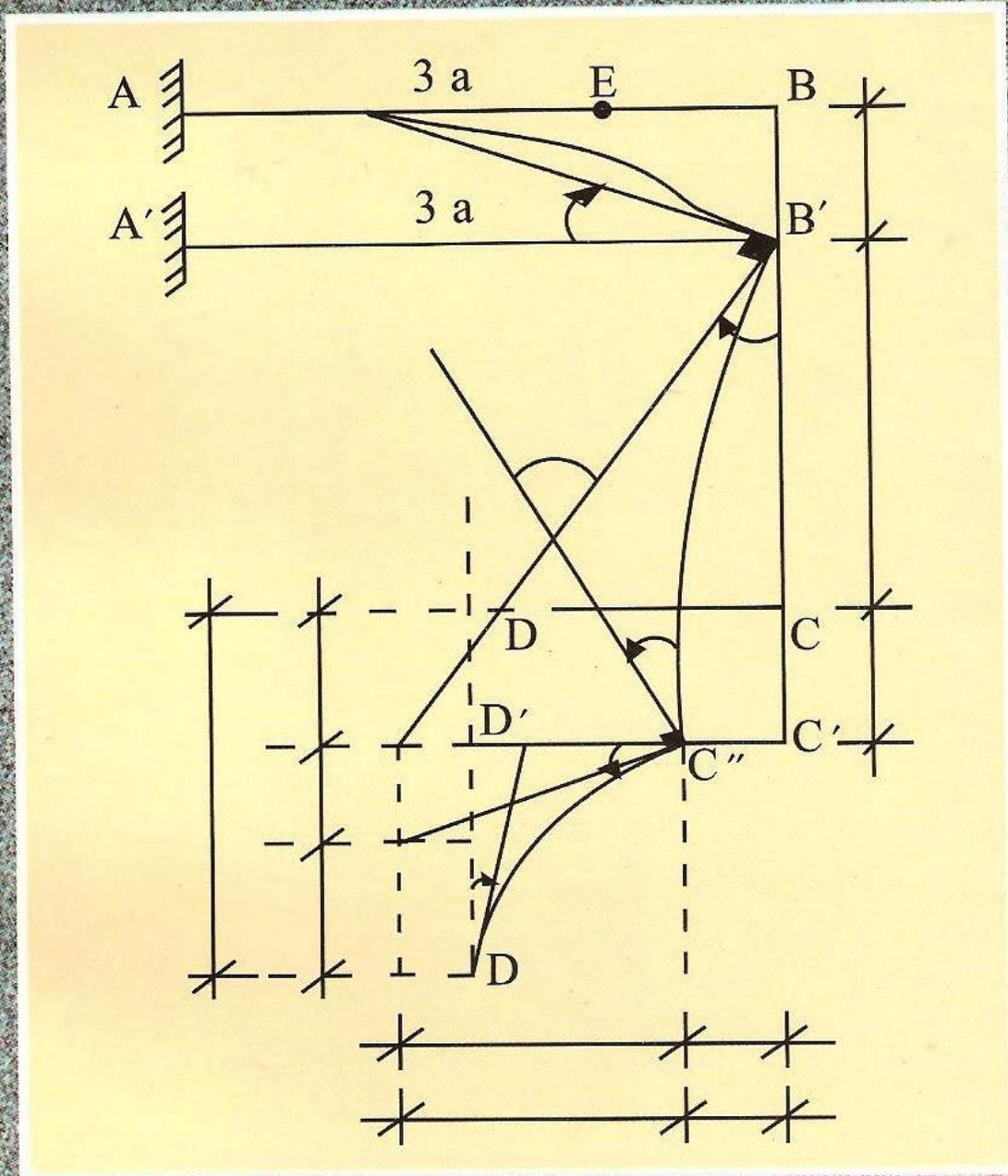


# RESISTENCIA DE MATERIALES



**GENARO DELGADO CONTRERAS**

*A mis Queridos Alumnos  
de la Facultad de Ingeniería Química y Textil  
de la Universidad Nacional de Ingeniería; que  
gracias a su entusiasmo y talento hicieron posible  
sacar adelante la presente publicación.*

...y ~~am~~ ~~ar~~...

*Con todo mi Amor.*

**Agradecimiento Especial a:**

**PATRICIA A. COSSI AROCUTIPA**

Ing. CIVIL

**pat\_ricia\_pv\_11@hotmail.com**

cel. 970956991

Lima, Marzo de 2010

## ÍNDICE

	<b>Pag.</b>
<b>Fuerzas Internas</b>	<b>4</b>
Análisis de Fuerzas Internas	5
<b>Esfuerzo</b>	<b>8</b>
Concepto Fundamental	9
Tipos de Esfuerzos	9
Introducción al Concepto de Esfuerzos	9
<i>Hipótesis Básicas de la Resistencia de Materiales</i>	<i>12</i>
<i>Conceptos y Definiciones</i>	<i>12</i>
<b>Deformación Axial y de Corte</b>	<b>14</b>
<b>Tracción y Compresión</b>	<b>19</b>
Materiales Dúctiles y Frágiles	20
Ley de Hooke	20
Modulo de Elasticidad	21
<i>Propiedades Mecánicas de los Materiales</i>	<i>21</i>
Limite de Proporcionalidad	21
Limite Elástico	21
Zona Elástica	22
Zona Plástica	22
Limite Elástico Aparente o De Fluencia	22
Resistencia a Tracción	22
Resistencia de Rotura	22
Modulo de Resiliencia	22
Modulo de Tenacidad	22
Restricción	23
Alargamiento de Rotura	23
Limite Elástico Convencional	23
Modulo Tangente	24
Coeficiente De Dilatación Lineal	24
Relación De Poisson	24
Forma General De La Ley De Hooke	24
<i>Clasificación de los Materiales</i>	<i>25</i>

<b>Tensión Cortante</b>	<b>27</b>
	27
Definición De Esfuerzo Cortante	28
Definición De Tensión Cortante	28
Comparación De Las Tensiones Cortante y Normal	28
Deformaciones Debidas A Tensiones Cortantes	29
Deformación Por Cortante	29
Modulo De Elasticidad En Cortante	29
<i>Problemas Resueltos</i>	<i>30</i>
<b>Deformación Tangencial</b>	<b>37</b>
<b>Efectos de Torsión</b>	<b>39</b>
Problemas de Aplicación	44
<b>Efectos Axiales</b>	<b>45</b>
Problemas Resueltos	46
<i>Sistemas De Fuerzas Estáticamente Indeterminados</i>	<i>55</i>
Problemas Resueltos	55
<i>Método De La Carga Unitaria Para Efectos Axiales</i>	<i>73</i>
Problemas de Aplicación	74
<b>Tensión en Vigas</b>	<b>87</b>
<i>Módulo de Rotura</i>	<i>93</i>
<i>Aplicaciones de Tensiones en Vigas</i>	<i>94</i>
<i>Deducción de la Fórmula de la Tensión Cortante Horizontal</i>	<i>100</i>
Flujo Cortante	102
Relación entre la tensión cortante horizontal y vertical	102
Aplicación a la sección rectangular	103
<b>Teoría de Pequeñas Deformaciones</b>	<b>105</b>
Giro en los Nudos	108
Rigidez y Elasticidad de Elementos Estructurales	109
Convención de Signos	112
<b>Método de la Doble Integración</b>	<b>113</b>
Problemas Resueltos	115
<b>Método del Área de Momentos</b>	<b>119</b>
Convención de Signos	124
Ecuación de Bresse	124

Concavidad y Convexidad	125
Concavidad y Convexidad de Deformadas y su Relación con el Diagrama de Momentos	126
Problemas resueltos	128
<b>Método de la Viga Conjugada</b>	<b>152</b>
Fundamentos teóricos	153
Definición de la Viga Conjugada	155
Conclusión	155
Relación entre la Viga Real y la Viga Conjugada	155
Problemas Resueltos	158
<b>Método de los Tres Momentos</b>	<b>172</b>
Problemas de Aplicación	178
<b>Método de Pendiente y Deflexión</b>	<b>182</b>
Aplicaciones	191
<b>Métodos Energéticos</b>	<b>207</b>
Método de la Carga Unitaria para Flexión	208
Método de la Energía de Deformación	216
Ejemplo de Aplicación	227
<b>Misceláneas de Problemas</b>	<b>228</b>
<b>Esfuerzos Combinados</b>	<b>236</b>

# ¿QUÉ HACE UN INGENIERO?

Todo estudiante de Ingeniería se pregunta cuando inicia sus estudios universitarios; ¿a qué se dedica un ingeniero?, pregunta interesante, ya que de la respuesta; el joven sabrá lo que hará el resto de su vida.

Los libros de ingeniería dicen que todo ingeniero diseña, construye máquinas y edificios; y por este punto iniciaremos nuestra exposición, para entender el campo de la Mecánica y Resistencia de Materiales.

La primera pregunta que surge es ¿qué es diseñar?

Diseñar es dimensionar, dar forma y determinar el tipo de material, y los tipos de apoyos de lo que queremos construir posteriormente.

La otra pregunta inmediata que surge es ¿Qué es una máquina? y ¿Qué es un edificio?, al respecto diremos, que toda máquina o edificio es una combinación de elementos unidos entre sí, para:

1.- SOPORTAR CARGAS

2.-TENER CAPACIDAD DE DEFORMARSE Y RECUPERAR SU FORMA.

3.-MANTENER SU POSICION ORIGINAL.

Es decir toda máquina y edificio debe tener **RESISTENCIA**, es decir capacidad de soportar cargas, además debe tener **RIGIDEZ**, capacidad de deformarse y recuperar su forma, y finalmente **ESTABILIDAD**, es decir capacidad de mantener su posición original.

Finalmente podemos concluir que toda máquina y edificio deben cumplir tres principios fundamentales de la Mecánica de Materiales, que son: **RESISTENCIA, RIGIDEZ Y ESTABILIDAD.**

Todo el diseño de máquinas y edificios se basa en la Mecánica y Resistencia de Materiales.

Otra pregunta que se hará el estudiante es ¿cuál es la diferencia entre la Mecánica y Resistencia de Materiales?

Al respecto diremos que la Mecánica, analiza las fuerzas exteriores que actúan sobre una estructura; y la considera a ésta como un cuerpo rígido; capaz de soportar todas estas cargas, sin deformarse.

En cambio a la Resistencia de Materiales le interesa saber si la estructura tendrá la capacidad para soportar dichas cargas; teniendo que analizarse en este caso las fuerzas internas del cuerpo y su relación con las fuerzas exteriores que actúan en él.

La Resistencia de Materiales estudia y establece las relaciones entre las cargas exteriores aplicadas y sus efectos en el interior de los sólidos. No supone que los sólidos son rígidos, como en la Mecánica; sino que las deformaciones por pequeñas que sean tienen gran interés en nuestro análisis.

Otra pregunta que surge de la exposición es si una máquina o estructura soportan cargas, ¿qué es una carga y de que tipo son?

A lo largo de la exposición iremos analizando los diferentes tipos de cargas que existen y sus efectos que ocasionan en las máquinas y edificios, pero a manera de introducción diremos que las cargas son fuerzas que actúan en un cuerpo y que cuando se les multiplica por su brazo de palanca se generan momentos.

Toda máquina o edificio estará sometida a fuerzas y momentos, y de acuerdo a como actúen en los elementos de las máquinas o estructuras generarán los siguientes efectos: AXIALES, CORTANTES, FLEXIONANTES y DE TORSIÓN.

Los efectos axiales y de corte son generados por fuerzas, los flexionantes y de torsión son generados por pares.

A continuación pasaremos a analizar los cuatro efectos que todo edificio o máquina tendrán, al ser sometidos a cargas o pares, según sea el caso.

### **EFFECTOS AXIALES**

Los efectos axiales aparecen cuando las fuerzas actúan en el centro de gravedad de la sección recta del elemento estructural y se desplazan a lo largo de su eje de simetría.

Los efectos axiales pueden ser de tracción o de compresión. Los primeros generan alargamiento y los segundos acortamiento en los elementos.

### **EFFECTOS DE CORTE**

Los efectos de corte aparecen cuando las fuerzas actúan en la dirección de la sección recta del elemento. Son los componentes de la resistencia total al deslizamiento de la porción del elemento a un lado de la sección de exploración respecto de la otra porción.

### **EFFECTOS DE FLEXION**

Los efectos flexionantes aparecen cuando se aplican pares en el plano donde se encuentra el eje de simetría del elemento estructural. Dichos pares tratarán de curvar o flexar el elemento en el plano donde están actuando los pares.

Este efecto genera tensiones normales de tracción y de compresión en las fibras que se encuentran a un lado y otro del eje neutro del elemento, asimismo también se generan tensiones de corte debido a la flexión.

### **EFFECTOS DE TORSION**

Este efecto surge cuando actúan, dos pares iguales en magnitud, en la misma dirección pero en sentido contrario, perpendicularmente al eje del elemento estructural en análisis. Mas adelante veremos que estos efectos se pueden combinar entre si generando efectos combinados.

# CAPÍTULO I:

# FUERZAS INTERNAS

## ANÁLISIS DE FUERZAS INTERNAS

En mecánica se determina la resultante de fuerzas para averiguar si el sólido se encuentra o no en equilibrio. Si la resultante es nula, existe equilibrio estático, que en general existe en una estructura. Si la resultante no es nula, y si introducimos en el sistema exterior de fuerzas, las fuerzas de inercia correspondiente, obtenemos el equilibrio dinámico.

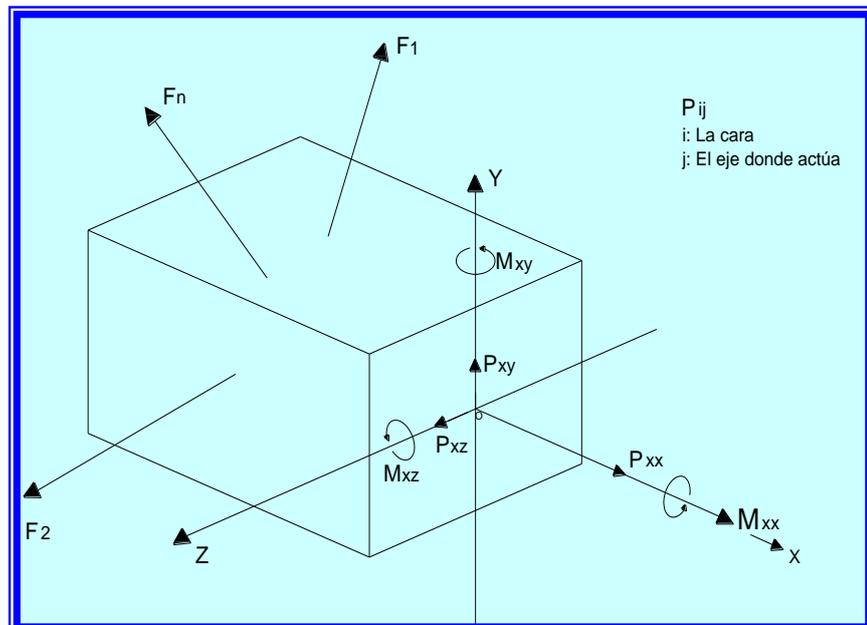
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \text{ Donde } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}$$

Por el momento consideramos el equilibrio estático.

La resistencia de materiales estudia la distribución interna de esfuerzos que produce un sistema de fuerzas exteriores aplicadas.

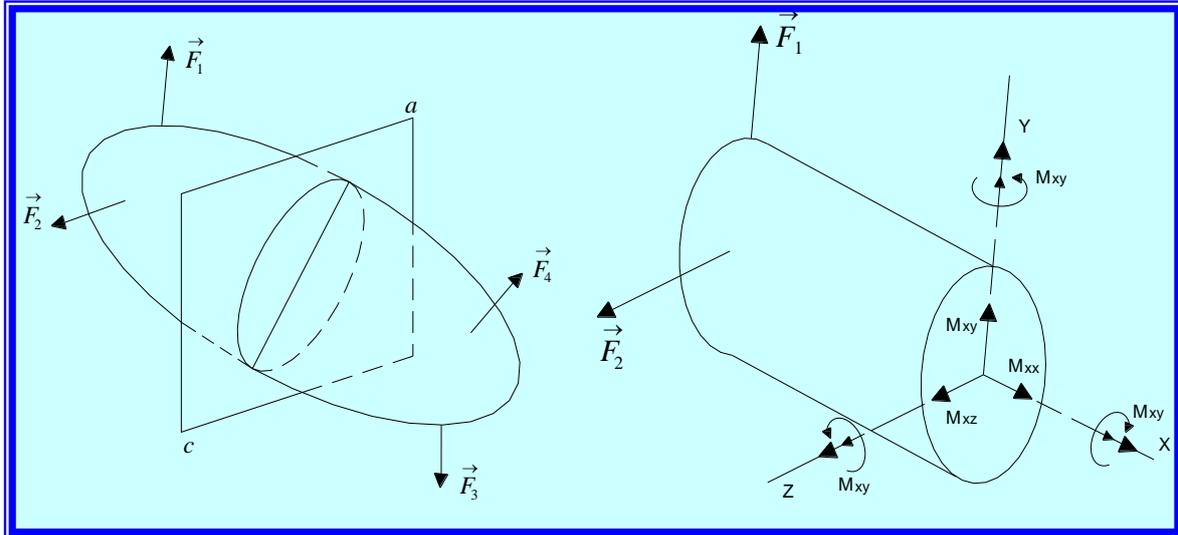
Para nuestro análisis haremos un corte ideal en el sólido mostrando en la figura en la que tendremos una sección de exploración, buscando que fuerzas deben actuar en esta sección para mantener el equilibrio del sólido aislado de cada una de las dos partes en que ha quedado dividida el total.

En general, el sistema de fuerzas internas equivale a una fuerza y un par resultante que, por conveniencia, se decomponen según la normal y tangente a las sección como se muestra en la figura.



- $P_{XX}$  : Fuerza Axial
- $P_{XY}, P_{XZ}$  : Fuerza Cortante
- $M_{XY}, M_{XZ}$  : Momento Flector.

Considerando un sólido cualesquiera sobre el que actúan una serie de fuerzas, como se muestra en la figura.



El origen del sistema de ejes coordenados se considera siempre en el centro de gravedad, que es el punto de referencia de la sección.

Si el eje X es normal a la sección, esta se denomina superficie o cara X. La orientación de los ejes Z e Y en el plano de la sección se suele elegir de manera que coincidan con los ejes principales de inercia de la misma.

La notación empleada en la figura identificada tanto la sección de exploración como la dirección de las componentes de la fuerza y del momento. El primer subíndice indica la cara sobre la que actúan las componentes, y el segundo la dirección de cada una de ellas. Por lo tanto,  $P_{xy}$  es a fuerza que actúa sobre la cara X en la dirección Y.

Cada componente representa un efecto distinto de las fuerzas aplicadas sobre el sólido, en esta sección, y recibe un nombre especial, que se nombra a continuación.

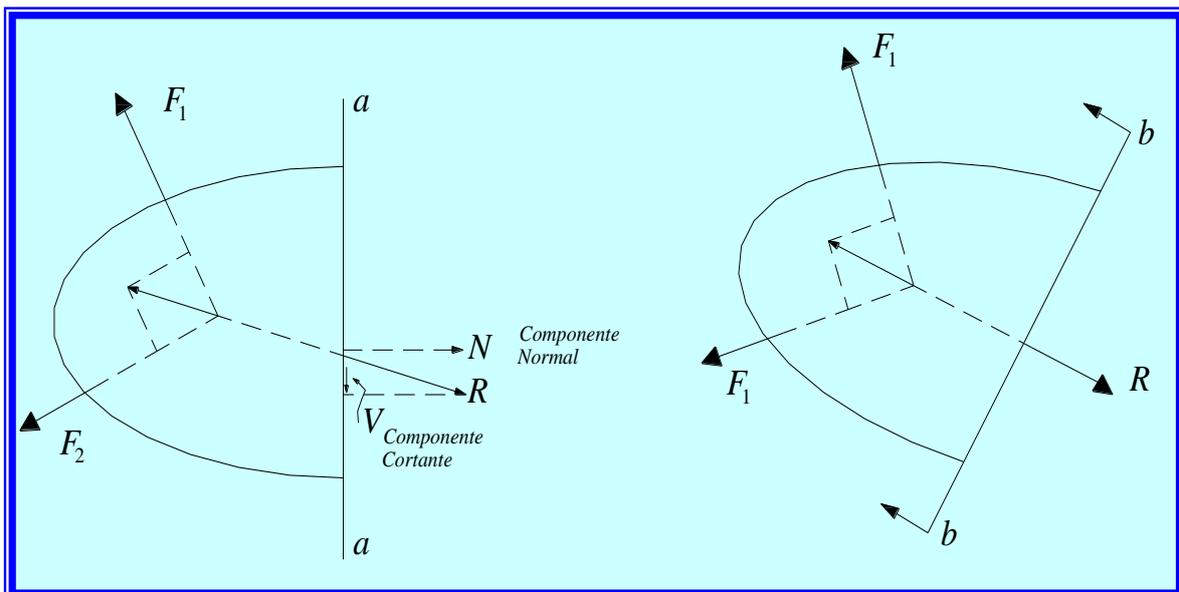
<p><math>P_{xx}</math>    Fuerza Axial</p>	<p>Esta componente mide una acción de tirar sobre la sección. Tirar representa una fuerza de extensión o tracción que tiende a alargar el sólido, mientras que empujar representa una fuerza de compresión que tiende a acortarlo.</p>
--	--

$P_{xy}, P_{xz}$ Fuerza Cortante	Son componentes de la resistencia total al deslizamiento de la porción de sólido a un lado de la sección de exploración respecto de la otra porción. La fuerza cortante total se suele representar por $V$ y sus componentes, $V_y$ y $V_z$ identifican sus direcciones.
$M_{xx}$ Momento Torsor o par	Esta componente mide la resistencia a la torsión del sólido considerando, y se suele representar por $M_t$
$M_{xy}, M_{xz}$ Momentos Flectores	Esta componente miden la resistencia del cuerpo a curvarse o flexar respecto de los ejes $Y$ o $Z$ y se suelen expresar por $M_y$ y $M_z$ , respectivamente.

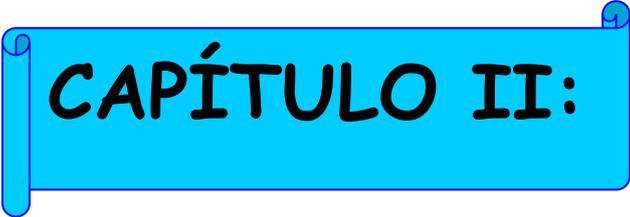
De lo expuesto el efecto interno de un sistema de fuerzas exterior dado depende de la elección y orientación de la sección de exploración.

En particular, si las cargas actúan en un plano, que se suele considerar  $xy$ . La fuerza axial  $P_{xx}$  ó  $P$ ; la fuerza cortante  $P_{xy}$  o  $V$  y el momento flector  $M_{xz}$  o  $M$ .

Si reducimos nuestro análisis al plano, vemos que las componentes equivalen a una fuerza resultante  $R$ . Como se muestra en la figura.



Si la sección de análisis hubiera sido el eje  $b - b$ , perpendicular a  $R$  el efecto de la cortadura en la sección se pudo.



**CAPÍTULO II:**

**ESFUERZO**

## ESFUERZO

### Concepto Fundamental

Sabemos que la mecánica estudia las fuerzas sin considerar los efectos que generan en el elemento en el que actúan.

Si queremos saber la magnitud de una fuerza, tendremos que tener en consideración el área en la que actúa.

Es decir, si tenemos una fuerza de 1000 kgs. y actúa sobre un área de  $100 \text{ cm}^2$  diremos que la fuerza de 1000 kg tiene una intensidad de  $10 \text{ kg/cm}^2$ ; si el área hubiera sido de  $10 \text{ cm}^2$  la magnitud de la fuerza será de  $100 \text{ kg/cm}^2$ .

Como podemos observar la magnitud de la fuerza está en función del área en que actúa. Al hecho de medir la intensidad de una fuerza se denomina Esfuerzo que es la intensidad de una fuerza por unidad de área en la que actúa.

### Tipos de Esfuerzos

Los esfuerzos pueden ser normales o cortantes dependiendo de cómo actúan dichas fuerzas y los esfuerzos generará una deformación en el elemento que analizamos.

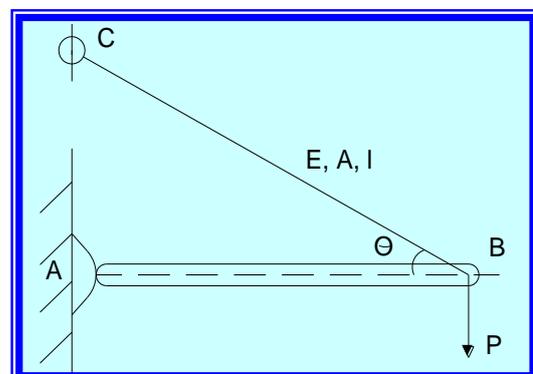
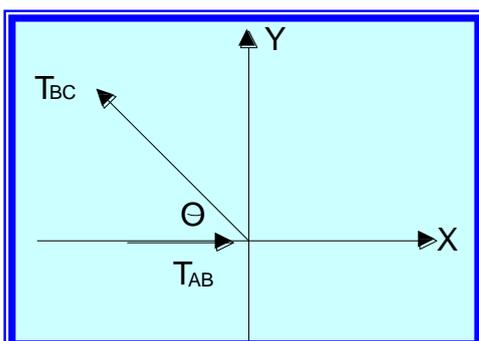
Si la fuerza actúa perpendicular a la sección recta generará alargamiento o acortamiento.

