

APUNTES DEL CURSO CONCRETO ARMADO I

Gianfranco Ottazzi Pasino

DECIMOQUINTA EDICIÓN

2015

Prefacio

Estos apuntes fueron elaborados a manera de introducción al comportamiento y diseño de secciones y estructuras simples de concreto armado. La idea nació en el año 1999 cuando la Sección Ingeniería Civil del Departamento de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú, me encomendó el dictado del curso Concreto Armado 1.

En un inicio se elaboró un manuscrito que se entregaba en clase a los alumnos. Con el pasar del tiempo, los apuntes fueron mejorándose y se agregaron numerosos ejemplos hasta llegar al material que, en su decimoquinta edición, la Oficina de Publicaciones para la Docencia de la PUCP ha tenido a bien publicar.

Se ha tratado que la presentación del material despierte curiosidad en el lector y se anime a continuar y profundizar con el estudio de los diversos temas presentados. Para ello se han incluido referencias a numerosas lecturas básicas provenientes de artículos técnicos y de capítulos de algunos de los numerosos libros que sobre este fascinante tema se han publicado.

Utilizando los principios básicos de la estática y de la mecánica de los materiales, se presentan los aspectos fundamentales del comportamiento de las secciones y elementos simples de Concreto Armado. También se ha tratado de explicar la procedencia o sustento de las numerosas disposiciones contenidas en los Códigos y Normas de Concreto Armado, en especial de la Norma Peruana E-060, de tal modo que estas disposiciones no se conviertan en reglas o recetas “absolutas” que se apliquen sin conocer su procedencia, limitaciones y alcances. Se espera que este enfoque permita a los estudiantes profundizar aspectos más avanzados del comportamiento de este material, especialmente en el rango no lineal.

Si bien se utiliza como base la Norma Peruana de Concreto Armado, se hacen numerosas referencias al ACI 318. Nuestra actual Norma (NTE.060), aprobada en Mayo del 2009, está basada en el ACI 318 del 2005 y ha reemplazado a la Norma E.060 del año 1989. No he podido aún actualizar totalmente los apuntes a la nueva Norma Peruana, sin embargo, el material contenido en este libro seguirá siendo válido, con algunos ajustes especialmente en los factores de carga y en las longitudes de anclaje.

El lector notará que no se han incluido varios capítulos importantes, entre ellos: la torsión en elementos de concreto armado, los efectos de esbeltez en columnas, las losas armadas en dos direcciones, el diseño de muros, las cimentaciones y el diseño de elementos utilizando los modelos de puntal – tirante. Estos capítulos se encuentran aún en el tintero y espero, con la ayuda de Dios, poder incluirlos algún día.

Deseo agradecer a todos los amigos que hicieron posible la publicación de estos apuntes. Son muchos los que han colaborado con sus sugerencias, correcciones, críticas y con el trabajo de edición y preparación de los gráficos. Nombrarlos a todos sería tedioso y seguramente cometería la injusticia de no mencionar a varios de ellos.

Gianfranco Ottazzi P.
Lima, agosto del 2014

Capítulo 1	Introducción	
1.1	El consumo de cemento en el mundo.	1
1.2	El Concreto Armado	2
1.3	Ventajas y desventajas del Concreto Armado.	3
1.3.1	Principales ventajas.	
1.3.2	Principales desventajas.	
1.4	Breve reseña histórica del Concreto y del Concreto Armado.	5
1.4.1	Morteros.	
1.4.2	Concreto.	
1.4.3	Cemento Portland.	
1.4.4	Concreto Armado.	
1.4.5	Concreto Preesforzado.	
1.4.6	Concretos de Alta Resistencia.	
1.5	Códigos o Normas de Concreto Armado.	8
1.5.1	Código del American Concrete Institute – ACI.	
1.5.2	Código o Norma Peruana.	
1.5.3	Códigos Europeos.	
1.6	Lecturas	11
Capítulo 2	Elementos Estructurales	
2.1	Elementos de Concreto Armado.	12
2.2	Edificios de losas con vigas.	12
2.3	Losas Nervadas.	13
2.4	Losas con vigas anchas.	14
2.5	Losas Nervadas en dos direcciones.	14
2.6	Edificios de losas sin vigas.	15
2.7	Losas armadas en dos direcciones.	17
2.8	Algunas configuraciones estructurales típicas de edificios en Lima.	19
2.9	Lecturas	22
Capítulo 3	Propiedades Mecánicas del Concreto	
3.1	Introducción.	23
3.2	Resistencia a la compresión.	24
3.3	Principales factores que afectan a la resistencia en compresión.	24
3.4	Resistencia del Concreto en la estructura real.	29
3.5	Resistencia a la tracción del Concreto.	30
3.6	Módulo de Elasticidad del Concreto simple para cargas de corta duración.	33
3.7	Módulo de Poisson del Concreto.	34
3.8	Mecánica de la fractura del Concreto en compresión.	34
3.9	Efecto del confinamiento (estados triaxiales).	37
3.10	Comportamiento del Concreto en compresión.	39
3.11	Modelos para el Concreto en compresión.	40
3.12	Concretos de alta resistencia.	42
3.13	Concretos Livianos.	44
3.14	Lecturas.	45
Capítulo 4	Cambios Volumétricos del Concreto	
4.1	Introducción.	46
4.2	Creep o Flujo Plástico del concreto.	47
4.2.1	Algunas observaciones relativas al Creep.	
4.2.2	Principales factores que afectan la magnitud del Creep.	
4.2.3	Coeficiente de Flujo Plástico.	
4.3	Retracción o Contracción del concreto.	50
4.3.1	Algunas observaciones relativas a la Retracción.	
4.3.2	Principales factores que afectan a la Retracción.	
4.3.3	Valores típicos de la Contracción.	

4.3.4 ¿Cómo controlar la Retracción?	
4.3 Lecturas.	56
Capítulo 5 Acero de Refuerzo	
5.1 Introducción	57
5.2 Barras de refuerzo laminadas en caliente.	58
5.3 Calidades del acero de refuerzo.	59
5.4 Propiedades mecánicas de las barras de refuerzo.	60
5.5 Propiedades de la barras Grado 60.	63
5.5.1 Características mecánicas – ASTM A615.	
5.5.2 Soldabilidad.	
5.5.3 Diámetros mínimos de doblado del acero de refuerzo.	
5.5.4 Efecto de la temperatura.	
5.6 Mallas Electro Soldadas.	65
5.7 Lecturas.	66
Capítulo 6 Detalles del Refuerzo	
6.1 Introducción.	67
6.2 El arte del detallado.	67
6.3 Funciones o propósitos de los refuerzos	67
6.4 Recubrimiento de Concreto para el refuerzo.	68
6.5 Espaciamiento del acero de refuerzo.	71
6.6 Paquetes de barras.	72
6.7 Tolerancias en la colocación del refuerzo.	73
6.8 Diámetros mínimos de doblado.	74
6.9 Ganchos Estándar.	74
6.10 Peralte efectivo (d) en elementos en flexión.	75
6.11 Casos particulares del peralte efectivo.	76
6.12 Lecturas.	77
Capítulo 7 Requisitos de Resistencia y de Servicio	
7.1 Introducción.	78
7.2 Estados Límites de una estructura.	78
7.2.1 Estado Límite Último.	
7.2.2 Estados Límites de Servicio.	
7.2.3 Estados Límites Especiales.	
7.3 Coeficientes (factores) de Seguridad.	80
7.3.1 Variabilidad de las acciones sobre las estructuras.	
7.3.2 Variabilidad de las resistencias.	
7.3.3 Selección de los factores de seguridad y probabilidad de falla.	
7.3.4 Normas actuales.	
7.4 Diseño por Esfuerzos Admisibles o Permisibles.	86
7.5 Diseño por Resistencia.	87
7.5.1 Factores de Reducción de Resistencia – Resistencia de Diseño.	
7.5.2 Factores de Reducción de Resistencia – Norma Peruana.	
7.5.3 Factores de Carga (Resistencia Requerida).	
7.5.4 Factores de Carga de la Norma Peruana (Resistencia mínima requerida).	
7.5.5 Resumen del Diseño por Resistencia.	
7.5.6 Análisis y diseño por Resistencia.	
7.5.7 Inconsistencias en el Diseño por Resistencia.	
7.5.8 Coeficientes de seguridad en el Diseño por Resistencia.	
7.6 Diseño por Capacidad.	98
7.7 Diseño Plástico.	99
7.8 Lecturas.	100
Capítulo 8 Requisitos Generales para el Análisis y el Diseño	
8.1 Análisis de las estructuras de Concreto Armado.	101
8.2 Cargas de servicio.	102

8.3 Métodos de análisis.	103
8.4 Rigidez.	103
8.5 Luces para el cálculo.	104
8.6 Distribución de la carga viva.	104
8.7 Modelo simplificado para el análisis por cargas de gravedad.	110
8.8 Programas de cómputo para el análisis por cargas verticales.	111
8.9 Método aproximado de los Coeficientes.	112
8.10 Tabla para vigas continuas.	115
8.11 Influencia de la alternancia de la carga viva.	116
8.12 Tabla para pórticos de un piso.	116
8.13 Lecturas.	118
Capítulo 9 Ejemplo de Introducción al Diseño en Concreto Armado	
9.1 Introducción.	119
9.2 Viga sin armadura de refuerzo.	119
9.3 Sección reforzada con acero en tracción.	120
9.3.1 Sección no fisurada.	
9.3.2 Sección fisurada.	
9.3.3 Capacidad máxima de la sección por Esfuerzos Admisibles.	
9.3.4 Capacidad última o máxima de la sección (Resistencia Nominal).	
9.3.5 Inicio de la fluencia en el acero.	
9.4 Sección preesforzada.	129
9.4.1 Preesfuerzo en el centro de gravedad de la sección.	
9.4.2 Cable de preesfuerzo excéntrico.	
9.5 Lecturas	131
Capítulo 10 Flexión Simple	
10.1 Introducción.	132
10.2 Comportamiento elástico en flexión.	133
10.2.1 Sección transformada no agrietada.	
10.2.2 Sección transformada agrietada.	
10.2.3 Esfuerzos máximos bajo cargas de servicio.	
10.2.4 Deducción de la sección transformada agrietada.	
10.3 Análisis y diseño de secciones en flexión (Diseño por Resistencia).	139
10.3.1 Relaciones Momento – Curvatura de una sección.	
10.3.2 Comportamiento de una viga en flexión con falla dúctil.	
10.3.3 Hipótesis para el análisis y diseño por flexión.	
10.3.4 Caracterización del bloque de compresiones para el análisis y diseño.	
10.4 Falla de tracción, compresión y balanceada.	150
10.5 Análisis de secciones rectangulares.	151
10.5.1 Análisis de secciones rectangulares con falla en tracción.	
10.5.2 Análisis de secciones rectangulares con falla en compresión.	
10.5.3 Secciones rectangulares con falla balanceada – Acero Balanceado.	
10.6 Acero máximo en flexión – Norma Peruana, ACI-99.	157
10.7 Ecuación general para la cuantía balanceada.	159
10.8 Acero mínimo por flexión.	160
10.9 Resumen – Diseño de secciones rectangulares.	163
10.10 Lecturas.	171
Ejemplos de análisis y diseño.	172
10.11 Recomendaciones para el armado por flexión de losas macizas.	204
Ejemplos de diseño de vigas.	205
10.12 Recomendaciones para el armado por flexión de vigas.	213
10.13 Vigas con altura (peralte) mayor a 0.90 m.	215
10.13.1 Exigencias de la Norma Peruana relacionadas con Ask.	
10.13.2 Exigencias del ACI 318-02 relacionadas con Ask.	
10.14 Análisis de vigas con refuerzo distribuido en el alma.	216
10.15 Cuantía balanceada en vigas con refuerzo en el alma.	217
10.16 Influencia del acero repartido en el alma en la resistencia.	218

10.17 Comparación entre el acero concentrado y el acero repartido.	220
10.18 Diseño de secciones no rectangulares.	222
Capítulo 11 Análisis y Diseño de Vigas T - Aligerados	
11.1 Introducción.	225
11.2 Esfuerzos en el encuentro ala – alma.	226
11.3 Ancho efectivo del ala – <i>b_e</i> – en vigas T.	227
11.4 Análisis de vigas T.	228
11.4.1 Zonas de momento negativo – ala de la T en tracción.	
11.4.2 Zonas de momento positivo – ala de la T en compresión.	
11.5 Cuantía balanceada en secciones T (momento positivo).	231
11.6 Acero mínimo en secciones T	232
Ejemplos de análisis y diseño.	233
11.7 Aligerados (losas nervadas)	246
11.8 Geometría típica de los aligerados utilizados en nuestro medio.	246
11.9 Peráltes (espesores) más usados en nuestro medio.	246
11.10 Cargas de diseño.	247
11.11 Viguetas de distribución.	247
11.12 Forma de trabajo en flexión de las viguetas	247
11.13 Acero mínimo y acero balanceado en aligerados.	248
11.14 Ensanches por cortante y flexión en aligerados.	249
11.14.1 Ensanches por cortante.	
11.14.2 Ensanches por flexión.	
Ejemplo de diseño de un aligerado.	251
11.15 Recomendaciones para el armado de aligerados convencionales	256
Capítulo 12 Secciones con Acero en Compresión	
12.1 Introducción.	257
12.2 Verificación de la fluencia del acero en compresión.	259
12.3 Influencia del acero en compresión en la resistencia.	261
12.4 Influencia del acero en compresión en el comportamiento.	262
12.5 Cuantía balanceada en secciones con acero en compresión.	264
12.6 Resistencia de una sección rectangular con acero en compresión.	266
12.6.1 El acero en compresión fluye.	
12.6.2 El acero en compresión no fluye.	
12.7 Diseño de secciones rectangulares con acero en compresión.	268
Ejemplos de análisis y diseño.	268
Capítulo 13 Durabilidad de las estructuras de Concreto Armado - Fisuración en Elementos de Concreto Armado	
13.1 Introducción.	276
13.2 Durabilidad del Concreto	277
13.2.1 Ataque por sulfatos.	
13.2.2 Corrosión del acero de refuerzo.	
13.2.3 Ciclos de congelación y deshielo.	
13.3 Fisuración en elementos de Concreto Armado.	280
13.4 Importancia del agrietamiento y tipos de fisuras.	280
13.5 Razones para controlar el ancho de las fisuras.	287
13.6 Principales factores que afectan el ancho de las fisuras.	287
13.7 Limitación del ancho de las fisuras.	287
13.8 Disposiciones reglamentarias para elementos en flexión.	288
13.8.1 Norma Peruana.	
13.8.2 Disposiciones del ACI 318-02 para elementos en flexión.	
Ejemplos.	292
13.9 Lecturas.	294

Capítulo 14 Deflexiones en Elementos de Concreto Armado Sometidos a Flexión

14.1	Introducción.	295
14.2	Principales razones para controlar las deflexiones.	296
14.3	Principales variables que influyen en las deflexiones.	297
14.4	Cálculo de las deflexiones a partir de los diagramas Momento – Curvatura.	298
14.5	Cálculo de las deflexiones según las Normas.	300
14.5.1	Código del ACI 318-02.	
14.5.2	Norma Peruana.	
14.6	Espesores (h) recomendados para no verificar deflexiones.	301
14.7	Cálculo de las deflexiones inmediatas.	302
14.8	Cálculo de las deflexiones diferidas.	303
14.8.1	Efecto del Flujo Plástico en las curvaturas y deflexiones.	
14.8.2	Efecto de la Retracción en las curvaturas y deflexiones.	
14.8.3	Aproximación de la Norma al problema de las deflexiones diferidas.	
14.9	Deflexiones máximas permisibles.	306
	Ejemplos.	308
14.10	Lecturas.	315

Capítulo 15 Diseño por Fuerza Cortante

15.1	Algunas ideas iniciales.	316
15.2	Etapas en el comportamiento a cortante de una viga.	317
15.2.1	Sección no fisurada.	
15.2.2	Sección fisurada.	
15.2.3	Comportamiento real.	
15.3	Mecanismo de viga y mecanismo de arco.	321
15.4	Tipos de agrietamiento.	323
15.4.1	Agrietamiento por cortante en el alma o por tracción diagonal.	
15.4.2	Agrietamiento por flexión y cortante.	
15.5	Comportamiento de vigas sin refuerzo en el alma.	324
15.5	Comportamiento de vigas con refuerzo en el alma.	308
15.6	Resistencia al corte suministrada por el Concreto - V_c	326
15.6.1	Elementos en flexión (vigas).	
15.6.2	Elementos en compresión (columnas).	
15.6.3	Elementos en tracción axial.	
15.6.4	Secciones rectangulares y T.	
15.6.5	Secciones circulares.	
15.7	Vigas con refuerzo en el alma.	332
15.7.1	Comportamiento.	
15.7.2	Tipos de refuerzo en el alma.	
15.7.3	Funciones de los estribos.	
15.8	Diseño por cortante de acuerdo a la Norma.	336
15.8.1	Metodología de diseño.	
15.8.2	Resistencia al corte suministrada por el refuerzo en el alma.	
15.8.3	Estribos perpendiculares al eje del elemento.	
15.8.4	Estribos inclinados y barras dobladas.	
15.8.5	Anclaje del refuerzo por cortante.	
15.8.6	Espaciamiento máximo de los estribos.	
15.8.7	Estribos mínimos.	
15.9	Tipos de falla en elementos con refuerzo en el alma.	342
15.10	Aligerados y losas macizas en una dirección.	343
15.11	Metodología para el diseño por corte.	343
	Ejemplos.	347
15.12	Lecturas.	362

Capítulo 16 Flexocompresión

16.1	Introducción.	363
16.2	Clasificación de las columnas.	363
16.3	Columnas cortas sin excentricidad – Resistencia en compresión.	365
16.3.1	Esfuerzos bajo cargas de servicio.	
16.3.2	Resistencia Nominal en compresión (P_o).	336
16.4	Comportamiento de columnas con estribos y espirales.	367
16.4.1	Formula del ACI y la Norma Peruana para las espirales.	371
16.5	Detalles del refuerzo en columnas – Refuerzo longitudinal y estribos.	373
16.5.1	Estribos en columnas.	
16.5.2	Refuerzo máximo y mínimo en columnas.	
16.5.3	Número mínimo de barras.	
16.5.4	Tamaño mínimo de una columna.	
16.6	Predimensionamiento de columnas.	377
16.7	Acciones (solicitaciones) en las columnas.	378
16.8	Diagrama de Interacción.	379
16.8.1	Algunos puntos notables de un Diagrama de Interacción.	
16.8.2	Factores de reducción de resistencia para Flexocompresión.	
16.8.3	Centroide Plástico.	
16.9	Elección del tipo de columna.	387
16.10	Construcción de los Diagramas de Interacción.	388
16.11	Columnas en Flexotracción.	390
16.12	Ayudas para el diseño de columnas – Ábacos.	390
16.13	Ecuaciones para el diseño de columnas.	391
16.14	Formas de falla de una columna.	394
16.15	Recomendaciones para el armado de columnas.	395
	Ejemplos de análisis y diseño.	397
	Tablas y Ábacos	411

Capítulo 17 Diseño Unificado en Concreto Armado

17.1	Introducción.	419
17.2	Disposiciones “clásicas” hasta el ACI-99 para elementos en flexión.	419
17.3	Algunas “inconsistencias” hasta el ACI-99.	420
17.4	Conceptos centrales del Diseño Unificado.	421
17.5	Nuevas definiciones en el ACI-02.	422
17.6	Disposiciones específicas para vigas del ACI-02.	424
17.7	Redistribución de Momentos.	424
17.8	Ventajas del Diseño Unificado adoptado por el ACI-02.	425
	Ejemplos.	426
17.9	Lecturas.	434

Capítulo 18 Flexión Biaxial

18.1	Introducción.	435
18.2	Flexión biaxial en vigas.	435
18.3	Flexión biaxial en columnas.	439
18.3.1	Superficies de Interacción.	
18.3.2	Contornos de carga constante.	
18.3.3	Método de Bresler.	
	Ejemplos de diseño.	444
18.4	Influencia de la Flexión Biaxial en la resistencia de columnas.	448
18.5	Lecturas.	452

Capítulo 19 Relaciones Momento – Curvatura

19.1	Introducción.	454
19.2	Definición de curvatura.	456
19.3	Ductilidad de curvatura.	457
19.4	Construcción de los diagramas Momento – Curvatura.	457
19.5	Factores que influyen en los diagramas $M-\phi$ y en la Ductilidad de Curvatura.	459

19.6 Diagramas Momento - Curvatura aproximados.	464
19.7 Lecturas.	468
Capítulo 20 Redistribución de Momentos Flectores	
20.1 Introducción.	469
20.2 Diagramas Momento – Rotación.	470
20.3 Requisitos generales para la Redistribución.	471
20.3.1 Especificaciones de la Norma de Concreto Armado – Redistribución.	
20.3.2 Limitaciones de la Norma ACI-99.	
20.4 Introducción al Análisis Límite.	474
Ejemplos.	474
20.5 Lecturas.	486
Capítulo 21 Adherencia y anclaje del Refuerzo.	
21.1 Introducción.	487
21.2 Mecanismos que originan la adherencia.	488
21.3 Esfuerzos de adherencia en una viga.	491
21.4 Longitud de anclaje o de desarrollo.	495
21.5 Longitudes de anclaje – Norma Peruana.	496
21.6 Anclajes con gancho estándar.	496
Tablas de longitudes de anclaje	498
Anexo 1 Planos de Estructuras de un Edificio en Concreto Armado.	505



1) Básica

- James K. Wight, James G. MacGregor, 2009. *Reinforced Concrete – Mechanics and Design*. 5ta. Edición. Prentice Hall.
- Nilson, Darwin, Dolan. 2004. *Design of concrete Structures*. 13a. Edición. McGraw Hill.
- R. Park y T. Paulay. 1975. *Reinforced Concrete Structures*. Wiley – Interscience.
- A. M. Neville. 1997. *Properties of Concrete*. 4ta. edición. John Wiley & Sons.
- P. Kumar Mehta, Paulo J. M. Monteiro. 1993. *Concrete: Structure, Properties and Materials*. 2da. Edición. Prentice Hall.
- ININVI. 1989. *Norma Técnica de Edificación E.060, Concreto Armado*. Instituto Nacional de Investigación y Normalización de la Vivienda. Lima, Perú.
- SENCICO. 2009. *Norma Técnica de Edificación E.060, Concreto Armado*. Reglamento Nacional de Construcciones.
- American Concrete Institute. 1999. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-99) and Commentary*.
- American Concrete Institute. 2011. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11, ACI 318S-11) and Commentary*.

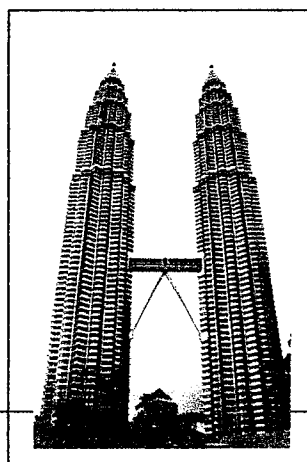
2) De consulta

- González Cuevas, Robles. 1995, 2005. *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*. 3ra. y 4ta. Edición. Limusa.
- Antonio Blanco Blasco. 1997. *Estructuración y Diseño de Edificios de Concreto Armado*. 2da. Edición. Colección del Ingeniero Civil, Libro 2.
- Teodoro E. Harmsen. 2002. *Diseño de Estructuras de Concreto Armado*. 3ra. Edición. Fondo Editorial 2002 PUCP.
- José Calavera Ruiz. 1999. *Patología de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado*. Ediciones Intemac, Madrid.
- José Calavera Ruiz. 1988. *Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación*. 4ta. Edición. Ediciones Intemac, Madrid.
- Boris Bresler. 1974. *Reinforced Concrete Engineering. Volume 1. Materials, Structural Elements, Safety*. John Wiley & Sons.
- Richard N. White, Peter Gergely, Robert G. Sexsmith. 1974. *Structural Engineering, Volume 3, Behavior of Members and Systems*. John Wiley & Sons.
- Pedro Jiménez Montoya, Alvaro García, Francisco Morán. 2000. *Hormigón Armado, 14^a edición basada en la EHE*. Editorial Gustavo Gili, Barcelona.
- Rafael Riddell, Pedro Hidalgo. 2002. *Diseño Estructural*. 3ra. Edición. Textos Universitarios. Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Russell s. Fling. 1987. *Practical Design of Reinforced Concrete*. John Wiley & Sons
- Michael Collins, Denis Mitchell. 1997. *Prestressed Concrete Structures*. Response Publications, Canada.
- Arthur H. Nilson. 1987. *Design of Prestressed Concrete. Second Edition*. John Wiley & Sons.
- Mark Fintel. 1985. *Handbook of Concrete Engineering, Second Edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- T. Paulay, M.J.N. Priestley. 1992. *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*. John Wiley & Sons.
- Hormigón. Manuel Fernández Cánovas. Octava edición 2007. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid.



CAPITULO 1

Introducción



1.1 El consumo de cemento en el mundo

El cemento hidráulico Portland, patentado por primera vez en Inglaterra en 1824, es el principal material cementante o aglomerante utilizado hoy en día para la fabricación del concreto.

Se estima (Mehta) que el consumo mundial de cemento en el año 2000 bordeó los 1,500 millones de toneladas anuales y en el año 2007 el consumo superó los 2,500 millones de toneladas. En el año 2000, para fabricar 1,500 millones de toneladas de cemento, la industria consumía anualmente cerca de 2,700 millones de toneladas de materia prima. Si partimos del hecho de que una mezcla típica de concreto contiene en peso, cerca del 12% de cemento, 8% de agua y 80% de agregados, resulta que la industria del concreto consumía anualmente alrededor de 9,000 millones de toneladas de agregados (finos y gruesos) y 900 millones de toneladas de agua para el mezclado. Hoy en día estas cifras probablemente se han duplicado.

En las Tablas 1-1 y 1-2 (Asocem, INEI) se muestra el consumo interno de cemento en el Perú. Actualmente las tres principales fábricas de cemento peruanas (Unacem, Yura y Pacasmayo) tienen una capacidad instalada de 14 millones de toneladas anuales (Asocem). La Tabla 1-3 muestra el consumo anual de cemento en los países con mayor consumo de cemento. Estas cifras indican que la industria del concreto es, probablemente, la que más recursos naturales consume en el mundo.

Tabla 1-1. Consumo de cemento en el Perú (millones de toneladas)

Año	Consumo
1999	3.7
2000	3.6
2008	6.7
2009	7.1
2013	10.5

Tabla 1-2. Consumo de cemento en el Perú Per cápita (kg por habitante)

Año	Consumo
1993	104
1999	152
2001	124
2009	249
2011	297
2013	364

Tabla 1-3. Países con mayor consumo anual de cemento (millones de toneladas)

	1995	1998	1999	2000	2001	Per capita año 2001 (kg / hab)
China	430	511	557	585	620	429
Estados Unidos	88	103	108	115	117	408
India	61	84	96	93	90	89
Japón	80	72	71	72	69	540
Corea del Sur	57	45	45	48	50	951
España	26	31	35	38	42	1,051
Italia	33	35	36	38	40	682
Brazil	28	40	40	39	39	217
Rusia	35	26	28	31	33	193
Alemania	38	37	38	35	31	370
México	21	26	28	30	28	278
Egipto	18	24	27	26	27	371
Indonesia	24	19	19	22	26	113
Turquía	29	34	32	32	25	380
Irán	16	18	21	21	23	350
Francia	19	19	20	21	21	352
Tailandia	34	22	19	18	19	293
Arabia Saudita		14	15	15	18	818
Taiwan	26	21	19	19	17	749
Vietnam		10	11	14	17	212
		1,191	1,265	1,312	1,352	

Cabe mencionar que en la China en el año 2007 el consumo fue de 1,200 millones de toneladas y en los Estados Unidos de 118 millones de toneladas.

A estas cifras es necesario agregar toda la materia prima necesaria para la fabricación de las barras (acero) de refuerzo. En la Tabla 1-4 (INEI) se muestra el consumo local de barras de acero utilizadas como refuerzo en los elementos de concreto armado.

Tabla 1- 4. Consumo de barras de construcción en el Perú

Año	Consumo (toneladas)
1997	385,000
2000	320,000
2008	569,000
2009	805,000

1.2 El Concreto Armado

El concreto armado es el material de construcción predominante en casi todos los países del mundo. Esta aceptación universal se debe en parte, a la disponibilidad de los elementos con los cuales se fabrica el concreto armado: grava, arena, cemento, agua y barras de refuerzo. También se debe a su economía, en comparación con otros materiales de construcción y a la facilidad con la cual mientras el concreto se encuentra en estado plástico, puede colocarse en los encofrados casi de cualquier forma y tamaño.

El concreto armado no se restringe a lo que denominamos concreto vaciado en sitio, hoy en día el concreto prefabricado en planta, representa una alternativa que permite ahorros importantes en costo y tiempo de ejecución. Otra variante importante del concreto armado la constituye el concreto preesforzado, en la cual se combinan aceros y concretos de alta resistencia. El acero se encuentra sometido a un esfuerzo inicial (preesfuerzo) alto el cual se equilibra con los esfuerzos de compresión en el concreto. Debido a esta precompresión, el concreto en las zonas de tracción por flexión, por ejemplo en una viga, se agrietará para cargas o momentos flectores mucho más altos que los correspondientes al concreto armado convencional. Esto permite reducir significativamente el agrietamiento por flexión y las deflexiones así como extender de manera importante las luces (claros libres) que es posible cubrir con elementos de concreto reforzado.

1.3. Ventajas y Desventajas del Concreto Armado

El hecho de que el concreto armado sea uno de los materiales de construcción más utilizados en el mundo, estriba en las innumerables ventajas que ofrece, algunas de ellas se describen en 1.3.1. Sin embargo, al igual que cualquier otro material de construcción, el concreto también presenta desventajas en comparación con otros materiales, descritas en 1.3.2.

1.3.1 Principales Ventajas

- a) Es un material con aceptación universal. Es relativamente fácil conseguir o transportar los materiales necesarios para su fabricación (cemento, agregados, agua, refuerzo de acero) aún en sitios remotos.
- b) No se necesita mucha habilidad para su fabricación y utilización. No es necesario contar con mano de obra altamente calificada. Este hecho se comprueba fácilmente en la ciudad de Lima, si observamos todas las viviendas que se han edificado mediante la autoconstrucción.
- c) Es económico comparado con otros materiales. Esta suele ser una consideración muy importante cuando se escoge el material de construcción predominante en una obra. La economía depende del costo de los materiales y de la mano de obra así como del tiempo necesario para la ejecución completa de la obra. Este último factor suele ser importante ya que el propietario invierte dinero y no recibe un retorno de su inversión hasta que la obra esté terminada y pueda ser ocupada. En consecuencia los ahorros financieros que puedan lograrse al ejecutar una obra más rápido, pueden ser mayores que los incrementos en materiales y mano de obra necesarios para terminar la obra en un menor tiempo.

En muchos casos el costo o la inversión necesaria en el largo plazo asociada con los costos de mantenimiento y durabilidad de la estructura, pueden exceder el costo inicial. En consecuencia, cualquier inversión inicial adicional que conduzca luego a menores costos de mantenimiento y mayor durabilidad se recupera con creces.

- d) El concreto armado se emplea en casi cualquier tipo o forma estructural, es decir su uso no está limitado a un tipo o forma estructural particular. Se emplea en la construcción de: Represas, puentes, edificios, casas, tanques, silos, tuberías, postes, estructuras enterradas, túneles, plataformas marinas, obras portuarias, muelles, losas de piso, pistas, veredas, naves industriales, estructuras de contención, reactores nucleares, embarcaciones, etc.
- e) Es un material de construcción con una buena durabilidad y un bajo costo de mantenimiento. Las estructuras de concreto requieren menos mantenimiento que por ejemplo las estructuras de acero o madera.
- f) Las estructuras de un edificio deben ser capaces de soportar los efectos de un incendio mientras que los ocupantes son evacuados y se termine de combatir el fuego. El concreto es un material con resistencia al fuego, una estructura de concreto armado sin detalles especiales, tiene una resistencia al fuego entre 1 a 3 horas. Las estructuras de acero y las de madera deben protegerse con recubrimientos especiales para lograr una resistencia similar a la del concreto.
- g) Es un material apropiado para cumplir funciones estructurales y arquitectónicas. Es posible obtener diversas texturas y acabados. Se le maneja inicialmente en estado plástico, por lo tanto la forma final depende de la forma del encofrado. La forma y las dimensiones de los elementos son definidas por el diseñador y no están sujetas, como en el caso de la madera y el acero, a la disponibilidad en el mercado de secciones estándar.

- h) Las estructuras de concreto armado poseen monolitismo e hiperestaticidad (redundancia). Los nudos de los pórticos de concreto armado casi siempre son rígidos lo cual origina una alta redundancia. La redundancia en una estructura permite la redistribución de las fuerzas internas en la eventualidad de una sobrecarga accidental no prevista, así se logra un mayor grado de seguridad al colapso.
- i) Las estructuras de concreto armado poseen masa y rigidez, esto las hace menos sensibles a las vibraciones verticales y laterales.

1.3.2 Principales Desventajas

- a) El concreto tiene una baja resistencia a los esfuerzos de tracción. La resistencia en tracción directa es de alrededor del 10% de su resistencia en compresión. Debido a su baja resistencia en tracción las grietas o fisuras en las zonas sujetas a esfuerzos de tracción son casi inevitables, en consecuencia es necesario adicionar refuerzo de acero para absorber los esfuerzos de tracción y controlar el agrietamiento.
- b) Las grietas hacen permeable al concreto armado y puede producirse o acelerarse la corrosión de las armaduras en concretos poco densos y permeables. La interconexión entre las fisuras, microfisuras y los vacíos en el concreto proveen trayectorias que permiten el ingreso de agua y otros elementos (iones dañinos) que pueden iniciar diversos tipos de problemas de durabilidad.
- c) Para la construcción de los elementos de concreto armado son necesarios los encofrados mientras el concreto se encuentra en estado plástico. El encofrado representa un costo importante para las estructuras vaciadas en obra y el proceso de - encofrado, vaciado, desencofrado, apuntalamiento temporal - consume materiales y mano de obra que inciden en el costo de la estructura.
- d) El proceso constructivo puede ser lento. La secuencia de: encofrar, colocar armaduras de refuerzo, vaciar el concreto, esperar el desarrollo de la resistencia, desencofrar, etc. genera lentitud.

El retraso en el tiempo de entrega de una obra o un avance lento significan un mayor "costo del dinero". Hoy en día, la velocidad de avance en una obra para lograr plazos de entrega más cortos, se ha convertido prácticamente en una obsesión.

En general si se logra emplear un mayor número de veces el mismo encofrado de las columnas, vigas y losas, se obtiene una reducción de los costos de la obra. También es posible lograr mayores velocidades de avance, con el uso de elementos prefabricados y/o preesforzados y con el empleo de concretos de mayor resistencia inicial para acortar los plazos de desencofrado.

- e) El concreto sufre Cambios de Volumen en el tiempo, estos son:
 - La Contracción de Secado o Retracción que puede originar fisuración en los elementos de concreto armado (vigas, losas, muros) así como deflexiones adicionales. El agrietamiento se produce en los elementos en los cuales la retracción se encuentra restringida, es decir que no pueden retraerse libremente. Las restricciones pueden ser externas provenientes de los apoyos (condiciones de borde del elemento) o por la fricción en el caso de pavimentos o pueden ser internas cuando las armaduras de refuerzo son asimétricas.
 - El Flujo Plástico produce a lo largo del tiempo en el concreto comprimido bajo cargas sostenidas, cambios importantes en los esfuerzos del acero de refuerzo y deflexiones en vigas y losas adicionales a las instantáneas.
- f) El concreto armado es un material con baja resistencia por unidad de volumen. Una manera simple de medir la "eficiencia" de un material es mediante el cociente Resistencia / Peso específico, este cociente para algunos materiales de construcción usuales es:

- Acero Grado 60 (tracción o compresión)	4,200 kg/cm ² / 7,800 kg/m ³	≈ 0.5 m ³ /cm ²
- Aceros de alta resistencia (Grado 250)	17,500 / 7,800	≈ 2.2
- Barra 16 mm fibra de carbono (Carbon FRP, SK Chemicals)	20,000/1,800	≈ 11.1
- Barra 16 mm fibra de vidrio (Glass FRP, SK Chemicals)	10,000/1,700	≈ 5.9
- Madera Tropical (compresión paralela)	300 / 900	≈ 0.3
- Aluminio Aleación 6061-T6	2,600 / 2,700	≈ 1.0
- Granito (compresión)	2,500 / 2,800	≈ 0.9
- Concreto $f'_c = 210$ (compresión)	210 / 2,300	≈ 0.1
- Concreto $f'_c = 210$ (tracción)	21 / 2,300	≈ 0.01
- Muro de Adobe (compresión)	18 / 1700	≈ 0.01

1.4 Breve Reseña Histórica del Concreto y del Concreto Armado

1.4.1 Morteros

Los morteros de cal empezaron a utilizarse unos 2000 años AC. Aún hoy en día se emplean en algunas partes del mundo. Este tipo de mortero tiene la desventaja de disolverse gradualmente ante la acción del agua. Alrededor del año 300 AC los Romanos descubrieron que ciertos materiales volcánicos (hoy en día conocidos con el nombre de Puzolanas) molidos finamente y mezclados con cal y arena daban origen a morteros con propiedades cementantes y resistentes al agua. El uso de este tipo de mortero permitió la construcción de numerosas obras, entre ellas acueductos, que perduran hasta nuestros días.

1.4.2 Concreto

Tal vez el ejemplo más importante del uso del concreto simple (sin armaduras de refuerzo) es el Pantheon en Roma. Construido inicialmente por Agrippa alrededor del año 30 AC, fue destruido dos veces por el fuego y finalmente reconstruido y modificado por Adriano alrededor del año 120 DC.

El Pantheon es un edificio de planta circular de albañilería y concreto con acabado de ladrillo en las paredes exteriores. La cimentación es un anillo de concreto de 4.5 m de altura bajo todo el muro perimetral. Destaca el domo o cúpula de 43 m de diámetro, la cúpula es una media esfera con un lucernario en la parte alta de unos 9 m de diámetro a través del cual se ilumina el interior del edificio. El espesor de la cúpula es variable desde unos 6 m en el arranque hasta 1.20 m en el lucernario. Para la construcción del domo se usó en la parte inferior agregado de pedazos (cascote) de ladrillo y en la parte superior agregados livianos provenientes de rocas volcánicas porosas (pómez). Fue durante muchos siglos la estructura con claro libre más largo, hasta la construcción de la Catedral de Florencia iniciada en el año 1420, cuya cúpula superó ligeramente el diámetro del Pantheon. Las figuras 1-1 a 1-4 muestran algunos detalles de esta colosal estructura.

1.4.3 Cemento Portland

En 1824 Joseph Apsdin, patentó un proceso de calentamiento en horno de piedra caliza y arcilla que producía un cemento artificial que al hidratarse y endurecerse adquiría la misma resistencia que la piedra de la isla de Portland. En 1845 I.C. Johnson descubrió que la mezcla calentada en exceso (calcinada) originaba un producto duro denominado clincker y que moliendo finamente este producto se obtenía un mejor cemento. Este cemento es el que utilizamos hasta hoy en día, con el nombre de Cemento Portland.

En 1871 se produjo Cemento Portland en Pennsylvania, sin embargo fue solo hasta principios de los 1880 que se produjo en los Estados Unidos una cantidad significativa de cemento.

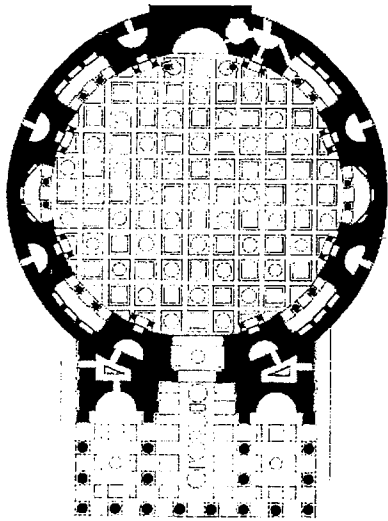


Fig. 1-1 Esquema de la planta.

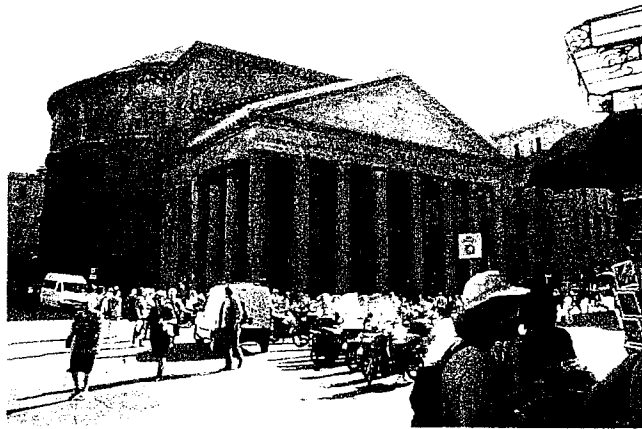


Fig. 1-2 Pórtico de entrada.

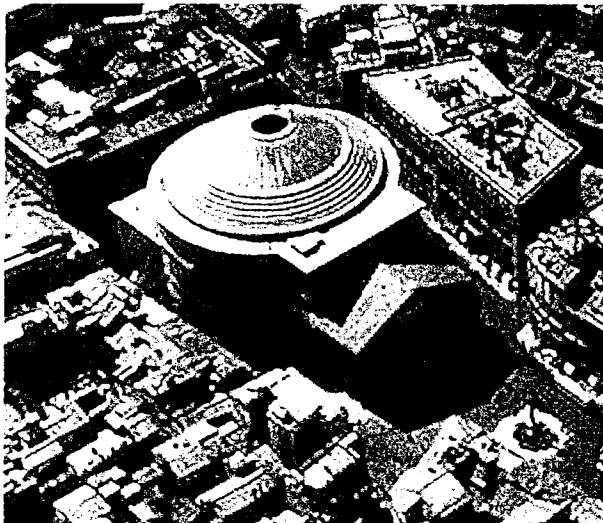


Fig. 1-3 Vista aérea.

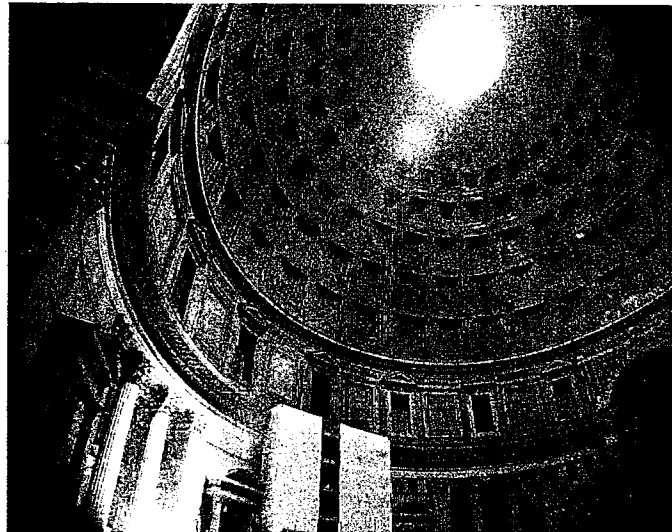


Fig. 1-4. Vista del domo desde el interior.
 Se aprecia el lucernario.

1.4.4 Concreto Armado

Se considera a Joseph Monier (Francés) el creador del concreto armado, fue uno de los primeros en patentar su uso. En 1850 comenzó a experimentar con macetas de concreto, reforzadas con malla de alambre. Patentó su idea en 1867 y entre 1868 y 1875 patentó numerosos sistemas de concreto armado para su uso en tanques, tuberías, losas de piso, puentes y escaleras.

Entre 1875 y 1900 el desarrollo del concreto armado se produjo a través de numerosas patentes en Europa y Estados Unidos. En 1904 existían 43 patentes registradas en el mundo. En 1894 una publicación de la Sociedad de Ingenieros Civiles de Francia sentó las bases para el diseño en flexión por esfuerzos admisibles.

En 1903 en la ciudad de Cincinnati, Ohio, se construyó el Ingalls Building, el primer edificio alto (rascacielos) íntegramente en concreto armado. Este edificio de 16 pisos y 64 m de altura fue construido con pórticos y losas monolíticas. Las losas trabajando

como diafragmas rígidos en su plano, permitieron distribuir las cargas laterales de viento entre los diversos pórticos. En la figura 1-5, tomada de la ASCE, se aprecia este edificio que aún hoy en día existe (figura 1-6).



Fig. 1-5 Edificio Ingalls 1903. 16 pisos.

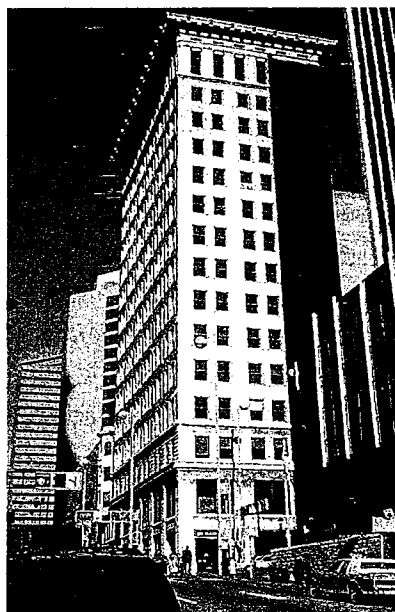


Fig. 1-6 Edificio Ingalls en la actualidad.

En el Perú (Harmsen) los primeros barriles de cemento llegaron en 1850 y los primeros hornos para fabricar cemento en 1915. En el libro, *Tópicos de Tecnología del Concreto* de Enrique Pasquel C. es posible encontrar una detallada reseña histórica del uso del concreto en el Perú.

1.4.5 Concreto Preesforzado

Se considera a Eugene Freyssinet el pionero del desarrollo del concreto preesforzado. Realizó numerosas investigaciones, diseños y construcciones de notables puentes y estructuras. Patentó diversos sistemas de preesfuerzo y de anclajes para los tendones.

En 1928, luego de numerosas pruebas e investigaciones iniciadas en 1911, concluyó que era indispensable el uso de aceros de alta resistencia para que el preesfuerzo funcionara adecuadamente en el concreto. El uso hasta entonces de aceros normales (de baja resistencia) condujo a que debido a los fenómenos de flujo plástico y retracción del concreto, gran parte del preesfuerzo inicial aplicado se perdía, con lo cual todas las ventajas del preesfuerzo desaparecen y se pone en serio riesgo la seguridad de la estructura.

1.4.6 Concretos de Alta Resistencia

Las figuras 1-7 y 1-8 (Calavera) intentan resumir la evolución, tanto en la altura de los edificios de concreto armado, como en la resistencia a compresión del concreto utilizado en su construcción. En cuanto a la evolución de la resistencia a compresión del concreto, es posible resaltar que ya se han ensayado en laboratorio mezclas de concreto de hasta 30,000 psi (2,100 kg/cm²) y en la construcción de edificios se han utilizados concretos de hasta 1,300 kg/cm².

En el Perú se han utilizado, con cierta frecuencia, concretos de hasta 450 kg/cm². Los concretos más comunes utilizados en la construcción de edificios convencionales, son los de 210 hasta 280 kg/cm², sin embargo se siguen empleando concretos de 175 kg/cm²

en la construcción de viviendas uni o multifamiliares. En estructuras preesforzadas empleamos normalmente concretos de 350 kg/cm².

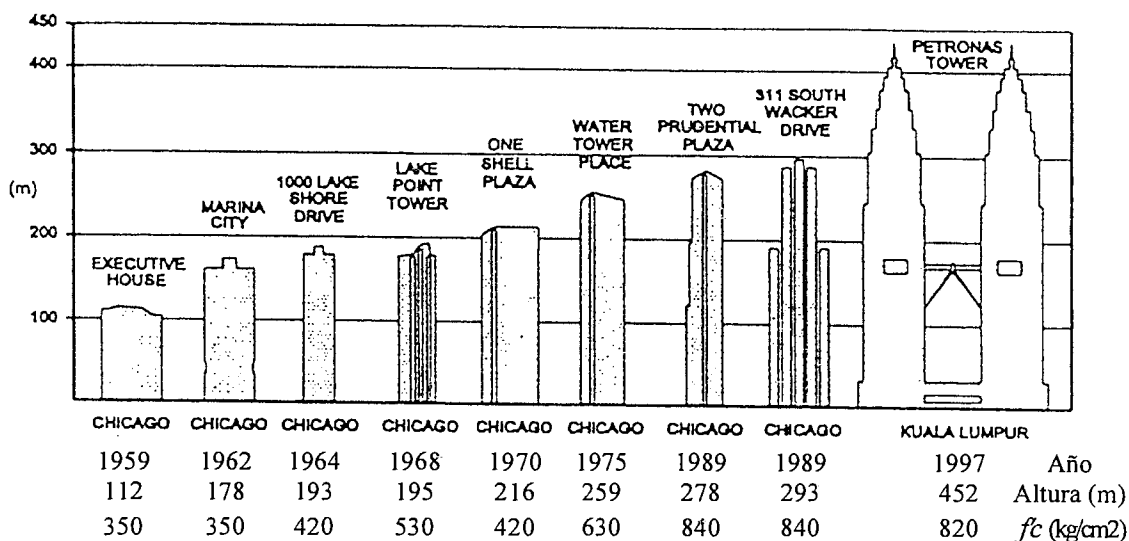


Fig. 1-7 Evolución de la altura de los edificios de concreto armado.

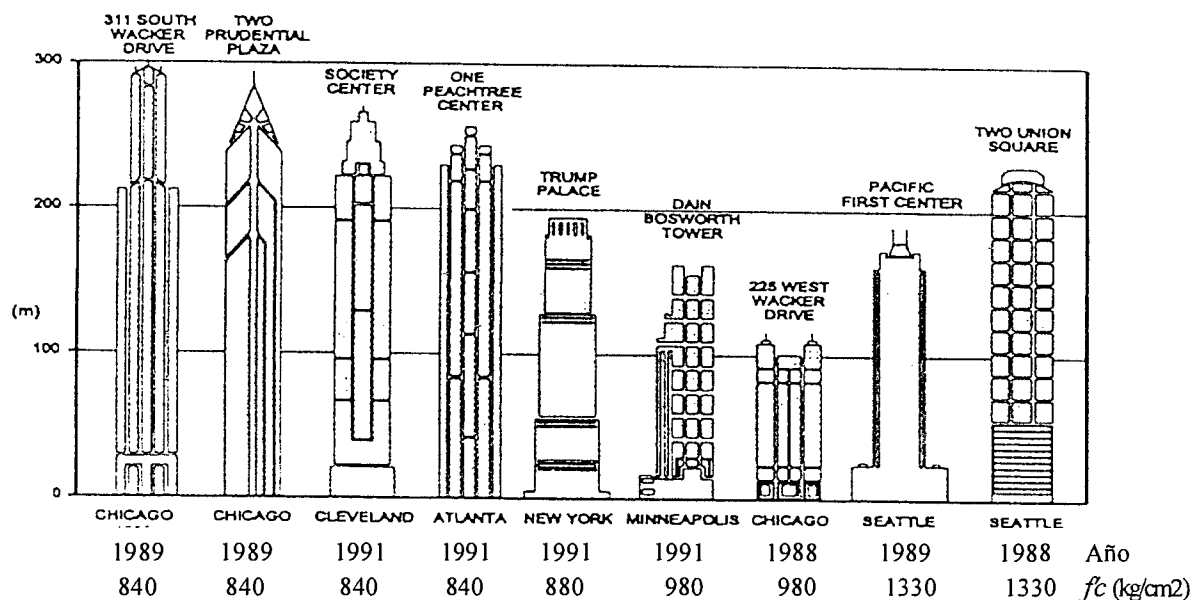


Fig. 1-8 Evolución de la resistencia del concreto en edificios.

1.5 Códigos o Normas de Concreto Armado

Cada material suele tener su propio código (concreto, acero, madera, albañilería, etc.). Existe un grupo de códigos generales aplicables a todos los materiales, por ejemplo en el Perú existen, entre otras, la Norma de Cargas E.020, la Norma de Diseño Sismorresistente E.030, la Norma de Suelos y Cimentaciones E.50. Estas se denominan Normas Técnicas de Edificación y forman parte del Reglamento Nacional de Construcciones.

El diseño y la construcción de edificios están regulados por leyes municipales, estatales o nacionales (como en el caso del Perú) denominadas Códigos de Construcción o de Edificación, estos tienen fuerza legal y su función principal es asegurar la seguridad del público.

Los códigos o normas establecen los **Requisitos Mínimos** que deben cumplir las estructuras, el material, los refuerzos y el diseño. Las normas establecen los niveles mínimos de seguridad que debe tener una estructura o elemento estructural. Además intentan asegurar que los niveles de seguridad sean mas o menos uniformes, es decir, varias estructuras similares diseñadas por distintos ingenieros para un mismo grupo de acciones o solicitaciones y con un mismo código, deberían tener niveles mínimos de seguridad similares. Se dice similares y no idénticos ya que pueden existir diferencias notables en la calidad y control en la ejecución de la obra.

Las normas provienen (Riddell, Hidalgo) de las siguientes fuentes:

- a) Estudios teóricos. Resultados obtenidos a partir de una base teórica o modelo matemático de un fenómeno físico. Los resultados teóricos suelen verificarse experimentalmente en laboratorio para comprobar su validez y si es necesario, se modifica la formulación teórica.
- b) Evidencias experimentales. Resultados experimentales, muchas veces empíricos, provenientes del estudio en laboratorio de fenómenos muy complicados para ser modelados y analizados teóricamente. Estos resultados conducen a fórmulas o expresiones que deben usarse con cuidado ya que podrían estar extrapoliándose a situaciones que escapan del rango de validez de los resultados experimentales.

En los códigos de concreto armado es bastante frecuente encontrar formulas empíricas provenientes del ajuste de resultados experimentales. Ejemplos de estas formulas son las que se utilizan para estimar el módulo de elasticidad del concreto, la resistencia a la tracción por flexión del concreto, la resistencia al corte del concreto.

- c) Práctica profesional. Buena parte del conocimiento en ingeniería proviene de lo que se ha hecho en el pasado con buenos resultados, representa algo así como el “arte” de la profesión. La incorporación en las normas de la experiencia local es importante ya que permiten reflejar las características locales de los materiales, la calidad de la mano de obra, el nivel y calidad de la supervisión de las construcciones, los usos y costumbres. Esto es particularmente importante cuando se adoptan normas extranjeras basadas en otras realidades.
- d) Avance del conocimiento. Los códigos normalmente tratan de reflejar lo que se suele denominar el “estado del arte” o del nivel de avance del conocimiento sobre el comportamiento del material ante las distintas solicitaciones o combinaciones de estas. A medida que se acumula o genera mayor información teórica y experimental, así como información sobre el desempeño de las estructuras diseñadas con determinado código – colapsos, mal comportamiento de estructuras reales, excesos de resistencia, etc. - los códigos se modifican y mejoran. Esto es particularmente importante en zonas de alta sismicidad, donde los terremotos fuertes suelen provocar numerosas fallas estructurales las que obligan a revisar las disposiciones de las normas.

Los códigos suelen ser una ayuda para el ingeniero, sin embargo, las disposiciones contenidas en ellos no deben seguirse ciegamente, es preciso entender el porqué de ellas para poder aplicarlas correctamente, ya que usualmente se han derivado para las situaciones más comunes que no pueden extrapolarse a cualquier caso. También se mencionó que los códigos fijan los requisitos mínimos que deben cumplirse, el ingeniero estructural deberá aplicar su criterio y conocimiento para discernir los casos o situaciones en las que las disposiciones de las normas pueden ser insuficientes o exageradas.

1.5.1 Código del American Concrete Institute – ACI

El American Concrete Institute (ACI), es una organización científica y educacional sin fines de lucro. Comenzó sus actividades en 1904, con otro nombre, con la finalidad de servir como foro de discusión de todos los aspectos relacionados con el uso del concreto como material de construcción.

En 1910 en los Estados Unidos la National Association of Cement Users, organización que luego en 1913 se convertiría en el American Concrete Institute (ACI) publicó un conjunto de regulaciones para el uso del concreto armado en edificaciones titulado “Standard Building Regulations for the Use of Reinforced Concrete”. Este documento se considera el primer código de edificaciones (Building Code) del ACI

El ACI publica periódicamente el “Building Code Requirements for Structural Concrete ACI-318”. El primer código con el título ACI-318 se publicó en 1941. El ACI-318 es una suerte de código modelo para el diseño del concreto armado, tiene fuerza legal solo si es adoptado como parte de un código local.

EL ACI-318 ha servido y sirve de base para el desarrollo de numerosos códigos en todo el mundo, por ejemplo en Canadá, Nueva Zelanda, Australia y varios países de Latino América, entre ellos, Perú, Chile, Colombia, Ecuador.

El código del ACI se suele renovar cada seis años, la última edición corresponde al año 2011. El ACI del año 2008 conjuntamente con la Norma Peruana E.060 del año 1989 y la nueva Norma del año 2009, son las normas que se han utilizado en estos apuntes.

1.5.2 Código o Norma Peruana

En el Perú la norma que rige el diseño de las estructuras de concreto armado es la “Norma E.060 - Concreto Armado”, que forma parte Reglamento Nacional de Construcciones. Fue publicada en mayo del 2009 por SENCICO (Servicio Nacional de Capacitación para la Industria de la Construcción).

La Norma Peruana E.060 del año 1989 estuvo basada fundamentalmente en el código del ACI-318 del año 1983 y en el suplemento del mismo del año 1986. La nueva norma E.060 del 2009 está basada en el ACI-318 del año 2005 y parcialmente en el borrador (Draft) que salió a discusión pública del ACI-318 del 2008.

1.5.3 Códigos Europeos

Cada país suele tener su propio código de edificaciones, sin embargo desde la formación de la Comunidad Europea de Naciones, los países miembros de esta, han migrado hacia un solo modelo de código común. En ese sentido el Código Modelo CEB-FIP 1990 para Concreto Estructural, ha jugado un papel importante.

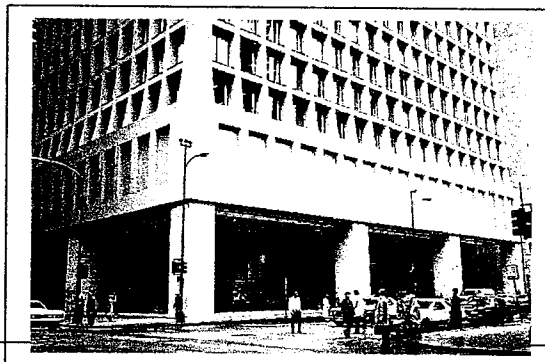
El Comité Europeo de Normalización (CEN) ha generado para el concreto estructural, sobre la base del Código Modelo CEB-FIP, el Eurocódigo 2 (EN 1992-1 Parte 1) “Design of Concrete Structures”.

1.6 Lecturas

- 1.1 Capítulo 2 (Historia del Concreto Reforzado) y Capítulo 3 (El uso del Concreto en Arquitectura) del libro Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado. Henry J. Cowan. Editorial Cecsca.
- 1.2 Concrete Construction in Early Rome. Kent A. Harries. ACI Concrete International, January 1995.
- 1.3 Capítulo 3 (Historia de la Albañilería) del libro Albañilería Estructural. Héctor Gallegos. Fondo Editorial PUCP, 1989.
- 1.4 Greening of the Concrete Industry for Sustainable Development. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, July 2002.
- 1.5 Reducing the Environmental Impact of Concrete. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, October 2001.
- 1.6 Development of a national Building Code for Reinforced Concrete 1908-1977. George Winter. ACI Concrete International, December 1982.
- 1.7 The Building of a Building Code. Mete A. Sozen. ACI Concrete International, May 2006.

CAPITULO 2

Elementos Estructurales



2.1 Elementos de Concreto Armado

Estos apuntes están orientados hacia el diseño de elementos simples de concreto armado, aquellos que normalmente están presentes en los edificios. Los edificios de concreto armado están conformados por el “ensamblaje” de elementos individuales, los que conectados entre sí interactúan para soportar las cargas que obran sobre el edificio.

2.2 Edificios de Losas con Vigas

La figura 2-1 (adatada de MacGregor) muestra un edificio simple donde están presentes los elementos más comunes de toda edificación. Las losas de piso, las vigas principales y secundarias, las columnas, los muros de concreto (en este caso en los sótanos), las escaleras, las zapatas y algunos elementos secundarios como los dinteles.

La losa del segundo piso es nervada, está compuesta por una losa maciza en la parte superior la que se apoya sobre los nervios o viguetas. La losa maciza trabaja en una dirección (Norte – Sur) y transmite las cargas a las viguetas que trabajan en la dirección perpendicular a la losa. Las viguetas se apoyan sobre las vigas y estas sobre las columnas las que transfieren finalmente las cargas al suelo a través de la cimentación (zapatas aisladas o corridas). Ya que la losa y las viguetas se construyen de manera monolítica, parte de la losa superior trabaja conjuntamente con las viguetas dando origen a una viga T. Este esquema de losa de piso es muy común en nuestro medio, se le denomina techo aligerado, la diferencia radica en que entre las viguetas se colocan ladrillos de relleno para obtener una superficie inferior plana.

En el primer piso de este hipotético edificio, se ha utilizado una losa maciza apoyada sobre vigas (Two-way Slab). A diferencia de la losa del segundo piso que trabaja en una dirección, la losa maciza normalmente trabaja en dos direcciones transfiriendo cargas a todas las vigas sobre las cuales se apoya. Las vigas en este caso trabajan como T ya que el vaciado de las losas y de las vigas suele ser monolítico.

Las losas (incluyendo la escalera) y las vigas se diseñan en flexión simple (flexión y cortante), las columnas y los muros en flexión compuesta (flexión, carga axial y cortante). Las zapatas experimentan flexión y cortante incluyendo lo que se denomina punzonamiento o cortante en dos direcciones.

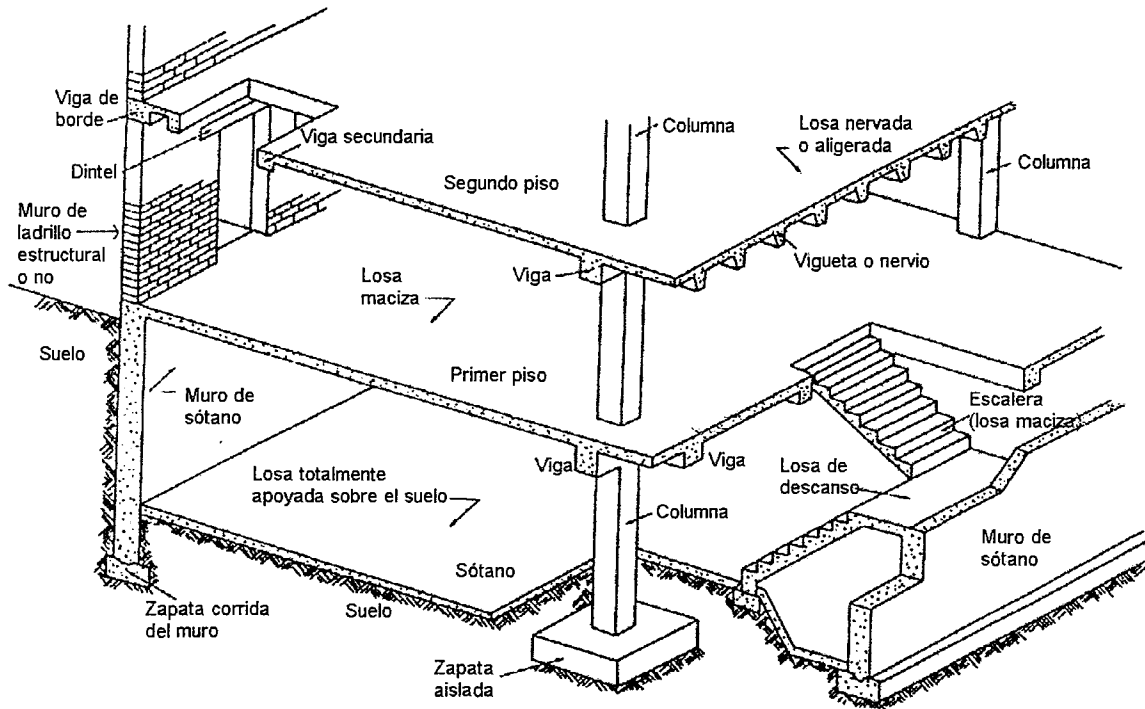


Fig. 2-1 Esquema de un edificio de concreto armado

2.3 Losas Nervadas

La figura 2-2 muestra la vista inferior de una losa nervada, se aprecia la losa maciza que se apoya sobre las viguetas y estas que se apoyan sobre las vigas principales. También se observa la presencia de tres nervios de costura perpendiculares a las viguetas en cada paño. Los nervios de costura permiten distribuir mejor las cargas que obran sobre la losa entre las viguetas, sobre todo las posible cargas provenientes de los tabiques o elementos de división paralelos a las viguetas. Las losas nervadas son un claro ejemplo de acción o de sistemas armados en una dirección.



Fig. 2-2 Losa Nervada armada en una dirección.

La figura 2-3a muestra el encofrado de una losa nervada, se observan los casetones utilizados para el encofrado. Nótese que los casetones en los extremos son de sección variable de tal modo que la vigueta de concreto tendrá un mayor ancho cerca de los apoyos sobre las vigas, con esto se mejora la resistencia del concreto de las viguetas ante las fuerzas cortantes. La diferencia de este encofrado con respecto al que se emplearía para un aligerado de los que utilizamos en nuestro medio (figura 2-3b), radica en que en lugar de los casetones los aligerados llevan ladrillos de arcilla o de concreto vibrado, con lo cual se obtiene una superficie inferior plana.



Fig. 2-3a Encofrado con casetones de una Losa Nervada.



Fig. 2-3b Llenado de un aligerado. Lima

2.4 Losas con Vigas Anchas

La figura 2-4 muestra otro sistema de techado constituido por una losa maciza (podría ser aligerada) que se apoya sobre vigas anchas. En este caso la losa maciza trabaja esencialmente en la dirección paralela al plano de la figura. Las vigas anchas obedecen a limitaciones en el peralte, producto de una altura libre de entrepiso reducida. Los ábacos son opcionales dependiendo de la intensidad de la fuerza cortante. Tanto las losas como las vigas podrían ser preesforzadas. Estas losas se les conoce con el nombre de "banded slab" o losas en banda

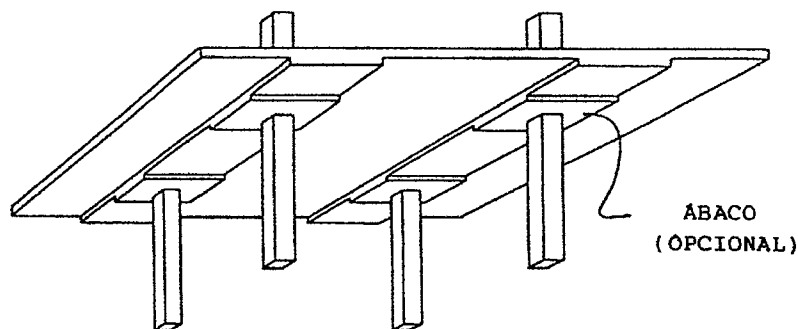


Fig. 2-4 Losas en una dirección con vigas anchas.

2.5 Losas Nervadas en Dos Direcciones

Las figuras 2-5 y 2-6 muestran otro tipo de losa nervada que se le conoce como "losa waffle". En este caso la losa trabaja en dos direcciones ortogonales entre sí y se requiere armadura de refuerzo por flexión en las dos direcciones. Nótese que no existen vigas y que en la zona de apoyo de las viguetas en la columna se ha colocado una losa maciza

a manera de ábaco incluido en el espesor del techo. Esta zona maciza se diseña para soportar los elevados esfuerzos cortantes (punzonamiento) que se presentan en la unión losa – columna.

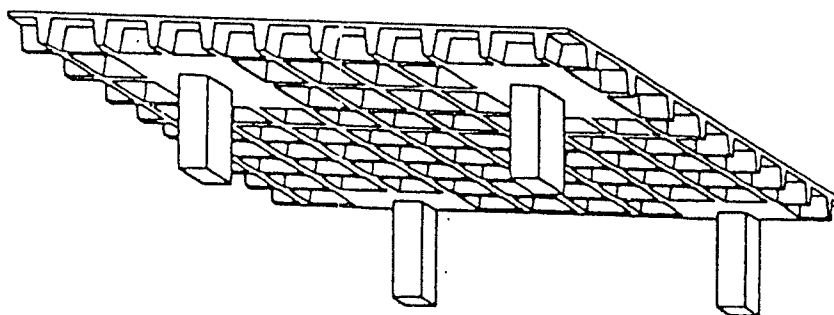


Fig. 2-5 Losa Nervada en dos sentidos (Waffle Slab)



Fig. 2-6 Detalle del encuentro losa – columna (Waffle Slab)

2.6 Edificios de Losas sin Vigas

La figura 2-7 (adatada de MacGregor) muestra otro edificio simple en el cual no hay vigas interiores. Las losas de piso, generalmente macizas, trabajan en dos direcciones, es decir hay flexión en las dos direcciones y en consecuencia debe proveerse refuerzo de acero en ambas direcciones.

La losa del segundo piso es plana de espesor uniforme (Losa Plana o Flat Plate) y se apoya directamente sobre las columnas sin necesidad de vigas. Este tipo de techo es muy común en otros países, sobre todo en edificios de departamentos, ya que provee una mayor altura libre, permite el pase de instalaciones de aire acondicionado y tuberías sin obstáculos y su encofrado es simple y más económico que en el caso de losas con vigas.

En el primer piso de este hipotético edificio, también se ha utilizado una losa maciza (Flat Slab). A diferencia de la losa del segundo piso, que era completamente plana, en este caso se han usado ábacos (drop panels) que son ensanches en el espesor de la losa en la zona de apoyo sobre las columnas. También se han utilizado capiteles en la parte superior de las columnas. El propósito de los ábacos y capiteles es proveer un mayor espesor en las zonas del encuentro con las columnas para tener mayor resistencia en flexión y cortante, cuando las cargas externas y/o luces así lo requirieran.

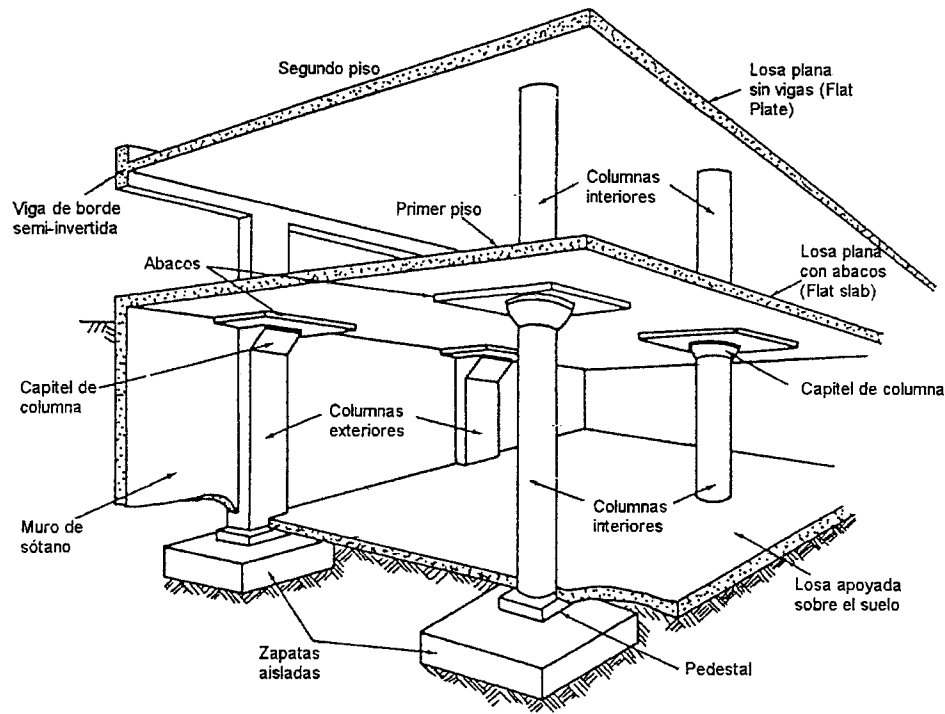


Fig. 2-7 Esquema de un edificio con losas planas (Flat Slab y Flat Plate)

La figura 2-8 muestra un edificio de estacionamientos en el cual se ha utilizado una losa plana (Flat Slab) armada en dos sentidos reforzada con ábacos.

La figura 2-9 muestra un edificio de varios pisos con losas planas armadas en dos direcciones sin vigas. Este tipo de edificio no es común en nuestro medio ya que ha demostrado, muchas veces durante sismos severos - en particular durante el sismo que afectó la ciudad de México en 1985 - un mal comportamiento. Este tipo de edificio ante las cargas laterales provenientes de un sismo, tiene problemas por las excesivas deformaciones laterales que experimenta (poca rigidez lateral) y por la baja resistencia frente a cargas cíclicas de la conexión losa – columna la cual suele experimentar peligrosas fallas de punzonamiento con muy baja ductilidad. En consecuencia cuando se le utiliza, es necesario combinarlo con generosos muros o placas de concreto armado que controlen el desplazamiento lateral y absorban una gran parte de las fuerzas sísmicas.



Fig. 2-8 Edificio de estacionamientos con losa plana (Flat Slab)

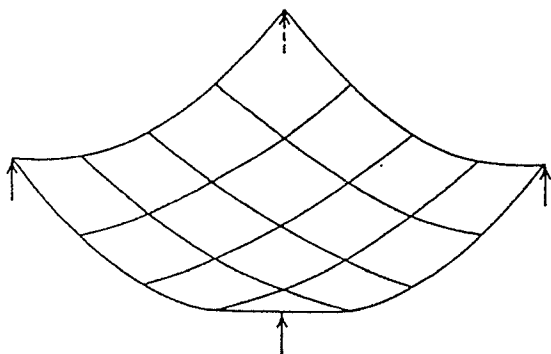


Fig. 2-10 Losa (Flat Plate) apoyada en las esquinas.

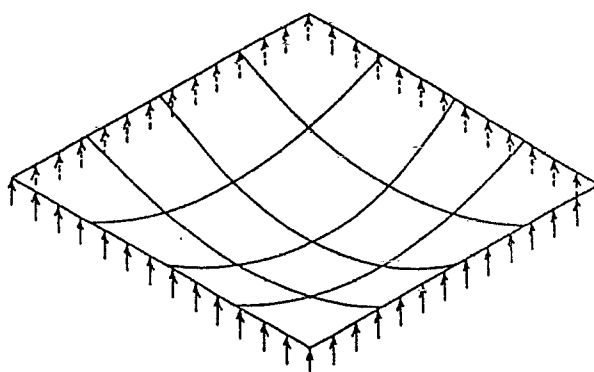


Fig. 2-11 Losa en dos sentidos apoyada en los cuatro bordes.

Para tener una idea de la variación de los momentos flectores entre los dos casos mencionados, consideremos una losa cuadrada de 8 m de lado de espesor uniforme, sometida a una carga uniformemente repartida. El análisis elástico indica que cerca del centro del paño, el momento positivo en la dirección longitudinal o transversal en el Flat Plate, es aproximadamente 2.5 veces mayor que en la losa apoyada en sus cuatro bordes. Si las vigas de borde no fueran infinitamente rígidas en la dirección vertical, como en el caso analizado, las diferencias serían menores.

Si ambas losas fuesen continuas, es decir de varios paños, aparecerían momentos negativos en los apoyos por el cambio en el signo de la curvatura. Esta situación se muestra en la figura 2-12 correspondiente a una losa alargada empotrada en todo su contorno. Se han dibujado las deformadas y los momentos flectores correspondientes a tres franjas de la losa, dos en la dirección transversal (A y B) y una en la dirección longitudinal (C). Una distribución similar de momentos flectores se obtendría si la losa estuviera apoyada sobre vigas rígidas.

La figura 2-13 muestra la variación de los momentos flectores al centro de una losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes sometida a una carga uniformemente repartida en toda el área, en función de la relación entre sus lados. La solución corresponde a Westergaard para el caso de un Coeficiente de Poisson nulo. Se muestran los coeficientes que permiten calcular los momentos flectores por unidad de ancho en la dirección corta de la losa (M corta) y en la dirección larga (M larga). Es claro que los momentos flectores al centro de la losa en la dirección corta siempre son mayores que los de la dirección larga, salvo en el caso de la losa cuadrada en que ambos son iguales. Este hecho se explica físicamente si imaginamos dos bandas, una en la dirección corta y otra en la larga, que se cruzan al centro de la losa, la banda en la dirección corta es más rígida y por lo tanto podemos imaginar que soporta una fracción mayor de la carga externa.

Es interesante comparar los momentos flectores al centro de la losa para el caso en el cual uno de los lados es el doble que el otro ($b/a = 0.5$) en esta situación el momento flector en la dirección corta es aproximadamente 3.8 veces mayor que el correspondiente a la dirección larga. En el caso extremo de que un lado sea mucho más largo que el otro ($b/a = 0$) el momento en la dirección corta, como era de esperarse, tiende a $1/8 w b^2$. Obsérvese que aún en esta situación, existe momento flector, aunque pequeño, en la dirección larga.

Una forma de eliminar el momento flector en la dirección larga, es la de utilizar una losa ortotrópica, es decir que tenga mayor rigidez en la dirección corta que en la dirección larga. Los aligerados o las losas nervadas cumplen con este requisito ya que, en la dirección de las viguetas (figuras 2-1, 2-2, 2-3) la rigidez y la resistencia es mucho mayor que en la dirección perpendicular a ellas. Por este motivo los aligerados y las losas

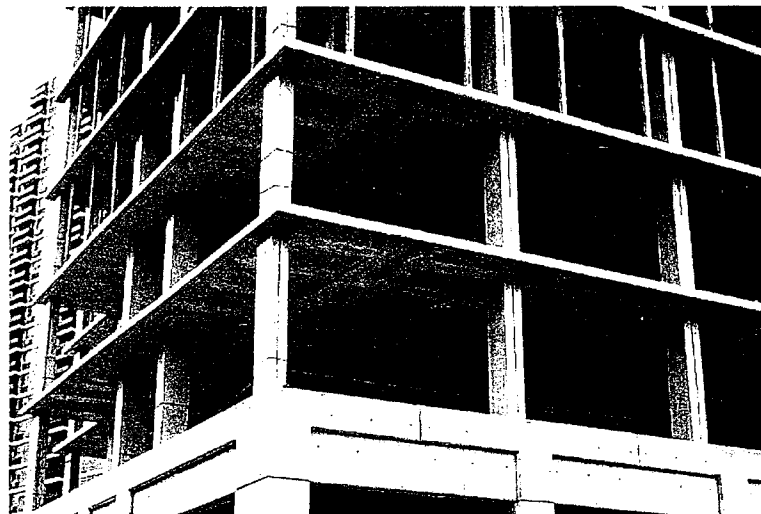


Fig. 2-9 Edificio de losas planas sin vigas (Flat Plate)

2.7 Losas Armadas en Dos Direcciones

Las losas que trabajan en dos direcciones son aquellas que tienen momentos flectores significativos en ambas direcciones. Esto ocurre normalmente cuando la relación entre claro largo y el claro corto se encuentra entre uno y dos. Losas con relaciones mayores que dos, se suelen analizar y diseñar como losas armadas en una dirección.

Históricamente las losas en dos direcciones se han dividido, para fines de diseño estructural, en dos tipos con comportamiento marcadamente distinto. Uno de los tipos corresponde a las losas apoyadas sobre vigas rígidas verticalmente o muros en sus cuatro lados, a estas se les denomina losas en dos direcciones con vigas (Two-way Slabs). El otro tipo corresponde a las losas sin vigas y se les denomina losas planas (Flat Plate) o losas planas con ábacos (Flat Slab).

La distinción anterior es completamente válida solo en los extremos citados, es decir con vigas rígidas o sin vigas. Cuando los apoyos están constituidos por vigas flexibles, el comportamiento estructural se encuentra entre estos dos límites. A medida que la rigidez de las vigas varía de pequeña (vigas flexibles) a grande (vigas rígidas), el comportamiento estructural varía paulatinamente entre el de un Flat Plate o Flat Slab al de un Two-way slab.

Este cambio de comportamiento se puede apreciar al comparar las figuras 2-10 y 2-11 (Fling) que corresponden a losas aisladas con distintas condiciones de apoyo. La figura 2-10 corresponde a una losa plana (Flat Plate) apoyada en las cuatro esquinas, la losa se deforma en doble curvatura. Las curvaturas y los momentos positivos son mayores a lo largo de la línea que une las columnas y se van reduciendo ligeramente a medida que nos acercamos hacia el centro de la losa.

En comparación, la losa de la figura 2-11 simplemente apoyada en los cuatro bordes sobre muros indeformables en la dirección vertical, se deforma de una manera distinta. Las curvaturas y los momentos positivos son máximos en el centro de la losa y se van reduciendo a cero, a medida que nos acercamos a los apoyos, este comportamiento es el inverso del comentado para el Flat Plate.

nervadas en una dirección, trabajan en esencia con momentos flectores en una sola dirección aún en el caso en que las longitudes de los bordes sean similares.

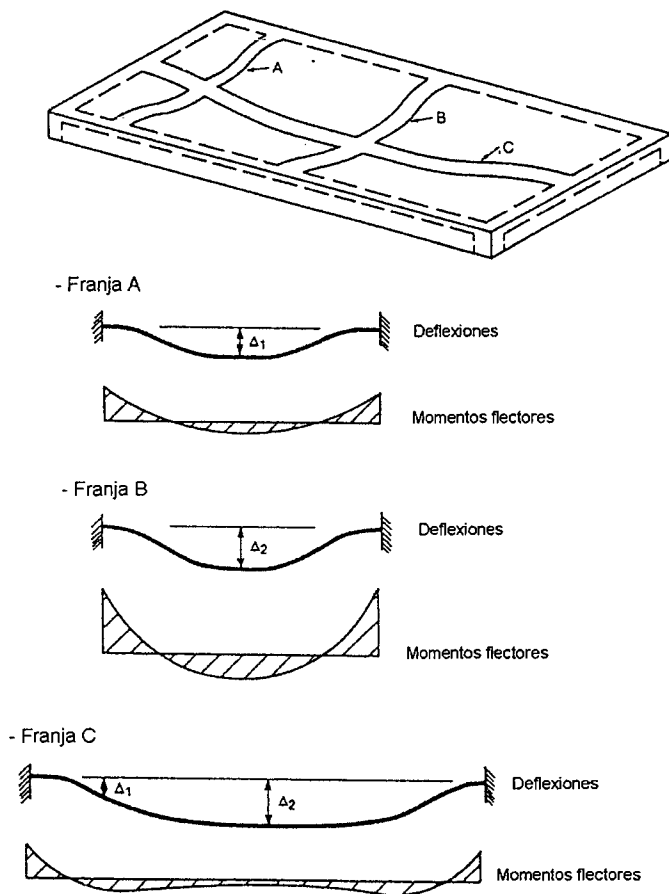


Fig. 2-12 Losa empotrada en todo el contorno.

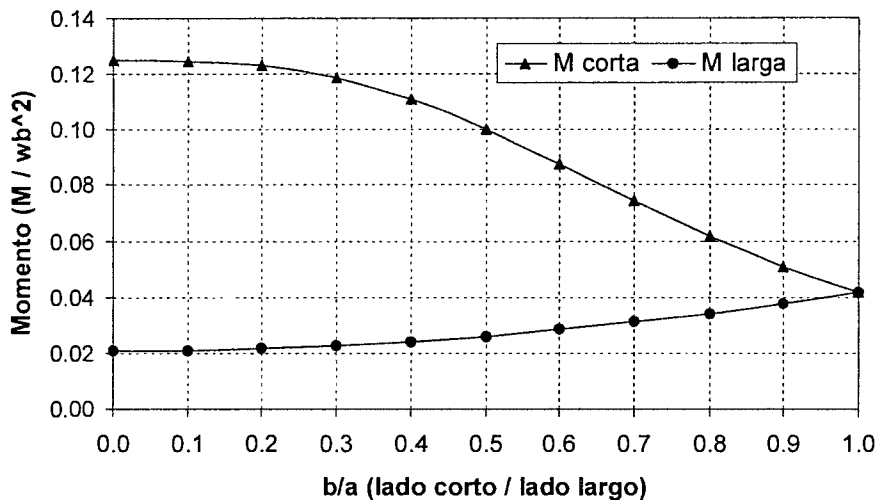


Fig. 2-13. Momentos flectores en una losa simplemente apoyada en los cuatro bordes.

2.8 Algunas Configuraciones Estructurales Típicas de Edificios en Lima

En este acápite no se intenta cubrir la gran variedad de configuraciones estructurales presentes en los edificios. Se intenta dar una idea de los tipos más comunes utilizados en nuestro medio en los edificios de concreto armado.

Las figuras 2-14 y 2-15 muestran una vivienda y un edificio de poca altura de albañilería confinada. Es un sistema estructural muy difundido en nuestro medio, un porcentaje muy alto de las viviendas y edificios bajos, están estructurados sobre la base de este sistema. Su ventaja estriba en que los muros cumplen una doble función, por un lado sirven como elementos de partición o división de ambientes y de cierre y además cumplen una función estructural al soportar las cargas verticales y las cargas laterales de sismo. El concreto armado está presente en la cimentación, en las losas de techo (normalmente aligeradas) en las columnas de confinamiento, en las soleras, en las vigas y en la escalera.

Las columnas de confinamiento y las soleras confieren ductilidad al muro de albañilería y permiten que este pueda seguir soportando cargas laterales después del agrietamiento diagonal que suele producirse en sismos intensos.

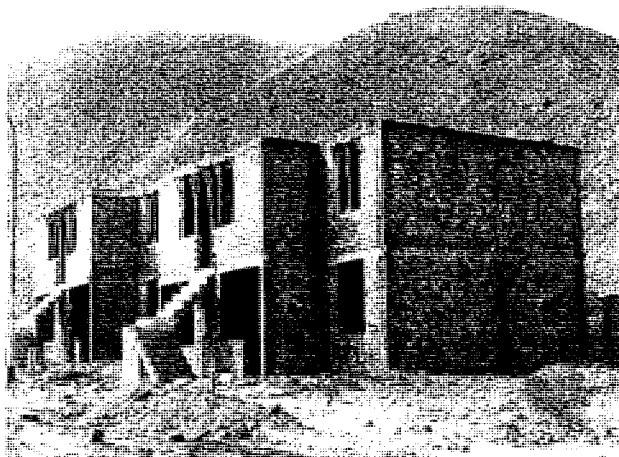


Fig. 2-14 Vivienda de albañilería confinada.



Fig. 2-15 Edificio de albañilería confinada.

La figura 2-16 muestra otro tipo estructural, basado en pórticos de concreto armado, que se utiliza con frecuencia en nuestro medio para edificios bajos de vivienda u oficina. En este caso el esqueleto resistente ante cargas verticales y laterales lo conforman los pórticos y se supone que los muros de albañilería no cumplen una función estructural, ni interfieren con los elementos estructurales. Esta suposición no es del todo válida para las cargas laterales de sismo ya que si los muros no se encuentran convenientemente aislados (como es el caso de la figura) el edificio, al deformarse lateralmente, hará trabajar en corte a los muros modificando la respuesta de la estructura tal como fue concebida por el diseñador.

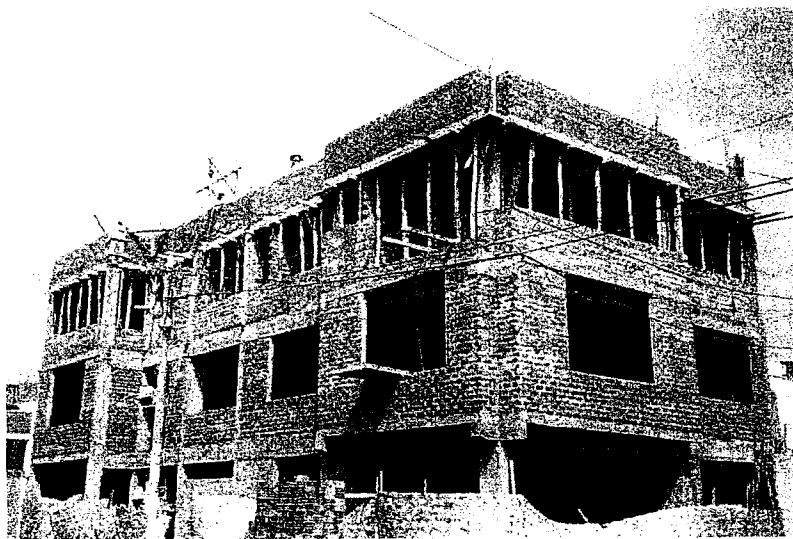


Fig. 2-16 Edificio de concreto armado con tabiques

La figura 2-17 muestra un tipo estructural que se utilizó mucho en nuestro medio en la década de los 60 hasta mediados de los 70. Se trata de un edificio de mediana altura en el cual las cargas verticales y laterales son soportadas básicamente por pórticos conformados por vigas y columnas con pocas placas o muros de corte. En este caso las placas están limitadas a la caja de ascensores y a la caja de escaleras a la izquierda del edificio. Este tipo de edificio, que aún hoy en día se construye, suele ser flexible lateralmente con lo cual los elementos no estructurales pueden dañarse en un sismo, además de exigir demasiada resistencia y ductilidad a las vigas y columnas.



Fig. 2-17 Edificio aporcionado de concreto armado

Las figuras 2-18 y 2-19 muestran un tipo estructural actualmente muy utilizado en nuestro medio para los edificios de mediana altura y para los altos. Son los edificios estructurados sobre la base de una combinación de pórticos y de generosos muros o placas de concreto armado, encargadas de soportar un gran parte de las fuerzas laterales de sismo. Este tipo de edificio es rígido y resistente lateralmente, sin embargo su ductilidad global es inferior a la de los edificios aporcionados. Su gran ventaja estriba en el control efectivo de los desplazamientos laterales (deriva de entrepiso) por la presencia de los muros.

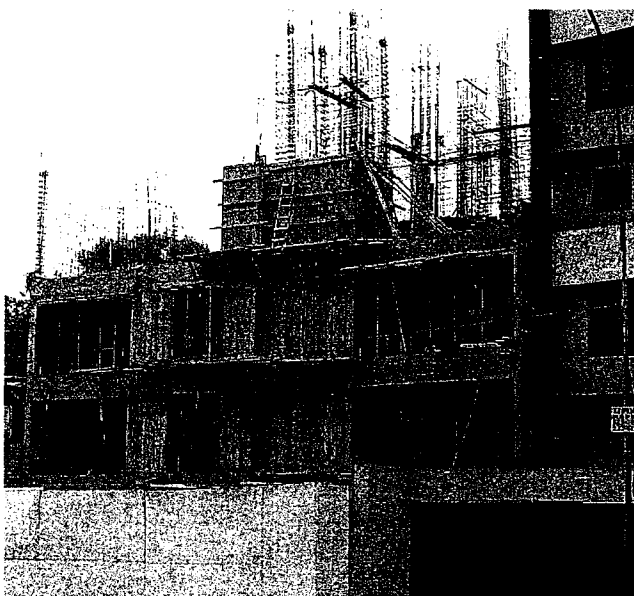


Fig. 2-18 Edificio con placas en construcción.



Fig. 2-19 Edificio con placas.

Finalmente las figuras 2-20 y 2-21 muestran un tipo estructural que ha adquirido mucha difusión y aceptación en nuestro medio. Se trata de los edificios construidos íntegramente de muros delgados de concreto armado, es decir no existen tabiques o particiones de albañilería de ninguna clase. Los muros suelen ser 0.10, 0.12 y hasta 0.15 m de espesor, generalmente con una sola malla de refuerzo y sin detalles especiales de ductilidad. Las losas son macizas armadas en dos sentidos de 0.10 ó 0.12 m de espesor. Estos edificios, que se suele denominar tipo "Mi Vivienda", nacieron para viviendas de relativo bajo costo de hasta cinco pisos, sin embargo se han llevado en algunos casos, hasta 10 o más pisos de altura. La Norma Sísmica y la de Concreto Armado los denomina Edificios con Muros de Ductilidad Limitada.

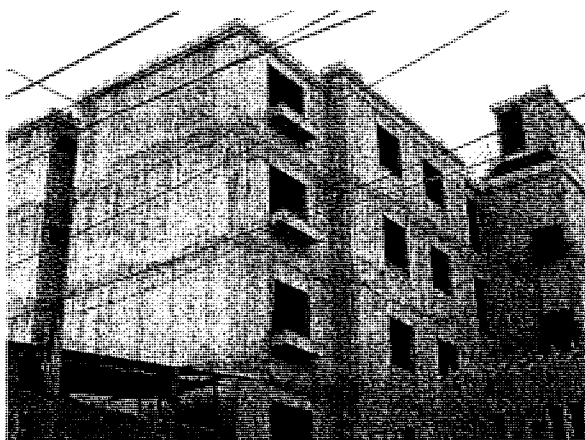


Fig. 2-20 Edificio construido íntegramente de muros y losas macizas de concreto armado.



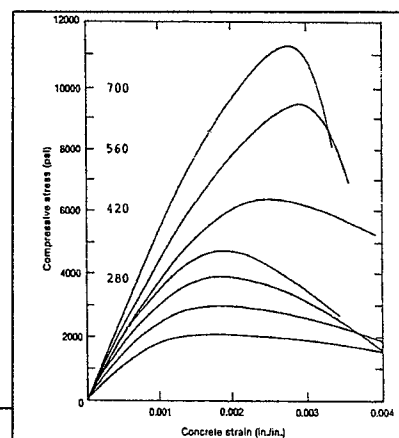
Fig. 2-21 Detalle del refuerzo de los muros con malla electro soldada.

2.9 Lecturas

- 2.1 Capítulo 2 (Elementos Estructurales) y Capítulo 3 (Predimensionamiento de Elementos Estructurales) del libro Estructuración y Diseño de Edificaciones de Concreto Reforzado. Antonio Blanco Blasco. Libro 2, Colección del Ingeniero Civil.
- 2.2 Shearwalls – An Answer for Seismic Resistance? Mark Fintel. ACI Concrete International, July 1991.
- 2.3 Capítulo 5 (Criterios de Estructuración de Edificios) del libro Diseño Sísmico de Edificios. Bazán / Meli. Editorial Limusa.

CAPITULO 3

Propiedades Mecánicas del Concreto



3.1 Introducción

En su forma más simple, el Concreto es un material compuesto constituido por un material cementante, agua y agregado. El cemento, normalmente tipo Portland, una vez hidratado genera la adhesión química entre los componentes. Por lo general el agregado representa entre el 60 al 75% del volumen total del concreto estructural, el cemento entre un 7 a 15% y el aire atrapado entre 1 al 3%. Para ciertos propósitos se puede incorporar hasta un 8% de aire, en forma de pequeñas burbujas en el mortero, agregando sustancias especiales. El aire incorporado es importante para concretos que van a estar sometidos a procesos de hielo – deshielo.

El concreto tiene una alta resistencia en compresión, pero su resistencia en tracción es baja, de hecho en los cálculos de resistencia de secciones de concreto armado, se suele despreciar el aporte del concreto en tracción.

En la tabla 3-1 (Mehta) se presenta una dosificación típica para un concreto de resistencia a la compresión $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ y un asentamiento (slump) comprendido entre 5" y 6". La intención de esta tabla es dar una idea de la cantidad de cada uno de los elementos presentes en una mezcla de concreto. Es interesante anotar que el contenido de pasta de cemento, constituido por la suma del cemento y el agua, constituye cerca del 30% del volumen.

Asumiendo que el cemento y los agregados son de buena calidad, los indicadores más importantes son la relación agua – cemento (w/c) y el contenido total de pasta de cemento en la mezcla, definido en este caso como la suma del agua y del cemento. Ambos indicadores, asumiendo que no se empleen aditivos, tienen que ver con la resistencia a la compresión y con la retracción por secado que experimentará la mezcla. La cantidad total de cemento presente en la mezcla, tiene que ver con el calor de hidratación que se genera durante la fragua y por consiguiente con el potencial de que se formen fisuras térmicas.

Tabla 3-1. Dosificación de una mezcla de concreto. Resistencia 250 kg/cm^2

	En peso (kg/m^3)	% en peso	En volumen (m^3)	% en volumen
Cemento	307	13%	0.098	10%
Agua	178	8%	0.178	18%
Aire atrapado			0.020	2%
Agregado grueso	1,040 (56%)	44%	0.385	39%
Agregado fino	825 (44%)	35%	0.319	32%
total	2,350	100%	1.00	100%
Relación w/c	0.58		1.82	
Contenido de Pasta	485	20.6%	0.276	27.6%

Una bolsa de cemento pesa 42.5 kg. 307 kg de cemento equivalen a 7.22 bolsas aprox.

3.2 Resistencia a la Compresión

El valor de f_c (resistencia a la compresión) se utiliza generalmente como indicador de la calidad del concreto. Es claro que pueden existir otros indicadores más importantes dependiendo de las solicitaciones y de la función del elemento estructural o estructura. Por ejemplo en el diseño de pavimentos la resistencia a la tracción por flexión es un indicador importante. Otro indicador importante suele ser la durabilidad.

Las Normas o Códigos relacionan muchas de las características mecánicas del concreto (modulo de elasticidad, resistencia a la tracción, resistencia al corte, adherencia, etc.) con el valor de f_c .

La resistencia a la compresión se determina a partir de ensayos de laboratorio en probetas estándar cargadas axialmente. Este ensayo se utiliza para monitorear la resistencia del concreto tanto para el control de la calidad como para la aceptación del concreto fabricado. La confección de las probetas y el ensayo están reguladas por las Normas (ASTM) y en ellas se especifica:

- El proceso de confección de las probetas.
- El tamaño de las probetas. Normalmente se utilizan probetas cilíndricas 6"x12". El ACI del 2008 permite el uso de probetas de 4"x 8".
- El proceso de curado de las probetas ya sea en el laboratorio o en obra para las probetas denominadas curadas bajo condiciones reales de obra. Estas ultimas permiten determinar la efectividad de los procesos de curado utilizados y los plazos de desencofrado y puesta en servicio de la estructura.
- El proceso de ensayo a compresión de las probetas. El ensayo puede estar controlado por carga o por deformación. Cuando el ensayo es realizado controlando la carga, normalmente la velocidad es tal que se alcanza la falla de la probeta en 2 a 3 minutos, lo cual equivale a un incremento de esfuerzo entre 2.1 y 2.8 kg/cm² por segundo aproximadamente. Cuando el control es por deformación, la velocidad de deformación unitaria es de 0.001 por minuto aproximadamente.

En otros países (Europa) se utilizan probetas cúbicas de 0.15, 0.20 ó 0.30 m de lado (la arista debe ser mayor que tres veces el tamaño máximo del árido empleado). La resistencia de las probetas cúbicas, por el efecto del confinamiento que producen las aristas y los cabezales de las máquinas de ensayo en contacto con la probeta, es mayor que las cilíndricas. El CEB recomienda la siguiente equivalencia (valor medio) entre probetas cilíndricas y cúbicas:

f_c (cilíndrica) \approx 0.80 f_c (cúbica de 0.15 m de arista). Valores límites entre 0.70 y 0.90

f_c (cilíndrica) \approx 0.83 f_c (cúbica de 0.20 m de arista). Valores límites entre 0.75 y 0.90

f_c (cilíndrica) \approx 0.90 f_c (cúbica de 0.30 m de arista). Valores límites entre 0.80 y 1.00

Es necesario resaltar que las probetas de concreto curadas y ensayadas bajo condiciones estándar, miden, en teoría, el **potencial resistente** del concreto al cual representan.

3.3 Principales Factores que Afectan la Resistencia - f_c -

- a) En todos los concretos de buena calidad, la resistencia de las partículas de agregado es mayor que la de los demás componentes del concreto, de modo que los elementos importantes en la resistencia del concreto son, la resistencia del propio cemento hidratado (matriz) y la resistencia de la interfase matriz - agregado.
- b) La relación agua - cemento (w/c). Esta es tal vez la variable más importante, una relación w/c baja, reduce la porosidad de la matriz o pasta de cemento y mejora la traba entre los sólidos aumentando la resistencia. Por el contrario una relación alta

aumenta la porosidad de la matriz y de la zona de transición entre la matriz y los agregados, reduciendo la resistencia.

La figura 3-1 (ACI) muestra la clara influencia que tiene la relación w/c en la resistencia a la compresión a los 28 días de un grupo de mezclas de concreto sin aire incorporado. También se observa que para una misma relación el rango de resistencias es amplio. Para una relación w/c de 0.45 el rango de resistencia varía entre 350 y 450 kg/cm^2 aproximadamente, mientras que para una relación de 0.65 el rango de variación es entre los 175 y los 280 kg/cm^2 .

La figura 3-2 (González Cuevas) muestra la influencia de la relación agua - cemento en la resistencia y en forma de la curva esfuerzo - deformación del concreto. Nótese que a medida que se reduce la relación w/c aumenta la resistencia y la rigidez axial (módulo de elasticidad). Los concretos de baja resistencia muestran deformaciones de rotura (ϵ_{cu}) mayores que los de alta resistencia y la pendiente de la rama descendente de la curva es suave.

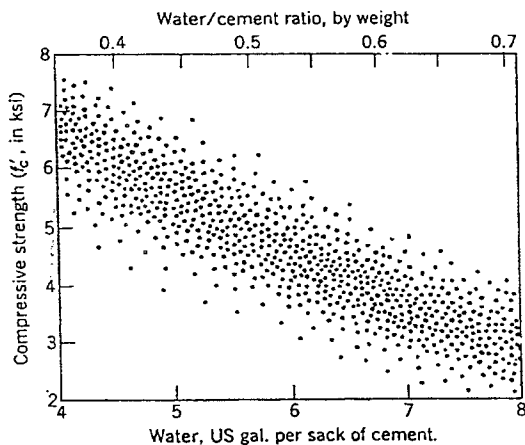


Fig. 3-1 Influencia de la relación w/c

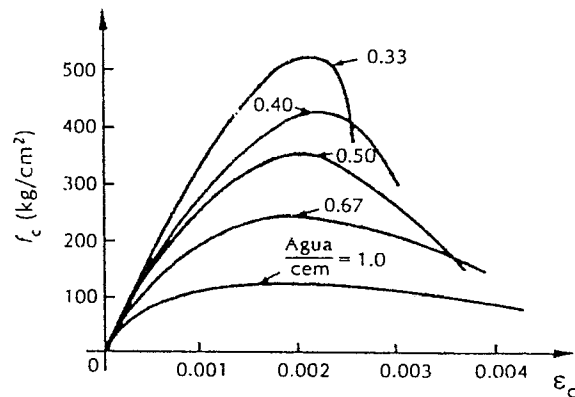


Fig. 3-2 Influencia de la relación w/c en la resistencia y la forma de la curva.

La figura 3-3 (Bresler) muestra curvas aproximadas que permiten apreciar el efecto de la relación w/c sobre la resistencia del concreto. Ya hemos mencionado que para una misma relación pueden obtenerse varias resistencias (figura 3-1) por lo tanto las curvas deben tomarse como tendencias globales y no como valores exactos. Se muestran las curvas para mezclas confeccionadas con y sin aire incorporado, curadas por vía húmeda a 21 °C hasta el día del ensayo.

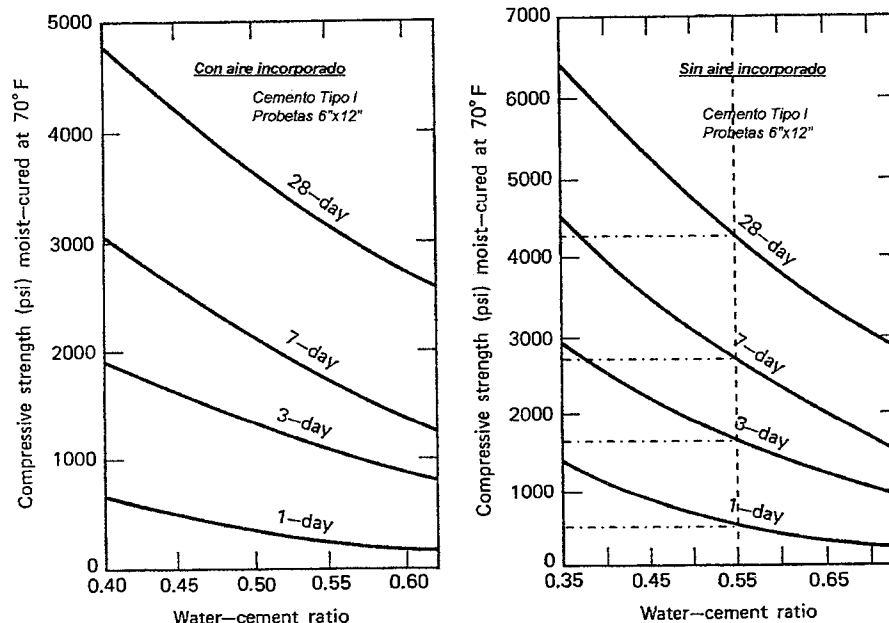


Fig. 3-3 Efecto de w/c en concretos con y sin aire incorporado.

- c) El aire incorporado (aire incluido o incorporado) en la mezcla a través de aditivos, tiende a reducir la resistencia en compresión. También el aire que queda atrapado (aire atrapado) por una consolidación no adecuada del concreto dentro de los encofrados, tiende a reducir la resistencia.

Las burbujas de aire incluido son del orden de 0.05 mm mientras que las de aire atrapado suelen ser mucho mayores, algunas de ellas tan grandes que se les denomina "marcas de viruela" como aquellas que se aprecian en la superficie de algunos elementos de concreto, principalmente muros, luego de desencofrar.

En la figura 3-3 se puede apreciar el efecto del aire incluido por medio de aditivos en la mezcla. Es claro que para una misma relación w/c las mezclas con aire incluido (a la izquierda de la figura) presentan resistencias menores.

La figura 3-4 (Neville) muestra la reducción de la resistencia del concreto por el efecto del aire incluido y el atrapado. La figura demuestra que la presencia de aire, sin ningún otro cambio en las proporciones de la mezcla, genera una reducción en la resistencia que es prácticamente proporcional al volumen del aire incluido. También muestra el efecto del aire atrapado como producto de una mala compactación.

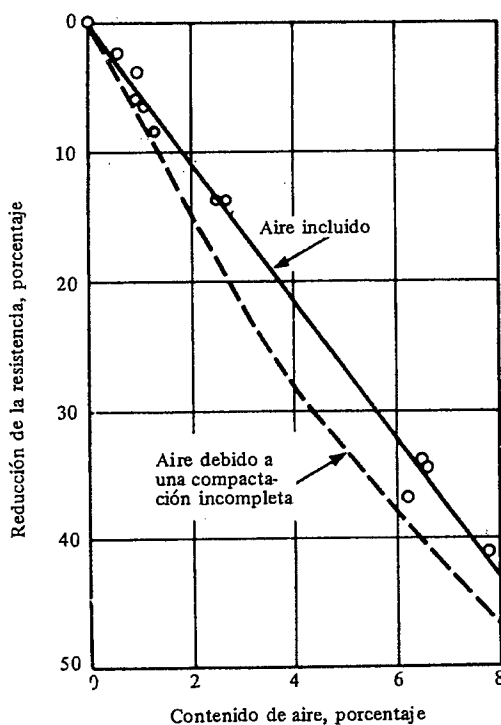


Fig. 3-4 Efecto del contenido de aire en el concreto

- d) El tipo de cemento. El tipo de cemento normalmente afecta la velocidad con la cual se logra f_c . El Cemento Tipo III, por ejemplo, es de una alta resistencia inicial o de rápido endurecimiento. A la edad de un día los concretos fabricados con Cemento Tipo III exhiben, aproximadamente, una resistencia dos veces mayor que los fabricados con Cemento Tipo I y a los 7 días una resistencia entre 1.2 y 1.5 veces mayor.

Los Cementos Tipo II (calor de hidratación moderado y resistencia moderada a los sulfatos) el Tipo IV (de bajo calor de hidratación) y el Tipo V (resistente a los sulfatos) desarrollan resistencia en el tiempo mas lentamente que el Tipo I.

A partir los dos o tres meses de edad aproximadamente, los concretos fabricados con cualquiera de los cinco tipos de cemento definidos por la Norma ASTM C150, exhiben prácticamente la misma resistencia.

- e) La gradación, textura y origen de los agregados. La gradación influye en la porosidad y la textura superficial afecta la adherencia entre el agregado y la matriz y el tamaño del área adherida. Los concretos de resistencia normal fabricados con agregados gruesos resistentes, fallan en compresión por el agrietamiento del mortero (matriz) y muestran un curva esfuerzo – deformación con una amplia rama descendente. En contraste si el agregado falla antes que el mortero, la falla tiende a ser súbita con una rama descendente corta y muy inclinada.
- f) Las condiciones de humedad y temperatura durante el curado. Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su resistencia en el tiempo dependiendo de las condiciones de intercambio de humedad con el ambiente, por ello las condiciones de humedad durante el curado afectan fuertemente la resistencia. Periodos prolongados de curado aumentan significativamente la resistencia.

La figura 3-5 (Mehta) muestra la influencia de las condiciones y tiempo de curado en la resistencia del concreto. Las diferencias en la resistencia por el efecto del curado son notables entre los concretos curados al aire (curva inferior) y los curados por vía húmeda. La figura 3-6 (González Cuevas) muestra las curvas esfuerzo – deformación de probetas fabricadas con un mismo concreto y ensayadas a distintas edades, todas las probetas fueron curadas bajo las mismas condiciones hasta el día del ensayo.

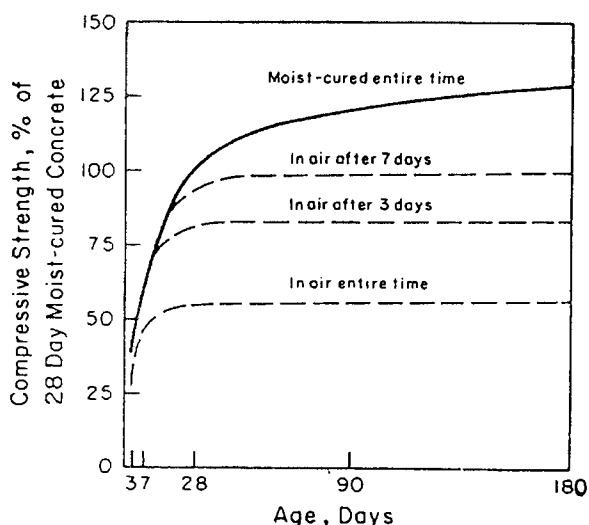


Fig. 3-5 Influencia de las condiciones de curado en la resistencia.

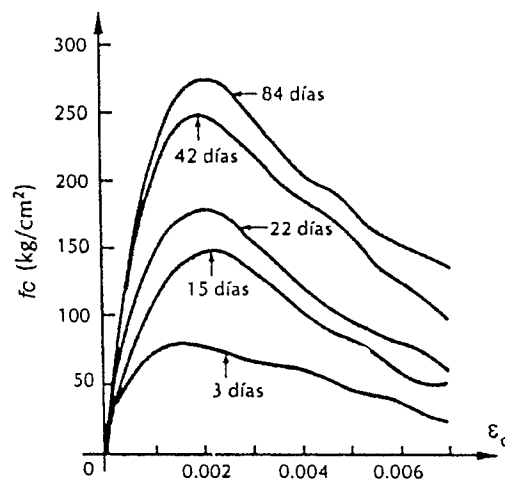


Fig. 3-6 Efecto de la edad y del curado en la resistencia.

- g) La edad del concreto. Con Cemento Tipo I la resistencia a los 7 días es aproximadamente el 65% a 70% de la resistencia a los 28 días. En la figura 3-3 se nota claramente el efecto de la edad en la resistencia para probetas curadas permanentemente hasta el día del ensayo.

En la figura 3-5 es posible apreciar que una probeta curada durante 7 días, que suele ser el plazo mínimo recomendado de curado para cementos Portland normales, aumenta poco su resistencia luego de un mes. En consecuencia, en estructuras reales curadas durante plazos convencionales, no es de esperarse un aumento importante en la resistencia con el tiempo.

El Comité 209 del ACI, para concreto fabricado con cemento Tipo I y curado por vía húmeda ($23\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 1.7\text{ }^{\circ}\text{C}$ y humedad $\geq 95\%$), propone la siguiente expresión para determinar la evolución de la resistencia del concreto en el tiempo:

$$(f'_c)_t = \frac{t}{4 + 0.85t} (f'_c)_{28}$$

En la formula anterior, t es la edad del concreto en días.

- h) La velocidad de carga o de deformación. Los ensayos de probetas se realizan a una velocidad especificada por la Norma (ver 3.2), sin embargo en las estructuras reales la velocidad con la cual se aplica la carga es distinta a la del ensayo. Este suele ser el caso de las cargas vivas, de las cargas de impacto y de las cargas inducidas por las acciones sísmicas.

A velocidades de carga muy altas, f_c puede aumentar en un 15% a 20% o más. Por ejemplo cuando la probeta se lleva a la falla en 0.1 a 0.15 segundos, lo que corresponde a una velocidad de carga de unos 2,000 kg/cm² por segundo, la resistencia del concreto se incrementa en un 15%. Esta velocidad de carga es la que podría esperarse en una estructura rígida durante un sismo intenso.

La figura 3-7 (Bresler) y 3-8 (González Cuevas) muestran la influencia de la velocidad de aplicación del esfuerzo de compresión sobre la resistencia del concreto. Es clara la influencia de las cargas (esfuerzos) aplicadas rápidamente, también el hecho de que a velocidades de carga muy bajas f_c se reduce hasta en un 15%. Este fenómeno probablemente se deba a que con velocidades de carga muy bajas, puede producirse un mayor creep o flujo plástico en el concreto. Como resultado, las deformaciones en el concreto se incrementan más rápidamente y la falla ocurre cuando se alcanza una cierta deformación límite, independiente de la magnitud del esfuerzo aplicado en ese instante.

En la figura 3-8 no ha sido posible obtener la rama descendente de la curva, por lo menos para cargas lentas, ya que el ensayo fue controlado por carga.

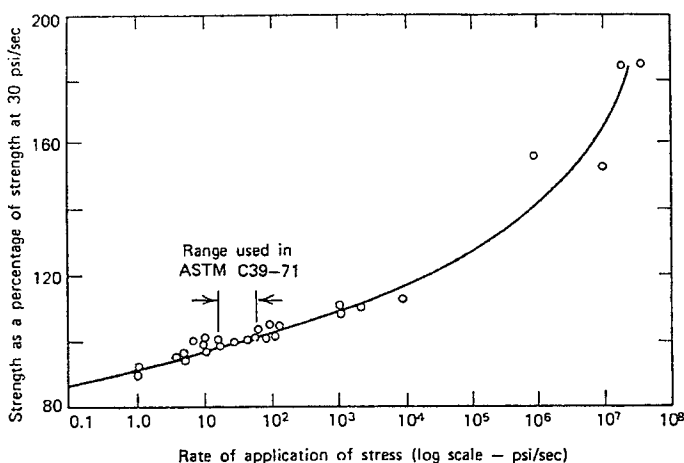
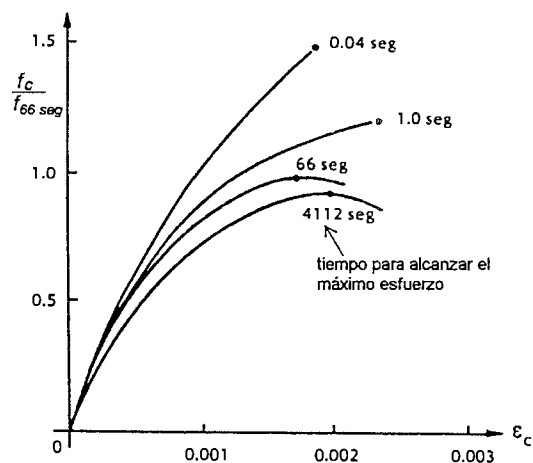


Fig. 3-7 Influencia de la velocidad de carga.



F Fig. 3-8 Efecto de la velocidad de carga en la curva esfuerzo – deformación.

La figura 3-9 (adaptada de Neville) muestra las curvas esfuerzo – deformación de probetas cargadas axialmente para distintas velocidades de deformación. En este caso el ensayo se hace controlando la deformación longitudinal (axial) de la probeta y, a diferencia de los ensayos controlados por velocidad de carga, sí es posible obtener la rama descendente de la curva. La velocidad de deformación, por lo menos en el rango presentado en la figura, no tiene una marcada influencia en la resistencia máxima, la influencia fuerte está en la forma de las curvas. La diferencia en las formas de las curvas para velocidades lentas, se debe al efecto del creep o flujo plástico.

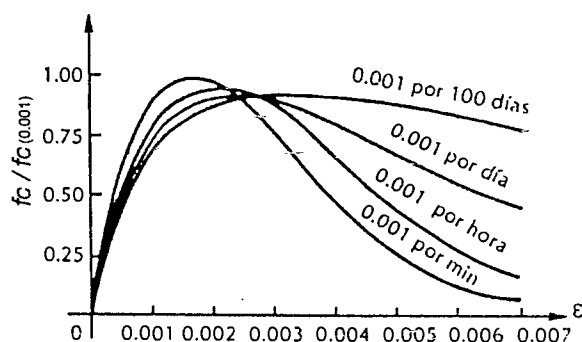


Fig. 3-9 Efecto de la velocidad de deformación

3.4 Resistencia del Concreto en la Estructura Real

Es muy difícil precisar la resistencia del concreto en la estructura real, esta puede variar entre los distintos elementos estructurales (vigas, losas, columnas, muros, cimentación) e inclusive, para un mismo elemento estructural, pueden presentarse variaciones a lo largo y alto del mismo. En general, se acepta que la resistencia del concreto en la estructura real, tiende a ser menor que la resistencia f_c obtenida en laboratorio a partir de las probetas fabricadas y ensayadas de acuerdo a las normas. Recuerde que, en teoría, las probetas miden el **potencial resistente** del concreto al cual representan. Las siguientes son algunas de las razones por las cuales se producen las diferencias:

- Las diferencias en la colocación y compactación entre el concreto colocado y compactado (vibrado) en la estructura real y el concreto colocado y compactado en una probeta.
- Las diferencias en el curado. Es clara la diferencia notable en las condiciones de curado entre una probeta de laboratorio y una estructura real.
- El efecto de la migración hacia arriba del agua en el concreto colocado en una estructura real. Esto genera que la relación w/c no sea uniforme a lo largo de la altura del elemento. En elementos peraltados el concreto de la parte superior suele ser menos resistente que el de la parte inferior. Esto debido a un aumento en la relación w/c por la migración del agua luego de colocado el concreto, y por la mayor compactación del concreto de la parte inferior producto del peso del concreto por encima.
- El efecto de la segregación de los agregados que se produce durante el llenado de las columnas. Este efecto genera un concreto no uniforme.
- Las diferencias de forma y tamaño entre los elementos de una estructura y la probeta de laboratorio. La probeta es cilíndrica de 6"x12" mientras que el elemento real puede tener cualquier forma y tamaño.
- Las diferencias entre los regímenes de esfuerzos en una probeta y en el elemento real. En una probeta la sollicitación es prácticamente de compresión uniforme, con algunas distorsiones o concentraciones de esfuerzos cerca de las zonas de aplicación de las cargas, mientras que en el elemento estructural real pueden existir fuertes gradientes de esfuerzos. Por ejemplo en la zona comprimida de una viga sometida a flexión, las fibras menos esforzadas, las cercanas al eje neutro, tienden a estabilizar a las fibras más esforzadas.

La resistencia del concreto en una estructura real no se puede estimar con precisión. En algunos casos cuando existen dudas sobre la calidad del concreto colocado en obra, se acude a la extracción de testigos perforados (Norma E.060 artículo 5.6.5). La Norma E.060 indica únicamente el criterio de aceptación o rechazo del concreto al cual

representan los testigos perforados, no indica la metodología a seguir para calcular la resistencia a compresión del concreto en la estructura real, a partir de los resultados de los ensayos en compresión de los testigos perforados. En este sentido se recomienda revisar los comentarios de Neville al respecto (Lectura 3.9).

La uniformidad del concreto en la estructura real se puede determinar con la ayuda de un instrumento denominado Esclerómetro, con el cual se determina la dureza superficial del concreto. Aunque algunos de los Esclerómetros incluyen tablas de correlación entre la dureza superficial y la resistencia del concreto, estos valores deben tomarse con suma prudencia, los resultados deben interpretarse como una medida de la uniformidad del concreto y no como una medida directa de la resistencia del concreto en la estructura real.

3.5 Resistencia a la Tracción del Concreto

La resistencia en tracción directa o en tracción por flexión del concreto, es una magnitud muy variable. La resistencia a la tracción directa (f_t) del concreto varía entre el 8% y el 15% de la resistencia en compresión (f_c). La resistencia f_t no varía proporcionalmente con la resistencia en compresión f_c .

La resistencia a la tracción del concreto es importante ya que la resistencia al corte del concreto, la adherencia entre el concreto y el acero y la fisuración por retracción y temperatura, dependen mucho de esta.

La resistencia en tracción directa, depende mucho del tipo de ensayo utilizado para su determinación. El ensayo en tracción directa no es simple de ejecutar por el tamaño de la probeta, por la baja resistencia en tracción del concreto, por su fragilidad ante esta sollicitación y por la dificultad de aplicar cargas sin producir concentraciones de esfuerzos que distorsionen los resultados de los ensayos. La figura 3-10 (González Cuevas) muestra un ensayo en tracción directa sobre una probeta de sección variable. Es un ensayo difícil de ejecutar y no está normalizado. Nótese que la curva esfuerzo – deformación se puede aproximar bastante bien mediante una parábola. También es importante hacer notar la pequeña deformación axial asociada al valor máximo del esfuerzo de tracción (0.00001) y al esfuerzo de rotura. La deformación de rotura en este caso, es del orden de la vigésima parte de la deformación de rotura en compresión del concreto especificada por la Norma E.060 ($\epsilon_{cu} = 0.003$).

La resistencia a la tracción del concreto depende también del tipo de agregado y de la presencia de esfuerzos transversales a los de tracción (estados biaxiales o triaxiales). Se desarrolla mas rápidamente en el tiempo que la resistencia a la compresión.

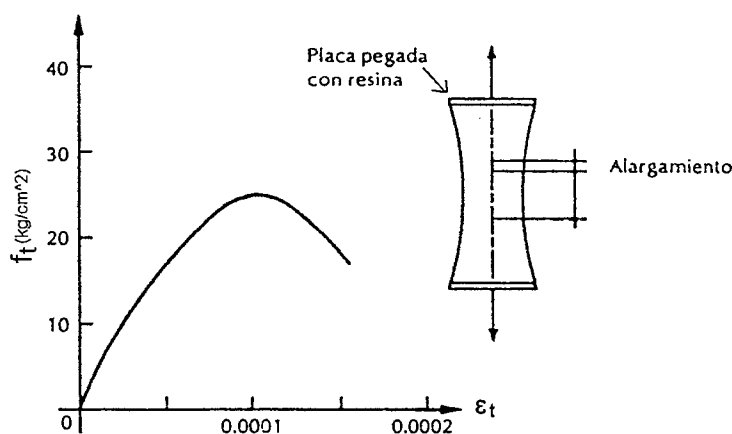


Fig. 3-10 Ensayo de tracción directa.

Los principales ensayos utilizados para determinar, de manera indirecta, la resistencia a la tracción del concreto son:

- a) Módulo de Rotura f_r (ensayo de tracción por flexión) es una medida indirecta de f_t . Se obtiene ensayando hasta la rotura una probeta prismática de concreto simple de 6"x6"x18" simplemente apoyada, con cargas a los tercios. Para calcular el esfuerzo de rotura f_r se asume una distribución lineal de los esfuerzos internos y se aplica la fórmula de resistencia de materiales:

$$f_r = \frac{6 M}{bh^2} \quad (3-1)$$

El ajuste de un gran número de resultados experimentales, arroja un promedio (con mucha dispersión) de:

$$f_r \approx 2.2 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (3-2)$$

El ACI y la Norma Peruana, definen el Módulo de Rotura del concreto mediante la ecuación 3-3. La Norma E.060 utiliza esta ecuación para el cálculo de deflexiones en elementos de concreto armado. Sin embargo para elementos de concreto simple (sin armadura) sometidos a flexión la E.060 (artículo 22.5.1) especifica el valor dado por la ecuación 3-4.

$$f_r \approx 2 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (3-3) \text{ E.060 (9.6.2.3)}$$

$$f_r \approx 1.33 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (3-4) \text{ E.060 (22.5.1)}$$

- b) Split Test f_{sp} . También llamado Ensayo Brasileño o Ensayo de Compresión Diametral. Se ensaya hasta la rotura una probeta cilíndrica de estándar 6"x12" cargada diametralmente, tal como se ilustra en la figura 3-11. Los esfuerzos a lo largo del diámetro vertical varían de compresiones transversales muy altas cerca de las zonas de aplicación de cargas a esfuerzos de tracción prácticamente uniformes en aproximadamente las dos terceras partes del diámetro. El esfuerzo de rotura se calcula con la fórmula 3-5 deducida de la teoría de la elasticidad para materiales homogéneos.

$$f_{sp} = \frac{2P}{\pi l d} \quad (3-5)$$

El ajuste de un gran número de resultados experimentales, arroja un promedio (con mucha dispersión) de:

$$f_{sp} \approx 1.7 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (3-6)$$

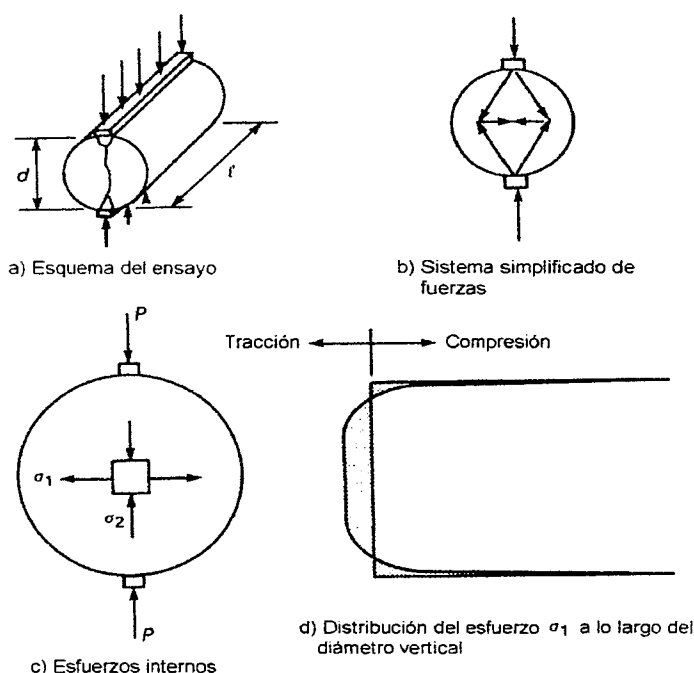


Fig. 3-11 Ensayo de Compresión Diametral (Split Test)

La figura 3-12 (MacGregor) muestra los resultados de un gran número de ensayos de compresión diametral (f_{sp}) con relación a la resistencia a la compresión f_c . La curva (ajuste) superior corresponde al promedio representado por la ecuación 3-6 en unidades inglesas. Es notoria la fuerte dispersión de los resultados en todos los rangos de resistencia, en consecuencia los valores promedio deben utilizarse con criterio.

En general las resistencias obtenidas de los ensayos, se ordenan del siguiente modo:

$$f_r > f_{sp} > f_t \quad (3-7)$$

El CEB (Jiménez Montoya) admite las siguientes relaciones entre los resultados de los ensayos:

$$f_t \approx 0.9 f_{sp} \quad (3-8)$$

$$f_t \approx 0.5 f_r \quad (3-9)$$

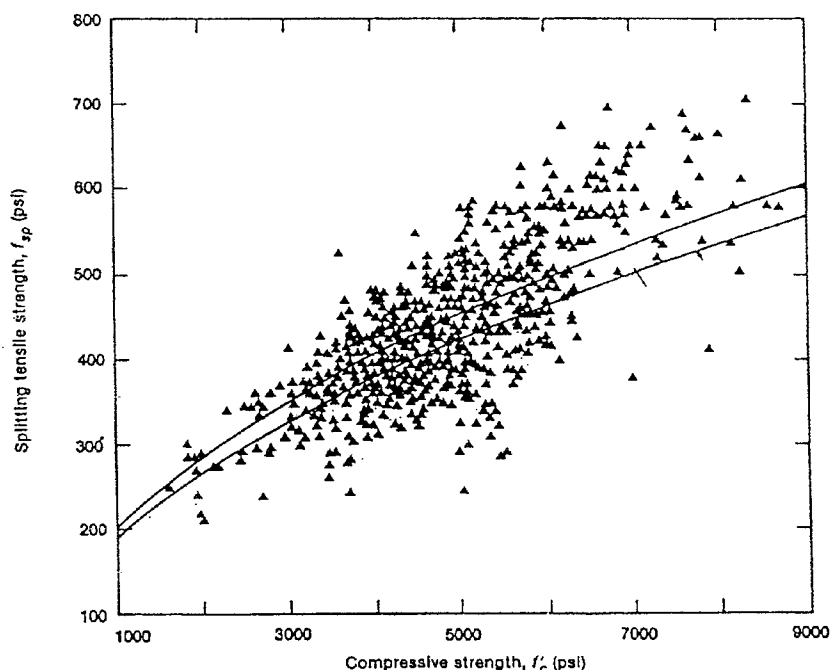


Fig. 3-12 Relación entre el ensayo Split Test y la resistencia en compresión

Tal como se mencionó, las deformaciones de rotura medidas en los ensayos de tracción son pequeñas, los siguientes son valores referenciales (MacGregor):

Tracción axial (f_t): $\epsilon_{rotura} = 0.0001$ a 0.00015

Tracción por flexión (f_r): $\epsilon_{rotura} = 0.00014$ a 0.0002

El ensayo de tracción por flexión o módulo de rotura (f_r) presenta mayor dispersión que el ensayo de compresión diametral. Esto se debe a que en la probeta utilizada, la hipótesis de secciones planas que se utiliza para calcular la resistencia f_r no es válida y también al gradiente de esfuerzos que existe en la zona traccionada de la probeta, gradiente que origina que las fibras menos esforzadas, las cercanas al eje neutro, tiendan a estabilizar a las más esforzadas. La correlación entre la resistencia a tracción por flexión y la resistencia a la tracción directa no es buena. Si fuera necesario estimar la resistencia a la tracción directa del concreto, es preferible utilizar el ensayo de compresión diametral.

Debido a la baja resistencia en tracción del concreto, esta generalmente se desprecia en los cálculos de resistencia en flexión y flexocompresión. Sin embargo el comportamiento de los elementos de concreto armado bajo cargas de servicio (fisuración y deflexiones por flexión) es fuertemente dependiente de la resistencia a tracción del concreto.

Además existen situaciones en las cuales el diseño del concreto se realiza en estado elástico y está controlado por la resistencia en tracción del concreto, como por ejemplo en cimentaciones sin armar, estanques o reservorios impermeables, pavimentos.

Si fuese necesario contar con un modelo simplificado (diagrama σ - ϵ) del comportamiento en tracción directa del concreto, por ejemplo para el diseño de tirantes en los cuales no se acepta fisuración, puede suponerse un diagrama lineal hasta la deformación de rotura en tracción, o hasta un esfuerzo máximo aproximado de $0.1 f_c$, con una pendiente aproximadamente igual a la del módulo de elasticidad del concreto en compresión. Esta última suposición relativa al módulo de elasticidad en tracción del concreto, se ha comprobado experimentalmente que es aceptable.

3.6 Módulo de Elasticidad del Concreto Simple para Cargas de Corta Duración

Para estimar las deformaciones en elementos o estructuras de concreto armado, debidas a las cargas de corta duración, donde es posible asumir para el concreto una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Las curvas esfuerzo - deformación del concreto no son lineales (ver figuras 3-2, 3-6, 3-8, 3-9) por lo tanto el concepto convencional de módulo de elasticidad, como el que empleamos para el acero, no es correcto. Sin embargo para esfuerzos de compresión bajos de hasta 0.4 a $0.5 f_c$ el suponer un comportamiento lineal no conlleva a errores importantes.

La figura 3-13a (Harmsen) muestra las distintas definiciones que puede adoptar el módulo de elasticidad del concreto simple: el módulo tangente inicial, el módulo tangente en un punto determinado de la curva y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Esta última definición es la más utilizada para cargas de corta duración y se suele calcular para un esfuerzo cercano a $0.5 f_c$. El módulo de elasticidad tangente inicial, normalmente es un 10% mayor que el secante. Las Normas ASTM (C469-94) especifican la manera de calcular el módulo secante a partir de los ensayos de compresión en probetas estándar de concreto.

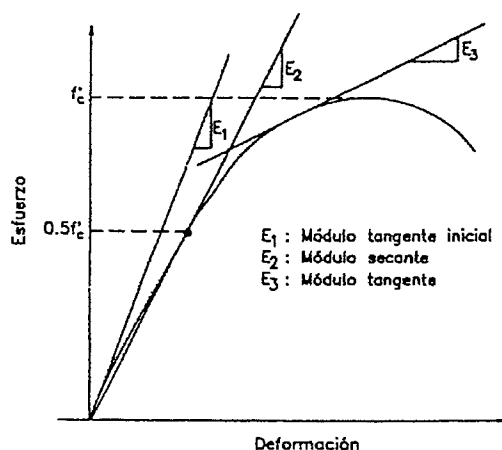


Fig. 3-13a Módulo de elasticidad del concreto

Para tomar en cuenta los efectos de las cargas sostenidas (cargas de larga duración) es necesario corregir el módulo de elasticidad determinado para cargas de cortas duración, ya que el flujo plástico del concreto modifica las deformaciones internas. Una posibilidad es utilizar el Coeficiente de Flujo Plástico del concreto C_t (acápite 4.2.3) el cual es dependiente del tiempo, con lo cual el módulo de elasticidad puede aproximarse mediante la ecuación 3-10 (Park - Paulay) en la cual E_c es el módulo de elasticidad secante (cargas de corta duración) en el instante de aplicar la carga. Para derivar esta ecuación, se asume que la deformación ocasionada por el Creep es proporcional a la deformación elástica inicial y que C_t no depende de la magnitud del esfuerzo aplicado en

el concreto (f_c). La ecuación es válida para esfuerzos que no superen de aproximadamente $0.5 f_c$.

$$\varepsilon_{creep} = Ct \frac{f_c}{E_c} \quad \varepsilon_{total} = \frac{f_c}{E_c} + Ct \frac{f_c}{E_c} \quad E_c(t) = \frac{f_c}{\varepsilon_{total}} \Rightarrow E_c(t) = \frac{E_c}{1 + Ct} \quad (3-10)$$

Ct depende de muchos factores (acápite 4.2.3) y su rango de variación es aproximadamente entre 1.0 y 2.0.

El módulo de elasticidad del concreto depende de muchas variables, las principales son:

- El módulo de elasticidad de la pasta de cemento. Un incremento en la relación w/c aumenta la porosidad de la pasta reduciendo el módulo de elasticidad (E_c) en consecuencia hay dependencia entre E_c y f_c .
- El módulo de elasticidad de los agregados. Los agregados de peso normal tienen un módulo que varía entre 1.5 a 5 veces el módulo de elasticidad de la pasta. Por lo tanto el tipo de agregado y la cantidad presente en la mezcla influyen fuertemente en el valor de E_c .

El ACI y la Norma E.060 permiten estimar el valor E_c para concretos de peso específico entre 1,450 y 2,500 kg/m^3 mediante la ecuación 3-11:

$$E_c = 0.136 (\gamma)^{1.5} \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (3-11) \quad \text{E.060 (8.5.1)}$$

Siendo γ el peso específico del concreto en kg/m^3 . Este valor corresponde al módulo de elasticidad secante del concreto, medido al 45% de f_c aproximadamente, en ensayos de corta duración. Los concretos de peso normal varían entre 2,300 y 2,500 kg/m^3 , si se asume un peso de 2,300 kg/m^3 , el ACI y la Norma Peruana permiten estimar E_c mediante:

$$E_c = 15,000 \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (3-12) \quad \text{E.060 (8.5.2)}$$

Ya que estas ecuaciones ignoran el tipo de agregado utilizado, su dispersión es amplia, los valores medidos en ensayos varían entre 0.8 y 1.2 del predicho por las ecuaciones. Cuando sea necesario una mejor estimación del modulo de elasticidad para cargas de corta duración, por ejemplo para el caso en que las deflexiones o vibraciones sean determinantes en el diseño, se recomienda obtener mediante ensayos el módulo de elasticidad del concreto a utilizarse. Las figuras 3-13b y 3-13c muestran los módulos de elasticidad medidos en ensayos de corta duración en concretos con distintos tipos de agregados y distintos pesos específicos, es clara la dispersión de los resultados.

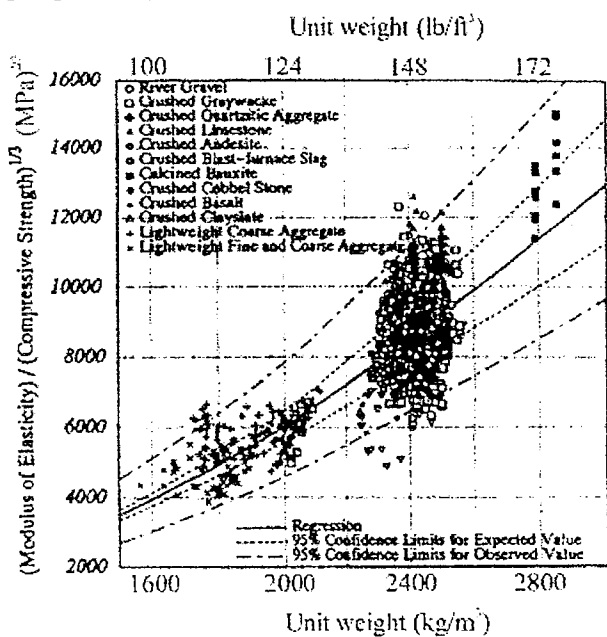


Fig. 3-13b Módulo de elasticidad del concreto (Noguchi, Tomasawa y otros)

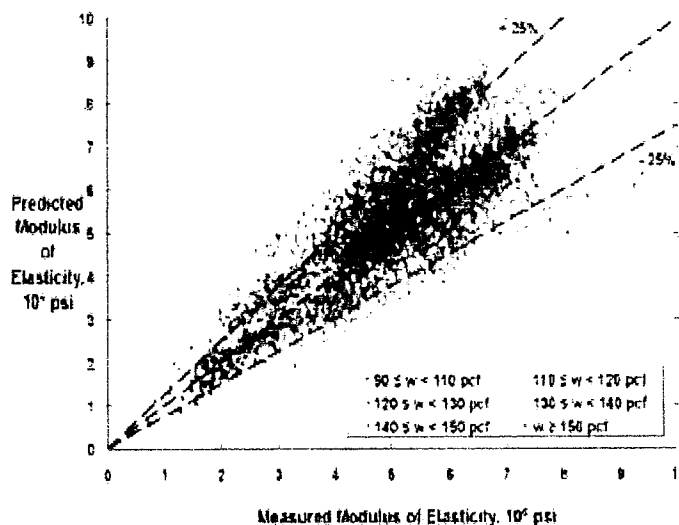


Fig. 3-13c Módulo de elasticidad del concreto (Henry Russel)

3.7 Módulo de Poisson del Concreto

Por debajo del esfuerzo crítico (75% a 80% de f_c) el Módulo de Poisson - μ - varía entre 0.11 y 0.21. Normalmente está en el rango de 0.15 a 0.20 y permanece aproximadamente constante bajo cargas sostenidas. En la práctica se suele adoptar $\mu = 0.15$, con lo cual el Módulo de Rigidez al Esfuerzo Cortante viene dado por la ecuación 3.14.

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} \quad (3-13)$$

$$G_c = \frac{E_c}{2.3} \quad (3-14)$$

3.8 Mecánica de la Fractura del Concreto en Compresión

La figura 3-14 (Mehta) muestra el comportamiento en compresión de la pasta de cemento hidratada y de los agregados utilizados para fabricar concreto. El comportamiento de ambos es frágil y prácticamente lineal hasta la falla, sin embargo, el concreto que es un material compuesto por la mezcla de los dos anteriores, muestra un comportamiento en compresión no lineal con algo de ductilidad.

Este fenómeno de comportamiento no lineal y de ductilidad aparente, se puede explicar si se observa en la figura 3-15, en la cual se muestra el estado de microfisuración interna en la interfase entre la pasta y el agregado (fisuras de adherencia) y en la misma pasta de cemento (fisuras en el mortero). El estado de microfisuración interna depende del nivel del esfuerzo aplicado, cerca del esfuerzo máximo (f_c) la fisuración interna es muy pronunciada tanto en la interfase como en la pasta misma.

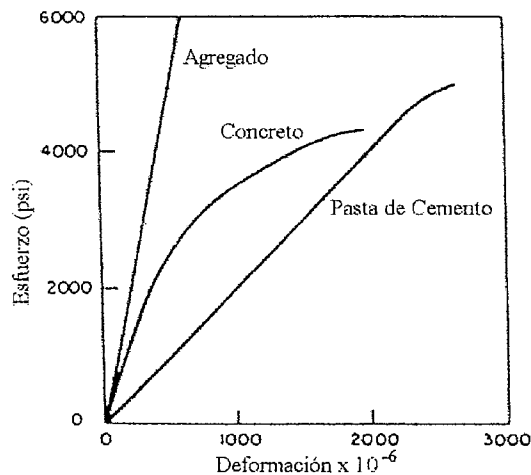


Fig. 3-14 Curvas esfuerzo – deformación del concreto y sus componentes

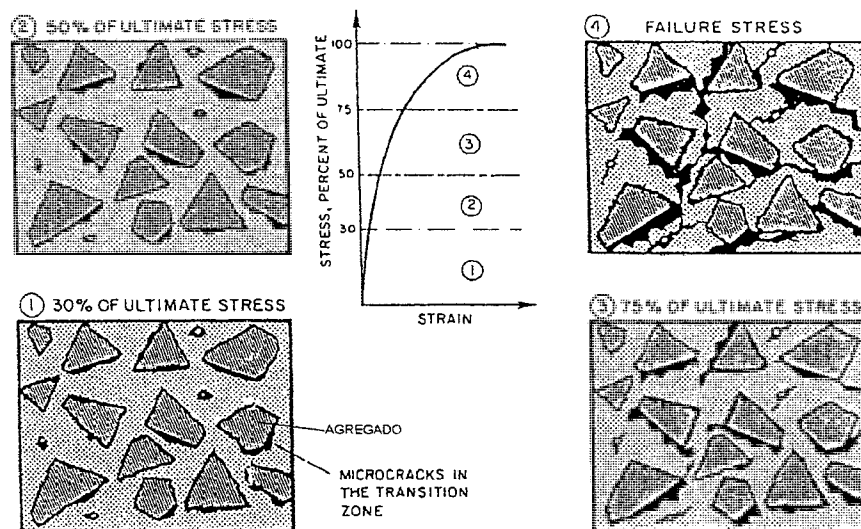


Fig. 3-15 Fisuración interna en el concreto sometido a esfuerzos

Las deformaciones longitudinales ϵ_1 y transversales ϵ_3 (por efecto Poisson) que se producen en un ensayo de compresión, son como se muestran en la figura 3-16 (MacGregor).

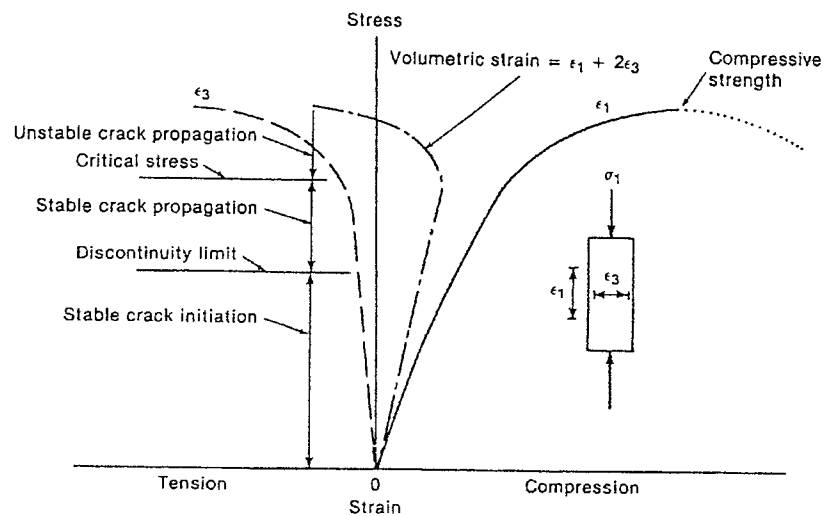


Fig. 3-16 Curva esfuerzo - deformación para el concreto sometido a compresión

Cuando los esfuerzos exceden del 30% a 40% de f_c , se empiezan a formar las fisuras de adherencia en la interfase entre la pasta y los agregados, este agrietamiento es estable y se propaga solamente si se aumenta el esfuerzo axial. Al aumentar la carga los esfuerzos internos se redistribuyen hacia las zonas de interfase que aún no se han agrietado y hacia el mortero (pasta). Esta redistribución origina que el diagrama esfuerzo - deformación empiece a curvarse a partir de un esfuerzo cercano a $0.4, 0.5 f_c$.

La propagación del agrietamiento interno es estable hasta el denominado Esfuerzo Crítico (entre 0.75 a 0.8 de f_c). Al alcanzar este esfuerzo la estructura interna del concreto se convierte en inestable, se incrementa el agrietamiento en el mortero y aumenta el comportamiento global no lineal. La deformación lateral (ϵ_3) y la deformación volumétrica crece fuertemente.

Los gradientes de esfuerzos que se producen en las situaciones reales, por ejemplo en la zona comprimida de una viga en flexión, atenúan el efecto de la propagación inestable ya que las fibras menos comprimidas estabilizan a las más comprimidas.

La figura 3-17 muestra el efecto que tienen las cargas sostenidas de compresión en un elemento de concreto sin armaduras de refuerzo (el denominado efecto de la permanencia de la carga). En esta figura, la curva inferior denominada límite de deformación, muestra las deformaciones máximas que se obtendrían al aplicar indefinidamente esfuerzos de compresión, inferiores al esfuerzo crítico. Es claro que bajo cargas constantes las deformaciones aumentan con el tiempo por el efecto del flujo plástico del concreto. La curva superior, denominada límite de falla, indica las deformaciones a la falla correspondientes a las cargas superiores al valor crítico.

La intersección entre las dos curvas mencionadas en el párrafo anterior, representa teóricamente el porcentaje de la resistencia del concreto por debajo del cual el elemento puede resistir la carga de compresión indefinidamente. Si se carga en compresión un elemento de concreto sin armar hasta cerca del esfuerzo crítico y se mantiene la carga en el tiempo, el concreto fallará.

En teoría, un elemento de concreto sin armar, puede soportar cargas indefinidamente sin fallar, hasta para un esfuerzo en el orden del 60% de su resistencia. Cargas mayores, aplicadas de modo permanente, que produzcan esfuerzos mayores al 70 - 80% de su capacidad, provocarán la falla del elemento.

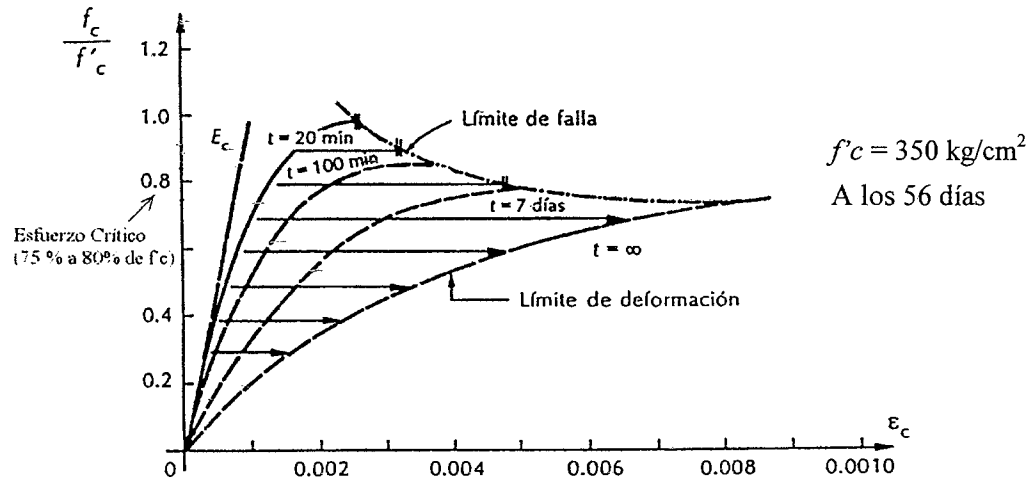
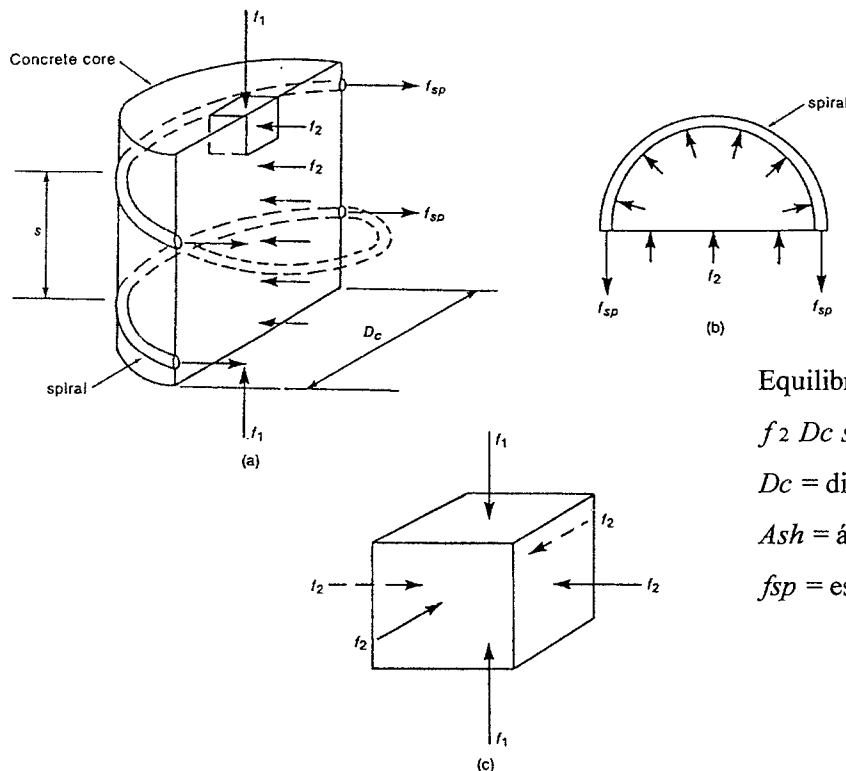


Fig. 3-17 Efecto de las cargas sostenidas de compresión.

3.9 Efecto del Confinamiento (Estados Triaxiales)

A partir del esfuerzo crítico el fuerte aumento de la deformación lateral del concreto hace que este empiece a empujar al refuerzo transversal, si lo hubiera, que sirve de confinamiento al concreto (estribos, espirales o zunchos). El confinamiento reacciona sobre el concreto restringiendo la deformación lateral o expansión, retardando así la desintegración del concreto.

La figura 3-18 (MacGregor) esquematiza el efecto del confinamiento que ejerce el refuerzo transversal (en este caso una espiral) sobre el concreto comprimido. En la parte (a) se muestra el núcleo de concreto sometido a un esfuerzo de compresión f_1 y los esfuerzos de compresión f_2 que surgen por el efecto del confinamiento que reacciona sobre el concreto. La parte (b) es una vista en planta del núcleo y de media vuelta de la espiral y la parte (c) representa un elemento de concreto sometido a un estado triaxial de esfuerzos como consecuencia del confinamiento proporcionado por el refuerzo transversal.



Equilibrio horizontal (figura b):

$$f_2 D_c s = 2 A_s h f_{sp}$$

D_c = diámetro del núcleo confinado

$A_s h$ = área de la espiral

f_{sp} = esfuerzo en el acero de la espiral

Fig. 3-18 Efecto del confinamiento sobre el concreto

Del equilibrio de fuerzas horizontales en la figura 3-18 b) se obtiene que el máximo esfuerzo de confinamiento que la espiral ejerce sobre el núcleo confinado viene dado por:

$$f_2 = \frac{2 A_s h f_y}{D_c s} \quad (3-15a)$$

En la formula anterior se ha supuesto que el acero de la espiral llega a la fluencia y a partir de ese estado ya no aumenta su esfuerzo.

La figura 3-19 (adaptada de MacGregor) muestra la influencia que tienen los estados triaxiales tanto en la resistencia a compresión del concreto, como en la curva misma esfuerzo – deformación. En ella se resumen los resultados de ensayos de compresión en probetas de concreto simple sometidas a distintos estados triaxiales de esfuerzos ($\sigma_2 = \sigma_3$) de magnitud creciente.

La resistencia del concreto no confinado en la figura 3-19 es de $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ y el comportamiento del concreto no confinado está representado por la curva inferior correspondiente a un esfuerzo $\sigma_3 = 0$. Es notable el incremento en la resistencia del concreto que se logra bajo estados triaxiales de esfuerzos, así como la modificación en la forma de la curva esfuerzo – deformación y el aumento de la deformación última o de rotura - ϵ_{cu} - del concreto.

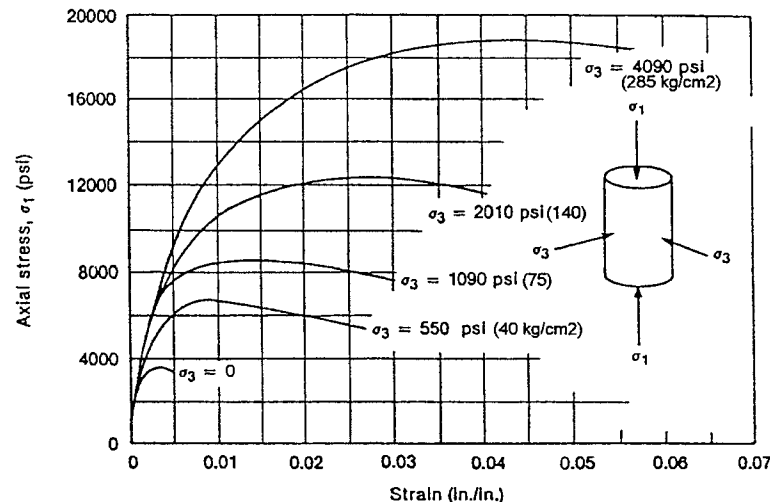


Fig. 3-19 Comportamiento del concreto en compresión en estados triaxiales de esfuerzos.

Los resultados de estos ensayos sugieren que el esfuerzo longitudinal en la falla se puede aproximar mediante la ecuación 3-15.

$$\sigma_1 = f'_c + 4.1 \sigma_3 \quad (3-15b)$$

Las figuras 3-20 y 3-21 (Park–Paulay) muestran los resultados de ensayos de compresión en probetas de concreto (sin refuerzo longitudinal) confinadas en un caso, por espirales con distintos pasos de las hélices y en el otro caso por estribos cerrados. Nuevamente es notoria la marcada influencia, tanto en la resistencia a la compresión como en la curva esfuerzo – deformación, que tiene el refuerzo transversal de confinamiento. Es claro que el efecto de confinamiento producido en el concreto por la presencia de una espiral, es bastante más marcado que para el caso de los estribos cerrados. Las espirales, debido a su forma, proveen un confinamiento continuo y producen presiones de confinamiento mayores y por ende son más eficientes. Los estribos cerrados (figura 3-21) tienen poca influencia en la resistencia, pero sí contribuyen a la ductilidad.

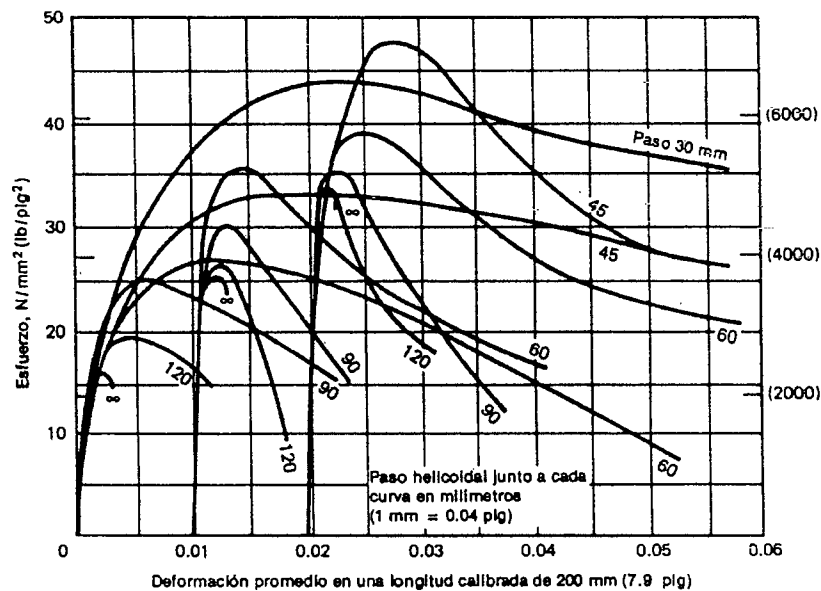


Fig. 3-20 Curvas esfuerzo – deformación para cilindros estándar de concreto (tres calidades de concreto) confinados por espirales de 1/4” con distintos pasos.

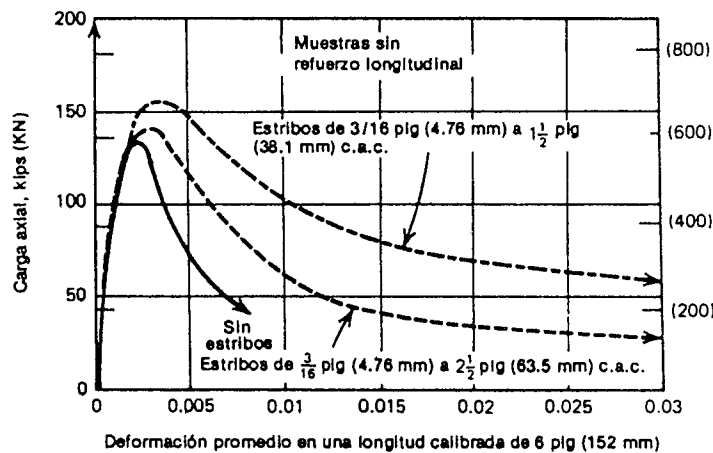


Fig. 3-21 Curvas carga – deformación axial para prismas de concreto de 4.5” de lado con estribos cerrados cuadrados.

Situaciones como las descritas, son comunes en los extremos de las columnas y vigas de concreto así como en los nudos o encuentros viga – columna donde se suele utilizar estribos poco espaciados, principalmente en elementos con responsabilidad sísmica donde se espera que se formen las rótulas en sismos severos. En estos casos cuando el concreto se esfuerza más allá de las cargas de servicio y se acerca al esfuerzo crítico, los estribos ejercen una presión de confinamiento sobre el concreto incrementando su resistencia y ductilidad. A este tipo de confinamiento se le denomina pasivo.

3.10 Comportamiento del Concreto en Compresión

La figura 3-22 muestra las formas típicas que tienen las curvas esfuerzo – deformación del concreto cargado axialmente. Las curvas han sido obtenidas de ensayos de compresión lentos con control de deformación, de tal modo que pudo obtenerse la rama descendente de las curvas. En ensayos con carga controlada, normalmente no es posible obtener la zona descendente.

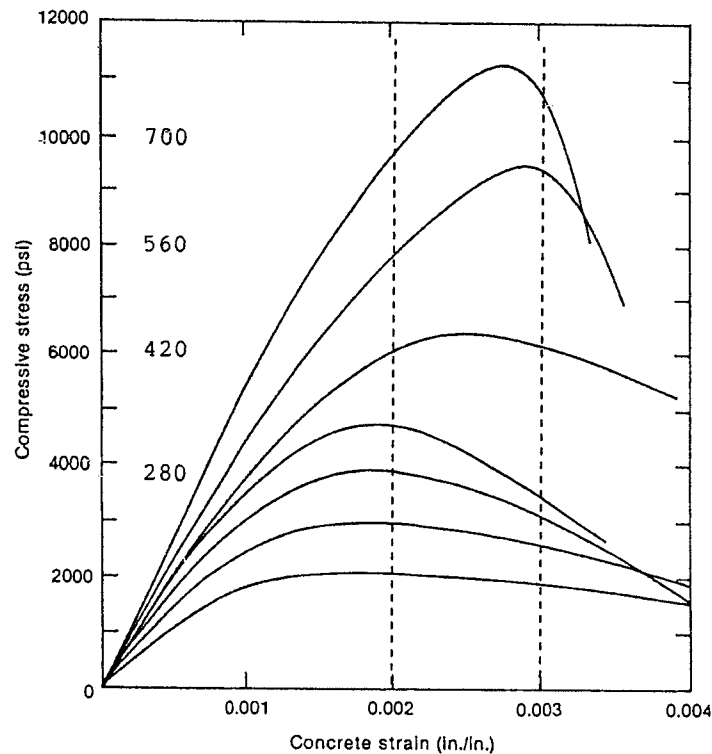


Fig. 3-22 Curvas típicas del concreto simple en compresión.

Es posible establecer algunas conclusiones generales de interés a partir de estas curvas:

- El concreto simple (sin armaduras de refuerzo) es un material frágil de baja capacidad de deformación que no tiene punto de fluencia ni rango de deformación plástica ni endurecimiento por deformación como el acero.
- A mayor resistencia (f_c) tiene menor capacidad de deformación. La deformación máxima que puede alcanzar el concreto comprimido - ϵ_{cu} - disminuye al aumentar f_c .
- La deformación - ϵ_o - correspondiente al valor de f_c , varía entre 0.0015 y 0.003. Al aumentar f_c aumenta ϵ_o . Para concretos de hasta unos 350 kg/cm^2 el valor de f_c se presenta para deformaciones cercanas a 0.002.
- Luego de alcanzar f_c empieza una rama descendente producto de la fisuración interna. Por encima del esfuerzo crítico la propagación interna de las grietas se vuelve inestable.
- La longitud de la rama descendente está muy influenciada por las condiciones del ensayo (control de carga o de deformaciones) y por la máquina de ensayo (rígida o flexible), las máquinas flexibles conducen a fallas explosivas de las probetas.
- La curva es aproximadamente lineal hasta 0.4, 0.5 de f_c .
- La rama ascendente se puede aproximar por una parábola.

En elementos reales (por ejemplo vigas) la rama descendente de la curva esfuerzo – deformación siempre estará presente, por la presencia de gradientes de esfuerzos en los cuales las fibras menos esforzadas estabilizan a las mas esforzadas.

3.11 Modelos para el Concreto en Compresión

Se han propuesto numerosas ecuaciones o modelos para describir analíticamente la curva esfuerzo – deformación del concreto en compresión. El problema es complejo ya que intervienen numerosas variables, entre ellas la presencia de confinamiento.

Afortunadamente las Normas permiten simplificaciones importantes en el modelo de comportamiento que se utiliza para el diseño de secciones de concreto armado, por ejemplo el ACI permite utilizar un bloque de compresiones rectangular. Sin embargo, cuando es necesario calcular (investigar) con mayor precisión la resistencia y ductilidad de un elemento, es necesario utilizar algún modelo de comportamiento. Hay que tener presente que rara vez se pueden determinar con precisión todas las variables que pueden influir en la forma de la curva y en los valores asociados de esfuerzos y deformaciones.

La figura 3-23 muestra una de las idealizaciones más comunes para el comportamiento del concreto no confinado, corresponde al modelo de Hognestad que data del año 1951. En este modelo se suele adoptar un valor de $\epsilon_0 = 0.002$ y un valor de ϵ_{cu} comprendido entre 0.003 y 0.004.

La figura 3-24 ilustra el modelo utilizado por el CEB para el diseño de elementos de concreto armado en flexión simple. Consiste en una parábola seguida por una recta.

En los dos modelos comentados, el valor de f''_c , representa la resistencia del concreto en la estructura real, por ejemplo el CEB especifica un f''_c equivalente a $0.85f_c$.

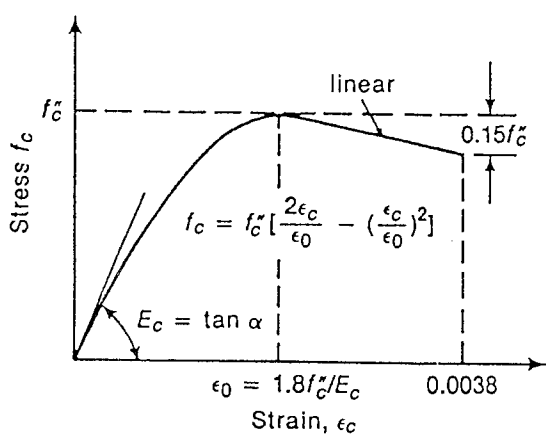


Fig. 3-23 Modelo de Hognestad (1951) concreto no confinado.

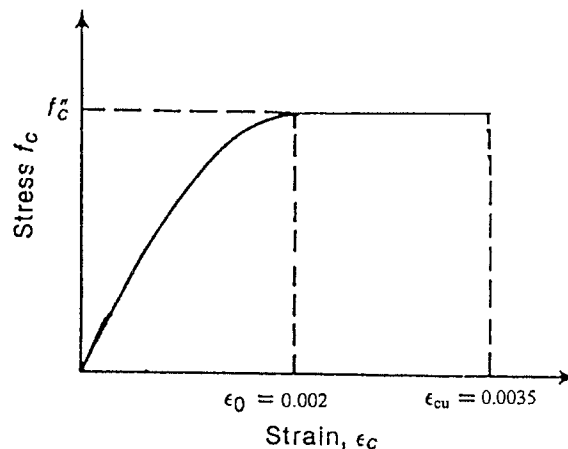


Fig. 3-24 Modelo del CEB para elementos en flexión simple

La figura 3-25 (Park-Paulay) muestra uno de los tantos modelos propuestos para el concreto confinado por estribos rectangulares. Conservadoramente no se ha modificado la resistencia del concreto por la presencia del confinamiento, su efecto se ha considerado en la longitud y pendiente de la rama descendente de la curva.

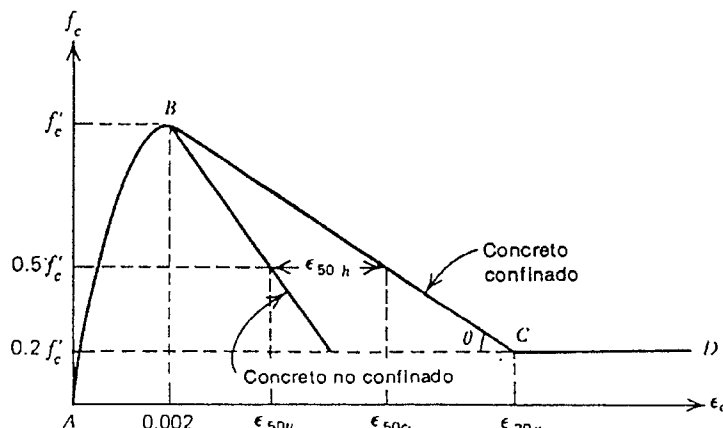


Fig. 3-25 Modelo de Kent y Park para concreto confinado por estribos rectangulares

La figura 3-26 muestra el Modelo de Mander para tres calidades de concretos no confinados (210, 280 y 350 kg/cm²). El Modelo de Mander es actualmente uno de los más utilizados para la investigación del comportamiento de secciones de concreto en flexión y flexocompresión. Es posible modificar la curva correspondiente al concreto no confinado, para incluir el efecto del confinamiento (estribos o espirales) tanto en el valor de f_c como en la deformación máxima.

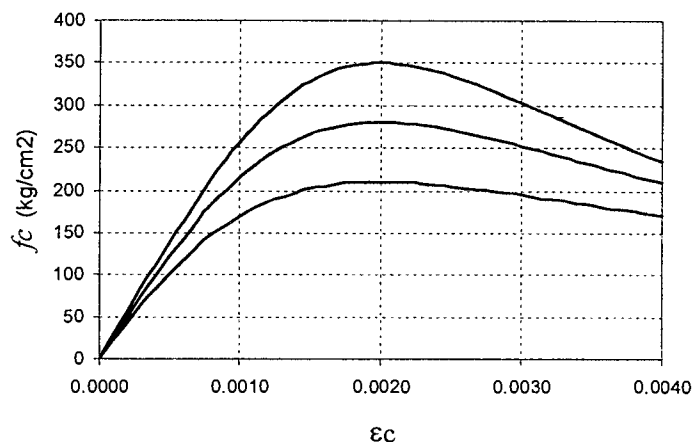


Fig.3-26 Modelo de Mander para concreto no confinado

3.12 Concretos de Alta Resistencia

Durante casi un siglo, el grueso del concreto estructural que se produjo y se sigue produciendo, es de una resistencia entre los 200 y 300 kg/cm². Ocasionalmente, cuando las circunstancias lo requerían, era posible producir concretos de mayor resistencia, a estos se les denominaba de alta resistencia. Hace unos 40 años, a los concretos de más de 400 kg/cm² o valores cercanos, se les dio el nombre de concretos de alta resistencia. Sin embargo en los últimos 20 años se han producido, comercialmente, concretos de mucho mayor resistencia, por ejemplo en los Estados Unidos se han usado concretos de hasta 1,300 kg/cm² en la construcción de algunos edificios altos. (ver fig. 1-7 y 1-8).

Los concretos de alta resistencia se definen, en la literatura especializada, a partir de una resistencia superior a los 420 kg/cm² (6,000 psi). El límite anterior resulta hoy en día un tanto arbitrario y se habla de concretos de alta resistencia (HSC) a aquellos con resistencias entre los 500 kg/cm² y los 1000 kg/cm² y concretos de muy alta resistencia (VHSC ó UHSC) a aquellos con resistencias mayores.

Los componentes para los concretos de alta resistencia son en esencia los mismos utilizados en los concretos convencionales. Se logran con el uso de relaciones w/c muy bajas, con la ayuda de súper plastificantes, micro sílice y el empleo de agregados resistentes, angulosos y de superficie rugosa. El concreto resultante tiene un volumen de vacíos menor que los concretos convencionales.

La Tabla a continuación (Aitcin, Neville) muestra dos dosificaciones de concretos de alta resistencia. La primera corresponde al edificio Water Tower Place en Chicago construido en 1975, cuando todavía no se utilizaban súper plastificantes y la segunda al edificio Two Union Square en Seattle construido en 1988. Ambos edificios se encuentran en las figuras 1-7 y 1-8.

Componentes (kg/m ³)	Water Tower (1975)	Two Union (1988)
Agua	195	130
Cemento	505	513
Cenizas volantes (Fly Ash)	60	--
Humo de Sílice (Silica Fume)	--	43
Agregado grueso	1,030	1,080
Agregado fino	630	685
Reductor de agua (mL/m ³)	975	--
Súper plastificante (L/m ³)	--	15.7
Relac. agua / cementante total (c+m)	0.35	0.25
$f'c$ a los 28 días (MPa)	65	119
$f'c$ a los 91 días (MPa)	79	145

Las curvas esfuerzo – deformación (ver figura 3-22) de los concretos de alta resistencia exhiben una zona lineal inicial de mayor amplitud y una rama descendente mas pronunciada. La falla suele ocurrir por la fractura de los agregados con deformaciones laterales bastante menores que las asociadas a concretos convencionales, esto conlleva a que el refuerzo transversal de confinamiento sea menos efectivo en incrementar la resistencia y la deformación de rotura del concreto. El esfuerzo crítico se produce al 90% de $f'c$ aproximadamente.

La expresión 3-11 ya no es válida para estimar el módulo de elasticidad del concreto de alta resistencia. Esta es válida para concretos de hasta 420 kg/cm² aproximadamente de resistencia a la compresión. Para los concreto de alta resistencia existen varias ecuaciones propuestas para estimar el módulo de elasticidad.

Es interesante anotar que algunos códigos limitan el valor máximo de $f'c$ que es posible utilizar. Por ejemplo:

- El CEB-FIP (Código Modelo de 1990) limita $f'c$ a 80 MPa.
- El Eurocódigo (EC2-02) limita a 90 MPa.
- El Código Canadiense (CSA A23.3-94) limita a 80 MPa y a 50 MPa cuando son elementos con responsabilidad sísmica
- El Código de Nueva Zelanda (NSZ 3101-95) limita a 100 MPa y a 70 MPa cuando son elementos con responsabilidad sísmica.

La limitación de estos dos últimos códigos para elementos con responsabilidad sísmica, obedece a razones de ductilidad de los elementos construidos con concretos de alta resistencia y a la ausencia de información experimental relativa al comportamiento cíclico de estos elementos.

En contraste el ACI-11 no impone ninguna limitación al valor máximo de $f'c$ que puede utilizarse en una estructura ya sea en zona sísmica o no. Sin embargo existen algunas limitaciones relativas al valor máximo de $f'c$ que puede utilizarse en algunas ecuaciones de diseño, básicamente en las longitudes de anclaje (sección 12.1.2) y en el cortante que puede soportar el concreto de elementos sin refuerzo en el alma (sección 11.1.2).

3.13 Concretos Livianos

Los concretos livianos se definen para pesos específicos entre los 1,400 y 1,900 kg/m³. Para su fabricación se utilizan agregados livianos, en algunos casos artificiales. Se utiliza arena de peso normal o arena liviana.

Para la fabricación de concretos se pueden utilizar:

- Agregados naturales ligeros o de baja densidad, por ejemplo piedra pómez o pómez vitrificada.
- Perlitas de Poliestireno Expandido.
- Mediante la inclusión de un elevado contenido de aire por medio de espumas (emulsiones), a este tipo de concreto se le denomina Concreto Celular o Aireado. Es muy utilizado para la construcción de paneles de concreto liviano.
- Mediante el uso de aditivos o agentes de esponjamiento (agente dilatador) que hinchan la pasta. El agente más empleado es el Polvo de Aluminio.
- Mediante el uso de cascote de ladrillo cerámico.

Los concretos livianos son en general más costosos que los de peso normal, por los agregados que se utilizan en su fabricación. En nuestro medio se utilizan muy poco por la poca o nula disponibilidad de agregados livianos.

El módulo de elasticidad (E_c) y la resistencia en tracción (f_t) es inferior a los valores correspondientes para los concretos de peso normal.

La figura 3-27 muestra algunas curvas típicas esfuerzo – deformación correspondientes a concretos livianos comparándolas con los de peso normal. La resistencia f_c se alcanza a mayores valores de 0.002 (ϵ_0) y hay una marcada diferencia tanto en la pendiente de la zona inicial como en la rama descendente de la curva.

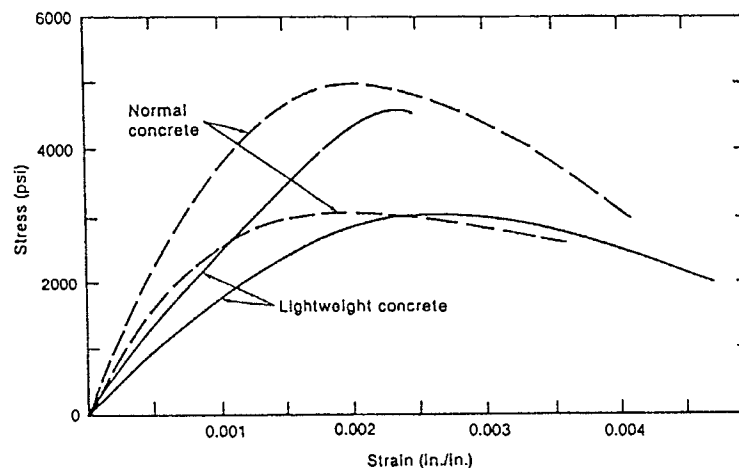


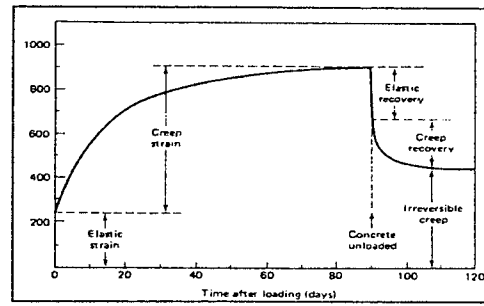
Fig. 3-27 Curvas esfuerzo – deformación para concretos de peso normal y livianos de 210 y 350 kg/cm².

3.14 Lecturas

- 3.1 Properties of Concrete – An Overview. Adam Neville. ACI Concrete International, February 1986.
- 3.2 Advancements in Concrete Technology. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, June 1999.
- 3.3 Durability – Critical Issues for the Future. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, July 1997.
- 3.4 The Question of Concrete Durability: We Can Make Good Concrete Today. Adam Neville. ACI Concrete International, July 2000.
- 3.5 Concrete Technology – An Essential Element of Structural Design. Adam Neville. ACI Concrete International, July 1998.
- 3.6 Building Durable Structures in the 21st Century. Mehta, Burrows. ACI Concrete International, March 2001.
- 3.7 How the Water-Cement Ratio Affects Concrete Strength. Aitcin, Neville. ACI Concrete International, August 2003.
- 3.8 How Useful is the Water-Cement Ratio? Adam Neville. ACI Concrete International, September 1999.
- 3.9 Core Test: Easy to Perform, Not Easy to Interpret. Adam Neville. ACI Concrete International, November 2001.
- 3.10 How Good is Good Enough? Edward A. Abdun-Nur. ACI Concrete International – Landmark Series, June 2003.
- 3.11 Tensile Strength of Concrete. Jerome M. Raphael. ACI Journal, March – April 1985.
- 3.12 Static Modulus of Elasticity of Concrete as Affected by Density. Adrian Pauw. ACI Journal, December 1960.
- 3.13 High- Performance Concrete Demystified. Aitcin, Neville. ACI Concrete International, January 1993.

CAPITULO 4

Cambios Volumétricos del Concreto



4.1 Introducción

Una de las principales desventajas del concreto como material de construcción, está asociada a los cambios volumétricos que este experimenta a lo largo del tiempo. Los principales cambios volumétricos que experimenta el concreto a lo largo del tiempo, son los debidos al Creep o Flujo Plástico, los debidos a la Retracción (Shrinkage), también llamada Contracción de Fragua y los asociados con los cambios de temperatura. Las figuras 4-1 y 4-2 (Mehta) muestran esquemáticamente los dos primeros fenómenos.

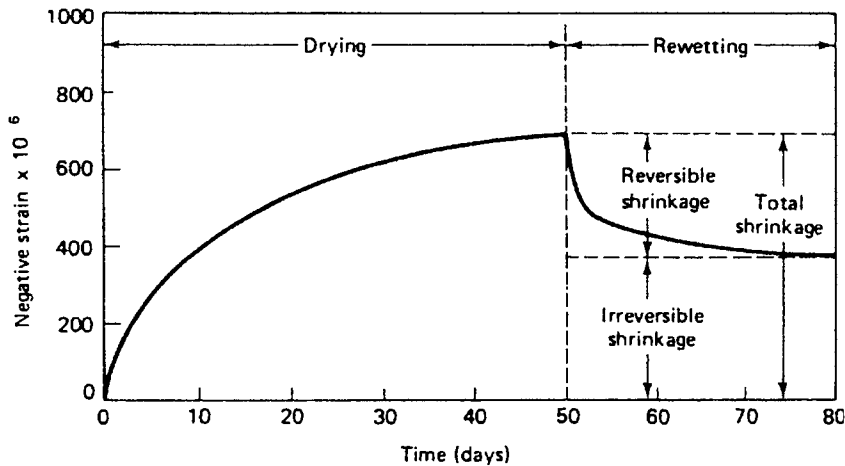


Fig. 4-1 Retracción en un elemento de concreto simple.

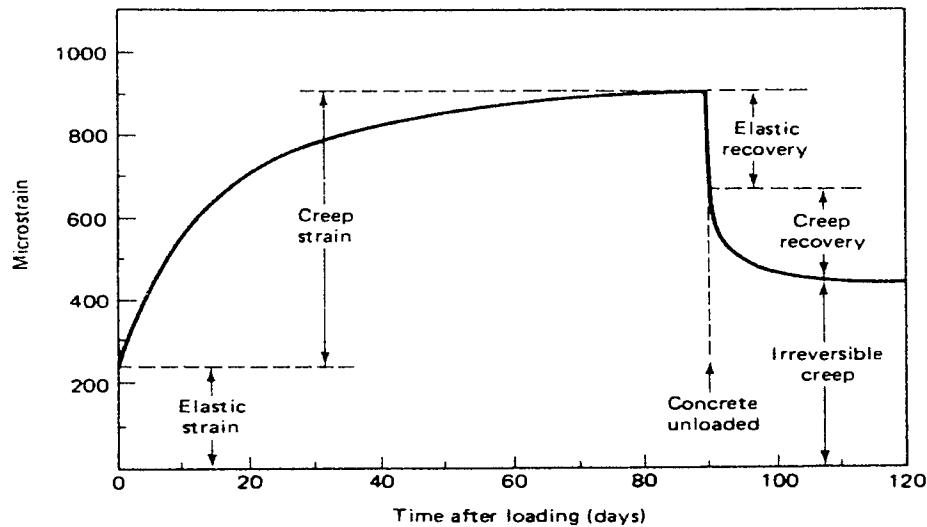


Fig. 4-2 Flujo plástico (Creep) en un elemento de concreto simple en compresión.

Al comparar las curvas de las figuras 4-1 y 4-2, se nota que existe una marcada similitud entre ambos fenómenos: Por un lado la figura 4-1 muestra la variación en el tiempo de la deformación ocasionada por la retracción no restringida del concreto, con los cambios que ocurren en ella por los procesos de secado y humedecimiento a los que está sujeto el concreto. Por otro lado, la figura 4-2 muestra la variación en el tiempo de la deformación longitudinal originada por el creep en un elemento cargado axialmente, con los cambios que ocurren por los sucesivos procesos de carga y descarga a los cuales puede estar sometida, por ejemplo, una columna.

En un elemento real de concreto, ambos fenómenos estarán presentes simultáneamente, y la deformación total del elemento será función de las deformaciones elásticas y de las deformaciones en el tiempo ocasionadas tanto por el creep como por la retracción.

4.2 Creep o Flujo Plástico del Concreto

El creep puede definirse como una deformación inelástica del concreto bajo esfuerzos sostenidos. Ocurre adicionalmente a las deformaciones elásticas producidas por los esfuerzos aplicados y se manifiesta como un aumento continuo de las deformaciones bajo carga sostenida. Ocurre únicamente cuando el concreto está sometido a esfuerzos de compresión o de tracción (en este caso cuando el elemento no se encuentra fisurado), es decir, si el elemento no está cargado no se produce creep.

Cuando se remueven o dejan de actuar los esfuerzos sostenidos, ocurre una recuperación parcial de las deformaciones ocasionadas por el creep, conocido como recuperación del creep (creep recovery). La recuperación del creep no es total, por lo tanto, el creep no es un fenómeno reversible.

Las deformaciones por creep en un elemento de concreto simple bajo esfuerzos sostenidos, son en general, mayores que las deformaciones elásticas iniciales, en consecuencia este fenómeno representa una parte importante de las deformaciones totales en un elemento de concreto a compresión. Como resultado del creep los desplazamientos y esfuerzos internos en una estructura de concreto, se modifican.

La figura 4-3 (Bresler) muestra una curva típica tiempo – deformación longitudinal para un espécimen de mortero 1:3 sin armaduras, a una humedad relativa del 95% y cargado inicialmente a un esfuerzo de compresión de 150 kg/cm^2 . El esfuerzo de compresión se mantuvo invariable durante 120 días y luego se descargó el espécimen. La deformación adicional por creep medida, antes de retirar la carga, fue del mismo orden de magnitud de la deformación elástica instantánea.

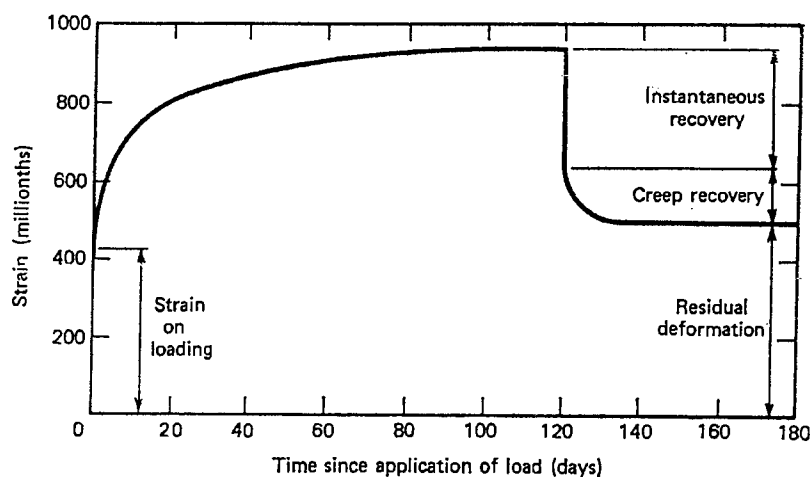


Fig. 4-3 Flujo plástico en un espécimen de mortero.

4.2.1 Algunas Observaciones Relativas al Creep

- Existen dos tipos de creep, ambos ocurren bajo la acción de cargas sostenidas. El primero es el denominado Creep Básico y ocurre bajo condiciones de humedad constante, es decir sin intercambio de humedad hacia o desde el medio ambiente. El segundo se denomina Creep por Secado, es adicional al primero y ocurre por el secado junto con la retracción.
- El creep es en general un fenómeno complejo, en consecuencia las deformaciones adicionales a las elásticas ocasionadas por el creep son difíciles de predecir. La figura 4-4 (White – Gergely), muestra el comportamiento de un cilindro de concreto simple sometido a compresiones de intensidad variable en el tiempo. La observación de la manera como evolucionan las deformaciones a lo largo del tiempo durante las sucesiva cargas y descargas en el elemento, indica que se trata de un fenómeno no lineal complejo.

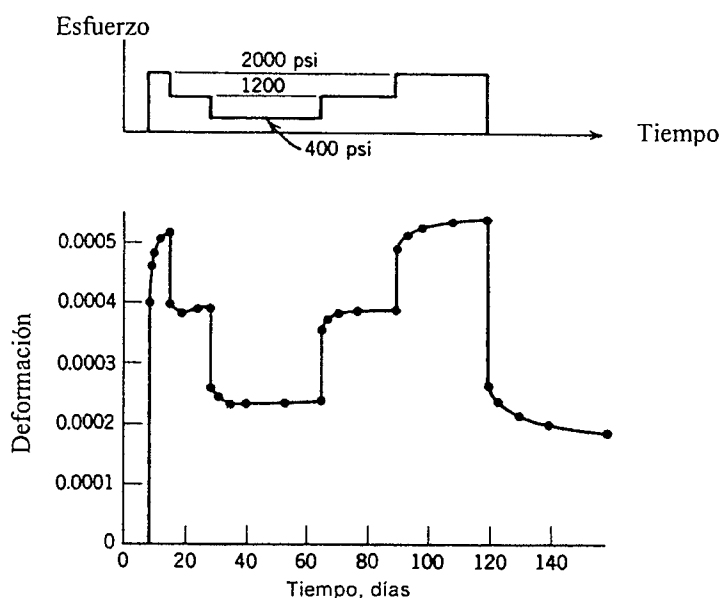


Fig. 4-4 Espécimen con esfuerzos de compresión variables en el tiempo

- La deformación adicional que ocasiona el creep (ϵ_{cr}) puede ser de una a tres veces la deformación elástica inicial. La presencia de acero longitudinal modifica tanto las deformaciones elásticas como las ocasionadas por el creep.
- El creep genera un aumento de las deflexiones en el tiempo, no solo en los elementos cargados axialmente (columnas), también en los elementos sometidos a flexión (vigas) ya que la zona de concreto comprimido por la flexión en las vigas también sufre el fenómeno del creep.
- El creep genera una redistribución interna de los esfuerzos en la estructura. En algunos casos los alivia, como es el caso de los esfuerzos generados por los asentamientos diferenciales de los apoyos en las estructuras.
- El creep genera un aumento importante en el esfuerzo del acero en compresión de vigas y columnas.
- El creep origina una reducción o pérdida en los esfuerzos iniciales de los elementos preesforzados tanto en los elementos pretensados como en los postensados.
- El creep origina acortamientos distintos en las columnas de los pisos altos de un edificio. Estos acortamientos no uniformes generan desplazamientos diferenciales en los extremos de las vigas los que a su vez, debido al monolitismo o hiperestaticidad de la estructura, generan esfuerzos adicionales en las vigas.

4.2.2 Principales Factores que Afectan la Magnitud del Creep

- a) La duración de la carga. Si las cargas son de corta duración, como el viento o el sismo, no se produce creep. El creep está asociado a cargas de naturaleza sostenida como el peso propio de los elementos estructurales. Si la carga se mantiene durante un año, el creep es alrededor de un 80% mayor que si se mantiene durante un mes.
- b) La edad a la cual se le aplican esfuerzos sostenidos al concreto. Si el concreto se carga a edades tempranas, el creep es mayor. Si el concreto se carga a los siete días, el creep es un 20% mayor que si se carga a los treinta días (ACI 209).
- c) El creep depende de la magnitud del esfuerzo de compresión aplicado. Hasta un esfuerzo de a aproximadamente $0.5f_c$, las deformaciones por creep son proporcionales a las deformaciones elásticas y por ende a la magnitud del esfuerzo aplicado. Más allá de este esfuerzo el creep se incrementa rápidamente. Para esfuerzos sostenidos entre el 75% a 85% de f_c el creep puede llevar el elemento a la falla (ver figura 3-17, efecto de las cargas sostenidas de compresión o efecto de la permanencia de la carga)
- d) El creep depende de la cantidad de armadura y de las dimensiones del elemento. Las dimensiones del elemento afectan en dos sentidos. El primero tiene que ver con la intensidad del esfuerzo, es claro que si el elemento tiene dimensiones mayores que las necesarias por resistencia, el esfuerzo aplicado será bajo y en consecuencia también el creep. Por otro lado la influencia de las dimensiones y forma del elemento puede ser representada por la relación área superficial – volumen del elemento. Cuanto mayor sea esta relación mayor será el creep y la retracción que experimenta el elemento.
- e) El creep depende de la composición del concreto. Lo único que experimenta creep es la pasta de cemento, los agregados no experimentan creep. Por lo tanto a mayor contenido de pasta mayor creep. El creep depende también del contenido de aire en el concreto y del contenido de finos en el concreto.
- f) El creep depende de la humedad relativa promedio del ambiente, a mayor humedad menor creep ya que una parte del creep (Creep por Secado) se debe a la migración de agua libre en los poros hacia el exterior del concreto. Al 50% de humedad relativa el creep es un 40% mayor que al 90% de humedad.

4.2.3 Coefficiente de Flujo Plástico

Para el cálculo de las deformaciones adicionales ocasionadas por el creep, el ACI 209 utiliza el denominado Coefficiente de Flujo Plástico (C_t), definido como:

$$\epsilon_{cr}(t) = C_t \epsilon_{ci} \quad (4-1)$$

$\epsilon_{cr}(t)$ es el valor de la deformación unitaria ocasionada por el creep en el tiempo.

$\epsilon_{ci} = f_c/E_c$ es la deformación elástica inicial (esfuerzo aplicado ÷ modulo elasticidad)

Por lo tanto: $\epsilon_{total}(t) = f_c/E_c + C_t f_c/E_c = f_c/E_c (1+C_t) = \epsilon_{ci} (1+ C_t) \quad (4-2)$

El ACI-209 recomienda calcular el valor de C_t mediante la siguiente expresión:

$$C_t = C_u K_{ti} K_{ed} K_{hu} K_{es} K_{sl} K_{fi} K_{ai} \quad (4-3)$$

C_u es el coeficiente último de creep, es decir el valor máximo que puede alcanzar el creep. Varía en un rango amplio, entre 1.3 a 4.2 con un valor promedio cercano a 2.4.

$K_{ti} = t^{0.6}/(10 + t^{0.6})$. t es el tiempo en días después de la aplicación de la carga sostenida.

$K_{ed} = 1.25 (t_i)^{-0.118}$. t_i es la edad del concreto (días) al aplicar la carga sostenida.

$K_{hu} = 1.27 - 0.0067 H_u$ para $H_u > 40\%$. H_u es la humedad relativa.

K_{es} , K_{sl} , K_{fi} , K_{ai} son coeficientes que dependen del espesor del elemento, del slump del concreto, del contenido de finos en la mezcla y del contenido de aire respectivamente. Para condiciones normales (ver ACI 209) se pueden suponer iguales a la unidad. Normalmente el contenido de cemento en la mezcla no es necesario considerar que afecta el valor de C_t , siempre y cuando no exceda de 450 kg/m^3 .

Si consideramos un elemento de concreto simple cargado durante un tiempo indefinido, una edad del concreto cuando se aplicó la carga de siete días y una humedad relativa del 90% (Lima) el valor de C_t será, como orden de magnitud:

$$C_t \approx C_u \times 1.0 \times 1.0 \times 0.7 = 0.7 C_u = 0.7 \times 2.4 \approx 1.7$$

El resultado anterior significa que se espera una deformación por creep 1.7 veces la deformación elástica inicial. Estos valores hay que tomarlos con cuidado debido a la alta dispersión del fenómeno del creep. Tanto una sobrestimación del creep como una subestimación pueden conducir a situaciones peligrosas en términos de los esfuerzos internos en la estructura ocasionados por este fenómeno.

4.3 Retracción o Contracción del Concreto

La retracción o contracción es el acortamiento que experimenta el concreto durante el proceso de endurecimiento y secado. Se debe principalmente a la pérdida por evaporación del exceso de agua de mezclado. Hay que recordar que el agua añadida inicialmente a una mezcla de concreto, puede llegar a ser aproximadamente el doble de la necesaria para lograr la hidratación del cemento, el exceso de agua se denomina agua de amasado o de mezclado.

En la figura 4-5 (Park – Paulay), se muestra una curva típica de la evolución de la retracción con el tiempo en un elemento de concreto, t_0 es el tiempo en el cual el elemento se somete a un medio ambiente de secado.

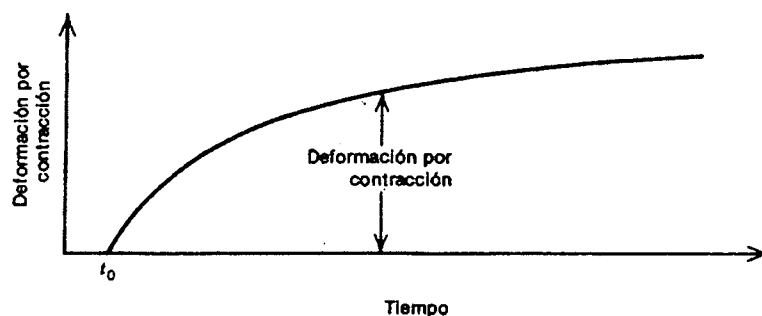


Fig. 4-5 Curva típica de retracción en el concreto.

4.3.1 Algunas Observaciones Relativas a la Retracción

- Existen diferentes formas de la retracción, a saber:
 - a) *Retracción Plástica*. Precede en el tiempo a la retracción por secado y ocurre por la pérdida de agua por evaporación hacia la atmósfera cuando el concreto aún se encuentra en estado plástico. Sucede cuando la humedad de la superficie del concreto se evapora a una tasa mayor que el suministro de agua que genera el sangrado, en consecuencia la superficie se retrae más que el concreto debajo de ella. Esta diferencia en la deformación de la superficie con respecto a las capas inferiores, genera esfuerzos de tracción que pueden superar al desarrollo de la resistencia en tracción del concreto a edades muy tempranas.

La magnitud de la retracción plástica está afectada por la cantidad de agua que se pierde por las superficies del concreto en contacto con la atmósfera, la cual depende de la temperatura, la humedad relativa del medio ambiente y de la velocidad del viento. Sin embargo la velocidad con la cual se pierde agua, no determina por sí sola la magnitud de la retracción plástica la cual depende también de la rigidez del concreto fresco.

- b) *Retracción Autógena* o auto generada. Se produce como consecuencia del proceso de hidratación del cemento. Ocurre dentro de la masa de concreto sin contacto con el medio ambiente, por lo tanto es característica de elementos sin pérdida ni aporte de humedad como suele ocurrir en el interior de grandes masas de concreto.
 - c) *Retracción Térmica*. Es el resultado del descenso en la temperatura del concreto desde la temperatura en el inicio de la fragua, o poco después, hasta la temperatura de servicio. El aumento de temperatura en una masa de concreto depende principalmente del contenido de cemento en la mezcla, del tipo de cemento, de las propiedades térmicas del agregado, de la temperatura del concreto durante su colocación, de la temperatura ambiente, de la relación entre el volumen de concreto y la superficie por donde se pierde calor y de las condiciones termodinámicas del curado.
 - d) *Retracción por Secado*. Es la más conocida de las formas de retracción. Se inicia cuando cesa el curado del concreto y se debe principalmente a la pérdida por evaporación del agua del gel de la masa de concreto. La ocasiona la evaporación del agua en la pasta de cemento hidratada en los extremos de los poros capilares en contacto con un medio ambiente con humedad relativa menor que la de los poros capilares. Siempre empieza en las superficies de concreto expuestas a una atmósfera no saturada.
 - e) *Retracción por Carbonatación*. Es un tipo de retracción secundaria que suele ocurrir por la reacción de la pasta de cemento hidratada con el dióxido de carbono del aire, en presencia de humedad. Es un fenómeno que normalmente, requiere de un lapso de tiempo importante para desarrollarse y sucede en ambientes o atmósferas ricas en dióxido de carbono (estacionamientos, lluvia ácida en atmósferas contaminadas) por la reacción de diversos productos de la hidratación del cemento con el CO_2 del medio ambiente. Al 50% de humedad relativa la Retracción por Carbonatación puede llegar a ser de la misma magnitud de la retracción primaria.
- Generalmente se define como Retracción Total de un determinado concreto, a la suma de la retracción autógena, la térmica y la de secado ya que la retracción plástica, como su nombre lo indica, ocurre cuando el concreto aún se encuentra en estado plástico.
 - La retracción ocurre a una tasa decreciente con el tiempo, normalmente para concretos curados por vía húmeda durante siete días, el 50% de la retracción total ocurre durante el primer mes posterior al curado y aproximadamente un 80% ocurre durante el primer año (T.Y. Lin).
 - Las deformaciones por retracción son independientes del estado de esfuerzos en el elemento de concreto.
 - Si se restringe la retracción libre, ya sea por la presencia de armaduras de acero, o por restricciones externas o por combinaciones de ambas, aparecen esfuerzos de tracción en el concreto que puede ocasionar el agrietamiento del elemento. La retracción, por lo general, provoca en los elementos estructurales (principalmente vigas) un aumento de las deflexiones con el tiempo.

- La retracción por secado es un fenómeno reversible (figura 4-1), esta se recupera parcialmente si se humedece el concreto. Los constantes cambios de humedad (procesos de humedecimiento y secado) en el concreto producen cambios de volumen en el concreto y en consecuencia movimientos en la estructura. Tal es el caso de los puentes de grandes luces en los cuales las deflexiones varían de acuerdo a la estación del año.
- La retracción origina una reducción o pérdida en los esfuerzos iniciales de los elementos preesforzados tanto en los elementos pretensados como en los postensados.

4.3.2 Principales Factores que Afectan a la Retracción

- a) La retracción por secado depende de la relación agua/cemento (w/c). Considerando la naturaleza misma del proceso, resulta claro que el factor determinante de la magnitud final de la retracción es el contenido original de agua en la mezcla, a mayor contenido de agua es de esperarse mayor retracción. Por este motivo la cantidad de agua en la mezcla no debe ser mayor que la necesaria para producir una adecuada trabajabilidad.
- b) La contracción sucede en la pasta de cemento (cemento más agua) por lo tanto, una mezcla rica en pasta se contraerá más que otra pobre. Los agregados no sufren retracción, por lo tanto éstos la restringen.
- c) Depende fuertemente de las condiciones ambientales (humedad relativa) especialmente a edades tempranas. A menor humedad mayor retracción. De allí la importancia del curado inicial especialmente en climas extremos, por ejemplo en nuestra serranía donde se pueden sumar condiciones de baja humedad y mucho viento.
- d) Depende de la finura del cemento, a mayor finura de molido del cemento, corresponde una mayor retracción.
- e) La presencia de finos en la mezcla aumenta apreciablemente la retracción.
- f) De los cambios estacionales de humedad (humedecimiento y secado) tal como se muestra en la figura 4-1.
- g) Depende de la relación (Volumen del elemento) / (Área de la superficie expuesta) ya que las capas exteriores del elemento pierden humedad más rápidamente que las interiores. En consecuencia las capas interiores restringen a las exteriores generando esfuerzos de tracción en la superficie del elemento.

En elementos grandes o masivos la relación anterior (volumen / área superficial) es mayor, por lo tanto la retracción será menor ya que habrá más concreto húmedo restringiendo la retracción. En elementos delgados la retracción es mayor.

4.3.3 Valores típicos de la Contracción

Los valores finales de la contracción o retracción libre (ϵ_{su}) medidos en probetas de laboratorio de 6"x12" mantenidas durante periodos prolongados a una humedad del 40% se encuentran entre 0.0004 y 0.0011 (MacGregor) con un valor promedio cercano a 0.0008 para los concretos normales curados por vía húmeda.

Los valores de la retracción final que aparecen en la literatura técnica son variados, a continuación se señalan algunos valores recomendados:

- Si no existe información de laboratorio disponible, el ACI-209 recomienda adoptar un valor final para la retracción libre de $\epsilon_{su} = 0.00078$ para una humedad relativa del 40%.
- Para el cálculo de las pérdidas de preesfuerzo, Nilson recomienda, en ausencia de información específica, un valor típico de 0.0006.
- Para el cálculo de las pérdidas de preesfuerzo, T.Y. Lin recomienda, un valor típico de 0.00055 para una humedad relativa cercana al 40%.
- La Norma Peruana de Cargas E.020 especifica un valor de 0.00025, aparentemente este valor es bajo, sin embargo es necesario precisar que el valor especificado por la Norma corresponde a valores típicos de la retracción restringida y no de la retracción libre.
- Jiménez Montoya recomienda adoptar, como valores medios del acortamiento por retracción, cuando no sea necesaria su determinación precisa, 0.00035 (0.35 mm por metro lineal) para concreto en masa y 0.00025 para concreto armado.
- La PCA, para muros de concreto armado, recomienda valores comprendidos entre 0.00043 y 0.00057 (13 mm a 17 mm por cada 30 m lineales de muro) un valor medio puede ser 15 mm por cada 30 m lineales de muro

La expresión propuesta por el ACI-209 para estimar la retracción de un elemento de concreto simple en el tiempo, tiene una forma similar a la ecuación 4-3 presentada para el Creep. Adicionalmente a los factores que intervienen en la ecuación 4-3, para la retracción es necesario agregar un factor que depende del tiempo de curado del elemento, ya que el ACI-209 adopta un curado "estándar" de siete días. La forma de la ecuación para estimar la retracción en cualquier instante "t", reteniendo únicamente las variables más importantes es:

$$\epsilon_s(t) = \epsilon_{su} K_t K_h K_{vs} \quad (4-4)$$

ϵ_{su} es el valor de la retracción libre. El ACI-209 recomienda un valor de 0.00078 en ausencia de información específica para los agregados y condiciones locales.

$K_t = t / (35 + t)$. t es el tiempo en días después de los 7 días de curado por vía húmeda.

$K_h = 1.4 - 0.01 H$. H es la humedad relativa en porcentaje ($40\% \leq H \leq 80\%$). Para humedades relativas mayores que el 80%, $K_h = 3.0 - 0.03 H$

$K_{vs} = 1.2 e^{-0.00472 v/s}$ Es un factor que depende de la relación volumen del elemento (v) al área expuesta (s) por donde se evapora el agua. El cociente v/s está expresado en mm.

El producto de los factores $K_h \times K_{vs}$ no debe ser menor que 0.2.

De los factores anteriores, para concretos normales, el más importante es el asociado con la humedad relativa (K_h).

El ACI 209 recomienda los siguientes valores mínimos para la retracción final:

- $\epsilon_s \geq 0.0001$ para concreto sometido a cambios estacionales de humedecimiento y secado
- $\epsilon_s \geq 0.00015$ para concreto sometido a condiciones sostenidas de secado.

Si consideramos por ejemplo, una losa cuadrada maciza de 4 m de lado y 0.15 m de espesor con las dos caras expuestas a la intemperie (relación de volumen a área expuesta de 75 mm), curada por vía húmeda durante 7 días y luego sometida a un ambiente de secado con una humedad relativa del 80%, el valor de ϵ_s a los 30 días de terminado el curado será, como orden de magnitud:

$$\epsilon_s(37) \approx 0.0008 \times 0.46 \times 0.6 \times 0.84 \approx 0.000185$$

Si la losa estuviera completamente restringida axialmente en sus bordes, de tal modo que la retracción no pudiese generarse libremente, el esfuerzo de tracción que ocurriría en la losa, sin considerar la relajación de los esfuerzos de tracción por creep, sería igual al producto del módulo de elasticidad del concreto por el valor calculado de la retracción (asumiendo un Módulo de Poisson nulo):

$$E_c \times \epsilon_s \approx 15,000 \times (210)^{1/2} \times 0.000185 \approx 40 \text{ kg/cm}^2.$$

Un esfuerzo de tracción de esta magnitud, originaría agrietamiento longitudinal y transversal en la losa.

Por lo general en una estructura real, la retracción final (retracción restringida) será menor que la retracción libre de una probeta de laboratorio, por los siguientes motivos:

- Presencia del refuerzo de acero que restringe la contracción libre. El concreto armado retrae menos que el concreto en masa ya que las barras de refuerzo se oponen al acortamiento y lo disminuyen, tanto más cuanto mayor sea la cuantía de refuerzo. La relación entre un valor y otro de la retracción es del orden del 80% (Jiménez Montoya).
- Por la presencia de restricciones externas por conexiones del elemento con otros elementos estructurales rígidos.
- Las estructura se construyen en etapas o con vaciados parciales por lo tanto parte de la contracción ocurre antes de completarse las zonas vecinas.
- Por la relajación de esfuerzos. Ya que la retracción es un fenómeno que depende del tiempo, a medida que esta evoluciona y se producen esfuerzos de tracción en el elemento, también aparecerá el fenómeno de relajación de esfuerzos debido al creep, fenómeno que reduce los esfuerzos de tracción en el elemento. La relajación es una reducción de los esfuerzos a deformación constante.

La figura 4-6 muestra los resultados de los cálculos teóricos de los esfuerzos ocasionados por la retracción, para la losa maciza completamente restringida en sus bordes, de 4 m de lado y 0.15 de espesor, mencionada líneas arriba. Se muestran las curvas esperadas de la evolución en el tiempo de la resistencia en tracción directa del concreto, de los esfuerzos de tracción originados por la retracción restringida y la manera como estos se modifican por el efecto de la relajación de esfuerzos. En el punto donde se interceptan las curvas de resistencia en tracción con la de los esfuerzos ocasionados por la retracción, es de esperarse que ocurra el agrietamiento de la losa, en este caso a los 20 días, tiempo que se modifica a unos 26 días si se incluye la relajación de esfuerzos.

En la realidad, es posible que el tiempo en el cual aparecen las primeras grietas de retracción sea menor, esto debido principalmente a las deficiencias en el curado. Nótese que en los cálculos no se ha incluido el efecto de la presencia de las armaduras de refuerzo, estas originan restricciones al acortamiento libre, adicionales a las presentes en los bordes de la losa, sin embargo son indispensables para controlar el ancho de las grietas.

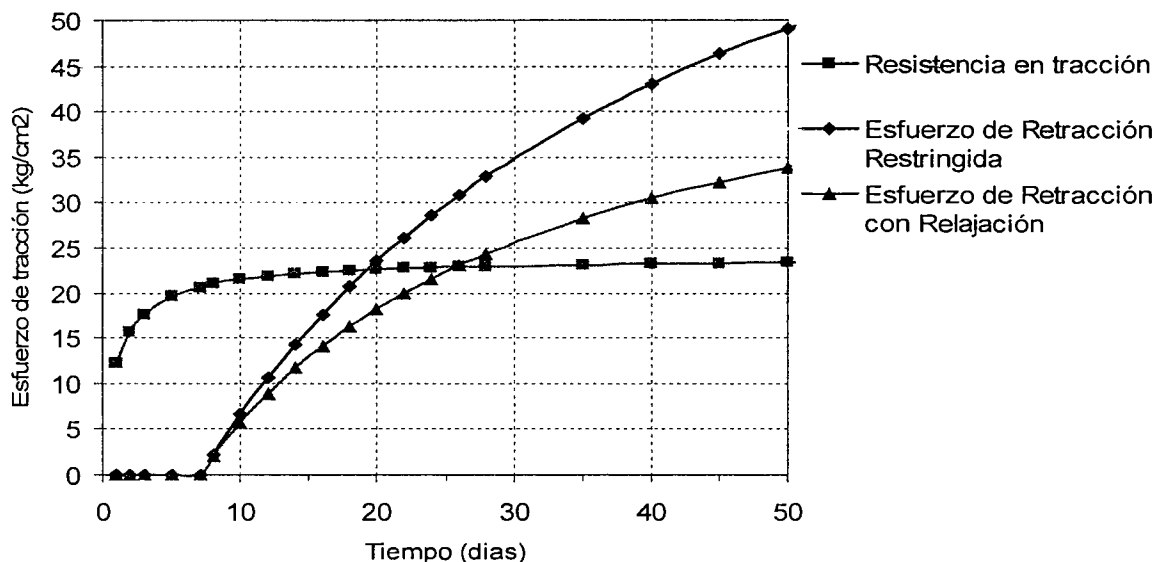


Fig. 4-6 Evolución de los esfuerzos ocasionados por la retracción restringida.

4.3.4 ¿Cómo controlar la Retracción?

- Mediante un curado apropiado del concreto. Un concreto curado durante un solo día experimenta alrededor de 20% más retracción que uno curado durante una semana. El plazo mínimo de curado por vía húmeda debería ser de 7 días.
- Mediante el empleo de dosificaciones o mezclas de concreto apropiadas. Es importante limitar el contenido de agua en la mezcla al mínimo necesario consistente con los requerimientos de trabajabilidad.
- Evitando las temperaturas altas en el concreto durante su colocación y curado.
- Mediante el uso de juntas de llenado o de construcción.
- Mediante el uso de juntas de control o de retracción.
- Mediante el empleo de las llamadas “bandas de retracción” sobre todo en losas de piso de gran área o en edificios de plantas grandes.
- Mediante el empleo de refuerzo de acero adecuadamente distribuido.
- Mediante el uso de cementos expansivos.
- Mediante el uso de aditivos reductores de retracción (ASR).
- Mediante la adición de fibras (por ejemplo de polipropileno o de acero) a la mezcla de concreto. Las fibras de polipropileno pueden ser efectivas para el control de la retracción plástica.

Estas medidas son para intentar controlar la retracción y reducir sus efectos en la estructura, sin embargo la retracción es inevitable.

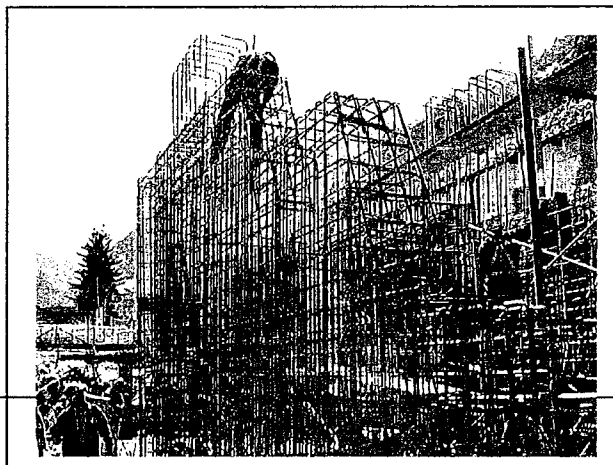


4.4 Lecturas

- 4.1 Shrinkage Cracking in Fully Restrained Concrete Members. R. Ian Gilbert. ACI Structural Journal. March – April 1992.
- 4.2 Integrated View of Shrinkage Deformation. Aitcin, Neville, Acker. ACI Concrete International. September 1997.
- 4.3 Creep of Concrete and Behavior of Structures. Adam Neville. ACI Concrete International. May 2002, June 2002.
- 4.4 ACI 209R-92 (Reapproved 1997). Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures. ACI Manual of Concrete Practice.
- 4.5 Creep, Shrinkage, and Cracking of Restrained Concrete at Early Age. Salah Altoubat, David Lange. ACI Materials Journal, July – August 2001.
- 4.6 Why Concrete Walls Crack. Concrete Technology Today - PCA. June 1984.

CAPITULO 5

Acero de Refuerzo



5.1 Introducción

El concreto es un material débil en tracción, por lo tanto se le usa junto con acero de refuerzo capaz de resistir los esfuerzos de tracción. Por ejemplo, en una viga sometida a flexión, el concreto se encarga de resistir las compresiones y las barras de acero longitudinal, colocadas cerca de la superficie en tracción, se encargan de resistir las tracciones originadas por la flexión. Adicionalmente se suele colocar refuerzo transversal, en la forma de estribos, que ayudan a resistir los esfuerzos de tracción diagonal en el concreto causados por las fuerzas cortantes.

El acero también se utiliza para ayudar al concreto a soportar los esfuerzos de compresión, por ejemplo en el caso de las columnas o elementos que trabajan en compresión o flexocompresión. Esto ayuda a reducir las secciones transversales de las columnas y se puede entender si se compara la resistencia en compresión de un concreto normal, digamos de 210 kg/cm^2 , con la resistencia del acero de refuerzo que utilizamos en nuestro medio que es de $4,200 \text{ kg/cm}^2$, es decir cada centímetro cuadrado de acero equivale a 20 cm^2 de concreto trabajando en compresión.

Para que el acero trabaje de manera efectiva es necesario que exista una fuerte adherencia entre el concreto y el acero, para asegurar que no ocurran movimientos relativos (deslizamientos) entre las barras de refuerzo y el concreto circundante. Esta unión o adherencia, proviene básicamente de tres fuentes: de la *adhesión* del tipo químico que existe en la interfase entre el acero y el concreto, de la *rugosidad natural* que tienen las superficies del refuerzo de acero laminado en caliente y de las *corrugaciones* (resaltes) con las cuales se fabrican las barras de refuerzo corrugadas. Esta última fuente es la más importante para la adherencia, y solo está presente en las barras corrugadas, en las barras lisas solamente existen las dos primeras fuentes.

Adicionalmente existen otras características que conducen a un comportamiento satisfactorio del conjunto acero – concreto, estas son:

- a) Los coeficientes de dilatación térmica del acero y del concreto son similares. Esto permite que no se forme agrietamiento en el concreto debido a las deformaciones térmicas.
- b) El concreto que rodea a las barras de refuerzo provee una buena protección contra la corrosión del acero.
- c) La resistencia al fuego del acero desprotegido no es buena, por su alta conductividad térmica y por el hecho de que sus propiedades mecánicas se reducen notablemente cuando es expuesto a temperaturas elevadas. El concreto protege al acero de la exposición a temperaturas elevadas, como las que se

producen en un incendio, permitiendo aumentar el tiempo de exposición a las temperaturas altas que es capaz de resistir una estructura.

5.2 Barras de Refuerzo Laminadas en Caliente

El refuerzo de acero se distribuye normalmente en barras o varillas de sección básicamente circular, con resaltes o corrugaciones en la superficie para mejorar la adherencia con el concreto. Los aceros lisos casi no se usan como refuerzo, salvo el de 1/4" que se utiliza en nuestro medio, para el refuerzo de retracción y temperatura en los aligerados y para estribos de columnas y elementos secundarios. Los aceros lisos, que en los inicios del concreto armado eran los únicos disponibles, hoy en día han sido completamente remplazados por los corrugados, con lo cual se ha logrado una mejora sustancial en la adherencia acero – concreto.

En la figura 5-1 (Fling) se muestran los principales tipos de corrugaciones de los aceros de refuerzo. El acero que se utiliza en nuestro medio tiene resaltes similares a los de la tercera columna de la misma figura. La Norma ASTM A615 especifica la altura mínima que deben tener las corrugaciones o resaltes, el espaciamiento entre los resaltes y la inclinación de los mismos.

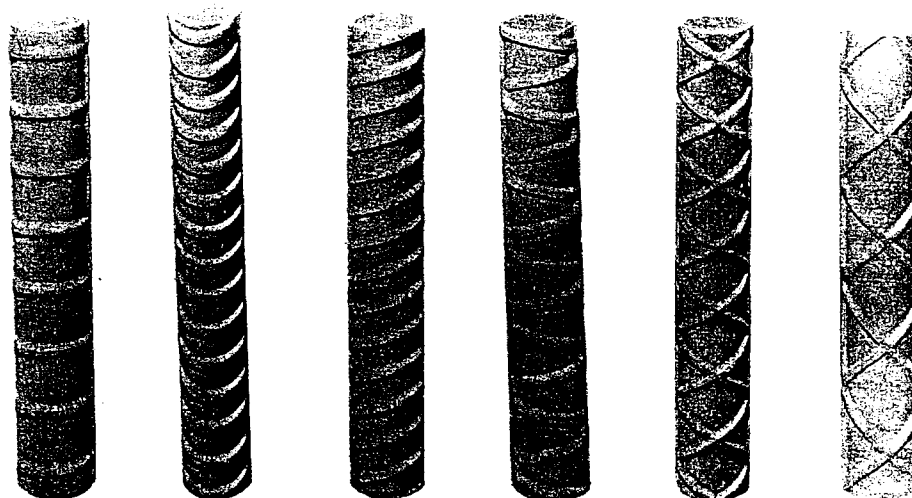


Fig. 5-1 Tipos de corrugaciones en las barras de refuerzo.

En la Tabla 5-1, adaptada de la ASTM, se resumen las principales características de las varillas de refuerzo. Las barras de producción nacional se ajustan a estas características.

Los productores de acero en los Estados Unidos distinguen los distintos diámetros asignándoles un número relacionado con el diámetro de la barra expresado en octavos de pulgada (por ejemplo la barra #5 es de 5/8", la #6 es de 3/4"). El área de las barras puede ser calculada directamente del diámetro nominal.

Las barras de producción nacional vienen en longitudes de 9 m, bajo pedido Aceros Arequipa puede fabricar barras de 12 m de longitud.

SiderPerú y Aceros Arequipa fabrican, adicionalmente a las barras de 3/8", 1/2", 5/8", 3/4", 1" y 1-3/8", barras de 8 mm y de 12 mm. Aceros Arequipa fabrica también barras de 6 mm corrugadas.

Tabla 5-1 Características de las varillas corrugadas.

Designación	Diámetro (in)	Diámetro (mm)	Area (cm ²)	Peso (kg/m)	Observaciones	
2	1/4	6.4	0.32	0.250	Liso	
3	3/8	9.5	0.71	0.560		
4	1/2	12.7	1.29	0.994		
5	5/8	15.9	2.00	1.552		
6	3/4	19.1	2.84	2.235		
8	1	25.4	5.10	3.973		
11	1 3/8	35.8	10.06	7.907		
6 mm (*)		6	0.28	0.222		Ac. Arequipa
8 mm		8	0.50	0.395		Ac. Arequipa
12 mm		12	1.13	0.888		Ac. Arequipa
7	7/8	22.2	3.87	3.042		No disponible
9	1 1/8	28.7	6.45	5.060	No disponible	
10	1 1/4	32.3	8.19	6.404	No disponible	
14	1 11/16	43.0	14.52	11.380	No disponible	
18	2 1/4	57.3	25.81	20.240	No disponible	

(*) Acero de 6 mm corrugado. También se comercializa en rollos

5.3 Calidades del Acero de Refuerzo

Las principales características que deben tener los aceros de refuerzo, están descritas en la Norma Peruana en el artículo 3.4 y en ACI-02 artículo 3.5. Los aceros de refuerzo que se producen en el Perú (SiderPerú, Aceros Arequipa) deben cumplir con alguna de las siguientes Normas:

- Norma Peruana NTP 341.031 y 339.186. Acero Grado 60.
- Norma ASTM A615. Acero Grado 60.
- Norma ASTM A706. Acero de baja aleación, soldable. Grado 60.

La Norma A615 cubre los aceros de refuerzo que se utilizan con mayor frecuencia, en nuestro medio son prácticamente los únicos que utilizamos. La citada Norma, no limita la composición química de los aceros, salvo el contenido máximo de fósforo en la colada que no debe exceder del 0.06%.

La Norma A706 cubre los aceros para aplicaciones “especiales” en las cuales la soldabilidad, la facilidad de doblado y la ductilidad, sean consideraciones importantes para la elección del acero. Limita la composición química del acero de tal modo que el carbono equivalente sea menor que el 0.55%. El carbono equivalente se calcula en función del contenido de Carbono, Manganeso, Cobre, Níquel, Cromo, Molibdeno y Vanadio.

Las calidades del acero que cubre la Norma ASTM y que es posible emplear, como refuerzo para el concreto, se resumen en la Tabla 5-2. Se indica el esfuerzo de fluencia (f_y) mínimo y máximo, el esfuerzo máximo o último (f_u) mínimo, a este último también se le denomina resistencia a la tracción (tensile strength).

Tabla 5-2 Calidades del acero de refuerzo (ASTM).

Grado	ASTM	f_y min (kg/cm ²)	f_y max (kg/cm ²)	f_u min (kg/cm ²)	f_u / f_y (min)
40	A615	2,800	--	4,200	--
60	A615	4,200	--	6,300	--
75	A615	5,300	--	7,000	--
60	A706	4,200	5,500	5,600	1.25
80	A706	5,600	6,900	7,000	1.25

Cabe resaltar que en el Perú, tanto Acero Arequipa S.A. como SiderPerú, los únicos productores de acero corrugado, sólo fabrican acero de refuerzo Grado 60 que se ajusta a la Norma ASTM A615. Aceros Arequipa fabrica acero A706 en diámetros de 3/8" a 1 3/8". Este acero es soldable, desafortunadamente es más caro que el A615 y su uso no se ha difundido.

La Norma ASTM A615 fija únicamente los valores mínimos de f_y y de f_u , no especifica un valor máximo para f_y . En contraste la Norma A706 sí especifica un valor máximo para el esfuerzo de fluencia f_y . Adicionalmente la A706 especifica un valor mínimo del cociente f_u/f_y esto obliga a que los aceros tengan una zona "franca" de endurecimiento por deformación. La intención de esta disposición es lograr que la longitud de las rótulas plásticas, que pueden formarse en los extremos del elemento durante sismos severos, sea mayor. Mientras mayor sea la relación entre el momento máximo (normalmente asociado a f_u) que puede desarrollar la sección en comparación al momento de fluencia, mayor será la longitud de la rótula plástica y mayor será la capacidad de rotación inelástica del elemento.

En general los fabricantes de acero se preocupan por cumplir con el valor mínimo de f_y . Los ensayos de laboratorio indican que el valor de f_y real puede ser mayor que el nominal, no es de extrañar valores de f_y un 10% a 30% por encima del nominal, tal como se aprecia en la figura 5-2 (MacGregor) correspondiente a muestras de la producción de acero Grado 60 en los Estados Unidos. En esta muestra el 10% de los ensayos mostraron un f_y mayor que 80 ksi es decir, 33% mayor que el valor nominal, con un coeficiente de variación cercano al 9% y muy pocos resultados por debajo del f_y nominal.

Un valor de f_y real muy por encima del nominal (el utilizado para el diseño) no es conveniente, ya que el elemento tendrá una marcada sobrerresistencia en flexión la que puede ocasionar una falla frágil por esfuerzo cortante y/o por adherencia. Por esta razón la Norma A706 establece un valor máximo para la fluencia (ver Tabla 5-2).

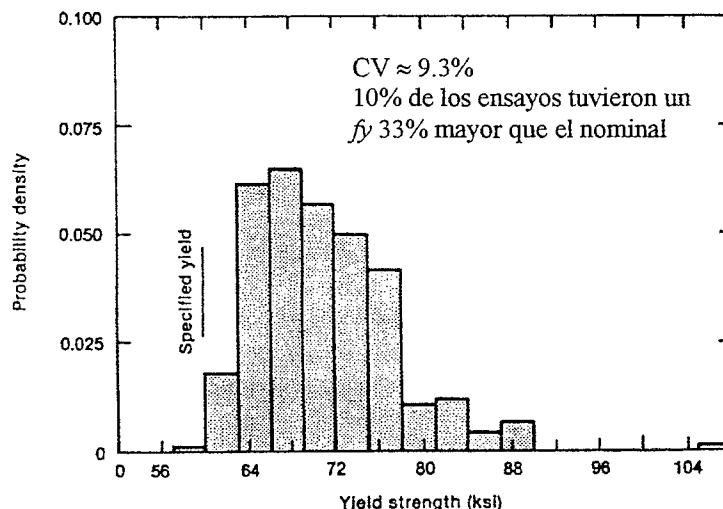


Fig. 5-2 Distribución de los esfuerzos de fluencia medidos en ensayos de tracción. Aceros Grado 60.

5.4 Propiedades Mecánicas de las Barras de Refuerzo

La figura 5-3 (MacGregor) muestra curvas típicas idealizadas esfuerzo – deformación, de los aceros de refuerzo Grado 40, 60 y 75. También se muestra en línea punteada la curva típica para los alambres con los cuales se fabrican las mallas electro soldadas (Welded Wire Fabric).

La figura 5-4 (adaptada de Fintel) muestra algunas curvas fuerza – deformación típicas de aceros con distintas calidades (40, 60 y 75) y distintos diámetros. Las curvas corresponden a la producción de acero Norteamericana.

Para los aceros Grado 40 y 60 se observan claramente las plataformas de fluencia, mientras que los aceros de mayor resistencia, como el Grado 75 y los alambres para mallas electro soldadas, ya no exhiben tal plataforma.

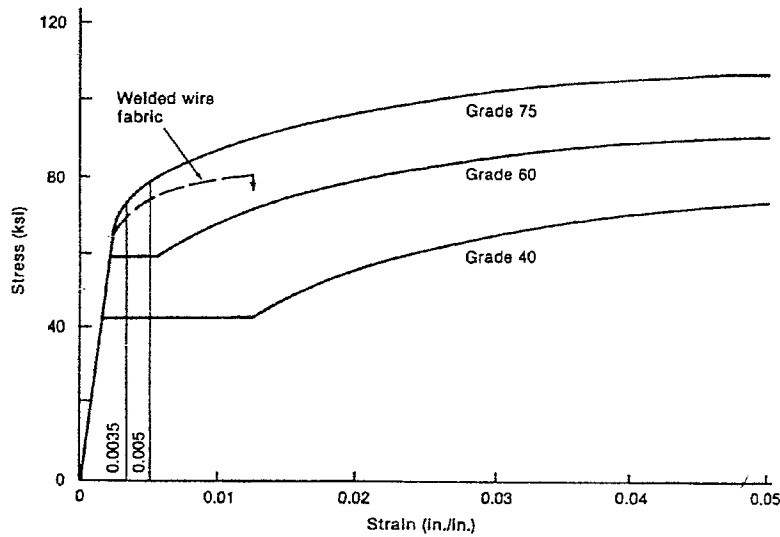


Fig. 5-3 Curvas esfuerzo – deformación típicas.

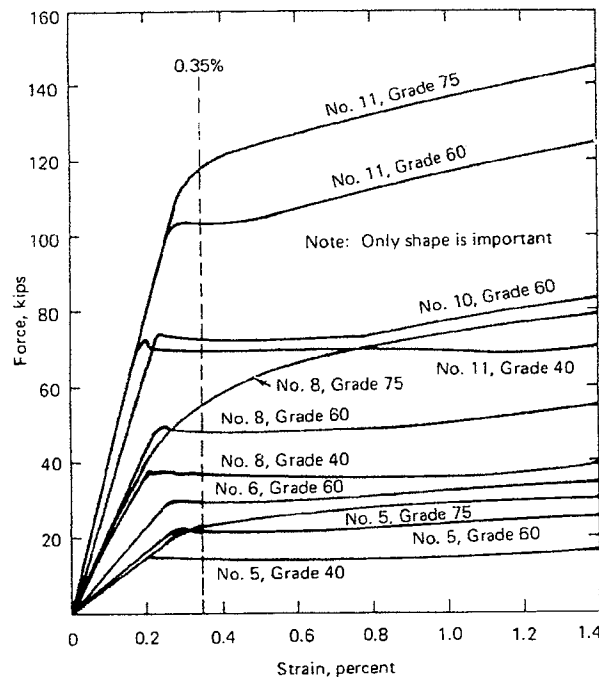


Fig. 5-4 Curvas fuerza – deformación típicas.

Los aceros Grado 60 pueden o no presentar plataforma de fluencia, dependiendo de la composición química y del proceso de fabricación. En el caso que no exista una fluencia clara, la Norma ASTM A615 especifica que la fluencia se calculará para una deformación del 0.5% para el Grado 60 y de 0.35% para el Grado 75 (ver figura 5-3).

Para los aceros con una resistencia especificada mayor que la correspondiente al Grado 60 ($f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$) el ACI exige que el esfuerzo de fluencia (en este caso virtual) se calcule para una deformación de 0.35% como se indica en la figura 5-4.

Los aceros que se producen en el Perú, suelen presentar un escalón de fluencia definido, salvo los aceros "trabajados en frío". La figura 5-5 muestra los resultados de los ensayos de dos barras de 5/8" Grado 60, fabricadas por Aceros Arequipa. Se muestran

también las curvas de descarga y recarga las que son paralelas a la recta inicial de carga. Solo se muestra un tramo de la curva, la gráfica se ha interrumpido mucho antes de la rotura de las barras.

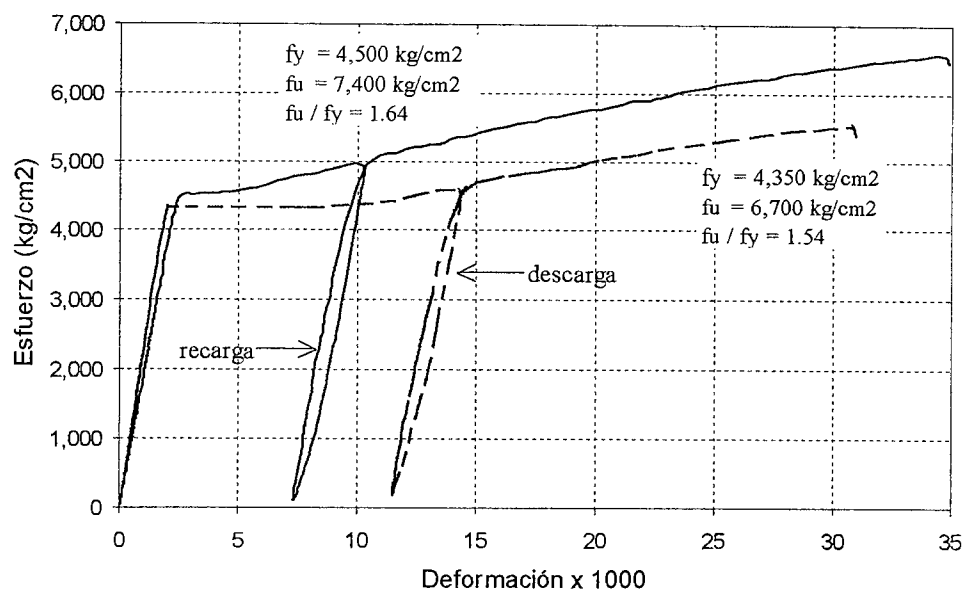


Fig. 5-5 Curvas típicas para aceros nacionales de 5/8" Grado 60.

La Norma E.060 (artículo 9.5) especifica que los diseños no deben basarse en un esfuerzo de fluencia de la armadura - f_y - que exceda de $5,600 \text{ kg/cm}^2$, salvo para aceros de preesforzado. La Norma Peruana y el ACI, en elementos con responsabilidad sísmica, no permiten el empleo de aceros con una resistencia especificada a la fluencia superior al Grado 60.

La Norma ASTM especifica el *alargamiento o elongación de rotura* mínima (medido en los ensayos en una longitud de 8") que deben tener los aceros de refuerzo. Para el acero Grado 60 el alargamiento mínimo debe estar entre el 7 y 9% dependiendo del diámetro. La Tabla 5-3 resume los requerimientos para el acero Grado 60.

El alargamiento o elongación es una medida de la ductilidad del acero. Obsérvese en la Tabla 5-3 que la Norma ASTM exige para el acero A706 una elongación mínima alrededor del 50% mayor que la correspondiente al acero fabricado bajo la A615, en consecuencia el A706 es bastante más dúctil y su empleo es recomendable en zonas de alta sismicidad.

Tabla 5-3 Elongaciones mínimas de rotura.

Designación	A615 Grado 60	A706 Grado 60	A706 Grado 80
Barras # 3, 4, 5, 6	9%	14%	12%
Barras # 7, 8	8%	12%	12%
Barras # 9, 10, 11	7%	12%	12%

En nuestro medio no es raro encontrar aceros trefilados o "trabajados en frío". Estos se fabrican a partir del fierro de 1/4" estirándolo en frío, para producir diámetros de 4, 4.5, 5, 5.5 mm. Las propiedades mecánicas de estos aceros son distintas a la del acero a partir del cual se fabricaron ya que el estiramiento en frío elimina el escalón de fluencia, dando lugar a aceros frágiles con poca elongación de rotura.

5.5 Propiedades de las Barras Grado 60

5.5.1 Características Mecánicas – ASTM A615

- f_y min = 4,200 kg/cm² (fluencia nominal, valor mínimo).
- f_u min = 6,300 kg/cm² (esfuerzo máximo o último o resistencia a la tracción).
- $E_s \approx 2'000,000$ kg/cm² (módulo de elasticidad).
- Deformación en el inicio de la fluencia $\epsilon_y = (f_y / E_s)$. ≈ 0.0021
- Longitud de la plataforma de fluencia = variable.
- Deformación de rotura >> Deformación de fluencia (30 a 40 veces).
- Elongación a la rotura entre el 7% y 9% (Tabla 3-3).
- Coeficiente de dilatación $\approx 11 \times 10^{-6}$ 1/C°. Valor muy parecido al del concreto el cual es aproximadamente 10×10^{-6} 1/C°. Ambos coeficientes de dilatación dependen de la temperatura.

5.5.2 Soldabilidad

El acero ASTM A615, por su composición química (carbono equivalente mayor a 0.5%) no es soldable en esencia. El alto contenido de carbono equivalente lo hace un acero difícil de soldar, con una alta posibilidad que se originen uniones frágiles y de baja resistencia. Es necesario utilizar procedimientos muy cuidadosos para lograr una soldadura “decente” como por ejemplo precalentar las barras y luego de soldar controlar el enfriamiento y usar electrodos de bajo contenido de hidrógeno E-7018 ó E-8018. En general no es recomendable soldar este acero, salvo bajo procedimientos supervisados y con mano de obra especializada.

El acero fabricado bajo la Norma ASTM A706 sí es soldable. Su uso es recomendable en zonas de alto riesgo sísmico ya que facilita las reparaciones y el refuerzo de estructuras dañadas luego de sismos intensos, o cuando se requiere reforzar o ampliar una estructura. También su uso facilita los empalmes de barras por soldadura, si fuesen necesarios.

5.5.3 Diámetros Mínimos de Doblado del Acero de Refuerzo

La Norma Peruana en los artículos 7.2 y 7.3 establece los diámetros mínimos de doblado para las barras de refuerzo. Estos diámetros mínimos de doblado, no deben confundirse con el diámetro de la prueba de doblado especificada por las Normas ASTM.

5.5.4 Efecto de la Temperatura

El acero expuesto a altas temperaturas pierde (reduce) sus propiedades mecánicas (f_y , f_u , E_s). A partir de los 450 C° aproximadamente, la reducción en f_y y f_u crece rápidamente. El recubrimiento de concreto protege, dentro de ciertos límites, al acero de refuerzo del fuego, prolongando el tiempo necesario para que sus propiedades mecánicas se vean afectadas por el efecto de las altas temperaturas.

La figura 5-6 (MacGregor) muestra el efecto de las altas temperaturas en la resistencia del acero, para las barras trabajadas (estiradas) en frío (cold-drawn), para las barras laminadas en caliente (hot-rolled) y para las barras de alta resistencia..

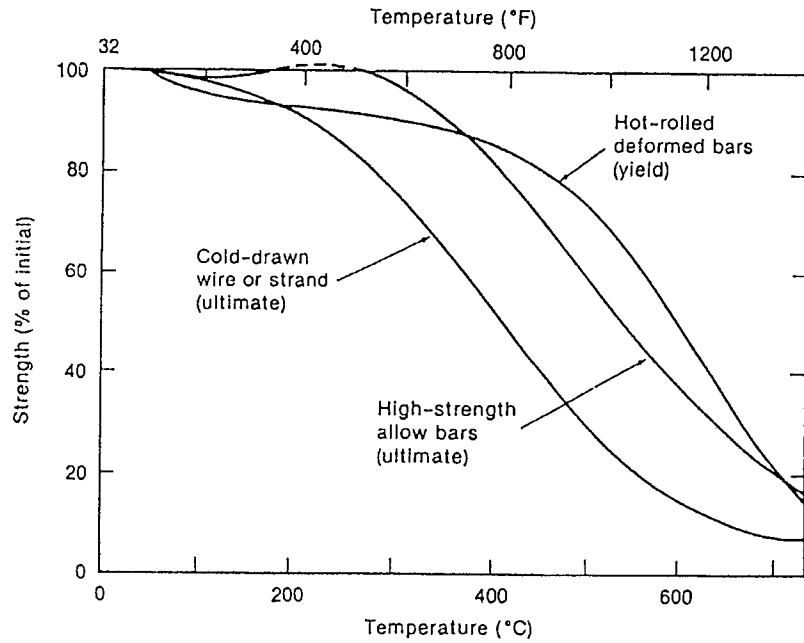


Fig. 5-6 Efecto de las altas temperaturas en la resistencia del acero.

