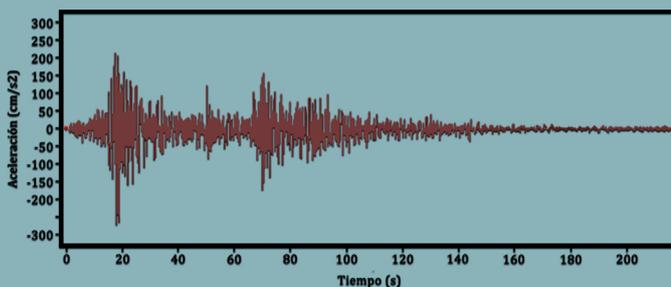
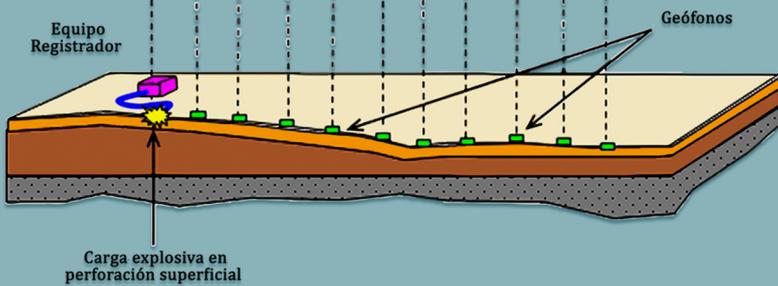
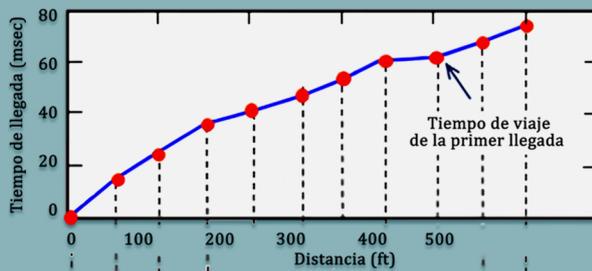


# Dinámica de Suelos

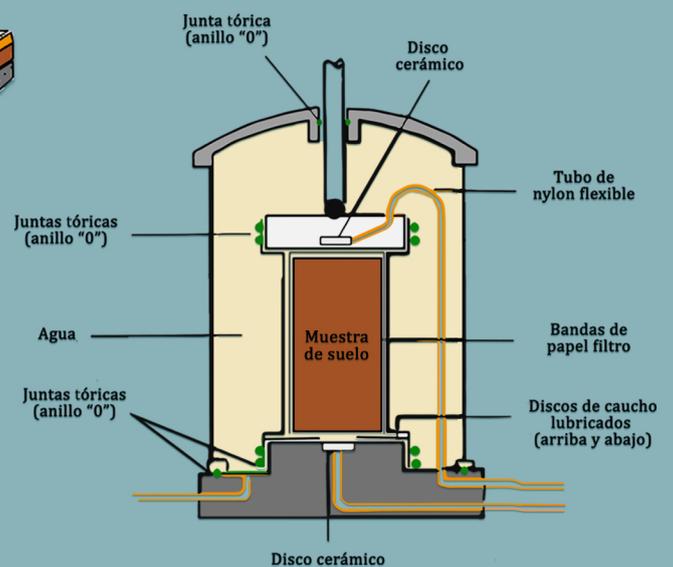
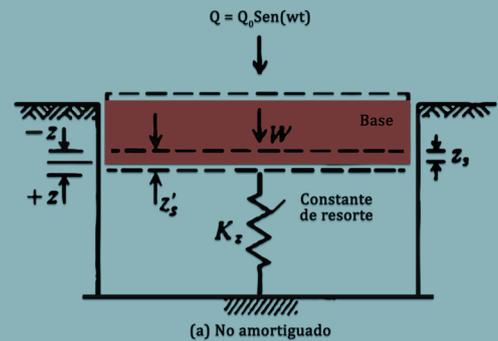
Dr. Jorge E. Alva Hurtado

## Propiedades dinámicas



Acelerograma - Sismo del 15/08/2007

## Cimentación de maquinarias



Ensayo triaxial cíclico



# **Dinámica de Suelos**

**Dr. Jorge E. Alva Hurtado**



**UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
INGENIERÍA**

Dr. Jorge Alva Hurtado  
Rector UNI

Dr. Gilberto Becerra Arévalo  
Vicerrector Académico

Dr. Walter Estrada López  
Vicerrector de Investigación

Jefe EDUNI  
Prof. Alvaro Montaña Freire

Dinámica de Suelos

Primera edición, noviembre 2020  
500 ejemplares

© Jorge Alva Hurtado  
Derechos reservados

© Derechos de edición

Universidad Nacional de Ingeniería Fondo Editorial EDUNI Av. Túpac Amaru 210, Rímac - Lima Teléfono: 4814196 Central telefónica: 4811070 Anexos 7500 y 7501 Correo: fondoeditorial@uni.edu.pe
--

Coordinador editorial  
Mg. Nilton Zelada Minaya  
(coordinacion.fondoeditorial@uni.edu.pe)

Editores asistentes  
Bach. Ronald Moisés Quincho Chávez  
Bach. Frida Stefanny Huarcaya Santillán  
(coordinación.editorial.eduni@gmail.com)

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú 2020-09159

ISBN 978-612-4396-35-9

Impreso en diciembre del 2020 por  
Imprenta Gráfica Fénix S. R. L.  
Av. Arica Nro. 1827 Urb. Chacra Ríos Norte

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o  
parcialmente, sin permiso expreso del autor.

## PRESENTACIÓN

La Dinámica de Suelos es una rama especializada de la Ingeniería Geotécnica, en la que se dan los principales lineamientos y marco teórico de la interpretación de diversos fenómenos geotécnicos relacionados con vibraciones e inercia. Gran parte de la información presentada en este libro forma parte del curso de Dinámica de Suelos, el cual es dictado a nivel de pregrado y posgrado, correspondiente a la currícula vigente en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería.

El libro **Dinámica de Suelos** contiene ocho capítulos. Los cuatro primeros capítulos son una adaptación de las Notas de Clase del profesor R. V. Whitman, dictadas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y los cuatro restantes han sido desarrollados por el autor y sus colaboradores a lo largo de los últimos años de vida académica y profesional.

El contenido de este libro es el siguiente:

- Problemas de ingeniería que involucran a la Dinámica de Suelos
- Sistemas lineales de un grado de libertad
- Sistemas lineales de varios grados de libertad
- Propagación de ondas
- Propiedades dinámicas de los suelos
- Análisis de respuesta de sitio
- Evaluación de deformaciones sísmicas permanentes en taludes
- Cimentación de maquinarias

En el capítulo I, se presenta la naturaleza de los problemas que involucra la dinámica de suelos, ilustrando su aplicación mediante casos prácticos. En este capítulo se hace referencia a la problemática relacionada con la cimentación de maquinarias, efectos de explosión nuclear, ingeniería sismorresistente, hincado de pilotes, compactación por vibración y otros problemas afines.

Los capítulos II y III, corresponden a los sistemas lineales de un grado y varios grados de libertad donde se analiza la respuesta máxima de suelo frente a la vibración libre, vibración forzada y la vibración por carga transitoria para un sistema no amortiguado y un sistema amortiguado; también se analiza la vibración debido a movimientos transitorios en la cimentación y se describe el espectro de respuesta como una herramienta fundamental en la ingeniería.

El capítulo IV, se brindan los conceptos básicos de propagación de ondas en diferentes medios, y su comportamiento en medios infinitos, semi-infinitos, campos estratificados y comportamiento de ondas en barras. Se incluye la propagación de las ondas en un medio estratificado cuya comprensión se destaca por el uso de la Ley de Snell.

En el capítulo V, el lector encontrará una breve descripción del comportamiento dinámico de los suelos a pequeñas deformaciones (ensayos de campo y laboratorio) y a grandes deformaciones (ensayos de laboratorio), así mismo una descripción de los ensayos de campo y laboratorio usados con mayor frecuencia. Además, encontrará una descripción de la representación del comportamiento esfuerzo-deformación mediante las curvas de reducción de módulo y de incremento de amortiguamiento.

El capítulo VI, corresponde a la amplificación del movimiento del terreno debido a la acción de eventos sísmicos, donde se describe la ecuación de la propagación vertical de la onda S, luego se resumen algunos modelos matemáticos que describen al suelo frente a cargas dinámicas cíclicas.

En el capítulo VII, se presenta una compilación de los métodos simplificados para determinar las deformaciones permanentes en estructuras de tierra (taludes, terraplenes, depósitos de suelos, entre otras estructuras) inducidas por sismos. Además, se hace una descripción breve de resistencia frente a cargas dinámicas y una descripción de los desplazamientos sísmicos tolerables según la experiencia de investigaciones en el pasado.

El capítulo VIII, corresponde a la cimentación de maquinarias, en este último capítulo se muestra los fundamentos que describen la respuesta del suelo de cimentación de maquinarias que producen fuerzas armónicas, cuyo interés en la ingeniería práctica es determinar las deformaciones ocasionadas y la frecuencia del movimiento tal que garanticen el correcto funcionamiento de la maquinaria.

Finalmente debo expresar mi profundo agradecimiento a todo el personal que participó en la recopilación, sintetización, compilación y edición del presente libro, pues gracias a ellos puedo compartir los conocimientos de la Dinámica de Suelos que he adquirido en mi práctica académica y profesional.

Jorge Alva Hurtado

# ÍNDICE

## CAPÍTULO I. PROBLEMAS DE INGENIERÍA QUE INVOLUCRAN A LA DINÁMICA DE SUELOS

1.1	CIMENTACIÓN DE MÁQUINAS	3
1.2	EFFECTOS DE EXPLOSIÓN NUCLEAR	8
1.3	INGENIERÍA SISMORESISTENTE	10
1.4	HINCADO DE PILOTES	13
1.5	COMPACTACIÓN POR VIBRACIÓN	13
1.6	OTROS PROBLEMAS DE INGENIERÍA	14
1.7	DEFINICIÓN DE DINÁMICA DE SUELOS	14

## CAPÍTULO II. SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

2.1	INTRODUCCIÓN	19
2.2	VIBRACIONES LIBRES	20
2.3	VIBRACIONES FORZADAS POR LA APLICACIÓN DE CARGAS PERIÓDICAS	25
2.4	VIBRACIONES DEBIDAS A CARGAS TRANSITORIAS	34
2.5	VIBRACIONES FORZADAS PRODUCIDAS POR MOVIMIENTOS PERIÓDICOS DE CIMENTACIÓN	41
2.6	VIBRACIONES DEBIDAS A MOVIMIENTOS TRANSITORIOS DE CIMENTACIÓN	42

## CAPÍTULO III. SISTEMAS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

3.1	INTRODUCCIÓN	57
3.2	VIBRACIÓN LIBRE DE SISTEMAS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD	57
3.3	VIBRACIONES DE SISTEMAS FORZADOS DE 2 GDL POR CARGAS PERIÓDICAS	65

## CAPÍTULO IV. PROPAGACIÓN DE ONDAS

4.1	INTRODUCCIÓN	89
4.2	PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO INFINITO	90
4.3	PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO SEMI-INFINITO	94
4.4	PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ESTRATIFICADO	101
4.5	PROPAGACIÓN DE ONDAS EN BARRAS	108

## **CAPÍTULO V. PROPIEDADES DINÁMICAS DE LOS SUELOS**

5.1	INTRODUCCIÓN	117
5.2	INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD DE LA CARGA EN LA RESISTENCIA DE LOS SUELOS	118
5.3	COMPORTAMIENTO ESFUERZO - DEFORMACIÓN DE LOS SUELOS FRENTE A CARGAS CICLICAS	120
5.4	ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE CORTE A DEFORMACIONES PEQUEÑAS MEDIANTE MÉTODOS INDIRECTOS	134
5.5	ESTIMACIONES A PARTIR DE RELACIONES EMPÍRICAS	137
5.6	PARÁMETROS DE RESISTENCIA FRENTE A CARGAS CICLICAS	144

## **CAPÍTULO VI. ANÁLISIS DE RESPUESTA DE SITIO**

6.1	INTRODUCCIÓN	153
6.2	AMPLIFICACIÓN SÍSMICA	154
6.3	PROPAGACIÓN VERTICAL DE LA ONDAS	155
6.4	MODELOS DE RESPUESTA DEL SUELO	156
6.5	ANÁLISIS DE RESPUESTA DE SITIO	164
6.6	MÉTODO LINEAL - ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIAS	164 169
6.7	MÉTODO LINEAL EQUIVALENTE- ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIAS	
6.8	MÉTODO NO LINEAL- ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	171

## **CAPÍTULO VII. EVALUACIÓN DE DEFORMACIONES SÍSMICAS PERMANENTES EN TALUDES**

7.1	INTRODUCCIÓN	181
7.2	ANÁLISIS PSEUDOESTÁTICO	182
7.3	ACELERACIÓN DE DISEÑO	184
7.4	PARÁMETROS DE RESISTENCIA	184
7.5	MODELOS UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE DEFORMACIONES SÍSMICAS	185
7.6	MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE DESPLAZAMIENTO SÍSMICOS DE ESTRUCTURAS DE TIERRA	186

ANEXO I. UN PROCEDIMIENTO SIMPLIFICADO PARA CALCULAR LAS ACELERACIONES MÁXIMAS DE LA CORONA Y EL PERIODO NATURAL DE TERRAPLENES	<b>196</b>
---	------------

### **CAPÍTULO VIII. CIMENTACIÓN DE MAQUINARIAS**

8.1 INTRODUCCIÓN	<b>211</b>
8.2 GRADOS DE LIBERTAD	<b>211</b>
8.3 OSCILACIÓN VERTICAL	<b>212</b>
8.4 GENERALIZACIÓN DE LAS OSCILACIONES	<b>216</b>
8.5 OSCILACIÓN DE BALANCEO	<b>217</b>
8.6 COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO	<b>219</b>
8.7 MODELOS EQUIVALENTES DE CIMENTACIÓN DE MAQUINARIAS	<b>223</b>
8.8 CRITERIOS PARA EL DISEÑO DE CIMENTACIÓN	<b>223</b>



**CAPÍTULO I:**  
**Problemas de ingeniería que  
involucran a la Dinámica de Suelos**



# **CAPÍTULO I**

## **PROBLEMAS DE INGENIERÍA QUE INVOLUCRAN A LA DINÁMICA DE SUELOS**

En su práctica profesional, el ingeniero civil tiene muchos encuentros diferentes e importantes con el suelo. El ingeniero civil utiliza el suelo como cimentación de estructuras y terraplenes; utiliza el suelo como material de construcción; debe diseñar estructuras de retención para excavaciones y aberturas subterráneas; y encuentra el suelo en un gran número de problemas especiales. En el desarrollo de dichas tareas, el ingeniero se basa en la Mecánica de Suelos, que es una disciplina que organiza de manera sistemática los principios y el conocimiento de las propiedades ingenieriles del suelo. La Dinámica de Suelos es una parte especializada de la Mecánica de Suelos que trata sobre el comportamiento del suelo y la respuesta de masas de suelo durante la aplicación rápida de carga, el uso de vibraciones para mejorar las propiedades ingenieriles del suelo y el uso de transmisión de ondas para evaluar las propiedades del terreno.

En este capítulo se presenta la naturaleza de los problemas que involucra la dinámica de suelos, ilustrando su aplicación mediante casos prácticos.

### **1.1 CIMENTACIÓN DE MÁQUINAS**

Una máquina que produce vibraciones o fuerzas dinámicas desbalanceadas está apoyada en un bloque de cimentación estructural, que reposa en el suelo. Las fuerzas dinámicas de las máquinas causan movimientos en el bloque de cimentación, que si son excesivos pueden:

1. Imponer condiciones no confortables o imposibles de soportar en el personal que trabaja cerca de la máquina.
2. Causar daño a la máquina o tuberías de conexión.

3. Producir grandes asentamientos en la cimentación que pueden impedir el funcionamiento apropiado de la máquina.

Los movimientos del bloque de cimentación adicionalmente serán transmitidos a través del terreno a edificaciones o maquinarias adyacentes, pudiendo causar movimientos no confortables o dañinos en dichas edificaciones, o pueden causar asentamientos en la cimentación de dichas edificaciones.

La dinámica de suelos tuvo sus comienzos en Alemania, en 1930, cuando los ingenieros de DEGEBO (Deutsche Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik) empezaron las primeras investigaciones científicas de problemas de cimentación de maquinaria. Aunque se desarrollaron importantes trabajos teóricos fundamentales en dicha época, el enfoque inicial del estudio estaba basado en correlaciones empíricas entre comportamientos y velocidad sísmica a través del suelo.

En los Estados Unidos y Europa Occidental se utilizaron dichas y otras correlaciones hasta los años 50. Se realizó un excelente trabajo de relación de comportamiento observado y teoría fundamental en la Unión Soviética, comenzando en el año 1930, pero no se conoció en el mundo occidental sino hasta el año 1960.

En los Estados Unidos se logró durante los años 1955 a 1965 un conocimiento fundamental de la relación entre comportamiento, teoría y propiedades esfuerzo-deformación del suelo, principalmente debido al apoyo e interés del gobierno federal en cimentaciones de antenas grandes de radar.

La cimentación de maquinaria es el problema más frecuente en dinámica de suelos, los libros iniciales en esta materia tratan dicho tópico (Barkan, 1962; Major, 1962; Richart et al, 1970).

### **Maquinaria Reciprocante y Rotativa**

Las máquinas, tales como compresores y motores grandes, ocasionan fuerzas dinámicas que varían sinusoidalmente, resultando en movimientos de la cimentación.

Cuando recién se instala una turbina bien diseñada, se originan fuerzas dinámicas pequeñas. Sin embargo, el desgaste conduce a desbalance en las partes rotativas, por lo que se desarrollan fuerzas dinámicas.

Ya que los turbo-compresores pueden ser dañados por movimientos dinámicos pequeños de sus apoyos, o por pequeños asentamientos diferenciales de los mismos, se debe realizar un cuidadoso diseño de los apoyos. Para facilitar las conexiones de tubería, este compresor está apoyado por encima de la superficie del suelo mediante un pórtico de acero o de concreto. El pórtico debe ser diseñado para evitar la resonancia entre la frecuencia natural del pórtico y las frecuencias de operación de la máquina. Como ejemplo se presenta el caso de un pórtico de concreto apoyado en una platea de cimentación. El suelo consiste de 4 metros de relleno hidráulico (arena), sobre un depósito profundo de arena ligeramente cementada. Fue necesario responder a las siguientes interrogantes en el diseño:

1. ¿Podría la interacción entre el suelo y el pórtico estructural causar frecuencias resonantes que coincidirán con una de las frecuencias de operación de la maquinaria?
2. ¿Qué magnitud de la fuerza dinámica debe ser aplicada al suelo durante la vida útil de la maquinaria?
3. ¿Cuán grande será el movimiento dinámico de la platea?
4. ¿Cuánto asentamiento diferencial de la platea ocurrirá como resultado de la compactación de la arena por las fuerzas dinámicas?
5. Si el relleno debe ser densificado antes de la construcción de la cimentación, ¿qué densidad final debe lograrse?
6. ¿Qué magnitud de movimientos dinámicos se transmitirán a través del suelo a edificaciones y maquinarias cercanas? y ¿podría reducirse el peligro de dicha transmisión por alguna forma de tratamiento de la cimentación?
7. ¿Cuál es el espaciamiento requerido entre las cimentaciones de turbo-compresores adyacentes?

En el ejemplo se decidió que para evitar la posibilidad de asentamiento diferencial, el relleno hidráulico debería ser densificado.

A menudo el ingeniero geotécnico es consultado solamente cuando la maquinaria ya ha sido instalada y se han desarrollado los problemas.

Como ejemplo se tiene un compresor de gas de tipo pistón que está apoyado sobre un bloque masivo de concreto de cimentación, que descansa en arena media a densa. Tales máquinas desarrollan fuerzas dinámicas desbalanceadas asociadas con la aceleración de subida y bajada del pistón; las magnitudes de dichas fuerzas pueden ser estimadas con bastante precisión. En este caso, con el compresor en operación, los trabajadores de la fábrica notaron que los movimientos de la cimentación eran excesivos. Se desarrollaron grietas en las paredes del local del generador adyacente. El ingeniero de suelos que fue contratado para recomendar las medidas correctivas debería responder a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cómo deberían medirse los movimientos dinámicos para establecer la razón del movimiento excesivo?
2. ¿Cuál es la mejor medida de reducción del movimiento, el incremento de la masa o el incremento de la rigidez de la cimentación?
3. Si se indica el incremento de la rigidez, ¿es mejor calzadura o grouting?
4. ¿En cuánto pueden reducirse los movimientos con las medidas de corrección recomendadas?

Las mediciones realizadas con un sismógrafo portátil de tres componentes, localizado sucesivamente en diferentes puntos del bloque de cimentación, mostraron que los movimientos resultaron principalmente del cabeceo alrededor de un eje horizontal. Cálculos simples demostraron que la frecuencia natural en cabeceo era aproximadamente igual a la frecuencia de operación del compresor.

El incremento de la rigidez de la cimentación se indicó como la mejor solución y los ensayos de laboratorio en la arena mostraron que esto podría ser logrado económicamente al inyectar en el suelo una solución de silicato de sodio, seguida por una solución de cloruro de calcio. Estas dos sustancias químicas reaccionaron para formar una solución gel que unió los granos de arena.

Como resultado del tratamiento, la amplitud de vibración se redujo a un séptimo del movimiento original.

## Otras Maquinarias Industriales

Existe una gran variedad de otros equipos industriales que causan cargas dinámicas en las cimentaciones, tales como: prensas, vibradores, etc. El problema de diseñar o mejorar la cimentación de dichas maquinarias es similar a aquél para maquinaria recíprocante o rotativa, con la diferencia que las cargas pueden no ser sinusoidales o periódicas.

## Desarrollo de la Era Espacial

Una clase de problema de cimentación de maquinarias, especializada pero importante, consiste en proporcionar una cimentación adecuada para antenas de radar de gran precisión. Las fuerzas dinámicas ocurren conforme la antena se acelera o desacelera, en elevación o en azimut. Es necesario asegurar que los movimientos de la cimentación, ya sea movimientos dinámicos o asentamientos acumulados, no causen errores agudos, y que las frecuencias resonantes del sistema antena-estructura-cimentación no caen dentro del ancho de banda de operación del servomecanismo de control de la antena.

Se ilustra una antena muy grande, con una antena tipo plato, apoyada sobre cuatro pies de acero. Un par de ruedas en la base de cada pie corren en una pista circular de 113 pies de diámetro, por lo tanto la superestructura rota alrededor de un eje vertical. La pista descansa en un anillo de concreto. El suelo es una arena gravosa media a densa, compuesta por fragmentos de coral. Durante el estudio de factibilidad para el sistema de radar, el cual condujo al establecimiento del criterio final del diseño, se tuvieron que absolver las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ensayos de campo y de laboratorio deberían realizarse para establecer el comportamiento esperado del suelo cuando se cargue éste con el movimiento de la antena?
2. ¿Cuál será la magnitud de la deflexión transitoria que ocurrirá en la viga anillo durante el movimiento de la antena?
3. ¿Cuál será el asentamiento permanente durante la vida útil de la antena?
4. ¿Cuál es el efecto de la deflexión de la viga-anillo en la frecuencia de resonancia fundamental de todo el sistema?

La absolución de estas interrogantes permitió un balance económico entre las rigideces de la cimentación, de la superestructura y otras partes del sistema. Para el diseño final de la viga-anillo, fue necesario seleccionar un valor apropiado del módulo de reacción de la subrasante para las condiciones de carga anticipadas. Una vez que se inició la construcción, fue necesario desarrollar un sistema de medición para verificar el comportamiento de la cimentación.

Una estructura muy especializada se utilizó en la plataforma del encendido de las diversas etapas del cohete Saturno V en las Misiones Apolo. Estas plataformas estaban apoyadas en pilotes de fricción en arenas y arcillas. Una pregunta importante fue: ¿Causarán las vibraciones producidas por el lanzamiento una penetración adicional de los pilotes?. El emplazamiento y diseño de los centros de control y otras estructuras cerca de las plataformas de lanzamiento han requerido el estudio de la transmisión de ondas a través del terreno y los métodos de aislamiento de edificaciones contra la vibración.

También ha existido el requisito de verificar el comportamiento de los componentes precisos de guía, como los giroscopios. Para estas plataformas deben conocerse las vibraciones ambientales del tráfico y de los microsismos, para minimizarlos o para aplicar las compensaciones adecuadas.

## **1.2 EFECTOS DE EXPLOSIÓN NUCLEAR**

El estudio de los problemas civiles y militares ocasionados por el desarrollo de las explosiones atómicas, ha dado un mayor ímpetu a la investigación en la dinámica de suelos.

### **Aplicaciones Civiles**

Las explosiones nucleares tienen un gran potencial para su utilización en la excavación rápida de grandes masas de tierra, tales como: canales, puertos y cortes profundos y largos para carreteras y ferrocarriles. Sin embargo, la realización de este potencial se ha impedido por la política internacional y la preocupación pública sobre el daño posible de la radioactividad.

Se ha dado considerable atención al uso posible de la energía nuclear en la creación de un Canal de Panamá a nivel del mar. Aunque mucho del material excavado sería en

roca dura, la mayor parte sería en arcillas lutáceas fuertemente sobreconsolidadas, del tipo estudiado por los ingenieros de suelos. Las preguntas sobre dinámica de suelos en este estudio han sido:

1. ¿Cuál es la relación entre tamaño y profundidad de la carga y las propiedades del suelo en relación al cráter resultante?
2. ¿Cuál es el efecto de los esfuerzos inducidos por una gran explosión en la resistencia del suelo bajo las paredes del cráter?
3. ¿Continuarán estables los taludes de los cráteres cuando se produzcan grandes explosiones para formar la sección siguiente del canal?

Los estudios han indicado que el costo de excavación utilizando explosivos nucleares sería mucho menor que el costo de una excavación convencional.

### **Construcción de Protección**

Las estructuras subterráneas de protección diseñadas para soportar explosiones indirectas de bombas nucleares varían, desde personales hasta bases para misiles balísticos intercontinentales. Para el diseño de una base ICBM se debieron absolver las preguntas sobre los efectos de una gigantesca explosión cercana:

1. ¿Cuánto movimiento vertical y horizontal ocurrirá en los sitios de las estructuras?
2. ¿Cuán grandes serán los esfuerzos verticales y horizontales sobre la estructura en profundidad?
3. ¿Cuánto aumenta la capacidad de carga de las estructuras por la interacción suelo-estructura?
4. ¿Cómo se deberían diseñar las conexiones entre las estructuras para soportar los desplazamientos relativos transitorios?

### 1.3 INGENIERÍA SISMORESISTENTE

La aplicación principal de la dinámica de suelos en los últimos tiempos ha sido en el establecimiento de la relación entre las condiciones del suelo y los daños durante terremotos. Aunque tal relación ha sido reconocida e investigada en el Japón desde los años 30, en el mundo occidental ha recibido atención seria desde los terremotos de Chile en 1960, de Alaska en 1964 y de Niigata en 1964. Una descripción excelente de este problema aparece en los trabajos de Ohsaki (1969) y Seed (1969). El diseño y construcción de Centrales Nucleares también ha contribuido grandemente al interés en la Dinámica de Suelos.

#### **Cimentaciones de Edificios**

Un abastecimiento grande de agua de enfriamiento es esencial para la operación y la seguridad de estas plantas; muchas plantas nucleares deben localizarse en depósitos recientes de suelo, que están cerca de grandes depósitos de agua. En la primera planta nuclear cimentada en suelo, el perfil estratigráfico mostraba arenas y arcillas blandas cerca de la superficie y una secuencia profunda de arcilla rígida y limolita sobre roca cristalina. El diseño y análisis de seguridad de esta planta incluyó las preguntas en dinámica de suelos siguientes:

1. ¿Se aplican los criterios de diseño desarrollados para plantas nucleares cimentadas en roca, o es necesario modificarlos para tomar en cuenta el efecto de amplificación del suelo?
2. ¿Permanecerán estables las arenas durante un terremoto, o existe el peligro de pérdida de capacidad portante o asentamiento por densificación?
3. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento relativo transitorio a ser considerado en las conexiones críticas de tuberías entre edificaciones?
4. ¿Cómo se debe incorporar el efecto de la interacción suelo-estructura en el análisis matemático para la respuesta dinámica de la estructura?
5. ¿Permanecerán estables los diques de los canales del agua de enfriamiento durante un terremoto?

La parte más crítica de esta planta, el contenedor del reactor, se cimentó directamente sobre arcillas rígidas. Las otras edificaciones se cimentaron a profundidades menores, y la arena superficial se excavó y reemplazó por material granular selecto y bien compactado.

Estas mismas preguntas se realizan en edificaciones y estructuras convencionales.

El efecto de amplificación del suelo sobre roca fue particularmente importante durante el sismo de Caracas de 1967. La profundidad de la roca base variaba grandemente en el Valle de Caracas y a lo largo de la zona costera cercana; el daño severo y la pérdida de vidas se concentró en áreas pequeñas donde la frecuencia de resonancia de depósitos profundos de suelo coincidió con la frecuencia de resonancia de edificios altos. Actualmente existe un gran interés y esfuerzo para incorporar el efecto de las condiciones locales del suelo en los códigos de construcción.

La pérdida de capacidad portante, como resultado de la licuación de suelos por sismos, fue especialmente notoria en Niigata, Japón, durante el terremoto de 1964. Efectos similares, incluyendo volcanes de arena y subsidencias causadas por densificación repentina de la arena, han sido observados durante muchos terremotos.

## **Deslizamientos**

Han ocurrido deslizamientos grandes durante terremotos. El deslizamiento de Turnagain en Alaska involucró 12 millones de yardas cúbicas de tierra, destruyó 75 casas y tomó varias vidas. El deslizamiento cerca del Lago Riñihue en Chile, involucró 30 millones de metros cúbicos y represó la salida del lago. En los dos meses siguientes el lago se elevó 26.5 metros y se represaron 2.5 billones de metros cúbicos. Un bloque similar ocurrió en el lago Riñihue durante un terremoto hace 400 años, y cuando la masa del deslizamiento fue sobrepasada, se erosionó rápidamente, generando una gran inundación que tomó muchas vidas y destruyó el pueblo de Valdivia. En 1960 se realizó un gran esfuerzo para cortar un canal a través de terreno menos erosionable, antes que el nivel del lago se elevara más, para minimizar los efectos de la inundación subsecuente.

Cuando existan comunidades u obras importantes localizadas por debajo de masas de tierra que puedan deslizarse durante un terremoto, se requiere un análisis detallado de la estabilidad dinámica del talud. Más aún, es necesario llevar a cabo estudios regionales sobre la susceptibilidad al deslizamiento. Por ejemplo, cuando se planea un

reservorio grande en una región susceptible a terremotos, es necesario asegurar que no existe un riesgo significativo de desborde de la presa, como resultado de deslizamientos repentinos en el reservorio.

### **Presas de Tierra**

Se tiene una presa localizada en una región sísmica inmediatamente aguas arriba de un área muy poblada. El suelo en el lugar era una arcilla muy blanda con inclusiones de arena. El diseño requería respuestas a las siguientes interrogantes en Dinámica de Suelos:

1. ¿Son las arenas susceptibles a la licuación?
2. ¿Cuál es la resistencia cortante de la arcilla durante terremotos?
3. Considerando la respuesta dinámica del suelo y el terraplén, ¿cuál es la magnitud de los esfuerzos cortantes que ocurrirán en la arcilla durante un terremoto?
4. Para un terremoto dado, ¿cuánto será el asentamiento del borde?
5. ¿Cuál es el requisito del borde libre, en relación al grado de consolidación de la arcilla bajo el peso del terraplén?
6. ¿Son los suelos a utilizarse en la construcción del terraplén resistentes a la erosión en caso que ocurra un desborde o agrietamiento durante un terremoto?
7. ¿Cuál será el contenido de humedad utilizado para compactar el núcleo, para minimizar el agrietamiento durante un terremoto?

Debido a malas condiciones de cimentación, la presa se diseñó con bermas anchas, y se puso bastante atención a la selección de los materiales para el núcleo y las zonas de transición.

## 1.4 HINCADO DE PILOTES

El comportamiento dinámico del suelo debe ser tomado en cuenta en la interpretación del hincado de pilotes por medio de martillos de impacto, ya que cada golpe del martillo causa una onda de esfuerzo en el pilote y de allí al suelo circundante. La penetración durante cada golpe es rápida y está relacionada a la resistencia dinámica del suelo. Muchas de las explicaciones recientes sobre el comportamiento del hincado de pilotes toman en consideración estos fenómenos dinámicos.

Existen máquinas vibratorias para el hincado de pilotes. Éstas operan estableciendo una condición resonante para las ondas que salen y llegan al pilote, o una condición resonante para el sistema suelo-pilote.

La posibilidad de daño a las edificaciones vecinas como resultado de las ondas de esfuerzo transmitidas a través del terreno es de gran importancia en todas las operaciones de hincado de pilotes.

## 1.5 COMPACTACIÓN POR VIBRACIÓN

Existen rodillos vibratorios que compactan el relleno hidráulico, en este caso por debajo de los turbo-compresores. Fue necesario absolver las siguientes preguntas, con referencia a la recompactación del suelo:

1. ¿Puede lograrse la densidad final por medio de rodillos vibratorios en la superficie del relleno? o ¿es necesario excavar y recompactar el suelo en capas?
2. Si el suelo debe excavar y recompactarse, ¿qué peso del vibrador debe ser usado?, ¿qué espesor de capa debe usarse? o ¿cuántos pases se necesitan en cada capa?

En este caso se decidió que el suelo debe excavar y recompactarse en capas de cuatro pies de espesor. Se encontró que esta forma de tratamiento era más económica que la compactación por vibroflotación o el uso de pilotes.

Los rodillos vibratorios se utilizan para compactar todo tipo de suelo. Las vibraciones se utilizan en ensayos de laboratorio para determinar las densidades máximas de suelos granulares.

## **1.6 OTROS PROBLEMAS DE INGENIERÍA**

Las ondas sísmicas se utilizan a menudo en investigaciones geotécnicas para determinar la profundidad del basamento rocoso y para dar una idea general de la naturaleza del suelo y las rocas del subsuelo. Se utiliza la medición de la velocidad de propagación de ondas como base para decidir si se utiliza en la excavación de terreno duro equipo mecánico o explosiones. La medida de la velocidad de propagación de las ondas de corte in-situ se requiere en muchos estudios de ingeniería sismo-resistente.

El efecto del tráfico en pavimentos y subrasantes se considera un problema de dinámica de suelos, aunque efectos dinámicos verdaderos se presentan solamente cuando los vehículos se mueven más rápido que las velocidades promedio. La transmisión de vibraciones de trenes subterráneos en edificios cercanos es de gran interés en los sistemas de transporte.

El daño o incomodidad en edificaciones cercanas, como resultado de explosiones en canteras o excavaciones, está influenciado por las características del terreno a través del cual las ondas de esfuerzo se transmiten y por el tipo de terreno por debajo de la edificación. Los ingenieros geotécnicos a menudo se encuentran involucrados en juicios de daños en relación a las explosiones.

Finalmente, existe una variedad de problemas especiales de problemas prácticos en dinámica de suelos, tales como: la penetración de pequeños misiles en el terreno y la dinámica del aterrizaje de vehículos en la luna.

## **1.7 DEFINICIÓN DE DINÁMICA DE SUELOS**

Los ejemplos citados anteriormente han indicado la naturaleza y el alcance de la Dinámica de Suelos. En general, los problemas de ingeniería geotécnica que involucran la aplicación rápida de carga se considera que pertenecen a la Dinámica de Suelos.

Con el objeto de ser más específicos acerca de la naturaleza de los problemas dinámicos, es recomendable considerar el comportamiento de un sistema dinámico muy simple: una masa apoyada por un resorte. Para obtener una descripción matemática total del comportamiento de este sistema, es necesario considerar:

(a) La inercia de la masa

(b) Las **características esfuerzo-deformación-tiempo** del resorte, incluyendo el comportamiento del resorte durante carga repetida.

Por ejemplo, a menudo el sistema real de masa-resorte se idealiza por un sistema de masa puntual, resorte lineal sin masa y amortiguador lineal. La idealización de resorte sin masa y el amortiguador juntos hacen uno de los muchos modelos posibles del comportamiento del resorte real: un modelo simple que afortunadamente es suficiente para muchos problemas.

La consideración de las características esfuerzo-deformación-tiempo es común a todos los problemas en ingeniería geotécnica: problemas estáticos y dinámicos. En todos los problemas el comportamiento real y complicado de esfuerzo-deformación-tiempo debe ser reemplazado por un modelo matemático lo suficientemente simple para cálculos prácticos. Este modelo idealizado enfatiza aquellos aspectos del comportamiento real esfuerzo-deformación-tiempo que son importantes para el problema en particular. Los modelos matemáticos utilizados en problemas dinámicos a menudo difieren de aquellos utilizados en problemas estáticos, especialmente por la inclusión de elementos que toman en cuenta los efectos de carga repetida. Sin embargo, puede decirse que el comportamiento de los suelos no difiere grandemente en problemas estáticos y dinámicos. Es decir, el comportamiento esfuerzo-deformación-tiempo del suelo es diferente cuantitativamente, pero similar cualitativamente para problemas estáticos y dinámicos.

Por otro lado, la necesidad de considerar la inercia cambia la manera de enfocar los problemas. Esto es, los problemas en dinámicas de suelos son cualitativamente diferentes de aquellos en mecánica de suelos, debido a la necesidad de considerar los efectos de las fuerzas de inercia. Por lo tanto, cualquier curso de Dinámica de Suelos debe enfatizar grandemente el rol de la inercia.

Puede decirse entonces que la dinámica de suelos consiste de:

1. Evaluación de las propiedades esfuerzo-deformación del suelo aplicadas a carga dinámica.
2. Técnicas para calcular o estimar el rol de las fuerzas de inercia presentes durante la carga dinámica.

3. Procedimientos y experiencia para aplicar este conocimiento a la solución de problemas prácticos.

## REFERENCIAS

Barkan D.D. (1962), "Dynamics of Bases and Foundations", Mc Graw-Hill, New York. (1)

Major A. (1962), "Vibration Analysis and Design of Foundations for Machines and Turbines", Akademiai Kiado, Budapest. (2)

Ohsaki Y. (1969), "The Effects of Local Soil Conditions upon Earthquake Damage", Proc. Specialty Session Soil Dynamics, 7<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico. (3)

Richart F.E., Woods R.D. y Hall J.R. (1970), "Vibrations of Soil and Foundations", Prentice-Hall, New Jersey. (4)

Seed H.B. (1969), "The Influence of Local Soil Conditions on Earthquake Damage", Proc. Specialty Session Soil Dynamics, 7<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico. (5)

Whitman R.V. (1975), "Soil Dynamics Class Notes", MIT, Cambridge, Massachusetts. (6)

# **CAPÍTULO II: Sistemas lineales de un grado de libertad**



## CAPÍTULO II

### SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo considera el comportamiento de sistemas con **elementos concentrados**. En estos sistemas la masa está concentrada en uno o más cuerpos rígidos (Figura 2.1), y estos cuerpos rígidos están conectados por resortes, que representan la flexibilidad del sistema y posiblemente por otros elementos (tales como amortiguadores), que representan las causas de la disipación de energía.



Figura 2.1. Sistemas de un grado de libertad

En algunos casos los sistemas idealizados de elementos equivalentes son una representación muy cercana de algunos sistemas estructurales y mecánicos reales. Por ejemplo, el tanque de agua elevado de la Figura 2.2a, que es susceptible a movimientos horizontales causados por terremotos, se comporta similarmente a cualquiera de los sistemas idealizados masa-resorte-amortiguador de la Figura 2.2b. En otros casos, un sistema de elementos equivalentes proporciona una aproximación conveniente y útil para un sistema continuo. Por ejemplo, el sistema masa-resorte de la Figura 2.3b, se utiliza para aproximar la respuesta de una viga (figura 2.3a), donde la masa y la flexibilidad están distribuidas continuamente en la realidad.

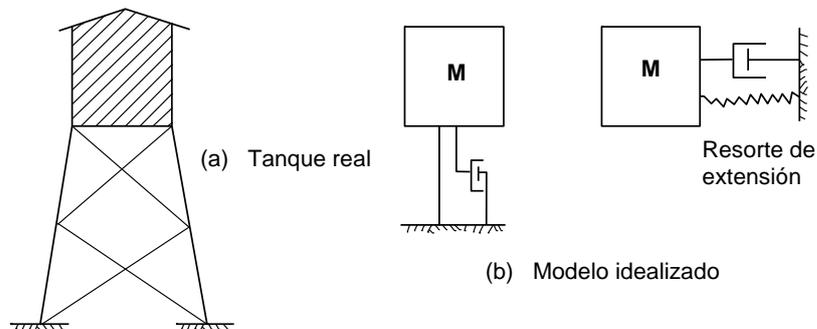
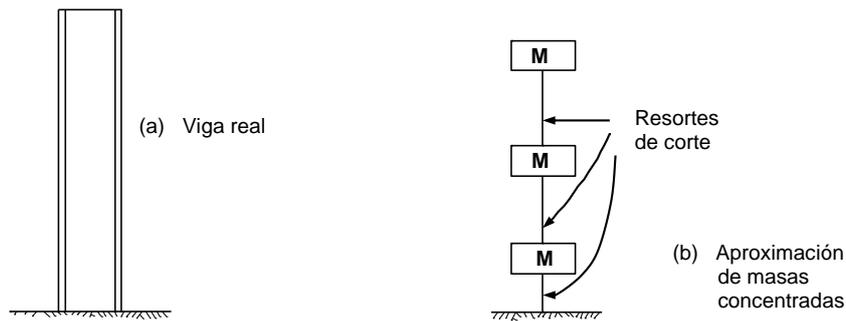


Figura 2.2. Tanque elevado de agua



**Figura 2.3.** Viga en cantilever

Un sistema equivalente de elementos concentrados se dice que tiene uno o más **grados de libertad**, dependiendo del número de masas concentradas y del tipo de movimiento que cada masa puede experimentar. Por ejemplo, la estructura reticular que soporta el tanque de agua en la Figura 2.2 es bastante flexible con respecto a movimientos horizontales, pero bastante rígida con respecto a movimientos verticales. Si se desprecian los movimientos rotacionales del tanque, el tanque de agua se comporta esencialmente como un **sistema de un grado de libertad**. En algunos casos el movimiento rotacional del tanque no se puede despreciar, por lo que se debe considerar al tanque como un **sistema de dos grados de libertad**. La aproximación de masas concentradas de la viga de la Figura 2.3 tiene **tres grados de libertad**.

Un sistema de elementos concentrados es **lineal** si la resistencia de los elementos que conectan las masas es proporcional, ya sea al movimiento o a la velocidad de movimiento.

El entendimiento del comportamiento de los sistemas de elementos concentrados es esencial al entendimiento de la dinámica de suelos. Se aprende a tratar con la inercia y las más importantes consecuencias de la inercia.

## 2.2 VIBRACIONES LIBRES

Se considera en primer lugar el sistema de un grado de libertad, no amortiguado, mostrado en la Figura 2.1a. Bajo condiciones estáticas, el peso de la masa comprime el resorte y ocasiona en él una fuerza. En lo que sigue se trata de cambios en posición y fuerza, conforme la masa experimenta movimiento dinámico.

Dos fuerzas dinámicas actúan en la masa durante el movimiento dinámico:

- 1) **Fuerza del resorte:** Si el movimiento  $x$  es positivo hacia abajo, la fuerza hacia arriba en la masa es:

$$k x$$

- 2) **Fuerza de inercia:** La fuerza de inercia se opone a la aceleración de la masa. La magnitud de esta fuerza en la dirección hacia arriba es:

$$M\ddot{x}$$

donde  $\ddot{x}$  es la segunda derivada de  $x$  con respecto al tiempo  $t$ .

El equilibrio de fuerzas en la masa requiere que:

$$M\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

Se puede verificar, por sustitución directa, que la siguiente expresión es una solución de la ecuación diferencial 2.1

$$x = A \sin \sqrt{\frac{k}{M}} t + B \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t \quad (2.2)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

Si la masa se va a mover, debe dársele alguna perturbación inicial. Supongamos que a la masa le ha sido dada un desplazamiento inicial estático  $x_0$  por una fuerza estática aplicada  $F_0 = k x_0$ , y que al tiempo cero, esta fuerza adicional se suprime repentinamente. Las condiciones iniciales siguientes se utilizan para evaluar las dos constantes en la ecuación 2.2.

$$t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = 0$$

Se encuentra que  $A$  debe ser cero y  $B=x_0$ . Por lo tanto, el movimiento resultante de esta perturbación inicial particular es:

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t \quad (2.3)$$

De aquí, la masa tendrá un movimiento periódico, entre los límites de  $x = -x_0$  y  $x = x_0$ . El período del movimiento será determinado por las características del sistema masa resorte  $M$  y  $k$ . El movimiento periódico resultante se conoce como **vibración libre**.

El período  $T$  es el tiempo requerido por la masa para completar un ciclo y retornar a su posición inicial ( $x = x_0$ ):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (2.4)$$

La **frecuencia**  $f_n$  (ciclos por unidad de tiempo) es:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (2.5)$$

Otra medida conveniente es la **frecuencia natural circular**  $\omega$ , que tiene unidades de radianes por unidad de tiempo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, existen varias alternativas para expresar la ecuación de movimiento, indicada en la ecuación 2.3.

$$x = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos 2\pi f_n t = x_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (2.7)$$

La frecuencia de vibración libre  $f_n$  se conoce como **frecuencia natural**. La frecuencia natural depende de las propiedades del sistema, y será la misma independientemente de la perturbación inicial dada al sistema.

**Consideraciones de energía:** Se evaluará ahora la energía dentro del sistema masa-resorte a varios intervalos de tiempo después de la perturbación inicial. Cuando el movimiento es máximo ( $x = \pm x_0$  en  $t = 0, T/2, T, 3T/2$ , etc.), la velocidad del movimiento es cero. A estos tiempos, la energía se almacena en el resorte, pero no hay energía cinética.

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad (2.8)$$

Por otro lado, cuando el movimiento es cero ( $x = 0$  en  $t = T/4, 3T/4, 5T/4$ , etc.), la velocidad es máxima.

$$(\dot{x})_{\max} = \omega x_0$$

En estos intervalos de tiempo existe energía cinética pero no se almacena energía en el resorte.

$$E = \frac{1}{2} M \omega^2 x_0^2 \quad (2.9)$$

Aplicando la ecuación 2.6, se puede demostrar que las ecuaciones 2.8 y 2.9 son iguales. La energía introducida en el sistema por la perturbación inicial permanece constante a través del movimiento subsecuente.

**NOTA:** Este análisis omite otros dos términos de energía: el cambio en la energía potencial de la masa conforme se mueve y el trabajo realizado por la fuerza estática del resorte actuando a través del movimiento dinámico. Sin embargo, estos dos términos se cancelan mutuamente en todo momento.

**Vibraciones libres amortiguadas:** La Figura 2.1b muestra un sistema masa-resorte que además incluye un amortiguador. La fuerza ejercida por el amortiguador es proporcional a la velocidad de movimiento. La ecuación diferencial de movimiento es:

$$M \ddot{x} + \delta \dot{x} + kx = 0 \quad (2.10)$$

Esta ecuación tiene diferentes formas de solución, dependiendo de la magnitud del coeficiente de amortiguamiento  $\delta$ . Definamos una expresión denominada **amortiguamiento crítico**  $\delta_{cr}$ :

$$\delta_{cr} = 2\sqrt{kM} \quad (2.11)$$

También se usará la **razón de amortiguamiento**, D:

$$D = \frac{\delta}{\delta_{cr}} \quad (2.12)$$

El significado de estas formas de solución será aparente en lo que sigue.

El caso más importante ocurre cuando  $D < 1$ . En este caso, la solución de la ecuación 2.10 para la misma perturbación inicial del caso con amortiguamiento es:

$$x = x_0 e^{-\omega D t} (\cos \omega_1 t + D \frac{\omega}{\omega_1} \text{sen } \omega_1 t) \quad (2.13)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia natural circular no amortiguada, y  $\omega_1$ , es la frecuencia natural circular amortiguada:

$$\omega_1 = \omega \sqrt{1 - D^2} \quad (2.13a)$$

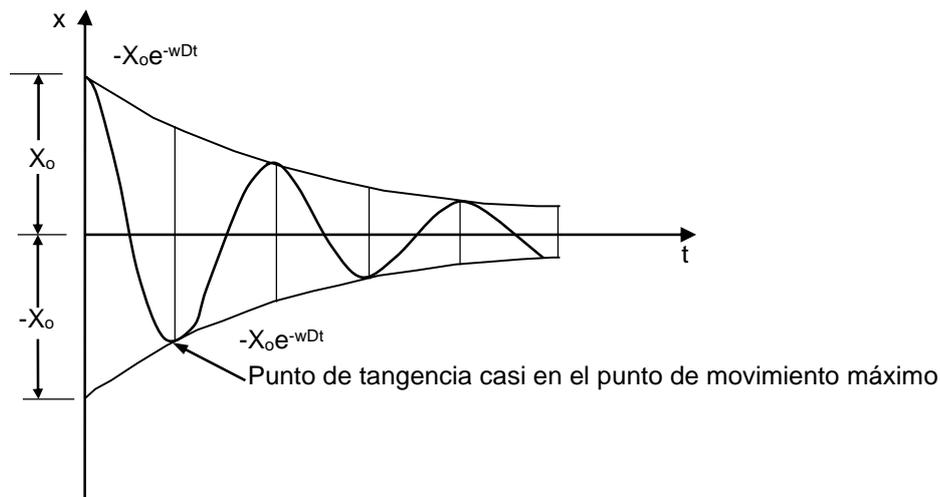
Utilizando fórmulas trigonométricas, la ecuación 2.13 se transforma en:

$$x = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{D\omega}{\omega_1}\right)^2} e^{-\omega D t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (2.14)$$

donde :

$$\theta = \arctg\left(-\frac{D\omega}{\omega_1}\right)$$

De la ecuación 2.14 se aprecia que el movimiento todavía es periódico, pero la amplitud de movimiento decrece con el tiempo, como se muestra en la Figura 2.4.



**Figura 2.4.** Vibración libre amortiguada

Aunque el amortiguamiento causa un ligero aumento al período de la vibración libre, el aumento es pequeño si  $D$  es pequeño (si  $D = 0.2$  el cambio es solamente 2%). El efecto principal del amortiguamiento es ocasionar que las vibraciones libres se atenúen.

Siempre y cuando el amortiguamiento sea relativamente pequeño, la amplitud de picos sucesivos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en la Figura 2.4, está dada por:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\omega D t} = e^{2\pi D}$$

El **decremento logarítmico**  $\Delta$  está definido por:

$$\Delta = \log \frac{x_i}{x_{i+1}} = 2\pi D \quad (2.15)$$

Si  $D > 1$ , la solución de la ecuación 2.10 para las condiciones de frontera dadas no contiene ya factor periódico y no representa ya un movimiento vibratorio. La resistencia viscosa es tan grande comparada a la resistencia inercial, que la masa no vibra sino simplemente se reduce de modo gradual a  $x=0$ . Es de interés particular el caso donde la fuerza de inercia es completamente despreciable, comparada a las fuerzas de amortiguamiento y de resorte. En este caso la ecuación diferencial básica es simplemente:

$$\delta \dot{x} + kx = 0$$

La solución para las condiciones de frontera utilizadas en esta sección es:

$$x = x_0 e^{-\frac{k}{\delta}t} \quad (2.16)$$

El desplazamiento relativo desaparece de acuerdo a una función exponencial simple de decaimiento. Las soluciones para diferentes condiciones de frontera se estudian en la Reología.

### 2.3 VIBRACIONES FORZADAS POR LA APLICACIÓN DE CARGAS PERIÓDICAS

Se estudia a continuación el caso donde existe una fuerza periódica aplicada a la masa. Esta carga puede describirse por una de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} P &= P_0 \sin \Omega t \\ P &= P_0 \sin 2\pi f t \end{aligned}$$

donde :

$P_0$	=	amplitud de la carga
$\Omega$	=	frecuencia circular de la carga aplicada
$f$	=	frecuencia de la carga aplicada

La ecuación diferencial del movimiento para el caso con amortiguamiento es:

$$M\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx = P_0 \sin \Omega t \quad (2.17)$$

La solución de esta ecuación para el caso donde el sistema está inicialmente en reposo

( $x = \dot{x} = 0$  para  $t = 0$ ) es:

$$x = \frac{P_0}{k} \frac{\left[ \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \text{sen } \Omega t - 2D \frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t \right] + e^{-\omega D t} \left[ 2D \frac{\Omega}{\omega} \cos \omega_1 t + \frac{\Omega}{\omega_1} \left(2D^2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right) \text{sen } \omega_1 t \right]}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (2.18)$$

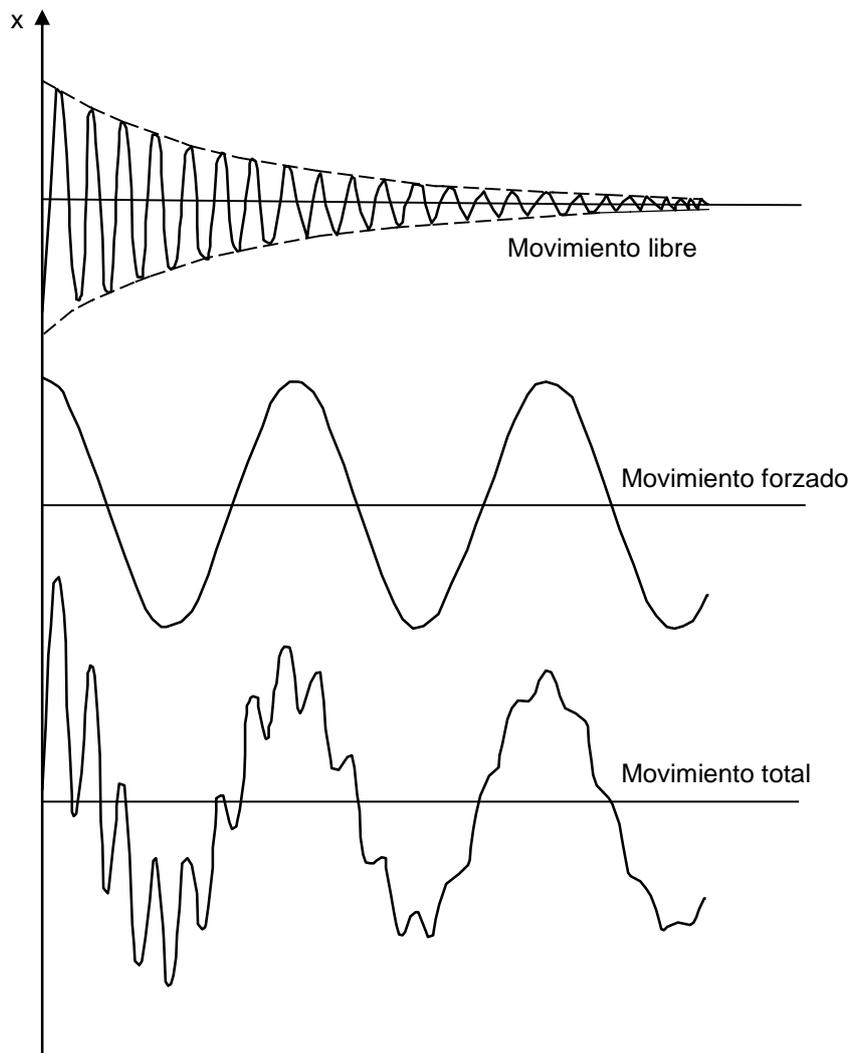
donde  $\omega$ ,  $\omega_1$  y  $D$  se han definido previamente en las ecuaciones 2.6, 2.13a y 2.12, respectivamente.

La ecuación 2.18 es bastante complicada, por lo que es de utilidad examinar algunos casos especiales.

**Amortiguamiento pequeño:** cuando  $D < 0.1$ , es razonable omitir ciertos términos; la ecuación 2.18 se reduce a:

$$x = \frac{P_0}{k} \frac{\left(\text{sen } \Omega t - e^{-\omega D t} \frac{\Omega}{\omega} \text{sen } \omega t\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (2.19)$$

El movimiento consiste en un movimiento periódico a la frecuencia de la fuerza aplicada, más un segundo movimiento periódico a la frecuencia natural del sistema. El segundo, vibración libre, es amortiguado y desaparece con el tiempo, como se ilustra en la Figura 2.5. En sistemas estructurales reales, la parte libre de la respuesta raramente persiste por más de 25 a 50 ciclos, por lo que es suficiente considerar solamente las vibraciones forzadas.



**Figura 2.5.** Vibración forzada amortiguada

**Vibraciones forzadas:** usando solamente la parte de la ecuación 2.18 que corresponde a las vibraciones forzadas:

$$x = \frac{P_0}{k} \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \text{sen } \Omega t - 2D \frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (2.20)$$

Esta ecuación puede ser transformada a: (Den Hartog, p.64)

$$x = \frac{P_0}{k} \frac{\text{sen}(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (2.21)$$

donde:

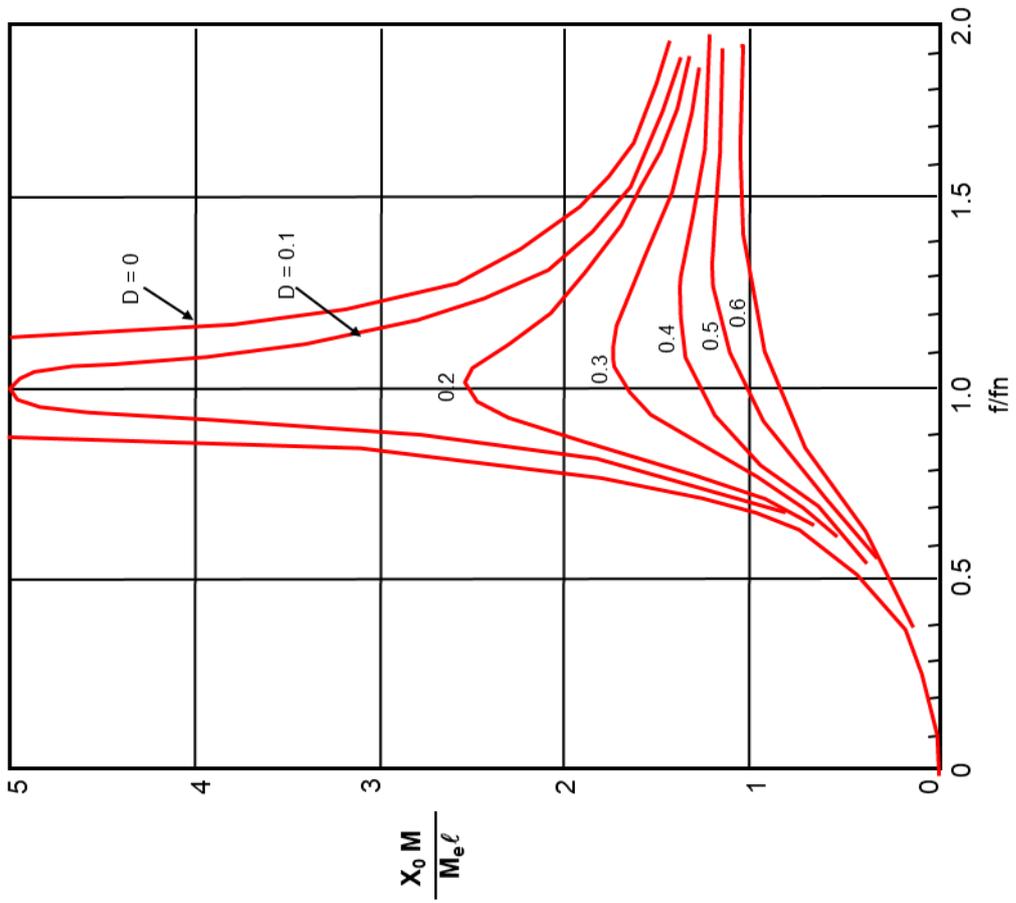
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2D \omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (2.22)$$

La ecuación 2.21 puede ser interpretada como sigue:

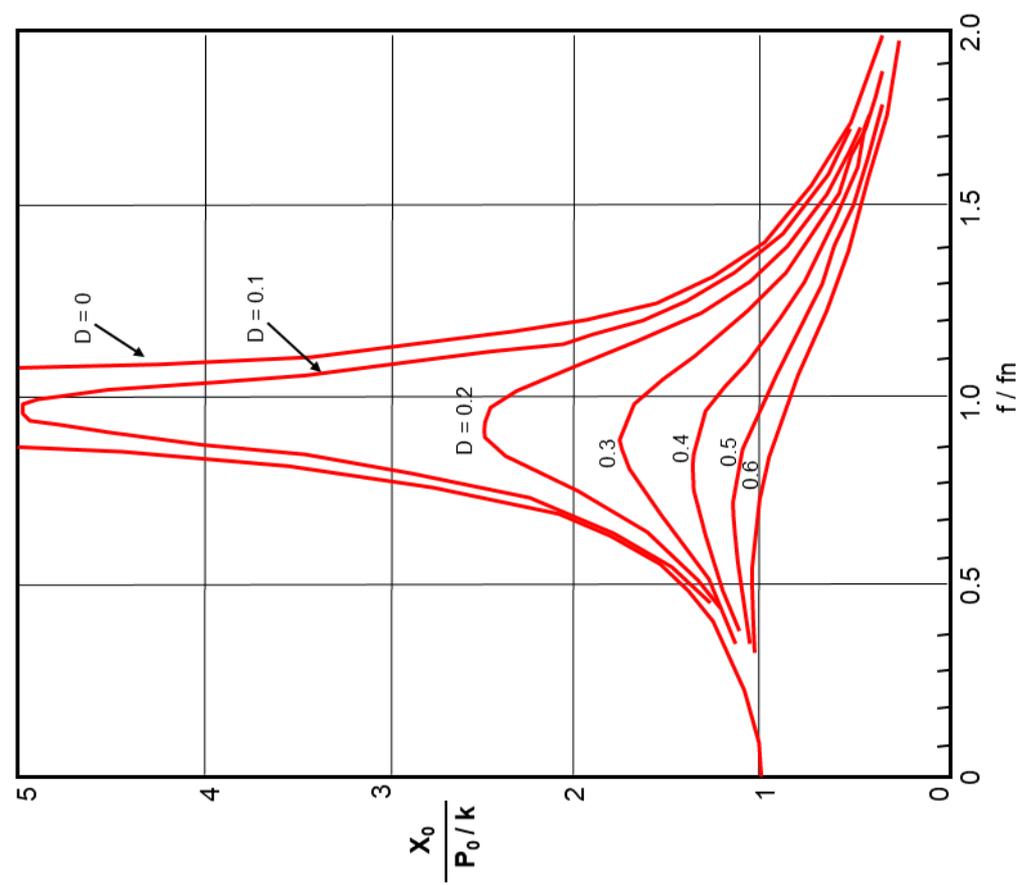
(1) El movimiento es periódico con la frecuencia  $\Omega$  de la función forzada. (2) Sin embargo, el movimiento está por detrás de la fuerza aplicada mediante el ángulo de fase  $\alpha$ . Esto es, el movimiento alcanza un máximo después del instante en que la fuerza es máxima. (3) La magnitud pico del movimiento  $x_o$ , es el producto de la deformación  $P_o/k$  que hubiese ocurrido si la fuerza  $P_o$  fuera aplicada lentamente, y un factor de carga dinámico DLF:

$$x_o = \frac{P_o}{k} \text{DLF}$$
$$\text{DLF} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (2.23)$$

El factor de carga dinámico es función de la relación  $\Omega/\omega$  (ó  $f/f_n$ ) entre la frecuencia de la carga aplicada y la frecuencia natural, y del amortiguamiento  $D$ . El factor de carga dinámico ha sido graficado en la parte (a) de la Figura 2.6.



