

UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENIERÍA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL



ANÁLISIS ESTRUCTURAL

UNIDAD 1: ARMADURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

DOCENTE: Mg. Luis Fernando Narro Jara

HUÁNUCO, 2020

Unidad 1. ARMADURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

CONTENIDO

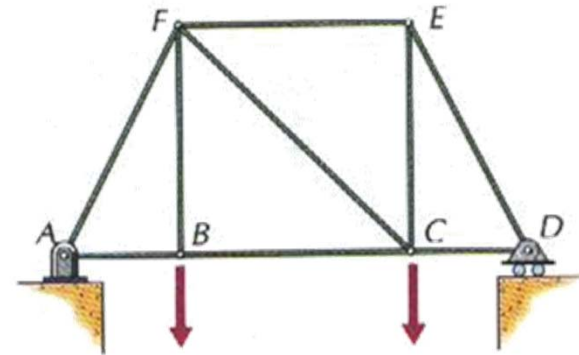
- 1. INTRODUCCIÓN**
- 2. ARMADURAS. TIPOS DE ARMADURAS**
- 3. EL MÉTODO DE LOS NODOS**
- 4. EL MÉTODO DE LAS SECCIONES**
- 5. ENTRAMADOS Y MÁQUINAS**



1. INTRODUCCIÓN

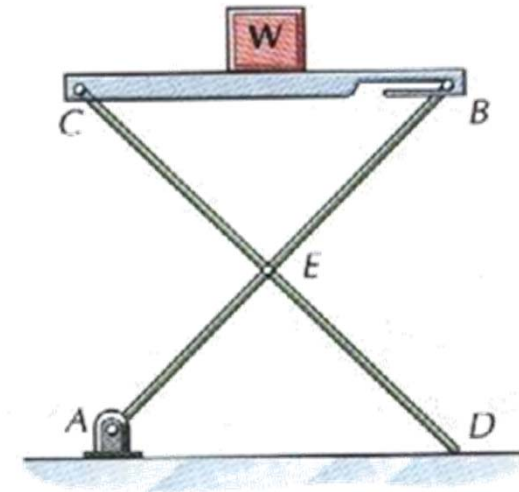
Para el análisis de estructuras se consideran tres categorías amplias de estructuras de ingeniería.

a. Armaduras: estructuras compuestas totalmente por miembros de dos fuerzas. Las armaduras constan generalmente de subelementos triangulares y están apoyadas de manera que se impida todo movimiento. Su estructura ligera puede soportar una fuerte carga con un peso estructural relativamente pequeño.



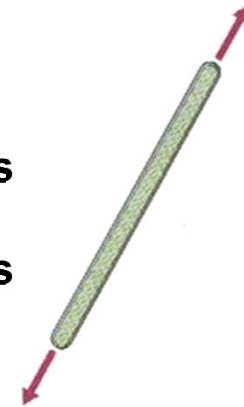
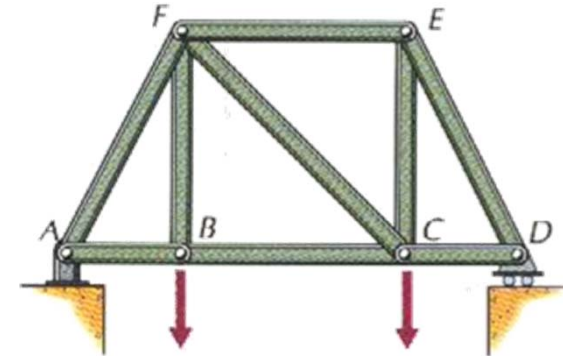
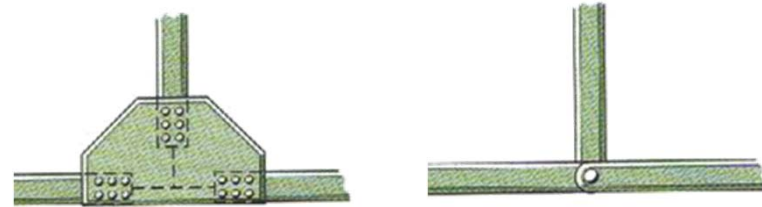
b. Entramados: estructuras que siempre contienen al menos un miembro sobre el que se ejercen fuerzas entres o más puntos. Los entramados también se construyen y apoyan de manera que se impida su movimiento.

Las estructuras tipo entramado que no estén totalmente inmovilizadas reciben el nombre de **máquinas o mecanismos**.



1.1 Hipótesis Fundamentales

- Los miembros de las armaduras están unidos solo por sus extremos.
- Los miembros de la armadura están conectados por pasadores exentos de rozamiento por lo que no hay momentos aplicados a los extremos de los miembros.
- La armadura sólo está cargada en los nudos. Los miembros suelen ser largos y esbeltos por lo que no pueden soportar momentos o cargas laterales fuertes.
- Se pueden despreciar los pesos de los miembros. En la práctica, es corriente suponer que la mitad del peso de cada miembro se ejerce sobre cada uno de los dos nudos que lo conectan.



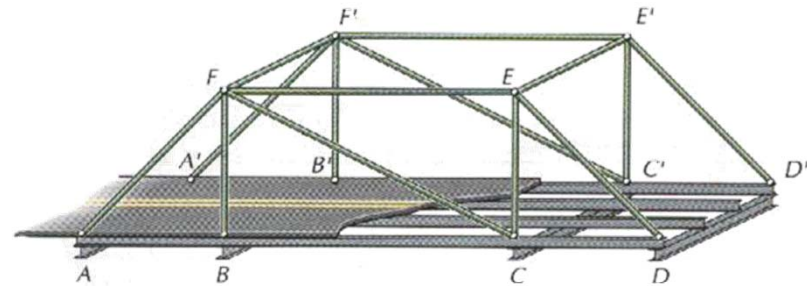
El resultado de estas cuatro hipótesis es que todos los miembros de la estructura idealizada son miembros de dos fuerzas. Tales estructuras son mucho más fáciles de analizar que otras más generales con igual número de miembros.

2. ARMADURAS

La Armadura es una estructura compuesta por miembros usualmente rectos unidos por sus extremos y cargada solamente en estos puntos de unión (nudos). La estructura ligera de una armadura proporciona, para grandes luces, una resistencia mayor que la que proporcionarían muchos tipos de estructura más recios.

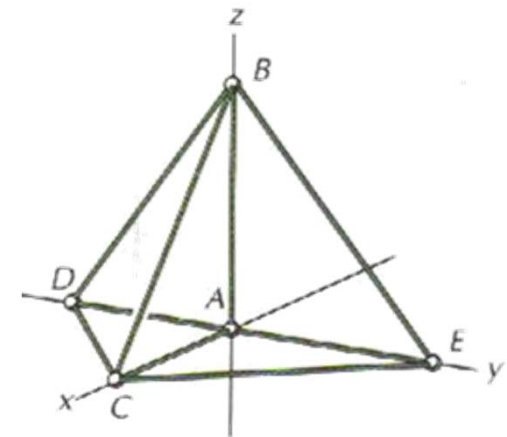
a. Armaduras Planas: están contenidas en un solo plano y todas las cargas aplicadas deben estar contenidas en él.

Ejemplo: Se utilizan a menudo por parejas para sostener puentes. Las cargas sobre el piso son transmitidas a los nudos ABCD por la estructura del piso.



b. Armaduras Espaciales: son estructuras que no están contenidas en un solo plano y/o están cargadas fuera del plano de la estructura.

Ejemplo: Grandes antenas, molinos de viento, etc.



2.1 Tipos de Armaduras

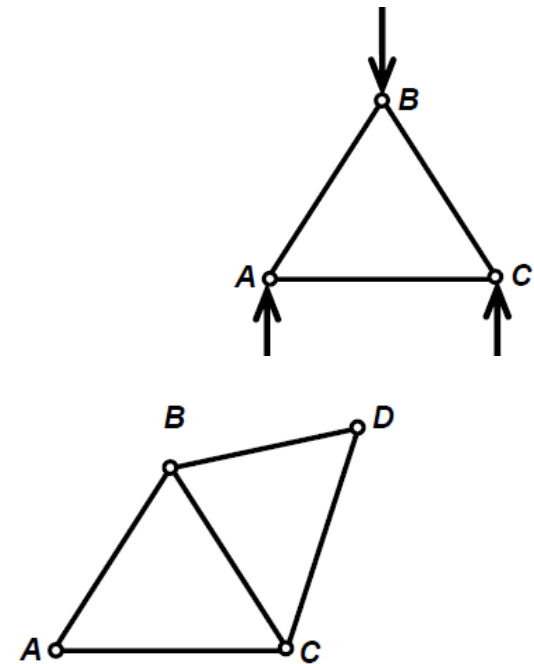
El elemento constitutivo básico de toda armadura es el **triángulo**. Las armaduras grandes se construyen uniendo varios triángulos.

De acuerdo con su formación, las armaduras pueden clasificarse en simples y compuestas.

a. Armadura Simple:

Son aquellas armaduras que se obtienen a partir de una armadura triangular rígida, agregándole dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo.

Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida. Si a una armadura triangular rígida le agregamos dos nuevos elementos y los conectamos en un nuevo nodo, también se obtiene una estructura rígida. Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de armaduras simples. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos.

