UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENÍERIA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

UNIDAD 2: CABLES

DOCENTE: Mg. Luis Fernando Narro Jara

HUÁNUCO, 2020

Unidad 2. CABLES

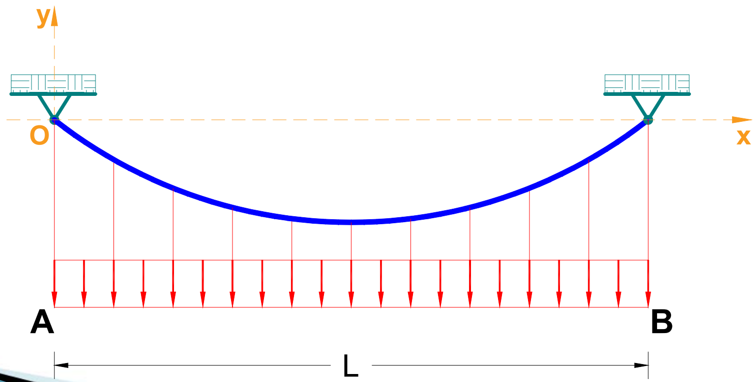
CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

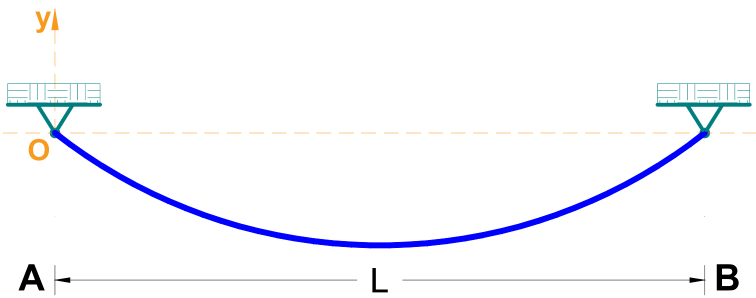
Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc.

Dentro del tipo de cables que existen analizaremos los que mostramos a continuación; los cables rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas, los cables parabólicos que soportan cargas repartidas y los cables que soportan su peso propio, mismos que se detallan en los siguientes gráficos:

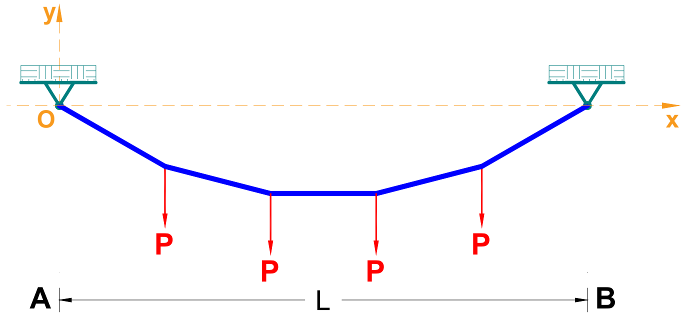
a. Cables parabólicos que soportan cargas repartidas



b. Cables que soportan su peso propio



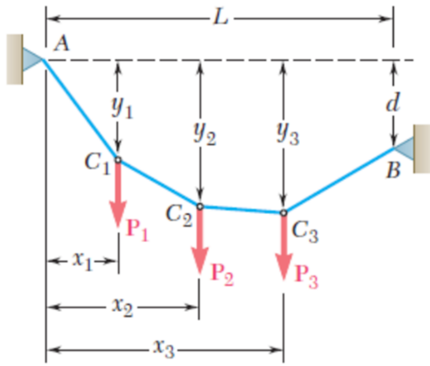
c. Cables rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas



2. ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE CABLES

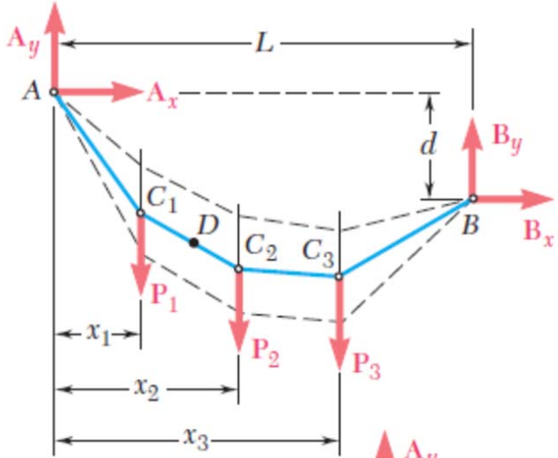
2.1 Cables sometidos a cargas concentradas