(a) En Función de la fuerza de excitación



(b) Para el caso de masa desbalanceada

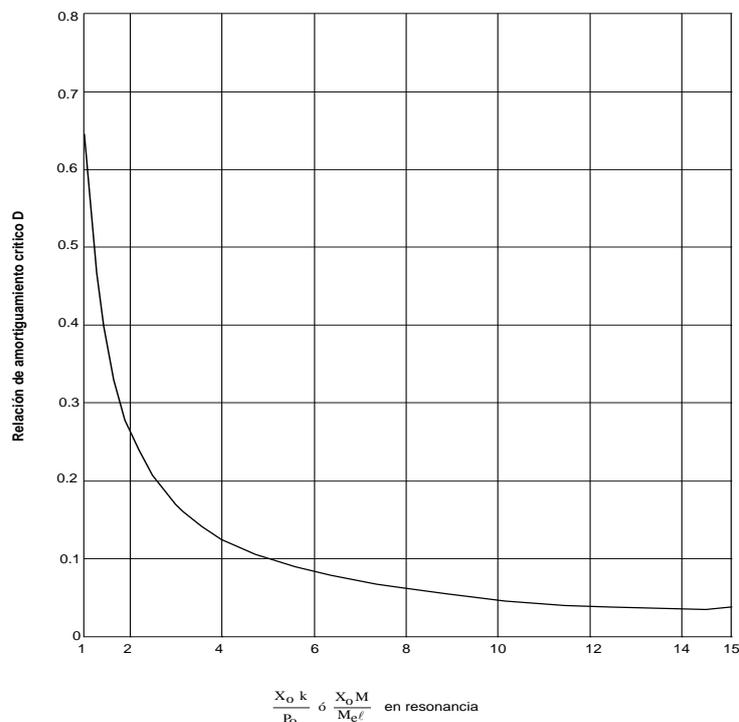
Figura 2.6. Amplitud adimensional del movimiento

Notar lo siguiente:

- Conforme  $f/f_n \rightarrow 0$ ,  $DLF \rightarrow 1$ . Físicamente esto significa que las cargas aplicadas cambian muy lentamente, comparadas con la velocidad (representada por la frecuencia natural) a la cual el sistema puede responder; de aquí que la carga sea esencialmente estática.
- Conforme  $f/f_n \rightarrow \infty$ ,  $DLF \rightarrow 0$ . Físicamente esto significa que la carga aplicada cambia muy rápidamente, en comparación a la velocidad a la cual el sistema puede responder. De aquí que la masa permanece inmóvil y resiste la carga aplicada enteramente por inercia.
- Conforme la relación de frecuencia  $\Omega/\omega$  (ó  $f/f_n$ ) aumenta, el valor del DLF aumenta hasta un pico y de allí disminuye. La relación de frecuencia a la cual DLF es máximo se denomina **condición resonante**, y la frecuencia correspondiente ( $f_r$  ó  $\Omega_r$ ) se denomina **frecuencia resonante**.
- El valor del DLF a la condición resonante es función del amortiguamiento D.

$$DLF_{\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \quad (2.24)$$

Esta relación está graficada en la Figura 2.7. Si el amortiguamiento es pequeño,  $DLF_{\max} \approx 1/2D$ .



**Figura 2.7.** Amplitud adimensional del movimiento en resonancia

- e. La frecuencia resonante es algo menor que la frecuencia natural y está dada por la expresión:

$$\frac{\Omega_r}{\omega} = \frac{f_r}{f_n} = \sqrt{1 - 2D^2} \quad (2.25)$$

- f. Cuando  $D \geq \sqrt{1/2}$ , DLF es máximo para la condición estática  $\Omega/\omega=f/f_n=0$ . Entonces no existe condición resonante verdadera.
- g. Para las frecuencias muy lejos de la frecuencia resonante, y considerando un amortiguamiento relativamente pequeño, el valor del DLF es relativamente insensible al amortiguamiento. Si  $f/f_n < 2/3$  ó  $f/f_n > 3/2$  y  $D < 0.2$ , el uso de la expresión para el caso no amortiguado es:

$$DLF = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2 \right|} \quad (2.26)$$

proporciona la respuesta dentro de un 10%.

La Tabla 2.1 resume las principales características de la relación DLF (respuesta adimensional) vs. frecuencia.

El ángulo de fase  $\alpha$  (ecuación 2.22) está graficado versus la relación de frecuencias y el amortiguamiento en la Figura 2.8. A frecuencias de operación pequeñas, el movimiento se encuentra ligeramente por detrás de la fuerza aplicada. Sin embargo, cuando  $f/f_n$  es muy grande, la fuerza y el movimiento tienden a estar en fases opuestas, es decir, el movimiento disminuye conforme la fuerza aumenta y viceversa.

**Consideraciones de energía:** Cuando el coeficiente de amortiguamiento tiene un valor diferente de cero, debe consumirse energía durante cada ciclo de vibración forzada. Esta pérdida de energía puede evaluarse por integración del producto del movimiento y la fuerza en el elemento amortiguador:

$$\Delta E = \int \delta \dot{x} dx = \delta \int_0^T \dot{x}^2 dt = \pi x_0^2 \frac{\Omega^2}{\omega} \delta \quad (2.27)$$

Dividiendo por la energía almacenada dentro del sistema como energía de deformación y cinética, se obtiene la fracción de la energía que se pierde en cada ciclo:

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\pi \frac{\Omega^2}{\omega} \frac{\delta}{k} \quad (2.28)$$

Cuando el sistema está operando a la frecuencia natural, este valor llega a ser:

$$\frac{\Delta E}{E} = 4\pi D = 2\Delta = \Psi \quad (2.29)$$

Esto es, la fracción de la energía perdida por ciclo es igual al doble del decremento logarítmico. La cantidad  $\Delta E/E$  a la frecuencia resonante se le conoce como capacidad de amortiguamiento ( $\Psi$ ).

La energía perdida debe ser proporcionada por la fuerza actuante. El retraso de la fase entre la fuerza y el movimiento es tal que la integral  $\int p dx$  sobre cada ciclo produce el trabajo neto sobre el sistema.

**Masa excéntrica:** Los resultados anteriores dan la respuesta dinámica del sistema de un grado de libertad, independientemente si  $P_o$  varía o nó con la frecuencia, por lo que representa una solución completa del sistema. Sin embargo, existe un tipo de carga que es muy común, por lo que es útil tener un conjunto de gráficos para dicho caso especial. Si la maquinaria de rotación tiene una masa desbalanceada, la fuerza dinámica será:

$$P = M_e \ell \Omega^2 \text{ sen } \Omega t \quad (2.30)$$

donde:

$M_e$  = masa excéntrica

$\ell$  = brazo del momento de la masa excéntrica

La cantidad  $M_e \ell \Omega^2$  tiene unidades de fuerza y corresponde a  $P_o$ .

La solución para este caso puede obtenerse al reemplazar  $P_o$  por  $M_e \ell \Omega^2$ . Es conveniente escribir los resultados en la forma:

$$x_o = \frac{M_e \ell \Omega^2}{k} \text{ DLF} = \frac{M_e \ell}{M} \left( \frac{f}{f_n} \right)^2 \text{ DLF}$$

La cantidad  $(f/f_n)^2 \text{ DLF}$  está graficada en la parte (b) de la Figura 2.6. Algunas de las características principales de estas curvas de respuesta son:

- a. Conforme  $f/f_n \rightarrow 0$ , la respuesta  $\rightarrow 0$ . Esto es debido a que la fuerza dinámica  $P_o$  es cero cuando la masa excéntrica está estacionaria.

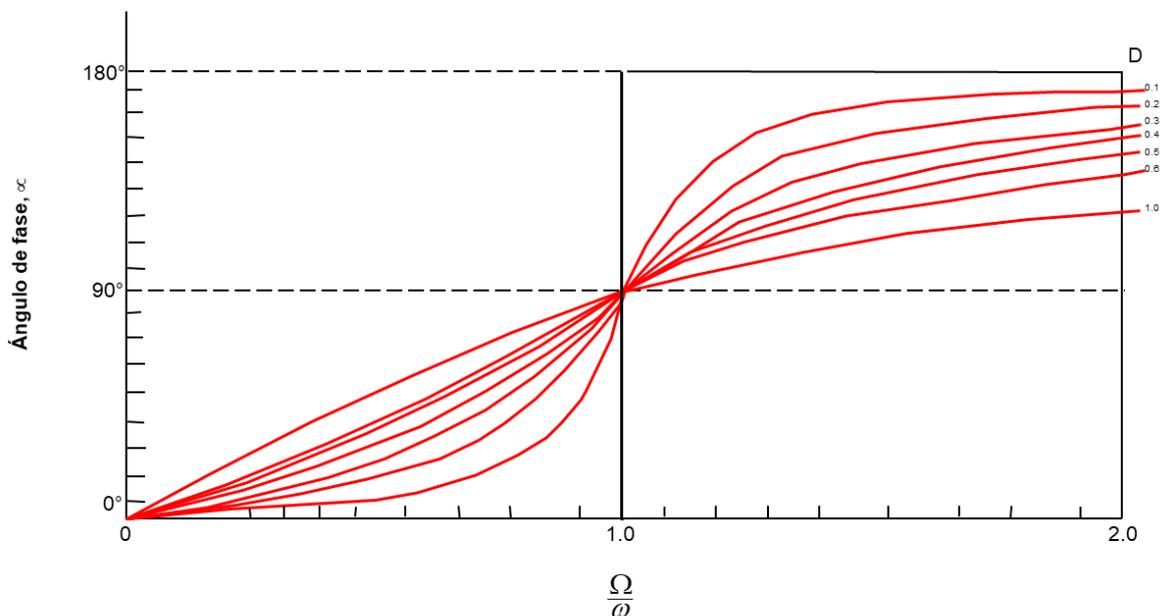
- b. Conforme  $f/f_n \rightarrow \infty$ , la respuesta  $\rightarrow 1$ . La fuerza dinámica  $P_o$  llega a ser sumamente grande cuando la frecuencia aumenta, y por lo tanto fuerza al sistema a responder a pesar de su gran masa.
- c. La respuesta adimensional en la condición resonante es la misma que cuando  $P_o$  es constante.
- d. La frecuencia resonante es algo mayor que la frecuencia natural.

$$\frac{f_r}{f_n} = \frac{1}{\sqrt{1-2D^2}} \quad (2.31)$$

- e. La frecuencia no amortiguada, que es una buena aproximación para la respuesta con amortiguamiento pequeño a frecuencias muy lejos de la frecuencia natural, está dada por:

$$\frac{\left(\frac{f}{f_n}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right|} \quad (2.32)$$

Estas propiedades también han sido resumidas en la Tabla 2.1. La Figura 2.8 se aplica a este caso especial, como al caso donde  $P_o$  es independiente de la frecuencia.



**Figura 2.8.** Ángulo de fase

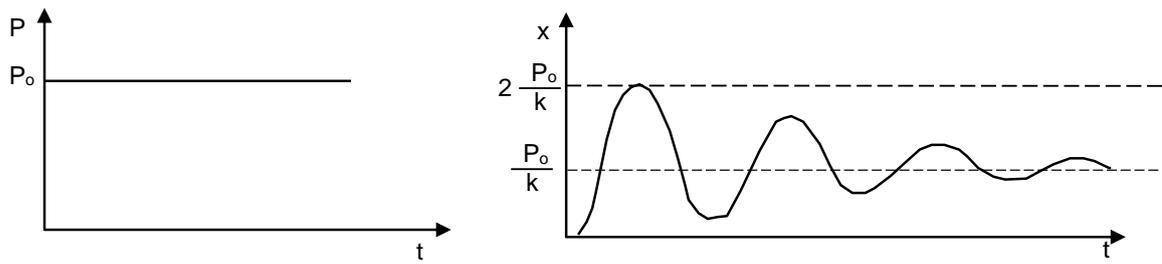
**Tabla 2.1.** Propiedades de la relación factor de Carga dinámica vs. Frecuencia

Descripción	Fuerza Actuante	Sistema Masa Excéntrica
Respuesta adimensional cuando $f = 0$	1	0
Respuesta adimensional cuando $f \rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$
Relación de frecuencia resonante $fr/fn$	$\frac{1}{\sqrt{1-2D^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-2D^2}}$
Respuesta adimensional cuando $f = fr$	$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$	$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$
Respuesta adimensional para $f \ll fr$	$\frac{1}{\left 1 - \left(\frac{f}{fn}\right)^2\right }$	$\frac{\left(\frac{f}{fn}\right)^2}{\left 1 - \left(\frac{f}{fn}\right)^2\right }$
ó $f \gg fr$		

## 2.4 VIBRACIONES DEBIDAS A CARGAS TRANSITORIAS

Esta sección introduce el comportamiento de un sistema de un grado de libertad, bajo la acción de carga transitoria, es decir una carga no periódica o periódica de duración finita. Solamente se considerará unos cuantos casos de cargas transitorias.

**Carga escalón:** Una carga escalón se aplica instantáneamente y de allí permanece constante (Figura 2.9).



**Figura 2.9.** Respuesta a una carga escalón

La ecuación diferencial gobernante es:

$$M\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Para un sistema inicialmente en reposo ( $x = \dot{x} = 0$  a  $t = 0$ ), la solución de la ecuación 2.33 es la suma de la solución estática  $P_0/k$ , más la vibración libre amortiguada dada por la ecuación 2.13.

$$x = \frac{P_0}{k} \left[ 1 - e^{-\omega D t} \left( \cos \omega_1 t + D \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]$$

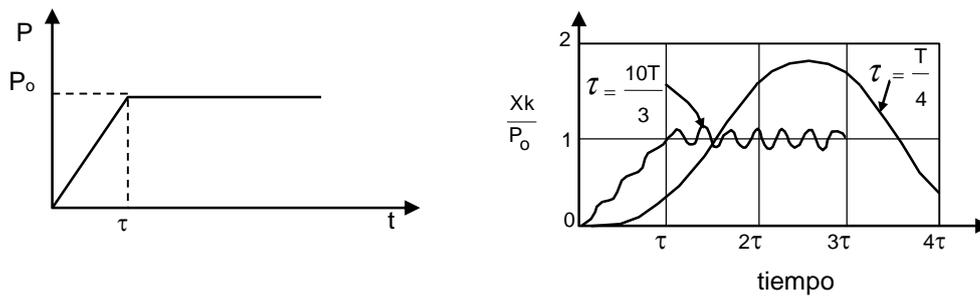
que para amortiguamiento pequeño es:

$$x = \frac{P_0}{k} [1 - e^{-\omega D t} \cos \omega t] \quad (2.34)$$

Esta solución se bosqueja en la Figura 2.9. El desplazamiento al primer pico es aproximadamente  $2P_0/k$ . Así, el desplazamiento máximo y la fuerza de resorte causados por la carga aplicada repentinamente, es igual al doble de la carga estática.

**Carga rampa:** Como se ilustra en la Figura 2.10, una carga rampa involucra un incremento lineal de carga, seguido de carga constante. La ecuación gobernante para amortiguamiento cero es:

$$M\ddot{x} + kx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 \frac{t}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ P_0 & t \geq \tau \end{cases} \quad (2.35)$$



**Figura 2.10.** Respuesta a una carga rampa

La solución del movimiento debe obtenerse en dos pasos. Primero se obtiene una solución para  $0 \leq t \leq \tau$ , con las condiciones iniciales  $x = \dot{x} = 0$  para  $t = 0$ :

$$0 \leq t \leq \tau \quad x = \frac{P_0}{k} \left( \frac{t}{\tau} - \frac{T}{2\pi\tau} \operatorname{sen} \omega t \right) \quad (2.36a)$$

Para  $t \geq \tau$ , la ecuación diferencial es exactamente la misma que la ecuación 2.1 para vibraciones libres, y la solución deberá ser:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t \quad (2.36b)$$

Las constantes A y B se determinan igualando  $x$  y  $\dot{x}$  de las ecuaciones 2.36a y 2.36b para  $t = \tau$ :

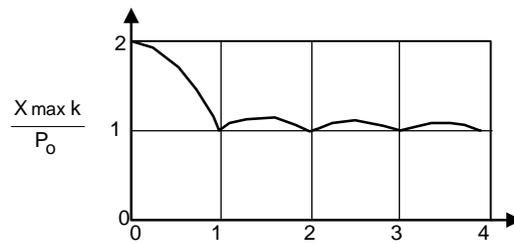
$$t = \tau \quad x = \frac{P_0}{k} \left( 1 - \frac{T}{2\pi\tau} \operatorname{sen} \omega \tau \right) = A \operatorname{sen} \omega \tau + B \cos \omega \tau$$

$$\dot{x} = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega \tau) = \omega (A \cos \omega \tau - B \operatorname{sen} \omega \tau)$$

Resolviendo para A y B y utilizando la ecuación 2.2:

$$t \geq \tau \quad x = \frac{P_0}{k} \left\{ 1 + \frac{T}{2\pi\tau} [\operatorname{sen} \omega (t - \tau) - \operatorname{sen} \omega t] \right\} \quad (2.36c)$$

La respuesta para una carga rampa consiste de vibraciones libres superpuestas sobre la solución estática, como se ilustra en la Figura 2.10. La amplitud máxima de movimiento es función de  $\tau/T$ , como se muestra en la Figura 2.11.

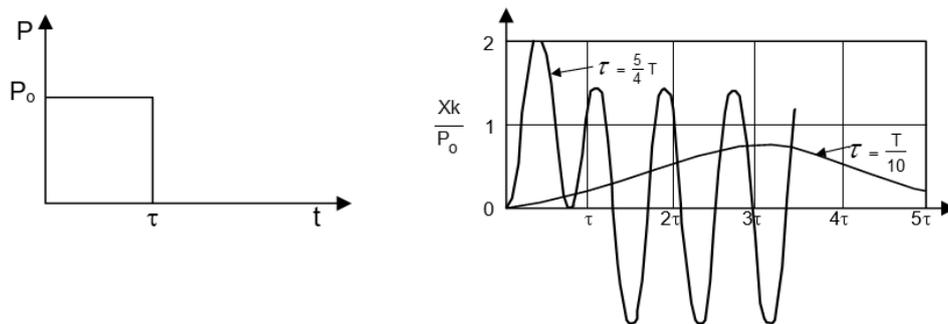


**Figura 2.11.** Máxima respuesta a una carga rampa

Cuando el período natural del sistema es pequeño, comparado con el tiempo  $\tau$ , la respuesta máxima difiere solo ligeramente de la respuesta estática. El amortiguamiento reducirá más la importancia de la vibración libre.

**Pulso cuadrado:** Un pulso cuadrado tiene una duración limitada. La ecuación gobernante para un pulso cuadrado (Figura 2.12) con amortiguamiento nulo es:

$$M\ddot{x} + kx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad (2.37)$$



**Figura 2.12.** Respuesta a una carga pulso

Como en el caso de la carga rampa, la solución debe obtenerse en dos etapas:

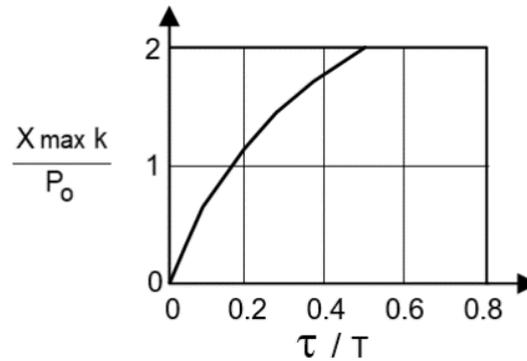
$$0 \leq t \leq \tau \quad x = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad (2.38a)$$

$$t \geq \tau \quad x = \frac{2P_0}{k} \sin \frac{\pi \tau}{T} \sin (\omega t + \alpha) \quad (2.38b)$$

donde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \omega \tau - 1}{\operatorname{sen} \omega \tau} \quad (2.38c)$$

La respuesta para  $0 \leq t \leq \tau$  es la misma que para carga escalón con amortiguamiento nulo. Para  $t \geq \tau$  existen vibraciones sobre la posición cero; éstas se denominan **vibraciones residuales**. La Figura 2.12 muestra la respuesta para diferentes valores de  $\tau/T$ . La respuesta máxima y la magnitud de la vibración residual son función de  $\tau/T$  como se muestra en la Figura 2.13.



**Figura 2.13.** Máxima respuesta a una carga pulso

Para valores grandes de  $\tau/T$ , la respuesta máxima ocurre durante la vibración forzada, y para ciertos valores de  $\tau/T$  no existen vibraciones residuales debido a que el sistema tiene desplazamiento y velocidad cero en el instante en que la fuerza aplicada es cero. Para valores pequeños de  $\tau/T$  la respuesta máxima ocurre durante la vibración residual. La respuesta máxima es  $2P_0/k$  y se logra si es que  $\tau/T > 0.5$ .

Es importante mencionar que los movimientos causados por un pulso de corta duración ( $\tau/T \ll 1$ ) pueden obtenerse directamente con la aplicación de la ecuación impulso-momento. El impulso es  $P_0 \tau$ , ya que en este caso no se desarrolla fuerza en el resorte durante la carga. El momento máximo durante la vibración residual subsiguiente es  $M \omega x_0$ , de donde:

$$x_0 = \frac{P_0 \tau}{M\omega} = \frac{P_0}{k} \tau\omega = \frac{P_0}{k} \frac{2\pi \tau}{T}$$

Este es el mismo resultado que el dado por la ecuación 2.38b para valores de  $\tau/T$  pequeños.

**Carga sinusoidal de duración limitada:** La ecuación diferencial gobernante, incluyendo amortiguamiento es:

$$M\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P_0 \text{ sen } \Omega t & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad (2.39)$$

Si la carga termina exactamente al terminar un ciclo de la función seno, entonces la duración  $\tau$  está relacionada a  $\Omega$  por  $\tau \Omega = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero.

Para  $0 \leq t \leq \tau$ , esta ecuación es igual a la ecuación 2.17 y la solución es la ecuación 2.18. Para amortiguamiento cero:

$$0 \leq t \leq \tau \quad x = \frac{P_o}{k} \frac{\text{sen } \Omega t - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \text{sen } \omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (2.40a)$$

La vibración residual se determina igualando la vibración libre y la forzada en  $t=\tau$ . Para amortiguamiento cero:

$$t = \tau \quad x = \frac{P_o}{k} \frac{-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \text{sen } \omega \tau}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = A \text{sen } \omega \tau + B \text{cos } \omega \tau$$

$$\dot{x} = \frac{P_o}{k} \frac{1 - \text{cos } \omega \tau}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \omega (A \text{cos } \omega \tau - B \text{sen } \omega \tau)$$

Resolviendo A y B y utilizando la ecuación 2.2:

$$t \geq \tau \quad x = \frac{P_o}{k} \frac{2 (\Omega/\omega)}{1 - (\Omega/\omega)^2} \text{sen } \frac{n\pi\omega}{2\Omega} \text{sen } (\omega t + \alpha) \quad (2.40b)$$

donde:

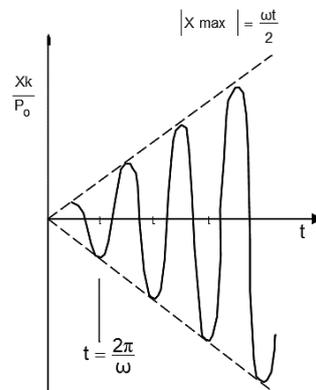
$$\text{tg } \alpha = \frac{-\text{sen } \omega \tau}{1 - \text{cos } \omega \tau} \quad (2.40c)$$

Para el caso especial donde  $\Omega/\omega=1$ , el numerador y denominador de las ecuaciones (2.40) se anulan. Una expresión alternativa para este caso se obtiene aplicando la regla de H'ospital:

$$0 \leq t \leq \tau \quad x = \frac{P_o}{2k} (\text{sen } \omega t - \omega t \text{cos } \omega t) \quad (2.41)$$

$$t \geq \tau \quad x = \frac{P_o}{k} n\pi \text{cos } \omega t \quad (2.42)$$

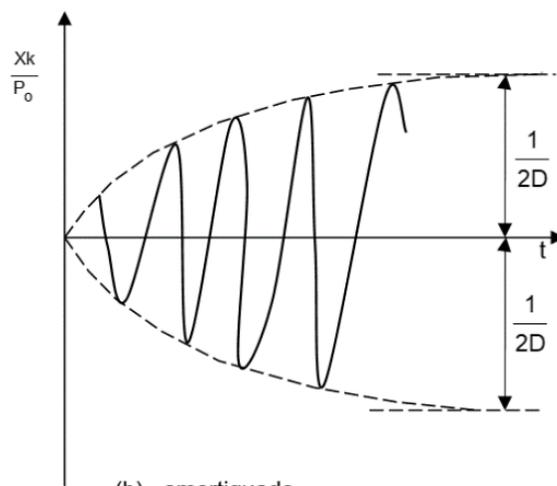
Las ecuaciones 2.41 y 2.42 se grafican en la Figura 2.14a. La amplitud del movimiento aumenta linealmente con el número de ciclos de fuerza aplicada, pero permanece finita en tanto que la duración total de la fuerza es finita. De este modo, una fuerza sinusoidal con  $\Omega = \omega$  causa movimientos muy grandes si se aplican muchos ciclos de la fuerza.



(a) no - amortiguado

**Figura 2.14.a** Aumento de movimientos de la condición inicial de reposo para fuerza sinusoidal con  $\Omega = \omega$  (no – amortiguado)

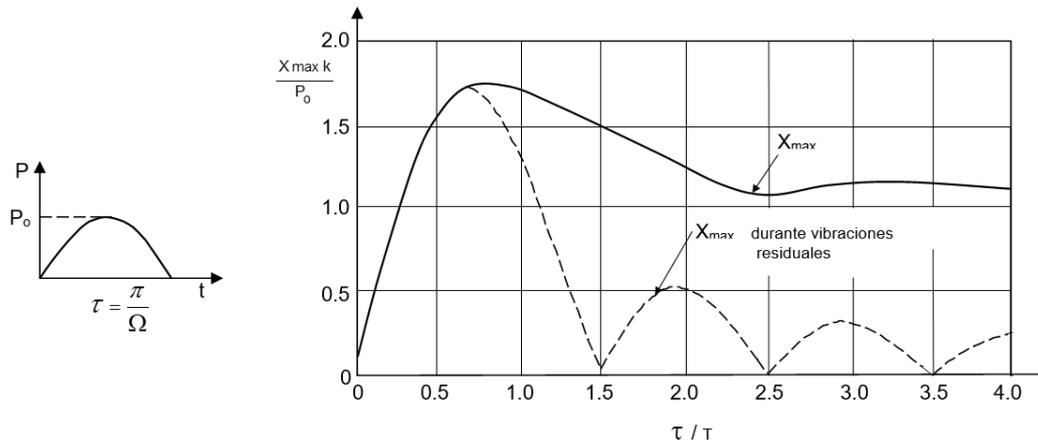
Las ecuaciones 2.41 y 2.42 se aplican para amortiguamiento nulo. Con amortiguamiento, los movimientos se producen hacia los límites indicados en la Figura 2.14b. El número total de ciclos de carga requeridos para lograr la respuesta total amortiguada es aproximadamente  $1/2\pi D$ . Así, con 5% de amortiguamiento, el movimiento aumenta durante los primeros 3 ciclos de carga y luego los ciclos sucesivos casi no aumentan el movimiento. Si  $2n < 1/2\pi D$ , la respuesta máxima es menor que para vibraciones forzadas, pero si  $2n > 1/2\pi D$ , la máxima respuesta transitoria es esencialmente la misma que para la respuesta de estado constante.



(b) amortiguado

**Figura 2.14.b** Aumento de movimientos de la condición inicial de reposo para fuerza sinusoidal con  $\Omega = \omega$  (amortiguado)

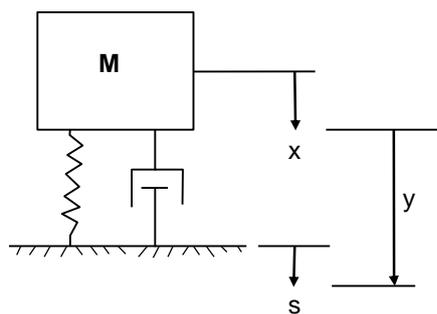
La máxima respuesta no amortiguada y la magnitud de las vibraciones residuales no amortiguadas están dadas en la Figura 2.15 en función de  $\tau/T$  para el caso de pulso único ( $n=1$ ). Existen similitudes y diferencias con el caso de pulso cuadrado (Figura 2.13).



**Figura 2.15.** Máxima respuesta para pulso seno medio

## 2.5 VIBRACIONES FORZADAS PRODUCIDAS POR MOVIMIENTOS PERIÓDICOS DE CIMENTACIÓN

Esta sección considera el caso cuando no se aplica fuerza a la masa, sino el apoyo del resorte experimenta movimiento en la cimentación (ver Figura 2.16).



**Figura 2.16.** Sistema masa - resorte-amortiguador con movimiento de apoyo

En las siguientes expresiones,  $x$  es el desplazamiento absoluto de la masa,  $s$  es el desplazamiento absoluto del terreno,  $y$  es el desplazamiento relativo entre la masa y el terreno. Luego,  $y+s=x$ . Las fuerzas actuantes en la masa son:

<b>Fuerza del resorte</b>	$ky$
<b>Fuerza de inercia</b>	$M\ddot{x} = M(\dot{y} + \ddot{s})$
<b>Fuerza amortiguadora</b>	$\delta \dot{y}$

La ecuación diferencial de equilibrio es

$$M\ddot{y} + \delta\dot{y} + ky = -M\ddot{s} \quad (2.43)$$

Comparando con la ecuación 2.17, se ve que el caso del movimiento de la cimentación es equivalente al caso donde una fuerza  $-M\ddot{s}$  se aplica a la masa. La solución de la ecuación 2.43 determina el desplazamiento relativo de la masa. Usualmente, éste es el de mayor interés, ya que determina la fuerza en la estructura. En algunos problemas, tal como cuando se instala equipo sensible en una masa, la **aceleración absoluta** también es de interés.

**Movimientos sinusoidales de cimentación:** El movimiento del terreno en este caso es:

$$S = S_0 \text{ sen } \Omega t$$

Por lo tanto, las soluciones de la sección 2.3 son también aplicables, pero reemplazando  $P_0$  por  $-MS_0 \Omega^2$  y además  $x$  por  $y$ . En particular, considerando solamente vibraciones forzadas y omitiendo vibraciones libres, la amplitud  $y_0$  de los desplazamientos relativos está dada por:

$$y_0 = S_0 \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \text{DLF} \quad (2.44)$$

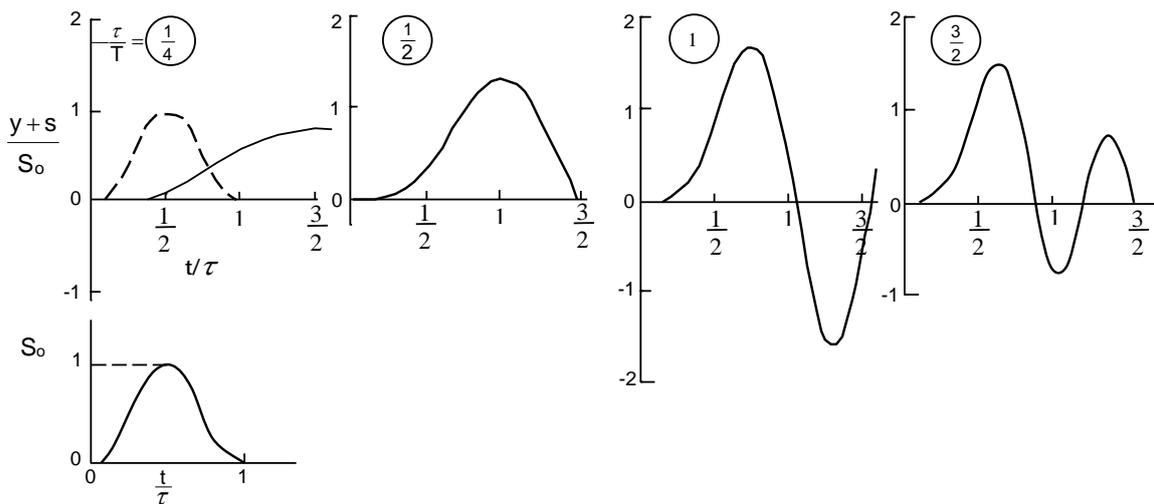
donde DLF está definida por la ecuación 2.23. Por lo tanto, la Figura 2.6b puede ser usada como un gráfico de  $y_0/S_0$  versus  $f/f_n$ . Se desarrolla resonancia a  $f/f_n \approx 1$ , tanto para movimientos periódicos de cimentación como para fuerza periódica aplicada.

## 2.6 VIBRACIONES DEBIDAS A MOVIMIENTOS TRANSITORIOS DE CIMENTACIÓN

Este es un problema de mucho interés, por su aplicación en la ingeniería sísmo-resistente. En esta sección se presentan diversas soluciones, con el objeto de lograr un entendimiento de la naturaleza de la respuesta a los movimientos transitorios de cimentación. Todas las soluciones siguen la ecuación 2.43, con funciones diferentes del movimiento del terreno.

**Movimiento seno-verso:** Un pulso simple de movimiento del terreno seno verso (Figura 2.17) está dado por:

$$S = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{S_0}{2} (1 - \cos \Omega t) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad \tau = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.45)$$



**Figura 2.17.** Respuestas típicas a un movimiento de cimentación seno verso (un ciclo)

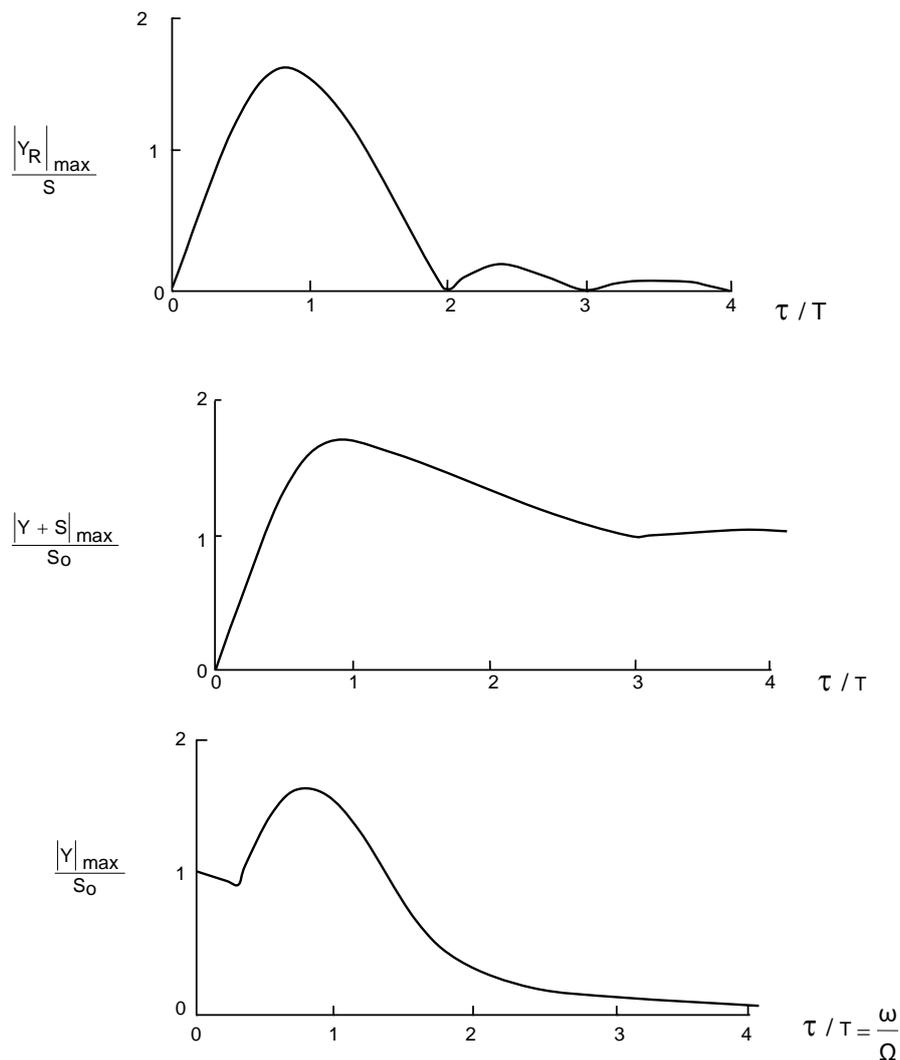
Esta es la ecuación más simple del movimiento del terreno con desplazamiento y velocidad cero al principio y al final de cada pulso.

La respuesta a este movimiento, para amortiguamiento cero, es:

$$0 \leq t \leq \tau \quad y = \frac{-S_0}{2} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} [\cos \Omega t - \cos \omega t] \quad (2.46a)$$

$$t \geq \tau \quad y = -S_0 \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi \omega}{\Omega} \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{3\pi}{\Omega}\right) \quad (2.46b)$$

Ambos, numerador y denominador se anulan para  $\Omega/\omega = 1$ , pero puede mostrarse que la relación permanece finita. La Figura 2.17 muestra la naturaleza del desplazamiento absoluto para diferentes valores de  $\tau/T = \omega/\Omega$ . La Figura 2.18 presenta el desplazamiento relativo máximo, el desplazamiento absoluto máximo y el desplazamiento residual máximo, en función de  $\tau/T$ .



**Figura 2.18.** Curvas de respuesta para un movimiento de cimentación seno verso (un ciclo)

**Espectro de respuesta:** Las curvas de la Figura 2.18 son ejemplos de **espectros de respuesta**. Un espectro de respuesta proporciona la **respuesta** de un sistema de un grado de libertad a un **movimiento particular del terreno**, en función de la frecuencia natural o período del sistema. Cuando el movimiento del terreno es muy simple, como aquel de un pulso simple, el espectro de respuesta puede graficarse en forma adimensional, como en la Figura 2.18. Cuando el movimiento del terreno es más complicado, el espectro se grafica en forma dimensional: por ejemplo centímetros de desplazamiento relativo vs período natural del sistema. El ejemplo 2.1 proporciona un espectro de respuesta típico en forma dimensional. Los espectros de respuesta se utilizan para conocer cómo las estructuras de diferentes períodos se comportarán a un

movimiento del terreno dado, de modo que permitirán investigar rápidamente la respuesta relativa de diferentes diseños propuestos.

Los espectros de respuesta se utilizan ampliamente para el análisis y diseño de estructuras sujetas a movimientos transitorios del terreno; se discutirán seguidamente algunos aspectos importantes del espectro de respuesta.

En cualquier sistema vibratorio, la velocidad relativa  $\dot{y}$  es cero cuando el desplazamiento relativo es máximo. Por lo tanto, de la ecuación 2.43, en dichos momentos:

$$M |\ddot{x}| = k |y|_{max}$$

ó

$$\ddot{x} = \omega^2 |y|_{max}$$

Siempre y cuando el amortiguamiento sea pequeño, la máxima aceleración absoluta ocurre muy cerca al momento cuando el desplazamiento relativo es máximo, de modo que:

$$|\ddot{x}|_{max} \approx \omega^2 |y|_{max} \quad (2.47)$$

La cantidad  $\omega^2 |y|_{max}$  se denomina **seudo-aceleración** y es una medida útil de la aceleración absoluta máxima. La ecuación 2.47 es exactamente cierta para amortiguamiento nulo.

Por analogía a la seudo-aceleración, la cantidad  $\omega |y|_{max}$  se denomina **seudo-velocidad Sv**:

$$Sv = \omega |y|_{max} \quad (2.48)$$

La seudo-velocidad no está relacionada directamente a la velocidad relativa o absoluta máxima. Sin embargo, puede demostrarse que la energía de deformación máxima en el sistema dinámico es:

$$|E| = \frac{1}{2} MSv_{max}^2 \quad (2.49)$$

Las ecuaciones 2.47 a 2.49 se aplican a un sistema no amortiguado bajo movimiento periódico simple. Lo importante de indicar es que en general se aplican a cualquier sistema dinámico que está sometido a movimiento de cimentación.

Debido a las relaciones simples entre  $|y|_{\max}$ ,  $S_v$  y  $|\ddot{x}|_{\max}$ , es conveniente graficar la respuesta de un sistema dinámico en el **papel gráfico espectral** mostrado en la Figura 2.19. Con este papel especial, es posible presentar simultáneamente el espectro de respuesta de desplazamiento relativo, pseudo-velocidad y aceleración absoluta. De este modo, si un sistema con una frecuencia natural de 10 cps experimenta un desplazamiento máximo relativo de 1 pulgada, la aceleración absoluta máxima (10 g) y la pseudo velocidad (63 pulg/seg) pueden leerse directamente del gráfico.

El espectro de respuesta para un pulso simple de movimiento seno-verso del terreno ha sido regraficado en la Figura 2.20 para  $S_0=1$  pulg. y  $\Omega=62.8$  rad/seg ( $f=10$  cps). Puede verse que un sistema simple de un grado de libertad con una frecuencia natural de 5 cps, experimentaría un desplazamiento máximo relativo de 1.3 pulg ( $y|\ddot{x}|_{\max} = 3.2$  g), mientras que con  $f_n = 25$  cps:  $|y|_{\max} = 0.2$  pulg y  $|\ddot{x}|_{\max} = 14$  g. Varias relaciones muy importantes entre la respuesta y el movimiento del terreno pueden entenderse con la ayuda de esta Figura:

- a) Para sistemas con  $\omega/\Omega$  pequeño, la masa tiende a permanecer inmóvil, mientras el terreno por debajo se mueve. De este modo, el desplazamiento relativo máximo es igual al movimiento máximo del terreno.
- b) Para sistemas con  $\omega/\Omega$  grande, el sistema muy rígido sigue al movimiento del terreno muy de cerca, de modo que los desplazamientos relativos son pequeños. La aceleración absoluta máxima de la masa es similar a la máxima aceleración del terreno, pero puede ser algo amplificada debido a la dinámica del sistema. En el ejemplo de la Figura 2.20, la aceleración máxima del terreno es 5.1 g, mientras que la máxima aceleración absoluta de estructuras con  $\omega/\Omega$  grande varía de 10.2 g a algo ligeramente menor que 10 g.

Las relaciones entre movimiento del terreno y respuesta para  $\omega/\Omega < 1$  y para  $\omega/\Omega > 1$  son válidas para cualquier movimiento del terreno. Los ejemplos siguientes consideran los factores que afectan la respuesta para  $\omega/\Omega \approx 1$ .

**Varios pulsos de movimiento de cimentación seno-verso:** Las ecuaciones 2.46 también se aplican para  $n$  pulsos de movimiento de cimentación, donde ahora  $\tau = 2n\pi/\Omega$ . La Figura 2.20 muestra curvas para  $n \rightarrow \infty$  y  $n = 4$ .

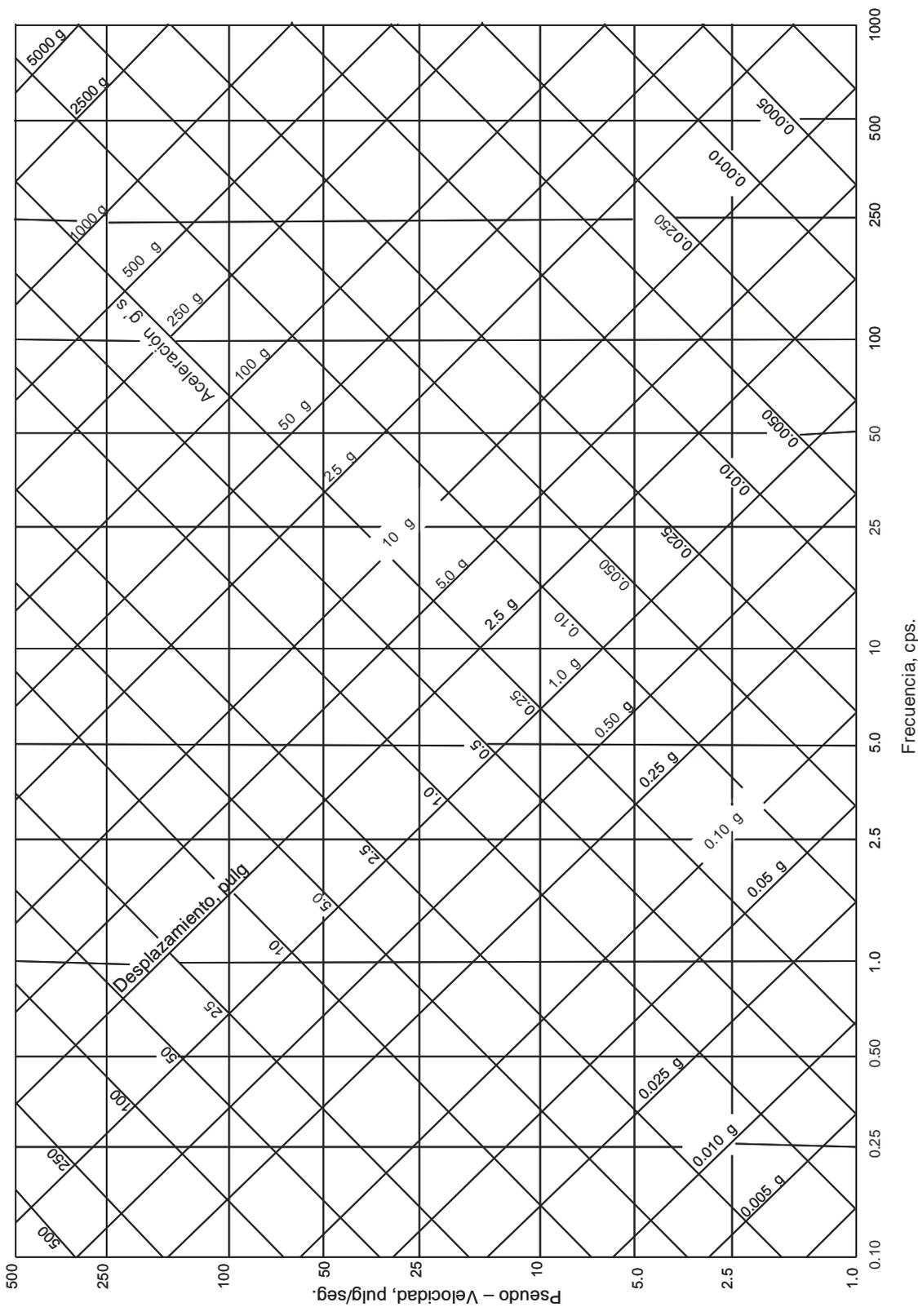


Figura 2.19. Lamina espectral para graficar el espectro de respuesta

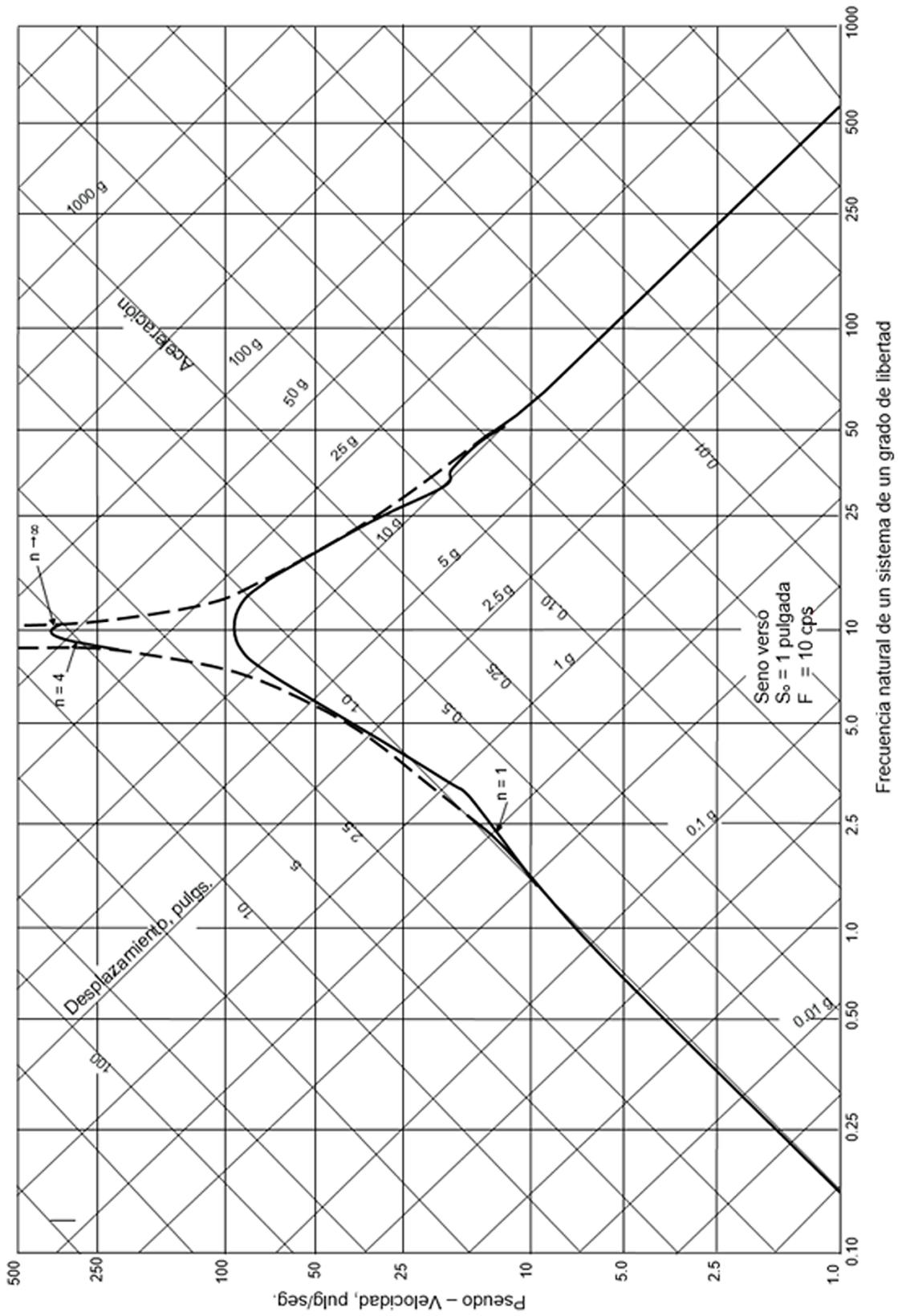


Figura 2.20. Espectro de respuesta para movimiento de cimentación seno verso

La curva para vibraciones forzadas continuas ( $n \rightarrow \infty$ ) es:

$$|y|_{\max} = S_o \left| \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right| \quad (2.50)$$

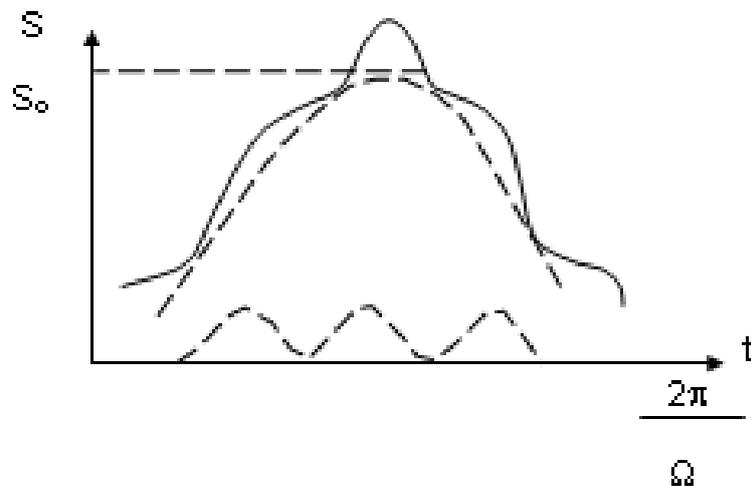
Para  $\omega/\Omega = 1/3, 3, 5, 7, \dots$ , la respuesta máxima es realmente algo menor que la dada por la ecuación 2.50, ya que para estas condiciones los términos de coseno en los paréntesis de la ecuación 2.46a nunca son simultáneamente la unidad. Para todos los otros valores de  $\omega/\Omega$ , incluyendo aquellos en la cercanía de  $1/3, 3, 5, 7, \dots$ , existirá algún tiempo durante un tren infinito de pulsos cuando los términos de coseno sean la unidad simultáneamente.

La curva para  $n = 4$  es virtualmente la misma que para la curva  $n \rightarrow \infty$ , excepto cerca de  $\omega/\Omega=1$ . En la condición de resonancia cuatro ciclos de movimiento del terreno causan una respuesta grande, pero finita, aún cuando el sistema es no amortiguado.

**Dos movimientos superpuestos:** Para ilustrar la respuesta de un movimiento del terreno que contiene varias frecuencias, se considera el movimiento:

$$S \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{S_o}{2} \left[ (1 - \cos \Omega t + \frac{1}{n} (1 - \cos n \Omega t)) \right] & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad \tau = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.51)$$

Para  $n = 5$ , este movimiento se grafica en la Figura 2.21. El desplazamiento máximo del terreno es, para  $n = 4$ , aproximadamente  $(1+1/n)S_o$ . La máxima aceleración del terreno es  $(1+n)\Omega^2 S_o$ .



**Figura 2.21.** Dos movimientos seno verso superimpuestos

La respuesta a este movimiento del terreno es una superposición de respuestas de un pulso a  $\Omega$  y  $n$  pulsos a  $n\Omega$ . Un estimado razonable de la respuesta máxima puede obtenerse añadiendo las respuestas máximas para estos dos sistemas de pulsos. Esta suma presupone que las respuestas máximas de cada sistema ocurren simultáneamente, que será verdadera cuando  $n \geq 4$ . La respuesta máxima para  $S_0 = 1$  pulg.,  $\Omega = 62.8$  rad/seg. y  $n = 5$  está dada en la Figura 2.22. En el extremo de frecuencia baja del espectro, el desplazamiento relativo iguala al movimiento máximo del terreno. En el extremo de frecuencia alta, la aceleración absoluta es cercanamente igual o igual al doble de la aceleración máxima del terreno. En el rango medio de frecuencias, el espectro muestra dos picos-uno correspondiente a cada una de las frecuencias del movimiento del terreno, con un pico agudo de los cinco pulsos en la frecuencia más alta.

De este resultado, puede imaginarse el efecto de tener frecuencias adicionales en el movimiento del terreno. La respuesta de estructuras con frecuencia natural pequeña todavía será determinada por el desplazamiento máximo del terreno, mientras que la respuesta de estructuras con frecuencia natural grande estará determinada por la aceleración máxima del terreno. En el rango medio de frecuencias naturales, el espectro mostrará un número de picos correspondientes a las frecuencias dominantes en el movimiento del terreno. La extensión de este rango medio dependerá del contenido de frecuencias del movimiento. Estos hechos se ilustran en la Figura 2.23. La Figura 2.24 presenta ejemplos de espectros de respuesta calculados de acelerogramas. El rango de períodos incluidos en la Figura 2.24 coincide con el rango de frecuencias principales contenidas en el movimiento del terreno, es decir, el denominado rango medio de la Figura 2.23.

**Efecto del amortiguamiento:** Las ecuaciones de la respuesta transitoria con amortiguamiento son suficientemente complicadas, por lo que ejemplos simples para ilustrar el comportamiento no pueden presentarse. Sin embargo, el efecto general del amortiguamiento puede entenderse de discusiones anteriores. Para estructuras con  $\omega$  muy pequeña, el amortiguamiento tiene efecto pequeño en la respuesta, desde que el desplazamiento relativo máximo es todavía igual al movimiento máximo del terreno. Para estructuras con  $\omega$  muy grande, el amortiguamiento disminuye la aceleración máxima hasta el nivel de la aceleración máxima del terreno. El efecto del amortiguamiento es máximo a las frecuencias intermedias donde los picos agudos de la curva de respuesta no amortiguada se eliminan. Los efectos del amortiguamiento se presentan en términos generales en la Figura 2.23 y se muestran en la Figura 2.24 para movimiento del terreno de terremotos reales.

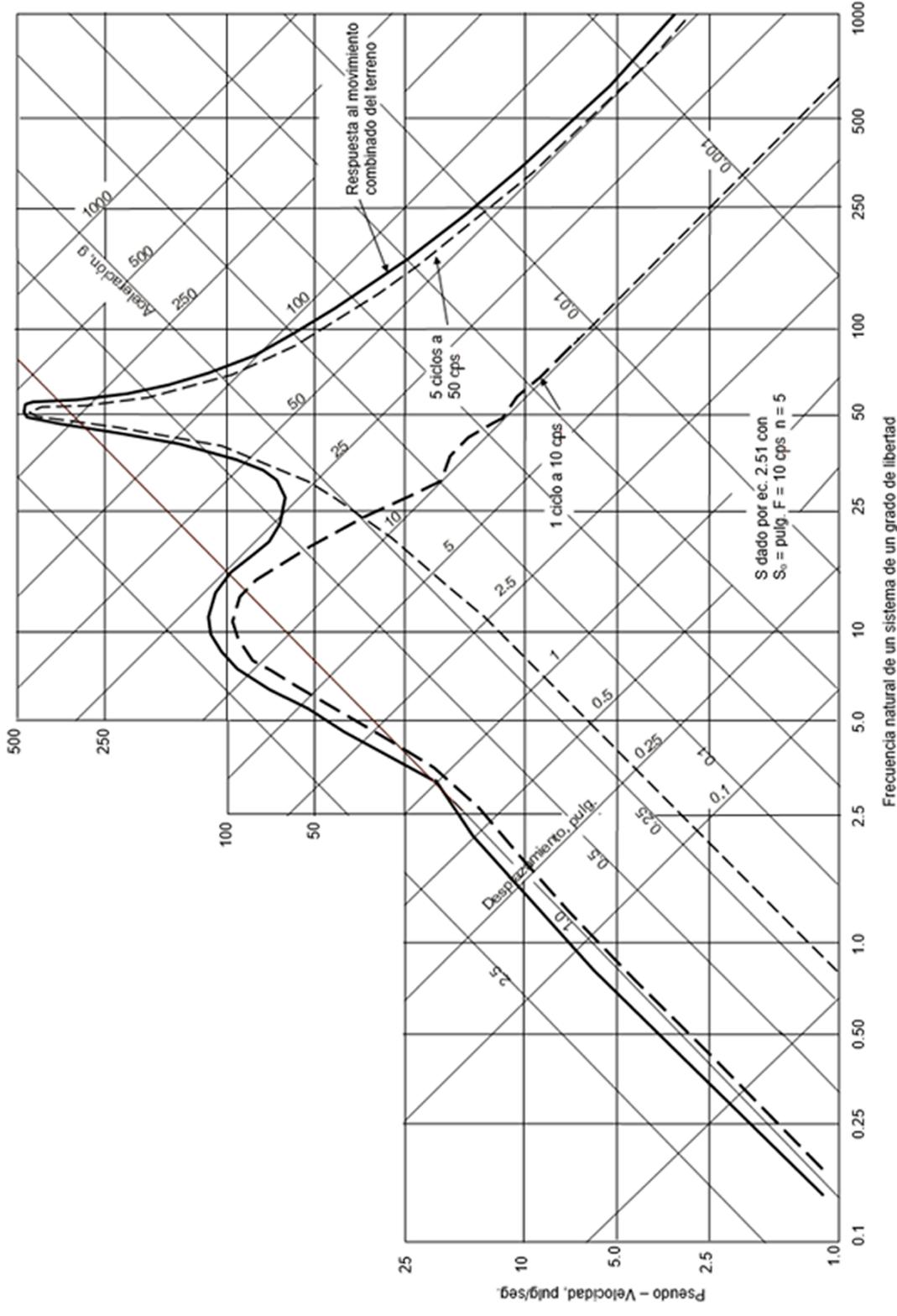
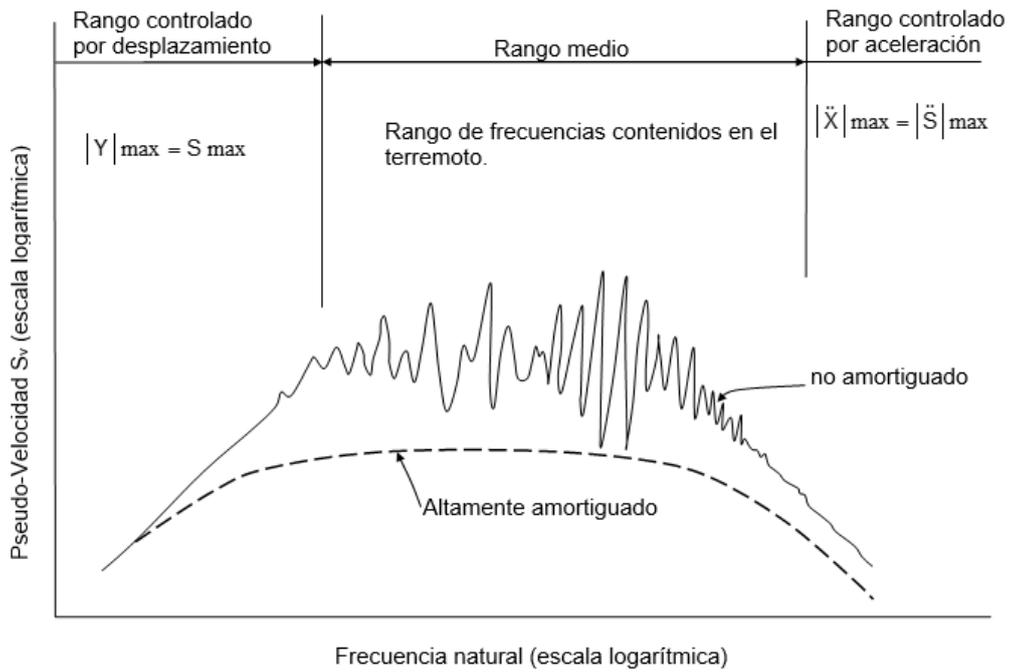
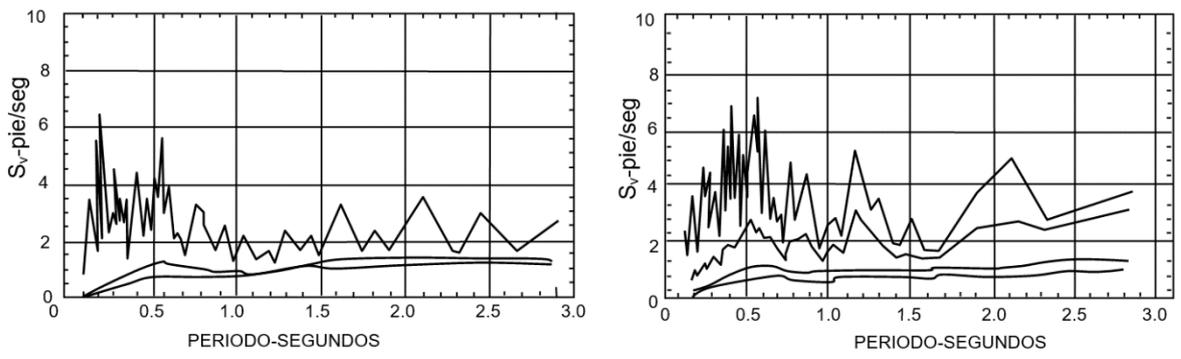


Figura 2.22. Espectros de respuesta para movimientos del terreno seno verso superimpuestos



**Figura 2.23.** Características el espectro de respuesta para movimientos transitorios del terreno conteniendo muchas frecuencias



Espectro de Velocidad para el Sismo de Olympia, Washington, 13 de Abril 1949  
Componente S 80° W

Espectro de Velocidad para el Sismo de El Centro, 18 de Mayo 1940  
Componente E-W

**Figura 2.24.** Espectro de respuesta de sismos reales

## REFERENCIAS

Biggs J (1975), "Introduction to Structural Dynamics", McGraw-Hill Book Company. ISBN 07-005255-7. USA

Den Hartog J.P. (1947), "Mechanical Vibrations", McGraw-Hill Book Company. USA

Withman R.V. (1975), "Soil Dynamics Class Notes", MIT, Cambridge, Massachusetts.