Si son cortantes no generan desplazamiento sino giro.

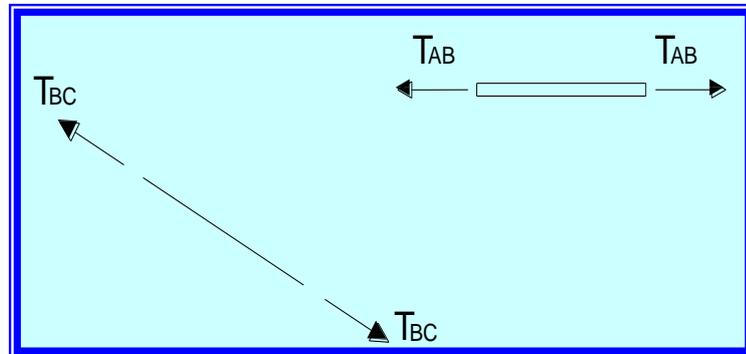
### Introducción al Concepto de Esfuerzos

Sea la estructura mostrada en la figura en la que deseamos conocer las tensiones en cada barra. De nuestros conocimientos de Estática.

Podemos concluir del diagrama de cuerpo libre mostrado.

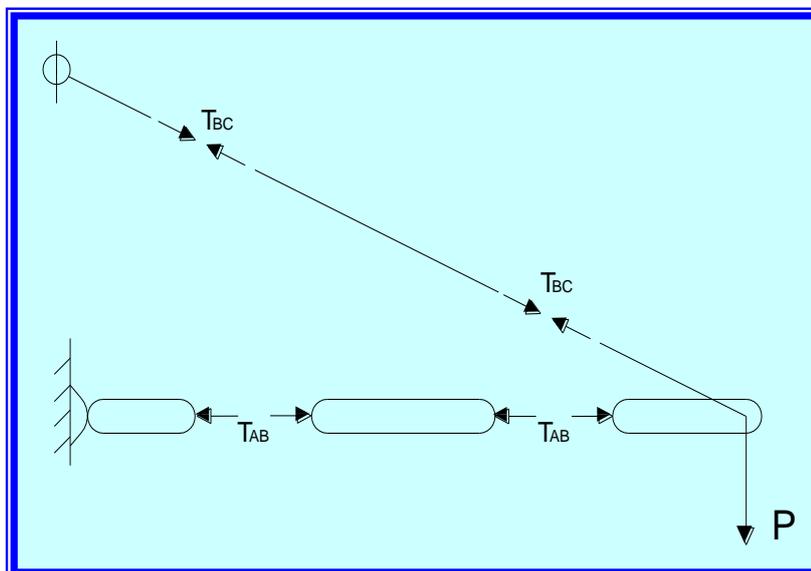


Que la barra BC soporta una tensión de  $P/\text{Sen}\theta$  y la barra AB de  $P\text{cotg}\theta$ , ejerciendo la primera un efecto de tracción en BC y la segunda un efecto de compresión en AB, como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de cada barra.



Como tenemos que mantener el equilibrio en ambas barras, concluimos que se producen fuerzas internas de  $P/\text{Sen}\theta$  y  $P\text{Cotg}\theta$  por el principio de acción y reacción.

Un análisis más detallado del equilibrio de las fuerzas internas y externas lo podemos ver a continuación



Los resultados obtenidos representan un paso inicial necesario en el análisis de estructuras, pero no nos dicen si las cargas que actúan en cada barra puedan ser soportadas por cada una sin peligro.

Para el caso de la varilla BC, la posibilidad de que se rompa o no; no depende sólo de la fuerza interna de tracción  $P/\text{Sen}\theta$  que también depende del tipo de material de que está hecha, y de la sección de la varilla.

La fuerza interna  $T_{BC} = P/\text{Sen}\theta$  representa realmente la resultante de fuerzas elementales distribuidas en el área  $A$  de la sección y la intensidad de tales fuerzas es igual a la fuerza por unidad de área  $T_{BC}/A$ , en la sección.

Como conclusión podemos decir que bajo la acción de la fuerza dada la varilla se rompa o no, depende de la capacidad del material para soportar el valor de  $T_{BC}/A$  de la intensidad de las fuerzas internas distribuidas.

Es decir la resistencia del elemento dependerá de la tensión  $T_{BC}$ , del área de la sección  $A$ , y del material de la barra.

La fuerza por unidad de área, o intensidad de las fuerzas distribuidas sobre la sección, se conoce como esfuerzo en dicha sección y se representa por la letra griega  $\sigma$  (sigma).

El esfuerzo en un elemento de sección transversal de área  $A$  sometido a una carga axial  $P$  se obtiene dividiendo la magnitud de  $P$  de la carga por el área  $A$ .

$$\sigma = P/A \qquad \text{Unidades: } F/L^2$$

Un signo positivo significa esfuerzo en tracción y genera un alargamiento del elemento, y negativo representa un esfuerzo de compresión generando un acortamiento del elemento.

Considerando una sección  $A$  para la barra BC tendremos que  $\sigma = P/A$ .

Pero, para determinar si podemos usar la varilla BC sin peligro, tenemos que comparar con el máximo que puedes soportar. Si el obtenido es menor que el máximo, entonces podemos concluir que la barra BC puede tomar la carga hallada sin ningún peligro.

Análogo análisis tenemos que hacer en la barra AB, así como en los pasadores y soportes.

Finalmente, tenemos que analizar si las deformaciones producidas son aceptables.

Pero; el Ingeniero diseña estructuras y máquinas, es decir crea nuevas posibilidades, en este sentido podemos plantearnos el problema de la siguiente manera:

Cuál será el diámetro de las barras si el material a utilizares de aluminio.

En este caso tendremos como dato el  $\sigma_{\max}$  del aluminio y de la fórmula  $\sigma = P/A$ .

Tendremos  $A = P/\sigma$  que será la sección de la barra.

Si la barra es circular tendremos  $\pi r^2 = A$ .; donde el radio a usar será:

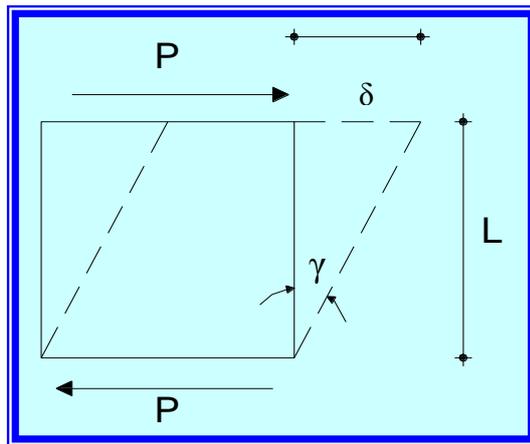
$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

## HIPOTESIS BASICAS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

1. Se hace una idealización o modelo del problema, se harán suposiciones sobre los elementos, las cargas aplicadas y los apoyos
2. Se supone que los materiales son linealmente elásticos. Relación esfuerzo deformación, linealidad de los materiales.
3. Se supone que el material no contiene vacíos interiores, es decir es continuo. Sus propiedades son iguales en cualquier punto, son homogéneos, y sus propiedades son iguales en cualquier dirección, es decir son materiales isotrópicos.
4. Linealidad Geométrica. Los desplazamientos son pequeños en comparación a las dimensiones de la estructura. Se cumple la teoría de los desplazamientos pequeños. Las ecuaciones de equilibrio se pueden establecer en función de la geometría original de la estructura
5. Se cumple el principio de SAINT VENANT. Los esfuerzos que actúan en una sección distante al punto de aplicación de la carga tienen una distribución uniforme.
6. Hipótesis de NAVIER.  
Las secciones planas permanecen planas después de la deformación.

## CONCEPTOS Y DEFINICIONES

1. **Masa.** – Es la resistencia que ofrecen los cuerpos a la traslación.
2. **Momento de inercia.** – Es la resistencia que ofrece los cuerpos a la rotación.
3. **Tensión Cortante.** – Se produce por fuerzas que actúan paralelamente al plano que los soporta.
4. **Tracción y Compresión.** – Son fuerzas que actúan perpendicularmente o normales al plano sobre el que actúan.  
Por esta razón a las tensiones de tracción y compresión se llaman también tensiones normales, mientras que a la tensión cortante se denomina tensión tangencial.
5. **Deformación Tangencial.** – Es generada por las fuerzas cortantes. La fuerza cortante no varía la longitud de sus lados, manifestándose sólo un cambio de forma; de rectángulo a paralelogramo por ejemplo.



$$\gamma = \frac{\delta}{L} ; \text{Tg}\gamma \approx \gamma$$

6. **Materiales Dúctiles.** – Pueden desarrollar grandes deformaciones sin llegar a la rotura. Presentan fenómeno de estricción y escalón de fluencia.  
Ejemplo: Acero con bajo contenido de carbono, cobre, aluminio, latón, etc.
7. **Materiales Frágiles.** – Llegan a la rotura de forma abrupta, no aceptan grandes deformaciones.  
Ejemplos: Piedra, Concreto, Vidrio, ladrillo, etc.
8. **Homogeneidad, Continuidad, Isotropía.** – Continuidad supone que el material no contiene vacíos interiores, Homogeneidad supone que sus propiedades son iguales en cualquier punto. Isotropía, sus propiedades son iguales en cualquier dirección.  
Ejemplo: Acero es isotrópico, Madera es anisotrópico.

**CAPÍTULO III:**

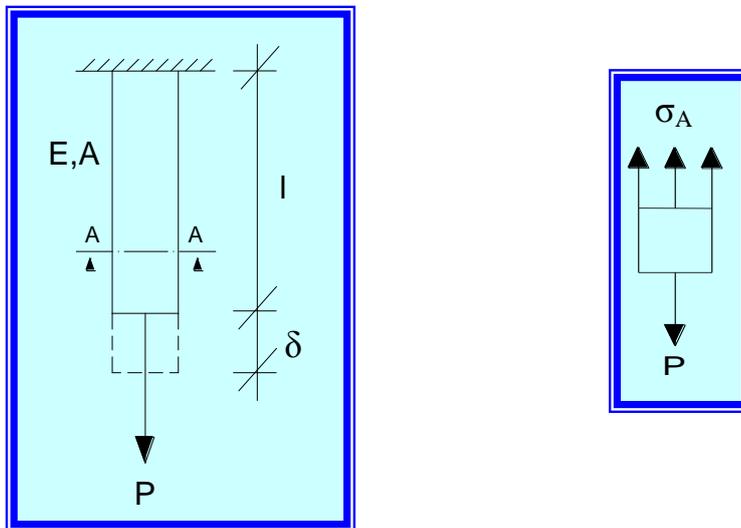
**DEFORMACIÓN  
AXIAL Y DE CORTE**

## DEFORMACIÓN AXIAL Y DE CORTE

Si tenemos una barra de sección recta rectangular "A", de longitud l y jalada por una fuerza P actuando en el centro de gravedad de la sección recta A y tiene un módulo de elasticidad E, sabemos por Mecánica que dicha fuerza P generará un alargamiento "δ".

La carga P externa se equilibrará con una fuerza interna que la denominaremos  $\sigma_A$ ; donde, "σ" es el esfuerzo expresado en unidades de fuerza por unidades al cuadrado de longitud ( $F/L^2$ ).

Si hacemos un corte perpendicular a la sección recta; corte A-A.

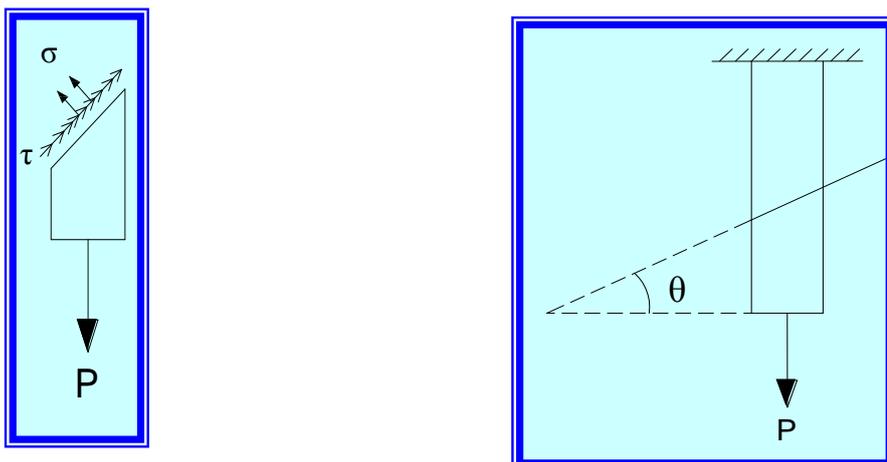


El sistema para que esté en equilibrio tendrá que:

$$\sigma_A = P \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

Al cual se le denomina Esfuerzo Normal y se expresa en  $F/L^2$ ; es decir,  $Kg/cm^2$  o sus equivalentes.

Pero si hacemos un corte inclinado con un ángulo  $\theta$ , tendremos una sección recta inclinada donde aparecen esfuerzos de corte ( $\tau$ ) y esfuerzos normales ( $\sigma$ ).



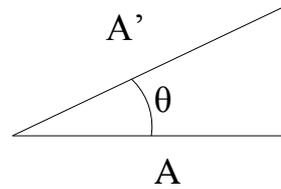
Si trazamos un sistema de referencia  $\sigma, \tau$ .

La sección  $A'$ .

$$\text{Será } \cos\theta = \frac{A}{A'}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{A}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow A = A' \cdot \cos\theta$$



Al analizar el equilibrio tendremos:

$$\sum F_{\tau} = 0$$

$$\tau \left( \frac{A}{\cos\theta} \right) = P \cdot \sin\theta$$

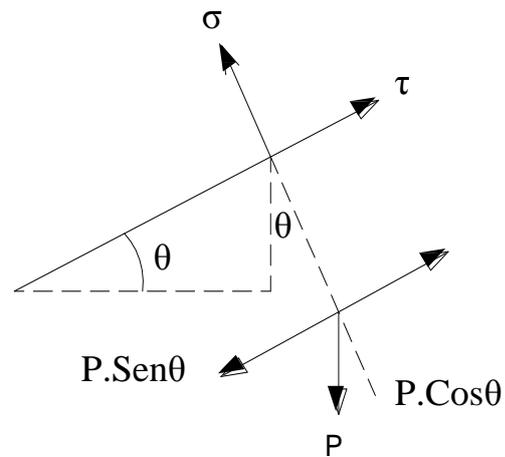
$$\tau = \frac{P}{A} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{A} \cdot \sin 2\theta$$

$$\sum F_{\sigma} = 0$$

$$\sigma \left( \frac{A}{\cos\theta} \right) = P \cdot \cos\theta$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \cdot \cos^2\theta$$



Podemos observar que existen esfuerzos Normales y Esfuerzos de Corte.

Hooke hizo experimentos con diferentes tipos de materiales sometiéndolos a efectos axiales llegando a la siguiente conclusión.

$$\delta = \frac{Pl}{EA},$$

Observó que el alargamiento de una barra era directamente proporcional a la fuerza que actuaba y su longitud  $l$ , inversamente proporcional a la sección y de la característica del material que la denominaremos Módulo de Elasticidad "E".

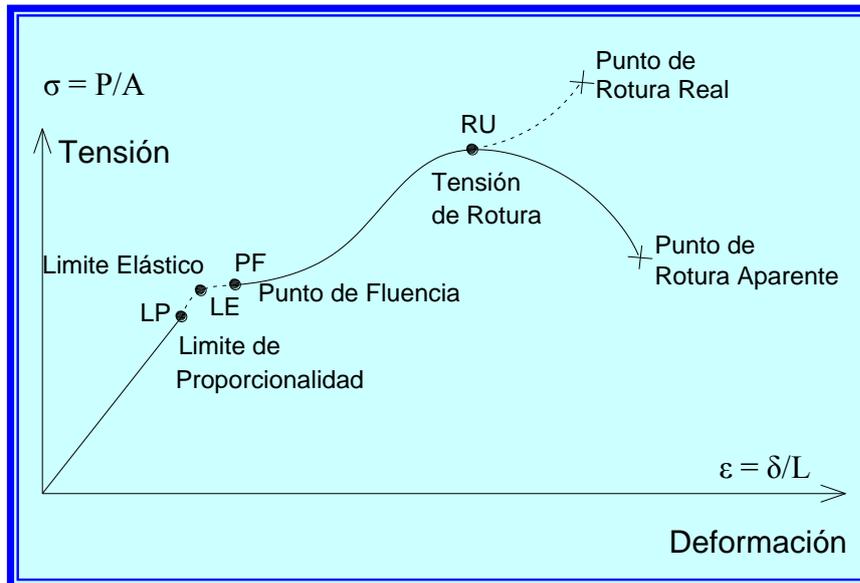
### **Deformación Unitaria Longitudinal ( $\epsilon$ )**

Se define como:

$$\epsilon = \frac{\delta}{l}; \text{ es adimensional}$$

Al graficarse  $\epsilon$  y  $\sigma$ , se llega a analizar el comportamiento de los materiales llegándose a:

## CURVA ESFUERZO DEFORMACION UNITARIA



### 1. Limite de Proporcionalidad (L.P.)

Hasta este punto los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones

### 2. Limite Elástico (L.E)

Alcanzado este punto de esfuerzo, el material no va a recuperar su forma y dimensiones primitivas

### 3. Punto de Fluencia (Yieldpoint) (P.F.)

Llegado a este punto denominado punto de fluencia, significa que habrá deformaciones que se irán incrementando aún sin incremento de cargas

### 4. Resistencia Última (R.U.)

Es el punto donde está el máximo esfuerzo que puede alcanzar el material antes que se produzca la falla, colapso o claudicación.

### Relación de Poisson ( $\mu$ )

$$\mu = \frac{\delta_T}{\delta_L} \dots\dots\dots \text{Módulo de Poisson}$$

Donde:

$\delta_T$  : Deformación Unitaria Transversal.

$\delta_L$  : Deformación Unitaria Longitudinal

Según Poisson:

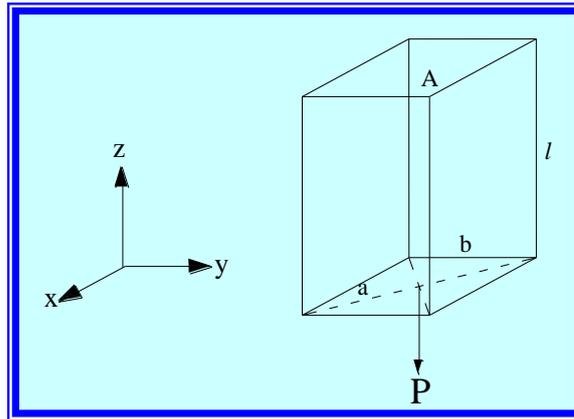
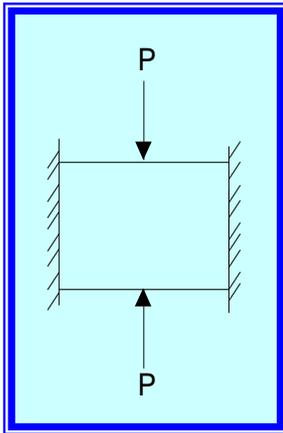
$$0 < \mu < 1$$

**Ejemplo:**

$\mu_{\text{acero}} = 1/4$ .....¿y qué significa?

Significa que las deformaciones transversales son el 25% de las longitudinales.

Sea la barra mostrada sometida a la carga “P” como se muestra.



$$\sigma_z = \frac{P}{A} \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_x = 0$$

$$\epsilon = \text{long. } \epsilon_z$$

$$\epsilon' = \text{Transversal} = \epsilon_x = \epsilon_y$$

**Relación de Poisson**

$$\mu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

$$\mu = \frac{\text{Deformación Transversal}}{\text{Deformación Axial}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

## CAPÍTULO IV:

# EFFECTOS INTERNOS DE LAS FUERZAS: TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

## TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

### EFECTOS INTERNOS DE LAS FUERZAS

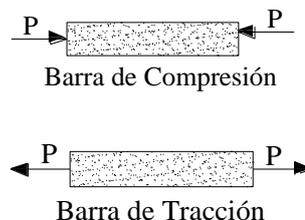
**MATERIALES DÚCTILES Y FRÁGILES.** Los materiales metálicos usados en la ingeniería se clasifican generalmente en dúctiles y frágiles. Un material dúctil es el que tiene un alargamiento a tracción relativamente grande hasta llegar al punto de rotura (por ejemplo, el acero estructural o el aluminio), mientras que un material frágil tiene una deformación relativamente pequeña hasta el mismo punto. Frecuentemente se toma como línea divisoria entre las dos clases de materiales un alargamiento arbitrario de 0,05 cm/cm. La fundición y el hormigón son ejemplos de materiales frágiles.

**LEY DE HOOKE.** Para un material cuya curva tensión-deformación es similar al de la figura 1, resulta evidente que la relación entre tensión y deformación es lineal para los valores relativamente bajos de la deformación. Esta relación lineal entre el alargamiento y la fuerza axial que lo produce (pues cada una de estas cantidades difiere solo en una constante de la deformación y la tensión, respectivamente) fue observada por primera vez por sir Robert Hooke en 1678 y lleva el nombre de ley de Hooke. Por tanto, para describir esta zona inicial del comportamiento del material, podemos escribir:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Donde:

E representa la pendiente de la parte recta (OP) de la curva tensión-deformación de la Figura 1.



*Figura N°01*

**MODULO DE ELASTICIDAD.** La cantidad  $E$ , es decir, la relación de la tensión unitaria a la deformación unitaria se suele llamar módulo de elasticidad del material en tracción o, a veces, módulo de Young. En los manuales aparecen tabulados los valores de  $E$  para diversos materiales usados en la ingeniería. Como la deformación unitaria  $\varepsilon$  es un número abstracto (relación entre dos longitudes) es evidente que  $E$  tiene las mismas unidades que la tensión, por ejemplo,  $\text{kg/cm}^2$ . Para muchos de los materiales usados en la ingeniería el módulo de elasticidad en compresión es casi igual al encontrado en tracción. Hay que tener muy en cuenta que el comportamiento de los materiales bajo una carga, se limita (si no se dice lo contrario) a esa región lineal de la curva tensión-deformación.

## PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

La curva tensión-deformación de la Fig. 1, se puede usar para determinar varias características de resistencia del material. Estas son:

**LIMITE DE PROPORCIONALIDAD.** A la ordenada del punto  $P$  se le conoce por límite de proporcionalidad; esto es, la máxima tensión que se puede producir durante un ensayo de tracción simple de modo que la tensión sea función lineal de la deformación. Para un material que tenga la curva tensión-deformación como la representada en la Fig. 2, no existe límite de proporcionalidad.

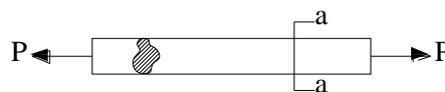


Figura N°2a



Figura N°2b

**LIMITE ELÁSTICO.** La ordenada de un punto que casi coincide con  $P$  se conoce por límite elástico, esto es, la tensión máxima que puede producirse durante un ensayo de tracción simple de modo que no haya deformación permanente o residual cuando se suprime totalmente la carga. Para muchos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces se

consideran sinónimos. En los casos en que es notoria la diferencia, el límite elástico es casi siempre mayor que el de proporcionalidad.

**ZONA ELÁSTICA.** La región de la curva tensión-deformación que va desde el origen hasta el límite de proporcionalidad.

**ZONA PLÁSTICA.** La región de la curva tensión-deformación que va desde el límite de proporcionalidad hasta el punto de rotura.

**LÍMITE ELÁSTICO APARENTE O DE FLUENCIA.** A la ordenada del punto Y en el que se produce un aumento de deformación sin aumento de tensión se le conoce por límite elástico aparente o límite de fluencia del material. Cuando la carga ha aumentado hasta el punto Y, se dice que se produce fluencia. Algunos materiales presentan en la curva tensión-deformación dos puntos en los que hay aumento de deformación sin que aumente la tensión. Se les conoce por límites de fluencia superior e inferior.

**RESISTENCIA A TRACCIÓN.** La ordenada del punto U, máxima de la curva, se llama resistencia a tracción o, a veces, resistencia última del material.

**RESISTENCIA DE ROTURA.** La ordenada del punto B se llama resistencia de rotura del material.

**MODULO DE RESILIENCIA.** El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta un valor tal que se alcance el límite de proporcionalidad del material, se define como módulo de resiliencia. Puede calcularse por el área bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta el límite de proporcionalidad y se representa por la superficie rayada en la Fig. 2. Las unidades en que se mide son  $\text{kg/cm}^3$ . Así, pues, la resiliencia de un material es su capacidad de absorber energía en la zona elástica.

**MODULO DE TENACIDAD.** El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta el valor que produce la rotura, se define como módulo de tenacidad. Puede calcularse por el área

total bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta la rotura. La tenacidad de un material es su capacidad de absorber energía en la zona plástica del material.

**ESTRICCIÓN.** La relación entre la disminución del área de la sección transversal respecto a la primitiva en la fractura, dividida por el área, primitiva y multiplicada por 100, se llama estricción. Hay que observar que cuando actúan fuerzas de tracción en una barra disminuye el área de la sección transversal, pero generalmente se hacen los cálculos de las tensiones en función del área primitiva, como en el caso de la Fig. 2. Cuando las deformaciones se hacen cada vez mayores, se más interesante considerar los valores instantáneos del área de la sección transversal (que son decrecientes), con lo cual se obtiene la curva tensión-deformación verdadera, que tiene el aspecto de la línea de trazos de la Figura 2.

**ALARGAMIENTO DE ROTURA.** La relación entre el aumento de longitud (de la longitud patrón) después de la fractura y la longitud inicial, multiplicada por 100, es el alargamiento de rotura. Se considera que tanto la estricción como el alargamiento de rotura son medidas de la ductilidad del material.

