

UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENIERÍA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## UNIDAD 3: ARCOS TRIARTICULADOS

**DOCENTE:** Mg. Luis Fernando Narro Jara

HUÁNUCO, 2020

## **Unidad 3. ARCOS TRIARTICULADOS**

### **CONTENIDO**

- 1. ANÁLISIS CINEMÁTICO**
- 2. CÁLCULO ANALÍTICO**
  - 2.1. ARCO TRIARTICULADO SIN TIRANTE**
  - 2.2. ARCO TRIARTICULADO CON TIRANTE**
- 3. CÁLCULO ANTE CARGAS MÓVILES**



# 1. ANÁLISIS CINEMÁTICO

Un arco triarticulado plano, es un sistema estáticamente determinado, formado por dos barras curvas y unidas por una articulación o rótula.

La condición de estabilidad geométrica del arco se comprueba por la siguiente fórmula:

$$GI = 3D - 2A - R$$

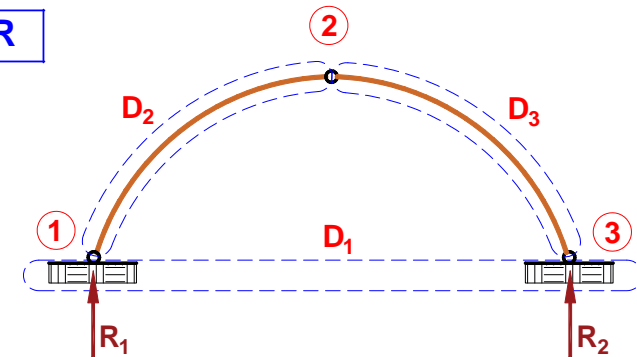
Donde:

GI : Grado de indeterminación del sistema.

D : Número de discos.

A : Número de articulaciones o rótulas simples.

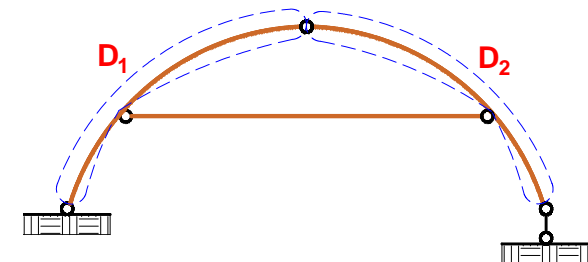
R : Número de reacciones.



El arco sin tirante (refuerzo) unido a la cimentación (tierra) forma tres discos unidos por tres articulaciones, que no están en una misma línea. Tal sistema estructural, **ante la acción de cargas verticales posee componente de reacción horizontal, llamado empuje.**

El arco con tirante está formado por dos discos, unidos por una articulación y una barra, cuyo eje no pasa por la rótula.

Las reacciones en los apoyos y los métodos de cálculo son los mismos que cuando se trata de una viga simple. En el caso del tirante, el empuje lo absorbe dicho elemento y no los apoyos.



## 2. CÁLCULO ANALÍTICO

### 2.1 Arco triarticulado sin tirante

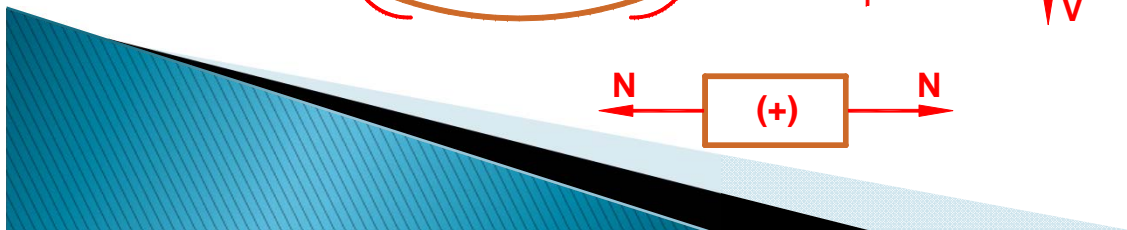
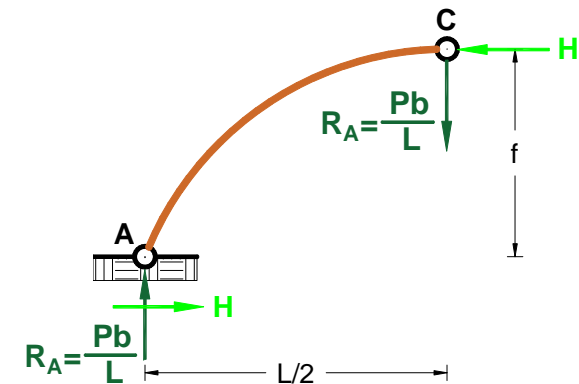
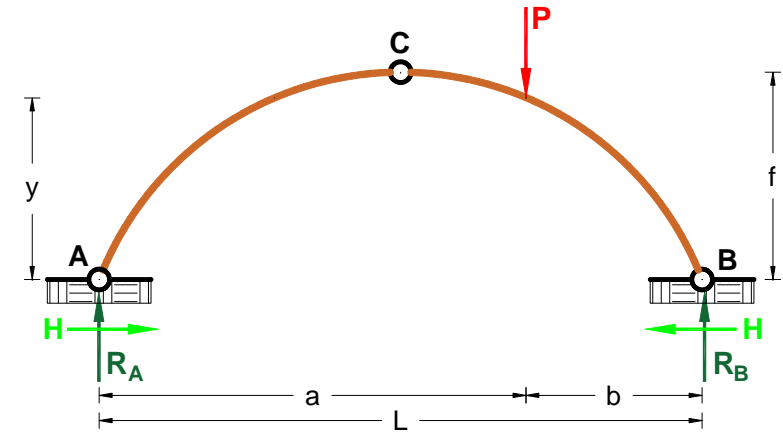
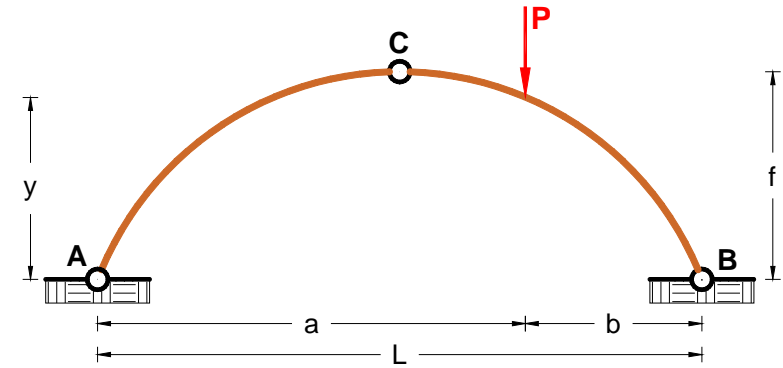
En el arco sin tirante, las reacciones verticales se determinan a partir de la sumatoria de momentos respecto a los apoyos.

$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow P(a) = R_B(L) \quad \therefore R_B = \frac{Pa}{L}$$

$$+\sum M_B^o = 0 \Rightarrow P(b) = R_A(L) \quad \therefore R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$+\sum M_C^o = 0 \Rightarrow H(f) = \frac{Pb}{L} \left( \frac{L}{2} \right) \quad \therefore H = \frac{Pb}{2f}$$

Para poder encontrar las ecuaciones de momento flector, fuerza cortante y fuerza axial, debemos tener en cuenta la convención de signos:



Analicemos un tramo, para ello tomaremos un punto referencial K:

👉 **La fuerza axial o normal** en la sección es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas, ubicadas a un lado de la sección, sobre el eje paralelo a la tangente que forma con el eje del arco.

La fuerza normal es positiva en el caso de tracción y negativa en compresión.

$$N_k = -V_k^v \operatorname{sen} \varphi - H \operatorname{cos} \varphi$$

👉 **La fuerza cortante** en la sección es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas, ubicadas a un lado de la sección, sobre el eje perpendicular a la tangente que forma con el eje del arco.

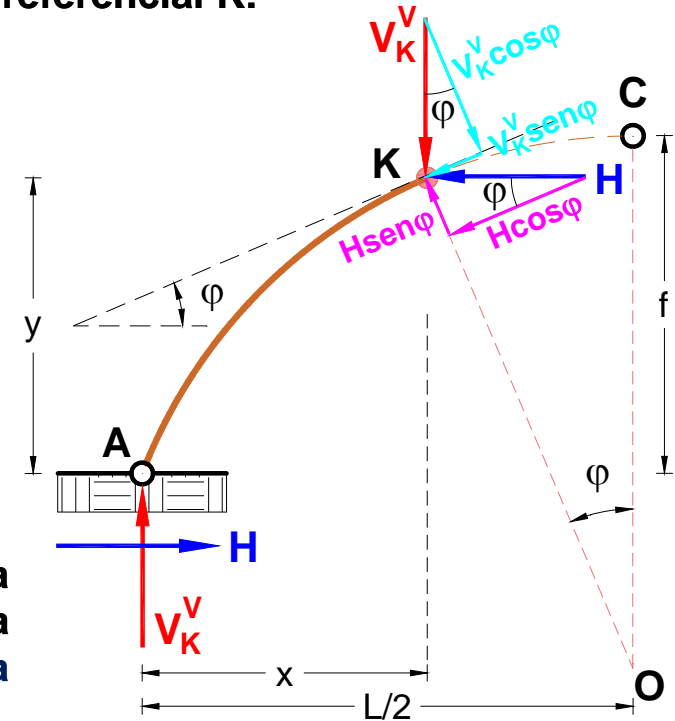
Las fuerzas cortantes serán positivas si gira en sentido horario la sección analizada del arco. En caso contrario será negativa.

$$V_k = V_k^v \operatorname{cos} \varphi - H \operatorname{sen} \varphi$$

👉 **El momento flector** en tal punto del arco es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas ubicadas a un lado de la sección, es decir, izquierda o derecha.

El momento flector es positivo si tracciona las fibras inferiores del arco y es negativo en caso opuesto.

$$M_k = M_k^v - Hy$$



Por lo tanto, los momentos flectores, fuerzas cortantes y fuerzas axiales en una determinada sección y bajo la acción de fuerzas verticales, se determinarán a través de la siguiente fórmula:

$$M_k = M_k^v - Hy \quad V_k = V_k^v \cos \varphi - H \sin \varphi \quad N_k = -(V_k^v \sin \varphi + H \cos \varphi) \quad \dots (1)$$

Donde:

$M_k^v$ ;  $V_k^v$ : momento y fuerza cortante en la sección "K" de la viga simplemente apoyada con longitud igual a la luz del arco.

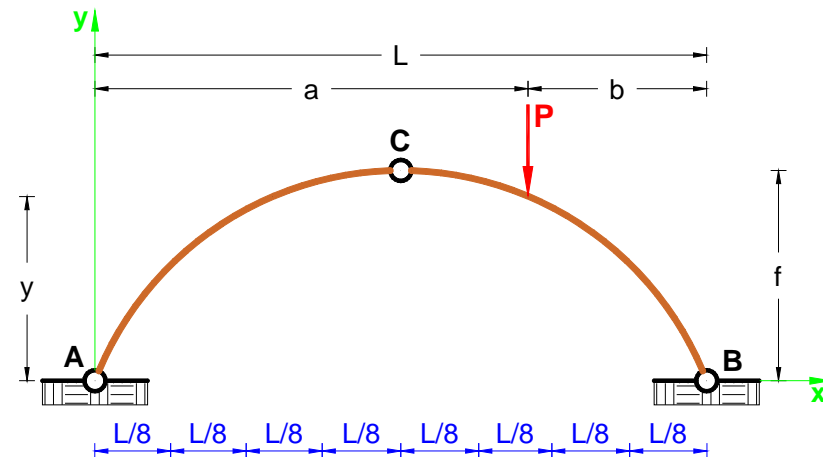
$y$ : ordenada, calculada de la línea que une los apoyos hasta el centro de la sección analizada (hasta el eje del arco).

