{ [5]} = \frac{2}{3} \left(\frac{\omega l^2}{4EI}\right)2l = \frac{1}{3} \omega l^3$$

$$E/I \text{ [6]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega l^2}{4EI}\right)2l = \frac{1}{4} \omega l^3$$

$$E/I \text{ [7]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega l^2}{4EI}\right)l = \frac{1}{8} \omega l^3$$



Reacciones de apoyo A' y B':

$$M_C = 0: P_A (2l) - P_B (l) + \left[3\left(\frac{l}{3}\right) - \left[1\right]\frac{3}{2}l - \left[2\right]\frac{l}{2}\right] \omega l^3 = 0 \rightarrow P_B = 2P_A - \frac{\omega l^3}{16EI} \dots (1)$$

$$M_D = 0: P_A (4l) - P_B (3l) + \left[3\left(2l + \frac{l}{3}\right) + \left[4\right]\frac{4}{3}l + \left[6\right]\frac{2}{3}l - \left[1\right]\frac{7}{2}l - \left[2\right]\frac{5}{2}l - \left[5\right]l\right] \omega l^3 = 0$$

$$\rightarrow P_A = \frac{7\omega l^3}{16EI}$$

$$\text{Luego: } P_B = 2 \left(\frac{7\omega l^3}{16EI}\right) - \frac{\omega l^3}{16EI} \rightarrow \therefore P_B = \frac{13\omega l^3}{16EI}$$

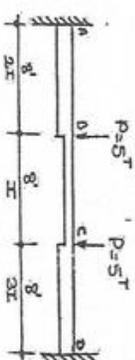
Deflexión vertical en B:

$$\delta_B = M_B = P_A (l) - \left[1\right]\frac{l}{2} = \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{2}\right) \frac{\omega l^4}{EI} \rightarrow \therefore \delta_B = \frac{19\omega l^4}{48EI} \downarrow$$

Cambio de pendiente en B= (reacción en el apoyo B): $\Delta\theta_B = P_B \cdot l \therefore \Delta\theta_B = \frac{13\omega l^3}{16EI}$

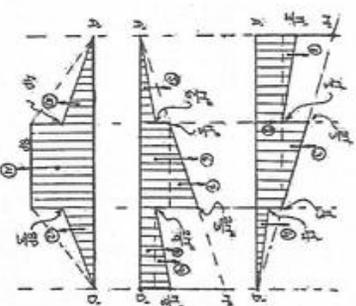
PROBLEMA IX.3. (UNI, 16-DIC-1968)

Aplicando el método de la viga conjugada, resolver la viga mostrada se trazara, finalmente, los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.



Solución:

Denominamos M' y M'' a los momentos en los extremos A y D, respectivamente; suponemos que son negativos. La viga conjugada A'D' (extremo de voladizos en A' y en D') esta sujeta al sistema de cargas indicadas en el esquema, en las que todos los valores hay que dividirlos por EI.



Las cargas concentradas correspondientes a estas fuerzas son:

$E/I \text{ [1]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{6} M'\right) = \frac{2}{3} M'$	$E/I \text{ [5]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{6} M''\right) = \frac{2}{3} M''$	$E/I \text{ [9]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{9} M''\right) = \frac{4}{9} M''$
$E/I \text{ [2]} = 2(8) \left(\frac{1}{3} M'\right) = \frac{16}{3} M'$	$E/I \text{ [6]} = (8) \left(\frac{1}{3} M''\right) = \frac{8}{3} M''$	$E/I \text{ [10]} = \frac{1}{2} (8) (4P) = 16P$
$E/I \text{ [3]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{3} M'\right) = \frac{4}{3} M'$	$E/I \text{ [7]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{3} M''\right) = \frac{4}{3} M''$	$E/I \text{ [11]} = (8) (8P) = 64P$
$E/I \text{ [4]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{9} M'\right) = \frac{4}{9} M'$	$E/I \text{ [8]} = (8) \left(\frac{2}{9} M''\right) = \frac{16}{9} M''$	$E/I \text{ [12]} = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{8}{3} P\right) = \frac{32}{3} P$

Ecuaciones de equilibrio en la viga conjugada:

$$1) \sum F_v = 0: \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} + \boxed{5} + \boxed{6} + \boxed{7} + \boxed{8} + \boxed{9} - \boxed{10} - \boxed{11} - \boxed{12} = 0$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{9}\right)M' + \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}\right)M'' = \left(16 + 64 + \frac{32}{3}\right)P$$

$$\rightarrow 35M' + 31M'' = 408P \quad \dots (1)$$

$$2) \sum M_A = 0: \boxed{1}\left(\frac{8}{3}\right) + \boxed{2}(8) + \boxed{3}\left(8 + \frac{8}{3}\right) + \boxed{4}\left(16 + \frac{8}{3}\right) + \boxed{5}\left(\frac{16}{3}\right) + \boxed{6}(12) + \boxed{7}\left(8 + \frac{16}{3}\right) + \boxed{8}(20) + \boxed{9}\left(16 + \frac{16}{3}\right) - \boxed{10}\left(\frac{16}{3}\right) - \boxed{11}(12) - \boxed{12}\left(16 + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right)M' + \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{9}\right)M'' = \left(16x^3 + \frac{64}{3}x^2 + \frac{32}{3}x\right)P$$

$$\rightarrow 113M' + 166M'' = 1776P \quad \dots (2)$$

Resolviendo entre las ecuaciones (1) y (2) se obtienen:

$$M' = 5.49P \quad \text{y} \quad M'' = 6.96P$$

Siendo positivos los resultados, se confirma que los momentos M' y M'' son de los signos supuestos, es decir, ambos negativos. Para $P=5T$, se tienen:

$$M_A = -5.49 \times 5 \quad \therefore M_A = -27.45 Tm$$

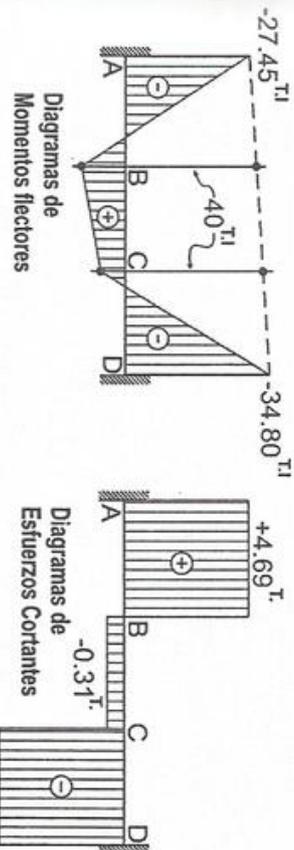
$$M_D = -6.96 \times 5 \quad \therefore M_D = -34.80 Tm$$

Esfuerzos cortantes en los extremos: En general $Q_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{l}(M_i - M_j)$

Luego:

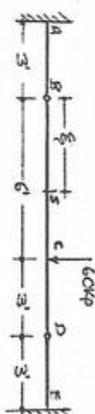
$$Q_{AB} = +5 - \frac{1}{24}(-27.45 + 34.80) = +5 - 0.31 = +4.69 T$$

$$Q_{DC} = -5 - \frac{1}{24}(-27.45 + 34.80) = -5 - 0.31 = -5.31 T$$

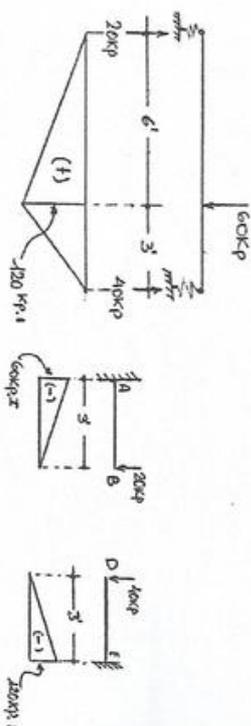


PROBLEMA IX.4, (UNI, 16-DIC-1968)

Calcular la posición y magnitud de la máxima deflexión vertical en la viga mostrada para toda la estructura $E = 3 \times 10^4 Kp/in^2, I = 432 in^4$.



Calculo de los momentos flectores en la viga real:



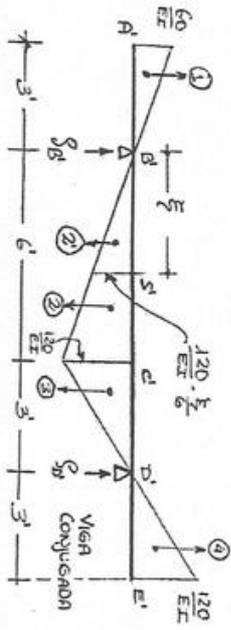
Cargas en la viga conjugada:

$$E/I \boxed{1} = \frac{1}{2}(60)(3) = 90 Kp \cdot in^2$$

$$E/I \boxed{2} = \frac{1}{2}(120)(6) = 360 Kp \cdot in^2$$

$$E/I \boxed{3} = \frac{1}{2}(120)(3) = 180 Kp \cdot in^2$$

$$E/I \boxed{4} = \frac{1}{2}(120)(3) = 180 Kp \cdot in^2$$



Haciendo $\Sigma M_D = 0$:

$$EI \rho_D (9) + 90(11) - 180(2) - 360(5) - 180(2) = 0 \rightarrow \therefore \rho_D = \frac{170}{EI}$$

Por $\Sigma F_v = 0$: $\rho_D = \frac{100}{EI}$

La máxima deflexión en S de la viga real, a distancia ξ de B, corresponde a la sección S' de la viga conjugada en la que el momento flector es máximo, o sea en la que el cortante es cero (recuérdese que $Q = \frac{dM}{dx}$, y M será máximo cuando $\frac{dM}{dx} = 0$):

$$Q_{S'} = 1 + \rho_D \cdot \xi = 0, \text{ donde } EI \cdot 2 = \frac{1}{2} \xi \left(120 - \frac{\xi}{6} \right) = 10\xi^2$$

Reemplazando valores:

$$\frac{90}{EI} + \frac{170}{EI} - \frac{10\xi^2}{EI} = 0 \rightarrow \xi^2 = 26 \rightarrow \therefore \xi = 5.1'$$

con lo que $\frac{260}{EI}$

Y la deflexión máxima, o sea en S, es:

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI} \left(2 + \xi \right) + \rho_D \left(\xi \right) - \frac{2}{EI} \left(\frac{\xi^3}{3} \right) = \frac{10}{EI} (7.1) + \frac{170}{EI} (5.1) - \frac{260}{EI} \left(\frac{5.1}{3} \right) = \frac{1064}{EI}$$

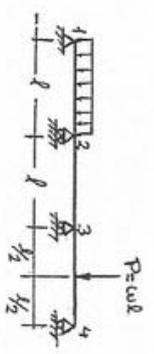
para $EI = (3 \times 10^4 \text{ Kp/in}^2)(432 \text{ in}^4) = 1296 \times 10^4 \text{ Kp/in}^2 = 9 \times 10^4 \text{ Kp/in}^2$

Luego,

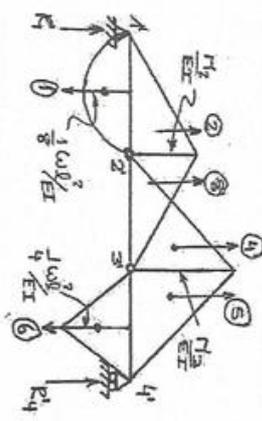
$$\delta_{max} = 0.01182 \text{ pies} \quad \downarrow$$

PROBLEMA IX.5.

Resolver la viga que se muestra, en la que para todos los tramos $EI = \text{Constante}$.



Solución:
Aplicando el método de la viga conjugada, consideramos los momentos para los apoyos 2 y 3 como negativos. Tendremos los siguientes valores para las cargas:



$\boxed{1} = \frac{2}{3} l \left(\frac{1}{8} \omega l^2 / EI \right) = \frac{\omega l^3}{12EI}$	$\boxed{4} = \frac{1}{2} l (M_3 / EI) = \frac{M_3 l}{2EI}$
$\boxed{2} = \frac{1}{2} l (M_2 / EI) = \frac{M_2 l}{2EI}$	$\boxed{5} = \frac{1}{2} l (M_3 / EI) = \frac{M_3 l}{2EI}$
$\boxed{3} = \frac{1}{2} l (M_2 / EI) = \frac{M_2 l}{2EI}$	$\boxed{6} = \frac{1}{2} l \left(\frac{1}{4} \omega l^2 / EI \right) = \frac{\omega l^3}{8EI}$

Las reacciones de apoyo son:

$$R_1 = \left[\frac{13}{144} \omega l^3 - \frac{1}{3} (2M_2 + M_3) \right] / EI \quad R_4 = \left[\frac{17}{144} \omega l^3 - \frac{1}{3} (M_2 + 2M_3) \right] / EI$$

Planteamos, en este caso, las ecuaciones de momento flector en las articulaciones 2' y 3' iguales a cero:

$$1) M_{f,2'}(i) = 0: R_1(l) + \boxed{2} \left(\frac{l}{3} \right) - \boxed{1} \left(\frac{l}{2} \right) = 0$$

$$\text{O sea } 6 \left[\frac{13}{144} \omega l^3 - \frac{1}{3} (2M_2 + M_3) \right] + 2 \left(\frac{M_2 l}{2} \right) - 3 \left(\frac{\omega l^3}{12} \right) = 0$$

$$\therefore 72M_2 + 48M_3 = 7\omega l^2 \quad \dots(i)$$

$$2) M_{f,3'}(d) = 0: \boxed{5} \left(\frac{l}{3} \right) + R_4(l) - \boxed{6} \left(\frac{l}{2} \right) = 0$$

$$2 \left(\frac{M_3 l}{2} \right) + 6 \left[\frac{17}{144} \omega l^3 - \frac{1}{3} (M_2 + 2M_3) \right] - 3 \left(\frac{\omega l^3}{8} \right) = 0$$

$$\therefore 6M_2 + 9M_3 = \omega l^2 \quad \dots(ii)$$

Resolviendo entre (i) y (ii) se obtienen:

$$M_2 = \frac{\omega l^2}{24} \quad M_3 = \frac{\omega l^2}{12}$$

Los resultados son positivos, luego los momentos son de los signos considerados, ambos negativos.

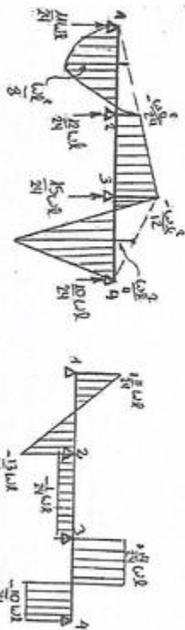
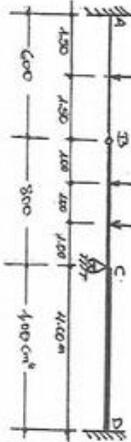


Diagrama de momentos
Flechas y reacciones

Diagrama de esfuerzos
Cortantes

PROBLEMA IX.6. (UNI, 25-FEB-1966)

Empleando el método de la viga conjugada, resolver la viga mostrada. Todos los elementos son de $E = 1.8 \times 10^4 \text{ T/cm}^2$



Consideramos como incógnitas del problema los momentos M_A, M_C y M_D en los apoyos, supondremos que M_A y M_C son negativos, y M_D positivo. Podemos establecer una primera relación entre estos momentos al plantear la condición de que la reacción R_B entre los tramos AB y BC, es nula:

$$R_B = 0$$

O sea, poniéndola en términos de esfuerzos cortantes:

$$R_B = Q_{BC} - Q_{BA} = 0$$

Dónde:

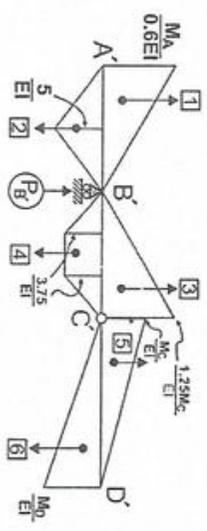
$$Q_{BC} = +3 - \frac{1}{3}(M_{BC} - M_{CB}) = 3 - \frac{1}{3}M_C$$

$$Q_{CB} = -2 - \frac{1}{3}(M_{AB} - M_{BA}) = -2 + \frac{1}{3}M_A$$

Pues $M_{BA} = M_{BC} = 0, M_{CB} = -M_C$ y $M_{AB} = -M_A$

$$\text{Luego, } R_B = \left(3 - \frac{1}{3}M_C\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}M_A\right) = 0 \rightarrow \therefore M_A + M_C = 15 \dots (1)$$

En la viga conjugada se ha tomado como valor de I la de 100 cm^4 , en el tramo CD. Las expresiones de las cargas sobre esta viga son:



Viga Conjugada

$\boxed{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_A}{0.6EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (2.5M_A)$	$\boxed{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{3.75}{EI} \right) (3+1) = \frac{1}{EI} (7.5)$
$\boxed{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (7.5)$	$\boxed{5} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_C}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_C)$
$\boxed{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1.25M_C}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (1.875M_C)$	$\boxed{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_D}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_D)$

$$P_B = \frac{1}{EI} (15 - 2.5M_A - 3.875M_C + 2M_D)$$

Las ecuaciones de equilibrio en la viga conjugada son:

$$1) M_{f'(der)} = 0: 5 \left(\frac{1}{3} \times 4 \right) - 6 \left(\frac{2}{3} \times 4 \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (2M_C) \left(\frac{4}{3} \right) - \frac{1}{EI} (2M_D) \left(\frac{8}{3} \right) = 0 \rightarrow \therefore M_C = 2M_D \dots (2)$$

$$2) \sum M_B = 0: \boxed{1} \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) + \boxed{4} \left(\frac{1}{2} \times 3 \right) - \boxed{2} \left(\frac{1}{2} \times 3 \right) - \boxed{3} \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) - \boxed{5} - \boxed{6} (3) = 0$$

$$\frac{1}{EI} (2.5M_A)(2) + \frac{1}{EI} (7.5)(1.5) - \frac{1}{EI} (7.5)(1.5) - \frac{1}{EI} (1.875M_C)(2)$$

$$-\frac{1}{EI} (2M_C - 2M_D)(3) = 0$$

$$\therefore 5M_A - 9.75M_C + 6M_D = 0 \dots (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se obtienen:

$$M_A = 8.61 \text{ Tm} \quad M_C = 6.38 \text{ Tm} \quad M_D = 3.19 \text{ Tm}$$

Los tres son resultados positivos, lo que significa que los momentos son de los signos supuestos: momentos negativos para M_A y M_C , y positivo para M_D .

Calculo de los esfuerzos cortantes:

$$Q_{AB} = +2 - \frac{1}{3}(-8.61 - 0) = +4.87 T$$

$$Q_{BA} = -2 - \frac{1}{3}(-8.61 - 0) = +0.87 T$$

$$Q_{BC} = +3 - \frac{1}{3}(0 + 6.38) = +0.87 T$$

$$Q_{CB} = -3 - \frac{1}{3}(0 + 6.38) = -5.13 T$$

$$Q_{CD} = 0 - \frac{1}{4}(-6.38 - 3.19) = +2.39 T$$

$$Q_{DC} = 0 - \frac{1}{4}(-6.38 - 3.19) = +2.39 T$$

Relaciones:

$$R_A = Q_{AB} = +4.87 T \uparrow$$

$$R_B = Q_{BC} - Q_{BA} = 0.87 - 0.87 = 0$$

$$R_C = Q_{CD} - Q_{CB} = 2.39 - (-5.13) = 7.52 T \uparrow$$

$$R_D = -Q_{DC} = -(+2.39) = 2.39 T \downarrow$$

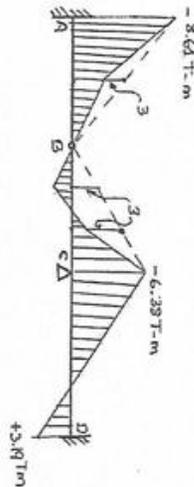


Diagrama de momentos flectores

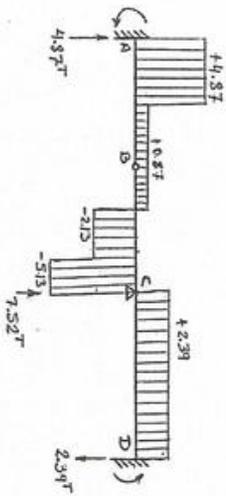
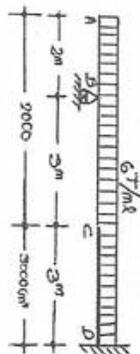


Diagrama de esfuerzos cortantes y reacciones de apoyos

PROBLEMA IX.7. (UNI,24-JUN-1968)

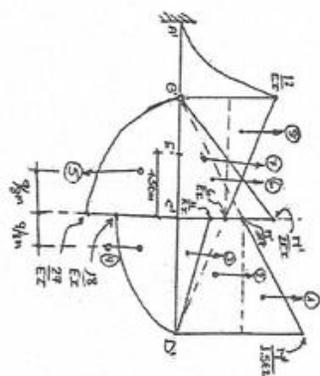
Para la viga que se muestra, determinar la deflexión en la sección de en medio entre B y C. toda la viga tiene $E = 2 \times 10^3 T/cm^2$.



Haremos la determinación empleando el método de la viga conjugada. Determinaremos en primer lugar el momento en el empotramiento D. Para esto debemos plantear para la viga conjugada, la ecuación:

$$M_{r,B'}(der) = 0$$

Considerando M' (el momento flector en el extremo D) como que es momento negativo y tomando $I = 2000 cm^4$, se tienen las siguientes expresiones para las cargas en la viga conjugada:



$\boxed{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M'}{3EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (0.5M')$	$\boxed{5} = \frac{2}{3} \left(\frac{27}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (54)$
$\boxed{2} = \left(\frac{M'}{3EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (M')$	$\boxed{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{M'}{2EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (0.75M')$
$\boxed{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (6)$	$\boxed{7} = \left(\frac{6}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (18)$
$\boxed{4} = \frac{2}{3} \left(\frac{18}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (36)$	$\boxed{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{EI} \right) (3) = \frac{1}{EI} (9)$

Haciendo igual a cero el momento flector de todos las fuerzas a la derecha de B', tenemos:

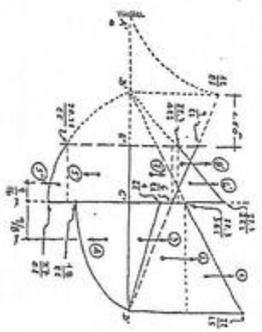
$$\boxed{1}(5) + 2(4.5) + \boxed{3}(4) - \boxed{4} \left(3 + \frac{9}{8} \right) - \boxed{5} \left(3 - \frac{9}{8} \right) + \boxed{6}(2) + \boxed{7}(1.50) + \boxed{8}(1) = 0$$

Reemplazando las expresiones para las fuerzas y despreciando se obtiene:

$$M' = \frac{759}{34} = 22.3 \quad \therefore M_D = 22.3 Tm$$

Resultado positivo, lo que significa que el momento es del signo supuesto, es decir, momento negativo. La deflexión solicitada esta dada por el momento flector en la sección B' de la viga conjugada. Tomaremos el momento de las cargas que quedan a la derecha de la reacción, pues alguna de ellas ya las tenemos calculadas. Hay por determinar ahora, además, las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned} \boxed{5} &= \left(\frac{20.25}{EI}\right)(1.50) = \frac{1}{EI}(30.375) \\ \boxed{5} &= \frac{2}{3} \left(\frac{2.27 - 20.25}{EI}\right)(1.50) = \frac{1}{EI}(6.75) \\ \boxed{6} &= \frac{1}{2} \left(\frac{22.3}{4EI}\right)(1.50) = \frac{1}{EI}(4.18) \\ \boxed{7} &= \left(\frac{22.3}{4EI} + \frac{6}{EI}\right)(1.50) = \frac{1}{EI}(17.37) \\ \boxed{8} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{EI}\right)(1.50) = \frac{1}{EI}(2.25) \end{aligned}$$



La deflexión solicitada es:

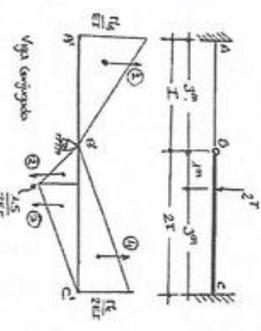
$$\begin{aligned} \delta &= M_{f,e}(ax) = -\boxed{1}(3.50) - \boxed{2}(3) - \boxed{3}(2.5) + \boxed{4}\left(1.50 + \frac{9}{8}\right) + \boxed{5}\left(1.50 - \frac{9}{16}\right) + \boxed{5}\left(\frac{1}{2} \times 1.50\right) \\ &\quad - \boxed{6}\left(\frac{2}{3} \times 1.50\right) - \boxed{7}\left(\frac{1}{2} \times 1.50\right) - \boxed{8}\left[\frac{1}{5} \times 1.50\right] \\ &= -\frac{1}{EI} \left[(0.5 \times 22.3)(3.50) + (22.3)(3) + (6)(2.50) - 36 \left(\frac{21}{8}\right) - 6.75 \left(\frac{15}{16}\right) - (30.375)(0.75) \right. \\ &\quad \left. + (4.18)(1) + (17.37)(0.75) + (2.25)(0.5) \right] = -\frac{15.649}{EI} \end{aligned}$$

Donde:
 $EI = (2 \times 10^3 T/cm^2)(2000 cm^4) = 4 \times 10^6 Tcm^2 = 4007m^2$

Luego,
 $\delta = -\frac{15.649}{400} = -0.039 m \quad \therefore \delta = 3.9 cm \uparrow$

PROBLEMA IX.8. (UNI,11-MAR-1966)

Aplicando el método de la viga conjugada, resolver la viga ABC perfectamente empotrada en A y C, y con articulación en B.



Solución:
Las incógnitas del problema son los momentos M_A y M_C en los empotramientos, los que suponemos son negativos.

En la viga real se tiene las siguientes expresiones para las reacciones en función de los momentos extremos:

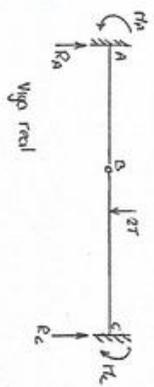
$$R_A \uparrow = \frac{1}{3} M_A \quad R_C \uparrow = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_C$$

Y planteando la ecuación $\Sigma F_v = 0$,

Tenemos:
 $R_A + R_C - 2 = 0 \quad \therefore 4M_A + 3M_C - 18 = 0 \dots (1)$

En la viga conjugada planteando la ec. $\Sigma M_B = 0$:

$$\boxed{1}\left(\frac{2}{3} \times 3\right) + \boxed{2}\left(\frac{2}{3} \times 1\right) + \boxed{3}\left(1 + \frac{1}{3} \times 3\right) - \boxed{4}\left(\frac{2}{3} \times 4\right) = 0$$



Donde:

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= \left(\frac{M_A}{EI}\right) \frac{3}{2} = \frac{1}{4EI}(6M_A) \\ \boxed{2} &= \left(\frac{1.5}{2EI}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{4EI}(1.5) \\ \boxed{3} &= \left(\frac{1.5}{2EI}\right) \frac{3}{2} = \frac{1}{4EI}(4.5) \\ \boxed{4} &= \left(\frac{M_C}{2EI}\right) \frac{4}{2} = \frac{1}{4EI}(4M_C) \end{aligned}$$

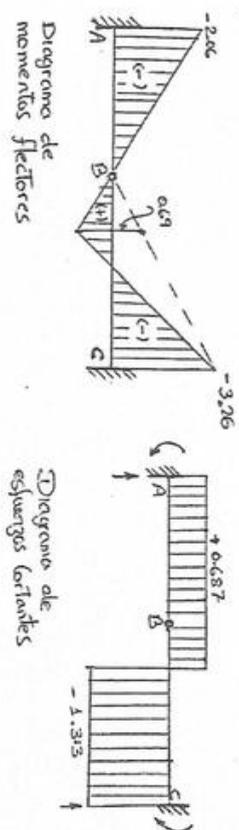
Que reemplazados dan la ecuación: $18M_A - 16M_C + 15 = 0 \dots (2)$

Resolviendo entre (1) y (2), se obtienen: $M_A = 2.067m \quad M_C = 3.267m$

Ambos resultados son positivos, o sea que estos momentos son de los sentidos supuestos; es decir, ambos son momentos negativos.

Las reacciones en los apoyos son: $R_A = \frac{1}{3} M_A = \frac{1}{3}(2.06) = 0.687 \quad \therefore R_A = 0.687 T \uparrow$

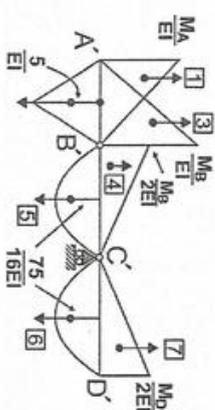
$R_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_C = 0.5 + \frac{1}{4}(3.26) = 1.313 \quad \therefore R_C = 1.313 T \uparrow$



PROBLEMA IX.9. (UNI,12-NOV-1965)

Aplicando el método de la viga conjugada, resolver la estructura que se muestra. Para toda la viga $E = 2 \times 10^3 T/cm^2$.

Solución:
Hacemos $I = 600 cm^4$, o sea que $1200 cm^4 = 2I$. Las incógnitas son los momentos M_A, M_B y M_D , que suponemos son negativos.



Viga Conjugada

Calculo de las cargas en la viga conjugada:

$\boxed{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_A}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_A)$	$\boxed{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_B}{2EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (1.25M_B)$
$\boxed{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (10)$	$\boxed{5} = \frac{1}{3} \left(\frac{7.5}{16EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (15.625)$
$\boxed{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_B}{EI} \right) (4) = \frac{1}{EI} (2M_B)$	$\boxed{7} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_D}{2EI} \right) (5) = \frac{1}{EI} (1.25M_D)$

Ecuaciones de equilibrio en la viga conjugada:

1) $M_{f,c'}(der) = 0: \boxed{6} \left(\frac{5}{2} \right) - \boxed{7} \left(\frac{2}{3} x^5 \right) = 0$

$\frac{1}{EI} (15.625)(2.5) - \frac{1}{EI} (1.25M_D) \left(\frac{10}{3} \right) = 0 \rightarrow \therefore M_D = 9.375 Tm$

2) $M_{f,b'}(eq) = 0: \boxed{1} \left(\frac{2}{3} x^4 \right) + \boxed{3} \left(\frac{1}{3} x^4 \right) - \boxed{2} \left(\frac{1}{2} x^4 \right) = 0$

$\frac{1}{EI} (2M_A) \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{1}{EI} (2M_B) \left(\frac{4}{3} \right) - \frac{1}{EI} (10) = 0 \rightarrow 4M_A + 2M_B = 15 \dots (1)$

3) $\sum M_{c'} = 0: \boxed{1} + \boxed{3} - \boxed{2} \left(\frac{2}{3} x^5 \right) + \boxed{4} \left(\frac{2}{3} x^5 \right) - \boxed{5} \left(\frac{1}{2} x^5 \right) = 0$

$\frac{1}{EI} (2M_A + 2M_B - 10)(5) + \frac{1}{EI} (1.25M_D) \left(\frac{10}{3} \right) - \frac{1}{EI} (15.625)(2.5) = 0$

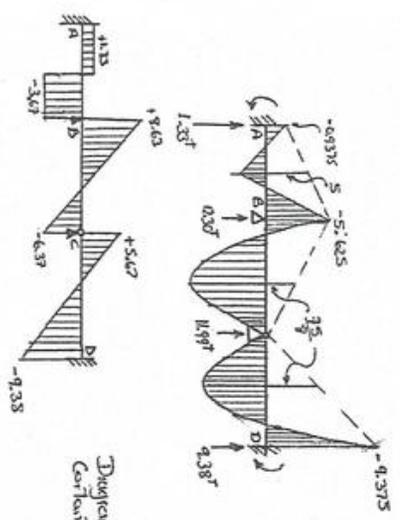
Resolviendo entre las ec. (1) y (2): $M_A = 1.9375 Tm, M_B = 5.625 Tm$

Los tres resultados son de signos positivos, lo que significa que los momentos son de los signos supuestos, es decir negativos.

Calculo de los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos. En general: $Q_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{l} (M_i - M_j)$

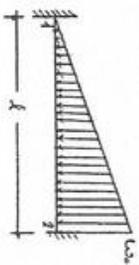
Luego:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= V_{AB} = +2.5 - \frac{1}{4} (-0.9375 + 5.625) = +1.33 T \\ Q_{BA} &= V_{BA} = -2.5 - \frac{1}{4} (-0.9375 + 5.625) = -3.67 T \\ Q_{BC} &= V_{BC} = +7.5 - \frac{1}{5} (-5.625 - 0) = +8.63 T \\ Q_{CB} &= V_{CB} = -7.5 - \frac{1}{5} (-5.625 - 0) = -6.37 T \\ Q_{CD} &= V_{CD} = +9 - \frac{1}{5} (+9 - 9.375) = +5.62 T \\ Q_{DC} &= V_{DC} = -9.375 - \frac{1}{5} (9.375 - 0) = -9.38 T \end{aligned}$$



PROBLEMA IX.10.

Determinar la ecuación del eje deformado de la viga mostrada, siendo EI = constante.



Solución:

Adaptando las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto debidos a una carga concentrada a distancias ξ y $l - \xi$ de los extremos son:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{(P)(a)(b)^2}{l^2} = -\frac{1}{l^2} \int_0^{l-\xi} (\omega_0 d\xi)(\xi)(l-\xi)^2 = -\frac{\omega_0 l^2}{30} \\ M_2 &= -\frac{(P)(b)(a)^2}{l^2} = -\frac{1}{l^2} \int_0^{\xi} (\omega_0 d\xi)(\xi)(l-\xi)^2 = -\frac{\omega_0 l^2}{20} \end{aligned}$$

La expresión del momento flector isostático es:

$$\mu = \left(\frac{1}{6} \omega_0 l \right) \xi - \left(\frac{1}{2} \xi \omega_0 \frac{\xi}{l} \right) \frac{1}{3} \xi$$

$$\therefore \mu = \frac{\omega_0}{6} (l^2 \xi - \xi^3)$$

La viga conjugada queda conformada como se muestra enseguida, en la que:

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= \frac{x}{2} \left(\frac{M_1}{EI} \right) = \frac{M_1 x^2}{2EI} = -\frac{\omega_0 l x^2}{30EI} \\ \boxed{2} &= x \left(\frac{M_1 (l-x)}{EI} \right) = \frac{\omega_0 l x}{30EI} (l-x) \\ \boxed{3} &= \frac{x}{2} \left(\frac{M_2}{EI} \right) = -\frac{\omega_0 l x^2}{40EI} \end{aligned}$$

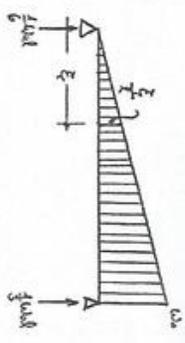
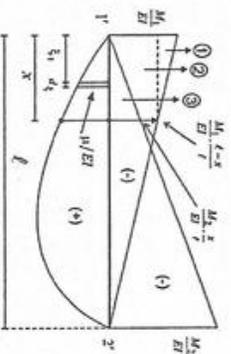


Diagrama de momentos flectores y reacciones en los apoyos



La deflexión en la sección de abscisa x de la viga real está dada por el momento flector en la misma sección de la viga conjugada.

$$y = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}x \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{3}{3} \left(\frac{x}{3} \right) + \int_{\xi=0}^{\xi=x} \left(\frac{M}{EI} d\xi \right) (x-\xi)$$

$$y = -\frac{60kx^2}{60EI} \left(\frac{2}{3}x \right) - \frac{60kx}{30EI} (1-x) \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{60kx^2}{40EI} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{1}{EI} \int_0^x 60k(1^2\xi - \xi^3) (x-\xi) d\xi$$

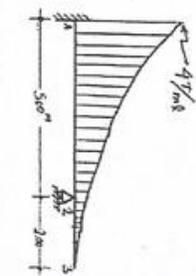
$$\therefore y = \frac{60kx^2}{120EI} (3/2x - x^3 - 2/3)$$

O también: $y = \frac{60k^4}{120EI} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left[3 \left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \right]$

O también: $y = \frac{60k^4}{120EI} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left[3 \left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \right]$

PROBLEMA IX. 11. UNI, 20-ENE-1969)

La viga de sección constante mostrada en el esquema, esta sujeta a la acción de una carga repartida, variable en forma parabólica (de 2º grado), de cero en el extremo 3, a 4t/m en 1. Aplicando el método de la viga conjugada, determinar la posición y magnitud de la máxima deflexión vertical.



Solución:
La reacción en el apoyo 2 será nuestra incógnita hipostática. Para determinar el valor de esta incógnita, planteamos en la viga conjugada la ecuación de equilibrio: el momento flector en la rotula 2' es igual a cero:
 $M_{2'} = 0 \dots (1)$

Para esto, en primer lugar determinamos la expresión de la carga ω en la sección genérica, y obtenemos: $\omega = \frac{4}{9}x^2$

Determinamos las cargas sobre la viga conjugada, ellas son el diagrama de momentos reducidos que hay en la viga real. En esta viga, las expresiones de los momentos flectores son:

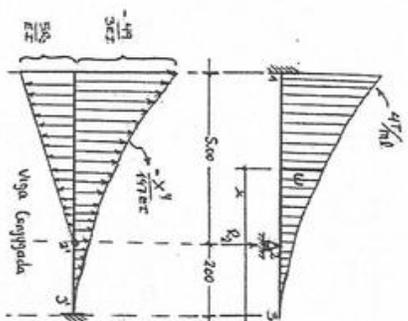
$$0 \leq x \leq 2.00 \text{ m: } M = - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (\omega d\xi) (x-\xi)$$

$$= - \int_0^x \left(\frac{4}{9} \xi^2 d\xi \right) (x-\xi) = - \frac{x^4}{147}$$

$$2.00 \leq x \leq 7.00 \text{ m: } M = - \frac{x^4}{147} + R_2(x-2)$$

Aplicando la ec.(1), tenemos:

$$\int_{x=2}^{x=7} \left(\frac{x^4}{147EI} dx \right) (x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{5R_2}{EI} \right) (5.00) \left(\frac{2}{3} \times 5.00 \right) = 0$$



$$\frac{1}{147} \left[\frac{1}{6} x^6 - \frac{2}{5} x^5 \right]_2^7 - \frac{125}{3} R_2 = 0 \rightarrow R_2 = 2.17 \uparrow$$

La máxima deflexión pedida en la viga dada, corresponde al máximo momento flector en la viga conjugada, es decir, en la sección en la que ocurre el esfuerzo cortante nulo para la viga conjugada:

$$\delta_{max} = M'_{max} \quad \frac{dM'}{dx} = Q' = 0$$

Debemos plantear, para la ecuación $Q' = 0$. Denominemos c la abscisa en la que ocurre el cortante nulo en la viga conjugada, y tenemos:

$$Q' = \int_{x=c}^{x=7} \left[\frac{-x^4}{147EI} + \frac{2.1}{EI} (x-2) \right] dx = 0$$

$$c^5 - 771.75c^2 + 3087c - 600.25 = 0$$

Ecuación de la que: $c = 4.23 \text{ m}$

En consecuencia, la máxima deflexión de la viga dada ocurre en la sección distante 4.23 m donde el extremo 3, y su valor es:

$$\delta_{max} = M'_{max} = M_c = \int_{4.23}^7 \left[-\frac{x^4}{147EI} + \frac{2.1}{EI} (x-2) \right] dx (x-4.23)$$

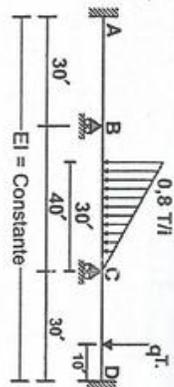
$$= \frac{1}{EI} \int_{4.23}^7 \left[2.1(x^2 - 6.23x + 8.46) - \frac{1}{147}(x^5 - 4.23x^4) \right] dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[2.1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6.23}{2} x^2 + 8.46x \right) - \frac{1}{147} \left(\frac{x^6}{6} - \frac{4.23}{5} x^5 \right) \right]_{4.23}^7 = -5.16$$

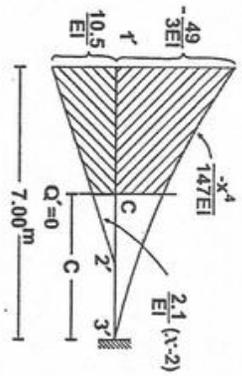
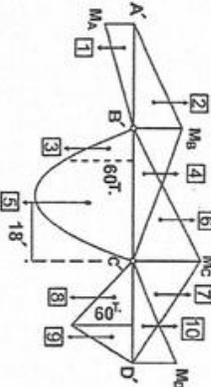
$$\therefore \delta_{max} = \frac{5.16}{EI}$$

PROBLEMA IX. 12. (UNI, 23-MARZ-1970)

Resolver la viga que se muestra, aplicando el método de la viga conjugada.



Solución:
Las incógnitas del problema serán los momentos $M_A, M_B, M_C, y M_D$ sobre los apoyos. Se muestra la viga conjugada correspondiente, en la que como EI es constante en todos los tramos, las cargas ficticias consideramos multiplicadas por EI, ya que se trata únicamente de determinar los momentos flectores.

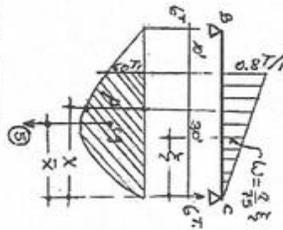


Veamos el diagrama de momentos isostáticos en el tramo BC:

$$\mu = 6x - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (\omega dx)(x - \xi) \rightarrow \therefore \mu = 6x - \frac{x^3}{225}$$

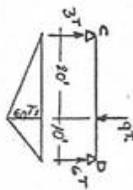
La carga [5] representa la parte achurada:

$$[5] = \int_{x=0}^{x=30} \mu dx = \int_0^{30} \left(6x - \frac{x^3}{225} \right) dx = 1800 \text{ Tm}^2$$



El centro de gravedad lo ubicamos por la distancia \bar{x} , tomando momentos respecto del extremo C'.

$$5\bar{x} = \int_{x=0}^{x=30} (\mu dx) x = \int_0^{30} \left(6x - \frac{x^3}{225} \right) x dx = \left[2x^3 - \frac{x^5}{1125} \right]_0^{30} \rightarrow \therefore \bar{x} = 18'$$



En el tramo CD, el momento isostático en la sección de aplicación de la carga concentrada es:

$$\frac{9x \cdot 20' \cdot x \cdot 10'}{30'} = 60 \text{ Tpie}$$

Las expresiones y valores de las cargas sobre la viga conjugada son:

[1] = $\frac{1}{2}(30)M_A = 15M_A$	[6] = $\frac{1}{2}(40)M_C = 20M$
[2] = $\frac{1}{2}(30)M_B = 15M_B$	[7] = $\frac{1}{2}(30)M_C = 15M$
[3] = $\frac{1}{2}(10)60 = 300$	[8] = $\frac{1}{2}(20)(60) = 600$
[4] = $\frac{1}{2}(40)M_B = 20M_B$	[9] = $\frac{1}{2}(10)60 = 300$
[5] = 1800	[10] = $\frac{1}{2}(30)M_D = 15M_D$

Ecuaciones de equilibrio de la viga conjugada:

$$1) M_{f,B'}(L_{B'}) = 0:$$

$$[1](20) - [2](10) = 0$$

$$30M_A - 15M_B = 0$$

$$\therefore M_B = 2M_A \dots (1)$$

$$2) M_{f,C'}(L_{C'}) = 0:$$

$$[7](10) + [10](20) - [8]\left(\frac{40}{3}\right) - [9]\left(20 + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$150M_C + 300M_D - 600\frac{40}{3} - 300x\frac{70}{3} = 0 \quad \therefore M_C + 2M_D = 10 \dots (2)$$

$$3) \sum M_C = 0:$$

(Concentrando en B' las cargas [1] y [2], y en C las cargas [7],[8],[9] y [10], teniendo en cuenta que los momentos de estas fuerzas respecto de dichos puntos son, respectivamente, iguales a cero):

$$([2] - [1])\left(\frac{40}{3}\right) + [4]\left(\frac{80}{3}\right) + [6]\left(\frac{40}{3}\right) - [3]\left(30 + \frac{10}{3}\right) - [5](18) = 0$$

$$(15M_B - 15M_A)\left(\frac{40}{3}\right) + 20M_B\left(\frac{80}{3}\right) + 20M_C\left(\frac{40}{3}\right) - 300\left(\frac{100}{3}\right) - 1800(18) = 0$$

$$17M_B - 9M_A + 4M_C = 636 \dots (3)$$

$$4) \sum F_v = 0:$$

$$[1] + [3] + [5] + [8] + [9] - [2] - [4] - [6] - [7] - [10] = 0$$

$$15M_A + 300 + 1800 + 600 + 300 - 15M_B - 20M_B - 20M_C - 15M_C - 15M_D = 0$$

$$\therefore 3M_A - 7M_B - 7M_C - 3M_D + 600 = 0 \dots (4)$$

Resolviendo entre las ec. (1) a (4), se obtienen:

$$M_A = 18.16 \text{ Tpie}$$

$$M_B = +36.32 \text{ Tpie}$$

$$M_C = 45.50 \text{ Tpie}$$

$$M_D = 27.25 \text{ Tpie}$$

Resultados todos positivos; lo que significa que estos momentos son de los signos supuestos en el diagrama de cargas, es decir, que M_A positivo, y los otros negativos, en la convención de Resistencia de Materiales:

$$M_A = +18.16 \text{ Tpie} \quad M_B = -36.32 \text{ Tpie} \quad M_C = -45.50 \text{ Tpie} \quad M_D = -27.25 \text{ Tpie}$$

Esfuerzos cortantes:

$$Q_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{l}(M_i - M_j)$$

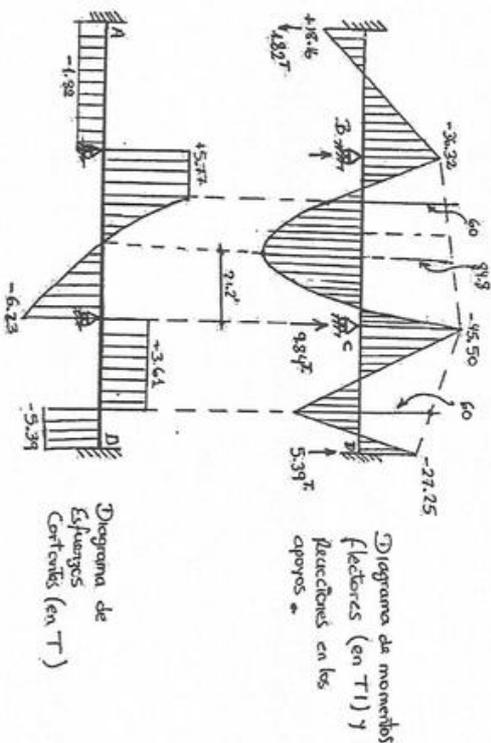
$$Q_{AB} = Q_{BA} = 0 - \frac{1}{30}(+18.16 + 36.32) = -1.82 \text{ T}$$

$$Q_{BC} = +6 - \frac{1}{40}(-36.52 + 45.50) = +5.77 \text{ T}$$

$$Q_{CB} = -6 - \frac{1}{40}(-36.52 + 45.50) = -6.23 \text{ T}$$

$$Q_{CD} = +3 - \frac{1}{30}(-45.50 + 27.25) = +3.61 \text{ T}$$

$$Q_{bc} = -6 - \frac{1}{30}(-45.50 + 27.25) = -5.39 \text{ T}$$

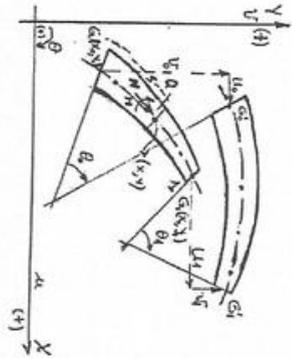


ECUACIONES DE BRESSE

Las ecuaciones de Bresse son relaciones entre los desplazamientos y giros de dos secciones de una estructura sometida a flexión, fuerzas normales, fuerzas cortantes y variaciones de temperatura.

NOTACION.

- H_0, H_1 Proyecciones horizontales de los desplazamientos de las secciones extremas 0 y 1, respectivamente.
- V_0, V_1 Proyecciones verticales de los desplazamientos de las secciones extremas 0 y 1, respectivamente.
- θ_0, θ_1 Giros de los extremos 0 y 1, respectivamente.
- x, y Coordenadas cartesianas de la sección genérica. Para las secciones extremas: $0(x_0, y_0), 1(x_1, y_1)$
- S Coordenada curvilínea de la sección genérica.
- M En general: $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.
Momento flector.
- Q Fuerza cortante.
- EI Rigidez flexora de la sección genérica.
- Ω Área de la sección transversal genérica.
- Ω' Cociente entre el área de la sección transversal y el coeficiente de forma μ (ver en el capítulo II).
- α Coeficiente de dilatación.
- Δt variación de temperatura en el eje medio



Coordenadas, de desplazamientos y giros positivos. Subíndices r, m, n, a positivos.

ECUACIONES.

a) En su forma más general:

$$u_1 = u_0 + \theta_0(v_1 - y_0) - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(v_1 - y)}{EI} ds + \int_{(0)}^{(1)} \frac{Q}{G\Omega} - \frac{dY}{ds} \cdot ds$$

$$- \int_{(0)}^{(1)} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha \Delta T \right) \frac{dx}{ds} ds \dots (1k)$$

$$v_1 = v_0 - \theta_0(x_1 - x_0) + \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(x_1 - x)}{EI} ds - \int_{(0)}^{(1)} \frac{Q}{G\Omega} \frac{dx}{ds} ds - \int_{(0)}^{(1)} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha \Delta T \right) \frac{dy}{ds} ds \dots (2k)$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds \dots (3k)$$

b) Estructura con eje rectilíneo paralelo al eje de abscisas, considerando solamente los efectos de la flexión:

$$u_1 = u_0 + \theta_0(v_1 - y_0) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{M(v_1 - y)}{EI} dx \dots (4k)$$

$$v_1 = v_0 - \theta_0(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI} dx \dots (5k)$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} dx \dots (6k)$$

PROBLEMA X.1.

Determinar el desplazamiento y el giro en el extremo B.

Solución:

Considerando el sistema de ejes cartesianos con origen en A, y el eje de abscisas coincidiendo con el de la viga, podemos aplicar las expresiones (5k) y (6k), en las que:

$$0 \leq x \leq l; \quad M = -P(l - x)$$

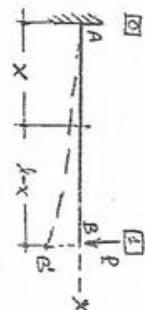
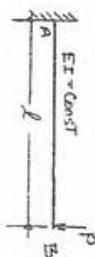
Entonces:

$$(5k): \quad v_1 = \int_0^l \frac{M(l-x)}{EI} dx = \frac{-P}{EI} \int_0^l (l-x)^2 dx$$

$$= \frac{-Pl^3}{3EI} \quad \therefore \delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \downarrow$$

$$(6k): \quad \theta_1 = - \int_0^l \frac{M}{EI} dx = + \frac{P}{EI} \int_0^l (l-x) dx = + \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\therefore \theta_B = \frac{Pl^2}{2EI} \curvearrow$$



$X_0 = 0$	$X_1 = l$
$u_0 = 0$	$u_1 = 0$
$v_0 = 0$	$v_1 = 0$
$\theta_0 = 0$	$\theta_1 = \theta_B$

PROBLEMA X.2.

Aplicando las fórmulas de bresse, resolver la estructura de sección constante que se muestra, considerando solamente los efectos de la flexión.

Solución:

Corrando la estructura según el eje horizontal de simetría, se tiene la situación mostrada en el esquema, para la que, aplicando entre las secciones [0] y [1] la 3ª fórmula de Bresse, tendremos:

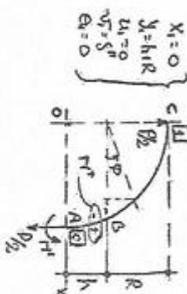
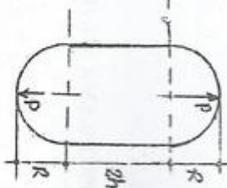
$$(6k): \quad \theta_A = \theta_0 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds \quad \therefore \int_{(0)}^{(1)} M ds \dots (1)$$

En la que:

Tramo AB: $0 \leq y \leq h, \quad M = M \quad ds = dy$

Tramo BC: $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad M$

$$= M' - \frac{P}{2}(R - R \cos \phi) \quad ds = R d\phi$$



$X_0 = R$	$X_1 = R$
$u_0 = 0$	$u_1 = 0$
$v_0 = 0$	$v_1 = 0$
$\theta_0 = 0$	$\theta_1 = \theta_B$

Reemplazando estas expresiones en la cc. (i):

$$\int_0^l (M') dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M' - \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) \right] R d\varphi = 0 \rightarrow M' = \frac{PR^2(\pi - 2)}{2(2h + \pi R)}$$

Luego, las expresiones de las variaciones de los momentos flectores, son:

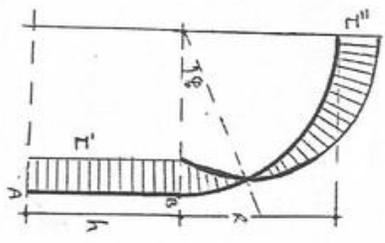
AB: $0 \leq y \leq h \quad M = \frac{PR}{2} \left(\frac{\pi - 2}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$

BC: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad M = \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$

En esta última, para:

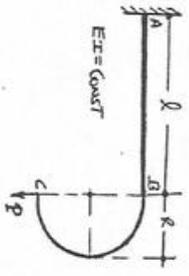
$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad M = M'' = -\frac{PR}{2} \left(\frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$

$y = M = 0 \text{ en } \varphi = \varphi_0 = \arccos \left(\frac{2 + \frac{2h}{R}}{\pi + \frac{2h}{R}} \right)$



PROBLEMA X.3. (UNI, 22-AGOST-1966)

Considerando solo los efectos de la flexión, empleando las ecuaciones de Bresse, determinar el desplazamiento horizontal y el giro de C.

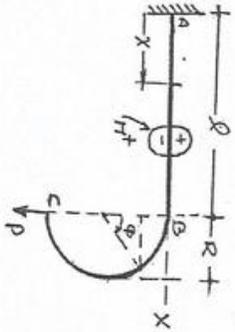


$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l [-P(l-x)] dx + R \int_0^{\pi} (PR \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \right\} \\ &= -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{P}{2} [(l-x)^2]_0^l + PR^2 [-\cos \varphi]_0^{\pi} \right\} = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{2} l^2 - 2PR^2 \right] \\ \therefore \theta_c &= \frac{Pl^2}{2EI} \left[1 - 4 \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right] \quad \square \end{aligned}$$

Solución: Considerando el sistema cartesianos de eje con el origen en el extremo A, tal como se muestra, debemos aplicar las fórmulas de Bresse (1k) y (3k) (en la (2k) todos los términos serían nulos). En ellas:

Tramo AB:-
 $0 \leq x \leq l: \quad y = 0 \quad ds = dx$

$M = -P(l-x)$



Tramo BC:

$0 \leq \varphi \leq \pi:$	$x_0 = l$	$x_1 = l$
$x = l + R \operatorname{sen} \varphi \quad ds = R d\varphi$	$y_0 = 0$	$y_1 = -2R$
$y = -R(1 - \cos \varphi)$	$M_0 = 0$	$M_1 = -hc$
$M = PR \operatorname{sen} \varphi$	$v_0 = 0$	$v_1 = v_c$
	$\theta_0 = 0$	$\theta_1 = \theta_c$

Entonces:

$$\begin{aligned} (1k): \quad h_c &= - \int_0^{\pi} \frac{M(y_1 - y)}{EI} ds = - \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (PR \operatorname{sen} \varphi) [-2R + R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi \\ &= + \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) d\varphi = + \frac{PR^3}{EI} \left[-\cos \varphi + \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \varphi)^2 \right]_0^{\pi} = + \frac{PR^3}{EI} \\ \therefore h_c &= \frac{PR^3}{EI} \rightarrow \end{aligned}$$

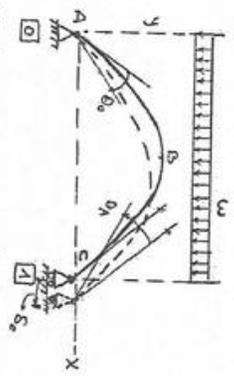
(3k): $\theta_c = - \int_0^l \frac{M}{EI} dx - \int_0^{\pi} \frac{M}{EI} R d\varphi$

PROBLEMA X.4.

Para la estructura del problema III-11, calcular el desplazamiento del apoyo C y los giros en las secciones A y C.

Por simetría física y de carga:

$\theta_0 = -\theta_1$



$x_A = 0$	$x_1 = 2cm$
$x_C = 0$	$y_1 = 0$
$y_A = 0$	$u_1 = Sx$
$v_A = 0$	$v_1 = 0$
$\theta_A = \theta_1$	$\theta_1 = \theta_c$

En la solución del problema C-11 se estableció que:

$$ds = \sec\phi dx$$

$$y = \frac{x}{10}(20-x)$$

$$M = \frac{\omega x}{2}(20-x)$$

$$EI = EI_0 \sec\phi$$

Teniendo en cuenta solamente los efectos de la flexión, aplicamos las ecuaciones (1k) y (3k) de Bresse:

$$(1k): \quad u_1 = - \int_{x=0}^{x=20} \frac{{}^{(1)}M(y-y)}{EI} ds = - \int_{x=0}^{x=20} \left[\frac{\omega x}{2}(20-x) \right] \frac{0 - \frac{x}{10}(20-x)}{EI_0 \sec\phi} \sec\phi dx$$

$$= + \frac{\omega}{20EI_0} \int_0^{20} x^2(20-x)^2 dx = + \frac{16000\omega}{3EI_0} \rightarrow \therefore \delta_c = \frac{16000\omega}{3EI_0}$$

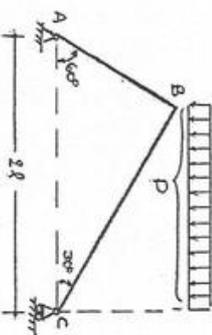
$$(3k): \quad \theta_1 = (-\theta_1) - \int_{x=0}^{x=20} \frac{{}^{(1)}M}{EI} ds$$

$$2\theta_1 = - \int_{x=0}^{x=20} \left[\frac{\omega x}{2}(20-x) \right] \frac{\sec\phi dx}{EI_0 \sec\phi} = - \frac{\omega}{2EI_0} \int_0^{20} x(20-x) dx = - \frac{2000\omega}{3EI_0}$$

$$\therefore \theta_1 = \frac{1000\omega}{3EI_0} \quad \cup \quad \theta_c = \frac{1000\omega}{3EI_0} \quad \cup$$

PROBLEMA X.5. (UNI, 21-AGOST-1969)

Considerando solamente los efectos de la flexión, determinar el desplazamiento del apoyo C debido a la carga uniformemente repartida vertical, de valor total P, en la estructura que se muestra, para la que EI=constante.



Considerando el sistema de ejes con origen en A, y aplicando la ecuación (1k), tenemos:

$$\delta_c = \theta_1(0) - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(-y)}{EI} ds \quad \dots (1)$$

En la que se ha considerado solamente el efecto de la flexión. Debemos determinar los factores que aparecen en el integrando para los tramos AB y BC, para cubrir la integración entre los extremos 0 y 1.