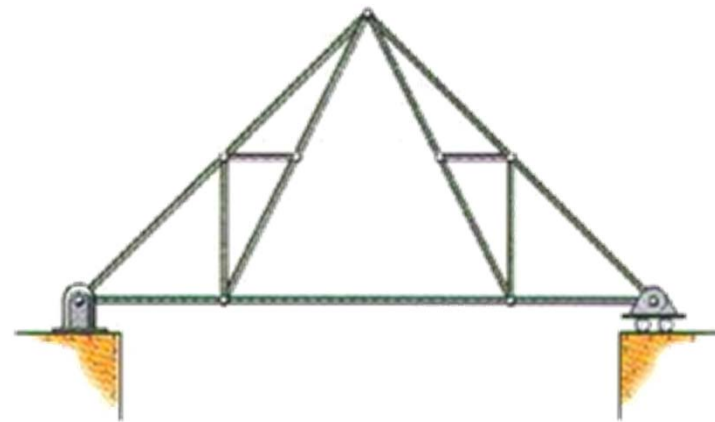
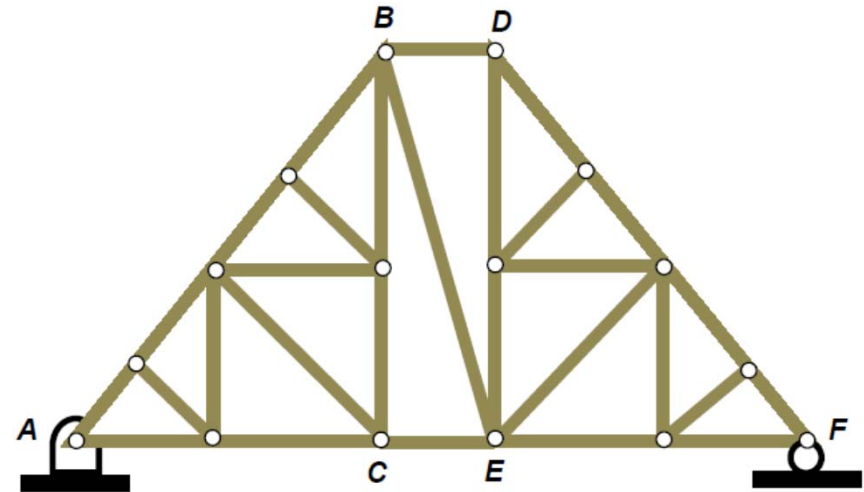


b. Armadura Compuesta:

Si dos o más armaduras simples se unen para formar un conjunto rígido, la armadura formada se denomina armadura compuesta.

Una armadura simple puede unirse rígidamente a otra en ciertos nudos por medio de tres vínculos no paralelos ni concurrentes o por medio de un tipo equivalente de unión. Cualquier armadura simple adicional puede unirse en forma similar a la estructura ya construida para obtener una armadura compuesta más amplia.

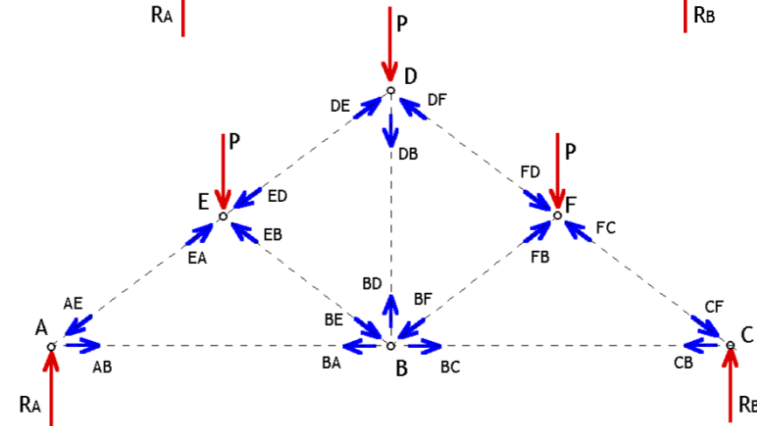
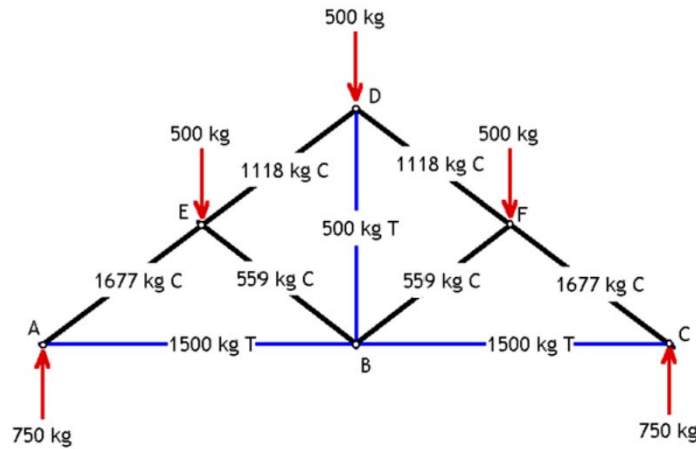
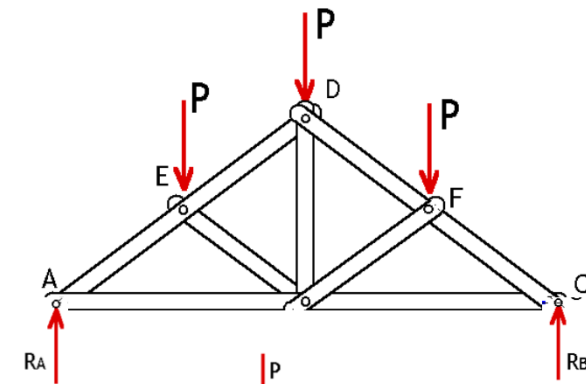
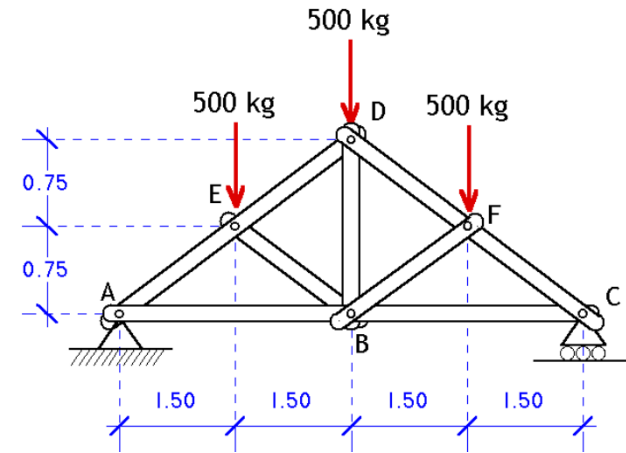
Entonces se satisface la siguiente condición necesaria pero no suficiente: $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.



3. MÉTODO DE LOS NUDOS

El método de los nodos nos permite determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Consiste en:

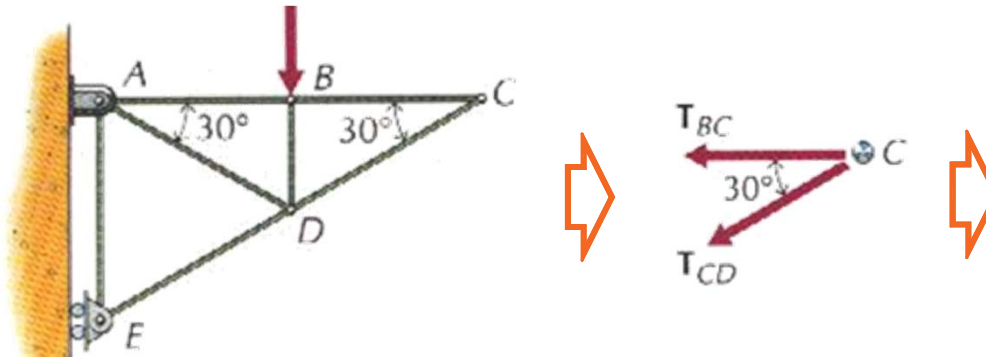
- Obtener las reacciones en los apoyos a partir del DCL de la armadura completa.
- Determinar las fuerzas en cada uno de los elementos haciendo el DCL de cada uno de los nudos o uniones.



3.1 Miembros de fuerza nula

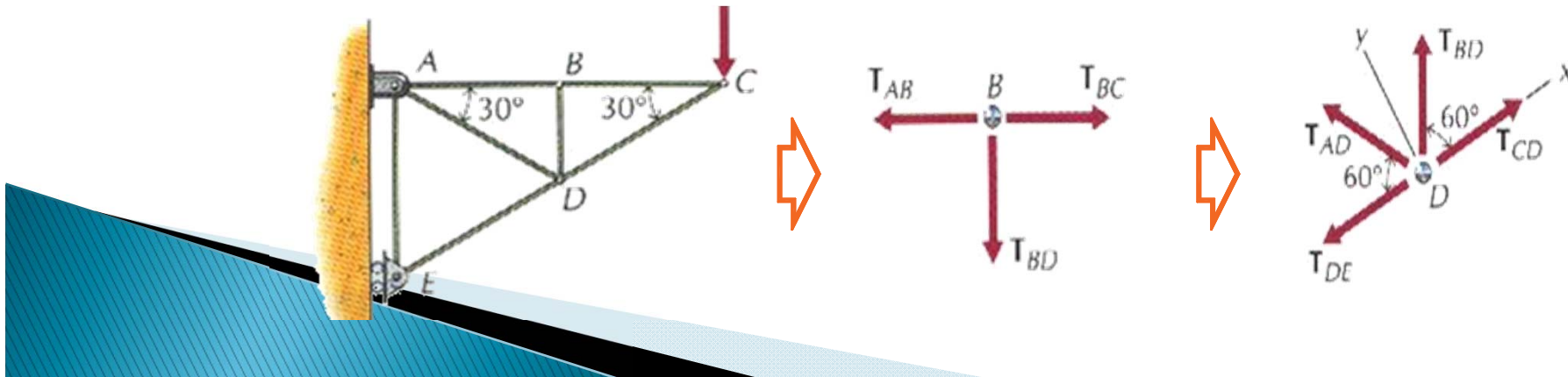
Sucede a menudo que ciertos miembros de una armadura dada no soportan carga. Esto suele deberse a una de las dos causas generales:

- a. Cuando sólo dos miembros no colineales forman un nudo y a éste no hay aplicada ni carga exterior ni reacción de apoyo, los miembros serán de fuerza nula.