$\varphi$ : ángulo que forma la tangente en un punto determinado con el eje del arco y la línea horizontal.

$H$ : empuje del arco.

**NOTA:** Para efectos de cálculo se divide el arco en tramos, cuyo número no debe ser menor de ocho.

También es necesario calcular las secciones infinitamente cercanas al punto de acción de la carga puntual, es decir, a la izquierda (-0) y a la derecha (+0).



El ángulo  $\varphi$  se determina a partir de la relación:  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$  donde  $y = f(x)$  es la ecuación de la forma del arco.

Si el arco tiene forma de **parábola cuadrática**,  $y = \frac{4f}{L^2}x(L-x) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L-2x)$  entonces:

En el caso que el arco tiene la forma **sinoidal**,  $y = f \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi f}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$  se tendrá:

Para el caso de arco, cuyo eje tiene la forma de un arco de **circunferencia**, es mejor trabajar con las siguientes ecuaciones:

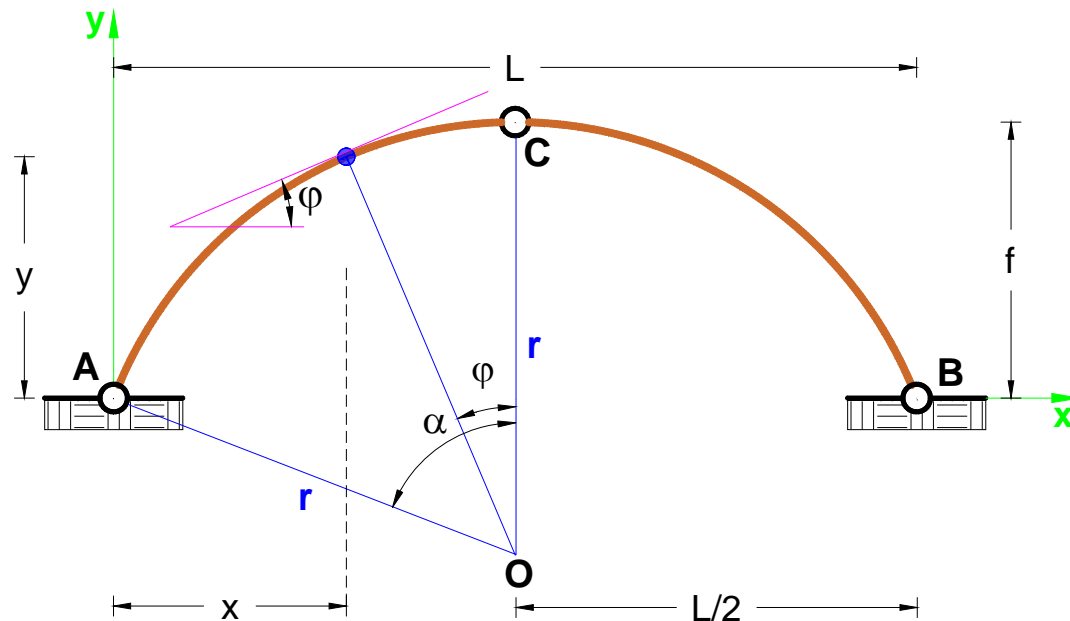
$$x = r(\sin \alpha - \sin \varphi)$$

$$y = r(\cos \varphi - \cos \alpha)$$

Siendo:

$$\sin \alpha = \frac{L}{2r} \quad \cos \alpha = \frac{r-f}{r}$$

$$r = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2}$$



**Ejemplo:** Analizar un arco triarticulado sin tirante, tal como se muestra en la figura, siendo la ecuación de su eje tipo sinoidal.

### Solución.

Realizamos el DCL del arco ACB para obtener las reacciones en los apoyos:

$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow V_B(20) = 20(15) + 20(5) \quad \therefore V_B = 20 \text{ kN}$$

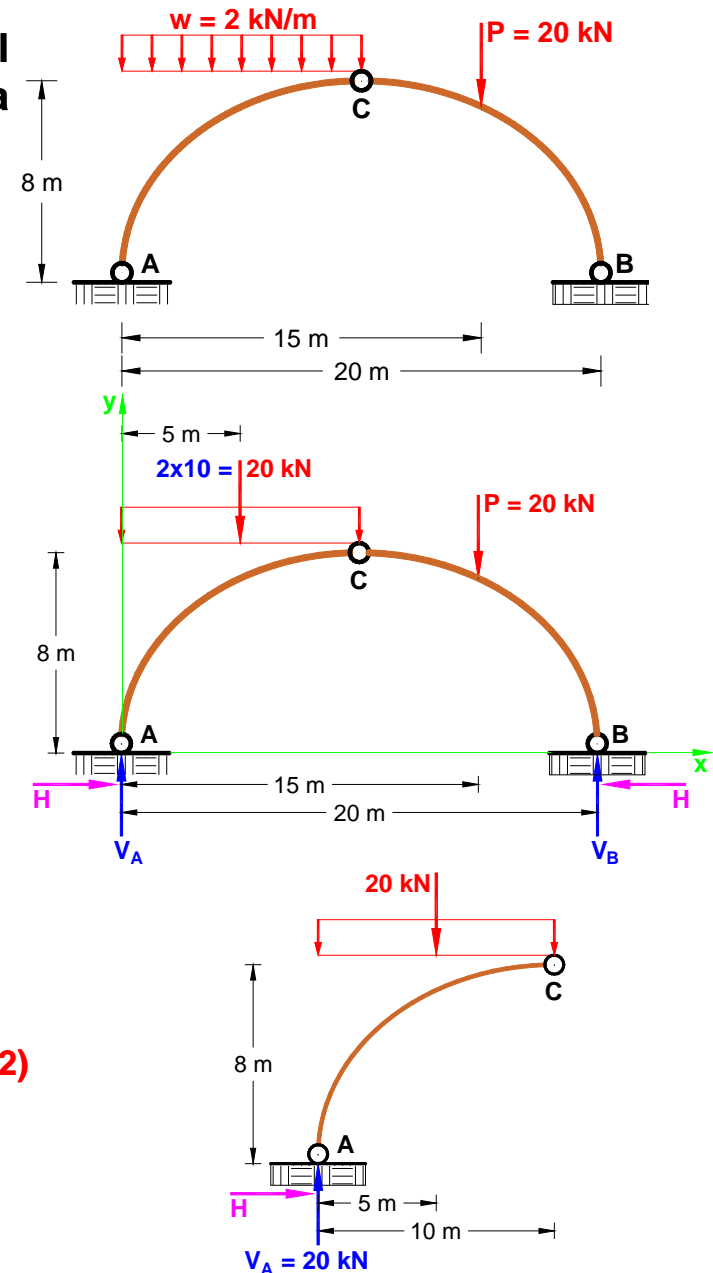
$$+\sum M_B^o = 0 \Rightarrow 20(5) + 20(15) = V_A(20) \quad \therefore V_A = 20 \text{ kN}$$

$$+\sum M_C^o = 0 \Rightarrow 20(5) - 20(10) + H(8) = 0 \quad \therefore H = 12.5 \text{ kN}$$

Debido a que la ecuación de su eje es de tipo sinoidal, calculamos sus características geométricas:

Sabemos que:  $y = f \text{sen} \frac{\pi X}{L} = 8 \text{sen} \frac{\pi X}{20} \dots (1)$

Además:  $\tan \varphi = \frac{\pi f}{L} \cos \frac{\pi X}{L} = \frac{8\pi}{20} \cos \frac{\pi X}{20} = \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi X}{20} \dots (2)$



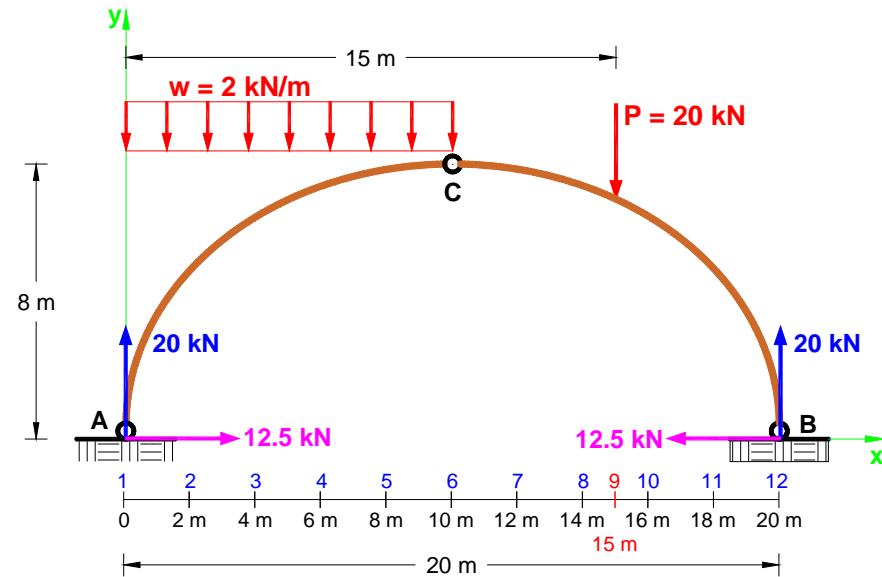


Vamos a asumir 10 intervalos y le corresponde 2m a cada uno. También es necesario calcular las secciones infinitamente cercanas al punto de acción de la carga puntual, es decir, a la izquierda (-0) y a la derecha (+0), como se muestra a continuación:

Obtenemos los valores para las ecuaciones (1) y (2), tabulando:

$$y = 8 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{20}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi x}{20}$$



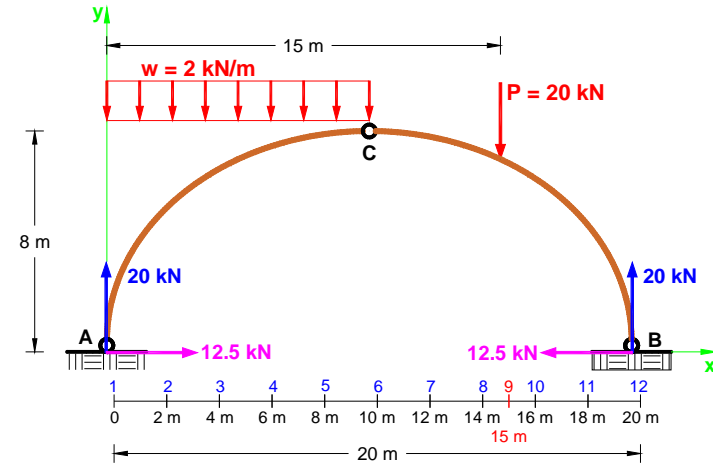
Nº de Sección	x (m)	y (m)	$\tan \varphi$	$\varphi$ (rad)	$\operatorname{sen} \varphi$	$\operatorname{cos} \varphi$
1	0	0	1.257	0.899	0.782	0.623
2	2	2.47	1.195	0.874	0.767	0.642
3	4	4.70	1.017	0.794	0.713	0.701
4	6	6.47	0.739	0.636	0.594	0.804
5	8	7.61	0.388	0.370	0.362	0.932
6	10	8	0	0	0	1
7	12	7.61	-0.388	-0.370	-0.362	0.932
8	14	6.47	-0.739	-0.636	-0.594	0.804
9-0	15	5.66	-0.889	-0.726	-0.664	0.748
9+0	15	5.66	-0.889	-0.726	-0.664	0.748
10	16	4.70	-1.017	-0.794	-0.713	0.701
11	18	2.47	-1.195	-0.874	-0.767	0.642
12	20	0	-1.257	-0.899	-0.782	0.623

