UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENÍERIA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL

ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 4: MÉTODOS ENERGÉTICOS

DOCENTE: Mg. Luis Fernando Narro Jara

HUÁNUCO, 2020

Unidad 4. MÉTODOS ENERGÉTICOS

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN
2. TRABAJO
3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL
4. DEFLEXIONES DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL
5. DEFLEXIONES DE VIGAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL
6. DEFLEXIONES DE MARCOS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL
7. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y ENERGÍA DE DEFORMACIÓN
8. TEOREMA DE CASTIGLIANO

1. INTRODUCCIÓN

En esta unidad desarrollaremos métodos para el análisis de deflexiones de estructuras estáticamente determinadas usando algunos principios básicos de trabajo y energía.

Los métodos energéticos (trabajo - energía) son más generales que los métodos geométricos, en el sentido de que se pueden aplicar a varios tipos de estructuras, tales como armaduras, vigas y marcos.

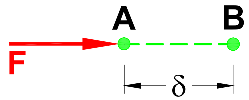
Una desventaja de estos métodos es que con cada aplicación solo se puede calcular una componente de deflexión, o pendiente, en un punto de la estructura.

Empezaremos con una revisión del concepto básico de trabajo realizado por las fuerzas y pares durante la deformación de la estructura, y luego discutiremos el principio de trabajo virtual. Este principio se usa para formular el método del trabajo virtual para las deflexiones en armaduras, vigas y marcos. Obtendremos las expresiones para la energía de deformación de armaduras, vigas y marcos, y consideraremos el primer teorema de Castigliano para calcular las deflexiones.

2. TRABAJO

El trabajo se define como el producto de una fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En los cálculos de deflexiones, se ha visto el trabajo realizado por fuerzas y momentos.

Si una fuerza F permanece constante en magnitud al moverse del punto A al B, el trabajo W puede expresarse de la siguiente manera:

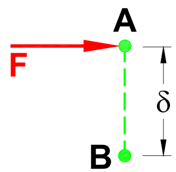


$$W = F\delta \quad \dots (1)$$

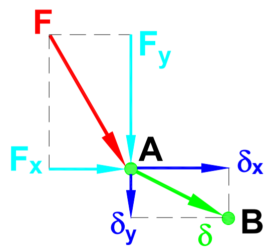
Donde δ es la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.

El trabajo es positivo si la fuerza y el desplazamiento se encuentran en el mismo sentido, y negativo cuando la fuerza actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

Cuando una fuerza F se mueve perpendicularmente a su línea de acción, el trabajo es cero: $W = 0$



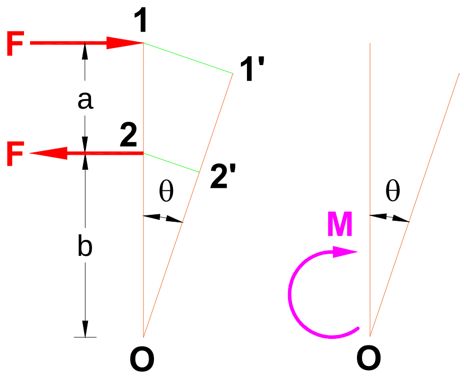
Si la magnitud y la dirección de una fuerza permanecen constantes cuando la fuerza se mueve por un desplazamiento δ que no es colineal con la línea de acción de la fuerza, el trabajo total se obtiene sumando el trabajo realizado por cada componente de la fuerza al moverse cada una por la correspondiente componente colineal del desplazamiento δ_x y δ_y:



$$W = F_x\delta_x + F_y\delta_y$$

De manera semejante, si un momento permanece constante al generarse un desplazamiento angular θ, el trabajo realizado es igual al producto del momento por el desplazamiento angular θ:

$$W = M\theta \quad \dots (2)$$



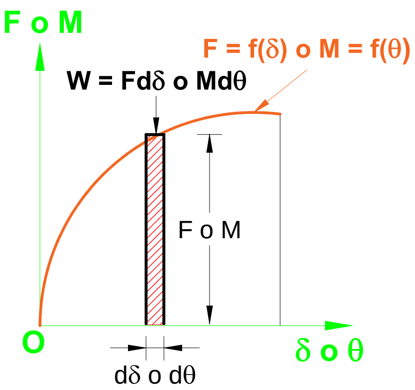
El trabajo realizado por un par es:

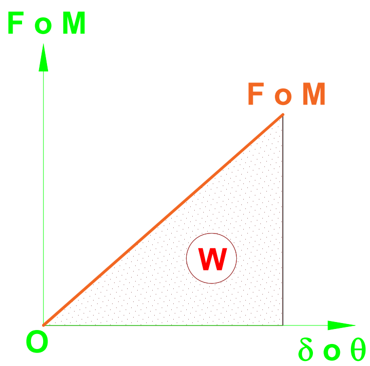
$$W = -Fb\theta + F(b+a)\theta$$

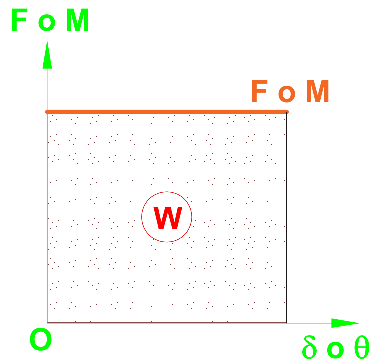
$$\Rightarrow \quad W = \underbrace{(Fa)}_{M = Fa}\theta$$

$$\Rightarrow \quad W = M\theta$$

Si una fuerza varía en magnitud durante un desplazamiento, y si la función que relaciona la fuerza F con el desplazamiento colineal δ es conocida, el trabajo se calcula mediante integración.







$$W = \int_0^{\delta} F d\delta \quad \dots (3)$$

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta \quad \dots (4)$$

$$W = \frac{1}{2} F\delta \quad \dots (5)$$

$$W = \frac{1}{2} M\theta \quad \dots (6)$$

$$W = F\delta \quad \dots (7)$$

$$W = M\theta \quad \dots (8)$$

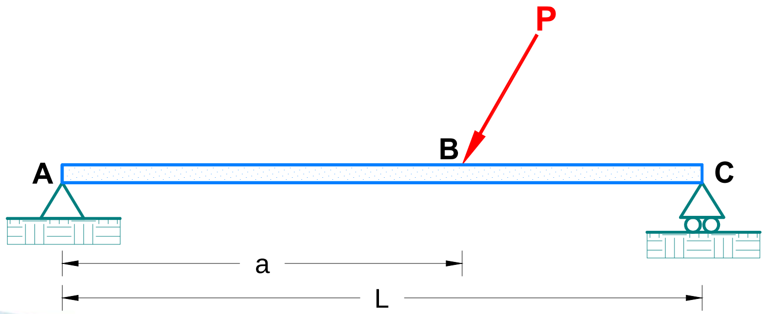
3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

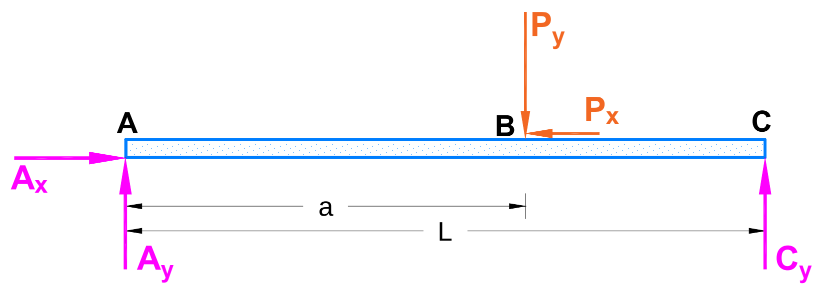
El principio del trabajo virtual, proporciona una herramienta de análisis poderosa para múltiples problemas de mecánica estructural. En esta sección estudiaremos dos de sus formulaciones, llamados principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos y principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables. Esta última se aplica en el siguiente apartado para desarrollar el método del trabajo virtual, el cual se considera uno de los métodos más generales para determinar las deflexiones en las estructuras.

3.1 Principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos

El principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos se puede establecer como sigue:

Si un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y si está sujeto a un pequeño desplazamiento virtual como cuerpo rígido, el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas es cero.