La figura 5-7 (MacGregor) muestra la influencia de la temperatura en la resistencia a la compresión del concreto simple. Se muestran las curvas correspondientes a tres tipos de agregados distintos. En general tanto la resistencia a la compresión como el módulo de elasticidad del concreto disminuyen con las temperaturas altas, mientras que el coeficiente de dilatación aumenta. Los concreto fabricados con agregados con carbonatos (calizas, dolomitas) son menos sensibles a la altas temperaturas que los fabricados con agregados silicios (granito, areniscas, cuarcitas). Estos últimos son los más utilizados en nuestro medio.

El color del concreto luego de un incendio, es un indicador aproximado de las temperaturas que se han alcanzado. En la parte inferior de la figura 5-7 se indican algunos rangos de temperatura asociados con el color del concreto. En general cuando el color ha pasado del rosado al gris, es probable que el concreto haya sido dañado de manera importante por las temperaturas.

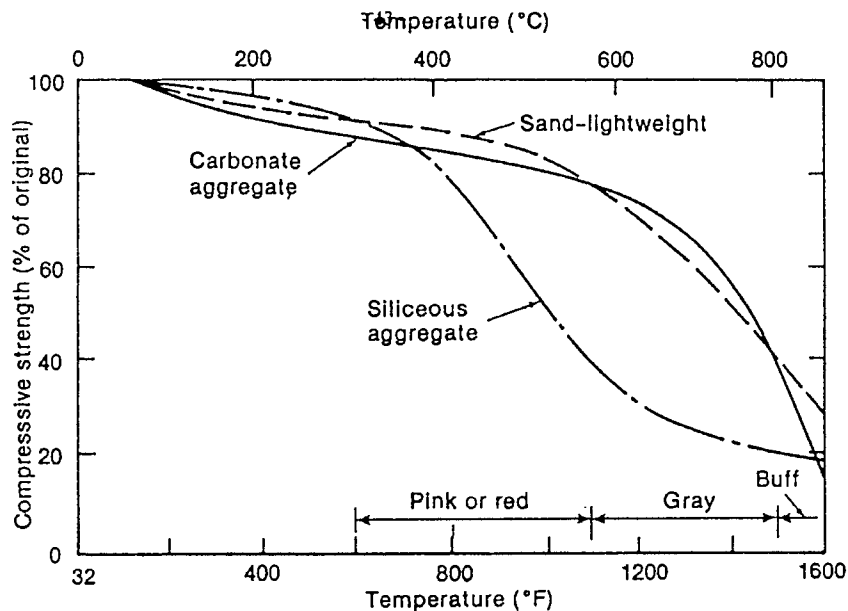


Fig. 5-7 Efecto de las altas temperaturas en la resistencia del concreto.

5.6 Mallas Electro Soldadas

Las mallas electro soldadas se utilizan como refuerzo prefabricado para el concreto. Consisten en alambres lisos o corrugados colocados horizontal y verticalmente, los alambres se sueldan eléctricamente en las intersecciones conformando mallas con aberturas cuadradas o rectangulares.

Se las usa como refuerzo en pavimentos, losas, muros y en general en estructuras con refuerzo longitudinal y transversal dispuesto en un patrón regular. La ventaja que tienen es la de ahorrar mano de obra ya que de utilizar refuerzo convencional, las armaduras deben “tejerse” manualmente.

Las Normas ASTM establecen las características que deben tener tanto las mallas como los alambres que la componen, por ejemplo la ASTM A496 especifica las características del alambre corrugado utilizado para la fabricación de mallas corrugadas. En este caso el acero debe tener un esfuerzo de fluencia mínimo de 4,900 kg/cm² y un esfuerzo último mínimo de 5,600 kg/cm².

El uso de las mallas electro soldadas debe evaluarse cuidadosamente en aquellas estructuras que requieran ductilidad, como lo son las estructuras que deban soportar sismos y en las cuales las fuerzas de diseño se han obtenido reduciendo el espectro elástico de respuesta. Esto se debe a que el alambre con el cual se fabrican las mallas suele ser frágil con una elongación a la rotura entre el 1% y el 3%, valores bastante menores a los exigidos para el acero corrugado de refuerzo (Tabla 5-3). La reducción en la ductilidad se origina por el proceso de estiramiento en frío (trefilado) al cual son sometidos los alambres. Este proceso conlleva a un endurecimiento por deformación del acero y elimina el escalón de fluencia.

La figura 5-8 muestra los resultados de ensayos realizados en laboratorio de tres barras de diferente diámetro: 3/8” y 1/2” (corrugadas Grado 60) y 5.6 mm trabajada en frío y luego corrugada mecánicamente. A la izquierda se muestran las curvas completas hasta la rotura de las barras (esfuerzo vs. desplazamiento de los cabezales de la máquina de ensayos) y a la derecha las curvas esfuerzo – deformación de la zona encerrada por el recuadro. Es clara la baja elongación a la rotura de la barra trabajada en frío así como la ausencia de la plataforma de fluencia y de una zona clara de endurecimiento por deformación. El esfuerzo último (*fu*) de la barra de 5.6 mm fue de 6,000 kg/cm² y el esfuerzo nominal de fluencia, calculado al 0.35% de deformación unitaria, fue de alrededor de 5,500 kg/cm². El cociente *fu / fy* es de tan solo 1.1.

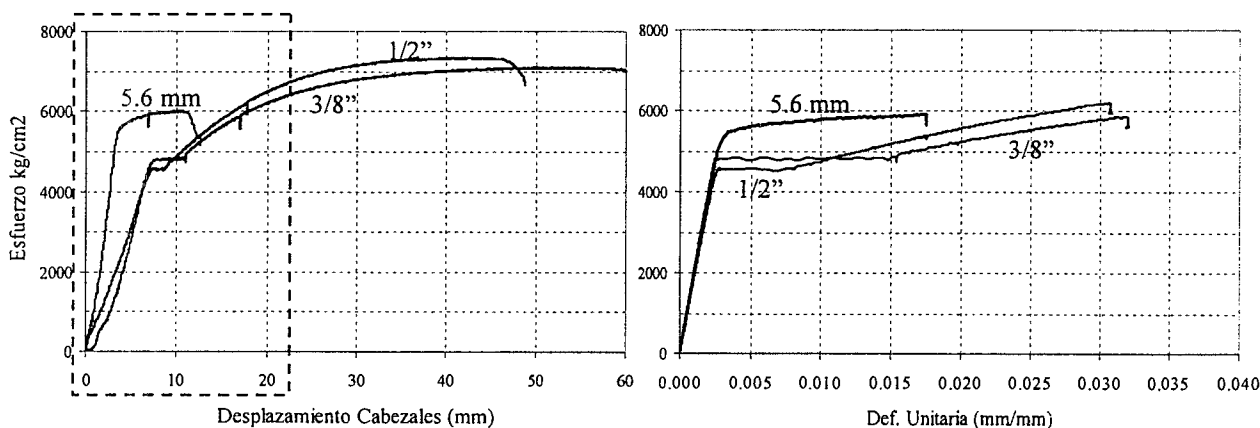


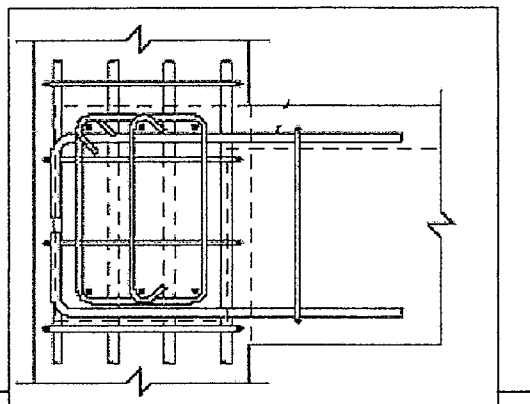
Fig. 5-8. Curvas esfuerzo – desplazamiento y esfuerzo – deformación de aceros de producción nacional (5.6 mm trefilado, 3/8”, 1/2”)

5.7 Lecturas

- 5.1 Capítulo 2 (Reinforcing Steel) del libro Reinforced Concrete Engineering –Volume 1. Edited by Boris Bresler. John Wiley.
- 5.2 Capítulo 6 (Properties of Materials for Reinforced Concrete) del libro Handbook of Concrete Engineering – Second Edition. Edited by Mark Fintel. Van Nostrand.
- 5.3 Cold Straightening of Partially Embedded Reinforcing Bars – A Different View. L.A. Erasmus. ACI Concrete International, June 1981.
- 5.4 ¿Cuál es la Varilla de Refuerzo más Resistente a la Corrosión? Revista Construcción y Tecnología, Febrero 2000. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.
- 5.5 Norma ASTM A615/A615M-01b. Standard Specification for Deformed and Plain Billet Steel Bars for Concrete Reinforcement.
- 5.6 Norma ASTM A706/A706M-01. Low-Alloy Steel Deformed and Plain Bars for Concrete Reinforcement.
- 5.7 Norma ASTM A706/A706M-01. Low-Alloy Steel Deformed and Plain Bars for Concrete Reinforcement.
- 5.8 Designing and Constructing with FRP Bars: An Emerging Technology. Nanni, Faza. ACI Concrete International, November 2002.

CAPITULO 6

Detalles del Refuerzo



6.1 Introducción

La Norma de Concreto especifica una serie de detalles asociados con la colocación de las armaduras de refuerzo en el concreto. Muchos de estos detalles provienen de la experiencia constructiva y están relacionados principalmente con los espaciamientos máximos y mínimos del refuerzo de acero así como con los recubrimientos mínimos de concreto necesarios para proteger a las armaduras.

Los detalles para el refuerzo de acero en estructuras de concreto armado, están cubiertos en el Capítulo 7 tanto en la Norma Peruana como en el ACI-08. Nuestra Norma, en este capítulo, ha adoptado completamente las disposiciones del ACI.

6.2 El Arte del Detallado

El diseño de una estructura de concreto armado es más que simplemente proporcionar los elementos para que sean capaces de soportar, con una seguridad razonable, los esfuerzos provenientes del análisis. Un análisis y diseño estructural elaborados son insuficientes, ambos deben complementarse con un detallado apropiado de todos los refuerzos para asegurar que la estructura como un todo se comporte tal como fue concebida por el diseñador. Una estructura mal detallada puede experimentar fisuración, deflexiones excesivas y en casos extremos llegar al colapso.

Para reforzar correctamente una estructura de concreto armado, el diseñador debe tener un claro conocimiento de su comportamiento, que va más allá de la simple formulación de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad o del uso de fórmulas, tablas, programas, etc. El detallado de una estructura debe incorporar todo el proceso mediante el cual, el diseñador, concibió cada parte o elemento de la estructura para que se comporte satisfactoriamente y de manera segura bajo las cargas de servicio y eficientemente cuando se vea sometida a cargas o deformaciones últimas que la lleven a la zona de comportamiento no lineal.

6.3 Funciones o Propósitos de los Refuerzos

Para poder entender el “arte del detallado” como lo llaman Park y Paulay, es necesario tener claro las numerosas funciones que cumple los refuerzos en una estructura de concreto armado. Las principales funciones son:

- 1) Resistir los esfuerzos de tracción. En el diseño por resistencia, solemos asumir que el concreto circundante al refuerzo es incapaz de tomar tracciones.
- 2) Proveer fuerzas de compresión cuando el concreto sólo no puede resistir los esfuerzos actuantes, esta situación es muy frecuente en las columnas. El refuerzo en compresión mejora la ductilidad de las secciones, reduce las deflexiones ocasionadas por el Creep bajo cargas sostenidas y aumenta la resistencia en flexión.

- 3) Asegurar que los anchos de grieta, bajo condiciones de servicio, no excedan de ciertos límites. Debe recordarse que el refuerzo, dentro de los límites prácticos de economía, no puede eliminar el agrietamiento, sólo lo controla.
- 4) Se requiere refuerzo para controlar el agrietamiento excesivo producido por la retracción y los cambios de temperatura en elementos estructurales axialmente restringidos.
- 5) Los estribos proveen resistencia ante los esfuerzos de tracción diagonal originados por las fuerzas cortantes
- 6) Restringir el pandeo de las armaduras en compresión (estribos).
- 7) Proveer confinamiento al concreto en las zonas de esfuerzos de compresión altos de vigas, columnas, nudos. El confinamiento adecuadamente diseñado y detallado incrementa la deformación de agotamiento del concreto comprimido, mejorando la ductilidad de las secciones. Este efecto es muy importante en las estructuras ubicadas en regiones de alto riesgo sísmico.

6.4 Funciones del Recubrimiento de Concreto para el Refuerzo

- a) Protección del refuerzo de acero contra agentes externos tales como la humedad. Para condiciones normales de exposición del concreto, la Norma fija una serie de recubrimientos mínimos que dependen del tipo de elemento estructural (zapatas, muros, vigas, columnas, losas, etc.). Cuando el concreto está expuesto a condiciones externas “agresivas” tales como la presencia de fuentes externas de cloruros provenientes de la aplicación de productos anticongelantes, agua de mar, rocío del agua de mar, agua salobre, aguas servidas, suele ser necesario incrementar los recubrimientos de concreto. En estos casos se recomienda en general y a cargo de revisar, un recubrimiento mínimo de 5 cm.

Normalmente cuando las condiciones de exposición son agresivas no resulta suficiente incrementar los recubrimientos, en estos casos la calidad del concreto y su impermeabilidad son decisivas para una adecuada protección del refuerzo. Estos métodos de protección escapan al alcance de este curso, algunos están cubiertos en el Capítulo 4 (Requisitos de Durabilidad) de la Norma E.060. Es necesario señalar, que en otros países (sobre todo de Europa), se exigen para condiciones normales de exposición, recubrimientos menores a los especificados por nuestra Norma y el ACI.

- b) Protección de refuerzo contra el fuego. En la sección 5.5.4 discutió la fuerte influencia que tiene la temperatura en las propiedades mecánicas del acero de refuerzo. En este sentido el concreto protege al acero de la acción directa de las altas temperaturas que se pueden alcanzar en un incendio. Cuando mayor sea el recubrimiento de concreto, mayor será el tiempo de exposición a las altas temperaturas que puede soportar el acero.
- c) Adherencia entre el acero y el concreto. Un adecuado recubrimiento permite que se desarrollen plenamente los esfuerzos de adherencia entre el acero y el concreto. Recubrimientos insuficientes pueden conducir a fallas prematuras de adherencia. En general un recubrimiento con un espesor equivalente por lo menos al diámetro de las barras de refuerzo, suele ser suficiente para la adherencia.
- d) Facilidad de colocación del concreto: Los recubrimientos mínimos también permiten que el concreto fluya fácilmente alrededor de las barras. Si los recubrimientos son muy pequeños es posible que el concreto no llene completamente el espacio comprendido entre las barras y las superficies libres del elemento.

Las figuras a continuación corresponden a los recubrimientos mínimos exigidos por la Norma E.060 para condiciones “normales” de exposición y para elementos vaciados en

sitio. Para elementos prefabricados en planta y para los preesforzados, la Norma contiene disposiciones específicas.

La figura 6-1 resume los recubrimientos mínimos para los muros de contención o para los muros de sótano en los cuales una cara está expuesta permanentemente al terreno. Si el concreto se coloca (llena) directamente contra el terreno, el recubrimiento de las barras de la cara en contacto con el terreno no debe ser inferior a 7 cm. La figura 6-2 resume el recubrimiento mínimo para las armaduras de las zapatas. En este caso se supone que el concreto ha sido colocado directamente contra el suelo, es decir sin el empleo de un solado en el fondo y sin un encofrado para las caras laterales.

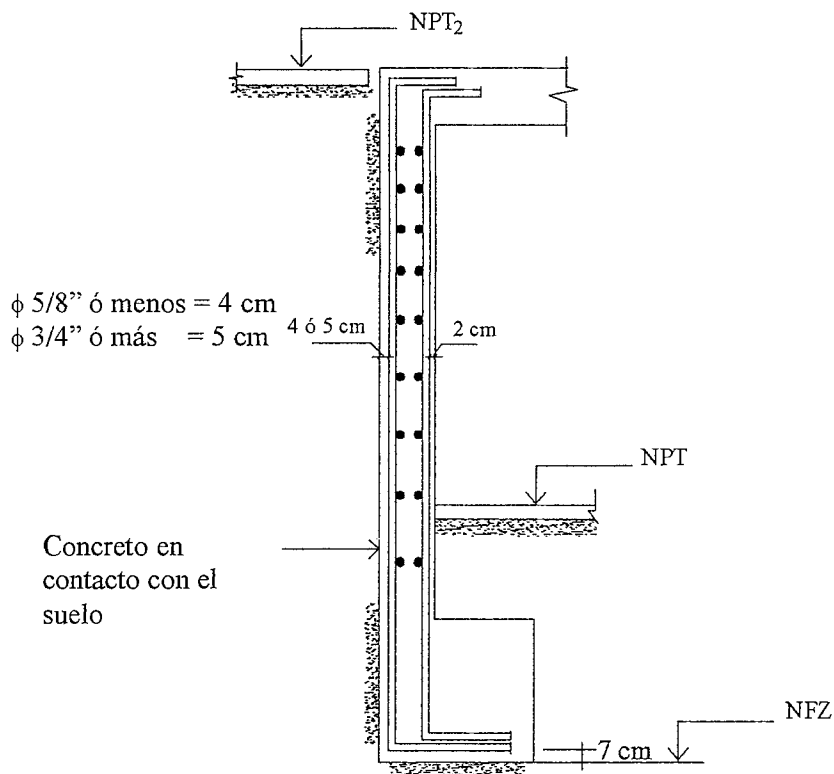


Fig. 6-1 Recubrimientos mínimos para muros

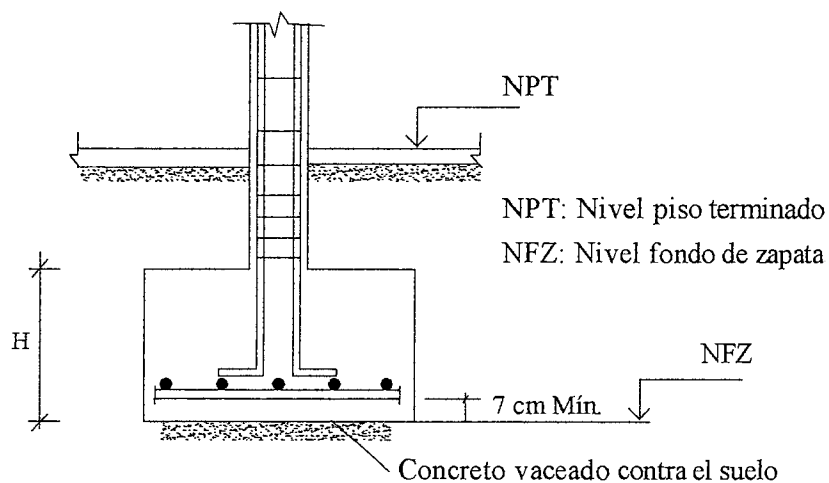


Fig. 6-2 Recubrimientos en zapatas

Las figuras 6-3 y 6-4 resumen los recubrimientos mínimos para aligerados y losas macizas armadas en una o dos direcciones. Se supone que las condiciones de exposición son "normales".

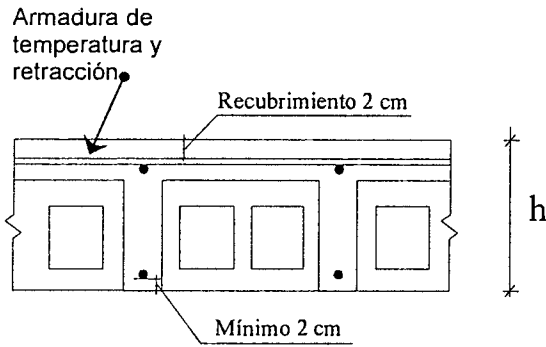


Fig. 6-4 Recubrimientos en aligerados

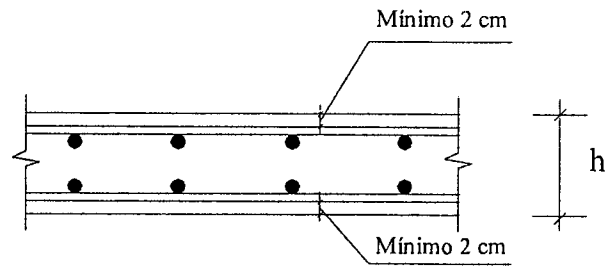


Fig. 6-5 Recubrimientos en losas macizas

Las figuras 6-6 y 6-7 se refieren a los recubrimientos mínimos en vigas peraltadas y en vigas chatas. Las vigas chatas son aquellas que tienen el mismo peralte que la losa o aligerado y por lo tanto no son visibles. Para las vigas chatas se especifica el mismo recubrimiento que para las losas. Nótese que el recubrimiento libre se mide al estribo y no a la armadura de flexión.

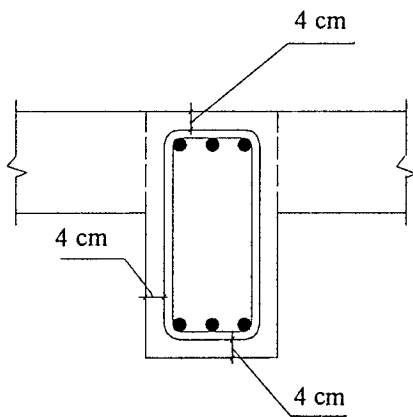


Fig. 6-6 Recubrimientos en vigas peraltadas

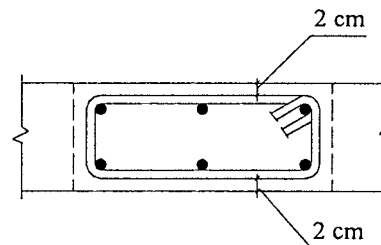


Fig. 6-7 Recubrimientos en vigas chatas

La figura 6-8 se refiere a los recubrimientos mínimos en columnas que son los mismos que para las vigas peraltadas. Nuevamente el recubrimiento libre se mide al estribo y no a la armadura longitudinal.

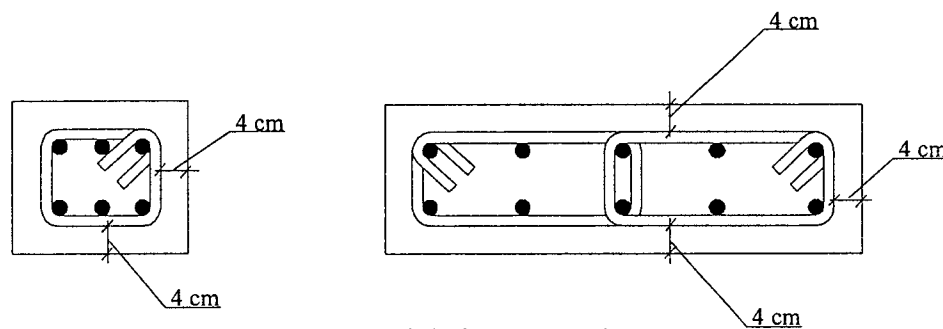


Fig. 6-8 Recubrimientos en columnas

Existen con frecuencia situaciones en las cuales las columnas y las vigas tienen poco ancho, este caso se presenta por ejemplo, en las columnas y soleras de confinamiento que se usan en los muros de albañilería. Generalmente los ladrillos de producción local tiene 0.14 m o menos de ancho, en consecuencia si el muro es de soga y la columna y la solera se llenan al ras con el muro, el espesor es insuficiente para acomodar las armaduras y respetar los recubrimientos de la figura 6-8. En estas situaciones hay dos alternativas, o se hace la columna más ancha que el muro con lo cual se produce un

“pinto” que sobresale, o se reducen los recubrimientos. En la figura 6-9 se presenta la segunda solución con un recubrimiento que ha sido reducido de 4 a 2.5 cm. Otras Normas de Concreto permiten reducir el recubrimiento medido al estribo hasta un mínimo de 2 cm.

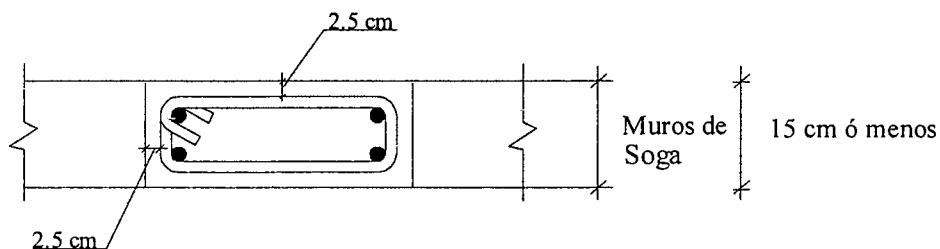


Fig. 6-9 Recubrimientos en columnas y soleras delgadas (elementos de confinamiento)

6.5 Espaciamiento del Acero de Refuerzo

El espaciamiento mínimo entre barras de refuerzo que especifica la Norma, obedece a la necesidad de garantizar el flujo del concreto fresco dentro de los espacios libres entre las barras y entre estas y el encofrado, de tal modo que no se generen “cangrejeras” en el concreto.

El espaciamiento mínimo también asegura la adherencia entre las barras y el concreto. Si las barras de una capa están poco espaciadas, puede sobrevenir una falla de adherencia que se manifiesta con una hendidura (split) a lo largo del concreto a la altura de la capa de refuerzo.

En general es necesario evitar la congestión del acero de refuerzo tanto en vigas como en columnas y especialmente en los nudos, para lograr una buena colocación y compactación del concreto fresco. La figura 6-10, resume los requerimientos de la Norma E.060 para el espaciamiento mínimo del refuerzo de vigas, ya sean entre las barras de una capa o entre capas de refuerzo paralelas. También se indica la colocación correcta de las barras en más de una capa.

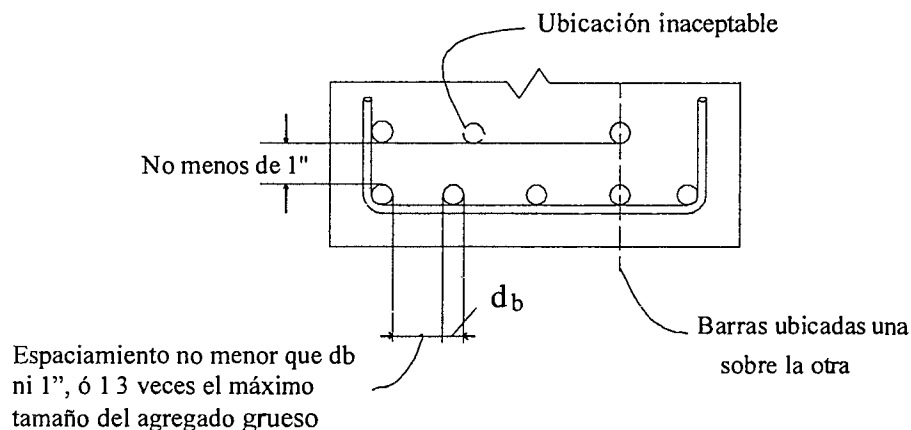


Fig. 6-10 Espaciamientos mínimos en armaduras de vigas

Para las columnas los requerimientos de espaciamiento libre entre barras son más exigentes que para las vigas, tal como se muestra en la figura 6-11. Nótese que el espaciamiento libre mínimo también debe aplicarse a la distancia libre entre empalmes traslapados (si los hubiera) y entre los traslapes y las barras adyacentes.

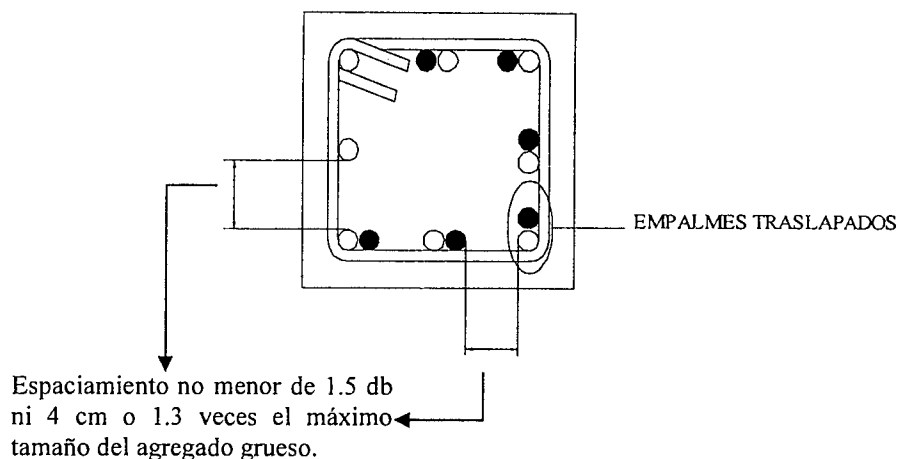


Fig. 6-11 Espaciamientos mínimos en columnas

La Norma también especifica, para algunos elementos como losas y muros, un *espaciamiento máximo del refuerzo*, con la finalidad de asegurar un agrietamiento mejor distribuido y evitar que grandes porciones de concreto se queden sin ningún refuerzo. Para las losas, el espaciamiento máximo del refuerzo, también ayuda a prevenir la falla por punzonamiento que podría producirse en presencia de cargas concentradas en zonas pequeñas de la losa. La figura 6-12 muestra los requerimientos de la Norma relacionados con el *espaciamiento máximo del refuerzo principal por flexión para losas macizas y muros*. En losas macizas armadas en dos direcciones la E.060 (Art. 13.3.2) exige un espaciamiento máximo de dos veces el espesor de la losa en las zonas críticas. Se exceptúan de estos requerimientos a las losas nervadas.

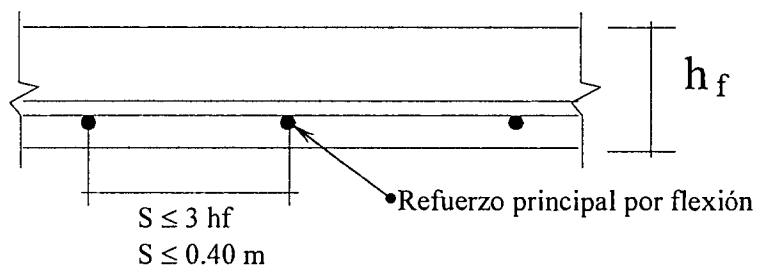


Fig. 6-12 Espaciamiento máximo de las armaduras en losas macizas y muros

6.6 Paquetes de Barras

Con cierta frecuencia es necesario agrupar dos o más barras conformando lo que se denomina un *paquete de barras*. Esta agrupación es conveniente cuando existe congestión del refuerzo, es decir cuando el número de barras requerido no puede ser colocado con comodidad en la sección, respetando los recubrimientos y espaciamientos libres mínimos entre las barras. Los paquetes de barras se usan principalmente en las columnas, su uso en vigas es poco frecuente.

Se supone que las barras agrupadas actúan como una unidad, es decir el paquete equivale a una barra cuya área es la suma de las áreas de las barras que lo conforman. Para que las barras actúen como una unidad, no pueden haber más de dos barras agrupadas en un mismo plano, en consecuencia el máximo número de barras que la Norma permite en un paquete es de cuatro. La Norma permite agrupar en paquetes, barras del #11 (1 3/8") como máximo. Las barras que conforman un paquete deben amarrarse firmemente entre si para asegurar que se mantengan en posición, ya sea vertical u horizontal, durante el llenado del concreto. Los paquetes deben alojarse en las esquinas de estribos cerrados.

El recubrimiento y espaciado libre debe basarse en el diámetro equivalente de una barra ficticia cuya área sea igual al área del paquete, sin embargo el recubrimiento mínimo no necesita ser mayor de 5 cm ó 7 cm para el caso de elementos vaciados contra el suelo y en contacto con él permanentemente. La figura 6-13 muestra paquetes de dos, tres y cuatro barras, también se resumen las principales exigencias de la Norma.

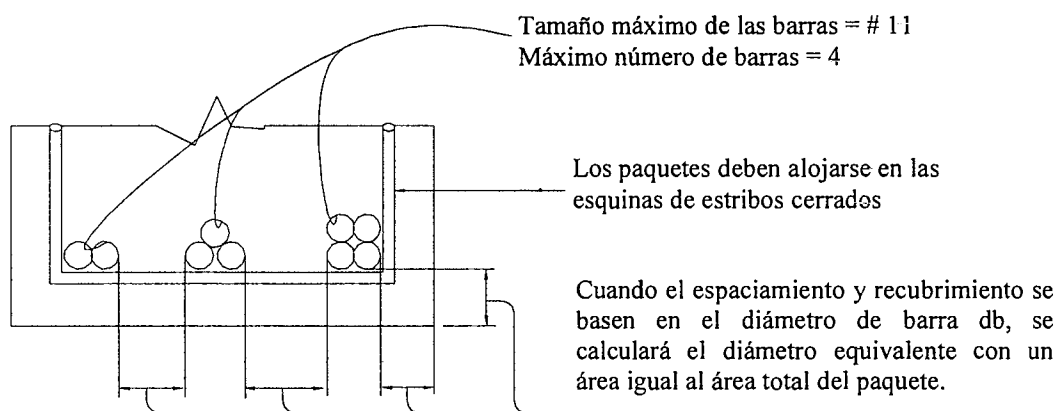


Fig 6-13 Paquetes de barras.

6.7 Tolerancias en la Colocación del Refuerzo

La armadura debe colocarse con precisión, respetando los recubrimientos especificados en los planos de estructuras así como los espaciados mínimos y detalles. La armadura debe asegurarse para que durante el vaciado no se produzcan desplazamientos. Salvo que en los planos se especifique otra cosa, las tolerancias en la colocación del acero de refuerzo, medidas a través del peralte efectivo - d - y del recubrimiento, no deben exceder los valores indicados en la Tabla 6-1. Las tolerancias indicadas se aplican a los elementos en flexión, elementos en compresión y muros. El peralte efectivo se define en 6.8. Hay que tomar en cuenta que la Norma adicionalmente limita la tolerancia en el recubrimiento de tal modo que no exceda de menos 1/3 del recubrimiento mínimo indicado en los planos. También se especifican las tolerancias en los puntos de corte y doblez del acero, la figura 6-14 (adaptada del ACI), resume estas tolerancias.

Tabla 6-1 Tolerancias en la colocación del refuerzo de acero.

Peralte efectivo d	Tolerancia en d	Tolerancia en el recubrimiento mínimo
$d \leq 0.20$ m	± 1.0 cm	- 1.0 cm
$d > 0.20$ m	± 1.3 cm	- 1.3 cm

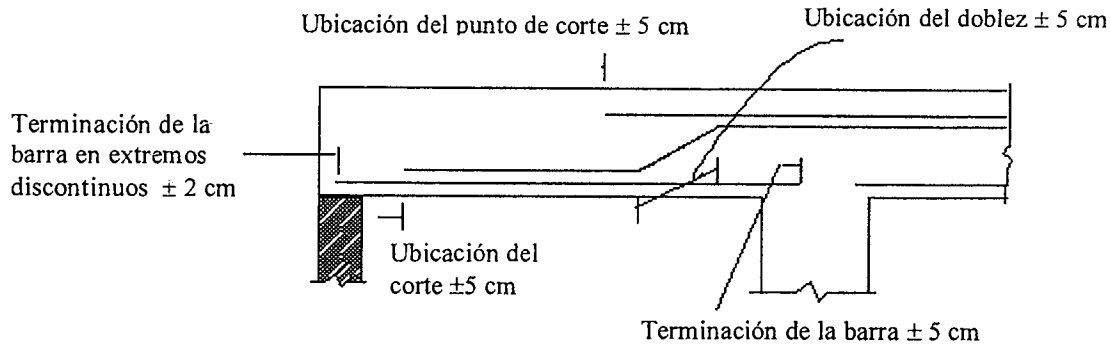


Fig. 6-14 Tolerancias en la ubicación de los puntos de corte y dobléz.

6.8 Diámetros Mínimos de Doblado del Refuerzo

Los factores principales que controlan los diámetros mínimos de doblado de las barras de refuerzo, tienen que ver con la capacidad (ductilidad) del acero de doblarse sin romperse o rajarse y con la necesidad de prevenir el aplastamiento del concreto dentro del dobléz. Los diámetros mínimos de doblado del acero de refuerzo se miden en la cara interior de la barra. La Norma E.060 permite para los estribos de hasta 5/8", diámetros de dobléz más cerrados que para las barras longitudinales de refuerzo.

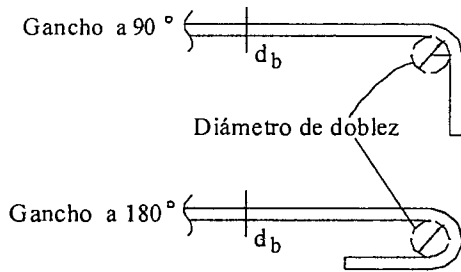


Fig. 6-15 En barras longitudinales

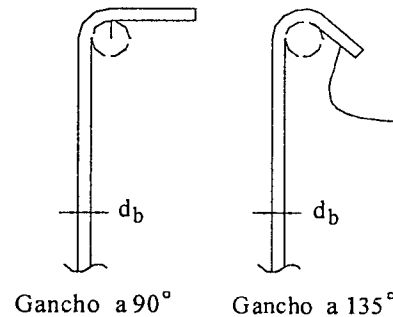


Fig. 6-16 En estribos y amarras

Tamaño de la barra	Diámetros mínimos de dobléz	
	Barras longitudinales	Estribos y amarras
#3, #4, #5	6 db	4 db
#6, #7, #8	6 db	6 db
#9, #10, #11	8 db	--
#14, #18	10 db	--

Los diámetros mínimos de dobléz de la tabla anterior, no deben confundirse con los diámetros para las pruebas de doblado especificados para los aceros en las Normas ASTM A-615 y A-706.

6.9 Ganchos Estándar

La Norma define gancho estándar de 90 y 180 grados para las barras longitudinales de refuerzo y de 90 y 135 grados para los estribos. Los ganchos tienen mucha importancia en el anclaje del refuerzo y se estudiarán con más detalle en el Capítulo de Adherencia. Para que el gancho clasifique como estándar, debe tener un diámetro interno de dobléz igual al diámetro mínimo mencionado en 6.6, además de una porción recta tal como se indica en las figuras 6-17 y 6-18.

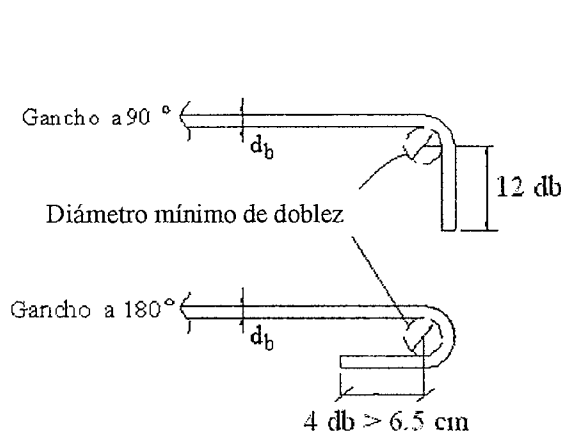


Fig. 6-17 Gancho estándar en barras longitudinales

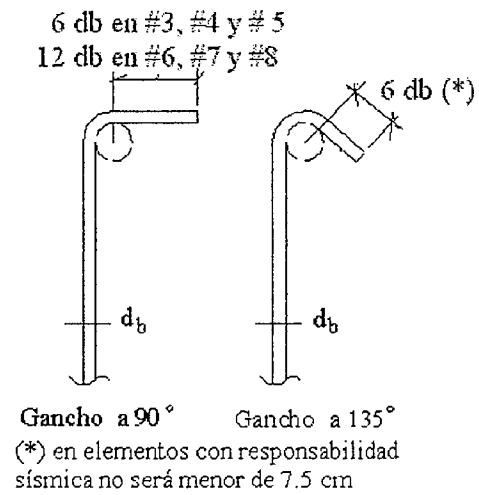


Fig. 6-18 Gancho estándar en estribos

6.10 Peralte Efectivo (d) en Elementos en Flexión

El *peralte efectivo* - d - se define como la distancia desde la fibra extrema en compresión de la sección hasta el centroide de la armadura en tracción. El peralte efectivo aparece en muchas de las fórmulas para el análisis y diseño de secciones de concreto armado en flexión y cortante, por lo tanto es necesario indicar la manera de calcularlo.

En la figura 6-19 se muestra la manera de calcular el peralte efectivo, para flexión positiva (compresión en la fibra superior) en una sección con armadura en una sola capa. Se ha supuesto que el recubrimiento sea 4 cm, los estribos de 3/8" y la armadura longitudinal en tracción de 3/4". En este caso, que representa una situación típica, el peralte efectivo se puede estimar como:

$$d \approx h - 6 \text{ (cm)} \quad d' \approx 6 \text{ cm} \quad (6-1)$$

El valor d' representa la distancia entre el borde comprimido y el centroide del acero en compresión. Mayores refinamientos en el cálculo del peralte efectivo, normalmente son innecesarios.

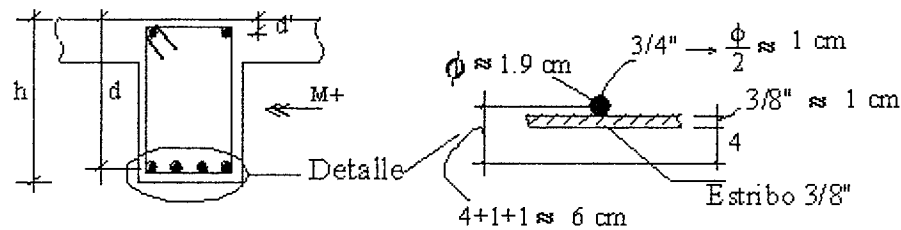


Fig. 6-19 Peralte efectivo en una sección con acero en una sola capa.

La figura 6-20 muestra la estimación del peralte efectivo, para flexión positiva, en una sección con armadura en dos capas o filas. Se ha supuesto que el recubrimiento sea 4 cm, los estribos de 3/8" y toda la armadura longitudinal en tracción de 3/4". Además se ha supuesto que toda la armadura longitudinal trabaje al mismo esfuerzo. Esta última suposición suele ser válida cuando la sección alcanza su *resistencia de diseño*, en este caso normalmente todo el acero de tracción estará en fluencia. El peralte efectivo se puede estimar, dependiendo del diámetro del acero de refuerzo, mediante:

$$d \approx h - 8 \text{ ó } h - 9 \text{ (cm)} \quad d' \approx 6 \text{ cm} \quad (6-2)$$

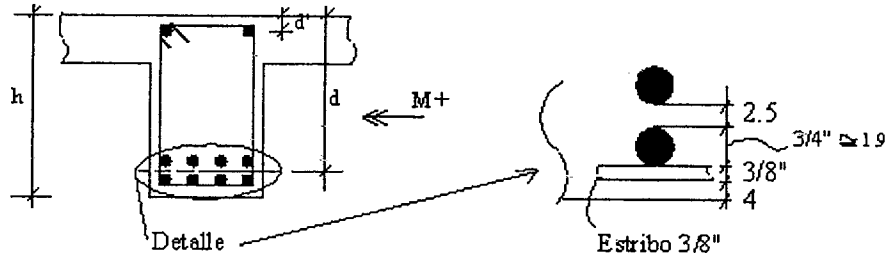


Fig. 6-20 Peralte efectivo en una sección con acero en dos capas.

La figura 6-21 muestra la estimación del peralte efectivo en un aligerado convencional. Se ha supuesto un recubrimiento de 2 cm y armadura longitudinal en tracción de 1/2". El peralte efectivo, para flexión positiva o negativa, se puede estimar mediante:

$$d \approx h - 3 \text{ (cm)} \quad d' \approx 3 \text{ cm} \quad (6-3)$$

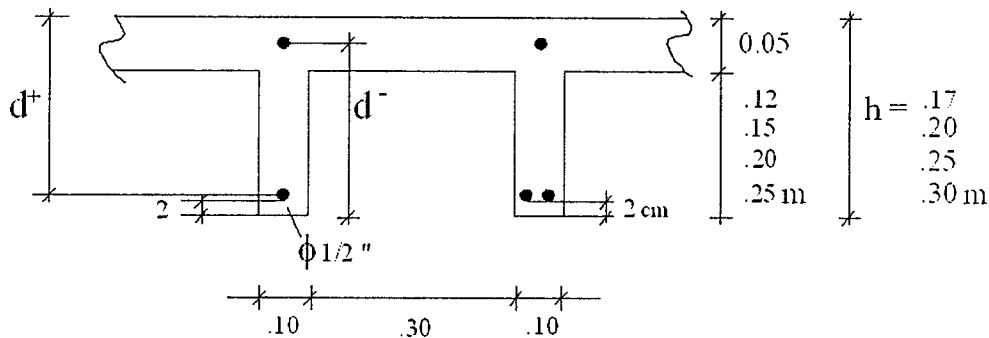


Fig. 6-21 Peralte efectivo en un aligerado.

Para losas macizas armadas en una dirección el peralte efectivo se puede estimar como se indica en la figura 6-22. Se ha supuesto un recubrimiento de 2 cm y armadura longitudinal en tracción de 1/2". El peralte efectivo, para flexión positiva, se puede estimar mediante:

$$d \approx h - 3 \text{ (cm)} \quad (6-4)$$

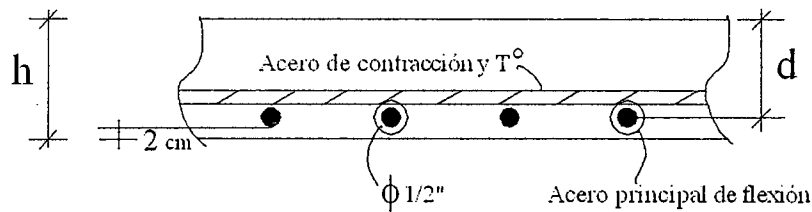


Fig. 6-22 Peralte efectivo en una losa maciza armada en una dirección.

6.11 Casos Particulares del Peralte Efectivo

Existen situaciones en las cuales la determinación del peralte efectivo no es directa como en los casos presentados en 6.10. Situaciones de esta naturaleza se presentan en las columnas circulares, en las placas o muros de corte y en las vigas o columnas como las mostradas en la figura 6-23. En esta se muestra la sección transversal de una viga (podría ser también una columna) en la cual el refuerzo por flexión o flexocompresión esta parcialmente concentrado cerca del borde inferior y el resto está distribuido a lo largo del alma. En este caso el suponer que todo el refuerzo en tracción se encuentra trabajando al mismo esfuerzo, conduciría a un error importante, en consecuencia será necesario calcular, mediante las relaciones de compatibilidad de deformaciones, los

esfuerzos en cada una de las capas de refuerzo para luego calcular el centroide de las fuerzas de tracción en las armaduras, la distancia desde el borde en compresión hasta dicho centroide será el peralte efectivo.

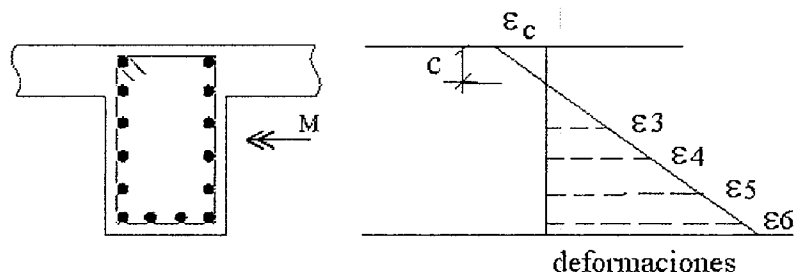


Fig. 6-23 Sección con refuerzo distribuido en el alma.

En el Capítulo 17 se presenta la manera en que el ACI a partir del 2002 ha redefinido, para flexión simple y compuesta, el peralte efectivo. El ACI-08 ha abandonado la definición tradicional presentada en 6.10 remplazándola por el valor de $-dt$ - definido como la distancia entre el borde comprimido y el centroide de la capa de refuerzo más alejada del borde comprimido, tal como se muestra en la figura 6-24. Con la introducción de dt , se hace innecesario el cálculo del centroide de las fuerzas en las armaduras en tracción. Sin embargo, en muchas otras secciones del ACI, por ejemplo para el diseño por cortante, el ACI-08 sigue utilizando la definición clásica del peralte efectivo.

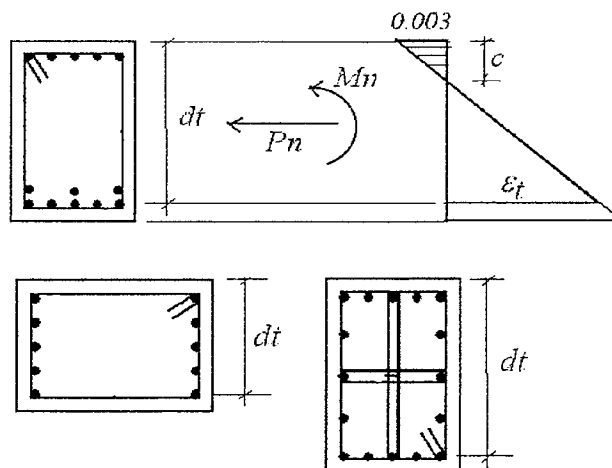


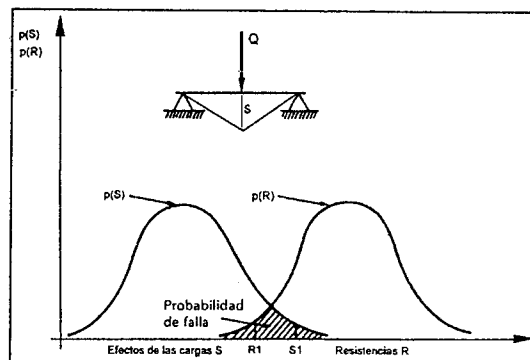
Fig. 6-24 Definición de dt - ACI-08

6.12 Lecturas

- 6.1 Concrete Cover to Reinforcement. Adam Neville. ACI Concrete International, November 1998.
- 6.2 Details and Detailing of Concrete Reinforcement. ACI 315-99. ACI Manual of Concrete Practice – Part 3.
- 6.3 The Designer's Responsibility for Rebar Design. Wyllie, LaPlante. CRSI, August 2003.
- 6.4 Capítulo 13 (The Art of Detailing) del libro de Park y Paulay.

CAPITULO 7

Requisitos de Resistencia y de Servicio



7.1 Introducción

El objetivo del diseño consiste en determinar las dimensiones y características de los elementos constituyentes de una estructura, para que ésta pueda cumplir, durante su vida útil, la función para la cual fue concebida con un grado de seguridad razonable. Adicionalmente, el comportamiento de la estructura bajo condiciones normales de servicio debe ser satisfactorio y finalmente, el costo de la estructura debe estar dentro de límites económicos aceptables.

De la definición anterior surgen, de manera natural, algunas interrogantes:

- ¿Cuál es la vida útil de la estructura que debe preverse?
- ¿Cuáles son las solicitaciones o acciones exteriores que debe soportar la estructura?
¿Cuáles son sus valores máximos, mínimos y medios?
- ¿Qué fuerzas internas o solicitaciones generan las acciones exteriores?
- ¿Cuál es el grado de seguridad razonable? ó ¿Cuál es la resistencia adecuada?
- ¿Qué se entiende por un comportamiento bajo cargas de servicio aceptable y cuales son los requisitos que debe cumplir una estructura para lograrlo?
- ¿Cuál es el costo económico aceptable?
- ¿Es estéticamente aceptable la solución propuesta?

Las respuestas a estas preguntas no siempre son sencillas. Dada la complejidad del problema, en general, puede afirmarse que la solución estructural no es única, se intenta que la solución sea razonable.

Para intentar una respuesta a las preguntas formuladas líneas arriba, es conveniente introducir algunas ideas sobre lo que se conoce como *Estados Límites* de una estructura, elemento estructural o sección.

7.2 Estados Límites de una Estructura

Cuando una estructura ó un elemento estructural ya no es capaz de cumplir con alguna de las funciones de uso para la cual fue concebida, se dice que ha alcanzado alguno de los Estados Límites. En el diseño de estructuras de concreto armado, se reconocen, en general, tres grandes grupos de Estados Límites.

7.2.1 Estado Límite Ultimo

Involucra el colapso total o parcial. Este evento debe tener una probabilidad muy baja de ocurrencia ya que puede conducir a la pérdida de vidas humanas y pérdidas económicas importantes. Los principales estados límites últimos son:

- a) **Pérdida de Equilibrio.** De una parte o de toda la estructura como sólido rígido, caso típico del volteo o del deslizamiento. Ocurre cuando las reacciones y/o restricciones necesarias para mantener el equilibrio no pueden desarrollarse.
- b) **Rotura o Agotamiento.** De alguno de los elementos estructurales que conlleva al colapso parcial o total. Casi todo el diseño en Concreto Armado que se presenta en estos apuntes, tiene que ver con este estado límite.
- c) **Colapso Progresivo.** La falla localizada de un elemento puede conducir a que los elementos adyacentes se sobrecarguen y fallen y así sucesivamente hasta que toda la estructura puede alcanzar el colapso. El colapso progresivo puede prevenirse o atenuarse mediante detalles adecuados del refuerzo que permitan “amarrar” a los elementos estructurales entre sí y que provean trayectorias alternativas a las cargas en caso de una falla localizada. Este tipo de falla suele ocurrir con relativa frecuencia durante la construcción.
- d) **Formación de un Mecanismo Plástico.** Cuando se forma un número suficiente de rótulas plásticas que conviertan a la estructura en inestable (mecanismo). Este estado límite es la base del denominado **Diseño Plástico** utilizado por ejemplo, para el diseño plástico de estructuras metálicas.
- e) **Inestabilidad (Pandeo).** Puede tratarse del pandeo local (aislado) de un elemento o del pandeo total de un grupo de elementos, por ejemplo el pandeo lateral de un entrepiso.
- f) **Fatiga.** Fractura o falla del elemento debido a un número elevado de ciclos de carga y descarga. Ocurre bajo cargas de servicio.

7.2.2 Estados Límites de Servicio

No involucran colapso parcial o total, pero sí puede involucrar un mal (pobre) funcionamiento de la estructura bajo cargas de servicio. Ya que este estado no suele tener asociado peligro de pérdidas de vidas humanas, se tolera una mayor probabilidad de ocurrencia que para el caso de los estados límites últimos. Los principales estados límites de servicio para el concreto armado son:

- a) **Deflexiones Excesivas.** Pueden generar un mal funcionamiento de la estructura con daños en los elementos no estructurales y suelen ser visualmente inaceptables ya que generan sensación de inseguridad.
- b) **Fisuración excesiva.** A pesar de que el concreto debe fisurarse antes de que las armaduras de refuerzo sean efectivas, es posible detallar el refuerzo para lograr minimizar la fisuración (ancho de fisuras y número) del concreto por tracción. Una fisuración excesiva puede conducir a problemas de corrosión en las armaduras de refuerzo y a un deterioro progresivo del concreto. En el diseño, por ejemplo, de un reservorio destinado a contener agua, este estado controlará normalmente el diseño.
- c) **Vibraciones Indeseables.** Las vibraciones verticales de las losas de piso o los tableros de puentes así como las oscilaciones laterales en edificios ocasionados por el viento o sismo pueden originar un pobre comportamiento de la estructura. También sucede con las vibraciones ocasionadas por el tráfico o por la operación de maquinarias.
- d) **Corrosión de las armaduras de refuerzo.** Si bien en el concreto armado este estado se ha considerado normalmente dentro de los *estados límites especiales* (ver 7.2.3), creo que dada la frecuencia con la cual se presentan problemas de corrosión en las estructuras de concreto armado, tanto en nuestro medio como en el mundo, este estado debería considerarse como uno específico dentro de los *estados límites de servicio*. La corrosión de las armaduras ocurre bajo cargas de servicio.

7.2.3 Estados Límites Especiales

Involucran daño o colapso de la estructura debido a cargas o condiciones inusuales. Es el caso, por ejemplo de terremotos extremos, cargas de nieve extremas, inundaciones, huracanes, tornados, explosiones, colisión de vehículos, incendios.

El diseño de una estructura por Estados Límites, normalmente involucra las siguientes etapas:

- 1) La identificación de los modos potenciales de falla o estados límites significativos.
- 2) La determinación de los niveles aceptables de seguridad ante cada estado límite.
- 3) La consideración, por el diseñador, de todos los estados límites significativos.

Para las estructuras o edificios usuales, las etapas 1 y 2 se fijan en los Códigos o Normas. En ellas se especifican las cargas de servicio, los factores de carga con los cuales hay que combinarlas, los factores de reducción de resistencia para las distintas solicitaciones que actúan en un elemento y los factores de seguridad mínimos.

En el diseño de edificios convencionales, se suele empezar por dimensionar las secciones y los refuerzos de acero utilizando para ello el estado límite último de rotura o agotamiento (Diseño por Resistencia). Posteriormente se realizan las verificaciones necesarias para asegurar que las dimensiones y refuerzos cumplen con los estados límites de servicio. Se sigue esta secuencia ya que normalmente la función principal de los elementos estructurales de los edificios convencionales es la de resistir las cargas sin poner en riesgo a los ocupantes. En contraste, cuando se diseña un reservorio de concreto armado, el estado límite de fisuración es de igual importancia que el estado límite último ya que la estructura debe permanecer impermeable. En este caso se suele empezar el diseño considerando el estado límite de servicio asociado al agrietamiento, para luego verificar la seguridad frente al estado límite de rotura.

7.3 Coeficientes (factores) de Seguridad

La primera condición que debe satisfacer un diseño, es que la estructura resultante sea lo suficientemente segura. Se entiende por seguridad, en términos generales, el evitar que la estructura o elemento estructural alcance o sobrepase alguno de los estados límites últimos descritos en 7.2.1.

Las Normas o Códigos actuales de concreto armado se centran en el estado límite último de rotura, falla o agotamiento (**Diseño por Resistencia**) de las secciones que componen los elementos estructurales. Desde esta óptica y de manera rudimentaria, *el factor de seguridad se puede definir como el cociente entre la resistencia y el valor estimado de la solicitación correspondiente en condiciones de servicio*. La evaluación cuantitativa del coeficiente de seguridad requiere comparar la demanda de resistencia (solicitación o carga) con la capacidad suministrada al elemento o estructura (resistencia máxima).

Dada la definición de coeficiente de seguridad que se ha planteado, sería válido imaginar una situación hipotética en la cual, si se cumplieran las siguientes dos condiciones:

- a) La resistencia de la estructura o elemento, construida sin defectos y tal como se concibió y diseñó, puede determinarse con absoluta precisión.
- b) Las cargas que obran sobre ella durante su vida útil así como los efectos que estas producen en el elemento (flexión, cortante, axial, etc.) se conocen con la misma precisión.

En este hipotético caso, la seguridad de la estructura podría garantizarse suministrando una resistencia ligeramente superior a la demandada por las cargas.

Se puede ilustrar la idea anterior utilizando el siguiente ejemplo simple sobre el factor o coeficiente de seguridad de un elemento estructural (Riddell, Hidalgo): El cable de una grúa debe ser capaz de izar una carga de 3 ton, para ello se ha seleccionado un cable de

acero de calidad y sección transversal tal que su resistencia nominal de rotura es de 5 ton. En este caso el factor de seguridad frente a la rotura del cable es de $5/3 = 1.7$.

El ejemplo anterior nos lleva a pensar que si existiera certeza de que la carga máxima no excederá de 3 ton, y conociéramos con precisión la resistencia del cable, entonces bastaría seleccionar un cable con una resistencia ligeramente superior a la demanda para evitar la rotura y por lo tanto se podría usar un cable más económico. Sin embargo, en la realidad hay incertidumbre respecto del valor preciso de la carga que el operador de la grúa puede ser requerido de izar y también hay incertidumbre respecto de la resistencia última real del cable utilizado.

Las incertidumbres mencionadas, relativas a las cargas y a las resistencias, requieren el empleo de factores de seguridad. *En rigor se trata de un problema probabilístico, ya que tanto las cargas como las resistencias son variables aleatorias.* Las variables aleatorias son aquellas en que sus valores no son determinísticos, es decir, no pueden ser fijados con precisión o conocidas de antemano y deben describirse mediante una función de distribución de probabilidades o función de densidad de probabilidades.

7.3.1 Variabilidad de las Acciones sobre las Estructuras

La figura 7-1 muestra una función supuesta de distribución de probabilidades de las sobrecargas Q (por unidad de área) que obran sobre una estructura o elemento estructural. La forma exacta de esta curva, para un tipo de carga en particular, como por ejemplo las sobrecargas en un techo o piso de una vivienda, oficina o depósito, pueden determinarse sobre la base de datos estadísticos obtenidos a partir de muestreos a gran escala de las sobrecargas reales que obran en tales edificaciones. La intensidad de la sobrecarga de servicio que se utiliza para el diseño se ha designado como Q_d y en nuestro caso la fija la Norma de Cargas E.020. La intensidad de la carga media se ha designado como Q_m .

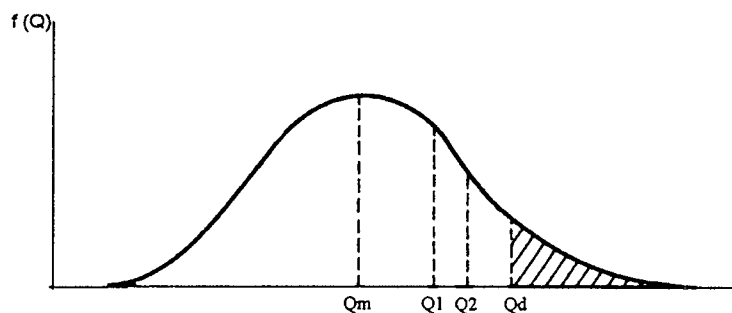


Fig. 7-1 Distribución supuesta de las frecuencias de las cargas vivas

Normalmente la sobrecarga de diseño (Q_d) es considerablemente mayor que la sobrecarga media (Q_m) que actúa sobre la estructura. La probabilidad de que la sobrecarga que actúe sobre la estructura sea mayor que la de diseño, viene representada por el área sombreada a la derecha de Q_d . Generalmente las Normas fijan el valor nominal de la intensidad máxima de la sobrecarga de diseño, considerando una vida útil de la estructura de 50 años y una probabilidad de excedencia entre el 2% (González Cuevas) y el 5% (Riddell, Hidalgo).

La figura 7-2 (Hart) muestra el histograma de las frecuencias de la intensidad de las sobrecargas medidas en un grupo grande de oficinas en los Estados Unidos. Las mediciones corresponden a oficinas privadas de uso general y para empleados de oficina. Es clara la fuerte dispersión encontrada, con un coeficiente de variación cercano al 60%. Llama la atención la sobrecarga promedio medida de tan solo 45 kg/m² en comparación con la sobrecarga de diseño de 250 kg/m² especificada por las Normas para las oficinas.

Es necesario mencionar que las sobrecargas medidas corresponden a lo que se podría llamar las cargas vivas sostenidas, es decir, las que se suponen actúan permanentemente como el mobiliario y cargas normales de las personas que las ocupan. A estas es necesario agregar las sobrecargas transientes como las que se presentan en caso de reuniones, almacenaje temporal, cambios de uso, entre otros efectos, con lo cual se podría alcanzar el valor de diseño.

La tabla 7-1 (Hart) muestra los promedios y los coeficientes de variación de las sobrecargas medidas en oficinas privadas, de acuerdo al uso de los ambientes. El número total de ambientes de oficinas medidas fue de 834. La tabla 7-2 (Hart) muestra las sobrecargas medidas en oficinas privadas (834 ambientes) y estatales (520 ambientes) de acuerdo al área del ambiente. Es clara la influencia que tiene el área sobre la intensidad promedio de las sobrecargas medidas, sobre la base de este hecho las Normas permiten reducir las sobrecargas de diseño, en función del área tributaria que soporta el elemento a diseñar (viga, columna, losa).

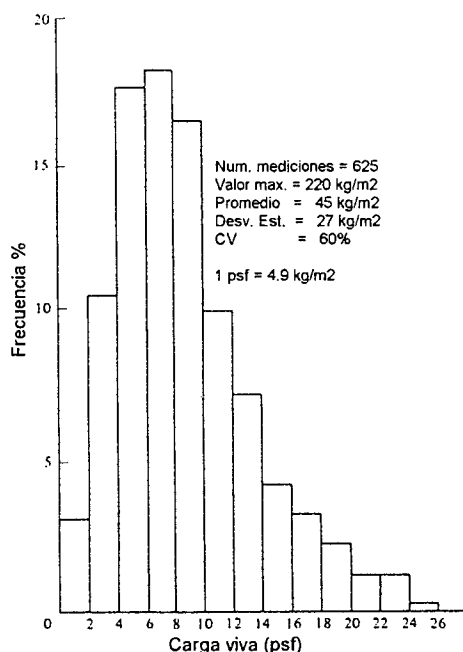


Fig. 7-2 Intensidad de las sobrecargas medidas en ambientes de uso general y oficinas de empleados (oficinas privadas).

Tabla 7-1 Sobrecargas medidas en oficinas (oficinas privadas)

Uso del ambiente	Sobrecarga promedio (kg/m ²)	Coefficiente de Variación
General	43	0.56
Empleados	50	0.69
Recepción	23	1.04
Conferencias	30	0.82
Archivo	120	0.79
Almacenaje	76	0.89
Biblioteca	122	0.39
Todos los ambientes	48	0.84

Tabla 7-2 Influencia del área del ambiente en la intensidad de la sobrecarga.

Area del ambiente (metros cuadrados)	Número de mediciones	Sobrecarga promedio (kg/m ²)	Coefficiente de Variación
hasta 5	41	85	100%
más de 5 a 10	188	65	95%
más de 10 a 28	899	45	70%
más de 28	226	43	102%

1,354

7.3.2 Variabilidad de las Resistencias

La resistencia también es una variable aleatoria. La forma que tiene la curva de distribución de las resistencias, no es fácil de obtener, depende de muchas variables, entre ellas la resistencia y variabilidad de los materiales que componen la estructura, de las variaciones en las dimensiones de las secciones transversales de los elementos, del tipo de sollicitación, del cuidado y controles durante el proceso constructivo, etc.

La figura 7-3 muestra una función supuesta de distribución de probabilidades de las resistencias (R) de un grupo de estructuras o elementos estructurales ante determinada fuerza interna (flexión, cortante, axial, etc.). Se muestra la resistencia media (R_m) la resistencia nominal (R_n) y la resistencia de diseño (R_d), el significado de estas dos últimas se definirá posteriormente.

El área de la curva de la figura 7-3 a la izquierda de R_n , representa la probabilidad de que la resistencia real del elemento esté por debajo del valor calculado por el diseñador. Veremos posteriormente que la Norma obliga a reducir el valor de R_n al valor de diseño R_d , con lo cual se reduce la probabilidad. El valor de la resistencia de diseño debe ser seleccionado de tal modo que la probabilidad de que no sea alcanzado sea relativamente pequeña, un valor del 2% suele ser recomendable (González Cuevas).

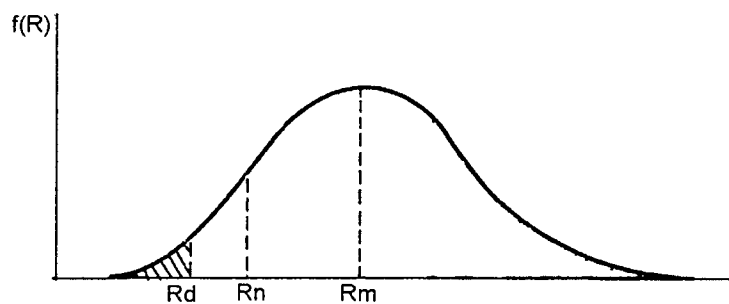


Fig. 7-3 Distribución supuesta de las frecuencias de las resistencias

La figura 7-4 (MacGregor), muestra en el eje horizontal la relación entre la resistencia última a flexión de un grupo de vigas (112 vigas con $f_c > 140 \text{ kg/cm}^2$) de concreto armado medida en ensayos de laboratorio y la resistencia predicha por las ecuaciones de diseño que se utilizan (M_{test}/M_n) y que se presentarán posteriormente. El promedio de las mencionadas relaciones se ubica en 1.05 con un coeficiente de variación cercano al 10%. Es claro que existe un grupo de resultados con una resistencia menor que la predicha por las ecuaciones, en este caso la discrepancia se debe fundamentalmente a las simplificaciones y suposiciones asociadas con las ecuaciones que predicen la resistencia ya que las otras variables están controladas bajo condiciones de laboratorio.

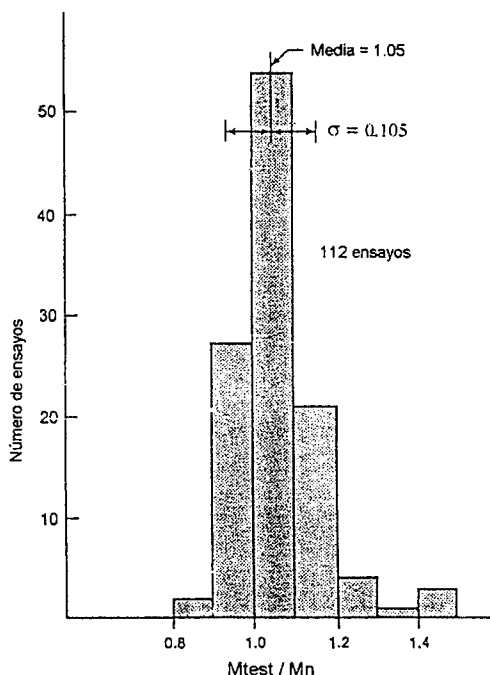


Fig. 7-4 Comparación entre las resistencias nominales a flexión calculadas y las obtenidas en laboratorio.

7.3.3 Selección de los Factores de Seguridad y Probabilidad de Falla

La selección de un factor de seguridad adecuado no es tarea sencilla, debido al gran número de variables y de condiciones que deben tomarse en cuenta. Como ya se ha mencionado, parte de la dificultad estriba en la naturaleza probabilística tanto de las acciones que obran sobre la estructura como de las resistencias de éstas. Los coeficientes de seguridad intentan reducir la probabilidad de falla, sin embargo siempre habrá una cierta probabilidad de que la estructura se sobrecargue o de que la resistencia sea menor a la calculada o una combinación de ambos efectos que conduzca a la falla. Lo anterior es particularmente fácil de comprobar, si se analizan las numerosas fallas y colapsos estructurales que se producen luego de terremotos fuertes.

La figura 7-5 (adaptada de González Cuevas) intenta dar una idea de la determinación de la probabilidad de falla de un elemento estructural. La curva de la derecha muestra la distribución de las resistencias, por ejemplo a la flexión, (R) de un grupo de elementos estructurales similares. La curva de la izquierda muestra la distribución del efecto (en este caso el momento flector) que se espera que ocurra durante la vida útil de la estructura debido a las cargas externas. Si el efecto de las cargas (S) alcanza un valor $S1$ y la resistencia un valor $R1$, ocurrirá un evento de falla, en este caso por flexión. El área sombreada es una medida de la probabilidad de falla del elemento estructural. La probabilidad de falla da una medida significativa del margen de seguridad real de la estructura.

Es claro que para una distribución dada de los efectos de las cargas, la probabilidad de falla se puede reducir incrementando la resistencia de la estructura, esto equivale a correr hacia la derecha la curva de resistencias. También se puede reducir la probabilidad de falla reduciendo la dispersión en la resistencia

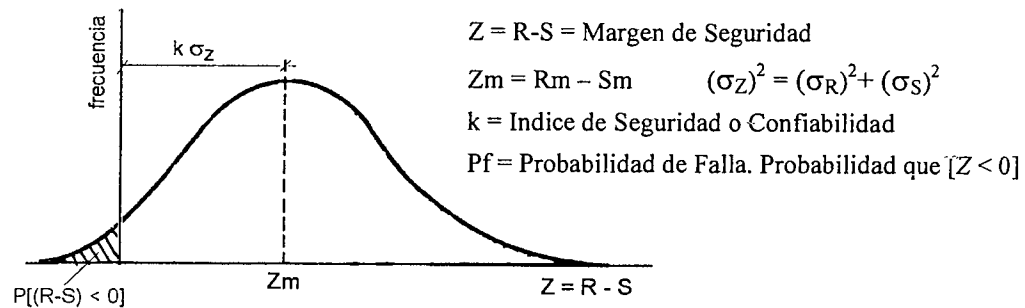


Fig. 7-6 Margen de seguridad y probabilidad de falla.

Para tener una idea del significado de los valores de las probabilidades de falla, puede considerarse que $P_f > 10^{-3}$ (mayor que uno en mil) revela una situación de alto riesgo, mientras que una $P_f < 10^{-5}$ (menor que uno en cien mil) refleja una condición de bajo riesgo.

Para el diseño de elementos de concreto armado los “valores apropiados” de la Probabilidad de Falla y en consecuencia de k , se seleccionan en función de las consecuencias de la falla del elemento (MacGregor). Normalmente k se fija en valores comprendidos entre 3 y 3.5 para las cargas de gravedad y modos dúctiles de falla con consecuencias promedio y entre 3.5 y 4 para fallas frágiles o súbitas que pudieran tener consecuencias serias.

7.3.4 Normas Actuales

Las Normas actuales de diseño están planteadas en términos determinísticos. Independientemente de los modelos probabilísticos que hayan sido utilizados para definir la intensidad de las cargas de diseño y las resistencias. El enfoque es determinístico ya que no se requiere realizar un análisis de confiabilidad estructural, es decir, evaluar la seguridad de un diseño (elemento estructural o estructura completa). Esta situación conduce a coeficientes de seguridad que no son uniformes, en el sentido que ciertos elementos pueden resultar diseñados en condiciones más conservadoras, o inversamente más inseguras, que otros.

A pesar de lo anterior, las Normas se calibran periódicamente frente a los resultados de diseño satisfactorios o no, frente a la observación del comportamiento real de las estructuras ante las solicitaciones, frente a las prácticas de diseño y construcción y frente a los nuevos materiales y refuerzos que aparecen. Esto origina ajustes periódicos de los coeficientes de seguridad, de las cargas de diseño y de las expresiones o teorías para evaluar las resistencias de los elementos y estructuras. Es decir las Normas no son estáticas, mejoran continuamente.

En términos generales puede decirse que las Normas enfocan el problema de la seguridad según dos filosofías o criterios diferentes de diseño: el Método de los Esfuerzos Admisibles y el método del Diseño por Resistencia, siendo este último el predominante hoy en día.

7.4 Diseño por Esfuerzos Admisibles o Permisibles

Durante muchos años el concreto armado se diseñó utilizando el método (filosofía) denominado Diseño por Esfuerzos Admisibles, también denominado Diseño Elástico. En breve resumen, este método establece que para las cargas de trabajo (servicio) ningún punto de la estructura debe tener un esfuerzo superior a un valor “admisible” que garantice que la estructura permanezca en el rango elástico. Está basado en:

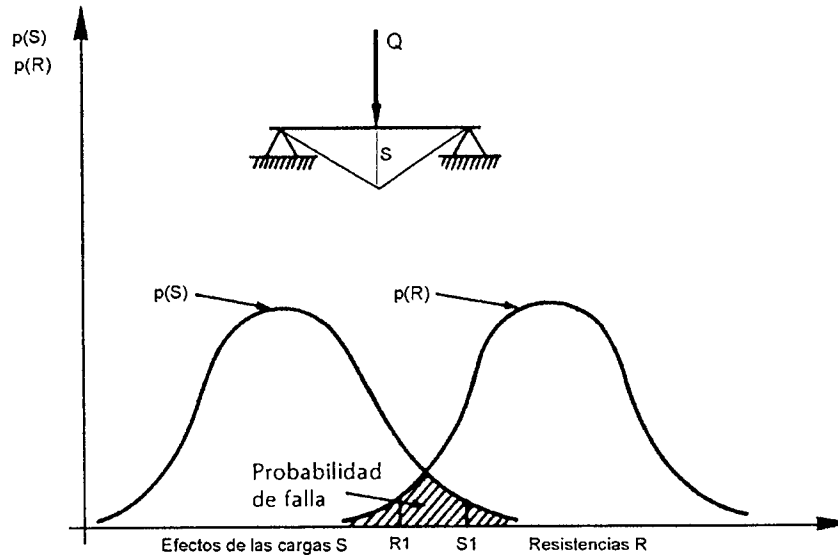


Fig. 7-5 Probabilidad de falla de un elemento estructural.

Existen diferentes definiciones relativas a la seguridad de una estructura que conviene aclarar, las definiciones o términos más empleados son:

a) Coeficiente de seguridad $CS = R_m / S_m$ (7-1)

b) Margen de seguridad $Z = R - S$ (7-2)

c) Probabilidad de falla $P_f = \text{probabilidad que } [Z < 0]$ (7-3)

d) Confiabilidad $P_c = \text{probabilidad que } [Z > 0] = 1 - P_f$ (7-4)

La Probabilidad de Falla es el criterio más utilizado cuando se realiza el análisis de la seguridad de una estructura. Por definición, la falla de una estructura o elemento ocurre cuando el valor de Z es negativo, la probabilidad viene representada por el área sombreada de la figura 7-6 (MacGregor). En esta figura, la función Z tiene un valor medio Z_m y una desviación estándar σ_z , el valor medio de la función puede expresarse como $Z_m = 0 + k\sigma_z$, donde $k = Z_m/\sigma_z$. Si la función (distribución) se corre hacia la derecha incrementando el valor de k (que equivale a aumentar Z_m y/o reducir σ_z) la probabilidad de falla (P_f) se reduce, en consecuencia P_f es una función de k .

Al factor k se le denomina Índice de Seguridad (MacGregor), algunos autores lo denominan Índice de Confiabilidad (Reliability Index). Si se asume que la función Z se ajusta a una distribución normal y se fija $k = 3.5$ la probabilidad de falla sería de uno en 4,300 (1/4,300) aproximadamente. Este valor sugiere de manera gruesa que uno de cada 4,300 elementos estructurales diseñados sobre la base de $k = 3.5$, podrían fallar durante su vida útil (normalmente 50 años) debido a cargas excesivas y/o resistencias bajas. Si se fija k en 3.7, asumiendo una distribución de Z del tipo normal, la probabilidad de falla sería de 1/10,000 aproximadamente.

- a) Se estiman las cargas en servicio que actúan sobre la estructura o elemento estructural. El análisis y el diseño de la estructura o elemento estructural se realizan bajo combinaciones de las cargas de servicio sin amplificar, es decir los factores de carga se toman igual a la unidad.
- b) El análisis se realiza asumiendo comportamiento lineal elástico de la estructura o elemento estructural.
- c) Se asume que el concreto bajo cargas de servicio se comporta linealmente, esto es aproximadamente válido siempre y cuando el esfuerzo de compresión en el concreto no exceda de aproximadamente 0.4 a 0.5 f_c . Se supone que el comportamiento de las secciones es lineal elástico y se utilizan las formulas para el análisis de secciones agrietadas transformadas (secciones de dos materiales).
- d) El coeficiente de seguridad se fija sobre los esfuerzos del concreto y del acero como una fracción de sus resistencias (f_c, f_y), es decir, los esfuerzos en el acero y en el concreto, bajo cargas de servicio, no deben exceder de ciertos valores fijados por la Normas, valores conocidos como esfuerzos admisibles o permisibles. Por ejemplo para el diseño por flexión de una sección de concreto armado, los esfuerzos admisibles suelen ser:

$$\begin{array}{ll} \text{Compresión en el concreto} & \sigma_c \leq 0.45 f_c \\ \text{Tracción en el acero} & f_s \leq 0.5 f_y \end{array}$$

El Diseño Elástico tiene serias desventajas frente al Diseño por Resistencia que se emplea hoy en día, estas son:

- Se desconoce el nivel de seguridad de la estructura o elemento estructural frente al Estado Límite Último de Rotura o Agotamiento. Se asume que este estado se satisface automáticamente al usar los esfuerzos admisibles, esto no es cierto necesariamente.
- No es posible tomar en cuenta explícitamente la variabilidad en la resistencia y en las cargas.

El Diseño por Esfuerzos Admisibles se utilizó desde principios de 1900 hasta finales de la década del 60. Debido a las numerosas deficiencias que presentaba, a partir de la publicación del ACI-63 se inició una rápida transición hacia el *Diseño por Resistencia*. En la publicación del código del ACI en 1971, todo el diseño en concreto armado pasó a ser por Resistencia. A partir del ACI del 77 el Diseño Elástico pasó a ser un apéndice y se le llamó Método de Diseño Alternativo, se mantuvo hasta el ACI del 99 desapareciendo completamente en el ACI del 2002.

7.5 Diseño por Resistencia

En sus inicios se le denominó Diseño por Resistencia Última o Diseño a la Rotura (Ultimate Strength Design ó USD), hoy en día se le conoce principalmente con el nombre de Diseño por Resistencia (Strength Design Method). En los códigos de diseño de las estructuras metálicas se le conoce por las siglas LFRD (Load and Resistance Factor Design) o Método de los Factores de Carga y Resistencia.

Este método es en esencia un diseño por *estados límites*, con la particularidad que la atención se centra en los *estados límites últimos* (ver 7.2.1). Los *estados límites de servicio* (ver 7.2.2) se verifican luego del diseño de los refuerzos de acero. A continuación se transcriben los artículos 9.1.1 y 9.1.2 de la Norma E.060, en los cuales se establece la filosofía del Diseño por Resistencia:

Artículo 9.1.1- Las estructuras y los elementos estructurales deberán diseñarse para obtener, en todas sus secciones, resistencias de diseño (ϕR_n) por lo menos iguales a las resistencias requeridas (R_u), calculadas para las cargas y fuerzas amplificadas en las combinaciones que se estipulan en esta Norma.

Artículo 9.2.2 - Las estructuras y los elementos estructurales también deberán cumplir con todos los demás requisitos de esta Norma, para garantizar un comportamiento adecuado bajo cargas de servicio.

El término *resistencia* hay que entenderlo en un sentido amplio, es aplicable a cualquier sollicitación o fuerza de sección, tal como: flexión, cortante, carga axial, torsión, etc. o a combinaciones de estas.

El elemento estructural o la estructura soportará en forma segura las cargas o sollicitaciones, si en cada sección se cumple:

$$Resistencia \geq Efecto \text{ de las Cargas} \tag{7-5}$$

$$Resistencia \text{ Suministrada o Proporcionada} \geq Resistencia \text{ Requerida} \tag{7-6}$$

$$\underline{Resistencia \text{ de Diseño} \geq Resistencia \text{ Requerida}} \tag{7-7}$$

Las expresiones 7-5, 7-6 y 7-7 son totalmente equivalentes y son las expresiones básicas para el diseño por el *estado límite último de rotura* o para el Diseño por Resistencia.

Ya que las resistencias y las cargas son variables aleatorias independientes, es conveniente contar con un juego de factores que tomen en cuenta la variabilidad de la resistencia y con otro juego de factores que tomen en cuenta la variabilidad en los efectos que producen las cargas externas en la estructura. Es decir, para contemplar la posibilidad de que la resistencia sea menor que la calculada o predicha y que los efectos de las cargas sean mayores que los calculados o estimados deberá cumplirse:

$$\phi R_n \geq C_1 * S_1 + C_2 * S_2 + C_3 * S_3 + \dots + C_n * S_n \tag{7-8}$$

donde:

- ϕR_n = Resistencia de Diseño o resistencia suministrada o proporcionada.
- ϕ = Factor de Reducción de Resistencia, menor que la unidad.
- R_n = Resistencia Nominal. Corresponde a aquella calculada mediante un modelo mecánico del comportamiento del elemento frente a determinada sollicitación o combinación de sollicitaciones, utilizando los valores nominales de las resistencias especificadas para el concreto y el acero, las dimensiones del elemento y el acero de refuerzo indicados en los planos. Los valores nominales de las resistencias del concreto y del acero se refieren a la resistencia determinística especificada como calidad de los materiales.
- $S_1, S_2, S_3 \dots$ = Efecto de las cargas de servicio especificadas (muertas, vivas, sismo, viento, empuje de líquidos o suelos, etc.), en este caso también son nominales.
- $C_1, C_2, C_3 \dots$ = Factores de Carga o de amplificación o de mayoración.

La ecuación 7-8 aplicada a los distintos tipos de sollicitaciones y grupos de carga que pueden estar presentes en un elemento estructural, se puede escribir como:

Para Flexión: $\phi_f M_n \geq C_d M_d + C_l M_l + C_s M_s + \dots$
 $\phi_f M_n \geq M_u \tag{7-9}$

Para Corte: $\phi_v V_n \geq C_d V_d + C_l V_l + C_s V_s + \dots$
 $\phi_v V_n \geq V_u \tag{7-10}$

Para Axial: $\phi_n P_n \geq C_d P_d + C_l P_l + C_s P_s + \dots$
 $\phi_n P_n \geq P_u \tag{7-11}$

Para Torsión: $\phi_t M_{tn} \geq C_d M_{td} + C_l M_{tl} + C_s M_{ts} + \dots$
 $\phi_t M_{tn} \geq M_{tu}$

Por ejemplo, la Norma E.060 del año 1989, para el diseño por flexión de una viga, sometida únicamente a cargas de gravedad y de uso (muertas y vivas), exigía que en todas las secciones se cumpla:

$$\phi_f M_n \geq M_u$$
$$0.9 M_n \geq 1.5 M_d + 1.8 M_l \quad (7-12)$$

Donde M_d es el momento flector ocasionado por las cargas muertas y M_l el ocasionado por las cargas vivas, ambas en servicio.

La Norma E.060 del año 2009, para el mismo grupo de cargas exige:

$$0.9 M_n \geq 1.4 M_d + 1.7 M_l \quad (7-13)$$

El ACI-08, basado en las combinaciones especificadas por el ASCE 7-98, que unifica los factores de carga y combinaciones de carga para su uso en estructuras de concreto, acero, madera, ladrillo, para el mismo grupo de cargas, exige:

$$0.9 M_n \geq 1.4 M_d \quad (7-14)$$

$$0.9 M_n \geq 1.2 M_d + 1.6 M_l \quad (7-15)$$

De la comparación de las expresiones 7-12 y 7-13, resulta claro que para este grupo de cargas, el factor de seguridad mínimo exigido por la Norma Peruana, es mayor que el exigido por el ACI-08. La comparación de las expresiones 7-13 y 7-15 indica que el ACI-08 ha reducido el factor de seguridad global para este grupo de cargas (muertas y vivas).

7.5.1 Factores de Reducción de Resistencia - Resistencia de Diseño

Los factores de reducción de resistencia (ϕ) afectan a las resistencias nominales de las secciones y toman en cuenta las siguientes incertidumbres:

a) La Variabilidad en la Resistencia

- Variabilidad en la resistencia de los materiales. En nuestro caso del concreto y del acero. La diferencia entre la resistencia del concreto de la probeta de laboratorio con el concreto realmente colocado en obra.
- Diferencias entre las dimensiones indicadas en los planos y la construcción real y las tolerancias en la colocación del acero.
- Incertidumbre del modelo mecánico en que se basa la determinación de resistencia nominal del elemento o sección. Inexactitudes, suposiciones y simplificaciones en las ecuaciones que utilizamos para predecir la resistencia.

b) Las Consecuencias de la Falla del elemento. La importancia del Elemento dentro de la estructura y las consecuencias de la falla del mismo. En un edificio, por ejemplo, las columnas suelen ser elementos cuya falla entraña más peligro que la falla de una viga. Adicionalmente la resistencia a compresión de las columnas es sensible a las variaciones en la resistencia del concreto (f'_c) mientras que las vigas son poco sensibles a estas variaciones.

c) El Tipo de falla del elemento, asociada con la sollicitación y el comportamiento de este bajo esa sollicitación. Hay una marcada diferencia entre una falla dúctil y una frágil, ciertos elementos de concreto en una estructura experimentan fallas frágiles cuando se sobrecargan más allá de su capacidad. Este es, por ejemplo, el caso de las columnas con cargas axiales altas en las cuales las fallas son mucho menos dúctiles que las fallas de las vigas en flexión. También es importante la posibilidad de que cuando algunas secciones de un elemento estructural, se sobrecarguen más allá de su resistencia, este pueda encontrar trayectorias alternas para soportar las cargas sin colapsar, a esto se le llama redistribución, cuando ésta no es posible se debe proveer un mayor grado de seguridad.

7.5.2 Factores de Reducción de Resistencia – Norma Peruana

Los factores de reducción están especificados en la Norma E.060 artículo 9.3 y son los mismos que especificaba el ACI-99. El ACI a partir del año 2002 ha modificado, de manera importante, los valores de ϕ como consecuencia de haber reducido los factores de carga (ver ecuaciones 7-13 y 7-15) para así lograr que el coeficiente de seguridad global de las secciones y elementos no se reduzca significativamente.

<u>Solicitud</u>	<u>Factor ϕ de Reducción (E.060)</u>
• Flexión	0.90
• Tracción y Tracción + Flexión	0.90
• Cortante	0.85
• Torsión	0.85
• Cortante y Torsión	0.85
• Compresión y Flexocompresión:	
Elementos con espirales	0.75
Elementos con Estribos	0.70
• Aplastamiento en el concreto	0.70
• Zonas de anclaje del postensado	0.85
• Concreto Simple (sin armaduras)	0.65

En la Tabla 7.4, inserta al final de esta Capítulo, se comparan factores de reducción entre las Normas E.060 y el ACI-08.

7.5.3 Factores de Carga (Resistencia Requerida)

En el Diseño por Resistencia las cargas de servicio se llevan a una condición extrema o última (de allí el nombre original de Diseño a la Rotura, USD) es decir, a un nivel de cargas de baja probabilidad de ser excedida durante la vida de la estructura. Para ello se utilizan *factores de carga* que en algunos textos se denominan *factores de amplificación o mayoración de las cargas*. Deben tomar en cuenta lo siguiente:

- a) La variabilidad de las cargas, es decir el grado de precisión con el que se pueden estimar las cargas y calcular sus efectos.

Para las cargas muertas convencionales los errores de estimación deberían ser menores al 20%. En los Estados Unidos, mediciones realizadas de la carga muerta real en un grupo de estructuras, arrojaron coeficientes de variación entre 6% y 13%, siendo 10% una aproximación razonable.

Para las cargas vivas los errores de estimación pueden ser mucho más altos que para las cargas muertas. Para las cargas de sismo y viento es muy difícil precisar el nivel de aproximación con el cual se pueden calcular. Las cargas de sismo son tal vez, las más difíciles de cuantificar.

- b) El grado de precisión de los métodos de análisis que utilizamos. Hay diferencias entre las fuerzas de sección que calculamos utilizando nuestros métodos de análisis y las que ocurren realmente en la estructura. Estas diferencias tienen que ver con las suposiciones y simplificaciones que se realizan para llegar a un modelo estructural, en las propiedades y comportamiento de los materiales, en el comportamiento de la cimentación, en la idealización de las cargas, en las propiedades de las secciones transversales de los elementos, en la interacción de los elementos estructurales, etc.

7.5.4 Factores de Carga de la Norma Peruana (Resistencia Mínima Requerida)

- Cargas muertas y vivas

$$U = 1.4 CM + 1.7 CV$$

(7-16)

- Cargas de viento (V)

$$U = 1.25 (CM + CV \pm V) \quad (7-17)$$

$$U = 0.9 CM \pm 1.25 V \quad (7-18)$$
- Cargas de sismo (CS)

$$U = 1.25 (CM + CV) \pm CS \quad (7-19)$$

$$U = 0.9 CM \pm CS \quad (7-20)$$
- Empuje de suelos (CE)

$$U = 1.4 CM + 1.7 CV + 1.7 CE \quad (7-21)$$

Si la CM y la CV reducen el efecto del empuje de CE, por ejemplo la sobrecarga que pudiera existir encima del relleno detrás de un muro de contención:

$$U = 0.9 CM + 1.7 CE \quad (7-22)$$
- Empuje de líquidos (CL) con densidades definidas y alturas controladas

$$U = 1.4 CM + 1.7 CV + 1.4 CL \quad (7-23)$$

Si la CM y la CV reducen el efecto del empuje de CL:

$$U = 0.9 CM + 1.4 CL \quad (7-24)$$
- Cargas de impacto: Se deberán incluir en la CV.
- Efecto (CT) de asentamientos diferenciales, cambios de temperatura, creep, retracción.

$$U = 1.05 CM + 1.25 CV + 1.05 CT \quad (7-26)$$

$$U = 1.4 (CM + CT) \quad (7-27)$$

Nótese que los momentos de sismo, de acuerdo a la Norma Peruana de Diseño Sísmico del 2003, están al nivel de resistencia y por lo tanto no requieren de factores de amplificación.

Las ecuaciones 7-18 y 7-20 son para los casos en los cuales las cargas muertas y vivas estabilizan a la estructura o reducen el efecto de las cargas de viento o sismo. Por ejemplo en el muro en voladizo mostrado en la figura 7-7, sometido a empujes laterales de viento, es claro que las cargas muertas y vivas estabilizan al muro. El esfuerzo máximo de compresión en el punto B estará controlado por las ecuaciones 7-16 ó 7-17 (V con signo positivo) y el esfuerzo máximo de tracción en el punto A estará controlado por la ecuación 7-18. Similar razonamiento es válido para el caso de empuje de suelos o líquidos, casos en los cuales es necesario investigar la resistencia utilizando las ecuaciones 7-22 y 7-24.

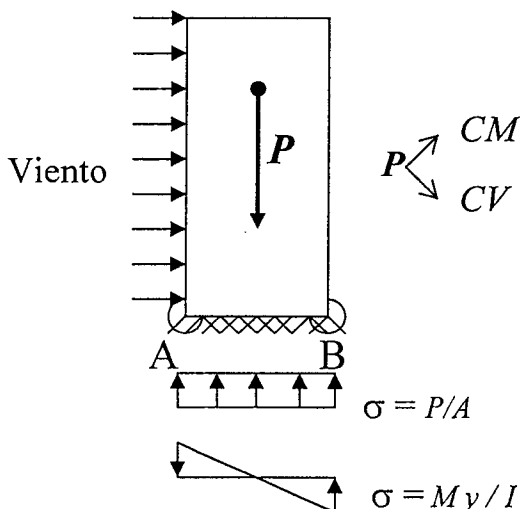


Fig. 7-7 Efecto estabilizante de las cargas muertas y vivas

Los factores de carga o resistencias requeridas, deben considerarse, en general, como valores mínimos. Si las consecuencias de la falla del elemento estructural pueden ser especialmente graves o si no fuera posible estimar razonablemente las cargas de servicio, siempre será posible aumentar dichos factores.

En la Tabla 7.5, inserta al final de este Capítulo, se comparan los Factores de Carga de las Normas E.060 de 1989, E.060 del 2009 y el ACI del 2008.

7.5.5 Resumen del Diseño por Resistencia

- a) Las cargas de servicio se llevan a una condición extrema o última es decir, a un nivel de cargas de baja probabilidad de ser excedida durante la vida de la estructura. Para ello se utilizan *factores de carga* o *factores de amplificación* o *mayoración*. Los factores de carga se basan en interpretaciones estadísticas de mediciones de cargas reales y por lo tanto reflejan la variabilidad de las mismas.
- b) Las cargas “últimas” se aplican sobre la estructura y la estructura o elemento estructural se analiza con las herramientas “clásicas” del análisis lineal – elástico, es decir se asume una respuesta lineal – elástica de la estructura. Se obtienen las fuerzas de sección en todos los elementos, estas fuerzas de sección representan las *resistencias requeridas*.
- c) Las *resistencias nominales* (flexión, cortante, axial, torsión) se calculan sobre la base de modelos mecánicos de comportamiento inelástico de las secciones transversales, para ello se formulan relaciones esfuerzo - deformación no lineales de los materiales. Las resistencias nominales se convierten a *resistencias de diseño* para tomar en cuenta lo indicado en 7.5.1.
- d) Se aplica la ecuación 7.8 a todas las secciones de los elementos constituyentes de la estructura.

Cabe recordar, que el Diseño por Resistencia en Concreto Armado, tal como lo enfocan los códigos, está orientado hacia el diseño de secciones de elementos. En consecuencia el estado límite último de rotura o agotamiento (ver 7.2.1) que utilizamos está relacionado directamente con el comportamiento de las secciones de elementos estructurales. Sin embargo es necesario reconocer que existen diferentes niveles o “tipos” de estados límites de rotura en el comportamiento de una estructura de concreto, estos pueden ser:

- a) El alcanzar la capacidad última (resistencia suministrada) de una sección de un elemento estructural. Este suceso no significa necesariamente que el elemento en cuestión falle o colapse, por ejemplo, en una viga continua o hiperestática se puede alcanzar la resistencia de una sección y la viga puede seguir recibiendo más carga por su capacidad de redistribuir los momentos. Sin embargo para que esto ocurra, las secciones que primero alcancen su resistencia deben tener ductilidad suficiente para soportar rotaciones inelásticas sin fallar y permitir así la redistribución de los momentos hacia otras secciones que aún tienen reserva de resistencia.
- b) El alcanzar la carga última de un elemento de la estructura.
- c) El alcanzar la carga última de la estructura completa.

7.5.6 Análisis y Diseño por Resistencia

Para el diseño de una estructura o elemento utilizando el Diseño por Resistencia, lo que se suele hacer es analizar la estructura para las cargas de servicio (con factores de carga unitarios), asumiendo comportamiento elástico de la misma bajo la acción de las cargas o grupos de cargas que puedan actuar sobre ella durante su vida útil (cargas muertas, sobrecargas de uso, viento, sismo, etc.). Luego los resultados de cada uno de los efectos de las cargas individuales se combinan con sus respectivos *factores de*

carga, de este modo se determina la *resistencia requerida* en cada una de las secciones del elemento y se procede a su diseño (por flexión, corte, torsión, flexocompresión, etc.) utilizando el formato de la ecuación 7-8.

También es posible analizar la estructura bajo la acción de las cargas multiplicadas por sus respectivos factores (cargas amplificadas, factorizadas o mayoradas), el resultado será el mismo, ya que el análisis se realiza asumiendo un comportamiento lineal de la estructura. En general es mejor analizar la estructura bajo cargas sin amplificar, esto permitirá realizar una serie de verificaciones que se hacen bajo condiciones de servicio, por ejemplo, el cálculo de deflexiones o del esfuerzo en el acero para verificar las exigencias relativas al control de fisuras.

El análisis de una estructura bajo cargas de servicio para luego amplificar y combinar los resultados de las distintas cargas, no es válido si se están analizando estructuras con comportamiento no lineal, por ejemplo si se están incluyendo los efectos de segundo orden producidos por las cargas de gravedad. En estos casos el análisis debe realizarse con las cargas amplificadas.

Para diseñar un elemento en flexión, por ejemplo una viga, es útil construir la envolvente de las Resistencias Requeridas. Este es el caso, por ejemplo, de la envolvente de momento flector y fuerza cortante que se presenta en el ejemplo 7-1 para una viga sometida a carga muerta, carga viva y momentos en sus extremos provenientes de las acciones sísmicas que obran sobre el pórtico al cual ella pertenece. Conocida la envolvente de las resistencias requeridas, se procede al diseño del refuerzo de acero para varias secciones a lo largo de la viga.

7.5.7 Inconsistencias en el Diseño por Resistencia

A estas alturas, el lector atento se habrá percatado que en el Diseño por Resistencia, tal como se aborda hoy en día, hay una inconsistencia importante. Por un lado trabajamos con resistencias de diseño - que representan la capacidad máxima inelástica de la sección frente a determinada sollicitación - y con cargas amplificadas por ciertos factores de carga para las cuales el comportamiento de la estructura ya no es elástico, más bien para la intensidad de las cargas amplificadas, la estructura ya incurrió en el régimen inelástico. Por otro lado, utilizamos métodos de análisis que son aplicables a estructuras con comportamiento lineal elástico, ignorando por ejemplo el efecto de la redistribución de fuerzas internas que se produce en una estructura con comportamiento inelástico.

Ciertamente lo anterior es una "inconsistencia" sin embargo, se acepta ya que los métodos de análisis en el rango del comportamiento inelástico no se encuentran suficientemente desarrollados para su uso rutinario. Aún cuando dispongamos de métodos analíticos de análisis inelástico (de hecho los hay), en el concreto armado hay incertidumbre relacionada con:

- La ubicación exacta y longitud de las rótulas plásticas.
- La ductilidad disponible o capacidad de rotación de las rótulas plásticas.
- La interacción de la fuerza cortante y/o fuerza axial con los momentos de flexión.
- Con el hecho de que no es posible lograr niveles de capacidad de rotación inelástica uniformes en todos los elementos.
- Con hecho que ciertos elementos bajo determinadas sollicitaciones tiene fallas frágiles.
- Porque no se han desarrollado modelos completos y confiables del comportamiento del concreto armado bajo sollicitaciones complejas.

Por otro lado la experiencia de más de 40 años en el uso del Diseño por Resistencia (se introdujo en el ACI de 1963) ha demostrado que el comportamiento de las estructuras diseñadas aún con esta "inconsistencia", ha sido, en general satisfactorio, con niveles de seguridad razonables y por lo tanto lo seguiremos empleando por un buen tiempo.

7.5.8 Coeficientes de Seguridad en el Diseño por Resistencia

Es conveniente tener una idea del coeficiente de seguridad que resulta al utilizar el Diseño por Resistencia. Si bien el coeficiente de seguridad global de una estructura completa, por ejemplo un edificio, es difícil de estimar, sí es posible tener una idea del mismo para un elemento en particular bajo una determinada condición de carga y para un determinado tipo de falla del elemento. Por ejemplo, los aligerados, que son elementos estructurales muy comunes en nuestro medio, se diseñan generalmente solo para la acción de su peso propio, el piso terminado y la sobrecarga de uso especificada por la Norma de Cargas. Para un aligerado de 0.25 m de peralte, con una sobrecarga de uso de 200 kg/m^2 y utilizando la Norma E.060 del 2009, tendremos:

$$\text{Peso propio} = 350 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Piso terminado} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Carga total en servicio} = 350 + 100 + 200 = 650 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Resistencia Requerida} = \omega u = 1.4 (350 + 100) + 1.7 (200) = 970 \text{ kg/m}^2$$

Si asumimos que el aligerado está bien construido, que los materiales utilizados se ajustan a lo especificado, que el diseñador ha colocado en todas las secciones exactamente la cantidad de acero que resulta de los cálculos, y que la falla del elemento se inicia por flexión (falla dúctil) tendremos que el coeficiente de seguridad frente a la falla por flexión, en este caso particular, estará en el orden de:

$$CS = (1 / 0.9) * (970 / 650) \approx 1.66$$

Por consiguiente podemos estimar que el coeficiente de seguridad global frente la falla por flexión en un aligerado (o en una viga) diseñado únicamente para cargas de gravedad estará, de acuerdo a las *resistencias requeridas* de dicha Norma, entre 1.56 ($U/\phi = 1.4 / 0.9$) cuando exista únicamente carga muerta y 1.89 ($U/\phi = 1.7 / 0.9$) cuando la carga viva sea mucho mayor que la carga muerta. En estos cálculos se ha supuesto que la falla del elemento sea ocasionada por la flexión, si la falla se iniciara antes por otras solicitaciones internas, tal como el cortante, se modificará el coeficiente de seguridad, el mecanismo de falla y sobre todo la ductilidad del elemento ya que la falla puede cambiar de dúctil a una falla frágil.

Es evidente que el diseñador tiene la capacidad de modificar el coeficiente de seguridad que se ha estimado, colocando por ejemplo, más o menos acero por flexión que el necesario. También es evidente que el constructor puede modificar seriamente los coeficientes de seguridad, si la ejecución de la obra adoleciera de serios defectos constructivos.

En las Tablas 7.6, 7.7 y 7.8 insertas al final de este Capítulo, se comparan los factores mínimos de seguridad globales exigidos por las Normas E.060 de 1989, E.060 del 2009 y el ACI del 2008.

Ejemplo 7-1 La figura 7-8 muestra una parte de un pórtico plano perteneciente a un edificio de baja altura. Sobre la viga del piso $n+1$ actúa una carga muerta uniformemente distribuida de 2.35 ton/m y una carga viva de 1.12 ton/m , ambas en servicio y provenientes de un metrado convencional de la viga. Adicionalmente el pórtico está sometido a un conjunto de fuerzas laterales provenientes del sismo actuando sobre el edificio. Se supone que mediante algún método reconocido de análisis estructural se han determinado las acciones en los extremos de la viga y a partir de ellas se han construido los diagramas de momento flector indicados en la figura.

Se quiere calcular la *resistencia requerida* en flexión para la sección A-A de la viga utilizando la Norma E.060.

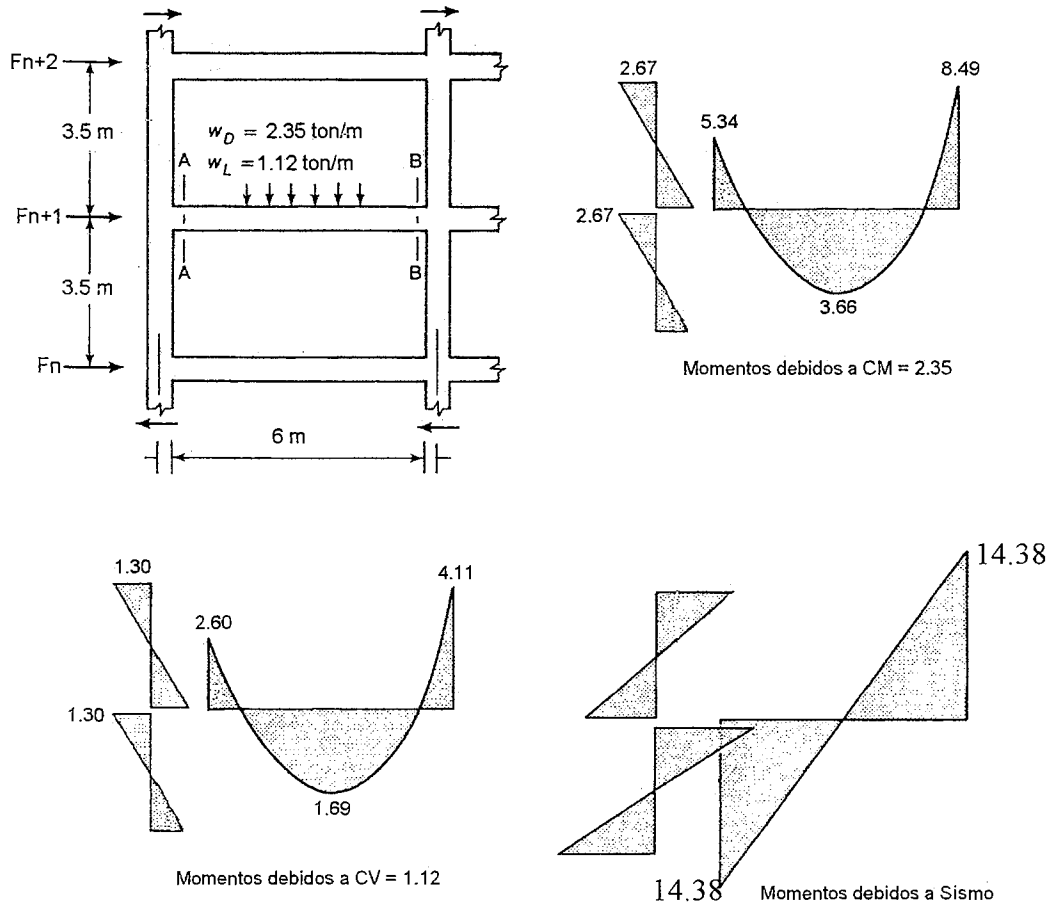


Fig. 7-8 Diagramas de momentos para la viga del pórtico.

Con los *factores de carga* de la Norma E.060, se obtienen las siguientes resistencias requeridas (Mu) para la sección A-A de la viga. Los momentos de sismo, de acuerdo a la Norma E.030, están a nivel de resistencia y por lo tanto no requieren de factores de amplificación. Se asume que los momentos son positivos cuando producen compresiones en la fibra superior de la sección.

$$U = Mu = 1.4 (-5.34) + 1.7 (-2.6) = -11.90 \text{ ton-m} \quad (C1)$$

$$Mu = 1.25 (-5.34 - 2.6) + 14.38 = 4.46 \quad (C2)$$

$$Mu = 1.25 (-5.34 - 2.6) - 14.38 = -24.31 \quad (C3)$$

$$Mu = 0.9 (-5.34) + 14.38 = 9.58 \quad (C4)$$

$$Mu = 0.9 (-5.34) - 14.38 = -19.19 \quad (C5)$$

En consecuencia la *resistencia requerida* en flexión (Mu) en la sección A-A es de -24.31 ton-m para momento negativo y de +9.58 ton-m para momento positivo. Si se repiten los mismos cálculos para diversas secciones a lo largo de la viga, es posible obtener la *envolvente de resistencias requeridas*. La figura 7-9 muestra la construcción de la envolvente de momentos flectores donde se indican las parábolas correspondientes a las distintas combinaciones, en línea punteada se muestra la resistencia requerida solo por la acción de las cargas verticales y las figuras 7-10 y 7-11 muestran las envolventes finales de momento flector y fuerza cortante.

Conocida la envolvente de las *resistencias requeridas*, se procede al diseño del refuerzo de acero, tanto por flexión como por cortante, para varias secciones a lo largo de la viga. En la tabla 7-3 se muestra el diseño por flexión y cortante a lo largo de este tramo de viga (cada 0.30 m) basado en las ecuaciones 7-9 y 7-10. Se ha supuesto una sección transversal de 0.30x0.60 m, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Se han empleado las ecuaciones de diseño por flexión y cortante que se presentarán más adelante.

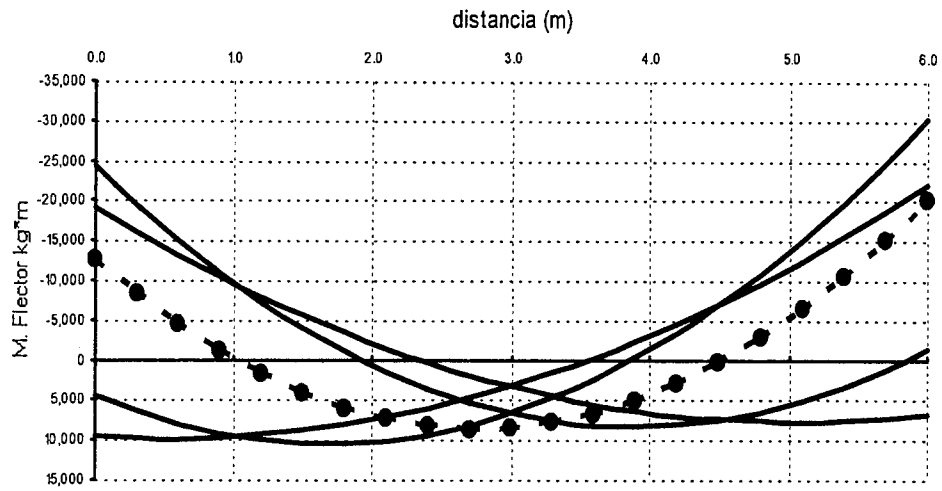


Fig. 7-9 Construcción de la envolvente de momentos flectores

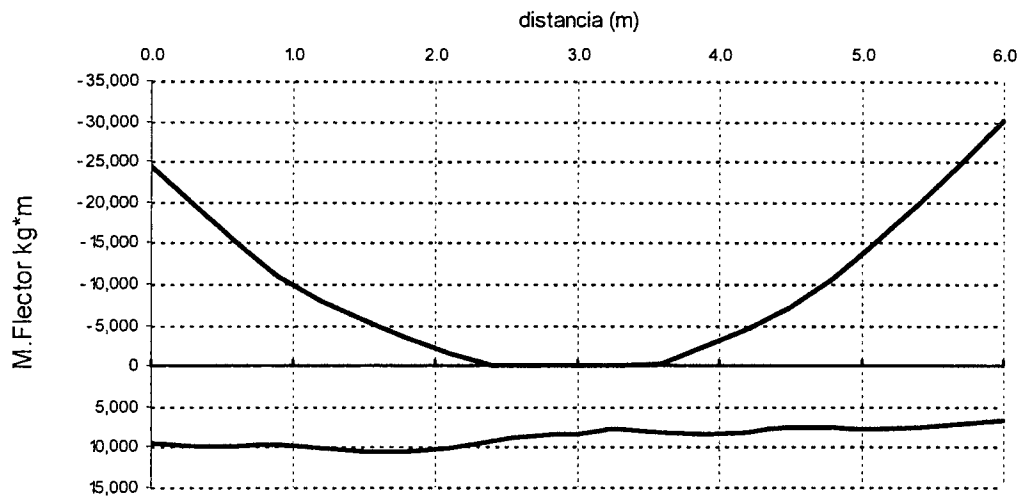


Fig. 7-10 Envolvente de momentos flectores (M_u)

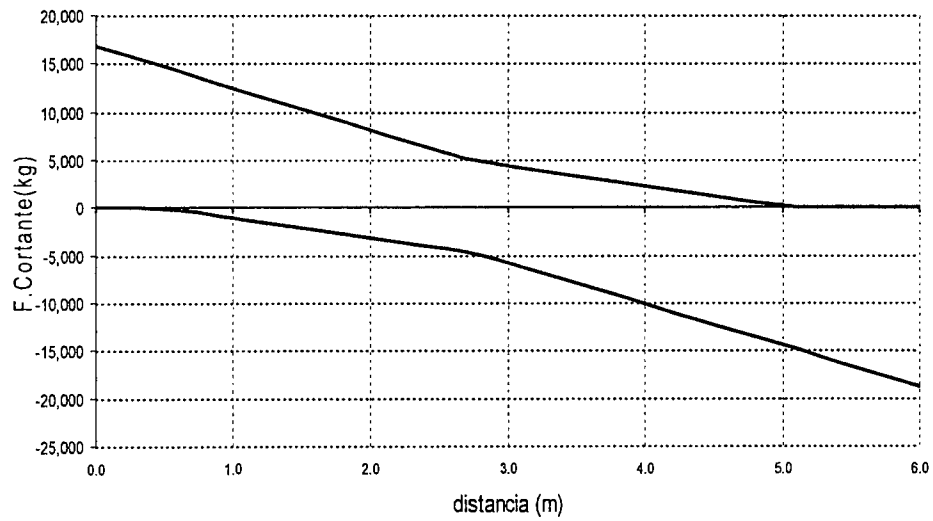


Fig. 7-11 Envolvente de fuerzas cortantes (V_u)

Tabla 7-3 Diseño por flexión y cortante

Posición (m)	Mu Neg. (kg-m)	Acero Neg. (cm ²)	Mu Pos. (kg-m)	Acero Pos. (cm ²)	Cortante Vu (kg)	Estribos S (cm)	Estribos Smax (cm)
0.0	-24,313	13.2	9,581	4.9	16,838	31	27
0.3	-19,464	10.3	9,806	5.0	15,536	39	27
0.6	-14,991	7.8	9,847	5.0	14,235	53	27
0.9	-10,923	5.6	9,690	4.9	12,934	82	27
1.2	-7,914	4.0	10,035	5.1	11,633	183	27
1.5	-5,574	2.8	10,444	5.3	10,331		27
1.8	-3,417	1.7	10,478	5.3	9,030		27
2.1	-1,457	0.7	10,107	5.1	7,729		27
2.4	0		9,360	4.7	6,427		27
2.7	0		8,636	4.4	5,126		40
3.0	0		8,523	4.3	5,767		27
2.7	0		7,921	4.0	7,068		27
2.4	-248	0.1	8,195	4.1	8,369		27
2.1	-2,308	1.1	8,359	4.2	9,670		27
1.8	-4,551	2.3	8,148	4.1	10,972	487	27
1.5	-7,039	3.5	7,578	3.8	12,273	114	27
1.2	-10,726	5.5	7,650	3.9	13,574	64	27
0.9	-15,001	7.8	7,706	3.9	14,875	45	27
0.6	-19,651	10.4	7,579	3.8	16,177	34	27
0.3	-24,707	13.4	7,254	3.7	17,478	28	27
0.0	-30,138	16.8	6,746	3.4	18,779	24	27

Calculemos el factor de seguridad frente a la falla por flexión en la sección A-A del ejemplo anterior. Supongamos que el diseñador ha colocado refuerzos de acero por flexión estrictamente iguales a los necesarios (tabla 7-3) y que el concreto y el acero se ajustan a las especificaciones, supongamos además que la estructura ha sido bien construida. Bajo estas premisas el factor de seguridad de la sección A-A frente a la falla por flexión para momento negativo, si no existiera como solicitación el sismo sería:

$$FS = (1/0.9) * (11.9 / (5.34 + 2.6)) \approx 1.67$$

Sin embargo es claro que en la sección A-A el diseño está controlado por la combinación C3 que incluye la acción del sismo, en consecuencia frente a cargas de gravedad el factor de seguridad de la sección es mucho mayor:

$$FS = (1/0.9) * (24.31 / (5.34 + 2.6)) \approx 3.4$$

Cuando actúe la solicitación sísmica con una magnitud igual a la supuesta y la viga se encuentre soportando el íntegro de la carga muerta y de la carga viva, el factor de seguridad estimado en la sección A-A será:

$$FS = (1/0.9) * (24.31 / (5.34 + 2.6 + (14.38/1.25))) \approx 1.4$$

Esta situación es frecuente en los elementos en los cuales el sismo controla el diseño. Los elementos suelen tener coeficientes de seguridad frente a las cargas verticales, las de todos los días, bastante más altos que los estrictamente necesarios si solo hubiera cargas verticales. El exceso de resistencia y ductilidad está a la espera que se produzca el "gran evento sísmico", evento que tal vez nunca ocurra durante la vida útil de la estructura, o que podría ocurrir al día siguiente de poner en servicio la estructura. Este exceso de resistencia podría denominarse "coeficiente de seguridad pasivo" y a las armaduras de refuerzo (refuerzo longitudinal y transversal) colocadas a la espera del "evento" se les puede denominar "armaduras pasivas".

Para la fuerza cortante el factor de seguridad será mayor ya que el factor de reducción de resistencia es 0.85. Para las columnas el factor de seguridad será aún mayor, ya que el factor de reducción para columnas con estribos controladas por compresión es de 0.7.

7.6 Diseño por Capacidad

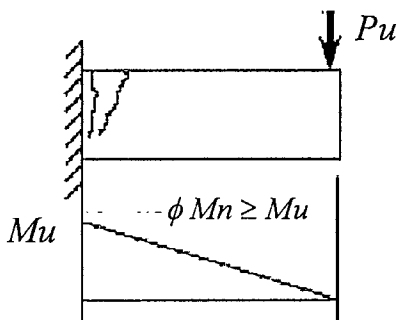
Se atribuye esta metodología de diseño a los ingenieros de Nueva Zelanda (Park, Paulay, Priestley) a principios de la década de 1970, sin embargo fue propuesta originalmente por Blume, Newmark y Corning en el libro de la PCA "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", publicado en 1961.

El Diseño por Capacidad se utiliza en un elemento estructural para prevenir los modos de falla indeseables. Por ejemplo, para evitar que una viga o una columna falle por cortante (modo de falla frágil) antes de que falle por flexión (modo de falla dúctil) o para evitar que una columna falle por flexión, comprometiendo el sistema de soporte de las cargas verticales, antes de que las vigas que concurren al nudo hayan fallado por flexión.

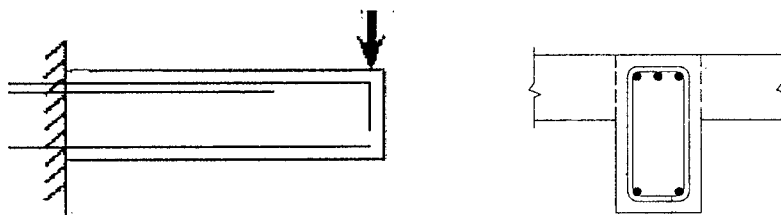
A continuación se muestra la secuencia del Diseño por Capacidad aplicada a un elemento estructural simple, una viga en voladizo. El objetivo en este caso es el de prevenir la falla por cortante antes que al elemento pueda desarrollar una falla dúctil en flexión.

La secuencia del Diseño por Capacidad, a grandes rasgos, es la siguiente:

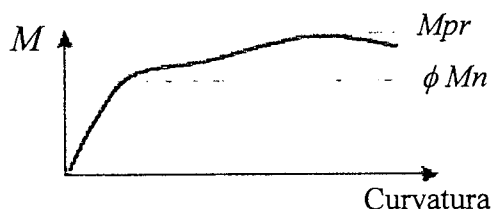
- Seleccionar el mecanismo de falla deseado. En este caso es la falla por flexión ya que está asociada a un modo de falla dúctil.
- Diseñar el acero de refuerzo por flexión utilizando el Diseño por Resistencia, con las cargas factorizadas (amplificadas) para determinar la resistencia requerida (M_u). La figura a continuación resume esta etapa.



- Detallar la distribución de los refuerzos: acero en tracción, acero en compresión, anclajes, empalmes, estribos de confinamiento, etc. para obtener una respuesta dúctil en flexión.

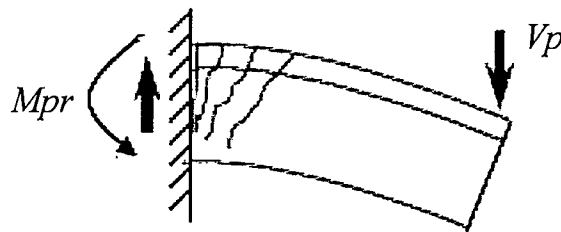


- Determinar la Resistencia Probable (en este caso M_{pr}) sobre la base de los refuerzos realmente colocados. La Resistencia Probable puede ser considerablemente mayor que la resistencia de diseño (ϕM_n). En la figura a continuación se muestra el diagrama momento – curvatura para la sección de máximo momento, se indica la resistencia de diseño y la resistencia probable.



- e) Determinar la carga externa necesaria para producir la resistencia probable. En este caso es necesario calcular el valor de V_p tal que:

$$V_p \times l = M_{pr}$$



El diseño por fuerza cortante (estribos) deberá realizarse para el valor de V_p y no para el valor de V_u , de tal modo que la resistencia en cortante de la viga exceda el valor de la carga asociada con la falla por flexión.

7.7 Diseño Plástico

Es importante resaltar que el Diseño por Resistencia no debe confundirse con el Diseño Plástico (ver 7.2.1) el que permite evaluar cuál es el mecanismo y la carga de falla (límite) o carga de colapso (parcial o total) de una estructura o elemento estructural.

El Diseño Plástico (Límite) permite determinar el factor de seguridad global de una estructura, entendido como el cociente entre la carga de falla (límite) y la carga de servicio.

El Diseño Plástico es simplemente un Diseño por Resistencia en el cual se utiliza el análisis plástico de estructuras en lugar del análisis lineal – elástico. La secuencia es la siguiente:

- Se realiza un análisis plástico en el cual se investigan los posibles mecanismos plásticos de la estructura o elemento estructural.
- Se selecciona el mecanismo plástico probable.
- Se proveen las resistencias utilizando el Diseño por Resistencia de las secciones.
- Se detallan los refuerzos de las rotulas plásticas para que puedan desarrollar una respuesta inelástica.
- Se investigan los modos de falla no deseados (por ejemplo cortante) mediante el Diseño por Capacidad.

Una de las aplicaciones más importante del Diseño Plástico en concreto armado, se da en el diseño de losas por el método denominado de las Líneas de Fluencia (Yield Line Analysis).

En estos apuntes el Diseño Plástico (Límite) lo utilizaremos para determinar la **carga límite** que puede soportar un determinado elemento estructural o estructura sobre la base de las armaduras realmente colocadas. Es decir, lo utilizaremos como una herramienta de comprobación del diseño, que nos permitirá estimar el factor de seguridad global de la estructura, entendido como el cociente entre la carga de falla (límite) y la carga de servicio.

7.8 Lecturas

- 7.1 Load and Resistance Factors for Concrete Design. James G. MacGregor. ACI Structural Journal, July – August 1983.
- 7.2 Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 1 – Statistical Models for Resistance, Part 2 – Reliability Analysis and Resistance Factors. Andrzej Nowak, Maria Szerszen. ACI Structural Journal. May-June 2003.
- 7.3 Capítulo 1 (Las Estructuras de Concreto) del libro Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado – Tercera Edición. González Cuevas – Robles. Limusa.
- 7.4 Capítulo 1 (Introducción al Análisis Estructural) del libro Diseño Estructural. Rafael Riddell, Pedro Hidalgo. Ediciones Universidad Católica de Chile.
- 7.5 Capítulo 1 (Structural Safety) del libro Practical Design of Reinforced Concrete. Russell S. Fling. John Wiley.
- 7.6 Development of a national Building Code for Reinforced Concrete 1908-1977. George Winter. ACI Concrete International, December 1982.
- 7.7 The Building of a Building Code. Mete A. Sozen. ACI Concrete International, May 2006.

Tabla 7.4 Comparación entre los factores de Reducción de Resistencia

Solicitud	Norma E.060 2009	ACI 318 - 2008
Flexión. Secciones controladas por tracción	0.9	0.9
Tracción y tracción con flexión	0.9	0.9
Columnas -flexocompresión. Secciones controladas por compresión.	0.7 (estribos) 0.75 (espirales)	0.65 (estribos) 0.75 (espirales)
Columnas - flexocompresión. Secciones con poca carga axial (secciones controladas por tracción).	Variable entre 0.9 y 0.7 (estribos) o entre 0.9 y 0.75 (espirales)	Variable entre 0.9 y 0.65 (estribos) o entre 0.9 y 0.75 (espirales)
Cortante y Torsión	0.85	0.75
Aplastamiento en el concreto	0.70	0.65
Concreto simple	0.65	0.60
Zonas de anclaje de postensado	0.85	0.85
Longitudes de desarrollo	1.0	1.0

Tabla 7.5 Comparación entre las Resistencias Requeridas

	Norma E.060 1989	Norma E.060 2009	ACI 318 - 2008
Cargas muertas y vivas (CM, CV)	1.5 CM + 1.8 CV	1.4 CM + 1.7 CV	1.4 CM 1.2 CM + 1.6 CV
Viento (CVi)	1.25 (CM + CV ± CVi) 0.9 CM ± 1.25 CVi	1.25 (CM + CV ± CVi) 0.9 CM ± 1.25 CVi	1.2 CM + CV ± 1.3 CVi 0.9 CM ± 1.3 CVi
Sismo (CS)	1.25 (CM + CV) ± CS 0.9 CM ± CS	1.25 (CM + CV) ± CS 0.9 CM ± CS	1.2 CM + CV ± CS 0.9 CM ± CS
Peso y empuje de suelos, peso y empuje de materiales granulares (CE)	1.5 CM + 1.8 CV + 1.8 CE 0.9 CM + 1.8 CE	1.4 CM + 1.7 CV + 1.7 CE 0.9 CM + 1.7 CE	1.2 CM + 1.6 CV + 1.6 CE 0.9 CM + 1.6 CE 0.9 CM + 1.6 CE ± 1.3 CVi 0.9 CM + 1.6 CE ± CS
Peso y empuje de líquidos (CL)	1.5 CM + 1.8 CV + 1.5 CL 0.9 CM + 1.5 CL	1.4 CM + 1.7 CV + 1.4 CL 0.9 CM + 1.4 CL	1.2 CM + 1.6 CV + 1.2 CL 1.4 CM + 1.4 CL
Impacto	Debe incluirse en la Carga Viva	Debe incluirse en la Carga Viva	Debe incluirse en la Carga Viva
Nieve o granizo (CN)		Deben considerarse como Cargas Vivas	1.2 CM + 1.6 CV + 0.5 CN 1.2 CM + CV + 1.6 CN 1.2 CM + CV + 0.5CN ± 1.3 CVi 1.2 CM + CV + 0.2 CN ± CS
Asentamientos diferenciales, flujo plástico, retracción restringida, cambios térmicos (CT)	1.25 (CM + CV + CT) 1.5 CM + 1.5 CT	1.05 CM + 1.25 CV + 1.05 CT 1.4 CM + 1.4 CT	1.2 CM + 1.6 CV + 1.2 CT 1.2(CM + CL + CT) + 1.6(CV + CE)
Zonas de anclaje de tendones de postensado, aplicar a la fuerza máxima aplicada por el gato		1.2 Pmax Gato	1.2 Pmax Gato

Tabla 7.6 Comparación de los Factores de Seguridad Globales (mínimos)
Falla por FLEXION - Cargas de Gravedad

$$F.S = (\alpha CM + \beta CV) \div \phi (CM + CV) = Wu \div (\phi * Wserv) = Mu \div (\phi * Mserv)$$

C Viva ÷ C Muerta (CV ÷ CM)	Norma E.060 1989 $\alpha=1.5 \beta=1.8 \phi=0.9$	Norma E.060 2009 $\alpha=1.4 \beta=1.7 \phi=0.9$	ACI 318 – 2008 $\alpha=1.2 \beta=1.6 \phi=0.9$ Mínimo 1.4 CM
0.0	1.67	1.56	1.56
0.25	1.73	1.62	1.42
0.5	1.78	1.67	1.48
0.75	1.81	1.70	1.52
1.0	1.83	1.72	1.56
1.5	1.87	1.76	1.60
2.0	1.89	1.78	1.63

Tabla 7.7 Comparación de los Factores de Seguridad Globales (mínimos)
Falla por CORTANTE - Cargas de Gravedad

$$F.S = (\alpha CM + \beta CV) \div \phi (CM + CV) = Wu \div (\phi * Wserv) = Vu \div (\phi * Vserv)$$

C Viva ÷ C Muerta (CV ÷ CM)	Norma E.060 1989 $\alpha=1.5 \beta=1.8 \phi=0.85$	Norma E.060 2009 $\alpha=1.4 \beta=1.7 \phi=0.85$	ACI 318 – 2008 $\alpha=1.2 \beta=1.6 \phi=0.75$ Mínimo 1.4 CM
0.0	1.76	1.65	1.87
0.25	1.84	1.72	1.71
0.5	1.88	1.76	1.78
0.75	1.92	1.80	1.83
1.0	1.94	1.82	1.87
1.5	1.98	1.86	1.92
2.0	2.00	1.88	1.96

Tabla 7.8 Comparación de los Factores de Seguridad Globales (mínimos)
Falla por COMPRESION (Columnas con estribos) - Cargas de Gravedad

$$P_u = (\alpha CM + \beta CV) \quad P_{serv} = (CM + CV) \quad FS = P_u \div (\phi (0.8) P_{serv})$$

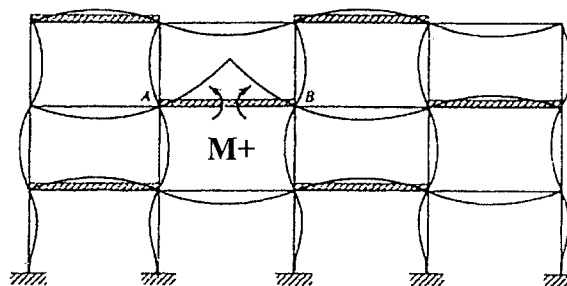
$$P_u \max = \phi (0.8) P_n = \phi 0.8 [0.85 f'c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y] \quad (\text{Corte horizontal Diagrama de Interacción})$$

C Viva ÷ C Muerta (CV ÷ CM)	Norma E.060 1989 $\alpha = 1.5 \quad \beta = 1.8 \quad \phi = 0.70$	Norma E.060 2009 $\alpha = 1.4 \quad \beta = 1.7 \quad \phi = 0.70$	ACI 318 – 2008 $\alpha = 1.2 \quad \beta = 1.6 \quad \phi = 0.65$ Mínimo 1.4 CM
0.0	2.68	2.50	2.69
0.25	2.79	2.61	2.46
0.5	2.86	2.68	2.56
0.75	2.91	2.73	2.64
1.0	2.95	2.77	2.69
1.5	3.00	2.82	2.77
2.0	3.04	2.86	2.82



CAPITULO 8

Requisitos Generales para el Análisis y Diseño



8.1 Análisis de las Estructuras de Concreto Armado

El análisis estructural, ya sea mediante métodos o herramientas sofisticadas de análisis o mediante métodos aproximados, es la etapa previa indispensable al diseño de los elementos de concreto armado.

El propósito del análisis estructural es calcular la respuesta - deformaciones y acciones interiores - en los distintos elementos o partes que componen la estructura, ante un conjunto de solicitaciones. Normalmente las acciones interiores que se calculan son las fuerzas de sección: fuerza normal, fuerza cortante, momento flector. Sin embargo, en casos tales como estructuras bidimensionales (muros, losas) y tridimensionales (represas), los resultados del análisis estructural conducen a la obtención de los esfuerzos internos en la estructura.

Para llevar a cabo el análisis de una estructura, es necesario conocer las acciones (solicitaciones) que obran sobre ella y las dimensiones de los elementos que la componen. En las estructuras de concreto armado, el peso propio de los elementos representa una parte importante de las cargas muertas y por lo tanto es imprescindible un estimado inicial de las dimensiones de los elementos. En la etapa inicial del análisis, las dimensiones de los elementos se estiman (predimensionamiento) mediante la experiencia del diseñador por comparación a situaciones similares anteriores y con la ayuda de algunos métodos simples de predimensionamiento. En situaciones especiales, se acude a un proceso iterativo de ajuste de las dimensiones hasta lograr dimensiones y refuerzos que satisfagan los diversos requerimientos del diseño y economía del proyecto.

Para poder analizar una estructura es necesario crear un modelo idealizado de ella. Una idealización frecuente en el análisis de edificios, es considerar la estructura formada por una serie de pórticos planos en cada una de las direcciones principales del edificio. Esta idealización permite reducir el problema real tridimensional, a uno de dos dimensiones. Además se considera que las propiedades de rigidez de los elementos de cada pórtico están concentradas a lo largo de sus ejes principales y centrales, de este modo los elementos se consideran como unidimensionales.

Otra suposición muy frecuente en el análisis de estructuras de concreto armado (ver acápite 8.4), es la de trabajar con el momento de inercia de la sección bruta de concreto, ignorando la presencia del refuerzo de acero y lo más importante ignorando el efecto que tiene la fisuración del concreto y el flujo plástico, en las propiedades de rigidez del elemento

Las solicitudes o acciones exteriores se aplican sobre el modelo idealizado, en consecuencia las solicitudes también pasan por un proceso de idealización de las mismas.

Para llevar a cabo cualquier análisis estructural es necesario, salvo en las estructuras isostáticas, conocer o suponer las relaciones constitutivas de cada uno de los elementos, es decir la relación entre los esfuerzos y las deformaciones o en términos generales la relación entre la acción y respuesta. La hipótesis más simple (también la más utilizada) para relacionar esfuerzos y deformaciones, es la de suponer una dependencia lineal entre ellas. El análisis clásico elástico de las estructuras, parte de esta hipótesis.

Existen otros métodos de análisis más “refinados” con hipótesis menos restrictivas que las anteriores y que en teoría arrojan resultados más cercanos al comportamiento real de las estructuras. Ciertamente son mucho más laboriosos y son posibles de llevar a cabo solo con la ayuda de las computadoras.

Un problema común es el exceso de minuciosidad o grado de precisión que se intenta obtener en situaciones que no lo ameritan, por ejemplo cuando el conocimiento de las acciones exteriores sobre la estructura solamente es aproximado o cuando el ahorro y grado de seguridad que pueda obtenerse en el diseño final, gracias al refinamiento del análisis, no lo justifique. En otras palabras es común enfrentar situaciones de análisis estructural en las cuales se tiene una aproximación muy “cruda” de las acciones exteriores o del comportamiento de la estructura o cuando la validez de los modelos utilizados sea cuestionable. En estos casos el empleo de herramientas muy sofisticadas de análisis no mejorará la “calidad” de los resultados, por el contrario el empleo de estas herramientas puede provocar en el diseñador, una falsa sensación de seguridad. La “calidad” de los resultados dependerá de la calidad del modelo utilizado y de sus posibilidades para representar el comportamiento de la estructura real y de la precisión con la cual se puedan estimar las acciones exteriores.

Este Capítulo intenta resumir algunas de las hipótesis y simplificaciones en el análisis estructural permitidas por los Códigos. Los aspectos generales para el análisis y el diseño de estructuras de concreto armado, están cubiertos en el Capítulo 8 de la Norma E.060.

8.2 Cargas de Servicio

Una etapa importante antes de iniciar el análisis de cualquier estructura, es tratar de identificar todas las cargas, de “magnitud significativa” que puedan obrar en ella durante su vida útil. Al estimar las acciones o solicitudes, es necesario prever las condiciones más desfavorables en que la estructura puede llegar a encontrarse, así como el tiempo en que estará expuesta a estas condiciones desfavorables. Para ello sería necesario conocer las variaciones probables en la intensidad y distribución espacial de las cargas a lo largo de la vida útil de la estructura, cosa que normalmente es muy difícil de lograr, salvo en estructuras simples.

Las principales solicitudes o acciones exteriores a las que pueden estar sometidas las estructuras “convencionales” de concreto armado provienen del peso propio de los elementos, de las cargas permanentes y de las cargas vivas o sobrecargas. Estas cargas se clasifican como estáticas, es decir se supone que no generan una respuesta dinámica de la estructura, o en otras palabras las fuerzas de inercia que se desarrollan en la estructura por la aplicación de estas cargas, son despreciables.

Existe un segundo grupo de cargas de naturaleza dinámica, estas son las debidas a acción del viento, las de sismo y las originadas por la aplicación repetida de cargas vivas como en el caso de las cargas que soportan los puentes por efecto del tráfico. Las cargas dinámicas son aquellas en las cuales las fuerzas de inercia son significativas y

deben ser equilibradas por las fuerzas internas. La estimación de las cargas laterales debidas a la acción del viento o sismo está sujeta a una fuerte incertidumbre, los errores de estimación que se cometen son mucho mayores que los asociados a las cargas muertas y sobrecargas.

Un tercer grupo de solicitaciones, al cual no se les puede dar el nombre de cargas, está constituido por las deformaciones en la estructura inducidas por los asentamientos de la cimentación, los cambios de temperatura, el flujo plástico y la retracción del concreto. Estas deformaciones impuestas en la estructura generan esfuerzos internos que pueden tener magnitudes para nada despreciables.

Generalmente las cargas “normales o usuales” a las que puede estar sometida una estructura, se especifican en los códigos locales. Las normas de concreto no especifican las *cargas de servicio*, hacen referencia a los códigos pertinentes. En el Perú, las cargas de servicio para el diseño de estructuras convencionales, las fija la Norma de Cargas E.020 y las cargas de sismo la Norma E.030 - Diseño Sismorresistente.

Existe un grupo de solicitaciones que normalmente no están cubiertas en los códigos, y que podrían requerir un cuidado especial por parte del diseñador, estas son: los esfuerzos ocasionados por el preesfuerzo, el efecto de los puentes grúa, las cargas de impacto, los cambios de temperatura, el flujo plástico del concreto, la retracción o contracción de fragua y los asentamientos diferenciales de los apoyos. La estimación de los efectos que estas solicitaciones pueden originar en la estructura, no suele ser tarea fácil, se requiere experiencia y sentido físico para estimar las magnitudes apropiadas.

8.3 Métodos de Análisis

Todos los elementos estructurales de concreto armado, deben diseñarse para los máximos efectos que produzcan las cargas exteriores amplificadas (*Resistencia Requerida*). Las fuerzas internas se determinan utilizando métodos elásticos de análisis estructural, es decir asumiendo un comportamiento lineal elástico del material, salvo cuando se utilice la redistribución de los momentos flectores o cuando se realicen análisis de segundo orden.

La Norma permite, salvo para las estructuras de concreto preesforzado, el empleo de métodos aproximados de análisis de pórticos de edificios con luces, alturas de entrepiso y tipos de construcción normales o convencionales.

Los métodos aproximados han sido extensamente utilizados para el análisis de edificios bajo la acción de las cargas de gravedad y cargas laterales de viento o sismo. Hay un grupo importante de edificios que han sido analizados para cargas laterales utilizando por ejemplo el Método del Portal o el Método de Muto, que constituían prácticamente la única herramienta manual de análisis con la que contaban los diseñadores. A lo largo de las últimas tres décadas, los métodos aproximados han ido cayendo en desuso debido a la disponibilidad de programas para el análisis estructural que operan en computadoras personales, con esto se han logrado mejoras notables en nuestra capacidad de analizar estructuras complejas bajo muy variados estados de carga, en teoría esto debería reflejarse en una mejora en los diseños de las estructuras de concreto armado.

8.4 Rigidez

La Norma permite adoptar *cualquier suposición razonable* para la estimación de la rigidez en flexión EI y en torsión GJ de las columnas, vigas, muros, sistemas de piso, etc. Las suposiciones que se hagan deberán ser consistentes a lo largo de todo el análisis.

Idealmente, la rigidez EI y GJ que se adopten para el análisis, deberían reflejar:

- El grado de fisuración y de acción inelástica a lo largo de cada elemento antes de la fluencia.

- El efecto de la duración de la carga. Cargas de corta duración y cargas sostenidas que producen fluencia plástica (creep) en el concreto comprimido.

Lo anterior es bastante complejo y poco práctico para el diseño de estructuras convencionales, puede servir para la investigación del comportamiento de estructuras de concreto armado.

Para *pórticos arriostrados* lo que interesa es la rigidez relativa de los elementos y se suele trabajar con el valor de EI bruto (sin considerar fisuración) para todos los elementos. Algunos autores proponen considerar $0.5 EI$ para las vigas y el valor de EI bruto para las columnas.

Para *pórticos no arriostrados* contra el desplazamiento lateral, es conveniente utilizar una aproximación más realista de las rigideces, sobre todo cuando se realizan análisis de segundo orden o cálculos de los desplazamientos relativos (derivadas) de entrepiso bajo la acción de cargas laterales de sismo reducidas por ductilidad. El ACI-08 en los artículos 8.8 y 10.10.4, presenta algunas recomendaciones para estimar las rigideces en estos casos.

8.5 Luces para el Cálculo

Para la determinación de los momentos flectores, fuerzas cortantes y rigideces de los elementos, se deberá utilizar:

- Para los elementos no monolíticos con sus apoyos, por ejemplo losas macizas o aligeradas que se apoyan sobre muros de ladrillo o elementos prefabricados, la luz de cálculo deberá considerarse igual a:

$$l_c = l_n + \text{peralte del elemento} \leq \text{luz ejes}$$

Donde l_n es la luz libre (entre apoyos) del elemento.

- Para el análisis de pórticos o elementos continuos para determinar los momentos flectores, se considerará la luz centro a centro de los apoyos.

Para el *diseño* de vigas construidas monolíticas con sus apoyos, se pueden utilizar los momentos flectores reducidos a la cara del apoyo. La reducción del momento a la cara del apoyo se ilustra en la figura 8-1 para el caso de una carga repartida. Los momentos provenientes del análisis han sido determinados utilizando un modelo idealizado a los ejes de los elementos estructurales (*Meje*).

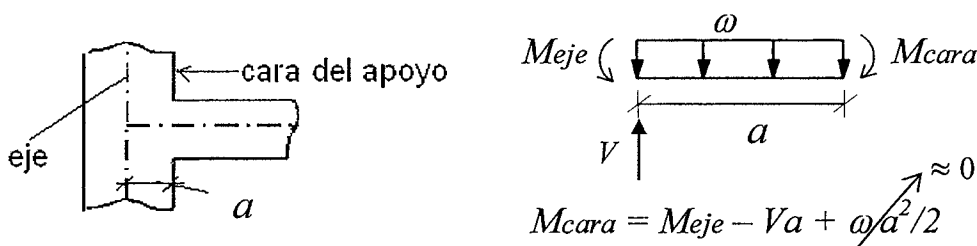


Fig. 8-1 Reducción del momento negativo a la cara del apoyo

8.6 Distribución de la Carga Viva

Es necesario investigar la distribución (arreglo) de la carga viva que produzca las máximas fuerzas internas en la estructura. Para ello se utiliza lo que se llama la *alternancia de carga viva*, proceso en el cual se estudian las diversas posiciones o arreglos "razonables" que puede adoptar la sobrecarga de uso a lo largo y alto de la estructura. Esta consideración de diseño es de particular cuidado para las estructuras en las cuales la sobrecarga sea importante comparada con la carga muerta, por ejemplo en depósitos o almacenes, estadios, auditorios, centros comerciales.

La mayoría de las Normas permiten reducir las sobrecargas de uso que obran sobre un elemento (losa, viga o columna) en función del área soportada por el elemento (ver Tabla 7-2). La Norma Peruana de cargas E.020 permite esta reducción en función del área soportada por el elemento, con reducciones que pueden llegar hasta el 50% de la sobrecarga de diseño para elementos con áreas tributarias grandes.

A continuación se muestran los patrones de carga, para una viga continua de cinco tramos, que producen los máximos momentos positivos y negativos:

- a) La figura 8-2 indica el estado de cargas que siempre es necesario investigar, aquel en el cual la sobrecarga está presente en todos los tramos. Este podría llamarse el estado mínimo de análisis que hay que realizar, los valores de diseño no deberían ser inferiores a los producidos por este estado de carga. Es posible utilizar reducciones en la sobrecarga de acuerdo al área tributaria que soporta el elemento.

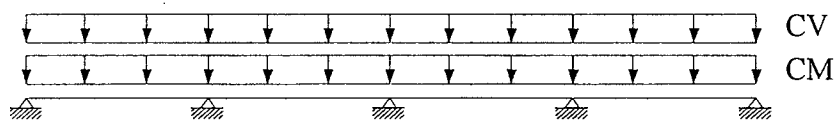


Fig. 8-2 Sobrecarga en todos los tramos

- b) Máximos momentos positivos. En las figuras 8-3 y 8-4 sólo se indica la sobrecarga ya que la carga muerta siempre estará presente.

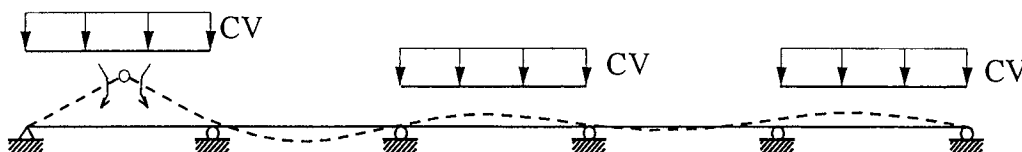


Fig. 8-3 Máximos positivos en el 1º, 3º y 5º tramo

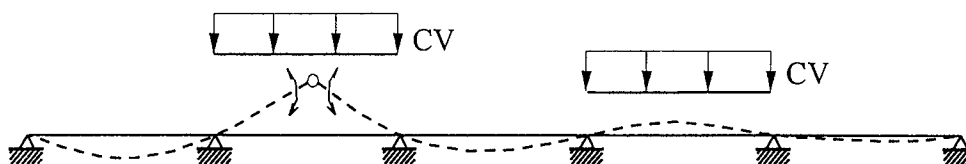


Fig. 8-4 Máximos positivos en el 2º y 4º tramo

- c) Máximos momentos negativos. El patrón de cargas indicado en la figura 8-5 permite obtener el máximo negativo en el primer apoyo interior para una viga de cinco tramos. Se indica únicamente la sobrecarga.

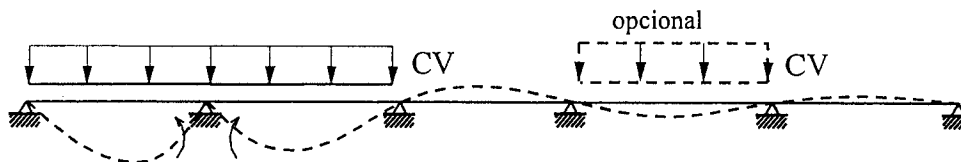


Fig.8-5 Máximo negativo en el primer apoyo interior

La Norma E.060 permite considerar la sobrecarga actuando únicamente en los dos tramos adyacentes al apoyo donde se determina el máximo negativo. La razón estriba en la poca influencia que suele tener, en el momento negativo en cuestión, la sobrecarga aplicada en los tramos lejanos. Las figuras 8-6a, 8-6b y 8-6c muestran las líneas de influencia a escala, para los momentos negativos en el primer, segundo y tercer apoyo

interior de una viga de concreto armado de seis tramos, cada uno de 5 m, con apoyos simples de cuchilla. La sección de la viga es constante de 0.30x0.60 m. Si se observa la amplitud que tiene la línea de influencia en los tramos lejanos, es claro que el error que se comete al no considerar la sobrecarga actuando en estos tramos, es normalmente despreciable, más aún si la viga fuera parte de un pórtico y en los apoyos existieran columnas monolíticas con la viga.

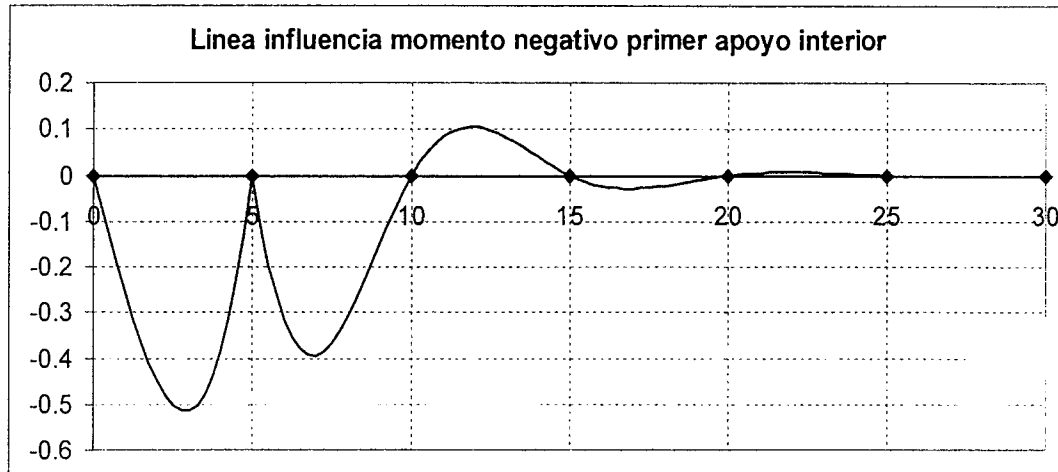


Fig. 8-6a Línea de influencia - viga de seis tramos.

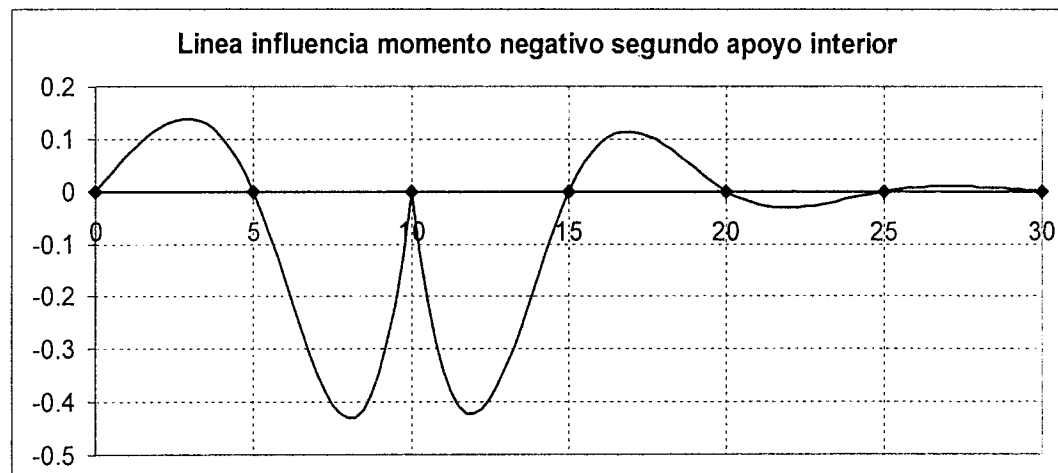


Fig. 8-6b Línea de influencia - viga de seis tramos.

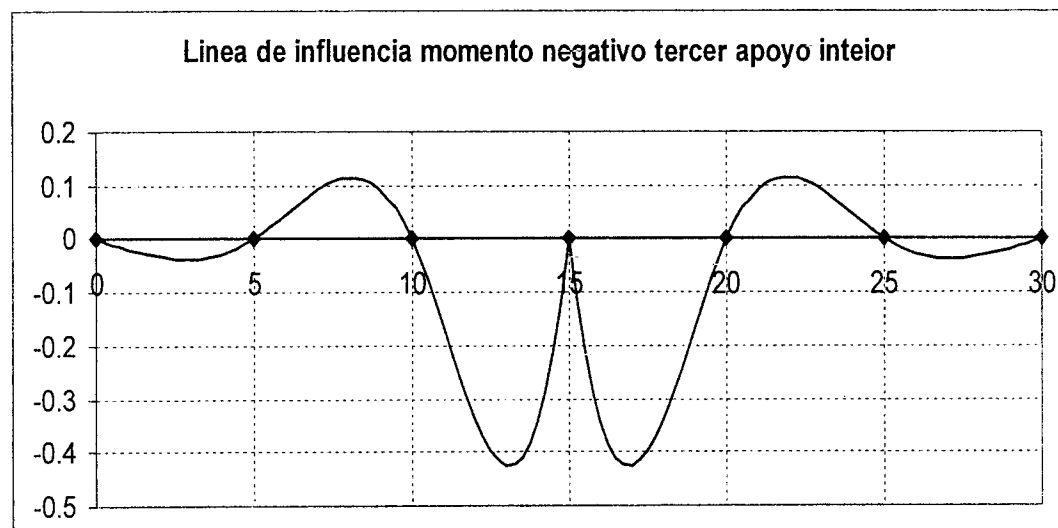
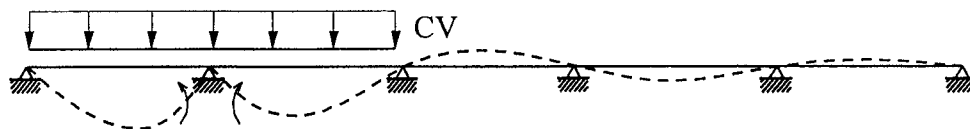
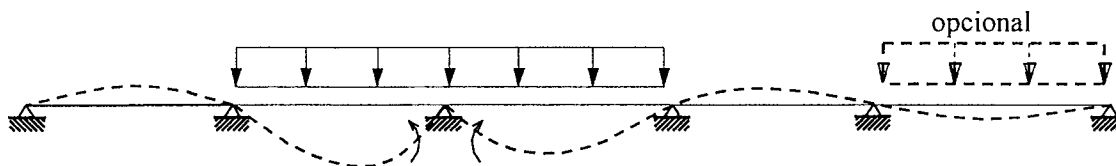


Fig. 8-6c Línea de influencia - viga de seis tramos.

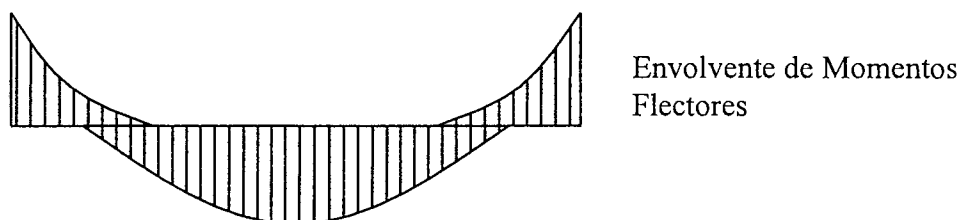
En consecuencia de acuerdo a la Norma, para la determinación, por ejemplo, del máximo negativo en el primer apoyo interior, puede utilizarse el siguiente patrón simplificado:



Para calcular el máximo negativo en el segundo apoyo interior es posible trabajar con:



La alternancia de la sobrecarga permite obtener momentos flectores máximos positivos, máximos negativos, mínimos (para la eventualidad que existan inversiones), máximos cortantes, deflexiones, etc. Para un tramo en particular, los resultados de la alternancia se pueden resumir mediante la construcción de las envolventes de momentos flectores y de fuerzas cortantes.



Realizar la alternancia de carga viva en el pórtico completo suele ser complejo y laborioso. La figura 8-7 muestra el patrón de cargas, en un pórtico de tres niveles, que origina los máximos momentos flectores positivos en las vigas con carga, a este patrón se le denomina "sobrecarga en damero". Se supone que el pórtico está arriostrado contra los desplazamientos laterales originado por las cargas de gravedad. Si se considera la verdadera amplitud de la línea de influencia en los pisos superiores (que en la figura no está a escala) es claro que la influencia, por ejemplo de la sobrecarga del tercer nivel, en los momentos positivos del primer nivel será normalmente despreciable.

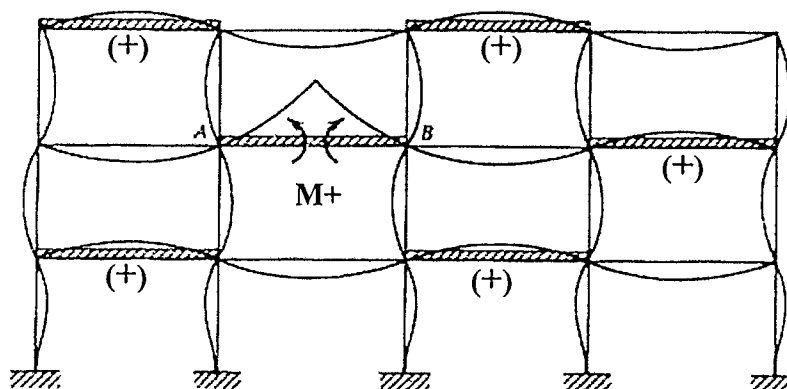


Fig. 8-7 Sobrecarga en damero – máximos positivos (+)

Para los *máximos negativos* los patrones de carga son más complejos que para los positivos. En la figura 8-8 se muestra el patrón que permitiría obtener el máximo momento negativo a la izquierda del tramo A-B de la viga del segundo nivel. Se supone que el pórtico está arriostrado contra los desplazamientos laterales originado por las cargas de gravedad. Nuevamente es claro que la influencia de la sobrecarga de los pisos superiores en el momento negativo del primer piso, es despreciable.

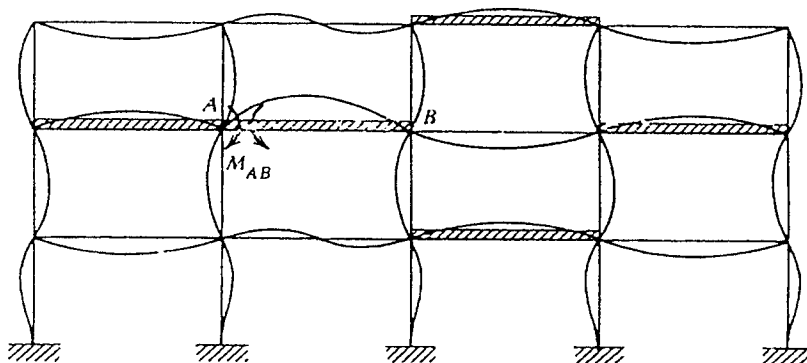


Fig. 8-8 Alternancia para máximo negativo en la viga A-B.

Existen otras muchas posiciones de la sobrecarga que permiten obtener los momentos flectores máximos y mínimos, las fuerzas cortantes máximas, los máximos momentos en columnas, las fuerzas axiales en columnas máximas y mínimas, etc. En la figura 8-9 (Calavera), se muestran algunos de los patrones de carga en un pórtico de cuatro pisos arriostrado lateralmente, que permiten calcular máximos y mínimos. Algunos de los patrones mostrados, pueden considerarse simples ejercicios teóricos, ya que la probabilidad de que la totalidad (100%) de la sobrecarga se ubique en esas posiciones específicas, es prácticamente nula.

En la determinación de las solicitaciones para el *diseño de las columnas*, la Norma E.060 (Art. 8.8.1) indica que es necesario considerar la carga axial proveniente de todos los pisos; sin embargo permite calcular el momento máximo debido a la sobrecarga actuando en solo uno de los tramos adyacentes en el piso bajo análisis, tal como se indica en la figura 8-10 correspondiente a un pórtico arriostrado para cargas verticales.

Adicionalmente es necesario considerar la condición de carga que produzca la máxima relación M/P , es decir, la máxima excentricidad de la carga axial en la sección. Esto debido a que la resistencia de las columnas es sensible a la magnitud de la carga axial y a su excentricidad.

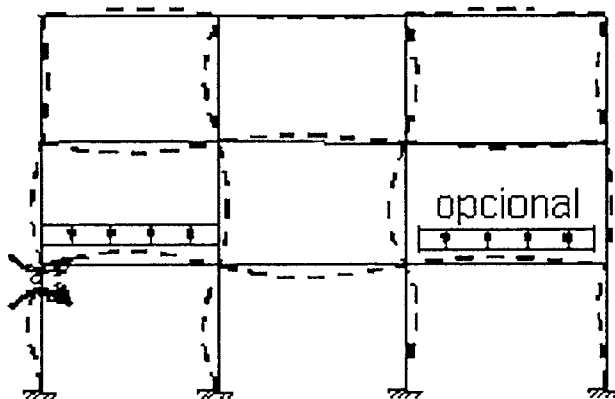
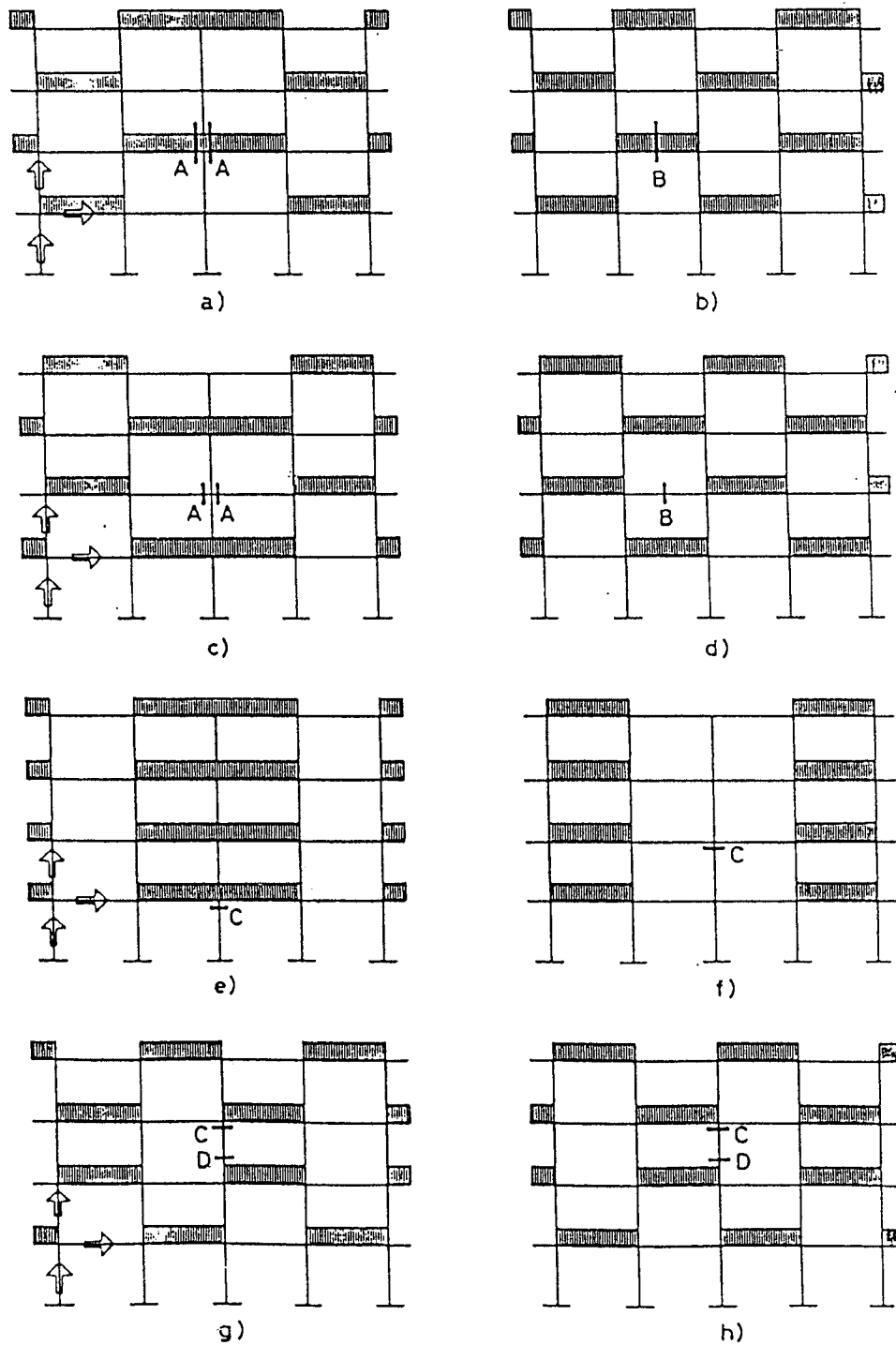


Fig. 8-10 Máximo momento en columna exterior



a) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES NEGATIVOS Y MAXIMOS ESFUERZOS CORTANTES EN LOS ARRANQUES A DE LAS VIGAS.
 c) MINIMO MOMENTO FLECTOR (O MAXIMO POSITIVO) EN LOS ARRANQUES A DE LAS VIGAS.
 e) MAXIMO ESFUERZO AXIL EN EL SOPORTE C.
 g) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES EN EL SOPORTE CD; NEGATIVO EN EL EXTREMO SUPERIOR C Y POSITIVO EN EL INFERIOR D.

b) MAXIMO MOMENTO FLECTOR POSITIVO EN EL CENTRO B DE LA VIGA.
 d) MINIMO MOMENTO FLECTOR (O MAXIMO NEGATIVO) EN EL CENTRO B DE LA VIGA.
 f) MINIMO ESFUERZO AXIL EN EL SOPORTE C.
 h) MAXIMOS MOMENTOS FLECTORES EN EL SOPORTE CD; POSITIVO EN EL EXTREMO SUPERIOR C Y NEGATIVO EN EL INFERIOR D.

Fig. 8-9. Alternancia de sobrecarga en un pórtico de cuatro pisos

8.7 Modelo Simplificado para el Análisis por Cargas de Gravedad

Para el análisis por cargas de gravedad (no para cargas horizontales) de pórticos con geometría y cargas "razonablemente regulares", la Norma permite una simplificación importante en la geometría. Esta simplificación consiste en admitir la sobrecarga actuando únicamente en el piso bajo estudio y suponer que los extremos lejanos de las columnas de los entrepisos superior e inferior están empotrados. Este modelo se ilustra en la figura 8-10 para un pórtico de tres pisos y dos paños.

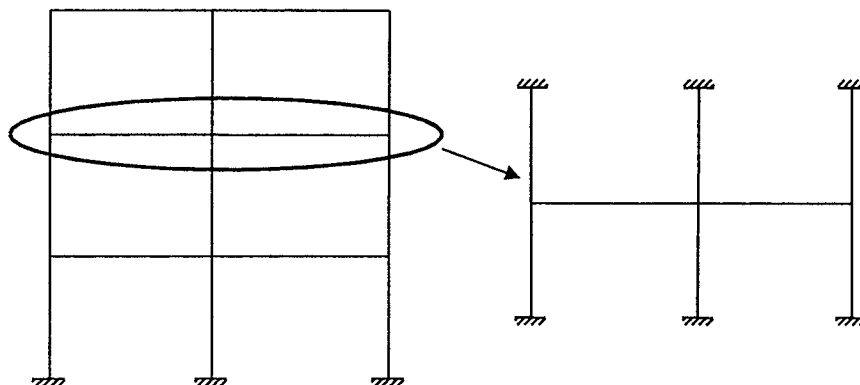
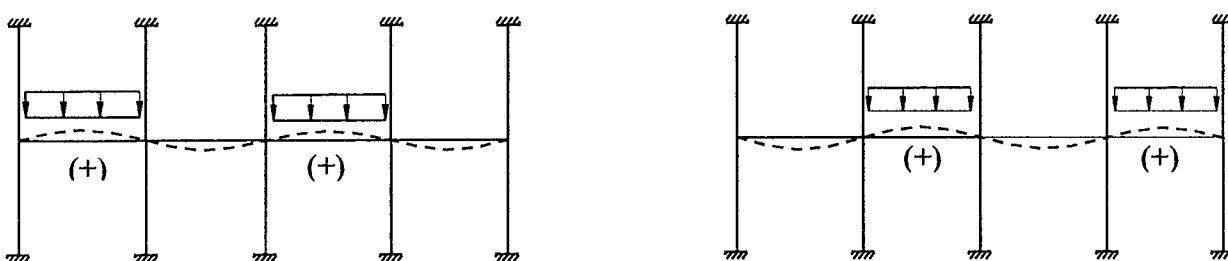


Fig. 8-10 Modelo simplificado para el análisis por cargas verticales.

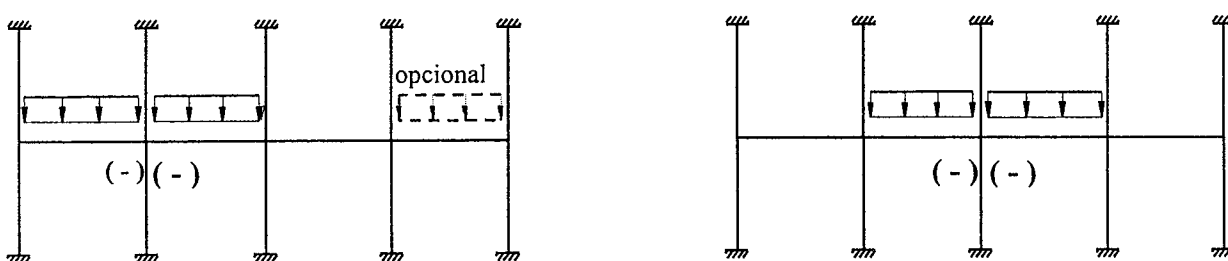
Para que este modelo sea válido, es necesario que las cargas de gravedad no produzcan desplazamientos laterales importantes, ya sea por la asimetría de las cargas o por una geometría irregular del pórtico. Esta condición también puede cumplirse si existen placas o muros rígidos lateralmente, que - unidos a los pórticos a través de un diafragma rígido en su plano (losa de piso) - controlen los desplazamientos laterales del entrepiso producidos por las cargas verticales.

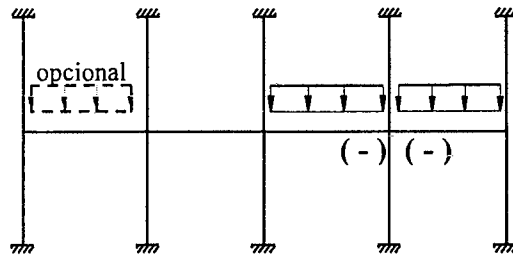
Con este modelo, la alternancia de la carga viva se restringe al entrepiso bajo análisis y no es necesario analizar el pórtico completo. Para determinar los máximos y mínimos en vigas y columnas tendremos que analizar la estructura bajo los siguientes estados de carga:

a) Vigas - máximos positivos

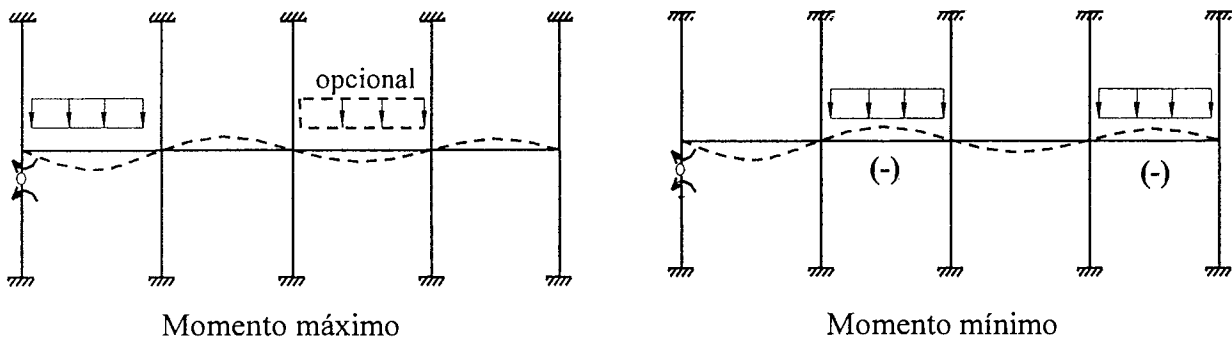


b) Vigas - máximos negativos

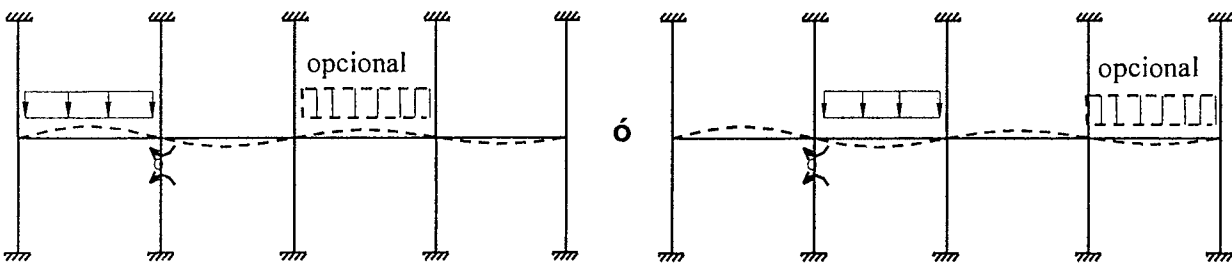




c) Columnas – máximos momentos



Columnas exteriores



Columnas interiores

Cabe anotar que en el análisis de estos modelos, denominados empotrados arriba y abajo, se suelen ignorar las deformaciones por esfuerzo cortante y las deformaciones axiales de vigas y columnas así como los desplazamientos laterales.

8.8 Programas de Cómputo para el Análisis por Cargas Verticales

Cuando se utilizan programas para el análisis automático de estructuras (programas de cómputo o computadoras) para el análisis del pórtico completo bajo cargas de gravedad, es necesario tener cuidado, tanto en el modelo como en los resultados, con lo siguiente:

- a) Las deformaciones axiales de las columnas. Estas deformaciones, ocasionadas por las cargas de gravedad, pueden modificar fuertemente los momentos en las vigas de pórticos altos, sobretudo las vigas de los últimos pisos, donde las deformaciones axiales de las columnas de todos los pisos inferiores se acumulan. En algunos casos la modificación puede llegar a invertir el signo de los momentos negativos en los apoyos de las vigas sobre las columnas. Este efecto no es real debido a la secuencia constructiva del edificio, secuencia en la que los pisos superiores se construyen sobre los inferiores cuyas columnas ya se han deformado axialmente.

b) Los desplazamientos laterales del pórtico ocasionados por las cargas de gravedad. Si existen elementos rígidos lateralmente (placas o muros) estos desplazamientos no son reales ya que el diafragma de piso, que une a todos los pórticos, hará que los elementos rígidos controlen los desplazamientos laterales.

8.9 Método Aproximado de los Coeficientes

Este método, reconocido por la Norma, data de hace muchos años, suministra momentos y cortantes aproximados para el diseño de elementos continuos. Se puede utilizar como alternativa al análisis estructural de pórticos para cargas de gravedad. Es aplicable a:

- Vigas continuas, aligerados o losas armadas en una dirección.
- Deben haber dos o más tramos de luces más o menos iguales. La luz del tramo mayor, de dos adyacentes, no debe exceder en más del 20% de la luz del menor ($L_{mayor} \leq 1.2 L_{menor}$)
- Elementos no preesforzados.
- Elementos prismáticos de sección constante.
- La carga viva en servicio, no debe exceder de tres veces la carga muerta en servicio.
- Solo deben haber cargas uniformemente distribuidas. Las cargas muertas y vivas uniformemente distribuidas en cada uno de los tramos tienen la misma intensidad.
- El pórtico, al cual pertenece la viga bajo análisis, debe estar arriostrado lateralmente sin momentos importantes debidos al desplazamiento lateral de la estructura producido por las cargas de gravedad.

a) Coeficientes para momentos en vigas con apoyos simples. Los coeficientes para el cálculo de los momentos positivos y negativos en aligerados, losas macizas armadas en una dirección o vigas apoyadas sobre otras vigas, se resumen en la figura 8-11. Se supone que tanto los apoyos interiores como los exteriores son apoyos simples (apoyos de cuchilla) sin posibilidad de desplazamiento vertical ni restricción torsional al giro del nudo.

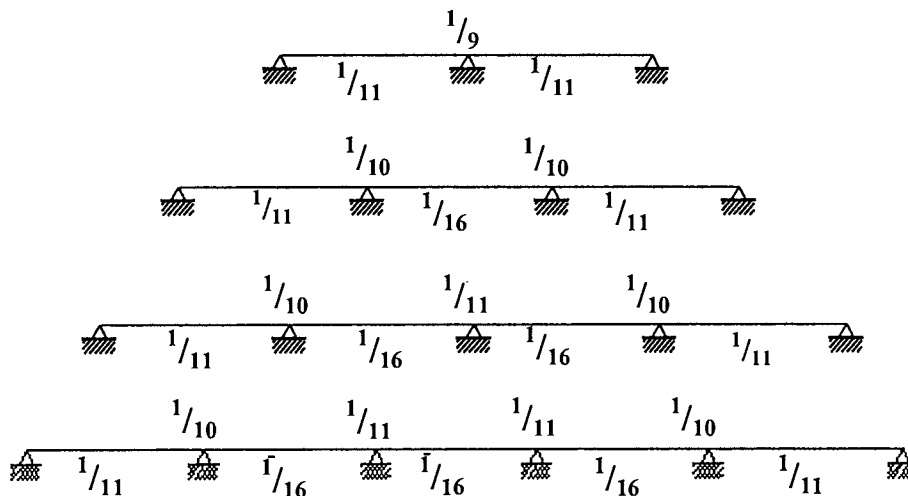


Fig. 8-11 Coeficientes para momentos en vigas, aligerados y losas continuas.

Los coeficientes de la figura 8-11 se deben multiplicar por $\omega (ln)^2$ para así obtener los momentos flectores positivos y negativos. Los momentos negativos se calculan a las caras de los apoyos. La luz ln es la luz libre del tramo para el cálculo de los momentos positivos y el promedio de las luces libres de los tramos adyacentes para el cálculo del momento negativo. Cuando los apoyos exteriores de los tramos extremos son monolíticos con el elemento sobre el cual se apoyan (aligerado apoyado sobre una viga de borde, por ejemplo) se suele aceptar un momento negativo equivalente a $1/24 (\omega ln^2)$.

- b) Coeficientes para momentos en vigas de pórticos monolíticos con las columnas. Los coeficientes para el cálculo de los momentos positivos y negativos en las vigas de pórticos arriostrados lateralmente, se resumen en la figura 8-12.

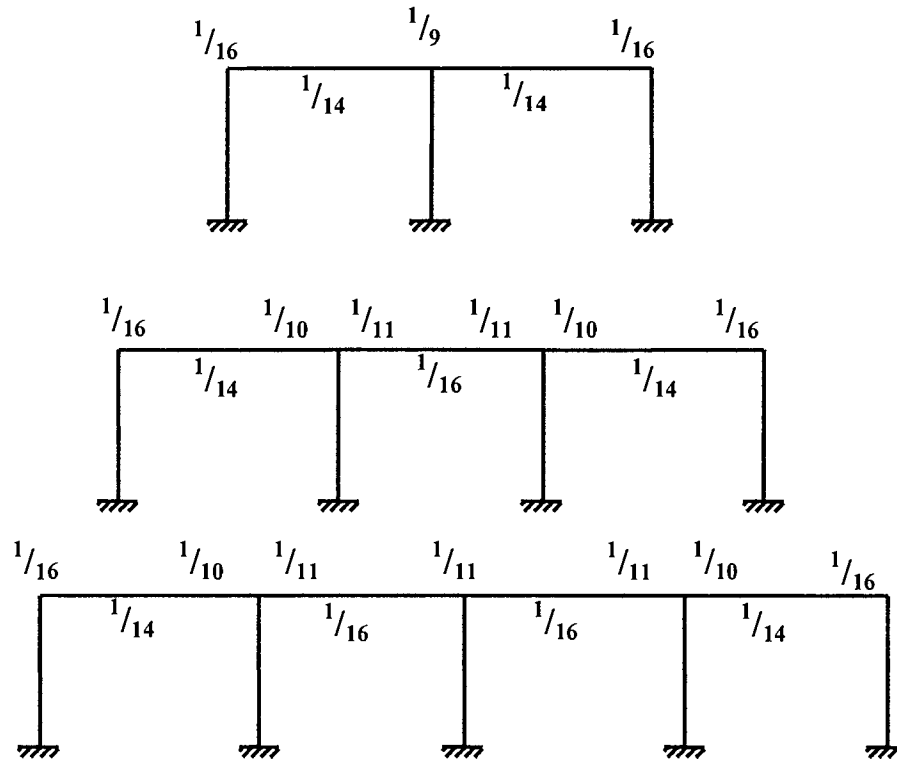


Fig. 8-12 Coeficientes para momentos en vigas de pórticos monolíticos.

Los coeficientes de la figura 8-12 se deben multiplicar por $\omega (ln)^2$ para así obtener los momentos flectores positivos y negativos. Los momentos negativos se calculan a las caras de los apoyos. La luz ln es la luz libre del tramo para el cálculo de los momentos positivos y el promedio de las luces libres de los tramos adyacentes para el cálculo del momento negativo.

Los momentos negativos en los apoyos exteriores de los tramos extremos ($1/16 \omega (ln)^2$) corresponden a vigas que se apoyan sobre columnas relativamente pequeñas. Si la viga apoya sobre columnas robustas este momento tiende al de empotramiento. La Norma de Concreto especifica que cuando la relación entre la suma de las rigideces en flexión de las columnas y la de las vigas excede de ocho, el momento negativo debe considerarse igual al de empotramiento ($1/12 \omega (ln)^2$)

Los momentos positivos y negativos obtenidos por coeficientes, toman en cuenta la alternancia de carga viva y por lo tanto no cumplen con el equilibrio tal como se indica en las siguientes figuras, correspondientes a un tramo interior de una viga continua:

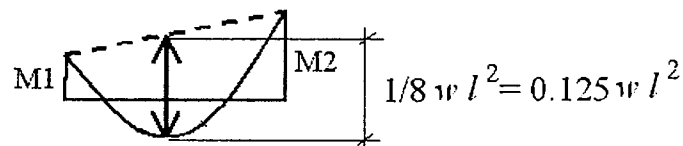
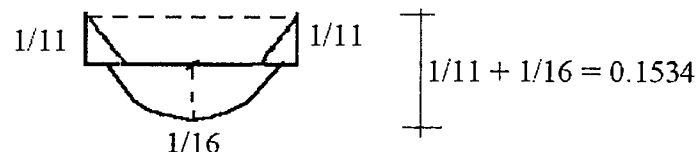
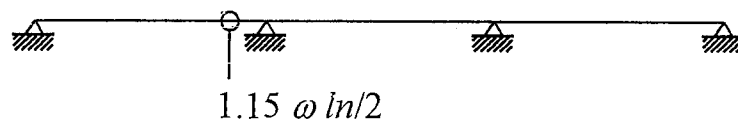


Diagrama de momentos utilizando los coeficientes de la Norma:



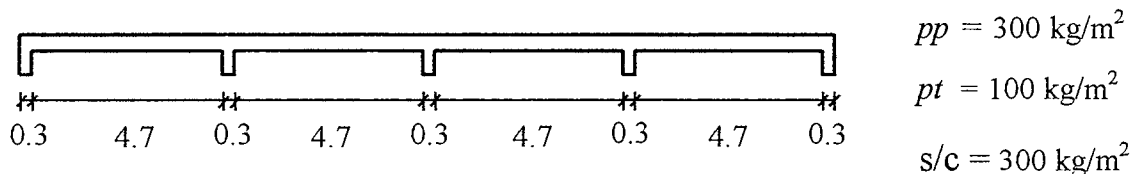
c) Fuerza Cortante en vigas, aligerados, losas



- Fuerza cortante en la cara exterior del primer apoyo interior = $1.15 \omega ln / 2$
- Fuerza cortante en la cara de todos los demás apoyos = $\omega ln / 2$

Los momentos que se obtienen por el Método de los Coeficientes solo son aplicables a las vigas, no son aplicables a las columnas ya que el patrón de cargas que produce máximos negativos en vigas, difiere del patrón que produce máximos en columnas, por lo tanto los momentos en las columnas deben evaluarse en forma separada.

Ejemplo 6-1 Resolvamos un aligerado continuo de peralte $h = 0.20$ m apoyado sobre vigas. Para el análisis estructural utilizaremos algún método "exacto" y luego utilizaremos coeficientes para comparar los resultados de ambos métodos. Las tres primeras filas de resultados, corresponden al método "exacto" utilizando alternancia del 100% de la sobrecarga y la cuarta fila corresponde al Método de Coeficientes.



Carga amplificada (*resistencia requerida*) por vigueta:

Norma E.060: $\omega u = (400 \times 1.4 + 300 \times 1.7) \times 0.4 = 428$ kg/m por vigueta

	5.0 5.0 5.0 5.0					
Todo cargado	0	1145	765	1145	0	← A ejes
Max. negativos	825	390	390	825	0	← A ejes
Max. positivos	935	615	615	935		
Max. Negativos a la cara del apoyo	0	1020	785	1020	0	
Coeficientes con $ln = 4.7$ m	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{24}$	← A la cara
	860	590	590	860		
	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{11}$		

La comparación de los resultados indica que el método de coeficientes, cuando se cumple con sus limitaciones, produce resultados satisfactorios para el diseño.

8.10 Tabla para Vigas Continuas

La Tabla 8-1 (C. Reynolds y J. Steedman) permite calcular los momentos negativos y positivos "exactos" para vigas continuas de sección constante de varios tramos sobre apoyos simples con cargas distribuidas o concentradas. Incluye la posibilidad de alternancia de la sobrecarga. El Método de los Coeficientes, probablemente fue derivado a partir de tablas similares a esta.

Tabla 8-1 Tabla para vigas continuas sobre apoyos simples.

Load	All spans loaded (e.g. dead load)	Imposed load (sequence of loaded spans to give max. bending moment or shearing force)
Coefficients for maximum bending moments	Uniformly-distributed	
	Concentrated at midspan	
	Concentrated at third points	
Coefficients for max. shearing force	Uniformly-distributed	

Bending moment = (coefficient) × (total load on one span) × (span).
 Shearing force = (coefficient) × (total load on one span).
 Bending moment coefficients: above line apply to negative bending moment at supports.
 below line apply to positive bending moment in span.
 Shearing force coefficients: above line apply to shearing force at right-hand side of support.
 below line apply to shearing force at left-hand side of support.
 Coefficients apply when all spans are equal (or shortest $\geq 15\%$ less than longest.) Loads on each loaded span are equal.
 Moment of inertia same throughout all spans.
 Bending moments coefficients (imposed load) in brackets apply if two spans only are loaded.

8.11 Influencia de la Alternancia de la Carga Viva

La Tabla 8-2 permite estimar la influencia que tiene la alternancia de las cargas vivas en los máximos momentos negativos y positivos en vigas de sección constante sobre apoyos simples. Se han resuelto vigas de 3, 4 y 5 tramos para distintas relaciones o cocientes (valores de k en la tabla) de la carga muerta repartida y la carga viva. Valores de k bajos corresponden a cargas vivas grandes en comparación a la carga muerta mientras que valores altos de k corresponden a cargas vivas pequeñas. Para aligerados, losas en una dirección y vigas, los valores de k normalmente están comprendidos entre 1 y 2.

En la Tabla 8-2 se puede leer el cociente, expresado en porcentaje, entre el momento positivo o negativo que se obtiene al resolver la viga sin considerar alternancia con el que se obtiene al considerarla. Es claro que, para los valores usuales de k , no se comete un error importante en los momentos negativos al no considerar la alternancia, el máximo error no excede del 20%, es decir el momento negativo máximo en los apoyos considerando alternancia es a lo sumo un 20% mayor que el momento negativo calculado sin alternancia. Sin embargo, para los momentos positivos el error sí puede ser importante, por ejemplo, en una viga de tres tramos, el error en el momento positivo del tramo central es, en promedio, 82% para los valores de k usuales.

Lo anterior se explica físicamente si se observan los patrones de carga que dan origen a los máximos negativos y positivos (ver figuras 8-4 y 8-5) conjuntamente con las amplitudes y formas que tienen las líneas de influencia de las figuras 8-13 y 8-14 que corresponden a una viga de tres tramos de sección constante y longitudes de 5 m.

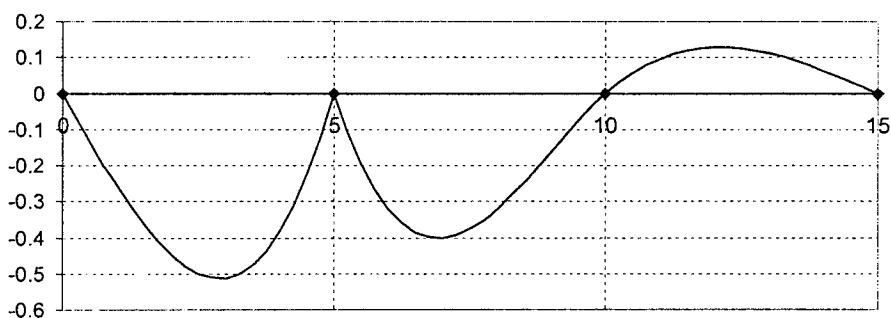


Fig. 8-13 Línea de influencia momento negativo - primer apoyo interior.

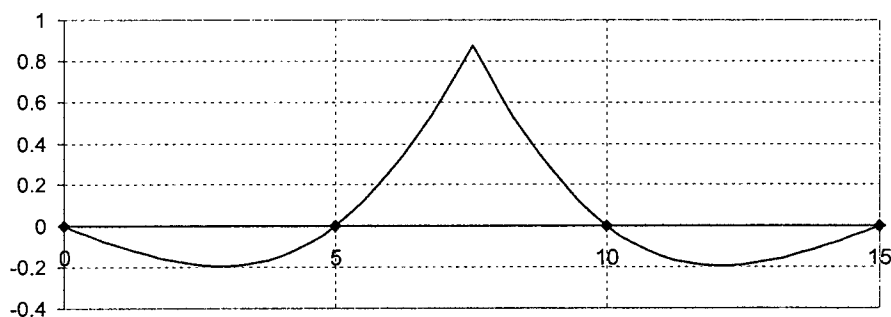


Fig. 8-14 Línea de influencia momento positivo - tramo central.

8.12 Tabla para Pórticos de Un Piso

En la Tabla 8-3 (Klaus J. Schneider) se presenta la solución analítica para pórticos de un piso y una cruzija, sometidos a diversas condiciones o estados de carga. Esta tabla será de utilidad en la obtención de las fuerzas de sección en este tipo de pórticos simples, para luego proceder al diseño de sus elementos (viga y columnas) en concreto armado.

Tabla 8-2 Influencia de la alternancia en los momentos negativos y positivos.

Vigas continuas con apoyos simples (sin columnas). Cargas repartidas. Luces iguales o casi iguales
 Mneg max, Mpos max: Momentos provenientes del análisis considerando la alternancia de la Carga Viva (CV)
 Mneg, Mpos: Momentos flectores provenientes del análisis considerando todos los tramos cargados (CM+CV)

Tres tramos

$k = C.Muerta / C.Viva$

k	Momentos Negativos		Momentos Positivos		
	primer apoyo interior Mneg max / Mneg		primer tramo Mpos max / Mpos		segundo tramo Mpos max / Mpos
0.2	14%		22%		167%
0.4	12%		19%		143%
0.6	11%		16%		125%
0.8	9%		15%		111%
1.0	9%		13%		100%
1.2	8%		12%		91%
1.4	7%	7%	11%	11%	83%
1.6	7%		10%		77%
1.8	6%		9%		71%
2.0	6%		9%		67%
2.2	5%		8%		63%
2.4	5%		8%		59%
2.6	5%		7%		56%
2.8	4%		7%		53%
3.0	4%		7%		50%

Cuatro tramos

k	Momentos Negativos		Momentos Positivos			
	primer apoyo interior Mneg max / Mneg	segundo apoy inte Mneg max / Mneg	primer tramo Mpos max / Mpos		segundo tramo Mpos max / Mpos	
0.2	11%		41%		24%	104%
0.4	9%		35%		20%	89%
0.6	8%		30%		18%	78%
0.8	7%		27%		16%	69%
1.0	7%		24%		14%	63%
1.2	6%		22%		13%	57%
1.4	5%	5%	20%	20%	12%	52%
1.6	5%		19%		11%	48%
1.8	5%		17%		10%	45%
2.0	4%		16%		10%	42%
2.2	4%		15%		9%	39%
2.4	4%		14%		8%	37%
2.6	4%		14%		8%	35%
2.8	3%		13%		8%	33%
3.0	3%		12%		7%	31%

Cinco tramos

k	Momentos Negativos		Momentos Positivos					
	primer apoyo interior Mneg max / Mneg	segundo apoy inte Mneg max / Mneg	primer tramo Mpos max / Mpos		segundo tramo Mpos max / Mpos		tercer tramo Mpos max / Mpos	
0.2	12%		32%		24%		119%	72%
0.4	10%		28%		20%		102%	62%
0.6	9%		24%		18%		89%	54%
0.8	8%		22%		16%		79%	48%
1.0	7%		19%		14%		71%	43%
1.2	6%		18%		13%		65%	40%
1.4	6%	6%	16%	16%	12%	11%	59%	36%
1.6	5%		15%		11%		55%	33%
1.8	5%		14%		10%		51%	31%
2.0	5%		13%		9%		47%	29%
2.2	4%		12%		9%		45%	27%
2.4	4%		11%		8%		42%	26%
2.6	4%		11%		8%		40%	24%
2.8	4%		10%		7%		37%	23%
3.0	4%		10%		7%		36%	22%

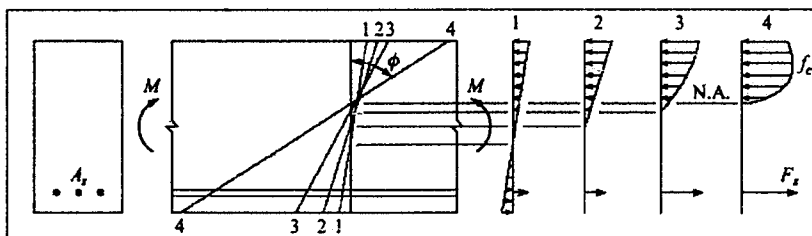
Tabla 8-3 Pórticos de un piso y una crujía

		$k = \frac{I_R}{I_S} \cdot \frac{h}{l}$ M-Linie
1		$A = \frac{q l}{2}$ $H_1 = H_2 = H = \frac{q l^2}{4 h (k + 2)} ; M_1^e = M_2^e = \frac{H h}{3}$
2		$A = \frac{P b}{l} \left[1 + \frac{a (b - a)}{l^2 (6 k + 1)} \right] ; B = P - A$ $H_1 = H_2 = \frac{3 P a b}{2 h l (k + 2)} ; M_1^e = \frac{P a b}{2 l^2} \cdot \frac{5 k l - l + 2 a (k + 2)}{(k + 2) (6 k + 1)}$ $M_2^e = \frac{P a b}{2 l^2} \cdot \frac{7 k l + 3 l - 2 a (k + 2)}{(k + 2) (6 k + 1)}$
3		$A = -B = \frac{q h^2}{l} \cdot \frac{k}{6 k + 1} ; H_1 = \frac{q h}{8} \cdot \frac{2 k + 3}{k + 2} ; H_2 = H_1 - q h$ $M_1^e = \frac{q h^2}{24} \left(\frac{5 k + 9}{k + 2} - \frac{12 k}{3 k + 1} \right)$ $M_2^e = -\frac{q h^2}{24} \left(12 - \frac{5 k + 9}{k + 2} - \frac{12 k}{6 k + 1} \right) ; M_4 = M_2^e - H_2 \cdot h - \frac{q h^2}{2}$
4		$A = -B = \frac{P h}{l} \cdot \frac{3 k}{6 k + 1} ; H_1 = -H_2 = \frac{P}{2}$ $M_1^e = -M_2^e = \frac{P h}{2} \cdot \frac{3 k + 1}{6 k + 1}$
5		$R_1 = \frac{P a b}{h} \cdot \frac{1 + \beta + \beta k}{2 (k + 2)} ; R_2 = \frac{P a b}{h} \cdot \frac{\alpha k}{2 (k + 2)} ; R_3 = \frac{3 P a \alpha k}{2 (6 k + 1)}$ $A = -B = -\frac{2 R_3}{l} ; H_1 = \frac{P a}{2 h} - \frac{R_1 - R_2}{h} ; H_2 = -(P - H_1)$ $M_1^e = -R_1 + (P a / 2 - R_3) ; M_2^e = -R_1 - (P a / 2 - R_3)$
6		$M_1^e = M_2^e = H \cdot \frac{h (k + 1)}{2 k + 1}$ $A = B = 0 ; H_1 = H_2 = H = 3 \alpha_1 \cdot t \cdot \frac{E I_R}{h^2} \cdot \frac{2 k + 1}{k (k + 2)}$
7		$A = B = 0 ; H_1 = H_2 = \alpha_1 \frac{E I_R}{h l} \left(\frac{\Delta t_R}{d_R} k l - \frac{\Delta t_S}{d_S} h \right) \frac{3}{k (k + 2)}$ $M_1^e = M_2^e = \alpha_1 \frac{E I_R}{l} \left[\frac{\Delta t_R}{d_R} k l - \frac{\Delta t_S}{d_S} h (k + 3) \right] \frac{1}{k (k + 2)}$

8.13 Lecturas

- 8.1 Capítulo 11 (Análisis de Vigas y Pórticos Indeterminados) del libro Diseño de Estructuras de Concreto – Duodécima Edición. Arthur H. Nilson. McGraw Hill.
- 8.2 Capítulo 5 (Criterios de Estructuración de Edificios) del libro Diseño Sísmico de Edificios. Bazán / Meli. Editorial Limusa.

CAPITULO 9



Ejemplo de Introducción al Diseño en Concreto Armado

9.1 Introducción

Con la finalidad de presentar algunas ideas preliminares relacionadas con el comportamiento en flexión de un elemento de concreto armado, analizaremos un elemento simple bajo diversas condiciones de refuerzo y agrietamiento de la sección transversal.

El elemento que emplearemos para la discusión, es una viga simplemente apoyada de 5 m de luz, con sección transversal 0.30x0.60 m, fabricada con un concreto de $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$. La sollicitación externa proviene de una carga uniformemente distribuida aplicada sobre la viga, producto de su peso propio y de las cargas muertas y vivas. Analizaremos diversas situaciones, a saber:

9.2 Viga sin Armadura de Refuerzo

Este es un ejercicio meramente teórico, ya que en la realidad es muy raro encontrar vigas esbeltas como esta (la esbeltez geométrica es $5.0/0.6 \approx 8.3$) construidas de concreto simple, es decir sin armadura de refuerzo. La idea de este análisis es la de demostrar la escasa, por no decir casi nula, resistencia que tendría una viga de estas proporciones si fuera construida sin refuerzo de acero.

El concreto simple se utiliza en algunos elementos de poca esbeltez en los cuales las dimensiones de la sección transversal son comparables con las luces del elemento y en los que los esfuerzos de tracción por flexión son bajos. Algunos elementos estructurales de concreto simple suelen ser: zapatas, muros de gravedad, calzaduras, losas completamente apoyadas sobre el piso (pavimentos).

Las principales hipótesis que haremos para el análisis son:

- Las secciones planas permanecen planas.
- El comportamiento del concreto en tracción y compresión es lineal elástico hasta la falla de la sección por tracción ($f_c = E \epsilon_c$ $f_t = E \epsilon_t$). El módulo de elasticidad en tracción y en compresión es el mismo.
- No hay posibilidad de una falla por cortante, ni de pandeo lateral.
- El módulo de rotura en tracción por flexión del concreto se puede estimar mediante la ecuación $f_r = 2 \sqrt{f_c} \approx 29 \text{ kg/cm}^2$

Si recordamos que la falla en tracción del concreto simple es frágil, con un diagrama esfuerzo - deformación que se puede idealizar como se muestra en la figura 9-1, tendremos que la viga colapsará cuando la fibra inferior de la sección central, la más sollicitada, alcance el esfuerzo f_r de tracción por flexión.

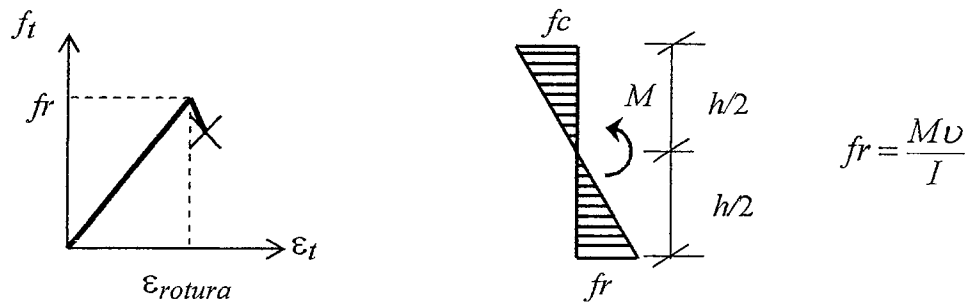


Fig. 9-1 Comportamiento en tracción por flexión del concreto y esfuerzos en la sección

Para la sección central de la viga, donde ocurre el momento máximo, la resistencia nominal será:

$$Mn = \frac{fr I_g}{v} = fr S \quad S = \frac{bh^2}{6} = \frac{30 \times 60^2}{6} = 18,000 \text{ cm}^3$$

$$Mn = 29 \times 18,000 \approx 5,220 \text{ kg-m} \Rightarrow \text{resistencia nominal de la sección}$$

La carga que produciría la falla de la sección central y en consecuencia el colapso de la viga será:

$$Mu = \frac{\omega u l^2}{8} = Mn = 5,220 \quad \omega u = \frac{5,220 \times 8}{25} = 1,670 \text{ kg/m} = \omega \text{ max}$$

La carga proveniente solamente del peso propio (estimado) de la viga representa cerca del 25% de la carga de falla:

$$pp \approx 2,300 \text{ kg/m}^3 \times 0.3 \times 0.6 \approx 415 \text{ kg/m} \approx 0.25 \omega \text{ max}$$

Es claro que en el análisis anterior no hemos considerado para nada el coeficiente de seguridad. Hemos mencionado que la falla de este elemento será frágil sin previo aviso, en consecuencia el coeficiente de seguridad deberá ser alto. Para concreto simple el factor de reducción de resistencia (ϕ) que señala la Norma E.060 es de 0.65 y si suponemos que la carga que actúa sobre la viga está asociada casi toda con carga muerta, tendremos:

$$\phi Mn \geq Mu \quad 0.65 Mn = 1.4 M \text{ servicio}$$

Por lo tanto la carga máxima, en condiciones de servicio, que podremos aplicar a esta viga de manera "segura" será 1,670 (0.65/1.4) \approx 775 kg/m es decir, prácticamente el peso propio de la viga.

Vuelvo a insistir, el caso que acabamos de analizar es hipotético, en la realidad una viga con esta sección transversal y luz no se haría de concreto simple, se haría de concreto reforzado. El concreto simple, por la poca resistencia en tracción y por su falla frágil, se utiliza en elementos secundarios en los cuales las dimensiones del elemento son tales que los esfuerzos de tracción son bajos.

Cabe anotar que en Capítulo 22 de la Norma E.060 (Concreto Estructural Simple) se establece que el diseño de secciones de concreto simple sometidas a flexión, la resistencia nominal, cuando controla la tracción viene dada por:

$$Mn = fr S = 1.35 \sqrt{f'_c} S = (1.35 \sqrt{210}) 18,000 \approx 3,520 \text{ kg-m}$$

9.3 Sección Reforzada con Acero en Tracción

Supongamos que la viga se refuerza con dos barras de acero corrugado Grado 60, con un área de 5 cm² cada una, tal como se muestra en la figura 9-2. Supongamos que la distancia entre el fondo de la viga y el centroide del acero de refuerzo es de 5 cm, lo que equivale a aceptar un recubrimiento libre de aproximadamente 3.7 cm, en consecuencia el peralte efectivo d será de 55 cm.

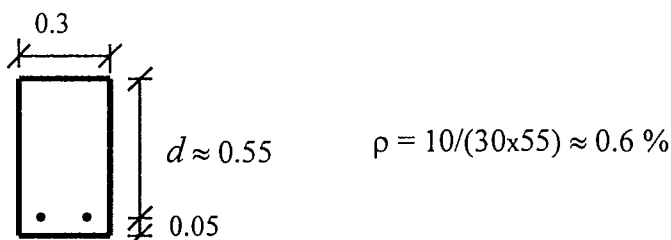


Fig. 9-2 Sección reforzada con 10 cm^2 de acero

Las hipótesis que haremos son:

- Las secciones planas permanecen planas.
- El comportamiento del concreto, bajo cargas de servicio, en tracción y compresión es lineal elástico. Sabemos que esta suposición es razonable para esfuerzos de compresión hasta 0.4 a 0.5 de f_c .
- No hay posibilidad de una falla prematura por cortante, ni por pandeo lateral.
- La resistencia (módulo de rotura) en tracción por flexión del concreto (f_r) se puede estimar en 29 kg/cm^2 .
- Existe una perfecta adherencia entre concreto y acero.

La figura 9-3 muestra las relaciones esfuerzo – deformación que utilizaremos para el acero y el concreto.

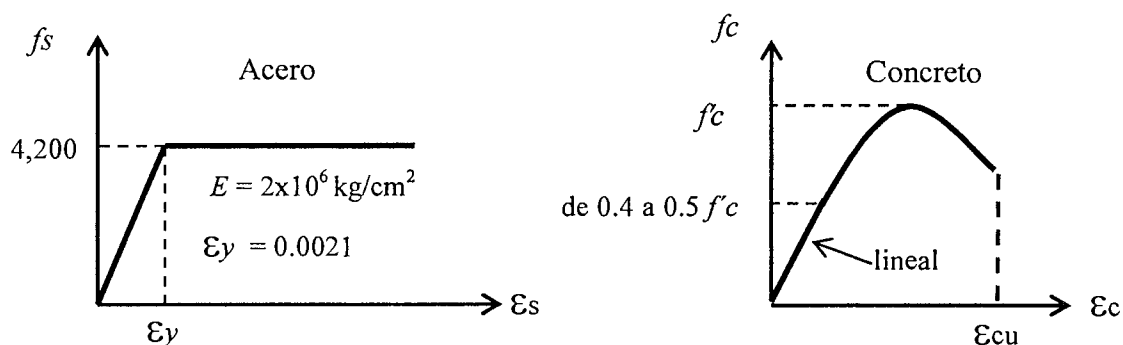


Fig. 9-3 Diagramas esfuerzo – deformación supuestos.

9.3.1 Sección No Fisurada

Analicemos el comportamiento de la sección antes de que se produzca la fisuración del concreto por efecto de la tracción por flexión, la resistencia máxima del concreto en tracción por flexión será f_r . La figura 9-4 muestra el estado de esfuerzos y deformaciones en la sección un instante antes que se produzca la fisuración de la sección.

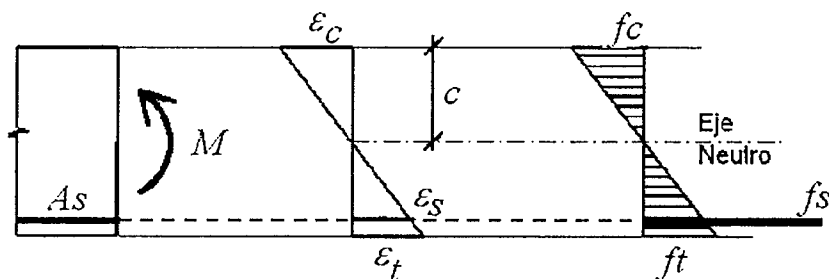
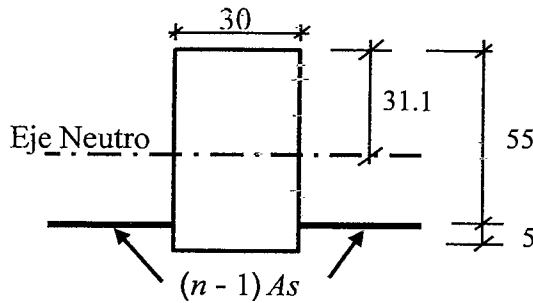


Fig. 9-4 Deformaciones y esfuerzos en la sección antes de la fisuración

Utilizaremos la sección transformada no agrietada, incluyendo el aporte del acero, para calcular los esfuerzos en el concreto y en el acero.



$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{relación modular})$$

$$E_c \approx 15,000 \sqrt{f'_c} \approx 220,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{2 \times 10^6}{220,000} \approx 9$$

$$(n-1) A_s = (9-1) \times 10 = 80 \text{ cm}^2$$

$$A_{tr} = 30 \times 60 + 80 = 1,880 \text{ cm}^2$$

Para el cálculo del centro de gravedad de la sección transformada tomamos suma de momentos estáticos de las áreas respecto al borde superior, equivale a calcular la posición del eje neutro c :

$$(30 \times 60 + 80) c = 30 \times 60 \times 30 + 80 \times 55 \Rightarrow c \approx 31.1 \text{ cm}$$

Momento de inercia de la sección transformada no agrietada:

$$I_{tr} = (1/12) \times 30 \times 60^3 + 30 \times 60 \times (1.1)^2 + 80 \times (55 - 31.1)^2 \approx 588,000 \text{ cm}^4$$

El valor de I_{tr} calculado representa un 9% de incremento respecto al momento de inercia de la sección bruta sin acero de refuerzo.

El momento flector que ocasiona el agrietamiento por tracción concreto en tracción, es:

$$f_t = \frac{Mv}{I_{tr}} = 2 \sqrt{f'_c} \quad 29 = \frac{M \times (60 - 31.1)}{588,000} \Rightarrow M_{cr} \approx 5,900 \text{ kg-m}$$

El momento de agrietamiento de la sección es $M_{cr} = 5,900 \text{ kg-m}$, por encima de este valor se espera que el concreto en tracción se agriete.

Los esfuerzos en el concreto y en el acero, un instante antes de alcanzar el momento de agrietamiento M_{cr} , serán:

$$f_c = \frac{590,000 \times 31.1}{588,000} = 31 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.15 f'_c \ll 210 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{concreto})$$

$$f_s = \frac{590,000 \times (55 - 31.1)}{588,000} \times 9 \approx 215 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.05 f_y \ll 4,200 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{acero})$$

Comparando el momento de agrietamiento con el de la sección no reforzada vemos que hay un 13% de incremento (5,900 vs. 5,220 kg-m). Obviamente el concreto armado no se desarrolló para mejorar la resistencia de una sección en flexión, como en este caso, tan solo en un 13%. Para cuantificar el incremento de resistencia que produce la presencia del acero de refuerzo, tendremos que analizar que sucede con la sección luego de que el concreto en tracción se haya agrietado. A partir del agrietamiento del concreto se puede decir que el acero empieza a trabajar realmente.

A diferencia del caso anterior, cuando el momento flector en la sección alcance el valor de agrietamiento por flexión, no se producirá una falla frágil de la sección ni el colapso de la viga. La presencia del acero de refuerzo, el cual tomará las tracciones que el concreto no es capaz de soportar, permitirá seguir incrementando la carga externa, de manera segura, sin el colapso de la viga.

La curvatura de agrietamiento (φ_{cr}) de la sección es:

$$\varphi_{cr} = \epsilon_c / c = (f_c / E_c) / c = (31 / 220,000) / 0.311 \approx 0.000141 / 0.311 \approx 0.453 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

9.3.2 Sección Fisurada

Solo por curiosidad, analicemos los esfuerzos en la sección un instante después de ocurrido el agrietamiento del concreto. Para ello apliquemos un momento flector ligeramente superior (un 10% mayor) al que origina el agrietamiento (M_{cr}) digamos unos 6,500 kg-m.

Las hipótesis para el análisis serán las mismas, con la diferencia que introduciremos una adicional: el aporte del concreto en tracción se desprecia. Esto significa que todo el concreto que está en tracción, por debajo del eje neutro, no será considerado en los cálculos de resistencia. Esta hipótesis permite simplificar los cálculos, sin embargo para momentos flectores de poca intensidad en condiciones de servicio, no es del todo realista, pero sí conservadora. El diagrama de esfuerzos y de las fuerzas resultante en el concreto y el acero será el indicado en la figura 9.5.

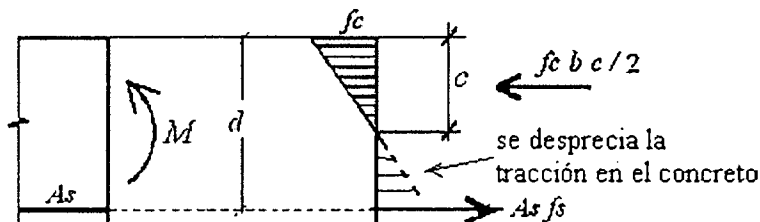


Fig. 9-5 Fuerzas en el concreto y en el acero luego del agrietamiento.

Utilizaremos la sección transformada agrietada (figura 9-6) para calcular los esfuerzos en el concreto y en el acero.

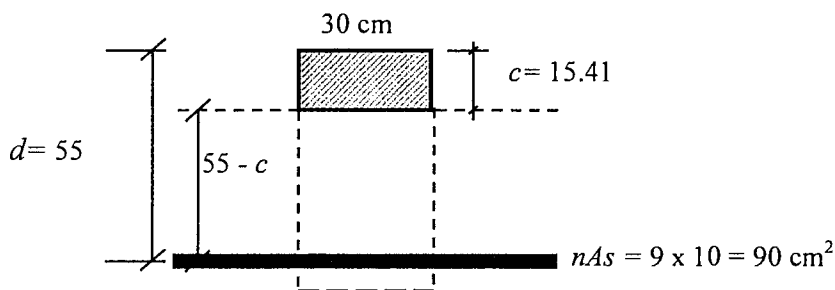


Fig. 9-6 Sección transformada agrietada.

La posición del eje neutro (c) se obtiene calculado el centroide de la sección, en este caso calcularemos la suma de los momentos estáticos de las áreas respecto del eje neutro:

$$30 c (c / 2) = 90 (55 - c) \quad c = 15.41 \text{ cm}$$

El momento de inercia de la sección transformada agrietada se obtiene mediante:

$$I_{cr} = \frac{30 \times 15.41^3}{3} + 90 (55 - 15.41)^2 \approx 178,000 \text{ cm}^4$$

La inercia se ha reducido, al agrietarse la sección, de 588,000 a 178,000 cm^4 . En este caso, la inercia fisurada o completamente agrietada de la sección, es aproximadamente el 33% de la inercia bruta. Calculemos los esfuerzos máximos en el concreto y el acero en la sección fisurada:

$$f_c = \frac{M v}{I_{cr}} = \frac{6.5 \times 10^5 \times 15.41}{178,000} \approx 56 \cdot \text{kg/cm}^2 \approx 0.27 f_c$$

$$f_s = \frac{n M v}{I_{cr}} = \frac{9 \times 6.5 \times 10^5 \times (55 - 15.41)}{178,000} \approx 1,300 \cdot \text{kg/cm}^2 \approx 0.3 f_y$$

La curvatura (ϕ) de la sección en este instante es:

$$\phi = \epsilon_c / c = (f_c / E_c) / c = (56 / 220,000) / 0.154 \approx 0.000255 / 0.154 \approx 1.65 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

La figura 9-7 permite comparar los esfuerzos en el concreto y en el acero antes y después del agrietamiento. Es importante notar el fuerte incremento en el esfuerzo del acero en tracción al agrietarse la sección. Para un momento externo un 10% mayor que el que produce el agrietamiento de la sección, el esfuerzo de compresión en el concreto ha aumentado de 31 a 56 kg/cm² (81% de incremento) y el esfuerzo en el acero de 215 a 1,300 kg/cm² (6 veces).

La curvatura de la sección también ha aumentado de manera importante (3.6 veces aproximadamente) lo que confirma la pérdida de rigidez de la sección ya que en este intervalo, al asumir comportamiento lineal del concreto y del acero, la relación entre momento y curvatura viene expresada por la relación clásica indicada a continuación:

$$EI = M / \phi \quad (\text{Relación Momento - Curvatura})$$

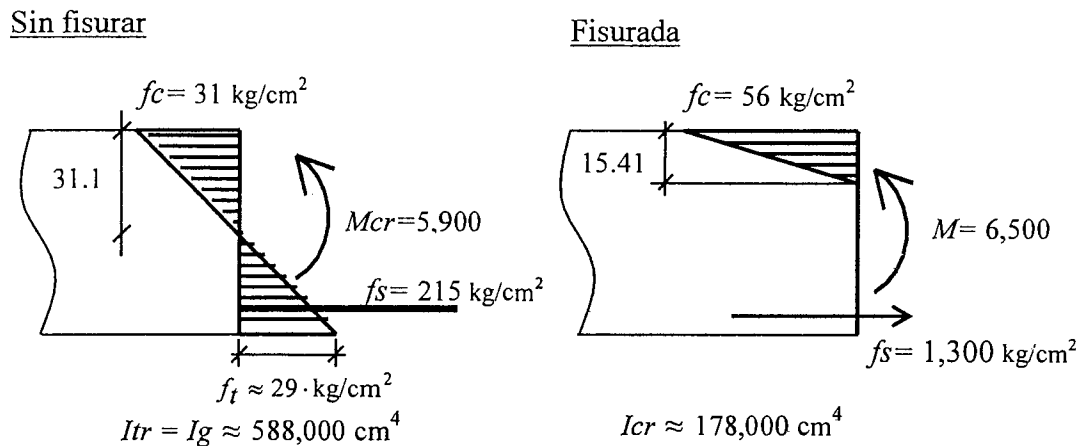


Fig 9-7 Esfuerzos en la sección no fisurada y fisurada.

9.3.3 Capacidad Máxima de la Sección por Esfuerzos Admisibles

Calculemos la capacidad de la sección utilizando el Diseño (en este caso análisis) por Esfuerzos Admisibles (WSD) que fuera presentado en la sección 7.4. Las Normas fijaban, para el diseño en flexión, los siguientes esfuerzos admisibles para la compresión en el concreto y la tracción en el acero:

$$\begin{aligned} \text{Concreto: } f_c \text{ admisible} &= 0.45 f_c & 0.45 \times 210 &\approx 95 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Acero: } f_s \text{ admisible} &= 0.5 f_y & 0.5 \times 4,200 &= 2,100 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Cuando el acero alcance su esfuerzo admisible, la sección ya se encontrará agrietada por flexión, en consecuencia los cálculos se harán utilizando las propiedades de la sección transformada agrietada. Para que esto sea válido, tendremos que suponer que el concreto se comporta linealmente hasta alcanzar su esfuerzo admisible.

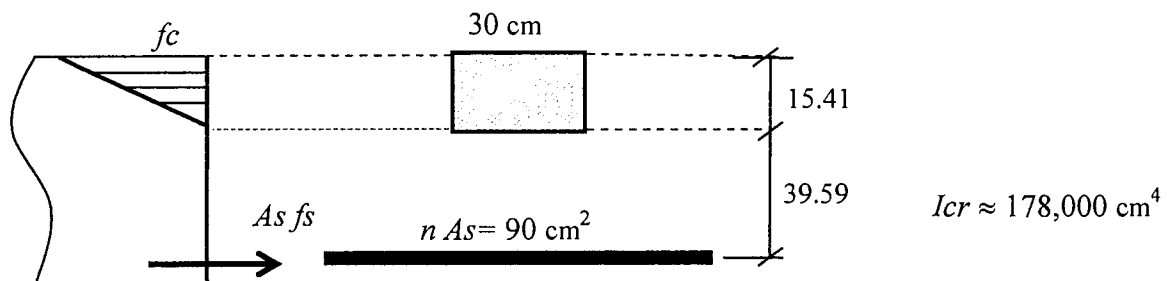


Fig. 9-8 Esfuerzos y sección transformada agrietada.

Los esfuerzos en el concreto y en el acero así como el momento máximo (M_{ad}) que será posible aplicar, sin sobrepasar los esfuerzos admisibles son:

$$f_c = \frac{M v_1}{I_{cr}} \approx 95 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{ad} = \frac{95 \times 178,000}{15.41} \approx 11,000 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}$$

$$f_s = n \frac{M v_2}{I_{cr}} \approx 2,100 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{ad} = \frac{2,100 \times 178,000}{9 \times 39.59} \approx 10,500 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}$$

La capacidad de la sección está controlada por el esfuerzo admisible en el acero, por lo tanto el momento flector admisible es 10,500 kg-m aproximadamente. Para esta intensidad del momento flector, el esfuerzo máximo en el concreto es $f_c \approx 90 \text{ kg/cm}^2$ con una deformación correspondiente de $(90/220,000) \approx 0.41 \times 10^{-3}$. El acero está trabajando a 2,100 kg/cm² con una deformación correspondiente de $(2,100/2 \times 10^6) \approx 1.05 \times 10^{-3}$. La curvatura de la sección, bajo estas condiciones, que podríamos llamar de "servicio" es:

$$\phi = \epsilon_c / c \approx 0.00041 / 0.154 \approx 2.66 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

Nótese que en este estado o etapa de comportamiento de la sección, se sigue cumpliendo la relación momento – curvatura elástica ($EI = M / \phi$) ya que hemos supuesto que tanto el acero como el concreto se encuentran en el rango lineal - elástico.

9.3.4 Capacidad Máxima de la Sección (Resistencia Nominal - Mn)

El valor del momento que produce el máximo esfuerzo admisible en el acero calculado en 9.3.3, no es la capacidad máxima o última de la sección, es decir el valor para el cual se agota la capacidad de la sección. Una vez que se superan los esfuerzos admisibles, la sección no falla, esta tiene aún una notable reserva de resistencia que es justamente la que aprovecha el *Diseño por Resistencia*.

Para calcular la *resistencia nominal* de la sección, utilizaremos las siguientes hipótesis:

- Las secciones planas permanecen planas.
- No hay posibilidad de una falla prematura por cortante, ni por pandeo lateral.
- Existe una perfecta adherencia entre concreto y acero.
- Se desprecia el aporte del concreto en tracción a la resistencia de la sección.
- El acero de refuerzo tiene un diagrama de comportamiento elastoplástico perfecto (relación constitutiva) con una plataforma de fluencia ilimitada con $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ que se inicia con una deformación de fluencia $\epsilon_y = 0.0021$. El módulo de elasticidad del acero se considera $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Adicionalmente a las hipótesis anteriores, es necesario conocer el diagrama esfuerzo – deformación del concreto en compresión (relación constitutiva). Este se puede obtener de ensayos de laboratorio o utilizando uno de los muchos modelos disponibles o asumiendo un diagrama "racional" simplificado. En general el comportamiento en compresión, de probetas en laboratorio, tendrá un diagrama similar al mostrado en la figura 9-9, en donde se ha supuesto $\epsilon_o = 0.002$ y $\epsilon_{cu} = 0.003$.

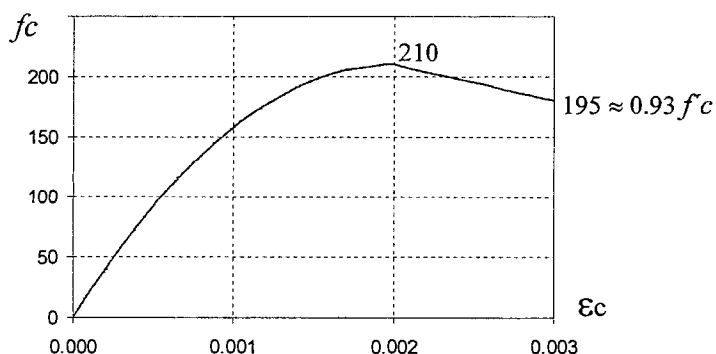


Fig. 9-9 Diagrama esfuerzo – deformación del concreto comprimido

Asumiremos, con cargo a verificación, que la falla de la sección se producirá por agotamiento del concreto comprimido y que al acero de refuerzo está en fluencia, esto conducirá a una falla dúctil de la sección. Bajo estas suposiciones el diagrama de esfuerzos y deformaciones en la sección será el indicado en la figura 9-10, admitiendo que el concreto en la zona comprimida de esta viga tiene el mismo valor (f_c) que el correspondiente concreto de la probeta de laboratorio.

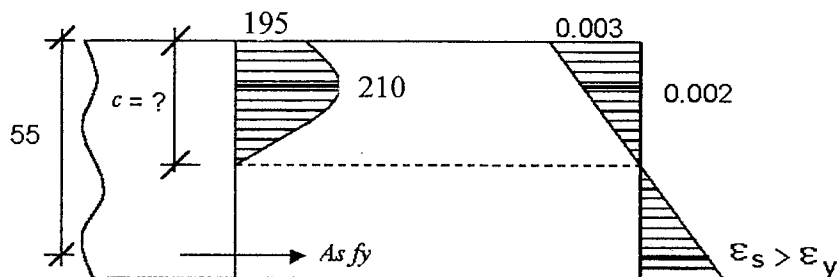


Fig. 9-10 Esfuerzos y deformaciones en la sección

Calcularemos la resistencia máxima de la sección (Mn) por tres caminos:

A) Para simplificar los cálculos necesarios para determinar el área debajo del diagrama de compresiones en el concreto, asumamos para el concreto un diagrama esfuerzo – deformación parabólico como el mostrado en la figura 9-11 con tangente horizontal en f_c , en el cual por simplicidad, se ha eliminado la rama descendente de la curva y se ha supuesto que la deformación de agotamiento del concreto comprimido se produce en $\epsilon_{cu} = \epsilon_o = 0.002$.

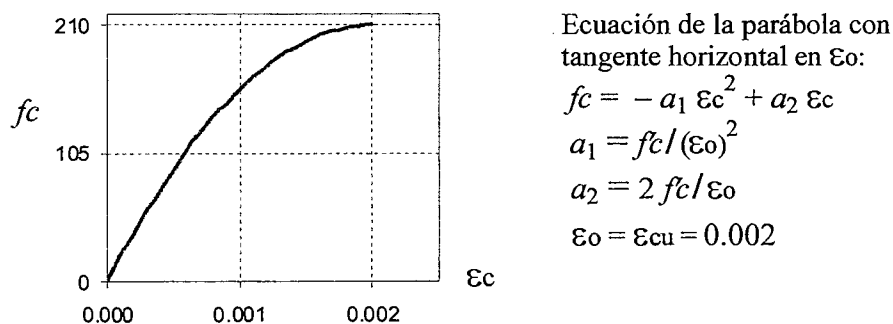


Fig. 9-11 Diagrama supuesto para el concreto en compresión

El diagrama de esfuerzos en el concreto y las resultantes de las fuerzas de compresión y tracción, se indica en la figura 9-12.

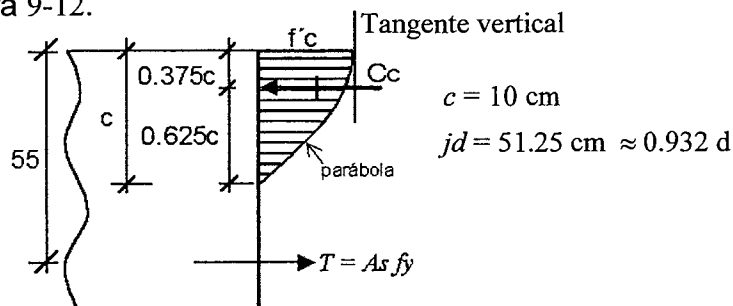


Fig. 9-12 Esfuerzos internos y fuerzas resultantes

Volumen de compresiones: $Cc \approx 2/3 c b f_c$

Tracción en el acero $T = A_s f_y = 10 \times 4,200 = 42,000 \text{ kg.}$

Equilibrio $Cc = T$ $2/3 c b f_c = A_s f_y \Rightarrow c = 10 \text{ cm}$

Resistencia Nominal de la sección (Σ Momentos respecto a Cc):

$$Mn = A_s f_y (jd) = 42,000 \times (55 - 0.375 \times 10) \approx 21,500 \text{ kg-m}$$

La verificación de la deformación en el acero, para comprobar su fluencia tal como se supuso inicialmente, se realiza con el diagrama de deformaciones de la figura 9-13.

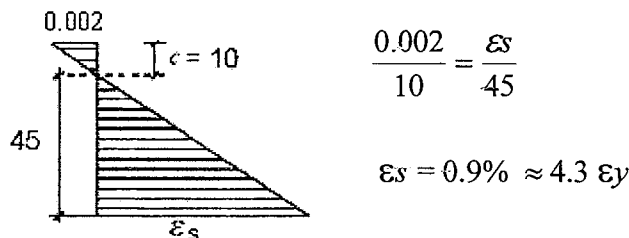


Fig. 9-13 Deformaciones en la sección

La curvatura de la sección cuando se alcanza la resistencia máxima es:

$$\phi_{\max} = \epsilon_c / c = 0.002 / 0.10 = 20 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

B) Si se adopta para el cálculo de M_n el diagrama "completo" para el concreto mostrado en la figura 9.9 y 9.10, tendremos:

Volumen de compresiones: $C_c = K_1 f'_c b c = 0.76528 (210) (30) c$ (ver Tabla 10-8)

Equilibrio: $C_c = T \quad 0.76528 (210) (30) c = A_s f_y = 42,000 \text{ kg} \Rightarrow c = 8.71 \text{ cm}$

Posición de la resultante de compresiones = $K_2 c = 0.40956 \times 8.71 \approx 3.57 \text{ cm}$ (ver Tabla 10-8)

$jd = 51.43 \text{ cm} \approx 0.935 d \quad M_n = 42,000 \times (55 - 3.57) \approx 21,600 \text{ kg-m} \quad \epsilon_s = 1.59\% \approx 7.6 \epsilon_y$

$\phi_{\max} = \epsilon_c / c = 0.003 / 8.71 \approx 34.4 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

C) Utilizando las fórmulas para calcular M_n , que se presentarán posteriormente en el Capítulo 10, deducidas a partir de las hipótesis de la Norma E.060.

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{10 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 30} = 7.84 \text{ cm} \quad c = \frac{7.84}{0.85} = 9.22 \text{ cm}$$

$jd = 51.08 \text{ cm} \approx 0.929 d \quad M_n = 42,000 \times (55 - 3.92) \approx 21,450 \text{ kg-m} \quad \epsilon_s = 1.49\% \approx 7.1 \epsilon_y$

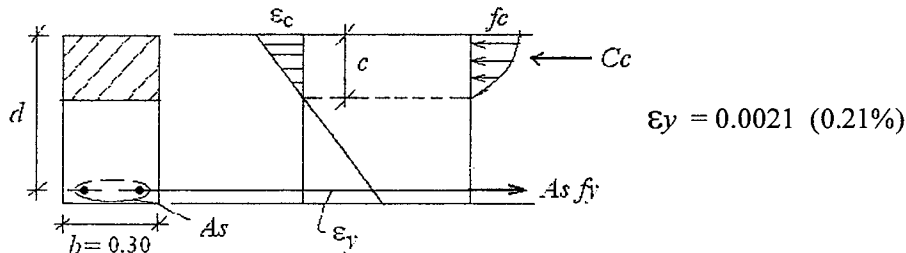
$\phi_{\max} = \epsilon_c / c = 0.003 / 9.22 \approx 32.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

9.3.5 Inicio de la Fluencia en el Acero

Un estado importante en el comportamiento de secciones de concreto armado, es el correspondiente al inicio de la fluencia del acero de refuerzo. Este estado precede al de la falla de la sección, calculado en el acápite anterior y se le asocia el momento de fluencia (M_f) y la curvatura de fluencia (ϕ_f). En secciones con falla en tracción (subreforzadas) marca el inicio del comportamiento inelástico de la sección.

Para el cálculo de este estado utilizaremos para el acero un diagrama elastoplástico perfecto como el mostrado en la figura 9-3 y para el concreto en compresión el diagrama de la figura 9-9. Utilizaremos las ecuaciones de equilibrio, relaciones constitutivas y compatibilidad de deformaciones en la sección (secciones planas).

- Estado de deformaciones y fuerzas internas en el inicio de la fluencia del acero:



- Compresión en el concreto asumiendo que la fluencia se produce para $\epsilon_c \leq 0.002$ (ver figura 9-11):

$$f_c = -a_1 \epsilon_c^2 + a_2 \epsilon_c \quad a_1 = f_c / (\epsilon_0)^2 \quad a_2 = 2 f_c / \epsilon_0$$

$$f_c = 210 \quad \epsilon_0 = 0.002 \quad a_1 = 52.5 \times 10^6 \quad a_2 = 0.21 \times 10^6$$

- Resultante de compresiones en el concreto (asumiendo $\epsilon_c < \epsilon_o$):

$$C_c = \int_0^c f_c(y) b dy = b \left(a_2 \frac{c}{2} \epsilon_c - a_1 \frac{c}{3} (\epsilon_c)^2 \right) = b c f'_c \left[\frac{\epsilon_c}{\epsilon_o} \right] \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_o} \right) \quad (1)$$

- Tracción total en el acero de refuerzo en el inicio de la fluencia ($\epsilon_s = \epsilon_y$):

$$T = A_s f_y = 42,000 \text{ kg}$$

- Compatibilidad:

$$\epsilon_c / c = \epsilon_y / (55 - c) \Rightarrow \epsilon_c = 0.0021 c / (55 - c) \quad (2)$$

- Equilibrio de la sección: $C_c = T = 42,000$ (3)

- Resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene:

$$c \approx 16.92 \text{ cm} \quad \epsilon_c \approx 0.000933 \quad f_c \approx 150 \text{ kg/cm}^2$$

- La curvatura de fluencia y el momento de fluencia son:

$$\phi_y = \epsilon_c / c \approx 5.51 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad M_y \approx 20.62 \text{ ton-m}$$

Para el cálculo del momento de fluencia es necesario determinar previamente la posición de la resultante de las compresiones en el concreto. La posición de la resultante se ubica aproximadamente a 5.9 cm del borde superior. La fuerza de compresión total en el concreto así como la posición de la resultante de compresiones, pueden determinarse con la ayuda de la Tabla 10-8 ó 10-9.

Alternativamente, el momento de fluencia puede calcularse por tanteos sobre la profundidad del eje neutro, es decir, se supone una posición del eje neutro, se calcula la compresión total en el concreto por integración o con la ayuda de la tabla 10-8. El objetivo de los tanteos es lograr el equilibrio de la sección, es decir $C_c = A_s f_y$.

La figura 9-14 muestra el diagrama momento – curvatura de la sección analizada en todo el intervalo de respuesta, es decir, desde el inicio del proceso de carga hasta el agotamiento total de su capacidad. Los puntos notables de este diagrama son tres: el agrietamiento de la sección (M_{cr}), el inicio de la fluencia en el acero (M_y) y el agotamiento o capacidad máxima (M_{max}).

Se nota que hasta el inicio de la fluencia el comportamiento es del tipo lineal con un salto en el instante de agrietamiento, luego de superado el momento de fluencia se inicia un comportamiento no lineal de la sección. La pendiente del primer tramo del diagrama corresponde al valor $E_c I_{tr}$, siendo I_{tr} el momento de inercia de la sección transformada no agrietada. La pendiente del segundo tramo corresponde, aproximadamente, al valor $E I_{cr}$, siendo I_{cr} el momento de inercia de la sección transformada agrietada. En el diagrama también se ha indicado, de manera aproximada, el punto correspondiente al momento flector bajo cargas de servicio ($M_{servicio}$), es evidente que bajo cargas de servicio, la sección debe encontrarse lejos de la fluencia del acero.

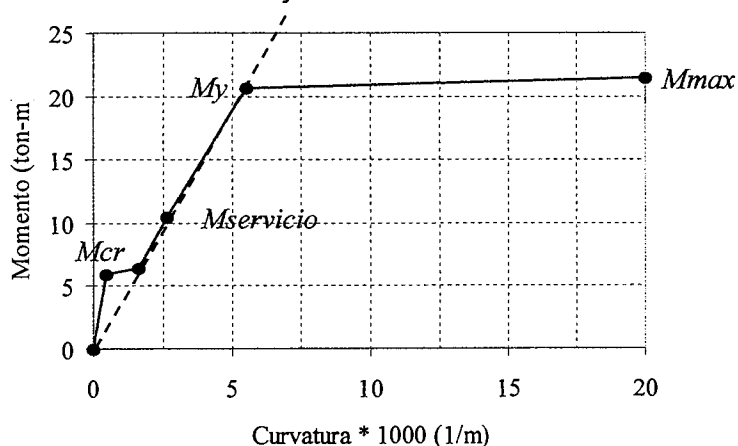


Fig. 9-14 Diagrama Momento – Curvatura de la sección

9.4 Sección Preesforzada

Analizaremos el comportamiento de la viga cuando se introduce en ella un preesfuerzo inicial mediante un cable o una barra no adherida al concreto.

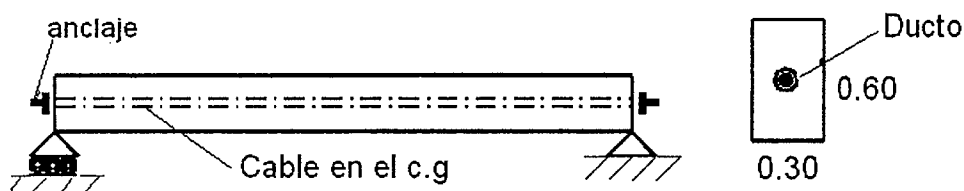
9.4.1 Preesfuerzo en el Centro de Gravedad de la Sección

Supongamos que antes de aplicar las cargas externas, colocamos a lo largo de la viga en el centroide de la sección, un cable no adherido de alta resistencia, de tal modo que permita aplicar una precompresión de 40 toneladas estables. La precompresión estable significa que a la fuerza inicial aplicada mediante un gato, se le han descontado las pérdidas provenientes, en este caso, del flujo plástico y la retracción del concreto y del embutimiento del anclaje.