👉 Obtenemos las fuerzas internas utilizando las siguientes fórmulas:

$$M_k = M_k^V - Hy$$

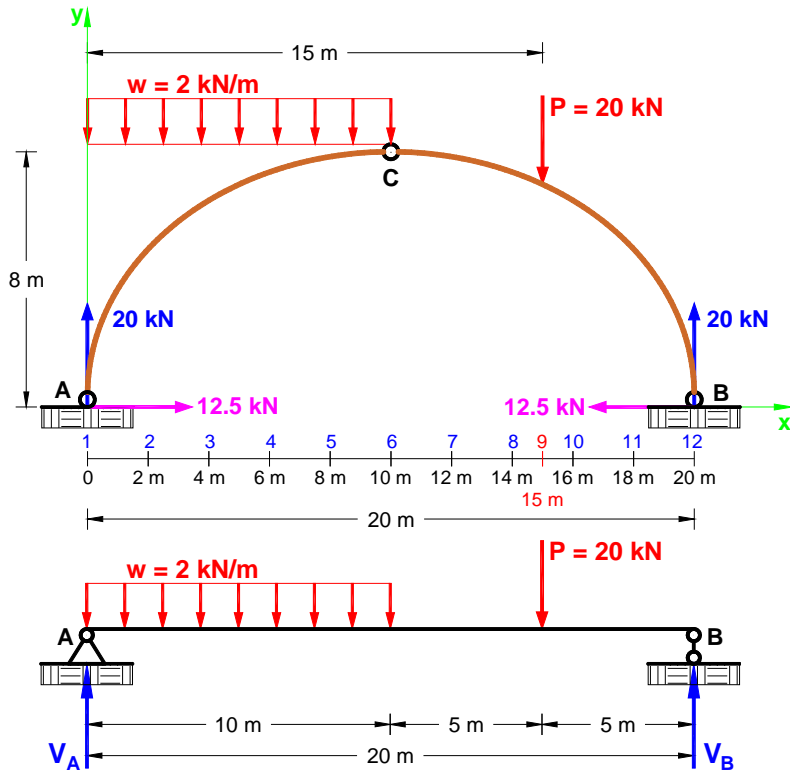
$$V_k = V_k^V \cos \varphi - H \sin \varphi$$

$$N_k = -(V_k^V \sin \varphi + H \cos \varphi)$$

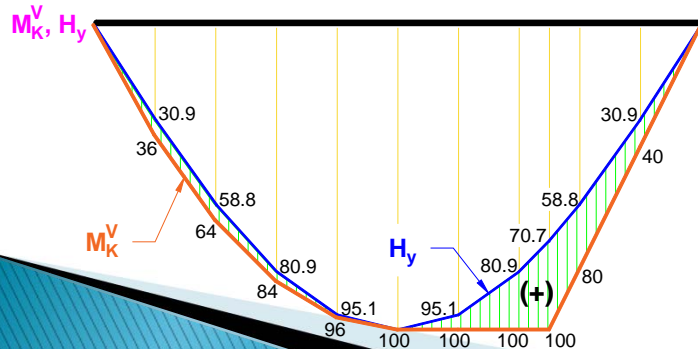


Nº de Sección	x (m)	y (m)	$M_K^V$ (kN.m)	-Hy (kN.m)	$M_K$ (kN.m)	$V_K^V$ (kN)	$V_K^V \cos \varphi$ (kN)	$-H \sin \varphi$ (kN)	$V_K$ (kN)	$V_K^V \sin \varphi$ (kN)	Hcos $\varphi$ (kN)	$N_K$ (kN)
1	0	0	0	0.0	0.0	20.0	12.5	-9.8	2.7	15.6	7.8	-23.4
2	2	2.47	36	-30.9	5.1	16.0	10.3	-9.6	0.7	12.3	8.0	-20.3
3	4	4.70	64	-58.8	5.2	12.0	8.4	-8.9	-0.5	8.6	8.8	-17.3
4	6	6.47	84	-80.9	3.1	8.0	6.4	-7.4	-1.0	4.8	10.1	-14.8
5	8	7.61	96	-95.1	0.9	4.0	3.7	-4.5	-0.8	1.4	11.7	-13.1
6	10	8	100	-100	0	0	0	0	0	0	12.5	-12.5
7	12	7.61	100	-95.1	4.9	0	0	4.5	4.5	0	11.7	-11.7
8	14	6.47	100	-80.9	19.1	0	0	7.4	7.4	0	10.1	-10.1
9-0	15	5.66	100	-70.7	29.3	0	0	8.3	8.3	0	9.3	-9.3
9+0	15	5.66	100	-70.7	29.3	-20.0	-15.0	8.3	-6.6	13.3	9.3	-22.6
10	16	4.70	80	-58.8	21.2	-20.0	-14.0	8.9	-5.1	14.3	8.8	-23.0
11	18	2.47	40	-30.9	9.1	-20.0	-12.8	9.6	-3.2	15.3	8.0	-23.4
12	20	0	0	0	0	-20.0	-12.5	9.8	-2.7	15.6	7.8	-23.4

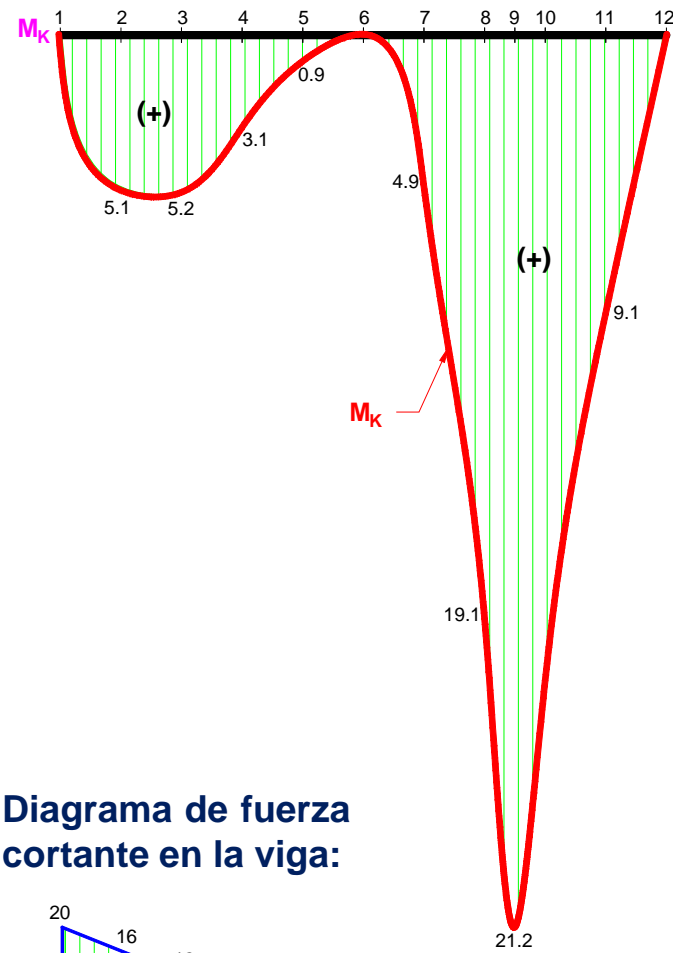
Realizamos los diagramas de fuerzas internas:



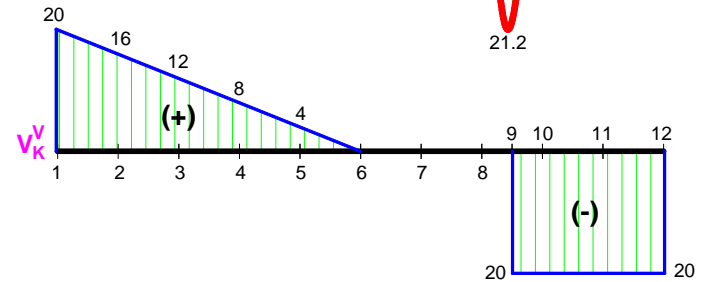
a. Diagramas  $M_K^V$  y  $H_y$ :



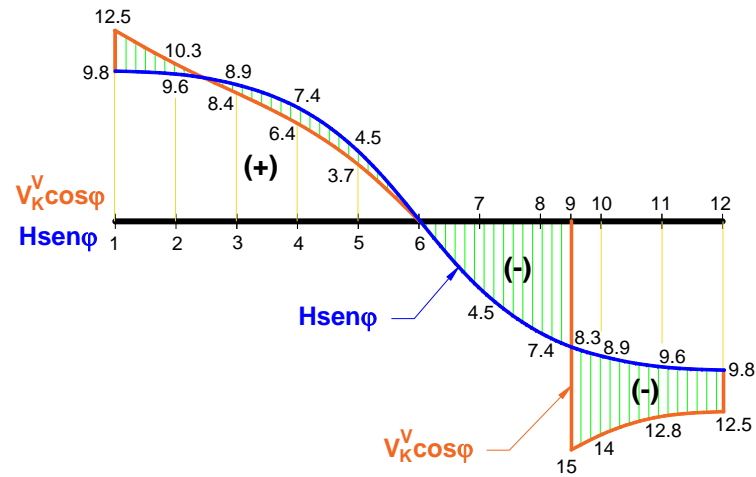
b. Diagrama de momento flector del arco:



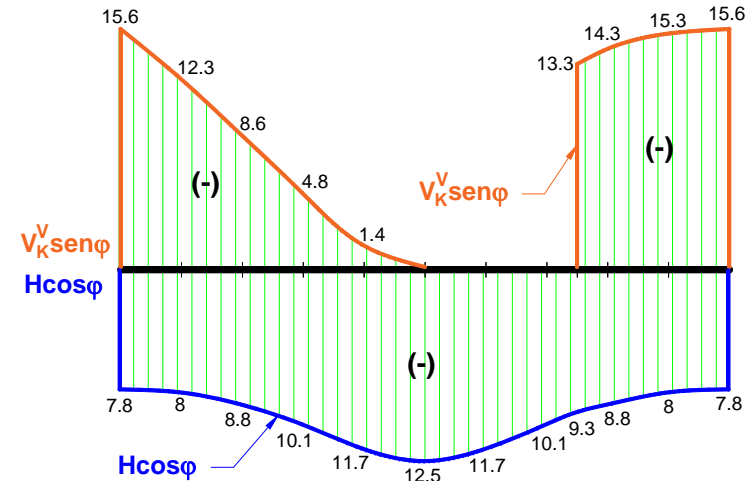
c. Diagrama de fuerza cortante en la viga:



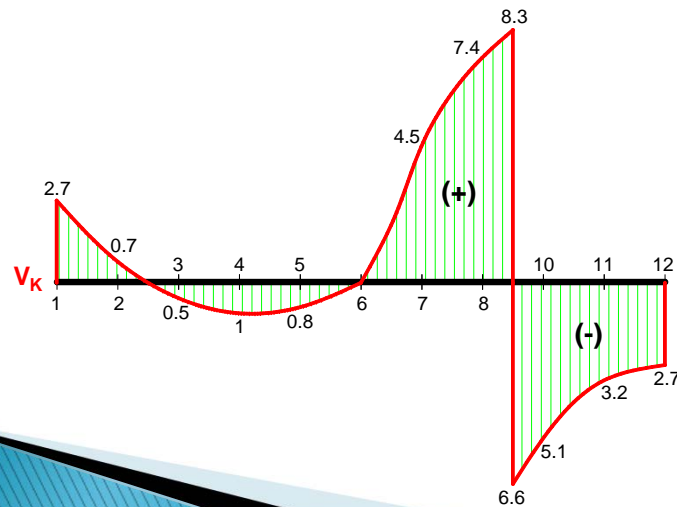
d. Diagramas  $V_K^V \cos \varphi$  y  $H \sin \varphi$ :