Cuando un cable de peso despreciable soporta varias cargas concentradas, el cable adopta la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales esta sometido a una fuerza constante de tensión. Considere por ejemplo, el cable que se muestra en la siguiente figura:



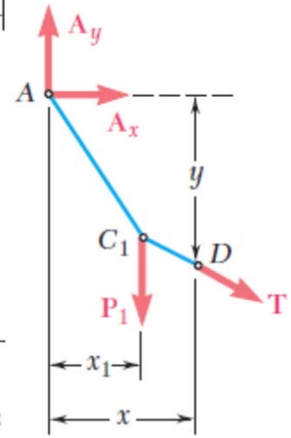
Se supone que el cable es flexible, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el peso del cable es susceptible de ser ignorado en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable.

Para realizar el análisis de los cables sometidos a cargas concentradas, se debe tomar en cuenta el siguiente procedimiento:

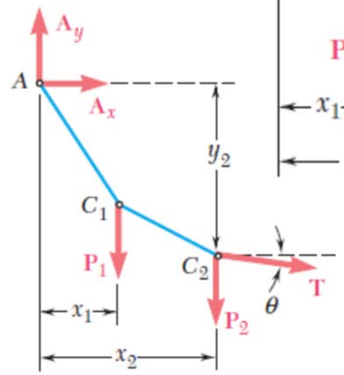


a. Realizar el DCL para todo el sistema. Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes.

b. Como se puede apreciar se tiene cuatro incógnitas y tres ecuaciones del equilibrio, que se tiene disponibles y no son suficientes para determinar las reacciones en A y B.



De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable, dibujando el DCL del segmento AD del cable y escribiendo una ecuación de momento en D y luego se pueden determinar las reacciones en A y B.

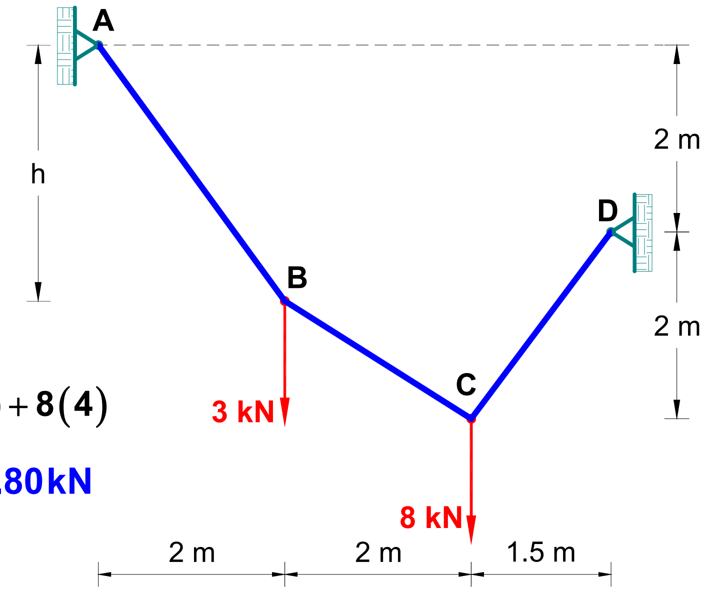


c. Una vez que se han determinado las reacciones A_x y A_y se pueden encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable.

La componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable .

La tensión T es máxima en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación θ. Dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

Ejemplo: **Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado a continuación ¿Qué valor tiene la dimensión h?**

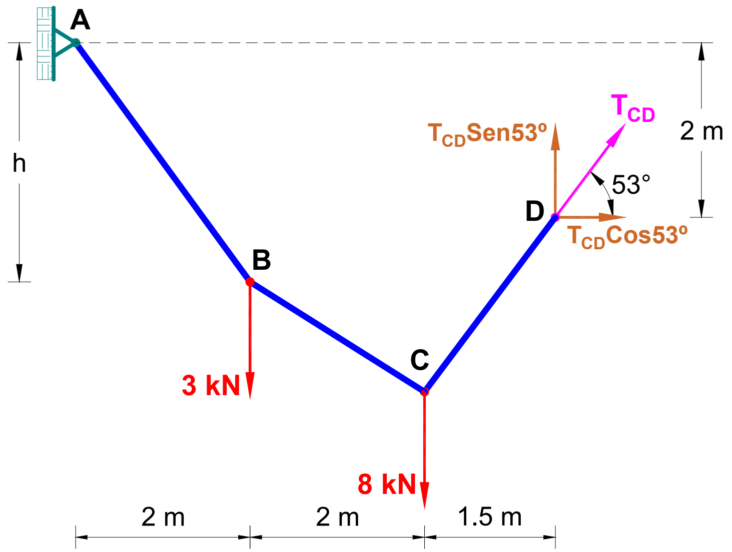


Solución.