**CAPÍTULO III:  
Sistemas lineales  
de varios grados de libertad**



## CAPITULO III

### SISTEMAS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

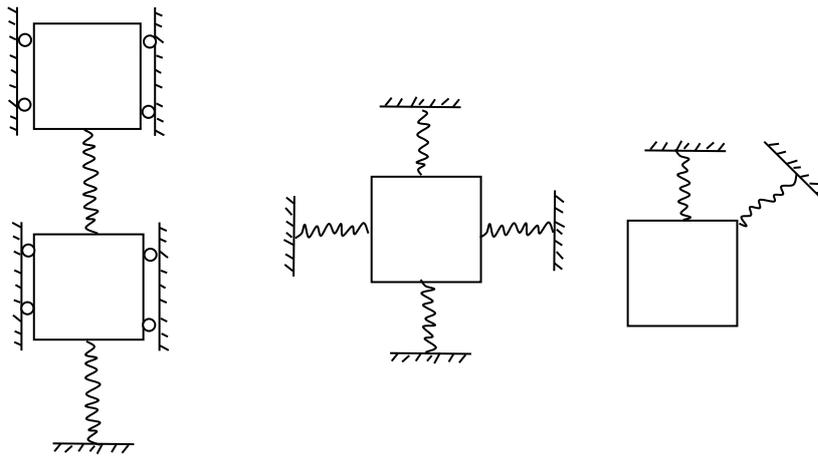
Cuando un sistema dinámico tiene dos grados de libertad (2-GDL), la respuesta dinámica puede evaluarse por solución directa de las ecuaciones diferenciales; es decir, las mismas técnicas que se utilizan para sistemas de un grado de libertad (1-GDL). Cuando un sistema tiene más de dos grados de libertad, es muy tedioso el obtener soluciones directas a las ecuaciones diferenciales, por lo que se utiliza generalmente en ese caso el **método de los modos**. En este capítulo se ilustrarán los dos métodos para enfatizar algunos conceptos fundamentales y derivar fórmulas simples importantes. Mayores detalles se obtienen de las referencias presentadas.

#### 3.2 VIBRACIÓN LIBRE DE SISTEMAS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Existen dos tipos diferentes de sistemas de 2-GDL:

- 1) Sistemas con dos masas, donde cada masa tiene solo un grado de libertad.
- 2) Sistemas con una masa, donde esta masa tiene dos grados de libertad para su movimiento.
  - a. Los dos movimientos son independientes (**desacoplados**); es decir, que la existencia de un tipo de movimiento no necesariamente implica que el otro tipo de movimiento se producirá.
  - b. Los dos tipos de movimiento son interdependientes (**acoplados**), de modo que un tipo de movimiento induce al otro.

Estos diferentes tipos de sistemas se ilustran en la Figura 3.1. El tipo 2a puede tratarse simplemente como dos sistemas de un grado de libertad cada uno, utilizando los métodos del capítulo anterior. En esta sección y en la próxima se tratarán los tipos 1 y 2b.



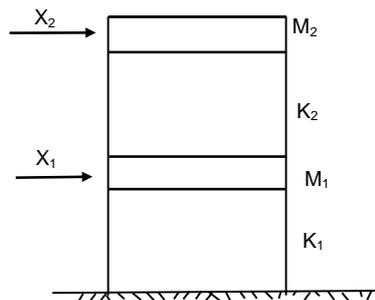
1) Dos masas, cada una con un grado de libertad

2a) Una masa, con dos grados de libertad independientes

2b) Una masa, con dos grados de libertad acoplados

**Figura 3.1.** Sistemas con dos grados de libertad

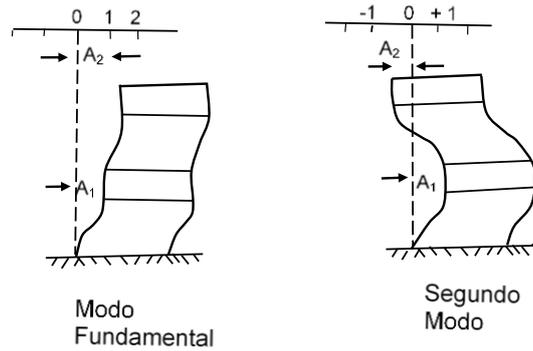
**Vibración Libre de Sistema no Amortiguado de 2 Masas:** La Figura 3.2 muestra un sistema de 2 masas típico: un edificio de dos pisos en donde los pisos solamente se mueven horizontalmente. Los pisos proporcionan las masas y las columnas actúan como resortes de corte. Las matemáticas serían las mismas si escogiésemos un sistema de dos masas conectadas por resortes de compresión.



**Figura 3.2.** Edificio de dos pisos con columnas que resisten momentos

En la Figura 3.3,  $x_1$  y  $x_2$  son desplazamientos **absolutos** relativos a la cimentación.

Las ecuaciones que describen la respuesta de este sistema pueden obtenerse del análisis que sigue. Las fuerzas actuantes en la masa inferior son:



**Figura 3.3.** Patrón de distorsión para modos normales de vibración (Ejemplo 3.1)

Inercia $M_1 \ddot{x}_1$		positiva cuando va en dirección ←
Fuerza en resorte inferior	$k_1 x_1$	positiva cuando va en dirección ←
Fuerza en resorte superior	$k_2 (x_1 - x_2)$	positiva cuando va en dirección ←

Las fuerzas actuantes en la masa superior son:

Inercia $M_2 \ddot{x}_2$		positiva cuando va en dirección ←
Fuerza en resorte superior	$k_2 (x_2 - x_1)$	positiva cuando va en dirección ←

Las ecuaciones siguientes representan el equilibrio de fuerzas:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Se asume que la solución de las ecuaciones 3.1 es de la forma:

$$x_1 = A_1 \text{sen } \omega t \quad x_2 = A_2 \text{sen } \omega t \quad (3.2)$$

La sustitución en las ecuaciones 3.1 da:

$$\left. \begin{aligned} -M_1 A_1 \omega^2 + (k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2 &= 0 \\ -M_2 A_2 \omega^2 + k_2 A_2 - k_2 A_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones pueden reacomodarse de modo de dejar solamente dos incógnitas:  $\omega$  y la relación  $A_2/A_1$ .

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 + k_2 - M_1 \omega^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 - M_2 \omega^2} \quad (3.4)$$

La segunda igualdad conduce a la ecuación de frecuencia:

$$\omega^4 - \left( \frac{k_1 + k_2}{M_1} + \frac{k_2}{M_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{M_1 M_2} = 0 \quad (3.5)$$

La solución de la ecuación 3.5 dará dos raíces reales y positivas de  $\omega$ . La razón de amplitud correspondiente a cada  $\omega$  puede determinarse de la ecuación 3.4. La magnitud real de cada amplitud dependerá de la naturaleza de las condiciones de frontera que excitan las vibraciones libres.

Una solución de la forma de las ecuaciones 3.2 es posible. Existen dos modos de vibración posibles, correspondientes a las dos raíces  $\omega_I$  y  $\omega_{II}$  de la ecuación 3.5; el movimiento total puede obtenerse por superposición.

$$x_1 = A_{II} \text{sen } \omega_I t + A_{III} \text{sen } \omega_{II} t$$

$$x_2 = A_{II} \left( \frac{A_{2I}}{A_{II}} \right) \text{sen } \omega_I t + A_{III} \left( \frac{A_{2II}}{A_{III}} \right) \text{sen } \omega_{II} t$$

Más aún, una solución de la forma de las ecuaciones 3.2 pero con  $B \cos \omega t$  en lugar de  $A \text{sen } \omega t$ , también dará las ecuaciones 3.3 a 3.4, y la solución total de la vibración libre sería de la forma:

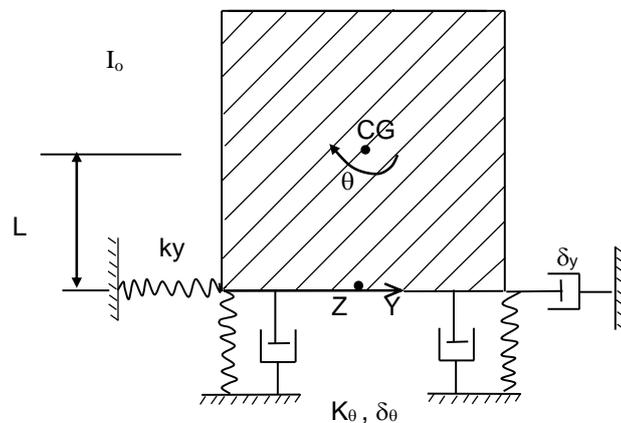
$$x_1 = A_{II} \text{sen } \omega_I t + B_{II} \cos \omega_I t + A_{III} \text{sen } \omega_{II} t + B_{III} \cos \omega_{II} t$$

$$x_2 = \left( \frac{A_{2I}}{A_{II}} \right) (A_{II} \text{sen } \omega_I t + B_{II} \cos \omega_I t) + \left( \frac{A_{2II}}{A_{III}} \right) (A_{III} \text{sen } \omega_{II} t + B_{III} \cos \omega_{II} t)$$

La aplicación de las ecuaciones anteriores se ilustra en el Ejemplo 3.1

**Vibración Libre Acoplada de Sistema no Amortiguado de 1 Masa:** El sistema mostrado en la Figura 3.4 tiene tres grados de libertad: traslación vertical, traslación horizontal y cabeceo. El resorte y amortiguador horizontal proporcionan resistencia a la traslación horizontal. El resorte y amortiguador vertical proporcionan resistencia a la traslación vertical y cabeceo.

Si los resortes y amortiguadores verticales están colocados simétricamente con respecto al centro de la masa, los movimientos verticales de la masa pueden ocurrir independientemente de la traslación horizontal o cabeceo.



**Figura 3.4.** Sistema con movimientos horizontal y cabeceo acoplados

Sin embargo, un movimiento de cabeceo debe estar acompañado de movimiento horizontal y viceversa. Para apreciar por qué ambos movimientos deben ocurrir simultáneamente, primero asuma que existe una rotación alrededor del centro de gravedad (CG). Esta rotación causará una traslación horizontal en la base (Z), y por lo tanto se desarrolla una fuerza horizontal restauradora, que debe causar la traslación de toda la masa. Alternativamente, suponga que toda la masa se traslada horizontalmente. En este caso, una fuerza horizontal de inercia se desarrolla en el CG, que causa un momento alrededor del punto Z y por consiguiente cabeceo de la masa. Por lo tanto, existe acoplamiento entre las rotaciones y las traslaciones horizontales; una debe acompañar y modificar a la otra.

Con el objeto de analizar este problema, se introducen las coordenadas de movimiento indicadas en la Figura 3.4. La traslación horizontal en el CG será:

$$y + \theta L$$

M es la masa del bloque e  $I_o$  es el momento de inercia de la masa alrededor de un eje a través del centro de gravedad.

### Fuerzas Horizontales

Inercia :  $M(\ddot{y} + \ddot{\theta}L)$  + cuando va en dirección ←

Restauradora :  $k_y y + \delta_y \dot{y}$  + cuando va en dirección ←

### Momentos Alrededor de Z

Momento de inercia horizontal :  $ML(\bar{y} + \theta L)$  + cuando gira en sentido ↺

Inercia rotativa :  $I_o \ddot{\theta}$  + cuando gira en sentido ↺

Restaurador :  $K_\theta \theta + \delta_\theta \dot{\theta}$  + cuando gira en sentido ↺

Esto conduce a dos ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} + \delta_y \dot{y} + k_y y &= -ML\ddot{\theta} \\ I\ddot{\theta} + \delta_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta &= -ML\ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Donde I es el momento de inercia alrededor de un eje a través de la base

$$I = ML^2 + I_o \quad (3.7)$$

Los lados de la izquierda de las ecuaciones 3.6 son exactamente las ecuaciones de vibración libre en los modos horizontal y de cabeceo. Estas ecuaciones son acopladas, ya que  $\theta$  aparece en la ecuación de  $y$ , y viceversa. Si el resorte restaurador horizontal y el amortiguador estuviesen alineados con el CG, de modo que  $L = 0$ , entonces estas ecuaciones se desacoplarían.

Con el objeto de estudiar la naturaleza de las vibraciones libres, se asume que  $\delta_y = \delta_\theta = 0$  de modo que las ecuaciones 3.6 son:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} + k_y y &= -ML\ddot{\theta} \\ I\ddot{\theta} + k_\theta \theta &= -ML\ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

asumamos la siguiente solución: 1\*

$$y = B_1 \cos \omega t \quad \theta = B_2 \cos \omega t \quad (3.9)$$

La sustitución en las ecuaciones 3.8 proporciona dos ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 M B_1 + k_y B_1 &= ML B_2 \omega^2 \\ -\omega^2 I B_2 + k_\theta B_2 &= ML B_1 \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Estas ecuaciones pueden reorganizarse del siguiente modo, dejando dos incógnitas:  $\omega$  y la relación de amplitudes  $\alpha = B_2/B_1$

$$\alpha = \frac{B_2}{B_1} = \frac{ML \omega^2}{-I \omega^2 + k_\theta} = \frac{-M \omega^2 + k_y}{ML \omega^2} \quad (3.11)$$

La igualdad entre los dos últimos términos conduce a la ecuación de frecuencia.

$$(ML \omega^2)^2 - (k_\theta - I \omega^2)(k_y - M \omega^2) = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación puede reorganizarse para dar:

$$\frac{I_0}{I} \omega^4 - \left( \frac{k_\theta}{I} + \frac{k_y}{M} \right) \omega^2 + \frac{k_\theta k_y}{MI} = 0 \quad (3.13)$$

La solución de la ecuación 3.13 produce dos raíces reales y positivas de  $\omega$ :

---

\* Un análisis cuidadoso probará que  $y$  y  $\theta$  deben estar exactamente en fase (ó 180° fuera de fase) si no existe amortiguamiento.

$$\omega^2 = \omega_\theta^2 \frac{I}{2I_0} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_y}{\omega_\theta} \right)^2 \pm \sqrt{\left\{ 1 + \left( \frac{\omega_y}{\omega_\theta} \right)^2 \right\}^2 - 4 \frac{I_0}{I} \left( \frac{\omega_y}{\omega_\theta} \right)^2} \right] \quad (3.14)$$

donde:

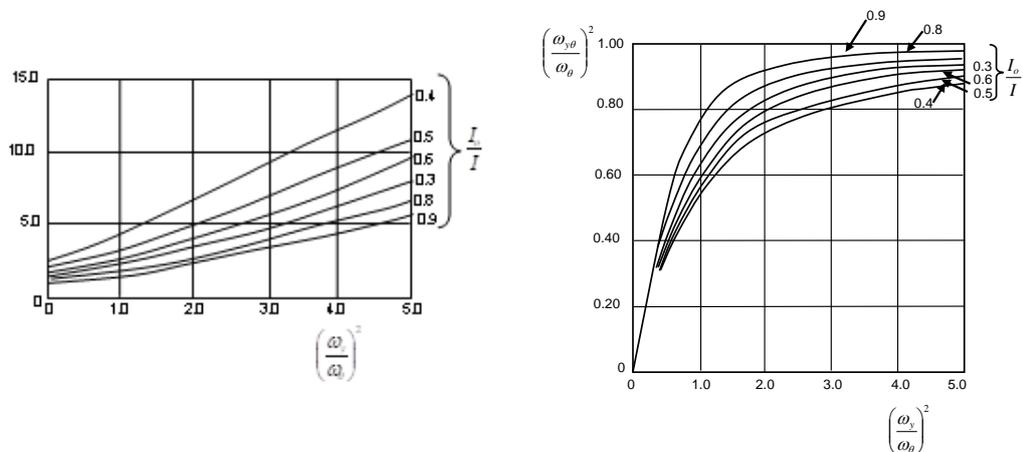
$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \quad ; \quad \text{la frecuencia circular natural de solo cabeceo.}$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{M}} \quad ; \quad \text{la frecuencia circular natural de solo traslación horizontal.}$$

Puede usarse la Figura 3.5 para determinar las dos raíces. La inspección de esta Figura mostrará:

cuando  $\omega_\theta \leq \omega_y$ :  $\omega_{y\theta}^I \leq \omega_\theta$  ,  $\omega_{y\theta}^{II} \geq \omega_y$

cuando  $\omega_y \leq \omega_\theta$ :  $\omega_{y\theta}^I \leq \omega_y$  ,  $\omega_{y\theta}^{II} \geq \omega_\theta$



**Figura 3.5.** Gráfico para determinar las dos frecuencias naturales acopladas

Por lo tanto, la frecuencia natural acoplada más pequeña es menor que las dos frecuencias desacopladas, mientras que la frecuencia natural acoplada más alta es mayor que las dos frecuencias desacopladas.

Una vez que los valores de la frecuencia natural circular  $\omega$  han sido hallados, los valores correspondientes de la relación de amplitudes  $\alpha = B_2/B_1$ , pueden encontrarse de la ecuación 3.11

La relación de amplitud será diferente en cada una de las dos frecuencias naturales. Los valores reales de  $B_2$  y  $B_1$  dependerán de las condiciones iniciales que causen las vibraciones libres. Soluciones de la forma:

$$y = A_1 \text{sen } \omega t \quad , \quad \theta = A_2 \text{sen } \omega t$$

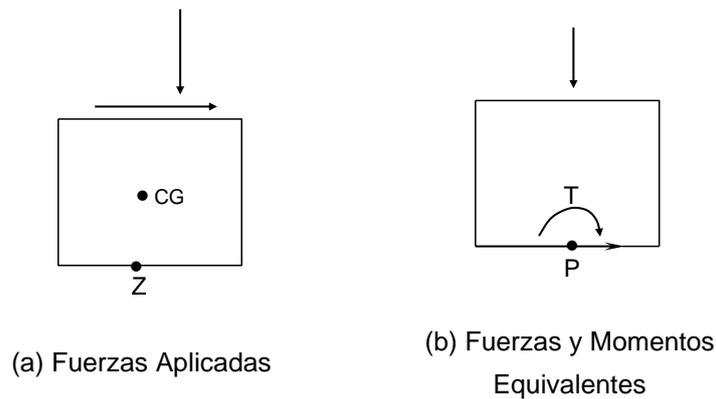
también conducirán a la ecuación 3.14 para las frecuencias naturales y a la ecuación 3.11 para la razón de amplitud. La aplicación de estas ecuaciones y gráficos al problema de vibración libre acoplada se ilustra en el Ejemplo 3.2.

**Vibraciones Libres con Amortiguamiento:** Como en el caso de sistemas de un grado de libertad, el amortiguamiento ocasiona un cambio en las frecuencias naturales y un decaimiento gradual de las vibraciones libres. De nuevo, el cambio en la frecuencia natural es insignificante si el amortiguamiento es pequeño.

### 3.3 VIBRACIONES DE SISTEMAS FORZADOS DE 2 GDL POR CARGAS PERIÓDICAS

Esta sección considera las vibraciones forzadas de un sistema de 2-GDL. Los principios se ilustrarán por medio de un problema de vibración acoplada en un sistema de una masa. Los mismos principios se aplican a vibraciones desacopladas de un sistema de dos masas.

**Vibraciones Forzadas Acopladas de Sistema no Amortiguado de una Masa:** Regresemos al sistema de una masa de la Figura 3.4 y consideremos los efectos de la aplicación de fuerzas periódicas como se muestra en la Figura 3.6. Este sistema de fuerzas puede ser resuelto en: (1) una fuerza vertical actuando a través del centro de gravedad (CG); (2) una fuerza horizontal actuando a través de Z; y (3) un momento alrededor de un eje horizontal a través de Z. La fuerza vertical a través del CG causará solamente movimientos verticales y su efecto puede ser estudiado utilizando las ecuaciones desarrolladas más adelante.



**Figura 3.6.** Fuerzas aplicadas al sistema con movimientos acoplados

Sean  $P = P_o \text{ sen } \Omega t$  y  $T = T_o \text{ sen } \Omega t$ :  $y$ : la fuerza horizontal aplicada a través de  $Z$  (actuando a la derecha) y el momento aplicado en  $Z$  (en el sentido de las agujas del reloj) respectivamente, se asume que actúan en fase. Añadiendo los términos de vibración forzada a la ecuación 3.6 y omitiendo el amortiguamiento, se tiene:

$$M \ddot{y} + k_y y + ML \ddot{\theta} = P_o \text{ sen } \Omega t \tag{3.15}$$

$$I \ddot{\theta} + k_\theta \theta + ML \ddot{y} = T_o \text{ sen } \Omega t$$

Asumamos que estas ecuaciones tienen soluciones de la forma (Nota: se asume que las vibraciones libres son amortiguadas. Puede demostrarse que el ángulo de fase entre la fuerza aplicada y la respuesta es cero ó  $180^\circ$ , si es que se omite el amortiguamiento):

$$y = y_o \text{ sen } \Omega t, \theta = \theta_o \text{ sen } \Omega t \tag{3.16}$$

La sustitución en las ecuaciones 3.15 conduce a las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} (-M \Omega^2 + k_y) y_o - ML \Omega^2 \theta_o &= P_o \\ -ML \Omega^2 y_o + (-I \Omega^2 + k_\theta) \theta_o &= T_o \end{aligned} \right\} \tag{3.17}$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas

$$\left. \begin{aligned} y_o &= \frac{(k_\theta - I\Omega^2) P_o + ML\Omega^2 T_o}{(k_\theta - I\Omega^2)(k_y - M\Omega^2) - (ML\Omega^2)^2} \\ \theta_o &= \frac{ML\Omega^2 P_o + (k_y - M\Omega^2) T_o}{(k_\theta - I\Omega^2)(k_y - M\Omega^2) - (ML\Omega^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Comparemos el denominador de estas ecuaciones con la ecuación 3.12. Se aprecia que el denominador se anula cuando  $\Omega$  es igual a cualquiera de las dos frecuencias naturales acopladas, es decir, la resonancia ocurre a estas frecuencias naturales. Con manipulación algebraica se demuestra que el denominador se puede reescribir como:

$$MI_o \left[ (\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2 \right] \left[ (\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2 \right]$$

Por lo tanto, las ecuaciones 3.18 se pueden reescribir como:

$$\left. \begin{aligned} y_o &= \frac{(\omega_\theta^2 - \Omega^2) \frac{P_o I}{(MI_o)} + \frac{L}{I_o} \Omega^2 T_o}{[(\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2] [(\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2]} \\ \theta_o &= \frac{\frac{L}{I_o} \Omega^2 P_o + (\omega_y^2 - \Omega^2) \frac{T_o}{I_o}}{[(\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2] [(\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2]} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Con el objeto de estudiar las implicancias de estos resultados, asumamos  $P_o = 0$ , es decir, que solamente existe un momento dinámico aplicado. Entonces las ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} y_o &= \frac{T_o}{k_\theta} \frac{LI}{I_o} \frac{\omega_\theta^2 \Omega^2}{[(\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2] [(\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2]} \\ \theta_o &= \frac{T_o}{k_\theta} \frac{I}{I_o} \frac{\omega_\theta^2 (\omega_y^2 - \Omega^2)}{[(\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2] [(\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2]} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

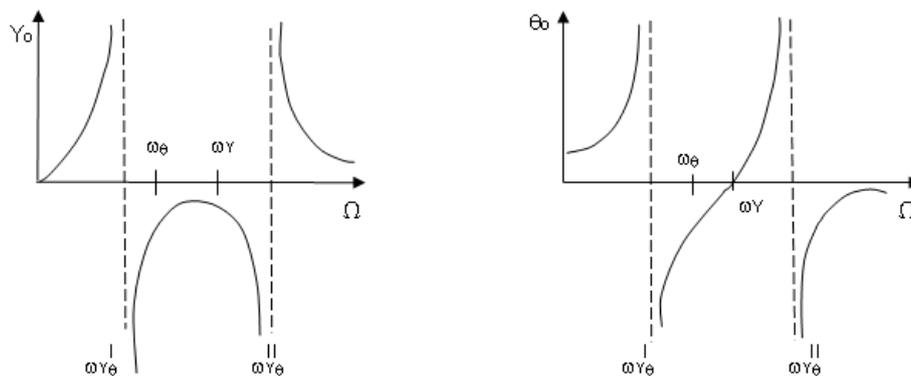
Las cantidades en el lado derecho sirven como factores de carga dinámicos. Supongamos que:

$$\omega_{y\theta I} < \omega_{\theta} < \omega_y < \omega_{y\theta II}$$

Las relaciones de fase siguientes pueden deducirse de las ecuaciones 3.20:

Rango de frecuencia	Ángulo de fase a la fuerza motora	
	y	$\theta$
$\Omega < \omega_{y\theta I}$	0°	0°
$\omega_{y\theta I} < \Omega < \omega_y$	180°	180°
$\omega_y < \Omega < \omega_{y\theta II}$	180°	0°
$\omega_{y\theta II} < \Omega$	0°	180°

Las formas generales de los factores de carga dinámica se muestran en la Figura 3.7



**Figura 3.7.** Naturaleza general de las curvas del Factor de Carga Dinámica de movimientos acoplados

El punto alrededor del cual la cimentación rota (el punto donde la traslación horizontal es cero) se encuentra a una altura  $h$  por encima del punto Z, tal que:

$$y_o + h\theta_o = 0$$

Utilizando las ecuaciones 3.20, se llega a:

$$h = L \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega_y^2}$$

Cuando  $\Omega$  es pequeño,  $h$  es pequeño y el centro de rotación se encuentra en la base del bloque de cimentación. Conforme  $\Omega$  aumenta,  $h$  toma progresivamente mayores valores negativos, es decir, el centro de rotación se encuentra por debajo de la base. Para  $\Omega = \omega_y$ , el centro de rotación está a una profundidad infinita, lo que implica que la base experimenta traslación sin rotación. Para  $\Omega > \omega_y$ , el centro de rotación está por encima del centro de gravedad, aproximando gradualmente al centro de gravedad conforme  $\Omega$  llega a ser muy grande.

El uso de los procedimientos presentados en esta sección para calcular la amplitud de movimiento de un sistema dinámico se ilustra en el Ejemplo 3.3.

**Vibración Forzada Acoplada de Sistema de una Masa Amortiguada:** Con los términos de amortiguamiento, las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + \delta_y \dot{y} + k_y y + ML \ddot{\theta} &= P_o \text{ sen } \Omega t \\ I\ddot{\theta} + \delta_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta + ML \ddot{y} &= T_o \text{ sen } \Omega t \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es más conveniente resolver independientemente los dos casos:

$$P_o = 0 \quad , \quad T_o \neq 0$$

$$P_o \neq 0 \quad , \quad T_o = 0$$

y superponer los resultados

Para el caso de  $P_o = 0$ , la porción de vibración forzada de la solución toma la forma:

$$\begin{aligned} y &= (y_o)_T \text{ sen } (\Omega t - \alpha_1 - \alpha_2) \\ \theta &= (\theta_o)_T \text{ sen } (\Omega t - \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.22 en las ecuaciones 3.21, expandiendo las funciones seno y agrupando términos en  $\sin \Omega t$  y  $\cos \Omega t$ , conduce a cuatro ecuaciones simultáneas que pueden ser resueltas para  $y_o$ ,  $\theta_o$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Esta solución es:

$$(y_o)_T = \frac{L}{I_o} T_o \frac{\Omega^2}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad (3.23a)$$

$$(\theta_o)_T = \frac{T_o}{I_o} \frac{\sqrt{(\omega_y^2 - \Omega^2)^2 + (2D_y \omega_y \Omega)^2}}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad (3.23b)$$

$$X = [(\omega_{y\theta I})^2 - \Omega^2] [(\omega_{y\theta II})^2 - \Omega^2] \quad (3.23c)$$

$$\begin{aligned} Z^2 = & \left( \frac{I}{I_o} \right)^2 [(\omega_\theta^2 - \Omega^2)^2 (2D_y \omega_y \Omega)^2 + (\omega_y^2 - \Omega^2)^2 (2D_\theta \omega_\theta \Omega)^2 \\ & + (2D_y \omega_y \Omega)^2 (2D_\theta \omega_\theta \Omega)^2 + 2 \frac{ML^2}{I} (2D_y \omega_y \Omega) (2D_\theta \omega_\theta \Omega) \Omega^4] \end{aligned} \quad (3.23d)$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{2D_y \omega_y \Omega}{\omega_y^2 - \Omega^2} \quad (3.23e)$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{(2D_\theta \omega_\theta \Omega) [(\omega_y^2 - \Omega^2)^2 + (2D_y \omega_y \Omega)^2] + \frac{ML^2}{I} \Omega^4 (2D_y \omega_y \Omega)}{(\omega_\theta^2 - \Omega^2) [(\omega_y^2 - \Omega^2)^2 + (2D_y \omega_y \Omega)^2] - \frac{ML^2}{I} \Omega^4 (\omega_y^2 - \Omega^2)} \quad (3.23f)$$

Para el caso  $T_o = 0$ , la parte de vibración forzada de la solución toma la forma:

$$y = (y_o)_p \text{ sen } (\Omega t - \alpha_3) \quad (3.24)$$

$$\theta = (\theta_o)_p \text{ sen } (\Omega t - \alpha_3 - \alpha_4)$$

donde:

$$(y_o)_p = \frac{P_o}{M} \frac{I}{I_o} \frac{\sqrt{(\omega_\theta^2 - \Omega^2)^2 + (2D_\theta \Omega \omega_\theta)^2}}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad (3.25a)$$

$$(\theta_o)_p = P_o \frac{L}{I_o} \frac{\Omega^2}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad (3.25b)$$

$$\text{tg } \alpha_4 = \frac{2D_\theta \omega_\theta \Omega}{\omega_\theta^2 - \Omega^2} \quad (3.25c)$$

$$\text{tg } \alpha_3 = \frac{(2D_y \omega_y \Omega) [(\omega_\theta^2 - \Omega^2)^2 + (2D_\theta \omega_\theta \Omega)^2] + \frac{ML^2}{I} \Omega^4 (2D_\theta \omega_\theta \Omega)}{(\omega_y^2 - \Omega^2) [(\omega_\theta^2 - \Omega^2)^2 + (2D_\theta \omega_\theta \Omega)^2] - \frac{ML^2}{I} \Omega^4 (\omega_\theta^2 - \Omega^2)} \quad (3.25d)$$

Donde X y Z están dadas por las ecuaciones 3.23 c y 3.23 d. En el caso típico, donde ambos  $P_o$  y  $T_o$  son diferentes de cero (cuando una fuerza horizontal actúa en algún punto por encima de la base de la cimentación), las ecuaciones 3.22 y 3.24 pueden añadirse. Con el objeto de obtener la amplitud del movimiento superimpuesto, las diferencias de fase deben tomarse en cuenta. El uso de estas ecuaciones se ilustra en los Ejemplos 3.4 y 3.5. El trabajo numérico asociado es bastante tedioso, por lo que se necesita un computador.

### Ejemplo 3.1

Dado un sistema como el de la Figura 3.2 con

$$k_1 = k_2 = k \quad M_1 = M_2 = M$$

**Frecuencias Naturales:** La ecuación 3.5 se reduce a:

$$\omega^4 - \frac{3k}{M} \omega^2 + \frac{k^2}{M^2} = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en  $\omega^2$ , que puede resolverse para dar:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\omega_I = 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \omega_{II} = 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}}$$

La frecuencia inferior se denomina frecuencia fundamental.

**Relaciones de Amplitud:** La ecuación 3.4 da:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k}{k \left( 1 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{2}{\pm \sqrt{5} - 1}$$

$$\left( \frac{A_2}{A_1} \right)_I = \alpha_I = 1.62 \quad \left( \frac{A_2}{A_1} \right)_{II} = \alpha_{II} = -0.618$$

Los dos patrones de movimiento se muestran en la Figura 3.3. Estos dos modos de vibración se denominan **modos normales** de vibración.

Las relaciones de amplitud  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son exactamente las mismas si se asume los movimientos B cos  $\omega t$  ó A sen  $\omega t$ , es decir:

$$\left( \frac{B_2}{B_1} \right)_I = \alpha_I \quad \left( \frac{B_2}{B_1} \right)_{II} = \alpha_{II}$$

La solución completa para la vibración libre del sistema de dos masas es:

$$x_1 = A_{I1} \sin 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t + B_{I1} \cos 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t + A_{II1} \sin 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t + B_{II1} \cos 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

$$x_2 = 1.62 \left( A_{I1} \sin 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t + B_{I1} \cos 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t \right) - 0.618 \left( A_{II1} \sin 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t + B_{II1} \cos 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t \right)$$

**Condiciones Iniciales:** Supongamos que la estructura está inicialmente desplazada de modo que  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_0$  ( $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ), y después se suelta. Las cuatro condiciones de frontera pueden ser usadas para encontrar las cuatro constantes  $A_{1I}$ ,  $B_{1I}$ ,  $A_{1II}$ ,  $B_{1II}$ .

$$A_{1I} = A_{1II} = 0$$

$$B_{1I} = 0.724 x_0$$

$$B_{1I} = 0.724 x_0$$

$$B_{1II} = 0.276 x_0$$

$$B_{1II} = 0.276 x_0$$

Ambos, el modo fundamental y el segundo modo participan en la vibración, como se muestra por las ecuaciones siguientes:

$$x_1 = 0.724 x_0 \cos 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t + 0.276 x_0 \cos 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

$$x_2 = 1.171 x_0 \cos 0.618 \sqrt{\frac{k}{M}} t - 0.171 x_0 \cos 1.62 \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

La variación de  $x_2$  con el tiempo se muestra en la Figura 3.8:

### Ejemplo 3.2

Dados : Un sistema tal como se muestra en la Figura 3.4, con los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} M &= 2,440 \text{ lb-seg}^2/\text{pie} & k_y &= 9.64 \times 10^6 \text{ lb/pie} \\ I &= 315,000 \text{ lb-seg}^2/\text{pie} & k_\theta &= 6.09 \times 10^8 \text{ lb/radián} \\ L &= 8.56 \text{ pies} & I_o &= I - ML^2 \end{aligned}$$

Determinar: La vibración libre resultante de la condición inicial

$$y = y_0 = 0.1 \text{ pie} \quad \theta = \theta_0 = 0 \quad \text{en } t = 0$$

Solución: Primero se calcula las frecuencias naturales

$$\omega_y = \sqrt{\frac{9.64 \times 10^6}{2440}} = \sqrt{39.5 \times 10^2} = 62.8 \text{ rad/seg}$$

$$(f_n)_y = 10 \text{ cps}$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{6.09 \times 10^8}{3.15 \times 10^5}} = \sqrt{19.3 \times 10^2} = 43.9 \text{ rad/seg}$$

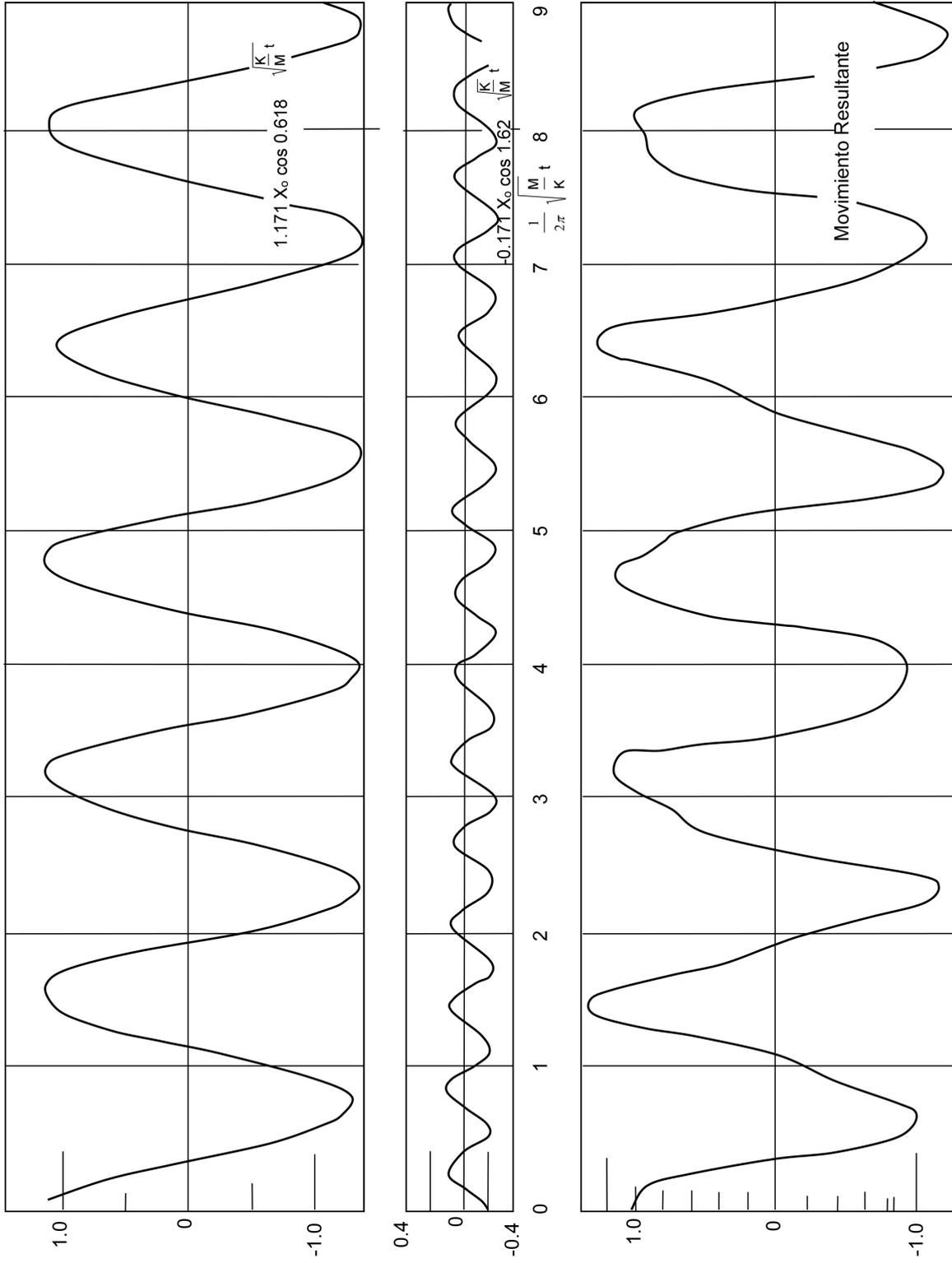
$$(f_n)_\theta = 7 \text{ cps}$$

$$\left(\frac{\omega_y}{\omega_\theta}\right)^2 = 2.04 \quad \frac{I_o}{I} = 0.432$$

Usando la ecuación 3.14 ó la Figura 3.5:

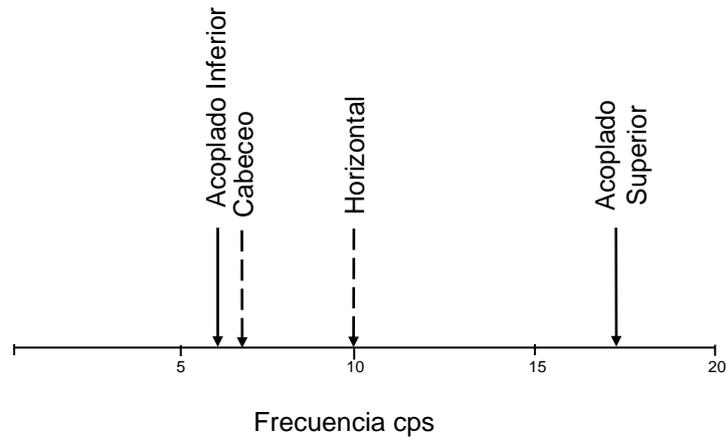
$$\omega_{y\theta}^I = 37.9 \text{ rad/seg} \quad (f_n)_{y\theta}^I = 6.04 \text{ cps}$$

$$\omega_{y\theta}^{II} = 109.0 \text{ rad/seg} \quad (f_n)_{y\theta}^{II} = 17.5 \text{ cps}$$



**Figura 3.8.** Movimiento de la masa superior en el ejemplo 3.1

La Figura 3.9 muestra esquemáticamente la relación entre estas frecuencias naturales diferentes.



**Figura 3.9.** Frecuencias naturales en el ejemplo 3.2

### Relaciones de Amplitud

Usando la ecuación 3.11:

$$\alpha_I = \frac{ML}{I} \times \frac{1}{\left( \frac{\omega_\theta}{\omega_{y\theta}} \right)^2 - 1} = \frac{2440 \times 8.56}{315,000} \times \frac{1}{(1.158)^2 - 1}$$

$$= 0.0663 \frac{1}{0.34} = 0.195 \text{ pies}^{-1}$$

$$\alpha_{II} = 0.0663 \times \frac{1}{(0.403)^2 - 1} = -0.0801 \text{ pies}^{-1}$$

Las vibraciones libres en cualquier modo involucran cabeceo y traslación. Desde que  $\alpha_I > \alpha_{II}$ , el cabeceo será relativamente más importante (con relación a la traslación horizontal) en el modo primario que en el secundario.

Las ecuaciones totales de movimiento (asumiendo solamente términos de coseno) son:

$$y = B_{I1} \cos 33.9 t + B_{II1} \cos 109.0 t$$

$$\theta = 0.195 B_{I1} \cos 33.9 t - 0.0801 B_{II1} \cos 109.0 t$$

$\theta$  en radianes,  $y$  en pies,  $t$  en segundos.

**Condiciones iniciales:** Los factores de amplitud están determinados para condiciones iniciales de las ecuaciones siguientes:

$$y_0 = 0.1 = B_{1I} + B_{1II} \quad (\text{en pies})$$

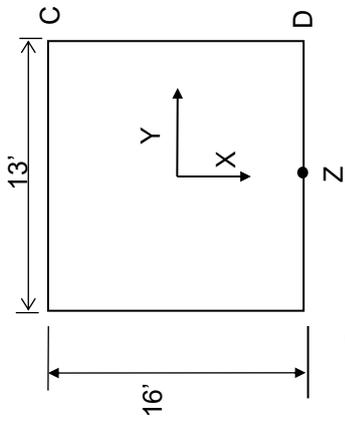
$$\theta_0 = 0 = 0.195 B_{1I} - 0.0801 B_{1II}$$

$$B_{1I} = 0.0291 \quad B_{1II} = 0.0309$$

$$y = 0.0291 \cos 33.9 t + 0.0309 \cos 109.0 t \quad (\text{en pies})$$

$$\theta = 0.00568 \cos 33.9 t - 0.00568 \cos 109.0 t \quad (\text{en radianes})$$

La Figura 3.10 presenta la naturaleza de los movimientos en dos puntos diferentes de la masa vibrante.



En C  $X_c = (8.5) \theta = 0.0483 (\cos 33.9t - \cos 1.09 t)$  en pies  
 $Y_c = Y + 16 (\theta) = 0.1199 \cos 33.9t - 0.0199 \cos 1.09 t$  en pies.

En D  $X_D = X_c$   
 $Y_D = Y = 0.0291 \cos 33.9 t + 0.0309 \cos 1.09 t$  en pies.

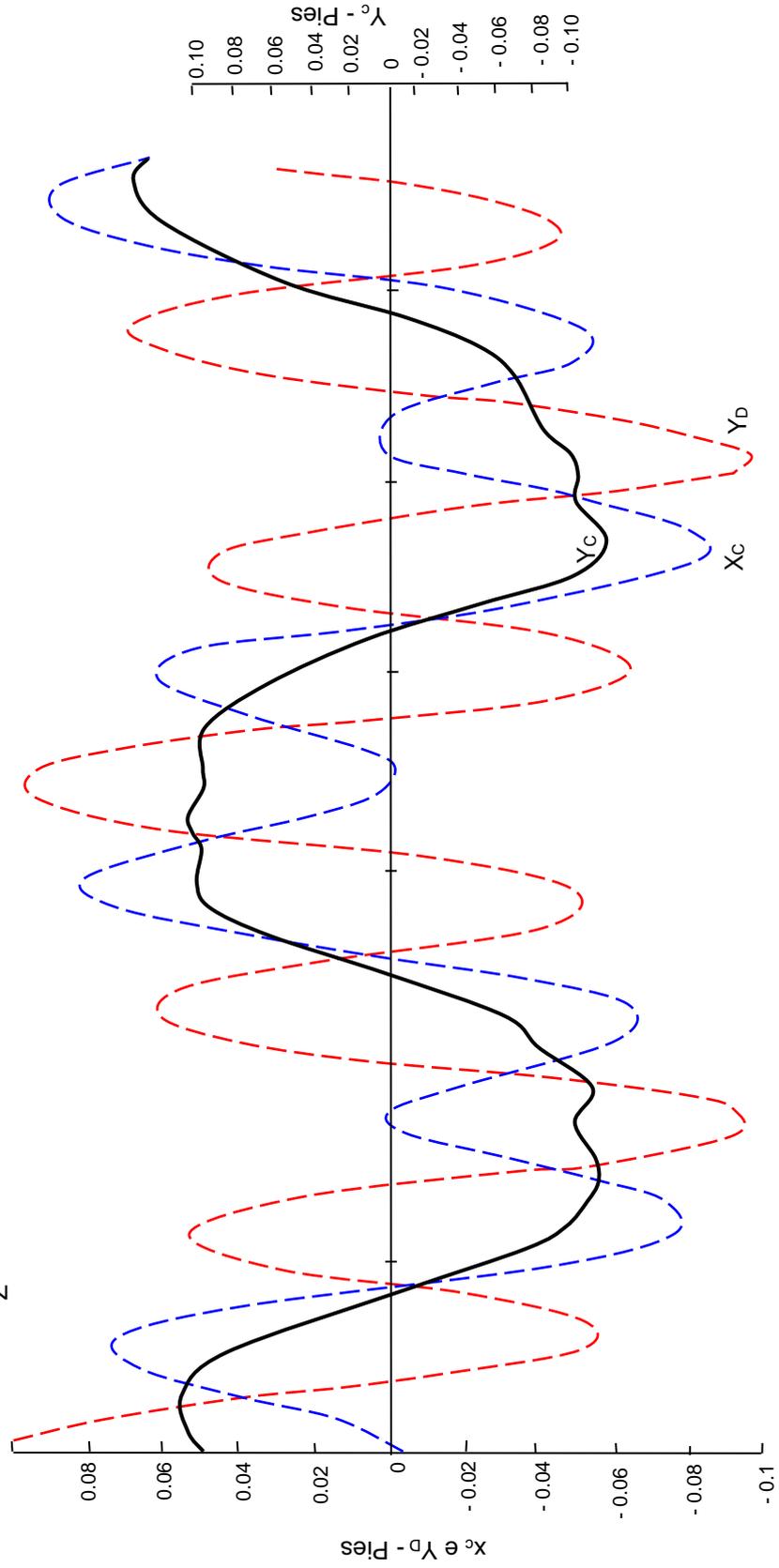


Figura 3.10. Movimientos en el ejemplo 3.2

### Ejemplo 3.3

Considere el sistema del Ejemplo 3.2 y asuma que este sistema está sujeto a la carga mostrada en la Figura 3.11. Esta fuerza aplicada fuera del CG puede ser resuelta en una fuerza vertical a través del CG más un momento  $T_0 = 15,830$  pie-libra alrededor del eje horizontal a través de Z. La fuerza será positiva hacia abajo; y el momento correspondiente también será positivo.

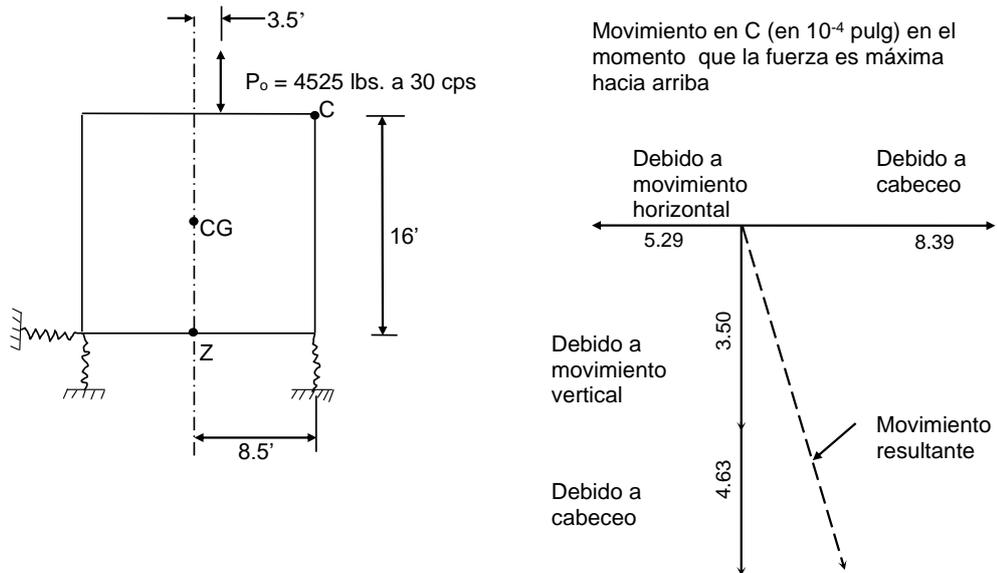


Figura 3.11. Fuerza aplicada y movimiento resultante ejemplo 3.3

La constante de resorte para el movimiento vertical se tomará como  $k_x = 14.35 \times 10^6$  lb/pie. La frecuencia natural para el movimiento vertical, que será desacoplado si los resortes verticales son simétricos con respecto al CG, es igual a:

$$(f_n)_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{14.35 \times 10^6}{2440}} = 12.2 \text{ cps}$$

Refiriéndose al Ejemplo 3.2, se sabe que existirán picos resonantes en la vecindad de 6 y 17.5 cps. Desde que la frecuencia de operación está en exceso de cualquiera de estas frecuencias, la cantidad de amortiguamiento existente no tendrá mucha influencia en la magnitud de los movimientos en la frecuencia de operación.

### Movimientos verticales

Para amortiguamiento cero, el movimiento dinámico es:

$$x_o = \frac{P_o}{k_x} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_x}\right)^2}$$

donde  $\omega_x$  es la frecuencia circular natural no amortiguada para movimientos verticales:  $\omega_x = 2 \pi (12.2) = 36.6$  rad/seg. A la frecuencia normal de operación  $\Omega = 2\pi (30) = 189$  rad/seg:

$$x_o = - 0.0000625 \text{ pies} = - 0.00035 \text{ pulgadas}$$

El signo negativo significa que el movimiento está fuera de fase con la fuerza;

$$x = - 0.0000625 \text{ sen } 189 t \text{ (en pies)}$$

### Traslación y Rotación Acoplados

Las ecuaciones 3.20 se aplican (existe fuerza horizontal cero). En la frecuencia de operación normal:

$$y_o = 0.00004405 \text{ pies}$$

$$\theta_o = -0.00000458 \text{ radianes}$$

### Movimientos Totales

Los movimientos totales debidos a la acción combinada de la fuerza vertical y el momento se presentan en la Figura 3.11.

### Análisis Modal de Sistemas de Varios Grados de Libertad

#### Conceptos Básicos

El movimiento  $u_i(t)$  de la masa  $i$  de un sistema que tiene  $r$  grados de libertad, puede escribirse como:

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^{n=r} D_n(t) \Psi_n \Phi_n(i) \quad (3.26)$$

$\Phi_n(i)$  es la **forma característica normalizada** del modo n-ésimo. La forma característica proporciona el patrón de deformación que será visto a cada instante de tiempo en que el sistema está vibrando en el modo n-ésimo. La Figura 3.3 muestra las formas características de los dos modos del sistema de 2-GDL en el ejemplo 3.1. Las formas son normalizadas al ajustar sus ordenadas para cumplir una condición conveniente, tal como el tener el máximo desplazamiento en cada modo igual a la unidad.

$\Psi_n$  es el **factor participación** del modo n-ésimo. Como su nombre lo sugiere,  $\Psi_n$  indica el grado en el cual el modo n-ésimo participa en la vibración.  $\Psi_n$  depende de la carga pico más grande aplicada al sistema y en la magnitud relativa de la carga aplicada a cada masa en cualquier tiempo dado. (El método de modos trabaja solamente si la magnitud relativa de la carga aplicada a cada masa es la misma en cada instante de tiempo). En la mayoría de los problemas de interés práctico (pero no en todos),  $\Psi_n$  disminuye conforme n aumenta.

$D_n(t)$  es el **factor de carga dinámico** para el modo n-ésimo.  $D_n(t)$  depende solamente de  $\omega_n$ ,  $D_n$  y el tiempo-historia de la carga aplicada, y es idéntico a la respuesta de un sistema de 1-GDL que tiene estos  $\omega$  y  $D$ . Así, cualquier solución (para carga periódica o transitoria) ya obtenida para 1-GDL puede ser utilizada. Este hecho proporciona al análisis modal su mayor ventaja: la tarea de evaluar el comportamiento complicado de un sistema complejo de n-GDL, se reduce a determinar y superponer las respuestas de n sistemas de 1-GDL.

Si  $D_n(t)$  se determina exactamente para cada n y se realiza la superposición total, la ecuación 3.26 es exacta. Esto es posible usando una computadora, pero tedioso si la carga aplicada transitoria es complicada. A menudo solamente se requiere la respuesta máxima, por lo que se realiza la aproximación siguiente:

$$(u_i)_{\max} \leq \sum_{n=1}^{n=r} (D_n)_{\max} \Psi_n \Phi_n(i)$$

o mejor aún:

$$(u_i)_{\max} \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{n=r} [(D_n)_{\max} \Psi_n \Phi_n(i)]^2}$$

Usualmente solo unos cuantos modos deben retenerse, y a menudo solo el primer modo se utiliza, especialmente para trabajo aproximado.

## Aplicación a Problemas Sísmicos

Para este caso, la ecuación 3.26 proporciona movimiento relativo y  $\Psi_n$  es determinado por cargas  $M_i \ddot{S}$  aplicadas a cada masa. El espectro de respuesta de  $Y_{\max}$  puede ser usado para determinar  $(Dn)_{\max}$  para cada modo.

Para trabajo aproximado (tal como diseño inicial) se asume algunas veces que existe solamente un modo para un edificio de muchos pisos y que la forma característica para este modo es una línea recta con desplazamiento máximo en el techo (esta última suposición ahorra el tener que calcular la forma característica). Estas suposiciones corresponden a tener un coeficiente sísmico que varía linealmente con la altura hasta un valor máximo de  $S_a$  en la parte superior del edificio. Así, el corte pico en la base  $V_{\max}$  del edificio es:

$$V_{\max} = S_a \sum_{i=1}^{i=N} (Z_i / H) M_r$$

donde  $Z_i$  es la elevación de la masa  $i$ -ésima y  $H$  es la altura total del edificio. Si los picos son igualmente espaciados y de igual masa

$$V_{\max} = \frac{1}{2} S_a N M$$

donde  $N$  es el número de pisos y  $M$  es la masa por piso.

## Para Fuerzas Aplicadas a las Masas

$$\Psi_n = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\sum_r F_r \Phi_{nr}}{\sum_r M_r \Phi_{nr}^2}$$

La sumatoria es con respecto a las masas.  $F_r$  es la amplitud de la fuerza aplicada a la masa  $r$ -ésima.  $D_n(t)$  de las soluciones para 1-GDL en la sección 2.3 ó 2.4

### Para Movimiento de la Cimentación

$$\Psi_n = \frac{\sum_r M_r \Phi_{nr}}{\sum_r M_r \Phi_{nr}^2}$$

$D_n(t)$  de soluciones 1-GDL como en la sección 2.5 ó 2.6. El espectro de respuesta proporciona  $D_n$  pico.

Nota: Existen varias maneras como se manejan las unidades. Como está aquí escrito, el enfoque más natural es:

Fuerza Aplicada:  $F$  tiene dimensiones de fuerza y  $\Psi_n$  de longitud. Entonces  $D_n$  es la respuesta a fuerza unitaria adimensional.

Movimiento de Cimentación:  $\Psi$  es adimensional y  $D_n$  tiene dimensiones de longitud.

### RESPUESTA DE SISTEMA 2-GDL POR SUPERPOSICIÓN MODAL

Forma de Modo:

$$\Phi_{12} = 1 \quad \Phi_{11} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - M_1 \omega_1^2} = \frac{k_2 - M_2 \omega_1^2}{k_2}$$

$$\Phi_{22} = 1 \quad \Phi_{21} = \text{igual pero con } \omega_2^2$$

Factor de Participación:  $F_1 = 0$   $F_2 = P_o$

$$\Psi_n = \frac{P_o}{(M_1 \Phi_{n1}^2 + M_2) \omega_n^2}$$

Factor de Carga Dinámica:

$$D_n(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \text{sen } \Omega t$$

$$x_2 = P_0 \sin \Omega t \left[ \frac{\left( \frac{\omega_2^2}{M_1 \phi_{11}^2 + M_2} + \frac{\omega_1^2}{M_1 \phi_{21}^2 + M_2} \right) - \Omega^2 \left( \frac{1}{M_1 \phi_{11}^2 + M_2} + \frac{1}{M_1 \phi_{21}^2 + M_2} \right)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} \right]$$

Después de cierta manipulación algebraica, el numerador se transforma en:

$$\frac{1}{M_1 M_2} (k_1 + k_2 - \Omega^2 M_1)$$

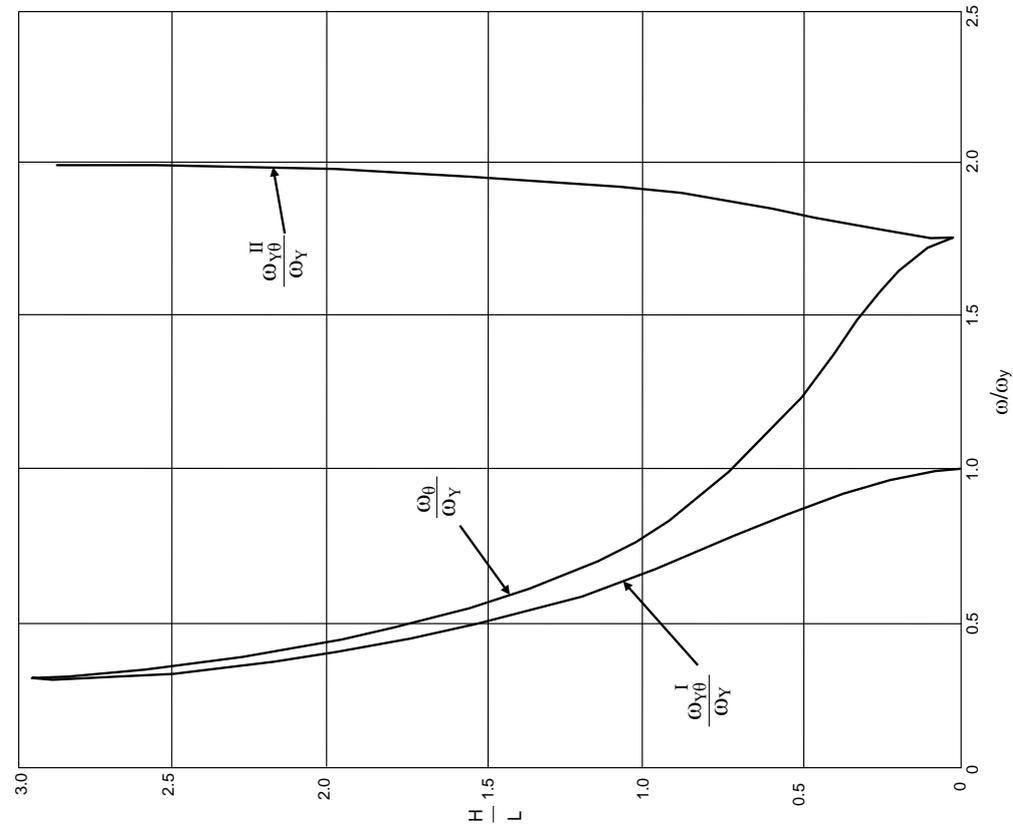
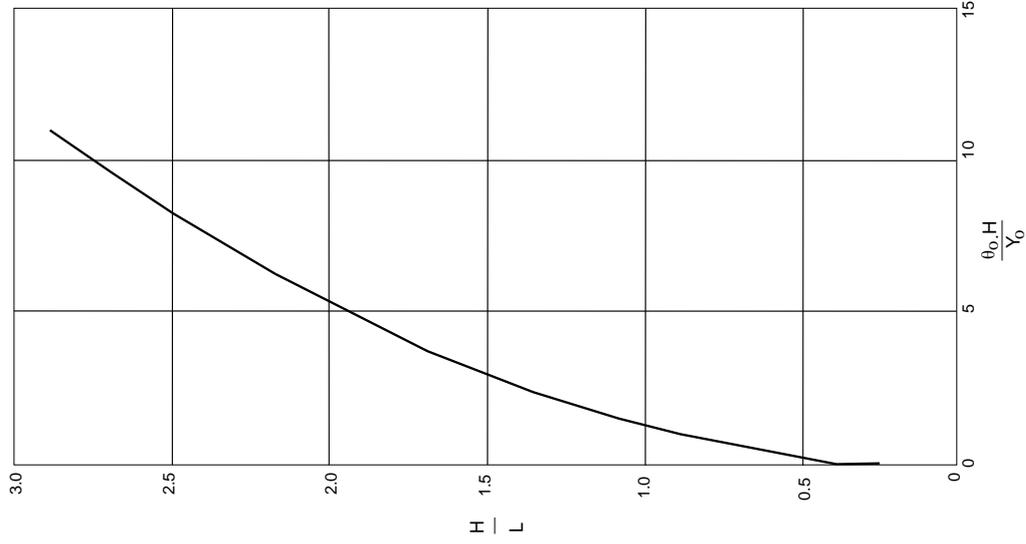
Como en la solución por sustitución directa.