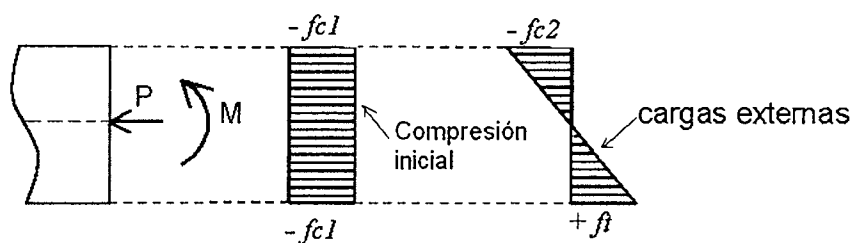
La fuerza estable de 40 ton producirá un esfuerzo de compresión en la sección de 22 kg/cm^2 aproximadamente, al cual se sumarán posteriormente los esfuerzos producidos por las cargas externas.

La situación que hemos planteado es una simplificación burda de lo que se llama el concreto precomprimido o preesforzado. Ciertamente un cable en el centro de gravedad no es lo más eficiente y un concreto de 210 kg/cm^2 es de resistencia demasiado baja para este tipo de construcción, sin embargo el ejemplo permitirá formarse una idea de lo que es el preesforzado.

Nuevamente asociaremos la falla de la viga al instante en el cual el esfuerzo de tracción (f_t) ocasionado por las cargas externas supere la resistencia en tracción por flexión del concreto (f_r), la falla, al no haber acero de refuerzo adherido, será frágil sin previo aviso.



Los esfuerzos en la sección central de la viga (la más esforzada) se obtendrán por superposición de los esfuerzos iniciales de compresión más los esfuerzos originados por las cargas externas:



$$S = \frac{bh^2}{6} = 18,000 \text{ cm}^3$$

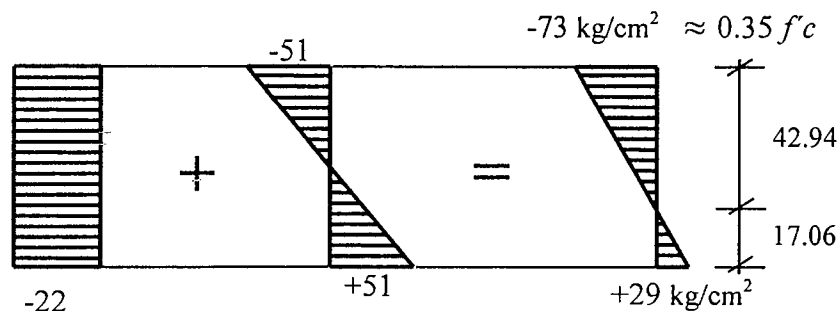
$$\frac{Mv}{Ig} = \frac{M}{S} = 29 + 22 = 51 \cdot \text{kg/cm}^2$$

$$fc1 = \frac{40,000}{30 \times 60} = -22 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = 51 \times 18,000 \approx 9,200 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$f_t = \frac{Mv}{Ig} - \frac{P}{Ag} = +29 \text{ kg/cm}^2$$

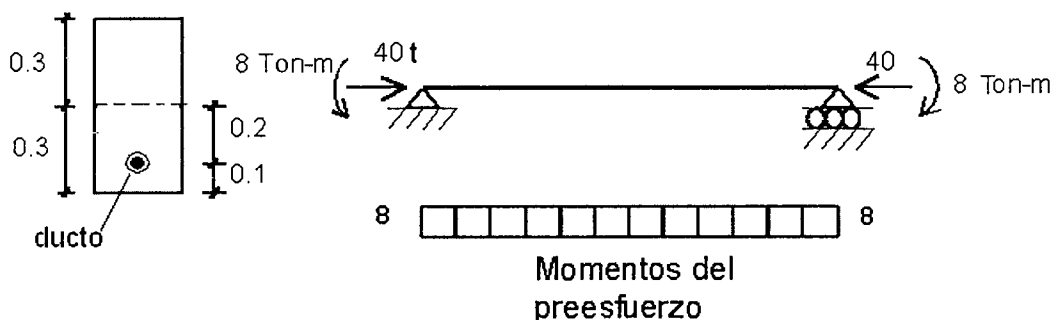
En consecuencia el momento de agrietamiento de la sección, asociado a una falla frágil, será 9,200 kg-m. Los esfuerzos en la sección en el instante del agrietamiento son:



La presencia de la precompresión, como era de esperar, ha modificado el momento de agrietamiento y en consecuencia la resistencia de la sección, de 5,220 (caso de la viga sin ningún refuerzo) a 9,200 kg-m, lo que equivale a un incremento en la capacidad de la viga del 75% aproximadamente. Nótese que en los cálculos no se ha considerado ningún coeficiente de seguridad.

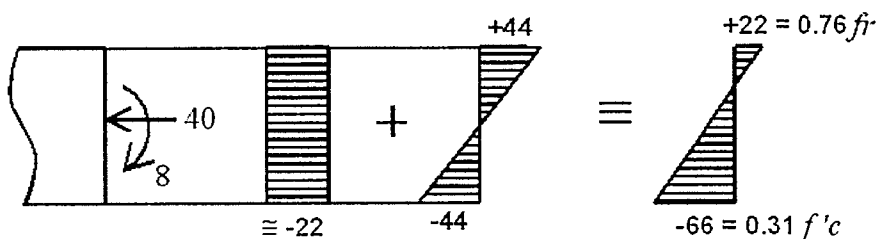
9.4.2 Cable de Preesfuerzo Excéntrico

Analicemos nuevamente la viga para las mismas 40 toneladas de preesfuerzo inicial, con la diferencia de que el cable recto no adherido se coloca 0.20 m por debajo del centroide de la sección. En esta situación además de la fuerza axial, tendremos un momento flector producido por la excentricidad del cable de $40 \times 0.2 = 8$ ton-m, tal como se indica en la figura a continuación:

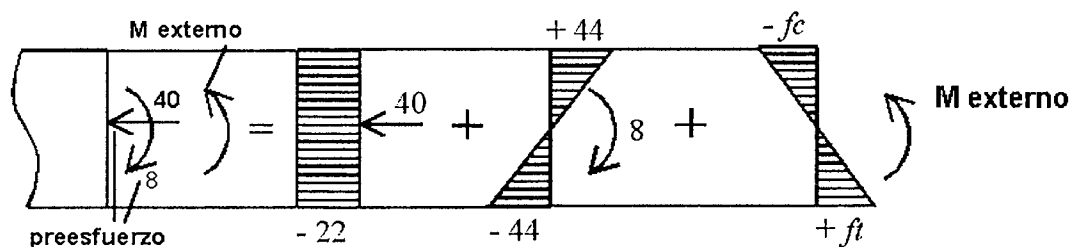


Será necesario investigar los esfuerzos en la sección cercana a los apoyos, donde la flexión originada por las cargas externas es nula, y en la sección central de máximo momento positivo.

Sección del apoyo:



Sección central:



Esfuerzos en la sección central de la viga:

- 1) $-22 + 44 - fc \leq 0.45 f'_c$ fibra superior
- 2) $-22 - 44 + ft \leq 29 \cdot \text{kg/cm}^2$ fibra inferior

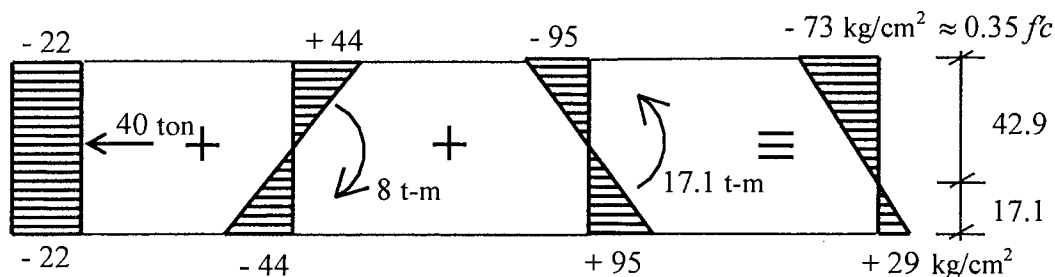
De 1) $-22 + 44 - fc = 0.45 \times 210 \approx -95$ $fc = -117 \text{ kg/cm}^2$

De 2) $-22 - 44 + ft = 29$ $ft = +95 \text{ kg/cm}^2$

La compresión en la fibra superior (primera desigualdad) se ha verificado asumiendo un esfuerzo admisible en el concreto equivalente a $0.45 f'_c$.

La condición que controla es la segunda, es decir la resistencia en tracción por flexión del concreto. El momento externo máximo que es posible aplicar a la sección central de la viga es: $M_{max} = ft S = 95 \times 18,000 = 17,100 \text{ kg-m}$. Esta intensidad del momento externo causará el agrietamiento por flexión de la sección y en consecuencia, para este caso particular, la falla de la viga.

Para concluir, verifiquemos los esfuerzos en la sección central de la viga para un momento externo aplicado de 17.1 ton-m.

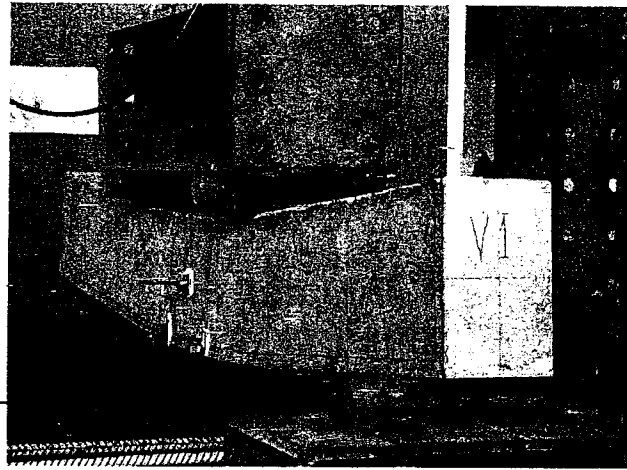


9.5 Lecturas

- 9.1 Capítulo 18 (Concreto Preesforzado) del libro Diseño de Concreto Reforzado. Quinta Edición. McCorman. Editorial Alfaomega.
- 9.2 Concreto Pretensado: Algunos Conceptos Fundamentales. Héctor Gallegos. Revista El Ingeniero Civil.
- 9.3 Capítulo 1 (Development of Prestressed Concrete) del libro Design of Prestressed Concrete Structures. Third Edition. T.Y. Lin, Ned Burns. Wiley.

CAPITULO 10

Flexión Simple



10.1 Introducción

Analicemos, a manera de introducción, el comportamiento de la viga doblemente empotrada mostrada en la figura 10-1. Las cargas estáticas se incrementan desde cero hasta el colapso o agotamiento de la viga. Se muestra la curva carga – deflexión al centro de la viga para dos tipos de comportamiento: frágil y dúctil.

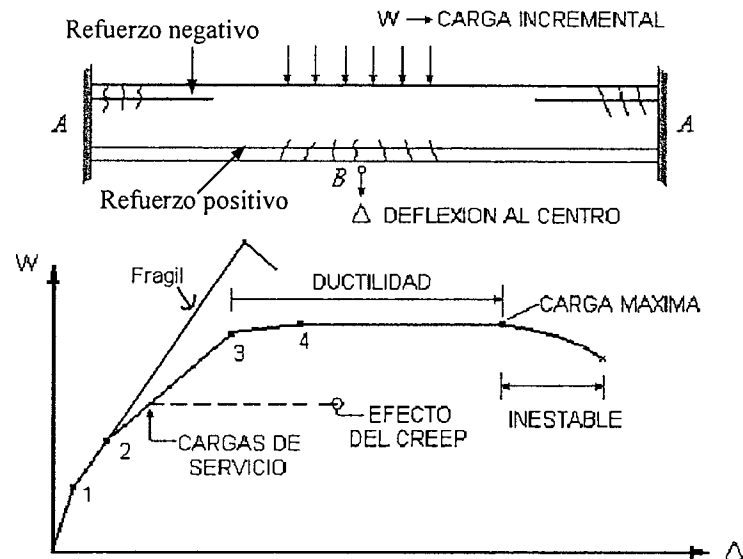


Fig. 10-1 Viga doblemente empotrada. Geometría y curva carga – desplazamiento al centro.

Los puntos notables de la curva carga – desplazamiento al centro de la viga si el comportamiento es dúctil, son:

- Punto 1 Agrietamiento en los extremos (empotramientos A)
- Punto 2 Agrietamiento al centro (zona central B)
- Punto 3 Inicio fluencia del acero negativo (empotramientos A)
- Punto 4 Inicio fluencia del acero positivo (zona central B)

La distancia entre los puntos 3 y 4 dependerá de las armaduras positivas y negativas que se hayan colocado. Si los aceros colocados son "exactos" es decir si corresponden exactamente con el diagrama de momentos elástico, se producirá la fluencia simultánea de las secciones A y B, es decir los puntos 3 y 4 coincidirán.

Si los aceros colocados difieren de los requeridos a partir de la distribución elástica de los momentos flectores (mayores o menores a los asociados al diagrama de momentos) se producirá un corrimiento de los puntos 3 y/o 4. Este corrimiento se denomina

redistribución de momentos y es posible solamente si las secciones tienen capacidad de rotación inelástica. De manera similar, la amplitud de la zona de comportamiento inelástico dependerá de la ductilidad disponible.

Bajo cargas de servicio la viga se encontrará probablemente entre los puntos 2 y 3 del diagrama anterior, es decir es probable que las secciones de máximo momento positivo y negativo se hayan agrietado, sin embargo la viga, si está bien diseñada, se encuentra lejos del inicio de la fluencia de las armaduras. Bajo cargas de servicio sostenidas, las deflexiones aumentan en el tiempo sin un aumento en la carga externa, los responsables de este fenómeno son la retracción y el flujo plástico (creep) del concreto.

A continuación se presenta la metodología para el análisis de los esfuerzos en el concreto y el acero producidos por la flexión, bajo cargas de servicio. Debe quedar claro que esta metodología sirve únicamente para verificar los Estados Límites de Servicio de un elemento estructural (fisuración, deflexiones) no es aplicable al Diseño por Resistencia (estado límite último de rotura o agotamiento de una sección).

10.2 Comportamiento Elástico en Flexión

Presentaremos el comportamiento elástico de secciones de concreto armado únicamente como una herramienta para el análisis de secciones bajo cargas de servicio. Con esta herramienta podremos investigar los esfuerzos en el acero de refuerzo y en el concreto cuando el elemento se encuentra en condiciones de servicio. No utilizaremos esta metodología para diseñar, el diseño por esfuerzos admisibles, tal como se mencionó en las secciones 7.4 y 7.5 ya no se utiliza. Bajo cargas de servicio la deformación del concreto comprimido está lejos de la deformación de agotamiento (ϵ_{cu}) así mismo el esfuerzo en el acero está lejos de la fluencia.

Existen tres estados posibles bajo condiciones de servicio, estos son:

- Sección no agrietada.
- Sección parcialmente agrietada.
- Sección completamente agrietada.

Estudiaremos solo el primer y tercer estado. El segundo estado si bien es el que más se presenta en la realidad bajo condiciones de servicio, no lo abordaremos ya que para su estudio es necesario considerar la resistencia en tracción del concreto, resistencia que normalmente se desprecia en los cálculos o que es difícil incluir ya que necesitaríamos conocer las leyes constitutivas para el comportamiento del concreto en tracción, en todo caso, el considerar que la sección se encuentra completamente agrietada, suele ser conservador cuando se evalúan los esfuerzos bajo cargas de servicio en una sección agrietada por flexión.

10.2.1 Sección Transformada No Agrietada

Permite calcular los esfuerzos (análisis) en el concreto y en el acero cuando la sección no se ha agrietado por flexión. En la figura 10-2 se muestra una sección rectangular con armaduras en tracción y compresión, se muestra el estado de deformaciones y esfuerzos así como la sección transformada no agrietada correspondiente.

La posición del eje neutro se obtiene calculando los momentos de primer orden de las áreas con respecto al eje neutro:

$$b h (c - 0.5 h) + (n - 1) A' s (c - d') = (n - 1) A s (d - c) \quad (10-1)$$

El momento de inercia de la sección transformada no agrietada se obtiene mediante:

$$I_{tr} = 1/3 b c^3 + 1/3 b (h - c)^3 + (n - 1) A' s (c - d')^2 + (n - 1) A s (d - c)^2 \quad (10-2)$$

Los esfuerzos en el concreto y en el acero vienen dados por las fórmulas clásicas estudiadas en Resistencia de Materiales para las vigas de dos materiales, estas son:

$$f_c = \frac{M c}{I_{tr}} \quad (10-3)$$

$$f_s = \frac{n M (d-c)}{I_{tr}} \quad (10-5)$$

$$f_t = \frac{M (h-c)}{I_{tr}} \quad (10-4)$$

$$f'_s = \frac{n M (c-d')}{I_{tr}} \quad (10-6)$$

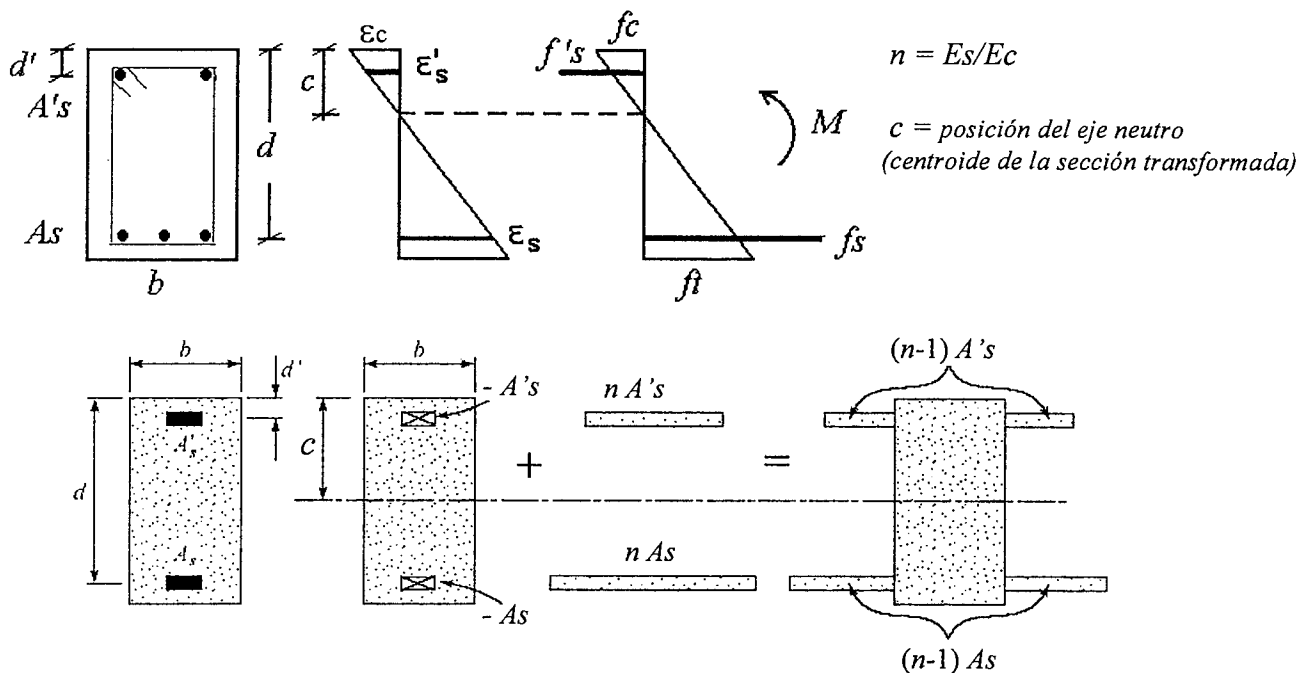


Fig. 10-2 Sección transformada no agrietada.

10.2.2 Sección Transformada Agrietada

Cuando el esfuerzo de tracción por flexión supera la resistencia del concreto, se supone que la sección se agrieta completamente. En la realidad, la sección bajo cargas de servicio, no llega a agrietarse completamente. El agrietamiento "completo" sucede para momento flectores cercanos a los que producen la primera fluencia del acero en tracción, sin embargo asumiremos por simplicidad, tal como se mencionó en 10.2, agrietamiento completo del concreto desde la parte inferior (para flexión positiva) hasta el eje neutro.

Para ubicar la posición del eje neutro - c - (figura 10-3) es necesario resolver una ecuación cuadrática, que proviene de calcular los momentos de primer orden de las áreas con respecto al eje neutro:

$$b c^2/2 + (n - 1) A'_s (c - d') = (n) A_s (d - c) \quad (10-7)$$

Ubicado el eje neutro se calcula el momento de inercia de la sección agrietada transformada - I_{cr} - y los esfuerzos en el acero y concreto mediante:

$$I_{cr} = 1/3 b c^3 + (n - 1) A'_s (c - d')^2 + n A_s (d - c)^2 \quad (10-8)$$

$$f_c = \frac{M c}{I_{cr}} \quad (10-9)$$

$$f_s = \frac{n M (d - c)}{I_{cr}} \quad (10-10)$$

$$f'_s = \frac{n M (c - d')}{I_{cr}} \quad (10-11)$$

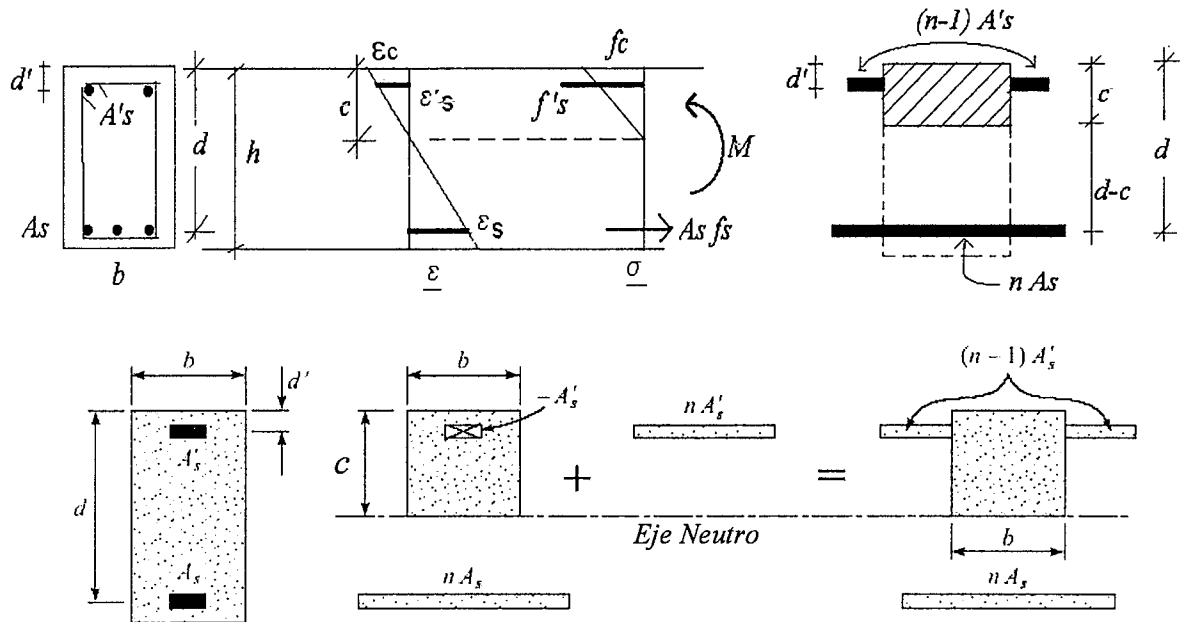


Fig. 10-3 Sección transformada agrietada.

En el caso de secciones T con el ala en compresión, existen dos posibilidades para el análisis de los esfuerzos utilizando la sección transformada agrietada. La primera posibilidad es que el eje neutro esté dentro del espesor del ala, en este caso la sección se analiza como si fuera rectangular con una ancho igual al del ala ($b = b_f$). La segunda posibilidad es que el eje neutro esté en el alma, esta segunda posibilidad es la que se presenta en la figura 10-4.

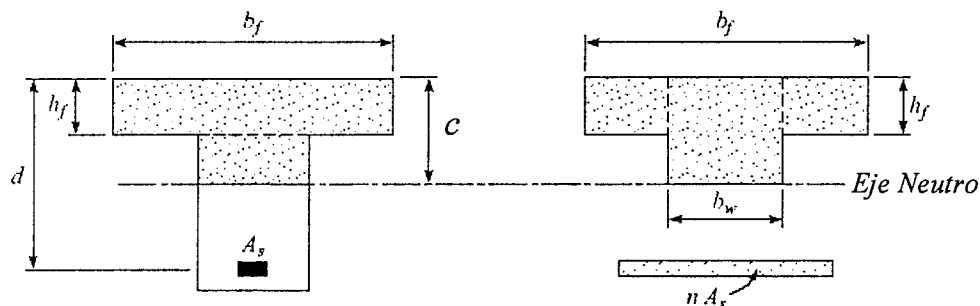


Fig. 10-4 Sección T transformada agrietada. Eje neutro en el alma.

La posición del eje neutro en secciones T con el eje neutro en el alma, se obtiene calculando los momentos de primer orden de las áreas con respecto al eje neutro:

$$(b_f - b_w) h_f (c - 0.5 h_f) + b_w c^2 / 2 = n A_s (d - c) \quad (10-12)$$

El momento de inercia de la sección transformada agrietada se obtiene mediante:

$$I_{cr} = 1/12 b_f (h_f)^3 + b_f h_f (c - 0.5 h_f)^2 + 1/3 b_w (c - h_f)^3 + n A_s (d - c)^2 \quad (10-13)$$

10.2.3 Esfuerzos Máximos bajo Cargas de Servicio

Cualquiera sea la forma de la sección, bajo cargas de servicio el esfuerzo en el concreto no debería exceder de $0.5 f_c$ aproximadamente. Por encima de este valor la suposición implícita, para concretos de resistencia normal, que el concreto se comporta linealmente para el cálculo de los esfuerzos utilizando la sección agrietada transformada, es cuestionable.

El esfuerzo en el acero de tracción no debería superar de alrededor del 60% de f_y , en caso contrario es probable que se produzca un fuerte agrietamiento por tracción en la sección, agrietamiento que podría ser incompatible con los estados límites de servicio.

Es necesario anotar, que bajo cargas sostenidas, el creep o flujo plástico del concreto, produce un aumento importante en el esfuerzo del acero de compresión f_s . Para tomar en cuenta este efecto, diversos autores proponen transformar el acero en compresión mediante una *relación modular* modificada equivalente a $(2n - 1)A_s$ con lo cual el esfuerzo en el acero de compresión se duplica.

10.2.4 Deducción de la Sección Transformada Agrietada

La determinación de los esfuerzos en el concreto y en el acero presentada en 10.2.2 está basada en el cálculo de las propiedades de la sección transformada agrietada (I_{cr}). Este concepto no debería ser nuevo para el lector ya que se estudia en Resistencia de Materiales para el caso de vigas hechas de varios materiales.

A continuación se presenta la deducción de las expresiones para el cálculo de los esfuerzos en una sección agrietada, sin utilizar la sección transformada. Para ello haremos uso de las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas.

a) Secciones Rectangulares sin Acero en Compresión

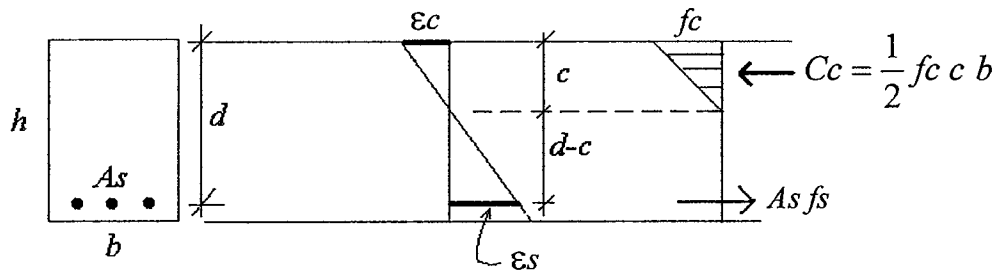


Fig. 10-5 Sección agrietada, deformaciones y esfuerzos

La ecuación de equilibrio ($C_c = A_s f_s$) no es suficiente para determinar la profundidad del eje neutro, adicionalmente es necesario utilizar las condiciones de compatibilidad y las relaciones constitutivas. Con referencia a la figura 10-5, que muestra una sección rectangular de concreto armado sin acero en compresión, y suponiendo que la sección se encuentra “completamente” agrietada, tendremos:

(1) Compatibilidad (secciones permanecen planas): $\frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d - c}$

(2) Relaciones Constitutivas: $f_s = E_s \epsilon_s$ $f_c = E_c \epsilon_c$

(3) Equilibrio: $1/2 (f_c c b) = A_s f_s$

(1) y (2) en (3) $\frac{1}{2} E_c \frac{\epsilon_s c}{d - c} c b = A_s E_s \epsilon_s$ (5)

La ecuación cuadrática anterior permite determinar la profundidad del eje neutro. Se puede simplificar si introducimos las siguientes definiciones:

Definimos: $n =$ Relación modular $\rho =$ Cuantía de acero en tracción

$$\frac{E_s}{E_c} = n \quad A_s = \rho b d \quad c = kd$$

Remplazando en (5) Se obtiene:

$$k^2 + 2 \rho k n - 2 \rho n = 0$$

$$k = \frac{\sqrt{(\rho n)^2 + 2 \rho n} - \rho n}{\rho n} \quad c = k d \quad (10-14)$$

La ecuación 10-14 permite calcular la posición del eje neutro y es completamente análoga al cálculo del centroide de la sección agrietada transformada. Es aplicable únicamente a vigas rectangulares sin acero en compresión.

Ubicado el eje neutro, los esfuerzos en el concreto y en el acero se pueden calcular utilizando las ecuaciones 10-9 y 10-10. Sin embargo, tiene más sentido físico y es más rápido analizar el equilibrio de la sección, tal como se presenta en la figura 10-6.

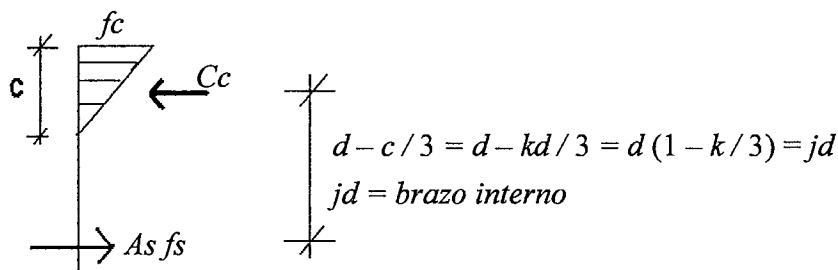


Fig. 10-6 Fuerzas internas en la sección agrietada.

Por conveniencia se define el brazo interno de palanca, es decir la distancia entre la resultante de las compresiones y la resultante de las tracciones mediante el término jd .

$$d - \frac{kd}{3} = jd \quad \underline{c = kd}$$

$$As fs(d - \frac{c}{3}) = M \rightarrow As fs(jd) = M$$

$$\underline{fs = \frac{M}{As(jd)}} \quad (10-15)$$

$$Cc = \frac{1}{2} fc bc = \frac{1}{2} fc b(kd)$$

$$Cc = As fs \rightarrow As fs = \frac{1}{2} fc b(kd)$$

$$\underline{fc = \frac{2As fs}{b(kd)} = \frac{2As fs}{bc}} \quad (10-16)$$

Otra forma de calcular fc :

$$Cc(jd) = M \rightarrow \frac{1}{2} fc b(kd)(jd) = M$$

$$\underline{fc = \frac{2M}{b j k d^2}} \quad (10-17)$$

Es ilustrativo determinar el rango de variación del brazo interno de palanca jd en una sección rectangular sin acero en compresión. La tabla a continuación muestra el rango de variación para dos calidades del concreto y para cuantías de refuerzo bajas y altas.

Concreto	n (aprox)	Cuantía	Valor de j
210	9	0.2%	0.942
		2.0%	0.851
280	8	0.2%	0.945
		2.0%	0.857

Es claro que a diferencia de la cuantía del acero en tracción (ρ), la calidad del concreto no tiene mucha influencia en el valor de j . Un valor razonable para cálculos rápidos y cuantías de acero normales es $j = 0.9$.

b) Secciones Rectangulares con Acero en Compresión

La demostración es totalmente análoga a la presentada para secciones sin acero en compresión y se deja como ejercicio para el lector. Con la relación a la figura 10-7, es posible demostrar que la posición del eje neutro viene dada por la ecuación 10-18.

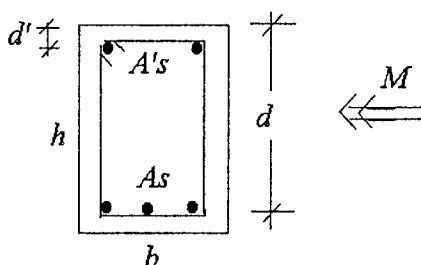


Fig. 10-7 Sección agrietada con acero en compresión.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \rho' = \frac{A's}{bd} \quad c = kd \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$k = \frac{[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2(\rho + \rho' \frac{d'}{d}) n]^{1/2} - (\rho + \rho') n}{n} \quad (10-18)$$

La expresión 10-18 ignora el área de concreto desplazada por el acero en compresión; este efecto suele ser despreciable. Tampoco toma en cuenta el posible aumento en el esfuerzo en el acero en compresión por efecto del creep ($2n$).

Las ecuaciones presentadas permiten estimar los esfuerzos en el acero y en el concreto bajo condiciones de servicio. Estas suponen comportamiento elástico del concreto bajo cargas de servicio y eran empleadas para el diseño por Esfuerzos Admisibles.

10.3 Análisis y Diseño de Secciones en Flexión (Diseño por Resistencia)

El diseño que se emplea hoy en día en las estructuras de concreto armado es el denominado Diseño por Resistencia, sus siglas en Inglés son: USD, LFRD, SDM cuyos significados ya se han explicado en el Capítulo 7.

La ecuación básica para el *Diseño por Resistencia* es:

$$\text{Resistencia} \geq \text{Efecto de las Cargas}$$

Ecuación que, para el caso particular de las solicitaciones de flexión simple, se convierte en:

$$\phi Mn \geq Mu \quad \phi = 0.9$$

- Calculada sobre la base de: $f'c$, fy , As , dimensiones.
 - Para su determinación se utilizan las ecuaciones de análisis (SDM).

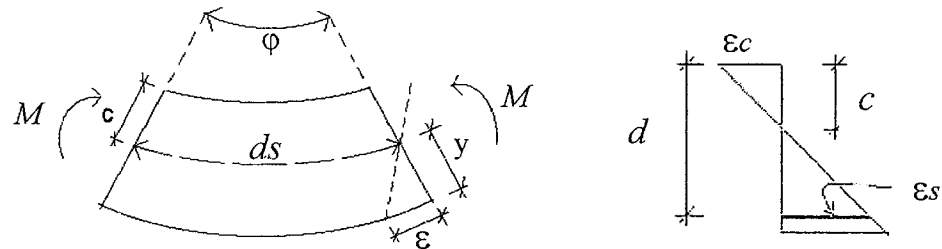
- Resistencia Requerida
 - Efecto de las cargas factorizadas. Su magnitud proviene del análisis estructural

Cualquiera sea el método de análisis o diseño utilizado, siempre se deberán cumplir los tres "bloques" fundamentales de condiciones:

- Equilibrio
- Compatibilidad
- Relaciones Constitutivas ($\sigma - \epsilon$)

10.3.1 Relaciones Momento - Curvatura de una Sección

Para las secciones de concreto armado utilizaremos la definición clásica de curvatura. Esta se estudia en Resistencia de Materiales y se ilustra en la figura 10-8.



$$\phi = \text{Curvatura} = \frac{\epsilon}{y} = \frac{\epsilon c}{c} = \frac{\epsilon s}{d - c}$$

Fig.10-8 Curvatura de una sección.

10.3.2 Comportamiento de una Viga en Flexión con Falla Dúctil

Para visualizar las distintas etapas en el comportamiento de un elemento de concreto armado en flexión simple, desde cargas externas muy bajas hasta la rotura o agotamiento, se presentan los resultados de un ensayo a escala natural de una viga ensayada en el Laboratorio de Estructuras de la PUCP.

La figura 10-9 resume las principales características geométricas de la viga, la sección transversal es de 0.20x0.40 m con refuerzo inferior únicamente consistente en 2-5/8" y sin estribos. La viga es esbelta (esbeltez geométrica $4.8/0.4 = 12$). Las cargas externas, en este caso concentradas, están aplicadas a los tercios, de tal modo que el tercio central de la viga se encuentra en flexión pura (fuerza cortante nula). El concreto es de $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ (medido en probetas cilíndricas estándar) y el acero de refuerzo de $f_y = 4,500 \text{ kg/cm}^2$, medido en ensayos de tracción.

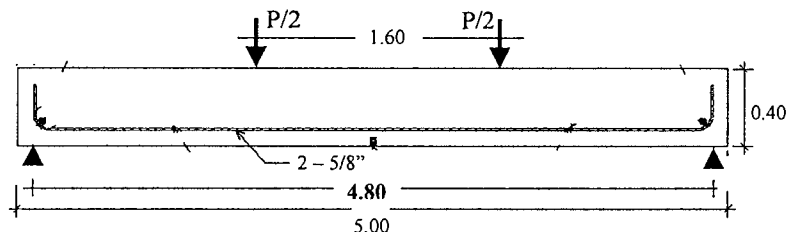


Fig. 10-9 Geometría y refuerzo de la viga

La figura 10-10 muestra la "respuesta" de la viga medida en el ensayo, en términos de carga vertical versus deflexión al centro. Se notan claramente tres etapas en el comportamiento o respuesta: la etapa elástica previa a la fisuración del concreto hasta los 2,000 kg aproximadamente, la etapa elástica hasta el inicio de la fluencia en el acero (alrededor de 7,000 kg) y finalmente la etapa inelástica, posterior a la fluencia del acero de tracción. Para esta viga la última etapa es bastante extendida debido al comportamiento dúctil logrado sobre la base de la baja cuantía del acero de refuerzo colocado (25% de la cuantía balanceada) y por que no se produjo la falla por cortante. La ductilidad de desplazamiento observada es cercana a 7.

Cabe mencionar que de acuerdo a las hipótesis del ACI para el análisis de secciones en flexión (las que se presentarán posteriormente), la resistencia nominal es 6,000 kg-m aproximadamente, resistencia a la cual le corresponde una carga externa de 7,500 kg. En la figura 10-10 se puede ubicar esta intensidad de la carga externa y se nota que luego de este valor la carga externa siguió aumentando, esto se debe al endurecimiento del acero de refuerzo.

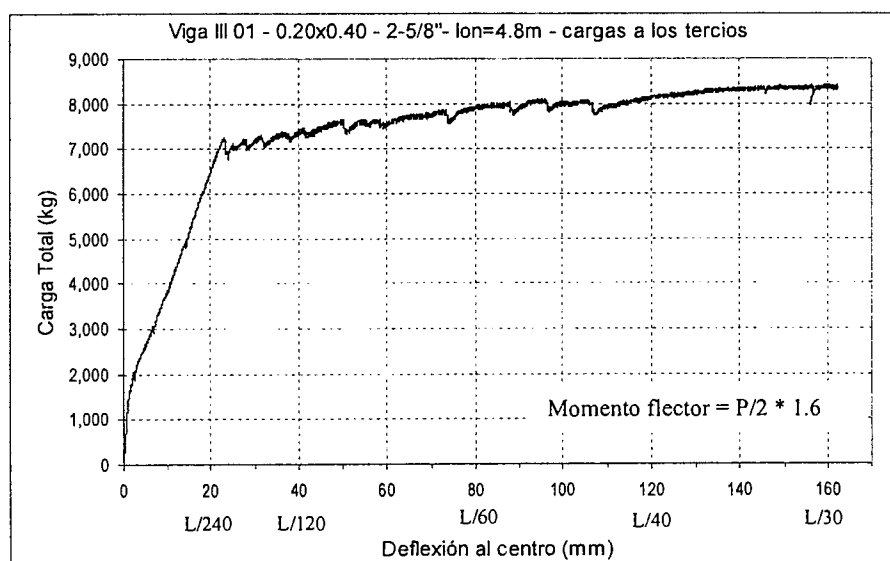


Fig. 10-10 Respuesta de la viga (Carga – deflexión al centro)

La figura 10-11 muestra la porción central de la viga donde se aprecia la falla en el bloque de concreto comprimido por agotamiento de su capacidad de deformación. No se produjo fractura por tracción en el acero de refuerzo.

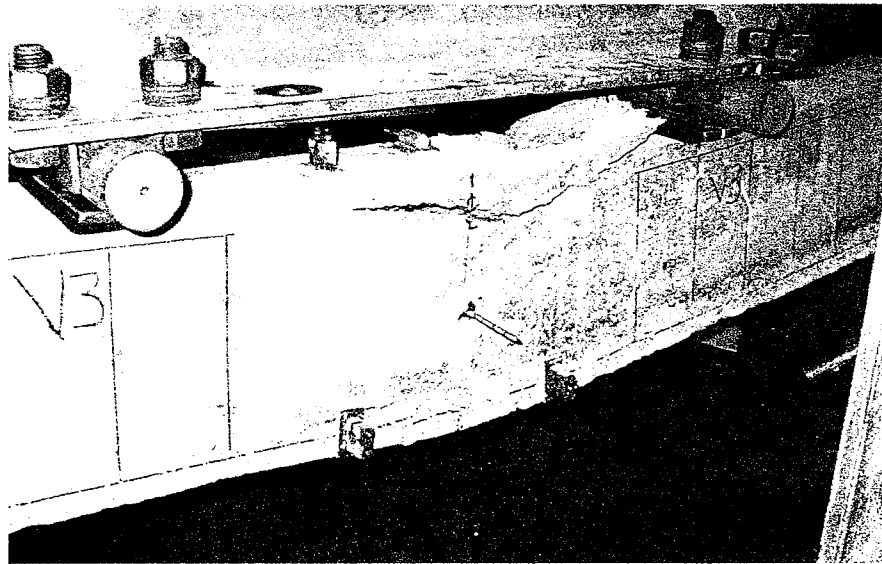


Fig. 10-11 Falla del bloque de concreto comprimido.

La figura 10-12 muestra el comportamiento de la sección central de la viga, al nivel de deformaciones y esfuerzos, bajo un momento flector $-M$ de magnitud creciente. En esta figura, el estado de deformaciones y esfuerzos designado como 1 corresponde a la sección antes del agrietamiento por tracción del concreto. El estado 2 corresponde a la sección agrietada antes de la fluencia del acero y normalmente será el estado en el que se encontrará la viga bajo cargas de servicio. El estado 3 corresponde al inicio de la fluencia del acero y finalmente el 4 a un estado cercano a la falla de la sección.

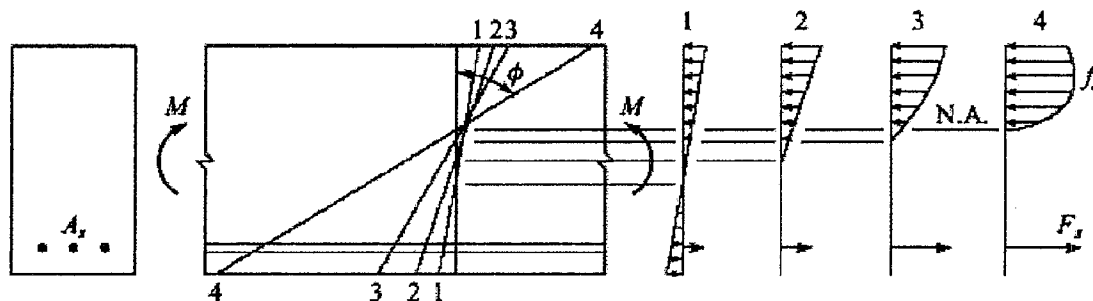
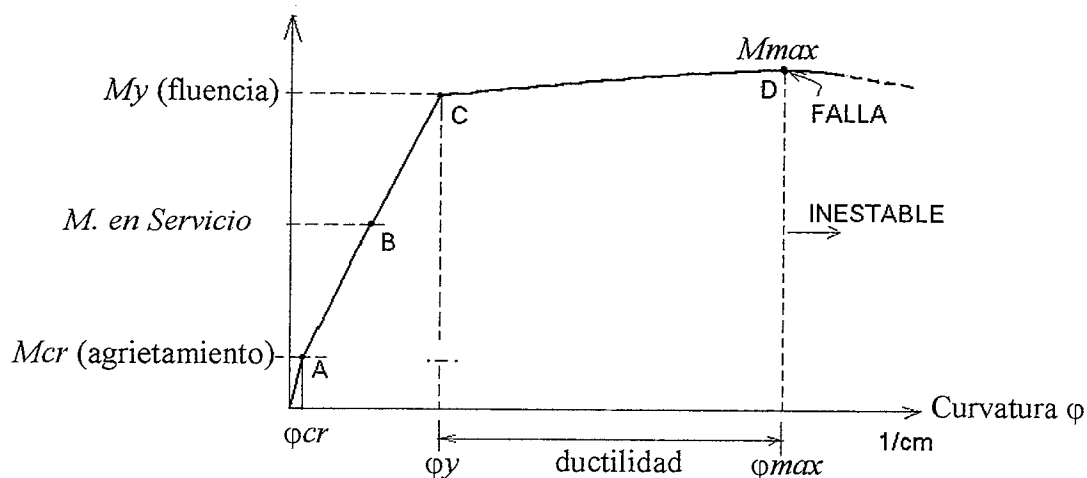


Fig. 10-12 Deformaciones y esfuerzos en la sección central de la viga

Otra manera de describir completamente el comportamiento de una sección de concreto armado, es a través de su Diagrama Momento – Curvatura ($M - \phi$) el cual tendrá, por lo general, una forma similar a la que se muestra en la figura 10-13. Se ha aprovechado esta figura para ilustrar la definición de la Ductilidad de Curvatura de una sección (μ). Esta se define a través del cociente entre la curvatura máxima o última (ϕ_{max}) y la curvatura donde se inicia la fluencia del refuerzo (ϕ_y) y es una medida de la ductilidad de la sección, es decir de la capacidad de deformarse en el rango inelástico.

Es interesante anotar que si bien el concreto simple no tiene por si mismo un comportamiento dúctil, una viga o sección de concreto armado adecuadamente diseñada y detallada puede exhibir niveles altos de ductilidad. El nivel de ductilidad se puede medir a través de la *ductilidad de curvatura de la sección*.



$$\text{Ductilidad de curvatura} = \mu = \phi_{max} / \phi_y$$

Fig. 10-13 Diagrama Momento – Curvatura de una sección

Algunas observaciones relativas a la figura 10-13.

- El Punto A (estado 1 de la figura 10-12) corresponde al agrietamiento de la sección, es decir cuando se excede la resistencia en tracción del concreto. Los esfuerzos de tracción en el concreto se transfieren totalmente al acero. De allí en adelante se supone que el concreto en tracción no aporta nada a la resistencia en flexión de la sección. La rigidez de la sección hasta el punto A se puede calcular utilizando el momento de inercia grueso de la sección ($E_c I_g$).
- El Punto B (estado 2 de la figura 10-12) corresponde a:
 - Comportamiento bajo cargas de servicio.
 - Diseño por esfuerzos admisibles.
 - Variación de los esfuerzos en el concreto aproximadamente lineal. Acero elástico, por debajo del esfuerzo de fluencia f_y .
 - Grietas de ancho pequeño de aproximadamente 0.1 mm o menos.
 - Deflexiones pequeñas, generalmente menores de 1/350 de la luz.
- El Punto C (estado 3 de la figura 10-12) corresponde al inicio de la fluencia en el acero de tracción.
- El Punto D (estado 4 de la figura 10-12) corresponde a:
 - Diseño por resistencia o estado límite.
 - Grietas anchas.
 - Deflexiones importantes $\approx 1/60$ de la luz.

La rigidez del tramo AC se puede estimar utilizando el momento de inercia de la sección agrietada transformada ($E_c I_{cr}$). A partir del punto C la rigidez de la sección se reduce de manera importante.

El Punto D está asociado con la resistencia máxima o última de la sección (M_{max}) y corresponde al *Diseño por Resistencia*. Una viga o sección alcanza su máxima capacidad cuando la pendiente del diagrama $M - \phi$ es horizontal (Punto D). La falla ocurre cuando la pendiente se vuelve negativa, que corresponde a una situación en la cual la estructura se convierte en inestable ya que las deformaciones aumentan y la carga decrece.

Veremos posteriormente que una de las variables más importantes que condiciona la ductilidad de curvatura de una sección, es la cantidad de armadura de refuerzo en tracción. Las Normas establecen las máximas armaduras de refuerzo para los elementos en flexión, con la finalidad de lograr un comportamiento dúctil del elemento.

10.3.3 Hipótesis para el Análisis y Diseño por Flexión

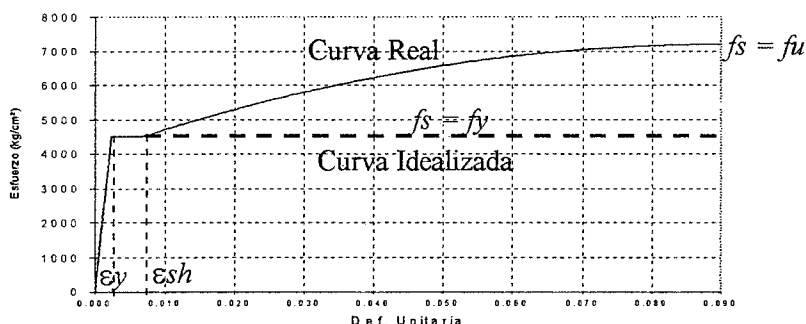
a) Hipótesis Básicas

- a1) Las secciones planas permanecen planas (Hipótesis de Navier). Esta hipótesis se cumple en vigas esbeltas, deja de tener validez en vigas de gran peralte o *vigas pared*. Experimentalmente se ha encontrado que cuando $l/h < 4$ (l = luz, h =peralte), deja de cumplirse la hipótesis de Navier. La Norma E.060 utiliza esta misma relación de luz a peralte para definir a las vigas pared (Art. 11.8).
- a2) Adherencia. No hay deslizamiento entre el acero y el concreto que lo rodea. Las deformaciones en el acero y en el concreto circundante son iguales.
- a3) Se puede despreciar la resistencia en tracción del concreto en los cálculos de la resistencia de una sección.
- a4) Los esfuerzos en el concreto y en el acero pueden ser calculados a partir de las deformaciones utilizando las relaciones constitutivas (σ - ϵ) del acero y del concreto

Con las cuatro hipótesis anteriores es posible determinar la resistencia en flexión de cualquier sección de concreto armado, siempre que el elemento sea esbelto. Sin embargo, las Normas suelen introducir hipótesis adicionales, que las podemos llamar simplificadoras, las cuales, como su nombre lo indica, permiten simplificar las ecuaciones para el análisis y el diseño.

b) Hipótesis Simplificadoras (Para el análisis y el diseño)

- b1) El diagrama constitutivo del acero de refuerzo se puede suponer elastoplástico, como se ilustra a continuación.



$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_y = 0.0021 \text{ (para } f_y = 4,200)$$

$$\epsilon_y = 0.0014 \text{ (para } f_y = 2,800)$$

$$\epsilon_{sh} = \text{Inicio del endurecimiento por deformación}$$

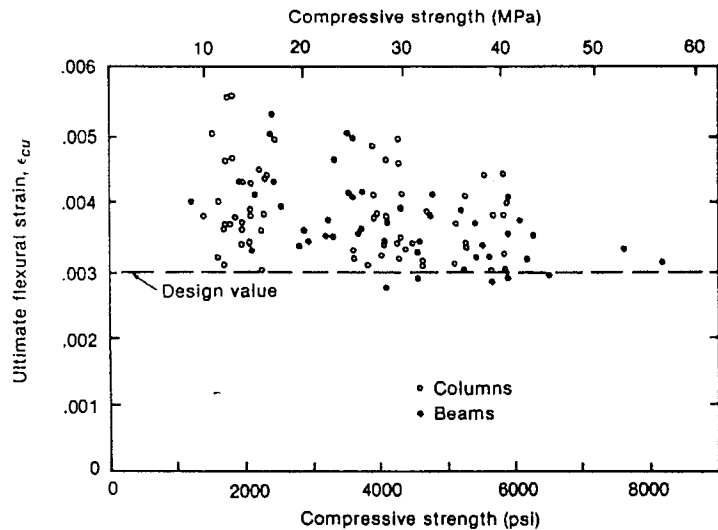
- b2) Se asume que el concreto falla (se agota su capacidad de deformación) cuando la deformación en compresión (ϵ_{cu}) alcanza un cierto valor límite definido como:

ACI:	$\epsilon_{cu} = 0.003$	deformación máxima utilizable (vigas y columnas)
CEB:	$\epsilon_{cu} = 0.0035$	deformación máxima utilizable (vigas)

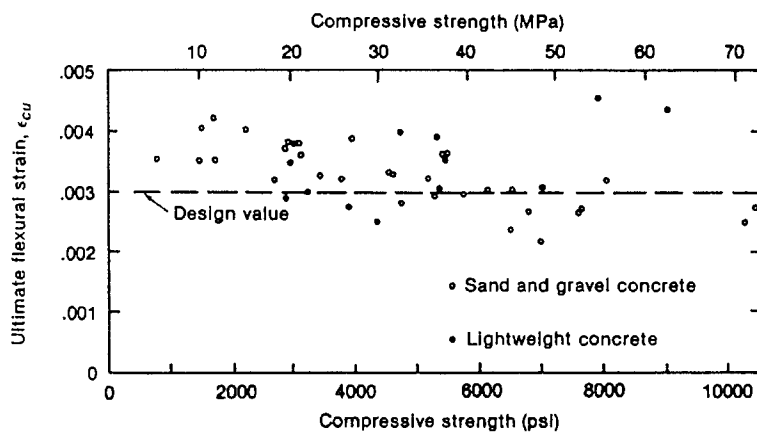
Se pueden alcanzar valores mayores de ϵ_{cu} en secciones confinadas por estribos cerrados poco espaciados y/o en secciones con fuertes gradientes de esfuerzos. El valor fijado por el ACI es conservador y proviene de los resultados experimentales de un gran número de elementos ensayados en laboratorio. La figura 10-14 (MacGregor) muestra las deformaciones últimas medidas en ensayos de laboratorio en vigas y columnas así como en elementos sin refuerzo, para distintas calidades de concreto. Es claro que el valor adoptado por el ACI (0.003) es conservador, basta compararlo con las deformaciones máximas medidas en elementos con refuerzo. Nótese que ha medida que aumenta la calidad del concreto (f'_c) la tendencia global es hacia la reducción de la deformación máxima del concreto.

- b3) La relación entre el esfuerzo de compresión en el concreto y su deformación correspondiente (σ - ϵ) puede asumirse como: Rectangular, trapezoidal, parabólica o cualquier otra que prediga la resistencia acorde con los resultados experimentales.

La figura 10-15 (Neville) muestra algunas curvas típicas para el concreto comprimido. Los resultados de los ensayos indican que la forma de la curva antes de alcanzar el esfuerzo máximo, dependen de la calidad del concreto (f'_c). En general para esta zona de la curva, una parábola de segundo grado permite un ajuste "razonable". En la figura no se muestra la rama descendente de la curva.



(a) Ultimate strain from tests of reinforced members.



(b) Ultimate strain from tests of plain concrete specimens.

Fig. 10-14 Deformación última del concreto medida en ensayos.

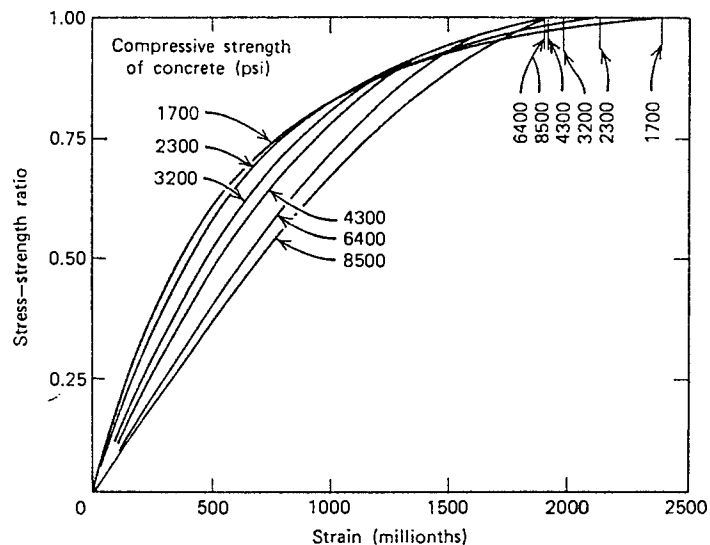


Fig. 10-15 Curvas típicas para el concreto en compresión hasta el esfuerzo

10.3.4 Caracterización del Bloque de Compresiones para el Análisis y Diseño

La figura 10-16 muestra, a la izquierda el diagrama esfuerzo – deformación de la probeta de concreto en compresión, y a la derecha el estado de deformaciones (bajo la suposición de que las secciones permanecen planas) y de esfuerzos en la zona comprimida de una sección de concreto armado sometida a flexión simple e compuesta. Se ha supuesto por simplicidad, que la sección es rectangular.

Para caracterizar el bloque de compresiones es necesario conocer los valores de k_1 , k_2 y k_3 . El parámetro k_1 permite calcular el área total bajo la curva de compresiones, k_2 permite ubicar la resultante de compresiones y k_3 mide la resistencia máxima del concreto de la sección como fracción de la resistencia obtenida en las probetas de laboratorio. Si se conocen estos tres parámetros, las compresiones en el concreto pueden remplazarse por su resultante C_c y los cálculos de resistencia se simplifican.

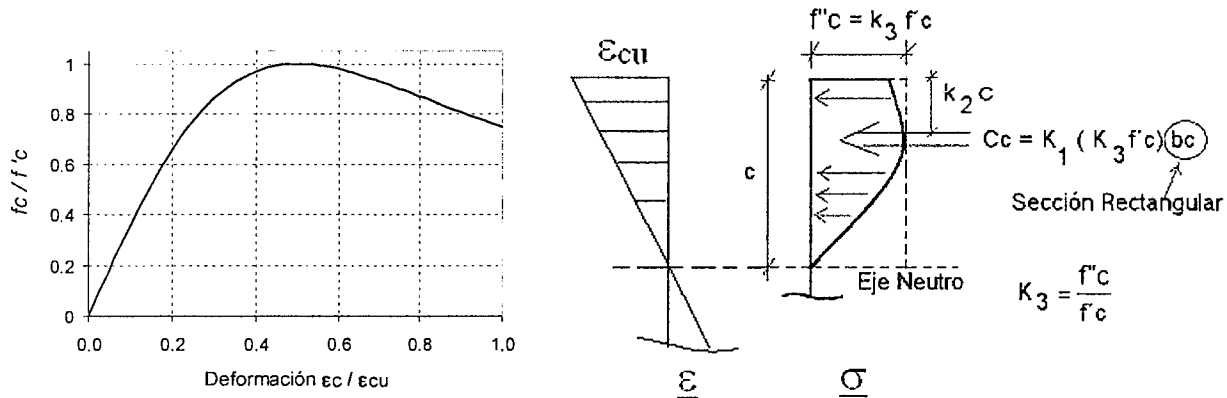


Fig. 10-16 Bloque de compresiones en una sección sometida a flexión.

El ACI y la Norma Peruana aceptan remplazar el diagrama “real” de esfuerzos en el concreto, como el mostrado en la figura 10-16, por un bloque equivalente de compresiones tal como se muestra en la figura 10-17.

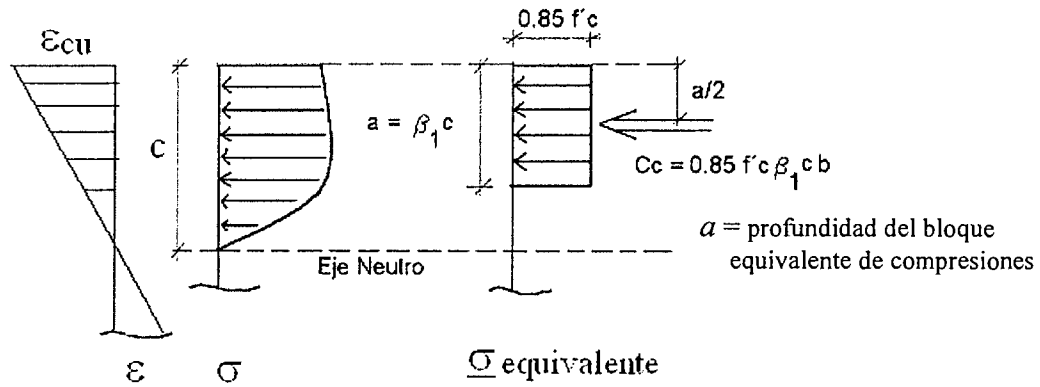


Fig. 10-17 Bloque equivalente de compresiones.

En una sección rectangular, la equivalencia entre la compresión “real” en el concreto comprimido y la compresión en el bloque equivalente, viene dada por:

$$C_c \text{ real} = k_1 (k_3 f'_c) b c = 0.85 f'_c b a \quad \therefore \quad k_1 k_3 = 0.85 (a/c) = 0.85 \beta_1$$

Para que la posición de la resultante sea la misma, debe cumplirse:

$$k_2 c = 0.5 a \quad \therefore \quad k_2 = 0.5 (a/c) = 0.5 \beta_1$$

A la simplificación adoptada por el ACI se le conoce con el nombre de *bloque equivalente de compresiones* o Rectángulo de Whitney, e involucra los siguientes valores que caracterizan al bloque de compresiones bajo esta simplificación:

$$k_1 k_3 = 0.85 \beta_1 \quad k_2 = 0.5 \beta_1$$

$$\beta_1 = 0.85 \quad \text{para } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2 \quad \beta_1 = 0.65 \quad \text{para } f'_c \geq 560 \text{ kg/cm}^2 \quad (10-19)$$

$$\beta_1 = 1.05 - 0.714 \frac{f'_c}{1,000} \quad 280 \text{ kg/cm}^2 \leq f'_c \leq 560 \text{ kg/cm}^2 \quad (10-19)$$

La figura 10-18 (PCA) muestra la variación del parámetro β_1 (ecuación 10-19) en función de la resistencia del concreto. La figura 10-19 (MacGregor) muestra el parámetro β_1 en comparación con un grupo de resultados experimentales. Se observa que el ajuste del ACI no es del todo bueno para los concretos de muy baja resistencia.

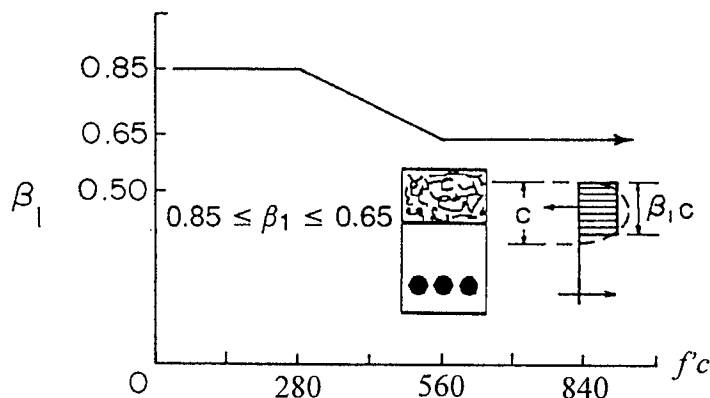


Fig. 10-18 Variación del parámetro β_1

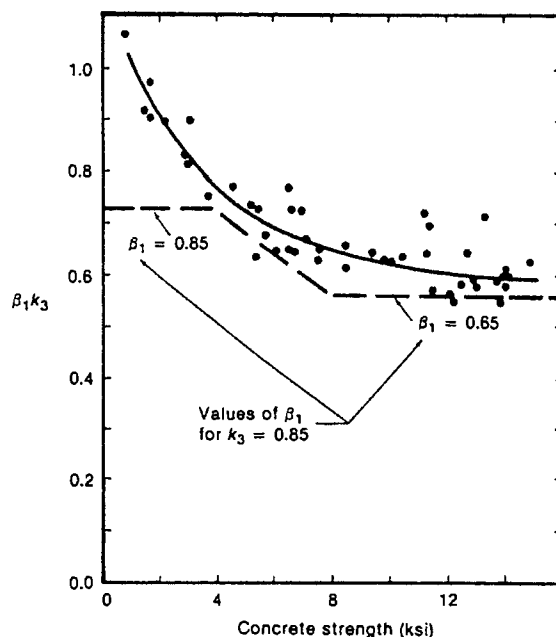


Fig. 10-19 Valores de $\beta_1 k_3$ provenientes de ensayos y ajuste del ACI

La distribución del bloque de compresiones propuesta por el ACI proviene del ajuste de resultados de ensayos realizados en vigas reales y logra un buen nivel de aproximación con los resultados experimentales. Para el caso, por ejemplo, de flexión sin carga axial, la sección debe estar en todo instante en equilibrio, es decir la resultante de las compresiones en el concreto (C_c) debe ser igual a la fuerza total de tracción en el acero

($A_s f_s$). En consecuencia, la compresión total en el concreto calculada a partir del diagrama "real" del mismo, tiene que ser igual a la compresión total calculada con el bloque equivalente del ACI.

Con respecto a otros modelos para el concreto comprimido, el bloque equivalente tiene la gran ventaja de su simplicidad. Las ecuaciones que predicen la resistencia nominal de secciones en flexión o flexocompresión son más simples que las provenientes del empleo de otros modelos.

A partir de la figura 10-17 es posible construir la curva esfuerzo - deformación ($\sigma-\epsilon$) para el concreto comprimido, asumida implícitamente por el ACI. La aplicación del bloque equivalente de compresiones conduce a una relación $\sigma-\epsilon$ para el concreto como la mostrada en la parte derecha de la figura 10-20. Los esfuerzos en el concreto son nulos hasta una deformación (ϵ_1) de 0.00045 para valores de f_c hasta 280 kg/cm² y de 0.00105 para concretos mayores de 560 kg/cm². La relación esfuerzo - deformación así obtenida no tiene significado físico, es consecuencia de haber adoptado un bloque equivalente que permite aproximar bastante bien la resistencia de la sección, en comparación con los resultados experimentales.

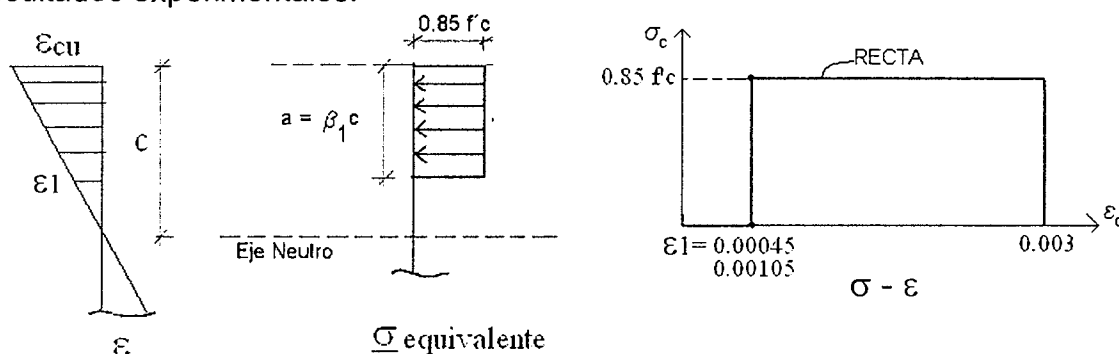


Fig. 10-20 Relación esfuerzo - deformación del ACI para el concreto comprimido.

La figura 10-21 (ACI) muestra el buen nivel de ajuste entre los resultados de ensayos sobre vigas con falla en tracción, con la ecuación que predice la resistencia en flexión. La ecuación mostrada en la figura que predice la resistencia, está basada en las hipótesis que hemos mencionado y su deducción se presentará posteriormente.

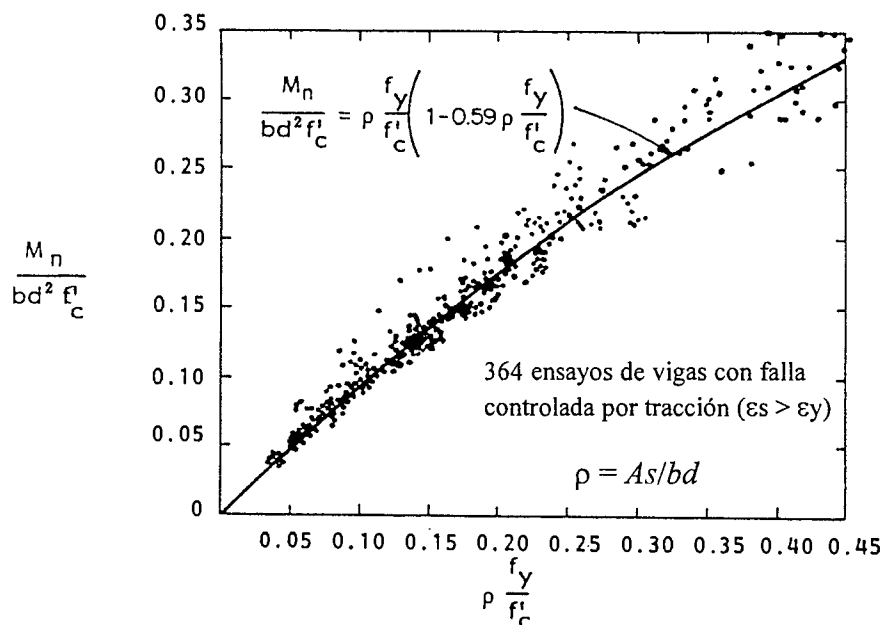


Fig. 10-21 Resultados de ensayos de vigas en flexión

Existen muchas otras propuestas para caracterizar la zona comprimida de concreto. La figura 10-22 muestra el *diagrama parábola – rectángulo* de cálculo propuesto por el CEB utilizado en Europa para el análisis y diseño de secciones. Consiste en una parábola de segundo grado cuyo vértice se encuentra en la abscisa $\epsilon_0 = 0.002$ (deformación de rotura del concreto en compresión simple) seguida de un rectángulo con vértice en la abscisa $\epsilon_{cu} = 0.0035$ (deformación de rotura del concreto en compresión por flexión). Al igual que el ACI se trata de un diagrama idealizado que conduce a resultados concordantes con la evidencia experimental existente.

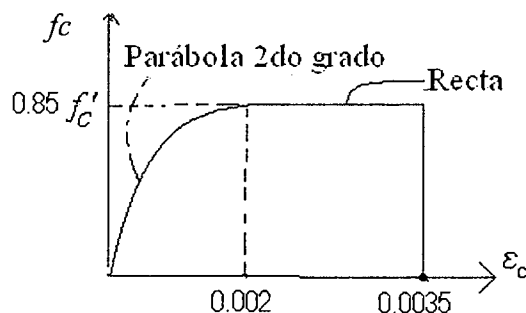


Fig. 10-22 Diagrama parábola – rectángulo de cálculo del CEB

La figura 10-23 (PCA) muestra el bloque de compresiones adoptado por la Portland Cement Association (PCA) para el cálculo de secciones de concreto armado. Es claro que este modelo es prácticamente el mismo que el del CEB.

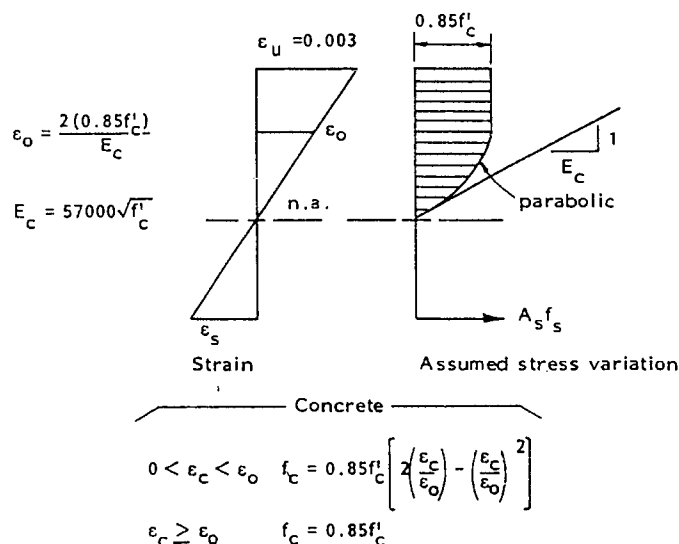
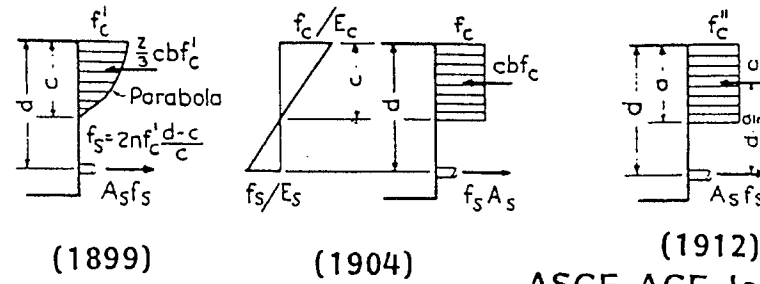
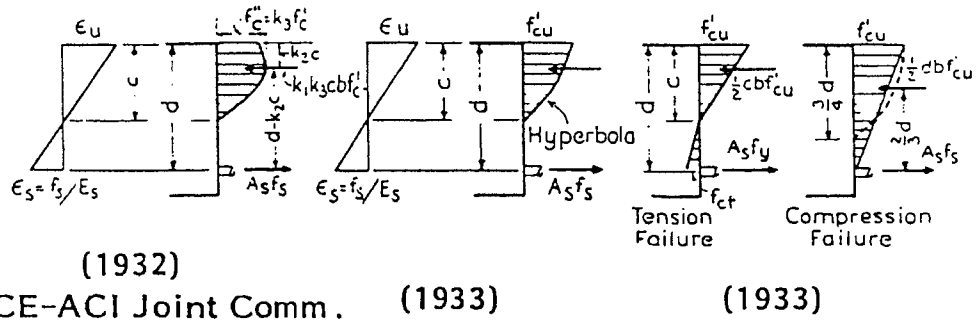
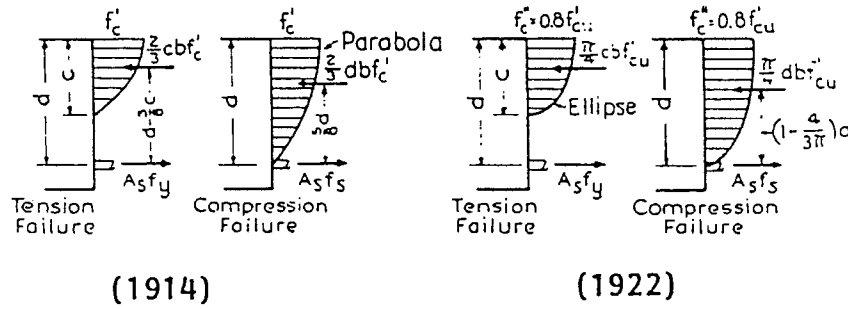


Fig. 10-23 Relación esfuerzo – deformación de la PCA para el concreto comprimido

La figura 10-24 (PCA) muestra la evolución histórica de la caracterización del bloque de compresiones. Nótese la gran variedad de modelos y su evolución a lo largo de los años. Es interesante observar la propuesta del año 1899 consistente en una parábola de segundo grado como la utilizada en el Capítulo 9 (figura 9-11), luego la propuesta de los años 1904 y 1912 basada en un rectángulo como el que se emplea en la actualidad y la propuesta más completa del año 1932, similar a la presentada en la figura 10-16.



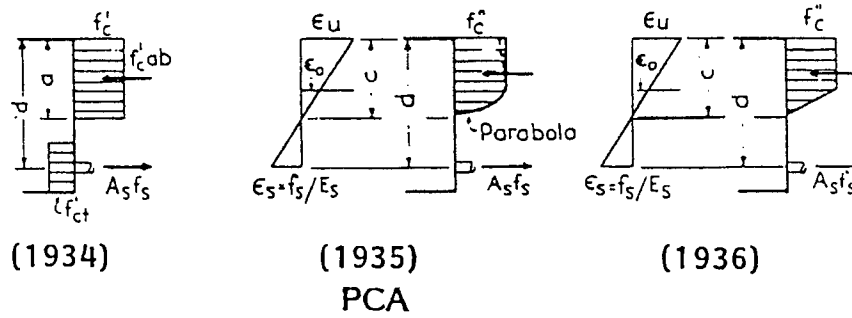
ASCE-ACE Joint Comm.



ASCE-ACI Joint Comm.

(1933)

(1933)



PCA

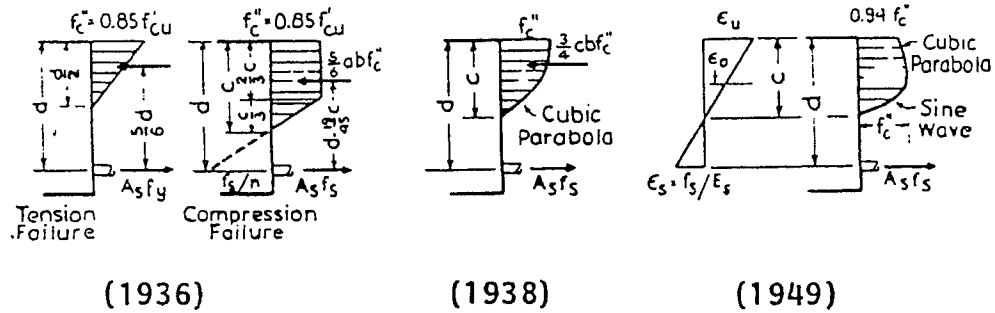


Fig. 10-24 Desarrollo de las teorías de capacidad última para secciones en flexión

10.4 Falla de Tracción, Compresión y Balanceada

La figura 10-25 muestra, por simplicidad en una sección rectangular sin acero en compresión, los tres tipos de falla que puede experimentar una sección de concreto armado sometida a flexión si fuera llevada hasta la falla. La diferencia entre los tres tipos estriba en la deformación del acero y en la posición del eje neutro cuando la sección alcanza la falla.

Una misma sección, dependiendo de la cantidad de acero en tracción, puede experimentar cualquiera de los tres tipos de falla.

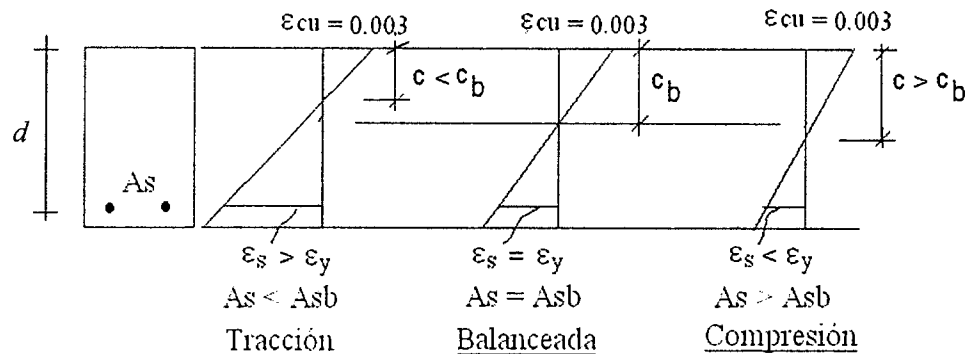


Fig. 10-25 Tipos de fallas de una sección en flexión

a) Falla de Tracción

Se le conoce también con el nombre de sección subreforzada. En este caso el acero entra en fluencia antes de que el concreto alcance la deformación máxima ϵ_{cu} . La falla de tracción es dúctil, la sección tiene capacidad de disipación de energía y de rotación inelástica.

Las Normas establecen la cantidad máxima de acero en tracción por flexión que se permite colocar en las secciones de concreto armado, de tal modo que la falla sea por tracción.

b) Falla Balanceada

Es un caso particular que marca el límite entre las fallas de tracción y de compresión. El concreto alcanza la deformación de agotamiento $-\epsilon_{cu}$ en simultáneo con el acero que alcanza la deformación de fluencia ϵ_y .

Este estado permite calcular la cantidad de acero (A_{sb}) que produce la falla balanceada de una sección. Las Normas fijan la cantidad máxima de refuerzo como una fracción del acero balanceado.

c) Falla de Compresión

Recibe también el nombre de sección sobre reforzada. El concreto alcanza la deformación máxima $-\epsilon_{cu}$ y el acero permanece aun elástico ($\epsilon_s < \epsilon_y$) es decir, sin haber llegado a la fluencia.

La falla de compresión es frágil, con poca capacidad de disipación de energía y sobreviene casi sin previo aviso. Las Normas no permiten este tipo de falla en elementos en flexión.

Las diferencias en el comportamiento y ductilidad entre los tres tipos de falla mencionados, se pueden apreciar cualitativamente con la ayuda de los diagramas simplificados *momento – curvatura* que se muestran en la figura 10-26.

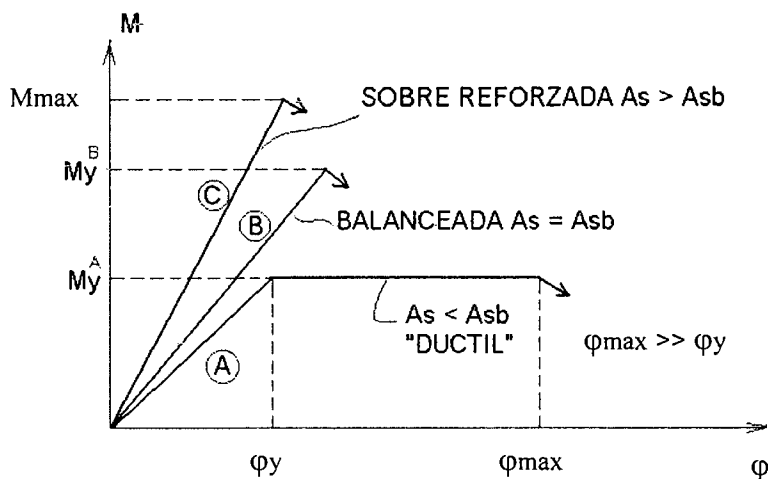


Fig. 10-26 Diagramas idealizados momento-curvatura para los tres tipos de falla de una sección en flexión.

La curva A de la figura 10-26 corresponde a una sección con falla en tracción. La falla es del tipo dúctil y la ductilidad de curvatura (ϕ_{max} / ϕ_y) si la cantidad de acero es moderada, suele ser grande. Se producen deflexiones notables en el elemento cerca de la falla, con grietas anchas en la zona de tracción.

Las secciones B y C, si bien exhiben mayor resistencia que la sección A por tener mayores cantidades de acero en tracción, presentan fallas indeseables del tipo frágil. La ductilidad de curvatura es pequeña, cercana a la unidad salvo que hubiera una cantidad importante de refuerzo de confinamiento que permita aumentar la deformación de agotamiento del concreto (ϵ_{cu}) o cantidades importantes de acero en compresión.

10.5 Análisis de Secciones Rectangulares

Iniciaremos el estudio con las secciones rectangulares por ser las más utilizadas en los elementos de concreto armado y por corresponder a la geometría más simple.

Deduciremos expresiones que permitan el análisis y el diseño de secciones rectangulares de concreto armado. Para ello utilizaremos las hipótesis básicas y las simplificadoras de la Norma E.060 (que son las mismas del ACI) presentadas en la sección 10.3.3 y haremos uso de los tres "bloques" de condiciones que siempre se deberán cumplir:

- *Equilibrio*
- *Compatibilidad de deformaciones*
- *Relaciones Constitutivas*

10.5.1 Análisis de Secciones Rectangulares con Falla en Tracción

La figura 10-27 muestra una sección rectangular que ha alcanzado su *resistencia nominal* a la flexión (M_n). Se indica el estado de deformaciones y de esfuerzos en el concreto y en el acero. Las compresiones "reales" en el concreto se han reemplazado por el bloque equivalente de compresiones de profundidad $a = \beta_1 c$ e intensidad $0.85 f_c$.

Ya que hemos supuesto que la falla de la sección sea de tracción (falla dúctil) se deberá cumplir:

- $A_s < A_{sb}$. Es decir, la cantidad de acero en tracción colocada es menor de la que originaría una falla balanceada.
- $\epsilon_s > \epsilon_y$ $\epsilon_y = 0.0021$ para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

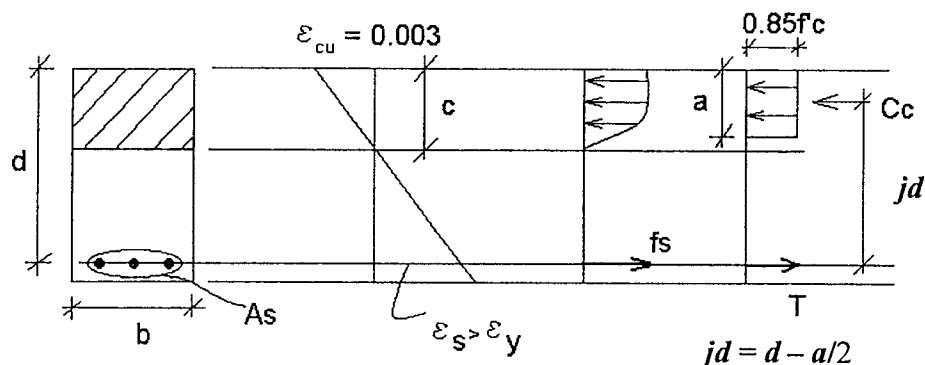


Fig. 10-27 Sección rectangular. Deformaciones y fuerzas internas en la falla.

Ecuaciones:

$$a = \beta_1 c$$

$$Cc = 0.85 f'_c a b \quad (\text{equilibrio})$$

$$T = As fs = As fy \quad (\text{acero elastoplástico en fluencia})$$

$$a = \frac{As fy}{0.85 f'_c b} \quad (10-20)$$

$$Mn = T(jd) = As fy \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$\phi Mn = \phi As fy \left(d - \frac{a}{2}\right) \quad (10-21)$$

$$Mn = Cc(jd) = 0.85 f'_c b a \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$\phi Mn = \phi [0.85 f'_c b a \left(d - \frac{a}{2}\right)] \quad (10-22)$$

La ecuación 10-20 permite determinar la profundidad del bloque equivalente de compresiones y a partir de ella la profundidad del eje neutro ($a = \beta_1 c$). Las ecuaciones 10-21 y 10-22 son equivalentes y permiten determinar la *resistencia nominal* en flexión de una sección rectangular con falla en tracción secciones subreforzadas).

Las ecuaciones anteriores son para el análisis de secciones rectangulares con falla de tracción, sin embargo es posible modificarlas convenientemente para ser utilizadas en el diseño. En el diseño se conoce el momento Mu (*resistencia requerida*) las dimensiones de la sección transversal (predimensionamiento) y la calidad del concreto y del acero, la pregunta que hay que contestar es ¿cuál es la cantidad de acero en tracción necesaria para satisfacer la ecuación $\phi Mn \geq Mu$? A continuación veremos como transformar las ecuaciones 10-21 y 10-22 para su empleo en el diseño de secciones rectangulares.

Definimos: $\rho = \frac{As}{bd} \quad (10-23)$

$$\omega = \frac{\rho fy}{f'_c} \quad (10-24)$$

de (10-20) $a = \frac{As fy}{0.85 f'_c b} = \frac{\omega d}{0.85}$

de (10-21) $Mn = As fy \left(d - \frac{a}{2}\right) = As fy d \left(1 - \frac{\omega}{1.7}\right)$

$$Mn = f'_c b d^2 \omega \left(1 - \frac{\omega}{1.7}\right)$$

$$\phi Mn = \phi f'_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega) \quad (10-25)$$

$$\frac{Mn}{f'_c b d^2} = \rho \frac{f_y}{f'_c} (1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c}) = \omega (1 - 0.59\omega) \quad (10-26)$$

Las ecuaciones 10-25 y 10-26 pueden utilizarse para el análisis o para el diseño de secciones rectangulares con acero únicamente en tracción. La más utilizada es la 10-25 en la cual la incógnita es ω la que se obtiene al resolver la ecuación cuadrática. Generalmente la ecuación 10-25 se emplea para el diseño de secciones, para el análisis es más simple emplear las ecuaciones 10-20 y 10-21.

En la figura 10-21 se muestra el ajuste de la ecuación 10-26 con los resultados obtenidos de los ensayos de laboratorio de vigas en flexión con fallas del tipo subreforzada.

El empleo de la ecuación 10-25 para diseño puede hacerse mediante el uso de gráficos, tablas, o calculadoras programables. Conocido f'_c , b , d , Mu (*resistencia requerida*) su empleo es muy simple, tal como se muestra a continuación:

$$\phi Mn = Mu = \phi f'_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega) \quad \text{la incógnita es } \omega$$

$$\text{resolver } \omega, \text{ calcular } \rho = \omega \frac{f'_c}{f_y} \quad \text{y luego calcular } As = \rho b d$$

La figura 10-28 (PCA) muestra gráficamente la solución de la ecuación 10-25 para acero de refuerzo Grado 60 y cuatro calidades del concreto. Puede utilizarse tanto para análisis de secciones como para diseño.

La Tabla 10-1 (PCA) inserta al final de este Capítulo, permite resolver la ecuación 10-25. Su ventaja estriba en que, además de ser adimensional (basta usar un sistema de unidades consistente), es aplicable a cualquier calidad del concreto y del acero.

Para el diseño rutinario de secciones rectangulares, la ecuación 10-25 puede transformarse de otra manera para generar gráficos y tablas más simples de usar que la Tabla 10-1, veamos:

$$Mu = \phi Mn = \phi f'_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega) \quad (10-25)$$

$$\text{llamando } Ku = \phi f'_c \omega (1 - 0.59\omega) \quad (10-27)$$

$$\text{tendremos } Mu = Ku b d^2 \quad (10-28)$$

$$Ku = \frac{Mu}{b d^2} \quad (10-29)$$

Las Tablas 10-2, 10-3 y 10-4 insertas al final del Capítulo, han sido generadas con una hoja de cálculo a partir de la ecuación 10-27 y sirven para análisis y diseño de secciones rectangulares. Para el diseño basta entrar a las tablas con el valor de Ku definido por la ecuación 10-29 y leer el correspondiente valor de la cuantía necesaria.

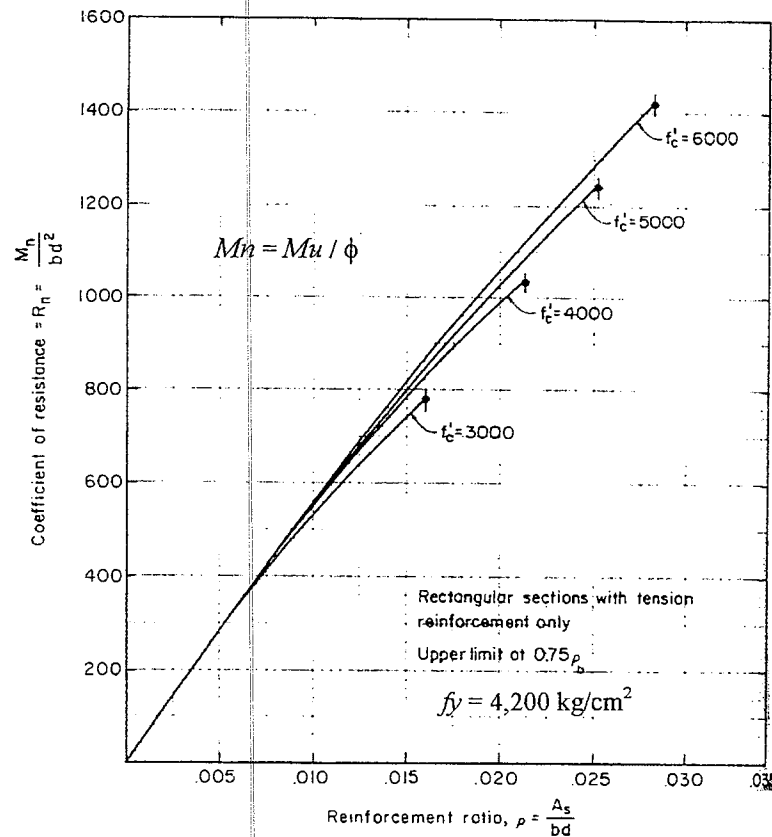
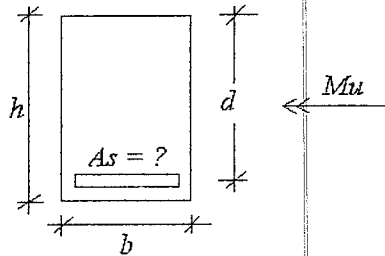


Fig. 10-28 Curvas de cuantía – resistencia ($\rho - Mn$)

Existen muchas otras tablas y gráficos, en general ayudas para el diseño, disponibles. La metodología que se presenta a continuación es útil para su empleo en calculadoras programables ya que no es necesario resolver la ecuación cuadrática (ecuación 10-25) ni emplear tablas.



Datos: $Mu, f'c, fy, b, h$

d (peralte efectivo): estimado

$d \approx h - 0.06$ (acero en una capa)

$d \approx h - 0.08$ ó 0.09 (acero en dos capas)

De la ecuación 10-22 se obtiene:

$$Mu / \phi = Mn = [0.85 f'_c b a (d - \frac{a}{2})] = 0.85 f'_c b (ad - \frac{a^2}{2})$$

$$\frac{a^2}{2} - 2ad + \frac{2Mu}{\phi 0.85 f'_c b} = 0$$

Una de las raíces de la ecuación anterior es:
$$a = d - \sqrt{d^2 - \frac{2 |Mu|}{\phi 0.85 f'_c b}} \quad (10-30)$$

Conocido el valor de a (profundidad del bloque equivalente de compresiones) se puede calcular el área de acero con la ecuación 10-21:

$$As = \frac{|Mu|}{\phi fy (d - \frac{a}{2})} \quad c = \frac{a}{\beta_1} \quad (10-31)$$

10.5.2 Análisis de Secciones Rectangulares con Falla en Compresión

En este tipo de secciones, con una cantidad de acero en tracción mayor que la cuantía balanceada, el concreto llega a su deformación de agotamiento - ϵ_{cu} - antes que el acero haya entrado en fluencia, en consecuencia el acero permanece elástico con un esfuerzo menor que el de fluencia. En este tipo de secciones, también conocidas como sobrerreforzadas, la falla de la sección es frágil, con una ductilidad de curvatura muy baja, cercana a la unidad.

A diferencia de las secciones subreforzadas, en las cuales el acero está en fluencia y por lo tanto su esfuerzo es conocido (para el modelo elastoplástico), en las secciones con falla en compresión la dificultad estriba en conocer el esfuerzo en el acero de tracción (f_s). Si bien la Norma E.060 no permite el empleo de secciones sobre reforzadas, es posible deducir la ecuación que predice la resistencia de la sección. La deducción se presenta a continuación:

Equilibrio de la sección (compresión en el concreto = tracción en el acero):

$$C_c = T \quad 0.85 f'_c b a = A_s f_s \quad (a)$$

$$a = \frac{A_s f_s}{0.85 f'_c b}$$

Compatibilidad de deformaciones (secciones planas, adherencia):

$$\frac{\epsilon_s}{0.003} = \frac{d-c}{c} \quad \rightarrow \quad \epsilon_s = 0.003 \frac{d-c}{c}$$

$$f_s = \epsilon_s E_s = 0.003 E_s \frac{d-c}{c} = 0.003 E_s \frac{\beta_1 d - a}{a} \quad (b)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (c)$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a) se obtiene:

$$\left(\frac{0.85 f'_c}{0.003 E_s \rho} \right) a^2 + a d - \beta_1 d^2 = 0 \quad (10-32)$$

Resolviendo la ecuación 10-32 se encuentra la profundidad del bloque equivalente de compresiones - a - y a partir de este valor se calcula la profundidad del eje neutro ($c = a / \beta_1$) y la resistencia de la sección, mediante:

$$M_n = 0.85 f'_c a b (d - a/2) \quad (10-33)$$

Será necesario verificar que la deformación en el acero de tracción sea menor que la deformación de fluencia. En caso contrario la solución no será válida.

La resistencia de la sección también se puede obtener tanteando sucesivos valores de "c" (la posición del eje neutro). Para cada valor de c se calcula la compresión total en el concreto (C_c) y la tracción en el acero. El proceso se repite hasta lograr la convergencia, es decir hasta lograr que la compresión en el concreto sea igual a la tracción en el acero, tal como se indica a continuación:

$$C_c = T_s = A_s f_s$$

10.5.3 Secciones Rectangulares con Falla Balanceada – Acero Balanceado

La figura 10-29 muestra una sección rectangular con acero en tracción con una falla balanceada. En la falla balanceada el concreto alcanza la deformación de agotamiento - ϵ_{cu} - en el mismo instante en que el acero que alcanza la deformación de fluencia ϵ_y .

Este tipo de secciones se estudia con la finalidad de determinar la cantidad de acero en tracción (A_{sb}) que provoca la falla balanceada, de tal modo que sea posible distinguir las secciones con falla en tracción ($A_s < A_{sb}$) de las secciones con falla en compresión ($A_s > A_{sb}$) utilizando como indicador la cantidad de acero presente en la sección.

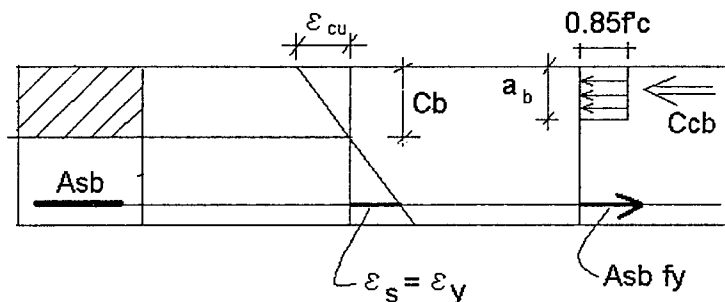


Fig. 10-29 Sección rectangular con falla balanceada.

Compatibilidad:
$$\frac{c_b}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \quad (10-34)$$

La ecuación 10-34 es válida para cualquier sección, independientemente de su geometría. La única limitación es que el plano de las cargas sea un eje de simetría de la sección y que las secciones permanezcan planas.

Para el caso particular de $\epsilon_{cu} = 0.003$, $f_y = 4,200$ y $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ la ecuación 10-34 se transforma en:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + 0.0021} \approx 0.588$$

$$\therefore \frac{c_b}{d} \approx 0.588 \quad (10-35a)$$

$$a_b = \beta_1 c_b \quad \frac{a_b}{d} \approx 0.588 \beta_1 \quad (10-36)$$

Para $f_y = 2,800 \text{ kg/cm}^2$ la relación es: $c_b/d \approx 0.6818$ (10-35 b)

Para una sección rectangular tendremos:

$$\rho_b = \frac{A_{sb}}{bd} \quad a_b = \frac{A_{sb} f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$\frac{a_b}{d} = \frac{\rho_b f_y}{0.85 f'_c} \quad \frac{c_b}{d} = \frac{\rho_b f_y}{0.85 f'_c \beta_1}$$

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{c_b}{d} = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \right) \quad (10-37)$$

La ecuación 10-37 permite calcular la cuantía de acero en tracción que produce la falla balanceada de una sección rectangular. Es válida para cualquier calidad del concreto y del acero así como para cualquier valor de ϵ_{cu} .

Para el caso particular de $\epsilon_{cu} = 0.003$ y $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, la ecuación 10-37 se reduce a:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{6,000}{6,000 + f_y} \quad (10-38)$$

Adicionalmente, para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ la ecuación 10-38 se convierte en:

$$\rho_b \approx 0.588 \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{4,200} \Rightarrow \rho_b \approx 1.19 \times 10^{-4} f'_c \beta_1 \quad (10-39)$$

Nótese que pudo obviarse toda el álgebra anterior y deducir la ecuación 10-39, haciendo uso exclusivamente de la definición de acero balanceado, veamos:

- Del equilibrio en la falla balanceada (figura 10-29) se tiene:

$$0.85 f'_c b a_b = A_s b f_y \quad (a)$$

- De la ecuación 10-36: $a_b \approx 0.588 \beta_1 d$ (b)

- Sustituyendo la expresión (b) en (a), obtendremos la ecuación 10-39:

$$0.85 f'_c b (0.588 \beta_1 d) = A_s b (f_y) \Rightarrow A_s b / b d = \rho_b = 0.5 f'_c \beta_1 / f_y$$

$$\text{Para } f_y = 4,200 \Rightarrow A_s b / b d = \rho_b \approx 1.19 \times 10^{-4} f'_c \beta_1$$

10.6 Acero Máximo en Flexión - Norma E.060 y ACI-99

La Norma ACI hasta el año 1999 y la Norma E.060, fijan la cantidad máxima de acero en tracción que se puede colocar en una sección, en función del área de acero que produce la falla balanceada. La idea central es que la falla de la sección debe ser por tracción (sección subreforzada) y no se permite la falla en compresión o las secciones sobre reforzadas. La cantidad de acero no debe exceder de:

$$\rho_{max} = 0.75 \rho_b \quad A_s_{max} = 0.75 A_s b \quad (10-40)$$

La Tabla 10-5 resume las cuantías balanceadas en secciones rectangulares y $f_y = 4,200$.

Tabla 10-5 Cuantías balanceadas en Secciones Rectangulares $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y =$	4,200 kg/cm ²	$d =$	peralte efectivo
$E_s =$	2,000,000 kg/cm ²	$jd =$	brazo interno de palanca en la falla balanceada
$\epsilon_{cu} =$	0.003 cm/cm	$jd =$	$d - abal/2$
$\epsilon_y =$	0.0021 cm/cm		

f'_c (kg/cm ²)	Beta 1	Cuantía Balan. (P_b)	0.75 P_b	0.50 P_b	$cbal / d$	$abal / d$	0.75 $abal/d$	Brazo jd
175	0.85	1.77%	1.33%	0.89%	0.588	0.500	0.375	0.750
210	0.85	2.13%	1.59%	1.06%	0.588	0.500	0.375	0.750
280	0.85	2.83%	2.13%	1.42%	0.588	0.500	0.375	0.750
350	0.80	3.33%	2.50%	1.67%	0.588	0.471	0.353	0.765
420	0.75	3.75%	2.81%	1.88%	0.588	0.441	0.331	0.779
450	0.73	3.90%	2.93%	1.95%	0.588	0.429	0.321	0.786

Las cuantías balanceadas (P_b , 0.75 P_b y 0.5 P_b) son aplicables solo a secciones rectangulares sin acero en compresión

Los valores de $cbal/d$, $abal/d$, 0.75 $abal/d$ son aplicables a cualquier tipo de sección

$cbal$, es la posición del eje neutro en la falla balanceada

$abal$, es la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos en el concreto en la falla balanceada

La limitación de la Norma en la cantidad de acero en tracción, equivale a limitar la cantidad máxima de compresión en el concreto (C_c) al 75% de la correspondiente a la falla balanceada ($C_c \leq 0.75 C_{cb}$). Sobre la base de este concepto, es posible afirmar que en las secciones rectangulares, para garantizar que se cumpla con la limitación $A_s < 0.75 A_s b$, bastará verificar que la profundidad del bloque equivalente de compresiones - a - con el acero realmente colocado no exceda de $a \leq 0.75 a_b$.

Dicho de otro modo, en secciones rectangulares, la profundidad máxima del bloque equivalente de compresiones - a - deberá ser menor que $0.75 a_b$ para garantizar que no se excede la cantidad máxima de acero permitida por la Norma, es decir:

$$a_{max} = 0.75 a_b = 0.75 \beta_1 c_b$$

$$a_{max} = 0.441 \beta_1 d \quad (f_y = 4,200 \quad \epsilon_{cu} = 0.003) \quad (10-41)$$

$$c_{max} = 0.441 d \quad (f_y = 4,200 \quad \epsilon_{cu} = 0.003) \quad (10-42)$$

Es necesario señalar que la limitación de $a_{max} = 0.75 a_b$ se cumple únicamente en las secciones rectangulares, o en secciones en las cuales la resultante de compresiones en el concreto varíe linealmente con la profundidad del eje neutro. Por lo tanto no será válida por ejemplo, en secciones circulares, triangulares, secciones T en las cuales el bloque de compresiones sea mayor que el espesor del ala, etc. Para estas secciones será necesario utilizar ecuaciones como las que se presentan en la sección 10.7.

Por otro lado, la limitación de la Norma en el acero máximo de tracción, también equivale indirectamente a imponer una deformación mínima en el acero de tracción cuando la sección alcanza su resistencia nominal. Para una sección rectangular, con acero en tracción únicamente, es posible demostrar que la deformación en el acero (ϵ_s), cuando la sección está reforzada con acero solo en tracción y considerando $\epsilon_{cu} = 0.003$, es:

	$f_y = 4,200$	$f_y = 2,800$
Cantidad de acero	ϵ_s / ϵ_y	ϵ_s / ϵ_y
$0.75 A_s b$	1.8	2.0
$0.65 A_s b$	2.3	2.7
$0.50 A_s b$	3.4	4.1

En una sección rectangular sin acero en compresión, la deformación en el acero que se obtiene con una cantidad de acero equivalente a $0.65 A_s b$ coincide con el valor mínimo de la deformación en el acero de tracción impuesto por el ACI-11 ($\epsilon_t \geq 0.005$) para que una sección pueda considerarse controlada por tracción (véase el Capítulo 23).

A continuación se presenta la deducción de la deformación en el acero para una armadura de tracción únicamente equivalente al $0.75 A_s b$, es decir el valor consignado en la primera fila de la tabla anterior.

Para el caso particular de $\epsilon_{cu} = 0.003$, $f_y = 4,200$, $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ tendremos:

En la falla balanceada la profundidad del eje neutro es: $c_b \approx 0.588 d$

Para $A_s = 0.75 A_s b$ tendremos en la sección rectangular $c = 0.75 \times 0.588 d \approx 0.441 d$

La deformación en el acero de tracción será: $\epsilon_s = 0.003 (d-c) / c \approx 0.38\%$

En consecuencia: $\epsilon_s / \epsilon_y \approx 1.81$

La Norma E.060 (Artículo 10.3.5) permite un procedimiento alternativo para establecer la cantidad máxima de acero en secciones de cualquier geometría y distribución del acero de refuerzo por flexión. Este procedimiento está basado en el cálculo de la deformación neta (ϵ_t) del acero más alejado del borde comprimido (ver figuras 17-2 y 17-3) cuando la sección alcanza su resistencia nominal en flexión (M_n), dicha deformación no debe ser inferior a 0.4 %, en caso contrario la cantidad de acero excede el límite máximo. En una sección rectangular, sin acero en compresión, una cantidad de acero equivalente a $0.73 A_s b$ genera una deformación $\epsilon_t = 0.004$. En secciones rectangulares tanto la limitación del acero basada en $A_s b$ como aquella basada en la deformación mínima del acero, conducen al mismo resultado. Esta coincidencia no se produce en otras formas geométricas y distribuciones del refuerzo.

10.7 Ecuación General para la Cuantía Balanceada

La deducción del área de acero - A_{sb} - que produce la falla balanceada presentada en el acápite 10.5.3, está limitada a secciones rectangulares con acero en tracción únicamente. En este acápite derivaremos una metodología para la determinación del acero balanceado en una sección genérica. Existen tres restricciones para la aplicación de la metodología que se presentará, estas son:

- Si la sección es aislada, el plano de cargas debe ser un plano de simetría de la sección. En caso contrario el eje neutro no será necesariamente perpendicular al plano de cargas y existirá una variable más en el problema, la inclinación del eje neutro.
- La flexión debe ser uniaxial. Para condiciones de flexión biaxial las ideas generales expuestas siguen siendo válidas, sin embargo no se conoce a priori la inclinación del eje neutro. El estudio de la flexión biaxial se presente en el Capítulo 18.
- La carga axial (compresión o tracción) debe ser nula, es decir la sollicitación debe ser de flexión simple (vigas). Los elementos en flexión compuesta (columnas) tienen sus propias disposiciones las que se estudiarán más adelante.

La primera restricción mencionada, es prescindible si es que el elemento forma parte de un sistema de piso conformado por vigas y losas indeformables en su plano. En este caso, la presencia de la losa de piso forzaría a que el eje neutro sea perpendicular al plano de cargas (normalmente vertical) al evitar que la viga pueda desplazarse lateralmente libremente, cosa que no ocurre cuando el elemento es aislado.

La única complicación en el cálculo de A_{sb} , si la geometría del bloque comprimido es compleja, puede radicar en la determinación de la resultante de compresiones en el concreto en la falla balanceada - C_{cb} -.

A título ilustrativo presentaremos la metodología para la deducción de A_{sb} para una sección genérica con acero en compresión como la mostrada en la figura 10-30.

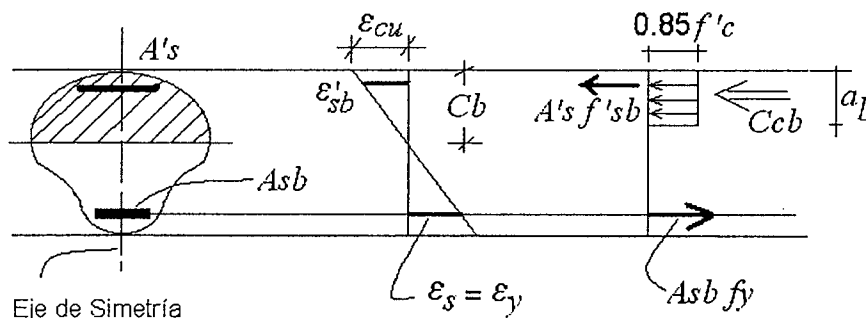


Fig. 10-30 Falla balanceada en una sección genérica.

$$\frac{c_b}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \quad c_b = \alpha d \quad a_b = \beta_1 \alpha d$$

Para el caso particular de $\epsilon_{cu} = 0.003$, $f_y = 4,200$ y $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ tendremos que el valor de ' α ' de la ecuación anterior será 0.588 aproximadamente y por lo tanto:

$$\frac{c_b}{d} \approx 0.588 \quad a_b = \beta_1 c_b \quad a_b \approx 0.588 (\beta_1 d)$$

La compresión en el concreto y la deformación del acero en compresión en la falla balanceada serán:

$$C_{cb} = (0.85 f'c) A_{cb} \quad \epsilon'_{sb} = \left(\frac{c_b - d'}{c_b} \right) \epsilon_{cu} \quad f'_{sb} = E_s \epsilon'_{sb} \leq f_y$$

Donde A_{cb} es el área del bloque comprimido en la falla balanceada. A través de la ecuación de equilibrio será posible determinar A_{sb} :

$$A_{sb}(f_y) = (0.85 f'_c) A_{cb} + A'_s f'_{sb} \quad (10-43)$$

De acuerdo a la Norma (ver acápite 10.6), la cantidad máxima de acero en tracción será:

$$A_{s \max}(f_y) = 0.75 (0.85 f'_c) A_{cb} + A'_s f'_{sb} \quad (10-44)$$

El ACI a partir del 2002 ha eliminado el concepto de cuantía o acero balanceado así como el límite absoluto en la cantidad de acero de tracción ($0.75 A_{sb}$). Ha retenido el concepto de secciones con falla en compresión, que ahora se llaman secciones controladas por compresión, y de secciones con falla en tracción, ahora llamadas secciones controladas por tracción. En el Capítulo 23 se presentan los principales cambios introducidos en el ACI a partir del 2002, relacionados con ese tema.

10.8 Acero Mínimo por Flexión

Existen situaciones en las cuales las vigas tienen una sección transversal mayor que la necesaria por resistencia, por ejemplo por razones arquitectónicas, o situaciones en las cuales los momentos flectores que obran en la sección son pequeños ya sea por la intensidad de las cargas externas, por la luz del elemento, etc.

En estos casos los cálculos conducen a áreas de acero en tracción por flexión pequeñas y podría suceder que la resistencia de diseño (ϕMn) de la sección fisurada sea menor que el momento flector que causa el agrietamiento por flexión de la sección (M_{cr}). Si el momento externo, por cualquier motivo, superara al momento de agrietamiento, la sección fallaría súbitamente ya que su resistencia agrietada es menor que su resistencia antes del agrietamiento. En estos casos la falla suele ser frágil y repentina. Para evitar este tipo de falla es necesario proveer una cantidad mínima de acero que garantice una resistencia de la sección agrietada mayor que la no agrietada.

La idea anterior se aprecia en la figura 10-31 en la cual se presentan esquemáticamente los diagramas momento- curvatura para tres secciones subreforzadas ($A_s < A_{sb}$). La curva inferior corresponde a una sección con una resistencia de diseño menor que su momento de agrietamiento, si el momento externo supera al momento de agrietamiento, el acero entra inmediatamente en fluencia, se produce una caída brusca en la resistencia de la sección, se forman unas pocas grietas de ancho notable y se presenta el riesgo que la deformación del acero de tracción sea tan grande que llegue hasta la rotura, produciéndose el colapso.

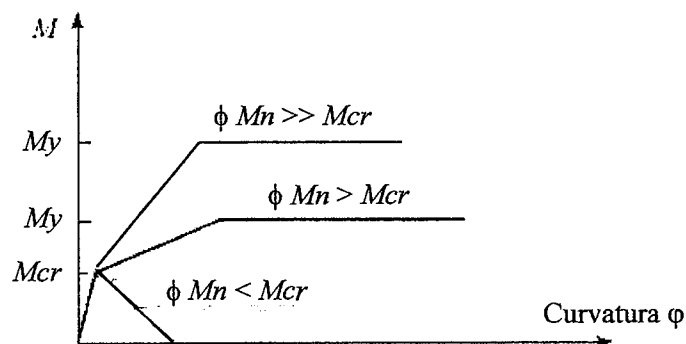


Fig. 10-31 Diagramas momento - curvatura

El acero mínimo permite una mejor transición entre el estado no agrietado y el agrietado de una sección, provee cierta ductilidad y ayuda a controlar parcialmente el ancho de las grietas térmicas y de retracción que se producen bajo condiciones normales.

El ACI-11 (artículo 10.5) especifica que en cualquier sección de un elemento estructural donde por flexión se requiera acero de refuerzo en tracción, el área de acero suministrada no deberá ser menor de:

$$A_s \text{ min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d$$

pero no menor de $A_s \text{ min} = \frac{14}{f_y} b_w d$

La segunda ecuación representa, según el ACI, el mínimo absoluto, que para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ equivale a:

$$A_s \text{ min} = 0.33\% b w d$$

La Norma E.060 (artículo 10.5) presenta un enfoque más general que el ACI para el cálculo del área mínima por flexión. La exigencia de la Norma E.060 es aplicable a cualquier geometría de la sección transversal a diferencia de las ecuaciones del ACI, que son aplicables únicamente a secciones rectangulares o a secciones T. La Norma Peruana exige que el acero mínimo de cualquier sección en flexión, debe ser tal que garantice que la resistencia de la sección fisurada sea por lo menos 1.2 veces el momento flector que causa el agrietamiento de la sección, es decir:

$$\phi M_n \geq 1.2 M_{cr}$$

Cabe señalar que la Norma E.060 de 1989 exigía un factor de seguridad de 1.5 en lugar de 1.2. Esto significa que la nueva Norma ha reducido la demanda de acero mínimo.

Con relación a la figura 10-32, la exigencia de la Norma Peruana equivale a diseñar la sección para un momento externo, positivo o negativo - M_u - que sea como mínimo el proveniente de la ecuación 10-45.

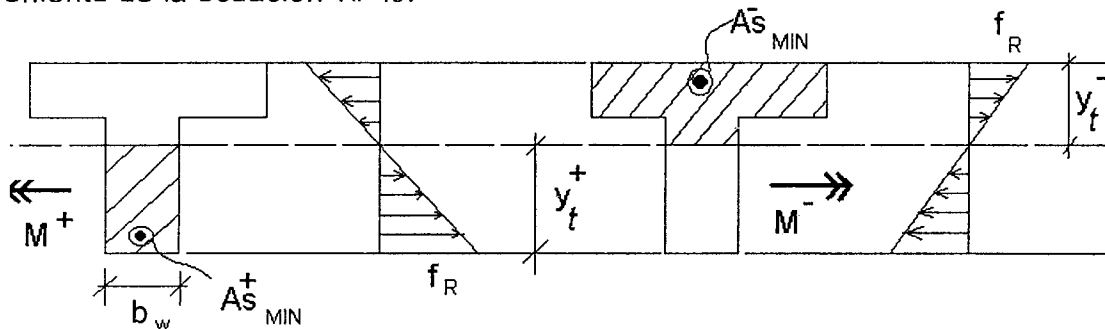


Fig. 10-32 Acero mínimo por flexión – Norma Peruana.

$$M_u \text{ min} = 1.2 M_{cr} \quad \text{ó} \quad \phi M_n \text{ min} = 1.2 M_{cr} \quad (10-45)$$

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad f_r = 2\sqrt{f'_c}$$

En secciones T, como la mostrada en la figura 10-32, generalmente se tendrá que el acero mínimo negativo necesario será mayor que el acero mínimo positivo:

$$A_s^- \text{ min} > A_s^+ \text{ min}$$

$$A_s^- \text{ min} \approx 2A_s^+ \text{ min}$$

Lo anterior se debe a que el volumen de concreto en tracción para la acción de un momento negativo es bastante más grande que para la acción de un momento positivo. Por consiguiente hay que tener cuidado con las secciones T cuando el ala esta en tracción, particularmente en volados y elementos isostáticos.

Para secciones rectangulares y para secciones T con el ala en compresión, el acero mínimo exigido por la Norma Peruana, viene dado por la ecuación 10-46.

$$A_s \text{ min} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \quad (10-46)$$

A continuación se presenta la deducción de la ecuación 10-46. Para una sección rectangular tendremos:

$$fr = 2\sqrt{f'_c}$$

$$Mu_{min} = 1.5 M_{cr} = 1.5 fr S = 1.5 \times 2\sqrt{f'_c} \times \left(\frac{1}{6} b h^2\right)$$

$$Mu_{min} = 0.5\sqrt{f'_c} b h^2 = \phi Mn = \phi A_{s min} f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

$$d - \frac{a}{2} = jd \approx 0.95d \quad (\text{estimado para secciones con poco refuerzo})$$

$$A_{s min} = \frac{0.5\sqrt{f'_c} b h^2}{0.9 (0.95d) f_y}$$

asumiendo $h \approx 1.10 d$

se obtiene $A_{s min} = 0.708 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b d$

Nótese que la Norma E.060 del 2009 ha mantenido un factor de seguridad de 1.5 para secciones rectangulares y secciones T con el ala en compresión.

La ecuación 10-46 para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ resulta en los aceros mínimos en secciones rectangulares indicados en la Tabla 10-6.

Tabla 10-6 Acero mínimo en secciones rectangulares – $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

$f'_c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$A_{s min}$
175	0.22% bd
210	0.24% bd
280	0.28% bd
350	0.31% bd

Alternativamente, tanto el ACI como la Norma Peruana, aceptan que los requerimientos de acero mínimo se consideren satisfechos, si en cada sección del elemento el acero negativo y el acero positivo que se coloque cumpla con:

$$A_s^- \text{ y } A_s^+ \text{ colocados } \geq 1.33 \text{ que } A_s \text{ necesaria por cálculo}$$

Es ilustrativo tener una idea de la deformación del acero de tracción en secciones rectangulares con una armadura igual a la mínima requerida por la ecuación 10-46. Para ello asumamos un concreto de 280 kg/cm^2 y acero de $4,200 \text{ kg/cm}^2$, tendremos:

- $A_{s min} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} b w d \approx 0.279\% b d$
- Equilibrio: $0.85 (280) b a = (0.279\%) b d f_y \Rightarrow a \approx 0.0492 d \Rightarrow c = a / \beta_1 \approx 0.0579 d$
- Deformación en el acero: $\epsilon_s = 0.003 (d-c) / c \approx 4.88\% \Rightarrow \epsilon_s / \epsilon_y \approx 23$

Las deformaciones en el acero de tracción en secciones rectangulares reforzadas con la cuantía mínima dada por la ecuación 10-46 de la Norma Peruana, para distintas calidades del concreto y $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ se muestran en la tabla 10-7. Nótese que la deformación del acero supera el 4%, con deformaciones de esta magnitud el acero ya se encuentra en la zona de endurecimiento por deformación (véanse las figuras 5-4 y 5-5), adicionalmente si el acero utilizado no tiene una adecuada elongación de rotura, como es el caso de los aceros trabajados en frío, es probable que se produzca la fractura del acero.

Tabla 10-7 Deformaciones en el acero en secciones rectangulares reforzadas con la cuantía mínima $-f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

$f_c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	ϵ_s	ϵ_s / ϵ_y
175	3.78 %	18
210	4.20 %	20
280	4.88 %	23
350	5.25 %	25

Para losas macizas y zapatas al acero mínimo de flexión que debe colocarse en la zona de momento positivo, se le denomina acero de retracción y temperatura y viene dado por la ecuación 10-47, en la cual h es el peralte de la losa:

$$A_s^+ \text{ min} = 0.0018 b h \quad (10-47)$$

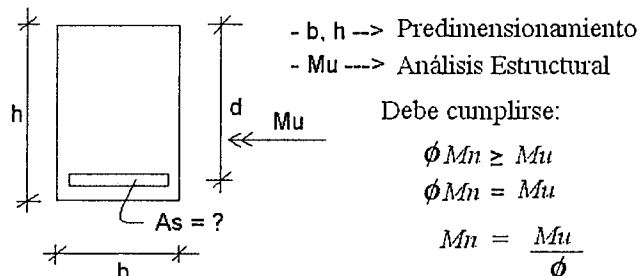
El espaciamiento de este refuerzo no debe exceder de tres veces el espesor de la losa ($3h$) ni de 0.40 m (ver figuras 6-12, 6-22 y Artículo 9.7 de la Norma e.060).

El refuerzo mínimo en losas macizas es un poco menor que el requerido para vigas ya que la acción en dos sentidos de las losas ayuda a distribuir las cargas y una falla repentina es menos probable. Los aceros mínimos indicados no son aplicables para losas apoyadas sobre el terreno (pavimentos) que no se consideren estructurales.

Para losas macizas de distintos espesores tendremos:

$h = 0.15 \text{ m}$	$A_s = 2.7 \text{ cm}^2/\text{m}$	$3/8" @ 0.25 \text{ m}$
$h = 0.20 \text{ m}$	$A_s = 3.6 \text{ cm}^2/\text{m}$	$3/8" @ 0.20$
$h = 0.25 \text{ m}$	$A_s = 4.5 \text{ cm}^2/\text{m}$	$3/8" @ 0.15 \text{ ó } 1/2" @ 0.28$
$h = 0.30 \text{ m}$	$A_s = 5.4 \text{ cm}^2/\text{m}$	$1/2" @ 0.24$

10.9 Resumen - Diseño de Secciones Rectangulares



- Las dimensiones de la sección transversal provienen del predimensionamiento realizado por el diseñador. Pueden existir restricciones del tipo arquitectónico o funcional para la elección de las dimensiones. El peralte de la sección también está relacionado con las deflexiones.
- El momento flector M_u proviene del análisis estructural.
- Seleccionar f_y . Dependerá de las calidades de acero disponibles en el mercado.
- Seleccionar f_c . Es responsabilidad del diseñador, la elección dependerá de criterios tales como: resistencia necesaria, condiciones de servicio, economía, proceso constructivo, plazos de desencofrado, limitaciones en el tamaño de la sección, etc.
- Estimar el peralte efectivo $d \approx h - 6$ ó $d \approx h - 8$ la estimación dependerá de la cantidad de armadura que se espera en la sección.
- Calcular el área (A_s) necesaria mediante fórmulas, tablas, programas.
- Seleccionar los refuerzos (diámetros de las barras), verificar el espaciamiento libre entre barras y entre capas paralelas (si las hubieran) y verificar que el acero realmente colocado sea menor que $0.75 A_s b$. Sabemos que esta verificación en

secciones rectangulares, es equivalente a verificar que la profundidad del bloque de compresiones sea menor que el valor máximo dado por la ecuación 10-41

$$a = \frac{(A_s \text{ colocado}) f_y}{0.85 f'_c b} \quad c = \frac{a}{\beta_1}$$

$$a \leq a_{\text{max}} \quad \text{ecuación 10-41}$$

$$c \leq c_{\text{max}} \quad \text{ecuación 10-42}$$

- Verificar el acero mínimo exigido por la Norma.

$$A_s \text{ colocado} \geq A_s \text{ mínimo} \quad \text{ó} \quad A_s \text{ colocado} \geq 1.3 A_s \text{ calculado}$$

La figura 10-33 muestra lo que podría ser el resultado final del diseño por flexión de una viga continua. Se han diseñado los aceros de refuerzo superiores (negativos) e inferiores (positivos) acordes con el diagrama de momentos flectores (resistencia requerida) obtenidos del análisis estructural. El diseño de los estribos por fuerza cortante se estudiará posteriormente, así como la verificación del comportamiento bajo condiciones de servicio (agrietamiento, deflexiones).

En el Anexo 1 se presentan los planos estructurales de un edificio real, en ellos se puede apreciar el armado de varias vigas.

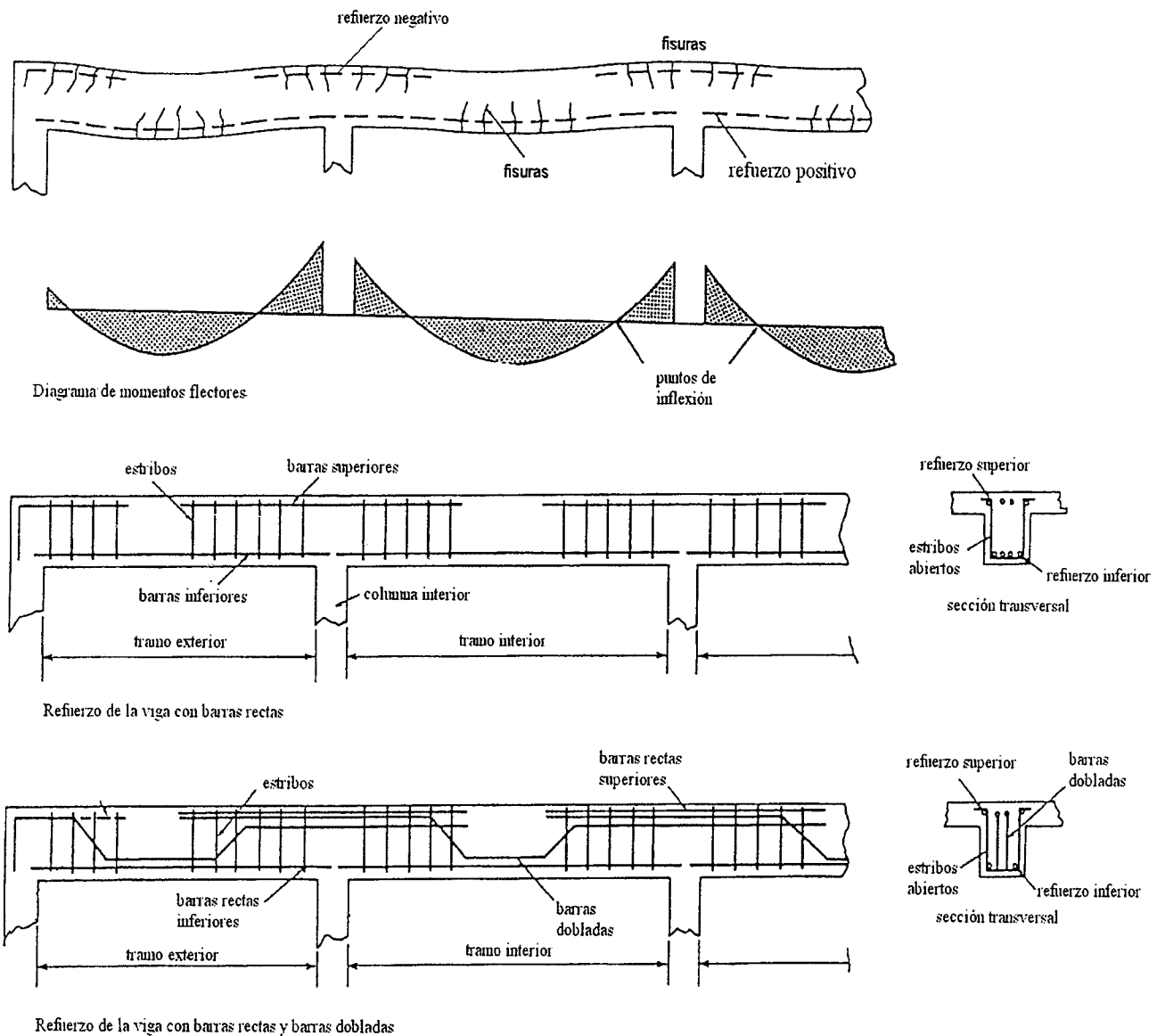


Fig. 10-33 Armadura de una viga continua.

Tabla 10-1 Secciones rectangulares con acero en tracción

ω	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
0.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
0.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
0.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
0.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0438	.0448	.0457	.0467	.0476
0.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
0.06	.0579	.0588	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
0.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0726	.0735	.0744	.0753
0.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
0.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
0.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
0.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
0.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
0.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
0.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
0.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
0.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1489	.1497	.1506	.1514	.1522
0.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
0.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
0.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
0.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
0.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
0.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
0.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
0.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
0.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
0.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
0.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
0.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
0.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
0.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
0.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
0.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
0.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
0.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
0.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
0.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
0.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
0.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
0.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051

$$Mn / (fc b d^2) = \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$\omega = \rho fy / fc \quad a = As fy / (0.85 fc b)$$

Para diseño: Entrar a la tabla con $Mu / (\phi fc b d^2)$, leer el valor de ω y calcular $\rho = \omega fc / fy$

Para análisis: Entrar a la tabla con $\omega = \rho fy / fc$ leer el valor de $Mn / (fc b d^2)$ y calcular Mn

Tabla 10-2 - Diseño en Flexión - $Mu = Ku b d^2$

ϵ_{cu} =	0.003
E_s =	2,000,000
ϵ_y =	0.0021
β_1 =	0.850
ϕ =	0.9

$\rho_{bal} = 2.13\%$
 $0.5 \rho_{bal} = 1.06\%$
 $0.75 \rho_{bal} = 1.59\%$

$f'_c = 210$
$f_y = 4,200$

$Ku = Mu / b d^2$
 Unidades: Kg, cm
 As = $\rho (b \cdot d)$

ρ	Ku
0.10%	3.74
0.12%	4.47
0.14%	5.20
0.16%	5.93
0.18%	6.66
0.20%	7.38
0.22%	8.10
0.24%	8.82
0.26%	9.53
0.28%	10.23
0.30%	10.94
0.32%	11.64
0.34%	12.34
0.36%	13.03
0.38%	13.72
0.40%	14.41
0.42%	15.09
0.44%	15.77
0.46%	16.44
0.48%	17.12
0.50%	17.78
0.52%	18.45
0.54%	19.11
0.56%	19.77
0.58%	20.42
0.60%	21.07
0.62%	21.72
0.64%	22.37
0.66%	23.01
0.68%	23.64
0.70%	24.27
0.72%	24.90
0.74%	25.53
0.76%	26.15
0.78%	26.77
0.80%	27.39
0.82%	28.00
0.84%	28.60
0.86%	29.21
0.88%	29.81
0.90%	30.41
0.92%	31.00
0.94%	31.59
0.96%	32.18
0.98%	32.76
1.00%	33.34
1.02%	33.92
1.04%	34.49
1.06%	35.06
1.08%	35.62
1.10%	36.18
1.12%	36.74

ρ	Ku
1.14%	37.30
1.16%	37.85
1.18%	38.39
1.20%	38.94
1.22%	39.48
1.24%	40.01
1.26%	40.55
1.28%	41.08
1.30%	41.60
1.32%	42.12
1.34%	42.64
1.36%	43.16
1.38%	43.67
1.40%	44.18
1.42%	44.68
1.44%	45.18
1.46%	45.68
1.48%	46.17
1.50%	46.66
1.52%	47.15
1.54%	47.63
1.56%	48.11
1.58%	48.59
1.60%	49.06
1.62%	49.53
1.64%	50.00
1.66%	50.46
1.68%	50.91
1.70%	51.37
1.72%	51.82
1.74%	52.27
1.76%	52.71
1.78%	53.15
1.80%	53.59
1.82%	54.02
1.84%	54.45
1.86%	54.88
1.88%	55.30
1.90%	55.72
1.92%	56.13
1.94%	56.54
1.96%	56.95
1.98%	57.36
2.00%	57.76
2.02%	58.16
2.04%	58.55
2.06%	58.94
2.08%	59.33
2.10%	59.71
2.12%	60.09
2.14%	---
2.16%	---

0.75 As_b

As_b

Para diseño: Entrar a la tabla con $Ku = Mu / (b d^2)$, leer el valor de ρ y calcular $As = \rho b d$
 Para análisis: Entrar a la tabla con $\rho = As / b d$ leer el valor de Ku y calcular $Mu = Ku b d^2$

Tabla 10-3 - Diseño en Flexión - $Mu = Ku b d^2$

$\epsilon_{cu} =$	0.003
$E_s =$	2,000,000
$\epsilon_y =$	0.0021
$\beta_1 =$	0.850
$\phi =$	0.9

$\rho_{bal} = 2.83\%$
 $0.5 \rho_{bal} = 1.42\%$
 $0.75 \rho_{bal} = 2.13\%$

$f_c =$	280
$f_y =$	4,200

$Ku = Mu / b d^2$
 Unidades: Kg, cm
 $As = \rho (b \cdot d)$

ρ	Ku
0.10%	3.75
0.12%	4.49
0.14%	5.23
0.16%	5.96
0.18%	6.70
0.20%	7.43
0.22%	8.15
0.24%	8.88
0.26%	9.60
0.28%	10.32
0.30%	11.04
0.32%	11.75
0.34%	12.47
0.36%	13.17
0.38%	13.88
0.40%	14.58
0.42%	15.29
0.44%	15.98
0.46%	16.68
0.48%	17.37
0.50%	18.06
0.52%	18.75
0.54%	19.44
0.56%	20.12
0.58%	20.80
0.60%	21.48
0.62%	22.15
0.64%	22.82
0.66%	23.49
0.68%	24.16
0.70%	24.82
0.72%	25.48
0.74%	26.14
0.76%	26.80
0.78%	27.45
0.80%	28.10
0.82%	28.75
0.84%	29.39
0.86%	30.03
0.88%	30.67
0.90%	31.31
0.92%	31.94
0.94%	32.58
0.96%	33.20
0.98%	33.83
1.00%	34.45
1.02%	35.08
1.04%	35.69
1.06%	36.31
1.08%	36.92
1.10%	37.53
1.12%	38.14

ρ	Ku
1.14%	38.74
1.16%	39.35
1.18%	39.95
1.20%	40.54
1.22%	41.14
1.24%	41.73
1.26%	42.32
1.28%	42.90
1.30%	43.49
1.32%	44.07
1.34%	44.65
1.36%	45.22
1.38%	45.79
1.40%	46.36
1.42%	46.93
1.44%	47.50
1.46%	48.06
1.48%	48.62
1.50%	49.17
1.52%	49.73
1.54%	50.28
1.56%	50.83
1.58%	51.37
1.60%	51.92
1.62%	52.46
1.64%	52.99
1.66%	53.53
1.68%	54.06
1.70%	54.59
1.72%	55.12
1.74%	55.64
1.76%	56.17
1.78%	56.68
1.80%	57.20
1.82%	57.72
1.84%	58.23
1.86%	58.73
1.88%	59.24
1.90%	59.74
1.92%	60.24
1.94%	60.74
1.96%	61.24
1.98%	61.73
2.00%	62.22
2.02%	62.71
2.04%	63.19
2.06%	63.67
2.08%	64.15
2.10%	64.63
2.12%	65.10
2.14%	65.57
2.16%	66.04

ρ	Ku
2.18%	66.51
2.20%	66.97
2.22%	67.43
2.24%	67.89
2.26%	68.34
2.28%	68.79
2.30%	69.24
2.32%	69.69
2.34%	70.13
2.36%	70.58
2.38%	71.01
2.40%	71.45
2.42%	71.88
2.44%	72.32
2.46%	72.74
2.48%	73.17
2.50%	73.59
2.52%	74.01
2.54%	74.43
2.56%	74.84
2.58%	75.26
2.60%	75.67
2.62%	76.07
2.64%	76.48
2.66%	76.88
2.68%	77.28
2.70%	77.67
2.72%	78.07
2.74%	78.46
2.76%	78.84
2.78%	79.23
2.80%	79.61
2.82%	79.99
2.84%	---
2.86%	---
2.88%	---
2.90%	---
2.92%	---
2.94%	---
2.96%	---
2.98%	---
3.00%	---
3.02%	---
3.04%	---
3.06%	---
3.08%	---
3.10%	---
3.12%	---
3.14%	---
3.16%	---
3.18%	---
3.20%	---

Para diseño: Entrar a la tabla con $Ku = Mu / (b d^2)$, leer el valor de ρ y calcular $As = \rho b d$
 Para análisis: Entrar a la tabla con $\rho = As / b d$ leer el valor de Ku y calcular $Mu = Ku b d^2$

Tabla 10-4 - Diseño en Flexión - $Mu = Ku b d^2$

$\epsilon_{cu} =$	0.003
$E_s =$	2,000,000
$\epsilon_y =$	0.0021
$\beta_1 =$	0.800
$\phi =$	0.9

$\rho_{bal} = 3.33\%$
 $0.5 \rho_{bal} = 1.67\%$
 $0.75 \rho_{bal} = 2.50\%$

$f'_c =$	350
$f_y =$	4,200

$Ku = Mu / b d^2$
 Unidades: Kg, cm
 $As = \rho (b \cdot d)$

ρ	Ku
0.10%	3.75
0.12%	4.50
0.14%	5.24
0.16%	5.98
0.18%	6.72
0.20%	7.45
0.22%	8.19
0.24%	8.92
0.26%	9.65
0.28%	10.37
0.30%	11.10
0.32%	11.82
0.34%	12.54
0.36%	13.26
0.38%	13.98
0.40%	14.69
0.42%	15.40
0.44%	16.11
0.46%	16.82
0.48%	17.53
0.50%	18.23
0.52%	18.93
0.54%	19.63
0.56%	20.33
0.58%	21.02
0.60%	21.72
0.62%	22.41
0.64%	23.10
0.66%	23.78
0.68%	24.47
0.70%	25.15
0.72%	25.83
0.74%	26.51
0.76%	27.18
0.78%	27.86
0.80%	28.53
0.82%	29.20
0.84%	29.86
0.86%	30.53
0.88%	31.19
0.90%	31.85
0.92%	32.51
0.94%	33.17
0.96%	33.82
0.98%	34.47
1.00%	35.12
1.02%	35.77
1.04%	36.42
1.06%	37.06
1.08%	37.70
1.10%	38.34
1.12%	38.98

ρ	Ku
1.14%	39.61
1.16%	40.25
1.18%	40.88
1.20%	41.51
1.22%	42.13
1.24%	42.76
1.26%	43.38
1.28%	44.00
1.30%	44.62
1.32%	45.23
1.34%	45.85
1.36%	46.46
1.38%	47.07
1.40%	47.67
1.42%	48.28
1.44%	48.88
1.46%	49.48
1.48%	50.08
1.50%	50.68
1.52%	51.27
1.54%	51.87
1.56%	52.46
1.58%	53.04
1.60%	53.63
1.62%	54.21
1.64%	54.79
1.66%	55.37
1.68%	55.95
1.70%	56.53
1.72%	57.10
1.74%	57.67
1.76%	58.24
1.78%	58.80
1.80%	59.37
1.82%	59.93
1.84%	60.49
1.86%	61.05
1.88%	61.61
1.90%	62.16
1.92%	62.71
1.94%	63.26
1.96%	63.81
1.98%	64.35
2.00%	64.90
2.02%	65.44
2.04%	65.97
2.06%	66.51
2.08%	67.05
2.10%	67.58
2.12%	68.11
2.14%	68.64
2.16%	69.16

ρ	Ku
2.18%	69.69
2.20%	70.21
2.22%	70.73
2.24%	71.24
2.26%	71.76
2.28%	72.27
2.30%	72.78
2.32%	73.29
2.34%	73.80
2.36%	74.30
2.38%	74.80
2.40%	75.30
2.42%	75.80
2.44%	76.30
2.46%	76.79
2.48%	77.28
2.50%	77.77
2.52%	78.26
2.54%	78.75
2.56%	79.23
2.58%	79.71
2.60%	80.19
2.62%	80.67
2.64%	81.14
2.66%	81.61
2.68%	82.08
2.70%	82.55
2.72%	83.02
2.74%	83.48
2.76%	83.94
2.78%	84.40
2.80%	84.86
2.82%	85.31
2.84%	85.77
2.86%	86.22
2.88%	86.67
2.90%	87.11
2.92%	87.56
2.94%	88.00
2.96%	88.44
2.98%	88.88
3.00%	89.31
3.02%	89.75
3.04%	90.18
3.06%	90.61
3.08%	91.04
3.10%	91.46
3.12%	91.88
3.14%	92.31
3.16%	92.72
3.18%	93.14
3.20%	93.56

Para diseño: Entrar a la tabla con $Ku = Mu / (b d^2)$, leer el valor de ρ y calcular $As = \rho b d$
 Para análisis: Entrar a la tabla con $\rho = As / b d$ leer el valor de Ku y calcular $Mu = Ku b d^2$

Tabla 10-8 Resultante de Compresiones y su ubicación (Diagrama de Hognestad o Kent – Park)

Cualquier valor de $f'c$			
ϵ_c	$f_c/f'c$	$K1$	$K2$
0.0001	0.098	0.04917	0.33475
0.0002	0.190	0.09667	0.33621
0.0003	0.278	0.14250	0.33772
0.0004	0.360	0.18667	0.33929
0.0005	0.438	0.22917	0.34091
0.0006	0.510	0.27000	0.34259
0.0007	0.578	0.30917	0.34434
0.0008	0.640	0.34667	0.34615
0.0009	0.698	0.38250	0.34804
0.0010	0.750	0.41667	0.35000
0.0011	0.798	0.44917	0.35204
0.0012	0.840	0.48000	0.35417
0.0013	0.878	0.50917	0.35638
0.0014	0.910	0.53667	0.35870
0.0015	0.938	0.56250	0.36111
0.0016	0.960	0.58667	0.36364
0.0017	0.978	0.60917	0.36628
0.0018	0.990	0.63000	0.36905
0.0019	0.998	0.64917	0.37195
0.0020	1.000	0.66667	0.37500
0.0021	0.993	0.68236	0.37828
0.0022	0.985	0.69629	0.38177
0.0023	0.978	0.70868	0.38536
0.0024	0.970	0.71972	0.38897
0.0025	0.963	0.72958	0.39258
0.0026	0.955	0.73840	0.39613
0.0027	0.948	0.74628	0.39961
0.0028	0.940	0.75333	0.40302
0.0029	0.933	0.75964	0.40633
0.0030	0.925	0.76528	0.40956
0.0031	0.918	0.77031	0.41269
0.0032	0.910	0.77479	0.41574
0.0033	0.903	0.77878	0.41869
0.0034	0.895	0.78230	0.42156
0.0035	0.888	0.78542	0.42435
0.0036	0.880	0.78815	0.42706
0.0037	0.873	0.79053	0.42969
0.0038	0.865	0.79259	0.43225
0.0039	0.858	0.79435	0.43474
0.0040	0.850	0.79583	0.43717

Notas:

c = posición (profundidad) del eje neutro

b = ancho de la sección

$C_c = K1 * f_c * b * c$ (compresión en el concreto)

Posición de resultante de compresiones = $K2 * c$

Las tablas son aplicables a cualquier valor de $f'c$ con la condición que el diagrama constitutivo en compresión sea como el mostrado en la figura (parábola – recta descendente con caída de $0.15 f'c$)

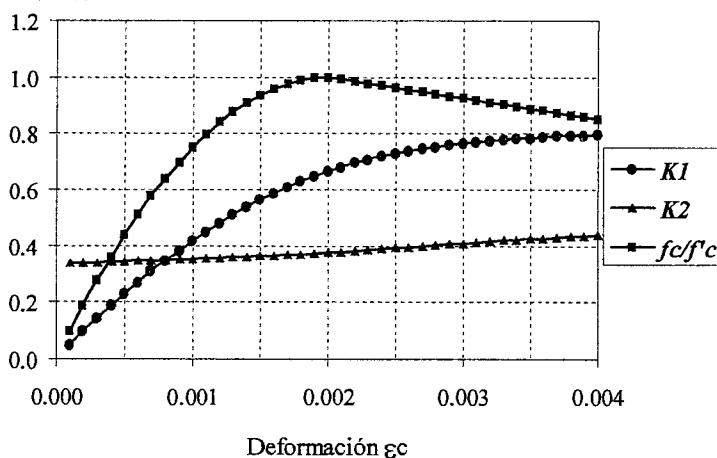
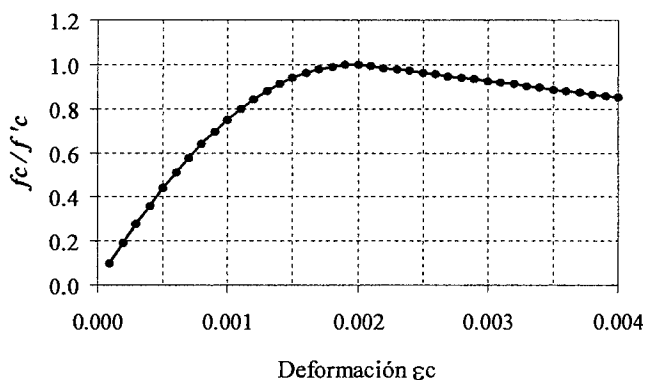


Tabla 10-9 Resultante de Compresiones y su ubicación (Diagrama modificado CEB)

Cualquier valor de $f'c$			
ϵ_c	$f_c/f'c$	$K1$	$K2$
0.0001	0.10	0.04917	0.33475
0.0002	0.19	0.09667	0.33621
0.0003	0.28	0.14250	0.33772
0.0004	0.36	0.18667	0.33929
0.0005	0.44	0.22917	0.34091
0.0006	0.51	0.27000	0.34259
0.0007	0.58	0.30917	0.34434
0.0008	0.64	0.34667	0.34615
0.0009	0.70	0.38250	0.34804
0.0010	0.75	0.41667	0.35000
0.0011	0.80	0.44917	0.35204
0.0012	0.84	0.48000	0.35417
0.0013	0.88	0.50917	0.35638
0.0014	0.91	0.53667	0.35870
0.0015	0.94	0.56250	0.36111
0.0016	0.96	0.58667	0.36364
0.0017	0.98	0.60917	0.36628
0.0018	0.99	0.63000	0.36905
0.0019	1.00	0.64917	0.37195
0.0020	1.00	0.66667	0.37500
0.0021	1.00	0.68254	0.37818
0.0022	1.00	0.69697	0.38142
0.0023	1.00	0.71014	0.38465
0.0024	1.00	0.72222	0.38782
0.0025	1.00	0.73333	0.39091
0.0026	1.00	0.74359	0.39390
0.0027	1.00	0.75309	0.39678
0.0028	1.00	0.76190	0.39955
0.0029	1.00	0.77011	0.40221
0.0030	1.00	0.77778	0.40476
0.0031	1.00	0.78495	0.40720
0.0032	1.00	0.79167	0.40954
0.0033	1.00	0.79798	0.41178
0.0034	1.00	0.80392	0.41392
0.0035	1.00	0.80952	0.41597
0.0036	1.00	0.81481	0.41793
0.0037	1.00	0.81982	0.41981
0.0038	1.00	0.82456	0.42161
0.0039	1.00	0.82906	0.42334
0.0040	1.00	0.83333	0.42500

Notas:

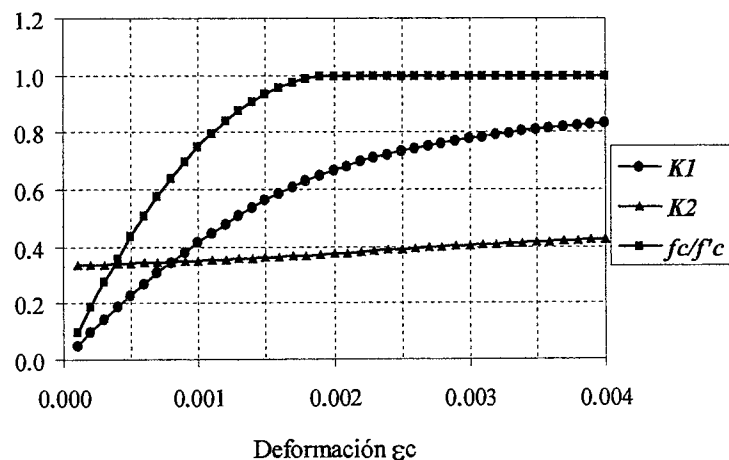
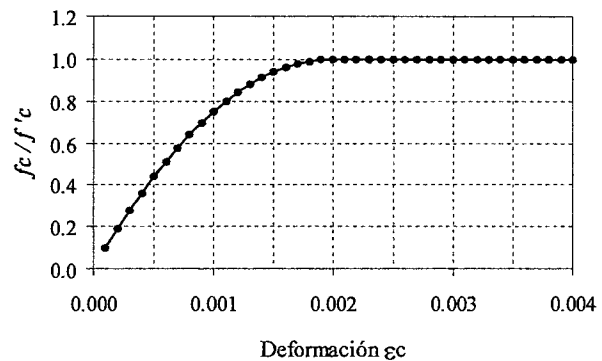
c = posición (profundidad) del eje neutro

b = ancho de la sección

$C_c = K1 * f_c * b * c$ (compresión en el concreto)

Posición de resultante de compresiones = $K2 * c$

Las tablas son aplicables a cualquier valor de $f'c$ con la condición que el diagrama constitutivo en compresión sea como el mostrado en la figura (parábola – recta).

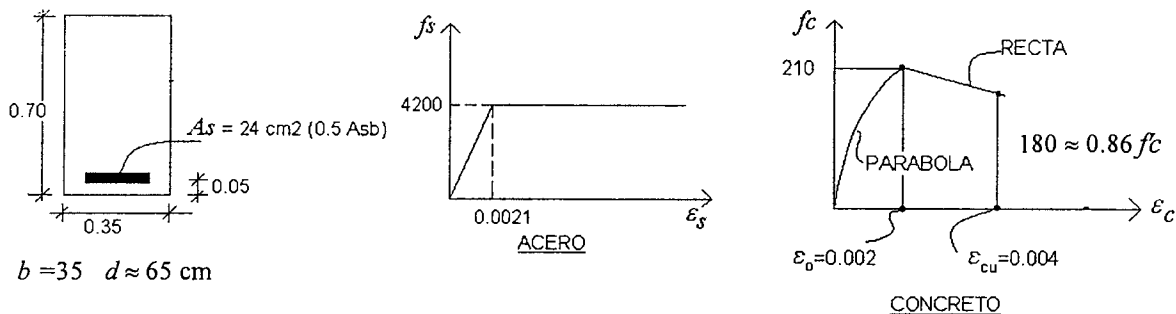


10.10 Lecturas

- 10.1 Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design. Mattock, Kriz, Hognestad. Journal ACI. February 1961.
- 10.2 Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete. Hubert Rusch. Journal ACI. July 1960.
- 10.3 Ultimate Strength of Nonrectangular Structural Concrete Members. Mattock, Kriz. Journal ACI. January 1961.
- 10.4 Design of Reinforced Concrete Members Under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression. Charles S. Whitney. ACI Concrete International, Landmark Series. May 2004.
- 10.5 Design Proposal for Side Face Crack Control Reinforcement for Large Reinforced Concrete beams. Gregory Frantz and John Breen. ACI Concrete International, October 1980.
- 10.6 Myths and Fallacies in Earthquake Engineering – Conflicts between Design and Reality. Nigel Priestley. ACI Concrete International. February 1997.
- 10.7 Seismic Resistance of Frames with Vertically Distributed Longitudinal Reinforcement in Beams. Wong, Priestley, Park. ACI Structural Journal. July-August 1990.
- 10.8 Designing and Constructing With FRP (Fiber Reinforced Polymer) Bars: An Emerging Technology. Antonio Nanni, Salem Faza. ACI Concrete International, November 2002.

Ejemplo 10-1 - Comportamiento de una Sección en Flexión Pura

Estudiemos el comportamiento de una sección rectangular de concreto armado sometida a flexión pura. La sección analizada, el modelo supuesto para el comportamiento del acero en tracción y para el comportamiento del concreto en compresión, se indican a continuación.



Para estudiar el comportamiento o respuesta de la sección frente a un momento flector de magnitud creciente, no es posible utilizar el bloque equivalente de compresiones de la Norma E.060, ya que este modelo solo permite aproximar la resistencia máxima de la sección, es decir, permite calcular solamente un punto de la curva total de respuesta.

Asumiremos que el concreto resiste tracciones hasta un instante antes de producirse la fisuración por flexión, de allí en adelante se ignora el aporte que podría tener el concreto en tracción que aún no se ha fisurado.

La respuesta se calculará utilizando las hipótesis básicas (ver 10.3.3) para el análisis de secciones de concreto armado en flexión. En todo instante deberán cumplirse los tres bloques de condiciones: Equilibrio, Compatibilidad, Relaciones Constitutivas.

En lugar de aplicar un momento flector de magnitud creciente, es más conveniente para los cálculos, someter la fibra extrema del concreto comprimido (borde superior de la sección) a una deformación que se incrementa desde cero, hasta su agotamiento por compresión y para cada deformación supuesta calcular el momento flector asociado.

La resultante de las compresiones en el concreto se calcula mediante:

$$C_c = \int_0^c f_c(y) b \, dy$$

Alternativamente es posible utilizar las tablas 10-8 y 10-9 para calcular la resultante de compresiones en el concreto, siempre y cuando el diagrama constitutivo del concreto comprimido sea el indicado en esas tablas.

El procedimiento utilizado es el siguiente:

- Variar la deformación del concreto de la fibra extrema en compresión (ϵ_c) desde cero hasta su valor máximo (en este caso $\epsilon_{cu} = 0.004$) con incrementos de, por ejemplo, 0.0001.
- Para cada valor de ϵ_c seleccionado, será necesario variar (iterar) la profundidad del eje neutro (c) hasta lograr el equilibrio de fuerzas horizontales en la sección, es decir la compresión total en el concreto debe ser igual a la tracción en el acero:

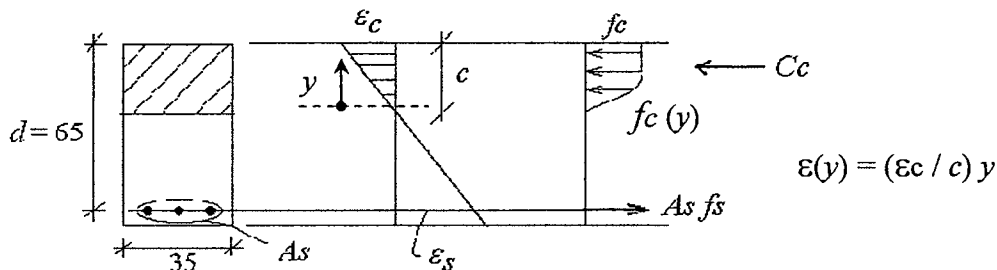
$$C_c = A_s f_s$$

Para ello será necesario para cada valor de la posición del eje neutro, integrar (conviene numéricamente) los esfuerzos en el concreto para calcular la compresión total (C_c) o utilizar la tablas 10-8 y 10-9.

- En todo instante hay que calcular la deformación en el acero y su esfuerzo, el cual deberá cumplir, para el modelo elastoplástico adoptado en este ejemplo:

$$f_s = E_s \times \epsilon_s \leq f_y.$$

La figura a continuación muestra esquemáticamente una de las tantas iteraciones necesarias.



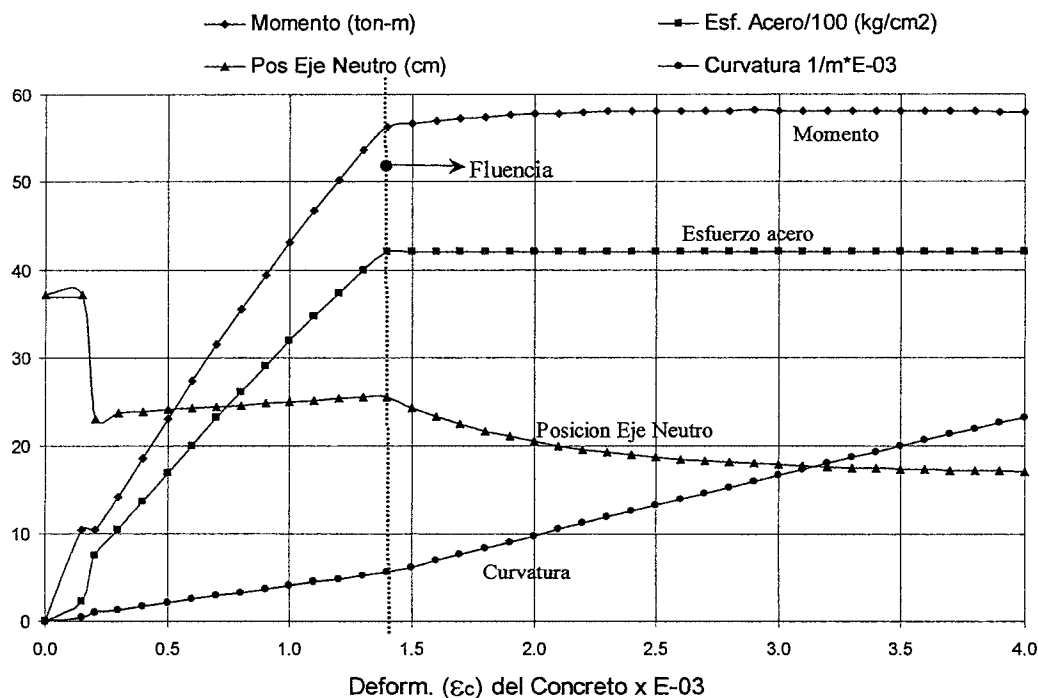
Las principales variables de este problema se han resumido en los dos gráficos insertos a continuación. En ellos se puede apreciar la variación del momento flector, el esfuerzo en el acero, la posición o profundidad el eje neutro, la curvatura de la sección, la deformación del acero y del concreto. Se distinguen claramente tres etapas:

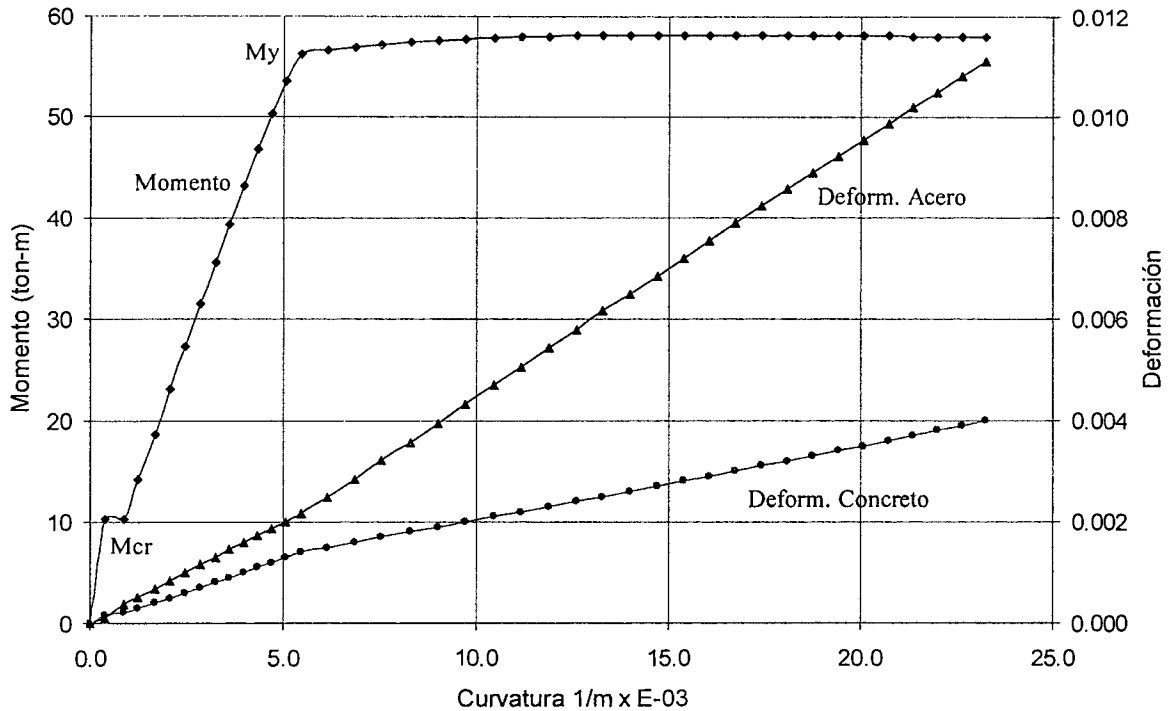
- La primera asociada al comportamiento de la sección antes de alcanzar el momento de agrietamiento ($M_{cr} \approx 10.3 \text{ ton-m}$) es decir la etapa en la cual el concreto aún resiste tracciones. Nótese el salto brusco que se produce tanto en la posición del eje neutro, en la curvatura de la sección así como en el esfuerzo en el acero, al pasar la sección de no agrietada a agrietada.
- La segunda asociada al comportamiento de la sección con el acero trabajando en el rango elástico ($f_s < f_y$)
- La tercera etapa una vez que se ha excedido el momento flector que produce la primera fluencia del acero ($M_y \approx 56.2 \text{ ton-m}$) hasta alcanzar el agotamiento del concreto en compresión el cual se produce para un momento flector $M_n \approx 58 \text{ ton-m}$

Nótese la similitud entre el momento de fluencia de la sección (M_y) y la resistencia nominal o momento máximo (M_n) la diferencia es de tan solo un 3%. Esto se debe, en parte, al modelo elastoplástico adoptado para el acero. Si se hubiera adoptado un modelo con endurecimiento por deformación, la diferencia hubiera sido mayor.

La ductilidad de curvatura de esta sección es:

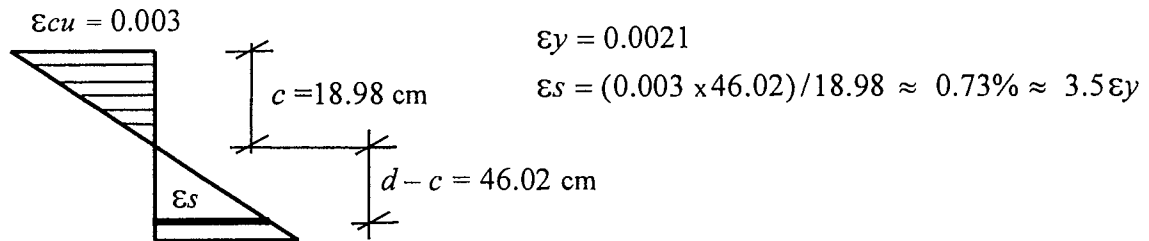
$$\phi_{\max} / \phi_y = 23.26 / 5.35 \approx 4.3$$



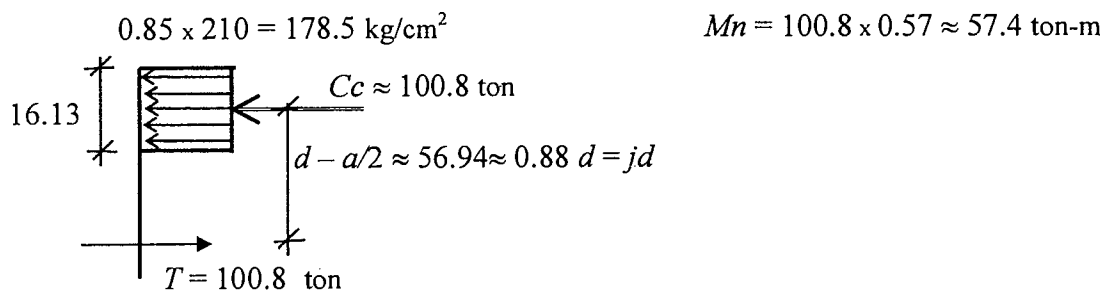


Utilizando las hipótesis de la Norma E.060 para secciones en flexión, la resistencia de la sección, asumiendo con cargo a verificar una falla del tipo subreforzada, es:

- Tracción en el acero: $T = A_s f_y = 24 \times 4,200 = 100,800 \text{ kg}$
- Equilibrio: $C_c = T \quad 0.85 f_c a b = A_s f_y \quad 0.85 \times 210 \times a \times 35 = 100,800 \Rightarrow a \approx 16.13 \text{ cm}$
- Verificación: $C_c = 0.85 \times 210 \times 16.13 \times 35 = 100,772 \text{ kg}$
- Posición del eje neutro: $c = \frac{16.13}{0.85} = 18.98 \text{ cm} \Rightarrow \frac{c}{d} \approx 0.29$
- Verificación de la fluencia en el acero:



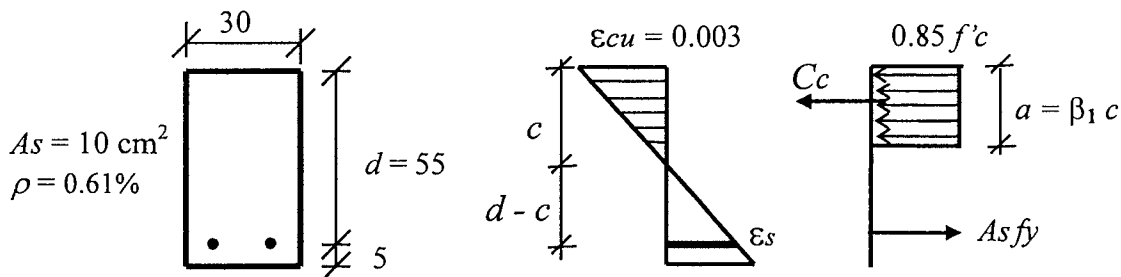
- Resistencia nominal de la sección:



La resistencia nominal calculada con la Norma E.060 (57.4 ton-m) es muy similar a la calculada con el modelo del concreto utilizado para calcular la respuesta de la sección (58 ton-m). Este resultado, por lo menos para este ejemplo, valida el uso del bloque equivalente de compresiones de la Norma.

Ejemplo 10-2- Análisis de una sección rectangular con las hipótesis de la Norma E.060

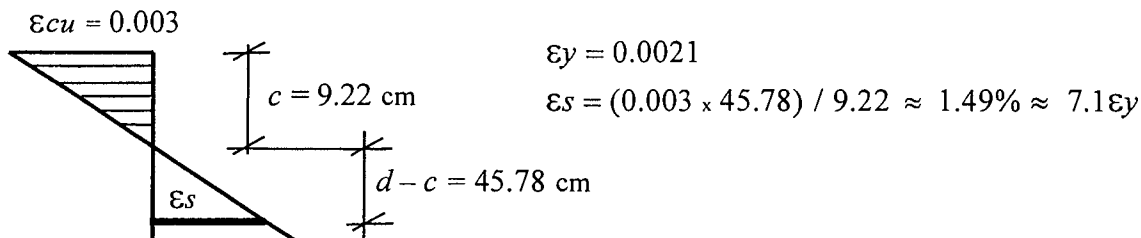
Calcular la resistencia de diseño de la sección rectangular mostrada en la figura para momento positivo (compresiones en la fibra superior). La sección mostrada es la misma que se utilizó en el ejemplo de introducción del Capítulo 9.



Con las hipótesis de la Norma E.060 para el análisis de secciones de concreto armado en flexión, es suficiente para determinar su resistencia, es decir, no utilizaremos las ecuaciones que se han deducido para el caso particular de las secciones rectangulares.

La altura del bloque equivalente de compresiones, para $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$, se obtiene a partir del valor de $\beta_1 = 0.85$, en consecuencia $a = 0.85 c$. Asumiremos, con cargo a verificar, que se trata de una falla dúctil (sección subreforzada), es decir que el acero fluye antes que el concreto alcance su deformación de agotamiento $\epsilon_{cu} = 0.003$.

- Tracción en el acero: $T = A_s f_y = 10 \times 4,200 = 42,000 \text{ kg}$
- Equilibrio $C_c = T \quad 0.85 f'c a b = A_s f_y$
 $0.85 \times 210 \times a \times 30 = 42,000 \Rightarrow a = 7.84 \text{ cm}$
- Verificación: $C_c = 0.85 \times 210 \times 7.84 \times 30 = 41,983 \text{ kg}$
- Posición del eje neutro: $c = \frac{7.84}{0.85} = 9.22 \text{ cm} \Rightarrow \frac{c}{d} \approx 0.17$
- Verificación de la fluencia en el acero:



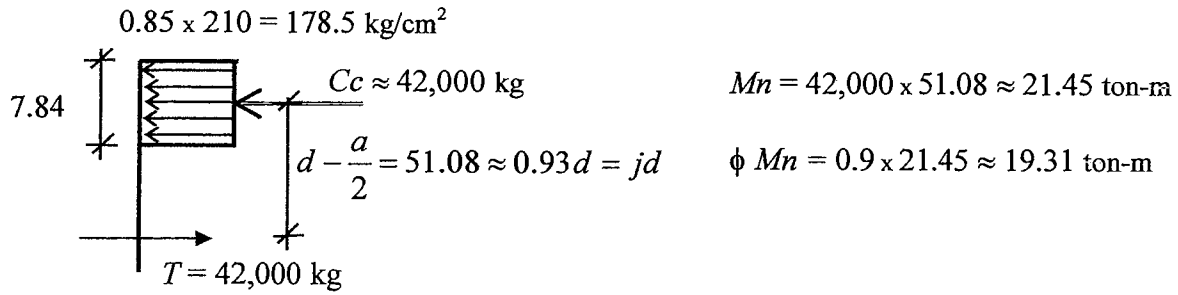
La fluencia en el acero de tracción, también se pudo verificar comparando la relación c/d con la correspondiente a la falla balanceada:

$$c_b/d = 0.588 \quad (f_y = 4,200 \quad \epsilon_{cu} = 0.003)$$

en la sección analizada: $c/d \approx 0.17 < 0.588$ (por lo tanto el acero fluye)

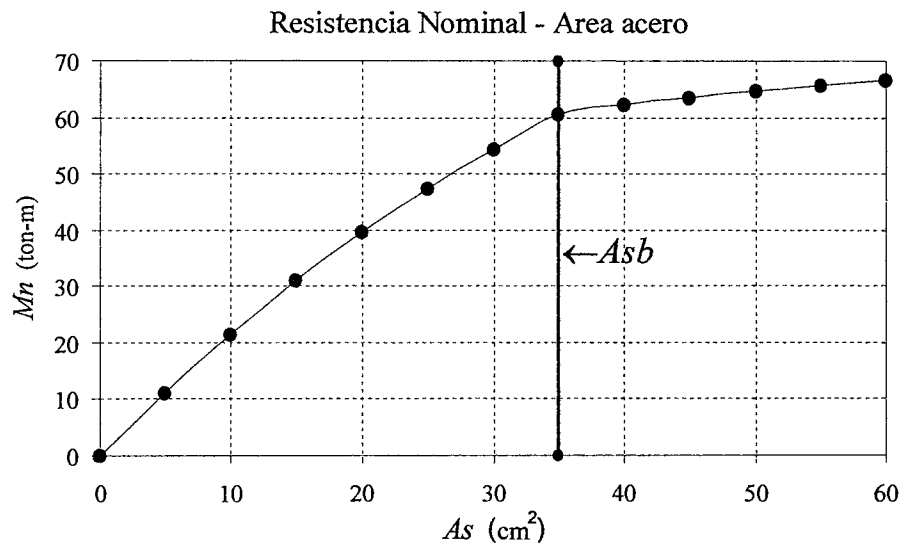
La cantidad de acero que produce la falla balanceada de la sección es, en este caso, de 35 cm^2 y la cantidad máxima de acero permitida por la Norma es $0.75 \times 35 \approx 26 \text{ cm}^2$. Evidentemente otra manera de verificar la fluencia del acero, es comparar la cantidad de acero colocada con la que produce la falla balanceada. Cuando el acero colocado es menor que el balanceado, el acero de refuerzo en tracción estará en fluencia.

- La resistencia de la sección la obtendremos por equilibrio de la misma, con la ayuda del diagrama de fuerzas internas que se muestra a continuación:



Aprovechemos este ejemplo para analizar la forma como cambia la resistencia en flexión de la sección con la cantidad de acero colocada. Para ello se han elaborado dos gráficos suponiendo que el peralte efectivo se mantiene constante ($d = 0.55 \text{ m}$).

En el primer gráfico se muestra la variación de la resistencia nominal con el aumento en la cuantía de acero. La relación es casi lineal hasta la cuantía balanceada, de allí en adelante la resistencia de la sección se incrementa poco ya que la falla está controlada por la capacidad del concreto y el acero permanece elástico. En consecuencia, con las hipótesis de la Norma E.060, aumentos en la cantidad de acero por encima del balanceado, son poco eficientes, es decir incrementan poco la resistencia de la sección, además de producir una falla frágil en la sección o elemento.

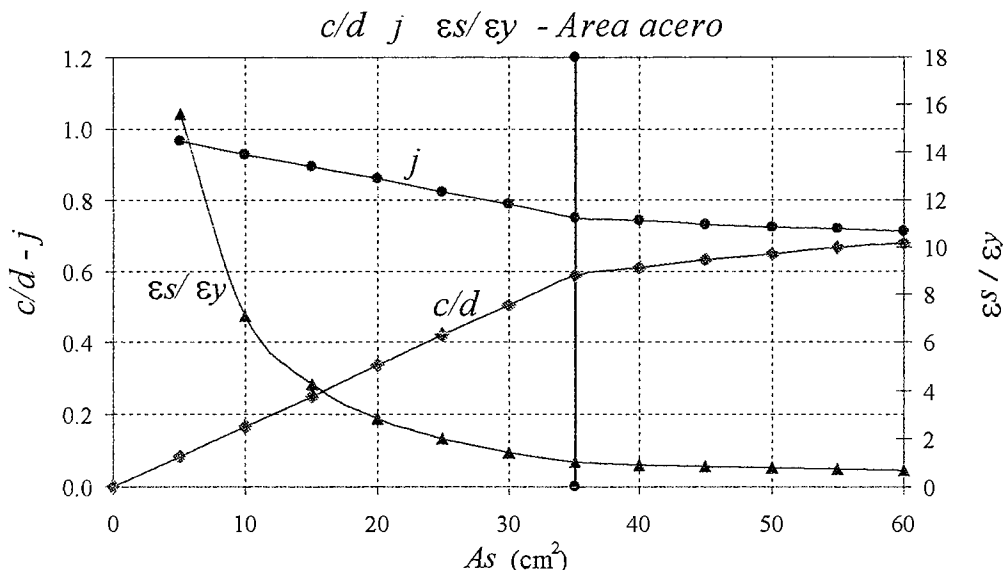


En el segundo gráfico se aprecia la variación de las relaciones c/d , ϵ_s/ϵ_y y del brazo interno de palanca medido a través del parámetro j ($jd = d - a/2$). El cociente c/d varía linealmente hasta la cuantía balanceada donde cambia de pendiente, similar observación es válida para jd .

El cociente c/d en una sección rectangular sin acero en compresión, para las cuantías de acero que se emplean normalmente, varía entre 0.1 y 0.4, mientras que el brazo interno de palanca (jd) varía aproximadamente entre 0.95, para cuantías bajas, y 0.80 para cuantías de acero altas. Para estimar de manera rápida la resistencia de una sección rectangular, puede suponerse un brazo interno de palanca aproximado de $jd = 0.9d$, con esta suposición tendremos:

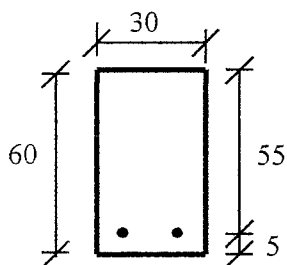
$$\phi M_n \approx \phi A_s f_y (0.9 d)$$

En el segundo gráfico también es posible apreciar la manera como, en una sección rectangular sin acero en compresión, cambia la deformación del acero de tracción a medida que se incrementa la cantidad de acero. Dependiendo del peralte de la viga, para cuantías bajas la deformación del acero está entre 7 y 15 veces la deformación de fluencia, mientras que para cuantías altas esta se va reduciendo hasta llegar a 1.8 veces la deformación de fluencia para cuantías cercanas a $0.75 A_{sb}$.



Ejemplo 10-3 - Uso de tablas y ayudas para el diseño

Para ilustrar el uso de las tablas o ayudas para el diseño de secciones rectangulares, diseñaremos la siguiente sección:



$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $M_u = 20 \text{ ton-m (Resistencia requerida)}$
 $b = 30 \quad d = 55 \text{ cm}$
 $A_s \text{ min} = 4 \text{ cm}^2$
 $A_s b = 35 \text{ cm}^2 \quad 0.75 A_s b \approx 26 \text{ cm}^2$

- Tabla 10.1. La ventaja de esta tabla estriba en que es válida para cualquier calidad del concreto y del acero. Además son adimensionales, basta utilizar un sistema consistente de unidades.

Calcular:
$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{20,000 \times 100}{0.9 \times 210 \times 30 \times 55^2} \approx 0.117$$

Leer en la tabla el valor de ω correspondiente que resulta ser 0.126:

$$\omega = 0.126 = \frac{\rho f_y}{f'_c} \Rightarrow \rho = 0.63\% \quad A_s = \rho b d = 0.0063 \times 30 \times 55 = 10.4 \text{ cm}^2$$

Con el valor de A_s que finalmente se decida colocar, se podrá calcular a , c , ϵ_s

- Tabla 10.2 (K_u). Estas tablas son válidas solo para aceros de 4,200 kg/cm² y para una calidad específica del concreto. No son adimensionales, deben emplearse kilogramos y centímetros.

Calcular:
$$K_u = \frac{M_u}{b d^2} = \frac{20,000 \times 100}{30 \times 55^2} = 22.04$$

Leer en la tabla el valor de la cuantía $\rho = 0.63\%$ y calcular $A_s = 0.63\% \times 30 \times 55$.

- Ecuación 10-30. Este método es apropiado para su uso en calculadoras programables.

$$a = d - \sqrt{d^2 - \frac{2 |M_u|}{0.85 \phi f'_c b}} \Rightarrow a \approx 8.15 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{Mu}{\phi \cdot f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)} = \frac{20,000 \times 100}{0.9 \times 4,200 \times \left(55 - \frac{8.15}{2}\right)} \approx 10.4 \text{ cm}^2$$

- *Método de tanteos.* Útil cuando no se dispone de tablas. Consiste en suponer un valor inicial del brazo de palanca interno jd e ir corrigiendo, por aproximaciones sucesivas, el valor supuesto hasta lograr la convergencia.

Ya se ha mencionado que en secciones rectangulares el valor de j se puede aproximar mediante:

- $j \approx 0.95$ en secciones rectangulares con poca armadura.
- $j \approx 0.80$ en secciones rectangulares con armadura cercana a $0.75 A_s b$.
- $j \approx 0.75$ en secciones con armadura igual a $A_s b$.

Por lo tanto para cantidades intermedias o usuales de armadura, una aproximación razonable es $j \approx 0.90$. Con este valor es posible calcular un primer estimado de la armadura necesaria mediante la ecuación (1) e ir corrigiendo el valor supuesto mediante las ecuaciones (2) y (3):

$$A_s = Mu / \phi f_y (jd) \quad (1) \quad a = A_s f_y / 0.85 f_c b \quad (2) \quad j = d - a/2 \quad (3)$$

Apliquemos estas ideas al ejemplo que hemos resuelto con la ayuda de las tablas ($f_c = 210$, $b = 30$, $d = 55$, $Mu = 20 \text{ ton-m}$):

- Primer estimado:
 $j = 0.9$ $jd = 49.5 \text{ cm}$ $A_s = 10.69 \text{ cm}^2$
 $a = 8.38$ $j = 0.92$
- Segundo estimado:
 $j = 0.92$ $jd = 50.6 \text{ cm}$ $A_s = 10.46 \text{ cm}^2$
 $a = 8.20$ $j = 0.925$
- Tercer estimado:
 $j = 0.925$ $jd = 50.88 \text{ cm}$ $A_s = 10.40 \text{ cm}^2$
 $a = 8.16$ $j = 0.926$

La convergencia de este método suele ser rápida. En el ejemplo que se ha resuelto, en el segundo estimado ya se tenía una buena aproximación al área de acero necesaria.

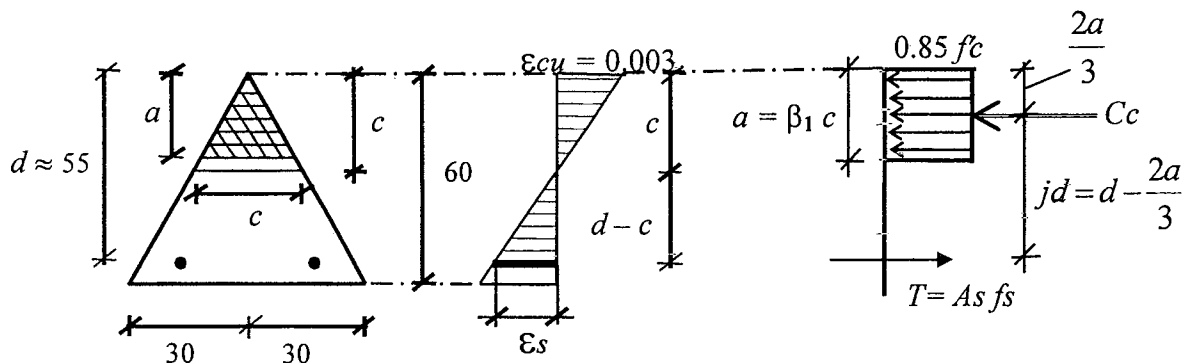
Ejemplo 10-4 - Análisis de una sección no rectangular

Calcular la resistencia de diseño de la sección triangular mostrada en la figura, reforzada con 10.2 cm^2 (2 - 1") de acero para momento positivo (compresiones en la fibra superior).

Igual que en el ejemplo 10-2 utilizaremos solamente las hipótesis para el análisis de secciones de concreto armado en flexión. Lo importante en este ejemplo radica en aceptar que aún con un bloque comprimido no rectangular, se sigue cumpliendo la hipótesis simplificadora de trabajar con un bloque equivalente de compresiones. Una discusión sobre la validez del empleo del bloque equivalente de compresiones en secciones no rectangulares, se puede encontrar en el libro de Park y Paulay y en la lectura 10-3.

Adicionalmente en este ejemplo veremos como analizar secciones no rectangulares para las cuales no se han derivado ecuaciones.

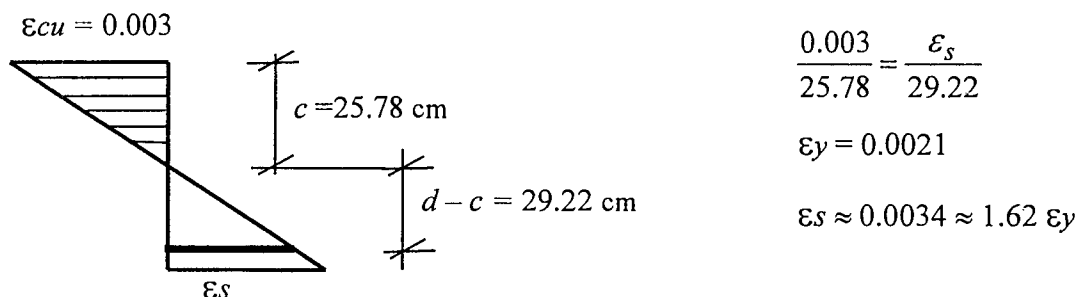
Nótese que para la sección triangular, no es posible definir el concepto de cuantía de acero en flexión ($\rho = A_s/bd$), el concepto de cuantía tal como lo define la Norma, es aplicable a secciones rectangulares o T.



Asumiremos, con cargo a verificar, que se trata de una falla dúctil (sección subreforzada), es decir que el acero fluye antes que el concreto alcance su deformación de agotamiento $\epsilon_{cu} = 0.003$. Para $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ $\beta_1 = 0.85$.

$$T = A_s f_y = 10.2 \times 4,200 = 42,840 \text{ kg}$$

- Equilibrio: $C_c = T$ (área del bloque comprimido equivalente = $a^2/2$)
 $C_c = 0.85 \times 210 \times a^2 / 2 = 42,840 \text{ kg} \Rightarrow a = 21.91 \text{ cm}$
 $c = a / 0.85 = 25.78 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.47$
- La fluencia en el acero de tracción, se puede verificar comparando la relación c/d con la correspondiente a la falla balanceada:
 $cb/d = 0.588$ (en la falla balanceada para $f_y = 4,200$ $\epsilon_{cu} = 0.003$)
 en la sección analizada: $c/d \approx 0.47 < 0.588$ (por lo tanto el acero fluye)



- Resistencia de la sección:
 $M_n = C_c j d = T j d = A_s f_y j d$
 $j d = d - \frac{2a}{3} = 55 - \frac{2 \times 21.91}{3} = 40.39 \text{ cm} \approx 0.73 d$
 $M_n = 42,840 \times 40.39 / 100 = 17,305 \text{ kg-m}$
- La resistencia de diseño o capacidad disponible de la sección será:
 $\phi M_n = 0.9 \times 17,305 = 15,575 \text{ kg-m}$
- Calculemos el área de acero en tracción que produce una falla balanceada en la sección:

$$cb/d = 0.588 \Rightarrow cb = 0.588 \times 55 = 32.34 \text{ cm}$$

profundidad del bloque de compresiones: $ab = 0.85 \times 32.34 = 27.5 \text{ cm}$

equilibrio en la falla balanceada: $C_{cb} = A_s b f_y$

$$0.85 f_c (27.5)^2 / 2 = 67,495 = A_s b f_y \Rightarrow A_s b \approx 16.1 \text{ cm}^2$$

El límite de la Norma es: $A_s \text{ max} = 0.75 A_s b = 0.75 \times 16.1 \approx 12 \text{ cm}^2$

Es necesario señalar que esta sección triangular, no cumple con el procedimiento alternativo de la Norma E.060 (Artículo 10.3.5) para establecer la cantidad máxima de acero en tracción ya que la deformación en el acero (ϵ_t) es menor a 0.4%. La cantidad máxima de acero que se puede colocar en esta sección para lograr una deformación en el acero por lo menos igual a 0.4% es de 8.5 cm² aproximadamente. Para que cumpla con el Artículo 10.3.5 sería necesario aumentar la calidad del concreto o reducir la cantidad de acero en tracción o añadir acero en compresión. En consecuencia, los requerimientos de los Artículos 10.3.4 y 10.3.5 de la Norma E.060 no conducen a la misma exigencia de acero máximo, salvo en secciones rectangulares.

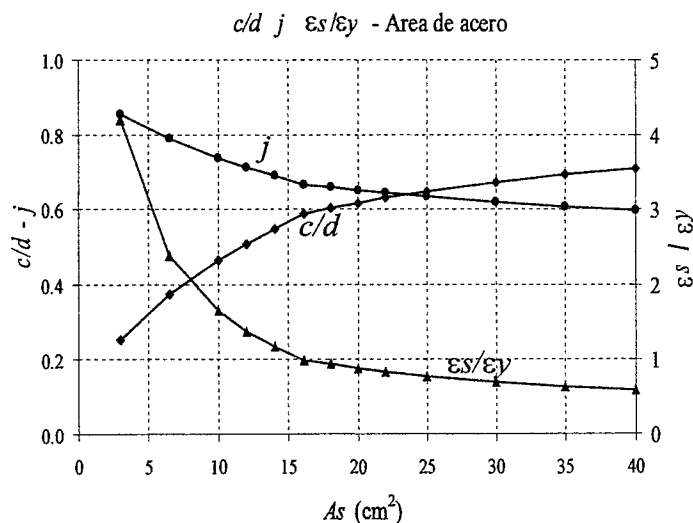
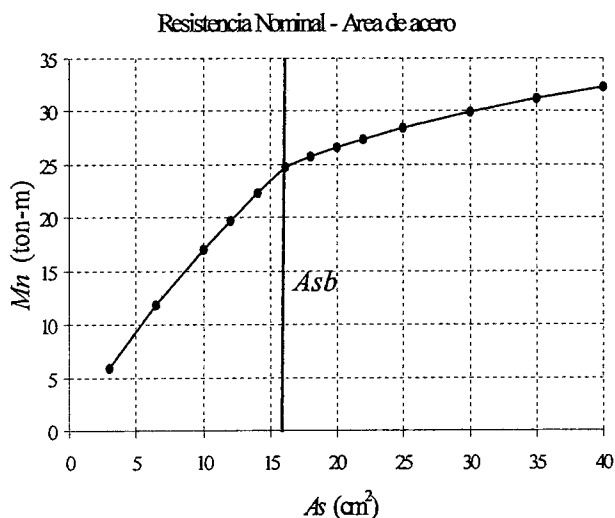
- Calculemos la deformación en el acero para 12 cm² (0.75 *Asb*) de refuerzo en la sección:

$$0.85 f_c (a)^2 / 2 = 12 \times 4,200 \Rightarrow a = 23.76 \Rightarrow c = 27.96 \text{ cm} \Rightarrow c/d \approx 0.51$$

$$\frac{0.003}{27.96} = \frac{\epsilon_s}{27.04} \Rightarrow \epsilon_s = 0.0029 \approx 1.4 \epsilon_y$$

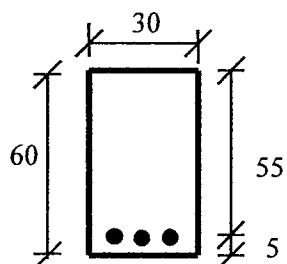
Para una sección rectangular reforzada con 0.75 *Asb* la deformación del acero, cuando se alcanza la resistencia de la sección, es de aproximadamente 1.8 ϵ_y (acápite 10.6). En la sección triangular que hemos analizado, la deformación del acero es de 1.4 ϵ_y para las mismas condiciones, en consecuencia, el requisito de la Norma de limitar la cantidad máxima de acero al 75% del valor que ocasiona la falla balanceada, no genera la misma deformación en el acero, es decir la deformación dependerá de la forma del bloque comprimido. Este resultado no es consistente, por este motivo (entre varios otros) a partir de la versión del ACI-95 se introdujo el Apéndice B (véase el Capítulo 17) el cual exige que, independientemente de la forma de la sección, de la calidad del acero y del concreto, para que una sección clasifique como subreforzada (falla en tracción) la deformación del acero más alejado del borde comprimido (ϵ_t), debe ser por lo menos 0.005. A partir del ACI-02, esta exigencia ha pasado a ser parte del cuerpo de la Norma del ACI, dejando de ser un apéndice. En consecuencia, en el ACI, el tratamiento de las secciones sobre reforzadas y subreforzadas ya es uniforme, y no está basado en el concepto de cuantía balanceada.

En los gráficos a continuación, se muestra la variación de la resistencia nominal con el aumento en la cuantía de acero y la variación de las relaciones *c/d*, ϵ_s/ϵ_y y del brazo interno de palanca medido a través del parámetro *j* ($j d = d - 2a/3$).



Ejemplo 10-5 - Influencia de f_c en la resistencia.

Para cuantificar la influencia que tiene la resistencia a la compresión del concreto en la resistencia a la flexión de una sección, analicemos una sección rectangular como la indicada en la figura a continuación. Manteniendo la cantidad de acero de refuerzo constante, calcularemos la resistencia de diseño para distintos valores de f_c . Utilizaremos las hipótesis de la Norma E.060 para los cálculos.



$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ (constante)
 $A_s = 3 - 1'' = 15.3 \text{ cm}^2$ (constante)
 $\rho = 0.93\%$ (constante)
 $d = 0.55 \text{ m}$ (constante)
 $f'_c = \text{variable}$

La tabla a continuación resume las resistencias en flexión para diversos valores de f_c :

f_c (kg/cm ²)	Delta f_c	A_s min (cm ²)	A_s max (cm ²)	c (cm)	c/d	ϵ_s / ϵ_y	ϕMn (kg-m)	Delta ϕMn
175	base	3.6	21.9	16.94	0.31	3.2	27,645	base
210	20%	4.0	26.3	14.12	0.26	4.1	28,340	3%
280	60%	4.6	35.1	10.59	0.19	6.0	29,205	6%
350	100%	5.1	41.3	9.00	0.16	7.3	29,725	8%
420	140%	5.6	46.4	8.00	0.15	8.4	30,075	9%

En todos los casos la falla de la sección es el tipo subreforzada, la cantidad de acero colocada (15.3 cm²) es menor que 0.75 A_{sb} . Otra forma de comprobar la fluencia del acero, es comparar el valor de c/d con el valor de este cociente correspondiente a la falla balanceada c_b/d que en este caso ($f_y = 4,200$ y $\epsilon_{cu} = 0.003$) vale 0.588.

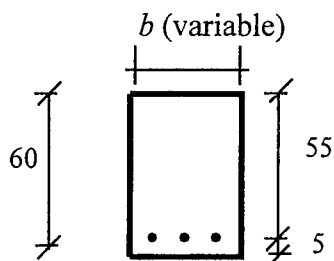
Nótese la poca influencia que tiene f_c en la resistencia de la sección. En el caso que hemos analizado, un incremento del 140% en f_c produce tan solo un incremento del 9% en la resistencia a flexión. Sin embargo, mejoras en f_c vienen acompañadas de otras ventajas, tales como:

- Incremento en el aporte del concreto a la resistencia al corte de la sección. Esto es importante si la sección no cuenta con refuerzo transversal, como es el caso de los aligerados, losas nervadas, losas macizas, vigas chatas.
- Incremento en el módulo de elasticidad del concreto y en consecuencia la posibilidad de reducir las deflexiones.
- Reducción en la fisuración en elementos a flexión ya que aumenta la resistencia a la tracción por flexión del concreto.
- Es posible colocar una mayor cantidad de acero en la sección ya que aumenta la cantidad máxima de acero permitida por la Norma, 0.75 A_{sb} . Con esto es posible aumentar la resistencia de la sección o modificar su comportamiento de sobre reforzada a subreforzada. Nótese en la tabla anterior, el incremento de la deformación del acero con la mejora del concreto.
- Para una misma cantidad de acero en tracción, aumenta la ductilidad de curvatura de la sección.
- Mejora en la adherencia y longitudes de desarrollo (anclaje) de las barras de refuerzo.
- Mejora la durabilidad del elemento (ataque de sulfatos, corrosión, abrasión).

Todas estas ventajas o mejoras hay que leerlas en "negativo" si en obra la resistencia del concreto resulta ser sensiblemente menor que la especificada.

Ejemplo 10-6 - Influencia del ancho de la sección (b) en la resistencia.

Utilizaremos la misma sección del ejemplo anterior, para cuantificar la influencia que tiene el ancho de la sección en la resistencia a la flexión. Mantendremos constante la cantidad de acero de refuerzo así como f_c .



- $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ (constante)
- $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ (constante)
- $A_s = 3 - 1'' = 15.3 \text{ cm}^2$ (constante)
- $\rho = 0.93\%$ (constante)
- $d = 0.55 \text{ m}$ (constante)
- $b = \text{variable}$

La tabla a continuación resume las resistencias en flexión para los diversos valores del ancho de la sección analizados.

b (cm)	Delta volumen	A_s min (cm ²)	A_s max (cm ²)	c (cm)	c/d	ϵ_s / ϵ_y	ϕMn (kg-m)	Delta ϕMn
25	base	3.3	21.9	16.94	0.31	3.2	27,645	base
30	20%	4.0	26.3	14.12	0.26	4.1	28,340	3%
35	40%	4.7	30.7	12.10	0.22	5.1	28,835	4%
40	60%	5.3	35.1	10.59	0.19	6.0	29,205	6%
50	100%	6.6	43.8	8.47	0.15	7.8	29,730	8%

En todos los casos la falla de la sección es el tipo subreforzada, la cantidad de acero colocada (15.3 cm²) es menor que 0.75 A_{sb} . Otra forma de comprobar la fluencia del acero, es comparar el valor de c/d con el valor de este cociente correspondiente a la falla balanceada c_b/d que en este caso ($f_y = 4,200$ y $\epsilon_{cu} = 0.003$) vale 0.588.

Nótese la poca influencia que tiene el ancho (b) en la resistencia de la sección. En el caso que hemos analizado, un incremento del 100% en el ancho (que significa duplicar el volumen de concreto) produce tan solo un incremento del 8% en la resistencia a flexión. Sin embargo, el aumentar el ancho de la sección tiene de otras ventajas, tales como:

- Incremento en la resistencia al corte de la sección.
- Permite un mejor acomodo (menor congestión) del refuerzo, facilitando la colocación del concreto.
- Es posible colocar una mayor cantidad de acero en la sección ya que aumenta la cantidad máxima de acero permitida por la Norma, 0.75 A_{sb} . Con esto es posible aumentar la resistencia de la sección o modificar su comportamiento de sobre reforzada a subreforzada.
- Para una misma cantidad de acero en tracción, aumenta la ductilidad de curvatura de la sección.

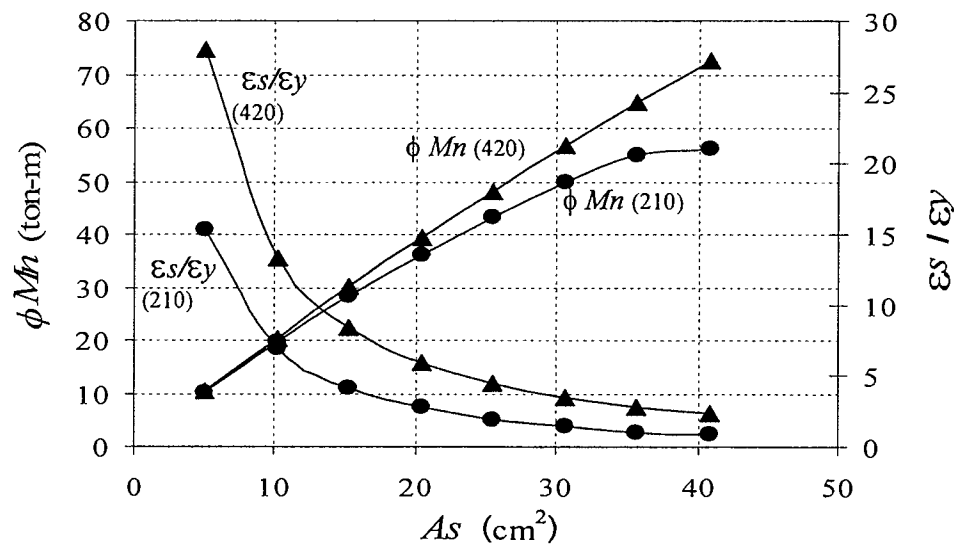
Ejemplo 10-7 - Influencia de la cantidad de acero en la resistencia.

Utilizaremos la misma sección del ejemplo anterior (0.30x0.60), para cuantificar la influencia de la cuantía de acero en la resistencia a la flexión. Calcularemos la resistencia de la sección manteniendo las dimensiones constantes ($b = 30 \text{ cm}$, $d = 55 \text{ cm}$) y variando la cantidad de acero. Se analizan dos calidades de concreto.

Variación de la resistencia de diseño con la cantidad de acero en tracción:

A_s		ΔA_s	$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$			$f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$		
			ϵ_s / ϵ_y	ϕM_n (kg-m)	$\Delta \phi M_n$	ϵ_s / ϵ_y	ϕM_n (kg-m)	$\Delta \phi M_n$
1-1"	5.1	-	15.3	10,215	-	28.0	10,410	-
2-1"	10.2	base	6.9	19,665	-	13.3	20,435	base
3-1"	15.3	50%	4.1	28,340	44%	8.4	30,075	47%
4-1"	20.4	100%	2.8	36,245	84%	5.9	39,325	92%
5-1"	25.5	150%	1.9	43,375	121%	4.5	48,195	136%
6-1"	30.6	200%	1.4	49,735	153%	3.5	56,675	177%
7-1"	35.7	250%	1.0	54,860	179%	2.8	64,775	217%
8-1"	40.8	300%	0.9	56,245	186%	2.3	72,485	255%

La figura a continuación muestra la variación de la resistencia en función de la cantidad de acero en tracción así como la variación de la deformación del acero como fracción de la deformación de fluencia.



Es claro que la cantidad de acero influye de manera aproximadamente lineal en la resistencia de la sección. A esta misma conclusión se puede llegar si se observa la figura 10-28. En el ejemplo analizado, para el concreto de 210 la linealidad se pierde para cuantías altas de acero, cercanas a la cuantía balanceada.

De las variables analizadas, las que tienen mayor influencia en la resistencia a la flexión son, el peralte efectivo (d) y la cantidad de acero en tracción. Cuando no se puede variar el peralte de la viga, por limitaciones de altura libre de entrepiso, la variable más influyente es la cantidad de acero en tracción. Sin embargo, cuando el acero excede del límite impuesto por la Norma, lo más eficiente sería aumentar el ancho de la viga, esto suele ser mucho más económico que mejorar la calidad del concreto, ya que normalmente habría que mejorar el concreto en todo el piso, es decir en las vigas y aligerados o losas con un costo mayor.

Ejemplo 10-8 - Influencia de la forma de la sección en la Resistencia a Flexión

Por medio de un ejemplo, intentemos cuantificar la influencia que tiene la forma de la sección transversal de un elemento de concreto armado, en su resistencia a la flexión.

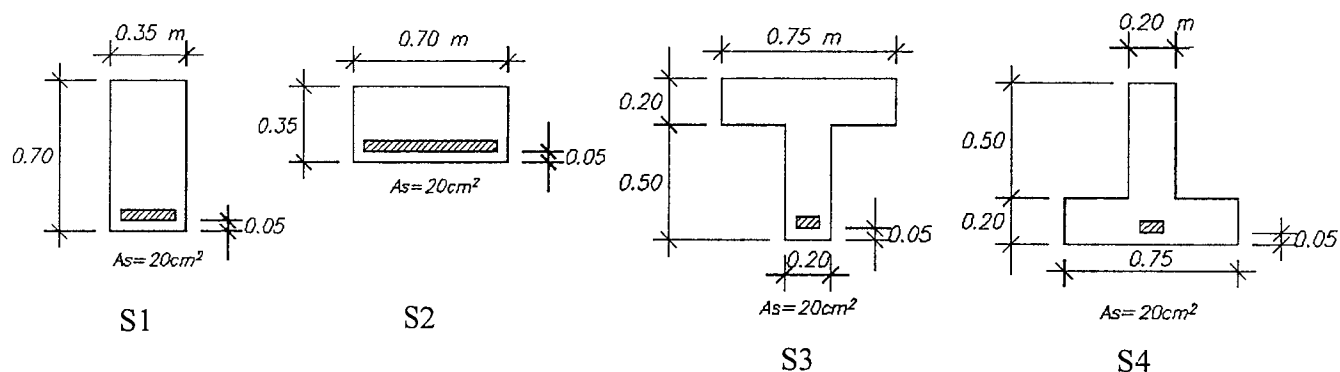
Para ello analicemos las cuatro secciones (S1, S2, S3 y S4) mostradas en la figura a continuación, reforzadas con la misma cantidad de acero en tracción (20 cm^2). Las cuatro secciones tienen la misma área y en consecuencia, salvo por el encofrado, el consumo de materiales (concreto y acero) es el mismo.

La sección S2 corresponde a la de una viga chata, la sección S3 a una viga T con una generosa área de concreto en compresión y la sección S4 a una viga T invertida. Nótese que la sección S4 corresponde a la S3 para las zonas de momento negativo.

Se ha supuesto un concreto de $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y acero de refuerzo con $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$. Las resistencias nominales (M_n) se han calculado con las hipótesis de la Norma que conducen a las ecuaciones 10-20 y 10-21 y que se transcriben a continuación:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \quad M_n = T(jd) = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

Para las secciones S1, S3 y S4 el peralte efectivo es de 0.65 m y para la sección S2 de 0.30 m.



La tabla a continuación resume los resultados para las cuatro secciones analizadas.

Sección	S1	S2	S3	S4
M_n (ton-m)	50.4	23.1	52.6	47.2
c (cm)	11.86	5.93	5.54	20.76
c/d	0.18	0.20	0.085	0.32
j	0.92	0.92	0.96	0.86
ϵ_s / ϵ_y	6.4	5.8	15.3	3.0
Curvat. ϕ_u (1/cm)	0.25×10^{-3}	0.51×10^{-3}	0.54×10^{-3}	0.14×10^{-3}

La comparación entre las resistencias de las secciones S1 y S2 muestra claramente la influencia del peralte efectivo. La sección S3 en este caso, para las dimensiones del ala y la cantidad de acero en tracción, está trabajando como rectangular con un ancho $b = 0.75 \text{ m}$ ya que el bloque de compresiones está contenido en el espesor del ala y su resistencia es muy parecida a la S1 (4% de incremento).

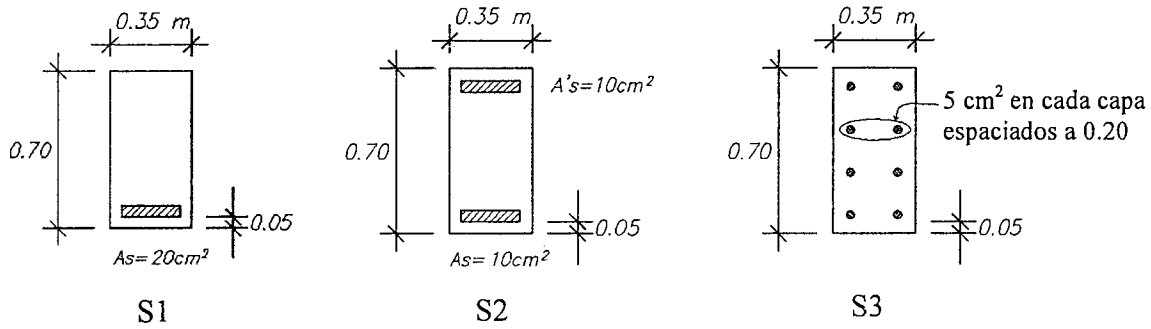
Se han calculado también las curvaturas últimas ($\phi_u = \epsilon_{cu} / c = 0.003 / c$) de las cuatro secciones para tener una idea de la ductilidad de curvatura. Las secciones con mayor ductilidad son la S2 y S3 debido a la poca profundidad del eje neutro por tener amplias zonas de concreto en compresión. La menos dúctil es la S4 ya que esta trabaja como rectangular con un ancho de tan solo 0.20 m.

Ejemplo 10-9 - Influencia de la distribución del acero en la Resistencia a Flexión

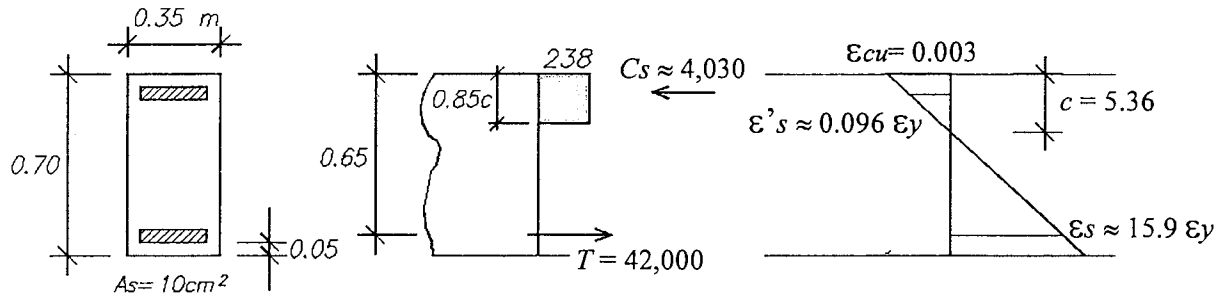
Intentemos cuantificar la influencia que tiene la distribución del acero en la resistencia a la flexión. Para ello analicemos las tres secciones (S1, S2, S3) mostradas en la figura a continuación, reforzadas con la misma cantidad total de acero (20 cm^2).

La sección S2 corresponde a la de una viga con acero en tracción y compresión y la sección S3 a una sección con refuerzo distribuido en la altura del alma en lugar de concentrado en los extremos.

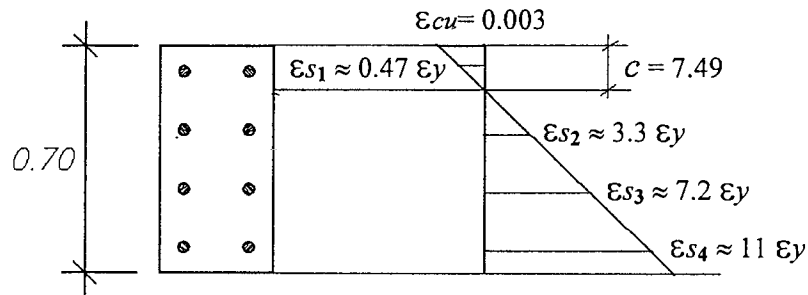
Se ha supuesto un concreto de $f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y acero de refuerzo con $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$.



La resistencia nominal de la sección S2 se obtuvo por tanteos, iterando sobre la profundidad del eje neutro hasta lograr el equilibrio de la sección. La solución corresponde a una profundidad del eje neutro de 5.36 cm como se indica en la figura a continuación, donde se muestra el estado de deformaciones y de fuerzas internas a partir del cual se puede calcular la resistencia nominal de la sección tomando momentos por ejemplo, con respecto a la compresión del concreto.



De manera similar, la resistencia nominal de la sección S3 se obtuvo por tanteos, iterando sobre la profundidad del eje neutro hasta lograr el equilibrio de la sección. La solución corresponde a una profundidad del eje neutro de 7.49 cm como se indica en la figura a continuación donde se muestra el estado de deformaciones, a partir del cual se pueden calcular los esfuerzos en los aceros de refuerzo ($f_{si} = E_s \times \epsilon_{si} \leq f_y$) y las fuerzas correspondientes ($F_{si} = A_{si} \times f_{si}$).



Aprovechemos los resultados de la sección S3 para calcular el peralte efectivo de esta sección de acuerdo a lo explicado en el acápite 6.9. El peralte efectivo se obtiene

calculado el centroide de las fuerzas en las barras en tracción, en este caso las tres barras inferiores, resultando en un valor de $d = 0.45$ m medido desde el borde superior.

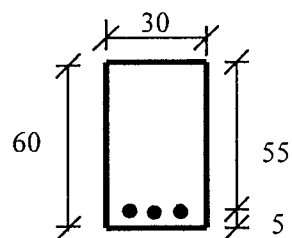
La tabla a continuación resume los resultados para las tres secciones analizadas.

Sección	S1	S2	S3
Mn (ton-m)	50.4	26.2	26.2
c (cm)	11.86	5.36	7.49
c/d	0.18	0.082	
j	0.92	0.96	--
ϵ_s / ϵ_y	6.4	15.9	11.0
Curvatura ϕ_u (1/cm)	0.25×10^{-3}	0.56×10^{-3}	0.4×10^{-3}

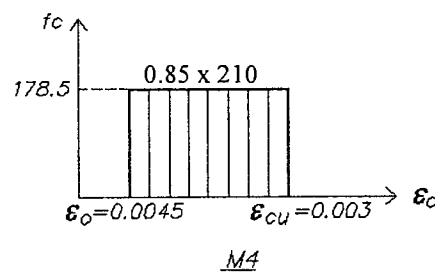
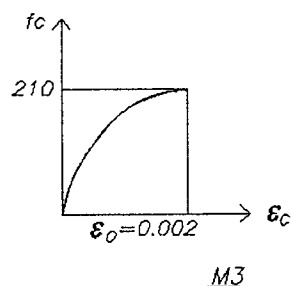
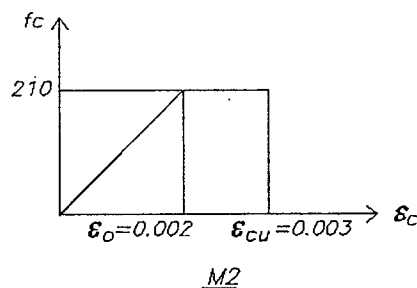
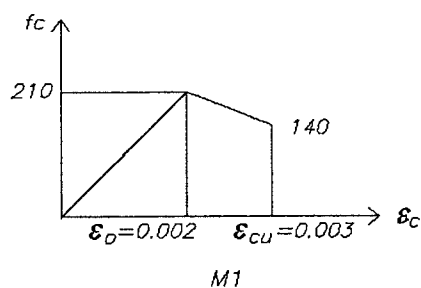
Como era de esperarse la sección con más resistencia es la S1. Nótese la similitud entre las resistencias de las secciones S2 y S3, este hecho pareciera indicar que un armado con el acero repartido en el alma, conduce a una resistencia parecida a la de un "armado convencional" en el cual los aceros se concentran en los extremos de la sección. Sin embargo, la curvatura última de la sección S3 es menor lo cual indica que se ha perdido algo de ductilidad en la sección. Al final de este Capítulo se analizará con más detalle el armado con acero distribuido en el alma.

Ejemplo 10-10 - Influencia de los Modelos para el Concreto en Compresión

Por medio de este ejemplo, trataremos de cuantificar la influencia que tiene el modelo que se asuma para el comportamiento del concreto en la zona de compresiones, en la resistencia a la flexión pura de una sección de concreto armado. Para ello analicemos la sección mostrada en la figura a continuación, reforzada en un caso con 10 cm^2 de acero y luego con 20 cm^2 . Asumiremos que el concreto es de 210 kg/cm^2 y que su comportamiento (relación constitutiva en compresión) es cualquiera de los cuatro modelos mostrados en la figura (M1, M2, M3 y M4). Nótese que el modelo M4 equivale al bloque equivalente de compresiones de la Norma E.060.



- $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ (constante)
- $A_s = 10$ ó 20 cm^2 (constante)
- $d = 0.55 \text{ m}$ (constante)
- $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ (Cuatro modelos)



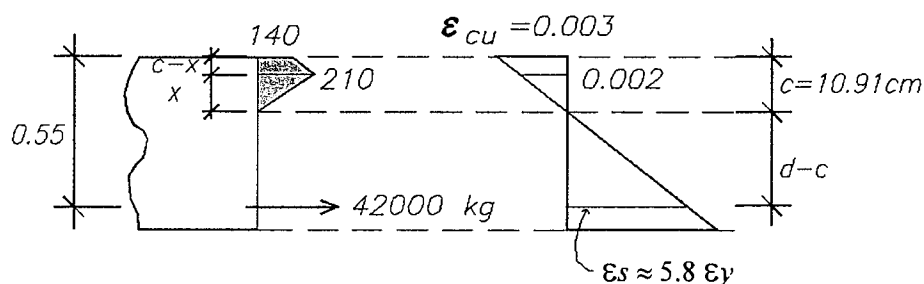
Para el acero se ha supuesto un modelo (relación constitutiva en tracción) del tipo elastoplástico perfecto, es decir, sin endurecimiento por deformación.

Definidas las relaciones constitutivas de los materiales, para la solución nos queda emplear la compatibilidad (secciones planas permanecen planas), la hipótesis de adherencia perfecta entre acero y concreto, la hipótesis de despreciar la resistencia en tracción del concreto y el equilibrio de la sección, que en este caso, debe satisfacerse logrando que la compresión total en el concreto debe ser igual a la tracción en el acero.

Para los cuatro modelos del concreto supondremos, con cargo a verificar, que cuando el concreto alcance su deformación de agotamiento el acero ya está en fluencia (sección subreforzada). Con esta suposición y al tener modelos para el concreto simples, no será necesario proceder a la solución por tanteos ya que será posible escribir la ecuación de equilibrio de las fuerzas horizontales, considerando como incógnita la profundidad del eje neutro.

▪ **Caso 1** $A_s = 10 \text{ cm}^2$

Modelo M1:



$$T = A_s f_y = 10 \times 4200 = 42,000 \text{ kg}$$

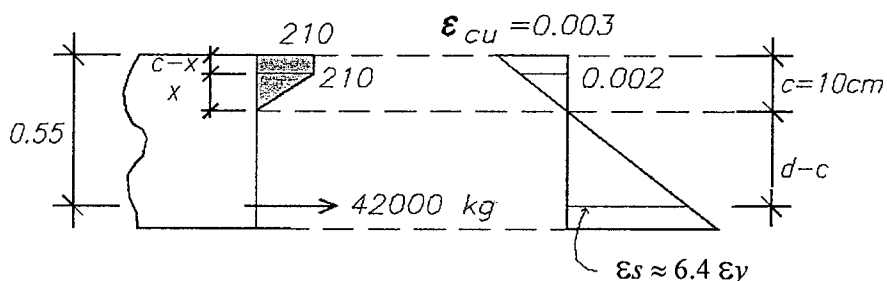
$$c = 0.003 x / 0.002 \Rightarrow c = 1.5 x$$

$$0.5 (210) (x) (30) + 0.5 (140 + 210) (c - x) 30 = 42,000 \Rightarrow c \approx 10.91 \text{ cm} \quad x \approx 7.27 \text{ cm}$$

La resultante de las fuerzas de compresión en el concreto es de 42 ton y está ubicada a 4.19 cm aproximadamente desde el borde superior, en consecuencia el brazo interno de palanca es $j d \approx 50.81 \text{ cm}$ ($j \approx 0.92$). La resistencia de la sección es:

$$M_n = 42 \times 0.508 \approx 21.34 \text{ ton-m.}$$

Modelo M2:



$$T = A_s f_y = 10 \times 4200 = 42,000 \text{ kg}$$

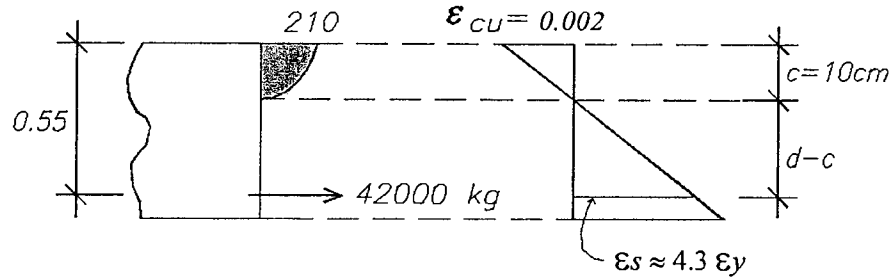
$$c = 0.003 x / 0.002 \Rightarrow c = 1.5 x$$

$$0.5 (210) (x) (30) + 210 (c - x) 30 = 42,000 \Rightarrow c \approx 10 \text{ cm} \quad x \approx 6.67 \text{ cm}$$

La resultante de las fuerzas de compresión en el concreto es de 42 ton y está ubicada a 3.62 cm aproximadamente desde el borde superior, en consecuencia el brazo interno de palanca es $j d \approx 51.38 \text{ cm}$ ($j \approx 0.93$). La resistencia de la sección es:

$$M_n = 42 \times 0.514 \approx 21.58 \text{ ton-m.}$$

Modelo M3:



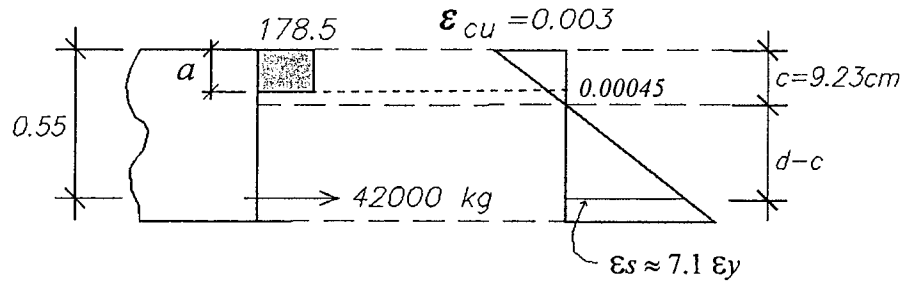
$$T = A_s f_y = 10 \times 4200 = 42,000 \text{ kg}$$

$$2/3 (210) (c) (30) = 42,000 \Rightarrow c \approx 10 \text{ cm}$$

La resultante de las fuerzas de compresión en el concreto es de 42 ton y está ubicada a 3.75 cm desde el borde superior, en consecuencia el brazo interno de palanca es $jd \approx 51.25 \text{ cm}$ ($j \approx 0.93$). La resistencia de la sección es:

$$M_n = 42 \times 0.513 \approx 21.53 \text{ ton-m.}$$

Modelo M4:



$$T = A_s f_y = 10 \times 4200 = 42,000 \text{ kg}$$

$$(178.5) (a) (30) = 42,000 \Rightarrow a \approx 7.84 \text{ cm} \Rightarrow c \approx 9.23 \text{ cm}$$

La resultante de las fuerzas de compresión en el concreto es de 42 ton y está ubicada a 3.92 cm desde el borde superior, en consecuencia el brazo interno de palanca es $jd \approx 51.08 \text{ cm}$ ($j \approx 0.93$). La resistencia de la sección es:

$$M_n = 42 \times 0.51 \approx 21.45 \text{ ton-m.}$$

Los resultados obtenidos para los cuatro modelos se resumen en la siguiente tabla:

Modelo Concreto	M1	M2	M3	M4
M_n (ton-m)	21.34	21.58	21.53	21.45
c (cm)	10.91	10.00	10.00	9.23
jd (cm)	50.81	51.38	51.25	51.08
j	0.92	0.93	0.93	0.93
ϵ_s / ϵ_y	5.8	6.4	4.3	7.1

▪ Caso 2 $A_s = 20 \text{ cm}^2$

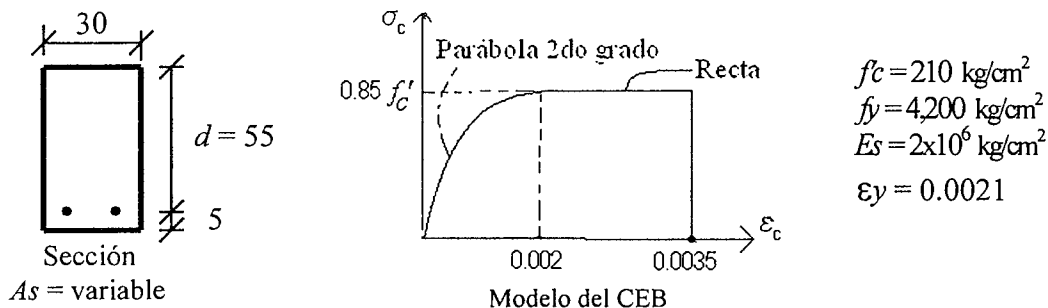
Los resultados se resumen en la tabla a continuación.

Modelo Concreto	M1	M2	M3	M4
M_n (ton-m)	39.17	40.13	39.90	39.61
c (cm)	21.82	20.00	20.00	18.45
jd (cm)	46.63	47.77	47.50	47.15
j	0.85	0.87	0.86	0.86
ϵ_s / ϵ_y	2.2	2.5	1.7	2.8

Ejemplo 10-11 - Resistencia en Flexión con otros Códigos

Utilizaremos dos modelos para el concreto, el bloque equivalente de compresiones de la Norma E.060 (ACI) y el modelo del CEB (figura 10-22) que se reproduce en la figura a continuación. La resistencia de la sección con las hipótesis de la Norma se calculará con las ecuaciones 10-20 y 10-21 si se presenta fluencia en el acero y con las ecuaciones 10-32 y 10-33 si no hubiera fluencia. La resistencia de la sección con el modelo del CEB se calculará con la ayuda de la Tabla 10-9 y en los casos en los cuales no se produzca la fluencia del acero, será necesario iterar sobre la profundidad del eje neutro.

Para el acero se ha supuesto un modelo elastoplástico perfecto, es decir sin endurecimiento por deformación. Se ha supuesto además que el peralte efectivo (d) permanece constante cualquiera sea la cantidad de acero colocada en la sección.



La tabla a continuación resume los resultados. Es claro que los valores de la resistencia nominal (Mn) obtenidos con el modelo "simple" del ACI son muy parecidos a los obtenidos con el modelo más elaborado del CEB. En conclusión, para flexión simple el modelo del ACI suministra resistencias suficientemente "precisas" para fines de diseño.

As (cm ²)	As / Asb	ACI			CEB		
		c (cm)	ϵ_s / ϵ_y	Mn (kg-m)	c (cm)	ϵ_s / ϵ_y	Mn (kg-m)
10	0.29	9.23	7.09	21,455	9.66	7.82	21,410
20	0.57	18.45	2.83	39,610	19.32	3.08	39,450
30	0.86	27.68	1.41	54,475	28.99	1.50	54,110
40	1.14	33.59	0.91	62,270	35.47	0.92	62,055

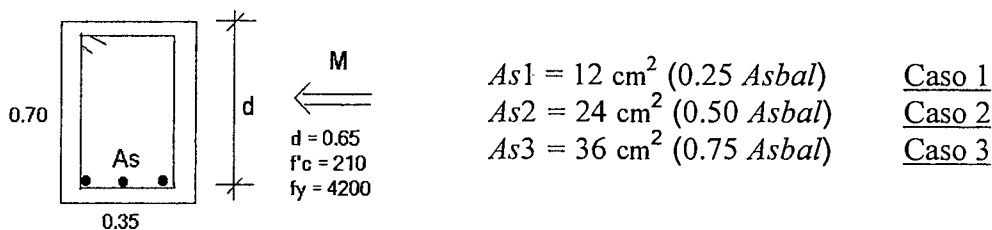
En la tabla a continuación se comparan las *ductilidades de curvatura* para los dos modelos. Se presenta también el momento flector que da inicio a la fluencia en el acero (My) calculado con el modelo del CEB ya que, con el modelo del ACI, no es posible calcular este valor. El momento de fluencia es ligeramente inferior al momento nominal de la sección, con lo cual el adoptar un diagrama momento curvatura del tipo bilineal no conduciría a errores importantes.

La *ductilidad de curvatura* calculada con el modelo del CEB es mayor que la calculada con el ACI. Esto se debe principalmente a que el CEB acepta una deformación de agotamiento del concreto ϵ_{cu} (0.0035) mayor que la del ACI. Nótese que para $As = 40$ cm² no llega a producirse fluencia en el acero, en consecuencia no es posible (en teoría) definir o calcular la ductilidad de curvatura de la sección. También es posible observar la estrecha relación que existe entre la cantidad de acero en tracción y la ductilidad de curvatura de la sección.

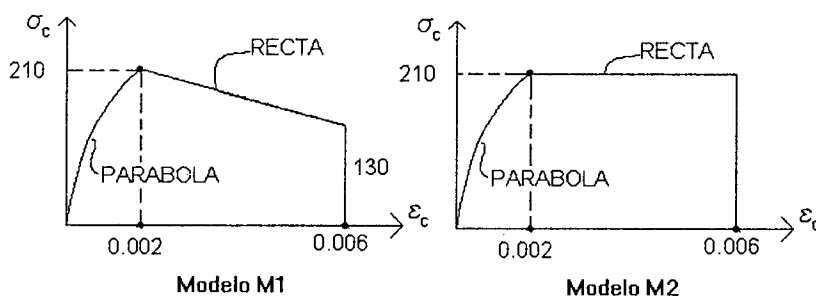
As (cm ²)	As / Asb	My (CEB) (kg-m)	ϕ_y (CEB) 1/m x 10E-03	Ductilidad Curvatura	
				ACI	CEB
10	0.29	20,410	5.711	5.97	6.35
20	0.57	38,430	7.026	2.31	2.58
30	0.86	53,730	8.770	1.24	1.38
40	1.14	--	--	--	--

Ejemplo 10-12 - Influencia del valor de ϵ_{cu} en la Resistencia a Flexión

Intentemos cuantificar la influencia que tiene la deformación máxima del concreto ϵ_{cu} en la resistencia a la flexión en una sección rectangular de concreto armado. Para ello analicemos la sección mostrada en la figura, reforzada con tres cantidades distintas de acero y utilicemos dos modelos de comportamiento en compresión del concreto (modelos M1 y M2).



Los modelos M1 y M2 utilizados para caracterizar el comportamiento en compresión del concreto, se muestran a continuación y se diferencian únicamente en la zona de la rama descendente. Se ha adoptado una deformación de rotura $\epsilon_{cu} = 0.006$.



Para el acero asumiremos un modelo elastoplástico perfecto con $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ y módulo de elasticidad $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

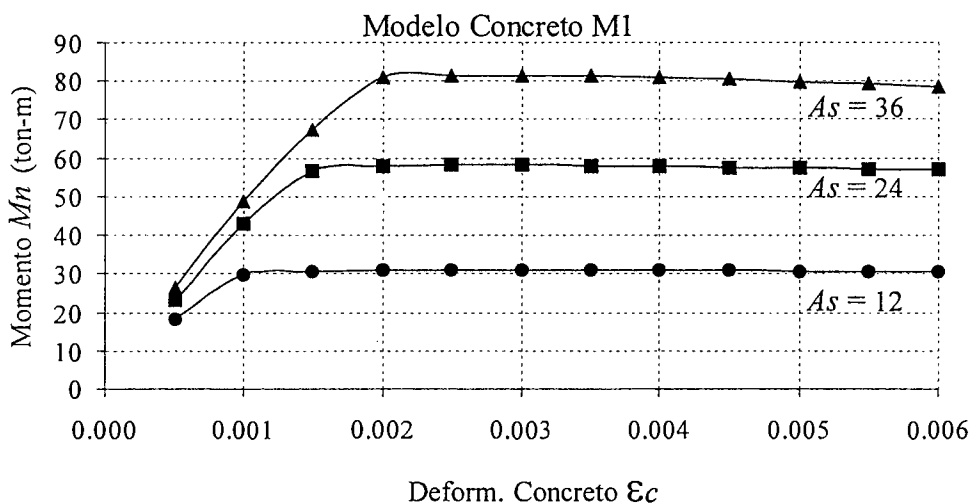
En cada caso, el procedimiento para calcular la resistencia se explica en el ejemplo 10-1 y consiste en ir variando la deformación del concreto en la fibra extrema comprimida y para cada una de las variaciones, calcular por iteración la resistencia de la sección utilizando las ecuaciones de compatibilidad, relaciones constitutivas y equilibrio. Este proceso se realizó con la ayuda de un programa de computadora. La resistencia (M_n) predicha con las hipótesis del ACI, se calculó con las ecuaciones 10-20 y 10-21. Las tablas a continuación resumen los resultados para las tres áreas de acero analizadas y para los dos modelos del concreto.

Caso	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$		$M_n \text{ ACI (t-m)}$	M. Fluencia $M_y \text{ (t-m)}$	Ductilidad de Curvatura	
					Mod. 1	Mod. 2
1	12	0.25 A_{sb}	30.73	29.48	14.48	16.81
2	24	0.50 A_{sb}	57.39	56.19	6.14	7.13
3	36	0.75 A_{sb}	79.98	80.61	3.52	4.09
	48	1.00 A_{sb}	98.51	101.3	2.24	2.64

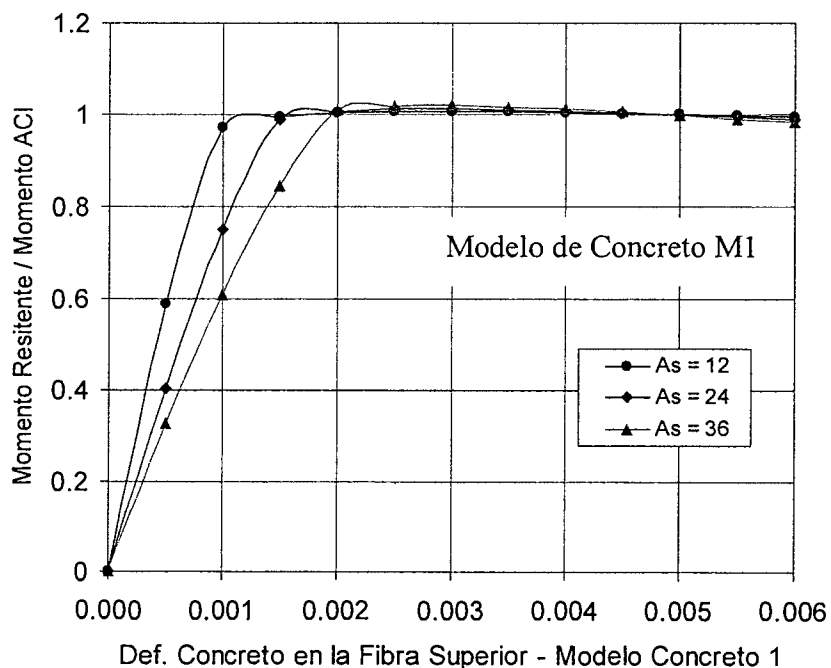
Def. Concreto	Resistencia a Flexión de la Sección (M_n) en ton-m					
	Caso 1 $A_s=12$		Caso 2 $A_s=24$		Caso 3 $A_s=36$	
	Mod 1	Mod 2	Mod 1	Mod 2	Mod 1	Mod 2
0.0005	18.07	18.07	23.08	23.08	26.22	26.22
0.0010	29.86	29.86	43.11	43.11	48.80	48.80
0.0015	30.54	30.54	56.65	56.65	67.48	67.48
0.0020	30.82	30.82	57.74	57.74	80.78	80.78
0.0025	30.90	30.92	58.06	58.15	81.50	81.70

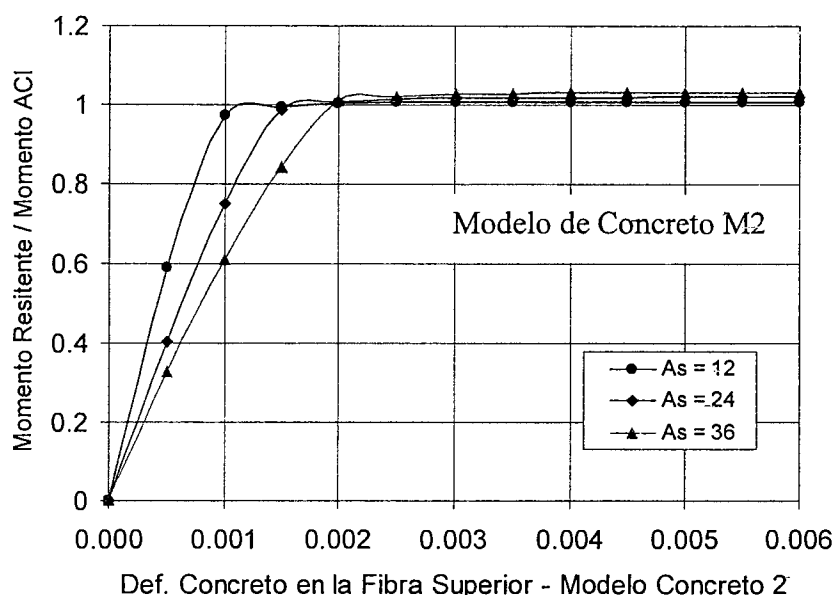
0.0030	30.90	30.96	58.07	58.33	81.51	82.09
0.0035	30.87	30.98	57.95	58.42	81.24	82.30
0.0040	30.82	31.00	57.77	58.47	80.84	82.42
0.0045	30.77	31.01	57.55	58.50	80.34	82.49
0.0050	30.70	31.01	57.30	58.53	79.77	82.54
0.0055	30.64	31.01	57.02	58.54	79.15	82.58
0.0060	30.57	31.01	56.77	58.55	78.60	82.60

La figura a continuación muestra para el modelo de concreto M1 y para las tres cantidades de acero, la variación del momento resistente en función a la deformación del concreto en la fibra extrema en compresión. El comportamiento de la sección es prácticamente elastoplástico para las tres cantidades de acero, lo cual indica que el momento de fluencia es muy parecido a la resistencia nominal o última de la sección.



Para comparar los resultados de la resistencia en flexión con los que se obtienen con las hipótesis del ACI, se han elaborado los dos gráficos que se presentan a continuación. En ellos se muestran el cociente entre la resistencia calculada con los modelos M1 y M2 y la resistencia calculada con el ACI.





Del análisis de los resultados, resulta claro que a partir de un valor de la deformación del concreto en la fibra extrema mayor o igual a 0.002, la resistencia en flexión de una sección de concreto armado es prácticamente independiente del valor de ϵ_{cu} que se adopte.

El valor de $\epsilon_{cu} = 0.003$ adoptado por el ACI, resulta adecuado y conservador para el cálculo de la resistencia de secciones en flexión. Para este nivel de deformación, el concreto comprimido en una sección en flexión, normalmente no mostrará agrietamiento ni se presentará estallido del recubrimiento, a pesar de que la deformación adoptada de 0.003 es mayor que la correspondiente al valor para el cual se produce el esfuerzo máximo (f_c) en los ensayos de compresión en probetas (aproximadamente 0.002). Esto probablemente se debe al gradiente de esfuerzos presente en la zona comprimida de una viga, donde las fibras menos esforzadas (las cercanas al eje neutro) tienden a estabilizar a las más esforzadas.

El valor de ϵ_{cu} que se adopte sí tiene una marcada influencia en la curvatura última de la sección, de allí que el valor del ACI puede ser demasiado conservador para los cálculos de la curvatura. Diversos autores recomiendan que para los cálculos de la curvatura última se adopte un valor de 0.004 o mayor dependiendo del grado de confinamiento que tenga el concreto comprimido.

El modelo M-2 presenta una ductilidad de curvatura mayor que la correspondiente al modelo M-1, esto se debe a la forma de la rama descendente de la curva esfuerzo – deformación.

Nuevamente notamos que el modelo del concreto comprimido, tiene poca influencia en la resistencia de la sección, en este caso la variable más importante es la cantidad de acero en tracción.