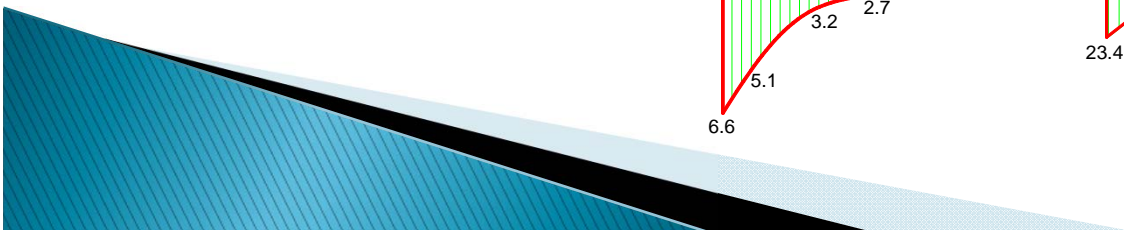
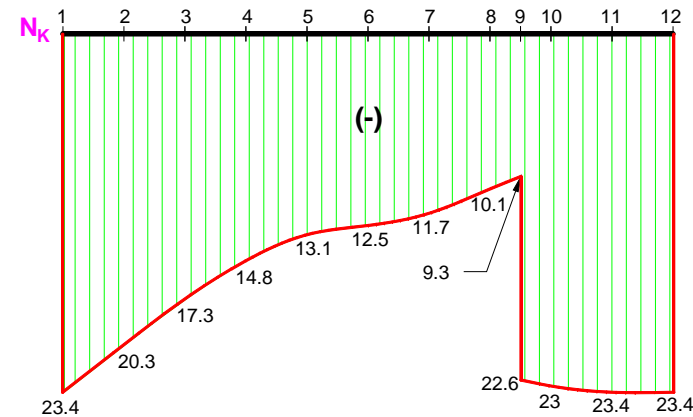
f. Diagramas  $V_K^V \sin \varphi$  y  $H \cos \varphi$ :



e. Diagrama de fuerza cortante en el arco:



g. Diagrama de fuerza axial o normal del arco:



## 2.2 Arco triarticulado con tirante

En el arco con tirante, las reacciones verticales se determinan a partir de la sumatoria de momentos respecto a los apoyos.

$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow P(L-z) = R_B(L)$$

$$\therefore R_B = \frac{P(L-z)}{L}$$

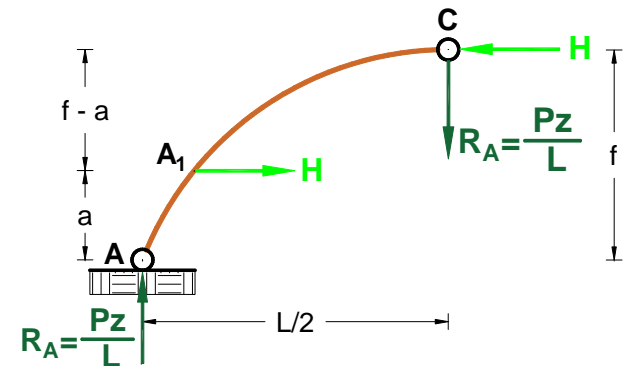
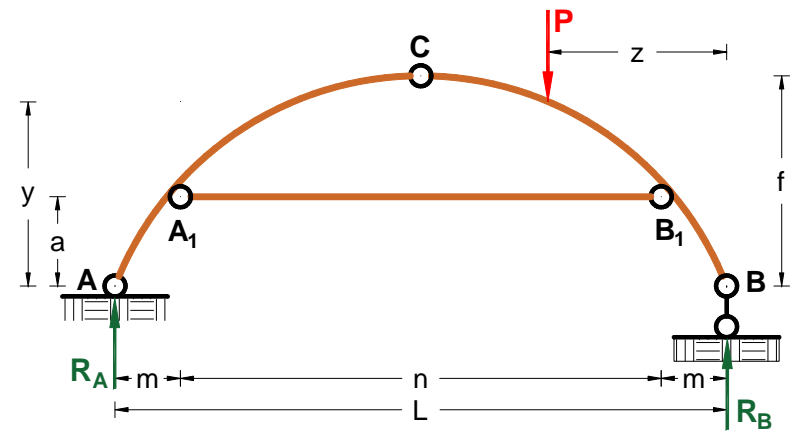
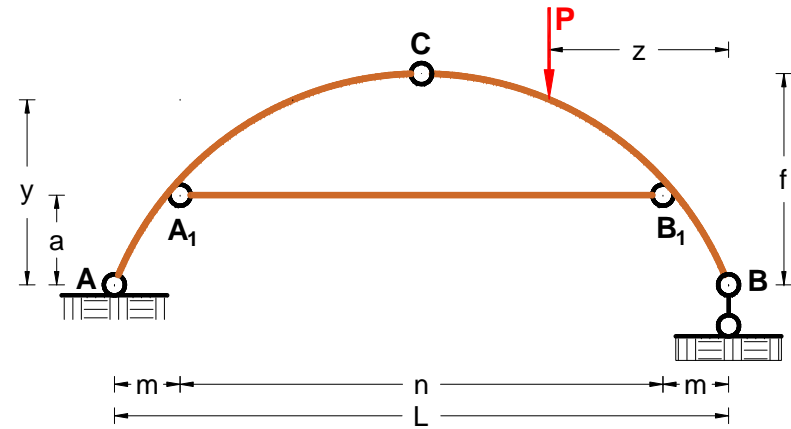
$$+\sum M_B^o = 0 \Rightarrow P(z) = R_A(L)$$

$$\therefore R_A = \frac{Pz}{L}$$

$$+\sum M_C^o = 0 \Rightarrow H(f-a) = \frac{Pz}{L} \left( \frac{L}{2} \right)$$

$$\therefore H = \frac{Pz}{2(f-a)}$$

Para determinar la fuerza que surge en el tirante, se hace un corte y se elaboran las ecuaciones de momentos de las fuerzas ubicadas a la izquierda o derecha de la articulación C, en forma análoga a la obtención del empuje del arco sin refuerzo.



Analicemos un tramo, para ello tomaremos un punto referencial K:

👉 La fuerza axial o normal:  $N_k = -V_k^v \operatorname{sen}\varphi - H \operatorname{cos}\varphi$

👉 La fuerza cortante:  $V_k = V_k^v \operatorname{cos}\varphi - H \operatorname{sen}\varphi$

👉 El momento flector:  $M_k = M_k^v - H(y - a)$

Donde:

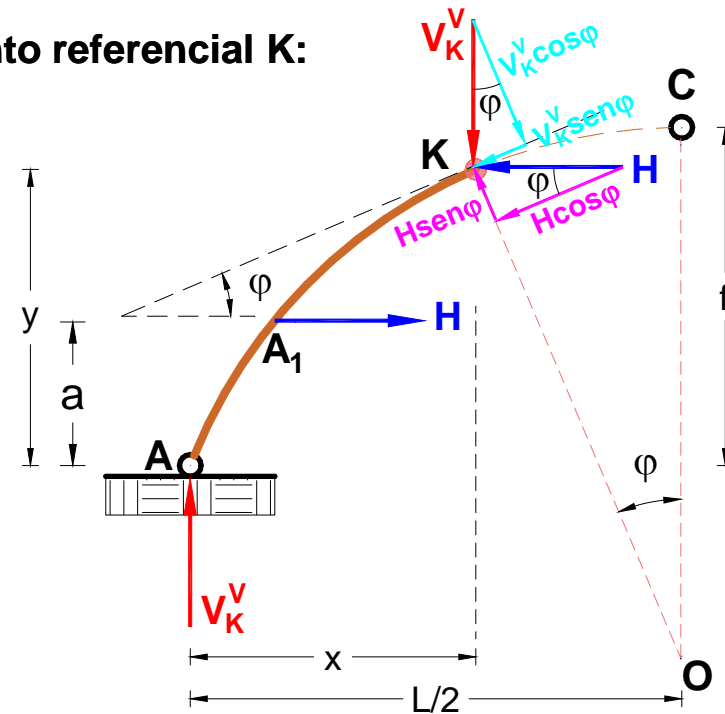
$M_k^v$ ;  $V_k^v$ : momento y fuerza cortante en la sección "K" de la viga simplemente apoyada con longitud igual a la luz del arco.

$y$ : ordenada, calculada de la línea que une los apoyos hasta el centro de la sección analizada (hasta el eje del arco).

$\varphi$ : ángulo que forma la tangente en un punto determinado con el eje del arco y la línea horizontal.

$H$ : fuerza interna en el tirante.

$a$ : distancia de la línea de los apoyos AB hasta el tirante.



**NOTA:** Para efectos de cálculo también se divide el arco en tramos, cuyo número no debe ser menor de ocho. Es necesario calcular las secciones infinitamente cercanas al punto donde se aplica la carga puntual, es decir, a la izquierda (-0) y a la derecha (+0)

Para determinar las características geométricas del eje del arco, se hace de forma análoga al arco sin refuerzo.

En las zonas no cargadas o en las zonas con cargas uniformemente distribuidas, todos los diagramas en dichos tramos son curvos. En los lugares donde actúan las cargas puntuales, en los diagramas se tienen variaciones.

En las secciones donde actúan los momentos, en el diagrama  $M_K$  debe haber una variación igual al valor de dicho momento, y en la sección donde actúa una carga vertical puntual, el diagrama  $M_K$  varía en forma inclinada tangente a la curva del arco y los diagramas  $V_K$  y  $N_K$  tienen variaciones igual a  $P\cos\varphi$  y  $P\sin\varphi$ .

En el punto donde actúe una carga puntual horizontal (en el presente problema en los nudos extremos del tirante), en el diagrama  $M_K$  existirá un pico y en los diagramas  $V_K$  y  $N_K$  se tendrán variaciones iguales a  $H\sin\varphi$  y  $H\cos\varphi$  respectivamente.

Los esfuerzos normales se determinan por la conocida fórmula de resistencia compuesta:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{S} = \frac{N}{A} \pm \frac{6Ne}{bh^2} = \frac{N}{A} \left( 1 \pm \frac{6e}{h} \right)$$

Donde:

$e$  : excentricidad de la acción de la fuerza axial o normal.  $e = \frac{M}{N}$

Para determinar las dimensiones de una sección transversal del arco se utiliza la siguiente fórmula:

$$h = \left( \frac{1}{30} \div \frac{1}{40} \right) L \quad \wedge \quad b = \frac{h}{2}$$

**Ejemplo:** Determine en forma analítica las fuerzas internas en el arco triarticulado con tirante y grafique el diagrama de esfuerzos normales en la sección más peligrosa, considerando que es rectangular. El eje del arco tiene la forma sinoidal.