## REFERENCIAS

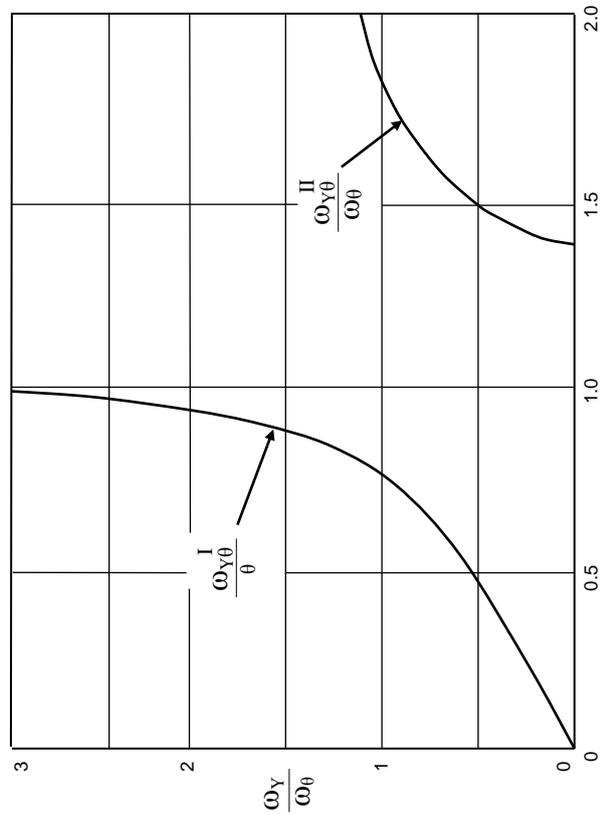
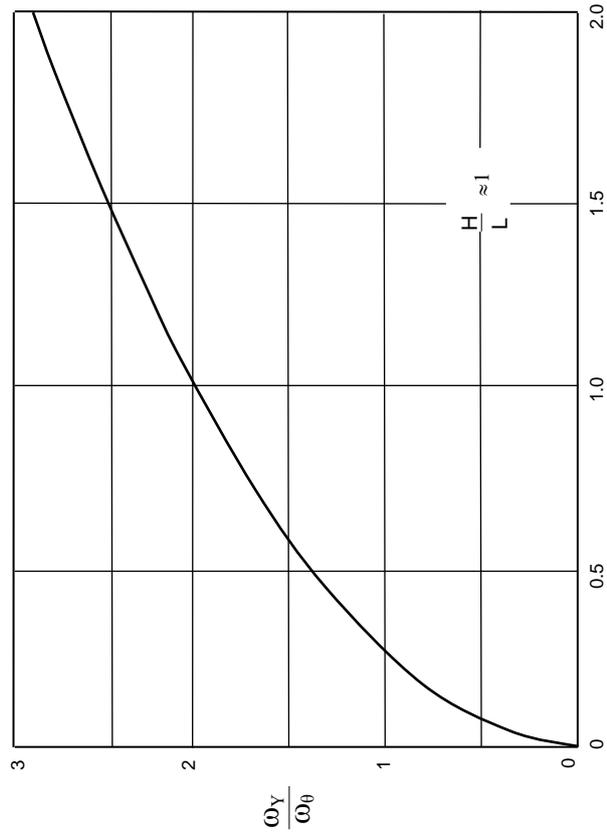
Biggs J (1975), "Introduction to Structural Dynamics", McGraw-Hill Book Company. ISBN 07-005255-7. USA

Den Hartog J.P. (1947), "Mechanical Vibrations", McGraw-Hill Book Company. USA

Withman R.V. (1975), "Soil Dynamics Class Notes", MIT, Cambridge, Massachusetts.



**Anexo 01 a.** Importancia relativa de traslación y cabeceo de bloque de cimentación rectangular ( $l / b=2$ ) en la superficie de cuerpo elástico ( $m = 0.35$ )



**Anexo 01 b** Efecto de la frecuencia horizontal resonante en la respuesta de un bloque de cimentación rectangular ( $i / i_o = 2$ ) sujeto a cabeceo

# **CAPÍTULO IV:**

## **Propagación de ondas**



## CAPITULO IV

### PROPAGACIÓN DE ONDAS

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

Puesto que las vibraciones transmitidas por las cimentaciones (bien sean de las estructuras hacia el suelo, como son las fuerzas de maquinarias, o del suelo hacia las estructuras, como es el caso de sismos) se efectúan siempre a través de ondas, es muy importante conocer los distintos tipos de ondas que se producen en el suelo y sus mecanismos de propagación.

En problemas relacionados al terreno de cimentación se tendrán situaciones que van, desde el caso de considerar un medio idealizado como homogéneo y elástico (depósitos profundos de arcilla), hasta el caso más complejo pero más común, consistente en un medio errático, con estratificaciones alternantes y con características no lineales de esfuerzo deformación. Además, cuando se analiza un suelo a través de probetas en el laboratorio, se tendrá un caso particular de medio no continuo por las condiciones de frontera allí existentes.

Los casos señalados se pueden analizar a partir del estudio de la propagación de ondas, tanto en semiespacios infinitos homogéneos o estratificados, así como en barras de longitud finita.

El presente capítulo no pretende cubrir el estado del arte en propagación de ondas, sino simplemente presentar los fundamentos que se requieren para el manejo de los conceptos que se tratan en la dinámica de suelos. Al lector que le interese profundizar más sobre el tema, podrá consultar las referencias señaladas al final del capítulo.

En primer lugar se indicarán los tipos de ondas elásticas existentes en un medio infinito, posteriormente se analizará la propagación de ondas en un medio semi-infinito con características tanto homogéneas como las de un medio estratificado y finalmente se describirá la propagación de ondas en barras.

## 4.2 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO INFINITO

En un medio infinito, homogéneo e isótropo, sólo se pueden propagar los dos tipos de ondas que corresponden a las dos únicas soluciones que se obtienen de las ecuaciones de movimiento, que más adelante se señalan; estas dos clases de ondas son las llamadas ondas de compresión, primarias o dilatantes y las conocidas como ondas cortantes, secundarias o distorsionales.

Partiendo del análisis de equilibrio de un elemento pequeño como el mostrado por la Figura 4.1, se llega a las siguientes expresiones conocidas en la literatura como las ecuaciones de movimiento (los pasos para llegar a las mismas se pueden ver en la Ref. 1).

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (4.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (4.3)$$

donde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{operador laplaciano en coordenadas cartesianas})$$

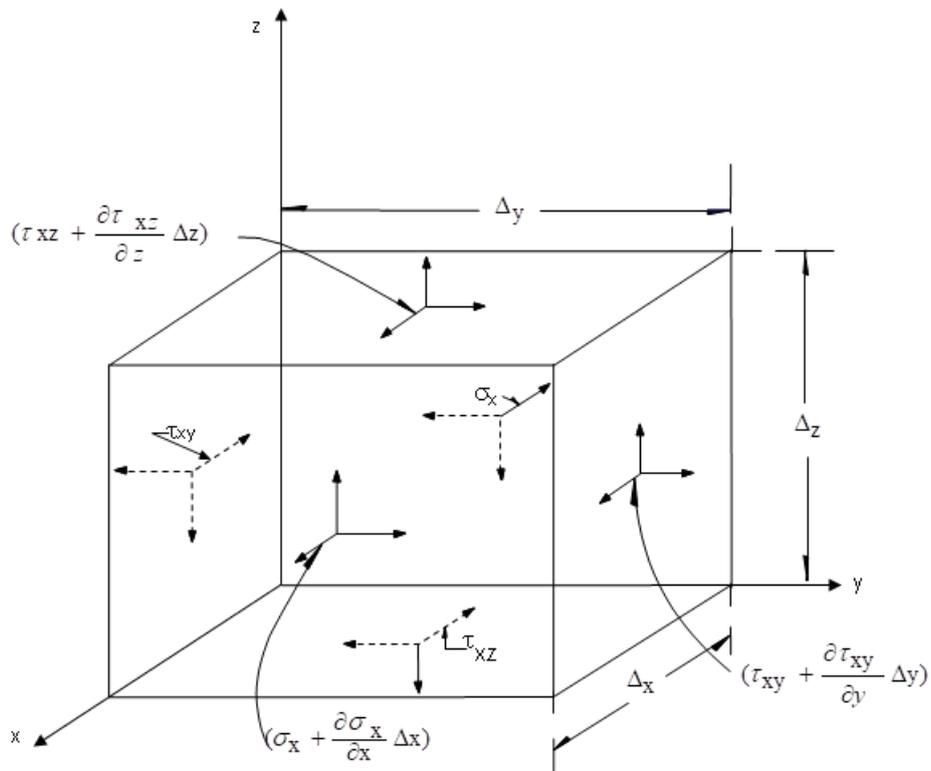
$u, v, w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

$\rho$  es la densidad de masa del medio (peso volumétrico/ aceleración de la gravedad).

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{constante de Lamé}$$

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad \text{módulo cortante}$$

$\nu$	relación de Poisson
$E$	módulo elástico de Young
$\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$	dilatación cúbica
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	son respectivamente las deformaciones normales en las direcciones $x, y$ y $z$ .



**Figura 4.1.** Esfuerzos actuando sobre un elemento pequeño

Derivando las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3 con respecto a  $x, y$  y  $z$  respectivamente, y sumando las expresiones obtenidas, se llega a la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \bar{\epsilon}$$

ó

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = v_c^2 \nabla^2 \bar{\epsilon} \quad (\text{ecuación de onda de dilatación cúbica}) \quad (4.4)$$

donde:

$$v_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (4.5)$$

Esta última expresión representa la velocidad de propagación de una onda dilatante o irrotacional, o dicho en otras palabras, la dilatación  $\bar{\epsilon}$  se propaga con una velocidad  $v_c$ . Al numerador de la ecuación 4.5 se le conoce comúnmente como módulo dilatante D, es decir:

$$D = \lambda + 2G = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Derivando ahora la ecuación 4.2 con respecto a z y a 4.3 con respecto a y, y eliminando  $\bar{\epsilon}$  mediante la substracción de las dos expresiones resultantes, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

o sea

$$\rho \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 \theta_x \quad (4.6)$$

donde:

$$\theta_x = 2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \text{o sea es la rotación alrededor del eje x}$$

La ecuación 4.6 se puede escribir también como sigue:

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \theta_x \quad (4.7)$$

donde:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

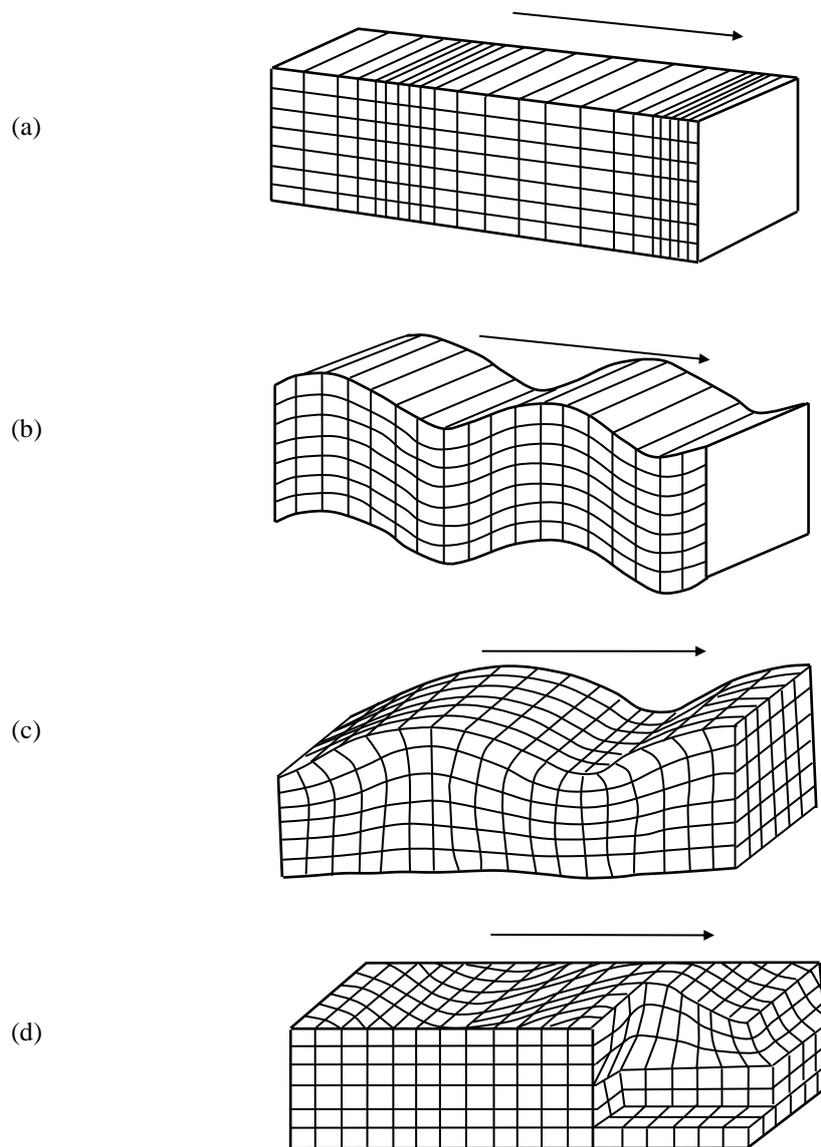
es la velocidad de las llamadas ondas cortantes o equivolumétricas y representa la velocidad de propagación de la rotación  $\theta_x$ .

Las ecuaciones correspondientes a  $\theta_y$  y  $\theta_z$  se obtienen de manera similar a la ecuación 4.7, y se puede decir que la rotación se propaga con la velocidad  $v_s$ .

Además de la velocidad con que se propagan cada una de estas ondas existentes en un medio elástico infinito, llamadas ambas ondas de cuerpo, tienen la siguiente particularidad: en las ondas compresionales el movimiento de las partículas tiene la misma dirección en que se propagan (véase Figura 4.2), mientras que en las ondas cortantes los movimientos de las partículas son perpendiculares a la dirección de su propagación. La relación entre las velocidades de estas dos clases de ondas está dada por la expresión:

$$\frac{v_c}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (4.8)$$

la cual implica que  $v_c > v_s$  para cualquier valor de  $\nu$ , y que para  $\nu = 0.5$ ,  $v_c$  adquiere un valor teórico de infinito.



**Figura 4.2.** Naturaleza de los desplazamientos de las partículas de un suelo durante el paso de a) ondas de compresión P, b) ondas cortantes S, c) ondas Rayleigh R y d) ondas Love L

### 4.3 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO SEMI-INFINITO

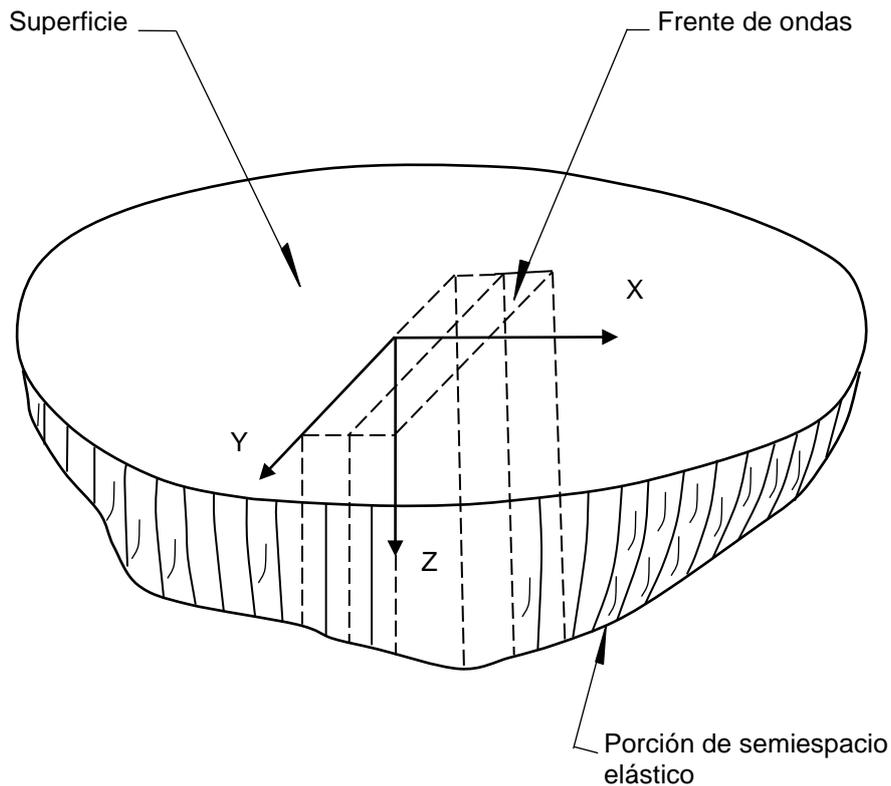
En un medio semi-infinito existe una frontera que permite obtener una tercera solución a las ecuaciones de movimiento y así tener un tercer tipo de onda. Este tercer tipo corresponde a las ondas superficiales llamadas de Rayleigh (en honor a quien las

descubrió), las cuales producen en las partículas movimientos elípticos (Figura 4.2) y disminuyen rápidamente su amplitud con la profundidad.

La ecuación de la onda Rayleigh se puede obtener estableciendo un sistema de coordenadas como el señalado en la Figura 4.3, y suponiendo una onda plana que viaja en la dirección positiva de las  $x$ . Así, partiendo de que los desplazamientos  $u$  y  $w$  se pueden escribir respectivamente como:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones potenciales que resultan estar relacionadas respectivamente con la dilatación y la rotación del medio, se obtiene, al sustituir  $u$  y  $w$  en las ecuaciones 4.1 y 4.3, las siguientes expresiones:



**Figura 4.3.** Sistema de coordenadas en un semiespacio elástico

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) \quad (4.9)$$

y

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - G \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \quad (4.10)$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \phi = v_c^2 \nabla^2 \phi \quad (4.11)$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left( \frac{G}{\rho} \right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi \quad (4.12)$$

Ahora bien, suponiendo una solución del tipo de onda sinusoidal viajando en la dirección positiva de las x, se puede escribir

$$\phi = F(z) e^{i(\omega t - N_x x)} \quad (4.13)$$

y

$$\psi = G(z) e^{i(\omega t - N_x x)} \quad (4.14)$$

donde F(z) y G(z) son funciones que describen la variación de la amplitud de la onda con la profundidad, y  $N = 2\pi/L_R$  (conocido como número de onda);  $L_R$  es la longitud de la onda generada. Al sustituir los valores de  $\phi$  y  $\psi$  dados por las ecuaciones 4.13 y 4.14 dentro de las ecuaciones 4.11 y 4.12, y considerar la condición de que la amplitud de la onda superficial tiende a cero con la profundidad, los valores de F(z) y G(z) resultan iguales a:

$$F(z) = A_1 e^{-\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}} z}$$

y

$$G(z) = A_2 e^{-\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}} z}$$

Los valores de  $A_1$  y  $A_2$  se obtienen de aplicar las condiciones de frontera relativas a que los esfuerzos cortantes y normales en la superficie del semiespacio deben ser nulos. Aplicando dichas condiciones se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{A_1}{A_2} \frac{(\lambda + 2G) \left( N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2} \right) - \lambda N^2}{2iGN \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}} - 1 = 0 \quad (4.15)$$

y

$$\frac{A_1}{A_2} \frac{2 \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}} iN}{2N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}} + 1 = 0 \quad (4.16)$$

Añadiendo estas dos ecuaciones y haciendo algunos arreglos matemáticos, se llega a la ecuación que da el valor de la velocidad con que se propagan las ondas Rayleigh:

$$\left( \frac{v_R}{v_s} \right)^6 - 8 \left( \frac{v_R}{v_s} \right)^4 + \left[ 24 - 16 \left( \frac{v_s}{v_c} \right)^2 \right] \left( \frac{v_R}{v_s} \right)^2 + 16 \left[ \left( \frac{v_s}{v_c} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (4.17)$$

En la Figura 4.4 se muestra la relación que guarda  $v_R/v_s$  y  $v_c/v_s$  para varios valores de la relación de Poisson  $\nu$ ; obsérvese que  $v_R$  es aproximadamente igual a  $v_s$ , particularmente para valores grandes de  $\nu$ .

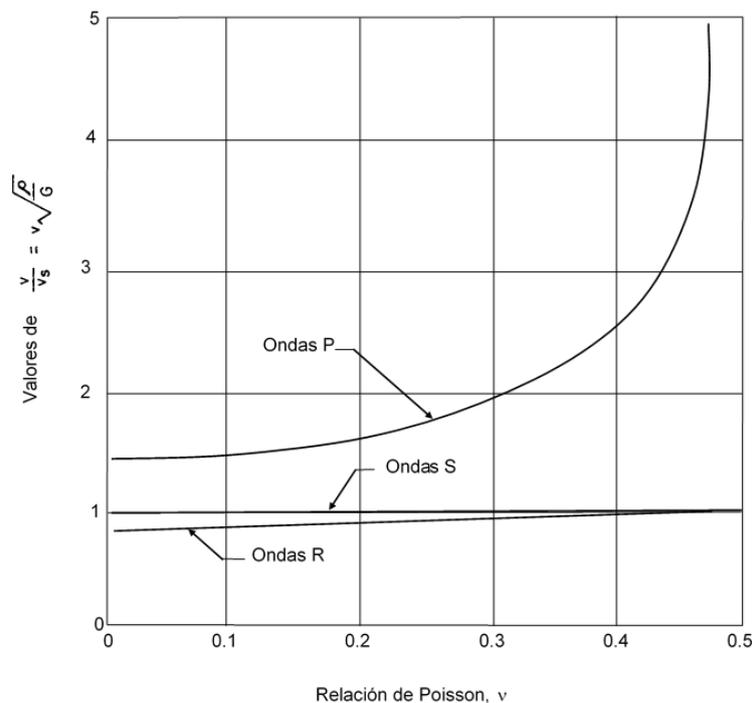


Figura 4.4. Relación entre  $v_s$ ,  $v_c$  y  $v_r$  con la relación de Poisson  $\nu$

En cuanto a la variación de los desplazamientos con la profundidad, éstos se pueden obtener a partir de las expresiones señaladas para  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$  y  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , así como de sustituir en ellas los valores de  $\phi$  y  $\psi$  dados por las ecuaciones 4.13 y 4.14.

Las expresiones que resultan (Ref. 1), son las siguientes:

$$u = A_1 N i \left\{ \exp \left[ -\frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N} (zN) \right] + \frac{2 \sqrt{\left(N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}\right) \left(N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}\right)}}{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2} + 1} x \right. \\ \left. \exp \left[ -\frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] \right\} \exp i (\Omega t - N x) \quad (4.18)$$

y

$$w = A_1 N \left\{ \frac{2 \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2} + 1} \exp \left[ -\frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] - \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N} x \right. \\ \left. \exp \left[ -\frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] \right\} \exp i (\Omega t - N x) \quad (4.19)$$

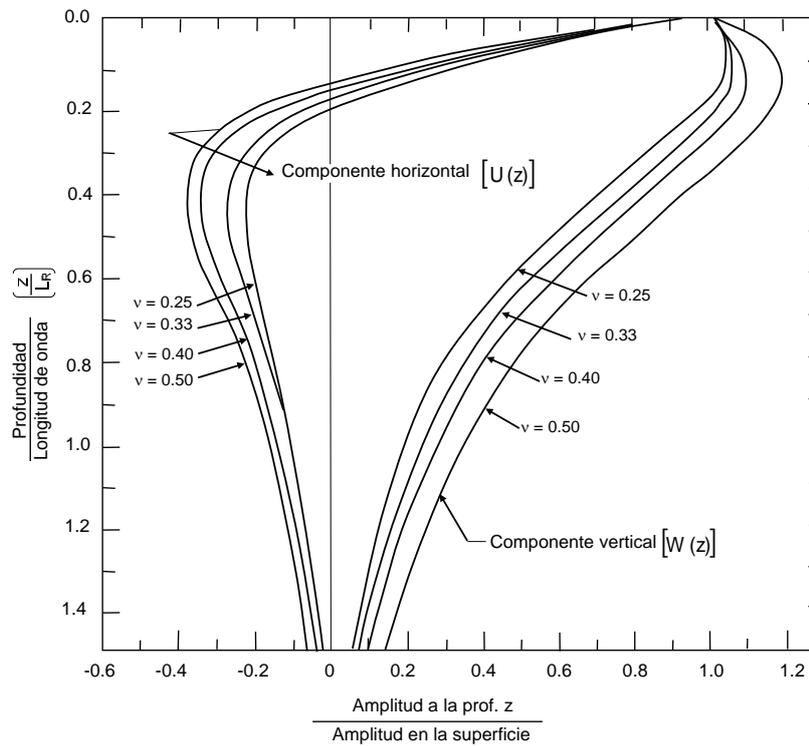
De la observación de estas dos ecuaciones, se puede deducir que los términos dentro de las llaves representan la variación respectiva de  $u$  y  $w$  con la profundidad. O sea:

$$u = U(z) A_1 N i e^{i(\Omega t - N x)}$$

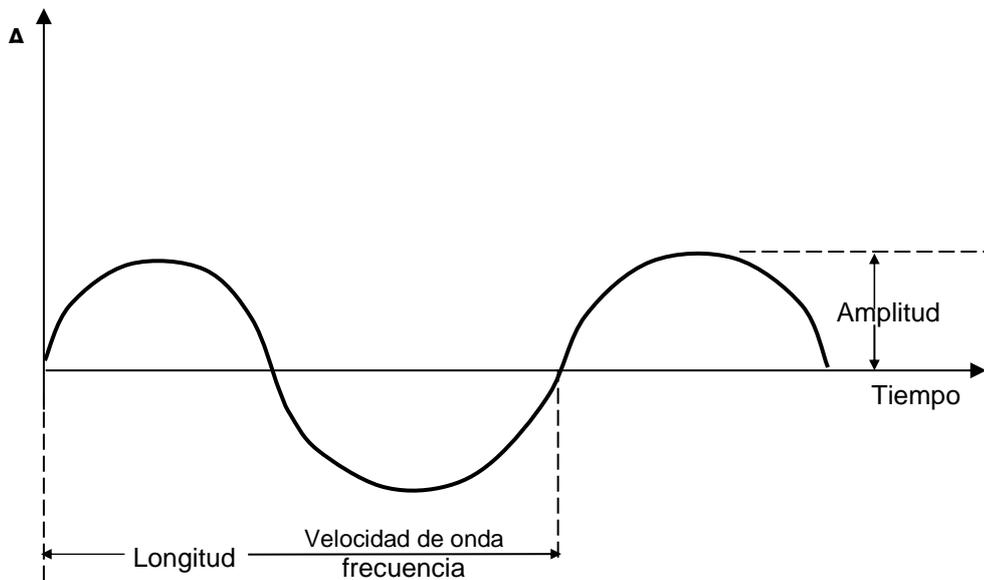
y

$$w = W(z) A_1 N e^{i(\Omega t - Nx)}$$

La variación de  $U(z)$  y  $W(z)$  con la profundidad para varios valores de  $\nu$ , se indica en la Figura 4.5. La Figura 4.6 señala la interpretación física del concepto de longitud de onda que interviene en la figura anterior.



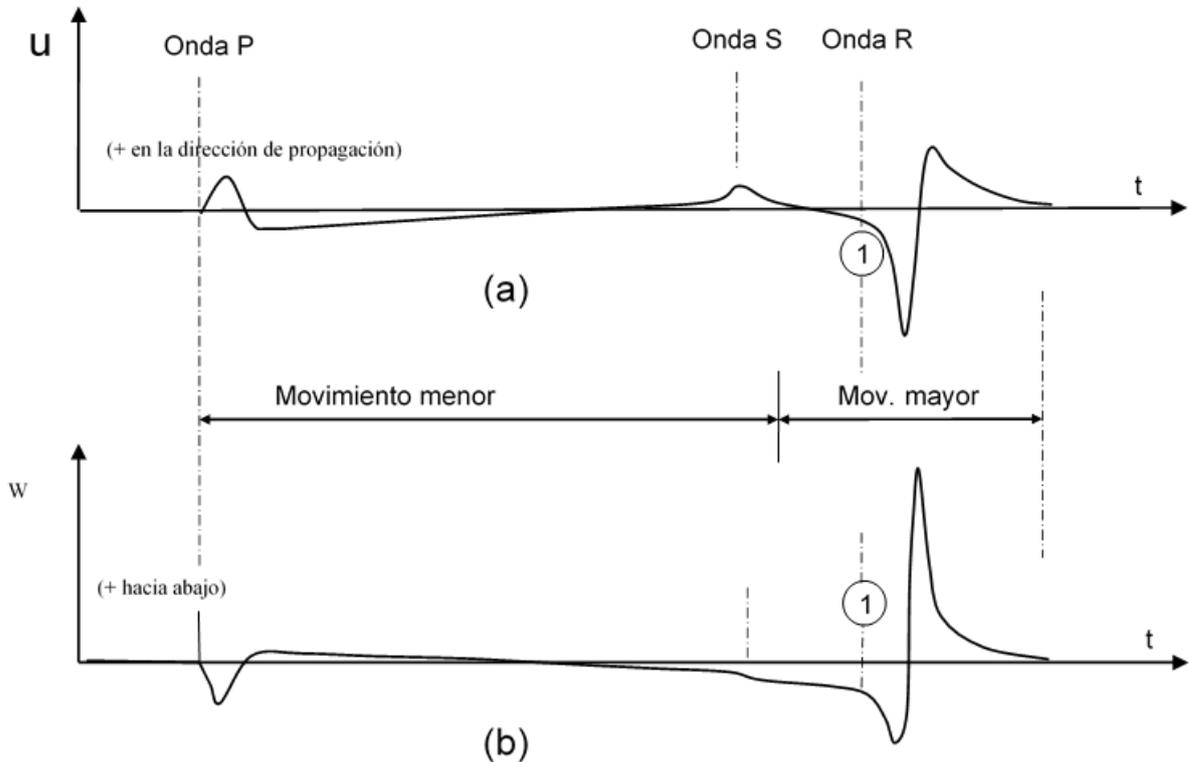
**Figura 4.5.** Relación de la amplitud de las ondas Rayleigh vs. la profundidad (Ref. 1)



**Figura 4.6.** Interpretación gráfica de la longitud de onda

Debe señalarse que son las ondas Rayleigh las que transmiten la mayor parte de la energía generada por la vibración de una zapata sobre la superficie de un semiespacio. Cuando la zapata es circular, el 67% de la energía es transmitida por las ondas Rayleigh, mientras que las cortantes transmiten el 26% y las de compresión el 7% restante. Por otro lado, en comparación con las ondas de cuerpo, las amplitudes de las ondas Rayleigh disminuyen más lentamente con la distancia  $r$  al centro de la fuente de excitación, mientras que la atenuación de las ondas P y S en la superficie es proporcional a  $1/r^2$ , en las ondas Rayleigh es proporcional a  $1/\sqrt{r}$ , la razón de esta diferencia se debe al concepto del llamado amortiguamiento radial que se estudia en el siguiente capítulo. Lo anterior hace, como se ilustrará posteriormente, que las ondas Rayleigh desempeñen un papel muy importante en la transmisión de vibraciones en o cerca de la superficie.

Las ondas Rayleigh son generalmente fáciles de reconocer ya que usualmente tienen una amplitud grande con frecuencia relativamente baja, según puede observarse en la Figura 4.7.

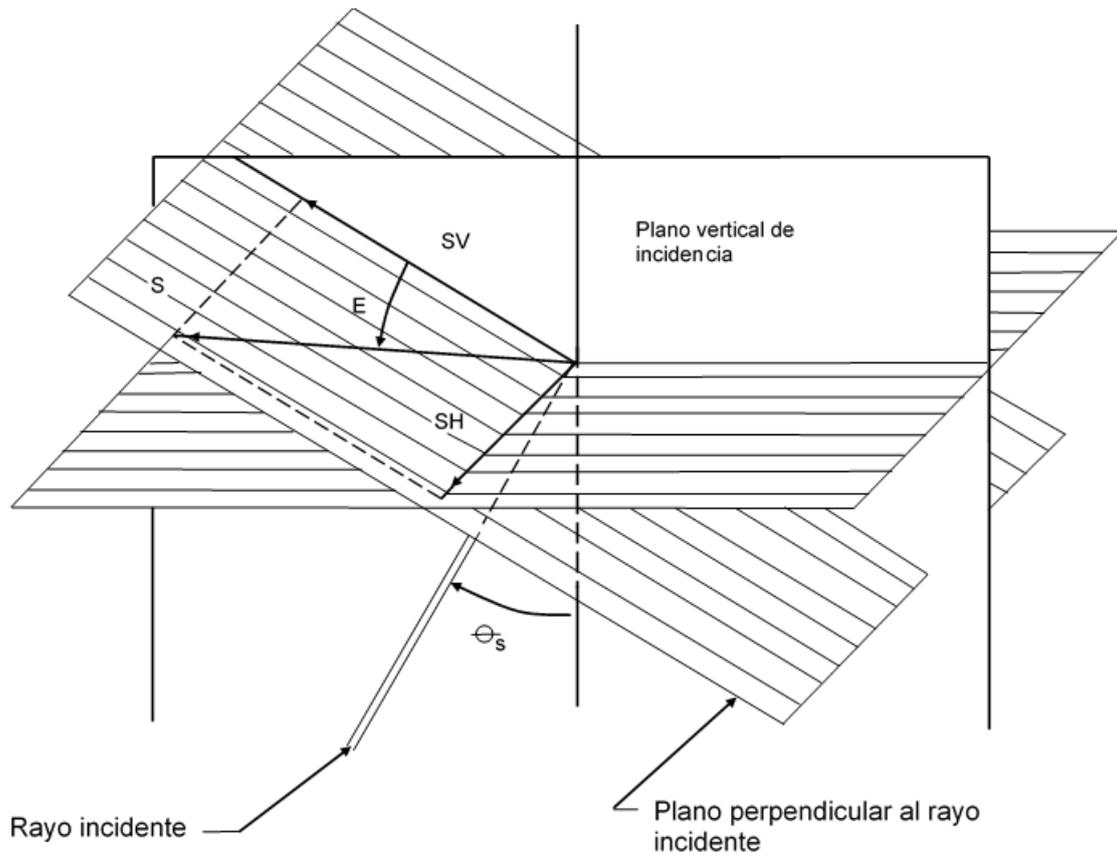


**Figura 4.7.** Sistema de ondas originadas por la excitación en un punto de la superficie de un medio idealizado (Ref. 1)

#### 4.4 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ESTRATIFICADO

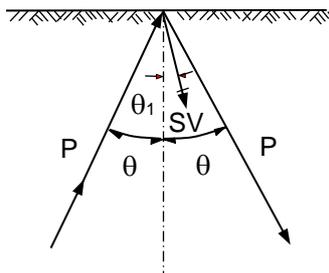
En la mayoría de los casos reales se tienen depósitos de suelo constituidos por estratificaciones, lo cual obliga a conocer la transmisión de vibraciones a través de medios estratificados. En forma simplista se puede conocer lo que sucede con las ondas que llegan a las superficies de contacto de dos estratos con propiedades diferentes, partiendo del análisis de refracción y reflexión que experimentan cada una de las ondas de cuerpo.

Sin embargo, con el objeto de considerar la división de la energía que se origina en el punto de incidencia, es conveniente considerar primeramente el caso particular de la descomposición de las ondas P y S al llegar a una superficie libre. Para ello resulta a la vez conveniente tomar en cuenta que las ondas cortantes S se pueden descomponer en una componente paralela a la superficie (ondas SH), y en otra contenida en el plano vertical (ondas SV). La Figura 4.8 ilustra esta descomposición.



**Figura 4.8.** Componentes SV y SH de una onda cortante S (Ref. 2)

Cuando una onda dilatante P incide sobre la superficie libre del semiespacio, parte de la energía se refleja a través de una onda cortante SV y parte a través de una onda P (Figura 4.9). El ángulo de reflexión  $\theta_1$  de la onda SV está dado de acuerdo con la ley de Snell:



**Figura 4.9.** Reflexión en la superficie de una onda incidente P

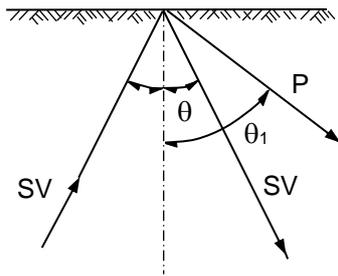
$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta \frac{v_s}{v_p}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia.

El ángulo  $\theta_1$  de la onda P resulta igual al de incidencia.

Al llegar una onda cortante SV a la superficie, toda la energía que se refleja se hace a través de: a) una onda SV con un ángulo de reflexión igual al de incidencia (Figura 4.10), y b) a través de una onda P cuyo ángulo de generación está dado por:

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta \frac{v_c}{v_s}$$

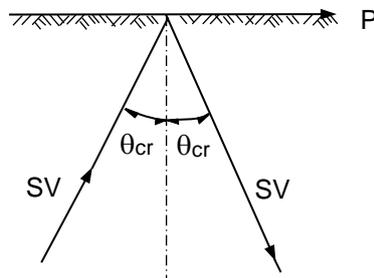


**Figura 4.10.** Reflexión de una onda incidente SV en una superficie libre

Existe un cierto ángulo de incidencia, llamado crítico, para el cual las ondas incidentes P y S se reflejan horizontalmente (Figura 4.11); dicho ángulo depende únicamente de la relación de Poisson.

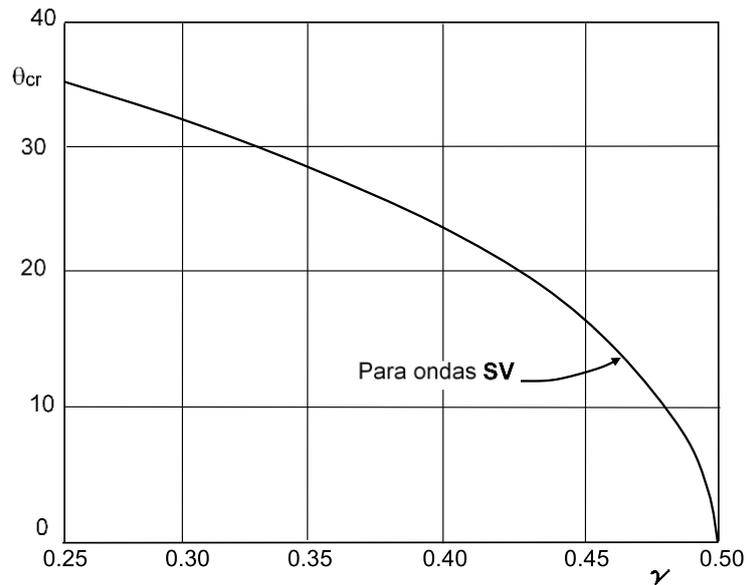
Para onda dilatantes  $\theta_{cr} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{v_c}{v_s} \right)$ , y

Para ondas cortantes  $\theta_{cr} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{v_s}{v_p} \right)$

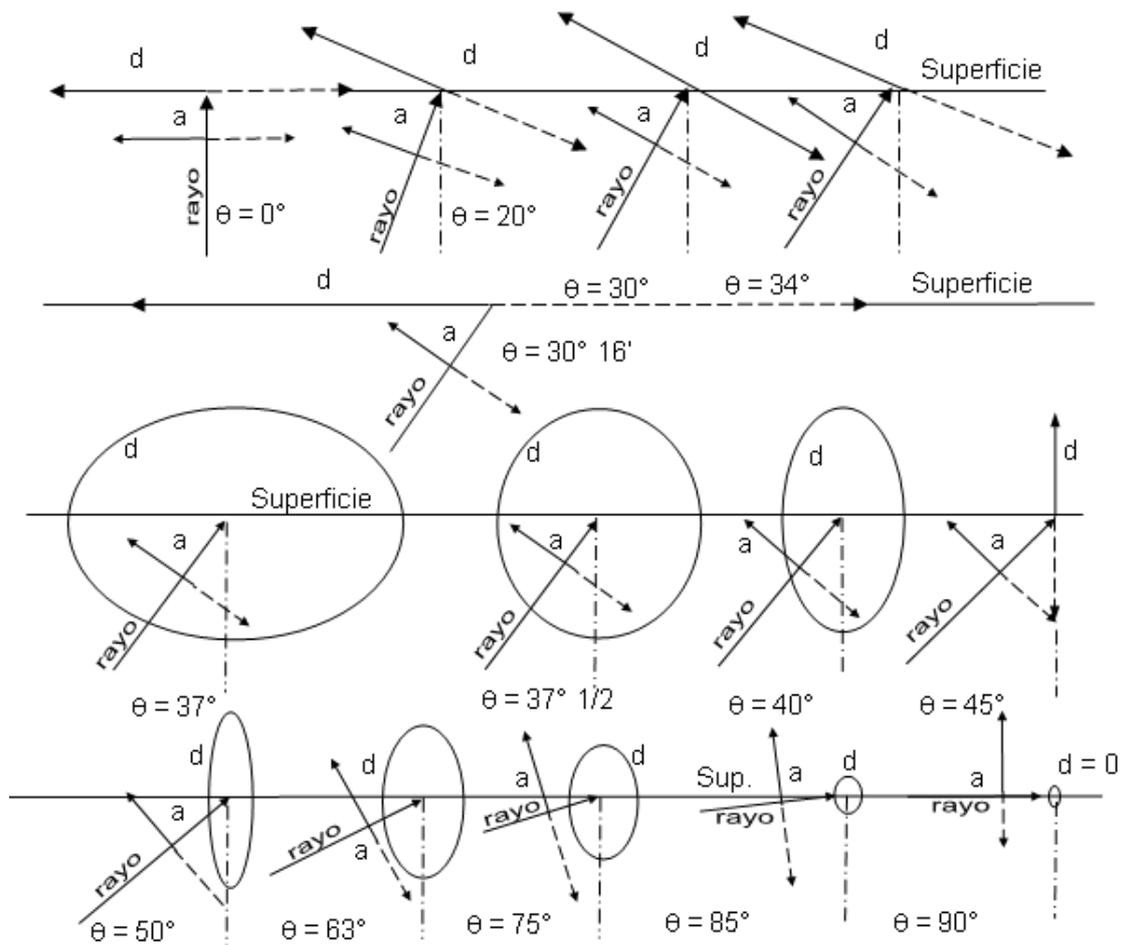


**Figura 4.11.** Reflexión horizontal de una onda P cuando una onda SV incide con un ángulo crítico

La Figura 4.12 muestra la relación entre  $\theta_{cr}$  y  $\nu$  para el caso de ondas de incidencia SV. Cuando los ángulos de incidencia son mayores, las componentes horizontal y vertical de los movimientos del terreno se encuentran desfasadas, creando una vibración del tipo elipsoidal; la Figura 4.13 muestra que para  $\theta_s = 45^\circ$  el movimiento es vertical y que para  $\theta_s = 90^\circ$  el movimiento se reduce a cero.

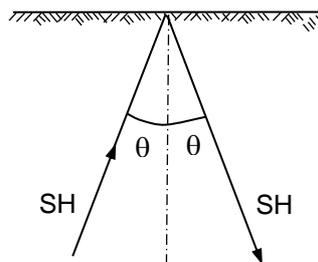


**Figura 4.12.** Ángulo de incidencia crítica para las ondas SV en función de la relación de Poisson  $\nu$



**Figura 4.13.** Desplazamientos (amplitud y dirección) de una partícula superficial producidos por una onda SV que tiene un ángulo de incidencia  $\theta$  (Ref. 2)

En el caso de una onda SH que llega a la superficie, toda la energía que se refleja se hace a través de otra onda SH, la cual tiene un ángulo de reflexión igual al de incidencia (Figura 4.14). Esta característica hace que existan procedimientos especiales por medio de los cuales se generen este tipo de ondas y se facilite la interpretación de los datos obtenidos mediante los métodos geosísmicos; el empleo de dichos métodos se explicará en capítulos posteriores.



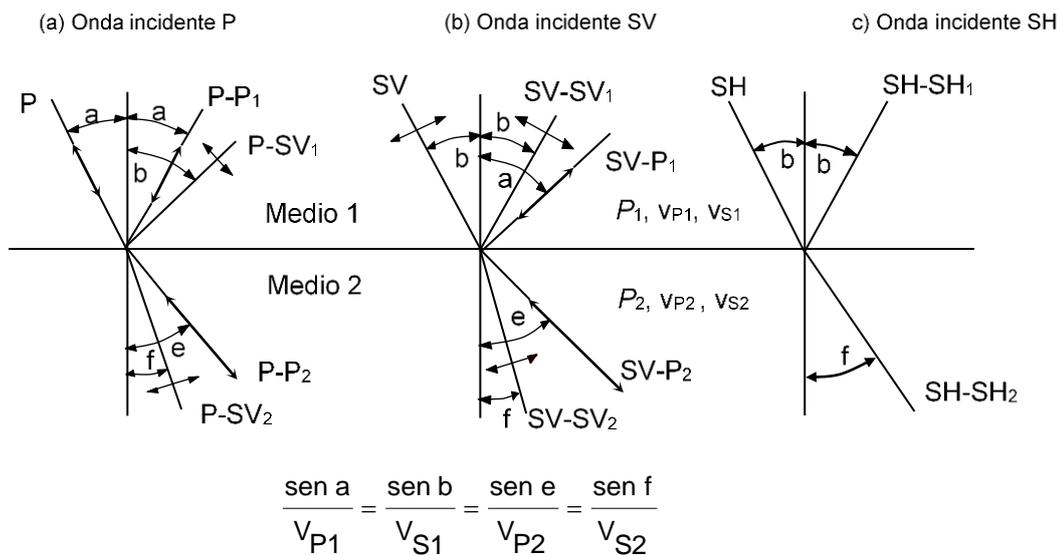
**Figura 4.14.** Incidencia y reflexión de una onda SH

Ahora bien, para el caso de llegar una onda a la superficie de contacto de dos estratos de características diferentes, se tendrá lo siguiente:

Al llegar una onda P sobre la superficie de contacto, se producen cuatro tipos de ondas según se ilustra en la Figura 4.15a; dos ondas SV (una reflejada [P-SV<sub>1</sub>] y otra refractada [P-SV<sub>2</sub>]) y dos ondas P (una reflejada [P-P<sub>1</sub>] y otra refractada [P-P<sub>2</sub>]).

Para una onda SV incidente habrá cuatro ondas resultantes:

- a) una onda SV reflejada (SV-SV<sub>1</sub>)
- b) otra onda SV refractada (SV-SV<sub>2</sub>)
- c) una onda P reflejada (SV-P<sub>1</sub>) y
- d) una onda P refractada (SV-P<sub>2</sub>)



**Figura 4.15.** Distribución de ondas elásticas en la interfase de dos medios elásticos

En cuanto a las ondas incidentes SH, parte de la energía es reflejada (ondas SH-SH<sub>1</sub>) y parte refractada (SH-SH<sub>2</sub>), pero nuevamente sólo a través de ondas SH; la razón de no producir ondas P se debe a que las ondas SH no tienen componente normal en el plano de contacto.

Los ángulos de reflexión y refracción pueden calcularse a partir de la ley de Snell, de la cual se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen } \theta}{V_{p1}} = \frac{\text{sen } \theta_1}{V_{s1}} = \frac{\text{sen } \theta_2}{V_{p2}} = \frac{\text{sen } \theta_3}{V_{s2}} \quad (4.20)$$

donde:

$V_{p1}$  y  $V_{p2}$  son respectivamente las velocidades de las ondas dilatantes en los medios superior e inferior, y análogamente.

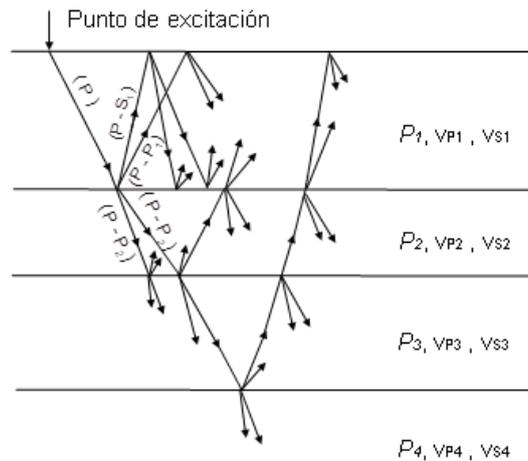
$V_{s1}$  y  $V_{s2}$  son las velocidades de las ondas cortantes de dichos medios.

Cuando la velocidad de una onda reflejada o refractada es mayor que la velocidad de la onda incidente, puede haber un ángulo de incidencia crítico para el cual la onda reflejada o refractada será horizontal; dicho ángulo se obtiene a partir de las expresiones 4.20. Por ejemplo, para una onda dilatante P incidente,

$$\theta_{cr} = \text{sen}^{-1} \frac{V_{p1}}{V_{p2}}$$

Existen en la literatura fórmulas y gráficos que proporcionan la cantidad de energía que se transmite a través de cada una de las ondas reflejadas o refractadas; véanse por ejemplo las Referencias 1 y 2.

Cuando existen varios estratos se tendrán múltiples refracciones y reflexiones, según puede observarse en la Figura 4.16, y el problema de propagación de ondas se vuelve más complejo. Cuando el estrato superior es menos rígido que el que lo subyace, se puede generar otro tipo de onda superficial conocida como onda Love; estas ondas son originadas por las reflexiones totales múltiples de la capa superior, y son ondas que se desplazan horizontalmente y producen movimientos transversales horizontales. Ewing (Ref. 3) define a esta clase de onda como "la onda cortante polarizada horizontalmente, atrapada en la capa superficial y originada por las reflexiones totales múltiples". Jones (Ref. 4) demuestra que para altas frecuencias de excitación, la velocidad de propagación de las ondas Love se aproxima asintóticamente a la velocidad de propagación de las ondas cortantes en el estrato superior, mientras que para bajas frecuencias dicha aproximación se refiere a la velocidad de las ondas cortantes en el estrato inferior.



**Figura 4.16.** Reflexión y refracción múltiple de ondas en un sistema estratificado (Ref. 1)

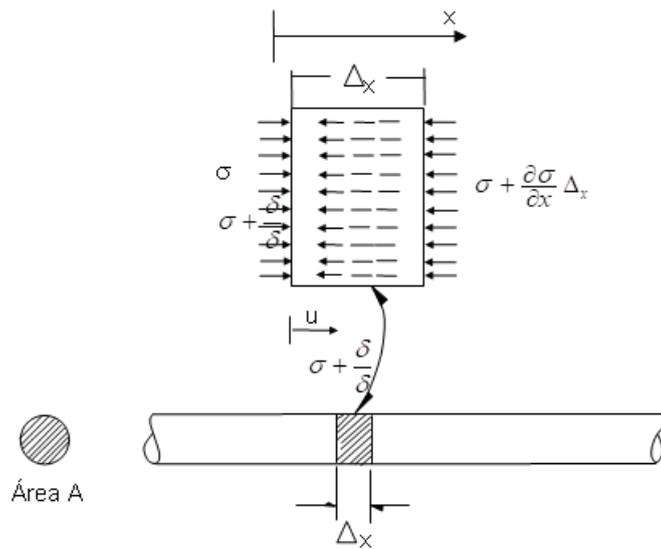
#### 4.5 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN BARRAS

Cuando las ondas dilatantes o compresionales se propagan en medios que no son infinitos, las condiciones de frontera modifican las ondas generadas haciendo que éstas sean un poco diferentes a las señaladas hasta ahora. Por ejemplo, las ondas compresionales que se propagan a través de una barra donde puede haber expansiones libres en el sentido transversal, tienen una velocidad de propagación que resulta, según se demuestra más adelante, aproximadamente igual a:

$$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.21)$$

Esta velocidad es menor que la velocidad  $v_c$  dada por la ecuación 4.5; la razón de ello es que en un medio infinito o semi-infinito no existen desplazamientos normales a la dirección en que se propagan estas ondas, mientras que en una barra dichos desplazamientos son factibles. A esta clase de ondas compresionales en barras se les conoce en la literatura con el nombre de ondas longitudinales.

La obtención de la ecuación 4.21 se puede hacer a partir del análisis de fuerzas actuando en un elemento de barra de longitud  $\Delta x$  (Figura 4.17), que tiene una sección transversal de área  $A$ .



**Figura 4.17.** Fuerzas actuando sobre un elemento de una barra continua

Del equilibrio de fuerzas indicadas en la Figura 4.17 se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x A = \rho \Delta x A \left( - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.22)$$

Esta misma ecuación se puede expresar en otros términos, de la siguiente manera. De la teoría de elasticidad se tiene:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.23)$$

donde:  $\varepsilon = - \frac{\partial u}{\partial x}$

Llevando 4.23 a 4.22, se obtiene

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

que es la llamada "ecuación de ondas en una dimensión". La solución a esta ecuación es del tipo

$$u = f \left( x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) \quad (4.25)$$

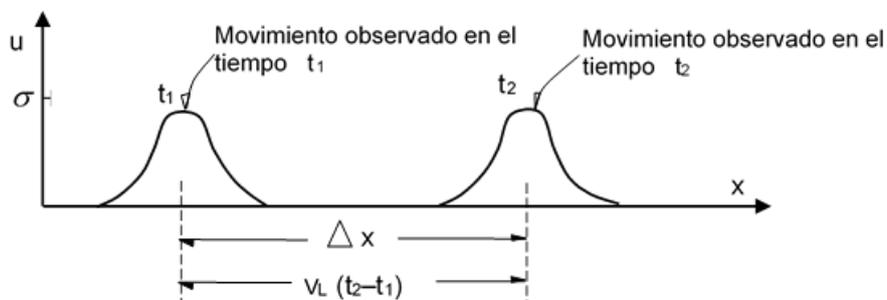
Ejemplo de funciones que satisfacen la condición anterior son las siguientes:

$$u = \text{sen} \left( x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right)$$

$$u = \text{cos} \left( x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right)$$

$$u = \left( x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right)$$

El significado físico de las implicancias de dicha solución se muestra en la Figura 4.18.



**Figura 4.18.** Desplazamientos observados en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , para una función del tipo señalado por la ecuación 4.5

Para un tiempo cualquiera  $t_1$  (que puede ser  $t_1=0$ ), se tiene un cierto tipo de desplazamiento caracterizado por una función que satisfaga la ecuación 4.25; posteriormente, en el tiempo  $t_2$ , se observará exactamente el mismo tipo de desplazamiento pero en un lugar diferente. Es decir, el tipo de movimiento que se observa es precisamente como el de una onda que se desplaza a una velocidad  $v_L = \sqrt{E / \rho}$ .

Analíticamente lo anterior se puede comprobar de la siguiente manera; supóngase el signo negativo de la ecuación 4.25, y que  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ; se tiene entonces:

$$u|_{t=t_1} = f(x - v_L t)$$

$$u|_{t_2=t_1+\Delta t} = f[(x + \Delta x) - v_L (t + \Delta t)]$$

$$u|_{t_2=t_1+\Delta t} = f[(x + v_L \Delta t - v_L t - v_L \Delta t)] = f(x - v_L t),$$

lo cual confirma lo antes señalado.

Es importante distinguir la diferencia que existe entre la velocidad de la onda y la velocidad de la partícula. Para el caso de una onda de compresión como la mostrada en la Figura 4.13, la velocidad de la partícula se obtiene a partir de la determinación del esfuerzo:

$$\sigma_x = E \frac{u}{\Delta x}$$

de donde se obtiene que

$$u = \frac{\sigma_x}{E} \Delta x = \frac{\sigma_x}{E} v_L \Delta t$$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula es :

$$\dot{u} = \frac{u}{\Delta t} = \frac{\sigma_x v_L}{E} \quad (4.26)$$

Obsérvese en esta última expresión que la velocidad de la partícula depende del valor del esfuerzo aplicado, mientras que la velocidad de propagación de ondas depende sólo de las propiedades del material.

Ahora bien, al analizar las ondas cortantes en barras, siguiendo un procedimiento similar al descrito para las ondas compresionales, se llega a que la ecuación de onda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.27)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de giro y

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.28)$$

es la velocidad con la que se propagan las ondas cortantes en barras.

Este valor, como puede notarse, resulta ser igual al obtenido en el análisis de propagación de ondas en un medio infinito o semi-infinito.

Obsérvese que conociendo las velocidades  $v_L$  o  $v_s$ , los módulos E y G se pueden obtener respectivamente mediante las ecuaciones 4.21 y 4.28.

En la práctica la determinación de  $C_L$  y  $C_s$  se puede efectuar en el laboratorio a través de probetas cilíndricas, las cuales constituyen barras de longitud finita. Si se consideran por ejemplo las ondas longitudinales a través de barras, la solución a la ecuación 4.24 en este caso se puede escribir en forma de series trigonométricas, de la siguiente manera:

$$u = U (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \text{sen } \omega_n t ) \quad (4.29)$$

donde:

U es la amplitud de los desplazamientos.

$A_1$  y  $A_2$  son constantes que dependen de las condiciones de frontera.

$\omega_n$  es la frecuencia circular natural de vibración del enésimo modo.

Al sustituir la ecuación 4.29 en la ecuación 4.24, se obtiene

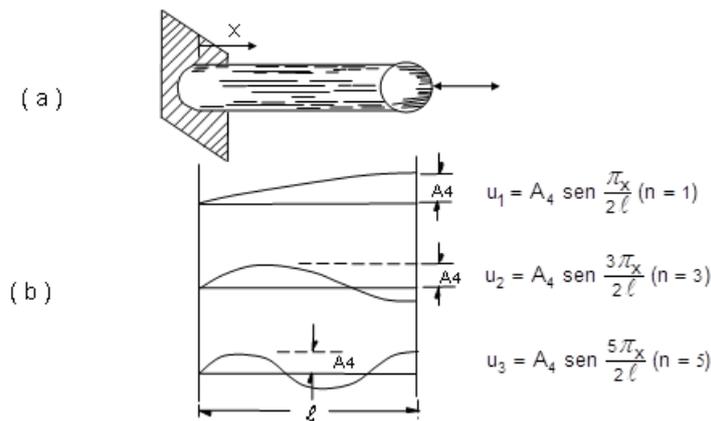
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\omega_n^2}{v_L^2} U = 0 \quad (4.30)$$

La solución a esta ecuación diferencial es del siguiente tipo:

$$U = A_3 \cos \frac{\omega_n X}{v_L} + A_4 \operatorname{sen} \frac{\omega_n X}{v_L}$$

donde  $A_3$  y  $A_4$  son también constantes dependientes de las condiciones de frontera. Por ejemplo, suponiendo un extremo fijo y el otro libre (Figura 4.19), dos condiciones son las siguientes:

- 1)  $U = 0|_{x=0}$  (significa que en el extremo fijo los desplazamientos son nulos)
- 2)  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0|_{x=l}$  (en el extremo libre las deformaciones valen cero)



**Figura 4.19.** Primeros tres modos naturales de vibración de una barra con un extremo fijo y el otro libre

Aplicando la primera condición se deduce que  $A_3 = 0$ , y de la segunda se obtiene que:

$$\cos \frac{\omega_n l}{v_L} = 0$$

de donde se deduce que

$$\omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{2l} v_L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

Lo anterior conduce a poder expresar la amplitud del desplazamiento de la siguiente manera:

$$U = A_4 \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \quad (4.32)$$

En la Figura 4.19 se muestran los tres primeros modos de vibración de una probeta circular y el significado físico de la constante  $A_4$ . Al sustituir la ecuación 4.32 en 4.29, se obtiene la forma general de los desplazamientos:

$$u = \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \left[ (A_1)_n \cos \frac{(2n-1)\pi v_L t}{2l} + (A_2)_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi v_L t}{2l} \right] \quad (4.33)$$

Para otras condiciones de frontera o para el caso de vibraciones torsionales se podrá seguir el procedimiento descrito y obtener expresiones análogas a la ecuación 4.33. La expresión correspondiente a la frecuencia circular natural bajo excitaciones torsionales, considerando las mismas condiciones de frontera (un extremo fijo y el otro libre), resulta exactamente la misma que la dada por la ecuación 4.31, sólo que en vez de  $v_L$  interviene  $v_s$ .

## REFERENCIAS

Richart, F.E., Hall, J.R., y Woods, R.D. (1970), "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice-Hall. (1)

Mooney, H.M. (1973), "Handbook of Engineering Geophysics", Bison Instruments, Inc. (2)

Ewing, W.M., Jardetsky, W.S., y Press, F. (1975), "Elastic Waves in Layered Media", McGraw-Hill Book Co, New York. (3)

Jones, R. (1958), "In-Situ Measurements of the Dynamic Properties of Soil by Vibration Methods", Géotechnique, Vol 8, No. 1, Marzo, pp 1-21. (4)

# **CAPÍTULO V: Propiedades dinámicas de los suelos**



## CAPÍTULO V

### PROPIEDADES DINÁMICAS DE LOS SUELOS

#### 5.1 INTRODUCCIÓN

Los suelos que están sujetos a cargas dinámicas sufren modificaciones de sus propiedades de resistencia. Por tanto, se deben considerar las propiedades dinámicas de los suelos para resolver los problemas de ingeniería relacionados a la capacidad de carga dinámica, respuesta de la cimentación de maquinarias sujetas a cargas cíclicas, análisis de respuesta de sitio, interacción suelo-estructura durante la propagación de las ondas sísmicas, estabilidad física de presas y taludes ante sismos, entre otros.

Las cargas estáticas permanecen invariables en el espacio y en el tiempo, mientras que las cargas dinámicas representan condiciones de carga que varían tanto en su dirección como en magnitud. Diversos investigadores realizaron estudios en la exploración del comportamiento complejo de los suelos bajo diferentes tipos de condiciones de carga.

Los daños ocasionados por cargas dinámicas están influenciados por la respuesta de los depósitos del suelo, el cual se rige por las propiedades dinámicas del suelo. Comprender las propiedades dinámicas de los suelos ayuda a estimar y analizar el comportamiento dinámico.

Las propiedades dinámicas del suelo más usadas son la velocidad de la onda de corte ( $V_s$ ), la variación de la rigidez o la reducción del módulo ( $G$ ) y el amortiguamiento ( $\xi$ ) del material que varían con los niveles de deformación ( $\gamma$ ), los mismos que constituyen los parámetros de entrada principales para varios estudios e investigaciones dinámicas.

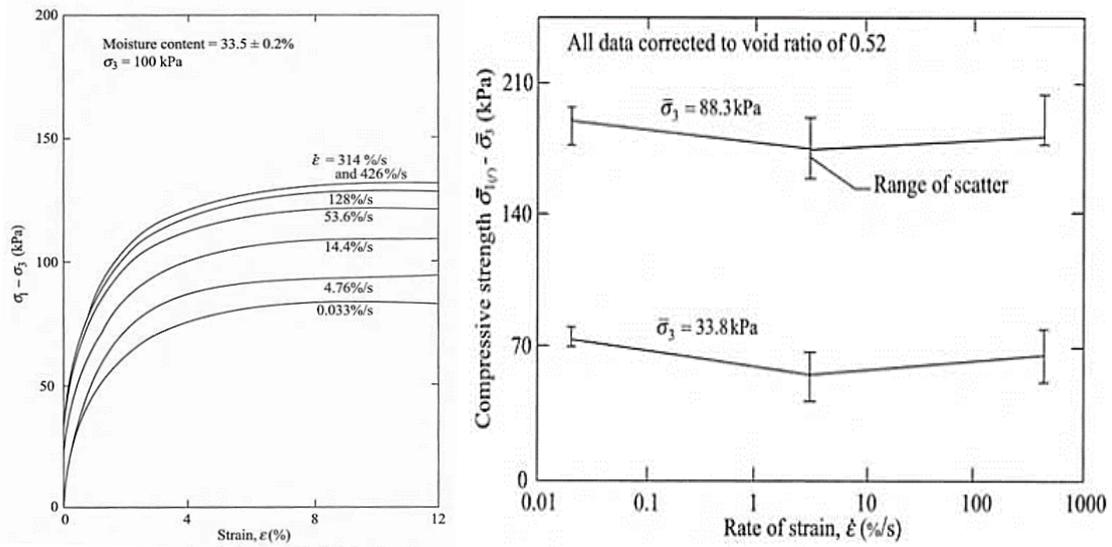
El comportamiento del suelo frente a cargas dinámicas está influenciado por las propiedades dinámicas del suelo. El comportamiento del suelo es diferente ante deformaciones pequeñas y grandes, además, se pueden medir directamente con trabajos de campo y laboratorio (Kramer, 1996). Por tanto, los cambios del comportamiento del suelo dependen de los cambios de la deformación cortante (Ishihara, 1996). En la Tabla 1 se indica la variación de las propiedades dinámicas en función de la deformación.