**TENSIÓN DE TRABAJO.** Se pueden usar las características de resistencia que se acaban de mencionar para elegir la llamada tensión de trabajo. Todas las tensiones de trabajo estarán dentro de la zona elástica del material. Frecuentemente, esta tensión se determina simplemente dividiendo la tensión en la fluencia o rotura por un número llamado coeficiente de seguridad. La elección del coeficiente de seguridad se basa en el buen juicio y la experiencia del proyectista. A veces se especifican en los reglamentos de la construcción valores de determinados coeficientes de seguridad.

La curva tensión-deformación no lineal de un material frágil, representada en la Fig. 2, caracteriza otras varias medidas de la resistencia que no se pueden definir si la mencionada curva tiene una zona lineal. Estas son:

**LIMITE ELÁSTICO CONVENCIONAL.** La ordenada de la curva tensión-deformación para la cual el material tiene una deformación permanente predeterminada cuando se suprime la carga se llama límite elástico convencional del material. Se suele tomar como deformación permanente 0,002 ó 0,0035 cm por cm; pero estos valores son

totalmente arbitrarios. En la Fig. 2 se ha representado una deformación permanente  $\mathcal{E}_1$  en el eje de deformaciones y se ha trazado la recta O' Y paralela a la tangente inicial a la curva. La ordenada de Y representa el límite elástico convencional del material, llamado, a veces tensión de prueba.

**MODULO TANGENTE.** A la pendiente de la tangente a la curva tensión-deformación en el origen se la conoce por módulo tangente del material.

Hay otras características de un material que son útiles para los proyectos, que son las siguientes:

**COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL.** Se define como la variación por unidad de longitud de una barra recta sometida a un cambio de temperatura de un grado. El valor de este coeficiente es independiente de la unidad de longitud, pero depende de la escala de temperatura empleada. Consideraremos la escala centígrada, para la cual el coeficiente que se representa por  $\alpha$  es para el acero, por ejemplo,  $11 \times 10^{-6}$  por  $^{\circ}\text{C}$ . Las variaciones de temperatura en una estructura dan origen a tensiones internas del mismo modo que las cargas aplicadas.

**RELACIÓN DE POISSON.** Cuando una barra está sometida a una carga de tracción simple se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a ésta. La relación entre la deformación en la dirección lateral y la de la dirección axial se define como relación de Poisson. La representaremos por la letra griega  $\mu$ . Para la mayoría de los metales está entre 0,25 y 0,35.

**FORMA GENERAL DE LA LEY DE HOOKE.** Se ha dado la forma simple de la ley de Hooke para tracción axial cuando la carga está totalmente según una recta; esto es, es uniaxial. Se consideró solamente la deformación en la dirección de la carga y se dijo que era:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

En el caso más general, un elemento de material está sometido a tres tensiones normales perpendiculares entre sí,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , acompañadas de tres deformaciones  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , respectivamente. Superponiendo las componentes de la deformación originada por la contracción lateral debida al efecto de Poisson a las deformaciones directas, obtenemos el enunciado general de la ley de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

### CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

Toda la discusión se ha basado en la suposición de que prevalecen en el material dos características, esto es, que tenemos un

**MATERIAL HOMOGÉNEO.**- Que tiene las mismas propiedades elásticas ( $E, \mu$ ) en todos los puntos del cuerpo.

**MATERIAL ISÓTROPO.**- Que tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones en cada punto del cuerpo. No todos los materiales son isótropos. Si un material no tiene ninguna clase de simetría elástica se llama anisótropo o, a veces, aeolotrópico. En lugar de tener dos constantes elásticas independientes ( $E, \mu$ ) como un material isótropo, esta sustancia tiene 21 constantes elásticas. Si el material tiene tres planos de simetría elástica perpendiculares entre sí dos a dos se dice que es ortotrópico, en cuyo caso el número de constantes independientes es 9.

## CAPÍTULO V:

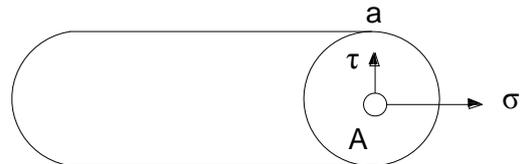
# TENSIÓN CORTANTE

## TENSIÓN CORTANTE

### RESUMEN

#### Definición:

Es cuando la fuerza actúa en la dirección de la sección recta de una barra, genera una tensión cortante.



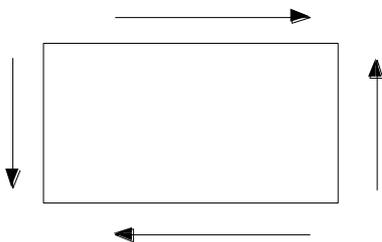
$$\tau = \frac{F}{A}$$

$\tau$  = Tensión cortante

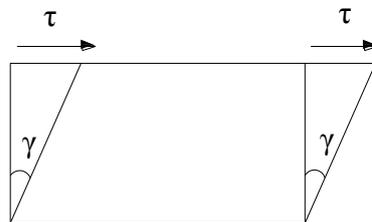
A = Sección Recta

F = Fuerza actuando en la dirección de la sección recta.

En el plano la tensión cortante será:



*Figura (a)*



*Figura (b)*

Se supone que las caras del elemento paralelas al plano del papel están exentas de cargas.

Como no actúan tensiones normales en el elemento, las longitudes de los lados del rectángulo elemental original no variarán cuando las tensiones cortantes adopten el valor  $\tau$ .

Sin embargo habrá una distorsión de los ángulos del elemento primitivamente rectos, después de cuya distorsión, debida a las tensiones cortantes, el elemento adopta la configuración representada por las líneas de trazos en la figura (b) anteriores.

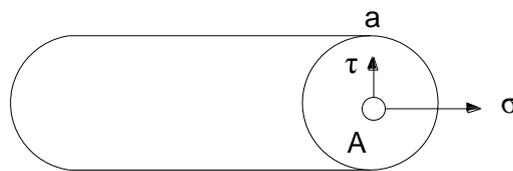
**DEFINICION DE ESFUERZO CORTANTE.** Si se hace pasar un plano a través de un cuerpo, una fuerza que actúa a lo largo del plano se llama esfuerzo cortante. Se representará por T.

**DEFINICION DE TENSION CORTANTE.** El esfuerzo cortante, dividido por la superficie sobre la que actúa, se llama tensión cortante. La representaremos por  $\tau$ . Por tanto,

$$\tau = \frac{T}{A}$$

**COMPARACION DE LAS TENSIONES CORTANTE Y NORMAL.**

Consideremos una barra cortada por un plano a-a perpendicular a su eje, como se ve en la figura adjunta. Una tensión normal  $\sigma$  es perpendicular a este plano.



Una tensión cortante es la que actúa a lo largo del plano, como la  $\tau$  indicada. Por tanto, la diferencia entre las tensiones normales y cortantes es la dirección.

**HIPOTESIS.** Es necesario hacer alguna hipótesis referente al modo en que se distribuyen las tensiones cortantes y, a falta de un conocimiento más preciso, en todos los problemas de este capítulo se tomarán como uniformes. Por ello, la expresión  $\tau = T/A$  indica una tensión cortante media en la superficie.

**APLICACIONES.** Ejemplos comunes de sistemas que contienen tensiones cortantes son las uniones roblonadas, las probetas de ensayo de madera y las chavetas usadas para bloquear las poleas a los ejes.

**DEFORMACIONES DEBIDAS A TENSIONES CORTANTES.** Consideremos la deformación de un elemento plano rectangular cortado de un sólido, en el que se sabe que las fuerzas que actúan son tensiones cortantes  $\tau$ , en la dirección representada en la Figura (a).

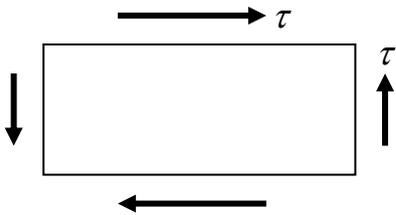


Fig. (a)

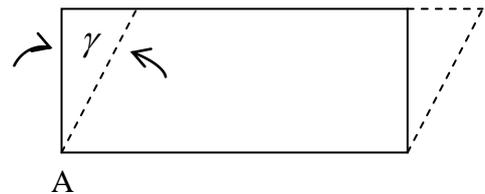


Fig. (b)

Se supone que las caras del elemento paralelas al plano del papel están exentas de carga. Como no actúan tensiones normales en el elemento, las longitudes de los lados del rectángulo elemental original no variarán cuando las tensiones cortantes adopten el valor  $\tau$ . Sin embargo, habrá una distorsión de los ángulos del elemento primitivamente rectos, después de cuya distorsión, debida a las tensiones cortantes, el elemento adopta la configuración representada por líneas de trazos en la Fig. (b) anterior.

**DEFORMACION POR CORTANTE.** La variación del ángulo A del elemento se define como deformación por cortante. Se mide en radianes y se suele representar por  $\gamma$ .

**MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE.** La relación de la tensión cortante  $\tau$  a la deformación y se llama módulo de elasticidad en cortante y se suele representar por G. Así, pues,

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

A G se le conoce también por módulo de rigidez y por coeficiente de elasticidad transversal.

Las unidades de  $G$  son las mismas que las de la tensión cortante, esto es,  $\text{kg}/\text{cm}^2$ , pues la deformación por cortante no tiene dimensión. La determinación experimental de  $G$  y la región de comportamiento lineal de  $\tau$  y  $\gamma$ . Los diagramas tensión-deformación para cargas normales, se pueden trazar esos diagramas para esfuerzos cortantes y diversos materiales.

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar la unión atornillada de la Fig. (a) que sigue. La fuerza es de 3.000 kg y el diámetro del perno de 1,2 cm. Determinar el valor medio de las tensiones cortantes que existen en cada uno de los planos a-a ó b-b.

**Solución:**

Como no tenemos más datos, podemos suponer que la fuerza  $P$  está repartida por igual entre las secciones a-a y b-b, por lo que actúa una fuerza de  $3.000/2 = 1.500$  kg, según cada uno de estos planos, sobre una sección de  $\frac{1}{4}\pi(1,2)^2 = 1,13 \text{ cm}^2$ .

Por tanto, la tensión cortante media en cada uno de los planos es

$$\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{1.500}{1,13} = 1.330 \text{ kg}/\text{cm}^2.$$

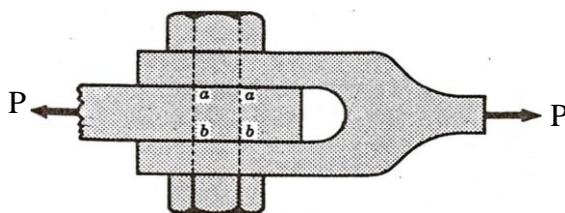


Fig. (a)

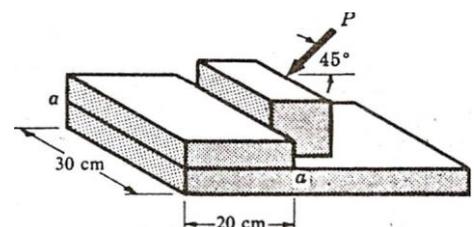


Fig. (b)

2. Con referencia a la Fig. (b), la fuerza  $P$  tiende a cortar el tope a lo largo del plano a-a. Si  $P = 4.000$  kg, determinar la tensión cortante media en el plano a-a.

**Solución:**

Para producir esta tensión cortante solo interviene la componente horizontal de  $P$ , que está dada por  $4.000 \cos 45^\circ = 2.825$  kg.

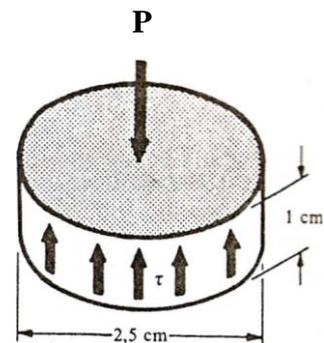
Por tanto, la tensión cortante media en el plano a-a es

$$\tau = \frac{P \cos 45^\circ}{A} = \frac{2.825}{30(20)} = 4,7 \text{ kg/cm}^2$$

3. El acero de estructuras, de bajo contenido en carbono, tiene una tensión de rotura a cortante de  $3.100 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar la fuerza P necesaria para punzonar un agujero de 2,5 cm de diámetro en una chapa de 1 cm de espesor de ese acero. Si el módulo de elasticidad en cortante para este material es  $8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , hallar la deformación por cortante en el borde del agujero cuando la tensión cortante es de  $1.500 \text{ kg/cm}^2$

**Solución:**

Supondremos una distribución uniforme de cortantes en una superficie cilíndrica de 2,5 cm de diámetro y 1 cm de espesor, como se ve en el esquema adjunto. Para que haya equilibrio es necesario que la fuerza P valga

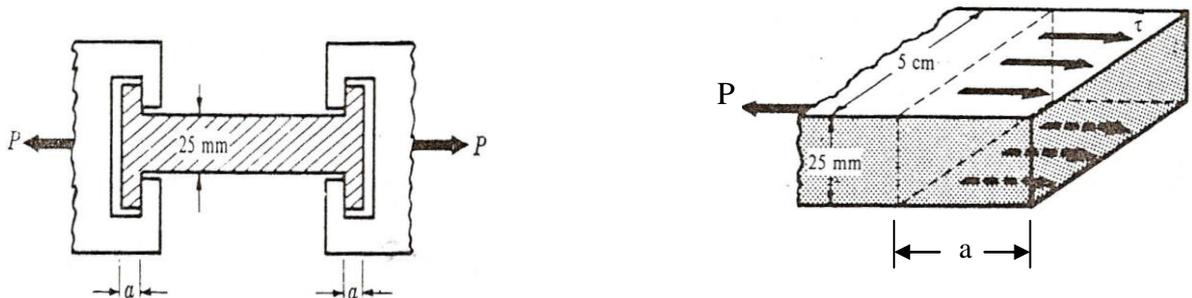


$$P = \tau A = \pi(2,5)(1)(3.100) = 24.300 \text{ kg}$$

Para determinar la deformación por cortante  $\gamma$ , cuando la tensión cortante  $\tau$  es de  $1.500 \text{ kg/cm}^2$ , emplearemos la definición  $G = \tau / \gamma$  obteniendo

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1.500}{840.000} = 0,00178 \text{ radianes}$$

4. Considerar la probeta rectangular de la figura, de sección 2,5 x 5 cm, que se usa a veces para determinar la resistencia a tracción de la madera. Para el roble albar, que tiene una carga de rotura a cortante paralela a la fibra de  $65 \text{ kg/cm}^2$ , determinar la mínima longitud de probeta que debe haber en la mordaza a para que no se produzca un fallo por cortante en ella antes de la rotura a tracción de la probeta. La fractura a tracción tiene lugar para una carga P de 3.300 kg



**Solución:**

Las tensiones cortantes actúan como se ve en la figura, sobre la superficie del extremo derecho, así como otra del extremo izquierdo de la probeta.

Suponiendo una distribución uniforme de las tensiones cortantes, tenemos

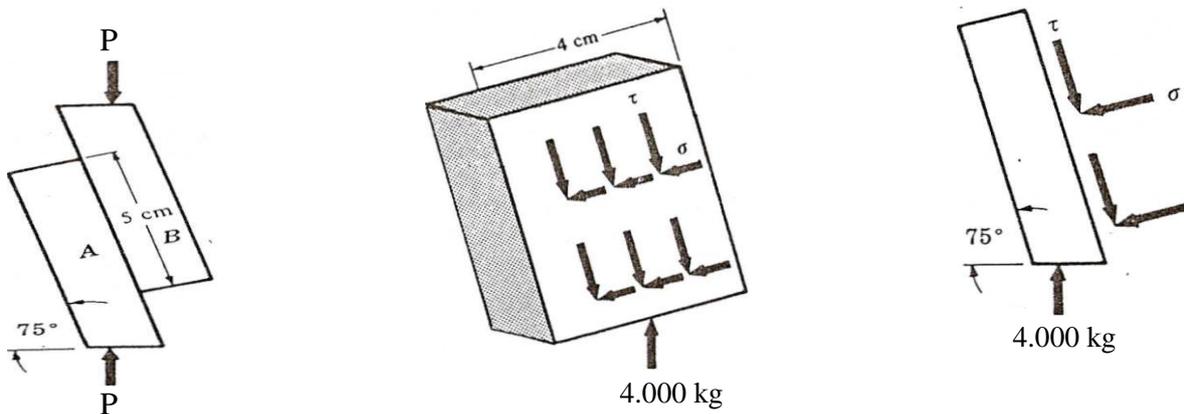
$$\tau = \frac{P}{A}, \quad 65 = \frac{3.300}{2(5)(a)} \quad \text{y} \quad a = 5,08 \text{ cm}$$

Naturalmente, la longitud de las mordazas será mayor que 5,08 cm para estar seguro de que se produce primero la rotura a tracción.

5. En la industria de la madera se usan a veces tacos inclinados de madera para determinar la resistencia a cortante-compresión de las uniones encoladas. Considerar el par de tacos encolados A y B que tienen un espesor de 4 cm en la dirección perpendicular al plano del papel. Determinar la carga de rotura a cortante del encolado si se necesita una fuerza vertical de 4.000 kg para producir la rotura del ensamble. Es de observar que una buena unión encolada hace que una gran proporción de las roturas se produzcan en la madera.

**Solución:**

Consideremos el equilibrio del taco inferior A. La reacción del taco superior B sobre el inferior consiste en fuerzas normales y de corte que aparecen como en la perspectiva y la vista ortogonal representadas.



Con referencia al croquis de la derecha, vemos que para que haya equilibrio en la dirección horizontal

$$\sum F_h = \tau(5)(4)\cos 75^\circ - \sigma(5)(4)\cos 15^\circ = 0 \quad \text{ó} \quad \sigma = 0,268\tau$$

Para que exista equilibrio en la dirección vertical, tenemos

$$\sum F_v = 4.000 - \tau(5)(4)\text{sen} 75^\circ - \sigma(5)(4)\text{sen} 15^\circ = 0$$

Sustituyendo  $\sigma = 0,269\tau$  y despejando, hallamos  $\tau = 193\text{kg}/\text{cm}^2$ .

6. La tensión cortante es de  $1.050\text{kg}/\text{cm}^2$  en una pieza de acero de estructuras. Si el módulo de rigidez  $G$  es  $840.000\text{kg}/\text{cm}^2$ , hallar la deformación por cortante  $\gamma$ .

**Solución:**

Por definición,  $G = \frac{\tau}{\gamma}$ , por lo que  $\gamma = \frac{1.050}{840.000} = 0,00125$  radianes.

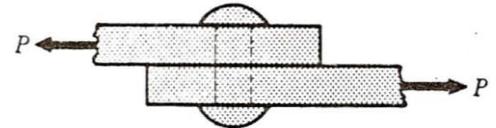
7. Para unir dos placas se utiliza un solo roblón, como se ve en la figura. Si el diámetro del roblón es de 2 cm y la carga P de 3.000 kg, ¿Cuál es la tensión de cortante media producida en el roblón?

**Solución:**

Aquí, la tensión cortante media en el roblón es  $P/A$ , donde A es la sección de éste.

Por consiguiente, la tensión media está dada por

$$\tau = \frac{3.000}{\frac{\pi}{4}(2)^2} = 955 \text{ kg/cm}^2$$



8. Habitualmente, se unen entre sí los árboles y las poleas por medio de una chaveta, como se ve en la Fig. (a).

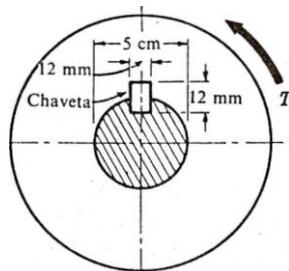


Fig. (a)

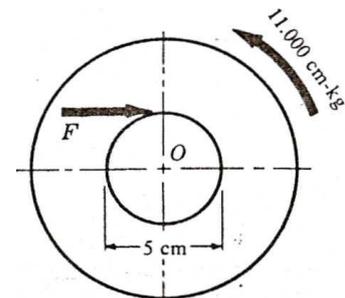


Fig. (b)

**Solución:**

Considerar una polea sometida a un momento de giro T de 11.000 cm·kg enclavada con una chaveta de 1,2 x 1,2 x 7,5 cm a un árbol. Determinar la tensión cortante en un plano horizontal a través de la chaveta.

Trazando un esquema de cuerpo en libertad de la polea sola, como el que aparece en la Fig. (b), vemos que el momento de giro de 11.000 cm·kg aplicado ha de ser resistido por una fuerza tangente horizontal F que la chaveta ejerce sobre la polea. Para que exista equilibrio de momentos respecto al centro de la polea, tenemos

$$\sum M_0 = 11.000 - F(2,5) = 0 \quad \text{ó} \quad F = 4.400 \text{ kg}$$

Hay que observar que el árbol ejerce fuerzas adicionales sobre la polea, que no se han representado, que actúan en el centro O y no entran en la ecuación de momentos anterior. En la Fig. (c) aparecen las fuerzas resultantes que actúan en la chaveta. En realidad, la fuerza F de la derecha es la resultante de fuerzas repartidas sobre la mitad inferior de la cara de la izquierda, y, del mismo modo, las otras fuerzas F que se representan son las resultantes de sistemas de fuerzas repartidas. No se conoce la verdadera naturaleza de la distribución de fuerzas.

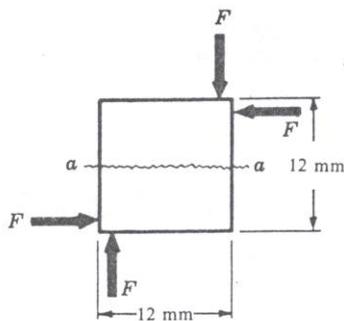


Fig. (c)

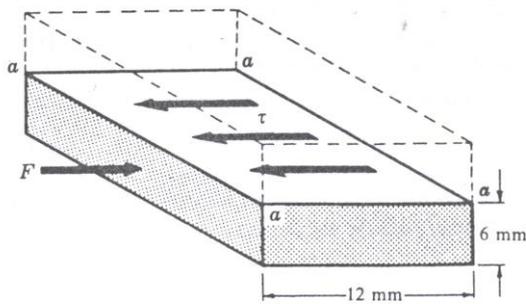


Fig. (d)

En la Fig. (d) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la parte de chaveta bajo un plano horizontal a-a trazado por su sección media. Para que exista equilibrio en la dirección horizontal, tenemos

$$\sum F_h = 4.400 - \tau(1,2)(7,5) = 0 \quad \text{ó}$$

$$\tau = 490 \text{ kg/cm}^2$$

Esta es la tensión cortante horizontal en la chaveta.

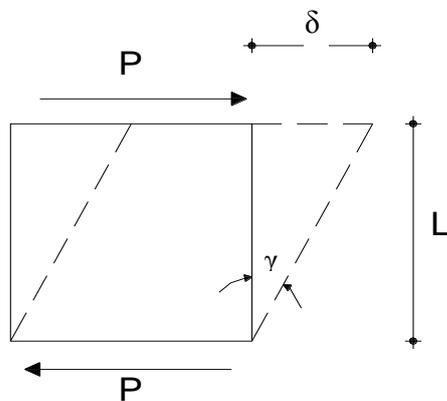
**CAPÍTULO VI:**

**DEFORMACIÓN  
TANGENCIAL**

## DEFORMACIÓN TANGENCIAL

Las fuerzas cortantes producen una deformación tangencial o distorsión, de la misma manera que las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales, pero con una gran diferencia, ya que un elemento sometido a efectos axiales experimenta un alargamiento o un acortamiento ya sea efecto axial de compresión o de tracción respectivamente.

En cambio el elemento sometido a una fuerza cortante no varía la longitud de sus lados, manifestándose un cambio de forma, de rectángulo a paralelogramo como se muestra en la figura.



La deformación tangencial será:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta}{L}$$

Como  $\gamma$  es muy pequeño siempre, entonces podemos concluir que:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{L}$$

Es decir “ $\gamma$ ” es la variación experimentada por el ángulo entre dos caras perpendiculares de un elemento diferencial.

Suponiendo que la Ley de Hooke también es válida para la cortadura entonces existe una relación lineal entre la distorsión y la tensión cortante dada por:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Donde:

G : Módulo de elasticidad transversal llamado Módulo de Rigidez Transversal

La relación entre la deformación tangencial total y las fuerzas cortantes aplicadas es:

$$\delta = \frac{V \cdot l}{G \cdot A}$$

Donde:

V : Fuerza cortante que actúa sobre la sección de área A.

La fórmula obtenida tiene una relación con la fórmula de deformación axial:

$$\delta = \frac{P.l}{E.A}$$

Teniendo en consideración que al existir efectos axiales se genera una deformación transversal; relación que viene dada por la **Relación de Poisson**, tenemos una importantísima relación:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Los valores más comunes de la relación de Poisson son 0.25 a 0.30 para el acero; 0.33 aproximadamente para otros muchos metales y 0.20 para el hormigón.