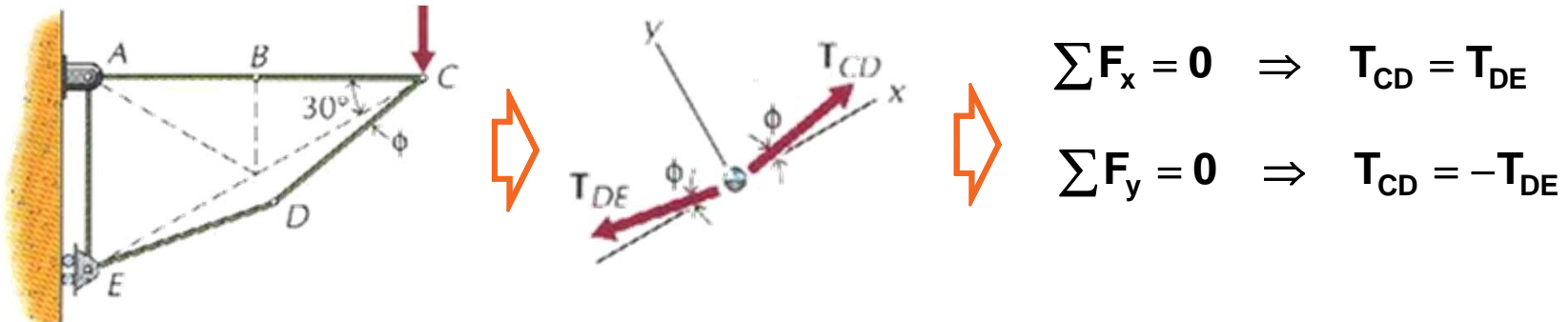
En este caso se podrían suprimir los dos miembros BC y CD, sin que viera afectada la solución e incluso la estabilidad de la armadura.

- b. Cuando tres miembros forman un nudo en el cual dos de los miembros sean colineales y el tercero forme ángulo con ellos, el miembro no colineal lo será de fuerza nula si al nudo no hay aplicada fuerza exterior ni reacción de apoyo. Los dos miembros colineales soportan cargas iguales.



En este caso estos miembros de fuerza nula no pueden suprimirse, sin más, de la armadura y descartarlos. Son necesarios para garantizar la estabilidad de la armadura, tal y como se indica a continuación:

Si se suprimieran los miembros de fuerza nula AD y BD, nada impediría que una pequeña perturbación desplazara ligeramente el pasador D y destruyera el alineamiento de los miembros.



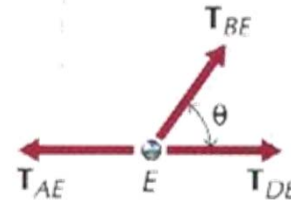
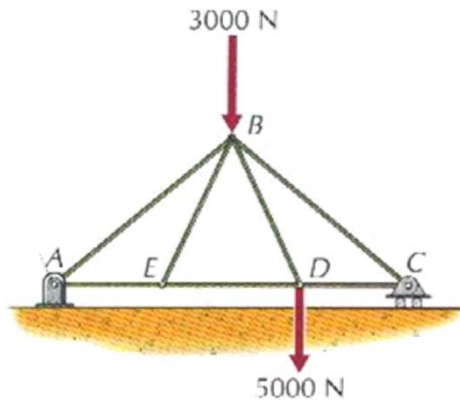
Pero el equilibrio del pasador C exige que T_{CD} no sea nula. Con lo que:

La armadura ya no estaría estático, el pasador D seguiría moviéndose hacia afuera y la armadura se derrumbaría.

Así pues, no hay que apresurarse a descartar miembros de una armadura sólo por que no soporten carga para una cierta configuración. Tales miembros son a menudo necesarios para soportar parte de la carga cuando la carga aplicada varíe y casi siempre son necesarios para garantizar la estabilidad de la armadura.

Ejemplos: Analizar que armaduras son nulas.

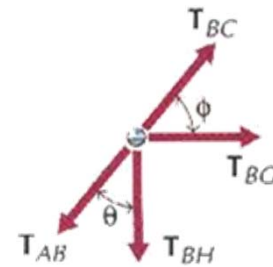
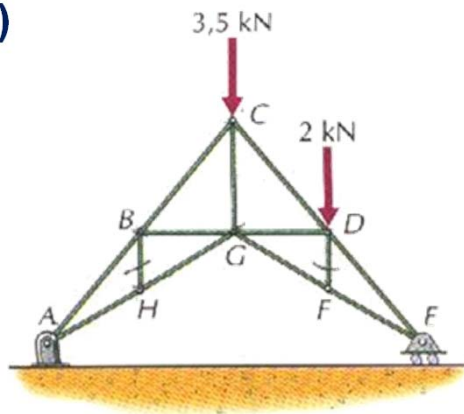
a)



El elemento BE:

$$\Rightarrow T_{BE} = 0$$

b)



Los elementos:

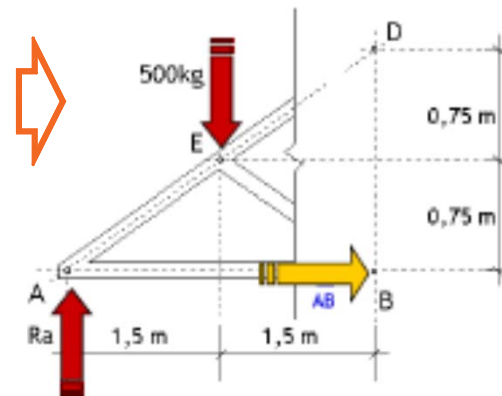
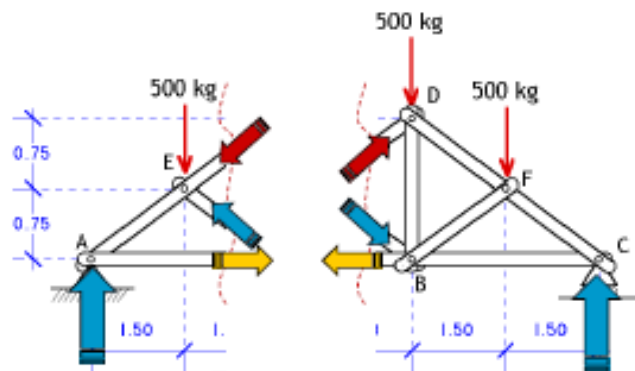
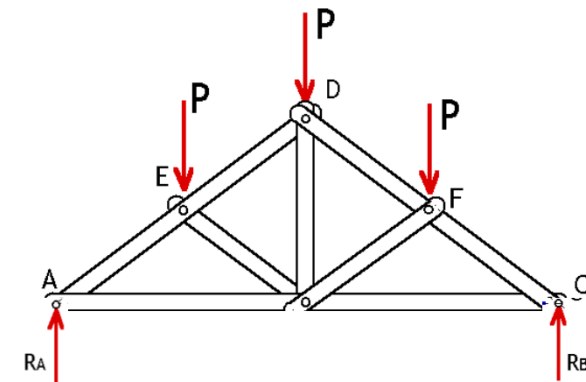
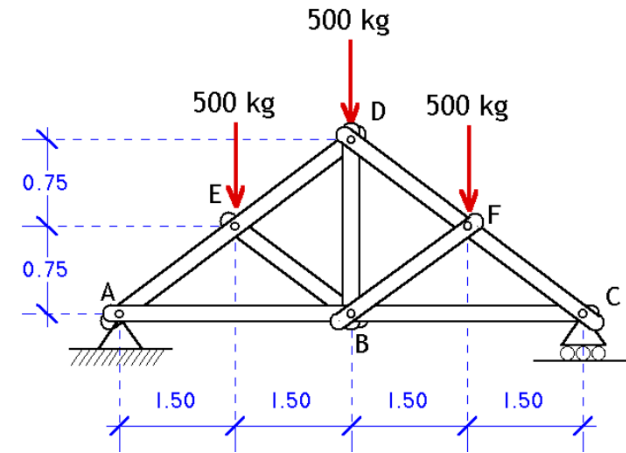
$$\Rightarrow T_{BH} = 0 \quad \wedge \quad T_{FD} = 0$$

$$\Rightarrow T_{BG} = 0$$

4. MÉTODO DE LAS SECCIONES

Éste método es más eficaz que el método de los nudos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento o en muy pocos elementos de una armadura. Se tendrán en cuenta los siguientes pasos:

- Se hace el DCL de la armadura completa y se usa dicho diagrama para calcular las reacciones en los apoyos.
- Se pasa una sección a través de tres o más elementos de la armadura cuyas fuerzas ejercidas se desea determinar.