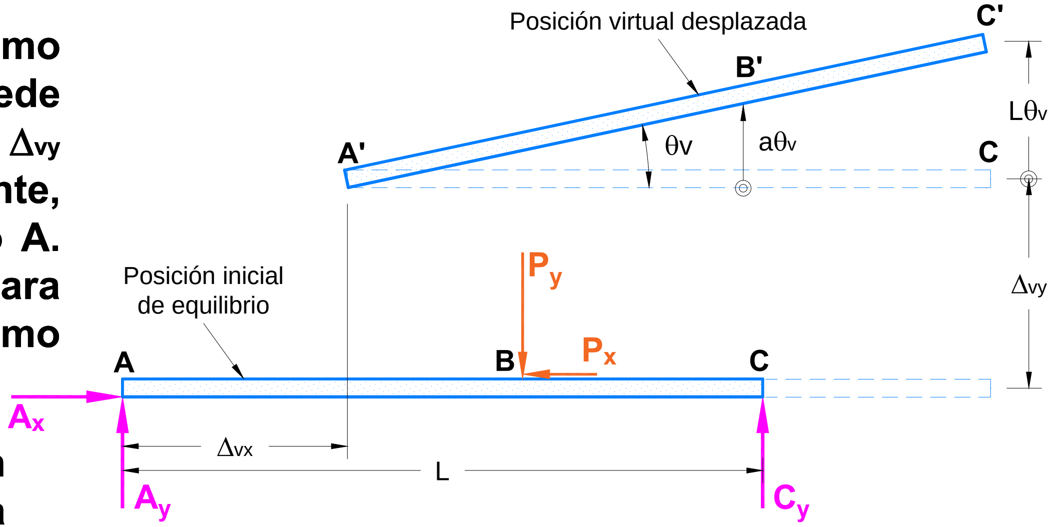




El término virtual simplemente significa imaginario, no real.

El desplazamiento virtual como cuerpo rígido de la viga se puede descomponer en translación Δ_{vx} y Δ_{vy} en dirección *x* y *y*, respectivamente, y rotación θ_v alrededor del punto A. Note que el subíndice *v* sirve para identificar los desplazamientos como cantidades virtuales.

Como la viga se somete a un desplazamiento virtual de la posición ABC a la posición A′B′C′, las fuerzas actuantes en ella realizan un trabajo denominado trabajo virtual. El total del trabajo virtual, W_{ve}, desarrollado por las fuerzas externas actuantes en la viga, puede expresarse como la suma del trabajo virtual W_{vx} y W_{vy} realizado durante la translación en las direcciones *x* y *y*, respectivamente, y el trabajo virtual W_{vr}, hecho durante la rotación; es decir:



$$W_{ve} = \underbrace{W_{vx}}_{W_{vx} = A_x\Delta_{vx} - P_x\Delta_{vx}} + \underbrace{W_{vy}}_{W_{vy} = A_y\Delta_{vy} - P_y\Delta_{vy} + C_y\Delta_{vy}} + \underbrace{W_{vr}}_{W_{vr} = -P_y(a\theta_v) + C_y(L\theta_v)}$$

$$W_{ve} = \underbrace{(A_x - P_x)}_{\sum F_x}\Delta_{vx} + \underbrace{(A_y - P_y + C_y)}_{\sum F_y}\Delta_{vy} + \underbrace{(-aP_y + LC_y)}_{\sum M_A}\theta_v$$

$$W_{ve} = \left(\sum F_x\right)\Delta_{vx} + \left(\sum F_y\right)\Delta_{vy} + \left(\sum M_A\right)\theta_v$$

Debido a que la viga se encuentra en equilibrio:

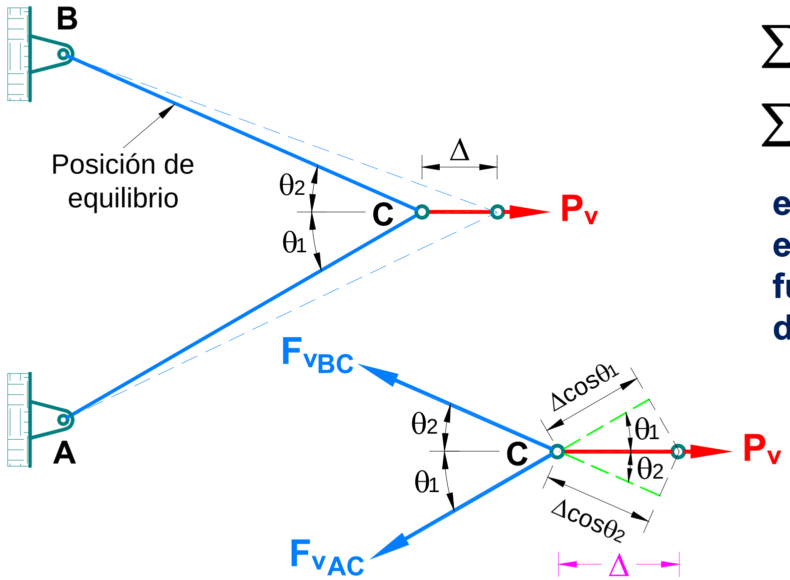
$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_A = 0$$

$$\boxed{W_{ve} = 0}$$

Expresión matemática del principio del desplazamiento virtual para cuerpos rígidos.

3.2 Principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables

Si una estructura deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas virtuales (o pares de fuerzas) y si está sujeta a una pequeña deformación consistente con el apoyo y condiciones de continuidad de la estructura, entonces el trabajo virtual externo realizado por las fuerzas virtuales externas (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos externos virtuales (y rotaciones) es igual al trabajo virtual interno realizado por las fuerzas internas virtuales (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos internos reales (y rotaciones).



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_v - F_{vAC}\cos\theta_1 - F_{vBC}\cos\theta_2 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{vAC}\,\mathrm{sen}\theta_1 + F_{vBC}\,\mathrm{sen}\theta_2 = 0 \quad \dots (2)$$

el total del trabajo virtual para la armadura (W_v) es igual a la suma algebraica del trabajo de las fuerzas virtuales que actúan en el nodo C, es decir:

$$W_v = P_v\Delta - F_{vAC}(\Delta\cos\theta_1) - F_{vBC}(\Delta\cos\theta_2)$$

$$W_v = \underbrace{(P_v - F_{vAC}\cos\theta_1 - F_{vBC}\cos\theta_2)}_{\sum F_x = P_v - F_{vAC}\cos\theta_1 - F_{vBC}\cos\theta_2 = 0}\Delta$$

$$\Rightarrow W_v = 0$$

En la presente definición, el término virtual se asocia a las fuerzas para indicar que el sistema de fuerzas es arbitrario y que no depende de la acción que causa la verdadera deformación.

Así, la ecuación (1) se puede expresar como:

$$P_v = F_{vAC}\cos\theta_1 + F_{vBC}\cos\theta_2 \quad \dots (3)$$

$$P_v = F_{vAC}\cos\theta_1 + F_{vBC}\cos\theta_2 \quad \dots (3)$$

$$\boxed{W_{ve} = W_{vi}} \quad \dots (4)$$

Expresión matemática del principio de las fuerzas virtuales para cuerpos deformables.

Donde:

P_v : representa el trabajo externo virtual (W_{ve}) realizado por la fuerza virtual externa, P_v, que actúa por el desplazamiento real externo, Δ.

$\Delta\cos\theta_1$ y $\Delta\cos\theta_2$: representa el trabajo virtual interno (W_{vi}) desarrollado por las fuerzas virtuales internas que actúan por los desplazamientos reales internos.

Tenga presente que el principio de fuerzas virtuales tal como se describe aquí es aplicable independientemente de la causa de las deformaciones verdaderas, es decir, deformaciones causadas por las cargas, los cambios de temperatura o cualquier otro efecto que pueda ser determinado por la aplicación del principio. Sin embargo, las deformaciones deben ser lo suficientemente pequeñas para que las fuerzas virtuales permanezcan constantes en magnitud y dirección mientras se desarrolla el trabajo virtual. Además, y aunque la aplicación del principio de fuerzas virtuales en este texto se limita a estructuras elásticas, el principio es válido independientemente de si la estructura es elástica o no.

El método del trabajo virtual se sustenta en el principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables, como se acaba de demostrar, la cual puede ser reescrita como:

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Trabajo virtual interno}$$

o

$$\boxed{\sum\left(\begin{matrix}\text{Fuerzas externas virtuales}\times\\ \text{desplazamientos externos reales}\end{matrix}\right) = \sum\left(\begin{matrix}\text{Fuerzas internas virtuales}\times\\ \text{desplazamientos internos reales}\end{matrix}\right)} \quad \dots (5)$$

el método del trabajo virtual emplea dos sistemas separados: el sistema de fuerzas virtuales y el sistema de cargas reales (u otros efectos), que causan la deformación a determinar.