**CAPÍTULO VII:**

**EFFECTOS DE  
TORSIÓN**

## EFFECTOS DE TORSIÓN

La Torsión es generada cuando actúan dos pares de igual magnitud, en la misma dirección, en sentidos contrarios y perpendiculares a la sección recta del elemento analizado. Como podemos ver en la figura n°01 y cuya sección recta es:

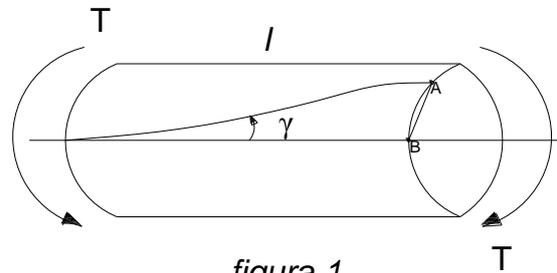
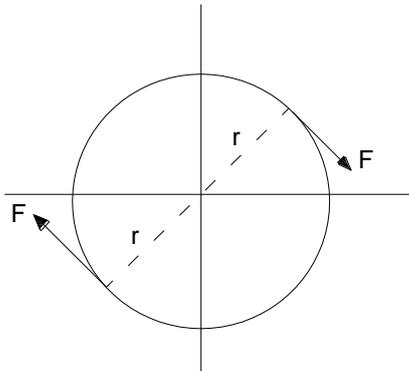


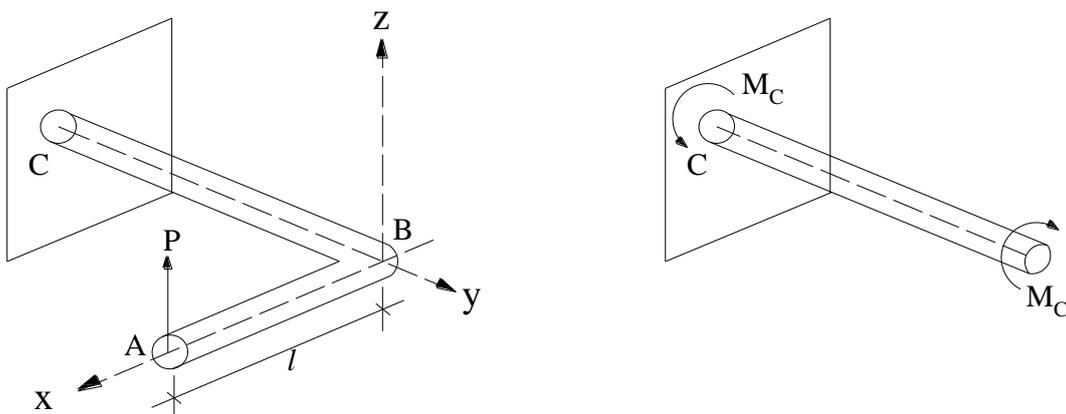
figura 1

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{AB}{l} = \frac{\delta}{l}$$



Si consideramos un árbol circular de radio “r” el par estará conformado por las fuerzas F actuando en el sentido mostrado (sentido horario).

Mostrando dicho efecto en el espacio tendremos:



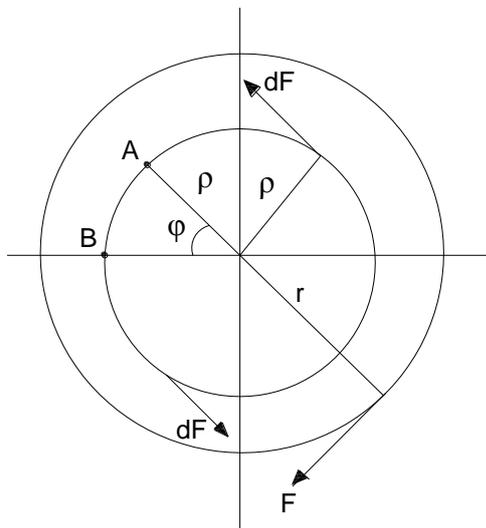
Ya que la torsión se genera por pares perpendiculares al eje (ó fuerzas actuando en la dirección de la sección recta); es decir, si la fuerza P actúa en la dirección del eje z en

sentido positivo generará un momento  $\vec{M} = (l \vec{i} \times P \vec{k}) = -Pl \vec{j}$ , es decir el momento actúa en sentido horario en el punto "B" autogenerándose el otro momento del par en el empotramiento por la tercera ley de Newton: Principio de Acción y Reacción.

Si sus pares que actúan en la dirección de la sección (perpendiculares al eje del elemento analizado) entonces dichas fuerzas están generando corte, por el concepto de fuerza cortante.

Es decir, si tomamos dos secciones infinitamente próximas; al generarse la rotación debido a los pares, entrarán en contacto una con otra generando una sección de corte respecto a la otra.

Por el principio de Acción y Reacción; el elemento equilibrará por sus fuerzas internas a dicho par externo actuante, generándose en la sección recta un Momento Torsor ( $M_t$ ).



$$M_t = \int \rho dF \dots\dots\dots(A)$$

Al existir fuerza cortante entonces se generará un esfuerzo de corte  $\tau = G \cdot \gamma \dots\dots\dots (B)$

$$\text{Donde: } \gamma = \frac{AB}{l} = \frac{\delta}{l} \dots\dots\dots(I)$$

$$\text{Pero: } \overline{AB} = \delta = \rho \phi \dots\dots\dots(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{l} \dots\dots\dots(III)$$

Y reemplazando (III) en (B):

$$\tau = G \cdot \frac{\rho \phi}{l} \dots\dots\dots(IV)$$

$$\text{Pero: } \tau = \frac{dF}{dA} \leftrightarrow dF = \tau \cdot dA \dots\dots\dots(V)$$

Reemplazando (V) en (A):

$$M_t = \int \rho \tau dA$$

Y Sustituyendo (IV) en (A):

$$M_t = \int \rho \cdot \frac{G \rho \phi}{l} \cdot dA = \frac{G \phi}{l} \int \rho^2 dA \dots\dots\dots(C)$$

Donde:

$$\int \rho^2 dA = I_p \dots \dots \dots (VI), \text{ que es el Momento Polar de Inercia}$$

Reemplazando (VI) en (C):

Tendremos:

$$M_t = \frac{G\phi}{l} \cdot I_p$$

Lo que nos dá:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

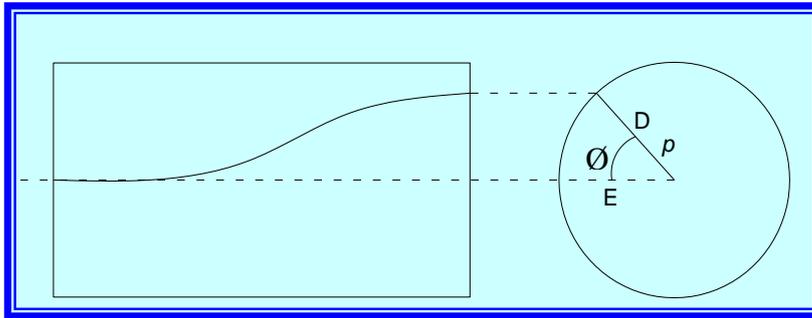
Si analizamos:  $\delta_{axial} = \frac{P \cdot l}{EA}$

$$\delta_{corte} = \frac{V \cdot l}{GA} \quad \delta_{torsión} = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Vemos una analogía en dichos términos.

El ángulo de giro  $\phi$  será directamente proporcional al momento torsor y la longitud del elemento y inversamente proporcional al módulo de elasticidad al corte y el momento polar de la sección que juntos  $G \cdot I_p$  forman la rigidez torsional, es decir la resistencia que ofrece el elemento a la torsión.

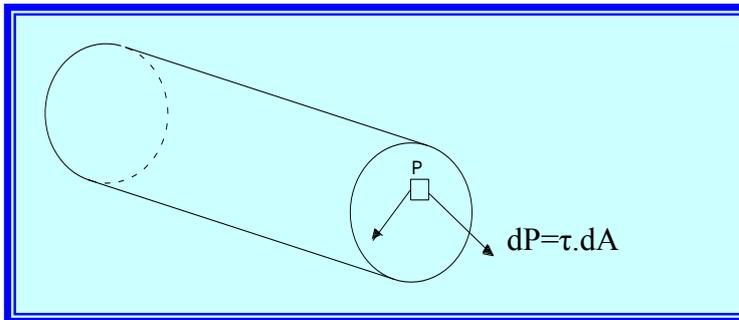
**Fórmulas Aplicadas**



$$\rho\phi = \delta = \overline{DE}$$

$$\gamma = \frac{\delta}{l} = \frac{\rho\phi}{l}$$

$$\tau = G.\gamma = \frac{G.\rho.\phi}{l} = \left(\frac{G.\phi}{l}\right).\rho$$



$$M_t = \int \rho dP = \int \rho(\tau dA)$$

$$M_t = \int \frac{\rho G \phi}{l} \rho . dA = \frac{G.\phi}{l} . \int \rho^2 dA = \frac{G.\phi}{l} . I_p$$

$$\phi = \frac{M_t . l}{G . I_p}$$

**APLICACIONES**

El árbol compuesto representado es de acero  $G=8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar la tensión cortante máxima en cada parte del árbol y los ángulos de torsión en B y en C.

**Solución:**

Par en BC: 50,000

AB:  $50,000 - 80,000 = -30,000 \text{ kg-cm}$

$$\tau_{AB} = \frac{30,000 \times 5}{\frac{\pi}{32}(10)^4} = 155 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{BC} = \frac{50,000 \times 3.75}{\frac{\pi}{32}(7.5)^4} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

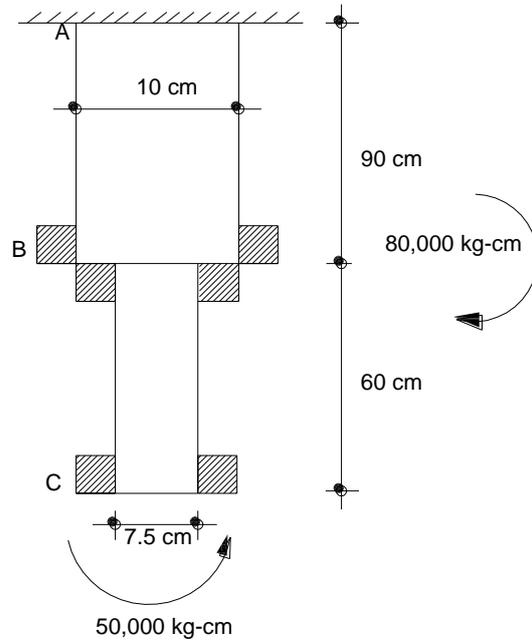
Luego; el ángulo de torsión en B:

$$\theta_1 = \frac{30,000 \times 90}{8.4 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32}(10)^4} = 0.00327 \text{ rad} \quad (\downarrow) \text{Mirando hacia abajo}$$

Asimismo; el ángulo de giro en C:

$$\theta_2 = \frac{50,000 \times 60}{8.4 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32}(7.5)^4} = 0.01150 \text{ rad} \quad (\uparrow) \text{Mirando hacia arriba}$$

$$\theta_3 = 0.01150 - 0.00327 = 0.00823 \text{ rad} \quad (\uparrow) \text{Mirando hacia arriba}$$

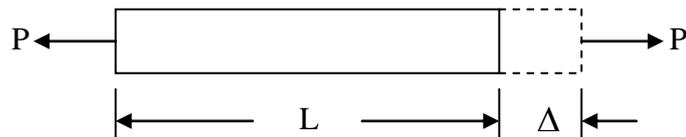


## CAPÍTULO VIII:

# EFEECTOS AXIALES

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el alargamiento total de una barra recta inicialmente de longitud  $L$ , área de la sección transversal  $A$  y módulo de elasticidad  $E$ , si actúa en sus extremos una carga de tracción  $P$ .



**Solución:**

La tensión unitaria en la dirección de la fuerza  $P$  no es más que la carga dividida por la sección, esto es,  $\sigma = P/A$ . De igual modo, la deformación unitaria  $\varepsilon$  viene dada por el cociente del alargamiento total  $\Delta$  dividido por la longitud inicial, esto es,  $\varepsilon = \Delta/L$ . Por definición, el módulo de elasticidad es la relación entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , es decir,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} = \frac{PL}{A\Delta} \quad \text{ó} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

Obsérvese que  $\Delta$  tiene unidades de longitud, seguramente centímetros o metros.

2. Una cinta de agrimensor, de acero, de 25 m de longitud tiene una sección de 6 mm por 0,8 mm. Determinar el alargamiento cuando se estira toda la cinta y se mantiene tirante bajo una fuerza de 6 kg. El módulo de elasticidad es  $2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

Alargamiento  $\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(6)(2.500)}{(0,6)(0,08)(2,1 \times 10^6)} = 0,15 \text{ cm}$

3. Una barra de acero de  $5 \text{ cm}^2$  de sección está sometida a las fuerzas representadas en la Fig. (a). Determinar el alargamiento total de la barra. Para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

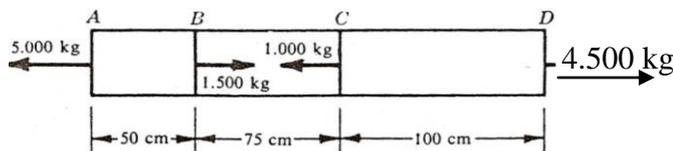


Figura N° (a)

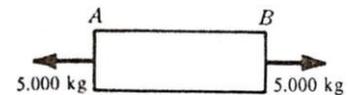


Figura N° (b)

**Solución:**

Toda la barra está en equilibrio, por lo que cada una de sus partes lo está también. El trozo de barra entre A y B tiene una fuerza resultante de 5.000 kg que actúa sobre cada sección transversal, por lo que un diagrama de cuerpo en libertad de esos 50 cm es como aparece en la Fig. (b). Para conservar el equilibrio con la fuerza aplicada al extremo izquierdo, la del extremo derecho ha de ser de 5.000 kg. El alargamiento de este trozo viene dado por

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{5.000(50)}{(5)(2,1 \times 10^6)} = 0,024 \text{ cm}$$

La fuerza que actúa en el trozo entre B y C se halla considerando la suma algebraica de las fuerzas situadas a la izquierda de una sección situada entre esos puntos, lo que indica que actúa una fuerza resultante de 3.500 kg hacia la izquierda, por lo que la sección está sometida a tracción. Indudablemente, podríamos haber llegado al mismo resultado considerando las fuerzas situadas a la derecha de esa sección. Como consecuencia, se obtiene el diagrama de cuerpo en libertad dado en la Figura (c).

El alargamiento de este trozo viene dado por  $\Delta_2 = \frac{3.500(75)}{(5)(2,1 \times 10^6)} = 0,025 \text{ cm}$ .

Del mismo modo, la fuerza que actúa sobre cualquier sección entre C y D ha de ser de 4.500 kg para mantener el equilibrio con la carga aplicada en D. En la Fig. (d) aparece el diagrama de cuerpo en libertad del segmento CD.

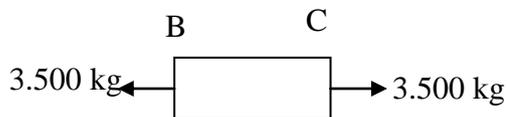


Fig. (c)

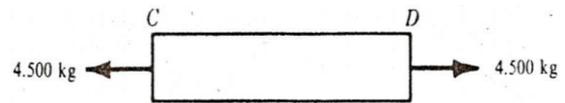


Fig. (d)

El alargamiento de esta parte viene dado por  $\Delta_3 = \frac{(4.500)(100)}{(5)(2,1 \times 10^6)} = 0,043 \text{ cm.}$

Por consiguiente, el alargamiento total es:

$$\Delta = 0,024 + 0,025 + 0,043 = 0,092 \text{ cm.}$$

4. La armadura Howe de la Fig. (a) soporta la carga única de 60.000 kg. Si se toma como carga de trabajo a tracción del material  $1.200 \text{ kg/cm}^2$ , determinar la sección necesaria de las barras DE y A C. Hallar el alargamiento de la barra DE en toda su longitud de 6 m. Se supondrá que el único factor a considerar para determinar el área buscada es el valor límite de la tensión de trabajo a tracción. Tomar como módulo de elasticidad de la barra  $2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

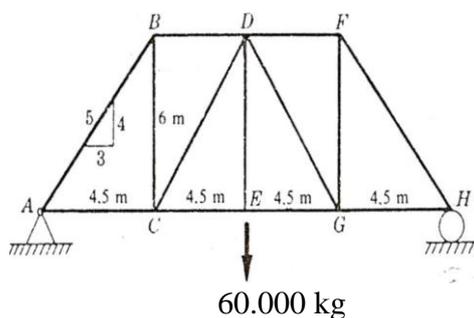


Fig. (a)

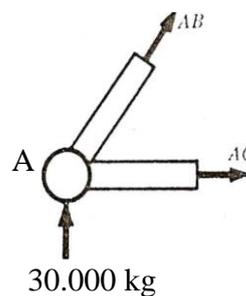


Fig. (b)

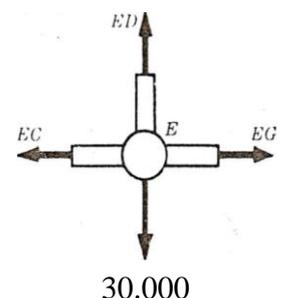


Fig. (c)

**Solución:**

Esta armadura es estáticamente determinada exterior e interiormente, esto es, se pueden determinar las reacciones en los apoyos por medio de las ecuaciones del equilibrio estático, y se puede hallar la fuerza axial en cada barra por un estudio estático simple.

Primeramente es necesario determinar las reacciones verticales en A y H. Por simetría, son de 30.000 kg cada una. En la Fig. (b) aparece un diagrama del nudo A como cuerpo en libertad. En ella se han expresado las fuerzas desconocidas en las barras por la misma designación de dichas barras, AB y AC, y se ha supuesto que se trata de tracciones, por lo que si se halla para ellas valores positivos serán realmente fuerzas de tracción, mientras que si son negativas se tratará de compresiones, estando así los signos de acuerdo con el criterio habitual de suponer positivas las tracciones y negativas las compresiones. Aplicando la ecuación del equilibrio estático al diagrama de cuerpo en libertad anterior, tenemos:

$$\sum F_v = 30.000 + \frac{4}{5}(AB) = 0 \quad \text{o} \quad AB = -37.500 \text{ kg}$$

$$\sum F_h = \frac{3}{5}(-37.500) + AC = 0 \quad \text{o} \quad AC = 22.500 \text{ kg}$$

De igual modo, en la Fig. (c) aparece un diagrama de cuerpo en libertad del punto E. De la estática, tenemos

$$\sum F_v = ED - 60.000 = 0 \quad \text{o} \quad ED = 60.000 \text{ kg}$$

La consideración simple de las armaduras utilizada aquí supone que todas las barras son elementos de los que podrían llamarse de dos fuerzas, esto es, sometidos a tracción o compresión axiales, sin ninguna otra carga.

Para la carga axial, la tensión viene dada por  $\sigma = P/A$ , donde P es la fuerza axial y A la sección de la barra. En nuestro caso, la tensión es de 1.200 kg/cm<sup>2</sup> en cada barra, por lo que las secciones serán

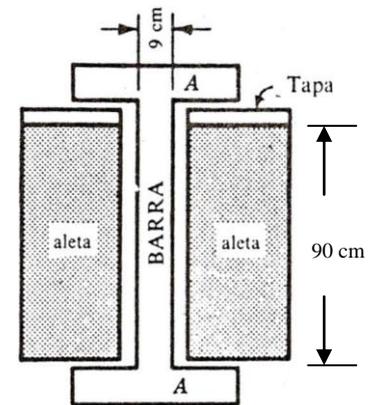
$$A_{DE} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_{AC} = \frac{22.500}{1.200} = 18,75 \text{ cm}^2$$

El alargamiento de la barra bajo la tracción axial viene dado por  $\Delta = \frac{PL}{AE}$ . Para la

barra DE tenemos:

$$\Delta = \frac{(60.000)(600)}{(50)(2,1 \times 10^6)} = 0,34 \text{ cm}$$

5. En un dispositivo de cierre para asegurar la tapa de un depósito cilíndrico que contiene fluido a presión se ha usado una serie de barras prismáticas de sección rectangular de 5 x 9 cm. La pared exterior del depósito de presión tiene unas aletas salientes soldadas a ella, encajando las barras prismáticas (en sentido lateral) entre dos aletas contiguas. Para asegurar el efecto de fijación, la barra está mecanizada de modo que es demasiado corta en sus cabezas (A) para encajar sobre la tapa del depósito, que apoya en la parte superior de las aletas. A la temperatura ambiente le faltan 25 mm. Se calienta la barra (pero no las aletas) de forma que pueda deslizar sobre la parte superior del depósito, y después de enfriarse ejerce una fuerza normal a dicha parte superior.



**Solución:**

Si la superficie total de apoyo en cada extremo de la barra (superficie en contacto con la parte superior del depósito) es de  $45 \text{ cm}^2$ , hallar la presión unitaria que ejerce cada barra sobre el depósito, así como la temperatura a que habría que calentarlas para que entrasen justo en la tapa. Las barras son de acero, para el cual  $\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}$

$$0,25 = (11 \times 10^{-6})(90)(\Delta T), \quad \text{de donde} \quad \Delta T = 252^\circ$$

La fuerza axial necesaria para alargar la barra esta misma cantidad es P, siendo

$$0,25 = \frac{P(90)}{(45)(2,1 \times 10^6)} \quad \text{y} \quad P = 262.500 \text{ kg}$$

Se supone que la presión está uniformemente repartida sobre la superficie de apoyo entre la cabeza y la parte superior del depósito, por lo que dicha presión es

$$\frac{262.500}{45} = 5.800 \text{ kg/cm}^2$$

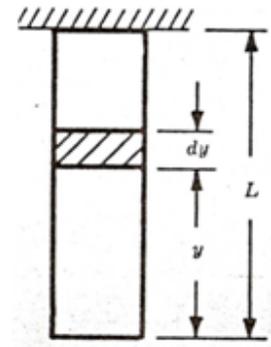
6. Determinar el aumento total de longitud de una barra de sección constante, colgada verticalmente y sometida como única carga a su propio peso. La barra es recta inicialmente.

**Solución:**

La tensión normal (tracción) en una sección horizontal está producida por el peso de material situado debajo de esa sección. El alargamiento del elemento  $dy$  de la figura es:

$$d\Delta = \frac{(A\gamma dy)}{AE}$$

Donde:  $A$  representa la sección de la barra y  $\gamma$  su peso específico (peso/volumen unidad). Integrando, el alargamiento total de la barra es



$$\Delta = \int_0^L \frac{A\gamma dy}{AE} = \frac{A\gamma}{AE} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{(A\gamma L)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

Donde:  $W$  indica el peso total de la barra. Hay que observar que el alargamiento total producido por el peso es igual al producido por una carga mitad de dicho peso, aplicada en el extremo.

7. En la construcción de un edificio se usa un cable de acero de 6 mm de diámetro para la elevación de materiales. Si cuelgan verticalmente 150 m del cable para elevar en su extremo inferior una carga de 200 Kg, determinar el alargamiento total del cable. El peso específico del acero es de  $0.0078 \text{ Kg/cm}^3$  y  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

**Solución:**

El alargamiento total es debido en parte a la fuerza aplicada de 200 kg y en parte al peso del cable. El debido a la carga es

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(15.000)}{\frac{\pi}{4}(0,6)^2(2,1 \times 10^6)} = 5 \text{ cm}$$

Por el Problema 6, el alargamiento debido al peso del cable es:

$$\Delta_2 = \frac{WL}{2AE} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0,6)^2(15.000)(0,0078)(15.000)}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)(0,6)^2(2,1 \times 10^6)} = 0,4cm$$

Por consiguiente, el alargamiento total es  $\Delta = 5 + 0,4 = 5,4cm$

8. Un cable recto de aluminio de 30 m de largo está sometido a una tensión de tracción de  $700 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar el alargamiento total del cable. ¿Qué variación de temperatura produciría este mismo alargamiento? Tomar  $E = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha$  (coeficiente de dilatación lineal) =  $21,6 \times 10^{-6} / ^\circ C$

**Solución:**

El alargamiento total está dado por:  $\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(700)(3.000)}{7 \times 10^5} = 3cm$

Un aumento de temperatura de  $\Delta T$  produciría la misma dilatación. Por tanto,

$$3 = (21,6 \times 10^{-6})(3.000)(\Delta T) \quad \text{y} \quad \Delta T = 46^\circ C$$

9. Dos barras prismáticas están unidas rígidamente y soportan una carga de 5.000 kg, como se ve en la figura. La barra superior es de acero con una densidad de  $0,0078 \text{ kg/cm}^3$ , una longitud de 10 m y una sección de  $60 \text{ cm}^2$ . La inferior es de bronce con densidad  $0,008 \text{ kg/cm}^3$ , una longitud de 6 m y una sección de  $50 \text{ cm}^2$ . Para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , y para el bronce  $E = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar las tensiones máximas en cada material.

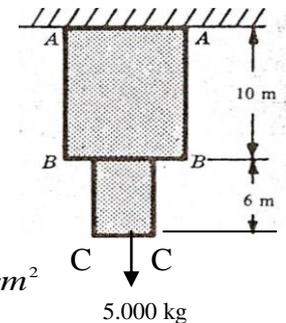
**Solución:**

La tensión máxima en el bronce tiene lugar inmediatamente bajo la unión en B-B. Allí, la tensión normal vertical es debida al efecto combinado de la carga de 5.000 kg Y del peso de toda la barra de bronce situada bajo B-B.

El peso de la barra de bronce es

$$W_b = (600)(50)(0,008) = 240kg$$

La tensión en esta sección es  $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240}{50} = 105kg/cm^2$



La tensión máxima en la barra de acero se produce en la sección A-A de suspensión porque en ella producen tensión normal todo el peso de las barras de acero y de bronce, mientras que en cualquier sección situada más abajo solo actuaría una parte del peso de la barra de acero.

El peso de la barra de acero es

$$W_a = (1.000)(60)(0,0087) = 468kg$$

La tensión en la sección A-A es  $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240 + 468}{60} = 95kg/cm^2$

10. Una barra troncocónica maciza de sección circular varía uniformemente entre un diámetro menor  $d$  y uno mayor  $D$ , con longitud  $L$ . Determinar el alargamiento debido a una fuerza axial  $P$  aplicada en cada extremo. Véase la Figura (a).