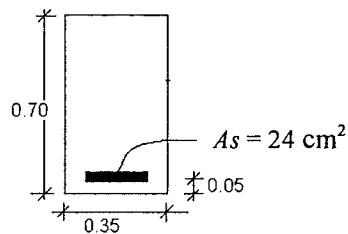
El momento de fluencia resultó ser independiente del modelo de concreto adoptado. Esto es debido a que la fluencia del acero se presentó cuando el concreto se encontraba en la zona parabólica de comportamiento, la cual es la misma para ambos modelos. Naturalmente sí depende de la cantidad de acero.

Se sugiere la lectura de los artículos 3.3 y 3.4 del libro de Park y Paulay que tratan sobre este tema y sobre la validez del empleo del bloque equivalente de compresiones en secciones no rectangulares.

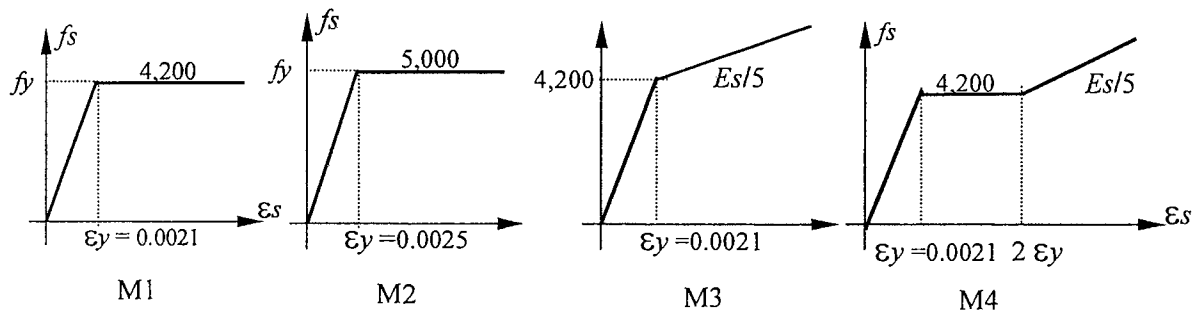
Ejemplo 10-13 – Influencia del Modelo del Acero de Refuerzo

Por medio de este ejemplo, trataremos de cuantificar la influencia que tiene el comportamiento del acero de refuerzo en tracción, en la resistencia a la flexión pura de una sección de concreto armado. Analizaremos la sección rectangular mostrada en la figura a continuación, reforzada con 24 cm^2 que equivalen a $0.5 A_s b$ para $f_y = 4,200$.

Para el acero se ha supuesto cuatro modelos de comportamiento o relaciones constitutivas en tracción. El modelo M1 es elastoplástico perfecto y es el que se emplea normalmente en los cálculos de resistencia de una sección. El modelo M2 se diferencia del M1 en que se ha supuesto un esfuerzo de fluencia "real" de $5,000 \text{ kg/cm}^2$ (20% mayor) a diferencia del esfuerzo nominal que solemos emplear de $4,200$, con este modelo se pretende cuantificar la sobre-resistencia que tendría la sección. El modelo M3 corresponde a un acero sin escalón de fluencia y con endurecimiento por deformación y el M4 a un acero con un pequeño escalón de fluencia, de amplitud igual a ϵ_y , seguido de una zona de endurecimiento por deformación que se ha idealizado como lineal.



- $f_y = \text{Variable}$
- $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$
- $A_s = 24 \text{ cm}^2 \text{ (} 0.5 A_s b \text{)}$
- $d = 0.65 \text{ m}$
- $b = 0.35 \text{ m}$

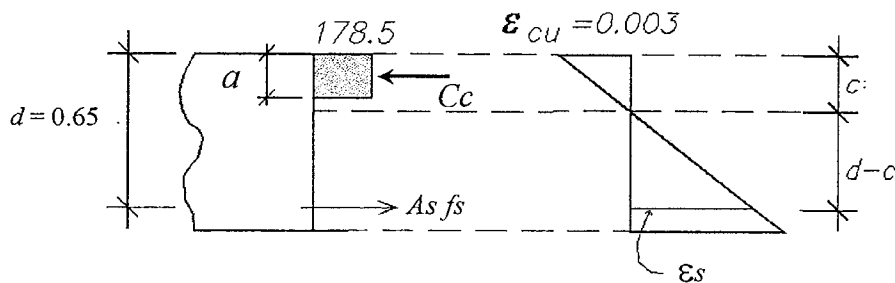


Asumiremos que el concreto es de 210 kg/cm^2 y que son aplicables las hipótesis de la Norma E.060, es decir trabajaremos con el bloque equivalente de compresiones y con una deformación de agotamiento del concreto en compresión de 0.003 .

Definidas las relaciones constitutivas de los materiales, para la solución nos queda emplear la compatibilidad (secciones planas permanecen planas), la hipótesis de adherencia perfecta entre acero y concreto, la hipótesis de despreciar la resistencia en tracción del concreto y el equilibrio de la sección, que en este caso, debe satisfacerse logrando que la compresión total en el concreto debe ser igual a la tracción en el acero.

Para los modelos M1 y M2 son aplicables las formulas 10-20 y 10-21 y los resultados se consignan en la tabla resumen, al final de este ejemplo. Los modelos para el acero M3 y M4, son modelos simples, constituidos por segmentos de rectas, y no será necesario proceder a la solución por tanteos ya que será posible escribir la ecuación de equilibrio de las fuerzas horizontales ($C_c = A_s f_s$), considerando como incógnita la profundidad del eje neutro.

Para el modelo M3, como se mencionó en el párrafo anterior, puede emplearse una solución por tanteos o iterativa, tomando como la variable de iteración la profundidad del eje neutro. Sin embargo, utilizaremos las ecuaciones de equilibrio para establecer una ecuación en la cual la incógnita sea la profundidad el eje neutro. A continuación se detalla la solución para el modelo de acero M3.



$$\epsilon_s = 0.003 (65 - c) / c \quad (1)$$

$$\text{para } \epsilon_s > 0.0021 \quad f_s = 400,000 \epsilon_s + 3,360 \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (2)$$

$$T = A_s f_s = 24 \times (400,000 \epsilon_s + 3,360) = 80,640 + 28,800 (65 - c) / c \quad (\text{kg}) \quad (3)$$

$$C_c = 0.85 f'_c a b = 0.85 \times 210 (0.85 c) \times 35 = 5,310 c \quad (\text{kg}) \quad (4)$$

Igualando 3 con 4 se obtiene una ecuación cuadrática, cuya solución es: $c \approx 24.28$ cm

Con la profundidad del eje neutro, se obtiene:

$$\text{De (1)} \quad \epsilon_s = 0.005031 \approx 2.4 \epsilon_y \quad \text{de (2)} \quad f_s \approx 5,370 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow A_s f_s \approx 129 \text{ ton}$$

El brazo interno de palanca es $jd \approx 54.68$ cm ($j \approx 0.84$) y la resistencia de la sección:

$$M_n = (A_s f_s) \times jd \approx 70.5 \text{ ton-m.}$$

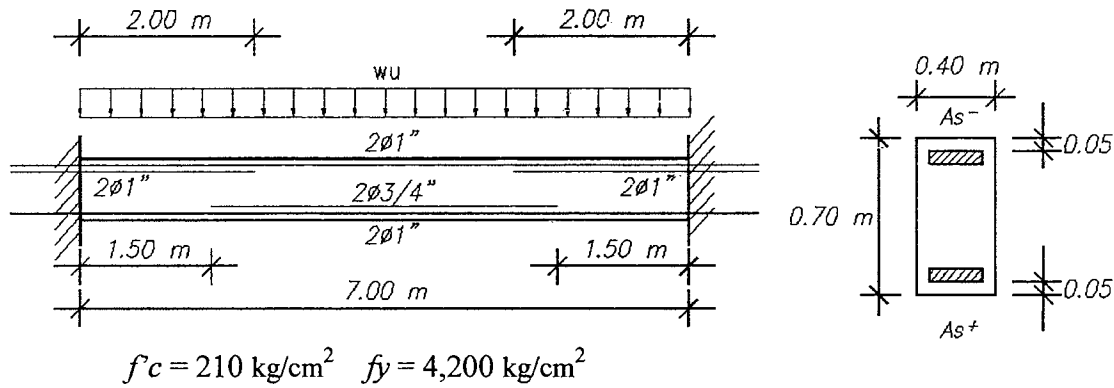
Los resultados obtenidos para los cuatro modelos se resumen en la siguiente tabla:

Modelo Acero	M1	M2	M3	M4
M_n (ton-m)	57.4	66.5	70.5	65.0
ΔM_n	base	+ 16%	+ 23%	+ 13%
c (cm)	18.98	22.60	24.28	22.00
jd (cm)	56.9	55.4	54.7	55.7
j	0.88	0.85	0.84	0.86
ϵ_s / ϵ_y	3.5	2.3	2.4	2.8
f_s (kg/cm ²)	4,200	5,000	5,370	4,865
Curvat. ϕu (1/cm)	0.16×10^{-3}	0.13×10^{-3}	0.12×10^{-3}	0.14×10^{-3}
$\Delta \phi u$	base	-19%	-25%	-13%

Ejemplo 10-14 – Análisis de una Viga

Se trata de un problema típico de análisis - en este caso particular aplicado a una viga doblemente empotrada - en el cual se conoce la distribución de las armaduras de refuerzo por flexión y las cargas de gravedad que obran sobre la viga, y se quiere estimar lo siguiente:

- La carga máxima (ωu) que podría aplicarse si se aceptan los resultados del análisis elástico (Diseño por Resistencia). Las cargas en servicio que obran sobre la viga son: $\omega_D = 4.64$ ton/m (carga muerta) y $\omega_L = 2.32$ ton/m (carga viva).
- Construir el diagrama de resistencia requerida (M_u) y el de resistencia suministrada (ϕM_n).
- Calcular los esfuerzos en el concreto y en el acero en las secciones de momento máximo positivo y negativo, bajo cargas de servicio.
- Revisar la seguridad de la viga utilizando el Análisis Límite (ver acápite 7.7).



a) Para una sección de 0.40x0.70 con $d = 0.65 \text{ m}$, el área máxima de acero de refuerzo por flexión que se puede colocar es de $0.75 Asb \approx 41 \text{ cm}^2$. Las resistencias nominales (Mn) de las secciones de máximo momento positivo y negativo, se calcularán sin tener en cuenta el acero en compresión presente:

Momento Negativo: $d = 65 \quad b = 40$

$$As- = 4\phi 1'' = 20.4 \text{ cm}^2$$

$$c = 14.12 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 5.2 \epsilon_y$$

$$\phi Mn- = 45.5 \text{ ton-m}$$

Momento Positivo: $d = 65 \quad b = 40$

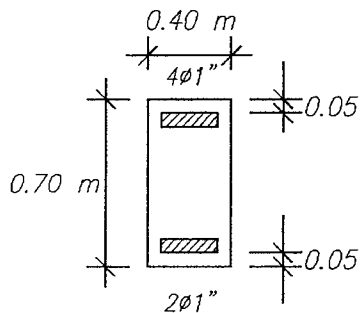
$$As+ = 2\phi 1'' + 2\phi 3/4'' = 15.88 \text{ cm}^2$$

$$c = 11.0 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 7.0 \epsilon_y$$

$$\phi Mn+ = 36.2 \text{ ton-m}$$

Por curiosidad calculemos la resistencia de la sección de máximo negativo, incluyendo en los cálculos el acero en compresión presente en ella.



Momento negativo con acero en compresión:

$$As = 20.4 \text{ cm}^2 \quad A's = 10.2 \text{ cm}^2$$

$$c = 9.40 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 8.5 \epsilon_y \quad \epsilon's \approx -0.67 \epsilon_y$$

$$\phi Mn- \approx 46.8 \text{ ton-m} \quad (3\% \text{ de incremento})$$

Igualando las resistencias suministradas (ϕMn) con los momentos máximos (positivo y negativo respectivamente) podremos calcular la carga máxima que puede soportar la viga con las armaduras colocadas:

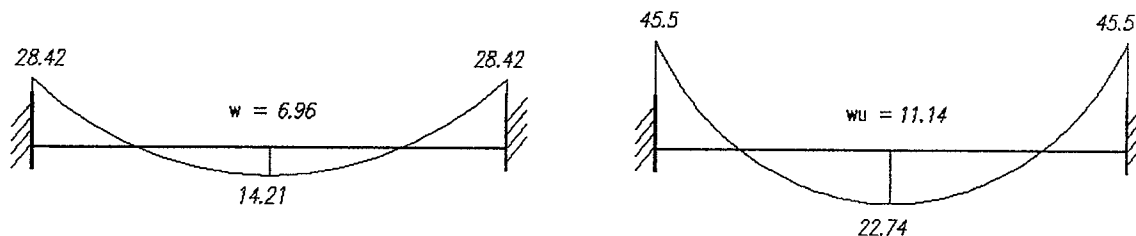
$$(1/24) \omega u (7)^2 = 36.2 \quad \omega u \approx 17.73 \text{ ton/m}$$

$$(1/12) \omega u (7)^2 = 45.5 \quad \omega u \approx 11.14 \text{ ton/m}$$

Por lo tanto la resistencia viene controlada por la sección de máximo negativo y la carga máxima, de acuerdo al diseño por resistencia, es $\omega u \approx 11.14 \text{ ton/m}$.

La resistencia requerida (Norma E.060 de 1989) es: $1.5 \times 4.64 + 1.8 \times 2.32 \approx 11.14 \text{ ton/m}$. Vemos que se trata de un diseño sin "holgura" en la zona de negativos, sin embargo, la zona de momentos positivos tiene exceso de resistencia.

Los diagramas de momentos para la carga de servicio (izquierda) y la carga última máxima (derecha) se muestran a continuación:

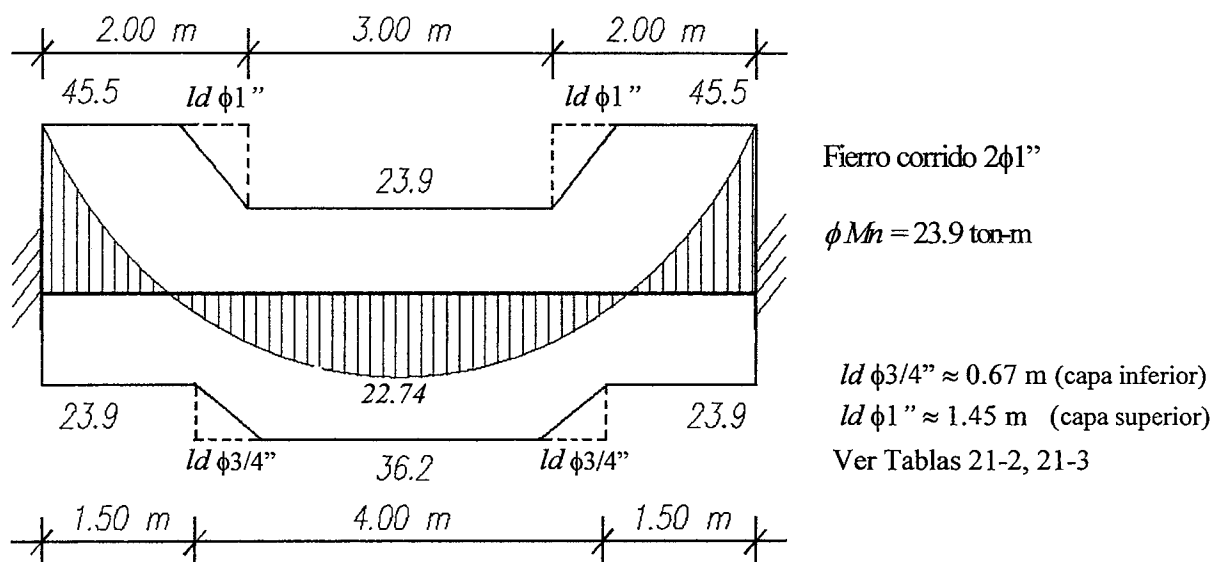


Si se aceptan los resultados del análisis elástico y la filosofía del diseño por resistencia, el factor de seguridad debe calcularse en el instante en el cual se agota la capacidad de momentos negativos (formación de la primera rótula), aún cuando haya reserva de resistencia en la zona de momentos positivos. El factor de seguridad mínimo exigido por la Norma E.060 de 1989 se puede estimar mediante:

$$F.S. = (\omega_u / \omega_s) (1 / \phi) = (11.14 / 6.96) \times (1/0.9) \approx 1.78.$$

Ya que el diseño no tiene "holgura" en los momentos negativos, el factor de seguridad calculado coincide con el mínimo que exigía la Norma de 1989.

b) Los diagramas de resistencia requerida (M_u) y el diagrama teórico de resistencia suministrada (ϕM_n) se muestran a continuación:



c) Cálculo de los esfuerzos bajo cargas de servicio.

El momento de agrietamiento (M_{CR}) estimado tanto para las secciones de momento negativo como positivo es de $M_{CR} \approx 9.5 \text{ ton-m}$ (sin considerar el aporte del acero presente) por lo tanto, se espera fisuración en las secciones bajo cargas de servicio, en consecuencia utilizaremos las propiedades de la sección agrietada transformada, despreciando la influencia del acero en compresión presente.

Sección de Momento Negativo Máximo: $M_{servicio} = 28.42 \text{ ton-m}$

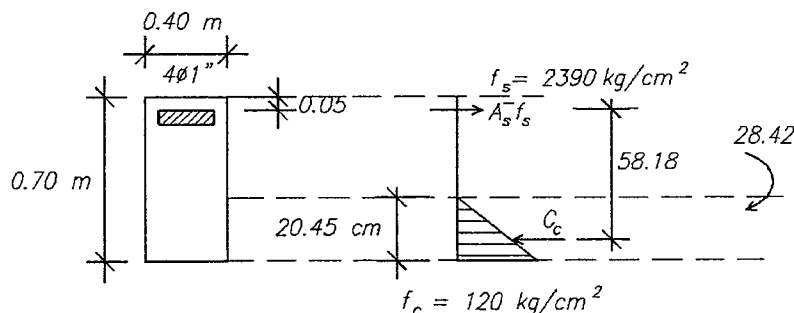
$$A_s = 20.4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pos. eje neutro } c = kd = 20.45 \text{ cm}$$

$$I_{CR} \approx 487,000 \text{ cm}^4 \approx 0.43 I_g$$

$$f_s \approx 2,390 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.57 f_y$$

$$f_c \approx 120 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.57 f'_c$$



Sección de Momento Positivo Máximo: $M_{servicio} = 14.21 \text{ ton-m}$

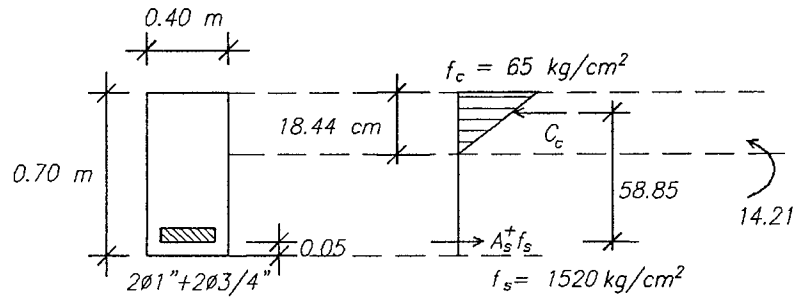
$A_s = 15.88 \text{ cm}^2$

Pos eje neutro $c = kd = 18.44 \text{ cm}$

$I_{CR} \approx 400,000 \text{ cm}^4 \approx 0.35 I_g$

$f_s \approx 1,520 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.36 f_y$

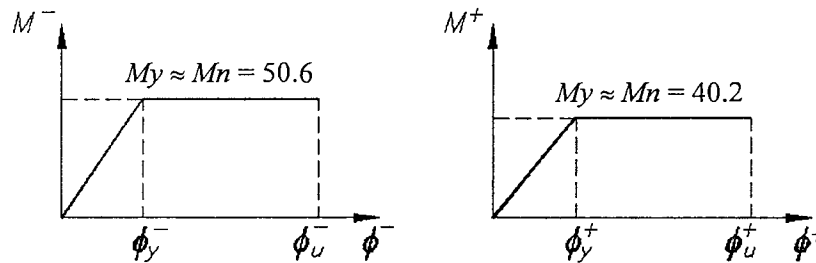
$f_c \approx 65 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.3 f'_c$



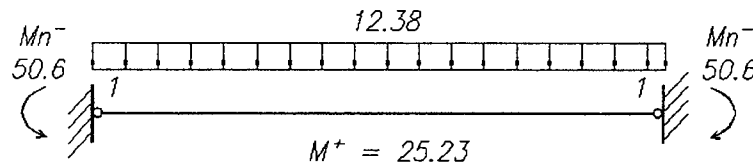
d) Revisión de la seguridad de la viga utilizando el Análisis Límite.

Ya que la sección de momento positivo máximo tiene un exceso de capacidad, la carga máxima calculada en la parte a (11.14 ton/m), no será el "verdadero" valor máximo que puede alcanzar la estructura. Cuando se formen las dos primera rotulas plásticas en la zona de los máximos negativos, todavía será posible incrementar la carga externa hasta formar un mecanismo plástico de tres rotulas.

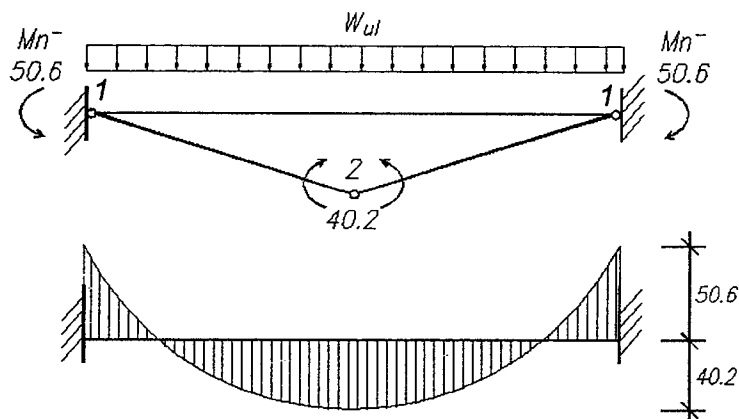
Asumamos que los diagramas momento – curvatura de las secciones de máximo negativo y positivo son como se indican en la figura a continuación. Se ha supuesto que los diagramas son del tipo elastoplástico perfecto, esto significa que aceptamos la simplificación de admitir $M_y \approx M_n$. Asumamos además, que las secciones de máximo negativo tienen suficiente capacidad de rotación inelástica como para acomodar rotaciones plásticas hasta formar el mecanismo completo. También tendremos que asumir que no se producirá una falla prematura por fuerza cortante en las secciones de máximo negativo y positivo, en caso contrario no podrá movilizarse toda la ductilidad disponible en las secciones. Para lograr esto último es necesario llevar a cabo un diseño por capacidad (ver acápite 7.6) del refuerzo por cortante (estribos).



Las dos primeras rótulas plásticas se formarán en los empotramientos, para una intensidad de la carga externa de 12.38 ton/m, como se muestra en la siguiente figura:



El mecanismo plástico se alcanzará cuando se forme la tercera rótula plástica en la sección de máximo positivo, para una intensidad de la carga externa de 14.82 ton/m como se indica en la figura a continuación:



La carga última límite es:

$$(1/8) \omega_{ul} (7)^2 = 50.6 + 40.2 \Rightarrow \omega_{ul} \approx 14.82 \text{ ton/m}$$

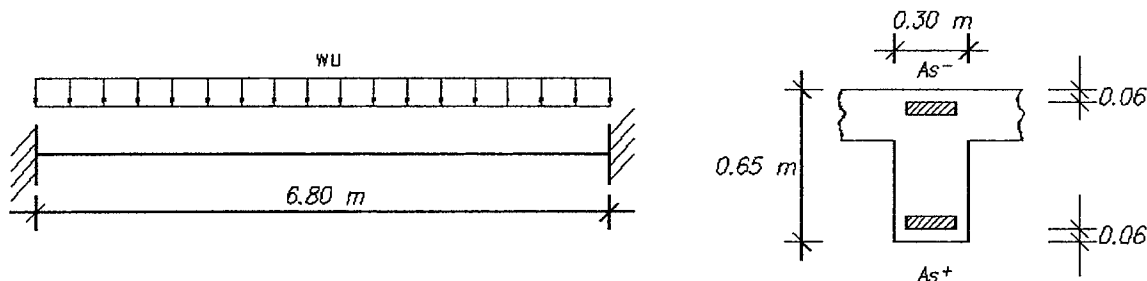
El factor de seguridad, frente a la formación de un mecanismo plástico, es:

$$F.S. = \omega_{ul} / \omega_s = (14.82 / 6.96) \approx 2.13.$$

Ejemplo 10-15 – Diseño de una Viga

Diseñar la viga doblemente empotrada mostrada en la figura. Los materiales que se utilizarán son: $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$. Las cargas externas (en servicio) provenientes de un metrado, que debe soportar la viga son:

$$\omega_D = 3,500 \text{ kg/m}, \quad \omega_L = 1,950 \text{ kg/m}$$



- Resistencia requerida (Norma E.060 de 1989): $\omega_u = 1.5 \omega_D + 1.8 \omega_L = 8,760 \text{ kg/m}$

- Áreas de acero máximo y mínimo calculadas con $b = 30$, $d \approx 59 \text{ cm}$.

$$Asb \approx 38 \text{ cm}^2 \quad As_{\text{max}} = 0.75 Asb \approx 28 \text{ cm}^2$$

$$As_{\text{min}} \approx 4.3 \text{ cm}^2$$

- Áreas de acero requeridas, para momento positivo y negativo:

a) Acero Negativo: $b = 30$, $d \approx 59 \text{ cm}$

$$Mu- = (1/12) \omega_u (6.8)^2 = 33,760 \text{ kg-m} \Rightarrow As- = 17.1 \text{ cm}^2$$

$$As- (\text{colocado}) = 6 \Phi 3/4'' = 17.04 \text{ cm}^2 \quad \rho \approx 1\% \quad (0.45 Asb)$$

$$\phi Mn- \approx 33,700 \text{ kg-m} \text{ (resistencia suministrada)} \quad \epsilon_s \approx 3.9 \epsilon_y$$

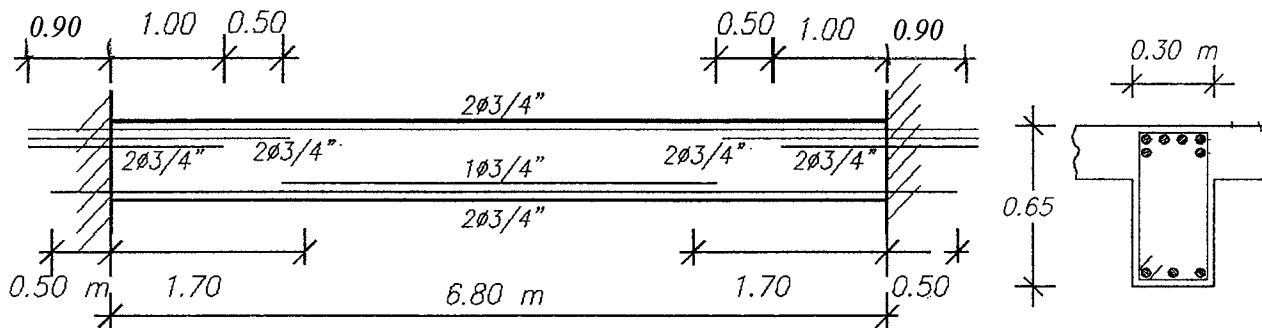
b) Acero Positivo: $b = 30$, $d \approx 59 \text{ cm}$

$$Mu+ = (1/24) \omega_u (6.8)^2 = 16,880 \text{ kg-m} \Rightarrow As+ = 8.0 \text{ cm}^2$$

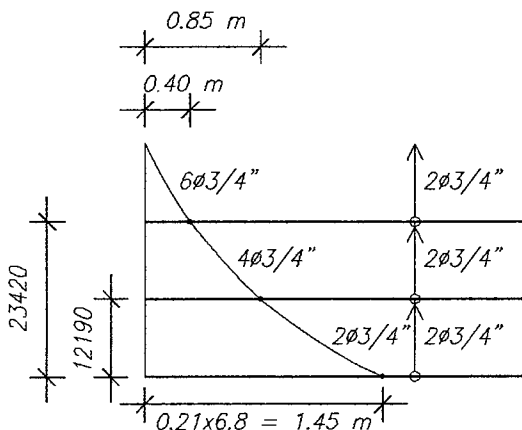
$$As+ (\text{colocado}) = 3 \Phi 3/4'' = 8.52 \text{ cm}^2 \text{ (7\% de exceso)} \quad \rho \approx 0.5\% \quad (0.22 Asb)$$

$$\phi Mn+ \approx 17,930 \text{ kg-m} \text{ (resistencia suministrada 6\% de exceso)} \quad \epsilon_s \approx 9.3 \epsilon_y$$

El refuerzo seleccionado se muestra en la elevación de la viga inserta a continuación:



- Los puntos teóricos de corte de las armaduras negativas se calculan mediante:



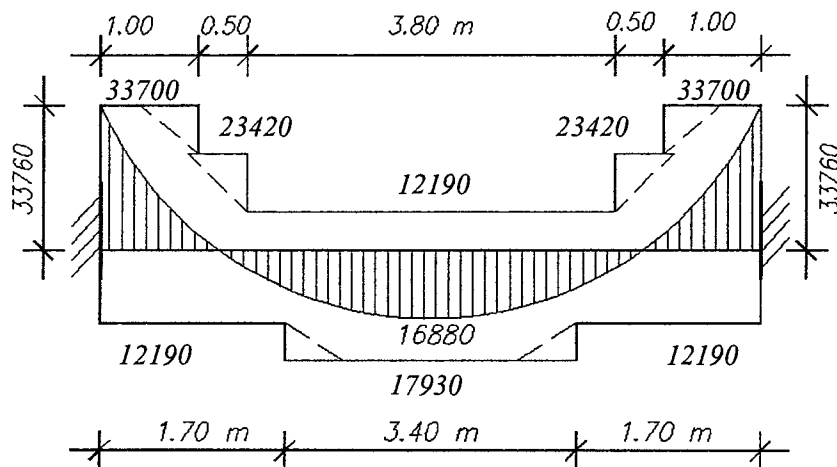
Capacidad de las armaduras:

$$A_s = 2\phi 3/4'' \quad \phi Mn = 12,190 \text{ kg-m.}$$

$$A_s = 4\phi 3/4'' \quad \phi Mn = 23,420 \text{ kg-m.}$$

La Norma exige que el acero no se corte exactamente en el punto teórico, debe prolongarse más allá como mínimo $d \approx 0.60$ ó $12d_b \approx 0.23 \text{ m}$, el que sea mayor. Si a los puntos de corte teórico determinados en la figura anterior se le agrega 0.60 m resulta en las longitudes de los bastones indicadas en la figura al inicio de esta página. Adicionalmente debe verificarse que ningún bastón tenga una longitud menor que su longitud de anclaje, en este caso para armadura de 3/4" ubicada en la capa superior, esta longitud es de 0.90 m aproximadamente.

Finalmente, el diagrama de resistencia requerida (M_u) versus la resistencia suministrada (ϕMn) se muestra a continuación.



$$l_d \phi 3/4'' \approx 0.70 \text{ m}$$

(capa inferior)

$$l_d \phi 3/4'' \approx 0.90 \text{ m}$$

(capa superior)

Ver Tablas 21-2, 21-3

Para las armaduras colocadas la carga límite es de:

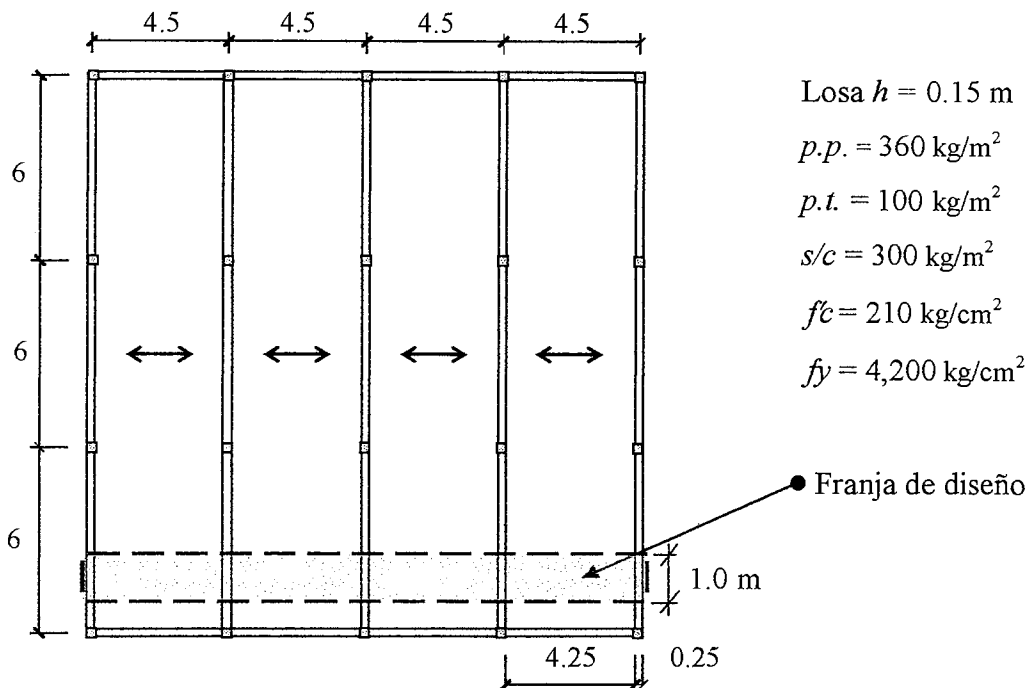
$$1/8 \omega u l (6.8)^2 = 33,700 + 17,930 \Rightarrow \omega u l \approx 8,930 / 0.9 \approx 9,925 \text{ kg/m}$$

El factor de seguridad frente a la formación de un mecanismo plástico: $9,925 / 5,450 \approx 1.82$

Ejemplo 10-15 - Diseño de una losa maciza armada en una dirección.

Utilizando el Método aproximado de los Coeficientes de la Norma E.060, que fue presentado en el acápite 8.9, diseñaremos la losa plana maciza del edificio cuya planta se muestra en la figura a continuación. La losa se apoya sobre las vigas transversales espaciadas cada 4.5 m de eje a eje.

La losa cumple con todas las condiciones para que el Método de los Coeficientes pueda aplicarse y, en este caso, debería proporcionar resultados aceptables en comparación con otros métodos de análisis más "precisos".



A partir de una relación entre los lados de 2 a 1, es posible analizar la losa prescindiendo de la acción en la dirección larga (ver acápite 2.7). En este ejemplo, no existen vigas en la dirección longitudinal y la relación entre los lados de cada uno de los tramos de la losa continua es cercana a 4, en consecuencia se puede afirmar que el trabajo de la losa será básicamente en la dirección corta.

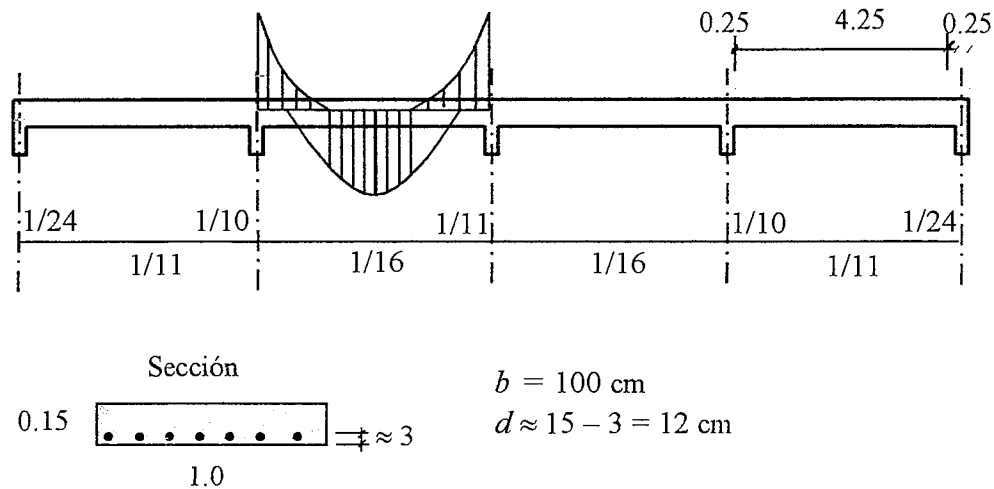
Por comodidad analizaremos una franja de losa de un metro de ancho. En este caso, siendo la carga la misma en toda la planta, los resultados que se obtengan para la franja mencionada serán válidos en todas las otras franjas.

- Metrado: por metro de ancho de la losa ($h = 0.15$ m):

CM:	$pp\ losa = 2,400 \times 0.15 \times 1.0 = 360$ kg/m	}	$460 \times 1.5 = 690$ kg/m
	$p. term. = 100 \times 1.0 = 100$		
CV:	$s/c = 300 \times 1.0 = 300$		$300 \times 1.8 = 540$ kg/m
	$\omega\ servicio = 760$ kg/m		$\omega u = 1,230$ kg/m

Se han utilizado los coeficientes de amplificación de cargas (resistencia requerida) de la Norma E.060 de 1989.

- Corte longitudinal de la losa.



- Acero máximo y mínimo

$$As_{max} = 0.75 \times 2.13\% \times 100 \times 12 \approx 19.2 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{límite que rara vez controla el diseño})$$

$$As_{min}^+ = 0.0018 \times 100 \times 15 = 2.7 \text{ cm}^2/\text{m} \quad S_{max} \leq 3h \quad S_{max} \leq 0.40 \text{ m} \quad (\text{Acero de contracción y temperatura}).$$

Si bien la Norma (tanto la E.060 como el ACI) no especifican claramente el acero mínimo negativo para losas macizas en una dirección, parecería razonable el utilizar como referencia el acero mínimo de secciones rectangulares. En este caso, de acuerdo a la Norma E.060, el acero mínimo negativo podría ser $0.24\% \times 100 \times 12 \approx 2.9 \text{ cm}^2/\text{m}$, sin embargo cuando este acero resulte excesivo, puede ser conveniente colocar 1.3 veces al área de acero que resulte del cálculo.

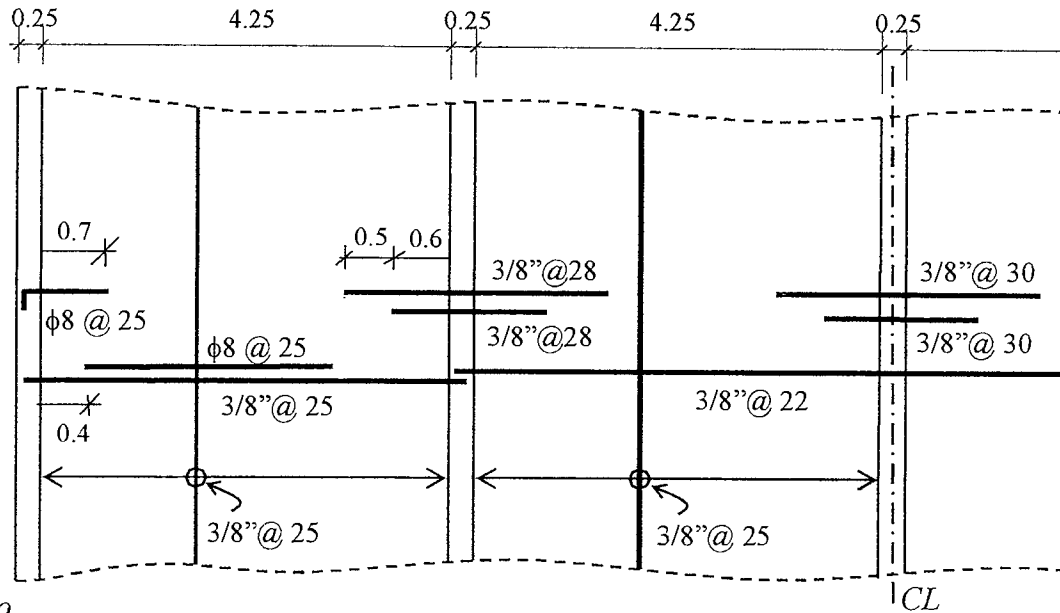
- Diseño de las secciones de momento máximo negativo y positivo

$$\omega u (ln)^2 = 1,230 \times (4.25)^2 = 22,217 \text{ kg-m/m}$$

- a) $M^-u = 1/24 = 925 \text{ kg-m/m}$ $As = 2.08 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $\phi 8 \text{ mm @ } 25 = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\phi Mn = 890 \text{ kg-m/m}$ ($c = 0.55 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 29.5 \epsilon_y$)
- b) $M^-u = 1/10 = 2,220$ $As = 5.15 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8'' @ 28 + 3/8'' @ 28 = 5.07$ $\phi Mn = 2,185$ ($c = 1.40 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 10.8 \epsilon_y$)
- c) $M^-u = 1/11 = 2,020$ $As = 4.67 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8'' @ 30 + 3/8'' @ 30 = 4.73$ $\phi Mn = 2,045$ ($c = 1.31 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 11.7 \epsilon_y$)
- d) $M^+u = 1/11 = 2,020$ $As = 4.67 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8'' @ 25 + \phi 8 @ 25 = 4.84$ $\phi Mn = 2,090$ ($c = 1.34 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 11.4 \epsilon_y$)
- e) $M^+u = 1/16 = 1,390$ $As = 3.16 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8'' @ 22 = 3.23$ $\phi Mn = 1,420$ ($c = 0.89 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 17.7 \epsilon_y$)

Para completar el diseño será necesario revisar la capacidad de la losa para fuerzas cortantes, verificar las deflexiones del tramo exterior, revisar la fisuración y acotar las longitudes de los bastones (corte de fierro).

• Armado por flexión propuesto



As Negativo

Necesario	2.08	5.15	4.67
Colocado	2.00	5.07	4.73

As Positivo

Necesario	4.67	3.16
Colocado	4.84	3.23

Resistencias Negativas

Exigidas	2,220	2,020
Suministradas	2,185 (-1.6%)	2,045 (+1.2%)

Resistencias Positivas

Exigidas	2,020	1,390
Suministradas	2,090 (+3.5%)	1,420 (+2.2%)

Las resistencias suministradas se aproximan bastante a las exigidas, por lo no se presentarán excesos o defectos de resistencia importantes. Nótese que el acero positivo corrido provisto, en ningún caso está por debajo del acero mínimo de retracción y temperatura, esta exigencia condicionó la elección de las combinaciones de diámetros para el acero positivo.

Es claro que la sección que gobierna la resistencia de la losa, si se aceptan los resultados del análisis elástico, es la de momento negativo en el primer apoyo interior, donde se presenta el mayor defecto en el acero ($5.07 \text{ cm}^2/\text{m}$ colocados contra 5.15 necesarios). Si imaginamos que la carga uniformemente repartida se incrementa desde un valor cero hasta la carga última, el momento negativo en el primer apoyo interior será el primero que alcanzará su resistencia disponible o suministrada. En consecuencia el factor de seguridad de esta losa frente a la falla por flexión, sobre la base de los resultados del análisis elástico, se obtiene igualando la sollicitación a la resistencia a momento negativo en el primer apoyo interior:

$$(1/10)\omega u (4.25)^2 = 2,185 \text{ kg-m/m} \quad \omega u \approx 1,210 \text{ kg/m}$$

$$\text{F.S.} = 1,210/760 = 1.59 / 0.9 \approx 1.77$$

Para el cálculo anterior del factor de seguridad se ha utilizado el momento negativo proveniente de la aplicación del método de los coeficientes, en consecuencia hay que tomar en cuenta por un lado que el método de los coeficientes es aproximado y por otro lado el hecho que este método toma en cuenta la alternancia de la sobrecarga.

Si se hubieran proporcionado áreas de acero exactamente iguales a las exigidas, el factor de seguridad global mínimo exigido por la Norma, frente a la falla por flexión, hubiera sido:

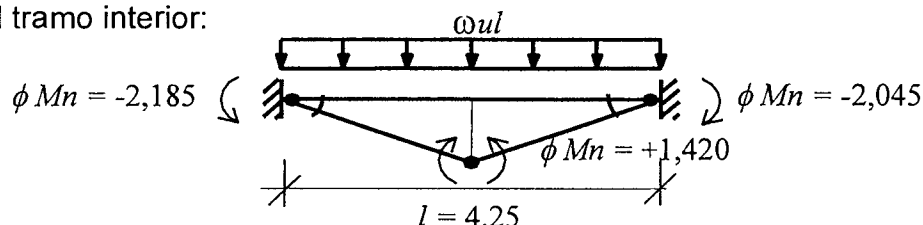
$$F.S. = 1,230/760 = 1.62 / 0.9 \approx 1.80$$

El haber reducido el área de acero en el primer apoyo interior modifica el factor de seguridad, frente a la falla por flexión, de 1.80 a 1.77. Esta reducción es insignificante, por otro lado la resistencia suministrada para los momentos positivos de los tramos extremos está en exceso de la exigida (3.5% de exceso). En consecuencia será posible una ligera redistribución del momento negativo (reducción) la que ocasionará un incremento en el positivo el cual tiene reserva de resistencia.

- **Análisis límite:** Calculemos el factor de seguridad frente a la falla por flexión utilizando el *análisis límite* (formación de un mecanismo plástico) que se describió en el acápite 7.7. Supongamos que la falla de la losa es por flexión, sin posibilidad de fallas prematuras por fuerza cortante o por adherencia. Supongamos además que los diagramas momento – curvatura de las secciones son del tipo bilineal, en consecuencia el momento último (resistencia nominal en flexión) es igual al momento de fluencia.

La losa, que se comporta como una viga continua de cuatro tramos, podrá alcanzar la falla bajo un mecanismo completo o bajo mecanismos parciales. La segunda opción es la más probable ya que hemos utilizado para el diseño el método de los coeficientes y se han realizado redondeos en las áreas de acero necesarias. Investiguemos los tramos interiores y los tramos extremos.

Análisis del tramo interior:

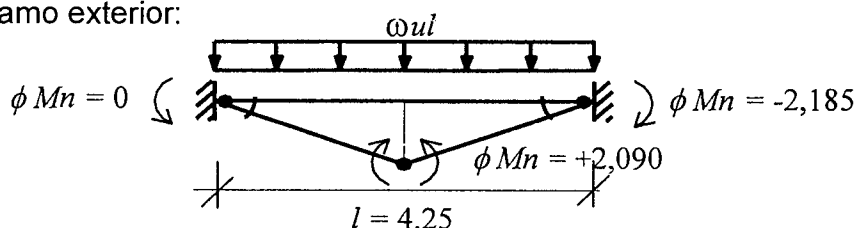


La carga límite para el tramo interior y el coeficiente de seguridad serán:

$$(2,185+2,045)/2 + 1,420 = (1/8) \omega_{ul} (4.25)^2 \Rightarrow \omega_{ul} = 1,565 / 0.9 \approx 1,740 \text{ kg/m}$$

$$F.S = 1,740 / 760 \approx 2.3$$

Análisis del tramo exterior:



La carga límite para el tramo exterior, asumiendo que el momento máximo positivo se produce cerca del centro del tramo, y el coeficiente de seguridad serán:

$$2,185/2 + 2,090 = (1/8) \omega_{ul} (4.25)^2 \Rightarrow \omega_{ul} = 1,410 / 0.9 \approx 1,565 \text{ kg/m}$$

$$F.S = 1,565 / 760 \approx 2.0$$

En consecuencia controla el tramo exterior y la carga límite que puede soportar la viga es de 1,565 kg/m con un factor de seguridad global frente a la falla por flexión cercano a dos. Nótese que en el análisis realizado no se ha considerado la alternancia de la sobrecarga, es decir se ha supuesto que la carga es la misma en todos los tramos y que se incrementa proporcionalmente desde cero hasta formar el mecanismo plástico, en

este caso un mecanismo parcial. Por este motivo los coeficientes de seguridad difieren de manera importante de los calculados a partir de los resultados del análisis elástico.

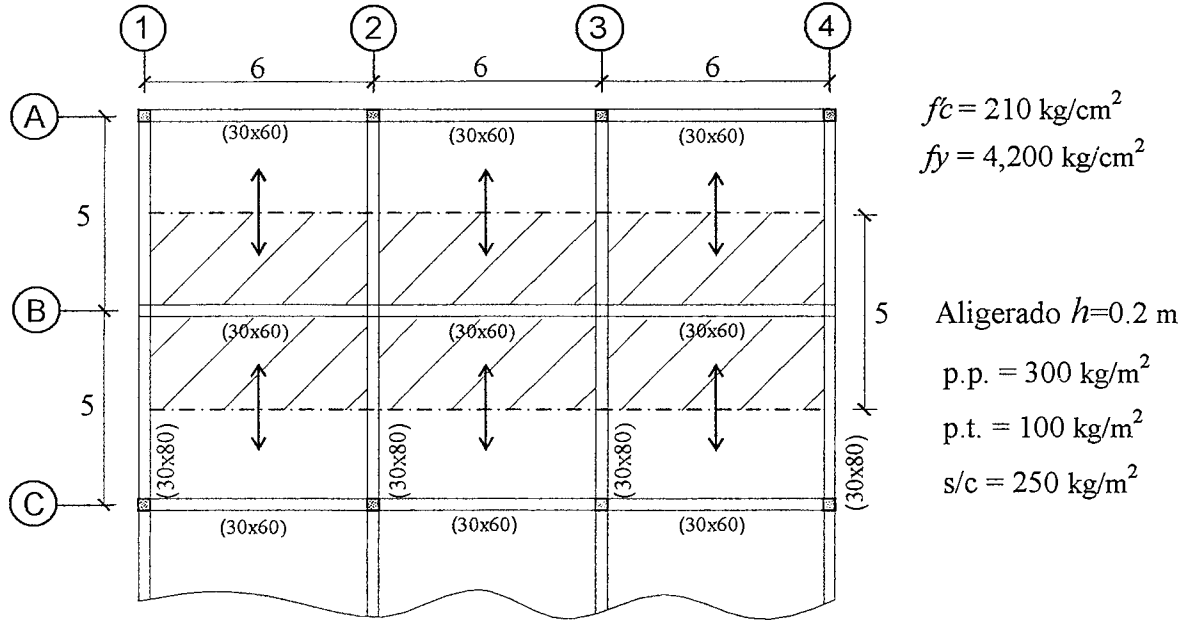
10.11 Recomendaciones para el Armado por Flexión de Losas Macizas

Varias de las recomendaciones que se encuentran en la literatura técnica para el armado de losas, responden a las preferencias personales del diseñador, otras obedecen a los requerimientos de las Normas. A continuación se presentan algunas recomendaciones aplicables a losas macizas, se excluyen las losas nervadas las cuales tiene sus propias exigencias.

- a) El espesor de las losas debe dimensionarse para no requerir refuerzo por cortante, es decir el concreto debe soportar toda la fuerza cortante sin la contribución del acero de refuerzo en la forma de estribos o similar.
- b) Las losas macizas no llevan refuerzo corrido en la parte superior, salvo en las situaciones en las cuales se presente inversión de momentos, es decir que en las zonas centrales de los paños exista momento negativo en lugar de positivo.
- c) La armadura positiva por flexión a lo largo de todo el paño no debe ser menor que la correspondiente a la armadura mínima de retracción y temperatura ($0.0018 b h$). El espaciamiento de esta armadura no debe exceder de tres veces el espesor de la losa ($3h$) ni de 0.40 m (ver figura 6-12).
- d) Perpendicularmente a la armadura positiva por flexión debe colocarse, sin excepciones y como mínimo, la armadura de retracción y temperatura.
- e) En losas gruesas puede repartirse la armadura de retracción y temperatura entre las caras superior e inferior. Esto ayuda a controlar el agrietamiento en la cara superior.
- f) Las losas se arman, por lo general, con barras de pequeño diámetro (8 mm, 3/8", 1/2" y hasta 5/8"). En losas gruesas, con luces y cargas importantes, puede ser necesario acudir a barras de 3/4" y hasta de 1".
- g) Deben evitarse los espaciamientos con decimales, por ejemplo 3/8" @ 21.5.
- h) La armadura negativa debe consistir, por lo general, en bastones con barras de a lo sumo dos diámetros iguales o distintos (8 mm + 3/8", 3/8" + 3/8", 3/8" + 1/2", 1/2" + 5/8", etc.). De preferencia los espaciamientos de los bastones deben ser múltiplos exactos uno del otro (8 mm @ 20 + 3/8" @ 20, 3/8 @ 25 + 3/8 @ 25, 3/8" @ 25 + 1/2" @ 25, 3/8" @ 15 + 1/2" @ 30, etc.). Por el punto de inflexión debe pasar por lo menos la tercera parte del acero negativo determinado para el apoyo y extenderse más allá de este punto una distancia no menor que d , $12 db$ ni $ln/16$.
- i) Ningún bastón positivo a negativo, debe tener una longitud menor que su longitud de anclaje a ambos lados de la sección crítica (de máximo momento).
- j) Si bien la Norma (tanto la E.060 como el ACI) no especifican claramente el acero mínimo negativo para losas macizas en una dirección, parece razonable el utilizar como referencia el acero mínimo de secciones rectangulares. Sin embargo cuando este acero resulte excesivo, puede ser conveniente colocar alrededor de 1.3 veces al área de acero que resulte del cálculo.
- k) La armadura positiva consiste en barras corridas y si fueran necesarios bastones adicionales. Al apoyo debe llegar por lo menos la tercera parte del acero positivo necesario en la sección de máximo positivo. La selección de los bastones y su espaciamiento, obedecen a las mismas reglas dadas para el acero negativo.

Ejemplo 10-16- Diseño por flexión de una viga continua.

Diseñar la viga de tres tramos del eje B correspondiente a la planta mostrada a continuación. Se trata de una viga que no forma pórtico con las columnas ya que se apoya sobre otras vigas (las vigas principales de los ejes 1, 2, 3 y 4).

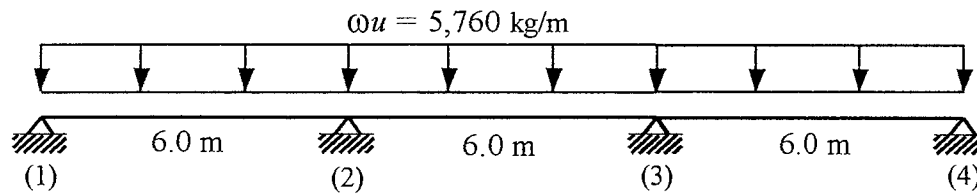


• **Metrado de la viga**

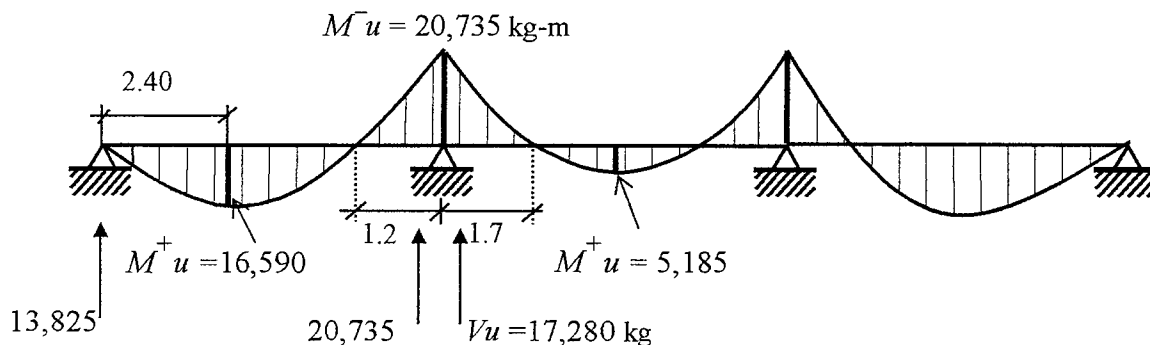
CM:	pp viga	= 2,400x0.3x0.6	= 432 kg/m	}	2,342x1.5 ≈ 3,510
	pp alig.	= 300x4.70	= 1,410		
	p.term.	= 100x5.0	= 500		
CV:	s/c	= 250x5.0	= 1,250		1,250x1.8 = 2,250
			ω servicio = 3,590 kg/m		$\omega u = 5,760$ kg/m

Se han utilizado los coeficientes de amplificación de cargas (resistencia requerida) de la Norma E.060 de 1989.

• **Modelo estructural a ejes**



El análisis estructural se realizó suponiendo comportamiento elástico de la viga bajo la acción de las cargas amplificadas, sin considerar alternancia de sobrecarga, los resultados son:



La Norma E.060 permite diseñar con los momentos negativos reducidos a la cara del apoyo. El momento negativo reducido a la cara izquierda del primer apoyo interior es de 17,625 kg-m aproximadamente, y a la cara derecha de 18,145. El momento flector negativo de diseño sería el mayor de los dos valores, es decir 18,145 kg-m que representa una reducción del 12% con respecto del momento flector calculado al eje.

Sin embargo, el diseño se realizará con los momentos negativos sin reducir a la cara del apoyo para así tomar en cuenta, indirectamente, el aumento en los momentos negativos por efecto de la posible alternancia de la carga viva.

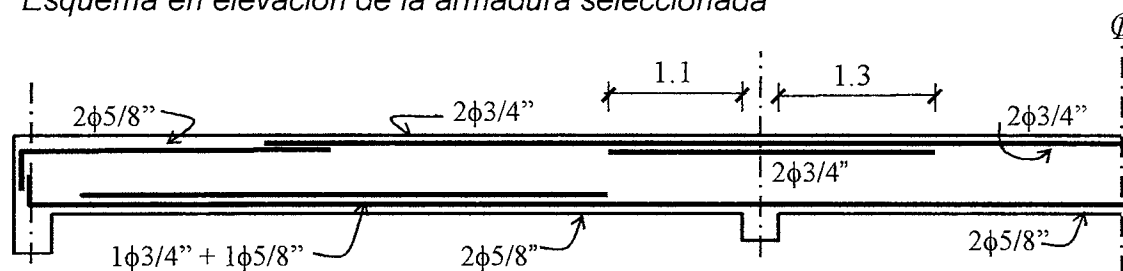
- *Diseño de la Sección 0.30x0.60. Peralte efectivo estimado $d \approx 0.54$ m*

$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad A_s \text{ max} = 0.75 A_s b = 0.75 \times 2.13\% \times 30 \times 54 \approx 26 \text{ cm}^2$$

$$A_s \text{ min} = \frac{0.7\sqrt{210}}{4,200} = 0.242\% \times 30 \times 54 \approx 4 \text{ cm}^2$$

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------|---|
| a) $M^+ u = 16,590$ | $A_s = 8.67 \text{ cm}^2$ | |
| Colocar $1\phi 3/4'' + 3\phi 5/8''$ | $A_s = 8.84 \text{ cm}^2$ | $\phi Mn = 16,885 \text{ kg-m} \quad \epsilon_s = 8.0 \epsilon_y$ |
| b) $M^+ u = 5,185$ | $A_s = 2.59 \text{ cm}^2$ | |
| Colocar $2\phi 5/8''$ | $A_s = 4 \text{ cm}^2$ | $\phi Mn = 7,930 \text{ kg-m} \quad \epsilon_s = 19.5 \epsilon_y$ |
| c) $M^- u = 20,735$ | $A_s = 11.04 \text{ cm}^2$ | |
| Colocar $4\phi 3/4''$ | $A_s = 11.36 \text{ cm}^2$ | $\phi Mn = 21,275 \text{ kg-m} \quad \epsilon_s = 5.9 \epsilon_y$ |

- *Esquema en elevación de la armadura seleccionada*



<i>As negativo</i>		
Necesario	11.04	
Colocado	11.36 (+2.9%)	
<i>As positivo</i>		
Necesario	8.67	2.59
Colocado	8.84 (+2%)	4.00 (+54%)
<i>Resistencias negativas</i>		
Exigidas	20,735	
Suministradas	21,275 (+2.6%)	
<i>Resistencias positivas</i>		
Exigidas	16,590	5,185
Suministradas	16,885 (+1.8%)	7,930 (+53%)

Para completar el diseño es necesario realizar el diseño por fuerza cortante (estribos), verificar las deflexiones del tramo exterior, realizar el control de la fisuración y acotar las longitudes de los bastones (corte de fierro).

Los aceros positivos y negativos colocados se aproximan bastante a los necesarios, por lo tanto, no habrá sobrerresistencia en flexión importante. En el segundo tramo hay un

exceso de acero positivo producto de la exigencia de la Norma relativa al acero mínimo. Es claro que la sección que gobierna la resistencia de la viga, si se aceptan los resultados del análisis elástico, es la de momento positivo en los tramos extremos, donde se ha proporcionado la menor sobrerresistencia (+1.8%). Si imaginamos que la carga se incrementa desde cero hasta la carga última, el momento positivo en los tramos extremos será el primero que alcanzará su resistencia disponible. En consecuencia la carga máxima que se podrá aplicar a la estructura y el factor de seguridad de la viga frente a la falla por flexión, sobre la base de los resultados del análisis elástico, será aproximadamente:

$$(16,885 / 16,590) \times 5,760 \Rightarrow \omega u \approx 5,860 \text{ kg/m}$$

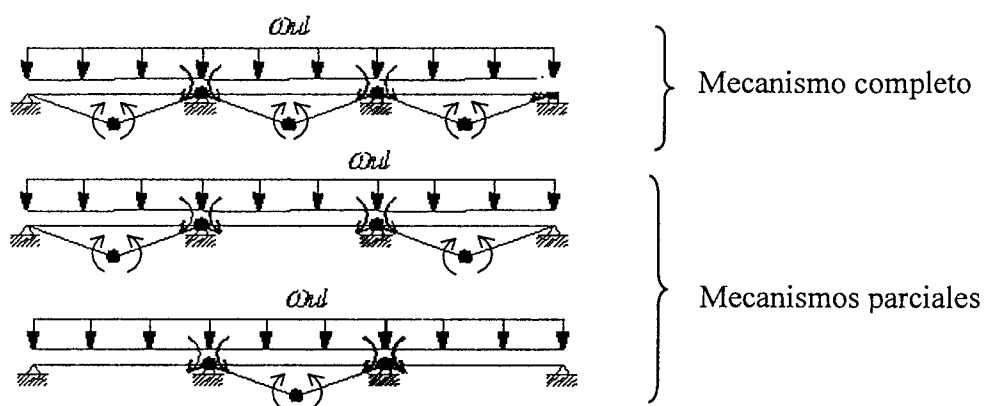
$$\text{F.S.} = 5,860 / 3,590 = 1.63 / 0.9 \approx 1.81$$

El valor calculado del coeficiente de seguridad, es muy parecido al que se hubiera logrado si se hubieran proporcionado áreas de acero exactamente iguales a las exigidas:

$$\text{F.S.} = 5,760 / 3,590 = 1.60 / 0.9 \approx 1.78$$

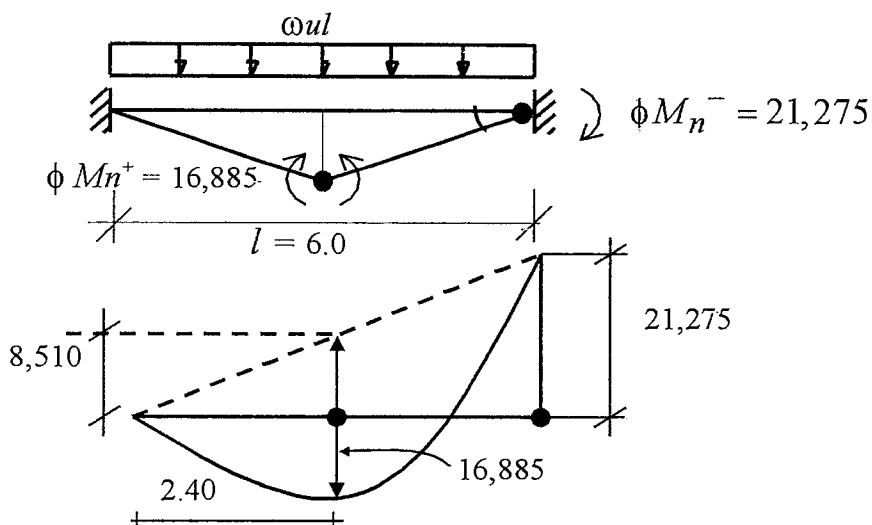
- Verificación del factor de seguridad de la viga utilizando el *diseño límite* o diseño por capacidad, es decir el asociado con la formación de un mecanismo plástico controlado por flexión. Para ello haremos las siguientes suposiciones:
 - a) Los apoyos extremos son simples, es decir, no se desarrolla momento negativo, tal como se supuso en el análisis elástico.
 - b) Las secciones poseen una buena ductilidad de curvatura. Los diagramas Momento – Curvatura son del tipo bilineal con una ductilidad de curvatura alta. No hay endurecimiento del acero por deformación.
 - c) No existe posibilidad de una falla prematura por fuerza cortante ni por adherencia, en consecuencia, el diseño por fuerza cortante deberá realizarse sobre la base de la carga límite que resulte de este análisis (diseño por capacidad).

Los posibles mecanismos plásticos, que son la base del análisis límite o por capacidad, son los siguientes:



El mecanismo plástico que controla la resistencia de toda la viga es el segundo. Se trata de un mecanismo parcial en el cual primero se formarán las rótulas en la zona de momento positivo de los tramos extremos y poco después (casi con la misma carga) se formarán las rotulas en los apoyos interiores. Para calcular la carga límite, analizaremos los tramos extremos y el tramo central:

- Análisis del tramo exterior:



Del diagrama anterior, considerando que el máximo momento positivo se produce a 2.4 m del apoyo izquierdo, se obtiene $\omega ul \approx 5,880 / 0.9 \approx 6,530 \text{ kg/m}$.

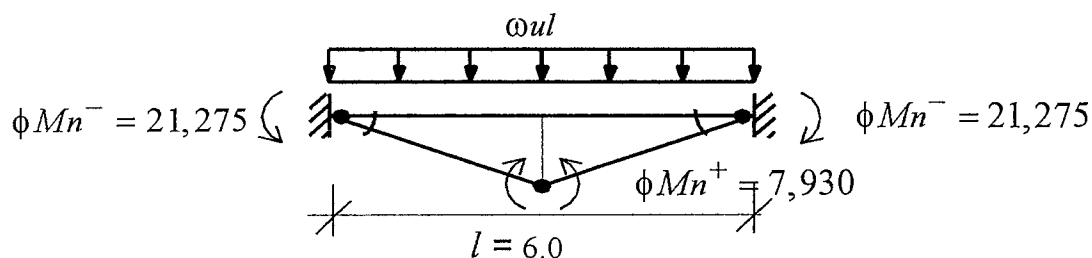
Si suponemos que el máximo positivo se presenta al centro de la luz, tendríamos:

$$21,275 / 2 + 16,885 = \omega ul \times 6^2 / 8 \Rightarrow \omega ul = 6,115 / 0.9 \approx 6,795 \text{ kg/m}$$

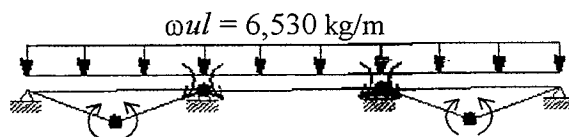
El error que se comete al suponer la rótula en la zona de momento positivo al centro de la luz, es en este caso, de tan solo el 4%. El factor de seguridad, frente a la formación de un mecanismo, para los tramos extremos será:

$$F.S. = 6,530 / 3,590 \approx 1.82$$

- Análisis del tramo interior:



La carga límite para el tramo central será $\omega ul \approx 6,490 / 0.9 \approx 7,210 \text{ kg/m}$ mayor que la correspondiente a los tramos extremos. En consecuencia el mecanismo plástico que controla la resistencia de la estructura es:



En resumen:

- a) Con los resultados del análisis elástico controla el momento positivo de los tramos extremos:

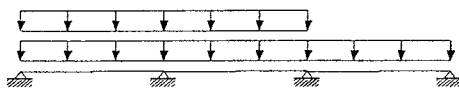
$$\omega u \approx 5,860 \text{ kg/m} \quad \text{F.S.} = (\omega u / \omega s)(1 / \phi) \approx 1.81$$

- b) Con los resultados del análisis limite controla el mecanismo parcial asociado a los tramos extremos:

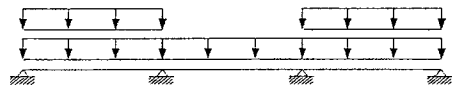
$$\omega u l \approx 6,530 \text{ kg/m} \quad \text{F.S.} = \omega u l / \omega s \approx 1.82$$

Ambos factores de seguridad se han calculado asumiendo que la falla de la viga es por flexión y son muy similares ya que las áreas de acero colocadas, se han ajustado bastante a los requerimientos provenientes del análisis elástico, es decir no hay ni excesos ni defectos significativos en el acero. Además el análisis y diseño se ha realizado sin considerar alternancia de la sobrecarga.

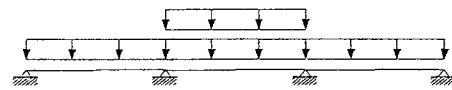
Es interesante comparar los resultados del análisis elástico que se ha realizado, suponiendo sobrecarga plena en todos los tramos, con los que se obtendrían con alternancia de sobrecarga sin reducción en su intensidad. Los patrones de carga que es necesario analizar son:



M_{neg} sin alternancia = 20,735
 M_{neg} máximo al eje = 22,090 kg-m (+7%)
 Resistencia suministrada = 21,275 (ϕMn)



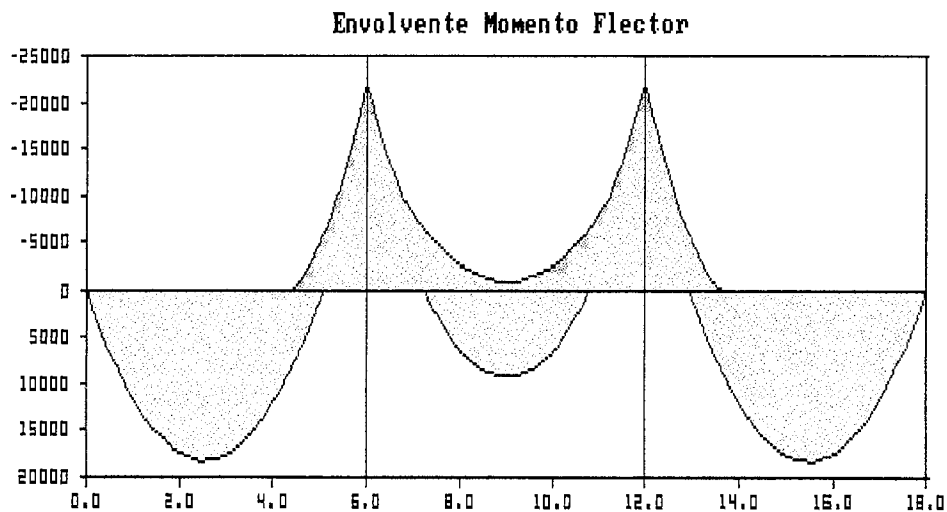
M_{pos} sin alternancia = 16,590
 M_{max} positivo = 18,250 kg-m (+10%)
 Resistencia suministrada = 16,885 (ϕMn)



M_{pos} sin alternancia = 5,185
 M_{max} positivo = 9,235 kg-m (+78%)
 Resistencia suministrada = 7,930 (ϕMn)

Los porcentajes entre paréntesis indican la comparación con los resultados considerando todos los tramos con sobrecarga plena.

La envolvente de momentos flectores (resistencias requeridas) considerando alternancia de sobrecarga se muestra a continuación:



El máximo momento negativo reducido a la cara del apoyo, en este caso a la derecha del mismo, es de 19,330 kg-m aproximadamente. La armadura negativa colocada suministra una resistencia de diseño de 21,275 kg-m por lo tanto la armadura provista cubre la posibilidad de alternancia en los negativos.

En los momentos positivos de los tramos extremos no hay mucha diferencia, tan sólo un 10%. Donde se produce la máxima diferencia es en el momento positivo correspondiente al tramo central (+78%). Esta diferencia importante se explicó en el acápite 8.11 (ver tabla 8-2). La resistencia proporcionada a esta sección, que obedece a las exigencias de acero mínimo, es de 7,930 kg-m por lo tanto el exceso de la demanda sobre la resistencia proporcionada es, en este caso, tan sólo del 16%.

Las diferencias mencionadas no deberían ser preocupantes ya que, la mayoría de los códigos permiten reducir la intensidad de la carga viva de diseño en función del área soportada por el elemento. Por ejemplo, la Norma Peruana de Cargas E-020 del año 2005, para este caso particular, permitiría una reducción cercana al 15%, es decir la sobrecarga de diseño pudo reducirse a $250 \times 0.85 \approx 210 \text{ kg/m}^2$. Este nivel de reducción puede aplicarse perfectamente a los patrones de carga que conduzcan a la determinación de los momentos máximos positivos y negativos.

Por otro lado los patrones de carga que producen los máximos positivos y negativos son distintos, y por lo tanto, todos los máximos no pueden ocurrir simultáneamente. Si se provee una adecuada ductilidad a la viga será posible una redistribución de los momentos máximos antes de que sobrevenga la falla. El diseño con reducción en el valor de la sobrecarga y sin alternancia, podría originar sobre esfuerzos en algunas secciones en la eventualidad de que el 100% de la sobrecarga actúe en algunos de los patrones que originan los máximos momentos. Sin embargo, la capacidad última del sistema, luego de la redistribución de momentos producto de los sobre esfuerzos, no debería ser menor que la requerida para soportar el íntegro de la sobrecarga reducida actuando en todos los tramos.

Para concluir con el ejemplo, veamos los resultados que se obtendrían si se aplicara el Método de los Coeficientes de la Norma con $\omega u = 5,760 \text{ kg/m}$ y $ln = 5.7 \text{ m}$:

$$M^-u \text{ negativo cara del apoyo} = 1/10 \omega u ln^2 = 18,715 \text{ kg-m vs. } 19,330 \text{ (alternancia)}$$

$$M^+u \text{ positivo tramos extremos} = 1/11 = 17,010 \text{ kg-m vs. } 18,250 \text{ (alternancia)}$$

$$M^+u \text{ positivo tramo interior} = 1/16 = 11,700 \text{ kg-m vs. } 9,235 \text{ (alternancia)}$$

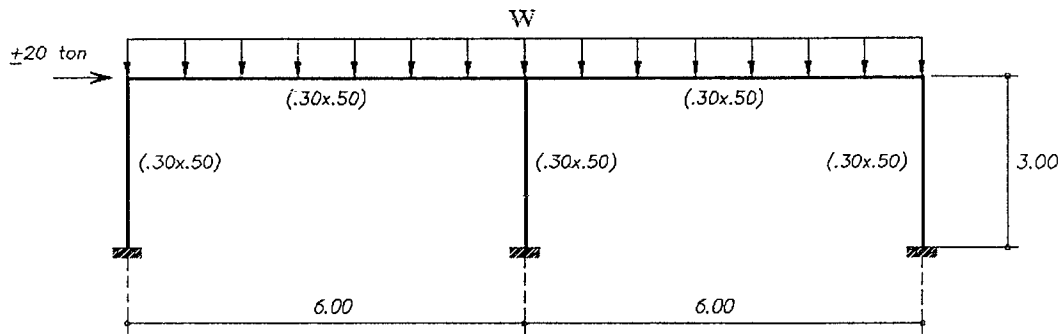
Ejemplo 10-17- Diseño por flexión de una viga continua con sismo.

La figura muestra el modelo a ejes de un pórtico interior simétrico de un edificio de un piso. El pórtico debe soportar las cargas muertas y vivas provenientes del metrado por áreas tributarias y una fuerza lateral de sismo estimada en 20 ton. La fuerza de sismo, calculada de acuerdo a la Norma E.030 del 2003, está a nivel de resistencia, es decir ya está amplificada. En la dirección perpendicular al pórtico, las fuerzas de sismo son resistidas por muros de albañilería confinada. Se quiere diseñar la viga.

Las principales características son:

- $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$
- Sección de la viga y de las columnas $0.30 \times 0.50 \text{ m}$
- Carga muerta = 3 ton/m (servicio) Carga viva = 1.2 ton/m (servicio)
- Columnas empotradas en la base.
- Para el análisis se han ignorado las deformaciones axiales y por cortante.

• Modelo del pórtico.



• Resultados del análisis estructural lineal elástico.

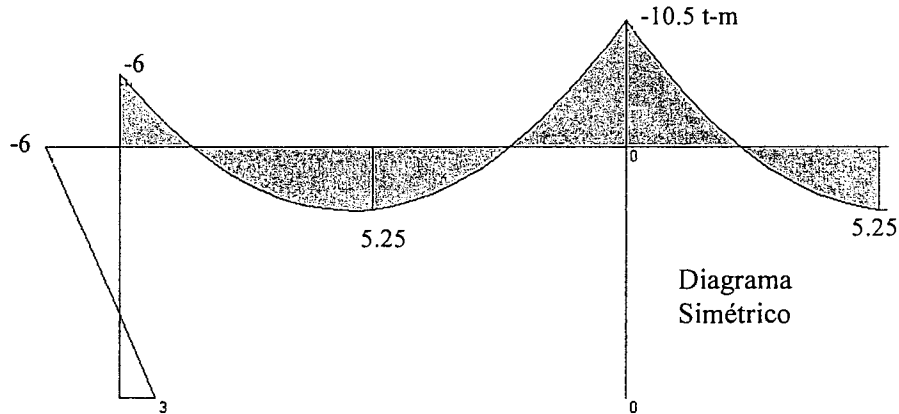


Diagrama de momentos para CM = 3 ton/m

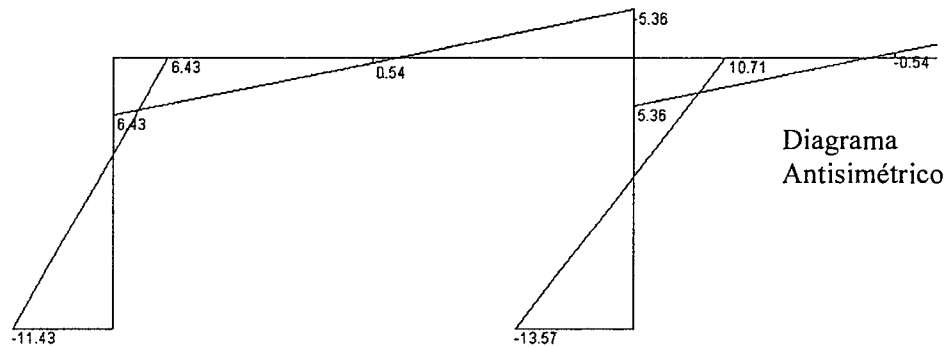


Diagrama de momento para carga lateral de sismo hacia la derecha

El diagrama de momento para la carga viva se puede obtener multiplicando el diagrama de carga muerta por el factor $1.2 / 3 = 0.4$.

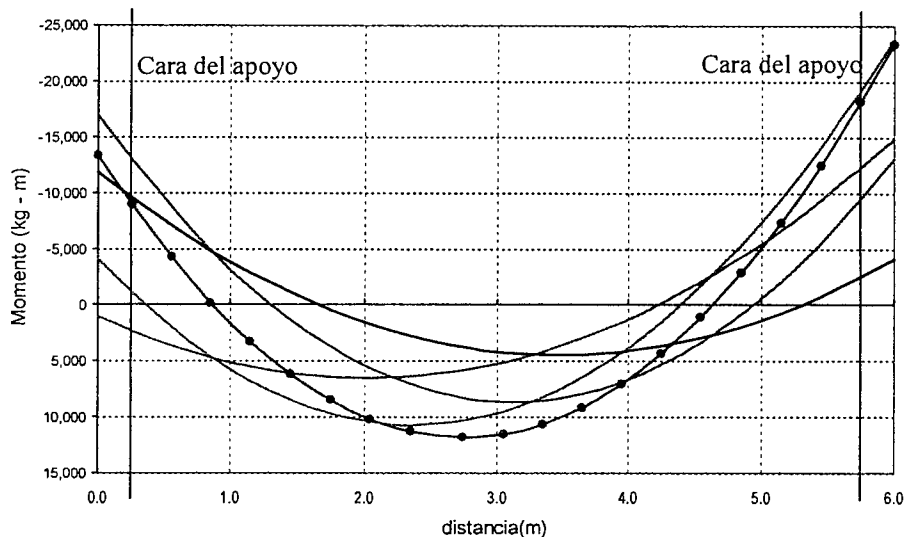
• Envoltente de momentos flectores (resistencias requeridas en flexión).

Se construye con las siguiente combinaciones de carga:

- | | | |
|----|------------------|---|
| 1) | $1.5 D + 1.8 L$ | $wu = 1.5 \times 3 + 1.8 \times 1.2 = 6.66 \text{ ton/m}$ |
| 2) | $1.25 (D+L) + S$ | $wu = 1.25 (3 + 1.2) = 5.25 \text{ ton/m}$ |
| 3) | $1.25 (D+L) - S$ | $wu = 5.25 \text{ ton/m}$ |
| 4) | $0.9 D + S$ | $wu = 0.9 \times 3 = 2.7 \text{ ton/m}$ |
| 5) | $0.9 D - S$ | $wu = 2.7 \text{ ton/m}$ |

La figura inserta a continuación muestra la envoltente, se han indicado las parábolas correspondientes a cinco combinaciones de carga. La demanda de resistencia para las cargas verticales solas ($wu = 6.66 \text{ ton/m}$) está representada por la curva con círculos llenos. Para el momento negativo de la izquierda controla la combinación 3) con sismo y

llega a producirse una pequeña inversión de momentos originada por la combinación 4). Para la zona de momentos positivos cercana al centro de la luz controla la combinación 1) de cargas verticales sin sismo y para el apoyo derecho las combinaciones 1) y 2) dan prácticamente el mismo resultado.



Envolvente de momentos flectores (resistencias requeridas) – tramo izquierdo

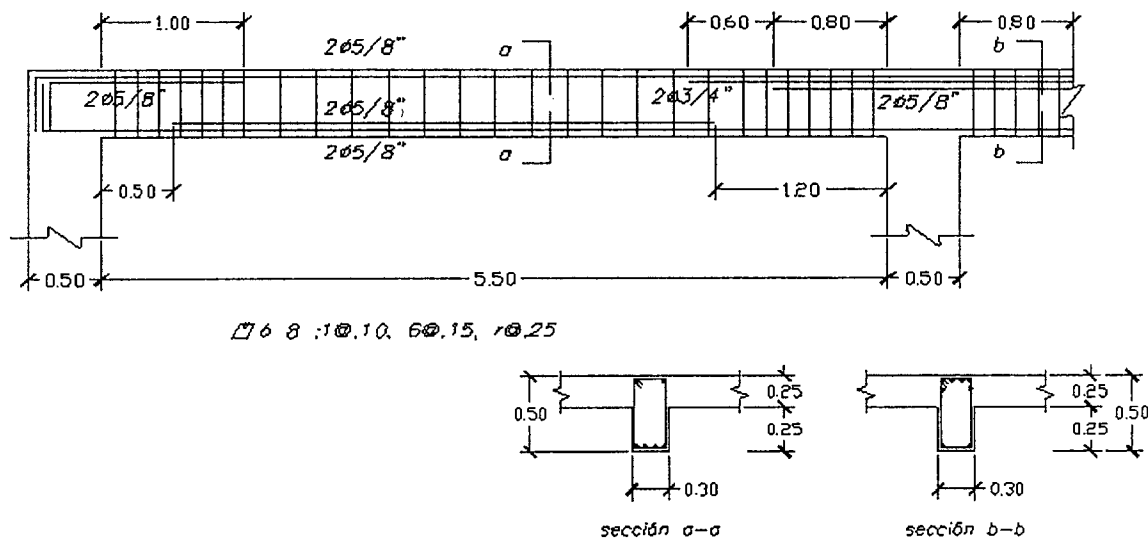
- Momentos flectores para el diseño (resistencias requeridas en flexión).

M^- al eje =	-16.93 ton-m	-23.74 ton-m
M^- cara =	<u>-13.00</u> (reducción 23%)	<u>-19.15</u> (reducción 19%)
M^+ =	<u>2.31</u>	<u>11.86</u>

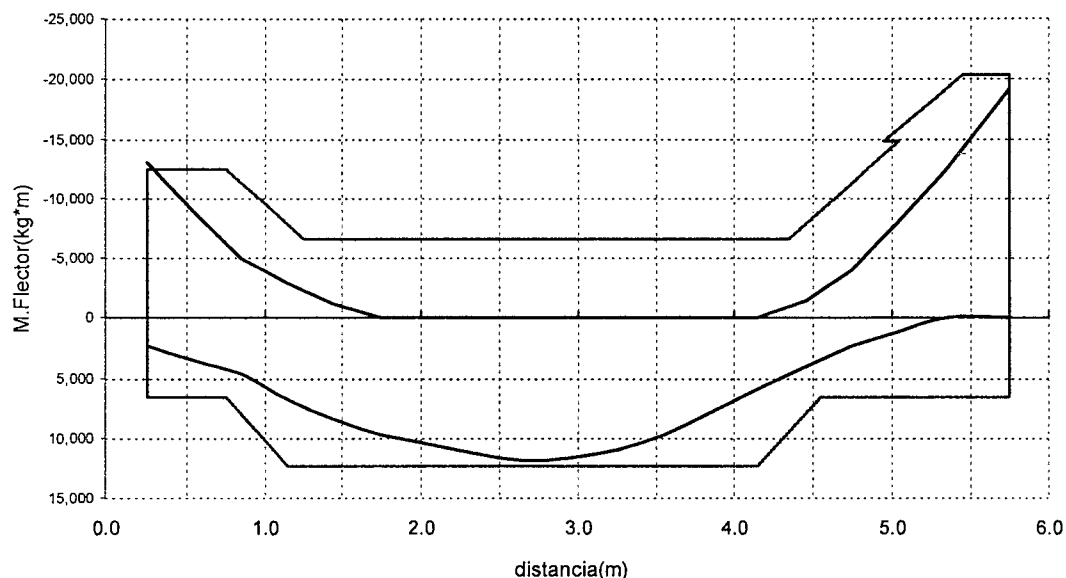
- Diseño por flexión. El diseño se realizará con los valores subrayados del cuadro anterior.

Sección	$b = 30$	$d \approx 44$	$d' \approx 6$	$As_{max} = 0.75 As_b \approx 21 \text{ cm}^2$	$As_{min} \approx 3.2 \text{ cm}^2$
As^- cara =	<u>8.5</u>	(4-5/8")		<u>13.0</u>	(4-5/8" + 2-3/4")
As^+ =	<u>1.4</u>		<u>7.7</u>	(4-5/8")	----

La figura a continuación muestra el armado seleccionado para la viga. Los estribos indicados obedecen a los requerimientos para elementos con responsabilidad sísmica (estribos de confinamiento), por cortante la viga necesita menos estribos que los seleccionados.



- Revisión de la capacidad con los aceros seleccionados. Los cálculos se realizarán incluyendo el aporte del acero en compresión, asumiendo $d \approx 44$ $d' \approx 6$. La figura a continuación muestra la envolvente de demandas (M_u) y las resistencias de diseño suministradas (ϕM_n)

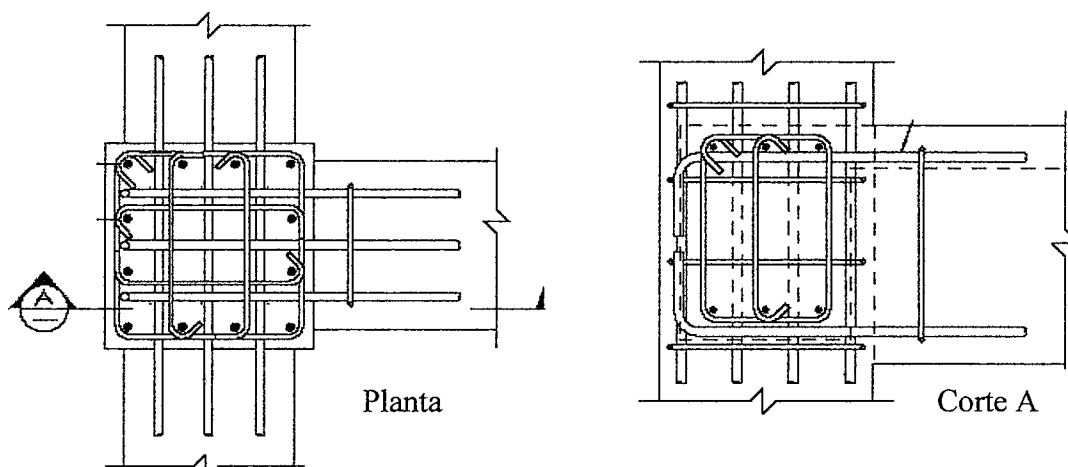


10-12 Recomendaciones para el Armado por Flexión de Vigas

Varias de las recomendaciones que se encuentran en la literatura técnica para el armado de vigas, responden a las preferencias personales del diseñador, otras obedecen a los requerimientos de las Normas. A continuación se presentan algunas recomendaciones aplicables a vigas aisladas o que forman pórticos sin responsabilidad sísmica.

- a) Es conveniente disponer tanto en la parte inferior como en la superior de la viga, armadura corrida que permita el armado de los estribos. La armadura corrida, de preferencia, no debería ser inferior a dos barras con un área total igual o mayor a la armadura mínima especificada por la norma (ver acápite 10.8). La armadura corrida, debe ser "compatible" con las dimensiones e importancia de la viga.
- b) Es conveniente colocar un número mínimo de barras que guarde relación con el ancho de la viga. Para anchos de 0.30 m o menos bastará con dos barras, para anchos entre 0.30 y 0.45 por lo menos 3 y para anchos entre 0.50 y 0.70 m por lo menos 4 barras. No es razonable, en una viga de por ejemplo de 0.60 m de ancho colocar únicamente dos barras de refuerzo de gran diámetro, es mucho mejor trabajar por lo menos con cuatro barras de menor diámetro.
- c) No es conveniente, dentro de una misma viga, usar barras de diámetros muy distintos. Por ejemplo si se decidió colocar dos barras corridas de 3/4", los bastones deberían ser de 3/4" y 5/8" o de 3/4" y 1". No deberían colocarse bastones de 1/2", 5/8", 3/4" y 1" simultáneamente, ya que la viga daría la apariencia de ser un "muestrario" de los diámetros disponibles en el mercado.
- d) El diámetro de las barras de refuerzo debe ser "consistente" con las dimensiones de la sección transversal, luces e importancia del elemento. Así por ejemplo en una viga de 0.30 x 1.00 m no es recomendable colocar acero corrido o bastones de 1/2" o por el contrario colocar una barra de 3/4" o de 1" en la vigueta de un aligerado.

- e) El número de varillas que se pueden colocar en cada capa debe estar de acuerdo con el ancho de la viga y con el espaciamiento mínimo entre barras (véase el acápite 6.3). Por ejemplo en una viga de 0.15 o 0.20 m de ancho, no deberían colocarse más de dos barras en cada capa. Recuerde que en muchos casos la armadura de los extremos de la viga debe anclar dentro de las columnas y por lo tanto es necesario imaginar la congestión de armaduras que se puede producir en los nudos. La figura a continuación (adaptada de la lectura 6.3) muestra la vista en planta y el corte de un nudo extremo al cual concurren las armaduras de las vigas longitudinales y transversales y las armaduras de la columna. Los autores del artículo enfatizan las ventajas de trabajar con vigas más angostas que la columna y de utilizar una de las dos vigas de un peralte ligeramente menor que la otra (unos 5 cm menor) para evitar la excesiva congestión de armaduras en el nudo.



- f) Por el punto de inflexión debe pasar por lo menos la tercera parte del acero negativo determinado para el apoyo y extenderse más allá de este punto una distancia no menor que d , $12 db$ ni $ln / 16$.
- g) Ningún bastón positivo a negativo, debe tener una longitud menor que su longitud de anclaje a ambos lados de la sección crítica (de máximo momento).
- h) La longitud de los bastones debe aproximarse a múltiplos de 0.10 m, por ejemplo no es "razonable" especificar un bastón de 1.265 m de longitud, en este caso debería especificarse 1.30 m.
- i) La armadura positiva debe consistir en barras corridas y si fueran necesarios bastones adicionales. A los apoyos debe llegar por lo menos la tercera parte del acero positivo necesario en la sección de máximo positivo.
- j) Estas recomendaciones deben modificarse para vigas con responsabilidad sísmica tal como se especifica en el Capítulo 21 de la Norma E.060.

10.10 Vigas con altura (peralte) mayor a 0.90 m

Las recomendaciones que a continuación se presentan, son aplicables a vigas con un peralte mayor a 0.90 m. Para estas vigas el ACI y la Norma Peruana exigen la colocación, adicional al acero principal de tracción, de una cierta cantidad de acero distribuido en el alma (*Ask*) que en inglés se le denomina "skin reinforcement" término que puede traducirse como refuerzo o "armadura superficial".

La armadura superficial debe colocarse lo más cerca posible a las caras del alma de la viga en la zona de tracción, con la finalidad de controlar el agrietamiento por flexión del alma. Sin este refuerzo, el ancho de las grietas en el alma podría ser mayor que el ancho de las grietas a nivel del refuerzo principal de flexión. Esto se muestra en la figura 10-34, en donde, de no existir acero distribuido en el alma, podría suceder que las grietas "B" tengan un ancho mayor que las grietas "A" donde está ubicado el refuerzo principal de flexión.

En muchos casos este refuerzo también ayuda a controlar o distribuir mejor el agrietamiento que se produce por los esfuerzos de tracción, originados por la retracción en vigas restringidas longitudinalmente.

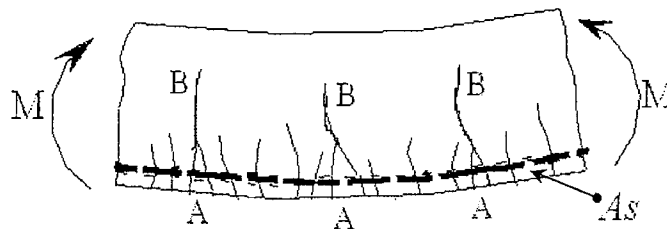


Fig. 10-34 Agrietamiento por flexión en el alma de una viga peraltada.

10.10.1 Exigencias de la Norma Peruana E.060 de 1989 Relacionadas con *Ask*

La Norma Peruana de 1989 (artículo 11.7.2.3) exigía que la armadura mínima superficial repartida en el alma *Ask* no debía ser menor del 10% del acero principal por flexión. La distribución de este acero se muestra en la figura 10-35.

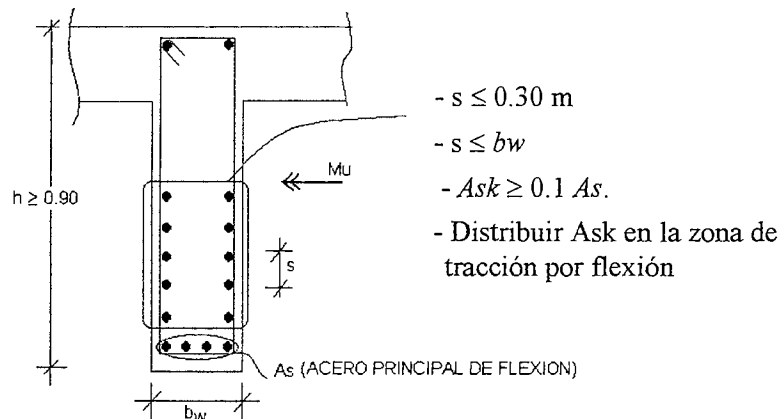


Fig. 10-35 Exigencias de la Norma Peruana de 1989 relativas a *Ask*.

La exigencia de la Norma Peruana provenía del ACI 318-83 y era conceptualmente incorrecta, ya que al fijar *Ask* como una fracción (10%) del acero principal de flexión, resulta que cuanto más peraltada sea la viga, menos acero de flexión será necesario y por lo tanto menor será el área de refuerzo *Ask* exigida y en consecuencia mayor será el riesgo de agrietamiento en el alma.

En ese sentido el ACI a partir de su edición de 1989, modificó los requerimientos de este acero para subsanar la inconsistencia señalada.

10.10.2 Exigencias del ACI 318-02 Relacionadas con Ask

Las disposiciones del Código ACI 318-02 (artículo 10.6.7) se resumen en la figura 10-36 y a partir del ACI del 2005 han sido nuevamente modificadas.

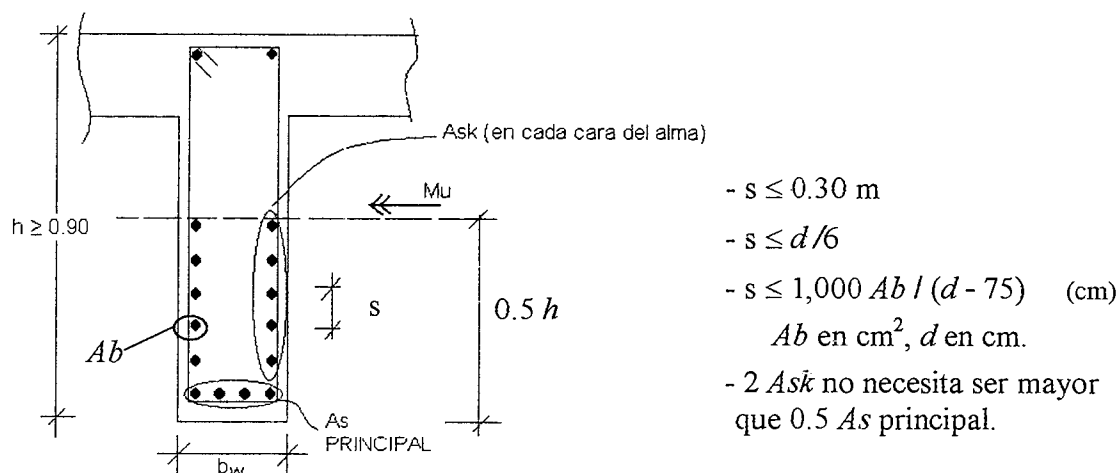


Fig. 10-36 Exigencias del ACI-02 relativas a Ask.

El refuerzo total (dos veces Ask) exigido por el ACI, puede llegar a ser importante, por lo tanto conviene incorporarse en los cálculos de la resistencia a flexión de la sección.

Las vigas de gran peralte o vigas pared, tienen sus propias disposiciones específicas.

10.10.3 Exigencias de la Norma E.060 del 2009 Relacionadas con Ask

Si el peralte h de una viga excede de 0.90 m, debe colocarse armadura superficial longitudinal uniformemente distribuida en ambas caras laterales del alma, en una distancia $0.5 h$ cercana de la armadura principal de tracción por flexión. El espaciamiento de la armadura superficial no excederá del menor de los siguientes valores:

$$s \leq 30 \text{ cm}$$

$$s \leq 38 (2,500 / f_s) - 2.5 C_c$$

$$s \leq 30 (2,500 / f_s)$$

C_c es la menor distancia medida desde la superficie del refuerzo superficial a la cara lateral del elemento y f_s es el esfuerzo en el acero principal de flexión bajo cargas de servicio, que se puede estimar de manera rápida utilizando la formula 13-6 del acápite 13.8.1, o de manera un tanto más precisa utilizando la sección transformada. No se especifica el diámetro mínimo de las barras que conforman Ask, normalmente se usan barras de diámetro 3/8" a 5/8". El refuerzo superficial se puede incluir en el cálculo de la resistencia a flexión de la sección únicamente si se hace un análisis de compatibilidad de deformaciones para determinar los esfuerzos en cada una de las barras colocadas en las caras laterales

10.11 Análisis de Vigas con Refuerzo Distribuido en el Alma

Veremos solamente el análisis de este tipo de vigas, pues derivar ecuaciones específicas para su diseño - dada la gran variedad de configuraciones geométricas de las secciones transversales así como las múltiples posibilidades de distribuciones del acero de refuerzo que se pueden presentar en la realidad - no es práctico. En estos casos hay que acudir a métodos numéricos. En la mayoría de los casos los problemas de diseño se pueden transformar en problemas de análisis, para ello es necesario suponer una cierta distribución tentativa o preliminar del acero para luego verificar mediante el análisis de la sección, si la resistencia es adecuada.

El problema de análisis, cuando no se cuenta con herramientas mas elaboradas, se resuelve por tanteos. Con relación a la figura 10-37 el procedimiento de tanteos consiste en:

- 1) Asumir un valor de "c" (posición del eje neutro).
- 2) Calcular la deformación en cada uno de los aceros (capas), ϵ_{si} y el esfuerzo correspondiente $f_{si} = E_s \epsilon_{si}$. Verificar que $f_{si} \leq f_y$.
- 3) Calcular la compresión total en el concreto (C_c).
- 4) Realizar el equilibrio de la sección $C_c + \sum f'_{si} A_{si} = \sum f_{sj} A_{sj}$ donde A_{si} son las barras en compresión y A_{sj} las barras de tracción.
- 5) Si no se logra el equilibrio regresar al primer paso e intentar con un nuevo valor de la posición del eje neutro.

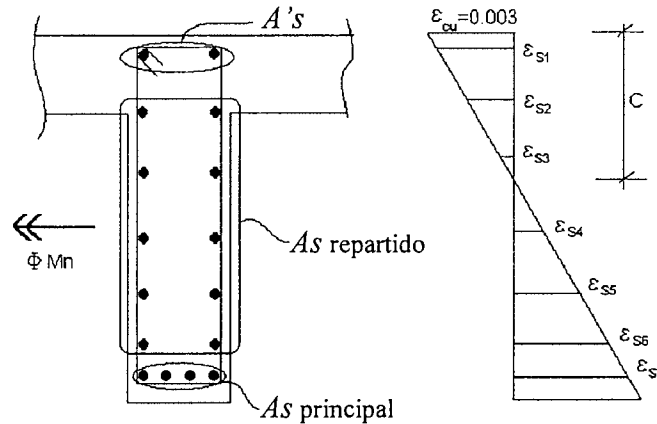


Fig. 10-37 Análisis de una sección con refuerzo distribuido en el alma.

10.12 Cuantía Balanceada en Vigas con Refuerzo en el Alma

Luego de lograr el equilibrio de la sección, tal como se mencionó en el acápite anterior, será necesario verificar que la sección es subreforzada (falla por tracción). Es claro que si el análisis demuestra que el acero mas alejado del eje neutro no llega a la fluencia, se trata de una sección sobreforzada. En caso contrario deberá verificarse, de acuerdo a la Norma, que $A_s \leq 0.75 A_{sb}$. Este límite deberá verificarse en el acero de tracción mas alejado del eje neutro (el A_s principal de la figura 10-37) es decir en la capa de acero más baja en el caso de flexión positiva, y en el acero superior más alto si se tratara de flexión negativa. Para ello será necesario calcular la cantidad de acero A_{sb} que produce la falla balanceada de la sección. Cuando existe acero repartido en el alma, el procedimiento a seguir es:

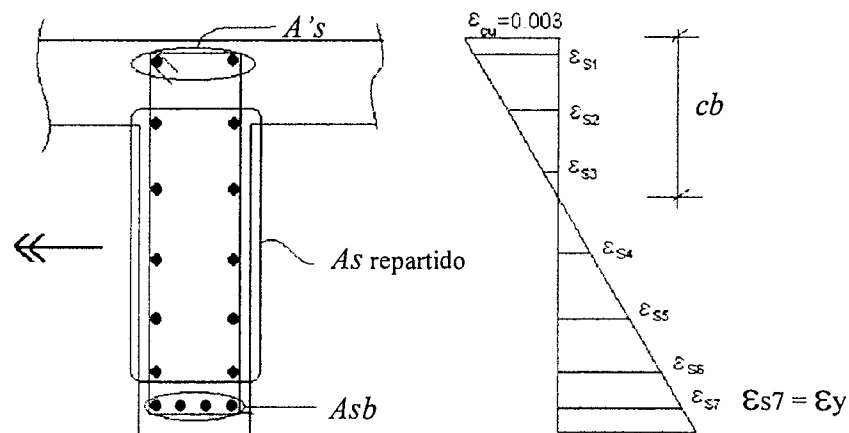


Fig. 10-38 Condición de falla balanceada en una sección con acero en el alma.

- Con referencia a la figura 10-38, construida para el caso de flexión positiva, el acero en compresión $A's$ y el acero repartido en el alma son conocidos. La incógnita es Asb . Similar razonamiento es válido para el caso de flexión negativa.

- Determinar la posición del eje neutro en la falla balanceada:

$$cb = 0.588 d \quad (\text{válido para } f_y = 4,200 \text{ y } \epsilon_{cu} = 0.003)$$

$$ab = 0.588 \beta_1 d$$

En este caso d deberá medirse desde el borde en compresión de la sección, al centroide del acero en tracción más alejado del eje neutro.

- Para la posición del eje neutro en la falla balanceada - cb - calcular las deformaciones y esfuerzos en las distintas capas del acero de refuerzo.
- Utilizar la ecuación de equilibrio de la sección para determinar Asb

$$C_{cb} + \sum f'_{sbi} A_{si} = Asb f_y + \sum f_{sbj} A_{sj}$$

↓
↘
↘

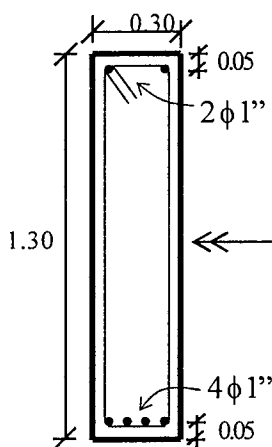
Compresión en el concreto en la Falla Balanceada Barras en Compresión Barras en Tracción

- Finalmente verificar que $As \leq 0.75 Asb$ donde, tal como se mencionó líneas arriba, As es el acero más alejado del eje neutro.

Con las nuevas disposiciones del ACI-08 (véase el Capítulo 17) el cálculo del acero que produce la falla balanceada, es innecesario. Para que la sección califique como controlada por tracción ($\phi = 0.9$), bastará verificar que la deformación (ϵ_t) en el acero de tracción más alejado del eje neutro (asociado a dt) sea mayor o igual a 0.005.

10.13 Influencia del Acero Repartido en el Alma en la Resistencia a Flexión

En la figura a continuación se muestra la sección de momento positivo de una viga continua de varios tramos que fue diseñada por resistencia. Por ser una viga con más de 0.90 m de peralte, se requiere colocar acero repartido en el alma. Adicionalmente se calculará el aporte a la resistencia en flexión de este acero repartido. Para ello primero calculemos la resistencia de la sección sin la presencia de acero repartido en el alma tal como se indica a continuación:



$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$As_{min} = 0.24\% \times 30 \times 125 \approx 9 \text{ cm}^2$$

Considerando solo el acero en tracción ($4\phi 1''$) la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 90.2 \text{ ton-m} \quad c = 18.82 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.15 \quad \epsilon_s \approx 8.1 \epsilon_y$$

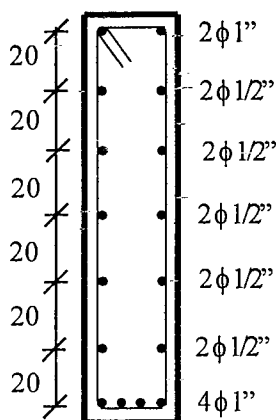
Considerando el aporte del acero en compresión ($A's = 2\phi 1''$) la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 92.6 \text{ ton-m} \quad c = 11.32 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.091 \quad \epsilon_s \approx 14.4 \epsilon_y$$

$$\epsilon'_s \approx -0.8 \epsilon_y$$

El incremento en la resistencia por la presencia del acero en compresión es de tan solo 2.7%.

El diseño del acero repartido en el alma se hará de acuerdo a la Norma ACI 318-02 presentado en la sección 10.10.2.



$$s \leq 30 \text{ cm.}$$

$$s \leq d/6 = 125 / 6 \approx 21 \text{ cm}$$

$$s \leq \frac{1000 Ab}{(d - 75)}$$

Para acero de 1/2" repartido $Ab = 1.29 \text{ cm}^2$

$$s \leq \frac{1000 \times 1.29}{(125 - 75)} \approx 26 \text{ cm}$$

Para acero de 3/8" repartido $Ab = 0.71 \text{ cm}^2$

$$s \leq \frac{1000 \times 0.71}{(125 - 75)} \approx 14 \text{ cm}$$

Seleccionamos 1/2" @ 0.20 m. en cada cara

Para la distribución del acero repartido mostrada en la figura anterior se tiene:

$$Ask = 1.29 \times 5 = 6.45 \text{ cm}^2 \text{ (en cada cara del alma)}$$

$$2 Ask = 2 \times 6.45 = 12.9 > 0.5 As = 10.2 \text{ cm}^2$$

Si bien el ACI indica que $2 Ask$ no necesita ser mayor que el 50% del acero principal en tracción, la condición que gobierna el espaciamiento es $d/6$, en consecuencia el espaciamiento no puede aumentarse.

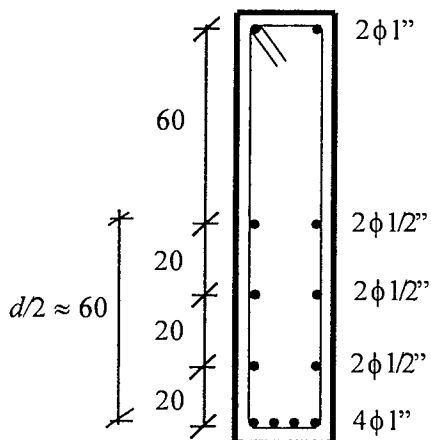
Utilizando la metodología propuesta en 10.10.2, la resistencia de la sección considerando el acero principal en tracción y compresión así como el refuerzo repartido en el alma es:

$$\phi Mn \approx 117.8 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad c = 19.82 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 7.6 \epsilon_y \quad \epsilon'_s \approx -1.1 \epsilon_y$$

El valor calculado representa un 27% de incremento en la resistencia, en consecuencia podría reducirse el acero principal de flexión (los 4 - 1"). En todo caso, si no se realiza esta reducción, es necesario modificar la fuerza cortante de diseño (diseño por capacidad) para tener en cuenta la sobrerresistencia en flexión que podría inducir una falla por cortante.

Es interesante aprovechar este ejemplo para calcular el peralte efectivo de la sección, de acuerdo a la definición clásica de peralte efectivo " d ". Cuando la sección alcanza su resistencia nominal ($c = 19.82 \text{ cm}$) la resultante de las fuerzas de tracción en el refuerzo está ubicada a 1.06 m aproximadamente ($0.82 h$) del borde superior, en consecuencia este es el valor del peralte efectivo para esta sección.

Nótese que en este caso, por ser una viga continua, se ha colocado acero repartido a todo lo alto del alma. Si fuera, por ejemplo, una viga simplemente apoyada, el acero repartido podría colocarse hasta una altura equivalente a $d/2$ medida desde el acero de tracción. En este caso la distribución del acero sería:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n \approx 114.6 \text{ ton-m}$$

$$c = 16.58 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 9.3 \epsilon_y$$

$$\epsilon'_s \approx -1.0 \epsilon_y$$

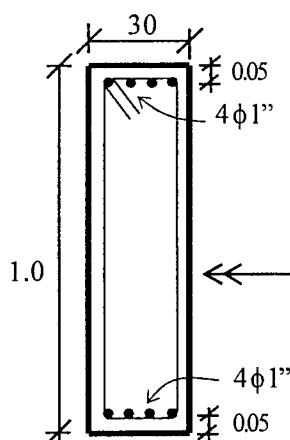
La capacidad de la sección aumenta en 24%

Para la distribución del refuerzo de la figura anterior, el peralte efectivo, calculado cuando la sección alcanza su resistencia nominal ($c = 16.58 \text{ cm}$), resulta ser 1.14 m aproximadamente (0.88 h).

10.14 Comparación entre el Acero Concentrado y el Acero Repartido

La idea de este acápite es la de comparar la resistencia de una viga con un armado del tipo "clásico" - es decir aquel en el cual tratamos de colocar los refuerzos de acero lo más cerca de los bordes superior e inferior para tratar de ganar el mayor brazo interno de palanca posible - con un armado no tan convencional que consiste en utilizar la misma cantidad de acero pero distribuida a lo alto del alma. Para comparar ambas situaciones utilizaremos algunos ejemplos simples.

- a) Primer caso. Se trata de una sección rectangular con igual cantidad de acero en tracción y compresión. Esta situación es común en la zona de momentos negativos de vigas que soportan sismo y con poca carga vertical, en las cuales debido a la inversión de los signos de los momentos flectores, resultan cantidades similares de acero superior e inferior.



$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

Considerando solo el acero en tracción (4 - 1'') la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n = 67.1 \text{ ton-m}$$

$$c = 18.82 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.20 \quad \epsilon_s \approx 5.8 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/18.82 \approx 0.16 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

Considerando el aporte del acero en compresión ($A'_s = 4 - 1''$) la resistencia de la sección es:

$$\phi M_n = 69.9 \text{ ton-m}$$

$$c = 8.24 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.087 \quad \epsilon_s \approx 15.0 \epsilon_y \quad \epsilon'_s \approx -0.56 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/8.24 \approx 0.36 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

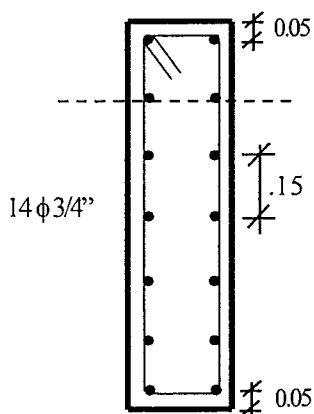
El incremento en la resistencia por la presencia del acero en compresión es de tan solo un 4%.

Una forma rápida de estimar la resistencia de una sección peraltada con igual cantidad de acero en tracción y compresión, consiste en tomar momentos del acero en tracción con respecto al acero en compresión. Esto presupone que el centroide del bloque de compresiones coincide aproximadamente con el del acero en compresión. Para el caso anterior se tendría:

$$\phi Mn \approx 0.9 \times (20.4 \times 4,200) \times (d - d') = 69.4 \text{ ton-m}$$

Se observa que la precisión del método propuesto es razonable y puede servir para verificaciones rápidas.

Ahora transformemos las ocho barras de 1" ($A_s = 40.8 \text{ cm}^2$) concentrados en los extremos de la viga, por su equivalente distribuido a lo alto del alma. La equivalencia más cercana consiste en utilizar 14 $\phi 3/4$ " ($A_s \approx 39.8 \text{ cm}^2$) espaciados cada 0.15 m, tal como se indica en la figura a continuación:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

$$c = 20.67 \text{ cm} \quad c/dt = 20.67/95 \approx 0.22$$

$$\epsilon_s \approx 5.1 \epsilon_y \quad \epsilon'_s \approx -1.1 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/20.67 \approx 0.145 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

En consecuencia, en este caso particular, el utilizar acero repartido en el alma ha reducido la capacidad de la sección, de 70 a 61 ton-m, es decir un 13% de reducción. Esta reducción ciertamente no es dramática, es más, si se utiliza para la comparación la capacidad de la sección con armadura convencional y sin considerar el aporte del acero en compresión, la reducción sería de 67 a 61 ton-m, es decir un 9% de reducción. Sin embargo la curvatura última sí ha experimentado una reducción importante y en consecuencia la ductilidad de la sección, la curvatura última ha cambiado de 0.36×10^{-3} a $0.145 \times 10^{-3} \text{ 1/cm}$ lo que representa una reducción del 60%.

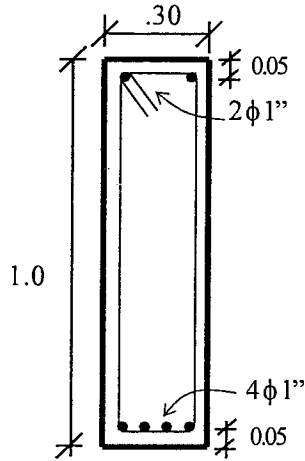
Para esta distribución del refuerzo, el peralte efectivo, calculado cuando la sección alcanza su resistencia nominal ($c = 20.67 \text{ cm}$), resulta ser 0.65 m aproximadamente ($0.65 h$).

Algunos investigadores, entre ellos Nigel Priestley (ver lecturas 10.6 y 10.7), en vigas con responsabilidad sísmica, abogan por el uso de refuerzo distribuido en el alma en lugar del armado convencional. El refuerzo distribuido en el alma en este tipo de vigas tiene las siguientes ventajas:

- No hay diferencias importantes entre las resistencias del armado clásico y del armado con acero distribuido.
- Se reduce la congestión del acero en los nudos.
- Permite una mejor colocación y compactación del concreto.
- Mejora el comportamiento del nudo frente a fuerzas cortantes, reduciendo así la cantidad de refuerzo transversal que suele colocarse en los nudos.
- Mejora el comportamiento de la zona de unión viga columna frente a la posibilidad de una grieta vertical que genera deslizamiento por cortante.
- Mejora la resistencia de la viga para fuerzas cortantes ya que hay mayor cantidad de concreto comprimido resistiendo parte de la fuerza cortante. Esto es fácil de

comprobar en el ejemplo anterior si se comparan las profundidades de los ejes neutros para el caso de refuerzo convencional y refuerzo distribuido.

- Se reduce la sobrerresistencia en flexión asociada al endurecimiento por deformación del acero de refuerzo.
- b) Segundo caso. Se trata de la misma sección rectangular analizada en el primer caso, con la diferencia de que se evalúa la resistencia en la zona de momentos positivos donde se tienen únicamente 2 - 1" en compresión.



Considerando el acero en tracción y el de compresión, la resistencia de la sección es:

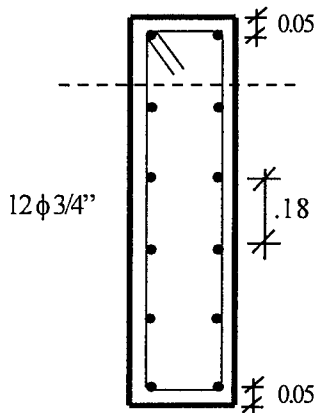
$$\phi Mn \approx 69.5 \text{ ton-m}$$

$$c = 11.32 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.12$$

$$\epsilon_s \approx 10.6 \epsilon_y \quad \epsilon'_s \approx -0.8 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/11.32 \approx 0.27 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

Ahora transformemos los 6 $\phi 1''$ ($A_{st} = 30.6 \text{ cm}^2$) concentrados en los extremos de la viga, por su equivalente distribuido a lo alto del alma. Una posibilidad consiste en utilizar 12 $\phi 3/4''$ ($A_{st} \approx 34.1 \text{ cm}^2$) espaciados cada 0.18 m, tal como se indica a continuación:



Con esta distribución del acero la resistencia de la sección es:

$$\phi Mn \approx 53.8 \text{ ton-m}$$

$$c = 17.87 \text{ cm} \quad c/d = 17.87/95 \approx 0.19$$

$$\epsilon_s \approx 6.2 \epsilon_y \quad \epsilon'_s \approx -1.0 \epsilon_y$$

$$\phi u = 0.003/17.87 \approx 0.17 \times 10^{-3} \text{ 1/cm (curvatura última)}$$

$$\text{peralte efectivo } d \approx 0.64 \text{ m}$$

En consecuencia, en este caso particular, el utilizar acero repartido en el alma ha reducido la capacidad de la sección, de 69.5 a 53.8 ton-m, es decir un 23% de reducción. A diferencia del caso anterior, esta reducción sí podría ser importante. Nuevamente la curvatura última ha experimentado una reducción importante y en consecuencia la ductilidad de la sección.

10.15 Diseño de Secciones No Rectangulares

Las fórmulas que se han deducido para el análisis y/o diseño de secciones sometidas a flexión simple, corresponden a secciones con una geometría simple del bloque comprimido, tales como rectangulares, secciones T, secciones doble T.

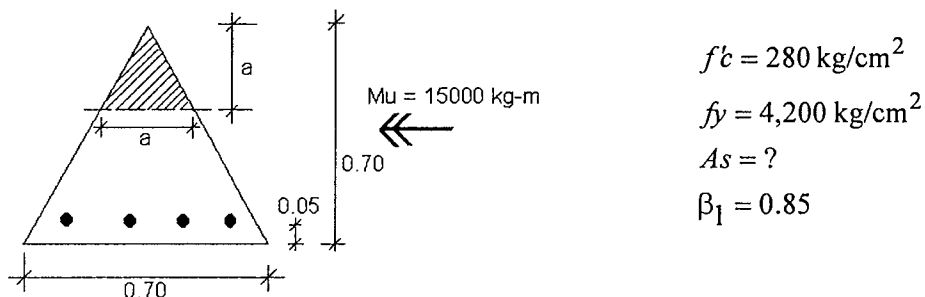
Cuando la geometría del bloque comprimido no es rectangular, normalmente, no es simple derivar expresiones generales para el análisis y/o diseño de tales secciones. En muchos casos, ni siquiera es práctico tratar de derivar estas ecuaciones ya que podría tratarse de unas pocas secciones ó elementos aislados dentro de una estructura en la cual predominan las secciones rectangulares o T.

En la lectura 10.3 se puede encontrar una extensa discusión sobre la validez de utilizar el bloque equivalente de compresiones, aún en los casos en los cuales la zona comprimida no tiene una geometría rectangular.

Para los casos en los cuales el bloque de compresiones no es rectangular o no puede descomponerse en una suma de rectángulos, existen dos posibilidades:

- Tratar de derivar ecuaciones para el diseño en las cuales normalmente se establece como incógnita la profundidad del eje neutro. Esto será posible en los casos en los cuales la geometría del bloque comprimido sea relativamente simple.
- Utilizar procesos numéricos o de tanteos. Esta, por lo general, será la opción más práctica.

Veamos las dos posibilidades mencionadas mediante un ejemplo:



- En este caso es fácil plantear ecuaciones para el diseño de la sección, ya que la geometría del bloque comprimido es triangular. Las expresiones para el brazo interno de palanca jd y para la resultante de compresiones en el concreto Cc son:

$$jd = d - \frac{2a}{3} \quad d = 65$$

$$Cc = 0.85 f'_c \frac{a^2}{2} = 119 a^2$$

- Asumimos que el acero de tracción fluye.

$$T = As fy$$

$$\text{Equilibrio: } Cc = T \Rightarrow 119 a^2 = As fy$$

- Equilibrio de momentos (equivalencia estática)

$$\frac{Mu}{\phi} = Mn = As fy \left(d - \frac{2a}{3} \right)$$

$$\frac{Mu}{\phi} = 119 a^2 \left(d - \frac{2a}{3} \right)$$

$$\frac{15 \times 10^5}{0.9} = 119 a^2 \left(65 - \frac{2a}{3} \right)$$

$$79.33 a^3 - 7735 a^2 + 1.667 \times 10^6 = 0$$

- De las tres raíces de esta ecuación, la solución es:

$$a = 16.06 \text{ cm} \quad c = \frac{16.06}{0.85} = 18.89 \text{ cm}$$

$$Cc = 119 (16.06)^2 = 30,692 \text{ kg} = As fy$$

$$As = 7.31 \text{ cm}^2 \quad (4\phi 5/8")$$

- Verificación de la capacidad resistente con los 4 fierros de 5/8" seleccionados:

$$As fy = Cc \quad 8.0 fy = 119 a^2 \quad a = 16.8 \text{ cm} \quad c = 19.77 \text{ cm}$$

$$\phi Mn = 0.9(8.0)(4,200) \left[65 - \frac{2 \times 16.8}{3} \right] \approx 16,270 \text{ kgm}$$

- Verificación de la fluencia del acero

$$\frac{c_b}{d} = 0.588 \quad c_b = 38.22 > 19.77 \text{ cm} \quad \text{ok}$$

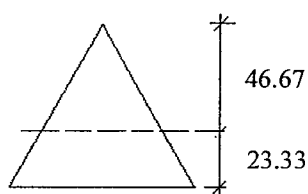
- Verificación del límite de la Norma $As \leq 0.75 Asb$ (solo por curiosidad ya que es evidente que se trata de una sección subreforzada).

$$c_b = 0.588(65) = 38.22 \quad ab = \beta_1 c_b \approx 32.5 \text{ cm}$$

$$Cc_b = 0.85(280) \left(\frac{32.5}{2} \right)^2 = 125,694 \text{ kg} = Asb fy$$

$$Asb \approx 30 \text{ cm}^2 \quad As \text{ max} = 0.75 \times 30 = 22.5 \text{ cm}^2$$

- Verificación del acero mínimo:



$$M_{cr}^+ = 9,570 \text{ kg-m}$$

$$I_g = \frac{(70)(70)^3}{36} \approx 667,000 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr}^+ = \frac{f_r I_g}{y_b} \quad f_r = 2\sqrt{f'_c}$$

$$f'_c = 280$$

$$1.2 M_{cr}^+ = 11,485 \text{ kg-m} < 15,000 \text{ (momento de diseño) ok.}$$

- b) *Solución utilizando un proceso iterativo.* En este caso utilizaremos un proceso de tanteos en el cual la variable es el brazo de palanca interno jd .

Ecuaciones para las iteraciones :

$$jd = d - \frac{2a}{3} \quad (1) \quad As = \frac{Mu}{\phi fy (jd)} \quad (2) \quad Cc = As fy \quad (3)$$

Estimar jd

$$\rightarrow \text{Primer Estimado } jd = 0.9d$$

$$jd = 0.9 \times 65 = 58.5 \quad \text{de (2)} \quad As = 6.78 \text{ cm}^2$$

$$\text{de (3)} \quad Cc = As fy = 119 a^2 \rightarrow a = 15.47$$

$$\rightarrow \text{Segundo Estimado } jd = d - \frac{2a}{3} = 65 - \frac{2(15.47)}{3} = 54.68 \text{ cm}$$

$$\text{de (2)} \quad As = 7.26 \text{ cm}^2$$

$$\text{de (3)} \quad Cc = As fy = 119 a^2 \rightarrow a = 16.0 \text{ cm}$$

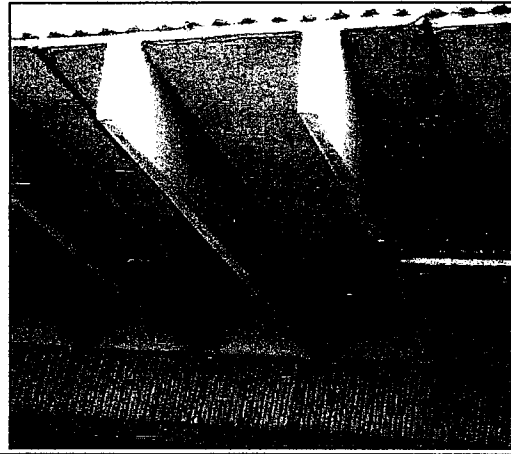
$$\rightarrow \text{Tercer Estimado } jd = 65 - \frac{2(16)}{3} = 54.33 \text{ cm}$$

$$\text{de (2)} \quad As = 7.3 \text{ cm}^2 \leftarrow \text{Solución}$$

Se puede apreciar que el proceso converge rápidamente, a pesar que el primer estimado fue pobre, un mejor estimado inicial hubiera sido $jd = 0.8 d$ por la forma triangular del bloque de compresiones.

CAPITULO 11

Análisis y Diseño de Vigas T Aligerados



11.1 Introducción

Con excepción de los sistemas prefabricados, los entresijos de una estructura o edificio de concreto armado, casi siempre son monolíticos. El vaciado del concreto se suele realizar en una sola operación, desde la parte inferior de las vigas de mayor peralte hasta la parte superior de la losa de piso. Los estribos de las vigas así como el refuerzo negativo de las mismas, penetran dentro de la losa de piso. Es claro entonces, que una porción de la losa actuará conjuntamente con la parte superior de la viga ayudando a la viga a resistir las compresiones longitudinales originadas por la flexión. La sección transversal de la viga que resulta de este trabajo monolítico viga – losa, tiene forma de sección T. La figura 11-1 ilustra esta situación.

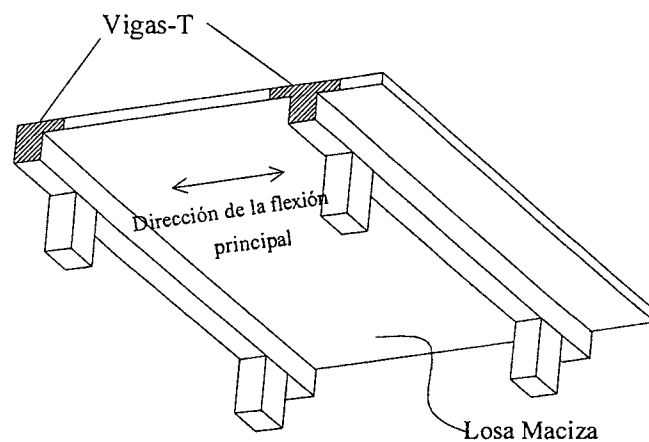


Fig. 11-1 Vigas T en una losa maciza armada en una dirección.

La figura 11-2 muestra un sistema de piso más complejo que el anterior, está compuesto por vigas principales, vigas secundarias que se apoyan sobre las principales y una losa de piso que se apoya básicamente sobre las vigas secundarias. En este sistema de piso todas las vigas, principales, secundarias y de borde trabajarán como T. El trabajo de la losa será bastante complejo, ya que, además de resistir la flexión propia originada por las cargas que obran sobre ella, tendrá que resistir las compresiones y tracciones provenientes de las vigas por efecto del monolitismo viga - losa.

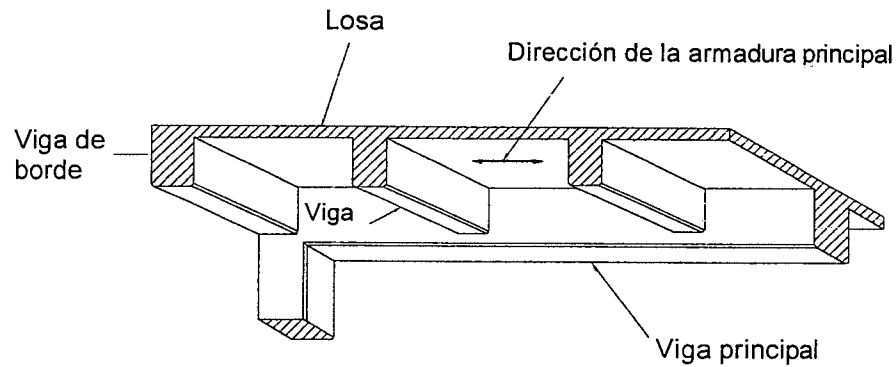


Fig. 11-2 Sistema de piso con vigas T.

11.2 Esfuerzos en el Encuentro Ala – Alma.

La figura 11-3 muestra una viga simplemente apoyada monolítica con la losa conformando una sección T. Se muestra la supuesta distribución de los esfuerzos longitudinales de compresión en el ala de la viga. Los esfuerzos no son uniformes, la compresión longitudinal en el ala es máxima en la zona del encuentro con el alma y disminuye al alejarse del alma. A este fenómeno se le denomina “shear lag” o “retraso del cortante” y origina que las compresiones en el ala no sean uniformes (constantes). Adicionalmente, a lo largo del eje de la viga la distribución de compresiones por flexión en el ala, varía.

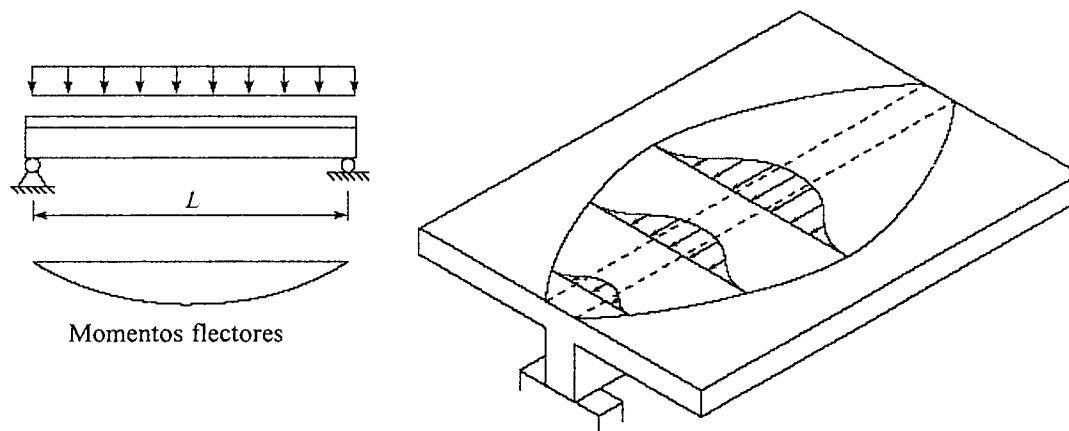


Fig. 11-3 Distribución de los esfuerzos de compresión en el ala.

Para que exista un trabajo del alma y del ala como una unidad, debe haber monolitismo entre el ala y alma o una unión efectiva capaz de transferir la fuerza cortante horizontal que se produce en el encuentro del ala con el alma. El corte horizontal o flujo de corte se requiere para mantener el equilibrio horizontal del ala. La figura 11-4 muestra las fuerzas que existen en la unión del alma con el ala.

El corte horizontal en el ala origina esfuerzos de tracción y de compresión transversales al ala (perpendiculares al alma) estos esfuerzos pueden originar agrietamiento del ala. Las normas no dan recomendaciones o reglas para diseñar el refuerzo transversal en el ala que controle este agrietamiento. Cuando el ala está en tracción la cantidad de acero transversal necesaria para controlar esto, puede ser importante.

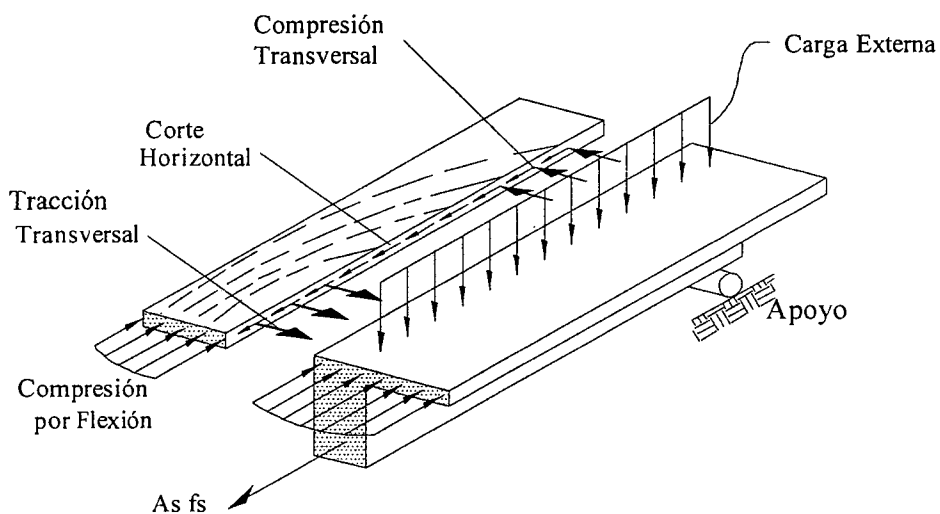


Fig. 11-4 Fuerzas en el encuentro ala – alma.

11.3 Ancho Efectivo del Ala - b_e - en Vigas T

Por simplicidad el código ACI, a partir de estudios teóricos sobre el comportamiento elástico (teoría de la elasticidad) define un ancho efectivo del ala " b_e " en el cual se puede suponer un esfuerzo uniforme de las compresiones originadas por la flexión es decir un ancho en el cual la resultante de compresiones ($f_c \max$) x ($b_e h_f$) es la misma que se desarrolla en el ancho real. La figura 11-5 ilustra esta simplificación.

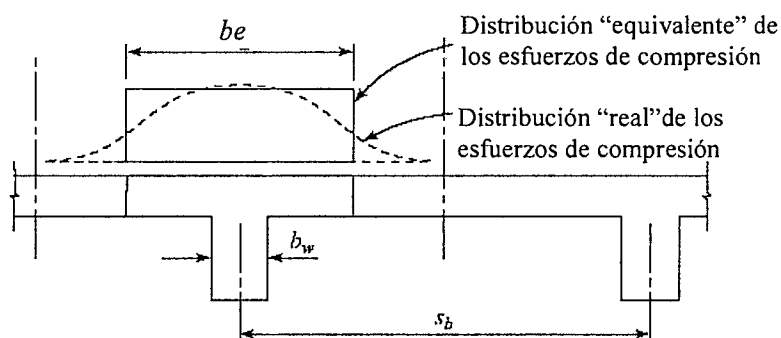


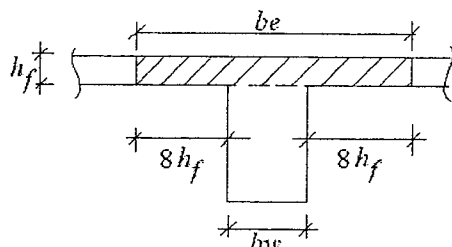
Fig. 11-5 Distribución equivalente de los esfuerzos de compresión en el ala

El ancho efectivo - b_e - es valido para la zona de momentos positivo de la viga en la cual se producen compresiones en el ala. En la zona de momentos negativos de la viga, el ala está en tracción con la consiguiente posibilidad de fisuración y por lo tanto el uso de un ancho efectivo en esas zonas es discutible. Los estudios teóricos demuestran que el ancho efectivo está influenciado por:

- Tipo de carga (concentrada, distribuida).
- Tipo de viga (continua o simplemente apoyada).
- Tipos de apoyo.
- Espaciamiento entre las vigas paralelas.
- Rigidez relativa viga – losa.

La Norma E.060 cubre lo relativo a vigas "T" en los artículos 8.10 y 9.9.5. A continuación se resumen las principales disposiciones de la Norma con relación al ancho efectivo que debe usarse en el diseño.

a) Vigas Interiores

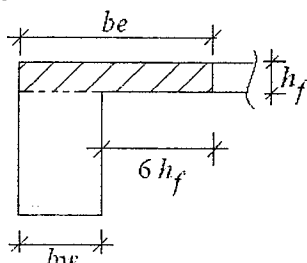


$$-be \leq l_{\text{viga}}/4$$

$$-be \leq bw + 16h_f$$

- be no debe de exceder de la mitad de la distancia a la siguiente viga paralela

b) Vigas de Borde o Exteriores

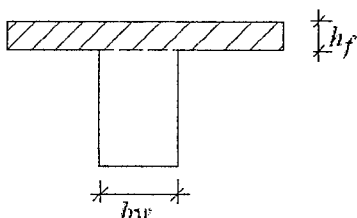


$$-be \leq bw + (l_{\text{viga}}/12)$$

$$-be \leq bw + 6h_f$$

- be no debe de exceder de la mitad de la distancia a la siguiente viga paralela

c) Vigas T Aisladas. En las cuales se utilice la sección T para proporcionar, con el ala, un área adicional de concreto en compresión.



$$-h_f \geq bw/2$$

$$-be \leq 4bw$$

El Eurocódigo fija el ancho efectivo en función de la distancia (l_0) entre los puntos de momento cero (puntos de inflexión) del elemento, las expresiones que proponen son:

Para vigas interiores: $be = bw + 0.1 (s_1 + s_2) + 0.2 l_0 \leq bw + 0.4 l_0$

Para vigas exteriores: $be = bw + 0.1 s_1 + 0.1 l_0 \leq bw + 0.2 l_0$

En las formulas anteriores, s_1 y s_2 son los espaciamento libres a la izquierda y a la derecha entre las vigas paralelas del sistema de piso. Permite estimar la distancia entre puntos de momento cero (l_0) como el 70% de la luz del tramo para vigas continuas en ambos extremos o como el 85% para vigas continuas en un solo extremo.

Finalmente es necesario recalcar que el ancho efectivo varía a lo largo del eje de la viga. Este ancho también puede variar en función del grado o estado de fisuración del elemento y por lo tanto puede ser distinto en condiciones de servicio y en el estado límite último de rotura o agotamiento del elemento.

11.4 Análisis de Vigas T

La figura 11-6 muestra la elevación de una viga continua monolítica con la losa maciza de piso. Se indica el posible estado de agrietamiento tanto en las zonas de momento positivo como en la de negativo. Se indica además las secciones transversales correspondientes a las mencionadas zonas.

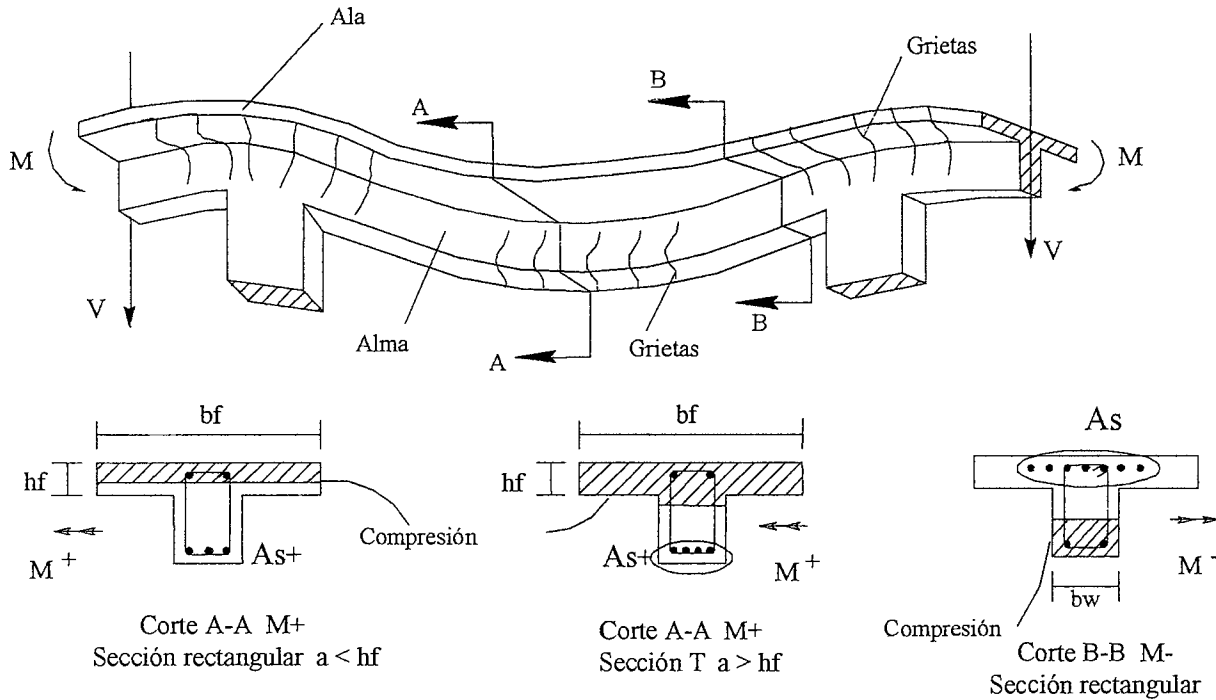
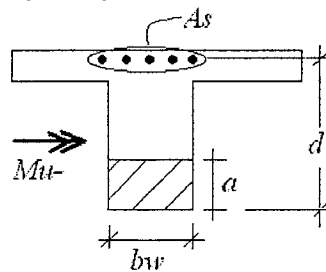


Fig. 11-6 Regiones de momento positivo y negativo en una viga T

Analicemos las distintas formas o posibilidades de trabajo de una viga T en las zonas de momento positivo y negativo.

11.4.1 Zonas de Momento Negativo – Ala de la T en Tracción

En estas zonas, correspondientes al corte B-B de la figura 11-6, el ala está en tracción, por lo tanto estas secciones se analizan y diseñan como rectangulares con $b = b_w$. La figura a continuación muestra las principales características de las secciones solicitadas por momentos negativos.



11.4.2 Zonas de Momento Positivo – Ala de la T en Compresión

Cuando el ala está en compresión en las zonas de momento positivo (corte A-A en la figura 11-6) existen dos posibilidades dependiendo de la profundidad del bloque equivalente de compresiones. Las dos posibilidades o casos son:

- **Caso 1** ($a \leq hf$) - bloque de compresiones en el espesor del ala. Esta situación se ilustra en la figura 11-7. Es claro que en este caso la sección se analiza y diseña como una rectangular con $b = bf$.

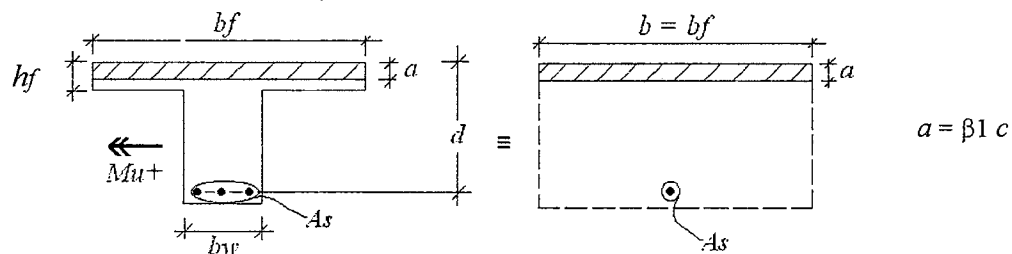


Fig. 11-7 Bloque de compresiones menor que el espesor del ala

- **Caso 2** ($a > hf$) - bloque de compresiones en el alma. Esta situación se ilustra en la figura 11-8. Por simplicidad la resistencia de la sección se puede obtener por superposición, es decir como la suma de la resistencia del ala y del alma.

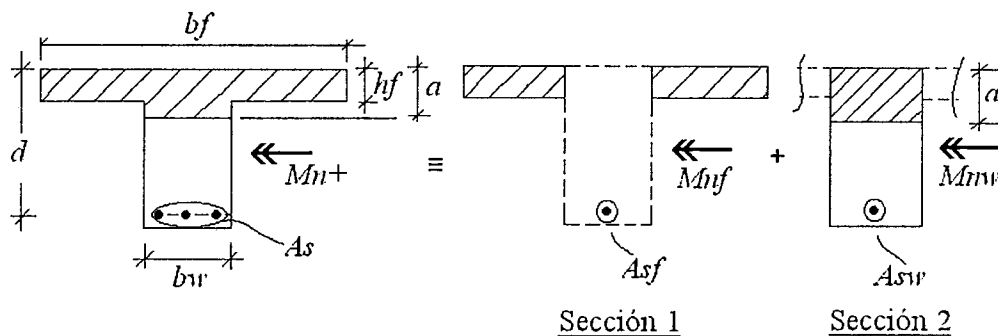


Fig. 11-8 Altura del bloque de compresiones mayor que el espesor del ala

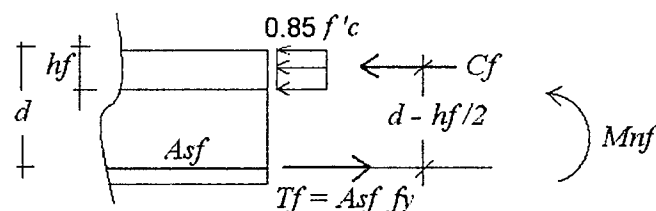
Con relación a la figura 11-8, deberá cumplirse:

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} \Rightarrow A_{sw} = A_s - A_{sf} \quad (11-1)$$

$$M_n = M_{nf} + M_{nw} \quad (11-2)$$

Calculemos las resistencias de la Sección 1 y 2 de la figura 11-8 para luego calcular la resistencia total como la suma de ambas mediante la ecuación 11-2.

Sección 1 – Resistencia del Ala: A_{sf} es el área de acero en tracción que equilibra las compresiones en el ala, para este análisis el ala se define como $bf - bw$.

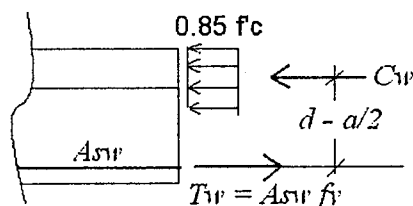


$$C_f = 0.85 f'_c (bf - bw) hf$$

$$A_{sf} f_y = C_f \Rightarrow A_{sf} = \frac{0.85 f'_c}{f_y} (bf - bw) hf \quad (11-3)$$

$$M_{nf} = A_{sf} f_y \left(d - \frac{hf}{2} \right) \quad (11-4)$$

Sección 2 – Resistencia del Alma



$$A_{sw} = A_s - A_{sf} \quad C_w = 0.85 f'_c bw a$$

$$a = \frac{A_{sw} f_y}{0.85 f'_c bw} \quad (11-5)$$

$$M_{nw} = A_{sw} f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (11-6)$$

De acuerdo a la ecuación 11-2, la resistencia de la sección será la suma de las resistencias del ala y del alma:

$$Mn = 0.85 f'_c (bf - bw) hf \left(d - \frac{hf}{2} \right) + 0.85 f'_c bw a \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (11-7)$$

$$Mn = \underline{Asf fy \left(d - \frac{hf}{2} \right) + Asw fy \left(d - \frac{a}{2} \right)} \quad (11-8)$$

Donde Asf , que representa la cantidad de acero en tracción necesaria para equilibrar las compresiones del concreto del ala, viene dada por 11-3 y la profundidad del bloque de compresiones - a - por la ecuación 11-5.

Finalmente es necesario verificar la fluencia del acero total As en tracción, lo cual se puede hacer utilizando la compatibilidad de deformaciones o en su defecto verificando que (acápite 10.5.3):

Si $\frac{c}{d} < \frac{c_b}{d}$ entonces As fluye

Para $fy = 4,200$ $\frac{c}{d} < 0.588$ ó $\frac{a}{d} < 0.588 \beta_1$

Donde $a = \frac{Asw fy}{0.85 f'_c bw}$

11.5 Cuantía Balanceada en Secciones T (Momento Positivo)

En el acápite 10.7 se presentó la metodología para el cálculo del área de acero que produce la falla balanceada de una sección. Apliquemos estas ideas a una sección T como la mostrada en la figura 11-9.

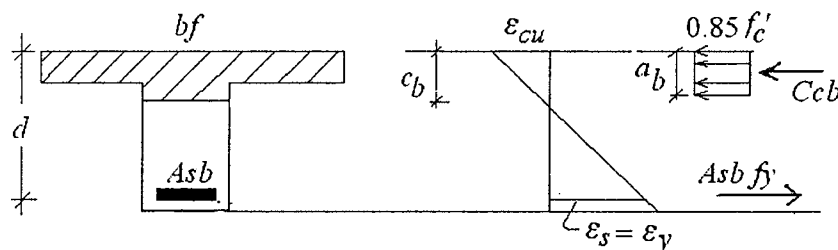


Fig. 11-9 Falla balanceada en una sección T.

$$c_b = \left(\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \right) d \quad c_b = 0.588 d \quad \text{para} \begin{cases} fy = 4,200 \\ \epsilon_{cu} = 0.003 \end{cases}$$

$$a_b = \beta_1 c_b \quad a_b = 0.588 \beta_1 d \quad \text{para} \begin{cases} fy = 4,200 \\ \epsilon_{cu} = 0.003 \end{cases}$$

Supongamos que la profundidad del bloque de compresiones en la falla balanceada (ab) es mayor que el espesor del ala. Con el valor de ab se calcula la compresión en el concreto en la falla balanceada - Ccb -, la cual para una viga T con $ab > hf$ será:

$$Ccb = 0.85 f'_c [(bf - bw) hf + a_b bw]$$

$$Ccb = A_{sb}^T fy \quad \text{equilibrio}$$

$$A_{sb}^T = \frac{0.85 f'_c}{fy} [(bf - bw) hf + a_b bw] \quad (11-9)$$

La Norma limita la cantidad máxima de acero en tracción de tal modo de garantizar una falla subreforzada, es decir al 75% del valor calculado con la ecuación 11-9:

$$A_s \max = 0.75 A_{sb}^T$$

Nótese nuevamente (ver sección 10.7) que el procedimiento propuesto para calcular A_{sb} en vigas T, se puede adaptar para cualquier sección con la condición de que el plano de carga sea un eje de simetría de la sección, el procedimiento consiste en:

- Calcular la posición del eje neutro en la falla balanceada cb
- Calcular, si hubiera acero en compresión, f'_{sb}
- Determinar el área comprimida de concreto en la falla balanceada A_{cb}
- Calcular A_{sb} a través del equilibrio de fuerzas horizontales:

$$A_{sb} f_y = 0.85 f'_c A_{cb} + A'_s f'_{sb}$$

La ecuación 11-9 se puede transformar para llegar a la expresión que suele presentarse en algunos libros de texto, de la siguiente manera:

$$A_{sb}^T = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left[(bf - bw) h_f + a_b bw \right] \quad (11-9)$$

$$a_b = \beta_1 d \left(\frac{6,000}{6,000 + f_y} \right) \rightarrow \begin{cases} \epsilon_{cu} = 0.003 \\ E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

$$\rho_b^T = \frac{A_{sb}^T}{bw d} \quad (\text{Definición})$$

Luego de un poco de álgebra se llega a:

$$\rho_b^T = \rho_b^R + \rho_f \quad A_{sb}^T = A_{sb}^R + A_{sf}$$

$$\text{donde: } \rho_f = \frac{A_{sf}}{bw d} \quad A_{sf} = \frac{0.85 f'_c}{f_y} (bf - bw) h_f \quad (11-3)$$

$$\rho_b^R = \text{Cuantía balanceada de una sección rectangular sección } bw \times d$$

$$\text{Norma (Artículo 10.3.4): } \underline{\underline{A_s^T \max = 0.75 A_{sb}^T = 0.75 A_{sb}^R + 0.75 A_{sf}}} \quad (11-10)$$

El resultado anterior era totalmente previsible, es decir el acero balanceado en una viga T con el ala en compresión, debe ser igual al acero que produce la falla en una sección rectangular más el acero necesario para equilibrar la compresión en el ala.

Recuerde que la Norma E.060 (Artículo 10.3.5) permite un procedimiento alternativo, basado en la deformación del acero más alejado del borde comprimido, para determinar el acero máximo. El procedimiento alternativo no conduce a la misma cantidad máxima de acero dada por la ecuación 11-10.

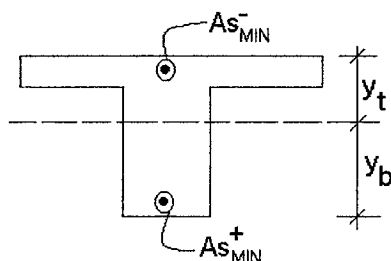
11.6 Acero Mínimo en Secciones T

La Norma E.060 del 2009 (artículo 10.5) exige una cantidad mínima de acero en tracción en elementos sujetos a flexión, tal que:

$$\phi Mn \geq 1.2 M_{cr}$$

Donde M_{cr} es momento de agrietamiento de la sección. El coeficiente de seguridad exigido por la Norma E.060 de 1989 de 1.5 resultaba excesivo, sobre todo para el momento de agrietamiento negativo de vigas T. En consecuencia se redujo el coeficiente de seguridad a 1.2 el cual, combinado con el factor $\phi = 0.9$ utilizado para el diseño por flexión, conduce a un factor global de seguridad en la sección de $1.2/0.9 = 1.33$.

A continuación se presenta una metodología aproximada y rápida para el cálculo del acero mínimo:



$I_g \rightarrow$ Momento de Inercia de la sección bruta, no fisurada

$$S^+ = \frac{I_g}{y_b} \quad S^- = \frac{I_g}{y_t}$$

$S \rightarrow$ Módulo de sección

$$M_{cr}^+ = S^+ f_r \quad M_{cr}^- = S^- f_r \quad f_r = 2\sqrt{f'_c}$$

$$\phi M_n^+ = 1.2 M_{cr}^+ \quad A_s^+ \text{ min} \approx \frac{1.2 (S^+ f_r)}{0.9 f_y (0.95 d)} \quad (11-11)$$

$$\phi M_n^- = 1.2 M_{cr}^- \quad A_s^- \text{ min} \approx \frac{1.2 (S^- f_r)}{0.9 f_y (0.95 d)} \quad (11-12)$$

En las expresiones 11-11 y 11-12, se ha supuesto que el brazo de palanca interno " $j d$ " se puede estimar como $0.95 d$. En general para vigas rectangulares o T con aceros cercanos al mínimo, " $j d$ " varía entre $0.93 d$ y $0.98 d$, siendo $0.95 d$ una aproximación razonable. Debe quedar claro que las ecuaciones mencionadas son solo aproximadas.

Las expresiones 11-11 y 11-12, son válidas para cualquier tipo de sección en flexión uniaxial, bastará utilizar el módulo de sección (S) apropiado para cada caso.

En vigas T normalmente se cumple la siguiente relación entre los momentos de agrietamiento negativos y positivos:

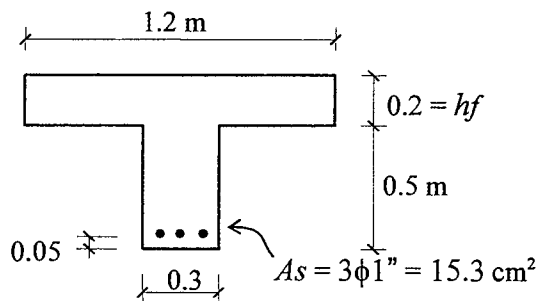
$$M_{cr}^- \approx 2 M_{cr}^+$$

por lo tanto las secciones T requieren más acero mínimo negativo que positivo. Esto se debe a que en la zona de momentos negativos, siendo el ala la que está en tracción, hay un volumen grande de tracciones que deberá ser equilibrado por el acero mínimo.

Recuerde que la Norma permite colocar en lugar del acero mínimo calculado con las expresiones 11-11 y 11-12, 1.3 veces el área de acero requerida por calculo.

Ejemplo 11-1- Resistencia (análisis) de una Sección T

Calcular la resistencia de diseño de la sección T mostrada en la figura a continuación, para momento positivo (compresiones en la fibra superior). Con las hipótesis para el análisis de secciones de concreto armado en flexión, es suficiente para determinar la resistencia, es decir, no utilizaremos las ecuaciones que se han deducido para el caso particular de las secciones T.



$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$d \approx 0.65 \text{ m}$$

Un posible método para determinar la capacidad (resistencia) en flexión de la sección, consiste en tantear sucesivos valores de la profundidad del eje neutro - c - considerando una deformación para el concreto $\epsilon_{cu} = 0.003$, hasta lograr el equilibrio de la sección es decir, la tracción en el acero debe equilibrarse con la compresión total en el concreto. Este método es aplicable a cualquier geometría de la sección.

En este caso particular, un método más simple, consiste en suponer que el acero está en fluencia y además que $a < hf$ con lo cual tendremos:

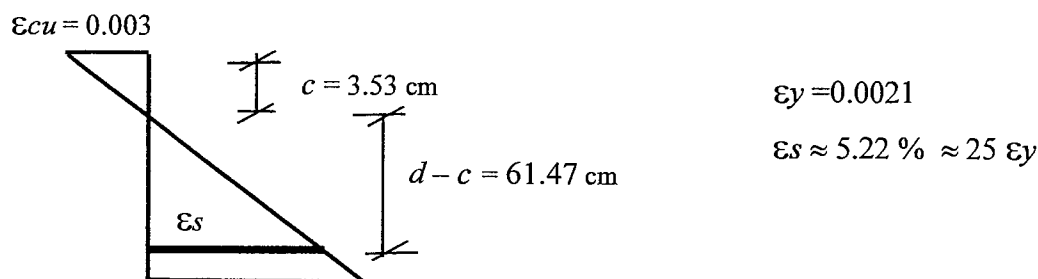
$$T = A_s f_y = 15.3 \times 4,200 = 64,260 \text{ kg}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{64,260}{0.85 \times 210 \times 20} = 3 \text{ cm}$$

Ya que $a < hf$ - la sección trabaja como rectangular con $b = bf = 1.2 \text{ m}$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{3}{0.85} \approx 3.53 \qquad \frac{c}{d} = \frac{3.53}{65} = 0.054 < \frac{Cb}{d} = 0.588$$

En consecuencia el acero está en fluencia, tal como se supuso inicialmente y la deformación en el acero de refuerzo se obtiene del diagrama de deformaciones mostrado a continuación:



La resistencia de diseño de la sección será:

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 0.9 \times 15.3 \times 4,200 \times \left(65 - \frac{3}{2} \right)$$

$$\phi M_n = 36,720 \text{ kg-m}$$

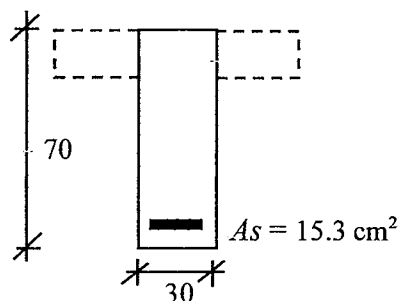
Es interesante aprovechar este ejemplo para calcular la cantidad de acero en tracción necesaria para que la profundidad del bloque equivalente llegue al borde inferior del ala. El límite será cuando la profundidad del bloque equivalente de compresiones sea igual al espesor del ala, en este caso tendremos:

$$a = 20 \text{ cm} \qquad C_c = 0.85 \times 210 \times 120 \times 20 = 428,400 \text{ kg}$$

$$C_c = T = A_s f_y = 428,400 \text{ kg} \Rightarrow A_s = 102 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto en este caso en particular se necesitan 102 cm^2 ($20 \phi 1"$) de acero positivo para que el bloque de compresiones ingrese al alma y la sección trabaje como verdaderamente como T. Cantidades de acero de esta magnitud ciertamente son poco comunes para una viga de estas dimensiones, por lo tanto, las secciones T con alas grandes normalmente trabajan como rectangulares con una profundidad del bloque equivalente de compresiones (a) menor que el espesor del ala. En el caso anterior aún con 102 cm^2 de acero en tracción, si asumimos que el peralte efectivo no cambia, la deformación del acero, cuando la sección alcanza su resistencia nominal, sería

aproximadamente 2.5 veces la deformación de fluencia, es decir el acero estaría aún en fluencia. Calculemos por curiosidad, la resistencia de la sección despreciando el aporte del ala, es decir, suponiendo que la sección trabaja como rectangular con $b = 30$ cm, tendremos:



$$a = \frac{15.3 \times 4,200}{0.85 \times 210 \times 30} = 12 \text{ cm}$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 0.9 \times 15.3 \times 4,200 \times \left(65 - \frac{12}{2} \right)$$

$$\phi M_n = 34,120 \text{ kgm}$$

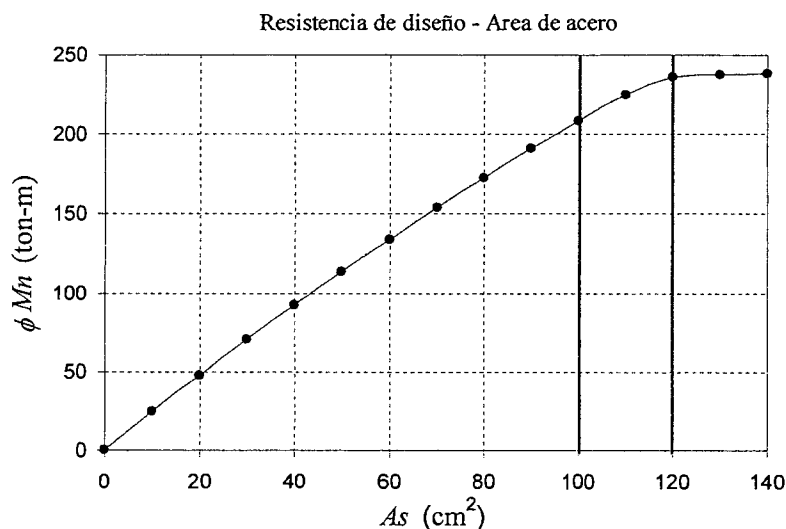
La resistencia se redujo de 36,720 a 34,120 kg-m (7% de reducción) ya que el brazo interno ($jd = d - a/2$) se ha modificado poco. En general el error que se comete al ignorar el ala no es significativo, siempre y cuando el bloque de compresiones esté en el ala, como en este caso.

Ejemplo 11-2 - Influencia de la cantidad de acero en la resistencia a flexión

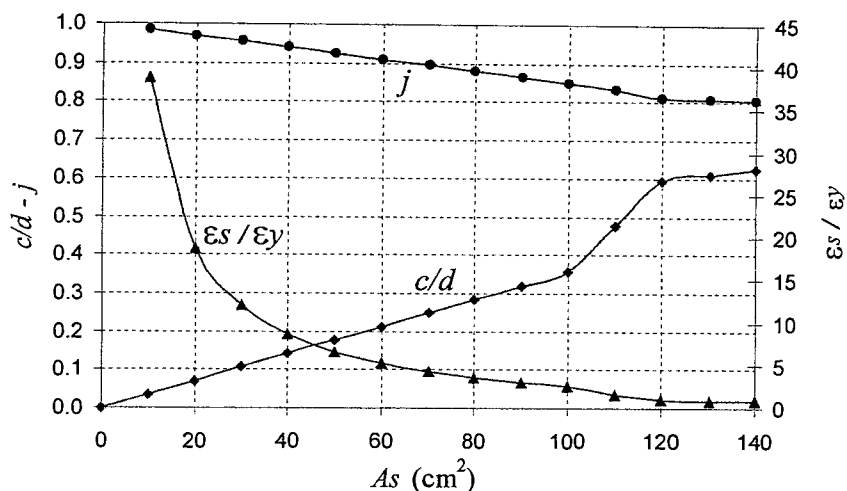
Para la sección del ejemplo 11-1, calculemos la resistencia en flexión para momento positivo, al variar la cantidad de acero en tracción. Supongamos que el peralte efectivo se mantiene constante al variar la cantidad de acero ($d = 0.65$ m). Esta suposición no es válida por la gran cantidad de acero que hay en algunos de los casos analizados, situación que obligaría a colocar el refuerzo en varias capas. Sin embargo la utilizaremos para no distorsionar las comparaciones introduciendo una variable adicional.

En el primer gráfico se aprecia la variación de la resistencia de diseño (ϕM_n) al aumentar la cuantía de acero. Se han resaltado dos límites importantes, el primero asociado al instante en el cual el bloque de compresiones ingresa al alma ($A_s \approx 100 \text{ cm}^2$) y el segundo asociado a la falla balanceada de la sección ($A_s \approx 120 \text{ cm}^2$). Se observa, al igual que en secciones rectangulares (ver ejemplo 10-2) que la relación $M_u - A_s$ es casi lineal hasta la cuantía balanceada. De allí en adelante la resistencia de la sección se incrementa poco ya que la falla está controlada por la capacidad del concreto y el acero permanece elástico. En consecuencia aumentos del acero por encima del balanceado, son poco eficientes, es decir incrementan poco la resistencia de la sección, además de producir una falla frágil en la sección.

En el segundo gráfico se aprecia la variación de las relaciones c/d , ϵ_s/ϵ_y y del brazo interno de palanca medido a través del parámetro j ($jd = d - a/2$). El cociente c/d varía linealmente hasta que el bloque de compresiones ingresa al alma, donde cambia de pendiente.



c/d j ϵ_s/ϵ_y - Area de acero



Ejemplo 11-3 – Acero balanceado y mínimo en Secciones T

Para la sección del ejemplo 11-1, calculemos la cantidad de acero que produce la falla balanceada y el acero mínimo positivo y negativo requerido por la Norma E.060.

a) *Acero balanceado negativo y positivo* (Norma E.060 Artículo 10.3.4):

Para momento negativo las compresiones están en la parte inferior de la sección, en consecuencia el acero balanceado será el mismo que para una viga rectangular. En este caso el área de acero que ocasiona una falla balanceada de la sección es de 41 cm² aproximadamente (2.13% x30x65). La cantidad máxima de acero de acuerdo a la Norma es de 31 cm² de acero negativo.

Para momento positivo la posición del eje neutro y la compresión total en el concreto en la falla balanceada vienen dadas por:

$$cb = 0.588 d = 38.22 \text{ cm} \qquad a_b = \beta_1 (cb) = 32.5 \text{ cm}$$

$$Ccb = 0.85 \times 210 \times (90 \times 20 + 30 \times 32.5) = 495 \text{ ton} = Asb fy$$

$$Asb = 118 \text{ cm}^2 \qquad 0.75 Asb \approx 88 \text{ cm}^2$$

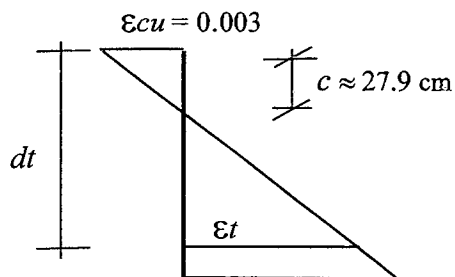
El resultado anterior indica que en general, en vigas T con alas en compresión grandes, rara vez se alcanza la falla balanceada por la gran cantidad de concreto presente en la zona comprimida. El límite de la Norma, 0.75 Asb (en este caso 88 cm²) tampoco suele alcanzarse.

La resistencia a momento positivo (ϕMn) para un área de acero igual al 75% de la balanceada (88 cm²) suponiendo que el valor de d no se modifica - suposición que en este caso no sería válida por la gran cantidad de acero que obligaría a colocarlo en varias capas - es de 188 ton-m y la deformación del acero sería de aproximadamente 3.2 veces la deformación de fluencia.

Ya hemos visto (acápite 10.6) que en una sección rectangular reforzada con 0.75 Asb la deformación del acero, cuando se alcanza la resistencia de la sección, es de aproximadamente 1.8 ϵ_y . En la sección T analizada, la deformación del acero es de 3.2 ϵ_y para las mismas condiciones. En consecuencia, notamos nuevamente que el requisito de la Norma de limitar la cantidad máxima de acero al 75% del valor que ocasiona la falla balanceada, no genera la misma deformación en el acero, es decir, como era de esperarse, la deformación del acero dependerá de la forma y tamaño del bloque comprimido.

b) *Acero máximo positivo* (Norma E.060 Artículo 10.3.5):

La deformación mínima del acero más alejado del borde comprimido, cuando la sección alcanza su resistencia nominal M_n , debe ser 0.4%. Con el valor mínimo ($\epsilon_t = 0.4\%$) el estado de deformaciones en la sección es:



Para $\epsilon_t = 0.004 \quad (\approx 1.9 \epsilon_y)$

$c / dt \approx 0.43 \Rightarrow c \approx 0.43 \times 65 \approx 27.9 \text{ cm}$

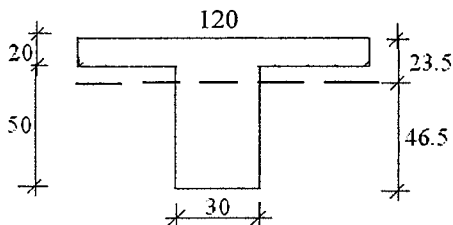
$a = 0.85 \times 27.9 \approx 23.7 \text{ cm}$

$C_c = 0.85 \times 210 \times (90 \times 20 + 30 \times 23.7) \approx 448 \text{ ton}$

$As_{max} = C_c / f_y \approx 107 \text{ cm}^2$

El acero máximo positivo calculado utilizando el procedimiento alternativo de la Norma (107 cm^2), es un 20% mayor que el calculado sobre la base de $0.75 As_b$ (88 cm^2). Tal como se comentó, ambos procedimientos no conducen a la misma cantidad de acero máximo, salvo para secciones rectangulares sin acero en compresión. El procedimiento alternativo tiene la ventaja de lograr la misma deformación mínima del acero de tracción, independientemente de la forma del bloque comprimido y de la distribución del acero en la sección.

c) *Acero mínimo en flexión positivo y negativo* (Norma Peruana):



$I_g \approx 1'523,000 \text{ cm}^4$ (momento de inercia central)

$S^+ = I_g / 46.5 \approx 32,750 \text{ cm}^3$ (módulo de sección positivo)

$S^- = I_g / 23.5 \approx 64,810 \text{ cm}^3$ (módulo de sección negativo)

$f_r = 2 (\sqrt{210}) \approx 29 \text{ kg/cm}^2$

$M_{cr+} = f_r S^+ \approx 9,500 \text{ kg-m}$ (momento agrietamiento positivo)

$M_{cr-} = f_r S^- \approx 18,800 \text{ kg-m}$ (momento agrietamiento negativo)

- *Acero mínimo positivo:*

$M_u = 1.2 \times 9,500 = 11,400 \text{ kg-m} \quad b = 120 \quad d = 65$

$As^+_{min} \approx 4.7 \text{ cm}^2 \quad a = 0.92 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 85 \epsilon_y !! \quad jd = d - a/2 = 64.54 \text{ cm} \approx 0.99 d$

Nótese que la Norma E.060 del 2009 para secciones T con el ala en compresión exige que el cálculo del acero mínimo positivo se base en la misma expresión utilizada para secciones rectangulares, en este caso tendremos:

$As^+_{min} = 0.24\% \times 30 \times 65 \approx 4.7 \text{ cm}^2 \quad (\text{Ver Tabla 10.6})$

Valor, que para esta sección en particular, coincide con el calculado con $1.2 M_{cr}$.

- *Acero mínimo negativo:*

$M_u = 1.2 \times 18,800 = 22,560 \text{ kg-m} \quad b = 30 \quad d = 65$

$As^-_{min} \approx 9.8 \text{ cm}^2 \quad a = 7.65 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 8.9 \epsilon_y \quad jd = d - a/2 = 61.18 \text{ cm} \approx 0.94 d$

Utilicemos las formulas aproximadas 11-11 y 11-12 para el cálculo del acero mínimo que fueron derivadas en el acápite 11.6, es decir:

$$As_{min} = \frac{1.2 S f_r}{0.9 f_y (0.95d)}$$

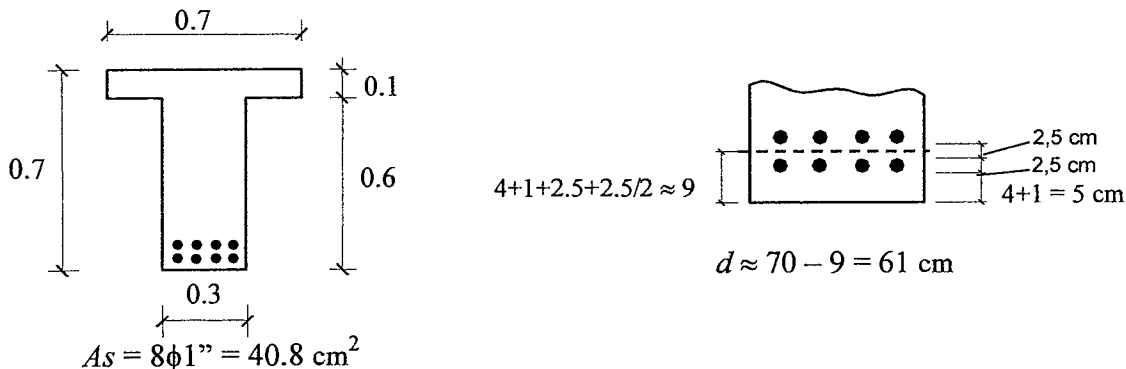
Para momento positivo y negativo la aplicación de la ecuación anterior, con el valor de $d = 0.65$, resulta en:

$As^+_{min} \approx 4.9 \text{ cm}^2 \quad As^-_{min} \approx 9.7 \text{ cm}^2$

En consecuencia, la precisión de las formulas aproximadas es suficiente para fines prácticos.

Ejemplo 11-4 – Resistencia (análisis) de una sección T con alas pequeñas

Se desea calcular la resistencia de diseño de la sección mostrada en la figura para momento positivo (compresiones en la fibra superior). Concreto $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, acero $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$



- Supongamos que A_s fluye y que $a < h_f$ ($h_f = 10 \text{ cm}$)

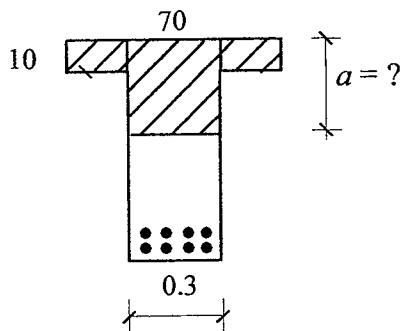
$$T = A_s f_y = 40.8 \times 4,200 = 171,360 \text{ kg}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b_f} = \frac{171,360}{0.85 \times 210 \times 70} = 13.71 \text{ cm} > h_f \Rightarrow \text{trabaja como T.}$$

Otra forma de verificar si la sección trabajará como T o como rectangular, consiste en determinar la cantidad de acero en tracción necesaria para equilibrar la compresión en el ala, suponiendo que la profundidad del bloque de compresiones es igual al espesor del ala:

$$C_c \text{ ala} = 0.85 \times 210 \times 70 \times 10 \approx 125 \text{ ton} = A_s \times 4200 \Rightarrow A_s \approx 30 \text{ cm}^2 < 40.8 \Rightarrow \text{Sección T}$$

- La sección trabaja como T. Calculemos la posición del eje neutro, asumiendo que el acero en tracción fluye:



$$\text{Ala: } C_f = (70-30) \times 10 \times 0.85 \times 210 = 71,400 \text{ kg}$$

$$\text{Alma: } C_w = 30a \times 0.85 \times 210 = 5,355 a$$

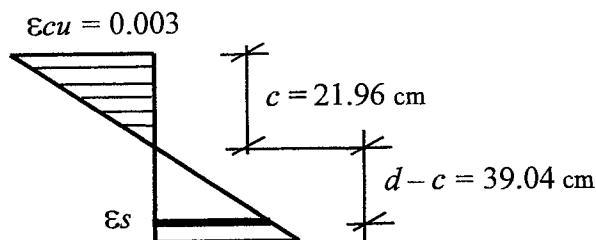
$$5,355 a = 171,360 - 71,400 \Rightarrow a \approx 18.67 \text{ cm}$$

$$c = 18.67 \div 0.85 = 21.96 \text{ cm}$$

$$c/b = 0.588 \text{ (falla balanceada)}$$

$$c/d = 21.96 \div 61 = 0.36 < 0.588 \Rightarrow \text{acero fluye}$$

- Deformación en el acero en tracción:



$$\epsilon_y = 0.0021$$

$$\epsilon_s \approx 0.53 \% \approx 2.5 \epsilon_y$$

- Resistencia del ala y del alma:

$$\text{Aporte del ala: } A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{71,400}{4,200} = 17 \text{ cm}^2$$

$$M_{nf} = 17 \times 4,200 \times \left(61 - \frac{10}{2}\right) \approx 40 \text{ ton-mt}$$

Aporte del alma: $C_w = 99,960 \text{ kg}$

$$A_{sw} = A_{st} - A_{sf} = 40.8 - 17 = 23.8 \text{ cm}^2 = C_w / f_y$$

$$M_{nw} = 23.8 \times 4,200 \times \left(61 - \frac{18.67}{2}\right) = 51.6 \text{ ton-mt}$$

- La resistencia total de la sección es:

$$\phi M_n = 0.9 (40 + 51.6) \approx 82.4 \text{ ton-m}$$

Si se desprecia el aporte de ala, es decir si se hubiera supuesto una sección rectangular en lugar de una sección T, los resultados serían:

$$b = 30 \quad d = 61 \quad A_s = 40.8 \text{ cm}^2$$

$$\phi M_n = 67.9 \text{ ton-m} \quad c = 36.38 \text{ cm} \quad c/d \approx 0.6 \quad \epsilon_s = 0.97 \epsilon_y$$

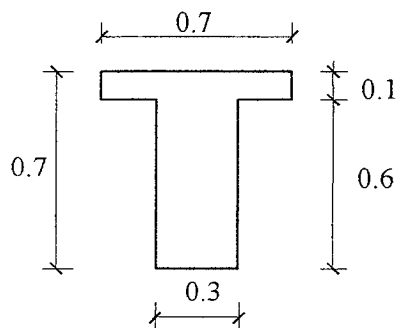
Se trataría de una sección sobre reforzada, no admitida por la Norma. La cantidad máxima de acero permisible sería $0.75 A_{sb} = 29.2 \text{ cm}^2$, con esta cantidad de acero (suponiendo $d = 61 \text{ cm}$) la capacidad de la sección sería $\phi M_n \approx 54.7 \text{ ton-m}$, que equivale al 65% de la capacidad de la sección T. Para que la sección rectangular tenga la misma capacidad que la T (82.4 ton-m) sin ser sobre reforzada, se necesitan 42.5 cm^2 de acero en tracción y 13.4 cm^2 en compresión.

Es claro entonces, que en los casos en los cuales el bloque de compresiones ingresa al alma o está muy cercano a ella, el despreciar el ala conduce a errores importantes, tanto en el análisis como en el diseño.

Ejemplo 11-5 – Diseño de una sección T

Ya se ha discutido que en la mayoría de los casos, las secciones T con el ala en compresión, trabajan como rectangulares ya que el bloque de compresiones suele ser menor que el espesor del ala. Sin embargo existen situaciones en las cuales el bloque de compresiones ingresa al alma, esto puede suceder en presencia de momentos flectores altos en secciones T con alas pequeñas.

El ejemplo que resolveremos es justamente esta situación, se trata de la sección que se analizó en el ejemplo 11-4 solicitada por un momento flector positivo (compresiones en la fibra superior) de 82.5 ton-m. Concreto $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, acero $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$



Solicitación $M_{u+} = 82.5 \text{ ton-mt}$

$d \approx 61 \text{ cm}$ (estimamos acero en dos capas, dada la magnitud del momento flector)

- Supongamos que la sección trabaja como rectangular ($a < h_f$), en consecuencia diseñamos una viga rectangular con $b = 70$, $d = 61$ cm. El área de acero necesaria es:

$$\rho \approx 0.94\% \quad A_s = 0.94\% \times 70 \times 61 = 40.1 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{40.1 \times 4,200}{0.85 \times 210 \times 70} = 13.48 \text{ cm} > 10 = h_f$$

Por lo tanto la sección trabaja como T y deberá diseñarse como tal.

Otra manera de verificar si la sección trabajará como T o como rectangular, consiste en determinar el momento resistente que proporciona el concreto de toda el ala (equivale a suponer que la profundidad del bloque de compresiones es igual al espesor del ala) y compararlo con la resistencia requerida, veamos:

$$C_c \text{ ala} = 0.85 \times 210 \times 70 \times 10 \approx 125 \text{ ton}$$

Resistencia máxima del ala (suma de momentos respecto del acero en tracción):

$$M_{\max \text{ ala}} = 0.9 \times 125 \times (0.61 - 0.05) \approx 63 \text{ ton-m.}$$

Ya que la resistencia máxima que provee el ala (63 ton-m) es menor que M_u (82.5), la sección trabajará como T.

- Resistencia del ala:

$$A_{sf} f_y = 0.85 f'_c (b_f - b_w) \times h_f \quad A_{sf} = \frac{0.85 \times 210 \times (70 - 30) \times 10}{4,200} = 17 \text{ cm}^2$$

$$\phi M_n = \phi A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2} \right) = 0.9 \times 17 \times 4,200 \times \left(61 - \frac{10}{2} \right) \approx 36 \text{ ton-m}$$

- Momento remanente a ser soportado por el alma = $82.5 - 36 = 46.5$ ton-m. El acero necesario para equilibrar el momento remanente con el alma, es:

$$b = 30, \quad d = 61, \quad M_u = 46.5 \text{ ton-m} \Rightarrow A_{sw} \approx 24 \text{ cm}^2 \quad a = 18.82 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 2.5 \epsilon_y$$

- Acero total requerido:

$$A_{st} = A_{sf} + A_{sw} = 17 + 24 = 41 \text{ cm}^2 \quad (8 \phi 1")$$

- Verificar que el acero colocado sea menor de $0.75 A_{sb}$. El acero colocado es $5.1 \times 8 = 40.8 \text{ cm}^2$

En la falla balanceada se tiene:

$$\frac{a_b}{d} = 0.588 \beta_1 \quad \Rightarrow a_b = 0.588 \times 0.85 \times 61 \approx 30.5 \text{ cms}$$

$$C_{cb} = 0.85 \times 210 \times [(70 - 30) \times 10 + 30.5 \times 30] = 234,730 \text{ kg}$$

$$A_{sb} = \frac{C_{cb}}{4,200} \approx 56 \text{ cm}^2 \quad A_{s \text{ max}} = 0.75 \times 56 = 42 \text{ cm}^2 \quad \text{ok.}$$

Para la cantidad de acero colocada (40.8 cm^2), la deformación en el acero, medida en el centroide del mismo, es $\epsilon_s \approx 2.5 \epsilon_y$.

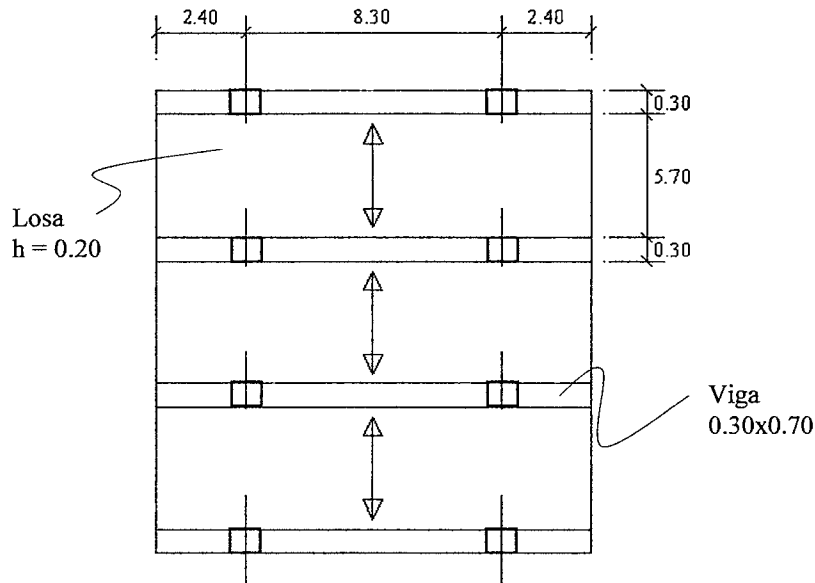
Ejemplo 11-6 – Diseño de una viga T

La figura muestra la planta del techo de un edificio de un piso. El techo será destinado a un depósito al aire libre. Los coeficientes de amplificación de cargas corresponden a la Norma E.060 de 1989. Las principales características son:

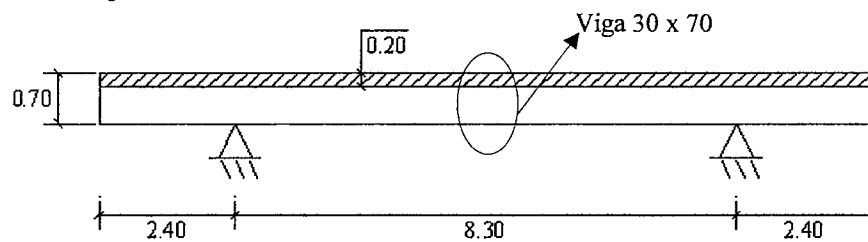
- Concreto $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, acero $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$.
- Espaciamiento libre entre vigas paralelas de 5.7 m.
- Losa maciza de espesor $h = 0.20$ m armada en un sentido.

- Piso terminado de 100 kg/m^2 .
- s/c de diseño de 300 kg/m^2 .
- Columnas empotradas en la base y articuladas en su extremo superior, es decir, no existe monolitismo entre la columna y la viga.
- Viga de sección constante 0.30×0.70 .

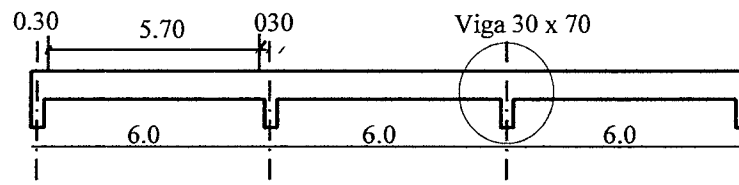
• Planta del techo de la estructura.



• Elevación de la viga.



• Corte transversal de la losa maciza.

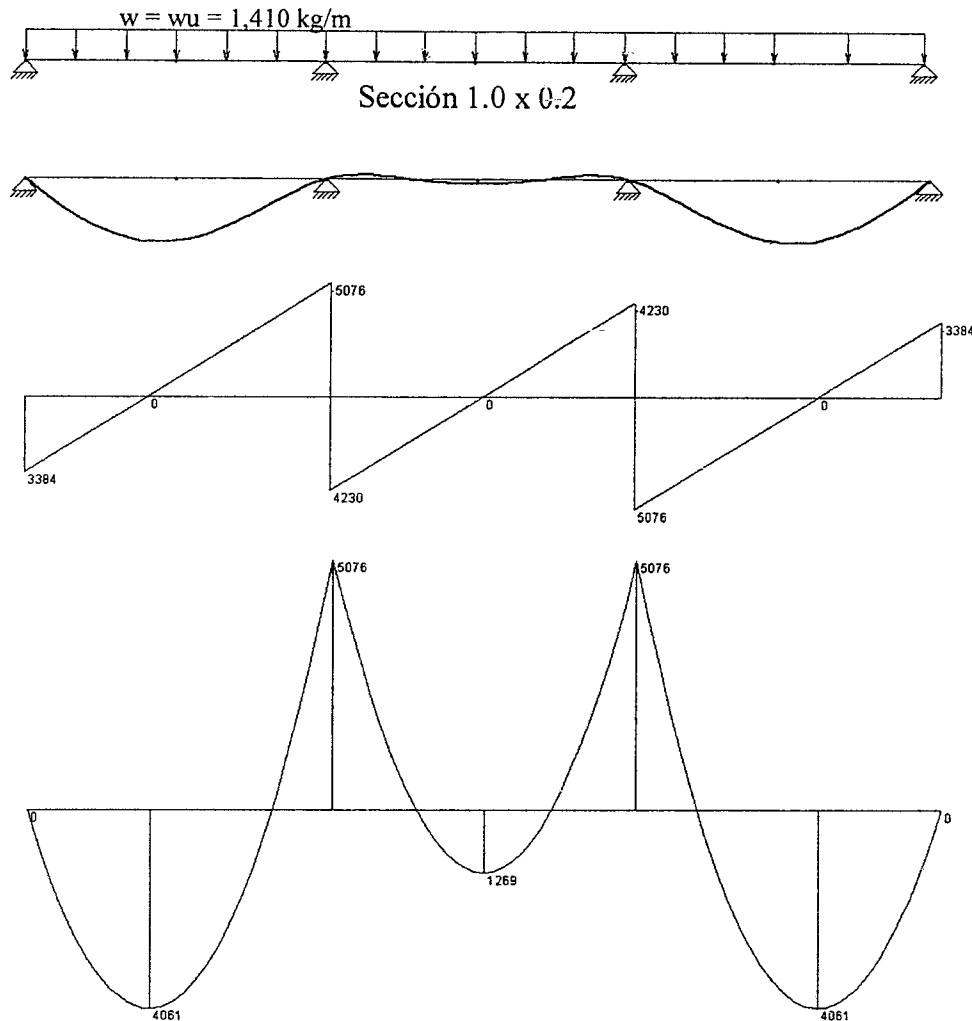


• Diseño por flexión de la losa maciza.

- Metrado: por metro de ancho de la losa ($h = 0.20 \text{ m}$):

CM:	$pp \text{ losa} = 2,400 \times 0.20 \times 1.0 = 480 \text{ kg/m}$	}	$580 \times 1.5 = 870 \text{ kg/m}$
	$p. \text{ term.} = 100 \times 1.0 = 100$		
CV:	$s/c = 300 \times 1.0 = 300$		$300 \times 1.8 = 540 \text{ kg/m}$
	$\omega \text{ servicio} = 880 \text{ kg/m}$		$\omega u = 1,410 \text{ kg/m}$

- El análisis estructural se realizó suponiendo comportamiento elástico de la losa bajo la acción de las cargas amplificadas, sin considerar alternancia de sobrecarga y con las luces a ejes de los apoyos. Los apoyos extremos e interiores se modelaron como simples (sin capacidad de tomar momento), lo que equivale a ignorar la rigidez torsional de las vigas de borde así como la de las vigas interiores. Los resultados del análisis son:



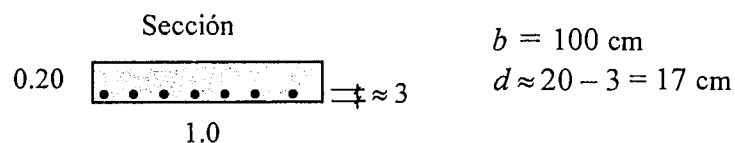
- Acero máximo y mínimo

$$As_{max} = 0.75 \times 2.13\% \times 100 \times 17 \approx 27 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{límite que rara vez controla el diseño})$$

$$As^{+min} = 0.0018 \times 100 \times 20 = 3.6 \text{ cm}^2/\text{m} \quad S_{max} \leq 3h \quad S_{max} \leq 0.40 \text{ m} \quad (\text{Acero de contracción y temperatura}).$$

Si bien la Norma (tanto la Peruana como el ACI) no especifican claramente el acero mínimo negativo para losas macizas en una dirección, parecería razonable el utilizar como referencia el acero mínimo de secciones rectangulares. En este caso, de acuerdo a la Norma Peruana, el acero mínimo negativo podría ser $0.24\% \times 100 \times 17 \approx 4.1 \text{ cm}^2/\text{m}$, sin embargo cuando este acero resulte excesivo, puede ser conveniente colocar 1.3 veces al área de acero que resulte del cálculo.

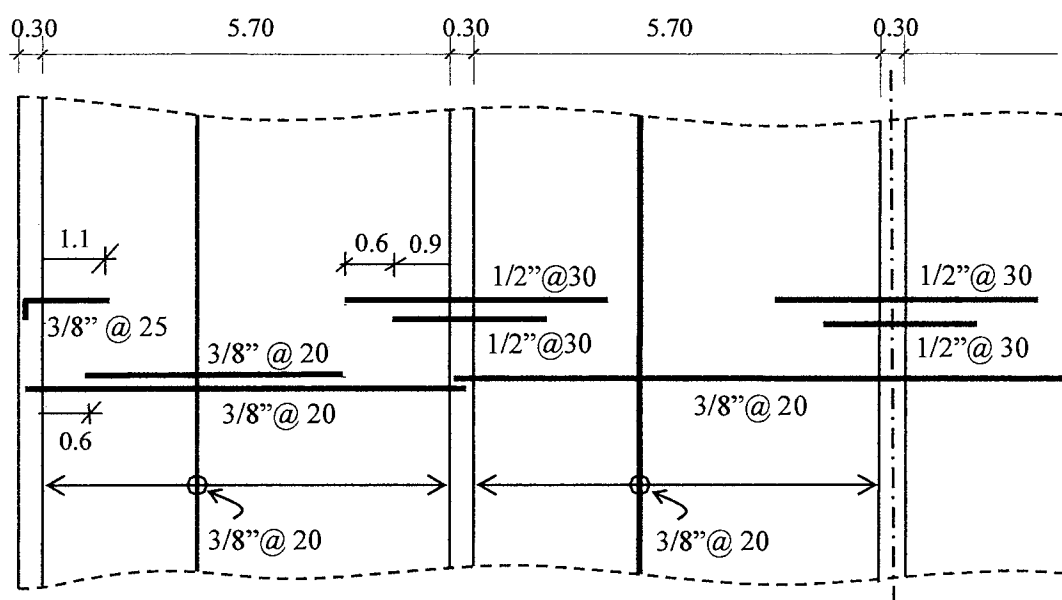
- Diseño de las secciones de momento máximo negativo y positivo. El diseño se realizará con los momentos negativos sin reducir a la cara del apoyo para así tomar en cuenta, indirectamente, el aumento en los momentos negativos por efecto de la posible alternancia de la carga viva. Se deja como ejercicio para el lector, el diseño de la losa considerando alternancia.



- a) $M^+u = 5,075 \text{ kg-m/m}$ $As = 8.39 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $1/2''@30 + 1/2''@30 = 8.6$ $\phi Mn = 5,200 (+2.5\%)$ ($c = 2.38 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 8.8 \epsilon_y$)
- b) $M^+u \text{ max} = 4,060$ $As = 6.62 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8''@20 + 3/8''@20 = 7.1$ $\phi Mn = 4,340 (+6.9\%)$ ($c = 1.97 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 10.9 \epsilon_y$)
- c) $M^+u \text{ max} = 1,270$ $As = 2.0 \text{ cm}^2/\text{m}$ (controla la armadura mínima)
 Colocar $3/8''@20 = 3.55$ $\phi Mn = 2,225 (+75\%)$ ($c = 0.98 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 23.3 \epsilon_y$)
- d) Momento negativo en los extremos: $M^-u = 1/24 \omega u (ln)^2 = 1,910 \text{ kg-m/m}$ $As = 3.04 \text{ cm}^2/\text{m}$
 Colocar $3/8''@25 = 2.84 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\phi Mn = 1,790 (-6.3\%)$ ($c = 0.79 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 29.5 \epsilon_y$)

Para completar el diseño será necesario revisar la capacidad de la losa para fuerzas cortantes (que en este caso no debería tener ningún problema) verificar las deflexiones del tramo exterior, revisar la fisuración y acotar las longitudes de los bastones (corte de fierro).

- Armado por flexión de la losa maciza



• Diseño por flexión de la viga interior.

- Metrado "convencional" de la viga:

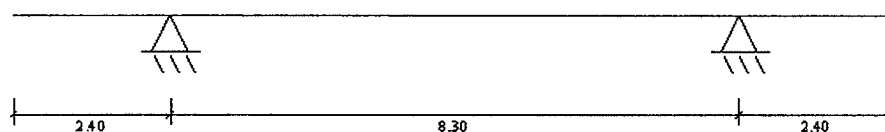
CM: $pp = 2,400 \times 0.3 \times 0.7 = 504 \text{ kg/m}$ CV: $s/c = 300 \times 6.0 = 1,800$

$losa = 480 \times 5.7 = 2,736$

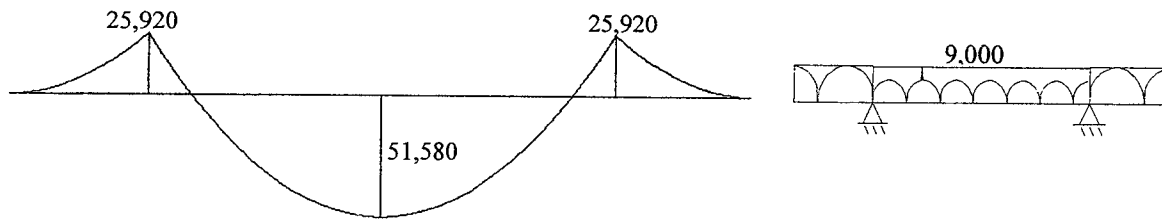
$p. \text{ term.} = 100 \times 6.0 = 600$

$\omega \text{ servicio} = 5,640 \text{ kg/m}$ $\omega u = 1.5 \times 3,840 + 1.8 \times 1,800 = 5,760 + 3,240 = 9,000 \text{ kg/m}$

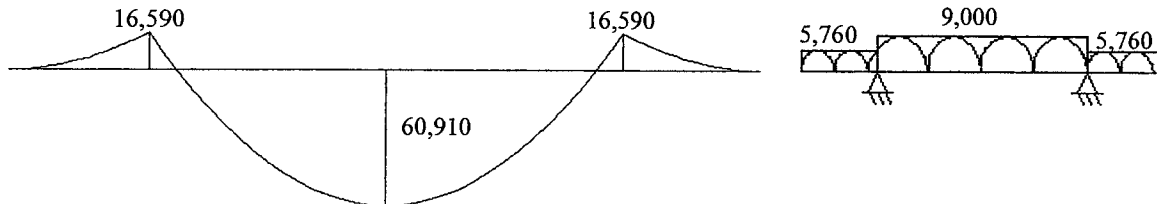
- El análisis estructural se realizó suponiendo comportamiento elástico de la losa bajo la acción de las cargas amplificadas, considerando alternancia de sobrecarga y con las luces a ejes de los apoyos. Los apoyos extremos se modelaron como simples, ya que en este caso no hay monolitismo entre las columnas y la viga. La estructura es isostática y su modelo se muestra a continuación.



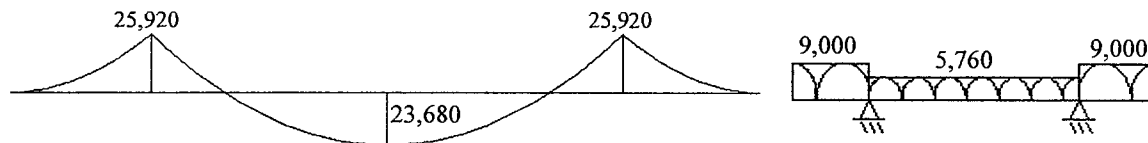
Todo cargado



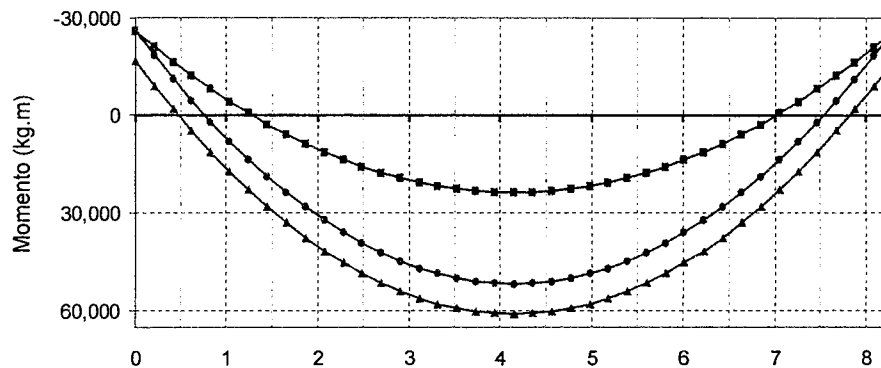
Máximo positivo



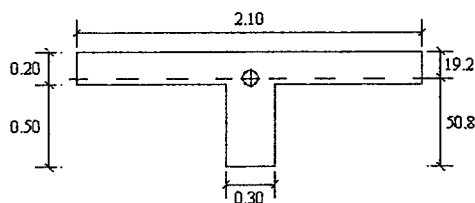
Mínimo positivo



- Envolvente del tramo central



- Características de la sección T y ancho efectivo del ala b_e para la viga interior, de acuerdo a la Norma:



$$b_e \leq l_{\text{viga}} / 4 = 8.30 / 4 \approx 2.10 \text{ m} \leftarrow (\text{controla})$$

$$b_e \leq (5.70 / 2) \times 2 \text{ lados} + 0.3 = 6.0 \text{ m}$$

$$b_e \leq 16 h_f + b_w = 3.50$$

$$I_g \approx 1'806,000 \text{ cm}^4 \quad M^+_{cr} \approx 10,310 \text{ kg-m} \quad M^-_{cr} \approx 27,260 \text{ kg-m}$$

- Flexión Positiva: $M_u \text{ max} = 60,910 \text{ kg-m}$

$$A_s^+_{\text{min}} = 0.24\% \times 30 \times 64 \approx 4.6 \text{ cm}^2$$

$$b = 210 \text{ cm}, d \approx 64 \Rightarrow A_s = 25.8 \text{ cm}^2 \quad c = 3.4 \text{ cm} \quad \varepsilon_s = 25.5. \varepsilon_y$$

Selección del acero de refuerzo positivo: $4 - 1'' + 2 - 3/4'' \approx 26.1 \text{ cm}^2$ (+ 1.3%)

Acero máximo positivo (sección T): $0.75 A_{sb} \approx 145 \text{ cm}^2$ (límite prácticamente inalcanzable)

- Flexión Negativa: $M_u \text{ max} = 25,920 \text{ kg-m} < 1.2 M_{cr}^-$ (no cumple con el acero mínimo)

$$b = 30 \text{ cm}, d \approx 64 \Rightarrow A_s = 11.5 \text{ cm}^2 \quad c = 10.64 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 7.2. \epsilon_y$$

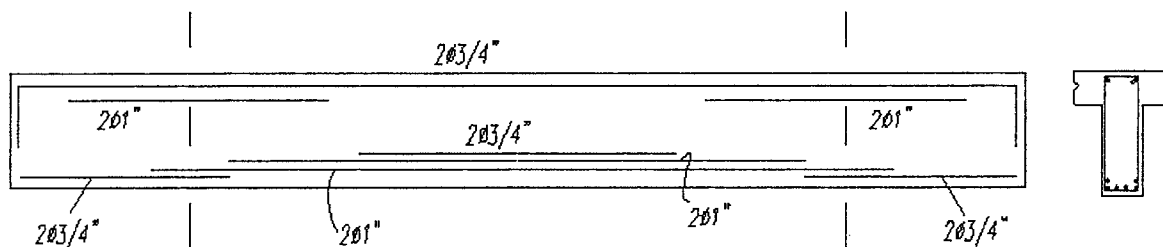
Si respetamos la exigencia para el acero mínimo negativo tendremos:

$$M_u^- = 1.2 M_{cr}^- = 32,710 \text{ kg-m}$$

$$b = 30 \text{ cm}, d \approx 64 \Rightarrow A_s \approx 14.9 \text{ cm}^2 \quad c = 13.73 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 5.3. \epsilon_y$$

La alternativa para no colocar el acero mínimo requerido, es la de utilizar 1.3 veces el área de acero necesaria, en este caso $1.3 \times 11.5 \approx 15 \text{ cm}^2$ valor que resulta mayor que el acero mínimo calculado. Seleccionamos una armadura negativa consistente en $2 - 1'' + 2 - 3/4'' \approx 15.9 \text{ cm}^2$. Con esta armadura la resistencia de diseño a momento negativo (incluyendo el acero en compresión, $2 - 3/4''$) es de 35.4 ton-m aproximadamente. Con esta resistencia el coeficiente de seguridad frente el agrietamiento de la sección será de $35.4 / (27.26 \times 0.9) \approx 1.4$, valor razonable. Es importante reconocer que el volado es un elemento isostático, sin posibilidad de redistribuir fuerzas internas, por lo tanto es necesario otorgarle un coeficiente de seguridad adecuado frente a la posibilidad de un agrietamiento súbito por tracción del ala.

- Armado por flexión de una de las vigas centrales.



Es interesante calcular la resistencia a momento positivo con la armadura realmente colocada. Considerando la sección T, un área de acero en tracción de 26.1 cm^2 y un área de acero en compresión de 5.68 cm^2 , se obtiene:

$$\phi M_n^+ = 62.14 \text{ ton-m} (+2\%) \quad (c = 3.98 \text{ cm}, \epsilon_s = 21.5 \epsilon_y, \epsilon'_s = 0.72 \epsilon_y)$$

Nótese que en este caso el acero superior, que se supone trabaja en compresión, está trabajando en tracción debido a que la profundidad del eje neutro es pequeña, menor que $d' \approx 6 \text{ cm}$.

Dada la longitud del tramo central de esta viga, es necesario verificar las deflexiones, la verificación debe hacerse bajo cargas de servicio (véase el Capítulo 14). Para la carga muerta únicamente, el máximo momento positivo en servicio es de 22 ton-m, valor que supera el momento de agrietamiento de la sección (10.31 ton-m) en consecuencia es de esperar que la sección central se agriete luego de desencofrar la viga y colocar el piso terminado, por lo tanto el cálculo de la deflexión deberá realizarse con la sección agrietada.

El momento de inercia agrietado de la sección central de la viga, considerando el acero en tracción y en compresión realmente colocado, es $I_{cr} = 770,000 \text{ cm}^4$ que equivale al 43% del momento de inercia bruto de la sección (I_g). La deflexión inmediata debida a la carga muerta es de 0.85 cm, que representa aproximadamente un milésimo de la luz central. Para el cálculo de la deflexión se ha supuesto que el momento de inercia de todo el tramo central equivale al de la sección agrietada, esta suposición es conservadora.

11.7 Aligerados (Losas Nervadas)

Los aligerados, de gran aceptación en nuestro medio, forman parte de los sistemas de techado denominados *Losas Nervadas* que se estudiaron en la sección 2.3. Las *Losas Nervadas* se definen como una combinación monolítica de nervios o viguetas espaciadas regularmente en una o dos direcciones perpendiculares, y de una losa en la parte superior.

Las losas nervadas o aligeradas se utilizan para reducir el costo del sistema de piso o techo. El ahorro se obtiene directamente al suprimir un cierto volumen de concreto e indirectamente por la reducción del peso en comparación con una losa maciza. En unos casos el aligeramiento se consigue con encofrado (ver figuras 2-2, 2-3 y 2-6) y en otros casos utilizando bloques permanentes de relleno.

Con las losas nervadas se pueden cubrir luces medianas a grandes con un menor peso en comparación con las losas macizas. Para sobrecargas o cargas muertas importantes los estados límites de servicio, principalmente el de deflexiones, se controlan mejor ya que se cuenta con mayor peralte. Existe un compromiso entre la distancia libre entre nervios o viguetas (que determina el número de nervios) y el espesor de la losa superior, por lo tanto el diseñador tiene mayor libertad en la selección de las dimensiones más apropiadas tanto de la losa superior como de las viguetas.

Las losas nervadas están cubiertas en el artículo 8.11 de la Norma E.060. Las Losas Nervadas que cumplan con lo dispuesto en el mencionado artículo, pueden diseñarse aceptando un incremento en la resistencia al corte del concreto del 10%. En caso contrario los nervios deberán diseñarse como vigas y la losa superior como una losa continua apoyada sobre los nervios.

Los aligerados son tal vez la aplicación más frecuente de lo estudiado en los acápites precedentes correspondientes al análisis y diseño de secciones T.

11.8 Geometría Típica de los Aligerados Utilizados en Nuestro Medio

La geometría de los aligerados típicos o convencionales usados en nuestro medio, se resume en la figura 11-10. El espaciamiento libre entre las viguetas de 0.30 m obedece a las dimensiones del ladrillo o bloque para techo que se fabrica en nuestro medio.

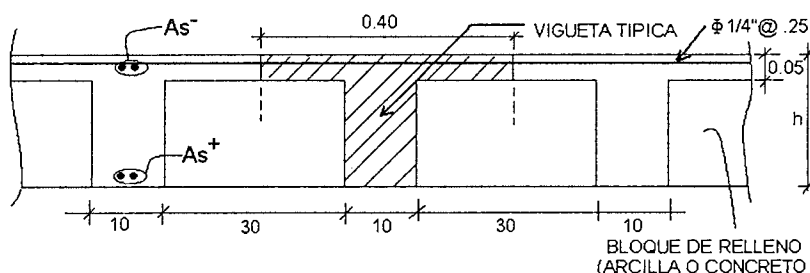


Fig. 11-10 Geometría de los aligerados convencionales utilizados en nuestro medio.

Existen situaciones en las cuales por razones de resistencia o por el tipo de bloque de relleno a utilizar, se modifica el espaciamiento entre las viguetas, el ancho de las mismas o el espesor de la losa superior. En estos casos estamos frente a un aligerado que podríamos llamar no "convencional", sin embargo las ideas que se presentan en este capítulo siguen siendo aplicables, con las modificaciones del caso.

11.9 Peraltes (espesores) más Utilizados en Nuestro Medio

La Tabla 11-1 resume los espesores más utilizados en nuestro medio así como el peso propio aproximado.

Tabla 11-1 Espesores típicos y luces máximas

h (m)	Peso propio (aproximado)	Luces máximas recomendadas (m)
0.17	280 kg/m ²	$l_n \leq 4$
0.20	300	$4 \leq l_n \leq 5.5$
0.25	350	$5 \leq l_n \leq 6.5$
0.30	420	$6 \leq l_n \leq 7.5$

Las luces máximas recomendadas en la tabla 11-1 sirven para el predimensionamiento del aligerado y han sido tomados del libro del Ing. Antonio Blanco. Estos valores son fruto de su experiencia y pueden ser usados para predimensionar el aligerado a cargo de verificar el espesor seleccionado, cuando se haga el diseño definitivo. Los espesores pueden usarse para sobrecargas de hasta 300 kg/m² y en ausencia de cargas concentradas provenientes por ejemplo, de tabiques pesados no estructurales.

11.10 Cargas de Diseño

En muchas ocasiones, además de su peso propio, del piso terminado y de la sobrecarga de uso, los aligerados pueden estar exigidos por cargas concentradas provenientes del peso de los tabiques o particiones que se apoyan directamente sobre él.

Cuando el tabique es perpendicular a la vigueta, la carga se modela como concentrada en cada vigueta. Cuando el tabique es paralelo a las viguetas, se suele colocar una "viga_chata" de ancho 0.25, 0.30, 0.40 ó 0.50 m (dependiendo de la luz) y del mismo espesor que el aligerado. La viga chata se diseña para resistir íntegramente la carga repartida que produce el tabique, además de su peso propio.

En algunos casos se colocan, para soportar el peso de los tabiques paralelos al aligerado las denominadas "viguetas dobles" es decir se juntan dos viguetas debajo del tabique. En general es mejor colocar una viga chata, diseñada y detallada para que soporte su peso propio y el peso del tabique, que hacer uso de las viguetas dobles.

11.11 Viguetas de Distribución

Son viguetas que se colocan perpendicularmente a la dirección de las viguetas o nervios principales (ver figura 2.2). Como su nombre lo sugiere, se utilizan para uniformizar las deflexiones de las viguetas y asegurar que los efectos de las posibles cargas lineales (tabiques) o concentradas (ruedas de vehículos en el caso de estacionamientos) o cargas no uniformes en el área sean resistidos por varias viguetas, es decir, permiten distribuir las cargas entre varias viguetas evitando que algunas de ellas resulten sobrecargadas.

La Norma E.060 no obliga su uso y por lo tanto no da recomendaciones o pautas para su distribución en planta. El manual del CRSI (Concrete Reinforcing Steel Institute) recomienda usar viguetas de distribución a partir de luces de 6 m, de un ancho no menor de 0.10 m y con una barra de 1/2" corrida superior e inferior. Para luces entre 6 y 9 m recomienda una vigueta de distribución al centro de la luz libre, para luces mayores a 9 m dos viguetas ubicadas a los tercios. Otros autores (Calavera) recomiendan su uso a partir de luces de 5.5 m.

11.12 Forma de Trabajo en Flexión de las Viguetas

En la zona de momento negativo la vigueta trabaja como una viga rectangular, la compresión en el concreto estará contenida íntegramente en el alma. En el raro caso

que el bloque de compresiones ingrese al ala, significará que la sección es insuficiente para las cargas y luces a cubrir.

En la zona de momento positivo, en la mayoría de los casos (por no decir en todos los casos), la vigueta también trabaja como rectangular. El bloque de compresiones será casi siempre menor que el espesor del ala ($a < hf$), siendo $hf = 0.05$ m y $bf = 0.40$ m para un aligerado típico. Esta situación es fácil de comprobar, basta considerar el caso en el cual el bloque de compresiones llegue al borde inferior del ala ($a = hf$), en esta condición la compresión en el concreto será:

$$C_c = 0.85 \times 210 \times 40 \times 5 = 35,700 \text{ kg}$$

El área de acero necesaria para equilibrar la compresión en el ala C_c , es:

$$A_s^+ = \frac{35,700}{4,200} = 8.5 \text{ cm}^2$$

Esta cantidad tan elevada de acero nunca se usa en un aligerado. Por ejemplo, en un aligerado de $h = 0.25$ m, el acero positivo que como máximo se suele colocar es 2 barras de 1/2" ó 1/2" + 5/8". En consecuencia podemos afirmar que el diseño de las viguetas de los aligerados, tanto para momento positivo como para negativo, es en realidad el diseño de secciones rectangulares.

11.13 Acero Mínimo y Acero Balanceado en Aligerados

En la sección 10.8 se presentó la exigencia de acero mínimo de la Norma E-060. Esta cantidad mínima de acero, en teoría, también debería usarse en los aligerados. El acero mínimo debe ser tal que garantice una resistencia mínima tal que:

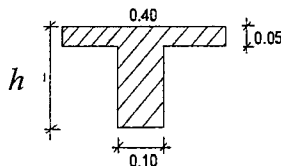
$$\phi Mn^+ \geq 1.2 M_{cr}^+ \quad \phi Mn^- \geq 1.2 M_{cr}^-$$

El coeficiente de seguridad de 1.2, combinado con el factor de reducción de la resistencia ($\phi = 0.9$) utilizado en el diseño por flexión, resulta en un factor de seguridad global cercano a 1.33.

La tabla 11-2 resume las propiedades de una vigueta típica. Se indica además los aceros mínimos y balanceados.

Vigueta típica. $f'_c = 210$ $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Peralte (h) m	Peralte efectivo (d)	I_g cm ⁴	M^{+cr} kg-m	M^{-cr} kg-m	$A^+s \text{ min}$	$A^-s \text{ min}$	A^+sb	A^-sb
0.17	0.14	7,275	185	370	0.34	0.91	9.35	2.97
0.20	0.17	11,800	260	505	0.41	1.01	10.0	3.61
0.25	0.22	22,700	405	750	0.53	1.15	11.05	4.67
0.30	0.27	38,430	580	1,030	0.65	1.28	12.11	5.74



- I_g = momento de inercia de la sección no fisurada.
- M^{+cr} = momento de agrietamiento positivo ($f_r = 2 \sqrt{f'_c}$)
- M^{-cr} = momento de agrietamiento negativo ($f_r = 2 \sqrt{f'_c}$)
- $A^+s \text{ min}$ = acero mínimo positivo Norma E.60 Artículo 10.5.2 ($0.24\% \times 10 \times d$)
- $A^-s \text{ min}$ = acero mínimo negativo Norma E-060 Artículo 10.5.1 ($1.2 M_{cr}$ neg).
- A^+sb, A^-sb = acero balanceado para M^+ y M^- respectivamente.

De la tabla 11-2, resulta claro que la exigencia de acero mínimo negativo es aproximadamente el doble con respecto al acero mínimo positivo.

En general los aceros mínimos positivos de la tabla 11-2, son fáciles de cumplir. Aun cuando el análisis indique una cantidad necesaria de acero positivo menor que la mínima, conviene respetar el acero mínimo, ya que para aligerados de 0.17, 0.20, 0.25 bastará con una barra de 3/8" corrida y menos de esto no se suele colocar. Para aligerados de $h = 0.30$ conviene usar una barra de 1/2" o dos de 3/8". Adicionalmente el colocar el acero mínimo, ayudará a controlar mejor la fisuración en la zona de momentos positivos, las deflexiones y a evitar la falla frágil de la sección en la zona de momentos positivos.

El acero mínimo negativo exigido por la Norma E.060 puede ser demasiado elevado, la experiencia ha demostrado que los aligerados con armaduras negativas por debajo del mínimo exigido indicado en la tabla precedente, se han comportado satisfactoriamente. En este caso puede utilizarse, como alternativa, un acero mínimo igual a 1.3 veces el área de acero requerida por el cálculo.

11.14 Ensanches por Cortante y Flexión en Aligerados

Los ensanches son zonas en la vecindad de los apoyos de los aligerados, en las que se retiran los bloques de relleno (ladrillos) y se reemplazan por concreto vaciado en sitio. De esta forma se obtiene una banda paralela a los apoyos que se comporta como una losa maciza.

Existen dos tipos de ensanches: los *corridos* y los *alternados*. En los ensanches corridos se remueven completamente los ladrillos o bloques de relleno de una o más hileras. En los ensanches alternados, como su nombre lo indica, se remueven alternadamente los ladrillos. Las figuras 11-11a y 11-11b, esquematizan lo indicado en relación con los ensanches.

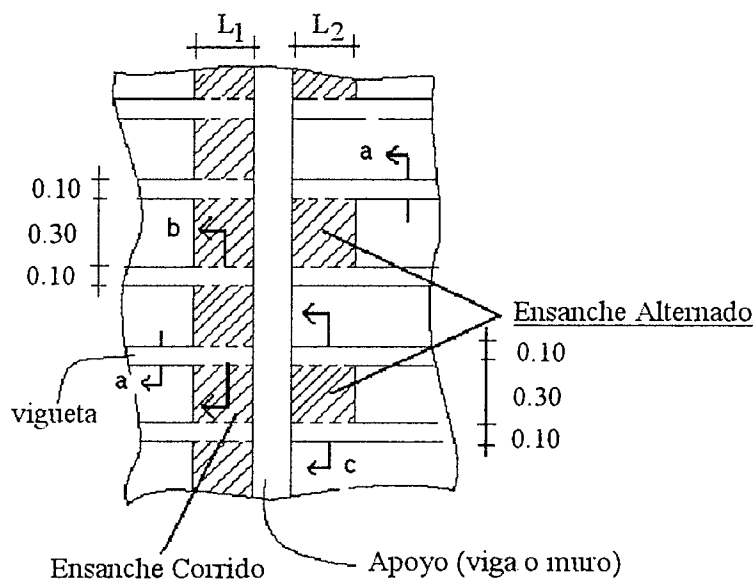


Fig. 11-11a Vista en planta de los ensanches corridos y alternados

Las longitudes L_1 y L_2 de los ensanches corridos o alternados indicadas en la figura 11-11a, deben determinarse por cálculo.

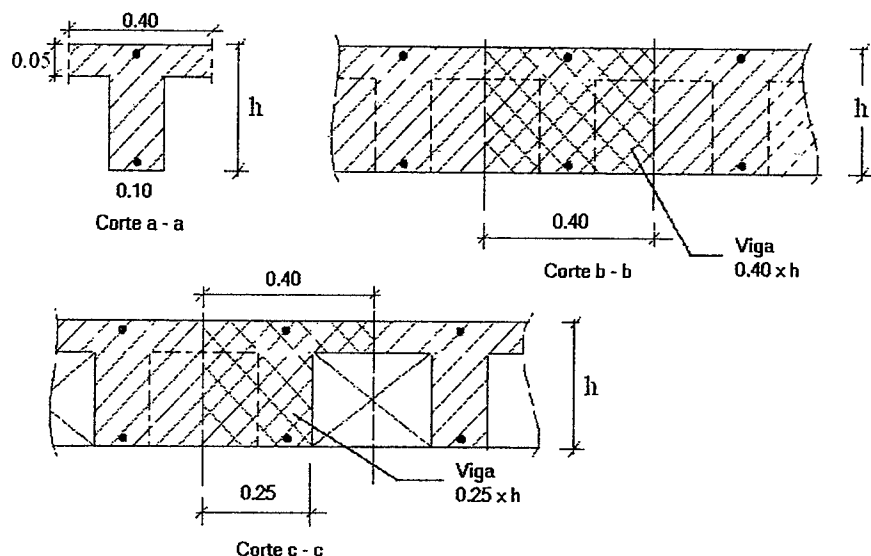


Fig. 11-11b Cortes en la zona de los ensanches

11.14.1 Ensanches por Cortante

Normalmente los ensanches en los aligerados se utilizan para mejorar la capacidad de las viguetas frente a los esfuerzos originados por las fuerzas cortantes. En los aligerados, toda la fuerza cortante debe ser resistida por el concreto del alma de las viguetas, ya que no se utiliza refuerzo de acero para soportar el cortante que no sea capaz de resistir el concreto. En otras palabras no se utilizan estribos. A este tipo de ensanches se le denomina *Ensanches por Corte*.

La fuerza cortante que soporta el concreto del alma de las viguetas de los aligerados convencionales viene dado, de acuerdo a la Norma E.060, por:

$$V_c = 1.1 \times (0.53 \sqrt{f'_c} b_w d)$$

Por ejemplo, para un aligerado de $h = 0.20$ m, $b_w = 0.10$ m y $f'_c = 210$, la resistencia al cortante proporcionada por el concreto del alma de las viguetas será:

$$V_c = 1.1 \times (0.53 \sqrt{210} \times 10 \times 17) \approx 1,435 \text{ kg}$$

$$\phi V_c = 0.85 \times 1,435 \approx 1,220 \text{ kg}$$

Cuando la fuerza cortante V_u es mayor que ϕV_c será necesario emplear ensanches en las viguetas. Si se utiliza un ensanche corrido, la capacidad de una vigueta en un aligerado de por ejemplo, $h = 0.20$ m, será:

$$V_c = (0.53 \sqrt{210} \times 40 \times 17) \approx 5,220 \quad \phi V_c \approx 4,440 \text{ kg}$$

Con lo cual la resistencia de diseño del aligerado (por vigueta) al cortante, se habrá incrementado de 1,220 a 4,440 kg. Nótese que en el cálculo anterior no se ha utilizado el factor 1.1 ya que estrictamente hablando un ensanche corrido genera una zona de losa maciza.

Si se usaran ensanches alternados la resistencia sería:

$$V_c = 1.1(0.53 \sqrt{210} \times 25 \times 17) \approx 3,590 \quad \phi V_c \approx 3,050 \text{ kg}$$

Es clara la conveniencia del uso de ensanches en aligerados para mejorar la capacidad de resistir fuerzas cortantes. De no usar ensanches, sería necesario y menos económico:

- Aumentar la resistencia del concreto f'_c .
- Aumentar el ancho b_w de las viguetas.
- Aumentar el peralte h del aligerado.

11.14.2 Ensanches por Flexión

Los ensanches por flexión son menos comunes que los ensanches por corte. Sin embargo, en algunos casos se utiliza este tipo de ensanche (corrido o alternado) para mejorar la resistencia en flexión del aligerado solamente en la zona de momentos negativos. A estos ensanches se les denomina *Ensanches por Flexión*. Permiten colocar mayor cantidad de acero negativo, sin exceder el límite de la Norma de $0.75 A_s b$ ya que, en la zona del ensanche la vigueta trabaja como una losa maciza con $b_w = 0.40$ (ensanche corrido) ó $b_w = 0.25$ m (ensanche alternado).

En aligerados, cuando la sección es insuficiente para resistir la flexión, no se emplea acero en compresión para suplir el déficit de resistencia ya que no hay estribos que eviten el pandeo del acero en compresión.

Veamos la influencia de los ensanches por flexión en la resistencia. Para ello supongamos un aligerado de $h = 0.20$ m con $f'_c = 210$ kg/cm²:

- La cantidad máxima de acero negativo sin ensanches con $b_w = 0.10$ sería de 2.7 cm² ($0.016 \times 10 \times 17$). En la práctica el acero máximo negativo que colocaríamos en un aligerado de 0.20 m sería de $2 - 1/2"$ (2.58 cm²) con los cuales la resistencia de una vigueta es de $\phi M_n \approx 1,360$ kg-m.
- Si usáramos un ensanche corrido ($b_w = 0.40$, $d = 0.17$) el área máxima de acero negativo sería 10.9 cm² ($0.016 \times 40 \times 17$). En la práctica colocaríamos como máximo $1/2" + 5/8"$ ($A_s = 3.29$ cm²)

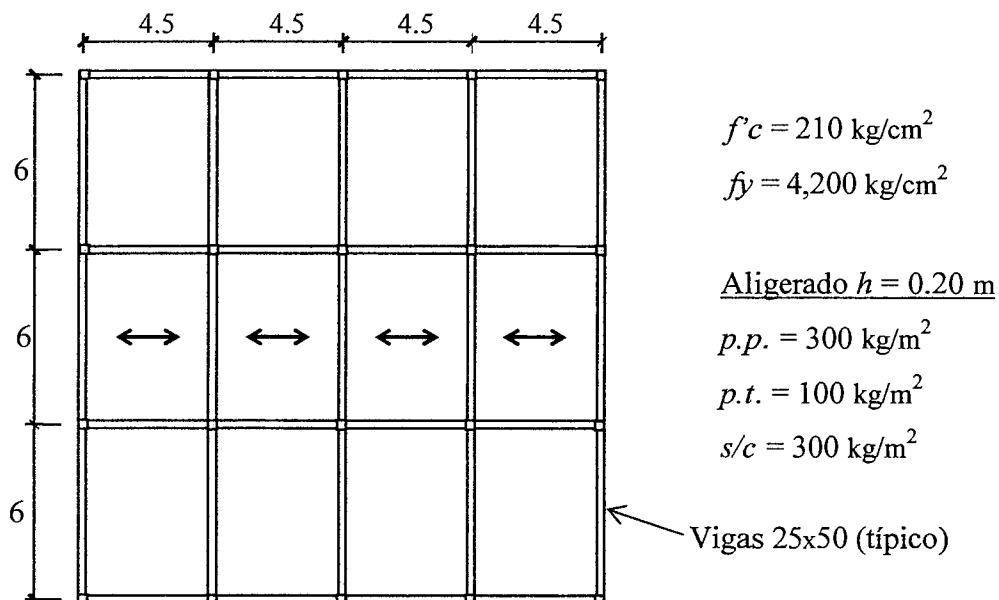
Con $2 - 1/2"$	$\phi M_n \approx 1,585$ kg-m (16% de incremento)
Con $1/2" + 5/8"$	$\phi M_n \approx 1,995$ kg-m
- Si usáramos un ensanche alternado ($b_w = 0.25$, $d = 0.17$) el área máxima de acero negativo sería 6.8 cm² ($0.016 \times 25 \times 17$)

Con $2 - 1/2"$	$\phi M_n \approx 1,540$ kg-m (13% de incremento)
Con $1/2" + 5/8"$	$\phi M_n \approx 1,920$ kg-m

Por lo tanto, en la eventualidad de que en la zona de momentos negativos la resistencia del aligerado fuera insuficiente, es posible utilizar ensanches por flexión ya sean corridos o alternados.

Ejemplo 11-7 - Diseño de un aligerado.

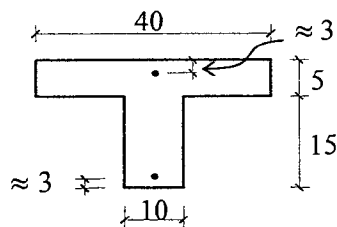
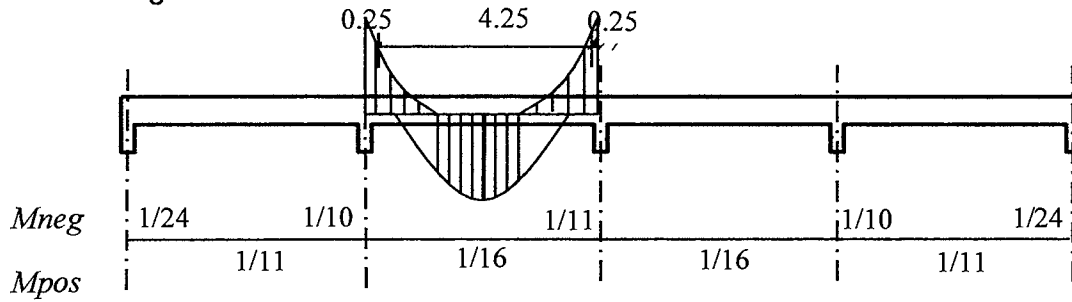
Utilizando el Método de los Coeficientes de la Norma, diseñaremos el aligerado del edificio cuya planta se muestra en la figura. Es la misma planta que fue resuelta anteriormente, en el ejemplo 9-10, utilizando una losa maciza de $h = 0.15$ m.



- Metrado por vigueta. Factores de amplificación de cargas de la Norma E.060 de 1989

$$\begin{array}{l}
 \text{CM: } pp \text{ alig.} \quad = 300 \times 0.4 = 120 \\
 \quad \quad \quad p.term. \quad = 100 \times 0.4 = 40 \\
 \text{CV: } s/c \quad \quad = 300 \times 0.4 = 120
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 160 \times 1.5 = 240 \\
 120 \times 1.8 = \underline{216} \\
 \omega u \approx 455 \text{ kg/m por vigueta} \\
 \omega_{servicio} = 280 \text{ kg/m por vigueta}
 \end{array}$$

- Corte longitudinal



$M_{neg}: b = 10, d = 17 \text{ cm}$

$M_{pos}: b = 40, d = 17 \text{ cm}$

- Aceros máximos y mínimos (Tabla 11-2).

$As^-_{max} = 0.75 \times 3.61 \approx 2.7 \text{ cm}^2$

$As^-_{min} \approx 1.0 \text{ cm}^2$

$As^+_{max} = 0.75 \times 10 \approx 7.5 \text{ cm}^2$ (rara vez controla)

$As^+_{min} \approx 0.4 \text{ cm}^2$

- Diseño de las secciones de momento máximo negativo y positivo.

$\omega u (ln)^2 = 455 \times (4.25)^2 = 8,218 \text{ kg-m}$

a) $M^-_u = 1/24 = 340 \text{ kg-m}$ $As = 0.55 \text{ cm}^2$

Colocar 1 - 8 mm = 0.50 cm^2 $\phi Mn = 310 \text{ kg-m}$ ($c = 1.38 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 16.1 \epsilon_y$)

b) $M^-_u = 1/10 = 820$ $As = 1.41$

Colocar 2 - 3/8" = 1.42 $\phi Mn = 825$ ($c = 3.93$, $\epsilon_s = 4.8 \epsilon_y$)

c) $M^-_u = 1/11 = 745$ $As = 1.27$

Colocar 3/8" + 8 mm = 1.21 $\phi Mn = 715$ ($c = 3.35$, $\epsilon_s = 5.8 \epsilon_y$)

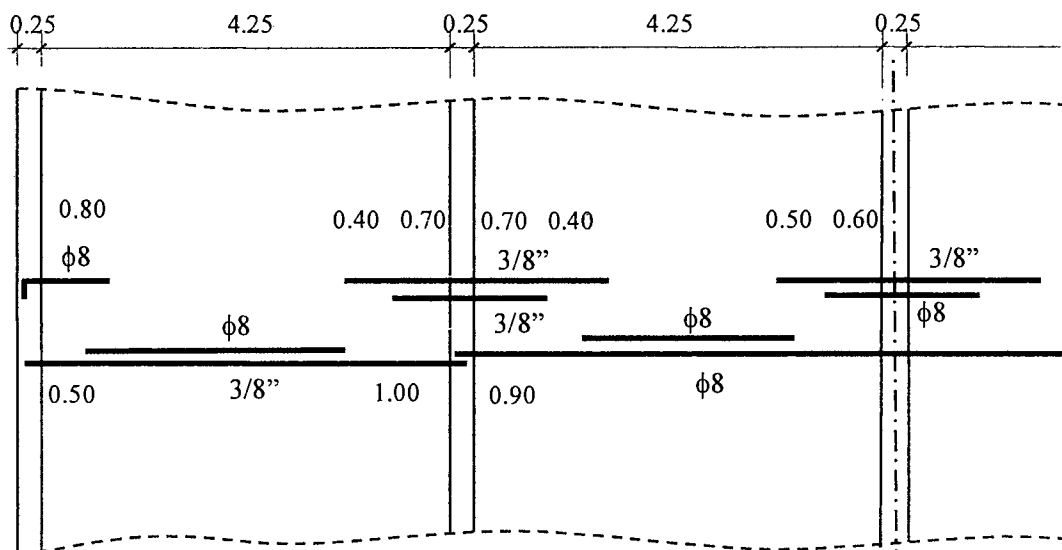
d) $M^+_u = 1/11 = 745$ $As = 1.18$

Colocar 3/8" + 8 mm = 1.21 $\phi Mn = 760$ ($c = 0.84$, $\epsilon_s = 27.6 \epsilon_y$)

e) $M^+_u = 1/16 = 515$ $As = 0.81$

Colocar 2 - 8 mm = 1.0 $\phi Mn = 630$ ($c = 0.69$, $\epsilon_s = 33.7 \epsilon_y$)

- Esquema en planta de la distribución de las armaduras seleccionadas. Las armaduras indicadas son para cada una de las viguetas.



<i>As Negativo</i>				
Necesario	0.55		1.41	<u>1.27</u>
Colocado	0.50		1.42	<u>1.21</u>
<i>As Positivo</i>				
Necesario		1.18		0.81
Colocado		1.21		1.00
<i>Resistencias Negativas</i>				
Exigidas			820	<u>745</u>
Suministradas			825 (+0.6%)	<u>715 (-4%)</u>
<i>Resistencias Positivas</i>				
Exigidas		745		515
Suministradas		760 (+2%)		630 (+22%)

- Estimación del factor de seguridad a partir de los resultados del análisis elástico.

Los aceros negativos colocados se aproximan bastante a los necesarios por lo tanto, no habrá sobrerresistencia importante en flexión. El acero positivo del primer tramo también se aproxima mucho al necesario. En el segundo tramo hay un exceso de acero positivo producto de los diámetros comerciales disponibles, que no permiten un mejor ajuste del acero.

Es claro que la sección que gobierna la resistencia del aligerado, si se aceptan los resultados del análisis elástico, es la de momento negativo en el apoyo central, donde se presenta el mayor defecto en el acero (1.21 cm² colocado contra 1.27 necesario). Si imaginamos que la carga se incrementa desde un valor cero hasta la carga última, el momento negativo en el apoyo central será el primero que alcanzará su resistencia disponible o suministrada, en consecuencia el factor de seguridad de este aligerado frente a la falla por flexión, sobre la base de los resultados del análisis elástico del Método aproximado de los Coeficientes, se obtiene igualando la sollicitación a la resistencia a momento negativo en el apoyo central:

$$(1/11) \omega u (4.25)^2 = 715 \Rightarrow \omega u \approx 435 \text{ kg/m}$$

$$\text{F.S.} = 435 / 280 = 1.55 / 0.9 \approx 1.73$$

Si se hubieran proporcionado áreas de acero exactamente iguales a las exigidas, el factor de seguridad global mínimo exigido por la Norma E.060 de 1989, frente a la falla por flexión, hubiera sido:

$$F.S. = 455 / 280 = 1.63 / 0.9 \approx 1.80$$

El haber reducido el área de acero en el apoyo central, modifica el factor de seguridad, frente a la falla por flexión, de 1.80 a 1.73. Esta reducción es aceptable ya que hay un exceso de acero positivo en los tramos interiores (23% de exceso). En consecuencia una ligera redistribución del momento negativo (reducción) ocasionará un incremento en el positivo el cual tiene resistencia en exceso.

