

UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENIERÍA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

**UNIDAD 4: MÉTODOS ENERGÉTICOS**

**DOCENTE: Mg. Luis Fernando Narro Jara**

HUÁNUCO, 2020

# **Unidad 4. MÉTODOS ENERGÉTICOS**

## **CONTENIDO**

- 1. INTRODUCCIÓN**
  - 2. TRABAJO**
  - 3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL**
  - 4. DEFLEXIONES DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL**
  - 5. DEFLEXIONES DE VIGAS Y MARCOS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL**
  - 6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y ENERGÍA DE DEFORMACIÓN**
  - 7. TEOREMA DE CASTIGLIANO**
- 
- A decorative graphic element in the bottom left corner consisting of a blue triangle with diagonal lines and a black triangle pointing towards the right.

## **1. INTRODUCCIÓN**

En esta unidad desarrollaremos métodos para el análisis de deflexiones de estructuras estáticamente determinadas usando algunos principios básicos de trabajo y energía.

Los métodos energéticos (trabajo - energía) son más generales que los métodos geométricos, en el sentido de que se pueden aplicar a varios tipos de estructuras, tales como armaduras, vigas y marcos.

Una desventaja de estos métodos es que con cada aplicación solo se puede calcular una componente de deflexión, o pendiente, en un punto de la estructura.

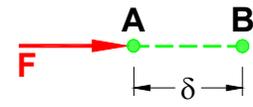
Empezaremos con una revisión del concepto básico de trabajo realizado por las fuerzas y pares durante la deformación de la estructura, y luego discutiremos el principio de trabajo virtual. Este principio se usa para formular el método del trabajo virtual para las deflexiones en armaduras, vigas y marcos. Obtendremos las expresiones para la energía de deformación de armaduras, vigas y marcos, y consideraremos el primer teorema de Castigliano para calcular las deflexiones.



## 2. TRABAJO

El trabajo se define como el producto de una fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En los cálculos de deflexiones, se ha visto el trabajo realizado por fuerzas y momentos.

Si una fuerza  $F$  permanece constante en magnitud al moverse del punto A al B, el trabajo  $W$  puede expresarse de la siguiente manera:

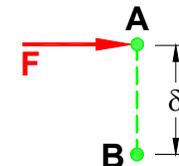


$$W = F\delta \dots (1)$$

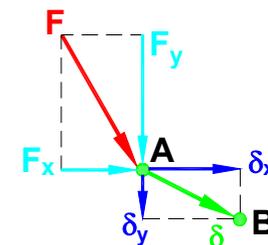
Donde  $\delta$  es la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.

El trabajo es positivo si la fuerza y el desplazamiento se encuentran en el mismo sentido, y negativo cuando la fuerza actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

Cuando una fuerza  $F$  se mueve perpendicularmente a su línea de acción, el trabajo es cero:  $W = 0$



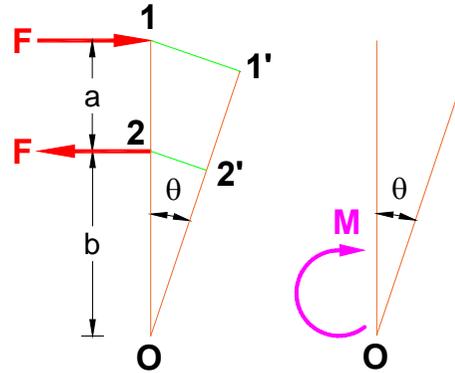
Si la magnitud y la dirección de una fuerza permanecen constantes cuando la fuerza se mueve por un desplazamiento  $\delta$  que no es colineal con la línea de acción de la fuerza, el trabajo total se obtiene sumando el trabajo realizado por cada componente de la fuerza al moverse cada una por la correspondiente componente colineal del desplazamiento  $\delta_x$  y  $\delta_y$ :



$$W = F_x\delta_x + F_y\delta_y$$

De manera semejante, si un momento permanece constante al generarse un desplazamiento angular  $\theta$ , el trabajo realizado es igual al producto del momento por el desplazamiento angular  $\theta$ :

$$W = M\theta \dots (2)$$



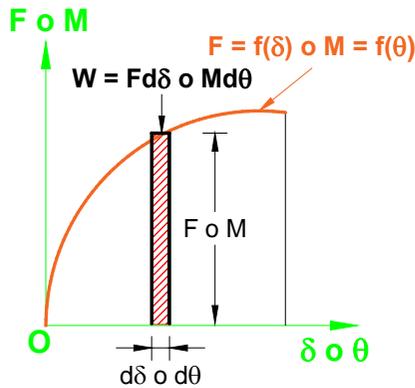
El trabajo realizado por un par es:

$$W = -Fb\theta + F(b+a)\theta$$

$$\Rightarrow W = \underbrace{(Fa)}_{M}\theta$$

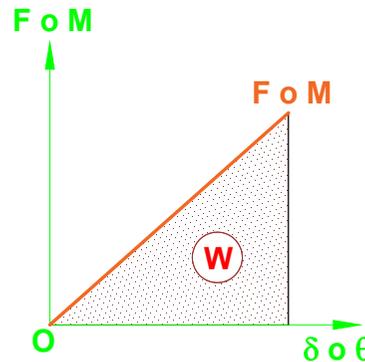
$$\Rightarrow W = M\theta$$

Si una fuerza varía en magnitud durante un desplazamiento, y si la función que relaciona la fuerza  $F$  con el desplazamiento colineal  $\delta$  es conocida, el trabajo se calcula mediante integración.



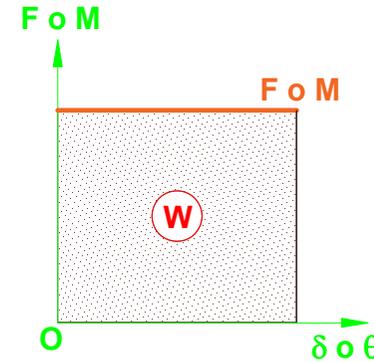
$$W = \int_0^{\delta} F d\delta \dots (3)$$

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta \dots (4)$$



$$W = \frac{1}{2} F\delta \dots (5)$$

$$W = \frac{1}{2} M\theta \dots (6)$$



$$W = F\delta \dots (7)$$

$$W = M\theta \dots (8)$$

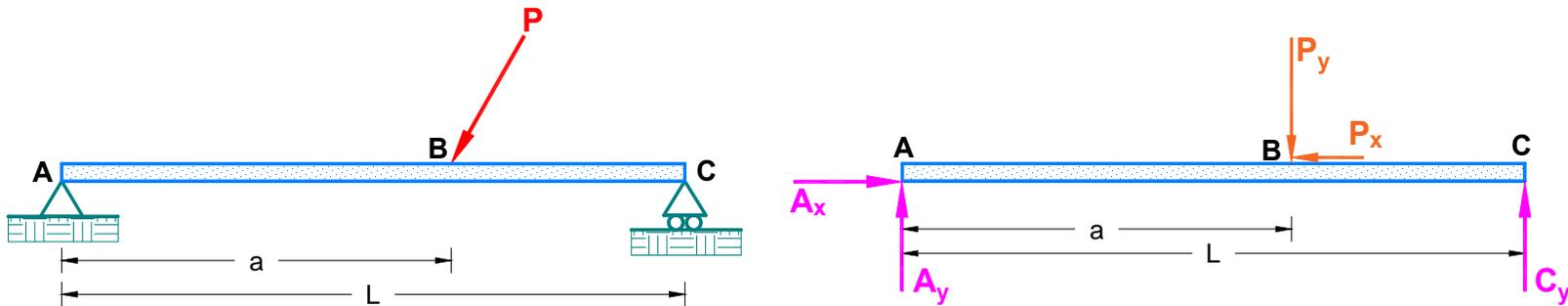
### 3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual, proporciona una herramienta de análisis poderosa para múltiples problemas de mecánica estructural. En esta sección estudiaremos dos de sus formulaciones, llamados **principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos** y **principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables**. Esta última se aplica en el siguiente apartado para desarrollar el método del trabajo virtual, el cual se considera uno de los métodos más generales para determinar las deflexiones en las estructuras.

#### 3.1 Principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos

El principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos se puede establecer como sigue:

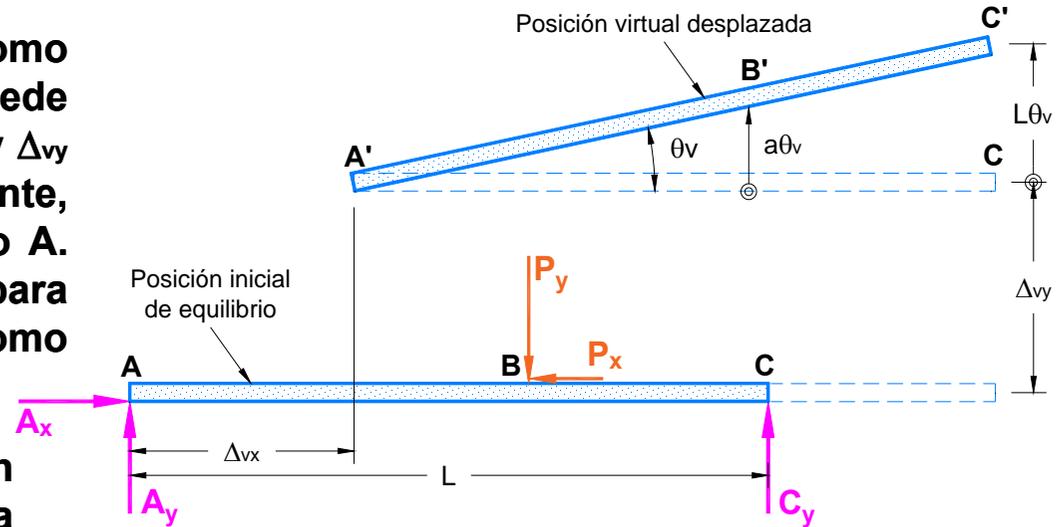
Si un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y si está sujeto a un pequeño desplazamiento virtual como cuerpo rígido, el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas es cero.



El término virtual simplemente significa imaginario, no real.

El desplazamiento virtual como cuerpo rígido de la viga se puede descomponer en translación  $\Delta_{vx}$  y  $\Delta_{vy}$  en dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente, y rotación  $\theta_v$  alrededor del punto A. Note que el subíndice  $v$  sirve para identificar los desplazamientos como cantidades virtuales.

Como la viga se somete a un desplazamiento virtual de la posición ABC a la posición A'B'C', las fuerzas actuantes en ella realizan un trabajo denominado trabajo virtual. El total del trabajo virtual,  $W_{ve}$ , desarrollado por las fuerzas externas actuantes en la viga, puede expresarse como la suma del trabajo virtual  $W_{vx}$  y  $W_{vy}$  realizado durante la translación en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, y el trabajo virtual  $W_{vr}$ , hecho durante la rotación; es decir:



$$W_{ve} = \underbrace{W_{vx}}_{W_{vx} = A_x \Delta_{vx} - P_x \Delta_{vx}} + \underbrace{W_{vy}}_{W_{vy} = A_y \Delta_{vy} - P_y \Delta_{vy} + C_y \Delta_{vy}} + \underbrace{W_{vr}}_{W_{vr} = -P_y (a\theta_v) + C_y (L\theta_v)}$$

$$W_{ve} = \underbrace{(A_x - P_x)}_{\sum F_x} \Delta_{vx} + \underbrace{(A_y - P_y + C_y)}_{\sum F_y} \Delta_{vy} + \underbrace{(-aP_y + LC_y)}_{\sum M_A} \theta_v$$

$$W_{ve} = (\sum F_x) \Delta_{vx} + (\sum F_y) \Delta_{vy} + (\sum M_A) \theta_v$$

Debido a que la viga se encuentra en equilibrio:

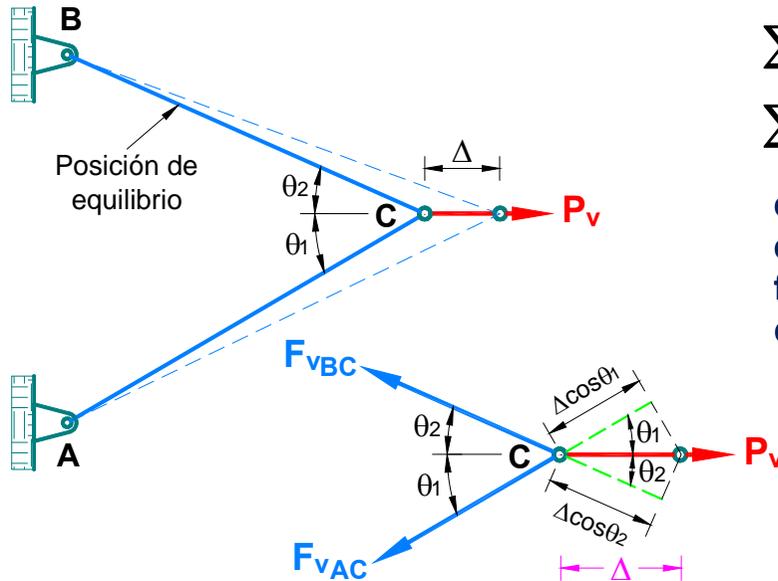
$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_A = 0$$

⇒  $W_{ve} = 0$

**Expresión matemática del principio del desplazamiento virtual para cuerpos rígidos.**

### 3.2 Principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables

Si una estructura deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas virtuales (o pares de fuerzas) y si está sujeta a una pequeña deformación consistente con el apoyo y condiciones de continuidad de la estructura, entonces el trabajo virtual externo realizado por las fuerzas virtuales externas (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos externos virtuales (y rotaciones) es igual al trabajo virtual interno realizado por las fuerzas internas virtuales (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos internos reales (y rotaciones).



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_v - F_{vAC} \cos \theta_1 - F_{vBC} \cos \theta_2 = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{vAC} \text{sen} \theta_1 + F_{vBC} \text{sen} \theta_2 = 0 \dots (2)$$

el total del trabajo virtual para la armadura ( $W_v$ ) es igual a la suma algebraica del trabajo de las fuerzas virtuales que actúan en el nodo C, es decir:

$$W_v = P_v \Delta - F_{vAC} (\Delta \cos \theta_1) - F_{vBC} (\Delta \cos \theta_2)$$

$$W_v = \underbrace{(P_v - F_{vAC} \cos \theta_1 - F_{vBC} \cos \theta_2)}_{\sum F_x = P_v - F_{vAC} \cos \theta_1 - F_{vBC} \cos \theta_2 = 0} \Delta$$

$$\Rightarrow W_v = 0$$

Así, la ecuación (1) se puede expresar como:

$$P_v = F_{vAC} \cos \theta_1 + F_{vBC} \cos \theta_2 \dots (3)$$

En la presente definición, el término virtual se asocia a las fuerzas para indicar que el sistema de fuerzas es arbitrario y que no depende de la acción que causa la verdadera deformación.

$$P_v = F_{vAC} \cos \theta_1 + F_{vBC} \cos \theta_2 \dots (3)$$



$$W_{ve} = W_{vi} \dots (4)$$

**Expresión matemática del principio de las fuerzas virtuales para cuerpos deformables.**

Donde:

$P_v$  : representa el trabajo externo virtual ( $W_{ve}$ ) realizado por la fuerza virtual externa,  $P_v$ , que actúa por el desplazamiento real externo,  $\Delta$ .

$\Delta \cos \theta_1$  y  $\Delta \cos \theta_2$  : representa el trabajo virtual interno ( $W_{vi}$ ) desarrollado por las fuerzas virtuales internas que actúan por los desplazamientos reales internos.

Tenga presente que el principio de fuerzas virtuales tal como se describe aquí es aplicable independientemente de la causa de las deformaciones verdaderas, es decir, deformaciones causadas por las cargas, los cambios de temperatura o cualquier otro efecto que pueda ser determinado por la aplicación del principio. Sin embargo, las deformaciones deben ser lo suficientemente pequeñas para que las fuerzas virtuales permanezcan constantes en magnitud y dirección mientras se desarrolla el trabajo virtual. Además, y aunque la aplicación del principio de fuerzas virtuales en este texto se limita a estructuras elásticas, el principio es válido independientemente de si la estructura es elástica o no.

El método del trabajo virtual se sustenta en el principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables, como se acaba de demostrar, la cual puede ser reescrita como:

Trabajo virtual externo = Trabajo virtual interno

o

$$\sum \left( \begin{array}{l} \text{Fuerzas externas virtuales} \times \\ \text{desplazamientos externos reales} \end{array} \right) = \sum \left( \begin{array}{l} \text{Fuerzas internas virtuales} \times \\ \text{desplazamientos internos reales} \end{array} \right) \dots (5)$$

el método del trabajo virtual emplea dos sistemas separados: **el sistema de fuerzas virtuales y el sistema de cargas reales** (u otros efectos), **que causan la deformación a determinar.**

Para establecer la deflexión (o pendiente) en cualquier punto de una estructura, se selecciona un sistema de fuerzas virtuales para que la deflexión deseada (o rotación) sea la única incógnita en la ecuación (5).