a) Realizamos el D.C.L. de todo el sistema y obtenemos la tensión en CD

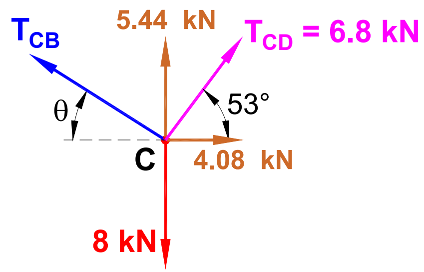
$$+\sum M_A^o = 0 \Rightarrow T_{CD}Sen53°(5.5) + T_{CD}Cos53°(2) = 3(2) + 8(4)$$

$$\therefore T_{CD} = 6.80\,kN$$



b) Por el método de los nudos podemos calcular las tensiones en los cables BC y AB

Nudo C



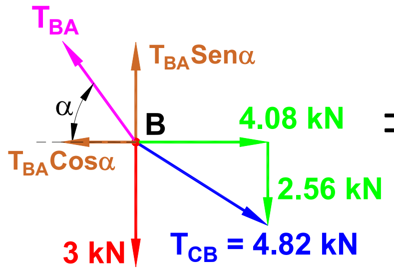
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{CB}Cos\theta = 4.08$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{CB}Sen\theta = 2.56$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2.56}{4.08} \quad \therefore \theta = 32.10°$$

$$\therefore T_{CB} = 4.82\,kN$$

Nudo B



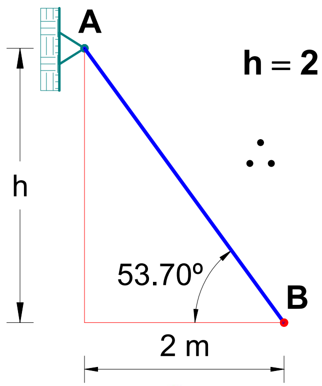
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{BA}Cos\alpha = 4.08$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{BA}Sen\alpha = 5.56$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{5.56}{4.08} \qquad \therefore\ \theta = 53.70^{o}$$

$$\therefore\ T_{BA} = 6.90\,kN$$

b) Calculamos h:



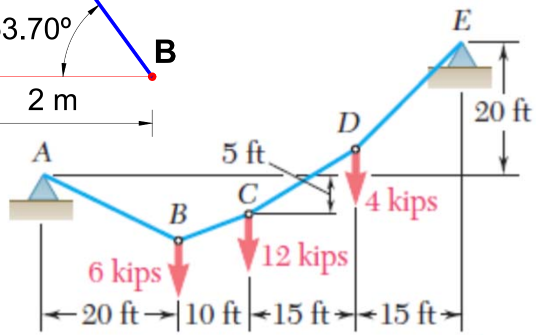
$$h = 2\tan(53.70^{o})$$

$$\therefore\quad h = 2.70\,m$$

Ejemplo: El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C está a 5' por debajo del apoyo izquierdo, determine:

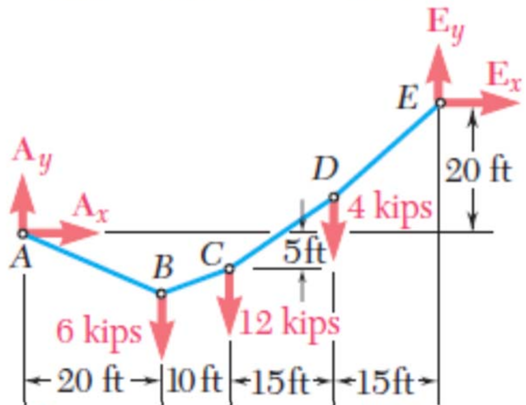
a) La elevación de los puntos B y D.

b) La pendiente máxima y la tensión máxima en el cable.