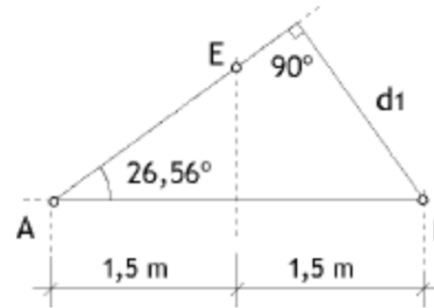
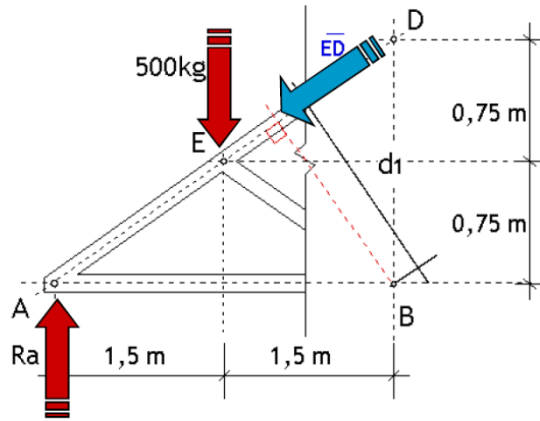


$$+ \sum M_E^o = 0$$

$$\Rightarrow T_{AB}(0.75) = 750(1.5)$$

$$\therefore T_{AB} = 1500 \text{ kg}$$

Calculamos el esfuerzo de la barra ED:

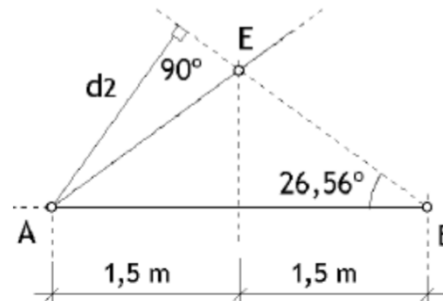
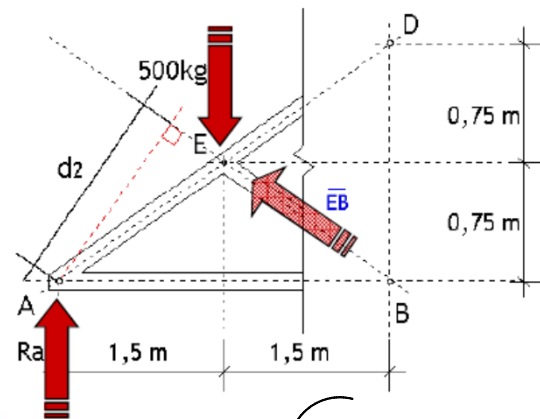


$$\frac{d_1}{\text{Sen}26.56^\circ} = \frac{3}{\text{Sen}90^\circ}$$

$$\therefore d_1 = 1.34 \text{ m}$$

$$+\sum M_B^0 = 0 \Rightarrow T_{ED}(d_1) + 500(1.5) = 750(3) \Rightarrow T_{ED}(1.34) = 2250 - 750 \therefore T_{ED} = 1119.40 \text{ kg}$$

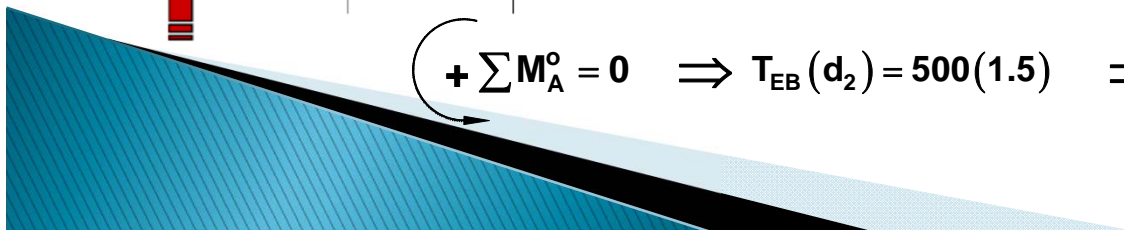
Calculamos el esfuerzo de la barra EB:



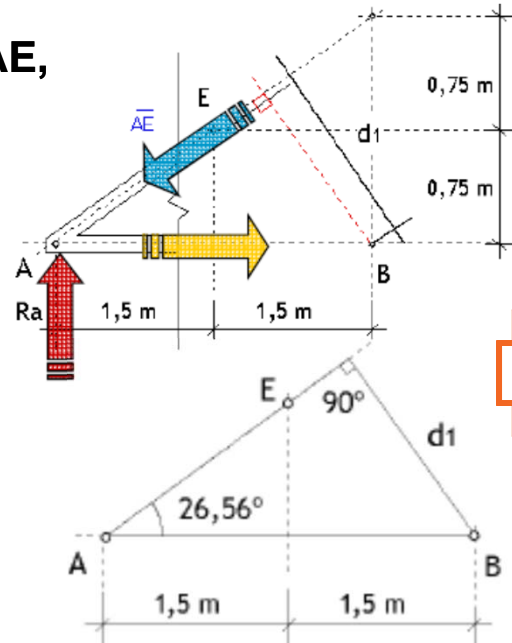
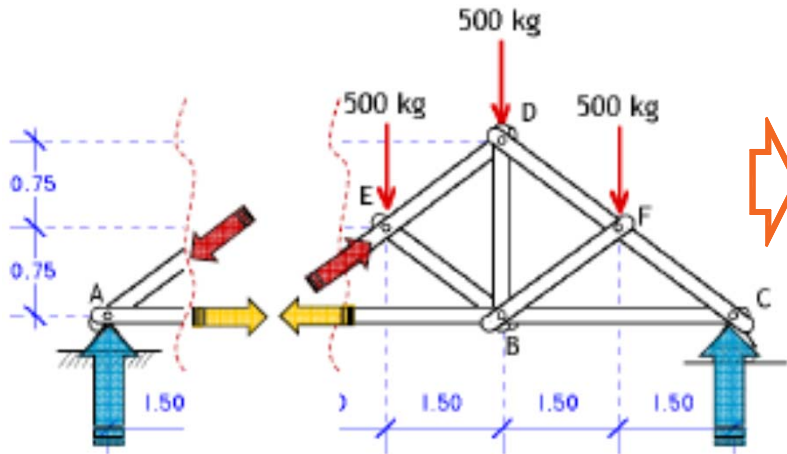
$$\frac{d_2}{\text{Sen}26.56^\circ} = \frac{3}{\text{Sen}90^\circ}$$

$$\therefore d_2 = 1.34 \text{ m}$$

$$+\sum M_A^0 = 0 \Rightarrow T_{EB}(d_2) = 500(1.5) \Rightarrow T_{EB}(1.34) = 750 \therefore T_{EB} = 599.70 \text{ kg}$$



Para calcular el esfuerzo en la barra AE, realizamos otra sección:



$$\frac{d_1}{\text{Sen}26.56^\circ} = \frac{3}{\text{Sen}90^\circ}$$

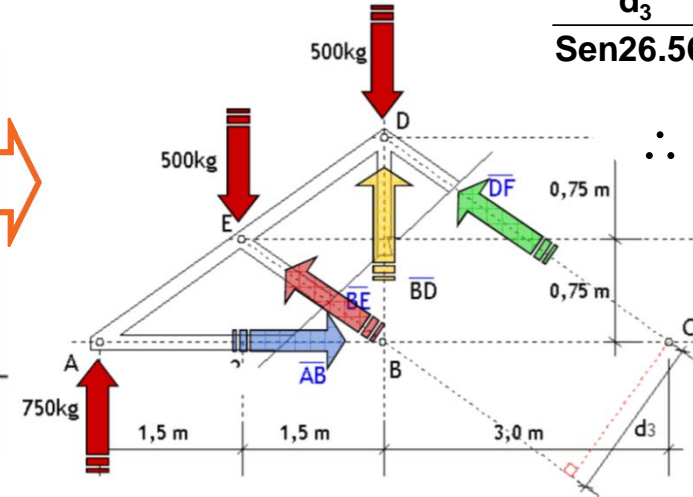
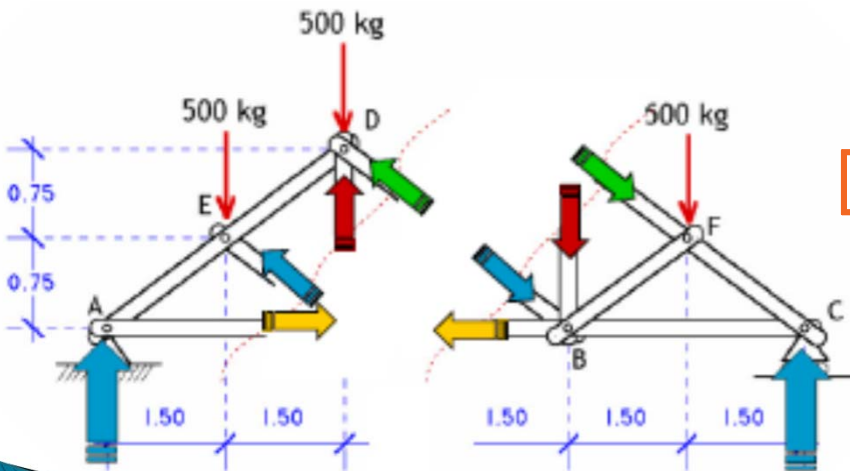
$$\therefore d_1 = 1.34 \text{ m}$$

$$+\sum M_B^o = 0$$

$$T_{AE}(d_1) = 750(3)$$

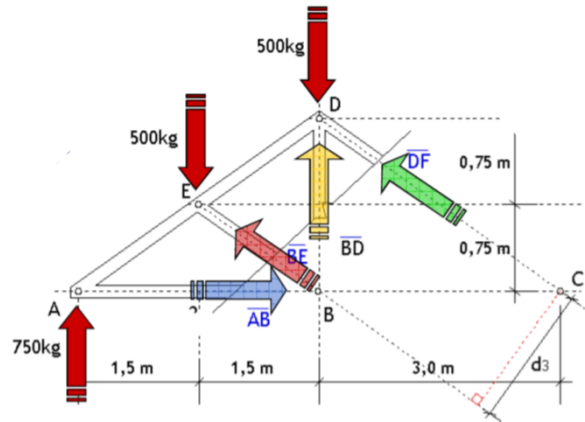
$$\therefore T_{AE} = 1679.10 \text{ kg}$$