## 4. DEFLEXIONES EN ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

### 4.1 Debido a cargas externas

El trabajo virtual realizado por la carga unitaria virtual que nos lleva a la deflexión real  $\Delta$  es igual a:

$$W_{ve} = 1(\Delta)$$

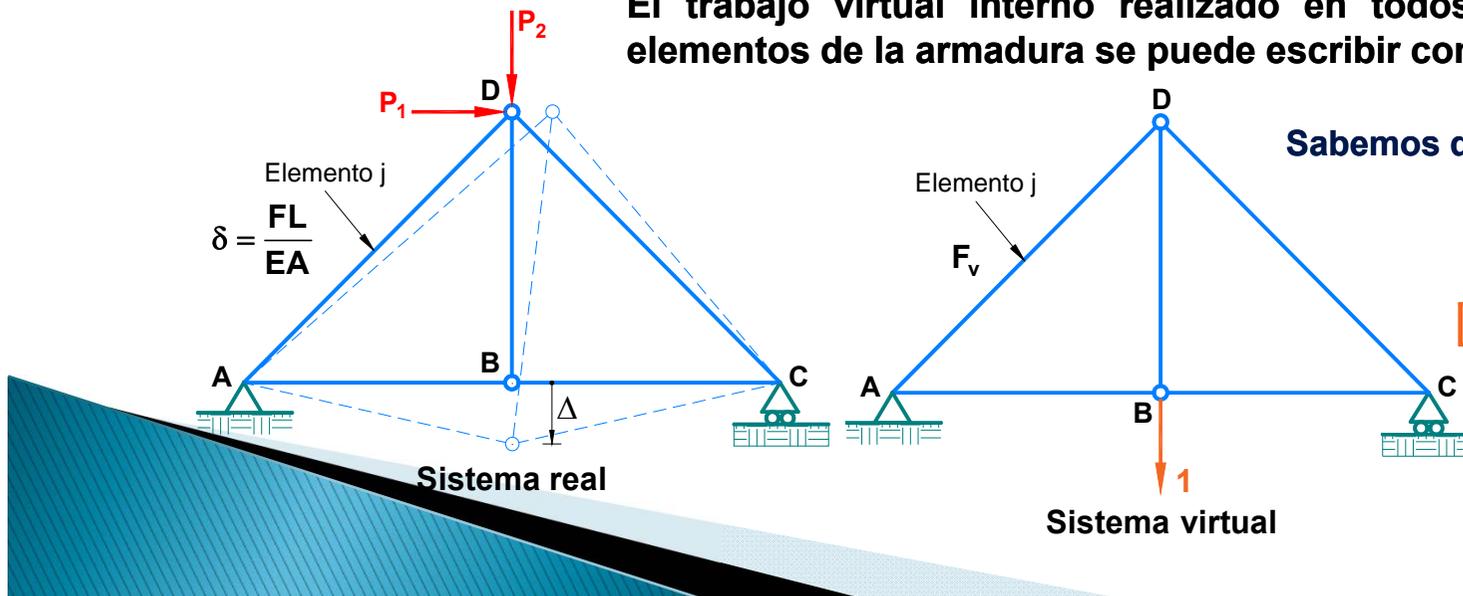
El trabajo virtual interno realizado en todos los elementos de la armadura se puede escribir como:

$$W_{vi} = \sum F_v(\delta)$$

Sabemos que:  $W_{ve} = W_{vi}$

$$\Rightarrow 1(\Delta) = \sum F_v(\delta)$$

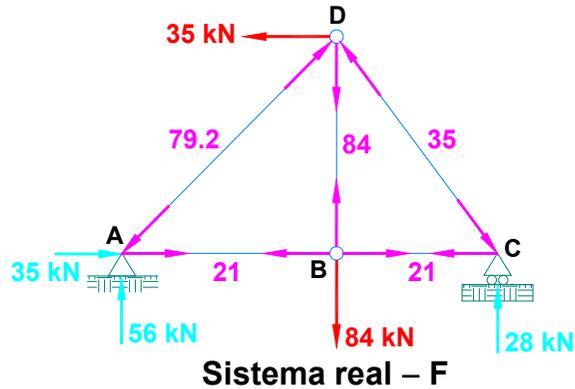
$$1(\Delta) = \sum F_v \left( \frac{FL}{EA} \right)$$



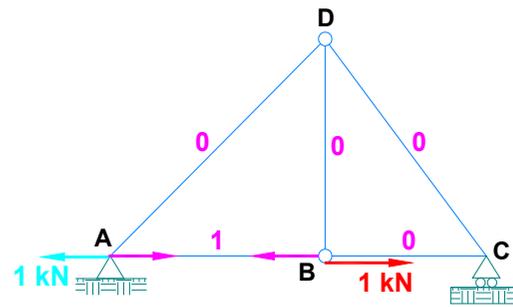
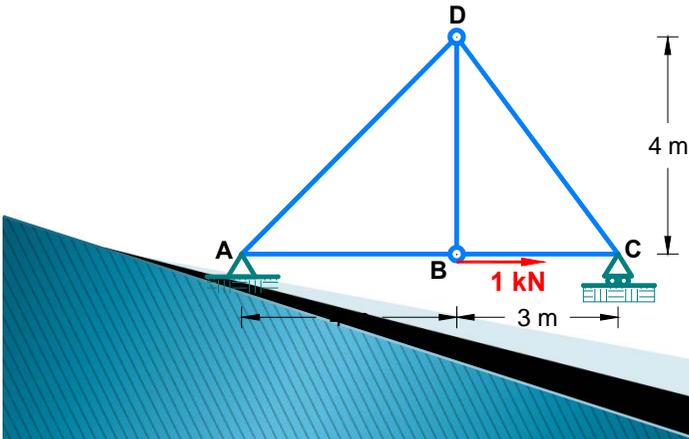
**Ejemplo:** Determine la componente horizontal y la vertical de la deflexión en el nudo B de la armadura. Considerar EA constante,  $E = 200 \text{ GPa}$  y  $A = 1200 \text{ mm}^2$ .

**Solución.**

👉 **Calculamos las fuerzas internas (F) de cada elemento:**

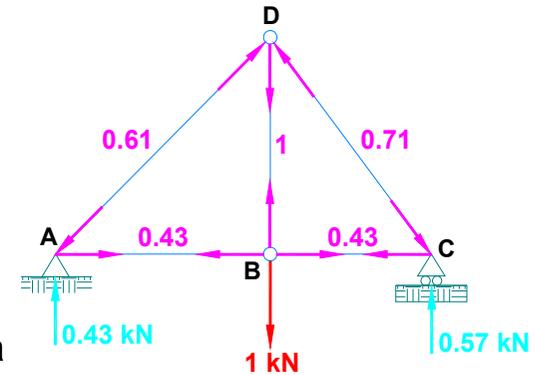
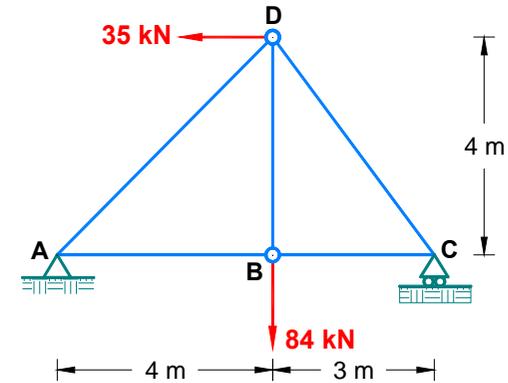
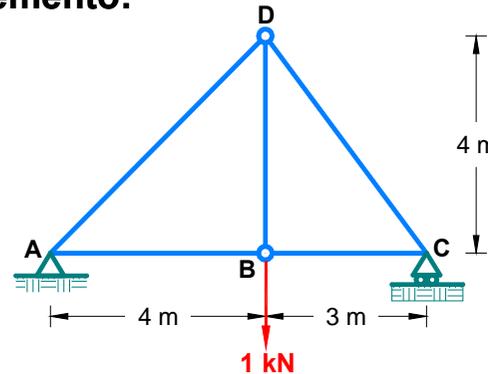


👉 **Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^h$ ) de cada elemento:**



**Sistema virtual para determinar  $(\Delta_B^h)(F_v^h)$**

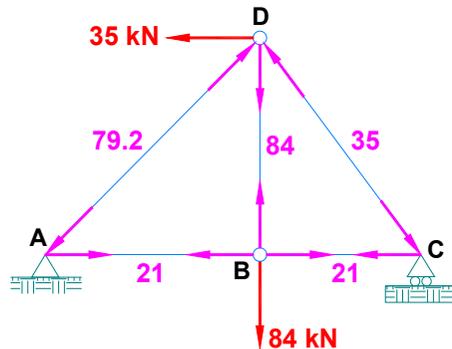
👉 **Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^v$ ) de cada elemento:**



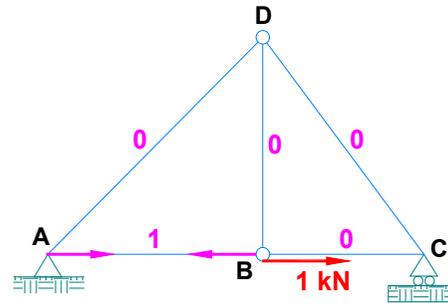
**Sistema virtual para determinar  $(\Delta_B^v)(F_v^v)$**

👉 Calculamos la deflexión en el nudo B:

| Elemento | F<br>(kN) | $F_v^h$<br>(kN) | $F_v^v$<br>(kN) | L<br>(m) | E<br>(kN/m <sup>2</sup> ) | A<br>(m <sup>2</sup> ) | $F_v^h \left( \frac{FL}{EA} \right)$<br>(kN.m) | $F_v^v \left( \frac{FL}{EA} \right)$<br>(kN.m) |
|----------|-----------|-----------------|-----------------|----------|---------------------------|------------------------|--|--|
| AB       | 21        | 1               | 0.43            | 4.00     | $200 \times 10^6$         | 0.0012                 | 0.00035  | 0.00015  |
| BC       | 21        | 0               | 0.43            | 3.00     | $200 \times 10^6$         | 0.0012                 | 0.00000  | 0.00011  |
| AD       | -79.2     | 0               | -0.61           | 5.66     | $200 \times 10^6$         | 0.0012                 | 0.00000  | 0.00114  |
| BD       | 84        | 0               | 1.00            | 4.00     | $200 \times 10^6$         | 0.0012                 | 0.00000  | 0.00140  |
| CD       | -35       | 0               | -0.71           | 5.00     | $200 \times 10^6$         | 0.0012                 | 0.00000  | 0.00052  |
|          |           |                 |                 |          |                           | $\Sigma$               | 0.00035  | 0.00332  |



Sistema real – F

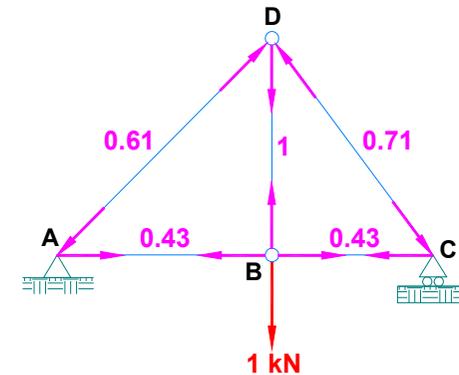


Sistema virtual para determinar

$$(\Delta_B^h)(F_v^h)$$

$$\Rightarrow (1\text{kN})(\Delta_B^h) = 0.00035\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\therefore \Delta_B^h = 0.35\text{mm}$$



Sistema virtual para determinar

$$(\Delta_B^v)(F_v^v)$$

$$\Rightarrow (1\text{kN})(\Delta_B^v) = 0.00332\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\therefore \Delta_B^v = 3.32\text{mm}$$

## 4.2 Debido a cambios de temperatura y errores de fabricación

Al variar la temperatura de un elemento, su longitud también cambia. Un incremento de temperatura causa la expansión de un elemento, en tanto que una disminución térmica genera una contracción. En cualquier caso, el cambio de longitud  $\delta$  se expresa como:

$$\delta = \alpha(\Delta T)L$$

Donde:

$\alpha$  : Coeficiente de dilatación térmica.                      L : Longitud del elemento.

$\Delta T$  : Cambio de temperatura.

Si las barras de una armadura cambian de longitud simultáneamente debido a carga, cambio de temperatura y errores de fabricación, entonces la deformación del elemento ( $\Delta$ ) es igual a la suma de los diferentes efectos, es decir:

$$\Delta = \frac{FL}{EA} + \alpha(\Delta T)L + \Delta L_{\text{fabricación}}$$

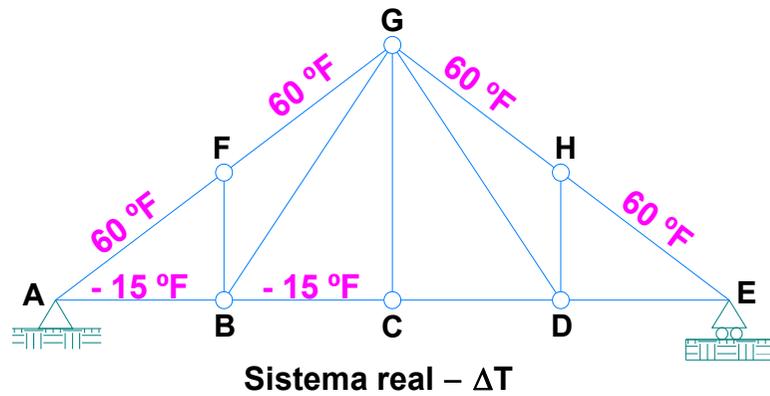
La forma general del trabajo virtual para armaduras es:

$$\Rightarrow 1(\Delta) = \sum F_v \left[ \frac{FL}{EA} + \alpha(\Delta T)L + \Delta L_{\text{fabricación}} \right]$$

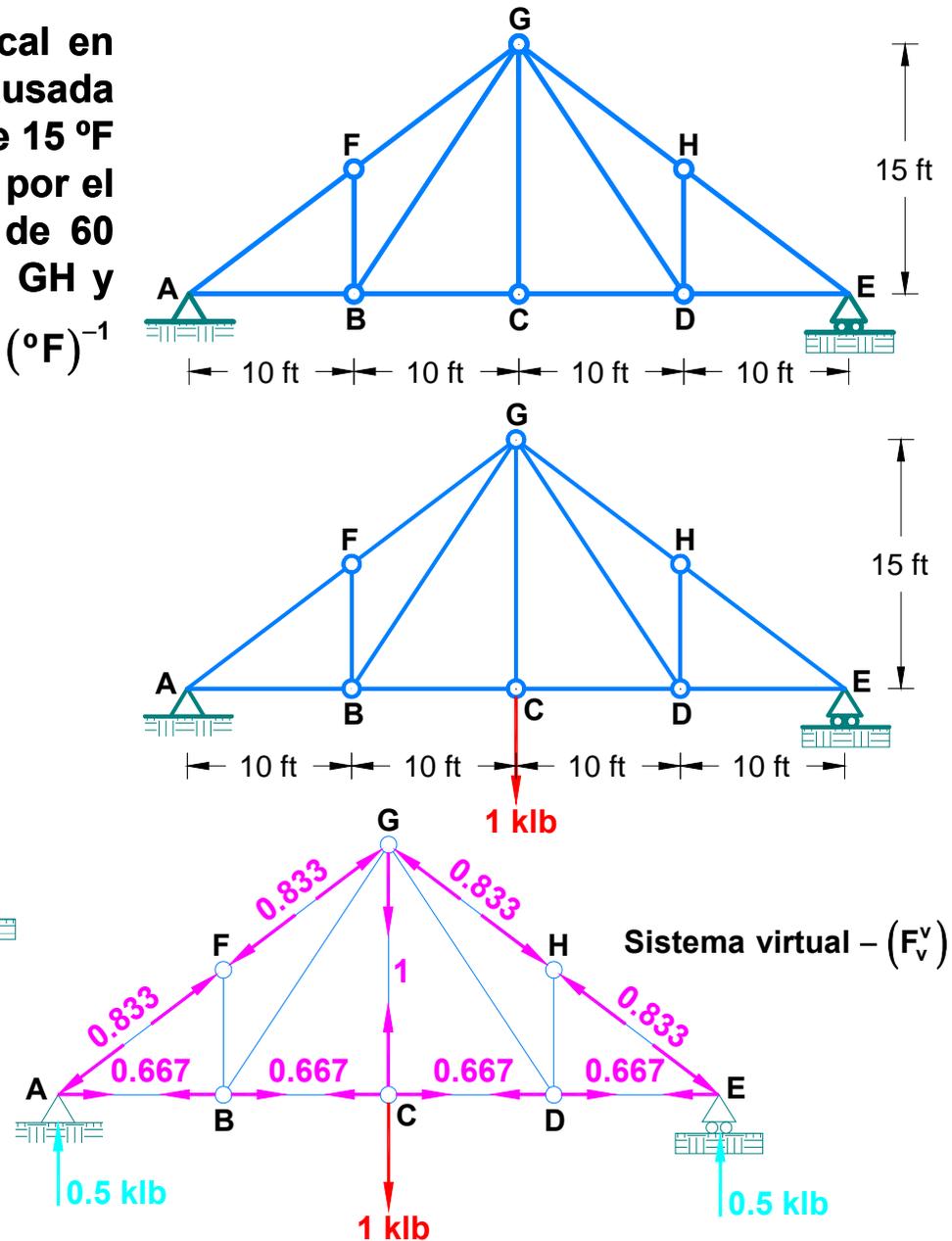
**Ejemplo:** Determine la deflexión vertical en el nudo C de la armadura, causada por la baja de temperatura de 15 °F en los elementos AB y BC y por el incremento de temperatura de 60 °F en los elementos AF, FG, GH y EH. Considerar:  $\alpha = 6.5 \times 10^{-6} (\text{°F})^{-1}$

**Solución.**

Colocamos los elementos que se encuentran sometidos a cambio de temperatura:



Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^v$ ) de cada elemento:



👉 **Calculamos la deflexión en el nudo C:**

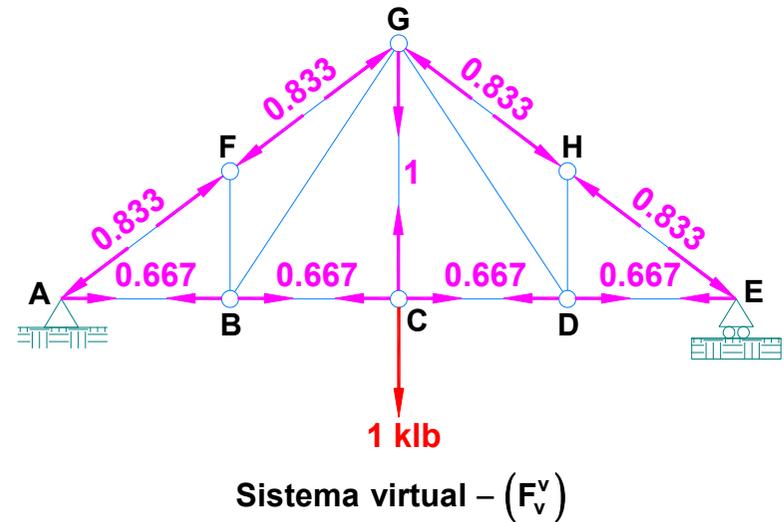
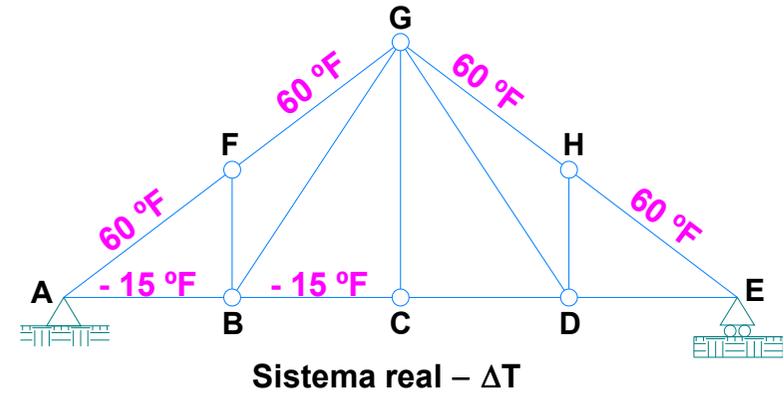
| Elemento | $\Delta T$<br>(°F) | $F_v^v$<br>(klb) | L<br>(ft) | $\alpha$<br>(°F) <sup>-1</sup> | $F_v^v(\Delta T \alpha L)$<br>(klb.ft) |
|----------|--------------------|------------------|-----------|--------------------------------|--|
| AB       | -15                | 0.667            | 10.0      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00065                               |
| BC       | -15                | 0.667            | 10.0      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00065                               |
| AF       | 60                 | -0.833           | 12.5      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00406                               |
| FG       | 60                 | -0.833           | 12.5      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00406                               |
| GH       | 60                 | -0.833           | 12.5      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00406                               |
| EH       | 60                 | -0.833           | 12.5      | $6.5 \times 10^{-6}$           | -0.00406                               |
|          |                    |                  |           | $\Sigma$                       | -0.01754                               |

$$\Rightarrow (1 \text{ klb})(\Delta_C^v) = -0.01754 \text{ klb} \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_C^v = -0.01754 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}}$$

$$\Delta_C^v = -0.21048 \text{ in}$$

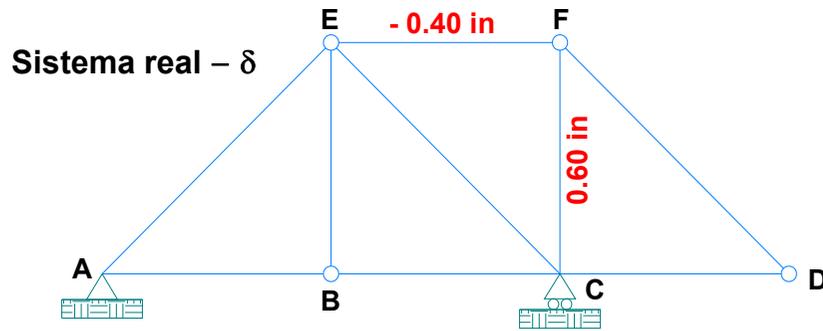
$$\therefore \Delta_C^v = 0.211 \text{ in } (\uparrow)$$



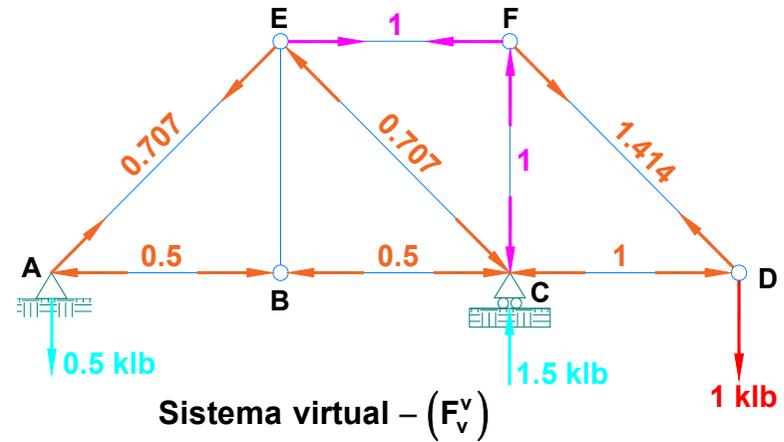
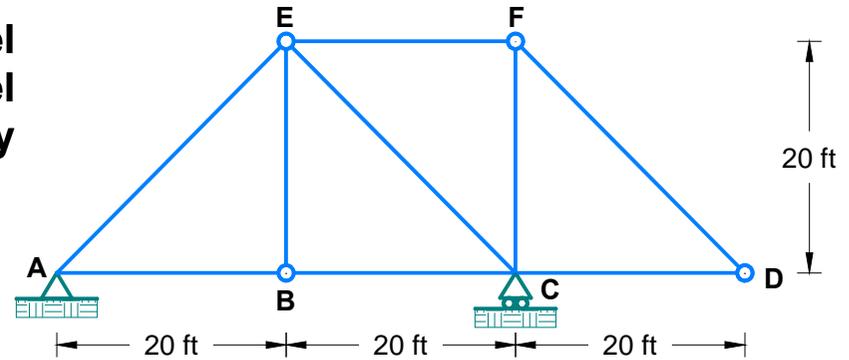
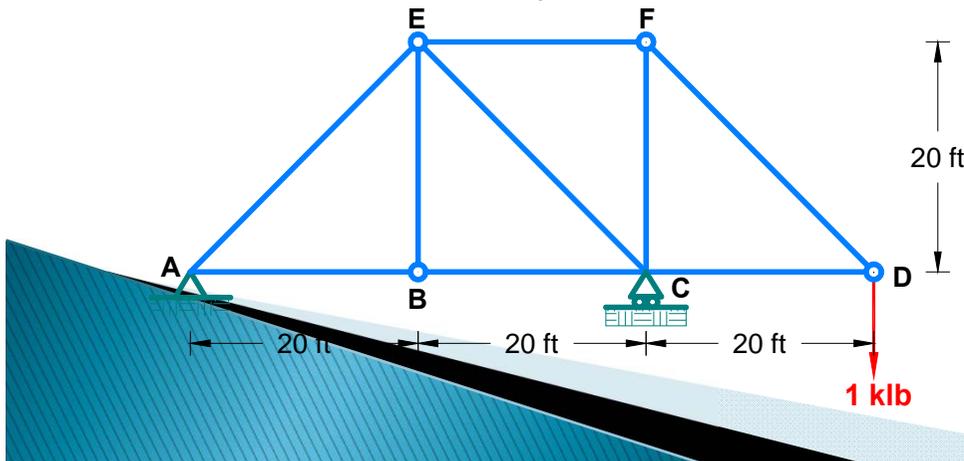
**Ejemplo:** Determine la deflexión vertical en el nudo D de la armadura, si el elemento CF es 0.60 in más largo y el elemento EF es 0.40 in más corto.

**Solución.**

Colocamos los elementos que presentan errores de fabricación:



Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^v$ ) de cada elemento:



Calculamos la deflexión en el nudo D:

| Elemento | $\delta$<br>(in) | $F_v^v$<br>(klb) | $F_v^v(\delta)$<br>(klb.in) |
|----------|------------------|------------------|-----------------------------|
| CF       | 0.60             | -1.00            | -0.60                       |
| EF       | -0.40            | 1.00             | -0.40                       |
|          |                  | $\Sigma$         | -1.00                       |

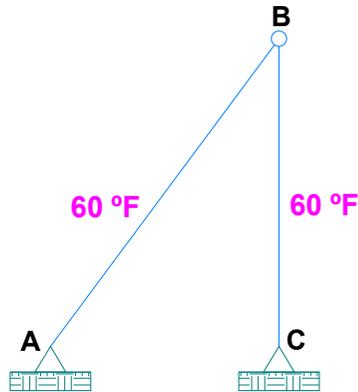
$$\Rightarrow (1\text{klb})(\Delta_D^v) = -1.0 \text{ klb} \cdot \text{in} \quad \therefore \Delta_D^v = 1.0 \text{ in } (\uparrow)$$

**Ejemplo:** Determine el desplazamiento horizontal en el nudo B de la armadura, debido al incremento de temperatura de 60 °F y a los siguientes errores de fabricación: el elemento BC se fabricó 0.8 in más corto y el elemento AB se fabricó 0.2 in más larga. Considerar:

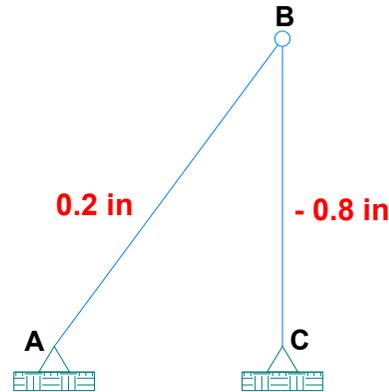
**Solución.**

$$\alpha = 6.5 \times 10^{-6} (\text{°F})^{-1}$$

Colocamos los elementos que se encuentran sometidos a cambio de temperatura, errores de fabricación.

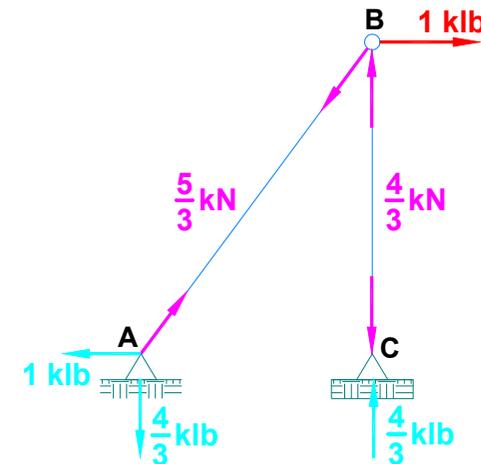
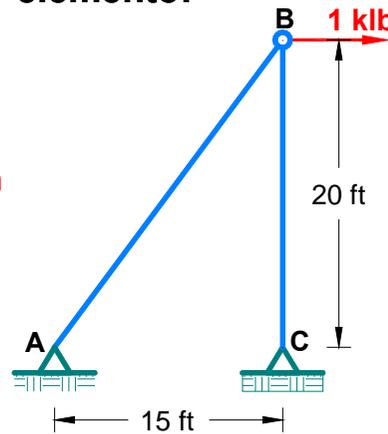


Sistema real –  $\Delta T$



Sistema real –  $\delta$

Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^h$ ) de cada elemento:



Sistema virtual – ( $F_v^h$ )

$$\Rightarrow (1\text{klb})(\Delta_B^h) = F_v^h(\alpha\Delta TL) + F_v^h(\delta)$$

$$(1\text{klb})(\Delta_B^h) = (0.07 + 1.40) \text{klb} \cdot \text{in}$$

$$\therefore \Delta_B^h = 1.47 \text{ in } (\rightarrow)$$

Calculamos el desplazamiento en el nudo B:

| Elemento | $\Delta T$<br>(°F) | L<br>(in) | $\alpha$<br>(°F) <sup>-1</sup> | $F_v^h$<br>(in) | $F_v^h(\Delta T \alpha L)$<br>(klb.in) | $\delta$<br>(in) | $F_v^h(\delta)$<br>(klb.in) |
|----------|--------------------|-----------|--------------------------------|-----------------|--|------------------|-----------------------------|
| AB       | 60                 | 300       | $6.5 \times 10^{-6}$           | 1.67            | 0.20                                   | 0.20             | 0.33                        |
| BC       | 60                 | 240       | $6.5 \times 10^{-6}$           | -1.33           | -0.12                                  | -0.80            | 1.07                        |
|          |                    |           |                                | $\Sigma$        | 0.07                                   |                  | 1.40                        |

### 4.3 Cálculo de los desplazamientos generados por asentamientos en los apoyos

Las estructuras cimentadas en suelos compresibles (arcillas blandas o arena suelta, por ejemplo) frecuentemente experimentan asentamientos importantes. Estos asentamientos generan rotación en los elementos y desplazamiento de los nudos.

Si una estructura es determinada, no se generan esfuerzos internos por el movimiento de un apoyo puesto que la estructura tiene la posibilidad de ajustarse a la nueva posición de los apoyos. Por otro lado, los asentamientos diferenciales de los apoyos inducen fuerzas internas grandes en estructuras indeterminadas. La magnitud de estas fuerzas es una función de la rigidez del elemento.

El trabajo virtual proporciona un método sencillo para evaluar los desplazamientos y las rotaciones producidas por movimientos de los apoyos. Con objeto de calcular un desplazamiento debido al movimiento en un apoyo, se aplica una carga virtual en el punto y en la dirección del desplazamiento deseado. La carga virtual y sus reacciones constituyen el sistema  $W_{vi}$ . Al someterse la estructura a los movimientos específicos del apoyo, se realiza trabajo externo tanto para la carga virtual como por sus reacciones al desplazarse. Puesto que un movimiento del apoyo no genera distorsión interna de los elementos estructurales si la estructura es determinada, la energía virtual de deformación es cero.



$$W_{vi} = \sum F_v(\delta) = 0$$

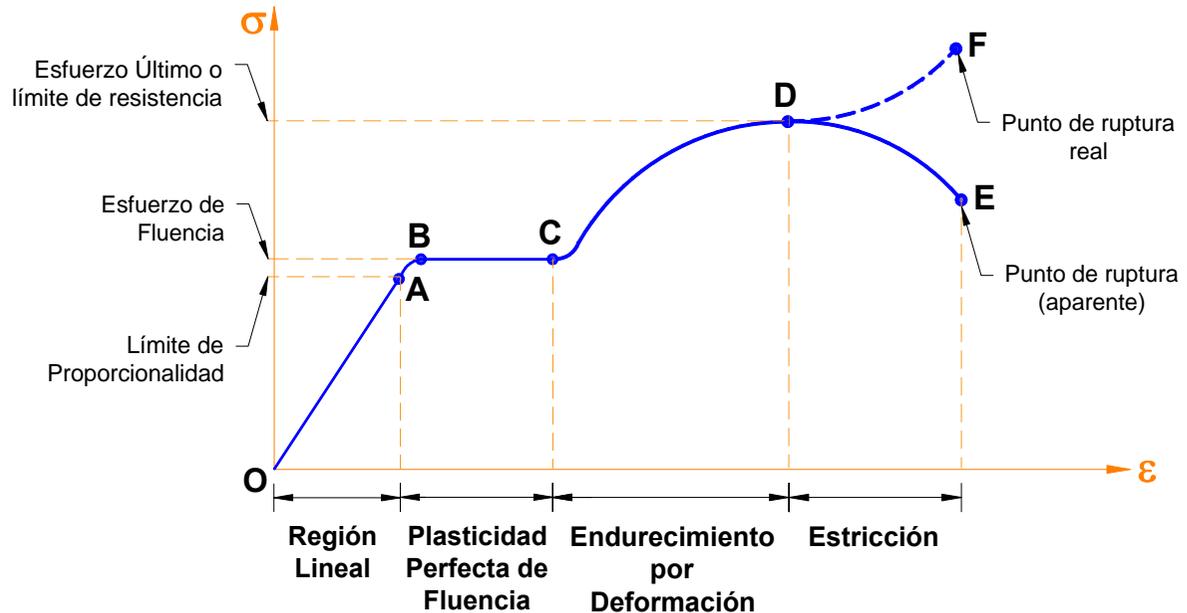
## Comportamiento Inelástico:

La expresión  $\sum F_v \left( \frac{FL}{EA} \right)$ , se basa en la hipótesis que todos los elementos se comportan elásticamente, esto es, que el nivel de esfuerzo no excede el límite proporcional  $\sigma_{PL}$  del material.

Para ampliar el concepto de trabajo virtual a armaduras que contengan barras esforzadas más allá del límite proporcional en la región inelástica, se debe tener el diagrama de esfuerzo – deformación unitaria del material.

Para determinar la deformación axial de un elemento, se calcula el esfuerzo en el elemento y con éste se halla la deformación unitaria, a partir de la cual se calcula el cambio de longitud  $\Delta L$  utilizando la relación básica:

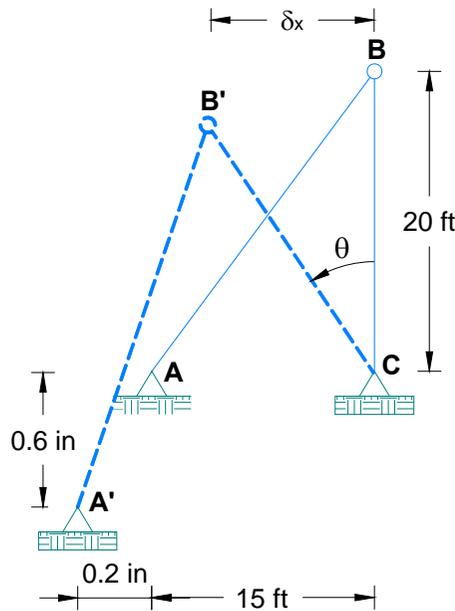
$$\Delta L = \varepsilon L$$



**Ejemplo:** Si el apoyo A de la armadura se asienta 0.6 in y se mueve hacia la izquierda 0.2 in, determinar el desplazamiento horizontal del nudo B y la rotación  $\theta$  de la barra BC.