Solución.

a) Realizamos el D.C.L. de todo el sistema:

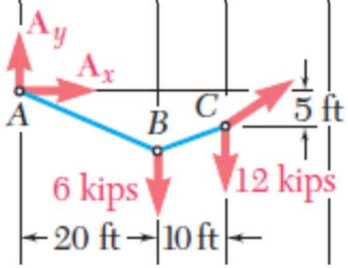


$$+\ \sum M_E^o = 0 \Rightarrow A_x(20) - A_y(60) + 6(40) + 12(30) + 4(15) = 0$$

$$\therefore\ A_x - 3A_y = -33 \ \ldots (1)$$

$$+\ \sum M_C^o = 0 \Rightarrow -A_x(5) - A_y(30) + 6(10) = 0$$

$$\therefore\ -A_x - 6A_y = -12 \ \ldots (2)$$



$$\therefore\ A_x = -18\,kips \quad \wedge \quad A_y = 5\,kips$$

b) Analizamos los puntos B y D:

$$+\circlearrowleft \sum M_B^o = 0 \Rightarrow 18(y_B) = 5(20) \quad \therefore\ y_B = 5.56\,\text{ft}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D^o = 0 \Rightarrow 6(25) + 12(15) = 18(y_D) + 5(45)$$

$$\therefore\ y_D = 5.83\,\text{ft}$$

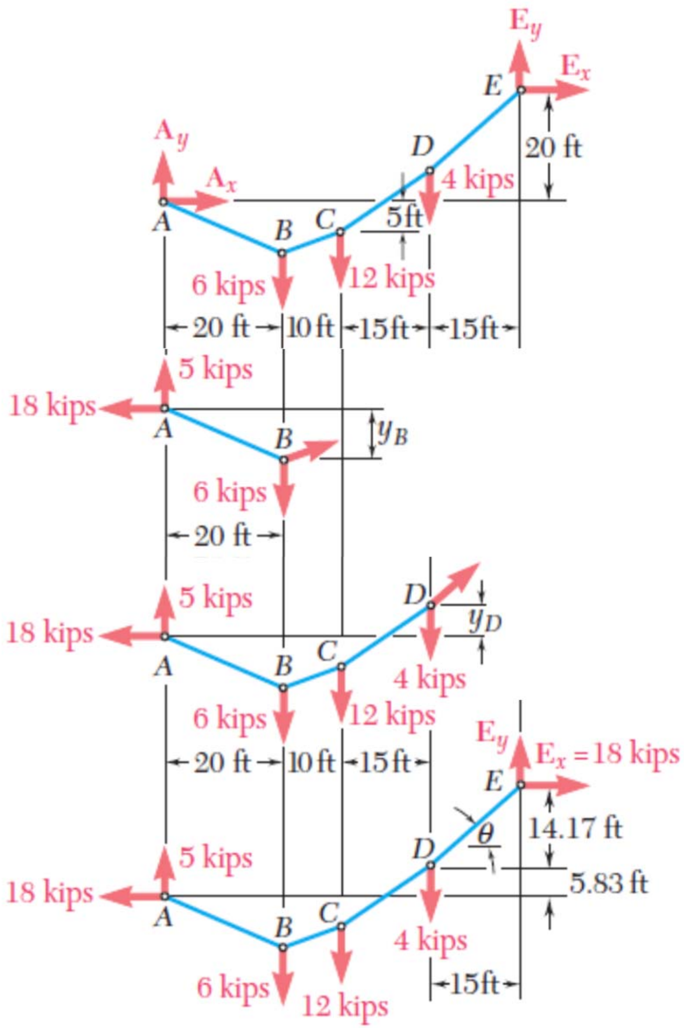
c) Calculamos la pendiente y la tensión máxima:

Se puede observar que la pendiente máxima ocurre en el tramo DE. Recuerda que la componente horizontal de la tensión es constante e igual a 18 kips, entonces:

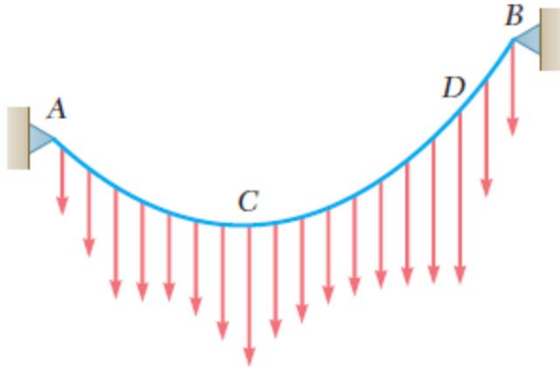
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{14.17}{15} \qquad \therefore\ \theta = 43.40^{o}$$

$$\Rightarrow T_{máx} = \frac{18}{\text{Cos}\theta} = \frac{18}{\text{Cos}(43.40^{o})}$$