Para establecer la deflexión (o pendiente) en cualquier punto de una estructura, se selecciona un sistema de fuerzas virtuales para que la deflexión deseada (o rotación) sea la única incógnita en la ecuación (5).

4. DEFLEXIONES EN ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

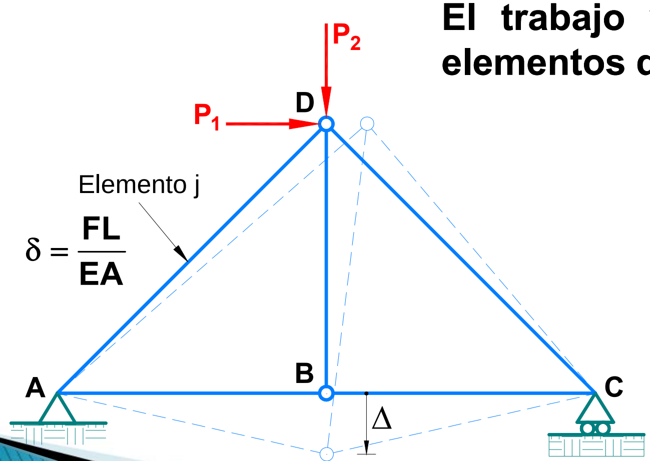
4.1 Debido a cargas externas

El trabajo virtual realizado por la carga unitaria virtual que nos lleva a la deflexión real Δ es igual a:

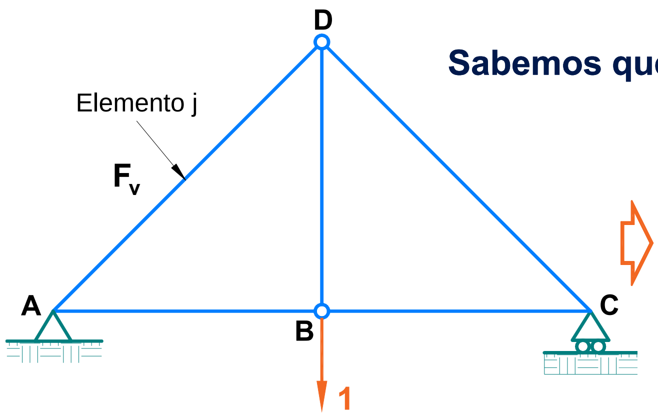
$$W_{ve} = 1(\Delta)$$

El trabajo virtual interno realizado en todos los elementos de la armadura se puede escribir como:

$$W_{vi} = \sum F_v(\delta)$$



Sistema real



Sistema virtual

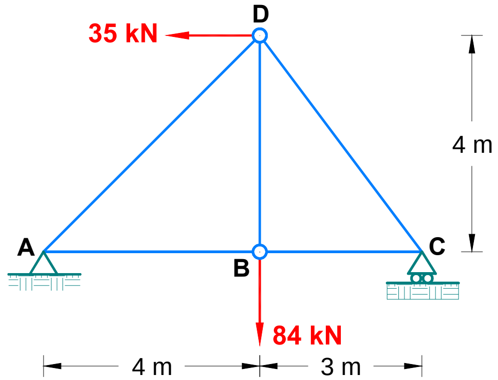
Sabemos que: $W_{ve} = W_{vi}$

$$\Rightarrow 1(\Delta) = \sum F_v(\delta)$$

$$\boxed{1(\Delta) = \sum F_v\left(\frac{FL}{EA}\right)}$$

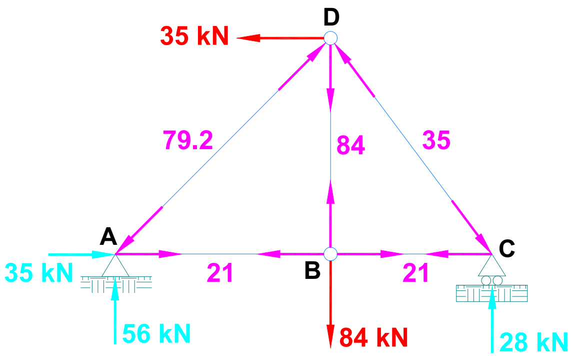
UDHCONECTA.COM

Ejemplo: **Determine la componente horizontal y la vertical de la deflexión en el nudo B de la armadura. Considerar EA constante, E = 200 GPa y $A = 1200\,mm^2$.**

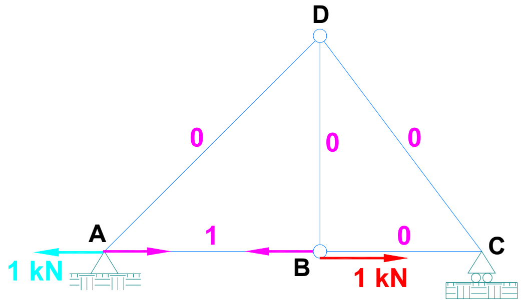


Solución.

Calculamos las fuerzas internas (F) de cada elemento:

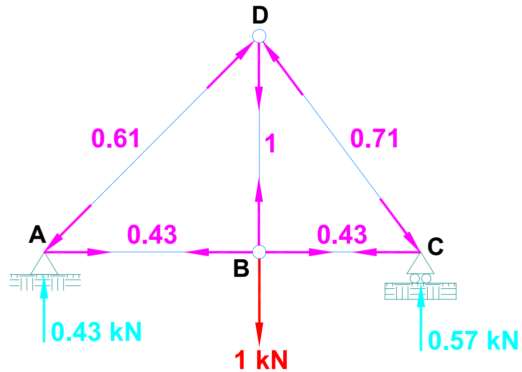


Sistema real – F



Sistema virtual para determinar

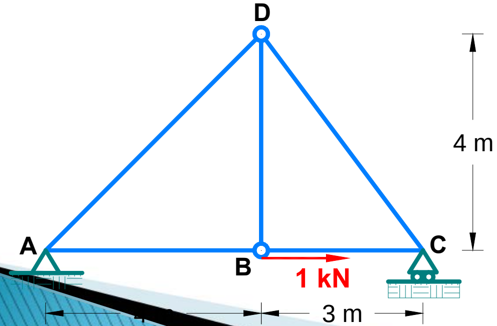
$(\Delta_B^h)(F_v^h)$



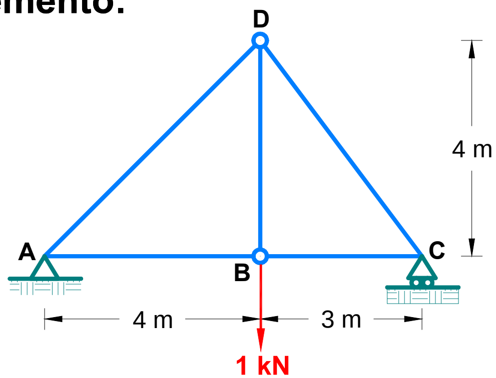
Sistema virtual para determinar

$(\Delta_B^v)(F_v^v)$

Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^h) de cada elemento:

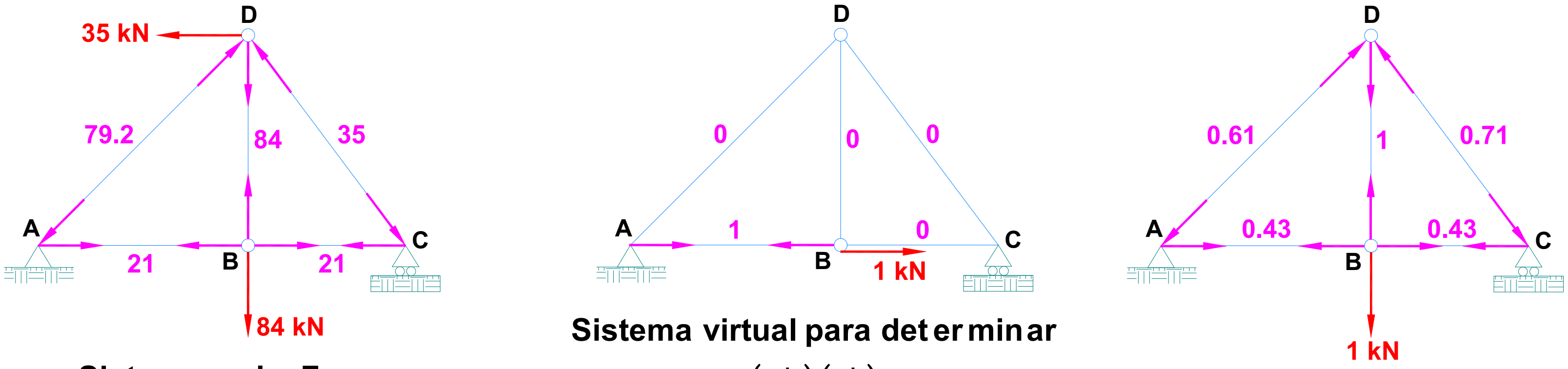


Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^v) de cada elemento:



Calculamos la deflexión en el nudo B:

Elemento	F (kN)	F_v^h (kN)	F_v^v (kN)	L (m)	E (kN/m^2)	A (m^2)	$F_v^h\left(\frac{FL}{EA}\right)$ (kN.m)	$F_v^v\left(\frac{FL}{EA}\right)$ (kN.m)
AB	21	1	0.43	4.00	200x10^6	0.0012	0.00035	0.00015
BC	21	0	0.43	3.00	200x10^6	0.0012	0.00000	0.00011
AD	-79.2	0	-0.61	5.66	200x10^6	0.0012	0.00000	0.00114
BD	84	0	1.00	4.00	200x10^6	0.0012	0.00000	0.00140
CD	-35	0	-0.71	5.00	200x10^6	0.0012	0.00000	0.00052
						Σ	0.00035	0.00332



Sistema real – F

Sistema virtual para determinar $(\Delta_B^h)(F_v^h)$

Sistema virtual para determinar $(\Delta_B^v)(F_v^v)$

$$\Rightarrow\ (1kN)(\Delta_B^h) = 0.00035 kN\cdot m$$

$$\therefore\ \Delta_B^h = 0.35 mm$$

$$\Rightarrow\ (1kN)(\Delta_B^v) = 0.00332 kN\cdot m$$

$$\therefore\ \Delta_B^v = 3.32 mm$$

4.2 Debido a cambios de temperatura y errores de fabricación

Al variar la temperatura de un elemento, su longitud también cambia. Un incremento de temperatura causa la expansión de un elemento, en tanto que una disminución térmica genera una contracción. En cualquier caso, el cambio de longitud δ se expresa como:

$$\delta = \alpha(\Delta T)L$$

Donde:

α : **Coeficiente de dilatación térmica.**

L : **Longitud del elemento.**

ΔT : **Cambio de temperatura.**

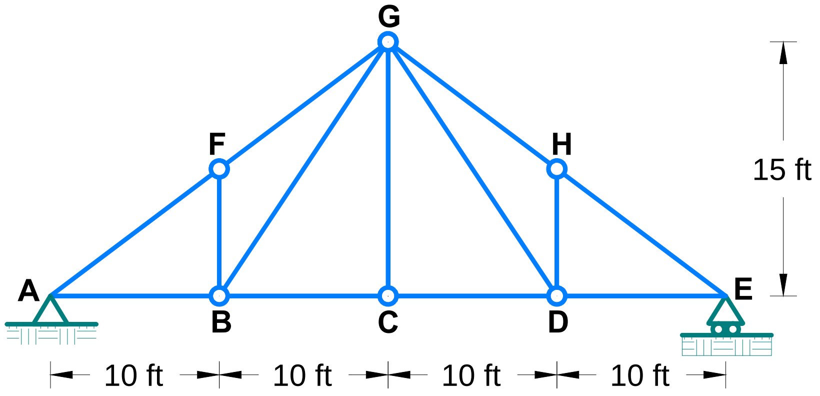
Si las barras de una armadura cambian de longitud simultáneamente debido a carga, cambio de temperatura y errores de fabricación, entonces la deformación del elemento (Δ) es igual a la suma de los diferentes efectos, es decir:

$$\Delta = \frac{FL}{EA} + \alpha(\Delta T)L + \Delta L_{fabricación}$$

La forma general del trabajo virtual para armaduras es:

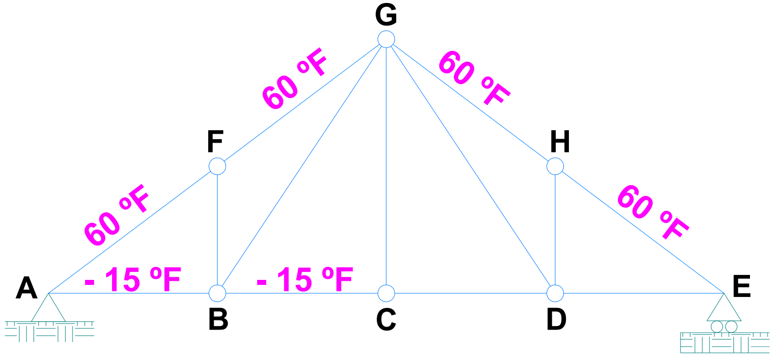
$$\boxed{1(\Delta) = \sum F_v\left[\frac{FL}{EA} + \alpha(\Delta T)L + \Delta L_{fabricación}\right]}$$

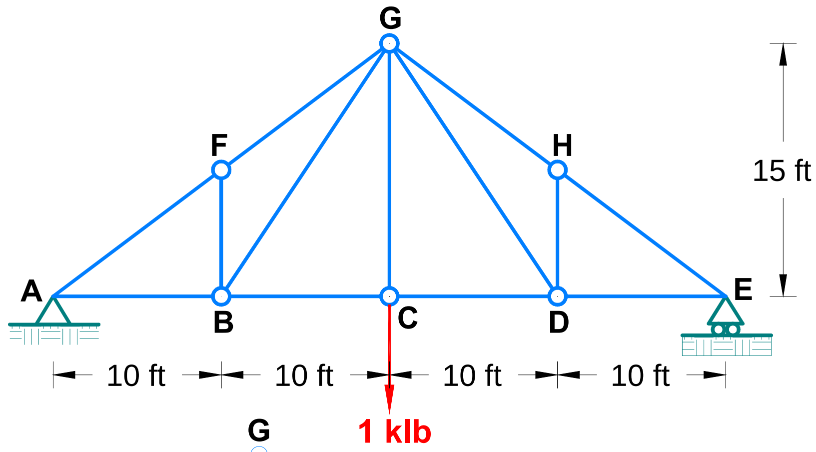
Ejemplo: Determine la deflexión vertical en el nudo C de la armadura, causada por la baja de temperatura de 15 ºF en los elementos AB y BC y por el incremento de temperatura de 60 ºF en los elementos AF, FG, GH y EH. Considerar: $\alpha = 6.5 \times 10^{-6} (°F)^{-1}$



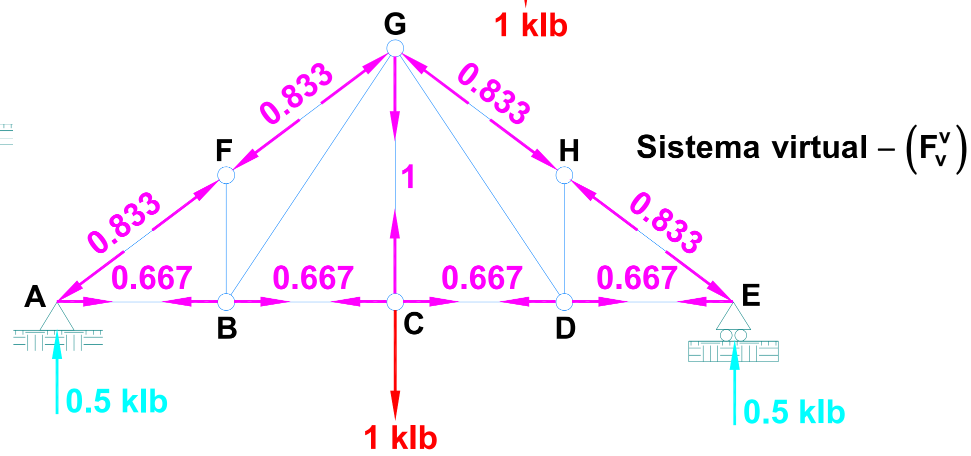
Solución.