**Solución.**

Realizamos el DCL del arco ACB para obtener las reacciones en los apoyos:

$$+\sum M_A^O = 0 \Rightarrow V_B(24) = 24(18) + 16(4) \quad \therefore V_B = 20.67 \text{ kN}$$

$$+\sum M_B^O = 0 \Rightarrow 24(6) + 16(20) = V_A(24) \quad \therefore V_A = 19.33 \text{ kN}$$

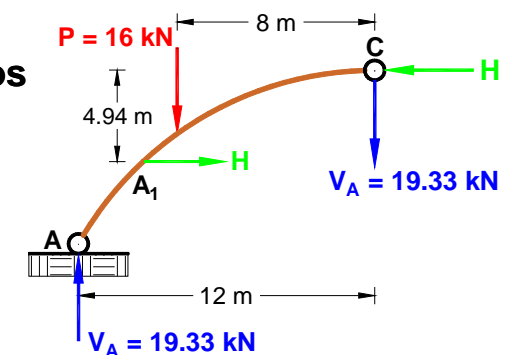
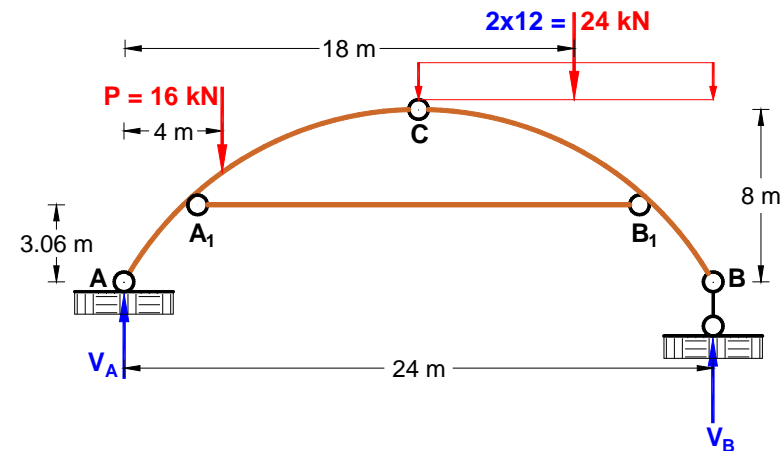
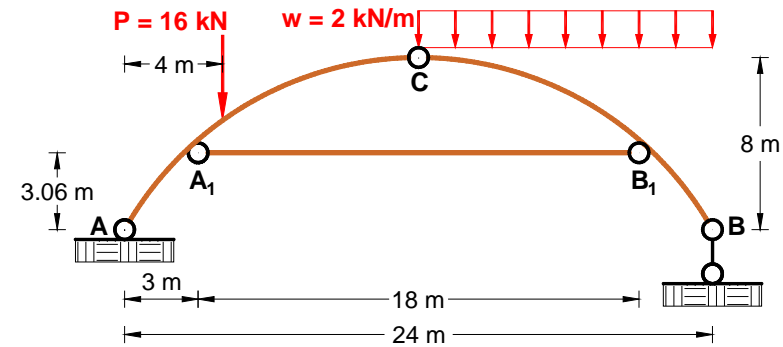
$$+\sum M_C^O = 0 \Rightarrow 16(8) + H(4.94) = 19.33(12) \quad \therefore H = 21.04 \text{ kN}$$

Debido a que la ecuación de su eje es de tipo sinoidal, calculamos sus características geométricas:

Sabemos que:  $y = f \text{sen} \frac{\pi X}{L} = 8 \text{sen} \frac{\pi X}{24} \dots (1)$

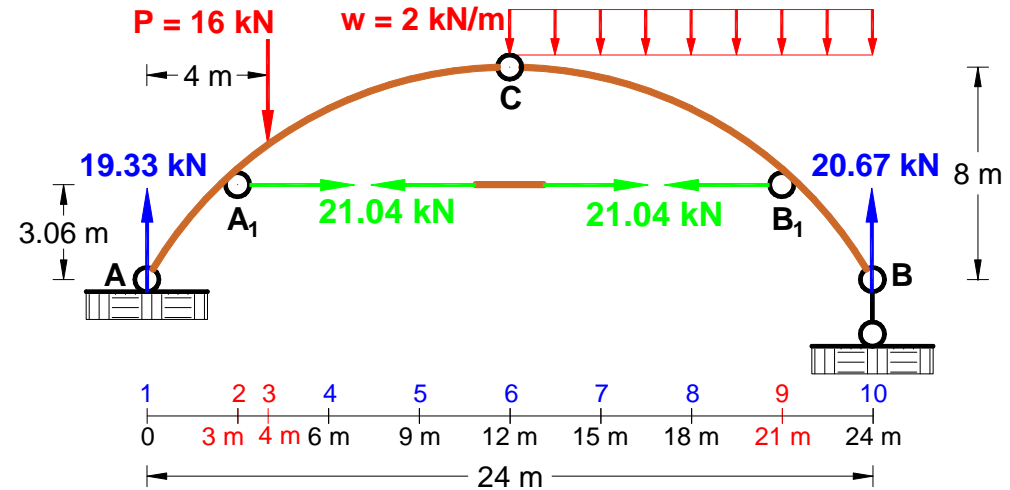
Además:

$$\tan \varphi = \frac{\pi f}{L} \cos \frac{\pi X}{L} = \frac{8\pi}{24} \cos \frac{\pi X}{24} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi X}{24} \dots (2)$$





Vamos a asumir 8 intervalos y le corresponde 3m a cada uno. También es necesario calcular las secciones infinitamente cercanas al punto de acción de la carga puntual, es decir, a la izquierda (-0) y a la derecha (+0), como se muestra a continuación:



Obtenemos los valores para las ecuaciones (1) y (2), tabulando:

$$y = 8 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{24}$$

$$\tan \varphi = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi x}{24}$$

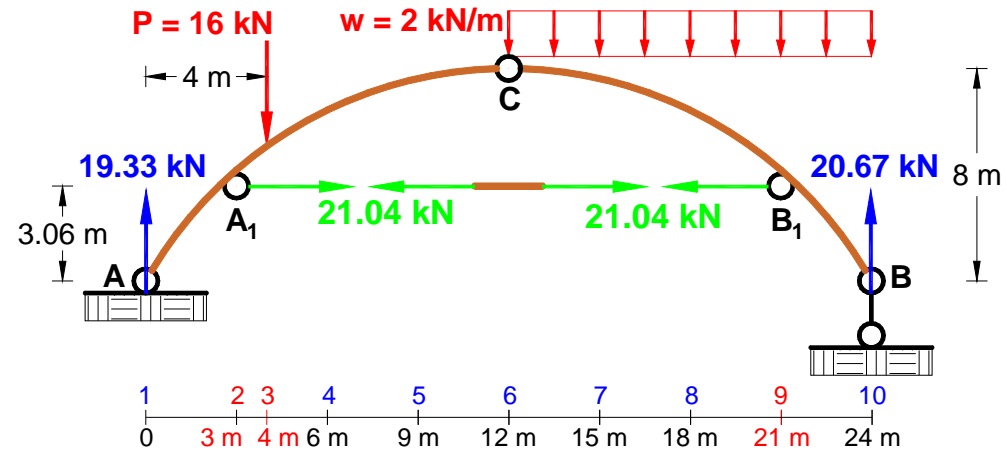
Nº de Sección	x (m)	y (m)	$\tan \varphi$	$\varphi$ (rad)	$\operatorname{sen} \varphi$	$\operatorname{cos} \varphi$
1	0	0	1.047	0.808	0.723	0.691
2-0	3	3.06	0.967	0.769	0.695	0.719
2+0	3	3.06	0.967	0.769	0.695	0.719
3-0	4	4.00	0.907	0.737	0.672	0.741
3+0	4	4.00	0.907	0.737	0.672	0.741
4	6	5.66	0.740	0.637	0.595	0.804
5	9	7.39	0.401	0.381	0.372	0.928
6	12	8	0	0	0	1
7	15	7.39	-0.401	-0.381	-0.372	0.928
8	18	5.66	-0.740	-0.637	-0.595	0.804
9-0	21	3.06	-0.967	-0.769	-0.695	0.719
9+0	21	3.06	-0.967	-0.769	-0.695	0.719
10	24	0	-1.047	-0.808	-0.723	0.691

👉 Obtenemos las fuerzas internas utilizando las siguientes fórmulas:

$$M_k = M_k^v - H(y - a)$$

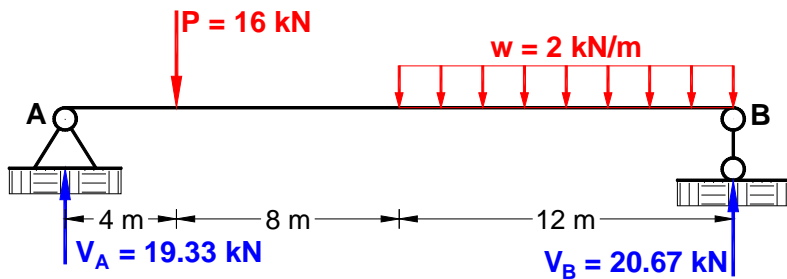
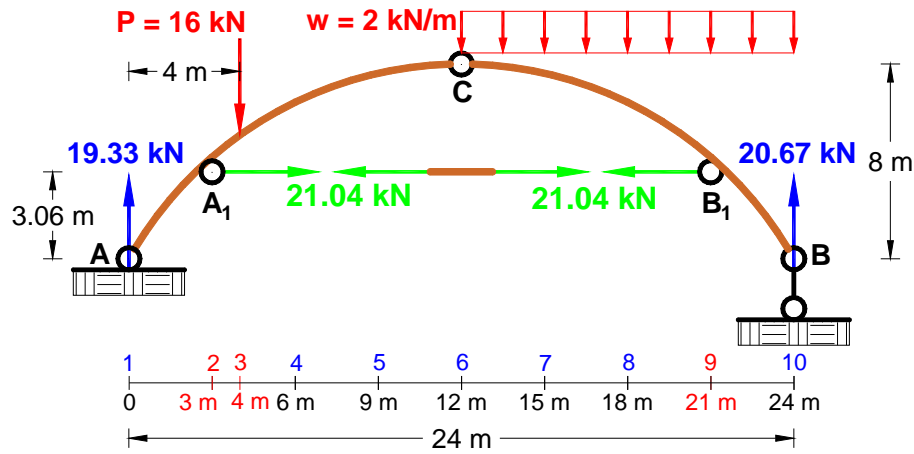
$$V_k = V_k^v \cos \varphi - H \operatorname{sen} \varphi$$

$$N_k = -(V_k^v \operatorname{sen} \varphi + H \cos \varphi)$$

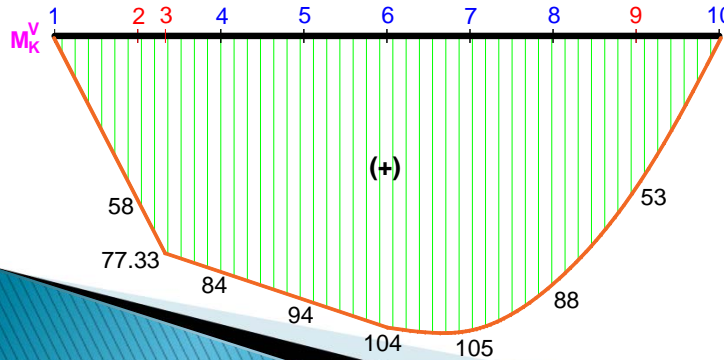


Nº de Sección	x (m)	y (m)	$M_K^V$ (kN.m)	$-H(y-a)$ (kN.m)	$M_K$ (kN.m)	$V_K^V$ (kN)	$V_K^V \cos \varphi$ (kN)	$-H \operatorname{sen} \varphi$ (kN)	$V_K$ (kN)	$V_K^V \operatorname{sen} \varphi$ (kN)	$H \cos \varphi$ (kN)	$N_K$ (kN)
1	0	0	0	0.0	0.0	19.33	13.35	0.0	13.35	13.98	0.00	-13.98
2-0	3	3.06	58.00	0.0	57.97	19.33	13.89	0.0	13.89	13.44	0.00	-13.44
2+0	3	3.06	58.00	0.0	57.97	19.33	13.89	-14.63	-0.73	13.44	15.12	-28.56
3-0	4	4.00	77.33	-19.78	57.56	19.33	14.32	-14.13	0.19	12.99	15.59	-28.57
3+0	4	4.00	77.33	-19.78	57.56	3.33	2.47	-14.13	-11.67	2.24	15.59	-17.82
4	6	5.66	84.00	-54.64	29.36	3.33	2.68	-12.52	-9.84	1.98	16.91	-18.89
5	9	7.39	94.00	-91.13	2.87	3.33	3.09	-7.83	-4.73	1.24	19.53	-20.77
6	12	8.00	104.00	-104.00	0.00	3.33	3.33	0.00	3.33	0.00	21.04	-21.04
7	15	7.39	105.00	-91.13	13.87	-2.67	-2.48	7.83	5.35	0.99	19.53	-20.52
8	18	5.66	88.00	-54.64	33.36	-8.67	-6.97	12.52	5.56	5.16	16.91	-22.07
9-0	21	3.06	53.00	0.0	52.97	-14.67	-10.54	14.63	4.09	10.20	15.12	-25.32
9+0	21	3.06	53.00	0.0	52.97	-14.67	-10.54	0.00	-10.54	10.20	0.00	-10.20
10	24	0	0.00	0.0	0	-20.67	-14.27	0.00	-14.27	14.95	0.00	-14.95