$$\therefore T_{máx} = 24.80\,\text{kips}$$

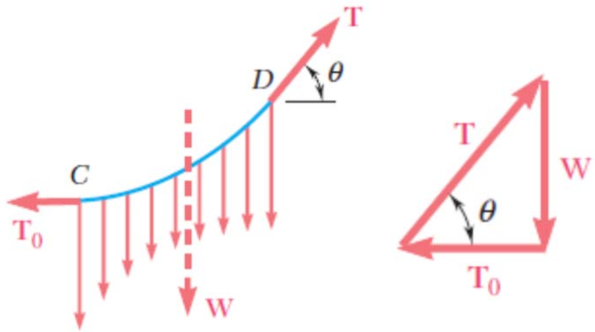


2.2 Cables sometidos a cargas distribuidas



Consideremos un cable que está unido a dos puntos fijos A y B y que soporta una carga distribuida.

A diferencia que, para un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable. En este caso el cual el cable soporta una carga distribuida, éste cuelga tomando la forma de una curva y la fuerza interna en el punto Des una fuerza de tensión T dirigida a lo largo de la tangente de la curva.



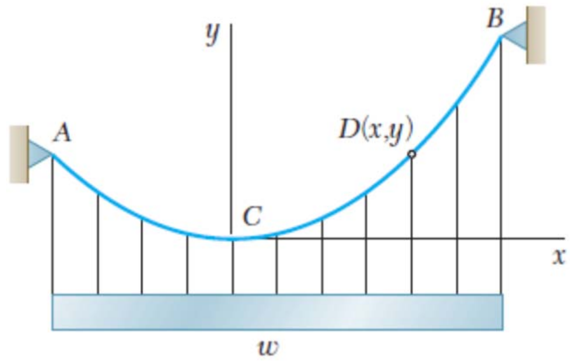
Analicemos como se determina la tensión en cualquier punto de un cable que soporta una carga distribuida dada.

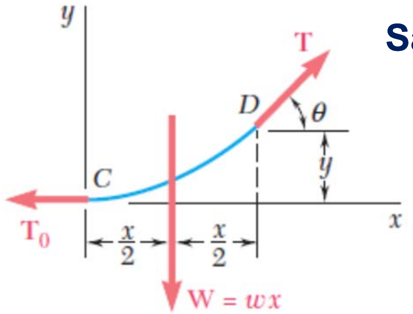
a. Considerando el caso más general de carga distribuida, realizamos el DCL de la porción del cable que se extiende desde el punto más bajo hasta un punto D del cable, tal como se muestra a continuación:

$T_o = T\cos\theta \qquad W = T\mathrm{Sen}\theta$ ... (1) $\qquad T = \sqrt{T_o^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \dfrac{W}{T_o}$ ... (2)

De las ecuaciones en (1), la componente horizontal de la fuerza de tensión T es la misma en cualquier punto y que la componente vertical de T es igual a la magnitud W de la carga medida a partir del punto más bajo.

b. **Realicemos el análisis como un cable parabólico: debemos seleccionar los ejes coordenados y hacer coincidir con su origen en el punto más bajo C del cable, luego analizaremos una porción del cable con la carga distribuida en el tramo CD.**





Sabemos: $T = \sqrt{T_o^2 + W^2} \Rightarrow T = \sqrt{T_o^2 + \omega^2 x^2}$

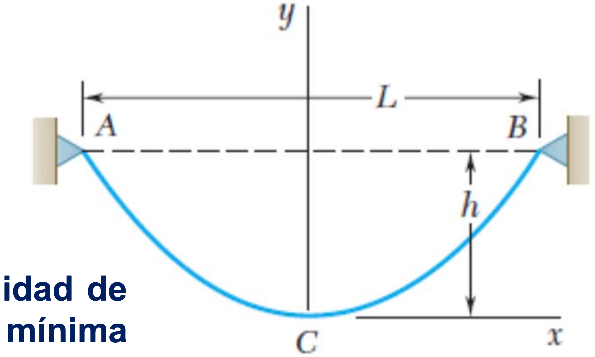
$$\tan\theta = \frac{W}{T_o} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\omega x}{T_o}$$

$$+\sum M_D^o = 0 \Rightarrow \omega x\left(\frac{x}{2}\right) = T_o(y)$$

Ecuación de la parábola con un eje vertical y con su vértice en el origen del sistema de coordenadas. Por lo tanto la curva formada por los cables que están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.