Tramo AB: $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ $M = \frac{3}{8}Px$ $y = x \tan 60$

$$= \sqrt{3}x \quad ds = \frac{dx}{\cos 60} = 2dx$$

Tramo BC: $\frac{l}{2} \leq x \leq 2l$ $M = \frac{5}{8}P(2l-x) - \frac{1}{2}\omega(2l-x)^2$

$$= \frac{5}{8}P(2l-x) - \frac{12P}{32}(2l-x)^2 = \frac{P}{24l}(2l-x)(8x-l)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(2l-x) \quad ds = \frac{dx}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

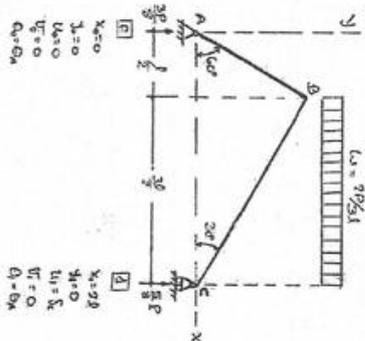
Reemplazando estas expresiones en (1), tenemos:

$$\delta_c = + \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{l/2} \left(\frac{3}{8}Px \right) (\sqrt{3}x)(2dx) + \int_{l/2}^{2l} \left[\frac{P}{24l}(2l-x)(8x-l) \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2l-x) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{3}} dx \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4} P \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{l/2} + \frac{P}{36l} \int_{l/2}^{2l} (8x^3 - 33lx^2 + 36l^2x - 4l^3) dx \right\}$$

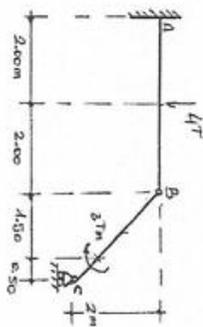
$$= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{32} Pl^3 + \frac{3}{16} Pl^3 \right\} = \frac{Pl^3\sqrt{3} + 6}{EI \cdot 32} = 0.242 \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\therefore \delta_c = 0.242 \frac{Pl^3}{EI} \rightarrow$$



PROBLEMA X.6.

En la estructura mostrada, se pide, aplicando las fórmulas de Bresse, determinar las deformaciones angulares y desplazamientos en B y C. para toda la estructura $EI = 400 \text{ Tm}^2$



$1.50 \leq x \leq 2.0\text{m}: M = -1.5x + 3$

Tramo BC:- Para este tramo, con el sistema de ejes ubicado como se indica en el esquema:
 $y = -x \quad ds = \sqrt{2}dx$
 Expresión de los momentos flectores:
 $0 \leq x \leq 1.50 \text{ m}: M = -1.5x$
 $1.50 \leq x \leq 2.0\text{m}: M = -1.5x + 3$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (2k):

$$0 = \frac{1}{75} - \theta_{BC}(2-0) + \frac{1}{EI} \int_0^{1.5} (-1.5x)(2-x)\sqrt{2}dx + \int_{1.5}^2 (-1.5x+3)(2-x)\sqrt{2}dx$$

$$\theta_{BC} = \frac{1}{150} - \frac{13\sqrt{2}}{16EI} \rightarrow \therefore \theta_{BC} = +0.0038 \text{ radian } \checkmark$$

Reemplazándolos en la ecuación (1k) considerando solo los efectos de la flexión:

$$u_C = u_0 + \theta_0(y_1 - y_0) - \int_0^{(1)} \frac{M}{EI} (y_1 - y) ds$$

$$u_C = 0 + \theta_{BC}(-2-0) - \frac{1}{EI} \int_0^{1.5} (-1.5x)(-2+x)\sqrt{2}dx + \int_{1.5}^2 (-1.5+3)(-2+x)\sqrt{2}dx$$

$$= -2\theta_{BC} - \frac{13\sqrt{2}}{8EI} = -2 \left(\frac{1}{150} - \frac{13\sqrt{2}}{16EI} \right) - \frac{13\sqrt{2}}{8EI} = -\frac{1}{75}$$

$$\therefore u_C = -0.013 \text{ m } \checkmark$$

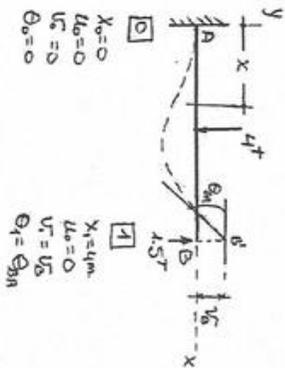
Finalmente, sustituyendo en la ecuación (3k):

$$\theta_{CB} = \theta_{BC} - \frac{1}{EI} \int_0^{(1)} M ds + \frac{1}{EI} \int_0^{1.5} M ds - \frac{1}{EI} \int_0^{1.5} (-1.5x)\sqrt{2}dx + \int_{1.5}^2 (-1.5x+3)\sqrt{2}dx$$

$$= 0.0038 - \frac{\sqrt{2}}{EI} \left(-\frac{3}{2} \right) = 0.0038 + 0.0053 = 0.0091$$

$$\therefore \theta_{CB} = +0.0091 \text{ radian } \checkmark$$

Solución:
 Aplicando en primer lugar las fórmulas de Bresse entre los extremos A y B, podemos determinar la deformación θ_{BA} y el único desplazamiento, el v_B . Enseguida, conocido el desplazamiento de aplicando las fórmulas entre los extremos B y C, podemos calcular θ_{BC} , θ_{CB} y el único desplazamiento lineal de C, es decir u_C .



$2 \leq x \leq 4\text{m}: M = 1.5(4-x) = 6 - 1.5x$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (6k):

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_0^{(1)} \frac{M}{EI} ds \quad \theta_{BA} = 0 - \frac{1}{EI} \int_0^2 (2.5x-2)dx + \int_2^4 (6-1.5x)dx$$

$$\theta_{BA} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{2.5}{2}x^2 - 2x \right]_0^2 + \left[6x - \frac{1.5}{2}x^2 \right]_2^4 = -\frac{4}{EI} \rightarrow \therefore \theta_{BA} = -0.01 \text{ radian } \checkmark$$

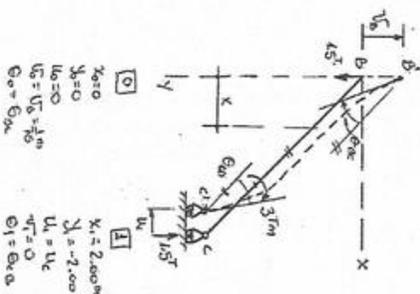
Y enseguida en la ecuación (5k):

$$v_1 = v_0 - \theta_0(x_1 - x_0) + \int_0^{(1)} \frac{M}{EI} (x_1 - x) dx$$

$$v_B = 0 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (2.5x-2)(4-x)dx$$

$$+ \int_2^4 (6-1.5x)(4-x)dx = +\frac{16}{3EI}$$

$$\rightarrow \therefore v_B = +\frac{1}{75} = +0.013 \text{ m } \uparrow$$



PROBLEMA X.7.

Resolver el problema III-14 aplicando las fórmulas de Bresse.

Solución:

Considerando el sistema el sistema de ejes cartesianos que se indica, se tienen las condiciones para los extremos 0 y 1 entre las que aplicaremos las tres fórmulas de Bresse; y, así podremos determinar las tres incógnitas que se presentan:

$$\theta_A, \delta_E \text{ y } \theta_E.$$

Las variaciones de los momentos flectores, con los intervalos de variaciones así como los correspondientes diferenciales de longitud son:

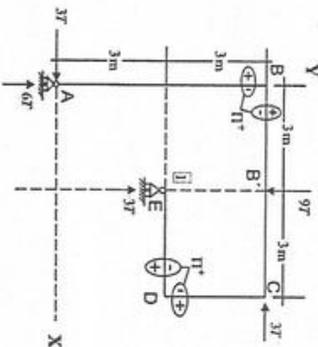
$$AB: \begin{cases} x=0 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases} ds = dy \quad M = -3y$$

$$BB': \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ y=6 \end{cases} ds = dx \quad M = 6x - 18$$

$$BC: \begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ y=6 \end{cases} ds = dx \quad M = 9 - 3x$$

$$CD: \begin{cases} x=6 \\ 3 \leq y \leq 6 \end{cases} ds = -dy \quad M = -9$$

$$DE: \begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ y=3 \end{cases} ds = -dx \quad M = -3(x-3)$$



$y_0 = 0$	$x_1 = 3$
$y_1 = 0$	$x_2 = 3$
$y_0 = 0$	$x_1 = \delta_2$
$y_1 = 0$	$x_2 = 0$
$y_0 = 0$	$x_1 = 0$

Aplicando enseguida la ecuación (3k).

$$\theta_1 = \theta_0 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds$$

$$\theta_E = \theta_A - \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (-3y) dy + \int_0^3 (6x-18) dx + \int_3^6 (9-3x) dx \right] + \int_6^3 (-9)(-dy) + \int_6^3 [-3(x-3)](-dx)$$

$$= -\frac{27}{EI} - \frac{1}{EI}(-135) = +\frac{108}{EI} \quad \dots (ii)$$

$$\therefore \theta_E = +\frac{108}{EI}$$

Finalmente, aplicando la ecuación (1k):

$$u_1 = u_0 + \theta_0(v_1 - y_0) - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} (v_1 - y) ds$$

$$\delta_E = \theta_A(3) - \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (-3y)(3-y) dy + \int_0^3 (6x-18)(3-6) dx + \int_3^6 (9-3x)(-3) dx \right] + \int_6^3 (-9)(3-y)(-dy) + \int_6^3 [-3(x-3)](3-3)(-dx)$$

$$\delta_E = -\frac{297}{EI}$$

Para este problema se indicó que $E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$, $I = 4000 \text{ cm}^4$, es decir que:

$$EI = 840 \text{ Tm}^2$$

Por consiguiente, el desplazamiento y el giro en el extremo E son:

$$\delta_E = -\frac{297}{840} = -0.354 \text{ m} \quad \therefore \delta_E = 35.4 \text{ cm} \leftarrow$$

$$\theta_E = +\frac{108}{840} = +0.129 \text{ rad.} \quad \therefore \theta_E = 0.129 \text{ rad} \curvearrowright$$

Aplicando la ecuación (2k) considerando solo la flexión:

$$v_1 = v_0 - \theta_0(x_1 - x_0) + \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} (x_1 - x) ds$$

$$0 = -\theta_A(3) + \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (-3y)(3) dy + \int_0^3 (6x-18)(3-x) dx + \int_3^6 (9-3x)(3-x) dx \right] + \int_6^3 (-9)(3-6)(-dy) + \int_6^3 [-3(x-3)](3-x)(-dx)$$

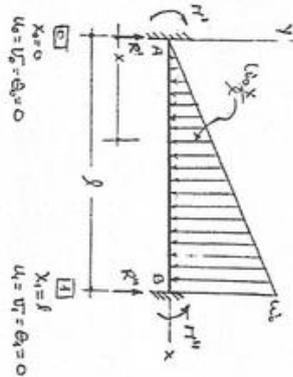
$$\rightarrow \theta_A = -\frac{27}{EI} \dots (i)$$

PROBLEMA X.8.

Determinar los momentos en los empotramientos y la ecuación del eje deformado para la viga del problema IX-10, aplicando las ecuaciones de Bresse.

Considerando los momentos de empotramiento $M' = M_A$ y $M'' = M_B$ con los sentidos indicados, ellos resultarán con su verdadero signo en la convención de signos de Resistencia de Materiales. Tomando momentos respecto del extremo B, tenemos:

$$M' - M'' + R'(l) - \frac{1}{2} \omega_0 \left(\frac{1}{3} l \right) = 0 \rightarrow R' = \frac{1}{6} \omega_0 l + \frac{M'' - M'}{l}$$



El momento flector en la sección genérica es:

$$M = M' + R'x - \frac{1}{2} \left(\omega_0 \frac{x}{l} \right) (x) \left(\frac{1}{3} x \right) \quad \therefore M = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - l^2 x) \quad \dots (i)$$

Aplicando la ec. (6k) entre los extremos A y B:

$$0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M}{EI} dx \rightarrow \therefore \int_{(A)}^{(B)} M dx = 0 \quad \dots (ii)$$

Y aplicando la ec. (5k) entre los mismos extremos: Según ... (ii)

$$0 = \int_{(A)}^{(B)} \frac{M(l-x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} M dx - \frac{1}{EI} \int_{(A)}^{(B)} Mx dx \rightarrow \therefore \int_{(A)}^{(B)} Mx dx \quad \dots (iii)$$

Reemplazando en (ii) y (iii) la expresión (i) para M:

$$(ii): \int_{x=0}^{x=l} \left[M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - l^2 x) \right] dx = 0$$

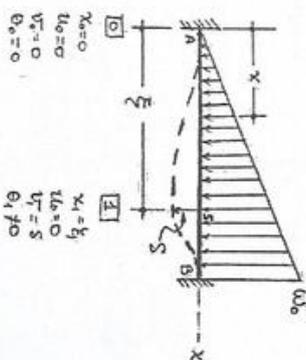
$$\left[-\frac{M'}{2l} (l-x)^2 + \frac{M''}{2l} x^2 - \frac{\omega_0}{6l} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} l^2 x^2 \right) \right]_0^l = 0 \rightarrow M' + M'' = -\frac{1}{12} \omega_0 l^2 \quad \dots (iv)$$

$$(iii): \int_{x=0}^{x=l} \left[M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} - \frac{\omega_0}{6l} (x^3 - l^2 x) \right] x dx = 0$$

$$\left[\frac{M'}{l} \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + \frac{M''}{l} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{\omega_0}{6l} \left(\frac{1}{5} x^5 - l^2 \frac{1}{3} x^3 \right) \right) \right]_0^l = 0 \rightarrow M' + 2M'' = -\frac{2}{15} \omega_0 l^2 \quad \dots (v)$$

Resolviendo entre las ec. (iv) y (v), obtenemos:

$$M' = -\frac{1}{30} \omega_0 l^2 \quad M'' = -\frac{1}{20} \omega_0 l^2$$



Reemplazando estos resultados en (i), tenemos:

$$M = -\frac{\omega_0}{60l} (2l^3 - 9l^2 x + 10x^3)$$

Aplicando la ec. (5k) entre el empotramiento A y la sección genérica S, podremos obtener la expresión de la deflexión δ del eje deformado en función de la abscisa ξ:

$$\delta = \int_{(A)}^{(S)} \frac{M(\xi-x)}{EI} dx$$

En la que reemplazamos la expresión (vi) para el momento flector:

$$EI \delta = \int_{x=0}^{x=\xi} \left[-\frac{\omega_0}{60l} (2l^3 - 9l^2 x + 10x^3) \right] (\xi - x) dx$$

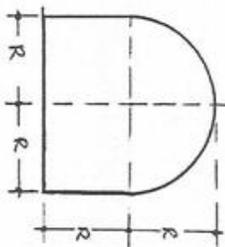
$$= -\frac{\omega_0}{60l} \int_{x=0}^{x=l} (2l^3 \xi - 9l^2 \xi x + 10\xi x^3 - 2l^3 x + 9l^2 x^2 - 10x^4) dx$$

$$= -\frac{\omega_0}{60l} \left(l^3 \xi^2 - \frac{3}{2} l^2 \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^5 \right)$$

$$\therefore \delta = -\frac{\omega_0 \xi^2}{120EI} (2l^3 - 3l^2 \xi + \xi^3)$$

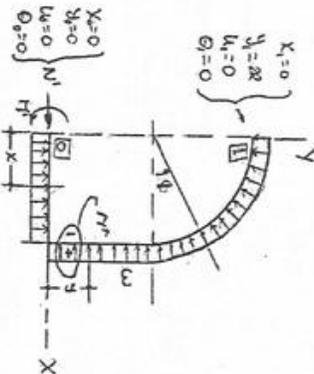
PROBLEMA X.9. (UNI, 16-DIC-1968)

Aplicando las ecuaciones de bresse, resolver la siguiente estructura, prescindiendo de los efectos del cortante y del normal:



Solución:

El esquema muestra la sección de una alcantarilla de concreto armado, de espesor constante, que se construirá A PROFUNDIDAD H, actuando sobre ella una presión hidrostática $\omega = \gamma H$, que se considerara constante para todos los puntos de la estructura.



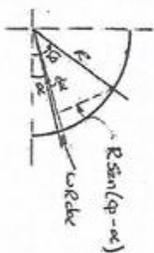
Aplicaremos las ec. De Bresse entre las secciones 0 y 1 indicados en el esquema, ubicadas en el eje de simetría.

En 0 consideramos el sistema cartesiano de ejes. Debido a la simetría física y de carga, se tienen las condiciones en estos dos extremos, indicados en el esquema sustituyendo estos valores en las ec. (1k) y (3k) de Bresse, tenemos:

$$(1k): u_1 = u_0 + \theta_0 (y_1 - y_0) - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M(y_1 - y)}{EI} ds = 0$$

$$\rightarrow \int_{(0)}^{(1)} M(y_1 - y) ds = 0$$

$$\therefore \int_{(0)}^{(1)} M y ds = 0 \quad \dots (1')$$



$$(3k): \theta_0 = \theta_1 - \int_{(0)}^{(1)} \frac{M}{EI} ds \rightarrow \int_{(0)}^{(1)} M ds = 0 \quad \dots (3)$$

Expresiones del momento flector:

$$0 \leq x \leq R: M = M' - \frac{\omega}{2} x^2$$

$$0 \leq y \leq R: M = M' + N'y - \frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}: M = (M' + N'R - \omega R^2) + (N' - \omega R)R \sin \varphi + \omega R \cdot R(1 - \cos \varphi) - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (\omega R d\alpha) R \sin(\varphi - \alpha) = M' + (N'R - \omega R^2)(1 + \sin \varphi)$$

Reemplazando estas expresiones se tienen:

$$(1'): \int_0^R (M' + N'y - \frac{\omega}{2} R^2 - \frac{\omega}{2} y^2) y dy$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} [M' + (N'R - \omega R^2)(1 + \sin \varphi)] (R + R \sin \varphi) R d\varphi = 0$$

$$\rightarrow (36 + 12\pi)M' + (56 + 16\pi)N'R = \omega R^2(57 + 18\pi) \quad \dots (1'')$$

$$(3'): \int_0^R (M' - \frac{\omega}{2} x^2) dx$$

$$+ \int_0^R (M' + N'y - \frac{\omega}{2} y^2) dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [M' + (N'R - \omega R^2)(1 + \sin \varphi)] R d\varphi = 0$$

$$\rightarrow (12 + 3\pi)M' + (9 + 3\pi)N'R = (11 + 3\pi)\omega R^2 \quad \dots (3'')$$

Resolviendo entre (1'') y (3''), se obtienen: $M' = 0.196 \omega R^2$ y $N' = 0.88\omega R$

Reemplazando estos valores en las expresiones de los momentos flectores:

$$0 \leq x \leq R, \quad M = 0.196\omega R^2 - \frac{\omega}{2} x^2 \quad \text{para } x = 0, \quad M = +0.20\omega R^2$$

$$\text{para } x = R, \quad M = -0.30\omega R^2$$

$$0 \leq y \leq R, \quad M = -0.30\omega R^2 + 0.88\omega R y - \frac{\omega}{2} y^2$$

$$\text{para } y = 0, \quad M = +0.30\omega R^2$$

$$\text{para } y = 0.46R, \quad M = 0$$

$$\text{para } y = R, \quad M = +0.08\omega R^2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad M = 0.08\omega R^2 - 0.12\omega R^2 \operatorname{sen} \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } \varphi = 0, \quad M = +0.08\omega R^2 \\ \text{para } \varphi = 41.8^\circ, \quad M = 0 \\ \text{para } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad M = -0.04\omega R^2 \end{array} \right\}$$

Expresiones de las fuerzas cortantes:

$$0 \leq x \leq R, \quad Q = +\omega x \quad \left. \begin{array}{l} \text{para } x = 0, \quad Q = 0 \\ \text{para } x = R, \quad Q = +\omega R \end{array} \right\}$$

$$0 \leq y \leq R, \quad Q = -N' + \omega y = -0.88\omega R + \omega y$$

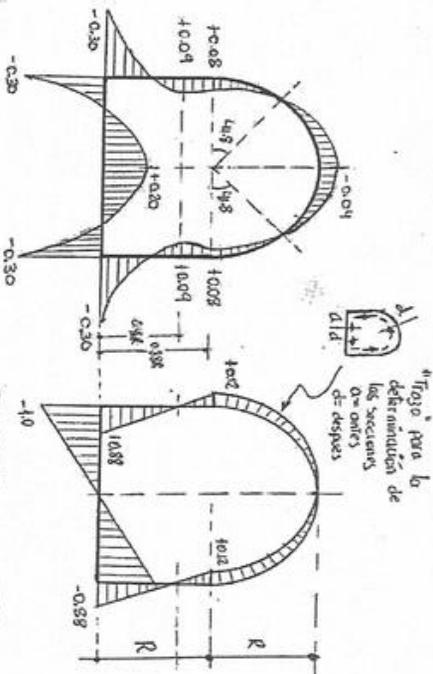
$$\left. \begin{array}{l} \text{para } y = 0, \quad Q = -0.88\omega R \\ \text{para } y = R, \quad Q = +0.12\omega R \end{array} \right\}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Q = (+0.12\omega R) \cos \varphi - (\omega R) \operatorname{sen} \varphi + \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (\omega R d\alpha) \cos(\varphi - \alpha) = +0.12\omega R \cos \varphi$$

para $\varphi = 0$, $Q = +0.12\omega R$

para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$



DIRECCIÓN DE LAS FUERZAS FLECTORAS: Se indican los coeficientes de ωR^2

DIRECCIÓN DE LAS FUERZAS CORTANTES: Se indican los coeficientes de ωR . Se graficaron los resultados de las fuerzas transversales antes de la sección.

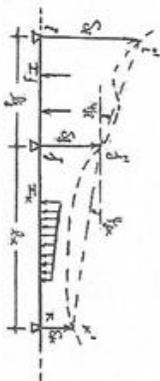
ECUACIONES DE LOS TRES MOMENTOS

NOTACION.

1) En general y para viga en tramos de sección constante:

$$M_i, M_j, M_k$$

Momentos flectores sobre los apoyos (en la convención de signos de Resistencia de Materiales).



$$\bar{l}_j = \frac{l_j}{I_j}$$

Longitud reducida del tramo de longitud l_j y momento de Inercia I_j .

$$E$$

Modulo o coeficiente de elasticidad normal.

$$I_c$$

Momento de Inercia de comparación.

$$\psi_{ji} = \frac{\delta_i - \delta_j}{l_j}$$

Rotaciones o giros de los tramos ij y jk [+U, -] debido a desnivelaciones de los apoyos.

$$\bar{A}_{ji}, \bar{A}_{jk}$$

Factores de carga reducidos de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk . En la tabla N° 4 (1) se dan sus expresiones para diversos estados de cargas.

2) Para vigas en tramos de secciones variables:

A_{ji}, A_{jk} Factores de forma de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk :

$$A_{ji} = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \bar{A}_{ji} \quad A_{jk} = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \bar{A}_{jk}$$

$I_{c,ij}$ Momento de inercia en la parte de sección constante (o que sirve de referencia) del elemento ij .

$\bar{A}_{ji}, \bar{A}_{jk}$ Factores de forma reducidos de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk . Tablas N° 5 a 8 y 29.

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad M = 0.08\omega R^2 - 0.12\omega R^2 \operatorname{sen} \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } \varphi = 0, \quad M = +0.08\omega R^2 \\ \text{para } \varphi = 41.8^\circ \\ \text{para } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad M = -0.04\omega R^2 \end{array} \right\}$$

Expresiones de las fuerzas cortantes:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq R, \quad Q = +\omega x \\ \text{para } x = R, \quad Q = +\omega R \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq R, \quad Q = -N' + \omega y = -0.88\omega R + \omega y \\ \text{para } y = 0, \quad Q = -0.88\omega R \\ \text{para } y = R, \quad Q = +0.12\omega R \end{array} \right\}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Q = (+0.12\omega R) \cos \varphi - (\omega R) \operatorname{sen} \varphi + \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} (\omega R \alpha) \cos(\varphi - \alpha) = +0.12\omega R \cos \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } \varphi = 0, \quad Q = +0.12\omega R \\ \text{para } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad Q = 0 \end{array} \right\}$$

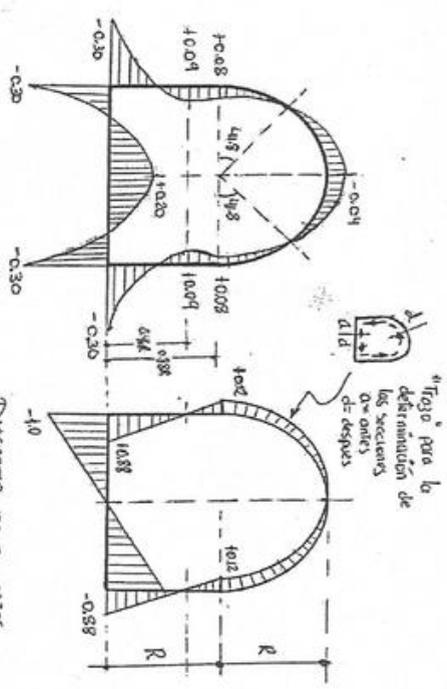


Diagrama de los Momentos Flectores - Se indican los coeficientes de ωR^2

Diagrama de Esfuerzos Cortantes - Se indican los coeficientes de ωR . Se grafican los resultados de las fuerzas transversales antes de la sección.

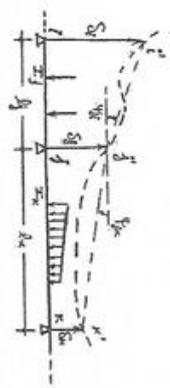
CAPÍTULO XI

ECUACIONES DE LOS TRES MOMENTOS

NOTACION.

1) En general y para viga en tramos de sección constante:

Momentos flectores sobre los apoyos (en la convención de signos de Resistencia de Materiales).



$$\bar{l}_j = \frac{l_j}{I_j}$$

Longitud reducida del tramo de longitud l_j y momento de Inercia I_j .

$$E$$

Modulo o coeficiente de elasticidad normal.

$$\psi_{ji} = \frac{\delta_i - \delta_j}{l_j}$$

Rotaciones o giros de los tramos ij y jk [+2, 5-] debido a desniveles de los apoyos.

$$\bar{A}_{ji}^0, \bar{A}_{jk}^0$$

Factores de carga reducidos de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk . En la tabla N° 4 (1) se dan sus expresiones para diversos estados de cargas.

2) Para vigas en tramos de secciones variables:

A_{ji}, A_{jk} Factores de forma de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk :

$$A_{ji} = \frac{l_{ij}}{E I_{c,ij}} \bar{A}_{ji} \quad A_{jk} = \frac{l_{jk}}{E I_{c,jk}} \bar{A}_{jk}$$

$I_{c,ij}$ Momento de inercia en la parte de sección constante (o que sirve de referencia) del elemento ij .

$\bar{A}_{ji}, \bar{A}_{jk}$ Factores de forma reducidos de 1ª especie en los extremos j de los tramos ij y jk . Tablas N° 5 a 8 y 29.

B_{ij}, B_{jk} Factores de forma de 1° especie de los tramos ij y jk:

$$B_{ji} = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \bar{B}_{ji} \quad B_{jk} = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \bar{B}_{jk}$$

(1) Las tablas que se citan en este capítulo, aparecen en el volumen II de "CALCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS"-B. Arbulu-UNI-1968

$\bar{B}_{ij}, \bar{B}_{jk}$ Factores de forma reducidos de 1° especie de los tramos ij y jk. Tablas Nº 5 a 8, y 29.

$\bar{l}_{ij} = \frac{I_c}{I_{c,ij}} l_{ij}$ Longitud reducida del tramo de longitud l_{ij} y con momento de inercia $I_{c,ij}$ en la parte de sección constante.

A_{ij}^0, A_{jk}^0 Factores de carga de 1° especie en los extremos j de los tramos ij y jk:

$$A_{ji}^0 = \frac{l_{ij}}{EI_{c,ij}} \sum_{n=1}^{n=k} \dot{M}_{ij,n} \bar{A}_{ji,n}^0 \quad A_{jk}^0 = \frac{l_{jk}}{EI_{c,jk}} \sum_{n=1}^{n=k} \dot{M}_{jk,n} \bar{A}_{jk,n}^0$$

$\bar{A}_{ij,n}^0, \bar{A}_{jk,n}^0$ Factores de carga reducidos de 1° especie en los extremos j de los tramos ij y jk, para el estado de carga n. Tablas Nº 13 a 20, y 29.

n Estado de carga, desde el primero 1 hasta el último k (Kappa), en el tramo.

$\dot{M}_{ij,n}$

ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS.

1) TRAMOS DE SECCION CONSTANTE:

$$M_i \bar{l}_i + 2M_j (\bar{l}_i + \bar{l}_k) + M_k \bar{l}_k = 6EI_c (\psi_{ji} - \psi_{jk}) - 6 \left[\frac{\bar{l}_i}{l_i} \bar{A}_{ji}^0 + \frac{\bar{l}_k}{l_k} \bar{A}_{jk}^0 \right] \dots (2.1L)$$

2) TRAMOS DE SECCIONES VARIABLES:

$$M_i (B_{ij}) + M_j (A_{ji} + A_{jk}) + M_k (B_{jk}) = (\psi_{ji} - \psi_{jk}) - (A_{ji}^0 + A_{jk}^0) \dots (2.1)$$

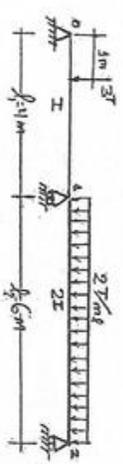
O empleando factores de forma y de carga reducidos:

$$M_i \bar{l}_i \bar{B}_{ij} + M_j (\bar{l}_i \bar{A}_{ji} + \bar{l}_k \bar{A}_{jk}) + M_k \bar{l}_k \bar{B}_{jk} = \dots (3.1L)$$

$$= EI_c (\psi_{ji} - \psi_{jk}) - \left[\bar{l}_i \sum_{n=1}^{n=k} \dot{M}_{ij,n} \bar{A}_{ji,n}^0 + \bar{l}_k \sum_{n=1}^{n=k} \dot{M}_{jk,n} \bar{A}_{jk,n}^0 \right]$$

PROBLEMA XI.1.

Resolver la viga que se muestra.



Solución:

Aplicando la ec. (1.L) a los tramos 0-1-2 de la viga, y adaptando los subíndices al caso dado, tenemos:

$$M_0 \bar{l}_1 + 2M_1 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) + M_2 \bar{l}_2 = 6EI_c (\psi_{10} - \psi_{12}) - 6 \left[\frac{\bar{l}_1}{l_1} \bar{A}_{10}^0 + \frac{\bar{l}_2}{l_2} \bar{A}_{12}^0 \right] \dots (1)$$

En la que:

$M_0 = M_2 = 0$ por ser apoyos simples extremos,
 $\psi_{10} = \psi_{12}$ porque no hay desviación de apoyos.

Tomando como momento de inercia de comparación, J_C , el del tramo 01:

$$\bar{l}_1 = \frac{J_C}{I_1} l_1 = \frac{1}{4} (4) = 4 \text{ m}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{J_C}{I_2} l_2 = \frac{1}{2} (6) = 3 \text{ m}$$

De la tabla Nº 4:

$$\text{caso } n^{\circ} 29 \quad \bar{A}_{10}^0 = \frac{Pab}{6I} (a + b) = \frac{3(1)(3)}{6(4)} (1 + 4) = \frac{15}{8} 7 \text{ m}^2$$

-caso n°1 $\bar{A}_{12}^0 = \frac{\omega l^3}{24} = \frac{2(6)^3}{24} = 18 \text{ Tm}^2$

Reemplazando valores en (i):

$$2M_1(4+3) = -6 \left[\frac{4}{4} \left(\frac{15}{8} \right) + \frac{3}{6} (18) \right]$$

$$\rightarrow \therefore M_1 = -4.66 \text{ Tm}$$

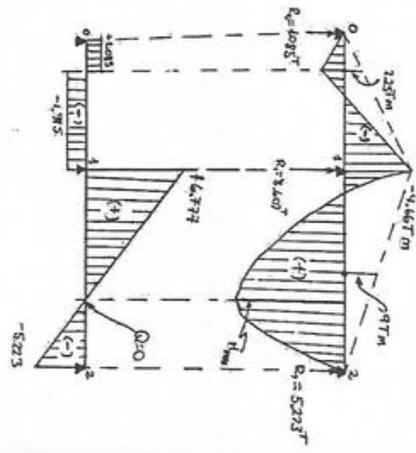
Con este resultado se pueden calcular las reacciones de apoyos, y, con ellas, los esfuerzos cortantes:

$$-4.66 = R_0(4) - 3(3) \rightarrow R_0 = 1.085 \text{ T} \uparrow$$

$$-4.66 = R_2(6) - \frac{1}{2}(2)(6)^2 \rightarrow R_2 = 5.223 \text{ T} \uparrow$$

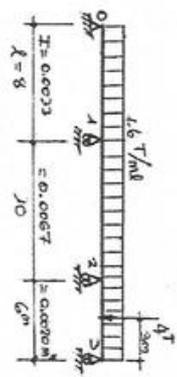
$$R_1 + R_0 + R_2 - 3 - (2)(6) = 0$$

$$\rightarrow R_1 = 8.692 \text{ T} \uparrow$$



PROBLEMA XII.

Resolver la viga continua que se muestra.



Solución:
Aplicando la ec. (1.L) sucesivamente a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, tenemos:

$$0 - 1 - 2: M_0 \bar{l}_1 + 2M_1(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) + M_2 \bar{l}_2 = -6 \left[\frac{\bar{l}_1}{l_1} A_{10}^0 + \frac{\bar{l}_2}{l_2} A_{12}^0 \right] \dots (i)$$

$$1 - 2 - 3: M_1 \bar{l}_2 + 2M_2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) + M_3 \bar{l}_3 = -6 \left[\frac{\bar{l}_2}{l_2} A_{21}^0 + \frac{\bar{l}_3}{l_3} A_{23}^0 \right] \dots (ii)$$

Para la que, al no haber desnivelación entre los apoyos, los signos ψ_{ji} y ψ_{jk} son nulos. Considerando $J_c = 0.0033 \text{ m}^4$, tenemos las siguientes longitudes reducidas:

$$\bar{l}_1 = \frac{J_c}{l_1} = \frac{0.0033}{0.0033} (8) = 8 \text{ m}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{J_c}{l_2} = \frac{0.0033}{0.0067} (10) = 5 \text{ m}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{J_c}{l_3} = \frac{0.0033}{0.0020} (6) = 10 \text{ m}$$

Veamos los factores de carga reducidos. De la tabla N°4,

-caso n°1 $\bar{A}_{10}^0 = \frac{\omega l^3}{24} = \frac{1.6(8)^3}{24} = \frac{102.4}{3} \text{ Tm}^2$

$$\bar{A}_{12}^0 = \bar{A}_{21}^0 = \frac{\omega l^3}{24} = \frac{1.6(10)^3}{24} = \frac{200}{3} \text{ Tm}^2$$

-caso n°1 y 30 $\bar{A}_{23}^0 = \frac{\omega l^3}{24} + \frac{Pl^2}{16} = \frac{1.6(6)^3}{24} + \frac{4(6)^2}{16} = 23.4 \text{ Tm}^2$

Reemplazando valores en las ec.(i) y (ii), teniendo en cuenta que $M_0 = M_3 = 0$ por ser apoyos simples extremos tenemos:

$$(i): 2M_1(8+5) + M_2(5) = -6 \left[\frac{8}{8} \left(\frac{102.4}{3} \right) + \frac{5}{10} \left(\frac{200}{3} \right) \right] \rightarrow 5.2M_1 + M_2 = -80.96 \dots (iii)$$

$$(ii): M_1(5) + 2M_2(5+10) = -6 \left[\frac{5}{10} \left(\frac{200}{3} \right) + \frac{10}{6} (23.4) \right] \rightarrow M_1 + 6M_2 = -86.8 \dots (iv)$$

Resolviendo las ec.(iii) y (iv), obtenemos:

$$M_1 = -13.21 \text{ Tm} \quad M_2 = -12.27 \text{ Tm}$$

Con estos resultados podemos determinar las reacciones de apoyo y los esfuerzos cortantes. Plantando la expresión del momento flector en cada apoyo, podemos escribir las siguientes ecuaciones de las cuales calculamos las reacciones:

$$M_1 = -13.21 = R_0(8) - \frac{1}{2}(1.6)(8)^2 \rightarrow R_0 = 4.75 \text{ T} \uparrow$$

$$M_2 = -12.27 = R_0(18) - \frac{1}{2}(1.6)(18)^2 + R_1(10) \rightarrow R_1 = 16.14 \text{ T} \uparrow$$

$$M_2 = -12.27 = R_3(6) - \frac{1}{2}(1.6)(6)^2 - 4(3) \rightarrow R_3 = 4.75 \text{ T} \uparrow$$

$$M_1 = -13.21 = R_3(16) + R_2(10) - 4(13) - \frac{1}{2}(1.6)(16)^2 \rightarrow R_2 = 16.76 \text{ T} \uparrow$$

Resultados a los que también se puede llegar calculando primero los esfuerzos cortantes en los extremos de cada tramo. Recordando que:

$$Q_{ij} = v_{ij} - \frac{M_i - M_j}{l_j} \quad Q_{ji} = v_{ji} - \frac{M_j - M_i}{l_j} \quad \dots \quad \frac{M_i}{l_j} \quad \frac{M_j}{l_j} \quad \dots$$

Tenemos en nuestro caso:

$$Q_{01} = +\frac{1}{2}(1.6)(8) - \frac{0 - (-13.21)}{8} = +6.4 - 1.65 = +4.75 T \rightarrow R_0 = 4.75 T$$

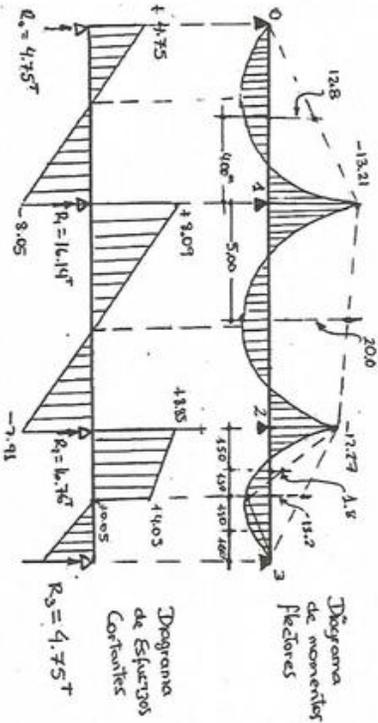
$$Q_{10} = -\frac{1}{2}(1.6)(8) - \frac{0 - (-13.21)}{8} = -6.4 - 1.65 = -8.05 T \rightarrow R_1 = 16.14 T$$

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}(1.6)(10) - \frac{-13.21 - (-12.27)}{10} = +8 + 0.09 = +8.09 T \rightarrow R_1 = 16.14 T$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{2}(1.6)(10) - \frac{-13.21 - (-12.27)}{10} = -8 + 0.09 = -7.91 T \rightarrow R_2 = 16.76 T$$

$$Q_{23} = +\frac{1}{2}(1.6)(6) + \frac{1}{2}(4) - \frac{-12.27}{6} = +6.8 + 2.05 = +8.85 T \rightarrow R_2 = 16.76 T$$

$$Q_{32} = -\frac{1}{2}(1.6)(6) - \frac{1}{2}(4) - \frac{-12.27}{6} = -6.8 + 2.05 = -4.75 T \rightarrow R_3 = 4.75 T$$

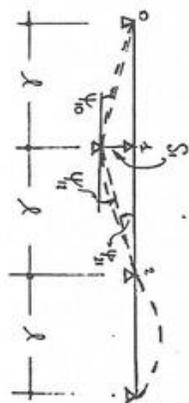


PROBLEMA XI.3.

Resolver la viga que se muestra para un descenso δ_1 del apoyo 1. Todos los tramos son de la misma sección transversal.



Al estar descargado la viga, los términos factores de carga δ^0 son nulos, los momentos en los apoyos extremos son cero: $M_0 = M_3 = 0$, al ser los tres tramos de la misma sección transversal, las longitudes reducidas son las propias longitudes reales. La adaptación de la ec.(1.L) a este caso da:



$$0 - 1 - 2: 2M_1(2l) + M_2(l) = 6EI(\psi_{10} - \psi_{12}) \dots \dots \dots (i)$$

$$1 - 2 - 3: M_1(l) + 2M_2(2l) = 6EI(\psi_{21}) \dots \dots \dots (ii)$$

En la que:

$$\psi_{10} = +\frac{\delta_1}{l} \quad \psi_{12} = -\frac{\delta_1}{l} \quad \psi_{21} = -\frac{\delta_1}{l}$$

Reemplazando estas expresiones en (i) y (ii):

$$(i): 4M_1 + M_2 = \frac{6EI}{l} \left[\frac{\delta_1}{l} - \left(-\frac{\delta_1}{l}\right) \right] \rightarrow 4M_1 + M_2 = \frac{12EI\delta_1}{l^2} \dots (1)$$

$$(ii): M_1 + 4M_2 = \frac{6EI}{l} \left[-\frac{\delta_1}{l} \right] \rightarrow M_1 + 4M_2 = -\frac{6EI\delta_1}{l^2} \dots (ii')$$

Resolviendo entre (i') y (ii').

$$M_1 = +\frac{18EI\delta_1}{5l^2} \quad M_2 = -\frac{12EI\delta_1}{5l^2}$$

Calculo de los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos:

$$Q_{ij} = v_{ij} - \frac{M_i - M_j}{l_j}$$

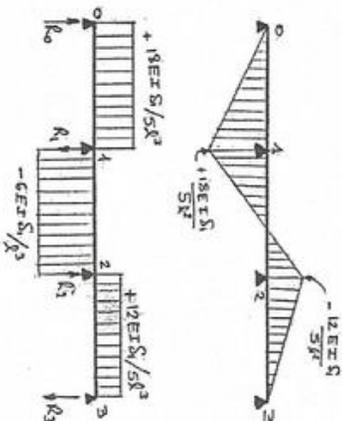
$$Q_{01} = Q_{10} = 0 - \frac{0 - M_1}{l} = +\frac{18EI\delta_1}{5l^2}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{M_1 - M_2}{l} = \frac{6EI\delta_1}{l^2}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0 - \frac{M_2 - 0}{l} = +\frac{12EI\delta_1}{5l^2}$$

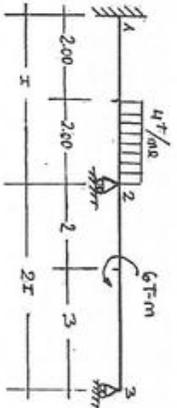
Luego:

$$R_0 = \frac{18EI\delta_1}{5l^2} \uparrow ; R_1 = \frac{48EI\delta_1}{5l^2} \downarrow ; R_2 = \frac{42EI\delta_1}{5l^2} \uparrow ; R_3 = \frac{12EI\delta_1}{5l^2} \downarrow$$



PROBLEMA XI.4.-(UNI, 16-DIC-1968)

Aplicando el teorema de los tres momentos, resolver la viga que se muestra. se trazaran, finalmente, los diagramas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes, y se calcularán las reacciones en los apoyos.



Solución:

El empotramiento 1 podemos considerarlo como un tramo con apoyos simples, de longitud cero, y de momento de inercia infinito. Aplicando la ec. (1.1) sucesivamente a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, tenemos:

$$0-1-2: M_0 \bar{I}_1 + 2M_1(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + M_2 \bar{I}_2 = -6 \left[\frac{\bar{I}_1}{l_1} \bar{A}_{10}^0 + \frac{\bar{I}_2}{l_2} \bar{A}_{12}^0 \right] \dots (i)$$

$$1-2-3: M_1 \bar{I}_2 + 2M_2(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + M_3 \bar{I}_3 = -6 \left[\frac{\bar{I}_2}{l_2} \bar{A}_{21}^0 + \frac{\bar{I}_3}{l_3} \bar{A}_{23}^0 \right] \dots (ii)$$

En las que, si consideramos $J_c = I$:

$$\bar{I}_1 = \frac{J_c}{I_1} l_1 \rightarrow \frac{\bar{I}_1}{l_1} = \frac{J_c}{I_1} = \frac{I}{\infty} = 0 \quad \bar{I}_1 = 0 \quad \bar{I}_2 = \frac{J_c}{I_2} l_2 = \frac{I}{I} l_2 = 4 \text{ m} \quad \bar{I}_3 = \frac{J_c}{I_3} l_3 = \frac{I}{2I} l_3 = 2.50 \text{ m}$$

Además $M_0 = 0 \quad M_3 = 0$. De la tabla N° 4:

-Estado de carga N°5:

$$\bar{A}_{12}^0 = \frac{\omega s^2}{24l} (2l^2 - s^2) = \frac{4(2)^2}{24(4)} [2(4)^2 - (2)^2] = \frac{14}{3} \text{ Tm}^2$$

$$\bar{A}_{21}^0 = \frac{\omega s^2}{24l} (2l - s)^2 = \frac{4(2)^2}{24(4)} [(2)(4) - 2]^2 = 6 \text{ Tm}^2$$

-Estado de carga N°40:

$$\bar{A}_{23}^0 = M_0 \left(\frac{3b^2}{l^2} - 1 \right) \frac{l}{6} = (-6) \left[\frac{3(3)^2}{5^2} - 1 \right] \frac{5}{6} = -\frac{2}{5} \text{ Tm}^2$$

Reemplazando valores en (i) y (ii), se obtienen:
 $2M_1 + M_2 = -7 \quad M_1 = 2.56 \text{ Tm}$
 $4M_1 + 13M_2 = -34.8 \quad M_2 = -1.89 \text{ Tm}$

Esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos:

$$Q_{ij} = V_{ij} - \frac{M_i - M_j}{l_j}$$

$$Q_{12} = +2 - \frac{(-2.56 + 1.89)}{4} = +2.17 \text{ T}$$

$$Q_{21} = -6 - \frac{(-2.56 + 1.89)}{4} = -5.83 \text{ T}$$

$$Q_{23} = +1.2 - \frac{(-1.89 - 0)}{5} = +1.58 \text{ T}$$

$$Q_{32} = +1.2 - \frac{(-1.89 - 0)}{5} = +1.58 \text{ T}$$

PROBLEMA XI.5.

Aplicando la ecuación de los tres momentos, resolver el pórtico que se muestra.

Solución:

Habiendo simetría física y de carga: $M_4 = M_1$, $M_3 = M_2$. Aplicamos la ecuación (1.1) al empotramiento y tramo 1,2, y luego a los tramos 1,2 y 2,3:

$$0-1-2: 2M_1(\bar{h}) + M_2(\bar{h}) = -6 \left[\frac{\bar{h}}{h} \bar{A}_{12}^0 \right] \dots (i)$$

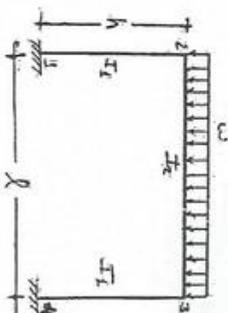
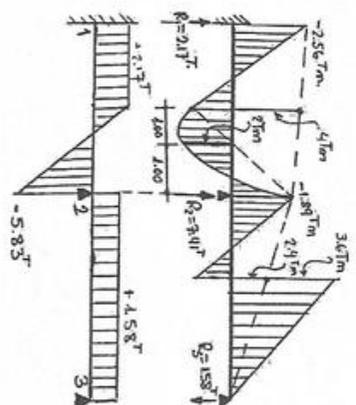
$$1-2-3: M_1(\bar{h}) + 2M_2(\bar{h} + l) + M_3(l) = -6 \left[\frac{\bar{h}}{h} \bar{A}_{21}^0 + \frac{l}{l} \bar{A}_{23}^0 \right] \dots (ii)$$

En la que considerando $J_c = I_2$, tenemos:

$$\bar{I} = I \quad \bar{h} = \frac{J_c}{I_1} h = \frac{I}{I_1} h \quad \bar{l} = \frac{J_c}{I_1} l = \frac{I}{I_1} l = \epsilon$$

Además, de la tabla N°4, caso n°1:

$$\bar{A}_{23}^0 = \frac{\omega l^3}{24}$$



Los otros factores de carga (\bar{A}_{12}^0 y \bar{A}_{21}^0) son nulos, por que no hay carga en el tramo o elemento 12.

Reemplazando valores en (i) y (ii), tenemos:

$$(i): 2M_1 + M_2 = 0$$

$$(ii): M_1 \frac{h}{l} + 2M_2 \left(\frac{h}{l} + 1 \right) + M_2 = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24l} \right] \rightarrow \epsilon M_1 + M_2 (3 + 2\epsilon) = -\frac{\omega l^2}{4}$$

Resolviendo entre estas dos ecuaciones, se obtienen:

$$M_1 = + \frac{\omega l^2}{12} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right) \quad M_2 = - \frac{\omega l^2}{6} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$

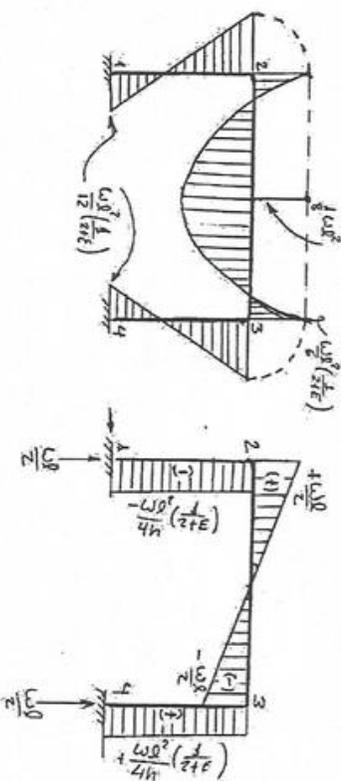
Esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos:

$$Q_{12} = Q_{21} = - \frac{M_1 - M_2}{h} = - \frac{\omega l^2}{4h} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$

$$Q_{23} = + \frac{\omega l}{2} - \frac{M_2 - M_3}{l} = + \frac{\omega l}{2}$$

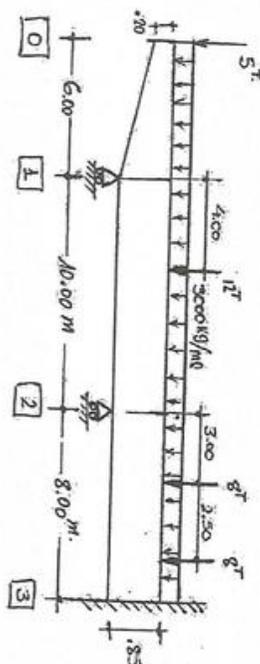
$$Q_{32} = - \frac{\omega l}{2} - \frac{M_2 - M_3}{l} = - \frac{\omega l}{2}$$

$$Q_{34} = - \frac{M_3 - M_4}{h} = + \frac{\omega l^2}{4h} \left(\frac{1}{2 + \epsilon} \right)$$



PROBLEMA XI.6. (UNI, 30-OCT-1948)

La viga mostrada en el croquis es de concreto armado (densidad 2.5); de ancho constante 0.40 m a lo largo de toda ella; el tramo en voladizo es de altura variable, de 0.20 a 0.85 m, y en los otros dos tramos la altura es constante de 0.85 m. Calcular la distribución de los momentos flectores y esfuerzos cortantes para el sistema de cargas mostrado, considerando, además, el peso propio de la viga.



El momento flector sobre el apoyo 1 es:

$$M_1 = -(5)(6) - (37/ml \times 6)(6/2) - \left[(0.40 \times 0.20 \times 6.00) \times \frac{6}{2} + \left(\frac{1}{2} \times 0.40 \times 0.65 \times 6 \right) \frac{6}{3} \right] \times 2.5 \frac{l}{m}$$

$$M_1 = -30 - 54 - 7.5 = -91.57m$$

$$\therefore M_1 = -91.57m$$

En los tramos 1-2-3 la carga repartida por peso propio es:

$$pp = 0.40 \times 0.85 \times 2.5 = 0.85 \text{ T/m}$$

En consecuencia la carga repartida total es: $\omega = 3 + 0.85 = 3.85 \text{ T/m}$.

La aplicación de la ecuación de tres momentos (1.L) a los tramos 1-2-3, considerando que las longitudes reducidas son iguales a las longitudes reales en cada tramo por ser el momento de inercia el mismo para los dos tramos, es:

$$M_1(10) + 2M_2(10 + 8) + M_3(8) = -6[\bar{A}_{21}^0 + \bar{A}_{23}^0] \dots (1)$$

Y la aplicación de la misma (1.L) al tramo 2-3 y empotramiento en 3 (este supuesto este como un tramo de $l = 0$ e $l = \infty$), se tiene:

$$M_2 + 2M_3 = -6 \frac{\bar{A}_{32}^0}{8}$$

En las que, de la tabla N°4, para los estados de carga n°1 (carga uniformemente repartida) y n°29 (carga concentrada):

$$\bar{A}_{21}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(10)^3 + \frac{12 \times 4 \times 6}{6 \times 10} (4 + 10) = 227.62 \text{ Tm}^2$$

$$\bar{A}_{23}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(8)^3 + \frac{8 \times 3 \times 5}{6 \times 8} (5 + 8) + \frac{8 \times 5.5 \times 2.5}{6 \times 8} (2.5 + 8) = 138.69 \text{ Tm}^2$$

$$\bar{A}_{32}^0 = \frac{1}{24} \times 3.85(8)^3 + \frac{8 \times 3 \times 5}{6 \times 8} (3 + 8) + \frac{8 \times 5.5 \times 2.5}{6 \times 8} (5.5 + 8) = 140.57 \text{ Tm}^2$$

Reemplazando estos valores, y $M_1 = -91.5$, en las ec. (1) y (2), tenemos:

$$(1): \quad -91.5(10) + 36M_2 + 8M_3 = -6(227.62 + 138.69)$$

$$\therefore 4.5M_2 + M_3 = -160.36 \quad \dots (1')$$

$$(2): \quad M_2 + 2M_3 = -0.75(140.57)$$

$$\therefore 0.5M_2 + M_3 = -52.71 \quad \dots (2')$$

Resolviendo el sistema de ec. (1') y (2'), se obtienen:

$$M_2 = -26.91 \text{ Tm} \quad \text{y} \quad M_3 = -39.26 \text{ Tm}$$

Calculamos los esfuerzos cortantes:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = +12x - \frac{6}{10} + \frac{1}{2}x3.85x10 - \frac{1}{10}(-91.5 + 26.91) = +32.91 \text{ T}$$

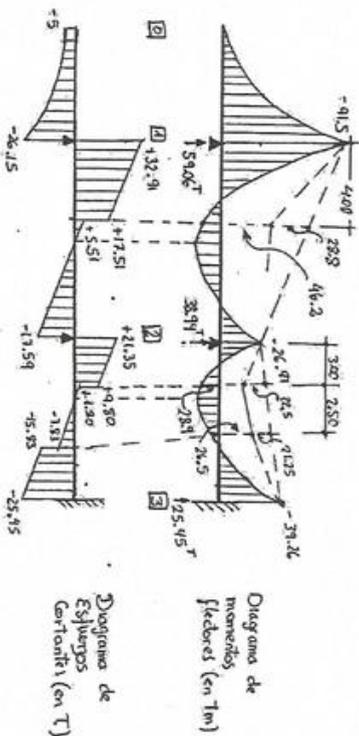
$$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = -12x - \frac{4}{10} + \frac{1}{2}x3.85x10 - \frac{1}{10}(-91.5 + 26.91) = -17.59 \text{ T}$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = +8x - \frac{2.5}{8} + \frac{1}{2}x3.85x8 - \frac{1}{8}(-26.91 + 39.26) = +21.35 \text{ T}$$

$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = -8x - \frac{5.5}{8} + \frac{1}{2}x3.85x8 - \frac{1}{8}(-26.91 + 39.26) = -25.45 \text{ T}$$

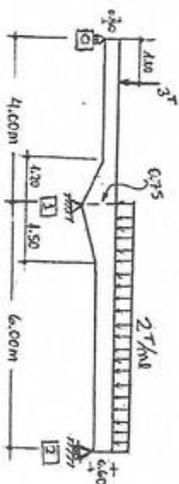
Además en el voladizo:

$$Q_{01} = -5^T Q_{10} = -5 - 3T/ml \times 6 - 2.5T/m^3 \times 0.40 \left[\frac{1}{2}(0.20 + 0.85)x6 \right] = -26.15 \text{ T}$$



PROBLEMA XI.7.

Calcular el momento flector en el apoyo 1 de la viga mostrada, de ancho constante.



Solución:

Los momentos sobre los apoyos 0 y 3 son nulos. Por consiguiente la adaptación de la ec. (3.1.) a estos dos tramos de la viga dado es:

$$M_1(\bar{I}_{01}\bar{A}_{10} + \bar{I}_{12}\bar{A}_{12}) = -[\bar{I}_{01}\dot{M}_{01}\bar{A}_{10} + \bar{I}_{12}\dot{M}_{12}\bar{A}_{12}] \quad \dots (1)$$

Donde, si adoptamos como J_c el momento de inercia de la parte de sección constante del tramo 01:

$$\bar{I}_{01} = 4.00 \text{ m} \quad \bar{I}_{12} = \frac{J_c}{I_{c,12}} \cdot l_{12} = \left(\frac{0.50}{0.60}\right)^3 (6) = 3.47 \text{ m}$$

Además,

$$\dot{M}_{01} = (3 \text{ T})(4 \text{ m}) = 12 \text{ Tm}$$

$$\dot{M}_{12} = (2 \text{ T/m})(6)^2 = 72 \text{ Tm}$$

$$\text{En el tramo 01: } n = \left(\frac{0.50}{0.75}\right)^3 = 0.296 \quad \lambda = \frac{1.20}{4.00} = 0.30 \quad \rho = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

$$\text{De la tabla N}^\circ 5: \quad \bar{A}_{10} = 0.227$$

$$\text{De la tabla N}^\circ 17: \quad \bar{A}_{10} = 0.0358$$

En el tramo 12:

$$n = \left(\frac{0.60}{0.75}\right)^3 = 0.512 \quad \lambda = \frac{1.50}{6.00} = 0.25$$

$$\text{De la tabla N}^\circ 5: \quad \bar{A}_{12} = 0.274$$

$$\text{De la tabla N}^\circ 13: \quad \bar{A}_{12} = 0.0393$$

Reemplazando valores en la ec. (1):

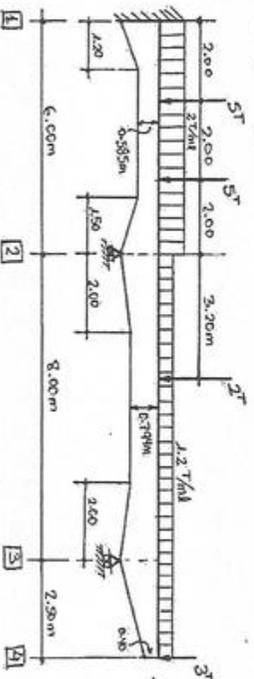
$$M_1(4x0.227 + 3.47x0.274) = -[4x12x0.0358 + 3.47x72x0.0393]$$

$$M_1(0.908 + 0.951) = -(1.718 + 9.819)$$

$$M_1 = -6.21 \text{ Tm}$$

PROBLEMA XI.8.