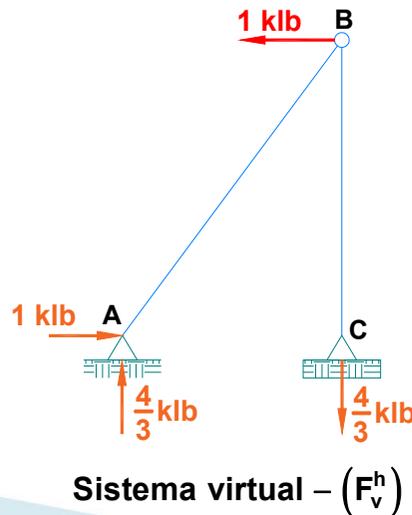
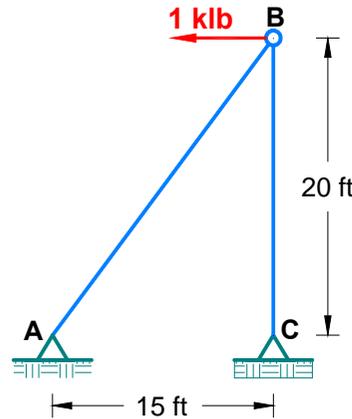
**Solución.**

Representamos la configuración de la deformada:

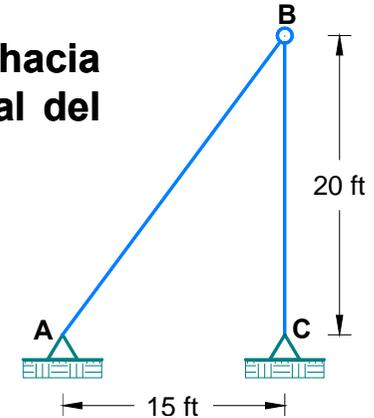


Configuración de la deformada

Calculamos el desplazamiento horizontal en el nudo B:



Sistema virtual - ( $F_v^h$ )



Como no se generan fuerzas internas ( $F$ ) en los elementos por efecto del movimiento, entonces:

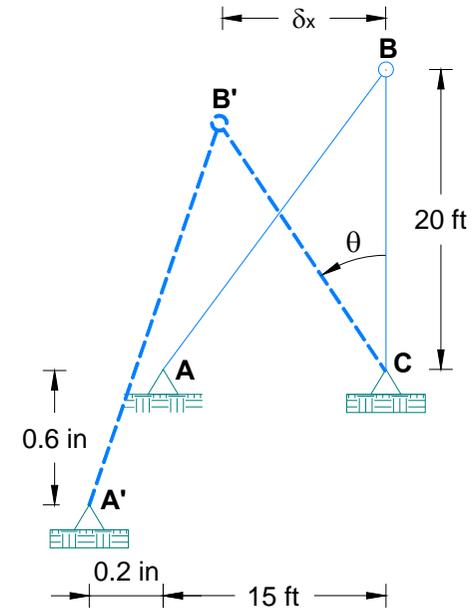
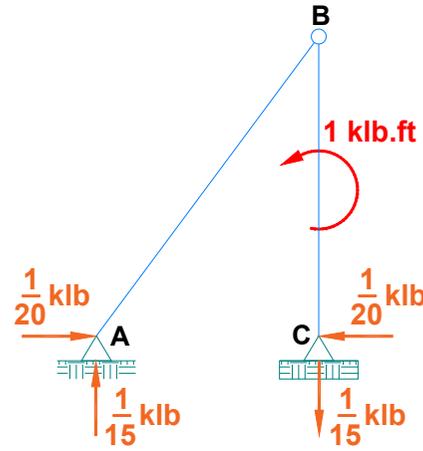
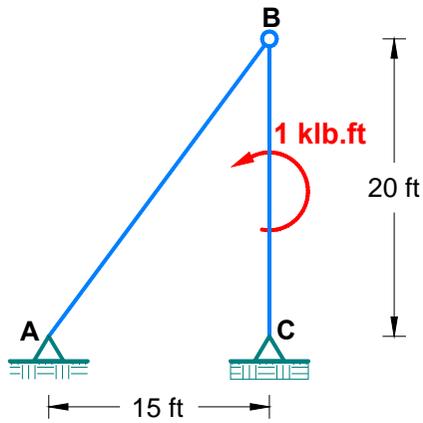
$$\sum F_v(\delta) = 0$$

$$\underbrace{(1\text{klb})}_{F_v^h} \underbrace{(\delta_x)}_{\delta_B^h} + \underbrace{(-1\text{klb})}_{F_v^{Ah}} \underbrace{(0.2\text{in})}_{\delta_A^h} + \underbrace{\left(-\frac{4}{3}\text{klb}\right)}_{F_v^{Av}} \underbrace{(0.6\text{in})}_{\delta_A^v} = 0$$

$$\delta_x = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ in} \quad \therefore \delta_B^h = 1.0 \text{ in} (\leftarrow)$$

Calculamos la rotación de la barra BC:

Para calcular la rotación del elemento BC, se aplica un momento virtual de 1 klb.ft al elemento BC en cualquier lugar entre sus extremos y se calculan las reacciones en sus apoyos.



El trabajo virtual generado por un momento unitario  $M$ , utilizado como carga virtual es igual a  $M_v \cdot \theta$ :  $\sum [F_v(\delta) + M_v(\theta)] = 0$

$$\underbrace{\left(1 \text{ klb} \cdot \text{ft} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}}\right)}_{M_v} (\theta) + \underbrace{\left(-\frac{1}{20} \text{ klb}\right)}_{F_v^{Ah}} (\underbrace{0.2 \text{ in}}_{\delta_h^A}) + \underbrace{\left(-\frac{1}{15} \text{ klb}\right)}_{F_v^{Av}} (\underbrace{0.6 \text{ in}}_{\delta_v^A}) = 0$$

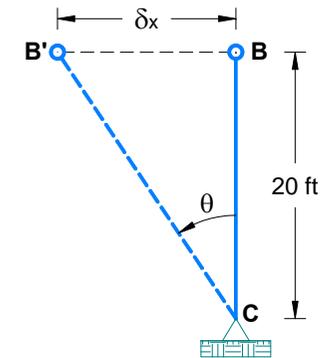
$$\Rightarrow 12\theta_{BC} = 0.01 + 0.04 = 0.05$$

$$\therefore \theta_{BC} = 0.00417 \text{ rad}$$

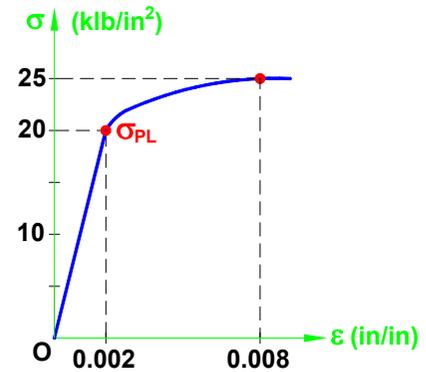
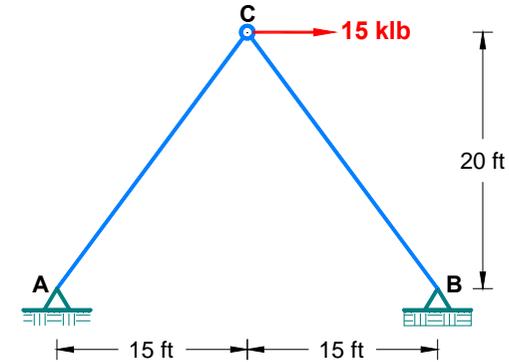
👉 Otra forma de calcular la rotación de la barra BC:

$$\Rightarrow \theta_{BC} = \frac{\delta_x}{20} = \frac{1 \text{ in} \times \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}\right)}{20 \text{ ft}}$$

$$\therefore \theta_{BC} = 0.00417 \text{ rad}$$



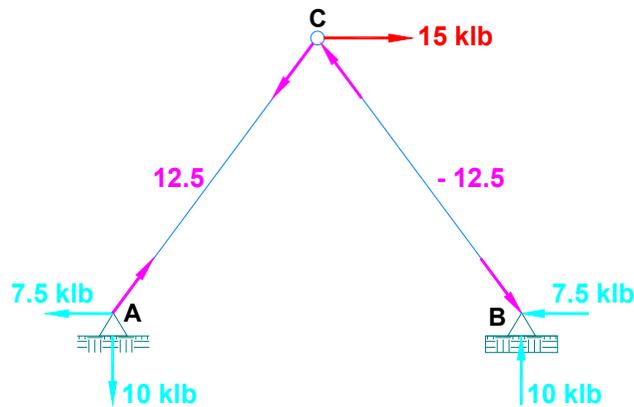
**Ejemplo:** Calcular el desplazamiento vertical  $\delta_y$  del nudo C para la armadura mostrada. Las barras de la armadura se fabrican con una aleación de aluminio cuyo diagrama esfuerzo – deformación unitaria se muestra y es válido para tensión y compresión uniaxiales. El límite proporcional, que se presenta para un esfuerzo de 20 ksi, sirve para distinguir el comportamiento elástico e inelástico. En la región elástica  $E = 10000$  ksi. Considerar:



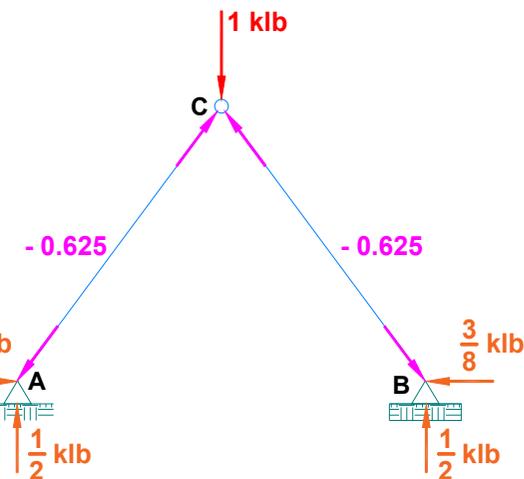
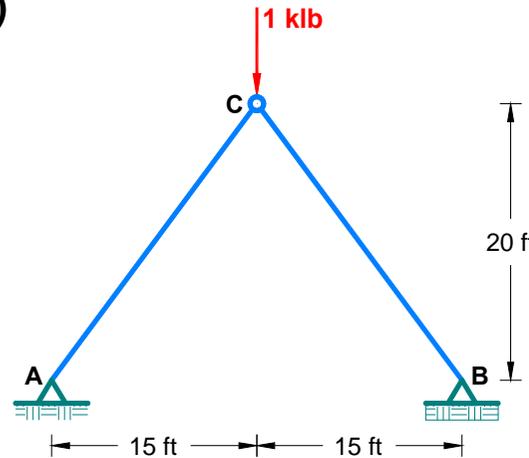
**Solución.**

$A_{AC} = 1 \text{ in}^2$        $A_{BC} = 0.5 \text{ in}^2$

Calculamos las fuerzas internas (F) de cada elemento:



Sistema real – F



Sistema virtual para determinar  $(\delta_C^v)(F_v^v)$

Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas ( $F_v^v$ ) de cada elemento:



👉 Analizamos si las barras se comportan elásticamente o se encuentran en la región inelástica, calcularemos primero el esfuerzo axial y lo compararemos con el esfuerzo del límite proporcional:

**Barra AC:**

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{12.5}{1} = 12.5 \frac{\text{klb}}{\text{in}^2} \leq \sigma_{PL} = 20 \frac{\text{klb}}{\text{in}^2} \quad \therefore \left( \begin{array}{l} \text{Se encuentra en} \\ \text{el rango elástico} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \delta_{AC} = \frac{F_{AC} L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}} = \frac{12.5 \left( 25 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \right)}{10000 (1)} \quad \therefore \delta_{AC} = 0.375 \text{ in}$$

**Barra BC:**

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{12.5}{0.5} = 25 \frac{\text{klb}}{\text{in}^2} > \sigma_{PL} = 20 \frac{\text{klb}}{\text{in}^2} \quad \therefore \left( \begin{array}{l} \text{Se encuentra en} \\ \text{la región inelástica} \end{array} \right)$$

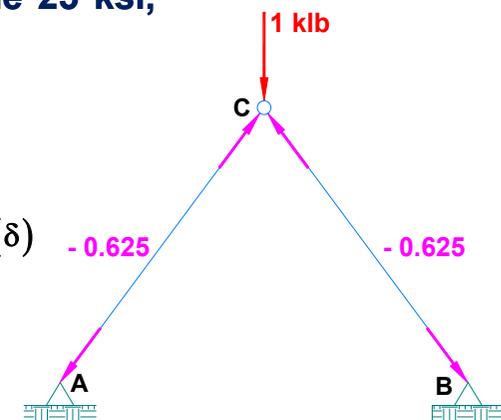
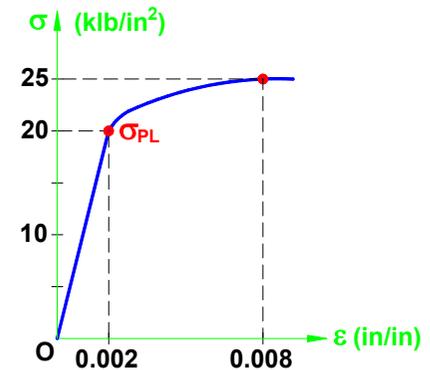
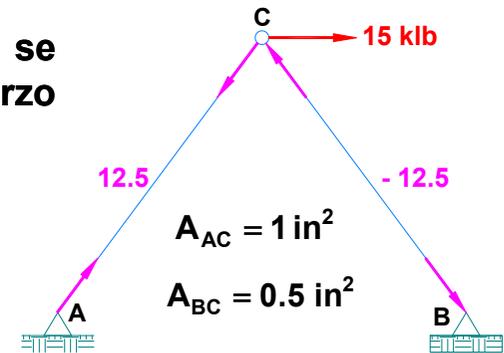
Entonces para calcular  $\delta_{BC}$ , debemos obtener  $\varepsilon$  para un esfuerzo de 25 ksi, siendo igual a  $\varepsilon = 0.008$

$$\Rightarrow \delta_{BC} = \varepsilon_{BC} L_{BC} = (-0.008) \left( 25 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \right) \quad \therefore \delta_{BC} = -2.4 \text{ in}$$

👉 Calculamos el desplazamiento vertical en el nudo C:  $(1 \text{ klb})(\delta_C^v) = \sum F_v^h(\delta)$

$$\Rightarrow (1 \text{ klb})(\delta_C^v) = \underbrace{(-0.625 \text{ klb})}_{F_{AC}^v} \underbrace{(0.375 \text{ in})}_{\delta_{AC}} + \underbrace{(-0.625 \text{ klb})}_{F_{BC}^v} \underbrace{(-2.4 \text{ in})}_{\delta_{BC}} = 1.27 \text{ in}$$

$$\therefore \delta_C^v = 2.4 \text{ in } (\downarrow)$$

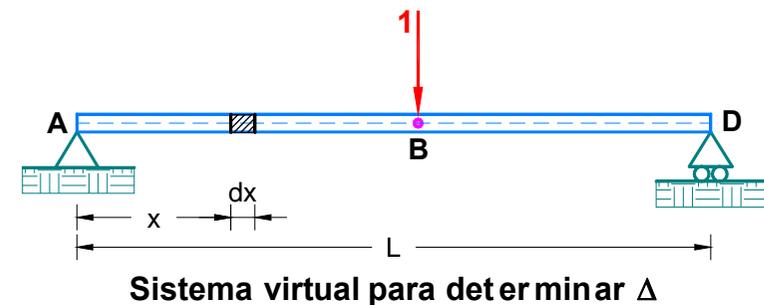
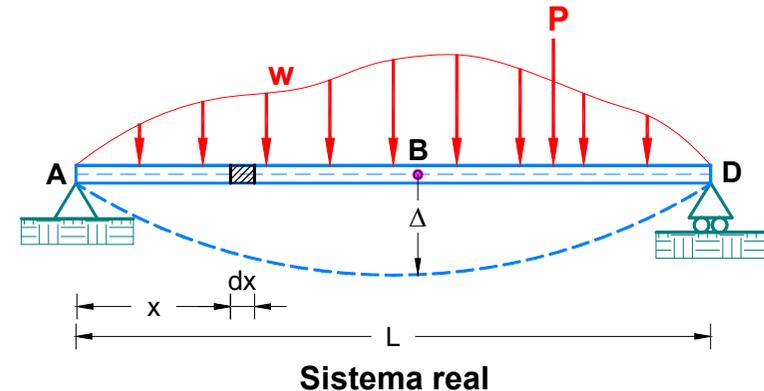


## 5. DEFLEXIONES DE VIGAS Y MARCOS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Para desarrollar la expresión del trabajo virtual para determinar las deflexiones en las vigas y marcos, vamos a considerar una viga sujeta a una carga arbitraria, tal como se muestra en el sistema real.

### a. Determinación de la deflexión vertical $\Delta$ , en el nudo B.

Para ello vamos a seleccionar un sistema virtual que consista de una carga unitaria que actúe en el punto y en la dirección de la deflexión deseada.

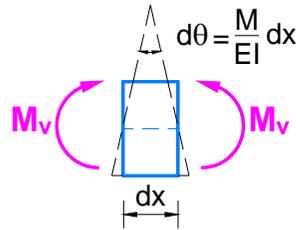


Ahora, si sujetamos la viga con la carga virtual unitaria que actúa en ella a las deformaciones debidas a las cargas reales, el trabajo virtual realizado por la carga virtual unitaria nos lleva a la deflexión  $\Delta$  que es:  $W_{ve} = 1(\Delta)$

Para obtener el trabajo virtual interno, enfocaremos nuestra atención en un elemento diferencial  $dx$  de la viga, localizado a una distancia  $x$  a lado derecho del apoyo A.