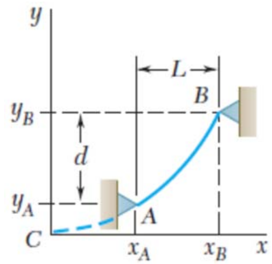
$$\therefore\ y = \frac{\omega x^2}{2T_o}$$

c. **Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos se conoce como el claro del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo se llama la flecha del cable.**

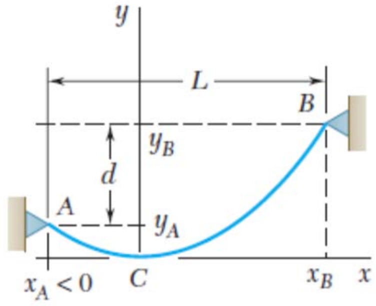


Si se conocen el claro y la flecha del cable y si la carga por unidad de longitud horizontal w está dada, se puede encontrar la tensión mínima T_o sustituyendo $x = L/2$ y $y = h$ en la ecuación de la parábola.

d. **Cuando los apoyos A y B tienen elevaciones diferentes, no se conoce la posición del punto más bajo del cable y se deben determinar las coordenadas x_A, y_A y x_B, y_B de los apoyos.**



La longitud del cable desde su punto más bajo C hasta su apoyo B se puede obtener a partir de la fórmula:



Sabemos que: $y = \dfrac{\omega x^2}{2T_o}$

$$S_B = \int_0^{x_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \right) \partial x$$

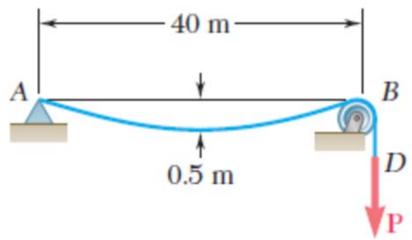
Derivamos: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\omega x}{T_o} \Rightarrow S_B = \displaystyle\int_0^{x_B} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega x}{T_o} \right)^2} \right) \partial x = \int_0^{x_B} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2 x^2}{T_o^2}} \right) \partial x = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{\omega^2 x^2}{2T_o^2} - \frac{\omega^4 x^4}{8T_o^4} + \ldots \right) \partial x$

Y como: $\dfrac{\omega x_B^2}{2T_o} = y_B \Rightarrow S_B = x_B \left[1 + \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{y_B}{x_B} \right)^2 - \dfrac{2}{5} \left(\dfrac{y_B}{x_B} \right)^4 + \ldots \right]$

$$\therefore S_B = x_B \left(1 + \frac{\omega^2 x_B^2}{6T_o^2} - \frac{\omega^4 x_B^4}{40T_o^4} + \ldots \right)$$

La serie converge para valores de la relación y_B/x_B menores que 0.5; en la mayoría de los casos, dicha relación es menor y solo es necesario calcular los dos primeros términos de la serie.

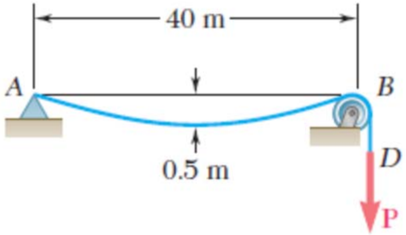
Ejemplo: Un cable ligero está unido a un apoyo en A, pasa sobre una polea pequeña en B y soporta una carga P. Si se sabe que la flecha del cable es de 0.5 m y que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m, determine:



a) La magnitud de la carga P.
b) La pendiente del cable en B.
c) La longitud total del cable desde A hasta B. Como la relación entre la flecha y el claro es pequeña, suponga que el cable es parabólico. Además se ignora el peso del tramo del cable que va desde B hasta D.

Solución.

a) Calculamos la carga P

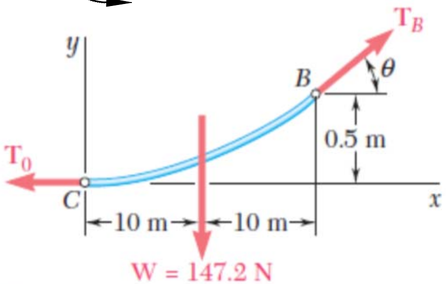


Realizamos el DCL del cable, desde la mitad hasta el punto B

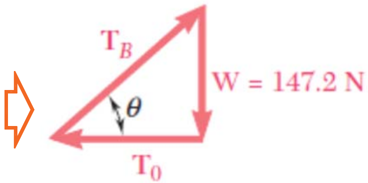
$$w = \left(0.75\,\frac{kg}{m}\right)\left(9.81\,\frac{m}{s^2}\right) = 7.36\,\frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow\ w_{CB} = \left(7.36\,\frac{N}{m}\right)(20m) = 147.2\,N$$