Resolver la viga que se muestra. Todas las secciones son del mismo ancho 0.36 m.



Solución:

El empujamiento lo consideramos como un tramo ficticio 0-1 de longitud cero. Aplicamos la ec. (3.L) sucesivamente a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, con lo que tendremos dos ecuaciones para las dos incógnitas del problema, que son M_1 y M_2 , así:

$$0 - 1 - 2: M_0 \bar{I}_{01} \bar{B}_{01} + M_1 (\bar{I}_{01} \bar{A}_{10} + \bar{I}_{12} \bar{A}_{12}) + M_2 \bar{I}_{12} \bar{B}_{12} = - \left[\bar{I}_{01} \sum_{n=1}^3 \dot{M}_{01n} \bar{A}_{10n}^0 + \bar{I}_{12} \sum_{n=1}^3 \dot{M}_{12n} \bar{A}_{12n}^0 \right]$$

La que, siendo $\bar{I}_{01} = 0$, se reduce a:

$$M_1 \bar{A}_{12} + M_2 \bar{B}_{12} = - \sum_{n=1}^3 \dot{M}_{12n} \bar{A}_{12n}^0 \quad \dots (I)$$

(Hay tres estados de carga en este tramo: la carga de 5T a 2m de 1, la otra de 5T a 4 m de 1, y la carga repartida)

$$1 - 2 - 3: M_1 \bar{I}_{12} \bar{B}_{12} + M_2 (\bar{I}_{12} \bar{A}_{21} + \bar{I}_{23} \bar{A}_{23}) + M_3 \bar{B}_{23} = - \left[\bar{I}_{12} \sum_{n=1}^3 \dot{M}_{12n} \bar{A}_{21n}^0 + \bar{I}_{23} \sum_{n=1}^3 \dot{M}_{23n} \bar{A}_{23n}^0 \right] \quad \dots (II)$$

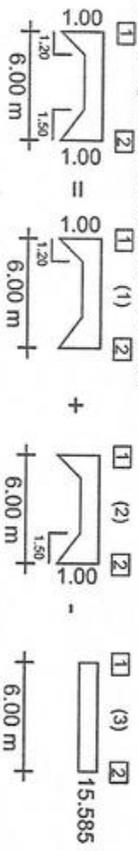
Considerando J_c el momento de inercia correspondiente a la sección de peralte 0.585 m, tendremos como longitudes reducidas:

$$\bar{I}_{12} = \frac{J_c}{l_{c,12}} l_{12} = \left(\frac{0.585}{0.585} \right)^3 (6) = 6.00 \text{ m}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{J_c}{l_{c,23}} l_{23} = \left(\frac{0.585}{0.794} \right)^3 (8) = 4.34 \text{ m}$$

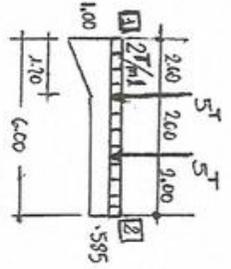
Debemos calcular los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (I) y (II):

Tramo 1-2: Tiene acarreamientos rectos diferentes en ambos extremos. Debemos considerarlo constituido por los tres elementos auxiliar es:



Elemento auxiliar (1):

$n = \left(\frac{0.585}{1.00} \right)^3 = 0.20$	$M_{12,1} = (5T)(6m) = 30 \text{ Tm}$
$\lambda = \frac{1.20}{6} = 0.20$	$\dot{M}_{12,2} = (5T)(6m) = 30 \text{ Tm}$
$p_1 = \frac{2}{6} \times 12 = 4$	$M_{12,3} = (2T/m)(6)^2 = 72 \text{ Tm}$
$p_2 = \frac{4}{6} \times 12 = 8$	



De la tabla Nº5: $\bar{A}_{12}(1) = 0.242$ $\bar{A}_{21}(1) = 0.332$ $\bar{B}_{12}(1) = 0.159$

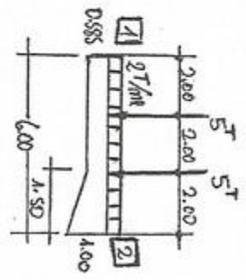
De la tabla Nº17: $p = 4$ $\bar{A}_{12,1}^0(1) = 0.0568$ $\bar{A}_{21,1}^0(1) = 0.0488$

De la tabla Nº17: $p = 8$ $\bar{A}_{12,2}^0(1) = 0.0469$ $\bar{A}_{21,2}^0(1) = 0.0614$

De la tabla Nº13: $\bar{A}_{12,3}^0(1) = 0.0384$ $\bar{A}_{21,3}^0(1) = 0.0413$

Elemento auxiliar (2):

$n = \left(\frac{0.585}{1.00} \right)^3 = 0.20$
$\lambda = \frac{1.50}{6} = 0.25$
$p_1 = \frac{4}{6} \times 12 = 8$
$p_2 = \frac{2}{6} \times 12 = 4$



De la tabla Nº5: $\bar{A}_{12}(2) = 0.332$ $\bar{A}_{21}(2) = 0.223$ $\bar{B}_{12}(2) = 0.155$

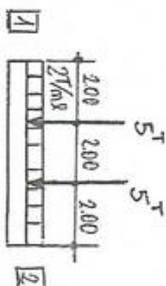
De la tabla Nº17: $p = 8$ $\bar{A}_{12,1}^0(2) = 0.0612$ $\bar{A}_{21,1}^0(2) = 0.0458$

De la tabla N°17 : $p = 4$ $\bar{A}_{12,2}^0(2) = 0.0482$ $\bar{A}_{21,2}^0(2) = 0.0543$

De la tabla N°13 : $\bar{A}_{12,3}^0(2) = 0.0409$ $\bar{A}_{21,3}^0(2) = 0.0368$

Elemento auxiliar (3):

$n = 1$
$\lambda = 1$
$p_1 = 4$
$p = 8$



De la tabla N°17 : $p = 4$ $\bar{A}_{12,1}^0(3) = 0.0617$ $\bar{A}_{21,1}^0(3) = 0.0494$

De la tabla N°17 : $p = 8$ $\bar{A}_{12,2}^0(3) = 0.0494$ $\bar{A}_{21,2}^0(3) = 0.0617$

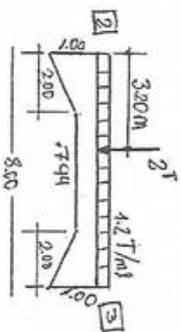
De la tabla N°13 : $\bar{A}_{12,3}^0(3) = 0.0416$ $\bar{A}_{21,3}^0(3) = 0.0416$

Luego, los factores de forma y de carga reducidos para este tramo son:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1,2}^0 &= 0.242 + 0.332 - 1/3 = 0.241 \\ \bar{A}_{2,1}^0 &= 0.332 + 0.223 - 1/3 = 0.222 \\ \bar{B}_{1,2}^0 &= 0.159 + 0.155 - 1/6 = 0.147 \\ \bar{A}_{1,2,1}^0 &= 0.0568 + 0.0612 - 0.0617 = 0.0563 \\ \bar{A}_{2,1,1}^0 &= 0.0488 + 0.0458 - 0.0494 = 0.0452 \\ \bar{A}_{1,2,2}^0 &= 0.0469 + 0.0482 - 0.0494 = 0.0457 \\ \bar{A}_{2,1,2}^0 &= 0.0614 + 0.0543 - 0.0617 = 0.0540 \\ \bar{A}_{1,2,3}^0 &= 0.0384 + 0.0409 - 0.0416 = 0.0377 \\ \bar{A}_{2,1,3}^0 &= 0.0413 + 0.0368 - 0.0416 = 0.0365 \end{aligned}$$

Tramo 2-3:

$n = \left(\frac{0.794}{1.00}\right)^3 = 0.50$
$\lambda = \frac{2}{8} = 0.25$
$p = \frac{3.2}{8} \times 12 = 4.8$
$\bar{M}_{2,3,1}^0 = (2.7)(8m) = 167m$
$\bar{M}_{2,3,2}^0 = (1.2 T/m)(8m)^2 = 76.87m$



De la tabla N°7 : $\bar{A}_{12,3}^0 = 0.273$ $\bar{B}_{23}^0 = 0.155$
De la tabla N°19 : $p = 4.8$ $\bar{A}_{23,1}^0 = 0.0600$ $\bar{A}_{32,1}^0 = 0.0531$... (iv)
De la tabla N°15 : $\bar{A}_{12,2}^0 = \bar{A}_{32,2}^0 = 0.0389$

Reemplazando en la ecuación (i) y (ii) los factores que acabamos de calcular, tenemos:

$$(i): M_1(0.241) + M_2(0.147) = -[(30)(0.0563) + (30)(0.0457) + (72)(0.0377)]$$

$$\text{O sea: } 0.241M_1 + 0.147M_2 = -5.774 \quad \dots (i')$$

$$(ii): M_1(6)(0.147) + M_2[(6)(0.222) + (4.34)(0.273)] + M_3(0.155)$$

$$= -[6[(30)(0.0452) + (30)(0.0540) + (72)(0.0365)] + 4.34[(16)(0.060) + (76.8)(0.0389)]]$$

$$\text{en la que } M_3 = -(37)(2.50m) - \frac{1.2 T/m}{2}(2.50)^2 = -11.25 Tm$$

Reemplazando y efectuando operaciones, se obtiene:

$$0.882M_1 + 2.517M_2 = -43.190 \quad \dots (ii')$$

Resolviendo entre las ecuaciones (i') y (ii'), se tienen:

$$M_1 = -17.16 Tm \quad M_2 = -11.15 Tm$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos son:

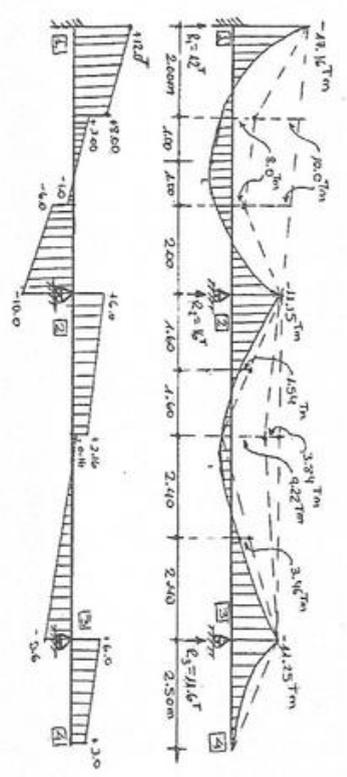
$$Q_{12} = V_{1,2} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = +(5 + 6) - \frac{(-17.16 + 11.5)}{6} = +11 + 1.0 = +12.0 T$$

$$Q_{21} = V_{2,1} - \frac{1}{l}(M_1 - M_2) = -11 + 1.0 = -10.0 T$$

$$Q_{23} = V_{2,3} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = +(4.8 + 1.2) - \frac{(-11.15 + 11.25)}{8.0} = +6.0 T$$

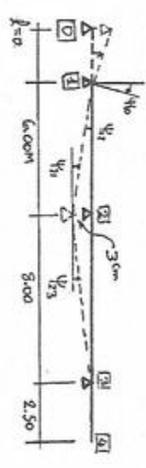
$$Q_{32} = V_{3,2} - \frac{1}{l}(M_2 - M_3) = -(4.8 + 0.8) - \frac{(-11.15 + 11.25)}{8.0} = -5.6 T$$

$$Q_{34} = +3 + (1.2 T/ml \times 2.50) = +6.0 T$$



PROBLEMA XI.9

Resolver la viga del problema XI-8 cuando, estando descargada, el empotramiento tiene un giro horario de 0.006 radianes, y el apoyo 2 sufre un asentamiento de 3 cm, considerar $E = 140 \text{ T/cm}^2$.



Solución:

Como en el problema XI-8, el empotramiento lo consideramos como un tramo ficticio de longitud cero y apoyos simples. El giro del empotramiento es pues el giro del tramo ficticio. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \psi_{10} &= +0.006 \text{ rad.} \\ \psi_{12} &= \psi_{21} = +\frac{0.03}{6.00} = +0.005 \text{ rad.} \\ \psi_{23} &= -\frac{0.03}{8.00} = -0.00375 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Aplicamos la ec.(3.L) a los tramos 0-1-2 y 1-2-3, sucesivamente, en la que los factores \bar{M} y \bar{A}^0 son cero por estar descargada la viga:

0 - 1 - 2: $M_0 \bar{I}_{01} \bar{B}_{01} + M_1 (\bar{I}_{01} \bar{A}_{10} + \bar{I}_{12} \bar{A}_{12}) + M_2 \bar{I}_{12} \bar{B}_{12} = E I_c (\psi_{10} - \psi_{12})$

Lo que siendo $\bar{I}_{01} = 0$, dar:

$$M_1 \bar{A}_{12} + M_2 \bar{B}_{12} = \frac{E I_c}{I_{12}} (\psi_{10} - \psi_{12}) \dots (i)$$

1 - 2 - 3: $M_1 \bar{I}_{12} \bar{B}_{12} + M_2 (\bar{I}_{12} \bar{A}_{21} + \bar{I}_{23} \bar{A}_{23}) + M_3 \bar{I}_{23} \bar{B}_{23} = E I_c (\psi_{21} - \psi_{23}) \dots (ii)$

En la que $M_3 = 0$ por estar descargada el voladizo. Reemplazando en estas ecuaciones los valores de los giros, los factores de formas reducidas y longitudes reducidas calculadas en el problema XI-8, tenemos:

(i): $M_1(0.241) + M_2(0.147) = \frac{E I_c}{6.00} [(+0.006) - (+0.005)]$

(ii): $M_1(6.00 \times 0.147) + M_2(6.00 \times 0.222 + 4.34 \times 0.273) = E I_c [(+0.005) - (0.00375)]$

Se toma como momento de Inercia de comparación el correspondiente a la de peralte 0.585m, entonces tenemos:

$$I_c = \frac{1}{12} (0.36)(0.585)^3 = 0.006 \text{ m}^4$$

Y como $E = 140 \text{ T/cm}^2 = 14 \times 10^5 \text{ T/m}^2$

O sea que

$$E I_c = (14 \times 10^5)(0.006) = 8400 \text{ Tm}^2$$

Luego las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{aligned} 0.241 M_1 + 0.147 M_2 &= 1.4 \dots (i') \\ 0.882 M_1 + 2.517 M_2 &= 73.5 \dots (ii') \end{aligned}$$

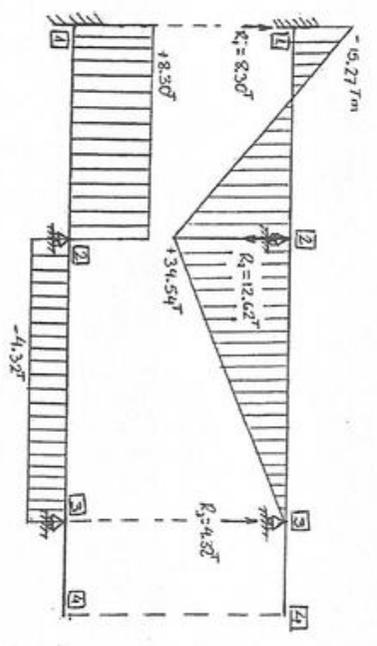
Resolviendo entre estas ecuaciones, se tienen:

$$M_1 = -15.27 \text{ Tm} \quad M_2 = +34.54 \text{ Tm}$$

Esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos:

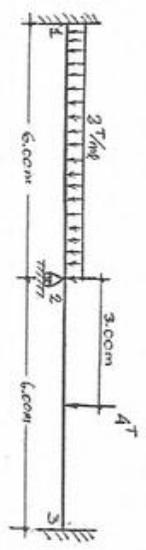
$$\begin{aligned} Q_{12} &= V_{12} - \frac{1}{l} (M_1 - M_2) = 0 - \frac{(-15.27 - 34.54)}{6.00} = +8.30 \text{ T} \\ Q_{21} &= V_{21} - \frac{1}{l} (M_1 - M_2) = 0 - \frac{(-15.27 - 34.54)}{6} = +8.30 \text{ T} \\ Q_{23} &= V_{23} - \frac{1}{l} (M_2 - M_3) = 0 - \frac{(+34.54 - 0)}{8.00} = -4.32 \text{ T} \end{aligned}$$

$$Q_{32} = \frac{1}{2} M_2 - M_3 = 0 - \frac{(+34.54 - 0)}{8.00} = -4.32 \text{ T}$$

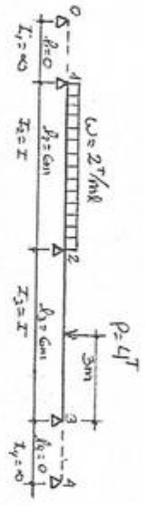


PROBLEMA XI.10. (UNI, 21-SET-1970)

Encontrar los momentos de flexión en la viga mostrada, que es de sección constante y de igual EI en toda la longitud.



Solución:
Considerando los empotramientos como tramos de apoyos simples con rigideces infinitamente grandes ($l = 0, l = \infty$). podemos resolver el problema en forma general (tramos de longitudes iguales entre sí, en una de ellos carga uniformemente repartida en toda la luz, y en el otro una carga concentrada en el punto medio, aplicando la ec. (1.L) así:



Tramos	M_l	M_j	M_k	\bar{l}_j	\bar{l}_k	\bar{A}_{ji}^0	\bar{A}_{jk}^0	Ec. (1.L)
0-1-2	0	M_1	M_2	0	l	0	$\frac{\omega l^3}{24}$	$2M_1(l) + M_2(l) = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24} \right]$
1-2-3	M_1	M_2	M_3	l	l	$\frac{\omega l^3}{24}$	$\frac{\omega l^3}{16}$	$M_1(l) + 2M_2(2l) + M_3(l) = -6 \left[\frac{\omega l^3}{24} + \frac{Pl^2}{16} \right]$
4-3-2	0	M_3	M_2	0	l	0	$\frac{Pl^2}{16}$	$2M_3(l) + M_2(l) = -6 \left[\frac{Pl^2}{16} \right]$

Simplificando, el sistema de ecuaciones es, pues:

$$\begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= -\frac{\omega l^2}{4} \\ M_1 + 2M_2 + M_3 &= -\frac{\omega l^2}{4} + \frac{3Pl}{8} \\ M_2 + 2M_3 &= -\frac{3Pl}{8} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, se obtienen:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{5\omega l^2}{48} + \frac{Pl}{32} \\ M_2 &= -\frac{\omega l^2}{24} - \frac{Pl}{16} \\ M_3 &= \frac{\omega l^2}{48} - \frac{3Pl}{32} \end{aligned}$$

Reemplazando valores para el caso particular dado, tenemos:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{5(2)(6)^2}{48} + \frac{1}{32}(4)(6) = -\frac{27}{4} = -6.75 & \therefore M_1 &= -6.75 \text{ Tm} \\ M_2 &= -\frac{(2)(6)^2}{24} - \frac{1}{16}(4)(6) = -\frac{9}{2} = -4.50 & \therefore M_2 &= -4.50 \text{ Tm} \\ M_3 &= -\frac{(2)(6)^2}{48} - \frac{3}{32}(4)(6) = -\frac{9}{4} = -2.25 & \therefore M_3 &= -2.25 \text{ Tm} \end{aligned}$$

CAPÍTULO XII MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES

OBJETO.

La solución de estructuras hiperestáticas continuas y apoyadas, de alma llena, considerando como incógnitas básicas los giros y desplazamientos de los nudos.

Este método también es conocido con el nombre de "SLOPE-DEFLECTION METHOD", de Wilson y Maney, o método de la deflexión de la pendiente.

NOTACION.

M_{ij}, M_{ji} Momentos o pares que los nudos aplican al elemento ij en los extremos i y j , respectivamente.

M_{ij}^o, M_{ji}^o Momentos que existirían en los extremos i y j , respectivamente, del elemento ij , si tales extremos estuvieran perfectamente empotrados, producidos por las cargas aplicadas al elemento.

$\bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ji}$ Factores de forma reducidos de 2ª especie en los extremos i y j , respectivamente.
 \bar{b}_{ij} Factor de forma reducido de 2ª especie del elemento ij .

$\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}$ Factores de giro reducidos en los extremos i y j ;

$$\bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} \quad \bar{c}_{ji} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$$

$\psi_{ij} = \frac{\Delta l}{l_{ij}}$ Rotación o giro del elemento ij , siendo Δl_{ij} el desplazamiento relativo entre los extremos i y j .

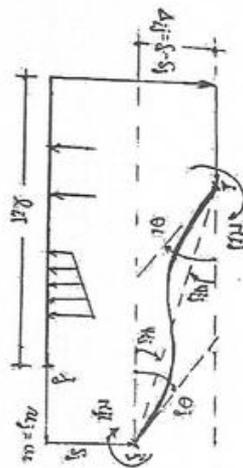
θ_i, θ_j Rotaciones o giros de los extremos i y j del elemento ij ; son los giros de los nudos i y j .

E Modulo o coeficiente de elasticidad normal.

I_c Momento de inercia en la parte de sección constante del elemento ij .

$$K_{ij} = \frac{12I}{l_{ij}^3}$$

Rigidez relativa del elemento ij , de momento de inercia constante I_{ij} en toda la longitud l_{ij} .



SIGNOS.

Para los momentos o pares que los nudos aplican al elemento, para los momentos de empotramiento perfecto (convención de signos de análisis), y para los giros de los nudos y de los elementos:

$$M_{ij}, M_{ji}, M_{ij}^0, M_{ji}^0, \theta_i, \theta_j, \psi_{ij} \} + \cup \quad - \cup$$

ECUACIONES.

A. Para el caso general de elementos de secciones variables (Ecuaciones de GULDAN):

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{ij} (\bar{a}_{ij}\theta_i + \bar{b}_{ij}\theta_j - \bar{c}_{ij}\psi_{ij}) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} &= \left(\frac{EI_c}{l}\right)_{ij} (\bar{a}_{ji}\theta_j + \bar{b}_{ji}\theta_i - \bar{c}_{ji}\psi_{ij}) + M_{ji}^0 \end{aligned} \right\} \dots (1.M)$$

B.-Para el caso en que cada elemento de la estructura tiene sección constante(ecuaciones de Mohr):

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= 2EK_{ij}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} &= 2EK_{ij}(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij}) + M_{ji}^0 \end{aligned} \right\} \dots (2.M)$$

METODO.

A.-Para el caso general de elementos de secciones variables.

1) Determinar las longitudes y dimensiones transversales de los elementos de la estructura.

- 2) Calcular los factores de forma de 2ª especie ($\bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ji}, \bar{b}_{ij}$) y los factores de giro ($\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}$) para cada elemento.
- 3) Calcular los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de todos los elementos cargados.
- 4) Estudiar la hipergeometría de la estructura con lo que se establecerán los giros y los desplazamientos relativos de los nudos, incógnitas del problema. La cantidad de estos giros y desplazamientos da el grado de hipergeometría de la estructura. En general se puede decir que siempre hay tantos desplazamientos relativos Δ entre los nudos como apoyos ficticios sería necesario considerar en los nudos para dejar la estructura sin posibilidades de desplazamientos.
- 5) Aplicar las ecuaciones de Golden (1.M) a los extremos d todos los elementos, incluso en los que exista rotula.
- 6) Plantear las ecuaciones de equilibrio estático del conjunto y de las partes de la estructura, en cantidad igual al grado de hipergeometría determinado en 4). En general:
 - a) en cada uno de los nudos debe cumplirse.

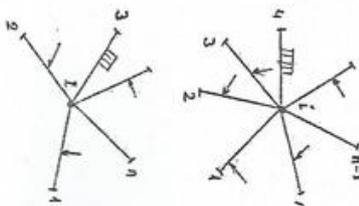
$$\sum_{j=1}^{j=n} M_{ij} = 0$$

Es decir:

$$M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + \dots + M_{in} = 0$$

b) en los extremos de elementos en los que hay articulaciones o rotulas, debe plantearse la condición de momento nulo; por ejemplo, en la figura:

$$M_{i1} = 0$$



c) Por cada uno de los desplazamientos relativos debe plantearse la ecuación $\sum F = 0$ es decir que la suma de las fuerzas, acciones y reacciones en un sentido determinado (generalmente en el del desplazamiento relativo), debe ser igual a cero.

- 7) Resolver el sistema de ecuaciones planteados en el paso 6), obteniéndose valores de las incógnitas (o proporcionales a las incógnitas) giros θ y ψ .
- 8) Reemplazar los resultados o valores de estas incógnitas en las expresiones escritas en el paso 5), con lo que se tendrán los valores de los momentos en los extremos de cada uno de los elementos de la estructura.

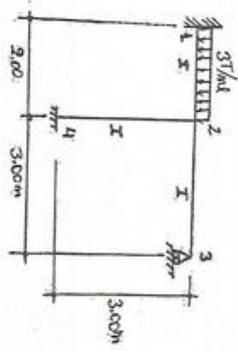
B.-Para el caso de elementos de sección constante.-

En general los pasos por dar son los mismos que para secciones variables, excepto:

- 1) Calcular las rigideces relativas k_{ij} para cada uno de los elementos.
- 2) Aplicar las ec. De Mohr (2.M) a los extremos de todos los elementos de la estructura, incluso en los que existe rotula.

PROBLEMA XIII.

Determinar los momentos flectores y esfuerzos cortantes de la estructura mostrada.



Solución:

Las incógnitas del sistema son los giros de los nudos 2 y 3, es decir θ_2 y θ_3 ; no hay desplazamientos de nudos.

Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{1}{12} (3)(2)^2 = -1 \text{ Tm}$$

Aplicando las ecuaciones de Mohr (2.M) para los diversos elementos:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2E \frac{I}{2} (\theta_2) - 1 &= 3m_2 - 1 \\ M_{21} &= 2E \frac{I}{2} (2\theta_2) + 1 &= 6m_2 + 1 \\ M_{23} &= 2E \frac{I}{3} (2\theta_2 + \theta_3) &= 4m_2 + 2m_3 \\ M_{32} &= 2E \frac{I}{3} (2\theta_3 + \theta_2) &= 4m_3 + 2m_2 \\ M_{24} &= 2E \frac{I}{3} (2\theta_2) &= 4m_2 \\ M_{42} &= 2E \frac{I}{3} (\theta_2) &= 2m_2 \end{aligned} \right\}$$

En las que:

$$m_2 = \frac{1}{3} EI \theta_2 \quad m_3 = \frac{1}{3} EI \theta_3$$

m_2 y m_3 son momentos de giro de los nudos 2 y 3.

Las ecuaciones de condición, de equilibrio estático, son dos:

$$1) \sum M_{zj} = 0:$$

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$(6m_2 + 1) + (4m_2 + 2m_3) + (4m_2) = 0$$

$$\therefore 14m_2 + 2m_3 = -1 \quad \dots (I)$$

$$2) M_{32} = 0:$$

$$\therefore 4m_3 + 2m_2 = 0$$

... (II)

Resolviendo entre estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$m_2 = -\frac{1}{13} \quad m_3 = \frac{1}{26}$$

Llevando estos resultados a las expresiones de los momentos en los extremos de los elementos, tenemos:

$$M_{12} = 3 \left(-\frac{1}{13} \right) - 1 = -\frac{16}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{21} = 6 \left(-\frac{1}{13} \right) + 1 = +\frac{7}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{23} = 4 \left(-\frac{1}{13} \right) + 2 \left(\frac{1}{26} \right) = -\frac{3}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{32} = 4 \left(\frac{1}{26} \right) + 2 \left(-\frac{1}{13} \right) = 0$$

$$M_{24} = 4 \left(-\frac{1}{13} \right) = -\frac{4}{13} \text{ Tm}$$

$$M_{42} = 2 \left(-\frac{1}{13} \right) = -\frac{2}{13} \text{ Tm}$$

El esfuerzo cortante en una sección cualquiera en función de los momentos en los extremos del elemento, momentos en la convención de signos de análisis, es:

$$Q = v - \frac{1}{l} (M_i + M_j)$$

Aplicando esta expresión para los diversos elementos, con los resultados obtenidos para los momentos extremos, tenemos:

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}\omega l - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = +\frac{1}{2}(3)(2) - \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{13} + \frac{7}{13}\right) = +3.35 T$$

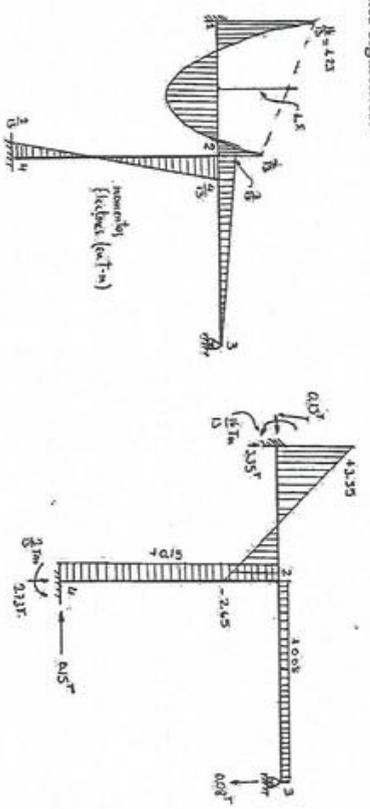
$$Q_{21} = -\frac{1}{2}\omega l - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = -\frac{1}{2}(3)(2) - \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{13} + \frac{7}{13}\right) = -2.65 T$$

$$Q_{23} = 0 - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{13}\right) = +0.08 T$$

$$Q_{32} = 0 - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = +0.08 T$$

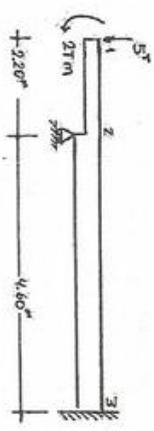
$$Q_{42} = Q_{24} = 0 - \frac{1}{l}(M_{42} + M_{24}) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{13} - \frac{4}{13}\right) = +0.15 T$$

Con los resultados así obtenidos, trazamos los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes siguientes:



PROBLEMA XII.2. (UNI, MARZO-1952)

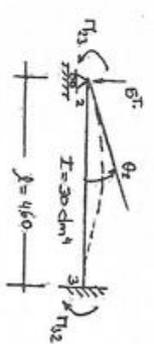
La viga mostrada en el esquema (tramo en voladizo con I constante de 20 dm^4 ; tramo siguiente con I constante de 30 dm^4), está sujeta a la acción de un par y de una carga concentrada, ambos en el extremo del voladizo. sin considerar el peso propio, se pide trazar los correspondientes diagramas de momentos flectores y de los esfuerzos cortantes.



Podemos trasladar el par y la carga aplicados en el extremo 1, hacia la sección 2. Así tendremos la situación del esquema, en la que el par total en 2 es:

$$M_{23} = -2 Tm - (5 T \times 2.20 m) = -13 Tm$$

$$\therefore M_{32} = -13 Tm$$



Aplicando las fórmulas de Mohr en el tramo 23, tenemos:

$$M_{23} = 2EK_1(2\theta_2)$$

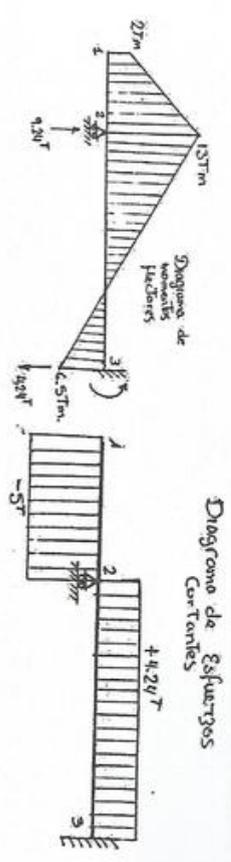
$$M_{32} = 2EK_1(\theta_2) \rightarrow \therefore M_{32} = \frac{1}{2}M_{23}$$

O sea que: $M_{32} = \frac{1}{2}(-13) = -6.5 \therefore M_{23} = -6.5 Tm$

Los esfuerzos cortantes son:

$$Q_{12} = Q_{21} = -5 T$$

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{1}{2}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{4.6}(-13 - 6.5) = +4.24 T$$

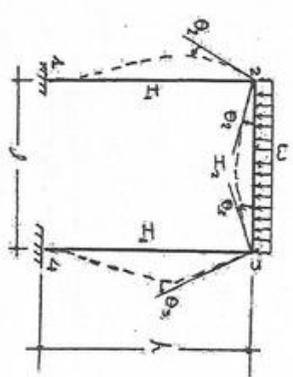


PROBLEMA XII.3.
Resolver el problema XI-5 aplicando el método de las deformaciones angulares.

Solución:
Por simetría física y de carga podemos afirmar que:

$$\theta_3 = -\theta_2$$

En el sistema, en consecuencia, hay solo una incógnita: la deformación angular θ_2 .



Denominando:

$$k_1 = \frac{l}{h} \quad k_2 = \frac{l^2}{l} \quad \varepsilon = \frac{k_2}{k_1}$$

Podemos escribir las ecuaciones de Mohr (2.M) para los momentos en los extremos de los elementos de la parte izquierda de la estructura (por simetría, en la otra parte ocurre cosa igual):

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2Ek_1(\theta_2) = 2Ek_1\theta_2 \\ M_{21} &= 2Ek_1(2\theta_2) = 4Ek_1\theta_2 \\ M_{23} &= 2Ek_2(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^0 = 2\varepsilon Ek_1\theta_2 - \frac{\omega l^2}{12} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

La ecuación de condición, o de equilibrio estático es:

$$\sum M_{2j} = 0: M_{21} + M_{23} = 0$$

$$(4Ek_1\theta_2) + \left(2\varepsilon Ek_1\theta_2 - \frac{\omega l^2}{12} \right) = 0$$

De la que:

$$2Ek_1\theta_2 = \frac{\omega l^2}{12(2 + \varepsilon)}$$

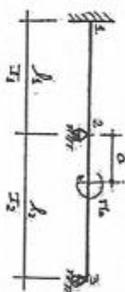
Que llevando a las igualdades (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{12} &= + \frac{\omega l^2}{12(2 + \varepsilon)} \\ M_{21} &= + \frac{\omega l^2}{6(2 + \varepsilon)} \\ M_{23} &= - \frac{\omega l^2}{6(2 + \varepsilon)} \end{aligned}$$

Las mismas expresiones obtenidas al resolver el problema XI-5, aquí ahora, con los signos de la convención de análisis.

PROBLEMA XII.4. (UNI, 19-DIC-1956)

Aplicando el método de las deformaciones angulares, resolver la viga que se muestra. Se trazaran los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.



En el tramo 23 los momentos de empotramiento, según la tabla N°4, estado de carga n° 40, son:

$$\left. \begin{aligned} M_{23}^0 &= +M_0 \frac{(l_2 - a)[2l_2 - 3l_2 - a]}{l_2^2} = +M_0(1 - \alpha)(3\alpha - 1) \\ M_{32}^0 &= +M_0 \frac{a[2l_2 - 3a]}{l_2^2} = +M_0\alpha(2 - 3\alpha) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Considerando que:

en las que $\alpha = \frac{a}{l_2}$, siendo $0 \leq \alpha \leq 1$

$$k_1 = \frac{l}{l_1} \quad k_2 = \frac{l^2}{l_2} \quad \varepsilon = \frac{k_2}{k_1}$$

Tenemos las expresiones de los momentos en los extremos:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2Ek_1(\theta_2) = \varphi_2 \\ M_{21} &= 2Ek_1(2\theta_2) = 2\varphi_2 \\ M_{23} &= 2Ek_2(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^0 = 2\varepsilon\varphi_2 + \varphi_3 + M_{23}^0 \\ M_{32} &= 2Ek_2(2\theta_3 + \theta_2) + M_{32}^0 = 2\varphi_3 + \varepsilon\varphi_2 + M_{32}^0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

En las que:

$$\varphi_2 = 2Ek_1\theta_2 \quad \text{y} \quad \varphi_3 = 2Ek_2\theta_3$$

Ecuaciones de condición:

$$1) \sum_{(2)} M = 0: M_{21} + M_{23} = 0$$

$$2\varphi_2 + 2\varepsilon\varphi_2 + \varphi_3 + M_{23}^0 = 0 \rightarrow \varphi_3 = -M_{23}^0 - 2(1 + \varepsilon)\varphi_2 \dots (3)$$

$$2) M_{32} = 0: 2\varphi_3 + \varepsilon\varphi_2 + M_{32}^0 = 0, \text{ en la que reemplazamos la ec (3):}$$

$$2[-M_{23}^0 - 2(1 + \varepsilon)\varphi_2] + \varepsilon\varphi_2 + M_{32}^0 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \frac{M_{32}^0 - 2M_{23}^0}{4 + 3\varepsilon}$$

O sea, reemplazando las igualdades (1):

$$\varphi_2 = M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\varepsilon}$$

Que es suficiente para determinar las expresiones de los momentos en los extremos, llevándola a las igualdades (2):

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= +M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\varepsilon} & M_{21} &= -M_{23} = +2M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\varepsilon} & M_{32} &= 0 \dots (4) \end{aligned} \right\}$$

El signo de estos momentos está dado por el término $3\alpha^2 - 6\alpha + 2$ en función de la posición α del par. Haciendo $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, obtenemos $\alpha_0 = 1 - 1/\sqrt{3}$ (la otra solución, $1 + 1/\sqrt{3}$, debe descartarse por ser > 1 , fuera del intervalo de valores de α). Por consiguiente, tenemos:

i) si $\alpha < 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0$,

$$\therefore M_{12} > 0, \text{ o sea } M_{12} > 0 \} \text{ en la convención de signos de R. M.}$$

$$M_{21} > 0, \text{ o sea } M_{21} < 0$$

ii) si $\alpha = 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, $\therefore M_{12} = M_{21} = 0$

iii) si $\alpha > 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0$,

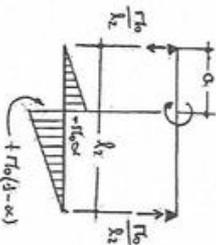
$$\therefore M_{12} < 0, \text{ o sea } M_{12} < 0$$

$$M_{21} < 0, \text{ o sea } M_{21} > 0 \} \text{ en la convención de signos de R. M.}$$

En base a esta discusión, se han dibujado los diagramas de momentos flectores que aparecen enseguida.

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los tramos son:

$$Q_{12} = -\frac{1}{l_1}(M_{12} + M_{21}) = -\frac{3M_0}{l_1(4 + 3\varepsilon)}(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)$$



Cuyo signo está regido por el del mismo trinomio, en consecuencia:

i) si $\alpha < 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0$, $\therefore Q_{12} < 0$

ii) si $\alpha = 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, $\therefore Q_{12} = 0$

iii) si $\alpha > 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0$, $\therefore Q_{12} > 0$

$$Q_{23} = -\frac{M_0}{l_2} - \frac{1}{l_2}(M_{23}) = -\frac{M_0}{l_2} + \frac{2M_0}{l_2} \cdot \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\varepsilon} = +\frac{6M_0}{l_2(4 + 3\varepsilon)} \left(\alpha^2 - 2\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Para todo valor de α comprendido dentro del intervalo de 0 a 1, el trinomio $\alpha^2 - 2\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < 0$; luego en todos los casos:

$$Q_{23} < 0$$

En ambos tramos los esfuerzos cortantes se mantienen constantes, es decir que:

$$Q_{21} = Q_{12} \quad \text{y} \quad Q_{32} = Q_{23}$$

En el 12 por que no hay carga aplicada, y en el 23 por que los esfuerzos cortantes isostáticos son iguales entre sí:

$$V_{23} = V_{32} = -\frac{M_0}{l_2}$$

Las reacciones de apoyo son:

$$R_1 \uparrow = +Q_{12}, \text{ cuyas variaciones de sentidos son:}$$

i) si $\alpha < 1 - 1/\sqrt{3}$, $Q_{12} < 0$, $\therefore R_1 < 0$ (1)

ii) si $\alpha = 1 - 1/\sqrt{3}$, $Q_{12} = 0$, $\therefore R_1 = 0$

iii) si $\alpha > 1 - 1/\sqrt{3}$, $Q_{12} > 0$, $\therefore R_1 > 0$ (T)

$$R_3 \uparrow = -Q_{32}$$

Conforme hemos analizado $Q_{32} = Q_{23} < 0$ para todo valor de α . Luego, para todos los casos o valores de α

$$R_3 \uparrow > 0 \text{ (T)}$$

$$R_2 = -Q_{21} + Q_{23} = \frac{1}{l_1}(M_{12} + M_{21}) + \left[-\frac{M_0}{l_2} - \frac{1}{l_2}M_{23} \right]$$

Pero $M_{21} = 2M_{12}$, $M_{23} = -2M_{12}$

Luego,

$$R_2 = \frac{1}{l_1}(3M_{12}) - \frac{M_0}{l_2} + \frac{2M_{12}}{l_2} = \frac{3l_2 + 2l_1}{l_1 l_2} M_{12} - \frac{M_0}{l_2}$$

$$\therefore R_2 = \frac{3l_2 + 2l_1}{l_1 l_2(4 + 3\varepsilon)} M_0(3\alpha^2 - 6\alpha + 2) - \frac{M_0}{l_2}$$

En la que:

iii) si $\alpha > 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 < 0$, $\therefore R_2 < 0$ (1)

i) si $\alpha = 1 - 1/\sqrt{3}$, $3\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$, $\therefore R_2 < 0$ (1)

i) si $\alpha < 1 - 1/\sqrt{3}$,

El primer término de R_2 es > 0 , de modo que la diferencia podría ser positiva o negativa, dependiendo ahora de la relación de longitud $l_2/l_1 = \beta$, así como de ε , así:

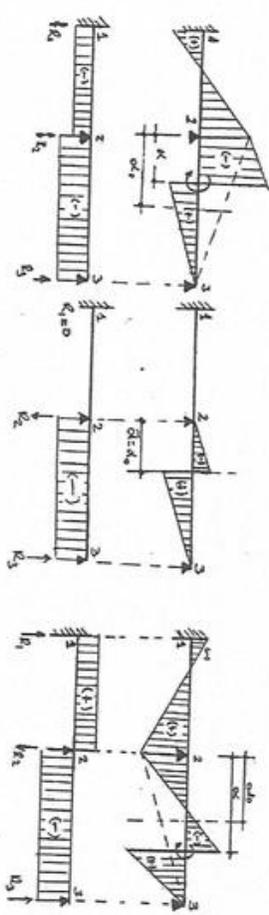
$$R_2 = 0, \quad \text{da} \quad \alpha_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\beta + 2 + \varepsilon}{\beta + 2/3}}$$

Valor que satisface la condición $\alpha < 1 - 1/\sqrt{3}$ para cualquiera que sean los valores de β , γ y ϵ , por que :

$$\sqrt{\frac{\beta + 2 + \epsilon}{\beta + 2/3}} > 1$$

Por consiguiente, en esta situación j):

para $\alpha < \alpha_1$, $R_2 > 0$ (I)
 para $\alpha = \alpha_1$, $R_2 = 0$
 para $\alpha > \alpha_1$, pero $< 1 - 1/\sqrt{3}$, $R_2 < 0$ (I)



PROBLEMA XIII.5.

Determinar la distribución de los momentos flectores y esfuerzos cortantes en el pórtico que se muestra.

Solución:

Las incógnitas básicas son los giros de los nudos 2 y 3, y la desviación horizontal de estos nudos. Es decir:

$$\theta_2, \theta_3, \delta$$

Los giros de los elementos 12 y 34 son:

$$\psi_{12} = \frac{\delta}{30} \quad \psi_{34} = \frac{\delta}{24}$$

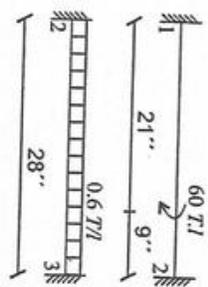
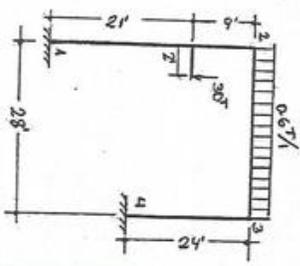
Los momentos de empotramiento perfecto son (Tabla N° 4)

$$M_{12}^0 = +M_0 \frac{b(2l - 3b)}{l^2} = +60 \frac{9(60 - 27)}{30^2} = +19.8 T \text{ pie.}$$

$$M_{21}^0 = +M_0 \frac{a(2l - 3a)}{l^2} = +60 \frac{21(60 - 63)}{30^2} = -4.2 T \text{ pie.}$$

$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{1}{12} (0.6)(28)^2 = -39.2 T \text{ pie.}$$

300



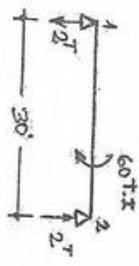
Aplicando las ecuaciones de Mohr (2.M) a los tres elementos de la estructura, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2E \frac{1.5l}{30} \left(\theta_2 - 3 \frac{\delta}{30} \right) + 19.8 = EI(0.1\theta_2 - 0.01\delta) + 19.8 \\ M_{21} &= 2E \frac{1.5l}{30} \left(2\theta_2 - 3 \frac{\delta}{30} \right) - 4.2 = EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2 \\ M_{23} &= 2E \frac{0.7l}{28} (2\theta_2 - \theta_3) - 39.2 = EI(0.1\theta_2 + 0.05\theta_3) - 39.2 \\ M_{32} &= 2E \frac{0.7l}{28} (2\theta_3 + \theta_2) + 39.2 = EI(0.1\theta_3 + 0.05\theta_2) + 39.2 \\ M_{34} &= 2E \frac{0.6l}{24} \left(2\theta_3 - 3 \frac{\delta}{24} \right) = EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta) \\ M_{43} &= 2E \frac{0.6l}{24} \left(\theta_3 - 3 \frac{\delta}{24} \right) = EI(0.05\theta_3 - 0.00625\delta) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Las fuerzas cortantes en las bases de las columnas son:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l} (M_{12} + M_{21}) = -2 - \frac{1}{30} (M_{12} + M_{21})$$

$$Q_{43} = V_{43} - \frac{1}{l} (M_{43} + M_{34}) = 0 - \frac{1}{24} (M_{43} + M_{34})$$



Las tres ecuaciones de equilibrio, son:

$$1) \sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$[EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2] + [EI(0.1\theta_2 + 0.05\theta_3) - 39.2] = 0$$

$$2) \sum M = 0: \quad M_{32} + M_{34} = 0$$

$$[EI(0.1\theta_3 + 0.05\theta_2) + 39.2] + [EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta)] = 0$$

$$\therefore EI(0.05\theta_2 + 0.2\theta_3 - 0.00625\delta) + 39.2 = 0 \quad \dots (ii)$$

$$3) \sum F_h = 0,$$

Suma de fuerzas horizontales al nivel 1-4 debe ser igual a cero:

$$\left[-2 - \frac{1}{30} (M_{12} + M_{21}) \right] + \left[-\frac{1}{24} (M_{43} + M_{34}) \right] = 0$$

$$2 + \frac{1}{30} [EI(0.1\theta_2 - 0.01\delta) + 19.8 + EI(0.2\theta_2 - 0.01\delta) - 4.2] + \frac{1}{24} [EI(0.05\theta_3 - 0.00625\delta) + EI(0.1\theta_3 - 0.00625\delta)] = 0$$

$$\therefore EI(0.3\theta_2 + 0.1875\theta_3 - 0.035625\delta) + 75.6 = 0 \quad \dots \text{(iii)}$$

Resolviendo el sistema de ec. (i), (ii) y (iii), obtenemos:

$$\theta_2 = \frac{297.6}{EI} \quad \theta_3 = -\frac{150.4}{EI} \quad \delta = \frac{3835}{EI}$$

Llevando estos resultados a la expresión (1), obtenemos:

$$M_{12} = 0.1 \times 297.6 - 0.01 \times 3835 + 19.8 = +11.21 \text{ T pie.}$$

$$M_{21} = 0.2 \times 297.6 - 0.01 \times 3835 - 4.2 = +16.97 \text{ T pie.}$$

$$M_{23} = 0.1(297.6) + 0.05(-150.4) - 39.2 = -16.96 \text{ T pie.}$$

$$M_{32} = 0.1(-150.4) + 0.05(297.6) + 39.2 = +39.04 \text{ T pie.}$$

$$M_{34} = 0.1(-150.4) - 0.00625 \times 3835 = -39.01 \text{ T pie.}$$

$$M_{43} = 0.05(-150.4) - 0.00625 \times 3835 = -31.49 \text{ T pie.}$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de cada elemento son:

$$Q_{12} = -2 - \frac{1}{30} (+11.21 + 16.97) = -2.94 \text{ T}$$

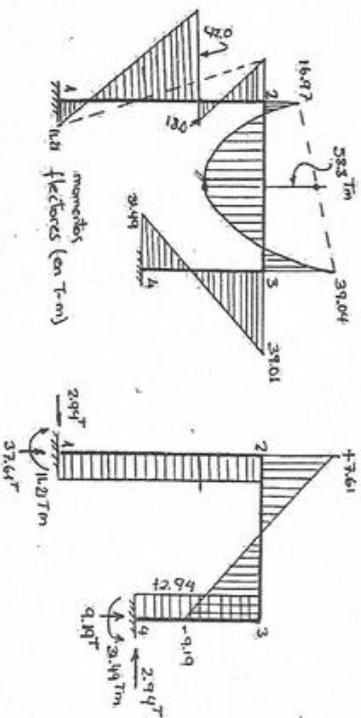
$$Q_{21} = -2 - \frac{1}{30} (+11.21 + 16.97) = -2.94 \text{ T}$$

$$Q_{23} = +\frac{0.6}{2} \times 28 - \frac{1}{28} (-16.97 + 39.04) = +7.61 \text{ T}$$

$$Q_{32} = -\frac{0.6}{2} \times 28 - \frac{1}{28} (-16.97 + 39.04) = -9.19 \text{ T}$$

$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{1}{24} (-39.01 - 31.49) = +2.94 \text{ T}$$

Con estos resultados podemos dibujar los diagramas de distribución de momentos y esfuerzos cortantes siguientes:

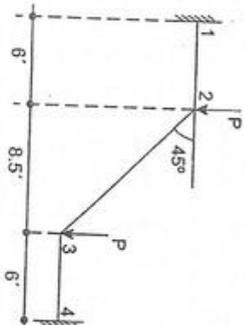


PROBLEMA XII.6. (UNI, 20-ENE-1969)

La estructura que se muestra es de sección constante. Calcular la distribución de los momentos flectores y los esfuerzos cortantes; se trazará, finalmente, los diagramas correspondientes.

Solución:

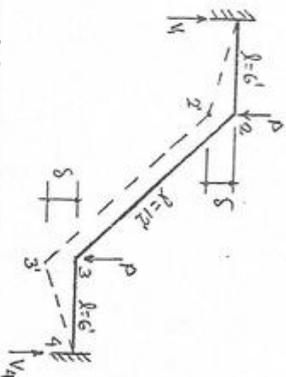
Las incógnitas básicas o primarias en este caso, por simetría física y de carga, son el giro del nudo 2 y el desplazamiento relativo entre los nudos 1 y 2, así tenemos:



$$\theta_3 = -\theta_2 \quad \psi_{12} = -\psi_{34} = \frac{\Delta}{6} \quad \psi_{23} = 0$$

Hagamos:

$$\phi_2 = \frac{EI}{6} \theta_2 \quad \gamma = \Delta = \frac{EI}{6} \delta$$



Los momentos en los extremos de los elementos son:

$M_{12} = 2E \frac{I}{6} \left(\theta_2 - 3 \frac{\delta}{6} \right) = 2\phi_2 - \Delta$	$M_{32} = 2E \frac{I}{12} (2\theta_3 + \theta_2) = -\phi_2$
$M_{21} = 2E \frac{I}{6} \left(2\theta_2 - 3 \frac{\delta}{6} \right) = 4\phi_2 - \Delta$	$M_{34} = 2E \frac{I}{6} (2\theta_3 + 3 \frac{\delta}{6}) = -4\phi_2 + \Delta$
$M_{23} = 2E \frac{I}{12} (2\theta_2 + \theta_3) = \phi_2$	$M_{43} = 2E \frac{I}{6} \left(\theta_3 + 3 \frac{\delta}{6} \right) = -2\phi_2 + \Delta$

(a)

Funciones de condición:

$$\sum_{(1)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$(4\phi_2 - \Delta) + (\phi_2) = 0 \rightarrow \Delta = 5\phi_2 \quad \dots (1)$$

$$2) \sum F_y = 0: \quad V_1 + V_4 - 2P = 0 \text{ por simetría } V_1 = V_4 \quad \therefore V_1 = P$$

Pero:

$$V_1 = Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21})$$

$$= 0 - \frac{1}{6}[(2\phi_2 - \Delta) + (4\phi_2 - \Delta)] \rightarrow V_1 = -\phi_2 + \frac{1}{3}\Delta$$

O sea que:

$$-\phi_2 + \frac{1}{3}\Delta = P \rightarrow \phi_2 = \frac{1}{3}\Delta - P \quad \dots (2)$$

Resolviendo entre las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$\phi_2 = \frac{3}{2}P \quad \Delta = \frac{15}{2}P$$

Llevando estos resultados a las expresiones (a), obtenemos los momentos en los extremos:

$$M_{12} = 2\left(\frac{3}{2}P\right) - \left(\frac{15}{2}P\right) \rightarrow \therefore M_{12} = -4.5P \quad \therefore M_{43} = +4.5P$$

$$M_{21} = 4\left(\frac{3}{2}P\right) - \left(\frac{15}{2}P\right) \rightarrow \therefore M_{21} = -1.5P \quad \therefore M_{34} = +1.5P$$

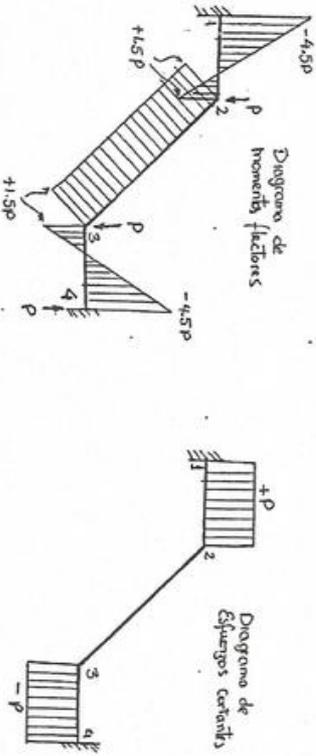
$$M_{23} = \left(\frac{3}{2}P\right) \rightarrow \therefore M_{23} = +1.5P \quad \therefore M_{32} = -1.5P$$

Los valores de las fuerzas cortantes en los extremos de los elementos son:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{6}(-4.5P - 1.5P) = +P \quad \therefore Q_{43} = -P$$

$$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{6}(-4.5P - 1.5P) = +P \quad \therefore Q_{34} = -P$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{12}(+1.5P - 1.5P) = 0 \quad \therefore Q_{32} = 0$$



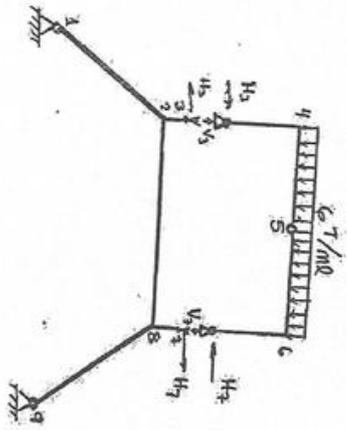
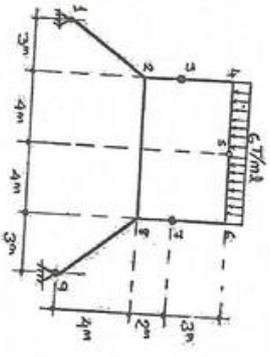
CAPITULO XII: METODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES
ANALISIS ESTRUCTURAL
PROBLEMA XII.7. UNI, 6-ENE-1969)

Resolver el pórtico que se muestra, para el que todos los elementos tienen el mismo EI. Se trazara finalmente, los diagramas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes. En las secciones 1, 3, 5, 7 y 9 hay articulaciones.

Solución:

Observando la estructura se constata que la parte 3-4-5-6-7 es estructura tipo arco de tres rotulas, sobrepuesta al resto del pórtico. Es posible, pues, determinar las fuerzas verticales V_3 y V_7 , y las fuerzas horizontales H_3 y H_7 que esa parte aplica sobre 1-2-8-9, que es la única porción hiperestática, por simetría:

$$V_3 = V_7 = \frac{1}{2}(6T/ml)(8m) = 24T, \text{ y como el momento flector en la rotula 5 tiene que ser cero, tomando momentos respecto de 5 de las fuerzas de la parte izquierda de 3-4-5-6-7 tenemos:}$$

$$V_3(4) - H_3(3) - (24)(2m) = 0 \rightarrow H_3 = H_7 = 16T$$


Queda por analizar, aplicando el método de las deformaciones angulares, la parte 1-2-8-9, sobre la que hay aplicadas la fuerza vertical de 24T y horizontal de 16T en los extremos 3 y 7. Por simetría dos incógnitas: los giros de los nudos 1 y 2. No hay desplazamientos relativos entre los nudos.

$$M_{12} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_1 + \theta_2) = 16\theta_1 + 8\theta_2$$

$$M_{21} = 2E \frac{I}{5} (2\theta_2 + \theta_1) = 16\theta_2 + 8\theta_1$$

$$M_{23} = 16(2) = +32Tm$$

$$M_{28} = 2E \frac{I}{8} (2\theta_2 + \theta_8) = 5\theta_2$$

In las que: $\phi_1 = \frac{EI}{20}\theta_1$ $\phi_2 = \frac{EI}{20}\theta_2$

Ecuaciones de condición:

1) $M_{12} = 0: 16\phi_1 + 8\phi_2 = 0 \rightarrow \phi_2 = -2\phi_1 \dots (1)$

2) $\sum M = 0: M_{21} + M_{23} + M_{28} = 0$
 $(16\phi_2 + 8\phi_1) + (32) + (5\phi_2) = 0$

$8\phi_1 + 21\phi_2 + 32 = 0 \dots (2)$

Resolviendo las ec. (1) y (2), se obtienen: $\phi_1 = \frac{16}{17}$ $\phi_2 = -\frac{32}{17}$

Resultados que llevados a las expresiones de los momentos en los extremos, son:

$M_{12} = 16\left(\frac{16}{17}\right) + 8\left(-\frac{32}{17}\right) = 0 \rightarrow \therefore M_{98} = 0$

$M_{21} = 16\left(-\frac{32}{17}\right) + 8\left(\frac{16}{17}\right) = -\frac{384}{17} = -22.6 \text{ Tm} \rightarrow \therefore M_{89} = +22.6 \text{ Tm}$

$M_{28} = 5\left(-\frac{32}{17}\right) - \frac{160}{17} = -9.4 \text{ Tm} \rightarrow \therefore M_{82} = +9.4 \text{ Tm}$

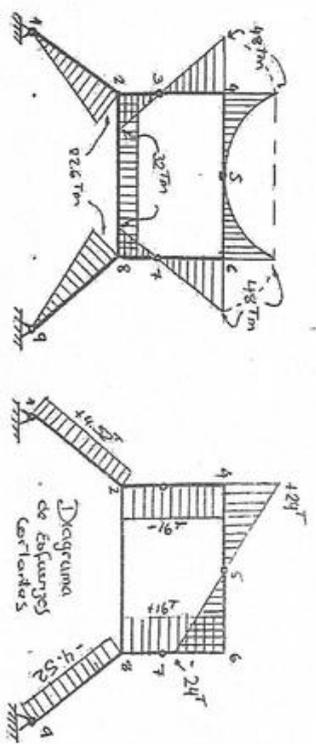
Los esfuerzos cortantes en estos extremos son:

$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(0 - 22.6) = +4.52 \text{ T} \therefore Q_{98} = -4.52 \text{ T}$

$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(0 - 22.6) = +4.52 \text{ T} \therefore Q_{89} = -4.52 \text{ T}$

$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = 0 - \frac{1}{2}(+32 + 0) = -16 \text{ T} \therefore Q_{87} = +16 \text{ T}$

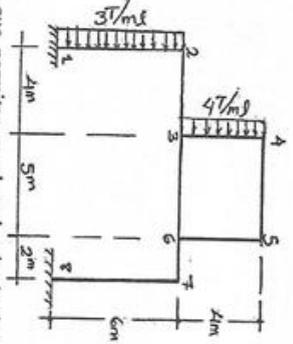
$Q_{28} = V_{28} - \frac{1}{l}(M_{28} + M_{82}) = 0 - \frac{1}{8}(-9.4 + 9.4) = 0 \therefore Q_{82} = 0$



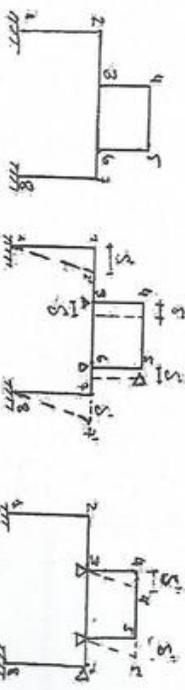
PROBLEMA XII.8. (UNI, 20-ENE-1969)

El pórtico que se muestra es de EI constante en todos sus elementos. Se pide:

- a) Indicar cuales son las incógnitas primarias en la estructura;
- b) Expresar los momentos en los extremos de los elementos en función de las incógnitas primarias;
- c) Plantear y expresar las ecuaciones de condición, en función de solo los momentos en los extremos, que permitan resolver las incógnitas primarias.