- Colocamos los elementos que se encuentran sometidos a cambio de temperatura:





- Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^v) de cada elemento:



Calculamos la deflexión en el nudo C:

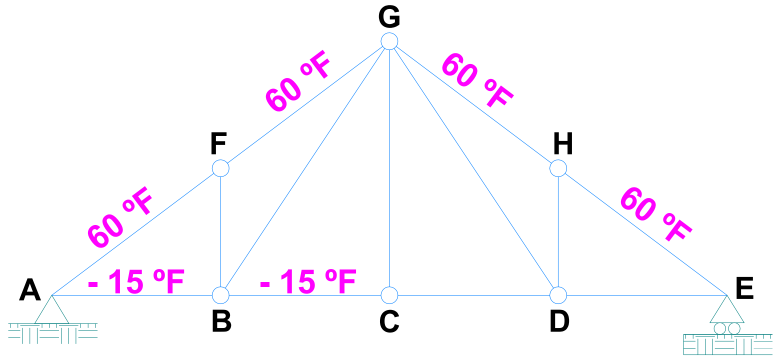
Elemento	ΔT (°F)	F_v^v (klb)	L (ft)	α $(°F)^{-1}$	$F_v^v(\Delta T \alpha L)$ (klb.ft)
AB	-15	0.667	10.0	$6.5x10^{-6}$	-0.00065
BC	-15	0.667	10.0	$6.5x10^{-6}$	-0.00065
AF	60	-0.833	12.5	$6.5x10^{-6}$	-0.00406
FG	60	-0.833	12.5	$6.5x10^{-6}$	-0.00406
GH	60	-0.833	12.5	$6.5x10^{-6}$	-0.00406
EH	60	-0.833	12.5	$6.5x10^{-6}$	-0.00406
				Σ	-0.01754

$$\Rightarrow \quad (1\text{klb})\left(\Delta_C^v\right) = -\ \mathbf{0.01754\ klb \cdot ft}$$

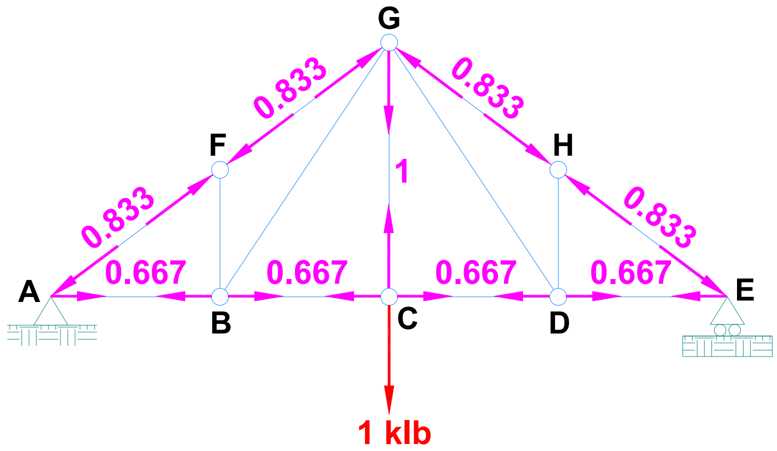
$$\Delta_C^v = -\ 0.01754\,\text{ft} \times \frac{12\,\text{in}}{1\,\text{ft}}$$

$$\Delta_C^v = -\ 0.21048\,\text{in}$$

$$\therefore\ \Delta_C^v = 0.211\,\text{in}\ (\uparrow)$$

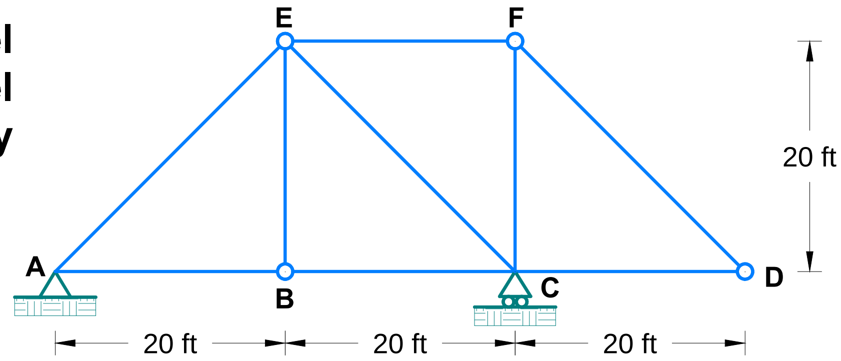


Sistema real – ΔT



Sistema virtual – (F_v^v)

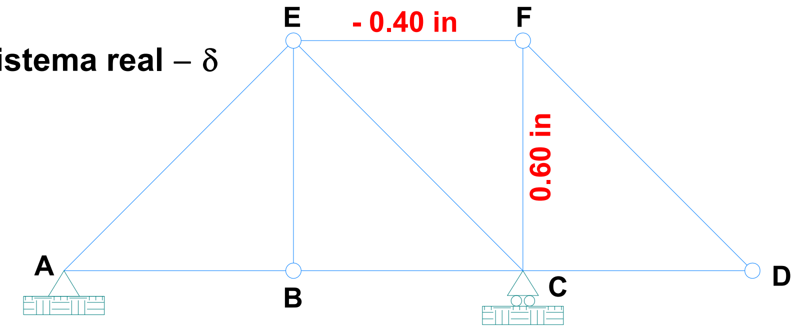
Ejemplo: **Determine la deflexión vertical en el nudo D de la armadura, si el elemento CF es 0.60 in más largo y el elemento EF es 0.40 in más corto.**

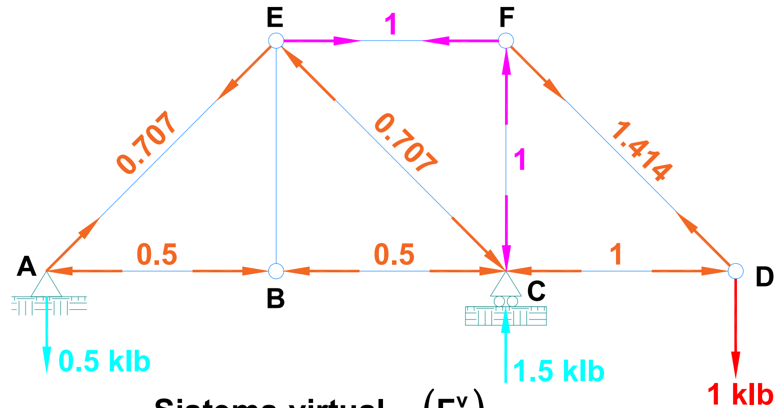


Solución.

- **Colocamos los elementos que presentan errores de fabricación:**

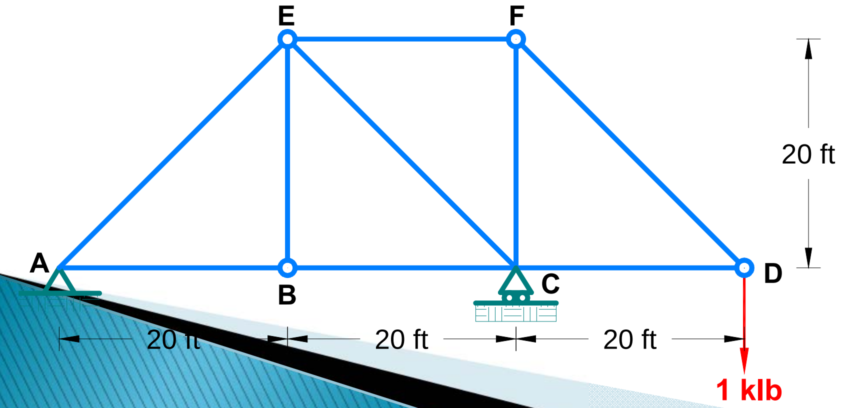
Sistema real – δ





Sistema virtual – $\left(F_v^v\right)$

- **Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^v) de cada elemento:**



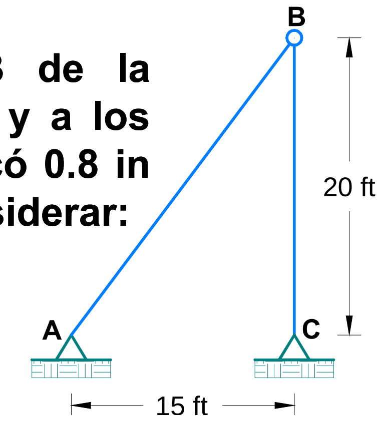
- **Calculamos la deflexión en el nudo D:**