**Tabla 1.** Propiedades dinámicas según la deformación (Ishihara, 1996)

Magnitud de la Deformación Cortante		10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup>
Fenómenos		Propagación de ondas, Vibración		Fisuramiento, Asentamiento Diferencial		Deslizamiento, Licuación	
Características Mecánicas		Elástico		Elásto - Plástico		Falla	
Efecto de Repetición de Carga				←————→		←————→	
Efecto de Velocidad de Carga				←————→		←————→	
Constantes		Módulo cortante, relación de Poisson, amortiguamiento				Angulo de fricción interna, Cohesión	
Medición In-situ	Métodos Sísmicos	←————→					
	Ensayo de vibración In-situ			←————→			
	Ensayo de carga repetida			←————→		←————→	
Medición en el Laboratorio	Propagación de ondas	←————→					
	Columna resonante			←————→			
	Ensayo de carga repetida			←————→		←————→	

## 5.2 INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD DE LA CARGA EN LA RESISTENCIA DE LOS SUELOS

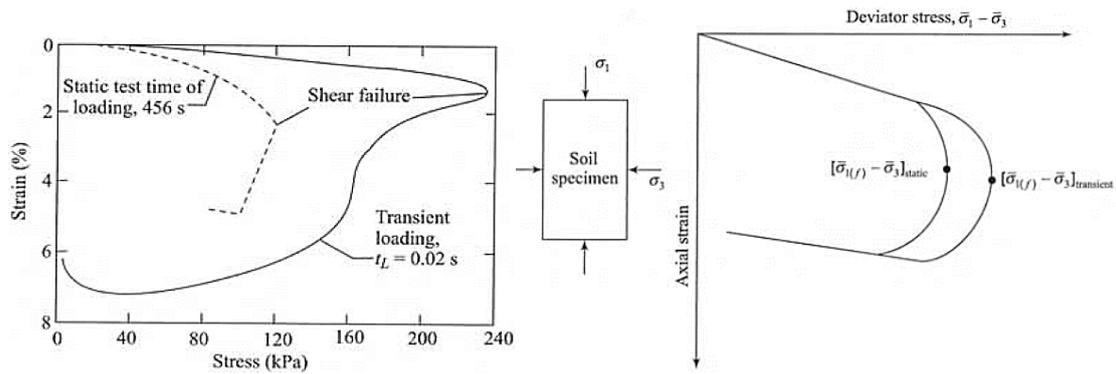
Uno de los principales problemas que se tiene en la medición de las propiedades dinámicas de los suelos está relacionado con la determinación de la velocidad con la que se aplica la carga a los suelos. Das y Luo (2016) hicieron una recopilación de los parámetros de resistencia (cohesión y fricción) frente a una carga monotónica aplicada de manera rápida a los suelos arcillosos y arenosos, mostrando que en un ensayo de compresión no confinada (aplicado a unos escasos segundos) para las arcillas, se obtuvo como resultado que la resistencia no drenada dinámica alcanza valores de 1.5 veces la resistencia estática a carga lenta; mientras que en un ensayo triaxial no confinado para las arenas secas la resistencia efectiva (ángulo de fricción) dinámica, se obtuvo como resultado un valor ligeramente menor (inferior a 2°) a la resistencia efectiva estática. En la Figura 5.1 se muestra la influencia de la resistencia con la velocidad de deformación del ensayo.



**Figura 5.1.** Resistencia no drenada (izquierda) y resistencia efectiva (derecha) para diferentes velocidades de deformación. (Das y Luo, 2016)

Por otra parte, los mismos autores recopilaron información respecto al comportamiento de la rigidez y la deformación de los suelos bajo cargas transitorias de muy corta duración (menor a 1 s de aplicación). Para ello, la información recopilada corresponde a las arenas de Manchester y las arcillas de Cambridge. Luego de aplicarle la carga transitoria para los **suelos arcillosos**, observaron que la resistencia no drenada dinámica alcanza valores de 1.5 a 2.0 veces la resistencia estática; la deformación dinámica fue menor a la deformación estática y el módulo de Young (E) dinámico resultó dos veces el Módulo de Young (E) estático. Mientras que, para **las arenas** el valor de “E” dinámico es aproximadamente similar al “E” estático; en cuanto a la deformación dinámica fue menor que la deformación estática similar al comportamiento de las arcillas. En la Figura 5.2 se muestra la variación de los esfuerzos con la carga aplicada, así como la deformación.

Por lo que siempre fue motivo de interés para los investigadores en el pasado, conocer las propiedades de resistencia y deformación a diferentes valores de las cargas dinámicas.



**Figura 5.2.** Resistencia no confinada para arcillas (izquierda), resistencia confinada para arenas (derecha). (Das y Luo, 2016)

### 5.3 COMPORTAMIENTO ESFUERZO-DEFORMACION DE LOS SUELOS FRENTE A CARGAS CICLICAS

#### a. Ensayos en campo

Las mediciones de las propiedades dinámicas de los suelos mediante ensayos de campo presentan algunas ventajas importantes en comparación con las mediciones realizadas en laboratorio. Una de esas mediciones hace referencia a que no se requiere de una muestra (que experimenta un cambio de esfuerzos, condiciones de la propia estructura, temperatura); la medición de las propiedades del suelo es de manera directa en el terreno a bajos niveles de deformación.

Algunos ensayos de campo son realizados desde la superficie del terreno, mientras que otros ensayos requieren profundizar el nivel de exploración, tal como el que se encuentra en las perforaciones. Los ensayos medidos a nivel de superficie son métodos más económicos, sin embargo, su interpretación del terreno está basada en la interpretación de modelos matemáticos que representan la respuesta, mientras que los medidos de las perforaciones proporcionan las características del suelo, la medición directa de las propiedades, la ubicación del nivel freático, entre otros.

#### Refracción Sísmica

Este método consiste en la medición de los tiempos de llegada de las ondas compresionales (ondas P), y en ciertas ocasiones de las ondas de corte (ondas S), generadas por una fuente de energía impulsiva; estas ondas son captadas por un grupo de sensores llamados geófonos equidistantes, los cuales son ubicados en forma de un arreglo lineal sobre la superficie del terreno. La fuente de energía es generalmente una

carga pequeña de explosivo o un golpe de martillo de 20 libras. La energía es detectada, amplificada y registrada de tal manera que puede determinarse su tiempo de arribo en cada punto. El instante del impacto o explosión, denominado "tiempo cero", también es registrado conjuntamente con las vibraciones del suelo que arriban a los geófonos. Para mayor detalle del ensayo se recomienda leer el libro de Redpath (1973).

Por lo general, los datos registrados consisten en tiempos de viaje y distancias, siendo el tiempo de viaje el intervalo entre el "tiempo cero" y el instante en que el geófono empieza a responder a la perturbación. Luego, mediante un proceso de inversión, se estima el perfil del terreno en términos de velocidad de onda P, el cual es denominado perfil sísmico de velocidad de ondas P. En la Figura 5.3 se muestra el método de refracción sísmica.

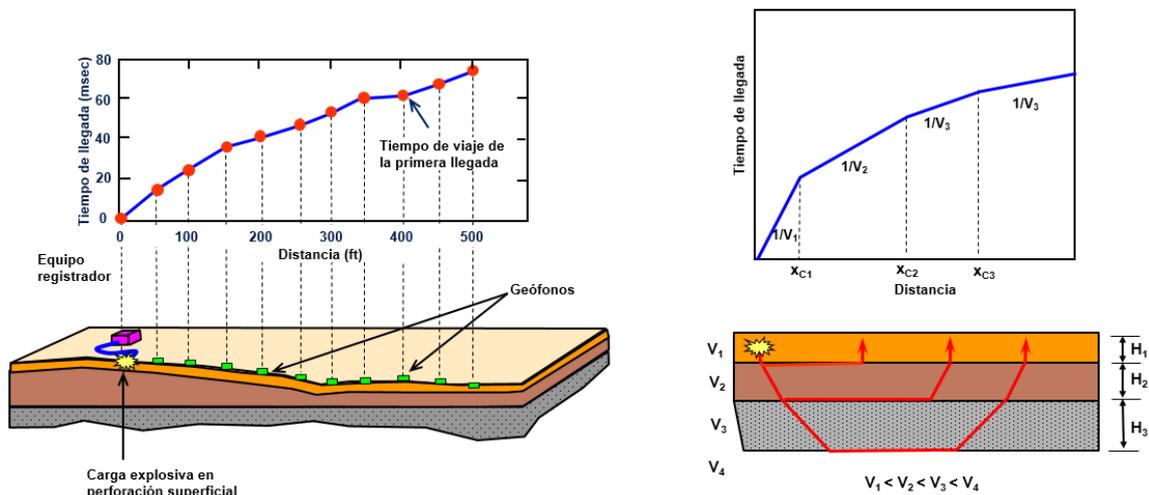
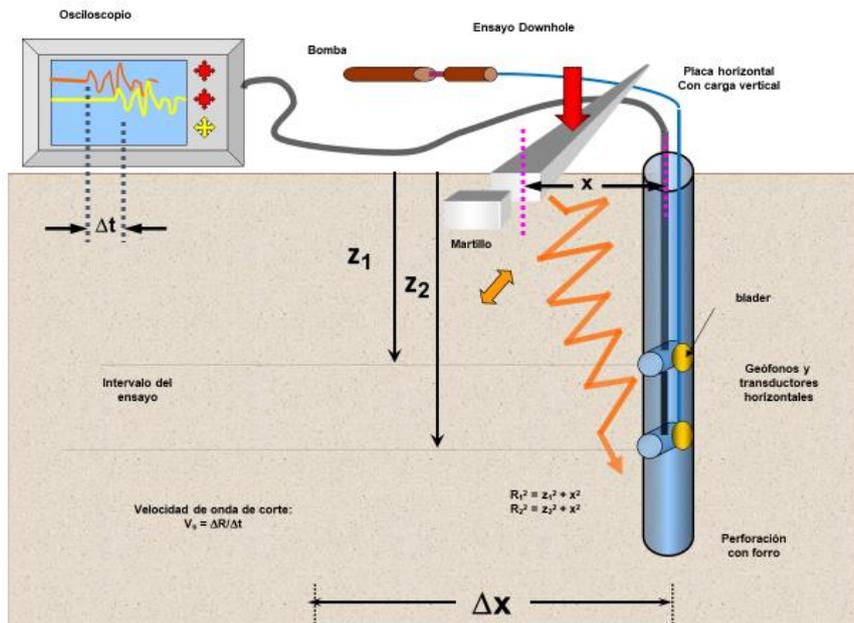


Figura 5.3. Ensayo de Refracción Sísmica

### Downhole

Este ensayo consiste en la medición del tiempo de viaje de las ondas de compresión y ondas de corte que se genera en la superficie del terreno y es registrado por dos receptores en un pozo perforado. La ventaja de este ensayo es que se requiere de un solo pozo. Desde la superficie del terreno se genera un impacto horizontal y el tiempo de viaje ( $\Delta t$ ) de la onda cortante entre los receptores (espaciado,  $\Delta z$ ) permite determinar la velocidad de onda S ( $V_s = \Delta z / \Delta t$ ). El esquema del ensayo Downhole se muestra en la Figura 5.4. El valor de la rigidez  $G$  se calcula como  $G = \rho V_s^2$ . Por otra parte, es importante indicar que la energía del impacto debe ocasionar una deformación muy pequeña (del orden de  $10^{-4}$  %). El procedimiento de obtener la velocidad  $V_s$  se realiza

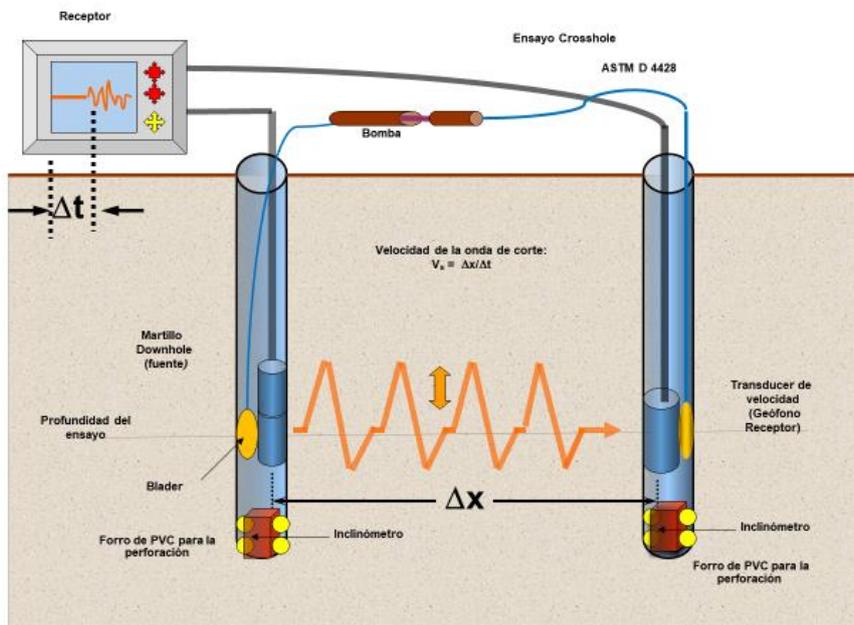
a diferentes profundidades. Una desventaja de este método es que mientras más profundos se ubican los receptores, se tiene dificultad para identificar la llegada de las ondas generadas.



**Figura 5.4.** Esquema del Ensayo Downhole

### Crosshole

Este ensayo consiste en la medición del tiempo de viaje de las ondas que se propagan entre dos pozos, tal como se muestra en la Figura 5.5. La fuente y el receptor se ubican a la misma profundidad y son asegurados en las paredes de los pozos. La fuente normalmente es un martillo que se desliza e impacta contra la pared, el impacto produce una onda de corte que viaja a través del suelo. La velocidad de onda de corte ( $V_s$ ) se obtiene del cociente entre la distancia de los pozos ( $\Delta x$ ) y el tiempo de viaje de la onda ( $\Delta t$ ), similar al método anterior ( $V_s = \Delta x / \Delta t$ ). Esta medición se repite a diferentes profundidades para obtener el perfil de velocidad del suelo.



**Figura 5.5.** Esquema del Ensayo Crosshole

### Sonda Suspendeda

El equipo de sonda suspendida está conformado por una fuente y dos receptores. En un pozo de perforación lleno de agua, se tiene el equipo suspendido mediante un cable y no requiere el contacto con las paredes del pozo. La energía generada por la fuente se transmite a través de las paredes del suelo, de tal manera que las ondas (P y S) viajan por el suelo y los receptores distanciados (a cada metro) se encargan de registrar el tiempo de viaje de la onda. El procedimiento de obtener la velocidad es similar a los métodos anteriormente mencionados. Este método es usado para mayores profundidades, por lo general mayores a 30 m. Una de las limitaciones de este método es que el pozo debe estar lleno de agua u otro fluido que permita la suspensión del equipo y la dificultad de la medición en suelos blandos que están revestidos por tuberías rígidas. La Figura 5.6 ilustra el equipo.

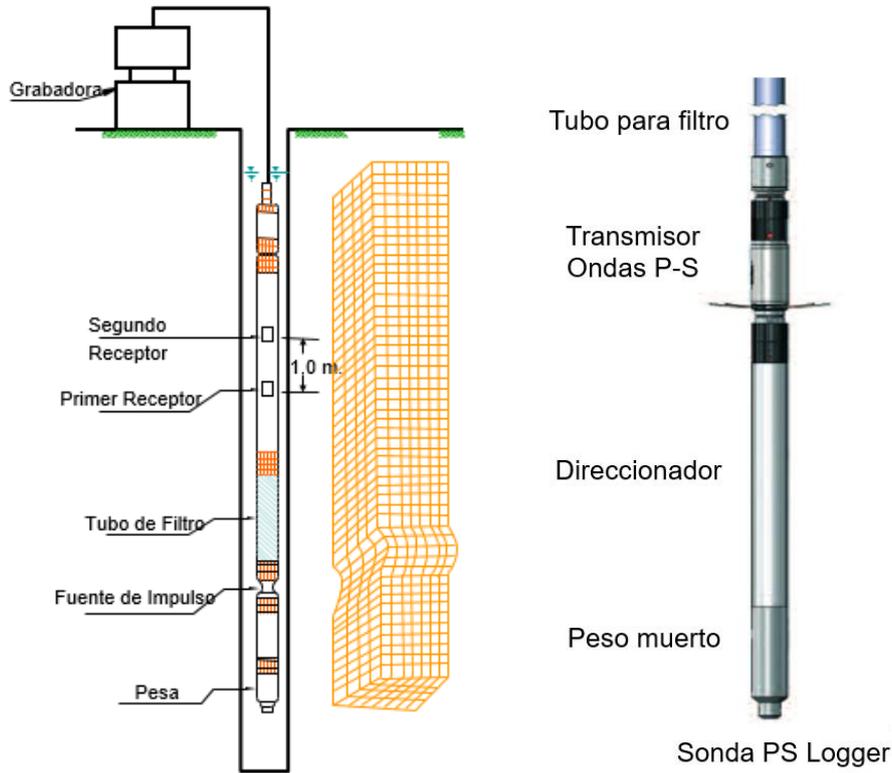


Figura 5.6. Esquema del Ensayo de Sonda Suspendida

### Medición con el Cono Sísmico

La medición del cono sísmico es una prueba similar al ensayo downhole. Este método utiliza el equipo de cono holandés (CPT) que tiene adaptado o adherido dos sensores de velocidad. Este ensayo no requiere de un pozo perforado. El procedimiento de obtener la velocidad de onda S es similar a los métodos anteriores. Este esquema se muestra en la Figura 5.7.

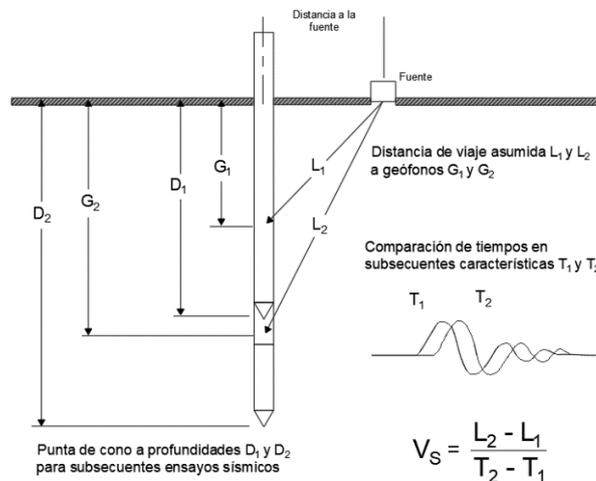


Figura 5.7. Ensayo del Cono Sísmico (ConeTec)

## Mediciones de Ondas Superficiales

Los ensayos de ondas superficiales han evolucionado con el paso del tiempo, esto con la finalidad de cubrir una deficiencia con respecto a sus ensayos predecesores. En esta sección se muestran los métodos activos y métodos pasivos.

### Medición Multicanal de Ondas Superficiales (MASW)

El método MASW es una versión mejorada del método SASW (Spectral Analysis of Surface Waves), el cual permite distinguir el modo fundamental de la onda Rayleigh de los modos altos que corresponden a las ondas de cuerpo (onda P), además el método MASW permite suavizar la variación espacial (debido al espaciamiento), el cual era un problema en el método SASW (Park et al., 1997). El método MASW es un método simple y rápido, tiene un registro multicanal que elimina mediciones repetidas por el cambio de configuración en el campo; este método registra la vibración del terreno comprendido entre 3 Hz a 30 Hz (Park et al., 1997). Este ensayo consiste en un arreglo lineal de sensores verticales sobre el terreno, equidistantes, que registran las ondas P, S y superficiales generadas por una fuente impulsiva de corta duración (1 a 2 segundos), para luego determinar la dispersión de las ondas Rayleigh en función de la frecuencia de vibración (o longitud de onda), finalmente mediante un proceso de inversión se obtiene el perfil de velocidad de onda S en profundidad. En la Figura 5.8 se muestra el principio de interpretación del ensayo MASW.

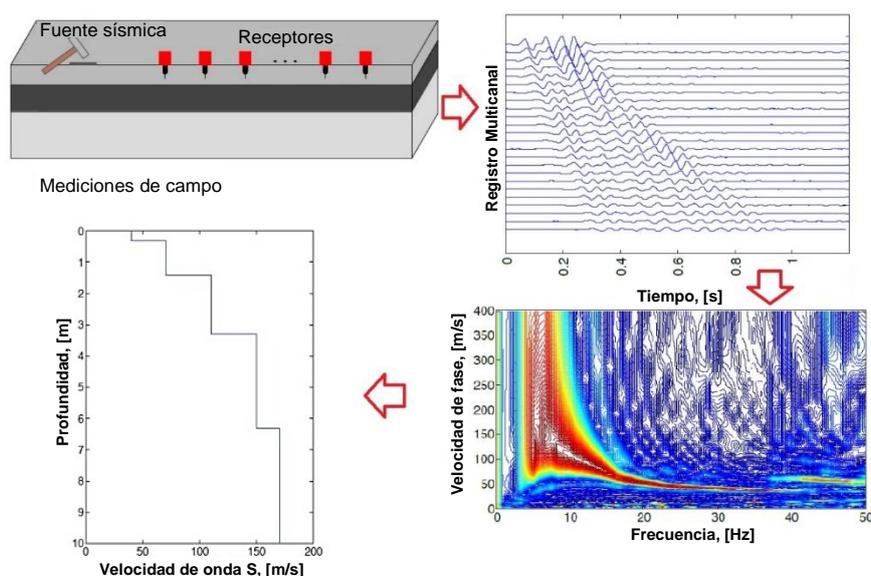


Figura 5.8. Principio del Método MASW

## Arreglo de Microtremores (MAM)

El método MAM (medición de arreglo de microtremores) consiste en un arreglo bidimensional (en forma de L, triangular o circular) de los sensores, que registran las vibraciones ambientales o microtremor (sin necesidad de una fuente impulsiva) de larga duración (intervalos de 20.48 s, 40.96 s, o mayor), estos registros son almacenados en una cantidad suficientemente grande, se analiza luego la velocidad de fase de las ondas Rayleigh y finalmente mediante un proceso de inversión se obtiene el perfil de velocidad de onda S. En la Figura 5.9 se muestra la forma de los arreglos multicanales.

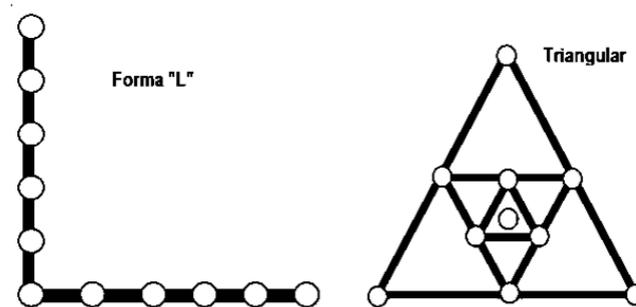


Figura 5.9. Forma de arreglos del MAM (Hayashi, 2008)

El método MAM analiza la velocidad de fase del microtremor mediante un análisis estadístico, denominado correlación autoespacial (SPAC, Spatial Auto Correlation). Aki (1957) propuso el método SPAC en el cual la data del microtremor es analizada estadísticamente para calcular la velocidad de fase de las ondas superficiales. El método del análisis de los microtremores (Hayashi, 2008) se describe como sigue: Sean las dos señales  $f(t)$  y  $g(t)$  obtenidas de dos receptores (o sensores) con una separación " $\Delta x$ ". Las dos trazas son transformadas en el dominio de las frecuencias por la transformada de Fourier, siendo escritas como  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ . La correlación de dos señales  $CC_{fg}(\omega)$  se define como:

$$CC_{fg}(\omega) = F(\omega)\overline{G(\omega)} = A_f(\omega)A_g(\omega) \exp [i\Delta\phi(\omega)] \quad (5.1)$$

Donde,  $A_f(\omega)$  y  $A_g(\omega)$  son amplitudes de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  respectivamente.  $CC_{fg}(\omega)$  es la diferencia de fase de dos trazas. De lo anterior, la coherencia compleja de dos trazas  $COH_{fg}(\omega)$  es definida como:

$$COH_{fg}(\omega) = \frac{CC_{fg}(\omega)}{A_f(\omega)A_g(\omega)} \quad (5.2)$$

Por otra lado, la velocidad de fase  $c(\omega)$  puede calcularse a partir de la diferencia de fase como:

$$c(\omega) = \frac{\omega \Delta x}{\Delta \phi(\omega)} \quad (5.3)$$

Donde  $\Delta x$  es la separación entre los receptores. Reordenando la ecuación 5.3 se tiene la diferencia de fase ( $\Delta \phi$ ) es:

$$\Delta \phi(\omega) = \frac{\omega \Delta x}{c(\omega)} \quad (5.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.1 y 5.4 en 5.2, se obtiene:

$$COH_{fg}(\omega) = \frac{CC_{fg}(\omega)}{A_f(\omega)A_g(\omega)} = \exp\left(i \frac{\omega \Delta x}{c(\omega)}\right) \quad (5.5)$$

La ecuación 5.5 tiene dos componentes una parte real y una parte imaginaria, por lo que la parte real de la coherencia es:

$$Re(COH_{fg}(\omega)) = \cos\left(\frac{\omega \Delta x}{c(\omega)}\right)$$

Esto significa que la parte real de la coherencia compleja para dos trazas será una función coseno. La correlación autoespacial (SPAC) para un arreglo bidimensional es definida como el promedio direccional de la coherencia compleja, la cual se expresa como:

$$SPAC(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} COH_{fg}(r, \varphi, \omega) d\varphi$$

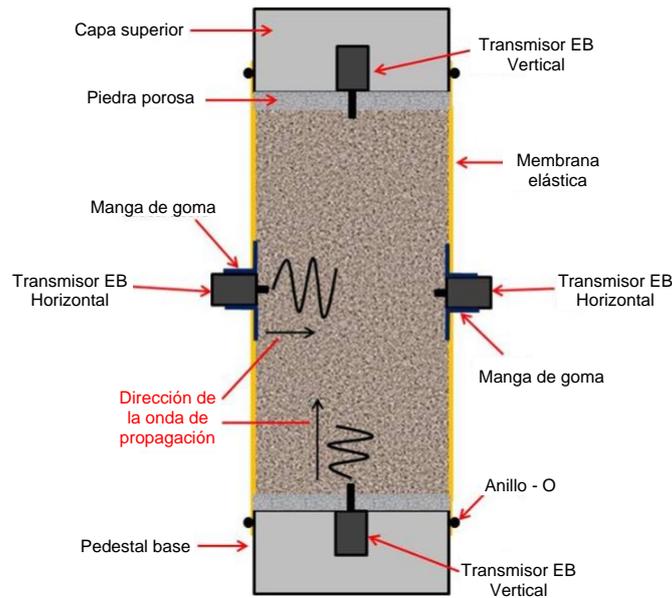
## b. Ensayos de laboratorio

En esta sección describiremos de manera general los ensayos dinámicos que existen en los laboratorios especializados de mecánica de suelos, en donde mencionaremos cuál es la función de cada ensayo y que parámetros del suelo se determinan.

### Ensayo con Elementos Bender

Consiste en dos transductores que emiten y reciben una señal de onda a través del espécimen de suelo (Figura 5.10). Estos transductores se pueden implementar a los ensayos de compresión no confinada, triaxiales, corte directo, entre otros. Con este

ensayo se determina el tiempo de viaje de la onda (transversal-S o longitudinal-P al espécimen) a través del espécimen. Una vez conocido el tiempo de viaje ( $t$ ), la dimensión ( $L$ ) del espécimen y la densidad ( $\rho$ ), se puede determinar la velocidad de propagación de la onda ( $V_S$  o  $V_P$ ) y se determina el módulo de corte ( $G$ ) o de Young ( $E$ ) a pequeñas deformaciones.



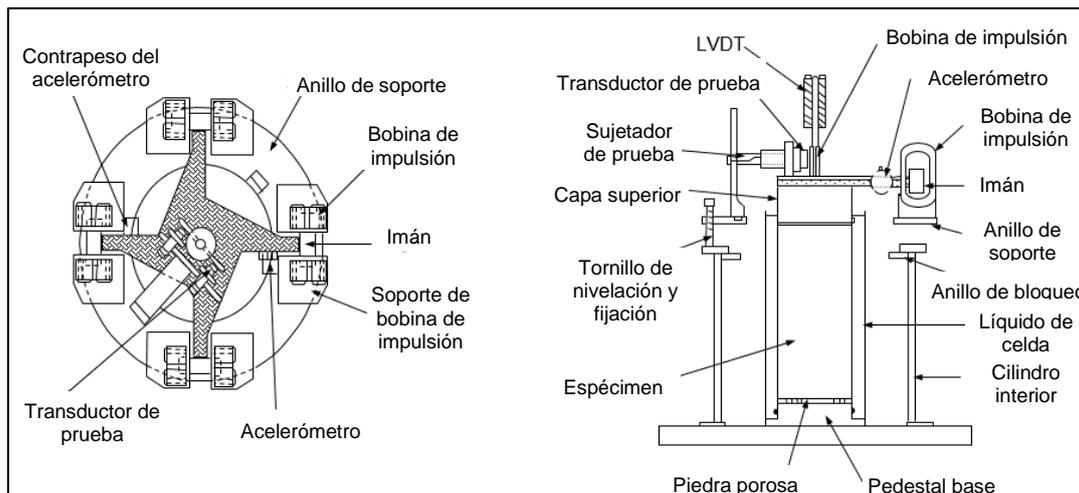
**Figura 5.10.** Elementos Bender en una muestra triaxial (esquema referencial)

### Ensayo de Columna Resonante

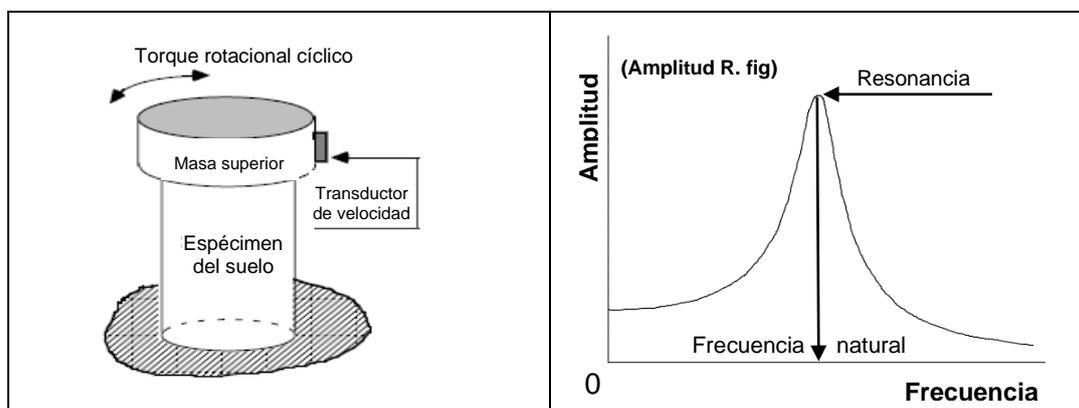
Existen dos variantes del ensayo de columna resonante, la primera de extremos libres que genera vibraciones longitudinales, y la segunda donde un extremo es fijo y el otro extremo es libre que genera vibraciones torsionales. En la Figura 5.11 se muestra un esquema referencial del equipo de columna resonante torsional.

El ensayo consiste en que al espécimen de suelo se les somete a vibraciones longitudinales (onda P) o torsionales (onda S), estas vibraciones se realizan en un amplio espectro de frecuencias del movimiento, de manera que uno de sus modos de vibración es la resonancia del espécimen. En la Figura 5.12 se muestra un esquema referencial de la vibración torsional (Towhata, 2008).

Una vez conocida la frecuencia de resonancia ( $f$ ) se puede conocer la velocidad de propagación de la onda (P o S) a través del espécimen. Para luego obtener el módulo de Young ( $E$ ) o de Corte ( $G$ ) mediante la ecuación de la velocidad de la propagación de la onda S o P,  $V_S = (G/\rho)^{0.5}$  o  $V_P = (E/\rho)^{0.5}$ , respectivamente.



**Figura 5.11.** Esquema del equipo de columna resonante

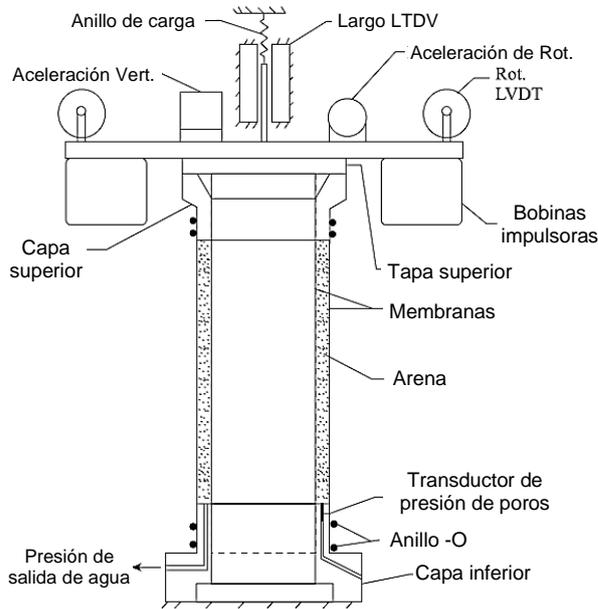


**Figura 5.12.** Espécimen cilíndrico sometido al ensayo de columna resonante.

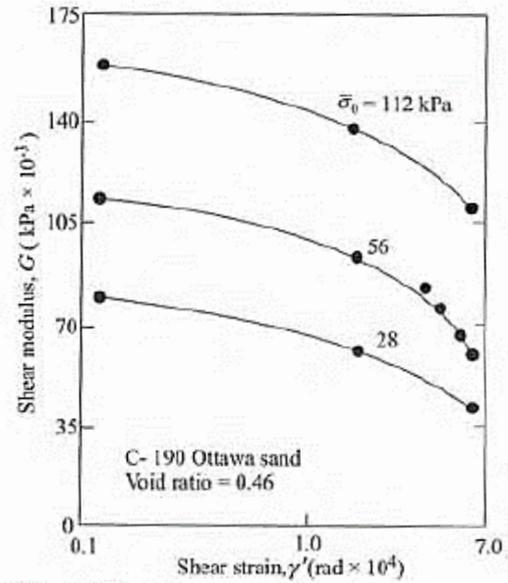
Otra variante de este ensayo de columna resonante es debido a que la deformación cortante en el espécimen cilíndrico se genera desde el centro hasta el borde, por lo que es difícil saber con precisión cuál es el valor de la deformación cortante, por lo que Drnevich, Hardin y Richart (1966) propusieron el equipo de columna resonante hueco para alcanzar mayores deformaciones cortantes, tal como se muestra en la Figura 5.13; una de sus aplicaciones fue para la arena Ottawa densa, cuyo resultado fue que el módulo de cortante se reduce cuando la deformación cortante se incrementa, como se muestra en la Figura 5.14. De manera complementaria, el amortiguamiento interno del suelo fue determinado a partir del concepto de decremento logarítmico.

De esta manera, a medida que la deformación se incrementa, el módulo de corte (o módulo secante) se reduce y el amortiguamiento se incrementa, por lo que la forma de identificar esta reducción de la rigidez del suelo se visualiza en la curva reducción de

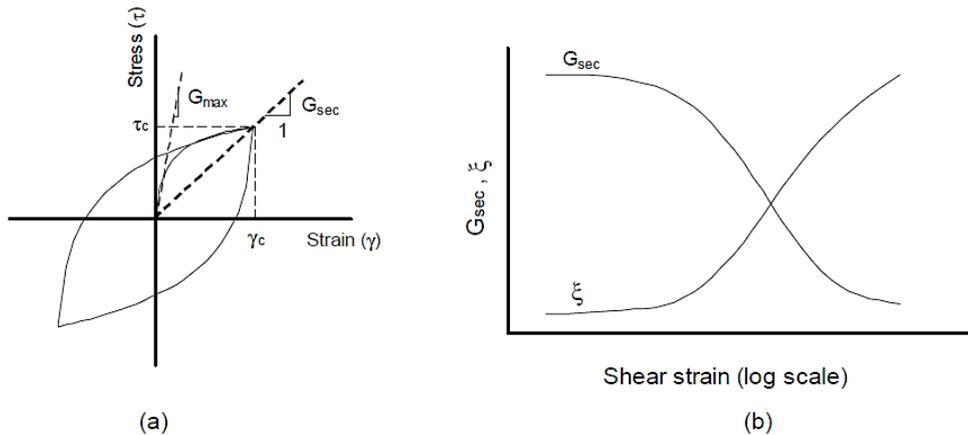
módulo normalizado ( $G/G_{max}$ ) y de la misma manera para el amortiguamiento ( $\xi$ ), tal como se muestra en la Figura 5.15.



**Figura 5.13.** Equipo de columna resonante hueco



**Figura 5.14.** Reducción del módulo G con la deformación



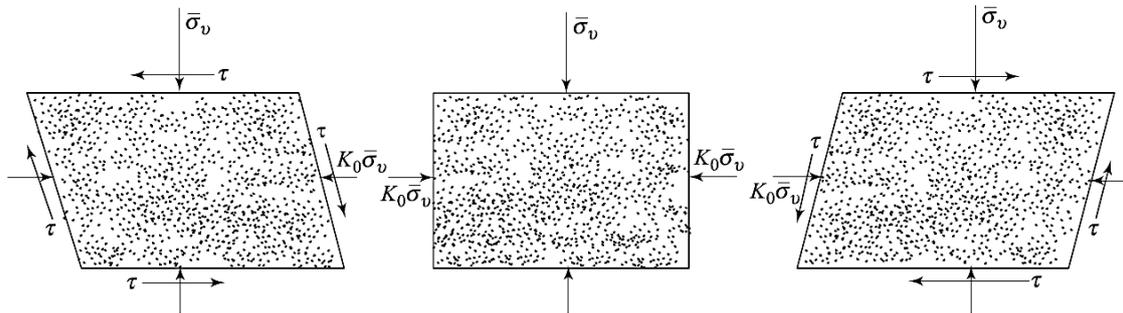
**Figura 5.15.** a) Módulo de corte o módulo secante, G; b) Curva de reducción de módulo y amortiguamiento con la deformación

### Ensayo de Corte Simple Cíclico

Este ensayo es ideal para determinar el módulo de corte ( $G$ ) y el amortiguamiento ( $\xi$ ) de los suelos. Este ensayo ha sido usado durante mucho tiempo para evaluar los parámetros de licuación de suelos granulares saturados. Este ensayo consiste en aplicar un esfuerzo vertical efectivo ( $\sigma'_v$ ) y un esfuerzo cortante cíclico ( $\tau$ ) (Figura 5.16). El esquema del equipo de corte directo cíclico se muestra en la Figura 5.17. El módulo

de corte o rigidez ( $G$ ) se obtiene del cociente entre el esfuerzo cortante aplicado y el nivel de deformación obtenido como  $G=\tau/\gamma$ . El amortiguamiento ( $\xi$ ), a un nivel de deformación, es obtenido de la curva esfuerzo-deformación mediante el cociente entre el área del lazo histerético (área del loop) dividido por  $2\pi$  veces la energía de deformación. De manera similar al ensayo anterior se puede obtener el módulo secante o módulo de corte reducido ( $G$ ) y el amortiguamiento para diferentes niveles de deformación, tal como se muestra en la Figura 5.15.

Este ensayo tiene la ventaja de ser más representativo en las condiciones de campo, ya que los especímenes son consolidados a un estado de reposo (es decir a  $K_0$ ). Los especímenes de suelos ensayados en columna resonante proporcionan buenos resultados solo hasta deformaciones cortantes de  $10^{-3}\%$ , mientras que las columnas resonantes huecas proporcionan resultados en rango de deformaciones de  $10^{-3}\%$  hasta  $1\%$ . Por lo que, para deformaciones de hasta  $5\%$ , se puede emplear el ensayo de corte directo cíclico. Otra de las ventajas de este equipo es su capacidad de medir el incremento de la presión de poros, mientras que los ensayos de columna resonante no pueden medir la presión de poros.



**Figura 5.16.** Esquema del ensayo de corte simple cíclico

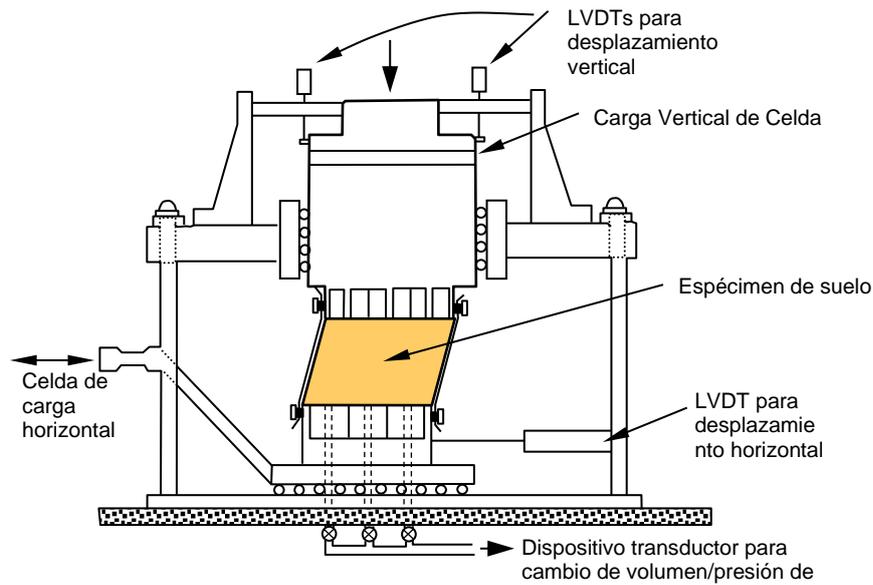
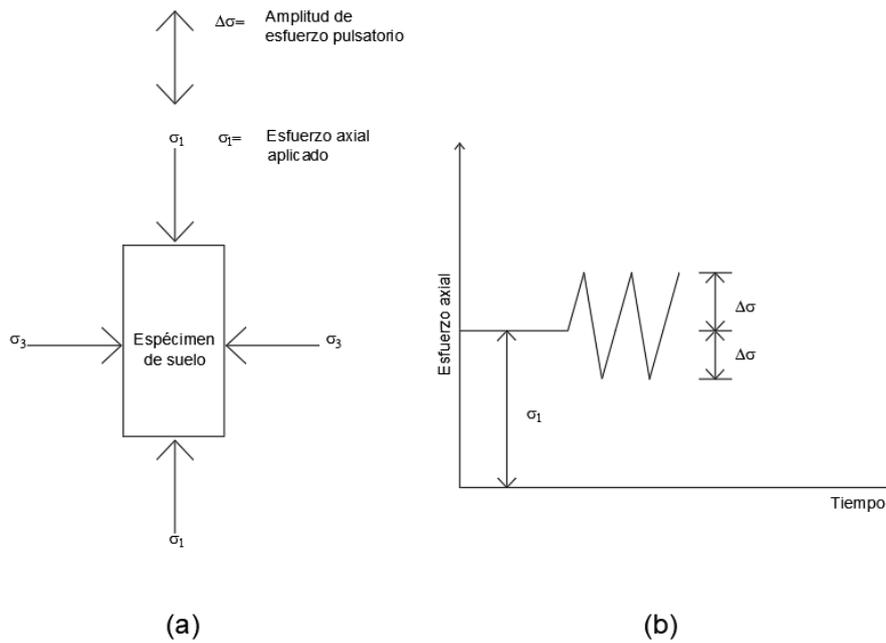


Figura 5.17. Equipo de corte simple cíclico

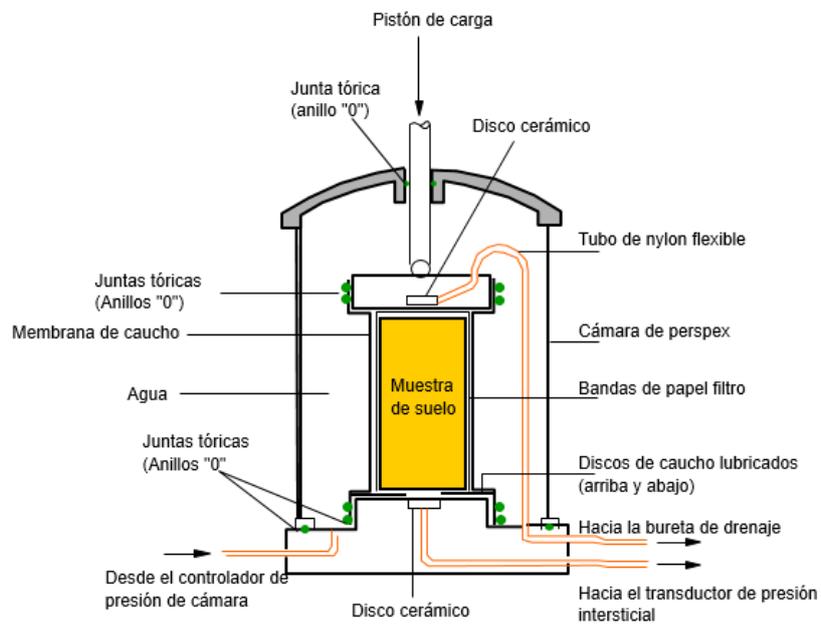
### Ensayo Triaxial Cíclico

Este ensayo está diseñado para calcular el módulo de elasticidad ( $E$ ) y el amortiguamiento ( $\xi$ ) de los suelos. En este ensayo el espécimen de suelo está sujeto a un esfuerzo de confinamiento ( $\sigma_3$ ) y se le aplica una carga axial cíclica de compresión y tracción ( $\sigma_3 \pm \Delta\sigma$ ), tal como se muestra en la Figura 5.18. Además, un esquema del ensayo triaxial cíclico se muestra en la Figura 5.19. Una diferencia clave que se debe tener en cuenta es el tipo de ensayo a realizar, es decir, cuando se realiza el ensayo a **deformaciones controladas**, se evalúan los parámetros de módulo de Young ( $E$ ) y amortiguamiento ( $\xi$ ), mientras que, si se realiza el ensayo a **esfuerzos controlados**, estos son usados por lo general para estudios de licuación de suelos granulares saturados.

El módulo de Young ( $E$ ) se obtiene del cociente entre el esfuerzo axial aplicado ( $\sigma$ ) y el nivel de deformación axial ( $\delta$ ) obtenido como  $E = \sigma / \delta$ . Luego, mediante la ecuación de elasticidad, se obtiene el módulo de corte ( $G$ ) mediante la ecuación  $G = E / 2(1 + \nu)$ , donde  $\nu$  = coeficiente de Poisson. Esta prueba es similar a los ensayos anteriores.



**Figura 5.18.** Esquema del ensayo de compresión triaxial cíclico



**Figura 5.19.** Equipo de compresión triaxial cíclico

## 5.4 ESTIMACION DEL MÓDULO DE CORTE A DEFORMACIONES PEQUEÑAS- MEDIANTE MÉTODOS INDIRECTOS

### a. A partir de propiedades índice de los suelos

Investigaciones realizadas por Seed et al. (1970) y Hardin (1978) han mostrado que el valor de  $G_{max}$  está influenciado por la relación de vacíos ( $e$ ) y el esfuerzo de confinamiento medio ( $\sigma'_m$ ). A continuación, se presentan algunas de las relaciones de  $G_{max}$  según diversos autores:

Seed et al. (1970), para arenas y gravas

$$G_{max} = 1000K_2(\sigma'_m)^{0.5} \quad (\text{psf})$$

Densidad Relativa, Dr (%)	K2
30	34
40	40
45	43
60	52
75	61
90	70

Hardin (1978), para arcillas

$$G_{max} = 1230 \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e} OCR^K (\sigma'_m)^{0.5} \quad (\text{psf})$$

IP	K
0	0
20	0.18
40	0.30
60	0.41
80	0.48
100	0.50

Menq (2003) para arenas y gravas

$$G_{max} = 1400 * C_u^{-0.20} * e^{-1-(D_{50}/20)^{0.75}} * \left( \frac{\sigma'_m}{P_a} \right)^{0.48C_u^{0.09}} \quad (\text{psf})$$

Donde:  $C_u$ =coeficiente de uniformidad,  $D_{50}$ =Tamaño medio de las partículas del suelo,  $P_a$ =Presión atmosférica.

Existen más relaciones de  $G_{max}$  que se pueden encontrar en la literatura técnica.

#### **b. Mediciones in-situ indirectas**

Debido a que el valor de  $G_{max}$  se obtiene de manera directa con los valores de  $V_s$ , y no siempre se puede realizar ensayos geofísicos para obtener el valor de  $V_s$ , teniendo por lo general ensayos de hincas como el SPT o cono holandés (CPT). De manera complementaria, diversos investigadores han intentado establecer la velocidad de onda de corte S ( $V_s$ ) a partir de los valores del número de golpes del ensayo de penetración estándar (N-SPT). En la Tabla 2 se muestra una serie de correlaciones para diferentes tipos de suelo y condiciones geológicas, por lo que se recomienda ser utilizadas con fines académicos.

**Tabla 2.** Estimación de Vs a partir del N-SPT (Wair et al., 2012)

<b>Tipo de Suelo</b>	<b>Vs (m/s)</b>	<b>Autor</b>
<b>Arena</b>	32 N <sup>0.50</sup>	Shibata (1970)
	87 N <sup>0.36</sup>	Ohta (1972)
	88 N <sup>0.34</sup>	Ohta y Goto (1978)
	80 N <sup>(1/3)</sup>	JRA (1980)
	56 N <sup>0.50</sup>	Seed (1983)
	81 N <sup>0.33</sup> (Holoceno)	Imai (1977)
	97 N <sup>0.32</sup> (Pleistoceno)	Imai (1977)
	57 N <sup>0.49</sup>	Lee (1990)
<b>Arcilla</b>	100 N <sup>(1/3)</sup>	JRA(1980)
	114N <sup>0.31</sup>	Lee (1990)
	102 N <sup>0.29</sup> (Holoceno)	Imai(1977)
	114 N <sup>0.29</sup> Pleistoceno)	Imai(1977)
<b>Limos</b>	106 N <sup>0.32</sup>	Lee(1990)
<b>Aluviales</b>	85 N <sup>0.31</sup>	Ohba y Toriumi (1970)
<b>Friccionantes</b>	59 N <sup>0.47</sup>	Ohsaki e Iwasaki (1973)
<b>Gravas</b>	94 N <sup>0.34</sup>	Ohta y Goto (1978)
<b>Granulares</b>	100 N <sup>0.29</sup>	Sykora y Stokoe (1983)
<b>Arenas diluviales</b>	125 N <sup>0.30</sup>	Okamota (1989)
<b>Todos</b>	19 N <sup>0.60</sup>	Kanai (1966)
	82 N <sup>0.39</sup>	Ohsaki e Iwasaki (1973)
	92 N <sup>0.329</sup>	Imai y Yoshimura (1975)
	90 N <sup>0.341</sup>	Imai (1975)
	91 N <sup>0.337</sup>	Imai (1977)
	85 N <sup>0.348</sup>	Ohta y Goto (1978)
	61 N <sup>0.50</sup>	Seed e Idris (1981)
	97 N <sup>0.314</sup>	Imai y Tonouchi (1982)
	76 N <sup>0.33</sup>	Imai y Yoshimura (1990)
	121 N <sup>0.27</sup>	Yokota (1991)
	22 N <sup>0.85</sup>	Jafari (1997)
	84 N <sup>0.31</sup>	Ohba y Toriumi (1970)

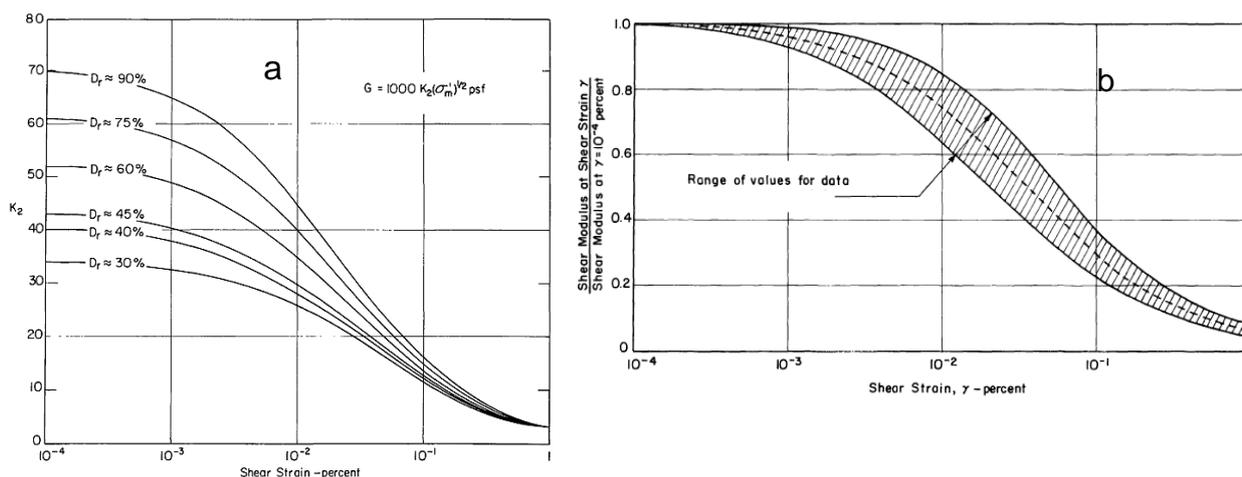
## 5.5 ESTIMACIONES A PARTIR DE RELACIONES EMPÍRICAS

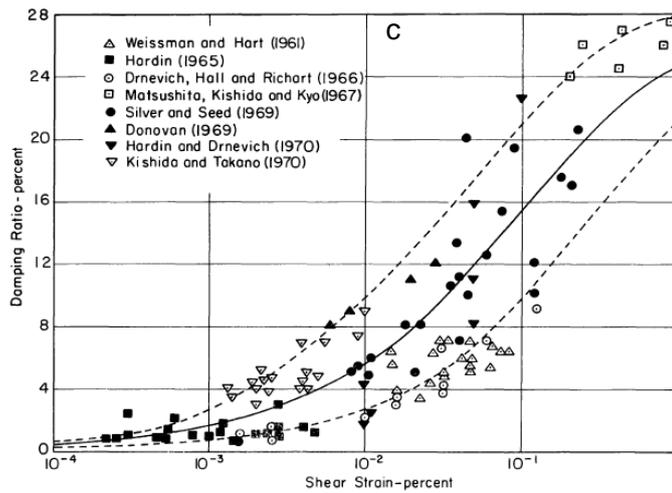
Los módulos de rigidez y amortiguamiento por lo general son medidos en ensayos de laboratorio y las deformaciones grandes son impuestas bajo condiciones controladas, además el rango de deformaciones son empleadas en más de un equipo de medición, por lo que estos tipos de ensayos resultan muy costosos. Por tanto, algunos investigadores han establecido los valores de  $G$  y  $\xi$  en base a varias propiedades intrínsecas que se puede medir con facilidad.

El comportamiento de las propiedades dinámicas de los suelos y los factores que lo afectan ha sido estudiado por diversos investigadores, estableciéndose varios modelos matemáticos para estimar el comportamiento no lineal del suelo. En esta sección mencionaremos algunas de las relaciones empíricas establecidas por Seed e Idriss 1970, Seed et al. (1984), Vucetic y Dobry (1991), Ishibashi y Zhang (1993), Rollins et al. (1998), Darendeli (2001), Menq (2003), Zhang et al. (2005) y otros.

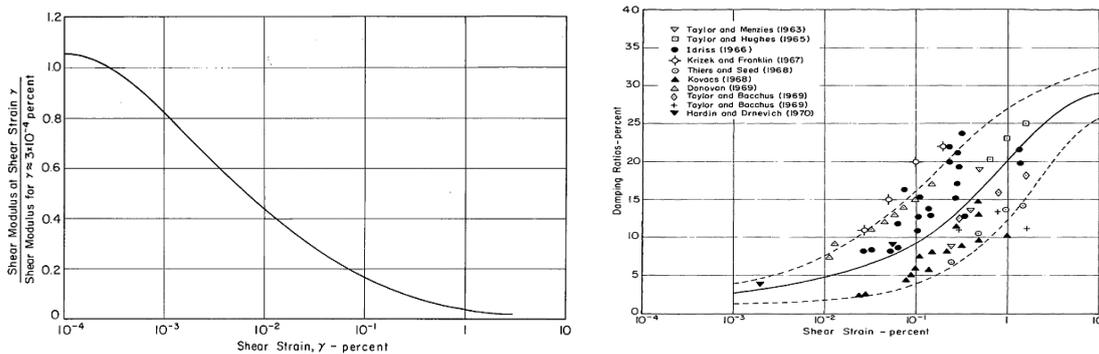
### Curvas Propuestas por Seed e Idriss (1970)

Seed e Idriss (1970) analizaron el comportamiento de las arenas y arcillas. Mostraron que para las arenas el módulo secante ( $G$ ) está influenciado por la presión de confinamiento ( $\sigma'_m$ ) y la relación de vacíos, pero no está influenciado directamente por el tamaño de las partículas o la forma de estas.





**Figura 5.20.** a) Factor K2 para arenas según densidad relativa, b) Curva de reducción de módulo normalizada, c) Curva de amortiguamiento



**Figura 5.21.** a) Curva de reducción de módulo normalizada, b) Curva de amortiguamiento, para arcillas

### Curvas Propuestas por Seed et al., (1984)

Seed et al. (1984), establecieron el módulo de corte como función del esfuerzo de confinamiento medio y el factor  $K_2$ . Este factor es función de la densidad relativa, gradación y de la deformación cortante. Para ello Seed et al., establecieron las curvas normalizadas para gravas que tienen una granulometría bien gradada, con un tamaño máximo de 1-1/2" a 3/4" y la forma redondeada y angular. Los resultados se muestran en las Figuras 5.22 y 5.23.

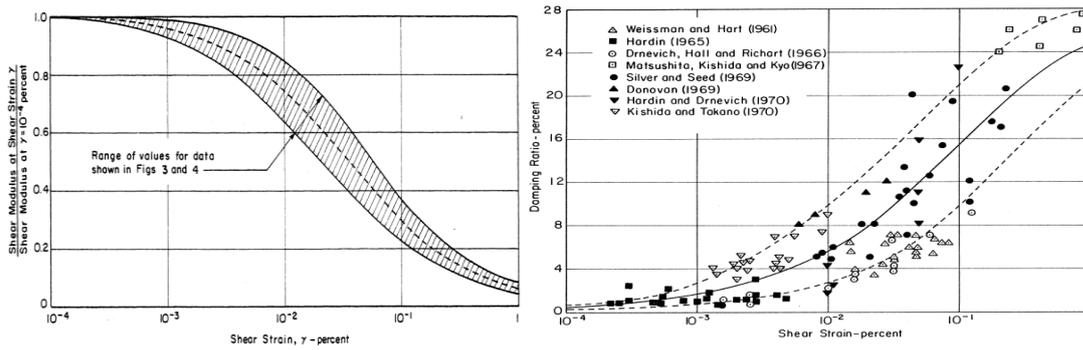


Figura 5.22. Reducción de módulo y amortiguamiento para arenas

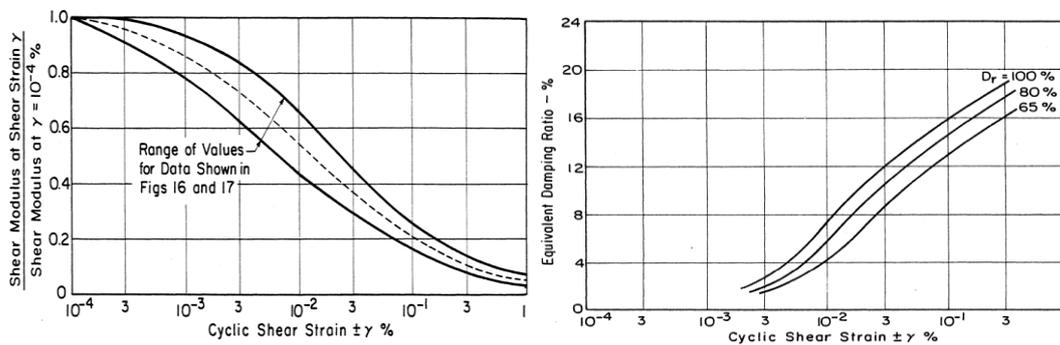


Figura 5.23. Reducción de módulo de corte y amortiguamiento para gravas

Los mismos autores hacen mención que el módulo de corte  $G$  para suelos granulares (tanto para arenas y gravas) puede ser expresado mediante la siguiente relación:

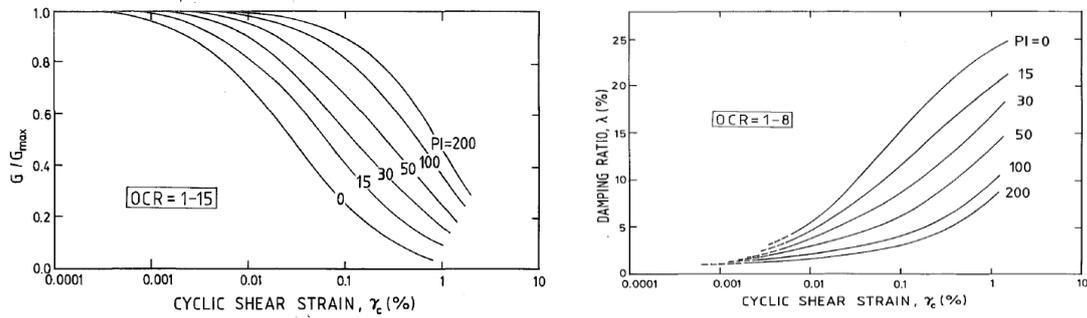
$$G(\text{psf}) = 1000K_2(\sigma'_o)^{0.5}$$

Donde  $K_2$  es el coeficiente del módulo de corte, que está influenciado por la granulometría y la densidad relativa, y las deformaciones cortantes. Por lo general, los valores de  $K_2$  para las gravas es 1.35 a 2.50 veces el valor de  $K_2$  para las arenas.

### Curvas Propuestas por Vucetic y Dobry (1991)

Vucetic y Dobry (1991) propusieron una serie de curvas de reducción de módulo ( $G/G_{\max}$ ) y amortiguamiento ( $\lambda$ ). Como base para suelos netamente arcillosos, en dicha investigación estudiaron la influencia del índice de plasticidad (IP) y observaron que cuando un suelo tiene mayor plasticidad, la curva de  $G/G_{\max}$  es distinta, por lo que el IP controla el módulo reducido y el amortiguamiento, además observaron que la presión de confinamiento ( $\sigma'_o$ ) y la razón de sobreconsolidación (OCR) no influyen. En la Figura

5.24 se muestra la curva de reducción de módulo normalizado y la curva de amortiguamiento como función de la deformación cortante.



**Figura 5.24.** a) Curvas de reducción de módulo normalizada, b) Curvas de amortiguamiento para arcillas

### Curvas Propuestas por Ishibashi y Zhanq (1993)

Ishibashi y Zhang (1993) analizaron la data correspondiente al módulo de corte y amortiguamiento de arenas no plásticas y arcillas muy plásticas, como referencias usaron las fórmulas propuestas por Seed e Idriss (1970), Hardin y Drnevich (1972), que son función del factor  $K(\gamma)$ , relación de vacíos ( $e$ ) y el esfuerzo de confinamiento ( $\sigma_o'$ ), a estas se incluyó el índice de plasticidad (IP), de tal manera que toda la data analizada hasta la fecha de la investigación quedan unificadas en las ecuaciones siguientes:

$$\frac{G}{G_{max}} = K(\gamma, IP)(\sigma_o')^{m(\gamma, IP) - m_o}$$

$$K(\gamma, IP) = 0.5 \left\{ 1 + \tanh \left[ \ln \left( \frac{0.000102 + n(PI)^{0.492}}{\gamma} \right) \right] \right\}$$

$$m(\gamma, IP) - m_o = 0.272 \left\{ 1 - \tanh \left[ \ln \left( \frac{0.000556}{\gamma} \right)^{0.4} \right] \right\} \exp(-0.0145IP^{1.3})$$

En cuanto al amortiguamiento (D), esta se expresa mediante la ecuación:

$$D = \frac{0.333(1 + \exp(-0.0145IP^{1.3}))}{2} \left\{ 0.586 \left( \frac{G}{G_{max}} \right)^2 - 1.547 \left( \frac{G}{G_{max}} \right) + 1 \right\}$$

Estas ecuaciones anteriores son aplicables para suelos arenosos y arcillosos.