Para calcular el esfuerzo en la barra BD, realizamos otra sección:



$$\frac{d_3}{\text{Sen}26.56^\circ} = \frac{3}{\text{Sen}90^\circ}$$

$$\therefore d_3 = 1.34 \text{ m}$$



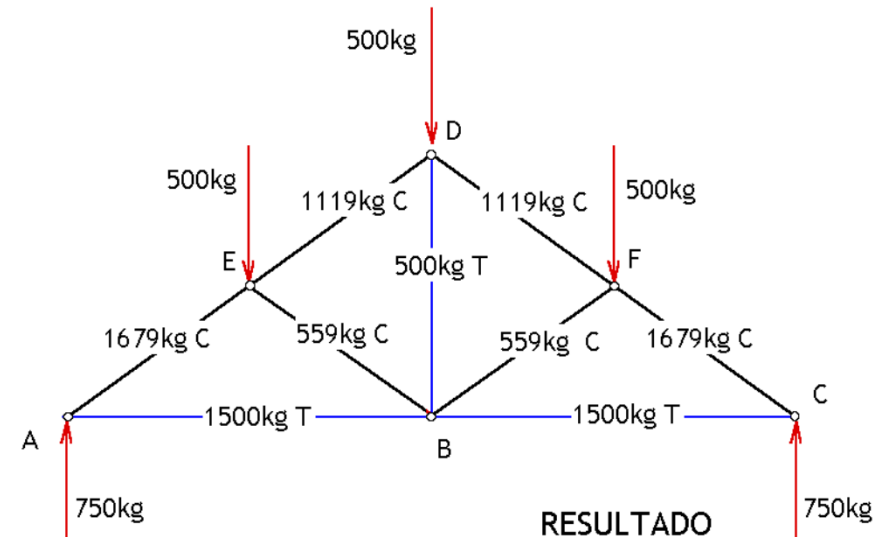
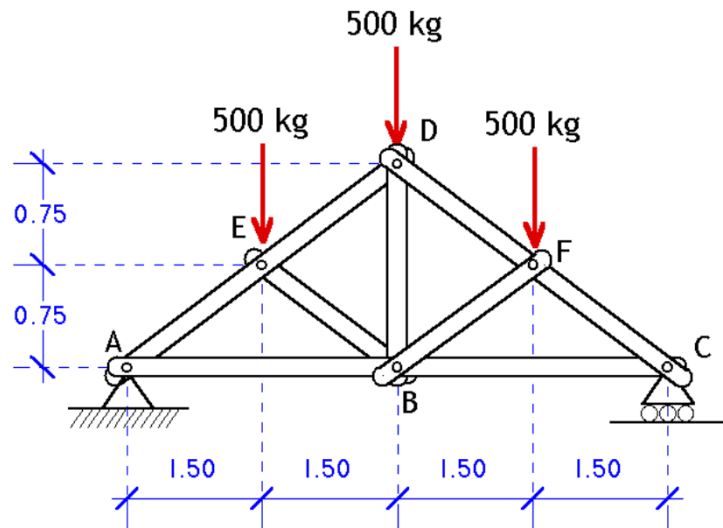
$$+\sum M_C^o = 0$$

$$500(3) + 500(4.5) - 750(6) - T_{EB}(d_3) = T_{BD}(3)$$

$$\Rightarrow 1500 + 2250 - 4500 - 599.70(1.4) = 3T_{BD}$$

$$\therefore T_{BD} = -500\text{kg}$$

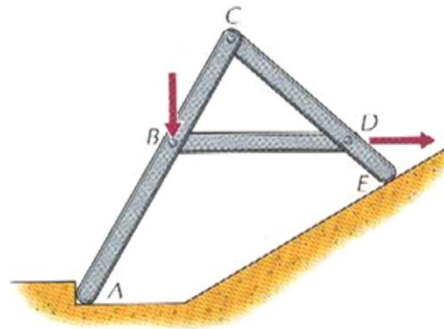
Finalmente, por ser una estructura simétrica, los demás elementos tienen los mismos esfuerzos:



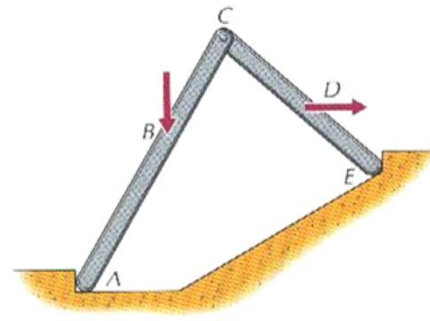
5. ENTRAMADOS Y MÁQUINAS

Aun cuando los entramados y las máquinas pueden contener también uno o más miembros de dos fuerzas, contienen al menos un miembro sobre el que se ejercen fuerzas en más de dos puntos o sobre el cual actúen fuerzas y momentos.

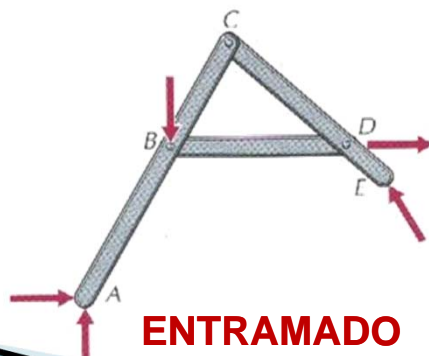
Los entramados a su vez son estructuras rígidas mientras que las máquinas no lo son.



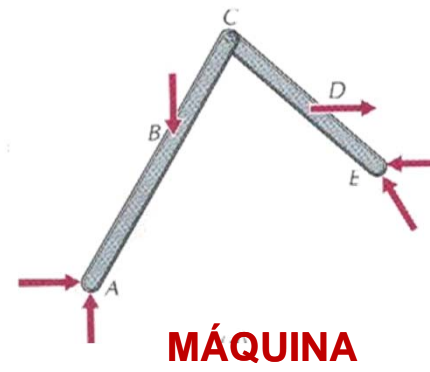
(a)



(c)



ENTRAMADO



MÁQUINA

Máquina: Esta estructura no es rígida en el sentido de que depende de sus apoyos para mantener su forma. La falta de rigidez se compensa con una reacción más de los apoyos.

Así pues, en las máquinas el equilibrio global no es suficiente para determinar las 4 reacciones en los apoyos. La estructura debe desmembrarse y analizarse aun cuando lo único que se pida sean las reacciones en los apoyos.

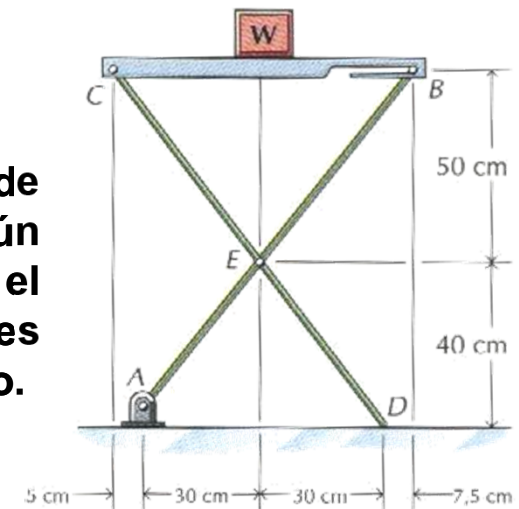
Más concretamente, el término **máquina** suele utilizarse para describir objetos que se utilicen para amplificar el efecto de las fuerzas (**tenazas, pinzas, cascanueces, etc.**) En cada caso, se aplica al mango del dispositivo una fuerza de entrada y éste elemento aplica una fuerza de salida mucho mayor a donde sea. Deben desmembrarse y analizarse aun cuando lo único que se pida sea la relación entre la fuerza aplicada y de salida.

El método de resolución de entramados y máquinas consiste en desmembrar las estructuras, dibujar el DCL de cada componente y escribir las ecuaciones de equilibrio para cada elemento.

En el caso de armaduras, al conocerse la dirección de la fuerza en todos los miembros, el método de los nudos se reducía a resolver problemas de equilibrio del punto. Si embargo, como algunos miembros de los entramados y máquinas no son miembros de dos fuerzas, no se conocen las direcciones de las fuerzas en dichos miembros con lo que su análisis consistirá en resolver el equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos.