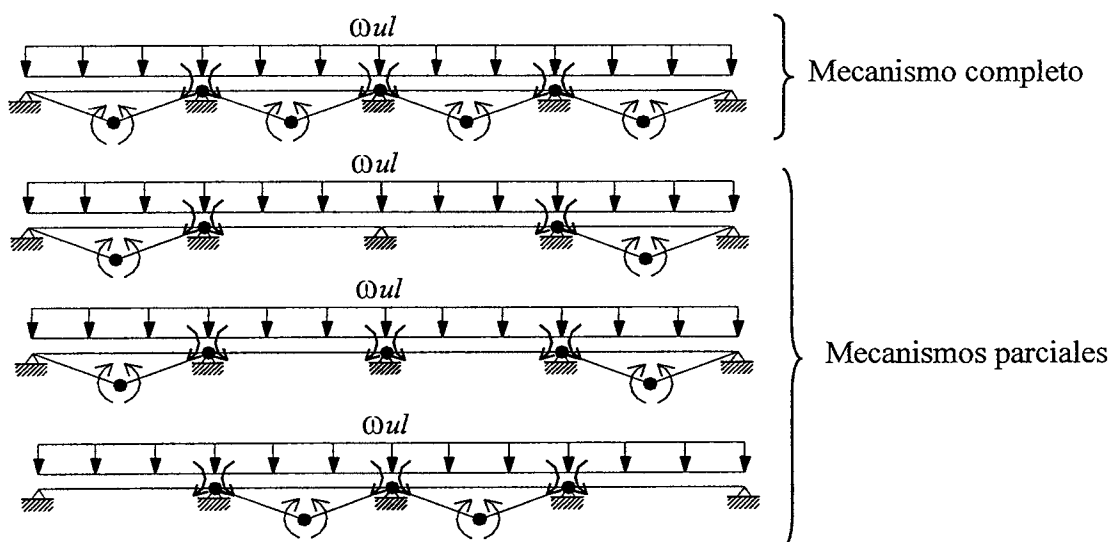
Para completar el diseño será necesario revisar la capacidad del aligerado para fuerzas cortantes, verificar las deflexiones del tramo exterior, y acotar las longitudes de los bastones (corte de fierro).

- Estimación del factor de seguridad a partir del análisis límite.

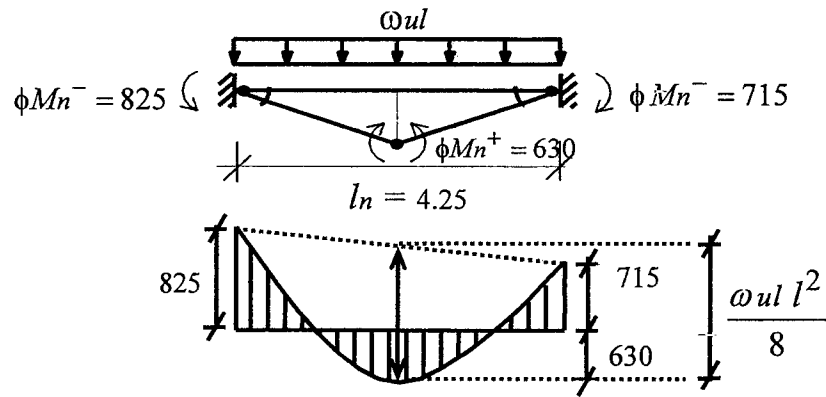
Verifiquemos ahora el factor de seguridad el aligerado utilizando el diseño límite, es decir el asociado con la formación de un mecanismo plástico controlado por flexión. Para ello haremos las siguientes suposiciones:

- Trabajaremos con las luces libres y no a ejes. Esto debido a que el diseño sobre la base de los momentos calculados suponiendo comportamiento elástico también fue hecho con las luces libres (Método de los Coeficientes).
- Los apoyos extremos son simples, es decir no se desarrolla momento negativo. Los momentos positivos máximos ocurren muy cerca del centro del tramo. Esta suposición no es del todo válida sobre todo en los tramos extremos, sin embargo el error que se comete no es grande.
- Las secciones poseen una adecuada ductilidad. Los diagramas Momento – Curvatura son del tipo bilineal con una ductilidad de curvatura alta. No hay endurecimiento del acero por deformación.
- No existe posibilidad de una falla prematura por fuerza cortante ni por adherencia. Esto significa que el diseño por fuerza cortante deberá realizarse sobre la base de la carga límite que resulte de este análisis (Diseño por Capacidad).

Las posibilidades de mecanismos plásticos, que son la base del análisis límite, son las siguientes:



- Análisis del tramo interior.



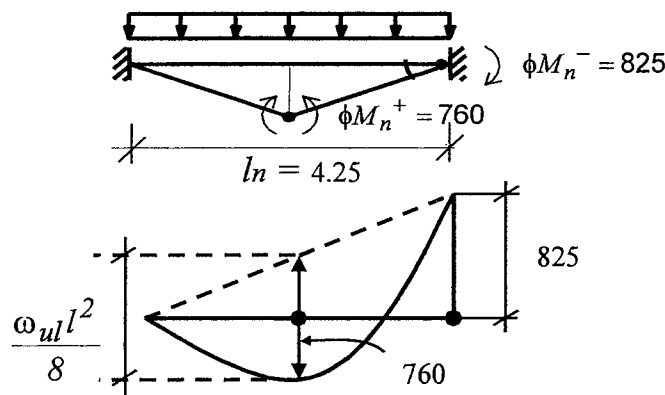
$$\left(\frac{825+715}{2}\right)+630=\frac{\omega ul \times 4.25^2}{8} \Rightarrow \omega ul \approx 620 / 0.9 \approx 690 \text{ kg/m}$$

La carga en condiciones de servicio es 280 kg/m (por vigueta) por lo tanto el factor de seguridad para el tramo interior será:

$$F.S. = 690 / 280 \approx 2.5$$

Este resultado indica que el tramo interior tiene una reserva de resistencia que permite la pequeña reducción que se hizo en el área de acero negativo del apoyo central, sin comprometer seriamente la seguridad.

- Análisis del tramo exterior.



Si asumimos que el máximo positivo se forma al centro de la luz, tendremos:

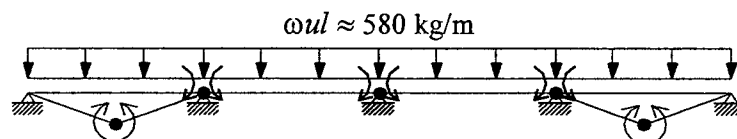
$$\frac{825}{2} + 760 = \frac{\omega ul \times 4.25^2}{8} \Rightarrow \omega ul \approx 520 / 0.9 \approx 580 \text{ kg/m}$$

El factor de seguridad, frente a la formación de un mecanismo plástico, para los tramos extremos será:

$$F.S. = 580 / 280 \approx 2.1$$

El máximo momento positivo en el tramo extremo realmente ocurre a 1.74 m (0.4 l_n aproximadamente) del apoyo izquierdo, con este resultado la carga límite se reduce de 520 a 505 kg/m, reducción que puede considerarse despreciable.

En consecuencia el mecanismo plástico que controla la resistencia de la estructura será un mecanismo parcial, como el indicado a continuación:



- En resumen:
 - En el Diseño por Resistencia controla el momento negativo del apoyo central y la carga máxima que puede aplicarse al aligerado es:
$$\omega u \approx 435 \text{ kg/m} \quad \text{F.S.} \approx 1.73$$
 - En el Diseño por Resistencia el factor mínimo de seguridad exigido por la Norma de 1989 era:
$$\text{F.S.}_{\min} = \omega u / \omega_{\text{ser}} (1 / \phi) = 455 / 280 = 1.63 / 0.9 \approx 1.80$$
 - En el Diseño por Resistencia el factor mínimo de seguridad exigido por la Norma del 2009 es:
$$\text{F.S.}_{\min} = \omega u / \omega_{\text{ser}} (1 / \phi) = 428 / 280 = 1.53 / 0.9 \approx 1.70$$
 - En el análisis límite controla el mecanismo parcial asociado a los tramos extremos. La carga límite teórica que puede soportar el aligerado es:
$$\omega u_l \approx 580 \text{ kg/m} \quad \text{F.S.} \approx 2.10$$

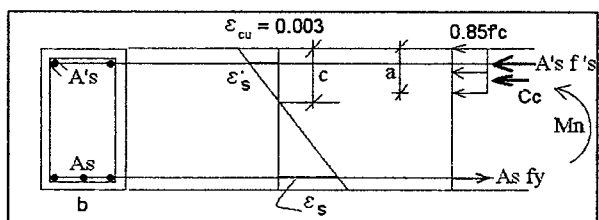
¿Por qué no coinciden las cargas y los factores de seguridad?

- a) El método de coeficientes considera alternancia de cargas. Todos los máximos no ocurren simultáneamente ya que los estados de carga que los producen son distintos. Los patrones de carga que producen máximos positivos difieren de los que producen máximos negativos. La armadura colocada responde a la alternancia y en consecuencia para el patrón único de cargas utilizado para el análisis límite, hay exceso de acero.
- b) Se ha colocado más acero positivo del estrictamente necesario, por lo menos en los tramos interiores.

11.15 Recomendaciones para el Armado de Aligerados Convencionales

- a) Los aligerados no llevan refuerzo corrido en la parte superior, salvo en las situaciones en las cuales se presente inversión de momentos, es decir que en las zonas centrales de los paños exista momento negativo en lugar de positivo.
- b) La armadura positiva por flexión no debe ser menor que la correspondiente a la armadura mínima (Tabla 11.2). El requerimiento de la Norma Peruana relacionado con el acero mínimo negativo, puede resultar excesivo, en estos casos conviene colocar alrededor de 1.3 veces al área de acero que resulte del cálculo.
- c) En la losa superior, perpendicularmente a la armadura principal, debe colocarse, sin excepciones y como mínimo, la armadura de retracción y temperatura.
- d) Los aligerados se arman, con barras de pequeño diámetro (8 mm, 3/8", 1/2" y hasta 5/8").
- e) La armadura negativa debe consistir, en bastones con barras de a lo sumo dos diámetros iguales o distintos (8 mm + 3/8", 3/8" + 3/8", 3/8" + 1/2", 1/2" + 1/2", 1/2" + 5/8"). Por el punto de inflexión debe pasar por lo menos la tercera parte del acero negativo determinado para el apoyo y extenderse más allá de este punto una distancia no menor que d , $12 d_b$ ni $l_n / 16$.
- f) Ningún bastón positivo a negativo, debe tener una longitud menor que su longitud de anclaje a ambos lados de la sección crítica (de máximo momento).
- g) La armadura positiva consiste en por lo menos una barra corrida y si fuera necesario un solo bastón adicional. En viguetas de 0.10 m de ancho no se pueden acomodar más de dos barras de refuerzo inferior. Al apoyo debe llegar por lo menos la tercera parte del acero necesario en la sección de máximo positivo. La selección de los bastones, obedece a las mismas reglas dadas para el acero negativo.

CAPITULO 12



Secciones con Acero en Compresión

12.1 Introducción

Muchas de las vigas, losas y aligerados que diseñamos y construimos, además del acero en tracción suelen tener acero en compresión por razones de tipo constructivo. En las vigas se suele colocar acero corrido positivo y negativo para poder armar los estribos. En estos casos el aporte del acero en compresión a la resistencia en flexión de las secciones, suele ser despreciable y por consiguiente su presencia se ignora. Sin embargo la presencia de acero en compresión, aún cuando no sea necesario por resistencia, tiene una marcada influencia en el comportamiento de las secciones ya que reduce el flujo plástico del concreto comprimido y en consecuencia las deflexiones diferidas de la viga. Además mejora la ductilidad de la sección ya que "alivia" las compresiones en el concreto.

Existen situaciones en las cuales el acero en compresión es necesario por razones de resistencia de las secciones. Este suele ser el caso en el cual la cantidad de acero necesaria para satisfacer la resistencia requerida, excede del límite máximo impuesto por las normas ($0.75 A_s b$). En esta situación puede utilizarse acero en compresión para "ayudar" al concreto comprimido a proveer la cantidad suficiente de fuerza en compresión, necesaria para equilibrar al acero en tracción que excede del límite máximo.

También el acero en compresión permite, en muchos casos, lograr que la deformación del acero en tracción (ϵ_t) alcance el valor mínimo de 0.5% exigido por el ACI-11 para que una sección clasifique como controlada por tracción (véase el Capítulo 17) o alcanzar la deformación mínima de 0.4% exigida por el Artículo 10.3.5 de la Norma E.060.

Iniciemos el estudio de la resistencia de las secciones rectangulares con acero en compresión ($A's$), mediante el análisis del caso particular indicado en la figura 12-1. Se trata de una sección de 0.30×0.60 m reforzada en el primer caso con 3 - 1" que equivalen a una cuantía del acero en tracción $\rho = 0.93\%$ ($0.44 A_s b$) y en el segundo caso añadiendo 2 - 1" en la zona de compresiones por flexión. Con el análisis de este caso particular, se pretende formar una idea de la manera como se modifican los principales elementos mecánicos cuando la sección alcanza su resistencia nominal.

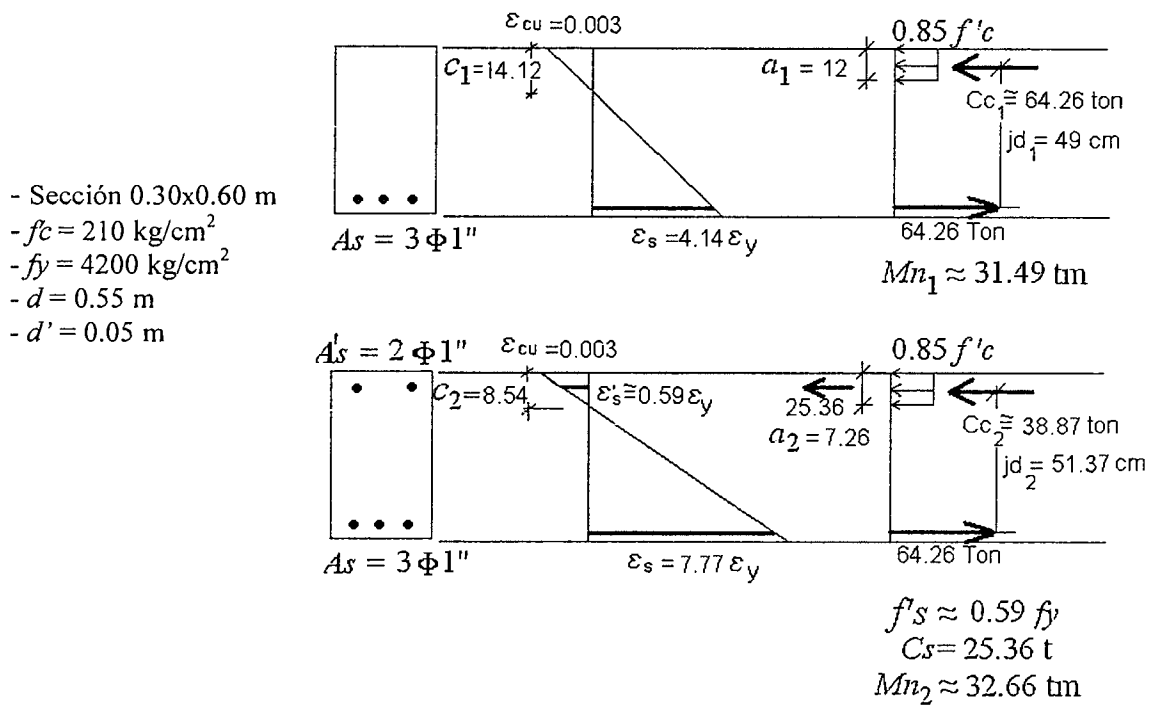


Fig. 12-1 Sección rectangular sin acero y con acero en compresión

De la comparación de los estados de deformación, esfuerzos y de las resistencias entre ambas secciones (figura 12-1), es posible concluir lo siguiente:

- $c_1 > c_2$ A'_s reduce la profundidad del eje neutro.
- $a_1 > a_2$ A'_s reduce la profundidad del bloque de compresiones.
- $C_{c1} > C_{c2}$ A'_s reduce la compresión total en el concreto.
- $jd_1 < jd_2$ El brazo interno de palanca se modifica ligeramente.
- $Mn_1 < Mn_2$ La presencia de A'_s aumenta ligeramente la resistencia (Mn) de la sección, en este caso tan solo un 3.7%.
- $f'_s < f_y$ El acero de compresión, en este caso, no ha llegado a la fluencia.
- $\epsilon_{s1} < \epsilon_{s2}$ El acero en compresión hace que la deformación en el acero de tracción aumente.
- La presencia de A'_s mejora la ductilidad de la sección ya que la curvatura última aumenta. En el caso anterior la curvatura última (bajo las hipótesis del ACI) para la sección sin acero en compresión es:

$$\phi_{u1} = \frac{0.003}{14.12} = 2.12 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}$$

Para la sección con acero en compresión:

$$\phi_{u2} = \frac{0.003}{8.54} = 3.51 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}$$

En consecuencia, el incremento en la curvatura última es, en este caso, del 65%.

De las comparaciones anteriores resulta claro que aún cuando la influencia del acero en compresión en la resistencia de la sección resultó ser despreciable, este sí tiene influencia en otros aspectos del comportamiento de la sección.

La tabla 12-1 resume, para distintas calidades de concreto, los valores de d'/a y d'/c por debajo de los cuales se tiene fluencia en el acero de compresión.

Tabla 12-1 Valores límites para verificar si el acero en compresión fluye

$f'c$ (kg/cm ²)	β_1	$(d'/a) \text{ lim}$	$(d'/c) \text{ lim}$
175	0.85	0.353	0.30
210	0.85	0.353	0.30
280	0.85	0.353	0.30
350	0.80	0.375	0.30
420	0.75	0.400	0.30
450	0.73	0.412	0.30

Los valores de $(d'/a) \text{ lim}$ y de $(d'/c) \text{ lim}$ son aplicables a cualquier geometría de sección.
 Si el valor de (d'/a) de la sección es mayor que el valor de $(d'/a) \text{ lim}$ de la tabla, el acero en compresión no está en fluencia y viceversa.
 Los valores de la tabla han sido calculados para:
 $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $\epsilon_y = 0.0021$
 $\epsilon_{cu} = 0.003$

Es posible demostrar, que para lograr la fluencia del acero en compresión en una sección rectangular, debe cumplirse:

$$\rho - \rho' \geq 0.85 \frac{f'c}{f_y} \beta_1 \frac{d'}{d} \frac{6,000}{6,000 - f_y} \quad (\text{valido para } \epsilon_{cu} = 0.003 \text{ y } E_s = 2 \times 10^6)$$

A partir de la expresión anterior se obtiene:

$$\rho - \rho' \geq \rho_{br} \frac{d' 6,000 + f_y}{d 6,000 - f_y} \quad (12-5)$$

Donde ρ_{br} es la cuantía balanceada de una sección rectangular sin acero en compresión. Para $f_y = 4,200$ la expresión 12-5 se convierte en:

$$\rho - \rho' \geq 5.667 \rho_{br} \frac{d'}{d} \quad (12-6)$$

$$A_s - A's \geq 5.667 \rho_{br} b d' \quad (12-7)$$

A partir de la ecuación 12-7, podemos afirmar que en una sección rectangular la cantidad de acero en tracción necesaria para que el acero en compresión fluya, no debe ser menor de:

$$A_s \geq A's + 5.667 \rho_{br} b d'$$

Visto de otro modo, la cantidad de acero en compresión para que éste fluya, no deberá exceder de:

$$A's \leq A_s - 5.667 \rho_{br} b d'$$

12.2 Verificación de la Fluencia del Acero en Compresión

Normalmente en el análisis de secciones con acero en compresión, el problema estriba en determinar el esfuerzo en el acero de compresión (f'_s) cuando la sección alcanza su resistencia nominal. En la mayoría de los casos el acero de tracción estará en fluencia.

Con relación a la figura 12-2 deduciremos, basándonos en la compatibilidad de deformaciones, las condiciones necesarias para que el acero en compresión fluya.

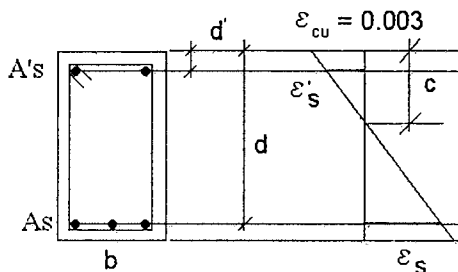


Fig. 12-2 Estado de deformaciones al alcanzar M_n

Definimos: $\rho = \frac{A_s}{bd}$ $\rho' = \frac{A'_s}{bd}$

Compatibilidad: $\frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{\epsilon'_s}{c - d'} \rightarrow \epsilon'_s = \epsilon_{cu} \left(\frac{c - d'}{c} \right)$ (12 - 1)

↑ Ecuación general, aplicable a a cualquier geometría.

Para que exista fluencia en el acero de compresión, debe cumplirse:

$$\epsilon'_s \geq f_y / E_s \quad \frac{c - d'}{c} \epsilon_{cu} \geq \epsilon_y$$

$$\frac{d'}{c} \leq 1 - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_{cu}} \quad (12 - 2)$$

Si $\epsilon_{cu} = 0.003$ la ecuación 12-2 se transforma en:

$$\frac{d'}{c} \leq 1 - \frac{f_y}{6,000} \quad (12 - 3)$$

Si consideramos $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ ($\epsilon_y = 0.0021$), entonces:

$$\frac{d'}{c} \leq 0.3 \quad (f_y = 4200 \text{ y } \epsilon_{cu} = 0.003)$$

Si $d' \leq 0.3 c \Rightarrow A'_s$ Fluye (12 - 4)

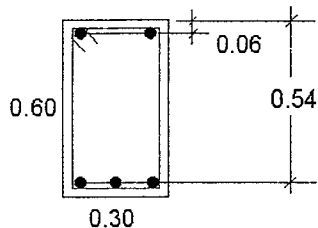
Recordando que $a = \beta_1 c$ la ecuación 12-4 se transforma en:

$$\frac{d'}{a} \leq \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{f_y}{6,000} \right) \quad (\text{para } \epsilon_{cu} = 0.003)$$

$$\frac{d'}{a} \leq \frac{0.3}{\beta_1} \quad (\text{valido para } f_y = 4,200 \text{ y } \epsilon_{cu} = 0.003)$$

12.3 Influencia del Acero en Compresión en la resistencia

Con la intención de ampliar el análisis del efecto del acero en compresión realizado en la sección 12.1, analicemos la sección mostrada a continuación reforzada con 3 - 1" en tracción y con una cantidad de acero en compresión variable. Todas las otras cantidades se mantendrán constantes:



$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 3 - 1'' (15.3 \text{ cm}^2 \text{ valor fijo})$$

$$\rho = 15.3 / (30 \times 54) = 0.94\% \approx 0.44 A_s b$$

$$A'_s = \text{variable (para evaluar su influencia en la resistencia)}$$

$$d = 0.54 \text{ m (valor fijo)}$$

$$d' = 0.06 \text{ m (valor fijo)}$$

$$d'/d = 0.11$$

La tabla a continuación resume los resultados de los seis casos analizados

A'_s	c (cm)	c/d	$\phi u \times 10^{-4}$ (1/cm)	ϵ'_s / ϵ_y	ϵ_s / ϵ_y	Mn (kg-m)	Incremento en la resistencia
0	14.12	0.26	2.12	--	4.036	30,845	base
2 - 5/8" 4.0 cm ²	11.58	0.21	2.59	- 0.688	5.235	31,415	1.8 %
2 - 3/4" 5.68 cm ²	10.79	0.20	2.78	- 0.634	5.719	31,540	2.2 %
2 - 1" 10.2 cm ²	9.32	0.17	3.22	- 0.509	6.845	31,710	2.8 %
3 - 1" 15.3 cm ²	8.38	0.15	3.58	- 0.406	7.773	31,775	3.0 %
4 - 1" 20.4 cm ²	7.83	0.14	3.83	- 0.334	8.423	31,795	3.1 %

- Se aprecia claramente que el acero en compresión tiene muy poca influencia en la resistencia a flexión simple, por lo tanto su aporte suele despreciarse en los cálculos de la resistencia a flexión simple. En ninguno de los casos analizados el acero en compresión alcanzó la fluencia.
- Sí tiene una marcada influencia en la deformación del acero de tracción y en la curvatura última de la sección (ϕu). Este hecho se nota claramente si comparamos las curvaturas últimas para los casos de $A'_s = 0$ y de $A'_s = 15.3 \text{ cm}^2$, este segundo caso corresponde a una sección con igual cantidad de acero en tracción y compresión, el incremento en la curvatura última es cercano al 70%.
- Para esta sección en particular, si se considera por ejemplo el caso de $A'_s = 2 - 1''$, la cantidad mínima de acero en tracción necesaria, en una sección rectangular, para lograr la fluencia del acero en compresión, viene dada por la ecuación 12-7:

$$A_s \geq A'_s + 5.667 \rho_{br} b d'$$

$$A_s \geq 10.2 + 5.667 (2.13\%) (30) (6) = 31.9 \text{ cm}^2$$

Es decir, se necesitan 31.9 cm^2 de acero en tracción para lograr que los 2 - 1" en compresión fluyan. Con un área inferior no se logra la fluencia. Con estas cantidades de acero en tracción (31.9 cm^2) y en compresión (10.2 cm^2), se tendría:

$$c = 20.02 \text{ cm} \quad \frac{\epsilon_s}{\epsilon_y} = 2.42 \quad \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_y} = 1.0$$

$$Mn \approx 62 \text{ ton-m.}$$

12.4 Influencia del Acero en Compresión en el Comportamiento

a) En general la presencia de $A's$ modifica poco la resistencia en flexión (Mn) de la sección. Este hecho se pudo comprobar en los casos particulares analizados en las secciones 12.1 y 12.3.

La figura 12.3 (adaptada de MacGregor) muestra el incremento en la resistencia en flexión de secciones rectangulares, para dos cuantías de acero en tracción y para vigas chatas y peraltadas. El máximo aporte del acero en compresión a la resistencia, se produce en las vigas peraltadas con bastante acero en tracción y no excede del 15%.

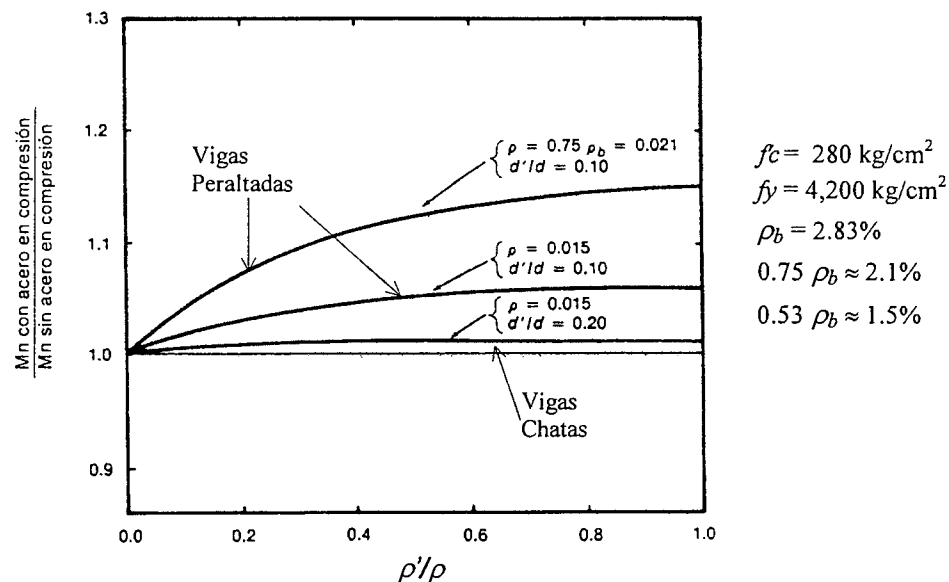


Fig. 12-3 Incremento en Mn debido a la presencia de acero en compresión.

- b) El acero en compresión es importante cuando la sección no tiene suficiente resistencia, es decir, cuando el área de acero en tracción excede el límite de $0.75 A_s b$ impuesto por la norma. En este caso la presencia de $A's$ permitirá colocar mayor cantidad de acero en tracción y la resistencia aumentara, no por el acero en compresión, si no por la mayor cantidad de acero en tracción que podremos colocar.
- c) El acero en compresión reduce el nivel de compresiones en el concreto, por lo tanto se reduce el creep o flujo plástico de la zona comprimida y en consecuencia, se reducen las deflexiones diferidas o por carga sostenida.

La figura 12-4 muestra los resultados de las deflexiones medidas en ensayos de vigas sometidas a cargas de larga duración (cargas sostenidas) de intensidad constante. Se aprecia claramente el efecto del flujo plástico en las deflexiones y la manera como la presencia de acero en compresión reduce las deflexiones diferidas producidas por las cargas sostenidas.

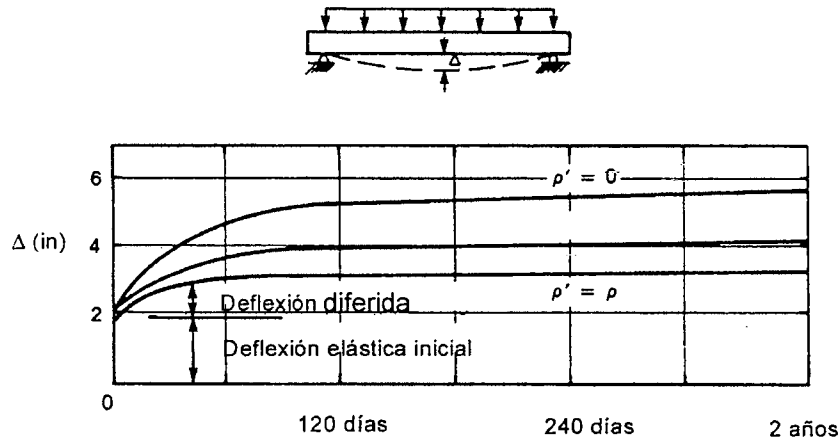


Fig. 12-4 Influencia del acero en compresión en las deflexiones originadas por las cargas sostenidas.

d) La presencia de acero en compresión mejora la ductilidad de la sección ya que la curvatura última aumenta. La figura 12-5 (MacGregor) ilustra el comportamiento de secciones rectangulares a través de los diagramas momento – curvatura correspondientes a tres cuantías del acero en compresión.

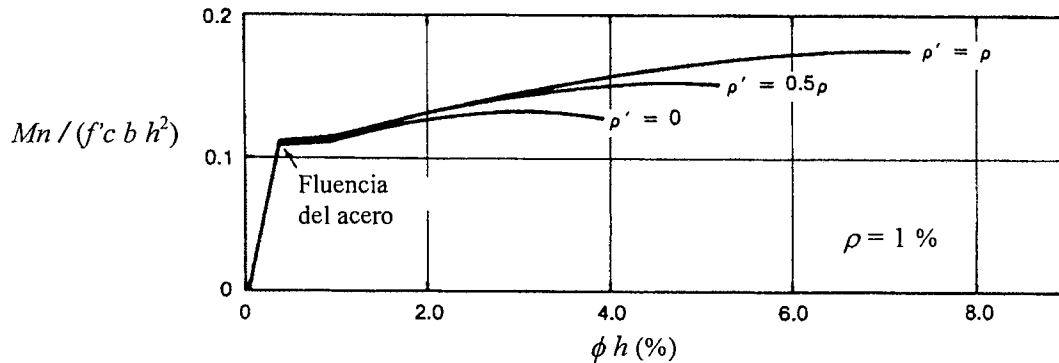


Fig. 12-5 Influencia del acero en compresión en la resistencia y ductilidad de secciones con falla por tracción ($A_s < A_{sb}$).

e) El acero en compresión puede modificar el modo de falla de una sección, de una falla en compresión (sobre reforzada) a una falla en tracción. La figura 12-6 muestra la manera como el acero en compresión modifica el tipo de falla de un sección con falla en compresión ($\rho' = 0$).

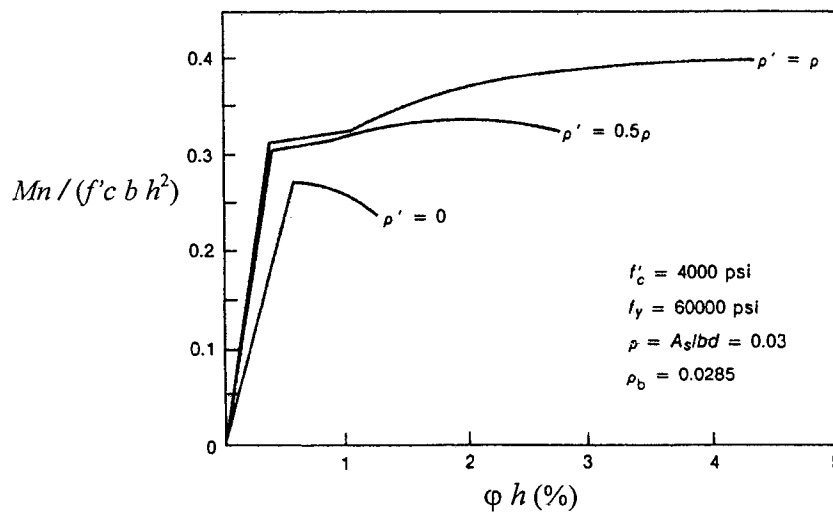


Fig. 12-6 Diagramas momento – curvatura para una sección con falla por compresión y efecto del acero en compresión.

- f) Para que el acero en compresión trabaje de manera efectiva cuando la sección se aproxima a la falla, debe estar "sujeto" por estribos que eviten el pandeo del acero comprimido. Esto es particularmente importante cuando la sección se aproxima a la falla y el recubrimiento de concreto se desprende o salta, sin los estribos adecuados el acero puede pandear y no ser efectivo. La figura 12-7 ilustra los requerimientos de la Norma E.060 del 2009 contenidos en el artículo 7.10.5.2.

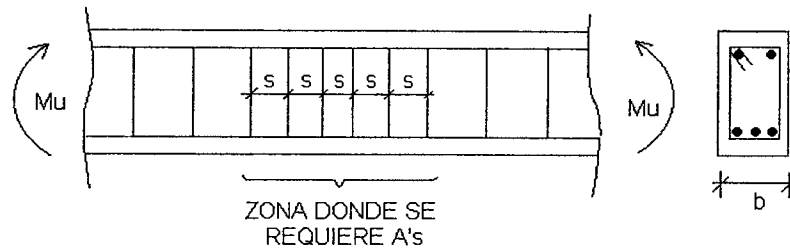


Fig. 12-7 Requerimientos de la Norma E.060 para los estribos en las zonas en que se necesita acero en compresión.

$$s \leq 16 db \quad (db = \text{diámetro de las barras en compresión})$$

$$s \leq b \quad (b = \text{ancho de la sección})$$

$$s \leq 48 de \quad (de = \text{diámetro de las barras de los estribos})$$

$$s \leq 0.30 \text{ m} \quad (\text{recomendable})$$

Los estribos deben ser por lo menos de 8 mm para barras longitudinales de hasta 5/8" de diámetro, de 3/8" para barras en compresión de hasta 1" de diámetro y de 1/2" para barras de mayor diámetro.

12.5 Cuantía Balanceada en secciones con Acero en Compresión

A partir de la definición de falla o estado balanceado es simple derivar las ecuaciones que permiten determinar la cantidad de acero en tracción que, junto a una determinada cantidad de acero en compresión, producen una falla balanceada de la sección, esta deducción se presentó en el acápite 10.7. A continuación se volverá a realizar la deducción para el caso particular de una sección rectangular como la mostrada en la figura 12-8.

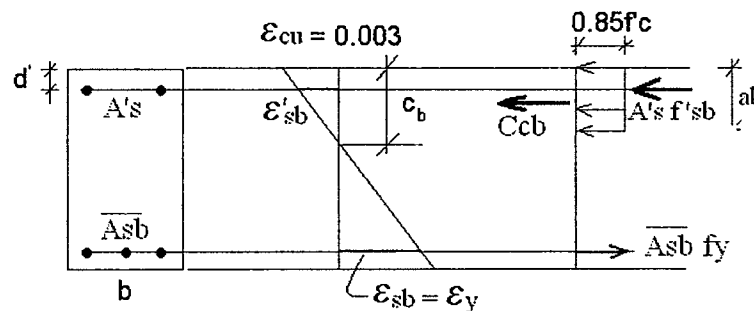


Fig. 12-8 Falla balanceada en una sección rectangular con acero en compresión.

Compatibilidad: $\epsilon_{sb} = 0.003 \frac{d - cb}{cb} = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$

Para $E_s = 2 \times 10^6$ y $\epsilon_{cu} = 0.003$

$$cb = \frac{6,000}{6,000 + f_y} d \quad (12-8)$$

$$ab = \frac{6,000}{6,000 + f_y} \beta_1 d \quad (12-9)$$

Para $f_y = 4,200$ $cb/d = 0.588$ (12-10)

Las ecuaciones 12-8 y 12-9 son válidas para cualquier geometría o sección, con la condición de que el plano de carga sea un plano de simetría de la sección.

$$\varepsilon'_{sb} = \left(\frac{cb - d'}{cb} \right) 0.003 \quad f'_{sb} = E_s \varepsilon'_{sb}$$

$$f'_{sb} = 0.003 E_s \left(1 - \frac{d'}{cb} \right) = 6,000 \left(1 - \frac{d'}{cb} \right) \quad (12-11)$$

Sustituyendo 12-8 en 12-11:

$$f'_{sb} = 6,000 \left[1 - \frac{d'}{d} \frac{6000 + fy}{6000} \right] \leq fy \quad (12-12)$$

$$\text{Para } fy = 4,200 \quad f'_{sb} = 6,000 \left[1 - 1.7 \frac{d'}{d} \right] \leq fy \quad (12-13)$$

Las expresiones 12-12 y 12-13 permiten calcular el esfuerzo en el acero en compresión en la falla balanceada. De 12-13 es fácil demostrar, que para que el acero en compresión esté en fluencia en la falla balanceada deberá cumplirse:

$$f'_{sb} = fy \quad \text{si se cumple que } \frac{d'}{d} \leq 0.176 \quad (fy = 4,200)$$

$$\text{Equilibrio de la sección: } 0.85 f'_c ab b + A's f'_{sb} = \overline{Asb} fy \quad (12-14)$$

La profundidad del bloque de compresiones en la falla balanceada (ecuación 12-9) no se modifica por la presencia de acero en compresión, por lo tanto:

$$0.85 f'_c ab b = Asbr$$

Donde $Asbr$ es el acero balanceado en una sección rectangular sin acero en compresión. Reemplazando en la ecuación 12-14 de equilibrio tendremos:

$$Asbr fy + A's f'_{sb} = \overline{Asb} fy$$

$$\overline{Asb} = Asbr + A's \frac{f'_{sb}}{fy} \quad \text{Acero balanceado de una SR con acero en compresión}$$

$$\therefore \overline{\rho}_b = \rho_{br} + \rho' \frac{f'_{sb}}{fy} \quad (12-15)$$

Donde f'_{sb} viene dado por 12-12 ó 12-13.

Limitación de la Norma - máxima cantidad de acero en secciones rectangulares con acero en compresión:

$$\overline{\rho}_{\max} = 0.75 \rho_{br} + \rho' \frac{f'_{sb}}{fy} \quad (12-16)$$

$$\overline{As}_{\max} = 0.75 Asbr + A's \frac{f'_{sb}}{fy} \quad (12-17)$$

Es interesante anotar en las ecuaciones anteriores, que la parte correspondiente al acero en compresión no está limitada por el factor 0.75, tal como sucede para el acero en tracción. Esto se explica por el hecho de que el acero adicional de tracción que añadimos por encima de $0.75 Asb$ no necesita de concreto para equilibrarse, este se equilibra por la presencia de acero en compresión.

Recuerde que es posible utilizar el procedimiento alternativo de la Norma (Artículo 10.3.5) para determinar la cantidad máxima de acero permitida. Dicho procedimiento está basado en la deformación mínima del acero más alejado del borde comprimido (ε_t) la cual no debe ser menor que 0.4%.

12.6 Resistencia de una Sección Rectangular con Acero en Compresión

Con las hipótesis de la Norma E.060 y las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas, sin acudir a fórmulas específicas, es posible analizar una sección con acero en compresión. Normalmente el problema estriba en determinar el esfuerzo en el acero de compresión ($f's$). En la mayoría de los casos el acero de tracción estará en fluencia $f_s = f_y$.

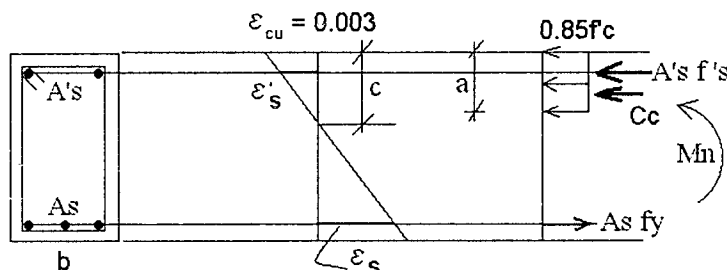


Fig. 12-9 Resistencia de una sección rectangular con acero en compresión.

Con relación a la figura 12-9 y asumiendo, con cargo a verificar, que el acero en tracción está en fluencia, la resistencia se puede obtener por superposición de la manera indicada en la figura 12-10.

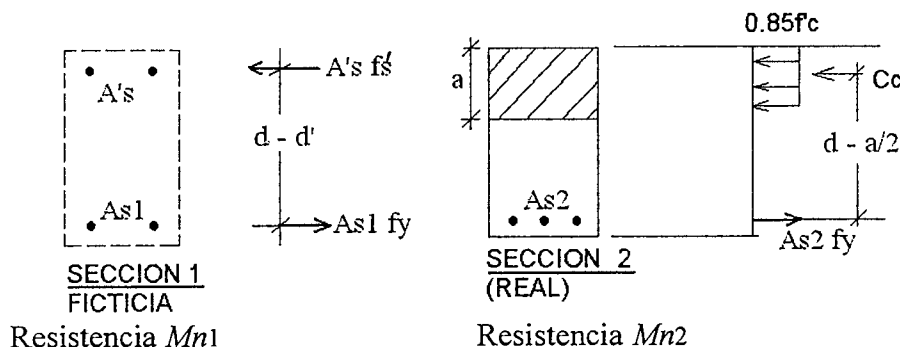


Fig. 12-10 Resistencia de la sección obtenida por superposición

Deberá Cumplirse: $A_{s1} + A_{s2} = A_s$ $M_{n1} + M_{n2} = M_n$

12.6.1 Caso 1: El acero en compresión fluye ($\epsilon's \geq \epsilon_y$). Sabemos que esto sucede cuando:

$$d' \leq 0.3c \quad \text{ó} \quad d' \leq \frac{0.3a}{\beta_1} \quad \text{ó} \quad \rho - \rho' \geq 5.667 \rho_{br} \frac{d'}{d} \quad (\text{rectangulares})$$

Las desigualdades anteriores son válidas para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ y una deformación de agotamiento del concreto de 0.003.

- Sección 1 (ficticia, solo acero):

Equilibrio: $A's f's = A_{s1} f_y$
 Si $f's = f_y \Rightarrow A_{s1} = A's$
 $M_{n1} = A's f_y (d - d')$ (12-18)

- Sección 2:

$$As_2 = As - As_1 \quad \text{Si } A's \text{ fluye entonces } As_2 = As - A's$$

$$\text{Equilibrio } Cc = T \Rightarrow a = \frac{(As - A's)fy}{0.85 f'_c b} \quad (12-19)$$

$$\therefore Mn_2 = (As - A's) fy \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (12-20)$$

$$\underline{\underline{Mn = Mn_1 + Mn_2 = A's fy (d - d') + (As - A's) fy \left(d - \frac{a}{2} \right)}} \quad (12-21)$$

En la deducción anterior se ha ignorado el área de concreto que desplaza el acero en compresión. Este efecto es normalmente despreciable, para cuantías normales de acero en compresión, al ignorarlo la resistencia de la sección se sobrestima en no más del 1%.

12.6.2 Caso 2: El acero en compresión no fluye ($\epsilon'_s < \epsilon_y$)

- Sección 1 (ficticia, solo acero):

$$A's fs = As_1 fy \Rightarrow As_1 = \frac{A's fs}{fy}$$

$$Mn_1 = A's fs (d - d') \quad fs = ?$$

- Sección 2:

$$As_2 = As - As_1$$

$$a = \frac{As fy - A's fs}{0.85 f'_c b} = ??$$

$$Mn_2 = (As - As_1) fy \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad a = ??$$

$$Mn = A's fs (d - d') + (As - As_1) fy \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$\text{ó } Mn = A's fs (d - d') + 0.85 f'_c b a \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

En las ecuaciones anteriores se desconoce el valor de "c" y el valor de $f's$ en consecuencia, no es posible calcular la resistencia de la sección.

Una alternativa para calcular la resistencia de la sección cuando el acero en compresión no fluye, es por tanteos mediante el siguiente procedimiento:

1. Suponer un valor de la posición del eje neutro c ($a = \beta_1 c$)
2. Calcular:

$$\epsilon'_s = 0.003 \left(\frac{c - d'}{c} \right) \quad f'_s = Es \epsilon'_s \leq fy$$

3. Calcular ϵ_s y $fs = Es \epsilon_s \leq fy$
 4. Verificar el equilibrio de la sección $Cc + A's f's = As fs$
- Si no se cumple el equilibrio, regresar al paso 1

Otra alternativa es deducir la ecuación que prediga la resistencia suponiendo, con cargo a verificar, que el acero en tracción fluye ($\epsilon_s \geq \epsilon_y$) tal como se presenta a continuación:

$$T = A_s f_y \quad C_c = 0.85 f'_c b a \quad C_s = f'_s A'_s = (E_s \epsilon'_s) A'_s$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{d'}{c} \right) = 0.003 \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a} \right)$$

$$C_c + C_s = A_s f_y$$

$$0.85 f'_c b a + E_s A'_s \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a} \right) 0.003 = A_s f_y$$

Con $E_s = 2 \times 10^6$, se obtiene

$$(0.85 f'_c b) a^2 + (6,000 A'_s - A_s f_y) a - 6,000 A'_s \beta_1 d' = 0 \quad (12 - 22)$$

en la ecuación anterior, la incógnita es: "a"

$$M_n = 0.85 f'_c b a \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s (d - d') \quad (12 - 23)$$

Verificar que: $\epsilon_s \geq \epsilon_y \quad \epsilon'_s < \epsilon_y$

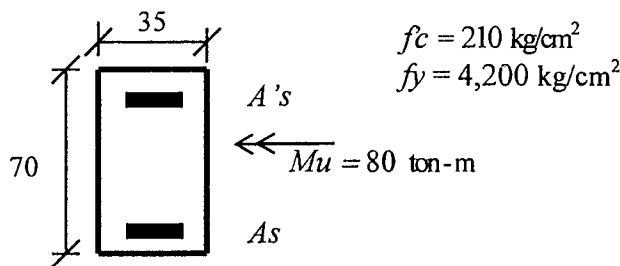
12.7 Diseño de Secciones Rectangulares con Acero en Compresión

El diseño de secciones con acero en compresión se basa en el mismo esquema de superposición presentado en el acápite 12.6.

Se calcula la resistencia de la sección 2 (ver figura 12-10) para la cantidad máxima de acero ($0.75 A_s b$) permitida por la Norma. El momento remanente que no puede ser resistido por el acero en tracción, debe ser resistido por la sección 1 con el acero en compresión y acero adicional en tracción. En los ejemplos a continuación se presenta el procedimiento de diseño para secciones que necesitan acero en compresión.

Ejemplo 12-1 – Diseño de una sección con acero en compresión

Se desea diseñar la sección rectangular mostrada en la figura a continuación, solicitada por un momento flector de 80 ton-m.



Dada la magnitud del momento flector, será necesario colocar el acero de tracción en dos capas, con lo cual tendremos:

$$d \approx 70 - 9 = 61 \text{ cm}$$

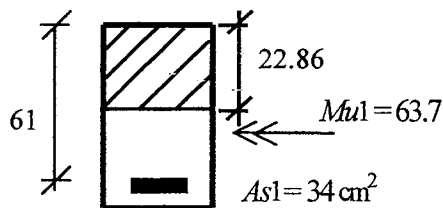
$$d' \approx 6 \text{ cm}$$

- Acero de refuerzo necesario, sin acero en compresión:

$$K_u = \frac{M_u}{b d^2} = \frac{80,000 \times 100}{35 \times 61^2} = 61.43$$

El valor de K_u calculado se sale de la tabla, en consecuencia la sección es insuficiente para la intensidad del momento flector aplicado. Existen varias posibilidades para salvar esta situación, tales como: aumentar el peralte de la viga, aumentar el ancho de la sección, elegir otra calidad de concreto (digamos 280 kg/cm^2), o utilizar acero en compresión. Emplearemos esta última posibilidad.

- Capacidad máxima de la sección con $0.75 A_s b = 0.75 \times 2.13\% \times 35 \times 61 \approx 34 \text{ cm}^2$



$$a = 34 \times 4,200 / (0.85 \times 210 \times 35) = 22.86 \text{ cm}$$

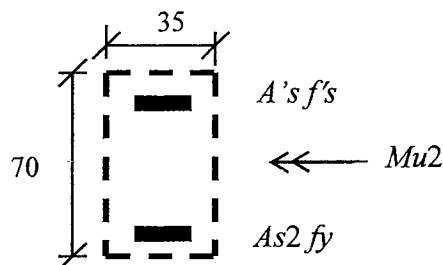
$$c = 22.86 / 0.85 = 26.89 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 1.81 \epsilon_y$$

$$\phi M_n1 = 0.9 \times 4,200 \times 34 \times (61 - 22.86/2) = 63.7 \text{ ton-m}$$

- Momento Remanente = $M_u2 = 80 - 63.7 = 16.3 \text{ ton-m}$

El concreto ya no puede suministrar compresiones adicionales ya que está equilibrando la cantidad máxima de acero en tracción permitida por la Norma, en este caso 34 cm^2 . En consecuencia el momento remanente deberá ser asumido por acero en tracción adicional, equilibrado por acero en compresión. La sección ficticia mostrada a continuación muestra los dos aceros mencionados, el de tracción adicional y el de compresión, que se equilibran sin necesidad de concreto en compresión.



Suma de momentos respecto del acero en compresión:

$$M_u2 = \phi A_s2 f_y (d - d') = 16.3 \text{ ton-m}$$

$$A_s2 = (16.3 \times 10^5) / (0.9 \times 4,200 \times (61 - 6))$$

$$A_s2 = 7.84 \text{ cm}^2$$

$$A_s2 f_y = A's f's \quad (\text{equilibrio})$$

El acero en tracción adicional está en fluencia ya que el eje neutro no va a cambiar, se mantendrá aproximadamente igual al calculado con $0.75 A_s b$ (dependerá de la selección final de los aceros que realmente se colocarán). Verifiquemos la fluencia del acero en compresión, sabemos que para que exista fluencia, deberá cumplirse:

$$d'/c < 0.3 \quad (\text{para } f_y = 4,200) \quad \text{en nuestro caso } d'/c = 6 / 26.98 = 0.223 < 0.3 \quad \text{ok}$$

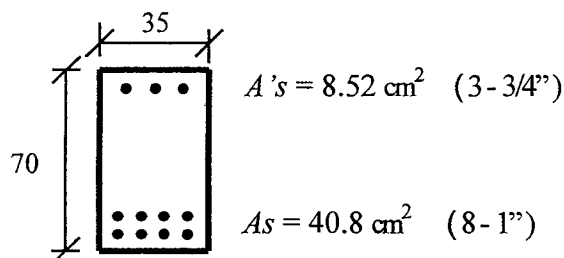
- Acero necesario en compresión.

$$A_s2 f_y = A's f's \Rightarrow A's = 7.84 \text{ cm}^2$$

- Acero total en tracción.

$$A_s = 34 + 7.84 = 41.84 \text{ cm}^2$$

- Selección del acero.



$$d \approx \frac{4 \times 6 + 4 \times 11}{8} \approx 8.5 \text{ cm}$$

$$d \approx 70 - 8.5 \approx 61.5 \text{ cm}$$

- Verificación de la capacidad con el acero seleccionado.

Suponiendo que $A's$ fluye

$$a = \frac{(A_s - A's)f_y}{0.85f'c b} = 21.7 \text{ cm}$$

$$c = 21.7 / 0.85 = 25.53 \quad d'/c = 6 / 25.53 = 0.235 < 0.3 \Rightarrow A's \text{ fluye}$$

$$\epsilon's = 0.003 \times (c - d') / c = 0.003 \times (25.53 - 6) / 25.53 = 0.00229 \approx 1.09 \epsilon_y$$

Verificamos la fluencia del acero de tracción.

$$cb / d = 0.588 \quad c / d = 25.53 / 61 = 0.418 < 0.588 \Rightarrow A_s \text{ fluye}$$

$$\epsilon_s = 0.003 \times (d - c) / c \approx 0.42\% \quad \epsilon_s \approx 2 \epsilon_y$$

$$\phi Mn = 0.9 \left[(40.8 - 8.52) \times 4,200 \times \left(61 - \frac{21.7}{2}\right) + 8.52 \times 4,200 \times (61 - 6) \right]$$

$$\phi Mn \approx 61.19 + 17.71 = 78.9 \text{ ton-m} \quad \phi Mn \approx 0.986 Mu \quad (Mu = 80)$$

- Verificación del acero máximo permitido por la Norma. Esta verificación es innecesaria, ya que si se analiza la metodología empleada para el diseño es posible concluir que siempre se cumplirá la limitación de la Norma. Haremos la verificación por curiosidad.

$$As_{max} = 0.75 As_{br} + A's f'sb / f_y \quad (\text{limitación de la Norma})$$

$$0.75 As_{br} = 34.1 \text{ cm}^2$$

$$f'sb = 6,000 \times (1 - 1.7 \times (6/61)) \approx 5,000 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow f'sb = f_y$$

$$As_{max} = 34.1 + 8.52 \approx 43 \text{ cm}^2$$

$$As_{colocado} = 40.8 \text{ cm}^2 \text{ ok}$$

Nótese que el diseño cumple con la limitación del acero máximo de la Norma E-060 ($0.75 As_b$). No cumple con la exigencia del ACI-11 de tener una deformación mínima en el acero de tracción (ϵ_t) del 0.5% ya que la deformación calculada en el acero más alejado del borde comprimido ($d_t = 64$) es $\epsilon_t \approx 0.45\%$ y por lo tanto no clasifica como una sección controlada por tracción y sería necesario reducir el factor ϕ (véase el Capítulo 17). Sin embargo, sí cumple con el artículo 10.3.5 de la Norma E.060 el cual, como alternativa al límite de $0.75 As_b$, exige una deformación mínima ϵ_t de 0.4%.

Es ilustrativo calcular la resistencia de la sección utilizando la posición exacta de los aceros de refuerzo seleccionados (3 de 3/4" en compresión y 8 de 1" en tracción dispuestos en dos capas) los resultados son:

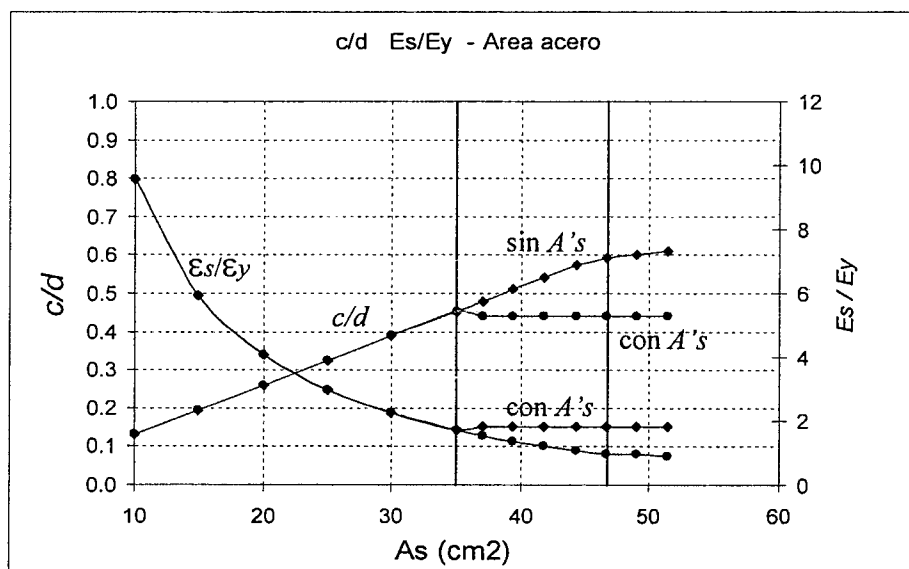
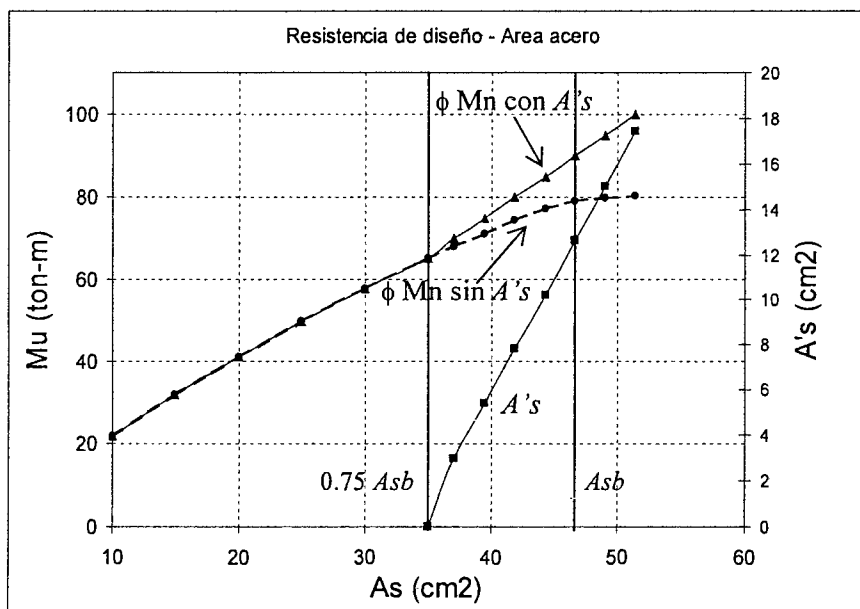
$$c = 25.53 \text{ cm} \quad \phi Mn = 79.68 \text{ ton-m} \quad \epsilon_t = 0.452\%$$

Los gráficos insertos a continuación han sido construidos suponiendo que tanto $d = 61 \text{ cm}$ como $d' = 6 \text{ cm}$ se mantienen constantes.

El primero de ellos muestra la variación de ϕMn contra el área de acero en tracción A_s . A partir de $0.75 As_b$ se adicionó acero en compresión a la sección, para no exceder el límite máximo de acero en tracción impuesto por la Norma. El acero en compresión se determinó siguiendo la metodología para el diseño de secciones con acero en compresión, presentada a lo largo de este ejemplo.

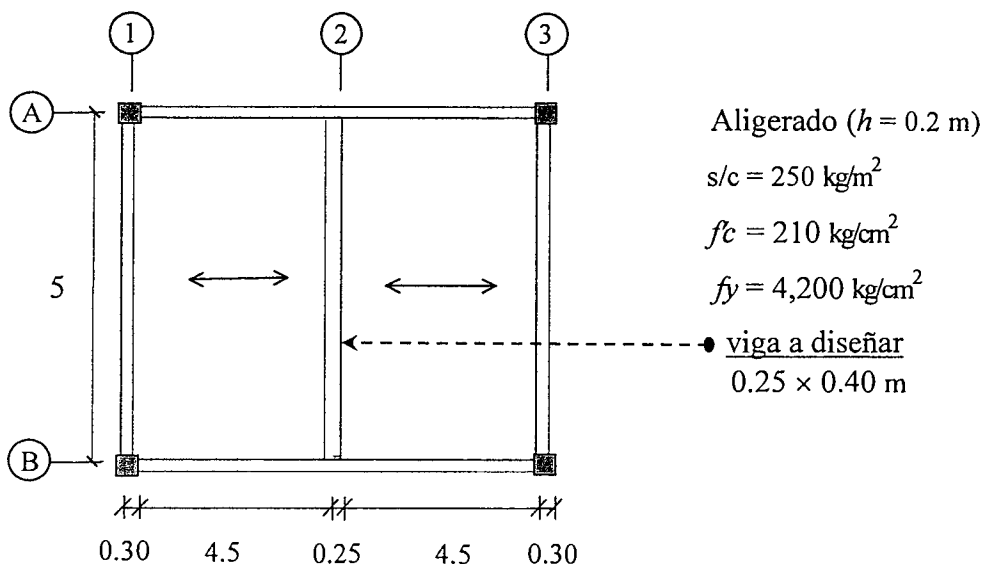
A partir de este límite se nota una clara diferencia en el comportamiento de la sección. La sección con acero en compresión sigue incrementando su resistencia, es más en teoría, por la manera como hemos diseñado el acero en compresión, no habría límite superior en el incremento de la resistencia. El límite superior viene impuesto por

En el segundo gráfico se muestra la variación de la profundidad del eje neutro (c/d) así como la variación de la deformación del acero en tracción (ϵ_s/ϵ_y). Nuevamente, a partir de $0.75 A_{sb}$, se presenta una marcada diferencia entre la sección sin acero en compresión y la sección con acero en compresión. Por la manera como se diseña el acero en compresión, la profundidad del eje neutro se mantiene constante a partir de esta cantidad de acero. La profundidad del eje neutro corresponde a la de una sección con un refuerzo equivalente a $0.75 A_{sb}$. Para una sección rectangular esta profundidad es de $0.588 \times 0.75 = 0.441 d$. Similar razonamiento es aplicable a la deformación del acero en tracción.



Ejemplo 12-2 – Diseño de una viga con acero en compresión

Diseñar la viga del eje central (Eje 2) que se apoya sobre las vigas longitudinales de los Ejes A y B.



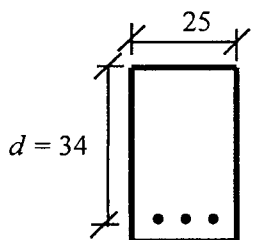
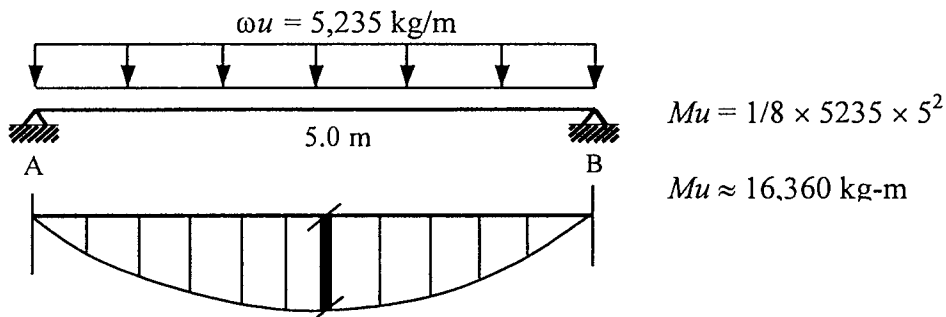
- **Metrado de la viga.** Coeficientes de amplificación de cargas (resistencia requerida) de la Norma E.060 de 1989.

p.p. viga	$2400 \times 0.25 \times 0.4$	=	240 kg/m
aligerado	300×4.5	=	1,350
piso term.	100×4.75	=	475
			2,065 kg/m
s/c	250×4.75	=	1,188 kg/m

$\omega_s \approx 3,250 \text{ kg/m (carga en servicio)}$

$\omega_u = 1.5 \times 2,065 + 1.8 \times 1,188 \approx 5,235 \text{ kg/m}$

- **Modelo estructural simplificado y análisis.** Se ha supuesto que en los extremos de la viga no se produce momento flector negativo, lo que equivale a suponer que la rigidez torsional de las vigas de los ejes A y B es nula.

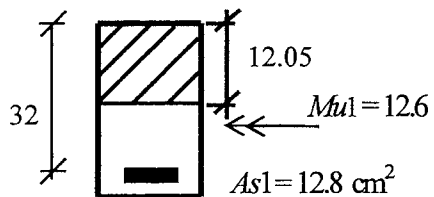


$K_u = Mu / (bd^2) = 16.36 \times 10^5 / (25 \times 34^2) = 56.6$
 $K_u \text{ max} = 49.06 \text{ para } 0.75 \text{ Asb}$

Ya que el valor de K_u de las tablas para diseño de secciones rectangulares, excede del valor máximo correspondiente a $0.75 A_{sb}$, será necesario utilizar acero en compresión. Cabe hacer notar que probablemente esta viga, por lo limitado de su sección transversal y por la intensidad de las cargas aplicadas, tendrá problemas con las deflexiones. En consecuencia, luego de concluir el diseño por flexión, será necesario verificar las deflexiones.

Dada la magnitud del momento flector, será necesario acomodar el acero de tracción en dos capas. Un mejor estimado para el peralte efectivo será: $d \approx 40 - 8 = 32$ cm.

- Capacidad máxima de la sección con $0.75 A_{sb} = 0.75 \times 2.13\% \times 25 \times 32 \approx 12.8 \text{ cm}^2$



$$a = 12.8 \times 4,200 / 0.85 \times 210 \times 25 = 12.05 \text{ cm}$$

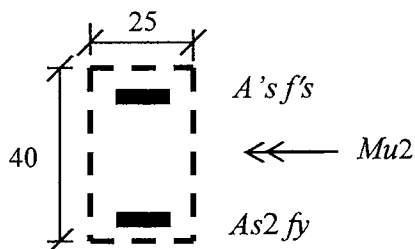
$$c = 12.05 / 0.85 = 14.17 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 1.8 \epsilon_y$$

$$\phi M_{n1} = 0.9 \times 12.8 \times 4,200 (32 - 12.05/2)$$

$$\phi M_{n1} \approx 12.57 \text{ ton-m}$$

- Momento Remanente $M_{u2} = 16,360 - 12,570 = 3,790 \text{ kg-m}$



Suma de momentos respecto del acero en compresión:

$$M_{u2} = \phi A_{s2} f_y (d - d') = 3,790 \text{ kg-m}$$

$$A_{s2} = (3790 \times 10^2) / (0.9 \times 4,200 \times (32 - 6))$$

$$A_{s2} = 3.86 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} f_y = A' s f' s \quad (\text{equilibrio})$$

Verifiquemos la fluencia del acero en compresión, sabemos que para que exista fluencia, deberá cumplirse:

$$d'/c < 0.3 \text{ (para } f_y = 4,200) \text{ en nuestro caso } d'/c = 6 / 14.17 \approx 0.42 > 0.3$$

En consecuencia el acero en compresión no llega a la fluencia, su esfuerzo es:

$$f_s = E_s \epsilon'_s = E_s \times 0.003 \times (c - d') / c = 6,000 \times (14.17 - 6) / 14.17 \approx 3,460 \text{ kg/cm}^2$$

- Acero en compresión necesario.

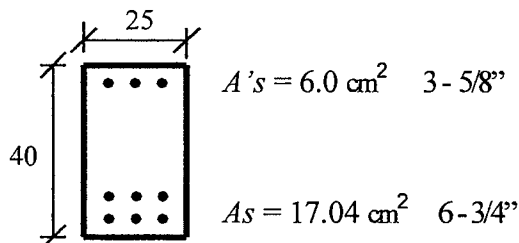
$$A_{s2} f_y = A' s f' s$$

$$A' s = 3.86 \times 4,200 / 3,460 \approx 4.7 \text{ cm}^2$$

- Acero total en tracción.

$$A_s = 12.8 + 3.86 \approx 16.7 \text{ cm}^2$$

- Selección del acero. El centroide del acero en tracción se ubica, aproximadamente a 8.5 cm del fondo de la sección.



$$d \approx \frac{3 \times 6 + 3 \times 11}{6} \approx 8.5 \text{ cm}$$

$$d \approx 40 - 8.5 \approx 32 \text{ cm}$$

- Verifiquemos la capacidad de la sección con el acero seleccionado. Utilizando los procedimientos para el análisis de secciones rectangulares con acero en compresión, se obtiene:

$$A_s = 17.04 \text{ cm}^2 \quad d \approx 32 \text{ cm} \quad A's = 6 \text{ cm}^2 \quad d' \approx 6 \text{ cm}$$

$$c = 13.57 \text{ cm} \quad f's \approx 3,350 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.8 f_y \quad \epsilon_s \approx 0.41\% \approx 1.94 \epsilon_y$$

$$\phi M_n = 16,850 \text{ kg-m} \approx 1.03 Mu$$

- Verificación del acero máximo permitido por la Norma. Esta verificación es innecesaria, ya que si se analiza la metodología empleada para el diseño es posible concluir, que siempre se cumplirá la limitación de la Norma. Haremos la verificación por curiosidad.

$$A_s \text{ max} = 0.75 A_{sbr} + A's \times f'sb / f_y \quad (\text{limitación de la Norma})$$

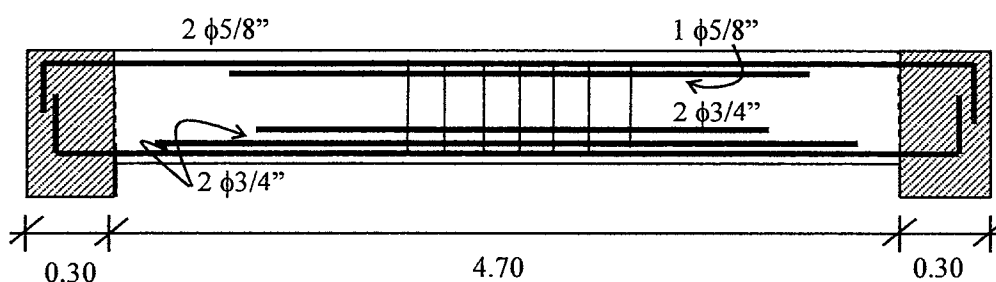
$$0.75 A_{sbr} \approx 12.8 \text{ cm}^2$$

$$f'sb = 6,000 \times (1 - 1.7 \times (6/32)) \approx 4,090 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s \text{ max} = 12.8 + 6 \times 4,090 / 4,200 = 18.6 \text{ cm}^2 \quad A_s \text{ colocado} = 17.04 \text{ cm}^2 \quad \text{ok}$$

El diseño cumple con la limitación del acero máximo de la Norma E-060 (Artículo 10.3.4). La deformación calculada en el centroide del acero más alejado del borde en compresión ($d_t = 34$) es $\epsilon_t \approx 0.45\%$, por lo tanto, la sección cumple también con el procedimiento alternativo (Artículo 10.3.5).

La distribución del acero a lo largo de la viga será la siguiente. No se muestran los estribos por cortante, solo se muestran los estribos para evitar el pandeo en compresión de las barras superiores.



La barra de 5/8", adicional a las dos corridas, deberá prolongarse hasta el punto donde ya no sea necesaria la presencia de acero en compresión. Deberá cortarse luego de interrumpir las dos primeras barras de 3/4" del positivo, en caso contrario la sección estaría sobre reforzada. Recuerde que la cantidad máxima de acero en tracción ($0.75 A_{sb}$) es de 12.8 cm^2 , a partir de ese punto (punto teórico de corte) deberá prolongarse por lo menos una longitud de anclaje en compresión (0.40 m para $\phi 5/8"$).

En la zona donde se necesita el acero en compresión, es decir donde se espera que el acero de compresión desarrolle su esfuerzo máximo par contribuir a la resistencia de la sección, será necesario colocar estribos que eviten el pandeo del acero en compresión, la separación de estos estribos, de acuerdo a la Norma, deberá ser el menor valor entre:

- $s \leq 16 db \leq 16 \times (5/8") \times (2.54) \approx 0.25 \text{ m}$
- $s \leq b \Rightarrow s \leq 0.25 \text{ m}$
- $s \leq 48 de$
- $s \leq 0.30 \text{ m}$ (recomendación)

Por lo tanto la separación de los estribos deberá ser como máximo 0.25 m .

- Para completar el diseño es necesario llevar a cabo:
 - Diseño por fuerza cortante (estribos).
 - Verificación de la deflexión al centro del tramo. Verificación importante por el poco peralte de la viga que obligará a utilizar contraflecha.
 - Control de fisuración al centro del tramo.
 - Corte del fierro positivo (acotar los bastones).

Solución alternativa:

Si en lugar de utilizar acero en compresión, hubiéramos colocado en el aligerado ensanches corridos de concreto de 0.30 m a ambos lados de la viga, entonces en la zona de momentos positivos la sección trabajaría como T con un ancho del ala de 0.85 m y un espesor de 0.20 m.

Con esta solución ya no sería necesario el acero en compresión y adicionalmente mejoraría notablemente el comportamiento de la viga ante deflexiones diferidas (la compresión en el concreto se reduce y en consecuencia se reduce el creep) y también mejoraría la ductilidad de la sección.

Si consideramos una sección T con las características mencionadas en el párrafo anterior, manteniendo d constante ($d \approx 32$ cm) el diseño deberá realizarse para las siguientes características:

$$Mu = 16,360 \text{ kg-m}$$

$$h = 40 \text{ cm} \quad bw = 25 \text{ cm} \quad bf = 85 \quad hf = 20 \quad d \approx 32$$

En este caso la sección T trabaja como rectangular con un bloque de compresiones de altura menor que el espesor del ala:

$$c = 4.7 \text{ cm}$$

$$As \text{ necesario} \approx 14.4 \text{ cm}^2$$

$$As \text{ max} = 43 \text{ cm}^2$$

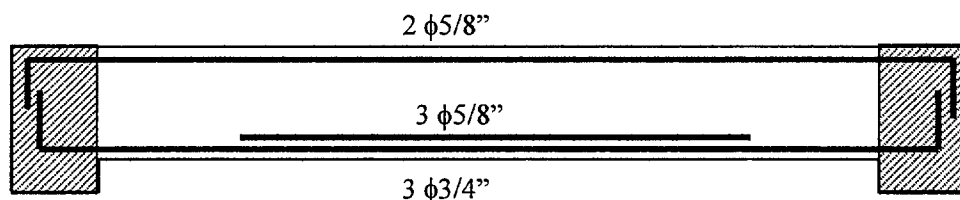
Será necesario colocar $3 - 3/4'' + 3 - 5/8'' = 14.52 \text{ cm}^2$. Con esta cantidad de acero, sin incluir el acero en compresión en los cálculos, con $d \approx 32$ cm, tendremos:

$$c = 4.73 \text{ cm}$$

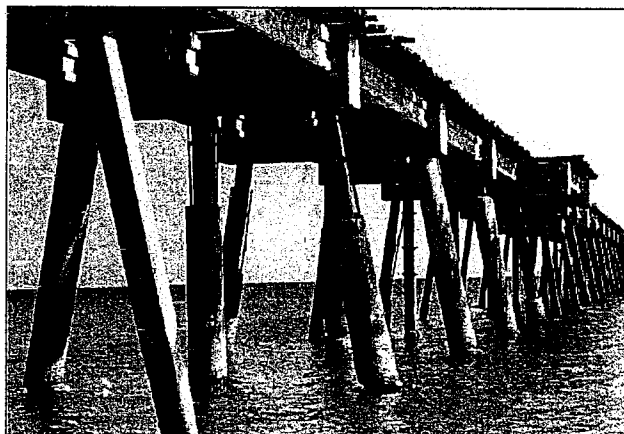
$$\epsilon_s \approx 8.2\epsilon_y$$

$$\phi Mn \approx 16,460 \text{ kg-m}$$

La distribución del acero a lo largo de la viga sería la siguiente. No se muestran los estribos por cortante.



CAPITULO 13



Durabilidad de las Estructuras de Concreto Armado

Fisuración en Elementos de Concreto Armado

13.1 Introducción

El diseño de las estructuras de concreto armado, hoy en día, se realiza sobre la base de los Estados Límites de Rotura (acápite 7.2.1) el denominado Diseño por Resistencia. El Diseño por Resistencia de un elemento, no garantiza necesariamente que su comportamiento bajo cargas de servicio será satisfactorio. Recuerde que la mayor parte del tiempo (por no decir todo) los elementos se encuentran solicitados por cargas en servicio y no por las cargas amplificadas o últimas - que son las que utilizamos para el Diseño por Resistencia - por lo tanto, es indispensable verificar que los elementos no excedan los Estados Límites de Servicio (acápite 7.2.2), estos son principalmente los siguientes:

- *Fisuración.* Es necesario evitar una excesiva fisuración o anchos de grietas mayores que ciertos límites que han demostrado en la práctica estar asociados a un comportamiento satisfactorio. Estudiaremos únicamente la fisuración originada por la flexión.
- *Deflexiones.* Es necesario evitar que las deflexiones excedan ciertos límites permisibles tanto por la apariencia, como por el daño que podría originar en los elementos no estructurales una excesiva deflexión de un elemento estructural. Estudiaremos únicamente las deflexiones ocasionadas por la flexión.
- *Vibraciones.* Es necesario evitar las vibraciones excesivas (verticales, laterales) de la estructura o elemento estructural las que pueden ser originadas por las cargas vivas, viento, sismo, tránsito, movimiento de puentes grúa, etc. Esta limitación está relacionada con el confort y sensación de inseguridad que pueden originar las vibraciones excesivas y es en esencia un problema dinámico.
- *Fatiga.* Si bien la fatiga es un estado límite último ya que involucra la falla o colapso del elemento, suele ocurrir bajo cargas de servicio.
- *Corrosión de las armaduras.* Este es un estado límite que ocurre bajo cargas de servicio y que hoy en día es el responsable de la falla o de la interrupción del funcionamiento de muchas estructuras y elementos estructurales.

Históricamente las deflexiones y la fisuración, que son los únicos Estados Límites de Servicio que estudiaremos, no representaron un problema serio en los elementos de concreto armado. Sin embargo con la aparición en el mercado de los aceros de alta resistencia (grado 60 ó 70), el esfuerzo en el acero bajo cargas de servicio, se incrementó en un 50%. En consecuencia las fisuras y deflexiones, que dependen en gran medida del esfuerzo (deformación) en el acero, se han convertido en un problema a considerar.

Por ejemplo para aceros de $f_y = 2,800 \text{ kg/cm}^2$, los elementos en flexión se diseñaban con un esfuerzo admisible en el acero de $f_s = 0.5 f_y$ ($1,400 \text{ kg/cm}^2$). Hoy en día con los aceros de $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ o más, en los elementos diseñados por resistencia, el esfuerzo en el acero de tracción por flexión suele estar, bajo cargas de servicio, entre 0.5 a 0.6 f_y . Esto significa un esfuerzo bajo cargas de servicio (para aceros Grado 60) entre 2,100 y 2,500 kg/cm^2 . Por lo tanto la deformación en el acero de tracción, bajo cargas de servicio, se ha incrementado entre 50% a 80% en consecuencia las grietas de flexión pueden ser más anchas y las deflexiones mayores.

13.2 Durabilidad del Concreto

Antes de proceder al estudio de la fisuración, conviene presentar algunas ideas generales sobre un tema que hoy en día tiene una importancia fundamental, el tema de la Durabilidad de las Estructuras de Concreto Armado. La fisuración, en muchos casos, tiene una estrecha relación con la durabilidad de los elementos y estructuras de concreto armado. Paralelamente, los problemas de durabilidad se suelen manifestar por la presencia visible de fisuración, en muchas ocasiones, intensa.

La durabilidad de un concreto puede definirse (ACI) como su resistencia a la acción del clima, a los ataques químicos, a la abrasión, o cualquier otro proceso de deterioro. Un concreto durable es aquel que mantiene su forma original, su calidad y sus propiedades al estar expuesto al medio ambiente.

El deterioro anticipado de las estructuras de concreto armado, bajo condiciones normales u ordinarias de operación, puede ser propiciado por diversos factores estructurales y no estructurales. Entre las diversas acciones o agentes de carácter no estructural que suelen ocasionar el deterioro prematuro del concreto, destacan las siguientes por su frecuencia y por la importancia de sus efectos en la durabilidad de las estructuras de concreto armado:

- Ataque por sulfatos.
- Corrosión del acero de refuerzo.
- Ciclos de congelación y deshielo.
- Reacción álcali – agregado.
- Intemperismo, abrasión.
- Ataque por sustancias ácidas.

13.2.1 Ataque por Sulfatos:

Los sulfatos forman parte de las sales inorgánicas que normalmente están presentes en el terreno (suelos), en las aguas freáticas y superficiales y en el agua de mar, aunque su grado de concentración puede ser muy variable. Los sulfatos solubles son principalmente los de sodio, calcio y magnesio.

Durante la hidratación del cemento se libera hidróxido de calcio, de la reacción de los sulfatos con el hidróxido de calcio resulta sulfato de calcio (yeso). El volumen que ocupa el yeso es aproximadamente el doble que el de los compuestos originales que lo forman, este aumento de volumen, que no puede acomodarse en el espacio original de los poros

del concreto, genera esfuerzos internos de tracción en la masa del concreto, que primero lo microfisuran y posteriormente lo desintegran gradualmente.

El sulfato de sodio puede reaccionar con el aluminato de calcio hidratado presente en el cemento Portland endurecido para producir etringita, producto que tiene un mayor volumen que los compuestos originales.

Para que los sulfatos representen un potencial problema de durabilidad en el concreto, es necesario que estén en solución y en la concentración necesaria. Adicionalmente es necesario que las sustancias en solución puedan ingresar en la estructura interna del concreto y permanezcan en ella el tiempo suficiente para que reaccionen con el cemento.

En pocas palabras, se necesita un agente que transporte a la masa del concreto los sulfatos contenidos en el ambiente que lo rodea, este agente es la humedad. Por lo tanto los concretos densos e impermeables o protegidos por una barrera impermeable pueden ser inmunes al ataque de los sulfatos, salvo que puedan ingresar debido a una fuerte fisuración del concreto originada por los esfuerzos o por la retracción.

En algunas circunstancias es recomendable el empleo de cemento Portland resistente a los sulfatos. El cemento Portland Tipo II es de moderada resistencia a los sulfatos y el Tipo V está recomendado para ser utilizado donde se requiera una elevada resistencia a los sulfatos en solución.

13.2.2 Corrosión del Acero de Refuerzo:

La corrosión del acero de refuerzo es considerada uno de los problemas más importantes para el mantenimiento de obras civiles tales como puentes, túneles, muelles y edificios. Los daños que puede ocasionar la corrosión en la infraestructura vial de un país (puentes, muelles) pueden tener un impacto económico y social importante.

El concreto protege al acero de refuerzo mediante dos mecanismos. El primero formando una barrera física que separa a las barras de refuerzo de la exposición directa al medio ambiente y el segundo debido a que la solución encerrada en los poros del concreto es altamente alcalina (pH entre 12.5 y 13.5) y se forma una capa pasiva (película de pasivación) que protege al acero de la corrosión. Cuando el pH del concreto adyacente a las barras de refuerzo cae por debajo de 10 ó 11, la corrosión puede iniciarse.

Los cloruros, al igual que los sulfatos, son sales inorgánicas que abundan en la naturaleza, y por ello suelen hallarse presentes en los componentes del concreto y en las aguas y suelos que tienen contacto con las estructuras. La influencia del ión cloruro como agente impulsor de la corrosión del acero de refuerzo, deriva de dos efectos principales:

1. Al agregarse cloruros a la solución de poros del concreto que actúa como electrólito, se incrementa la conductividad de este y se facilita el movimiento de los iones de hidroxilo (OH⁻) entre el ánodo y el cátodo.
2. Cuando la cantidad de cloruros alcanza un alto grado de concentración, se producen reacciones químicas que originan zonas de deterioro en la película de pasivación, las cuales al funcionar como ánodos dan lugar a la formación de celdas de corrosión electrolítica.

El refuerzo protegido por el concreto no experimentará corrosión hasta que se haya establecido una celda (pila) electroquímica o celda galvánica. Para esto es necesaria la presencia simultánea en el concreto de oxígeno y humedad.

La corrosión del acero de refuerzo tiene dos consecuencias principales que afectan la durabilidad de la estructura:

1. Por efecto de la corrosión se reduce la sección de las barras de acero y se merma fuertemente su adherencia con el concreto. Como consecuencia la capacidad estructural del elemento resulta seriamente comprometida.
2. Como resultado de la corrosión, se originan productos (herrumbre) cuyo volumen es varias veces superior al de los componentes que le dieron origen. Este aumento de volumen trae como consecuencia esfuerzos internos de tracción en el concreto que agrietan progresivamente el recubrimiento de concreto e incluso, lo desprenden totalmente en situaciones de corrosión avanzada.

La corrosión puede iniciarse cuando la carbonatación (disminución de la alcalinidad) del recubrimiento de concreto alcance el acero de refuerzo o cuando la permeabilidad del concreto permita el ingreso de cloruros hasta la superficie del refuerzo. El tiempo necesario para que ocurra corrosión dependerá de la existencia o no de grietas en el concreto, de la agresividad del medio ambiente, del espesor del recubrimiento de su calidad y grado de compactación y de la impermeabilidad del concreto.

Como regla general, la corrosión es más probable que se inicie por:

- La presencia de cloruros.
- La humedad relativa excede del 60%. Por debajo de este valor es poco probable que ocurra corrosión, salvo en presencia de cloruros.
- Temperaturas ambientales altas (se aceleran las reacciones químicas).
- Los ciclos continuos de humedecimiento y secado en el concreto, como en el caso de los pilotes de un muelle en la zona de fluctuación de las mareas o la zona de salpicadura de agua de mar. La corrosión no ocurre en el concreto permanentemente saturado ya que el agua no permite el flujo de oxígeno hacia el acero.
- La presencia de corrientes eléctrica erráticas en el acero de refuerzo.

Es claro que cuando mayor sea el recubrimiento de concreto y más impermeable sea este, tomará más tiempo y trabajo al oxígeno, humedad y iones cloruro el alcanzar a las barras de refuerzo. El agrietamiento del recubrimiento por flexión o por retracción de fragua puede propiciar una vía de ingreso.

Las Normas intentan controlar la corrosión del acero de refuerzo especificando una resistencia mínima del concreto, una relación w/c máxima para reducir la permeabilidad del concreto y espesores apropiados de recubrimiento. También limitan la cantidad máxima de cloruros en la mezcla.

13.2.3 Ciclos de Congelación y Deshielo:

Cuando el agua contenida en los poros del concreto se congela, aumenta su volumen. Al expandirse genera esfuerzos internos lo suficientemente fuertes como para dañar aún a los concretos más fuertes.

En los climas fríos, el daño a las estructuras de concreto, principalmente a las losas de pavimentos, plataformas de puentes y muros de sostenimiento, puede deberse a la acción de los ciclos de congelamiento – deshielo. Los efectos nocivos sobre el concreto endurecido dependen no solamente de las características del concreto sino también de las condiciones específicas del ambiente.

La repetición de ciclos de congelación – deshielo provoca esfuerzos fluctuantes en el concreto que pueden llevarlo a la falla por fatiga.

Los aditivos incorporadores de aire, generan burbujas microscópicas de aire muy juntas que alivian las presiones internas generadas por la congelación del agua.

13.3 Fisuración en Elementos de Concreto Armado

En este acápite trataremos con uno de los varios estados límites de servicio, el de la fisuración. Es necesario evitar una excesiva fisuración o anchos de grietas mayores que ciertos límites que han demostrado en la práctica estar asociados a un comportamiento satisfactorio. Estudiaremos únicamente como “controlar” la fisuración originada por la flexión.

Las fisuras en elementos a flexión se “estiman” bajo cargas de servicio utilizando la sección transformada agrietada. La sección transformada permite calcular los esfuerzos en el acero y el concreto bajo cargas de servicio.

Recuerde que, cualquiera sea la forma de la sección, bajo cargas de servicio el esfuerzo en el concreto no debería exceder de $0.5 f_c$ aproximadamente. Por encima de este valor la suposición implícita, para concretos de resistencia normal, que el concreto se comporta linealmente para el cálculo de los esfuerzos utilizando la sección agrietada transformada, es, por lo menos, cuestionable. Similarmente, el esfuerzo en el acero de tracción no debería superar el 60% de f_y , en caso contrario es probable que se produzca un fuerte agrietamiento por tracción en la sección, agrietamiento que sería incompatible con los estados límites de servicio.

13.4 Importancia del Agrietamiento y Tipos de Fisuras.

Debido a la baja resistencia a la tracción del concreto, los elementos de este material son proclives a agrietarse. Los elementos (estructuras) de concreto armado se agrietan fundamentalmente por los esfuerzos de tracción ocasionados por las cargas externas y por las deformaciones impuestas por los cambios volumétricos restringidos (creep, retracción, cambios de temperatura).

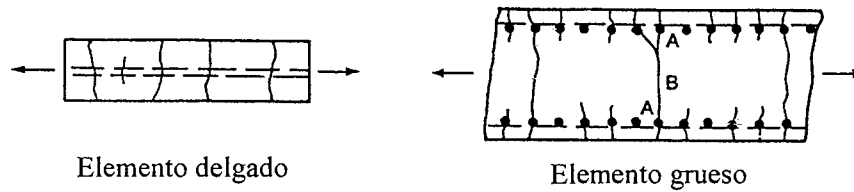
Adicionalmente, los agentes de carácter no estructural mencionados en 13.2, también pueden ocasionar serios agrietamientos en las estructuras de concreto armado.

La importancia del agrietamiento en las estructuras de concreto armado puede clasificarse de acuerdo a las siguientes cuatro categorías:

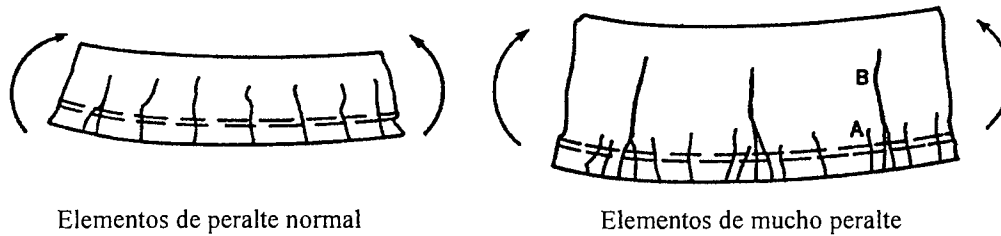
- a) Grietas que afectan la integridad estructural de los elementos.
- b) Grietas que pueden conducir, en el tiempo, a problemas de durabilidad de la estructura.
- c) Grietas que pueden conducir a un mal comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio. Por ejemplo filtraciones en estructuras que retienen líquidos, daños en los acabados, pérdida de aislamiento acústico, etc.
- d) Grietas que estéticamente son inaceptables.

A continuación se describen los principales tipos de agrietamiento que pueden producirse en el concreto. Muchas de las figuras utilizadas para ilustrar los tipos de agrietamiento, han sido tomadas de MacGregor y Calavera.

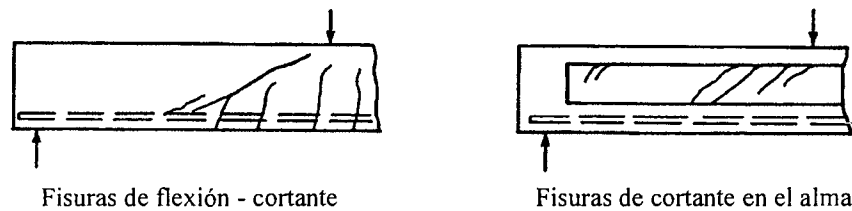
- a) **Grietas por esfuerzos de tracción directa.** Bajo esta sollicitación los elementos se agrietan a través de toda su sección, con un espaciamiento entre grietas comprendido entre 0.75 a 2 veces la menor dimensión de la sección transversal. En el caso de elementos de sección gruesa con refuerzo solamente en las caras, se desarrollan pequeñas fisuras en la superficie que alcanzan el refuerzo. Algunas de estas fisuras se unen en el centro del elemento (fisuras B), como resultado las fisuras que se unen tienen un mayor ancho que las superficiales.



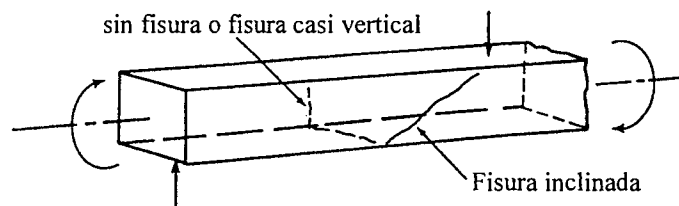
- b) **Grietas por esfuerzos de tracción por flexión.** Los elementos que soportan momentos flectores desarrollan grietas en la zona de tracción. Algunas de estas fisuras verticales progresan casi hasta el eje neutro de la sección. En vigas de mucho peralte (peralte mayor que 1 m aproximadamente) como se explicó en la sección 10.10, las fisuras al nivel del refuerzo principal de flexión suelen tener poco espaciamiento. Algunas de estas fisuras progresan hacia el alma de la viga hasta llegar casi al eje neutro y podría suceder que estas fisuras (B en la figura) presenten un ancho mayor que las fisuras A. Por este motivo la Norma obliga a colocar refuerzo distribuido en el alma, adicional al refuerzo principal por flexión.



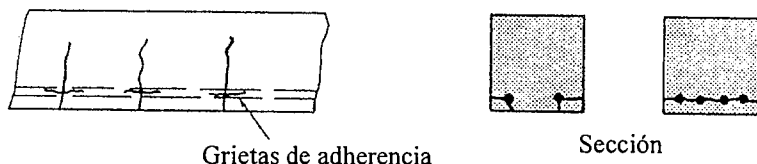
- c) **Grietas de flexión – cortante y de cortante en el alma.** Se les reconoce por ser inclinadas, muchas de ellas se inician por flexión y luego se inclinan hasta alcanzar, en algunos casos, la zona comprimida de la viga. Las fisuras por cortante en el alma se suelen producir en vigas con patines (alas) generosos en tracción y compresión y con almas relativamente delgadas.



- d) **Grietas de torsión.** Las fisuras originadas por la torsión pura tienden a formar una espiral alrededor del elemento. Si en el elemento, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, además de la torsión existe flexión y cortante, las fisuras tienden a ser pronunciadas en la cara donde se suman los esfuerzos cortantes producidos por la torsión y el cortante y menos pronunciadas o ausentes, en la cara opuesta donde los cortantes se contrarrestan.



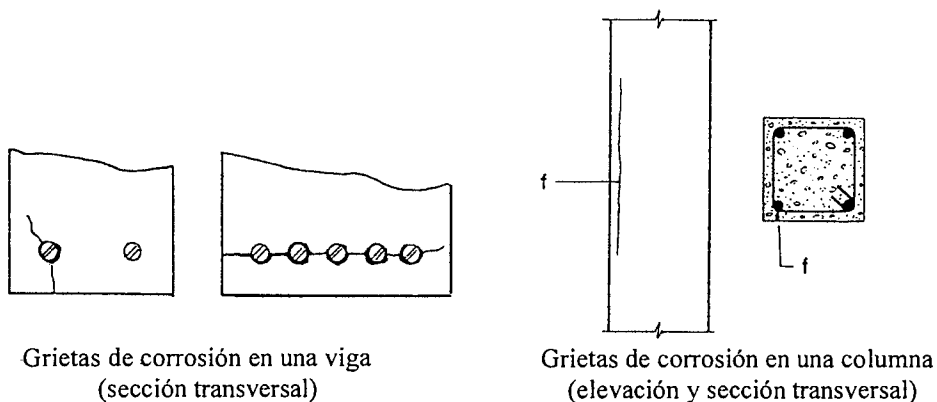
- e) **Grietas de adherencia entre el concreto y el acero.** Se suelen formar a lo largo del acero de refuerzo como producto de recubrimientos insuficientes o de esfuerzos de adherencia elevados. La grieta es paralela al refuerzo (splitting).



Grietas de adherencia

Sección

- f) **Grietas por corrosión en el acero.** El óxido ocupa varias veces el volumen del metal a partir del cual se formó, en consecuencia las barras corroídas generan presiones radiales que empujan el concreto que las circunda, este empuje puede conducir a la pérdida del recubrimiento. Las grietas por corrosión suelen ser paralelas al refuerzo y similares a las grietas de adherencia (splitting). Normalmente, cuando el estado de corrosión es avanzado, las fisuras vienen acompañadas de manchas en la superficie del concreto que las hacen fácilmente identificables.

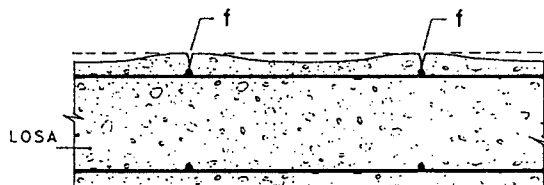


Grietas de corrosión en una viga
(sección transversal)

Grietas de corrosión en una columna
(elevación y sección transversal)

- g) **Grietas por asentamiento plástico del concreto fresco.** Se producen por el asentamiento plástico que experimenta el concreto fresco cuando se produce la exudación. Cuando las barras de refuerzo no pueden desplazarse verticalmente, el asentamiento plástico del concreto se encuentra restringido y en consecuencia se forman grietas paralelas al refuerzo, generalmente de poca profundidad.

Este tipo de agrietamiento también se produce en la parte superior de las columnas, se manifiesta como grietas horizontales que son producidas por el asentamiento plástico restringido por los estribos de la columna. Una correcta dosificación del concreto y recubrimientos adecuados eliminan este tipo de agrietamiento.

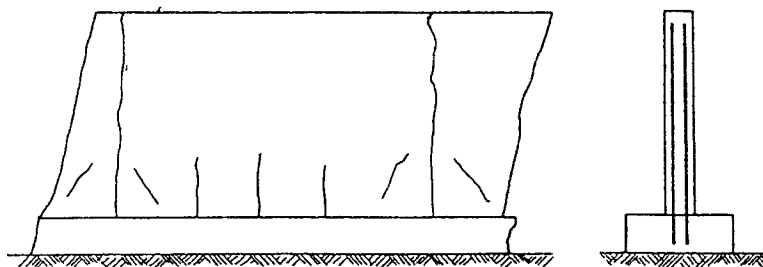


Grietas (f) por asentamiento plástico del concreto fresco.

- h) **Grietas por calor de hidratación.** Se forman por el enfriamiento a la temperatura del medio ambiente del concreto que se ha expandido por el calor de hidratación generado durante el fraguado. Para que suceda este tipo de agrietamiento, el

elemento debe de estar restringido por otros durante su enfriamiento. Un ejemplo es el agrietamiento que se produce en los muros largos (sin juntas) de contención como el mostrado en la figura. El concreto del muro ha sido colocado luego de que la zapata corrida ha endurecido, en consecuencia ésta restringe la contracción del muro a medida que se enfría.

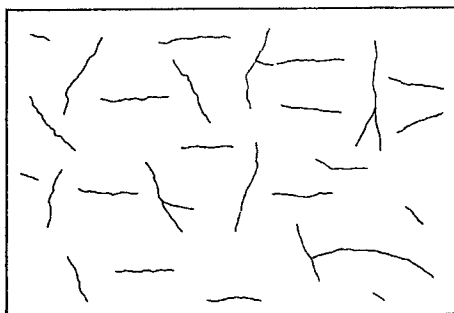
Este tipo de agrietamiento puede eliminarse si se controla el aumento de temperatura generado por el calor de hidratación o la velocidad de enfriamiento o ambos. También colocando juntas o vaciando el muro en segmentos cortos o aumentando significativamente la armadura horizontal de retracción.



Fisuración de un muro por contracción térmica inicial.

- i) **Grietas por retracción plástica del concreto.** Se presentan en losas, son de poca profundidad y erráticas. Aparecen pocas horas luego de colocado el concreto y normalmente se deben a una evaporación muy rápida del agua en la superficie del concreto. Se forman con facilidad en zonas de alta temperatura, baja humedad relativa y en días con viento sumado a un curado inadecuado.

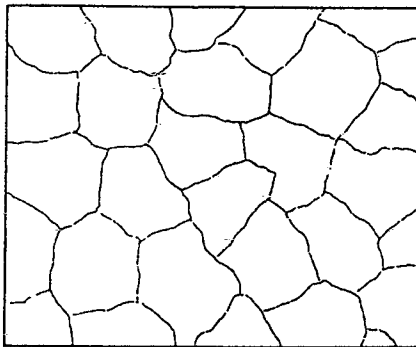
Estas fisuras se pueden evitar mediante el empleo un diseño de mezcla adecuado, evitando la evaporación rápida del agua de la superficie durante las primeras horas luego de colocado el concreto y con un curado minucioso.



Fisuras por retracción plástica en una losa (vista en planta)

- j) **Fisuración en mapa en muros y losas.** Las fisuras se caracterizan por ser de ancho pequeño a medio (0.05 a 0.2 mm) poca profundidad y distribución errática. Aparecen durante la primera semana de edad del concreto. Se deben normalmente a un contenido excesivo de cemento, un curado deficiente, encofrados excesivamente impermeables o a un exceso de llaneado (acabado) en la superficie.

En muchas ocasiones se originan por la mala costumbre de los constructores de espolvorear cemento en la superficie. La reacción álcalis – agregado también puede ser responsable de este tipo de agrietamiento.

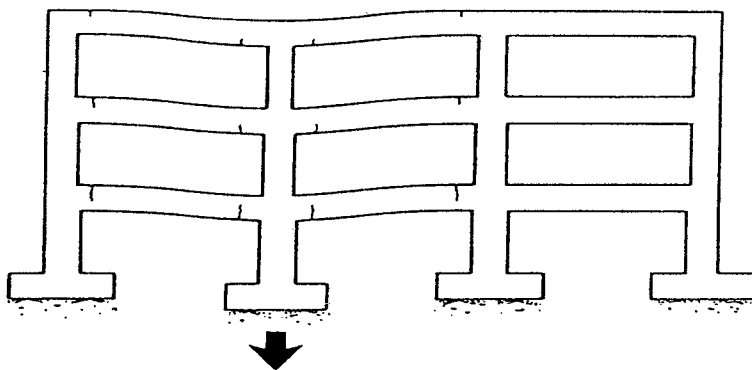


Fisuración en "mapa" en un muro o losa

k) **Grietas por deformaciones impuestas.** Dentro de esta categoría se encuentra el agrietamiento originado por las siguientes causas:

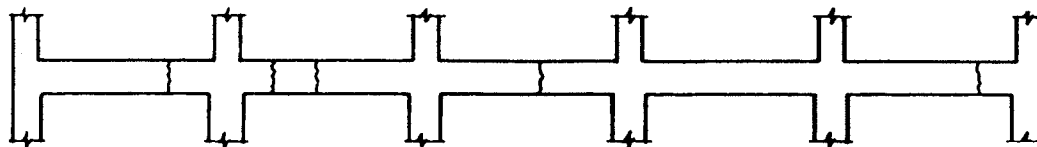
- Asentamiento de apoyos.
- Retracción del concreto.
- Cambios de temperatura.

Si cualquiera de los efectos anteriores ocurre en una estructura que restringe la deformación libre del elemento, se producirá agrietamiento.

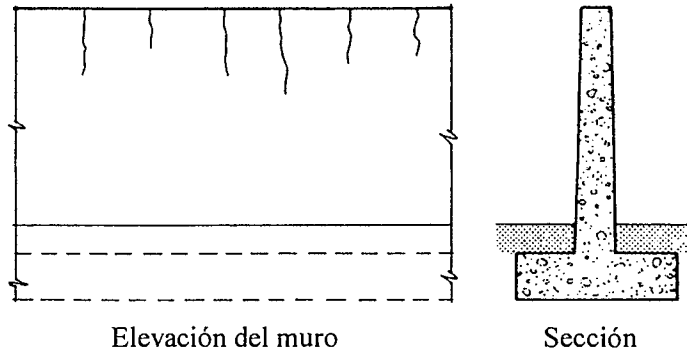


Fisuración en vigas por asentamiento de una columna interior de un pórtico

Las grietas típicas de retracción en vigas son como se muestra en la figura a continuación. Suelen presentarse cerca del centro y cerca a los tercios de la luz del elemento. Las grietas son casi verticales y a todo lo alto del elemento.

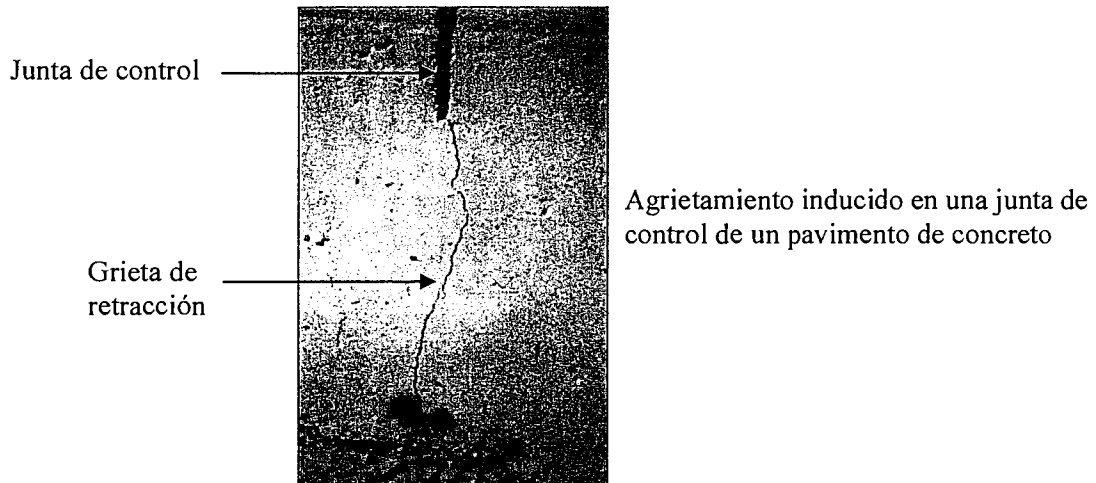


Arietamiento por retracción en una viga.

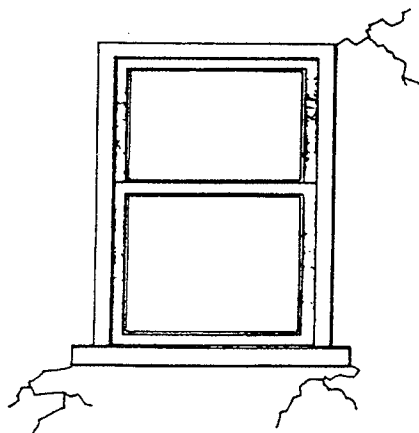


Agrietamiento por retracción en la parte superior de un muro

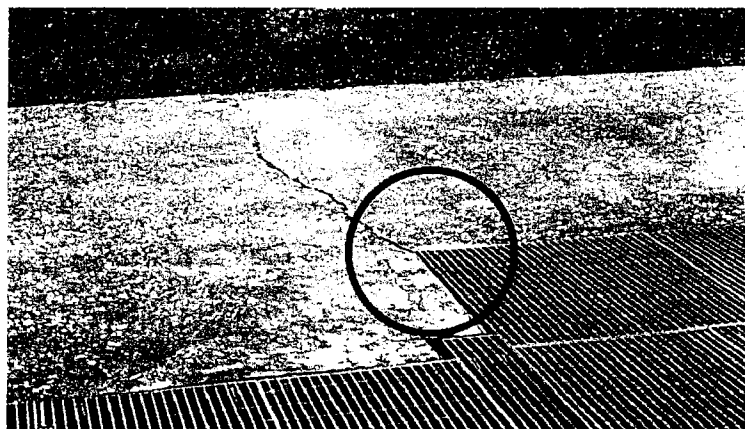
El agrietamiento ocasionado por la retracción o por los cambios de temperatura, puede controlarse por medio de refuerzo de acero adecuadamente distribuido y/o por juntas de control que hacen que las grietas aparezcan en lugares predefinidos.



l) **Agrietamiento por Forma Estructural (Concentración de Esfuerzos).** Se produce normalmente en las esquinas de vanos y ventanas, en general de aberturas en elementos estructurales, donde se produce concentración de esfuerzos de tracción. Los esfuerzos de tracción pueden ser ocasionados también por la retracción y los cambios de temperatura.

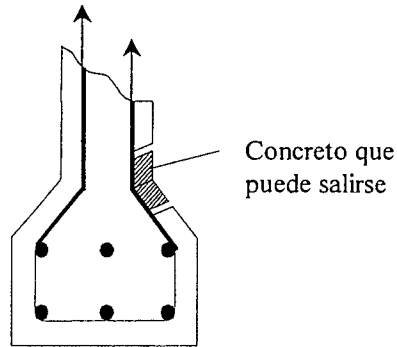


Agrietamiento en las esquinas de un vano

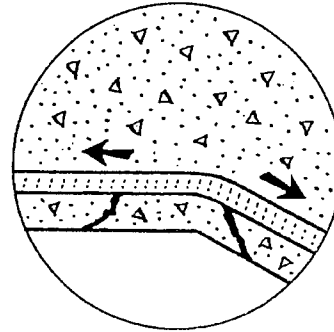


Agrietamiento en una esquina de una abertura en un pavimento de concreto

m) **Agrietamiento Ocasionado por un Inadecuado Detallado del Refuerzo.** Ocurren por una mala disposición o detallado de los refuerzos de acero. En muchas ocasiones sucede por la falta de detalles apropiados en los planos de estructuras, hecho que sumado a la falta de preparación técnica de los “maestros de obra” y “fierros” (personal que habilita el acero de refuerzo) conduce a una mala disposición de los refuerzos.



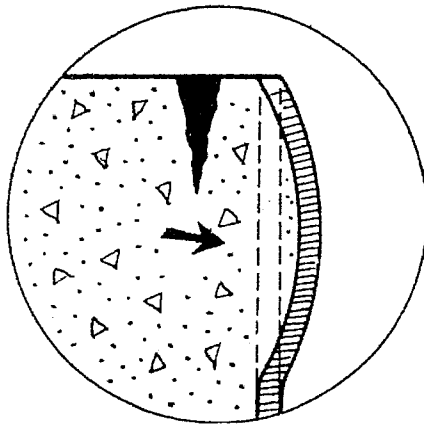
Estribo mal detallado



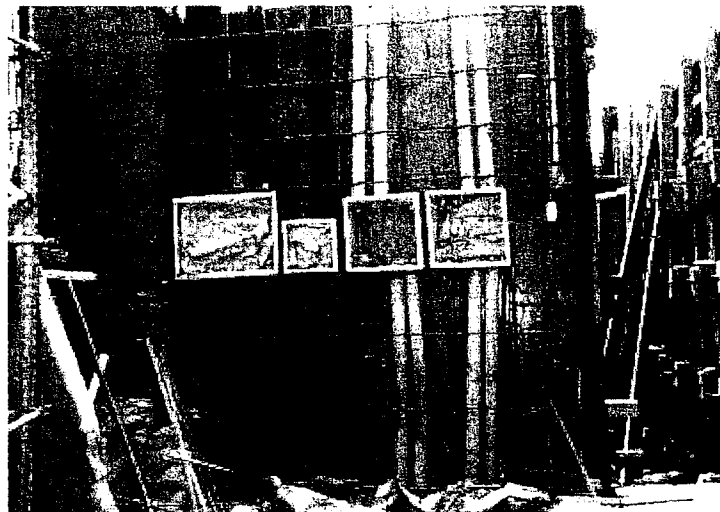
Cambio en la dirección de la fuerza en una barra en tracción

n) **Agrietamiento Ocasionado por Errores Constructivos.** Desafortunadamente son bastante comunes en nuestro medio, ya sea por la falta de preparación técnica del constructor, por una errónea práctica constructiva, por una mala interpretación de los planos, o por no disponer de los medios adecuados (encofrados, mezcladoras, etc).

En muchos casos los problemas potenciales, surgen por la falta de coordinación entre los diversos especialistas que participan en la elaboración del proyecto. Una situación de esta naturaleza se muestra en la figura de la derecha a continuación, se observa la alta concentración de cajas y tubos de las instalaciones eléctricas dentro de una placa o muro de concreto armado, generando una extensa zona en la cual prácticamente no hay ni concreto ni acero de refuerzo apropiado, en consecuencia es muy probable que este elemento se agriete.



Agrietamiento por movimiento del encofrado



Concentración inadecuada de cajas y tubos de instalaciones eléctricas en un muro de concreto

13.5 Razones para Controlar el Ancho de las Fisuras

a) Apariencia

En superficies limpias y poco rugosas, se ha establecido que las grietas que exceden de 0.25 mm a 0.35 mm son visibles y pueden conducir a preocupación por parte del público usuario. El ancho de grietas anterior podría considerarse como ancho límite. El tamaño "visible" de las grietas depende mucho del acabado, color y textura superficial del elemento.

b) Corrosión de las Armaduras

Tradicionalmente se ha relacionado la presencia de grietas con el peligro de corrosión en las armaduras. Las recientes investigaciones realizadas, no han podido establecer a partir de que ancho de grietas existe peligro de corrosión y sugieren que los factores que influyen en el eventual inicio de la corrosión, son relativamente independientes del ancho de las grietas. El tiempo necesario para que ocurra corrosión dependerá de la existencia o no de grietas en el concreto, de la agresividad del medio ambiente, del espesor del recubrimiento de su calidad y grado de compactación y de la impermeabilidad del concreto.

c) Impermeabilidad

Esta razón es de suma importancia cuando se trata de estructuras destinadas a contener o retener líquidos. Es claro que si se requiere impermeabilidad es indispensable controlar el ancho de las grietas.

13.6 Principales Factores que Afectan el Ancho de las Fisuras

A continuación se señalan algunas de las variables que tiene mayor influencia en el agrietamiento por flexión de los elementos de concreto armado.

- a) El uso de refuerzo liso o corrugado que influye fuertemente en la adherencia entre el acero y el concreto. El ancho de grietas es mayor con refuerzo liso. Hoy en día casi todo el refuerzo que utilizamos es corrugado, en consecuencia este ya no es un factor importante.
- b) El espesor del recubrimiento. A mayor espesor de recubrimiento es de esperarse un mayor ancho de grieta.
Una mala práctica de diseño es la de intentar reducir el ancho de grietas disminuyendo el espesor del recubrimiento. El espesor del recubrimiento debe ser compatible con las condiciones ambientales o de exposición del elemento para así proporcionar una protección adecuada al refuerzo de acero.
- c) El esfuerzo en el acero de tracción por flexión. Tal vez esta es la variable más importante ya que a mayor esfuerzo en el acero de tracción por flexión (bajo cargas de servicio) mayor será el ancho de las grietas. Esto se debe a la mayor deformación en el acero que a su vez origina una mayor deformación en el concreto circundante.
- d) La distribución del acero de refuerzo en la zona de tracción. Es mejor utilizar varias barras de menor diámetro con poco espaciamiento que pocas de gran diámetro muy espaciadas. El ancho de grieta disminuye cuanto mejor distribuido se encuentre el acero de refuerzo en la zona de tracción.

13.7 Limitación del Ancho de las Fisuras

No existe un acuerdo o reglas relativas al ancho máximo de grietas aceptables en un elemento estructural. Algunos investigadores y códigos establecen límites en los anchos de grieta del orden de 0.1 a 0.2 mm para estructuras expuestas a ambientes agresivos y de 0.2 a 0.4 mm para ambientes normales.

En la tabla 13-1 (González Cuevas) se resumen los anchos máximos permisibles (recomendados) según distintos investigadores y códigos de acuerdo con el tipo de exposición al medio ambiente del elemento.

Tabla 13-1 Ancho máximo de grietas.

Investigador o Reglamento	Condiciones de exposición	Anchos máximos permisibles, mm
Brice	Severa	0.10
	Agresiva	0.20
	Normal	0.30
Rusch	Agresiva (agua salada)	0.20
	Normal	0.12 - 0.30
Efsen	Severa o agresiva	0.05 - 0.15
	Normal (exterior)	0.15 - 0.25
	Normal (interior)	0.25 - 0.35
Reglamento ACI 318 - 89	Exterior	0.33
	Interior	0.40
CEB (Comité Eurointernacional del concreto)	Interior (ambiente normal)	0.30
	Interior (ambiente medianamente agresivo)	0.20
	Exterior	0.20
	Muy agresivo o cuando se requiere impermeabilidad	0.10
CFE (Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad - México)	Interior	0.30
	Agresivo	0.20
	Agresivo cuando se requiere impermeabilidad	0.10
	Cargas accidentales	0.40
Comité ACI 224	Aire seco o membrana protectora	0.40
	Aire húmedo, contacto con el suelo	0.30
	Productos químicos descongelantes	0.18
	Agua de mar, mojado y secado alternado	0.15
	Estructuras para almacenamiento de agua	0.10

13.8 Disposiciones Reglamentarias para Elementos en Flexión

Bajo cargas de servicio el patrón final de agrietamiento no se ha desarrollado completamente. Normalmente hay pocas grietas en las zonas de máximos esfuerzos. El número de grietas que se producen, por ejemplo en una viga, es finito. Una vez que el patrón de grietas se ha estabilizado y se incrementa la carga hacia la carga última las grietas existentes se agrandan, formándose pocas grietas adicionales.

El ancho de las grietas, su espaciamiento, su distribución ó patrón, la variación de los esfuerzos en el acero (ϵ_s) y en el concreto (ϵ_c) entre las zonas agrietadas, son muy difíciles de establecer. Por este motivo los códigos utilizan fórmulas empíricas para controlar indirectamente el ancho de grietas. La idea central es lograr varias grietas finas en lugar de pocas gruesas. La Norma E.060 presta más atención a la distribución del refuerzo en la zona de tracción que al ancho mismo de la grieta. La Norma se limita a proporcionar reglas para la distribución del refuerzo en los elementos en flexión, tales como las vigas y las losas armadas en una dirección.

13.8.1 Norma Peruana E.060

Históricamente el ACI, limitó indirectamente el ancho de grietas (ω) a los siguientes valores:

Exposición interior $\omega_{max} \approx 0.016'' \approx 0.40 \text{ mm}$

Exposición exterior $\omega_{max} \approx 0.013'' \approx 0.34 \text{ mm}$

Nunca estuvo claro o definido en el ACI el significado del término exposición interior o exterior. Más razonable sería referirse a condiciones de exposición severa, agresiva, normal o a la necesidad de lograr elementos impermeables.

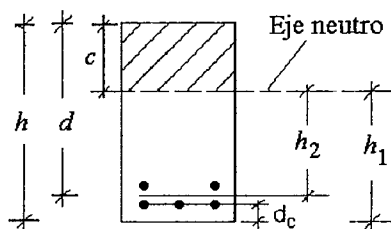
Las disposiciones para el control de la fisuración de la Norma E.060 del 2009 (Artículo 9.9) provienen del ACI del año 95, y están basadas en la Fórmula empírica de Gergely – Lutz (ecuación 13-1) que permite estimar el ancho máximo de las grietas en la cara en tracción por flexión de vigas y losas armadas en una dirección. Esta ecuación fue derivada estadísticamente a partir de la medición de los anchos máximos de grietas observados en vigas.

El valor de ω - predicho debe tomarse con reserva debido a la fuerte dispersión en los anchos de grieta observados. Por ejemplo, de la serie de datos que dio origen a la fórmula, el 10% de las grietas superaban en 1.5 veces el ancho predicho por la fórmula. Por este motivo y por la naturaleza aleatoria del fenómeno del agrietamiento, los cálculos de los anchos de grieta deben emplearse solamente como una guía para lograr una disposición apropiada de las barras de refuerzo.

$$\omega = 1.1 \beta f_s \sqrt[3]{dc Act} \times 10^{-5} \quad (\omega \text{ en mm}) \quad (13-1)$$

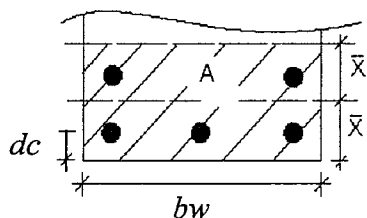
El significado de los términos de la ecuación 13-1 es el siguiente:

- ω es una predicción del ancho de la grieta (en mm) en la fibra extrema en tracción.
- f_s esfuerzo (en kg/cm^2) bajo cargas de servicio, en el acero de tracción por flexión.
- β es la distancia del eje neutro a la fibra extrema en tracción dividida entre la distancia al centroide del refuerzo y se calcula con la ecuación 13-2. La posición del eje neutro se calcula para cargas de servicio.



$$\beta = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h-c}{d-c} \quad (13-2)$$

- dc es la distancia entre la fibra extrema en tracción y el centroide del acero más cercano a ella.
- Act es el área efectiva del concreto en tracción (zona achurada de la figura a continuación) que rodea al acero de refuerzo en tracción y que tiene el mismo centroide que el acero de refuerzo. Se calcula con la ecuación 13-3.



$$Act = \frac{2 \bar{X} bw}{N \text{ barras}} \quad (13-3)$$

- \bar{X} es el centroide del acero de tracción por flexión.
- $N \text{ barras}$ es el número de barras de refuerzo. Si estas son de distintos diámetros, se convierte el área total de acero al número de barras que correspondería a la barra de mayor diámetro.

Debido a la dispersión en los resultados la Norma E.060 del 2009 no controla directamente el ancho de las grietas. Lo que hacen es un control indirecto del ancho mediante el cálculo del parámetro "Z" definido por la ecuación 13-4.

$$Z = f_s \sqrt[3]{dc A_{ct}} \quad \text{kg/cm} \quad (13-4)$$

El refuerzo en la zona de tracción por flexión debe distribuirse de tal modo que:

$$Z \leq Z_{\max} = 26,000 \text{ kg/cm para condiciones normales de exposición } (\omega_{\max} \approx 0.34 \text{ mm}).$$

En la fórmula 13-4, f_s es el esfuerzo en el acero de tracción bajo cargas de servicio. Para evaluar f_s la Norma permite utilizar la expresión 13-6 que es una simplificación de la expresión 13-5 proveniente de asumir que el brazo de palanca interno se puede estimar como $0.9 d$.

$$f_s = \frac{M_{\text{servicio}}}{A_s (jd)} \quad (13-5)$$

$$f_s \approx \frac{M_{\text{servicio}}}{A_s (0.9 d)} \quad (13-6)$$

El parámetro "Z" proviene directamente de la ecuación 13-1 de Gergely – Lutz, haciendo:

$$\omega = 1.1 \beta Z \times 10^{-5} \Rightarrow Z_{\max} = \frac{\omega \times 10^5}{1.1 \beta} = \frac{0.34 \times 10^5}{1.1 \times 1.2} \approx 26,000 \text{ kg/cm}$$

- $\omega = \omega_{\max} = 0.34 \text{ mm}$ Para condiciones normales de exposición.
- Se ha asumido $\beta \approx 1.2$ (valor para vigas de dimensiones usuales)

En losas el valor de β es cercano a 1.35, sin embargo la Norma no hace distinción entre vigas y losas macizas armadas en una dirección.

Nótese que el empleo de un valor máximo del parámetro Z, equivale indirectamente a fijar un esfuerzo máximo en el acero de refuerzo bajo cargas de servicio. Por ejemplo, para una viga de 0.30 m de ancho con dos barras de acero de refuerzo ($dc \approx 6 \text{ cm}$) y en condiciones normales de exposición, de la ecuación 13-4 se obtiene $f_s \approx 0.6 f_y$, que representa el esfuerzo máximo en el acero de refuerzo para no sobrepasar el valor de Z_{\max} .

La Norma E.060 especifica claramente que las disposiciones señaladas no son suficientes para elementos expuestos a ambientes agresivos. En tales casos conviene reducir el valor máximo del parámetro Z, normalmente la manera más eficiente de lograr esto es reduciendo el esfuerzo en el acero de tracción bajo cargas de servicio, esto se logra colocando más acero que el estrictamente necesario por resistencia.

En las losas macizas armadas en un sentido deberá cumplirse adicionalmente:

$$S \leq 3 h \quad S \leq 0.40 \text{ m}$$

El parámetro "Z" no es aplicable a losas armadas en dos sentidos, este tipo de elemento estructural tiene sus propias disposiciones. En losas macizas armadas en dos sentidos, en las zonas de esfuerzos elevados deberá cumplirse:

$$S \leq 2 h$$

13.8.2 Disposiciones del ACI 318–08 para Elementos en Flexión

A partir del año 99 el ACI modificó el procedimiento para el control de fisuras. Sigue basándose en las investigaciones de Gergely – Lutz, pero ya no exige el cálculo del parámetro "Z" esto debido a las siguientes razones:

- Reconoce que el ancho de las grietas es muy variable y las expresiones que intentan predecir este ancho, tienen mucha dispersión. Las nuevas expresiones intentan controlar el ancho de grietas a un tamaño aceptable bajo condiciones usuales, pero reconocen que este ancho puede variar mucho.
- Ya no hay distinción entre exposición exterior o interior. Tal como se comentó líneas arriba, esta distinción nunca estuvo clara, la distinción se debía a la supuesta asociación entre el ancho de grietas y la posibilidad de corrosión en las armaduras. Ya que las investigaciones han mostrado que la corrosión no está claramente correlacionada con el ancho de grietas que ocurre en estructuras o elementos bajo condiciones de exposición usuales, no hay razón para seguir manteniendo esta distinción en el tipo de exposición.
- Las nuevas disposiciones no son suficientes para elementos o estructuras sometidas a una exposición severa o agresiva o cuando deban ser impermeables. Para estos casos será necesario adoptar precauciones especiales que no están cubiertas por la Norma.
- Las nuevas disposiciones del ACI fijan indirectamente un ancho de grietas máximo de 0.4 mm (0.016"), en contraste con la Norma E.060 del 2009 que fija 0.34 mm.
- Las nuevas disposiciones controlan el espaciamiento máximo del refuerzo "S" en elementos en flexión de tal modo que no se exceda el ancho máximo de grietas. Las expresiones para determinar el máximo espaciamiento del refuerzo más cercano a la superficie en tracción por flexión son:

$$S \leq 38 \left(\frac{2,500}{f_s} \right) - 2.5 C_c \quad (\text{en cm}) \quad (13-7)$$

$$S \leq 30 \left(\frac{2,500}{f_s} \right) \quad (\text{en cm}) \quad (13-8)$$

Donde f_s es el esfuerzo en el acero (en kg/cm^2) bajo cargas de servicio calculado como $0.6 f_y$ ó mejor con las ecuaciones 13-5 ó 13-6. Nótese que el ACI del 2008 al haber reducido los factores de amplificación de cargas (véase la Tabla 7.5) ha tenido que aceptar un aumento en los esfuerzos del acero de tracción de $2,500 \text{ kg/cm}^2$ ($0.6 f_y$) a $2,800 \text{ kg/cm}^2$ ($0.67 f_y$), por lo tanto en las fórmulas del ACI el factor que aparece en las ecuaciones 13-7 y 13-8 es 2,800 en lugar de 2,500.

C_c es el recubrimiento libre (en cm), medido desde la superficie en tracción del concreto a la superficie del refuerzo en tracción por flexión más cercano.

Las ecuaciones 13-7 y 13-8 del ACI, aplicadas a una viga típica con acero de refuerzo de $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$, asumiendo $f_s = 0.6 f_y \approx 2,500 \text{ kg/cm}^2$ y $C_c = 5 \text{ cm}$ (recubrimiento + diámetro del estribo), conducen a:

$$S \leq 38 \left(\frac{2,500}{2,500} \right) - 2.5 \times 5 \approx 25 \text{ cm} \quad S \leq 30 \left(\frac{2,500}{2,500} \right) = 30 \text{ cm}$$

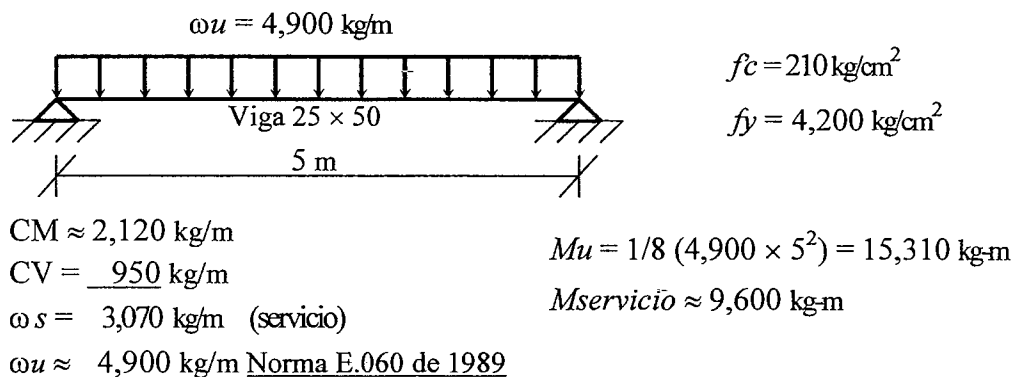
Por lo tanto en vigas típicas bastará asegurar que el espaciamiento del refuerzo sea menor que 0.25 m. Esta limitación raramente será excedida salvo en el caso de vigas anchas con refuerzo muy espaciado.

Para una losa maciza armada en una dirección con un recubrimiento típico (C_c) de 2 cm tendremos:

$$S \leq 38 \left(\frac{2,500}{2,500} \right) - 2.5 \times 2 = 33 \text{ cm} \quad S \leq 30 \times \frac{2,500}{2,500} = 30 \text{ cm}$$

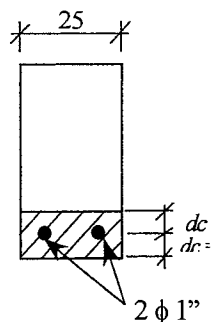
Por lo tanto en losas macizas armadas en una dirección, bastará asegurar que el espaciamiento del refuerzo no exceda de 0.30 m ó 3h.

Ejemplo 13-1 Control de la fisuración en una viga con exposición exterior



- Diseño por flexión con acero grueso en una sola capa

$Mu = 15,310 \text{ kg-m}$ $d \approx 50 - 6 = 44 \text{ cm}$ $As \text{ max} = 17.5 \text{ cm}^2$
 $As = 10.35 \text{ cm}^2$ (acero necesario) \Rightarrow Seleccionamos 2 - 1" = 10.2 cm²



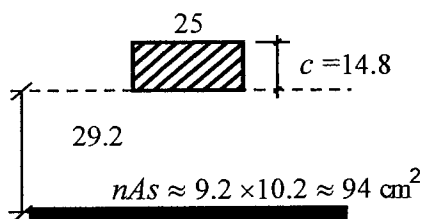
De 13-3, con $dc \approx 6.2 \text{ cm}$:

$Act = 2 \times 6.2 \times 25 / 2 \text{ barras} = 155 \text{ cm}^2$

De 13-6:

$fs \approx Mserv / As (0.9 d) = 9,600 \times 100 / (10.2 \times 0.9 \times 44) \approx 2,380 \approx 0.57 fy$

- Verificamos los esfuerzos en el acero utilizando la sección transformada agriera



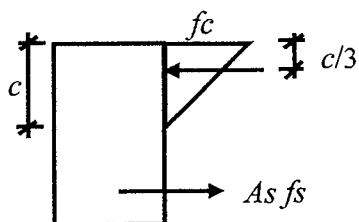
$Mcr = 3,020 \text{ kg-m}$ (sin aporte del acero)

$9,600 > 3,020$ (la sección se agrieta)

$n \approx 9.2$ $Icr = 107,000 \text{ cm}^4 \approx 0.4 Ig$

$c = 14.8 \text{ cm} \approx 0.34 d$ (valor típico)

$jd = 44 - 14.8 / 3 \approx 39.1 \text{ cm} \approx 0.89 d$



$fs = Mserv / As (jd) = 9,600 \times 100 / (10.2 \times 39.1) \approx 2,410 \text{ kg/cm}^2$

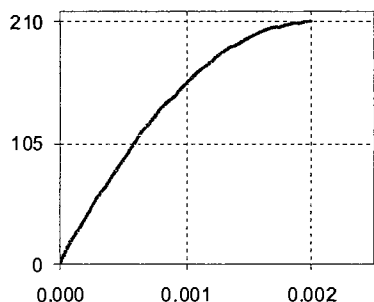
$1/2 fc (25) c = As fs \Rightarrow fc \approx 135 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.64 fc$

$\epsilon_c = fc / Ec \approx 0.000621$ (0.31 ϵ_0)

El esfuerzo máximo de compresión calculado en el concreto ($0.64 f'c$) es alto. Si se incluye en los cálculos la presencia de acero en compresión en la sección, por ejemplo 2 φ 5/8", el esfuerzo máximo se reduce a $0.60 f'c$ aproximadamente.

Investiguemos el comportamiento de la sección bajo cargas de servicio, utilizando en lugar de una relación esfuerzo – deformación lineal en el concreto, un diagrama

constitutivo parabólico con tangente horizontal para una deformación de $\epsilon_0 = 0.002$, como el indicado en la figura a continuación, los resultados son:



$$A_s = 10.2 \text{ cm}^2 \quad d \approx 44 \text{ cm}$$

$$A's = 4 \text{ cm}^2 \quad d' \approx 6 \text{ cm}$$

$$M = 9,600 \text{ kg-m (en servicio)}$$

$$c \approx 14.9 \text{ cm} \quad \epsilon_c \approx 0.000621 \quad (0.31 \epsilon_0)$$

$$f_c \approx 110 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.52 f'_c$$

$$f_s \approx 2,430 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.58 f_y$$

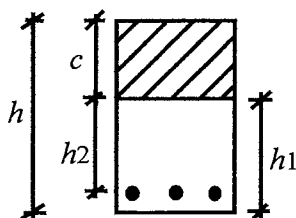
$$f's \approx -740 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.18 f_y$$

- Cálculo del parámetro Z

$Z_{max} = 26,000 \text{ kg/cm}$ para condiciones normales de exposición.

$$Z = 2,410 (6.2 \times 155)^{1/3} \approx 23,800 \text{ kg/cm} \Rightarrow \text{cumple}$$

- Estimación del ancho de grietas (Gergely – Lutz) ecuación 13-1.

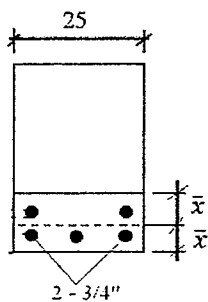


$$\omega = 1.1 \beta f_s \sqrt[3]{dc Act} \times 10^{-5} \quad (\text{en mm})$$

$$\beta = \frac{h1}{h2} = \frac{h-c}{d-c} = \frac{50-14.68}{44-14.68} = 1.2$$

$$\omega = 1.1 \times 1.2 \times 2,410 \times (6.2 \times 155)^{1/3} \times 10^{-5} \approx 0.3 \text{ mm}$$

- Uso de acero de menor diámetro. Para estimar la influencia que tiene la selección de las armaduras en el ancho de grietas por flexión, cambiemos los dos fierros de 1", por armaduras de menor diámetro.



Nueva armadura:

$$2\phi 3/4'' + 3\phi 5/8'' \quad A_s = 11.68 \text{ cm}^2 \quad (\text{contra } 10.2)$$

$$\bar{x} = \frac{7.68 \times 5.9 + 4 \times 10.2}{11.68} \approx 7.4$$

$$\text{Con } d = 50 - 7 = 43 \text{ cm} \quad A_s \text{ necesario} = 10.7 \text{ cm}^2$$

$$n = 11.68 / 2.84 = 4.1 \text{ barras}$$

$$Act = (2 \times 7 \times 25) / 4.1 = 85 \text{ cm}^2$$

$$f_s = 9,600 \times 100 / (0.9 \times 43 \times 11.68) \approx 2,130 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.51 f_y$$

Por lo tanto:

$$Z = 2,130 (5.9 \times 85)^{1/3} \approx 16,900 \text{ kg/cm}$$

El nuevo ancho de grieta estimado por la ecuación de Gergely – Lutz será:

$$\beta = \frac{h1}{h2} = \frac{h-c}{d-c} = (50 - 15.4) / (43 - 15.4) \approx 1.25$$

$$\omega = 1.1 \times 1.25 \times 2,130 \times (5.9 \times 85)^{1/3} \times 10^{-5} \approx 0.23 \text{ mm}$$

13.9 Lecturas

- 13.1 Durability – Critical Issues for the Future. P. Kumar Mehta. ACI Concrete International, July 1997.
- 13.2 The Question of Concrete Durability: We Can Make Good Concrete Today. Adam Neville. ACI Concrete International, July 2000.
- 13.3 Building Durable Structures in the 21st Century. Mehta, Burrows. ACI Concrete International, March 2001.
- 13.4 ¿Cuál es la Varilla de Refuerzo más Resistente a la Corrosión? Revista Construcción y Tecnología, Febrero 2000. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.
- 13.5 Causes, Evaluation and Repair of Cracks in Concrete Structures. ACI Committee 224. ACI Manual of Concrete Practice.
- 13.6 Crack Width, Cover and Corrosion. David Darwin et al. ACI Concrete International. May 1985.
- 13.7 Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete. ACI Structural Journal. May - June 1989.
- 13.8 Cracks and Crack Control in Concrete Structures. Fritz Leonhardt. Special Report, PCI Journal, July - August 1988.
- 13.9 Diagnosis of Deterioration in Concrete Structures. Concrete Repair Manual. Concrete Society, Technical Report No. 54.
- 13.10 Shrinkage Cracking in Fully Restrained Concrete Members. R. Ian Gilbert. ACI Structural Journal. March – April 1992.
- 13.11 Modeling and Control of Side Face Beam Cracking. Robert J. Frosch. ACI Structural Journal. May – June 2002.

CAPITULO 14

Deflexiones en Elementos de Concreto Armado Sometidos a Flexión



14.1 Introducción

Como se mencionó en el Capítulo 13, el Diseño por Resistencia de un elemento estructural, no garantiza necesariamente que su comportamiento bajo cargas de servicio será satisfactorio. Recuerde que la mayor parte del tiempo (por no decir todo) los elementos se encuentran solicitados por cargas en servicio y no por las cargas amplificadas o últimas - que son las que utilizamos para el Diseño por Resistencia - por lo tanto, es indispensable verificar que los elementos no excedan los Estados Límites de Servicio.

En este capítulo trataremos con uno de estos estados límites de servicio que es el relacionado con las deflexiones. Presentaremos únicamente como “estimar” las deflexiones originadas por la flexión, no se presentará metodología alguna para estimar las deflexiones originadas por la fuerza cortante (fisuración diagonal) ni la originada por las pérdidas de adherencia que se producen en la vecindad de las grietas de flexión. Recuerde que las deflexiones en elementos a flexión de concreto armado, se calculan bajo cargas de servicio utilizando la sección transformada agrietada o no.

En el acápite 13.1 se mencionó que históricamente las deflexiones y la fisuración, no representaron un problema serio en los elementos de concreto armado. Sin embargo con la aparición en el mercado de los aceros de alta resistencia (grado 60 ó 70), el esfuerzo en el acero y su deformación correspondiente, bajo cargas de servicio, se incrementó en un 50% a 80%. En consecuencia las fisuras y deflexiones, que dependen en gran medida del esfuerzo (deformación) en el acero, se han convertido en un problema a considerar.

Si consideramos además que a partir del 2002 el ACI redujo los factores de amplificación de cargas de $1.4D + 1.7L$ (utilizada hasta el ACI-99) a $1.2D + 1.6L$ (pero no menor de $1.4D$) y no modificó el factor $\phi = 0.9$ para el diseño por flexión, resulta claro que con los factores de carga del ACI existe un mayor riesgo de exceder los límites de las deflexiones y la fisuración ya que los esfuerzos en el acero bajo condiciones de servicio serán mayores.

Similar situación puede presentarse con la Norma E.060 del 2009 que redujo los factores de amplificación de $1.5D + 1.8L$ vigentes desde 1989 a $1.4D + 1.7L$.

Para cuantificar la aseveración hecha en el párrafo anterior, se ha confeccionado la tabla a continuación en la que se muestran los cocientes entre la resistencia requerida (ω_u) y la carga de servicio (ω_s) para distintas relaciones de carga muerta a carga viva (D/L). Los cocientes se han calculado para la Norma Peruana E-060 de 1989, la E.060 del 2009 y para el ACI-2008.

D/L	L/D	Cociente ω_u / ω_s Norma E060 – 1989 (1.5D + 1.8L)	Cociente ω_u / ω_s Norma E.060 -2009 (1.4D + 1.7L)	Cociente ω_u / ω_s ACI-2008 (1.2D + 1.6L)
0.5	2.0	1.70	1.60	1.47
1.0	1.0	1.65	1.55	1.40
1.5	0.67	1.62	1.52	1.36
2.0	0.5	1.60	1.50	1.33
3.0	0.33	1.58	1.48	1.30
4.0	0.25	1.56	1.46	1.28
∞	0	1.50	1.40	1.40

De la tabla anterior se observa que para una relación usual carga muerta a carga viva entre 1.5 y 2.0, la Norma E.060 de 1989 exige una resistencia un 7% mayor que la del 2009 y esta a su vez exige una resistencia un 12% mayor que el ACI-08, en consecuencia con la Norma E.060 el acero de flexión necesario será mayor y los esfuerzos bajo cargas de servicio en el acero serán menores. Con un diseño basado en los factores de carga del ACI-08 existe definitivamente mayor riesgo de exceder los límites tolerables de fisuración y deflexiones por flexión, en consecuencia si se utilizan dichos factores será necesario revisar con cuidado ambos estados límites.

14.2 Principales Razones para Controlar las Deflexiones

a) Apariencia.

Las deflexiones mayores que $L/250$ (L = luz del elemento) generalmente son apreciables a simple vista y pueden causar preocupación en el público usuario.

b) Daños en Elementos No Estructurales.

Las deflexiones excesivas en los elementos estructurales, causan agrietamientos en los tabiques o elementos no estructurales que se apoyan en ellos y también el mal funcionamiento de puertas, mamparas y ventanas. Si el elemento estructural por excesiva deflexión llega a apoyarse en las ventanas o mamparas, este puede romper los vidrios.

Normalmente los códigos, en los casos en los cuales por deflexiones excesivas de los elementos estructurales se puedan dañar los elementos no estructurales, suelen fijar la deflexión máxima permisible en:

$$\Delta \leq L / 480$$

Donde Δ es la deflexión del elemento estructural que puede afectar al tabique o elemento no estructural y suele tener varios componentes, entre ellos:

$$\Delta = \Delta_i L + k(t_0, \infty) \Delta_i D + k_{\infty} \Delta_i L_s + \Delta_i P + k_{\infty} \Delta_i P$$

El subíndice i se refiere a las deflexiones instantáneas debidas a la carga muerta o a la carga viva. La carga viva suele tener dos componentes, una componente sostenida es decir que actúa permanentemente sobre el elemento y una componente transiente. En la ecuación anterior, el significado de los términos es el siguiente:

$\Delta_i L$ = deflexión instantánea debida a la carga viva de diseño (la parte de la carga viva sostenida más la parte transiente).

$k(t_0, \infty) \Delta_i D$ = deflexión diferida debida a carga muerta o permanente.

t_0 = tiempo en el cual se instala o construye el elemento no estructural que puede verse afectado por las deflexiones.

$k_{\infty} \Delta iL_s =$ deflexión diferida debido a la parte de la carga viva de diseño que se estime sostenida, es decir que actúe permanentemente sobre el elemento estructural.

$\Delta iP =$ deflexión instantánea debida al peso del tabique.

$k_{\infty} \Delta iP =$ deflexión diferida debida al peso del tabique.

Nótese que en la expresión anterior no se ha incluido la deflexión instantánea por carga muerta ya que se supone que el tabique o elemento no estructural, se construye después de que esta parte de la deflexión ya ocurrió.

c) Interrupción o Mal Funcionamiento de la Estructura:

Las deflexiones excesivas de los elementos estructurales pueden interferir con el funcionamiento de la estructura. Por ejemplo, en los casos de elementos estructurales que soporten maquinarias o equipos de precisión, las deflexiones excesivas pueden ocasionar un mal funcionamiento de los equipos. También las deflexiones excesivas en techos planos o con poca inclinación pueden ocasionar la acumulación excesiva del agua de lluvia.

14.3 Principales Variables que Influyen en las Deflexiones

El cálculo de las deflexiones en elementos de concreto armado no es tarea simple, dependen de muchas variables, entre las principales:

- a) La resistencia a la tracción del concreto. A mayor resistencia en tracción, menores deflexiones ya que será mayor la zona del elemento que no tiene grietas y por lo tanto será mayor la contribución del concreto al momento resistente de cada una de las secciones. Sin embargo, esta contribución no se toma en cuenta en el diseño por resistencia en flexión.
- b) El módulo de elasticidad del concreto. A mayor módulo de elasticidad menores curvaturas y por consiguiente menores deflexiones instantáneas.
- c) La cantidad de acero en tracción. Para una misma intensidad del momento flector, a mayor cantidad de acero en tracción, el esfuerzo en el acero bajo cargas de servicio disminuye y por lo tanto la deformación en el acero (ϵ_s) será menor y en consecuencia las deflexiones también.
- d) Los cambios en la cantidad y disposición de la armadura de refuerzo a lo largo del elemento.
- e) El nivel y patrón de agrietamiento por flexión del elemento. En un elemento de concreto armado no se conoce de antemano la distribución y profundidad de las grietas originadas por la flexión u otros fenómenos. El agrietamiento tiene una distribución aleatoria a lo largo del elemento.
- f) Las deformaciones originadas en el tiempo por creep o flujo plástico. A mayor creep mayores deflexiones diferidas. El creep depende de la historia o secuencia de las cargas aplicadas sobre el elemento, por lo tanto las deflexiones diferidas serán dependientes de la historia de cargas y su evolución en el tiempo será un problema no lineal. Por otro lado la historia o secuencia de cargas que obra sobre un elemento durante su vida útil es muy variable y difícil de predecir.
- g) La retracción del concreto. Esta produce deflexiones adicionales cuando la sección y/o la armadura no es simétrica. Los cambios estacionales de humedad afecta la retracción y en consecuencia las deflexiones del elemento
- h) Los cambios de temperatura.

En general las deflexiones en los elementos de concreto armado constituyen en esencia un problema probabilístico, sin embargo, los códigos lo tratan como si fuera determinístico.

14.4 Cálculo de las Deflexiones a partir de los Diagramas Momento - Curvatura

En la figura 14-1 se muestra la forma como varía el estado de agrietamiento y la curvatura a lo largo de un elemento de concreto armado en flexión. En la sección A-A de la viga de la figura 14-1, el momento flector es menor que el momento de agrietamiento ($M < M_{cr}$) en consecuencia se puede suponer que trabaja la sección bruta.

En la sección B-B, que es una sección entre grietas, el concreto en la zona de tracción contribuye parcialmente a resistir el momento flector y en la sección C-C, que corresponde a una sección agrietada parcialmente, el concreto en tracción contribuye poco o casi nada a resistir el momento flector.

Si bien para el diseño por flexión de elementos de concreto armado hemos ignorado o despreciado la resistencia en tracción del concreto, para el problema de las deflexiones la resistencia en tracción influye de manera importante en la magnitud de las mismas. A la contribución del concreto en tracción entre grietas o en las zonas parcialmente agrietadas, se le llama rigidización por tensión o tracción (tensión stiffening)

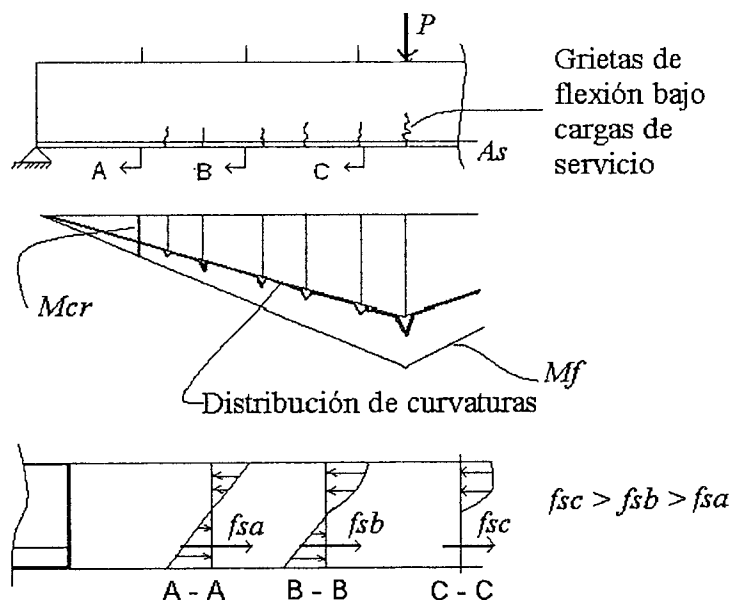


Fig. 14-1 Variación del agrietamiento, esfuerzos en el acero y curvaturas en un elemento a flexión

En teoría, a partir de los diagramas momento – curvatura de las diversas secciones del elemento, se podría construir el diagrama de variación de las curvaturas a lo largo del eje del mismo. Conocida la distribución de curvaturas, la cual es irregular ya que se presentan picos o concentraciones en las secciones donde se producen las grietas, podríamos intentar integrar esta variación para calcular las deflexiones por flexión en el elemento, utilizando por ejemplo el Teorema de las Fuerzas Virtuales:

$$Q_v D_r = \int m_v \phi_r$$

Virtuales en Equilibrio
Reales Compatibles

Donde:

- Q_v = Fuerzas virtuales
- D_r = Desplazamientos reales
- ϕ_r = Curvaturas reales
- m_v = Momentos internos virtuales

Para cada sección a lo largo del eje del elemento es posible construir su diagrama $M - \phi$. En la figura 14-2 se muestra un diagrama trilineal típico.

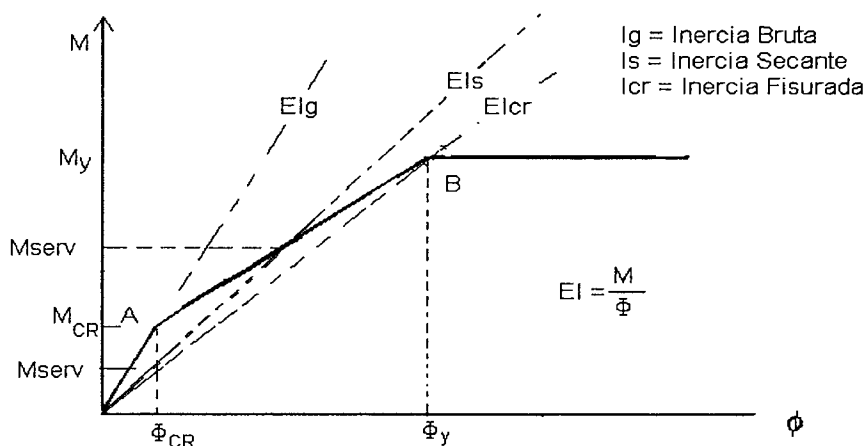


Fig. 14-2 Diagrama Momento – Curvatura

El momento de servicio es variable a lo largo del eje del elemento, los momentos flectores obedecen a alguna ley de variación que es función de las cargas externas, de la geometría del elemento y de las condiciones de apoyo, por lo tanto la curvatura del elemento y el valor de EI serán también variables a lo largo del eje del elemento.

Si el momento flector bajo cargas de servicio (M_{serv}) es menor que el momento de agrietamiento (M_{cr}) la rigidez en flexión del elemento se puede estimar como $EI = EI_g$. Esta situación corresponde a las secciones cercanas al punto "A" de la figura 14-2.

Si $M_{cr} < M_{serv} < M_y$ entonces el límite inferior de EI será EI_{cr} , es decir el momento de inercia de la sección completamente agrietada. El valor de $EI = M_y/\phi_y = EI_{cr}$ corresponde al momento de inercia de la sección completamente fisurada, cerca del punto B de la figura 14-2 anterior. Si se acepta un diagrama Momento – Curvatura bilineal, este valor es una buena aproximación al momento de inercia. Sin embargo, en el cálculo de las deflexiones tiene mucha importancia la contribución de las secciones que no se encuentran agrietadas bajo las cargas de servicio.

Una forma de trabajar con un valor que tome en cuenta la doble pendiente del diagrama Momento – Curvatura, es utilizar el valor de $-EIs$ - es decir, el valor secante de la rigidez en las secciones que se encuentren agrietadas y el valor de $-EI_g$ - en las secciones que no lo estén.

El cálculo de las deflexiones en un elemento de concreto armado a partir de los diagramas, $M - \phi$ de sus secciones, si bien es en teoría correcto, no siempre es posible por las siguientes razones:

- No se conoce de antemano la distribución (patrón y ubicación) de las grietas por flexión ni su profundidad. El patrón del agrietamiento es aleatorio.
- No se conoce con precisión la distribución de las curvaturas en las vecindades de las grietas.
- Es difícil incluir las deformaciones adicionales generadas por el agrietamiento ocasionado por el cortante y por el deslizamiento del acero (pérdida de adherencia) en las vecindades de las grietas.

En consecuencia los códigos tratan de aproximar el cálculo de las deflexiones en elementos de concreto armado, mediante expresiones empíricas provenientes del ajuste de resultados experimentales.

14.5 Cálculo de las Deflexiones según las Normas

Reconociendo la incertidumbre y complejidad del problema por el número de variables que intervienen, los códigos proponen expresiones empíricas para evaluar el momento de inercia efectivo (I_{ef}) a ser utilizado en el cálculo de deflexiones:

14.5.1 Código del ACI.

En el artículo 9.5 (Control de las Deflexiones) el ACI-08 propone la expresión 14-1 para la estimación del momento de inercia efectivo de un elemento en flexión. La expresión 14-2 es análoga a la 14-1. El significado de los términos que intervienen es el siguiente:

I_{ef} = momento de inercia efectivo de la sección donde se evalúan las deflexiones.

I_g = momento de inercia de la sección bruta.

I_{cr} = momento de inercia de la sección agrietada.

M_{cr} = momento de agrietamiento de la sección. ($M_{cr} = f_r I_g / y$)

M_a = momento máximo actuante en la sección donde se evalúa I_{ef} y la deflexión.

$$I_{ef} = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g \quad (14-1)$$

$$\text{ó } I_{ef} = I_{cr} + (I_g - I_{cr}) \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \quad (14-2)$$

La expresión 14-1 propone una transición entre los dos extremos correspondientes al momento de inercia bruto (I_g) y el momento de inercia de la sección completamente fisurada (I_{cr}) que son los dos extremos o límites superior e inferior. Esta transición depende del nivel de agrietamiento en la sección, el cual se expresa mediante la relación M_{cr}/M_a . Esta ecuación toma en cuenta empíricamente, el efecto del aumento en la rigidez de la sección por el aporte en tracción del concreto no fisurado en las zonas comprendidas entre las grietas de flexión, así como en las zonas de bajos esfuerzos de tracción.

Si suponemos que $I_{cr} \approx 0.5 I_g$ (valor usual para la inercia agrietada) tendremos que la variación de la inercia efectiva calculada con ecuación 14-1 será como la mostrada en la figura 14-3. Se aprecia que a medida que el cociente entre el momento actuante en la sección y el momento de agrietamiento aumenta, el momento de inercia efectivo tiende al momento de inercia de la sección agrietada.

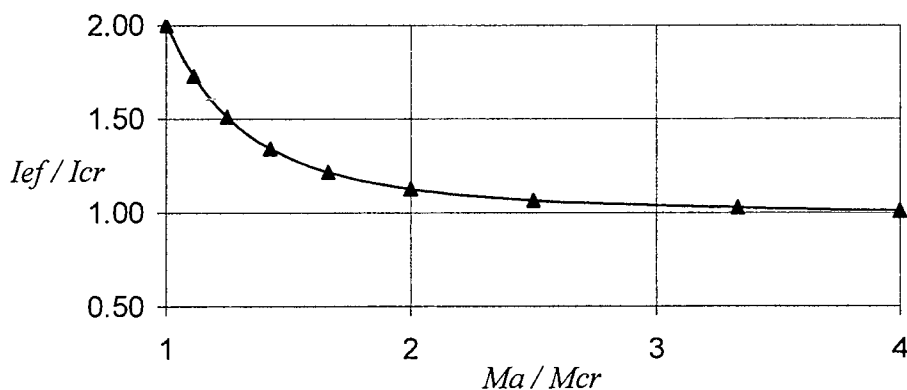


Fig. 14-3 Variación del momento de inercia efectivo de acuerdo al ACI.

La expresión del ACI para el cálculo de I_{ef} arroja resultados en el rango de $\pm 20\%$ con respecto a lo obtenido en los ensayos. Adicionalmente, M_{cr} tiene mucha dispersión. La

precisión de la fórmula del ACI es pobre cuando M_a es cercano a M_{cr} ya que la variación de este último es aleatoria.

En este sentido, es interesante citar la publicación del ACI 435.4R-72 (lectura 14.5) " Bajo condiciones controladas de laboratorio en vigas simplemente apoyadas, hay un 90% de probabilidad de que el valor de la deflexión real (medida) esté en el rango de 0.8 a 1.3 del valor calculado con la metodología propuesta por el ACI". Esto da a entender que los cálculos de las deflexiones hechos con la ayuda de calculadoras o programas suelen arrojar varias cifras significativas, lo que podría dar la sensación de un alto grado de precisión en su determinación, sin embargo esto no sucede en la realidad. Nótese que la probabilidad mencionada está referida a ensayos realizados bajo condiciones controladas de laboratorio, para elementos estructurales "reales" el rango de variación debe ser aún mayor.

14.5.2 Norma Peruana

Teniendo en cuenta la incertidumbre asociada al cálculo de las deflexiones, la Norma Peruana simplifica el cálculo de la inercia efectiva (I_{ef}) asignándole el menor valor que éste puede tomar, es decir I_{cr} , el momento de inercia de la sección completamente fisurada, bajo los siguientes criterios:

- a) Cuando a lo largo de todo el elemento, bajo cargas de servicio, se cumpla que $M_a < M_{cr}$ entonces es posible utilizar a lo largo de todo el elemento:

$$I_{ef} = I_g$$

- b) Cuando en alguna sección (o en varias) $M_a > M_{cr}$, entonces:

$$I_{ef} = I_{cr}$$

La Norma Peruana sobrestima las deflexiones al suponer que a lo largo de todo el elemento las secciones están completamente fisuradas, no propone, tal como lo hace el ACI, una expresión que provea una transición entre I_g e I_{cr} , en consecuencia es conservadora.

El módulo de elasticidad del concreto que se utiliza para los cálculos de las deflexiones inmediatas es:

$$E_c = 15,000 \sqrt{f'_c} \quad \text{kg/cm}^2$$

14.6 Espesores (h) Recomendados para No Verificar Deflexiones

La Norma E.060 de 1989 (artículo 10.4), establecía que cuando no existan elementos no estructurales susceptibles de dañarse por causa de las deflexiones del elemento estructural sobre el cual se apoyan, era posible obviar el cálculo de las deflexiones en los siguientes casos:

- Losas aligeradas continuas con $s/c \leq 300 \text{ kg/m}^2$

$$h \geq L / 25 \quad (\text{aligerados convencionales})$$

- Losas macizas continuas armadas en una dirección con $s/c \leq 300 \text{ kg/m}^2$

$$h \geq L / 30$$

- Vigas continuas o vigas que formen pórticos

$$h \geq L / 16$$

Estos límites provienen de la experiencia práctica, no tienen justificación teórica, son el resultado de la observación del comportamiento satisfactorio, en cuanto a deflexiones se refiere, de elementos estructurales dimensionados con estas expresiones.

La Norma E.060 del 2009 ha adoptado los mismos límites del ACI 318 – 08 para no verificar deflexiones, estos se reproducen en la tabla 14-1 para $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$.

Tabla 14-1 Límites de la Norma E.060 – 2009 para no verificar deflexiones.

Tipo	Elemento	Simplemente apoyados	Un extremo continuo	Ambos extremos continuos	Voladizo
Elementos que no soportan o no están conectados a elementos no estructurales que puedan dañarse por las deflexiones	Losas macizas en una dirección	$L/20$	$L/24$	$L/28$	$L/10$
	Vigas o losas nervadas en una dirección	$L/16$	$L/18.5$	$L/21$	$L/8$

Otros autores (Grossman) proponen los valores indicados en la tabla 14-2 para elementos estructurales conectados a elementos no estructurales que pueden dañarse por las deflexiones. Estos valores deben tomarse como referenciales. Nótese que los valores recomendados dependen de la relación entre la carga sostenida (C_s) y la carga total que actúa sobre el elemento (C_t), con esto se pretende considerar la deflexión diferida producida por las cargas sostenidas.

Tabla 14-2

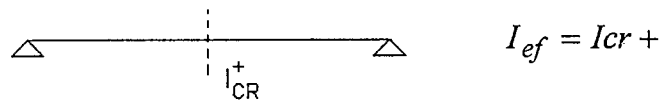
Tipo	Elemento	Simplemente apoyados	Un extremo continuo	Ambos extremos continuos	Voladizo
Elementos que soportan o que están conectados a elementos no estructurales que puedan dañarse por las deflexiones	Cualquiera con: $w < 0.12$ y $C_s/C_t < 0.5$	$L/10$	$L/13$	$L/16$	$L/4$
	Cualquiera con: $C_s/C_t > 0.5$	$L/6$	$L/8$	$L/10$	$L/3$

$w = \rho f_y / f_c$ $C_s =$ Carga Sostenida $C_t =$ Carga total

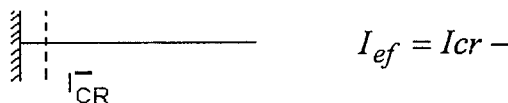
14.7 Cálculo de las Deflexiones Inmediatas

De acuerdo a la Norma E.060, el momento de inercia efectivo que debe emplearse en el cálculo de las deflexiones, viene dado, en vigas continuas o que formen pórtico, por un promedio ponderado entre los momentos de inercia fisurados de las secciones de apoyo y del centro. Los casos más comunes son:

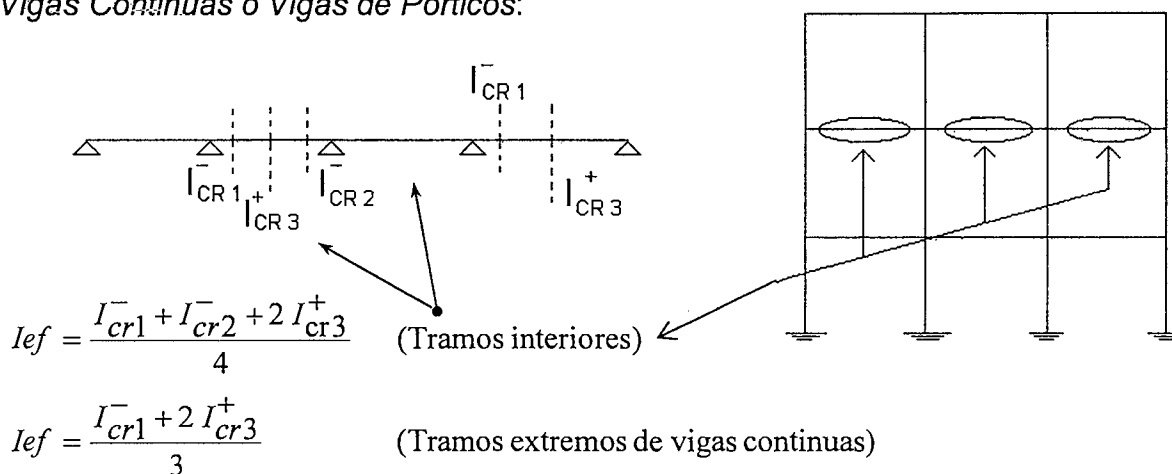
- a) *Vigas simplemente apoyadas*: La sección que controla las deflexiones es la de máximo positivo.



- b) *Vigas en voladizo*: La sección que controla las deflexiones es la del empotramiento.

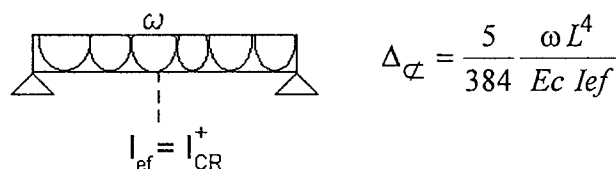


c) Vigas Continuas o Vigas de Pórticos:

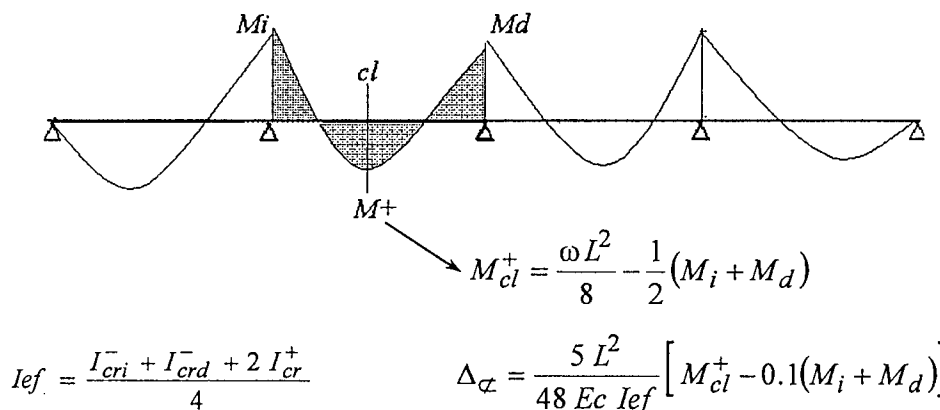


En este caso a la sección central de la viga se le está dando el doble de peso en comparación con las secciones extremas. Esto se debe a que normalmente será la rigidez de la zona central la que controle la deflexión de la viga ya que la porción del tramo sujeta a momentos positivos, normalmente será mayor que la porción sujeta a momentos negativos.

Para el cálculo de las deflexiones se utilizan las fórmulas clásicas de resistencia de materiales deducidas para las deflexiones elásticas, reemplazando el módulo de elasticidad - E - por Ec y el momento de inercia - I - por I_{ef} . Así, por ejemplo, en vigas simplemente apoyadas tendremos:



Para los tramos interiores de vigas continuas con carga repartida ω , se puede utilizar:



En la tabla 14-3, inserta al final del capítulo, se presentan las deflexiones elásticas para algunos casos típicos de vigas simples.

14.8 Cálculo de las Deflexiones Diferidas

Si una viga se deja bajo la acción de cargas sostenidas durante un periodo prolongado de tiempo se observará:

- Se abren más las grietas existentes.
- Se forman nuevas grietas por retracción y cambios de temperatura.

- Las deflexiones inmediatas aumentan hasta 2 ó 3 veces su valor inicial por efecto del Flujo Plástico o Creep y de la Retracción. Este fenómeno se presentó cuando se analizaron las vigas con acero en compresión (ver figura 12-4).

14.8.1 Efecto del Flujo Plástico en las Curvaturas y Deflexiones

En la figura 14-4 se muestra una sección de concreto armado en la cual, adicionalmente a las deformaciones iniciales debidas a las cargas externas sostenidas, la zona comprimida de concreto experimenta deformaciones adicionales debidas al Creep.

Las deformaciones en el concreto comprimido aumentan por efecto del flujo plástico y los esfuerzos máximos de compresión se reducen ligeramente ya que el eje neutro se desplaza. La deformación en el acero de tracción permanece casi constante, mientras que la deformación en el acero de compresión (si lo hubiera) aumenta notablemente ya que las deformaciones en el concreto que lo circundan aumentan por el Creep. Los incrementos de la deformación en el concreto por Creep son mayores mientras más elevados sean los esfuerzos de compresión actuantes.

Al aumentar las curvaturas de las secciones por efecto del Creep, se incrementan también las deflexiones del elemento.

A diferencia de la contracción, para que exista creep es necesario que el elemento se encuentre cargado.

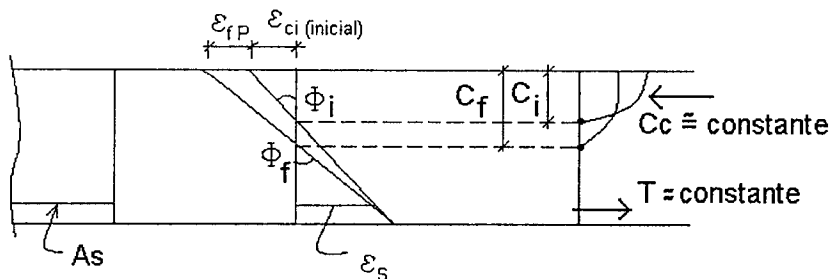


Fig. 14-4 Efecto del Creep en la curvatura de una sección.

ϵ_{ci} = deformación inicial en el concreto debida a las cargas externas.

ϵ_{fp} = deformación adicional por el Creep.

ϵ_s = deformación en el acero que prácticamente no varía por el Creep.

ϕ_i = curvatura inicial de la sección debida a las cargas externas.

ϕ_f = curvatura final debida a las cargas y al Creep.

C_i, C_f = Posición inicial y final del eje neutro

14.8.2 Efecto de la Retracción en las Curvaturas y Deflexiones

La figura 14-5 muestra una sección perteneciente a una viga simplemente apoyada con acero en tracción únicamente. La sección se deforma por la acción de las cargas externas. Adicionalmente sobre la sección actúa la retracción del concreto la cual hace que las fibras superiores se acorten casi libremente (por la ausencia de acero superior) mientras que las fibras inferiores están restringidas por la presencia del acero de tracción. En este caso la curvatura de la sección debida a la retracción es del mismo signo que la curvatura producida por las cargas externas, en consecuencia se producirán deflexiones adicionales por la retracción que son del mismo signo que las producidas por las cargas externas. Nótese en la figura 14-5, que la retracción produciría deflexiones en el elemento aún cuando no existieran cargas externas.

Si la sección y las armaduras fuesen simétricas, la retracción no originaría ni curvaturas ni deflexiones adicionales.

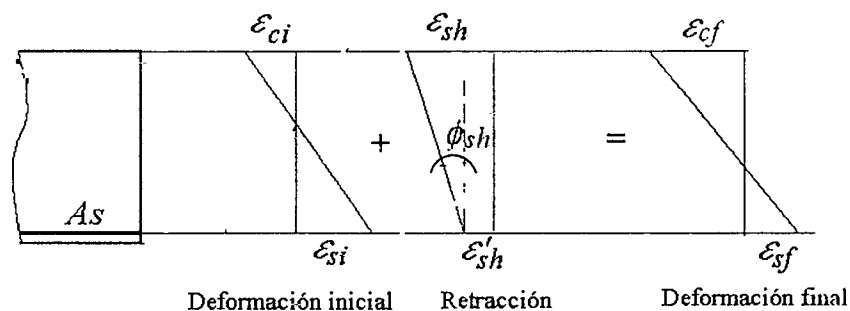


Fig. 14-5 Efecto de la retracción en la curvatura de una sección

$\epsilon_{si}, \epsilon_{ci}$ = deformaciones elásticas iniciales debidas a las cargas externas.

$\epsilon_{sh}, \epsilon'_{sh}$ = deformaciones por retracción (shrinkage).

ϕ_{sh} = curvatura debida a la retracción.

$\epsilon_{sf}, \epsilon_{cf}$ = deformaciones finales de la sección.

Las principales variables que influyen en las deflexiones asociadas con la retracción, adicionalmente a la presencia de acero en tracción y compresión, son las mismas que se discutieron en el acápite 4.3.

14.8.3 Aproximación de la Norma al Problema de las Deflexiones Diferidas

La influencia del creep y la retracción en las deflexiones es un fenómeno complejo, por lo tanto los códigos utilizan fórmulas o expresiones que provienen del ajuste de resultados experimentales. El ACI y la Norma E.060 estiman las deflexiones diferidas mediante las formulas 14-3 y 14-4 que son expresiones muy simplificadas para la cantidad de variables que intervienen en el problema.

$$\text{Deflexión Diferida} = \lambda (\text{Deflexión Inmediata}) \quad (14-3)$$

$$\lambda = \frac{\zeta}{1 + 50 \rho'} \quad (14-4)$$

En la formula 14-4, ρ' es la cuantía del acero en compresión ($A's / bd$) en el centro del tramo para vigas simples o continuas y en el apoyo para voladizos. El valor del parámetro ζ se obtiene de la tabla 14-4 o de la figura 14-6 (ACI).

Tabla 14-4

Duración de la carga	Valor de ζ
1 mes	0.7
3 meses	1.0
6 meses	1.2
12 meses	1.4
5 años o más	2.0

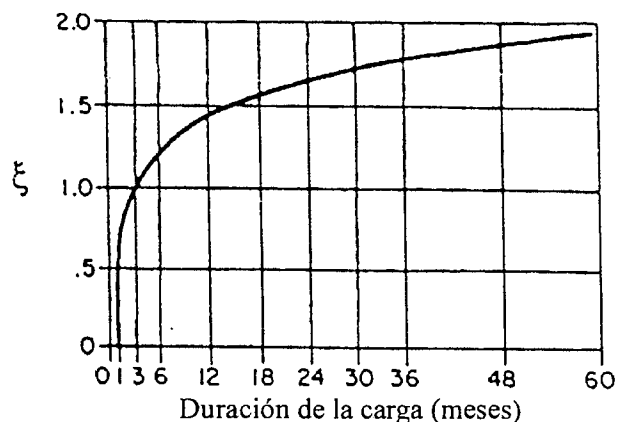


Fig. 14-6 Variación del parámetro ζ

La deflexión diferida se entiende que es la causada, a lo largo del tiempo, por el creep y la retracción. Con la expresión del ACI no es posible diferenciar la parte de la deflexión diferida originada por el creep y la parte originada por la retracción.

Para el cálculo de la deflexión diferida es necesario considerar todas las cargas que se estimen actuarán de manera sostenida o permanente, ellas deben incluir las cargas muertas y la fracción de la carga viva que se estime actuará de manera permanente o sostenida sobre el elemento.

14.9 Deflexiones Máximas Permisibles

La Norma E.060 establece los límites permisibles de las deflexiones. Estos límites están basados en la práctica y en la observación de los daños en elementos no estructurales causados por las excesivas deflexiones (lectura 14.3). Estos límites prácticamente no han variado desde el ACI de 1971.

Los límites de las deflexiones de la Norma E.060 se reproducen en la tabla 14-5 y son idénticos a los del ACI.

Tabla 14.5 Deflexiones máximas permisibles – Norma Peruana

TIPO DE ELEMENTO	DEFLEXIÓN CONSIDERADA	DEFLEXIÓN LÍMITE
<u>Techos planos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles</u> de sufrir daños por deflexiones excesivas	Deflexión inmediata debida a la carga viva.	$L / 180$ (**)
<u>Pisos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles</u> de sufrir daños por deflexiones excesivas.	Deflexión inmediata debida a la carga viva.	$L / 360$
Piso o techos que soporten o estén ligados a <u>elementos no estructurales susceptibles</u> de sufrir daños por deflexiones excesivas	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión diferida debida a todas las cargas sostenidas y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional). (*)	$L / 480$ (***)
Pisos o techos que soporten o estén ligados a <u>elementos no estructurales no susceptibles</u> de sufrir daños por deflexiones excesivas.		$L / 240$ (****)

donde L = Luz de cálculo tal como se le define en la Sección 9.5

- (*) Las deflexiones diferidas se podrán reducir según la cantidad de la deflexión que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determinará basándose en los datos de ingeniería aceptables con relación a las características tiempo-deformación de elementos similares a los que se están considerando.
- (**) Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el estancamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuados, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al peso del agua estancada y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas sostenidas, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las previsiones para el drenaje.
- (***) Este límite se podrá exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en los elementos apoyados o unidos.
- (****) Pero no mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Este límite se podrá exceder si se proporciona una contraflecha de modo que la deflexión total menos la contraflecha no exceda dicho límite.

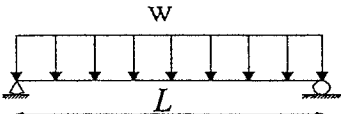
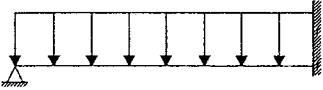
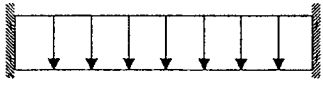
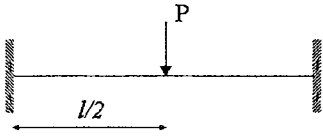
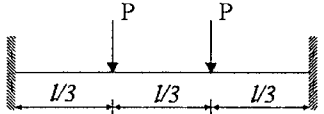
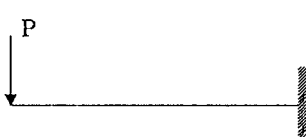
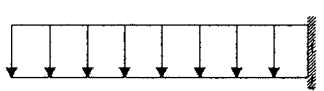
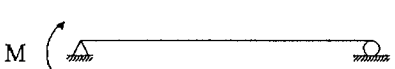
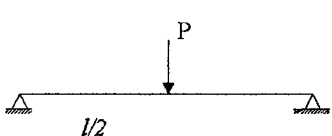
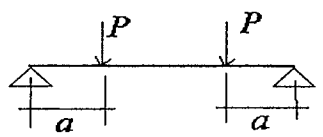
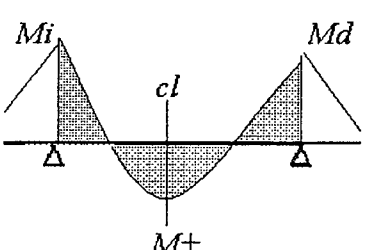
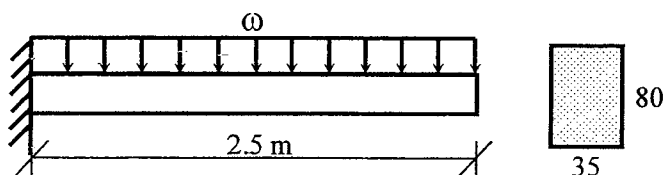
	$\Delta_{\alpha} = \frac{5}{384} \frac{W L^4}{EI} = \frac{5}{48} \frac{M_{pos} L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{1}{185} \frac{W L^4}{EI} = \frac{128}{1665} \frac{M_{pos} L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{1}{384} \frac{W L^4}{EI} = \frac{1}{16} \frac{M_{pos} L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{1}{192} \frac{P L^3}{EI} = \frac{1}{24} \frac{M_{pos} L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{5}{684} \frac{P L^3}{EI} = \frac{5}{72} \frac{M_{pos} L^2}{EI}$
	$\Delta_{extr} = \frac{1}{3} \frac{P L^3}{EI} = \frac{1}{3} \frac{M_{neg} L^2}{EI}$
	$\Delta_{extr} = \frac{1}{8} \frac{W L^4}{EI} = \frac{1}{4} \frac{M_{neg} L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{1}{16} \frac{M L^2}{EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{P L^3}{48 EI}$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{P a}{24 EI} (3L^2 - 4a^2)$
	$\Delta_{\alpha} = \frac{5 L^2}{48 Ec I_{ef}} [M_{cl}^+ - 0.1(M_i + M_d)]$

Tabla 14-3 Deflexiones elásticas de vigas simples

Ejemplo 14-1 - Cálculo de las deflexiones en el extremo libre de una viga en voladizo.
Se desea calcular las deflexiones de una viga en voladizo de sección constante 0.35x0.80 m y longitud 2.5 m, solicitada por una carga distribuida.



$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c \approx 220,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = E_s/E_c \approx 9$$

Cargas en servicio:

$$\omega_{cm} = 4 \text{ ton/m}$$

$$\omega_{cv} = 5 \text{ ton/m}$$

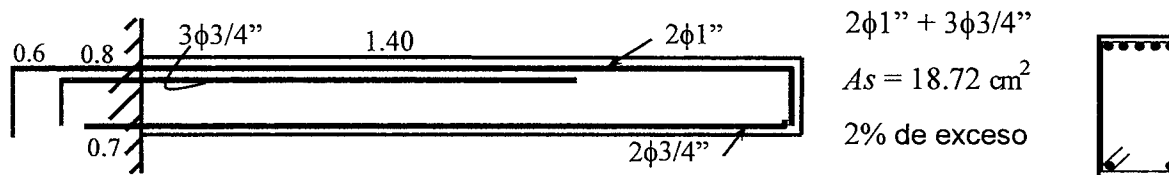
• **Diseño por flexión**

Resistencia requerida, Norma E.060 de 1989: $\omega u = 1.5 \times 4 + 1.85 \times 5 = 15 \text{ ton/m}$

$$M_u^- = (15 \times 2.5^2) / 2 \approx 47 \text{ ton-m}$$

Con $d \approx 74 \text{ cm}$ el acero necesario en tracción es $A_s = 18.3 \text{ cm}^2$

• **Armado propuesto (no se muestran los estribos)**



Con el armado propuesto, en la sección de máximo momento negativo la resistencia de diseño será:

$$A_s = 18.72 \quad A's = 5.68 \quad c = 11.68 \text{ cm} \quad \epsilon_s \approx 7.62 \epsilon_y \quad \epsilon's \approx 0.7 \epsilon_y$$

$$\phi Mn \approx 48.7 \text{ ton-m} \quad (3.6\% \text{ de exceso sobre la resistencia requerida por flexión})$$

La resistencia de los 2φ1'' corridos es $\phi Mn \approx 27.2 \text{ t-m}$ por lo tanto, a partir del diagrama de momentos, se determina que los bastones (3φ3/4'') pueden cortarse a 0.60 m del empotramiento. A esta longitud hay que sumarle d , resultando en una longitud de los bastones de 1.40 m aproximadamente, como se indica en la figura.

• **Momento de Agrietamiento**

$$M_{cr} = 2 f_r I_g / h \quad f_r = 2 \sqrt{210} \approx 29 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = (1/12) 35 \times 80^3 \approx 1,493,000 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr} = 2 \times 29 \times 1,493,000 / 80 = 10.82 \text{ t-m}$$

• **Momento flector bajo las cargas de servicio**

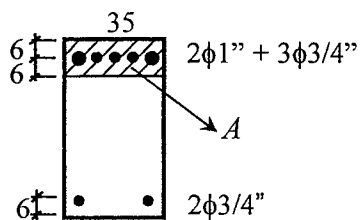
Carga muerta únicamente: $M_{cm}^- = 4 \times 2.5^2 / 2 = 12.5 \text{ t-m} > M_{cr} \quad (M_{cm} \approx 1.16 M_{cr})$

Carga muerta y viva plena: $\omega_s = 4 + 5 = 9 \text{ ton/m}$

$$M_s^- = 9 \times 2.5^2 / 2 = 28.13 \text{ t-m} > M_{cr} \quad (M_s \approx 2.6 M_{cr})$$

Por lo tanto para los cálculos de las deflexiones será necesario utilizar la inercia agrietada de la sección. Como se mencionó en el acápite 14.7, el momento de inercia que debe utilizarse para el cálculo de las deflexiones, es el correspondiente a la sección aledaña al empotramiento que es la sección que en gran medida controlará la deflexión de la viga.

- **Control de la fisuración.** Cálculo del parámetro Z (ver Capítulo 13). Supondremos que las condiciones de exposición no son severas.



$$A_s = 18.72 \text{ cm}^2$$

$$dc \approx 6.0 \text{ cm}$$

$$n \text{ barras} = 18.72 / 5.1 \approx 3.7$$

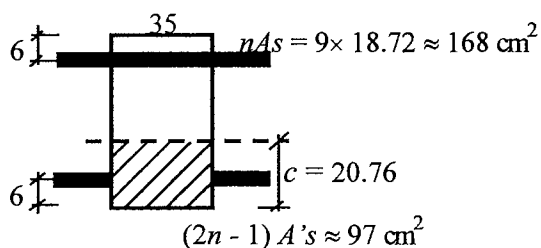
$$Act = (2 \times 6 \times 35) / 3.7 \approx 114 \text{ cm}^2$$

$$fs \approx Ms / As \cdot 0.9d \approx 2,260 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.54 fy \text{ (carga viva plena)}$$

$$Z = fs (dc Act)^{1/3} = 2,260 (6 \times 114)^{1/3} \approx 19,900 \text{ kg/cm}$$

$$Z_{\max} = 26,000 \text{ kg/cm}$$

- **Cálculo de I_{cr} .** La sección que controla las deflexiones es la del apoyo (máximo momento negativo) en consecuencia será necesario calcular la inercia agrietada solo en esta sección y por ser un volado $I_{ef} = I_{cr}$.



$$I_{cr} \approx 603,000 \text{ cm}^4 \approx 0.4 I_g$$

Esfuerzos en el acero y concreto para carga viva plena:

$$jd = d - c/3 \approx 67.1 \text{ cm}$$

$$fs = Ms / As \cdot jd \approx 2,240 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.53 fy$$

$$fc = Ms \cdot c / I_{cr} \approx 97 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.46 f'c$$

El factor $(2n - 1)$ utilizado para transformar el acero en compresión a concreto equivalente, debería usarse solo para el cálculo de las deflexiones debidas a las cargas sostenidas ya que toma en cuenta, de manera aproximada, el efecto que el flujo plástico en el concreto comprimido tiene sobre los esfuerzos en el acero en compresión. Para el cálculo de las deflexiones inmediatas producidas por las cargas muertas, inmediatamente después del desencofrado, debería utilizarse $(n-1)$ para transformar el acero en compresión ya que el flujo plástico aún no se ha producido. Sin embargo las diferencias en el cálculo de I_{cr} al utilizar cualquiera de los dos factores mencionados son pequeñas, en consecuencia realizaremos todos los cálculos con el valor asociado a $(2n - 1)$.

- **Deflexiones inmediatas**

- a) **debidas a la carga muerta**

$$M_{cm} = (1/2) 4 \times 2.5^2 = 12.5 \text{ ton-m}$$

$$\Delta_i \text{ cm} = \frac{1}{4} \frac{(12.5 \times 10^5) \times 250^2}{(220,000 \times 603,000)} \approx 0.15 \text{ cm}$$

- b) **debidas al 100% de la carga viva**

$$\Delta_i \text{ cv} = (5/4) \times 0.15 \approx 0.20 \text{ cm}$$

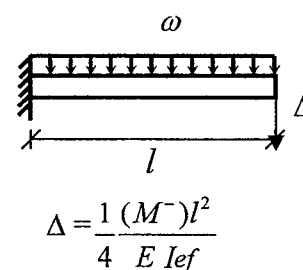
- c) **debidas al 30% de la carga viva.** Se estima que esta es la fracción de la carga viva que podría actuar permanentemente sobre la viga.

$$\Delta_i \text{ cv (30\%)} = 0.20 \times 0.3 = 0.06 \text{ cm}$$

- **Deflexiones Diferidas.**

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'} \quad \xi = 2.0 \text{ (para 5 años o más)}$$

$$\rho' = A's / bd = (2 \times 2.84) / (35 \times 74) \approx 0.22 \%$$



$$\Delta d_{cm} = 1.8 \times 0.15 \approx 0.27 \text{ cm}$$

$$\Delta d_{cv} (30\%) = 1.8 \times 0.06 \approx 0.1 \text{ cm}$$

- *Deflexiones totales*

a) *deflexión media* con el 30% de la CV actuando permanentemente

$$\Delta m = \Delta i_{cm} + 0.3 \Delta i_{cv} + \Delta d_{cm} + \Delta d_{cv} (30\%)$$

$$\Delta m = 0.15 + 0.06 + 0.27 + 0.1 \approx 0.6 \text{ cm}$$

b) *deflexión máxima esperada*

$$\Delta m_{max} = \Delta i_{cm} + \Delta i_{cv} + \Delta d_{cm} + \Delta d_{cv} (30\%)$$

$$\Delta m_{max} = 0.15 + 0.20 + 0.27 + 0.1 \approx 0.7 \text{ cm}$$

De los 0.7 cm estimados de deflexión máxima, aproximadamente el 50% corresponden a las deflexiones diferidas.

- *Límites de la Norma.* Si la viga no estuviera conectada con elementos no estructurales susceptibles de dañarse por deflexiones, el límite de la Norma sería:

$$\text{Deflexión límite} = 2L/360 \quad (\text{instantánea debido a 100\% de la CV})$$

$$\text{Deflexión límite} = 2 \times 250 / 360 \approx 1.4 \text{ cm} > 0.20 \Rightarrow \text{ok}$$

El valor de 2L utilizado para establecer el límite de la Norma corresponde a elementos estructurales en volado.

Si hubiera elementos no estructurales susceptibles de dañarse (por ejemplo un muro o tabique de ladrillo apoyado directamente sobre la viga) y suponiendo que el tabique se construye inmediatamente después (o digamos una semana) de desencofrar la viga, de tal modo que no hayan ocurrido deflexiones diferidas importantes debidas a la carga muerta, el límite sería:

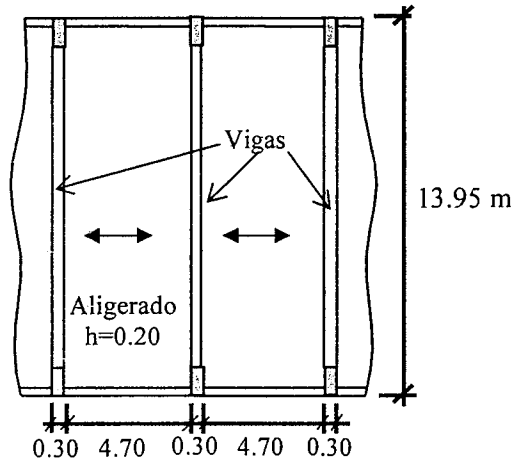
$$\text{Deflexión límite} = 2L/480 = 2 \times 250 / 480 \approx 1.0 \text{ cm}$$

En el cálculo de la deflexión, intervendrían:

Δd_{cm}	=	0.27	47%
$\Delta d_{cv} (30\%)$	=	0.10	18%
Δi_{cv}	=	<u>0.20</u>	35%
		0.57 cm	valor inferior al límite de la Norma

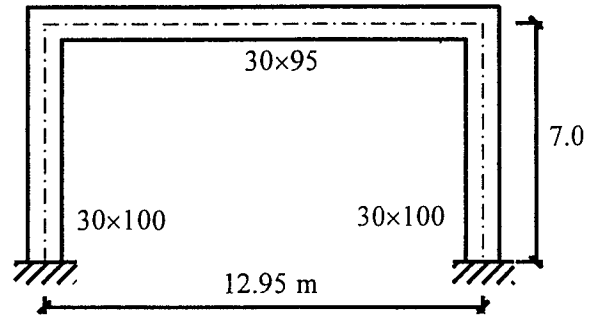
Es necesario señalar que en los cálculos anteriores se ha supuesto que el tabique o elemento no estructural sea de peso despreciable frente a las otras cargas que soporta la viga. Si este no fuera el caso, habría que calcular e incluir las deflexiones adicionales (instantánea y diferida) producidas por el peso del tabique.

Ejemplo 14-2 - Cálculo de las deflexiones en la viga de un pórtico.



Planta

Aligerado $h = 0.20$ m
 $s/c = 300 \text{ kg/m}^2$ (futura ampliación)



Elevación pórtico interior típico

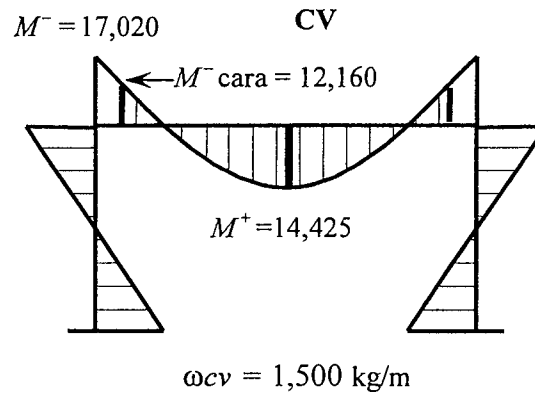
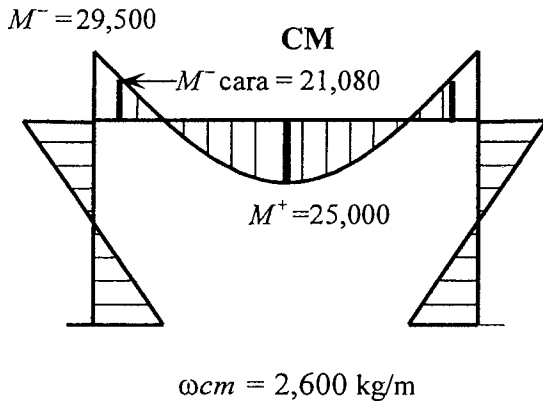
$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$
 $E_c \approx 220,000 \text{ kg/cm}^2$
 $n = E_s/E_c \approx 9$

• **Metrado de la viga**

p.p	= $2,400 \times 0.3 \times 0.95$	= 684
alig.	= 300×4.7	= 1,410
p.ter.	= 100×5.0	= 500
s/c	= 300×5.0	= 1,500
	$\omega_{cm} \approx 2,600 \text{ kg/m}$	$\omega_{cv} 1,500 \text{ kg/m}$

Norma E.060 de 1989 $\omega_u = 1.5 \times 2,600 + 1.8 \times 1,500 = 6,600 \text{ kg/m}$

• **Análisis:** los diagramas de momento flector para las cargas muertas y vivas en condiciones de servicio son:



• **Diseño por flexión:** $d \approx 95 - 7 = 88 \text{ cm}$ (estimado)

$As_{max} \approx 42 \text{ cm}^2$ $As_{min} = 6.4 \text{ cm}^2$

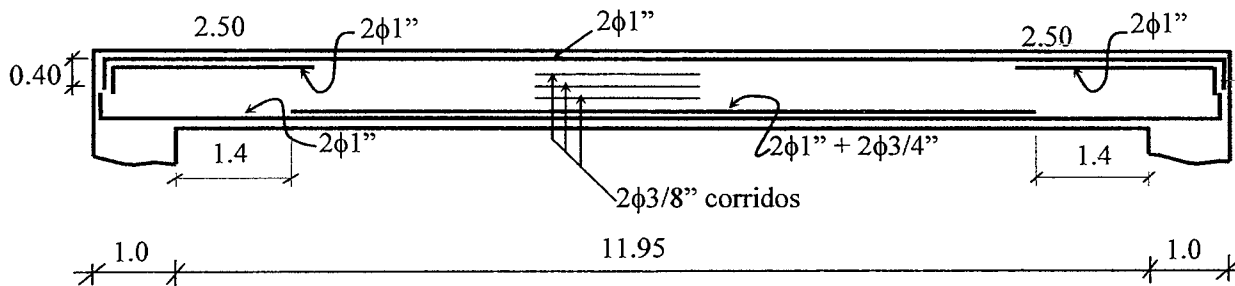
$Mu^- = 1.5 \times 21,080 + 1.8 \times 12,160 \approx 53,510 \text{ kg-m}$

$As^- = 17.4 \text{ cm}^2$

$Mu^+ = 1.5 \times 25,000 + 1.8 \times 14,425 \approx 63,470 \text{ kg-m}$

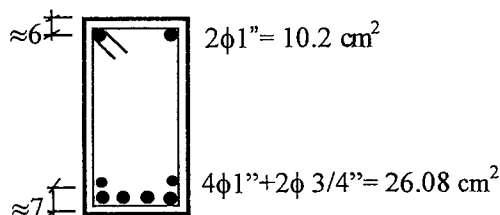
$As^+ = 21.1 \text{ cm}^2$

- Armadura por flexión (no se muestran los estribos)



- Armaduras colocadas $As^- = 20.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow \phi Mn^- \approx 61.7 \text{ t-m}$ 15% exceso
 $As^+ = 26.08 \text{ cm}^2 \Rightarrow \phi Mn^+ \approx 76.7 \text{ t-m}$ 21% exceso

- Control de la fisuración. Cálculo del parámetro Z en la zona de máximo momento positivo. Supondremos que las condiciones de exposición no son severas y utilizaremos el momento positivo de carga muerta más el de carga viva plena.



$$dc \approx 6.2 \text{ cm} \quad d \approx 88 \text{ cm}$$

$$n \text{ barras} = 26.08 / 5.1 \approx 5.1$$

$$Act = (2 \times 7 \times 30) / 5.1 \approx 82 \text{ cm}^2$$

$$Ms = 25,000 + 14,425 = 39,425 \text{ kg-m}$$

$$fs \approx Ms / As \cdot 0.9d \approx 1,910 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.45 fy$$

$$Z = 1,910 (6.2 \times 82)^{1/3} \approx 15,240 \text{ kg/cm}$$

$$Z_{max} = 26,000 \text{ kg/cm}$$

- Momento de Agrietamiento

$$Mcr = 2 fr Ig / h \quad fr = 2 \sqrt{210} \approx 29 \text{ kg/cm}^2$$

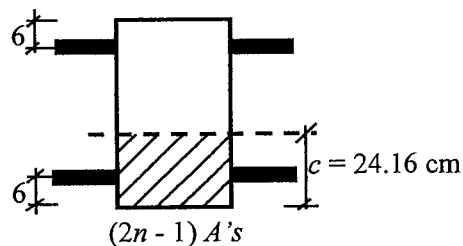
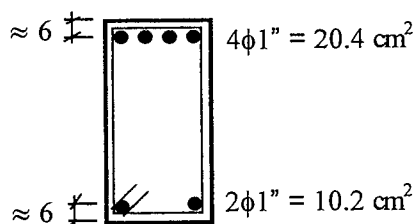
$$Ig = (1/12) 30 \times 95^3 \approx 2,143,000 \text{ cm}^4$$

$$Mcr^+ = Mcr^- = 2 \times 29 \times 2,143,000 / 95 \approx 13,080 \text{ kg-m}$$

Por lo tanto, solo por la acción de la carga muerta, las secciones de momento positivo y negativo deberían agrietarse. En consecuencia, para los cálculos de las deflexiones será necesario utilizar la inercia agrietada de la sección.

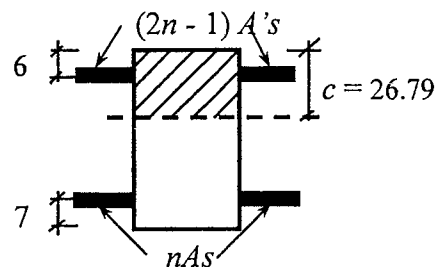
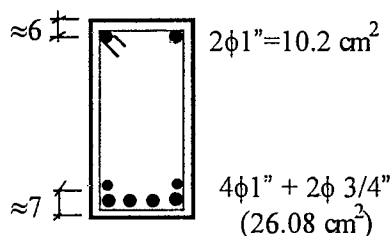
- Cálculo de Icr . Se ha utilizado $2n - 1 \approx 17$

Sección M^-



$$Icr \approx 970,000 \text{ cm}^4 \approx 0.45 Ig$$

Sección M^+



$$I_{cr} \approx 1'147,000 \text{ cm}^4 \approx 0.53 I_g$$

• Inercia Efectiva

$$I_{ef} = \frac{I_{cr1^-} + I_{cr2^-} + 2I_{cr^+}}{4}$$

$$I_{ef} = (2 \times 970 + 2 \times 1,147) \times 1000 / 4 \approx 1'060,000 \text{ cm}^4 = 0.49 I_g$$

• Deflexiones inmediatas

a) debidas a la carga muerta $\omega = 2,600 \text{ kg/m}$

$$\Delta \varphi = \frac{5}{48} \times \frac{ln^2}{E I_{ef}} [M^+ - 0.1(M_1 + M_2)]$$

$$M_1 = M_2 = 21,080 \text{ kg-m} \quad (\text{momentos negativos a la cara del apoyo})$$

$$\Delta \varphi = \frac{5}{48} \times \frac{1,195^2}{220,000 \times 1'060,000} [25,000 - 0.1 \times 2 \times 21,080] \times 100$$

$$\Delta \varphi \approx 1.35 \text{ cm} \quad (\text{inmediata debida a CM})$$

b) debidas al 100% de la carga viva $\omega = 1,500 \text{ kg/m}$

$$\Delta \varphi = 1.35 (1,500/2,600) \approx 0.80 \text{ cm} \quad (\text{inmediata debida al 100\% de CV})$$

c) debidas al 30% de la carga viva. Se estima que esta es la fracción de la carga viva que podría actuar permanentemente sobre la viga.

$$\Delta \varphi = 0.80 \times 0.3 \approx 0.25 \text{ cm} \quad (\text{inmediata debida al 30\% de CV})$$

• Deflexiones diferidas

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad \xi = 2.0 \quad (5 \text{ años o más})$$

$$\rho' = \frac{2 \times 5.1}{30 \times 88} \approx 0.39 \% \quad (\text{sección central})$$

$$\lambda \approx 1.7$$

• Deflexiones totales

$$\Delta i \text{ cm} = 1.35 \text{ cm}$$

$$\Delta i \text{ cv} = 0.80 \text{ cm} \quad (100\% \text{ de CV})$$

$$\Delta i \text{ cv} (30\%) = 0.25 \text{ cm} \quad (30\% \text{ de CV})$$

$$\Delta d \text{ cm} = 1.7 \times 1.35 \approx 2.30 \text{ cm}$$

$$\Delta d \text{ cv} (30\%) = 1.7 \times 0.25 \approx 0.40 \text{ cm}$$

a) deflexión media con el 30% de la CV actuando permanentemente

$$\Delta m = \Delta i \text{ cm} + 0.3 \Delta i \text{ cv} + \Delta d \text{ cm} + \Delta d \text{ cv} (30\%)$$

$$\Delta m = 1.35 + 0.25 + 2.30 + 0.40 \approx 4.3 \text{ cm}$$

b) *deflexión máxima* esperada en el instante en que actúe el 100% de la CV

$$\Delta_{\max} = \Delta i_{cm} + \Delta i_{cv} + \Delta d_{cm} + \Delta d_{cv} (30\%)$$

$$\Delta_{\max} = 1.35 + 0.80 + 2.30 + 0.40 = 4.85 \text{ cm} \Rightarrow \approx 5 \text{ cm}$$

- *Límites de la deflexión.* Si la viga no estuviera conectada con elementos no estructurales susceptibles de dañarse por deflexiones, el límite de la Norma sería:

$$\text{Deflexión límite} = L/360 \quad (\text{instantánea debido a 100\% de CV})$$

$$\text{Deflexión límite} = 1,195 / 360 \approx 3.3 \text{ cm} > 0.80 \Rightarrow \text{ok}$$

Si hubiera elementos no estructurales susceptibles de dañarse (por ejemplo un muro o tabique de ladrillo apoyado directamente sobre la viga) y suponiendo que el tabique se construye inmediatamente después (o digamos una semana) de desencofrar la viga, de tal modo que no hayan ocurrido deflexiones diferidas importantes, el límite sería:

$$\text{Deflexión límite} = L/480 \approx 2.5 \text{ cm}$$

En el cálculo de la deflexión que podría afectar al tabique, intervendrían:

$$\Delta d_{cm} = 2.30 \text{ cm} \quad (66\%)$$

$$\Delta d_{cv} (30\%) = 0.40 \text{ cm} \quad (11\%)$$

$$\Delta i_{cv} = \underline{0.80 \text{ cm}} \quad (23\%)$$

$$3.50 \text{ cm} \quad (\text{no cumple con el límite de la Norma})$$

Posibles soluciones si existiera un tabique susceptible de dañarse:

- Aumentar el peralte de la viga.
- Aumentar el acero en compresión para reducir las deflexiones diferidas.
- Aumentar el acero en tracción para aumentar I_{cr} y reducir los esfuerzos en el acero bajo cargas de servicio.
- Descontar la parte de la flecha diferida por carga muerta que ya ocurrió antes de construir el elemento no estructural ¿Cuánto tiempo después se construirá el elemento no estructural?

Es necesario señalar que en los cálculos anteriores se ha supuesto que el tabique o elemento no estructural sea de peso despreciable frente a las otras cargas que soporta la viga. Si este no fuera el caso, habría que calcular e incluir las deflexiones adicionales (instantánea y diferida) producidas por el peso del tabique.

En este caso, el especificar una contraflecha en el centro de la viga durante el proceso de construcción, no resolvería el problema ya que las deflexiones que más afectan al tabique son las diferidas producidas por la carga muerta y por la parte de la carga viva que se supone actúa permanentemente. El tratar de compensar estas deflexiones con una contraflecha, puede dar lugar a que mientras no se produzcan las deflexiones diferidas, la viga tendrá una contraflecha notable. Además, las deflexiones diferidas afectarán al tabique aún cuando exista una contraflecha en la viga ya que el tabique se construye sobre la viga que ha sido desencofrada y ha quedado con contraflecha.

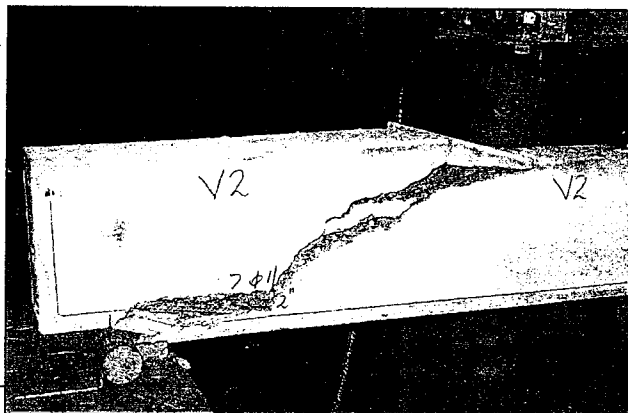
Para reducir la posibilidad de que las deflexiones afecten la apariencia de la viga, o si fuera el caso de una azotea plana, para evitar que el agua se empoce, es conveniente especificar una contraflecha que compense las deflexiones inmediatas debidas a la carga muerta y a la parte de la carga viva permanente. En el caso particular de la viga que hemos analizado, una contraflecha de 2 cm sería adecuada.

14.10 Lecturas

- 14.1 Instantaneous and Long – Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads. Wei-Wen Yu and George Winter. Journal of ACI. July 1960.
- 14.2 Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. ACI Committee-435. Journal of ACI. June 1966.
- 14.3 Allowable Deflections. ACI Committee 435. Journal of ACI. June 1968.
- 14.4 Deflection of Reinforced Concrete Members: A Critical Review. Amin Ghali. ACI Structural Journal, July- August 1993.
- 14.5 Variability of Deflection of Simply Supported Reinforced Concrete Beams. ACI 435.4R-72.
- 14.6 Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures – Why We Sometimes Get It Wrong. R. Ian Albert. ACI Structural Journal, November- December 1999.

CAPITULO 15

Diseño por Fuerza Cortante



15.1 Algunas ideas iniciales

La sollicitación por fuerza cortante en los elementos de concreto armado, es una sollicitación compleja. La resistencia al corte de una sección o elemento de concreto armado se puede predecir con mucha menor precisión que la resistencia a flexión. El diseño por cortante que propone la Norma es semi - empírico, y está basado en el ajuste de los resultados obtenidos en ensayos de laboratorio de numerosos elementos, con y sin refuerzo en el alma (estribos).

Existe interacción entre el cortante, la flexión, la torsión y la carga axial. Es decir no son sollicitaciones independientes, la flexión, la torsión y la carga axial influyen en la resistencia al corte de un elemento de concreto armado.

La Norma reconoce que la falla por cortante es una falla frágil, esto explica parcialmente el menor valor del factor de reducción de resistencia ($\phi = 0.85$) adoptado por la Norma.

El concreto no falla por corte, falla por los esfuerzos de tracción diagonal originados por las cargas externas. La resistencia del concreto al corte directo, es mucho mayor que su resistencia a la tracción. La resistencia al corte (tracción diagonal) depende de la resistencia en tracción del concreto.

Es necesario que como consecuencia de un diseño racional, mediante refuerzos apropiados y un buen detallado de los elementos, se evite la falla por corte. La idea central es que debe primar la falla por flexión del elemento y no la falla por cortante. Esto se puede lograr si en el diseño del elemento se toman las previsiones necesarias para lograr que la falla por flexión, asociada normalmente a una falla dúctil, suceda antes de que se produzca la falla por cortante (Diseño por Capacidad).

Una excesiva sobrerresistencia en flexión puede conducir a una falla prematura por cortante antes que el elemento alcance la falla por flexión. Esto sucede si la fuerza cortante de diseño y en consecuencia, el refuerzo por cortante en el elemento, no se ajusta o no refleja la intensidad real de la carga asociada con la mayor resistencia en flexión, provista por el diseñador. Este fenómeno también podría suceder, cuando el esfuerzo de fluencia real del acero por flexión es notablemente mayor que el esfuerzo nominal de fluencia utilizado para el diseño.

Antes de presentar el comportamiento de los elementos de concreto armado ante las fuerzas cortantes y la metodología de diseño, es conveniente formarse una idea del tipo de falla que puede experimentar un elemento sollicitado por fuerzas cortantes más allá del régimen elástico. Para ello al final de este capítulo se presentan algunas fotos de fallas por fuerza cortante en elementos estructurales reales.

En la foto 1 se muestra la falla por cortante (tracción diagonal) de una viga perteneciente a un techo de un depósito con cobertura liviana. La viga tenía un refuerzo por corte

(estribos) muy liviano, casi inexistente, por debajo de los estribos mínimos que los códigos exigen hoy en día. La falla fue del tipo frágil, súbita sin previo aviso y obligó a revisar las disposiciones de relativas a los estribos mínimos que contenía el código de esa época. La foto 2 corresponde a un ensayo en laboratorio de una viga sin refuerzo por cortante.

Las otras fotos corresponden a daños en muros de corte, columnas y vigas de acoplamiento producidos por la acción de sismos fuertes. Es necesario observar con cuidado la forma de falla en las columnas de las fotos 5, 6 y 7. En estas columnas el refuerzo por cortante era casi inexistente y el tipo de falla condujo a una pérdida total de la capacidad de carga del elemento, con un comportamiento muy poco dúctil.

15.2 Etapas en el Comportamiento a Cortante de una Viga

15.2.1 Sección no Fisurada

Las secciones no fisuradas en flexión se pueden tratar con las teorías clásicas de resistencia de materiales, derivadas para elementos esbeltos de un material homogéneo, isotrópico y elástico. Antes de la fisuración los esfuerzos ocasionados por las fuerzas cortantes son tomados íntegramente por el concreto y su distribución se puede aproximar mediante las teorías clásicas como se indica en la figura 15-1 (Park – Paulay) en la cual se muestran los esfuerzos de flexión, el flujo de cortante y los esfuerzos cortantes en una sección de una viga solicitada por una carga externa.

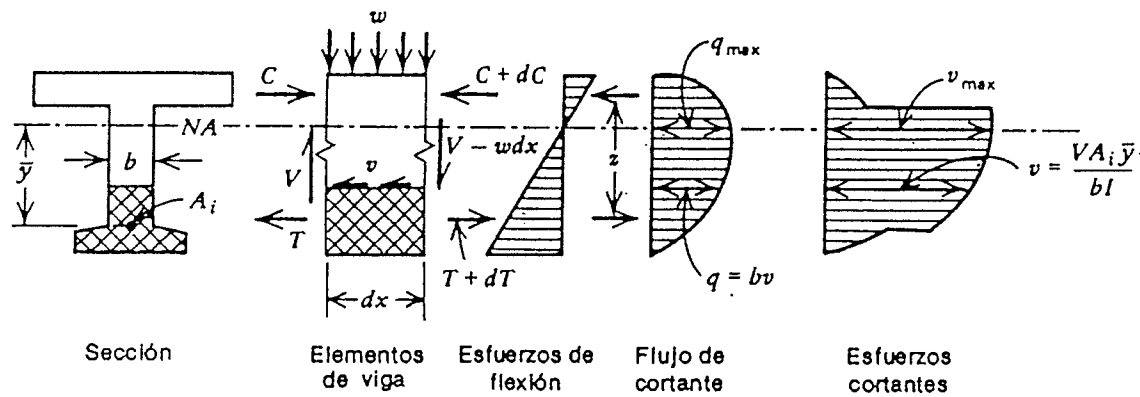


Fig. 15-1 Esfuerzos de flexión y cortante en una sección no fisurada.

Los esfuerzos originados por la flexión se combinan con los originados por las fuerzas cortantes dando origen a los que se denominan esfuerzos principales de tracción y de compresión. Los esfuerzos principales de tracción se pueden obtener mediante la ecuación 15-1a en la cual σ es el esfuerzo causado por la flexión (t ó c , figura 15-2 a) y v es el esfuerzo cortante. La trayectoria de los esfuerzos principales de tracción y de compresión se muestra 15-2 b.

$$\sigma_t = 0.5(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4v^2}) \quad (15-1a)$$

El ángulo entre la horizontal y el esfuerzo principal de tracción σ_t viene dado por:

$$\tan 2\theta = \frac{2v}{\sigma} \quad (15-1b)$$

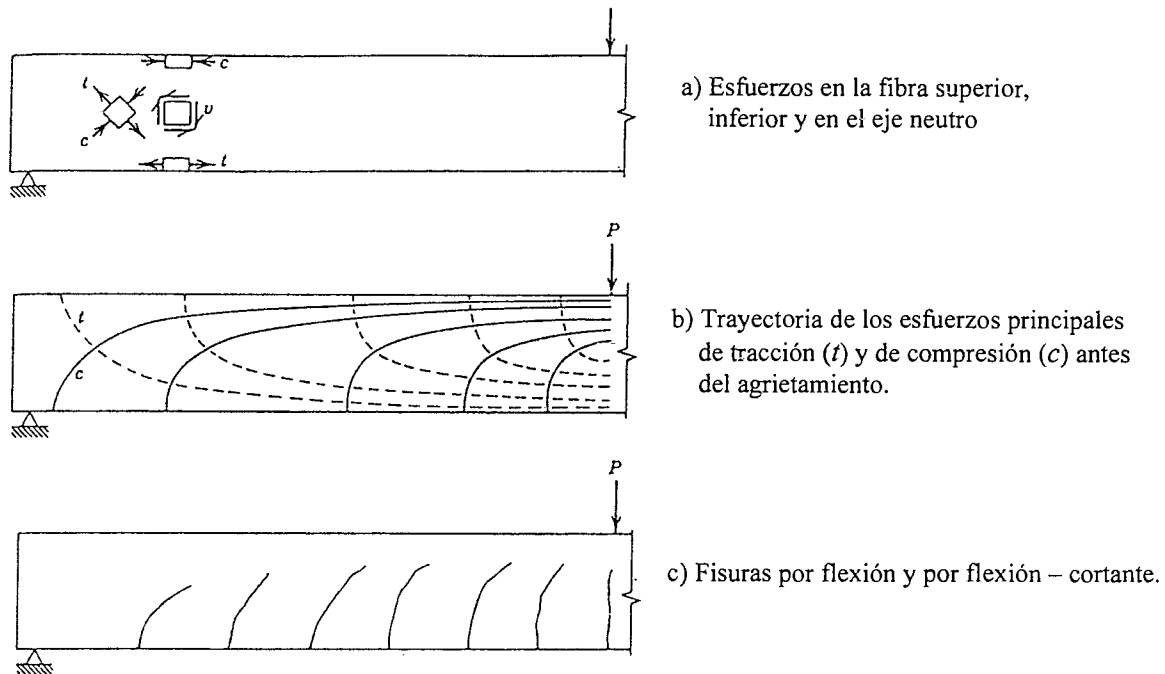


Fig. 15-2 Esfuerzos principales y agrietamiento en una viga de concreto.

Cuando los esfuerzos principales de tracción sobrepasan la resistencia del concreto, se desarrollan grietas aproximadamente perpendiculares a las trayectorias de los esfuerzos principales de tracción. Cerca del centro de la viga, donde la flexión es grande y el cortante es pequeño, las grietas se inician en la parte inferior y son verticales. Lejos de la zona central de la viga, las grietas se inician en la parte inferior y progresan hacia arriba cambiando su dirección a medida que el esfuerzo cortante aumenta. En las zonas cercanas al eje neutro, las grietas forman un ángulo de aproximadamente 45° con respecto a la horizontal. La dirección de las trayectorias de las grietas depende de la relación momento – cortante en cada sección a lo largo del eje de la viga. Cerca de los apoyos, las grietas que se iniciaron por flexión, se inclinan.

La distribución de los esfuerzos principales también puede encontrarse utilizando análisis por elementos finitos como se muestra en la figura 15-3 a. Aprovechando la simetría se ha analizado la mitad de la viga de sección rectangular, asumiendo un material homogéneo, isotrópico y lineal elástico. Este tipo de análisis tiene diversas ventajas, entre ellas, el incluir los esfuerzos verticales de compresión (o de tracción si la carga está “colgada” de la viga) causados por las cargas verticales que obran sobre la viga.

Los esfuerzos principales de compresión y de tracción se muestran en las figuras 15-3 b y c respectivamente en las cuales la dirección de las flechas coincide con la dirección de los esfuerzos y la longitud representa la magnitud relativa del esfuerzo. Los esfuerzos máximos de compresión, como era de esperarse en este caso, ocurren al centro de la viga en la parte superior de la misma, se nota que las trayectorias de los esfuerzos de compresión forman un arco dirigido hacia los apoyos. Los esfuerzos máximos de tracción ocurren en la parte inferior de la viga al centro de la luz y cambian de dirección cerca de los apoyos.

Debe tenerse en cuenta que una vez que se inicia la fisuración del concreto, la suposición de que el material es homogéneo e isotrópico deja de ser válida. Sin embargo, los esfuerzos principales calculados ayudan a predecir el primer agrietamiento y pueden ser útiles para explicar el agrietamiento que puede producirse en las vigas de concreto armado.

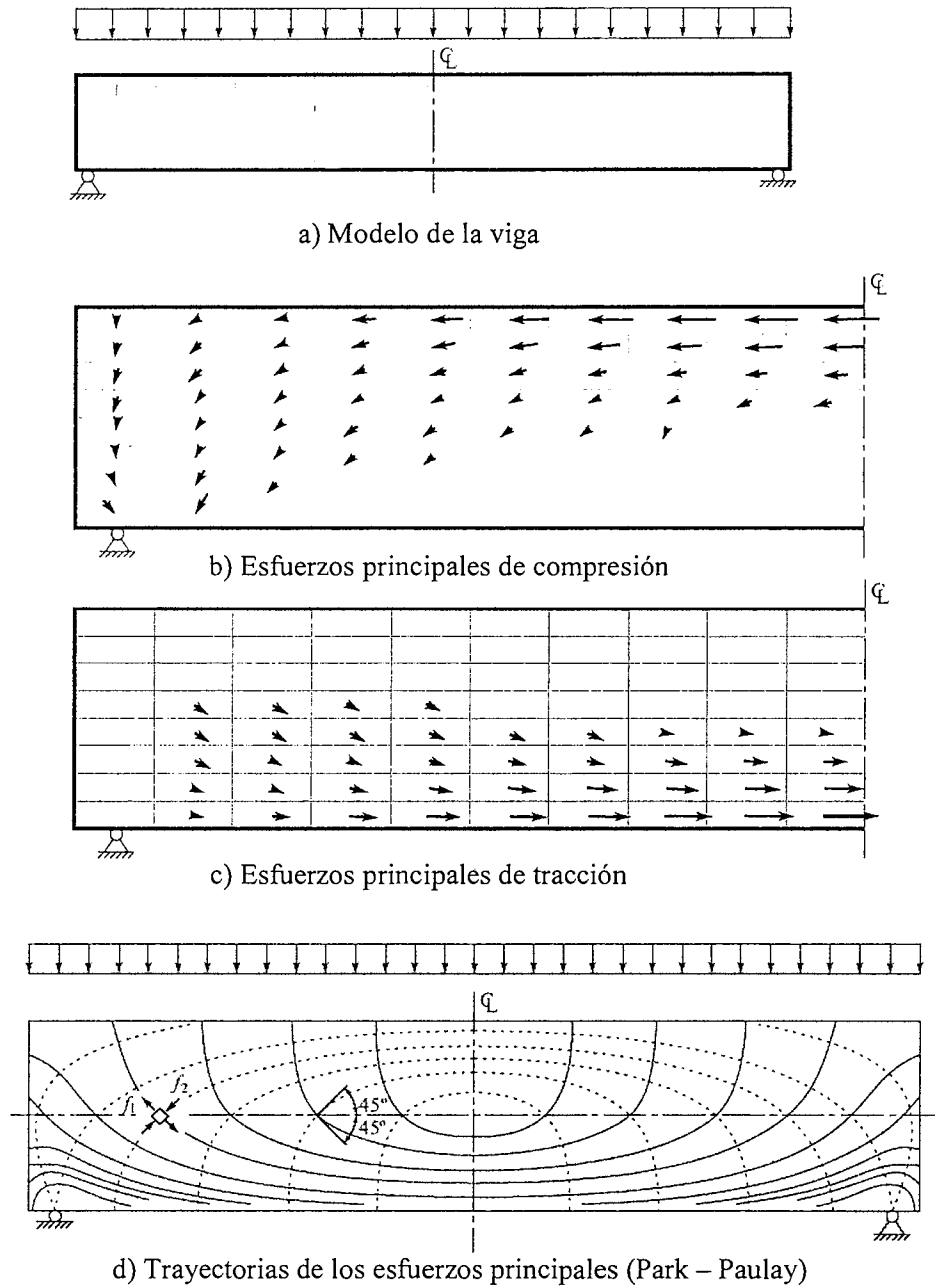


Fig. 15-3 Esfuerzos principales calculados con un modelo de elementos finitos

15.2.2 Sección Fisurada

El concepto tradicional para el cálculo del esfuerzo cortante mostrado en la figura 15-1, se extendió al caso de las secciones fisuradas por flexión, como se muestra en la figura 15-4a (Park – Paulay), en la cual el concreto por debajo del eje neutro se encuentra fisurado por tracción y no es capaz de tomar esfuerzos, en consecuencia el flujo de cortante por debajo del eje neutro es constante - si el ancho del alma fuera constante, el esfuerzo cortante por debajo del eje neutro también sería constante - esto significa que el concreto ubicado debajo del eje neutro se encuentra en un estado de corte puro. Esta metodología se utilizó durante muchos años y está asociada con el diseño por esfuerzos admisibles.

Nótese nuevamente en la figura 15-4b que las fibras por debajo del eje neutro transfieren un cortante horizontal constante, igual al cambio de tensión en el acero de refuerzo, el cual debe equilibrarse con un cortante vertical. Para que esto sea posible debe admitirse

que puede transferirse cortante vertical en la misma grieta. Sin embargo, la pregunta que surge de manera natural es ¿cómo se puede transferir el cortante vertical en la misma grieta si el concreto está fisurado? La respuesta es que el mecanismo real debe involucrar transferencia de una parte del cortante en la zona comprimida de concreto y el resto debe ser resistido por la acción de dovela en el acero y por la acción de trabazón entre los agregados a ambos lados de la grieta. Estos mecanismos se presentarán posteriormente.

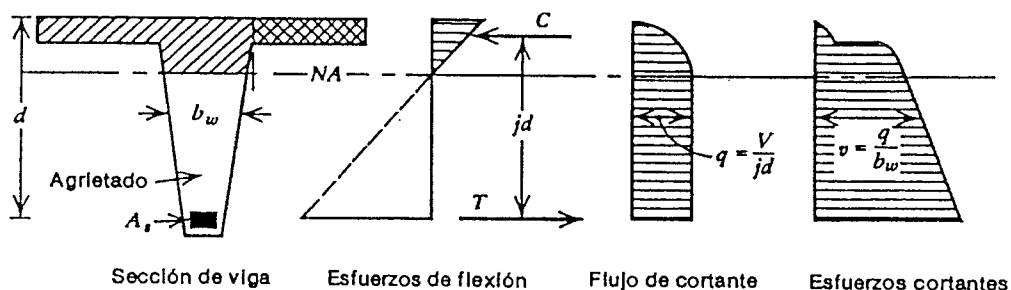


Fig. 15-4a Esfuerzos cortantes en una sección agrietada.

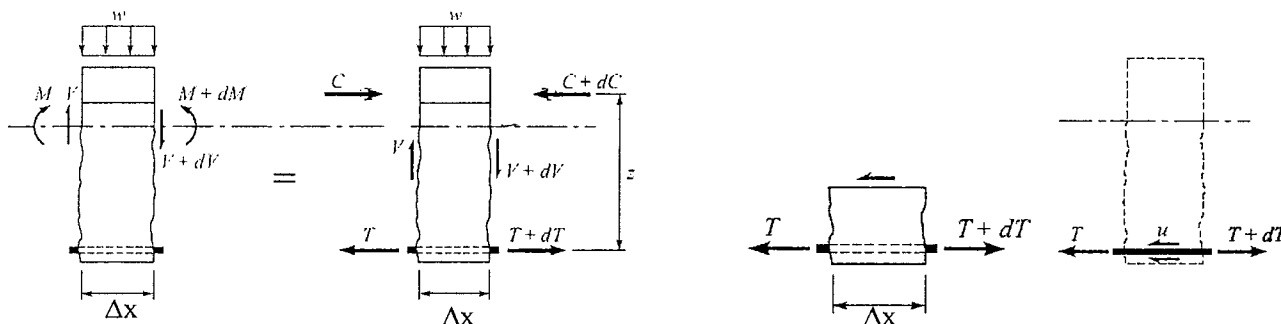


Fig. 15-4b Equilibrio de un elemento entre grietas.

Con relación a la figura 15-4b y asumiendo que debajo del eje neutro el concreto no resiste tracciones pero que sí es posible transferir cortante vertical en la grieta, tendremos:

$$T = \frac{M}{jd} \quad T + \Delta T = \frac{M + \Delta M}{jd} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{\Delta M}{jd}$$

donde $jd = z$ es el brazo interno de palanca que se asume constante. El equilibrio de momentos del elemento exige que:

$$\Delta M = V \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{V \Delta x}{jd}$$

La fuerza ΔT debe transferirse mediante un esfuerzo cortante horizontal, la intensidad del esfuerzo cortante promedio por debajo del eje neutro es:

$$v = \frac{\Delta T}{b_w \Delta x} = \frac{V}{b_w jd} \quad (15-2)$$

$$\text{Flujo de corte: } q = v b_w = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{V}{jd}$$

En una sección rectangular agrietada bajo cargas de servicio, el valor de j se encuentra comprendido entre 0.85 y 0.9. Asumiendo un valor promedio de 0.875 la ecuación 15-2 conduce a que alrededor de un 30% de la fuerza cortante es transferida al concreto en compresión ubicado por encima del eje neutro, el resto de la fuerza cortante debe ser transferida a lo alto de la grieta.

El ACI simplificó la expresión 15-2 y utilizó durante muchos años la expresión 15-3 como una medida de la intensidad del esfuerzo cortante, de utilidad solamente dentro de la metodología de diseño propuesta para fuerza cortante por las normas. Es decir no debe pensarse que con el uso de la ecuación 15-3 es posible calcular con precisión la intensidad del esfuerzo cortante en una sección agrietada. Veremos posteriormente que los mecanismos de transferencia de las fuerzas cortantes en vigas agrietadas cerca de su resistencia máxima, son bastante más complejos.

$$v = \frac{V}{b_w d} \quad (15-3)$$

Es necesario indicar que en ciertas situaciones los esfuerzos cortantes máximos pueden ocurrir en otras fibras de la sección transversal. Por ejemplo cuando las alas de secciones T soportan elevadas compresiones provenientes de la flexión, el esfuerzo cortante en la unión del ala con el alma (ver figura 15-4a) puede ser crítico y es necesario colocar refuerzo horizontal en el ala. En las vigas que soportan losas de concreto, el refuerzo por flexión de la propia losa suele ser suficiente para este propósito.

15.2.3 Comportamiento Real

Si bien existe cierta similitud entre las trayectorias de los esfuerzos principales de tracción y el agrietamiento en vigas reales, la concordancia dista de ser buena. La estimación de los esfuerzos principales de tracción mediante la ecuación 15-1, es válida antes del agrietamiento por flexión y normalmente este suele ocurrir antes que los esfuerzos principales de tracción, cerca del eje neutro, se vuelvan críticos.

Cuando ocurre el agrietamiento por flexión los esfuerzos de tracción a través de las grietas se vuelven nulos. Para mantener el equilibrio ocurre una redistribución importante de los esfuerzos internos en todo el elemento. Como consecuencia, el inicio del agrietamiento diagonal en una viga no puede ser predicho a partir de los esfuerzos principales, salvo que el agrietamiento por cortante preceda al agrietamiento por flexión, situación poco frecuente en los elementos de concreto armado, salvo en el alma de algunas vigas preesforzadas antes del agrietamiento.

Como consecuencia, como en el caso de la flexión, es más racional estudiar el comportamiento de las vigas agrietadas frente a las fuerzas cortantes cuando se alcanza la resistencia última del elemento para ser consistentes con el diseño por resistencia que se emplea en el concreto armado.

15.3 Mecanismo de Viga y Mecanismo de Arco

La relación entre fuerza cortante y momento flector viene dada por:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d(Tz)}{dx} = \frac{d}{dx}(T jd) = jd \frac{dT}{dx} + T \frac{d(jd)}{dx} \quad (15-4)$$

Mecanismo de Viga: El primer término de la ecuación anterior ($jd \frac{dT}{dx}$) representa el mecanismo clásico de viga en el cual el brazo interno de palanca (jd) permanece constante, tal como se asume en la teoría elástica clásica de vigas y la magnitud de la tracción T cambia a lo largo del eje de la viga, para equilibrar el momento externo. Este mecanismo se ilustra en la figura 15-5a. Si el brazo interno de palanca permanece constante entonces:

$$\frac{d(jd)}{dx} = 0 \Rightarrow V = jd \frac{dT}{dx} = q jd \quad (15-5)$$

Donde dT/dx es igual al flujo de corte “ q ” a lo largo de cualquier plano horizontal entre el refuerzo de tracción y la zona de compresión, como se muestra en la figura 15-4b. Para que exista el mecanismo de viga, es necesario que exista flujo de corte y para que exista cambio en la tracción del acero de refuerzo (dT) es necesario que exista adherencia entre el acero y el concreto, la intensidad de los esfuerzos de adherencia (μ) viene dada por:

$$dT = n(\pi db)\mu dx \Rightarrow q = n(\pi db)\mu \Rightarrow \mu = \frac{V}{n\pi db(jd)} \quad (15-6)$$

donde n es el número de barras de refuerzo y db el diámetro de las mismas.

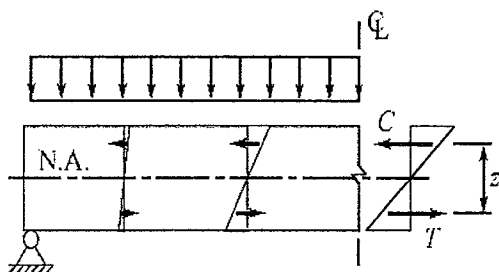


Fig. 15-5a Mecanismo de viga

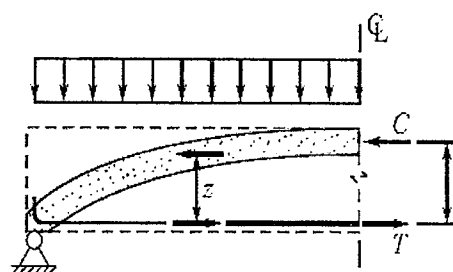
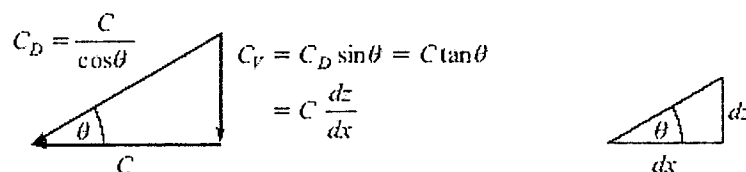


Fig. 15-5b Mecanismo de arco

Mecanismo de Arco: Cuando no existe adherencia entre el acero y el concreto o por algún motivo se pierde la adherencia en la viga, la fuerza de tracción en el acero no puede cambiar, en consecuencia $dT/dx = 0$ y la fuerza se mantiene constante. En estos casos el mecanismo de viga se pierde y la fuerza cortante puede ser resistida solamente por las compresiones inclinadas en el concreto (figura 15-5b). Este caso extremo se denomina “efecto o mecanismo de arco”. La resistencia al corte asociada a este mecanismo, viene dada por el segundo término de la ecuación 15-4:

$$V = T \frac{d(jd)}{dx} = C \frac{d(jd)}{dx} \quad (15-7)$$

En la ecuación anterior se observa que la tracción en el acero se mantiene constante y lo que cambia es el brazo interno de palanca. También, la fuerza de tracción T ha sido remplazada por la fuerza interna de compresión C para resaltar que la componente vertical de las compresiones es la encargada de equilibrar la fuerza cortante, tal como se ilustra en la siguiente figura.



Es importante anotar que el efecto de arco depende del anclaje en los extremos de las armaduras de tracción (figura 15-5b), si el anclaje falla la viga colapsa (asumiendo que el mecanismo de viga se ha perdido) también que el mecanismo de arco se puede formar solo a expensas de la pérdida casi completa de la adherencia. El mecanismo de arco se vuelve más efectivo a medida que aumenta el peralte de la viga y en consecuencia la flecha del arco.

15.4 Tipos de Agrietamiento

La figura 15-6 (ACI) resume los diversos tipos de fisuración en los cuales interviene las fuerzas cortantes y la flexión en vigas de concreto armado.

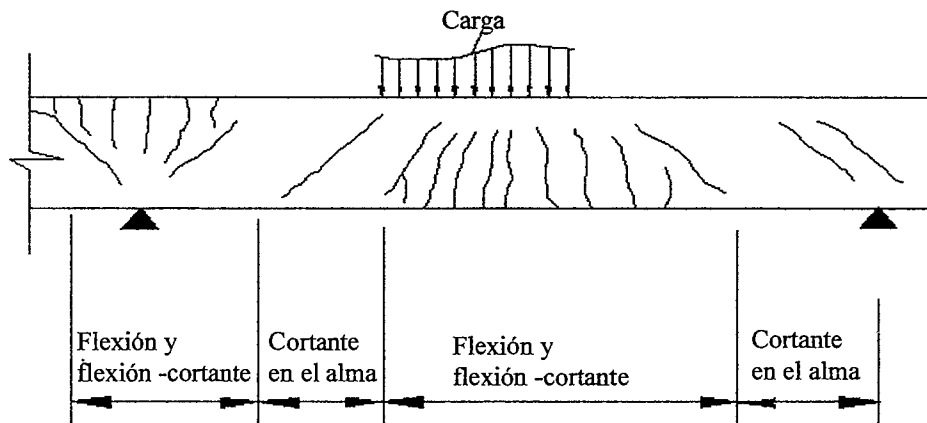


Fig. 15-6 Tipos de agrietamiento en vigas de concreto armado.

En la mayoría de las vigas esbeltas las grietas inclinadas son extensiones de grietas existentes originadas por la flexión, se les denomina grietas de cortante por flexión o grietas de flexión – cortante. En algunos casos se pueden presentar grietas diagonales que se inician cerca de la mitad de la altura del elemento; a estas se le denomina grietas por cortante en el alma

15.4.1 Agrietamiento por Cortante en el Alma o por Tracción Diagonal

Este tipo de agrietamiento se inicia cerca del eje neutro donde los esfuerzos producidos por la flexión son pequeños. Puede presentarse cuando los esfuerzos de tracción diagonal en la vecindad del eje neutro sobrepasan la resistencia en tracción del concreto.

No es un tipo de agrietamiento común en vigas esbeltas. Suele presentarse cerca de los apoyos de vigas de gran peralte, en vigas con almas delgadas, en vigas T o doble T con almas delgadas y patines generosos o en los puntos de inflexión de vigas continuas. También pueden ocurrir en vigas preesforzadas en las cuales el agrietamiento por flexión se retarda o se impide mediante el preesfuerzo.

En general se puede decir que este tipo de agrietamiento está asociado con las zonas donde la fuerza cortante es grande y el momento flector pequeño. La fuerza cortante que produce en estos casos la fisuración diagonal, proviene de ensayos y viene dada aproximadamente por la ecuación 15-8.

$$V_n \approx 0.9 \sqrt{f_c} b_w d \quad (15-8)$$

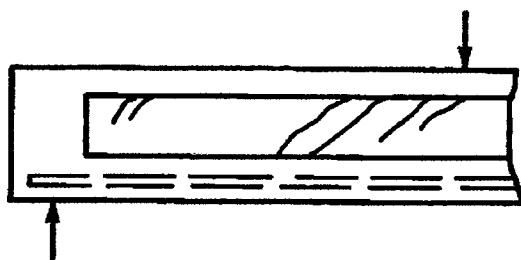


Fig. 15-7 Fisuras de cortante en el alma en una viga doble T.

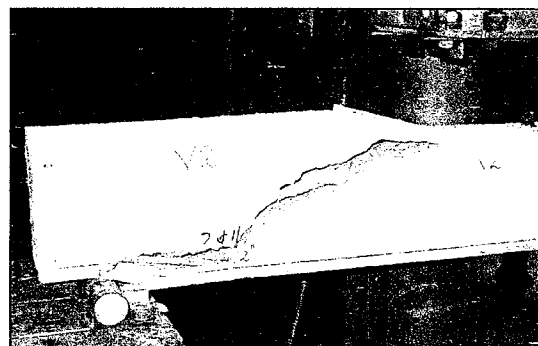


Fig. 15-8 Fisuras de cortante en el alma con falla de adherencia.

15.4.2 Agrietamiento por Flexión y Cortante

Los ensayos muestran que en presencia de momentos flectores importantes, para los cuales se ha provisto el refuerzo por flexión necesario, la fuerza cortante necesaria para la formación y propagación de las grietas de tracción diagonal viene dada, conservadoramente por la ecuación 15-9.

$$V_n \approx 0.5 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (15-9)$$

En algunos casos esta falla puede devenir en una de falla de adherencia en la cual la grieta, cerca de los apoyos, se hace paralela al refuerzo por flexión perdiéndose así la adherencia entre el refuerzo y el acero.

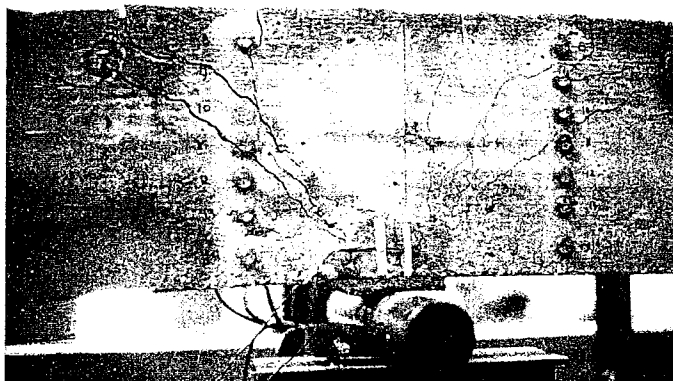


Fig. 15-9 Agrietamiento de flexión y de flexión – cortante en el apoyo interior de una viga continua.

15.5 Comportamiento de Vigas Sin Refuerzo en el Alma

Es necesario distinguir claramente dos tipos de comportamiento dependiendo de si existe o no refuerzo en el alma. Ocurrida la fisuración, existe una diferencia importante en el comportamiento de los elementos sin refuerzo en el alma en comparación a los que sí tienen refuerzo en el alma. En esta sección estudiaremos el comportamiento de elementos sin refuerzo en el alma.