La coordenada  $x$  indica la distancia de un elemento en forma de disco de espesor  $dx$  al extremo menor. Por triángulos semejantes se halla fácilmente para radio de este elemento

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D-d}{2} \right)$$

**Solución:**

El alargamiento del elemento discoidal se puede hallar aplicando la fórmula para la carga axial,  $\Delta = PL/AE$ .

Para el elemento, esta expresión se convierte en

$$d\Delta = \frac{Pdx}{\pi \left[ \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D-d}{2} \right) \right]^2 E}$$

El alargamiento de toda la barra se obtiene sumando los de todos los elementos a lo largo de la misma, lo que se consigue integrando. Si expresamos por  $\Delta$  el alargamiento de toda la barra,

$$\Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{4Pdx}{\pi \left[ d + \frac{x}{L}(D-d) \right]^2 E} = \frac{4PL}{\pi DdE}$$

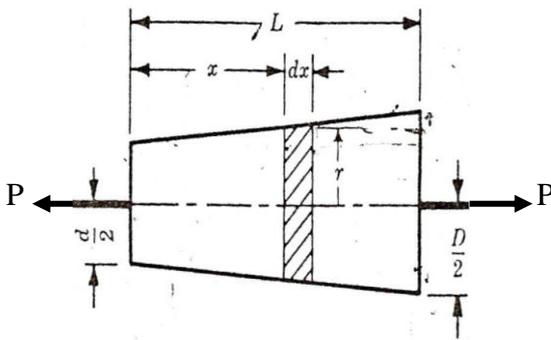


Fig. (a) Prob. 10

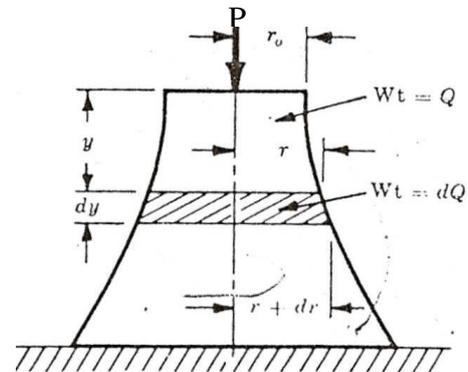


Fig. (b) Prob. 11

## SISTEMAS DE FUERZAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. La barra, representada en la Fig. (a) es de sección constante y está sujeta rígidamente entre los muros. Si se aplica una carga  $P$  a la distancia  $L_1$  del extremo izquierdo, determinar las reacciones de los muros sobre la barra.

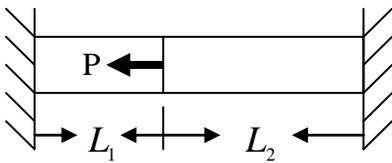


Fig. (a)

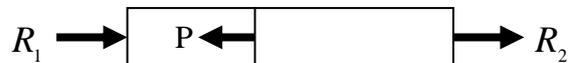


Fig. (b)

#### **Solución:**

Dibujaremos primero el diagrama de cuerpo en libertad de la barra, mostrando la fuerza aplicada  $P$  juntamente con las tracciones de los muros, que representaremos por  $R_1$  y  $R_2$  como se ve en la Figura (b).

Hay solo una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\sum F_h = R_1 - P + R_2 = 0$$

Como esta ecuación contiene dos incógnitas ( $R_1$  y  $R_2$ ) el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementar la ecuación con otra basada en las deformaciones de la barra.

El acortamiento de la parte de barra de longitud  $L_1$  debe ser igual al alargamiento del trozo de longitud  $L_2$  lo que proporciona la base para obtener la ecuación referente a las deformaciones. La fuerza axial que actúa en la parte Izquierda de la barra es  $R_1$  (kg) y en la derecha  $R_2$  (kg). La ecuación que relaciona las deformaciones es

$$\frac{R_1 L_1}{AE} = \frac{R_2 L_2}{AE}$$

Donde: A representa el área de la sección de la barra y E el módulo de elasticidad. De esta ecuación tenemos que  $R_1 L_1 = R_2 L_2$  y resolviéndola, juntamente con la de la estática, hallamos

$$R_1 = \frac{PL_2}{L_1 + L_2} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{PL_1}{L_1 + L_2}$$

Conociendo esas reacciones, es evidente que el alargamiento de la parte derecha ( $L_2$ ) de la barra es

$$\Delta_e = \frac{R_2 L_2}{AE} = \frac{PL_1 L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

Y el acortamiento de la izquierda ( $L_1$ )

$$\Delta_c = -\frac{R_1 L_1}{AE} = -\frac{PL_1 L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

Por lo que:

$$\Delta_e = -\Delta_c$$

2. Considerar un tubo de acero que rodea a un cilindro macizo de aluminio, comprimido todo el conjunto entre placas infinitamente rígidas, por fuerzas aplicadas centralmente, como se ve en la Fig. (a). El cilindro de aluminio tiene 7,5 cm de diámetro y el diámetro exterior del tubo de acero es de 9 cm. Si  $P = 24.000 \text{ kg}$ , hallar las tensiones en el acero y en el aluminio. Para el acero,  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el aluminio  $E = 2,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

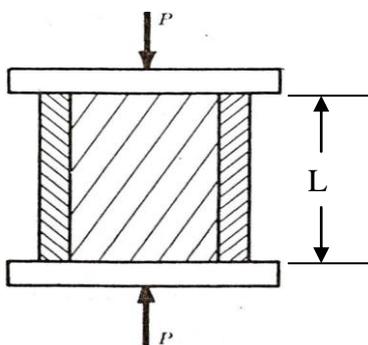


Fig. (a)

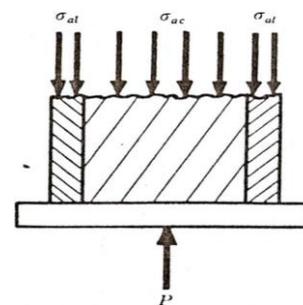


Fig. (b)

**Solución:**

Tracemos un plano horizontal a través del conjunto a una altura cualquiera, excepto en la inmediación de las placas, y separemos una parte de la otra, por ejemplo, la superior. La parte que hemos quitado debe ser sustituida por el efecto que ejerce sobre el resto, efecto que consiste en esfuerzos verticales normales, distribuidos en los dos materiales. En la Fig. (b) se representa el diagrama de cuerpo en libertad de la parte del conjunto situada bajo el plano de corte, siendo  $\sigma_{ac}$  y  $\sigma_{al}$  las tensiones normales que existen en el acero y el aluminio, respectivamente.

Si representamos la fuerza total soportada por el acero por  $P_{ac}$  (kg) Y la del aluminio por  $P_{al}$ ,

$$P_{ac} = A_{ac} \times \sigma_{ac} \quad \text{y} \quad P_{al} = A_{al} \times \sigma_{al}$$

Donde:  $A_{ac}$  y  $A_{al}$  representan las secciones del tubo de acero y el cilindro de aluminio, respectivamente. Solo disponemos de una ecuación de equilibrio estático para este sistema de fuerzas, y toma la forma

$$\sum F_y = P - P_{ac} - P_{al} = 0$$

Así, pues, tenemos una ecuación con dos incógnitas  $P_{ac}$  y  $P_{al}$  por lo que el problema es estáticamente indeterminado. En este caso tenemos que suplementar la ecuación de la estática por otra deducida de las deformaciones de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente porque las placas infinitamente rígidas obligan a ser iguales a las deformaciones axiales de los dos metales.

La deformación debida a la carga axial está dada por  $\Delta = PL/AE$ . Igualando las deformaciones axiales del acero y el aluminio, tenemos

$$\frac{P_{ac} \times L}{A_{ac} \times E_{ac}} = \frac{P_{al} \times L}{A_{al} \times E_{al}}$$

$$\text{ó } \frac{P_{ac} \times L}{\frac{\pi}{4}[(9)^2 - (7,5)^2](2,1 \times 10^6)} = \frac{P_{al} \times L}{\frac{\pi}{4}(7,5)^2(2,8 \times 10^5)}, \text{ de donde } P_{ac} = 3,3P_{al}$$

Resolviendo esta ecuación conjuntamente con la de la estática  $P - P_{ac} - P_{al} = 0$ , hallamos  $P_{al} = 0,233P$ ,  $P_{ac} = 0,767P$ .

Para una carga de 24.000 kg, se obtiene  $P_{al} = 5.590\text{kg}$ ,  $P_{ac} = 18.410\text{kg}$  y dividiendo las fuerzas resultantes en cada material por su sección, se obtienen las tensiones buscadas:

$$\sigma_{al} = \frac{5.590}{\frac{\pi}{4}(7,5)^2} = 126\text{kg/cm}^2 ;$$

$$\sigma_{ac} = \frac{18.410}{\frac{\pi}{4}[(9)^2 - (7,5)^2]} = 947\text{kg/cm}^2$$

3. La barra AB es absolutamente rígida y está soportada por tres varillas, como se ve en la Fig. (a). Las dos varillas extremas son de acero y tienen una sección de  $3\text{ cm}^2$ . La central es de cobre y de sección  $9\text{ cm}^2$ . Para el acero,  $E = 2,1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ , y para el cobre,  $E = 1,2 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ . Todas las varillas tienen 2,10 m y están igualmente separadas entre sí, estando aplicadas las cargas de 6.000 kg en el punto medio entre ellas. Despreciando el peso de la barra AB, determinar la fuerza en cada una de las barras verticales. AB permanece horizontal después de aplicar las cargas.

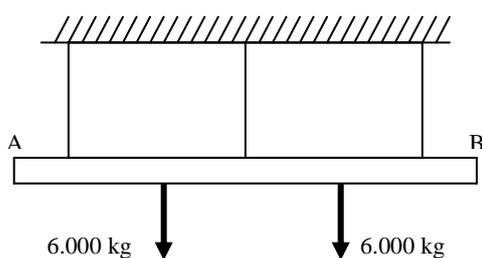


Fig. (a)

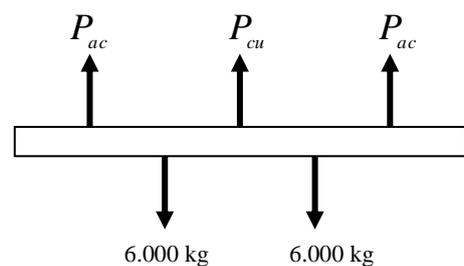


Fig. (b)

**Solución:**

Primero dibujaremos un diagrama de cuerpo en libertad de la barra AB en que aparezcan todas las fuerzas que actúan en ella, incluyendo las dos cargas aplicadas y las reacciones de las varillas verticales. Si se representa la fuerza en cada una de las

varillas de acero por  $P_{ac}$  (kg) y la de la de cobre por  $P_{cu}$  (kg), el diagrama aparece como en la Figura (b).

Ya se ha hecho uso de la condición de simetría al decir que las fuerzas son iguales en las dos varillas de acero, por lo que solo queda una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\sum F_v = 2P_{ac} + P_{cu} - 12.000 = 0$$

Tenemos, pues, una ecuación con dos incógnitas y el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementarla con otra que provenga de las deformaciones de la estructura.

Se determina fácilmente esta ecuación porque el alargamiento de las varillas de acero y de cobre es el mismo.

Aplicando la expresión del alargamiento debido a una carga axial  $\Delta = PL/AE$  a las varillas, tenemos

$$\frac{P_{ac}(210)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{P_{cu}(210)}{(9)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{ó} \quad P_{ac} = 0,583P_{cu}$$

Resolviendo esta ecuación juntamente con la de la estática, se tiene

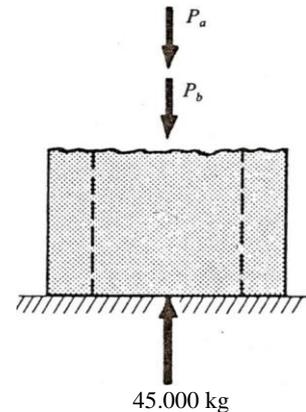
$$2(0,583P_{cu}) + P_{cu} - 12.000 = 0$$

Y despejando,  $P_{cu} = 5.540\text{kg}$  y  $P_{ac} = 3.230\text{kg}$

4. Considerar un pilar cuadrado de hormigón armado de 30 x 30 cm de sección y 2,40 m de altura. El hormigón está armado con ocho barras verticales de acero, cuadradas, de 2 cm de lado, colocadas simétricamente respecto al eje vertical del pilar. Se ha aplicado una fuerza de compresión axial de 45.000 kg, a través de una placa absolutamente rígida en la parte superior del hormigón. Considerar, para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el hormigón  $E = 1,75 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar la tensión en el hormigón y en el acero.

**Solución:**

Cortemos el pilar por un plano horizontal y quitemos la parte de encima de este plano. La parte suprimida deberá sustituirse por cualquier efecto que ejerciera sobre la parte inferior, efecto que consiste en fuerzas verticales distribuidas sobre el hormigón y sobre el acero. El diagrama de cuerpo en libertad de la parte inferior tiene el aspecto representado en el diagrama adjunto, donde  $P_a$  y  $P_b$  representan las fuerzas resultantes que se ejercen sobre el acero y sobre el hormigón, respectivamente, por la parte superior que se ha suprimido. La



fuerza  $P_b$ , por ejemplo, es en realidad la resultante de las tensiones normales que se supone uniformemente repartidas sobre toda la sección transversal del hormigón. Como la carga es axial, es razonable suponer una distribución uniforme de la tensión normal, por lo que la resultante  $P_b$  está en el eje geométrico del pilar. Solo hay disponible una ecuación de equilibrio estático para este sistema, que es

$$\sum F_v = 45.000 - P_b - P_a = 0$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado y es necesario tratarla juntamente con otra ecuación basada en la deformación de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente, pues el acortamiento del hormigón y del acero son iguales a causa de la placa rígida. La deformación bajo la carga axial es  $\Delta = PL/AE$ , y aplicando esta expresión a los dos materiales, tenemos

$$\frac{P_a \times L}{8(2)^2 (2,1 \times 10^6)} = \frac{P_b \times L}{[900 - 8(2)^2] (1,75 \times 10^5)}$$

Donde: L representa la altura del pilar. Despejando,  $P_a = 0,442P_b$  y

$$45.000 - P_b - 0,442P_b = 0 \quad , \quad P_b = 31.200kg \quad , \quad y \quad P_a = 13.800kg$$

La tensión en el acero se halla dividiendo la fuerza resultante en las ocho barras, por su sección. Del mismo modo, se obtiene la tensión en el hormigón dividiendo la fuerza resultante  $P_b$  por la sección del hormigón. Así,

$$\sigma_a = \frac{13.800}{8(2)^2} = 430 \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_b = \frac{31.200}{900 - 8(2)^2} = 36 \text{ kg/cm}^2$$

5. Un tubo de acero, vertical, de diámetro exterior 90 cm e interior 88 cm, está lleno de hormigón. Si el límite estático aparente del acero es de  $3,1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ , se admite un coeficiente de seguridad 2,25 y la resistencia a rotura del hormigón es de  $175 \text{ kg/cm}^2$  y su coeficiente de seguridad 2,5, ¿qué carga axial total de compresión puede soportar? Suponer que los dos extremos del tubo están cubiertos por placas infinitamente rígidas, y despreciar los efectos de la expansión lateral de los dos materiales. Tomar para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el hormigón  $E = 1,75 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  (La relación del módulo de Young para el acero y para el hormigón se suele designar por  $n$ , esto es,  $n = E_a / E_b$ . Aquí,  $n = 12$ ).

**Solución:**

La sección del hormigón es de  $6.082 \text{ cm}^2$ , y la del acero  $280 \text{ cm}^2$ . Como la variación total de altura del acero debe ser igual a la del hormigón, tenemos

$$\frac{P_b \times L}{(6.082)(1,75 \times 10^5)} = \frac{P_a \times L}{(280)(2,1 \times 10^6)} \qquad \text{ó} \qquad P_b = 1,81 P_a$$

Siendo  $P_b$  y  $P_a$  las fuerzas resultantes en el hormigón y en el acero, respectivamente. Por la estática solo tenemos la ecuación  $P = P_a + P_b$ , siendo  $P$  la carga axial total soportada.

Es improbable que se alcance la tensión de trabajo admisible para los dos materiales simultáneamente. Probablemente, el procedimiento más sencillo es calcular dos

valores de la carga total axial, uno basado en la hipótesis de que el hormigón está sometido a su carga de trabajo de  $70 \text{ kg/cm}^2$  y el otro suponiendo que el acero alcanza la suya de  $1.380 \text{ kg/cm}^2$ , siendo el menor de estos dos valores el determinante. Así, si el hormigón está sometido a su tensión de trabajo máxima, tenemos

$$P = 70(6.082)[1 + 1/1,81] = 661.000 \text{ kg}$$

Por otro lado, si el acero está sometido a  $1.380 \text{ kg/cm}^2$ , tenemos

$$P = 1.380(280)[1 + 1,81] = 1.086.000 \text{ kg}$$

Por consiguiente, la carga axial admisible es  $P = 661.000 \text{ kg}$

6. La barra AD, inicialmente recta, tiene una sección uniforme y está amordazada en los apoyos extremos, como se ve en la figura, sin que exista ninguna tensión inicial. Se aplican las cargas simétricamente colocadas de la Fig. (a) a las ménsulas (cuyo efecto se desprecia) y se desea hallar la fuerza de tracción o compresión resultante sobre cada sección transversal en cada una de las zonas AB, BC y CD.

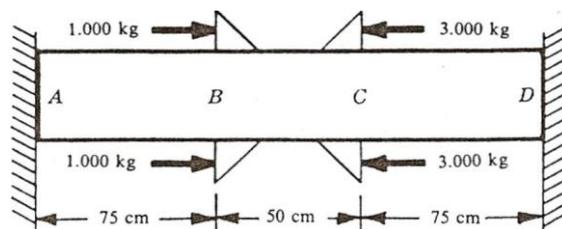


Fig.

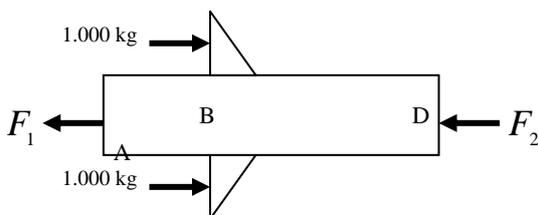


Fig. (b)

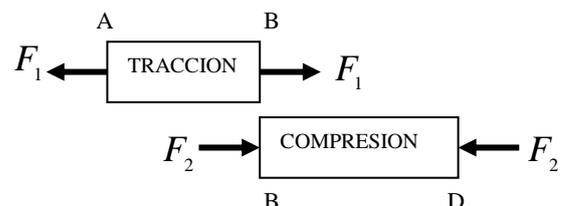


Fig. (c)

Consideremos primero solamente la carga total de 2.000 kg aplicada en B y comprobemos que la barra AD está en equilibrio. Habrá dos reacciones  $F_1$  y  $F_2$  en los extremos de la barra para equilibrar la fuerza de  $2(1.000) = 2.000$  kg. Entre A y B habrá una tracción de  $F_1$ , y entre B y D una compresión, como se ve en la Fig. (b), lo que puede representarse también como en la Fig. (c). Así,  $F_1$  alarga AB y B se mueve la distancia  $\Delta_1 = F_1(75)/AE$  hacia la derecha. Del mismo modo,  $F_2$  comprime BD y B se mueve  $\Delta_2 = F_2(125)/AE$ .

Evidentemente,  $\Delta_1 = \Delta_2$  y podemos escribir  $\frac{F_1(75)}{AE} = \frac{F_2(125)}{AE}$  ó  $F_1 = \left(\frac{5}{3}\right)F_2$

De la estática tenemos solamente la ecuación  $\sum F_h = -F_1 - F_2 + 2.000 = 0$   
Sustituyendo,

$(5/3)F_2 + F_2 = 2.000$  ,  $F_2 = 750$ kg (BD está en compresión) y  $F_1 = 1.250$ kg (AB está en tracción)

La distribución de las fuerzas axiales internas es ya evidente. Debido a la carga de  $2(3.000) = 6.000$  kg , tenemos

$$(5/8)(6.000) = 3.750 \text{ kg} \quad (\text{CD está en tracción})$$

$$(3/8)(6.000) = 2.250 \text{ kg} \quad (\text{AD está en compresión})$$

Sumando algebraicamente los resultados anteriores, se pueden hallar ya las fuerzas axiales resultantes en las distintas partes de AD. Los valores finales son

$$AB = 1.250 - 2.250 = - 1.000 \text{ kg} , \quad BC = - 750 - 2.250 = - 3.000 \text{ kg}$$

$$CD = - 750 + 3.750 = 3.000 \text{ kg}$$

Donde el signo positivo indica fuerza de tracción y el negativo de compresión.

7. Considerar la barra AB de la Fig. (a) absolutamente rígida y horizontal antes de aplicar la carga de 20.000 kg, articulada en A y soportada por la varilla de acero EB y la de cobre CD. La longitud de CD es de 90 cm y la de EB de 150 cm. Si la sección de CD es de  $5 \text{ cm}^2$  y la de EB de  $3 \text{ cm}^2$ , determinar la tensión en cada varilla vertical y el alargamiento de la de acero.

Despreciar el peso de AB. Para el cobre,  $E = 1,2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

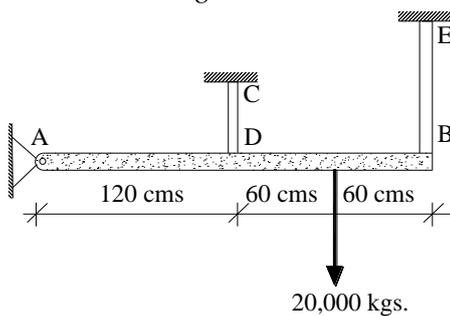


Figura (a)

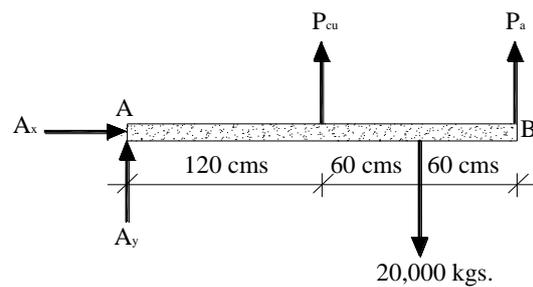


Figura (b)

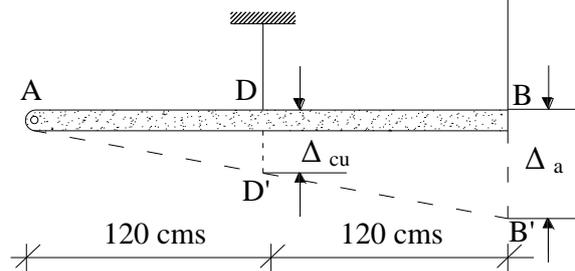


Figura (c)

El primer paso para resolver el problema es trazar el diagrama de cuerpo en libertad de la barra AB, con todas las fuerzas que actúan sobre ella. Es lo que se ha hecho en la Figura (b).

De la estática, tenemos (1)  $\sum F_h = A_x = 0$

$$(2) \sum M_A = 120P_{cu} + 240P_a - 20.000(180) = 0$$

$$(3) \sum F_v = A_y + P_{cu} + P_a - 20.000 = 0$$

Como las dos últimas ecuaciones tienen tres incógnitas, el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que buscar otra, basada en las deformaciones del sistema. Como la barra AB es rígida, el único movimiento que puede producirse es un giro del cuerpo rígido alrededor de A como centro. La línea

de trazos de la Fig. (c) indica la posición final de AB después de aplicar la carga de 20.000 kg. Inicialmente, esa barra era horizontal, como muestra la línea llena.

Los extremos inferiores de las varillas estaban al principio en D y B y se trasladan a D' y B' después de aplicar la carga. Como la barra AB es rígida, los triángulos semejantes ADD' y ABB' nos proporcionan una relación sencilla entre las deformaciones de las dos barras verticales:  $\Delta_{cu} / 120 = \Delta_a / 240$  expresando por  $\Delta_{cu}$  y  $\Delta_a$  los alargamientos de las varillas de cobre y acero, respectivamente. Por tanto, la ecuación suplementaria basada en las deformaciones es

$$\Delta_a = 2\Delta_{cu}$$

Pero el alargamiento bajo carga axial viene dado por  $\Delta = PL/AE$ . Utilizando esta expresión en la relación anterior entre deformaciones, tenemos

$$\frac{P_a(150)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{2P_{cu}(90)}{(5)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{ó} \quad P_a = 1,26P_{cu}$$

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la (2) de la estática, tenemos

$$120P_{cu} + 240(1,26P_{cu}) = 360.000 \quad P_{cu} = 8.500kg \quad \text{y} \quad P_a = 10.700kg$$

Las tensiones se obtienen por la relación  $\sigma = P/A$

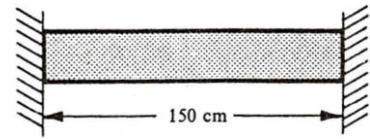
En la varilla de cobre,  $\sigma_{cu} = 8.500/5 = 1.700kg/cm^2$

En la varilla de acero,  $\sigma_a = 10.700/3 = 3.600kg/cm^2$

- Una barra de cobre tiene sección uniforme y está unida rígidamente a los muros, como se ve en la figura. La longitud es de 150 cm y la sección de 15 cm<sup>2</sup>. A la temperatura de 25° C la varilla no tiene tensiones. Determinar las que existen en ella cuando descienda la temperatura a 10°, suponiendo que los apoyos no ceden. Para el cobre,  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 16 \times 10^{-6}$  por °C.