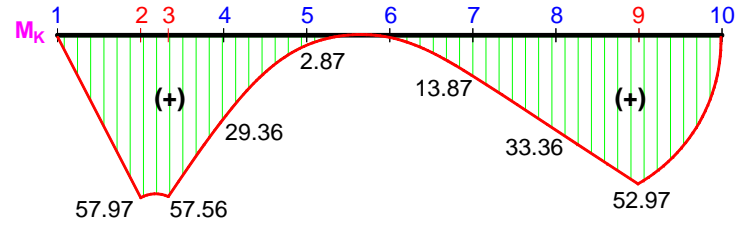
Realizamos los diagramas de fuerzas internas:



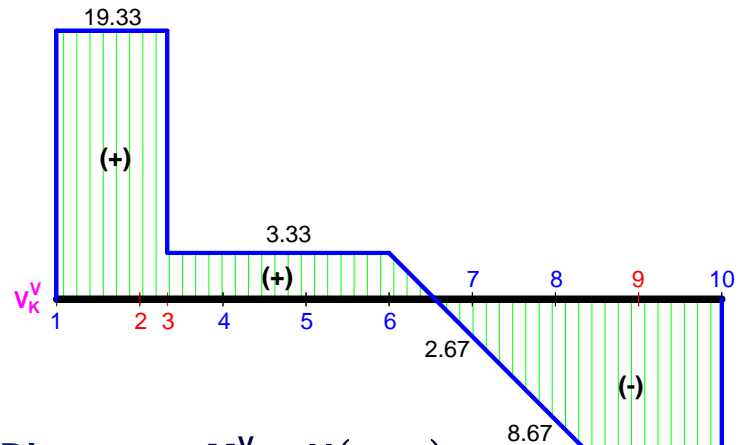
a. Diagrama de momento flector en la viga:



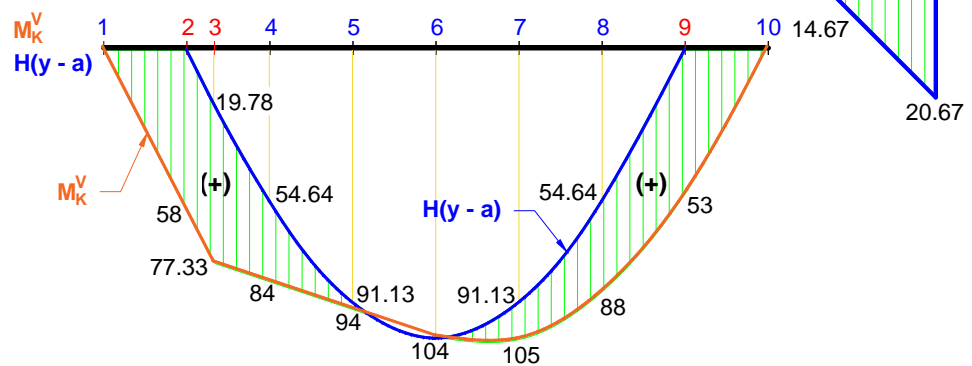
b. Diagrama de momento flector del arco:



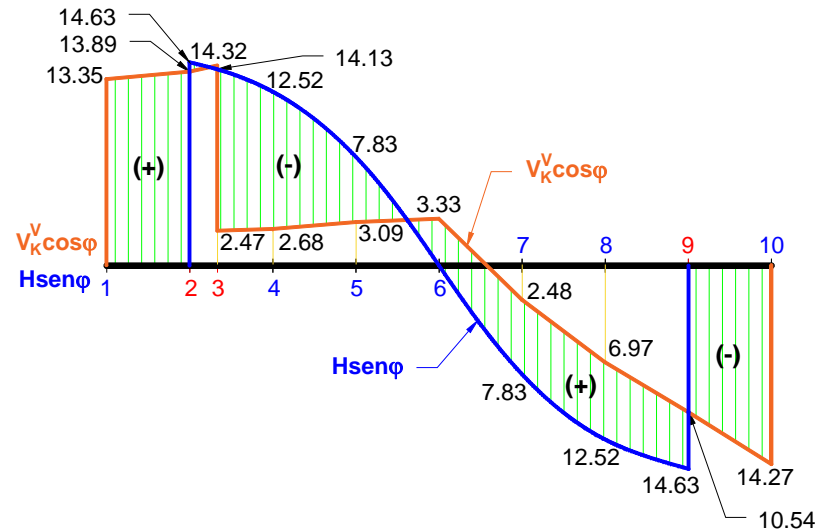
c. Diagrama de fuerza cortante en la viga:



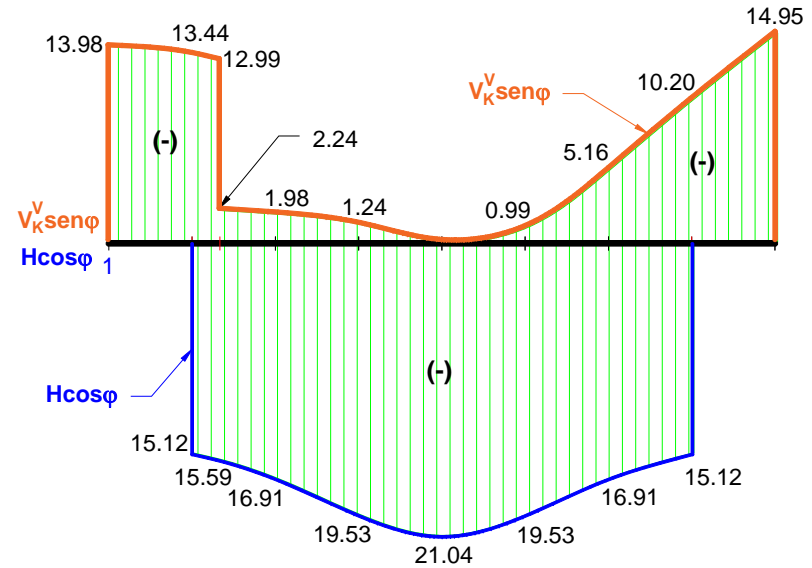
d. Diagramas  $M_K^V$  y  $H(y-a)$ :



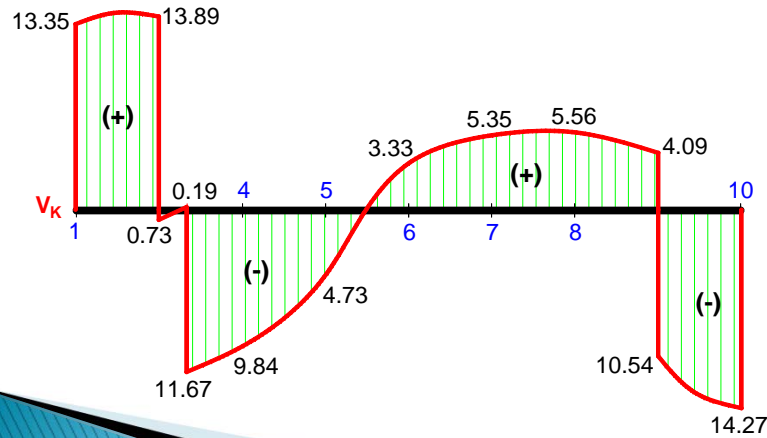
e. Diagramas  $V_K^V \cos \varphi$  y  $H \sin \varphi$  :



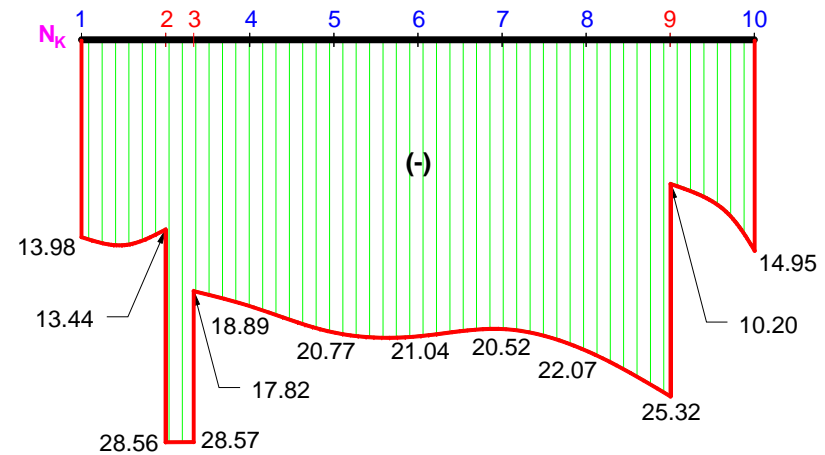
g. Diagramas  $V_K^V \sin \varphi$  y  $H \cos \varphi$  :



f. Diagrama de fuerza cortante en el arco:



h. Diagrama de fuerza axial o normal del arco:



👉 Determinamos el esfuerzo en la sección 2+0, es decir cerca al apoyo A, pero superior al tirante y de acuerdo a los diagramas tenemos:  $M = 58\text{kN} \wedge N = -28.56\text{kN} \wedge \varphi_{2+0} = 44.04^\circ$

👉 Determinamos las dimensiones de la sección transversal del arco en el intervalo:

Sabemos que:  $h = \left( \frac{1}{30} \div \frac{1}{40} \right) L \wedge b = \frac{h}{2} \wedge e = \frac{M}{N} \Rightarrow e = \frac{58}{28.56} = 2.03\text{m}$