Las incógnitas primarias están dadas por los giros de los nudos o deformaciones angulares en los extremos de los elementos, y por los desplazamientos de los nudos. Veamos primero esto último, los desplazamientos, para lo cual sujetamos con apoyos ficticios todos los nudos susceptibles de desplazamiento, y luego iremos soltando uno a uno estos apoyos ficticios y analizando los desplazamientos y giros que se producen; finalmente combinaremos tales giros para la situación de desplazamientos simultáneos.



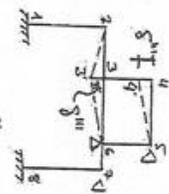
Cuatro apoyos ficticios

$\psi_{12}^I = \psi_{87}^I = \frac{\delta}{6}$

$\psi_{34}^{II} = \psi_{56}^{II} = \frac{\delta'}{4}$

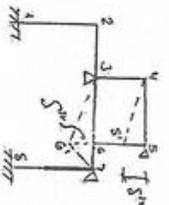
La combinación de los giros anteriormente indicados da:

$\psi_{12} = \delta'/6$	$\psi_{23} = \delta'''/4$
$\psi_{34} = \delta''/4$	$\psi_{45} = (-\delta''' + \delta''')/5$
$\psi_{56} = \delta''/4$	$\psi_{67} = -\delta''/2$
$\psi_{78} = \delta'/6$	$\psi_{36} = (-\delta''' + \delta''')/5$



$$\psi_{43}^{III} = \frac{\delta_3^{III}}{4}$$

$$\psi_{45}^{III} = \psi_{45}^{III} = -\frac{\delta_5^{III}}{5}$$



$$\psi_{45}^{IV} = \psi_{25}^{IV} = \frac{\delta_5^{IV}}{5}$$

$$\psi_{69}^{IV} = -\frac{\delta_9^{IV}}{2}$$

a) Las incógnitas primarias son:

Giros de nudos: $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$;
Desplazamientos: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9$

En total: 10 incógnitas.

b) Los momentos de empotramiento perfecto en los elementos cargados son:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -9 \text{ Tm}$$

$$M_{34}^0 = -M_{43}^0 = -\frac{1}{12}(4)(4)^2 = -\frac{16}{3} \text{ Tm}$$

Momentos en los extremos:

$$M_{12} = \frac{2EI}{6}(\theta_2 - 3\frac{\delta_1'}{6}) - 9 = 10\theta_2 - 5\delta_1 - 9$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{6}(2\theta_2 - 3\frac{\delta_1'}{6}) + 9 = 20\theta_2 - 5\delta_1 + 9$$

$$M_{23} = \frac{2EI}{4}(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\delta_2'}{4}) = 30\theta_2 + 15\theta_3 - 11.25\delta_2$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{4}(2\theta_3 + \theta_2 - 3\frac{\delta_2'}{4}) = 30\theta_3 + 15\theta_2 - 11.25\delta_2$$

$$M_{34} = \frac{2EI}{4}(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\delta_3'}{4}) - \frac{16}{3} = 30\theta_3 + 15\theta_4 - 11.25\delta_3 - \frac{16}{3}$$

$$M_{35} = \frac{2EI}{5}(2\theta_3 + \theta_6 - 3\frac{-\delta_3^{III} + \delta_3^{IV}}{5}) = 24\theta_3 + 12\theta_6 + 7.2\delta_3 - 7.2\delta_4$$

$$M_{43} = \frac{2EI}{4}(2\theta_4 + \theta_3 - 3\frac{\delta_4'}{4}) + \frac{16}{3} = 30\theta_4 + 15\theta_3 - 11.25\delta_4 + \frac{16}{3}$$

$$M_{45} = \frac{2EI}{5}(2\theta_4 + \theta_5 - 3\frac{-\delta_4^{III} + \delta_4^{IV}}{5}) = 24\theta_4 + 12\theta_5 + 7.2\delta_4 - 7.2\delta_5$$

$$M_{54} = \frac{2EI}{5}(2\theta_5 + \theta_4 - 3\frac{-\delta_5^{III} + \delta_5^{IV}}{5}) = 24\theta_5 + 12\theta_4 + 7.2\delta_5 - 7.2\delta_4$$

En las que, para simplificar la escritura se ha hecho:

$$\phi_2 = \frac{EI}{30}\theta_2, \quad \phi_3 = \frac{EI}{30}\theta_3, \quad \phi_4 = \frac{EI}{30}\theta_4, \dots, \delta_1 = \frac{EI}{30}\delta_1', \delta_2 = \frac{EI}{30}\delta_2', \dots$$

c) Las ecuaciones de condición deben ser 10, para las 10 incógnitas del sistema:

- 1) $\sum_{(2)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0 \quad \dots (i)$
- 2) $\sum_{(3)} M = 0: \quad M_{32} + M_{34} + M_{36} = 0 \quad \dots (ii)$
- 3) $\sum_{(4)} M = 0: \quad M_{43} + M_{45} = 0 \quad \dots (iii)$
- 4) $\sum_{(5)} M = 0: \quad M_{54} + M_{56} = 0 \quad \dots (iv)$
- 5) $\sum_{(6)} M = 0: \quad M_{63} + M_{65} + M_{67} = 0 \quad \dots (v)$
- 6) $\sum_{(7)} M = 0: \quad M_{76} + M_{78} = 0 \quad \dots (vi)$
- 7) $\sum_{(3-6)} F_N = 0: \quad Q_{34} + Q_{65} - (4T/ml)(4m) = 0 \quad \dots (v)$

Donde:

$$Q_{34} = V_{34} - \frac{1}{l}(M_{34} + M_{43}) = +\frac{1}{2}(4T/ml)(4m) - \frac{1}{4}(M_{34} + M_{43})$$

$$Q_{65} = V_{65} - \frac{1}{l}(M_{65} + M_{56}) = 0 - \frac{1}{4}(M_{65} + M_{56})$$

O sea que, reemplazando en la ec. (1), tenemos:

$$M_{34} + M_{43} + M_{65} + M_{56} + 32 = 0 \quad \dots (vi)$$

$$8) \sum_{(1-8)} F_n = 0: \quad Q_{12} + Q_{67} - (3T/ml)(6m) - (4T/ml)(4m) = 0 \quad \dots (2)$$

Donde:

$$Q_{12} = +\frac{1}{2}(3T/ml)(6m) - \frac{1}{6}(M_{12} + M_{21})$$

$$Q_{67} = 0 - \frac{1}{6}(M_{67} + M_{76})$$

Que llevando a la ec.(2), da:

$$M_{12} + M_{21} + M_{67} + M_{76} + 150 = 0 \quad \dots (viii)$$

$$9) \sum_{(2)} F_x = 0:$$

(La suma de las fuerzas verticales acciones y reacciones en la sección inmediatamente a la derecha del nudo 2, es igual a cero):

$$V_1 + Q_{23} = 0 \quad \dots (3)$$

Donde, tomando momentos respecto del extremo 8 para todo el conjunto:

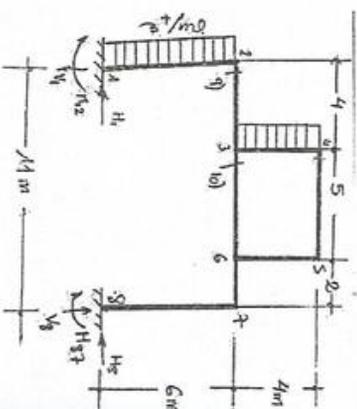
$$M_{12} + M_{67} - V_1(11) + (18T)(3m) + (16T)(8m) = 0$$

$$V_1 = \frac{1}{11}(M_{12} + M_{67} + 182)$$

$$Q_{23} = -\frac{1}{4}(M_{23} + M_{32})$$

Llevando estas igualdades a (3), tenemos:

$$\frac{1}{11}(M_{12} + M_{67} + 182) - \frac{1}{4}(M_{23} + M_{32}) = 0 \quad \dots (ix)$$



$$10) \sum_{(3-4)} F_y = 0:$$

(La suma de las fuerzas verticales acciones y reacciones en la sección inmediatamente a la derecha de los nudos 3 y 4, es igual a cero):

$$V_1 + Q_{36} + Q_{45} = 0$$

Donde V_1 ya está determinado para la ecuación anterior y:

$$Q_{36} = -\frac{1}{5}(M_{36} + M_{63})$$

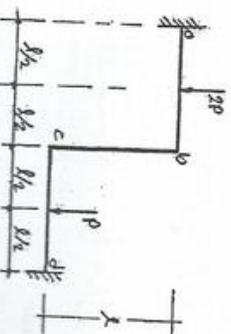
$$Q_{45} = -\frac{1}{5}(M_{45} + M_{54})$$

Luego,

$$\frac{1}{11}(M_{12} + M_{67} + 182) - \frac{1}{5}(M_{36} + M_{63} + M_{45} + M_{54}) = 0 \quad \dots (x)$$

PROBLEMA XII.9. UNI, 15-JUL-1968)

La estructura continua que se muestra está perfectamente empotrada en a y d, sujeta a la acción de las cargas 2P y P, todos los elementos son de la misma sección transversal. Determinar los momentos y esfuerzos cortantes, trazando los diagramas correspondientes.



Solución:
La única posibilidad de desplazamientos de los extremos b (del elemento ab) y c (del elemento cd), es normalmente a tales elementos; así tenemos los desplazamientos Δ , que dan:
$$\psi_{ab} = \frac{\Delta}{l} \quad \psi_{cd} = \frac{\Delta}{l} \quad \therefore 3\psi_{ab} = -3\psi_{cd} = \psi$$

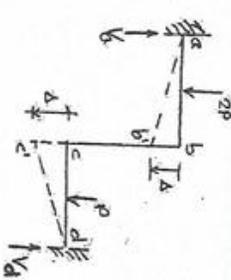
Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^o &= -M_{ba}^o = -\frac{1}{8}(2Pl) = -\frac{1}{4}Pl \\ M_{cd}^o &= -M_{dc}^o = -\frac{1}{8}(Pl) = -\frac{1}{16}Pl \end{aligned} \right\}$$

Si hacemos:

$$\frac{1}{16}Pl = m,$$

$$\begin{aligned} M_{ab}^o &= -M_{ba}^o = -2m, \\ M_{cd}^o &= -M_{dc}^o = -m \end{aligned}$$



Las incógnitas básicas son: $\theta_b, \theta_c, \Delta$ ($\theta \psi$): 3 en total.

Haciendo $K = 2E \frac{I}{l}$, tenemos:

$M_{ab} = K(\theta_b - \psi) - 2m$	$M_{cb} = K(2\theta_c + \theta_b)$
$M_{ba} = K(2\theta_b - \psi) + 2m$	$M_{ca} = K(2\theta_c + \psi) - m$
$M_{bc} = K(2\theta_b + \theta_c)$	$M_{dc} = K(\theta_c + \psi) + m$

(a)

Ecuaciones de condición:

$$1) \sum_{(b)} M = 0: \quad M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$K(2\theta_b - \psi) + 2m + K(2\theta_b + \theta_c) = 0 \quad \therefore 4\theta_b + \theta_c - \psi - \frac{2m}{K} = 0 \quad \dots (1)$$

$$2) \sum_{(c)} M = 0: \quad M_{cb} + M_{cd} = 0$$

$$K(2\theta_c + \theta_b) + K(2\theta_c + \psi) - m = 0 \quad \therefore 4\theta_c + \theta_b + \psi - \frac{m}{K} = 0 \quad \dots (2)$$

$$3) \sum F_v = 0: \quad V_a + V_d - 3P = 0$$

Donde:

$$V_a = Q_a = +P - \frac{1}{l}(M_{ab} + M_{ba}) = P - \frac{1}{l}K(3\theta_b - 2\psi)$$

$$V_d = -Q_d = +\frac{P}{2} + \frac{1}{l}(M_{cd} + M_{dc}) = \frac{P}{2} + \frac{1}{l}K(3\theta_c + 2\psi)$$

O sea:

$$P - \frac{1}{l}K(3\theta_b - 2\psi) + \frac{P}{2} + \frac{1}{l}K(3\theta_c + 2\psi) - 3P = 0 \quad \therefore \frac{K}{l}(3\theta_c - 3\theta_b + 4\psi) - \frac{3}{2}P = 0 \quad \dots (3)$$

Resolviendo el sistema de ec.(1), (2) y (3), se obtienen:

$$\theta_b = \frac{9Pl}{80K}, \quad \theta_c = -\frac{11Pl}{80K}, \quad \psi = \frac{45Pl}{80K}$$

Que llevando a las expresiones (a), dan:

$$\begin{aligned} M_{ab} &= -0.7Pl \\ M_{ba} &= -M_{bc} = 0.0875Pl \\ M_{cb} &= -M_{cd} = -0.1625Pl \\ M_{dc} &= +0.55Pl \end{aligned}$$

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos son:

$$Q_{ab} = +P - \frac{1}{l}(-0.7Pl - 0.0875Pl) = +1.7875P$$

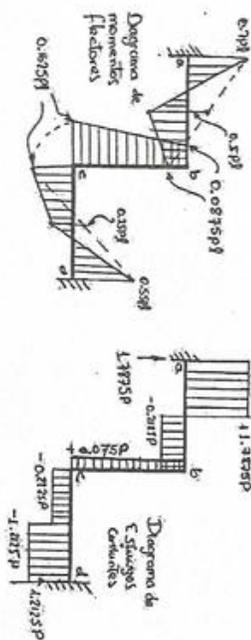
$$Q_{ba} = -P - \frac{1}{l}(-0.7Pl - 0.0875Pl) = -0.2125P$$

$$Q_{bc} = 0 - \frac{1}{l}(0.0875Pl - 0.1625Pl) = +0.075P$$

$$Q_{cb} = 0 - \frac{1}{l}(0.0875Pl - 0.1625Pl) = +0.075P$$

$$Q_{ca} = +\frac{P}{2} - \frac{1}{l}(0.1625Pl + 0.55Pl) = -0.2125P$$

$$Q_{dc} = -\frac{P}{2} - \frac{1}{l}(0.1625Pl + 0.55Pl) = -1.2125P$$



PROBLEMA XII.10. (UNI, 8-JUL-1968)

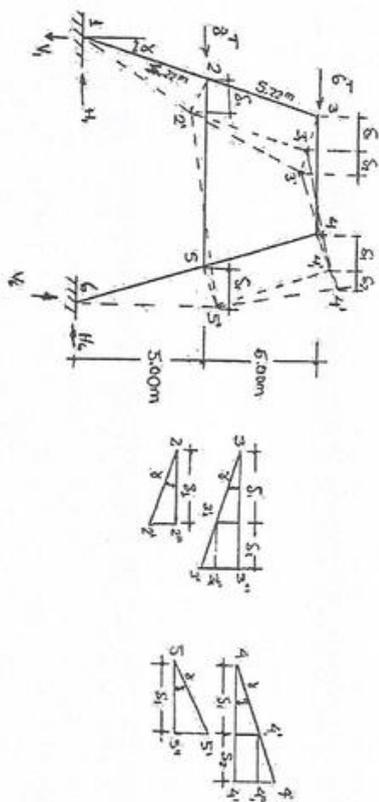
Para el pórtico que se muestra, con el fin de resolverlo aplicando el método slope-deflection:

- Indicar cuales son las incógnitas primarias.
- Estudiar la geometría del sistema, determinando la expresión del giro para cada elemento en función de las incógnitas primarias.
- plantear las expresiones de los momentos en los extremos de los elementos.
- plantear las ecuaciones de compatibilidad. (para cada elemento se indica el I en dm^4)



Solución:

Consideramos que, primero, se produce desviación δ_1 , solamente en el primer nivel, la que arrastra consigo, y paralelamente así mismo a las piezas 23 y 45, adoptando el pórtico la posición $12' 31' 41' 5' 6$. Donde esta posición, se produce la desviación δ_2 en solamente el cuerpo superior, adoptando la estructura la posición final, definitiva, $12' 3' 4' 5' 6$.



a) Incógnitas primarias: - giros de nudos $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$, y desplazamientos relativos δ_1 y δ_2 ; total: 6 incógnitas.

Pero por simetría física y por la posición que tienen las cargas aplicadas, $\theta_2 = \theta_5$ y $\theta_3 = \theta_4$. Luego, las incógnitas primarias se reducen a 4: $\theta_2, \theta_3, \delta_1$ y δ_2

b) Giros de los elementos:-(Usando las dimensiones en m)

$$\psi_{12} = \psi_{56} = + \frac{22'}{12} = + \frac{\delta_1 / \cos \gamma}{12} = + \frac{\delta_1}{5.00} \quad \therefore \psi_{12} = \psi_{56} = +0.2 \delta_1$$

$$\psi_{25} = - \frac{2'2'' + 5''5'}{25} = - \frac{2\delta_1 \tan \gamma}{25} = - \frac{2\delta_1(0.3)}{8.00} \quad \therefore \psi_{25} = -0.075 \delta_1$$

$$\psi_{23} = \psi_{45} = + \frac{3'1'3'}{23} = + \frac{\delta_2 / \cos \gamma}{23} = + \frac{\delta_2}{5.00} \quad \therefore \psi_{23} = \psi_{45} = +0.2 \delta_2$$

$$\psi_{34} = - \frac{3'3'' + 4''4'}{34} = - \frac{2(\delta_1 + \delta_2) \tan \gamma}{34} = - \frac{2(\delta_1 + \delta_2)(0.3)}{5.00} \quad \therefore \psi_{34} = -0.12 (\delta_1 + \delta_2)$$

c) Momentos en los extremos.-

$$M_{12} = M_{65} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [\theta_2 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha[\theta_2 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{21} = M_{56} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_2 - 3(0.2\delta_1)] = \alpha[2\theta_2 - 0.6\delta_1]$$

$$M_{23} = M_{54} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_2 + \theta_3 - 3(0.2\delta_2)] = \alpha[2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_2]$$

314

$$M_{25} = M_{52} = 2E \left(\frac{0.027}{8.00} \right) [2\theta_2 + \theta_2 + 3(0.075\delta_1)] = \alpha[2.202\theta_2 + 0.16515\delta_1]$$

$$M_{32} = M_{45} = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right) [2\theta_3 + \theta_2 - 3(0.2\delta_2)] = \alpha[2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_2]$$

$$M_{34} = M_{43} = 2E \left(\frac{0.018}{5.00} \right) [2\theta_3 + \theta_3 + 3(0.12)(\delta_1 + \delta_2)] = \alpha[2.349\theta_3 + 0.28188(\delta_1 + \delta_2)]$$

En las que:

$$\alpha = 2E \left(\frac{0.024}{5.22} \right)$$

d) Cuatro ecuaciones de compatibilidad:-

$$1) \sum M = 0: \quad M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$$

$$\alpha[2\theta_2 - 0.6\delta_1] + \alpha[2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_2] + \alpha[2.202\theta_2 + 0.16515\delta_1] = 0$$

$$\therefore 6.202\theta_2 + \theta_3 - 1.03485\delta_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$2) \sum M = 0: \quad M_{32} + M_{34} = 0$$

$$\alpha[2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_2] + \alpha[2.349\theta_3 + 0.28188(\delta_1 + \delta_2)] = 0$$

$$\therefore \theta_2 + 4.349\theta_3 + 0.28188\delta_1 - 0.31812\delta_2 = 0 \quad \dots (2)$$

$$3) \sum F_h = 0: \quad H_1 + H_6 - 6 - 8 = 0$$

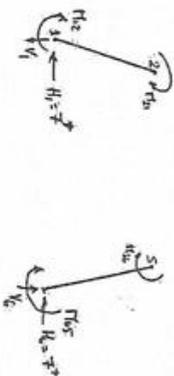
Por simetría: $H_1 = H_6 \quad \therefore H_1 = H_6 = 7 T$

Tomando momentos respecto de 2 en el cuerpo libre 12:

$$M_{12} + M_{21} + 7(5) - V_1(1.50) = 0 \quad \dots (3a)$$

Y tomando momentos de todo el conjunto respecto del extremo 6:

$$M_{12} + M_{65} - V_1(11) + 8(5) + 6(10) = 0 \quad \dots (3b)$$



Eliminando V_1 entre (3a) y (3b), siendo: $M_{12} = M_{65}$, se tiene:

$$8M_{12} + 11M_{21} + 235 = 0$$

$$8\alpha[2\theta_2 - 0.6\delta_1] + 11\alpha[2\theta_2 - 0.6\delta_1] + 235 = 0$$

$$\therefore 30\theta_2 - 11.4\delta_1 + \frac{235}{\alpha} = 0 \quad \dots (3)$$

$$4) \sum_{(2-3)} F_A = 0: \quad H_2 + H_5 - 6 = 0$$

$$\therefore H_2 = H_5 = 3T$$

Momentos respecto de 3 del cuerpo libre 23:

$$M_{23} + M_{32} + 3(5) - V_2(1.50) = 0 \quad \dots (4a)$$

Y tomando momentos respecto de 5 de la parte 2345 (corte 2-5):

$$M_{23} + M_{54} - V_2(8) + 6(5) = 0 \quad \dots (4b)$$

Eliminando V_2 entre (4a) y (4b), siendo $M_{23} = M_{54}$, se tiene:

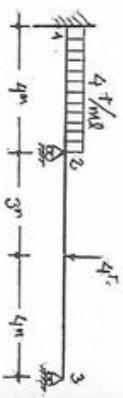
$$5M_{23} + 8M_{32} + 75 = 0$$

$$5\alpha[2\theta_2 + \theta_3 - 0.6\delta_1] + 8\alpha[2\theta_3 + \theta_2 - 0.6\delta_2] + 75 = 0$$

$$\therefore 6\theta_2 + 7\theta_3 - \delta_1 - 1.6\delta_2 + \frac{25}{\alpha} = 0 \quad \dots (4)$$

PROBLEMA XII.11

Aplicando el método de las deformaciones angulares resolver el problema VII-4.



Hay solo dos incógnitas primarias: las deformaciones angulares en los apoyos 2 y 3, es decir, θ_2 y θ_3 .

Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12} (4)(4)^2 = -\frac{16}{3} Tm$$

$$M_{23}^0 = -\frac{4(3)(4)^2}{72} = -\frac{192}{49} Tm$$

$$M_{32}^0 = +\frac{4(3)^2(4)}{72} = +\frac{144}{49} Tm$$

Momentos en los extremos de los elementos:

$$M_{12} = \frac{2EI}{4} (\theta_2) - \frac{16}{3} = 7\theta_2 - \frac{16}{3}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{4} (2\theta_2) + \frac{16}{3} = 14\theta_2 + \frac{16}{3}$$

$$M_{23} = \frac{2EI}{7} (2\theta_2 + \theta_3) - \frac{192}{49} = 8\theta_2 + 4\theta_3 - \frac{192}{49}$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{7} (2\theta_3 + \theta_2) + \frac{144}{49} = 8\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{144}{49}$$

En las que se ha hecho:

$$\theta_2 = \frac{14}{EI} \theta_2$$

$$\theta_3 = \frac{14}{EI} \theta_3$$

Las ecuaciones de condición son:

$$1) \sum_{(2)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$\left(14\theta_2 + \frac{16}{3} \right) + \left(8\theta_2 + 4\theta_3 - \frac{192}{49} \right) = 0$$

$$\therefore 22\theta_2 + 4\theta_3 + \frac{208}{147} = 0 \quad \dots (1)$$

$$2) M_{32} = 0: \quad 8\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{144}{49} = 0 \quad \dots (2)$$

Resolviendo entre las ec. (1) y (2) se obtienen:

$$\theta_2 = \frac{2}{735}$$

$$\theta_3 = -\frac{271}{735}$$

Levando estos resultados a las expresiones de los momentos en los extremos, se obtienen:

$$M_{12} = 7 \left(\frac{2}{735} \right) - \frac{16}{3} = -\frac{3906}{735} = -5.32 \quad \therefore M_{12} = -5.32 Tm$$

$$M_{21} = 14 \left(\frac{2}{735} \right) + \frac{16}{3} = +\frac{3948}{735} = +5.36 \quad \therefore M_{21} = +5.36 Tm$$

$$M_{23} = 8 \left(\frac{2}{735} \right) + 4 \left(-\frac{271}{735} \right) - \frac{192}{49} = -\frac{3948}{735} = -5.36 \quad \therefore M_{23} = -5.36 Tm$$

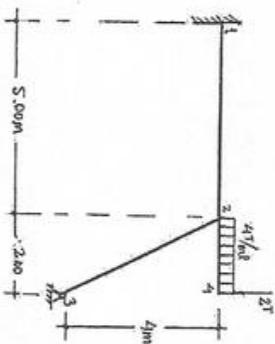
Los diagramas de distribución de momentos flectores y de los esfuerzos cortantes, aparecen en la solución del problema VII-4.

PROBLEMA XII.12. (UNI, 24-JUN-1968)

Solucionar por el método de las deformaciones angulares, la estructura aportada que se muestra en el croquis adjunto considerando que el empotramiento experimenta un giro de +0.003 radianes, y el apoyo derecho un asentamiento de 2cm. respecto de su posición inicial. Tomar: $I = 3000 \text{ cm}^4$, $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ para todos los elementos.

Solución:

Al asientarse el apoyo 3, el elemento 12 gira el ángulo ψ_{12} debido al consiguiente asentamiento del nudo 2; el elemento 23 no sufre giro alguno, debido a que su nueva posición, la 2'3', es paralela a su posición original.



Por consiguiente:

$$\psi_{12} = +\frac{2}{500} = +0.004 \text{ rad.}$$

Además, según el enunciado, $\theta_1 = +0.003 \text{ rad.}$ Para cada elemento tenemos:

$$\left(\frac{2EI}{l}\right)_{12} = \frac{2(2x \times 10^3 T/cm^2)(3000cm^4)}{500} = 240 Tm$$

$$\left(\frac{2EI}{l}\right)_{24} = 0$$

$$\left(\frac{2EI}{l}\right)_{23} = \frac{2(2 \times 10^3 T/cm^2)(3000cm^4)}{447.2} = 268.3 Tm$$

Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$M_{12} = 240(2 \times 0.003 + \theta_2 - 3 \times 0.004) = 240(\theta_2 - 0.006)$$

$$M_{21} = 240(2\theta_2 + 0.003 - 3 \times 0.004) = 240(2\theta_2 - 0.009)$$

$$M_{23} = 268.3(2\theta_2 + \theta_3)$$

$$M_{32} = -27(2m) - \frac{1}{2}(4 T/ml)(2m)^2 = -12 Tm$$

$$M_{32} = 268.3(2\theta_3 + \theta_2)$$

Ecuaciones de condición:

$$1) M_{32} = 0: \quad 2\theta_3 + \theta_2 = 0 \rightarrow \theta_2 = -2\theta_3 \quad \dots (2)$$

$$2) \sum_{(2)} M = 0: \quad M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$240(2\theta_2 - 0.009) + 268.3(2\theta_2 + \theta_3) + (-12) = 0$$

$$1016.6\theta_2 + 268.3\theta_3 - 14.16 = 0 \quad \dots (3)$$

Resolviendo el sistema de ec.(2) y (3), se obtienen:

$$\theta_2 = +0.01604 \quad \text{y} \quad \theta_3 = -0.00802 \text{ rad}$$

Reemplazando estos valores en las expresiones (1), se tienen:

$$M_{12} = 240(0.01604 - 0.006) = +2.40 \quad \therefore M_{12} = +2.40 Tm$$

$$M_{21} = 240(2 \times 0.01604 - 0.009) = +5.54 \quad \therefore M_{21} = +5.54 Tm$$

$$M_{23} = 268.3(2 \times 0.01604 - 0.00802) = +6.46 \quad \therefore M_{23} = +6.46 Tm$$

Calculo de los esfuerzos cortantes:-

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 T \quad \therefore Q_{12} = -1.59 T$$

$$Q_{21} = V_{21} - \frac{1}{l}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{5}(+2.40 + 5.54) = -1.59 T \quad \therefore Q_{21} = -1.59 T$$

$$Q_{24} = +2 + (4T/ml \times 2m) = +10 \quad \therefore Q_{24} = +10 T$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_{23}) = 0 - \frac{1}{4.472}(+6.46) = -1.45 T \quad \therefore Q_{23} = -1.45 T$$

$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{l}(M_{23}) = -1.45 T \quad \therefore Q_{32} = -1.45 T$$

Calculo de reacciones.

Calculo toda la estructura

$$\sum_{(2)} M = 0$$

$$\sum_{(1)} M = 0$$

$$6.46 + H_3(4) - V_3(2) = 0$$

$$2.40 + 2(7m) + 8(6m) + H_3(4) - V_3(7) = 0$$

$$V_3 = 2H_3 + 3.23 \quad \dots \dots (4)$$

$$4H_3 - 7V_3 + 64.4 = 0 \quad \dots \dots (5)$$

Resolviendo entre (4) y (5)

$$H_3 = 4.18 \text{ t}$$

$$V_3 = 11.59 \text{ t}$$

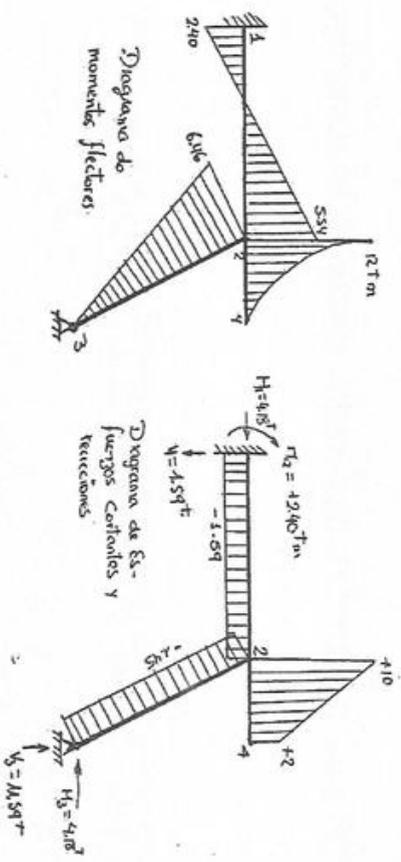
Para el conjunto

$$\sum F_v = 0 \quad -V_1 + 11.59 - 2 - 8 = 0$$

$$V_1 = 1.59 \text{ t}$$

$$\sum F_h = 0 \quad H_1 - H_3 = 0$$

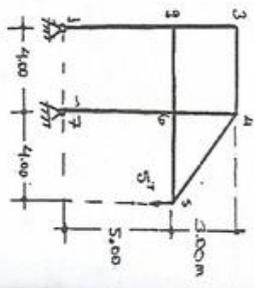
$$H_1 = 4.18 \text{ t}$$



PROBLEMA XII.13. (UNI, 10-FEB-1969)

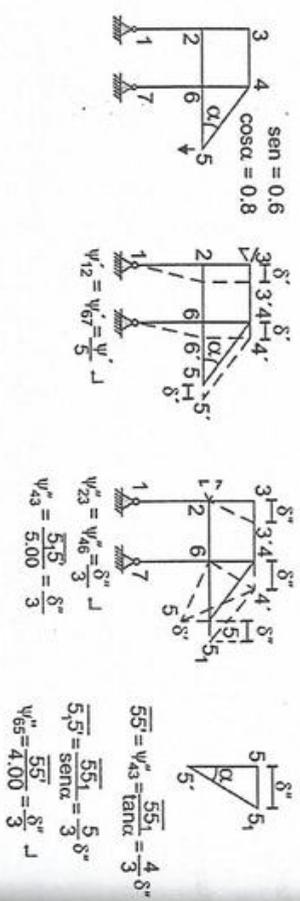
El pórtico que se muestra tiene todos sus elementos con el mismo valor de EI. se pide:

- Indicar cuales son las incógnitas primarias;
- Expresar los momentos en los extremos de los elementos en función de las incógnitas primarias; y
- Plantear y expresar las ecuaciones de condición, en función de los momentos extremos, que permitan resolver las incógnitas primarias.



Solución:

En primer lugar analicemos los desplazamientos de esta estructura. Ella queda fijada si sujetamos los nudos 2 y 3. Solitando luego, separadamente, las sujeciones o apoyos ficticios indicados, podemos estudiar los movimientos que en cada caso se generen, y, finalmente, combinar tales momentos.



Luego, los giros de los elementos son:

$$\psi_{12} = \psi_{67} = \frac{\delta''}{5} \quad \psi_{23} = \psi_{46} = \psi_{45} = \psi_{65} = \frac{\delta''}{3} \quad \psi_{26} = \psi_{34} = 0$$

a) Las incógnitas primarias en este caso son:

- Giros de nudos (extremos de elementos): $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$;
- Desplazamientos: δ', δ'' .

En total 9 incógnitas.

b) Por no haber cargas en los tramos, fuera de los nudos, no hay momentos de empotramiento perfecto. Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$M_{12} = \frac{2EI}{5} (2\theta_1 + \theta_2 - 3\frac{\delta''}{5}) = 24\theta_1 + 12\theta_2 - 7.2\delta_1$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{5} (2\theta_2 + \theta_1 - 3\frac{\delta''}{5}) = 24\theta_2 + 12\theta_1 - 7.2\delta_1$$

$$M_{23} = \frac{2EI}{3} (2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\delta''}{3}) = 40\theta_2 + 20\theta_3 - 20\delta_2$$

$$M_{26} = \frac{2EI}{4} (2\theta_2 + \theta_6) = 30\theta_2 + 15\theta_6$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{3} (2\theta_3 + \theta_2 - 3\frac{\delta''}{3}) = 40\theta_3 + 20\theta_2 - 20\delta_2$$

$$M_{34} = \frac{2EI}{4} (2\theta_3 + \theta_4) = 30\theta_3 + 15\theta_4$$

$$M_{43} = \frac{2EI}{4} (2\theta_4 + \theta_3) = 30\theta_4 + 15\theta_3$$

$$M_{45} = \frac{2EI}{5} (2\theta_4 + \theta_5 - 3\frac{\delta''}{3}) = 24\theta_4 + 12\theta_5 - 12\delta_2$$

$$M_{46} = \frac{2EI}{3} (2\theta_4 + \theta_6 - 3\frac{\delta''}{3}) = 40\theta_4 + 20\theta_6 - 20\delta_2$$

$$M_{54} = \frac{2EI}{5} (2\theta_5 + \theta_4 - 3\frac{\delta''}{3}) = 24\theta_5 + 12\theta_4 - 12\delta_2$$

$$M_{56} = \frac{2EI}{4} (2\theta_5 + \theta_6 - 3\frac{\delta''}{3}) = 30\theta_5 + 15\theta_6 - 15\delta_2$$

$$M_{65} = \frac{2EI}{4} (2\theta_6 + \theta_5 - 3\frac{\delta''}{3}) = 30\theta_6 + 15\theta_5 - 15\delta_2$$

$$M_{67} = \frac{2EI}{5} (2\theta_6 + \theta_7 - 3\frac{\delta''}{5}) = 24\theta_6 + 12\theta_7 - 7.2\delta_1$$

$$M_{62} = \frac{2EI}{4} (2\theta_6 + \theta_2) = 30\theta_6 + 15\theta_2$$

$$M_{64} = \frac{2EI}{3} (2\theta_6 + \theta_4 - 3\frac{\delta''}{3}) = 40\theta_6 + 20\theta_4 - 20\delta_2$$

$$M_{76} = \frac{2EI}{5} \left(2\theta_7 + \theta_6 - 3\frac{\delta'}{5} \right) = 24\theta_7 + 12\theta_6 - 7.2\delta'$$

En las que se ha hecho:

$$\theta_i = \frac{30}{EI} \phi_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\delta' = \frac{30}{EI} \delta_1$$

$$\delta'' = \frac{30}{EI} \delta_2$$

c) Las 9 ecuaciones son:

1) $M_1 = 0$... (1)

2) $M_7 = 0$... (2)

3) $\sum M = 0 \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$i = 2: M_{21} + M_{23} + M_{26} = 0$... (3)

$i = 3: M_{32} + M_{34} = 0$... (4)

$i = 4: M_{43} + M_{45} + M_{46} = 0$... (5)

... ..

8) $\sum F_n = 0: H_1 + H_7 = 0$
(1-7)

Donde:

$$H_1 = Q_{12} = -\frac{1}{5}(M_{21})$$

$$H_7 = Q_{76} = -\frac{1}{5}(M_{67})$$

$$M_{21} + M_{67} = 0 \quad \dots (8)$$

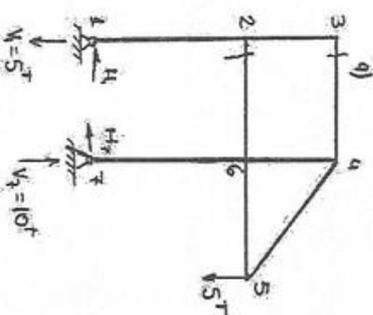
$$9) \sum_{(1-2-3)} F_v = 0: -5 + Q_{26} + Q_{34} = 0$$

Donde:

$$Q_{26} = -\frac{1}{4}(M_{26} + M_{62})$$

$$Q_{34} = -\frac{1}{4}(M_{34} + M_{43})$$

$$M_{26} + M_{62} + M_{34} + M_{43} + 20 = 0 \quad \dots (9)$$



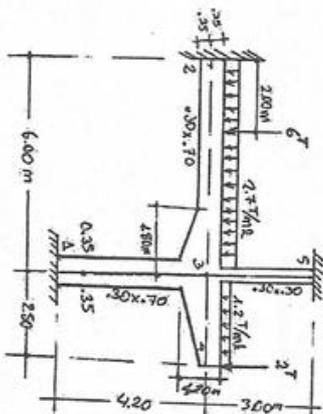
PROBLEMA XII.14.

Aplicando el método de las deformaciones angulares, resolver el pórtico que se muestra. Se trazaran los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

Solución:

La única incógnita que se presenta al aplicar el método de las deformaciones angulares, es el giro del nudo 3; es decir, θ_3 y para determinar esta, plantearemos la ecuación:

$$\sum_{(3)} M = 0$$



Denominando I al momento de inercia de la sección de 0.30×0.70 , tenemos:

$$I_{23} = I \quad I_{43} = I$$

$$I_{35} = \left(\frac{0.30}{0.70} \right)^3 I = 0.0787 I$$

Para el elemento 23 determinemos los factores de forma reducidos de 2ª especie y momentos de empotramiento perfecto que necesitamos para aplicar las ec. (1.M):

$$\lambda = \frac{1.80}{6.00} = 0.30 \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = 0.30 \\ \lambda = 0.20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{a}_{22} = 7.27 \quad \bar{a}_{23} = 4.55 \quad \bar{b}_{32} = 3.33 \\ \bar{a}_{32} = 0.20 \end{array}$$

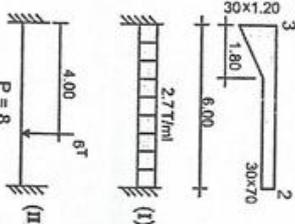


Tabla N°24

$$\left. \begin{array}{l} M_{32}(I) = +1.449 \left(\frac{2.7 \times 6^2}{12} \right) = +11.74 \text{ Tm} \\ M_{23}(I) = -0.806 \left(\frac{2.7 \times 6^2}{12} \right) = -6.53 \text{ Tm} \end{array} \right\} (I)$$

Tabla N°25

$$\left. \begin{array}{l} M_{32}(II) = +0.119(6 \times 6) = +4.28 \text{ Tm} \\ M_{23}(II) = -0.130(6 \times 6) = -4.68 \text{ Tm} \end{array} \right\} (II)$$

∴ $M_{32} = +11.74 + 4.28 = +16.02 \text{ Tm}$ $M_{23} = -6.53 - 4.68 = -11.21 \text{ Tm}$
El momento en el extremo 3 del voladizo es:

$$M_{34} = -(27 \times 2.50) - \frac{1}{2}(1.27 \text{ T/m} \times 2.50^2) = -5 - 3.75 \quad \therefore M_{34} = -8.75 \text{ Tm}$$

Momentos en los extremos de los elementos: aplicando las cc. (2.M) para los elementos de secciones constantes 13 y 35, y la cc. (1.M) para el 23:

$$M_{13} = 2E \frac{I}{4.20} (\theta_3) = 0.476 \phi_3$$

$$M_{31} = 2E \frac{I}{4.20} (2\theta_3) = 0.952 \phi_3$$

$$M_{23} = \frac{EI}{6.00} (\bar{a}_{23}\theta_2 + \bar{b}_{23}\theta_3) + M_{23}^0 = \frac{EI}{6.00} (3.33\theta_3) - 11.21 = 0.556 \phi_3 - 11.21$$

$$M_{32} = \frac{EI}{6.00} (\bar{a}_{32}\theta_2 + \bar{b}_{32}\theta_3) + M_{32}^0 = \frac{EI}{6.00} (7.27\theta_3) + 16.02 = 1.212 \phi_3 + 16.02$$

$$M_{53} = 2E \frac{I}{3.00} (0.07871) (2\theta_3) = 0.105 \phi_3$$

$$M_{35} = 2E \frac{I}{3.00} (0.07871) (\theta_3) = 0.052 \phi_3$$

En las que $\phi_3 = EI\theta_3$

La ecuación de condición es:

$$\sum_{(3)} M = 0:$$

$$M_{31} + M_{32} + M_{35} + M_{34} = 0$$

$$(0.952\phi_3) + (1.212\phi_3 + 16.02) + (0.105\phi_3) + (-8.75) = 0 \rightarrow \phi_3 = -3.204$$

Llevando este valor a las expresiones de los momentos en los extremos de los elementos, tenemos:

$$M_{13} = 0.476(-3.204) = -1.537 \text{ Tm}$$

$$M_{31} = 0.952(-3.204) = -3.057 \text{ Tm}$$

$$M_{23} = 0.556(-3.204) - 11.21 = -12.997 \text{ Tm}$$

$$M_{32} = 1.212(-3.204) + 16.02 = +12.147 \text{ Tm}$$

$$M_{35} = 0.105(-3.204) = -0.347 \text{ Tm}$$

$$M_{53} = 0.052(-3.204) = -0.177 \text{ Tm}$$

Con estos valores podemos calcular los esfuerzos cortantes en los extremos de cada elemento:

$$Q_{13} = V_{13} - \frac{1}{l}(M_{13} + M_{31}) = 0 - \frac{1}{4.20}(-1.53 - 3.05) = +1.097$$

$$Q_{31} = V_{31} - \frac{1}{l}(M_{13} + M_{31}) = 0 - \frac{1}{4.20}(-1.53 - 3.05) = +1.097$$

$$Q_{23} = V_{23} - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32}) = + \frac{1}{2} \times 2.7 \text{ T/ml} \times 6.00 + 6x \frac{4.00}{6.00} - \frac{1}{6.00}(-12.99 + 12.14) + 12.10 + 0.14 = +12.247$$

$$Q_{32} = V_{32} - \frac{1}{l}(M_{23} + M_{32})$$

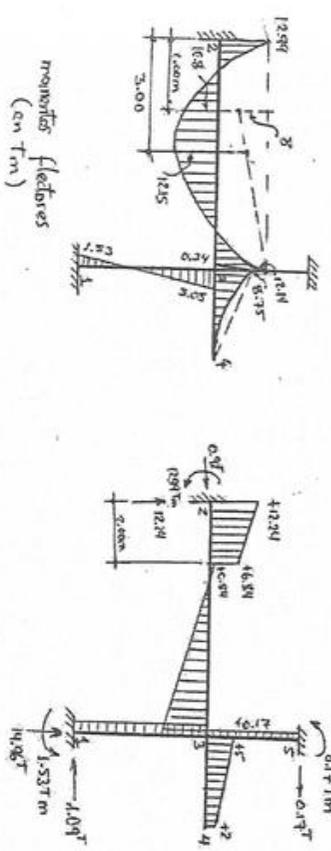
$$= -\frac{1}{2}(2.7) \times 6 - 6 \times \frac{2.00}{6.00} - \frac{1}{6.00}(-12.99 + 12.14)$$

$$= -10.10 + 0.14 = -9.967$$

$$Q_{34} = +2.7 + 1.2 \text{ T/ml} \times 2.50 \text{ m} = +5.7$$

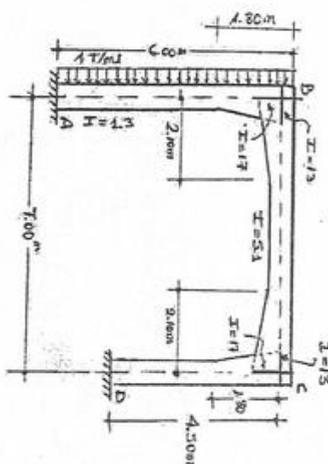
$$Q_{43} = +2.7$$

$$Q_{35} = Q_{53} = 0 - \frac{1}{l}(M_{35} + M_{53}) = -\frac{1}{3.00}(-0.34 - 0.17) = +0.177$$



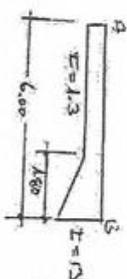
PROBLEMA XII.15.

Resolver el pórtico que se muestra. Están indicados valores relativos de los momentos de inercia. Se determinará la distribución de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes.



Solución:
Las incógnitas básicas del problema son los giros de los nudos B y C, y el desplazamiento horizontal de estos nudos; es decir: $\theta_B, \theta_C, \gamma \delta$.

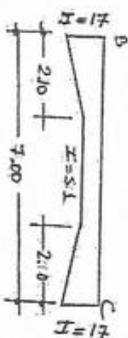
Para la aplicación las ec.(1.M) necesitamos conocer los factores de forma reducidos de 2ª especie y los momentos de empotramiento perfecto. Así tenemos:



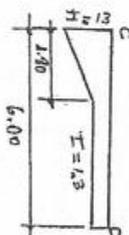
$$\lambda = \frac{1.80}{6.00} = 0.30 \quad \left. \begin{aligned} \bar{a}_{BA} &= 8.77 & \bar{a}_{AB} &= 4.78 & \bar{b}_{BA} &= 3.90 \\ \bar{c}_{BA} &= 8.77 + 3.90 & & & & \\ \bar{c}_{AB} &= 4.78 + 3.90 & & & & \end{aligned} \right\} \text{Tabla N}^\circ 9$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tabla N}^\circ 21 \quad \therefore M_{AB}^0 &= -0.734 \left(\frac{1 T / ml \times 6^2}{12} \right) = -2.202 Tm \\ Y_{AB} &= 0.734 \\ Y_{BA} &= 1.628 \end{aligned} \right\} M_{BA}^0 = +1.628 \left(\frac{1 T / ml \times 6^2}{12} \right) = +4.884 Tm$$

$$\lambda = \frac{2.10}{7.00} = 0.30 \quad \left. \begin{aligned} \text{De la tabla N}^\circ 11 \\ \bar{a}_{BC} = \bar{a}_{CB} &= 7.30 & \bar{b}_{BC} &= 4.58 \\ n &= \frac{5.1}{17} = 0.30 \end{aligned} \right\}$$



$$\lambda = \frac{1.80}{4.50} = 0.40 \quad \left. \begin{aligned} \text{De la tabla N}^\circ 9 \\ \bar{a}_{BC} &= 11.09 & \bar{a}_{CB} &= 4.98 & \bar{b}_{CB} &= 4.57 \\ n &= \frac{1.3}{13} = 0.10 \end{aligned} \right\} \therefore \bar{c}_{CB} = 11.09 + 4.57 = 15.66 \\ \bar{c}_{BC} = 4.98 + 4.57 = 9.55$$



Los giros de los elementos AB y CD son:

$$\psi_{AB} = \frac{\delta}{6.00} \quad \psi_{CD} = \frac{\delta}{4.50}$$

Aplicamos las ecuaciones de Golden (1.M) para los tres elementos de la estructura:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \left(\frac{EI_C}{l} \right)_{AB} (\bar{a}_{AB}\theta_A + \bar{b}_{AB}\theta_B - \bar{c}_{AB}\psi_{AB}) + M_{AB}^0, \text{ donde } \theta_A = 0 \\ M_{AB} &= \frac{E(1.3)}{6.00} (3.90\theta_B - 8.68\frac{\delta}{6}) - 2.202 = 0.845\theta_B - 0.313A - 2.202 \\ M_{BA} &= \frac{E(1.3)}{6.00} (\bar{a}_{AB}\theta_B + \bar{b}_{AB}\theta_A - \bar{c}_{AB}\psi_{AB}) + M_{BA}^0 \\ M_{BA} &= \frac{E(1.3)}{6.00} (8.77\theta_B - 12.67\frac{\delta}{6}) + 4.884 = 1.900\theta_B - 0.458A + 4.884 \\ M_{BC} &= \frac{E(5.1)}{7.00} (7.30\theta_B + 4.58\theta_C) = 5.319\theta_B + 3.337\theta_C \\ M_{CB} &= \frac{E(5.1)}{7.00} (7.30\theta_C + 4.58\theta_B) = 3.337\theta_B + 5.319\theta_C \\ M_{CD} &= \frac{E(1.3)}{4.50} (11.09\theta_C - 15.66\frac{\delta}{4.5}) = 3.204\theta_C - 1.005A \\ M_{DC} &= \frac{E(1.3)}{4.50} (4.57\theta_C - 9.55\frac{\delta}{4.5}) = 1.320\theta_C - 0.613A \end{aligned} \quad (1)$$

Debemos plantear tres ecuaciones de condición o equilibrio, para las tres incógnitas básicas. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 1) \sum M = 0: \quad M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ (1.900\theta_B - 0.458A + 4.884) + (5.319\theta_B + 3.337\theta_C) &= 0 \\ \therefore 7.219\theta_B + 3.337\theta_C - 0.458A + 4.884 &= 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$2) \sum_{(c)} M = 0: \quad M_{cb} + M_{cd} = 0$$

$$(3.337\theta_B + 5.319\phi_C) + (3.204\phi_C - 1.005\Delta) = 0$$

$$\therefore 3.337\theta_B + 8.523\phi_C - 1.005\Delta = 0 \quad \dots (ii)$$

$$3) \sum F_h = 0: \quad Q_{AB} + Q_{DC} - (1 T/m \times 6.00 m) = 0$$

Donde:

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA})$$

$$= +3 - \frac{1}{6} [(0.845\theta_B - 0.313\Delta - 2.202) + (1.900\theta_B - 0.458\Delta + 4.884)]$$

$$= -0.458\theta_B + 0.129\Delta + 2.552$$

$$Q_{DC} = V_{DC} - \frac{1}{l}(M_{DC} + M_{CD})$$

$$= 0 - \frac{1}{4.50} [(1.320\phi_C - 0.613\Delta) + (3.204\phi_C - 1.005\Delta)]$$

$$= -1.005\phi_C + 0.360\Delta$$

Que llevando a la ecuación da:

$$(-0.458\theta_B + 0.129\Delta + 2.552) + (-1.005\phi_C + 0.360\Delta) - 6 = 0$$

$$\therefore -0.458\theta_B - 1.005\phi_C + 0.489\Delta - 3.448 = 0 \quad \dots (iii)$$

Resolviendo entre las ec. (i), (ii) y (iii), se obtienen:

$$\theta_B = -0.726 \quad \phi_C = +1.365 \quad \Delta = +9.167$$

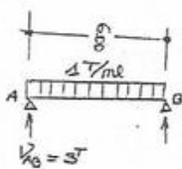
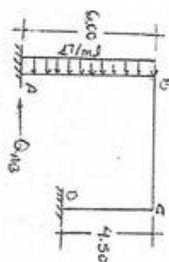
Llevando estos resultados a las expresiones (1), tenemos:

$$M_{AB} = 0.845(-0.726) - 0.313(9.167) - 2.202 = -5.68 \text{ Tm}$$

$$M_{BA} = 1.900(-0.726) - 0.458(9.167) + 4.884 = -0.69 \text{ Tm}$$

$$M_{BC} = 5.319(-0.726) + 3.337(1.365) = +0.69 \text{ Tm}$$

328



$$M_{CB} = 3.337(-0.726) + 5.319(1.365) = +4.84 \text{ Tm}$$

$$M_{CD} = +3.204(1.365) - 1.005(9.167) = -4.84 \text{ Tm}$$

$$M_{DC} = +1.320(1.365) - 0.613(9.167) = -3.82 \text{ Tm}$$

Con los valores obtenidos para los momentos podemos calcular los esfuerzos cortantes en los extremos de cada uno de los elementos:

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) = +3 - \frac{1}{6}(-5.68 - 0.69) = +4.06 \text{ T}$$

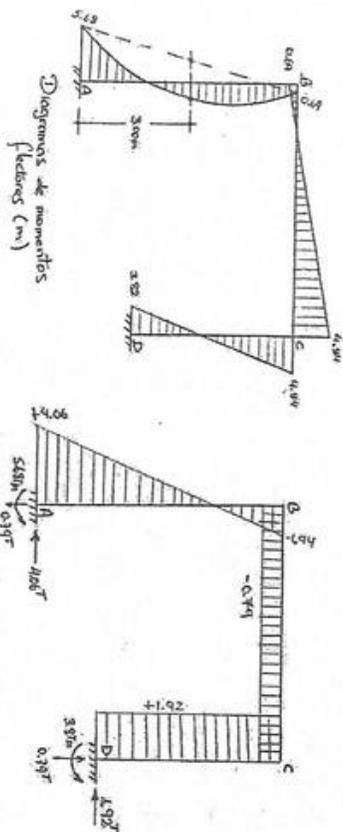
$$Q_{BA} = V_{AB} - \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) = -3 - \frac{1}{6}(-5.68 - 0.69) = -1.94 \text{ T}$$

$$Q_{BC} = V_{BC} - \frac{1}{l}(M_{BC} + M_{CB}) = 0 - \frac{1}{7}(+0.69 + 4.84) = -0.79 \text{ T}$$

$$Q_{CB} = V_{CB} - \frac{1}{l}(M_{BC} + M_{CB}) = 0 - \frac{1}{7}(+0.69 + 4.84) = -0.79 \text{ T}$$

$$Q_{CD} = V_{CD} - \frac{1}{l}(M_{CD} + M_{DC}) = 0 - \frac{1}{4.5}(-4.84 - 3.82) = +1.92 \text{ T}$$

$$Q_{DC} = V_{DC} - \frac{1}{l}(M_{CD} + M_{DC}) = 0 - \frac{1}{4.5}(-4.84 - 3.82) = +1.92 \text{ T}$$



PROBLEMA XII.16. (UNI, 17-JUL-1970)

Por el método de las deformaciones angulares resolver la estructura mostrada. Dibujar los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

Solución:

Los momentos de empotramiento perfecto en la viga son:

$$M_{23}^0 = -M_{32}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{2(5)^2}{12} = -\frac{25}{6} \text{ Tm}$$

Los momentos en los extremos de los elementos son:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= 2E \frac{I}{4} (0 + \theta_2 - 3 \frac{\Delta}{4}) = 5\theta_2 - \delta \\ M_{21} &= 2E \frac{I}{4} (2\theta_2 + 0 - 3 \frac{\Delta}{4}) = 10\theta_2 - \delta \\ M_{23} &= 2E \frac{I}{5} (2\theta_2 + \theta_3) - \frac{25}{6} = 8\theta_2 + 2\theta_3 - \frac{25}{6} \\ M_{32} &= 2E \frac{I}{5} (2\theta_3 + \theta_2) + \frac{25}{6} = 4\theta_3 + 4\theta_2 + \frac{25}{6} \\ M_{34} &= 2E \frac{I}{2} (2\theta_3 + 0 - 3 \frac{\Delta}{2}) = 10\theta_3 - 4\delta \\ M_{43} &= 2E \frac{I}{2} (0 + \theta_3 - 3 \frac{\Delta}{2}) = 5\theta_3 - 4\delta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

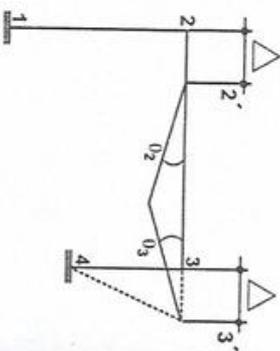
En la que se ha hecho:

$$\begin{aligned} EI\theta_2 &= 10\theta_2 \\ EI\theta_3 &= 5\theta_3 \\ EI\Delta &= \frac{8}{3}\delta \end{aligned}$$

Ecuaciones de condición:

$$1) \sum_{(2)} M = 0: M_{21} + M_{23} = 0 \quad \therefore 18\theta_2 + 2\theta_3 - \delta - \frac{25}{6} = 0 \quad \dots (1)$$

$$2) \sum_{(3)} M = 0: M_{32} + M_{34} = 0 \quad \therefore 14\theta_3 + 4\theta_2 - 4\delta + \frac{25}{6} = 0 \quad \dots (2)$$



$$3) \sum_{(1-4)} F_h = 0: \text{ suma de las fuerzas horizontales al nivel 1 - 4 debe ser igual a cero: } Q_{12} + Q_{43} - 3T = 0$$

En la que:

$$Q_{12} = V_{12} - \frac{1}{h}(M_{12} + M_{21}) = 0 - \frac{1}{4}(15\theta_2 - 2\delta)$$

$$Q_{43} = V_{43} - \frac{1}{h}(M_{43} + M_{34}) = 0 - \frac{1}{2}(15\theta_3 - 8\delta)$$

O sea llevando a la ecuación:

$$-\frac{1}{4}(15\theta_2 - 2\delta) - \frac{1}{2}(15\theta_3 - 8\delta) - 3 = 0$$

$$\therefore \theta_2 + 2\theta_3 - 1.2\delta + 0.8 = 0 \quad \dots (3)$$

Resolviendo el sistema de ec. (1), (2) y (3), obtenemos:

$$\theta_2 = \frac{647}{2262} \quad \theta_3 = -\frac{521.5}{2262} \quad \delta = \frac{1178}{2262}$$

Resultados que llevados a las expresiones (1), nos dan:

$$\begin{aligned} M_{12} &= 5x \frac{647}{2262} - \frac{1178}{2262} = +2262 = +0.909 \text{ Tm} \\ M_{21} &= 10x \frac{647}{2262} - \frac{1178}{2262} = +5292 = +2.340 \text{ Tm} \\ M_{23} &= 8x \frac{647}{2262} + 2x \frac{-521.5}{2262} - \frac{25}{6} = -5292 = -2.340 \text{ Tm} \\ M_{32} &= 4x \frac{2262}{2262} + 4x \frac{9927}{2262} + \frac{25}{6} = +4.389 \text{ Tm} \\ M_{34} &= 10x \frac{-521.5}{1178} - 4x \frac{9927}{1178} - \frac{2262}{2262} = -4.389 \text{ Tm} \\ M_{43} &= 5x \frac{-521.5}{2262} - 4x \frac{7319.5}{2262} = -3.236 \text{ Tm} \end{aligned}$$

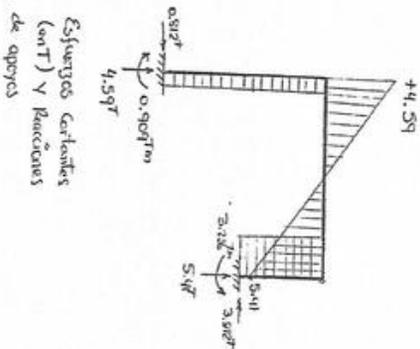
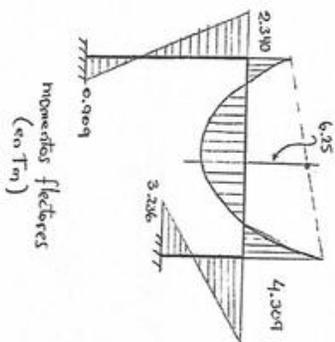
Los esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos son:

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{1}{4}(+0.909 + 2.340) = -0.812 \text{ T}$$

$$Q_{23} = +\frac{1}{2}(2 \text{ T/m})(5 \text{ m}) - \frac{1}{5}(-2.340 + 4.384) = +4.59 \text{ T}$$

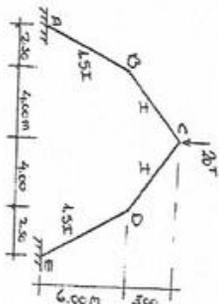
$$Q_{43} = -\frac{1}{2}(2 \text{ T/m})(5 \text{ m}) - \frac{1}{5}(-2.340 + 4.384) = -5.41 \text{ T}$$

$$Q_{43} = Q_{34} = 0 - \frac{1}{2}(-4.389 - 3.236) = +3.812 \text{ T}$$



PROBLEMA XII.17. (UNI, 21-SET-1970)
Trazar el diagrama de momentos flectores para la estructura que se muestra.