**Solución:**

Un modo de resolver este problema es suponer que se corta la barra y se la separa del muro en el extremo derecho. En tal caso, es libre de contraerse cuando la temperatura desciende, contrayéndose la longitud



$$\Delta = (16 \times 10^{-6})(150)(15) = 0,036 \text{ cm}$$

Ahora, es necesario hallar la fuerza axial P que hay que aplicar a la barra para alargarla 0,036 cm, esto es, para volver a llevar el extremo derecho a su posición verdadera, porque sabemos que en la realidad el extremo no se desplaza en absoluto al bajar la temperatura. Para determinar esta fuerza P, utilizamos la ecuación

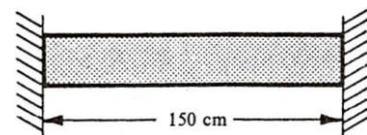
$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{que da} \quad 0,036 = \frac{P(150)}{(15)(1,1 \times 10^6)} \quad \text{ó} \quad P = 3.960 \text{ kg}$$

La tensión axial que produce esta fuerza es  $\sigma = P/A = 3.960/15 = 264 \text{ kg/cm}^2$

9. La barra compuesta de la figura está rígidamente sujeta a los dos apoyos. La parte de la izquierda es de cobre, con sección uniforme  $70 \text{ cm}^2$  y longitud 150 cm, mientras que la derecha es de aluminio, con sección uniforme de  $18 \text{ cm}^2$  y longitud 100 cm. A la temperatura de  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ , el conjunto está sin tensiones. La temperatura de la estructura desciende, y durante este proceso el soporte derecho cede 0,05 cm en el sentido de la contracción del metal. Determinar la, temperatura mínima a que puede someterse el conjunto para que la tensión en el aluminio no exceda de  $1.700 \text{ kg/cm}^2$ . Para el cobre,  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , y para el aluminio,  $E = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 22,2 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .

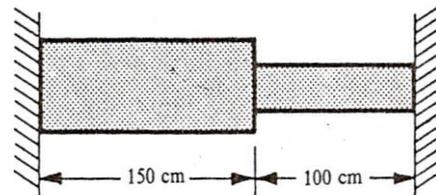
**Solución:**

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, es quizá más sencillo considerar que la barra se corta inmediatamente

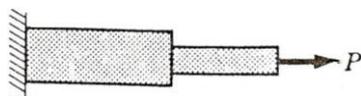


a la izquierda del muro que la soporta por el lado derecho, quedando libre para contraerse por la baja de temperatura  $\Delta T$ . El acortamiento total de la barra compuesta está dado por:

$$(17 \times 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \times 10^{-6})(100)(\Delta T)$$



Es de observar que la forma de la sección no tiene influencia en el cambio de longitud de la barra por variación de la temperatura.



Aún cuando la barra se haya contraído esta cantidad, sigue estando libre de tensiones, pero no hemos terminado el estudio, porque se ha suprimido la reacción del muro de la derecha cortando allí la barra. Por tanto, debemos representar la acción del muro por una fuerza axial  $P$ , aplicada a la barra, como se ve en el adjunto diagrama. Para que exista equilibrio, la fuerza resultante sobre cada sección transversal del cobre o del aluminio debe ser igual a  $P$ . La aplicación de la fuerza  $P$

alarga la barra compuesta en una longitud  $\frac{P(150)}{70(1,1 \times 10^6)} + \frac{P(100)}{18(0,7 \times 10^6)}$

Si no cediera el apoyo derecho, igualaríamos la última expresión a la que da el acortamiento total debido al descenso de temperatura, pero como dicho apoyo cede 0,05 cm, podemos escribir

$$\frac{P(150)}{70(1,1 \times 10^6)} + \frac{P(100)}{18(0,7 \times 10^6)} = (17 \times 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \times 10^{-6})(100)(\Delta T) - 0,05$$

La tensión en el aluminio no debe exceder de 1.700 kg/cm<sup>2</sup> y como viene dada por la fórmula  $\sigma = P/A$ , la fuerza máxima es

$$P = A \times \sigma = 18(1.700) = 30.600kg$$

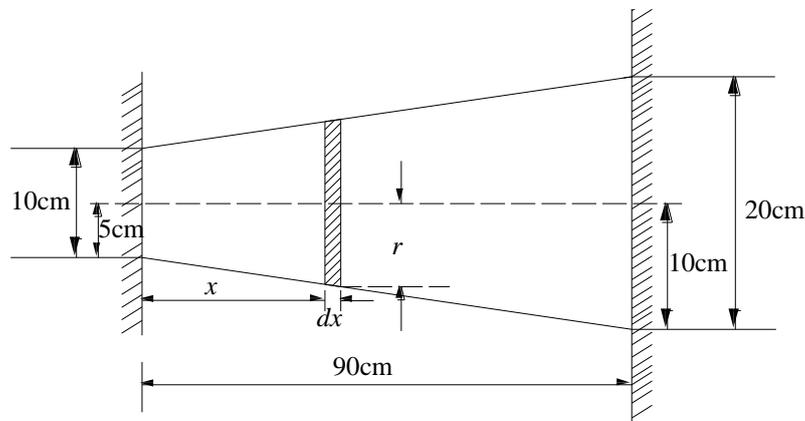
Sustituyendo este valor de P en la ecuación anterior entre deformaciones, hallamos  $\Delta T = 74^{\circ}C$ , por lo que la temperatura puede descender  $74^{\circ}$  desde la original de  $25^{\circ}$ , siendo la final de  $-49^{\circ}C$ .

10. Considerar la barra cónica de acero de la figura, que tiene los dos extremos sujetos en apoyos indeformables y está inicialmente libre de tensiones. Si la temperatura descende  $22^{\circ}C$ , determinar la tensión máxima en la barra. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> y  $\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^{\circ}C$

**Solución:**

Quizá el modo más sencillo de resolver este problema es imaginar que un extremo de la barra, por ejemplo, el derecho, está temporalmente suelto de su apoyo. En este caso, la barra contrae una longitud:

$$(22)(90)(11 \times 10^{-6}) = 0,0218cm; \text{ debido al descenso de temperatura.}$$



Hallemos, ahora, la fuerza axial que hay que aplicar al extremo derecho «libre», para que la barra se alargue 0,0218 cm, esto es, para que se satisfaga en ese extremo la condición de límite verdadera, de fijeza completa. Adoptando el sistema de coordenadas de la figura, tenemos

$$r = 5 + 5x/90 = 5 + x/18$$

Como el ángulo con que varía la sección es relativamente pequeño, se puede suponer que la fuerza de tracción está uniformemente distribuida en cada sección transversal. Como tampoco hay cambios bruscos de sección, podemos determinar el alargamiento del elemento discoidal de espesor  $dx$  aplicando  $\Delta = PL/AE$ , donde  $L = dx$ , al disco e integrando luego a lo largo de toda la barra:

$$0,0218 = \int_0^{90} \frac{Pdx}{\pi(5+x/18)^2 E} = \int_0^{90} \frac{324Pdx}{\pi E(90+x)^2} = \frac{324P}{180E\pi}$$

y despejando,  $P = 80.000$  kg, siendo  $P$  la fuerza resultante axial que actúa sobre cada sección, esto es, la fuerza necesaria para volver a llevar la barra a su longitud original.

Debe observarse que la fuerza resultante en cada sección vertical es  $P$  (kg) para que exista equilibrio en cualquier parte de la barra. Sin embargo, como el área de la sección varía de un extremo de la barra al otro, la tensión varía desde un valor máximo en el extremo izquierdo en que la sección es mínima, hasta un mínimo en el extremo derecho en que es máxima la sección.

La tensión máxima en el extremo izquierdo está dada por

$$\sigma_{\max} = \frac{80.000}{\pi(5)^2} = 1.020 \text{ kg/cm}^2$$

11. Un cilindro hueco de acero rodea a otro macizo de cobre y el conjunto está sometido a una carga axial de 25.000 kg, como se muestra en la Fig. (a). La sección del acero es de  $18 \text{ cm}^2$ , mientras que la del cobre es de  $60 \text{ cm}^2$ , Ambos cilindros tienen la misma longitud antes de aplicar la carga. Determinar el aumento de temperatura del sistema necesario para colocar toda la carga en el cilindro de cobre. La placa de cubierta de la parte superior del conjunto es rígida, y para el cobre  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , mientras que para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .

**Solución:**

Un procedimiento para resolver este problema es suponer que se suprimen la carga y la placa superior de tapa, permitiendo al sistema dilatarse libremente en sentido

vertical por un aumento de temperatura  $\Delta T$ . En estas condiciones, los extremos superiores de los cilindros adoptan las posiciones representadas en la Fig. (b) por líneas de trazos.

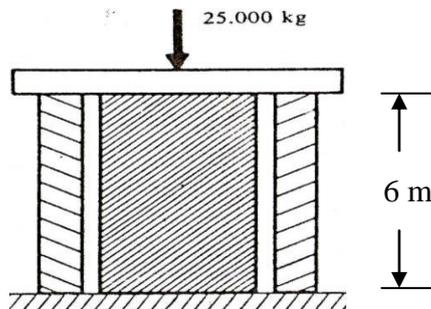


Fig. (a)

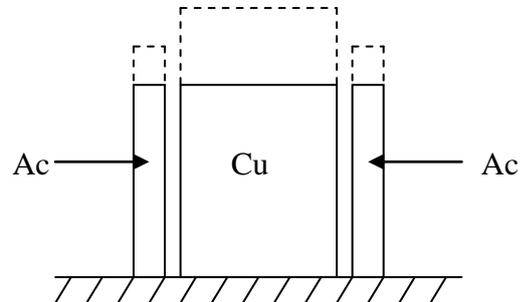


Fig. (b)

Naturalmente, el cilindro de cobre se dilata hacia arriba más que el de acero, porque el coeficiente de dilatación lineal del cobre es mayor que el del acero. La dilatación del acero es

$$(11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

Mientras que la del cobre es  $(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$

No cabe duda de que ésta no es la situación real, porque todavía no se ha considerado la carga de 25.000 kg. Si toda esta carga axial ha de ser soportada por el cobre, solo será comprimido él, y la compresión viene dada por

$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{25.000(600)}{(60)(1,1 \times 10^6)}$$

El enunciado del problema dice que el aumento de temperatura  $\Delta T$  es el preciso para que el cobre soporte toda la carga. Por tanto, la longitud del cobre aumentada, representada por las líneas de trazos en el esquema anterior, disminuirá por efecto de la fuerza, y la dilatación total será la causada por el aumento de temperatura menos la compresión debida a la carga. La variación de longitud del acero es debida solo al cambio de temperatura. En consecuencia, podemos escribir :

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) - \frac{25.000(600)}{(60)(1,1 \times 10^6)} = (11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) \quad \text{ó} \quad \Delta T = 63^\circ C$$

12. La barra rígida AD está articulada en A, y unida a las BC y ED, como se ve en la Fig. (a). Todo el sistema está al principio sin tensiones y son despreciables los pesos de las barras. La temperatura de la barra BC desciende  $30^\circ\text{C}$  y la de la barra ED aumenta los mismos  $30^\circ\text{C}$ . Despreciando toda posibilidad de pandeo lateral, hallar las tensiones normales en las barras BC y ED. Para BC, que es de bronce, suponer  $E = 9,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , y para ED, que es de acero, tomar  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ . La sección de BC es de  $6 \text{ cm}^2$  y la de ED de  $3 \text{ cm}^2$ .

**Solución:**

Expresemos las fuerzas aplicadas sobre AD por  $P_{ac}$  y  $P_{br}$  y supongamos que actúan en las direcciones representadas en el diagrama de cuerpo en libertad de la Fig. (b). Como AD gira rígidamente alrededor de A (c

de trazos), tenemos  $\Delta_{br} / 26 = \Delta_{ac} / 65$  donde  $\Delta$  acortamiento y el alargamiento axiales de BC y DE, re

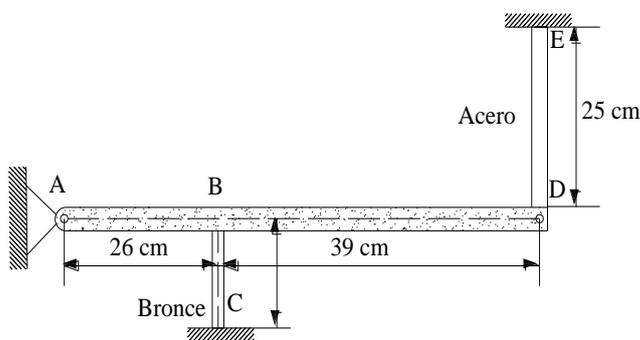


Figura (a)

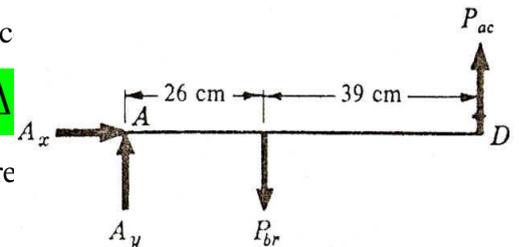


Fig. (b)

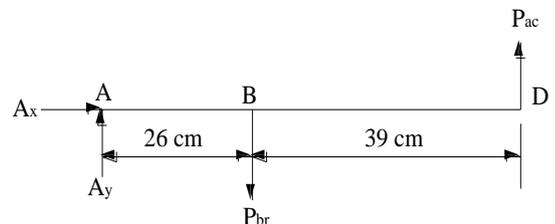


Figura (a)

La variación total de longitud de BC está compuesta por un acortamiento debido al descenso de temperatura y el debido a la fuerza axial  $P_{br}$ . La variación total de longitud de DE está compuesta por un alargamiento debido al aumento de temperatura y otro producido por la fuerza  $P_{ac}$ . Por tanto, tenemos

$$\frac{2}{5} \left[ (11 \times 10^{-6})(25)(30) + \frac{P_{ac}(25)}{(3)(2,1 \times 10^6)} \right] = -(17,7 \times 10^{-6})(30)(30) + \frac{P_{br}(30)}{(6)(9,8 \times 10^5)}$$

$$\begin{aligned} \text{ó} & & 5,102P_{br} - 1,587P_{ac} &= 19.230 \\ \text{de la estática} & & \sum M_A &= 26P_{br} - 65P_{ac} = 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones,  $P_{ac} = 1.720kg$ ,

$$P_{br} = 4.300kg$$

Utilizando la expresión  $\sigma = P/A$  para cada barra, obtenemos  $\sigma_{ac} = 573 \text{ kg/cm}^2$  y

$$\sigma_{br} = 716 \text{ kg/cm}^2.$$

## MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA PARA EFECTOS AXIALES

El Método consiste en aplicar una carga unitaria en el punto que deseamos conocer su desplazamiento.

Si nos piden el desplazamiento vertical u horizontal; tendremos que aplicar una carga unitaria vertical u horizontal respectivamente, en el punto a analizar.

Si nos piden el giro; tendremos que aplicar un giro unitario.

Para resolver casos por este método, se analiza el sistema con sus cargas reales y luego sólo con la carga unitaria.

Al sistema real lo denominaremos N y al de la carga unitaria n.

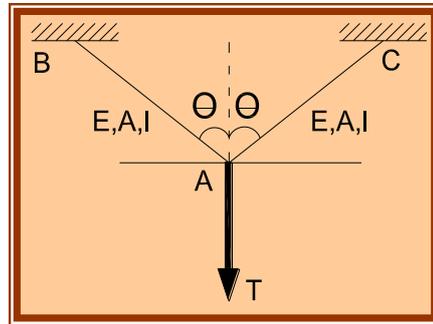
Este método energético nos evita determinar la deformación por métodos geométricos.

El desplazamiento  $\delta$ , viene dado por:

$$\delta = \frac{N \cdot n \cdot l}{E \cdot A}$$

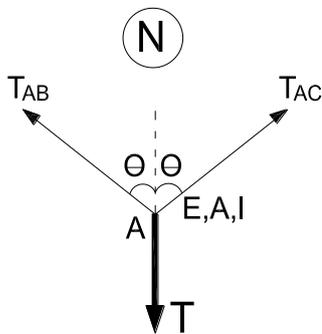
**PROBLEMA DE APLICACIÓN**

Calcular las tensiones en cada barra:



**Solución:**

Tenemos los sgtes. Esquemas:

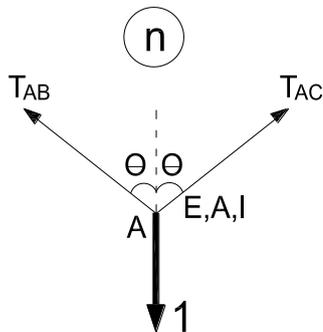


$$T_{AB} = T_{AC}$$

$$T_{AB} \cdot \cos\theta + T_{AC} \cdot \cos\theta = T$$

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{P}{2 \cdot \cos\theta}$$

Luego:



$$T_{AB} = T_{AC}$$

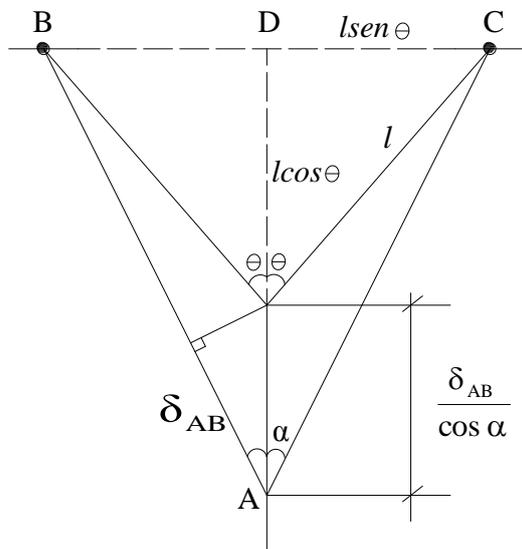
$$T_{AB} \cdot \cos\theta + T_{AC} \cdot \cos\theta = 1$$

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{1}{2 \cdot \cos\theta}$$

Asimismo:

Barra	N	N	E	L	A	$\frac{Nnl}{EA}$
AB	$P/2\cos\theta$	$1/2\cos\theta$	E	$l$	A	$P/4EA\cos^2\theta$
AC	$P/2\cos\theta$	$1/2\cos\theta$	E	$l$	A	$P/4EA\cos^2\theta$
						$P/2EA\cos^2\theta$

**Por Métodos Geométricos:**



Luego:

$$l^2 \cdot \text{sen}^2 \theta + \left( l \cdot \text{cos} \theta + \frac{\delta_{AB}}{\text{cos} \alpha} \right)^2 = (l + \delta_{AB})^2$$

$$\cancel{l^2 \cdot \text{sen}^2 \theta} + \cancel{l^2 \cdot \text{cos}^2 \theta} + 2l \cdot \frac{\text{cos} \theta \cdot \delta_{AB}}{\text{cos} \alpha} = \cancel{l^2} + 2l \cdot \delta_{AB} + \delta_{AB}^2$$

Despreciamos el elemento de orden superior:

$$2l \cdot \frac{\text{cos} \theta \cdot \delta_{AB}}{\text{cos} \alpha} = 2l \cdot \delta_{AB}$$

$$\text{cos} \theta = \text{cos} \alpha$$

$$\theta = \alpha$$

De donde:

$$\delta_{v_B} = \frac{\delta_{AB}}{\text{cos} \theta}$$

Pero:

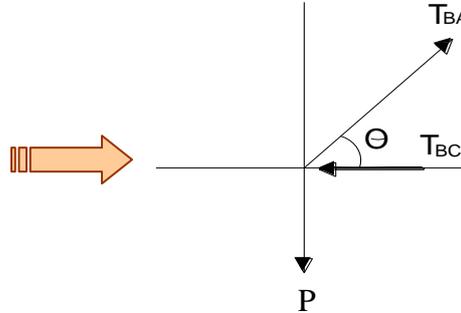
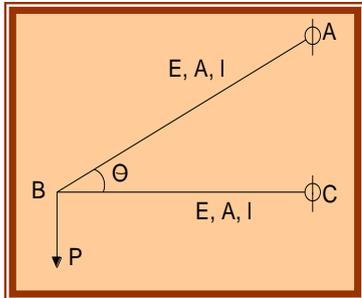
$$\delta_{AB} = \frac{P}{2 \cdot \text{cos} \theta} \cdot \frac{l}{EA}$$

Entonces:

$$\delta_{v_B} = \frac{P \cdot l}{2 \text{cos}^2 \theta \cdot EA}$$

**PROBLEMAS DE APLICACIÓN**

1. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento vertical y horizontal del punto B.



Del gráfico, se tiene:

$$(*) T_{AB} \cos \theta = T_{BC}$$

$$(*) T_{AB} \sin \theta = P$$

$$T_{AB} = \frac{P}{\sin \theta} \dots \dots \dots (T)$$

$$T_{BC} = P \cdot \text{Ctg} \theta \dots \dots \dots (C)$$

Tenemos que:

$$\delta v_B = a + b$$

$$\sin \theta = \frac{\delta_{AB}}{a} \Rightarrow a = \frac{\delta_{AB}}{\sin \theta}$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\delta_{BC}}{b} \Rightarrow b = \frac{\delta_{BC}}{\text{tg} \theta}$$

$$\delta_{AB} = \frac{P}{\sin \theta} \cdot \frac{l}{EA} \quad \delta_{AB} = \frac{P \cdot \text{Ctg} \theta \cdot l}{EA}$$

$$\delta v_B = \frac{P \cdot l}{\sin^2 \theta \cdot EA} + \frac{P \cdot \text{Ctg} \theta \cdot l}{EA \cdot \text{Tg} \theta}$$

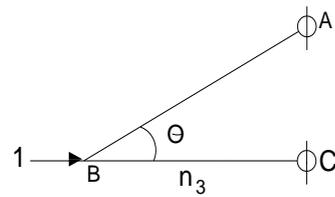
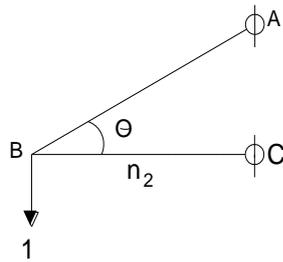
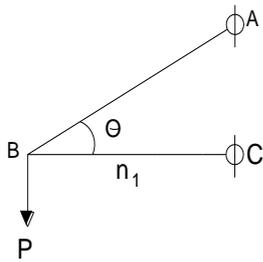
$$\delta v_B = \frac{P \cdot l}{EA} (\csc^2 \theta + \text{Ctg}^2 \theta)$$

Luego:

$$\delta H_B = \delta_{AB} \cdot \cos \theta = P \cdot \text{Ctg} \theta \cdot \frac{l}{EA}$$

$$\delta H_B = P \cdot \text{Ctg} \theta \cdot \frac{l}{EA}$$

**Por Carga Unitaria:**



De los gráficos; se tiene:

$$T_{AB} = \frac{P}{\text{sen}\theta}$$

$$T_{AB} = \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

$$T_{AB} = 0$$

$$T_{BC} = P \cdot \text{Ctg}\theta$$

$$T_{BC} = \text{Ctg}\theta$$

$$T_{AB} = 1$$

**Hallando  $\delta v_B$  :**

Barra	N	$n_1$	E	A	l	$\sum \frac{N \cdot n \cdot l}{EA}$
AB	$P/\text{Sen}\theta$	$1/\text{Sen}\theta$	E	A	l	$\frac{P \cdot l}{EA \cdot \text{Sen}^2\theta}$
BC	$P \cdot \text{Ctg}\theta$	$\text{Ctg}\theta$	E	A	l	$\frac{P \cdot l \cdot \text{Ctg}^2\theta}{EA}$
						$\frac{P \cdot l}{EA} (\text{Csc}^2\theta + \text{Ctg}^2\theta)$

Entonces:

$$\delta v_B = \frac{P \cdot l}{EA} (\text{Csc}^2\theta + \text{Ctg}^2\theta)$$

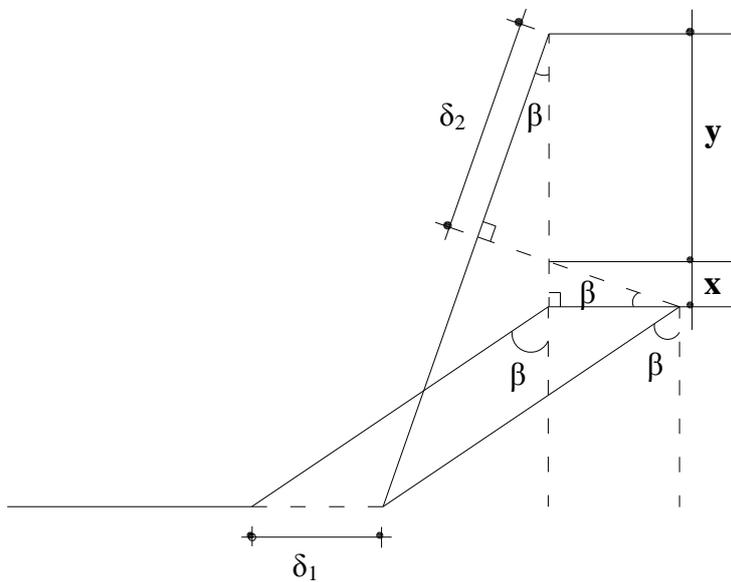
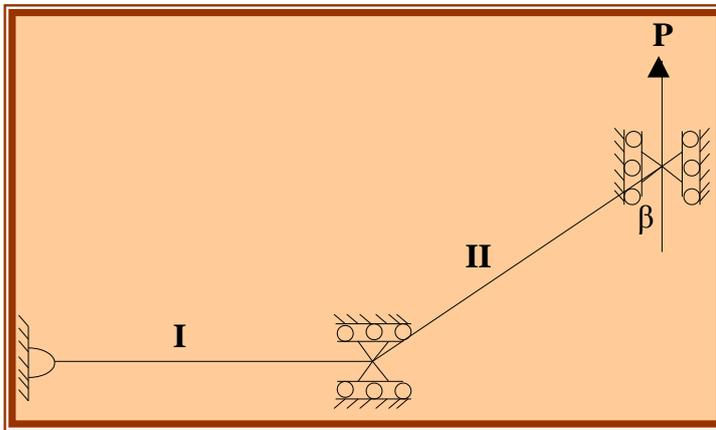
**Hallando  $\delta H_B$  :**

Barra	N	$n_2$	E	A	l	$\sum \frac{N \cdot n \cdot l}{EA}$
AB	$P/\text{Sen}\theta$	0	E	A	l	0
BC	$P \cdot \text{Ctg}\theta$	1	E	A	l	$P \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \frac{1}{EA}$
						$P \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \frac{1}{EA}$

Entonces:

$$\delta H_B = P \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \frac{1}{EA}$$

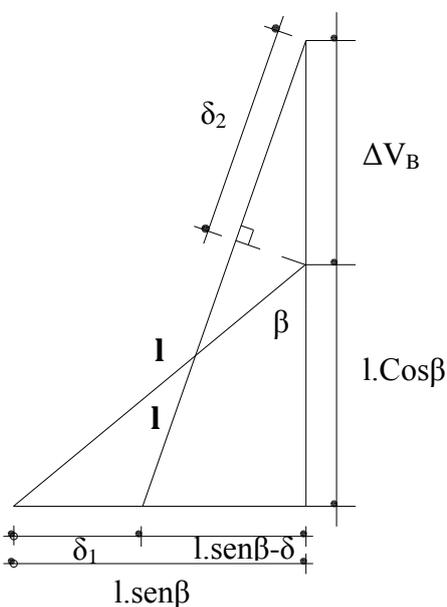
2. Calcular el desplazamiento del punto A para el sistema que se muestra. ( $E, A = \text{Ctte}$ ).