La figura 15-10 (González – Cuevas) muestra los principales tipos o modos de falla de vigas sin refuerzo en el alma. En la primera, la falla es por tracción diagonal, la grieta se produce súbitamente sin previo aviso y se extiende hasta causar el colapso del elemento.

En el segundo tipo de falla la grieta inclinada se desarrolla gradualmente, normalmente aparece como una extensión de una grieta iniciada previamente por la flexión. El colapso del elemento se produce finalmente por el aplastamiento de la zona comprimida en el extremo de la grieta inclinada. Este tipo de falla se denomina de compresión por cortante.

El tercer tipo de falla se denomina de adherencia por cortante y se produce cuando el agrietamiento inclinado alcanza el acero de refuerzo y la grieta se vuelve paralela al refuerzo destruyendo la adherencia.

Desde el punto de vista del comportamiento de la estructura, es malo que el elemento alcance su resistencia debido a alguno de estos tipos de falla descritos, antes que el acero de refuerzo longitudinal alcance la fluencia. La falla de una viga por cortante sin refuerzo en el alma es súbita y frágil, se produce a deformaciones pequeñas con posibilidad de colapso del elemento.

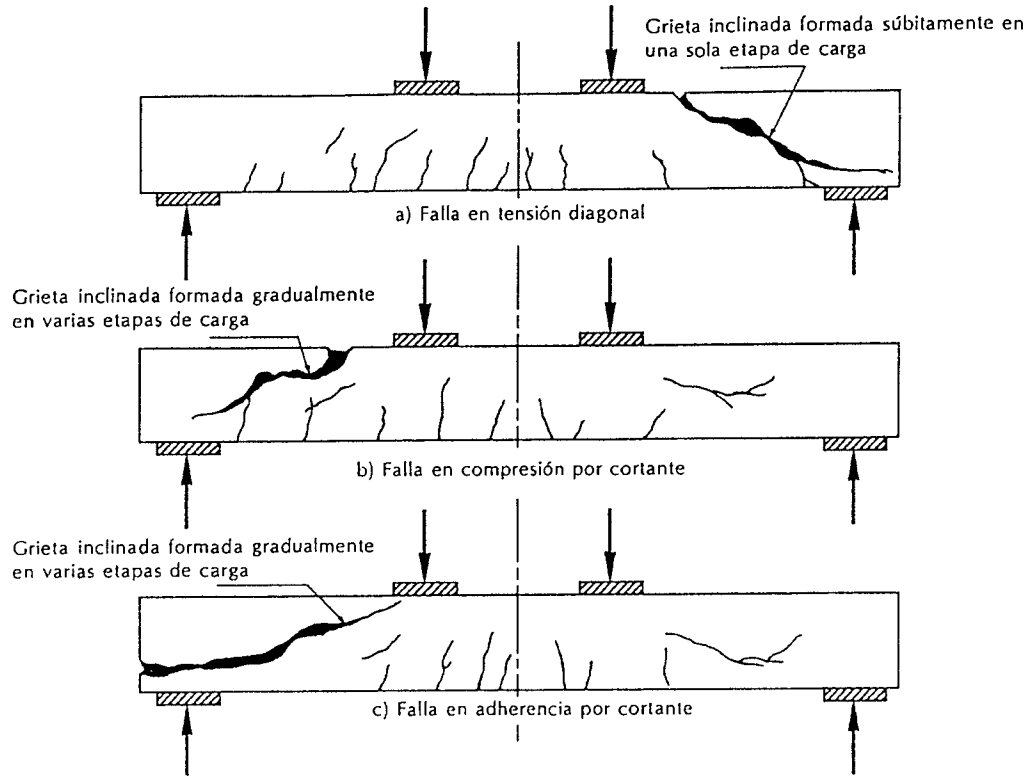


Fig 15-10 Principales tipos de falla en una viga sin refuerzo en el alma.

Examinemos las fuerzas que aparecen cuando se produce el agrietamiento inclinado en una viga. Para ello haremos uso del diagrama de cuerpo libre de la figura 15-11.

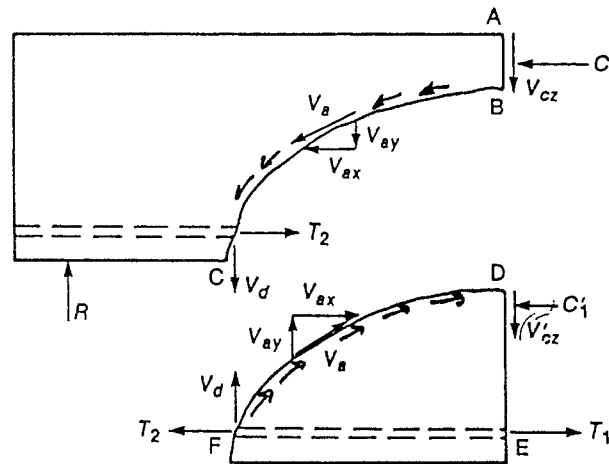


Fig. 15-11 Diagrama de cuerpo libre en la falla. Elemento sin refuerzo en el alma.

El equilibrio en la figura 15-11 exige que:

$$V_{\text{externo}} = V_n = V_{cz} + V_d + V_{ay} \quad (15-10)$$

V_{cz} = Fuerza cortante que toma el concreto comprimido. Esta componente representa únicamente entre el 20% y el 40% de la resistencia total (Taylor, Lectura 15-5).

V_d = Fuerza cortante que toma el acero longitudinal por acción de dovela (efecto de dowell). Esta componente representa entre el 15% y el 25% del cortante total. Tenga en cuenta que las barras de refuerzo longitudinal, al aparecer la componente V_d , se apoyan en el concreto empujándolo verticalmente hacia abajo y el recubrimiento puede

desprenderse, en cuyo caso esta componente se pierde completamente. La acción de dovela está imitada por la resistencia a la tracción del concreto del recubrimiento.

V_a = Fuerza cortante que se transfiere por la interacción o trabazón entre los agregados (interlocking) a lo largo de la grieta inclinada. Se genera por el desplazamiento relativo de los bloques. Esta componente representa el 35% al 50% de la resistencia total. Sin embargo a medida que la grieta se hace más ancha esta fuerza decae.

Antes del agrietamiento vertical por flexión, el cortante es tomado íntegramente por el concreto. Al agrietarse por flexión la sección, aparecen V_{cz} y V_d , posteriormente al formarse la grieta inclinada aparece la componente V_a . Una vez que se forma la grieta inclinada la suma de $V_d + V_{ay}$ representa entre el 40% y el 60% del corte total.

Cuando V_a decae como producto de que la grieta se ha vuelto más ancha y V_d se pierde porque el acero se apoya contra el concreto generando una grieta por hendidura, el íntegro del cortante debe ser tomado por la zona del concreto comprimido (V_{cz}). El incremento en V_{cz} puede conducir a la falla por compresión del concreto comprimido (crushing) produciendo la falla del elemento

Por ahora no es posible desarrollar un procedimiento de diseño por cortante basado en el cálculo individual de V_d , V_a y V_{cz} . En vez de ello, el diseño suele basarse en el valor de la resistencia nominal del concreto, que se denomina V_c , que agrupa las tres componentes mencionadas y que proviene del ajuste de los resultados de ensayos de numerosas vigas sin refuerzo en el alma.

Nótese en la figura 15-11, que si no existiera la grieta diagonal, la tracción en el acero (T_2) dependería de la compresión en el concreto que se presenta en la misma sección vertical. Al presentarle la grieta diagonal el equilibrio horizontal exige que T_2 sea igual a la compresión C_1 la cual es mayor, en consecuencia T_2 se incrementa. Es por este motivo que la Norma exige que el corte de fierro no se haga en el punto teórico de corte sino d ó $12 db$ más allá del punto donde ya no se necesita parte del acero por flexión.

15.6 Resistencia al Corte suministrada por el Concreto - V_c

15.6.1 Elementos en Flexión (vigas)

La Norma cubre básicamente el caso de agrietamiento por Flexión - Cortante. Para este caso se puede suponer conservadoramente que el aporte del concreto viene dado por la ecuación 15-11.

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (15-11)$$

V_c representa la suma de V_{cz} , V_d , y V_{ay} (figura 15-11) ya que tal como se mencionó, es muy difícil cuantificar el aporte de cada una de ellas, en consecuencia el código las agrupa en una sola que la denomina V_c .

Las variables que más afectan a V_c (elementos sin refuerzo por corte):

- La resistencia a tracción del concreto.* Los esfuerzos principales cerca del eje neutro producen tracciones que pueden iniciar el agrietamiento inclinado. Aumentos en f'_c mejoran la acción de dovela, la acción de trabazón y la resistencia del bloque comprimido.
- La cuantía de acero longitudinal por flexión.* A mayor cuantía de acero longitudinal el elemento tendrá menos grietas de flexión (verticales) y en consecuencia se reduce el agrietamiento de flexión – cortante, las grietas de flexión serán más delgadas y esto permitirá que el mecanismo de trabazón entre los agregados así como el mecanismo de dovela puedan soportar cargas mayores. La figura 15-12 muestra los resultados de ensayos de elementos sin refuerzo en el alma, es claro que la ecuación 15-11 es conservadora, salvo para cuantías muy bajas de acero. Para cuantías bajas del

refuerzo por flexión, las grietas de flexión se extienden más alto en la altura de la viga y tienen un mayor ancho en comparación a las vigas con mayor cuantía, en consecuencia las grietas inclinadas (las precursoras de la falla) ocurren a cargas más bajas.

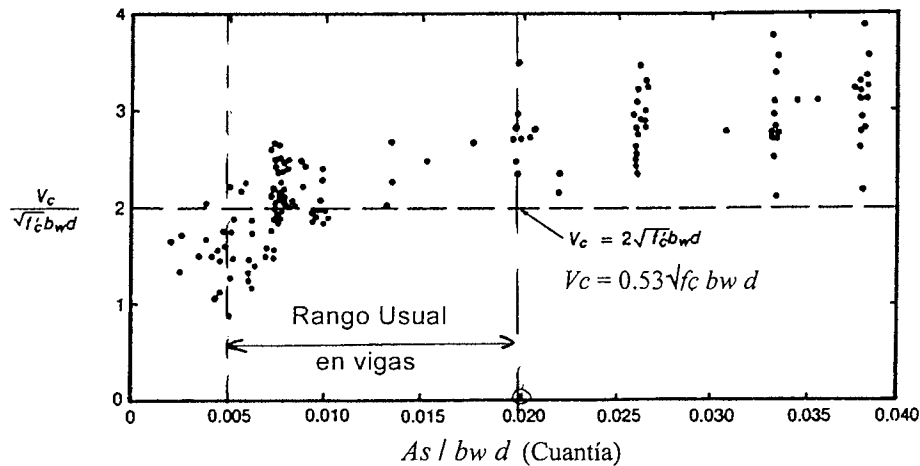


Fig. 15-12 Influencia de la cuantía en la resistencia al corte del concreto.

- c) *La esbeltez del elemento.* Normalmente la esbeltez se mide mediante el cociente M/Vd , en la cual M es el momento flector y V la fuerza cortante, ambas medidas en la misma sección. A la relación M/V se le suele denominar "claro de cortante" y se empleó originalmente en los ensayos de vigas con dos cargas concentrada ubicadas a los tercios de la luz, para las cuales $M/Vd = a/d$, siendo "a" la distancia del apoyo a la carga concentrada más próxima.

La figura 15-13 (Kong y Evans) muestra los principales tipos de fallas de vigas sin refuerzo en el alma ensayadas con dos cargas concentradas. La variable en estudio es la relación a/d y es claro que esta relación tiene una marcada influencia en el modo de falla.

En vigas esbeltas (a grande) por lo general predomina la falla por flexión, es decir el elemento puede desarrollar su capacidad de flexión antes de sobrevenir la falla por corte.

Las vigas con a/d entre 2.5 y 6 tienden a fallar por cortante antes de alcanzar su capacidad en flexión, la falla es en el mecanismo de viga (ver acápite 15.3) y aparece al alcanzar o poco después de la aplicación de la carga de agrietamiento diagonal, el mecanismo de arco que aparece después no es capaz de mantener la carga de agrietamiento. Pueden presentar dos variantes en el tipo de falla, tal como se muestra en la figura 15-13.

Las vigas con a/d entre 1 y 2.5 tienden a formar una grieta diagonal que no es una extensión de una grieta de flexión. Bajo cargas sostenidas la grieta es estable, al aumentar la carga la grieta progresa hacia la zona de compresión pudiendo causar una falla explosiva. La carga de falla puede llegar a ser el doble de la correspondiente al agrietamiento diagonal. Para relaciones de a/d menores que 2.5, el mecanismo de arco incrementa notablemente la resistencia al corte.

- d) *La presencia de cargas axiales.* Las cargas axiales de compresión aumentan V_c , mientras que las cargas axiales de tracción reducen V_c . La influencia de la carga axial, se discute en los acápite 15.6.2 y 15.6.3.

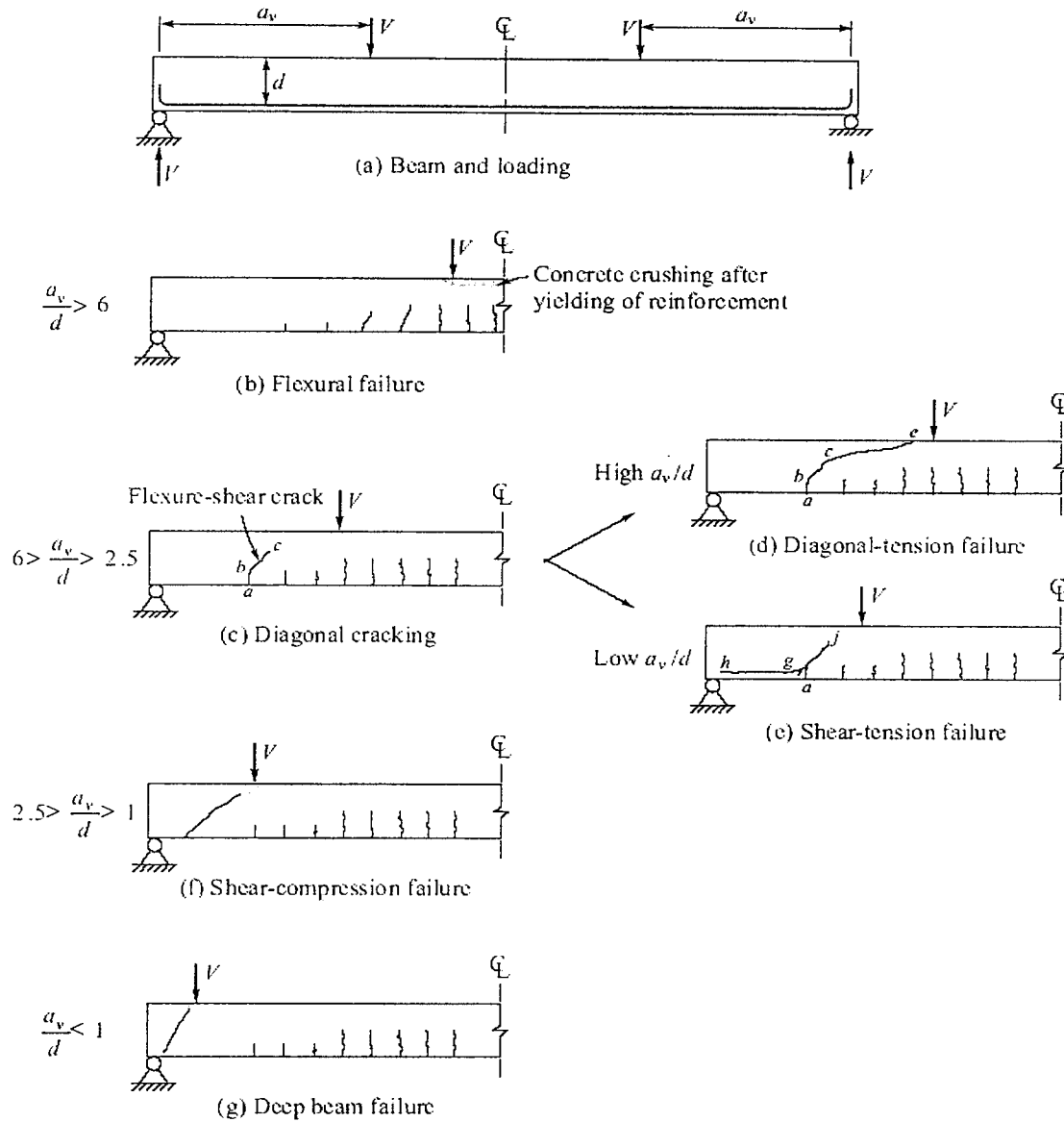


Fig. 15-13 Influencia de la esbeltez (a/d) en el tipo de falla.

- e) *El tipo de agregado.* Tiene influencia en el mecanismo de trabazón (interlocking) de los agregados. Por este motivo, la resistencia al corte de los concretos livianos es menor que la de los concretos de peso normal, aún cuando ambos tengan la misma resistencia en compresión.
- f) *La ubicación de los puntos de corte de la armadura de flexión.* En los puntos de corte de las armaduras se produce concentración de esfuerzos que favorece el inicio del agrietamiento diagonal.
- g) *El tamaño de la viga.* A medida que se incrementa el peralte de una viga, la fuerza cortante que origina el agrietamiento diagonal se reduce. Esto se debe a que el tamaño de las grietas por encima del refuerzo principal de flexión tienden a crecer en vigas con mucho peralte. Este efecto reduce el "interlocking" entre los agregados a cada lado de la grieta. En vigas con refuerzo en el alma el tamaño de las grietas inclinadas está controlado por el refuerzo, de tal modo que no debería ocurrir una reducción importante por efecto del tamaño de la viga.

La expresión 15-12 propuesta por el ACI intenta tomar en cuenta la resistencia a tracción del concreto medida a través de la raíz cuadrada de $f'c$, el efecto de la cuantía de

refuerzo longitudinal así como el efecto de la esbeltez del elemento. En esta ecuación la medida de la esbeltez viene dada por la inversa del cociente $M_u / V_u d$. Tal como se mencionó líneas arriba, este cociente en vigas con cargas a los tercios equivale al cociente d/a .

$$V_c = (0.5\sqrt{f'_c} + 176 \rho_w \frac{V_u d}{M_u}) b_w d \leq 0.9\sqrt{f'_c} b_w d \quad (15-12)$$

V_u , M_u , ρ_w deben medirse, todos en la misma sección. El término ρ_w representa la cuantía del refuerzo por flexión:

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d}$$

Adicionalmente debe tomarse en cuenta que el cociente $V_u d / M_u$ debe ser menor o igual a la unidad. Esta última limitación es para evitar los valores de V_c muy grandes que se producen cerca de los puntos de inflexión donde el cociente V/M es grande. Adicionalmente equivale a limitar el cociente a/d a valores mayores de la unidad.

En la ecuación 15-12 - cuyo ajuste a partir de los resultados experimentales se muestra en la figura 15-14 - el segundo término de la ecuación suele ser pequeño salvo para relaciones grandes de V/M (claros cortos de cortante) y para cuantías de acero elevadas, en consecuencia la ecuación simplificada 15-11, suele ser suficiente para fines prácticos, además de conservadora. El uso de la ecuación 15-11, equivale a suponer que el segundo término de la ecuación 15-7 se aproxima a $0.03 (f'_c)^{1/2}$ con lo cual se obtiene la ecuación simple mencionada.

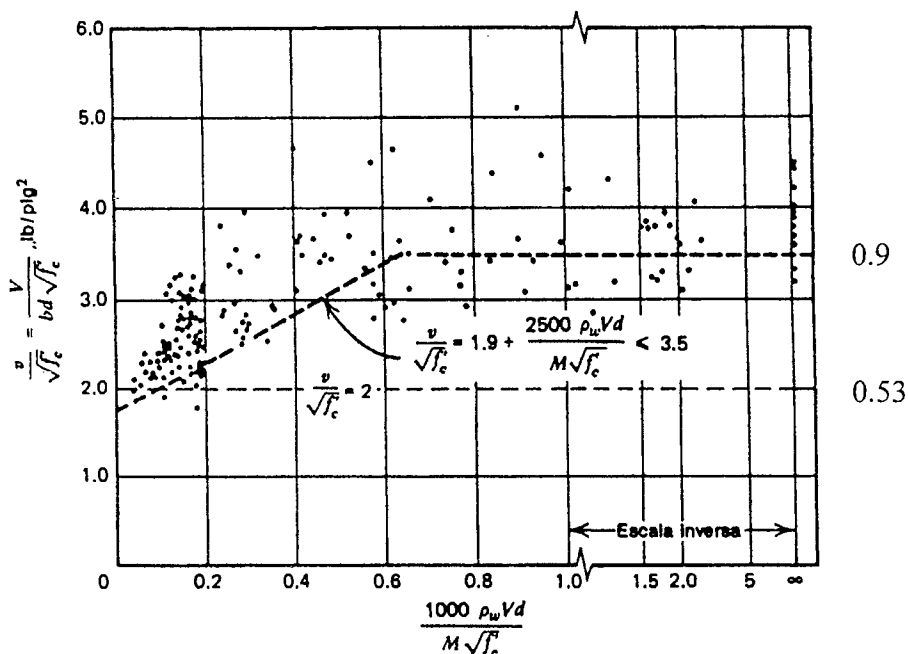


Fig. 15-14 Ajuste de la ecuación 15-12

Existen muchas expresiones propuestas para estimar V_c , una de ellas la ecuación 15-13, es la de Zsutty que proporciona resultados aceptables y contiene las tres principales variables (f'_c , la cuantía de refuerzo longitudinal y la esbeltez) que afectan la resistencia al corte V_c . Proviene del ajuste estadístico de los resultados de muchos ensayos de vigas sin refuerzo en el alma con cargas concentradas a los tercios. Está limitada a vigas con una relación (esbeltez) $a/d > 2.5$.

$$V_c = 10 \left(f'_c \rho_w \frac{d}{a} \right)^{1/3} b_w d \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (15-13)$$

La figura 15-15 muestra la resistencia V_c proporcionada por el concreto de acuerdo a la formula 15-13 de Zsutty para un concreto de 210 kg/cm^2 y diversas cuantías de refuerzo longitudinal. Se observa nuevamente (ver figura 15-12) que para cuantías bajas de refuerzo la ecuación 15-11, a pesar de ser conservadora, arroja resultados del lado de la inseguridad.

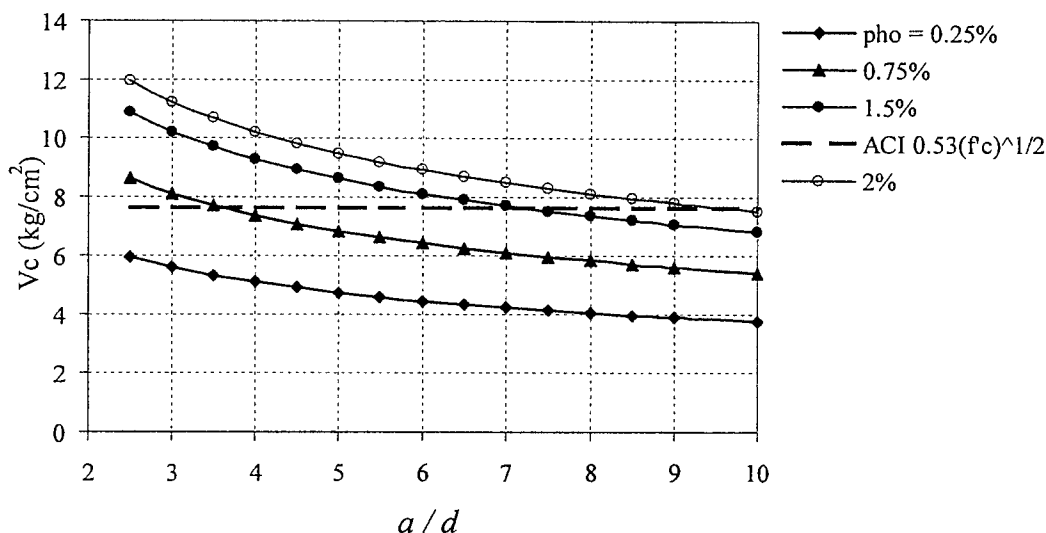


Fig. 15-15 Resistencia V_c del concreto de acuerdo a Zsutty – $f'_c = 210$

15.6.2 Elementos en Compresión (Columnas)

La presencia de compresiones en el elemento mejora la resistencia al corte que proporciona el concreto ya que retarda el agrietamiento diagonal. Para el caso de solicitaciones de fuerza axial de compresión, flexión y cortante, la Norma propone la ecuación 15-14 para estimar el aporte del concreto.

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} \left(1 + \frac{Nu}{140 A_g} \right) b_w d \quad (15-14)$$

Donde Nu es la carga axial en kgf que debe considerarse positiva por ser de compresión y A_g es el área bruta de la sección transversal del elemento en cm^2 .

15.6.3 Elementos en Tracción Axial

La presencia de tracciones reduce la capacidad en corte del concreto, en parte debido a la área más pequeña de concreto disponible para soportar cortante por encima de las grietas de flexión. Por otro lado los esfuerzos de tracción facilitan el agrietamiento diagonal y producen grietas más anchas. Para estos casos, el ACI propone la ecuación 15-15 para estimar, conservadoramente, el aporte del concreto.

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} \left(1 - \frac{Nu}{35 A_g} \right) b_w d \quad (15-15)$$

El término contenido dentro del paréntesis se convierte en nulo cuando el esfuerzo de tracción alcanza los 35 kg/cm^2 , este nivel de esfuerzo corresponde, de manera gruesa, a la resistencia en tracción del concreto. La Norma E.060, además de la ecuación 15-15

especifica que para los casos donde se presente una tracción axial "significativa" puede considerarse $V_c = 0$ y toda la fuerza cortante deberá ser tomada por el refuerzo de acero. La figura 15-20 (MacGregor) muestra el ajuste de las ecuaciones 15-14 y 15-15 contra los resultados experimentales.

Es necesario tomar en cuenta que, la contracción o retracción de fragua así como los cambios de temperatura, pueden ocasionar tracciones importantes en los elementos que tengan fuertes restricciones longitudinales. Esta posibilidad se menciona en el Artículo 13.2.2 de la Norma Peruana. Debe tenerse presente que si el refuerzo longitudinal llega a la fluencia bajo la acción del cortante, momento y la tracción axial, la capacidad en corte del elemento disminuye significativamente.

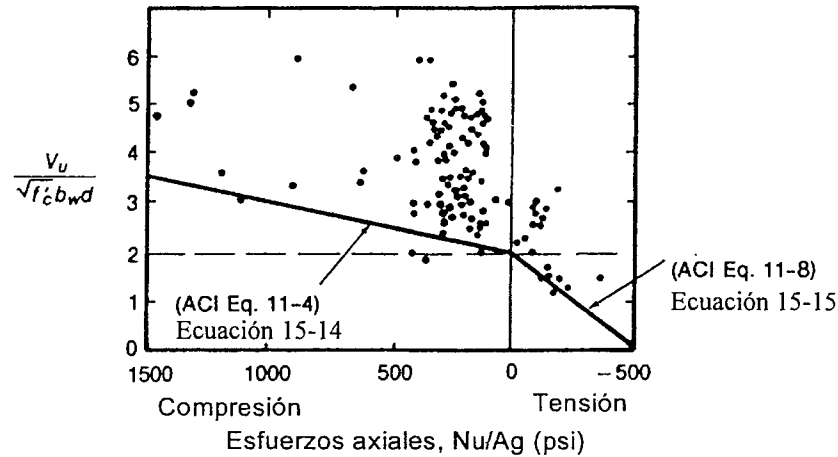
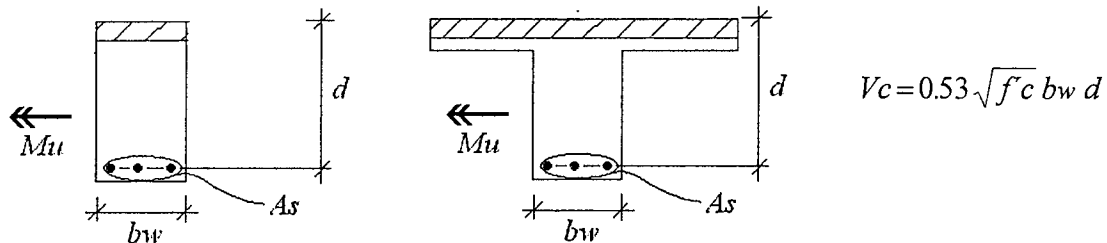


Fig.15-20 Influencia de los esfuerzos axiales.

15.6.4 Secciones Rectangulares y T

Para este tipo de secciones el aporte del concreto (V_c) cuando se emplea la expresión simplificada 15-11, es como se indica en la figura a continuación.



Nótese que en vigas T la resistencia al corte proporcionada por el concreto, tanto para flexión positiva como para negativa, se calcula con el espesor del alma b_w en consecuencia, no se reconoce ningún aporte del ala. Esto se sustenta en el hecho que el agrietamiento diagonal es en el alma (véase por ejemplo la figura 15-8) y es ella la que debe soportar el cortante.

15.6.5 Secciones Circulares

En secciones circulares la Norma E.060 permite estimar V_c mediante la siguiente expresión simplificada:

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} (\text{Diámetro})(0.8 \text{ Diámetro})$$

Se ha supuesto $b_w = \text{diámetro}$ y el peralte efectivo d se ha estimado como 0.8 veces el diámetro.

15.7 Vigas con Refuerzo en el Alma

15.7.1 Comportamiento

Debido al agrietamiento inclinado, la resistencia de una viga sin refuerzo por corte cae por debajo de su resistencia en flexión. Uno de los propósitos del refuerzo por cortante es asegurar que la viga pueda alcanzar su capacidad íntegra en flexión desarrollando una falla dúctil.

Antes del agrietamiento por flexión, el esfuerzo en los estribos es muy bajo, entre los 200 y 400 kg/cm² ya que su deformación será igual a la del concreto circundante que no está fisurado y el concreto se fisura a deformaciones muy bajas. El refuerzo por corte empieza a trabajar cuando se produce la fisura diagonal. Los estribos no impiden el agrietamiento diagonal, ellos empiezan a tener un papel importante una vez que aparecen las fisuras inclinadas.

A partir de la observación del diagrama de cuerpo libre en la falla mostrado en la figura 15-21 (MacGregor), es posible concluir que los estribos restringen el crecimiento de las grietas inclinadas y por lo tanto mantienen la componente V_a (trabazón entre los agregados) y también proporciona soporte vertical al acero longitudinal y por lo tanto aumenta considerablemente la componente V_d (acción de dovela).

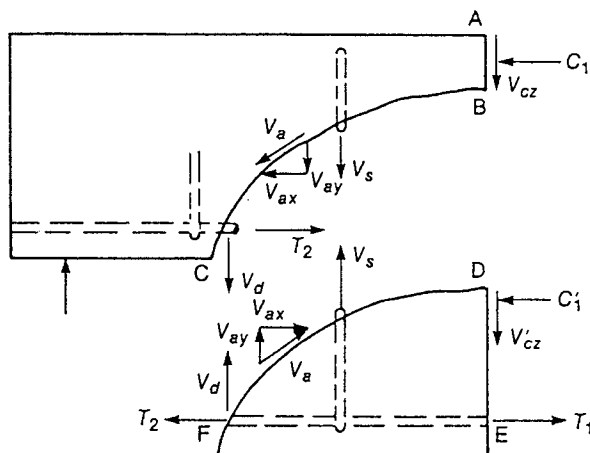


Fig. 15-21 Diagrama de cuerpo libre en la falla. Elemento con refuerzo en el alma.

El equilibrio en la figura 15-21 exige que:

$$V_{\text{externo}} = V_n = V_{cz} + V_d + V_{ay} + V_s \quad (15-16)$$

El refuerzo en el alma no es efectivo en vigas no fisuradas, es por eso que se supone que la magnitud de la fuerza cortante que causa el agrietamiento diagonal es la misma que en una viga sin refuerzo en el alma, lo que significa:

$$V_{\text{externo}} = V_n = V_c + V_s \quad (15-17)$$

Nótese que la componente V_d puede ser mayor que en el caso de vigas sin refuerzo en el alma ya que los estribos le sirven de apoyo vertical al refuerzo de tracción.

La figura 15-22 (adaptada de MacGregor) muestra cualitativamente el comportamiento de una sección de concreto armado, cargada hasta la falla por cortante. En el eje horizontal se muestra la magnitud del cortante externo aplicado y en el eje vertical la magnitud relativa de las diversas componentes de la resistencia al cortante mostrados en la figura 15-21. En todo instante la fuerza cortante externa aplicada, debe estar equilibrada por la suma de todas las componentes internas mencionadas, el equilibrio viene representado por la recta a 45°.

Antes del agrietamiento por flexión, todo el cortante es soportado por el concreto no agrietado. Entre el agrietamiento por flexión y el inicio de agrietamiento inclinado, las

únicas componentes resistentes son V_{ay} , V_d y V_{cz} , los estribos prácticamente están libres de esfuerzos. Iniciado el agrietamiento inclinado los estribos empiezan a trabajar colaborando en la resistencia y controlando el ancho de la grieta inclinada. Al aumentar la carga externa, el esfuerzo en el refuerzo por cortante empieza a aumentar hasta que eventualmente llega a la fluencia. Cuando los estribos alcanzan la fluencia, su contribución se mantiene constante y la grieta diagonal empieza a crecer notoriamente (volverse más gruesa). Al abrirse la grieta inclinada, la componente V_a se empieza a perder forzando a que V_d y V_{cz} crezcan a una tasa mayor, finalmente se produce la falla de adherencia por cortante o de desgarramiento (dowel splitting) o el concreto en compresión falla por el efecto combinado del corte y la compresión por flexión. La falla es inminente cuando el refuerzo por corte llega a la fluencia.

Cada una de las componentes mencionadas, salvo la componente V_s , tiene una respuesta o comportamiento frágil. Como resultado es difícil cuantificar la contribución de cada una de ellas y para la filosofía de diseño por cortante propuesta por el ACI, V_{ay} , V_d y V_{cz} se agrupan en una sola contribución denominada V_c , tal como se indica en la ecuación 15-17.

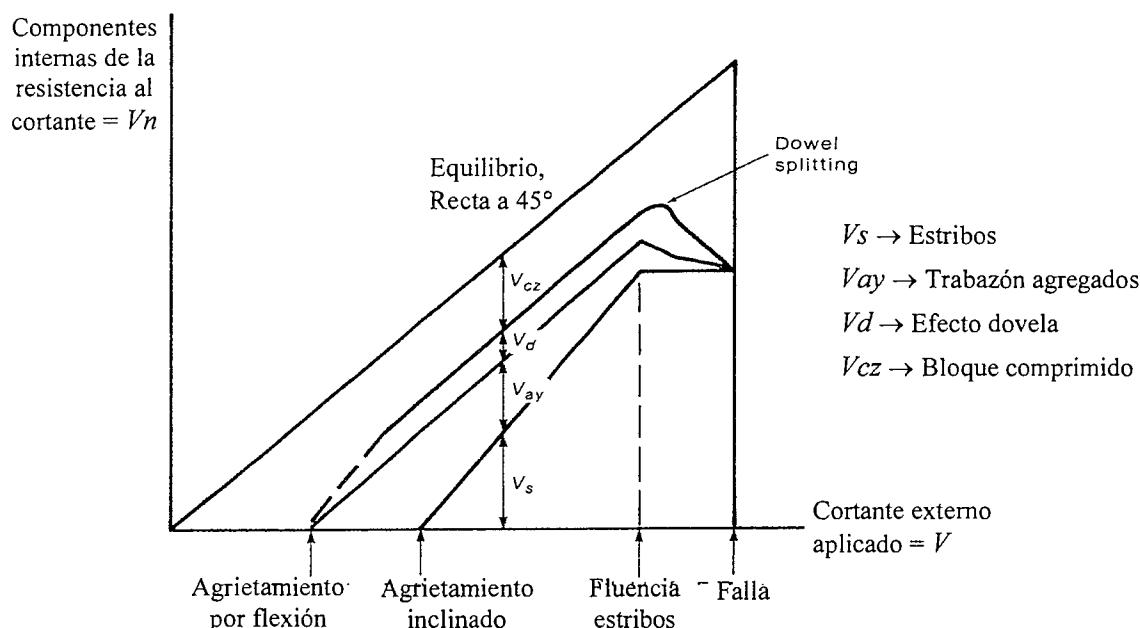


Fig. 15-22 Evolución de los mecanismos de resistencia al corte en una sección de concreto armado con estribos.

En resumen, la presencia del refuerzo por corte (estribos) tiene una marcada influencia en el comportamiento de los elementos de concreto armado debido a:

- 1) No solamente incrementa la resistencia al corte del elemento también mejora la ductilidad ya que reduce las posibilidades de una falla frágil como ocurre en los elementos sin refuerzo en el alma.
- 2) Aumenta la contribución del mecanismo de dovela (V_d). Los estribos pueden soportar de manera efectiva a las barras longitudinales que son cruzadas por una grieta de flexión – cortante (figura 15-21).
- 3) Controlan el ancho de las grietas diagonales y por lo tanto preservan el mecanismo de trabazón entre los agregados (V_a) tanto bajo cargas de servicio como bajo cargas cercanas al agotamiento del elemento.
- 4) Cuando están a poco espaciamiento, los estribos proveen confinamiento al concreto comprimido aumentando su capacidad de deformación y resistencia. De esta manera mejora el comportamiento de las zonas afectadas por el mecanismo de arco así como de la componente V_{cz} .

- 5) Controlan la pérdida de adherencia como consecuencia de las grietas de adherencia por cortante en las zonas de anclaje del refuerzo. Estas grietas se producen por la acción de dovela y por las fuerzas de anclaje (véase las figuras 15-8, 15-10 y 15-13c).

15.7.2 Tipos de Refuerzo en el Alma

La figura 15-17 muestra algunas de los tipos más comunes de refuerzo en el alma en vigas. Hasta hace algunas décadas se utilizaban estribos inclinados a 45° grados o más, barras dobladas (inclinadas) y combinaciones de barras dobladas con estribos verticales. En la actualidad, en nuestro medio, prácticamente se utilizan únicamente los estribos perpendiculares al eje del elemento. Los estribos inclinados y las barras dobladas han caído en desuso, entre otros motivos porque los estribos inclinados y las barras dobladas no sirven para solicitaciones sísmicas ya que la fuerza cortante se puede invertir por la acción de un sismo intenso y la grieta inclinada se hace paralela al estribo inclinado. Lo mismo sucede con las barras dobladas (inclinadas) por eso la Norma exige, si se decide usar barras dobladas, la presencia adicional de estribos verticales.

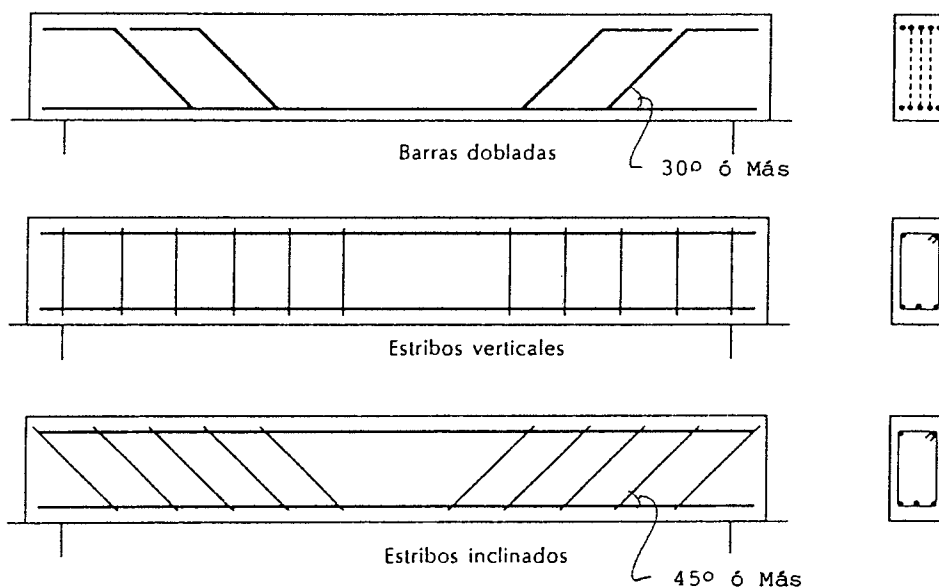


Fig. 15-23 Algunos tipos de refuerzo en el alma en vigas.

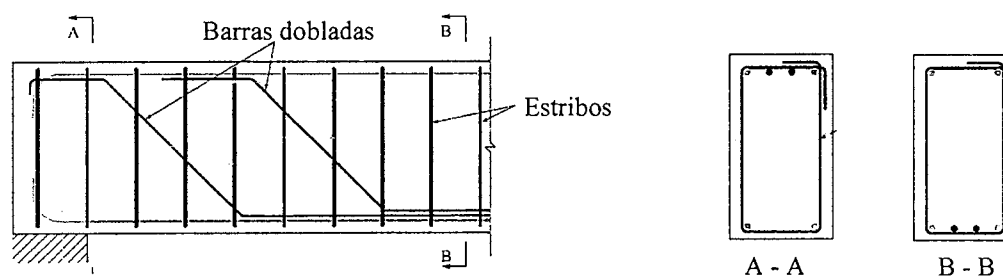


Fig. 15-24 Combinación de barras dobladas y estribos.

La Norma Peruana sólo permite el uso de:

- Estribos cerrados perpendiculares al eje del elemento
- Espirales. Útiles cuando hay torsiones importantes en el elemento o necesidades de ductilidades altas en el elemento.
- Estribos cerrados perpendiculares al eje del elemento y adicionalmente, si las hubiera, barras dobladas a 30° o más.

15.7.3 Funciones de los Estribos

Los estribos en un elemento de concreto armado, cumplen múltiples funciones, entre ellas:

- a) Montaje. Sirven para facilitar el ensamblaje de las armaduras longitudinales de refuerzo es decir para el montaje de las barras.
- b) Confinamiento. Sirven para confinar el concreto comprimido (función de confinamiento) y así aumentar su deformación de agotamiento (ϵ_{cu}).
- c) Pandeo de barras. Sirven para evitar el pandeo de las barras longitudinales en compresión, sobre todo cuando se esperan ciclos inelásticos de carga y descarga que produzcan inversión de esfuerzos en el elemento y en consecuencia en el acero longitudinal de refuerzo, como sucede en sismos intensos.
- d) Control del Agrietamiento. Sirven para controlar el agrietamiento diagonal por cortante, evitando una falla frágil y permitiendo al elemento alcanzar su capacidad en flexión (falla dúctil) antes de que sobrevenga la falla frágil por cortante.
- e) Mejorar el comportamiento de los empalmes traslapados de barras en tracción. Controlar el agrietamiento por tracción del concreto generado por esfuerzos de adherencia elevados.

Los estribos abiertos indicados en la figura 15-25, se permiten únicamente en elementos sin responsabilidad sísmica ya que no sirven para confinar el concreto. Es posible utilizarlos en elementos sin responsabilidad sísmica, es decir, en aquellos que no tengan que disipar energía en la eventualidad de cargas sísmicas intensas.

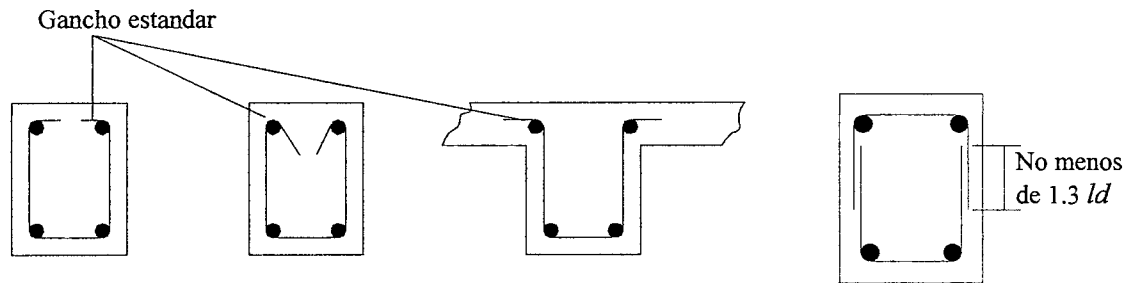


Fig. 15-25 Estribos abiertos

Los estribos cerrados son obligatorios para elementos sometidos a torsión o que tengan responsabilidad sísmica. La figura 15-26 muestra algunas configuraciones posibles de estribos cerrados, en nuestro medio el más empleado es el de la izquierda.

En muchas ocasiones se utilizan estribos múltiples, principalmente en columnas o en vigas anchas. La figura 15-27 muestra estribos múltiples, en este caso de cuatro ramas, que no pueden considerarse del tipo cerrado para solicitaciones sísmicas ya que si se desprende el recubrimiento de concreto en un sismo intenso, el gancho a 90° del estribo se abre y se pierde su capacidad de confinamiento. Para que clasifique como cerrado el gancho del estribo debe ser a 135°. En la figura 15-28 se muestran configuraciones de estribos múltiples que sí clasifican como cerrados.

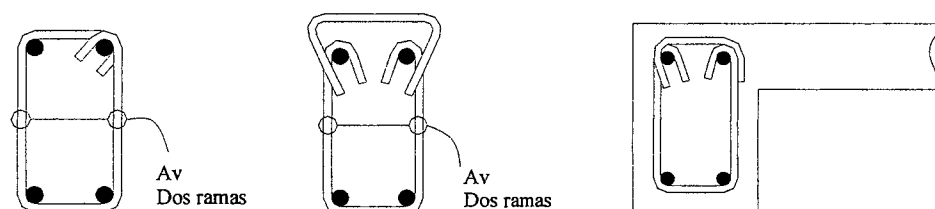


Fig. 15-26 Estribos cerrados.

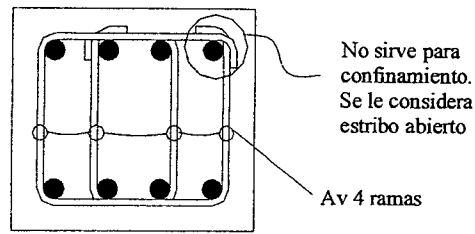


Fig. 15-27 Estribos múltiples (cuatro ramas) cerrados. No sirve para confinar al concreto por tener ganchos a 90.

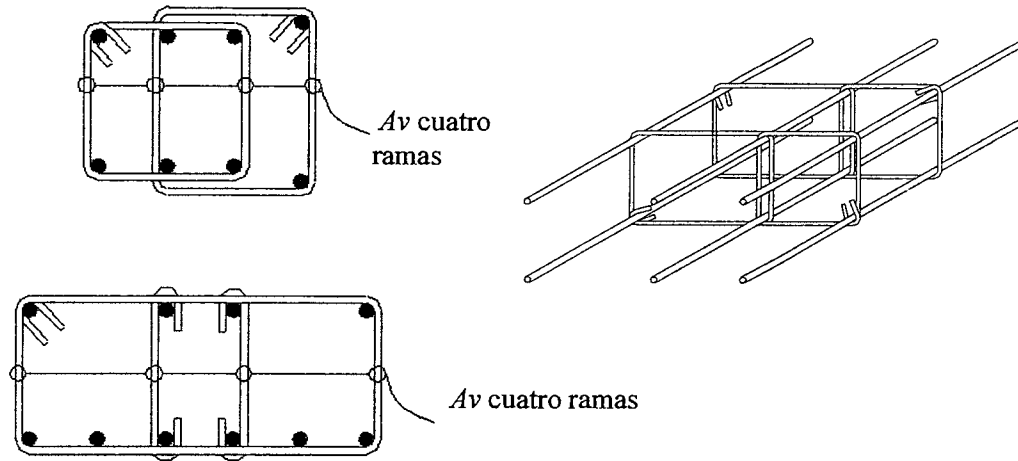


Fig. 15-28 Estribos cerrados múltiples.

En la figura 15-29 se muestra un detalle de estribo totalmente inadecuado ya que el estribo trabaja en tracción y el dobléz tiende a enderezarse causando el desprendimiento del concreto del recubrimiento.

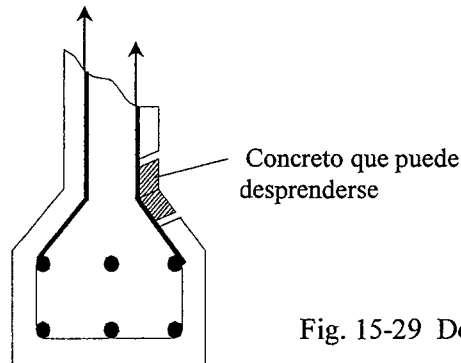


Fig. 15-29 Detalle inadecuado de estribo.

15.8 Diseño por Cortante de Acuerdo a la Norma

15.8.1 Metodología de Diseño

La metodología de diseño propuesta por la Norma, se basa en suponer que la capacidad en corte del elemento viene dada por la suma del aporte del concreto más el aporte del refuerzo en el alma. Para el aporte del concreto se asume que el refuerzo no tiene influencia en la carga de agrietamiento diagonal y por lo tanto su valor viene dado, conservadoramente, por los ensayos realizados en vigas sin refuerzo en el alma. Las expresiones que se utilizan para estimar la resistencia de una sección de un elemento, son las siguientes:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (\text{en todas las secciones del elemento})$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (\text{aporte del concreto + aporte del refuerzo en el alma})$$

$$V_u \leq \phi (V_c + V_s) \quad (\text{condición del diseño por resistencia})$$

El aporte del concreto V_c viene dado por cualquiera de las ecuaciones 15-11, 15-12, 15-14 ó 15-15 según el caso.

En vigas cargadas en su borde superior y apoyadas en el borde inferior, las grietas inclinadas adyacentes a los apoyos se extienden a un ángulo de 45° aproximadamente (véase la figura 15-9). Las cargas aplicadas dentro de una distancia d desde el apoyo (figura 15-30) son transmitidas directamente al apoyo por los puntales de compresión ubicados por encima de las grietas a 45° y no afectan los esfuerzos en los estribos que cruzan esas grietas. Por este motivo la Norma permite reducir la fuerza cortante de diseño a una distancia d (peralte efectivo) medida desde la cara del apoyo del elemento, como se muestra en la figura 15-30. Adicionalmente las compresiones verticales que se presentan en las vecindades de los apoyos mejoran la resistencia al corte de la sección.

En la figura 15-31 se muestran situaciones en las cuales es posible reducir la fuerza cortante de diseño.

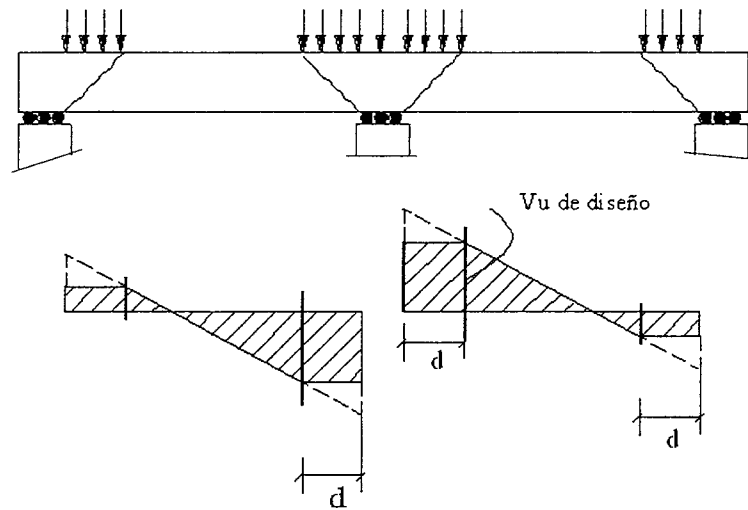


Fig. 15-30 Secciones críticas para el diseño por cortante.

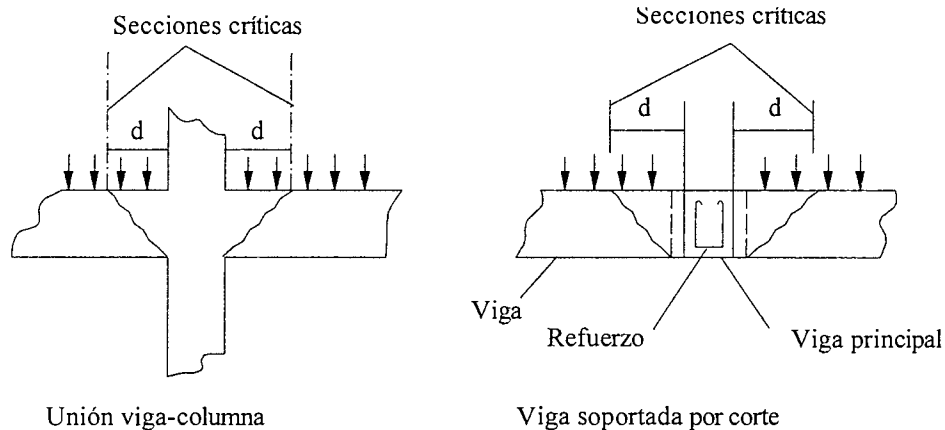


Fig. 15-31 Situaciones en las cuales se puede reducir el cortante a "d" de la cara.

En la figura 15-32 se muestran tres situaciones en las cuales no es posible la reducción del cortante V_u a una distancia d de la cara del apoyo. En el caso a la carga está "colgada" de la viga, situación típica en las vigas invertidas, y las cargas situadas dentro de la distancia d de los apoyos deben transferirse a través de las grietas inclinadas para llegar a los apoyos, en consecuencia, la sección crítica se ubica en la cara del apoyo. En el caso b la viga está soportada por un elemento en tracción (tirante) y la sección crítica debe ubicarse a la cara del elemento de soporte, adicionalmente debe detallarse

cuidadosamente el nudo ya que la grieta inclinada puede extenderse dentro del nudo. En el caso c existe una carga concentrada "significativa" cerca de la cara del apoyo y la porción extrema de la viga trabaja como una viga pared o viga de gran peralte para efectos de flexión y cortante.

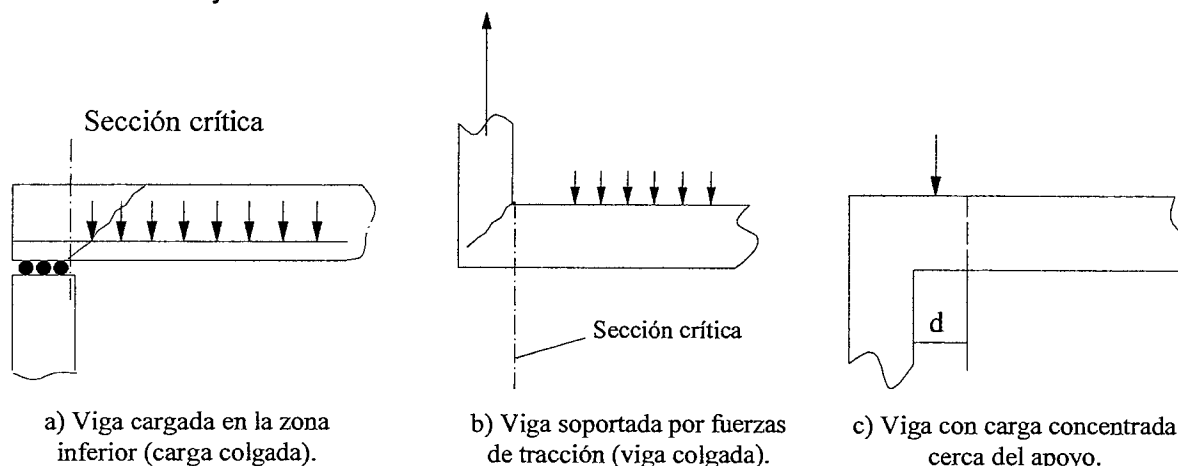


Fig. 15-32 Situaciones en las cuales no se puede reducir el cortante.

15.8.2 Resistencia al Corte Suministrada por el Refuerzo en el Alma

Cuando el concreto no puede soportar la fuerza cortante aplicada, se coloca refuerzo en el alma en la forma de estribos cerrados o abiertos. Aunque sería más eficiente colocar acero en el alma inclinado a 45° a lo largo de las trayectorias de los esfuerzos principales de tracción y perpendicular a las grietas por tracción diagonal, generalmente es más simple constructivamente el utilizar estribos verticales.

Las ecuaciones del diseño por resistencia, para el caso de las fuerzas cortante son:

$$V_u \leq \phi V_n$$

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_u \leq \phi (V_c + V_s) \text{ normalmente para el diseño } V_u = \phi (V_c + V_s)$$

Si $V_u > \phi V_c$ entonces es necesaria la presencia de refuerzo por corte. El refuerzo por corte deberá resistir:

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c \quad (15-18)$$

15.8.3 Estribos Perpendiculares al Eje del Elemento

El caso más frecuente de refuerzo en el alma consiste en estribos verticales o perpendiculares al eje del elemento. El aporte de los estribos verticales a la resistencia en corte, puede deducirse con la ayuda del diagrama de cuerpo libre de las figuras 15-21 y 15-33. Si suponemos que la proyección de la grieta diagonal es aproximadamente igual al peralte efectivo d - lo que conlleva a una inclinación de la grieta inclinada algo menor que 45° - entonces habrán d/s estribos cruzando la grieta. La fuerza total en los estribos - V_s - viene dada por la ecuación 15-19, en la cual se ha supuesto que los todos los estribos que cruzan la grieta, alcanzaron la fluencia.

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (15-19)$$

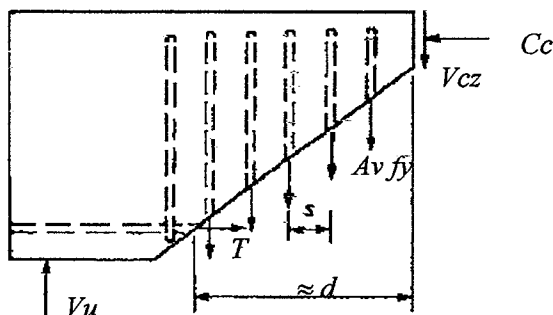


Fig. 15-33 Aporte de los estribos verticales. No se muestran Vd y Va

Nótese nuevamente en el diagrama de cuerpo libre de la figura 15-33, que la presencia de una grieta inclinada afecta a la fuerza de tracción T de las barras longitudinales, haciendo que la tracción sea mayor que la calculada a partir del diagrama de momentos flectores. Este fenómeno se comentó en el acápite 15-5.

En la formula 15-19, s es el espaciamiento entre estribos y A_v es el área total de cada estribo que cruza la grieta. La Norma limita la contribución máxima de los estribos a la resistencia en corte de una sección, de acuerdo a la ecuación 15-20.

$$V_s \leq 2.1 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (15-20)$$

La limitación impuesta por la ecuación 15-20, asumiendo que V_c viene dado por la ecuación 15-11, equivale a aceptar que el cortante máximo, permitido por la Norma, que puede actuar en una sección es:

$$V_u \text{ max} = \phi (V_c + 2.1 \sqrt{f'_c} b_w d) \approx 2.6 \phi \sqrt{f'_c} b_w d \quad (15-21)$$

Si V_u excede de $V_u \text{ max}$, será necesario incrementar la resistencia del concreto f'_c o cambiar las dimensiones de la sección. Esta limitación es para evitar la falla del concreto comprimido (V_{cz} , figura 15-21) antes de que se inicie la fluencia de los estribos. Adicionalmente, esta limitación intenta controlar el ancho de las grietas inclinadas bajo cargas de servicio.

Es necesario señalar que el ACI para el refuerzo por cortante (estribos, barras dobladas o combinaciones de ambos) establece que el esfuerzo de fluencia de diseño no debe exceder de $4,200 \text{ kg/cm}^2$. Esta limitación intenta controlar el ancho de las grietas inclinadas bajo cargas de servicio ya que, con valores de f_y altos el espaciamiento entre estribos aumenta y en consecuencia el ancho de las grietas inclinadas puede ser mayor.

15.8.4 Estribos Inclinados y Barras Dobladas

El aporte de los estribos inclinados a la resistencia en corte, puede deducirse con la ayuda del diagrama de cuerpo libre de la figura 15-34.

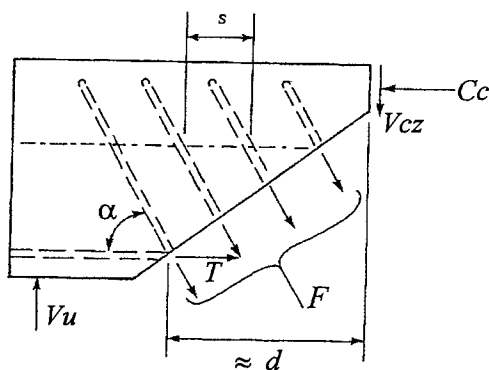


Fig. 15-34 Aporte de los estribos inclinados. No se muestran Vd y Va

Si suponemos que la proyección de la grieta diagonal será aproximadamente igual al peralte efectivo d - lo que conlleva a una inclinación de la grieta inclinada algo menor que 45° - entonces habrán aproximadamente:

$$(d/s) (1 + \cot \alpha) \text{ estribos cruzando la grieta.}$$

Donde s es el espaciamiento horizontal de los estribos inclinados. La fuerza inclinada total en los estribos - F - viene dada por la ecuación que se presenta a continuación, en la cual se ha supuesto que los todos los estribos que cruzan la grieta, alcanzaron la fluencia.

$$F = A_v f_y (d/s) (1 + \cot \alpha)$$

El cortante resistido por los estribos será la componente vertical de la fuerza F ($F \sin \alpha$), por lo tanto tendremos:

$$V_s = A_v f_y (\sin \alpha + \cos \alpha) (d/s) \quad (15-22)$$

La inclinación α de los estribos debe ser de 45° o más y debe ser tal que cualquier potencial grieta inclinada quede interceptada por un estribo por lo menos. Los estribos inclinados son difíciles de detallar cerca de los extremos de la viga y han caído en desuso.

La expresión 15-22 también es aplicable a los grupos de barras paralelas dobladas a diferentes distancias del apoyo (figuras 15-23 y 15-24). En estos casos la inclinación de las barras dobladas debe ser de 30° o más (figura 15-23).

Ensayos realizados por Leonhardt sobre vigas similares, mostraron que bajo cargas de servicio, las vigas reforzadas por corte únicamente con barras dobladas exhibieron grietas inclinadas 1.5 veces más anchas que las reforzadas con estribos verticales. Las vigas reforzadas con estribos inclinados exhibieron grietas de aproximadamente 0.8 veces las correspondientes a las vigas reforzadas con estribos verticales. Los ensayos mostraron también que los estribos de diámetro pequeño con poco espaciamiento tuvieron grietas menos anchas que las vigas armadas con estribos de mayor diámetro y mayor espaciamiento.

En los casos en los cuales se emplee más de un tipo de refuerzo por corte (figura 15-24) la Norma, conservadoramente, permite calcular V_s como la suma de los aportes individuales de cada uno de los tipos.

15.8.4 Anclaje del Refuerzo por Cortante

El aporte de los estribos a la resistencia al corte de una sección está basado en la suposición de que los estribos alcanzarán la fluencia cuando la sección agote su capacidad (véase el acápite 15.8.3 y 15.8.4). Esto será posible solamente si los estribos están bien anclados en sus extremos.

Cerca de la carga máxima, el extremo superior de las grietas inclinadas se acerca a la cara en compresión del elemento, tal como se muestra en la figura 15-35. Todos los estribos que sean interceptados por la grieta inclinada, alcanzarán probablemente la fluencia. La zona de anclaje de los estribos mostrada en la figura 15-35 es escasa. Por este motivo la Norma requiere que los estribos se extiendan, tan cerca de las caras en compresión y tracción, como el recubrimiento lo permita y adicionalmente especifican determinados tipos de gancho para el anclaje de los estribos como los indicados en las figuras 15-25, 15-26 y 15-28.

Ya que la longitud de anclaje disponible entre la grieta inclinada y el extremo superior del estribo, es por lo general corta, conviene utilizar estribos del menor diámetro posible y utilizar ganchos a 135° y estribos cerrados.

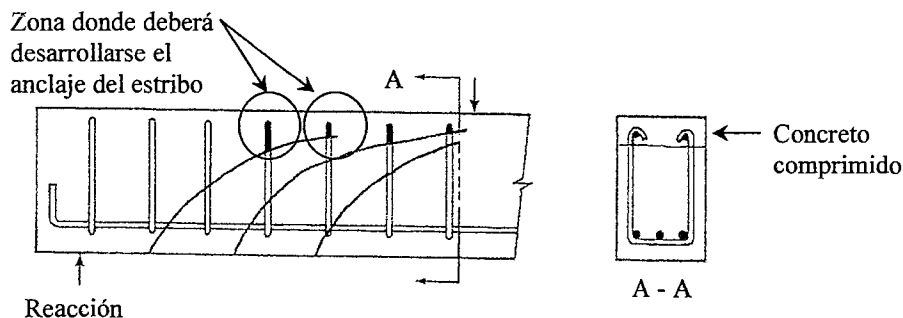


Fig. 15-35 Anclaje de los estribos.

15.8.5 Espaciamiento Máximo de los Estribos

Para el diseño, en donde normalmente interesa calcular el espaciamiento entre estribos para soportar el cortante que excede la capacidad del concreto, conviene transformar la ecuación 15-19 a una más adecuada para el diseño, como la mostrada a continuación.

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} \quad (15-23)$$

La Norma limita el espaciamiento calculado de tal modo en las zonas donde se necesita refuerzo por cortante, el espaciamiento entre ellos debe ser tal que cada grieta inclinada potencial a 45° que se extienda desde la mitad del peralte de la sección ($0.5 d$) hacia el refuerzo en tracción, debe ser cruzada cuando menos por un estribo, tal como se muestra en la figura 15-36. Esta limitación es completamente lógica ya que los estribos son incapaces de soportar cortante a menos que sean cruzados por una grieta inclinada.

Adicionalmente la Norma exige, para los estribos verticales, que:

- Si $V_s \leq 1.1 \sqrt{f_c} (b_w d)$ Entonces $s \leq 0.60 \text{ m}$ ó $s \leq d/2$
- Si $V_s > 1.1 \sqrt{f_c} (b_w d)$ Entonces $s \leq 0.30 \text{ m}$ ó $s \leq d/4$

La segunda limitación obedece a que los estribos con menos espaciamiento controlan mejor el ancho de las grietas inclinadas y proveen un mejor anclaje a las diagonales de concreto en compresión.

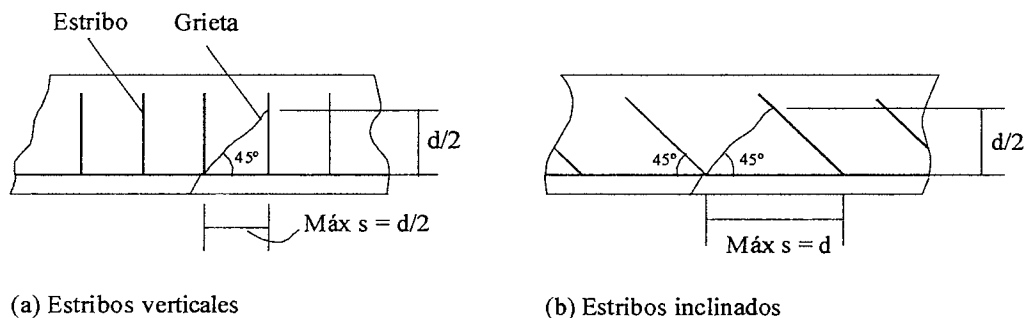


Fig. 15-36 Espaciamiento máximo de estribos para interceptar una grieta inclinada.

15.8.6 Estribos Mínimos

Si la fuerza cortante V_u es tal que: $0.5 \phi V_c \leq V_u \leq \phi V_c$ entonces deberá colocarse estribos mínimos de acuerdo al mayor de los dos siguientes valores:

$$A_v \min = (0.2 \sqrt{f_c} b_w s) / f_y \quad S_{max} = A_v f_y / (0.2 \sqrt{f_c} b_w) \quad (15-23)$$

$$A_v \min = (3.5 b_w s) / f_y \quad S_{max} = A_v f_y / (3.5 b_w) \quad (15-24)$$

Los estribos mínimos sirven para evitar las fallas de cortante que son súbitas y frágiles y que podrían suceder en las almas de vigas sin refuerzo de corte. El refuerzo por corte restringe el crecimiento de las grietas inclinadas mejorando la ductilidad. Adicionalmente es necesario tomar en cuenta la fuerte dispersión que existe en la estimación del aporte del concreto a la resistencia al corte. El refuerzo mínimo también es útil cuando el elemento pueda estar sujeto a sobrecargas imprevistas o a esfuerzos axiales de tracción no previstos.

La ecuación 15-24 ha sido introducida en el Código ACI del 2002 específicamente para los concretos de alta resistencia para los cuales 15-23 resultaba insuficiente para prevenir las fallas súbitas de corte cuando se inicia el agrietamiento inclinado. Controla en concretos de más de 300 kg/cm^2 .

No es necesario colocar estribos mínimos en los siguientes casos:

- a) losas macizas y zapatas
- b) losas nervadas y/o aligerados que cumplan el artículo 8.11 Norma E.060
- c) vigas con peralte $h \leq 0.25 \text{ m}$
- d) Vigas anchas en las cuales $b_w \geq 2 h$
- e) Vigas T en las cuales $h_f \geq 0.4 h$
- f) Cuando $V_u \leq 0.5 \phi V_c$

En losas macizas, zapatas y vigas anchas la posibilidad de una falla súbita de cortante es menor que en vigas de ancho normal. Esto se debe a que las potenciales grietas diagonales deben seguir una trayectoria transversal a través de la sección del elemento más larga. Adicionalmente en losas, zapatas y losas nervadas (incluye a los aligerados) existe la posibilidad de transferir lateralmente los sobreesfuerzos locales, es decir de compartir la carga entre las áreas débiles y fuertes.

La ecuación 15-24 también se puede escribir de la siguiente manera:

$$s_{\max} = A_v f_y / 3.5 b_w \quad (15-18)$$

Si se combinan las ecuaciones 15-19 y 15-24 se obtiene que el aporte mínimo del refuerzo en el alma debe ser:

$$V_s \min = 3.5 b_w d$$

Introduciendo esta ecuación en $V_n = V_c + V_s$ se obtiene que la resistencia mínima de diseño, cuando los estribos colocados están gobernados por 15-24 es:

$$\phi V_n \min = \phi (V_c + 3.5 b_w d)$$

15.9 Tipos de Falla en Elementos con Refuerzo en el Alma

De lo expuesto en los acápites precedentes, es posible concluir que los estados límites de falla en elementos con refuerzo en el alma, pueden ser los siguientes.

- 1) Falla por fluencia de los estribos o del refuerzo por cortante.
- 2) Falla de cortante ocasionada por la falla del anclaje de los estribos.
- 3) Falla por un excesivo ancho de grietas bajo cargas de servicio.
- 4) Falla de cortante debida a la excesiva compresión en el alma de la viga. Puede suceder en vigas con almas delgadas.
- 5) Falla de cortante iniciada por un anclaje insuficiente o deficiente del refuerzo longitudinal.

15.10 Aligerados y Losas Macizas en una Dirección

En este tipo de elemento estructural, normalmente, no se usa refuerzo por corte o estribos, el concreto debe soportar el íntegro de la fuerza cortante. Para aligerados y losas nervadas que cumplen con lo dispuesto en el artículo 9.9 de la Norma Peruana, se permite un incremento del 10% en V_c .

$$V_c = 1.1 (0.53 \sqrt{f_c} b_w d) \quad b_w = 10 \text{ cm (normalmente)}$$

$$V_u \leq \phi V_n \quad V_n = V_c \quad (\text{ya que no hay estribos})$$

$$\therefore V_u \leq \phi V_c$$

En los aligerados, cuando la resistencia requerida - V_u - excede de ϕV_c , es posible utilizar ensanches corridos o alternados, tal como se explicó en el acápite 11.14. Cuando se usan ensanches alternados con viguetas estándar de 0.10 m de ancho, en la zona del ensanche el ancho de las viguetas se convierte en $b_w = 0.25$ m. Si se utiliza un ensanche corrido entonces $b_w = 0.40$ m.

15.11 Metodología para el Diseño Por Corte

La metodología para el diseño por cortante de acuerdo a la Norma, es simple, hasta podría decirse que se trata de una "receta de cocina". La idea central es que la resistencia requerida por fuerza cortante V_u que obra en cualquier sección de un elemento, debe ser resistida por el concreto V_c . Cuando la resistencia del concreto es insuficiente, se colocan estribos o refuerzo por corte de tal modo que la suma de ambos aportes (concreto + refuerzo) sea capaz de resistir el íntegro de la sollicitación.

El enfoque o metodología del ACI para el diseño por corte ha sido cuestionado por numerosos investigadores ya desde hace un buen tiempo, sin embargo, se sigue utilizando casi sin variaciones desde la versión del ACI de 1971 y anteriores.

La ecuación básica para el diseño por corte de una sección es:

$$V_u \leq \phi V_n$$

$$V_n = V_c + V_s$$

$$V_u \leq \phi (V_c + V_s) \quad \text{Normalmente para diseño } V_u = \phi (V_c + V_s)$$

En resumen la "receta de cocina" es:

- Construir el diagrama de fuerza cortante V_u a lo largo del eje del elemento.
- Ubicar las secciones críticas. Normalmente se ubican a d de la cara. En estas secciones generalmente actúa la máxima fuerza cortante V_u y por lo tanto, exigirán el menor espaciamiento del refuerzo por corte.
- Seleccionar el tipo de refuerzo por cortante que se va a utilizar. Generalmente en nuestro medio se utilizan estribos cerrados. Seleccionar el diámetro del estribo, con lo cual definiremos A_v . En vigas se suele utilizar estribos simples, sin embargo en vigas anchas o en presencia de fuerzas cortantes elevadas se pueden utilizar estribos múltiples (dobles, triples, etc.).
- Calcular la contribución o resistencia del concreto V_c . Incluir la influencia de las fuerzas axiales si las hubiera.
- Verificar si $V_u \leq \phi V_c$. Si esto sucede entonces es posible utilizar estribos mínimos con un espaciamiento que no exceda del menor de los dos siguiente valores:

$$S_{max} = A_v f_y / 0.2 \sqrt{f_c} b_w$$

$$S_{max} = A_v f_y / 3.5 b_w$$

Colocar estos estribos solo en la zona en la cual $V_u \geq 0.5 \phi V_c$. Si el cortante $V_u \leq 0.5 \phi V_c$ no se necesita ningún refuerzo por corte, salvo los estribos de montaje.

- Si $V_u > \phi V_c$ es necesario refuerzo por corte. Calcular la resistencia que deberá proporcionar el refuerzo por corte mediante:

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

- Verificar que $V_s \leq 2.1 \sqrt{f_c} b_w d$

Esta verificación equivale a decir que el cortante máximo en cualquier sección del elemento, no debe exceder de $V_u \max \approx \phi (V_c + 2.1 \sqrt{f_c} b_w d)$. Si se excede de este valor es necesario aumentar las dimensiones de la sección transversal del elemento o aumentar la resistencia del concreto.

- Calcular el espaciamiento del refuerzo

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$$

Calcular $V_s \lim = 1.1 \sqrt{f_c} b_w d$

Si $V_s < V_s \lim$ entonces $S_{max} = d/2$ ó 0.60 m

Si $V_s > V_s \lim$ entonces $S_{max} = d/4$ ó 0.30 m

- Repetir el proceso para varias secciones a lo largo del eje del elemento de tal modo de ir variando el espaciamiento de los estribos.

La figura 15-37 resume la "receta" presentada para el caso de una viga con carga distribuida.

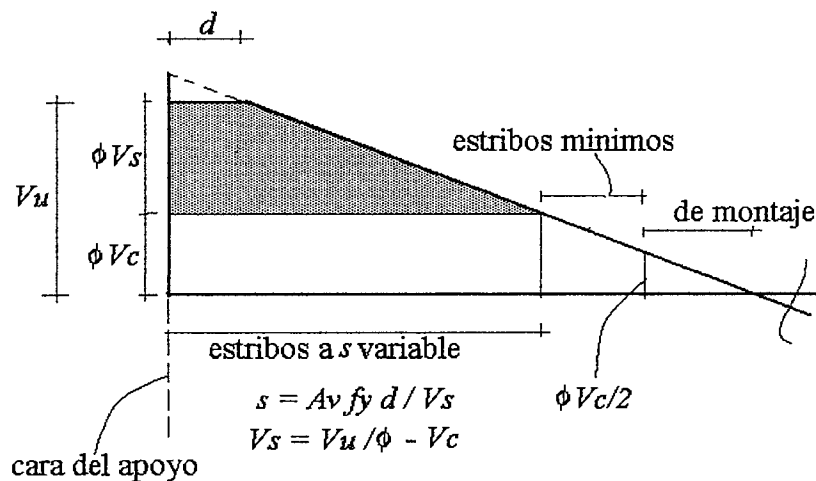


Fig. 15-37 Diagrama de fuerza cortante y espaciamiento de estribos.

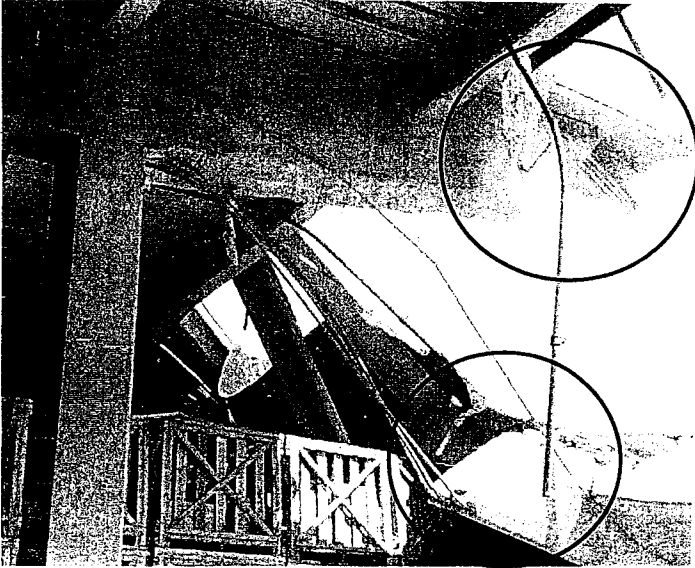


Foto-1. Falla por corte en una viga de un sistema liviano de techado.
 Depósito del U.S. Airforce. (MacGregor)

Foto-2. Falla por corte (tracción diagonal) en una viga sin refuerzo en el alma.
 (Laboratorio LEDI).

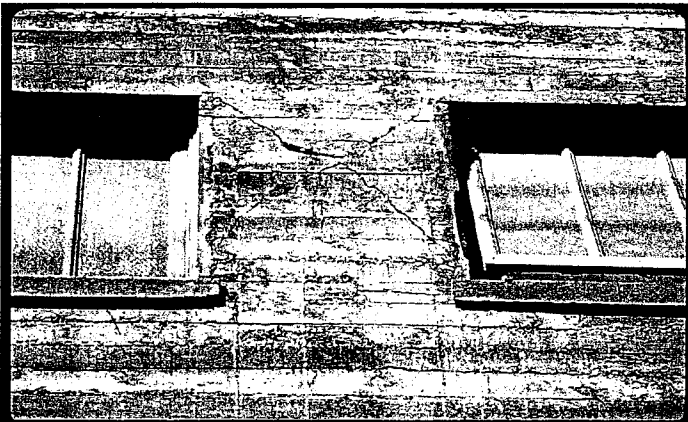
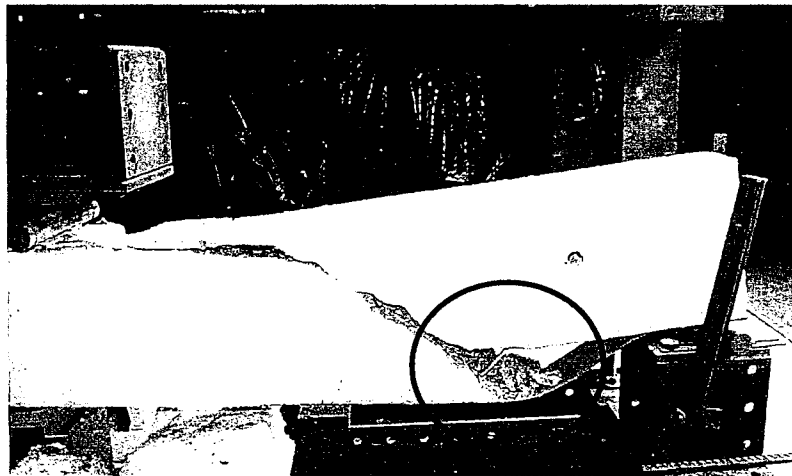


Foto-3. Falla por corte (tracción diagonal) en un segmento de un muro entre aberturas.
 (EQIIS)

Foto-4. Falla por corte y deslizamiento horizontal en la junta de llenado en un muro (placa). (EQIIS)

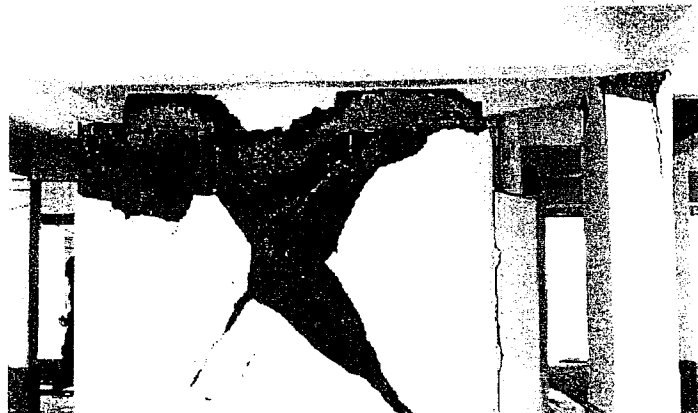




Foto-5. Falla por corte de una columna.
Ausencia de estribos.
Terremoto de San Fernando 1971. (EQIIS)

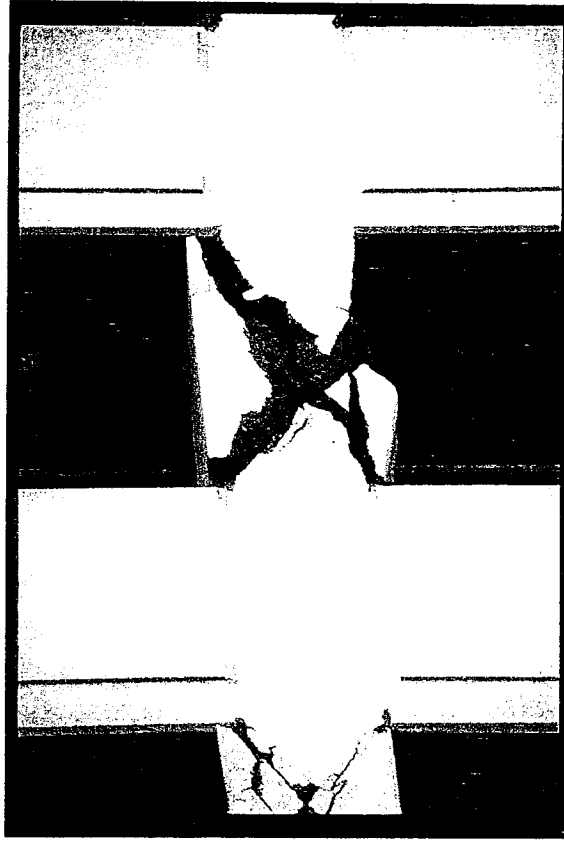


Foto-6. Falla por corte de una columna corta
de un edificio de 15 pisos. Pandeo de barras
longitudinales y fractura de estribos.
Terremoto Northridge 1994. (EQIIS)

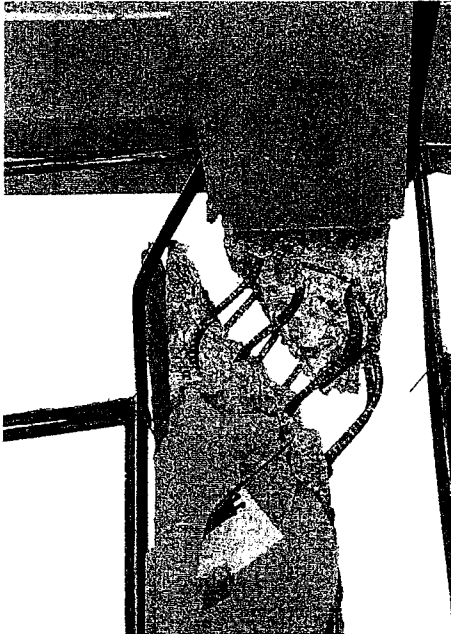
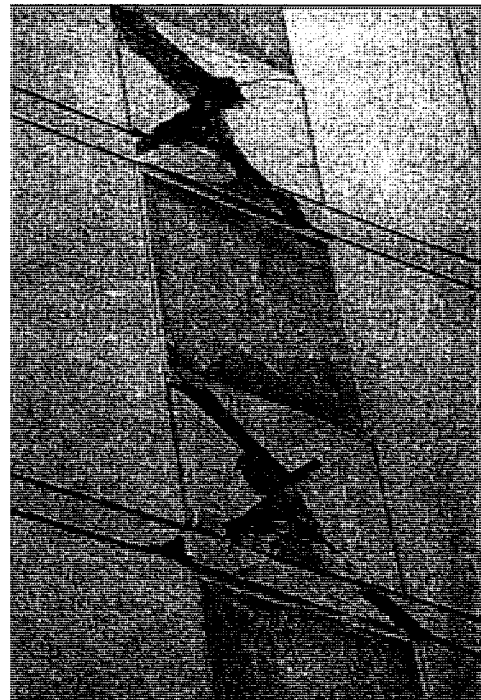


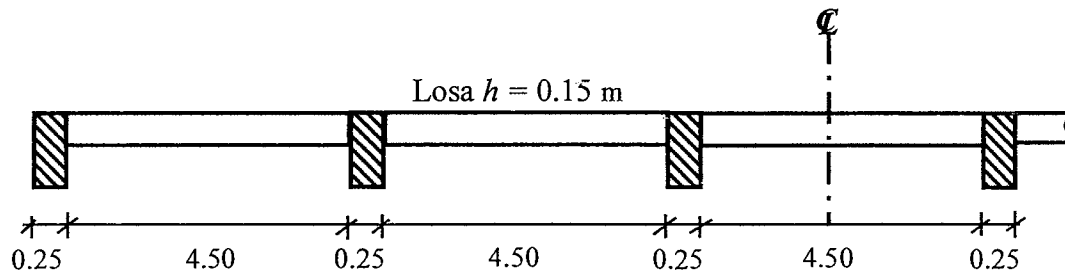
Foto-7. Falla por corte de una columna.
Ausencia de estribos.
Terremoto de Moquegua 2001 (PUCP)

Foto-8. Falla por corte en las
vigas de acoplamiento entre placas.
Edificio de 16 niveles
Terremoto Northridge 1994. (EQIIS)



Ejemplo 15-1 - Losa maciza armada en una dirección

Revisemos por fuerza cortante una losa maciza de espesor constante, armada en una dirección con cinco tramos. Verificaremos solamente el apoyo interior del primer tramo que es la sección más solicitada por cortante, si esta sección pasa por cortante todas las otras también lo harán. La sobrecarga es de 300 kg/m^2 y el concreto de $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$



- Metrado por metro de ancho de la losa.

p.p. = $2,400 \times 0.15 \times 1.0 = 360$

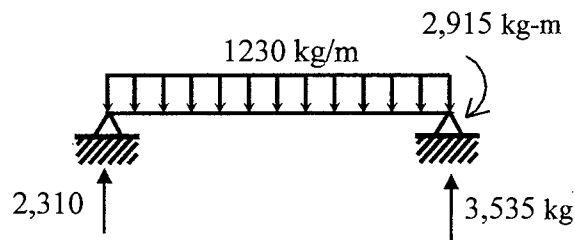
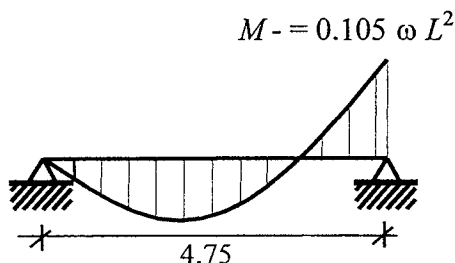
p.term. = $\frac{360}{4} = 100$

$\omega_{cm} = 460 \text{ kg/m}$

s/c = 300×1.0 $\omega_{cv} = 300 \text{ kg/m}$

Norma E.060 de 1989 $\omega_u = 1.5 \times 460 + 1.8 \times 300 = 1,230 \text{ kg/m}$ (por metro de ancho)

- Tramo extremo. Para una viga de cinco tramos el momento negativo en el primer apoyo interior (sin alternancia) es $0.105 \omega L^2$



Fuerzas de sección en los extremos del elemento

- Cortante reducido a "d" ($\approx 0.12 \text{ m}$) de la cara del apoyo derecho.

$V_u = 3,535 - 1,230 \times (0.25 / 2 + 0.12) \approx 3,230 \text{ kg}$

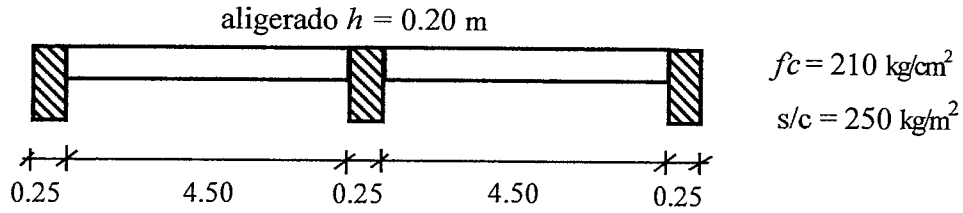
- Capacidad del concreto (ϕV_c)

$\phi V_c = \phi 0.53 \sqrt{f_c} b_w d = 0.85 \times 0.53 \times \sqrt{210} \times 100 \times 12 \approx 7,830 \text{ kg} > V_u \Rightarrow \text{ok}$

Normalmente las losas macizas no tienen problemas de corte. El cortante se controla con el espesor de la losa ya que se diseñan para que el concreto soporte todo el cortante ($\phi V_c > V_u$). No se suele colocar refuerzo por corte en la forma de estribos u otros.

Ejemplo 15-2 - Aligerado armado en una dirección

Revisaremos por fuerza cortante un aligerado de 0.20 m de peralte de dos tramos. Verificaremos solamente el apoyo interior del primer tramo que es la sección más solicitada por cortante. La sobrecarga es de 250 kg/m² y el concreto de $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

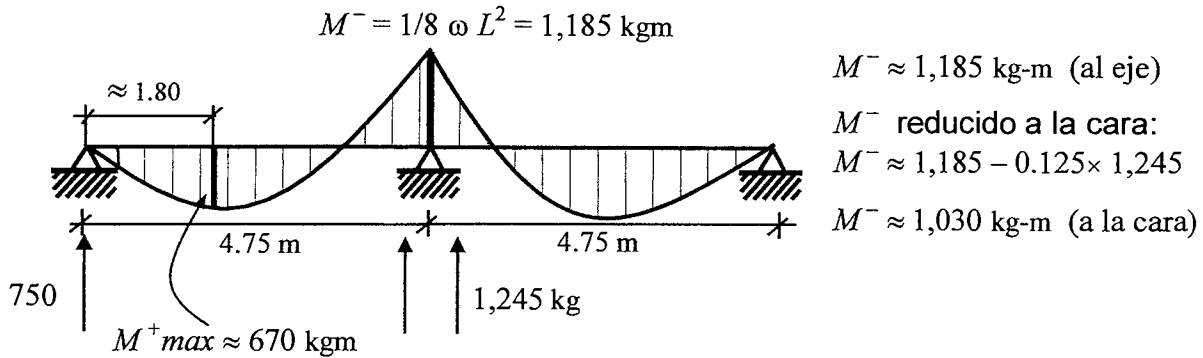


• **Metrado por vigueta**

p.p. = 300 kg/m² s/c = 250 kg/m² = ω_{cv}
 p.term. = 100 kg/m²
 $\omega_{cm} = 400 \text{ kg/m}^2$

Norma E.060 de 1989 $\omega_u = 0.4 \times (1.5 \times 400 + 1.8 \times 250) = 0.4 \times 1,050 = 420 \text{ kg/m}$ (por vigueta)

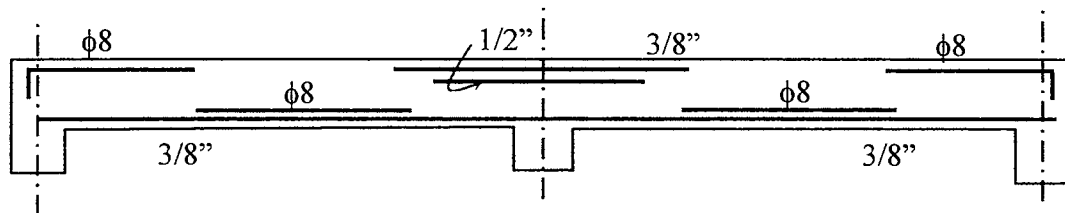
• **Diagrama de Momentos Flectores**



• **Diseño por flexión**

$M^+_{max} \approx 670 \text{ kg-m}$ $b = 40, d = 17 \quad A_s = 1.06 \text{ cm}^2 \quad (\frac{1}{2}'' \text{ ó } \frac{3}{8}'' + \phi 8)$
 $M^- \approx 1,030 \text{ kg-m}$ (a la cara) $b = 10, d = 17 \quad A_s = 1.83 \text{ cm}^2 \quad (\frac{1}{2}'' + \frac{3}{8}'')$

• **Distribución del refuerzo por flexión**



• **Revisión del cortante. Cortante a "d" de la cara derecha**

$V_u = 1,245 - 420 \times (0.25/2 + 0.17) \approx 1,120 \text{ kg}$

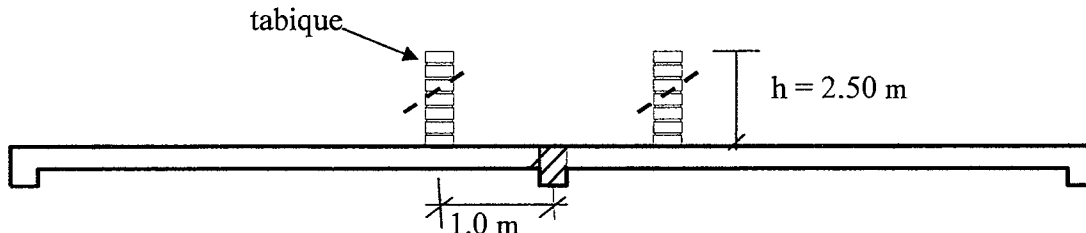
Capacidad del concreto ϕV_c . Considerando 10% de incremento de acuerdo a la Norma.

$\phi V_c = 1.1 \phi 0.53 \sqrt{f_c} b_w d = 1.1 \times 0.85 \times 0.53 \times \sqrt{210} \times 10 \times 17 \approx 1,220 \text{ kg}$

En consecuencia $\phi V_c > V_u$. El cortante resistido por el concreto excede en un 9% a la resistencia requerida por corte en la sección.

Ejemplo 15-3 - Aligerado armado en una dirección con tabiques

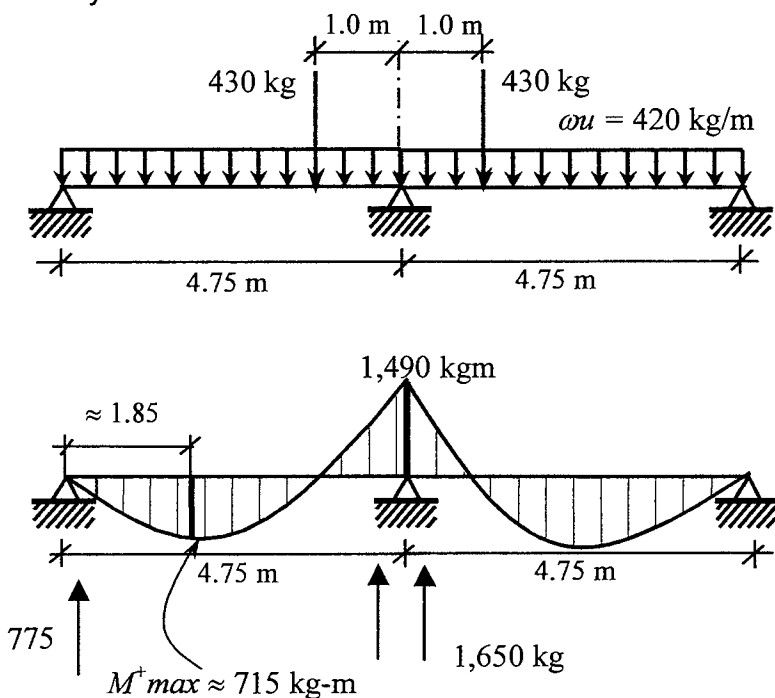
Revisemos por fuerza cortante el aligerado del problema anterior pero ahora, además de las cargas consideradas, supongamos que sobre el aligerado se apoyan dos tabiques de 2.5 m de altura, ubicados simétricamente a 1 m de distancia del eje de la viga central.



- **Metrado.** Además de la carga repartida, calculada en el problema anterior, el aligerado deberá soportar cargas concentradas provenientes de los tabiques perpendiculares a las viguetas. Asumamos que el peso del tabique es de 285 kg/m^2 , en consecuencia:

Norma E.060 de 1989 $P_u = 1.5 (285 \times 2.5 \times 0.4) \approx 430 \text{ kg}$ (en cada vigueta)

- **Modelo estructural y análisis**



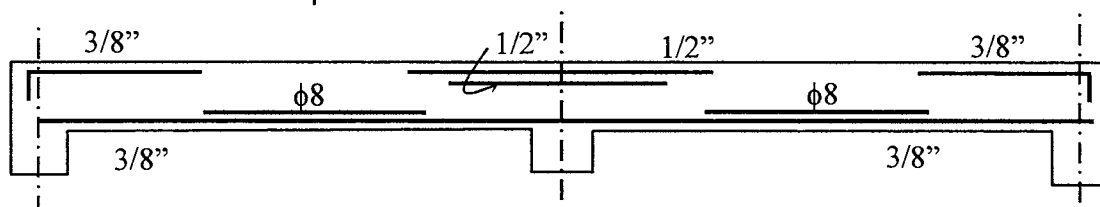
- **Diseño por flexión**

$M^+ \text{ max} \approx 715 \text{ kg-m}$ $b=40, d=17 \quad A_s = 1.13 \text{ cm}^2 \quad (1/2'' \text{ ó } 3/8'' + \phi 8)$

$M^- \text{ a la cara} \approx 1,490 - 1,650 \times 0.125 \approx 1,285$ $b=10, d=17 \quad A_s = 2.40 \text{ cm}^2 \quad (2 - 1/2'')$

En este caso, si hubiéramos diseñado con el momento negativo al eje, la sección hubiera necesitado acero en compresión ($A_s = 2.85 \text{ cm}^2, A's = 0.17 \text{ cm}^2$) y los dos fierros de $1/2''$ seleccionados no hubieran sido suficientes.

- **Distribución del refuerzo por flexión**



- Revisión del cortante. Cortante a "d" de la cara derecha

$$V_u = 1,650 - 420 \times (0.25/2 + 0.17) \approx 1,525 \text{ kg}$$

Capacidad del concreto ϕV_c , considerando 10% de incremento de acuerdo a la Norma.

$$\phi V_c = 1.1 \phi 0.53 \sqrt{f_c} b_w d = 1.1 \times 0.85 \times 0.53 \times \sqrt{210} \times 10 \times 17 \approx 1,220 \text{ kg} \Rightarrow V_u > \phi V_c$$

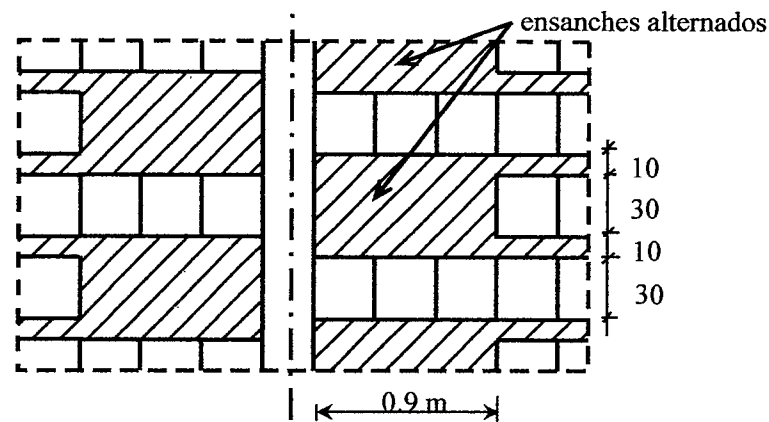
Utilizaremos ensanches alternados, con lo cual el ancho de las viguetas (b_w) aumenta de 0.10 a 0.25 m. En la zona de ensanches la resistencia al corte proporcionada por el concreto será:

$$\phi V_c = \phi 0.53 \sqrt{f_c} b_w d = 0.85 \times 0.53 \times \sqrt{210} \times 25 \times 17 \approx 2,775 \text{ kg}$$

Con lo cual logramos que $\phi V_c > V_u$. Falta determinar la longitud de ensanches necesaria, que se obtiene mediante:

$$1,650 - 420 x = 1,220 \Rightarrow x \approx 1.0 \text{ m (medidos desde el eje de la viga)}$$

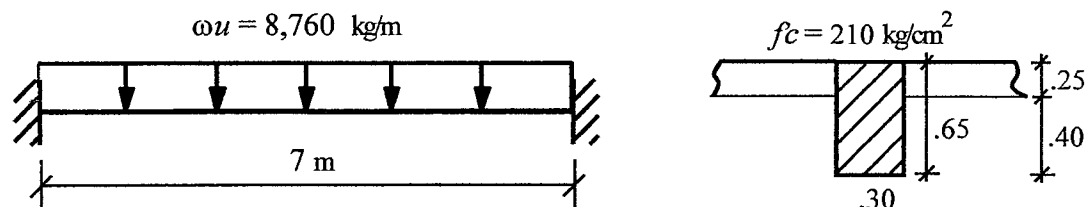
En consecuencia se usarán ensanches alternados de 0.90 m a ambos lados de la viga central, tal como se muestra en la vista en planta a continuación.



Ya que se han utilizado ensanches, podría revisarse el diseño del acero negativo por flexión, ya que el ancho de la vigueta en la zona de los ensanches, ha variado de 0.10 a 0.25 m. Con esta consideración resulta una demanda de acero negativo, a la cara del apoyo, de 2.12 cm^2 con lo cual la selección final de los aceros no se modifica.

Ejemplo 15-4 - Viga doblemente empotrada

Diseñar por flexión y por fuerza cortante una viga doblemente empotrada de 7 m de luz y sección transversal 0.30x0.65 m. La carga amplificada (resistencia requerida) es $\omega u = 8,760 \text{ kg/m}$



- Diseño por flexión

$$b_w = 30 \text{ cm} \quad d \approx 59 \text{ cm} \quad A_s^{max} = 0.75 A_s^b \approx 28 \text{ cm}^2 \quad A_s^{min} \approx 4.3 \text{ cm}^2$$

$$M^- = 1/12 (7^2 \times 8,760) = 35,770 \text{ kg-m} \quad A_s^- = 18.25 \text{ cm}^2$$

$$A_s^{colocado} = 6 \phi 3/4" = 17.04 \text{ cm}^2 \quad (\text{en dos capas } 4+2) \quad \rho = 0.96 \% \quad (7 \% \text{ menos del necesario})$$

$$M^+ = 1/24 (7^2 \times 8,760) = 17,885 \text{ kg-m} \quad A_s^+ = 8.50 \text{ cm}^2$$

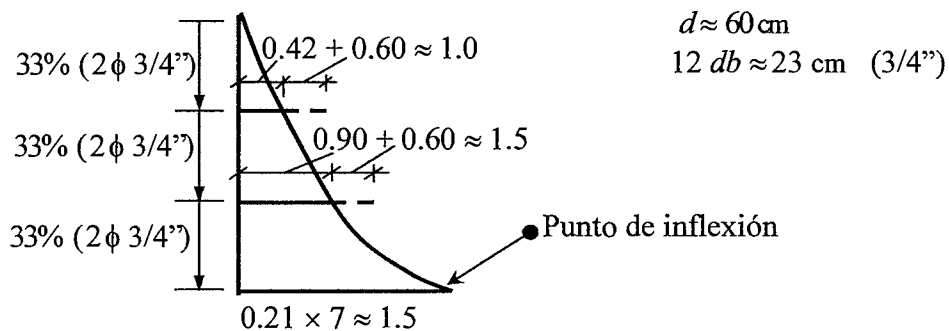
$$A_s^{colocado} = 2 \phi 3/4" + 2 \phi 5/8" = 9.68 \text{ cm}^2 \quad \rho = 0.55 \% \quad (14 \% \text{ en exceso})$$

- Revisión del diseño por flexión. Ya que hemos colocado menos acero negativo del necesario, verifiquemos por curiosidad, si el acero positivo está en capacidad de soportar la diferencia, producto de la redistribución.

La capacidad de los negativos, considerando el acero en compresión y la posición "exacta" de los aceros en tracción distribuidos en dos capas (4 + 2) es de 33,510 kg-m por lo tanto la reducción en la resistencia requerida es del 6% aproximadamente (de 35,770 a 33,510 kg-m). La Norma en las secciones de momento negativo permitiría, en este caso, una redistribución máxima del orden del 12% que es mayor que la que hemos utilizado (véase el acápite 20.3.1).

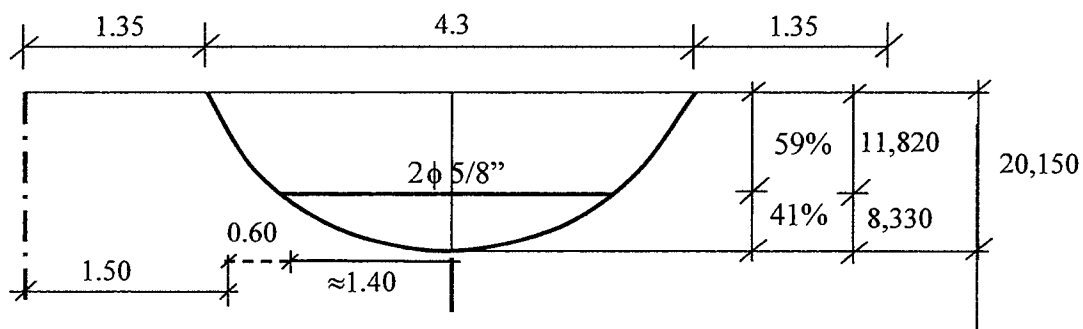
El momento positivo ajustado es $1/8 (8,760) \times 49 - 33,510 \approx 20,150$ kg-m, valor que representa un aumento cercano al 13%. Para el momento positivo ajustado se requieren 9.65 cm^2 de acero de refuerzo, valor muy cercano al acero positivo que se ha seleccionado. En consecuencia el diseño es satisfactorio.

- Corte de acero negativo. Con el uso de la parábola unitaria y asumiendo que la resistencia de los fierros que se cortan es directamente proporcional (alícuota) al área de acero, se determinan los puntos teóricos de corte de las barras. Desde el punto teórico de corte, las barras deben prolongarse una distancia equivalente a d o $12 db$. Ninguna barra se debe cortar a menos de su longitud de anclaje, para el fierro de $3/4''$ la longitud de anclaje para las barras de la capa superior es de 0.90 m (Tabla 21-3). Se usarán dos fierros corridos de $3/4''$ para asegurar que a lo largo de toda la viga no se tenga menos del acero mínimo.



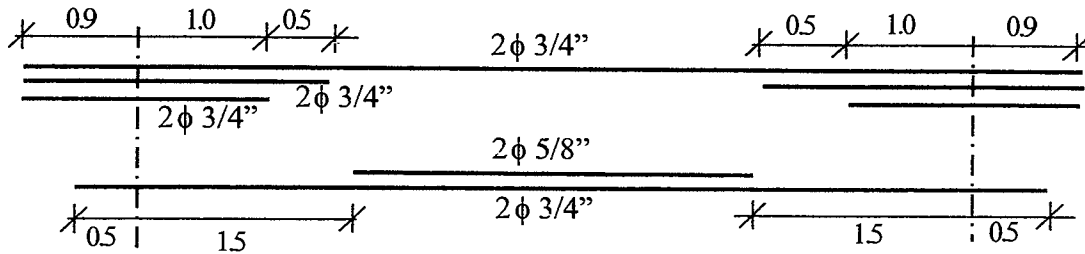
Cabe anotar que al haber utilizado redistribución en los momentos negativos, los puntos de inflexión se ubican 1.35 m de los apoyos aproximadamente, valor muy cercano al utilizado (1.5 m) para cortar el fierro y que proviene del diagrama de momentos elástico, es decir sin redistribución, las diferencias son pequeñas.

- Corte del acero positivo. De manera similar al acero negativo, en el positivo se correrán $2 \phi 3/4''$ y con la ayuda de la parábola unitaria se cortarán las otras armaduras.



Nótese que para cortar el acero positivo se ha utilizado el diagrama de momentos redistribuido.

• Distribución final del refuerzo por flexión

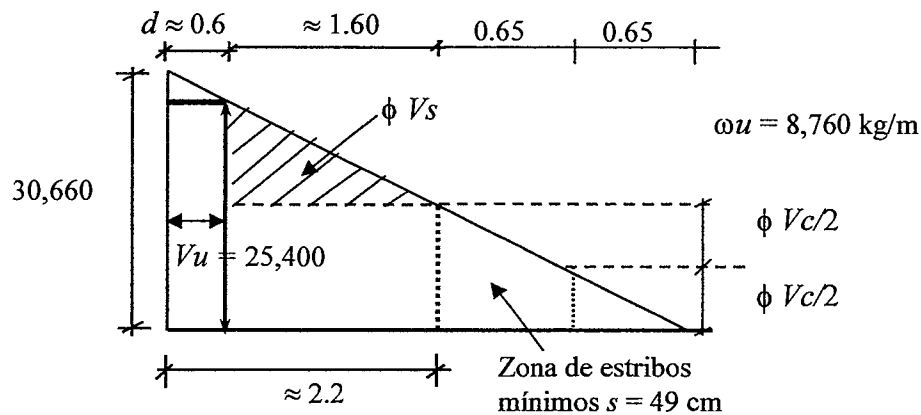


• Diseño por cortante. Cortante a "d" de la cara izquierda

$$V_u = 8,760 \times (3.5 - 0.6) \approx 25,400 \text{ kg}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f_c} b_w d = 0.53 \times \sqrt{210} \times 30 \times 59 \approx 13,590 \text{ kg} \quad \phi V_c \approx 11,550 \text{ kg}$$

$$V_u > \phi V_c \text{ (se necesitan estribos)} \quad V_u = \phi (V_c + V_s) \quad V_s = V_u / \phi - V_c$$



a) Sección a d de la cara $V_u = 25,400$ $V_s = 16,290$ kg

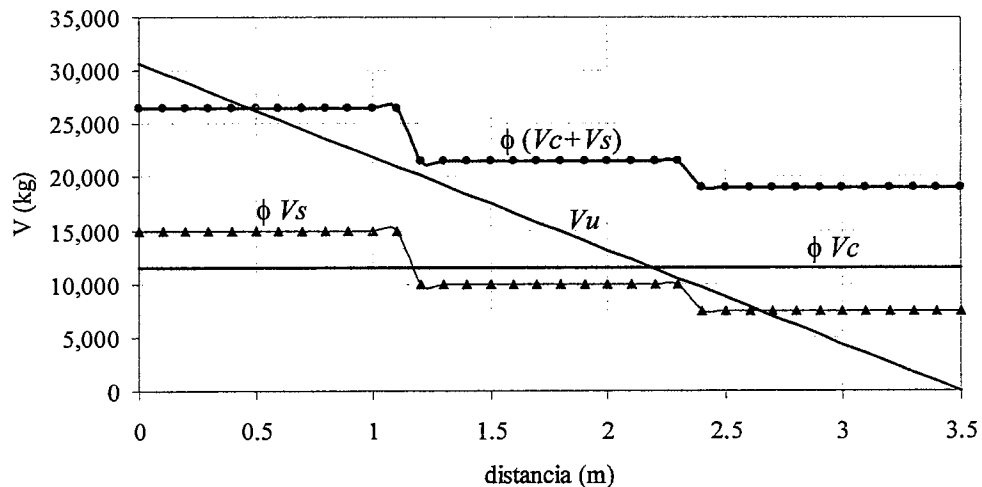
$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{2 \times 0.71 \times 4,200 \times 59}{16,290} \approx 22 \text{ cm} \quad s_{max} = d/2 \approx 30 \text{ cm}$$

Seleccionamos $\square 3/8''$ 1@ 10, 5@ 20 = 1.10 m

b) Sección a 1.10 m de la cara: $V_u \approx 21,020$ $V_s \approx 11,140$ kg $\Rightarrow s = 32$ cm $s_{max} = d/2 \approx 30$

Selección final $\square 3/8''$ 1@ 10, 5@ 20, 4@ 30, resto @ 40 en cada extremo de la viga

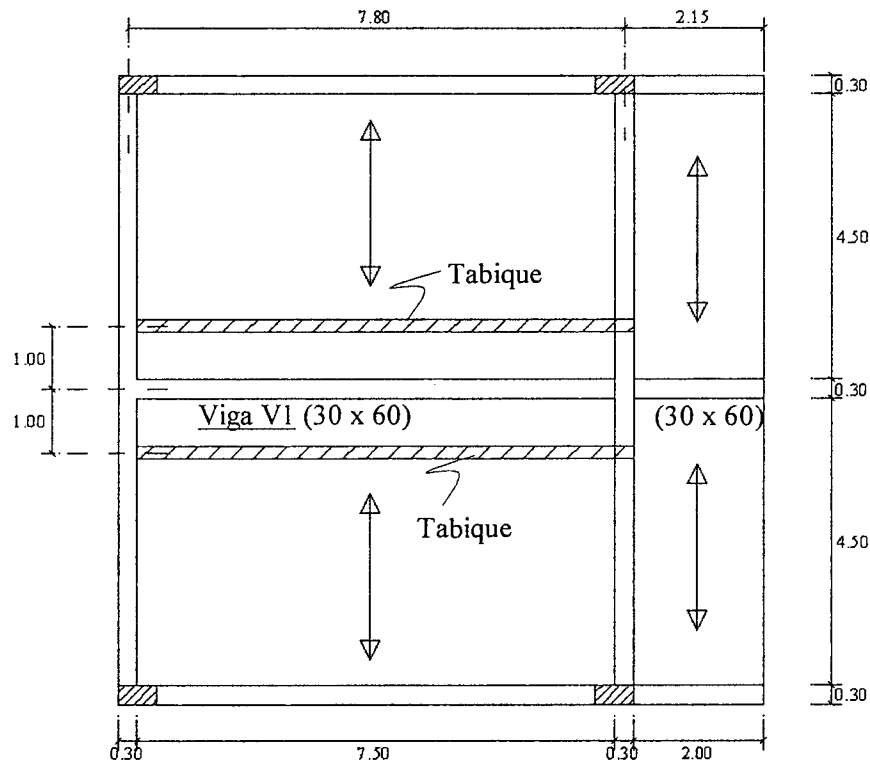
La figura a continuación muestra los diagramas de resistencia requerida V_u , versus los diagramas de resistencia de diseño o suministrada, ϕV_c , ϕV_s y $\phi (V_c + V_s)$ para la mitad izquierda de la viga.



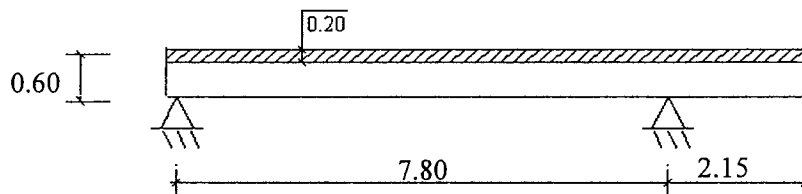
Ejemplo 15-5 – Diseño de una viga intermedia

La figura muestra la planta típica de un edificio (un tanto irreal) cuyas principales características son:

- Concreto $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, acero $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$.
 - Espaciamiento libre entre vigas paralelas de 4.5 m.
 - Losa aligerada de espesor $h = 0.20 \text{ m}$ armada en el sentido transversal.
 - Piso terminado de 100 kg/m^2 .
 - Tabiques de piso a techo de altura 2.5 m y peso de 290 kg/m^2 .
 - s/c de diseño de 250 kg/m^2 .
 - Viga V1 de sección constante 0.30×0.60 .
- Planta del piso típico.



- Elevación de la Viga V1 (modelo a ejes de apoyos).



a) Diseño del aligerado.

El diseño del aligerado es el mismo que el presentado en el ejemplo 15-3. La única diferencia radica en el ancho de las vigas de apoyo, esta pequeña diferencia no modifica el diseño. En consecuencia, los resultados del diseño por flexión y por cortante (ensanches) son los mismos.

b) Diseño por flexión de la Viga V1.

- Metrado "convencional" de la viga:

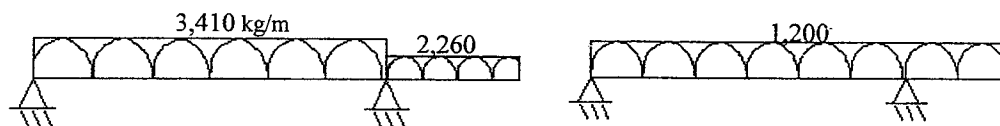
$$pp = 2,400 \times 0.3 \times 0.6 = 432 \text{ kg/m} \qquad s/c = 250 \times 4.8 = 1,200$$

$$alig. = 300 \times 4.5 = 1,350$$

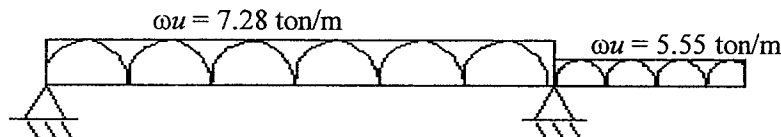
$$p. \text{ term.} = 100 \times 4.8 = 480$$

$$tabiques = 290 \times 2.5 \times (3.8/4.8) \times 2 \text{ tabiques} \approx 1,150 \text{ (metrado isostático)}$$

Las cargas muerta y vivas en servicio son las siguientes:

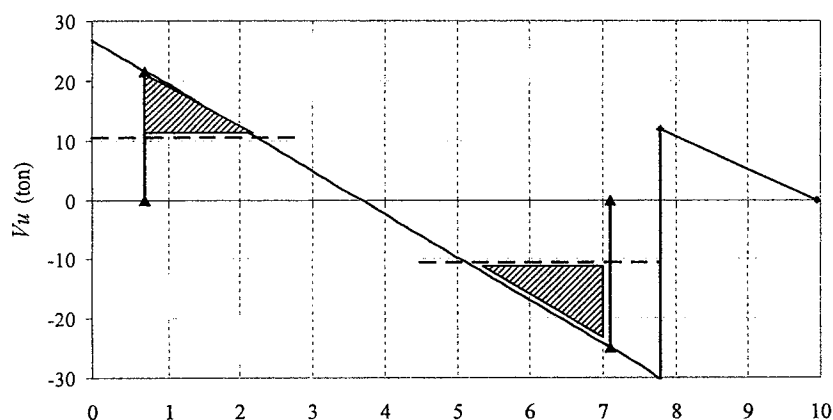


Las cargas amplificadas (resistencia requerida Norma E.060 de 1989) son:

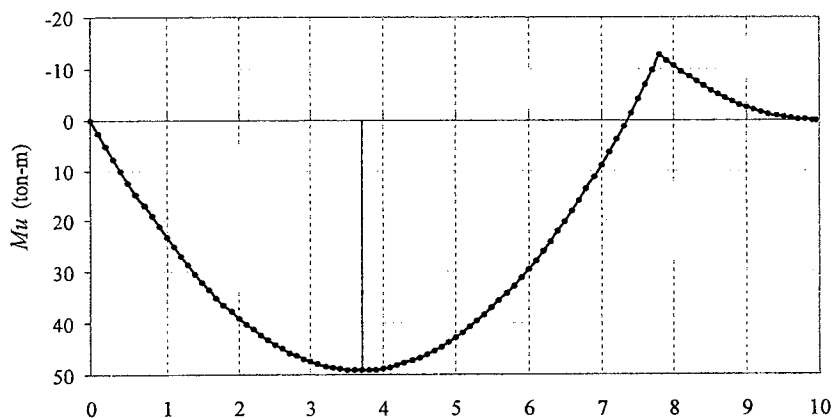


- El análisis estructural se realizó suponiendo comportamiento elástico de la viga bajo la acción de las cargas amplificadas, sin considerar alternancia de sobrecarga y con las luces a ejes de los apoyos.

La Viga V1 se apoya sobre otras dos vigas perpendiculares, si se ignora la rigidez torsional de las vigas y se asume que verticalmente son muy rígidas los apoyos pueden modelarse como simples. La estructura resultante de este modelo es isostática y por lo tanto cualquier desplazamiento relativo entre sus extremos, que podría ocurrir como consecuencia del descenso de las vigas perpendiculares, no modifica las fuerzas internas. Si se deseara un análisis más "preciso" podría modelarse la estructura como una parrilla, sin embargo, no necesariamente la calidad de los resultados será mejor dada la incertidumbre existente en la estimación de la rigidez torsional de las vigas.



V_u izq = 26.75 ton
 V_u der = 30.03 ton
 V_u volado = 11.93



M_u volado = 12.83 ton-m
 $M_u + \max = 49.15$

El análisis considerando alternancia de sobrecarga conduce a un momento positivo máximo de 51.5 ton-m aproximadamente, valor que comparado con el obtenido con sobrecarga plena en los dos tramos (49.15 ton-m) indica que en este caso no es necesario considerar la alternancia de sobrecarga.

- Flexión Negativa: $Mu = 12,830 \text{ kg-m}$

$$b = 30 \text{ cm}, d \approx 54 \Rightarrow As = 6.6 \text{ cm}^2 \quad c = 6.09 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 11.2. \epsilon_y$$

- Flexión Positiva: $Mu \text{ max} = 49,150 \text{ kg-m}$ (sección ubicada a 3.70 m del apoyo izquierdo)

$$b = 30 \text{ cm}, d \approx 52 \text{ (acero en dos capas)} \Rightarrow As = 33.4 \text{ cm}^2 \quad c = 30.85 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 0.98. \epsilon_y$$

Con $d = 52 \text{ cm}$ el acero máximo permitido es 25 cm^2 aproximadamente, por lo tanto se necesita adicionar acero en compresión en la zona de máximo positivo. Diseño con acero en compresión:

Capacidad de la sección con $0.75 Asb \approx 24.9 \text{ cm}^2$ $b = 30 \text{ cm}, d' = 6, d \approx 52$

$$Mu1 = \phi Mn = 39.7 \text{ ton-m} \quad c = 23 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 1.81 \epsilon_y$$

$$\text{Momento remanente: } Mu2 = 49.15 - 39.7 = 9.45 \text{ ton-m} = \phi As2 fy (d - d') \Rightarrow As2 \approx 5.4 \text{ cm}^2$$

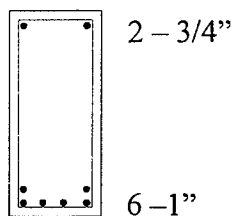
Fluencia del acero en compresión $\frac{d'}{c} = \frac{6}{23} = 0.26 < 0.3 \Rightarrow \text{Sí fluye.}$

Aceros requeridos:

$$A's = 5.4 \text{ cm}^2 \quad \text{Selección } 2 - 3/4'' = 5.68 \text{ cm}^2$$

$$As = 24.9 + 5.4 = 30.3 \text{ cm}^2 \quad \text{Selección } 6 - 1'' = 30.6 \text{ cm}^2$$

- Capacidad de la sección con los aceros seleccionados para flexión positiva:



$$b = 30 \text{ cm}, d' = 6, d \approx 52 \text{ cm}$$

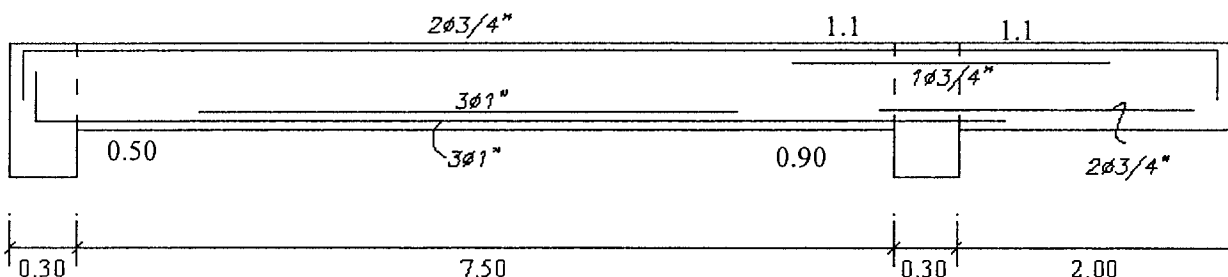
$$As = 30.6 \text{ cm}^2 \quad A's = 5.68 \text{ cm}^2$$

$$\phi Mn = 49.65 \text{ ton-m}$$

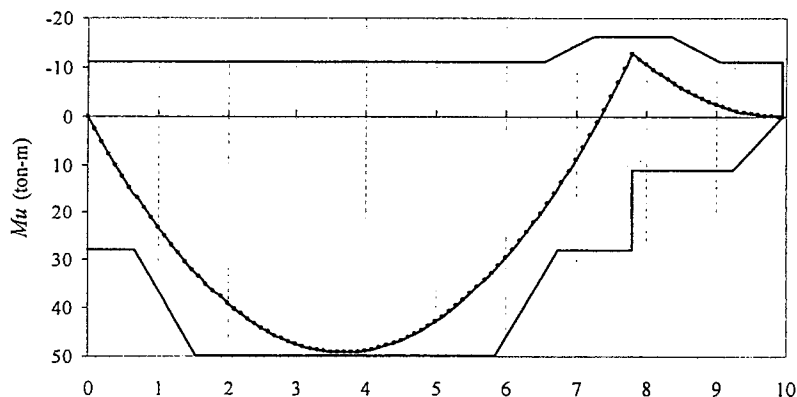
$$c \approx 23 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 1.8 \epsilon_y \quad \epsilon's \approx -1.06 \epsilon_y$$

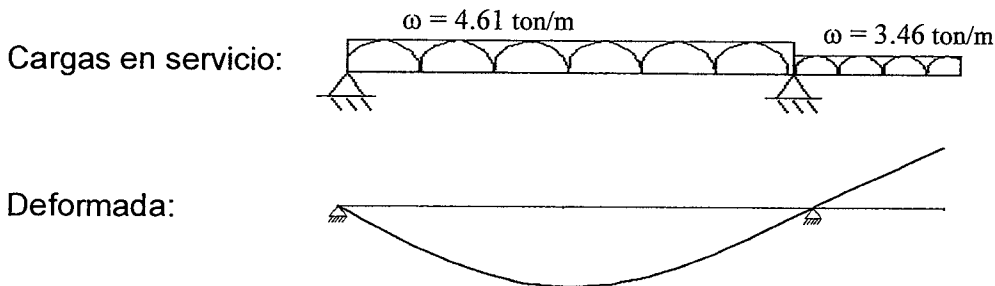
- Armado por flexión de la Viga V1.



A continuación se presenta el diagrama de resistencias requeridas (Mu) y el de resistencias de diseño suministradas (ϕMn) el cual se ha construido a partir de las armaduras seleccionadas y los puntos de corte de hierro indicados.

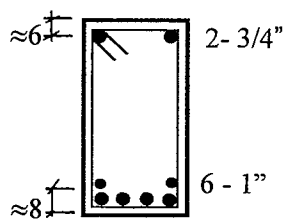


- Verificación de la fisuración por flexión (parámetro Z) en la sección de máximo positivo bajo cargas de servicio, asumiremos carga viva plena y tabiques construidos:



Momento positivo máximo: $M^+_{servicio} \approx 31.16$ ton-m

Momento de agrietamiento: $M^+_{cr} \approx 5.22$ ton-m



$$dc \approx 6.2 \text{ cm}$$

$$n \text{ barras} = 6$$

$$A_{ct} = (2 \times 8 \times 30) / 6 \approx 80 \text{ cm}^2$$

$$f_s \approx M_s / A_s \cdot 0.9d \approx 2,180 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.52 f_y$$

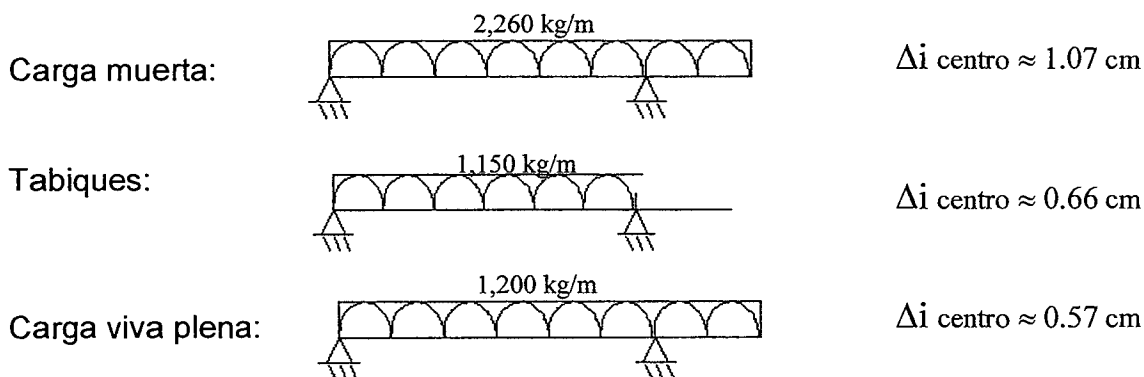
$$Z = 2,180 (6.2 \times 80)^{1/3} \approx 17,200 \text{ kg/cm}$$

$$Z_{\max} = 26,000 \text{ kg/cm}$$

- Verificación de las deflexiones en el tramo central.

Este es un caso en el cual es necesario verificar las deflexiones en el tramo largo de la viga, pues los tabiques podrían dañarse por una deflexión excesiva. Tenga presente que el modelo de apoyos simples, para el cálculo de las deflexiones, no es real ya que la deflexión total de la Viga V1 será la suma de la deflexión propia más el descenso de las vigas sobre las cuales se apoya. En todo caso, el descenso de las vigas de apoyo se traducirá parcialmente en un movimiento de sólido rígido en la V1 ya que se espera que ambas vigas de apoyo descendan cantidades similares (la viga de la derecha descenderá más que la de la izquierda por la presencia del volado). El movimiento de sólido rígido no afecta a los tabiques pero sí a la apariencia de la V1.

Para tener una idea de la deflexión esperada analicemos las Viga V1 con la hipótesis de apoyos sin posibilidad de movimiento vertical. Los estados de carga que es necesario considerar son los siguientes:



Los valores de las flechas instantáneas (Δi) se han calculado asumiendo un módulo de elasticidad para el concreto de $217,000 \text{ kg/cm}^2$ y un momento de inercia constante calculado para la sección agrietada transformada, correspondiente a la zona de momento positivo, de $385,000 \text{ cm}^4$ que equivale al 70% de I_g aproximadamente. El momento de inercia se ha calculado transformando el acero en compresión con el valor de $2n - 1$, siendo $n = 9.2$. La deflexión se ha calculado al centro del tramo.

Para el cálculo de las deflexiones diferidas se ha utilizado la metodología propuesta por la Norma, es decir:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad \rho' = A's / bd = (2 \times 2.84) / (30 \times 52) \approx 0.36 \% \Rightarrow \lambda \approx 0.85 \xi$$

Adicionalmente se ha supuesto que los tabiques se construirán 3 meses después de desencofrar la viga y que la carga viva que se estima sostenida equivale al 25% de la sobrecarga de diseño. Nótese que se ha supuesto que la deflexión de los tabiques es la misma que la de la Viga V1 cuando en realidad están separados 1 m del eje de la viga, sin embargo, se estima que la deflexión del aligerado puede en este caso ignorarse. El resumen de los cálculos se presenta en la tabla siguiente.

Concepto	Deflexión Instantánea	Deflexión Diferida (3 meses) $\xi = 1$	Deflexión Diferida (5 años o más) $\xi = 2$
Carga Muerta	1.07	0.91	1.82
Tabique	0.66	Se construye el tabique	1.12
25% de CV sostenida	0.14	-----	0.24
100% de CV	0.57	-----	-----
Total al 25% de CV	1.9	0.9	3.2
Total al 100% de CV	2.3	0.9	

La deflexión máxima que en el largo plazo podría experimentar la viga estará en el orden de $2.3 + 3.2 = 5.5 \text{ cm}$ y la deflexión media en el largo plazo con una sobrecarga permanente del 25% será de $1.9 + 3.2 = 5.1 \text{ cm}$. En este caso es conveniente especificar una contraflecha, al centro de la viga, que compense las deflexiones inmediatas y parte de la diferida por carga muerta, la contraflecha es de $1.07 + 0.66 + 0.14 + 0.91 \approx 2.8 \text{ cm}$ por lo tanto, el especificar una contraflecha de 3 cm sería apropiado. Mientras no se construya el tabique y no ocurra la parte de la deflexión diferida ocasionada por la carga muerta, la viga tendrá una curvatura hacia arriba.

Las deflexiones de la viga que pueden afectar al tabique son:

$$\begin{aligned} \Delta d_{cm} &= 1.82 - 0.91 = 0.91 \text{ cm} && (32\%) \\ \Delta d_{cv (25\%)} &= 0.24 && (8\%) \\ \Delta d_{tabique} &= 1.12 && (39\%) \\ \Delta i_{cv} &= \underline{0.57} && (20\%) \\ &\approx 2.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

El límite de la Norma en estos casos es $L / 480 \approx 1.6 \text{ cm}$, por lo tanto se está excediendo dicho límite. Alternativas de solución se presentaron en el ejemplo 14-2.

Una última acotación, si se observa la tabla anterior donde se resumen los cálculos de las deflexiones, podría pensarse erróneamente que las deflexiones se pueden calcular con un alto nivel de precisión ya que se han mostrado los resultados hasta con tres cifras

significativas, redondeando los resultados finales. Esto no es cierto, en el acápite 14.3 se discutieron algunas de las numerosas variables que afectan a las deflexiones en elementos de concreto armado, por lo tanto los cálculos mostrados representan tan solo estimados gruesos.

c) Diseño por corte de la Viga V1.

El diagrama de fuerza cortante se muestra al inicio del problema. Se indica el valor de V_u reducido a d de la cara ($0.15 + 0.54 \approx 0.7$ m) mediante las rectas verticales que se han dibujado. También se indica el valor de $\phi V_c = 10.58$ ton y se ha achurado la zona que requiere refuerzo por cortante.

Los cortantes de diseño a d de la cara son:

Izquierda	$V_u \approx 21,730$ kg
Derecha	$V_u \approx 25,000$ kg

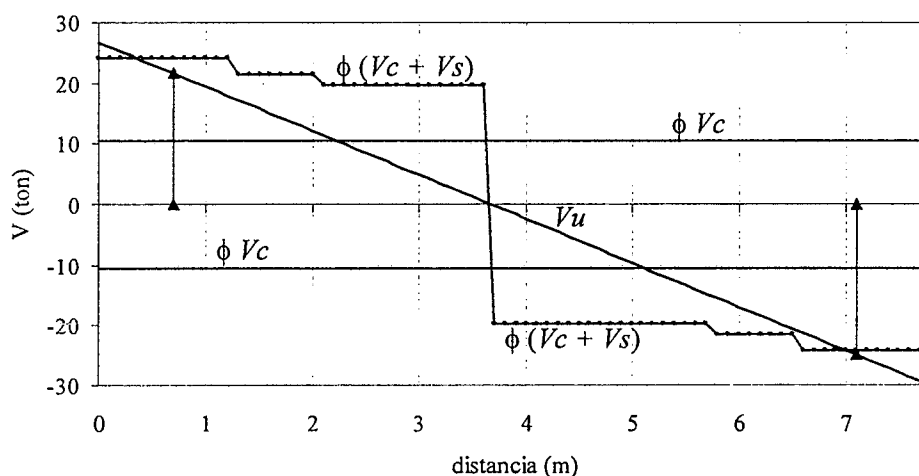
Siendo ambos valores relativamente cercanos, diseñaremos con el mayor de los dos y se utilizará la misma distribución de estribos en ambos extremos del tramo interior de la viga. Si hubiera diferencias importantes, entonces sería apropiado utilizar dos distribuciones distintas de estribos, una para cada extremo.

La distribución de estribos cerrados verticales elegida para ambos extremos es:

□ 3/8"1@ 10, 5@ 20, 3@ 25, resto @ 30 en cada extremo de la viga

En la zona central de la viga se han seleccionado estribos espaciados a 0.30 para controlar el pandeo de la armadura en compresión que es necesaria por resistencia, tal como se explica en el acápite 12.4.

La figura a continuación, muestra los diagramas de resistencia requerida V_u , versus los diagramas de resistencia de diseño o suministrada, ϕV_c , y $\phi (V_c + V_s)$ para el tramo largo de la viga. En el volado se han dispuesto estribos 1@ 10, resto @ 30.

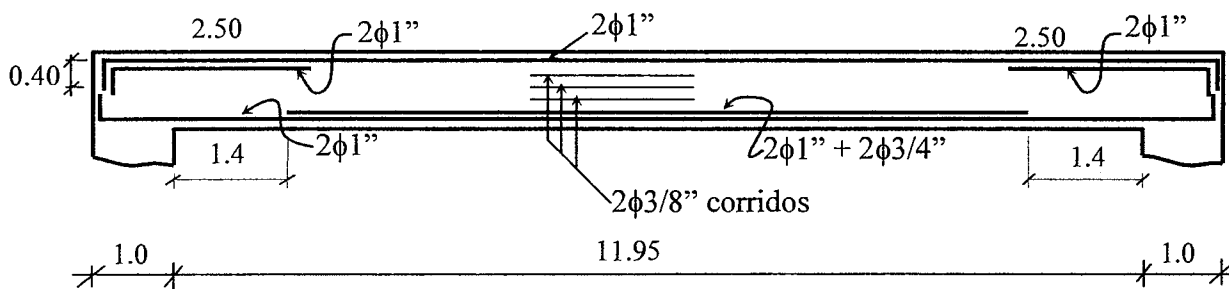


Ejemplo 15-6 - Viga de un pórtico

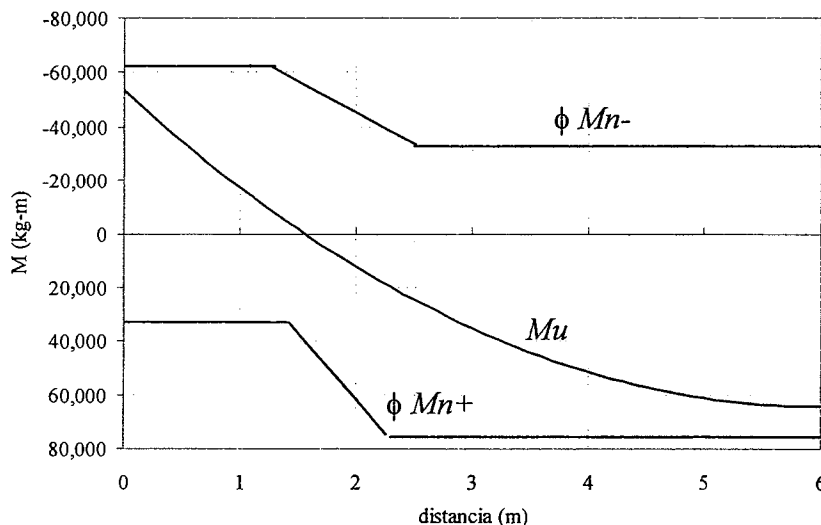
Diseñaremos por fuerza cortante la viga del pórtico que fue diseñada por flexión en el ejemplo 14-2. La sección transversal es de 0.30x0.95 m y las armaduras colocadas se muestran en la figura a continuación. La carga de servicio (muerta más viva) es de 4,100 kg/m y la carga amplificada con la cual se diseñó es de $\omega u = 6,600$ kg/m. (Norma E.060 de 1989)

El diseño por fuerza cortante se hará sobre la base de la capacidad en flexión de la viga con los aceros realmente colocados, es decir utilizaremos un Diseño por Capacidad. Si se revisa el ejemplo 14-2 se encontrará que el refuerzo por flexión colocado, es mayor que el necesario. El diseño por cortante basado en la capacidad "real" en flexión de la viga, intenta garantizar que no sobrevenga una falla frágil por cortante antes de alcanzar la capacidad en flexión de la viga. Con esto será posible aprovechar el exceso de resistencia en flexión que tiene la viga, sin que sobrevenga una falla por cortante. Por otro lado, si no se ajusta la fuerza cortante con la asociada a la capacidad en flexión, el factor de seguridad global por flexión sería mayor que el de cortante.

- Distribución del refuerzo por flexión



La figura a continuación muestra los diagramas de resistencia requerida M_u , versus los diagramas de resistencia de diseño o suministrada, ϕM_n , para la mitad izquierda de la viga.



- Capacidad en flexión de la viga. Calcularemos la capacidad en flexión de las secciones de momento negativo y positivo con los aceros realmente colocados. Los cálculos de las resistencias en flexión se harán despreciando el aporte del acero en compresión.

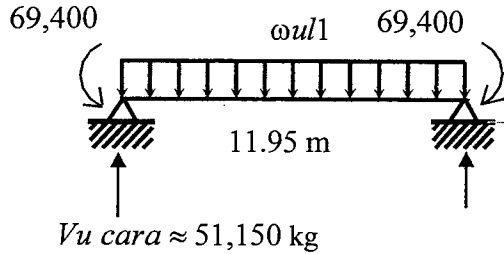
$M_u^- = 53,510$ kg-m resistencia requerida a la cara del apoyo.

$M_u^+ = 63,470$ kg-m resistencia requerida al centro del tramo.

a) Sección de M^- $b = 30 \text{ cm}$, $d \approx 89 \text{ cm}$, $As^- = 20.4 \text{ cm}^2$ $Mn^- \approx 69,400 \text{ kg-m}$

b) Sección de M^+ $b = 30 \text{ cm}$, $d \approx 87 \text{ cm}$, $As^+ = 26.08 \text{ cm}^2$ $Mn^+ \approx 84,100 \text{ kg-m}$

- Cortante asociado a la formación de las primeras rótulas plásticas en la zona de momentos negativos.



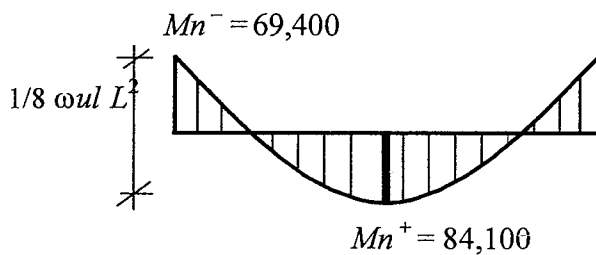
$$\omega ul1 = 6,600 \times 69,400 / 53,510$$

$$\omega ul1 \approx 8,560 \text{ kg/m}$$

$$M^+ \approx 83,400 \text{ kg-m}$$

$$Vu \text{ cara} = 8,560 \times 11.95/2 \approx 51,150 \text{ kg}$$

- Cortante asociado a la formación del mecanismo



$$1/8 \omega ul (11.95)^2 = 153,500$$

$$\omega ul \text{ lim} \approx 8,600 \text{ kg/m}$$

$$Vu \text{ lim cara} \approx 51,400 \text{ kg}$$

El factor de seguridad de la viga frente a la falla por flexión, si se aceptan los resultados del análisis elástico y el diseño por resistencia, está controlado por los momentos negativos y su valor es:

$$F.S. = 8,560/4,100 \approx 2.1$$

El factor de seguridad global de la viga frente a la formación de un mecanismo plástico será:

$$F.S. = 8,600/4,100 \approx 2.1$$

Si se diseña la viga con el cortante proveniente del análisis elástico, el factor de seguridad frente a la falla por cortante es:

$$F.S. = 6,600/4,100 \times (1/0.85) \approx 1.9$$

Resulta claro que si no se ajusta la fuerza cortante al valor asociado a la formación de un mecanismo plástico, se producirían diferencias entre los factores globales de seguridad por flexión y por cortante. Si se diseña para el cortante asociado a la carga límite (8,600 kg/m) el factor de seguridad global para esta sollicitación será $(8,600/4,100 \times (1/0.85)) \approx 2.5$ valor que es consistente con el factor de seguridad por flexión.

- Diseño por cortante. Cortante a "d" de la cara izquierda

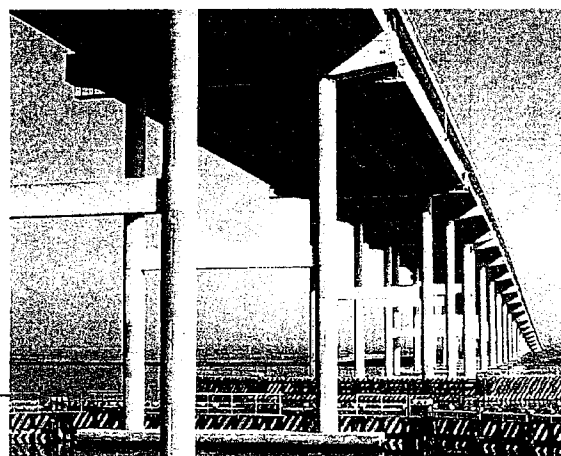
$$Vu \text{ lim} = 8,600 \times (11.95/2 - 0.89) \approx 43,730 \text{ kg}$$

$$Vc = 0.53 \sqrt{f_c} b w d = 0.53 \times \sqrt{210} \times 30 \times 89 \approx 20,500 \text{ kg} \quad \phi Vc \approx 17,430 \text{ kg}$$

$$Vu \text{ lim} > \phi Vc \text{ (se necesitan estribos)} \quad Vu \text{ lim} = \phi (Vc + Vs) \quad Vs = Vu / \phi - Vc$$

15.12 Lecturas

- 15.1 Shear and Diagonal Tension. Committee ACI - ASCE 326. ACI Journal. January-March 1962.
- 15.2 Suggested Revisions to Shear Provisions for Building Codes. Committee ACI - ASCE 426. ACI Journal. September 1977.
- 15.3 Suggested Revisions to ACI Building Code Clauses Dealing with Shear in Beams. MacGregor, Gergely. ACI Journal. October 1977.
- 15.4 General Shear Design Method. Collins, Mitchell, Adebar, Vecchio. ACI Structural Journal. January – February 1996.
- 15.5 The Fundamental Behavior of Reinforced Concrete Beams in Bending and Shear. Taylor H.P.J. Proceedings ACI – ASCE Shear Symposium, 1973. ACI Special Publication, SP42.
- 15.6 Repeating a Classic Set of Experiments on Size Effect in Shear of Members without Strirrups. Bentz, Buckely. ACI Structural Journal. November – December 2005.



CAPITULO 16

Flexocompresión

16.1 Introducción

En la estructura de un edificio, a los elementos verticales que soportan carga axial y flexión (flexocompresión) se les suele denominar columnas. Sin embargo, en una misma estructura, pueden haber varios tipos de elementos trabajando en flexocompresión: Las columnas, las placas o muros de corte, la caja de los ascensores, los muros de sótano, algunas vigas aisladas (horizontales o inclinadas) que pueden estar recibiendo compresiones importantes y hasta podrían haber tirantes trabajando en flexotracción (tracción + flexión).

No todas las columnas son verticales, existen estructuras en las cuales las columnas son inclinadas. También suele suceder, sobre todo en las columnas de los últimos pisos, que la carga axial sea pequeña y en consecuencia el comportamiento del elemento estructural se aproxime más al de una viga que al de una columna. Una manera de diferenciar una columna de una viga, independientemente de su ubicación en la estructura, es por el nivel o intensidad de la carga axial que soporta. Se acepta (ACI) que cuando la carga axial P_u es menor de:

$$P_u < 0.1 f_c A_g \quad (16-1)$$

el elemento debería diseñarse y detallarse como un elemento en flexión simple (viga) más que como un elemento en flexocompresión (columna). En la expresión anterior el término A_g denota el área bruta de la sección transversal.

16.2 Clasificación de las Columnas

Las columnas pueden ser clasificadas de diferentes maneras. La clasificación que se presenta a continuación, es una de las tantas posibles.

16.2.1 Por la ubicación del refuerzo. Normalmente esta clasificación se aplica a las columnas rectangulares o cuadradas.

- a) *Columnas con refuerzo en dos caras.* Se utilizan cuando el momento flector alrededor de uno de los ejes (en el caso de la figura a continuación, el eje vertical) es mucho mayor que el otro, siempre y cuando la armadura necesaria se pueda acomodar en las dos caras.

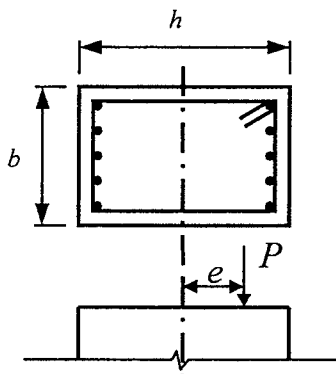


Fig. 16-1 Columna rectangular con refuerzo en dos caras.

b) *Columnas con refuerzo en las cuatro caras*

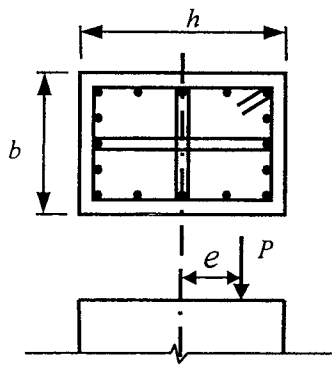


Fig. 16-2 Columna rectangular con refuerzo en las cuatro caras.

16.2.2 Por la forma y el tipo de confinamiento o refuerzo transversal.

- a) *Columnas con estribos.* Las formas más comunes que se emplean son las rectangulares, cuadradas, en L, en T, en doble T, circulares. Aunque se pueden construir casi con cualquier forma, dependiendo del encofrado. La mayoría de las columnas que utilizamos son con estribos. En zonas sísmicas el espaciamiento de los estribos suele ser más pequeño que en zonas no sísmicas, es decir se utiliza una mayor cantidad de estribos tanto por corte como por confinamiento.
- b) *Columnas con espirales:* Se suelen emplear si es necesario una ductilidad alta y/o en presencia de cargas axiales elevadas. La forma elegida en estos casos suele ser la circular aunque eventualmente se podría usar una columna cuadrada con las barras en arreglo circular tal como se muestra en la figura a continuación. No todas las columnas circulares deben llevar necesariamente confinamiento de espirales, muchas columnas circulares se diseñan y construyen con estribos.

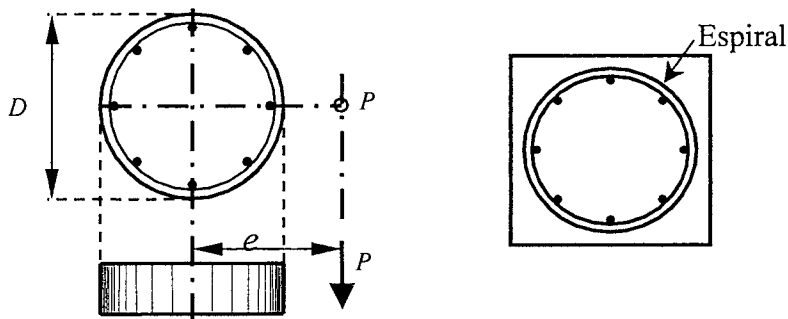


Fig. 16-3 Columnas con espirales o zunchos.

16.2.3 De acuerdo a la esbeltez de la columna. La importancia que tengan los efectos de segundo orden ($P - \Delta$) en la resistencia de la columna.

- a) *Columnas cortas:* en las cuales los efectos de esbeltez son despreciables.
- b) *Columnas largas o esbeltas:* en las cuales es necesario considerar los efectos de la esbeltez en el diseño.

La mayoría de las columnas que utilizamos en nuestro medio pueden clasificarse como “robustas” y por lo tanto los efectos de la esbeltez suelen ser despreciables. Esto significa que las dimensiones de la sección transversal que empleamos suelen ser “generosas” dado que vivimos en un país sísmico y aún no utilizamos concretos de muy alta resistencia.

16.2.4 Por el grado de arriostramiento lateral. El arriostramiento lateral mide la posibilidad de desplazamiento relativo entre los extremos de la columna. Dependiendo del grado de arriostramiento tendremos:

- a) *Columnas arriostradas:* pueden ser cortas o largas.
- b) *Columnas no arriostradas:* pueden ser cortas o largas también.

Debido al empleo de elementos rígidos (placas o muros de corte) destinados a soportar una fracción importante de las fuerzas sísmicas, una buena parte de las columnas de nuestros edificios, trabajan como arriostradas lateralmente ante cargas de gravedad y en muchos casos, dada la gran rigidez lateral de las placas, también lo hacen para cargas laterales.

16.2.5 Columnas Compuestas. Cuando por necesidades de resistencia, sobretodo para cargas axiales altas y dimensiones de la sección transversal limitadas, se utiliza un perfil de acero estructural embebido dentro del concreto.

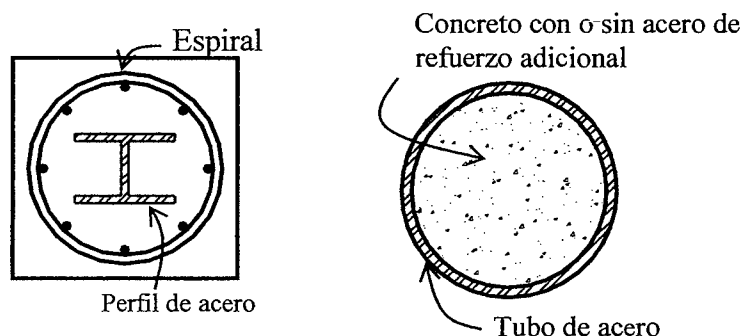


Fig. 16-4 Columnas compuestas.

16.3 Columnas Cortas sin Excentricidad – Resistencia en Compresión

Corresponde a una situación en la cual una columna corta (sin efectos de esbeltez) está solicitada únicamente por cargas axiales sin presencia de momentos flectores. Este estado podría denominarse como una sollicitación de *Compresión Pura*. Es en esencia un caso de interés teórico, en la realidad siempre existirá alguna excentricidad de la carga axial lo que conduce a la presencia de momentos flectores, aunque estos sean pequeños.

16.3.1 Esfuerzos Bajo Cargas de Servicio.

Si se quisiera conocer los esfuerzos en el concreto y en el acero bajo cargas de servicio, es factible utilizar un análisis elástico empleando el criterio de la sección transformada. Veremos posteriormente que los resultados que se obtienen para el esfuerzo en el acero bajo cargas de servicio, distan mucho de los resultados obtenidos en ensayos de laboratorio, el principal responsable de estas diferencias es el creep o flujo plástico del concreto.

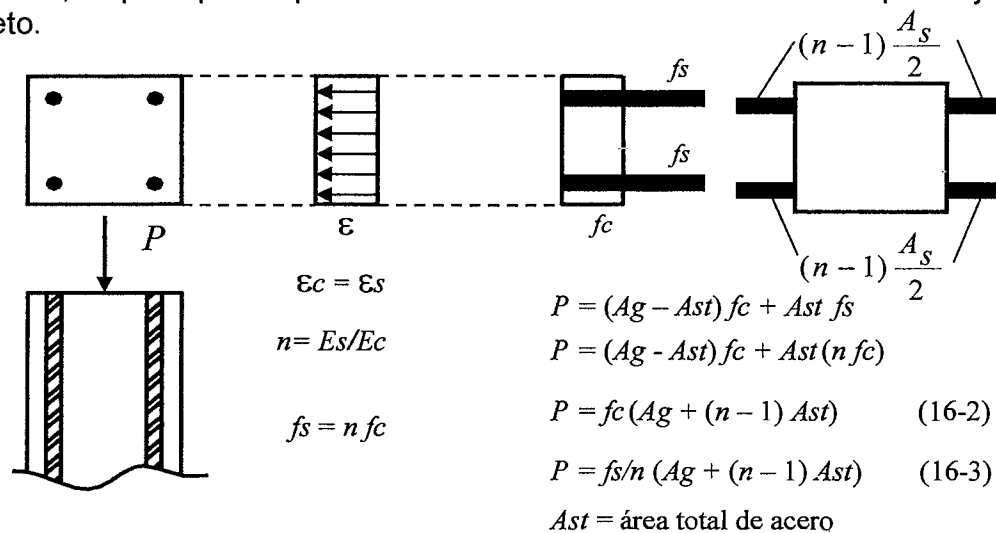


Fig. 16-5 Sección transformada en un elemento en compresión.

La metodología presentada en la figura 16-5 y a través de las ecuaciones 16-2 ó 16-3 para el caso de compresión, puede utilizarse también para analizar elementos en

tracción (tirantes) cuando se desea conocer los esfuerzos en el concreto y en el acero bajo cargas de servicio, para así verificar la posibilidad de fisuración en el concreto. Esta verificación es necesaria si la fisuración fuera una condición que controla el diseño, es decir el control del agrietamiento por tracción directa bajo cargas de servicio.

16.3.2 Resistencia Nominal en Compresión (P_o):

En teoría, la resistencia máxima (P_o) de una columna en compresión pura, puede obtenerse como la suma de la resistencia del concreto más la resistencia del acero. Al existir adherencia entre el acero y el concreto, las deformaciones en el acero serán iguales a las del concreto que las circunda.

Para ilustrar el comportamiento teórico de una columna corta en compresión pura, cargada desde cero hasta la falla, construyamos el diagrama Carga axial – Deformación longitudinal para la columna cuya sección se muestra en la figura 16-6. Se indican además, las relaciones constitutivas supuestas para el concreto y el acero. Para el acero se ha supuesto un modelo elastoplástico perfecto. Asumiremos que el confinamiento del concreto generado por los estribos, no modifica ni la resistencia ni la deformación de agotamiento (ϵ_{cu}).

Asumiendo que existe una perfecta adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo y que las secciones permanecen planas, el problema se resuelve variando, en incrementos pequeños, la deformación longitudinal de la columna. Para cada deformación se calculan los esfuerzos en el concreto y el acero según las relaciones constitutivas y se calcula por equilibrio, la carga axial. El esquema de cálculo es el siguiente:

- Para cada valor de ϵ , calcular f_c y f_s
- Calcular $P_c = f_c (A_g - A_s)$ $P_s = f_s A_s$
- Equilibrio $P_t = P_c + P_s$

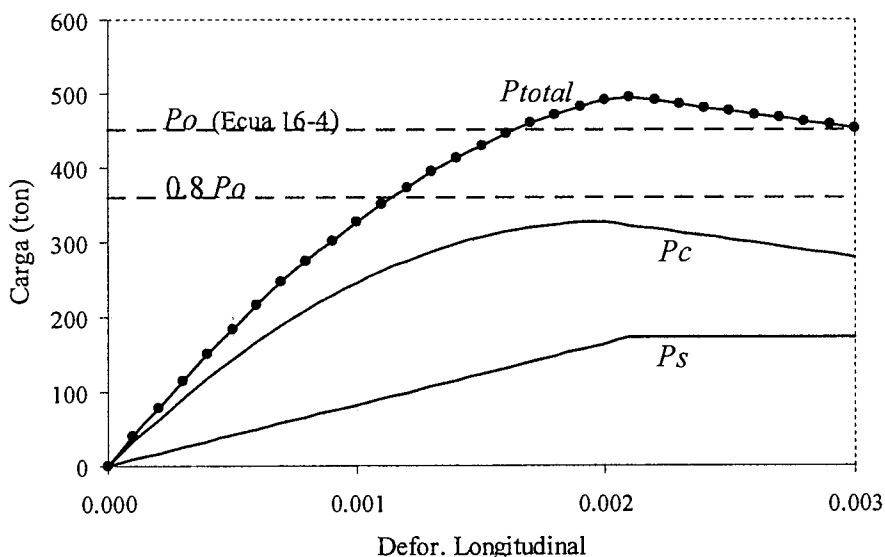
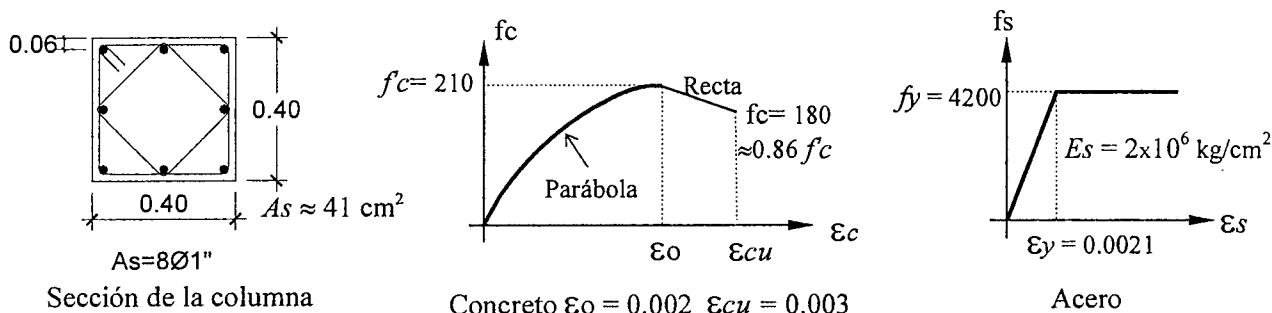


Fig. 16-6 Diagrama teórico Carga axial – Deformación longitudinal

En el diagrama se han indicado adicionalmente la resistencia nominal máxima (P_o) establecida por la Norma E.060 para columnas cortas en compresión pura, valor que viene dado por la ecuación 16-4. Veremos posteriormente (acápite 16.8.1) que la Norma E.060 limita el valor máximo de la carga axial que se puede aplicar a una columna corta con estribos al 80% de P_o .

En teoría, la resistencia nominal máxima de la columna, suponiendo que el acero tiene una plataforma de fluencia definida y que este se encuentra en fluencia cuando el concreto alcance su resistencia máxima, es:

$$P_o = A_{st} f_y + (A_g - A_{st}) f_c$$

En la realidad el aporte del concreto a la resistencia a compresión de las columnas se ve reducido por un factor k , de la siguiente manera:

$$P_o = A_{st} f_y + (A_g - A_{st}) k f_c$$

El valor de k adoptado la Norma es de 0.85 (varía entre 0.7 y 0.93) y proviene del ajuste de los resultados de una extensa serie de ensayos realizados en la Universidad de Illinois.

La reducción en el aporte del concreto en la resistencia total se debe principalmente a:

- Sangrado del concreto. Debido al proceso de colocación y consolidación del concreto en una columna, las porciones o zonas superiores tienen mayores relaciones de agua – cemento (w/c) que las zonas inferiores.
- Excentricidad de las cargas y esbeltez de la columna real.
- Reducción de la resistencia del concreto por el incremento del tamaño del elemento. No es lo mismo, en tamaño, una probeta de laboratorio que una columna verdadera, esto genera mayores probabilidades de que se produzcan zonas débiles en el concreto.
- Efecto de las cargas sostenidas de larga duración.

Por lo tanto la resistencia de diseño a compresión pura de las columnas se estima con la ecuación 16-4.

$$P_o = A_{st} f_y + 0.85 f_c (A_g - A_{st}) \quad (16-4)$$

Esta expresión tiene sentido cuando el acero tiene una plataforma de fluencia bien definida, en caso contrario será necesario conocer la curva real esfuerzo –deformación del acero.

Para el cálculo de la Resistencia de Diseño (Diseño por Resistencia) es necesario introducir los factores de reducción de resistencia (ϕ) los cuales, para elementos en compresión son:

Para columnas con estribos: $\phi = 0.70$

Para columnas con espirales: $\phi = 0.75$ (debido a su mayor ductilidad)

Al nivel de comportamiento elástico es muy difícil establecer como se distribuyen los esfuerzos entre el concreto y el acero. No hay concordancia entre la teoría (ecuaciones 16-2 y 16-3) y los resultados experimentales, aún en el rango elástico del concreto y el acero. Esta falta de concordancia se debe al creep o flujo plástico del concreto que hace que los esfuerzos dependan de la historia de cargas sobre el elemento, y a la contracción del concreto. Sin embargo, los ensayos han demostrado que la resistencia P_o es prácticamente independiente de la historia de cargas y puede evaluarse con una aproximación aceptable, mediante la ecuación 16-4.

16.4 Comportamiento de columnas con estribos y espirales

Las figuras 16-7 y 16-8 (Fling), muestran el comportamiento en ensayos de laboratorio a escala natural, de columnas circulares con espirales (figura 16-7) y de columnas

circulares con estribos (figura 16-8). Es notable el pandeo de las barras verticales y la falla del concreto del núcleo (falla de splitting) que ocurre en las columnas con estribos, una vez que se desprende el recubrimiento de concreto y las barras alcanzan la fluencia, fenómeno que no se presenta cuando el confinamiento consiste en una espiral de paso cerrado. Es necesario hacer notar que en este caso los estribos estaban notoriamente espaciados, en consecuencia la comparación no es del todo válida.



Fig. 16-7 Columna con espiral sometida a carga axial centrada. Esbeltez 6.6.



Fig. 16-8. Columna con estribos sometida a carga axial centrada. Cuantía 4%.

Las figuras 16-9, 16-10 y 16-11 (Nisse) muestran el estado final de dos columnas pertenecientes al hospital Olive View en California, luego del terremoto de San Fernando en 1971. La columna zunchada, a pesar de haber quedado con un desplazamiento relativo remanente entre sus extremos de casi 0.50 m y de haber perdido el recubrimiento, continúa con el núcleo de concreto casi intacto y en capacidad de seguir soportando la carga vertical. En contraste, la columna con estribos ha quedado destruida, con el núcleo desintegrado y sin ninguna capacidad de carga. Es cierto que al parecer los estribos en esta columna estaban muy espaciados, esta debió estar preparada para soportar solicitaciones sísmicas intensas y demandas elevadas de ductilidad. Dicho de otro modo la cantidad de acero de confinamiento presente en la espiral de la primera columna es muy superior a la de los estribos de la segunda columna, en consecuencia, la comparación directa entre los comportamientos de ambas no es del todo válida. Si la columna de la figura 16-10 hubiera tenido estribos múltiples cerrados menos espaciados, su comportamiento hubiera sido notablemente superior.

La diferencia de comportamiento entre las columnas con estribos y las zunchadas se debe al efecto de confinamiento que ejercen los estribos o la espiral sobre el núcleo de

concreto. La espiral, adecuadamente diseñada y detallada, ejerce un efecto de confinamiento mucho más eficiente e intenso que el de los estribos. Para lograr la misma eficiencia de una espiral se necesitan estribos estrechamente espaciados. Tenga en cuenta que el paso de una espiral suele estar entre 0.05 a 0.10 m, en comparación, el espaciamiento máximo entre estribos que exige el código en zonas no sísmicas (digamos entre 0.25 y 0.30 m) no permite un confinamiento efectivo.



Fig. 16-9 Columna con espiral.



Fig. 16-10 Columna con estribos



Fig. 16-11 Columnas con estribos (esquinas) y con espirales (interiores) de un mismo pórtico.

La figura 16-12 (Park – Paulay) permite apreciar el efecto de confinamiento mencionado en una columna con estribos cuadrados muy espaciados y en una columna con estribos circulares con poco espaciamiento juntos o una espiral.

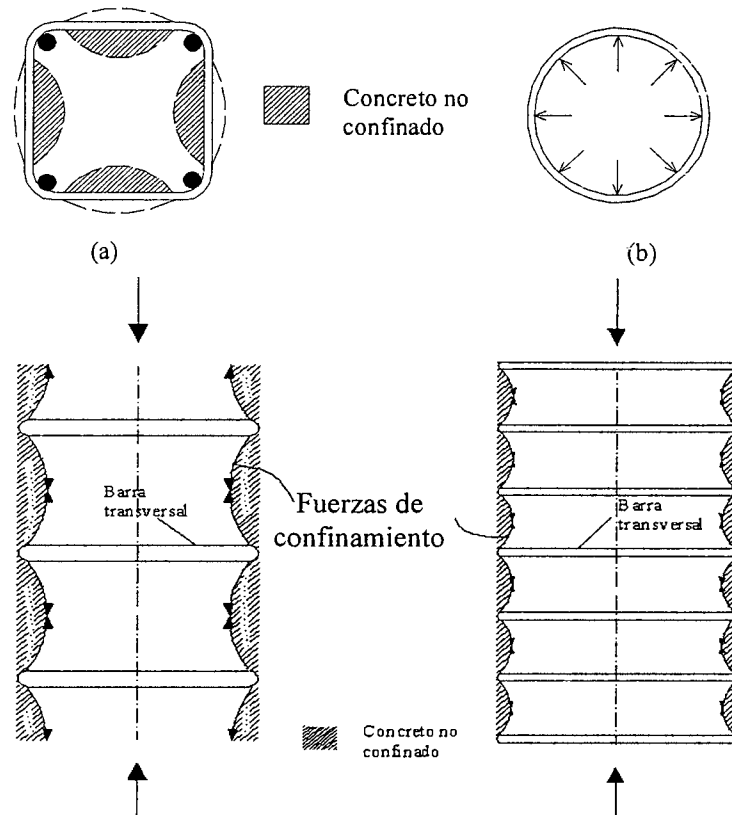


Fig. 16-12 Efecto del confinamiento producido por el refuerzo transversal

La figura 16-13 (González Cuevas), muestra esquemáticamente el comportamiento de columnas cortas (poca esbeltez) con estribos y con espirales de varias cuantías - livianas o pesadas de acuerdo al diámetro y paso de la espiral - en un ensayo de compresión axial.

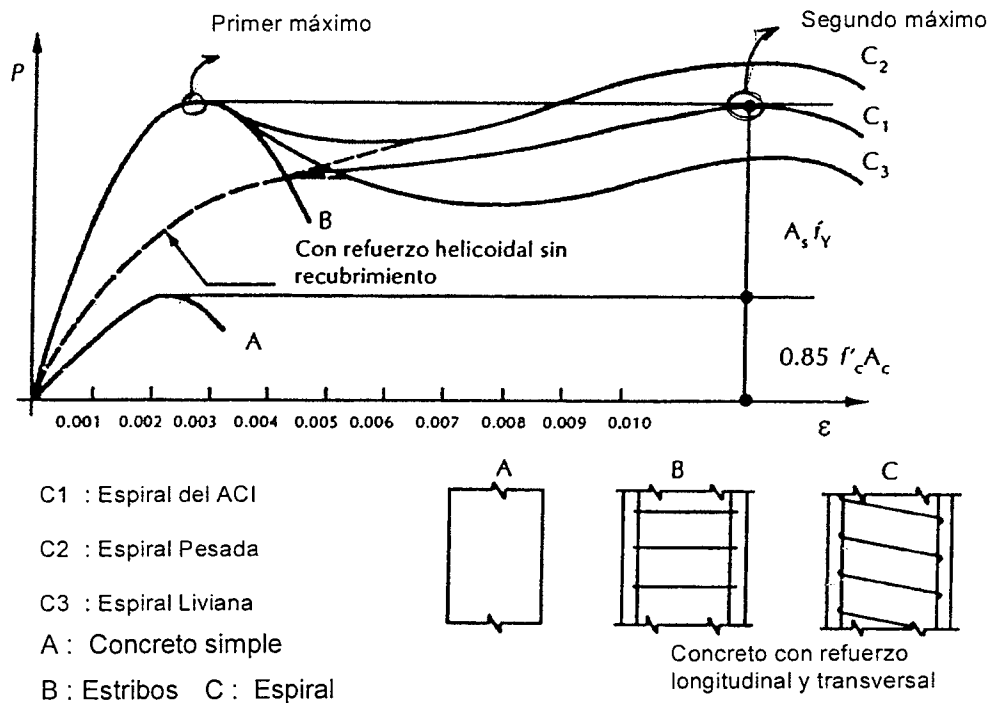


Fig. 16-13 Curvas carga axial – deformación de columnas cortas

El primer máximo sucede antes de que la columna pierda el recubrimiento. Cuando "salta" el recubrimiento se produce una caída brusca de la resistencia por la pérdida de sección transversal. La columna con estribos espaciados colapsa poco después de manera frágil, mientras que la columna con espiral, a pesar de haber perdido el recubrimiento, empieza a recuperar capacidad de carga debido al estado triaxial de esfuerzos en que se encuentra el concreto, por efecto del confinamiento que ejerce la espiral, hasta alcanzar el segundo máximo.

La figura 16-14 esboza el estado triaxial de esfuerzos en el núcleo de una columna con espiral de poco paso. Este efecto se discutió en el acápite 3.9 con ayuda de las figuras 3-18, 3-19, 3-20 y 3-21, que se sugiere revisar.

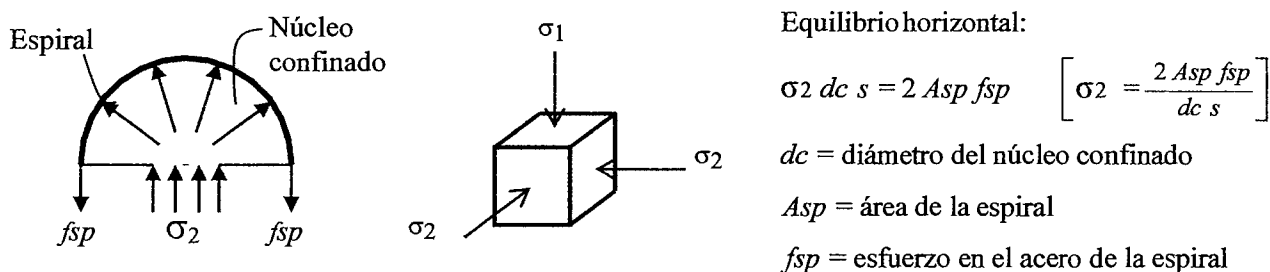


Fig. 16-14 Estado de esfuerzos en el núcleo confinado de una columna.

El segundo máximo en las columnas zunchadas, solo se alcanza con grandes deformaciones axiales, basta observar la escala horizontal de la figura 16-13. Cuando el acero de la espiral llega a la fluencia empieza a deformarse sin control, se pierde la capacidad de la espiral de seguir aumentando la presión que ejerce sobre el núcleo y se produce el estallido del núcleo sobreviniendo el colapso. Que el segundo máximo sea menor, igual o mayor que el primer máximo dependerá del paso y diámetro (cuantía) de la espiral.

En una columna con estribos, la presión que ejerce el concreto debido a su expansión lateral, sobre los estribos hace que estos se flexionen (figura 16-12 a). Los estribos que no estén espaciados estrechamente tienen poca influencia en la resistencia a compresión del núcleo por lo que al perderse el recubrimiento se incrementa notablemente el esfuerzo de compresión en el concreto del núcleo, originando la falla de éste. Las barras verticales de refuerzo pandean y sobreviene la falla de naturaleza frágil es decir súbita. Los estribos son necesarios para evitar el pandeo prematuro de las barras de refuerzo a medida que estas se acercan a la fluencia.

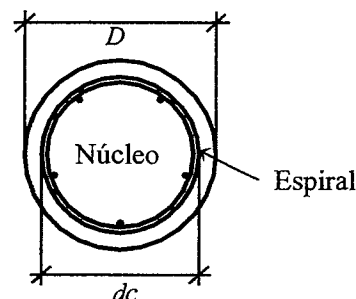
16.4.1 Formula del ACI y la Norma E.060 para las Espirales.

La expresión para el cálculo de la cuantía mínima de una espiral, está basada en lograr que el segundo máximo (figura 16-13), en el cual se ha perdido el recubrimiento, y el núcleo confinado debe soportar toda la carga, debe ser por lo menos igual al primer máximo en el cual la columna está completa. Esto se logra únicamente por el efecto del estado triaxial de esfuerzos al que se encuentra sometido el concreto del núcleo.

La cuantía de refuerzo de la espiral, ρ_s , no deberá ser menor que el valor dado por las ecuaciones 16-5, 16-6 ó 16-7.

$$\rho_s = \frac{4 A_{sp}}{d_c s} \quad (\text{definición}) \quad (16-5)$$

$$\rho_s = 0.45 \left[\frac{A_g}{A_c} - 1 \right] \frac{f'_c}{f_y} \quad (16-6)$$



$$\rho_s = 0.12 \left(\frac{f'_c}{f_y} \right) \quad (16-7)$$

En donde:

A_g = Área bruta de la columna = $\pi D^2 / 4$

A_c = Área del núcleo medida al exterior de la espiral = $\pi dc^2 / 4$

dc = diámetro del núcleo medido al exterior de la espiral.

s = paso de la espiral (medido centro a centro)

A_{sp} = área de la barra de la espiral.

La ecuación 16-7 es aplicable únicamente a elementos (columnas) con responsabilidad sísmica. El esfuerzo de fluencia de las barras que conforman la espiral no debe considerarse mayor que $7,000 \text{ kg/cm}^2$. Otros requerimientos de la Norma E.060 para las espirales se encuentran en el acápite 7.10.4 y se resumen en la figura 16-15.

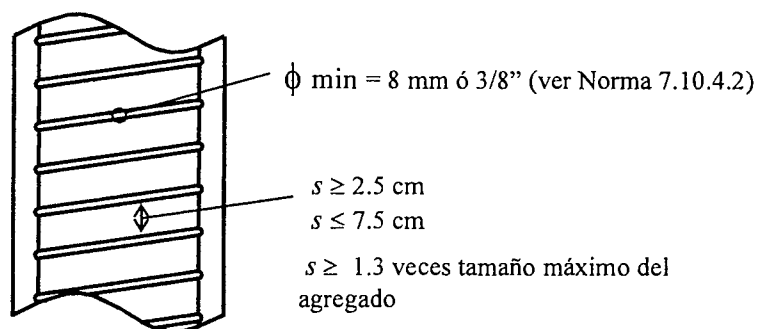


Fig. 16-15 Requerimientos de la Norma para las espirales.

La deducción de la ecuación 16-6, como ya se mencionó, está basada en tratar de lograr que el segundo máximo (véase la figura 16-13) de la resistencia a carga axial, que se produce luego de perder el recubrimiento, sea por lo menos igual al primer máximo.

Primer máximo: $P1 = 0.85 f'_c (A_g - A_s) + A_s f_y$ (ecuación 16-4)

Segundo máximo (ver figuras 16-13 y 16-14):

$$P2 = 0.85 \sigma_1 (A_c - A_s) + A_s f_y$$

Despreciando el término A_s frente a A_g y A_c e igualando P1 con P2 se obtiene:

$$\sigma_1 = (A_g / A_c) f'_c \quad (A)$$

La ecuación anterior significa físicamente que la resistencia a compresión del concreto del núcleo confinado (σ_1) debe aumentar para lograr que ambos máximos sean iguales. Por otro lado la relación entre σ_1 y f'_c obtenida de ensayos triaxiales, tal como se explicó en el acápite 3.9 (véase la ecuación 3-15) viene dada conservadoramente por:

$$\sigma_1 = f'_c + 4.1 \sigma_2 \quad (B)$$

Para determinar la presión de confinamiento σ_2 que ejerce la espiral, hagamos uso del diagrama de la figura 6-14, el equilibrio horizontal exige, en el instante en el cual la espiral llega a la fluencia:

$$2 f_y A_{sp} = \sigma_2 dc s \Rightarrow \sigma_2 = 2 f_y A_{sp} / dc s$$

Remplazando 16-5 se obtiene: $\sigma_2 = f_y \rho_s / 2$ (C)

Sustituyendo C en B tendremos:

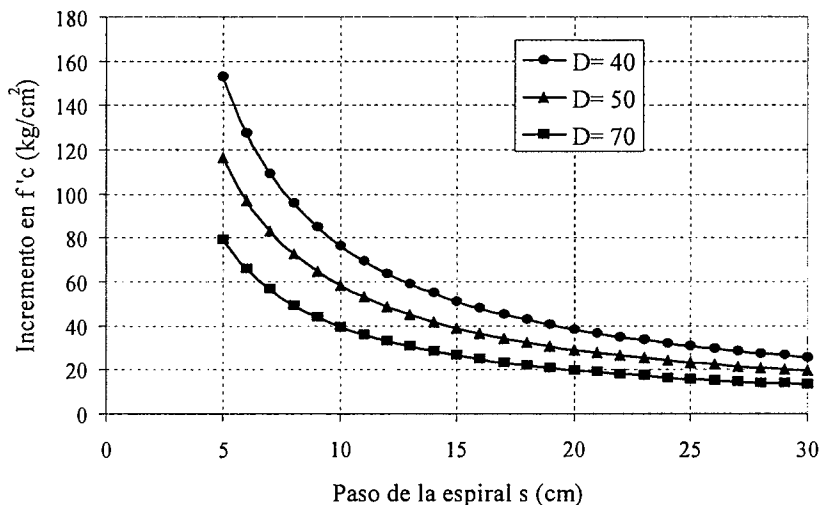
$$\sigma_1 = f'_c + 4.1 (f_y \rho_s / 2) = f'_c + 2.05 f_y \rho_s \quad (D)$$

Igualando A con D: $(A_g / A_c) f'_c = f'_c + 2.05 f_y \rho_s \Rightarrow \rho_s \approx 0.488 (A_g / A_c - 1) (f'_c / f_y)$ (E)

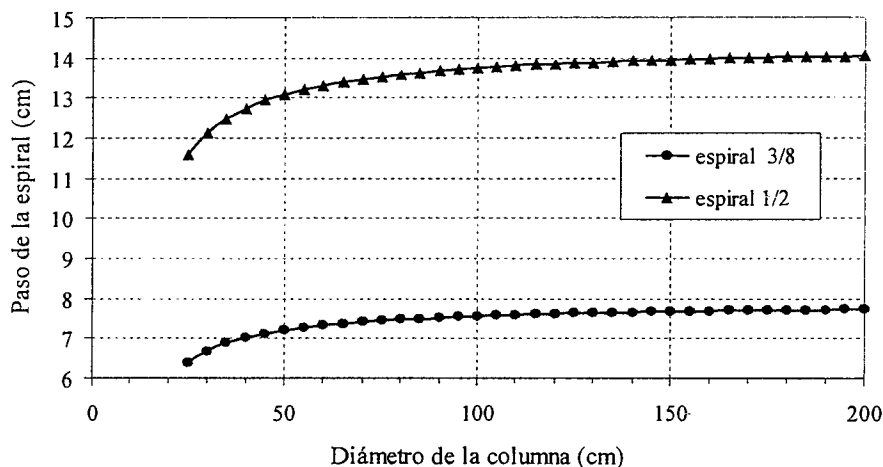
El ACI aproximó la ecuación E a la ecuación 16-6.

Es interesante, utilizando la ecuación D, formarse una idea de cuanto puede aumentar la resistencia a compresión del concreto del núcleo de la columna, por el efecto de confinamiento que produce la espiral. Para ello se ha preparado la figura a continuación asumiendo una espiral de diámetro 3/8" ($A_{sp} = 0.71 \text{ cm}^2$, $f_y = 4,200$, recubrimiento de 4 cm) de paso variable y columnas circulares con diámetros 40, 50 y 70 cm. En el eje vertical se ha graficado el incremento en la resistencia a la compresión del concreto en el núcleo que en la ecuación D resulta ser $\sigma_1 - f'_c$.

Se observa claramente que, para espirales con paso cerrado y columnas de diámetro relativamente pequeño, el incremento en la resistencia del concreto del núcleo confinado es notable.



En la figura inserta a continuación se muestra el requerimiento de la ecuación 16-6 relativo al paso de la espiral. Se ha supuesto $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4,200$ y dos diámetros para la espiral, 3/8" y 1/2". Para la construcción de las curvas no se han impuesto los límites de la figura 16-15. Para columnas de gran diámetro el requerimiento de la ecuación 16-6 se estabiliza ya que el término A_g / A_c tiende al valor 1.1, físicamente significa que para alcanzar el segundo máximo (figura 16-13) no es necesario un efecto de confinamiento elevado ya que el núcleo de la columna prácticamente tiene la misma área que la columna antes de perder el recubrimiento.



16.5 Detalles del Refuerzo en Columnas- Refuerzo Longitudinal y Estribos

En el Capítulo 6, Detalles del Refuerzo, se presentaron algunas de las disposiciones de la Norma relacionadas con el recubrimiento y la colocación del refuerzo en columnas (figuras 6-8, 6-9 y 6-11).

La figura 16-16 resume estas disposiciones en lo relativo a recubrimiento, espaciamiento libre entre barras y disposición de estribos. Es necesario anotar que la Norma exige que cada barra de esquina debe tener apoyo lateral proporcionado por el doblé de un estribo con un ángulo comprendido menor o igual a 135° . Adicionalmente ninguna barra debe estar separada mas de 0.15 m libres, a cada lado a lo largo del estribo, desde la barra lateralmente soportada.

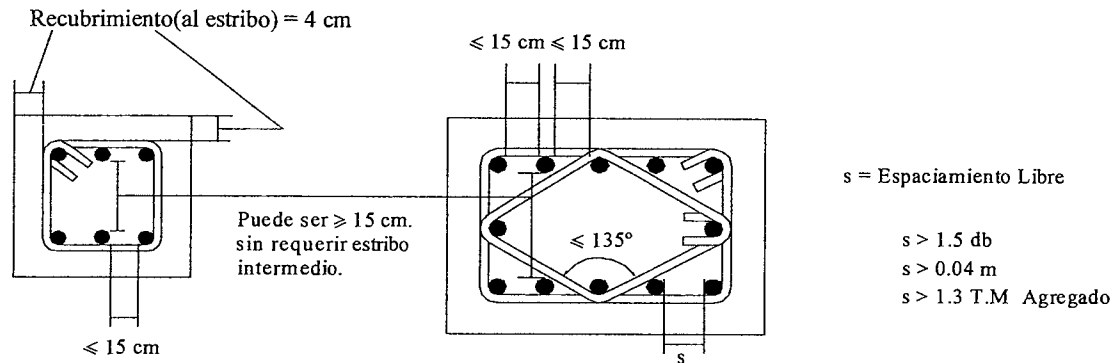


Fig. 16-16 Disposiciones de la Norma relacionadas con la colocación del refuerzo en columnas.

Cuando en las columnas hay cuantías elevadas de acero longitudinal de refuerzo, suele ser conveniente agrupar el refuerzo en lo que se denominan “barras en paquete” (véase el acápite 6.4) con esto se pueden ahorrar algunos estribos y lograr acomodar mejor el acero. La figura 16-17 muestra una posibilidad de agrupar 24 barras de refuerzo en 8 paquetes de tres barras cada uno.

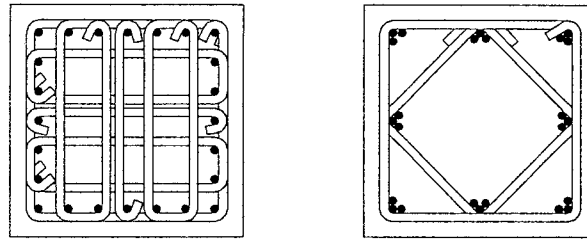


Fig. 16-17 Refuerzo convencional en una columna y refuerzo con barras agrupadas en paquetes.

16.5.1 Estribos en Columnas

Los estribos en una columna cumplen diversas funciones importantes, entre ellas:

- Sirven para facilitar el ensamblaje (montaje) de las armaduras longitudinales de refuerzo
- Restringen el pandeo de las barras verticales en compresión. Por este motivo el código limita el espaciamiento máximo de los estribos al menor de los siguientes valores:

$$s \leq 16 db \quad db \text{ es el diámetro de las barras verticales}$$

$$s \leq \text{menor dimensión de la columna}$$

$$s \leq 48 de \quad de \text{ es el diámetro del estribo}$$

$$s \leq 0.30 \text{ m (recomendación o sugerencia del autor)}$$

- Los estribos adecuadamente espaciados confinan el núcleo de concreto y pueden conferir una mayor ductilidad al elemento, aumentando la deformación de agotamiento del concreto (ϵ_{cu}).
- Sirven de refuerzo por corte a la columna cuando $V_u > \phi V_c$ controlando el agrietamiento diagonal por cortante. En este caso el espaciamiento máximo entre los

estribos viene controlado por las disposiciones del diseño por fuerza cortante y puede ser $0.5 d$ ó $0.25 d$ dependiendo de la intensidad de V_s . Para el diseño por corte de una columna, puede tomarse en cuenta el incremento en la resistencia al corte que suministra el concreto por la presencia de las compresiones originadas por la carga axial (acápite 15.6.2). Cuando se produzca un esfuerzo neto de tracción significativo, como suele ocurrir durante un sismo en las columnas cercanas a un muro de corte y conectadas a él mediante vigas rígidas, es necesario tomar en cuenta lo indicado en el acápite 15.6.3.

e) Mejoran el comportamiento de los empalmes traslapados de barras en tracción.

La figura 16-18 (adaptada de González Cuevas) muestra algunos arreglos típicos del refuerzo longitudinal y de los estribos en columnas cuadradas. Nótese que algunos casos se han reemplazado los estribos por “amarras” o “grapas suplementarias” (en Inglés Crosstie).

La Norma E.060 permite el uso de grapas (Artículos 7.1 y 21.1) sin embargo, en columnas con responsabilidad sísmica, los extremos de las grapas deben ser ganchos con doblez a 135° , ya que si se usaran ganchos a 90° y en un sismo intenso se perdiera el recubrimiento de la columna, el gancho a 90° en uno de los extremos no sería efectivo por la pérdida del anclaje. El ACI permite usar ganchos a 90° en uno de los extremos pero este gancho debe alternarse. Una práctica más saludable sería la de colocar grapas con ganchos a 180° en ambos extremos, con las dificultades constructivas que esto conlleva, o mejor aún no reemplazar indiscriminadamente estribos por ganchos.

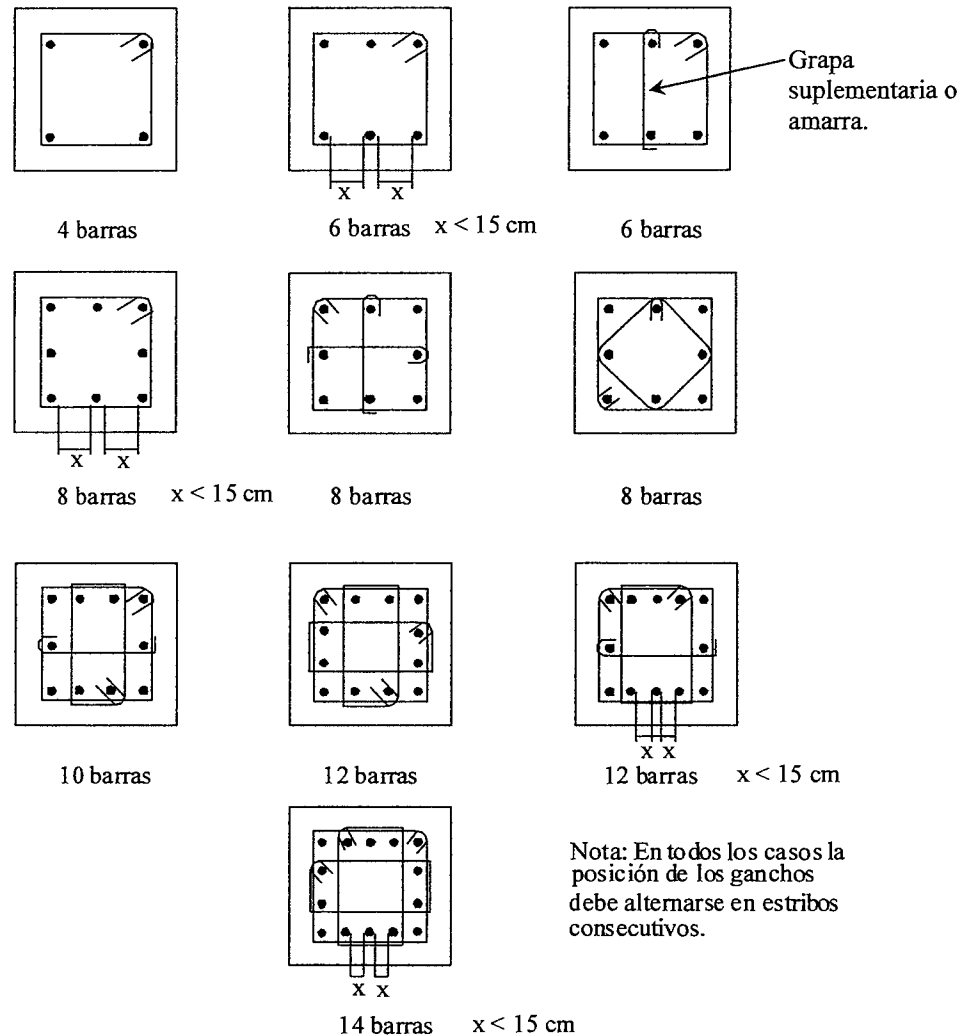


Fig. 16-18 Arreglo del refuerzo en columnas cuadradas.

16.5.2 Refuerzo Máximo y Mínimo en Columnas

La Norma Peruana exige las siguientes cuantías de refuerzo mínimas y máximas en columnas:

$$\rho = \frac{A_{st}}{A_g} \quad \rho \geq 1\% \quad \rho \leq 6\%$$

Donde A_{st} es el área total de acero y A_g el área bruta de la sección transversal. El ACI permite una cuantía máxima de hasta 8% sin embargo en elementos con responsabilidad sísmica la limita al 6%.

La cuantía mínima exigida (1%) obedece al fenómeno del creep o flujo plástico que experimenta el concreto en compresión bajo cargas sostenidas. Ensayos de laboratorio en columnas cargadas axialmente, mostraron que para cuantías menores al 1% el refuerzo alcanzaba la fluencia bajo cargas de servicio sostenidas.

El máximo del 6% (8% según el ACI) obedece en esencia a razones del tipo práctico para evitar el congestionamiento del refuerzo. Esto es especialmente importante en las zonas de los empalmes traslapados de las barras verticales, donde si se empalman todas las barras en una misma sección, se llega al doble de refuerzo en esas zonas.

A diferencia de las vigas o elementos en flexión simple, para los cuales el código limita la cantidad máxima de acero a una fracción de la balanceada, en las columnas no es posible evitar la falla en compresión limitando el acero en tracción ya que, en las columnas, el tipo de falla depende de la intensidad de la carga axial. Para cargas axiales por encima de la carga que produce la falla balanceada, la falla es por compresión en el concreto, y el acero más alejado del borde comprimido no llega a la fluencia por tracción.

Un límite práctico, desde el punto de vista de la congestión de acero, es limitar la cuantía en columnas con estribos al 4%. Adicionalmente se obtienen columnas más económicas si se limita la armadura entre el 1% y el 3%.

Las columnas con espirales; que se suelen usar para cargas axiales grandes o cuando hay demandas altas de ductilidad; pueden llegar hasta un 5% de cuantía.

16.5.3 Número Mínimo de Barras

El número mínimo de barras dependerá de la forma de la sección, sin embargo el código para algunas formas especifica un número mínimo. Normalmente en columnas rectangulares se suele usar un número par de barras para tener simetría en la resistencia. En la figura 16-19 se muestran algunos arreglos basados en el número mínimo de barras.

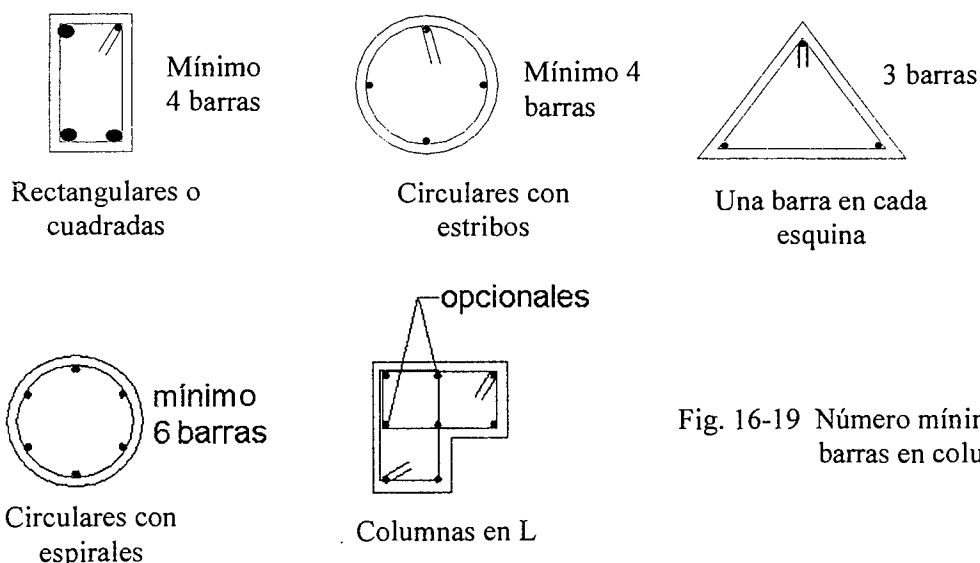


Fig. 16-19 Número mínimo de barras en columnas.

En columnas circulares importantes, si bien la Norma exige un mínimo de cuatro barras cuando se usan estribos y un mínimo de seis cuando se usan espirales, se aconseja el uso de por lo menos ocho barras. Con un número menor la orientación de las barras tiene influencia en la resistencia y durante la construcción es muy probable que no se respete la orientación o arreglo que uno desea.

La figura 16-20 (tomada del Manual del CRSI) muestra la resistencia, a través de diagramas de interacción, de una columna circular de 20" de diámetro para diversas orientaciones de las barras. Resulta claro que para pocas barras, la resistencia en flexión de la columna depende de la orientación de las mismas. A partir de ocho barras la resistencia es prácticamente independiente de la orientación de las mismas y para los cálculos de resistencia, las armaduras se pueden idealizar como un tubo de acero delgado de área equivalente.

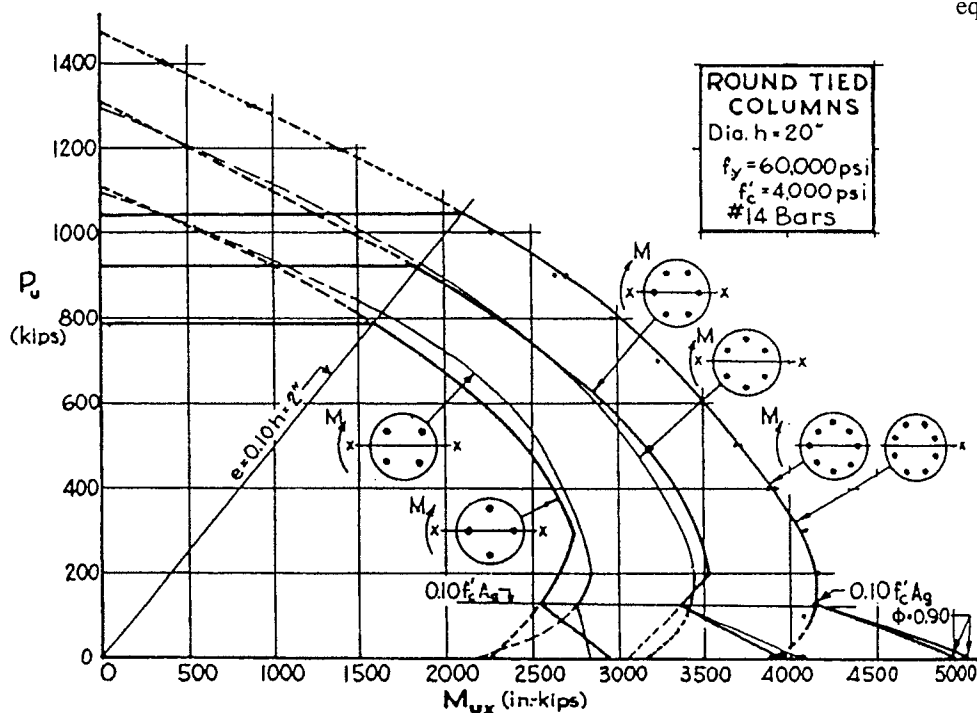
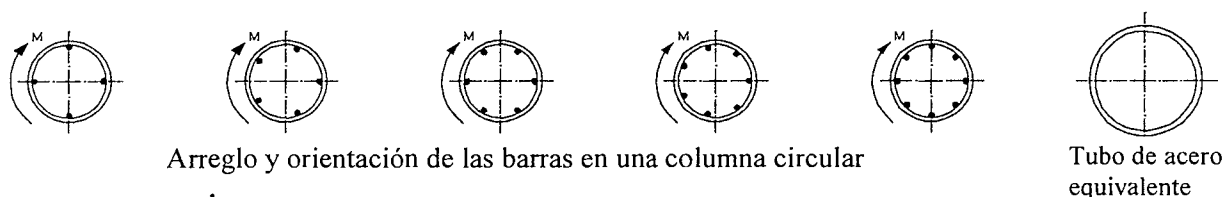


Fig.16-20 Diagrama de interacción para una columna circular con diferentes número de barras y orientación de las mismas.

16.5.4 Tamaño Mínimo de una Columna

La Norma no especifica dimensiones mínimas para columnas, salvo para aquellas con responsabilidad sísmica para las cuales exige un ancho mínimo de 0.25 m. Sin embargo es recomendable no utilizar columnas rectangulares con un ancho menor de 0.20 m o circulares con un diámetro menor a 0.25 m. La dimensión mínima dependerá, además de los requisitos de resistencia, de la congestión de armaduras y de la posibilidad de vaciar el concreto en obra sin que se produzcan cangrejeras.

16.6 Predimensionamiento de Columnas

No hay reglas simples para predimensionar columnas ya que la capacidad de carga de una columna depende del momento flector que acompaña a la carga axial o de la

excentricidad de la carga. Para valores pequeños de la excentricidad $e/h \leq 0.15$ que corresponde a cargas axiales grandes y momentos flectores bajos, se puede usar la ecuación 16-8, cuya deducción se presenta a continuación.

La carga máxima, que de acuerdo a la Norma, se puede aplicar a una columna con estribos ($\alpha = 0.8, \phi = 0.7$) viene dada por la ecuación 16-4.

$$P_u = \alpha \phi P_o = (0.8) 0.7 [0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}]$$

$$A_{st} = \rho A_g$$

$$P_u = 0.56 [0.85 f_c A_g + \rho A_g (f_y - 0.85 f_c)]$$

$$P_u = 0.56 A_g [0.85 f_c + \rho (f_y - 0.85 f_c)]$$

Si aproximamos el término $\rho (f_y - 0.85 f_c)$ por $\rho 0.85 f_y$ y si además adoptamos un margen de un 10% de exceso en el valor de P_u estimado en el metrado, tendremos:

$$1.1 P_u = 0.56 \times 0.85 A_g (f_c + \rho f_y)$$

$$1.1 P_u \approx 0.45 A_g (f_c + \rho f_y)$$

$$A_g \geq \frac{1.1 P_u}{0.45 (f_c + \rho f_y)} \quad (16-8)$$

La ecuación 16-8 es aplicable cuando la falla de la sección es por compresión. No es aplicable cuando el momento flector es importante (excentricidad grande) o cuando se esperan momentos de sismo considerables, para estas situaciones no hay formulas simples para el predimensionamiento.

16.7 Acciones (solicitaciones) en las Columnas

Las principales solicitaciones que obran en una columna son las cargas axiales (en algunos casos de tracción) los momentos flectores (flexión recta o biaxial) y las fuerzas cortantes. Existen situaciones en las cuales pueden presentarse adicionalmente momentos torsores. Suele ser el caso de edificios con excentricidades en planta importantes bajo solicitaciones sísmicas, en estos casos la rotación en planta de la losa como consecuencia de la excentricidad, originará torsión en las columnas.

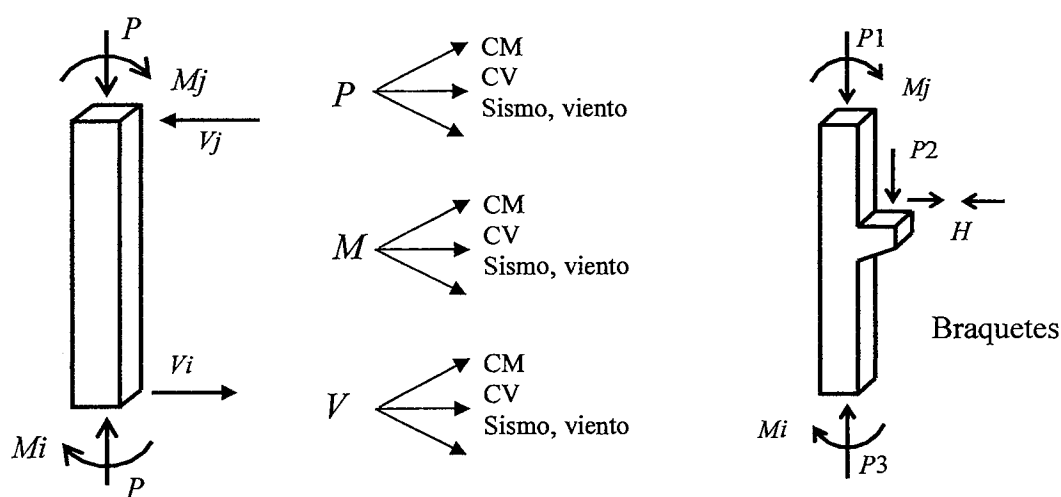


Fig. 16-21 Solicitaciones en las columnas.

Existen situaciones en las cuales las columnas se encuentran solicitadas por acciones entre sus extremos. Por ejemplo en los braquetes en los que se apoya un puente grúa o

en el caso de presiones de viento o empujes del suelo que obran directamente sobre la columna o como producto de la reacción de otros elementos sobre las columnas.

Para determinar la Resistencia Requerida (P_u y M_u) se emplean las combinaciones de carga del Diseño por Resistencia. Las combinaciones más frecuentes para determinar la resistencia requerida, son:

$1.4 D + 1.7 L$	P_u y M_u (Cargas de gravedad)
$1.25 (D + L) \pm S$	P_u y M_u (Gravedad y sismo)
$0.9 D \pm S$	P_u y M_u (Gravedad y sismo)

16.8 Diagrama de Interacción

La determinación de la resistencia de una sección de una columna, dados f_c , f_y , las dimensiones y el refuerzo longitudinal, consiste en calcular las resistencias nominales P_n y M_n . Es claro que no existe una solución única pues, a diferencia de lo estudiado en flexión simple, el valor de M_n dependerá de la intensidad de la carga axial P_n y viceversa.

Si bien es posible derivar ecuaciones que permitan, dada una geometría y una distribución de las armaduras, determinar la resistencia de una sección o dadas las solicitaciones - P_u , M_u - determinar el refuerzo necesario, estas ecuaciones suelen ser bastante complejas para su aplicación "manual".

Al final de este Capítulo se presentan las ecuaciones de diseño para el caso más simple de una sección rectangular con armadura en dos caras, veremos que son ecuaciones un tanto complejas para su uso rutinario en el diseño, si no se cuenta con la ayuda de programas automáticos de diseño o análisis. Por ello es más simple, tanto para el análisis como para el diseño, el uso de los denominados Diagramas de Interacción los que describen completamente la resistencia de una sección sometida a flexocompresión.

Un Diagrama de Interacción, se define como el lugar geométrico de las combinaciones de P y M que agotan la capacidad de la sección. Se construyen siguiendo las mismas hipótesis, básicas y simplificadoras que hemos utilizado para el análisis de una sección en flexión simple, es decir:

- Las secciones planas permanecen planas.
- La deformación última del concreto se puede considerar $\epsilon_{cu} = 0.003$
- Los esfuerzos reales en la zona de compresión se pueden remplazar por el bloque rectangular equivalente de compresiones.
- Existe perfecta adherencia entre el acero y el concreto.
- El acero es elastoplástico perfecto (diagrama bilineal).
- La resistencia a la tracción del concreto se desprecia.

Los diagramas de interacción se suelen construir variando sucesivamente la ubicación del eje neutro " c ". Para cada posición del eje neutro asumida (c_i) se calcula por equilibrio, la resistencia nominal de la sección asociada: $P_{ni} - M_{ni}$. La figura 16-22 ilustra la obtención de un punto del diagrama de interacción asociado a la posición del eje neutro asumida - c_i -.

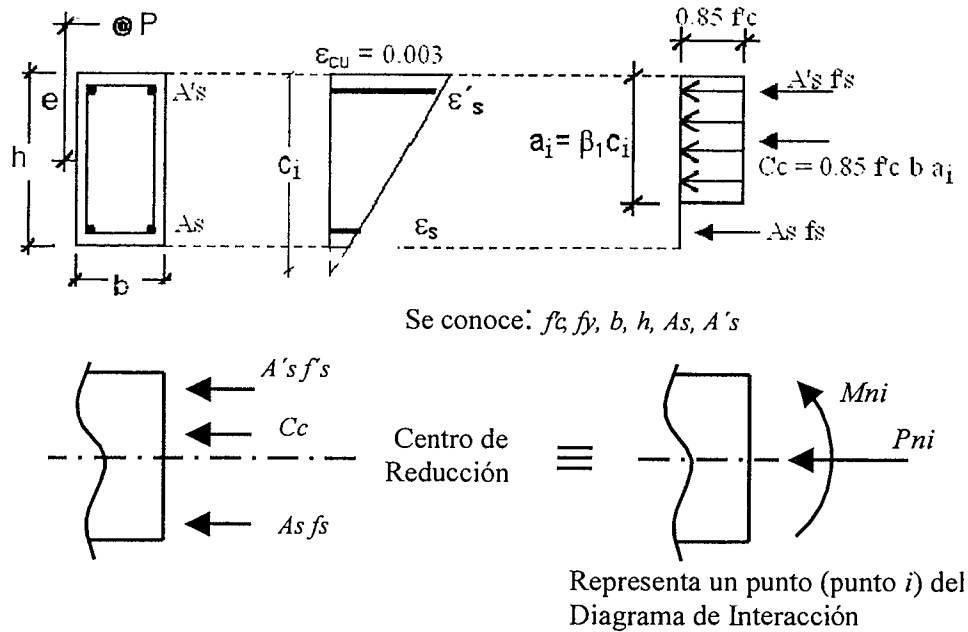


Fig. 16-22 Obtención de un punto del diagrama de interacción

La sucesión de cálculos (variaciones en la posición del eje neutro) permitirá calcular o construir el diagrama de interacción. La forma típica de un diagrama de interacción, para una columna con estribos, se presenta en la figura 16-23.

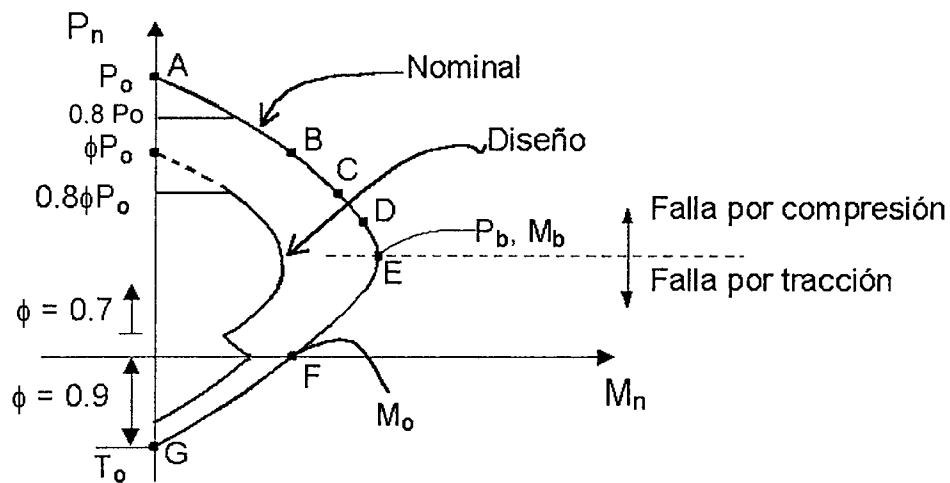
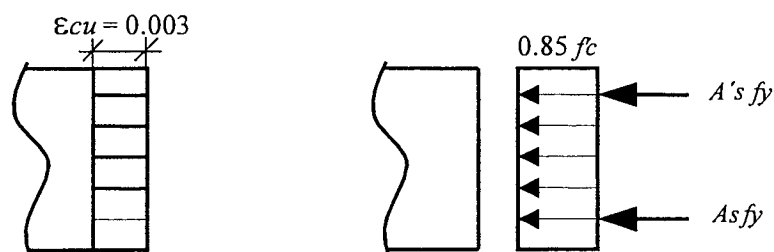


Fig. 16-23 Forma típica de un diagrama de interacción para una columna con estribos.

16.8.1 Algunos Puntos Notables de un Diagrama de Interacción

En la figura 16-23 es posible ubicar algunos puntos notables comunes a todos los diagramas de interacción. Estos se describen a continuación.

a) *Punto A.* Falla en compresión pura.



En la figura anterior la deformación de agotamiento del concreto realmente es cercana a 0.002 para la sollicitación de compresión pura, ya que este valor corresponde aproximadamente a la deformación asociada con la resistencia máxima del concreto. Sin embargo por simplicidad se adopta el valor indicado en la figura.

La resistencia en compresión pura, que viene dada por la ecuación 16-4, raramente se puede alcanzar ya que siempre habrá un momento flector asociado con la carga axial, ya sea por el desalineamiento vertical de la columna, por el desalineamiento del refuerzo vertical, por la falta de uniformidad en la compactación del concreto, por la presencia de momentos desequilibrados en los nudos provenientes de las vigas, etc. En consecuencia la Norma establece como valor máximo de la carga que produce la falla en compresión lo siguiente:

Columnas con estribos: ($\alpha = 0.8, \phi = 0.7$)

$$P_n \max = 0.8 P_o \quad (16-9)$$

$$P_u \max = \phi 0.8 P_o = (0.7) 0.8 [0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (16-10)$$

Columnas con espirales: ($\alpha = 0.85, \phi = 0.75$)

$$P_n \max = 0.85 P_o \quad (16-11)$$

$$P_u \max = \phi 0.85 P_o = (0.75) 0.85 [0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (16-12)$$

En la practica, desde el punto de vista de la resistencia, las columnas con estribos o espirales se diseñan igual, es decir no se toma en cuenta la mejora en el comportamiento del concreto por la presencia de las espirales, es decir se supone que el concreto no se encuentra confinado. La única diferencia estriba en el valor de ϕ distinto para columnas con estribos (0.7) y para columnas con espirales (0.75).

Los códigos anteriores no limitaban la capacidad en compresión pura de la columna al valor dado por las ecuaciones 16-9 a 16-12, lo que hacían era fijar una excentricidad de mínima de diseño. Para columnas con estribos la excentricidad mínima era equivalente al 10% de la dimensión de la columna en la dirección de análisis ($e = 0.1 h$) de tal modo que el valor mínimo del momento flector de diseño, asociado a la carga axial venía dado por $M_u = P_u \times 0.1 h$. Esto se ilustra en la figura 16-24 para una columna con estribos.

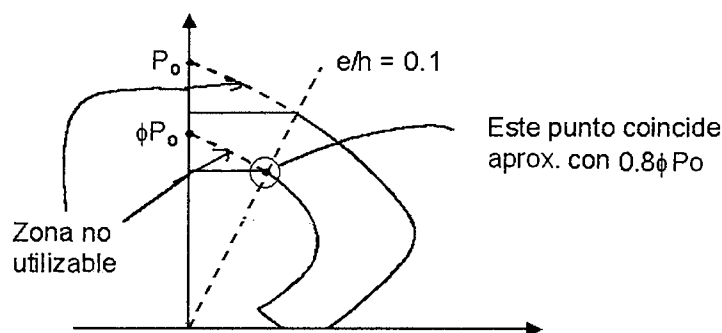
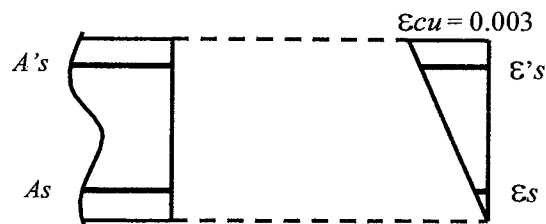


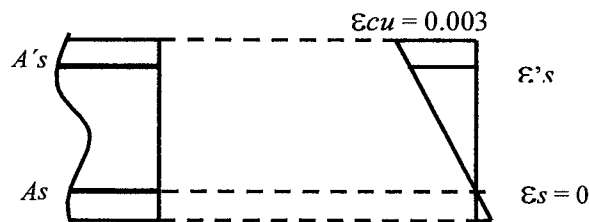
Fig. 16-24 Excentricidad mínima para una columna con estribos, especificada por las Normas anteriores.

El establecer una excentricidad mínima es cuestionable físicamente ya que, para columnas con una carga axial alta y dimensiones importantes conduce a momentos flectores altos, algunas veces mucho mayores que los provenientes del análisis de la estructura. En consecuencia la Norma optó por fijar el valor máximo de la carga axial de manera independiente al momento flector que acompaña a la carga axial.

- b) *Punto B.* Si se desprecia la resistencia a tracción del concreto, este punto podría considerarse como el límite a partir del cual la sección se agrieta. A partir de este punto, la sección empieza a comportarse como parcialmente fisurada.

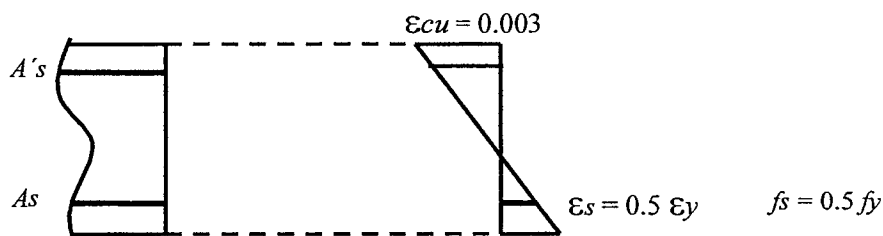


- c) *Punto C.* Corresponde a una deformación nula (esfuerzo cero) en el refuerzo en tracción más alejado del borde en compresión.

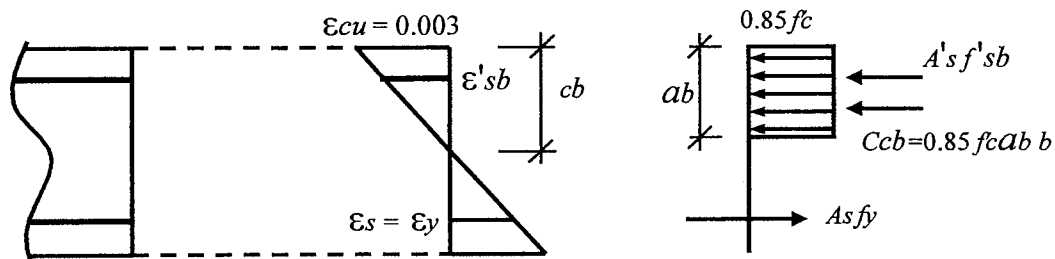


Este punto es útil para clasificar el empalme en las armaduras de la columna. Hasta este punto los empalmes son los correspondientes a barras en compresión, a medida que el acero comienza a trabajar en tracción, es necesario utilizar empalmes traslapados en tracción. Del punto C hasta el punto D se usan empalmes traslapados en tracción Clase o Tipo A y del punto D para abajo se usan empalmes en tracción Clase B dependiendo del porcentaje de barras que se empalmen en una misma sección (ver acápite 12.15 Norma E.060).

- d) *Punto D.* Corresponde a un esfuerzo en el refuerzo en tracción más alejado del borde en compresión equivalente al 50% del de fluencia. Este punto también es útil para clasificar los empalmes de las armaduras longitudinales.



- e) *Punto E.* Corresponde a lo que se denomina el punto falla balanceada de la sección. Es un punto que se puede definir con precisión y marca el tránsito entre la falla por compresión y la falla por tracción. En una columna, cuando la carga axial es mayor que la balanceada, la falla ocurre sin que las barras más alejadas del borde comprimido lleguen a la fluencia en tracción cuando la sección alcanza su capacidad máxima. A este tipo de falla se le denomina falla en compresión.



La figura 16-25 muestra los posibles perfiles de deformación en una sección, correspondientes a los distintos modos de falla. Se indican los perfiles correspondientes a las fallas en compresión (carga axial por encima de la balanceada) y los perfiles asociados con las fallas en tracción.

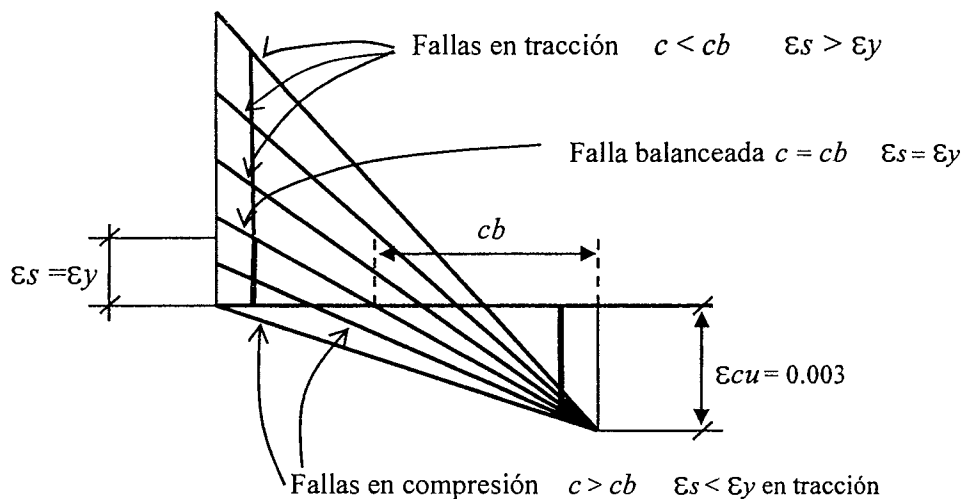


Fig.16-25 Fallas en tracción, compresión y balanceada.

La posición del eje neutro en el punto de falla balanceada viene dada por las ecuaciones 16-13 ó 16-14 que son equivalentes.

$$\frac{\epsilon_{cu}}{cb} = \frac{\epsilon_y}{d - cb} \quad (16-13)$$

$$cb = \frac{\epsilon_{cu} E_s}{f_y + \epsilon_{cu} E_s} d \quad (16-14)$$

Para $\epsilon_{cu} = 0.003$, $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ tendremos:

$$cb \approx 0.5882 d \quad (16-15)$$

- f) *Punto F.* Corresponde a la falla en flexión pura es decir, cuando la carga axial es nula. Es aplicable todo lo estudiado para la sollicitación de flexión simple. Este punto normalmente hay que obtenerlo por tanteos.
- g) *Punto G.* Corresponde a la falla en tracción pura. Despreciando la resistencia del concreto en tracción tendremos:

$$T_o = A_{st} f_y \quad (16-16)$$

$$\phi T_o = 0.9 A_{st} f_y \quad (16-17)$$

Donde A_{st} es el área total de acero.

16.8.2 Factores de Reducción de Resistencia para Flexocompresión

Para convertir un diagrama de interacción construido para resistencias nominales a resistencias de diseño, es necesario introducir el factor de reducción de resistencia especificado por la Norma para elementos en flexocompresión. La figura 16.26 ilustra la manera de realizar la mencionada conversión.

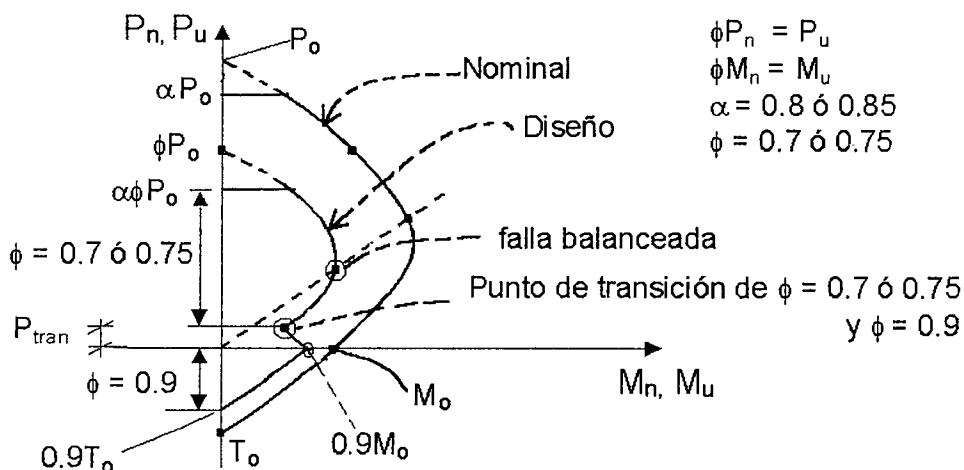


Fig. 16-26 Diagrama de interacción. Resistencias nominales y de diseño.

La Norma E.060 permite variar mediante una interpolación lineal el factor de reducción de resistencia de 0.7 ó 0.75 (zunchos) hasta 0.9 a medida que la carga axial se aproxima a cero. Cuando la carga axial se aproxima a cero, el elemento se comporta como una viga y por lo tanto es razonable utilizar el mismo factor de reducción empleado para el diseño de elementos en flexión pura (vigas). El valor de la carga axial donde es posible iniciar la interpolación en el valor de ϕ se fija como el menor valor entre:

$$\phi P_n = 0.1 f_c A_g \quad \text{y} \quad \phi P_b.$$

El segundo valor (ϕP_b) suele controlar únicamente en columnas de dimensiones reducidas y cuantías de acero elevadas o en secciones asimétricas.

Para una columna con estribos ($\phi = 0.7$) y en la cual controle la primera condición para el inicio de la transición ($0.1 f_c A_g$), la interpolación es:

$$\phi = 0.9 - (0.2 P_n / P_{tran}) \quad \text{donde} \quad P_{tran} = (0.1 / 0.7) f_c A_g$$

16.8.3 Centroide Plástico

Normalmente el centro de reducción que se utiliza para trasladar todas las fuerzas internas (suma de momentos) es el centroide de la sección bruta, cuya posición se calcula normalmente sin considerar el acero de refuerzo. Esto se hace ya que los modelos utilizados para el análisis estructural, están referidos a ese punto. Es decir las propiedades de la sección, tal como la rigidez en flexión EI , están referidas a los ejes que pasan por el centroide de las secciones de los elementos.

Sin embargo, cuando la sección es asimétrica, el refuerzo es asimétrico, o ambas situaciones, podría ser conveniente usar como centro de reducción el *Centroide Plástico* de la sección. Si no se utiliza este punto ocurrirá que en las zonas de tracción y compresión del diagrama de interacción, obtendremos un diagrama rotado como el mostrado en la figura 16-27, el cual ha sido construido utilizando como centro de reducción el centroide de la sección:

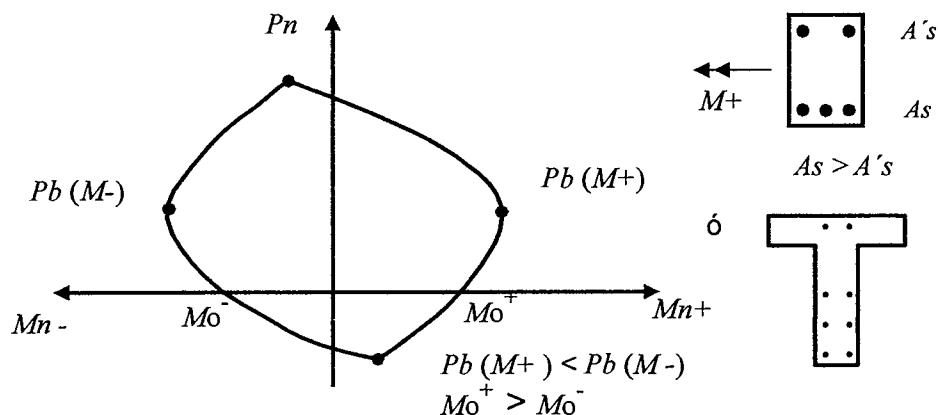


Fig. 16-27 Diagrama de interacción de una sección asimétrica referido al centroide de la sección.

La figura 16-28 muestra el diagrama de interacción (nominal y de diseño) para flexión positiva y negativa de una sección rectangular con armadura muy asimétrica. El diagrama ha sido construido tomando como centro de reducción, el centroide de la sección bruta. Los cortes horizontales de ambos diagramas corresponden a las ecuaciones 16-9 y 16-10.

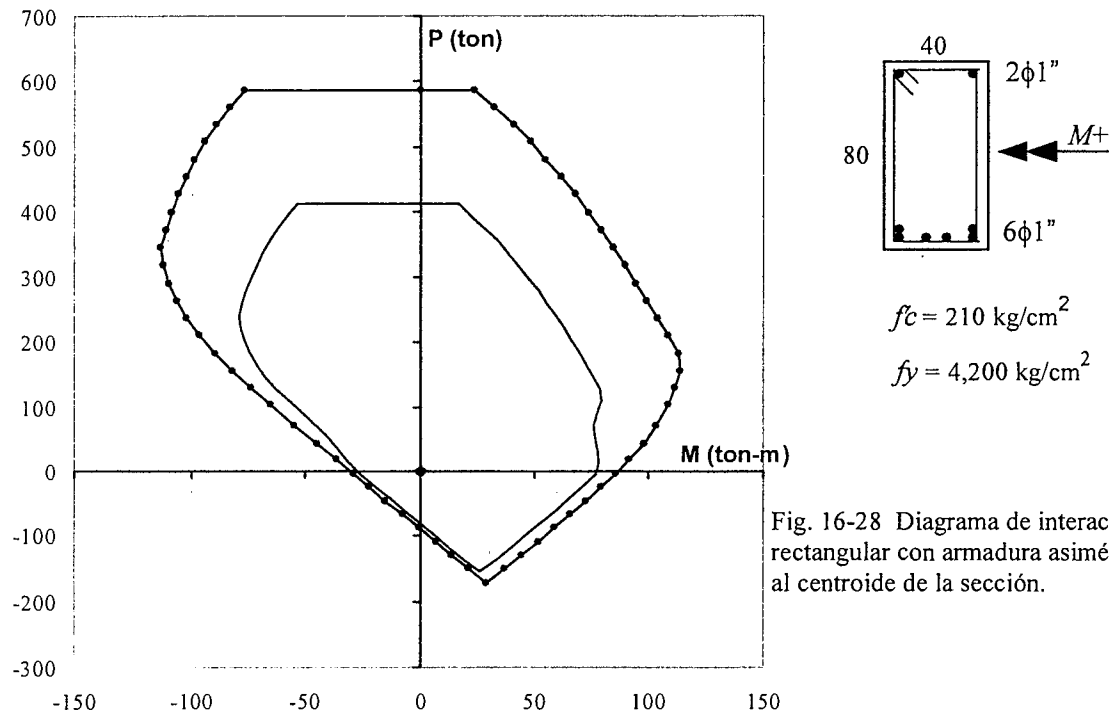
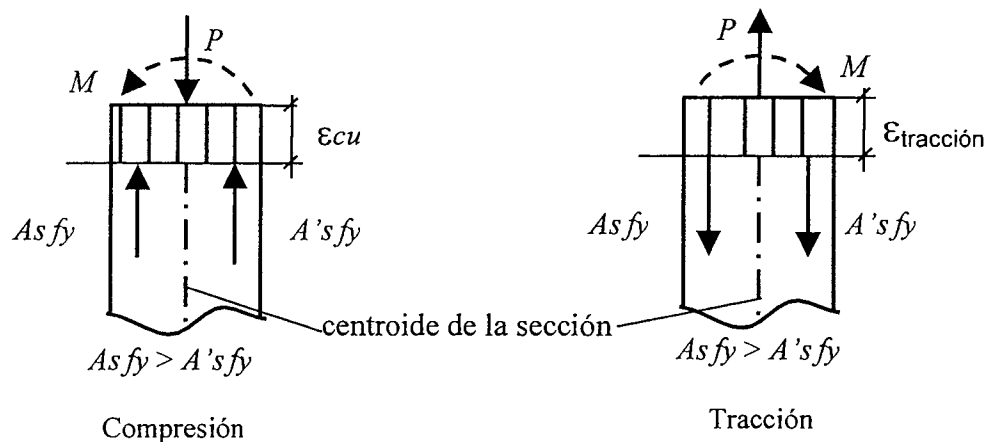


Fig. 16-28 Diagrama de interacción. Sección rectangular con armadura asimétrica referido al centroide de la sección.

En la figura anterior, ya que la armadura no es simétrica, la resistencia de la sección depende del sentido del momento flector aplicado (positivo o negativo), esto se manifiesta claramente en el diagrama de interacción mostrado.

La explicación de lo que sucede con los diagramas de interacción de las figuras 16-27 y 16-28, es decir la razón por la cual los diagramas aparecen rotados, es la siguiente:

Si se utiliza como centro de reducción el centroide de la sección, en las zonas de compresión pura o tracción pura, las cargas P_o y T_o deberán estar acompañadas de un momento flector. Esto se debe a que en una sección con refuerzo asimétrico o geometría asimétrica, para lograr que la sección baje o suba sin girar, es necesario agregar un momento externo para equilibrar el par desequilibrado producido por la diferencia de fuerzas totales en los refuerzos. A continuación se ilustra esta situación para el caso de compresión y de tracción, se ha supuesto una sección rectangular con un refuerzo de tracción mayor que el de compresión ($A_s > A's$).



La presencia del momento externo M es necesaria para lograr que la sección baje (o suba en el caso de tracción) paralela sin girar. Si se utiliza como centro de reducción el centroide plástico, esto no sucede, es decir no es necesario aplicar un momento externo.

a) Centroide Plástico en Compresión:

Es el punto donde aplicada la carga axial (sin momento flector) la sección baja paralela sin rotaciones. Se calcula como el centroide del concreto de toda la sección trabajando a $0.85 f_c$ y de todo el acero trabajando a f_y .

Ilustremos la manera de proceder para ubicar el centroide plástico en compresión, aplicando estas ideas a la sección de la columna indicada en la figura 16.28:

	Fuerza (kg)	Brazo (m)	Fuerza x Brazo
Concreto	$0.85 \times 210 \times 40 \times 80$	0.40	228,480
Capa 1	$(4200 - 0.85 \times 210) \times 5.1 \times 6$	≈ 0.06	7,383
Capa 2	$(4200 - 0.85 \times 210) \times 5.1 \times 2$	≈ 0.74	30,354
totales	735,277		266,217

La posición del centroide plástico en compresión, medida desde el borde inferior de la sección, es:

$$Y_{cp} = 266,217 / 735,277 \approx 36.2 \text{ cm}$$

b) Centroide Plástico en Tracción

Es el centroide de todo el acero trabajando a f_y sin el aporte del concreto que se supone totalmente agrietado. Para el caso anterior:

$$Y_{ct} \approx 23 \text{ cm}$$

El centroide plástico en tracción puede utilizarse como centro de reducción para la construcción de los diagramas de interacción en la zona de flexotracción (tracción acompañada de flexión o viceversa).

La figura 16-29 muestra el diagrama de interacción nominal y de diseño para la sección y armaduras indicadas en la figura 16-28. Para su construcción se ha utilizado un doble centro de reducción, para las cargas de compresión se utilizó el centroide plástico en compresión y para las de tracción el centroide plástico en tracción. Al utilizar los centros de reducción mencionados, el diagrama de interacción ya no aparece rotado como en la figura 16-28.

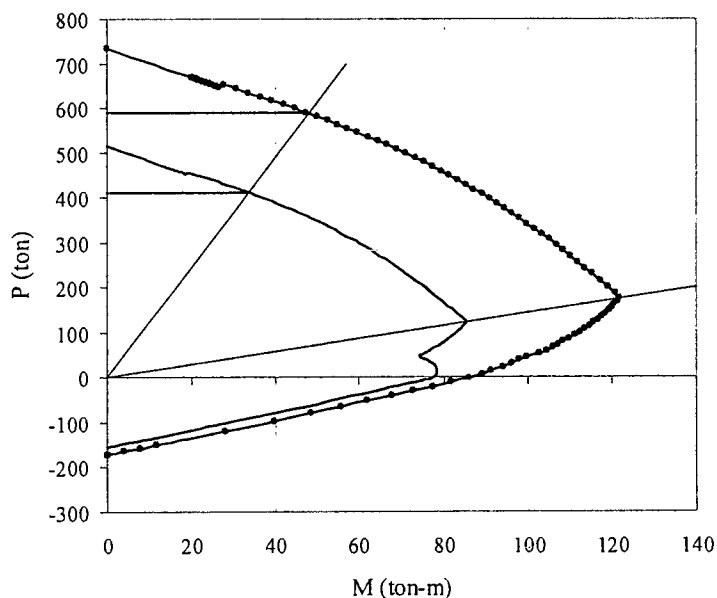


Fig. 16-29 Diagrama de interacción referido al Centroide Plástico.

Si la sección y la armadura son simétricas, entonces el centroide plástico en compresión y tracción coinciden con el centroide de la sección bruta del concreto. En este caso, los

diagramas de interacción construidos tomando como centro de reducción ya sea el centroide de la sección o el centroide plástico, serán idénticos.

Es importante tener en cuenta que los centros de reducción deben ser los mismos tanto en el análisis estructural como en la construcción de los diagramas de interacción, es decir, si en el modelo utilizado para el análisis estructural se utiliza por ejemplo, el centroide de la sección transversal, los resultados del análisis estructural estarán referidos a dichos ejes. En consecuencia el diagrama de interacción deberá construirse para ese mismo centro de reducción (eje), en caso contrario deberán trasladarse las fuerzas de sección (carga axial y momento) provenientes del análisis al centro de reducción utilizado para la construcción del diagrama de interacción.