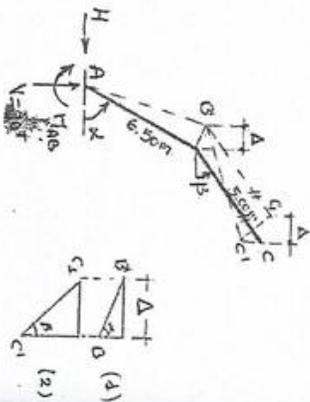
Solución:
Analicemos primero los giros de las barras debidos a los desplazamientos de los nudos. Por simetría física y de carga, el nudo C únicamente se desplazará verticalmente; no tendrá desplazamiento horizontal, ni girará; por consiguiente, $\theta_c = 0$.



Sujetando el nudo C, toda la estructura queda con sus nudos imposibilitados de desplazamientos; luego, en esta estructura solamente hay una incógnita de desplazamiento. Y además una incógnita giro de nudo: $\theta_B (= -\theta_D)$.

Por simetría las componentes verticales de las reacciones en los apoyos son iguales entre sí, es igual a 10 T. c/u .

Si consideramos la desviación horizontal Δ para el nudo B, este pasará a ocupar la posición B'; y como el nudo C solamente puede trasladarse verticalmente, el pasará a ocupar la posición B'. Las desviaciones relativas las obtenemos de los triángulos (1) y (2); así:



Para el elemento AB: es $\overline{BB}' = \frac{\Delta}{\text{sen } \alpha} = \frac{13}{12} \Delta$

Para el elemento BC: es $\overline{C_1C'} = \frac{\Delta}{\text{sen } \beta} = \frac{5}{3} \Delta$

Los giros para estas barras son:

$$\psi_{AB} = -\frac{\overline{BB}'}{AB} = -\frac{13\Delta}{12 \cdot 6.50} \quad \therefore \psi_{AB} = -\frac{\Delta}{6}$$

$$\psi_{BC} = +\frac{\overline{C_1C'}}{BC} = +\frac{5\Delta}{3 \cdot 5.00} \quad \therefore \psi_{BC} = +\frac{\Delta}{3}$$

Las expresiones en los extremos de los elementos son, aplicando las ecuaciones (2.M):

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2E \frac{1.5l}{6.50} \left[\theta_B - 3 \left(-\frac{\Delta}{6} \right) \right] = 30\theta + 30\delta \\ M_{BA} &= 2E \frac{1.5l}{6.50} \left[2\theta_B - 3 \left(-\frac{\Delta}{6} \right) \right] = 60\theta + 30\delta \\ M_{BC} &= 2E \frac{l}{5.00} \left[2\theta_B - 3 \left(+\frac{\Delta}{3} \right) \right] = 52\theta - 52\delta \\ M_{CB} &= 2E \frac{l}{5.00} \left[\theta_B - 3 \left(+\frac{\Delta}{3} \right) \right] = 26\theta - 52\delta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

En la que se ha hecho:

$$\theta_B = \frac{65}{EI} \theta \quad \gamma \quad \Delta = \frac{130}{EI} \delta$$

Las ecuaciones de condición son:

$$1) \sum_{(B)} M = 0: M_{BA} + M_{BC} = 0$$

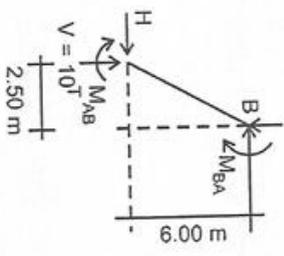
$$(60\theta + 30\delta) + (52\theta - 52\delta) = 0 \quad \therefore \therefore 56\theta - 11\delta = 0 \quad \dots (ii)$$

2) Para el cuerpo libre AB, aplicando la ecuación de equilibrio estático:

$$\sum M_B = 0: M_{AB} + M_{BA} + 10(2.50) - H(6.00) = 0$$

$$(30\theta + 30\delta) + (60\theta + 30\delta) + 25 - 6H = 0$$

$$\therefore 15\theta + 10\delta + \frac{25}{6} = H \quad \dots (iii)$$

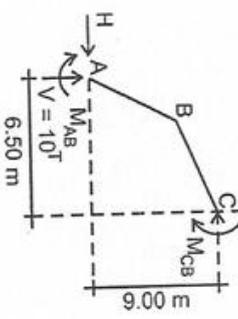


3) Para el cuerpo libre ABC, aplicando la ecuación de equilibrio estático:

$$\sum M_C = 0: M_{AB} + M_{CB} + 10(6.50) - H(9.00) = 0$$

$$(30\theta + 30\delta) + (26\theta - 52\delta) + 65 - 9H = 0$$

$$\therefore 56\theta - 22\delta + 65 = 9H \quad \dots (iv)$$



Resolviendo entre las ecuaciones (ii), (iii) y (iv), obtenemos:

$$\theta = \frac{605}{14282} = 0.04236 \quad \delta = \frac{3080}{14282} = 0.21566 \quad H = 6.96 T.$$

Reemplazando los valores θ y δ en las expresiones (i), tenemos los valores de los momentos en los extremos:

$$M_{AB} = 30 \left(\frac{605}{14282} \right) + 30 \left(\frac{3080}{14282} \right) = \frac{110550}{14282} = +7.74 Tm$$

$$M_{BA} = 60 \left(\frac{605}{14282} \right) + 30 \left(\frac{3080}{14282} \right) = \frac{128700}{14282} = +9.01 Tm$$

$$M_{BC} = 50 \left(\frac{605}{14282} \right) - 52 \left(\frac{3080}{14282} \right) = -\frac{128700}{14282} = -9.01 Tm$$

$$M_{CB} = 26 \left(\frac{605}{14282} \right) - 52 \left(\frac{3080}{14282} \right) = -\frac{144430}{14282} = -10.11 Tm$$

Los esfuerzos cortantes para cada barra considerando que en los elementos propiamente no ha cargas aplicadas son:

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{1}{6.50} (M_{AB} + M_{BA}) = -\frac{1}{6.50} (+7.74 + 9.01) = -2.58 T$$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = -\frac{1}{5.00} (M_{BC} + M_{CB}) = -\frac{1}{5} (-9.01 - 10.11) = +3.82 T$$

Las fuerzas normales en cada barra son:

$$N_{AB} = +10 \text{ sen } \alpha + 6.96 \text{ cos } \alpha = +10 \left(\frac{12}{13} \right) + 6.96 \left(\frac{5}{13} \right) = +11.91 T$$

$$N_{BC} = +10 \text{ sen } \beta + 6.96 \text{ cos } \beta = +10 \left(\frac{3}{13} \right) + 6.96 \left(\frac{4}{5} \right) = +11.57 T$$

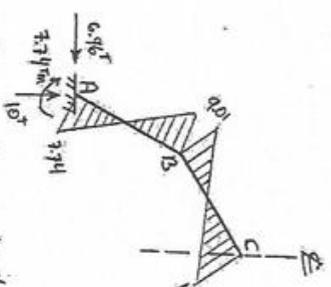


Diagrama de momentos flectores

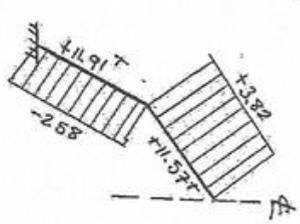


Diagrama de Esfuerzos Cortantes (en T)

CAPÍTULO XIII

MÉTODO DE CROSS

Se hace una sucinta explicación del método de Hardy Cross, que cubre el caso de pórticos con elementos de secciones variables y desviaciones relativas entre los nudos. Se hace uso del "método de dos etapas".

NOTACION:

K_{ij}, K_{ji} Rigideces relativas en los extremos i y j , respectivamente, del elemento ij .

d_{ij} Factor de distribución en el extremo i del elemento ij .

t_{ij} Factor de transporte (o coeficiente de transmisión) del extremo i hacia el extremo j .

M_{ij}^o Momento de empotramiento en el extremo i del elemento ij , perfectamente empotrado en sus dos extremos.

M'_{ij} Momento de empotramiento en el extremo i del elemento ij , perfectamente empotrado en i y articulado en j .

$\bar{l}_{ij} = \frac{I_c}{I_{cij}} l_{ij}$ Longitud reducida del elemento de longitud l_{ij} y momento de

Inercia I_c en la parte de sección constante.

I_c Momento de Inercia de comparación para toda la estructura.

$\bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ji}$ Factores de forma reducidos de 2ª especie en los extremos i y j del elemento ij .

\bar{b}_{ij} Factor de forma reducido de 2ª especie del elemento ij .

$\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}$ Factores de giro reducidos en los extremos i y j :

$$\bar{c}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} \bar{c}_{ji} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$$

$\bar{A}_{ij}, \bar{A}_{ji}$ Factores de forma reducidos de 1ª especie en los extremos i y j del elemento ij .

$M_{ij}^{(o)}$ Momento en el extremo i del elemento ij , producido por las cargas aplicadas a la estructura considerando que no hay desviaciones relativas entre los nudos.

$v_{ij}^{(o)}$ Esfuerzo cortante isostático en el extremo i del elemento ij , producido por las cargas aplicadas a la estructura.

$Q_{ij}^{(0)}$ Es fuerza cortante isostático en el extremo i del elemento ij, producido por la carga aplicadas a la estructura, considerando que no hay desviaciones relativas entre los nudos.
 $M_{ij}^{(1)}, M_{ij}^{(2)}, \dots, M_{ij}^{(n)}$ Valores correspondientes a los momentos en el extremo i del elemento ij, producidos por los estados de desviaciones relativas 1, 2, ..., n entre los nudos.
 x_1, x_2, \dots, x_n Factores que multiplicados respectivamente por $M_{ij}^{(1)}, M_{ij}^{(2)}, \dots, M_{ij}^{(n)}$ dan los momentos en el extremo i del elemento ij, producidos por los estados de desviaciones relativas 1, 2, ..., n.
 $Q_{ij}^{(1)}, Q_{ij}^{(2)}, \dots, Q_{ij}^{(n)}$ Esfuerzos cortantes en el extremo i del elemento ij, generados por los estados de desviaciones relativas 1, 2, ..., n.

SIGNOS.- Se sigue las mismas convenciones de signos empleadas en el método de las deformaciones angulares (del capítulo XII).

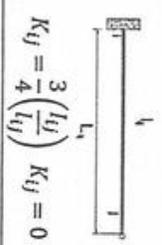
METODO.-
1.-CALCULOS PREVIOS.-

A.- TODOS LOS ELEMENTOS SON DE SECCION CONSTANTE.-

(En esta parte izquierda se indicara todo lo relativo a cuando no hay articulación extrema)
 (En esta parte derecha se indicara todo lo relativo a cuando si hay articulación extrema)

- 1) Calcular la rigidez relativa para cada elemento:

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{I_{ij}}{l_{ij}}$$



- 2) En cada nudo calcular los factores de distribución:

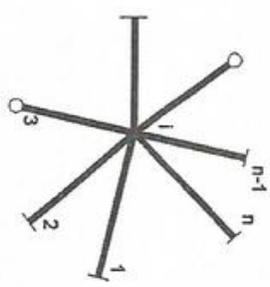
$$d_{i1} = \frac{K_{i1}}{\sum_i K_{ij}}$$

$$d_{i2} = \frac{K_{i2}}{\sum_i K_{ij}}$$

$$d_{in} = \frac{K_{in}}{\sum_i K_{ij}}$$

siendo $\sum_i K_{ij} = K_{i1} + K_{i2} + \dots + K_{in}$ verificación:

$$\sum_i d = d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{in} = 1$$



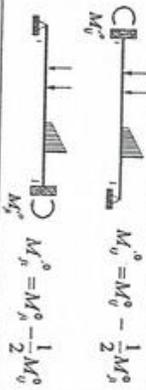
3) Factores de transporte:

$$t_{ij} = t_{ji} = \frac{1}{2}$$



$$t_{ij} = t_{ji} = 0$$

4) Calcular los momentos de empotramiento perfecto debido a las cargas externas aplicadas:



Las expresiones para M_{ij}^o y M_{ji}^o están dadas en la tabla

B.-PARA LOS ELEMENTOS DE SECCION VARIABLE.-

En los casos en que el nudo i concurre algún elemento con secciones variables, para cada uno de los elementos:

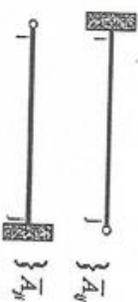
(En esta parte izquierda se indicara todo lo relativo a cuando no hay articulación extrema)	(En esta parte derecha se indicara todo lo relativo a cuando si hay articulación extrema)
---	---

1) Calcular las longitudes reducidas:

$$\bar{l}_{ij} = \frac{I_c}{I_{c,ij}} l_{ij}$$

... (1.N)

2) Determinar los factores de forma reducidos de 2ª especie para los elementos sin articulación extrema, y de 1ª especie para aquellos en los que hay articulación en un extremo:



3) Calcular las rigideces relativas en cada extremo:



$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{l}_{ij}} \\ K_{ji} &= \frac{\bar{a}_{ji}}{\bar{l}_{ij}} \end{aligned} \right\} \dots (2.N)$$



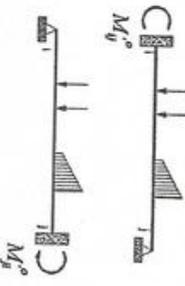
$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{\bar{A}_{ij} \bar{l}_{ij}} \\ K_{ji} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3.N)$$



$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= 0 \\ K_{ji} &= \frac{1}{\bar{A}_{ji} \bar{l}_{ij}} \end{aligned} \right\} \dots (4.N)$$

Si dentro del conjunto de elementos concurrentes al nudo, los hay de sección constante (para los cuales $\bar{a}_i = \bar{a}_j = 4$, $b = 2$, $\bar{A}_i = \bar{A}_j = 1/3$), las rigideces relativas son:

 $K_{ij} = K_{ji} = \frac{4}{l_{ij}} \dots (5.N)$	 $K_{ij} = \frac{3}{l_{ij}} \dots (6.N)$ $K_{ji} = 0$
 $K_{ij} = 0$ $K_{ji} = \frac{3}{l_{ij}} \dots (7.N)$	 $t_{ij} = t_{ji} = 0$ <p>(para los efectos de la distribución y repercusión)</p>
<p>4) Calcular los factores de distribución en cada nudo.- Igual que en el paso 2) de A.</p>	
<p>5) Calcular los factores de transporte.</p>	

<p>6) Calcular los momentos de empotramiento perfecto:</p> 	 $M'_{ij} = M_{ij}^0 - t_{ji} M_{ji}^0$ $M'_{ji} = M_{ji}^0 - t_{ij} M_{ij}^0 \dots (9.N)$
--	---

Los momentos M'_{ij} y M'_{ji} pueden determinarse de las tablas N° 21 a 28.

En vez de las expresiones (9.N), para calcular los momentos de empotramiento en elementos con una articulación extrema, pueden emplearse las siguientes formulas:

$$M'_{ij} = -M_{ij}^0 \frac{\bar{A}_{ij}^0}{A_{ij}} \dots (10.N)$$

$$o, M'_{ji} = +M_{ij}^0 \frac{\bar{A}_{ji}^0}{\bar{A}_{ji}}$$

En las que:

M_{ij}^0 es el momento en el elemento ij debido a las cargas aplicadas.

$\bar{A}_{ij}^0, \bar{A}_{ji}^0$ Son los factores de carga reducidos de 1ª especie en los extremos del elemento.

II.- PROCESO DE DISTRIBUCION.-

Considerando en los nudos apoyos ficticios que impidan todo desplazamiento de los nudos (primera etapa):

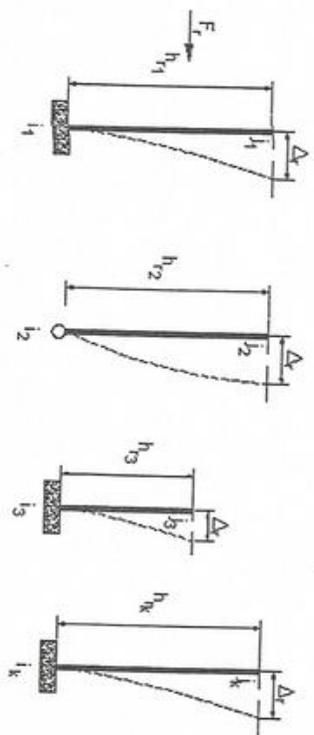
1) Fijando todos los nudos contra rotaciones (excepto los extremos en los que hay rotula), se exige un nudo a ser liberado primero, se calcula el momento desequilibrado \bar{M}_i en ese nudo.

- 2) Calcular los momentos distribuidos para los extremos adyacentes de los elementos concurrentes al nudo, multiplicando el momento desequilibrado por cada uno de los factores de distribución en el nudo.
- 3) Calcular los momentos de transporte o de repercusión en los extremos opuestos en cada elemento, multiplicando el momento distribuido por el correspondiente factor de transporte.
- 4) Volver a fijar el nudo y elegir otro nudo a ser liberado(procurar escoger, en cada oportunidad, el nudo desequilibrado). Repetir los pasos 1), 2), y 3).
- 5) Repetir los pasos 1) a 4) hasta que los momentos desequilibrados sean insignificantes.
- 6) En cada extremo de elemento, sumar los momentos parciales (el empotramiento perfecto, mas los momentos distribuidos y los de repercusión) para obtener los momentos totales sin desviaciones $M_{ij}^{(0)}$.

III.-CORRECCION POR DESVIACION.- (Segunda etapa)

- 1) Establecer cuáles son los desplazamientos relativos Δ_r entre los nudos. Ver párrafo 4) en el capítulo XII. Considerando que hay n desplazamientos relativos independientes entre si, se tendrá n desplazamientos.
- 2) Solrar uno a uno los apoyos ficticios considerados en II; es decir que debemos permitir que se produzca, separadamente, cada uno de los n desplazamientos relativos.

Por ejemplo, para el cuerpo r de la estructura:



- Hay K elementos paralelos entre si, de longitud $h_{r1}, h_{r2}, \dots, h_{rk}$ (1)
- Todos los elementos sufren la desviación relativa Δ_r .
- Hasta las bases i de estos elementos hay una fuerza total externamente aplicada F_r , de dirección normal a los elementos del cuerpo r.

- a) Si no existiera tal paralelismo, tendría que trabajarse calculando fuerzas cortantes y normales (Ver el problema XIII-13).

Para cada uno de los conjuntos de elementos que así se tienen en la estructura:

- a) Calcular las fuerzas cortantes en sus bases debidas a las cargas aplicadas (estado 0), considerando que no hay desviación relativa entre los extremos:

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij1}^{(0)} &= v_{ij1}^{(0)} - \frac{1}{h_{r1}} [M_{ij1}^{(0)} + M_{ji1}^{(0)}] \\ Q_{ij2}^{(0)} &= v_{ij2}^{(0)} - \frac{1}{h_{r2}} [M_{ij2}^{(0)} + M_{ji2}^{(0)}] \\ &\dots \dots \dots \\ Q_{ijk}^{(0)} &= v_{ijk}^{(0)} - \frac{1}{h_{rk}} [M_{ijk}^{(0)} + M_{jik}^{(0)}] \end{aligned} \right\} \dots (11. N)$$

- b) Plantear las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de cada uno de los elementos en el cuerpo r, debidos a las desviaciones relativas entre sus extremos:

b1) Si no hay articulación extrema:

$$\left. \begin{aligned} M_{ji}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{h_r^2} \right)_{ij} \bar{c}_{ij} \Delta_r = D_i(\Delta_r) \\ M_{ji}^0 &= \left(-\frac{EI_c}{h_r^2} \right)_{ij} \bar{c}_{ji} \Delta_r = D_j(\Delta_r) \end{aligned} \right\} \dots (12. N)$$

- 4) Plantear las ecuaciones de condición o de equilibrio:
En cada nivel o cuerpo en el que hay desplazamiento relativo, la suma de la fuerza en el sentido del desplazamiento (fuerzas acciones y fuerzas reacciones en las bases de los elementos), debe ser igual a cero.
Así para el cuerpo r:

$$F_r + \sum_1^k Q_{ij}^{(0)} + \sum_1^k Q_{ij}^{(1)} + \dots + \sum_1^k Q_{ij}^{(n)} \dots (18.N)$$

Se plantea así un conjunto de n ecuaciones lineales con incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n .

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen los valores para los factores x_1, x_2, \dots, x_n .

IV.-CALCULO DE LOS MOMENTOS FINALES.-

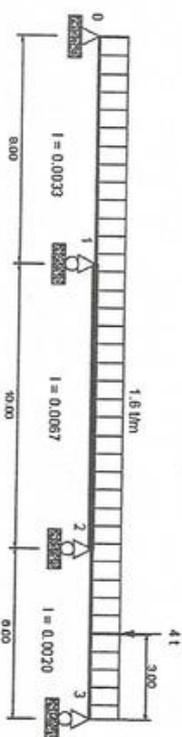
El momento final en el extremo i del elemento ij de la estructura, es la superposición de los momentos en ese extremo obtenidos en los estados 0,1,2,...,n:

$$M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + x_1 M_{ij}^{(1)} + x_2 M_{ij}^{(2)} + \dots + x_n M_{ij}^{(n)} \dots (19.N)$$

En forma similar podrá calcularse los esfuerzos cortantes, reacciones, etc. Finales.

PROBLEMAS

PROBLEMA XIII-1.-



Aplicando el método de Cross, resolver la viga que se muestra (problema 1-2)

- 1) Cálculos previos.-

- 1) Rigidez relativa:

$$k_{01} = \frac{3}{4} \left(\frac{33}{8} \right) = 3.094 \quad k_{12} = \frac{67}{10} = 6.7 \quad k_{23} = \frac{3}{4} \left(\frac{20}{6} \right) = 2.5$$

- 2) Coeficientes de distribución.-

$$\text{Nudo 1} \begin{cases} 10: & 3.094 \div 9.794 = 0.316 = d_{10} \\ 12: & 6.7 \div 9.794 = 0.684 = d_{12} \end{cases} \quad \sum k = (3.094 + 6.7) = 9.794$$

$$\text{Nudo 2} \begin{cases} 21: & 6.7 \div 9.2 = 0.728 = d_{24} \\ 23: & 2.5 \div 9.2 = 0.272 = d_{23} \end{cases} \quad \sum k = (6.7 + 2.5) = 9.2$$

- 3) Momentos de empotramiento perfecto.-

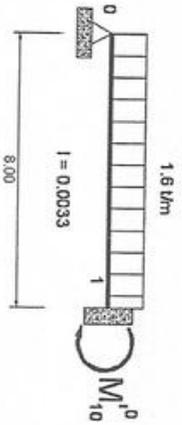


Tabla N°4, estado de carga n°1

$$\begin{cases} M_{01}^0 = -M_{10}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{1}{12} (1.6)(8)^2 = -\frac{25.6}{3} \text{ Tm} \\ \therefore M_{10}^0 = -M_{01}^0 = +\frac{1}{2} M_{01}^0 = +\frac{25.6}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{25.6}{3} \right) = +12.8 \text{ Tm} \end{cases}$$

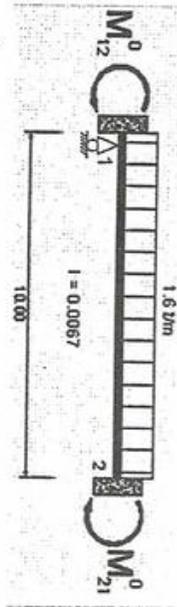
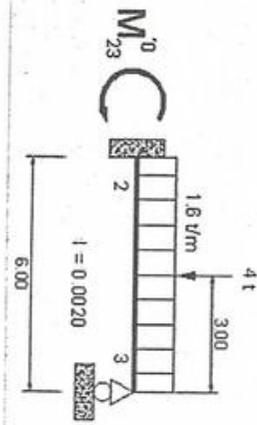


Tabla N°4, estado de carga n°1

$$\begin{cases} M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 = -\frac{1}{12} (1.6)(10)^2 = -13.33 \text{ Tm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{Tabla N°4, estado de carga n°1 y 30} \\ M_{23}^0 = -M_{32}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} Pl \\ = -\frac{1}{12} (1.6)(6)^2 - \frac{1}{8} (4)(6) = -7.8 \text{ Tm} \\ \therefore M_{32}^0 = M_{23}^0 - \frac{1}{2} M_{32}^0 = -7.8 - \frac{1}{2} (+7.8) = -11.7 \text{ Tm} \end{cases}$$

II)

Proceso de distribución:-

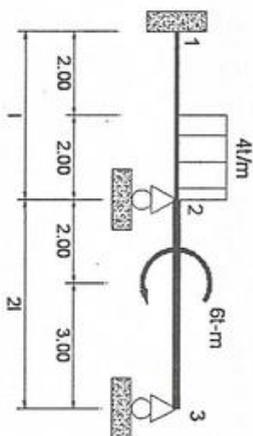
0	1	2	3
	316	728	272
	-684		
	+12.8	-13.33	+13.33
	+0.35	-0.59	-1.19
	+0.04	+0.77	+0.38
	+0.01	-0.14	-0.28
	+0.01	+0.10	0.05
	+0.01	+0.01	-0.04
	+13.20	-13.20	+12.25
			-12.25

Por consiguiente, los momentos sobre los apoyos, en la convención de signos de Resistencia de Materiales, son:

$$M_1 = -13.20 \text{ Tm} \quad M_2 = -12.25 \text{ Tm}$$

Los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes aparecen en la solución del problema XI-2

PROBLEMA XIII-2.-



Aplicando el Método de Cross, resolver la viga que se muestra. (Ver problema 1-4)

1) Cálculos previos:-

1) Rigideces Relativas:

$$K_{12} = 1/4 = 0.25 \qquad K_{23} = \frac{3}{4} (1/4) = 0.30$$

2) Coeficientes de distribución:

$$d_{12} = 0 \qquad d_{21} = \frac{K_{12}}{\sum K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.30} = 0.455$$

$$d_{23} = \frac{K_{23}}{\sum K} = \frac{0.30}{0.55} = 0.545$$

3) Momentos de empotramiento perfecto:

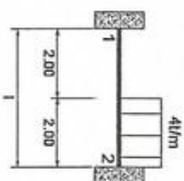


Tabla N°4, estado de carga N°5:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{12}^0 &= -\frac{\omega s^3}{12l^2} (4l - 3s) = -\frac{4(2)^3}{12(4)^2} (4 \times 4 - 3 \times 2) = -1.67 \text{ Tm} \\ M_{21}^0 &= +\frac{\omega s^2}{12l^2} [2l(3l - 4s) + 3s^2] \\ &= +\frac{4(2)^2}{12(4)^2} [2 \times 4(3 \times 4 - 4 \times 2) + 3 \times 2^2] = +3.67 \text{ Tm} \end{aligned} \right.$$

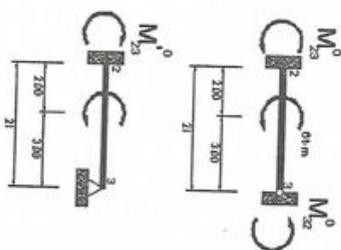


Tabla N°4, estado de carga n° 40

$$\left\{ \begin{aligned} M_{23}^0 &= +M_0 \frac{b(2l - 3b)}{l^2} = +(-6) \frac{3(2 \times 5 - 3 \times 3)}{5^2} = -0.72 \text{ Tm} \\ M_{32}^0 &= +M_0 \frac{a(2l - 3a)}{l^2} = +(-6) \frac{2(2 \times 5 - 3 \times 2)}{5^2} = -1.92 \text{ Tm} \\ \therefore M_{23}^0 &= M_{23}^0 - \frac{1}{2} M_{32}^0 = -0.72 - \frac{1}{2} (-1.92) = +0.24 \text{ Tm} \end{aligned} \right.$$

III) Proceso de distribución:

1	2	3
0	.455	.545
-1.67	+3.67 + 0.34	
-0.89	-1.78 - 2.13	
0		
-2.56	+1.89 - 1.89	

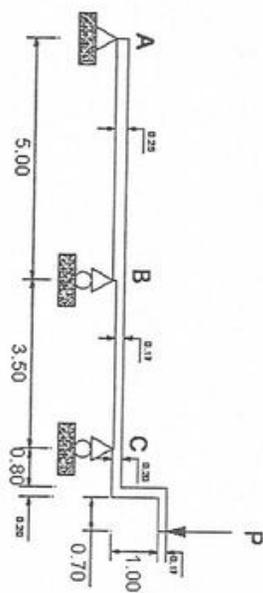
Luego los momentos sobre los apoyos, en la convención de signos de Resistencia de materiales, son:

$$M_1 = -2.56 \text{ Tm}$$

$$M_2 = -1.89 \text{ Tm}$$

Los diagramas de momentos flectores y de Esfuerzos cortantes aparecen en la solución del problema XI-4.

PROBLEMA XIII-3.- (UNI, 10-DIC-1955)



En la estructura que se muestra, se pide determinar el valor que debe tener la fuerza P de manera que sobre el apoyo B se genere un momento flector positivo (en la convención de resistencia de materiales) de 3000 kg.m . Se aplicara el Método de Hardy Cross.

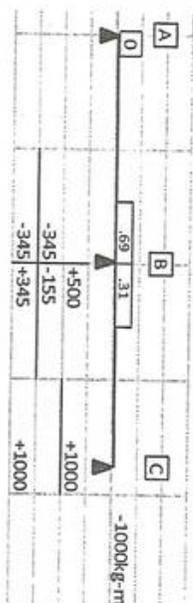
El caso se reduce a una viga de dos tramos (A-B-C) con el par $1.7 P$ aplicado en C. Veamos la distribución de momentos cuando en C hay aplicado un par de 1000 Kg.m (°)

$$K_{AB} = \frac{3(0.25)^3}{4} = 0.00234 \quad K_{BC} = \frac{3(0.17)^3}{4 \cdot 3.5} = 0.00105$$

Los coeficientes de distribución son:

$$d_{BA} = \frac{0.00234}{0.00234 + 0.00105} = 0.69 \quad d_{BC} = 0.31$$

Distribución:



Plantando la proporción: Si el par de 1000 Kg.m aplicado en C genera en B un momento positivo de 345 Kg.m , el par $1.7 P$ genera el momento de 3000 Kg.m :

$$1000 \text{ --- } -345 \} \rightarrow (1.7P)(345) = (1000)(3000)$$

$$1.7 P \text{ --- } -3000$$

$$\therefore P = 5.115 \text{ Kgr } \downarrow$$

PROBLEMA XIII-4.- (UNI, 19-DIC-1956)

Resolver el problema XIII-4 aplicando el Método de Cross.



Rigideces relativas de los tramos:

$$K_{12} = \frac{I}{l_1} = K_1$$

$$K_{23} = \frac{3I}{4l_2} = \frac{3}{4} K_2$$

$$\left. \begin{matrix} K_{12} = \frac{I}{l_1} = K_1 \\ K_{23} = \frac{3I}{4l_2} = \frac{3}{4} K_2 \end{matrix} \right\} \sum K = K_1 + \frac{3}{4} K_2 = K_1 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon \right), \text{ ya que } \epsilon = \frac{K_2}{K_1}$$

Coefficientes de distribución:-

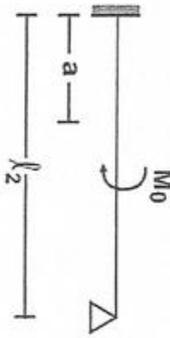
$$d_{21} = \frac{K_{12}}{\sum^{(2)} K} = \frac{K_1}{K_1 \left(1 + \frac{3}{4}\epsilon\right)} = \frac{4}{4 + 3\epsilon}$$

$$d_{23} = \frac{K_{23}}{\sum^{(2)} K} = \frac{\frac{3}{4}K_2}{K_1 \left(1 + \frac{3}{4}\epsilon\right)} = \frac{3\epsilon}{4 + 3\epsilon}$$

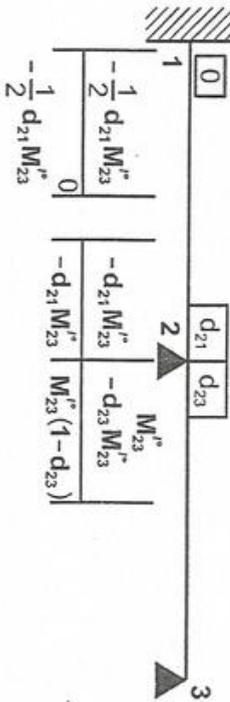
Momentos de empotramiento perfecto iniciales:- El único que se presenta es el M_{23}^0 . Ya habíamos determinado M_{23}^0 y M_{32}^0 ; luego:

$$M_{23}^0 = M_{23}^0 - \frac{1}{2}M_{32}^0 = M_0(1 - \alpha)(3\alpha - 1) - \frac{1}{2}M_0\alpha(2 - 3\alpha)$$

$$\therefore M_{23}^0 = -\frac{1}{2}M_0(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)$$



Distribución:-



$$M_{12} = -\frac{1}{2}d_{21}M_{23}^0 = +M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\epsilon}$$

Luego,

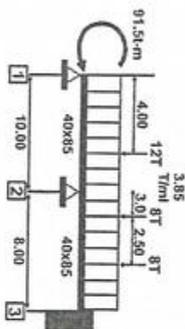
$$M_{21} = -M_{23} = -d_{21}M_{23}^0 = +2M_0 \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{4 + 3\epsilon}$$

$$M_{32} = 0$$

De aquí continuaría el mismo análisis hecho al resolver el problema XII-4 para trazar los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

PROBLEMA XIII-5:- (UNI, 30-OCT-948)

Resolver el problema XI-6 aplicando el Método de Cross.



De acuerdo con lo expuesto al resolver el problema XI-6, se tiene la situación mostrada en el esquema.

1) Rigideces:

$$K_{12} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = 0.075$$

$$K_{23} = \frac{1}{8} = 0.125$$

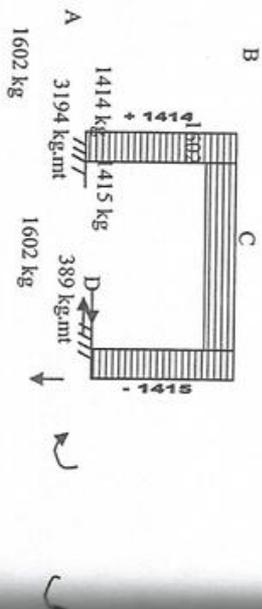
$$\sum^{(2)} K = 0.200$$

2) Coeficientes de distribución:

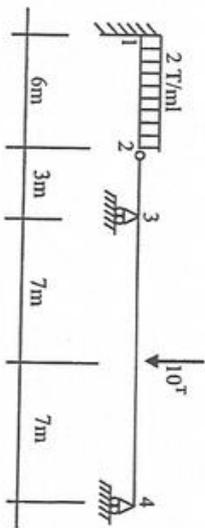
$$d_{21} = \frac{0.075}{0.200} = 0.375 \quad d_{23} = \frac{0.125}{0.200} = 0.625 \quad d_{32} = 0$$

3) Momentos de empotramiento perfecto:- Tabla N°4, estados de carga: n°1 para la carga repartida, y n°29 para las cargas concentradas:

DIAGRAMA DE CORTANTES Y REACCIONES
EN LA BASE (kg)



PROBLEMA XIII-7.- (UNI, 28-OCT-1951)



Determinar el valor del momento de empotramiento de la estructura mostrada, considerando que es constante a lo largo de toda ella y que en 2 hay una articulación.
Resolveremos esta estructura aplicando el método de Cross. Primero haremos la distribución considerando que la articulación 2 no sufre desplazamiento; luego haremos la corrección por desplazamientos.

1) Rigideces:-

$$K_{12} = \frac{3}{4} \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \quad K_{23} = \frac{3}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad K_{34} = \frac{3}{4} \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$$

362

2) Coeficientes de distribución en 3:

$$\sum_3 K = \frac{1}{4} + \frac{3}{56} + \frac{17}{56} d_{32} = \frac{K_{23}}{\sum_3 K} = \frac{1/4}{17/56} = \frac{14}{17} = 0.824$$

$$d_{34} = \frac{K_{34}}{\sum_3 K} = \frac{3/56}{17/56} = \frac{3}{17} = 0.176$$

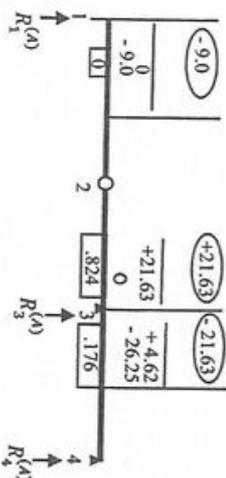
3) Momentos de empotramiento por cargas aplicadas:

$$M_{12}^0 = -M_{21} = -\frac{1}{12} (2)(6)^2 = -6 \text{ Tm} \rightarrow \therefore M_{12}^0 = -6 - \frac{1}{2} (+6) = -9 \text{ Tm}$$

$$M_{34}^0 = -M_{43} = -\frac{1}{8} (10)(14) = -17.5 \text{ Tm} \rightarrow \therefore M_{34}^0 = -17.5 - \frac{1}{2} (+17.5) = -26.25 \text{ Tm}$$

4) Distribución.-

A) Distribución suponiendo los nudos fijos.-



$$Q_{12}^{(A)} = +6 - \frac{1}{6} (-9.0) = +7.50 \quad \therefore R_1^{(A)} = 7.50 \uparrow T$$

$$Q_{32}^{(A)} = 0 - \frac{1}{3} (+21.63) = -7.21$$

$$Q_{34}^{(A)} = +5 - \frac{1}{14} (-21.63) = +6.55 \quad \therefore R_3^{(A)} = 13.76 \uparrow T$$

$$Q_{43}^{(A)} = -5 - \frac{1}{14} (-21.63) = -3.45 \quad \therefore R_4^{(A)} = 3.45 \uparrow T$$

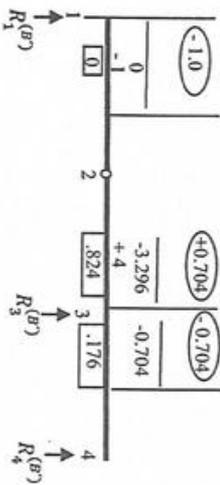
363

B) Distribución por desplazamiento vertical δ del nudo 2.- Los momentos de empotramiento perfecto que genera el desplazamiento δ son:

$$M_{12}^{i0} = -\frac{3EI\delta}{(6)^2} = EI\delta \left(-\frac{1}{12}\right) = (-1)x$$

$$M_{32}^{i0} = +\frac{3EI\delta}{(3)^2} = EI\delta \left(+\frac{1}{3}\right) = (+4)x$$

Tomamos como valores iniciales relativos los momentos -1 y +4 en los extremos 1 y 3 de los tramos 12 y 23:



$$Q_{12}^{(B)} = -\frac{1}{6}(-1.0) = +0.167 \quad \therefore R_1^{(B)} = 0.167 \uparrow T$$

$$Q_{32}^{(B)} = -\frac{1}{3}(+0.704) = -0.235$$

$$Q_{34}^{(B)} = -\frac{1}{14}(0.704) = +0.050 \quad \therefore R_3^{(B)} = 0.285 \uparrow T$$

$$Q_{43}^{(B)} = -\frac{1}{14}(-0.704) = +0.050 \quad \therefore R_4^{(B)} = 0.050 \uparrow T$$

5) Ecuación de la condición:-
Para las situaciones A y B superpuesta debe cumplirse la ecuación de equilibrio estático.

$$\sum F_V = 0;$$

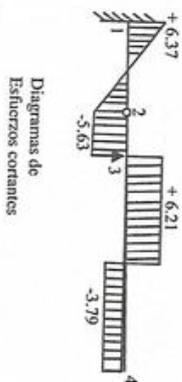
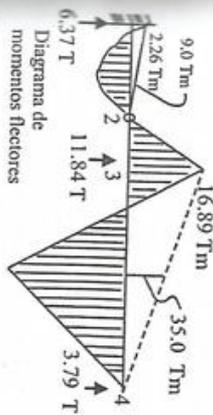
Es decir: $\sum F_V^{(A)} + \sum F_V^{(B)} - 22 = \sum F_V^{(A)} + x \sum F_V^{(B)} - 22 = 0$
o sea: $(7.50 + 13.76 + 3.45) + x(0.167 + 0.285 - 0.050) - 22 = 0$
 $X = -6.74$

6) Momentos finales:-

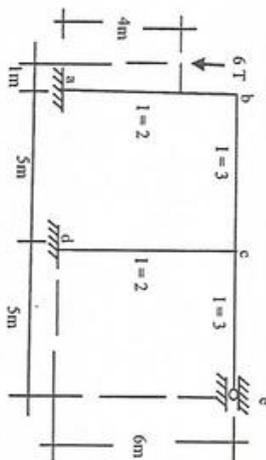
A:	$\frac{12}{-9.00}$	$\frac{32}{+21.63}$	$\frac{34}{-21.63}$
B:	$\frac{+6.74}{-2.26}$	$\frac{-4.74}{+16.89}$	$\frac{+4.74}{-16.89}$
	$T.m$		

Esfuerzos cortantes finales:

A:	$\frac{12}{+7.50}$	$\frac{32}{-7.21}$	$\frac{34}{+6.55}$
B:	$\frac{-1.13}{+6.37}$	$\frac{+1.58}{-5.63}$	$\frac{-0.34}{+6.21}$
	T		



PROBLEMA XIII-8:- (UNI, 12-DIC-1955)



En el pórtico que se muestra, el apoyo e es de libre desplazamiento horizontal. Resolver esta estructura aplicando el Método de Hardy Cross. se determinaran las reacciones de apoyo y se trazaran los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

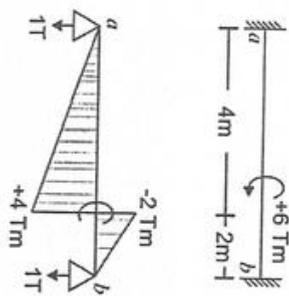
1) Rigideces:-

$$K_{ab} = \frac{2}{6} = 0.333 \quad K_{bc} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad K_{cd} = \frac{2}{6} = 0.333 \quad K_{ce} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = 0.45$$

2) Coeficientes de distribución:-

$$b \begin{cases} ba: 0.333 \div 0.933 = 0.357 \\ bc: \frac{0.6}{0.6 \div 0.933} = 0.643 \\ \Sigma K = 0.933 \end{cases} \quad c \begin{cases} cd: 0.333 \div 1.383 = 0.241 \\ cb: \frac{0.45}{0.45 \div 1.383} = 0.315 \\ \Sigma K = 1.383 \end{cases}$$

3) Momentos de empotramiento perfecto:- Tabla N°4, estado de carga n°40 (par aplicado en sentido anti horario):



$$M_{ab}^0 = +(-6) \frac{2(2 \times 6 - 3 \times 2)}{6^2} = -2Tm$$

$$M_{ba}^0 = +(-6) \frac{4(2 \times 6 - 3 \times 4)}{6^2} = 0$$

4) Distribución:-

A) Considerando los nudos fijos:

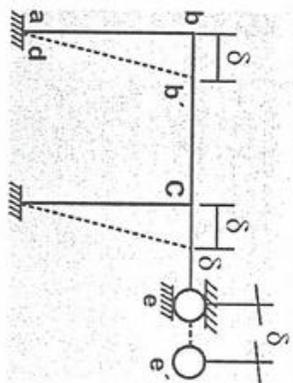


$$Q_{ab}^{(A)} = -\frac{1}{6}(-2.0 + 0) = +0.333T$$

$$Q_{dc}^{(A)} = 0$$

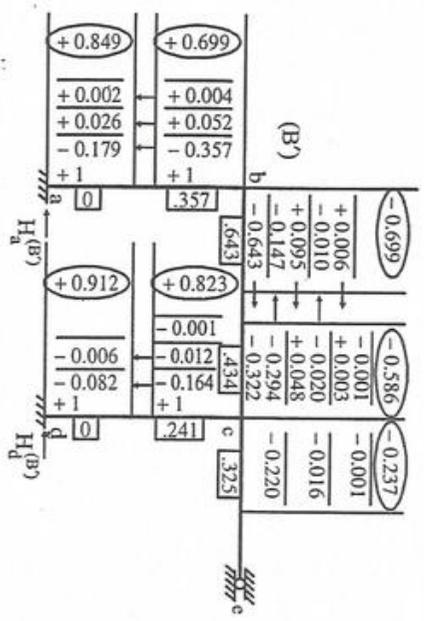
$$\therefore H_a^{(A)} = +0.333T \quad H_d^{(A)} = 0$$

B) Considerando un desplazamiento δ de los nudos B,C,E, se generan los siguientes momentos de empotramiento perfecto:



$$M_{ab}^0 = M_{ba}^0 = M_{bc}^0 = M_{cb}^0 = + \frac{6EI\delta}{h^2} = + \frac{6E(2)\delta}{6^2} = +1 Tm$$

Por no conocer el valor de δ , tomamos un valor arbitrario +1 Tm, con el que hacemos la distribución y luego planteamos la ecuación de equilibrio que permitirá hacer la corrección real por este desplazamiento:



$$Q_{ab}^{(B)} = \frac{1}{6} (+0.849 + 0.699) = -0.258 T$$

$$Q_{dc}^{(B)} = -\frac{1}{6} (+0.912 + 0.823) = -0.289 T$$

$$\therefore H_a^{(B)} = +0.258 T \quad H_d^{(B)} = +0.289 T$$

5) Ecuación de equilibrio:-

$$\sum F_h = 0:$$

$$H_a + H_d = 0 \rightarrow H_a^{(A)} + H_d^{(A)} + x [H_a^{(B)} + H_d^{(B)}] = 0$$

$$(+0.333 + 0) + x(-0.258 - 0.289) = 0 \rightarrow \therefore x = 0.609$$

6) Momentos y esfuerzos cortantes finales:

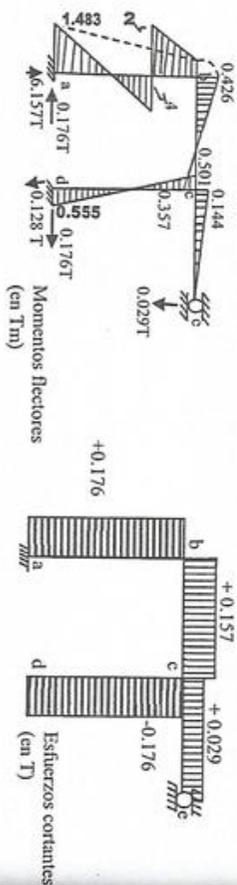
	ab	ba=bc	cd	cb	ce	dc
A:	-2.0	0	0	0	0	0
x.B:	+0.517	+0.426	+0.501	+0.357	-0.144	+0.555
$\therefore M =$	-1.483	+0.426	+0.501	+0.357	-0.144	+0.555

$$Q_{ab} = -\frac{1}{6} (-1.483 + 0.426) = +0.176 T$$

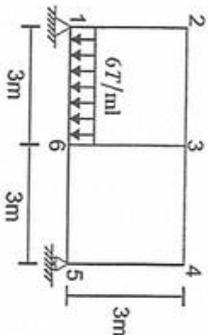
$$Q_{bc} = -\frac{1}{5} (-0.426 - 0.357) = +0.157 T$$

$$Q_{dc} = -\frac{1}{6} (+0.501 + 0.555) = -0.176 T$$

$$Q_{ce} = -\frac{1}{5} (-0.144) = +0.029 T$$



PROBLEMA XIII-9.- (UNI, 6-ENE-1969)



Resolver la estructura aporticada que se muestra, para la que todos los elementos tienen el mismo valor El constante. Se trazará, finalmente, el diagrama de los momentos flectores.

1) Cálculos Previos:-

1) Reacciones de apoyo:

$$V_5(6) = (6 \times 3) \frac{3}{2} \rightarrow V_5 = 4.5 T \uparrow$$

$$V_1 = (6 \times 3) - V_5 \rightarrow V_1 = 13.5 T \uparrow$$

2) Coeficientes de distribución:

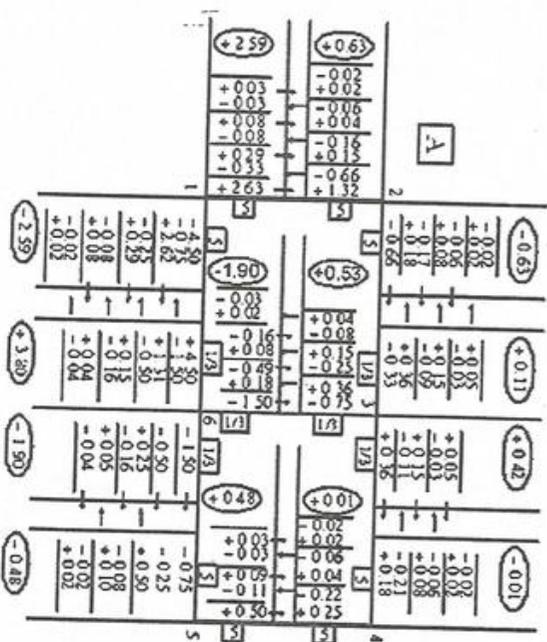
nudos 1, 2, 4 y 5: $d_{16} = d_{12} = d_{21} = \dots = 0.5$

nudos 3 y 6: $d_{36} = d_{32} = d_{34} = \dots = 1/3$

3) Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{16}^0 = -M_{61}^0 = -\frac{1}{12} (6)(3)^2 = -4.5 Tm$$

II) Distribución, supuestos los nudos sin desplazamientos.



$$Q_{12}^A = -\frac{1}{3} (+2.59 + 0.63) = -\frac{3.22}{3} T$$

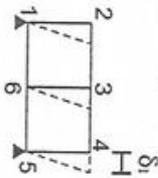
$$Q_{63}^A = -\frac{1}{3} (-1.90 - 0.53) = +\frac{2.43}{3} T$$

$$Q_{54}^A = -\frac{1}{3} (+0.48 + 0.01) = -\frac{0.49}{3} T$$

$$Q_{65}^A = -\frac{1}{3} (-1.90 - 0.48) = +\frac{2.38}{3} T$$

$$Q_{34}^A = -\frac{1}{3} (+0.42 - 0.01) = -\frac{0.41}{3} T$$

III) Distribución, considerando solo desplazamiento horizontal δ_1 :-



$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = M_{63}^0 = M_{36}^0 = M_{54}^0 = M_{45}^0 = + \frac{6EI\delta_1}{(3)^2} = \chi$$

Considerando valor arbitrario +1 para estos momentos:

$$Q_{12}^B = -\frac{1}{3}(+0.47 + 0.47) = -\frac{0.94}{3}T$$

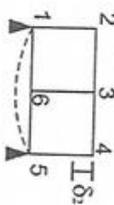
$$Q_{63}^B = -\frac{1}{3}(+0.70 + 0.70) = -\frac{1.40}{3}T$$

$$Q_{54}^B = -\frac{1}{3}(+0.47 + 0.47) = -\frac{0.94}{3}T$$

$$Q_{65}^B = -\frac{1}{3}(-0.35 - 0.47) = +\frac{0.82}{3}T$$

$$Q_{34}^B = -\frac{1}{3}(-0.35 - 0.47) = +\frac{0.82}{3}T$$

IV) Distribución, considerando solo desplazamiento vertical δ_2 :-



$$M_{16}^0 = M_{61}^0 = M_{23}^0 = M_{32}^0 = -M_{65}^0 = -M_{56}^0 = -M_{34}^0 = -M_{43}^0 = -\frac{6EI\delta_2}{(3)^2} = y$$

Considerando valor arbitrario +1 para estos momentos:

Member	Node	Moment	Shear	End Moment
1-2	1	+0.47	-0.30	+0.47
	2	+0.47	-0.30	+0.47
2-3	2	+0.70	+0.02	+0.70
	3	+0.70	+0.02	+0.70
3-4	3	+0.47	-0.30	+0.47
	4	+0.47	-0.30	+0.47
4-5	4	-0.47	+0.30	-0.47
	5	-0.47	+0.30	-0.47
5-6	5	-0.35	+0.02	-0.35
	6	-0.35	+0.02	-0.35
6-5	6	-0.35	+0.02	-0.35
	5	-0.35	+0.02	-0.35

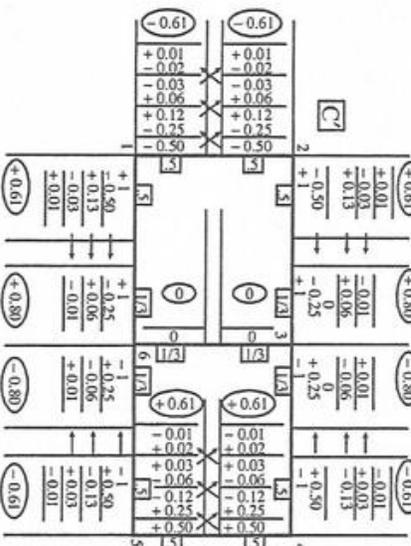
$$Q_{12}^{C'} = -\frac{1}{3}(-0.61 - 0.61) = +\frac{1.22}{3} T$$

$$Q_{63}^{C'} = -\frac{1}{3}(0) = 0$$

$$Q_{54}^{C'} = -\frac{1}{3}(+0.61 + 0.61) = -\frac{1.22}{3} T$$

$$Q_{65}^{C'} = -\frac{1}{3}(-0.80 - 0.61) = +\frac{1.41}{3} T$$

$$Q_{34}^{C'} = -\frac{1}{3}(-0.80 - 0.61) = +\frac{1.41}{3} T$$



V) Ecuaciones de condición:-

1) $\sum_{i=1}^{n-1} F_n = 0:$

$$Q_{12} + Q_{63} + Q_{54} = 0$$

$$Q_{12} = Q_{12}^A + xQ_{12}^{B'} + yQ_{12}^{C'} = -\frac{3.22}{3} - \frac{0.94}{3}x + \frac{1.22}{3}y$$

$$Q_{63} = Q_{63}^A + xQ_{63}^{B'} + yQ_{63}^{C'} = +\frac{2.43}{3} - \frac{1.40}{3}x + 0$$

$$Q_{54} = Q_{54}^A + xQ_{54}^{B'} + yQ_{54}^{C'} = -\frac{0.49}{3} - \frac{0.94}{3}x + \frac{1.22}{3}y$$

Sumando las ecuaciones:

$$Q_{12} + Q_{63} + Q_{54} = -\frac{1.28}{3} - \frac{3.28}{3}x + 0 = 0 \rightarrow x = -0.39$$

2) $\sum_{i=1}^{n-1} M_i = 0:$ $Q_{65} + Q_{34} = 13.5 - (6 T/ml \cdot x \cdot 3m) = -4.5 T$

$$Q_{65} = Q_{65}^A + xQ_{65}^{B'} + yQ_{65}^{C'} = +\frac{2.38}{3} + \frac{0.82}{3}x + \frac{1.41}{3}y$$

$$Q_{34} = Q_{34}^A + xQ_{34}^{B'} + yQ_{34}^{C'} = +\frac{0.41}{3} + \frac{0.82}{3}x + \frac{1.41}{3}y$$

Sumando las ecuaciones:

$$Q_{65} + Q_{34} = +\frac{1.97}{3} + \frac{1.64}{3}x + \frac{2.62}{3}y = -4.5 \rightarrow y = -5.26$$

VI) Momentos finales en los extremos:-

$$M_{16} = -M_{12} = -2.59 - 0.39(-0.47) - 5.26(+0.61) = -5.62 Tm$$

$$M_{21} = -M_{23} = +0.63 - 0.39(-0.47) - 5.26(+0.61) = +3.66 Tm$$

$$M_{32} = +0.11 - 0.39(-0.35) - 5.26(+0.80) = -3.96 Tm$$

$$M_{34} = +0.42 - 0.39(-0.35) - 5.26(-0.80) = +4.77 Tm$$

$$M_{36} = -0.53 - 0.39(+0.70) - 5.26(0) = -0.81 Tm$$

$$M_{43} = -M_{45} = -0.01 - 0.39(-0.47) - 5.26(-0.61) = +3.38 Tm$$

$$M_{54} = -M_{56} = +0.48 - 0.39(+0.47) - 5.26(+0.61) = -2.91 Tm$$

$$M_{65} = -1.90 - 0.39(-0.35) - 5.26(-0.80) = +2.45 Tm$$

$$M_{61} = +3.80 - 0.39(-0.35) - 5.26(+0.80) = -0.27 Tm$$

$$M_{63} = -1.90 - 0.39(+0.70) - 5.26(0) = -2.18 Tm$$

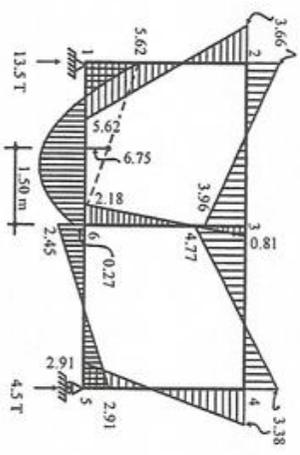
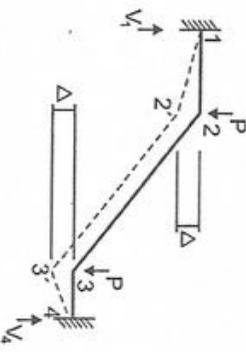


Diagrama de momentos flectores (en Tm)

PROBLEMA XIII-10.-(UNI, 20-ENE-969)

Resolver el problema XII-6 aplicando el Método de Cross.