Elemento	δ (in)	F_v^v (klb)	$F_v^v(\delta)$ (klb.in)
CF	0.60	-1.00	-0.60
EF	-0.40	1.00	-0.40
		Σ	-1.00

$$\Rightarrow (1\text{klb})\left(\Delta_D^v\right) = -1.0\ \text{klb}\cdot\text{in} \qquad \therefore\ \Delta_D^v = 1.0\ \text{in}\ (\uparrow)$$

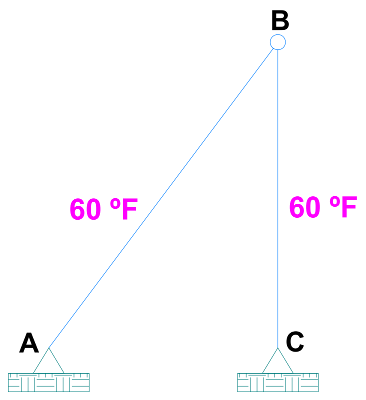
Ejemplo: Determine el desplazamiento horizontal en el nudo B de la armadura, debido al incremento de temperatura de 60 ºF y a los siguientes errores de fabricación: el elemento BC se fabricó 0.8 in más corto y el elemento AB se fabricó 0.2 in más larga. Considerar:

$$\alpha = 6.5\times10^{-6}\,(^{\circ}F)^{-1}$$

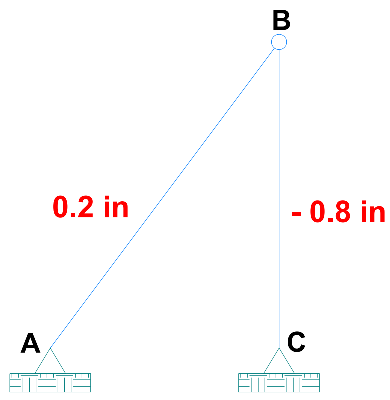


Solución.

- Colocamos los elementos que se encuentran sometidos a cambio de temperatura, errores de fabricación.

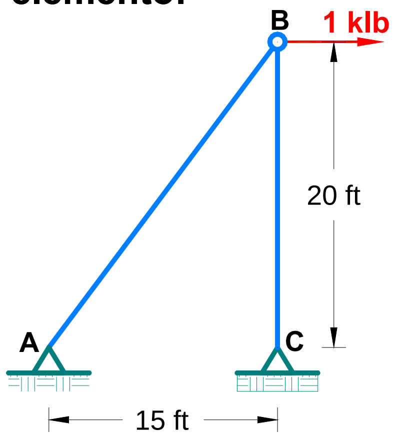


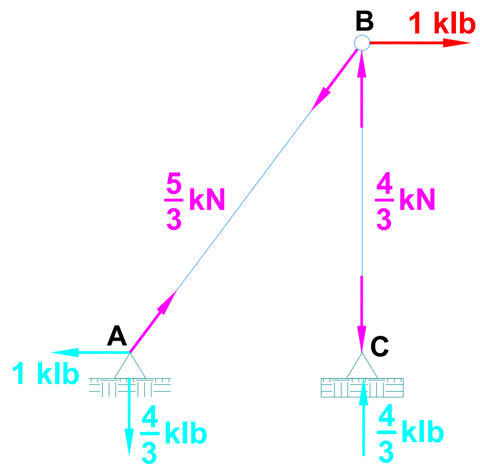
Sistema real $-\ \Delta T$



Sistema real $-\ \delta$

- Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^h) de cada elemento:





Sistema virtual $-\ (F_v^h)$

- Calculamos el desplazamiento en el nudo B:

Elemento	ΔT (ºF)	L (in)	α $(^{\circ}F)^{-1}$	F_v^h (in)	$F_v^h(\Delta T\alpha L)$ (klb.in)	δ (in)	$F_v^v(\delta)$ (klb.in)
AB	60	300	6.5×10^{-6}	1.67	0.20	0.20	0.33
BC	60	240	6.5×10^{-6}	-1.33	-0.12	-0.80	1.07
				Σ	0.07		1.40

$$\Rightarrow (1\text{klb})(\Delta_B^h) = F_v^h(\alpha\Delta TL) + F_v^h(\delta)$$

$$(1\text{klb})(\Delta_B^h) = (0.07 + 1.40)\ \text{klb}\cdot\text{in}$$

$$\therefore\ \Delta_B^h = 1.47\ \text{in}\ (\rightarrow)$$

4.3 Cálculo de los desplazamientos generados por asentamientos en los apoyos

Las estructuras cimentadas en suelos compresibles (arcillas blandas o arena suelta, por ejemplo) frecuentemente experimentan asentamientos importantes. Estos asentamientos generan rotación en los elementos y desplazamiento de los nudos.

Si una estructura es determinada, no se generan esfuerzos internos por el movimiento de un apoyo puesto que la estructura tiene la posibilidad de ajustarse a la nueva posición de los apoyos. Por otro lado, los asentamientos diferenciales de los apoyos inducen fuerzas internas grandes en estructuras indeterminadas. La magnitud de estas fuerzas es una función de la rigidez del elemento.

El trabajo virtual proporciona un método sencillo para evaluar los desplazamientos y las rotaciones producidas por movimientos de los apoyos. Con objeto de calcular un desplazamiento debido al movimiento en un apoyo, se aplica una carga virtual en el punto y en la dirección del desplazamiento deseado. La carga virtual y sus reacciones constituyen el sistema W_{vi}. Al someterse la estructura a los movimientos específicos del apoyo, se realiza trabajo externo tanto para la carga virtual como por sus reacciones al desplazarse. Puesto que un movimiento del apoyo no genera distorsión interna de los elementos estructurales si la estructura es determinada, la energía virtual de deformación es cero.

$$\boxed{W_{vi} = \sum F_v(\delta) = 0}$$

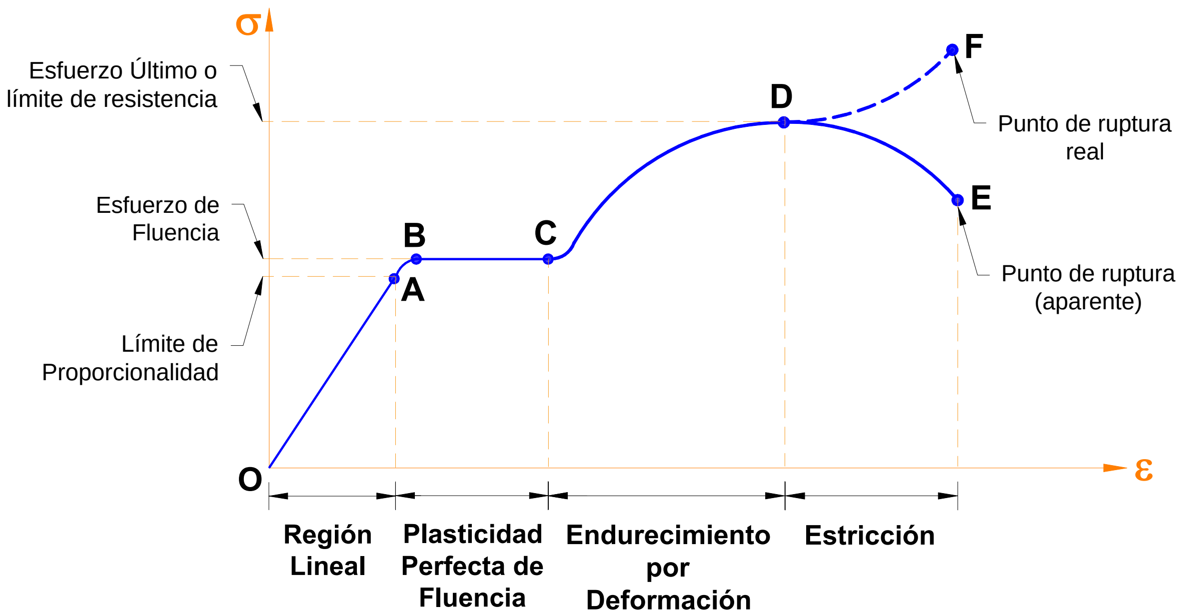
Comportamiento Inelástico:

La expresión $\sum F_v \left(\frac{FL}{EA}\right)$, se basa en la hipótesis que todos los elementos se comportan elásticamente, estos es, que el nivel de esfuerzo no excede el límite proporcional σ_{PL} del material.