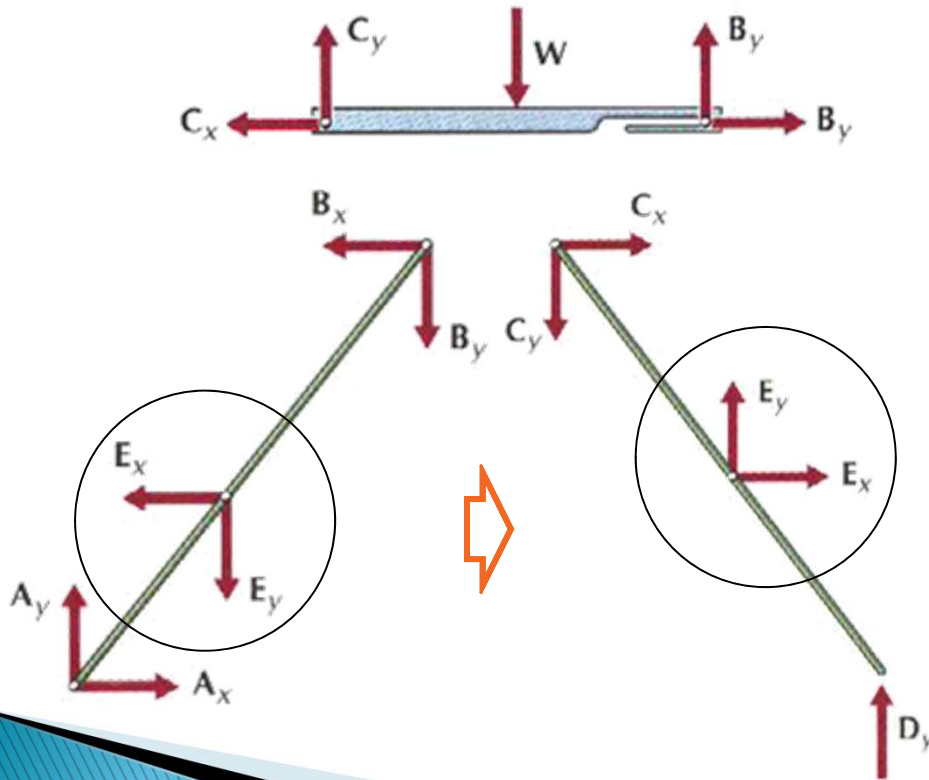
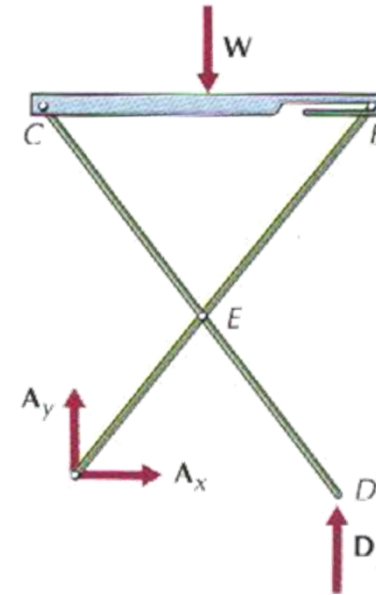
5.1 Análisis de Entramados

En la figura tenemos una mesa en la que ninguno de sus miembros lo es de dos fuerzas. Además, aún cuando pueda doblarse la mesa desenganchando el tablero de las patas, en su utilización normal la mesa es una estructura rígida estable y por tanto un entramado.



Para analizar entramados que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se deben seguir los siguientes pasos:

- Hacer el DCL del bastidor completo y utilizar este diagrama para calcular, en la medida de lo posible, las reacciones en los apoyos.
- Desensamblar el entramado y hacer el DCL para cada uno de sus elementos.



- Considerar primero a los elementos sujetos a dos fuerzas. Estas fuerzas iguales y opuestas se aplican a cada uno de los elementos en los puntos en que éstos se conectan a otro elemento. Si el elemento sujeto a dos fuerzas es un elemento recto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo del eje del elemento.

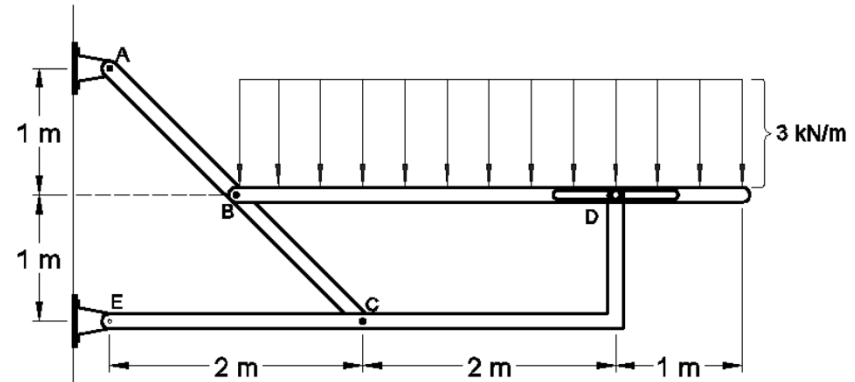
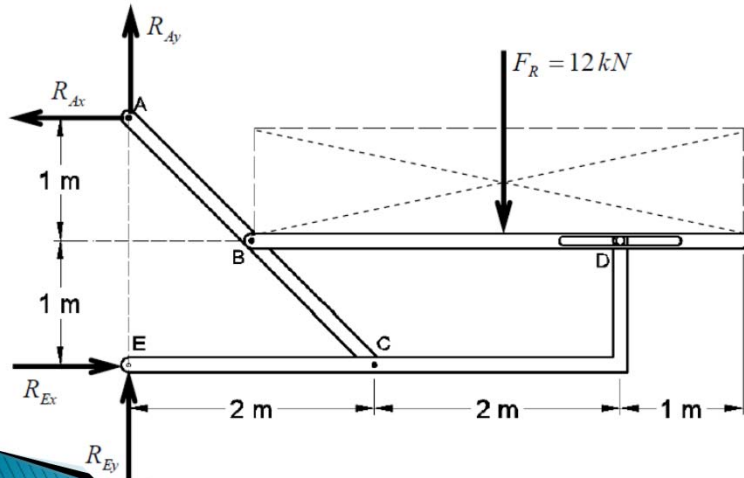
- d. Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos se grafican todas las fuerzas que actúan sobre dicho elemento.
- e. Se determinan las fuerzas internas, al igual que aquellas reacciones que aún no se han determinado.

Nota: En el punto donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples, se usan componentes horizontales y verticales para representar a las fuerzas internas que actúan sobre ese punto.

Ejemplo: Resolver el siguiente entramado.

Solución.

a) Realizamos el D.C.L. de todo el sistema



$$\begin{aligned}
 \uparrow \quad + \sum M_E^0 = 0 &\Rightarrow R_{Ax} (2) = 12(3) \quad \therefore R_{Ax} = 18 \text{ kN} \\
 \uparrow \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = R_{Ex} \quad \therefore R_{Ex} = 18 \text{ kN} \\
 \uparrow \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_{Ey} = 12 \dots (1)
 \end{aligned}$$

b) Desensamblamos el entramado y hacemos el DCL para cada uno de sus elementos.

👉 $\sum M_B^o = 0$

$R_{Dy}(3) = 12(2)$

$\therefore R_{Dy} = 8 \text{ kN}$

👉 $\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0$

👉 $\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{By} + R_{Dy} = 12$

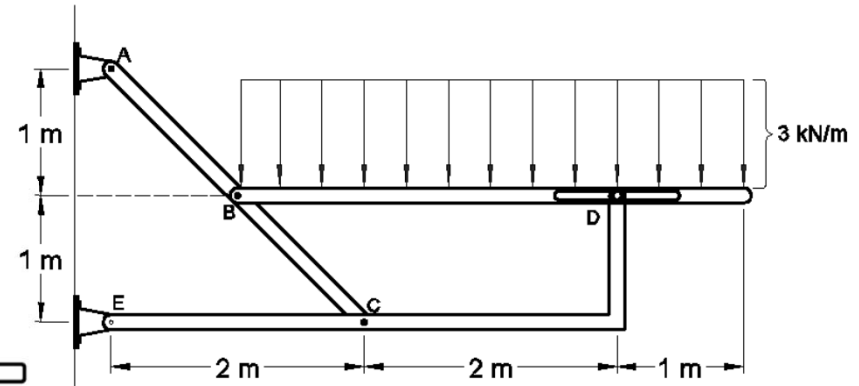
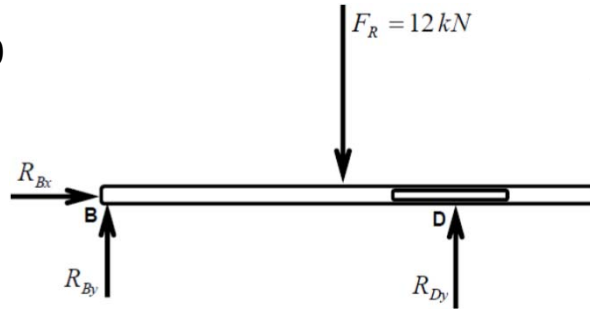
$\Rightarrow R_{By} + 8 = 12 \therefore R_{By} = 4 \text{ kN}$

De la ecuación (1) tenemos:

$R_{Ay} + R_{Ey} = 12$

$\Rightarrow R_{Ay} - 8 = 12$

$\therefore R_{Ay} = 20 \text{ kN}$



👉 $\sum M_E^o = 0 \Rightarrow R_{Cy}(2) = R_{Dy}(4)$

$\Rightarrow R_{Cy} = \frac{(8)(4)}{2} \therefore R_{Cy} = 16 \text{ kN}$

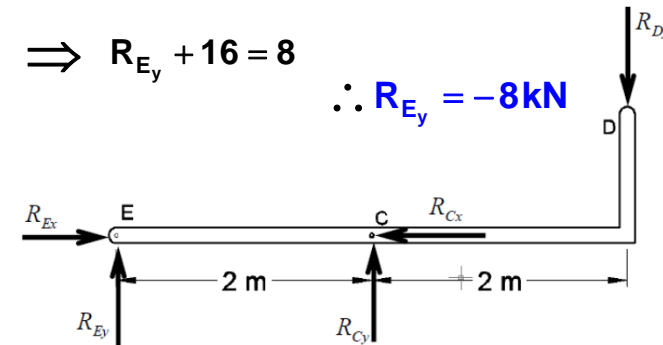
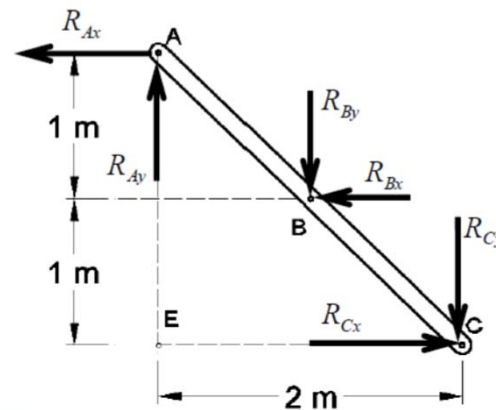
👉 $\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ex} = R_{Cx}$