La posición de las cargas aplicadas hace necesaria solo la distribución de momentos debido al desplazamiento de los nudos. Las cargas aplicadas producen los desplazamientos Δ de los nudos 2 y 3, respectivamente, respecto de 1 y 4. Los momentos de empotramiento perfecto que generarían estos desplazamientos son:

$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = -6EI \frac{\Delta}{(6)^2} = -3$$

$$M_{34}^0 = M_{43}^0 = +6EI \frac{\Delta}{(6)^2} = +3$$

Tomamos como valores arbitrarios para estos momentos -3 y $+3$, respectivamente. Con estos valores iniciaremos la distribución por desplazamiento de nudos:

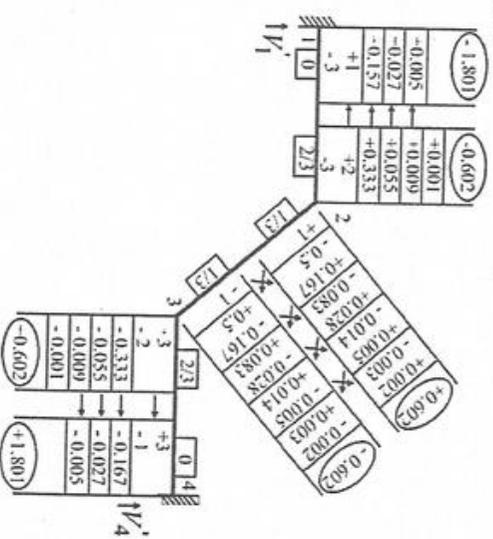
Las rigideces de los elementos son (en valores relativos):

$$K_{12} = \frac{1}{6} \quad \gamma \quad K_{23} = \frac{1}{12}, \text{ es decir: } \sum_2 K = \frac{3}{2}$$

Luego, los coeficientes de distribución son:

$$C_{21} = \frac{2}{3} \quad \gamma \quad C_{23} = \frac{1}{3}$$

Calculo de la distribución:



Para esta situación las reacciones en los apoyos son:

$$V_1' = V_4' = -\frac{1}{6}(-1.801 - 0.602) = +0.4$$

La ecuación de condición es:

$$\sum F_b = 0: (2V_1')x - 2P = 0 \rightarrow \therefore x = 2.5P$$

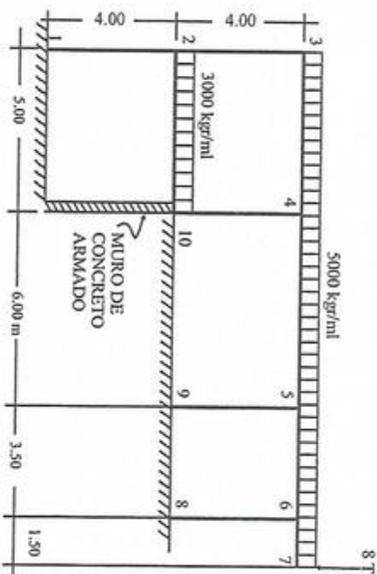
Luego, los valores definitivos, finales de los momentos en los extremos son:

$$M_{12} = -M_{21} = -1.801(2.5P) = -4.5P$$

$$M_{23} = -M_{32} = -0.602(2.5P) = -1.5P$$

Los esfuerzos cortantes y los diagramas correspondientes están expuestos en la solución del problema XII-6.

PROBLEMA XIII-11.-(UNI, 10-NOV-1956)



Aplicando el Método de Cross, determinar los momentos en el pórtico de concreto armado que se muestra en la figura, el mismo que es parte de la estructura resistente de un edificio urbano. dimensiones: para los elementos horizontales, 30x60 cm; para los verticales, 30x40 cm. Consideramos empotramientos perfectos en los extremos 1, 10, 9 y 8 de los elementos. Por tener todos los elementos ancho constante de 30 cm, calcularemos las rigideces relativas, proporcionales al cubo del peralte en dm; así:

$$K_{12} = K_{23} = K_{10-4} = K_{95} = K_{86} = \frac{(4)^3}{4} = 16$$

$$K_{2-10} = K_{34} = \frac{(6)^3}{5} = 43.2$$

$$K_{45} = \frac{(6)^3}{6} = 36 \quad K_{56} = \frac{(6)^3}{3.50} = 61.7$$

Coefficientes de distribución:

$$21: 16 \div 75.2 = 0.213$$

$$23: 16 \div 75.2 = 0.213$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 2 - 10: \frac{43.2}{43.2 + 75.2} = 0.574 \\ \sum K = 75.2 \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 34: \frac{43.2}{43.2 + 59.2} = 0.730 \\ 59.2 \end{array} \right.$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} 4 - 10: \frac{16}{16 + 95.2} = 0.168 \\ 43: \frac{43.2}{43.2 + 95.2} = 0.454 \\ 45: \frac{36}{36 + 95.2} = 0.378 \\ \sum K = 75.2 \end{array} \right.$$

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 59: \frac{16}{16 + 120.9} = 0.132 \\ 54: \frac{43.2}{43.2 + 120.9} = 0.358 \\ 56: \frac{61.7}{61.7 + 120.9} = 0.510 \\ \sum K = 120.9 \end{array} \right.$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 68: \frac{16}{16 + 77.7} = 0.206 \\ 65: \frac{61.7}{61.7 + 77.7} = 0.794 \\ 77.7 \end{array} \right.$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{2-10}^0 = -M_{10-2}^0 = -\frac{1}{12}(3)(5)^2 = -6.25 \text{ Tm}$$

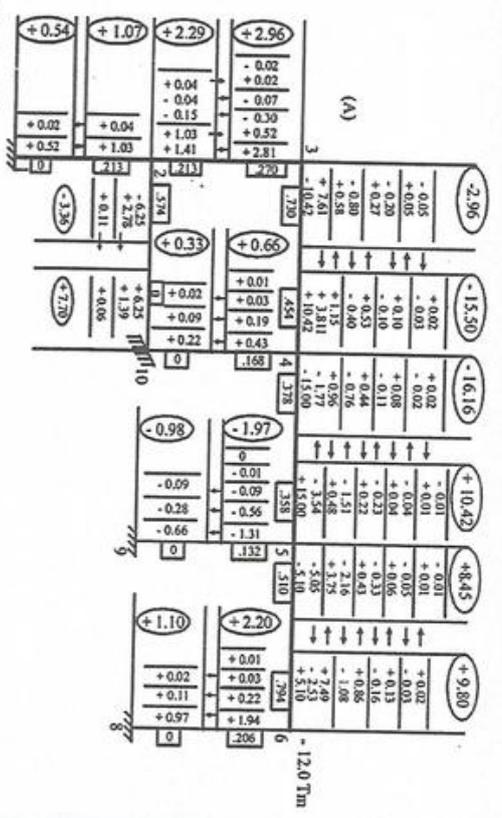
$$M_{34}^0 = -M_{43}^0 = -\frac{1}{12}(5)(5)^2 = -10.42 \text{ Tm}$$

$$M_{45}^0 = -M_{54}^0 = -\frac{1}{12}(5)(6)^2 = -15 \text{ Tm}$$

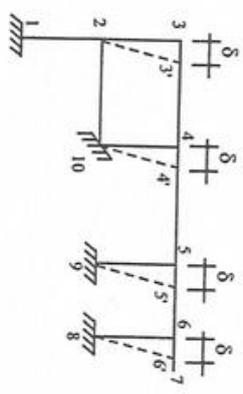
$$M_{56}^0 = -M_{65}^0 = -\frac{1}{12}(5)(3.5)^2 = -5.10 \text{ Tm}$$

$$M_{67}^0 = -(8)(1.5) = -12 \text{ Tm}$$

A) Distribución considerando los nudos fijos:-

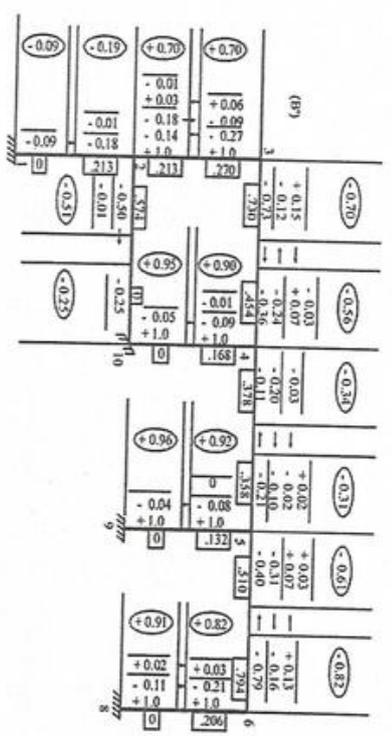


B) Considerando un desplazamiento lateral δ :- se genera los siguientes momentos de empotramiento perfecto:



$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = M_{10-4}^0 = M_{4-10}^0 = M_{95}^0 = M_{59}^0 = M_{86}^0 = M_{68}^0 = -\frac{6EI\delta}{(4)^2} = x = +1.07m$$

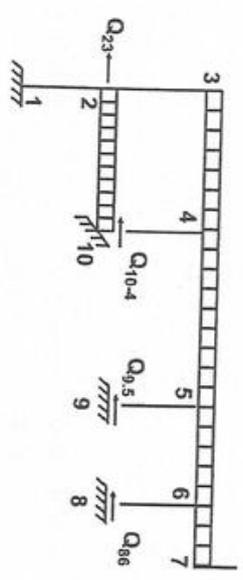
Hacemos la distribución considerando +1.0 Tm como valor arbitrario en los extremos de los elementos:



La ecuación de condición que nos permitirá determinar el valor de x, es que, estando en las bases de las columnas 23, 10-4, 95 y 86, la suma de las fuerzas horizontales del sistema debe ser cero:

$$\sum_{(2-10-9-8)} F_h = 0: Q_{23} + Q_{10-4} + Q_{95} + Q_{86} = 0$$

Donde:



$$Q_{23} = Q_{23}^{(A)} + xQ_{23}^{(B')} \quad Q_{10-4} = Q_{10-4}^{(A)} + xQ_{10-4}^{(B')}$$

$$Q_{95} = Q_{95}^{(A)} + xQ_{95}^{(B')} \quad Q_{86} = Q_{86}^{(A)} + xQ_{86}^{(B')}$$

O sea que:

$$\left[-\frac{1}{4}(+2.29 + 2.96) - \frac{1}{4}(+0.33 + 0.66) - \frac{1}{4}(-0.98 - 1.97) \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(+1.10 + 2.20) \right] + \\ + x \left[-\frac{1}{4}(+0.70 + 0.70) - \frac{1}{4}(+0.95 + 0.90) - \frac{1}{4}(+0.96 + 0.92) - \frac{1}{4}(+0.91 \right. \\ \left. + 0.82) \right] = 0$$

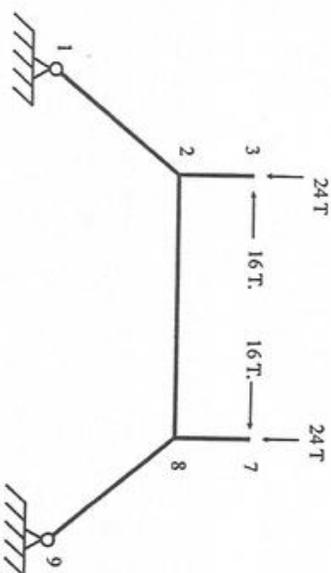
$$\therefore x = -0.96$$

Los momentos finales son: $M = M^{(A)} + (-0.96)M^{(B')}$, es decir:

$M_{12} = +0.54 - 0.96(-0.09) = +0.63 \text{ Tm}$	$M_{10-4} = +0.33 - 0.96(+0.95) = -0.58 \text{ Tm}$
$M_{21} = +1.07 - 0.96(-0.19) = +1.25 \text{ Tm}$	$M_{54} = +10.42 - 0.96(-0.31) = +10.72 \text{ Tm}$
$M_{23} = +2.29 - 0.96(+0.70) = +1.62 \text{ Tm}$	$M_{56} = -8.45 - 0.96(-0.61) = -7.87 \text{ Tm}$
$M_{2-10} = -3.36 - 0.96(-0.51) = -2.87 \text{ Tm}$	$M_{59} = -1.97 - 0.96(+0.92) = -2.85 \text{ Tm}$
$M_{10-2} = +7.70 - 0.96(-0.25) = +7.94 \text{ Tm}$	$M_{95} = -0.98 - 0.96(+0.96) = -1.90 \text{ Tm}$
$M_{32} = -2.96 - 0.96(0.70) = -3.63 \text{ Tm}$	$M_{65} = +9.80 - 0.96(-0.82) = +10.59 \text{ Tm}$
$M_{34} = +2.96 - 0.96(-0.70) = +3.63 \text{ Tm}$	$M_{67} = -12 \text{ Tm}$
$M_{43} = +15.50 - 0.96(-0.56) = +16.04 \text{ Tm}$	$M_{68} = +2.20 - 0.96(+0.82) = +1.41 \text{ Tm}$
$M_{45} = -16.16 - 0.96(-0.34) = -15.83 \text{ Tm}$	$M_{86} = +1.10 - 0.96(+0.91) = +0.23 \text{ Tm}$
$M_{4-10} = +0.66 - 0.96(+0.90) = -0.21 \text{ Tm}$	

382

PROBLEMA XIII-12.- (UNI, 6-ENE-1969)
Resolver el problema XII-7 aplicando el Método de Cross.



Realizado el análisis expuesto en la solución del problema XII-7, resolveremos por el método de Cross el pórtico 1-2-8-9.

Los momentos externos que ocurren en los nudos 2 y 8 son respectivamente: $+16(2) = +32 \text{ Tm}$ y $-16(2) = -32 \text{ Tm}$. Las rigideces de los elementos concurrentes al nudo 2 (igual que para el nudo 8) son:

$$K_{12} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right) = 0.15$$

$$K_{28} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\sum_z K = 0.275$$

Luego, los coeficientes de distribución son:

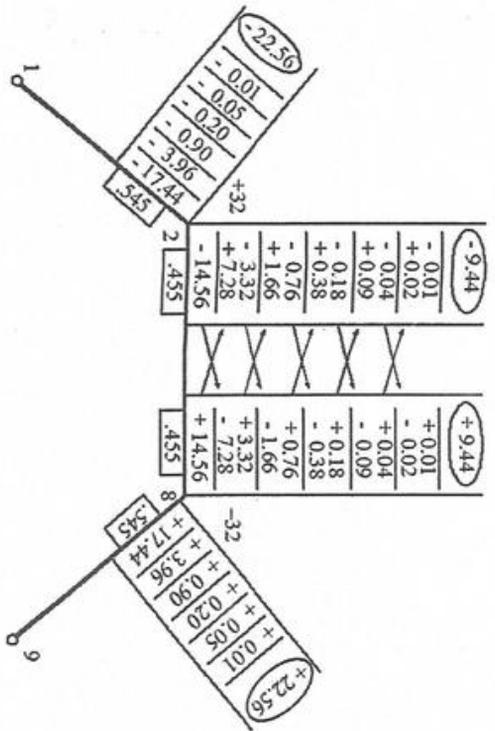
$$d_{21} = \frac{0.15}{0.275} = 0.545$$

$$d_{28} = \frac{0.125}{0.275} = 0.455$$

No hay desplazamientos relativos entre los nudos.

383

Distribución:

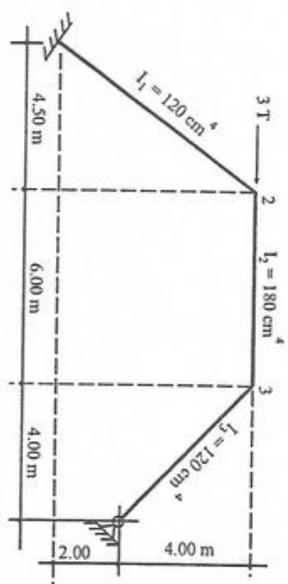


Los momentos en los extremos son:

$M_{12} = 0$	$M_{98} = 0$
$M_{21} = -22.56 \text{ Tm}$	$M_{89} = +22.56 \text{ Tm}$
$M_{28} = -9.44 \text{ Tm}$	$M_{82} = +9.44 \text{ Tm}$

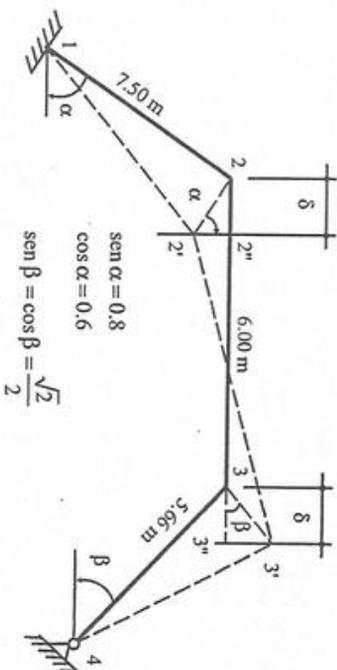
En todo lo demás proseguirá tal como se ha expuesto en la solución del problema mencionado.

PROBLEMA XIII-13.-(UNI, 19-DIC-1956)



Por el Método de Hardy Cross, resolver la estructura cuyo esquema de ejes se muestra, se trazaran los diagramas de momentos flectores, de esfuerzos cortantes y de esfuerzos normales, se determinaran, además, los desplazamientos de los nudos $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.
Por estar aplicada en un nudo 1 fuerza de 3 T, no se generan momentos al considerar los nudos fijos. Debemos analizar la distribución por un desplazamiento δ .
Los desplazamientos relativos entre los nudos son:

entre 2 y 1: $\overline{22}' = \frac{\delta}{\sin \alpha} = 1.25 \delta$
entre 3 y 2: $\overline{2'2}'' + \overline{3'3}'' = \frac{\delta}{\tan \alpha} + \delta = 1.75 \delta$
entre 3 y 4: $\overline{33}' = \sqrt{2} \delta$



Momentos de empotramiento debidos a estos desplazamientos:

$$\left. \begin{aligned} M_{12}^0 = M_{21}^0 &= -\frac{6EI_1(1.25\delta)}{(750)^2} = -\frac{6E\delta(120)(1.25)}{562500} = \frac{E\delta}{200}(-0.32) = (-0.32)x \\ M_{23}^0 = M_{32}^0 &= +\frac{6EI_2(1.75\delta)}{(600)^2} + \frac{6E\delta(180)(1.75)}{360000} = \frac{E\delta}{200}(+1.05) = (+1.05)x \\ M_{34}^0 &= -\frac{3EI_3(\sqrt{2}\delta)}{(566)^2} = -\frac{6E\delta(60)\sqrt{2}}{320000} = \frac{E\delta}{200}(-0.318) = (-0.318)x \end{aligned} \right\} (1)$$

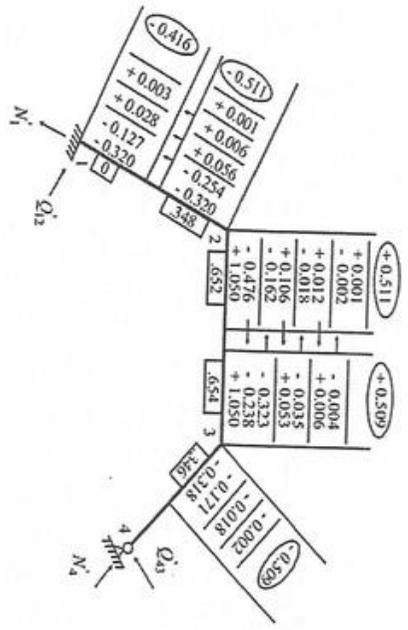
Rigideces:-

$$K_{12} = \frac{120}{7.50} = 16 \quad K_{23} = \frac{180}{6.0} = 30 \quad K_{34} = \frac{3}{4} \times \frac{120}{5.66} = 15.9$$

Coefficientes de distribución:

$$\left. \begin{aligned} 21: 16 \div 46 &= 0.348 \\ 23: 30 \div 46 &= 0.652 \\ \Sigma K &= 46 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 32: 30 \div 45.9 &= 0.654 \\ 34: 15.9 \div 45.9 &= 0.346 \\ \Sigma K &= 45.9 \end{aligned} \right\}$$

Distribución:



Fuerzas cortantes:-

$$Q_{12} = -\frac{1}{7.5}(-0.416 - 0.511) = +0.1236$$

$$Q_{43} = -\frac{1}{5.66}(-0.509) = +0.0899$$

Fuerzas normales:-

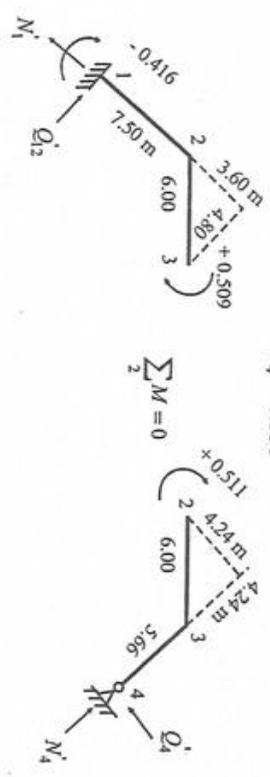
$$\sum M = 0:$$

$$+0.509 - 0.416 - N_1'(4.80) + 0.1236(7.50 + 3.60) = 0$$

$$\therefore N_1' = 0.305$$

$$+0.511 + 0.0899(4.24 + 5.66) - N_4'(4.24) = 0$$

$$\therefore N_4' = 0.330$$



Ecuación de equilibrio del conjunto:-

$$\sum F_n = 0: \quad -3 + x(Q_{12} \text{ sen } \alpha + N_1' \text{ cos } \alpha + Q_{43} \text{ sen } \beta + N_4' \text{ cos } \beta) = 0$$

$$-3 + x \left(0.1236 \times 0.8 + 0.305 \times 0.6 + 0.0899 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.330 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\therefore x = 5.181$$

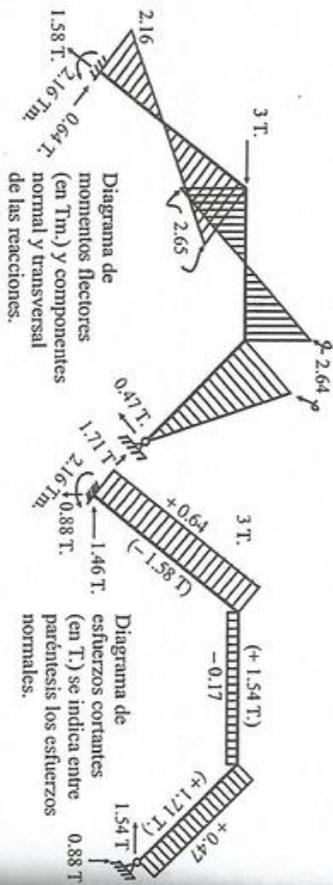
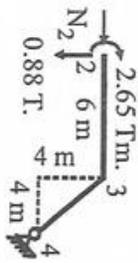
De las igualdades (1) tenemos que:

$$\frac{E\delta}{200} = x \rightarrow \delta = \frac{200x}{E} = \frac{200 \times 5.181}{2 \times 10^7 \text{ T/m}^2} = 0.00259 \text{ m}$$

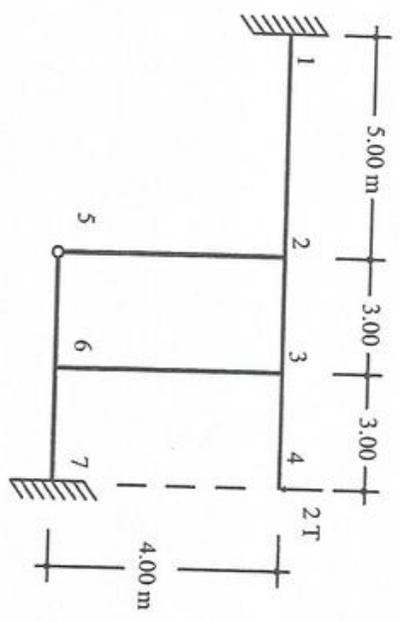
$$\therefore \delta = 2.59 \text{ mm}$$

Momentos, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales finales:

$M_{12} = -0.416(5.181) = -2.16 \text{ Tm}$	$Q_{12} = +0.1236(5.181) = +0.64 \text{ T}$
$M_{21} = -M_{23} = -0.511(5.181) = -2.65 \text{ Tm}$	$Q_{43} = +0.0899(5.181) = +0.47 \text{ T}$
$M_{32} = -M_{34} = +0.509(5.181) = +2.64 \text{ Tm}$	$Q_{23} = -\frac{1}{6}(+2.65 + 2.64) = -0.88 \text{ T}$
$M_1 = 0.305(5.181) = 1.58 \text{ T (tracc)}$	$\sum_4 M = 0: N_2(4) + 2.65 - 0.88(10) = 0$
$N_4 = 0.330(5.181) = 1.71 \text{ T (comprr)}$	$\therefore N_2 = 1.54 \text{ T (comprr)}$



PROBLEMA XIII-14. (UNI, 8-JUL-1968)



Aplicando el Método de Cross, resolver el pórtico que se muestra, en el que todos los elementos tienen el mismo momento de inercia.

1) Cálculos previos:-

1) Rigideces relativas:

$$K_{12} = 1/5 = 0.2 \quad K_{23} = 1/3 = 0.333 \quad K_{25} = \frac{3}{4}(1/4) = 0.1875$$

$$K_{36} = 1/4 = 0.25 \quad K_{56} = \frac{3}{4}(1/3) = 0.25 \quad K_{25} = (1/3) = 0.333$$

2) Coeficientes de distribución:

$$\sum_2 \begin{cases} 21: 0.2 & + 0.7208 = 0.277 \\ 23: 0.3333 & + 0.7208 = 0.463 \\ 25: 0.1875 & + 0.7208 = 0.260 \end{cases} \quad \sum_3 \begin{cases} 36: 0.25 & + 0.583 = 0.428 \\ 32: 0.333 & + 0.583 = 0.572 \end{cases}$$

$$\sum K = 0.7208 \quad \sum K = 0.583$$

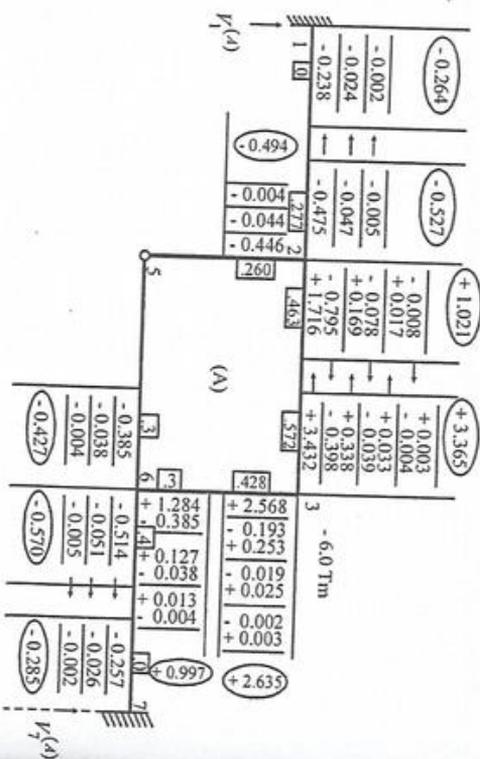
$$\left\{ \begin{array}{l} 65: 0.25 \\ 63: 0.25 \\ 67: 0.333 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + 0.833 = 0.3 \\ + 0.833 = 0.3 \\ + 0.833 = 0.4 \end{array} \right.$$

$$\sum K = 0.833$$

3) Momento de empotramiento perfecto:

$$M_{34}^0 = -2(3) = -6 \text{ Tm}$$

II) Distribucion considerando que no hay desplazamientos de nudos:



$$V_1^{(A)} = -\frac{1}{5}(-0.264 - 0.527) = +0.158t$$

$$V_7^{(A)} = +\frac{1}{3}(-0.570 - 0.285) = -0.285t$$

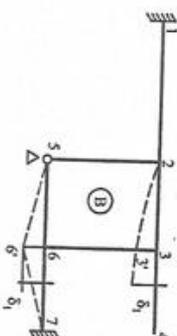
III) Distribuciones debidas a los desplazamientos:-

i) Para un primer desplazamiento δ_1 : los momentos de empotramiento perfecto serán:

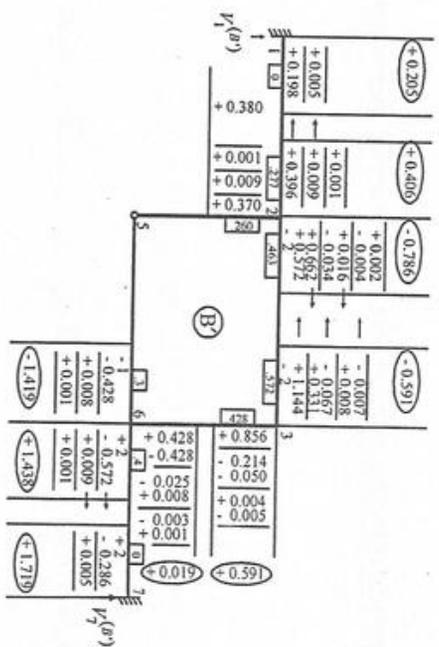
$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = -\frac{6EI\delta_1}{(3)^2} = -2x$$

$$M_{67}^0 = M_{76}^0 = +\frac{6EI\delta_1}{(3)^2} = +2x$$

$$M_{65}^0 = -\frac{3EI\delta_1}{(3)^2} = -x$$



Consideramos momentos iniciales $-2x$, $+2x$ y $-1x$ para los extremos de los elementos 23, 67 y 65 (solo en el extremo 6), respectivamente. Los resultados que se obtengan partiendo con estos momentos, tendrán que multiplicarse por x para que den los verdaderos valores de la situación [B], es decir: $[B] = x \cdot [B]$.



$$V_1^{(B')} = -\frac{1}{5} (+0.205 + 0.406) = -0.122 T$$

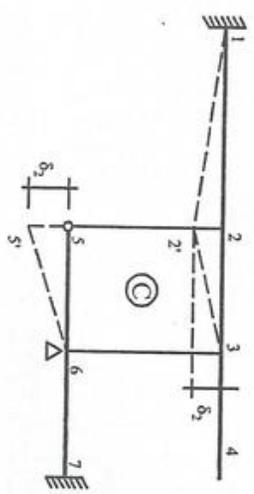
$$V_7^{(B')} = +\frac{1}{3} (+1.438 + 1.719) = +1.052 T$$

ii) Para un segundo desplazamiento δ_2 : los momentos de empotramiento serian:

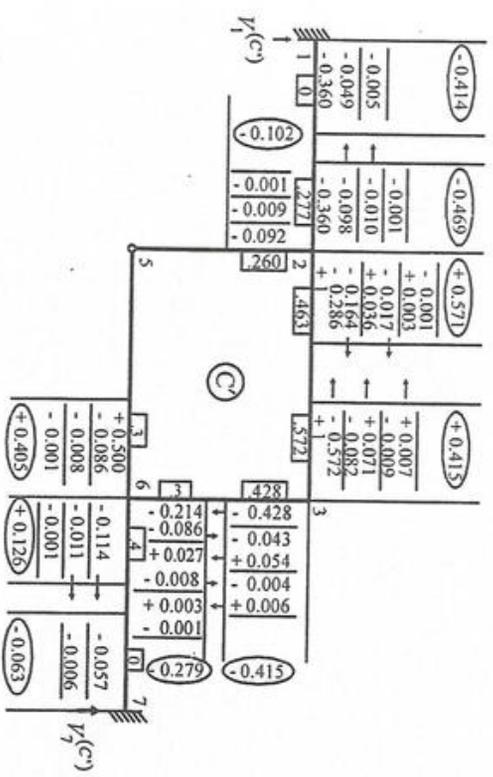
$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = -\frac{6EI\delta_2}{(5)^2} = -0.36 y$$

$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = +\frac{6EI\delta_2}{(3)^2} = +y$$

$$M_{65}^0 = +\frac{3EI\delta_2}{(3)^2} = +0.5y$$



Considerando momentos iniciales -0.36 , $+1 y +0.5 Tm$. en los extremos de los elementos 12, 23 y 56 respectivamente, los resultados que se obtengan, tendrán que multiplicarse por " y " para tener los verdaderos de la situación \square : $\square = y \cdot \square'$



$$V_1^{(C')} = -\frac{1}{5} (-0.414 - 0.469) = +0.177 T.$$

$$V_7^{(C')} = +\frac{1}{3} (-0.126 - 0.063) = -0.063 T.$$

IV) Ecuaciones de compatibilidad:- Necesitamos plantear dos ecuaciones para las dos incógnitas (x,y) del sistema:

1) $\sum F_v = 0$ (para el conjunto):

$$V_1 + V_7 - 2 = 0$$

Siendo:

$$V_1 = V_1^{(A)} + xV_1^{(B')} + yV_1^{(C')} = +0.158 - 0.122x + 0.177y$$

$$V_7 = V_7^{(A)} + xV_7^{(B')} + yV_7^{(C')} = -0.285 + 1.502x - 0.063y$$

Reemplazando y reduciendo tenemos:

$$0.930x + 0.114y = 2.127 \quad \therefore 8.16x + y = 18.65 \dots (1)$$

2) $\sum_{(6-3)} F_v = 0$

(corte inmediatamente a la izquierda de los nudos 6 y 3):

$$-V_1 + Q_{32} + Q_{65} = 0$$

Siendo:

$$Q_{32} = Q_{32}^{(A)} + xQ_{32}^{(B')} + yQ_{32}^{(C')} = -1.462 + 0.459x - 0.329y$$

$$Q_{65} = Q_{65}^{(A)} + xQ_{65}^{(B')} + yQ_{65}^{(C')} = +0.142 + 0.473x - 0.135y$$

$$-V_1 = -0.158 + 0.122x - 0.177y$$

$$\therefore Q_{32} + Q_{65} - V_1 = -1.478 + 1.054x - 0.641y = 0$$

$$\therefore 1.65x - y = 2.31 \dots (2)$$

Resolviendo entre las ecuaciones (1) y (2), se obtienen:

$$x = 2.14 \quad y = 1.20$$

Momentos finales, serían:

$$M = M^{(A)} + xM^{(B')} + yM^{(C')}$$

Así:

	12	21	23	25	32	36	65	63	67	76
M :	-0.264	-0.527	+1.021	-0.494	+3.365	+2.635	-0.427	+0.997	-0.570	-0.285
M :	+0.439	+0.870	-1.682	+0.812	-1.263	+1.263	-3.035	-0.041	+3.076	+3.678
M :	1.30	-0.497	-0.563	+0.685	-0.122	+0.498	-0.498	+0.486	-0.335	-0.151
M :	-0.322	-0.220	+0.024	+0.196	+2.600	+3.400	-2.976	+0.621	+2.355	+3.317

Esfuerzos cortantes:

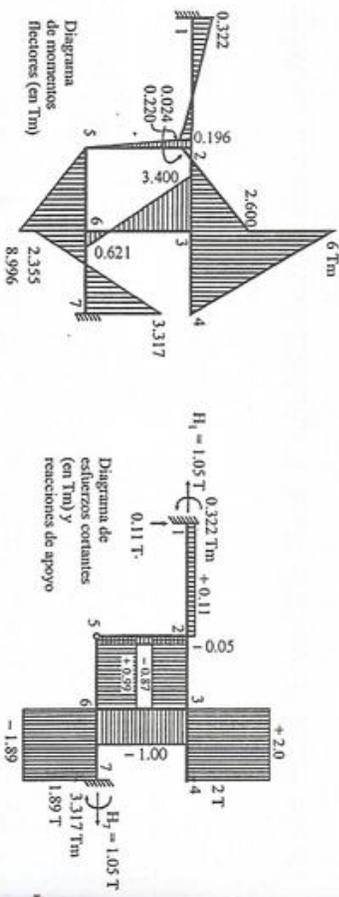
$Q_{12} = -\frac{1}{5}(-0.322 - 0.220)$ $= +0.11 T$	$Q_{67} = -\frac{1}{3}(+2.355 + 3.317)$ $= -1.89 T$
$Q_{23} = -\frac{1}{3}(+0.024 + 2.6)$ $= -0.87 T$	$Q_{25} = -\frac{1}{4}(+0.196)$ $= -0.05 T$
$Q_{56} = -\frac{1}{3}(-2.976)$ $= +0.99 T$	$Q_{36} = -\frac{1}{4}(+3.44 + 0.621) = -1.0 T$

Reacciones de apoyos:- Los pares y esfuerzos cortantes en los extremos 1 y 7 permiten fijar parte de estas reacciones. Faltan las componentes horizontales. Aplicando a toda la estructura:

$$\sum_{(1)} M = 0: -0.322 + 3.317 + 2T(11 m) - 1.89 T(11) - H_7(4 m) = 0$$

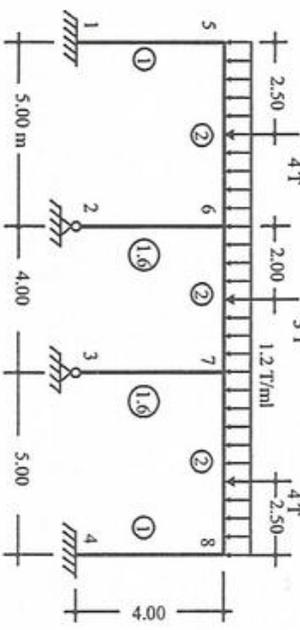
$$\therefore H_7 = 1.05 T \rightarrow$$

$$\therefore H_1 = 1.05 T \leftarrow$$

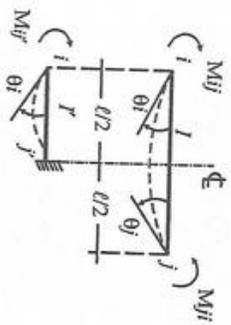


PROBLEMA XIII-15.-

Resolver la estructura que se muestra, aplicando el Método de Cross. Enmarcados se indican números proporcionales a los momentos de inercia de los elementos.



La estructura es simétrica y esta simétricamente cargada. El eje de simetría pasa por el punto medio del tramo 67. Para este tipo de estructuras, con número impar de tramos, puede procederse así:



Para el tramo correspondiente al eje de simetría: $\theta_i = -\theta_j$
Aplicando la ecuación (2M), tenemos:

$$M_{ij} = 2EK_{ij}\theta_i + M_{ij}^0 K_{ij} = \frac{l}{2}$$

Considerando el medio tramo ij' , perfectamente empotrado en j' (siendo $\theta_{j'} = 0$), aplicando la misma ec (2M):

$$M'_{ij'} = 2EK'_{ij'}(2\theta_i) + M_{ij'}^0 K'_{ij'} = \frac{l'}{2}$$

Para que sea suficiente analizar la mitad de la estructura, será necesario que $M'_{ij'} = M_{ij}$; o sea que:

$$2EK'_{ij'}(2\theta_i) + M_{ij'}^0 = 2EK_{ij}\theta_i + M_{ij}^0$$

$$\therefore K'_{ij'} = \frac{1}{2} K_{ij}$$

O sea que en las estructuras simétricas, y simétricamente cargadas, con número impar de tramos, es posible analizar la mitad de la estructura, considerando para el elemento central los momentos de empotramiento perfecto M_{ij}^0 del elemento real, pero rigidez relativa K' igual a la mitad de rigidez real K .

En el caso que nos ocupa:

$$K_{15} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad K_{26} = \frac{3}{4} \times \frac{1.6}{4} = 0.30 \quad K_{56} = \frac{2}{5} = 0.40 \quad K_{67} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = 0.25$$

Coefficientes de distribución:

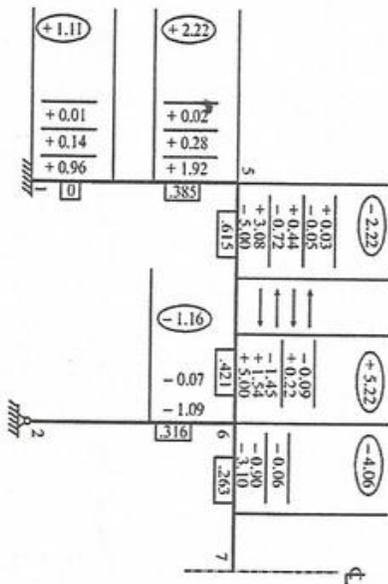
$$5 \left\{ \begin{array}{l} 51: 0.25 \div 0.65 = 0.385 \\ 56: \frac{0.40}{0.40 + 0.65} = 0.615 \\ \sum K = 0.65 \end{array} \right. \quad 6 \left\{ \begin{array}{l} 62: 0.30 \div 0.95 = 0.316 \\ 65: 0.40 \div 0.95 = 0.421 \\ 67: \frac{0.25}{0.25 + 0.95} = 0.263 \\ \sum K = 0.95 \end{array} \right.$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$M_{56}^0 = -M_{65}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} Pl = -\frac{1}{12} (1.2)(5)^2 - \frac{1}{8} (4)(5) = -5.00 \text{ Tm}$$

$$M_{67}^0 = -M_{76}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} Pl = -\frac{1}{12} (1.2)(4)^2 - \frac{1}{8} (3)(4) = -3.10 \text{ Tm}$$

Distribución:-



Esfuerzos cortantes:-

$$Q_{15} = Q_{51} = 0 - \frac{1}{4} (+1.11 + 2.22) = -0.83 \text{ T}$$

$$Q_{26} = Q_{62} = 0 - \frac{1}{4} (-1.16) = +0.29 \text{ T}$$

$$Q_{56} = (+2 + 3) - \frac{1}{5} (-2.22 + 5.22) = +4.40 \text{ T}$$

Reacciones de apoyos:

$$Q_{65} = (-2 - 3) - \frac{1}{5} (-2.22 + 5.22) = -5.60 \text{ T}$$

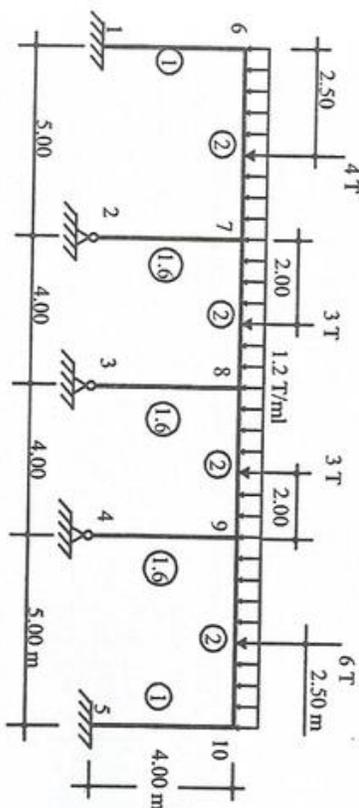
$$Q_{67} = -Q_{76} = (+1.5 + 2.4) - 0 = +3.90 \text{ T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = 0.83 \rightarrow T \\ V_1 = 4.40 \uparrow T \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_2 = 0.29 \leftarrow T \\ V_2 = 5.60 + 3.90 = 9.50 \uparrow T \end{array} \right.$$

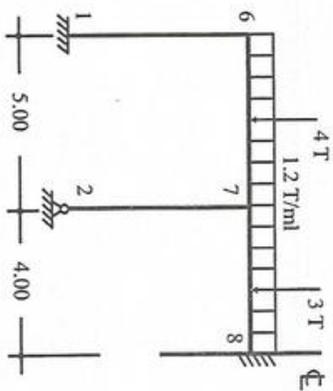
$$\left\{ \begin{array}{l} H_3 = 0.29 \rightarrow T \\ V_3 = 9.50 \uparrow T \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_4 = 0.83 \leftarrow T \\ V_4 = 4.40 \uparrow T \end{array} \right.$$

PROBLEMA XIII-16.-

Aplicando el Método de Cross, resolver el pórtico que se muestra enmarcado, se indican los momentos de inercia para cada elemento.



Esta estructura es simétrica y esta simétricamente cargada. El eje de simetría coincide con el elemento 38. Para este tipo de estructura, con un número par de tramos, se procede así:



Por la simetría indicada, el elemento 38 no sufre deformación o giro (si algún giro tuviera, dejaría de haber simetría), el nudo 8 no tiene pues, giro alguno, y se empujara como un empujamiento perfecto. Basta en consecuencia, analizar media estructura.

O sea que en la estructura simétrica y simétricamente cargadas, con número par de tramos, será suficiente analizar media estructura, situada a la izquierda o a la derecha del eje de simetría, considerando que los nudos del eje de simetría no sufren deformaciones angulares (empujamientos perfectos).

En el caso propuesto:

$$K_{16} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad K_{27} = \frac{3}{4} \times \frac{1.6}{4} = 0.30 \quad K_{67} = \frac{2}{5} = 0.40 \quad K_{78} = \frac{2}{4} = 0.50$$

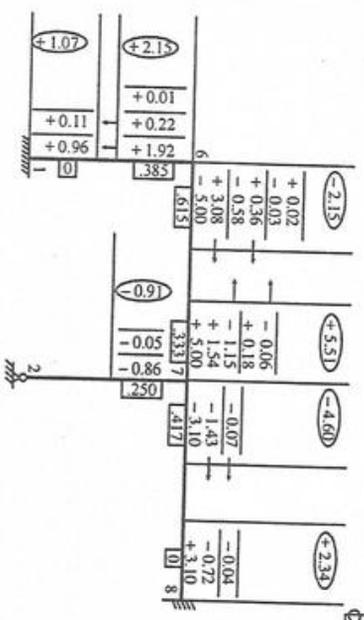
Coefficientes de distribución:

$$\left\{ \begin{array}{l} 61: 0.25 \div 0.65 = 0.385 \\ 67: \frac{0.40}{0.40 + 0.65} = 0.615 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 72: 0.30 \div 1.20 = 0.250 \\ 76: 0.40 \div 1.20 = 0.333 \\ 78: \frac{0.50}{0.50 + 1.20} = 0.417 \end{array} \right.$$

Momentos de empujamiento perfecto:

$$M_{67}^0 = -M_{76}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} P l = -\frac{1.2}{12} (5)^2 - \frac{4}{8} (5) = -5.0 \text{ Tm}$$

$$M_{78}^0 = -M_{87}^0 = -\frac{1}{12} \omega l^2 - \frac{1}{8} P l = -\frac{1.2}{12} (4)^2 - \frac{3}{8} (4) = -3.10 \text{ Tm}$$



Las fuerzas cortantes:

$$Q_{16} = Q_{61} = 0 - \frac{1}{4} (+1.07 + 2.15) = -0.81 \text{ T}$$

$$Q_{27} = Q_{72} = 0 - \frac{1}{4} (-0.91) = +0.23 \text{ T}$$

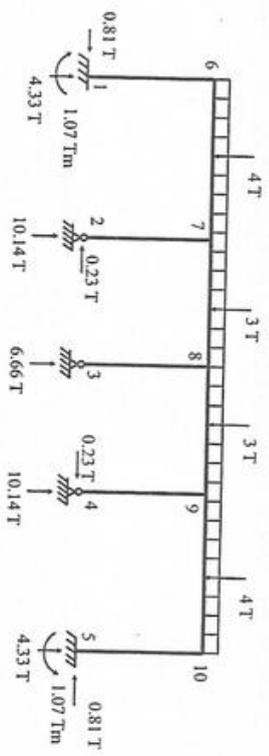
$$Q_{67} = (+2 + 3) - \frac{1}{5} (-2.15 + 5.51) = +4.33 \text{ T}$$

$$Q_{76} = (-2 - 3) - \frac{1}{5} (-2.15 + 5.51) = -5.67 \text{ T}$$

$$Q_{78} = (+1.5 + 2.4) - \frac{1}{4} (-4.60 + 2.34) = +4.47 \text{ T}$$

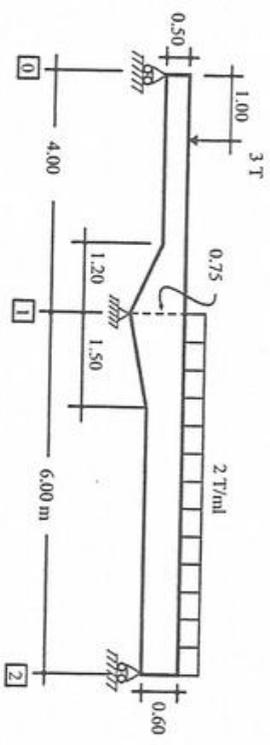
$$Q_{87} = (-1.5 - 2.4) - \frac{1}{4} (-4.60 + 2.34) = -3.33 \text{ T}$$

Reacciones en los apoyos:



PROBLEMA XIII-17-

Aplicando el Método de Cross, resolver la viga que se muestra (problema XI-7).



En la solución del problema XI-7, para el caso dado se obtuvieron:

$$\begin{aligned} \bar{l}_{01} &= 4.00 \text{ m} & \bar{l}_{12} &= 3.47 \text{ m} \\ \bar{A}_{10} &= 0.227 & \bar{A}_{10}^0 &= 0.0358 & M_{01} &= 12 \text{ Tm} \\ \bar{A}_{12} &= 0.274 & \bar{A}_{12}^0 &= 0.0393 & M_{12} &= 72 \text{ Tm} \end{aligned}$$

Según las expresiones (4N) y (3N) tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{10} &= \frac{1}{\bar{A}_{10} \bar{l}_{01}} = \frac{1}{0.227 \times 4} = 1.101 \\ K_{12} &= \frac{1}{\bar{A}_{12} \bar{l}_{12}} = \frac{1}{0.274 \times 3.47} = 1.052 \end{aligned} \quad \therefore \sum K = 2.153$$

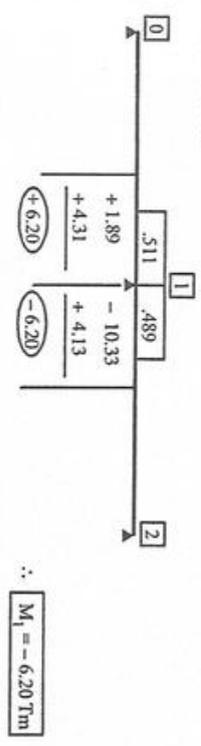
Coefficientes de distribución:

$$d_{10} = \frac{1.101}{2.153} = 0.511 \quad d_{12} = \frac{1.052}{2.153} = 0.489$$

Momentos de empotramiento perfecto: según las expresiones (10.N)

$$\begin{aligned} M_{10}^0 &= +M_{01} \frac{A_{10}^0}{A_{10}} = +12x \frac{0.0358}{0.227} = +1.89 \text{ Tm} \\ M_{12}^0 &= -M_{12} \frac{A_{12}^0}{A_{12}} = -72x \frac{0.0393}{0.274} = -10.33 \text{ Tm} \end{aligned}$$

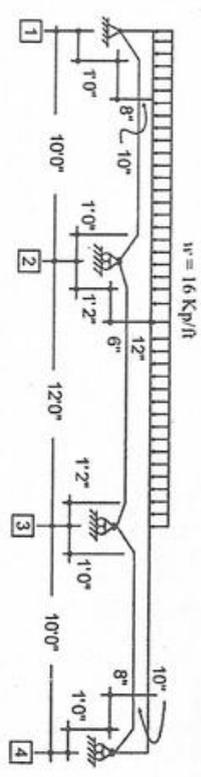
Proceso de distribución:-



PROBLEMA XIII-18-

La viga que se muestra es de ancho constante 1'0"; de material $E = 3000 \text{ Kp}/\text{pie}^2$. Determinar, aplicando el Método de Cross, la distribución de momentos flectores y esfuerzos cortantes, debidos a:

- La carga que se muestra;
- Un descenso de 1" del apoyo 2. Considerar $E = 3000 \text{ Kp}/\text{in}^2$.



- Cálculos previos.- Considerando J_c el momento de inercia relativa a la sección de peralte 10", tenemos las longitudes reducidas:

$$Q_{32} = -\frac{1}{2} \left(10 \frac{Kp}{pie} \right) (12') - \frac{-157.57 + 47.59}{10'} = -50.84 Kp$$

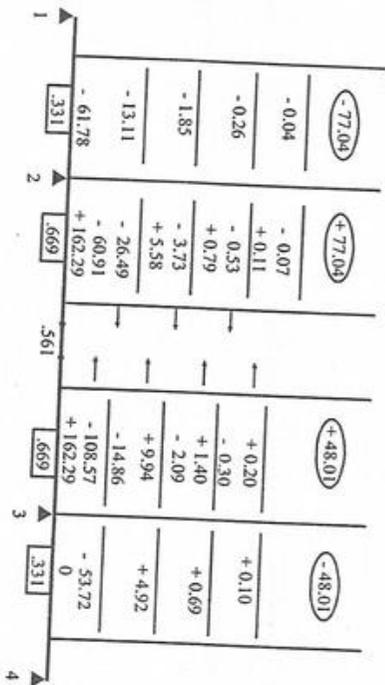
$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{-47.59 + 0}{10'} = +4.76 Kp$$

b) Cálculos previos: - Ya están calculados en a) las rigideces, factores de transporte y coeficientes de distribución. Queda por calcular únicamente los momentos de empotramiento perfecto y 2, y entre 2 y 3. Los momentos iniciales están dados, respectivamente, por las expresiones (14.N) y (12.N); que adaptadas al caso dan:

$$M_{21}^0 = -\frac{E I_{c12}}{l^2} \cdot \Delta = -\frac{(3000 \frac{Kp}{pie^2}) \left(\frac{1}{12} \times 1' \times 10'^2 \right) (1'')}{120''^2} = -61.78 Kp \cdot pie$$

$$M_{32}^0 = M_{32}^0 = -\frac{E I_{c23}}{l^2} \cdot \bar{c}_{23} \cdot \Delta = -\frac{(3000 \frac{Kp}{pie^2}) \left(\frac{1}{12} \times 1' \times 12'^2 \right) (-1'')}{144''^2} = +162.29 Kp \cdot pie$$

Proceso de distribución:



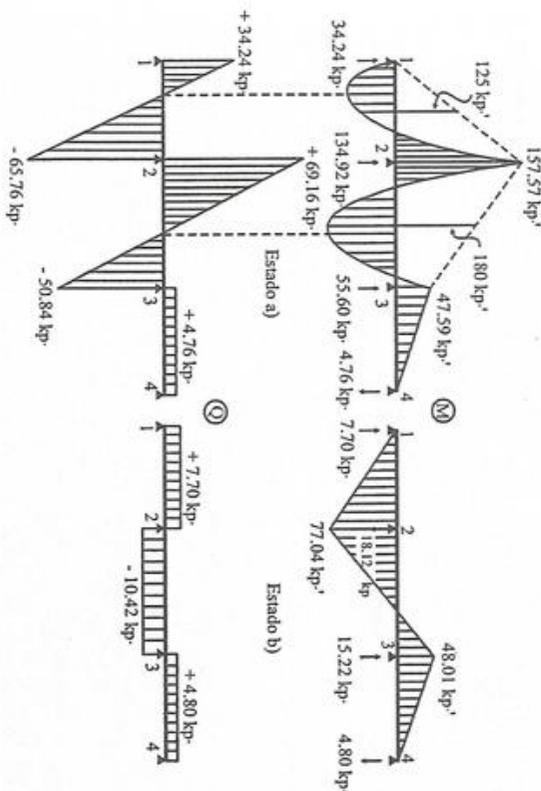
Diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes:-

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 - \frac{0 - 77.04}{10'} = +7.70 Kp$$

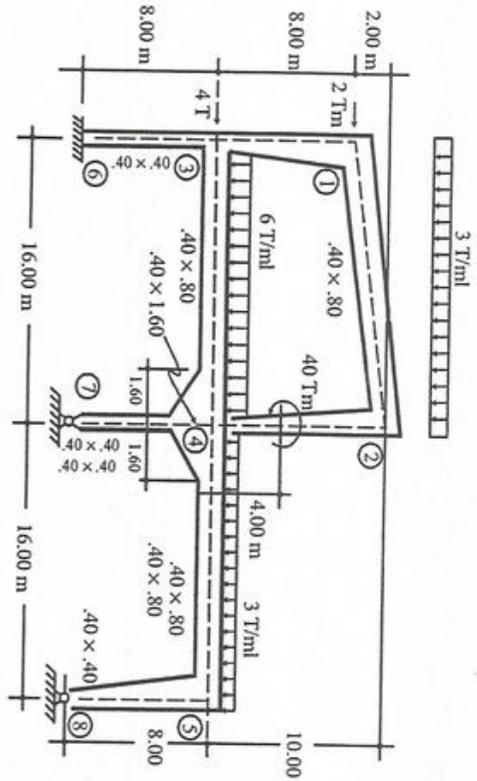
$$Q_{23} = Q_{32} = 0 - \frac{+77.04 + 48.01}{12'} = -10.42 Kp$$

$$Q_{34} = Q_{43} = 0 - \frac{-48.01 + 0}{10'} = +4.80 Kp$$

Diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes:-



PROBLEMA XIII-19.-
Aplicando el Método de Cross, resolver el pórtico que se muestra. las columnas de sección variable tienen dimensiones 0.40x0.40 m en la base, y 0.40x0.80 en su parte superior. Considerando J_c el momento de inercia correspondiente a la sección de 0.40x0.80 m; el de la sección de 0.40x0.40 m es $J_c/8$.



D) Cálculos previos.- Para cada elemento se determinaran los factores de forma que sean necesarios, las rigideces relativas, los factores de transporte y los momentos de empotramiento perfecto.