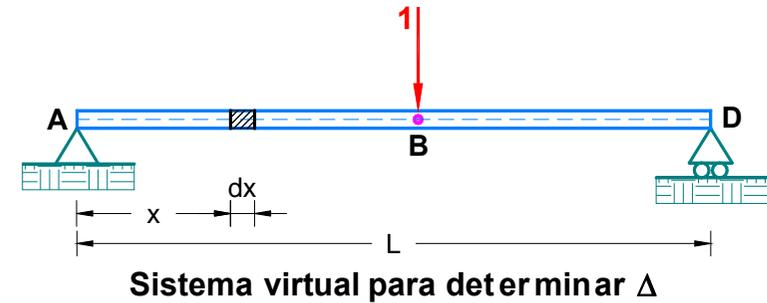
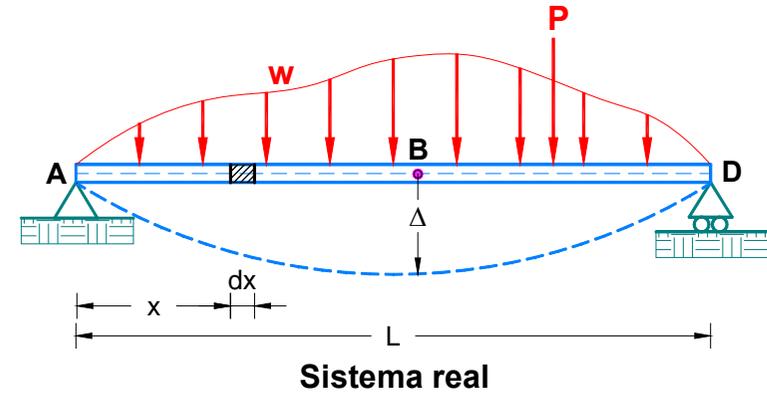
Dado que la viga con la carga virtual está sujeta a la deformación con la carga real, el momento interno flexionante virtual  $M_v$ , que actúa en el elemento  $dx$  realiza un trabajo interno virtual que nos lleva a la rotación real  $d\theta$ , como se muestra a continuación:

Así, el trabajo interno virtual realizado en el elemento  $dx$ , está dado por:



$$dW_{vi} = M_v (d\theta)$$

$$\Rightarrow dW_{vi} = M_v \underbrace{\left( \frac{M}{EI} dx \right)}_{d\theta} \Rightarrow W_{vi} = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$



Sabemos que:  $W_{vi} = W_{ve}$

$$1(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

**Expresión para el método del trabajo virtual para deflexiones en vigas y marcos**

Si se tiene en cuenta los efectos de la flexión, de la fuerza cortante, de la fuerza normal y de la torsión, la deflexión vertical sería:

$$1(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx + \int_0^L k \frac{V_v V}{GA} dx + \int_0^L \frac{F_v F}{EA} dx + \int_0^L \frac{T_v T}{GJ} dx$$

Donde:

**k**: Factor de forma de la sección transversal

$$1(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx + \int_0^L k \frac{V_v V}{GA} dx + \int_0^L \frac{F_v F}{EA} dx + \int_0^L \frac{T_v T}{GJ} dx$$

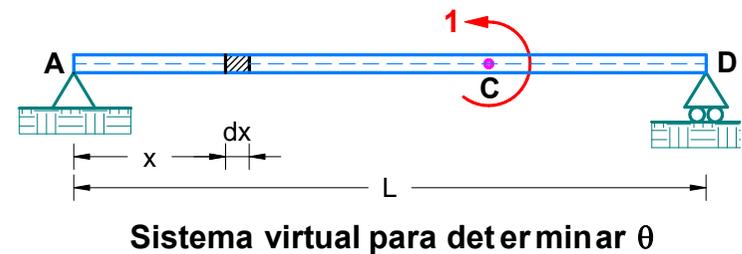
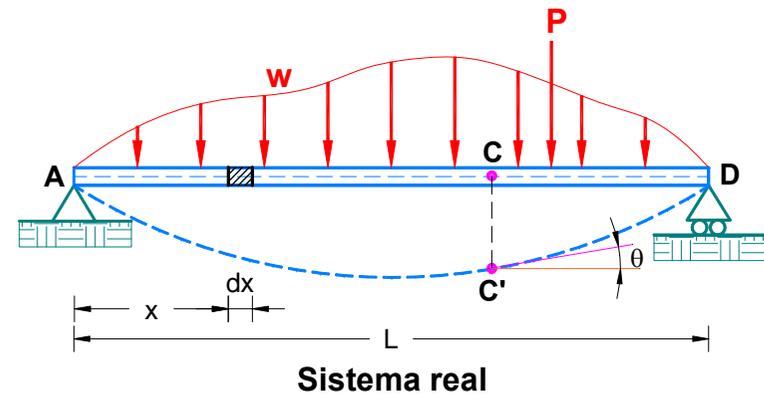
**k = 1.2** Secciones rectangulares      **k =  $\frac{10}{9}$**  Secciones circulares      **k = 1** Vigas I

**b. Determinación de la pendiente  $\theta$ , en el nudo C.**

Para ello vamos a seleccionar un sistema virtual que consista en un par unitario actuante en el punto, tal como se muestra a continuación.

Cuando la viga con el par unitario virtual está sujeta a la deformación causada por las cargas reales, el trabajo externo virtual realizado por el par unitario virtual se somete a una rotación real  $\theta$ , es:  **$W_{ve} = 1(\theta)$**

La expresión para el trabajo interno virtual permanece igual a  $W_{vi} = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$ , excepto que  **$M_v$**  ahora indica el momento de flexión debido al par unitario virtual.

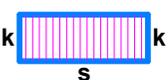
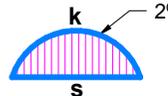
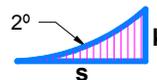
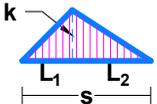
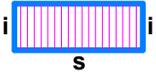
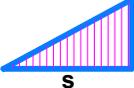
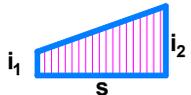
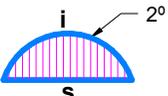
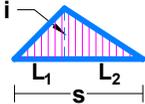
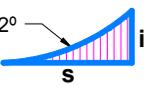


Estableciendo que:  $W_{vi} = W_{ve}$

$$1(\theta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

**Expresión para el método del trabajo virtual para la pendiente en vigas y marcos**

## 5.1 Integrales de Mohr: Si la estructura consiste en segmentos con EI constante.

| $\int (M_i)(M_k) ds$  |  |  |        |  |  |        |
|---|---|---|---|---|---|---|
|    | $sik$   | $\frac{1}{2}sik$  | $\frac{1}{2}si(k_1 + k_2)$  | $\frac{2}{3}sik$  | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{2}sik$  |
|    | $\frac{1}{2}sik$  | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{6}si(k_1 + 2k_2)$   | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{4}sik$  | $\frac{1}{6}(s + L_1)ik$  |
|    | $\frac{1}{2}sik$  | $\frac{1}{6}sik$  | $\frac{1}{6}si(2k_1 + k_2)$   | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{12}sik$   | $\frac{1}{6}(s + L_2)ik$  |
|    | $\frac{1}{2}s(i_1 + i_2)k$  | $\frac{1}{6}s(i_1 + 2i_2)k$   | $\frac{1}{6}s \begin{pmatrix} 2i_1k_1 + i_1k_2 \\ + i_2k_1 + 2i_2k_2 \end{pmatrix}$       | $\frac{1}{3}s(i_1 + i_2)k$  | $\frac{1}{12}s(i_1 + 3i_2)k$  | $\frac{1}{6} \left[ \begin{matrix} (s + L_2)i_1 \\ + (s + L_1)i_2 \end{matrix} \right] k$ |
|    | $\frac{2}{3}sik$  | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{3}si(k_1 + k_2)$  | $\frac{8}{15}sik$   | $\frac{1}{5}sik$  | $\frac{1}{3} \left( s + \frac{L_1L_2}{s} \right) ik$                                      |
|  | $\frac{1}{2}sik$  | $\frac{1}{6}(s + L_1)ik$  | $\frac{1}{6} \left[ \begin{matrix} (s + L_2)k_1 \\ + (s + L_1)k_2 \end{matrix} \right] i$ | $\frac{1}{3} \left( s + \frac{L_1L_2}{s} \right) ik$                                | $\frac{1}{12} \left( s + L_1 + \frac{L_1^2}{s} \right) ik$                          | $\frac{1}{3}sik$  |
|  | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{4}sik$  | $\frac{1}{12}si(k_1 + 3k_2)$  | $\frac{1}{5}sik$  | $\frac{1}{5}sik$  | $\frac{1}{12} \left( s + L_1 + \frac{L_1^2}{s} \right) ik$                                |
|  | $\frac{1}{3}sik$  | $\frac{1}{12}sik$   | $\frac{1}{12}si(3k_1 + k_2)$  | $\frac{1}{5}sik$  | $\frac{1}{30}sik$   | $\frac{1}{12} \left( s + L_2 + \frac{L_2^2}{s} \right) ik$                                |

## 5.2 Método de Vereschaguin:

Para el caso de vigas y marcos, la integral de Mohr se puede calcular en forma aproximada por el método de Vereschaguin.

Para multiplicar dos diagramas  $M_i$  y  $M_k$ , siendo  $M_i$  un diagrama no lineal o lineal y  $M_k$  lineal, se utilizará la siguiente fórmula:

Donde:

$\text{Área}_{M_i}$  : área del diagrama  $M_i$ .

$\text{Área}_{M_k}$  : área del diagrama  $M_k$ .

$y_{M_k}^{C.G.(M_i)}$  : ordenada en el diagrama  $M_k$ , debajo del centro de gravedad del diagrama  $M_i$ .

$y_{M_i}^{C.G.(M_k)}$  : ordenada en el diagrama  $M_i$ , debajo del centro de gravedad del diagrama  $M_k$ .

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_i M_k}{EI} dx = \frac{\text{Área}_{M_i} \cdot y_{M_k}^{C.G.(M_i)}}{EI} = \frac{\text{Área}_{M_k} \cdot y_{M_i}^{C.G.(M_k)}}{EI}$$

Cuando se tiene varios tramos, se aplicará la sumatoria de cada uno de ellos.

Para aplicar el método de Vereschaguin se deberá tener en cuenta que:

- Los diagramas de momento flector deben ser divididos en tramos, de tal manera que por lo menos un diagrama sea lineal y la rigidez constante.
- La multiplicación de los diagramas será negativo, si ambos diagramas tienen signos opuestos o se encuentren en diferentes lados, respecto al eje de cálculo.

### 5.3 Método de Simpson - Kornoujov:

Para el caso de vigas y marcos, la integral de Mohr se puede calcular en forma aproximada por el método de Simpson . Kornoujov.

Se aplica para multiplicar dos diagramas  $M_i$  y  $M_k$ , siendo ambos curvos o uno curvo y el otro lineal variable, tal como se muestra.

De esta manera, la ecuación para determinar la deflexión o pendiente en un punto determinado, se calculará por medio de la fórmula:

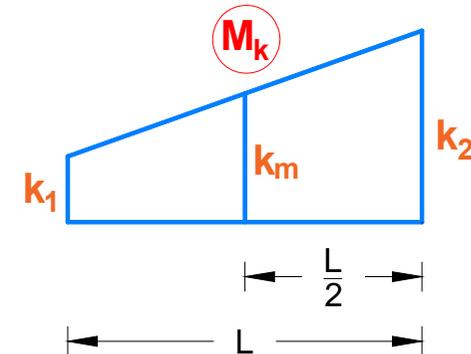
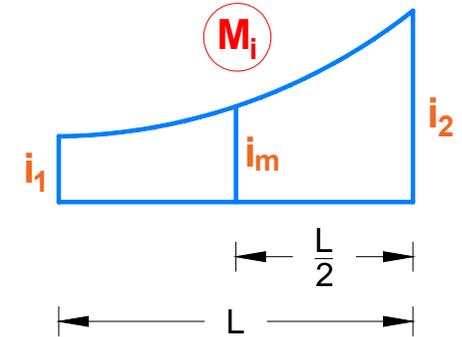
$$\Delta = \int_0^L \frac{M_i M_k}{EI} dx = \frac{L}{6EI} (i_1 k_1 + 4i_m k_m + i_2 k_2)$$

Donde:

$i_1$  y  $k_1$  : ordenadas en el lado izquierdo de los diagramas  $M_i$  y  $M_k$ .

$i_m$  y  $k_m$ : ordenadas en el centro de los diagramas  $M_i$  y  $M_k$ .

$i_2$  y  $k_2$  : ordenadas en el lado derecho de los diagramas  $M_i$  y  $M_k$ .

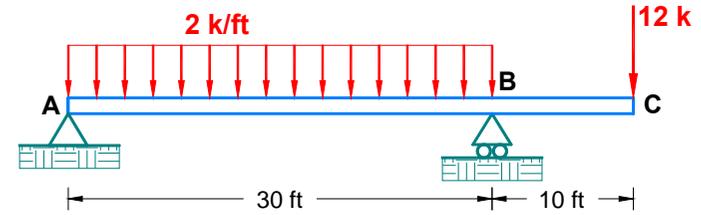


En la multiplicación de diagramas, se consideran los signos en las ordenadas de ambos diagramas, siendo positivo si están al mismo lado y negativo si están en sentidos opuestos, respecto al eje de la barra.

En caso se tengan varios tramos, se aplicará la sumatoria de dichos tramos, teniendo en cuenta que método será más sencillo y rápido de aplicación.

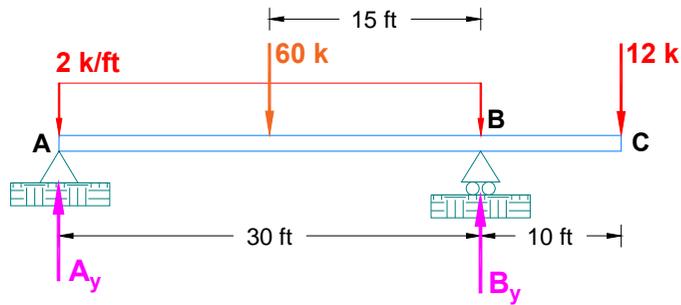
**Ejemplo:** Determine la deflexión en el punto C.  
 Considerar  $EI$  constante.

$E = 29000 \text{ ksi}$      $I = 2000 \text{ in}^4$



**Solución.**

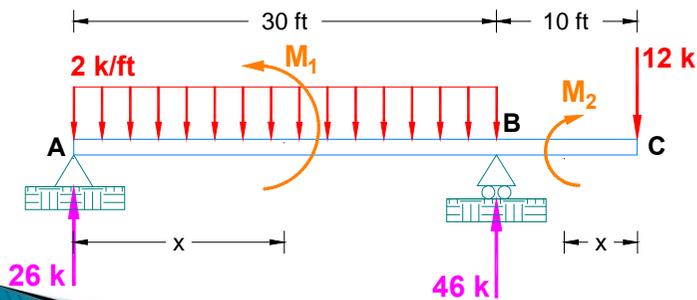
Realizamos el DCL de la viga, calculamos las reacciones en A y B:



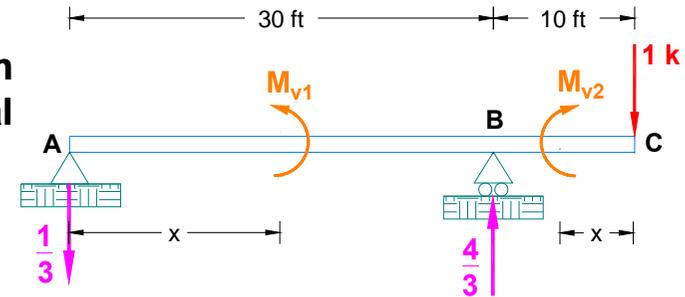
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -12(10) + 60(15) = (30)A_y$$

$$\therefore A_y = 26 \text{ k} \quad \therefore B_y = 46 \text{ k}$$

Analizamos la viga real por tramos:



Analizamos la viga con carga virtual por tramos:



Calculamos los momentos en cada tramo, en la viga real y en la viga con la carga virtual:

**Tramo AB:  $0 \leq x \leq 30 \text{ ft}$**

$$M_1 = 26x - x^2$$

$$M_{v1} = -\frac{x}{3}$$

**Tramo CB:  $0 \leq x \leq 10 \text{ ft}$**

$$M_2 = -12x$$

$$M_{v2} = -x$$

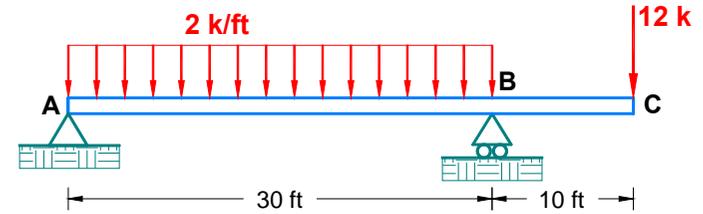
Calculamos la deflexión en C:

$$1(\Delta_c) = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{30} (26x - x^2) \left( -\frac{x}{3} \right) dx + \int_0^{10} (-12x)(-x) dx \right]$$

$$\Delta_c = -\frac{6500 \text{ k} \cdot \text{ft}^3}{EI} = -\frac{6500(12^3)}{29000(2000)} = -0.194 \text{ in} \quad \therefore \Delta_c = 0.194 \text{ in } (\uparrow)$$

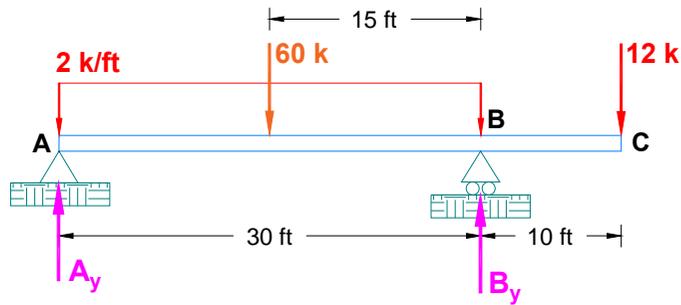
**Ejemplo:** Determine la deflexión en el punto C.  
 Considerar El constante.