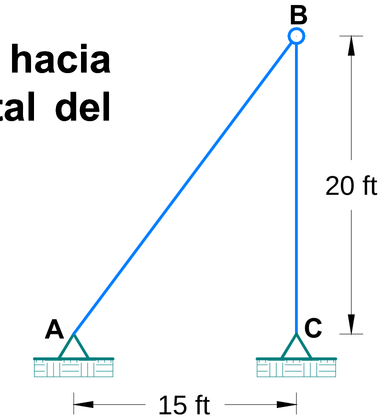
Para ampliar el concepto de trabajo virtual a armaduras que contengan barras esforzadas más allá del límite proporcional en la región inelástica, se debe tener el diagrama de esfuerzo – deformación unitaria del material.

Para determinar la deformación axial de un elemento, se calcula el esfuerzo en el elemento y con éste se halla la deformación unitaria, a partir de la cual se calcula el cambio de longitud ΔL utilizando la relación básica:

$$\boxed{\Delta L = \varepsilon L}$$

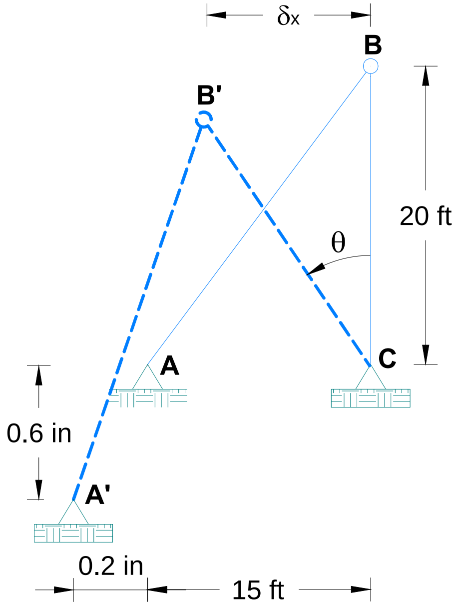


Ejemplo: Si el apoyo A de la armadura se asienta 0.6 in y se mueve hacia la izquierda 0.2 in, determinar el desplazamiento horizontal del nudo B y la rotación θ de la barra BC.



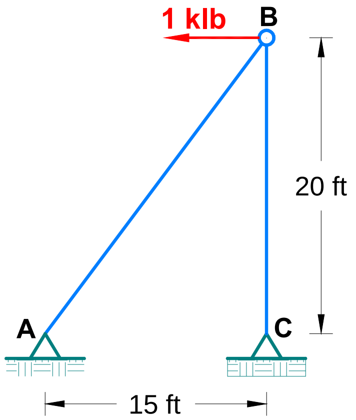
Solución.

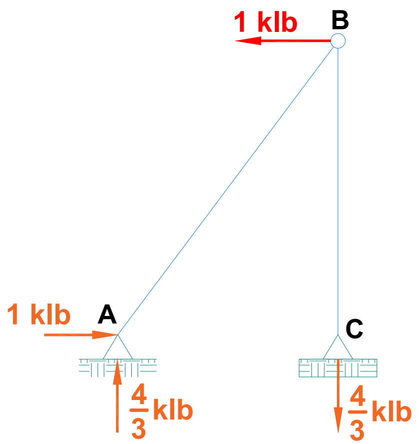
Representamos la configuración de la deformada:



Configuración de la deformada

Calculamos el desplazamiento horizontal en el nudo B:





Sistema virtual – $\left(F_v^h\right)$

Como no se generan fuerzas internas (F) en los elementos por efecto del movimiento, entonces:

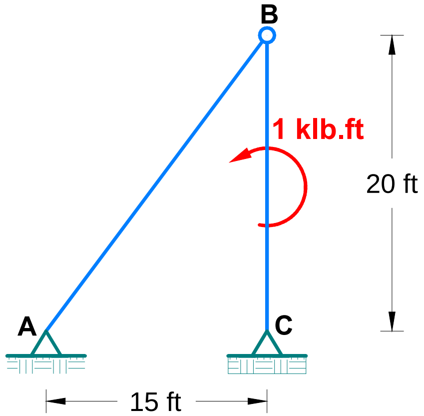
$$\sum F_v(\delta) = 0$$

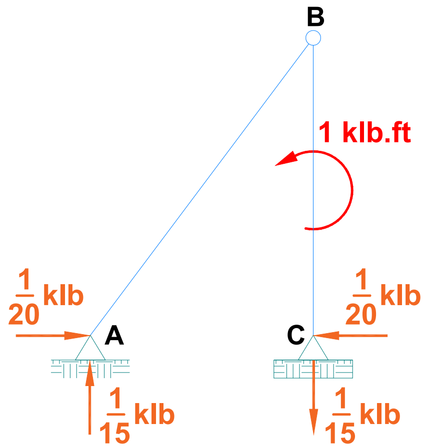
$$\underbrace{(1\text{klb})}_{F_v^h}\underbrace{(\delta_x)}_{\delta_B^h} + \underbrace{(-1\text{klb})}_{F_v^{Ah}}\underbrace{(0.2\text{in})}_{\delta_h^A} + \underbrace{\left(-\frac{4}{3}\text{klb}\right)}_{F_v^{Av}}\underbrace{(0.6\text{in})}_{\delta_v^A} = 0$$

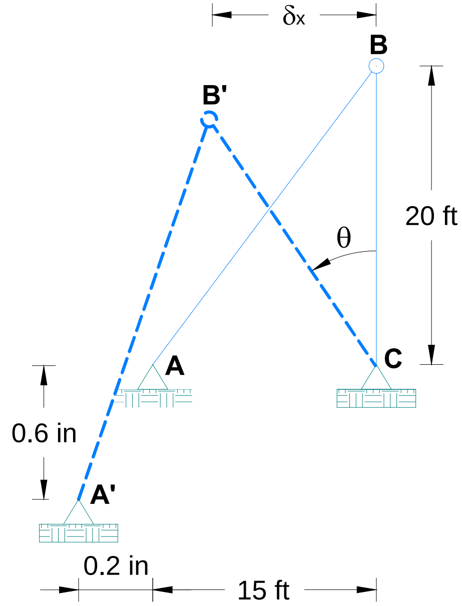
$$\delta_x = 0.2 + 0.8 = 1.0\text{ in} \quad \therefore \quad \delta_B^h = 1.0\text{ in}\ (\leftarrow)$$

Calculamos la rotación de la barra BC:

Para calcular la rotación del elemento BC, se aplica un momento virtual de 1 klb.ft al elemento BC en cualquier lugar entre sus extremos y se calculan las reacciones en sus apoyos.







El trabajo virtual generado por un momento unitario M, utilizado como carga virtual es igual a M$_v$.θ:

$$\sum\left[F_v(\delta)+M_v(\theta)\right]=0$$

$$\underbrace{\left(1\text{klb}\cdot\text{ft}\times\frac{12\text{in}}{\text{ft}}\right)}_{M_v}\underbrace{(\theta)}_{\theta_{BC}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{20}\text{klb}\right)}_{F_v^{Ah}}\underbrace{(0.2\text{in})}_{\delta_h^A}+\underbrace{\left(-\frac{1}{15}\text{klb}\right)}_{F_v^{Av}}\underbrace{(0.6\text{in})}_{\delta_v^A}=0$$

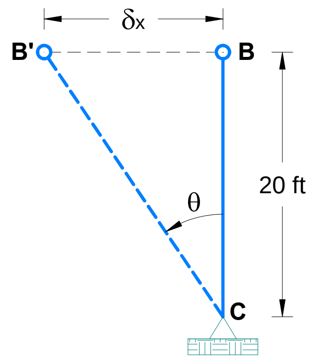
$$\Rightarrow\ 12\theta_{BC}=0.01+0.04=0.05$$

$$\therefore\ \theta_{BC}=0.00417\text{ rad}$$

Otra forma de calcular la rotación de la barra BC:

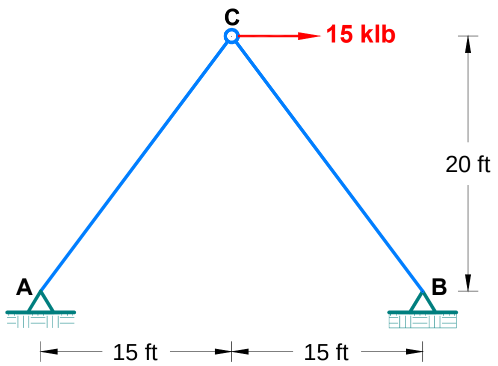
$$\Rightarrow\ \theta_{BC}=\frac{\delta_x}{20}=\frac{1\text{ in}\times\left(\frac{1\text{ft}}{12\text{in}}\right)}{20\text{ ft}}$$