## Curvas Propuestas por Rollins et al., (1998)

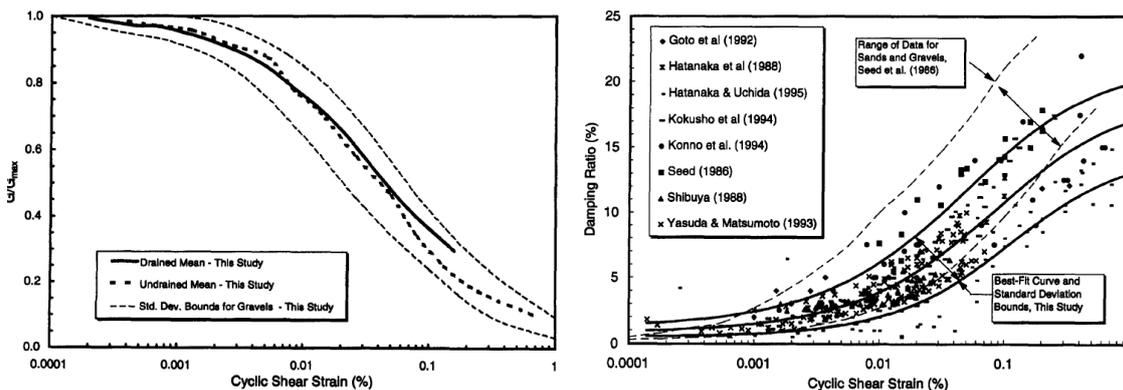
Rollins et al., (1998) analizaron los resultados de varias investigaciones de las propiedades dinámicas de suelos gravosos que fueron ensayados en equipos triaxiales cíclicos y torsionales cíclicos.

Analizaron el comportamiento dinámico de suelos gravosos, donde observaron que la curva de reducción del módulo normalizada está influenciada por la presión de confinamiento y es independiente de la densidad relativa y la gradación; mientras que el amortiguamiento está influenciado por la presión de confinamiento y es independiente de los demás factores. Las curvas del módulo de reducción ( $G/G_{max}$ ) y el amortiguamiento ( $D$ ) propuestas están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1.2 + 16\gamma (1 + 10^{-20\gamma})}$$

$$D = 0.8 + 18 (1 + 0.15\gamma^{-0.9})^{-0.75}$$

Las curvas  $G/G_{max}$  y  $D$  se muestran en la Figura 5.25, en ésta imagen se incluye la incertidumbre que pueden tener ambas curvas. La curva media  $G/G_{max}$  propuesta por Rollins et al., es superior a la curva  $G/G_{max}$  para gravas propuesta por Seed et al. (1986) y muy cercana a la curva  $G/G_{max}$  para arenas de Seed et al. (1970).



**Figura 5.25.** Curva de reducción de módulo y amortiguamiento para suelos gravosos

### Correlación Propuesta por Darendeli (2001)

Darendeli (2001) propuso una serie de relaciones empíricas en base a un análisis estadístico de la base de datos de curvas de reducción de módulo de suelos arenosos y arcillosos. La curva de reducción de módulo se expresa como:

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)^a}$$

Donde:  $\gamma_r$  = deformación de referencia y  $a$  = coeficiente de curvatura (0.92, para suelos arenosos y arcillosos). La deformación de referencia de los suelos arenosos y arcillosos es función del índice de plasticidad (IP), la razón de sobreconsolidación (OCR) y la presión de confinamiento efectiva ( $\sigma_o'$ ). La deformación de referencia ( $\gamma_r$ ) para valores medios en general puede ser determinada como sigue:

$$\gamma_r = 0.352 + 0.101 * PI * (OCR)^{0.325} \sigma_o'^{0.348}$$

Además, el amortiguamiento no lineal (D) para los materiales arenosos y arcillosos tiene una mejor representación por el comportamiento "Masing Modificado" (Darendeli, 2001), la cual es función del número de cargas cíclicas (N). La curva  $(D-D_{min})-\log \gamma$  puede ser determinada usando el comportamiento de Masing Modificado mediante las siguientes ecuaciones:

$$D_{ajustado} = b \left( \frac{G}{G_{max}} \right)^{0.1} * D_{Masing} + D_{min}$$
$$D_{Masing,1} = \frac{2}{\pi} * \left[ 2 * \frac{\gamma - \gamma_r \ln \left( \frac{\gamma + \gamma_r}{\gamma_r} \right)}{\frac{\gamma^2}{\gamma + \gamma_r}} - 1 \right]$$

Donde:  $b$ =coeficiente de escala ( $=0.6329-0.0057\ln N$ ),  $N$ =número de cargas cíclicas.  $D_{Masing}$ = razón de amortiguamiento obtenido por el comportamiento de Masing Modificado.

$$C_1 = - 1.1143 a^2 + 1.861 a + 0.2523$$

$$C_2 = 0.0805 a^2 - 0.1710 a - 0.0095$$

$$C_3 = - 0.0005 a^2 + 0.0002 a + 0.0003$$

## Curvas Propuestas por Menq (2003)

Menq (2003) propuso una serie de relaciones para obtener la curva de reducción de módulo y el amortiguamiento para suelos gravosos con ciertas características granulométricas. La curva de reducción del módulo ( $G/G_{max}$ ) está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)^a}$$

Donde:  $\gamma_r$  = deformación de referencia y  $a$  = coeficiente de curvatura. La deformación de referencia de los suelos granulares es función del coeficiente de uniformidad ( $C_u$ ) y la presión de confinamiento efectivo ( $\sigma'_o$ ). La deformación de referencia ( $\gamma_r$ ) puede ser determinada como sigue:

$$\gamma_r = 0.12 * C_u^{-0.6} * \left(\frac{\sigma'_o}{P_a}\right)^{0.5 * C_u^{-0.15}}$$

Donde:  $P_a$  es la presión atmosférica (100 kPa) y  $S$  es la desviación estándar. El coeficiente de curvatura "a", es función de la presión de confinamiento efectiva  $\sigma'_o$ , esta generalmente se incrementa cuando se incrementa  $\sigma'_o$ , y se expresa de la siguiente manera:

$$a = 0.86 + 0.1 \log\left(\frac{\sigma'_o}{P_a}\right)$$

Además, el amortiguamiento no lineal ( $D$ ) para los materiales granulares se adecúa de mejor manera con el comportamiento "Masing Modificado" (Darendeli, 2001). El tamaño medio ( $D_{50}$ ), el coeficiente de uniformidad ( $C_u$ ), la relación de vacíos ( $e$ ) y la presión de confinamiento muestran que no tiene efecto sobre la relación entre  $D-D_{min}$  y  $G/G_{max}$ .

La curva  $(D-D_{min})-\log \gamma$  puede ser determinada usando el comportamiento de Masing Modificado mediante las siguientes ecuaciones:

$$D - D_{min} = b \left(\frac{G}{G_{max}}\right)^{0.1} D_{Masing}$$

$$D_{Masing} = C_1 * D_{Masing,1} + C_2 * D_{Masing,1}^2 + C_3 * D_{Masing,1}^3$$

$$D_{Masing,1} = \frac{2}{\pi} * \left[ 2 * \frac{\gamma - \gamma_r \ln\left(\frac{\gamma + \gamma_r}{\gamma_r}\right)}{\gamma^2} - 1 \right]$$

$$D_{min} = 0.55 * C_u^{0.1} * D_{50}^{-0.3} * \left( \frac{\sigma'_o}{P_a} \right)^{-0.08}$$

Donde: b=coeficiente de escala (=0.6329-0.0057LnN),  $D_{Masing}$ = razón de amortiguamiento obtenido por el comportamiento de Masing Modificado.

$$C_1 = -1.1143 a^2 + 1.861 a + 0.2523$$

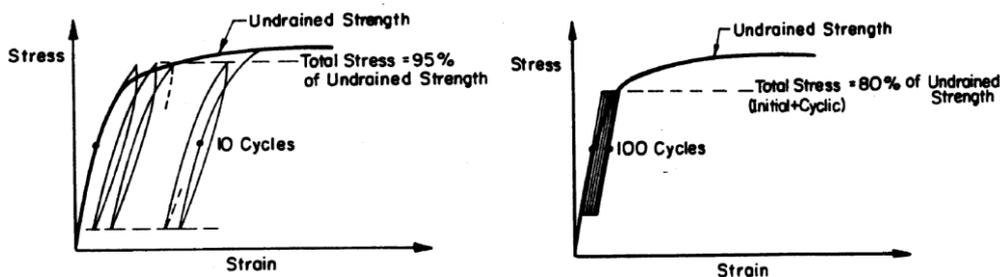
$$C_2 = 0.0805 a^2 - 0.1710 a - 0.0095$$

$$C_3 = -0.0005 a^2 + 0.0002 a + 0.0003$$

## 5.6 PARÁMETROS DE RESISTENCIA FRENTE A CARGAS CICLICAS

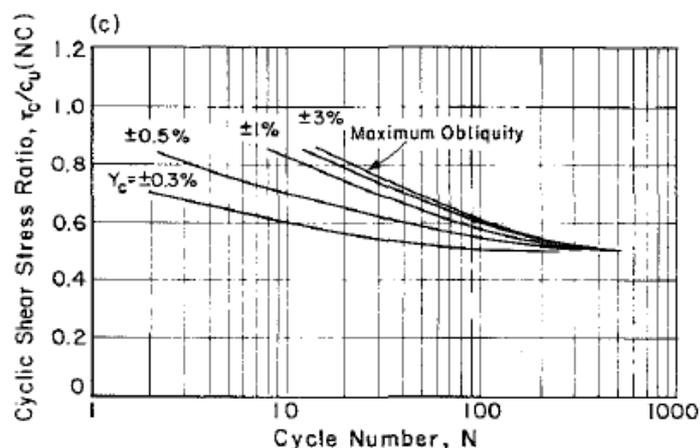
La resistencia cortante de un suelo que no está sujeto a cargas cíclicas (degradación de la rigidez) puede ser evaluada usando métodos convencionales, incluyendo pruebas de laboratorio y pruebas in-situ y la correlación con las propiedades índice del suelo. La diferencia principal en problemas sísmicos comparado con problemas estáticos es que los parámetros de resistencia no drenados son usados para resistir las cargas cíclicas de los suelos saturados, incluyendo los suelos granulares debido a la rapidez de la carga sísmica (Kavazajian et al., 1997). La resistencia cortante no drenada dinámica de un suelo está influenciada por la amplitud, el esfuerzo aplicado, el número de cargas cíclicas y la plasticidad del suelo. Para suelos granulares, incluso los esfuerzos cortantes cíclicos pueden generar presión de agua y una pérdida significativa de la resistencia no drenada.

Makdisi y Seed (1977) mostraron que las deformaciones permanentes pueden producirse por cargas cíclicas en los suelos arcillosos para esfuerzos muy cercanos al esfuerzo de fluencia, mientras que el comportamiento elástico es observado para un gran número de ciclos en esfuerzos de corte cíclico de hasta el 80% de la resistencia no drenada (esfuerzo de fluencia) para suelos que presentan un pequeño incremento de presión de poros durante la carga cíclica (Figura 5.26). Incluso mostraron que, para suelos arcillosos, suelos granulares secos o parcialmente saturados, y suelos granulares densos saturados (suelos no licuables), pueden adoptar la resistencia no drenada cíclica como el 80% de la resistencia no drenada estática. Además, dicho porcentaje de resistencia representa el nivel de deformación entre deformaciones pequeñas y deformaciones grandes.



**Figura 5.26.** Deformaciones permanentes y deformaciones elásticas ante cargas cíclicas

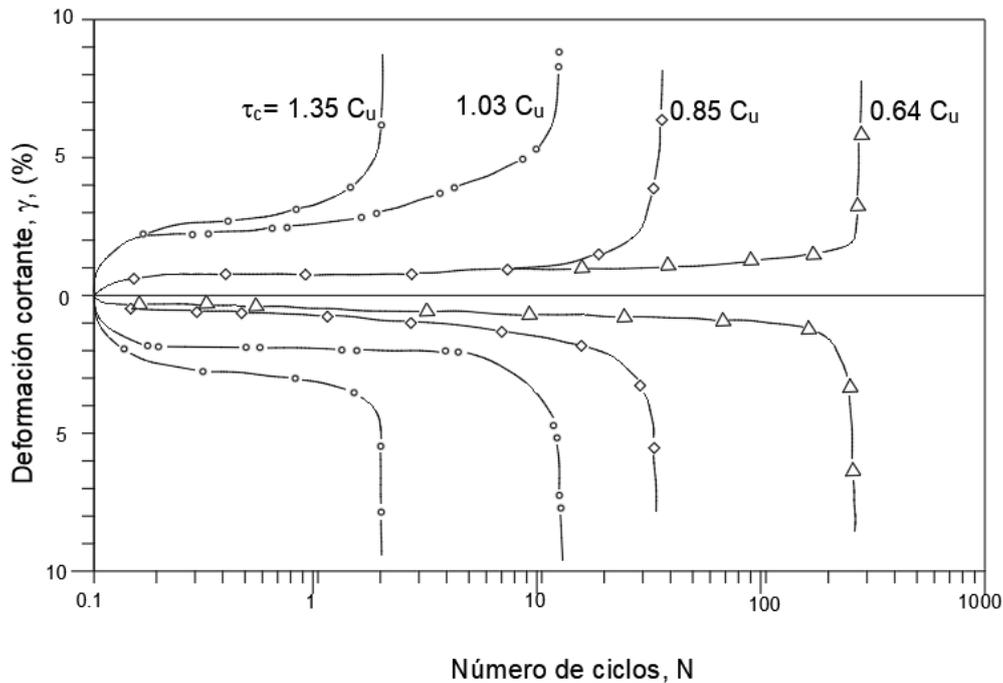
Azzouz et al. (1989) estudiaron las arcillas azules de Boston saturadas (normalmente consolidadas) cuyas propiedades índices como la humedad ( $w$ ), límite líquido (LL), límite plástico (LP) e índice de plasticidad (IP) son 39%, 44%, 23% y 21%, respectivamente. Estas arcillas fueron sometidas a ensayos de corte directo cíclico. Uno de sus resultados fue la obtención de la resistencia cíclica no drenada ( $\tau_c$ ) como una función de la resistencia no drenada ( $C_u$ ), del número de ciclos de carga ( $N$ ) y la deformación cíclica ( $\gamma_c$ ), como se muestra en la Figura 5.27. De esta figura se puede observar que para nivel de deformación del 3% y con un número de ciclos de 10 a 30, la resistencia no drenada cíclica ( $\tau_{cyc}$ ) varía de 1.0 a 0.8 veces la resistencia no drenada ( $C_u$ ), teniendo en cuenta que se desarrolla la presión de poros durante la carga cíclica.



**Figura 5.27.** Resistencia cíclica no drenada ( $\tau_c$ ), para arcilla azul de Boston

Lefebvre y Pfendler (1996) estudiaron a las arcillas saturadas de Canadá (a 80 km de Quebec) cuyas propiedades índices como  $w$ , LL, LP e IP son 55%, 41%, 21% y 20%, respectivamente, que se ubicaron a una profundidad de 5.3 a 5.7 m, cuya resistencia no drenada ( $C_u$ ) fue de 19 kPa (0.2 kg/cm<sup>2</sup>). El ensayo cíclico fue mediante ciclos de carga controlada en forma de onda sinusoidal con una frecuencia de 0.1Hz. Una evolución de

la deformación cortante ( $\gamma$ ) con el número de cargas cíclicas (N), donde se puede observar que la resistencia cíclica no drenada ( $\tau_c$ ) cae rápidamente con el incremento de la deformación cortante, tal como se muestra en la Figura 5.28. Para un nivel de deformación cortante de 3% y un número de ciclos de 10 a 30, la resistencia no drenada cíclica ( $\tau_c$ ) varía de 1.0 a 0.8 veces la resistencia no drenada estática ( $C_u$ ).



**Figura 5.28.** Resistencia cíclica no drenada ( $\tau_c$ ) para arcillas de Canadá

Andersen et al. (1988) estudiaron a las arcillas marinas saturadas de Noruega que tienen un índice de plasticidad (IP) de 27%, además mediante el ensayo de corte directo obtuvieron la resistencia no drenada ( $S_{u_{DSS}}$ ) cuyo valor fue 84 kPa (0.8 kg/cm<sup>2</sup>). El ensayo cíclico fue mediante ciclos de carga controlada en forma de onda sinusoidal con frecuencia de 0.1 Hz. Los resultados de los ensayos de corte directo cíclico para arcillas normalmente consolidadas NC (OCR=1) y sobreconsolidadas (OCR=4) se muestran en la Figura 5.29. Los esfuerzos cortantes promedio ( $\tau_a$ ) y cíclico ( $\tau_{cy}$ ) son normalizados respecto al esfuerzo de confinamiento ( $\sigma'_{vc}$ ) y la resistencia no drenada estática ( $S_{u_{DSS}}$ ), respectivamente. La falla fue definida a una deformación cortante cíclica  $\gamma_{cy}=15\%$ . De estos resultados se identificaron que para la arcilla con un OCR=1, una deformación del 3% y con 10 a 25 ciclos de carga, el valor de  $\tau_{cy}$  varía de 0.9 a 0.8 veces la resistencia  $S_u$ ; mientras que para las arcillas sobreconsolidadas OCR=4, una deformación del 3% y con 10 a 100 ciclos de carga, el valor de  $\tau_{cy}$  varía de 0.8 a 0.6 veces la resistencia  $S_u$ .

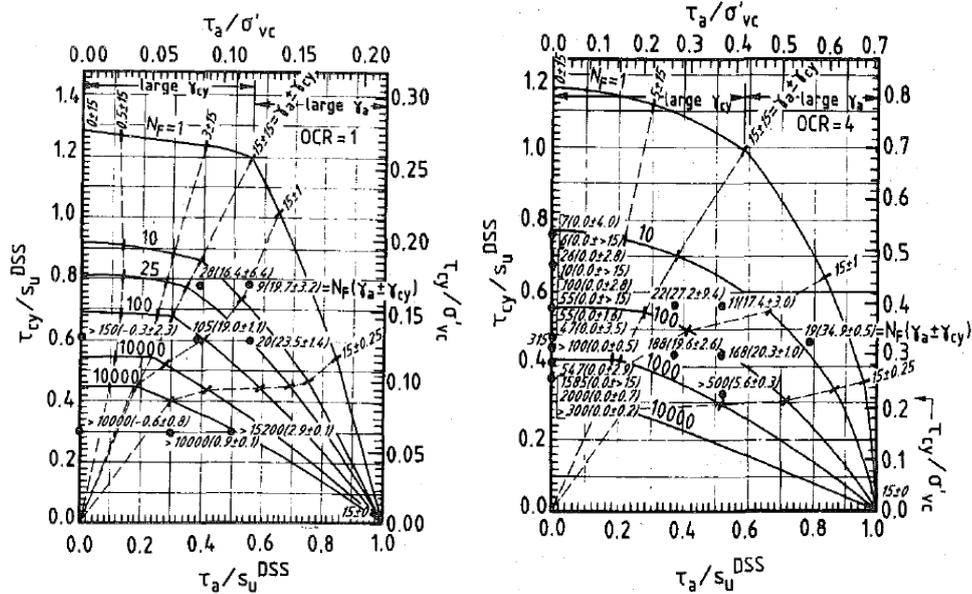


Figura 5.29. Resistencia cíclica no drenada ( $\tau_{cy}$ ), arcillas de Noruega

## REFERENCIAS

Andersen K, Kleven A., Heien D. (1988) "Cyclic Soil Data for Design of Gravity Structures". Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 114, No. 5.

Aki, K., (1957) "Space and Time Spectra of Stationary Stochastic Waves, with Special Reference to Microtremors". Bulletin Earthquake Research Institute Tokyo University, 25, 415-457.

Azzouz A., Malek A.M., Baligh M. (1989) "Cyclic Behavior of Clays in Undrained Simple Shear". Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 115, No. 5.

Darendeli, M. B. (2001) "Development of a New Family of Normalized Modulus Reduction and Material Damping Curves", University of Texas.

Das B.M., Luo Z. (2016) "Principles of Soil Dynamics". 3rd Edition, International Edition. CENGAGE Learning.

Drnevich V., Hall J., Richardt F. (1966) "Large amplitude vibration effects on the shear modulus of sand". University of Michigan, Report to Waterways Experiment Station. Corps of Engineers. U.S. Army Contract DA-22-079-Eng-340.

Hardin B. O. (1978) "The Nature of Stress-Strain Behavior of Soils," Proceedings, Geotech. Eng. Div. Specialty Conference on Earthquake Eng. and Soil Dynamics, Vol. 1 ASCE, Pasadena, June, pp. 3-90

Hardin B., Drnevich, V., (1972) "Shear modulus and damping in soils: design equations and curves", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 98 (SM7), 667–692.

Hayashi K. (2008) "Development of the Surface-wave Methods and Its Application to Site Investigations". Tesis de Doctorado. Kyoto University.

Ishibashi I., Zhang X. (1993) "Unified Dynamic Shear Moduli and Damping Ratios of Sand and Clay," *Soils and Foundations*, Vol. 33, No. 1, pp.182-191.

Ishihara K. (1996) "Soil Behavior in Earthquake Geotechnics", Oxford University Press. ISBN 0-19-856224-1.

Kavazajian E., Matasovic N., Hadj-Hamou T., Sabatini P. (1997) "Geotechnical Engineering Circular N°3-FHWA-SA-97-076".

Kramer S.L. (1996) "Geotechnical Earthquake Engineering". Ed. Prentice Hall. New Jersey – USA.

Lefebvre G., Pfendler P. (1996) "Rate and Preshear Effects in Cyclic Resistance of Soft Clay". Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 1.

Makdisi F.I., Seed HB. (1977) "A Simplified Procedure for Estimating Earthquake-Induced Deformations in Dams and Embankments". Earthquake Engineering Research Center. Report N°UCB/EERC-77/19

Menq, F. (2003) "Dynamic properties of sandy and gravelly soils", Ph.D. Dissertation. University of Texas, Austin.

NAVFAC DM-7.3 (1983) "Soil Dynamics and Special Design Aspects". MIL-HDBK-1007/3.

Park C., Miller R., Xia J. (1997) "Multi-channel Analysis of Surface Waves (MASW)", Kansas Geological Survey. Open File Report 97-10.

Redpath B. (1973) "Seismic Refraction Exploration for Engineering Site Investigations". Technical Report. Nation Technical Information Service (NTIS).

Rollins K., Evans M., Diehl N., Daily W. (1998) "Shear Modulus and Damping Relationships for Gravels". Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 124, No 5.

Seed H.B., and Idriss I.M., (1970) "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analyses," *Report No. EERC-70-10*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA.

Seed H.B., Wong R.T., Idriss I.M., Tokimatsu, K. (1986) "Moduli and Damping Factors for Dynamic Analyses of Cohesionless Soils," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 112, No. SM11, pp. 1016-1032.

Sun J., Goesorkhi, R., and Seed, B. (1988) "Dynamic moduli and damping factors for cohesive soils". Berkeley, CA: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California.

Towhata I. (2008) "Geotechnical Earthquake Engineering". Springer Series in Geomechanics and Geoengineering. ISBN 978-3-540-35782-7.

Vucetic M., and Dobry, R. (1991) "Effect of soil plasticity on cyclic response". Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 117 (1), 89–107. doi:10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:1(89).

Wair B.R., J.T. DeJong, T. Shantz (2012) "Guidelines for Estimation of Shear Wave Velocity Profiles", Pacific Earthquake Engineering Research Center, PEER Report 2012/08.

Zhang, J., Andrus, R.D., and Juang, H. (2005) "Normalized shear modulus and material damping ratio relationships". Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 131 (4), 453–464. doi:10.1061/(ASCE) 1090-0241(2005)131:4(453)

<https://www.conetec.com/es>



# **CAPÍTULO VI: Análisis de respuesta de sitio**

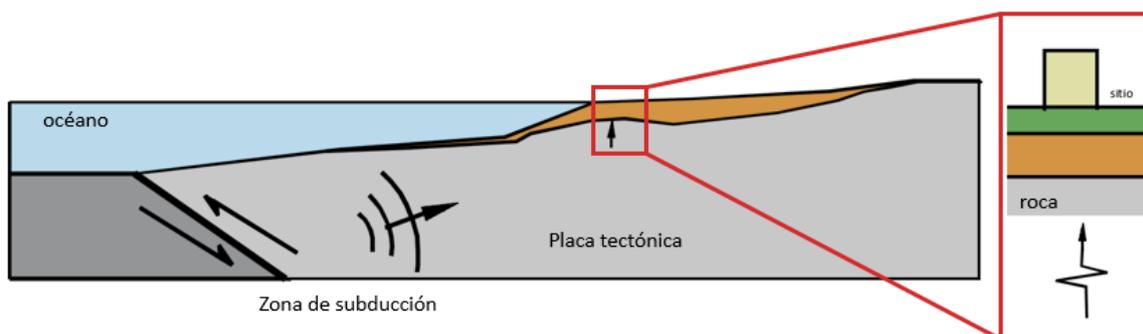


## CAPÍTULO VI

### ANÁLISIS DE RESPUESTA DE SITIO

#### 6.1 INTRODUCCIÓN

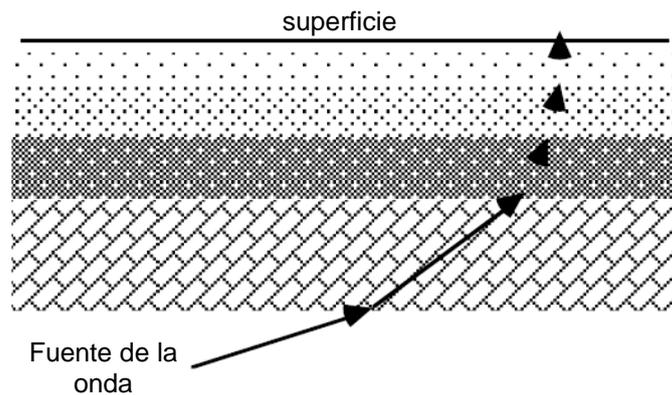
Los sismos ocurren a distancias de decenas o cientos de kilómetros lejanos del sitio, mientras que la profundidad de la ruptura de falla está a decenas de kilómetros, por lo que la fuente de propagación de ondas sísmicas (onda P y onda S) no está directamente debajo del sitio de estudio. Es entonces que, tal como se muestra en la Figura 6.1, se presenta un esquema de la relación geométrica entre la fuente sísmica y el sitio específico (Towhata, 2008).



**Figura 6.1.** Relación geométrica entre la fuente sísmica y el sitio

El movimiento sísmico más importante convencionalmente (y que probablemente lo seguirá siendo en el futuro) es generado por la onda S, ésta produce un movimiento en el suelo en la dirección horizontal. Esta dirección del movimiento es sustancialmente eficiente para causar daño a las estructuras civiles o edificaciones en la superficie del terreno.

Lo anterior se puede considerar como la propagación de ondas de manera regional, sin embargo, el sitio específico es de carácter local por lo que en la propagación de las ondas según la Ley de Snell, las trayectorias de las ondas viajan desde la roca al depósito de suelo, en la dirección vertical conforme se acerca a la superficie, tal como se muestra en la Figura 6.2.



**Figura 6.2.** Trayectoria de las ondas desde la roca a un depósito de suelo.

## 6.2 AMPLIFICACIÓN SÍSMICA

Por lo general el movimiento superficial de los depósitos de suelos blandos (finos) y suelos sueltos (arenas) es mayor que en suelos firmes (gravas) o afloramiento rocoso (Figura 6.1). El principal efecto del sitio es la estratigrafía y sus propiedades intrínsecas. El efecto de la estratigrafía está relacionado con los cambios que sufre el movimiento de la onda sísmica cuando incide verticalmente hacia el depósito estratificado horizontalmente. Esta condición es fundamental para la ocurrencia de la amplificación del movimiento de suelos blandos que atrapa las ondas sísmicas (ondas S) debido al contraste de impedancia entre los suelos y la formación rocosa.

Este fenómeno de amplificación ha sido estudiado en sismos pasados como el ocurrido en México en 1985, y el de Loma Prieta de 1989 y a su vez mediante la propagación de ondas sísmicas con el método lineal equivalente y no lineal (Idriss, 1991) para verificar la amplificación de la aceleración máxima en la superficie de los suelos y dar validez a los dos métodos de estimación de la amplificación, tal como se muestra en la Figura 6.3.

Por lo expuesto anteriormente, en esta sección se hará una descripción de la ecuación de la propagación vertical de la onda S y su efecto como la propagación de ondas conocida como la repuesta de sitio, la que puede generar la amplificación del suelo o de-amplificación del movimiento.

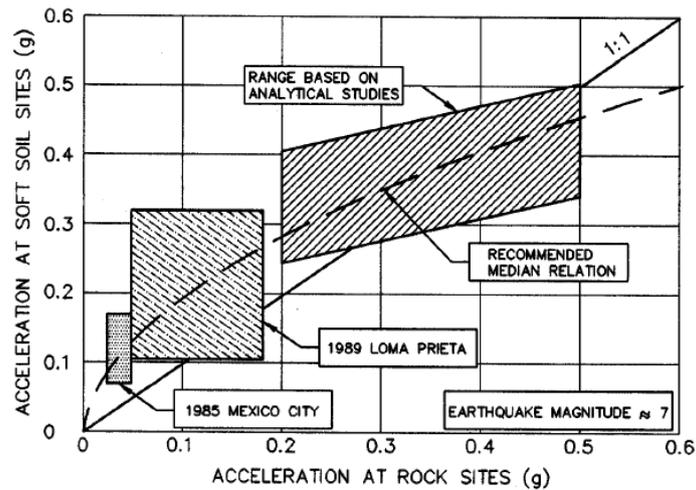


Figura 6.3. Amplificación de la aceleración del suelo respecto del movimiento en la roca

### 6.3 PROPAGACIÓN VERTICAL DE LA ONDAS

Considere a una profundidad “z” del terreno (de densidad,  $\rho$ ) un elemento diferencial “dz” cuya área transversal es A, que está sujeto a un esfuerzo cortante “ $\tau$ ”, debido al movimiento sísmico que se propaga en la dirección vertical, como se muestra en la Figura 6.4, aplicando la segunda ley del movimiento de Newton se obtiene lo siguiente:

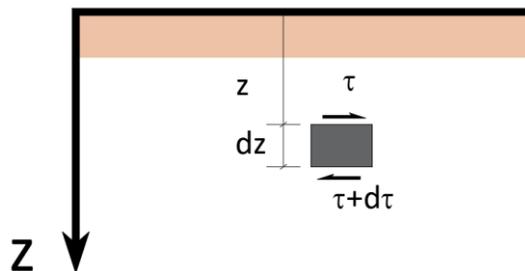


Figura 6.4. Fuerzas en la propagación vertical de la onda S

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow: +)df &= dm * a \\
 (\tau + d\tau)A - \tau A &= (\rho dV) * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & dV &= Adz \\
 d\tau A &= (\rho Adz) * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \frac{d\tau}{dz} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (6.1)
 \end{aligned}$$

La ecuación 6.1 corresponde a la propagación vertical unidimensional de la onda S en un medio elástico. Resolver dicha ecuación dependerá del modelo matemático que representa el comportamiento del suelo. Entre los modelos matemáticos que se tiene para el suelo comprenden los modelos lineales, modelos viscoelásticos, modelos no lineales y modelos constitutivos avanzados. En esta sección sólo se mencionará los tres primeros modelos.

## 6.4 MODELOS DE RESPUESTA DEL SUELO

### Modelo Lineal

Este modelo es representado por medio de un resorte, por lo general, se estima que su comportamiento es proporcional a la deformación ( $\gamma$ ) aplicada, mediante la siguiente ecuación:

$$\tau = G\gamma \quad (6.2)$$

Donde G es el módulo de corte o rigidez. Si sometemos a una deformación cíclica la deformación será  $\gamma = \gamma_o \sin(\omega t)$ , la respuesta del modelo lineal es  $\tau = G\gamma_o \sin(\omega t)$ . Además, podemos conocer la disipación de la energía, en un ciclo de deformación ocurrido será:

$$\Delta W = \int_{t_o}^{t_o+T} \tau \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt \quad T=\text{Periodo}=2\pi/\omega$$

$$\Delta W = \int_{t_o}^{t_o+T} (G\gamma_o \sin(\omega t))(\gamma_o \omega \cos(\omega t)) dt$$

$$\Delta W = \int_{t_o}^{t_o+T} \left( \frac{1}{2} G\omega\gamma_o^2 \sin(2\omega t) \right) dt$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} G\omega\gamma_o^2 \int_{t_o}^{t_o+T} \sin(2\omega t) dt$$

$$\Delta W = 0$$

Este modelo básicamente no disipa la energía sísmica, por lo que no necesariamente esto ocurre en la realidad. Debido a lo anterior, un modelo alternativo se debe considerar para ver la capacidad de disipación de la energía que refleje lo ocurrido durante la propagación de ondas.

## Modelo Viscoelástico Lineal

Conformado por un sistema resorte-amortiguador, los que puede ser configurado en arreglo en paralelo conocido como el modelo Kelvin-Voigt y el arreglo en serie conocido como modelo Maxwell (Ishihara, 1996). El más utilizado en la propagación de ondas sísmicas es el modelo Kelvin-Voigt, como se muestra en la Figura 6.5. El resorte tiene un comportamiento elástico lineal y el amortiguador es lineal. La ecuación que gobierna este comportamiento del modelo Kelvin-Voigt está dada por la siguiente ecuación:

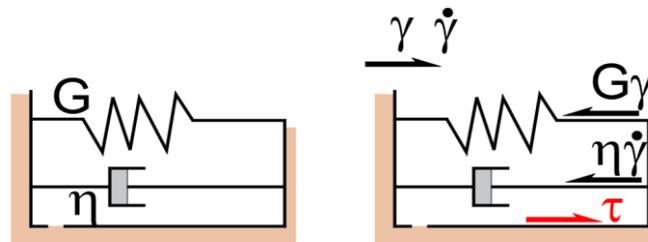


Figura 6.5. Modelo viscoelástico Kelvin-Voigt

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_e + \tau_\eta \\ \tau &= G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt}\end{aligned}\quad (6.3)$$

Donde  $G$  es el módulo de corte o rigidez,  $\eta$  es la viscosidad del amortiguador,  $\gamma$  es la distorsión o deformación cortante. La ecuación 6.3 es el modelo de Kelvin-Voigt. La ventaja de este modelo comparado al anterior descrito es que éste tiene la capacidad de disipar la energía del movimiento sísmico.

Si se aplica una deformación cortante cíclica como  $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$ , y la razón de deformación en el tiempo queda como  $d\gamma/dt = \gamma_0 \omega \cos(\omega t)$ , entonces el esfuerzo cortante resultante del esfuerzo cortante elástico y del esfuerzo del amortiguamiento será:

$$\tau = G\gamma_0 \sin(\omega t) + \eta\gamma_0 \omega \cos(\omega t)$$

Dado que el amortiguador tiene como función disipar la energía del movimiento, por lo que al evaluar la disipación de energía en un ciclo del movimiento será:

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+T} \tau \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt \quad T=\text{Periodo}=2\pi/\omega$$

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+T} (G\gamma_o \sin(\omega t) + \eta\gamma_o \omega \cos(\omega t))(\gamma_o \omega \cos(\omega t)) dt$$

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+T} (G\omega\gamma_o^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \eta\gamma_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)) dt$$

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \frac{1}{2} G\omega\gamma_o^2 \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \eta\gamma_o^2 \omega^2 (\cos(2\omega t) + 1) \right) dt$$

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \frac{1}{2} G\omega\gamma_o^2 \sin(2\omega t) \right) dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \frac{1}{2} \eta\gamma_o^2 \omega^2 (\cos(2\omega t) + 1) \right) dt$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} G\omega\gamma_o^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(2\omega t) dt + \frac{1}{2} \eta\gamma_o^2 \omega^2 \int_{t_0}^{t_0+T} (\cos(2\omega t) + 1) dt$$

$$\Delta W = \pi\eta\omega\gamma_o^2$$

La pérdida de energía es proporcional a la frecuencia del movimiento “ $\omega$ ”. Además, la energía que almacena el sistema es  $W = \frac{1}{2} G\gamma_o^2$ . Entonces la razón de amortiguamiento por el sistema resorte-amortiguador es:

$$\xi = \frac{\Delta W}{4\pi W} = \frac{\pi\eta\omega\gamma_o^2}{4\pi \left( \frac{1}{2} G\gamma_o^2 \right)} \quad (6.3.1) \quad \text{Amortiguamiento critico}$$

$$\xi = \frac{\eta\omega}{2G}$$

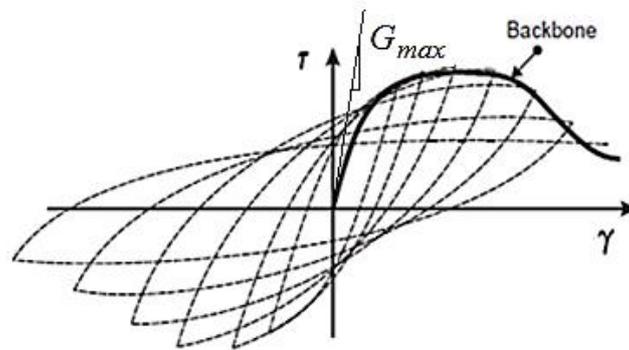
$$\eta = \frac{2G\xi}{\omega} \quad (6.3.2) \quad \text{Amortiguamiento viscoso}$$

De acuerdo con el resultado obtenido, el amortiguamiento viscoso es proporcional al amortiguamiento crítico ( $\xi$ ), a la rigidez (G) e inversamente proporcional a la frecuencia del movimiento ( $\omega$ ).

### Modelo No Lineal

Este comportamiento está basado en los resultados de laboratorio obtenidos de cargas cíclicas. Al aplicar una serie de cargas cíclicas como se muestra en la Figura 6.6, se observa que la capacidad de resistir al cortante de un suelo rígido se ve reducida conforme se incrementa la deformación cortante, al unir los valores máximos de la cortante se obtiene lo que se conoce como la curva principal o curva de carga monotónica (en inglés se conoce como backbone). Esta curva principal tiene la forma

de una curva que es ensayada de manera monótonica. En muchas ocasiones el comportamiento del suelo es modelado como una curva hiperbólica.

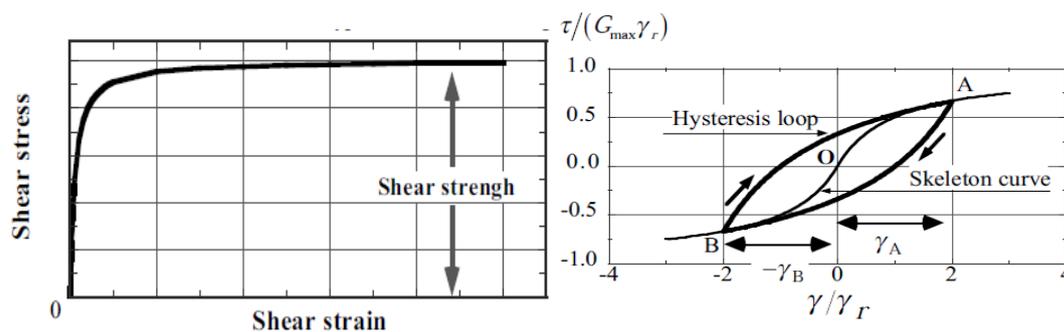


**Figura 6.6.** Comportamiento esfuerzo-deformación a diferentes niveles de deformaciones

Uno de los primeros trabajos fue realizado por Kondor y Zelasko (1963) y Hardin y Drnevich (1972), los cuales modelaron la curva esfuerzo-deformación como una hipérbola (Figura 6.7), cuya ecuación está dada por la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{G_o \gamma}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \quad (6.4)$$

Donde  $G_o$  es el módulo de corte máximo a deformaciones muy pequeñas,  $\gamma_r$  es la deformación cortante de referencia, según Hardin y Drnevich  $\gamma_r = \tau_{max}/G_o$ . Si  $\gamma$  tiende a un valor demasiado grande, entonces el esfuerzo de corte será  $\tau = G_o \gamma_r$ .



**Figura 6.7.** Esfuerzo-Deformación, histéresis cíclica (Towhata, 2008).

La ecuación 6.4 representa la curva hiperbólica BOA de la Figura 6.7. La curva pasa por los extremos de la histéresis cíclica con una amplitud de  $\gamma_A$ . Reordenando la ecuación

6.4, se obtiene el módulo secante G con una determinada amplitud  $\gamma$ , como se expresa en la ecuación:

$$\tau = \frac{G_o \gamma}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau}{\gamma} = G = \frac{G_o}{1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}}$$

$$\frac{G}{G_o} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}} \quad (6.5)$$

La histéresis cíclica (hysteresis loop)  $A \rightarrow B \rightarrow A$ , se modela por lo general bajo las reglas de Masing (1926), para la ruta  $A \rightarrow B$  la curva principal se alarga dos veces y se expresa como sigue:

$$\frac{\tau - \tau_A}{2} = -f\left(-\frac{\gamma - \gamma_A}{2}\right) \quad (\tau_A, \gamma_A) \text{ Es el punto de descenso o descarga}$$

$$\frac{\tau - \tau_A}{2} = \frac{G_o \left(\frac{\gamma - \gamma_A}{2}\right)}{1 + \frac{\frac{\gamma - \gamma_A}{2}}{\gamma_r}} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau - \tau_A}{2} = \frac{G_o \left(\frac{\gamma - \gamma_A}{2}\right)}{1 + \frac{\gamma - \gamma_A}{2\gamma_r}} \quad (6.6)$$

De manera análoga para la ruta  $B \rightarrow A$ , se aplica al lazo ascendente como sigue:

$$\frac{\tau - \tau_B}{2} = -f\left(-\frac{\gamma - \gamma_B}{2}\right) \quad (\tau_B, \gamma_B) \text{ Es el punto de ascenso o recarga}$$

$$\frac{\tau - \tau_B}{2} = \frac{G_o \left(\frac{\gamma - \gamma_B}{2}\right)}{1 + \frac{\gamma - \gamma_B}{2\gamma_r}} \quad (6.7)$$

De acuerdo con las ecuaciones 6.6 y 6.7 de lazos de histéresis, ambos prácticamente son simétricos respecto al eje origen del diagrama  $\tau-\gamma$ .

De ambos lazos se puede obtener la energía disipada como el cociente de  $\Delta W/W$ , mediante lo siguiente:

$$\Delta W = 2 \int_{-\gamma_A}^{\gamma_A} \tau d\gamma$$

$$\Delta W = 2 \int_{-\gamma_A}^{\gamma_A} \left[ \tau_B - \frac{G_o(\gamma - \gamma_B)}{1 + \frac{\gamma - \gamma_B}{2\gamma_r}} \right] d\gamma \quad \text{Donde:}$$

$$\gamma_B = -\gamma_A$$

$$\tau_B = -\tau_A$$

$$\Delta W = 2 \int_{-\gamma_A}^{\gamma_A} \left[ -\frac{G_o(\gamma_A)}{1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}} - \frac{G_o(\gamma + \gamma_A)}{1 + \frac{\gamma + \gamma_A}{2\gamma_r}} \right] d\gamma$$

$$\Delta W = \frac{4G_o\gamma_A}{1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}} * \frac{\gamma_A}{\gamma_r} \left( \frac{\gamma_A}{\gamma_r} + 2 \right) - 8G_o\gamma_r^2 \text{Ln} \left( \frac{\gamma_A}{\gamma_r} + 1 \right) \quad (6.8)$$

Además, la energía almacenada está dada por:

$$W = \frac{1}{2} G \gamma_A^2 = \frac{1}{2} \frac{G_o}{\left(1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}\right)} \gamma_A^2 \quad (6.9)$$

Entonces la razón de amortiguamiento será el cociente de las ecuaciones 6.8 y 6.9 como sigue:

$$\xi = \frac{\Delta W}{4\pi W}$$

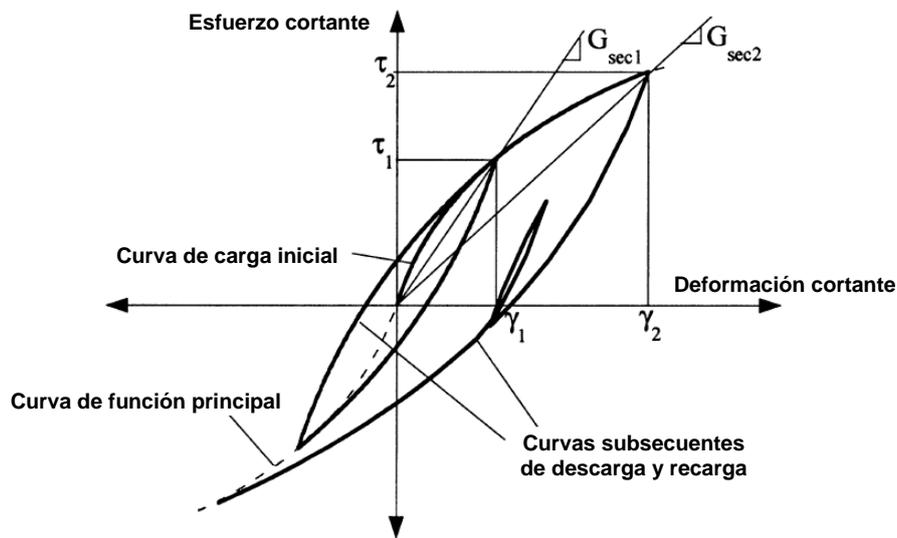
$$\xi = \frac{2}{\pi} \left[ \left(1 + \frac{2\gamma_r}{\gamma_A}\right) - 2 \frac{1 + \frac{\gamma_A}{\gamma_r}}{\frac{\gamma_A^2}{\gamma_r}} \text{Ln} \left( \frac{\gamma_A}{\gamma_r} + 1 \right) \right]$$

Para cuando la deformación  $\gamma_A$  tiende a crecer a un valor muy grande, entonces el amortiguamiento  $\xi$  tiende a  $2/\pi$  (=0.636). Este valor de amortiguamiento no se ha observado en la práctica en los laboratorios por lo que esta formulación del modelo hiperbólico tiene limitaciones y fue de interés para los investigadores.

Matasovic y Vucetic (1993) propusieron una modificación del modelo hiperbólico de Konder y Zelasko (modelo KZ) denominándolo modelo MKZ y lo expresó mediante la siguiente ecuación:

$$\tau = \frac{G_o\gamma}{1 + \beta \left(\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)^s} \quad (6.10)$$

Donde  $G_0$ =módulo de corte máximo a deformaciones muy pequeñas,  $\gamma_r$ =deformación cortante de referencia,  $\beta$  y  $s$  son parámetros de ajuste de forma de la curva principal (backbone). Este modelo fue desarrollado para cubrir un rango amplio de deformaciones de corte. Para los ciclos de carga y descarga utilizaron el modelo extendido de Masing (Figura 6.8) el cual fue propuesto por Vucetic (1990).



**Figura 6.8.** Modelo del suelo no lineal con las reglas de Masing extendido.

En principio, el modelo hiperbólico se ajusta de manera adecuada a la curva de reducción de módulo  $G/G_0$  obtenidos de ensayos de laboratorio, sin embargo, no necesariamente la formulación del modelo hiperbólico ajusta de manera adecuada a los valores de amortiguamiento, por lo que esta ha sido de interés en las investigaciones recientes (Stokoe et al, 1999; Darendeli, 2001; Phillips y Hashash, 2009).

Por lo que el siguiente interés fue obtener la formulación del amortiguamiento de los modelos no lineales. Stokoe et al (1999) y Darendeli (2001) utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)^\alpha} \quad (6.11) \quad \text{Resistencia de la curva principal (backbone)}$$

$$\tau = \frac{2G_0 \left(\frac{\gamma - \gamma_{rev}}{2}\right)}{1 + \beta \left(\frac{\gamma - \gamma_{rev}}{2\gamma_r}\right)^s} + \tau_{rev} \quad (6.12) \quad \text{Resistencia para los lazos histeréticos.}$$

$$\xi_{histeretico} = DF(\gamma_m)\xi_{masing} \quad (6.13) \quad \text{Amortiguamiento}$$

$$DF(\gamma_m) = b_1 \left( \frac{G_{\gamma_m}}{G_o} \right)^{c_1} \quad (6.14)$$

Donde  $DF(\gamma_m)$  es el Factor de reducción propuesto por Darendeli,  $\xi_{masing}$  es el amortiguamiento histerético usando la regla de Masing,  $G_{\gamma_m}$  es el Módulo secante correspondiente a la deformación máxima,  $b_1$  es el parámetro que depende del tipo de suelo y  $c_1$  es un valor constante.

El factor de reducción DF para deformaciones pequeñas ( $<10^{-3}\%$ ) reduce a un 40%, mientras que para deformaciones grandes ( $>1\%$ ) se reduce a 70%, sin embargo, este factor no reduce lo suficientemente. Luego de esta deficiencia del modelo para capturar el amortiguamiento del suelo, Phillips y Hashash (2009) propusieron un factor de reducción distinto, como sigue:

$$F(\gamma_m) = p_1 - p_2 \left( 1 - \frac{G_{\gamma_m}}{G_o} \right)^{p_3} \quad (6.15)$$

Donde  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son parámetros adimensionales que permite el mejor ajuste de las curvas de amortiguamiento ( $\xi-\gamma$ ) obtenidas de laboratorio o relaciones empíricas. Estos parámetros son obtenidos mediante prueba y error hasta obtener los parámetros adimensionales. El efecto principal del factor de reducción de amortiguamiento "F" es cuando esta es menor a uno en la ecuación (6.16.2) y que la trayectoria de la histéresis no sigue las reglas de Masing. Cuando F decrece el módulo tangente es bastante cercano al módulo secante, si F es cercano a cero la ecuación (6.19.2) sigue las reglas de Masing Extendido (Phillips y Hashash, 2009).

$$\tau = \frac{G_o \gamma}{1 + \beta \left( \frac{\gamma}{\gamma_r} \right)^s} \quad (6.16.1) \quad \text{Resistencia de la curva principal (backbone)}$$

$$\tau = F(\gamma_m) \left[ \frac{2G_o \left( \frac{\gamma - \gamma_{rev}}{2} \right)}{1 + \beta \left( \frac{\gamma - \gamma_{rev}}{2\gamma_r} \right)^s} - \frac{G_o(\gamma - \gamma_{rev})}{1 + \beta(\gamma_m - \gamma_r)^s} \right] + \frac{G_o(\gamma - \gamma_{rev})}{1 + \beta(\gamma_m - \gamma_r)^s} + \tau_{rev} \quad (6.16.2)$$

A lo largo de las investigaciones, los modelos del comportamiento esfuerzo-deformación se ajustan muy bien para algunos suelos con propiedades intrínseca específicas, lo que no necesariamente se cumplirá para otros tipos de suelos, por lo que con frecuencia en la literatura técnica se encuentra varias modelos con nuevos parámetros

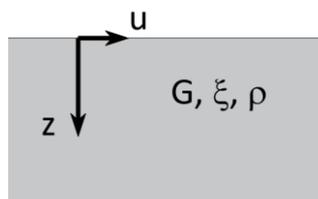
adimensionales que intentan ajustar el comportamiento de los suelos. De igual manera, existen modelos que interpretan la generación de presión de poros que se genera en los suelos cuando están sujetos a cargas cíclicas, sin embargo, no fue considerado en esta sección.

## 6.5 ANÁLISIS DE RESPUESTA DE SITIO

Luego de obtenida la ecuación de la propagación vertical de la onda S, podemos evaluar la solución de dicha ecuación, si la ecuación se resuelve en términos de la frecuencia circular  $e^{i\omega t}$ , se le conoce como solución en el *dominio de las frecuencias*, si la solución se resuelve en incrementos del tiempo entonces se le conoce solución en el *dominio del tiempo* (Towhata, 2008).

## 6.6 MÉTODO LINEAL - ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIAS

Considérese un depósito de suelo horizontal, tal como se muestra en la Figura 6.9, en el cual se propaga la onda de corte verticalmente desde la base hasta la superficie del terreno (Kramer, 1996). Tomando como referencia la ecuación de la propagación de la onda 6.1, y el modelo de Kelvin-Voigt 6.3, la ecuación queda como:



**Figura 6.9.** Sistemas del depósito de suelo estratificado unidimensional

$$\begin{array}{lll}
 \text{(Prop. de la onda S)} & \text{(Modelo Kelvin-Voigt)} & \text{(deformación)} \\
 \frac{d\tau}{dz} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & ; \quad \tau = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt} & ; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} \\
 \\
 \rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial z} = G \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) & & 
 \end{array}$$

Siendo la ecuación de la propagación vertical de la onda S:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \quad (6.17)$$

La solución de la ecuación anterior está dada por desplazamiento armónico en la frecuencia:

$$u(z, t) = U(z)e^{i\omega t} \quad (6.18)$$

Derivando la ecuación 6.18 para obtener  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}$  y reemplazándolos en la ecuación 6.17 se obtiene lo siguiente:

$$\rho(-\omega^2 U e^{i\omega t}) = G \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} e^{i\omega t} \right) + \eta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} i\omega e^{i\omega t} \right)$$

$$\rho(-\omega^2 U) = G \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \eta i\omega \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

$$-\rho\omega^2 U = (G + \eta i\omega) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$-\rho\omega^2 U = G^* \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\rho\omega^2}{G^*} U = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^{*2} U = 0$$

$$U(z) = Ae^{-ik^*z} + Be^{ik^*z}$$

Haciendo

$$G^* = G + \eta i\omega$$

$$G^* = G(1 + 2\xi i)$$

Haciendo

$$k^{*2} = \frac{\rho\omega^2}{G^*} \rightarrow k^{*2} = \frac{\omega^2}{G^*/\rho}$$

$$k^* = \frac{\omega}{\sqrt{G^*/\rho}} = \frac{\omega}{Vs(1 + i\xi)} = k(1 + i\xi)$$

Finalmente, el desplazamiento del terreno es (considerando el modelo Kelvin-Voigt):

$$u(z, t) = Ae^{i(k^*z - \omega t)} + Be^{-i(k^*z - \omega t)} \quad (6.19)$$

Donde  $G^*$  es el módulo de corte complejo,  $k^*$  es el número de onda compleja,  $\omega$  es la frecuencia circular, A y B son los valores de la amplitud de la onda incidente y onda reflejada. La deformación cortante, además del esfuerzo cortante que se genera en el terreno serán:

$$\gamma(z, t) = Ak^* e^{i(k^*z + \omega t)} - Bk^* e^{-i(k^*z - \omega t)} \rightarrow \gamma(z, t) = (Ae^{ik^*z} - Be^{-ik^*z})k^* e^{i\omega t} \quad (6.20)$$

$$\tau(z, t) = G(Ak^* e^{i(k^*z + \omega t)} - Bk^* e^{-i(k^*z - \omega t)}) \rightarrow \tau(z, t) = (Ae^{ik^*z} - Be^{-ik^*z})Gk^* e^{i\omega t} \quad (6.21)$$

Una condición de borde generalizada es que en la superficie del terreno el esfuerzo cortante es nulo, es decir,  $\tau(z = 0, t) = 0$ ,

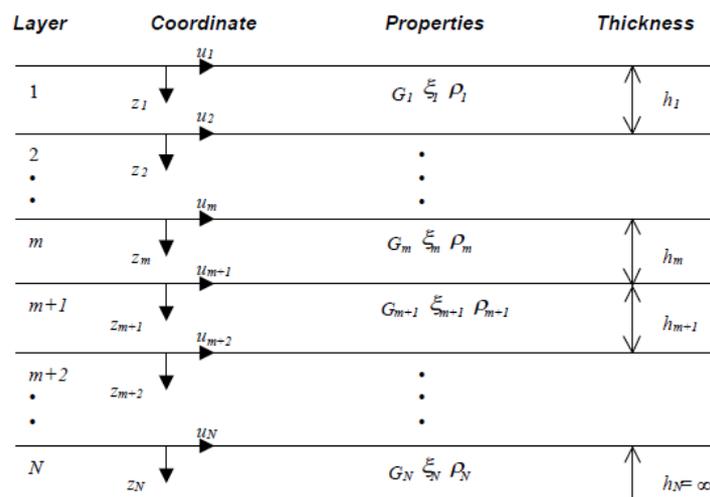
$$\tau(z = 0, t) = (-Ae^{-ik^*z} + Be^{ik^*z})Gk^*e^{i\omega t} = 0 \quad ; \text{ donde } G, k^*, e^{ik^*z}, e^{i\omega t} \neq 0$$

$$(-Ae^{-ik^*z} + Be^{ik^*z}) = 0$$

$$A = B$$

Por tanto, en la superficie del terreno la amplitud de la onda incidente y la reflejada son iguales en amplitud.

Si se considera que las ondas sísmicas se propagan a través de un perfil estratificado horizontalmente, tal como se muestra en la Figura 6.10, se introduce un sistema de coordenadas locales  $Z$  para cada estrato y resolvemos la ecuación de la onda, el desplazamiento de la parte superior e inferior de cada estrato se convierte en:



**Figura 6.10.** Depósito de suelo estratificado

$$u(z_m = 0, t) = u_m = A_m e^{i(k^* m \cdot 0 + \omega t)} + B_m e^{-i(k^* m \cdot 0 - \omega t)}$$

$$u(z_m = h_m, t) = u_{m+1} = A_m e^{i(k^* m \cdot h_m + \omega t)} + B_m e^{-i(k^* m \cdot h_m - \omega t)}$$

$$u(z_m = 0, t) = u_m = (A_m + B_m) e^{i\omega t}$$

$$u(z_m = h_m, t) = u_{m+1} = (A_m e^{ik^* m \cdot h_m} + B_m e^{-ik^* m \cdot h_m}) e^{i\omega t}$$

Aplicando las condiciones de borde y ecuaciones de compatibilidad el resultado obtenido es una ecuación recursiva para los estratos sucesivos:

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= \frac{1}{2}A_m(1 + \alpha_m^*)e^{-ik^*_m \cdot h_m} + \frac{1}{2}B_m(1 - \alpha_m^*)e^{ik^*_m \cdot h_m} \\
B_{m+1} &= \frac{1}{2}A_m(1 - \alpha_m^*)e^{-ik^*_m \cdot h_m} + \frac{1}{2}B_m(1 + \alpha_m^*)e^{ik^*_m \cdot h_m}
\end{aligned}
\tag{6.22}$$

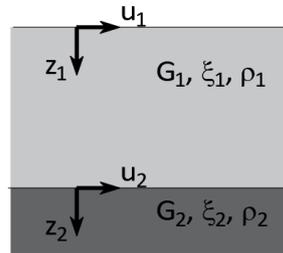
Donde:  $\alpha_{m+1}^* = \frac{\rho_m V S_m^*}{\rho_{m+1} V S_{m+1}^*}$ , es la impedancia compleja.

De acuerdo con este resultado, el movimiento sísmico en cualquier estrato se puede calcular a través de la función de transferencia (FT) que relaciona la amplitud del movimiento de un estrato  $i$  a un estrato  $j$ .

$$FT_{ij} = \frac{|u_i|}{|u_j|} = \frac{A_i(\omega) + B_i(\omega)}{A_j(\omega) + B_j(\omega)}
\tag{6.23}$$

### Caso de suelo sobre roca rígida

Como ejemplo consideremos un depósito de suelo que descansa sobre la roca rígida (Figura 6.11), entonces, los desplazamientos son:



**Figura 6.11.** Depósito de suelo apoyado sobre roca

Suelo :  $u_1(z, t) = A_1 e^{i(k^*_1 z_1 + \omega t)} + B_1 e^{-i(k^*_1 z_1 - \omega t)}$

Roca :  $u_2(z, t) = A_2 e^{i(k^*_2 z_2 + \omega t)} + B_2 e^{-i(k^*_2 z_2 - \omega t)}$

Suelo ( $z_1=0$ ):  $u_1(z = 0, t) = A_1 e^{i(k^*_1 \cdot 0 + \omega t)} + B_1 e^{-i(k^*_1 \cdot 0 - \omega t)} \rightarrow u_1(0, t) = (A_1 + B_1) e^{i\omega t}$

Roca ( $z_2=0$ ):  $u_2(z = 0, t) = A_2 e^{i(k^*_2 \cdot 0 + \omega t)} + B_2 e^{-i(k^*_2 \cdot 0 - \omega t)} \rightarrow u_2(0, t) = (A_2 + B_2) e^{i\omega t}$

En la interface suelo – roca, se cumple la compatibilidad de desplazamiento como sigue:

$$u_1(H_1, t) = u_2(0, t)$$

Suelo ( $z_1=H$ ):  $u_1(z = H, t) = A_1 e^{i(k^*_1 \cdot H + \omega t)} + B_1 e^{-i(k^*_1 \cdot H - \omega t)}$   
 $u_1(z = H, t) = (A_1 e^{ik^*_1 \cdot H} + B_1 e^{-ik^*_1 \cdot H}) e^{i\omega t}$

De la condición de superficie libre que:  $A_1 = B_1$

$$u_1(z = H, t) = (A_1 e^{ik^*_1 \cdot H} + A_1 e^{-ik^*_1 \cdot H}) e^{i\omega t}$$

$$u_1(z = H, t) = A_1 (e^{ik^*_1 \cdot H} + e^{-ik^*_1 \cdot H}) e^{i\omega t}$$

Identidad de Euler:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$u_1(z = H, t) = 2A_1 \cos(k^*_1 \cdot H) e^{i\omega t}$$

Al considerar el cociente del movimiento entre el movimiento de la superficie y el movimiento de la roca, podemos identificar si existe una amplificación o de amplificación del movimiento, mediante la función de transferencia. La función de transferencia se define como:

$$FT = \frac{u_1(0, t)}{u_2(0, t)}$$

$$FT = \frac{(A_1 + B_1) e^{i\omega t}}{2A_1 \cos(k^*_1 \cdot H) e^{i\omega t}}$$

$$FT = \frac{1}{\cos(k^*_1 \cdot H)}$$

$$FT = \frac{1}{\cos(k_1(1 + i\xi_1) \cdot H)}$$

$$|FT| = \left| \frac{1}{\cos(k_1(1 + i\xi_1) \cdot H)} \right|$$

$$|FT| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(k_1 H) + \sinh^2(k_1 \xi_1 H)}}$$

$$|FT| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega H}{Vs_1}\right) + \sinh^2\left(\frac{\xi_1 \omega H}{Vs_1}\right)}} \quad (6.24)$$

$$k^*_1 = k_1(1 + i\xi_1); k_1 = \omega/Vs_1$$

Donde:

$$\cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) + i \sin(x) \sinh(y)$$

$$|\cos(x + iy)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sinh^2(y)}$$

Para ver la influencia de la función de transferencia consideramos que el depósito de suelo tiene un espesor de  $H=30\text{m}$ ,  $Vs=300 \text{ m/s}$  y tres valores de amortiguamiento de

0%, 5% y 10%. En la función de transferencia, la amplificación del movimiento ocurre cuando el factor “cos ( )” tiene el valor de cero, es decir, cuando el argumento es igual a:

$$\frac{\omega H}{V_{s1}} = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0,1,2,3 \dots$$

$$\frac{2\pi f H}{V_{s1}} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$f = \frac{V_{s1} (2n+1)}{H \cdot 4}$$

Donde:  
 (6.25) f= frecuencia natural del movimiento para el modo de vibración n-ésima

El resultado de dibujar la ecuación 6.24 se muestra en la Figura 6.12, como se puede observar cuando el suelo tiene un valor de  $\xi=0\%$ , el movimiento se amplifica ( $FT>1$ ) para todas las frecuencias de movimiento. Si  $\xi=5\%$ , el movimiento se amplifica hasta la frecuencia de 17.5 Hz, para mayores el movimiento empieza a deamplificar ( $FT<1$ ) y amplificar paulatinamente; mientras que para  $\xi=10\%$ , el movimiento se amplifica ( $FT>1$ ) hasta la frecuencia de 12Hz, para mayores frecuencias el movimiento se deamplifica ( $FT<1$ ).