Tenemos que:

$$\cos\beta = \frac{\delta_2}{y} \Rightarrow y = \frac{\delta_2}{\cos\beta}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{x}{\delta_1} \Rightarrow x = \delta_1 \cdot \text{tg}\beta$$



Se tiene que:

$$\Delta V_B = \frac{\delta_2}{\cos\beta} + \delta_1 \cdot \text{tg}\beta$$

Luego:

$$(1 + \delta_2)^2 = (\Delta V_B + l \cdot \cos\beta)^2 + (l \cdot \text{sen}\beta - \delta_1)^2$$

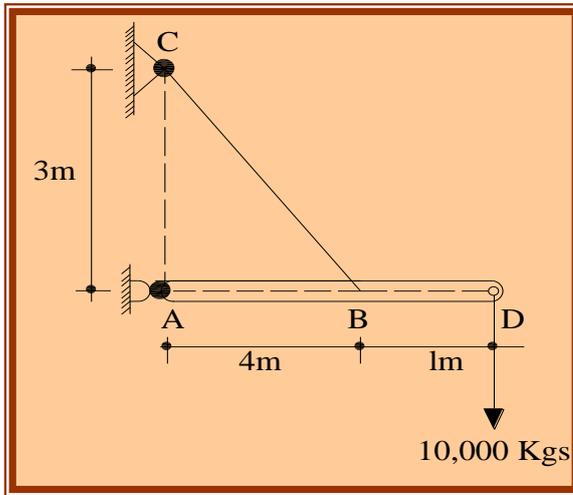
$$1^2 + 2l\delta_2 + \delta_2^2 = \Delta V_B^2 + 2\Delta V_B \cdot l \cdot \cos\beta + l^2 \cdot \cos^2\beta +$$

$$l^2 \cdot \text{sen}^2\beta - 2l \cdot \text{sen}\beta \cdot \delta_1 + \delta_1^2$$

$$= 2 \cdot \Delta V_B \cdot l \cdot \cos\beta = 2l \cdot \text{sen}\beta \cdot \delta_1 + 2l \delta_2$$

$$\Delta V_B = \frac{\delta_2}{\cos\beta} + \delta_1 \cdot \text{tg}\beta$$

3. Para la barra mostrada. Calcular el  $\delta V_D$  y  $\delta V_B$

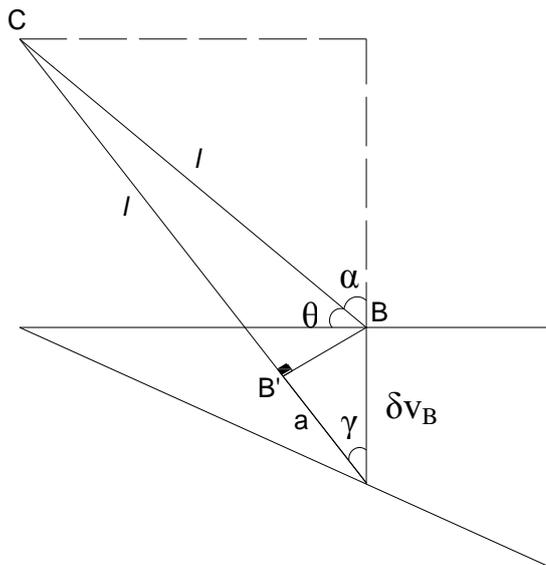


Considerar:  
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$   
 $A = 4 \text{ cm}^2$   
 Barra AD tiene  $EA = \infty$

**Solución:**

Si  $EA = \infty$ , entonces  $\delta = \frac{Pl}{EA} = \frac{Pl}{\infty} = 0$ ; es decir, la barra no tiene deformación

axial. En otras palabras, la barra AB gira de la siguiente manera:



Se tiene:

$$(l \cdot \cos \alpha + \delta_{VB})^2 + (l \cdot \sin \alpha)^2 = (l+a)^2$$

$$\cos \gamma = \frac{a}{\delta_{VB}}$$

$$\delta_{VB} = \frac{a}{\cos \gamma}$$

$$(l \cdot \cos \alpha + \frac{a}{\cos \gamma})^2 + (l \cdot \sin \alpha)^2 = (l+a)^2$$

$$\cancel{l^2} \cdot \cos^2 \alpha + 2al \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + \frac{a^2}{\cos^2 \gamma} + \cancel{l^2} \cdot \sin^2 \alpha = \cancel{l^2} + 2al + a^2$$

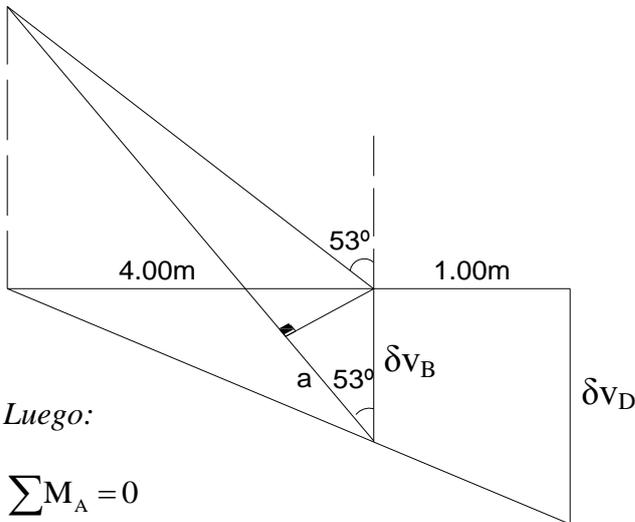
Agrupando y despreciando infinitésimo de orden superior:

$$2al \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = 2al$$

$$\cos \alpha = \cos \gamma$$

$$\alpha = \gamma$$

*Aplicando la teoría expuesta; al Problema Enunciado:*



*Tenemos que:*

$$\cos 53^\circ = \frac{a}{\delta v_B}$$

$$\delta v_B = \frac{a}{\cos 53^\circ}$$

*Luego:*

$$\sum M_A = 0$$

$$T_{BC} \cdot \sin 37^\circ \times 4 = 10,000 \times 5$$

$$T_{BC} \cdot \frac{3}{5} \times 4 = 10,000 \times 5$$

$$T_{BC} = 20,833.33 \text{ Kgs.}$$

*De otro lado:*

$$\delta_{BC} = \frac{20,833.33 \times 500}{2.1 \times 10^6 \times 4} = 1.24 \text{ cm}$$

$$\delta v_B = \frac{\delta_{BC}}{\cos 53^\circ} = \frac{\delta_{BC}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \times 1.24 \text{ cm}$$

$$\delta v_B = 2.06 \text{ cm.}$$

*De donde:*

$$\frac{\delta v_B}{\delta v_D} = \frac{4}{5}$$

$$\delta v_D = \frac{5}{4} \cdot \delta v_B$$

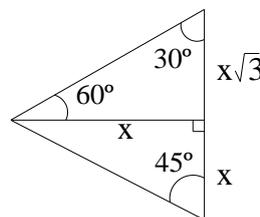
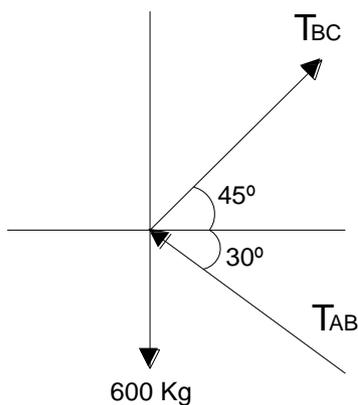
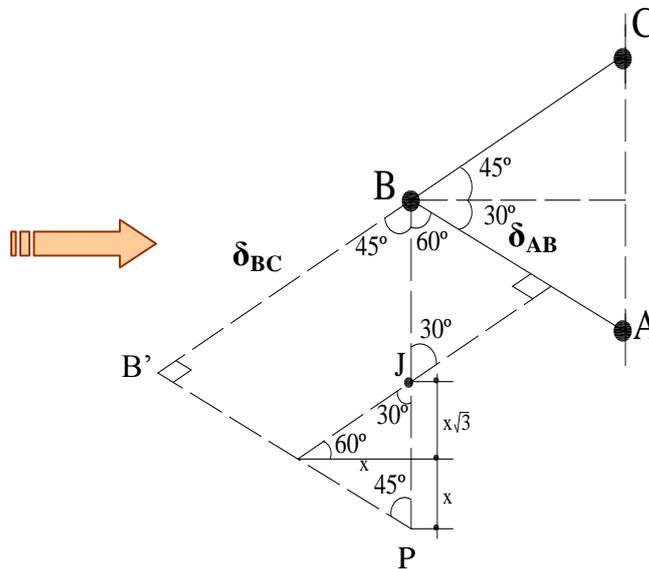
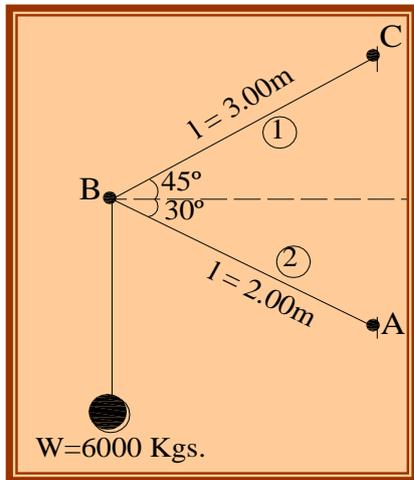
$$\delta v_D = \frac{5}{4} \times 2.06 \text{ cm}$$

$$\delta v_D = 2.58 \text{ cm.}$$

4. Calcular los componentes del desplazamiento de la articulación en B.

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg./cm}^2$$

$$A = 4 \text{ cm}^2 \text{ cada uno}$$



$$\frac{\delta_{AB}}{BJ} = \cos 60^\circ$$

$$BJ = 2 \cdot \delta_{AB}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\delta_{BC}}{BP}$$

$$\vec{BP} = \delta_{BC} \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{BP} = 2 \cdot \delta_{AB} + x + x \cdot \sqrt{3}$$

Tenemos que:

$$T_{BC} \cdot \cos 45^\circ = T_{AB} \cdot \cos 30^\circ$$

$$T_{BC} \cdot \sin 45^\circ + T_{AB} \cdot \sin 30^\circ = 6000$$

$$T_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = T_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \implies T_{BC} = T_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$T_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{AB} \cdot \frac{1}{2} = 6000 \implies T_{AB} \cdot \sqrt{3} + T_{AB} = 12000 \implies T_{AB} = \frac{12000}{1 + \sqrt{3}}$$

$$T_{AB} = 4392.30 \text{ Kgs}$$

$$T_{BC} = 5379.45 \text{ Kgs}$$

De donde:

$$\delta_{BC} = \frac{5\,379.45 \times 300}{2 \times 10^6 \times 4} = 0.2017 \text{ cm.}$$

$$\delta_{AB} = \frac{4\,392.30 \times 200}{2 \times 10^6 \times 4} = 0.1098 \text{ cm.}$$

Luego:

$$\vec{BP} = \delta v_B = 2 \cdot \delta_{AB} + x \cdot \sqrt{3}$$

$$\vec{BP} = 2 \cdot \delta_{AB} + x + x \cdot \sqrt{3} = 0.2017 \cdot \sqrt{2}$$

$$2 \times 0.1098 + x(1 + \sqrt{3}) = 0.2017 \cdot \sqrt{2}$$

$$x = 0.02402 \text{ cm.}$$

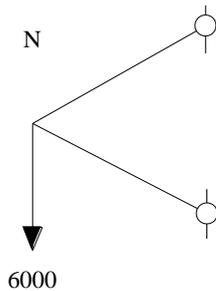
Asimismo:

$$\delta v_B = 2 \times 0.1098 + 0.02402 \times \sqrt{3} + x$$

$$\delta v_B = 0.2612 \text{ cm.}$$

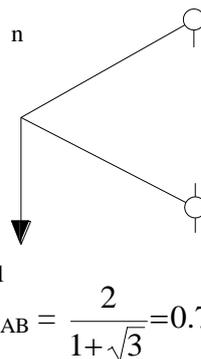
$$\Delta H_B = x = 0.02402 \text{ cm.}$$

**Por Carga Unitaria:**



$$T_{AB} = 4\,392.30 \text{ Kgs.}$$

$$T_{BC} = 5\,379.45 \text{ Kgs.}$$

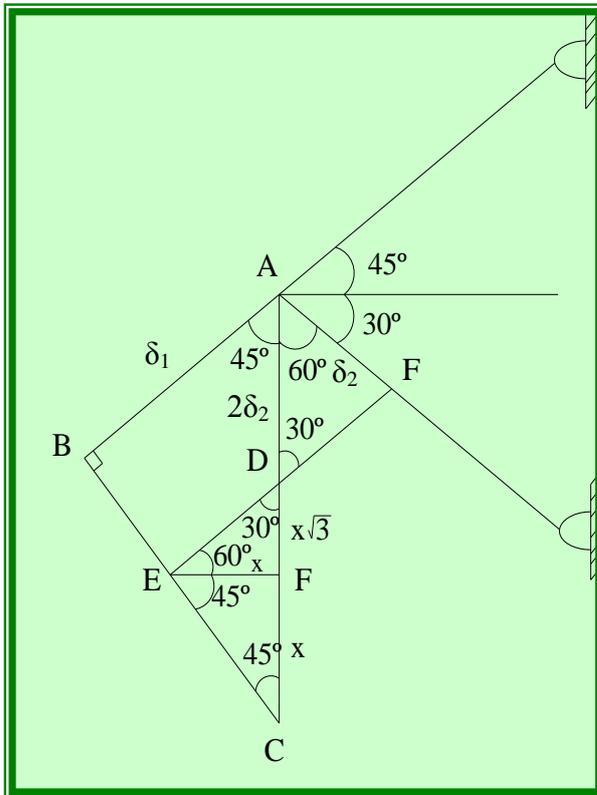


$$T_{AB} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 0.7320 \text{ Kgs.}$$

$$T_{BC} = 0.8965 \text{ Kgs.}$$

Barra	N (Kgs)	n <sub>2</sub> (Kg.)	E (Kgxc <sup>2</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	L (cm)	$\sum \frac{N \cdot n \cdot l}{EA}$
AB	4 392.30	0.7320	2.1x10 <sup>6</sup>	4	200	0.0803 cm
BC	5 379.45	0.8965	2.1x10 <sup>6</sup>	4	300	0.1808 cm
						0.2612 cm

De forma general; podemos expresar los desplazamientos de la siguiente manera:



$$\vec{AD} = 2\delta_2$$

$$\delta v = \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DF} + \vec{FC}$$

$$\text{Tg}60^\circ = \frac{DF}{x} \Rightarrow \vec{DF} = \sqrt{3}x$$

$$\vec{CF} = x$$

$$\text{sen}45^\circ = \frac{\delta_1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\delta_1 x \sqrt{2} = \vec{AC} = 2\delta_2 + \sqrt{3}x + x$$

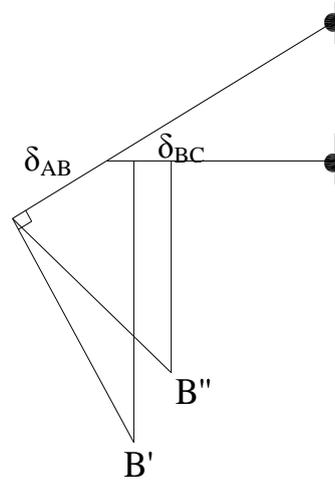
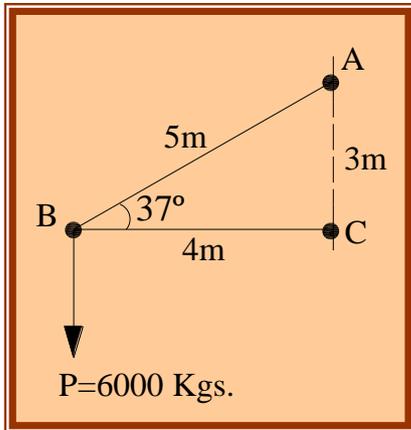
$$\delta_1 x \sqrt{2} - 2\delta_2 = (\sqrt{3}+1)x$$

$$x = \frac{\delta_1 \sqrt{2} - 2\delta_2}{\sqrt{3}+1}$$

$$\delta v_{AC} = 2\delta_2 + \frac{\delta_1 \sqrt{2} - 2\delta_2}{\sqrt{3}+1}$$

$$\delta v_{AC} = \frac{2\delta_2 \sqrt{3} + \delta_1 \sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

5. Dos barras de acero  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$  soportan una carga  $P=6000$  Kgf. La sección de  $\vec{AB}$  es  $4 \text{ cm}^2$  y la de  $\vec{BC}$   $6 \text{ cm}^2$ . Si  $E=2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ . Determinar el desplazamiento vertical y horizontal del punto B.



Tenemos que:

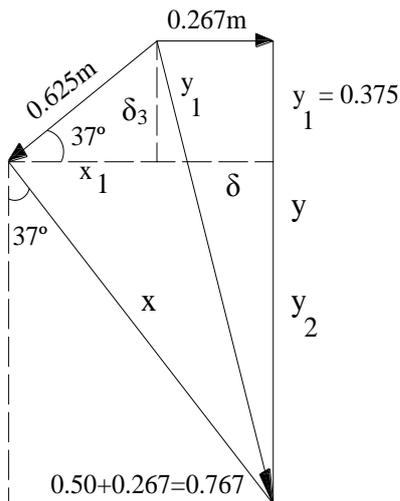
$$T_{AB} \cdot \text{Sen}37^\circ = 6000 \implies T_{AB} = 6000 \times (5/3) \implies T_{AB} = 10,000 \text{ Kg.}$$

$$T_{BC} = T_{AB} \cdot \text{Cos}37^\circ \implies T_{BC} = 10,000 \times (4/5) \implies T_{BC} = 8000 \text{ Kg.}$$

Luego:

$$\delta_{AB} = \frac{10,000(500)}{4 \times 2 \times 10^6} = 0.625 \text{ m} \dots \dots \dots \text{Alargamiento}$$

$$\delta_{BC} = \frac{8000(400)}{6 \times 2 \times 10^6} = 0.267 \text{ m} \dots \dots \dots \text{Acortamiento}$$



$$(*) \text{Cos}37^\circ \cdot \frac{x_1}{0.625} = \frac{4}{5}$$

$$x_1 = 0.50 \text{ m}$$

$$(*) \text{Cos}53^\circ \cdot \frac{y_1}{0.625} = \frac{3}{5}$$

$$y_1 = 0.375 \text{ m}$$

$$\text{tg}37^\circ = \frac{0.767}{y_2}$$

$$y_2 = 0.767 \cdot \frac{4}{3}$$

$$y_2 = 1.0226 \text{ m}$$

De donde:

$$\delta v = 1.397 \text{ cm}$$

Asimismo:

$$\delta H = x$$

$$\text{Sen}37^\circ = \frac{0.767}{x}$$

$$x = 0.767 \cdot \frac{5}{3}$$

$$x = 1.278 \text{ cm}$$

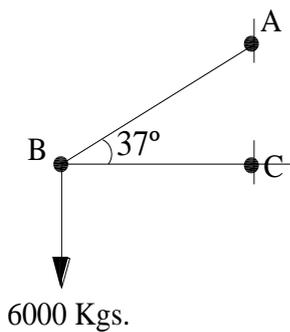
De otro lado:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{x}{l_{AB}} = \frac{1.277}{500} = 0.00255 \text{ rad} = 0.143^\circ$$

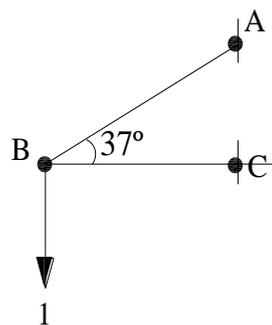
$$\alpha_{BC} = \frac{y}{l_{BC}} = \frac{1.397}{400} = 0.00349 \text{ rad} = 0.2^\circ$$

**Método de la Carga Unitaria:**



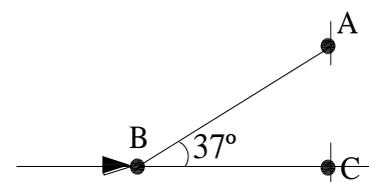
$$T_{AB} = 10\ 000 \text{ Kgs} \dots(T)$$

$$T_{BC} = 8\ 000 \text{ Kgs} \dots(C)$$



$$T_{AB} = \frac{5}{3} \dots\dots(T)$$

$$T_{BC} = \frac{4}{3} \dots\dots(T)$$



$$T_{AB} = 0$$

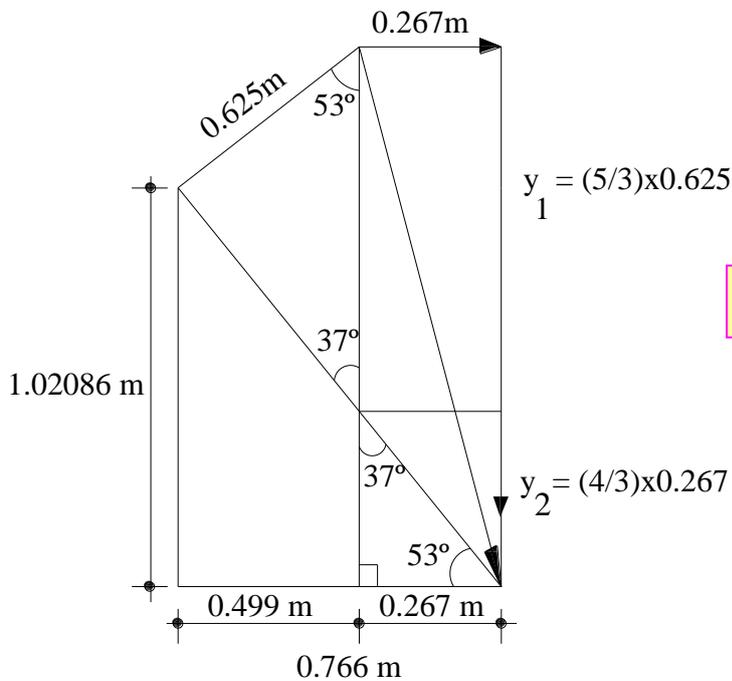
$$T_{BC} = 1$$

*Hallando  $\delta_V$ :*

Barra	Q	q	l	A	E	$\frac{Q \cdot q \cdot l}{EA}$
AB	10 000	5/3	500	4	$2 \times 10^6$	1.041666
BC	8 000	4/3	400	6	$2 \times 10^6$	0.355
						1.396 cm

*Hallando  $\delta_H$ :*

Barra	Q	q	l	A	E	$\frac{Q \cdot q \cdot l}{EA}$
AB	10 000	0	500	4	$2 \times 10^6$	-----
BC	8 000	1	400	6	$2 \times 10^6$	0.267 cm
						0.267cm



**$\delta_V = y_1 + y_2 = 1.397 \text{ m}$**

**CAPÍTULO IX:**

**TENSIONES  
EN VIGAS**

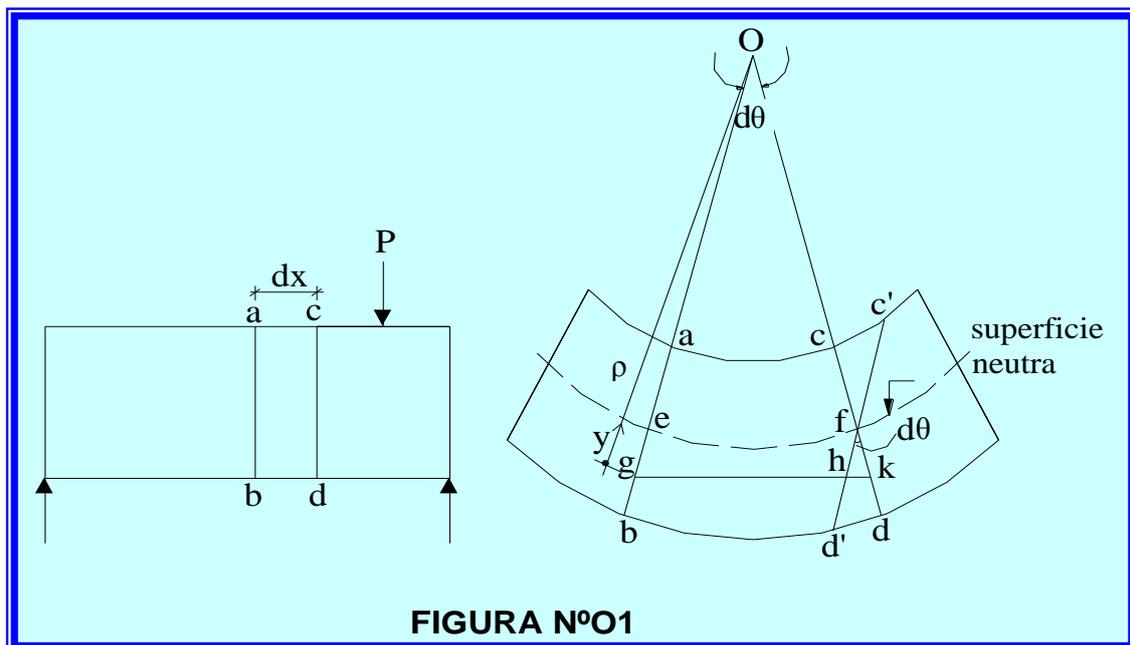
## TENSIONES EN VIGAS

Las tensiones normales producidas por el momento flector, se llaman *Tensiones de Flexión* y las relaciones entre estas tensiones y el momento se expresan mediante la fórmula de la flexión.