$\therefore R_{Cx} = 18 \text{ kN}$

👉 $\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ey} + R_{Cy} = R_{Dy}$

$\Rightarrow R_{Ey} + 16 = 8$

$\therefore R_{Ey} = -8 \text{ kN}$



Ejemplo: Resolver el siguiente entramado

Solución.

a) Realizamos el D.C.L. de todo el sistema

$\uparrow + \sum M_A^o = 0$

$\Rightarrow (12.5)C = 250(15) + 375(20) \quad \therefore C = 900N$

$\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = C \quad \therefore A_x = 900N$

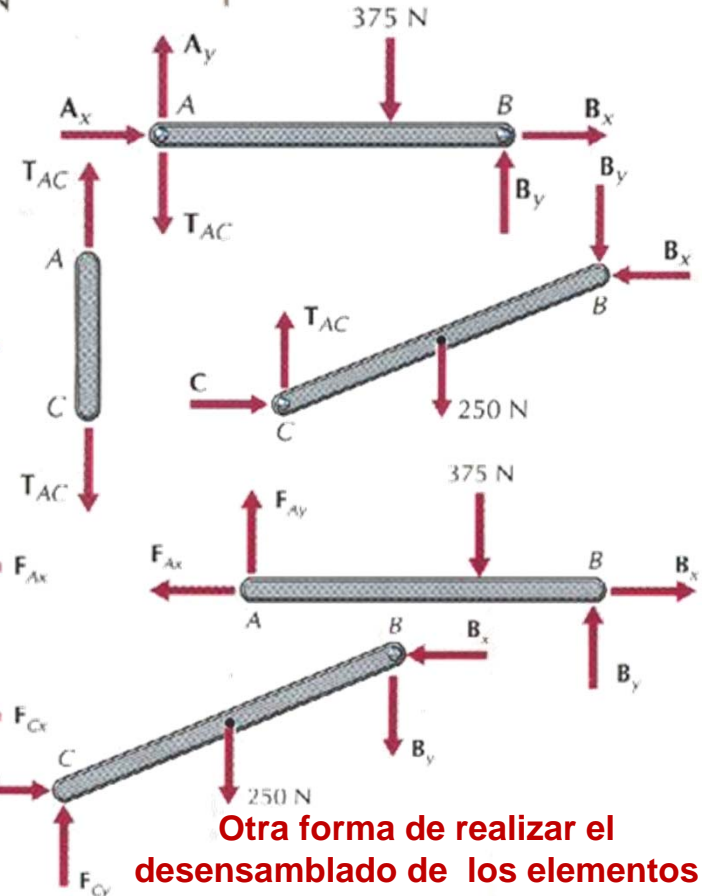
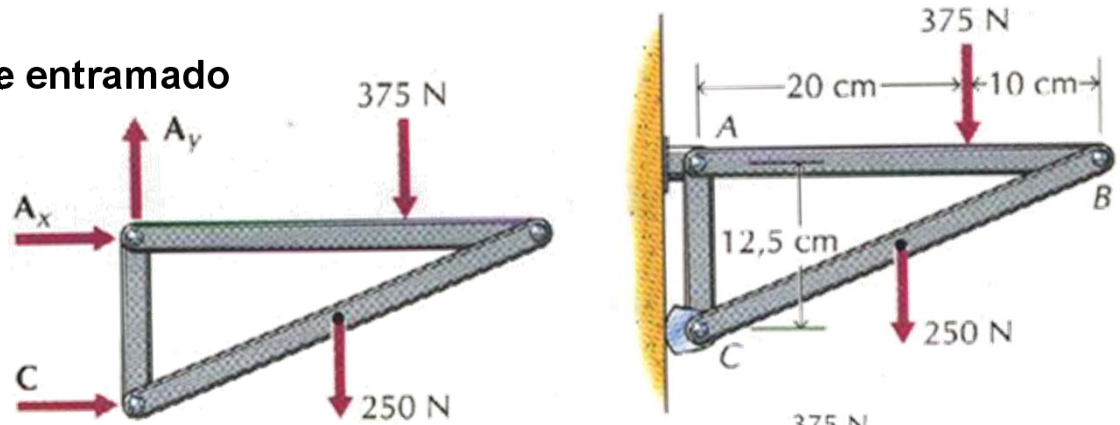
$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 250 + 375 \quad \therefore A_y = 625N$

b) Desensamblamos el entramado y hacemos el DCL para cada uno de sus elementos.

$\uparrow + \sum M_A^o = 0 \Rightarrow B_y(30) = 375(20)$
 $\therefore B_y = 250N$

$\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = -A_x \quad \therefore B_x = -900N$

$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 375 = T_{AC}$
 $\Rightarrow 625 + 250 - 375 = T_{AC}$
 $\therefore T_{AC} = 500N$



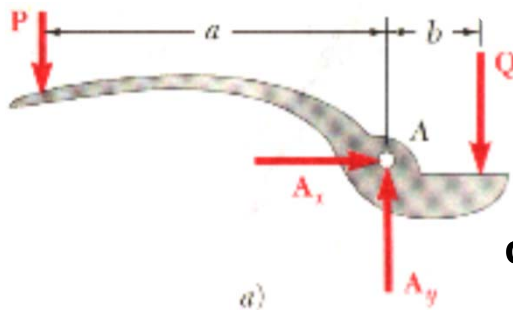
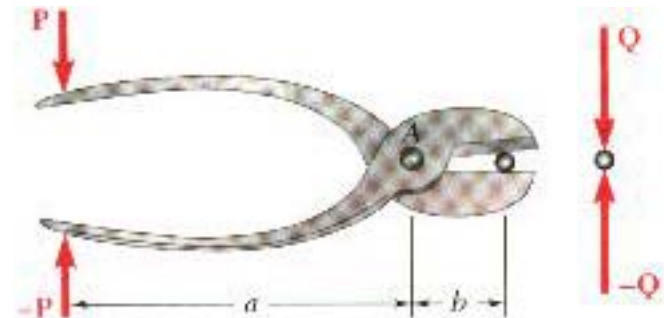
Otra forma de realizar el desensamblado de los elementos

5.2 Análisis de Máquinas

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar fuerzas de entrada en fuerzas de salida.

Para analizar una máquina se siguen los siguientes pasos:

- Hacer el DCL de la máquina completa y utilizarlo para determinar tantas fuerzas desconocidas ejercidas sobre la máquina como sea posible.
- Desensamblar la máquina y hacer el DCL para cada uno de los elementos que la constituyen. Considere primero a los elementos sujetos a dos fuerzas y después se considera a los elementos sujetos a fuerzas múltiples.



- Aplicar las ecuaciones de equilibrio en los DCL que se han determinado y hallar las incógnitas solicitadas.

Ejemplo 1: Determine las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de los elementos DH, EH y EI, indicando si se encuentran a tracción o compresión. Ver figura (1).

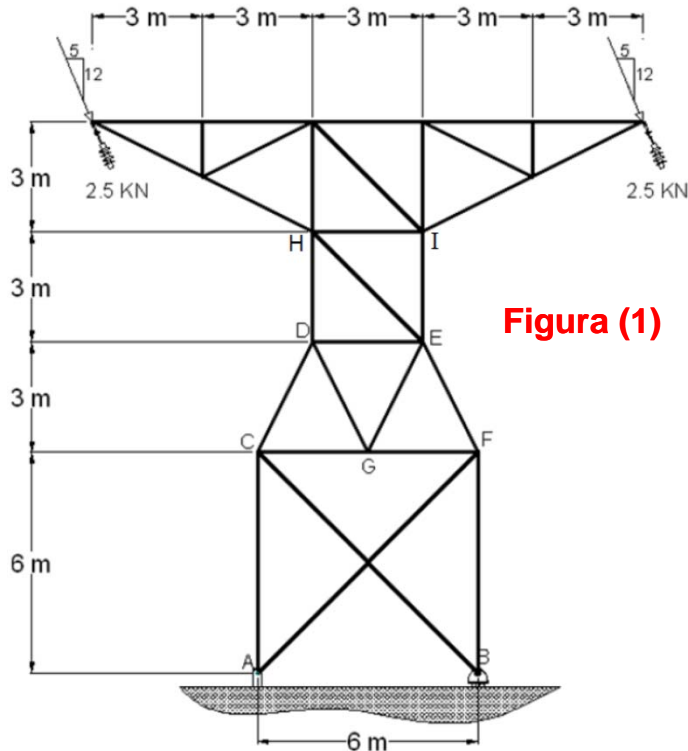


Figura (1)

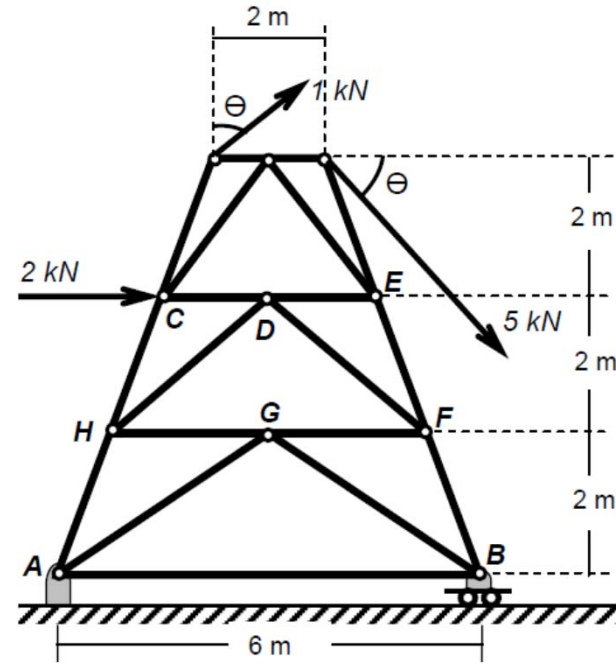


Figura (2)

Ejemplo 2: Determine las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de los elementos CH, DF y EF, indicando si se encuentran a tracción o compresión. Considerar $\theta = 53^\circ$. Ver figura (2).