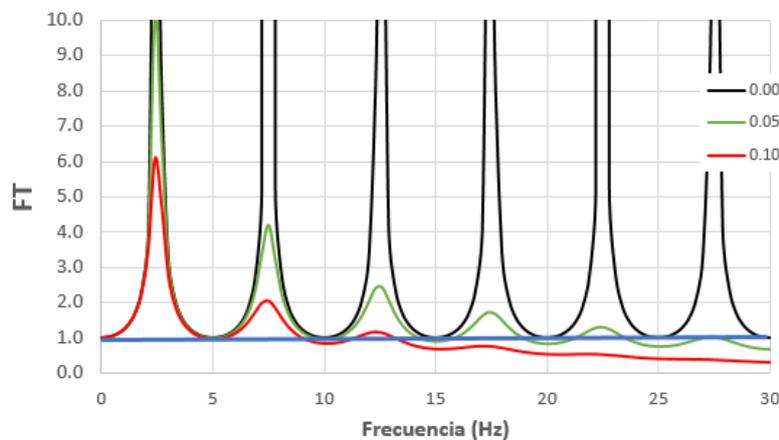


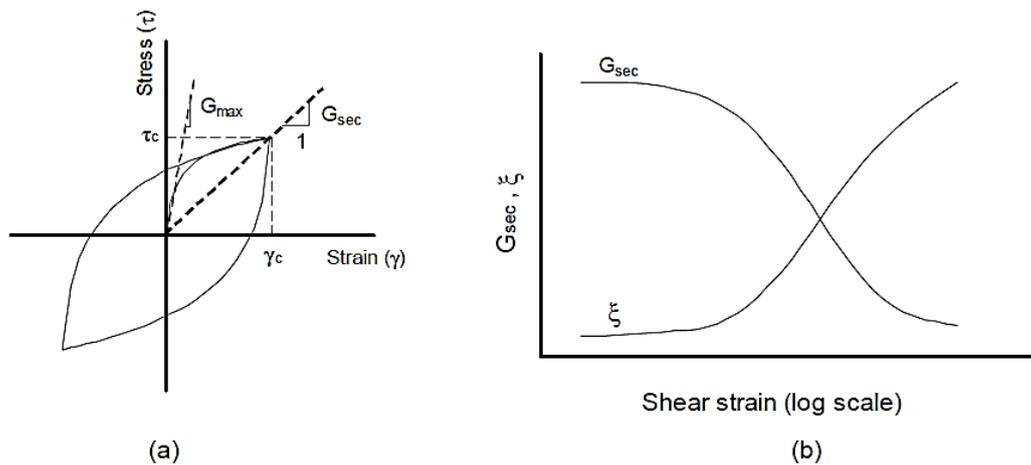
Figura 6.12. Función de transferencia para depósito de suelo H=30m y Vs=30m/s

## 6.7 MÉTODO LINEAL EQUIVALENTE- ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIAS

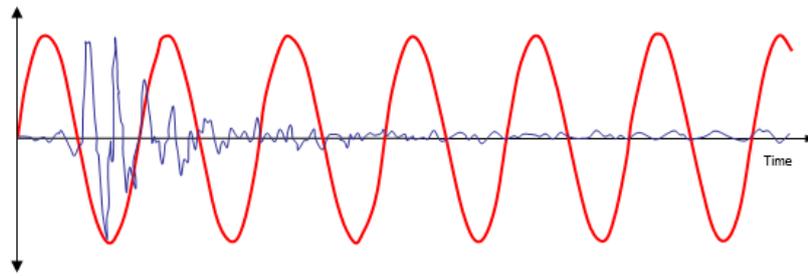
Dado que la no linealidad del suelo es bien conocida, el método lineal debe ser modificado para proporcionar estimados razonables de la respuesta del suelo en problemas prácticos. El real comportamiento esfuerzo-deformación histerético no lineal

del suelo cíclicamente cargado, puede ser aproximado por las propiedades lineales equivalentes del suelo. El módulo cortante lineal equivalente,  $G$ , es tomado generalmente como un módulo cortante secante, y la relación de amortiguamiento lineal equivalente,  $\xi$ , como la relación de amortiguamiento que produce la misma pérdida de energía en un ciclo único tal como el real lazo histerético.

Al ser necesario que  $G$  y  $\xi$  sean constantes para cada estrato de suelo, deben definirse valores consistentes con el nivel de deformación cortante inducido en el estrato. Las curvas de reducción del módulo cortante y del amortiguamiento han sido obtenidas a partir de ensayos de laboratorio que utilizan cargas armónicas simples o en su defecto por curvas obtenidas de relaciones empíricas, caracterizando el nivel de deformación por la amplitud de la deformación cortante pico (Figura 6.13). El tiempo historia de deformación cortante para un movimiento sísmico típico, sin embargo, es bastante irregular, con amplitudes pico que son alcanzadas pocas veces en el registro. En la Figura 6.14 se comparan tiempos historia de deformación cortante armónicas (ensayo de laboratorio) y transitorias (sismo) con la misma deformación cortante cíclica pico. Como la condición armónica representa claramente una condición de carga más severa que el registro transitorio, el nivel de deformación del registro transitorio suele caracterizarse por una “deformación cortante efectiva” que es frecuentemente adoptada como el 65 % de la deformación pico.

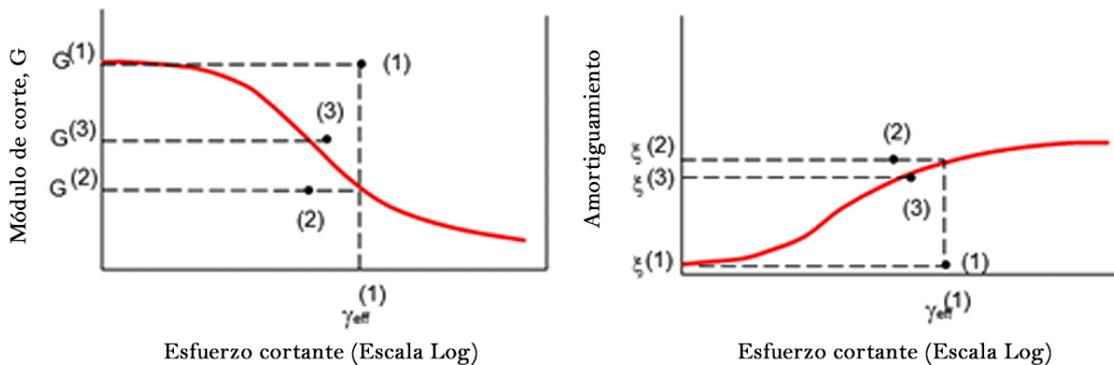


**Figura 6.13.** a) Curva de esfuerzo deformación b) Curva  $G/G_0$ - $\gamma$ ; curva  $\xi$ - $\gamma$ .



**Figura 6.14.** Tiempo historia de deformación, con una carga transitoria del 65% del valor pico

Dado que el nivel de deformación calculado depende de los valores de las propiedades lineales equivalentes, se requiere un procedimiento iterativo para asegurar que las propiedades utilizadas en el análisis son compatibles con los niveles de deformación calculados en todos los estratos, la Figura 6.15, muestra el procedimiento.



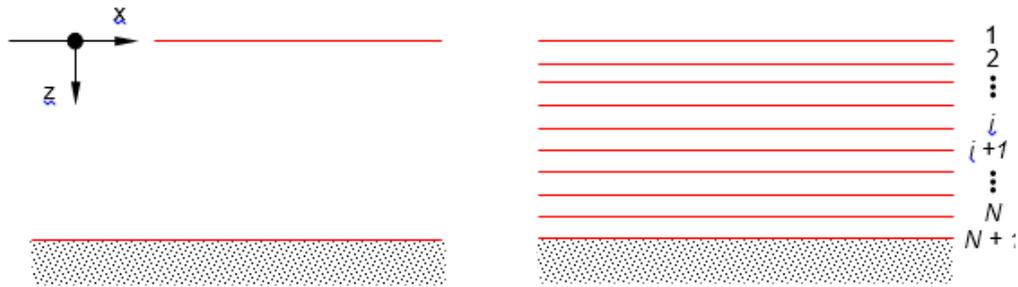
**Figura 6.15.** Procedimiento para obtener el módulo de corte y amortiguamiento, en el análisis lineal equivalente.

## 6.8 MÉTODO NO LINEAL- ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Este enfoque analiza la respuesta no lineal de un depósito de suelo, usando integración numérica directa, la integración de la ecuación del movimiento en pequeños incrementos de tiempo cualquier modelo esfuerzo-deformación lineal o no lineal (Kramer, 1996).

### Enfoque de Diferencias Finitas

Considere el depósito de suelo de espesor  $H$  (Figura 6.16), el cual será discretizado en  $N$  estratos, cuya ecuación de la propagación de la onda  $S$  (ver ecuación 6.1)



**Figura 6.16.** Depósito de suelo horizontal, discretizado en N subestratos.

Reordenando la ecuación 6.1

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \quad (6.26)$$

Para resolver la ecuación 6.26 hacemos uso del método de diferencias finitas, a través de las ecuaciones explícitas o implícitas, en este desarrollo utilizaremos las ecuaciones explícitas, como sigue:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\tau_{i+1,t} - \tau_{i,t}}{z_{i+1} - z_i} \quad (6.27) \quad \Delta z = z_{i+1} - z_i$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\dot{u}_{i,t+1} - \dot{u}_{i,t}}{t_{i+1} - t_i} \quad (6.28) \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Una razonable aproximación es dividiendo los estratos de suelo en N subestratos de espesor  $\Delta z$ , y el procedimiento a través del tiempo en pequeños incrementos  $\Delta t$ , por lo que la ecuación diferencial 6.26 expresada en ecuación de diferencias queda como sigue:

$$\frac{\tau_{i+1,t} - \tau_{i,t}}{\Delta z} = \rho \frac{\dot{u}_{i,t+1} - \dot{u}_{i,t}}{\Delta t}$$

$$\dot{u}_{i,t+1} = \dot{u}_{i,t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\tau_{i+1,t} - \tau_{i,t}) \quad (6.29)$$

Para  $i=1, 2, 3, \dots, N$

Como cualquier problema de integración se debe satisfacer las condiciones de borde en la superficie libre y en la base del depósito de suelo.

$$i=1 \quad \tau_{1,t} = 0 \quad \dot{u}_{1,t+1} = \dot{u}_{1,t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\tau_{2,t})$$

$$i=N \quad \text{Si la roca es rígida} \quad \dot{u}_{r,t} = \dot{u}_{N+1,t} \quad (\text{Movimiento de entrada})$$

Si la roca es elástica

$$\tau_{r,t} = \tau_{N+1,t}$$

$$\text{(Empleando la ecuación 6.29)} \quad \dot{u}_{N,t+1} = \dot{u}_{N,t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\tau_{r,t} - \tau_{N,t})$$

Si la onda incidente viaja hacia de manera ascendente a través de la roca, la velocidad de la partícula en la interfase suelo-roca, el esfuerzo cortante en la interfase es aproximadamente:

$$\tau_{r,t} = \rho_r V_{S_r} (2\dot{u}_{r,t+1} - \dot{u}_{N+1,t+1}) \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{N+1,t+1} &= \dot{u}_{N+1,t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} [\rho_r V_{S_r} (2\dot{u}_{r,t+1} - \dot{u}_{N+1,t+1}) - \tau_{N,t}] \\ \dot{u}_{N+1,t+1} &= \dot{u}_{N+1,t} - V_{S_r} \frac{\rho_r}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} \dot{u}_{N+1,t+1} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} [\rho_r V_{S_r} (2\dot{u}_{r,t+1}) - \tau_{N,t}] \\ \dot{u}_{N+1,t+1} &= \frac{\dot{u}_{N+1,t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z} [2\rho_r V_{S_r} \dot{u}_{r,t+1} - \tau_{N,t}]}{\left(1 + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z}\right) \rho_r V_{S_r}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Inicialmente el depósito de suelo está en reposo, es decir,  $\dot{u}_{i,0} = 0$  y  $\ddot{u}_{i,0} = 0$ , para todo  $i$ . Cuando el movimiento de entrada imparte parte de la velocidad a la base del suelo  $\dot{u}_{N+1,0}$  tendrá un valor no cero. En los pasos del tiempo subsecuente  $\dot{u}_{N,0}$ ;  $\dot{u}_{N-1,0}$ ;  $\dot{u}_{N-2,0}$ ; ... todos tendrán valores no cero, como los movimientos del depósito de suelo en respuesta del movimiento de entrada.

El incremento de desplazamiento en cada paso del tiempo será:  $\Delta u_i = \dot{u}_{i,t} \Delta t$ , la suma de los incrementos de desplazamiento permite obtener el despeamiento total, para ser determinado en el inicio de cada paso del tiempo.

La deformación cortante en cada substrato es:

$$\gamma_{i,t} = \frac{\partial u_{i,t}}{\partial z} = \frac{u_{i+1,t} - u_{i,t}}{\Delta z} \quad (6.32)$$

Respecto al modelo del suelo, se tendrá el caso lineal y no lineal. Si el suelo se considera lineal, el esfuerzo cortante será proporcional a la deformación (es decir,  $\tau = G\gamma$ ) Si el suelo es no lineal, la deformación cortante  $\gamma_{r,t}$  y la relación de esfuerzo-deformación serán usados para obtener  $\tau_{i,t}$ .

El procedimiento para emplear el análisis no lineal se resume como sigue:

- 1- Al inicio de cada paso del tiempo, la velocidad " $\dot{u}_{i,t}$ " y el desplazamiento total " $u_{i,t}$ " son conocidos en cada estrato.
- 2- El perfil de desplazamiento es usado para calcular la distorsión o deformación angular " $\gamma_{i,t}$ " dentro de cada estrato.
- 3- La relación esfuerzo-deformación es usada para determinar el esfuerzo cortante " $\tau_{i,t}$ " en cada estrato. La curva  $\tau-\gamma$  puede ser lineal o no lineal. Si el comportamiento del suelo es no lineal, los esfuerzos de retorno deben ser verificados y considerados, usando la regla de Masing o Masing modificado en cada estrato.
- 4- El movimiento de entrada es usado para calcular el movimiento en la base de los estratos de suelo en el tiempo " $t+1$ "
- 5- El movimiento de cada estrato en el tiempo " $t+1$ " es calculado, trabajando de abajo hacia arriba. Este proceso es repetido desde el paso 1 a la respuesta del siguiente paso.

### Enfoque de las Masas Concentradas

Otro método de evaluar la propagación vertical de las ondas es a través de un depósito de suelo mediante el modelo masas concentradas (lumped mass, en inglés), cada estrato está representado mediante una masa, resorte y un amortiguamiento viscoso tal como se muestra en la Figura 6.17 (Park y Hashash, 2001). La rigidez ( $k_i$ ) de cada estrato es una constante para un elástico-lineal y se define como  $k_i = Gi/h_i$  ( $G$  es el Módulo de corte y  $h$  es el espesor del estrato  $i$ -ésimo). La ecuación del equilibrio dinámico es realizada para cada masa concentrada como sigue en las siguientes expresiones:

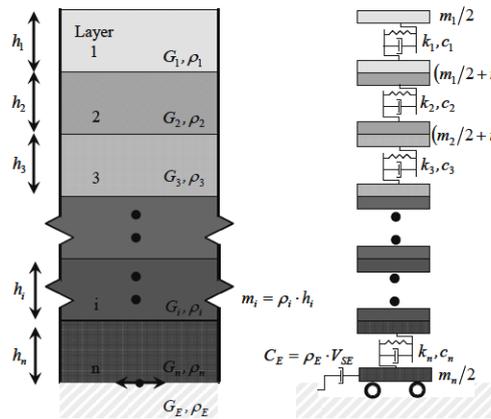
estrato

$$\left. \begin{array}{l}
 1 \quad -k_1(u_1 - u_2) - c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = \frac{1}{2} m_1 \ddot{u}_1 \\
 2 \quad -k_2(u_2 - u_3) + k_1(u_1 - u_2) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_3) + c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ddot{u}_2 \\
 3 \quad -k_3(u_3 - u_4) + k_2(u_2 - u_3) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_4) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_3) = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \ddot{u}_3 \\
 \dots \quad \dots
 \end{array} \right\} (6.33)$$

Reordenando las ecuaciones anteriores

estrato

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \frac{1}{2}m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 - k_1u_2 + c_1\dot{u}_1 - c_1\dot{u}_2 = 0 \\
 2 \quad & \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ddot{u}_2 - k_1u_1 + (k_1 + k_2)u_2 - k_2u_3 - c_1\dot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_3 = 0 \\
 3 \quad & \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\ddot{u}_3 - k_2u_2 + (k_2 + k_3)u_3 - k_3u_4 - c_2\dot{u}_2 + (c_2 + c_3)\dot{u}_3 - c_3\dot{u}_4 = 0 \\
 \dots & \quad \dots
 \end{aligned} \tag{6.34}$$



**Figura 6.17.** Modelo de masas concentradas de depósito estratificado horizontal (Hashash y Park, 2001)

Las ecuaciones anteriores 6.33 y 6.34 se pueden simplificar mediante una ecuación matricial mediante la siguiente expresión:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = [I]\{\ddot{u}_g\} \tag{6.35}$$

Donde  $[M]$  es la matriz de masas,  $[C]$  es la matriz de amortiguamiento,  $[K]$  es la matriz de rigidez,  $\{\ddot{u}\}$  es el vector de aceleración;  $\{\dot{u}\}$  es el vector de velocidad;  $\{u\}$  es el vector de desplazamiento.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2}(m_1 + m_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(m_2 + m_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2}m_n \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \dots \\ -c_1 & (c_1 + c_2) & c_2 & \dots \\ 0 & c_2 & (c_2 + c_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_n + c_E \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \dots \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & k_2 & \dots \\ 0 & k_2 & (k_2 + k_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

La ecuación dinámica 6.35 se resuelve numéricamente en cada paso del tiempo usando el método de Newmark  $\beta$  (Newmark, 1959). Este método de Newmark es un método incondicionalmente estable y no introduce errores de redondeo (Chopra, 1995).

La matriz de rigidez  $[K]$  es actualizada en cada paso del tiempo el cual incorpora la no linealidad del suelo. Para el caso del programa de cómputo Deepsoil, el modelo no lineal del comportamiento del suelo está dadas por las ecuaciones 6.13, 6.14, 6.15 y 6.16.

## Resumen

Los métodos analíticos de la respuesta de sitio pueden ser el lineal equivalente o no lineal los que se encuentran implementados en programas de cómputo.

Los estratos de los suelos en el modelo se caracterizan por el peso unitario ( $\rho$ ) y la velocidad de onda de corte ( $V_s$ ) y las relaciones empíricas que definen el comportamiento no lineal de los suelos. Los parámetros para el análisis que se usan comúnmente, son las curvas que definen la variación de la rigidez o módulo de corte del suelo ( $G$ ) y la deformación cortante ( $\gamma$ ) es conocida como curva de reducción de módulo, y por la curva que define la variación del amortiguamiento del suelo ( $\xi$ ) en función de la deformación cortante, también conocida como curva de amortiguamiento. Para estimar los efectos de la licuación de suelos en la respuesta de sitio, en el modelo no lineal del suelo se debe incorporar la generación de presión de poros ( $\Delta u$ ) por lo que consiguientemente se reducirá la rigidez ( $G$ ) y resistencia ( $\tau$ ).

Las curvas de reducción de modulo y amortiguamiento pueden ser utilizadas en base a las relaciones para suelos similares (como Vucetic y Dobry, 1991; Darendeli, 2001;

Menq, 2003; Zhang et al, 2005; entre otros recientes). Los ensayos dinámicos de laboratorio de especímenes de suelos para establecer las características no lineales pueden ser considerados donde las relaciones de la literatura técnica son inadecuadas para los suelos del sitio.

El programa de cómputo usado frecuentemente para en análisis lineal es el SHAKE que considera el análisis lineal equivalente, mientras que para el análisis no lineal son los programas FLAC, DESRA-2, Deepsoil, OpenSees, entre otros. Si la respuesta del suelo induce a deformaciones grandes dentro del suelo (niveles de aceleración muy alto y suelos blandos), el análisis no lineal debe ser considerado.

Para el análisis respuesta del sitio, considerando los efectos de licuación de suelos, el programa debe incorporar el desarrollo de presión de poros, para ello se recomienda utilizar los programas de cómputo como FLAC, DESRA-2, DEEPSOIL y OpenSees.

## REFERENCIAS

Idriss I.M. (2001) "Earthquake Ground Motions at Soft Soil Sites". Proceedings: Second International Conference on Recent Advances on Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics.

Kramer S. (1996). "Geotechnical Earthquake Engineering". Ed. Prentice Hall. New Jersey – USA.

Konder R., Zelasko J. (1963) "A hyperbolic stress-strain formulation of sands." Proceedings of the 2nd Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Sao Paulo, Brazil, 289-324.

Ishihara K. (1995) "Earthquake Geotechnical Engineering", Ed. Tokyo Science University of Tokyo. Japan.

Towhata I. (2008) "Geotechnical Earthquake Engineering". Ed. Prentice Hall. New Jersey. USA.

Hardin B., Drnevich V. (1972) "Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equation and Curves". Journal of Soil Mechanics and Foundation Division. Proceeding of the American Society of Civil Engineers.

Phillips C., Hashash Y. (2009) "Damping Formulation for Nonlinear 1D Site Response Analyses". University of Illinois at Urbana Champaign.

Matasovic N., Vucetic M. (1993) "Cyclic Characterization of Liquefiable Sands." ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 119(11), 1805-1822.

Hashash Y., Park D. (2001) "Non-Linear one-dimensional Seismic Ground Motion Propagation in the Mississippi embayment", Engineering Geology, Elsevier.S0013 3-79522.

Hashash Y., Phillips C., Groholski D. (2010) "Recent advances in Non-linear Site Response Analysis". Fifth International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics". San Diego, California.

Bardet J., Tobita T. (2001) "A Computer Program for Nonlinear Earthquake Site Response Analyses of Layered Soil Deposits", University of Southern California. Department of Civil Engineering.

**CAPÍTULO VII:**  
**Evaluación de deformaciones**  
**sísmicas permanentes en taludes**



## CAPÍTULO VII

### EVALUACIÓN DE DEFORMACIONES SÍSMICAS PERMANENTES EN TALUDES

#### 7.1 INTRODUCCIÓN

Las evidencias históricas nos muestran que los eventos sísmicos de gran magnitud han ocasionado deslizamientos de grandes volúmenes de estructuras de tierra, demostrando que en los taludes sometidos a cargas dinámicas se reduce la resistencia de los suelos y puede causar la inestabilidad de dichas estructuras (Kramer, 1996; Das y Luo, 2016). En la Figura 7.1 se muestra una variedad de deformaciones residuales o permanentes de estructuras de tierra que experimentaron sismos pasados. Los tipos de falla se clasifican en 1) deslizamiento superficial de talud poco profundo, 2) superficie de deslizamiento dentro del cuerpo del terraplén, 2') superficie de deslizamiento que alcanza el suelo de cimentación blando, 3) hundimiento y 4) densificación (Towhata, 2008).

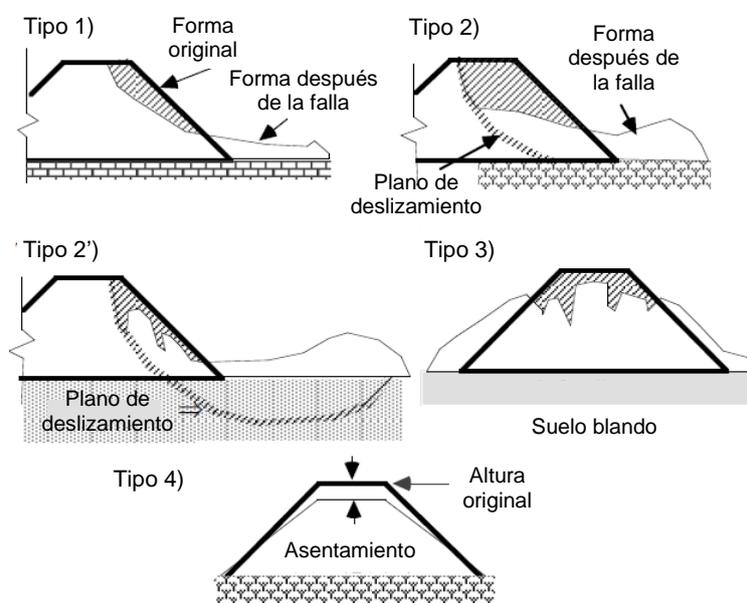


Figura 7.1. Tipos de falla en estructuras de tierra

En esta sección se abarca los tipos 1 y 2 correspondientes a problemas por deslizamientos sísmicos permanentes; el Tipo 2' corresponde al problema de falla por capacidad portante; el tipo 3 corresponde al problema de suelos blandos; y el tipo 4 corresponde a problemas constructivos de la estructura de tierra.

El método usado con frecuencia para evaluar la estabilidad de un talud es el análisis pseudoestático, el cual está basado en el cálculo del factor de seguridad, sin embargo, este método no proporciona información acerca de la deformación, por lo que para estimar las deformaciones sísmicas se emplean los métodos simplificados (Newmark, 1965; Makdisi y Seed, 1978; Rathje y Bray, 1999; Bray y Travasorou 2007; entre otros) y los métodos de elementos finitos.

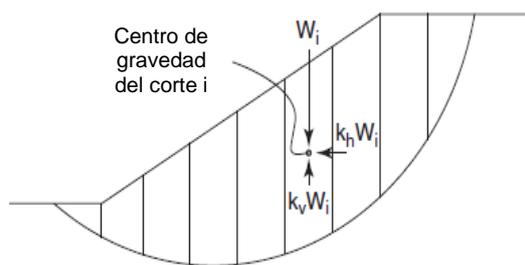
En este capítulo mencionaremos algunos de los métodos simplificados utilizados en la práctica actual y en el ámbito de la investigación.

## **7.2 ANÁLISIS PSEUDOESTÁTICO**

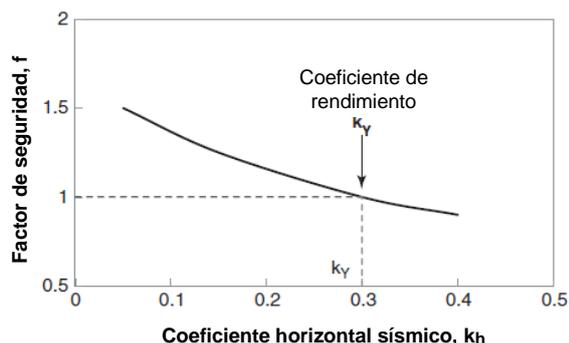
El método pseudoestático consiste en sumar una fuerza estática horizontal y una fuerza vertical en el análisis de equilibrio límite (Figura 7.2). Estas dos fuerzas se eligen para que sean equivalentes a los efectos de las fuerzas dinámicas de inercia generadas durante el sacudimiento de la masa del suelo, suponiendo que son proporcionales al peso  $W$  de la masa deslizante. Los coeficientes son  $k_h$  y  $k_v$  para la dirección horizontal y vertical, respectivamente.

La fuerza sísmica generalmente se coloca en el centro de gravedad de la dovela. Los análisis sísmicos indican que la mayoría de las veces, la aceleración máxima aumenta a medida que la onda se propaga desde la parte inferior hacia la parte superior de la pendiente, con fines prácticos se considera que la fuerza sísmica se ubica en el centro de gravedad de las dovelas.

Otra forma de abordar el problema es encontrar el coeficiente sísmico horizontal  $k_h$  que conduciría a la falla del talud. El valor de  $k_h$  que conduce a un factor de seguridad de 1 proporciona el coeficiente sísmico horizontal de fluencia  $k_y$  (Figura 7.3). Luego, el valor de  $k_y$  se puede comparar con la aceleración máxima del suelo (PGA) del terremoto en la ubicación de la pendiente.



**Figura 7.2.** Fuerzas sísmicas pseudoestáticas



**Figura 7.3.** Coeficiente sísmico de fluencia

El análisis pseudoestático es una herramienta muy útil que permite obtener el potencial de inestabilidad de los taludes, en particular cuando los suelos que la conforman no pierdan significativamente su resistencia (como el caso de licuación de suelos). Este análisis es un proceso simple, en base a un coeficiente sísmico específico y un método de análisis (Bishop, Spencer, Janbu, entre otros). El valor del factor de seguridad (FS) puede proporcionar una idea de los desplazamientos sísmicos permanentes. Si el resultado del análisis de estabilidad pseudoestático de los taludes muestra que es estable ( $FS > 1$ ), entonces se debe calcular los desplazamientos sísmicos.

Duncan y Wright (2005) recopilaron una serie de valores del desplazamiento sísmico tolerable en base a ciertos criterios del coeficiente sísmico establecido por diversos investigadores, como se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Métodos usados en el análisis pseudoestático

(1) Reference	(2) Reference acceleration, $a_{ref}$	(3) Acceleration multiplier, $ala_{ref}$	(4) Strength reduction factor	(5) Minimum factor of safety	(6) Tolerable displacement
Makdisi and Seed (1978)	0.2 g ( $M \approx 6\frac{1}{2}$ )	0.5	0.8	1.15	Approx. 1 m
Makdisi and Seed (1978)	0.75 g ( $M \approx 8\frac{1}{2}$ )	0.2	0.8	1.15	Approx. 1 m
Hynes-Griffin and Franklin (1984)	$PHA_{rock}$	0.5	0.8	1.0	1 m
Bray et al. (1998)	$PHA_{rock}$	0.75	Recommend using conservative (e.g., residual) strengths	1.0	0.30 m for landfill covers; 0.15 m for landfill base sliding
Kavazanjian et al. (1997)	$PHA_{soil}$	0.17 if response analysis is performed	0.8*	1.0	1 m
Kavazanjian et al. (1997)	$PHA_{soil}$	0.5 if response analysis is not performed	0.8*	1.0	1 m

\*For fully saturated or sensitive clays.

### **7.3 ACELERACIÓN DE DISEÑO**

La aceleración máxima del terreno (PGA) es un parámetro importante durante el análisis de estabilidad de taludes y de las deformaciones inducidas por sismo (denominadas deformaciones sísmicas); además los métodos más recientes para determinar las deformaciones sísmicas consideran al espectro de respuesta de aceleración ( $S_a$ ) y la magnitud de momento sísmico ( $M_w$ ). La aceleración se puede determinar por diferentes métodos tales como método simplificado, análisis de respuesta de sitio, peligro sísmico, leyes de atenuación, entre otros.

El método simplificado comúnmente usado para obtener las aceleraciones máximas del terreno es recurrir a las normas de diseño sismorresistente, incluida la norma peruana E.030. La norma E.030 está basada en el análisis de los registros sísmicos en el sitio y el estudio de Peligro Sísmico y Análisis de Respuesta de Sitio. El Mapa de Zona Sísmica (Z) está elaborado para un suelo muy rígido ( $V_{s30}=760$  m/s), cuyo movimiento del suelo es la aceleración máxima; para el perfil de suelo cuyo valor de  $V_{s30}$  es menor a 760 m/s, se debe multiplicar el factor Z por el factor de suelo (S), para obtener la amplificación del movimiento del suelo. La amplificación del movimiento fue simplificada en factores para diferentes tipos de suelos (factor de suelo, S) y en las estructuras (factor de amplificación, C). Por lo que estos métodos, se encuentran simplificados y dependen de las características de la intensidad sísmica, el tipo de suelo y los periodos de vibración de la estructura.

En cuanto al análisis de respuesta de sitio, el procedimiento a seguir se detalla en el capítulo Análisis de Respuesta de Sitio.

### **7.4 PARÁMETROS DE RESISTENCIA**

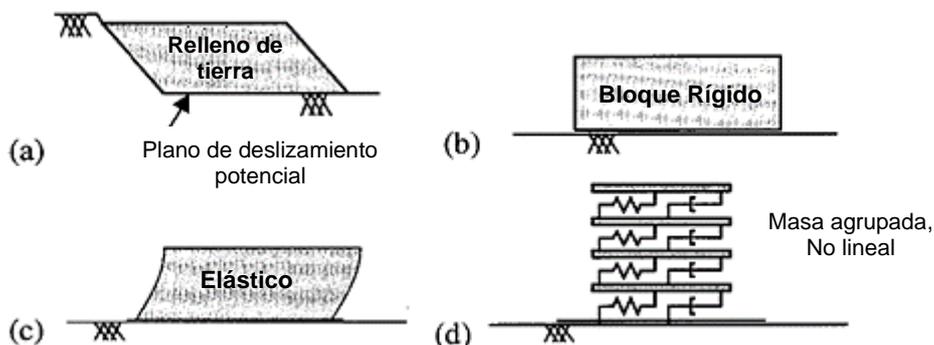
Durante un sismo es necesario comprender que debido a las cargas cíclicas la resistencia cortante del suelo se puede ver reducida por la degradación de la rigidez. Uno de los primeros trabajos que ha considerado la degradación de la resistencia de los suelos fue el trabajo realizado por Makdisi y Seed (1978). En el análisis de estabilidad de taludes de terraplenes es importante seleccionar apropiadamente la resistencia de fluencia para determinar los parámetros de resistencia cortante (Das y Luo, 2016). Esta resistencia frente a las cargas cíclicas está asociada como la resistencia a la fluencia. La resistencia a la fluencia está definida como el esfuerzo máximo cuando el material exhibe un comportamiento elástico al ser sometido a esfuerzos cíclicos similares a los

inducidos por sismo. La magnitud del esfuerzo de fluencia puede estar comprendida entre 80% a 90% de la resistencia no drenada estática.

## 7.5 MODELOS UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE DEFORMACIONES SÍSMICAS

Los métodos que intentan estimar el desplazamiento del talud han utilizado tres tipos de modelos, entre los que se tienen: modelo de bloque rígido, modelo desacoplado y modelo acoplado. El **modelo de bloque rígido** fue propuesto por Newmark (1965), este modelo no consideraba la deformabilidad interna, por lo que posteriormente Makdisi y Seed (1978) incorporaron la respuesta dinámica del suelo y luego analizaron el deslizamiento del bloque rígido, que se le conoce como **modelo desacoplado**. Con esta premisa, varios investigadores estudiaron el efecto no lineal (o lineal equivalente) de la masa deslizante al que denominaron **modelo acoplado**. Chopra y Zhang (1991) mostraron que el análisis de desplazamiento realizado a una presa de concreto mediante el modelo desacoplado da valores más conservadores que el modelo acoplado.

Rathje y Bray (2000) describen las ventajas del modelo acoplado no lineal en comparación al modelo acoplado lineal equivalente y bloque rígido (Figura 7.4). En la Figura 7.4a se muestra la representación de un talud para el análisis, en la Figura 7.4b se muestra la representación de la masa deslizante como un bloque rígido, en la Figura 7.4c se muestra la representación dinámica elástica lineal 1D del bloque deslizante deformable (las propiedades del material son viscoelásticas lineales con la profundidad) y el deslizador acoplado en la base. En la Figura 7.4d se muestra el modelo de masas concentradas 1D del bloque deslizante (incorpora propiedades del suelo completamente no lineales) y el deslizador acoplado en la base.



**Figura 7.4.** Modelo de analizado para estimación del desplazamiento sísmico

Existen varios métodos que permiten estimar el deslizamiento permanente por sismos, en este capítulo solo se mencionarán algunos métodos que serán de ayuda al lector.

## 7.6 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE DESPLAZAMIENTO SÍSMICOS DE ESTRUCTURAS DE TIERRA

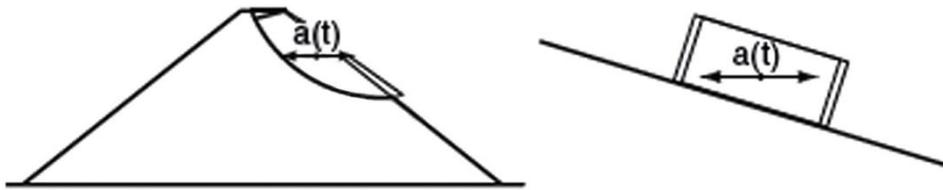
El procedimiento de análisis es usado para terraplenes, presas de tierra, terraplenes e incluso laderas naturales donde se estima que la falla del talud es inminente cuando ocurra un movimiento sísmico.

### a. Método de Newmark (1965)

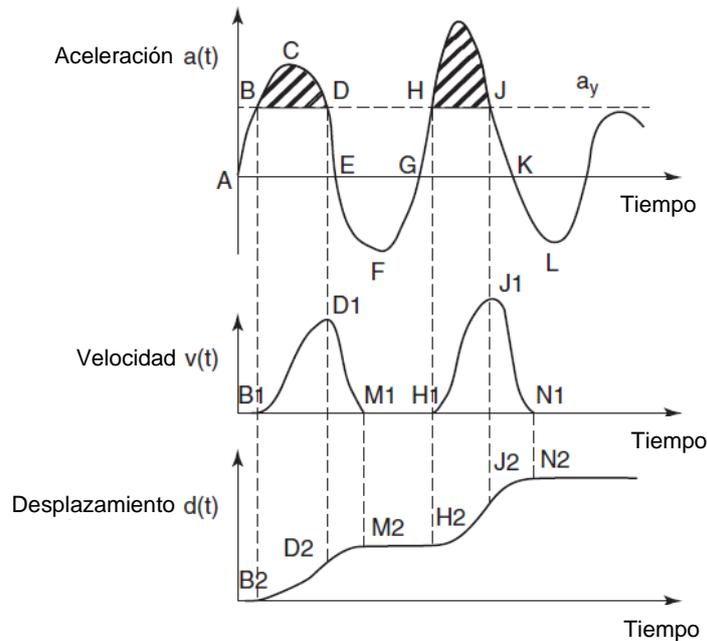
Newmark hizo la analogía del movimiento sísmico del talud con el movimiento de un bloque rígido que se desliza sobre una pendiente rugosa (Figura 7.5).

Cuando el bloque de masa “m” está sujeto a un movimiento cíclico en su base, la fuerza inercial que se genera es “a\*m”, donde “a” es función del tiempo. El bloque empezará a deslizarse hacia abajo cuando la fuerza inercial es mayor a la resistencia friccional; al valor de la aceleración se le denomina aceleración de fluencia “ $a_y$ ”. Cualquier aceleración mayor a “ $a_y$ ” genera un movimiento de deslizamiento del talud durante un incremento del tiempo (puntos B a D, Figura 7.6). Mediante la integración de la aceleración neta [ $a(t) - a_y$ ] de B a D, se encuentra la velocidad de la masa del suelo (puntos B<sub>1</sub> a D<sub>1</sub>). Luego, la velocidad disminuye a medida que la aceleración retrocede por debajo de  $a_y$  y la resistencia cortante reduce la velocidad de la masa del suelo (puntos D<sub>1</sub> a M<sub>1</sub>). Al integrar la velocidad de B<sub>1</sub> a M<sub>1</sub>, se obtiene el desplazamiento de la masa del talud (puntos B<sub>2</sub> a M<sub>2</sub>). En M<sub>2</sub> se ha acumulado un desplazamiento permanente; el desplazamiento aumenta de nuevo cuando la aceleración excede la aceleración de fluencia (punto H). El proceso se repite hasta que el sismo se termine.

El análisis de equilibrio límite es empleado para determinar la aceleración de fluencia. La aceleración de fluencia es expresada como coeficiente sísmico de fluencia  $k_y = a_y/g$ . En el análisis de estabilidad pseudoestático, este coeficiente  $k_y$  es un coeficiente sísmico que genera un factor de seguridad igual a la unidad.



**Figura 7.5.** Modelo de bloque rígido para cálculo de deformaciones sísmicas



**Figura 7.6.** Determinación de deformación permanente - Método de Newmark

### b. Método de Makdisi y Seed (1978)

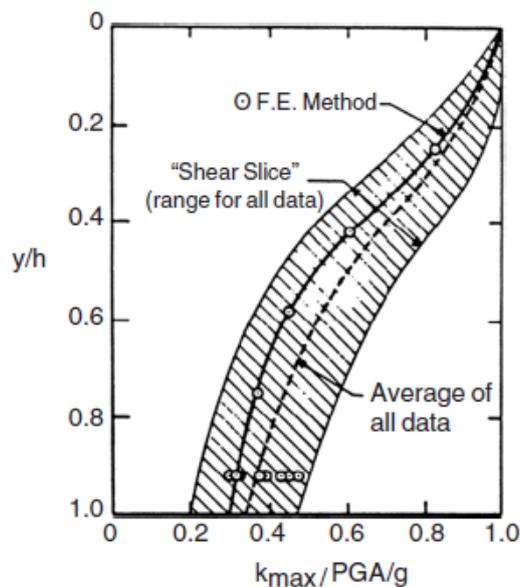
Makdisi y Seed (1978) realizaron un estudio paramétrico de presas de tierra y terraplenes reales e hipotéticos. El análisis fue realizado considerando el método simplificado de Newmark.

El primer paso es la evaluación del potencial de pérdida de resistencia del material. Recomiendan no utilizar este procedimiento si la pérdida de resistencia del material podría ser significativa, por lo que consideran una reducción de la resistencia del 10% al 20% de la resistencia cortante no drenada. La reducción de resistencia se aplica debido al uso del modelo de bloque deslizante rígido, perfectamente plástico, en el que, de usarse la resistencia máxima, la acumulación de deformaciones elastoplásticas no lineales para cargas cíclicas por debajo del valor máximo subestimará significativamente. En base a los parámetros reducidos, se debe determinar el coeficiente  $K_y$  que genera un factor de seguridad igual a la unidad.

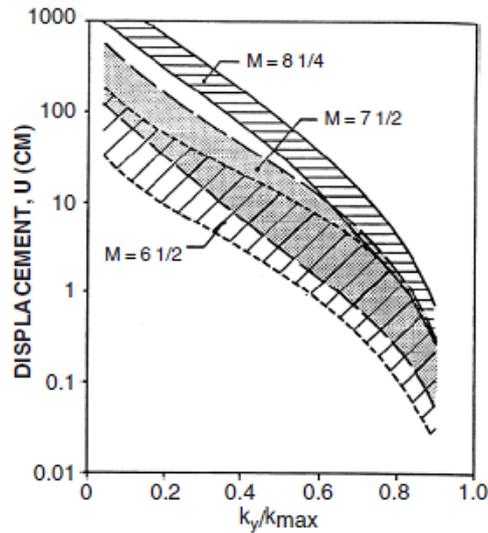
El segundo paso es determinar o estimar el PGA en la cresta de la estructura de tierra, esta se obtiene de un análisis de respuesta de sitio 1D de una columna del suelo (esto genera mucha incertidumbre al obtener el PGA en la cresta), así como la primera frecuencia de vibración de la estructura de tierra (en el Anexo I, se muestra el procedimiento para estimar la frecuencia de vibración, de una estructura de tierra propuesto por Makdisi y Seed).

Luego de obtener los parámetros de resistencia reducidos, el tercer paso es conocer la profundidad del talud ( $z$ ) respecto de la altura total ( $h$ ) que causará los desplazamientos importantes (es decir,  $FS=1$ ), luego se obtiene el coeficiente de fluencia  $K_{y_{max}}$  (a partir de  $K_{y_{max}}/PGA$ ) de la Figura 7.7.

Como cuarto paso se determina el cociente " $K_y/K_{y_{max}}$ " y en función a la magnitud sísmica ( $M$ ) se puede obtener el desplazamiento en la cresta de la presa como se muestra en la Figura 7.8.



**Figura 7.7.** Estimación del coeficiente sísmico  $k_y$  en función de la profundidad y el PGA



**Figura 7.8.** Desplazamiento sísmico vs  $K_y/K_{max}$  y magnitud  $M$  (Makdisi y Seed, 1978).

Es importante precisar que los autores han restringido el uso de este método para terraplenes de arcillas compactas o suelos granulares densos o secos porque puede reducir al 80% de su resistencia estática. Además, los autores mencionan que las curvas obtenidas en las Figuras 7.7 y 7.8 fueron realizadas en base a un número limitado de casos de presas de tierra, por lo que recomiendan que las curvas deben ser actualizadas y refinadas.

### c. Método de Bray y Travararou (2007)

Bray y Travararou (2007) propusieron una relación semiempírica simplificada para estimar los desplazamientos permanentes inducidos por sismo. Esta relación fue establecida utilizando el modelo no lineal acoplado completamente (ver la sección anterior). Dado que la principal fuente de incertidumbre del desempeño de una estructura de tierra durante un sismo es el movimiento de entrada, los autores utilizaron más de 600 movimientos sísmicos para calcular el desplazamiento sísmico. Para el desarrollo de esta relación utilizaron registros de aceleración de sismos continentales (o corteza) superficial, de eventos cuya magnitud de momento ( $M_w$ ) está comprendida entre 5.5 y 7.6 y una distancia hipocentral ( $R$ ) no mayor a 100 km. Este método es aplicable a presas de tierra, laderas naturales, terraplenes o botaderos municipales.

Para estimar el desplazamiento sísmico se deben realizar dos cálculos: primero se calcula la probabilidad de ocurrencia de desplazamiento despreciables ( $D=0$ ), y segundo se calcula el desplazamiento con un valor diferente de cero ( $D>0$ ).

La probabilidad de ocurrencia de desplazamientos despreciables se calcula como:

$$P(D = 0) = 1 - \Phi \left( -1.76 - 3.22 \ln(K_y) - 0.484 T_s \ln(K_y) + 3.52 \ln(Sa_{1.5T_s}) \right)$$

Donde:

$P(D = 0)$	La probabilidad de ocurrencia de desplazamiento cero
$D$	Desplazamiento sísmico
$\Phi$	Función de distribución normal acumulada
$K_y$	Coefficiente de fluencia
$T_s$	Período fundamental de la masa de suelo deslizante, unidades en segundos
$Sa_{1.5T_s}$	Aceleración espectral en el periodo de vibración $1.5T_s$ , unidades en g

El desplazamiento sísmico diferente de cero, en cm, se estima mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(D) = & -1.10 - 2.83 \ln(K_y) - 0.333 \left( \ln(K_y) \right)^2 + 0.566 \ln(K_y) \ln(Sa_{1.5T_s}) \\ & + 3.04 \ln(Sa_{1.5T_s}) - 0.244 \left( \ln(Sa_{1.5T_s}) \right)^2 + 1.50 T_s + 0.278(M - 7) \pm \varepsilon \end{aligned}$$

Donde  $M$  es la magnitud de momento,  $\varepsilon$  es la variable aleatoria de distribución normal, con media igual a cero y una desviación  $\sigma=0.67$ .

Para el caso en que la masa deslizante es muy rígida o tiene un periodo de vibración  $T_s < 0.05s$ , entonces el desplazamiento se puede calcular como:

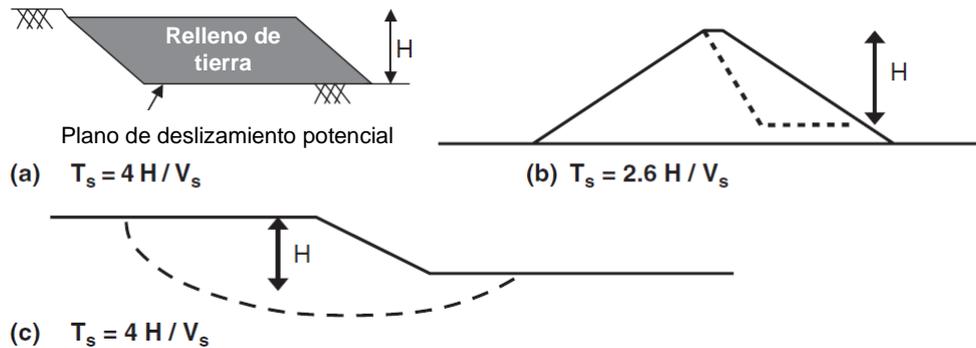
$$\begin{aligned} \ln(D) = & -0.22 - 2.83 \ln(K_y) - 0.333 \left( \ln(K_y) \right)^2 + 0.566 \ln(K_y) \ln(PGA) \\ & + 3.04 \ln(PGA) - 0.244 \left( \ln(PGA) \right)^2 + 0.278(M - 7) \pm \varepsilon \end{aligned}$$

El procedimiento para calcular el desplazamiento es el siguiente:

- 1- Calcular el coeficiente sísmico  $K_y$ , del talud analizado.
- 2- Establecer la resistencia de fluencia del suelo, la que no debe ser inferior al 80%.
- 3- Determinar el período de vibración de la estructura que se desplazará  $T_s = 2.6H/V_s$ ;  $H$ =altura de la masa deslizante,  $V_s$ =velocidad promedio de la masa deslizante.
- 4- Obtener el espectro de aceleración de la base de la masa deslizante.

- 5- Evaluar la probabilidad de ocurrencia de desplazamiento cero  $P(D=0)$
- 6- Calcular del desplazamiento sísmico "D"

Adicionalmente, Bray (2007) menciona algunos métodos prácticos para calcular el período de vibración de la masa deslizante ( $T_s$ ) cuando se realiza el cálculo de los desplazamientos sísmicos, como se muestra en la Figura 7.9.



**Figura 7.9.** Estimación del período fundamental de vibración

#### d. Método de Bray et al., (2018)

Bray et al. (2018) proponen un método simplificado para estimar el desplazamiento sísmico de taludes para estructuras de tierra (presas, terraplenes, entre otros) y laderas que están sujetos a movimientos o sacudidas por sismos de subducción en zonas de interfase. Para esto los autores utilizaron el modelo no lineal acoplado completamente, este modelo captura la influencia del coeficiente de fluencia ( $K_y$ ), el periodo de vibración del fundamental del talud ( $T_s$ ) y la aceleración espectral en el periodo degradado del talud ( $Sa_{1.5T_s}$ ).

La probabilidad de ocurrencia de desplazamientos despreciables se calcula como:

$$P(D = 0) = 1 - \Phi \left( -2.64 - 3.20 \ln(K_y) - 0.17 \left( \ln(K_y) \right)^2 - 0.49 T_s \ln(K_y) + 2.09 T_s + 2.91 \ln(Sa_{1.5T_s}) \right) \quad T_s < 0.7s$$

$$P(D = 0) = 1 - \Phi \left( -3.53 - 4.78 \ln(K_y) - 0.34 \left( \ln(K_y) \right)^2 - 0.30 T_s \ln(K_y) - 0.67 T_s + 2.66 \ln(Sa_{1.5T_s}) \right) \quad T_s > 0.7s$$

Donde:

$P(D = 0)$	La probabilidad de ocurrencia de desplazamientos cero
$D$	Desplazamiento sísmico
$\Phi$	Función de distribución normal acumulada
$K_y$	Coefficiente de fluencia
$T_s$	Periodo fundamental de la masa de suelo deslizando, unidades en segundos
$Sa_{1.5T_s}$	Aceleración espectral en el periodo de vibración $1.5T_s$ debajo de masa deslizando, unidades en g

El desplazamiento sísmico diferente de cero, en cm, se estima mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(D) = a_1 - 3.353\ln(K_y) - 0.390 \left( \ln(K_y) \right)^2 + 0.538\ln(K_y)\ln(Sa_{1.5T_s}) \\ + 3.06\ln(Sa_{1.5T_s}) - 0.225 \left( \ln(Sa_{1.5T_s}) \right)^2 + a_2 T_s + a_3 T_s^2 + 0.55M \pm \varepsilon \end{aligned}$$

Donde:  $K_y, T_s, Sa_{1.5T_s}$ , fueron definidos en párrafos anteriores,  $M$  es la magnitud de momento,  $\varepsilon$  es la variable aleatoria de distribución normal, con media igual a cero y una desviación  $\sigma=0.73$ .

Para los siguientes periodos de vibración los coeficientes  $a_1, a_2, a_3$

$$\begin{aligned} T_s < 0.1s: & \quad a_1 = -5.864; a_2 = -9.421; a_3 = 0.0 \\ T_s \geq 0.1s: & \quad a_1 = -6.896; a_2 = 3.081; a_3 = -0.803 \end{aligned}$$

Para el caso especial donde el bloque es rígido ( $T_s = 0.0$ ), el desplazamiento sísmico se calcula como:

$$\begin{aligned} \ln(D) = -5.864 - 3.353\ln(K_y) - 0.390 \left( \ln(K_y) \right)^2 + 0.538\ln(K_y)\ln(PGA) \\ + 3.06\ln(PGA) - 0.225 \left( \ln(PGA) \right)^2 + 0.55M \pm \varepsilon \end{aligned}$$

Donde el PGA es la aceleración máxima del terreno en la base del movimiento, en unidades de g. Si existen efectos importantes topográficos para analizar el deslizamiento a poca profundidad, el valor de PGA de entrada debe ser ajustado (1.3 veces el valor de PGA para taludes moderados o 1.5 veces el valor de PGA para taludes muy pronunciados). Para masas superficiales potenciales y extensas, debido a la

incoherencia lateral el PGA de entrada se reducirá para el análisis (0.65 veces el valor de PGA para taludes moderados).

### **Coefficiente sísmico pseudoestático**

Los procedimientos de taludes pseudoestático son usados en la ingeniería práctica para evaluar de manera preliminar la estabilidad física pero no ofrecen una evaluación confiable del desempeño. Por lo que seleccionar un coeficiente sísmico en el análisis de estabilidad de taludes es un punto crítico, además este valor es tomado como una fracción de la aceleración máxima del suelo. Para ello Bray y Travararou (2007) propusieron un método racional para seleccionar el coeficiente “k” para usar en el análisis de estabilidad pseudoestático y proporcionaron una evaluación consistente con los análisis de desplazamientos sísmicos propuestos por Bray y Travararou, dichos resultados fueron aplicados a zonas de subducción.

Reescribiendo la ecuación anterior como función de D y los otros parámetros, como sigue:

$$K = \exp\left(\frac{-a + \sqrt{b}}{0.780}\right)$$

Donde:

$$a = 3.353 - 0.538 \ln(Sa_{1.5T_s})$$

$$b = a^2 - 1.56 \ln(D_a) - a_1 - 3.06 \ln(Sa_{1.5T_s}) + 0.225 (\ln(Sa_{1.5T_s}))^2 - a_2 T_s - a_3 T_s^2 + 0.55M - \varepsilon$$

$\varepsilon = \sigma = 0.73$ . Para los siguientes periodos de vibración los coeficientes  $a_1, a_2, a_3$

$$T_s < 0.1s: \quad a_1 = -5.864; \quad a_2 = -9.421; \quad a_3 = 0.0$$

$$T_s \geq 0.1s: \quad a_1 = -6.896; \quad a_2 = 3.081; \quad a_3 = -0.803$$

Para obtener el valor de K, el diseñador deberá establecer un desplazamiento sísmico admisible y el cálculo debe ser recursivo de tal manera que se debe verificar el valor del coeficiente de fluencia.

Por lo tanto, para estimar el desplazamiento sísmico empleando los métodos de Bray y Travararou (2007) y Bray et al. (2018) se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Verificar que los suelos que conforman la estructura de tierra no pierdan su resistencia de manera significativa.
- Seleccionar un desplazamiento admisible.
- Estimar el periodo de vibración de la masa deslizante ( $T_s$ ).
- Caracterizar la demanda sísmica en el sitio ( $S_{a1.5T_s}$ ) y ( $M_w$ ).
- Calcular el coeficiente sísmico  $K$ .
- Evaluación de la probabilidad de ocurrencia de desplazamiento cero  $P(D=0)$ .
- Cálculo del desplazamiento sísmico "D".

## REFERENCIAS

Bray J. (2007). "Simplified Seismic Slope Displacement Procedures", from Chap 14 of Earthquake Geotechnical Engineering, Pitilakis, 2007, page 327-353.

Bray, J. D., and Travararou, T. (2007). "Simplified procedure for estimating earthquake-induced deviatoric slope displacements". Journal of Geotechnical Geoenvironmental Engineering., DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2007)133:4(381), 381–392.

Bray J., Macedo J., Travararou T. (2018). "Simplified Procedure for Estimating Seismic Slope Displacements for Subduction Zones". J. Geotech. Geoenvironmental. Eng., 2018, 144(3): 04017124.

Chopra, A. K., and Zhang, L. (1991). "Base sliding response of concrete gravity dams to earthquakes." Rep. No. UCB/EERC-91/05, Univ. of California, Berkeley, CA.

Das B.M., Luo Z. (2016). "Principles of Soil Dynamics". 3rd Edition, International Edition. CENGAGE Learning.

Duncan J.M., Wright S. (2005) "Soil Strength and Slope Stability". Wiley& Sons Inc. ISBN 0-471-69163-1. USA.

Kramer S.L. (1996). "Geotechnical Earthquake Engineering". Ed. Prentice Hall. New Jersey – USA.

Makdisi F.I., Seed HB. (1978). "Simplified procedure for estimating dam and embankment earthquake-induced deformations". *Journal of Geotechnical Engineering*, 104(7), 849–867.

Newmark, N. (1965). "Effects of earthquakes on dams and embankments." *Geotechnique*, 15(2), 139–160.

Rathje E.M., Bray J.D. (1999) "An examination of simplified earthquake induced displacement procedures for earth structures". *Canadian Geotechnical Journal* 36: 72–87.

Rathje E.M., Bray, J. D. (2000). "Nonlinear coupled seismic sliding analysis of earth structures." *Journal Geotechnical Geoenvironmental Engineering*, DOI 10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:11(1002), 1002–1014.

Towhata I. (2008) "Geotechnical Earthquake Engineering". Ed. Prentice Hall. New Jersey. USA.

## **ANEXO I**

### **UN PROCEDIMIENTO SIMPLIFICADO PARA CALCULAR LAS ACELERACIONES MÁXIMAS DE LA CORONA Y EL PERIODO NATURAL DE TERRAPLENES**

Por

F.I. Makdisi y H.B. Seed

#### **INTRODUCCION**

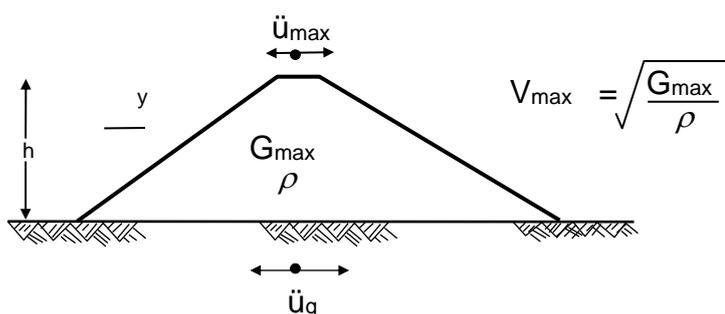
Para muchos tipos de terraplenes construídos con arenas secas o muy densas o suelos arcillosos, puede estimarse la magnitud de la deformación que induce un sismo a partir del conocimiento de la aceleración de fluencia de una masa potencial deslizante, la aceleración máxima en la corona de la presa producida por el sismo, y el período natural de vibración de la presa (Makdisi y Seed, 1877). La aceleración de fluencia, es decir, la aceleración promedio a la cual se induce una falla incipiente en la masa potencial deslizante, se determina de los parámetros de resistencia del suelo y un método apropiado de análisis de estabilidad.

La aceleración máxima de la corona inducida en el terraplén y su período natural pueden determinarse fácilmente mediante el análisis de elementos finitos (Clough y Chopra, 1966; Idriss y Seed, 1967) de la sección del terraplén, o el análisis de rebanadas de corte (Ambraseys, 1960; Seed y Martín, 1966). Sin embargo, para muchos propósitos, un procedimiento simplificado puede proporcionar evaluaciones de estas características de los terraplenes con suficiente aproximación para muchos propósitos prácticos. Se describe en este artículo este procedimiento que permite el cálculo por métodos manuales, de la aceleración máxima en la corona y el período natural de un terraplén debido a una carga sísmica específica. El método también permite, por medios iterativos, el empleo de propiedades del material dependientes de la deformación. Se describe los pasos involucrados en este procedimiento y se resuelve un ejemplo para comparar los resultados del método aproximado con aquellos obtenidos de una solución de elementos finitos.

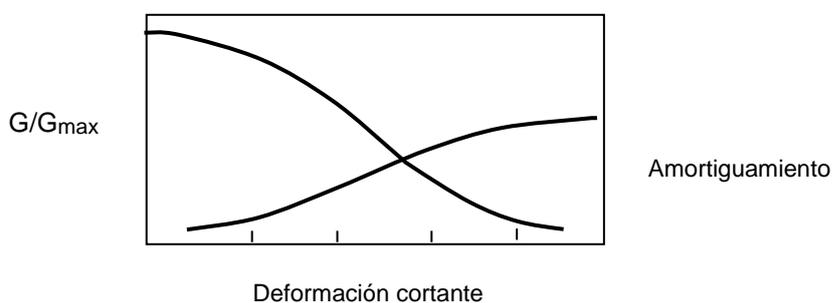
## 1. EVALUACIÓN DE PROPIEDADES INICIALES

Se considera la sección de la presa mostrada en la Figura 1 (a) con altura  $H$ , velocidad de onda de corte  $v_{\max}$  y una densidad de masa  $\rho$ . La sección se asume que es homogénea y de longitud infinita. El módulo de corte máximo,  $G_{\max}$  se relaciona a la velocidad de ondas de corte,  $v_{\max}$  por:

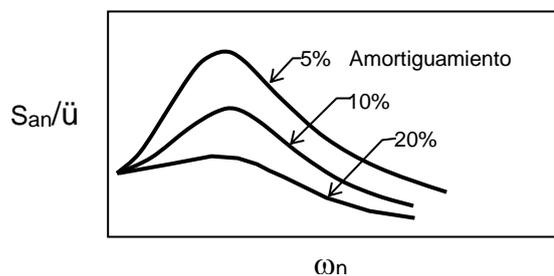
$$G_{\max} = \rho v_{\max}^2 \quad (1)$$



(a) Sección de Presa Homogénea



(b) Propiedades del Suelo Dependientes de la Deformación



(c) Espectro de Respuesta de Aceleración

**Figura 1.** Cálculo de la máxima aceleración en la corona y periodo natural (Método Aproximado)

Para la primera iteración de cálculo se asume cualquier valor inicial de G, y se determina la relación  $G/G_{\max}$ . De la Figura 1 (b), se determina los valores de deformación por cortante  $\gamma_{av}$  y amortiguamiento  $\lambda$ .

## 2. CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN MÁXIMA Y EL PERÍODO NATURAL

En la derivación de la teoría de rebanada de corte de una sección de presa con las propiedades descritas antes, la expresión de la aceleración en cualquier nivel, y, en función del tiempo es:

$$\ddot{u}(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\beta_n y/h)}{\beta_n J_1(\beta_n)} W_n V_n(t) \quad (2)$$

donde :

$J_0, J_1$  = funciones Bessel de primera clase de orden cero y uno

$\beta_n$  = el valor cero de la ecuación de frecuencia  $J_0(\omega h \sqrt{P/G}) = 0$

$W_n$  =  $B_n V_s/h$ , donde  $V_s = \sqrt{G/P}$

= frecuencia natural del modo n-ésimo.