$E = 29000 \text{ ksi}$      $I = 2000 \text{ in}^4$



**Solución.**

Realizamos el DCL de la viga  
 calculamos las reacciones en A y B:



$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow -12(10) + 60(15) = (30)A_y \\ \therefore A_y &= 26 \text{ k} \quad \therefore B_y = 46 \text{ k} \end{aligned}$$

$$\sum M_{x=13\text{ft}} = 26(13) - (2 \times 13) \left( \frac{13}{2} \right) = 169$$

$$\therefore M_{x=13\text{ft}} = 169 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

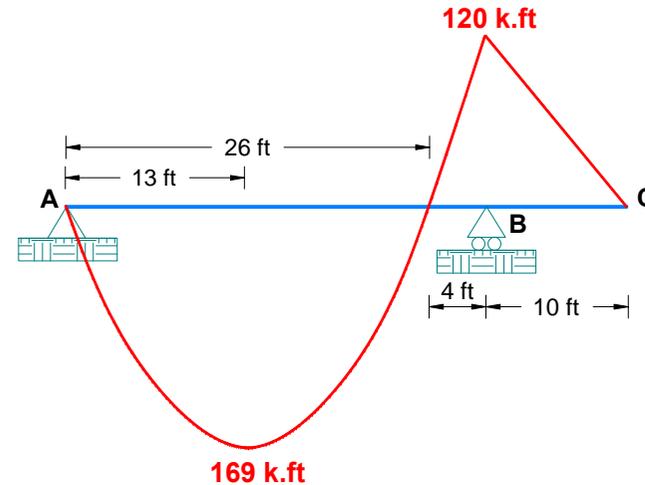
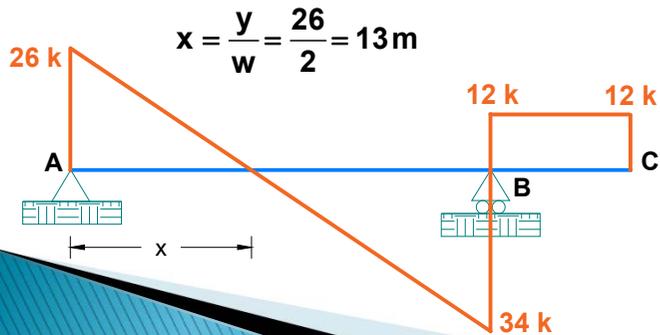
$$\sum M_B = -12(10) = -120$$

$$\therefore M_B = -120 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

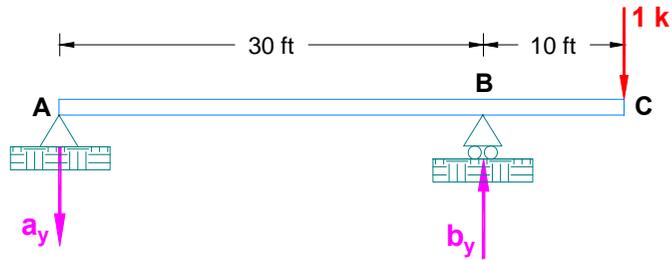
$$\sum M_x = 26(x) - (2x) \left( \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\therefore x_1 = 0 \quad \therefore x_2 = 26 \text{ ft}$$

Realizamos el DMF de la viga con cargas reales:



👉 Analizamos la viga con carga virtual unitaria y realizamos el DMF:



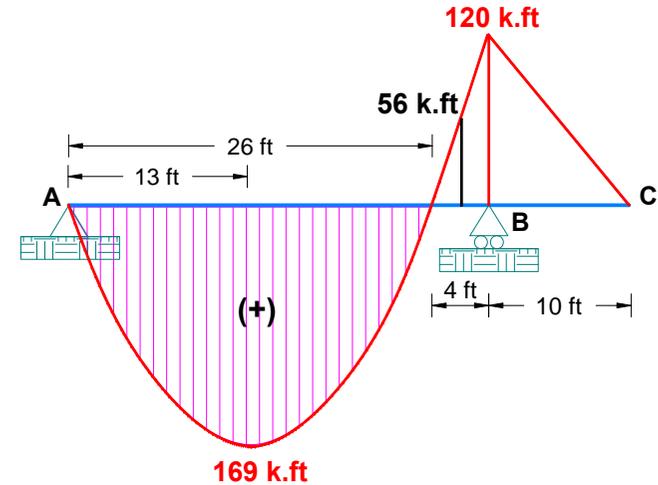
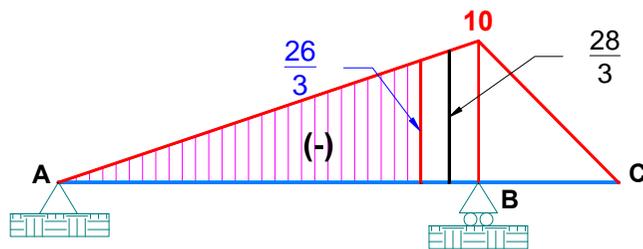
$$+ \sum M_b = 0 \Rightarrow -1(10) + a_y(30) = 0$$

$$\therefore a_y = \frac{1}{3} \quad \therefore b_y = \frac{4}{3}$$

Graficamos el DMF:

$$+ \sum M_B = -1(10) \quad \therefore M_B = -10$$

$$+ \sum M_B = -\frac{1}{3}(30) \quad \therefore M_B = -10$$



👉 Calculamos la deflexión en C:

Integrales de Mohr

$$\int M_i M_k ds = \frac{1}{3} s i k$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} (26)(169) \left( \frac{26}{3} \right) \right] = -\frac{114244}{9EI}$$

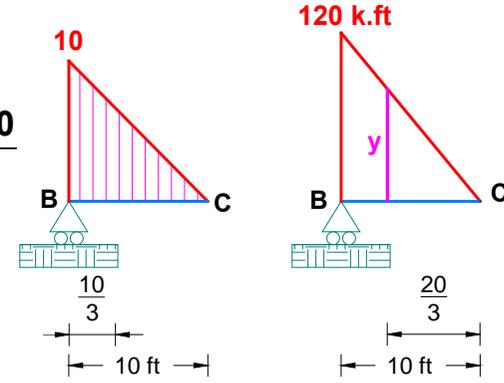
Simpson - Kornoujov

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_i M_k}{EI} dx = \frac{L}{6EI} (i_1 k_1 + 4i_m k_m + i_2 k_2)$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{4}{6EI} \left[ (0) \left( \frac{26}{3} \right) + 4(56) \left( \frac{28}{3} \right) + (120)(10) \right] = \frac{19744}{9EI}$$

**Método de Vereschaguin**

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_i M_k}{EI} dx = \frac{\text{Área}_{M_i} \cdot y_{M_k}^{C.G.(M_i)}}{EI} \Rightarrow \delta_3 = \frac{1}{EI} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(10)(10)}_{\text{Área}_{M_i} = \frac{1}{2}bh} \right] \left( \underbrace{\frac{2}{3}}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h} \right) (120) = \frac{4000}{EI}$$



**Finalmente, tenemos:**

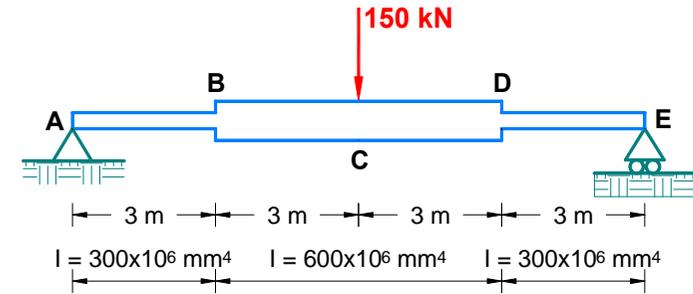
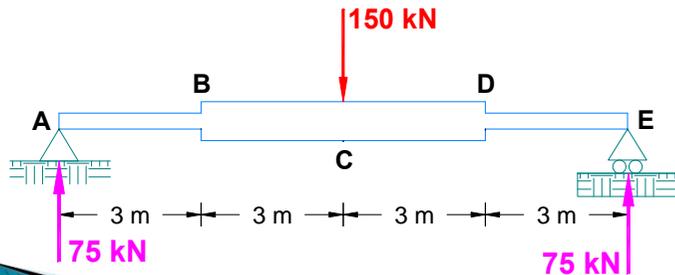
$$\Delta_C = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\frac{114244}{9EI} + \frac{19744}{9EI} + \frac{4000}{EI} = -\frac{6500}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_C = -\frac{6500(12^3)}{29000(2000)} = -0.194 \text{ in} \quad \therefore \Delta_C = 0.194 \text{ in } (\uparrow)$$

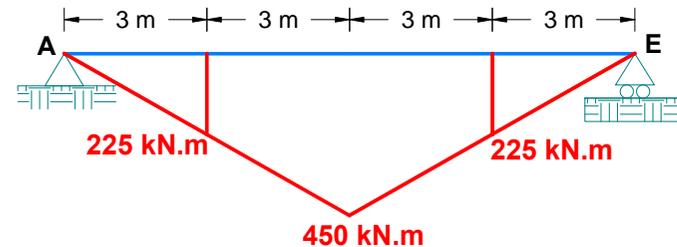
**Ejemplo:** Determine la deflexión en el punto D.  
 Considerar E = 200 GPa.

**Solución.**

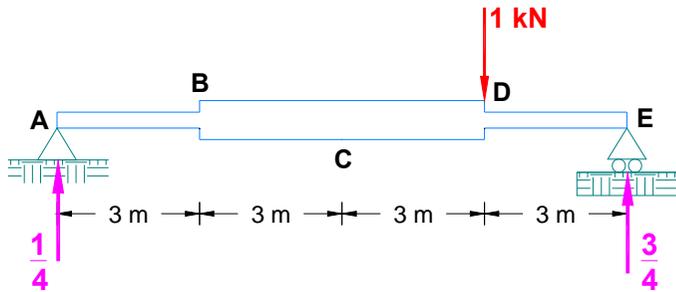
Realizamos el DCL de la viga calculamos las reacciones en A y E:



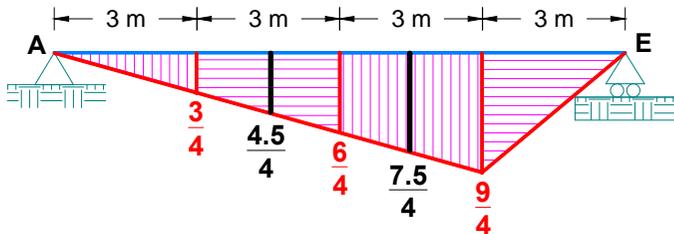
Realizamos el DMF de la viga con cargas reales:



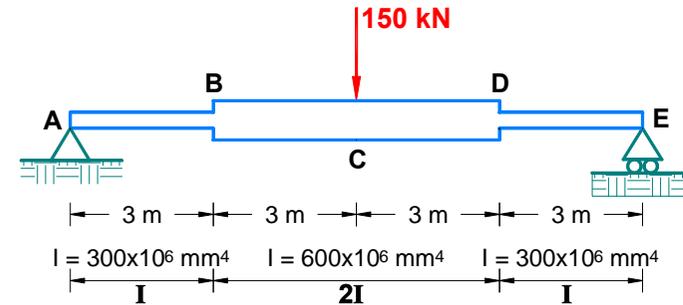
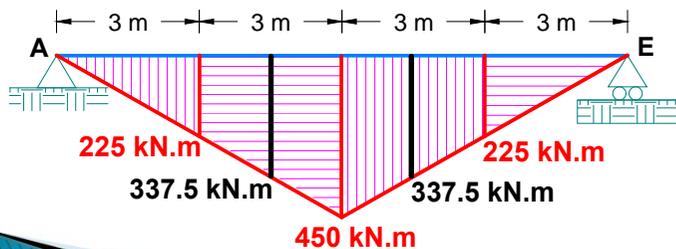
👉 Analizamos la viga con carga virtual unitaria y realizamos el DMF:



Graficamos el DMF:



👉 Calculamos la deflexión en D:



$$\Delta_D = \frac{1}{EI} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Área}_{M_i} = \frac{1}{2}bh} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h} (225) \right] + \frac{1}{EI} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(3)\left(\frac{9}{4}\right)}_{\text{Área}_{M_i} = \frac{1}{2}bh} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h} (225) \right]$$

$$+ \frac{3}{6(2EI)} \left[ \left(\frac{3}{4}\right)(225) + 4\left(\frac{4.5}{4}\right)(337.5) + \left(\frac{6}{4}\right)(450) \right]$$

$$+ \frac{3}{6(2EI)} \left[ \left(\frac{6}{4}\right)(450) + 4\left(\frac{7.5}{4}\right)(337.5) + \left(\frac{9}{4}\right)(450) \right]$$

$$\Delta_D = \frac{675}{4EI} + \frac{2025}{4EI} + \frac{2362.5}{4EI} + \frac{3712.5}{4EI} = \frac{2193.75}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_D = \frac{2193.75}{(200)(300)} = 0.0366 \text{ m}$$

$$\therefore \Delta_D = 36.6 \text{ mm } (\downarrow)$$

## 6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

La energía de una estructura se puede definir como **su capacidad de realizar trabajo**. El término **energía de deformación** se atribuye a la **energía que una estructura tiene debido a su deformación**.

La relación entre el trabajo y la energía de deformación de una estructura se basa en el **principio de conservación de la energía**, el cual se puede establecer como sigue:

El trabajo realizado en una estructura elástica en equilibrio por un sistema de fuerzas externas aplicado es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas, o energía de deformación almacenada en una estructura.

Este principio se expresa matemáticamente como:

$$W_e = W_i \quad \text{o} \quad W_e = U$$

Donde:

$W_e$  y  $W_i$  : representan el trabajo realizado por las fuerzas externas e internas, respectivamente.

$U$  : representan la energía de deformación de la estructura.

La expresión explícita para la energía de deformación de una estructura depende del tipo de fuerzas internas que pueden desarrollar los elementos de una estructura.

## 6.1 Energía de deformación de las armaduras

Consideremos una armadura que está sujeta a la carga  $P$ , la cual incrementa gradualmente de cero hasta su valor final, causando deformación en la estructura como se ve en la figura.

Puesto que consideramos estructuras linealmente elásticas, la deflexión de la armadura  $\Delta$  en el punto de la aplicación de  $P$  incrementa linealmente con la carga; por lo tanto, como hemos visto en los temas anteriores, el trabajo externo realizado por  $P$  durante la deformación se puede expresar como:

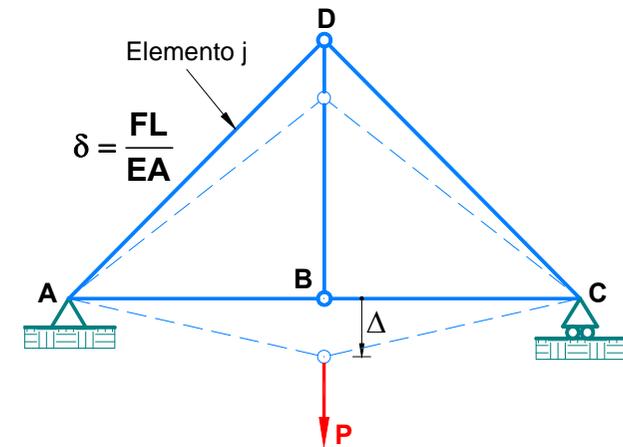
$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$$

Por lo tanto, el trabajo interno o energía de deformación almacenada en el elemento  $j$ ,  $U_j$ , está dada por:

$$U_j = \frac{1}{2} F \delta = \frac{F^2 L}{2EA}$$

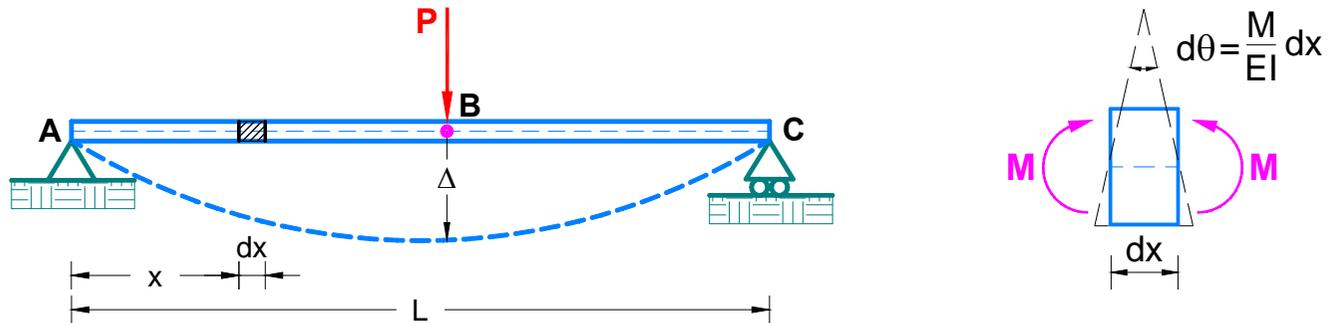
La energía de deformación de la armadura completa es igual a la suma de las energías de deformación de todos sus elementos y puede escribirse como:

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$



## 6.2 Energía de deformación en vigas

Consideremos una viga cualquiera, como se muestra en la figura, así como la carga  $P$  que actúa en la viga incrementando gradualmente de cero a su valor final.



El momento flexionante  $M$  actuante en un elemento diferencial  $dx$  de la viga también incrementa gradualmente de cero a su valor final, mientras la sección transversal del elemento  $dx$  rota en un ángulo  $d\theta$  con respecto al otro.

El trabajo interno o energía de deformación almacenada en el elemento  $dx$  está dado por:

$$dU = \frac{1}{2} M (d\theta) = \frac{1}{2} M \underbrace{\left( \frac{M}{EI} dx \right)}_{d\theta} \Rightarrow dU = \frac{M^2}{2EI} dx$$

La expresión para la energía de deformación de toda la viga ahora se puede conseguir mediante la integración a lo largo de la longitud  $L$  de la viga:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

### 6.3 Energía de deformación en marcos

Las partes de marcos pueden estar sujetas a fuerzas axiales además de momentos flexionantes, así que el total de la energía de deformación ( $U$ ) de los marcos se expresa como la suma de la energía de deformación causada por las fuerzas axiales ( $U_a$ ) y la energía de flexión ( $U_b$ ); es decir:

$$U = U_a + U_b$$

Si un marco se divide en segmentos para que la cantidad  $F/AE$  sea constante en toda la longitud  $L$  de cada segmento, entonces, la energía de deformación almacenada en cada segmento debida a la carga axial  $F$  es igual a:

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

Por lo tanto, la energía de deformación causada por la carga axial para el marco completo se puede expresar como:

$$U_a = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$

De manera similar, si el marco está dividido en segmentos para que la cantidad  $M/EI$  sea continua en toda la longitud de cada elemento, entonces la energía de deformación almacenada en cada parte debida a la flexión se puede obtener al integrar la cantidad  $M/EI$  en toda la longitud del segmento.

La energía de deformación provocada por la flexión en el marco completo es igual a la suma de energías de deformación de flexión de todos los segmentos del marco y se puede escribir como:

$$U_b = \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión para la energía de deformación de marcos debida tanto a las fuerzas axiales como a la flexión:

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA} + \sum \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

## 7. TEOREMA DE CASTIGLIANO

En 1876, Alberto Castigliano enunció un teorema que permite encontrar cualquier componente de deflexión de una estructura a partir de la energía de deformación de la misma. Al aplicarlo a las reacciones redundantes de una estructura indeterminada, se obtiene un corolario que se conoce como Segundo Teorema de Castigliano.

### Primer Teorema:

La componente de deflexión del punto de aplicación de una acción sobre una estructura, en la dirección de dicha acción, se puede obtener evaluando la primera derivada parcial de la energía interna de deformación de la estructura con respecto a la acción aplicada.

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Si el signo de la respuesta da negativo, quiere decir que la deflexión es opuesta al sentido de la acción con respecto a la cual se tomó la derivada. Si se quiere averiguar la deflexión en un punto donde no hay aplicada ninguna acción, o en una dirección distinta de la acción aplicada, sencillamente se aplica una acción imaginaria en el sitio y dirección deseados hasta encontrar la derivada parcial de la energía de deformación; luego la acción imaginaria se iguala a cero.