Elemento 12:

$$l_{12} = \sqrt{(16)^2 + (2)^2} = 16.12 \text{ m}$$

$$\bar{l}_{12} = \frac{J_c}{l_{12}} i_{12} = 16.12$$

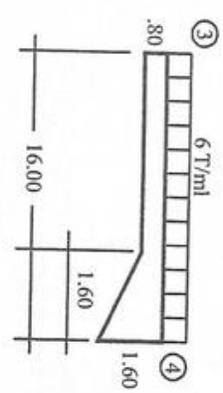
De acuerdo con la expresión (5.N):

$$K_{12} = \frac{4}{l_{12}} = \frac{4}{16.12} = 0.248 = K_{21}$$

De la tabla N°4, estado de carga n° 1:

$$M_{12}^0 = -M_{21}^0 = -\frac{1}{12} \left(3 \frac{T}{ml} \right) (16)^2 = -64.7 \text{ Tm}$$

Elemento 34:-



$$\bar{l}_{34} = \frac{J_c}{l_{c,34}} i_{34} = \frac{J_c}{J_c} (16) = 16 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{1.6}{16} = 0.10 \quad n = \left(\frac{0.80}{1.6} \right)^3 = 0.125$$

De la tabla N°9:

$$\bar{a}_{34} = 4.25 \quad \bar{a}_{43} = 5.14 \quad \bar{b}_{34} = 2.53$$

De la tabla N°21: $\gamma_{34} = 0.889 \quad \gamma_{43} = 1.235$

O sea que:

$$M_{34}^0 = -0.889 \left(\frac{6 \times 16^2}{12} \right) = -113.79 \text{ Tm}$$

$$M_{43}^0 = +1.235 \left(\frac{6 \times 16^2}{12} \right) = +158.08 \text{ Tm}$$

Rigideces:

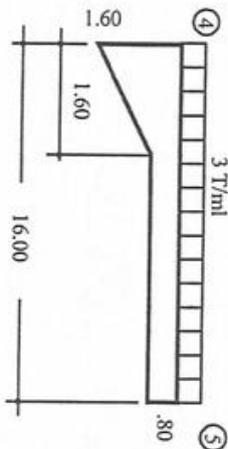
$$K_{34} = \frac{\bar{a}_{34}}{\bar{l}_{34}} = \frac{4.25}{16} = 0.266$$

$$K_{43} = \frac{\bar{a}_{43}}{\bar{l}_{34}} = \frac{5.14}{16} = 0.321$$

Factores de transporte:

$$t_{34} = \frac{\bar{b}_{34}}{\bar{a}_{34}} = \frac{2.53}{4.25} = 0.595 \quad t_{43} = \frac{2.53}{5.14} = 0.492$$

Elemento 45:-



De la tabla N°9:
 $\bar{l}_{45} = 16 \quad \lambda = 1 \quad r = 0.125$

$$\bar{a}_{45} = 5.14 \quad \bar{a}_{54} = 4.25 \quad \bar{b}_{45} = 2.53$$

De la tabla N°21:
Luego, $\gamma_{45} = 1.235 \quad \gamma_{54} = 0.889$

$$M_{45}^0 = -1.235 \left(\frac{3 \times 16^2}{12} \right) = -79.04 \text{ Tm}$$

$$M_{54}^0 = +0.889 \left(\frac{3 \times 16^2}{12} \right) = +56.90 \text{ Tm}$$

$$K_{45} = \frac{5.14}{16} = 0.321 \quad K_{54} = \frac{4.25}{16} = 0.266$$

$$t_{45} = \frac{2.53}{5.14} = 0.492 \quad t_{54} = \frac{2.53}{4.25} = 0.595$$

Elemento 63:-

$$\bar{l}_{63} = \frac{J_c}{I_{63}} l_{63} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \times 8 = 64 \text{ m}$$

Según la expresión (5.N):

$$K_{63} = \frac{4}{I_{63}} = \frac{4}{64} = 0.0625 = K_{36}$$

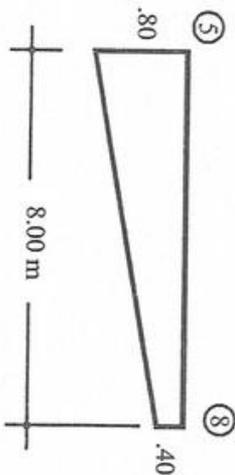
Elemento 74:-

$$\bar{l}_{74} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \times 8 = 64 \text{ m}$$

Según la expresión (6.N):

$$K_{47} = \frac{3}{I_{74}} = \frac{3}{64} = 0.047 \quad K_{74} = 0$$

Elemento 85:-



$$\bar{l}_{85} = \frac{J_c}{I_{85}} l_{85} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \times 8 = 64 \text{ m}$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80} \right)^3 = 0.125$$

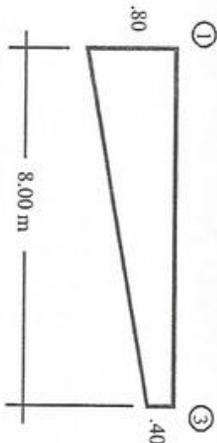
De la tabla N°5 $\bar{A}_{58} = 0.068 \quad \bar{A}_{85} = 0.193$

De la tabla N°9 $\bar{a}_{58} = 19.54 \quad \bar{a}_{85} = 6.87 \quad \bar{b}_{85} = 5.75$

Según la expresión (3.N):

$$K_{58} = \frac{1}{\bar{A}_{58} \bar{l}_{85}} = \frac{1}{0.068 \times 64} = 0.230 \quad K_{85} = 0 \quad t_{58} = t_{85} = 0$$

Elemento 31:-



$$\bar{I}_{13} = \frac{J_c}{I_{c,13}} I_{13} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \times 8.0 = 64 \text{ m}$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80} \right)^3 = 0.125$$

De la tabla N°9:

$$\bar{a}_{13} = 19.54 \quad \bar{a}_{31} = 6.87 \quad \bar{b}_{13} = 5.75$$

O sea que:

$$\bar{c}_{13} = \bar{a}_{13} + \bar{b}_{13} = 19.54 + 5.75 = 25.29$$

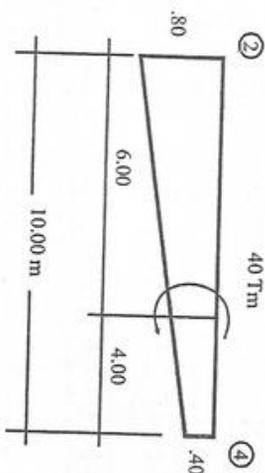
$$\bar{c}_{31} = \bar{a}_{31} + \bar{b}_{13} = 6.87 + 5.75 = 12.62$$

$$K_{13} = \frac{\bar{a}_{13}}{\bar{I}_{13}} = \frac{19.54}{64} = 0.305 \quad K_{31} = \frac{\bar{a}_{31}}{\bar{I}_{13}} = \frac{6.87}{64} = 0.107$$

$$t_{13} = \frac{\bar{b}_{13}}{\bar{a}_{13}} = \frac{5.75}{19.54} = 0.294 \quad t_{31} = \frac{\bar{b}_{31}}{\bar{a}_{31}} = \frac{5.75}{6.87} = 0.837$$

412

Elemento 42:-



$$I_{24} = \frac{J_c}{I_{c,24}} I_{24} = \left(\frac{0.80}{0.40} \right)^3 \times 10.0 = 80 \text{ m}$$

$$\lambda = 1 \quad n = \left(\frac{0.40}{0.80} \right)^3 = 0.125$$

De la tabla N°5:

$$A_{14} = 0.068$$

$$A_{42} = 0.193$$

De la tabla N°9:

$$\bar{a}_{14} = 19.54$$

$$\bar{a}_{42} = 6.87$$

$$\bar{b}_{14} = 5.75$$

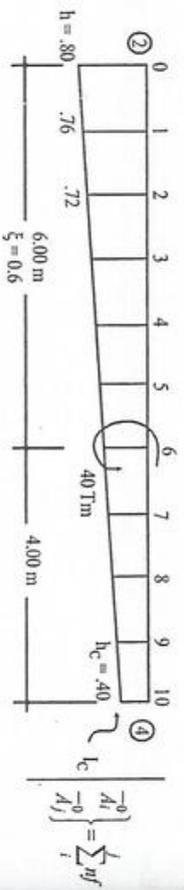
Según la expresión (3.N):

$$K_{14} = \frac{1}{A_{24} \bar{I}_{24}} = \frac{1}{0.068 \times 80} = 0.184$$

$$t_{14} = t_{42} = 0$$

Para calcular los momentos de empotramiento perfecto empleamos la tabla N°29-V del Profesor Van Langendorek, para la ubicación $\xi = 0.6$ para el par, para calcular los factores de carga reducidos de 1ª especie:

413



Secc.	h	$n = \frac{I_c}{I} = \left(\frac{h_c}{h}\right)^3$	A_{24}^0		A_{42}^0	
			f	nf	f	nf
0	.80	(.40/.80) ³ = 0.125	-0.0016	-0.0002	-0.0001	0
1	.76	(.40/.76) ³ = 0.146	-0.0088	-0.0013	-0.0012	-0.0002
2	.72	(.40/.72) ³ = 0.171	-0.0158	-0.0027	-0.0042	-0.0007
3	.68	(.40/.68) ³ = 0.204	-0.0208	-0.0042	-0.0092	-0.0019
4	.64	(.40/.64) ³ = 0.244	-0.0238	-0.0058	-0.0162	-0.0040
5	.60	(.40/.60) ³ = 0.296	-0.0248	-0.0073	-0.0252	-0.0075
6	.56	(.40/.56) ³ = 0.364	-0.0055	-0.0020	-0.0045	-0.0016
7	.52	(.40/.52) ³ = 0.455	+0.0092	+0.0042	+0.0208	+0.0095
8	.48	(.40/.48) ³ = 0.579	+0.0042	+0.0024	+0.0158	+0.0091
9	.44	(.40/.44) ³ = 0.751	+0.0012	+0.0009	+0.0088	+0.0066
10	.40	1.0	+0.0001	+0.0001	+0.0016	+0.0016
			$\Sigma =$			

O sea que: $\bar{A}_{24}^0 = -0.0159$ γ $\bar{A}_{42}^0 = +0.0109$

El momento de empujamiento perfecto en el extremo 2 es, según la expresión (10.N):

$$M_{24}^{i0} = -M \frac{\bar{A}_{24}^0}{A_{24}} = -(-40 \text{ Tm}) \frac{-0.0159}{0.068} = -9.35 \text{ Tm}$$

Coefficientes de distribución:-

nudo 1 $\left\{ \begin{array}{l} 13: 0.305 \div 0.553 = 0.552 \\ 12: \frac{0.248}{0.553} = 0.448 \end{array} \right.$

nudo 2 $\left\{ \begin{array}{l} 24: 0.184 \div 0.432 = 0.426 \\ 21: \frac{0.248}{0.432} = 0.574 \end{array} \right.$

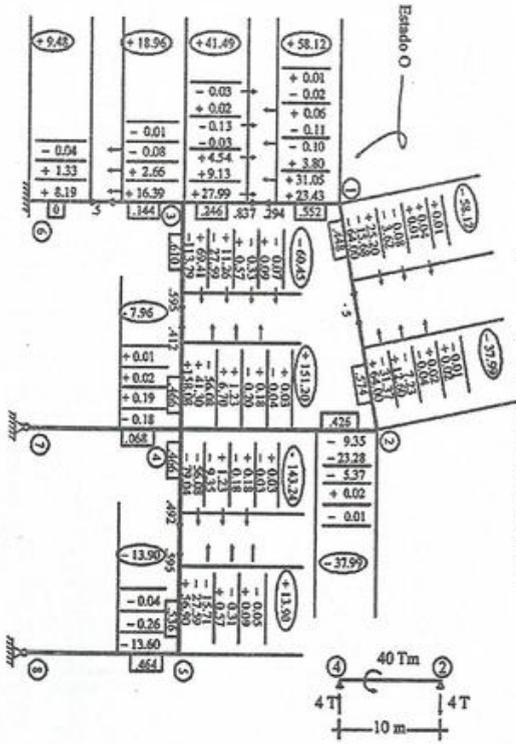
$\Sigma K = 0.553$

nudo 3 $\left\{ \begin{array}{l} 36: 0.063 \div 0.436 = 0.144 \\ 31: 0.107 \div 0.436 = 0.246 \\ 34: \frac{0.266}{0.436} = 0.610 \end{array} \right.$

nudo 4 $\left\{ \begin{array}{l} 47: 0.047 \div 0.689 = 0.068 \\ 43: 0.321 \div 0.689 = 0.466 \\ 45: \frac{0.321}{0.689} = 0.466 \end{array} \right.$

nudo 5 $\left\{ \begin{array}{l} 58: 0.230 \div 0.496 = 0.464 \\ 54: \frac{0.266}{0.496} = 0.536 \end{array} \right.$

II) Distribución considerando que no hay desplazamiento de nudos:



Fuerzas cortantes en las bases de las columnas:

$$Q_{31}^{(0)} = V_{31} - \frac{1}{h} (M_{31}^{(0)} + M_{13}^{(0)}) = 0 - \frac{1}{8} (+41.49 + 58.12) = -12.451 \text{ T}$$

$$Q_{42}^{(0)} = V_{42} - \frac{1}{h} (M_{42}^{(0)} + M_{24}^{(0)}) = +4 - \frac{1}{10} (0 - 37.99) = +7.799 \text{ T}$$

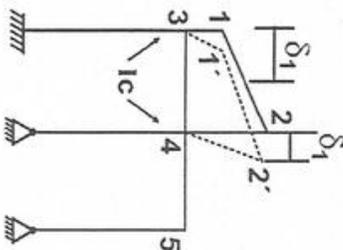
$$Q_{63}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8} (+9.48 + 18.96) = -3.555 \text{ T}$$

$$Q_{74}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8}(0 - 7.96) = +0.995 T$$

$$Q_{85}^{(0)} = 0 - \frac{1}{8}(0 - 13.90) = +1.738 T$$

III) Distribución debido a los desplazamientos:-

1) Desplazamiento del cuerpo superior:



$$M_{13}^0 = -c_{13} \frac{\delta_1}{h} = -\left(\bar{c}_{13} \frac{\delta_1}{8}\right) \frac{\delta_1}{8} = \left(\frac{EI_c}{64}\right) (-\bar{c}_{13})$$

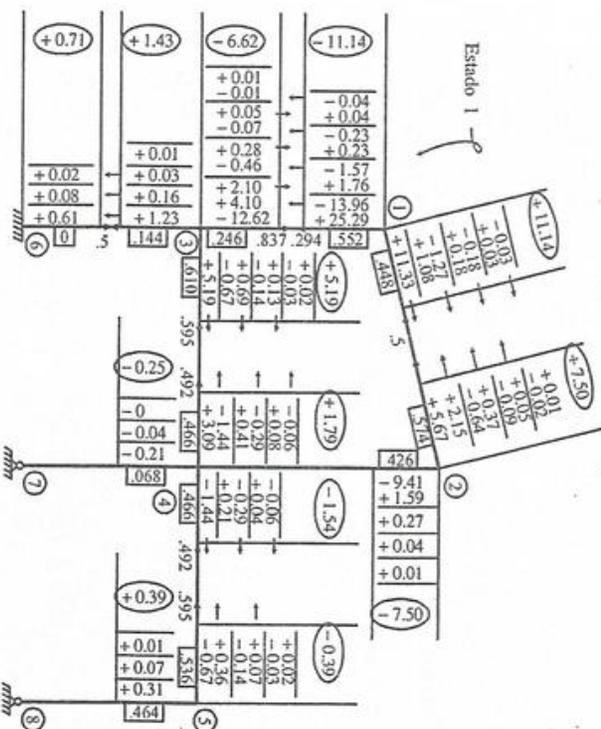
$$M_{31}^0 = -c_{31} \frac{\delta_1}{h} = -\left(\bar{c}_{31} \frac{\delta_1}{8}\right) \frac{\delta_1}{8} = \left(\frac{EI_c}{64}\right) (-\bar{c}_{31})$$

$$M_{24}^0 = -\frac{EI_c \psi}{h} = -\frac{EI_c}{10} \frac{\delta_1}{10A_{24}} = \left(\frac{EI_c}{64}\right) \left(-\frac{0.64}{A_{24}}\right)$$

1) luego,

$$\left. \begin{aligned} M_{13}^0 &= -25.29 x_1 \\ M_{31}^0 &= -12.62 x_1 \\ M_{24}^0 &= -\frac{0.64}{0.068} x_1 = -9.41 x_1 \end{aligned} \right\}$$

Hacemos la distribución con los momentos iniciales -25.29, -12.62 y -9.41, proporcionales en el factor x_1 a los verdaderos valores iniciales:



Fuerzas cortantes en las bases de las columnas:

$$Q_{31}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8}(-6.62 - 11.14) \right] x_1 = +2.220 x_1$$

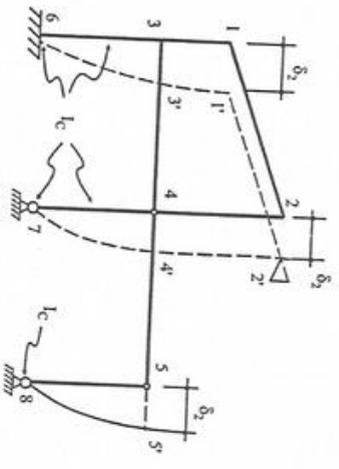
$$Q_{42}^{(1)} = \left[-\frac{1}{10}(-7.50) \right] x_1 = +0.750 x_1$$

$$Q_{63}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (+0.71 + 1.43) \right] x_1 = -0.268 x_1$$

$$Q_{74}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (-0.25) \right] x_1 = +0.031 x_1$$

$$Q_{85}^{(1)} = \left[-\frac{1}{8} (+0.39) \right] x_1 = -0.049 x_1$$

2) Desplazamiento del cuerpo inferior:



$$M_{36}^0 = M_{63}^0 = -6 \frac{E I_c}{h} \psi = \left(\frac{E I_c}{8^2} \right) (-6)$$

$$M_{43}^0 = -3 \frac{E I_c}{h} \psi = \left(\frac{E I_c}{8^2} \right) (-3)$$

$$M_{58}^0 = -\frac{E I_c}{h} \frac{1}{A_{58}} \psi = \left(\frac{E I_c}{8^2} \right) \left(-\frac{1}{A_{58}} \right) = \left(\frac{E I_c}{8^2} \right) (-14.71)$$

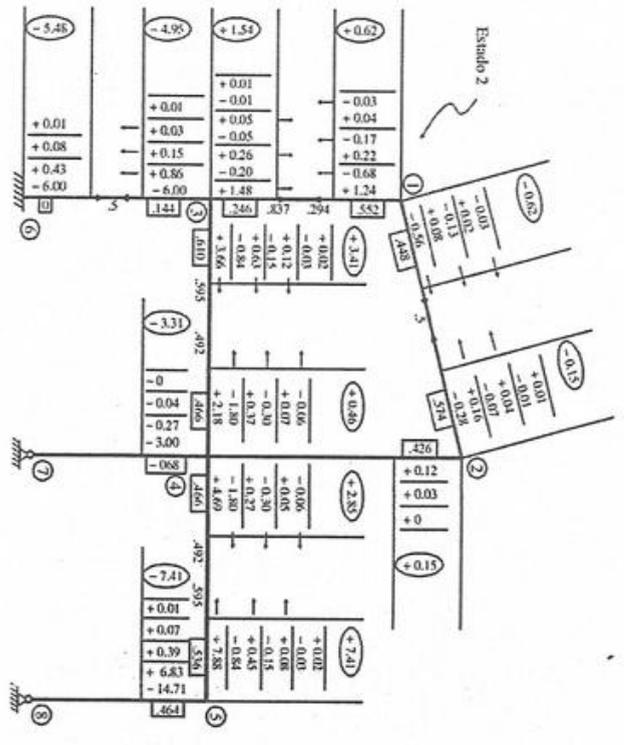
luego,

$$M_{36}^0 = M_{63}^0 = -6 x_2$$

$$M_{43}^0 = -3.0 x_2$$

$$M_{58}^0 = -14.71 x_2$$

Hacemos la distribución en los momentos iniciales -6.0, -3.0 y -14.71, proporcionales en el factor x_2 a los verdaderos valores iniciales:



Fuerzas cortantes en las bases de las columnas:

$$Q_{31}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8}(+1.54 + 0.62) \right] x_2 = -0.270 x_2$$

$$Q_{42}^{(2)} = \left[-\frac{1}{10}(+0.15) \right] x_2 = -0.015 x_2$$

$$Q_{63}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8}(-5.48 - 4.95) \right] x_2 = +1.304 x_2$$

$$Q_{74}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8}(-3.31) \right] x_2 = +0.414 x_2$$

$$Q_{85}^{(2)} = \left[-\frac{1}{8}(-7.41) \right] x_2 = +0.926 x_2$$

IV) Ecuaciones de compatibilidad:-

Debemos plantear dos ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas x_1 y x_2 (o sea de los desplazamientos δ_1 y δ_2). La situación real o final de la estructura es la superposición de los estados 0, 1 y 2. En ella deben cumplirse las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

1) $\sum_{(6-7-8)} F_h = 0$ La suma de las fuerzas horizontales hasta el nivel 6-7-8 debe ser igual a cero:

$$\left[Q_{63}^{(0)} + Q_{74}^{(0)} + Q_{85}^{(0)} \right] + \left[Q_{63}^{(1)} + Q_{74}^{(1)} + Q_{85}^{(1)} \right] + \left[Q_{63}^{(2)} + Q_{74}^{(2)} + Q_{85}^{(2)} \right] - 6 = 0$$

O sea:

$$\begin{aligned} & [-3.555 + 0.995 + 1.738] + [-0.268x_1 + 0.031x_1 - 0.049x_1] \\ & + [+1.304x_2 + 0.414x_2 + 0.926x_2] - 6 = 0 \\ & -0.268x_1 + 2.644x_2 - 6.822 = 0 \quad \dots (i) \end{aligned}$$

2) $\sum_{(3-4)} F_h = 0$

$$\left[Q_{31}^{(0)} + Q_{42}^{(0)} \right] + \left[Q_{31}^{(1)} + Q_{42}^{(1)} \right] + \left[Q_{31}^{(2)} + Q_{42}^{(2)} \right] - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} & [-12.451 + 7.799] + [+2.220x_1 + 0.750x_1] + [-0.270x_2 - 0.015x_2] \\ & - 2 = 0 \\ & \therefore +2.970x_1 - 0.285x_2 - 6.652 = 0 \quad \dots (ii) \end{aligned}$$

Resolviendo entre las ec. (i) y (ii) obtenemos:

$$x_1 = +2.514 \quad x_2 = +2.852$$

V) Momentos finales:-

$$M_{13} = -M_{12} = +58.12 + 2.514(-11.14) + 2.852(+0.62) = +31.88 \text{ Tm}$$

$$M_{24} = -M_{21} = -37.99 + 2.514(-7.50) + 2.852(+0.15) = -56.42 \text{ Tm}$$

$$M_{31} = +41.49 + 2.514(-6.62) + 2.852(+1.54) = +29.23 \text{ Tm}$$

$$M_{34} = -60.45 + 2.514(+5.19) + 2.852(+3.41) = -37.67 \text{ Tm}$$

$$M_{56} = +18.96 + 2.514(+1.43) + 2.852(-4.95) = +8.44 \text{ Tm}$$

$$M_{43} = +151.20 + 2.514(1.79) + 2.852(+0.46) = +157.01 \text{ Tm}$$

$$M_{45} = -143.24 + 2.514(-1.54) + 2.852(+2.85) = -138.98 \text{ Tm}$$

$$M_{47} = -7.96 + 2.514(-0.25) + 2.852(-3.31) = -18.03 \text{ Tm}$$

$$M_{58} = -M_{54} = -13.90 + 2.514(+0.39) + 2.852(-7.41) = -34.05 \text{ Tm}$$

$$M_{63} = +9.48 + 2.514(+0.71) + 2.852(-5.48) = -4.37 \text{ Tm}$$

VD Esfuerzos cortantes: $-Q_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{l_{ij}}(M_{ij} + M_{ji})$

$$Q_{63} = Q_{36} = 0 - \frac{1}{8}(-4.37 + 8.44) = -0.51 T$$

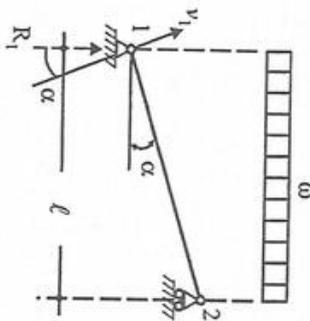
$$Q_{74} = Q_{47} = 0 - \frac{1}{8}(-18.03) = +2.25 T$$

$$Q_{58} = Q_{85} = 0 - \frac{1}{8}(-34.05) = +4.26 T$$

$$Q_{31} = Q_{13} = 0 - \frac{1}{8}(+29.23 + 31.88) = -7.64 T$$

$$Q_{42} = Q_{24} = +4 - \frac{1}{10}(-56.42) = +9.64 T$$

$$Q_{12} = +23.82 - \frac{1}{16.12}(-31.88 + 56.42) = +22.30 T$$



$$R_1 = \frac{1}{2} \omega \ell$$

$$v_1 = R_1 \cos \alpha$$

$$\therefore v_1 = +\frac{1}{2}(37/\text{ml})(16.00) \times \frac{16.00}{16.12} = +23.82 T$$

$$Q_{21} = -23.82 - \frac{1}{16.12}(-31.88 + 56.42) = -25.34 T$$

$$Q_{34} = +48 - \frac{1}{16}(-37.67 + 157.01) = +40.54 T$$

$$Q_{43} = -48 - \frac{1}{16}(-37.67 + 157.01) = -55.46 T$$

$$Q_{45} = +24 - \frac{1}{16}(-138.98 + 34.05) = +30.56 T$$

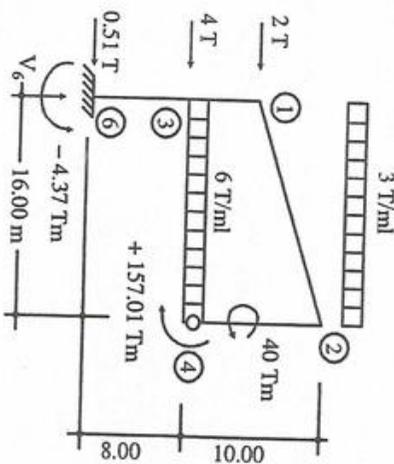
$$Q_{54} = -24 - \frac{1}{16}(-138.98 + 34.05) = -17.44 T$$

VIII

Reacciones en los apoyos: - Según los resultados obtenidos al calcular las fuerzas cortantes, las componentes horizontales de las reacciones en los apoyos son:

$$H_6 = 0.51 T \rightarrow \quad H_7 = 2.25 T \leftarrow \quad H_8 = 4.26 T \leftarrow$$

Para calcular las componentes verticales tenemos:



i) Por el valor del esfuerzo cortante en el tramo 4-5:

$$V_8 = 17.44 \text{ T} \uparrow$$

ii) Aplicamos al cuerpo libre 1-2-4-3-6 la ecuación de equilibrio $\sum_4 M = 0$:

$$+157.01 - 40 - 4.37 - 0.51(8) + 2(8) + V_6(16) - (3T/ml \times 16m + 6T/ml \times 16)8 = 0$$

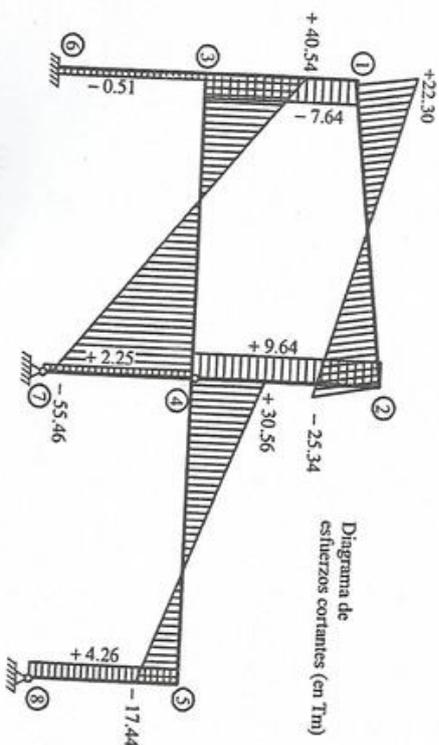
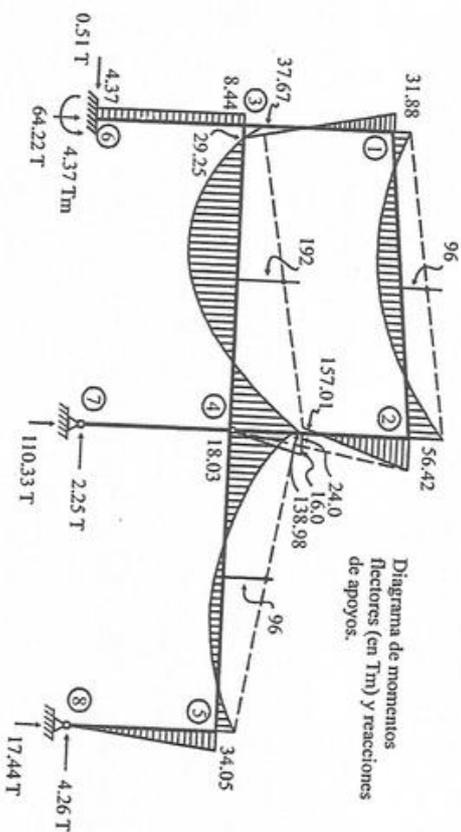
$$\therefore V_6 = 64.22 \text{ T} \uparrow$$

iii) Aplicando a toda la estructura la ecuación de equilibrio $\sum_8 M = 0$:

$$2T(16) + 4T(8) - 40 - 4.37 + 64.22T(32) - (3T/ml \times 16m + 6T/ml \times 16)24 - (3T/ml \times 16m)8 + V_7(16) = 0$$

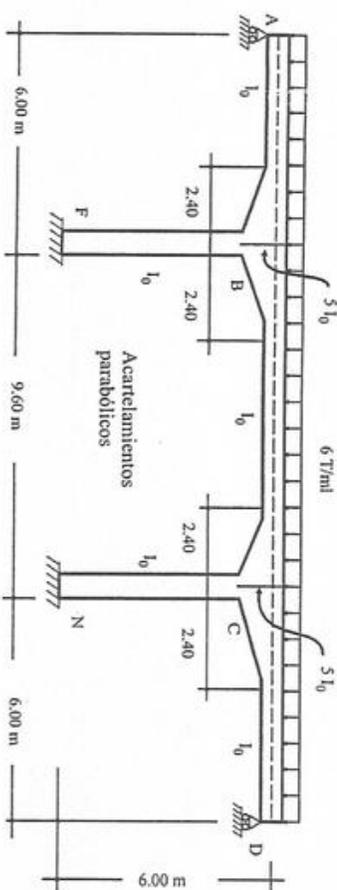
$$\therefore V_7 = 110.33 \text{ T} \uparrow$$

VIII) Diagrama de momentos flectores y de esfuerzos cortantes:-



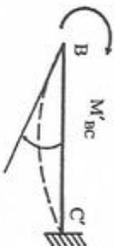
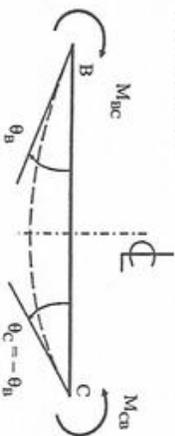
PROBLEMA XIII-20.-(UNI, 19-MAR-970)

Dibujar el diagrama de momentos flectores y el diagrama de fuerzas cortantes para la estructura que se muestra en la figura.



La estructura es simétrica y esta simétricamente cargada. Para hacer la determinación de los momentos flectores por el método de Cross podemos aplicar un criterio igual al del problema N-15, adaptado a este caso de secciones variables.

Para el tramo BC, aplicando la ec. (1.M):



$$M_{bc} = \left(\frac{EI_c}{l} \right)_{bc} (\bar{a}_{bc}\theta_B + \bar{b}_{bc}\theta_C) + M_{bc}^0$$

$$= \left(\frac{EI_c}{l} \right)_{bc} (\bar{a}_{bc} - \bar{b}_{bc})\theta_B + M_{bc}^0 \dots (1)$$

Considerando el tramo BC' perfectamente empotrado en C' (en el que $\theta_{C'} = 0$), aplicando la misma ec. (1.M):

$$M'_{bc} = \left(\frac{EI_c}{l} \right)_{bc} (\bar{a}_{bc}\theta_B) + M_{bc}^0 \dots (ii)$$

En (i) y (ii) se ha considerado el momento de empotramiento perfecto M_{bc}^0 que corresponde al tramo real. Para que sea suficiente analizar la mitad de la estructura dada, será necesario que $M'_{bc} = M_{bc}$; o sea, igualando entre sí (i) y (i):

$$\left(\frac{EI_c}{l} \right)_{bc} (\bar{a}_{bc}\theta_B) = \left(\frac{EI_c}{l} \right)_{bc} (\bar{a}_{bc} - \bar{b}_{bc})\theta_B$$

De donde:

$$\frac{\bar{a}_{bc}}{l_{bc'}} = \frac{\bar{a}_{bc} - \bar{b}_{bc}}{l_{bc} - l_{bc}}$$

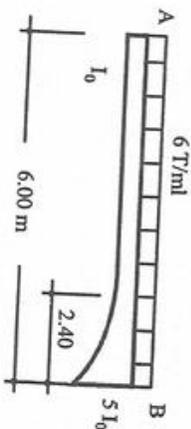
Luego, según (2.N):

$$K_{bc} = \frac{\bar{a}_{bc} - \bar{b}_{bc}}{l_{bc}} \dots (iii)$$

Consideramos J_c el momento de inercia I_0 .

Cálculos previos:-

Elemento AB:-



$$\bar{l}_{AB} = 6.0 \text{ m} \quad \lambda = \frac{2.4}{6.0} = 0.40 \quad n = \frac{l_0}{5l_0} = 0.20$$

Tabla N°6: $\bar{A}_{BA} = 0.213$

Tabla N°10: $\bar{a}_{AB} = 4.49$

Tabla N°22: $\gamma_{AB} = 0.823$

$\bar{a}_{BA} = 6.95$

$\bar{b}_{AB} = 3.19$

$\gamma_{BA} = 1.405$

Según la expresión (4.N):

$$K_{BA} = \frac{1}{\bar{A}_{BA} \bar{l}_{AB}} = \frac{1}{0.213 \times 6} = 0.7825$$

Según (8.N):

$$t_{BA} = \frac{\bar{b}_{AB}}{\bar{a}_{AB}} = \frac{3.19}{4.49} = 0.71$$

Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$M_{AB}^0 = -\gamma_{AB} \left(\frac{\omega l^2}{12} \right) = -0.823 \left(\frac{6T/ml \times 6^2}{12} \right) = -14.814 \text{ Tm}$$

$$M_{BA}^0 = +\gamma_{BA} \left(\frac{\omega l^2}{12} \right) = +1.405 \left(\frac{6T/ml \times 6^2}{12} \right) = +25.290 \text{ Tm}$$

Luego, según (9.N):

$$M'_{BA} = +25.290 - 0.71(-14.814) = +35.808 \text{ Tm}$$

Elemento BF:-

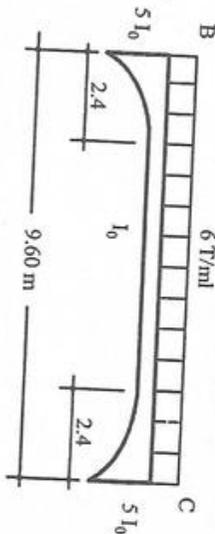
$$\bar{l}_{BF} = 6.0 \text{ m}$$

Según (5.N):

$$K_{BF} = \frac{4}{\bar{l}_{BF}} = \frac{4}{6} = 0.6667$$

428

Elemento BC:-



$$\bar{l}_{BC} = 9.60 \text{ m} \quad \lambda = \frac{2.4}{9.60} = 0.25 \quad n = 0.20$$

Tabla N°12: $\bar{a}_{BC} = 6.43$

$\bar{b}_{BC} = 3.95$

Tabla N°24: $\gamma = 1.142$

Según (iii):

$$K_{BC} = \frac{6.43 - 3.95}{9.60} = 0.2583$$

Los momentos de empotramiento perfecto son:

$$M_{BC}^0 = -M_{CB}^0 = -\gamma \left(\frac{\omega l^2}{12} \right) = -1.142 \left(\frac{6T/ml \times 9.60^2}{12} \right) = -52.623 \text{ Tm}$$

Factores de distribución en el nudo B:

$$BF: 0.6667 \div 1.7075 = 0.39$$

$$BA: 0.7825 \div 1.7075 = 0.46$$

$$BC: \frac{0.2583}{1.7075} = 0.15$$

$$\sum K = 1.7075 \quad \sum d = 1.00$$

429

Distribución:-



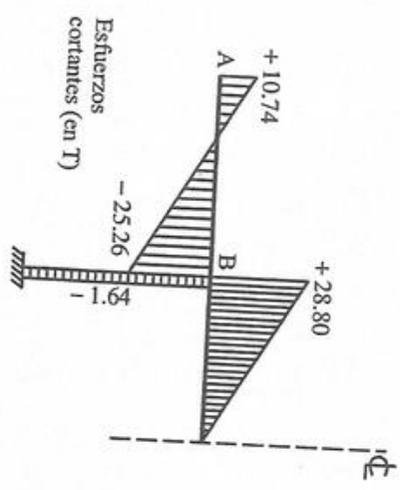
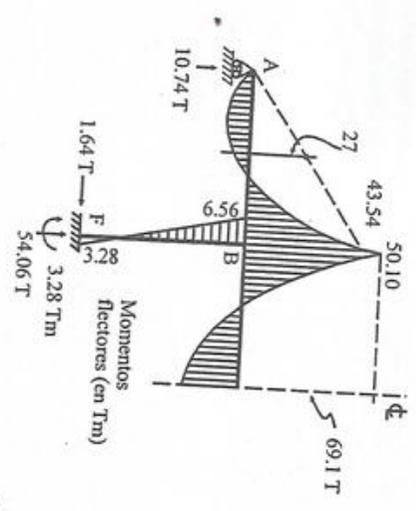
Esfuerzos cortantes:-

$$Q_{AB} = V_{AB} - \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) = +\frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{6}(+43.54) = +18 - 7.26 = +10.74 \text{ T}$$

$$Q_{BA} = V_{BA} - \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) = -\frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{6}(+43.54) = -18 - 7.26 = -25.26 \text{ T}$$

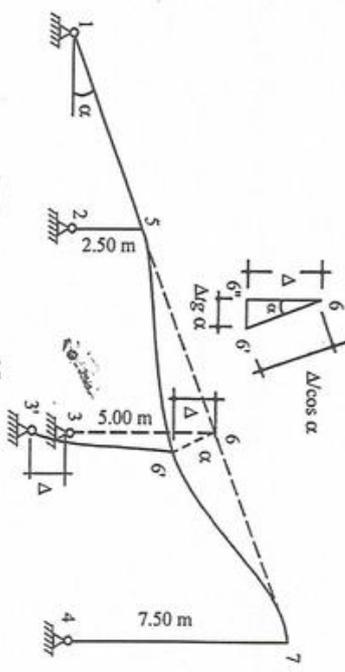
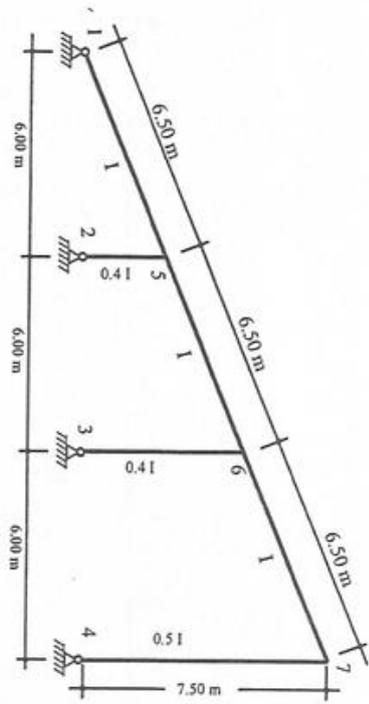
$$Q_{BC} = V_{BC} - \frac{1}{l}(M_{BC} + M_{CB}) = +\frac{1}{2} \times 6 \times 9.60 - 0 = +28.80 \text{ T}$$

$$Q_{CB} = Q_{BF} = 0 - \frac{1}{l}(M_{FB} + M_{BF}) = -\frac{1}{6}(+3.28 + 6.56) = -1.64 \text{ T}$$



PROBLEMA XIII-21.-(UNI)

El apoyo 3 sufre un asentamiento de 2cm. aplicando el Método de Cross determinar la distribución de los momentos flectores. Considerar $EI = 9150 \text{ Tm}^2$.



Al descender el apoyo 3 a 3', el nudo 6 también descenderá, ubicándose en 6' perpendicularmente a 5-6-7 y a 3-6. Las desviaciones relativas entre los extremos son:

Para los momentos 56 y 67: $\overline{66'} = \Delta / \cos \alpha = \frac{6.5}{6} \Delta$
 Para el elemento 63: $\overline{6''6'} = \Delta \tan \alpha = \frac{2.5}{6} \Delta$
 432

Momentos de empotramiento perfecto iniciales:

$$M_{56}^0 = M_{65}^0 = -M_{67}^0 = -M_{76}^0 = -6 \frac{EI(\overline{66'})}{(6.5)^2} = -6 \times \frac{9150 \left(\frac{6.5}{6} \times 0.02\right)}{(6.5)^2} = -28.18 \text{ Tm}$$

$$M_{63}^0 = -3 \frac{EI(\overline{6''6'})}{(5.0)^2} = -3 \times \frac{9150 \left(\frac{2.5}{6} \times 0.02\right)}{(5.0)^2} = -3.66 \text{ Tm}$$

Rigideces de los elementos:- Considerando para I un valor relativo igual a 10, tenemos los siguientes valores de rigideces relativas:

$$K_{15} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{6.50} = 1.154 \quad K_{25} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{2.50} = 1.2$$

$$K_{56} = \frac{10}{6.50} = 1.538 = K_{67} \quad K_{36} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5.0} = 0.6$$

$$K_{47} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7.50} = 0.5$$

Coefficientes de distribución:

$$\left. \begin{array}{l} 52: 1.2 + 3.892 = 0.308 \\ 51: 1.154 + 3.892 = 0.297 \\ 56: \frac{1.538 + 3.892}{3.892} = 0.395 \\ \sum K = 3.892 \end{array} \right\} \sum K = 1.0 \quad \left. \begin{array}{l} 63: 0.6 + 3.676 = 0.163 \\ 65: 1.538 + 3.676 = 0.419 \\ 67: \frac{1.538 + 3.676}{3.676} = 0.418 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 74: 0.5 + 2.038 = 0.245 \\ 776: \frac{1.538 + 2.038}{2.038} = 0.755 \end{array} \right\}$$

Distribución:-

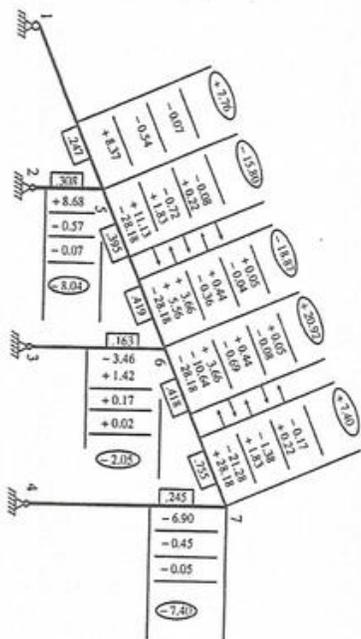
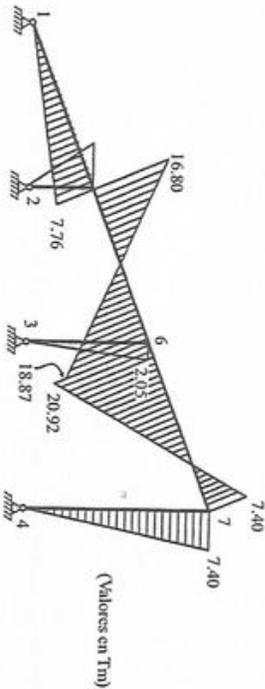


Diagrama de distribución de momentos flectores:-



PROBLEMA XIII-22.-

Con los resultados obtenidos en el problema XIII-21, determinar la distribución de esfuerzos cortantes y las reacciones en los apoyos.

Los esfuerzos cortantes en los extremos de los elementos, son:

$$Q_{15} = Q_{51} = 0 - \frac{1}{6.50} (+7.76) = -1.19 T$$

$$Q_{56} = Q_{65} = 0 - \frac{1}{6.50} (-15.80 - 18.87) = +5.33 T$$

434

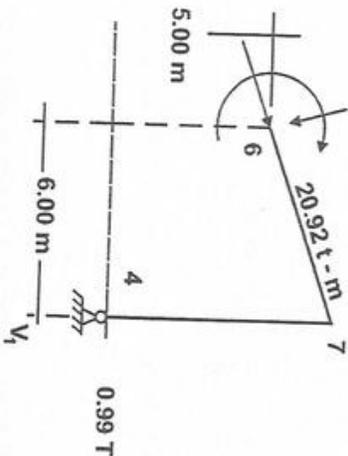
$$Q_{67} = Q_{76} = 0 - \frac{1}{6.50} (+20.92 + 7.40) = -4.36 T$$

$$Q_{25} = Q_{52} = 0 - \frac{1}{2.50} (+8.04) = -3.22 T$$

$$Q_{36} = Q_{63} = 0 - \frac{1}{5.00} (-2.05) = +0.41 T$$

$$Q_{47} = Q_{74} = 0 - \frac{1}{7.50} (-7.40) = +0.99 T$$

En el cuerpo libre 6-7-4, tomando momentos respecto de 6:



$$\sum_6 M = 0: +20.92 + 0.99(5.0) - V_4(6.0) = 0 \rightarrow V_4 = 4.31 T \uparrow$$

En forma similar para el cuerpo libre 5-6-7-3-4, tomando momentos respecto de 5:

$$\sum_5 M = 0: -15.80 + (0.41 + 0.99)(2.50) - 4.31(12.0) + 1 V_3(6.0) = 0 \rightarrow V_3 = 10.67 T \uparrow$$

Aplicando en 1 la ecuación de equilibrio del conjunto:

$$\sum_1 M = 0: \uparrow V_2(6.0) - 10.67(12.0) + 4.31(18.0) = 0 \rightarrow V_2 = 8.41 T \uparrow$$

435

Para toda la estructura:

$$\sum F_v = 0: -V_1 + 8.41 - 10.67 + 0.431 = 0 \rightarrow V_1 = 2.05 T \downarrow$$

$$\sum F_h = 0: -H_1 + 3.22 - 0.41 - 0.99 = 0 \rightarrow H_1 = 1.82 T \leftarrow$$

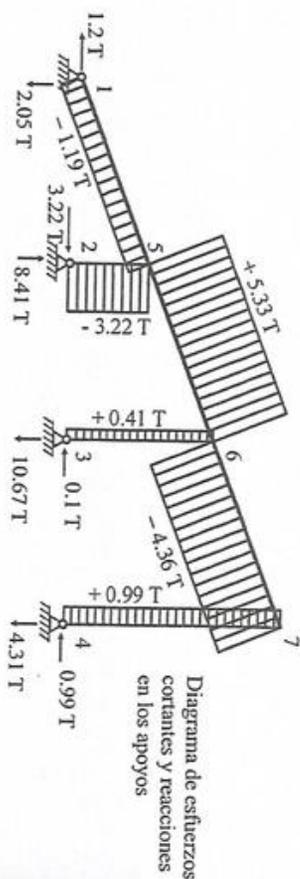


Diagrama de esfuerzos cortantes y reacciones en los apoyos.

CAPÍTULO XIV

CALCULO MATRICIAL

Introducción

Los métodos clásicos de análisis estructurales desarrollados a fines del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática. Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se los aplicaba en casos prácticos, y en aquella época, esto era un gran defecto.

Por esta razón sucesivas generaciones de ingenieros se dedicaron a tratar de reducir el conjunto de cálculos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo (Método de Cross), pero la mayoría de las mismas eran aplicable sólo a determinados tipos de estructuras.

La principal objeción a los primeros métodos de análisis fue que los mismos conducían a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente. Con los computadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tiene ahora sentido, mientras que la generalidad de los métodos permanece. Esto explica por qué los métodos matriciales deben en su tratamiento básico de las estructuras más al siglo XIX que al XX.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro.

Para toda la estructura:

$$\sum F_v = 0: -V_1 + 8.41 - 10.67 + 0.431 = 0 \rightarrow V_1 = 2.05 T \downarrow$$

$$\sum F_h = 0: -H_1 + 3.22 - 0.41 - 0.99 = 0 \rightarrow H_1 = 1.82 T \leftarrow$$

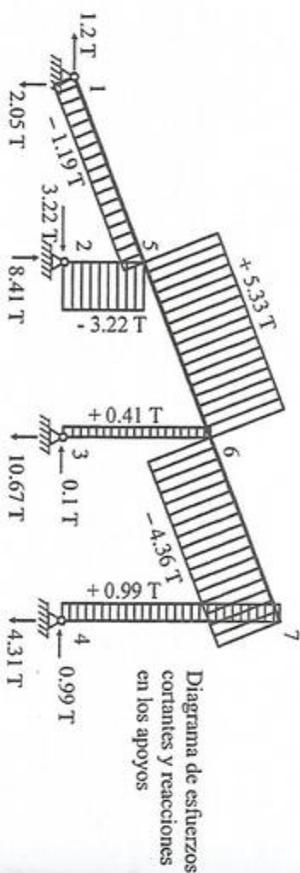


Diagrama de esfuerzos cortantes y reacciones en los apoyos.

CAPÍTULO XIV

CALCULO MATRICIAL

Introducción

Los métodos clásicos de análisis estructurales desarrollados a fines del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática. Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se los aplicaba en casos prácticos, y en aquella época, esto era un gran defecto.

Por esta razón sucesivas generaciones de ingenieros se dedicaron a tratar de reducir el conjunto de cálculos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo (Método de Cross), pero la mayoría de las mismas eran aplicable sólo a determinados tipos de estructuras.

La principal objeción a los primeros métodos de análisis fue que los mismos conducían a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente. Con los computadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tiene ahora sentido, mientras que la generalidad de los métodos permanece. Esto explica por qué los métodos matriciales deben en su tratamiento básico de las estructuras más al siglo XIX que al XX.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro.

Desde el punto de vista práctico, proporciona un sistema apropiado de análisis de estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación.

En contraste con estas ventajas, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático.

Las virtudes del cálculo con computadora radican en la eliminación de la preocupación por las operaciones rutinarias, el ingenio necesario para preparar el modelo con que se pretende representar la realidad y el análisis crítico de los resultados.

Se debe ser consciente que sin un modelo adecuado o sin una interpretación final, el refinamiento en el análisis carece de sentido.

Método de la Rigidez

Hipótesis:

Estructura lineal- Todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas-
Pequeñas deformaciones (ecuaciones de equilibrio en la estructura no distorsionada). Las barras son rectas y de sección constante.

Para estudiar una estructura por el método de la rigidez, al igual que en cualquier otro problema elástico, disponemos de tres conjuntos de ecuaciones que deben cumplirse.

- Ecuaciones de compatibilidad
- Ecuaciones constitutivas
- Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de compatibilidad relacionan las deformaciones de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones constitutivas, relacionamos las fuerzas en los extremos de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas últimas relaciones en

438

las ecuaciones de equilibrio se obtiene un conjunto de ecuaciones de fuerzas nodales en función de desplazamientos nodales, que pueden ser consideradas como Ecuaciones de Equilibrio de la estructura en función de desplazamientos. La resolución de este sistema de ecuaciones nos permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales), a partir de los cuales se obtienen las solicitaciones de las barras de la estructura, así como las reacciones.

Cuando se van a calcular las relaciones esfuerzos de extremo de barra - desplazamientos, es natural escoger un sistema de coordenadas que haga estas ecuaciones lo más sencillas posible.

Tomaremos por lo tanto como eje x el que coincide con el eje geométrico de la pieza y los ejes Y y Z coincidentes con los ejes principales de la sección transversal.

Tal sistema pertenece a la barra, y no depende de la orientación de la misma en la estructura y lo denominaremos sistemas de ejes locales.

Por el contrario, cuando las piezas se unen entre sí para formar la estructura, es necesario tener un sistema de coordenadas común para todos los movimientos y esfuerzos de extremo de barras para poder aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad. A dicho sistema lo denominaremos sistema de ejes globales.

Dichos esfuerzos de extremos de barras y desplazamientos dependerán del tipo de estructura que estamos resolviendo, para barras de:

- a) Reticulado Plano: tendremos dos desplazamientos por nudo
- b) Reticulado Espacial: tres desplazamientos por nudo.
En ambos casos sólo tendremos esfuerzos normales.
- c) Pórtico Plano: tres desplazamientos por nudo. (una rotación en el plano del pórtico y dos traslaciones), como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial, un esfuerzo de corte y un momento flector.

439

d) Pórtico Espacial: seis desplazamientos por nudo, tres traslaciones y tres rotaciones. Como

solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial, dos esfuerzos de corte dos momentos flectores y un momento torsor.

e) Emparillado de vigas: tres desplazamientos nodales (un corrimiento normal al plano de la grilla) y dos rotaciones alrededor de los ejes contenidos en el plano mencionado). Los esfuerzos son un cortante y dos momentos (un torsor y un flector).

Método de la Rigidez

Una de las características más importantes del método de la rigidez es la forma en que las propiedades elásticas de las piezas, y su orientación dentro de la estructura, son introducidas en el cálculo antes de que se efectúe ninguna consideración sobre el equilibrio o la compatibilidad de los nudos.

Esto nos permite establecer relaciones entre las fuerzas de extremo de barras y los desplazamientos de nudo. Estas relaciones expresadas en forma matricial se denominan o conforma la matriz de rigidez de barra.

Al considerar la interrelación de cada barra con las demás se obtiene un sistema global de ecuaciones que define el comportamiento de toda la estructura y nos conduce a la solución del problema.

Podemos considerar seis etapas fundamentales en la solución de un problema:

- 1) Identificación estructural
- 2) Cálculo de la matriz de rigidez de barra y del vector de cargas nodales equivalentes
- 3) Cálculo de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de la estructura.
- 4) Introducción de las condiciones de borde
- 5) Solución del sistema de ecuaciones
- 6) Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones nodales.

440

Identificación estructural.

Esta etapa consiste en definir a través de números y datos las barras de la estructura.

a) Definir un sistema de ejes globales para la estructura. Las coordenadas de los nudos se refieren a dicho sistema.

b) Conectividad de los elementos, identificando para cada barra el nudo inicial y el final. A cada barra está asociado un sistema de ejes locales al cual se refieren todas las dimensiones y características de la barra. El mismo queda definido automáticamente por el orden establecido para la numeración de los nudos de la barra.

El eje x local coincide con el eje geométrico de la barra, siendo el sentido positivo el que va del nudo inicial (nudo de menor numeración) al final (nudo de mayor numeración). Los otros ejes locales deberán coincidir con los ejes principales de Inercia de la sección transversal de la barra formando un triédro directo.

c) Propiedades de la sección transversal de cada barra. Dependiendo del tipo de estructura (reticulado, pórtico plano, pórtico espacial, emparillado) se debe dar el área de la sección transversal, los momentos de inercia en relación a los ejes principales y la inercia a la torsión.

d) Propiedades del material. Se debe indicar, para cada barra, el módulo de elasticidad longitudinal y/o el módulo de elasticidad transversal.

e) Especificación de los vínculos: se debe indicar el nombre del nudo que tiene una o más restricciones y cuales son las mismas.

f) Descripción de la carga: se da el nombre del nudo y los componentes de globales de las cargas externas y las reacciones de empotramiento perfecto en relación a los ejes locales de la barra, si hay cargas en el tramo.

Matriz de Rigidez y Vector de Cargas Nodales Equivalentes

a) Barra de reticulado plano

Consideremos una barra de reticulado plano, supongamos que la misma esté arbitrariamente orientada con relación a un sistema de ejes globales X e Y .

Supondremos que la barra es recta, de sección transversal constante y que el material responde a la ley de Hooke.

441

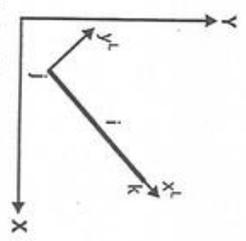


Fig 14.4.- Ejes locales de la barra i

En la barra i de la figura el nudo inicial es el j y el final es el k, quedando definida la orientación de los ejes locales x e y.

Considerando que no existen deformaciones iniciales y que la deformación es elástica el alargamiento de la barra i estará dado por:

$$\Delta L_i = D_{xk}^L - D_{xj}^L \dots\dots\dots (1)$$

L son los desplazamientos del nudo k y j respectivamente en la dirección local xL.

Para una barra de reticulado existe una sola sollicitación posible que es el esfuerzo axial o normal.

Suponiendo un material elástico lineal sometido a esfuerzo de tracción tendremos para los nudos j y k respectivamente:

$$F_{x_j} = -\frac{EA}{L} \Delta L_i \qquad F_{x_k} = \frac{EA}{L} \Delta L_i \qquad \dots\dots\dots (2)$$

$$F_{x_j} = -\frac{EA}{L} (D_{xk}^L - D_{xj}^L) \qquad \dots\dots\dots (3)$$

$$F_{x_k} = \frac{EA}{L} (D_{xk}^L - D_{xj}^L) \qquad \dots\dots\dots (4)$$

Donde:

- E= Módulo de elasticidad
- L= Longitud de la barra
- A= Área de la sección transversal de la barra.

Como en la dirección yL para barras de reticulado no existen sollicitaciones podemos expresar las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{y_j} \\ F_{y_k} \\ F_{y_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_{x_j}^L \\ D_{y_j}^L \\ D_{x_k}^L \\ D_{y_k}^L \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

La expresión (5) corresponde a la ecuación matricial de la barra i en coordenadas locales y expresa las Fuerzas de extremo de barra FY^L en función de los desplazamientos de nudos DI^L .

A la Matriz que relaciona FY^L y DI^L se la denomina matriz de Rigidez de barra de reticulado en coordenadas locales SI^L Expresando en forma compacta o simbólica:

$$FY^L = SI^L \cdot DI^L \dots\dots\dots (6)$$

La ecuación (6) define las fuerzas de extremo Fj y Fk para cualquier pareja de corrimientos Dj, Dk dados. Estas ecuaciones son simétricas, como podíamos esperar a partir del teorema de reciprocidad. No es posible, sin embargo, "resolverlas" y obtener los desplazamientos (D) en términos de las fuerzas (F), puesto que la matriz S es singular. Esto refleja el hecho de que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto, sin afectar las fuerzas que actúan en sus extremos.

Interpretación física de la Matriz de Rigidez de barra

Si en la ecuación (5), hacemos nulos todos los desplazamientos excepto $D_{x_j}^L$ que es igual a la unidad, entonces los esfuerzos en los extremos de la barra serán los indicados en la figura:

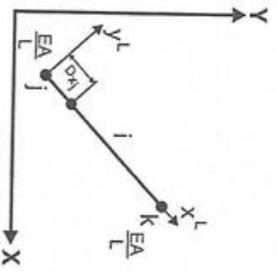


fig 14.5.- Corrimiento unitario Dxj

$$F_{x_i} = \frac{EA}{L} \text{ y } F_{x_k} = -\frac{EA}{L} \dots\dots\dots(7)$$

Que corresponden a la primera columna de S.