$$+\sum M_B^o = 0 \ \Rightarrow\ 147.2(10) = T_o(0.5)$$



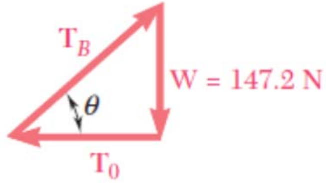
$$\therefore\ T_o = 2944\,N$$



$$\Rightarrow\ T_B = \sqrt{(147.2)^2 + T_o^2}$$

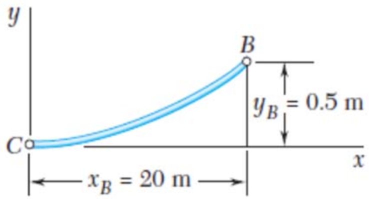
$$\therefore\ T_B = 2948\,N = P$$

b) Cálculo de la pendiente del cable en B



$$\tan\theta = \frac{w}{T_o} = \frac{147.2}{2944} \qquad \therefore\ \theta = 2.9^{o}$$

c) Cálculo de la longitud total del cable desde A hasta B



Sabemos que: $$S_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow\ S_B = (20)\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{0.5}{20}\right)^2 - \ldots\right] = 20.00833\,m$$

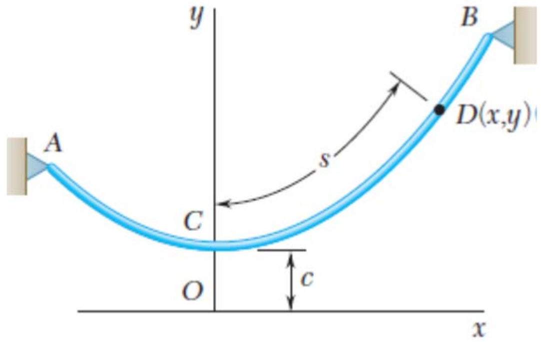
Sin embargo la longitud del cable es desde A hasta B, siendo éste el doble de S_B:

$$\Rightarrow\ L = 2S_B = 2(20.00833)$$

$$\therefore\ L = 40.0167\,m$$

2.3 Catenaria

Consideremos un cable AB que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable. Los cables que cuelgan bajo la acción de su peso propio están cargados de esta forma.



La magnitud W de la carga total soportada por un tramo del cable de longitud s, el cual se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D, está dada por W = ws. Si reemplazamos, obtenemos:

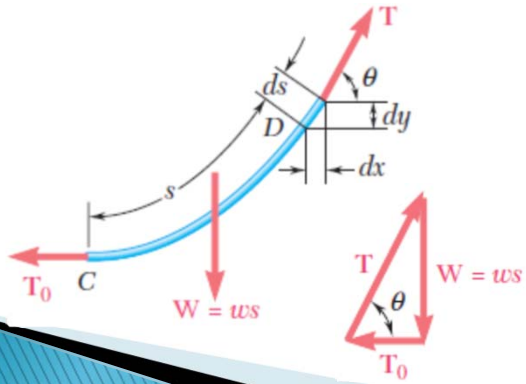
Si denominamos: $c = \dfrac{T_o}{w}$

$\Rightarrow T_o = cw \qquad W = ws$

Sabemos que: $T = \sqrt{T_o^2 + W^2} = \sqrt{T_o^2 + w^2 s^2} = \sqrt{w^2\left[\left(\dfrac{T_o}{w}\right)^2 + s^2\right]}$

$\therefore \boxed{T = w\sqrt{c^2 + s^2}}$

Si realizamos el DCL del tramo CD del cable y si queremos obtener la ecuación de la curva que adopta el cable, primero se obtiene la proyección horizontal de un pequeño elemento de cable de longitud ds y es dx = dsCosθ.