### Deflexión lineal en una armadura:

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 L}{2EA} = \sum F \left( \frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{L}{EA}$$

### Deflexión lineal por flexión en vigas y pórticos:

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

**Deflexión cuando sólo se considera el efecto de corte:**

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} k \int \frac{V^2 dx}{2GA} = k \int V \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{GA}$$

**Deflexión cuando sólo se considera el efecto de torsión:**

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{T^2 dx}{2GJ} = \int T \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{GJ}$$

### Segundo Teorema:

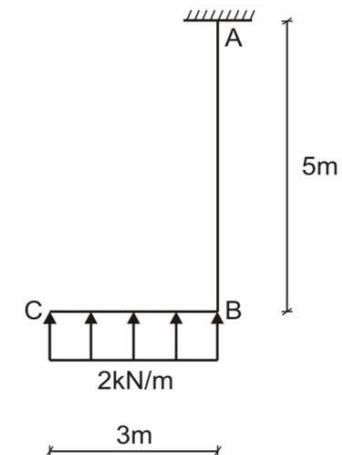
La derivada parcial de la energía interna de deformación de una estructura cargada, con respecto a un componente de reacción, es igual a cero.

En cualquier estructura indeterminada sometida a carga, los valores de las redundantes deben ser tales que hagan mínima la energía total interna de deformación elástica que resulta de la aplicación del sistema de cargas dado.

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las incógnitas redundantes, la condición de mínimo, hace que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Determinar la energía potencial de deformación para la estructura mostrada en la figura, si es de sección constante. Considerar únicamente el efecto de momento flector.



## Solución.

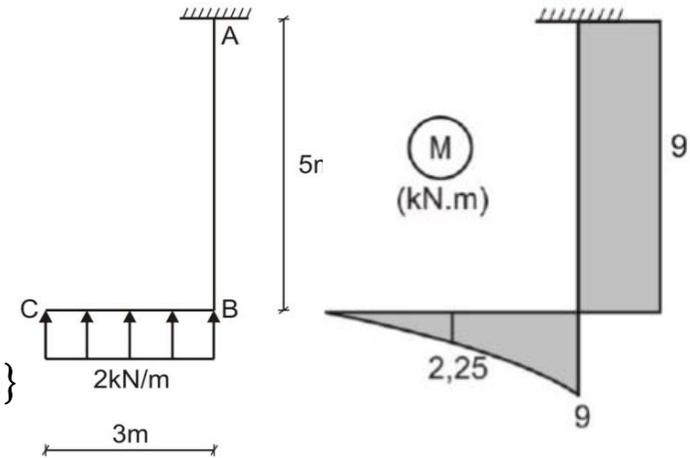
Realizamos el D.M.F. para la estructura:

Calculamos la energía potencial de deformación para la estructura:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$U = \sum \int_0^L \frac{MM}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{3}{6} [0 + 4(2.25)(2.5) + (9)(9)] + 5(9)(9) \right\}$$

$$\therefore U = \frac{227.81}{EI} \text{ kJ}$$



**Ejemplo:** Determinar la deflexión en los puntos B y C de la viga. Considerar:  $E = 29000 \text{ ksi}$   $I = 1750 \text{ in}^4$

## Solución.

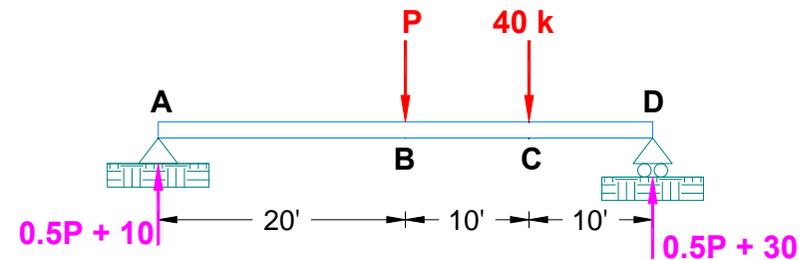
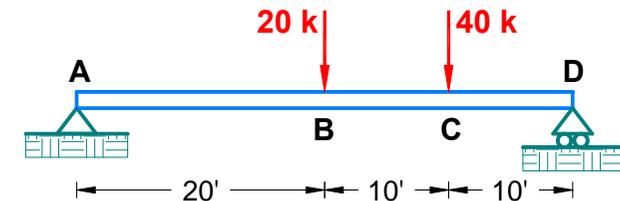
Determinamos la rigidez de la viga:

$$EI = (29000 \times 10^3) \times 1750 = 50750 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in}^2$$

$$\therefore EI = 352.43 \times 10^3 \text{ klb} \cdot \text{ft}^2$$

a. Calculamos la deflexión en B:

Colocamos una carga P en el punto B, luego calculamos las reacciones en función de P:



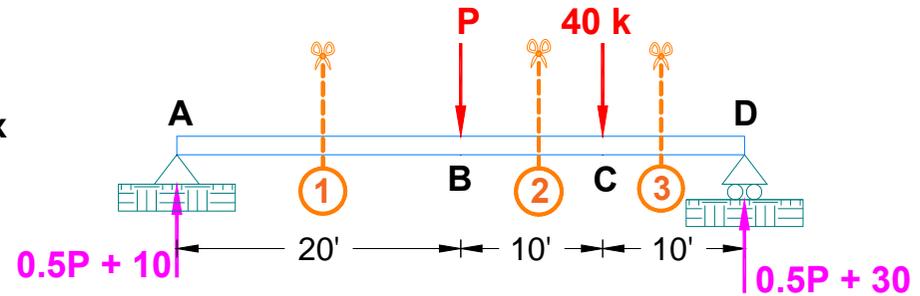
Ahora realizamos el método de los cortes o secciones para calcular las ecuaciones de momentos con sus respectivas derivadas parciales.

**Tramo AB:  $0 \leq x \leq 20'$**

$$M_1 = (0.5P + 10)(x)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.5x$$

$$M_1^{P=20} = [0.5(20) + 10](x) = 20x$$



**Tramo BC:  $20' \leq x \leq 30'$**

$$M_2 = (0.5P + 10)(x) - P(x - 20)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.5x - (x - 20) = 20 - 0.5x$$

$$M_2^{P=20} = [0.5(20) + 10](x) - (20)(x - 20) = 400$$

**Tramo DC:  $0 \leq x \leq 10'$**

$$M_3 = (0.5P + 30)(x)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = 0.5x$$

$$M_3^{P=20} = [0.5(20) + 30](x) = 40x$$

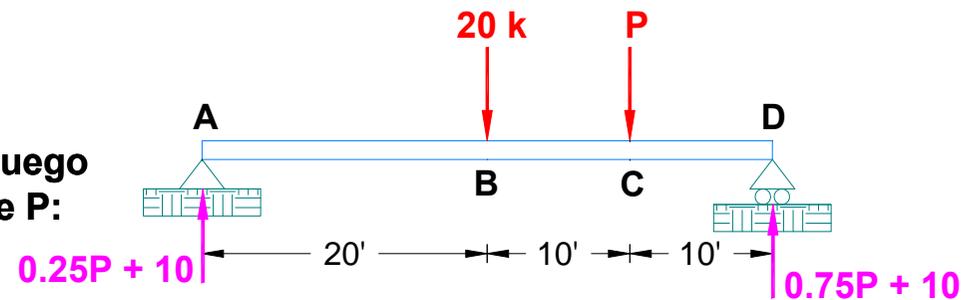
**Calculamos la deflexión en B:**

$$\delta_B = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{20} (20x)(0.5x) dx + \int_{20}^{30} (400)(20 - 0.5x) dx + \int_0^{10} (40x)(0.5x) dx \right]$$

$$\delta_B = \frac{190000}{3EI} = \frac{190000}{3(352.43 \times 10^3)} = 0.1797 \text{ ft} = 2.16 \text{ in}$$

**b. Calculamos la deflexión en C:**

Colocamos una carga P en el punto C, luego calculamos las reacciones en función de P:

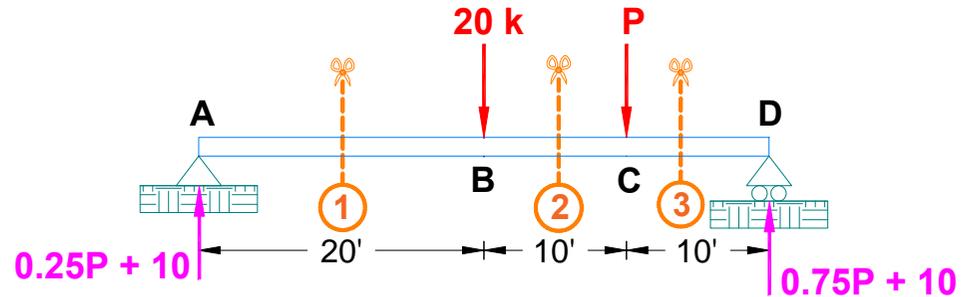


**Tramo AB:  $0 \leq x \leq 20'$**

$$M_1 = (0.25P + 10)(x)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.25x$$

$$M_1^{P=40} = [0.25(40) + 10](x) = 20x$$



**Tramo BC:  $20' \leq x \leq 30'$**

$$M_2 = (0.25P + 10)(x) - 20(x - 20)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.25x$$

$$M_2^{P=40} = [0.25(40) + 10](x) - 20(x - 20) = 400$$

**Tramo DC:  $0 \leq x \leq 10'$**

$$M_3 = (0.75P + 10)(x)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = 0.75x$$

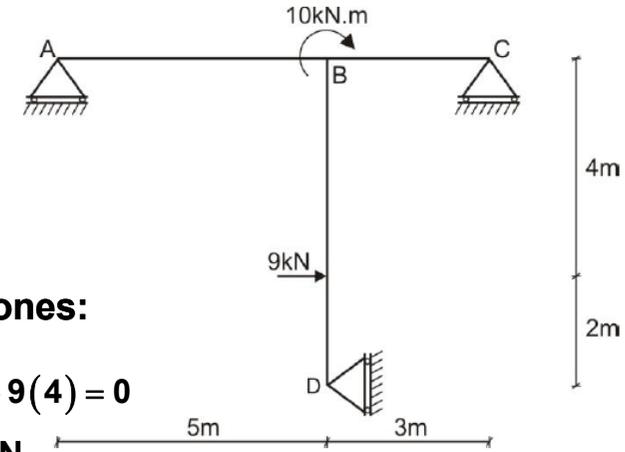
$$M_3^{P=40} = [0.75(40) + 10](x) = 40x$$

**Calculamos la deflexión en B:**

$$\delta_B = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{20} (20x)(0.25x) dx + \int_{20}^{30} (400)(0.25x) dx + \int_0^{10} (40x)(0.75x) dx \right]$$

$$\delta_B = \frac{145000}{3EI} = \frac{145000}{3(352.43 \times 10^3)} = 0.1371 \text{ ft} = 1.65 \text{ in}$$

**Ejemplo:** Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura, si es de rigidez constante.



**Solución.**

Realizamos el DCL de la estructura y calculamos las reacciones:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_D = 9\text{kN}$$

$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow V_C(8) - 10 - H_D(6) + 9(4) = 0$$

$$\therefore V_C = 3.5\text{kN}$$

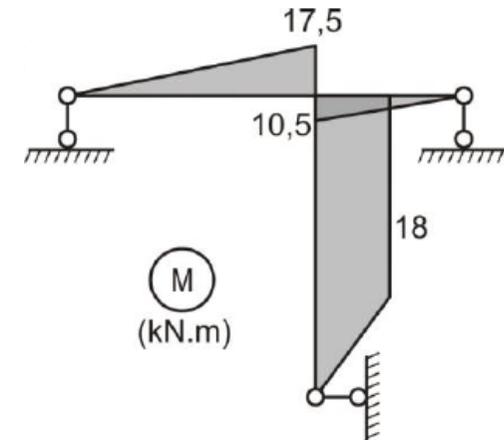
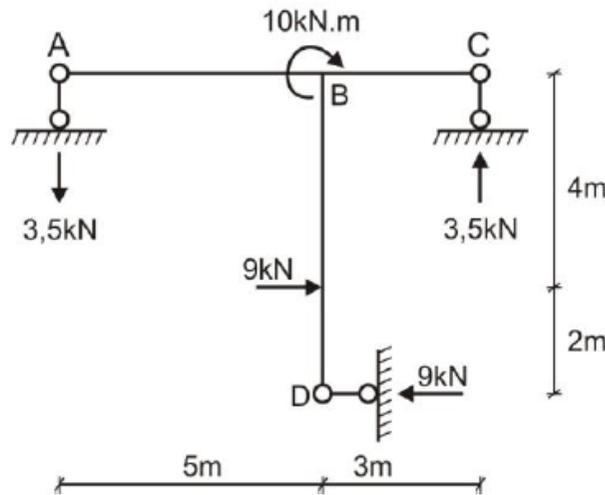
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_C = 0 \therefore V_A = 3.5\text{kN}$$

Calculamos la energía potencial de deformación para la estructura:

$$U = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{1}{2}(5)(17.5) \left( \frac{2}{3} \times 17.5 \right) + \frac{1}{2}(3)(10.5) \left( \frac{2}{3} \times 10.5 \right) \right.$$

$$\left. + 4(18)(18) + \frac{1}{2}(2)(18) \left( \frac{2}{3} \times 18 \right) \right\}$$

$$\therefore U = \frac{1066.33}{EI} \text{ kJ}$$



Realizamos el D.M.F. para la estructura:



**Ejemplo:** Determinar la energía potencial de deformación para el pórtico mostrado en la figura con apoyo elástico en D. Expresar su respuesta en función de la rigidez del pórtico  $EI$  y la rigidez del resorte  $K$ .

**Solución.**

Realizamos el DCL de la estructura y calculamos las reacciones:

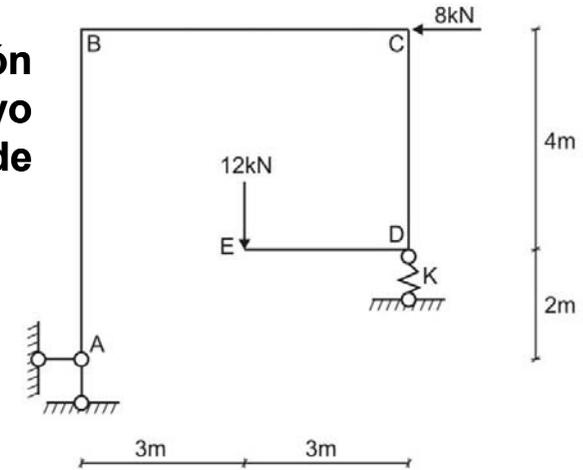
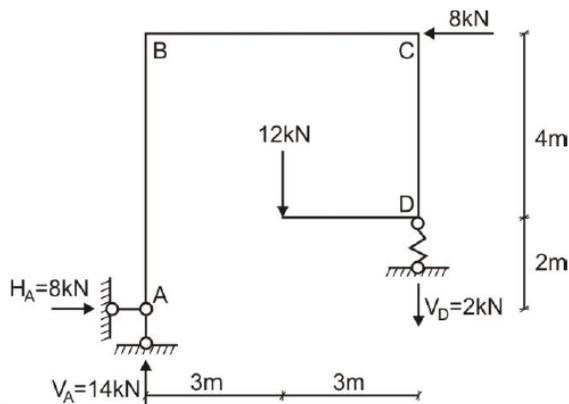
$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow -V_D(6) - 12(3) + 8(6) = 0$$

$$\therefore V_D = 2\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V_D = 12$$

$$\therefore V_A = 14\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 8\text{kN}$$



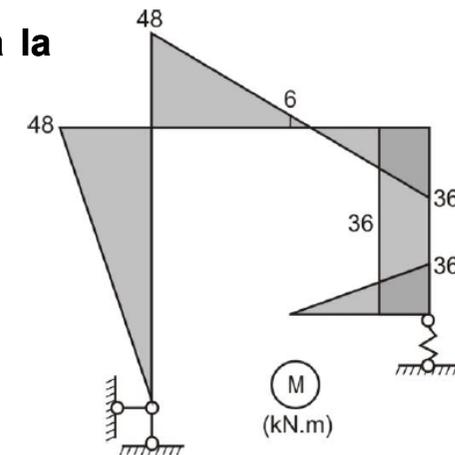
Realizamos el D.M.F. para la estructura:

Calculamos la energía potencial de deformación para la estructura:

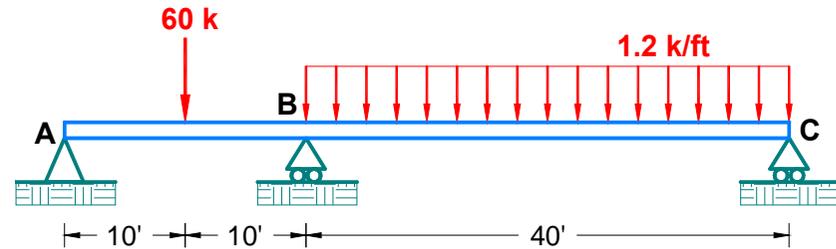
$$U = \sum \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \sum \frac{R_i^2}{2k_i}$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{1}{2}(6)(48) \left( \frac{2}{3} \times 48 \right) + \frac{6}{6} [48(48) + 4(6)(6) + 36(36)] + 4(36)(36) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(3)(36) \left( \frac{2}{3} \times 36 \right) \right\} + \frac{(-2)^2}{2k}$$

$$\therefore U = \frac{7416}{EI} + \frac{2}{k}$$



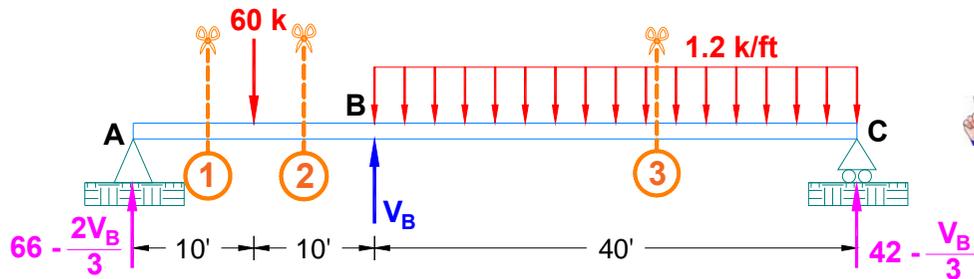
**Ejemplo:** Resolver la siguiente viga y graficar sus diagramas de fuerza cortante, momento flector, considerando  $EI$  constante para toda la viga.