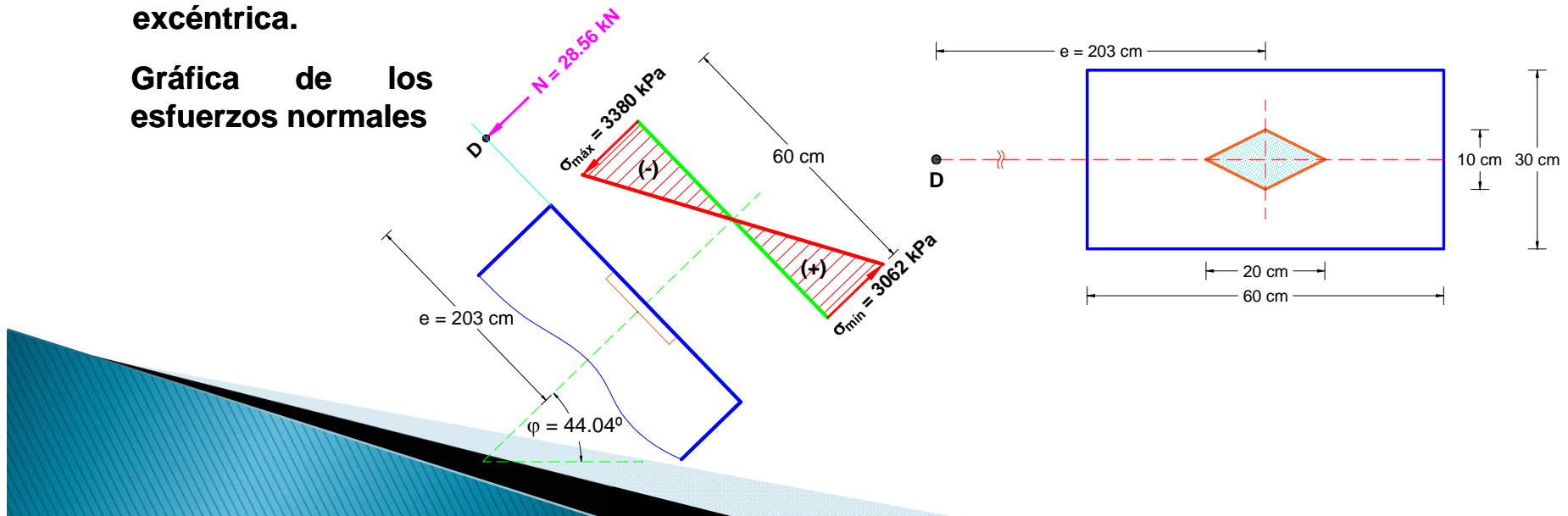
$\Rightarrow h = \frac{2400}{40} = 60\text{cm} \Rightarrow b = \frac{60}{2} = 30\text{cm} \Rightarrow A = bh = 60 \times 30\text{cm}^2 = 1800\text{cm}^2$

👉 Determinamos los esfuerzos normales máximos:  $\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{A} \left( 1 \pm \frac{6e}{h} \right)$

$\Rightarrow \sigma_{\min}^{\max} = -\frac{28560}{1800 \times 10^{-4}} \left( 1 \pm \frac{6 \times 2.03}{0.60} \right) \therefore \sigma_{\min} = 3062\text{kPa} \quad \therefore \sigma_{\max} = -3380\text{kPa}$

En la figura se muestra el núcleo de la sección y el punto de aplicación de la fuerza axial excéntrica.

Gráfica de los esfuerzos normales

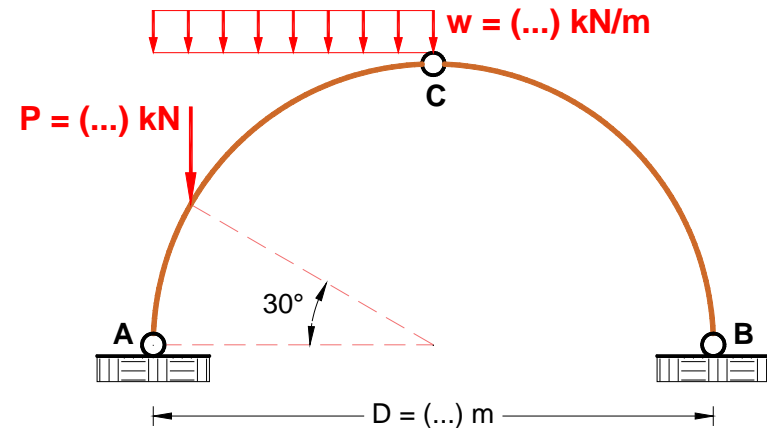


**Ejemplo 1:** Analizar un arco triarticulado sin tirante, tal como se muestra en la figura, siendo la ecuación de su eje **tipo circular**.

$$W = \frac{1^{\circ} \text{ nombre} + 1^{\circ} \text{ apellido}}{2}$$

$$P = \frac{1^{\circ} \text{ nombre} + 2^{\circ} \text{ apellido}}{3}$$

$$D = 1^{\circ} \text{ nombre} + 1^{\circ} \text{ apellido}$$



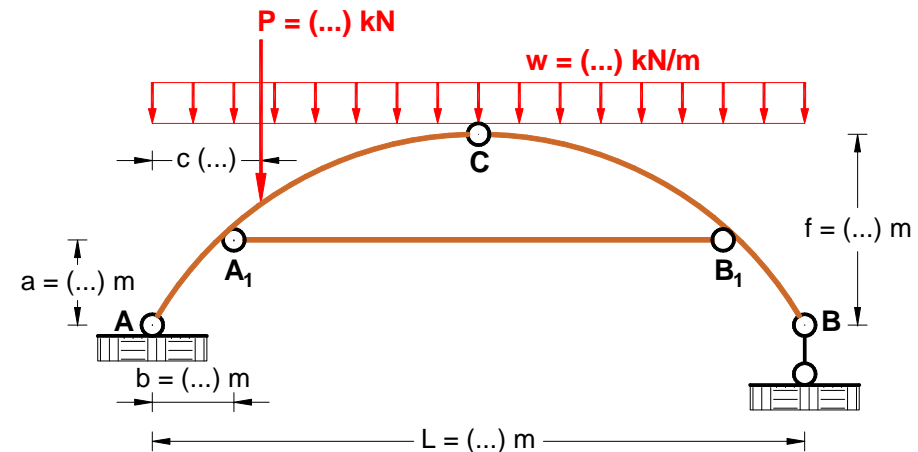
**Ejemplo 2:** Analizar un arco triarticulado sin tirante, tal como se muestra en la figura, siendo la ecuación de su eje **tipo parábola cuadrática**.

$$W = \frac{1^{\circ} \text{ nombre} + 1^{\circ} \text{ apellido}}{2}$$

$$P = \frac{1^{\circ} \text{ nombre} + 2^{\circ} \text{ apellido}}{3}$$

$$L = 2(1^{\circ} \text{ nombre} + 1^{\circ} \text{ apellido})$$

$$b = 1^{\circ} \text{ nombre}$$



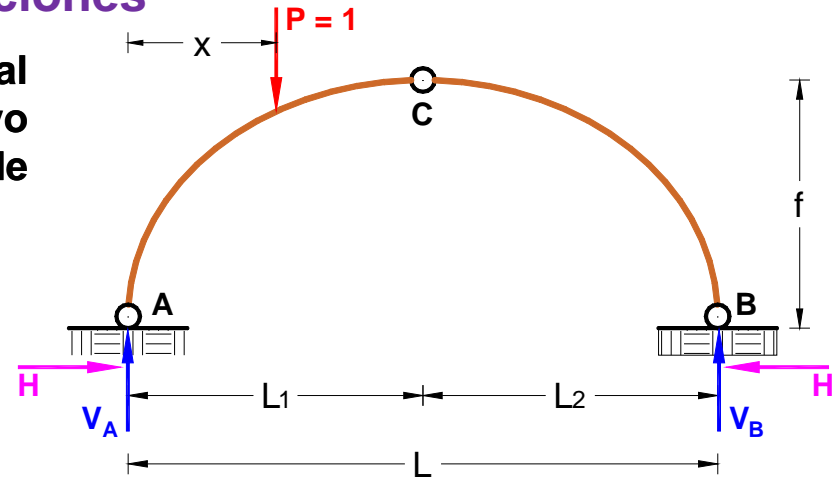
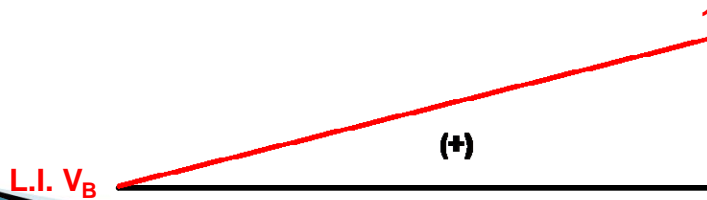
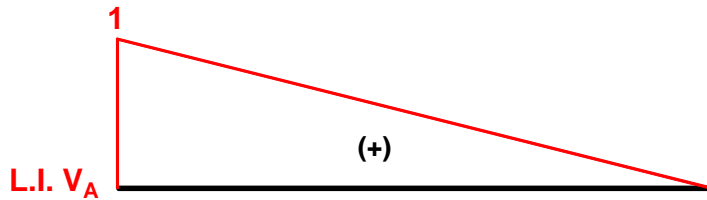
$$c = 3(1^{\circ} \text{ nombre})$$

$$f = 2(1^{\circ} \text{ apellido})$$

### 3. CÁLCULO ANTE CARGAS MÓVILES

#### 3.1 Línea de influencia de las reacciones

Ubiquemos una carga unitaria vertical  $P = 1$  a una distancia  $x$  del apoyo izquierdo y efectuemos la sumatoria de momentos respecto a los apoyos:



$$+\sum M_B^o = 0 \Rightarrow P(L-x) = V_A(L) \quad \therefore V_A = 1 - \frac{x}{L}$$

$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow P(x) = V_B(L) \quad \therefore V_B = \frac{x}{L}$$

Las expresiones  $V_A$  y  $V_B$  concuerdan con las reacciones de una viga simplemente apoyada, en consecuencia, las líneas de influencia de  $V_A$  y  $V_B$  no se diferencian de las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de una viga simple.

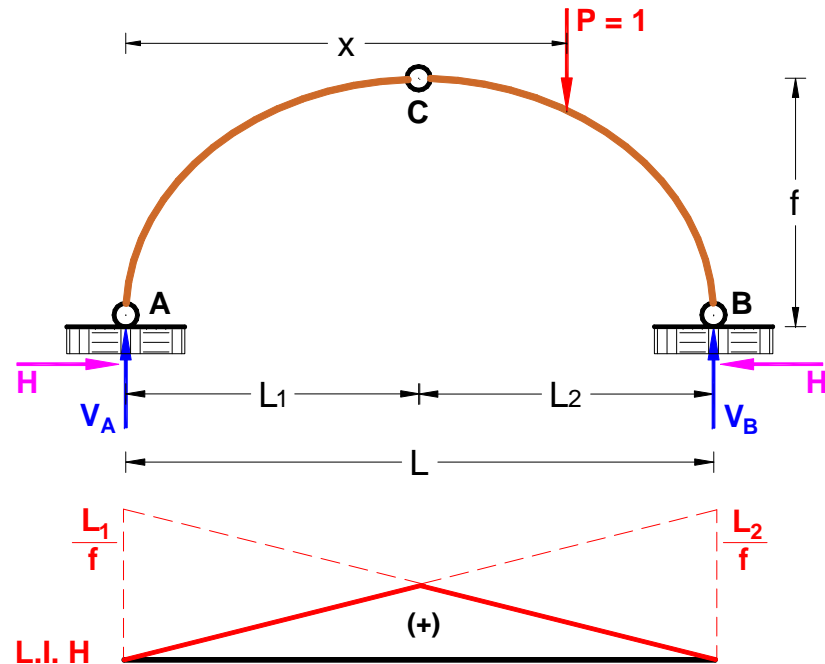
El empuje H se determina por la expresión:

$$H = \frac{M_C^V}{f} \dots (1)$$

Si la fuerza  $P = 1$  se desplaza, entonces:

$$L.I.H = \frac{1}{f} L.I.M_C^V \dots (2)$$

De esta manera, la línea de influencia del empuje H se forma como la multiplicación de las ordenadas de la línea de influencia del momento flector en la sección C de la viga correspondiente por la magnitud  $1/f$ .



### 3.2 Línea de influencia de las fuerzas internas

#### a. Línea de influencia del momento flector

El momento flector en la sección "K" se determina por la fórmula:  $M_K = M_K^V - Hy_K$

Si la fuerza  $P = 1$  se desplaza, entonces:  $L.I.M_K = L.I.M_K^V - y_K L.I.H$

De donde, la línea de influencia  $M_K$  es igual a la suma de dos líneas de influencia: línea de influencia del momento flector  $M_K^V$  en la sección "K" de la viga simple y la línea de influencia del empuje H, cuyas ordenadas se multiplican por  $-y_K$ , sumando ambos gráficos obtenemos la línea de influencia  $M_K$ .