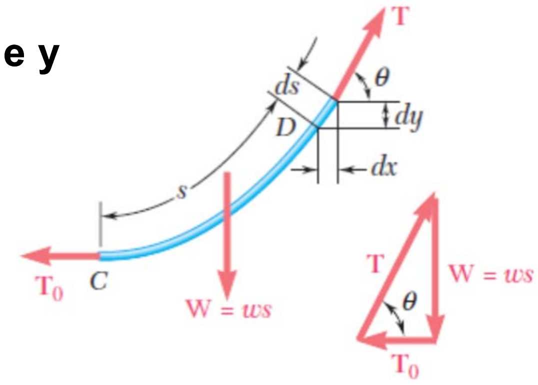
$$dx = ds(\text{Cos}\theta) = ds\left(\frac{T_0}{T}\right) = \left(\frac{cw}{w\sqrt{c^2+s^2}}\right)ds = \frac{ds}{\sqrt{1+\dfrac{s^2}{c^2}}}$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+\dfrac{s^2}{c^2}}} = c\left(\text{senh}^{-1}\frac{s}{c}\right)_0^s = c\left(\text{senh}^{-1}\frac{s}{c}\right)$$

$$\therefore \boxed{s = c\left(\text{senh}\frac{x}{c}\right)}$$

Esta ecuación relaciona la longitud s de la porción CD del cable y la distancia horizontal x.

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x e y escribiendo:



$$dy = dx(\tan\theta) = dx\left(\frac{W}{T_o}\right) = \left(\frac{ws}{cw}\right)dx = \left(\frac{s}{c}\right)dx = \left(\operatorname{senh}\frac{x}{c}\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_c^y dy = \int_0^x \left(\operatorname{senh}\frac{x}{c}\right)dx \quad \Rightarrow y - c = c\left(\cosh\frac{x}{c}\right)_0^x = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right)$$

$$\Rightarrow y - c = c\left(\cosh\frac{x}{c}\right) - c \qquad \therefore \boxed{y = c\left(\cosh\frac{x}{c}\right)}$$

Esta es la ecuación de una catenaria con eje vertical. La ordenada c del punto más bajo C recibe el nombre de parámetro de la catenaria.

Sabemos que: $s = c\left(\operatorname{senh}\frac{x}{c}\right) \qquad y = c\left(\cosh\frac{x}{c}\right)$

Elevamos al cuadrado ambos términos, tenemos: $\boxed{y^2 - s^2 = c^2}$

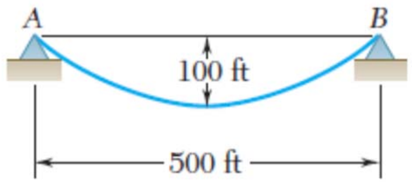
Reemplazando esta expresión en: $T = w\sqrt{c^2 + s^2} \qquad \therefore \boxed{T = wy}$

El cual indica que, la tensión en cualquier punto D del cable es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa al eje x.

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos recibe el nombre de claro del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo C se conoce como la flecha del cable. Estas definiciones son las mismas que las proporcionadas para el caso de cables parabólicos, pero se debe señalar que, debido a la forma en que se seleccionaron los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por:

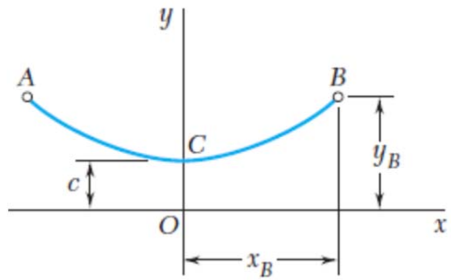
$$\boxed{h = y_A - c}$$

Ejemplo: Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se suspende entre dos puntos A y B, como se muestra en la figura, determine:



a) Los valores de la tensión máxima y mínima en el cable P.
b) longitud del cable.

Solución. Calculamos la ecuación del cable, para ello el origen de coordenadas se colocará a una distancia c por debajo del punto más bajo del cable.



Sabemos que: $y = c\left(\cosh\frac{x}{c}\right)$ Y las coordenadas del punto B son: $x_B = 250\,\text{ft}$, $y_B = 100 + c$

Reemplazando obtenemos:

$$100 + c = c\left(\cosh\frac{250}{c}\right) \quad \therefore \quad \frac{100}{c} + 1 = \cosh\frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos:

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh\frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

$$\therefore \; c = 328 \quad \Rightarrow y_B = 428\,\text{ft}$$

a) Valores máximos y mínimos de la tensión:

$$T_{mín} = T_o = wc = 3(328)$$

$$\therefore \; T_{mín} = 984\,\text{lb}$$

$$T_{máx} = T_B = wy_B = 3(428)$$

$$\therefore \; T_{máx} = 1284\,\text{lb}$$

b) Longitud del cable:

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \quad \therefore \; s_{CB} = 275\,\text{ft}$$

$$\therefore \; s_{AB} = 2s_{CB} = 550\,\text{ft}$$