**Solución.**

👉 Determinamos el grado de indeterminación:  $GI = R - 3 = 4 - 3 = 1$

👉 Isostatizamos la estructura, para ello liberamos el apoyo B y calculamos sus reacciones:



👉 Realizamos el método de los cortes y calculamos las ecuaciones de momentos:

**Corte 1 - 1:**  $0 \leq x \leq 10'$

$$M_1 = \left(66 - \frac{2V_B}{3}\right)(x) \quad \frac{\partial M_1}{\partial V_B} = -\frac{2}{3}x$$

**Corte 2 - 2:**  $10' \leq x \leq 20'$

$$M_2 = \left(66 - \frac{2V_B}{3}\right)(x) - 60(x - 10) \quad \frac{\partial M_2}{\partial V_B} = -\frac{2}{3}x$$

**Corte 3 - 3:**  $0 \leq x \leq 40'$

$$M_3 = \left(42 - \frac{V_B}{3}\right)(x) - 0.6x^2 \quad \frac{\partial M_3}{\partial V_B} = -\frac{x}{3}$$

👉 Aplicamos la condición:  $\frac{\partial U}{\partial V_B} = 0$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{10} \left(66 - \frac{2}{3}V_B\right)(x) \left(-\frac{2}{3}x\right) dx +$$

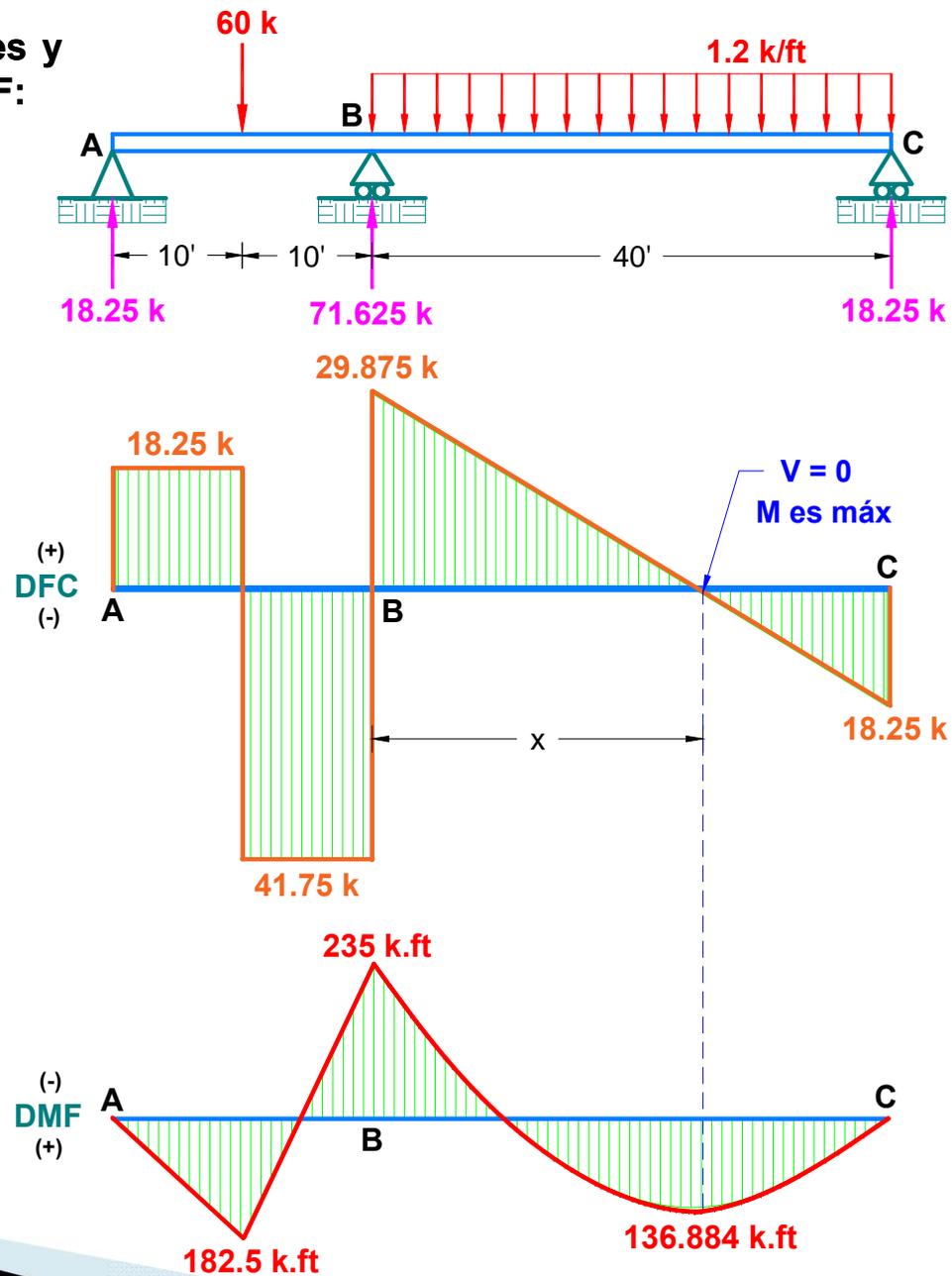
$$+ \frac{1}{EI} \int_{10}^{20} \left[\left(66 - \frac{2}{3}V_B\right)(x) - 60(x - 10)\right] \left(-\frac{2}{3}x\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{40} \left[\left(42 - \frac{V_B}{3}\right)(x) - 0.6x^2\right] \left(-\frac{x}{3}\right) dx = 0$$

$\therefore V_B = 71.625 \text{ k } (\uparrow)$

👉 Calculamos las reacciones y graficamos los DFC y DMF:

$$x = \frac{y}{w} = \frac{29.875}{1.2} = 24.896 \text{ ft}$$



**Ejemplo:** Resolver la armadura mostrada en la figura, considerando que la rigidez EA es constante en toda la estructura.

**Solución.**

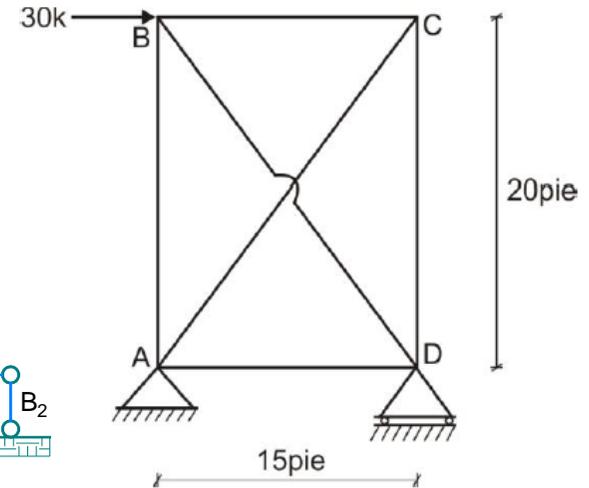
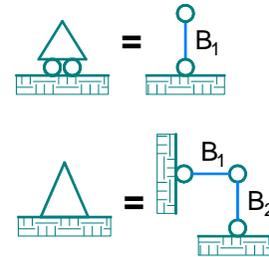
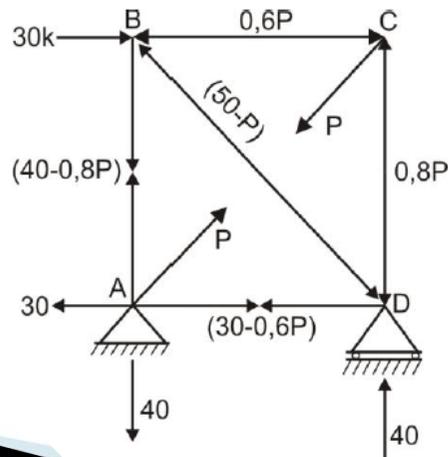
👉 Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = B - 2N = 9 - 2(4) = 1$$

Donde: **B:** Número de barras incluido los apoyos.

**N:** Número de nudos.

👉 Reemplazamos la fuerza interna AC por P y determinamos las otras fuerzas internas en función de P, así como las reacciones en los apoyos:



| BARRA | L  | EA | $F_{(P)}$   | $\frac{\partial F_{(P)}}{\partial P}$ | $F \frac{\partial F}{\partial P} \frac{L}{EA}$ |
|-------|----|----|-------------|---------------------------------------|--|
| AB    | 20 | EA | $40 - 0,8P$ | -0,8                                  | $\frac{-640 + 12,8P}{EA}$                      |
| AC    | 25 | EA | P           | 1                                     | $\frac{25P}{EA}$                               |
| AD    | 15 | EA | $30 - 0,6P$ | -0,6                                  | $\frac{-270 + 5,4P}{EA}$                       |
| BC    | 15 | EA | -0,6P       | -0,6                                  | $\frac{5,4P}{EA}$                              |
| BD    | 25 | EA | $-(50 - P)$ | 1                                     | $\frac{-1250 + 25P}{EA}$                       |
| CD    | 20 | EA | -0,8P       | -0,8                                  | $\frac{12,8P}{EA}$                             |

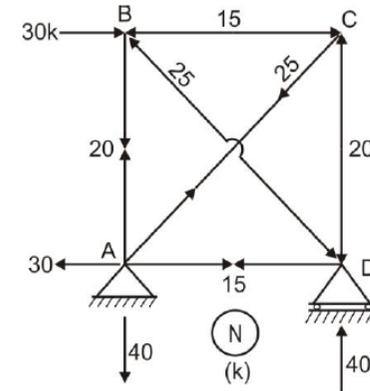
$$\Sigma = \frac{-2160 + 86.4P}{EA}$$

👉 Aplicamos la condición:  $\frac{\partial U}{\partial P} = 0$

$$\Rightarrow \frac{-2160 + 86.4P}{EA} = 0$$

$$\therefore P = 25 \text{ k}$$

👉 Finalmente, las reacciones y fuerzas internas finales son:



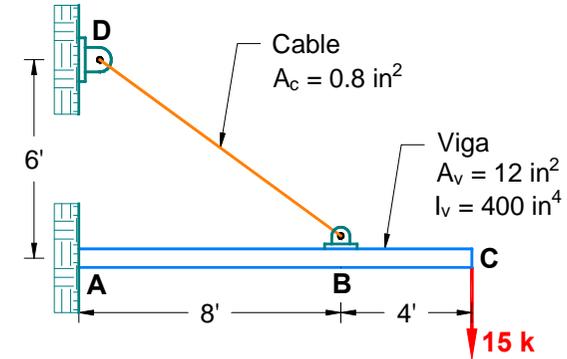
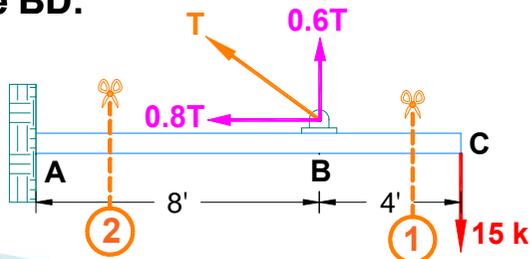
**Ejemplo:** Una viga esta soportada por un apoyo empotrado en A y un cable BD. Determine la tensión en el cable. Considerar E constante.

**Solución.**

👉 Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = R - 3 = 4 - 3 = 1$$

👉 Isostatizamos la estructura, considerando la tensión T en el cable BD:



👉 Realizamos el método de los cortes y calculamos las ecuaciones de momentos:

**Corte 1 - 1:**  $0 \leq x \leq 4'$

$$M_1 = -15(x) \quad \frac{\partial M_1}{\partial T} = 0$$

$$F_1 = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial T} = 0$$

**Corte 2 - 2:**  $4' \leq x \leq 12'$

$$M_2 = -15(x) + 0.6T(x - 4)$$

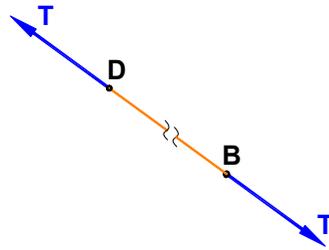
$$\frac{\partial M_2}{\partial T} = 0.6(x - 4)$$

$$F_2 = -0.8T \quad \frac{\partial F_2}{\partial T} = -0.8$$

**Cable BD:**

$$M_3 = 0 \quad \frac{\partial M_3}{\partial T} = 0$$

$$F_3 = T \quad \frac{\partial F_3}{\partial T} = 1$$



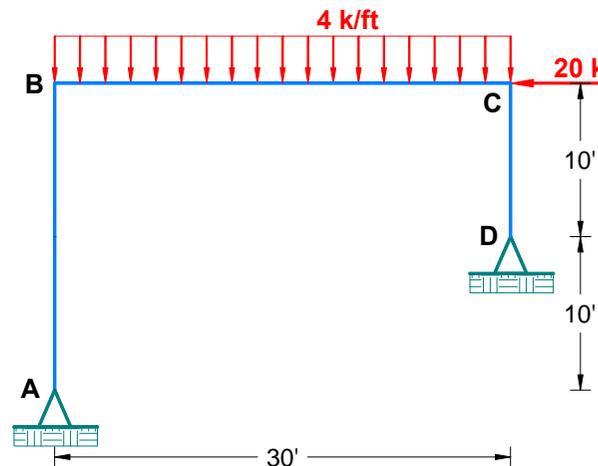
 **Aplicamos la condición:**

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \sum F \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right) \frac{L}{EA} + \sum \int M \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \underbrace{\frac{1}{EA_v}(0)}_{\text{Corte 1-1: } F_1} + \underbrace{\frac{1}{EA_v}[(-0.8T)(-0.8)(8)]}_{\text{Corte 2-2: } F_2} + \underbrace{\frac{1}{EA_c}[(T)(1)(10)]}_{\text{Cable: } F_3} + \underbrace{\frac{1}{EI_v}(0)}_{\text{Corte 1-1: } M_1} \\ & + \underbrace{\frac{1}{EI_v} \int_4^{12} [-15x + 0.6T(x-4)][0.6(x-4)] dx}_{\text{Corte 2-2: } M_2} + \underbrace{\frac{1}{EI_v}(0)}_{\text{Cable: } M_3} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{(-0.8T)(-0.8)(8)}{12 \times 12^{-2}} + \frac{10T}{0.8 \times 12^{-2}} + \frac{1}{400 \times 12^{-4}} \int_4^{12} [-15x + 0.6T(x-4)][0.6(x-4)] dx = 0$$

**Ejemplo:** Resolver el siguiente pórtico y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, si  $EI$  es constante para todo el pórtico.



$$\therefore T = 27.612 \text{ k}$$

## Solución.



Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = 3C - A = 3(1) - 2 = 1$$

Donde: **C**: Número de contornos cerrados.

**N**: Número de articulaciones o rótulas incluidos los apoyos.



Isostatizamos la estructura, para ello liberamos la componente horizontal en A y calculamos sus reacciones:



Realizamos el método de los cortes y calculamos las ecuaciones de momentos:

**Corte 1 - 1:  $0 \leq x \leq 20'$**       **Corte 2 - 2:  $0 \leq x \leq 30'$**

$$M_1 = -H_A(x)$$

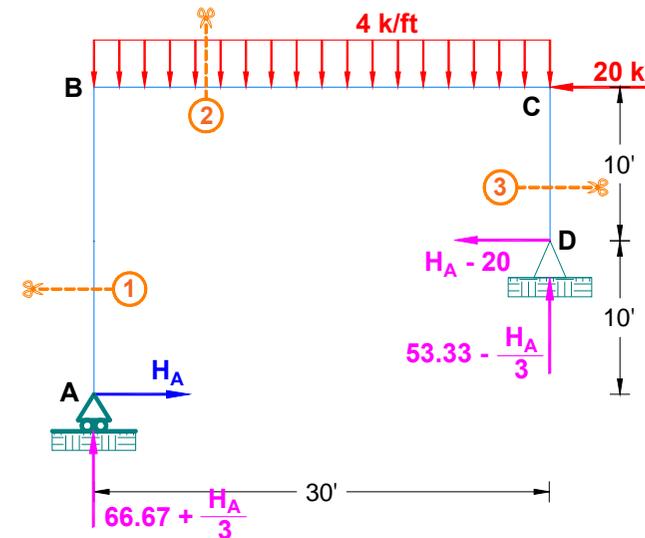
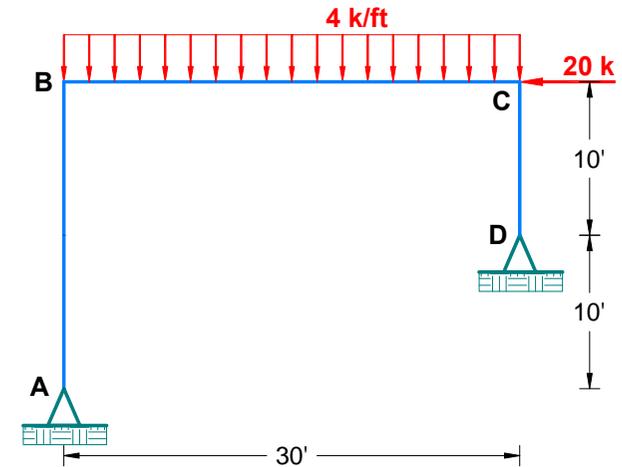
$$\frac{\partial M_1}{\partial H_A} = -x$$

$$M_2 = \left(66.67 + \frac{H_A}{3}\right)(x) - 20H_A - 2x^2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial H_A} = \frac{x}{3} - 20$$

**Corte 3 - 3:  $0 \leq x \leq 10'$**

$$M_3 = -(H_A - 20)(x) \quad \frac{\partial M_3}{\partial H_A} = -x$$



Aplicamos la condición:  $\frac{\partial U}{\partial H_A} = 0$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{20} (-H_A x)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{30} \left[ \left( 66.67 + \frac{H_A}{3} \right) (x) - 20H_A - 2x^2 \right] \left( \frac{x}{3} - 20 \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{10} [-(H_A - 20)(x)(-x)] dx = 0$$

👉 Calculamos las reacciones y graficamos los DFA, DFC y DMF: ∴  $H_A = 18.167 \text{ k} (\rightarrow)$