El punto  $D_M$  se denomina punto cero de la línea de influencia  $M_K$ .

Si la carga  $P$  se encontrara en el punto  $D_M$ , entonces el momento flector  $M_K$  en la sección "K" es igual a cero (debido a que la línea de acción de la reacción pasa por el punto K).

La igualdad a cero de la línea de influencia del momento  $M_K$  en el punto  $D_M$ , viene a ser la comprobación de la veracidad de la obtención de la línea de influencia  $M_K$ . Tal comprobación es obligatoria y se llama **comprobación del punto cero**.

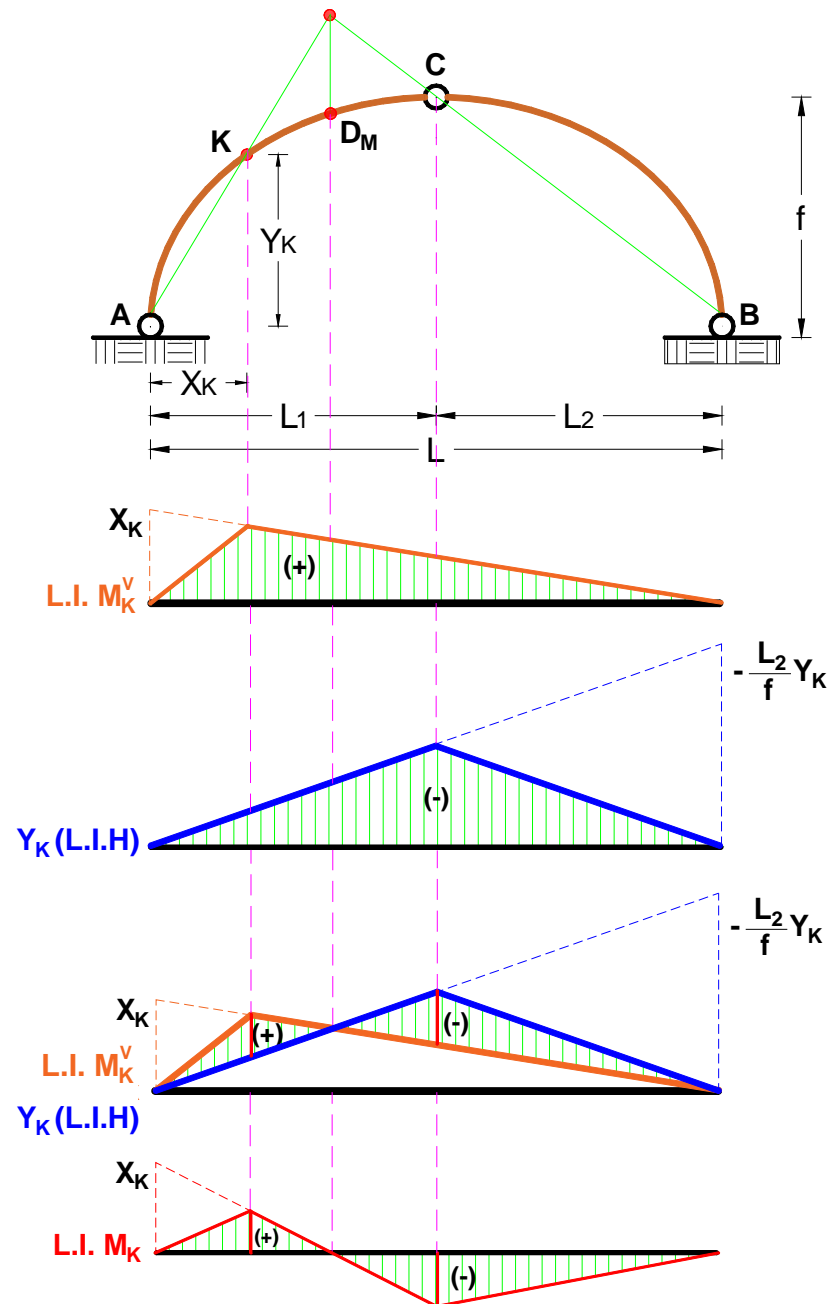
### b. Línea de influencia de la fuerza cortante

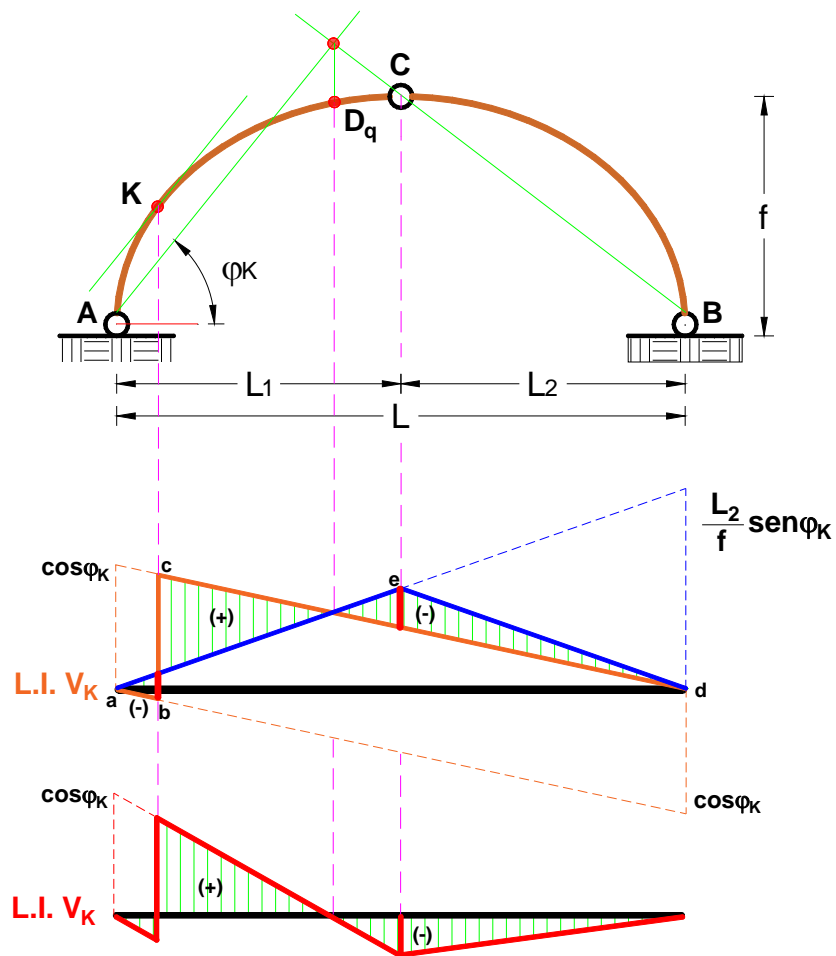
Para graficar la línea de influencia de la fuerza cortante  $V_K$  en la sección "K", se utiliza la siguiente expresión:

$$V_K = V_K^V \cos \varphi_K - H \operatorname{sen} \varphi_K$$

Si la fuerza  $P = 1$  se desplaza, entonces:

$$L.I. V_K = \cos \varphi_K \cdot L.I. V_K^V - \operatorname{sen} \varphi_K \cdot L.I.H$$





De donde, la línea de influencia  $V_K$  es igual a la suma de dos líneas de influencia: línea de influencia de la fuerza cortante  $V_K^V$ , cuyas ordenadas se multiplicarán por  $\cos \varphi_K$  (ver la línea  $abcd$ ) y la línea de influencia del empuje  $H$ , cuyas ordenadas se multiplican por  $-\sin \varphi_K$  (ver la línea  $aed$ ).

El punto  $D_q$  se denomina punto nulo de la línea de influencia  $V_K$ .

Si la carga  $P$  se encontrara en el punto  $D_q$ , entonces la fuerza cortante  $V_K$  será cero en el punto "K" (línea de acción de la reacción  $R_A$  paralela a la tangente al arco en la sección "K", en consecuencia, su proyección a la cortante del arco en la sección "K" será cero).

La igualdad a cero de esta ordenada es la comprobación de la correcta gráfica de la línea de influencia  $V_K$ . Tal comprobación es obligatoria y se llama **comprobación del punto cero**.

### c. Línea de influencia de la fuerza axial o normal

Para graficar la línea de influencia de la fuerza axial o normal  $N_K$  en la sección "K", se utiliza la siguiente expresión:

$$N_K = V_K^V \operatorname{sen} \varphi_K + H \cos \varphi_K$$

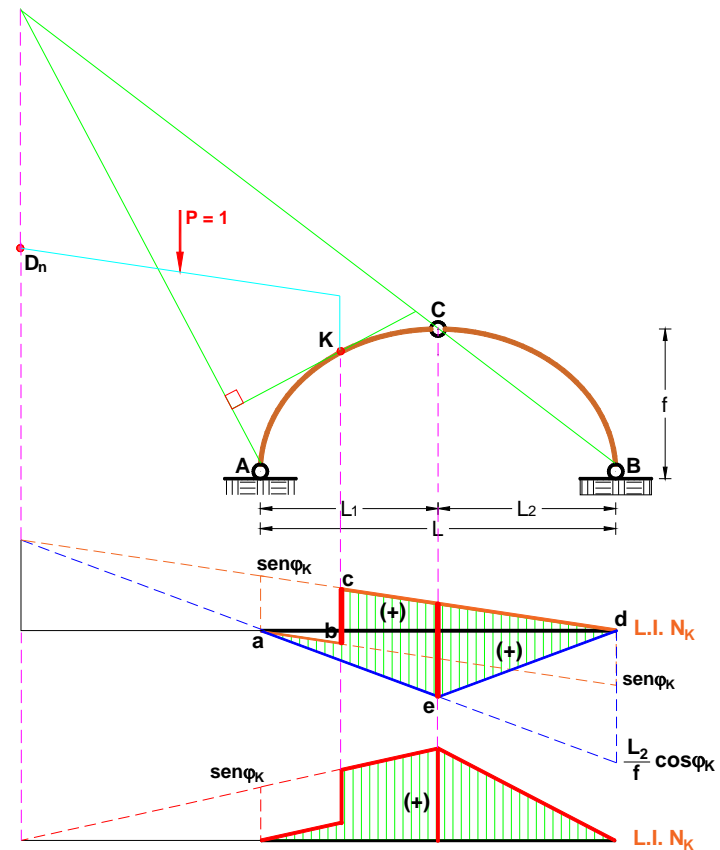
Si la fuerza  $P = 1$  se desplaza, entonces:

$$\text{L.I. } N_K = \operatorname{sen} \varphi_K \cdot \text{L.I. } V_K^V + \cos \varphi_K \cdot \text{L.I. } H$$

De donde, la línea de influencia  $N_K$  es igual a la suma de dos líneas de influencia: línea de influencia de la fuerza cortante  $V_K^V$ , cuyas ordenadas se multiplicarán por  $\operatorname{sen} \varphi_K$  (ver la línea abcd) y la línea de influencia del empuje  $H$ , cuyas ordenadas se multiplican por  $\cos \varphi_K$  (ver la línea aed).

El punto  $D_n$  se denomina punto cero de la línea de influencia  $N_K$ .

Tal punto nulo es ficticio, por cuanto la fuerza  $P$  se encuentra fuera del arco. La ordenada de la línea de influencia en dicho punto también es ficticia.



La igualdad a cero de dicha ordenada es la comprobación correcta de la línea de influencia  $N_K$ . Tal comprobación es obligatoria y se llama **comprobación del punto cero**.