16.9 Elección del Tipo de Columna

La figura 16-30 (adaptada de MacGregor), muestra los diagramas de interacción para tres columnas que tienen la misma área, la misma calidad de concreto (280 kg/cm^2) y la misma cuantía de acero de refuerzo longitudinal (2 %). La idea es determinar cual de ellas es la más eficiente, desde el punto de vista de su resistencia.

Para excentricidades pequeñas ($e/h < 0.1$) y cargas axiales importantes la columna más eficiente es la zunchada o con espiral ya que tiene mayor capacidad de carga axial. Esto se debe al factor de reducción de resistencia de 0.75 comparado con el valor de 0.7 para columnas con estribos, y también al hecho de que la Norma permite mayores cargas axiales en columnas con espirales, hecho que se comprueba al comparar las ecuaciones 16-10 y 16-12. De acuerdo a la Norma, la capacidad de carga de una columna zunchada en la zona de excentricidades bajas, es un 14% mayor que una columna, de la misma área y cuantía de refuerzo, con estribos.

Para excentricidades $e/h > 0.2$ una columna con estribos y con armadura en dos caras (en las caras alejadas del eje de flexión) es más eficiente que disponer la misma armadura en las cuatro caras y más eficiente aún sería usar una sección rectangular.

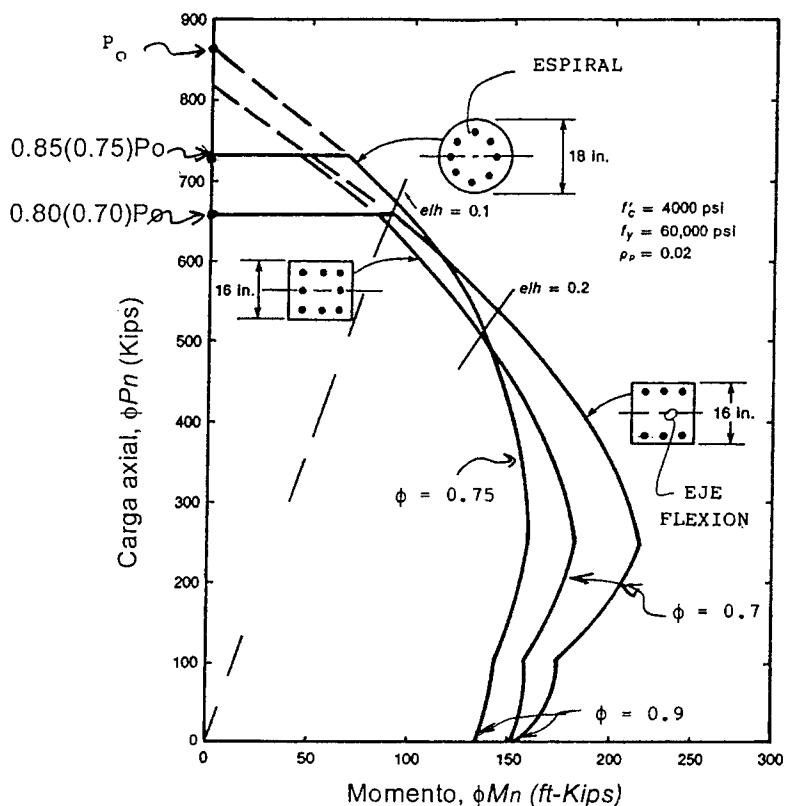


Fig. 16-30 Resistencia de tres diferentes tipos de armado

16.10 Construcción de los Diagramas de Interacción

Normalmente la construcción de diagramas de interacción se logra variando la posición del eje neutro. Para cada posición supuesta del eje neutro (c_j) se calcula la resistencia de la sección ($P_{nj} - M_{nj}$), hasta lograr describir completamente el diagrama.

Otra posibilidad, en algunos casos más conveniente, consiste en ir variando la deformación en el acero de tracción más alejado del borde en compresión, fijando para ello algunos valores típicos de ϵ_s . En la figura 16-31 se ilustra este método. Este procedimiento es totalmente equivalente al de ir variando la posición del eje neutro, descrito en el párrafo anterior.

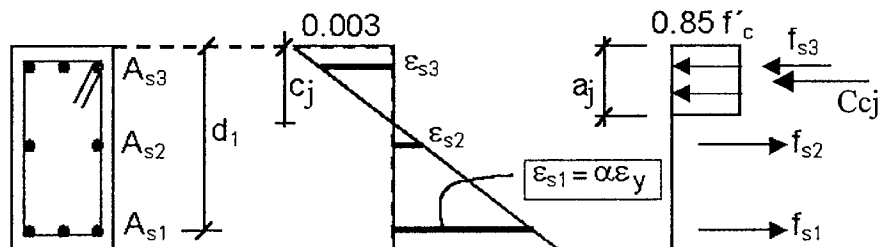


Fig. 16-31 Obtención de un punto del diagrama de interacción variando la deformación del acero en tracción más alejado.

Para cada valor de α que se adopte tendremos:

$$c_j = \left(\frac{0.003}{0.003 - \alpha \epsilon_y} \right) d_1 \quad \begin{array}{l} \alpha \text{ es positivo si } \epsilon_{s1} \text{ es de compresión} \\ \alpha \text{ es negativo si } \epsilon_{s1} \text{ es de tracción} \end{array}$$

$$\epsilon_{si} = \left(\frac{c - d_i}{c} \right) 0.003 \quad \text{Deformación positiva si es de compresión}$$

$$f_{si} = E_s \epsilon_{si} \leq f_y \quad F_{si} = A_{si} f_{si} \quad (\text{positivo compresión})$$

$$a_j = \beta_1 c_j \quad C_{cj} = 0.85 f'_c \times (\text{Área comprimida})$$

Es posible "refinar" el procedimiento restando el área de concreto que desplazan las barras de acero, por ejemplo:

$$\text{Si } a > d_i \text{ entonces } F_{si} = (f_{si} - 0.85 f'_c) A_{si}$$

Cuando se realizan cálculos manuales este refinamiento es innecesario, el error que se comete suele ser despreciable.

Finalmente, será necesario escoger un centro de reducción (centroide de la sección o centroide plástico o cualquier punto que se desee) para el cálculo de las resistencias nominales, las cuales para el valor particular de α adoptado serán:

$$P_{nj} = C_{cj} + \sum_{i=1}^n F_{si} \quad M_{nj} = C_{cj} \cdot \text{brazo} + \sum_{i=1}^n F_{si} \cdot \text{brazo}_i$$

Normalmente cuando se realizan cálculos manuales, no son necesarios muchos puntos del diagrama de interacción, bastará con calcular algunos puntos notables, como los indicados en la figura 16-32.

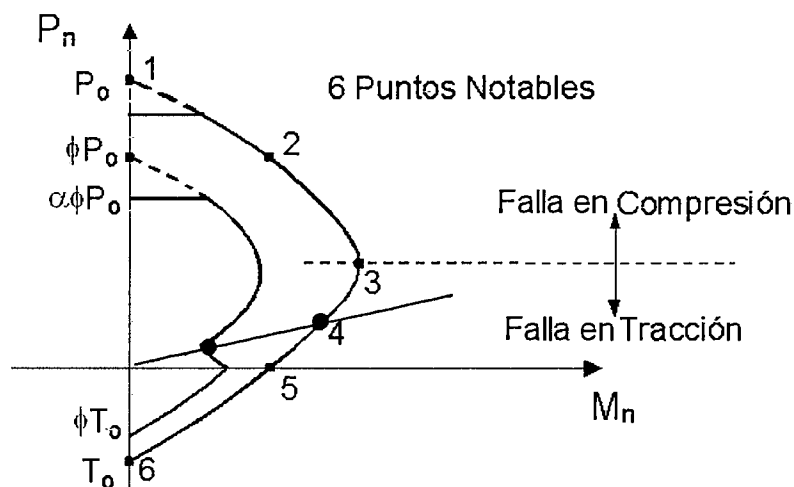


Fig. 16-32 Puntos notables para la construcción de un diagrama de interacción.

Para una columna con estribos los seis puntos notables indicados en la figura 16-32, pueden ser:

- Punto 1: Compresión pura P_o , ecuación 16-4, $\phi = 0.7$
- Punto 2: Fisuración incipiente. Esfuerzo nulo en el acero más alejado del borde en compresión. $\alpha = 0$, $\epsilon_1 = 0$, $\phi = 0.7$
- Punto 3: Falla Balanceada (ecuaciones 16-13 y 16-14). Las barras más alejadas del borde en compresión inician su fluencia en tracción. $\alpha = -1$, $\epsilon_1 = \epsilon_y$, $\phi = 0.7$
- Punto 4: Inicio en el cambio del valor de ϕ (véase el acápite 16.8.2). Este punto es opcional se podría trabajar conservadoramente con $\phi = 0.7$ hasta el punto 5.
- Punto 5: Corresponde a la flexión pura. Suele ser un punto que requiere de varios tanteos para su determinación, basta con un punto cercano, $\phi = 0.9$.
- Punto 6: Tracción pura T_o , ecuación 16-16, $\phi = 0.9$

Es posible, para cálculos rápidos, trabajar únicamente con cuatro puntos de la figura 16-32, estos son los puntos 1, 3, un punto cercano al 5 y el punto 6. Los puntos se unen por segmentos de rectas como se indica en la figura 16-33.

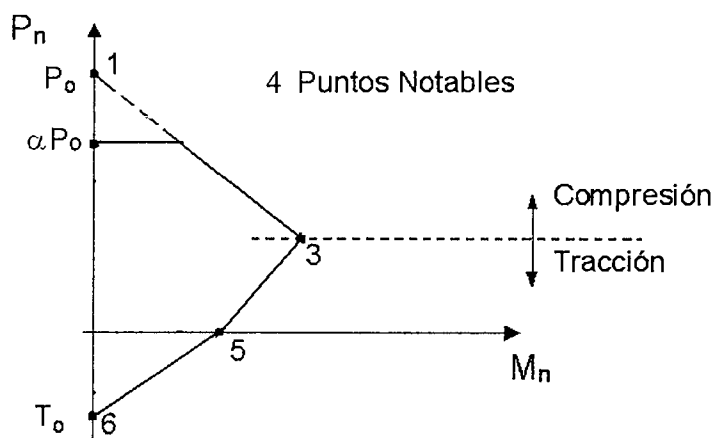


Fig. 16-33 Diagrama de interacción simplificado.

16.11 Columnas en Flexotracción

Existen situaciones en las cuales las columnas trabajan en tracción y flexión. Un caso típico es el de las columnas cercanas a una placa o muro de corte unidas a él por vigas rígidas. En la eventualidad de un sismo, las fuerzas laterales sobre el edificio inducen momentos flectores importantes en las placas así como fuerzas axiales de magnitud para nada despreciable. Ya que la acción del sismo es reversible, también lo serán las fuerzas axiales que obran en dichas columnas, en un instante serán de compresión y en otro de tracción. Cuando la fuerza axial (en este caso de tracción) en las columnas inducida por el sismo supera a las cargas de gravedad, la columna entra a trabajar en tracción.

Si se observa la forma que tienen los diagramas de interacción en la zona de tracción, podremos concluir que una aproximación plausible es la de considerar una línea recta entre el valor de M_o (flexión pura) y el valor de T_o (tracción pura). El diagrama de interacción aproximado será como el indicado en la figura 16-34.

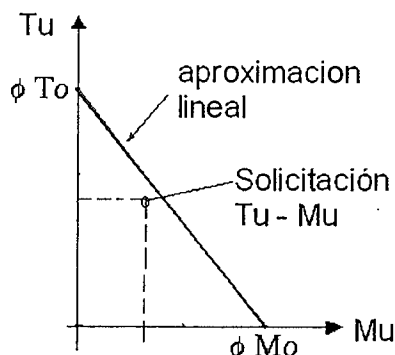


Fig. 16-34 Diagrama de interacción aproximado en la zona de flexotracción.

Las armaduras seleccionadas deberán cumplir con la ecuación de interacción 16-18 que aproxima el diagrama de interacción en la zona de flexotracción mediante una línea recta.

$$\frac{T_u}{\phi T_o} + \frac{M_u}{\phi M_o} \leq 1.0 \quad (16-18)$$

Para diseñar una columna en flexotracción utilizando la aproximación anterior, es necesario estimar un área de acero. Normalmente se procede por aproximaciones sucesivas en las cuales se varía la cantidad de acero hasta encontrar la solución o una aproximación a ella.

16.12 Ayudas para el Diseño de Columnas - Ábacos

Existen numerosas ayudas de diseño para columnas, las más comunes se restringen a secciones cuadradas, rectangulares y circulares. Estas ayudas se presentan en la forma de tablas o gráficos los que suelen denominarse ábacos.

Una de las ayudas más difundidas (por lo menos en nuestro medio) son las tablas y ábacos del ACI correspondientes a la denominada Special Publication SP-17A del Comité 340. Su primera publicación (SP-7) data de mediados de la década de los sesenta y estuvo basada en el Código del ACI 318-63. La publicación SP-17A se actualiza periódicamente, sin embargo en esencia los ábacos siguen siendo los mismos, con algunas mejoras del tipo cosmético y adecuaciones a los cambios que se producen en el reglamento del ACI.

Al final de este capítulo, se han insertado las tablas 16-1 y 16-2 (de las muchas que contiene el SP-17A) que permiten determinar algunos de los puntos notables, comentados en el acápite 16.10, de un diagrama de interacción para una sección

rectangular con refuerzo en dos caras (tabla 16-1) y en cuatro caras (tabla 16-2) ambas para $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4,200$. Estas Tablas pertenecen a la edición del SP-17A del año 1990.

Se han incluido algunos ábacos típicos para el diseño de columnas. El primero de ellos (ábaco 16-1) proveniente del SP-17A de 1978 que corresponde a columnas rectangulares con armadura en las cuatro caras. Incluye la interpolación en los valores del factor de reducción de resistencia y el corte horizontal en los diagramas correspondiente a la máxima carga axial que permite la Norma. La gran desventaja es que no son adimensionales y el sistema de unidades utilizado para su construcción es el Inglés (ksi).

A manera de ilustración, se han incluido otros ábacos que corresponden a la publicación SP-17A del año 1973. Los ábacos 16-2, 16-3, 16-4 y 16-5 sirven para el diseño de columnas rectangulares con armadura en dos caras. Los ábacos 16-6, 16-7, 16-8 y 16-9 para columnas rectangulares con armadura en las cuatro caras. La ventaja de éstos es que son adimensionales, sin embargo asumen un valor constante del factor de reducción de resistencia, es decir no tienen interpolación en la zona de cargas axiales bajas y tampoco tienen el corte horizontal correspondiente a la máxima carga axial permitida por la Norma. Finalmente se ha incluido el ábaco 16-10 para columnas circulares.

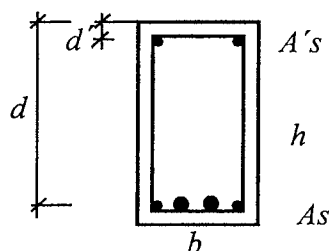
Hoy en día existen en el mercado numerosos programas de cálculo automático, que permiten analizar y diseñar columnas con casi cualquier forma de la sección transversal y disposición de armaduras. Algunos permiten construir inclusive los diagramas momento – curvatura para distintos valores de la carga axial para tener una idea de la ductilidad disponible. Sin embargo los ábacos, como los incluidos al final de este capítulo, seguirán utilizándose por un buen tiempo debido a su facilidad y rapidez en su uso.

16.13 Ecuaciones para el Diseño de Columnas

Cuando discutimos el tema de los diagramas de interacción para columnas en la sección 16-8, mencionamos que a diferencia de lo estudiado en flexión simple - sollicitación para la cual fue posible derivar ecuaciones simples para el análisis y el diseño de vigas - en columnas, las ecuaciones resultan bastante más complejas por varios motivos:

- 1) Por la presencia de la carga axial que acompaña al momento flector. La resistencia en flexión depende de la intensidad de la carga axial y viceversa.
- 2) Por la gran variedad de arreglos o disposiciones de las armaduras longitudinales de refuerzo.
- 3) Por la variedad de formas o geometría de la sección transversal.

En este acápite, para darnos una idea de la complejidad de las ecuaciones de diseño en una columna, estudiaremos el caso más simple, el de las secciones rectangulares con armadura en dos caras. La armadura en compresión la expresaremos como una fracción ($A's = n A_s$) de la armadura en tracción.

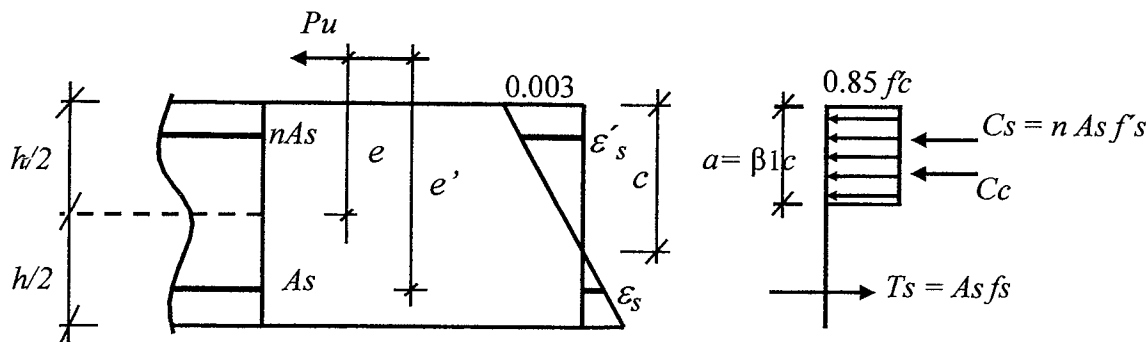


Datos: $b, h, d, d', f'_c, f_y, P_u, e = M_u / P_u$

Incognita: A_s $A's = n A_s \quad n > 0$

“n” no es incógnita, el valor de n se selecciona al inicio del diseño

Equilibrio de la sección, utilizando las hipótesis del ACI:



Imponemos la restricción adicional de $c \leq h$. Asumimos la convención de considerar positivas a las fuerzas de compresión.

- Equivalencia estática:

$$Pu / \phi = 0.85 f_c a b + n A_s f'_s - A_s f_s \quad (a)$$

Los signos de f_s y f'_s dependerán de la posición del eje neutro, en este caso trabajaremos con los signos asociados a la figura anterior. Realizando la suma de momentos respecto del acero inferior para eliminar f_s de la ecuación tendremos:

$$Pu e' / \phi = 0.85 f_c a b (d - a/2) + n A_s f'_s (d - d') \quad (b)$$

- Compatibilidad y relaciones constitutivas

$$f'_s = \epsilon'_s E_s = \frac{0.003 (c - d')}{c} E_s = 0.003 \left(\frac{a - \beta_1 d'}{a} \right) E_s \leq f_y$$

con $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$f'_s = 6,000 \left(\frac{a - \beta_1 d'}{a} \right) \leq f_y \quad (c) \quad (\text{nota: verificar la fluencia del acero})$$

$$f_s = 6,000 \left(\frac{\beta_1 d - a}{a} \right) \leq f_y \quad (d) \quad (\text{nota: verificar la fluencia del acero})$$

Sustituyendo las ecuaciones (c) y (d) en (a) y (b) se obtienen dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas, las incógnitas son A_s y la profundidad del bloque de compresiones a . Las ecuaciones son de la forma:

$$F(a, a^2, A_s) = 0 \quad (e)$$

$$G(a, a^3, A_s) = 0 \quad (f)$$

Además las ecuaciones (e) y (f) tienen condiciones que es necesario verificar, ya que tanto f_s como f'_s deben ser menores que f_y al haber asumido un modelo elastoplástico perfecto para el acero.

Si definimos $k = 0.85 f_c b$, las ecuaciones (e) y (f) tienen la siguiente forma:

$$\frac{Pu a}{\phi} = k a^2 + 6,000 A_s [a (1+n) - \beta_1 (n d' + d)] \quad (g)$$

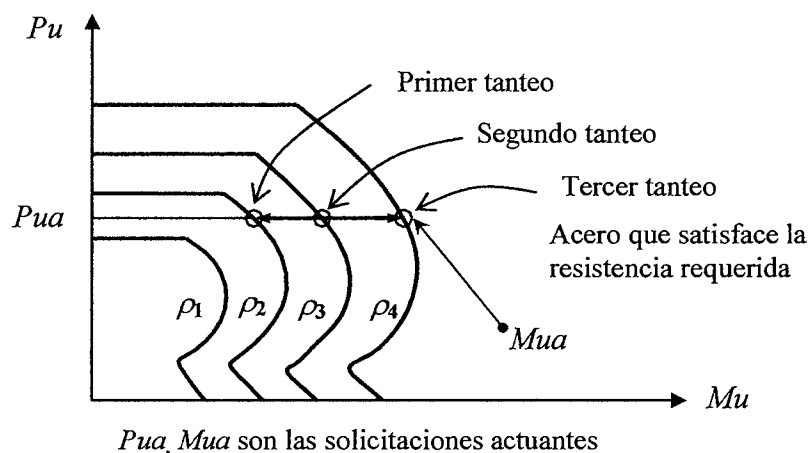
$$\frac{Pu e' a}{\phi} = k a^2 \left(d - \frac{a}{2} \right) + 6,000 n A_s (d - d') (a - \beta_1 d') \quad (h)$$

Existen diversas técnicas para la solución de este tipo de ecuaciones no lineales. Una de las varias posibilidades es proceder por tanteos o iteraciones sucesivas, seleccionado alguna de las incógnitas como la variable sobre la cual se harán las iteraciones. Una posibilidad es utilizar la profundidad del eje neutro como variable de iteración, con lo cual el procedimiento es el siguiente:

- a) Fijar el valor de n . Por ejemplo si se desea armadura simétrica este parámetro tendrá un valor unitario. En algunos casos cuando la carga axial es baja y el momento flector es importante, conviene utilizar armadura asimétrica, por ejemplo se puede fijar una cantidad de acero en compresión equivalente al 50% del acero en tracción ($n = 0.5$). Con esta solución se pueden lograr economías en el acero de refuerzo.
- b) Suponer un valor de c , calcular $a = \beta_1 c$. Deberá seleccionarse un valor racional, en caso contrario la convergencia puede ser lenta.
- c) Calcular $\varepsilon_s, \varepsilon'_s, f_s, f'_s$.
- d) De la ecuación (b) (Σ Momentos respecto al acero en tracción) calcular el valor de $A's$ que en este caso hemos hecho igual a $n A_s$.
- e) De la ecuación (a) con el valor de A_s calculado en el paso anterior, calcular un nuevo valor de la profundidad del bloque de compresiones a .
- f) Si el nuevo valor de a coincide con el valor inicial supuesto, se habrá encontrado la solución, en caso contrario será necesario regresar al primer paso de la iteración.

Es necesario hacer notar que en las ecuaciones planteadas, no se ha tomado en cuenta el área de concreto desplazada por el acero, el error que se introduce suele ser pequeño.

Existen muchas alternativas de iteración para encontrar la solución, una alternativa distinta a la propuesta, se esboza en la figura a continuación. Está basada en ir desplazándose por los diagramas de interacción, a un valor constante de la carga axial, hasta encontrar la cuantía de acero que satisfaga la resistencia requerida en flexión.



La secuencia de las iteraciones necesarias, tomando como incógnita A_s , es:

- a) Asumir un valor de A_s (un valor inicial racional).
- b) Ir variando el valor de "c" hasta lograr que P_{ur} (carga axial resistente de la sección) calculada con la ecuación (a) sea igual a P_{ua} (carga axial que actúa).
- c) Calcular con la ecuación (b) el momento resistente de la sección (M_{ur}). Si se cumple que $M_{ur} = M_{ua}$ (momento flector que actúa en la sección) entonces habremos encontrado la solución, es decir la cantidad de acero que satisface la resistencia requerida.
- d) Si no cumple lo anterior, regresar al paso a)

Los procedimientos anteriores pueden extenderse a otras configuraciones de la armadura de refuerzo, por ejemplo armadura en las cuatro caras, y a otras formas de la sección transversal, la única diferencia estará en el grado de complejidad de las ecuaciones el cual irá en aumento.

Resulta clara, luego de la presentación de las ecuaciones para el diseño de columnas en su caso más simple, la ventaja de trabajar con los diagramas de interacción o con ábacos, salvo que se cuente con herramientas (programas para computadora) para el cálculo automático. Existen hoy en día en el mercado, un sinnúmero de estos programas, muchos son de distribución gratuita, otros vienen como subrutinas de diseño dentro de programas sofisticados para el análisis estructural y el diseño de edificios de concreto armado. Su uso sin criterio y sin haber desarrollado un sentido de la proporción de los resultados (órdenes de magnitud) el cual se adquiere con la experiencia y luego de haber resuelto varios diseños "manualmente", puede ser peligroso. En todo caso se recomienda una cuidadosa verificación tanto de los datos de entrada como de los resultados que arroje el programa.

16.14 Formas de Falla de una Columna

Imaginemos una columna corta (sin efectos de esbeltez importantes) que forma parte de una estructura y que se encuentra bajo cargas de servicio. La resistencia de la columna (o de sus secciones) viene dada por el diagrama de interacción mostrado esquemáticamente en la figura 16-35; este diagrama muestra todas las posibles combinaciones de carga axial y momento que agotan la capacidad de la columna. Si por algún motivo las acciones o cargas exteriores sobre la estructura se incrementan, también lo harán las fuerzas de sección (carga axial y momento) de la columna y si el incremento es suficiente la columna llegará eventualmente a la falla. Si prevenimos una falla prematura por cortante, hay tres posibilidades de falla por flexocompresión, en ausencia de efectos de segundo orden, estas son:

- Falla a excentricidad constante. Sucede cuando la carga axial y el momento crecen ambas a la misma tasa o velocidad. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, en un pórtico de un piso cuando se incrementa de manera constante la carga que actúa sobre la viga, el momento y la carga axial en las columnas se incrementará en la misma proporción hasta alcanzar la falla.
- Falla a carga axial constante. Sucede cuando se incrementa el momento flector y la carga axial se mantiene casi constante. Puede ocurrir, por ejemplo, en el caso de cargas laterales sobre las estructuras provenientes de un sismo intenso.
- Falla a momento constante. Sucede cuando se incrementa la carga axial y el momento flector permanece casi constante. Puede ocurrir, por ejemplo, en las columnas de los primeros pisos de un edificio alto cuando se incrementan las cargas verticales en los pisos superiores.

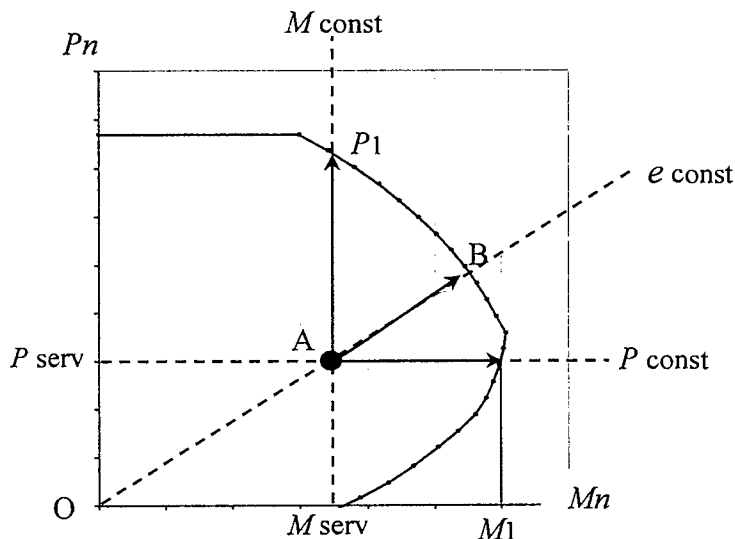


Fig. 16-35 Formas de falla de una columna

Aprovechemos la figura anterior para definir los factores de seguridad de una sección en flexocompresión:

a) Falla a excentricidad constante:

$$F_{seg} = \frac{\overset{\rightarrow}{[OB]}}{\underset{\rightarrow}{[OA]}}$$

b) Falla a carga axial constante:

$$F_{seg} = \frac{M1}{M_{serv}}$$

c) Falla a momento constante:

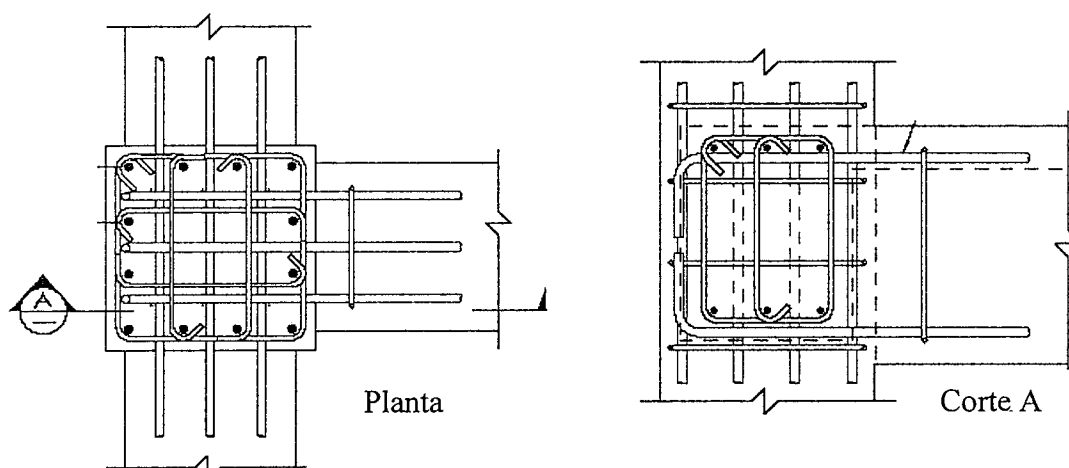
$$F_{seg} = \frac{P1}{P_{serv}}$$

16-15 Recomendaciones para el Armado de Columnas

Varias de las recomendaciones que se encuentran en la literatura técnica para el armado de columnas, responden a las preferencias personales del diseñador, otras obedecen a los requerimientos de las Normas. A continuación se presentan algunas recomendaciones aplicables a columnas aisladas o que formen pórticos sin responsabilidad sísmica. Varias de las recomendaciones provienen del libro Estructuración y Diseño de Edificaciones de Concreto Armado del Ing. Antonio Blanco B.

- a) Es importante una adecuada selección de las dimensiones de la sección transversal de tal modo que la cuantía total de acero longitudinal no exceda del 4%. Armaduras por encima de esa cuantía pueden generar serios problemas de congestión de armaduras, tanto en la zona de los nudos, como en la zona de empalme de las barras longitudinales. Adicionalmente, dependiendo del costo relativo del concreto, acero y encofrado, se suele obtener columnas más económicas si se limita la armadura entre el 1% y el 3%.
- b) Respetar los recubrimientos mínimos especificados por la Norma y el espaciamiento mínimo entre barras así como la distribución de estribos para no dejar mas de una barra longitudinal suelta.
- c) En algunos casos será conveniente armar las barras en paquetes. Trate de limitar a dos barras como máximo en cada paquete, más de dos barras pueden presentar serios problemas de pandeo en elementos con responsabilidad sísmica en la eventualidad que la columna pierda el recubrimiento. Todos los paquetes deben quedar contenidos dentro de la esquina de un estribo cerrado.
- d) Trate de respetar la cuantía mínima de acero del 1%. Esta cuantía ayuda a controlar el flujo plástico del concreto comprimido.
- e) Si existen limitaciones en el tamaño de la sección transversal, utilice concretos de mayor resistencia en los primeros pisos de los edificios altos (280, 350 ó 420 kg/cm²) luego se puede cambiar a concretos de menor resistencia en los pisos superiores.
- f) En edificios altos pueden realizarse cambios de sección cada tres o cuatro pisos, de este modo se reduce la sección transversal de la columna, se ahorra concreto y acero y se evitan los elementos sobredimensionados con armaduras longitudinales y transversales importantes por cumplir con las armaduras mínimas exigidas por las Normas. Tenga presente que cada vez que se cambia de sección en una columna deben modificarse los encofrados. Incluya siempre detalles estructurales claros en la zona de cambio de sección.

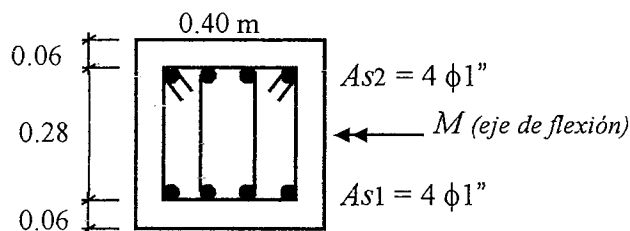
- g) No es conveniente, dentro de una misma columna, usar barras de diámetros muy distintos. Por ejemplo si se decidió utilizar algunas barras de 1", las otras deberían ser de 3/4". No deberían utilizarse barras longitudinales de más de dos diámetros simultáneamente, ya que la columna daría la apariencia de ser un "muestrario" de los diámetros disponibles en el mercado
- h) Es conveniente en una sección con doble eje de simetría utilizar una disposición simétrica de las armaduras. En columnas rectangulares se suele usar un número par de barras de tal modo que la armadura de la columna sea simétrica con respecto del eje de flexión.
- i) Colocar un número de barras que guarde relación con el ancho de la columna. Para anchos de 0.25 m o menos no deben utilizarse más de dos barras. El número de varillas que se pueden colocar en cada cara de la columna debe estar de acuerdo con las armaduras de la viga que pasan por la columna y con el espaciamiento mínimo entre las barras de la columna. Recuerde que en muchos casos la armadura de los extremos de la viga debe anclar dentro de las columnas y por lo tanto es necesario imaginar la congestión de armaduras que se puede producir en los nudos. La figura a continuación (adaptada de la lectura 6.3) muestra la vista en planta y el corte de un nudo extremo al cual concurren las armaduras de las vigas longitudinales y transversales y las armaduras de la columna. Los autores del artículo enfatizan las ventajas de trabajar con vigas más angostas que la columna y de utilizar una de las dos vigas de un peralte ligeramente menor que la otra (unos 5 cm menor) para evitar la excesiva congestión de armaduras en el nudo.



- j) Trate de seleccionar el arreglo de las barras longitudinales de refuerzo de tal modo de lograr una configuración del juego de estribos uniforme en toda la altura de la columna. De este modo el juego de estribos será el mismo en todos los pisos a pesar de los cambios que puedan producirse en las armaduras longitudinales. Esta recomendación es válida mientras no se produzca un cambio en la sección transversal de la columna.

Ejemplo 16-1 - Construcción de un diagrama de interacción

Se quiere construir el diagrama de interacción para la columna de concreto armado de 0.40 x 0.40 m mostrada a continuación para excentricidades de la carga axial sobre el eje y. Se usará como centro de reducción el centroide de la sección.



$$f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_y = 0.0021$$

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

$$A_{s1} = 20.4 \text{ cm}^2 \quad d_1 = 34 \text{ cm}$$

$$A_{s2} = 20.4 \text{ cm}^2 \quad d_2 = 6 \text{ cm}$$

$$A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2 \quad \rho = 40.8/1,600 = 2.55\%$$

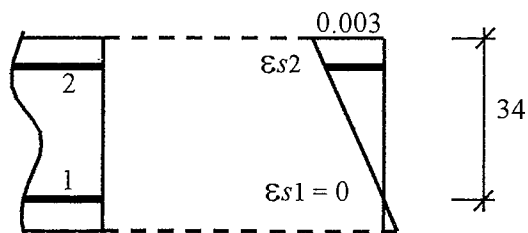
- **Compresión Pura (Punto 1)**

$$P_o = 0.85 \times 280 (40 \times 40 - 40.8) + 40.8 \times 4200 = 542 \text{ ton}$$

$$\phi 0.8 P_o = 304 \text{ ton} \quad \text{Carga axial máxima permitida por la Norma. Corte horizontal del diagrama.}$$

- **Fisuración Incipiente (Punto 2)** $\alpha = 0 \quad d_1 = 34$

$$c = \left(\frac{0.003}{0.003 - 0 \times \epsilon_y} \right) \cdot 34 = 34 \text{ cm}$$



$$\epsilon_{s2} = ((34-6)/34) \times 0.003$$

$$\epsilon_{s2} = +0.002471 > \epsilon_y$$

$$f_{s2} > f_y$$

$$F_{s2} = 4200 \times 20.4 = +85.7 \text{ ton}$$

$$C_c = 0.85 \times 280 \times (0.85 \times 34) \times 40 = 275 \text{ ton}$$

$$P_n = 85.7 + 275 \approx 361 \text{ ton}$$

$$M_n = 85.7 \times (0.2 - 0.06) + 275 \times (0.2 - 0.1445) \approx 27.3 \text{ ton-m}$$

$$\phi = 0.7$$

- **Falla Balanceada (Punto 3)** $\alpha = -1$

$$c = \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} \right) \cdot 34 = 20 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{s1} = \epsilon_y \quad F_{s1} = 4,200 \times 20.4 = -85.68 \text{ ton} \quad (\text{tracción})$$

$$\epsilon_{s2} = 0.0021 \quad F_{s2} = 4,200 \times 20.4 = 85.68 \text{ ton} \quad (\text{compresión})$$

$$C_c = 0.85 \times 280 \times (0.85 \times 20) \times 40 \approx 162 \text{ ton}$$

$$M_b = 162 \times (0.2 - 0.17/2) + 85.68 \times (0.20 - 0.06) \times 2 = 42.6 \text{ ton-m}$$

$$P_b = 162 \text{ ton}$$

$$\phi = 0.7$$

- **Cambio en el valor de ϕ (Punto 4)**

$$\phi P_n = 0.1 f_c A_g = 44.8 \text{ ton} \Rightarrow P_n = 64 \text{ ton} \quad (\phi = 0.7)$$

Por tanteos se obtiene $c = 11.4 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{s1} &= -2.83 \epsilon_y & F_{s1} &= -85.68 & \epsilon_{s2} &= 0.001421 & F_{s2} &= 58 \\ C_c &= 0.85 \times 280 \times (0.85 \times 11.4) \times 40 \approx 92.3 \text{ ton} \\ P_n &\approx 64.6 \text{ ton} & M_n &\approx 34.1 \text{ ton-m} \end{aligned}$$

- Punto cercano a la flexión pura - M_o (Punto 5)

Intentemos con $\alpha = -5$

$$c = \left(\frac{0.003}{0.003 + 5 \epsilon_y} \right)^{34} \approx 7.56$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{s1} &= -5 \epsilon_y & F_{s1} &= -85.68 \text{ ton} \\ \epsilon_{s2} &= 0.00062 & f_{s2} &= 1,238 \text{ kg/cm}^2 & F_{s2} &= 1,238 \times 20.4 \approx 25.3 \text{ ton} \\ C_c &= 0.85 \times 280 \times (0.85 \times 7.56) \times 40 \approx 61.2 \text{ ton} \\ P_n &= 61.2 + 25.3 - 85.68 \approx 0.82 \text{ ton} \approx 0 \end{aligned}$$

$$M_o = 61.2 \times \left(20 - \frac{0.85 \times 7.56 / 2}{100} \right) + 25.3 \times \left(\frac{20 - 6}{100} \right) + 85.68 \times \left(\frac{20 - 6}{100} \right) = 25.8 \text{ ton-m}$$

$$\phi = 0.9$$

- Tracción Pura (Punto 6)

$$T_o = A_{st} f_y = 40.8 \times 4,200 = 171 \text{ ton} \quad \phi = 0.9$$

La figura 16-36 muestra el diagrama de interacción a nivel de Resistencia de Diseño, ($\phi P_n - \phi M_n$) para excentricidades sobre el eje y (e_y) que es el problema que hemos resuelto y para excentricidades sobre el eje x (e_x) cuya construcción se deja como ejercicio. Si se comparan las resistencias de esta columna para ambas excentricidades se nota una clara diferencia, diferencia que obedece exclusivamente a la distribución o arreglo del acero de refuerzo.

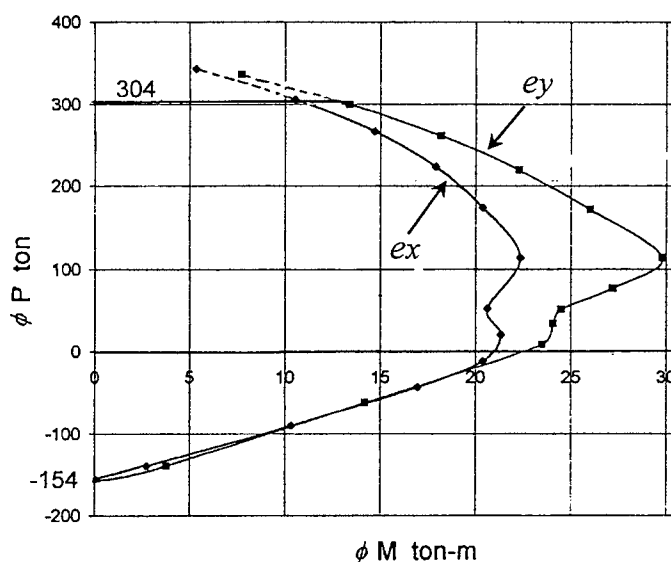


Fig. 16-36 Diagrama de interacción para la columna del ejemplo 16-1.

La figura 16-37, muestra la construcción del diagrama de interacción para la columna del ejemplo 16-1 para excentricidades sobre el eje y (e_y), utilizando una Hoja de Cálculo de Excel. Esta herramienta es más que suficiente para este tipo de secciones. La mecánica es muy simple y consiste en:

- 1) Seleccionar un centro de reducción (en este caso el centroide de la sección).
- 2) Definir una posición del eje neutro.
- 3) Por compatibilidad (secciones planas) calcular los esfuerzos en las armaduras.
- 4) Calcular la compresión total en el concreto.

- 5) Por equilibrio, calcular las resistencias nominales $P_n - M_n$
- 6) Calcular el valor de ϕ y las resistencias de diseño asociadas, $\phi P_n - \phi M_n$
- 7) Regresar al paso 2 cuantas veces sea necesario.

Análisis de una Sección Rectangular de CA con varias capas de acero

$f_c =$	280 kg/cm ²	$E_s =$	2,000,000 kg/cm ²	$\beta_{t1} =$	0.85
Ancho =	40 cm	$E_{psCon} =$	0.003	$E_y =$	0.00210 def. fluencia acero
Peralte =	40 cm	$f_y =$	4,200 kg/cm ²		

Definir las capas de acero empezando por la mas cercana al borde en compresión
 La posición (Posic) es la distancia del cg del acero al borde en compresión

Capa	Area (cm ²)	Posic (cm)	Deform.	Deform./E _y	Sigma Acero	Fuerza (kg)	Momento(kg-m)
1	20.4	6	-0.002550	-1.21	-4,200	-85,680	11,995
2	20.4	34	-0.000450	-0.21	-900	-18,360	-2,570
3	0	0	0.000000	0.00	0	0	0
4	0	0	0.000000	0.00	0	0	0
5	0	0	0.000000	0.00	0	0	0
6	0	0	0.000000	0.00	0	0	0
7	0	0	0.000000	0.00	0	0	0
40.80						-104,040	9,425 kg-mt

Valor de c para tanteos = 40.000 cm - posic.eje neutro respecto del borde en compresión - Solo valores positivos
 a = 34.00 altura bloque compresiones

Compresión en el concreto = -323,680 kg $0.85 \cdot f_c \cdot b \cdot a$
 Tracción total en el acero = -104,040 kg
 Suma de fuerzas = -427,720 *Negativo Compresión*
 Momento Nominal del Concreto = 9,710 kg-mt *El Centro de Reducción es el centro de gravedad (peralte/2)*

$P_n =$	-427,720 kg	$\Phi(P_n) =$	-299,404 Kg	(positivo Tracción)
$M_n =$	19,135 kg-mt	$\Phi(M_n) =$	13,395 kg-mt	
		$\Phi =$	0.700	Factor de reducción de resistencia

$P_o =$ -542,000 Kg *Valor máximo de la carga axial $P_o = 0.85 \cdot f_c \cdot (A_g - A_{st}) + A_{st} \cdot f_y$*
 $P_o \text{ max} =$ -433,600 Kg *Valor máximo de la carga axial del código $P_o \text{ max} = 0.80 \cdot P_o$*
 $P_u \text{ max} =$ -303,520 Kg *Valor máximo de la carga axial P_u admitido por el código $= 0.7 \cdot 0.8 \cdot P_o$*
 $P_n \text{ de transición} =$ -64,000 Kg *Valor de la carga axial P_n donde se inicia el cambio de Φ*
 $P_u \text{ de transición} =$ -44,800 Kg *Valor de la carga axial P_u donde se inicia el cambio de Φ*
 $T_o =$ 171,000 Kg *Tracción Pura $= A_s \cdot f_y$*

c	ϕ	P_n	M_n	$\Phi(P_n)$	$\Phi(M_n)$
2.00	0.90	-155.2	3.1	-139.7	2.8
5.00	0.90	-69.7	15.8	-62.7	14.2
8.00	0.87	9.7	27.0	8.4	23.5
10.00	0.76	44.2	31.6	33.7	24.1
12.00	0.70	72.6	35.0	50.8	24.5
15.00	0.70	109.1	38.8	76.4	27.2
20.00	0.70	161.8	42.6	113.3	29.8
25.00	0.70	243.9	37.1	170.7	26.0
30.00	0.70	312.1	31.9	218.5	22.3
35.00	0.70	372.4	26.0	260.7	18.2
40.00	0.70	427.7	19.1	299.4	13.4

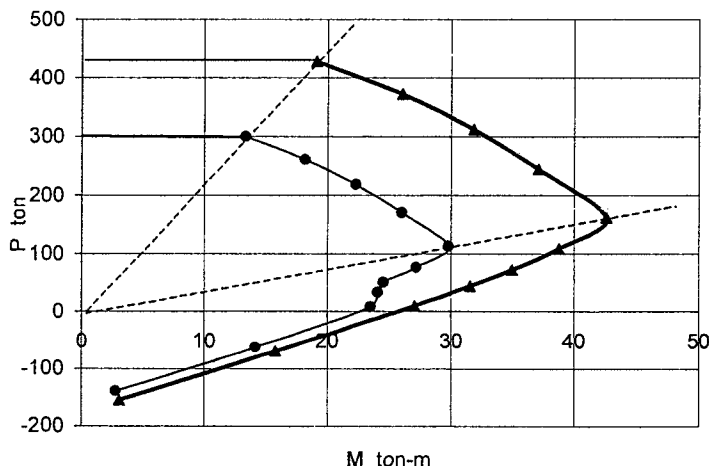
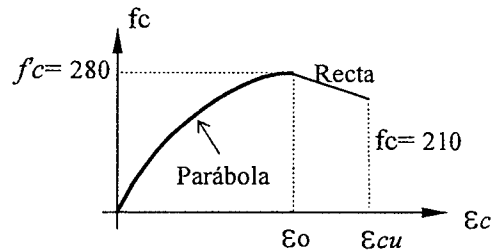
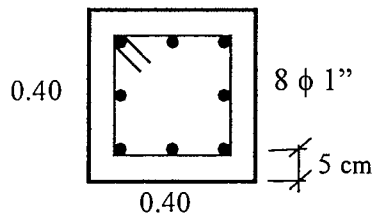


Fig. 16-37 Diagrama de interacción de la columna del ejemplo 16-1.

Ejemplo 16-2 – Influencia del Diagrama del Concreto en la Resistencia

De manera similar a las comparaciones realizadas en los ejemplos 10-10 y 10-11, veamos mediante un ejemplo, la influencia que tiene el modelo del concreto (diagrama constitutivo) que se adopte en la resistencia de una sección en flexocompresión.

Para ello se ha construido el diagrama de interacción de una columna de 0.40x0.40 m reforzada con 8 barras de 1" para dos modelos del concreto: el modelo del bloque equivalente de compresiones de la Norma E.060 y otro un tanto mas "sofisticado" como el mostrado en la figura a continuación. Para el acero se ha supuesto en ambos casos un modelo del tipo elastoplástico perfecto.



$f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2$ $\rho = 2.55\%$

Concreto $\epsilon_o = 0.002$ $\epsilon_{cu} = 0.004$

La figura 16-38 muestra los resultados para los dos modelos, la curva superior corresponde al modelo "sofisticado" del concreto y la inferior al modelo del ACI. La diferencia entre ambos es, en este caso, pequeña. La principal diferencia estriba en el valor de la carga balanceada, con la Norma E.060 la carga balanceada es de $P_b = 168 \text{ ton}$ y con el otro modelo de 208 ton aproximadamente, esta diferencia se explica si se comparan las deformaciones de agotamiento del concreto de la Norma E.060 ($\epsilon_{cu} = 0.003$) con el valor asumido en el otro modelo (0.004).

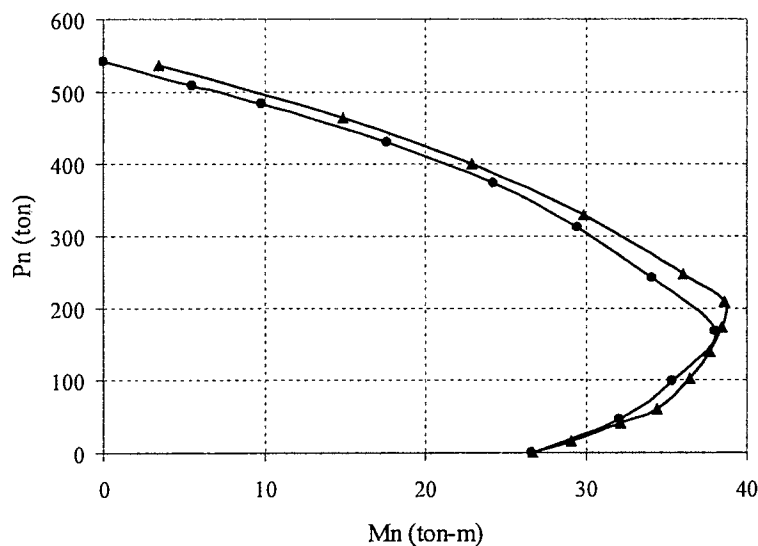
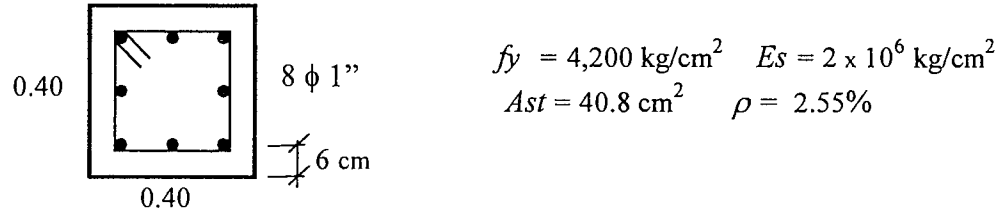


Fig. 16-38 Influencia del modelo del concreto en la resistencia

Ejemplo 16-3 – Influencia de $f'c$ en la Resistencia de una Columna

Para cuantificar la influencia que tiene la resistencia del concreto en la capacidad nominal en flexocompresión, analicemos la columna mostrada en la figura a continuación.

La cantidad de acero de refuerzo longitudinal se ha mantenido constante, y se han construido los diagramas de interacción (resistencias nominales) para cuatro valores de $f'c$ (140, 210, 280 y 350 kg/cm^2). Se han utilizado las hipótesis de la Norma E.060 para los cálculos.



Los resultados se muestran en la figura 16-39 en la cual se han graficado los cuatro diagramas de interacción construidos para esta columna.

Es claro que para la zona de flexotracción la calidad del concreto no tiene influencia. En esta zona, una de las hipótesis utilizadas, consiste en despreciar la resistencia en tracción del concreto. En consecuencia toda la capacidad de la columna viene determinada por las armaduras longitudinales.

Para la zona de cargas axiales bajas (por debajo de las 50 ton aproximadamente), la resistencia del concreto tampoco es determinante ya que en esta zona la columna trabaja más como una viga. La resistencia de la sección viene determinada por las armaduras de refuerzo. Esta situación ya fue comentada en el ejemplo 10-5.

En la zona de cargas axiales importantes la resistencia del concreto sí es determinante. Si imaginamos que la falla de la columna ocurre a excentricidad constante, indicada por la recta inclinada en la figura, la capacidad de la columna irá descendiendo desde la curva más alta hacia las más bajas pudiendo devenir en el colapso del elemento.

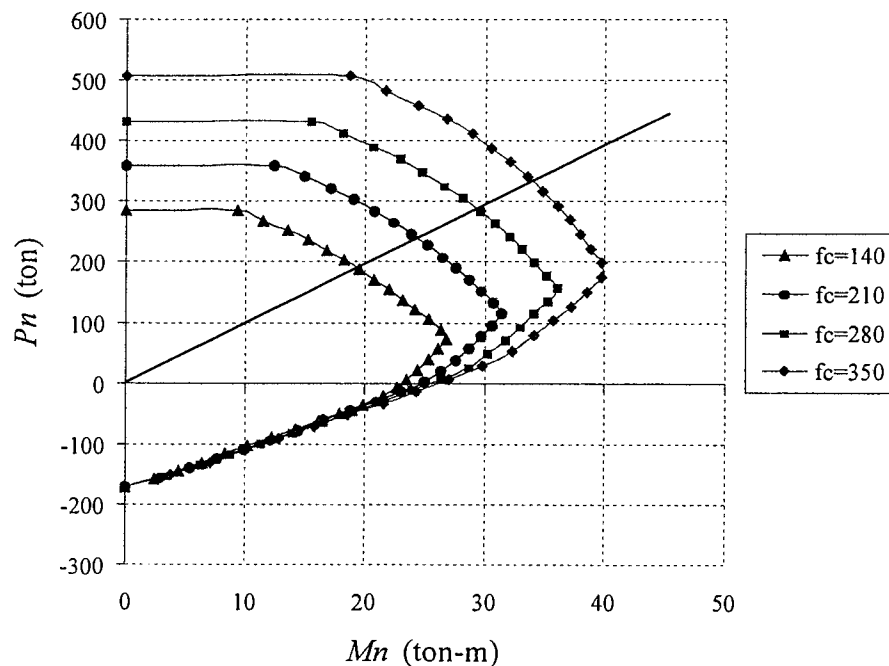
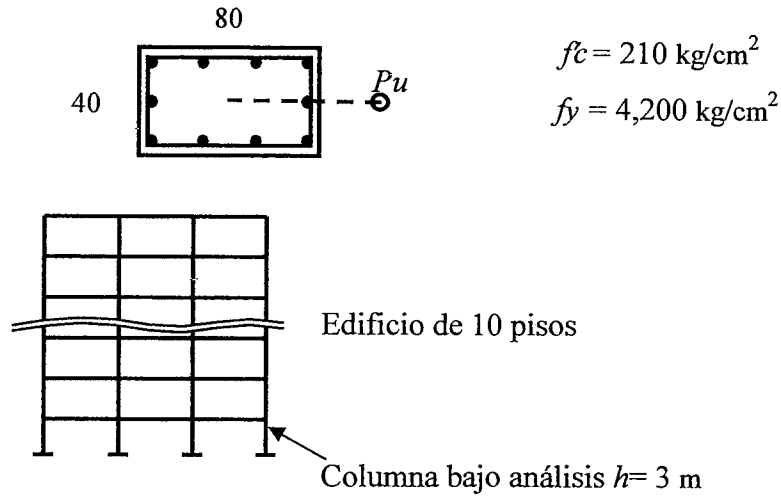


Fig. 16-39 Influencia de $f'c$ en la resistencia nominal de una columna.

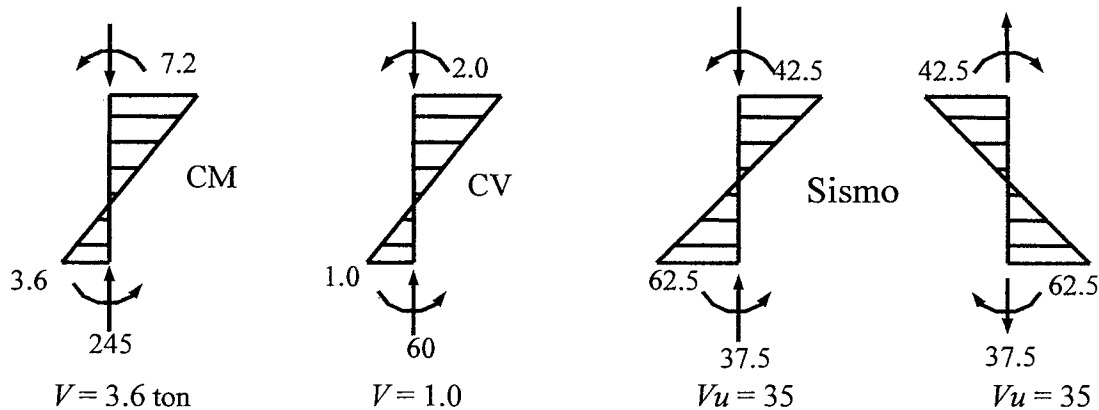
Ejemplo 16-4 - Diseño de una columna de un edificio

Se trata de diseñar la columna extrema de la derecha (diseño de las armaduras del primer piso y último piso) de un pórtico de un edificio de diez pisos. La columna fue predimensionada, resultando una sección de 0.40 x 0.80 m. Se dispondrán las armaduras en las cuatro caras de la columna (25% en cada cara aproximadamente). Los resultados del análisis estructural se indican a continuación.



Para el diseño se puede hacer uso de los ábacos 16-8 y 16-9 tomando en cuenta que el valor del parámetro - g - es de 0.85 ((80-12)/80) y el valor del parámetro - m - es de 23.53 aproximadamente.

- *Solicitaciones en el primer piso (toneladas y metros). La carga muerta y la viva están en servicio, el sismo está a nivel de resistencia (Pu, Mu, Vu).*



- *Diseño de la sección inferior de la columna (primer piso)*

Combinación	Pu (ton)	Mu (t-m)	e/t	Ast (cm ²)	ρ%	φ
1.4 D + 1.7 L	445	6.7	0.019	53	1.66 (*)	0.7
1.25(D + L) + S	419	68.3	0.20	92	2.86	0.7
1.25(D + L) - S	344	-56.8	0.21	53	1.66	0.7
0.9 D + S	258	65.7	0.32	48	1.50	0.7
0.9 D - S	183	-59.3	0.41	29	0.90	0.7

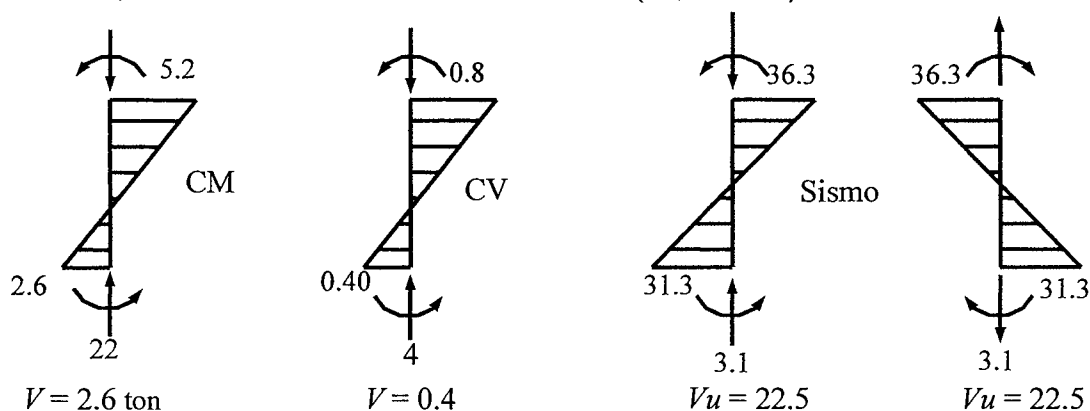
(*) Controla la ecuación 16-10

- *Diseño de la sección superior de la columna (primer piso)* Por simple inspección se nota que la sección superior de la columna no controla el diseño ya que el momento de sismo es el 70% del valor en la base. Sin embargo, haremos el diseño a manera de comprobación.

Combinación	P_u (ton)	M_u (t-m)	e/t	A_{st} (cm ²)	$\rho\%$	ϕ	c (cm)
$1.4 D + 1.7 L$	445	13.5	0.038	53	1.66 (*)	0.7	93.7
$1.25(D + L) + S$	419	54.0	0.16	<u>71</u>	<u>2.22</u>	0.7	72.1
$1.25(D + L) - S$	344	-31.0	0.11	15	0.47	0.7	75.0
$0.9 D + S$	258	49.0	0.24	21	0.65	0.7	56.0
$0.9 D - S$	183	-36.0	0.25	Min.	Min.	0.7	43.3

(*) Controla la ecuación 16-10

- *Solicitaciones en el último piso* (toneladas y metros). La carga muerta y la viva están en servicio, el sismo está a nivel de resistencia (P_u, M_u, V_u).



Del análisis de las solicitaciones, es claro que el diseño está controlado por la sección en el extremo superior de la columna.

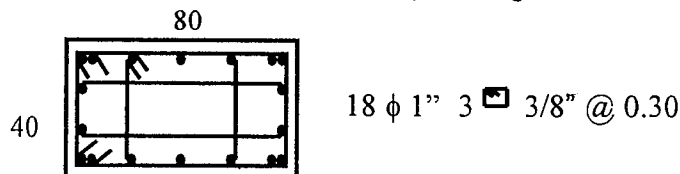
- *Diseño de la sección superior de la columna (último piso)*

Combinación	P_u (ton)	M_u (t-m)	e/t	A_{st} (cm ²)	$\rho\%$	ϕ (*)
$1.4 D + 1.7 L$	38	8.6	0.29	-	-	0.78
$1.25(D + L) + S$	36	43.8	1.5	<u>29</u>	<u>0.91</u>	0.79
$1.25(D + L) - S$	29	-28.8	1.2	16	0.49	0.81
$0.9 D + S$	23	40.9	2.2	28	0.88	0.83
$0.9 D - S$	17	-31.6	2.3	21	0.65	0.85

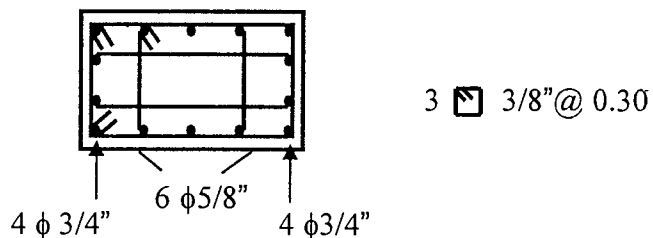
(*) Es posible modificar ϕ a partir de $P_u \leq 0.1 f'c A_g \approx 67$ ton

En el último piso controla la cuantía mínima $0.01 \times 40 \times 80 = 32$ cm². Para concluir el diseño será necesario diseñar por fuerza cortante los estribos de la columna. Los estribos que se han colocado son los mínimos exigidos por la Norma indicados en la sección 16.5.1.

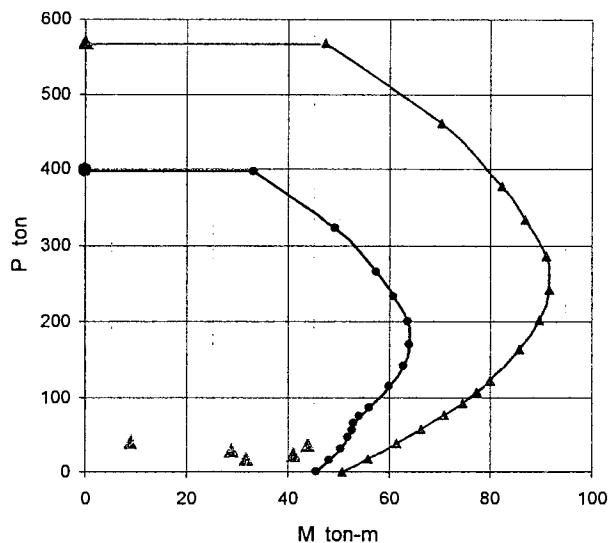
Primer Piso: $A_{st} \approx 92 \text{ cm}^2$. Utilizaremos 18 – 1" que proveen cerca de 92 cm^2 de acero. En las esquinas se armarán paquetes de dos barras para lograr acomodar el acero.



Ultimo Piso: Acero mínimo, $A_{st} = 32 \text{ cm}^2$. Utilizaremos 8 - 3/4" + 6 - 5/8" que proveen cerca de 35 cm^2 de acero.



A continuación se presenta el diagrama de interacción para la armadura seleccionada en el último piso. Se muestran las resistencias nominales y las de diseño así como los puntos correspondientes a las resistencias requeridas (triángulos en la parte inferior).



Ejemplo 16-5 - Diseño por Cortante de una Columna

Diseñemos por cortante la columna del último piso del ejemplo 16-4. La columna tiene una sección de 0.40 x 0.80 m y las solicitaciones así como las armaduras longitudinales, se muestran en el problema anterior.

a) Diseño por Resistencia con los resultados del análisis estructural. Ya que la armadura longitudinal de la columna (8 ϕ 3/4" + 6 ϕ 5/8") tiene el acero más pesado en los extremos, el peralte efectivo (d) lo estimaremos como 74 cm. Esta estimación puede no ser conservadora ya que la columna tiene poca carga axial, excentricidades grandes y existe armadura distribuida en la altura del alma. Nótese que el armado longitudinal propuesto conduce a estribos dobles, en consecuencia $A_v = 4 \times 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2$

Combinación	P_u (ton)	V_u (ton)	V_c (ton) Ecu. 15-14	V_s (ton)	s (cm)
$1.25(D + L) + S$	36	26.3	24.6	6.34	140
$1.25(D + L) - S$	29	18.8	24.2	-	-
$0.9 D + S$	23	24.8	23.9	5.28	167
$0.9 D - S$	17	20.2	23.6	-	-

El espaciamiento máximo viene dado por $d/2 \approx 37$ cm. Adicionalmente es necesario verificar los requerimientos de estribos para el control del pandeo de las barras longitudinales (acápite 16.5.1) requerimientos que conducen a un espaciamiento de los estribos múltiples de 0.30 m, tal como figura en el ejemplo 16-4.

b) Diseño por Capacidad (acápite 7.6). La armadura seleccionada para esta columna, es mayor que la estrictamente necesaria por resistencia ya que en el diseño controló el requerimiento de armadura mínima longitudinal, en consecuencia la columna tiene sobrerresistencia en flexión. En la eventualidad de un sismo severo, que demande a la estructura disipación de energía, es necesario intentar que predominen los modos de falla dúctiles (flexión), en caso contrario podría sobrevenir una falla frágil como la de fuerza cortante (fotos 5, 6 y 7 del Capítulo 15). Por lo tanto es necesario ajustar las fuerzas cortantes de diseño a un valor mayor que el proveniente del análisis estructural elástico realizado con fuerzas sísmicas reducidas por el factor R especificado en la Norma E.030.

Para poder realizar el diseño por capacidad de esta columna frente a fuerzas cortantes, supondremos que en los extremos de ella se desarrollan "rotulas plásticas" con una resistencia probable (M_{pr}) igual a la resistencia nominal multiplicada por el factor de sobrerresistencia en flexión ($M_{pr} \approx M_n \times F_{sr}$). La Norma Peruana (artículo 21.6.5.1) fija este factor en 1.25.

Con la ayuda del diagrama de interacción nominal construido en el ejemplo anterior, para la armadura realmente colocada ($8\phi 3/4'' + 6\phi 5/8''$) calcularemos las resistencias nominales para los diversos valores de P_u . Con las resistencias nominales se calcula la resistencia probable en flexión, $M_{pr} \approx 1.25 M_n$. Por equilibrio de la columna, asumiendo que esta trabaja en doble curvatura, se calcula la fuerza cortante probable V_{pr} , que será la que utilizaremos para el diseño. $V_{pr} = 2 M_{pr} / h$ donde $h = 3$ m es la altura de la columna.

Asumiremos que el peralte efectivo (d) es 74 cm. Nótese que el armado longitudinal propuesto conduce a estribos dobles, en consecuencia $A_v = 4 \times 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2$

Combinación	P_u (ton)	M_n (ton-m)	M_{pr} (ton-m)	V_{pr} (ton)	V_c Ecu. 15-14 (ton)	V_s Ecu. 15-18 (ton)	s Ecu. 15-19 (cm)
$1.25(D + L) + S$	36	61.0	76.3	50.9	24.6	35.28	25
$0.9 D - S$	17	55.8	69.8	46.5	23.6	31.11	28

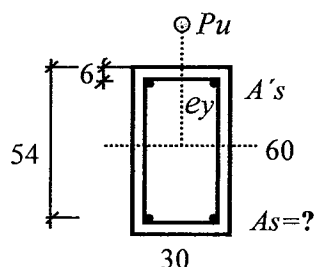
En consecuencia será necesario colocar estribos múltiples a un espaciamiento máximo de 0.25 m en toda la altura de la columna ya que la fuerza cortante es constante. En los extremos de la columna deberán disponerse estribos a menor espaciamiento (probablemente a 0.10 m) por los requerimientos de confinamiento (ductilidad) que tiene la Norma E.060 para columnas con responsabilidad sísmica.

Es necesario señalar que en la tabla anterior, para el cálculo de P_u , se ha utilizado además de las cargas muertas y vivas, las fuerzas axiales provenientes del análisis estructural del pórtico ante cargas laterales de sismo. El axial de sismo proveniente del análisis, es válido mientras la estructura se comporta en el rango elástico y el diseño por capacidad realizado involucra un pronunciado comportamiento inelástico del pórtico, en consecuencia, dichos axiales no representan nada en el ámbito del comportamiento inelástico. Para estimar de una manera más racional los axiales de sismo, sería necesario realizar un análisis límite del pórtico.

Una última observación: al haber utilizado un diseño por capacidad asociado a la formación de rótulas en los extremos de la columna, se debió realizar el diseño por cortante utilizando un factor de reducción de resistencia unitario en lugar del valor 0.85 empleado. Esto debido a que la fuerza cortante de diseño (V_{pr}) se calculó a partir de las resistencias nominales en flexión. Sin embargo, el valor $\phi = 0.85$ empleado, permite disponer de un cierto margen adicional para afrontar sobre resistencias en flexión mayores a las previstas, resistencias del concreto (V_c) menores a las estimadas e imperfecciones en los modelos mecánicos utilizados para predecir las resistencias.

Ejemplo 16-6 - Diseño de una Columna con Excentricidad Grande

A manera de aplicación de lo expuesto en el acápite 16.13, diseñaremos una columna de sección de 0.30 x 0.60 m con una carga axial relativamente baja y una excentricidad grande. Situaciones de esta naturaleza son comunes en las columnas extremas de pórticos bajos con vigas de luces importantes o en las columnas de los pisos superiores de un edificio. Las características de la columna y las sollicitaciones se indican a continuación.



Datos: $b = 30$ $h = 60$ $d = 54$ $d' = 6$
 $f'_c = 210$ $f_y = 4,200$
 $P_u = 40$ ton $M_u = 20$ ton-mt,
 $e_y = M_u / P_u = 0.5$ m $e' = 0.74$ m
Incognita: A_s $A's = n A_s$ $n \geq 0$

Dada la magnitud de la excentricidad y la forma rectangular de la sección, la armadura más eficiente es la concentrada en las caras extremas. En este caso la solución más económica no es la de utilizar la misma armadura en ambas caras, en consecuencia ensayaremos distintas soluciones variando la cantidad de acero en compresión (acero superior) lo que equivale a variar el parámetro n ($A's = n A_s$).

La cara axial $P_u = 40$ ton es mayor que el valor por debajo del cual se puede incrementar el factor de reducción de resistencia ($0.1 f'_c A_g \approx 38$ ton), por lo tanto utilizaremos $\phi = 0.7$.

La tabla a continuación resume los resultados del diseño. El centro de reducción utilizado para los cálculos es el centroide de la sección.

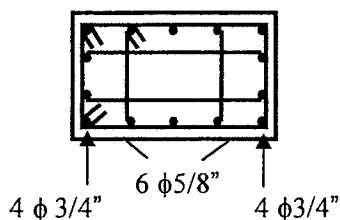
Caso	n	A_s	$A's$	A_{st}	ρ_t	c (cm)	ϵ_s / ϵ_y	$\epsilon's / \epsilon_y$
1	0	8.63	--	8.63	0.48%	20.52	2.3	--
2	0.25	8.09	2.02	10.11	0.56%	18.23	2.8	-0.96
3	0.50	7.75	3.88	11.63	0.65%	16.45	3.3	-0.91
4	0.75	7.50	5.62	13.12	0.73%	15.02	3.7	-0.86
5	1.00	7.33	7.33	14.66	0.81%	13.85	4.1	-0.81

¿Cuál de las cinco alternativas analizadas es la más aconsejable? La primera no es conveniente ya que no hay acero en compresión que controle en algo el flujo plástico del concreto y además, si la columna trabajase en doble curvatura, no habría acero para tomar las tracciones. Probablemente la más conveniente sea, en este caso, la tercera que tiene en compresión el 50% del acero en tracción con lo cual la sección tendría capacidad para tomar momentos en sentido contrario al analizado, siempre y cuando estos momentos sean la mitad del valor utilizado y no existan momentos de sismo. En todo caso, la discusión se torna un tanto académica, si respetamos la cuantía mínima para columnas del 1% que especifica la Norma.

Es interesante anotar que de acuerdo al ACI-08, para la magnitud de las deformaciones del acero en tracción, todos los casos analizados corresponden a secciones controladas por tracción (véase el Capítulo 17), en consecuencia se podría utilizar un valor de ϕ de 0.9 en lugar del 0.7 que hemos utilizado para los cálculos.

Ejemplo 16-7 – Diagramas de Interacción con los factores ϕ del ACI-11

Para la columna del último piso del ejemplo 16-4, cuya armadura seleccionada se muestra a continuación, se construyeron los diagramas de interacción utilizando los factores de reducción de resistencia especificados por el ACI hasta el año 1999 (que son los mismos de la Norma E.060 del 2009) y también utilizando los factores del ACI-2011.



Los resultados se muestran en las dos figuras a continuación, los diagramas se han construido para flexión alrededor del eje fuerte de la sección. Los diagramas de interacción en resistencia nominal ($P_n - M_n$) son los mismos en ambos casos ya que las hipótesis básicas para el análisis de secciones de concreto armado, no han cambiado en el ACI-11.

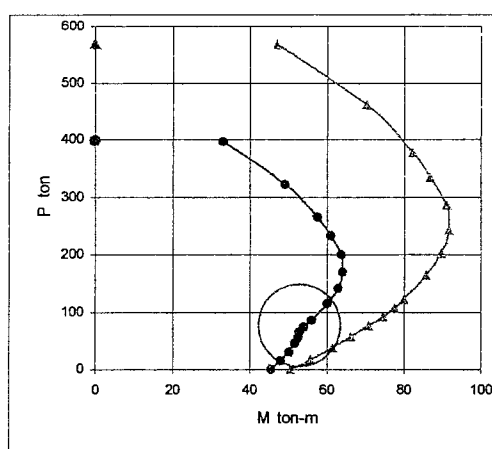


Diagrama de interacción ACI-99

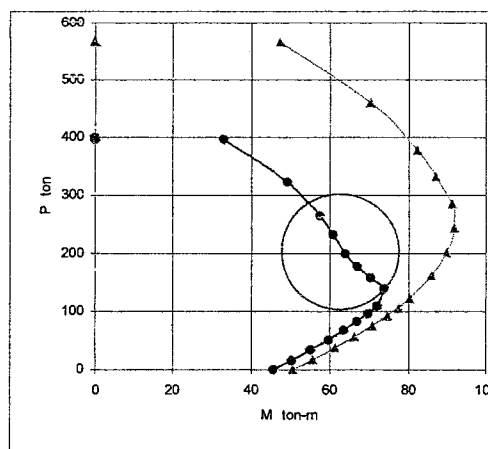
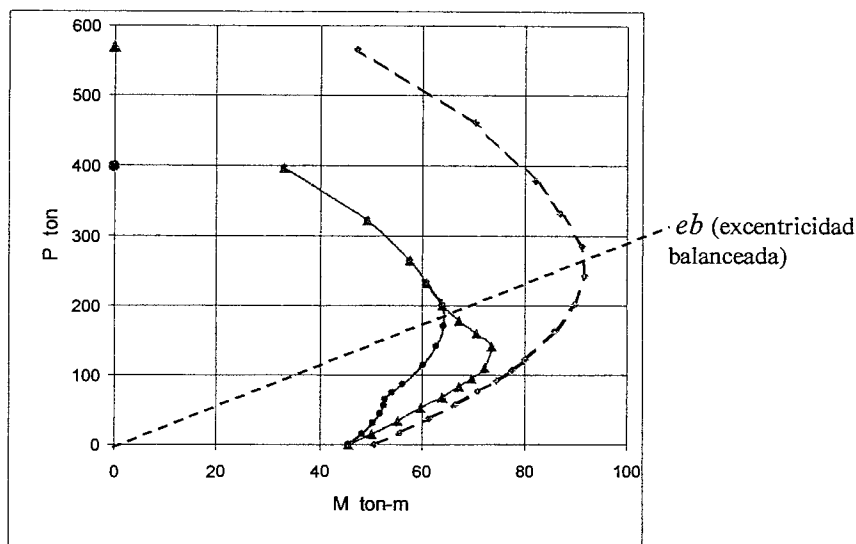


Diagrama de interacción ACI-11

En la figura siguiente se han superpuesto los diagramas para resaltar las diferencias. Nótese que el diagrama de resistencias de diseño del ACI-11, en la zona de cargas axiales bajas, está mucho más pegado a la curva de resistencia nominal, en

consecuencia, el ACI-2011 exige menos acero de refuerzo en la zona de cargas axiales bajas en comparación con la Norma E.060.

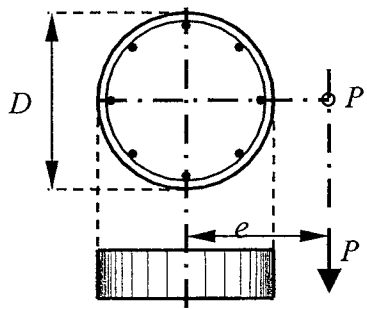
Nótese también, que en el diagrama de resistencias de diseño construido con el ACI-11, es casi imposible identificar el punto de falla balanceada si no se conoce el diagrama de resistencias nominales.



Se sugiere revisar el ejemplo 17-7 en el cual se desarrolla en detalle este caso y se comentan las diversas "inconsistencias" en los diagramas de interacción al nivel de resistencias de diseño, que ocurren con la Norma E.060 y con el ACI-2011.

Ejemplo 16-8 – Diagrama de Interacción para una Columna Circular

Construir el diagrama de interacción para la columna circular mostrada a continuación.

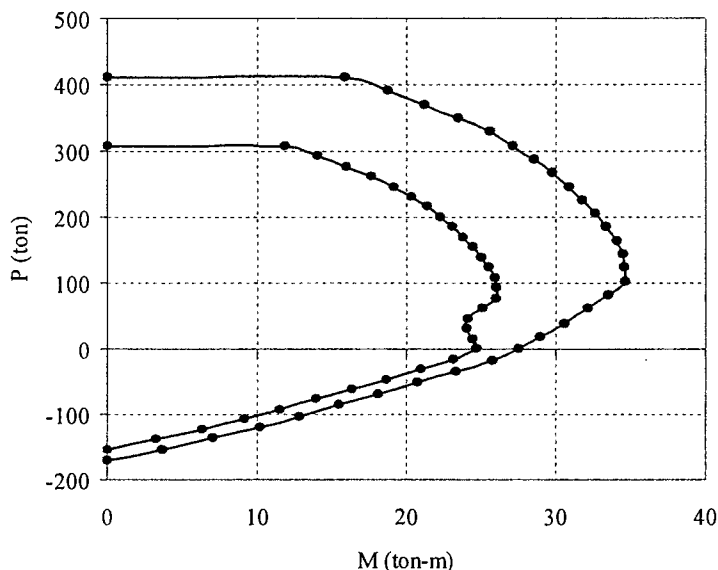


- Datos: $D = 50 \text{ cm}$ Recubr. al eje de las barras ≈ 6
 $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ $f_y = 4,200$
 Columna con espiral $\phi = 0.75$
 $A_s = 8 - 1'' = 40.8 \text{ cm}^2$
 $A_g \approx 1,960 \text{ cm}^2$ $\rho \approx 2.08\%$
 $d_c = 50 - 8 = 42 \text{ cm}$ (diámetro del núcleo confinado)
 $A_c \approx 1,385 \text{ cm}^2$ (área del núcleo confinado)
 $A_g / A_c \approx 1.42$

Para la construcción del diagrama de interacción, las hipótesis básicas son las mismas que hemos utilizado en la resolución de los anteriores problemas y se encuentran en el acápite 16.8, recuerde que también en este caso, es válido remplazar el diagrama real del concreto comprimido por el bloque equivalente de compresiones. La secuencia de cálculos que podría utilizarse se presentó en el ejemplo 16-1, la única "complicación" que puede surgir radica en el cálculo del área del concreto comprimido para una determinada posición del eje neutro, en todo caso se trata de un simple segmento circular.

La figura a continuación muestra el diagrama de interacción tanto en resistencia nominal como en resistencia de diseño. Dado que se han utilizado 8 barras longitudinales, la

resistencia de la sección debería ser prácticamente independiente de la orientación de las mismas, tal como se discutió en el acápite 16.5.3.



El diseño de la espiral debe basarse en la ecuación 16-6 (véase el acápite 16.4.1) para justificar el uso de $\phi = 0.75$. Si se utiliza un espiral con un paso mayor o se emplean estribos circulares, deberá utilizarse $\phi = 0.70$.

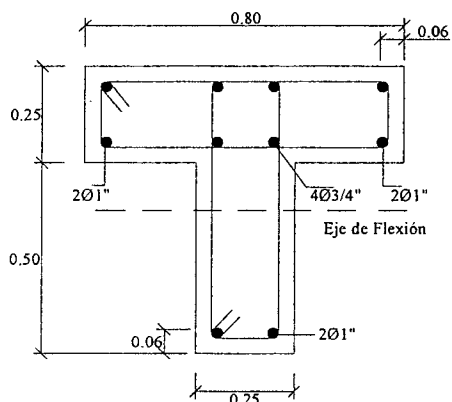
$$\rho_s = 0.45 \left[\frac{A_g}{A_c} - 1 \right] \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 (1.42 - 1) \frac{210}{4,200} \approx 0.95\%$$

$$\rho_s = \frac{4 A_{sp}}{dc s} \Rightarrow s = \frac{4 A_{sp}}{\rho_s dc} = \frac{4 \times 0.71}{0.95\% \times 42} \approx 7.2 \text{ cm}$$

Deberá utilizarse una espiral de acero corrugado de 3/8" ($f_y = 4,200$) con un paso a ejes de 7.5 cm y un paso libre de aproximadamente 6.5 cm. La fórmula 16-7 aplicable a columnas con responsabilidad sísmica, exige un paso máximo de 11.3 cm y no controla el diseño de la espiral.

Ejemplo 16-9 – Diagrama de Interacción para una Columna No Rectangular

Construir el diagrama de interacción para la columna en T mostrada a continuación. El eje de flexión es horizontal (excentricidades sobre el eje y).



Datos: Recubr. al eje de las barras ≈ 6

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 4,200$$

Columna con estribos $\phi = 0.70$

$$A_s = 6 - 1'' + 4 - 3/4'' \approx 42 \text{ cm}^2$$

$$A_g \approx 3,250 \text{ cm}^2 \quad \rho \approx 1.3\%$$

Posición del centroide del concreto:

$$Y_i \approx 48.1 \text{ cm (desde el borde inferior)}$$

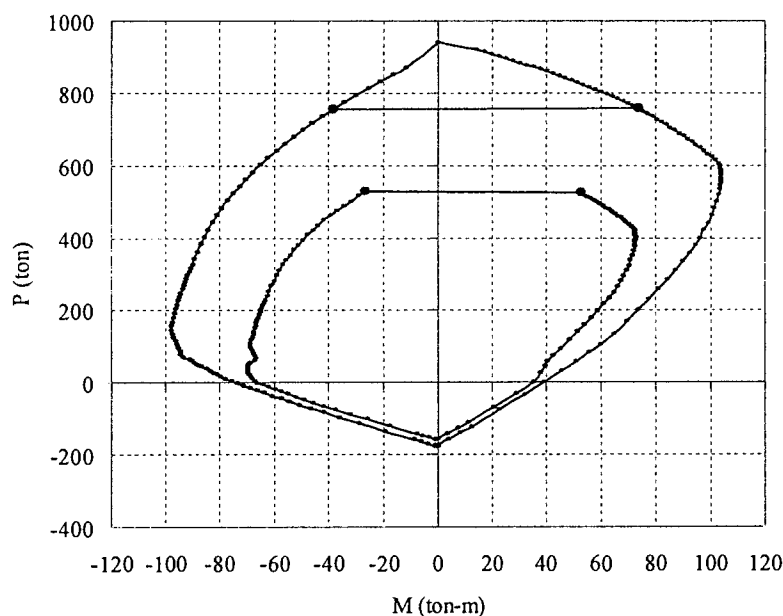
$$Y_s \approx 26.9 \text{ cm (desde el borde superior)}$$

La flexión positiva corresponde a compresiones en la fibra superior y la flexión negativa a compresiones en la fibra inferior. Para la construcción del diagrama de interacción se utilizará como centro de reducción el centroide del concreto sin considerar las armaduras de refuerzo.

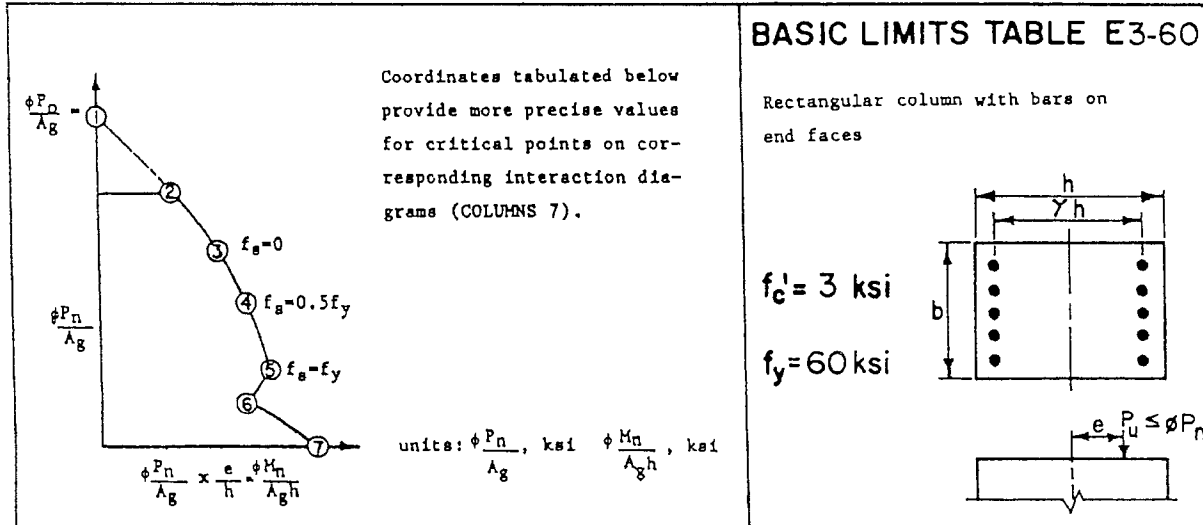
Debido a que la sección es asimétrica con respecto al eje de flexión, será necesario construir el diagrama de interacción completo, tanto para flexión positiva, como para flexión negativa.

Para la construcción del diagrama de interacción, se utilizaron las hipótesis básicas que se encuentran en el acápite 16.8. La secuencia de cálculos que puede utilizarse es similar a la empleada en el ejemplo 16-1.

A continuación se muestra el diagrama de interacción para la columna en T propuesta. Es notable la asimetría del diagrama producto de la forma de la sección y de la distribución de las armaduras longitudinales. Como era de esperarse, la resistencia en flexión pura (carga axial nula) para flexión negativa es casi el doble que para flexión positiva. Los valores de las cargas balanceadas también difieren notablemente, para flexión positiva la carga balanceada nominal es de 607 ton aproximadamente y para flexión negativa 145 ton.



El centroide plástico de esta sección se encuentra a 48.2 cm del borde inferior, valor que prácticamente coincide con el centroide del concreto, por lo tanto si se construye el diagrama de interacción utilizando como centro de reducción el centroide plástico, los resultados serán prácticamente los mismos.



Pg	② maximum Pu/Ag		③ fs = 0		④ fs = 0.5fy		⑤ fs = fy			⑥ phi changes		⑦ Pu = 0
	phi*Pn/Ag	phi*Mn/Ag*h	phi*Pn/Ag	phi*Mn/Ag*h	phi*Pn/Ag	phi*Mn/Ag*h	phi*Pn/Ag	phi*Mn/Ag*h	e/h	phi*Pn/Ag	phi*Mn/Ag*h	phi*Mn/Ag*h
E3-60.45 gamma = 0.45												
.01	1.750	.155	1.280	.252	.853	.277	.541	.277	.511	.300	.233	.1968
.02	2.071	.169	1.460	.292	.888	.332	.432	.346	.802	.300	.324	.3280
.03	2.393	.184	1.640	.333	.924	.387	.322	.416	1.292	.300	.410	.4512
.04	2.715	.200	1.820	.373	.959	.442	.213	.486	2.286	.213	.486	.5709
.05	3.037	.216	2.000	.414	.994	.497	.103	.556	5.392	.103	.556	.6221
.06	3.358	.233	2.180	.454	1.029	.553	-.006	.626	-96.928	-.006	.626	.6256
.07	3.680	.249	2.361	.495	1.065	.608	-.116	.696	-5.996	-.116	.696	.6874
.08	4.002	.266	2.541	.535	1.100	.663	-.226	.766	-3.393	-.226	.766	.7680
E3-60.60 gamma = 0.60												
.01	1.750	.168	1.415	.255	.991	.313	.675	.328	.485	.300	.250	.2045
.02	2.071	.193	1.616	.315	1.079	.402	.632	.441	.697	.300	.364	.3699
.03	2.393	.218	1.817	.375	1.167	.491	.589	.554	.940	.300	.496	.5307
.04	2.715	.243	2.018	.435	1.255	.581	.546	.667	1.221	.300	.609	.6994
.05	3.037	.268	2.219	.496	1.344	.670	.503	.780	1.550	.300	.729	.8486
.06	3.358	.293	2.420	.556	1.432	.760	.460	.893	1.941	.300	.855	1.0069
.07	3.680	.318	2.621	.616	1.520	.849	.417	1.006	2.413	.300	.985	1.1652
.08	4.002	.344	2.822	.677	1.608	.939	.374	1.119	2.993	.300	1.119	1.3234
E3-60.75 gamma = 0.75												
.01	1.750	.178	1.529	.246	1.083	.335	.777	.374	.482	.300	.283	.2202
.02	2.071	.211	1.730	.321	1.179	.450	.768	.528	.688	.300	.427	.4222
.03	2.393	.242	1.931	.396	1.275	.565	.759	.682	.899	.300	.584	.6228
.04	2.715	.273	2.132	.472	1.371	.680	.750	.837	1.115	.300	.750	.8230
.05	3.037	.304	2.333	.547	1.468	.795	.741	.991	1.337	.300	.881	1.0232
.06	3.358	.335	2.534	.623	1.564	.909	.732	1.145	1.564	.300	1.060	1.2234
.07	3.680	.365	2.735	.698	1.660	1.024	.723	1.299	1.796	.300	1.196	1.4236
.08	4.002	.396	2.936	.773	1.756	1.139	.714	1.453	2.034	.300	1.385	1.6241
E3-60.90 gamma = 0.90												
.01	1.750	.192	1.642	.229	1.168	.352	.844	.408	.483	.300	.321	.2455
.02	2.071	.234	1.844	.320	1.264	.490	.835	.593	.710	.300	.503	.4876
.03	2.393	.274	2.045	.410	1.360	.627	.826	.778	.941	.300	.685	.7297
.04	2.715	.313	2.246	.501	1.456	.765	.817	.963	1.178	.300	.867	.9719
.05	3.037	.351	2.447	.591	1.552	.903	.808	1.148	1.420	.300	1.064	1.2143
.06	3.358	.388	2.648	.682	1.648	1.041	.800	1.333	1.667	.300	1.251	1.4567
.07	3.680	.425	2.849	.772	1.744	1.178	.791	1.518	1.920	.300	1.433	1.6991
.08	4.002	.462	3.050	.863	1.840	1.316	.782	1.703	2.178	.300	1.633	1.9417

1 ksi = 70.31 kg/cm2
 E = 29,000 ksi = 2'039,000 kg/cm2
 epsilon_y = 0.00206

Tabla 16-1 Puntos notables de un diagrama de interacción (ACI SP-17A 1990)

Coordinates tabulated below provide more precise values for critical points on corresponding interaction diagrams (COLUMNS 7).

units: $\frac{\phi P_n}{A_g}$, ksi $\frac{\phi M_n}{A_g h}$, ksi

BASIC LIMITS TABLE R3-60

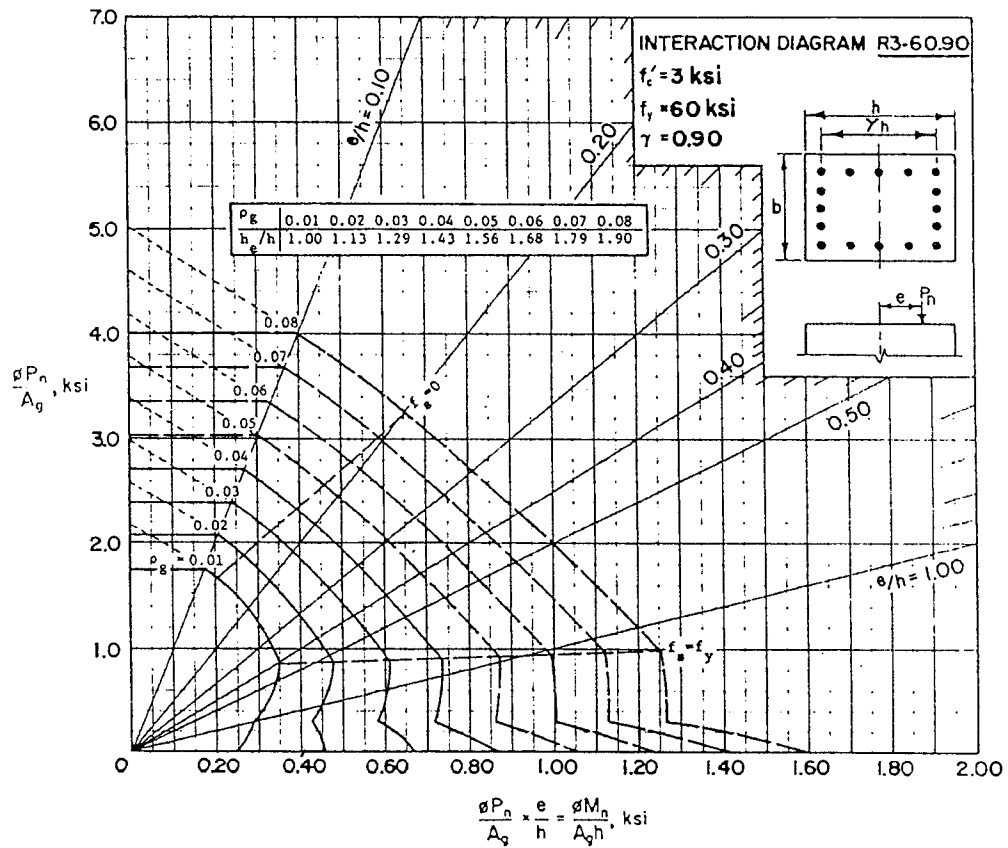
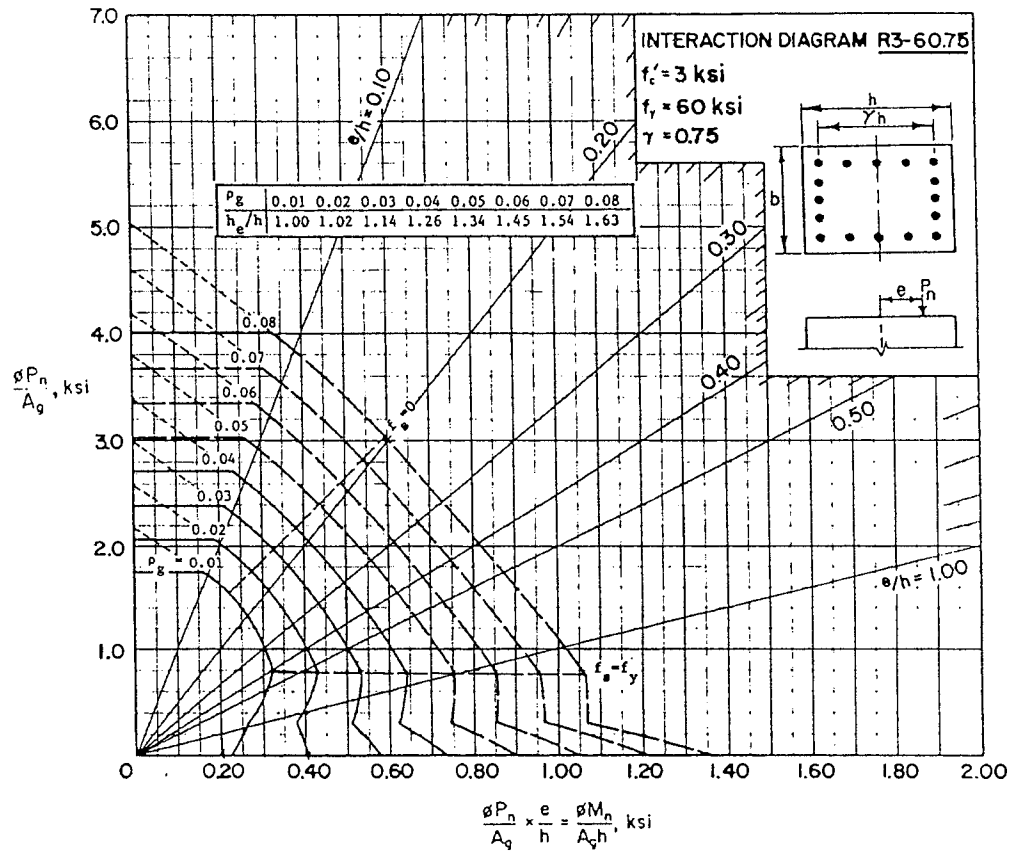
Rectangular column with bars on four faces

$f'_c = 3$ ksi

$f_y = 60$ ksi

p g	② maximum P_u/A_g		③ $f_s = 0$		④ $f_s = 0.5f_y$		⑤ $f_s = f_y$			⑥ ϕ changes		⑦ $P_u = 0$
	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	e/h	$\frac{\phi P_n}{A_g}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$	$\frac{\phi M_n}{A_g h}$
R3-60.45 $\gamma = 0.45$												
.01	1.750	.148	1.277	.239	.852	.259	.543	.255	.469	.300	.226	.1995
.02	2.071	.156	1.453	.267	.886	.297	.434	.303	.697	.300	.295	.3168
.03	2.393	.165	1.630	.295	.920	.335	.326	.350	1.076	.300	.345	.4096
.04	2.715	.175	1.807	.323	.954	.373	.217	.398	1.834	.217	.398	.4885
.05	3.037	.185	1.984	.351	.989	.411	.109	.446	4.105	.109	.446	.4940
.06	3.358	.196	2.160	.379	1.023	.448	.000	.494	∞	.000	.494	.4940
.07	3.680	.207	2.337	.407	1.057	.486	-.108	.542	-5.000	-.108	.542	.5368
.08	4.002	.218	2.514	.435	1.091	.524	-.217	.590	-2.722	-.217	.590	.5791
R3-60.60 $\gamma = 0.60$												
.01	1.750	.158	1.418	.236	.990	.284	.676	.292	.432	.300	.229	.2065
.02	2.071	.174	1.623	.270	1.077	.346	.635	.370	.583	.300	.331	.3561
.03	2.393	.191	1.828	.320	1.164	.407	.593	.447	.755	.300	.427	.4855
.04	2.715	.209	2.032	.362	1.251	.468	.551	.525	.953	.300	.510	.6067
.05	3.037	.226	2.237	.404	1.338	.530	.509	.603	1.184	.300	.596	.7228
.06	3.358	.244	2.442	.446	1.425	.591	.467	.680	1.457	.300	.667	.8319
.07	3.680	.262	2.646	.488	1.512	.652	.425	.758	1.783	.300	.757	.9370
.08	4.002	.280	2.851	.530	1.599	.714	.383	.835	2.181	.300	.831	1.0415
R3-60.75 $\gamma = 0.75$												
.01	1.750	.167	1.544	.223	1.096	.300	.784	.326	.416	.300	.260	.2201
.02	2.071	.190	1.761	.277	1.204	.380	.781	.432	.553	.300	.378	.4034
.03	2.393	.214	1.978	.330	1.313	.459	.779	.539	.691	.300	.511	.5774
.04	2.715	.238	2.195	.383	1.421	.539	.777	.645	.830	.300	.629	.7391
.05	3.037	.262	2.412	.436	1.529	.618	.775	.751	.969	.300	.747	.8943
.06	3.358	.286	2.629	.490	1.638	.698	.773	.858	1.110	.300	.852	1.0485
.07	3.680	.310	2.846	.543	1.746	.777	.771	.964	1.251	.300	.966	1.2020
.08	4.002	.335	3.062	.596	1.855	.857	.768	1.070	1.393	.300	1.074	1.3550
R3-60.90 $\gamma = 0.90$												
.01	1.750	.177	1.667	.203	1.194	.311	.868	.352	.405	.300	.286	.2427
.02	2.071	.209	1.893	.267	1.316	.407	.884	.480	.544	.300	.428	.4637
.03	2.393	.241	2.118	.332	1.439	.504	.899	.609	.678	.300	.580	.6685
.04	2.715	.272	2.344	.396	1.561	.600	.914	.738	.807	.300	.718	.8681
.05	3.037	.303	2.569	.460	1.683	.697	.929	.867	.933	.300	.859	1.0547
.06	3.358	.334	2.795	.525	1.806	.793	.945	.996	1.054	.300	1.001	1.2360
.07	3.680	.365	3.020	.589	1.928	.890	.960	1.124	1.172	.300	1.128	1.4160
.08	4.002	.396	3.246	.653	2.050	.986	.975	1.253	1.285	.300	1.269	1.5950

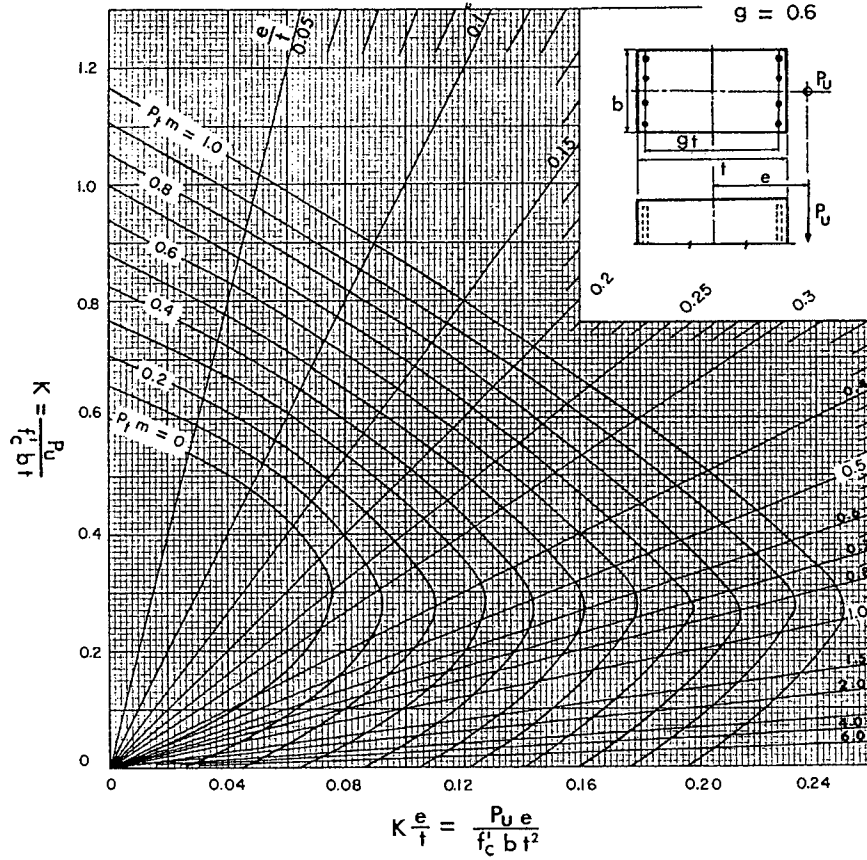
Tabla 16-2 Puntos notables de un diagrama de interacción (ACI SP-17A 1990)



$f'_c \leq 4.0$ ksi

$f_y = 60.0$ ksi

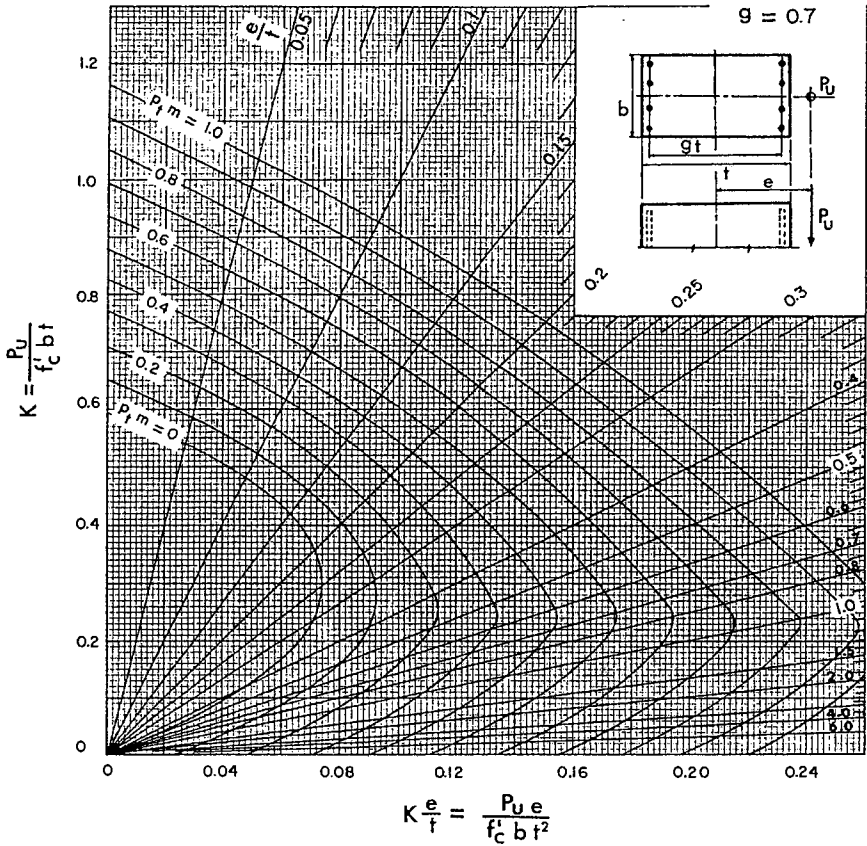
$g = 0.6$



$f'_c \leq 4.0$ ksi

$f_y = 60.0$ ksi

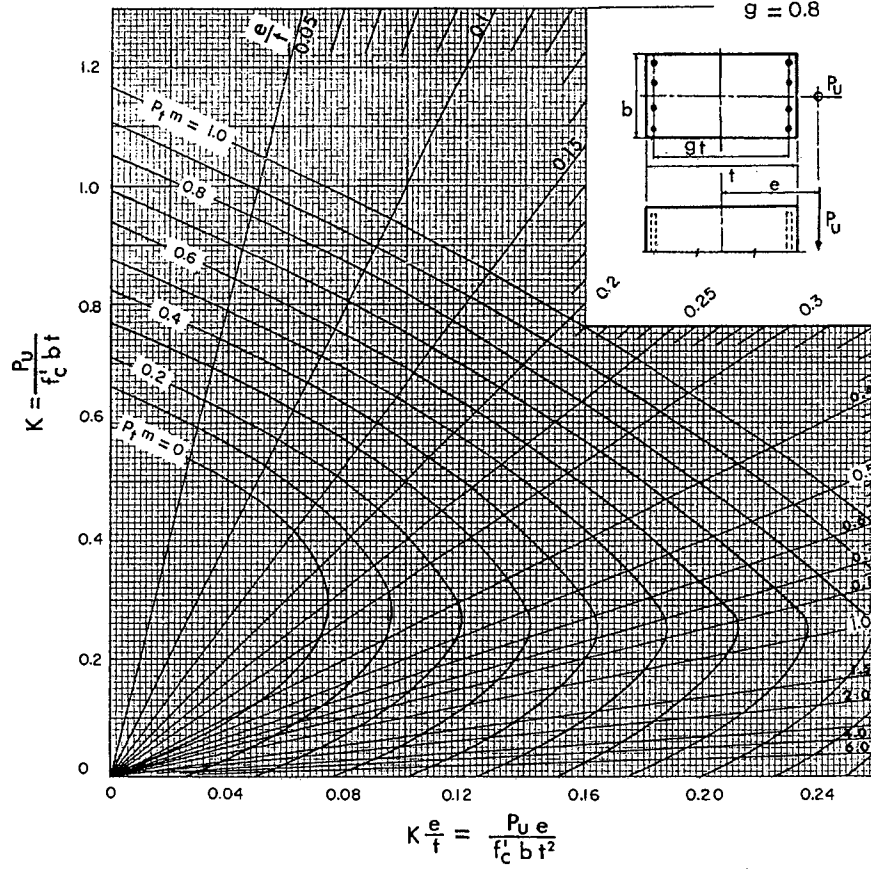
$g = 0.7$



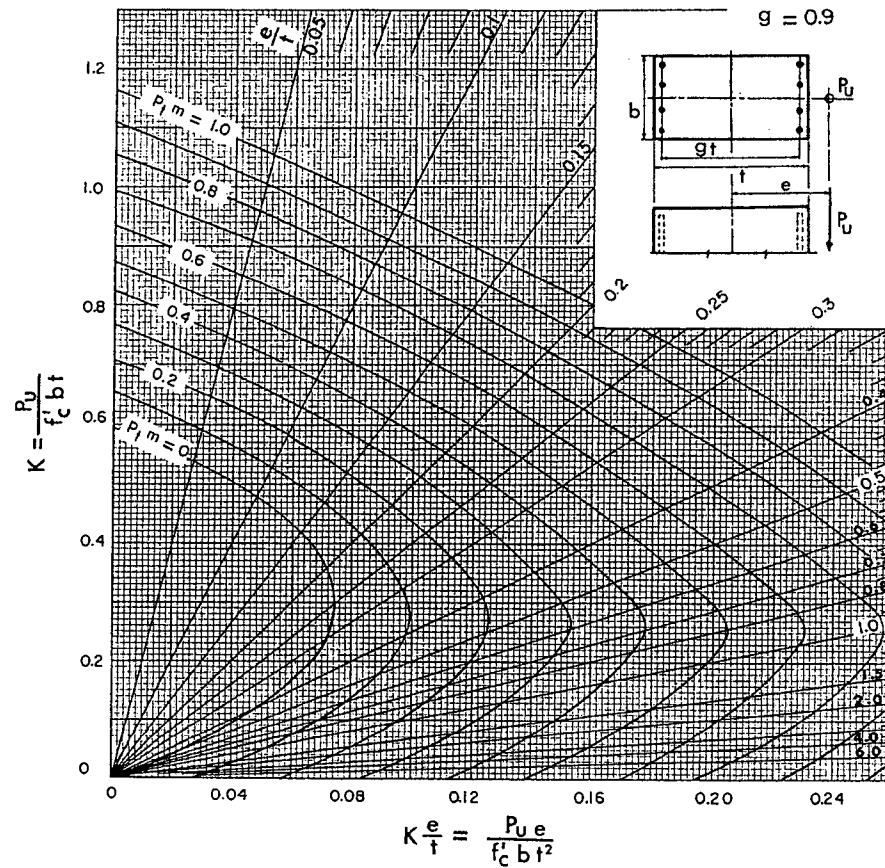
Ábacos 16-2 y 16-3 ACI SP-17A 1973

$\phi = 0.7$ $m = f_y / 10.85 f'_c$

$f'_c \leq 4.0$ ksi
 $f_y = 60.0$ ksi



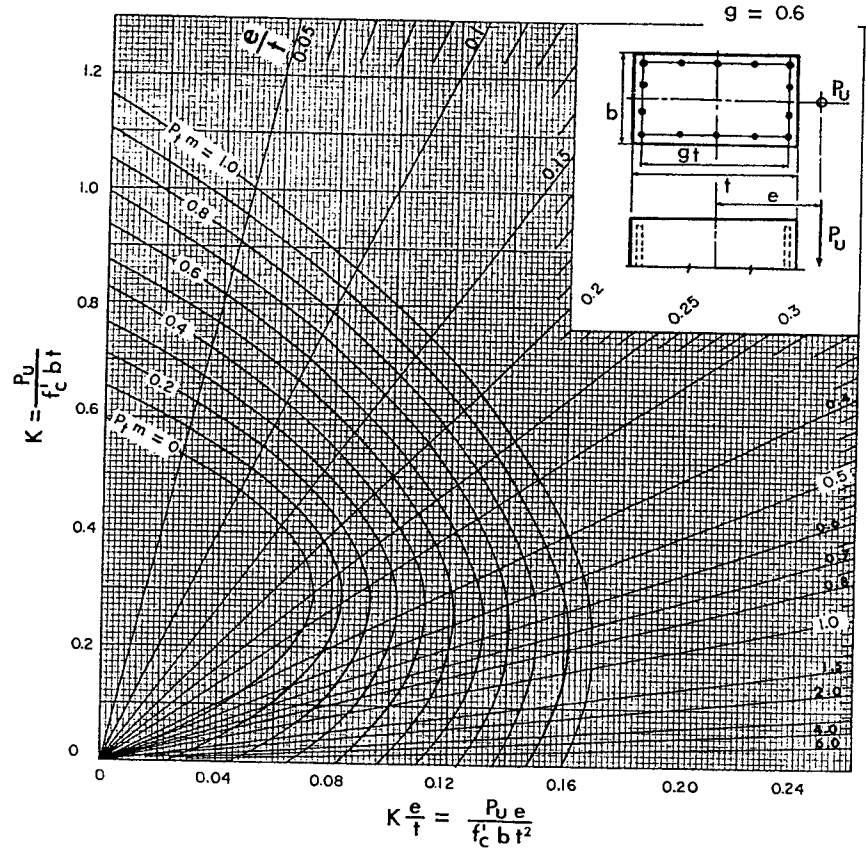
$f'_c \leq 4.0$ ksi
 $f_y = 60.0$ ksi



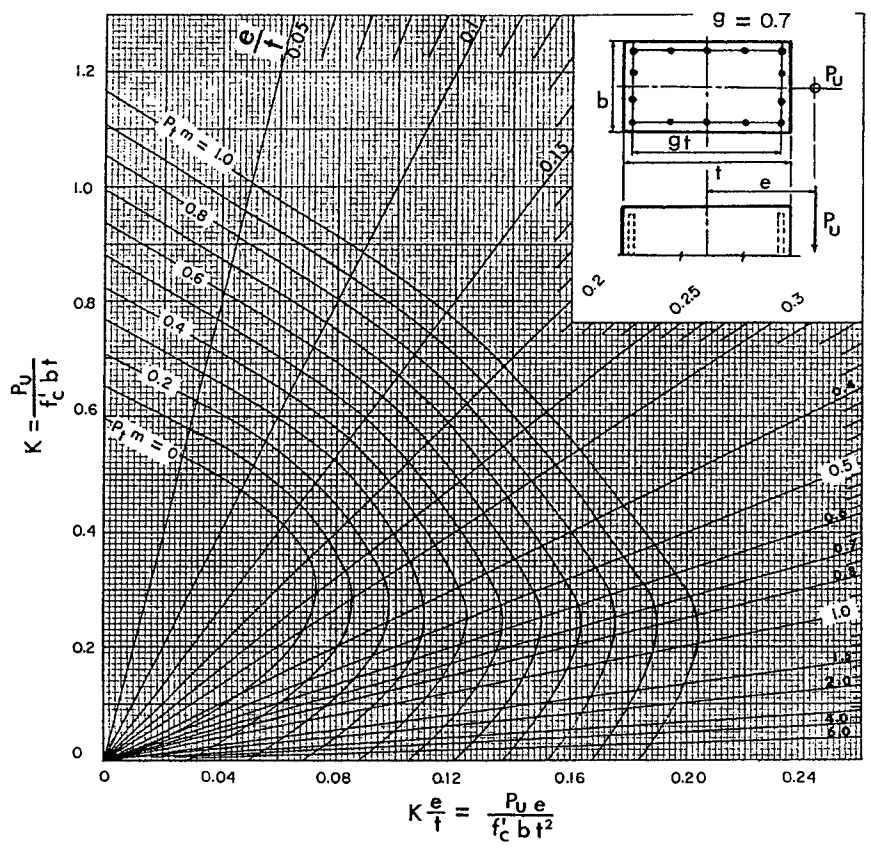
Ábacos 16-4 y 16-5 ACI SP - 17A 1973

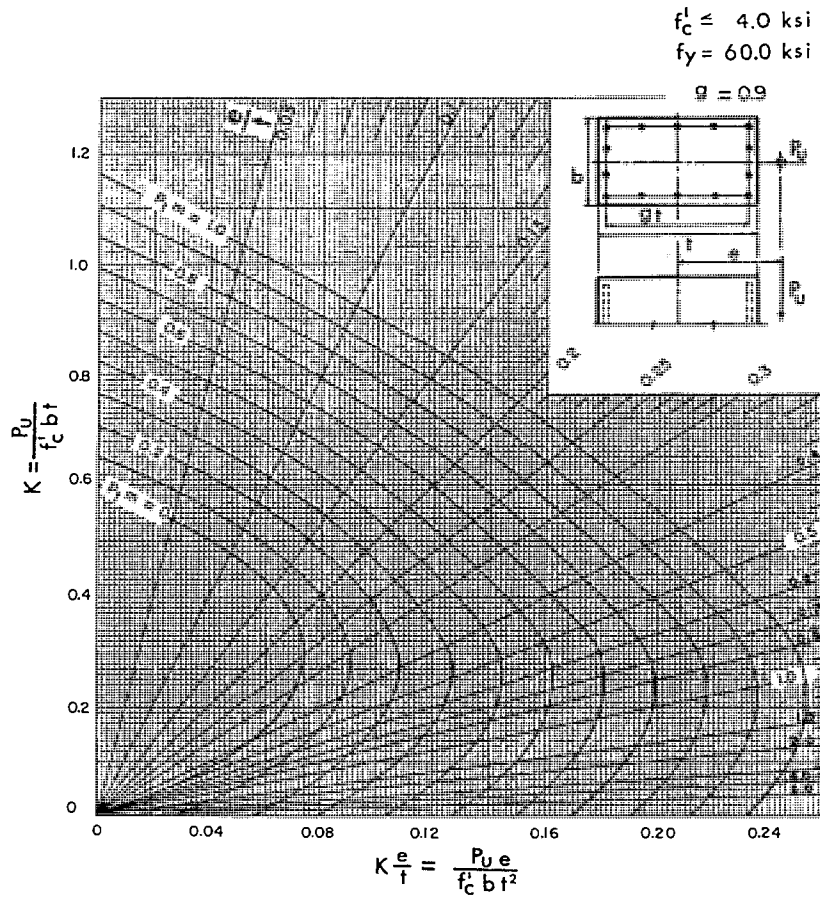
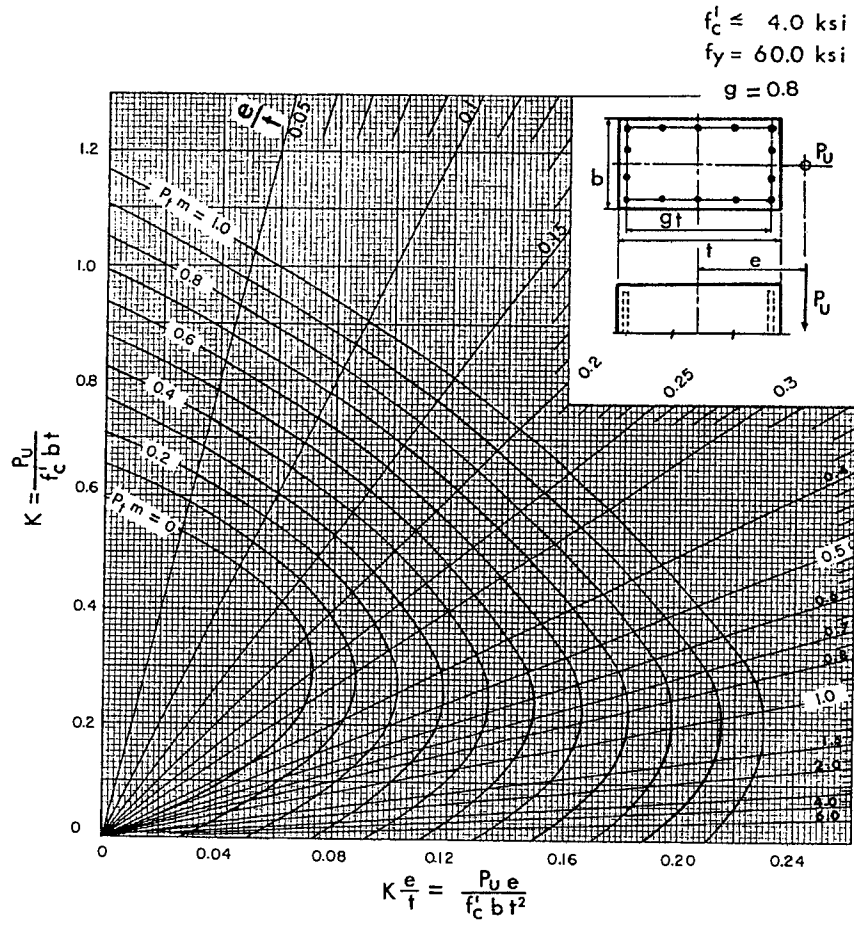
$\phi = 0.7$ $m = f_y / 10.85 f_c$

$f'_c \leq 4.0 \text{ ksi}$
 $f_y = 60.0 \text{ ksi}$



$f'_c \leq 4.0 \text{ ksi}$
 $f_y = 60.0 \text{ ksi}$

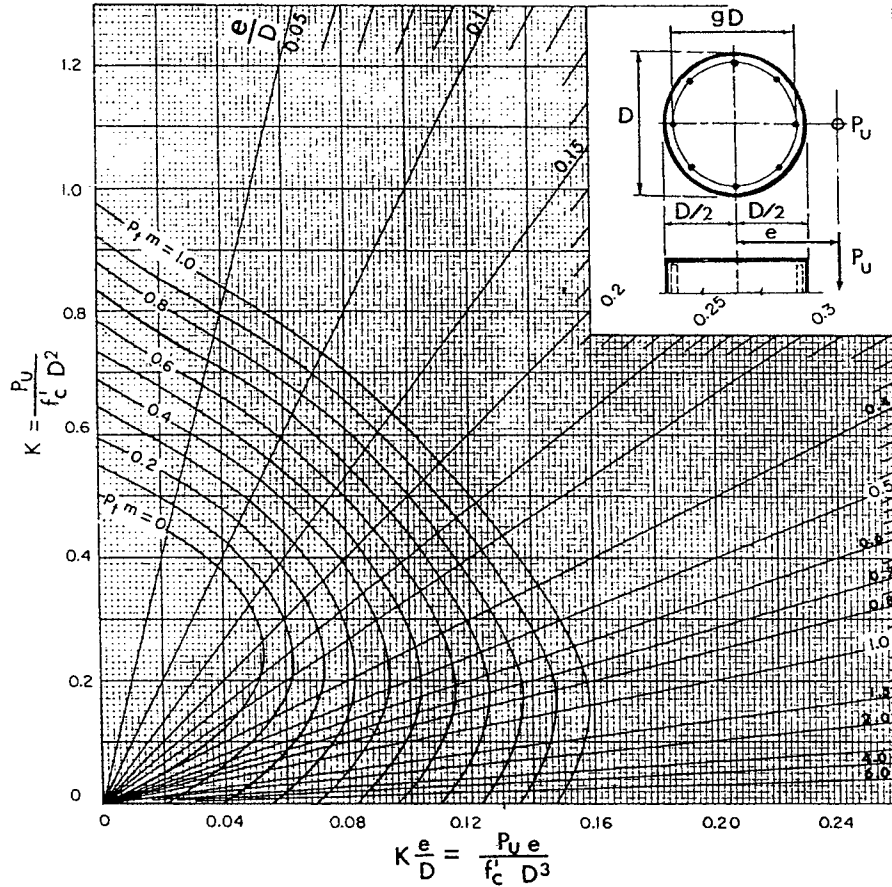




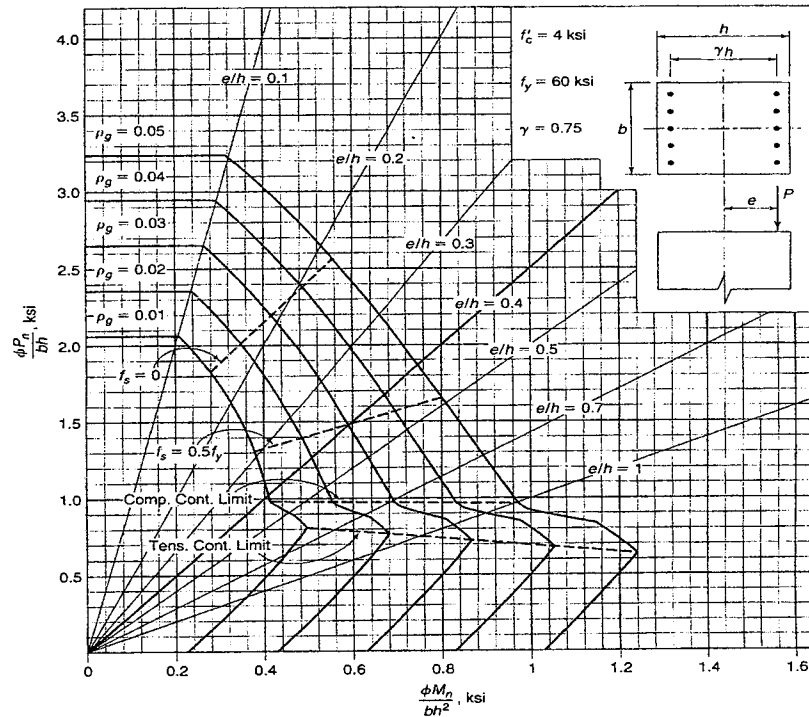
Ábacos 16-8 y 16-9 ACI SP-17A 1973

$\phi = 0.7$ $m = f_y / 0.85 f'_c$

$f'_c \leq 4.0$ ksi
 $f_y = 60.0$ ksi
 $g = 0.8$

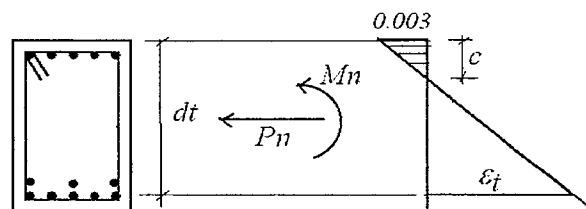


Ábaco 16-10 ACI SP - 17A 1973 $\phi = 0.75$ $m = f_y / 0.85 f_c$



Ábaco Wight - MacGregor. Factores ϕ del ACI 2008

CAPITULO 17



Diseño Unificado en Concreto Armado

Apéndice B del Reglamento ACI 318-99

Norma ACI 318-08

17.1 Introducción

En el ACI 318 del año 1995 se introdujo el Apéndice B titulado "Disposiciones de diseño unificadas para elementos de Concreto Armado y Pretensado sometidos a Flexión y Compresión". Este Apéndice se basó casi exclusivamente en el trabajo de Robert F. Mast citado en la lectura 17.1. El ACI 318 del año 1999 repitió este Apéndice sin modificaciones.

En las últimas ediciones del ACI 318 del año 2002, 2005, 2008 y 2011, el Apéndice B se incorporó, con algunas modificaciones, al cuerpo de la Norma quedando sus artículos incluidos en los diversos capítulos (el ACI-11 tiene 22 capítulos y 5 Apéndices) principalmente en el Capítulo 8 (Requisitos Generales para el Análisis y Diseño), Capítulo 9 (Requerimientos de Resistencia y de Servicio), Capítulo 10 (Flexión y Carga Axial) y en el Capítulo 18 (Concreto Preesforzado).

Para poder entender mejor los cambios que se han producido en el diseño de elementos de concreto armado, es conveniente revisar íntegramente el Apéndice B del ACI-99, de otro modo, sería necesario recorrer todo el ACI-11 en busca de los cambios que se han originado, al haber sido incluido en el cuerpo de la Norma.

Es necesario anotar que en el ACI-11 existe el Apéndice B, titulado "Disposiciones de Diseño Alternativas para Elementos de Concreto Armado y Preesforzado Sometidos a Flexión y Compresión". El Apéndice B contiene las disposiciones "clásicas" para diseño por flexión con o sin carga axial empleadas hasta el ACI del año 1999, es decir, el límite del refuerzo en vigas basado en el concepto de cuantía balanceada ($0.75 A_{sb}$), la redistribución de momentos limitada a las secciones con cuantías por debajo de $0.5 A_{sb}$, la interpolación de los factores de reducción de resistencia (ϕ) para columnas con poca carga axial.

Es necesario indicar que la Norma E.060 del 2009 no ha adoptado el Diseño Unificado que se presenta en este Capítulo, salvo por lo dispuesto en el Artículo 10.3.5 y en lo relativo a la redistribución de momentos flectores (Artículo 8.4).

17.2 Disposiciones "Clásicas" hasta el ACI-99 para Elementos en Flexión

La figura 17-1 permite recordar la definición de falla o condición balanceada en una sección de concreto armado, en este caso para un acero de $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$. Esta condición hasta el ACI-99, sirvió de base para establecer la cantidad máxima de acero permitida en una sección en flexión (acápite 10.6).

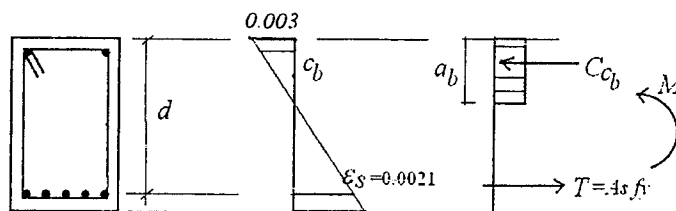


Fig. 17-1 Falla balanceada de una sección en flexión sin carga axial

Hasta el ACI-99 la cantidad máxima de acero venía limitada por la Norma mediante la expresión 17-1:

$$\rho_{max} = 0.75 \rho_b \quad (17-1)$$

La expresión 17-1 ha sido cuestionada a lo largo de estos apuntes, por varios motivos, uno de ellos porque estrictamente el término de cuantía (A_s/bd) solo tiene sentido en secciones rectangulares, no es aplicable cuando el bloque comprimido de concreto no tiene una forma rectangular. Sin embargo la Norma cuando limita la cantidad máxima de acero utiliza el término cuantía. Esta limitación es fácilmente superable si la Norma, en lugar de limitar la cuantía, limitase la cantidad máxima de acero, como se indica en las ecuaciones 17-2 o en la ecuación 17-3 aplicable a secciones con acero en compresión.

$$A_s_{max} = 0.75 A_s b \quad (17-2)$$

$$A_s_{max} = 0.75 A_s b + A' s f' s b / f_y \quad (17-3)$$

Es conveniente recordar (acápito 10.5.3) que la posición del eje neutro en la falla balanceada, independientemente de la geometría de la sección, viene dada por:

$$c_b / d \approx 0.588 \quad (\text{para } f_y = 4,200, \epsilon_{cu} = 0.003) \quad (17-4)$$

En el acápito 10.6, se demostró que para una sección rectangular la limitación de $A_s \leq 0.75 A_s b$ equivale a limitar la profundidad del eje neutro de acuerdo a:

$$c / d \leq 0.75 \times 0.588 \Rightarrow c / d \leq 0.441 \quad (\text{para } f_y = 4,200) \quad (17-5)$$

Para una sección rectangular la limitación de la Norma (hasta el año 99) en el acero máximo de tracción (ecuación 17-2), equivale indirectamente a imponer una deformación mínima en el acero de tracción. Ya hemos demostrado (acápito 10.6) que la deformación mínima en el acero (ϵ_s min), cuando la sección está reforzada con acero solo en tracción y considerando $\epsilon_{cu} = 0.003$, es:

$$\epsilon_s \geq 0.0038 \quad (\approx 1.8 \epsilon_y \text{ para } f_y = 4,200) \quad (17-6)$$

Es importante recordar la máxima profundidad del eje neutro (ecuación 17-5) y la deformación mínima en el acero de tracción (ecuación 17-6) en una sección rectangular, ya que a partir del ACI-02, el control indirecto de la máxima cantidad de acero y del tipo de comportamiento de una sección, viene dado por la deformación del acero de tracción más alejado del borde comprimido.

17.3 Algunas "Inconsistencias" hasta el ACI-99

A lo largo de estos apuntes se han señalado algunas de las "inconsistencias" del ACI, a continuación se resumen las principales:

- La definición del peralte efectivo (d) para elementos en flexión, como la distancia entre el borde comprimido y el centroide de los aceros en tracción. Esta definición es fácil de aplicar en secciones en las cuales el acero de tracción está concentrado cerca de la superficie en tracción, como suele ocurrir en las vigas. Sin embargo para secciones con acero distribuido en el alma (columnas, placas, vigas de gran peralte) no es

directo el establecer cuales de los aceros (capas) están en tracción y cual es la magnitud del esfuerzo en ellos ya que no necesariamente todos estarán en fluencia.

Lo mismo ocurre con secciones con acero preesforzado o con combinaciones de acero convencional con preesforzado. En estos casos la norma toma una definición distinta del peralte efectivo (en preesforzado la llama d_p).

- La definición de la cuantía balanceada a partir de la cual se fija el acero máximo. En algunas situaciones es necesario “estirar” este concepto, como por ejemplo en las secciones con acero distribuido en el alma (véase el acápite 10.12) o el tener que definir un nivel de carga axial ($0.1 f'c Ag$) para diferenciar una viga de una columna ya que, para elementos en flexión los límites son distintos que para elementos en flexocompresión, es decir en elementos con carga axial (columnas) se permite colocar una mayor cantidad de acero de refuerzo (hasta un 8% según el ACI).
- El limitar las armaduras como una fracción de la cuantía balanceada. Esta limitación tiene por objeto lograr un cierto nivel de comportamiento dúctil, asegurando que el acero de refuerzo entrará en fluencia antes de que el concreto alcance su deformación de agotamiento o rotura.

Sin embargo para el acero máximo permitido, la deformación en el acero depende de la forma del bloque comprimido de concreto y por lo tanto, la ductilidad de curvatura será distinta aún en elementos con igual peralte efectivo. Basta comparar la curvatura última de tres secciones: triangular, rectangular y T, las tres reforzadas con $0.75 A_{sb}$ y con el mismo peralte efectivo, la de mayor curvatura última será la sección T, le seguirá la rectangular y finalmente la menos dúctil será la triangular, a pesar que las tres cumplen con el límite de la Norma.

- El mismo término de cuantía, que en algunas geometrías no es aplicable. Por ejemplo secciones triangulares en flexión, secciones circulares, etc. Adicionalmente las secciones preesforzadas tenían sus propias definiciones de cuantías, distintas a las secciones reforzadas con acero convencional.
- El especificar límites del refuerzo distintos para secciones de concreto armado y preesforzado.
- El utilizar expresiones (límites) distintas para la redistribución de momentos en elementos de concreto armado y preesforzado.
- La interpolación de los factores ϕ para columnas con baja carga axial. Los diagramas de interacción que resultan al aplicar la interpolación en los factores de reducción de resistencia, presentan una “colita” en la zona de cargas axiales bajas. Esta “colita” no tiene sentido físico, la inconsistencia estriba en que en esta zona, al aumentar la carga axial la resistencia en flexión se reduce, situación que no se produce en los diagramas de resistencia nominal.

17.4 Conceptos Centrales del Diseño Unificado

- Las hipótesis y metodologías para el cálculo de las resistencias nominales de secciones en flexión simple o compuesta, no se han modificado.
- Se elimina el concepto de cuantía balanceada y la limitación de la cantidad máxima de acero como una fracción de esta.
- Se define el concepto de secciones controladas por tracción y por compresión. En las secciones controladas por compresión, normalmente columnas con cargas axiales altas, el comportamiento está gobernado por el agotamiento (ϵ_{cu}) del concreto sin que el acero de tracción haya llegado a la fluencia en tracción.

- Las secciones controladas por tracción o por compresión, se definen en función de la magnitud de la deformación del acero más alejado del borde comprimido cuando la sección alcanza su resistencia nominal.
- Los factores de Reducción de Resistencia (ϕ) dependen de la deformación neta del acero (ϵ_t) más alejado del borde comprimido cuando la sección desarrolla su resistencia nominal (M_n). En consecuencia los factores de reducción dependerán del comportamiento de la sección, es decir, si se trata de una sección controlada por tracción o por compresión.
- La deformación neta del acero (ϵ_t) más alejado del borde comprimido cuando la sección desarrolla su resistencia nominal (M_n), es una medida del comportamiento esperado de la sección al alcanzar su resistencia máxima. También puede ser una medida de alerta, bajo cargas de servicio, de posibles problemas de deflexiones excesivas o agrietamiento excesivo.
- Las disposiciones son igualmente aplicables a vigas y columnas de cualquier geometría y arreglo o distribución del refuerzo y combinaciones de refuerzo convencional y preesforzado.

17.5 Nuevas definiciones a partir del ACI-02

- Se elimina, para flexión simple y compuesta, la definición tradicional de peralte efectivo d . Esta ha sido remplazada por - dt - la distancia entre la fibra extrema en compresión y el centroide del acero de refuerzo más alejado. La figura 17-2 ilustra la nueva definición.

Sin embargo, para cortante y torsión el ACI ha retenido la definición clásica de peralte efectivo (d).

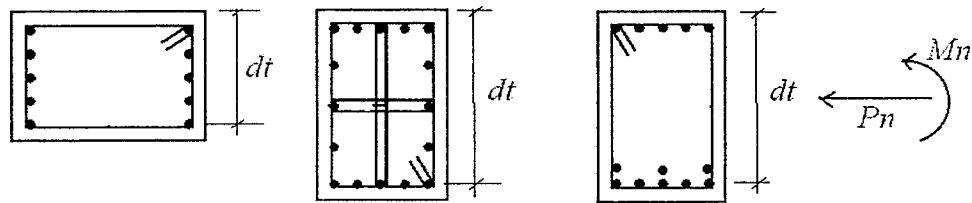


Fig. 17-2 Definición de dt

- La deformación ϵ_t en el acero de tracción, se define como la deformación neta en el acero más alejado cuando la sección alcanza su resistencia nominal. Se excluyen las deformaciones en el acero debidas al preesfuerzo, flujo plástico, retracción, cambios de temperatura.
- Secciones controladas por compresión, por tracción o de transición. Las secciones se clasifican de acuerdo a la magnitud de la deformación del acero ϵ_t cuando alcanzan o desarrollan su Resistencia Nominal, tal como se indica en la figura 17-3.

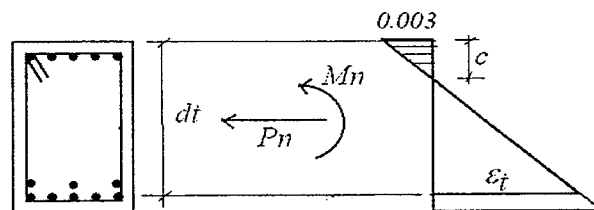


Fig. 17-3 Comportamiento de una sección definido por ϵ_t

Para cualquier geometría y distribución del acero de refuerzo, la relación entre la profundidad del eje neutro y la deformación en el acero más alejado, viene dada por la

ecuación 17-7 (asumiendo $\epsilon_{cu} = 0.003$), la cual es una relación del tipo geométrico basada en la hipótesis de que las secciones permanecen planas.

$$c/dt = 0.003 / (0.003 + \epsilon_t) \quad (17-7)$$

$$\epsilon_t = 0.003 (dt/c - 1) \quad (17-8)$$

Dependiendo del valor de ϵ_t , las secciones pueden clasificarse como se indica a continuación:

- a) **Secciones Balanceadas:** Cuando $\epsilon_t = \epsilon_y$. Esta definición es igual a la clásica empleada en estos apuntes, correspondiente a secciones con falla balanceada.

$$\epsilon_t = f_y / E_s \quad \epsilon_t = 0.0021 \quad (\text{para } f_y = 4,200)$$

Equivale a: $c/dt \approx 0.588 \quad (\text{para } f_y = 4,200) \quad (17-9)$

- b) **Secciones Controladas por Compresión:** Cuando $\epsilon_t \leq \epsilon_y$. Esta definición es similar a la de secciones sobre reforzadas o secciones con falla en compresión.

$$\epsilon_t \leq f_y / E_s \quad \epsilon_t \leq 0.0021 \quad (\text{para } f_y = 4,200)$$

Equivale a: $c/dt \geq 0.588 \quad (\text{para } f_y = 4,200) \quad (17-10)$

Para las secciones controladas por compresión los factores de reducción de resistencia que, de acuerdo a los valores de ϕ adoptados por de la Norma E.060, que deben considerarse son:

$$\phi = 0.70 \quad (\text{elementos con estribos})$$

$$\phi = 0.75 \quad (\text{elementos con espirales que cumplan con 16.4.1})$$

- c) **Secciones Controladas por Tracción:** Cuando $\epsilon_t \geq 0.005$. Nótese que esta limitación es independiente de la calidad del acero.

$$\epsilon_t \geq 0.005 \quad (\text{independiente de } f_y) \quad \text{para } f_y = 4,200 \quad \epsilon_t \geq 2.38 \epsilon_y$$

Equivale a: $c/dt \leq 0.375 \quad (17-11)$

Para las secciones controladas por tracción, el factor de reducción de resistencia que deberá considerarse es:

$$\phi = 0.9$$

- d) **Secciones de Transición**

$$\epsilon_y < \epsilon_t < 0.005$$

$$0.375 < c/dt < 0.588 \quad (17-12)$$

Para las secciones de transición, el factor de reducción de resistencia es variable y puede obtenerse por interpolación lineal como se muestra en la figura 17-4.

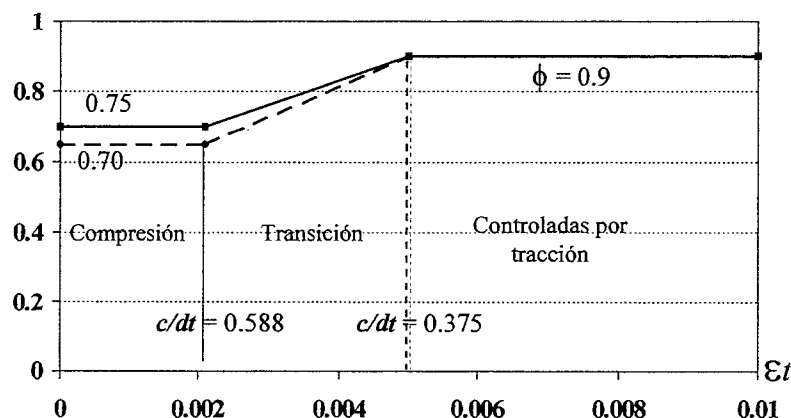


Fig. 17-4 Valores de ϕ para las secciones de transición ($f_y = 4200$)

$$\phi = 0.555 + 69 \epsilon_t \leq 0.9 \quad (\text{secciones con estribos y } f_y = 4,200) \quad (17-13)$$

$$\phi = 0.641 + 51.7 \epsilon_t \leq 0.9 \quad (\text{secciones con espirales y } f_y = 4,200) \quad (17-14)$$

17.6 Disposiciones Específicas para Vigas del ACI

- Se considera a una sección como viga si: $P_u < 0.1 f'_c A_g$. Esta limitación no estuvo presente en el Apéndice B del ACI-99, al parecer el ACI-02 resolvió insistir con este límite arbitrario para diferenciar una viga de una columna.
- La deformación mínima del acero en tracción cuando la sección alcanza su resistencia nominal deberá ser $\epsilon_t \geq 0.004$. Este límite inferior para la deformación del acero, no estuvo presente en el Apéndice B del ACI-99. En teoría se podían diseñar vigas con secciones controladas por compresión o de transición, reduciendo el valor de ϕ como se indica en la figura 17-4. Sin embargo esto no resultaría económico ya que al reducir ϕ se reduce la resistencia de diseño y esto obliga a colocar aún más acero.

Al parecer el ACI resolvió mantener la "tradición" e intentar garantizar por medio de esta limitación, un cierto nivel mínimo de ductilidad en las secciones de vigas.

Las consecuencias de imponer este límite en la deformación del acero son:

- Obliga a que $c/dt \leq 0.43$ (para cualquier valor de f_y)
- Para una sección rectangular con $f_y=4200$, equivale a limitar el área de acero a un máximo de $A_s \leq 0.73 A_{sb}$.

Sin embargo, para un valor de $\epsilon_t = 0.004$ el valor del factor de reducción de resistencia que resulta de emplear la ecuación 17.13 es $\phi \approx 0.83$.

En general, las vigas deberían diseñarse para lograr que $\epsilon_t \geq 0.005$ y así poder utilizar el valor de $\phi = 0.9$. En secciones rectangulares para lograr que $\epsilon_t \geq 0.005$ es necesario limitar:

$$A_s < 0.64 A_{sb} \quad (\text{para } f_y=4200) \quad c/dt \leq 0.375$$

Aumentar el área de acero por encima de $0.63 A_{sb}$ no es conveniente ya que ϕ se reduce y no se gana resistencia de diseño. Mejor es agregar acero en compresión para levantar el eje neutro y lograr que la sección sea del tipo controlada por tracción.

En la tabla a continuación se comparan los aceros máximos en vigas para secciones rectangulares con $f_y = 4,200$. El ACI exige un 15% menos de acero máximo

f'_c	ACI - 99 (1)		ACI - 02 (2)	
	A_s max	c/dt	A_s max	c/dt
210	1.59%	0.441	1.35%	0.375
280	2.13%	0.441	1.81%	0.375
350	2.50%	0.441	2.13%	0.375

(1) Calculado para $0.75 A_{sb}$
 (2) Calculado para $\epsilon_t = 0.005$

17.7 Redistribución de Momentos

La redistribución de momentos flectores se presenta en el Capítulo 20 de estos apuntes. El ACI, a partir del 2002, ha modificado las expresiones que se utilizaron durante muchos

redistribuir momentos, sin embargo no ha modificado el máximo de redistribución aceptado (20%).

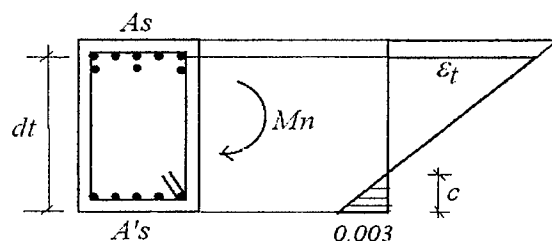


Fig. 17-5 Redistribución de momentos negativos

Con relación a la figura 17-5, el ACI permite la redistribución solo si en la sección en la cual se reduce el momento negativo se cumple:

$$\epsilon_t \geq 0.0075 \quad (\approx 3.6 \epsilon_y \text{ para } f_y = 4,200) \quad \text{Independiente del valor de } f_y$$

$$\text{Equivale a: } c/dt \leq 0.29$$

En una sección rectangular, sin acero en compresión, lo anterior equivale a limitar el área de acero a $A_s \leq 0.48 A_{sb}$ (para $f_y = 4,200$).

El porcentaje de redistribución permitido es :

$$\Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\% \quad (17-15)$$

Esta expresión se aplica tanto a elementos de concreto armado como a elementos preesforzados. Como siempre, la redistribución no es aplicable a elementos isostáticos, vigas analizadas por el método de coeficientes y losas en dos sentidos analizadas por el Método Directo.

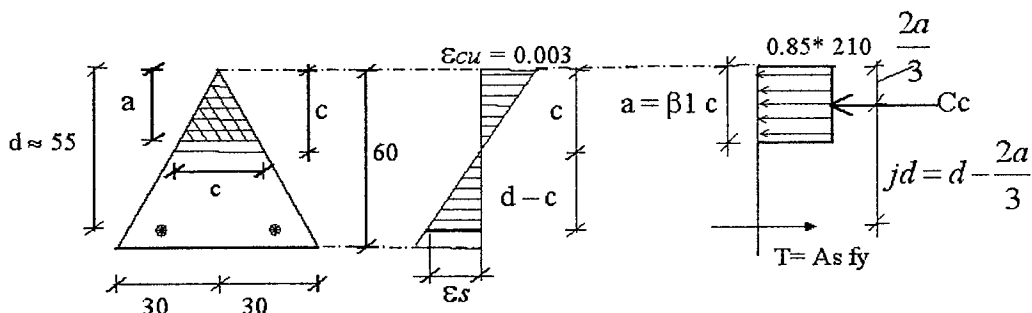
17.8 Ventajas del Diseño Unificado Adoptado por el ACI

A continuación se señalan algunas de las ventajas de haber adoptado el llamado "diseño unificado":

- Se da el mismo tratamiento para secciones en flexión y flexocompresión.
- Se ha introducido el concepto de secciones controladas por compresión y el de secciones controladas por tracción. Con esto se ha eliminado el concepto de cuantía o acero balanceado y en consecuencia también el límite absoluto en la cantidad de acero de tracción ($0.75 A_{sb}$). Por lo tanto, ya no es necesario el contar con diversas expresiones o ecuaciones particulares, para cada geometría y arreglo de los aceros de refuerzo, para el cálculo de A_{sb} .
- Se cubre con facilidad la distinción de secciones con falla en tracción (las que antes se denominaban subreforzadas) y las de falla por compresión (antes, sobre reforzadas) de cualquier geometría.
- Se cubre con facilidad la definición de secciones con falla en tracción o compresión en los casos de flexión biaxial.
- Con los mismos conceptos o definiciones se cubre la gama del concreto reforzado, preesforzado y combinaciones de ambos.
- Se cubre con facilidad el caso de acero en varias capas o niveles.
- Se cubren con facilidad las Secciones Compuestas.
- Se ha corregido o mejorado la interpolación de los factores de reducción de resistencia en las columnas controladas por tracción.
- Se utilizan las mismas expresiones para la redistribución de momentos tanto en elementos de concreto armado como en elementos preesforzados.

- Se ha creado una dependencia entre el factor de reducción de resistencia y el comportamiento de la sección cuando esta alcanza su resistencia nominal.
- El haber adoptado una definición de secciones controladas por tracción basado en la magnitud de la deformación del acero, conduce a que secciones con geometría distinta pero con el mismo valor de dt , tengan la misma curvatura última cuando el valor de ϵ_t se fija en el mínimo aceptado (0.005). Esto se puede comprobar si se examina las ecuaciones 16-7 y 16-11 conjuntamente con la definición de curvatura máxima (ϵ_{cu} / c). A igualdad de dt se tendrá la misma curvatura, independientemente de la forma de la sección.
- Para las secciones en flexión simple o compuesta se ha eliminado el concepto tradicional de peralte efectivo reemplazándolo por dt , el cual se puede calcular sin ambigüedades.

Ejemplo 17-1 – Apliquemos las ideas del diseño unificado a la sección triangular que se muestra a continuación y que fue resuelta en el ejemplo 10-4. La sección está reforzada con 2 fierros de 1" ($A_s = 10.2 \text{ cm}^2$) siendo $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ y $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$.



La primera dificultad que surge al aplicar el ACI-99 es la relativa a la definición de cuantía en flexión. Esta dificultad ya la hemos comentado, sin embargo para resolver el problema podemos obviar esta definición.

Para el cálculo de la resistencia nominal no hay diferencias entre el ACI-99 y el ACI-11, por lo tanto tendremos:

$$T = A_s f_y = 10.2 \times 4,200 = 42,840 \text{ kg}$$

$$C_c = T$$

$$C_c = 0.85 \times 210 \times a^2 / 2 = 42,840 \text{ kg} \Rightarrow a = 21.91 \text{ cm}$$

$$c = a / 0.85 = 25.78 \text{ cm}$$

$$c/d \approx 0.47 < 0.588 \quad (\text{el acero fluye})$$

$$\epsilon_s \approx 0.0034 \approx 1.62 \epsilon_y$$

$$M_n = C_c \times jd = T \times jd = A_s f_y (jd)$$

$$M_n = 42,840 \times 40.39 / 100 = 17,305 \text{ kg-m}$$

$$\phi_u = 0.003 / 25.78 \approx 11.6 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\text{curvatura última})$$

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

$$0.75 A_s b \approx 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \text{ fierros } 1'' \text{ ok}$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 17,305 \approx 15,575 \text{ kg-m}$$

Si colocáramos una armadura equivalente a $0.75 A_s b$ (12 cm^2) la posición del eje neutro estaría en $c = 27.96 \text{ cm}$ ($c/d = 0.51$) y la deformación en el acero sería $\epsilon_s \approx 0.0029$ ($\approx 1.4 \epsilon_y$). La curvatura última de la sección sería $10.7 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$. En esta situación, la

deformación en el acero que resulta es inconsistente con respecto a las secciones rectangulares armadas con $0.75 A_{sb}$.

- Con el Apéndice B del ACI-99: $d_t = d = 0.55 \text{ m}$ $c/d_t \approx 0.47$ $\epsilon_t \approx 0.0034$

Este Apéndice no impone ningún límite mínimo a la deformación del acero en tracción, por lo tanto esta sección clasificaría como una de transición y el factor ϕ , calculado con 17-13, es:

$$\phi = 0.555 + 69 \times 0.0034 \approx 0.79$$

$$\phi Mn = 0.79 \times 17,305 \approx 13,670 \text{ kg-m} \quad (-12\%)$$

- Con el ACI-11: $d_t = d = 0.55 \text{ m}$ $c/d_t \approx 0.47$ $\epsilon_t \approx 0.0034$.

La sección no se acepta ya que $\epsilon_s < 0.004$ ó lo que es equivalente $c/d_t > 0.43$. Las alternativas son las de aumentar la calidad del concreto o la de colocar acero en compresión.

Calculemos la cantidad máxima de acero en tracción que se podría colocar en esta sección para que pueda considerarse como controlada por tracción. En el límite tendremos que $\epsilon_t = 0.005$ y $c/d_t = 0.375$, por lo tanto:

$$c_{\max} = 0.375 \times 55 = 20.625 \text{ cm} \quad a_{\max} = 0.85 c_{\max}$$

$$0.85 \times 210 \times a_{\max}^2 / 2 = A_s f_y$$

$$A_s = 6.53 \text{ cm}^2$$

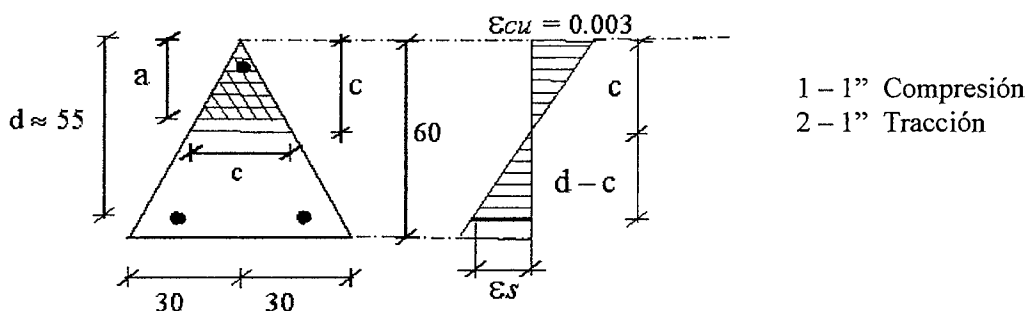
$$\phi Mn = 10,690 \text{ kg-m} \quad (\phi = 0.9)$$

$$\phi u = 0.003 / 20.625 \approx 14.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \quad (\text{curvatura última})$$

Es claro que con el ACI-11 la cantidad máxima de acero que podríamos colocar en esta sección, para que pueda considerarse como controlada por tracción, es bastante menor que la permitida hasta el ACI-99 correspondiente a $0.75 A_{sb}$ (12 cm^2).

También se aprecia que en este caso la curvatura última mínima, que puede ser una medida de la ductilidad de la sección, exigida por el ACI-11, es bastante más alta de la que se obtiene al limitar el acero a $0.75 A_{sb}$.

Ejemplo 17-2 – Veamos como se modifica el comportamiento de la sección triangular del ejemplo 17-1 al agregar 1 fierro de 1" ($A_s = 5.1 \text{ cm}^2$) en compresión.



Asumiendo, con cargo a verificar, que tanto el acero en tracción como el de compresión están en fluencia cuando la sección alcanza su resistencia nominal, se tiene:

$$0.85 \times 210 \times a^2 / 2 + 5.1 \times 4,200 = 10.2 \times 4,200$$

$$a = 15.49 \text{ cm} \quad c = 18.23 \text{ cm} \quad c/d_t \approx 0.33$$

$$\epsilon'_s = 0.002177 \approx 1.04 \epsilon_y$$

$$\epsilon_t = \epsilon_s = 0.00605 \approx 2.9 \epsilon_y$$

$$C_c = 21,415 \text{ kg} \quad (\text{compresión resultante en el concreto})$$

$$M_n = 5.1 \times 4200 \times 50 + 21,415 \times (55 - 2 \times 15.49/3) = 20,280 \text{ kg-m} \quad (\text{mom. respecto de } A_s)$$

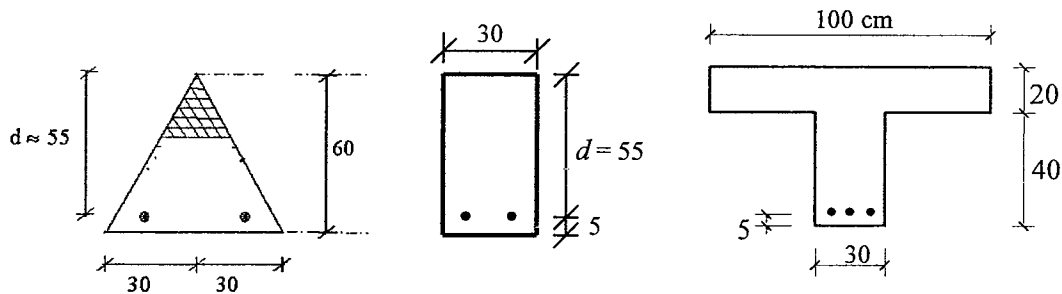
$$\phi u = 0.003/18.23 \approx 16.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m.} \quad (\text{curvatura última})$$

- Con el ACI-11: $dt = d = 0.55 \text{ m}$ $c/dt \approx 0.33$ $\epsilon_t \approx 0.00605$. Se trata de una sección controlada por tracción en consecuencia puede emplearse $\phi = 0.9$.

$$\phi M_n \approx 0.9 \times 20,280 = 18,250 \text{ ton-m} \quad (+17\% \text{ con respecto al ejemplo 17-1})$$

Conclusión: El acero en compresión modifica la posición del eje neutro y en este caso convirtió la sección de la zona de transición y no aceptada por el ACI-11 en una sección controlada por tracción. El acero en compresión, a diferencia de las secciones rectangulares, ha modificado de manera apreciable la resistencia de la sección. También su presencia ha aumentado la curvatura última de 11.6 a $16.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$.

Ejemplo 17-3 – Comparemos el comportamiento de tres secciones con distintas geometrías del bloque comprimido, pero con el mismo peralte efectivo ($d = dt = 0.55 \text{ m}$). Las tres secciones tendrán la armadura en tracción máxima permitida tanto por el ACI-99 como por el ACI-11. El concreto es de 210 kg/cm^2 y el acero de 4,200.



ACI-99 – Norma Peruana

Sección	$A_s \text{ (cm}^2\text{)} (*)$	$c \text{ (cm)}$	c/dt	ϵ_t	$\phi M_n \text{ (ton-m)}$	$\phi u \text{ (1/m} \times 10^{-3}\text{)}$
Triangular	12.0	27.96	0.51	$1.4 \epsilon_y$	15.1	10.7
Rectangular	26.3	24.27	0.44	$1.8 \epsilon_y$	44.4	12.4
Sección T	70.9	19.63	0.36	$2.6 \epsilon_y$	125.0	15.3

(*) Corresponde a $0.75 A_{sb}$

ACI-11

Sección	$A_s \text{ (cm}^2\text{)} (*)$	$c \text{ (cm)}$	c/dt	ϵ_t	$\phi M_n \text{ (ton-m)}$	$\phi u \text{ (1/m} \times 10^{-3}\text{)}$
Triangular	6.5	20.63	0.375	$2.4 \epsilon_y$	10.7 (-29%)	14.6
Rectangular	22.3	20.63	0.375	$2.4 \epsilon_y$	39.0 (-12%)	14.6
Sección T	74.5	20.63	0.375	$2.4 \epsilon_y$	130.2 (+4%)	14.6

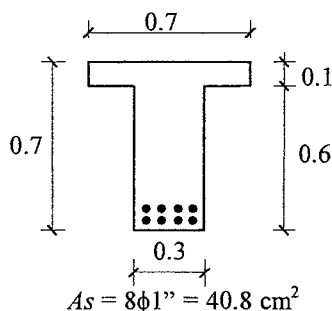
(*) Corresponde a una deformación $\epsilon_t = 0.005$

Nótese que la armadura máxima permitida por el ACI-11, para que la sección clasifique como controlada por tracción, es menor que la permitida por el ACI-99 tanto para la sección triangular como para la rectangular. Sin embargo permite un poco más de acero en la sección T. La sección triangular es la más afectada ya que con el ACI-11 la resistencia nominal máxima que puede alcanzar es alrededor del 70% de la que permitiría el ACI-99.

También es claro que la profundidad del eje neutro cuando la sección alcanza su resistencia nominal es la misma para las tres secciones de acuerdo al ACI-11. Lo mismo sucede con la curvatura última de la sección, en consecuencia las tres secciones, en teoría, alcanzan la misma curvatura en la falla mientras que en el ACI-99, las curvaturas últimas son distintas y en consecuencia también lo serán las ductilidades de curvatura.

Por lo tanto si la intención de la Norma al limitar el acero (ACI-99), o imponer una deformación mínima (ACI-11) tiene por objeto asegurar un cierto nivel de comportamiento dúctil en la sección, el ACI-11 es más uniforme o consistente.

Ejemplo 17-4 – Apliquemos las ideas del diseño unificado a la sección T que se muestra a continuación y que fue resuelta en el ejemplo 11-4. Se trata de una sección con una ala en compresión pequeña y con una armadura de tracción importante. La sección está reforzada con 8 fierros de 1" ($A_s = 40.8 \text{ cm}^2$) siendo $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ y $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$



- Con el ACI-99 y Norma Peruana:
 - $d \approx 61 \text{ cm}$
 - $A_{s \text{ max}} = 0.75 A_{sb} \approx 42 \text{ cm}^2$
 - $c \approx 22 \text{ cm}$ $c/d = 22/61 = 0.36 < 0.588$ se comprueba que el acero fluye
 - $M_n \approx 91.6 \text{ ton-m}$ $\phi M_n \approx 82.4 \text{ ton-m}$

- Con el ACI-11:
 - $dt \approx 64 \text{ cm}$
 - Deformación en el acero más alejado del borde comprimido (asociado a dt):

$$\epsilon_t \approx 0.00574 \approx 2.73 \epsilon_y$$

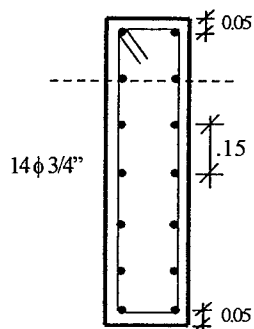
$$c/dt \approx 22 / 64 \approx 0.34 \quad (c/dt < 0.375)$$

Por lo tanto se trata de una sección controlada por tracción $\phi = 0.9$

$$\phi M_n \approx 82.4 \text{ ton-m}$$

Conclusión: Las secciones T, aún con alas pequeñas, normalmente cumplirán con el ACI-11 y no habrá diferencias en el cálculo de la resistencia de diseño con respecto al ACI-99.

Ejemplo 17-5 – Analizaremos la sección con acero distribuido en el alma que se muestra a continuación. Esta sección fue analizada en el acápite 10.14.



Sección 0.30 x 1.0

$$f'c = 210$$

$$fy = 4,200$$

Armadura total 14 barras de 3/4" @ 0.15 m

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

El primer problema que encontramos es el de definir el peralte efectivo d . Este hay que calcularlo como el centroide de las fuerzas en los aceros en tracción, para ello hay que determinar las deformaciones y esfuerzos reales del acero en tracción (aquellos ubicados debajo del eje neutro) cuando la sección alcanza su resistencia nominal en flexión. Este procedimiento se utilizó en el acápite 10.14 resultando en un valor $d \approx 65$ cm.

El siguiente problema que encontramos está relacionado con el cálculo de la cuantía balanceada para esta sección, ya que a partir de este valor la Norma fija la cantidad máxima de acero. Para solucionar este inconveniente, puede utilizarse la metodología presentada en el acápite 10.12 en el cual "estiramos" un tanto la definición.

Resultados del análisis:

$$c \approx 20.67 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s \approx 0.0108 \approx 5.1 \epsilon_y \quad (\text{deformación en el acero inferior})$$

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

- Con el ACI-11:

$$dt \approx 95 \text{ cm}$$

$$\epsilon_t \approx 0.0108 > 0.005$$

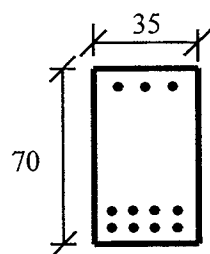
$$c/dt \approx 20.67 / 95 \approx 0.22 \quad (c/dt < 0.375)$$

Por lo tanto se trata de una sección controlada por tracción y $\phi = 0.9$

$$\phi Mn \approx 61 \text{ ton-m}$$

Conclusión: El tratamiento de este tipo de secciones con acero distribuido en el alma es más simple y consistente con el ACI-11.

Ejemplo 17-6 - Sección con acero en compresión. Esta sección fue diseñada en el ejemplo 12-1, para una resistencia requerida (M_u) de 80 ton-m, con los resultados del diseño, verifiquemos la resistencia de la sección.



$$A's = 8.52 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 3/4")$$

$$As = 40.8 \text{ cm}^2 \quad (8 \phi 1")$$

$$f'c = 210$$

$$fy = 4200$$

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

$$d \approx 61 \text{ cm} \qquad d' \approx 6 \text{ cm}$$

$$c = 25.53 \text{ cm} \qquad c/d = 0.418$$

$$\epsilon_s = 0.00417 \qquad (\text{calculado a la altura del centroide del acero en tracción})$$

$$M_n \approx 87.67 \text{ ton-m} \qquad (\text{calculado con } d = 61 \text{ cm})$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 87.67 \approx 78.9 \text{ ton-m}$$

Cantidad máxima de acero: $A_s \text{ max} = 0.75 A^R_{sb} + A's f'_{sb} / f_y \approx 43 \text{ cm}^2$ ok los 8 de 1"

- Con ACI-11:

$$d_t \approx 63.8 \text{ cm} \qquad c = 25.53 \text{ cm} \qquad c/d_t = 0.40 > 0.375$$

$$\epsilon_t \approx 0.0045 < 0.005$$

Se trata de una sección de transición con $\phi = 0.555 + 69 \times 0.0045 \approx 0.87$

$$\phi M_n = 0.87 \times 87.67 \approx 75.9 \text{ ton-m}$$

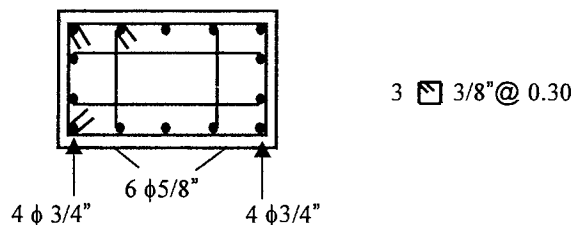
Conclusión: Para lograr que $\epsilon_t > 0.005$ es necesario reformular el diseño de secciones con acero en compresión, reduciendo por ejemplo, la cantidad máxima de acero en tracción que debe equilibrar el concreto (se podría reducir a $0.7 A_{sb}$ en lugar de $0.75 A_{sb}$) Otra posibilidad es la de aumentar el acero en compresión, por ejemplo, si se aumentara el acero en compresión a $2 - 1'' + 1 - 3/4''$ ($A's = 13.04 \text{ cm}^2$) sin modificar el acero en tracción, se tendría:

$$d_t \approx 63.8 \text{ cm} \qquad c \approx 22 \text{ cm} \qquad \epsilon_t \approx 0.0057 \Rightarrow \phi = 0.90$$

$$M_n \approx 90.36 \text{ ton-m} \qquad (\text{calculado con } d = 61 \text{ cm})$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 90.36 \approx 81.3 \text{ ton-m}$$

Ejemplo 17-7 - Estudiemos el efecto que tiene en los en los diagramas de interacción el haber adoptado factores de reducción de resistencia dependientes de la deformación en el acero ϵ_t . Para ello consideremos una columna de 0.40×0.80 con flexión alrededor de su eje fuerte (resuelta en el ejemplo 16-4) armada con $8 - 3/4'' + 6 - 5/8''$ ($\rho \approx 1.1 \%$) y concreto $f'_c = 210$.



La tabla a continuación resume los valores de la resistencia nominal de la sección para distintas posiciones del eje neutro. También se indican los valores de los factores de reducción de resistencia. Con el ACI-99 la interpolación de los factores se inicia para una carga axial inferior a $0.1 f'_c A_g$ mientras que para el ACI-11, los factores dependen de la deformación en el acero más alejado del borde comprimido. Es claro que los factores son distintos para la misma resistencia nominal de la sección.

c (cm)	P_n (ton)	M_n (t-m)	ϕ ACI-99	ϕ ACI-02
11.10	0.6	50.6	0.90	0.90
13.00	17.5	55.9	0.86	0.90
15.00	37.8	61.4	0.82	0.90
17.00	57.5	66.4	0.78	0.90
19.00	75.6	70.9	0.74	0.90
21.00	91.6	74.5	0.71	0.90
23.00	106.0	77.5	0.70	0.90
25.00	122.4	80.2	0.70	0.90
30.00	162.9	85.9	0.70	0.86
35.00	202.1	89.8	0.70	0.79
40.00	242.8	91.7	0.70	0.73
45.00	284.9	91.3	0.70	0.70
50.00	332.8	87.0	0.70	0.70
55.00	377.6	82.2	0.70	0.70
65.00	460.5	70.4	0.70	0.70
79.00	566.8	47.3	0.70	0.70

Las figuras a continuación muestran los diagramas de interacción construidos con ambas versiones del ACI. Las resistencias nominales son las mismas en ambos casos, ya que tal como se comentó, el ACI-11 no ha modificado en absoluto el cálculo de las resistencias nominales de una sección de concreto armado.

En el diagrama construido con el ACI-99, se presenta la "colita" (resaltada con un círculo en la figura) en la zona de cargas axiales bajas cuando la columna trabaja más como una viga. Esta "colita" ya hemos comentado que no tiene sentido físico, es el resultado de un proceso matemático que intenta variar de manera continua el factor de reducción desde 0.7 (columna con estribos) hasta el valor de 0.9 que corresponde a la flexión pura.

En el diagrama construido con el ACI-11, la inconsistencia mencionada en el párrafo anterior ha desaparecido. Sin embargo se presenta, a mi entender, una inconsistencia peor, se trata de la concavidad que se produce en el diagrama (resaltada con un círculo en la figura) para cargas axiales relativamente altas. Esta concavidad se explica si se observan los valores de ϕ de la tabla anterior.

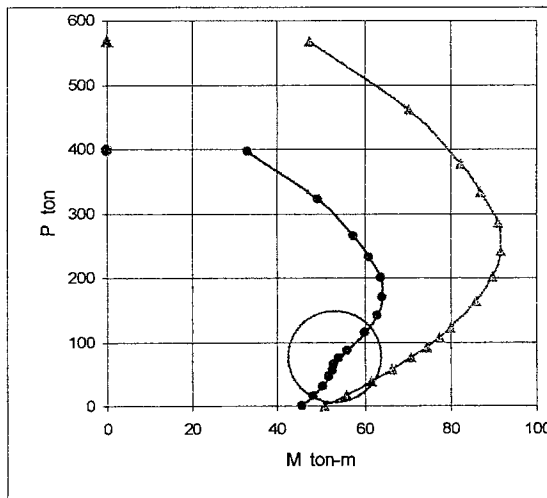


Diagrama de interacción ACI-99

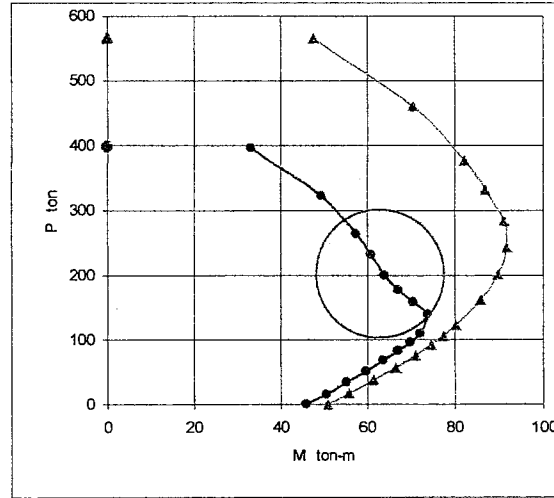
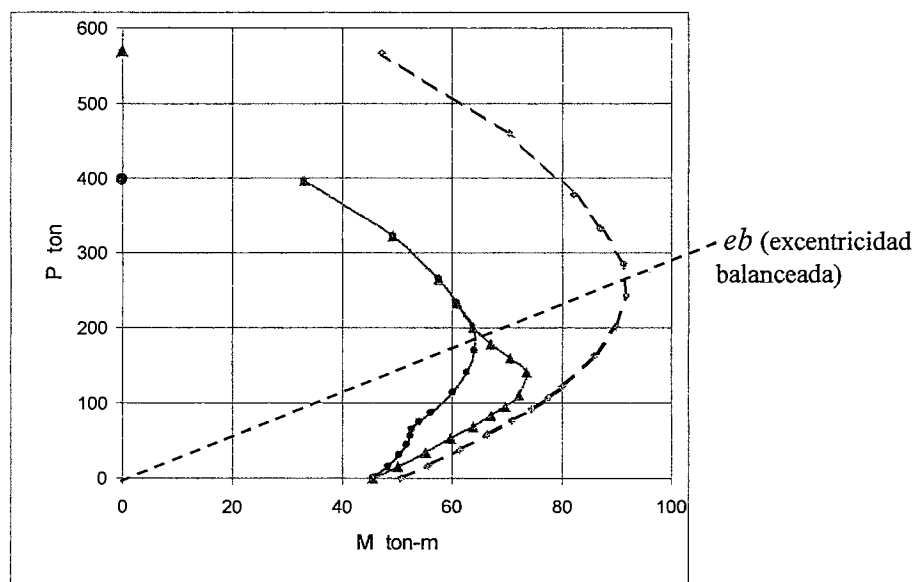


Diagrama de interacción ACI-11

En la figura a continuación se han superpuesto los diagramas para resaltar ambas inconsistencias. Nótese que el diagrama de resistencias de diseño del ACI-11, en la zona de cargas axiales bajas, está mucho más pegado a la curva de resistencia nominal, en consecuencia, el ACI-11 exige menos acero de refuerzo en la zona de cargas axiales bajas en comparación al ACI-99.

Nótese también, que en el diagrama de resistencias de diseño construido con el ACI-11, es casi imposible identificar el punto de falla balanceada si no se conoce el diagrama de resistencias nominales.



Estas inconsistencias o faltas de significado físico que se producen en los diagramas de interacción construidos con los factores ϕ especificados por el ACI a partir del 2002 (véase también el ábaco de Wight – MacGregor, página 418) son las principales razones por las cuales la Norma E.060 del 2009 no adoptó el Diseño Unificado.

Ejemplo 17-8 - Para cuantificar las diferencias que se producen en las demandas de acero de refuerzo en una columna con carga axial baja, diseñemos una columna de sección 0.40×0.80 con acero uniformemente repartido en las cuatro caras y concreto de $f'c = 210$. Las resistencias requeridas son:

$$\begin{aligned}
 P_u &= 100 \text{ ton} \\
 M_u &= 55 \text{ ton-m} \\
 e &= M_u/P_u = 0.55 \text{ m} \quad e/t = 0.55 / 0.8 = 0.69
 \end{aligned}$$

- Con el ACI-99 y Norma Peruana:

El valor de la carga axial por debajo de la cual puede iniciarse la interpolación de los factores de reducción de resistencia entre 0.7 y 0.9, es:

$$P_u \text{ transición} = 0.1 \times 210 \times 40 \times 80 \approx 67 \text{ ton} < 100 \text{ ton}$$

En consecuencia esta sección debe diseñarse con $\phi = 0.7$. Para la combinación P_u , M_u y una armadura uniformemente distribuida en las cuatro caras, los resultados son:

$$\begin{aligned}
 A_{st} &\approx 32 \text{ cm}^2 \quad \rho \approx 1\% \quad (\text{área total de acero necesaria}) \\
 c &= 27.56 \text{ cm} \quad \epsilon_t = 0.00506
 \end{aligned}$$

La resistencia nominal de esta sección reforzada con 32 cm^2 de acero de acero es:

$$P_n = 100 / 0.7 \approx 143 \text{ ton} \quad M_n = 55 / 0.7 \approx 78.6 \text{ ton-m}$$

- Con el ACI-11:

$$d_t \approx 64 \text{ cm}$$

La deformación en el acero mas alejado del eje neutro, calculada líneas arriba, indica que se trata de una sección controlada por tracción ($\epsilon_t > 0.005$) en consecuencia el valor de ϕ permitido es de 0.9 y las resistencias nominales asociadas a P_u , M_u son:

$$P_n = 100 / 0.9 \approx 111 \text{ ton} \quad M_n = 55 / 0.9 \approx 61.1 \text{ ton-m}$$

Para esta combinación de P_n y M_n y considerando una armadura uniformemente distribuida en las cuatro caras, los resultados son:

$$\begin{aligned} A_{st} &\approx 21 \text{ cm}^2 & \rho &\approx 0.66\% & (\text{área total de acero necesaria}) \\ c &= 22.14 \text{ cm} & c/dt &\approx 0.3 & \epsilon_t = 0.00703 \end{aligned}$$

El valor de c/dt o de ϵ_t calculado, confirma nuevamente que se trata de una sección controlada por tracción.

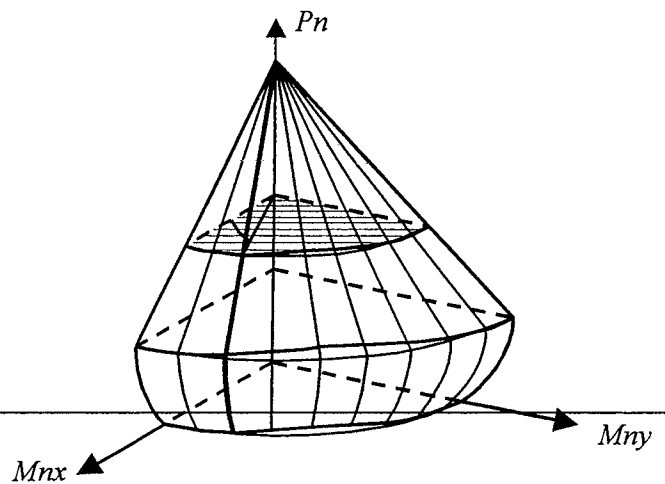
Conclusión: La demanda de acero de refuerzo en columnas con baja carga axial, es (por lo menos en este caso) notablemente inferior con el ACI-11 (21 cm² contra 32 lo que representa un 34% menos). En la práctica, en el armado final de esta sección, no habría diferencias si respetamos la cuantía mínima en columnas del 1%.

17.9 Lecturas

- 17.1 Appendix B - Unified Design Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. ACI 318-99.
- 17.2 Unified Design Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members. Robert F. Mast. ACI Structural Journal. March – April 1992.
- 17.3 ϕ Factors and Other Anomalies. William Gamble. ACI Concrete International. August 1998.
- 17.4 ACI 318-95 Appendix B: Beam Design Applications. Richard Furlong. ACI Concrete International. June 1997.
- 17.5 Unified Design Recommendations for Reinforced, Prestressed and Partially Prestressed Concrete Bending and Compression Members. Antoine Naaman. ACI Structural Journal. March - April 1992.
- 17.6 Designing Reinforced Concrete Columns. Mehdi Setareh. ACI Concrete International. September 2004.

CAPITULO 18

Flexión Biaxial



18.1 Introducción

Hasta ahora hemos estudiado la manera de analizar y diseñar secciones de concreto armado con uno o dos ejes de simetría sometidas a flexión (con o sin carga axial) alrededor de uno de los ejes principales. Sin embargo existen con frecuencia situaciones en las cuales, debido a las sollicitaciones externas, se presentan simultáneamente momentos flectores alrededor de ambos ejes principales.

La flexión biaxial puede presentarse en vigas y en columnas. El término "vigas" debe entenderse en un sentido amplio, es decir todo elemento con una carga axial pequeña o nula, independientemente de su posición dentro de la estructura.

18.2 Flexión Biaxial en Vigas

La flexión biaxial en vigas, por lo general, sucede solamente en vigas aisladas sin la losa de piso que las rodee. Es importante reconocer que las vigas aisladas pueden deformarse libremente vertical y horizontalmente y por lo tanto, dependiendo de las sollicitaciones externas, desarrollar flexión biaxial.

Un caso típico de elementos aislados se presenta en las vigas que soportan un muro o elemento de cierre que está sometido a fuerzas laterales de viento o sismo. En este caso la viga debe soportar además de su peso propio y el peso del muro o elemento de cierre que actúan en un plano vertical, la reacción horizontal del elemento de cierre produciéndose flexión vertical y horizontal. Otro caso frecuente es el de las vigas "carrileras" es decir aquellas sobre las que se desplazan los puentes grúa, en estas se produce flexión biaxial por el peso del puente grúa y por el efecto del frenado transversal del mismo.

La figura 18-1 muestra la sección transversal de una viga de concreto armado sometida a flexión alrededor de sus ejes principales. La carga W_x produce flexión alrededor del eje y (M_y) y la carga W_y flexión alrededor del eje x (M_x).

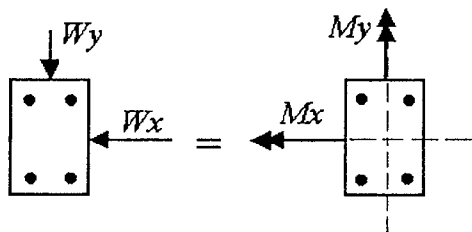


Fig. 18-1 Viga con sollicitaciones que producen flexión biaxial.

Si la viga de la figura anterior no fuera aislada, es decir si fuera parte por ejemplo de un sistema de piso conformado por vigas y losas, la losa o diafragma impediría la deformación horizontal y forzaría a que el eje neutro sea paralelo (o casi) a la losa, por lo tanto la sección se puede diseñar suponiendo flexión únicamente alrededor del eje x (M_x). La figura 18-2 esquematiza esta situación.

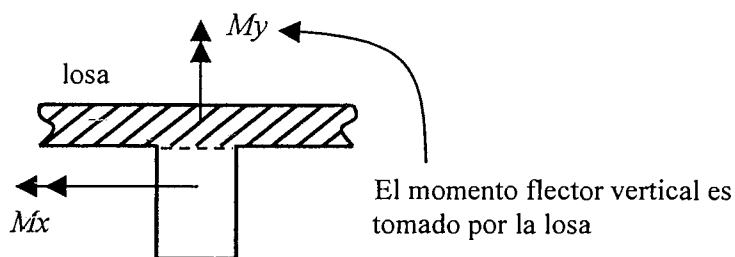


Fig. 18-2 Viga que forma parte de un sistema de piso.

Una situación similar se produce en los techos inclinados, como el mostrado en la figura 18-3, ya sea una losa maciza apoyada sobre vigas intermedias o un aligerado. En este caso debido a la inclinación del techo las cargas de gravedad - W - se descomponen en W_x , W_y . Podría pensarse que estas dos componentes originan flexión biaxial en la viga, sin embargo la componente W_x es tomada por la losa. La losa, junto con las vigas extremas (las de borde) conforman, debido al monolitismo del sistema, una viga doble T de gran peralte la que soporta el momento M_y y en consecuencia las vigas (o el aligerado si fuera el caso) trabajan soportando únicamente la flexión alrededor de un eje paralelo a la losa originada por la componente W_y .



Fig. 18-3 Losa o techo inclinado.

Un caso particular lo constituyen las vigas aisladas con sección transversal asimétrica como la mostrada en la figura 18-4. Al ser una viga aislada se supone que entre sus apoyos, es libre de deformarse vertical y horizontalmente. En este caso el plano de carga o de la flexión (que se asume pasa por el centro de corte de la sección) no es un eje de simetría de la sección.

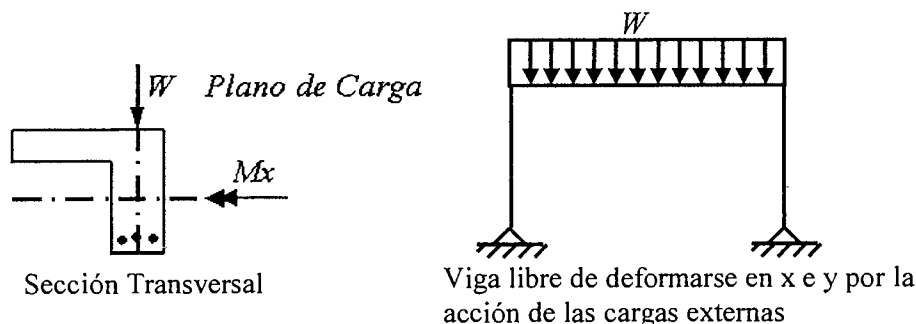
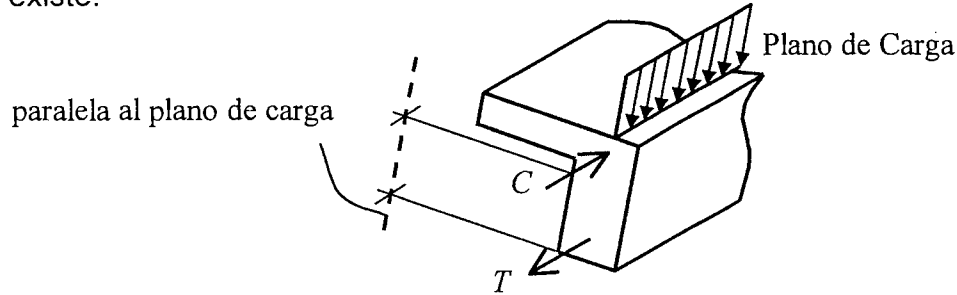


Fig. 18-4 Viga aislada con sección transversal asimétrica con respecto al plano de carga.

Las cargas aplicadas originan momentos flectores que deben ser resistidos por pares internos cuyo momento resultante, en este caso, es alrededor de un eje horizontal. Como sabemos el par interno que resiste la flexión proviene de la compresión en el concreto y de la tracción en el acero. Ya que las cargas aplicadas originan únicamente un momento alrededor de un eje horizontal, las fuerzas internas resultantes C y T deberán estar contenidas en el plano de cargas (en este caso vertical) o en un plano paralelo a él (ver figura a continuación), de no ser así el par interno originaría flexión biaxial la cual en este caso, no existe.



En este caso particular, de una sección transversal en L invertida, la condición de que la resultante de las compresiones y de las tracciones estén contenidas en el plano de carga vertical, conducirá a un bloque de compresiones de forma triangular como se indica en la figura 18-5. La explicación física de esto es simple: si el eje neutro fuera horizontal, el centroide del bloque comprimido donde actúa la resultante de compresiones, no coincidiría (sobre la misma vertical) con el centroide de la resultante de las tracciones en el acero, originando un par interno alrededor de un eje vertical que no está equilibrado por las cargas externas.

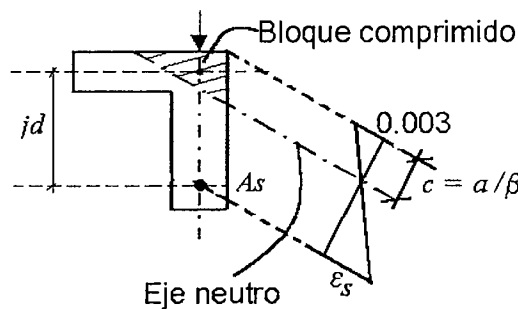


Fig. 18-5 Inclinación del eje neutro en una sección asimétrica con plano de cargas vertical.

Las ecuaciones clásicas que se presentan en los textos de resistencia de materiales para la determinación de los esfuerzos en secciones sometidas a flexión biaxial, son válidas (despreciando el aporte del acero) solamente cuando la sección de concreto armado no está agrietada. La investigación de los esfuerzos en el acero y en el concreto en una sección agrietada bajo cargas de servicio (análisis elástico), utilizando las ideas de la sección transformada agrietada, no es tarea simple ya que se desconoce la profundidad e inclinación del eje neutro y adicionalmente los esfuerzos en el acero varían aún entre las barras de una misma capa. En consecuencia será necesario acudir a las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas para hallar la solución, normalmente será necesario proceder por aproximaciones sucesivas.

En una sección en flexión biaxial, el eje neutro está inclinado con respecto a la horizontal, la profundidad y el grado de inclinación del eje neutro depende de las propiedades de la sección (calidad del concreto, geometría y disposición de las armaduras) y de la relación entre los momentos flectores actuantes (M_x / M_y). En general el eje neutro no es perpendicular al plano de flexión ni paralelo al vector momento resultante. Solamente se conoce la inclinación del eje neutro cuando la sección transversal es cuadrada con el mismo acero en las cuatro caras y además los momentos

flectores alrededor de sus dos ejes principales son iguales ($M_x = M_y$), en este caso particular, el bloque de compresión tiene la forma de un triángulo isósceles.

La manera de analizar una sección de concreto armado sometida a flexión biaxial sin carga axial se muestra en la figura 18-6. En ella se muestra una sección rectangular perteneciente a una viga aislada, sometida a momentos flectores alrededor de ambos ejes principales con armadura en las cuatro esquinas. Se quiere determinar las resistencias nominales de la sección M_x , M_y . En la figura 18-6 se muestra el estado de deformaciones y fuerzas en el concreto y en el acero para una posición particular del eje neutro definida por su inclinación y profundidad. Será necesario variar la profundidad del eje neutro hasta lograr el equilibrio de la sección, deberá cumplirse:

- Tracción = Compresión
- Σ Momentos $x = M_x$ (resistencia nominal)
- Σ Momentos $y = M_y$ (resistencia nominal)

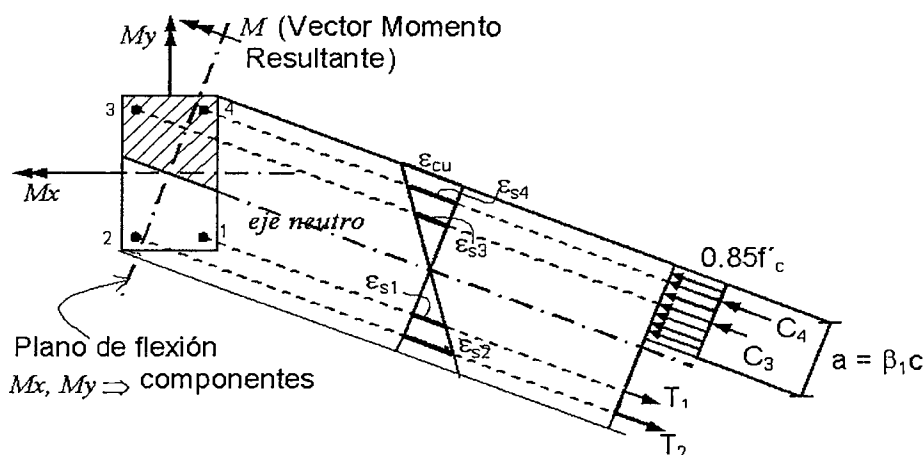


Fig. 18-6 Deformaciones y fuerzas internas en una sección en flexión biaxial para una posición particular del eje neutro.

Para cada inclinación del eje neutro que se seleccione, se podrá calcular por iteración sobre su profundidad, hasta lograr el equilibrio de fuerzas en la sección, el par de valores M_x , M_y que agotan la capacidad de la sección. La sucesión de cálculos permitirá construir el diagrama de interacción de la sección. La figura 18-7 (adaptada de Park – Paulay), muestra las formas, solamente en el primer cuadrante, que tendrían los diagramas o curvas de interacción de secciones rectangulares con la misma cantidad de acero en cada esquina. Han sido construidas para una cuantía total creciente y podrían utilizarse para el diseño. Se observa que a medida que la cuantía total aumenta, las curvas cambian de forma o de perfil.

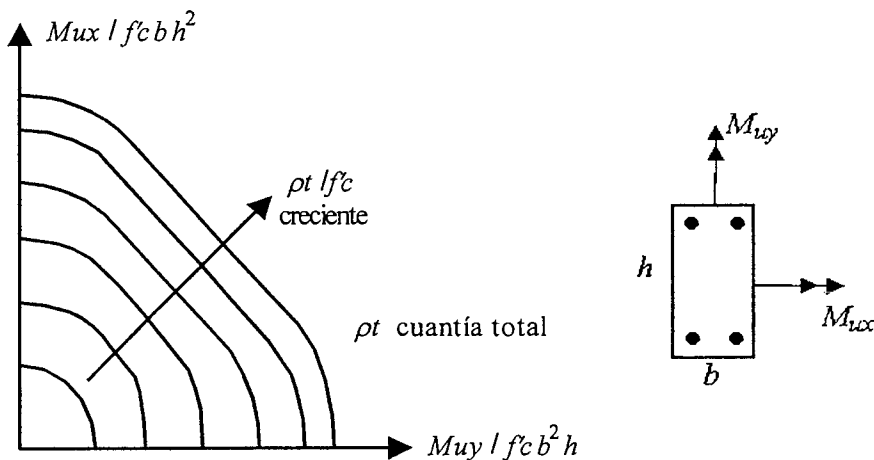


Fig. 18-7 Formas de las Curvas de Interacción para secciones en flexión biaxial.

Una aproximación conservadora para el análisis de secciones en flexión biaxial, es la de asumir una curva de interacción del tipo lineal, tal como se muestra en la figura 18-8. Una mejora importante a esta aproximación, puede lograrse si se calcula un punto adicional del diagrama, por ejemplo para un eje neutro inclinado a 45 grados. Si se aproximara la curva de interacción por una elipse (o un círculo para el caso de igual resistencia alrededor de ambos ejes principales) podría sobrestimarse la resistencia de la sección a la flexión biaxial.

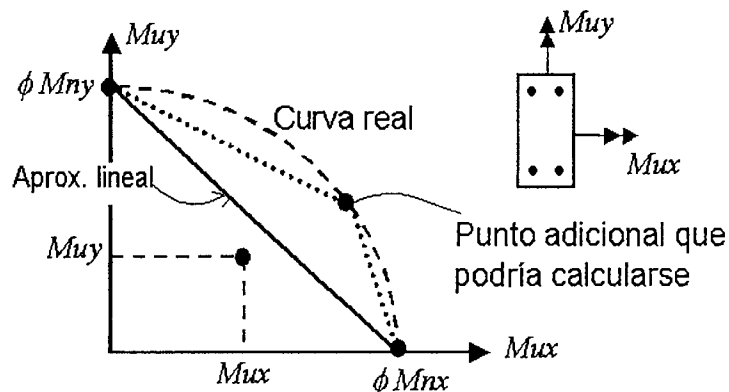


Fig. 18-8 Aproximación lineal a la curva de interacción para flexión biaxial.

En función de la geometría, del área y disposición supuesta de los refuerzos de acero, se calculan las resistencias ϕM_{nx} , ϕM_{ny} con los procedimientos presentados para la flexión uniaxial, para luego verificar si las armaduras supuestas son adecuadas para resistir la sollicitación externa.

La ecuación de interacción que resulta de suponer una curva de interacción del tipo lineal como la mostrada en la figura 18-8, es la siguiente:

$$\frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi M_{ny}} \leq 1.0 \quad (18-1)$$

No se presentarán ecuaciones o una metodología para el diseño de secciones sometidas a flexión biaxial más refinada que la presentada líneas arriba (ecuación 18-1), basada en diagramas de interacción o en aproximaciones a los mismos, ya que es prácticamente imposible cubrir la gran cantidad de variables involucradas en el problema, entre ellas: la geometría de la sección, la calidad del concreto y del acero, la disposición o arreglos posibles de las armaduras.

Para el diseño, conocidas las dimensiones de la sección transversal y las sollicitaciones externas, es necesario acudir a métodos numéricos, en donde, partiendo de una disposición determinada de las armaduras, a través de numerosas iteraciones es posible calcular el área de acero necesaria. La gran cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la solución, solamente es posible enfrentarla con la ayuda de programas de computadora.

18.3 Flexión Biaxial en Columnas

En la práctica las columnas sometidas a carga axial y flexión biaxial, se presentan con más frecuencia que las vigas. Una situación típica es la de las columnas que soportan los efectos de las fuerzas laterales de sismo o viento. En este caso además de la flexión producida por las cargas verticales (de gravedad) alrededor de uno de los ejes principales, se producirá por el sismo o viento flexión alrededor del otro eje principal originando una sollicitación biaxial.

El problema de diseño de columnas en flexión biaxial es complejo numéricamente por la gran cantidad de iteraciones que es necesario realizar, recuerde que el eje neutro por lo general no es perpendicular a la excentricidad resultante o paralelo al vector momento resultante. Para el diseño normalmente se suele suponer un cierto arreglo de la armadura de refuerzo y el área de acero supuesta se va corrigiendo, hasta lograr que la capacidad de la columna sea adecuada para soportar las solicitaciones externas.

En las tesis de grado para optar el título de ingeniero civil, desarrolladas en el Departamento de Ingeniería de la PUCP, por los ingenieros Geo Baccarani Rosas (Lectura 18.7) y posteriormente por Luis Salcedo Ponce de León, se desarrollaron algoritmos y programas de cómputo para el análisis y diseño de columnas en flexión biaxial. Dichos algoritmos son generales ya que no están limitados a una forma particular de la sección transversal o a un arreglo particular de las armaduras de refuerzo, sin embargo son de utilidad solamente con la ayuda de una computadora, es decir no sirven para cálculos manuales.

18.3.1 Superficies de Interacción

El análisis de columnas en flexión biaxial es un poco más simple que el de diseño ya que se conoce de antemano el arreglo y el área de las armaduras. En este caso es posible describir la resistencia de una sección mediante las llamadas Superficies de Interacción, que representan el lugar geométrico de todas las combinaciones de carga axial (P_n) y momentos flectores M_{nx} , M_{ny} que juntos agotan la capacidad de la sección.

La figura 18-9 muestra esquemáticamente una superficie de interacción típica que ha sido construida variando la inclinación del eje neutro para obtener una serie de diagramas de interacción a distintos ángulos (λ) respecto de los ejes principales de la sección. Solamente se muestra el primer cuadrante de la superficie. Si la sección (y/o las armaduras) fuese asimétrica, para describir completamente el comportamiento sería necesario construir los otros cuadrantes. Similarmente si la carga fuese de tracción sería necesario construir la zona inferior de la superficie, correspondiente a los valores negativos (tracción) de la carga axial.

Los diagramas de interacción contenidos en los planos $P_n - M_{nx}$ y $P_n - M_{ny}$ respectivamente, corresponden a flexión uniaxial y su construcción se puede hacer con los métodos estudiados en el capítulo de flexocompresión. Todos los otros diagramas comprendidos entre los dos anteriores, corresponden a un cierto ángulo de inclinación (λ) de la excentricidad resultante con respecto a los ejes principales de la sección.

18.3.2 Contornos de Carga Constante

Las secciones horizontales a través de la superficie de interacción representan el lugar geométrico de todas las posibles combinaciones de M_{nx} y M_{ny} que conjuntamente con una carga axial constante agotan la capacidad de la sección, se les denomina Curvas de Falla para carga constante o Contornos de Carga Constante. Las curvas de interacción que se presentaron para el caso de vigas en flexión biaxial, son un caso particular de los contornos de carga en el cual la carga axial es nula.

En las figuras 18-10 y 18-11, se muestran los Contornos de Carga Constante para una columna de 0.30 x 0.60 m armada con un fierro en cada esquina, el área total de acero es de 20 cm². Se han construido los contornos para distintos niveles de carga axial, la figura 18-10 corresponde a cargas nominales por encima de la carga balanceada y la figura 18-11 para valores por debajo de la carga balanceada. Es clara la dependencia de la forma de los contornos con el nivel de la carga axial.

Con un poco de imaginación, a partir de los contornos de carga constante, puede visualizarse la superficie de interacción.

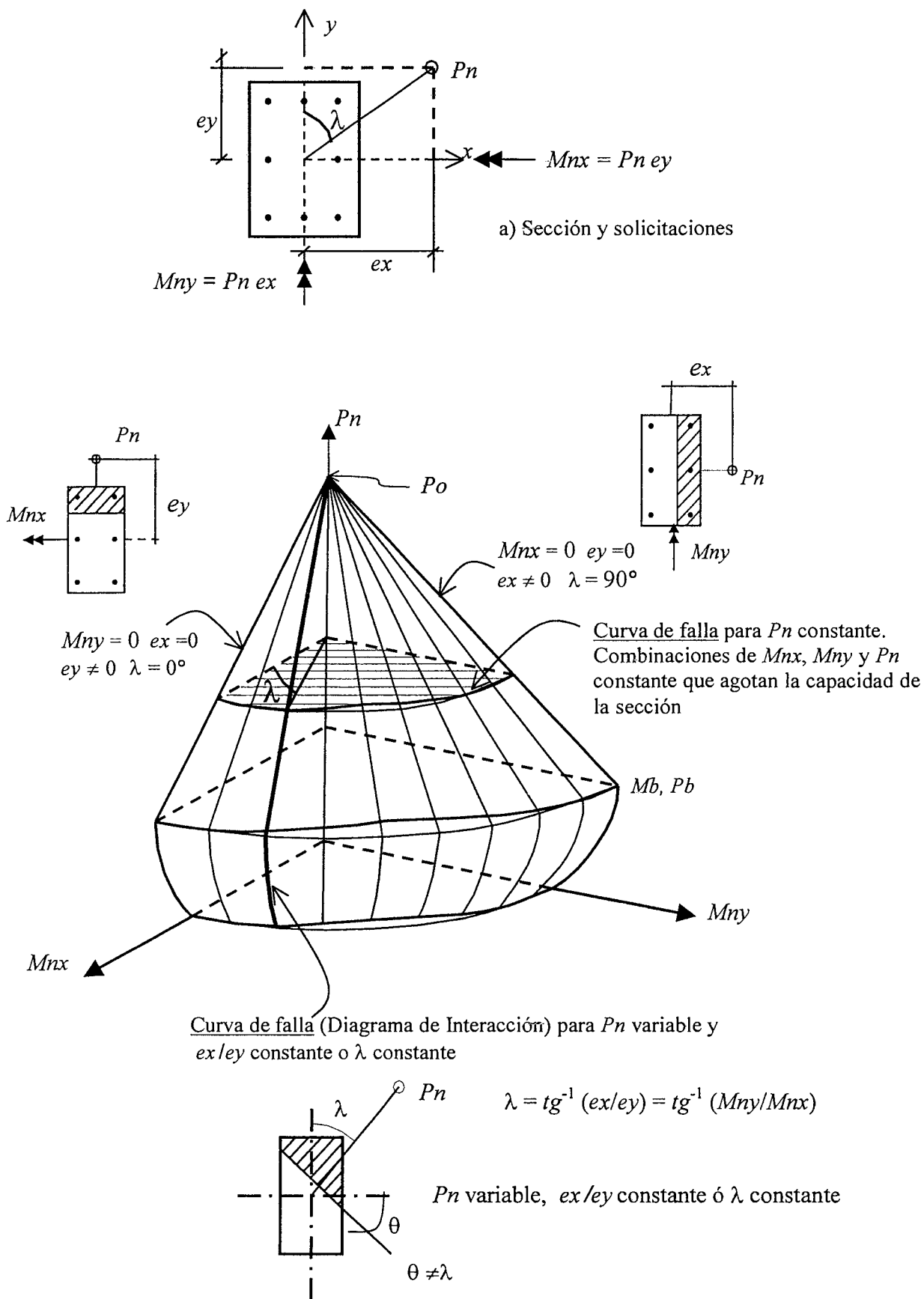


Fig. 18-9 Superficie de interacción para flexocompresión biaxial.

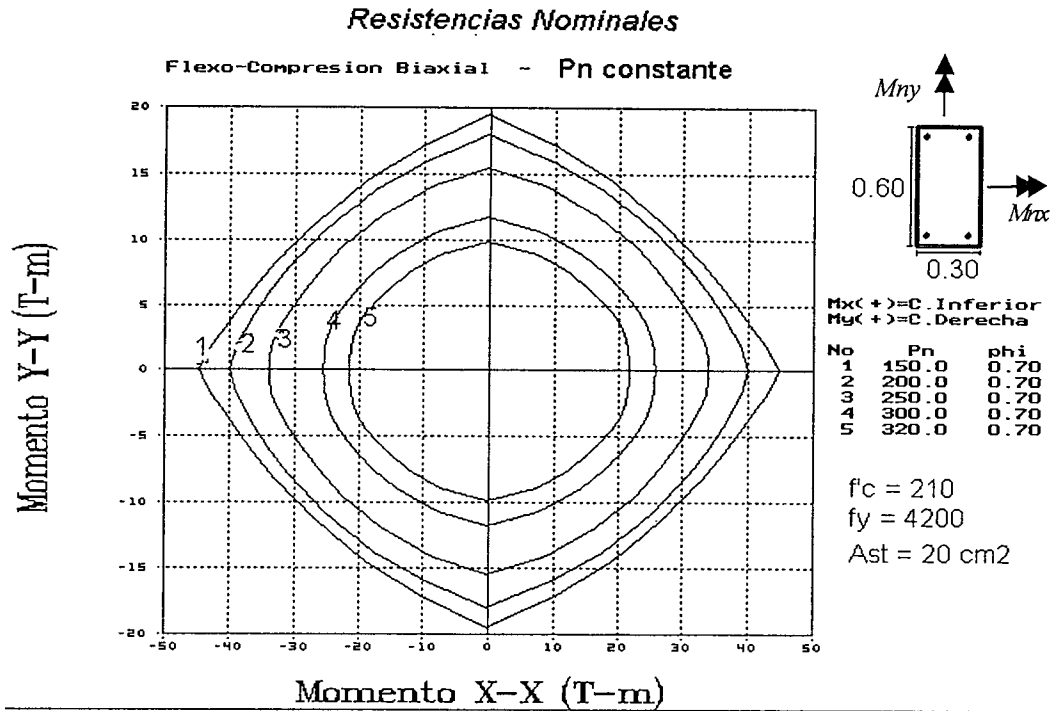


Fig. 18-10 Curvas de falla nominales para distintos valores de P_n .
 Cargas axiales mayores que P_b ($P_b \approx 150 \text{ ton}$)

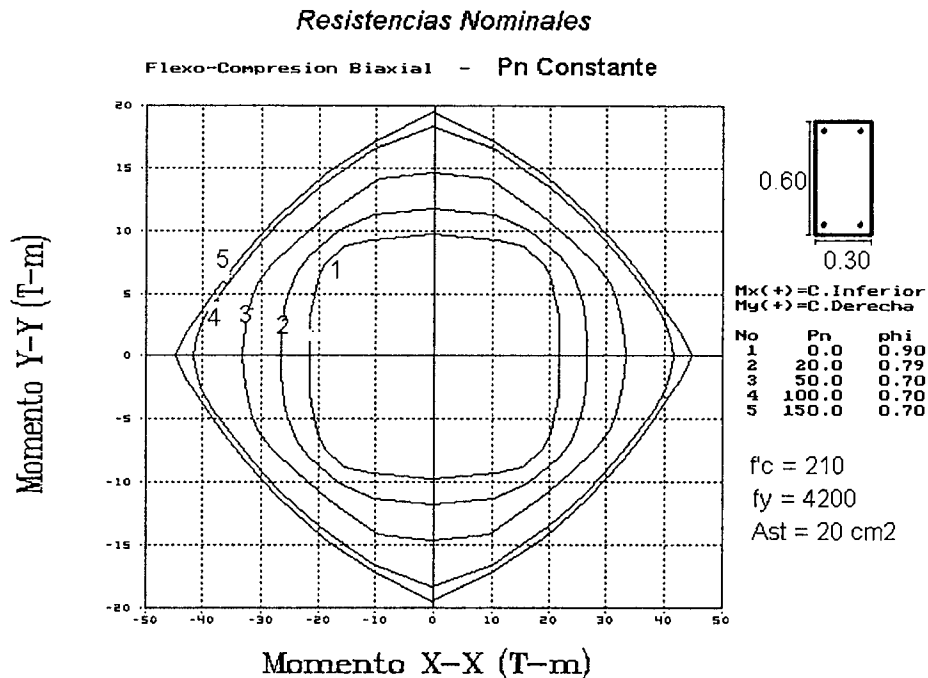


Fig. 18-11 Curvas de falla nominales para distintos valores de P_n .
 Cargas axiales menores que P_b ($P_b \approx 150 \text{ ton}$)

Debido a la gran cantidad de variables involucradas, no es simple deducir expresiones que permitan aproximar los contornos de carga constante. Los contornos varían con la geometría de la sección, la calidad del concreto y del acero, el arreglo y cuantía de las armaduras de refuerzo y con la intensidad de la carga axial. Es claro que aproximar los contornos por medio de líneas rectas, es una aproximación bastante conservadora, salvo para cargas axiales cercanas a la carga balanceada.

Debido a la complejidad numérica del problema, se han propuesto numerosos métodos aproximados para el diseño de columnas en flexión biaxial. La mayoría no son

verdaderos métodos de diseño, más bien son métodos que permiten estimar la resistencia de una columna para una armadura dada. Es decir, se supone un arreglo y cuantía para la armadura de refuerzo y mediante el empleo de alguno de los métodos aproximados propuestos, se calcula la capacidad de la columna la cual se compara con las solicitaciones actuantes hasta lograr el nivel de ajuste deseado.

La mayoría de los métodos aproximados que proporcionan una precisión "razonable" están basados en aproximaciones al perfil de la superficie real de interacción de la sección. Uno de los métodos más utilizados, incluido en la Norma Peruana E060 y en los comentarios del código ACI, es el Método de Bresler.

18.3.3 Método de Bresler

Propuesto por Boris Bresler en el año de 1960, está basado en una aproximación al perfil de la superficie de interacción. Este método intenta predecir la resistencia de una sección bajo carga axial y flexión biaxial, a partir de las resistencias a flexión uniaxial de la misma. Las diversas formas de la expresión de Bresler son:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx}} + \frac{1}{P_{ny}} - \frac{1}{P_o} \quad (18-2)$$

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{\phi P_{nx}} + \frac{1}{\phi P_{ny}} - \frac{1}{\phi P_o} \quad (18-3)$$

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{\phi P_o} \quad (18-4)$$

Donde:

P_{ur} es la carga axial que resiste la columna en flexión biaxial.

ϕP_{nx} capacidad de la sección si solo existiera M_{ux} ($M_{uy} = 0$)

ϕP_{ny} capacidad de la sección si solo existiera M_{uy} ($M_{ux} = 0$)

ϕP_o capacidad de la sección si solo existiera carga axial ($e_x = e_y = 0$)

$$P_o = 0.85 f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

Es claro que el método de Bresler es más una herramienta de análisis que de diseño, su utilización para el diseño obliga a suponer una área de acero y a aproximarse a la solución final por tanteos.

Deberá verificarse que el valor de P_{ur} que resulte de la ecuación 18-3 ó 18-4 sea menor que la carga axial máxima permitida por el código (corte horizontal de los diagramas de interacción) es decir:

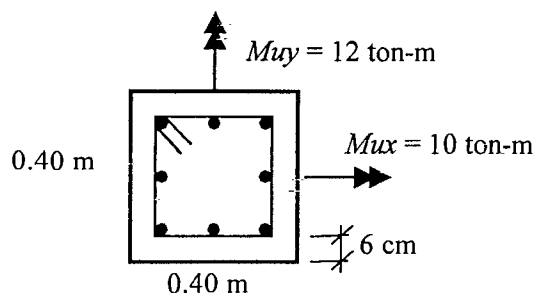
$$P_{ur} \leq 0.8 \phi P_o \quad (\text{para columnas con estribos})$$

Limitaciones de la fórmula de Bresler:

- Se limita a secciones simétricas con armaduras simétricas (secciones rectangulares).
- La formula funciona mejor para valores de P_{ux} y P_{uy} por encima del valor de la carga balanceada correspondiente.
- La carga axial actuante debe ser por lo menos mayor que $P_u \geq 0.1 \phi P_o$ es decir el método de Bresler no funciona para cargas axiales bajas cercanas a la flexión simple. Cuando la carga axial es menor que el valor antes mencionado, podrá emplearse la ecuación 18-1 que se reproduce a continuación.

$$\frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi M_{ny}} \leq 1.0$$

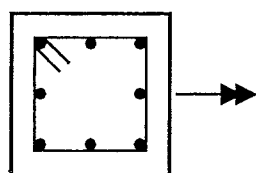
Ejemplo 18-1 – Diseño de una columna en flexión biaxial.



$$\begin{aligned}
 P_u &= 170 \text{ ton} \\
 f_c &= 210 \text{ kg/cm}^2 \\
 e_x &= 12/170 = 0.07 \text{ m} & e_x/h &\approx 0.18 \\
 e_y &= 10/170 = 0.06 \text{ m} & e_y/h &\approx 0.15
 \end{aligned}$$

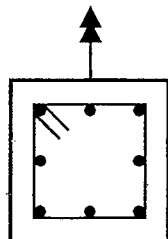
Ya que no tenemos una idea precisa del área necesaria para iniciar los tanteos, hagamos el diseño de la columna para flexión uniaxial alrededor de cada uno de los ejes por separado. Utilizaremos los ábacos para diseño en flexión uniaxial para columnas con armadura en las cuatro caras

- Para $M_{uy} = 0$, tendremos:



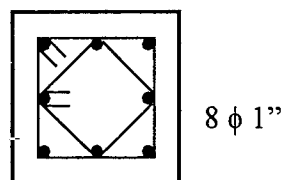
$$\begin{aligned}
 P_u &= 170 \text{ ton} \\
 M_{ux} &= 10 \text{ ton-m} \\
 A_{st} &\approx 15 \text{ cm}^2 \quad \rho = 0.95 \%
 \end{aligned}$$

- Para $M_{ux} = 0$, tendremos:



$$\begin{aligned}
 P_u &= 170 \text{ ton} \\
 M_{uy} &= 12 \text{ ton-m} \\
 A_{st} &\approx 22 \text{ cm}^2 \quad \rho = 1.4 \%
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el área total de acero (A_{st}) deberá ser por lo menos, mayor que 22 cm^2 . Intentemos con un área de acero que sea la suma de ambas áreas halladas $15 + 22 = 37 \text{ cm}^2$. Esta aproximación es la base de uno de los varios métodos (métodos de superposición) para el diseño de columnas en flexión biaxial, sin embargo no tiene una base física y puede no ser conservador ya que se está empleando dos veces la capacidad máxima del concreto. Iniciemos los tanteos con el siguiente arreglo:



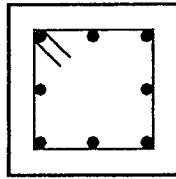
$$\begin{aligned}
 A_{st} &= 40.8 \text{ cm}^2 \\
 \rho &= 2.55 \%
 \end{aligned}$$

$$\phi P_o = 0.7 (0.85 \times 210 \times (1600 - 41) + 40.8 \times 4200) \approx 0.7 \times 450 = 315 \text{ ton}$$

- Deberá cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 P_u &> 0.1 \phi P_o = 0.1 \times 315 \approx 32 \text{ ton} && \text{ok} \\
 P_u &< P_u \text{ max} = 0.8 \phi P_o = 0.8 \times 315 = 252 \text{ ton} && \text{ok } (P_u = 170)
 \end{aligned}$$

- Cálculo de la capacidad para momento flector solo alrededor del eje x:



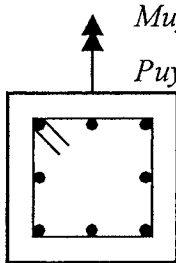
$M_{ux} = 10 \text{ t-m}$
 $P_{ux} = ?$

$A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2$

Para $M_{ux} = 10$, $P_{ux} \approx 245 \text{ ton}$

$\phi P_b \approx 85 \text{ ton}$ $\phi M_b \approx 22 \text{ t-m}$

- Cálculo de la capacidad para momento flector solo alrededor del eje y:



$M_{uy} = 12 \text{ ton-m}$
 $P_{uy} = ?$

$A_{st} = 40.8 \text{ cm}^2$

Para $M_{uy} = 12$, $P_{uy} \approx 230 \text{ ton}$

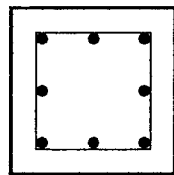
$\phi P_b \approx 85 \text{ ton}$ $\phi M_b \approx 22 \text{ ton-m}$

- Aplicando Bresler:

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{245} + \frac{1}{230} - \frac{1}{315}$$

$P_{ur} \approx 190 \text{ ton} > P_u = 170 \text{ ok.}$

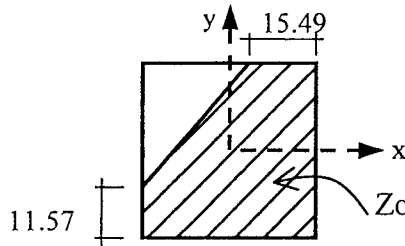
A manera de verificación, se calculó con la ayuda de un programa de cómputo la solución "exacta" (Lectura 18.7) resultando en un área de acero requerida de 43 cm^2 para las solicitaciones antes indicadas:



Para ocho fierros y solicitaciones de:

$P_u = 170, M_{ux} = 10 \text{ } M_{uy} = 12 \text{ ton-m}$

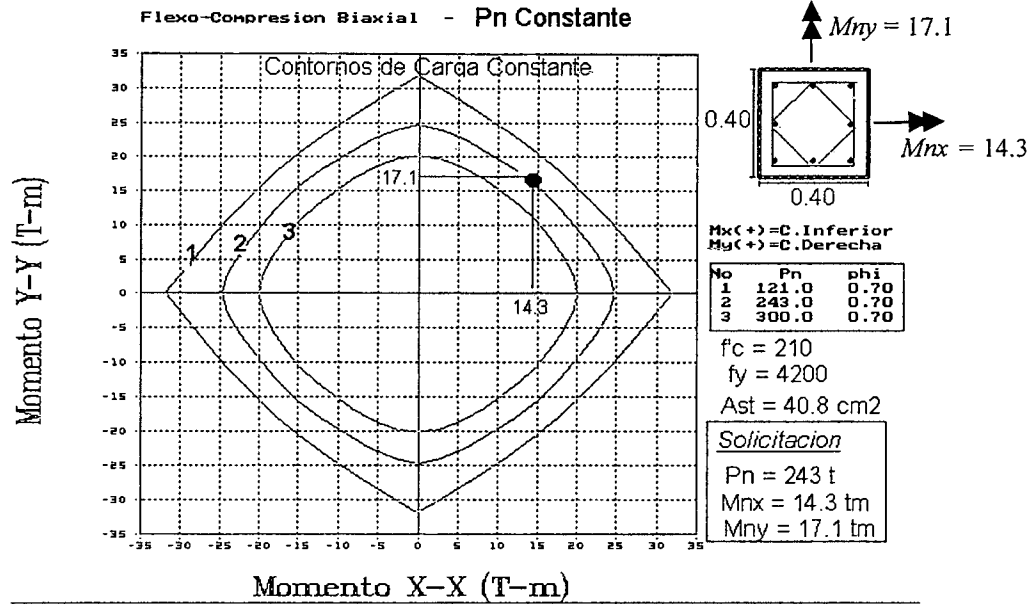
$A_{st} \text{ requerida} \approx 43 \text{ cm}^2$, $\rho = 2.69\%$



Ecuación eje neutro: $x = 0.8621 y - 12.73 \text{ cm}$

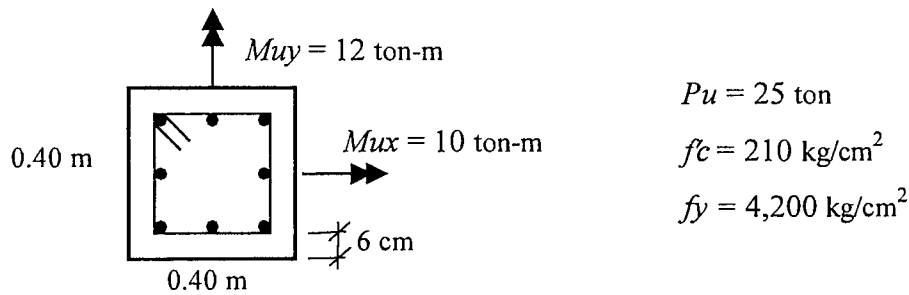
La figura a continuación muestra los contornos de carga constante para la columna de 0.40×0.40 reforzada con 8 barras de 1". El contorno número 2 corresponde a la carga nominal actuante ($170/0.7 = 243 \text{ ton}$), el contorno número 1 corresponde a la carga que produce la falla balanceada de la sección y el número 3 se ha incluido para mostrar la tendencia de los contornos al aumentar la carga axial.

Columna 0.40x0.40 8-1" Resistencias Nominales



Ejemplo 18-2 – Diseño de una columna en flexión biaxial.

Diseñemos la misma columna del ejemplo 18-1 pero solicitada por una carga axial pequeña de $P_u = 25$ ton



- Al ser la carga axial baja ($P_u \leq 0.1 \phi P_o$) no es aplicable la ecuación de Bresler, usaremos la ecuación de interacción 18-1 para flexión simple:

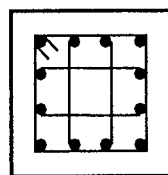
$$\frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi M_{ny}} \leq 1$$

- Aproximación inicial al área de acero requerida:

Para $P_u = 25$ $M_{ux} = 10,$ $M_{uy} = 0$ $A_{st} \approx 13$ cm²

Para $P_u = 25$ $M_{ux} = 0,$ $M_{uy} = 12$ $A_{st} \approx 19$ cm²

Seleccionemos un área de acero que sea la suma de las calculadas para flexión uniaxial $A_{st} \approx 32$ cm². Intentaremos con 12 ϕ 3/4" en el siguiente arreglo:



12 ϕ 3/4"

$A_{st} = 34.1$ cm²

$\rho = 2.13$ %

- Para $P_u = 25$ ton y $\rho = 2.13\%$, utilizando los ábacos para flexión uniaxial para columnas con acero en las cuatro caras, se obtiene:

$$\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 17.5 \text{ ton-m} \quad (\phi = 0.75)$$

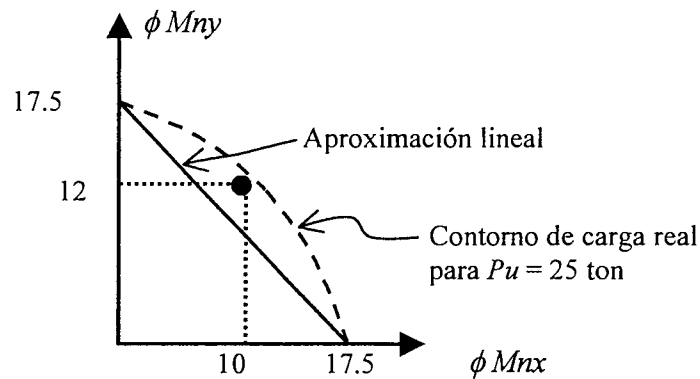
- Si calculamos la resistencia suponiendo flexión pura ($P_u = 0$) se obtiene:

$$\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 18.1 \text{ ton-m} \quad (\phi = 0.9)$$

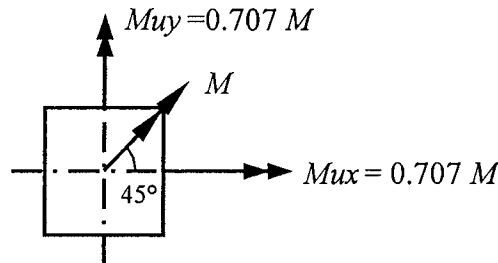
- Reemplazando valores en la ecuación de interacción:

$$\frac{10}{17.5} + \frac{12}{17.5} = 1.26 > 1 \quad \text{La sección no pasa}$$

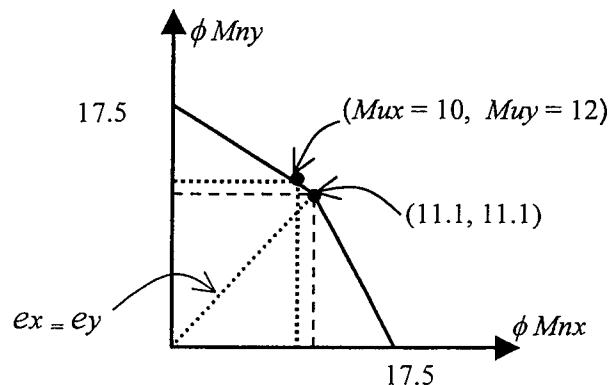
Una alternativa sería la de aumentar el área de acero, por ejemplo probar con una nueva armadura de $4\phi 1" + 8\phi 3/4"$. Otra posibilidad consiste en calcular un punto adicional del contorno de carga ya que sabemos que la aproximación lineal es conservadora, tal como se ilustra en la siguiente figura:



Generaremos un punto adicional del contorno de carga correspondiente al caso más simple, el de flexión a 45° como se muestra a continuación:



Para $P_u = 25$ ton y una armadura de $12\phi 3/4"$ utilizando un proceso iterativo relativamente simple, se obtiene $\phi M_{nx} = \phi M_{ny} \approx 11.1$ ton-m. En este caso el bloque de compresiones, por la doble simetría de la sección y las armaduras y por la baja intensidad de la carga axial, es un triángulo isósceles. Con este punto adicional se puede mejorar la aproximación inicial:

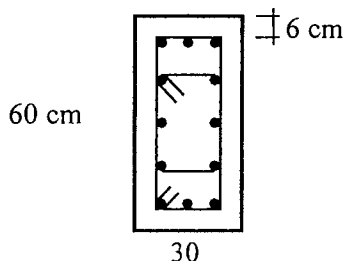


De la figura anterior es claro que la armadura supuesta ($12\phi 3/4$ ") es adecuada para soportar las solicitaciones externas. A manera de verificación, se calculó con la ayuda de un programa de cómputo la solución "exacta" resultando, para las solicitaciones antes indicadas, un área de acero requerida de 33 cm^2 aproximadamente.

18.4 Influencia de la Flexión Biaxial en la Resistencia de las Columnas

Mediante el análisis de un caso particular, intentemos formarnos una idea de la influencia que puede tener la flexión biaxial en la capacidad de carga (P_u). Para ello analicemos la siguiente columna:

Caso 1:



$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

Armadura: $12 \phi 3/4$ "

$$A_{st} = 34.1 \text{ cm}^2 \quad \rho = 1.9\%$$

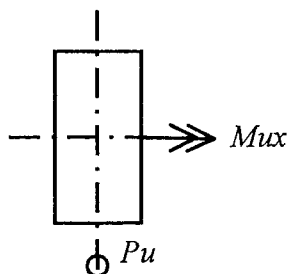
- Características generales:

$$P_o \approx 460 \text{ ton} \quad \phi P_o = 0.7 \times 460 \approx 320 \text{ t} \quad P_u \text{ max} = 0.8 \times 320 \approx 260 \text{ ton}$$

$$\text{Dirección fuerte: } \phi P_b \approx 105 \text{ ton} \quad \phi M_b \approx 31 \text{ t-m (condición balanceada)}$$

$$\text{Dirección débil: } \phi P_b \approx 81 \text{ ton} \quad \phi M_b \approx 15 \text{ t-m (condición balanceada)}$$

- Si la columna estuviera solicitada en flexocompresión uniaxial alrededor del eje x, para la armadura antes indicada, bajo la acción de un momento flector M_{ux} de 22 t-m, la resistencia de la columna sería de 210 ton. La columna está controlada por compresión ya que la carga axial es mayor que la carga balanceada, tal como se aprecia en el diagrama de interacción para flexión uniaxial a continuación.

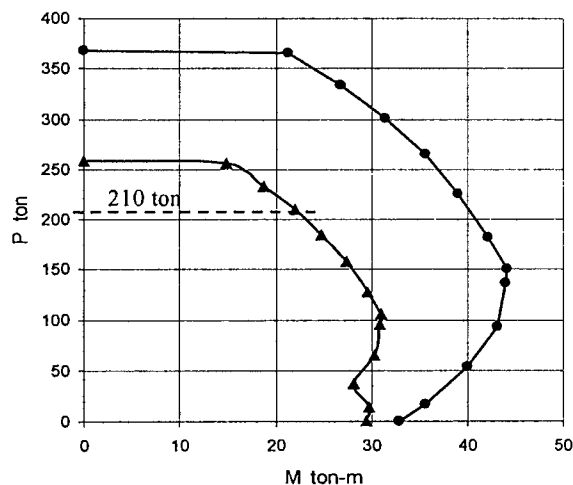


$$P_u = 210 \text{ ton}$$

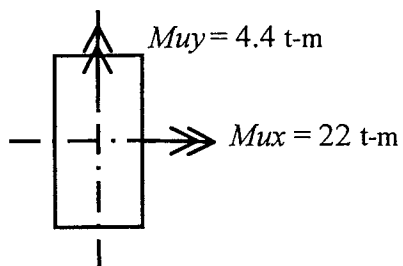
$$P_u / P_u \text{ max} \approx 0.8$$

$$M_{ux} = 22 \text{ ton-m}$$

$$e_y / h \approx 0.17$$



- Supongamos ahora que conjuntamente con M_{ux} actúa un momento M_{uy} equivalente al 20% del anterior, en este caso la capacidad de carga se reduce de 210 a 175 ton, es decir una reducción del 17%.



$$A_{st} = 12 \phi 3/4$$

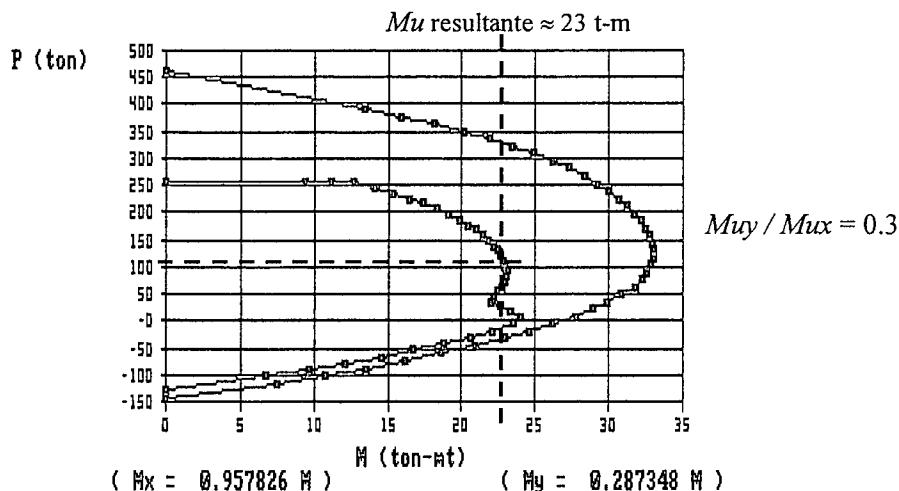
$$M_{ux} = 22 \text{ ton-m}$$

$$M_{uy} = 4.4 \text{ t-m (20\% de } M_{ux})$$

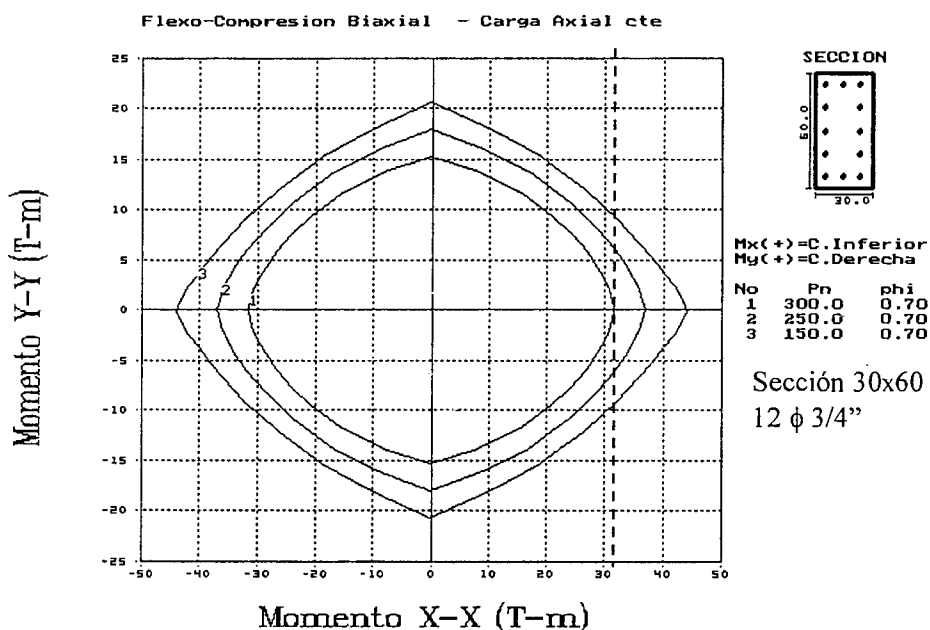
$$P_u = 175 \text{ ton (17\% de reducción)}$$

- Aumentemos el momento flector M_{uy} al 30% de M_{ux} , en este caso la capacidad de carga se reduce de 210 a 105 ton, es decir una reducción del 50%. Con este nivel de reducción en la capacidad de carga, es muy probable que el coeficiente de seguridad que resta sea próximo a la unidad y por lo tanto el diseño sea inseguro. Recuerde que el coeficiente de seguridad ($P_u / P_{servicio}$) es cercano a $1.6 \div 0.7 \approx 2.3$ lo cual significa que la carga axial en condiciones de servicio es de $210 \div 2.3 \approx 90$ ton y la carga resistente ha bajado a 105 ton.

La figura a continuación, muestra la curva de falla (diagrama de interacción, véase la figura 18-9) para cargas P_u variables y una relación de momentos M_{uy}/M_{ux} constante igual a 0.3. En el eje horizontal aparecen los valores del momento resultante, que en este caso es de 23 ton-m aproximadamente.



La figura a continuación muestra los contornos de carga constante (resistencias nominales) para esta columna, Se muestran las curvas para las tres intensidades de la carga axial nominal calculadas.



Otra forma de evaluar en este caso la influencia de la flexión biaxial, es la de suponer que tanto la carga axial como el momento flector M_{ux} son constantes e ir variando M_{uy} . Para cada una de las combinaciones P_u , M_{ux} , M_{uy} se calculó el área de acero necesaria, el cambio en la demanda de acero de refuerzo mide la influencia de la flexión biaxial. En la tabla a continuación se muestran los resultados, se supone que la distribución de la armadura (12 fierros) es la misma en todos los casos.

P_u (ton) constante	M_{ux} (t-m) constante	M_{uy} (t-m) Variable	A_{st} requerida (cm^2)	Cuantía ρ	Incremento en A_{st}
210	22	0	34	1.9 %	--
210	22	2	36	2.0 %	7 %
210	22	4	42	2.3 %	22 %
210	22	6	49	2.7 %	44 %
210	22	8	58	3.2 %	69 %
210	22	10	67	3.7 %	98 %
210	22	12	78	4.3 %	129 %

Caso 2: Existen otras situaciones en las cuales la influencia de la flexión biaxial no es tan marcada como en el caso anterior. Para ilustrar esta situación analicemos una columna con las siguientes características y solicitaciones:

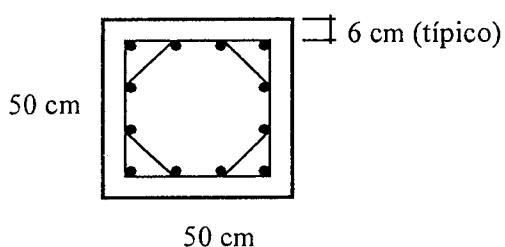
Sección 0.50x0.50 m $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

$P_u = 380 \text{ ton}$

$M_{ux} = 20 \text{ ton-m}$ $e_y \approx 0.1 h$

$M_{uy} = 0$ $e_x = 0$

Para las características y solicitaciones indicadas, el área de acero necesaria es $A_{st} \approx 62 \text{ cm}^2$. Con el arreglo de armaduras que se indica a continuación se satisface el requerimiento de resistencia.