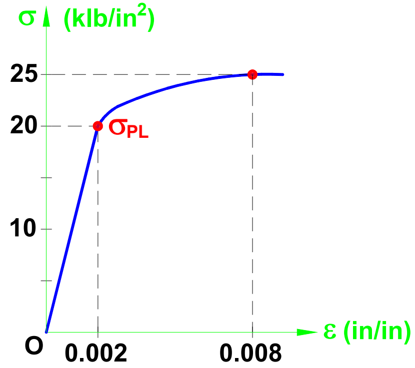
$$\therefore\ \theta_{BC}=0.00417\text{ rad}$$



UDHCONECTA.COM

Ejemplo: Calcular el desplazamiento vertical δ_y del nudo C para la armadura mostrada. Las barras de la armadura se fabrican con una aleación de aluminio cuyo diagrama esfuerzo – deformación unitaria se muestra y es válido para tensión y compresión uniaxiales. El límite proporcional, que se presenta para un esfuerzo de 20 ksi, sirve para distinguir el comportamiento elástico e inelástico. En la región elástica E = 10000 ksi. Considerar:

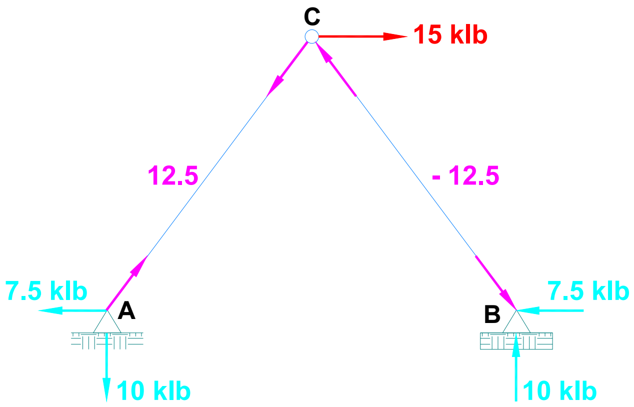




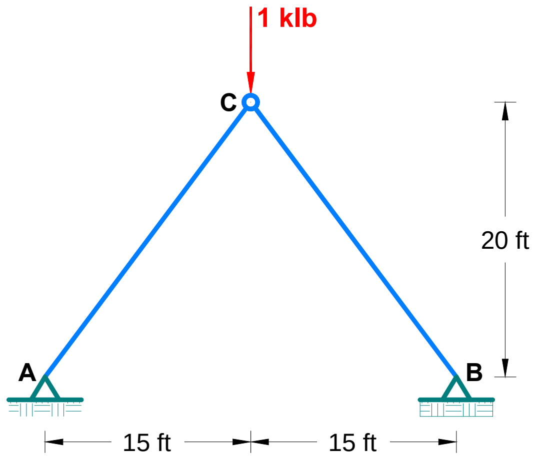
Solución.

$$A_{AC} = 1\ in^2 \qquad A_{BC} = 0.5\ in^2$$

- Calculamos las fuerzas internas (F) de cada elemento:



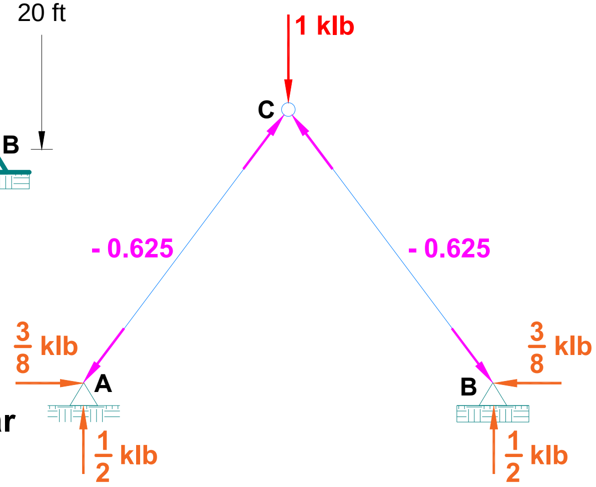
Sistema real – F



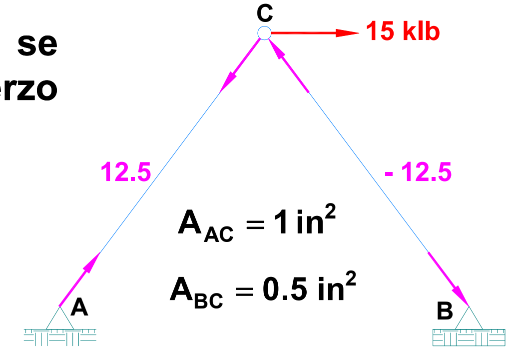
- Ubicamos la carga unitaria y calculamos las fuerzas internas (F_v^v) de cada elemento:

Sistema virtual para determinar

$$\left(\delta_C^v\right)\left(F_v^v\right)$$



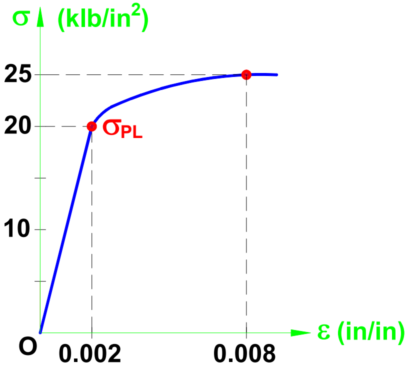
Analizamos si las barras se comportan elásticamente o se encuentran en la región inelástica, calcularemos primero el esfuerzo axial y lo compararemos con el esfuerzo del límite proporcional:



Barra AC:

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{12.5}{1} = 12.5\,\frac{klb}{in^2} \leq \sigma_{PL} = 20\,\frac{klb}{in^2} \quad \therefore \left(\text{Se encuentra en el rango elástico}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{AC} = \frac{F_{AC}L_{AC}}{E_{AC}A_{AC}} = \frac{12.5\left(25\,ft \times \frac{12\,in}{ft}\right)}{10000(1)} \quad \therefore \quad \delta_{AC} = 0.375\text{ in}$$

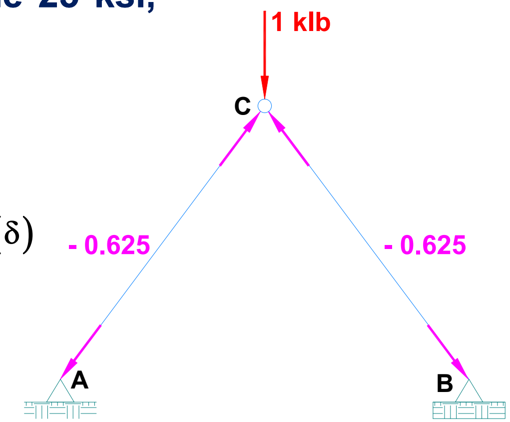


Barra BC:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{12.5}{0.5} = 25\,\frac{klb}{in^2} > \sigma_{PL} = 20\,\frac{klb}{in^2} \quad \therefore \left(\text{Se encuentra en la región inelástica}\right)$$

Entonces para calcular δ_{BC}, debemos obtener ε para un esfuerzo de 25 ksi, siendo igual a $\varepsilon = 0.008$

$$\Rightarrow \quad \delta_{BC} = \varepsilon_{BC}L_{BC} = (-0.008)\left(25\,ft \times \frac{12\,in}{ft}\right) \quad \therefore \quad \delta_{BC} = -2.4\text{ in}$$



Calculamos el desplazamiento vertical en el nudo C: $(1klb)\left(\delta_C^v\right) = \sum F_v^h(\delta)$

$$\Rightarrow \quad (1klb)\left(\delta_C^v\right) = \underbrace{(-0.625klb)}_{F_v^{AC}}\underbrace{(0.375in)}_{\delta_{AC}} + \underbrace{(-0.625klb)}_{F_v^{BC}}\underbrace{(-2.4in)}_{\delta_{BC}} = 1.27\text{ in}$$

$$\therefore \quad \delta_C^v = 2.4\text{ in } (\downarrow)$$