Ejemplo 3: Determine las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de los elementos CD, DF y EF, indicando si se encuentran a tracción o compresión. Ver figura (3).

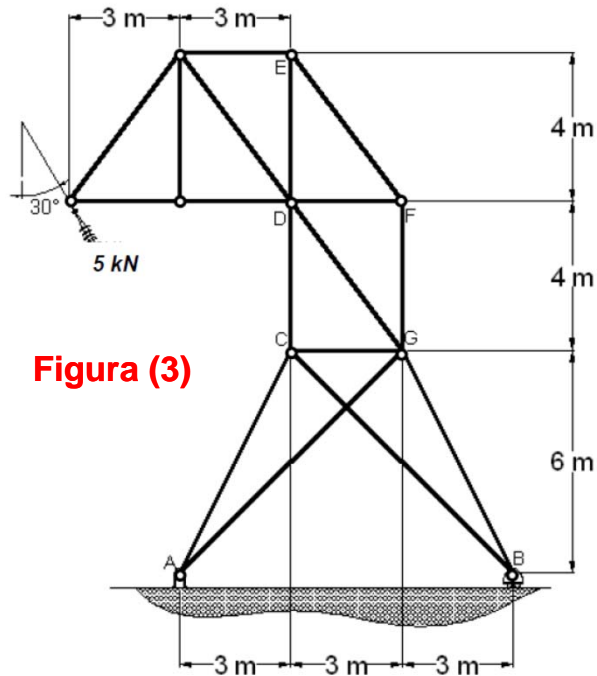


Figura (3)

Ejemplo 4:

Determinar la fuerza axial del elemento HJ, indicando si se encuentra a tracción o compresión. Considerar:

$$d = 3 \text{ ft}$$

$$W = 200 \text{ lbf y}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Ver figura (4)

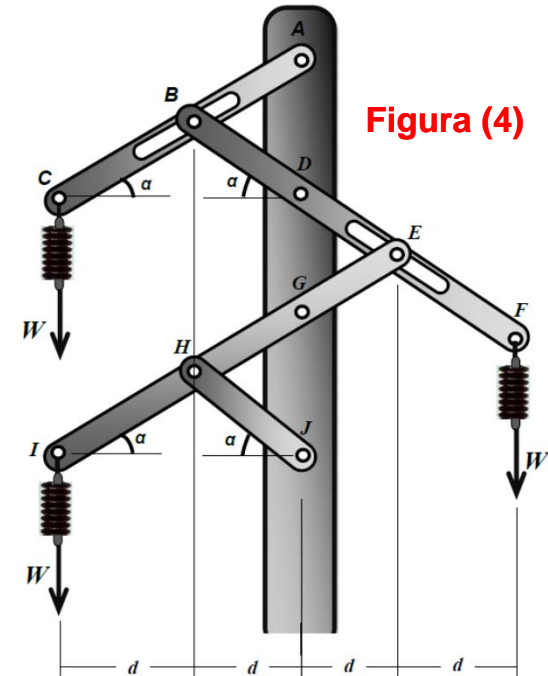
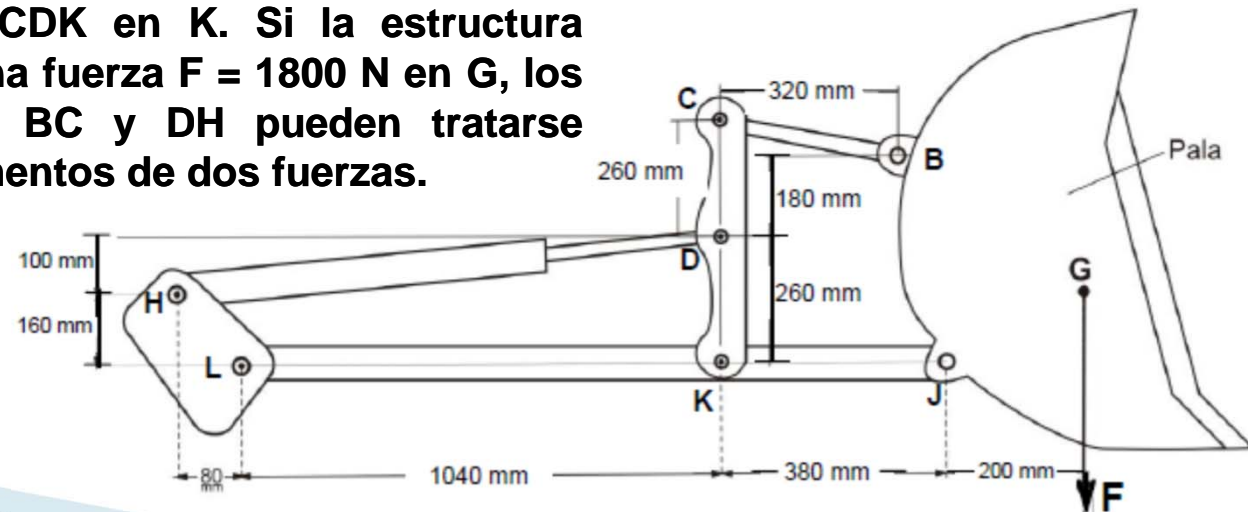


Figura (4)

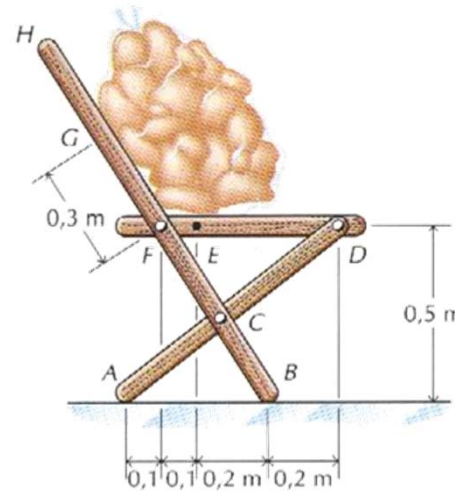
Ejemplo 5: Determine la fuerza de reacción sobre el elemento CDK en K. Si la estructura soporta una fuerza $F = 1800 \text{ N}$ en G, los elementos BC y DH pueden tratarse como elementos de dos fuerzas.



Ejemplo 6: Determine las reacciones y las fuerzas internas en cada uno de los elementos de la figura mostrada.

Ejemplo 7: Determine las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de los elementos DE, DF, DG y CD, indicando si se encuentran a tracción o compresión. Ver figura (5).

Ejemplo 8: La armadura del letrero está diseñada para soportar una carga de viento horizontal de 800 lb. Si la resultante de esta carga pasa por el punto C, determine las fuerzas de los elementos BG y BF. Ver figura (6).



DCL del sistema

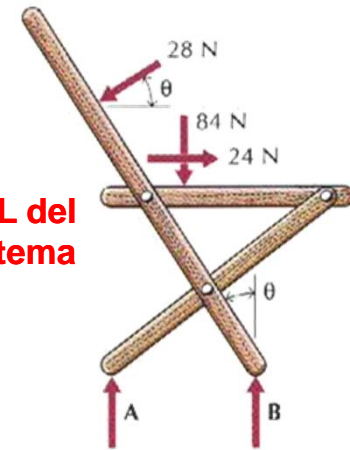


Figura (5)

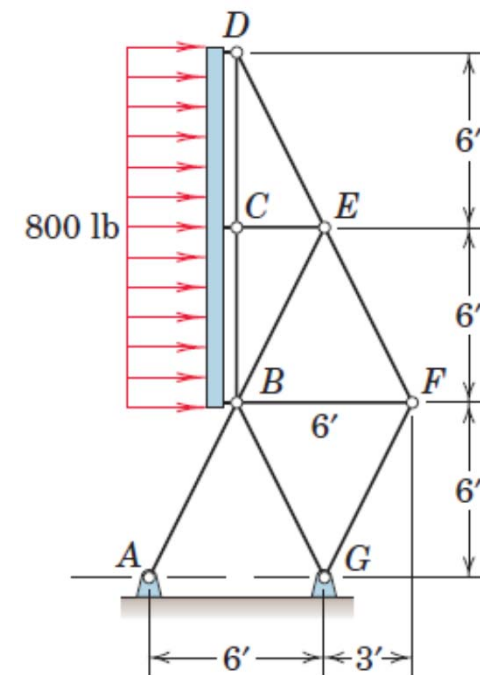
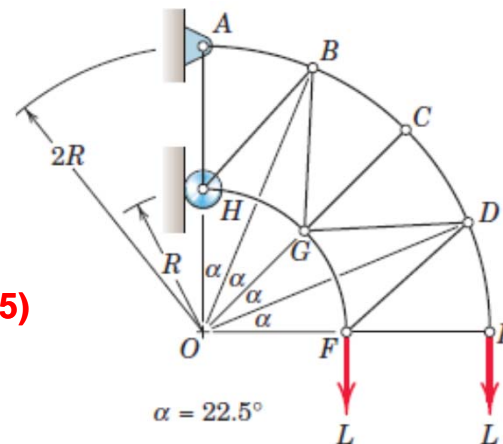


Figura (6)