De la misma forma podemos hacer $D_y^L=1$ y el resto de los corrimientos nulos, siendo en este caso nulos los esfuerzos en los extremos de barra, ya que se considera una barra doblemente articulada y pequeños desplazamientos. Por esta razón los cuatro valores de la segunda columna son nulos. Si en cambio hacemos $D_x^L=1$ y el resto de los desplazamientos nulos, los esfuerzos serán:

$$F_{x_i} = -\frac{EA}{L} \text{ y } F_{x_k} = \frac{EA}{L} \dots\dots\dots(8)$$

$$F_{y_i} = 0 \text{ y } F_{y_k} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

Que corresponden a la tercera columna de la matriz de rigidez de la barra i

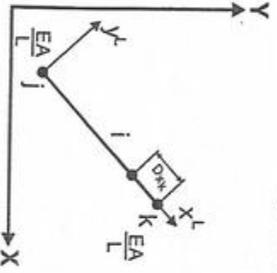


fig 14.6.- Corrimiento unitario Dxk

En forma análoga se puede analizar la cuarta columna aplicando un desplazamiento $Dy_k=1$. Asociando los desplazamientos y reacciones de nudos en las direcciones indicadas en la figura, podemos deducir el significado físico de la matriz de rigidez de la barra.

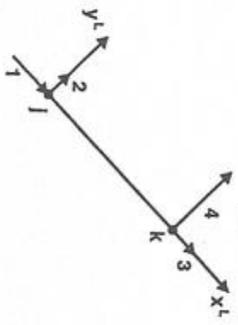


fig 14.6.- Corrimiento unitario Dxk

Con lo cual podemos observar que los elementos S_{ij} de la matriz de rigidez, representan las fuerzas que se generan en i al aplicar un desplazamiento unitario en j, permaneciendo fijos los restantes.

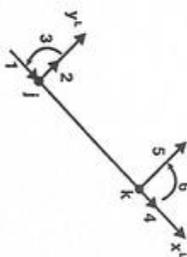
Además para un desplazamiento del nudo k obtenemos una reacción en j que es la misma que la obtenida en k para un desplazamiento en j, lo cual nos es expresado por la simetría de la matriz de rigidez.

$$S_{ij}^L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

También podemos ver que una columna j está formada por las reacciones debidas a un desplazamiento unitario impuesto en la dirección j, y una fila i no es más que las reacciones en i debido a corrimientos unitarios impuestos en las distintas direcciones.

b) Barra de Pórtico Plano

En base al significado físico de los elementos de la matriz de rigidez, deducimos la Matriz de Rigidez para una barra de Pórtico Plano en coordenadas locales. Para este tipo de elemento corresponden tres desplazamientos por nudo (2 traslaciones y una rotación en el plano).



La matriz de rigidez se obtiene dando desplazamientos unitarios de a uno por vez en las direcciones de la figura mientras los otros permanecen nulos.

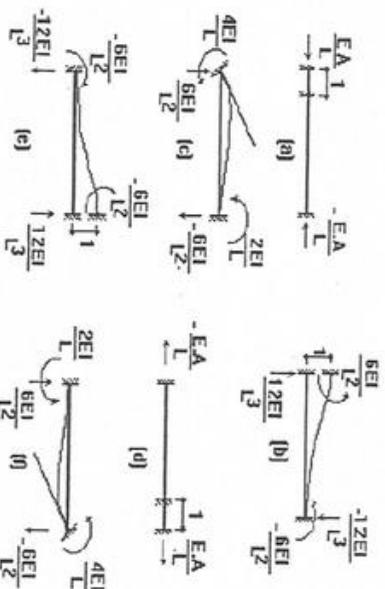


fig 14.7 - Desplaz. unitario p/pórtico plano

Las reacciones mostradas en la figura nº5 constituyen las respectivas columnas de la matriz de rigidez de la barra de Pórtico Plano de la ecuación (11)

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^L \\ F_{y1}^L \\ F_{z1}^L \\ F_{x2}^L \\ F_{y2}^L \\ F_{z2}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x1}^L \\ D_{y1}^L \\ D_{z1}^L \\ D_{x2}^L \\ D_{y2}^L \\ D_{z2}^L \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

Escribiendo en forma compacta:

$$F1^L = S1^L \cdot D1^L \dots\dots\dots(12)$$

Esta matriz relaciona las fuerzas de extremo de barra con los desplazamientos nodales en ejes locales.

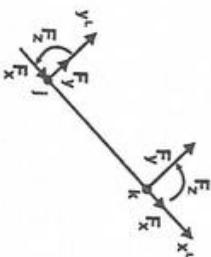


fig 14.7 - Solicitaciones para barra de Pórtico Plano

Cargas nodales equivalentes

Hasta ahora hemos supuesto que las cargas estaban aplicadas en los nudos, y por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de aplicación de las cargas y los desplazamientos que están siendo calculados. Si esto no ocurriera, por ejemplo tuviéramos cargas en el tramo de las barras, en forma distribuida o concentrada, debemos sustituir las cargas en las mismas por un

sistema de cargas equivalentes aplicadas en los nodos que produzca en la estructura el mismo efecto que las cargas originales.

Aplicando el principio de superposición, que es válido por haber supuesto que el sistema es lineal, podemos descomponer las cargas tal como se indica en la figura:

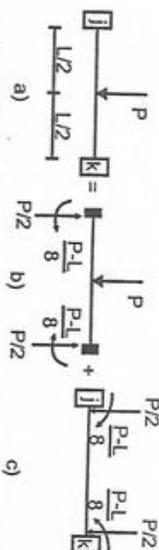


Fig. 14.8 - Barra de pórtico con cargas en el tramo.

Como podemos observar las cargas, reacciones y deformaciones de la estructura a) serán equivalentes a la suma de los dos estados b) y c).

Como las deformaciones de nodos en b) son nulas, serán iguales las deformaciones de los casos c) y a). O sea que las cargas de c) producen la misma respuesta estructural en lo referente a desplazamientos de nudos que las cargas originales. Estas serán entonces las cargas equivalentes en los nudos, que no son más que las reacciones de empotramiento perfecto cambiadas de signo.

Los esfuerzos en los extremos de barra se obtienen por la suma de los casos (b) y (c).

$$F^a = F^b + F^c \quad D^a = D^c$$

Por lo tanto a la ecuación (12) habrá que adicionarle las fuerzas de empotramiento perfecto del caso b).

$$FJ^L = SJ^L \cdot DJ^L \cdot DJ^L + AJ^L \dots \dots \dots (13)$$

AJ^L Representa el vector de fuerzas de empotramiento perfecto de la barra en coordenadas locales.
448

Rotación de ejes en el plano

Hasta el momento expresamos la matriz de rigidez del elemento barra, tanto de reticulado plano como de pórtico plano, según un sistema de ejes locales, estando los desplazamientos y esfuerzos de extremo de barra referidos a los mismos.

No obstante, según ya lo mencionamos, antes de poder aplicar las condiciones de equilibrio en los nudos y de compatibilidad de desplazamientos es necesario transformar las fuerzas y corrimientos a un sistema de ejes globales.

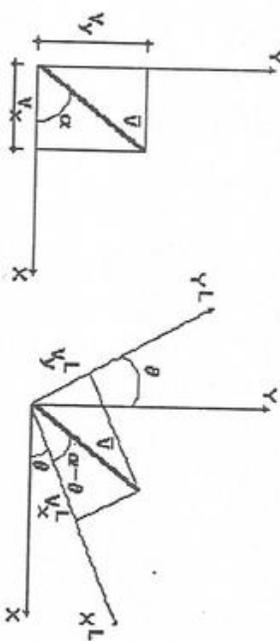


Fig. 14.9 - Rotación de un vector.

Supongamos el vector V de la figura referido al sistema de ejes X e Y. Las componentes del mismo serán:

$$V_x = V \cdot \cos \alpha \quad V_y = V \cdot \text{sen} \alpha \dots \dots \dots (14)$$

En el sistema de ejes X^L e Y^L , las componentes serán

$$V_x^L = V \cdot \cos(\alpha - \theta) \quad V_y^L = V \cdot \text{sen}(\alpha - \theta) \dots \dots \dots (15)$$

Luego:

$$V_x^L = V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta + V \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \theta \dots \dots \dots (16)$$

$$V_y^L = V \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \theta - V \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen} \theta \dots \dots \dots (17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (14) y escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_x^L \\ V_y^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

O en forma compacta:

$$V^L = R \cdot V \dots\dots\dots (19)$$

A la matriz de cosenos directores **R** la llamaremos matriz de rotación.

Si queremos el pasaje del sistema local al global, en este caso la matriz de rotación es la transpuesta de **R**.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x^L \\ V_y^L \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

$$V = R^T V^L \dots\dots\dots (21)$$

Pre multiplicando la ecuación (19) por **R**

$$V = R^{-1} V^L \dots\dots\dots (22)$$

Lo que implica que **R** es una matriz ortogonal (su inversa es igual a su transpuesta):

$$R^{-1} = R^T \dots\dots\dots (23)$$

Ecuación fundamental de la barra en el sistema global

Tanto las solicitaciones como los desplazamientos pueden expresarse como vectores en el plano, podemos entonces aplicar la transformación lineal antes vista para llevar los esfuerzos y desplazamientos de extremos de barra del sistema local al global.

$$\begin{aligned} D_j^L &= R \cdot D_j \\ D_k^L &= R \cdot D_k \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

Donde D_j^L y D_k^L representan respectivamente los desplazamientos de los nudos *j* y *k* en coordenadas locales y D_j, D_k representan los mismos desplazamientos en coordenadas globales. Escribiendo en forma compacta:

$$D^L = R^T \cdot D \dots\dots\dots (25)$$

Siendo:

$$R^T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

La matriz de rotación de la barra por incluir ambos nudos de la misma.

D^L contiene los desplazamientos de los dos nudos de la barra en coordenadas locales y ~

Di los desplazamientos de los mismos en coordenadas globales. Para las solicitaciones tendremos:

$$F^L = R^T \cdot F \dots\dots\dots (27)$$

F^L Contiene las solicitaciones de los dos extremos de la barra en coordenadas locales y **F** en coordenadas globales.

La inversa de la matriz de rotación de la barra será:

$$R_{JT}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

Pero como $R^{-1} = R^T$ será $R_{JT}^{-1} = R_{JT}^T$

$$F^L = S_{JT}^L \cdot D^L + A_{JT}^L \dots\dots\dots (29)$$

$$F^L = R_{JT}^T \cdot F \dots\dots\dots (30)$$

$$\tilde{F}_I = \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{S}_I^T \cdot \tilde{D}_I^T + \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{A}_I^T \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\tilde{F}_I = \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{S}_I^T \cdot \tilde{R}_I \cdot \tilde{D}_I + \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{A}_I^T \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\tilde{F}_I = \tilde{S}_I \cdot \tilde{D}_I + \tilde{A}_I \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\tilde{S}_I = \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{S}_I^L \cdot \tilde{R}_I \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\tilde{A}_I = \tilde{R}_I^T \cdot \tilde{A}_I^L \quad \dots\dots\dots (35)$$

Matriz de rotación para barra de reticulado plano

$$\tilde{R}_I = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\tilde{S}_I = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \quad \dots\dots\dots (37)$$

Matriz de rotación para barra de pórtico plano

$$\tilde{R}_I = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de barra de Pórtico Plano
.....(38)

$$\tilde{S}_I = \begin{bmatrix} (EAc^2/L + 12EI s^2/L^3) & (EAc/L - 12EIs/L^2) & -6EIs/L^2 & (-EAc^2/L - 12EIs^2/L^3) & (-EAc/L + 12EIs/L^2) & -6EIs/L^2 \\ (EAc/L - 12EIs/L^2) & (EAc^2/L - 12EIs^2/L^3) & 6EIs/L^2 & (-EAc/L + 12EIs/L^2) & (-EAc/L - 12EIs/L^2) & 6EIs/L^2 \\ -6EIs/L^2 & 6EIs/L^2 & 4EI/L & (-EAc^2/L + 12EIs^2/L^3) & (-EAc/L + 12EIs/L^2) & 2EI/L \\ (-EAc^2/L - 12EIs^2/L^3) & (-EAc/L + 12EIs/L^2) & 6EIs/L^2 & (EAc^2/L + 12EIs^2/L^3) & (EAc/L - 12EIs/L^2) & 6EIs/L^2 \\ (-EAc/L + 12EIs/L^2) & (-EAc/L - 12EIs/L^2) & -6EIs/L^2 & (EAc/L - 12EIs/L^2) & (EAc^2/L + 12EIs^2/L^3) & -6EIs/L^2 \\ -6EIs/L^2 & 6EIs/L^2 & 2EI/L & 6EIs/L^2 & -6EIs/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez y Vector de Cargas Global de la Estructura.

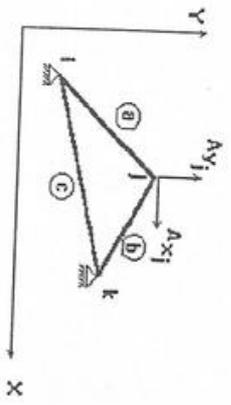


Fig.14.10 - Reticulado plano

Las ecuaciones de equilibrio exigen que las cargas externas aplicadas en los nudos deban ser iguales a la suma de las solicitaciones de extremo de las barras que concurren al nudo. Siendo el vector de cargas externas aplicadas en j:

$$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} \bar{A}_{Xj} \\ \bar{A}_{Yj} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (39)$$

Las ecuaciones matriciales de las barras a) y b) son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^a &= \bar{S}_i^a \cdot \bar{D}_i^a + \bar{A}_i^a \\ \bar{F}_j^a &= \bar{S}_j^a \cdot \bar{D}_j^a + \bar{A}_j^a \\ \bar{F}_i^b &= \bar{S}_i^b \cdot \bar{D}_i^b + \bar{A}_i^b \end{aligned} \dots \dots \dots (40)$$

Que pueden representarse en función de los nudos de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_i^a \\ \bar{F}_j^a \\ \bar{F}_i^b \\ \bar{F}_k^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{ii}^a & \bar{S}_{ij}^a \\ \bar{S}_{ji}^a & \bar{S}_{jj}^a \\ \bar{S}_{ii}^b & \bar{S}_{ik}^b \\ \bar{S}_{ki}^b & \bar{S}_{kk}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}_i^a \\ \bar{D}_j^a \\ \bar{D}_i^b \\ \bar{D}_k^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_i^a \\ \bar{A}_j^a \\ \bar{A}_i^b \\ \bar{A}_k^b \end{bmatrix} \dots \dots \dots (41)$$

Dónde:

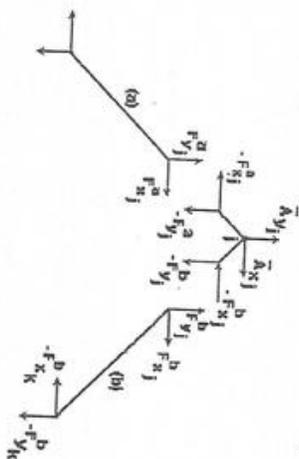
\bar{F}_i^a = Vector sollicitación en el extremo i de la barra (a)

\bar{D}_i^a = Vector deformación en el extremo i de la barra (a)

\bar{A}_i^a = Vector fuerza de empotramiento perfecto en el extremo i de la barra (a)

\bar{S}_{ij}^a = Submatriz conteniendo los coeficientes de rigidez del nudo i que provienen de un desplazamiento unitario del nudo j de la barra (a).

Las condiciones de equilibrio para el reticulado de la figura en el nudo j resultan:



$$\bar{A}_j - \bar{F}_j^a - \bar{F}_j^b = 0$$

$$\bar{A}_j = \bar{F}_j^a + \bar{F}_j^b \dots \dots \dots (42)$$

$$\bar{A}_j = \bar{S}_{ij}^a \cdot \bar{D}_i^a + \bar{S}_{jj}^a \cdot \bar{D}_j^a + \bar{A}_i^a + \bar{S}_{jk}^b \cdot \bar{D}_k^b + \bar{S}_{jj}^b \cdot \bar{D}_j^b + \bar{A}_k^b + \bar{A}_j^a \dots \dots \dots (43)$$

Por condición de compatibilidad de desplazamientos:

$$\bar{D}_j^a = \bar{D}_j^b = \bar{D}_j^c = \bar{D}_j^d = \bar{D}_j^e = \bar{D}_j^f = \bar{D}_j^g = \bar{D}_j^h = \bar{D}_j^i = \bar{D}_j^j = \bar{D}_j^k = \bar{D}_j^l = \bar{D}_j^m = \bar{D}_j^n = \bar{D}_j^o = \bar{D}_j^p = \bar{D}_j^q = \bar{D}_j^r = \bar{D}_j^s = \bar{D}_j^t = \bar{D}_j^u = \bar{D}_j^v = \bar{D}_j^w = \bar{D}_j^x = \bar{D}_j^y = \bar{D}_j^z \dots \dots \dots (44)$$

Reemplazando la (44) en la (43) y extendiendo el razonamiento a los nudos restantes:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \bar{S}_{ij}^a \cdot \bar{D}_i^a + (\bar{S}_{jj}^a + \bar{S}_{jj}^b) \cdot \bar{D}_j^a + \bar{S}_{jk}^b \cdot \bar{D}_k^b + \bar{A}_i^a + \bar{A}_j^a \\ \bar{A}_i &= \bar{S}_{ij}^a \cdot \bar{D}_j^a + (\bar{S}_{ii}^a + \bar{S}_{ii}^b) \cdot \bar{D}_i^a + \bar{S}_{ik}^c \cdot \bar{D}_k^c + \bar{A}_i^a + \bar{A}_i^b \\ \bar{A}_k &= \bar{S}_{ki}^c \cdot \bar{D}_i^c + (\bar{S}_{kk}^c + \bar{S}_{kk}^d) \cdot \bar{D}_k^c + \bar{S}_{kj}^d \cdot \bar{D}_j^d + \bar{A}_k^c + \bar{A}_k^d \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

Si la organizamos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_j \\ \tilde{A}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{ij}^a + \tilde{S}_{ij}^c & \tilde{S}_{ij}^a & \tilde{S}_{ik}^c \\ \tilde{S}_{ij}^a & \tilde{S}_{jj}^a + \tilde{S}_{jj}^b & \tilde{S}_{jk}^b \\ \tilde{S}_{ki}^c & \tilde{S}_{kj}^b & \tilde{S}_{kk}^b + \tilde{S}_{kk}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^a + \tilde{A}_i^c \\ \tilde{A}_j^a + \tilde{A}_j^b \\ \tilde{A}_k^b + \tilde{A}_k^c \end{bmatrix} \dots\dots\dots(46)$$

Que representa el sistema global de ecuaciones de la estructura, escribiendo en forma compacta:

$$\tilde{A} + \tilde{A}_{eq} = \tilde{S} \cdot D \dots\dots\dots(47)$$

Dónde:

\tilde{A} = Vector de acciones externas aplicadas en los nudos.

\tilde{S} = Matriz de rigidez global de la estructura

D = Vector deformación de nudos

\tilde{A}_{eq} = Vector de cargas nodales equivalentes (fuerzas de empotramiento perfecto cambiadas de signo) debido a las cargas aplicadas en los tramos de barras.

Haciendo:

$$\tilde{A} = \tilde{A} + \tilde{A}_{eq} \dots\dots\dots(48)$$

$$\tilde{A} = \tilde{S} \cdot D \dots\dots\dots(49)$$

Consideremos el reticulado de la figura nº 10. La matriz de rigidez global del reticulado tendrá 6 filas y 6 columnas ya que son 3 nudos y cada uno tiene 2 grados de libertad (un desplazamiento según el eje x y uno según el eje y). La contribución de cada nudo deberá ser colocada en las posiciones que se indican en la figura nº 11.

Los nudos i, j, k definen las filas y columnas de la matriz (submatrices)

	i	j	k
i	a+c a+c a a c c		
	a+c a+c a a c c		
j	a A a+b a+b b b		
	A A a+b a+b b b		
k	c C b b b+c b+c		
	C C b b b+c b+c		

Fig. 11: Esquema Formación Matriz Reticulado

	i	j	k
i	S ^a + S ^c S ^a S ^c		
	-S ^a -S ^a -S ^c		
j	S ^a S ^b + S ^a S ^b		
	-S ^a -S ^b -S ^a		
k	S ^a S ^b S ^b + S ^c		
	-S ^a -S ^b -S ^b - S ^c		

Las submatrices tendrán tantas filas y columnas como grados de libertad tenga cada nudo.

En el caso del reticulado este número es 2.

Analicemos la posición en figura nº 11 de las submatrices de la matriz de rigidez de la barra b de la figura nº 10.

$$S_1^a = \begin{bmatrix} S_{ii}^a & S_{ij}^a \\ S_{ji}^a & S_{jj}^a \end{bmatrix} \quad S_1^b = \begin{bmatrix} S_{ij}^b & S_{jk}^b \\ S_{kj}^b & S_{kk}^b \end{bmatrix} \quad S_1^c = \begin{bmatrix} S_{ii}^c & S_{ik}^c \\ S_{ki}^c & S_{kk}^c \end{bmatrix} \dots\dots\dots(50)$$

Las submatrices son de orden 2x2. La posición S_1^b en la matriz S está indicada en la Figura Nº 11 a partir del siguiente esquema:

S_{ji}^b = indica fila j columna i

S_{jk}^b = indica fila j columna k

S_{ij}^b = indica fila i columna j

S_{ik}^b = indica fila i columna k

Nótese que en las posiciones donde ya existen valores provenientes de otras barras, estos son sumados a aquellos.

Generalizando, debemos considerar una barra de reticulado que une los nudos j y k según la figura nº12.

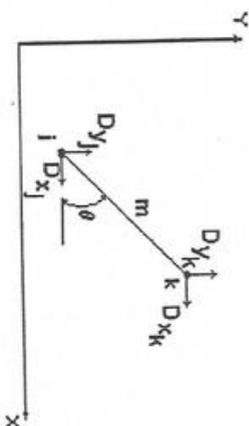


Figura Nº 12

Las posiciones ocupadas por la matriz de rigidez de la barra (m) en la matriz de rigidez global son las siguientes:

S =

1	2	3	1+1	2+1	3+1
			X	X	X
			X	X	X
			X	X	X
			X	X	X
			X	X	X

Fig nº 13 - Posiciones ocupadas por una barra de Reticulado Plano en la matriz de Rigidez Global.

Para un pórtico plano o estructuras con 3 grados de libertad por nudo tendríamos la siguiente configuración:

S =

1	2	3	1+1	2+1	3+1	1+2	2+2	3+2	1+3	2+3	3+3
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						
			X	X	X						

Figura nº 14 - Posiciones ocupadas por una barra de Pórtico Plano en la matriz de Rigidez Global

Del mismo modo, un vector de cargas equivalentes en los nudos para una barra de la figura N°12 ocupa la posición indicada en la figura N° 14 del vector acciones globales nodales.

$$\underline{A} = \begin{matrix} & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 3g-1)+1 & X & \\ 3g-1)+2 & X & \\ 3g-1)+3 & X & \\ \hline 3k-1)+1 & X & \\ 3k-1)+2 & X & \\ 3k-1)+3 & X & \end{matrix}$$

$$\underline{A} = \begin{matrix} & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 2g-1)+1 & X & \\ 2g-1)+2 & X & \\ \hline 2k-1)+1 & X & \\ 2k-1)+2 & X & \end{matrix}$$

CAPÍTULO XV

LINEAS DE INFLUENCIA

15.1.-CONSIDERACIONES GENERALES

Si bien en el tratamiento del tema, por simplicidad nos referimos a casos de vigas, la generalización a otros tipos de estructuras es casi inmediata y no requiere de nuevos conceptos a los necesarios en nuestro tratamiento.

La posibilidad de cargas móviles implica la necesidad de obtener:

a) Las sollicitaciones, deformaciones, etc., que produce una carga (o un estado de cargas) para distintos puntos de aplicación de la misma.

b) El estado más desfavorable de aplicación de la carga, que trae aparejada las mayores sollicitaciones o deformaciones, y con las cuales tiene que ser evaluada una sección dada.

Estas dos necesidades deben ser tenidas en cuenta en todas las secciones de la viga, o por lo menos, en varias secciones características según las circunstancias.

El trazado de diagramas o Líneas de Influencia nos permite una adecuada respuesta a las dos necesidades y su utilización es casi imprescindible en el caso de estudios de puentes, puentes grúa, etc., donde las cargas móviles (p) tienen una cierta importancia con respecto a peso propio o carga permanentes (g).

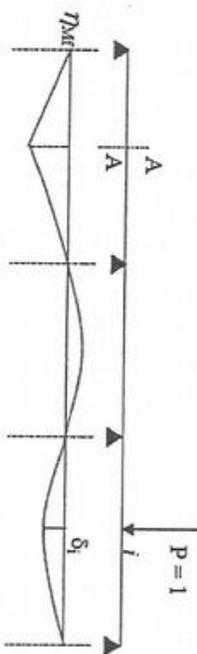
15.2.-DEFINICIÓN DE LINEAS DE INFLUENCIA

Definiremos como líneas de influencia de una sollicitación (o deformación), en la sección A-A, a un diagrama tal, que su ordenada en un punto *i* mida, en una determinada escala, el valor de la sollicitación en la sección A-A (o de la deformación), cuando en el punto *i* de referencia actúa una

carga de valor unitario. En el caso de la figura, diremos que $\eta M_f(A)$ es la Línea de Influencia del momento flector en A, si se cumple que la ordenada δ_i representa el valor del momento flector en A para una carga $P = 1$ aplicada en el punto i. $M_f(A) = \delta_i$ (escala de L. de I.) para $P = 1$ aplicada en i. Si $P \neq 1$ se cumplirá:

$$M_f(A) = P \cdot \delta_i \quad (\text{escala de L. de I.})$$

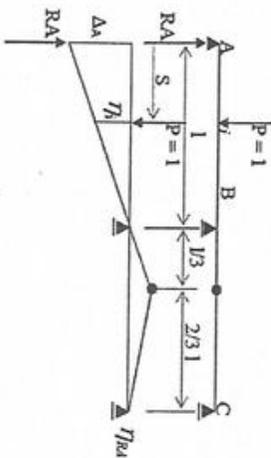
Esto mismo puede aplicarse para otros estados de carga y otras sollicitaciones, reacciones, deformaciones, etc.



15.3.- LINEAS DE INFLUENCIA EN SISTEMAS ISOSTÁTICOS

Recordemos algunos elementos básicos aplicados en sistemas isostáticos simples a fin de apreciar las similitudes y diferencias con el tratamiento que daremos a las vigas hiperestáticas. Nada mejor para esto que la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, en el método de la Cadena Cinemática en una viga isostática de dos tramos para distintos casos de sollicitaciones, o Método Analítico.

15.3.1.- LÍNEA DE INFLUENCIA DE UNA REACCIÓN



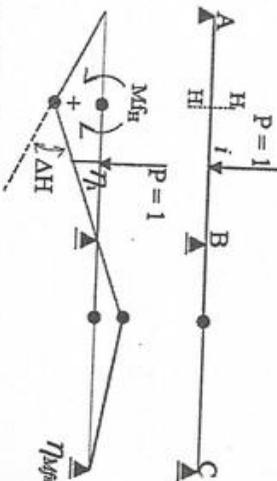
Descemos la L. de I. de RA que denominamos con ηR_A . Eliminamos el apoyo A, colocamos el esfuerzo correspondiente al vínculo suprimido, y damos un desplazamiento ΔA en el apoyo al mecanismo formado. Por aplicación de P.T.V.:

$$-R_A \cdot \Delta_A + \int m \cdot \eta_i = 0$$

$$R_A = \eta_i \frac{\int m}{\Delta_A} \quad \therefore \eta_{eA} = \eta_i$$

Donde vemos que RA es proporcional a la coordenada η_i o sea que η_i en una determinada escala puede representar el valor de RA para una carga unitaria aplicada en i, donde $\frac{1}{\Delta A}$ se puede incorporar como factor de escala.

LÍNEA DE INFLUENCIA DEL MOMENTO FLECTOR



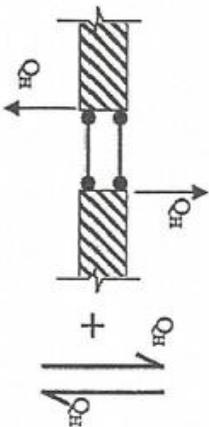
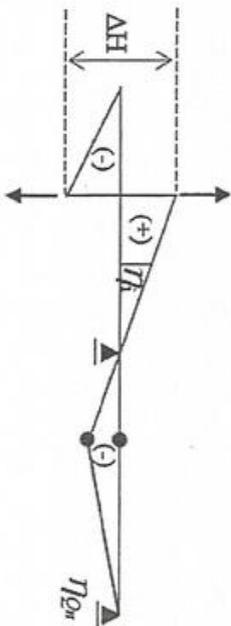
Descemos la L. de I. del MfH en la sección HH. Para ello eliminamos el vínculo que transmite el momento en dicha sección introduciendo una articulación. A la cadena cinemática formada, doy un desplazamiento virtual y aplico el P.T.V. después de explicitar el MfH en la sección (+ tracción abajo).

$$-M_{fH} \cdot \Delta_H + \int m \cdot \eta_i = 0$$

$$M_{fH} = \eta_i \frac{\int m}{\Delta_H} \quad \therefore \eta_{MfH} = \eta_i$$

15.3.2.- LÍNEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE

Para el esfuerzo de corte QH eliminamos un vínculo al introducir en H-H un mecanismo como el siguiente:



Aplicando el P.T.V.

$$Q_H \cdot \Delta_H - 1m \cdot \eta_i = 0$$

$$Q_H \cdot \Delta_H \eta_i \frac{1m}{\Delta_H} \quad \therefore \eta_{Q_H} = \eta_i$$

15.3.3.- LÍNEA DE INFLUENCIA DEL ESFUERZO NORMAL

En este caso se introduce un mecanismo que no transmite esfuerzos normales:



Se pueden hallar los centros de rotación, y el desplazamiento de ΔH en la dirección de N_H por aplicación del P.T.V. y la teoría de Cadena Cinemática. Analicémoslo a este caso en forma analítica, que permite una buena visualización del problema:

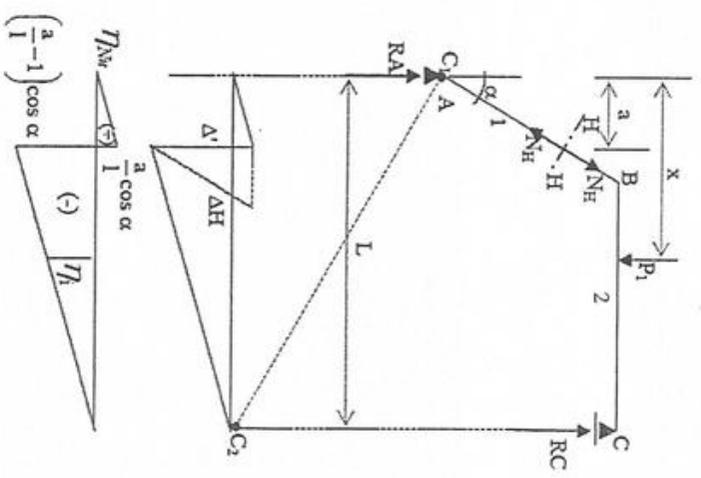
Analicémoslo a este caso en forma analítica, que permite una buena visualización del problema:

$$RA = 1l \times \frac{(1-x)}{1} = 1l \left(1 - \frac{x}{1} \right)$$

Para $P=1l$ entre $0 \leq x \leq a$

$$N_H = (1l - RA) \cos \alpha$$

$$N_H = 1l \times \frac{x}{1} \cos \alpha \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow N_H = 0 \\ x=a \rightarrow N_H = \frac{a}{1} \cos \alpha \end{cases}$$



Para $P = 1t$ entre 1 x a

$$N_H = -RA \cos \alpha$$

$$N_H = -1t \left(1 - \frac{x}{1} \right) \cos \alpha \begin{cases} x = a \rightarrow N_H = - \left(1 - \frac{a}{1} \right) \cos \alpha \\ x = 1 \rightarrow N_H = 0 \end{cases}$$

Métodos análogos a los problemas isostáticos aparecen en los casos hiperestáticos, con algunas variantes.

Desarrollaremos alguno de estos métodos en los próximos puntos.

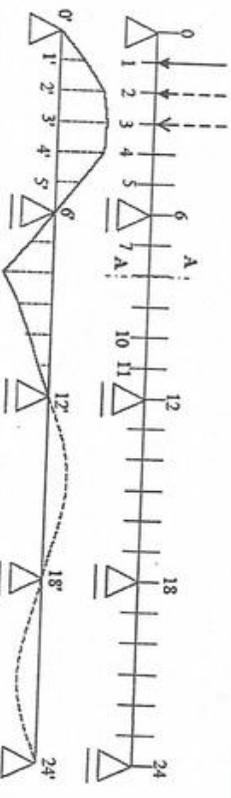
15.4 LÍNEA DE INFLUENCIA EN SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

Analicemos por distintos métodos, una viga continua de cuatro tramos (grado 3 de hiperestaticidad.)

15.4.1 MÉTODO POR PUNTOS

Es un método cuya explicación es inmediata, basada en la aplicación de la definición de L . de I . Supongamos que la L de I del Momento flector en $A-A$ (η MFA).

Dividimos cada tramo de la viga en partes iguales (cuyo largo dependerá de la precisión requerida) que en nuestro caso es igual a 6 partes.



Coloquemos $P = 1t$ en el punto 1. Calculamos el MFA para esa carga (η_1) y al valor (en una determinada escala) lo dibujamos debajo del punto 1 (1').

Corremos $P = 1t$ al punto 2. Calculamos el MFA para esa carga (η_2) y al valor lo dibujamos debajo del punto 2 (2'), y así sucesivamente para todos los puntos (3, 4, ..., 23, 24).

Unimos los puntos 0', 1', 2', ..., 23', 24' mediante curvas o poligonales, y por la forma de su construcción está curva o poligonal es la L de I buscada (η MFA).

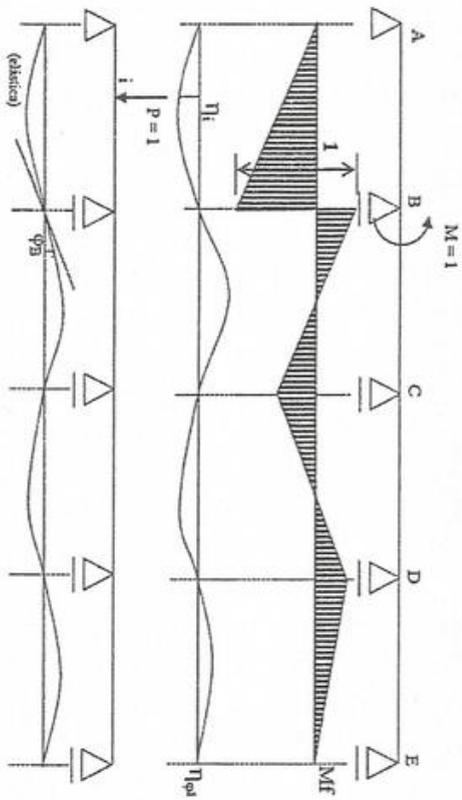
El método puede ser largo, según el número de puntos elegidos, pues para cada uno es necesario resolver un hiperestático.

Dichos cálculos se pueden facilitar con la utilización de computadora, utilización de la matriz β para los distintos estados de carga, o la utilización de condiciones de simetría, si la estructura fuera simétrica.

15.4.2 MÉTODO DE MÜLLER-BRESLAU (Aplicación de Betti - Maxwell)

15.4.2a.-Línea de influencia de deformaciones

Sea la viga de la figura, y queramos calcular $\eta\phi_B$ (Línea de Influencia de la rotación del nudo B). Para ello aplicamos en el nudo B la carga correspondiente con la deformación cuya L de I se busca, en este caso un momento unitario $M = 1$.



Resolvemos la viga y con las solicitaciones hallamos la elástica para ese estado de cargas. Demostraremos que esta elástica es la L de I de la rotación ϕ_B ($\eta\phi_B$).

Para ello aplicamos $P = 1$ en un punto genérico i , hallamos la elástica y la rotación ϕ_B para este estado de carga.

Aplicamos el teorema de Maxwell entre estos dos estados de carga:

$i \cdot B \cdot P \cdot M \eta = \phi ;$ siendo $M = 1 \text{ tm}$ y $P = 1 \text{ tn}$

$\phi_B = \frac{1 \text{ tm}}{1 \text{ tm}} \cdot \eta_i$

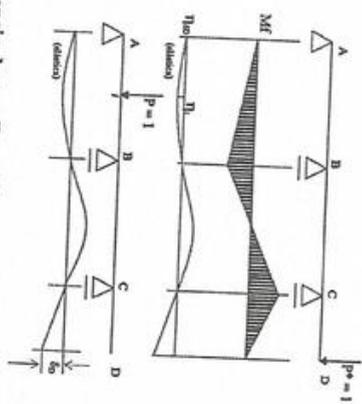
$\phi_B = \eta_i \cdot [\text{Escala de L. de I}] = \eta_{\phi_B}$

Es decir que en una escala determinada, la primera elástica representa ϕ_B para cada punto i , o sea es su Línea de Influencia.

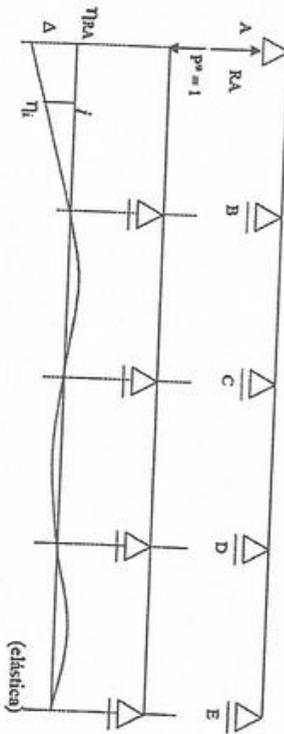
Como un segundo ejemplo analicemos en la siguiente viga la L de I del descenso en el punto D ($\eta\delta_D$). Siguiendo los mismos pasos, aplico en D la carga $P^*=1$, correspondiente con δ_D . Aplicar $P=1$ en el punto i , hallo la elástica, δ_D y por el teorema de Maxwell:

$P \times \delta_D = P^* \cdot \eta_i$

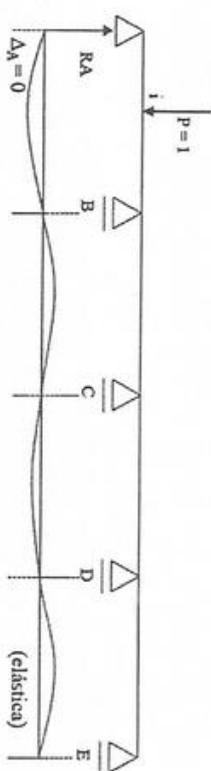
* $\delta_D = \eta_i \cdot [\text{Escala de L. de I}] = \eta_{\delta_D}$



15.4.2 b Línea de influencia de una Reacción



Descemos la L. de I. de la reacción RA (η_{RA}). Eliminamos el apoyo y aplicamos en ese punto una carga $P^* = 1$. Hallamos las solicitaciones y la elástica, que demostramos es la L. de I. De RA (η_{RA}).

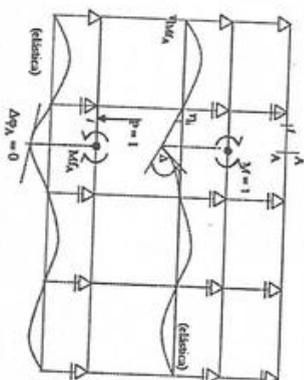


Aplicamos ahora un segundo estado de cargas $P = 1$ en un punto i , junto con el verdadero valor de la reacción RA para esta carga, por lo cual el descenso ΔA debe ser igual a cero. Aplicando el teorema de Maxwell:

$$P^* \cdot \Delta_A = -R_A \cdot \Delta + P \cdot \eta_i = 0 \quad R_A = \frac{1 \text{ in}}{\Delta} \eta_i \quad R_A = \eta_i [\text{Esc. de L. de I.}] = \eta_{R_A}$$

15.4.2 e Línea de influencia de una Solicitación

Sea la viga con una sección A - A en la cual queremos la L. de I. del momento flector en A (Δ Mf η). En A eliminamos el vínculo que resiste el momento flector, es decir colocamos una articulación, y además aplicamos un par de momentos $M = 1$. Hallamos las solicitaciones y la elástica, que demostraremos es la L. de I. A Mf η . Para ello aplicamos en un punto genérico i una carga $P = 1$ y el valor del verdadero MfA que corresponde a la viga original para dicha carga. La viga con la carga $P = 1$ y MfA se comportará como la original, que por no tener en A una articulación, no sufrirá en dicho punto una rotación relativa y por lo tanto $\Delta \phi_A = 0$.



* Aplicando el Teorema de Maxwell:

$$M \Delta_{\phi_A} = P \eta_i - m f_A \cdot \Delta = 0 \quad M f_A = \frac{1 \text{ in}}{\Delta} \eta_i \quad M f_A = \eta_i [\text{Esc. de L. de I.}] = \eta_{M f_A}$$

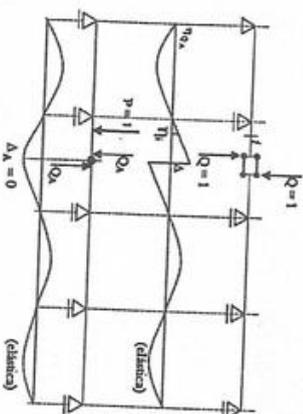
Venimos ahora en la misma sección la L. de I. del esfuerzo de corte QA (η_{QA}). Aplicamos en A el mecanismo de 6.3.3, con un par de $Q = 1$.

Hallamos las solicitaciones y la elástica será la L. de I. buscada (η_{QA}). Aplico $P = 1$ en i y en A el verdadero valor de QA con lo cual el desplazamiento relativo normal al eje de la barra en la sección A será nulo ($\Delta A = 0$). Aplicando el Teorema de Maxwell:

$$Q^* \cdot \Delta_A = P \cdot \eta_i - Q_A \cdot \Delta = 0$$

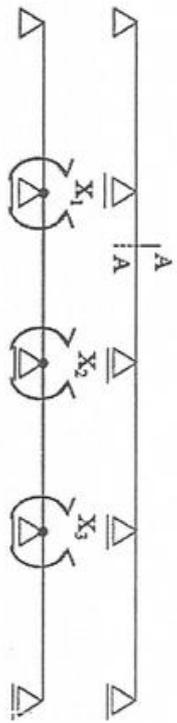
$$Q_A = \frac{1 \text{ in}}{\Delta} \eta_i$$

$$Q_A = \eta_i [\text{Escala de L. de I.}] = \eta_{Q_A}$$



15.4.2 Línea de Influencia por superposición de efectos (Matriz β)

Para aprender este método vamos a trabajar con una viga continua que posee cuatro tramos, o sea con tres incógnitas hiperestáticas; en forma genérica indicamos que esa viga tiene un apoyo fijo y los demás



Móviles. Por el método de las fuerzas, en función del isostático fundamental apropiado, en una sección genérica A, el momento viene dado por la expresión:

$$M^A = M_0^A + X_1 M_1^A + X_2 M_2^A + X_3 M_3^A$$

Si quisiéramos conocer η M A, deberíamos identificar en la expresión que factores dependen del estado de cargas. Ellos son M_0^A, X_1, X_2 y X_3 . Sería entonces:

$$\eta_{M^A} = \eta_{M_0^A} + \eta_{X_1} M_1^A + \eta_{X_2} M_2^A + \eta_{X_3} M_3^A$$

Para obtener las líneas de influencia de las incógnitas hiperestáticas utilizamos las propiedades de los coeficientes β vistos en el Capítulo 2 en el tema de Matriz β . Recordemos que:

$$X_i = \delta_{i0} \beta_{i1} + \delta_{20} \beta_{i2} + \dots + \delta_{n0} \beta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{j0} \beta_{ij}$$

Donde:

X_i : incógnita hiperestática

δ_{j0} : término que depende de las cargas exteriores.

β_{ij} = β_{ji} : coeficiente independiente de las cargas exteriores.

Si queremos la línea de influencia η_{X_i} en nuestra viga:

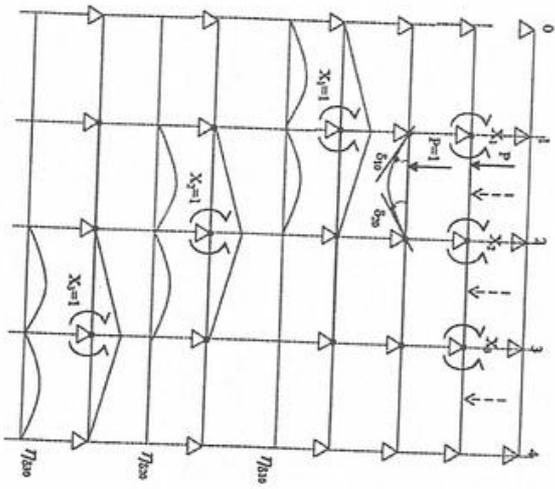
$$\eta_{X_i} = \eta_{\delta_{i0}} \cdot \beta_{i1} + \eta_{\delta_{20}} \cdot \beta_{i2} + \eta_{\delta_{30}} \cdot \beta_{i3}$$

Analicemos por etapas las distintas L. de I. que pueden aparecer en nuestra estructura

Línea de influencia del término δ_{j0}

Definimos el isostático fundamental con las incógnitas X_1, X_2, X_3 (momento en los apoyos intermedios) aplicando articulación en los apoyos 1, 2 y 3. Aparecen los δ_{j0} , relaciones relativas en el apoyo j (corrimientos correspondientes con X_j).

- De acuerdo con 6. 4. 2.a para la L. de I. de δ_{j0} ($\eta_{\delta_{j0}}$) debo calcular la elástica para la carga $X_1 = 1$.
- En forma similar se procede para $\eta_{\delta_{20}}$ y $\eta_{\delta_{30}}$.



De acuerdo con lo visto:

$$\begin{aligned}\eta_{X_1} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{11} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{12} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{13} \\ \eta_{X_2} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{21} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{22} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{23} \\ \eta_{X_3} &= \eta_{\delta_{10}} \beta_{31} + \eta_{\delta_{20}} \beta_{32} + \eta_{\delta_{30}} \beta_{33}\end{aligned}$$

Donde los diagramas η_{X1} , η_{X2} y η_{X3} son combinaciones lineales de los η_{δ} 10, $\eta_{\delta 20}$, y $\eta_{\delta 30}$.

Línea de influencia de una sollicitación (M)

Hallaremos la L. de I. del momento flector en el punto A (η_{M_A}) del hiperestático.

Sabemos del Capítulo II:

$$M_A^A = M_0^A + X_1 M_1^A + X_2 M_2^A + X_3 M_3^A$$

Y por lo tanto será:

$$\eta_{M_A^A} = \eta_{M_0^A} + \eta_{X_1} M_1^A + \eta_{X_2} M_2^A + \eta_{X_3} M_3^A$$

Donde serán:

$\eta_{M_0^A}$: L. de I del M^A en el isostático fundamental

$\eta_{X_1}, \eta_{X_2}, \eta_{X_3}$: L. de I de la incógnitas hiperestáticas (X_1, X_2 y X_3)

M_1^A, M_2^A y M_3^A : Momento en sección A del isostático para cargas

$X_1 = 1; X_2 = 1; X_3 = 1$, respectivamente.

$\eta_{M_A^A}$: Línea de influencia del MFA del hiperestático.

Análisis similares se pueden realizar para las reacciones de apoyo, los esfuerzos N y Q o deformaciones.

15.5 DIAGRAMAS ENVOLVENTES SOLICITACIONES MÁXIMAS Y MÍNIMAS

474

Como ya hemos visto, el diagrama de Líneas de Influencia, nos sirve para calcular una Reacción, Deformación o Sollicitación para una carga o el estado de cargas dado, pero también para aplicar la carga en el lugar que produzca un efecto máximo (o mínimo) y por lo tanto posibilita el estudio de las condiciones más desfavorables.

La ubicación de las cargas en determinados lugares, nos dará entonces las sollicitaciones más desfavorables, para las cuales debemos dimensionar o verificar las secciones.

Con las sollicitaciones máximas y mínimas en distintas secciones críticas (o en todas las secciones) obtendremos "diagramas envolventes" con técnicas que dependerán del tipo de estructura y del tipo de carga a aplicar.

Daremos una introducción al tema con vigas sencillas y considerando cargas permanentes (G) y cargas móviles uniformemente repartidas (p). Cargas puntuales P deben ser tratadas en forma especial pero con técnicas similares, y su tratamiento se encuentra en la amplia bibliografía sobre el tema.

15.5.1 ESTRUCTURA ISOSTÁTICA

a) Línea de Influencia de Reacciones:

$$\eta_{R_A} = \frac{(L-x)}{L} = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{con} \quad \eta_{R_A}^C = \frac{(L+y_1)}{L} = 1 + \frac{y_1}{L}$$

$$\eta_{R_A}^A = 1 \quad \eta_{R_A}^B = 0$$

$$\eta_{R_A}^d = -\frac{y_2}{L}$$

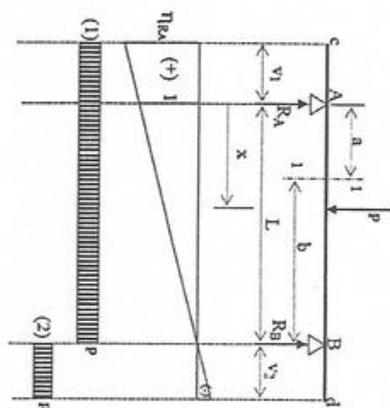
Para $R_{A \max}$ (1)

$$R_{A \max}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{L+y_1}{L} \right) (L+y_1) p = \frac{p}{2L} (L+y_1)^2$$

$$R_{A \min}^p = \frac{1}{2} \left(-\frac{y_2}{L} \right) \cdot y_2 \cdot p = -\frac{p}{2L} y_2^2$$

475

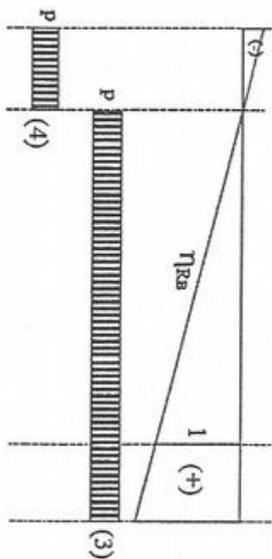
Para $R_{A \min}$ (2)



$$R_{A \min}^P = \frac{1}{2} \left(-\frac{v_2}{L} \right) \cdot v_2 \cdot p = -\frac{p}{2L} v_2^2 \quad R_B = \frac{x}{L}$$

$$\eta_{RB}^A = 0; \eta_{RB}^B = 1 \quad \eta_{RB}^C = -\frac{v_1}{L}; \eta_{RB}^D = \frac{L+v_2}{L}$$

$$R_{B \max}^P = \frac{p}{2L} (L+v_2)^2 \quad R_{B \min}^P = -\frac{p}{2L} v_1^2$$

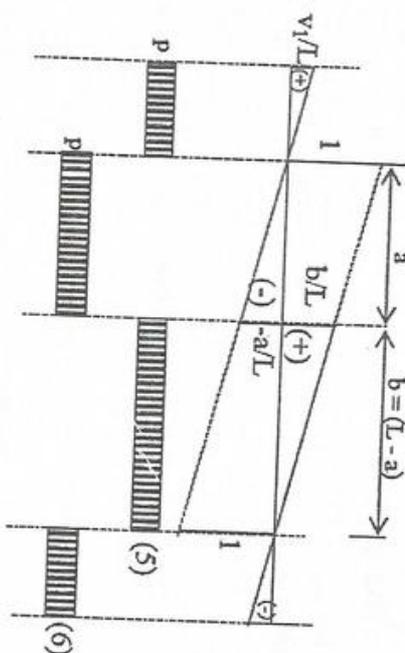


b) Línea de Influencia del Esfuerzo de Corte (Q1): sea la sección 1, para $x = a$, con $Q \geq 0$

$$x < a \quad Q_1 = R_B = -\frac{x}{L}$$

$$x > a \quad Q_1 = R_A = \frac{L-x}{L}$$

$$Q_{1 \max} = \frac{p}{2L} (v_1^2 + b^2) \quad (5)$$



$$Q_{1 \min} = -\frac{p}{2L} (a^2 + v_2^2) \quad (6)$$

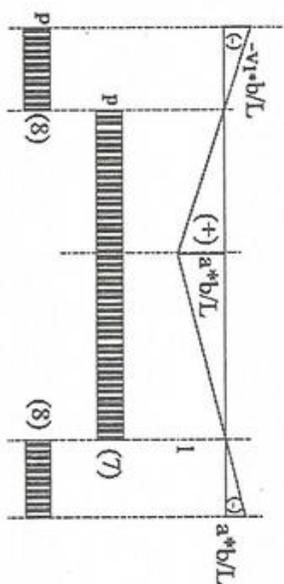
e) Línea de Influencia del Momento Flector (MFI), con MFI ≥ 0 , fibra traccionada abajo.

$$x < a \quad Mf_1 = R_B \cdot b = \frac{x}{L} b$$

$$x > a \quad Mf_1 = R_A \cdot a = \frac{(L-x)}{L} a$$

$$Mf_{1 \max} = p \frac{ab}{2} \quad (7)$$

$$Mf_{1 \min} = -\frac{p}{2L} (v_1^2 \cdot b + v_2^2 \cdot a)$$



Dado que a y b son funciones de a (coordenadas de 1), la función MfI max es cuadrática en a y derivable con la cual podemos hallar el punto 1 que nos da el máximo Mf_{max} .

$$\frac{dMf_{max}}{da} = \frac{d}{da} \left(\frac{P}{2} a(L-a) \right) = \frac{P}{2} [(L-a) - a] = \frac{P}{2} (L-2a) = 0 \Rightarrow a = \frac{L}{2}$$

Punto medio del tramo donde será:

$$Mf_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{8}$$

15.5.2 DIAGRAMA ENVOLVENTE

a) Esfuerzo de corte Q :

$$Q_{max} = \frac{P}{2L} (v_1^2 + (L-a)^2)$$

$$a=0 \quad Q_{max} = \frac{P}{2L} (v_1^2 + L^2) \quad A'$$

$$a=L \quad Q_{max} = \frac{P}{2L} (v_1^2) \quad B'$$

$$Q_{min} = -\frac{P}{2L} (a^2 + v_2^2)$$

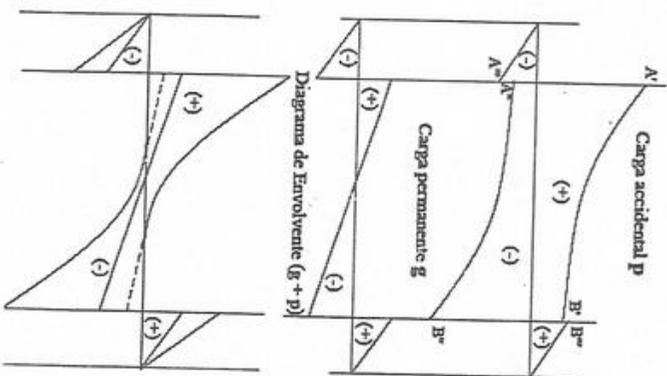
$$a=0 \quad Q_{min} = -\frac{P}{2L} (v_2^2) \quad A''$$

$$a=L \quad Q_{min} = \frac{P}{2L} (L^2 + v_2^2) \quad B''$$

En los voladizos:

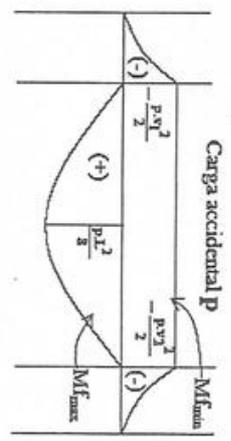
$$a=0 \quad Q_{min} = -Pv_1 \quad A'''$$

$$a=L \quad Q_{max} = Pv_2 \quad B'''$$



Si al diagrama de carga móvil p le agregamos el diagrama de corte Q , para la carga permanente g , se obtiene el diagrama final envolvente con los Q_{max} y los Q_{min} en todas las secciones de la viga.

b) Momento Flector Mf



El diagrama de envoltvente para una carga p es de inmediata deducción, al igual que la carga g permanente.

El diagrama envoltvente final para M_{fmin} y M_{fmax} serán debido a las cargas:

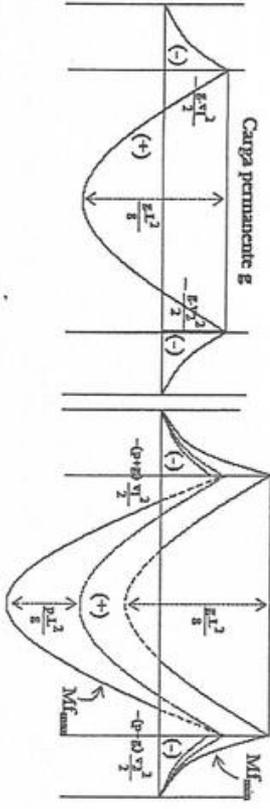
M_{fmin} : Voladizos: $g + p$

Tramo: g

M_{fmax} : Voladizos: g

Tramo: $g + p$

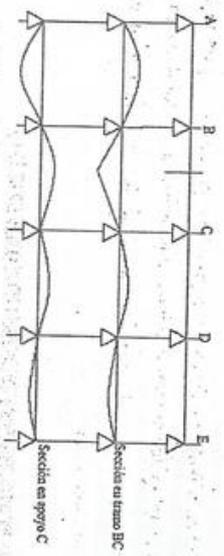
Diagrama envoltvente ($p + g$)



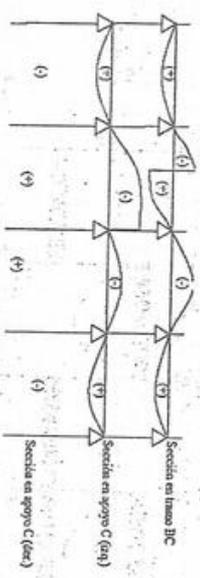
15.6. ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA

Analicemos la viga continua de la figura, y estudiemos en función de las líneas de influencia los estados de carga para que se den sollicitaciones máximas y mínimas. En el tramo BC y en el apoyo C.

a) Línea de Influencia MF



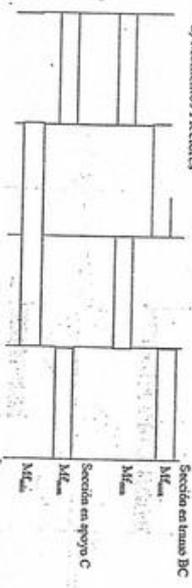
b) Línea de Influencia Q



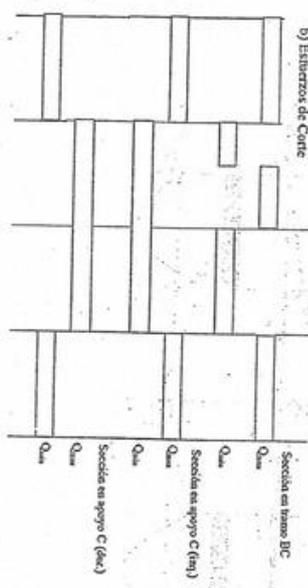
15.6.1 DIAGRAMA ENVOLVENTE

Las cargas a aplicar para esfuerzos máximos o mínimos en los distintos casos son los siguientes:

a) Momentos Flectores



b) Esfuerzos de Corte



En los casos vistos se deben adicionar a las cargas p las cargas permanentes g (peso propio, etc.).
Por último a modo de ejemplo intentaremos explicitar que ocurriría con los diagramas envolventes de los momentos flectores para la viga de cuatro tramos simétrica, haciendo la salvedad de que los mismos son una aproximación docente.