Armadura 12 $\phi 1''$

$A_{st} = 61.2 \text{ cm}^2$ $\rho = 2.45\%$

$P_u = 380 \text{ ton}$

$M_{ux} = 20 \text{ ton-m}$ $e_y \approx 0.1 h$

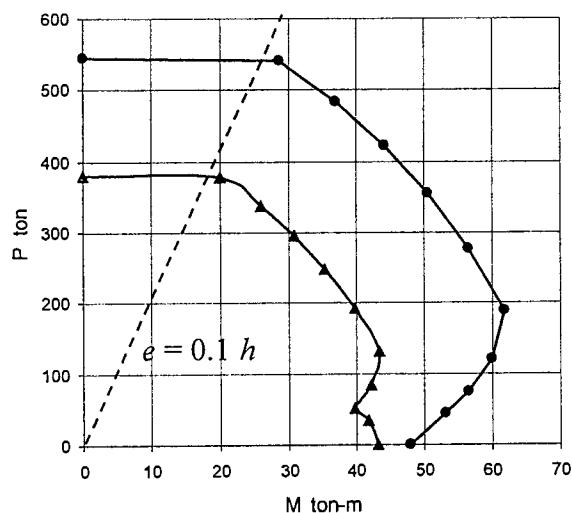
$M_{uy} = 0$ $e_x = 0$

- Características generales:

$$P_o = 692 \text{ ton} \quad \phi P_o = 0.7 \times 692 = 484 \text{ ton} \quad P_u \text{ max} = 0.8 \times 484 = 387 \text{ ton}$$

$$\phi P_b \approx 140 \text{ ton} \quad \phi M_b \approx 43 \text{ ton-m} \quad (\text{condición balanceada})$$

Es claro que se trata de una sección con falla en compresión, con una excentricidad pequeña. Es más, la carga actuante es cercana al máximo valor de la carga axial permitido por la Norma de 387 ton ($P_u \div P_u \text{ max} \approx 0.98$). El diagrama de interacción en flexión uniaxial, es el mostrado en la figura a continuación.



Para investigar la influencia de la flexión biaxial en esta sección particular, agreguemos un momento flector alrededor del eje y manteniendo constante el momento flector en x (20 ton-m) y la armadura, calculemos la carga axial que es capaz de soportar la columna.

- Agreguemos $M_{uy} = 30\% M_{ux}$ $M_{ux} = 20 \text{ t-m}$ $M_{uy} = 6 \text{ t-m}$
 $P_u \approx 370 \text{ ton}$ (resistencia calculada)

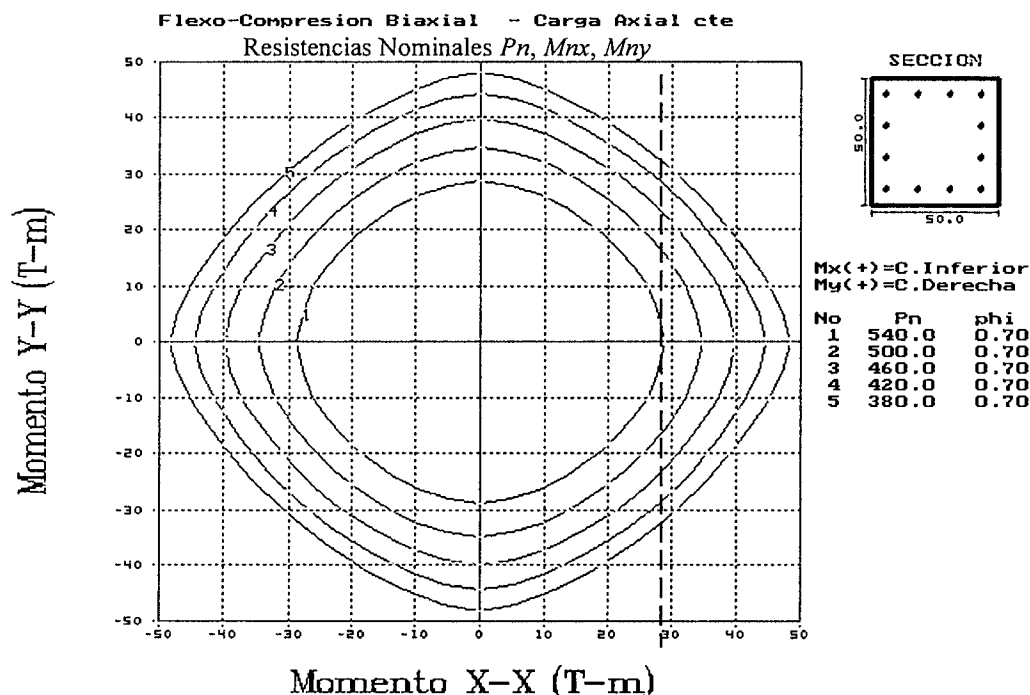
La resistencia se redujo de 380 a 370 ton que representa un 3% de reducción en la capacidad de carga.

- Agreguemos $M_{uy} = 50\% M_{ux}$ $M_{ux} = 20 \text{ t-m}$ $M_{uy} = 10 \text{ t-m}$
 $P_u \approx 355 \text{ ton}$ (resistencia calculada)

La resistencia se redujo de 380 a 355 ton que representa un 7% de reducción en la capacidad de carga.

- Agreguemos $M_{uy} = 100\% M_{ux}$ $M_{ux} = 20 \text{ t-m}$ $M_{uy} = 20 \text{ t-m}$
 $P_u \approx 290 \text{ ton}$ (resistencia calculada)

La resistencia se redujo de 380 a 290 ton que representa un 24% de reducción en la capacidad de carga. La figura a continuación muestra los contornos de carga constante (resistencias nominales) para esta columna, para cinco intensidades de la carga axial nominal.



Otra forma de evaluar la influencia de la flexión biaxial, es la de suponer que tanto la carga axial como el momento flector M_{ux} son constantes e ir variando M_{uy} . Para cada una de las combinaciones P_u, M_{ux}, M_{uy} se calculó el área de acero necesaria, el cambio en la demanda de acero de refuerzo mide la influencia de la flexión biaxial. En la tabla a continuación se muestran los resultados, se supone que la distribución de la armadura (12 fierros) es la misma en todos los casos.

P_u (ton) constante	M_{ux} (t-m) constante	M_{uy} (t-m) Variable	A_{st} requerida (cm^2)	Cuantía ρ	Incremento en A_{st}
380	20	0	62	2.5%	--
380	20	6	65	2.6 %	5 %
380	20	10	69	2.8 %	11 %
380	20	20	87	3.5 %	40 %
380	20	30	110	4.4 %	77 %

A manera de comprobación de la aproximación que se logra con el método de Bresler, apliquemos este método al último caso analizado, es decir calculemos la resistencia de la columna (P_{ur}) en flexión biaxial para las siguientes solicitaciones:

$$M_{ux} = 20 \text{ ton-m} \quad M_{uy} = 20 \text{ ton-m}$$

Para $M_{ux} = 20$ y $M_{uy} = 0$, la resistencia de la columna en $P_{ux} \approx 380$ ton. Dada la simetría de la sección y las armaduras, tendremos $P_{uy} \approx 380$ ton, en consecuencia con la ecuación 18-4 del método aproximado de Bresler tendremos:

$$\frac{1}{P_{ur}} = \frac{1}{380} + \frac{1}{380} - \frac{1}{0.7 \times 692} \Rightarrow P_{ur} \approx 310 \text{ ton}$$

Por lo tanto el método de Bresler predice una resistencia para esta columna en flexión biaxial de 310 ton, contra 290 ton calculado con un método "exacto". El error es cercano al 7 %, error más que aceptable para un método aproximado. Nótese que en este caso se están cumpliendo todas las limitaciones del método de Bresler, adicionalmente estamos en la zona de cargas axiales elevadas, bastante por encima de la carga balanceada, en esta zona es donde el método predice con mejor aproximación la resistencia de la columna en flexión biaxial.

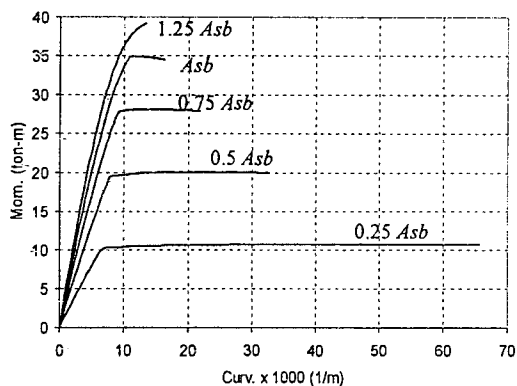
18.5 Lecturas

- 18.1 Artículos 4.4, 4.5 - del libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 18.2 Concrete Columns Under Biaxially Eccentric Thrust. Richard W. Furlong. ACI Journal, October 1979.
- 18.3 Ultimate Limit State of Cracked Arbitrary Concrete Sections Under Axial Load and Biaxial Bending. Troels Brondum-Nielsen. ACI Concrete International. November 1982.
- 18.4 Ultimate Flexural Capacity of Circular and Annular Cracked Concrete Sections. Troels Brondum-Nielsen. ACI Structural Journal, July – August 1988.
- 18.5 Biaxial Interaction Diagrams for Short RC Columns of any Cross Section. J.A. Rodriguez, J. Dario Aristizabal-Ochoa. ASCE Journal of Structural Engineering, June 1999.
- 18.6 Partially and Fully Prestressed Concrete Sections under Biaxial Bending and Axial Load. J.A. Rodriguez, J. Dario Aristizabal-Ochoa. ACI Structural Journal, July – August 2000.

- 18.7 Análisis y Diseño de Secciones de Columnas de Sección Poligonal de Concreto Armado Sometidas a Carga Axial y Flexión Biaxial. Geo José Baccarani Rosas. Tema de Tesis en el Área de Investigación para optar el Título de Ingeniero Civil. Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Ciencias e Ingeniería, 1990.
- 18.8 Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending – Overview. Furlong, Cheng-Tzu, Mirza. ACI Structural Journal, May – June 2004.
- 18.9 Appraisal of Reciprocal Load Method for Reinforced Concrete Columns of Normal and High Strength Concrete. W. Wang, H. P. Hong. ASCE Journal of Structural Engineering, November 2002.

CAPITULO 19

Relaciones Momento - Curvatura



19.1 Introducción

En el diseño de elementos y estructuras de concreto armado, es importante lograr un comportamiento dúctil bajo cargas de gravedad y especialmente frente a solicitaciones sísmicas severas. La importancia de considerar las características carga – deformación de un elemento o de una estructura, obedecen a:

- a) La necesidad de evitar las fallas frágiles. En el caso extremo de que una estructura se vea sobrecargada hasta la falla, si su comportamiento es dúctil y ciertas porciones de la estructura pueden fluir sin fallar, la estructura puede ser capaz de soportar grandes deflexiones o deformaciones cerca de su capacidad máxima de carga. Bajo estas condiciones la estructura “avisa” y es posible prevenir el colapso total.

La figura 19-1 muestra el comportamiento de una viga bajo cargas que se incrementan hasta la falla. Se muestran dos posibilidades de comportamiento, un comportamiento del tipo frágil y uno dúctil. Lo deseable es lograr un comportamiento dúctil asociado a deformaciones importantes sin pérdida apreciable en la capacidad de carga. La estructura dúctil tiene mayor capacidad de absorber energía, esta mayor capacidad se aprecia si se comparan las áreas debajo de la curva carga - deflexión. Frente a cargas de servicio el comportamiento es prácticamente el mismo para ambas vigas.

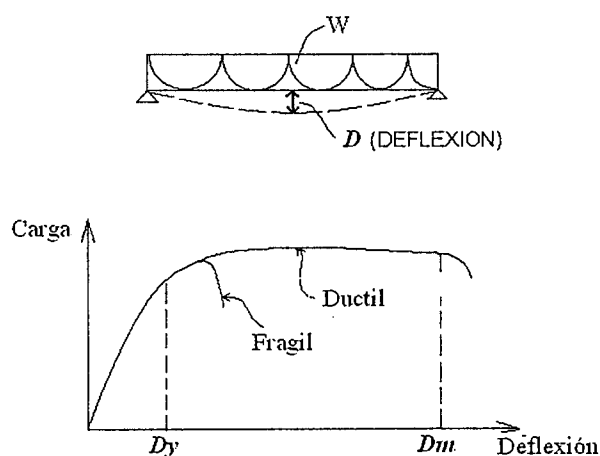


Fig. 19-1 Comportamiento de una viga con falla frágil y dúctil

En la figura anterior, si el comportamiento de la estructura es dúctil, esta puede incursionar en el rango no lineal sin colapsar. Si la estructura es hiperestática ocurre una importante redistribución de las fuerzas internas. Una medida de la ductilidad de una

estructura es la **ductilidad de desplazamiento** definida como el cociente entre el desplazamiento máximo y el desplazamiento donde se inicia la fluencia de la estructura:

$$\mu = D_{\max} / D_y$$

- b) Si una estructura hiperestática es dúctil, mediante la **redistribución de momentos**, puede modificarse la distribución de momentos flectores que se obtiene del análisis elástico. Si las secciones que componen la viga tienen una ductilidad adecuada, puede modificarse el diagrama de momentos proveniente del análisis elástico aliviando por ejemplo los momentos negativos y transfiriendo la reducción hacia la zona de momentos positivos. Esto se puede lograr solamente si las secciones donde se reducen los momentos negativos, tienen la capacidad de soportar rotaciones inelásticas sin fallar.

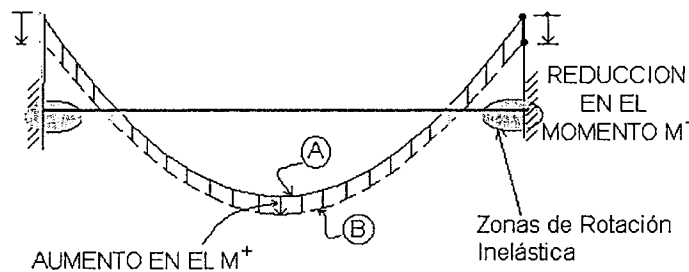


Fig. 19-2 Redistribución de los momentos flectores.

La figura 19-2 ilustra esta idea en una viga doblemente empotrada. El diagrama A corresponde al diagrama de momentos flectores proveniente del análisis elástico y el diagrama B corresponde al de momentos ajustados o redistribuidos. En consecuencia es posible lograr una nueva distribución de momentos flectores, distinta a la elástica, si las secciones de momento negativo tienen capacidad de rotación inelástica manteniendo su capacidad de momento una vez alcanzada la fluencia del acero de refuerzo.

En una estructura hiperestática, como la mostrada en la figura 19-2, la redistribución permite que, una vez alcanzada la resistencia de fluencia en los empotramientos, la carga pueda seguir aumentando hasta formar, en este caso, una tercera rotula plástica al centro del tramo, momento en el cual se formará un mecanismo plástico. En consecuencia la relación final entre el momento negativo y el momento positivo diferirá de manera importante con la del rango elástico ($1/12 \div 1/24 = 2$).

La redistribución en una estructura hiperestática significa que los momentos internos pueden reajustarse para permitir a la estructura soportar cargas adicionales, luego de la formación de una o más rotulas plásticas.

- c) La ductilidad es importante no solamente porque puede servir como señal de alerta de fallas inminentes, también es esencial si la estructura debe resistir, en algún instante de su vida útil, cargas dinámicas como las que imponen los grandes terremotos. En zonas de alta sismicidad, la ductilidad es una consideración de diseño muy importante. La actual filosofía de diseño sismo – resistente confía en las propiedades de absorción y disipación de energía de las estructuras (reducción de las fuerzas elásticas por ductilidad) para que estas puedan sobrevivir sin colapsar, terremotos intensos.

De lo expuesto se desprende que las características de disipación de energía o de comportamiento inelástico de los elementos estructurales son importantes. Estas características son dependientes de los diagramas Momento – Curvatura y será posible

formarse una idea clara de la capacidad de deformación inelástica de un elemento o estructura, si construimos los diagramas Momento – Curvatura para varias secciones a lo largo del eje del elemento.

Aunque en el diseño “corriente” de estructuras de concreto armado, no es necesario conocer en forma explícita, la relación que existe entre el momento aplicado a determinada sección del elemento y la curvatura que resulta en el intervalo completo de carga hasta su falla, y tampoco forma parte de los procedimientos de diseño contenidos en la Normas, el conocimiento del comportamiento de la sección a través de los diagramas Momento – Curvatura es importante en diferentes contextos. Es básica para estudiar la ductilidad de la sección y del elemento, para entender el desarrollo de las rotulas plásticas y la redistribución de los momentos elásticos que ocurre en la mayor parte de estructuras de concreto armado antes del colapso.

Para una sección de concreto armado los diagramas Momento – Curvatura ($M - \phi$) se suelen construir considerando que las deformaciones predominantes son las de flexión. Normalmente las deformaciones predominantes de un elemento estructural de dimensiones o proporciones usuales, provienen de la sollicitación de flexión.

19.2 Definición de Curvatura

La definición de curvatura de una sección que utilizaremos es la misma que se presenta en los textos de resistencia de materiales y que se resume en la figura 19-3.

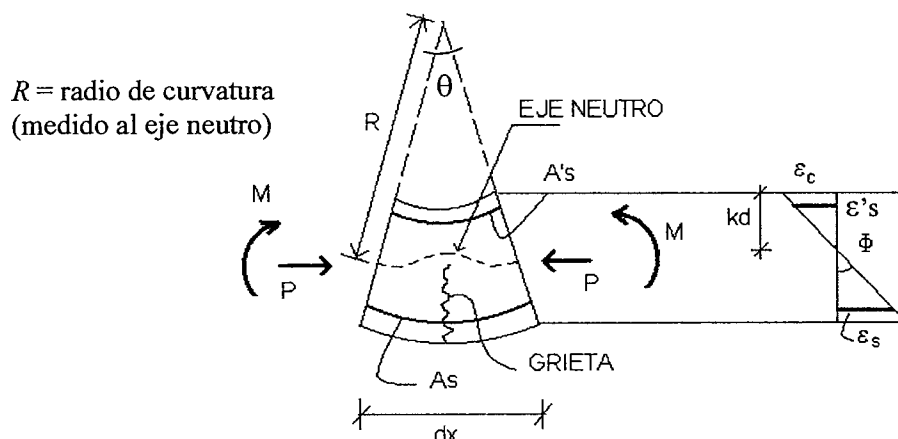


Fig. 19-3 Curvatura de un elemento.

La curvatura se define como el cambio de ángulo (rotación) por unidad de longitud en una determinada ubicación a lo largo del eje del elemento sometido a cargas que producen flexión. La curvatura entre los extremos del elemento de la figura 19-3, será:

$$\theta = dx \frac{1}{R} \quad \frac{dx}{R} = \frac{\epsilon_c dx}{kd} = \frac{\epsilon_s dx}{d(1-k)}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} = \phi \quad \begin{array}{l} \text{Curvatura del elemento} \\ \text{(Rotación por unidad de longitud)} \end{array}$$

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} \quad \phi = \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$$

La curvatura de la sección (ϕ) cambia a lo largo del eje del elemento debido a la variación en la profundidad del eje neutro, a la variación de las deformaciones entre grietas y a la variación en la cantidad de acero de refuerzo. En la etapa elástica (sección sin fisurar) se cumplirá la relación clásica:

$$E I_g = M R = M / \phi$$

19.3 Ductilidad de Curvatura

Se define a través del siguiente cociente:

$$\mu\varphi = \varphi_{\max} / \varphi_y$$

Donde φ_{\max} es la curvatura correspondiente a la falla de la sección, es decir cuando el concreto alcanza su deformación de agotamiento ε_{cu} , asumiendo que el acero de refuerzo no ha llegado a la rotura. La curvatura φ_y corresponde a la primera fluencia del acero de refuerzo en tracción.

La ductilidad de curvatura permite "medir" la capacidad de rotación o de deformación inelástica de una sección.

19.4 Construcción de los Diagramas Momento – Curvatura.

La construcción de los diagramas momento – curvatura para una sección de concreto armado, es una tarea numéricamente tediosa por la gran cantidad de iteraciones que es necesario realizar. En cada etapa de los cálculos se deberán cumplir, las ecuaciones de equilibrio, la compatibilidad (Navier) las relaciones constitutivas de los materiales así como la hipótesis de adherencia entre concreto y acero. Las grandes etapas son:

- Definir la geometría de la sección y la disposición de las armaduras.
- Definir el diagrama $f_c - \varepsilon_c$ del concreto comprimido. Normalmente se desprecia el aporte del concreto en tracción. Es necesario adoptar un valor de la deformación de agotamiento del concreto ε_{cu} , consistente con la cantidad de confinamiento transversal presente en la sección. El valor de ε_{cu} que se adopte es importante ya que es determinante en la curvatura última de la sección.
- Definir el diagrama $f_s - \varepsilon_s$ del acero. Las posibilidades son: diagrama elastoplástico, diagrama con endurecimiento por deformación, diagrama proveniente de resultados de ensayos de laboratorio. Se asume que el comportamiento del acero en tracción y compresión es el mismo.
- Variar la deformación del concreto - ε_c - correspondiente a la fibra mas comprimida en incrementos pequeños, desde cero hasta el valor máximo o de agotamiento del concreto ε_{cu} .
- Fijado un cierto valor de ε_c en el paso anterior, es necesario variar la profundidad del eje neutro ($c_i = kd$) hasta alcanzar el equilibrio de la sección. Cuando se alcanza el equilibrio de la sección es posible calcular la curvatura asociada mediante:

$$\varphi_i = \frac{\varepsilon_c}{c_i} = \frac{\varepsilon_s}{d - c_i} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d}$$

La figura 19-4 (Park y Paulay) ilustra una de las numerosas iteraciones necesarias para la construcción del diagrama momento – curvatura de una sección. En este caso, el punto del diagrama que se está calculando corresponde a una deformación igual a ε_{cm} .

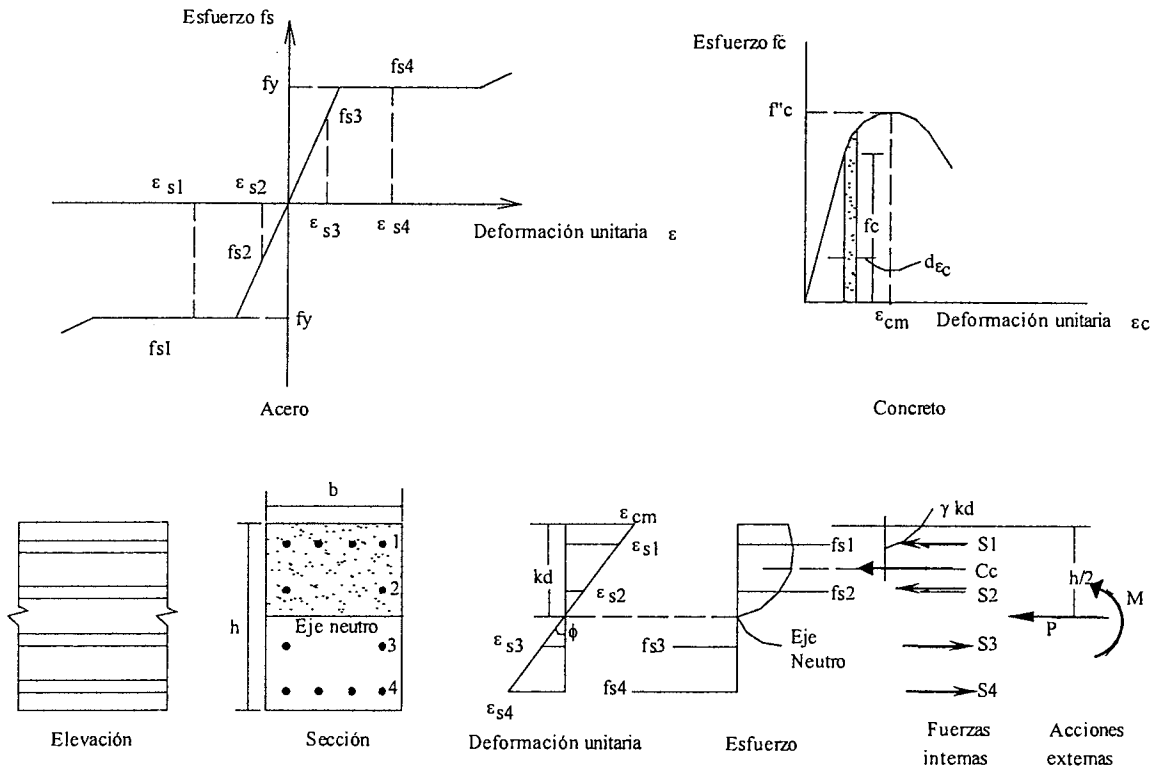


Fig. 19-4 Determinación de un punto del diagrama momento – curvatura de una sección.

A manera de ejemplo, la figura 19-5 muestra el diagrama momento - curvatura para una sección de concreto armado de 0.35×0.70 m, sin carga axial y reforzada con acero de tracción únicamente con una cuantía equivalente al 50% de la balanceada. El modelo del acero adoptado es elastoplástico perfecto con $f_y = 4,200$ y el modelo del concreto es similar al Modelo de Hognestad, es decir, parabólico hasta $f'_c = 210$ ($\epsilon_0 = 0.002$) y lineal descendente hasta $f_c = 180 \text{ kg/cm}^2$ ($\epsilon_{cu} = 0.004$).

Se ha supuesto que el concreto resiste tracciones hasta un instante antes de producirse la fisuración por flexión, de allí en adelante se ignora el aporte que podría tener el concreto en tracción que aún no se ha fisurado.

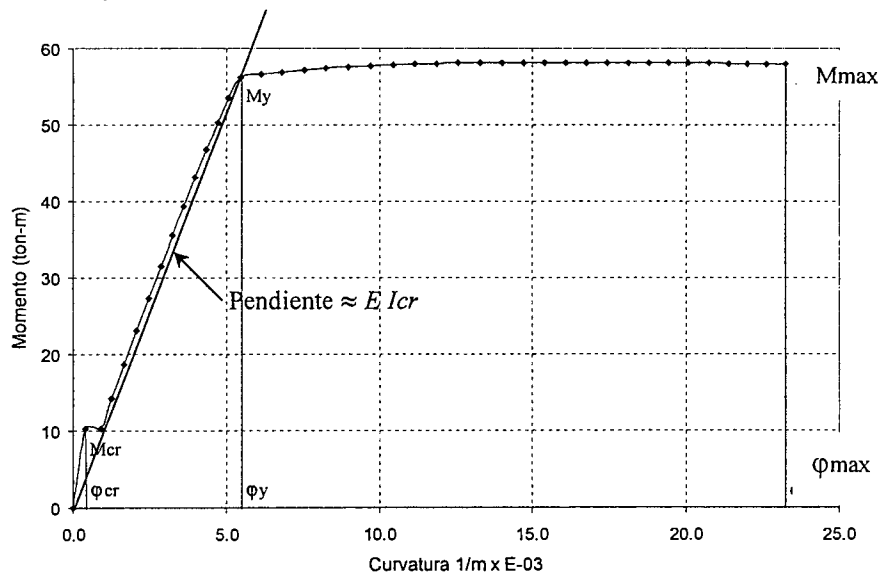


Fig.19-5 Diagrama momento – curvatura para una sección de 0.35×0.70 .

modelo del concreto es similar al Modelo de Hognestad, es decir, parabólico hasta $f'c = 210$ ($\epsilon_0 = 0.002$) y lineal descendente hasta $f_c = 170 \text{ kg/cm}^2$ ($\epsilon_{cu} = 0.004$). Se ha asumido que el peralte efectivo se mantiene constante ($d = 0.45 \text{ m}$). La figura 19-6 muestra los resultados.

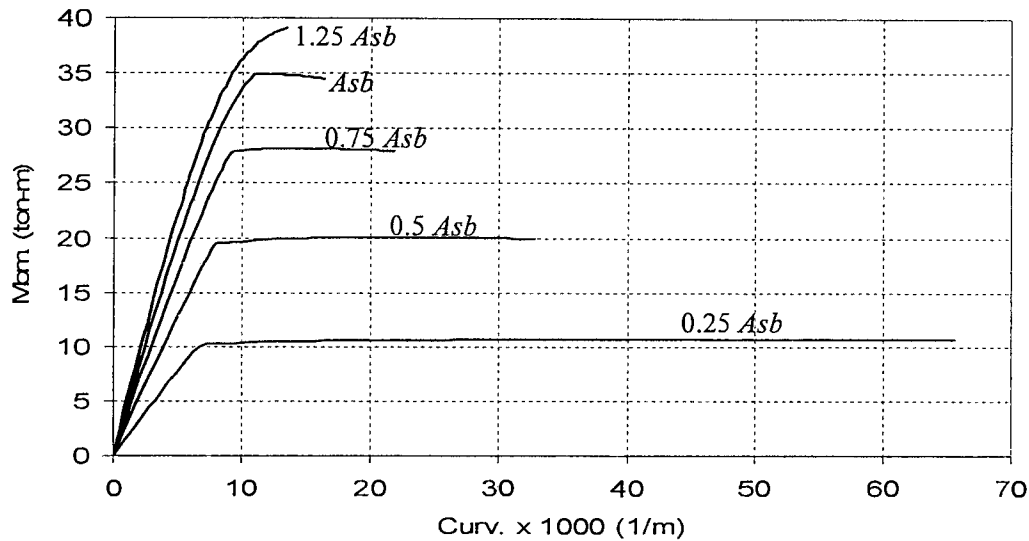


Fig. 19-6 Diagramas Momento – Curvatura. Sección 0.25 x 0.50. Acero en tracción variable

La tabla a continuación resume los resultados y la ductilidad de curvatura que puede alcanzar la sección para las distintas cantidades de acero en tracción utilizadas. Nótese que para un acero equivalente a 0.75 Asb , la ductilidad de curvatura es de tan solo 2.4.

As / Asb	M_y ton-m	M_{max} ton-m	ϕ_y 1/m *1000	ϕ_{max} 1/m *1000	Duct. Curvat. $\mu\phi = \phi_{max} / \phi_y$
0.25	10.2	10.6	6.57	65.48	10.0
0.50	19.4	20.0	7.76	32.74	4.2
0.75	27.9	27.9	9.04	21.83	2.4
1.00	34.9	34.5	10.83	16.37	1.5
1.25	---	39.1	---	13.44	---

Para intentar cuantificar las diversas variables que influyen en los diagramas Momento – Curvatura, y por lo tanto en la ductilidad de la sección, resolvamos el caso particular de una sección de $0.35 \times 0.70 \text{ m}$ como la indicada en la figura 19-7. Las variables a estudiar son:

- La cantidad de acero en tracción.
- La cantidad de acero en compresión.
- El valor de ϵ_{cu} del concreto comprimido.
- La intensidad de la carga axial,

Para todos los casos analizados se ha mantenido $f'c$ y f_y constantes. Para cada uno de los casos, se calculó la Ductilidad de Curvatura de la sección como una medida del cambio que se produce en la ductilidad.

Se distinguen claramente tres etapas en el comportamiento de la sección:

- La primera asociada al comportamiento de la sección antes de alcanzar el momento de agrietamiento ($M_{cr} \approx 10.3 \text{ ton-m}$) es decir la etapa en la cual el concreto aún resiste tracciones. Cuando se produce la fisuración por flexión, la rigidez se reduce y la curvatura aumenta sin incremento en el momento flector.

Antes de la fisuración la rigidez de la sección se puede estimar mediante $E_c I_g$, siendo I_g el momento de inercia bruto de la sección. Luego de la fisuración y hasta antes del inicio de la fluencia, la rigidez de la sección se reduce a $E_c I_{cr}$, siendo I_{cr} el momento de inercia de la sección completamente fisurada, ya que se está despreciando la resistencia a la tracción de todo el concreto situado por debajo del eje neutro.

- La segunda etapa está asociada al comportamiento de la sección fisurada con el acero trabajando en el rango elástico ($f_s < f_y$).
- La tercera etapa se presenta una vez que se ha excedido el momento flector que produce la primera fluencia del acero ($M_y \approx 56.2 \text{ ton-m}$) y se prolonga hasta alcanzar el agotamiento del concreto en compresión, el cual se produce para un momento flector $M_{max} \approx 58 \text{ ton-m}$

Nótese la similitud entre el momento de fluencia de la sección (M_y) y la resistencia nominal o momento máximo (M_{max}) la diferencia es de tan solo un 3%. Esto se debe, en parte, al modelo elastoplástico adoptado para el acero. Si se hubiera adoptado un modelo con endurecimiento por deformación, la diferencia hubiera sido mayor. Para esta sección, el asumir un diagrama momento – curvatura bilineal, sería acertado.

La ductilidad de curvatura de la sección es de:

$$\varphi_{max} / \varphi_y = 23.3 / 5.4 \approx 4.3$$

19.5 Factores que Influyen en los Diagramas $M - \varphi$ y en la Ductilidad de Curvatura

- a) La cantidad de acero en tracción. A mayor cantidad de acero en tracción menor ductilidad de curvatura. Al aumentar el acero en tracción aumenta kd , aumenta φ_y y φ_{max} se reduce.
- b) La cantidad de acero en compresión. Su presencia aumenta la ductilidad ya que kd decrece, φ_y decrece y φ_{max} aumenta.
- c) El esfuerzo de fluencia f_y del acero. Un aumento en f_y es equivalente a aumentar el área de acero en tracción.
- d) Las características de la plataforma de fluencia y de la zona de endurecimiento por deformación del acero. Estas características son importantes una vez que se ha alcanzado la fluencia del acero.
- e) La forma del diagrama esfuerzo – deformación del concreto.
- f) La forma y tamaño de la zona en compresión.
- g) El valor de f_c . Un aumento de f_c (para la misma cantidad de acero en tracción) aumenta la ductilidad ya que, kd se reduce, φ_y se reduce y φ_{max} aumenta.
- h) El valor de ε_{cu} del concreto. Una mejora en este valor hace que φ_{max} aumente y en consecuencia la ductilidad de curvatura. Hay diferencias notables entre el concreto confinado y no confinado, la presencia de confinamiento (estribos o espirales) influye marcadamente en el valor de ε_{cu} .
- i) La intensidad de la carga axial. Para una misma sección y armaduras, un aumento de la carga axial reduce la ductilidad de curvatura fuertemente.

Para observar la influencia que tiene la cantidad de acero en tracción en la forma del diagrama Momento – Curvatura así como en la ductilidad, se han construido los diagramas para una sección de 0.25×0.50 con diversas cantidades de acero en tracción únicamente. El modelo del acero adoptado es elastoplástico perfecto con $f_y = 4,200$ y el

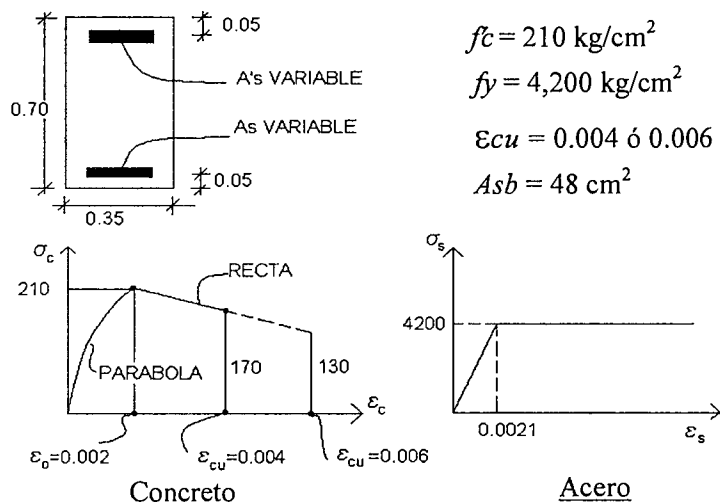
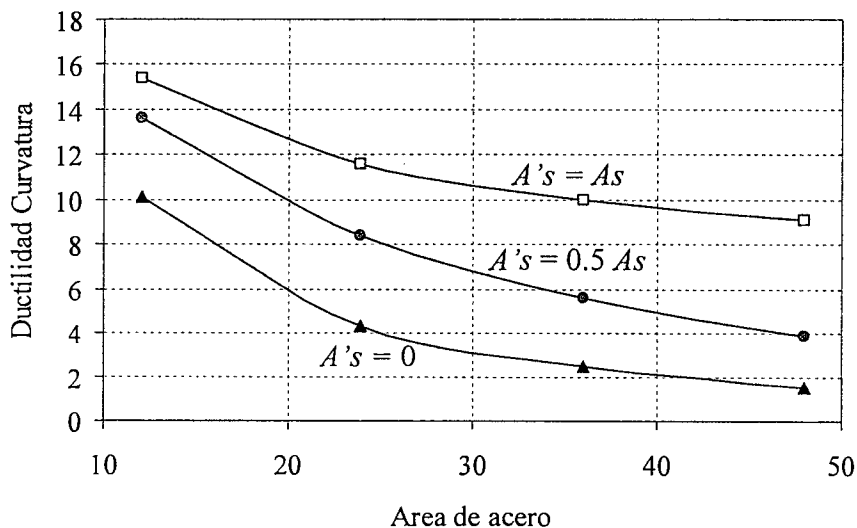


Fig. 19-7 Sección de concreto armado utilizada para cuantificar el efecto de algunas de las variables que influyen en la ductilidad de curvatura.

a) **Caso 1** $\epsilon_{cu} = 0.004$

$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$A's \text{ (cm}^2\text{)}$	Mom. fluencia $M_y \text{ (ton-m)}$	ϕ_y $1/m \times 10^{-3}$	Mom. máximo $M_{max} \text{ (ton-m)}$	Ductilidad de Curvatura
12 (0.25 A_{sb})	0	29.5	4.54	30.8	10.1
24 (0.50 A_{sb})	0	56.2	5.35	57.8	4.3
36 (0.75 A_{sb})	0	80.6	6.23	80.8	2.5
48 (1.00 A_{sb})	0	101.3	7.43	100.0	1.5
12	6	29.8	4.43	31.0	13.6
12	12	30.0	4.33	31.1	15.4
24	12	58.0	5.01	60.9	8.4
24	24	59.0	4.77	61.2	11.6
36	18	85.7	5.48	90.1	5.6
36	36	87.9	5.07	91.4	10.0
48	24	113.2	5.89	118.3	3.9
48	48	116.9	5.30	121.6	9.1

La ductilidad de curvatura de esta sección, cuando el acero de refuerzo equivale a 0.75 A_{sb} es de tan solo 2.5. La figura a continuación resume los resultados del Caso 1, se muestra la variación en la ductilidad de curvatura por efecto de las variaciones en el acero de tracción y de compresión.



b) Caso 2 $\epsilon_{cu} = 0.006$

A_s (cm ²)	$A's$ (cm ²)	Mom. fluencia M_y (ton-m)	$\phi\gamma$ $1/m \times 10^{-3}$	Mom. máximo M_{max} (ton-m)	Ductilidad de Curvatura
24 (0.50 A_{sb})	0	56.2	5.35	56.8	6.1
24	12	58.0	5.01	60.8	13.1
36 (0.75 A_{sb})	0	80.6	6.23	78.6	3.5
36	18	85.7	5.48	89.6	8.0
48 (1.00 A_{sb})	0	101.3	7.43	96.1	2.2
48	24	113.2	5.89	117.3	5.6

c) Caso 3 $\epsilon_{cu} = 0.004$ Efecto de la Carga Axial

Utilizando la misma sección de 0.35x0.70 m, se calcularon las ductilidades de curvatura para distintos niveles de carga axial de una columna con armadura simétrica en dos caras con una cuantía total de acero del 2% (48 /35x70). La figura 19-8 muestra las dimensiones, refuerzos y modelos del concreto y acero utilizados para este análisis.

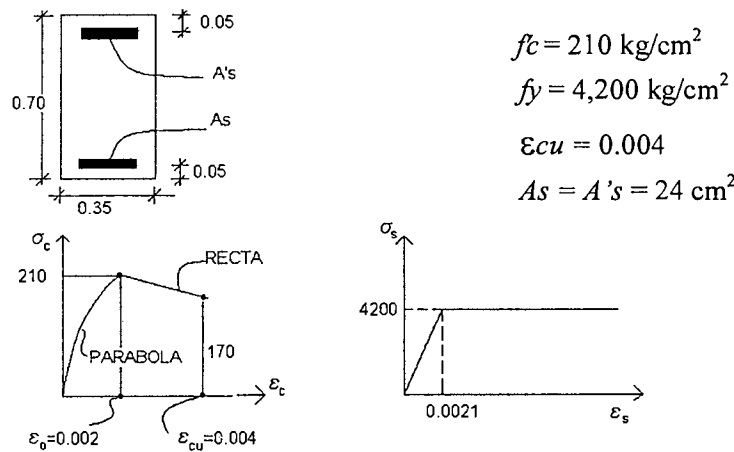


Fig. 19-8 Ductilidad de Curvatura en una columna

Para asociar cada una de las cargas axiales analizadas con la resistencia de la columna, se presenta a continuación el Diagrama de Interacción de esta sección (resistencias nominales) construido sobre la base de las hipótesis de la Norma E.060 para elementos en flexocompresión, es decir con un bloque rectangular equivalente de compresiones y una deformación de agotamiento del concreto $\epsilon_{cu} = 0.003$. También se muestra en trazo discontinuo el Diagrama de Interacción construido con el mismo modelo del concreto (figura 19-8) con el cual se calcularon las ductilidades de curvatura.

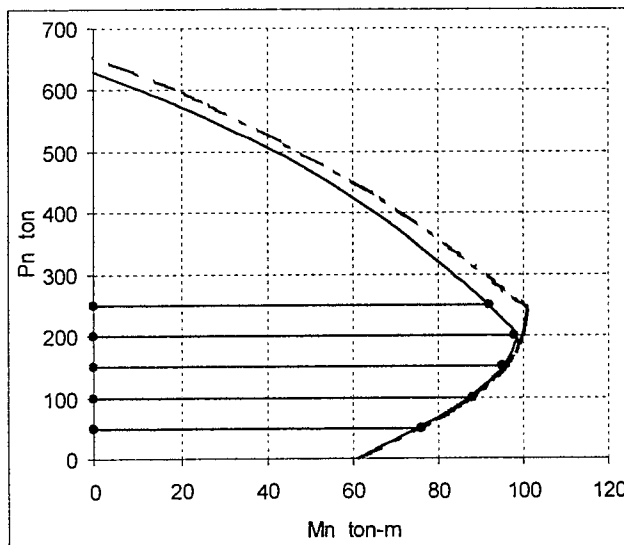


Diagrama de Interacción de la Sección de la Fig. 19-8.

a) Trazo continuo: construido con las hipótesis de la Norma E.060.

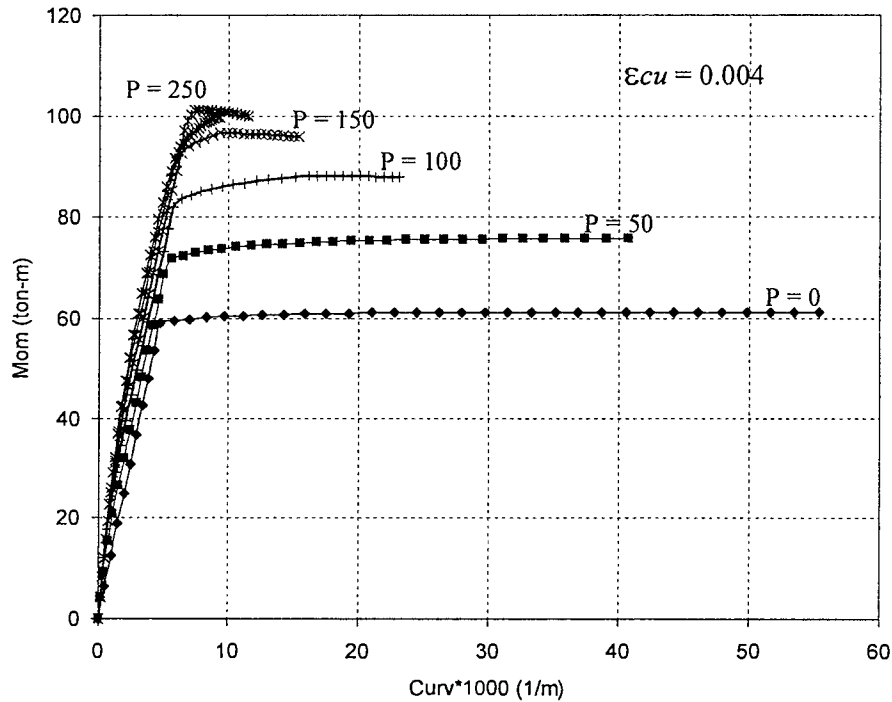
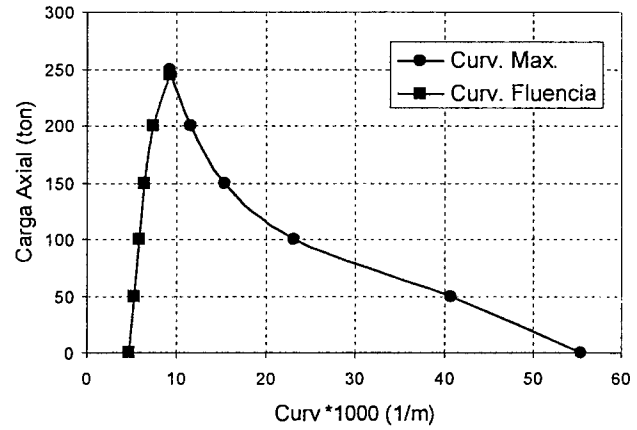
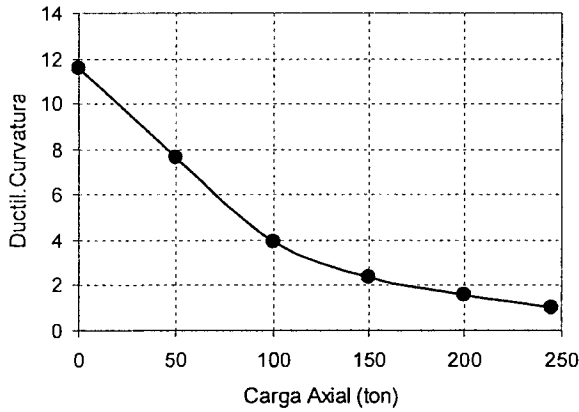
Falla balanceada: $P_b = 203$ ton $M_b = 98.6$ t-m

b) Trazo discontinuo: construido con el modelo de concreto de la figura 19-8.

Falla balanceada: $P_b = 246$ ton $M_b = 100$ t-m

La tabla y los gráficos a continuación resumen los resultados obtenidos para 7 niveles (intensidades) de la carga axial analizados.

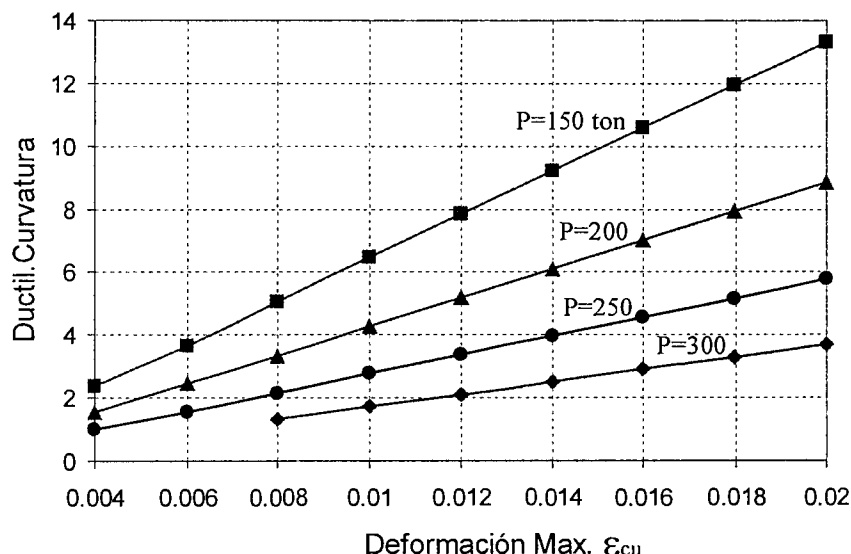
P (ton)	Mom. fluencia M_y (ton-m)	ϕ_y $1/m \times 10^{-3}$	Mom. máximo M_{max} (ton-m)	$\mu\phi$
0	59.0	4.77	61.2	11.6
50	71.4	5.32	75.9	7.7
100	82.9	5.88	87.8	3.9
150	93.3	6.50	95.8	2.4
200	101.2	7.38	100.1	1.6
245	100.5	9.30	100.4	1.0
250	--	--	99.7	--



Es clara la fuerte influencia que tiene la carga axial en la ductilidad de curvatura de esta sección. Como era de esperarse, para cargas por encima de la carga balanceada (245 ton) la sección no desarrolla ductilidad de curvatura ya que el acero en tracción más alejado, no llega a fluir en tracción.

Para desarrollar ductilidades, cuando la carga axial es mayor que la balanceada, es necesario incrementar la deformación de agotamiento del concreto (ϵ_{cu}) por medio de estribos que confinen eficientemente al núcleo. La figura a continuación muestra, para

diversos valores de la carga axial, la dependencia entre la ductilidad de curvatura y el valor de ϵ_{cu} . Se observa una relación prácticamente lineal entre la ductilidad de curvatura y la deformación de agotamiento del concreto, debido a que para cada intensidad de la carga axial analizada, la curvatura de fluencia es prácticamente la misma, independiente del valor de ϵ_{cu} . Cabe anotar, que el modelo utilizado para el concreto y el acero en la construcción de esta gráfica, son los indicados en la figura 19-8, adicionalmente se ha supuesto que el valor de f_c asociado a ϵ_{cu} es constante (170 kg/cm²).



19-6 Diagramas Momento – Curvatura Aproximados

Si se observan las figuras 19-5 y 19-6, se notará que para cálculos rápidos, es posible simplificar los diagramas momento – curvatura de una sección de concreto armado. La figura 19-9 muestra tres posibles simplificaciones para la construcción de los diagramas momento - curvatura de una sección de concreto armado en flexión pura. El diagrama más simple y fácil de construir es el Bilineal Simplificado, para su construcción se necesitan solamente tres valores: Las curvaturas de fluencia y última y el momento último (nominal) que resiste la sección.

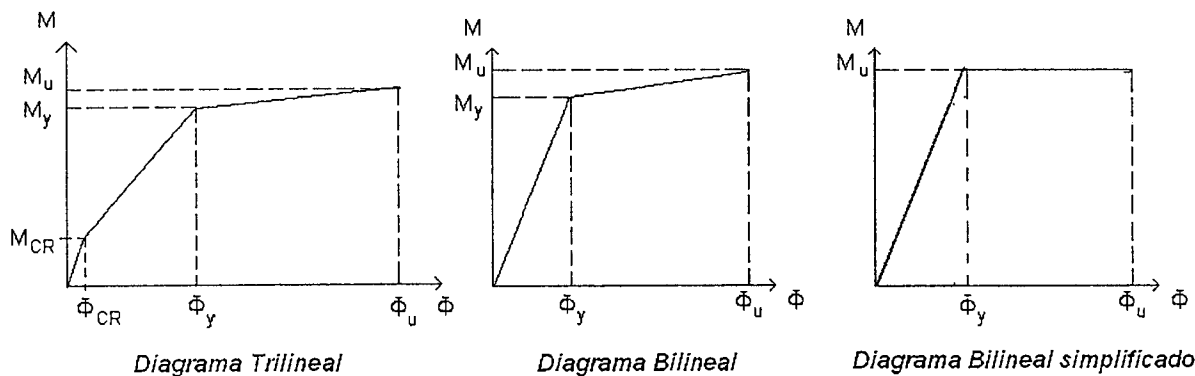


Fig. 19-9 Diagramas momento – curvatura aproximados.

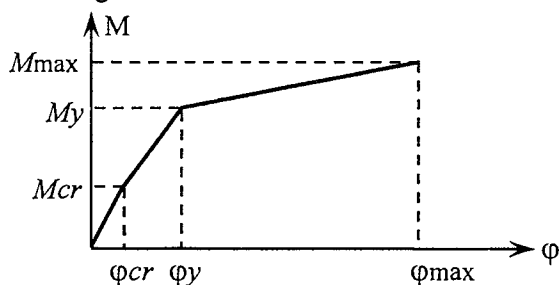
Los puntos notables del Diagrama Trilineal son:

- M_{cr} , ϕ_{cr} : El momento y la curvatura de agrietamiento de la sección. Para su cálculo se puede ignorar la presencia del acero de refuerzo.
- M_y , ϕ_y : El momento y la curvatura asociados al inicio de la fluencia en el acero de tracción. Para su determinación se puede suponer comportamiento elástico en el concreto hasta el inicio de la fluencia del acero en tracción. Normalmente el esfuerzo

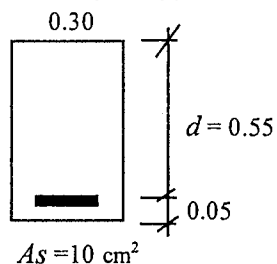
en el concreto (f_c) en el inicio de la fluencia, suele exceder de $0.5 f_c$ por lo tanto esta suposición es discutible. Sin embargo el suponer comportamiento lineal hasta el inicio de la fluencia del acero generalmente subestima ϕ_y y sobrestima M_y siendo esta situación conservadora para el cálculo de la ductilidad de curvatura, por lo que suele aceptarse. Si se quisiera una mejor aproximación puede optarse por un modelo de comportamiento del tipo parabólico para el concreto.

- M_{max} , ϕ_{max} : El momento y la curvatura asociados a la falla de la sección, ya sea por agotamiento del concreto o por rotura del acero (situación poco común). M_{max} se puede aproximar mediante el uso de las hipótesis de la Norma E.060. Un valor de $\epsilon_{cu} = 0.004$ es más apropiado para el cálculo de ϕ_{max} .

Con la ayuda de un ejemplo mostraremos la construcción de un diagrama aproximado momento – curvatura para una sección rectangular. Los diagramas aproximados, como ya se explicó, se pueden construir determinando tres puntos notables de los mismos, los que están indicados en la figura a continuación.

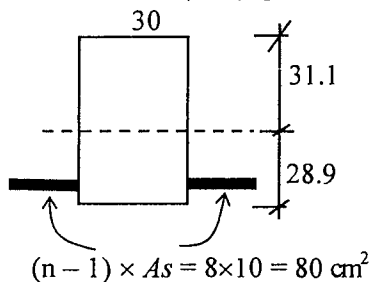


La sección para la cual calcularemos el diagrama aproximado, es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 f_c &= 210 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_y &= 4,200 \text{ kg/cm}^2 \\
 E_c &= 220,000 \text{ kg/cm}^2 \\
 E_s &= 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 n &= E_s / E_c \approx 9 \\
 f_r &= 2 \sqrt{f_c} \approx 29 \text{ kg/cm}^2 \\
 A_s &= 10 \text{ cm}^2 \quad (0.28 A_s b)
 \end{aligned}$$

- Cálculo de M_{cr} , ϕ_{cr} (agrietamiento de la sección)



Sección transformada no agrietada:

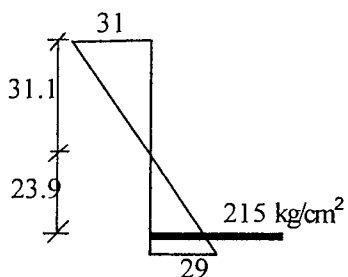
$$\begin{aligned}
 I_{tr} &\approx 588,000 \text{ cm}^4 & I_g &= 540,000 \text{ cm}^4 \\
 S^+ &\approx 20,345 \text{ cm}^3 & S^- &\approx 18,905 \text{ cm}^3 \\
 M^+_{cr} &= f_r \times S^+ \approx 5.9 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Esfuerzos en el concreto y acero:

$$\begin{aligned}
 f_c &= M^+_{cr} / S^- \approx 31 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_s &= n M^+_{cr} / 24,600 \approx 215 \text{ kg/cm}^2 \\
 \epsilon_c &= 31 / E_c \approx 140 \times 10^{-6} \\
 \phi_{cr} &= 140 \times 10^{-6} / 31.1 \approx 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m}
 \end{aligned}$$

Alternativamente:

$$\phi_{cr} = M^+_{cr} / E_c I_{tr} \approx 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$



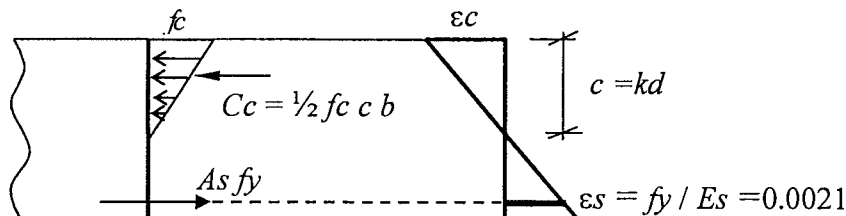
Si se hubiera despreciado o ignorado la presencia del acero de refuerzo, el momento de agrietamiento y la curvatura correspondiente, serían:

$$S^+ = S^- = 18,000 \text{ cm}^3 \quad M^{+cr} = f_r \times S^+ \approx 5.22 \text{ ton-m}$$

$$f_c = M^{+cr} / S^- \approx 29 \text{ kg/cm}^2 \quad \varphi_{cr} = M^{+cr} / E_c I_g \approx 0.439 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

Es claro que en este caso, el error que se comete al despreciar el aporte del acero no es importante.

- Cálculo de M_y , φ_y : Asumiremos que el concreto se comporta linealmente hasta el inicio de la fluencia del acero. Para la condición de inicio de fluencia del acero la sección de concreto normalmente se encuentra completamente agrietada.



Posición del eje neutro en la sección agrietada:

$$\rho = 10 / (30 \times 55) = 0.606\% \Rightarrow k = \sqrt{(\rho n)^2 + 2 \rho n} - \rho n \approx 0.28 \quad c = k d = 15.4 \text{ cm}$$

$$I_{cr} \approx 178,000 \quad (\text{momento de inercia de la sección agrietada} \approx 0.33 I_g)$$

$$\text{Equilibrio: } C_c = \frac{1}{2} f_c (15.4 \times 30) = A_s f_y = 42,000 \Rightarrow f_c \approx 180 \text{ kg/cm}^2 \approx 0.86 f_c$$

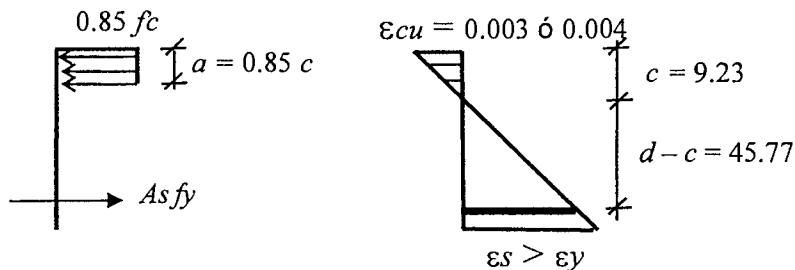
$$\text{Curvatura de fluencia: } \varphi_y = 0.0021 / (55 - 15.4) = 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$\text{Momento de fluencia: } M_y = A_s f_y (d - c/3) \approx 20.9 \text{ ton-m}$$

El valor de f_c calculado es bastante alto. Para estos niveles de esfuerzo, el concreto ya dejó de comportarse linealmente, sin embargo, aceptaremos los resultados sobre la base de que se subestima φ_y y se sobrestima M_y , lo cual es conservador para el cálculo de la ductilidad de curvatura. Otra alternativa sería la de trabajar con un diagrama parabólico de esfuerzos en el concreto. La curvatura de fluencia, al haber asumido que el concreto se comporta elástico hasta este nivel, también puede calcularse mediante la relación clásica momento – curvatura:

$$\varphi_y = M_y / E_c I_{cr} = 20.9 \times 10^5 / (220,000 \times 178,000) \approx 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Cálculo de φ_{max} , M_{max} . Se puede realizar, de manera simplificada, utilizando las hipótesis de la Norma E.060 con el bloque equivalente de compresiones. Sin embargo, el valor de ϵ_{cu} considerado por la Norma de 0.003 es conservador, un valor más adecuado sería $\epsilon_{cu} = 0.004$.



$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' c b} = 7.84 \text{ cm} \quad c = a / \beta_1 = 7.84 / 0.85 \approx 9.23 \text{ cm}$$

$$M_{max} = M_n = A_s f_y (d - a/2) = 21.45 \text{ ton-m}$$

Curvatura máxima: $\varphi_{max} = \epsilon_{cu} / c$

$$\text{Si } \epsilon_{cu} = 0.003 \text{ entonces } \varphi_{max} = 32.5 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$\epsilon_s \approx 7.1 \epsilon_y$$

Si $\epsilon_{cu} = 0.004$ entonces $\phi_{max} = 43.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$

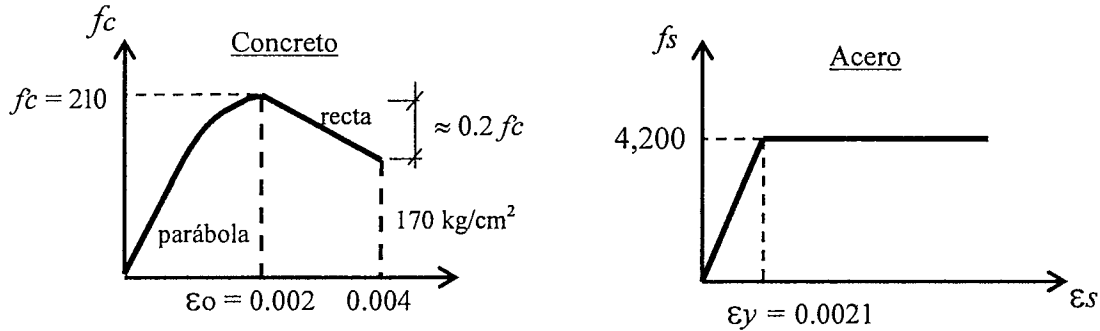
$\epsilon_s \approx 9.4 \epsilon_y$

En resumen:

$$\begin{aligned} M_{cr} &= 5.9 \text{ ton-m} & \phi_{cr} &= 0.455 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \\ M_y &= 20.9 \text{ ton-m} & \phi_y &= 5.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \\ M_{max} &= 21.45 \text{ ton-m} & \phi_{max} &= 43.3 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \end{aligned}$$

La ductilidad de curvatura de la sección es: $\mu_\phi = 43.3/5.3 \approx 8.2$

A manera de verificación del método aproximado propuesto, calculemos los puntos notables utilizando un diagrama esfuerzo – deformación del concreto un tanto más “refinado” manteniendo un modelo elastoplástico para el acero, como se muestra a continuación. Se ha supuesto que el concreto se encuentra agrietado por tracción desde el inicio, por lo tanto no se ha calculado el momento de agrietamiento.



Con este modelo para el concreto y el acero los resultados son:

$$\begin{aligned} M_y &= 20.62 \text{ ton-m} & \phi_y &= 5.51 \times 10^{-3} \text{ 1/m} & (\epsilon_c \approx 0.48 \epsilon_o & f_c \approx 0.7 f_c & c = 16.9 & \epsilon_s = \epsilon_y) \\ M_{max} &= 21.53 \text{ ton-m} & \phi_{max} &= 47.1 \times 10^{-3} \text{ 1/m} & (\epsilon_c = 0.004 & & c = 8.48 & \epsilon_s = 10.4 \epsilon_y) \end{aligned}$$

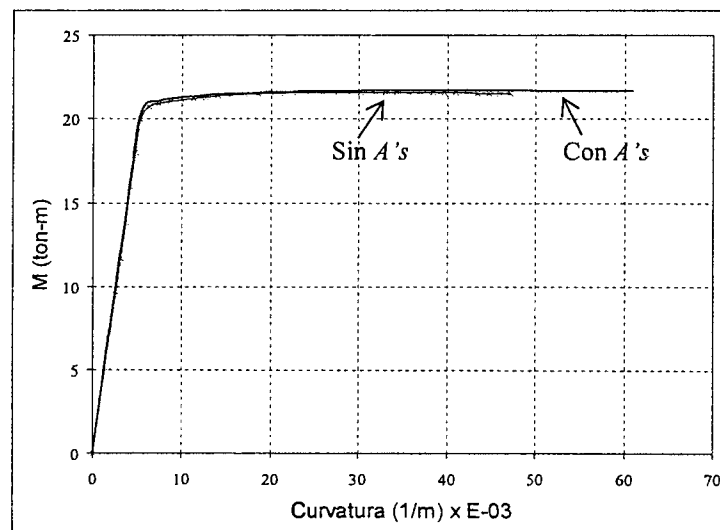
La ductilidad de curvatura de la sección es $\mu_\phi \approx 8.5$

Analicemos la influencia que tendría la presencia de acero en compresión en la sección. Para ello asumamos $A's = 5 \text{ cm}^2$ (50% de A_s) y utilicemos para el análisis el modelo “refinado” para el concreto, los resultados son:

$$\begin{aligned} M_y &= 20.82 \text{ ton-m} & \phi_y &= 5.36 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \\ (\epsilon_c \approx 0.42 \epsilon_o & f_c \approx 0.65 f_c & c = 15.8 \text{ cm} & \epsilon_s = \epsilon_y & f's = 0.27 f_y) \\ M_{max} &= 21.69 \text{ ton-m} & \phi_{max} &= 61 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \\ (\epsilon_c = 0.004 & c = 6.56 \text{ cm} & \epsilon_s = 14.1 \epsilon_y & f's = 0.45 f_y) \end{aligned}$$

La ductilidad de curvatura es $\mu_\phi \approx 11.4$.

El gráfico a continuación muestra los diagramas momento – curvatura para los dos casos analizados.



Finalmente, utilizando las mismas relaciones constitutivas (modelos) para el concreto y el acero, calculemos la ductilidad de curvatura de esta sección, sin acero en compresión, para las siguientes cantidades de acero:

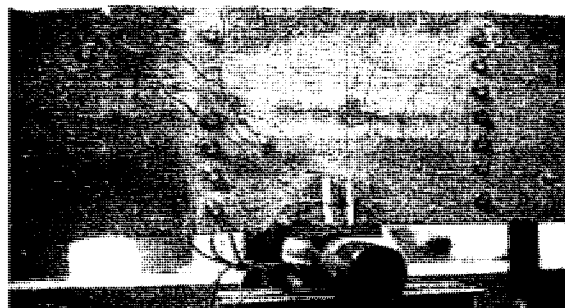
$A_s = 10.0 \text{ cm}^2$ (0.28 A_{sb})	$M_y = 20.62 \text{ t-m}$	$M_{\max} = 21.53 \text{ t-m}$	$\mu_\phi \approx 8.5$
$A_s = 17.6 \text{ cm}^2$ (0.5 A_{sb})	$M_y = 34.83 \text{ t-m}$	$M_{\max} = 35.80 \text{ t-m}$	$\mu_\phi \approx 4.2$
$A_s = 26.4 \text{ cm}^2$ (0.75 A_{sb})	$M_y = 49.94 \text{ t-m}$	$M_{\max} = 50.0 \text{ t-m}$	$\mu_\phi \approx 2.4$

Nótese nuevamente la escasa ductilidad de curvatura disponible (2.4) que tiene la sección cuando el acero de refuerzo equivale a 0.75 A_{sb} . Si fuese necesario mejorar la ductilidad, tendremos que colocar una cantidad significativa de acero en compresión, o lograr un aumento en la deformación ϵ_{cu} del concreto comprimido por medio de confinamiento apropiado, o aumentar el área del concreto comprimido (por ejemplo creando una viga T) lo cual no será posible en las zonas de momento negativo. Estas tres alternativas no son excluyentes entre sí, por ejemplo, es usual en el diseño de elementos con responsabilidad sísmica utilizar acero en compresión y además colocar estribos cerrados con poco espaciamiento para confinar de manera efectiva el concreto comprimido.

19.7 Lecturas

- 19.1 Influencia de la Plataforma de Fluencia y el Endurecimiento del Acero en la Ductilidad de Elementos de Concreto Armado. G. Ottazzi, A. Muñoz. Memorias del XI Congreso nacional de Ingeniería Civil, 1997.
- 19.2 Capítulo 6 – Ultimate Deformation and Ductility of Members with Flexure – del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 19.3 Myths and Fallacies in Earthquake Engineering – Conflicts between Design and Reality. Nigel Priestley. ACI Concrete International. February 1997.
- 19.4 Load Moment Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Sections. Pfrang, Siess, Sozen. ACI Journal. July 1964.
- 19.5 Displacement Based Design of RC Structures Subjected to Earthquakes. Moehle, Eeri. Earthquake Spectra, Vol. 8, No. 3, 1992.

CAPITULO 20



Redistribución de Momentos Flectores

20.1 Introducción

En el Capítulo 19 – Relaciones Momento Curvatura – se discutió la importancia de lograr un comportamiento dúctil de las estructuras y elementos estructurales. La importancia está asociada a la necesidad de evitar las fallas frágiles en las estructuras y elementos, a la actual filosofía de diseño sísmico que confía en las propiedades de absorción y disipación de energía y a la posibilidad de modificar la distribución elástica de los momentos flectores.

Si las secciones de un elemento - por ejemplo una viga hiperestática - tienen suficiente ductilidad, es posible modificar el diagrama de momentos flectores obtenido del análisis elástico, aliviando por ejemplo los momentos negativos y transfiriendo la reducción hacia la zona de momentos positivos, a este proceso se le denomina Redistribución de Momentos. La figura 20-1 ilustra la redistribución de momentos en una viga doblemente empotrada sometida a una carga uniformemente distribuida

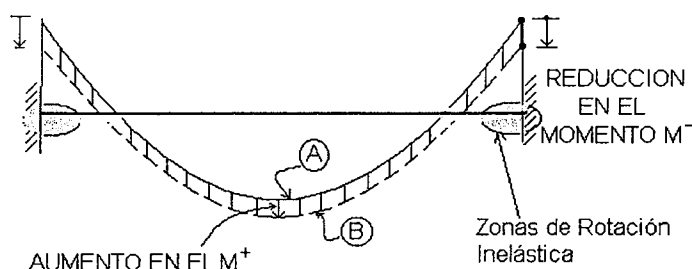


Fig. 20-1 Redistribución de los momentos flectores en una viga doblemente empotrada.

En la figura 20-1 el diagrama A corresponde a la distribución elástica de los momentos flectores y el diagrama B al de momentos ajustado o redistribuido, distinto al elástico, en el cual se han reducido los momentos negativos. Este nuevo diagrama será posible si las secciones en las zonas de momento negativo, una vez alcanzada la fluencia del acero, tienen suficiente capacidad de rotación inelástica manteniendo su resistencia (capacidad de momento) de tal modo que transfieran la diferencia hacia la zona de momentos positivos. En este caso la rotación inelástica se concentra en las zonas aledañas a los empotramientos en una cierta longitud, difícil de estimar con precisión, que se denomina zona plastificada o zona de rotación inelástica.

Normalmente la redistribución se utiliza para reducir los momentos flectores negativos en las zonas de "rótulas plásticas" o zonas plastificadas, con respecto a los obtenidos del análisis elástico, lo que se traduce, para mantener el equilibrio, en un aumento de los momentos positivos. Como resultado es posible, por ejemplo, reducir la congestión del

acero en la zona de momentos negativos sin reducir la seguridad global del elemento o estructura.

La redistribución también puede suceder en la eventualidad de una sobrecarga o acción imprevista sobre el elemento o estructura. En esta eventualidad, si la estructura es redundante y con suficiente ductilidad, las secciones que alcancen momentos flectores cercanos al de fluencia, podrán “transferir” el exceso de demanda hacia las zonas que aún tienen reserva de resistencia hasta formar un mecanismo plástico y agotar la capacidad de la estructura.

Los ensayos han mostrado que una estructura hiperestática puede seguir admitiendo incrementos de carga aún cuando una o varias secciones hayan entrado en fluencia, siempre y cuando las secciones que ya alcanzaron su capacidad (resistencia) puedan soportar rotaciones inelásticas es decir, si se pueden formar rótulas plásticas. Esto permite el incremento de los momentos en otras secciones (redistribución) que tienen reserva, hasta que se forme el mecanismo de colapso.

20.2 Diagramas Momento – Rotación

Es importante hacer notar la diferencia que existe entre un diagrama momento - curvatura y un diagrama momento - rotación para la zona plastificada de una viga de concreto armado. El primero corresponde a una sección (en teoría de longitud nula) fisurada de concreto armado y el segundo a una zona o porción del elemento, normalmente la zona donde se forma la articulación plástica.

La capacidad de las estructuras de concreto armado para soportar rotaciones inelásticas en las zonas de formación de las rótulas plásticas, no es ilimitada. Por lo tanto, cuando se realiza un análisis límite en una estructura de concreto armado o cuando se reducen los momentos mediante la redistribución, es necesario conocer (o por lo menos estimar) la demanda de rotación inelástica en las zonas donde se forman las rótulas. La demanda se compara con la disponibilidad de rotación inelástica que tiene la estructura en esas zonas. Si la demanda es mayor que la disponibilidad no será posible una redistribución total, ni será posible alcanzar el mecanismo plástico de colapso ya que las secciones donde se forman las rótulas no tendrán suficiente capacidad de rotación inelástica.

A partir de un diagrama momento – curvatura, en teoría, se podría calcular la rotación entre dos puntos cualesquiera a lo largo del eje del elemento y por lo tanto calcular la rotación inelástica (plástica) disponible en la zona de la rótula. Recuerde que la curvatura se define como la rotación por unidad de longitud del elemento, en consecuencia la rotación entre dos puntos A y B, viene dada por la ecuación 20-1.

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx \quad (20-1)$$

Sin embargo, los diagramas momento – curvatura se construyen para una sección agrietada mientras que la zona donde se presenta la plastificación tiene una cierta longitud que se denota mediante el símbolo - l_p - (longitud plastificada equivalente). Esta zona incluye normalmente una cierta cantidad de grietas discretas. Entre estas grietas el concreto no fisurado reduce la deformación unitaria del acero, esto conduce a lo que se conoce como efecto de “rigidización por tensión”. Este efecto se discutió en el acápite 14.4 donde se presentó la posibilidad de calcular las deflexiones de elementos de concreto armado a partir de los diagramas momento – curvatura de las secciones que lo componen. Adicionalmente los diagramas momento – curvatura construidos a partir de la teoría presentada en el Capítulo 19, no incluyen las deformaciones causadas por el agrietamiento inclinado por cortante ni por el deslizamiento del acero en las vecindades de las grietas.

Como resultado del efecto de rigidización, la rotación total en la zona de rótula es menor que la que resultaría de multiplicar la curvatura por unidad de longitud en la sección fisurada, por la longitud observada o supuesta en la zona de rótula.

Lo anterior hace difícil el cálculo de la rotación inelástica disponible en la zona de las rótulas, por lo tanto se suele acudir a expresiones empíricas producto del ajuste de resultado experimentales o a simplificaciones del problema real.

20.3 Requisitos Generales para la Redistribución

a) Las secciones donde se forman las rótulas deben tener la ductilidad suficiente para aceptar rotaciones inelásticas, permitiendo que otras secciones alcancen su momento de fluencia. Esto significa que se debería comparar la capacidad de rotación inelástica en las zonas donde se prevé que se formarán las rotulas plásticas, con la demanda de rotación impuesta por las cargas externas. Sin embargo, veremos posteriormente, que si se utilizan los límites de redistribución que permite la Norma, esta verificación no es un requisito de la Norma.

En el Capítulo 19 – Diagramas Momento Curvatura – se estudiaron las principales variables que afectan a la ductilidad de curvatura de una sección de concreto armado y en consecuencia la capacidad de rotación inelástica de la misma. Lo que no se ha presentado es como calcular la capacidad inelástica de rotación a partir de los diagramas momento - curvatura, ni como calcular la demanda de rotación.

b) Las “rótulas plásticas” no deben formarse al nivel de cargas de servicio ya que en estas secciones las grietas pueden tener anchos y profundidades importantes. Adicionalmente la estructura bajo cargas de servicio podría experimentar deflexiones apreciables, incompatibles con los estados límites de servicio.

c) Ya que normalmente los momentos máximos positivos y negativos provienen de patrones de carga distintos (alternancia) las secciones tienen una reserva de resistencia la cual no es totalmente empleada por ninguna de las condiciones de carga usuales. La redistribución permite utilizar la capacidad total de un mayor número de secciones, a medida que se alcanza la carga última (límite) obteniéndose un diseño más eficiente.

d) El ajuste de los momentos negativos y positivos debe realizarse para cada estado de carga. Luego las secciones se diseñan para los máximos ajustados que resulten de cada uno de los estados de carga.

e) Se debe mantener el equilibrio estático, entre la carga externa y las fuerzas internas de sección, en todos los apoyos (nudos) y tramos antes y después de la redistribución.

20.3.1 Especificaciones de la Norma de Concreto Armado - Redistribución

La Norma E.060 de 1989 y el ACI (hasta el año 99) permitían un aumento o disminución de los momentos negativos en los apoyos de los miembros continuos para cualquier estado de carga. El porcentaje de aumento o disminución de los momentos negativos calculados por métodos elásticos en los apoyos de elementos continuos, no deberá superar el siguiente valor:

$$\%R = 20 \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} \right) \text{ en } \% \quad (20-2)$$

La expresión anterior es aplicable solo a aquellas secciones en las cuales el término cuantía en flexión (ρ) tenga significado, estas son las secciones rectangulares y las T, en consecuencia parecería que el código limita la redistribución a este tipo de secciones. Lo que sucede es que la investigación experimental que dio base a la propuesta del

código, probablemente se realizó únicamente en secciones rectangulares o T. Sin embargo, otras formas de secciones transversales también tienen capacidad de rotación inelástica y en consecuencia ser susceptibles a redistribución de momentos flectores, por lo tanto la expresión propuesta por el código puede transformarse a:

$$\%R = 20 \left(1 - \frac{A_s - A'_s}{A_{sb}} \right) \text{ en } \% \quad (20-3)$$

La figura 20-2 (ACI-99) compara los resultados experimentales de la cantidad de redistribución disponible contra el índice de refuerzo por flexión, $(\rho - \rho')/pb$. Se indica también el límite de redistribución (expresión 20-2) adoptado por la Norma. Como se observa este límite es conservador comparado con los resultados experimentales y no ha sido modificado desde la edición del ACI del año 1971.

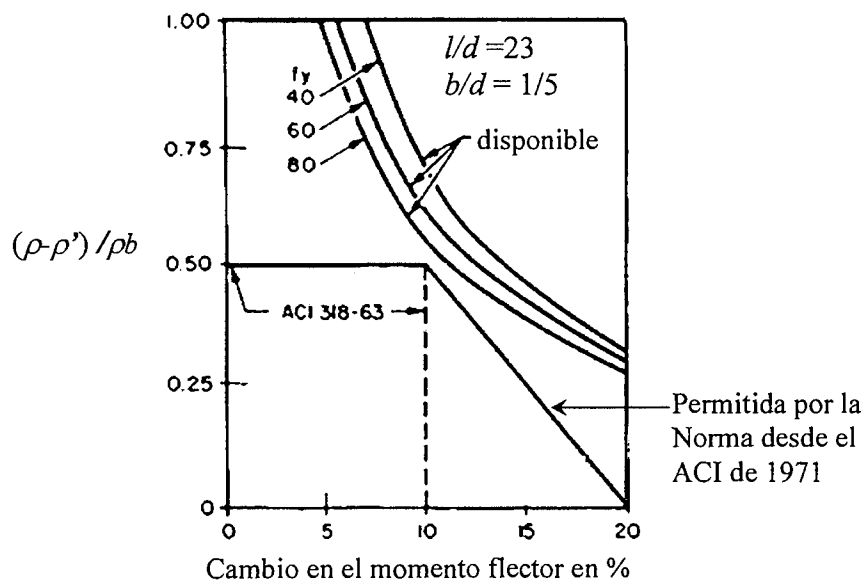


Fig. 20-2 Redistribución permitida por la Norma en comparación con la disponible teórica y experimental.

Tal como se mencionó en el acápite 17.7, a partir del ACI-02 se modificaron las expresiones que se utilizaron durante muchos años para redistribuir momentos, sin embargo no ha modificado el máximo de redistribución aceptado (20%).

La Norma E.060 del 2009 (artículo 8.4) y el ACI-08 permiten la redistribución solo si en la sección en la cual se reduce el momento se cumple:

$$\epsilon_t \geq 0.0075 \quad (\approx 3.8 \epsilon_y) \quad \text{Independiente del valor de } f_y$$

Equivale a: $c/dt \leq 0.29$

En una sección rectangular, sin acero en compresión, lo anterior equivale a limitar el área de acero a: $A_s \leq 0.48 A_{sb}$ (para $f_y = 4,200$).

El porcentaje de redistribución permitido es :

$$\Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\% \quad (20-4)$$

La nueva exigencia de la Norma E.60 en secciones rectangulares, difiere muy poco de la tradicionalmente utilizada.

20.3.2 Limitaciones de la Norma E.060

a) En la sección o secciones en las cuales se reduce el momento flector, la cantidad máxima de acero presente debe cumplir con:

$$\epsilon_t \geq 0.0075 \quad (\approx 3.8 \epsilon_y)$$

Una de las variables que más influencia tiene en la ductilidad de las secciones de una viga, es la cantidad de refuerzo presente (véase el acápite 19.5) en consecuencia, con esta limitación, la Norma pretende garantizar, a través de la deformación en el acero más alejado del borde en compresión, que la sección en la cual se realiza la redistribución, tenga una ductilidad de curvatura adecuada. En el cálculo de ϵ_l conviene considerar el acero en compresión presente en la sección que se analiza.

- b) La redistribución de momentos no es aplicable cuando los momentos flectores hayan sido obtenidos mediante métodos aproximados, como por ejemplo, el método de los coeficientes de la Norma. Cuando se utilizan estos métodos las fuerzas de sección que se obtienen, no están en equilibrio.
- c) Los momentos negativos modificados deben utilizarse para calcular todas las fuerzas internas restantes (momentos y cortantes) de tal modo que se conserve el equilibrio entre las fuerzas internas y las cargas externas.
- d) De la ecuación 20-4 resulta claro que la Norma establece un límite superior del 20% para la redistribución de los momentos. Este límite es en general conservador. Está basado en la información experimental sobre la capacidad de rotación inelástica de secciones y elementos, para las cuales se adoptaron valores conservadores de la deformación máxima del concreto (ϵ_{cu}) y de las longitudes de rótulas plásticas. La adopción de este límite conservador demostró en los ensayos, que la fisuración y las deflexiones de los elementos diseñados con los niveles máximos de redistribución permitidos, no eran significativamente mayores, bajo cargas de servicio, que los diseñados a partir de la distribución elástica de momentos.

En otras palabras, la cantidad máxima de redistribución fijada por la Norma, no requiere que las secciones tengan grandes cantidades de ductilidad disponible, las que solo se podrían lograr con cuantías de refuerzo bajas y gran capacidad del concreto para deformarse, capacidad asociada a valores altos de ϵ_{cu} que se logran con la presencia de abundante refuerzo transversal de confinamiento. Es por eso que la cantidad de redistribución que permite el código, no está condicionada a la presencia de refuerzo de confinamiento, solo está limitada por la cuantía de acero en flexión de la sección. Por lo tanto, es posible redistribuir momentos aún en elementos que no tengan refuerzo transversal, como lo son por ejemplo los aligerados. Adicionalmente, si se emplean los límites de redistribución de la Norma, es de esperar un comportamiento aceptable bajo cargas de servicio.

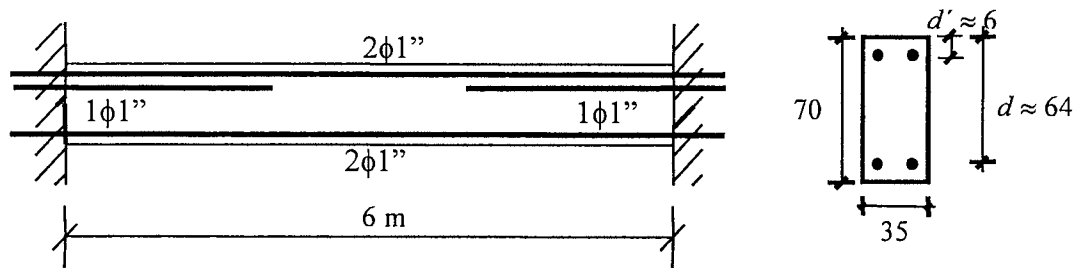
- e) La Norma no requiere el cálculo de la cantidad de rotación inelástica disponible en las zonas donde se espera que se formen las rótulas plásticas. Tampoco exige el cálculo de la demanda de rotación inelástica que se produce como consecuencia de la redistribución en las rótulas, por la acción de las cargas externas.

20-4 Introducción al Análisis Límite

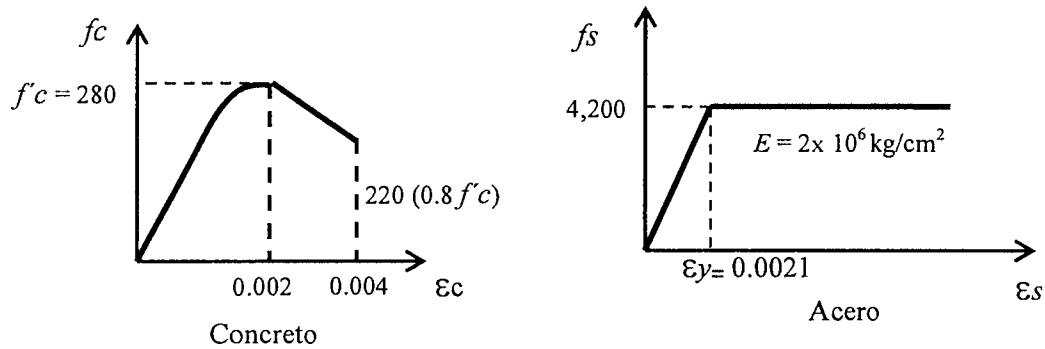
Cuando se presentaron los Estados Límites Últimos de una estructura o elemento estructural, se mencionó que uno de ellos era el asociado a la Formación de un Mecanismo Plástico, es decir a la situación en la cual se forma un número suficiente de rotulas plásticas que convierten a la estructura en un mecanismo. En esto se basa el Análisis y Diseño Límite conocido también como Diseño Plástico.

La aplicación de esta metodología de análisis, permite entender mejor la redistribución de momentos y puede ser aplicada, como herramienta para estimar la capacidad o carga límite de una estructura (viga o pórtico) de concreto armado.

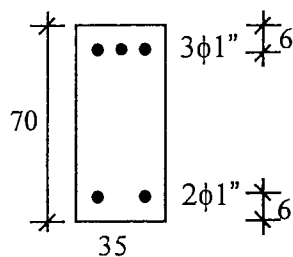
Ejemplo 20-1 - Para introducir algunas particularidades del Diseño Límite, analizaremos la viga doblemente empotrada, cuya distribución de acero de refuerzo ha sido obtenida a partir de un análisis elástico convencional utilizando el Diseño por Resistencia.



Para formarnos una idea de la ductilidad de curvatura disponible de las secciones, de momento negativo y positivo máximo, construyamos los diagramas momento - curvatura. Asumiremos un modelo parabólico - lineal para el concreto y un modelo elastoplástico perfecto para el acero, tal como se indica en la figura a continuación.

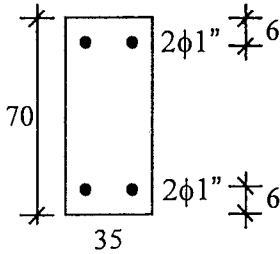


- Sección de momentos negativos:

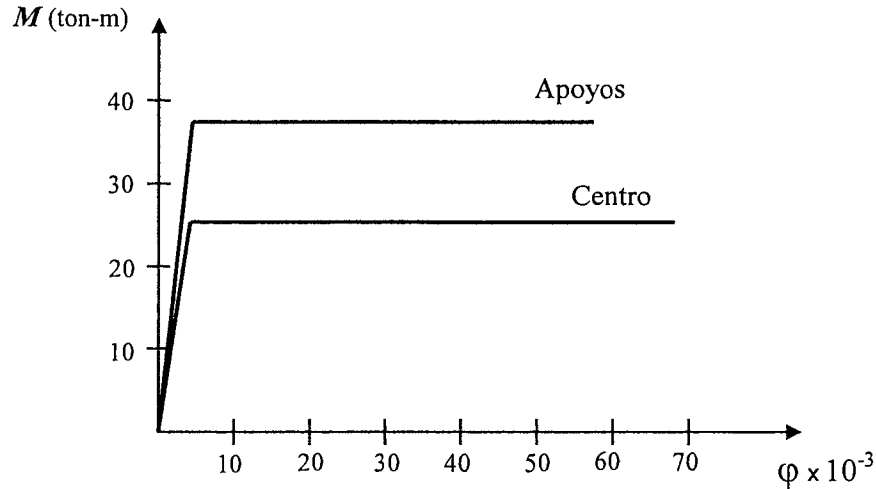


Momento de Fluencia (M_y)	37.36 ton-m
Curvatura de Fluencia (ϕ_y)	4.46×10^{-3} 1/m
Deformación del concreto (ϵ_{cy})	0.00075 (0.38 ϵ_o)
Posición eje neutro (c)	16.87 cm
Momento máximo ($M_{max} = M_n$)	38.83 ton-m
Curvatura máxima (ϕ_{max})	57.4×10^{-3} 1/m
Deformación en el concreto (ϵ_{cu})	0.004
Posición eje neutro (c)	6.95 cm
Ductilidad de curvatura	12.9

- Sección de momentos positivos



Momento de Fluencia (M_y)	25.28 ton-m
Curvatura de Fluencia (ϕ_y)	4.19×10^{-3} 1/m
Deformación del concreto (ϵ_{cy})	0.0006 (0.3 ϵ_o)
Posición eje neutro (c)	13.90 cm
Momento máximo ($M_{max}=M_n$)	26.37 ton-m
Curvatura máxima (ϕ_{max})	68.1×10^{-3} 1/m
Deformación en el concreto (ϵ_{cu})	0.004
Posición eje neutro (c)	5.86 cm
Ductilidad de curvatura	16.2



Diagramas $M - \phi$

Los diagramas de momento - curvatura obtenidos son prácticamente bilineales, por lo que podemos asumir sin mayor error que $M_y \approx M_{max}$. Adicionalmente los resultados indican que tanto las secciones de momento negativo como las de positivo tienen una alta ductilidad de curvatura y por lo tanto deben ser capaces de soportar rotaciones inelásticas importantes, siempre y cuando no sobrevenga antes una falla por fuerza cortante, posibilidad que debe evitarse mediante un diseño por cortante de la viga adecuado (diseño por capacidad), si se quiere utilizar la ductilidad de las secciones.

La capacidad de rotación inelástica disponible en las zonas de momento negativo, donde se espera se producirán las primeras rótulas plásticas, se puede estimar mediante la ecuación 20-5 (véase Park y Paulay) en la cual - l_p - es la longitud plastificada equivalente, la cual conservadoramente se puede estimar para este caso, como $0.5 d$.

$$\theta_p \text{ disponible} = (\phi_{max} - \phi_y) l_p \quad (20-5)$$

Para este ejemplo, en las zonas de empotramiento, tendremos:

$$\theta_p \text{ disponible} = (57.4 - 4.46) \times 10^{-3} \times 0.5 \times 0.64 \approx 17 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

La capacidad de rotación inelástica disponible calculada, que en este caso es grande, deberá compararse con la demanda de rotación en la zona de negativos, cuando se forme el mecanismo plástico.

Con fines comparativos calculemos la resistencia nominal, de acuerdo al código, de las secciones de momento positivo y negativo.

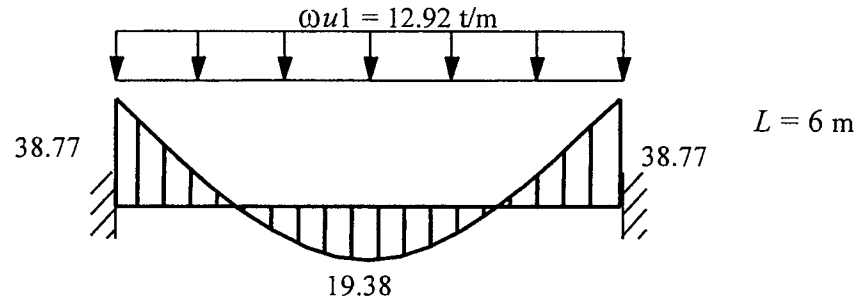
	M_n con A's	M_n sin A's	M_n teórico
Momento negativo	38.77 t-m	38.65	38.83
Momento positivo	26.31 t-m	26.32	26.37

Notamos nuevamente la poca influencia que tiene en la resistencia de la sección la presencia de acero en compresión. También la buena aproximación al valor del momento nominal máximo (M_n) que se obtiene, en este caso, al utilizar las suposiciones del código para evaluar la resistencia en flexión.

Ahora realizaremos el Análisis Limite con cargas incrementales para determinar el valor de la carga máxima (límite) que puede soportar la viga, así como la secuencia de formación de rotulas. El primer paso consiste en hallar el valor de la carga ωu_1 que agote la capacidad en las secciones de momento negativo (M_{n-}) para ello utilizaremos la distribución de momentos correspondiente a la etapa elástica.

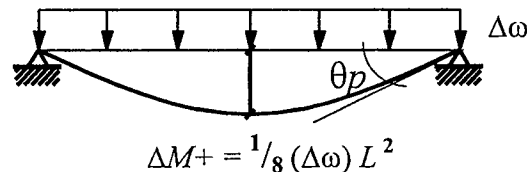
Para M_- : $M_{n-} = 38.77 = (\frac{1}{12}) \omega u_1 (36) \Rightarrow \omega u_1 \approx 12.92 \text{ ton/m}$

Para M_+ : $M_+ = (\frac{1}{24})(12.92) 36 = 19.38 < M_{n+}$



Las secciones de los empotramientos alcanzaron la fluencia, mientras que la sección central aun tiene una capacidad no utilizada plenamente, por lo tanto a la viga le queda una reserva de resistencia. Si las secciones de los empotramientos poseen suficiente capacidad de rotación inelástica, podremos seguir incrementando la carga y utilizar la reserva de resistencia de la zona de momentos positivos. Para ello deberán formarse articulaciones plásticas en los apoyos.

Ya que los diagramas momento – curvatura son prácticamente del tipo bilineal, no habrá incremento de momentos negativos ante posteriores incrementos de la carga, por lo tanto la viga se comportará como simplemente apoyada.



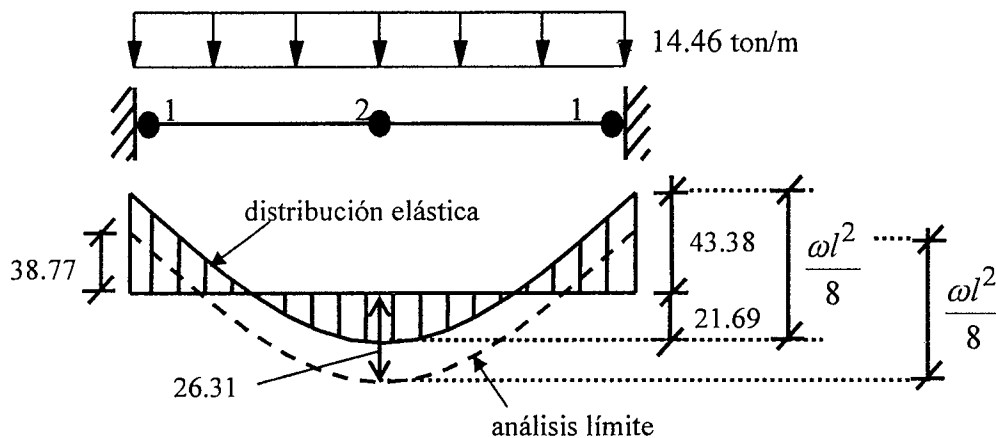
La capacidad remanente en la sección de M_+ será la diferencia entre la capacidad máxima (resistencia disponible) y la ya empleada. Por lo tanto la capacidad remanente es:

$$\Delta M_+ = 26.31 - 19.38 = 6.93 \text{ ton-m}$$

$$\frac{1}{8} (\Delta \omega) (36) = 6.93 \Rightarrow \Delta \omega \approx 1.54 \text{ ton/m}$$

$$\omega u_1 = \omega u_2 = 12.92 + 1.54 \approx 14.46 \text{ ton/m}$$

Cuando la carga alcance una intensidad de 14.46 ton/m, se formará un mecanismo con tres rotulas, con el siguiente diagrama de momentos:



Como comprobación, verifiquemos el equilibrio de la estructura, cuando ésta alcanza la carga límite:

$$1/8 \omega_{ul} L^2 = 14.46 \times 36 / 8 = 65.07 \text{ ton-m} = 38.77 + 26.31$$

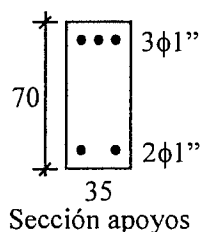
Cambio en los momentos flectores: M^- de 43.38 a 38.77 $\approx -11\%$
 M^+ de 21.69 a 26.31 $\approx +21\%$

La Norma E.060 permite para las secciones de máximo negativo en los empotramientos la siguiente cantidad máxima de redistribución:

$$\Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\%$$

$$\epsilon_t \approx 2.29\% \text{ (considerando } A's)$$

$$\% R = 1,000 \times 2.29\% \approx 23\% \text{ Max. } 20\%$$



Sección apoyos

Calculemos la demanda de rotación inelástica que se produce en las zonas de momento negativo al alcanzar el mecanismo plástico. Mientras que no se formen las rótulas en los empotramientos, no habrá demanda de rotación inelástica. La demanda se produce una vez que se hayan formado las rótulas en los empotramientos y la rotación plástica demandada (θ_p) será la rotación en el apoyo de la viga simplemente apoyada, a la cual le aplicamos el incremento de carga necesario para formar la tercera rótula al centro de la viga. Asumiendo que la viga trabaja con la sección fisurada desde el inicio de la aplicación de las cargas, la rigidez en flexión EI y la rotación plástica en la viga simplemente apoyada son:

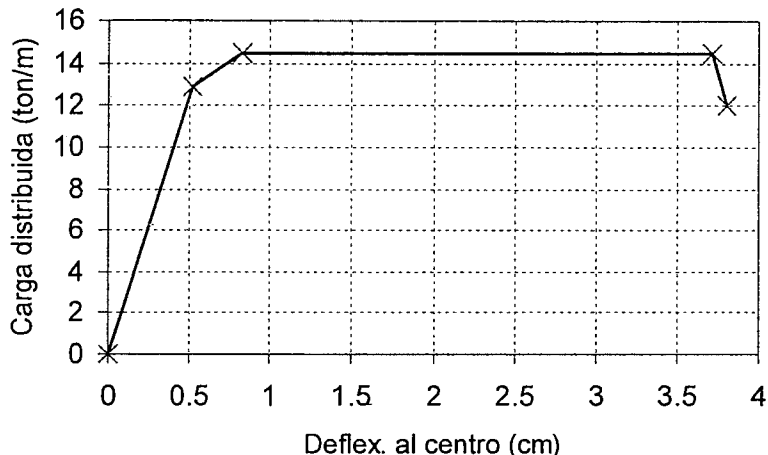
$$E I_{cr} = M_{y-} / \phi_y = 37.36 / 4.46 \times 10^{-3} \approx 8,380 \text{ ton-m}^2 \approx 0.4 E I_g$$

$$\theta_p = \Delta \omega L^3 / (24 E I_{cr}) = 1.54 \times 6^3 / (24 \times 8380) \approx 1.65 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

La demanda de rotación (θ_p) es bastante menor que la capacidad de rotación inelástica disponible en las rótulas de los negativos ($\theta_p \text{ disponible} = 17 \times 10^{-3}$) en consecuencia será posible alcanzar el mecanismo plástico completo.

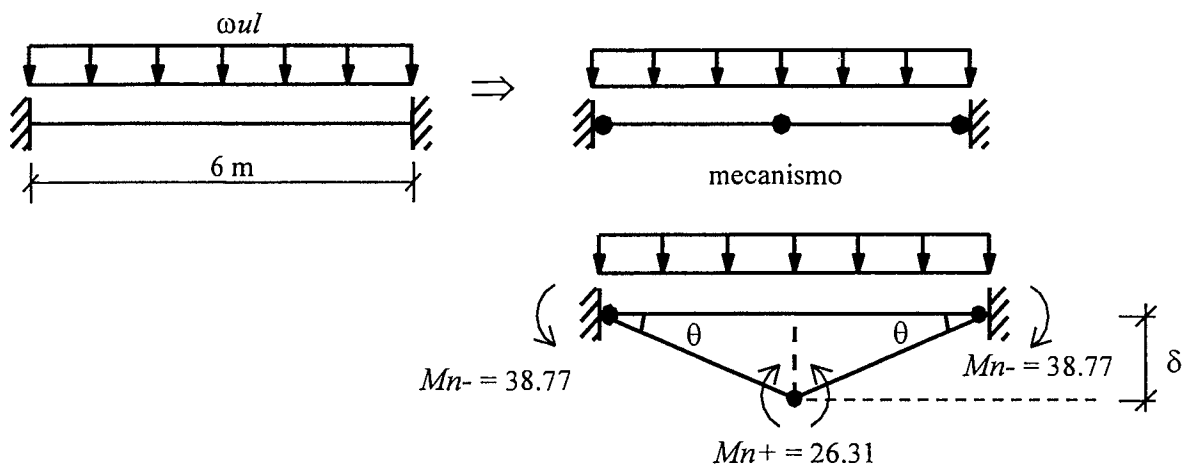
Ya que solo se ha utilizado un 10% de la capacidad de rotación inelástica en los apoyos, la deflexión al centro del tramo podrá seguir aumentando, sin aumento en la carga externa, hasta agotar la capacidad de rotación en las rótulas de los momentos negativos. La figura a continuación, muestra un diagrama idealizado carga versus desplazamiento vertical al centro del tramo. Para los cálculos se ha supuesto un momento de inercia constante igual a $E I_{cr}$. Se nota un fuerte cambio en la rigidez de la viga al formarse las dos rótulas en los empotramientos a una deflexión de 0.52 cm. La tercera rótula, al centro

del tramo, se forma para una deflexión de 0.83 cm aproximadamente. La ductilidad global de desplazamiento, resulta ser cercana a 7.



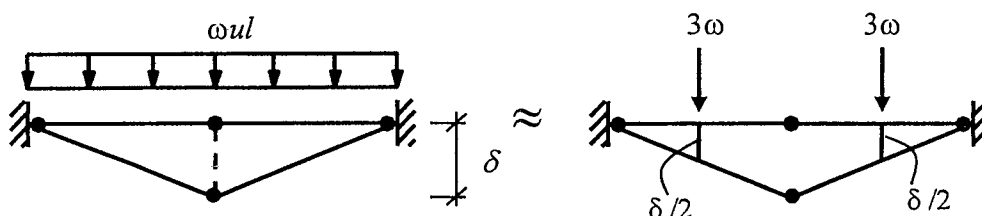
Para que pueda desarrollarse el mecanismo plástico, es necesario asegurar que no se producirá una falla prematura por esfuerzo cortante. Por lo tanto la viga deberá diseñarse para soportar las fuerzas cortantes producidas por la carga límite.

Hay otros métodos que permiten calcular la carga límite ωul . Uno de ellos es el Método del Trabajo Virtual o de los Desplazamientos Virtuales en el cual hay que presuponer el mecanismo de falla. Es un método poderoso y simple, sin embargo no permite conocer la secuencia de formación de las rótulas. Apliquemos este método a la misma viga:

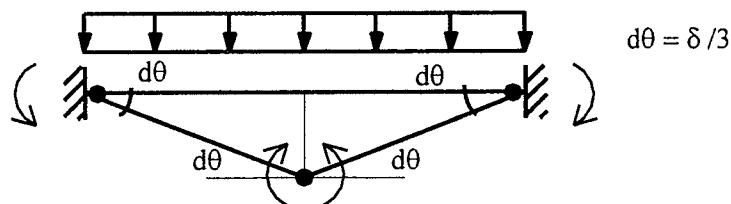


Trabajo virtual externo = Trabajo virtual interno

$$\sum Q\bar{D} = \sum q\bar{d} \quad (\text{Desplazamientos virtuales})$$



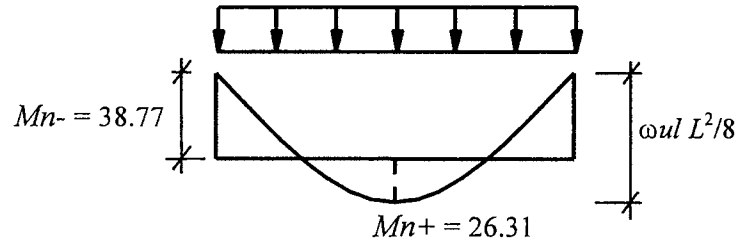
Trabajo virtual externo: $3 \omega ul \left(\frac{\delta}{2}\right) \times 2 = 3 \omega ul \delta$



Trabajo virtual interno: $38.77 \times \frac{\delta}{3} \times 2 + 26.31 \times \frac{\delta}{3} \times 2 = 43.39 \delta$

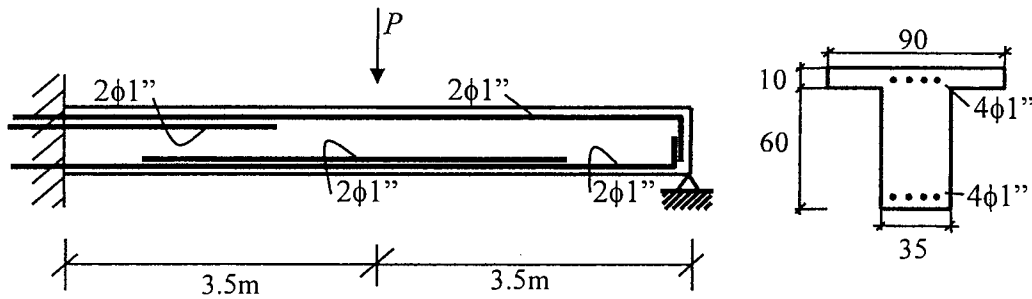
Igualando los trabajos virtuales: $3 \omega ul \delta = 43.39 \delta \Rightarrow \omega ul \approx 14.46 \text{ ton/m}$

Un tercer método, generalmente el más simple y rápido, consiste en reconocer que en el mecanismo final debe cumplirse necesariamente el equilibrio entre la carga límite y los momentos internos, esto equivale a igualar la suma de las resistencias disponibles en las secciones de momento positivo y negativo (M_{n+} y M_{n-}) al máximo valor del momento producido, en este caso, por la carga distribuida.



Deberá cumplirse: $1/8 \omega ul (6)^2 = 38.77 + 26.31 \quad \omega ul \approx 14.46 \text{ ton/m}$

Ejemplo 20-2 - Análisis límite y redistribución.



Características resistentes de las secciones de momento negativo y positivo con $f_c = 210$:

Sección Momento Negativo (ignorando el aporte del acero en compresión):

$A_{s-} = 20.4 \text{ cm}^2, b = 35 \text{ cm}, d \approx 64 \text{ cm}$

$M_{n-} \approx 49 \text{ t-m} \quad (c = 16.13 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 4.24 \epsilon_y)$

Sección Momento Positivo (ignorando el aporte del acero en compresión):

$A_{s+} = 20.4 \text{ cm}^2, b = 90 \text{ cm}, d \approx 64 \text{ cm}$

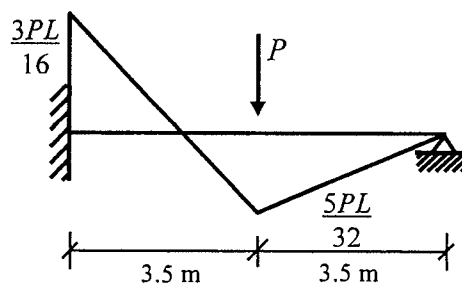
$M_{n+} \approx 52.6 \text{ t-m} \quad (c = 6.27 \text{ cm} \quad \epsilon_s = 13.14 \epsilon_y)$

Secuencia de formación de rótulas:

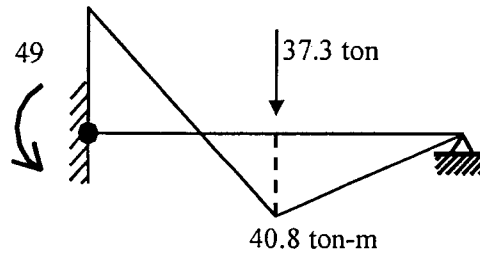
Primera rótula: Se formara cuando la sección en el empotramiento alcance el valor de M_{n-} . Utilizando los resultados del análisis elástico e ignorando el peso propio de la viga, tendremos:

$M_{n-} = 49 = 3 PL / 16$

$P_{ul1} = 37.3 \text{ ton}$



El diagrama de momentos flectores, cuando se forma la primera rótula, es:

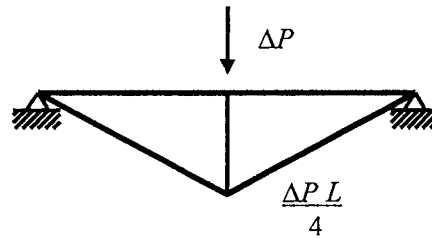


Segunda rótula: Se formará cuando la sección central alcance el valor de $Mn+$. Los incrementos en la carga producirán incremento en los momentos flectores como si la viga estuviera simplemente apoyada. Asumiremos que los diagramas momento curvatura son del tipo bilineal es decir $M_y \approx M_n$ en consecuencia un aumento en las rotaciones plásticas en el empotramiento, no producirá incremento en los momentos.

La capacidad remanente de momento positivo es:

$$\Delta M = 52.6 - 40.8 = 11.8 \text{ ton - m}$$

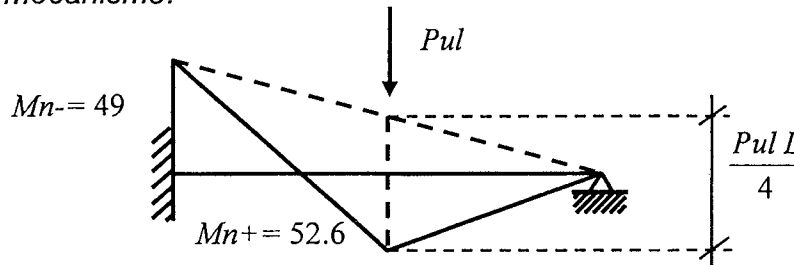
Una vez formada la primera rótula en el apoyo, para los sucesivos incrementos de carga, la viga se comportará como simplemente apoyada.



$$\Delta P L / 4 = 11.8 \Rightarrow \Delta P \approx 6.74 \text{ ton} \Rightarrow P_{ul} = 37.3 + 6.74 \approx 44 \text{ ton}$$

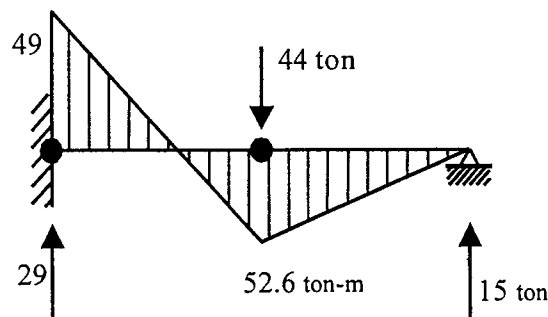
Por lo tanto la segunda rótula se formará cuando la carga externa alcance las 44 ton.

Verificación del mecanismo:

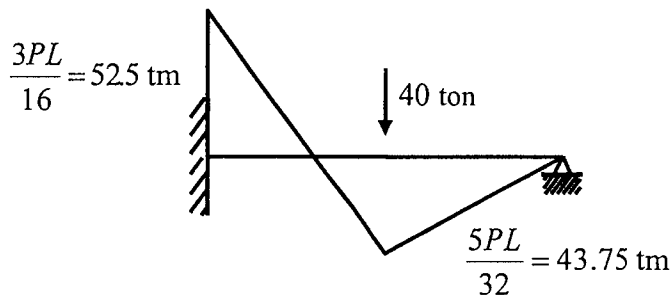


$$52.6 + \frac{49}{2} = \frac{P_{ul} L}{4} \Rightarrow P_{ul} \approx 44 \text{ ton}$$

El diagrama de momento y las fuerzas cortantes en los apoyos cuando se forme el mecanismo plástico completo será el mostrado en la figura a continuación.

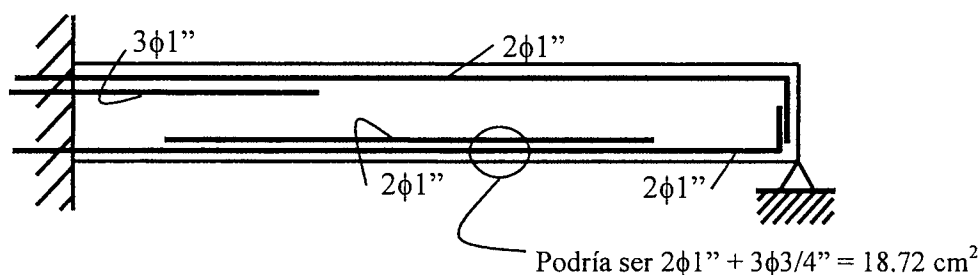


Como aplicación de la redistribución de momentos, realicemos el diseño de la viga empleando la distribución elástica de momentos flectores, suponiendo que actúa una carga externa (resistencia requerida) $P_u = 44 \times 0.9 \approx 40$ ton e ignoremos el peso propio. La distribución elástica será:



Diseño: $M_{u-} = 52.50$ t-m $b = 0.35$, $d \approx 0.64$ $A_{s-} = 25.0$ cm²
 $M_{u+} = 43.75$ t-m $b = 0.90$, $d \approx 0.64$ $A_{s+} = 18.8$ cm²

La armadura de la viga, con los resultados del análisis elástico es:



El acero positivo seleccionado (4 - 1'') excede del necesario, por lo tanto intentemos una reducción del momento negativo de tal modo que el área de acero negativo final resulte ser 4 - 1'' (20.4 cm²). En la sección de momento máximo negativo tendremos:

$$A_{s-} = 20.4 \text{ cm}^2 \text{ (} 4\phi 1'' \text{)} \quad A'_{s-} = 10.2 \text{ cm}^2 \text{ (} 2\phi 1'' \text{)}$$

$$\phi M_n \approx 45.4 \text{ ton-m (incluyendo el acero en compresión)}$$

El porcentaje máximo de redistribución admitido por la Norma es:

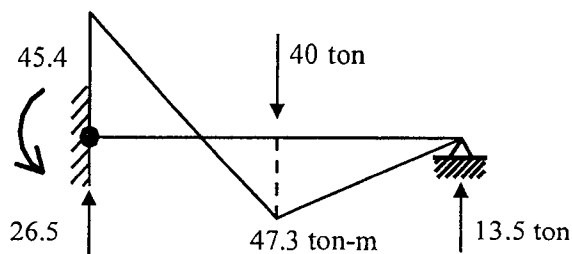
$$\Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\%$$

$$\epsilon_t \approx 1.46\% \text{ (considerando } A'_{s-} \text{)}$$

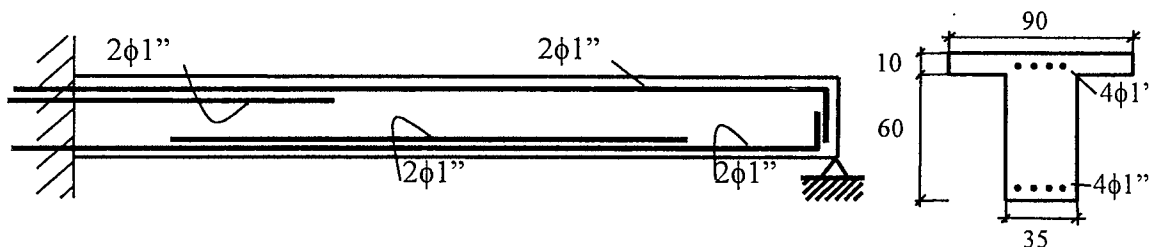
$$\% R = 1,000 \times 1.46\% \approx 15\%$$

El momento negativo redistribuido será: $M_{u-} = 52.5 (1 - 0.15) \approx 44.6$ ton-m valor muy cercano a ϕM_n . con lo cual la armadura negativa (4 - 1'') propuesta es suficiente.

Las otras fuerzas internas deberán calcularse empleando el momento negativo reducido, esto se logra por equilibrio como se muestra en la figura a continuación.



Para el centro de la luz el área de acero necesaria para $Mu+ = 47.3$ ton-m será $As+ = 20.4$ cm^2 con lo cual los 4 -1" seleccionados inicialmente serán suficientes. La distribución final del acero será la mostrada a continuación.



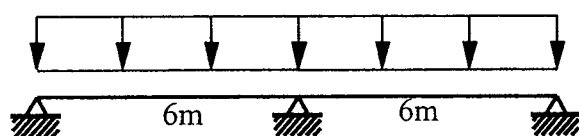
Empleando la redistribución hemos conseguido reducir el acero negativo de 25.5 a 20.4 cm^2 es decir, un 20% de reducción en el área de acero.

Para concluir el diseño falta:

1. El diseño del refuerzo por cortante. Las fuerzas cortantes deben calcularse a partir del diagrama de momentos redistribuido.
2. Corte del fierro negativo y positivo empleando el diagrama de momentos final que considere la redistribución.
3. El cálculo de Z (control de la fisuración) para momentos positivo y negativo bajo cargas de servicio, teniendo cuidado de verificar el esfuerzo de trabajo en el acero al haber reducido el área de acero negativa.
4. El cálculo de las deflexiones.

Ejemplo 20-3 - Redistribución en una viga continua

Se diseñará la viga de dos tramos mostrada a continuación incluyendo la posibilidad de redistribución del momento negativo. Sobre la viga se apoya un aligerado de $h = 0.20$ m con una longitud tributaria de 5.1 m.



$f_c = 210$ kg/cm^2
 $f_y = 4,200$ kg/cm^2
 Sección 0.30x 0.60 m

- **Metrado de cargas:**

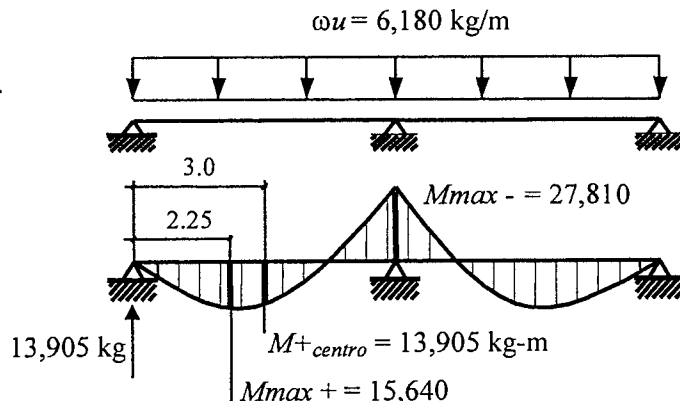
$$\begin{aligned}
 \text{p.p. viga + pt} &= 0.30 \times 0.60 \times 2,400 + 0.30 \times 100 &= 462 \text{ kg/m} \\
 \text{Aligerado + pt} &= 400 \times 5.1 &= 2,040 \\
 & &2,500 \\
 s/c &= 250 \times (5.1 + 0.3) &= 1,350 \\
 \omega_{\text{servicio}} &= 3,850 \text{ kg/m}
 \end{aligned}$$

Norma E.060 de 1989

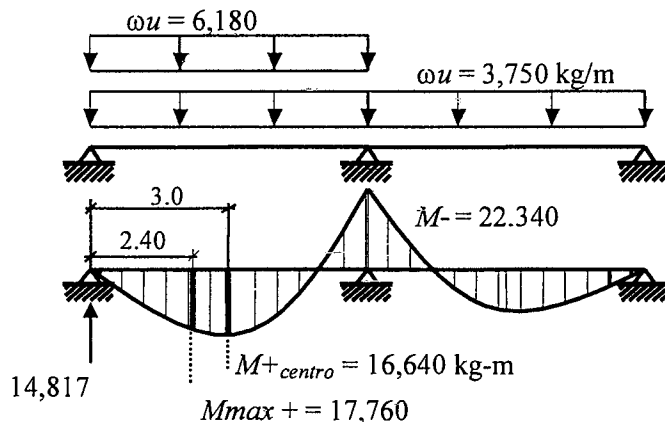
$$\omega_u = 1.5 \times 2,500 + 1.8 \times 1,350 = 6,180 \text{ kg/m}$$

- **Análisis elástico considerando alternancia:**

Máximo negativo:



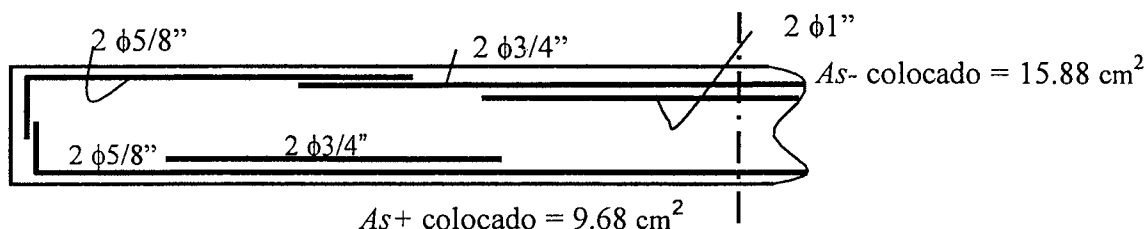
Máximo positivo:



Diseño de acuerdo al diagrama elástico de momentos flectores:

$$\begin{array}{lll}
 Mu- = 27,810 \text{ kg-m} & b = 0.30, d \approx 0.54 & As- = 15.33 \text{ cm}^2 \quad (0.45 Asb) \\
 Mu+ = 17,760 \text{ kg-m} & b = 0.30, d \approx 0.54 & As+ = 9.33 \text{ cm}^2 \quad (0.27 Asb)
 \end{array}$$

Una alternativa de armado de la viga, sobre la base de los momentos provenientes del análisis elástico, es:



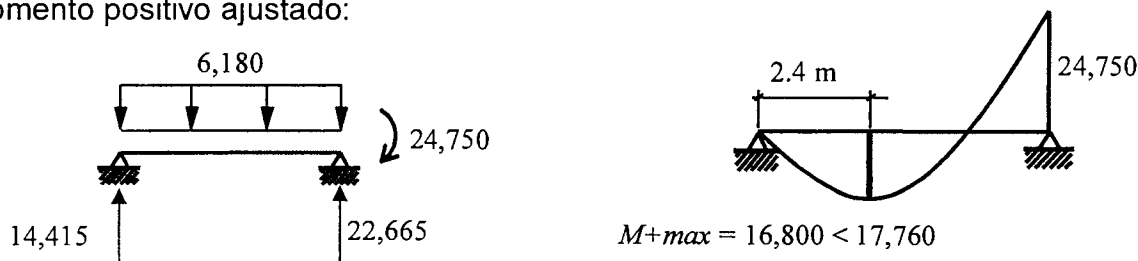
Si la carga de servicio, asumiendo sobrecarga plena en los dos tramos, se incrementara de manera continua, la primera sección que alcanzaría su resistencia máxima sería la del apoyo central. En consecuencia el factor de seguridad de la viga frente a la falla por flexión, sobre la base de los resultados del análisis elástico, se puede estimar como:

$$F.S \approx (6,180/3,850) \times (15.88/15.33) \times (1/0.9) \approx 1.85$$

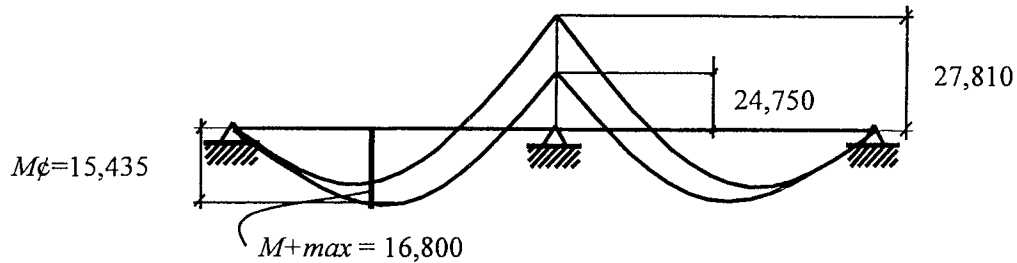
Estimemos la cantidad de redistribución que es posible realizar empleando el acero negativo calculado para la sección de 0.30x 0.60:

$$\begin{array}{l}
 \Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\% \\
 \epsilon_t \approx 1.05\% \text{ (considerando } A's) \\
 \% R = 1,000 \times 1.05\% \approx 11\% \\
 M- (\text{redis}) = 27,810 (1 - 0.11) = 24,750 \text{ kg-m}
 \end{array}$$

Momento positivo ajustado:



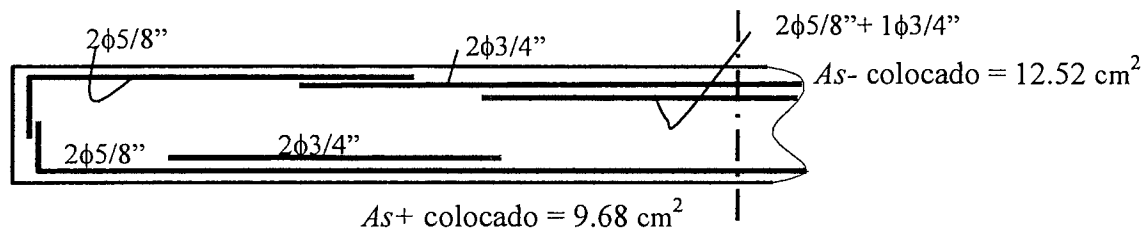
Distribución final de los momentos flectores:



En consecuencia el momento negativo se puede reducir a 24,750 kg-m y el momento positivo que controla el diseño es 17,760 kg-m proveniente de la alternancia elástica que produce el máximo positivo.

Diseño final:

$M_u^- = 24,750 \text{ kg-m}$ $A_{s^-} = 13.4 \text{ cm}^2$ ($0.39 A_{sb}$). Hemos logrado, mediante la redistribución, reducir el acero negativo necesario de 15.33 a 13.4 cm^2 (13 % de reducción). El acero positivo no ha variado ya que está controlado por el máximo proveniente de la alternancia.



Verifiquemos el porcentaje de redistribución admisible con el acero realmente colocado:

$$A_{s^-} = 12.52 \text{ cm}^2 \quad A's = 4.0 \text{ cm}^2 \quad (2 \phi 5/8'')$$

$$\epsilon_t \approx 1.4\% \quad (\text{considerando } A's)$$

$$\Delta M = 1,000 \epsilon_t \% \leq 20\%$$

$$\% R = 1,000 \times 1.4\% \approx 14\%$$

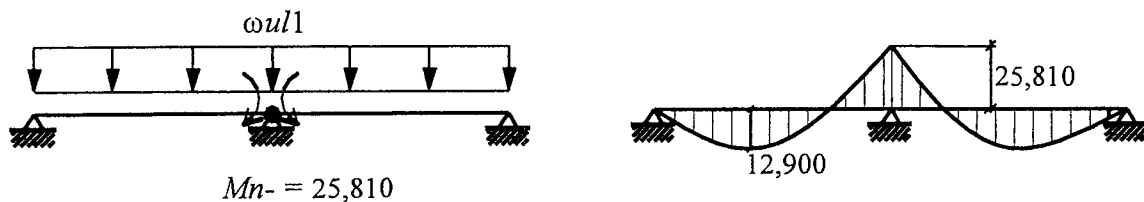
$$M_- (\text{redis}) = 27,810 (1 - 0.14) = 23,920 \text{ kg-m} \Rightarrow A_{s \text{ necesario}} = 12.9 \text{ cm}^2 \text{ OK}$$

Carga última que soporta la viga: realicemos un análisis límite (plástico) para determinar, por curiosidad, la carga máxima que resiste la viga.

Zona de M_- $A_{s^-} = 12.52 \text{ cm}^2$ $M_{n^-} \approx 25,810 \text{ kg-m}$ (ignorando $A's$)

Zona de M_+ $A_{s^+} = 9.68 \text{ cm}^2$ $M_{n^+} \approx 20,410 \text{ kg-m}$

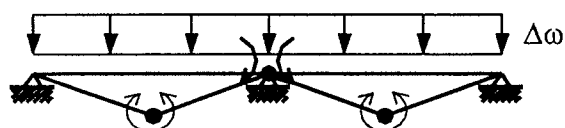
Primera rótula



$$0.125 (\omega_{ul1}) 36 = 25,810 \Rightarrow \omega_{ul1} = 5,735 \text{ kg/m}$$

Segunda y tercera rótula

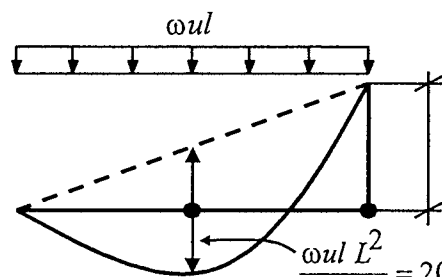
Se formarán simultáneamente cerca del centro de los tramos. Asumiremos por simplicidad, que los máximos positivos se producen al centro del tramo. Una vez que se ha formado la primera rótula, la capacidad remanente en las secciones de momento positivo será de 7,510 kg-m (20,410 – 12,900).



$$\frac{\Delta\omega L^2}{8} = 7,510 \Rightarrow \Delta\omega \approx 1,670 \text{ kg/m}$$

La carga límite total es: $\omega_{ul} = 5,735 + 1,670 \approx 7,400 \text{ kg/m}$

La carga límite también se puede calcular por equilibrio de uno de los tramos de la siguiente manera:



$$\frac{\omega_{ul} L^2}{8} = 20,410 + \frac{25,810}{2} \Rightarrow \omega_{ul} \approx 7,400 \text{ kg/m}$$

La carga plena de servicio es de 3,850 kg/m, la resistencia requerida es de 6,180 kg/m y la carga límite 7,400 kg/m. El factor de seguridad de la viga, frente a la formación de un mecanismo plástico, es de 1.9 aproximadamente. Al haber utilizado redistribución de momentos hemos acercado la intensidad de la resistencia requerida (ωu) a la intensidad de la carga límite, lográndose un diseño un tanto más eficiente. Estrictamente hablando para comparar la resistencia requerida con la carga límite, es necesario multiplicar esta última por 0.9 ya que en el diseño por resistencia se ha incluido el factor de reducción de resistencia.

De haber utilizado la armadura proveniente del diseño basado en los momentos del análisis elástico, la primera rotula se formaría para una carga de 7,080 kg/m y la carga límite total sería de 8,070 kg/m aproximadamente. Se nota que en este caso habría un exceso de resistencia, mayor del obtenido al utilizar redistribución.

Para concluir el diseño falta:

1. El diseño del refuerzo por cortante. Las fuerzas cortantes deben calcularse a partir del diagrama de momentos redistribuido.
2. Corte del fierro negativo y positivo empleando el diagrama de momentos final que considere la redistribución.
3. El cálculo de Z (control de la fisuración) para momentos positivo y negativo bajo cargas de servicio, teniendo cuidado de verificar el esfuerzo de trabajo en el acero al haber reducido el área de acero negativa.
4. Cálculo de las deflexiones.
5. Sería necesario comparar la capacidad de rotación inelástica de la sección sobre el apoyo central donde se han reducido los momentos, con la demanda de rotación inelástica. Sin embargo, dado que se ha utilizado una cantidad reducida

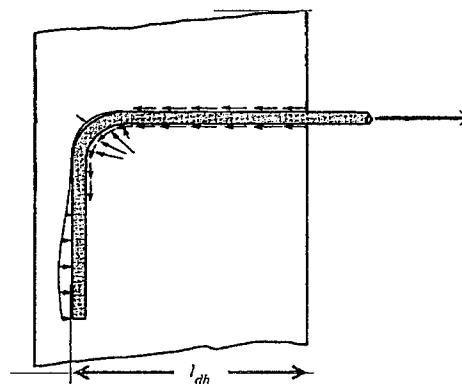
de redistribución (alrededor de un 15%) y que la cantidad de acero negativo colocado es equivalente a $0.35 A_s b$, es probable que la sección disponga de la capacidad de rotación inelástica necesaria para “acomodar” sin problemas los cambios realizados en el diagrama de momentos.

20.5 Lecturas

- 20.1 Capítulo-6 - Ultimate Deformation and Ductility of Members with Flexure - del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 20.2 Capítulo 10 - Strength and Ductility of Frames - del Libro Reinforced Concrete Structures. Park – Paulay.
- 20.3 Capítulo 28 – Behavior of Concrete Structures - del Libro Structural Engineering, Vol. 3, Behavior of Members and Systems. White - Gergely - Sexsmith.
- 20.4 Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams. W. Gene Corley. Journal of the Structural Division. ASCE, October 1966.
- 20.5 Rotational Capacity in Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams. Allan H. Mattock. International Symposium of Flexural Mechanics of Reinforced Concrete. ASCE, 1965.

CAPITULO 21

Adherencia y Anclaje del Refuerzo



21.1 Introducción

En un elemento de concreto reforzado, es indispensable que exista adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto que rodea al acero, de manera que ambos materiales trabajen juntos logrando la acción compuesta. Por ejemplo, en una sección fisurada de una viga de concreto armado en flexión simple, las compresiones originadas por la flexión son resistidas por el concreto mientras que las tracciones las soporta el acero de refuerzo. Para que exista este trabajo conjunto concreto – acero, debe existir transferencia de esfuerzos o adherencia entre los dos materiales.

Si no existiera adherencia, las barras de refuerzo deslizarían dentro de la masa de concreto sin encontrar resistencia en toda su longitud y no acompañarían al concreto en sus deformaciones. Al fisurarse el concreto se producirá una falla brusca, la resistencia de la viga será prácticamente la correspondiente al agrietamiento del concreto en tracción por flexión, es decir como si el refuerzo de acero no existiera. La figura 21-1 (adaptada de Nilson) ilustra esta situación en una viga simple sin adherencia entre concreto y acero.

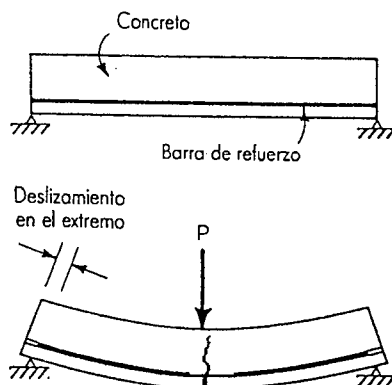


Fig. 21-1 Viga sin adherencia entre el acero y el concreto.

Situaciones como las indicadas en la figura 21-1 son frecuentes cuando se emplean barras lisas, sin corrugaciones. Si bien existe algo de adherencia entre las barras y el concreto, provenientes de la adhesión y la fricción, estos mecanismos se vencen fácilmente. La fricción se encuentra afectada por el efecto de Poisson que reduce el diámetro de las barras en tracción, en consecuencia es indispensable proveer anclajes mecánicos (los ganchos a 180° eran muy frecuentes) en todas las terminaciones de las barras.

En el caso en el cual las barras tengan un anclaje mecánico en sus extremos, como por ejemplo un gancho a 90 o 180°, la situación sería un tanto distinta. En ausencia de

adherencia, la viga trabajará como un arco con un tirante constituido por el acero de refuerzo. La tracción en el tirante es prácticamente constante a lo largo de la viga, igual al momento flector al centro dividido entre el brazo de palanca jd . El comportamiento de la viga no sería "bueno" ya que mostraría mucho agrietamiento y deflexiones excesivas debido a que la elongación o estiramiento del acero sería mucho mayor que la correspondiente al caso en el cual sí existe adherencia. La figura 21-2 (adaptada de Nilson) ilustra el mecanismo de arco que se produce en una viga con baja adherencia, es indispensable que el tirante esté firmemente anclado en los extremos, en caso contrario al agrietarse el concreto la viga colapsa.

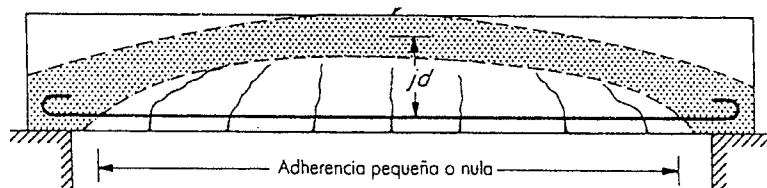


Fig. 21-2 Acción de arco con tirante en una viga con poca adherencia.

Gracias a la adherencia, las barras de refuerzo pueden trabajar, inicialmente, a la vez que el concreto y después, cuando éste se fisura, lo hacen de forma más o menos regularmente distribuida a lo largo del elemento. La adherencia permite que el acero de refuerzo tome los esfuerzos de tracción, manteniendo la unión entre los dos materiales en las zonas entre fisuras.

La adherencia cumple fundamentalmente dos objetivos:

- 1) Asegurar el anclaje de las barras de refuerzo.
- 2) Transmitir los esfuerzos cortantes que aparecen en la periferia de las armaduras como consecuencia de las variaciones en los esfuerzos longitudinales de las mismas.

El segundo objetivo es consecuencia de las variaciones de los esfuerzos longitudinales (tracción o compresión) en las armaduras de refuerzo. Para que pueda ocurrir esta variación, es necesario que se transmitan esfuerzos de las barras al concreto. Por lo tanto, en todos los casos en que los esfuerzos de las barras cambien de un punto o sección a otro, será necesario que se desarrollen esfuerzos de adherencia.

21.2 Mecanismos que Originan la Adherencia

La adherencia o resistencia al deslizamiento se origina por dos fenómenos: uno de naturaleza física (o físico – química) y otros de naturaleza mecánica.

El primero genera la adhesión del acero con el concreto, a través de fuerzas capilares y moleculares que se desarrollan en la interfase. Es como si el acero absorbiese pasta cementante.

El segundo, más importante que el anterior, proviene de la resistencia al deslizamiento debida a la penetración de la pasta de cemento en las irregularidades de la superficie de las barras de refuerzo. Esta causa de origen mecánico, puede denominarse rozamiento o fricción y es la que produce la mayor parte de la adherencia en las barras lisas (hoy en día prácticamente en desuso) y varía notablemente con el estado de la superficie del refuerzo.

En el caso de barras corrugadas, a la fricción se le añade el efecto de acuñamiento o de apoyo directo de las corrugaciones o resaltos de las barras contra el concreto circundante. En las barras corrugadas este efecto es el más importante.

Los dos primeros mecanismos, adhesión y fricción, son los únicos presentes en las barras lisas. El primero es un mecanismo débil que se vence fácilmente cuando la barra está en tracción. Vencida la adhesión el único mecanismo que resta es la fricción. Al aumentar la carga, la fricción se debilita ya que las barras por efecto de Poisson, reducen su diámetro, por este motivo las barras lisas necesitan anclajes del tipo mecánico (normalmente ganchos) en sus extremos.

En las barras corrugadas también están presentes estos mecanismos, sin embargo, la adhesión queda anulada cuando el deslizamiento de la barra alcanza una cierta magnitud. La fricción y las fuerzas de acuñamiento son las únicas que quedan, no siendo posible separar ambos efectos, sin embargo, las fuerzas de acuñamiento son las más importantes. Las fuerzas de acuñamiento dependen de las características de las corrugaciones de las barras de refuerzo.

La figura 21-3 (CEB, 2000) muestra la evolución de los diversos mecanismos que generan la adherencia. Las fallas de adherencia se desarrollan en cuatro grandes etapas, estas son:

- 1) A esfuerzos de adherencia bajos, están presentes los tres grandes mecanismos (adhesión, fricción y fuerzas de aplastamiento sobre el concreto o efecto de acuñamiento). No existe desplazamiento relativo de la barra con respecto al concreto que la circunda. El único movimiento de la barra proviene de la deformación elástica del concreto circundante.
- 2) Se inicia el deslizamiento del acero. Se forman microfisuras transversales a la barra detrás de las corrugaciones. Restan dos mecanismos, la fricción y el aplastamiento que producen las corrugaciones sobre el concreto.
- 3) Las microfisuras se propagan radialmente hacia afuera. El confinamiento que provee el concreto circundante y/o el refuerzo transversal presente resiste la propagación de las grietas. La trituración (aplastamiento o crushing) local del concreto al frente de las corrugaciones acelera el deslizamiento y reduce la pendiente del diagrama (ver figura 21-3).
- 4) Finalmente ocurre la falla de adherencia ya sea por extracción (pullout) de la barra o por excesivo agrietamiento del concreto (agrietamiento por adherencia). La falla de extracción ocurre en presencia de fuerzas de confinamiento importantes como las producidas por refuerzo transversal a las barras (estribos a poco espaciamiento o una espiral envolviendo a la barra).

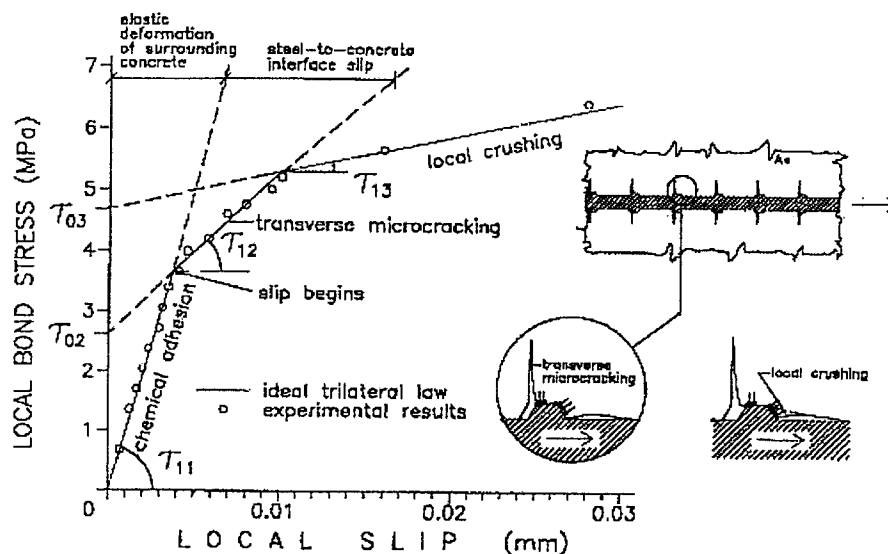


Fig. 21-3 Esfuerzos de adherencia y deslizamiento de la barra.

La figura 21-4 (adaptada de MacGregor) ilustra el mecanismo de apoyo directo de las corrugaciones o resaltes de las barras sobre el concreto circundante, también lo hemos llamado efecto de acuñamiento. La corrugación de la barra se "apoya" sobre el concreto generando aplastamiento, el ángulo de inclinación de estas fuerzas depende de muchas variables, entre ellas las características de los resaltes. Las fuerzas en el concreto pueden descomponerse en una componente tangencial o longitudinal y una componente radial. Esta última genera esfuerzos circunferenciales de tracción en el concreto que producen agrietamiento (split o hendidura) y cuando el agrietamiento se propaga hasta la superficie del elemento se produce la falla de adherencia.

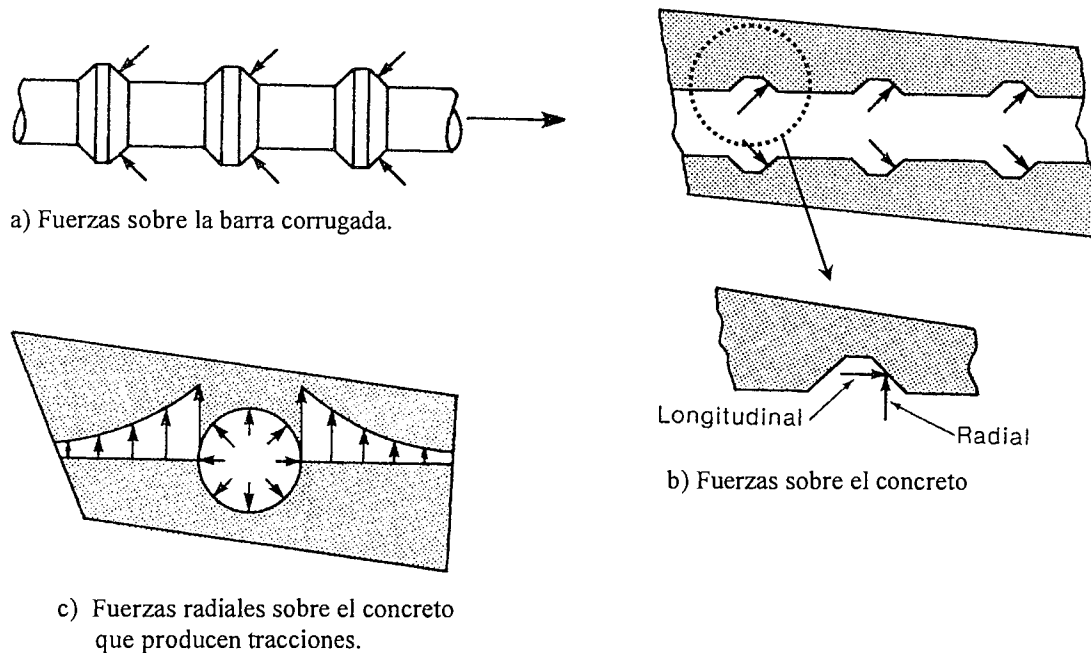


Fig. 21-4 Mecanismo de apoyo directo de las corrugaciones

Las fallas de adherencia en una viga siguen a las barras de refuerzo a lo largo del fondo o las caras laterales de la viga tal como se muestra en la figura 21-5 (Nilson)

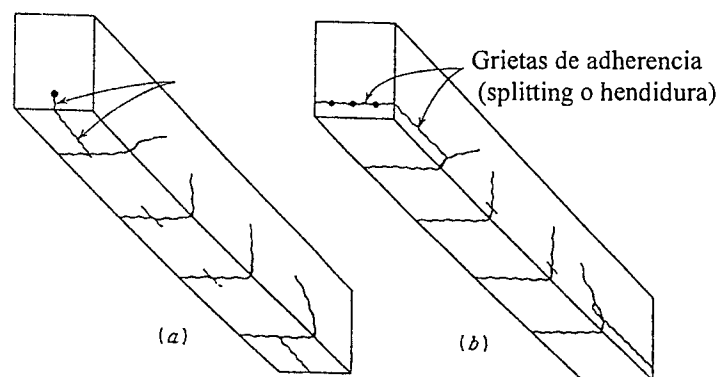


Fig. 21-5 Fallas de adherencia en una viga.

La figura 21-6 (adaptada de MacGregor) muestra algunas de las superficies típicas de adherencia en una viga de concreto armado. Los círculos concéntricos que se han dibujado alrededor de las barras, simbolizan el cilindro de concreto que está más afectado por las tracciones inducidas por las fuerzas radiales sobre el concreto producto del apoyo de las corrugaciones (véase la figura 21-4 c). Las dimensiones de este cilindro

se pueden estimar, de manera gruesa, imaginando un círculo de diámetro $1.5 db$ (db es el diámetro de la barra) con centro en la barra de refuerzo. Cuando el círculo toca alguna de las superficies de la viga puede producirse una grieta de adherencia. Estas grietas tienden a desarrollarse a lo largo de la distancia más corta entre una barra y la superficie del elemento o entre dos barras. De la observación de esta figura se desprende nuevamente la importancia de ser exigente con los recubrimientos y con el espaciamiento mínimo entre barras de refuerzo.

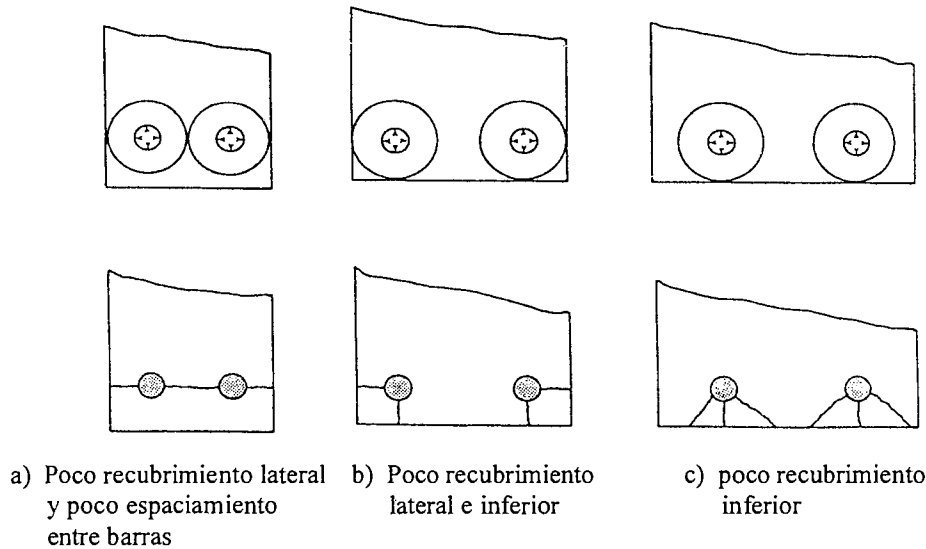


Fig. 21-6 Superficies típicas asociadas con fallas de adherencia (splitting o hendidura).

La figura 21-6 también permite imaginar la influencia que tiene el refuerzo transversal en el control de la falla de adherencia. Por ejemplo, si la barra estuviese rodeada o envuelta por una espiral de acero, las grietas de adherencia estarían interceptadas por el refuerzo aumentando de manera importante la resistencia. También los estribos con poco espaciamiento, interceptan a las potenciales grietas restringiendo su crecimiento.

La carga a la cual puede desarrollarse una falla de adherencia depende de:

- La distancia entre la barra y la superficie del elemento o de la distancia a la barra próxima, la que sea menor. Cuanto más pequeña sea esta distancia menor será la carga de falla.
- La resistencia a la tracción del concreto.
- La intensidad promedio de los esfuerzos de adherencia. Cuanto mayor sean los esfuerzos de adherencia mayores serán las fuerzas radiales de tracción que obran sobre el concreto.
- La presencia de refuerzo transversal que retarde el crecimiento de las grietas por hendidura.

Si el recubrimiento y el espaciamiento entre barras son grandes, en comparación al diámetro de las barras, puede ocurrir una falla de extracción (pullout) en la cual la barra y un cilindro de concreto adherido a ella, tangente a la parte superior de las corrugaciones, se sale del elemento.

21.3 Esfuerzos de Adherencia en una Viga

La figura 21-7 muestra el diagrama de cuerpo libre de un pedazo (cercano al apoyo) de una viga y el diagrama de la barra de refuerzo con las fuerzas de adherencia necesarias para mantener el equilibrio de la misma. Si las fuerzas de adherencia desaparecen, las barras serían incapaces de tomar los esfuerzos de tracción, las barras se "saldrán" del

concreto causando el colapso de la viga, salvo que en sus extremos tengan algún tipo de anclaje mecánico.

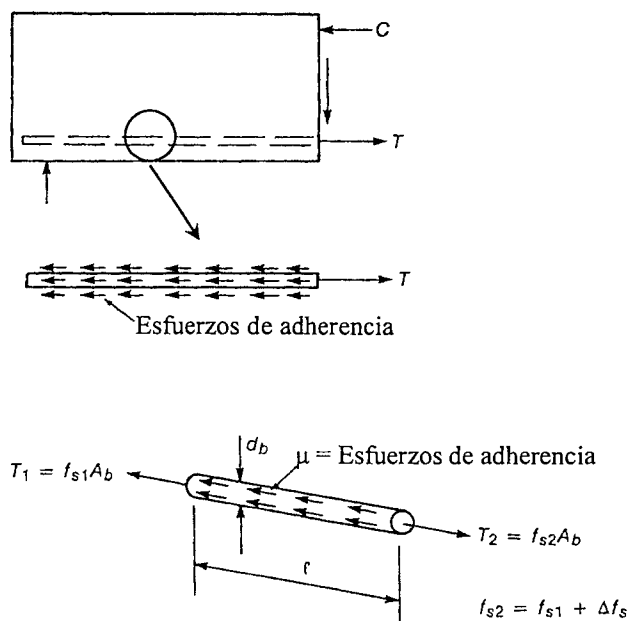


Fig. 21-7 Esfuerzos de adherencia en las barras de refuerzo.

En todos los casos en que los esfuerzos de las barras cambien de un punto o sección a otro, será necesario que se desarrollen esfuerzos de adherencia. Esta situación se ilustra en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la parte inferior de la figura 21-7, si la fuerza T_2 es mayor que T_1 , en la superficie de la barra deberán producirse esfuerzos de adherencia para mantener el equilibrio de la barra en la dirección de la misma. El equilibrio horizontal exige:

$$(f_{s2} - f_{s1}) Ab = \Delta f_s (\pi db^2 / 4) = \mu_{prom} (\pi db) L$$

$$\mu_{prom} = \Delta f_s db / 4L \quad (21-1)$$

$$\mu_{prom} = (\Delta T / \Delta x) (1 / \pi db) \quad (21-2)$$

Las ecuaciones 21-1 y 21-2 son equivalentes y representan el esfuerzo de adherencia promedio necesario en la longitud L (ó Δx) de la barra para mantener el equilibrio de la misma. Se denomina promedio porque no toma en cuenta las fuertes variaciones en la intensidad de la adherencia que se producen dentro del segmento de barra analizado.

El esfuerzo real de adherencia en un punto puede obtenerse de 21-1 considerando una longitud de barra L muy pequeña.

$$\mu_{real} = (df_s / dx) (db / 4) \quad (21-3)$$

$$\mu_{real} = (dT / dx) (1 / \pi db) \quad (21-4)$$

Para diferenciar el esfuerzo de adherencia promedio del real, consideremos un segmento de viga entre dos grietas consecutivas en una viga sometida a flexión pura. El segmento se indica en la figura 21-8 (Nilson) junto con la variación de las fuerzas de tracción en el acero (figura c). Ya que entre las grietas el concreto resiste tracciones, es evidente que el esfuerzo en las barras de refuerzo debe variar entre ellas. La tangente a la curva de variación de las tracciones (dT / dx) es directamente proporcional al esfuerzo de adherencia real presente en ese punto como lo indica la ecuación 21-4. Sin embargo el esfuerzo de adherencia promedio entre las dos grietas es nulo ya que el cambio de tracción en la barra también lo es (ecuación 21-2). En consecuencia los esfuerzos de adherencia deben variar como se indica en la figura d, con una resultante horizontal neta nula.

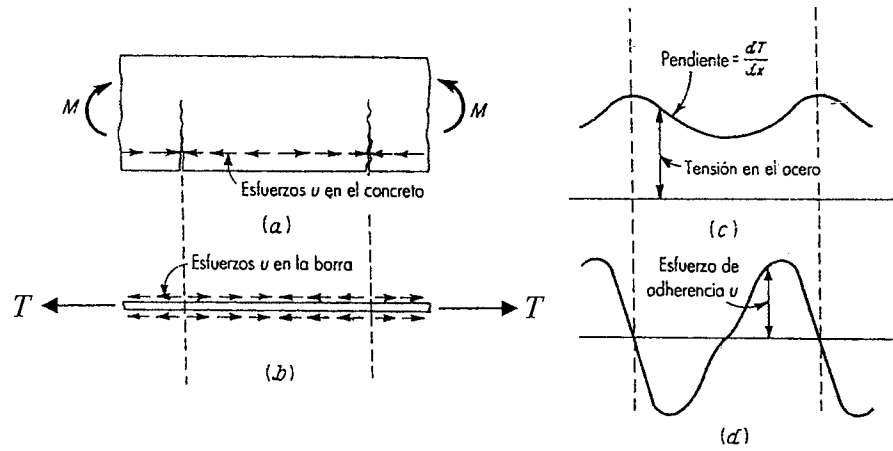


Fig. 21-8 Esfuerzos de adherencia en un segmento de viga en flexión pura.

Analicemos ahora el caso de una viga en flexión simple como la mostrada en la figura 21-9. Se ha aislado un segmento de la viga de longitud Δx comprendido entre dos grietas de flexión. Asumiremos que el concreto no resiste tracciones y que existe una sola barra de refuerzo en el lecho inferior.

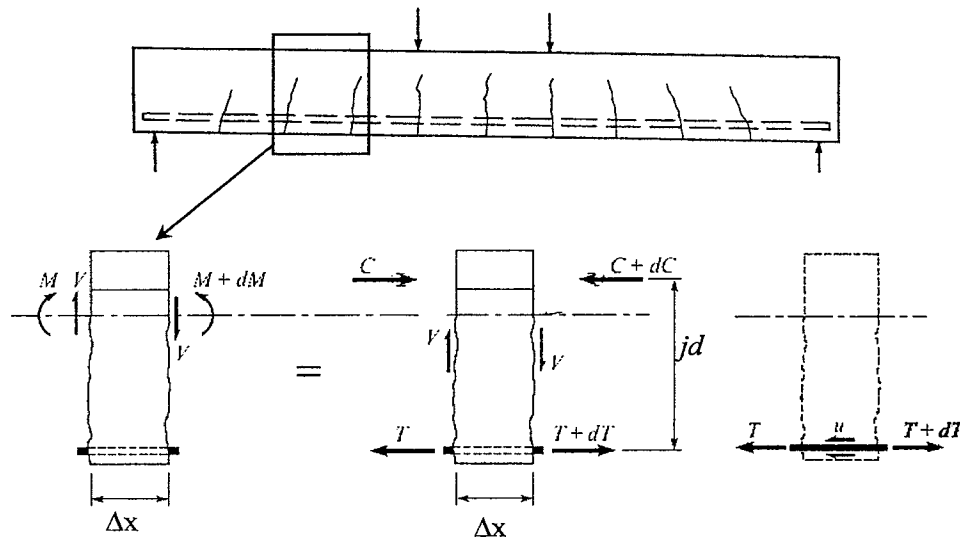


Fig. 21-9 . Esfuerzos de adherencia en un segmento de viga en flexión simple.

La fuerza en la barra en la zona de la grieta y el esfuerzo promedio de adherencia son:

$$T = M / jd$$

$$\Delta T = (\pi db \Delta x) \mu \text{ prom} \quad \Rightarrow \quad (\Delta T / \Delta x) = (\pi db) \mu \text{ prom}$$

$$\Delta T = \Delta M / jd \quad \Rightarrow \quad \Delta M / \Delta x = (\pi db) \mu \text{ prom } jd$$

$$\mu \text{ prom} = (\Delta M / \Delta x) (1 / \pi db jd) \quad (21-5)$$

$$\Delta M / \Delta x = V \quad \Rightarrow \quad \mu \text{ prom} = V / (\pi db jd) \quad (21-6)$$

Si existen varias barras de refuerzo la ecuación 21-6 se convierte en:

$$\mu \text{ prom} = V / (\Sigma(\pi db) jd) \quad (21-7)$$

Las ecuaciones 21-6 y 21-7 permiten calcular el esfuerzo promedio de adherencia que existe en las barras de tracción entre dos grietas. Demuestran que el esfuerzo promedio es proporcional a la fuerza cortante que existe en esa sección y en consecuencia a la tasa de variación del momento flector. El esfuerzo promedio no toma en cuenta las fuertes variaciones que sufre la adherencia de punto a punto entre las grietas.

Estas ecuaciones fueron deducidas también en el acápite 15-3 (véase la ecuación 15-6) son aplicables a las barras en tracción en las zonas en las cuales el concreto se encuentra agrietado y se supone que el concreto no resiste tracciones. No son aplicables a las barras en compresión para las cuales el esfuerzo de adherencia es mucho más bajo.

Los esfuerzos reales de adherencia muestran variaciones notables a lo largo del eje de la viga. La figura 21-10 (adaptada de MacGregor) muestra las variaciones mencionadas.

Entre grietas, el concreto no está fisurado y por lo tanto es capaz de tomar tracciones reduciendo el esfuerzo de tracción en las barras (figura c) esto genera una distribución de esfuerzos de adherencia como la sugerida en la figura e en la cual se aprecia que la adherencia cambia constantemente de signo, mientras que la ecuación 21-7 indica que la adherencia varía con la fuerza cortante y en este caso debería ser constante entre el apoyo y las cargas y nula en la zona central de la viga que se encuentra en flexión pura. Los esfuerzos reales de adherencia, en este caso, son mucho mayores a la izquierda de las grietas (para el tramo izquierdo) que los predichos por la ecuación 21-7 mientras que a la derecha de las grietas son menores que los predichos y, de hecho, en general son negativos en las zonas cercanas a las grietas; es decir, las fuerzas de adherencia actúan en la dirección opuesta.

En la zona central la resultante (área total bajo el diagrama de esfuerzos de adherencia) de las fuerzas de adherencia debe ser nula ya que no hay cambio de fuerza en el acero de refuerzo por ser una zona de flexión pura. Entre el apoyo y las cargas la resultante es distinta de cero.

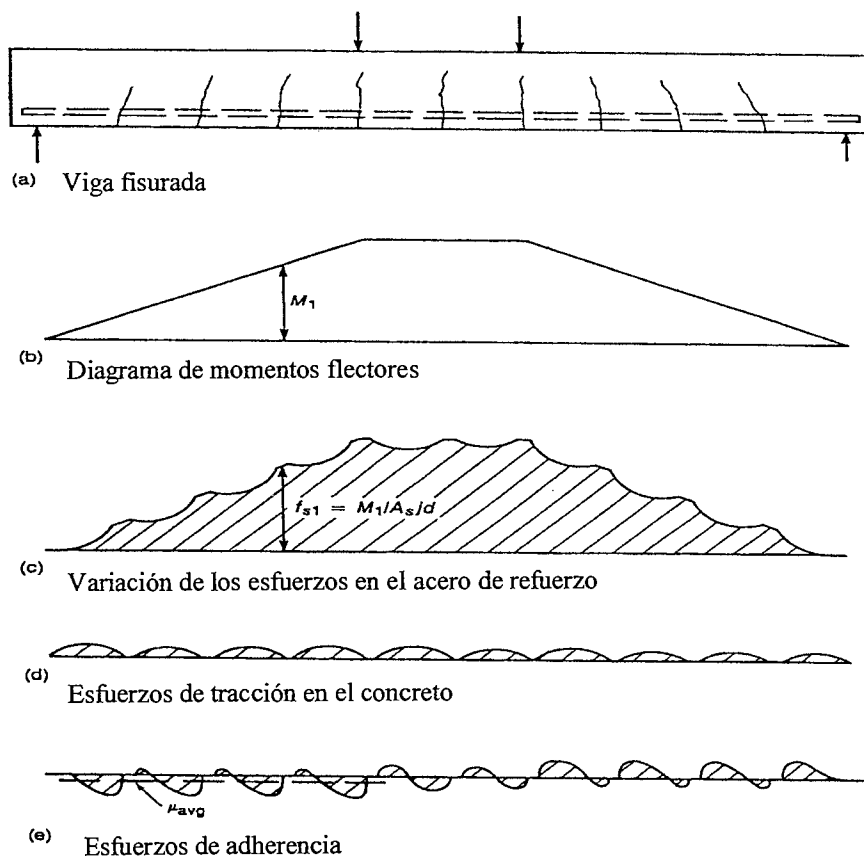


Fig. 21-10 Variación de los esfuerzos de adherencia en una viga fisurada

21.4 Longitud de Anclaje o de Desarrollo

Ya que los esfuerzos reales de adherencia varían notablemente a lo largo de las barras en tracción, como se muestra en la figura 21-10, resulta inútil para fines de diseño calcular los esfuerzos de adherencia utilizando por ejemplo la ecuación 21-7. En consecuencia el ACI (y otras normas) buscó un concepto más simple para remplazar el procedimiento clásico de calcular el esfuerzo promedio de adherencia y compararlo con algún valor nominal de referencia.

Hoy en día el concepto utilizado es el de longitud de anclaje o longitud de desarrollo. La longitud de desarrollo se define como la longitud mínima necesaria en una barra para que los esfuerzos puedan variar desde cero hasta el esfuerzo de fluencia. Si la distancia desde una sección de la barra en la cual se ha alcanzado el esfuerzo de fluencia al extremo de la misma, es menor que la longitud de desarrollo, entonces en teoría la barra se saldrá del concreto. El concepto de longitud de anclaje se muestra de manera simple en la figura 21-11, la longitud de la barra embebida en el concreto es tal que permite alcanzar la fluencia sin falla de adherencia.

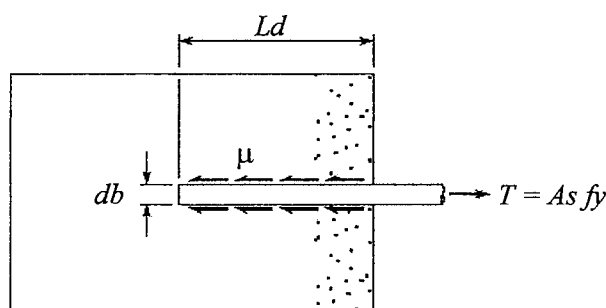


Fig. 21-11 Longitud de anclaje o de desarrollo

La longitud de anclaje puede expresarse en función del esfuerzo promedio de adherencia en la falla. Utilizando la ecuación 21-1, haciendo $\Delta f_s = f_y$ tendremos:

$$L_d = \frac{f_y d_b}{4 \mu_{\text{prom}}} \quad (21-8)$$

El valor μ_{prom} proviene de los numerosos ensayos de adherencia realizados en vigas y en ensayos de extracción (pull-out test).

La longitud de anclaje o de desarrollo de una barra en tracción, depende de numerosos factores, varios de ellos son evidentes y están reflejados en la ecuación 21-8, otros fueron discutidos en acápite anteriores, los más importantes son:

- El diámetro de la barra.
- El tipo de barra, lisa o corrugada.
- El esfuerzo de fluencia del acero utilizado.
- La posición de la barra (barra superior o inferior)
- El tipo de recubrimiento que tiene la barra. Por ejemplo, existen en el mercado barras de refuerzo que están recubiertas de un material epóxico (Epoxy coated bars) para mejorar su resistencia a la corrosión. Este material afecta a la adherencia de la barra.
- Tamaño o espesor del recubrimiento de concreto y espaciamiento entre barras.
- Tipo de concreto, concretos de peso normal o livianos.
- Resistencia a la compresión, f'_c , del concreto.
- Presencia de refuerzo transversal en la zona de anclaje que controle el agrietamiento por hendidura.

Las barras del lecho superior de una viga requieren mayor longitud de anclaje que las del lecho inferior. Esto es debido a que el asentamiento plástico del concreto puede generar una zona de vacío debajo de la barra y agrietamiento por encima de la barra (véase el acápite 13-4 g) adicionalmente el concreto en la parte superior de una viga está menos compactado y tiene una relación agua / cemento mayor y un mayor contenido de finos. El ACI define a las barras del lecho superior como aquellas que tienen más de 0.30 m de concreto por debajo. Normalmente esto sucede en las vigas peraltadas y en el refuerzo horizontal de muros.

Las longitudes de anclaje en compresión de las barras de refuerzo son sensiblemente menores que sus pares en tracción. La razón obedece a varios factores, entre ellos:

- a) El concreto en la zona de compresión no se encuentra agrietado. Por lo tanto no existe el fenómeno de cambio de signo en los esfuerzos de adherencia como si lo hay en las barras en tracción.
- b) Parte de la carga en la barra se transfiere por apoyo directo del extremo de la barra en el concreto el cual genera esfuerzos de aplastamiento en el concreto. Este efecto se denomina efecto de punta. Es evidente que en el extremo de una barra en tracción, este efecto no existe.

21.5 Longitudes de Anclaje – Norma Peruana

Las longitudes de anclaje de la Norma E.060 de 1989 estuvieron basadas en las ecuaciones propuestas por el ACI del año 1983, mientras que las longitudes de anclaje de la Norma E.060 del 2009 están basadas, con modificaciones importantes, en el ACI del 2005.

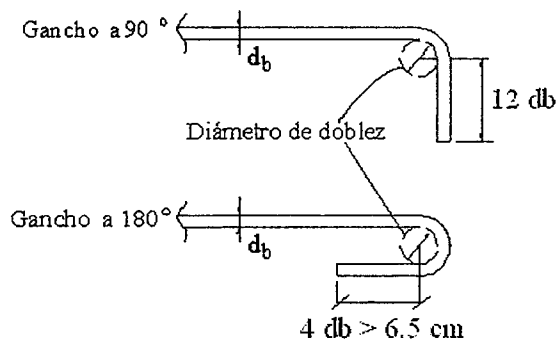
Es importante anotar que a partir del ACI del año 1995 las longitudes de anclaje en tracción, sufrieron cambios importantes resultando en longitudes mayores. Para las barras en compresión los valores no han cambiado.

Las Tablas insertas al final de este capítulo, resumen los valores de la longitud de anclaje en tracción y compresión para diversas calidades de concreto y diámetros de las barras corrugadas de Grado 60 para la Norma E.060 de 1989 (Tabla 21-1) y del 2009 (Tablas 21-2 y 21-3).

21.6 Anclaje con Gancho Estándar

Los ganchos se emplean cuando no hay suficiente espacio para anclar la barra, esto es bastante común en los extremos de las vigas que se apoyan en una columna o muro. El ACI cubre únicamente los denominados “ganchos estándar” de 90 ó 180° cuyas características y dimensiones fueron presentadas en el acápite 6.9 y se resumen en la tabla y figura a continuación.

Tamaño de la barra	Diámetros mínimos de doblez Barras longitudinales
#3, #4, #5	6 db
#6, #7, #8	6 db
#9, #10, #11	8 db



El anclaje con un gancho estándar se caracteriza por una longitud recta mínima denominada L_{dg} , un doblez a 90 ó 180° y una extensión recta. La figura 21-12 ilustra el

anclaje en el extremo de una viga en la cual para las barras superiores se han utilizado ganchos a 90°.

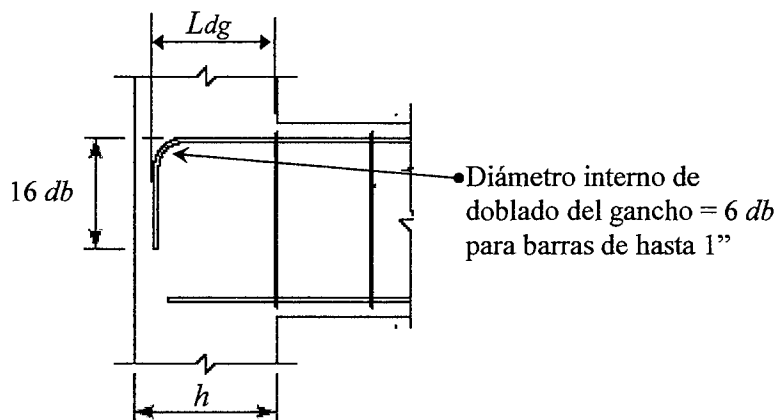


Fig. 21-12 Anclaje con gancho estándar a 90

Los valores de L_{dg} se encuentran en la Tabla 21-4 inserta al final de este capítulo y son los mismos para ganchos a 90 y 180°. Los valores de L_{dg} son los mismos para barras de lecho superior e inferior, es decir el valor no se modifica por la posición de la barra. Tenga presente que los ganchos en barras gruesas requieren de bastante espacio para acomodar todas las características geométricas, por lo tanto, en los nudos extremos hay que prestar especial atención a la congestión del refuerzo y a las dimensiones del nudo.

Los ganchos son eficientes para las barras en tracción, para las barras en compresión no aportan resistencia.

Un gancho bien detallado y construido tiene la misma o más eficiencia que un anclaje recto. La figura 21-13 (MacGregor) ilustra la manera como un gancho a 90° resiste las fuerzas de tracción. Al entrar en tracción la barra, el gancho desliza hacia la derecha y se forma una pequeña zona de vacío (gap) entre la barra y el concreto, se movilizan fuerzas de adherencia en la zona recta del gancho y esfuerzos elevados de aplastamiento (bearing) en el interior del gancho. Debido a que las fuerzas de compresión en el interior del gancho no son colineales con la fuerza de tracción aplicada en la barra, la parte vertical del gancho (la cola) tiende a enderezarse produciendo esfuerzos de compresión en el concreto. La falla de un gancho casi siempre ocurre por aplastamiento o trituración del concreto en el interior de la zona curva del gancho, si el gancho se encuentra cerca de la cara del nudo el aplastamiento puede llegar a la superficie desprendiendo el recubrimiento lateral. En algunas ocasiones el recubrimiento de concreto en la zona vertical del gancho se agrieta permitiendo que la cola tienda a enderezarse.

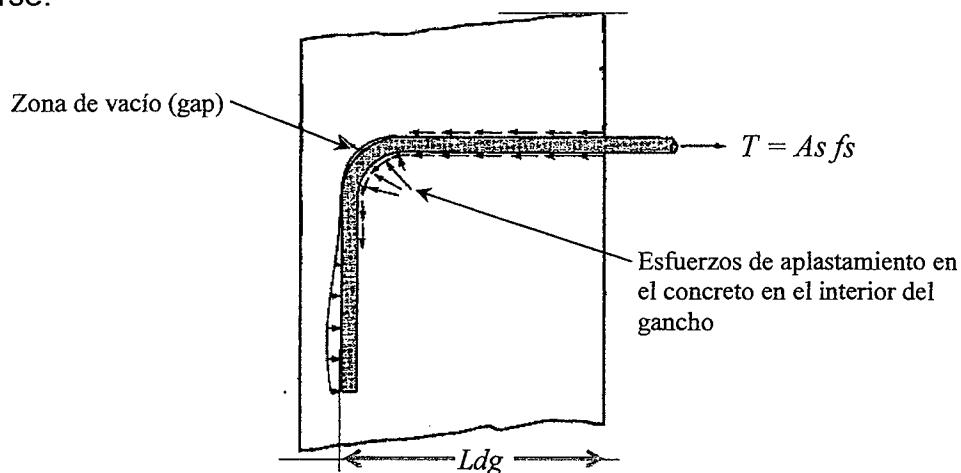


Fig. 21-13 Fuerzas de anclaje en un gancho

Tabla 21-1 Longitudes rectas de anclaje de acuerdo a la Norma E.060 de 1989

Longitudes de Anclaje en Tracción - Barras Inferiores - Norma E-060

1) $L_d \geq 0.06 A_b f_y / (f'c)^{1/2}$ $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

2) $L_d \geq 0.006 d_b f_y$

3) $L_d \geq 0.30 \text{ m (ojo)}$

Barra	db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$			
			210	280	350	420
8 mm	0.80	0.50	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)
3/8"	0.95	0.71	20	20	20	20
1/2"	1.27	1.29	24	24	24	24
5/8"	1.59	2.00	32	32	32	32
3/4"	1.91	2.84	40	40	40	40
7/8"	2.22	3.87	49	48	48	48
1"	2.54	5.10	67	58	56	56
1 3/8"	3.58	10.06	89	77	69	64
			175	152	136	124

Longitudes de Anclaje en Tracción - Barras Superiores - Norma E-060

1) $L'd \text{ (barras superiores)} \geq 1.4 L_d \text{ de barras inferiores}$ $FM = 1.4$

2) $L'd \geq 0.30 \text{ m (ojo)}$

Barra	Db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$			
			210	280	350	420
8 mm	0.80	0.50	L'd (cm)	L'd (cm)	L'd (cm)	L'd (cm)
3/8"	0.95	0.71	28	28	28	28
1/2"	1.27	1.29	34	34	34	34
5/8"	1.59	2.00	45	45	45	45
3/4"	1.91	2.84	56	56	56	56
7/8"	2.22	3.87	69	67	67	67
1"	2.54	5.10	94	82	78	78
1 3/8"	3.58	10.06	124	108	96	90
			245	212	190	173

Longitudes de Anclaje en Compresión - Norma Peruana E-060

1) $L_d \geq 0.08 d_b f_y / (f'c)^{1/2}$ $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

2) $L_d \geq 0.004 d_b f_y$

3) $L_d \geq 0.20 \text{ m (ojo)}$

Barra	Db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$			
			210	280	350	420
8 mm	0.80	0.50	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)
3/8"	0.95	0.71	19	16	14	13
1/2"	1.27	1.29	22	19	17	16
5/8"	1.59	2.00	29	26	23	21
3/4"	1.91	2.84	37	32	29	27
7/8"	2.22	3.87	44	38	34	32
1"	2.54	5.10	52	45	40	37
1 3/8"	3.58	10.06	59	51	46	43
			83	72	64	60

Nota: Las longitudes de anclaje de las barras en compresión de la Norma E.060 del 2009, no han variado con respecto a las de 1989. En consecuencia los valores de Ld son los indicados en la tabla precedente.

Longitudes rectas de anclaje de acuerdo a la Norma E.060 del 2009

Tabla 21-2 Longitudes de Anclaje en Tracción - Barras Inferiores - Norma E.060 2009

$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

1) L_d Mínimo $\geq 0.30 \text{ m}$ (longitud mínima de anclaje)

Barra	db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$				
			210	280	350	420	550
8 mm	0.80	0.50	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)	Ld (cm)
8 mm	0.80	0.50	28	24	22	20	17
3/8"	0.95	0.71	34	29	26	24	21
1/2"	1.27	1.29	45	39	35	32	28
5/8"	1.59	2.00	56	49	43	40	35
3/4"	1.91	2.84	67	58	52	48	42
7/8"	2.22	3.87	98	85	76	69	60
1"	2.54	5.10	112	97	86	79	69
1 3/8"	3.58	10.06	157	136	122	111	97

Tabla 21-3 Longitudes de Anclaje en Tracción - Barras Superiores - Norma E.060 2009

$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

1) $L'd$ (barra superior) $\geq 1.3 L_d$ (barra inferior)

2) L_d Mínimo $\geq 0.30 \text{ m}$ (longitud mínima de anclaje)

Barra	Db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$				
			210	280	350	420	550
8 mm	0.80	0.50	L'd (cm)	L'd (cm)	L'd (cm)	L'd (cm)	Ld (cm)
8 mm	0.80	0.50	37	32	28	26	23
3/8"	0.95	0.71	44	38	34	31	27
1/2"	1.27	1.29	58	51	45	41	36
5/8"	1.59	2.00	73	63	57	52	45
3/4"	1.91	2.84	88	76	68	62	54
7/8"	2.22	3.87	127	110	98	90	78
1"	2.54	5.10	145	126	112	103	90
1 3/8"	3.58	10.06	204	177	158	145	126

Notas - Las longitudes de anclaje de las dos tablas anteriores son aplicables sólo en los siguientes casos:

- 1) Espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo empalmados o desarrolladas no menor que db , con recubrimiento libre no menor que db , y estribos a lo largo de L_d por lo menos iguales al mínimo indicado en el acápite 11.5.6.
- 2) Aplicable también cuando el espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo desarrolladas o empalmadas no sea menor que $2 db$ y el recubrimiento libre no menor que db .
- 3) Para otros casos ver acápite 12.2.3 de la Norma E.060.
- 4) Los valores corresponden a concretos de peso normal y barras de refuerzo sin tratamiento superficial. Ver acápite 12.2.4 de la Norma.
- 5) Las longitudes de anclaje para barras en compresión, son iguales a las de la Norma de 1989 (Tabla 21-1)

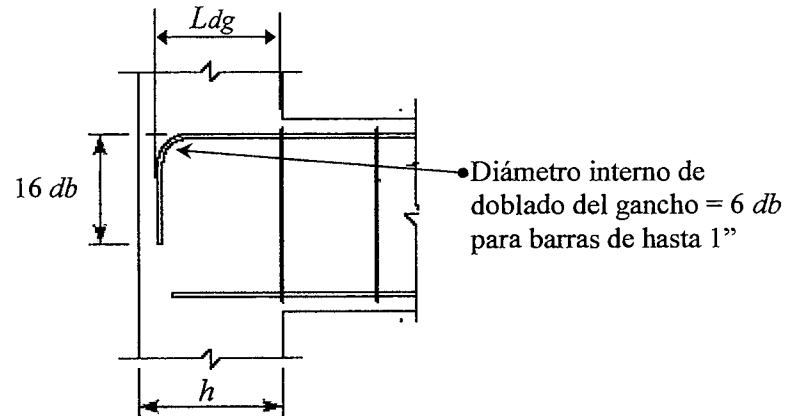
Tabla 21- 4 Norma E.060 de 1989 y del 2009

Anclaje con Gancho Estándar - Norma Peruana E-060

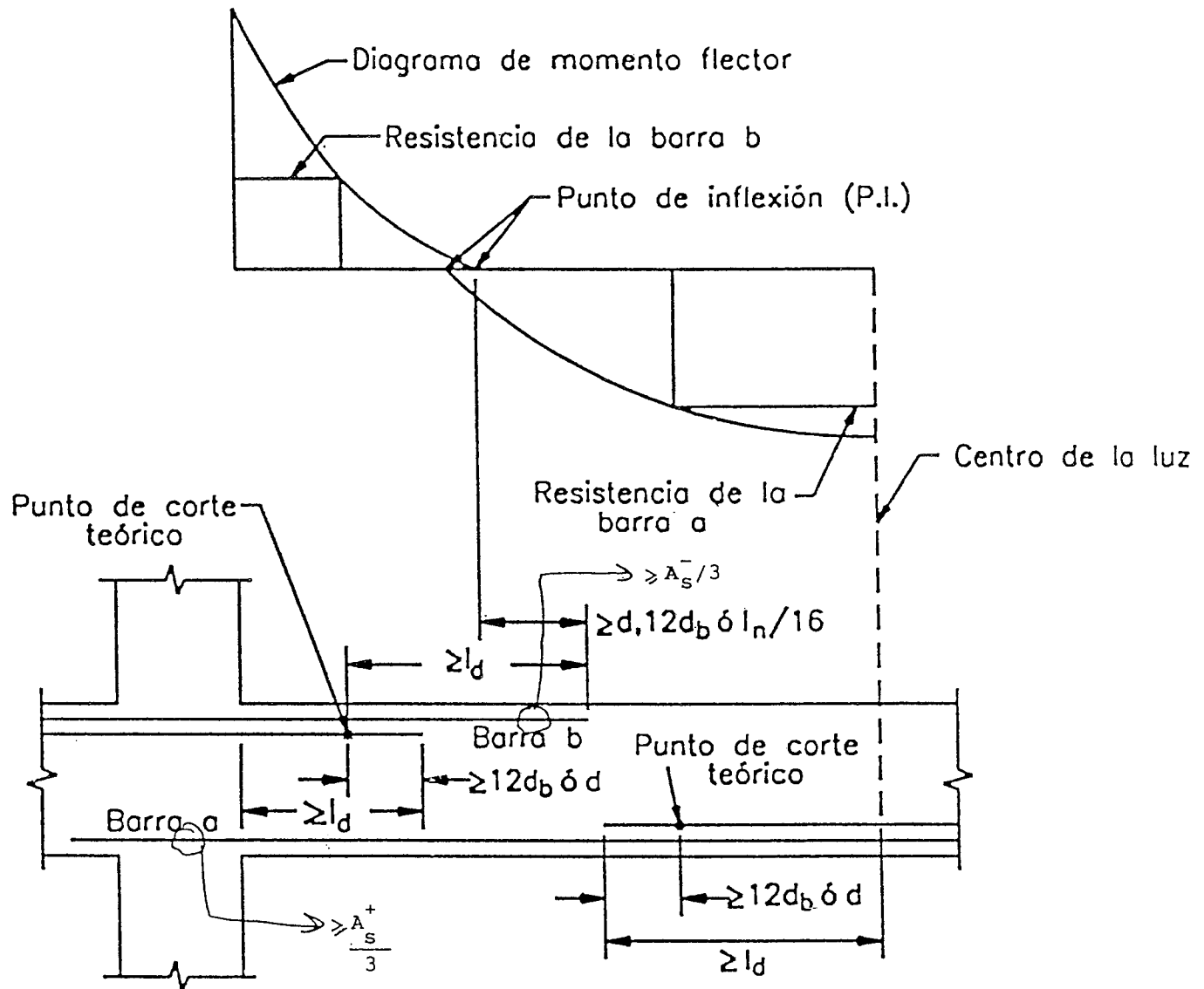
- 1) $L_{dg} \geq 318 db / (f'c)^{1/2}$
- 2) $L_{dg} \geq 8 db$
- 3) $L_{dg} \geq 0.15 \text{ m (ojo)}$

$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

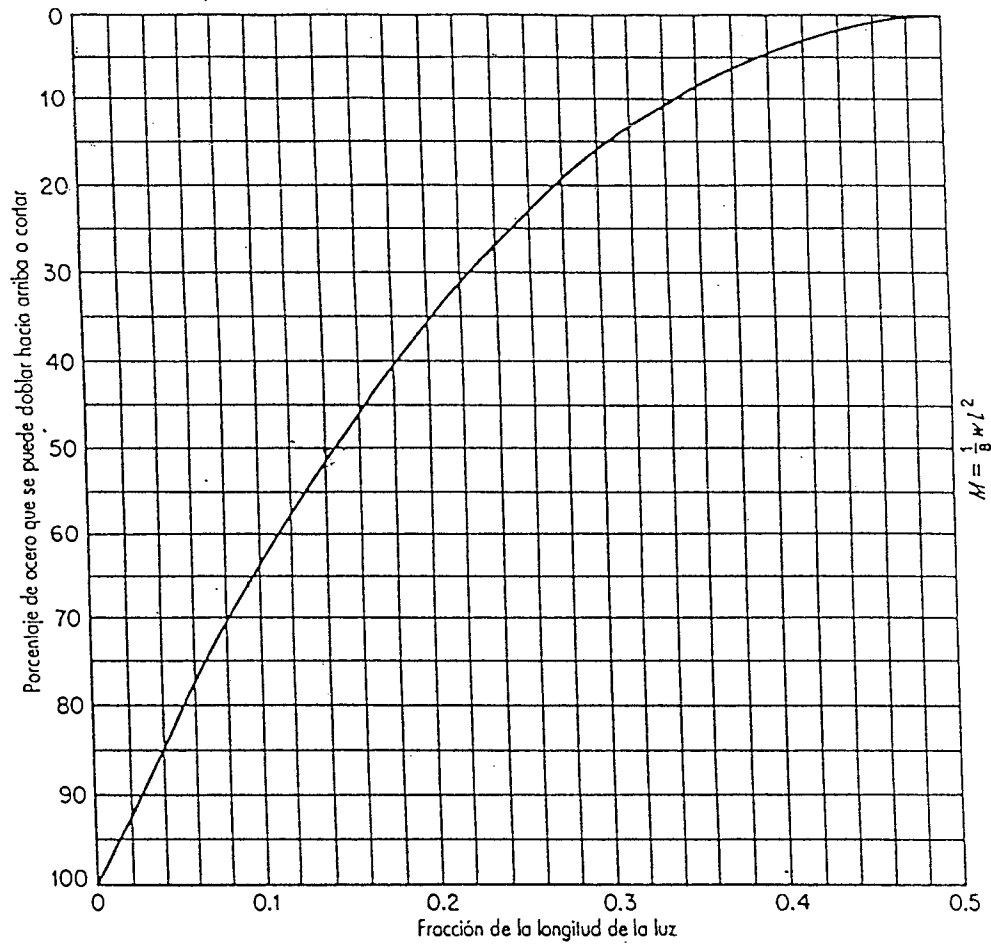
Barra	db (cm)	Ab (cm ²)	$f'c \text{ (kg/cm}^2\text{)}$			
			210	280	350	420
			Ldg (cm)	Ldg (cm)	Ldg (cm)	Ldg (cm)
8 mm	0.80	0.50	18	15	14	12
3/8"	0.95	0.71	21	18	16	15
1/2"	1.27	1.29	28	24	22	20
5/8"	1.59	2.00	35	30	27	25
3/4"	1.91	2.84	42	36	32	30
7/8"	2.22	3.87	49	42	38	34
1"	2.54	5.10	56	48	43	39
1 3/8"	3.58	10.06	79	68	61	56



Número fácil de recordar: Para $f'c = 210$ $L_{dg} \approx 22 db$ pero no menor de 0.15 m

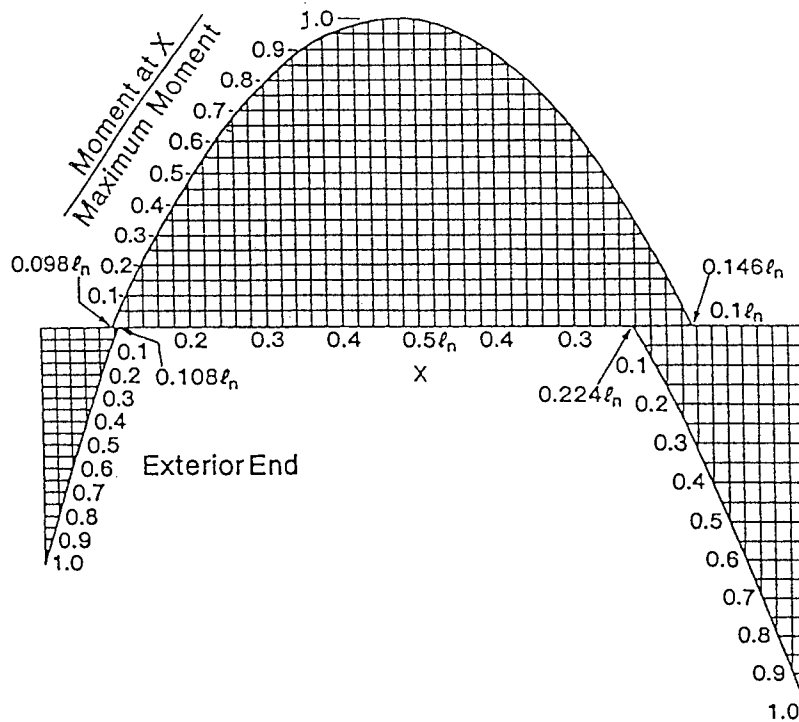


CONSIDERACIONES PARA EL CORTE DE ACERO EN REGIONES DE MOMENTO POSITIVO Y NEGATIVO

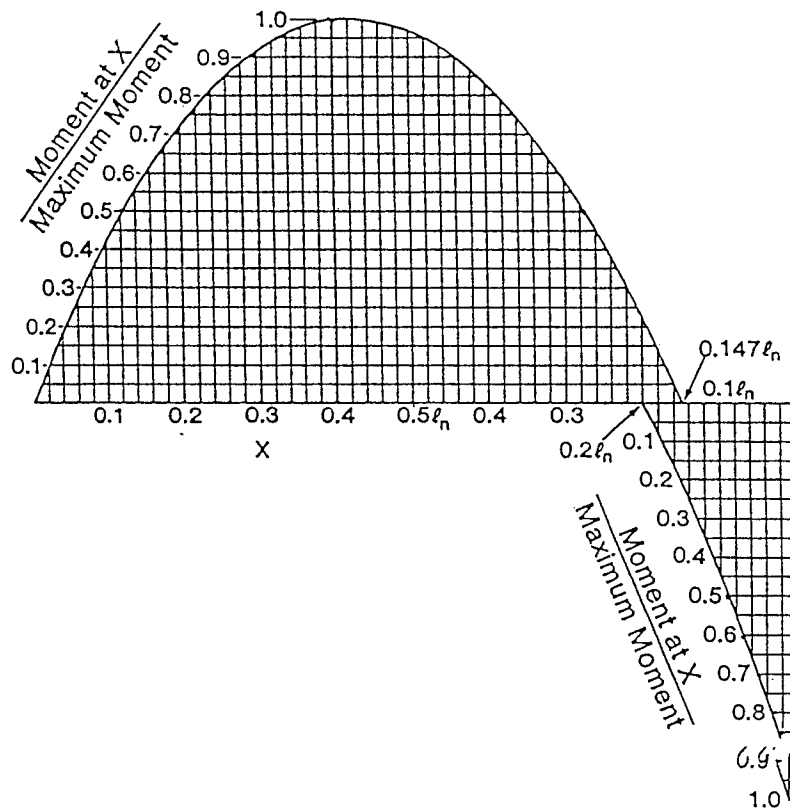


Ubicación de puntos de doblado o corte de barras en vigas simplemente apoyadas y cargadas uniformemente.

PARÁBOLA UNITARIA (Corte de Fierro)

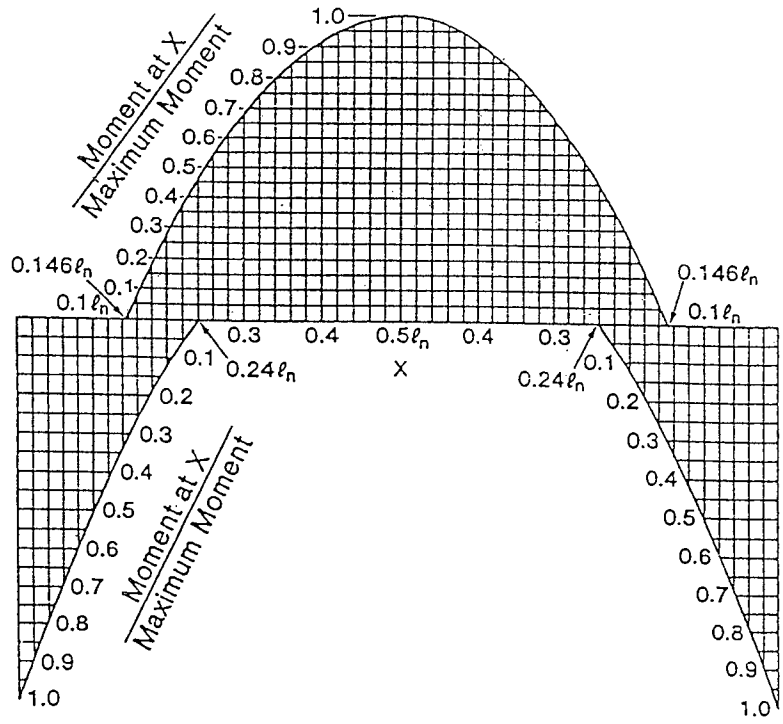


Bending moment envelope for exterior span with exterior support built integrally with a spandrel beam or girder (moment coefficients: $-1/24, +1/14, -1/10$).

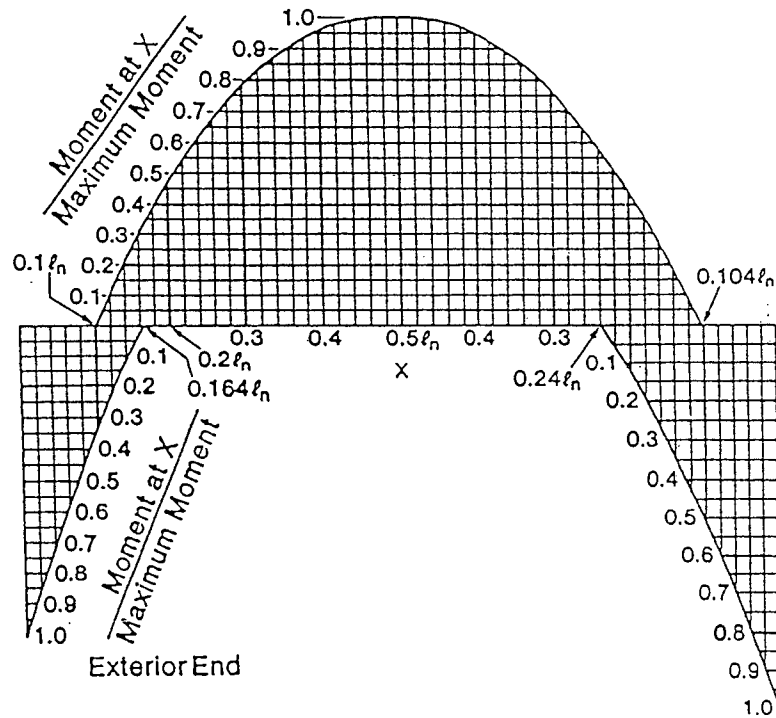


Bending moment envelope for exterior span with discontinuous end restraint (moment coefficients: $0, +1/11, -1/10$).

CORTE DE FIERRO - MÉTODO DE LOS COEFICIENTES



Bending moment envelope for typical interior span (moment coefficients: $-1/11, +1/16, -1/11$).



Bending moment envelope for exterior span with exterior support built integrally with a column (moment coefficients: $-1/16, +1/14, -1/10$).

CORTE DE FIERRO - MÉTODO DE LOS COEFICIENTES

ANEXO 1

Planos de Estructuras de un Edificio en Concreto Armado

El diseñador debe transmitir al que ejecutará la obra, los resultados finales de su diseño, entre ellos: la concepción estructural, los esquemas resistentes para las diversas cargas que obran sobre la estructura, los análisis realizados (como herramienta para el diseño), los refuerzos y dimensiones de todos los elementos estructurales, la posible interacción entre elementos estructurales y no estructurales, las calidades de los materiales a utilizar (especificaciones), los detalles especiales, las precauciones a considerar durante la ejecución de la obra, las sobrecargas de diseño, etc.

La manera como el diseñador suele transmitir al constructor o ejecutor de la obra toda esta información, es a través de los planos de estructuras. Es obvio de que si los planos resumen todo el trabajo de concepción y diseño, debe prestarse especial cuidado en la presentación de los mismos. Los planos deben ser claros, con abundancia de detalles y especificaciones y deben contener toda la información necesaria para una correcta ejecución de la obra.

Recuerde que el constructor, en la mayoría de los casos, desconoce completamente la manera como el diseñador concibió el trabajo de los distintos elementos estructurales tanto de manera individual como dentro del conjunto y todas las suposiciones que se hicieron en el análisis y diseño. En consecuencia los planos deben transmitir al lector la información de tal modo que no haya lugar a interpretaciones erróneas.

A manera de ejemplo de presentación de planos estructurales, sin que esto signifique un estándar o un modelo a seguir - y a pesar del riesgo que significa presentar este tipo de información ya que indudablemente refleja los "gustos" personales del diseñador así como sus decisiones y simplificaciones - decidí incluir tres planos básicos de un edificio simple en concreto armado. El edificio corresponde a un pabellón de aulas de tres pisos ubicado en el Campus de la PUCP. La idea, para los que conocen el Campus, es ver un proyecto materializado a partir de unos planos, por lo tanto podrá entender la concepción estructural del edificio o esquema resistente, podrá verificar la posición de las columnas, formarse una idea de los refuerzos de cada elemento, del tamaño de las vigas, del sentido del armado del techo, la presencia elementos no estructurales, etc.

No se trata de un juego completo de planos, es más, falta el plano de la cimentación, el plano del encofrado de la azotea, los planos de los otros edificios colindantes y se han obviado diversos detalles importantes.

Se presentan únicamente tres planos: el de encofrado de un piso típico, algunas columnas y placas y el plano parcial de las vigas. Para completar el "expediente" es necesario contar con los planos de arquitectura, los planos completos de estructuras, los planos de instalaciones eléctricas y sanitarias, los planos de instalaciones electromecánicas (si las hubiera), el estudio de mecánica de suelos y las especificaciones técnicas.





ANEXO 1

Planos de Estructuras de un Edificio en Concreto Armado

El diseñador debe transmitir al que ejecutará la obra, los resultados finales de su diseño, entre ellos: la concepción estructural, los esquemas resistentes para las diversas cargas que obran sobre la estructura, los análisis realizados (como herramienta para el diseño), los refuerzos y dimensiones de todos los elementos estructurales, la posible interacción entre elementos estructurales y no estructurales, las calidades de los materiales a utilizar (especificaciones), los detalles especiales, las precauciones a considerar durante la ejecución de la obra, las sobrecargas de diseño, etc.

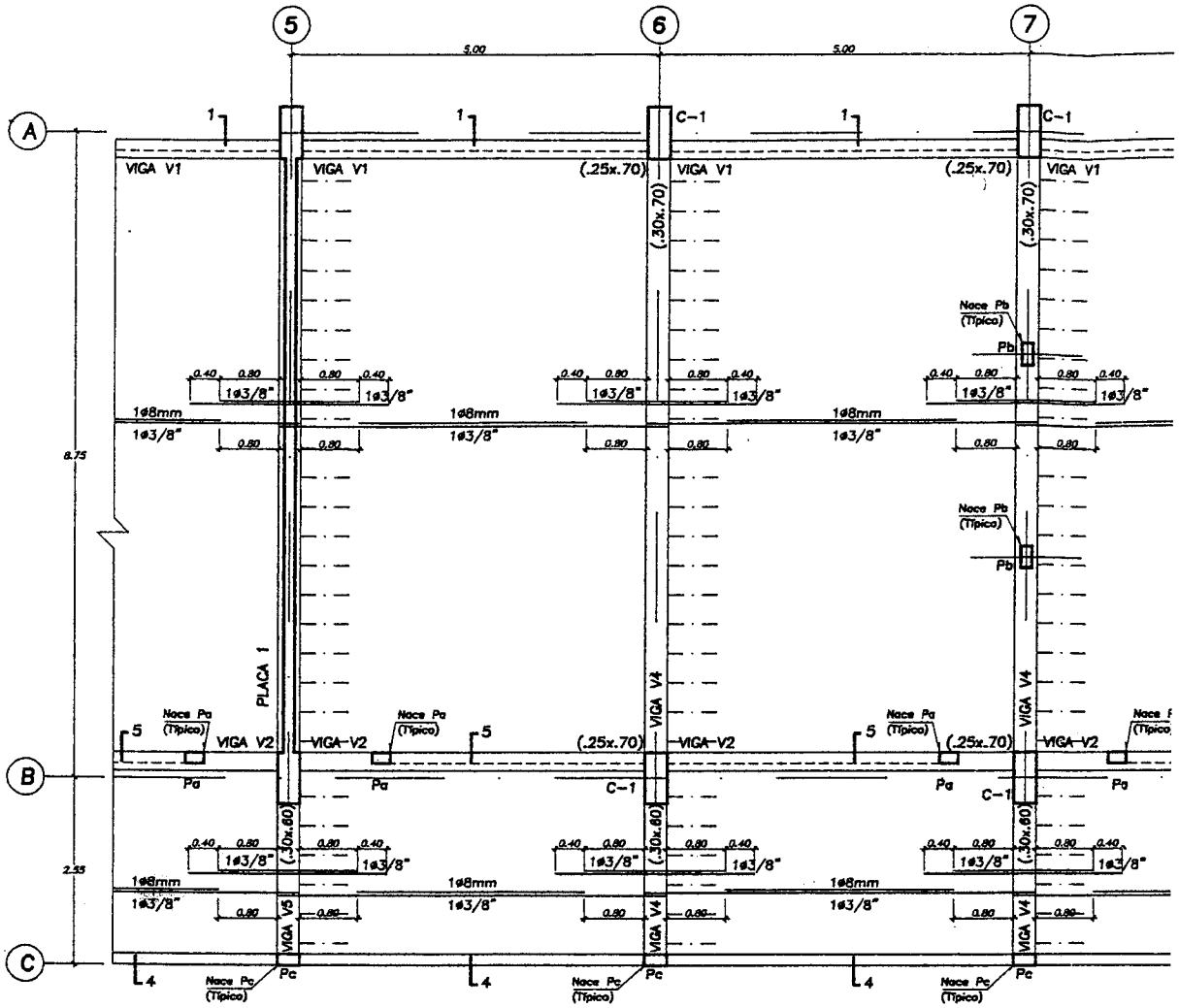
La manera como el diseñador suele transmitir al constructor o ejecutor de la obra toda esta información, es a través de los planos de estructuras. Es obvio de que si los planos resumen todo el trabajo de concepción y diseño, debe prestarse especial cuidado en la presentación de los mismos. Los planos deben ser claros, con abundancia de detalles y especificaciones y deben contener toda la información necesaria para una correcta ejecución de la obra.

Recuerde que el constructor, en la mayoría de los casos, desconoce completamente la manera como el diseñador concibió el trabajo de los distintos elementos estructurales tanto de manera individual como dentro del conjunto y todas las suposiciones que se hicieron en el análisis y diseño. En consecuencia los planos deben transmitir al lector la información de tal modo que no haya lugar a interpretaciones erróneas.

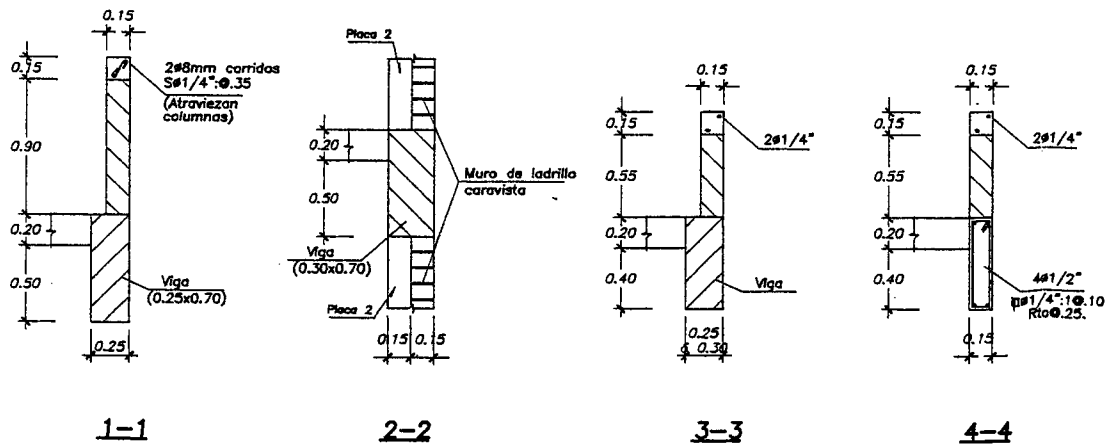
A manera de ejemplo de presentación de planos estructurales, sin que esto signifique un estándar o un modelo a seguir - y a pesar del riesgo que significa presentar este tipo de información ya que indudablemente refleja los "gustos" personales del diseñador así como sus decisiones y simplificaciones - decidí incluir tres planos básicos de un edificio simple en concreto armado. El edificio corresponde a un pabellón de aulas de tres pisos ubicado en el Campus de la PUCP. La idea, para los que conocen el Campus, es ver un proyecto materializado a partir de unos planos, por lo tanto podrá entender la concepción estructural del edificio o esquema resistente, podrá verificar la posición de las columnas, formarse una idea de los refuerzos de cada elemento, del tamaño de las vigas, del sentido del armado del techo, la presencia elementos no estructurales, etc.

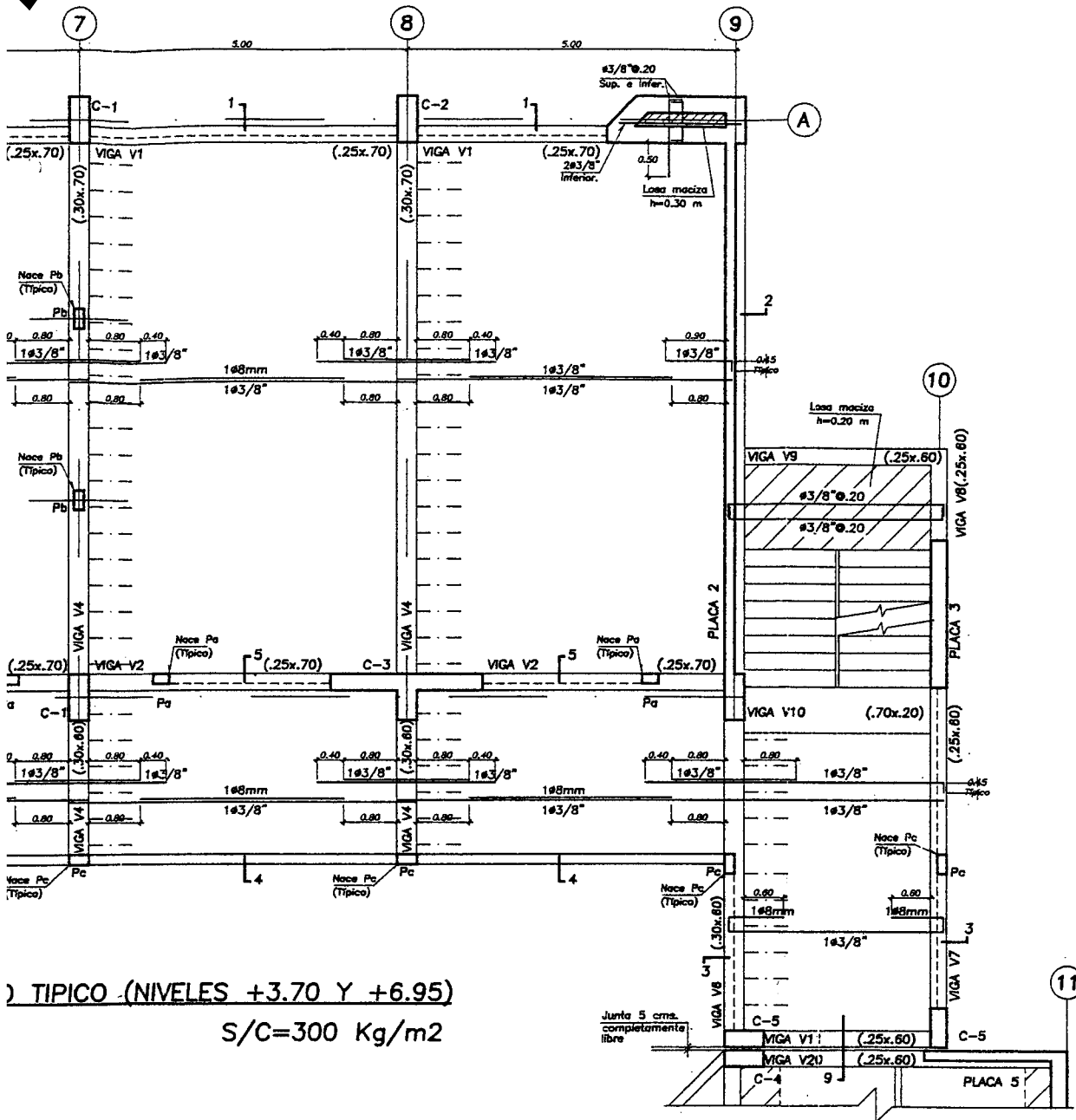
No se trata de un juego completo de planos, es más, falta el plano de la cimentación, el plano del encofrado de la azotea, los planos de los otros edificios colindantes y se han obviado diversos detalles importantes.

Se presentan únicamente tres planos: el de encofrado de un piso típico, algunas columnas y placas y el plano parcial de las vigas. Para completar el "expediente" es necesario contar con los planos de arquitectura, los planos completos de estructuras, los planos de instalaciones eléctricas y sanitarias, los planos de instalaciones electromecánicas (si las hubiera), el estudio de mecánica de suelos y las especificaciones técnicas.

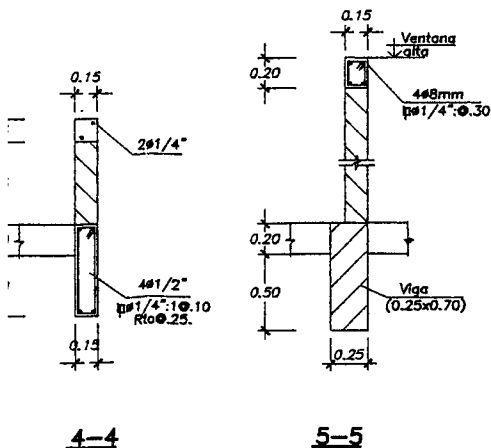


ENCOFRADO TECHO TÍPICO (NIVEL)
 Aligerado $h=0.20$

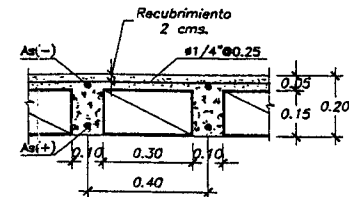




TIPO (NIVELES +3.70 Y +6.95)
S/C=300 Kg/m²

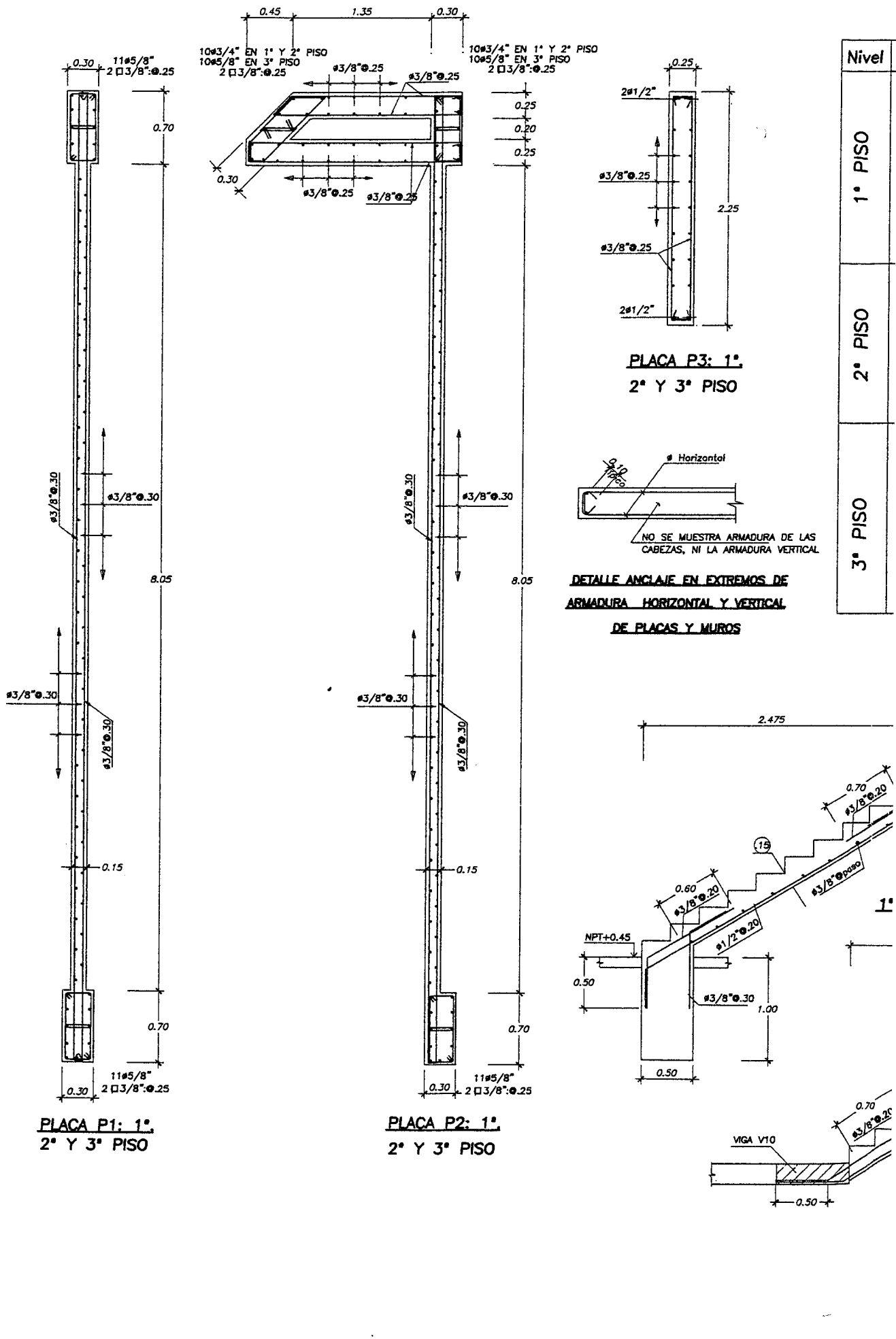


$f_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$



SECCION TIPICA DE ALGERADO h=0.20

CONCRETO ARMADO 1				
OBRA: PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU ZONA AULAS - CEPREPUC			LABORA:	
PLANO: ENCOFRADO TECHO TIPICO			E-1/3	
DISEÑO: GOP	DEBILLO: PABLO QUISPE	ESCALA: 1:100, 1:50	FECHA: NOV-2001	REVISADO: GOP



CUADRO DE COLUMNAS

Nivel	C1	C2	C3	C4	C5
1° PISO	<p>6#3/4" + 6#5/8" 2#13/8" @ 0.20</p>	<p>12#3/4" 2#13/8" @ 0.20</p>	<p>6#3/8" 2#3/4" #horizontal #3/8" @ 0.25 2#3/4" + 4#5/8" 2#13/8" @ 0.25 12#5/8" 2#13/8" @ 0.25</p>	<p>4#3/4" + 4#5/8" 2#13/8" @ 0.20</p>	<p>8#5/8" 2#13/8" @ 0.20</p>
2° PISO	IGUAL	IGUAL	IGUAL	IGUAL	IGUAL
3° PISO	IGUAL	<p>6#3/4" + 6#5/8" 2#13/8" @ 0.20</p>	<p>6#5/8" #horizontal #3/8" @ 0.25 6#5/8" 12#5/8" 2#13/8" @ 0.25</p>	IGUAL	IGUAL

3: 1° PISO

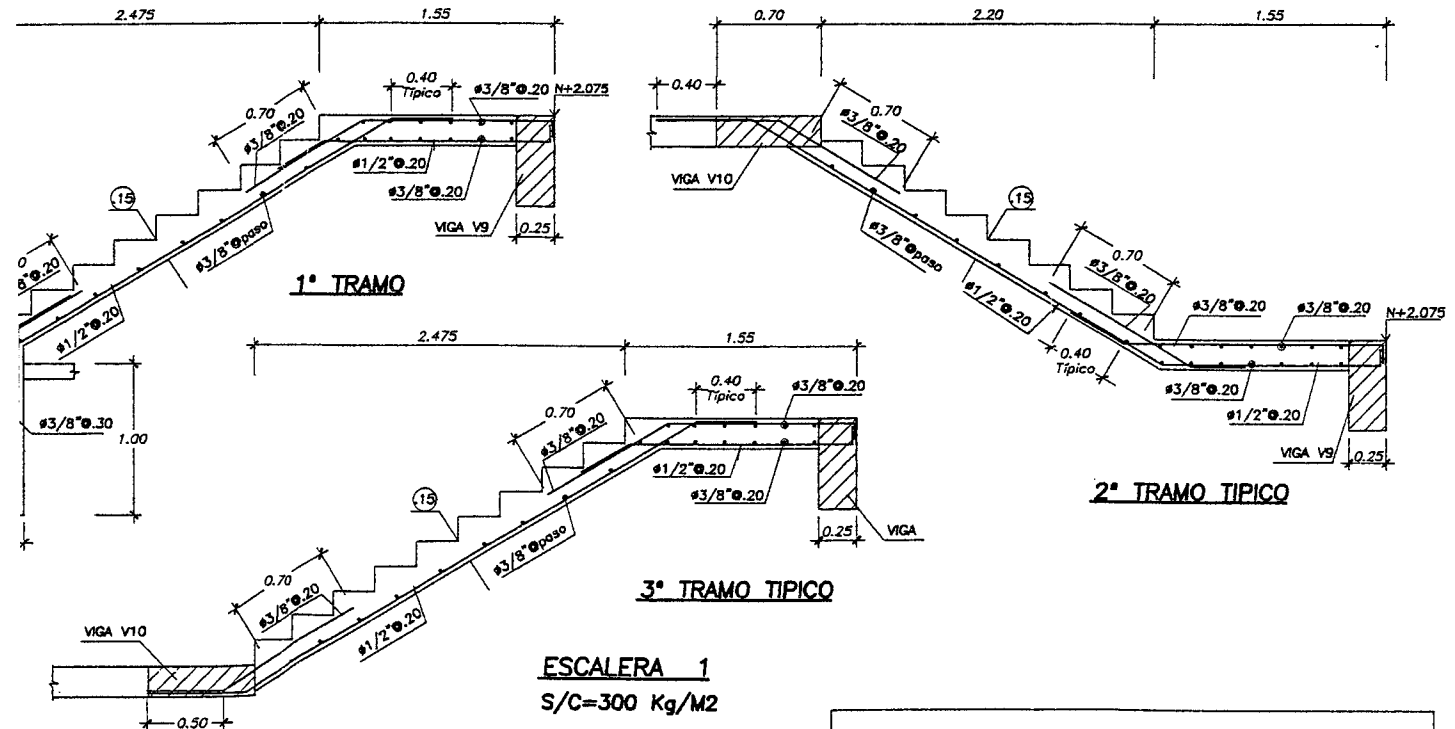
horizontal



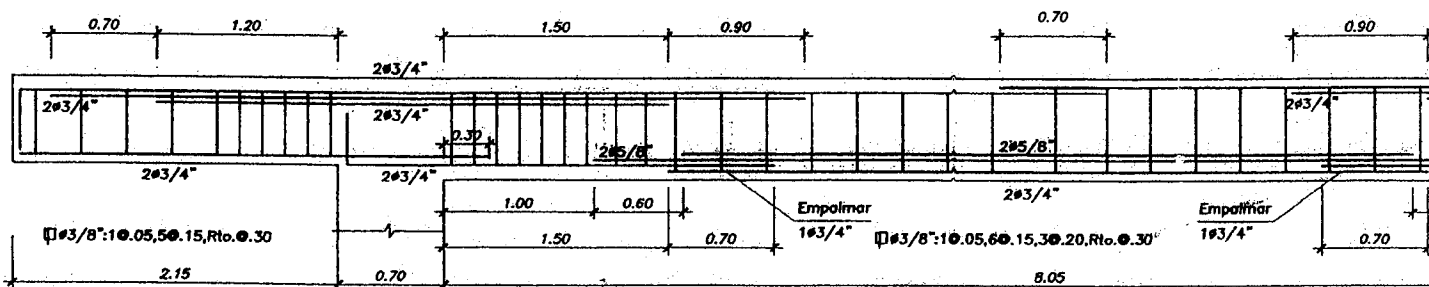
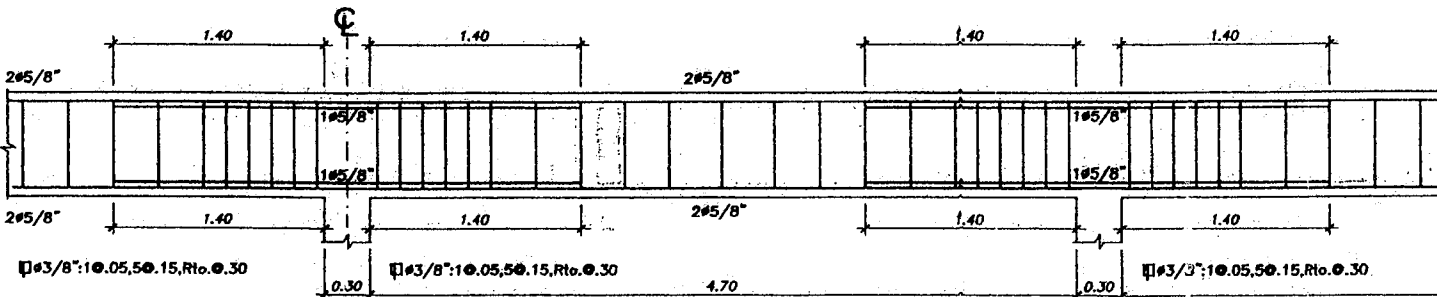
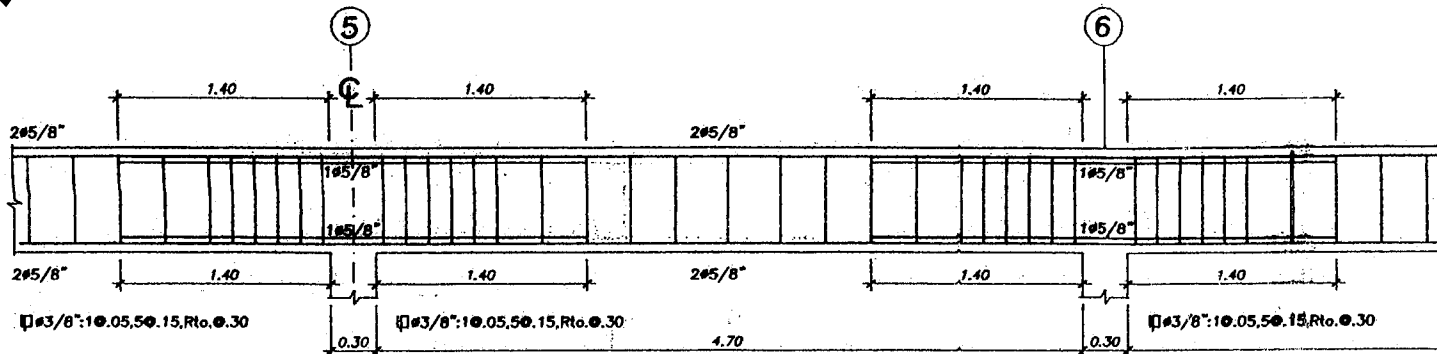
ESTRADA ARMADURA DE LAS NI LA ARMADURA VERTICAL

N EXTREMOS DE ITAL Y VERTICAL

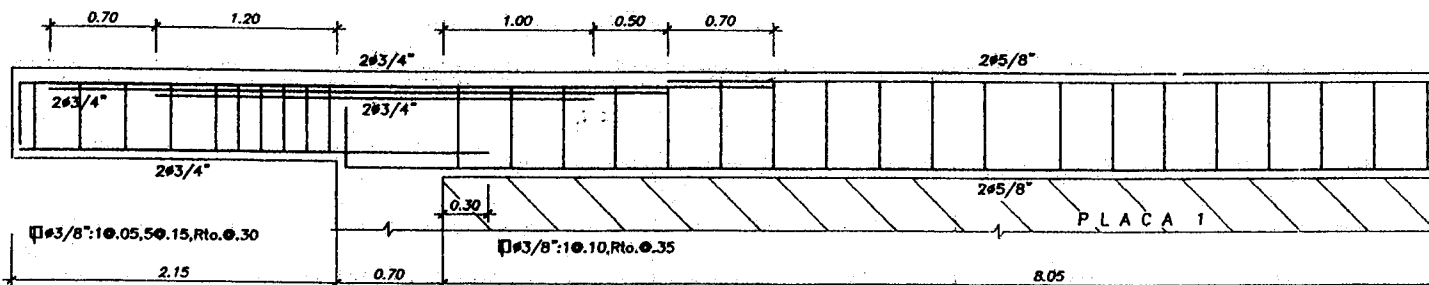
MUROS



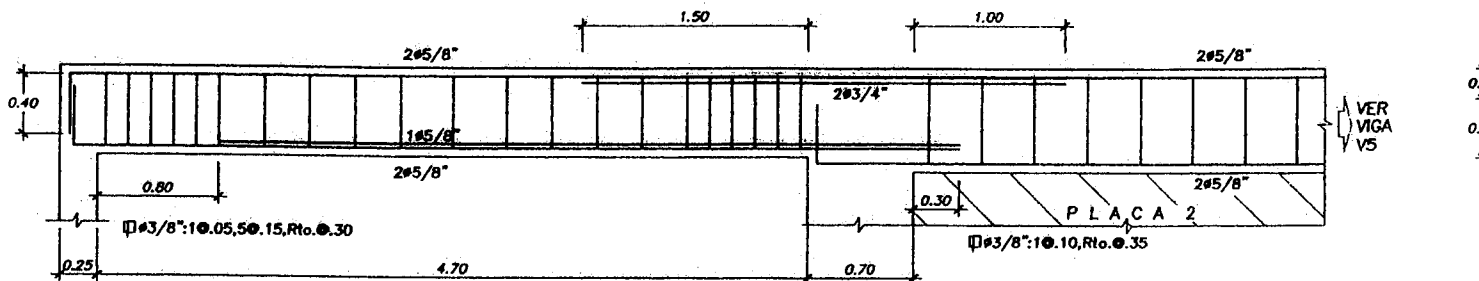
CONCRETO ARMADO 1			
OBRA: PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU ZONA AULAS - CEPREPU			LAMINA:
PLANO: COLUMNAS, PLACAS Y DETALLES			E-2/3
DISEÑO: GOP	DIBUJO: PABLO QUISPE	ESCALA: 1:50	FECHA: NOV-2001
REVISADO: GOP			



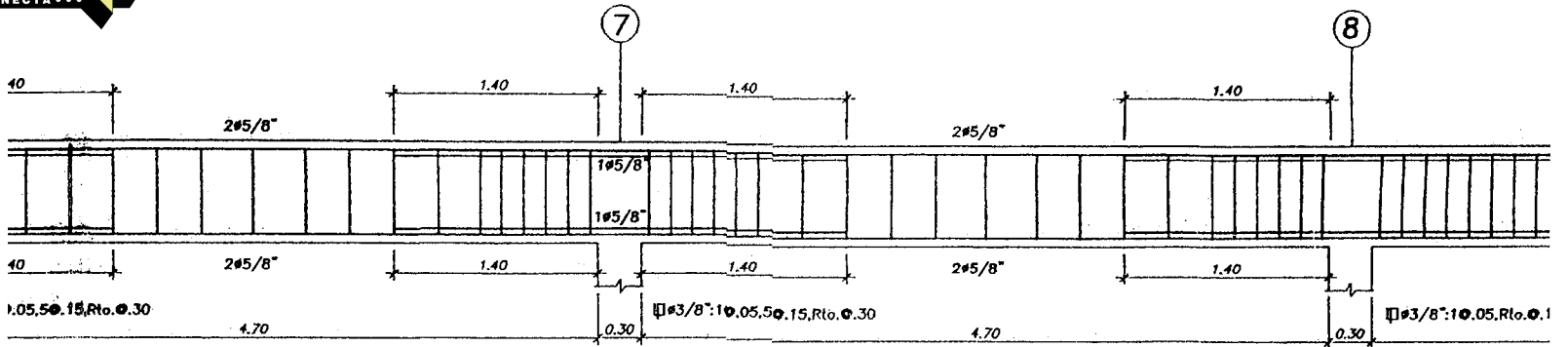
VIGA V4 (0.30x0.60/0.30x0.70)



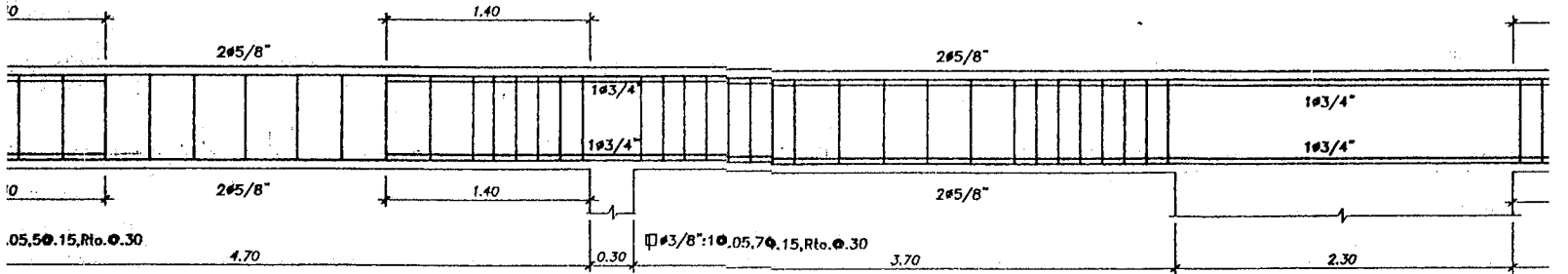
VIGA V5 (0.30x0.60/0.30x0.70)



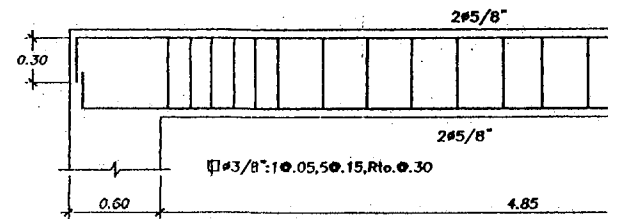
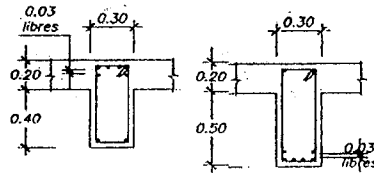
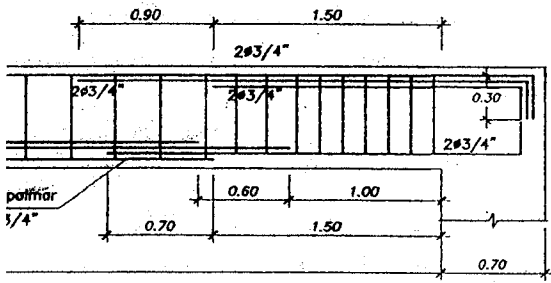
VIGA V6 (0.30x0.60/0.30x0.70)



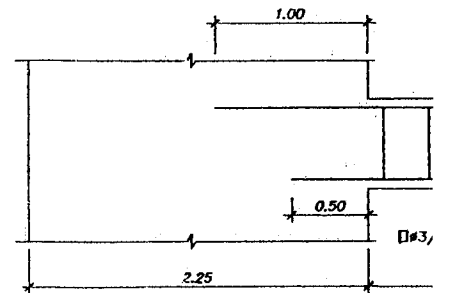
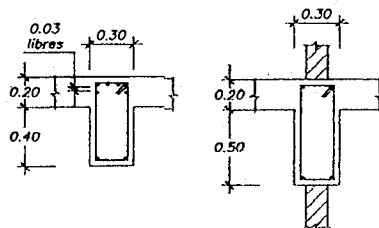
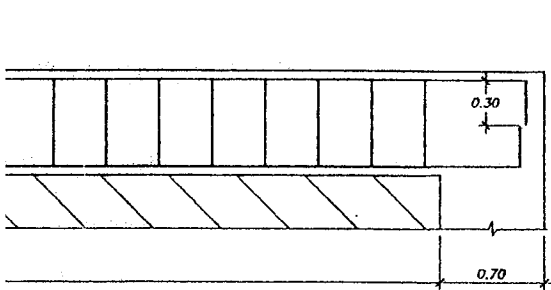
VIGA V1 (0.25x0.70)



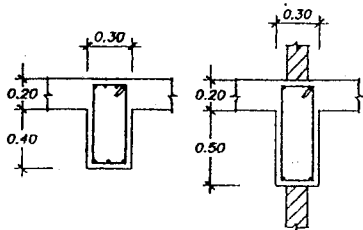
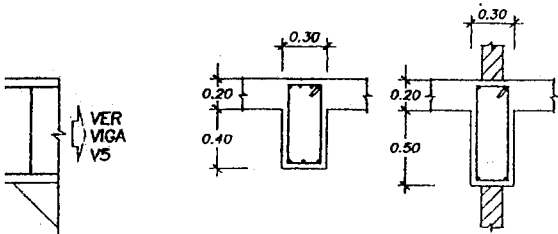
VIGA V2 (0.25x0.70)



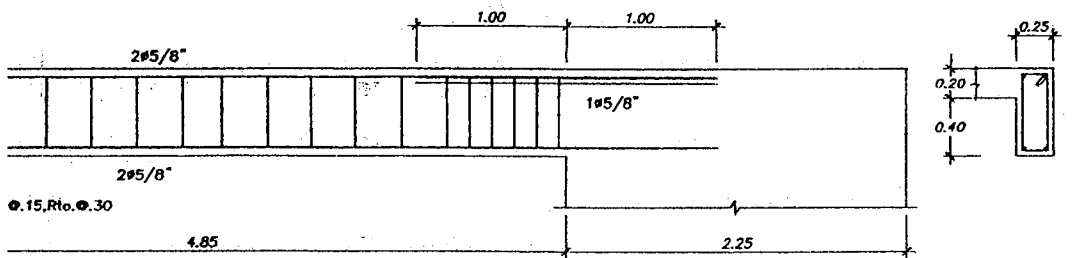
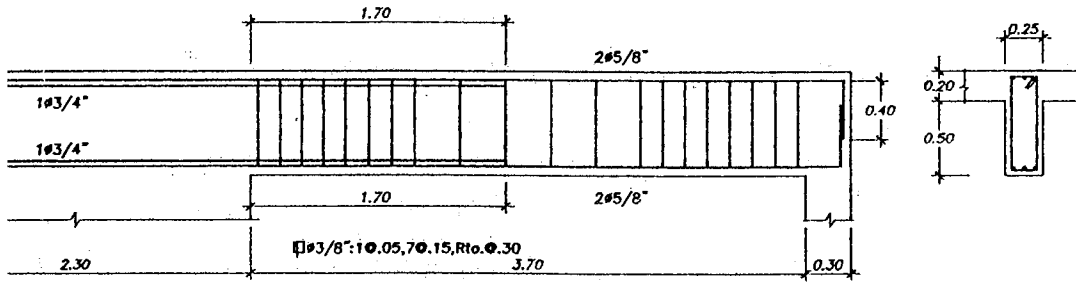
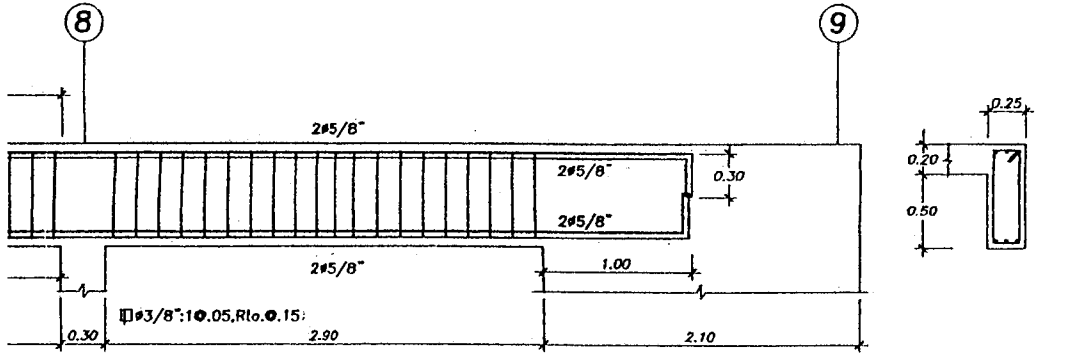
VIGA V7 (0.25x0.70)



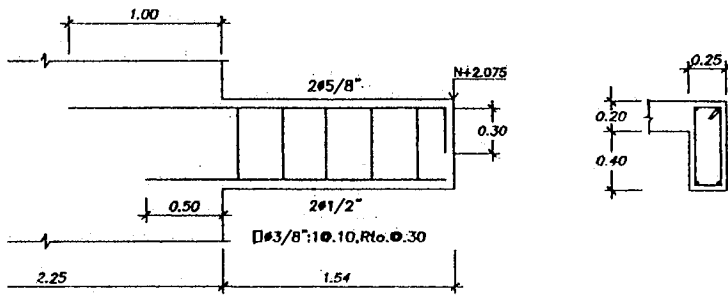
VIGA V8 (0.25x0.70)



VER VIGA V5



VIGA V7 (0.25x0.60)



VIGA V8 (0.25x0.60)

CONCRETO ARMADO 1				
OBRA: PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU ZONA AULAS - CEPREPU				LAMINA:
PLANO: ALGUNAS VIGAS DEL PISO TIPICO				E-3/3
DISEÑO: GOP	DEBLUJO: PABLO QUISPE	ESCALA: 1:50	FECHA: NOV-2001	REVISADO: GOP