La integral de Duhammel,  $V_n(t)$ , está dada por la expresión:

$$V_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g e^{-\lambda_n \omega_n(t-\tau)} \text{sen}[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (3)$$

donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\lambda_n^2} \approx \omega_n$  para valores pequeños de  $\lambda_n$

$\lambda_n$  = fracción de amortiguamiento crítico.

Luego, 
$$\ddot{u}(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) W_n V_n(t) \quad (4)$$

donde 
$$\phi_n(y) = \frac{2J_0(\beta_n y/h)}{\beta_n J_1(\beta_n)}$$

= factor de participación modal

Considerando los tres primeros modos de vibración, los valores correspondientes a  $\beta_n$  son siempre;  $\beta_1 = 2.4$ ,  $\beta_2 = 5.52$ ,  $\beta_3 = 8.65$  y los valores correspondientes de las primeras frecuencias naturales son:

$$\begin{aligned} W_1 &= 2.4 \text{ Vs/h} \\ W_2 &= 5.52 \text{ Vs/h} \\ W_3 &= 8.65 \text{ Vs/h} \end{aligned} \quad (5)$$

En la corona de la presa,  $y = 0$  y los valores correspondientes de los factores de participación modal  $\phi_n(0)$  para los tres primeros modos están dados por:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1.6 \\ \phi_2(0) &= 1.06 \\ \phi_3(0) &= 0.86 \end{aligned} \quad (6)$$

El valor de la aceleración en la corona para cada modo está dado por la expresión:

$$\ddot{u}(0,t) = \phi_n(0) W_n V_n(t) \quad (7)$$

y el valor máximo de la aceleración de la corona en cada modo está dado por:

$$\ddot{u}_{n\max} = \phi_n(0) W_n S_{vn} \quad (8)$$

donde  $S_{vn}$ , conocido como velocidad espectral, es el valor máximo de  $V_n(t)$ , y es función de  $W_n$ ,  $\lambda_n$  y las características del movimiento del terreno  $\ddot{u}_g(t)$ . Para valores pequeños de  $\lambda_n$ , la aceleración espectral  $S_{an}$  es aproximadamente igual a  $W_n$  y  $S_{vn}$ , por lo que la expresión para la aceleración máxima en la corona para cada modo puede escribirse como:

$$\ddot{u}_{n\max} = \phi_n(0) S_{an} \quad (9)$$

El valor de  $S_{an}'$  en función de  $W_n$  y  $\lambda_n$  está disponible fácilmente para la mayoría de registros sísmicos, habiendo sido publicados por varios autores (Housner, 1959; Newmark y Hall, 1969; Newmark, Blume y Kapur, 1973; Seed, Ugas y Lysmer, 1976).

La aceleración máxima en la corona para los tres primeros modos está dada por:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{1\max} &= \phi_1(o) Sa_1 = 1.6 Sa_1 \\
\ddot{u}_{2\max} &= \phi_2(o) Sa_2 = 1.06 Sa_2 \\
\ddot{u}_{3\max} &= \phi_2(o) Sa_3 = 1.06 Sa_3
\end{aligned}
\tag{10}$$

Como los valores máximos en cada modo ocurren a diferentes tiempos, los valores máximos de la aceleración de la corona se determinan por la raíz cuadrada de la suma de cuadros de las aceleraciones máximas de los tres primeros modos, luego:

$$\ddot{u}_{1\max} \left[ \sum_{n=1}^3 (\ddot{u}_{n\max})^2 \right]^{1/2}
\tag{11}$$

Por lo tanto, habiendo determinado el valor de  $V_s$  y  $\lambda$  en el paso (1), se emplea la ecuación (5) para determinar los valores correspondientes de las tres primeras frecuencias naturales.

Estas se emplean luego en la Figura 1 (c) para determinar los valores correspondientes de aceleración espectral, y con las ec. 10 y 11 se calcula el valor de la aceleración máxima en la corona.

### 3. CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN CORTANTE PROMEDIO

Para estimar la deformación compatible con las propiedades del material, debe determinarse una expresión para la deformación cortante promedio en la sección total. De la teoría de rebanadas de corte, la expresión para la deformación a cualquier nivel en el terraplén como función del tiempo está dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma(y,t) &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\beta_n y/h)}{h W_n J_1(\beta_n)} \right] V_n(t) \\
&= \frac{h}{V S^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\beta_n y/h)}{\beta_n^2 J_1(\beta_n)} W_n V_n(t)
\end{aligned}
\tag{12}$$

Luego

$$\gamma(y,t) = \frac{h}{VS^2} \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(y) W_n V_n(t)
\tag{13}$$

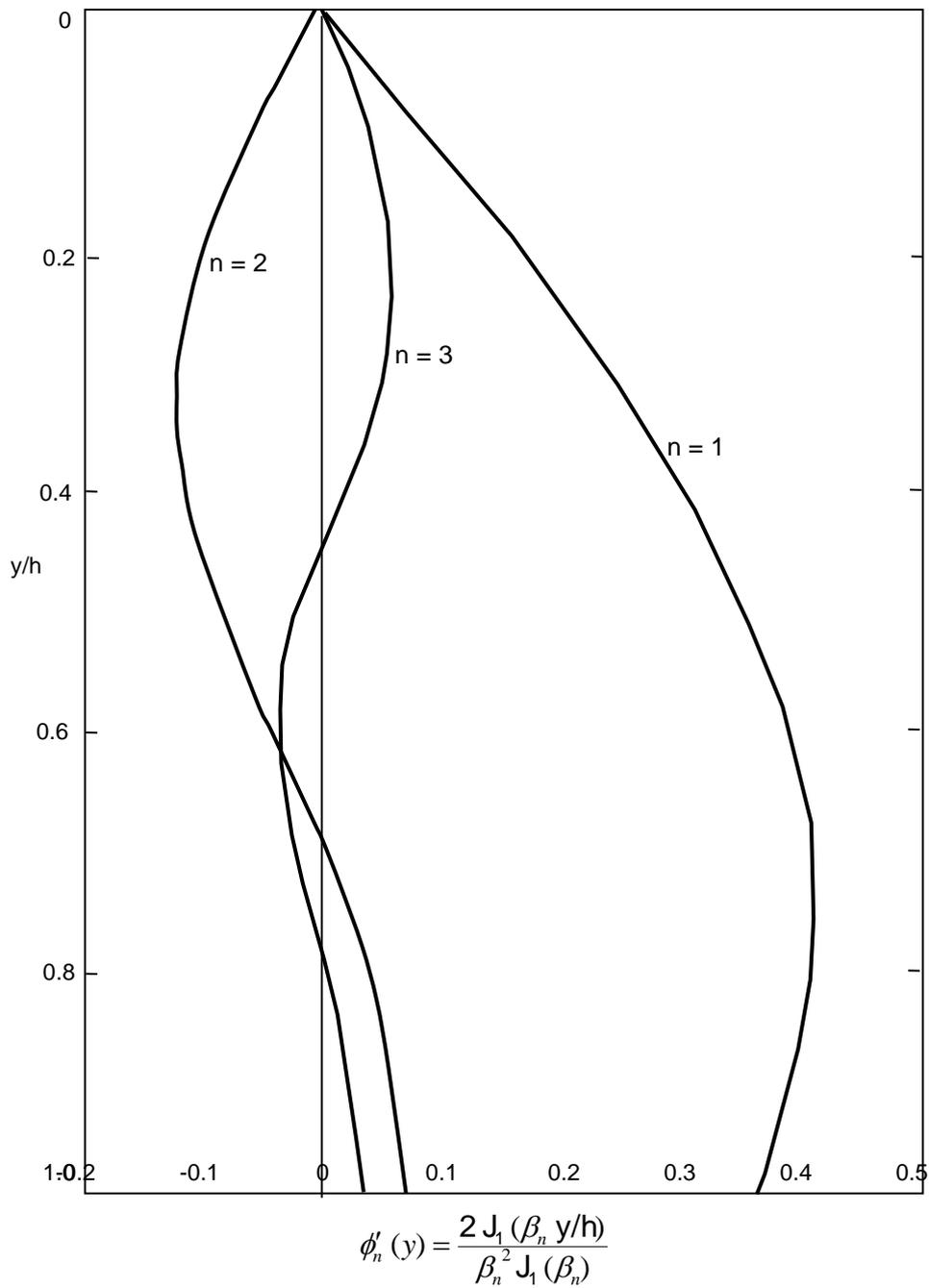
donde

$$\phi'_n(y) = \frac{2J_1(\beta_n y/h)}{\beta_n^2 J_1(\beta_n)} \quad (14)$$

= factor de participación modal de deformación cortante

La variación de  $\phi'_n$  con la profundidad para los tres primeros modos (Martín, 1985), se muestran en la Figura 2. Considerando las contribuciones pequeñas de los modos altos comparadas con el primer modo en toda la profundidad, es suficiente para propósitos prácticos, considerar la contribución de solo el primer modo en el cálculo de la deformación cortante promedio. Por lo tanto, de la ec. 13, la expresión para la deformación cortante máxima a cualquier nivel,  $y$ , puede escribirse como:

$$\gamma_{\max}(y) = \frac{h}{V_S^2} \phi_1'(y) S a_1 \quad (15)$$



**Figura 2.** Variación de factores de participación modal de deformación cortante con profundidad teoría de rebanada de corte. (Martín, 1965)

Donde  $\phi_1'$  es el factor de participación del primer modo, como se muestra en la Figura 2 y  $S a_1$  es la aceleración espectral que corresponde a la primera frecuencia natural  $W_1$ .

La deformación cortante máxima promedio para la sección total puede determinarse mediante el cálculo de un valor promedio  $(\phi'_1)_{ave}$  del primer factor de participación modal en la Figura 2:

$$\phi'_n \text{ ave} = \frac{1}{5} \text{ ave} (0.38 + 0.41 + 0.35 + 0.24 + 0.1) \quad (16)$$

$$\text{y} \quad (\gamma_{ave})_{\max} = \frac{h}{V S^2} (\phi'_1)_{ave} S a_1 \quad (17)$$

Asumiendo que la deformación cortante equivalente cíclica es aproximadamente 65% de la deformación cortante promedio máxima,  $(\gamma_{ave})_{\max}'$  luego

$$(\gamma_{ave})_{eq} = 0.65 \times 0.3 \times \frac{h}{V S^2} S a_1 \quad (18)$$

Habiendo obtenido un nuevo valor para la deformación cortante promedio de la ec. 18, un nuevo conjunto de valores de módulo y amortiguamiento puede determinarse de la Figura 1 (b). Si estos valores son diferentes de aquellos asumidos en el paso (1), debe realizarse una nueva iteración comenzando del paso (2), debiendo repetirse el proceso hasta obtener propiedades compatibles con la deformación. El proceso converge usualmente en tres iteraciones.

### Problema del Ejemplo

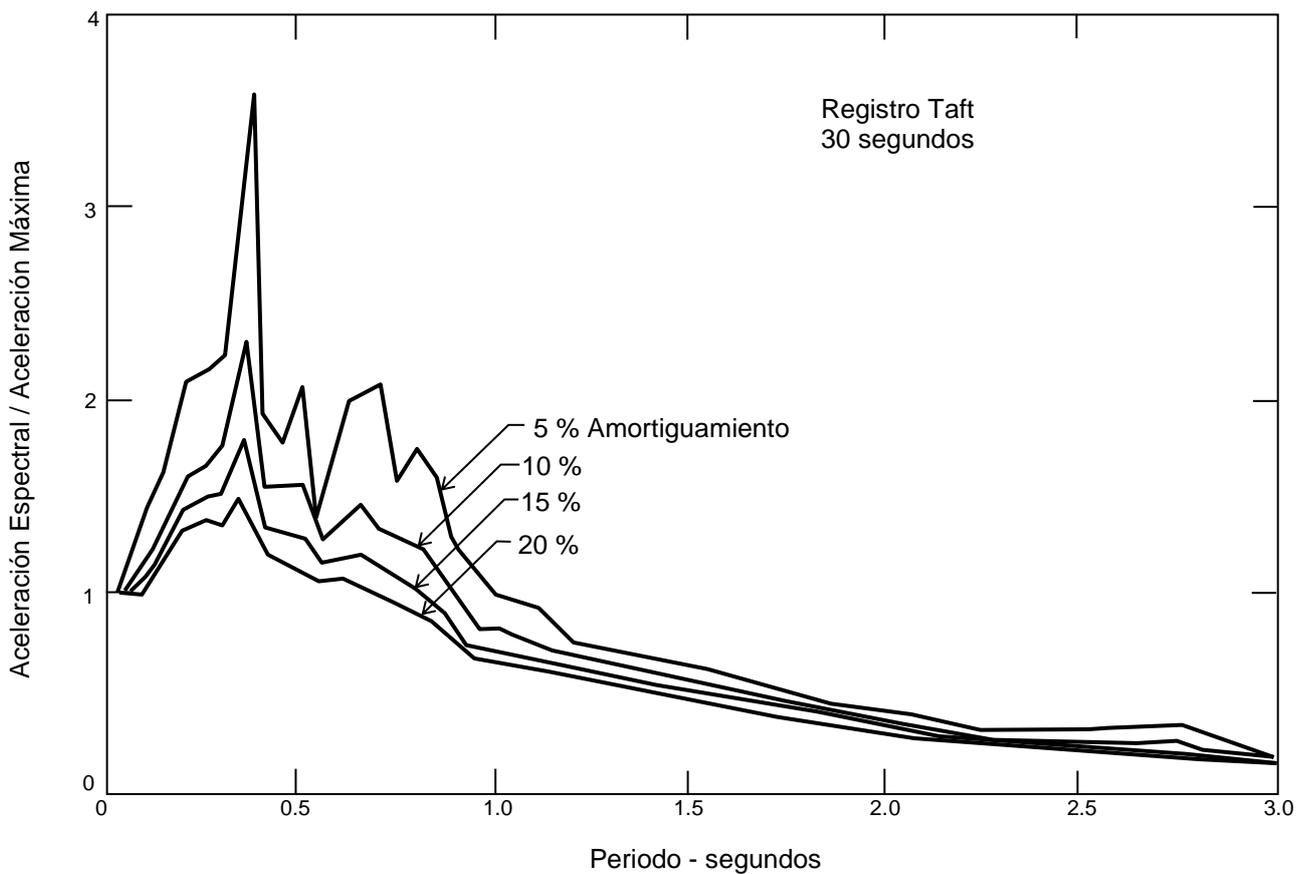
Para evaluar la precisión del método aproximado propuesto, se calculará la respuesta de un terraplén de 150 pies de altura, para el cual se ha obtenido una solución con el método de elementos finitos.

En la solución de elementos finitos, el módulo cortante máximo se calculó como una función de la raíz cuadrada del esfuerzo efectivo de confinamiento; por lo tanto, un promedio ponderado basado en los valores de todos los elementos fue calculado, siendo este valor usando para la sección homogénea analizada por el método aproximado. Las propiedades del terraplén son:

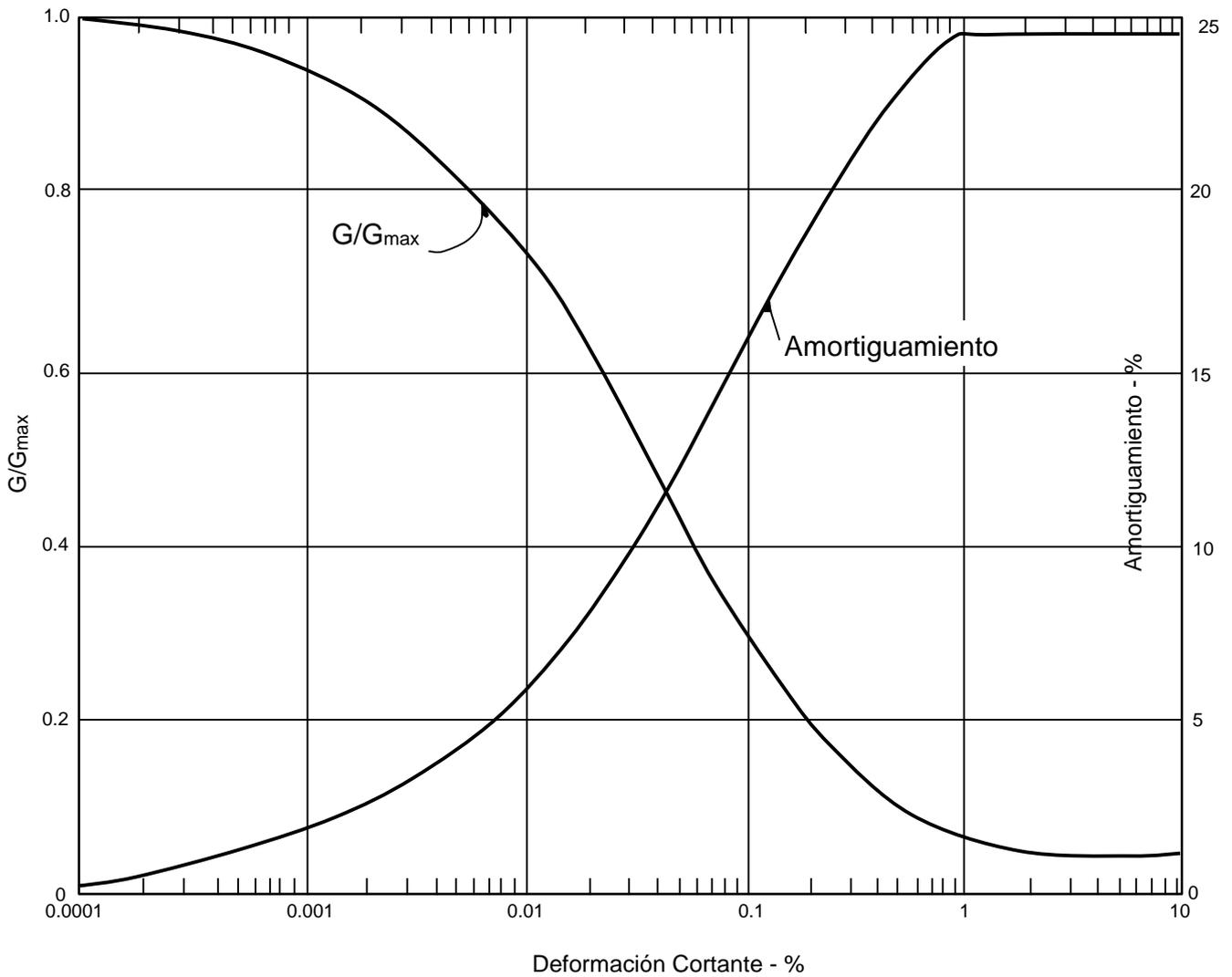
Altura, h	= 150 pies
Peso unitario, $\gamma$	= 130 lbs/pie <sup>3</sup>
Densidad de masa, $\rho$	= 4.04 slugs/pie <sup>3</sup>

Módulo cortante máx,p,  $G_{max}$  = 3650 Kips/pie<sup>2</sup> (promedio)  
Velocidad de onda de corte máxima,  $V_{max}$  = 950 pie/seg.

La respuesta por elementos finitos fue calculada para aceleraciones del terreno obtenidos de la componente N-S del registro de Taft del sismo de Ken Country (1952), ajustado para tener una aceleración máxima de 0.2 g. Un gráfico del espectro de respuesta normalizado de este registro se presenta en la Figura 3. Las propiedades de módulo y amortiguamiento, dependientes de deformación, empleadas en el análisis se presentan en la Figura 4.



**Figura 3.** Espectro de respuesta normalizado de aceleraciones-registro TAFT  
(Componente N.S.)



**Figura 4.** Modulo cortante y amortiguamiento empleados en cálculos de respuesta

**Iteración 1**

Asuma  $V_s = 600$  pies/seg  
 $V_s/V_{max} = 600/950 = 0.63$   
 y  $G/G_{max} = (V_s/V_{max})^2 = 0.4$   
 De la Figura 4 para  $G/G_{max} = 0.4$

Deformación cortante = 0.06%

y  $\lambda = 13\%$

De la ec. 5

$$\begin{aligned}W_1 &= 2.4 \times 600/150 = 9.6 \text{ rad/seg}, & T_1 &= 0.65 \text{ segs} \\W_2 &= 5.52 \times 600/150 = 22.1 \text{ rad/seg}, & T_2 &= 0.284 \text{ segs} \\W_3 &= 8.65 \times 600/150 = 34.6 \text{ rad/seg}, & T_3 &= 0.182 \text{ segs}\end{aligned}$$

Los valores de la aceleración espectral para  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  se obtienen de la Figura 3 para  $\lambda = 13\%$ , y de la ec. 10 se obtienen:

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{\max} &= 1.6 \times 0.26 = 0.416 \text{ g} \\ \ddot{u}_{2\max} &= 1.6 \times 0.316 = 0.335 \text{ g} \\ \ddot{u}_{3\max} &= 0.86 \times 0.29 = 0.249 \text{ g}\end{aligned}$$

de la ec. 11, la aceleración máxima en la corona

$$\ddot{u}_{\max} = 0.59 \text{ g}$$

la deformación promedio equivale de la ec. 18 es luego:

$$\begin{aligned}(\gamma_{ave})_{eq} &= 0.65 \times 0.3 \times \frac{150}{(600)^2} \times 0.26 \times 32.2 \\ &= 0.068\%\end{aligned}$$

## Iteración 2

De la Figura 4 para la deformación cortante = 0.068%

$$\begin{aligned}G/G_{\max} &= 0.36 \\ \lambda &= 13.7\%\end{aligned}$$

$$y \quad V_S/V_{\max} = 0.6 \quad V_S = 570 \text{ pies/seg}$$

$$\begin{aligned}W_1 &= 2.4 \times 570/150 = 9.12 \text{ rad/seg}, & T_1 &= 0.69 \text{ segs} \\ W_2 &= 5.52 \times 570/150 = 20.97 \text{ rad/seg}, & T_2 &= 0.3 \text{ segs} \\ W_3 &= 8.65 \times 570/150 = 32.87 \text{ rad/seg}, & T_3 &= 0.19 \text{ segs}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \quad \ddot{u}_{1\max} &= 1.6 \times 0.244 = 0.39 \text{ g} \\
 \ddot{u}_{2\max} &= 1.06 \times 0.32 = 0.339 \text{ g} \\
 \ddot{u}_{3\max} &= 0.86 \times 0.294 = 0.253 \text{ g} \\
 \ddot{u}_{\max} &= 0.575 \text{ g}
 \end{aligned}$$

Repitiendo los mismos cálculos para la Iteración N° 3, se obtienen los siguientes resultados.

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{u}_{\max} &= 0.57 \text{ g} \\
 T_o &= 0.7 \text{ segs} \\
 \gamma_{ave} &= 0.07\% \\
 G &= 1270 \text{ Kip} / \text{pie}^2 \\
 \lambda &= 14\%
 \end{aligned} \right\} \text{Procedimiento Aproximado}$$

La solución de elementos finitos dio los siguientes resultados:

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{u}_{\max} &= 0.51 \text{ g} \\
 T_o &= 0.75 \text{ segs} \\
 \gamma_{ave} &= 0.065\% \\
 (G)_{ave} &= 1410 \text{ Kip} / \text{pie}^2 \\
 (\lambda)_{ave} &= 11\%
 \end{aligned} \right\} \text{Solución de Elementos finitos}$$

Como puede apreciarse de la comparación anterior, existe una buena concordancia entre los resultados obtenidos por el procedimiento aproximado y aquellos del cálculo por elementos finitos. Aparecería que para propósitos prácticos el procedimiento descrito puede emplearse para estimar la aceleración máxima en la corona y el período natural de un terraplén sujeto a un movimiento de base dado. Estos valores pueden utilizarse en la estimación de los desplazamientos permanentes inducidos por sismo, como en el método descrito por Makdisi y Seed, 1977).

## RECONOCIMIENTO

El estudio descrito se realizó bajo el auspicio de la National Science Foundation (Grant ENV 75-21875). Se reconoce el apoyo brindado por la National Science Foundation.

## REFERENCIAS

Ambraseys, N.N. (1960) "The Seismic Stability of Earth Dams, "Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, Japan, 1960, Vol. III.

Clough, R.W. y Chopra, A.K. (1966) "Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, "Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 92, N°. EM", Proceedings Paper 4793, April, pp. 197-212.

Housner, G.W. (1959), "Behavior of Structures during Earthquakes, "Proceedings, ASCE, Vol. 85, N° EM4, October 1959.

Idriss, I.M. y Seed, H.B. (1967) "Response of Earth Banks During Earthquakes, "Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, N° SM3, May, pp. 61-82.

Makdisi, F.I. y Seed, H. Bolton (1977) "A Simplified Procedure for Estimating Earthquake-Induced Deformation in Dams and Embankments, "Report EERC-77-19, University of California, Berkeley.

Martín, G.R. (1965) "The Response of Earth Dams to Earthquakes, "Thesis submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, University of California, Berkeley.

Newmark, N.M. Blume, J.A. y Kapur, K. (1973) "Design Response Spectra for Nuclear Power Plants, "National Structural Engineering Meeting, ASCE, San Francisco, April.  
Newmark, N.M. y Hall, W.J. (1969) "Seismic Design Criteria for Nuclear Ractor Facilities, "Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile.

Seed, H.B. y Martín, G.R. (1966) "The Seismic Coefficient in Earth Dam Desing, "Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 92, N°. SM3, May.

Seed, H. Bolton, Ugas, C. y Lysmer, J. (1976) "Site-Dependent Spectra for Earthquake Resistant Design, "Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, N° 1, pp. 221-244, February.

# **CAPÍTULO VIII: Cimentación de Maquinarias**



## **CAPÍTULO VIII**

### **CIMENTACIÓN DE MAQUINARIAS**

#### **8.1. INTRODUCCIÓN**

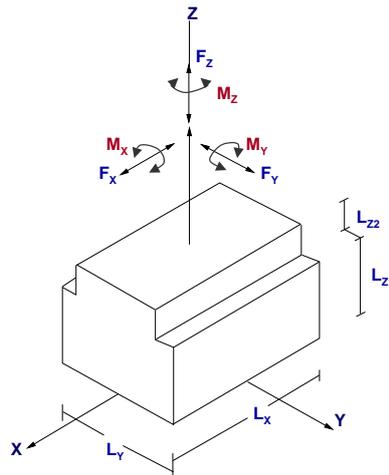
El análisis y diseño de las cimentaciones y estructuras sometidas a cargas de vibración es considerado un problema de alto nivel de complejidad, debido a que el comportamiento dinámico del suelo y la interacción suelo-estructura manejan diferentes variables y formulaciones sustentadas en la teoría de vibraciones. La cimentación de maquinarias contempla diferentes especialidades de la ingeniería civil, principalmente la especialidad de Geotecnia y Estructuras.

En el análisis de la cimentación de una máquina, la carga dinámica se aplica de manera cíclica y repetitiva sobre un periodo largo, lo que ocasiona que el suelo presente un comportamiento de tipo elástico, y ocasiona que la deformación se incremente con cada ciclo de carga hasta que el comportamiento del suelo alcance niveles tolerables de deformación. La amplitud del movimiento de la máquina y su frecuencia de operación son los parámetros de mayor importancia en el análisis y diseño de la cimentación de maquinarias.

En este capítulo se menciona la teoría referente a las oscilaciones verticales y balanceo que se someterá a la cimentación, así como la ecuación del movimiento que la rigen, las deformaciones máximas que se pueden estimar, y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento que representen el comportamiento del suelo sujeto a cargas armónicas; algunos de los modelos equivalentes de cimentación de maquinarias; y los criterios para el diseño de cimentación de maquinarias.

#### **8.2. GRADOS DE LIBERTAD**

Las cimentaciones son modeladas como un cuerpo rígido que posee seis grados de libertad, las cuales se agrupan en tres grados de traslación y tres grados de rotación, tal como se muestra en la Figura 8.1.



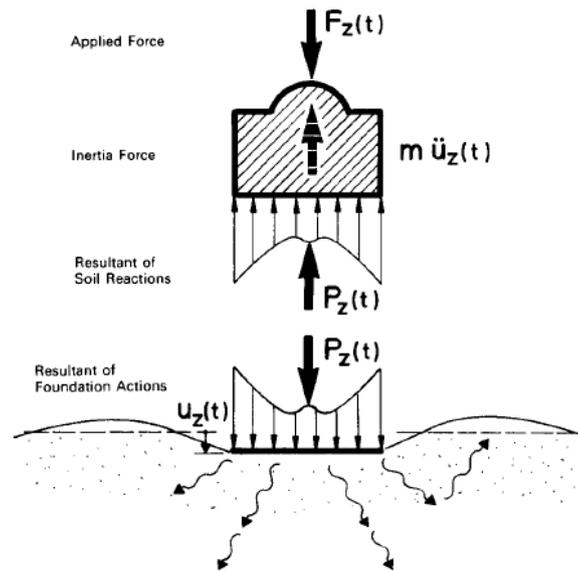
**Figura 8.1.** Grados de libertad de la cimentación de maquinaria

El método general se presenta para calcular los desplazamientos y rotación dinámica debido a las cargas dinámicas armónicas (fuerzas o momentos) en estado estacionario. Las oscilaciones armónicas son utilizadas debido a que las máquinas producen un desbalance de fuerzas armónicas en el tiempo (rotación o reciprocantes), sin embargo, las fuerzas no armónicas pueden surgir como fuerzas de martilleo o sismo, por lo que en ambos casos estas fuerzas se pueden descomponer en funciones armónicas mediante el análisis de Fourier.

Se debe comprender el comportamiento del terreno frente a la vibración inducida por maquinarias sometidas a fuerzas verticales y transversales armónicas y de momentos armónicos, por lo que generan oscilación vertical, transversal y de balanceo respectivamente.

### 8.3. OSCILACIÓN VERTICAL

La Figura 8.2 muestra un cuerpo o cimiento rígido de masa "m" que tiene un eje vertical de simetría "z" que pasa por el centroide del contacto suelo-cimentación. La cimentación descansa sobre un depósito de suelo horizontal, la cual está sujeta a una fuerza vertical armónica  $F_z(t)$  a lo largo del eje z, esta cimentación experimenta sólo el desplazamiento vertical armónico  $u_z(t)$ , por lo que debe determinarse  $u_z(t)$ , debido a la presencia de  $F_z(t)$ .



**Figura 8.2.** Cimentación rígida sometida a una carga armónica (Gazetas, 1991)

Para ello se considera por separado el movimiento de cada cuerpo, es decir el bloque de cimentación y el suelo de fundación. Los diagramas de cuerpo libre son presentados en la Figura 8.2, diagrama en el que se incluye la fuerza inercial. El bloque actúa sobre el suelo generando una reacción igual y de reacción opuesta, distribuida de forma desconocida, y además tiene una resultante desconocida  $P_z(t)$ .

Del equilibrio dinámico del bloque se tiene:

$$-P_z(t) - m\ddot{u}_z(t) = F_z(t) \quad (8.1)$$

Y de la deformación lineal de suelo, la fuerza sobre el terreno es:

$$P_z(t) = \chi_z u_z(t) \quad (8.2)$$

Donde  $\chi_z$  es la **impedancia vertical dinámica** del sistema suelo-cimiento. Por tanto, según la ecuación 8.2 resuelta en la ecuación 8.1, se obtiene lo siguiente:

$$m\ddot{u}_z(t) + \chi_z u_z(t) - F_z(t) = 0 \quad (8.3)$$

De acuerdo con esta ecuación, es evidente que, para resolver la ecuación dinámica de la vibración producida por la maquinaria, necesariamente se debe determinar la impedancia  $\chi_z$ .

La teoría y los experimentos (Arya et al., 1981) han demostrado que una carga armónica  $P_z$  aplicada sobre el terreno y el desplazamiento armónico  $u_z$  resultante tienen la misma frecuencia  $\omega$ , pero ésta tiene un desfase. Ambas cantidades armónicas se escriben de la siguiente manera:

$$P_z(t) = P_z \cos(\omega t + \alpha) \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} u_z(t) &= u_z \cos(\omega t + \alpha + \phi) \\ u_z(t) &= u_1 \cos(\omega t + \alpha) + u_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Donde  $u_z$  y  $\phi$  son relaciones mediante los desfases  $u_1$  y  $u_2$ , estas componentes son:

$$u_z = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (8.5.1)$$

$$\tan \phi = u_2/u_1 \quad (8.5.2)$$

Si reescribimos en términos más compactos, es decir, mediante expresión de números complejos:

$$P_z(t) = \bar{P}_z e^{i\omega t} \quad (8.6)$$

$$u_z(t) = \bar{u}_z e^{i\omega t} \quad (8.7)$$

Donde son los números complejos y se escriben como:

$$\bar{P}_z = P_{z1} + iP_{z2} \quad (8.8)$$

$$\bar{u}_z = u_{z1} + iu_{z2} \quad (8.9)$$

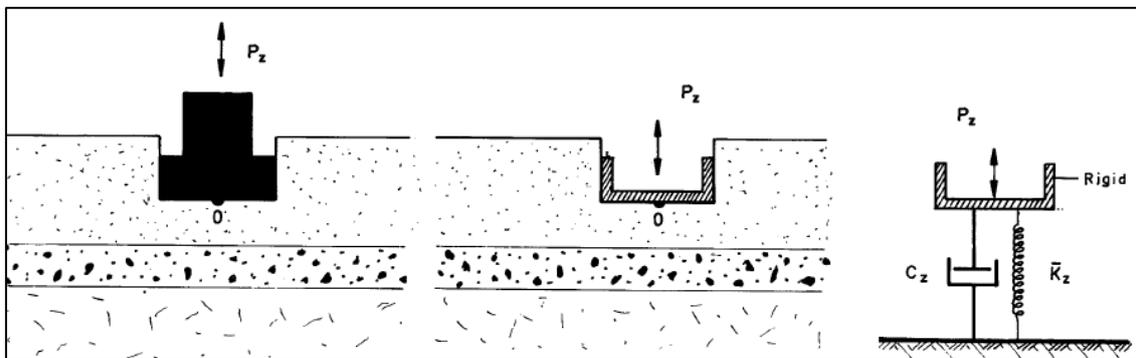
Es necesario precisar que las ecuaciones 8.4 y 8.5 son equivalentes a las ecuaciones 8.6, 8.7, 8.8 y 8.9. Como se puede notar en las ecuaciones 8.7 y 8.8, los ángulos de fase  $\alpha$  y  $\phi$  están indicados de manera implícita.

Luego de un reordenamiento de la ecuación 8.2, la **impedancia vertical dinámica** se puede expresar de la siguiente manera:

$$\chi_z = \frac{P_z(t)}{u_z(t)} = \frac{\bar{P}_z e^{i\omega t}}{\bar{u}_z e^{i\omega t}} = \frac{\bar{P}_z}{\bar{u}_z} = K_z^* \quad (8.10)$$

$$\chi_z = K_z + i\omega C_z \quad (8.11)$$

Donde  $K_z$  y  $C_z$  son funciones de la frecuencia del movimiento  $\omega$ . La componente  $K_z$  es la rigidez dinámica que refleja la rigidez e inercia del suelo de fundación, debido a las propiedades del suelo, la rigidez del suelo es independiente de la frecuencia. La componente  $\omega C_z$  es la frecuencia  $\omega$  veces el coeficiente de amortiguamiento  $C_z$ , el cual refleja dos tipos de amortiguamiento (amortiguamiento del material y de radiación). La ecuación 8.11 como la impedancia dinámica es un factor que presenta todo sistema suelo-cimentación. Por lo que  $K$  y  $C$  son interpretados como **coeficientes de rigidez (resorte)** y **amortiguamiento (amortiguador)**, respectivamente. En la Figura 8.3, se muestra que el sistema estructura-cimentación puede ser representado por una cimentación rígida sin peso propio y el suelo fundación es representado como un resorte (rigidez) y amortiguador (amortiguamiento).



**Figura 8.3.** Sistema estructura-cimentación (izquierda), cimentación rígida sin peso (centro), modelo físico de la rigidez ( $K_z$ ) y amortiguamiento ( $C_z$ ) de la vibración vertical (derecha)

Entonces, según el párrafo anterior, al considerar las dos componentes de reacción del suelo, la rigidez y el amortiguamiento, además de considerar que la fuerza desbalanceada es del tipo armónica, la ecuación del movimiento se escribe así:

$$\begin{aligned}
 -m\ddot{u}_z(t) - C_z\dot{u}_z(t) - K_z u_z(t) + F_z(t) &= 0 \\
 m\bar{u}_z \omega^2 e^{i\omega t} - C_z \bar{u}_z i \omega e^{i\omega t} - K_z \bar{u}_z e^{i\omega t} + F_z e^{i\omega t} &= 0 \\
 [(-m\omega^2 + K_z) + iC_z\omega] \bar{u}_z &= F_z \\
 \bar{u}_z &= \frac{F_z}{(K_z - m\omega^2) + iC_z\omega} \quad (8.12)
 \end{aligned}$$

La amplitud del desplazamiento armónico es de interés en la ingeniería práctica, por lo que ésta tiene la siguiente expresión:

$$u_z = |\bar{u}_z| = \frac{F_z}{\sqrt{(K_z - m\omega^2)^2 + (C_z\omega)^2}} \quad (8.13)$$

Por tanto, a lo largo de esta sección hemos notado que la reacción del suelo debido a que la cimentación oscila verticalmente es completamente descrita por la impedancia compleja  $\chi_z$ , o su equivalente los coeficientes de rigidez “K<sub>z</sub>” y amortiguamiento “C<sub>z</sub>”. Además, la amplitud máxima ( $u_z$ ) que puede ocurrir en el terreno es función de la amplitud máxima de la fuerza armónica, la masa de la estructura, los coeficientes del suelo y la frecuencia del movimiento.

#### 8.4. GENERALIZACIÓN DE LAS OSCILACIONES

La definición de la impedancia dinámica indicada en la ecuación 8.10 fue obtenida de la respuesta de la oscilación vertical, y es aplicable a los otros cinco modos de vibración (dos de traslación y tres de rotación). Definimos la **impedancia lateral**  $\chi_y$  al cociente entre la fuerza armónica horizontal  $P_y(t)$  aplicada en la dirección más corta de la cimentación que genera un desplazamiento armónico, como sigue:

$$\chi_y = \frac{P_y(t)}{u_y(t)} = \frac{\bar{P}_y e^{i\omega t}}{\bar{u}_y e^{i\omega t}} = \frac{\bar{P}_y}{\bar{u}_y} = K_y^* \quad (8.14)$$

$$\chi_y = K_y + i\omega C_y \quad (8.15)$$

De manera análoga podemos obtener las siguientes impedancias:

- $\chi_x$  : Impedancia longitudinal (cociente fuerza-desplazamiento), dirección larga
- $\chi_{rx}$  : Impedancia de rotación (cociente momento-rotación) en la dirección larga
- $\chi_{ry}$  : Impedancia de rotación (cociente momento-rotación) en la dirección corta
- $\chi_t$  : Impedancia torsional (cociente momento-rotación) en la dirección del eje vertical

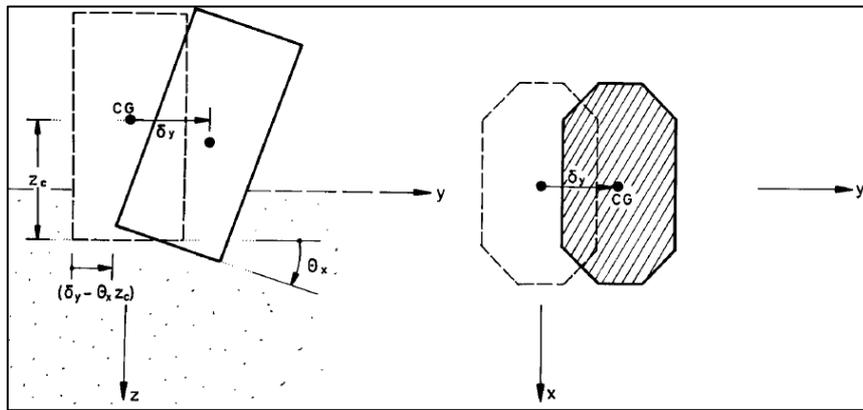
Como se puede apreciar en las ecuaciones 8.14 y 8.15, ambas impedancias son números complejos, las cuales están conformadas por la rigidez y el amortiguamiento. Por lo que la expresión general de la impedancia es:

$$\chi = K + i\omega C \quad (8.16)$$

Donde K y C son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, además para los otros modos de vibración se debe considerar el modelo físico de resorte y amortiguador.

### 8.5. OSCILACIÓN DE BALANCEO

Considérese una cimentación rígida, la cual es simétrica a lo largo del eje X e Y (o de los planos XZ y YZ), tal como se muestra la Figura 8.4. Dicha cimentación tiene los modos de vibración vertical y torsional a lo largo del eje z, por lo que éstas pueden ser analizadas por separado, por lo que los dos modos son desacoplados.



**Figura 8.4.** Oscilación de balanceo o rotación

Para estudiar las oscilaciones de balanceo (*rocking* en inglés) de un bloque rígido en el plano ZY (Figura 8.4), se considera el desplazamiento horizontal  $\delta_y$  en la dirección Y, y rotación del bloque rígido  $\theta_x$  respecto al centro de la cimentación, además se tiene la presencia de la fuerza de excitación horizontal  $F_y(t)$  y el momento  $M_x(t)$  en el centro del cuerpo rígido. Luego, las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$-P_y(t) - m\ddot{\delta}_z(t) = F_z(t) \tag{8.17}$$

$$-T_x(t) - P_z(t) - I_{ox}\ddot{\theta}_x(t) = M_x(t) \tag{8.18}$$

Donde:  $m$ = masa de la cimentación;  $I_{ox}$ =momento de inercia de masa respecto al eje X;  $P_y(t)$  y  $T_x(t)$  son las reacciones a la fuerza horizontal y a la rotación de parte del suelo de fundación. La fuerza y momento de excitación armónica se expresan mediante:

$$F_y(t) = F_y e^{i\omega t} \tag{8.19}$$

$$M_z(t) = M_z e^{i\omega t} \quad (8.20)$$

Las amplitudes  $F_y$  y  $M_x$  son parámetros de operación de las máquinas, y éstas pueden ser constantes o proporcionales al cuadrado de la frecuencia de operación ( $2\pi f$ ). La respuesta armónica estacionaria puede ser escrita como:

$$\delta_y(t) = \delta_y e^{i\omega t} \quad (8.21)$$

$$\theta_x(t) = \theta_x e^{i\omega t} \quad (8.22)$$

Donde  $\delta_y$  y  $\theta_x$  son desplazamientos complejos dependientes de la frecuencia. En ambas respuestas, el ángulo de fase está indicado de manera implícita. De manera complementaria, la reacción del suelo también es armónica, por lo que puede ser escrita de la siguiente manera:

$$P_y(t) = P_y e^{i\omega t} \quad (8.23)$$

$$T_x(t) = T_x e^{i\omega t} \quad (8.24)$$

Las amplitudes de las reacciones  $P_y$  y  $T_x$  están relacionadas con las amplitudes del desplazamiento y rotación (tal como se muestra en la Figura 8.4) a través de las correspondientes impedancias dinámicas, por lo que se escribe como:

$$P_y = \chi_y(\delta_y - z_c \theta_x) + \chi_{yrx} \theta_x \quad (8.25)$$

$$T_x = \chi_{rx} \theta_x + \chi_{yrx}(\delta_y - z_c \theta_x) \quad (8.26)$$

Al sustituir las ecuaciones 8.19 y siguientes (hasta la ecuación 8.26) en las ecuaciones 8.17 y 8.18, se obtienen los desplazamientos desconocidos  $\delta_y$  y  $\theta_x$ , cuyos valores se expresan como sigue:

$$\delta_y = (B_{22}F_y - B_{12}M_x)N^{-1} \quad (8.27)$$

$$\theta_x = (B_{11}M_x - B_{12}F_y)N^{-1} \quad (8.28)$$

Donde:

$$B_{11} = \chi_y(\omega) - m\omega^2 \quad (8.29.1)$$

$$B_{12} = \chi_{yrx}(\omega) - \chi_y(\omega)z_c \quad (8.29.2)$$

$$B_{22} = \chi_{rx}(\omega) - I_{ox}\omega^2 + \chi_y(\omega)z_c^2 - 2\chi_{yrx}^2 \quad (8.29.3)$$

$$N = B_{11}B_{22} - B_{12}^2 \quad (8.29.4)$$

Como se puede apreciar, las impedancias dinámicas son dependientes de la frecuencia del movimiento, por lo que estas ecuaciones son actualizadas durante los cálculos numéricos.

Las vibraciones indicadas en el desarrollo de las ecuaciones del movimiento en el modo vertical y torsional prácticamente son desacopladas una de la otra. Por lo que la *amplitud del desplazamiento vertical* se puede obtener mediante la ecuación 8.13 y la *amplitud de la rotación* es representada con la siguiente ecuación:

$$\theta_z = |\bar{u}_z| = \frac{M_z}{\sqrt{(K_t - J_z\omega^2)^2 + (C_t\omega)^2}} \quad (8.30)$$

Donde:

$K_t$ =coeficiente de rigidez dinámica a la torsión,

$C_t$ =coeficiente de amortiguamiento a la torsión,

$J_z$ =momento de inercia con respecto al eje Z,

$M_z$ =amplitud máxima del momento externo alrededor del eje Z.

De acuerdo con el análisis realizado, existen varias funciones de impedancia dinámica para cada problema relacionado a cimentación de maquinarias específicas, además de la forma de la cimentación.

## 8.6. COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO

En las secciones de Oscilación Vertical y Oscilación de Cabeceo, se ha identificado que el parámetro de impedancia del suelo ( $\chi$ ) se describe por los coeficientes de resorte (o rigidez, K) y un amortiguador (amortiguamiento, C), y éstos a su vez permiten estimar la amplitud de desplazamiento y giro de la cimentación.

Varios modelos están disponibles para alcanzar dicha estimación, pero el modelo que es ampliamente utilizado es el modelo de semiespacio elástico. Este modelo considera que una cimentación circular descansa sobre la superficie de un semiespacio elástico, que se extiende de manera ilimitada en profundidad, el cual es homogéneo e isotrópico, y que las propiedades esfuerzo-deformación puede ser definidas por el módulo de corte

(G) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ); estos dos parámetros se pueden obtener como se indica en el capítulo de “Propiedades Dinámicas del Suelo”. Con el modelo de semiespacio elástico es posible predecir la respuesta del suelo de cimentación sujeto a fuerzas armónicas verticales, momentos de balanceo, momentos de torsión y combinación de éstas aplicadas a la cimentación rígida (Das, 1983). Las expresiones matemáticas exactas fueron derivadas para obtener la respuesta de la cimentación sujeta a cargas armónicas de cualquier tipo. Dichas expresiones indican que la rigidez del suelo y la cantidad de amortiguamiento que ocurre es función de las propiedades elásticas del suelo, también de la frecuencia de la carga. Este efecto es llamado respuesta dependiente de la frecuencia, por lo que las aproximaciones de parámetros concentrados del modelo de semiespacio se han desarrollado y permite al suelo ser representado por constantes de resorte lineales, lo cual resiste las cargas aplicadas en los modos vertical, horizontal, torsión y cabeceo, y las constantes de amortiguador lo cual simula el amortiguamiento viscoso en el semiespacio en cada modo de vibración. Ambas constantes son independientes de la frecuencia.

En esta sección haremos una recopilación de las constantes de resorte y amortiguador que han desarrollado algunos investigadores como Richart y Whitman (1967), Whitman (1972), Richart et al (1970).

Las expresiones para los resortes verticales, horizontales, cabeceo y torsional son dados en la **Tabla 8.1**. Nótese que es posible evaluar las constantes de resortes para cimentaciones circular y rectangular que se apoyan en la superficie o empotramiento (o embebidos) debajo de la superficie. Los efectos de empotramiento también son considerados como se muestran en la **Tabla 8.2**.

Los amortiguamientos pueden ser calculados a partir del cociente de masa ( $B$ , diferente al ancho de la cimentación) como se muestra en la **Tabla 8.3**. Los pesos  $W$  en el cociente de masa  $B$  son el peso de la cimentación más la carga soportada por el cimient. Los momentos de inercia  $I_\phi$  e  $I_\theta$  son los momentos de inercia de masa de balanceo y torsión. Los factores  $\alpha$  son los coeficientes de amortiguamiento que incrementa el amortiguamiento geométrico que ocurre debido al efecto de empotramiento; las ecuaciones para evaluar se muestran en la **Tabla 8.4**. Finalmente, el factor  $\eta_\phi$  es el factor de corrección de cabeceo que está dado en la **Tabla 8.5**.

**Tabla 8.1.** Constantes de Resorte ( $K$ ) para una Cimentación Circular y Rectangular (Whitman y Richart, 1967)

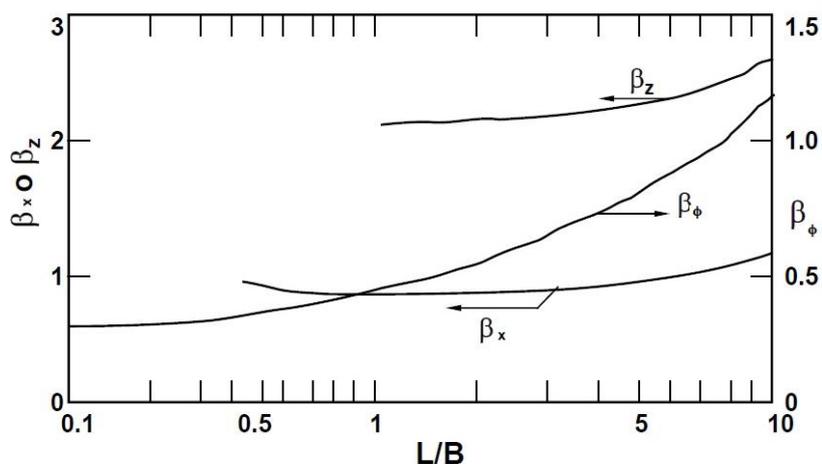
Modo de vibración	Cimentación Circular	Cimentación rectangular
Vertical	$K_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \eta_z$	$K_z = \frac{G}{1-\nu} \beta_z (\sqrt{BL}) \eta_z$
Horizontal	$K_x = \frac{32(1-\nu)Gr_o}{7-8\nu} \eta_x$	$K_x = 2(1+\nu)G\beta_x (\sqrt{BL}) \eta_x$
Cabeceo	$K_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \eta_\phi$	$K_\phi = \frac{G}{(1-\nu)} \beta_\phi BL^2 \eta_\phi$
Torsional	$K_\theta = \frac{16Gr_o^3}{3}$	-

Donde:  
 $\nu$  = Coeficiente de Poisson  
 $\eta$  = Coeficiente de empotramiento (Tabla 8.2)  
 $\beta$  = Factores geométricos (Figura 8.5)

**Tabla 8.2.** Coeficiente de empotramiento ( $\eta$ ) de las constantes de resorte (Whitman, 1972)

Modo de vibración	$r_o$ para una Circular	Coeficiente de empotramiento
Vertical	$\sqrt{BL/\pi}$	$\eta_z = 1 + 0.60(1-\nu)(h/r_o)$
Horizontal	$\sqrt{BL/\pi}$	$\eta_x = 1 + 0.55(2-\nu)(h/r_o)$
Cabeceo	$\sqrt[4]{BL^3/3}$	$\eta_\phi = 1 + 1.20(1-\nu)(h/r_o) + 0.20(2-\nu)(h/r_o)^3$
Torsional	$\sqrt[4]{BL(B^2 + L^2)/3\pi}$	-

Donde:  
 $h$  = Profundidad de la cimentación, debajo del nivel de terreno  
 $L$  = Dimensión horizontal perpendicular al eje de cabeceo  
 $B$  = Ancho de la cimentación



**Figura 8.5.** Coeficientes  $\beta_x$ ,  $\beta_z$ ,  $\beta_\phi$  para cimentaciones rectangulares (Richart et al, 1970)

**Tabla 8.3.** Amortiguamiento equivalente (D) para Cimentación Circular y Rectangular (Richart et al 1970)

Modo de vibración	Razón de Masa	Amortiguamiento D
Vertical	$B_z = \frac{(1-v)}{4} \frac{W}{\gamma r_o^3}$	$D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \alpha_z$
Horizontal	$B_x = \frac{7-8v}{32(1-v)} \frac{W}{\gamma r_o^3}$	$D_x = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}} \alpha_x$
Cabeceo	$B_\phi = \frac{3(1-v)}{8} \frac{I_\phi}{\rho r_o^5}$	$D_\phi = \frac{0.15\alpha_\phi}{(1 + \eta_\phi B_\phi)\sqrt{\eta_\phi B_\phi}}$
Torsional	$B_\theta = \frac{I_\theta}{\rho r_o^5}$	$D_\theta = \frac{0.50}{(1 + 2B_\theta)}$

**Tabla 8.4.** Coeficiente de empotramiento ( $\alpha$ ) del amortiguamiento (Whitman 1972)

Modo de vibración	Factor de Amortiguamiento de empotramiento
Vertical	$\alpha_z = \frac{1 + 1.9(1-v)(h/ro)}{\sqrt{\eta_z}}$
Horizontal	$\alpha_x = \frac{1 + 1.9(1-v)(h/ro)}{\sqrt{\eta_x}}$
Cabeceo	$\alpha_\phi = \frac{1 + 0.7(1-v)(h/ro) + 0.6(2-v)(h/ro)^3}{\sqrt{\eta_\phi}}$

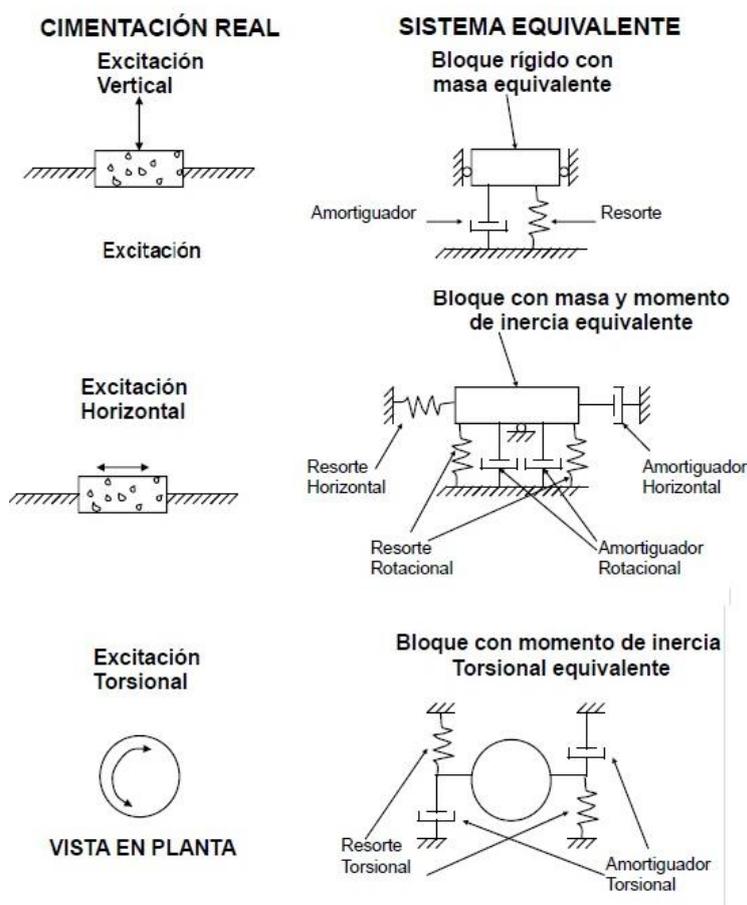
**Tabla 8.5.** Valores  $\eta_\phi$  de para valores de  $\beta_\phi$  (Arya et al, 1981)

$\beta_\phi$	5.0	3.0	2.0	1.0	0.8	0.5	0.2
$\eta_\phi$	1.079	1.110	1.148	1.219	1.251	1.378	1.600

Según lo observado, el principal objetivo del diseño de la cimentación es maximizar el amortiguamiento geométrico con consistencia económica. Además, se ha observado que el amortiguamiento de un semiespacio se incrementa con el tamaño de la cimentación, y a su vez decrece cuando el peso se incrementa o la inercia de momento aumenta.

## 8.7. MODELOS EQUIVALENTES DE CIMENTACIÓN DE MAQUINARIAS

El modelo matemático básico utilizado en el análisis dinámico de varios sistemas de cimentación de maquinarias es una masa agrupada con un resorte y un amortiguador, tal como se muestra en la Figura 8.6. La masa incluye la masa de la maquinaria, la masa de cimentación y, en algunos modelos, la masa del suelo. Por ejemplo, la masa  $m$ , libre de moverse sólo en la dirección vertical, tiene solo un grado de libertad. El comportamiento de la masa depende de la naturaleza del resorte y del amortiguador.



**Figura 8.6.** Sistema de masas concentradas para una cimentación sometida a fuerzas de excitación vertical, horizontal y torsional (Richart et al ,1970)

## 8.8. CRITERIOS PARA EL DISEÑO DE CIMENTACIÓN

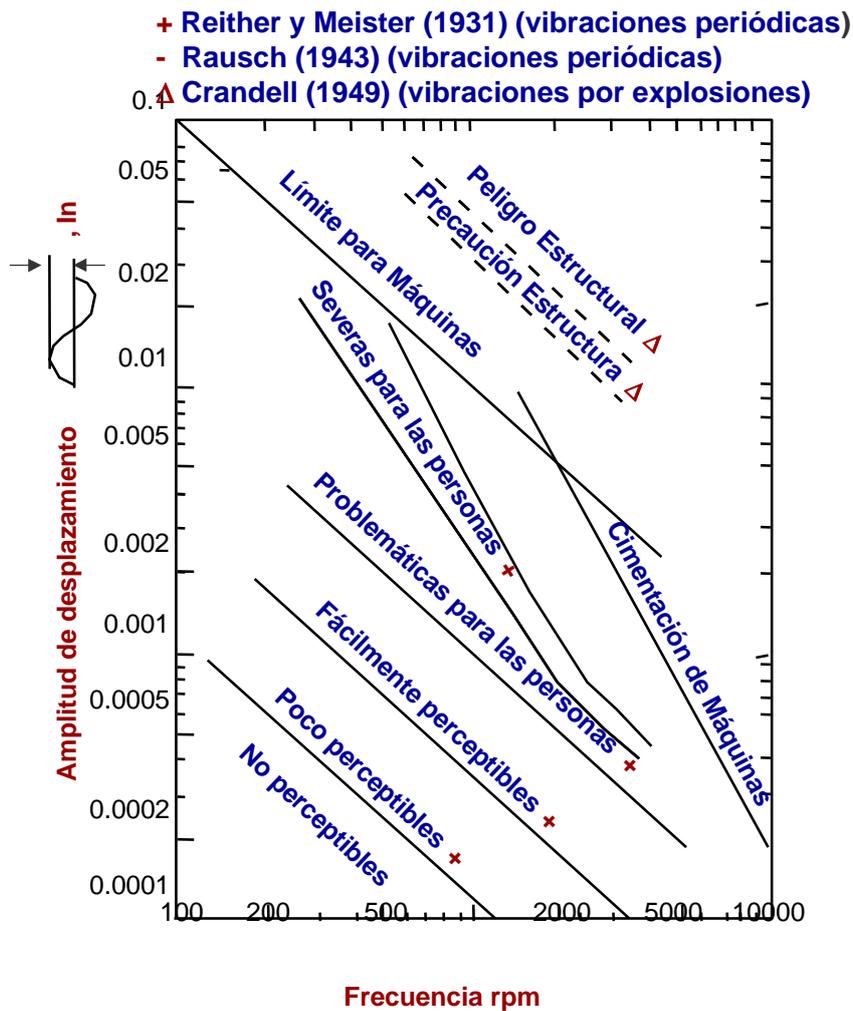
Una cimentación de maquinaria debe reunir las siguientes condiciones (Prakash, 1981 y Arya et al., 1981) para un diseño satisfactorio:

### ***Para cargas estáticas***

- Debe resistir a la falla por cortante.
- No debe exceder los asentamientos permisibles.

### ***Para cargas dinámicas***

- La cimentación no debe entrar en resonancia, la frecuencia de vibración del sistema suelo-cimentación-maquinaria no debe coincidir con la frecuencia de operación de la maquinaria.
- Las amplitudes del movimiento en las frecuencias de operación no deben ser excedidas al límite de amplitudes, la cual es especificada por el fabricante.
- Las vibraciones no deben ocasionar molestias a los operadores de las fábricas o sufrir posibles daños por otras máquinas. Por naturaleza, las vibraciones son perceptibles, molestas o perjudiciales, y éstas dependen de la frecuencia de vibración o amplitud. Richart (1962) desarrolló un gráfico (Figura 8.7) que permite identificar si los problemas detectados son ocasionados a partir del desplazamiento y la correspondiente frecuencia de vibración.



**Figura 8.7.** Límites de las amplitudes del desplazamiento para una frecuencia particular (Richart et al., 1970)

## REFERENCIAS

Arya S.C., Pincus G., O'Neill M. (1981) "Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines". Gulf Publishing Co.; Houston, Texas.

Das B. (1983) "Fundamentals of Soil Dynamics". Ed. Elsevier; New York

Gazetas G. (1983) "Analysis of Machine Foundations Vibrations: State-of-the-Art". International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.2, pp.2-42, Princeton University; Princeton, N.J.

Gazetas G. (1991) "Foundation Vibrations". Foundation Engineering Handbook, H. Y. Fang (editor), cap.15, pp.553-593, Van Nostrand Reinhold; New York, N.Y.

Prakash S. (1981) "Soil Dynamics". McGraw-Hill Publishing Co.; New York, N.Y.

Richart F.E. (1962) "Foundation Vibrations". Transactions ASCE, Vol.127(I), pp.863-898.

Richart F.E., Hall J. y Woods R. (1970); "Vibrations of Soils and Foundations". Prentice-Hall Inc.; Englewood Cliffs, N.J.

Whitman R.V. (1972) "Analysis of Soil-Structure Interaction. A State-of-the-Art Review". MIT Soils Publication N° 300, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.



## Dr. Jorge E. Alva Hurtado



Jorge Alva Hurtado obtuvo el grado académico de Doctor en Filosofía (Ph. D.) en Ingeniería Geotécnica en la Universidad de Massachusetts, Amherst - Massachusetts (1977-1980) y la Maestría en Ciencias (M. Sc.) con mención en Ensayos de Materiales (1974-1976) e Ingeniero Civil (CE) con mención en Geotecnia (1976-1977) en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) - USA. Es Profesor Principal de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería en pregrado y posgrado en el área de Geotecnia.

Actualmente es Rector de la Universidad Nacional de Ingeniería (Periodo 2016-2020). Fue elegido Decano Nacional del Colegio de Ingenieros del Perú (Periodo 2016-2018) y Presidente de la Asociación Peruana de Ingeniería Geotécnica (Periodo 2015-2018) y de la Asociación Nacional de Universidades Públicas del Perú (Periodo 2016-2019).

Ha publicado más de 80 artículos en revistas especializadas a nivel nacional e internacional en Ingeniería Civil, así como libros de su autoría. Ha sido expositor, ponente y disertante en más de 200 seminarios y conferencias de Ingeniería Civil de carácter nacional e internacional, representando a diversas instituciones y organismos nacionales. Ha recibido distinciones como Doctor Honoris Causa y Profesor Honorario en diferentes universidades del Perú, es miembro de la Academia Panamericana de Ingeniería, Medalla de la Orden de Ingeniería del Colegio de Ingenieros y Miembro de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Ha sido Consultor para empresas y organismos privados nacionales y extranjeros en obras de ingeniería a gran escala durante los últimos 40 años, como especialista en estudios de peligro sísmico e ingeniería geotécnica.