La figura mostrada presenta dos secciones adyacentes **ab** y **cd** separadas una distancia  $dx$ . Debido a la flexión producida por la carga "P", las secciones **ab** y **cd** giran una respecto de la otra un pequeño ángulo " $d\theta$ ", como se ve en la figura, pero permanecen planos y sin distorsión de acuerdo con la hipótesis una.

La fibra  $\overline{ac}$  de la parte superior se acorta y la fibra  $\overline{bd}$  se alarga. En algún punto entre ellos existe una fibra, tal como  $\overline{ef}$ , cuya longitud no varía. Trazando la línea  $c'd'$  por  $f$ , paralela a  $\overline{ab}$ , se observa que la fibra  $\overline{ac}$  se ha acortado una longitud  $\overline{cc'}$  y está comprimida; mientras que la fibra  $\overline{bd}$  se ha alargado la longitud  $\overline{dd'}$  y está sometida a tracción.

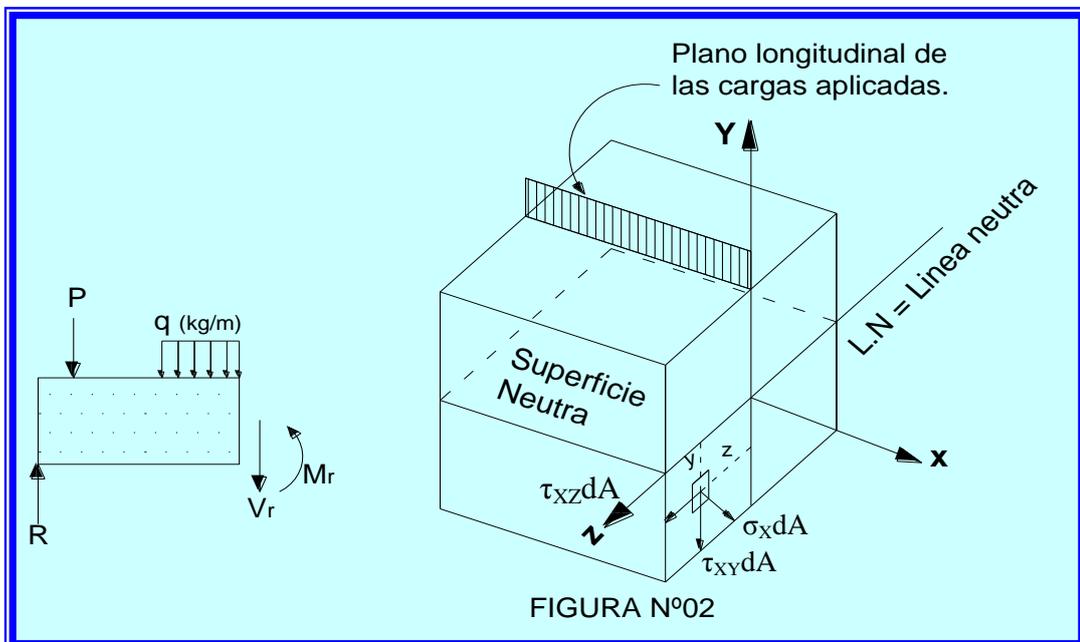
El plano que contiene todas las fibras tales como  $\overline{ef}$  se llaman, superficie neutra; ya que tales fibras no varían de longitud "y", por tanto, no soportan tensión alguna. La superficie neutra pasa por los centros de gravedad de las secciones transversales de la viga.



Existe una relación entre el momento flector y las tensiones normales de flexión que se producen; así, como la fuerza cortante vertical y las tensiones cortantes.

Para obtener estas relaciones se hacen las hipótesis siguientes:

- 1) Las secciones planas de la viga, inicialmente planas, permanecen planas.
- 2) El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
- 3) El módulo elástico es igual a tracción que a compresión.
- 4) La viga es inicialmente recta y de sección constante.
- 5) El plano en el que actúan las fuerzas contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de aquella.



Consideremos ahora la deformación de una fibra cualquiera  $gh$  situada a una distancia “ $y$ ” de la superficie neutra.

Su alargamiento  $hk$  es el arco de circunferencia de radio “ $y$ ” y ángulo “ $d\theta$ ”, viene dado por:

$$\delta = \overline{hk} = y d\theta$$

La deformación unitaria se obtiene dividiendo el alargamiento por la longitud inicial  $\overline{ef}$  de la fibra:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y d\theta}{\overline{ef}}$$

Llamando  $\rho$  al radio de curvatura de la superficie neutra, la longitud  $\overline{ef}$  es igual a  $\rho d\theta$ , por lo que la deformación unitaria, varía.

$$\varepsilon = \frac{y d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke; hipótesis 2, la tensión en la fibra  $\overline{gh}$ , viene dado por:

$$\sigma = E\varepsilon = \left(\frac{E}{\rho}\right)y \dots\dots\dots(a)$$

Esta expresión indica que la tensión en cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia “y” a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el módulo elástico es igual a tracción que a compresión, hipótesis 3; y el radio de curvatura “ $\rho$ ” de la superficie neutra es independiente de la ordenada “y” de la fibra.

Ahora bien, las tensiones no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad, pues en caso contrario dejaría de cumplirse la ley de Hooke, en la que se ha basado la determinación de la forma de distribución de las tensiones.

Aplicando las condiciones de equilibrio; las fuerzas exteriores que actúan aun lado de la sección en estudio quedan equilibradas por la fuerza cortante y el momento flector resistente.

Para que se produzca este equilibrio, un elemento diferencial cualquiera de la sección de exploración está sometido a las fuerzas que se muestra en la gráfica 02.

A la intersección de la superficie neutra con la sección se le llama “*línea neutra*”

Para satisfacer la condición de que las fuerzas exteriores no tienen componente según el eje X; hipótesis 5, tenemos:

$$\sum x = 0 \quad \int \sigma_x dA = 0$$

En donde;  $\sigma_x$ , equivale a  $\sigma$  de la ecuación “a”

Sustituyendo  $\sigma_x$  por su valor  $\frac{E}{\rho}y$ ; tenemos:

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

Los términos E y  $\rho$  son constantes, por tal razón están fuera de la integral.

Como  $y dA$  es el momento estático del área diferencial  $dA$  respecto de la línea neutra, la integral  $\int y dA$  es el momento estático total del área. Por lo tanto:

$$\frac{E}{\rho} \bar{y} = 0$$

Sin embargo, como solamente  $\bar{y}$  en esta expresión puede ser nulo, se deduce que la distancia a la línea neutra, eje de referencia, del centro de gravedad de la sección recta debe ser cero, es decir, que la línea neutra pasa por el centro de gravedad del área de la sección recta.

La condición  $\sum y = 0$  que da  $V = V_r$ , conduce a la fórmula de la tensión cortante.  $V_r$ , es

la suma de todas las fuerzas cortantes  $\tau_{xy} dA$ , es decir,  $V_r = \int \tau_{xy} dA$ .

La condición  $\sum Z = 0$ , conduce a que  $\int \tau_{xz} dA = 0$ .

Puesto que las fuerzas exteriores no tienen componente según el eje  $Z$ , el sistema de fuerzas cortante  $\tau_{xz} dA$  está en equilibrio.

En estos casos, las cargas producen un momento respecto del eje  $x$  que es equilibrado por:

$$\int y (\tau_{xz} dA) - \int z (\tau_{xy} dA), \text{ para satisfacer la ecuación } \sum M_x = 0.$$

Esta condición se verifica automáticamente para secciones simétricas respecto del eje  $Y$ , ya que cualquier elemento tiene otro simétrico y, por lo tanto las integrales se anulan como consecuencia, para secciones simétricas respecto del eje  $Y$ , el plano de fuerzas exteriores debe coincidir con el plano  $XY$ , y si no ocurre así, la viga estará sometida a torsión.

Considerando  $\sum M_y = 0$ . Las fuerzas exteriores no producen momento respecto del eje  $Y$ , ni tampoco las fuerzas cortantes interiores. Por lo tanto:

$$\sum M_y = 0 \qquad \int Z (\sigma_x dA) = 0$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  por su valor  $\frac{E}{\rho} y$

$$\frac{E}{\rho} \int Z y dA = 0$$

La integral  $\int Zy dA$ , es el producto de inercia  $P_{zy}$ , que es nulo solamente si Y y Z son ejes de simetría ó ejes principales de la sección. Esto constituye la justificación de la hipótesis 5.

La última condición de equilibrio  $\sum M_Z = 0$ , requiere que el momento flector sea equilibrado por el momento resistente, es decir;  $M=M_r$ . El momento resistente respecto de la línea neutra de un elemento cualquiera es  $y(\sigma_x dA)$  y; por lo tanto:

$$M = \int y(\sigma_x dA)$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  por  $\frac{E}{\rho}y$ , resulta:

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

Como  $\int y^2 dA$ , es el momento de inercia I del área respecto al eje de referencia, que en este caso es la línea neutra, que pasa por el centro de gravedad, se obtiene, finalmente:

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

Ó

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Igualando  $\sigma = \left(\frac{E}{\rho}\right)y$  con  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I}$$

Llegamos a  $\sigma = \frac{My}{I}$

Esta expresión indica que la tensión debida a la flexión en cualquier sección es directamente proporcional a la distancia del punto considerado a la línea neutra.

Otra forma de expresarla es sustituir y por c; siendo c, la distancia del elemento más alejado de la línea neutra, con esto se obtiene la tensión máxima:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{Mc}{I}\right)$$

El cociente  $\left(\frac{I}{c}\right)$ , se denomina módulo resistente de la sección y, y se suele designar por

Z, por lo que la fórmula de la flexión tiene la forma:

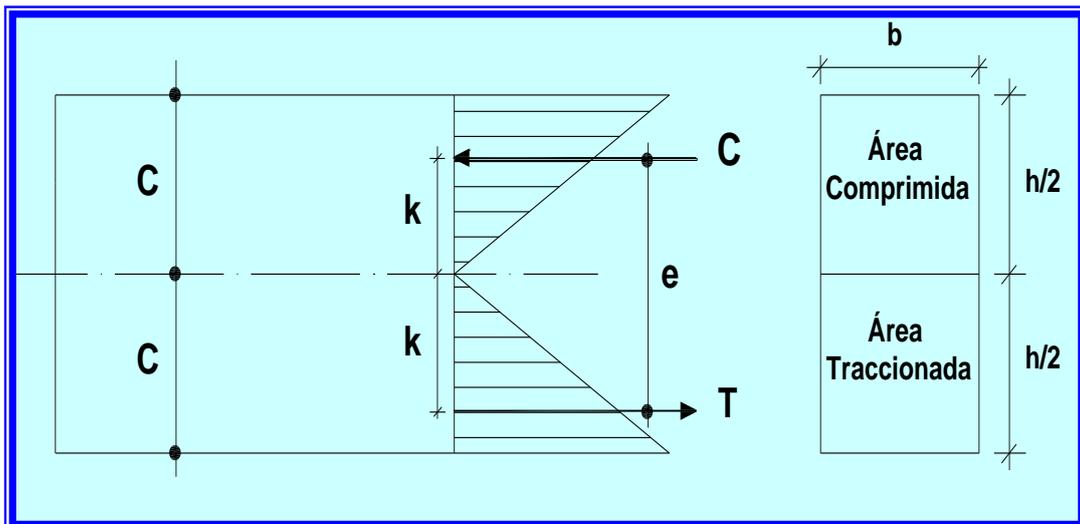
$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M}{\frac{I}{c}}\right) = \frac{M}{Z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$$

Esta fórmula nos muestra que la tensión máxima se produce en la sección de momento flector máximo.

### MÓDULO DE ROTURA

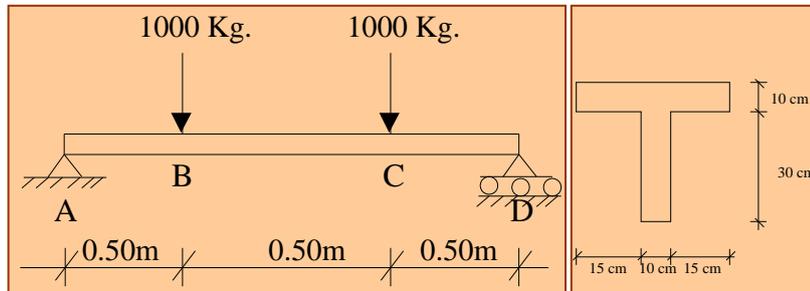
Puede usarse la ecuación:  $\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$ , para determinar la tensión de flexión en una viga cargada hasta su rotura en una máquina de ensayos. Puesto que en este caso se excede el límite de proporcionalidad, la tensión determinada de esta forma no es la verdadera tensión en el material cuando se produce la rotura de la viga; sin embargo, la tensión ficticia así obtenida se llama “módulo de rotura del material” y se utiliza para comparar las resistencias de rotura de vigas de distintos tamaños y materiales.



El momento resistente equivale al par formado por las resultantes de las fuerzas de compresión y de tracción.

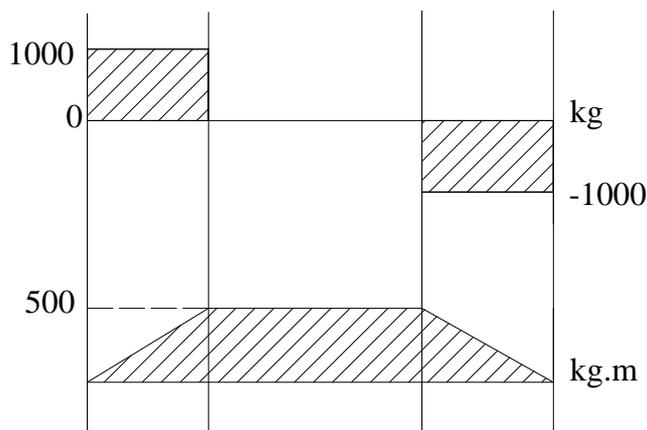
**APLICACIONES DE TENSIONES EN VIGAS**

1. Calcular los máximos esfuerzos de corte y flexión en el tramo BC.

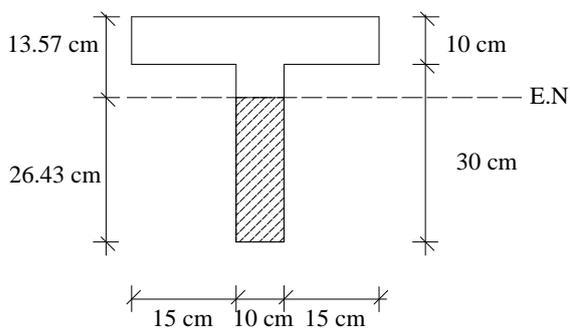


**Solución:**

Tenemos los Diagramas de Fuera Cortante y Momento Flector:



Luego; hallaremos el centro de gravedad ( $Y_{CG}$ ):



$$Y_{CG} = \frac{(10 \times 30 \times 15) + (40 \times 10 \times 35)}{40 \times 10 + 10 \times 30}$$

$$Y_{CG} = \frac{18500}{700}$$

$$Y_{CG} = 26.43 \text{ cm}$$

Asimismo; hallaremos el Momento de Inercia respecto al eje x.

$$I_{xx} = \frac{10 \times 30^3}{12} + 30 \times 10 \times 15^2 + \frac{40 \times 10^3}{12} + 40 \times 10 \times 35^2$$

$$I_{xx} = 583,333.33 \text{ cm}^4$$

$$\text{Pero; } I_{xx} = I_{CG} + (700 \times 26.43^3)$$

Entonces:

$$I_{CG} = 94351.90 \text{ cm}^4$$

Finalmente, sabemos que;

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Tenemos así:

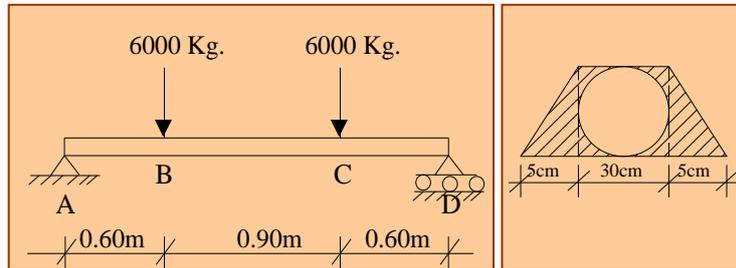
$$\sigma_t = \frac{500 \times 100 \times 26.43}{94351.90}$$

$$\sigma_t = 14 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{500 \times 100 \times 13.57}{94351.90}$$

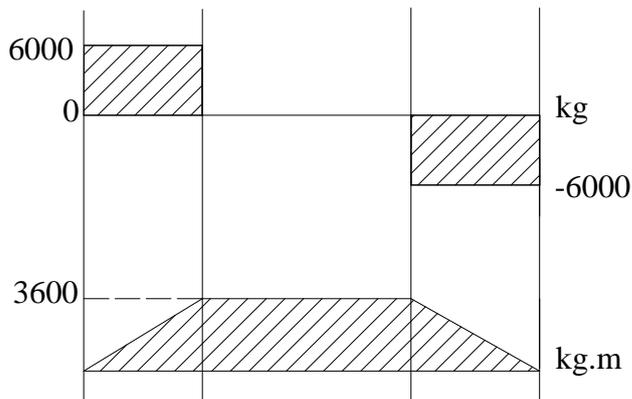
$$\sigma_c = 7.19 \text{ kg/cm}^2$$

2. Para la viga mostrada. Calcular las tensiones normales máximas y el esfuerzo cortante máximo en el tramo BC.



**Solución:**

Tenemos los Diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector:

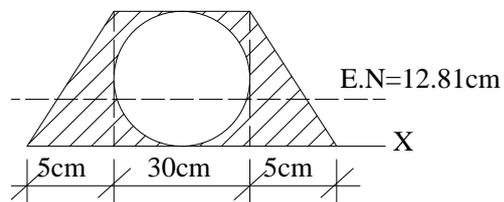


Luego; hallaremos el centro de gravedad ( $Y_{CG}$ ):

$$Y_{CG} = \frac{2\left(\frac{5 \times 30}{2} \times \frac{30}{3}\right) + (30 \times 30 \times 15) - \pi(15^2)15}{2 \times \frac{5 \times 30}{2} + 30 \times 30 - \pi(15^2)}$$

$$Y_{CG} = \frac{4397.12}{343.14}$$

$$Y_{CG} = 12.81 \text{ cm}$$



Asimismo; hallaremos el Momento de Inercia respecto al eje x.

$$I_{xx} = 2 \times \left[ \frac{5 \times 30^3}{36} + \frac{5 \times 30}{2} (10)^2 \right] + \frac{30 \times 30^3}{12} + 30 \times 30 \times 15^2 - \left[ \frac{\pi(15)^4}{4} + \pi(15)^2 \times 15^2 \right]$$

$$I_{xx} = 93,696.09 \text{ cm}^4$$

Pero;

$$I_{xx} = I_{CG} + Ad^2$$

Reemplazando:

$$93696.09 = \bar{I}_{CG} + 343.14x(12.81)^2$$

$$\bar{I}_{CG} = 37388.15 \text{ cm}^4$$

Finalmente, sabemos que;

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Tenemos así:

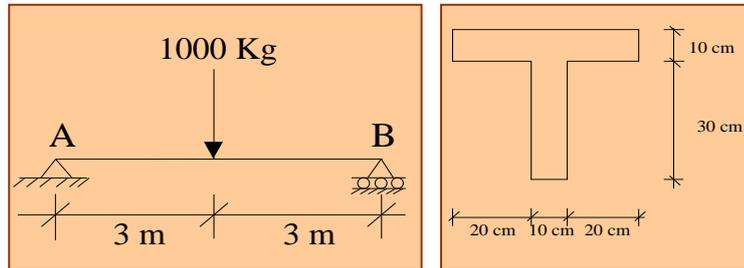
$$\sigma_t = \frac{3600x100x1 \ 2.81}{37388.15}$$

$$\sigma_t = 123,343 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{3600x100x1 \ 7.19}{37388.15}$$

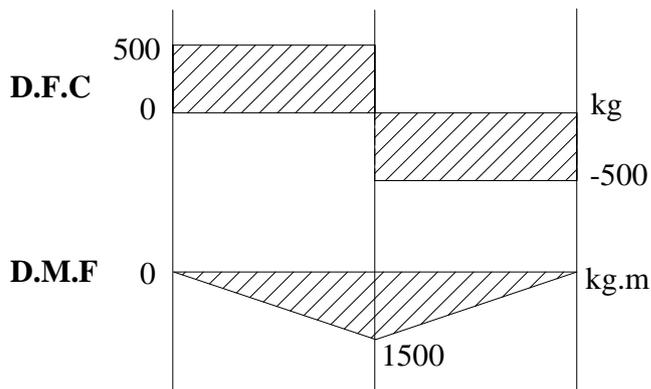
$$\sigma_c = 165.517 \text{ kg/ cm}^2$$

3. Para la viga mostrada. Calcular las tensiones normales máximas y el esfuerzo cortante máximo.



**Solución:**

Tenemos los Diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector:

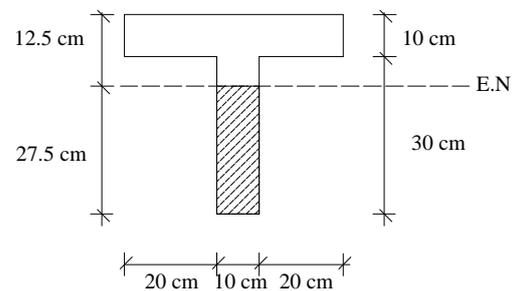


Luego; hallaremos el centro de gravedad ( $Y_{CG}$ ):

$$Y_{CG} = \frac{(10 \times 30 \times 15) + (50 \times 10 \times 35)}{(10 \times 30) + (10 \times 50)}$$

$$Y_{CG} = \frac{22000}{800}$$

$$Y_{CG} = 27.5 \text{ cm}$$



Asimismo; hallaremos el Momento de Inercia respecto al eje x.

$$I_{xx} = \frac{10 \times 30^3}{12} + 10 \times 30 \times 15^2 + \frac{50 \times 10^3}{12} + 50 \times 10 \times 35^2$$

$$I_{xx} = 22500 + 67500 + 4166.66 + 612500$$

$$I_{xx} = 706666.66 \text{ cm}^4$$

Pero;

$$I_{xx} = I_{CG} + Ad^2$$

Reemplazando:

$$706,666.66 = \bar{I}_{CG} + 800x(27.5)^2$$

$$\bar{I}_{CG} = 101,666.66 \text{ cm}^4$$

Finalmente, sabemos que;

Tenemos así:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Tenemos así:

$$\sigma_t = \frac{150,000x100x27.5}{101,666.66}$$

$$\sigma_t = 4,057.38 \text{ kg/cm}^2$$

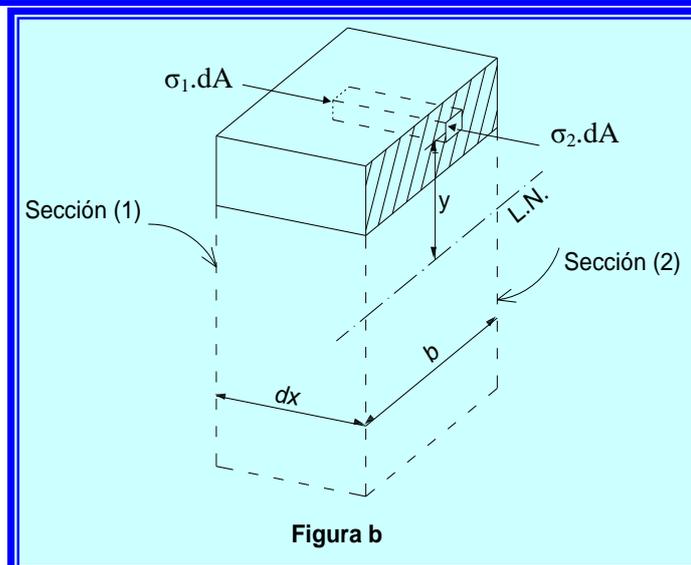
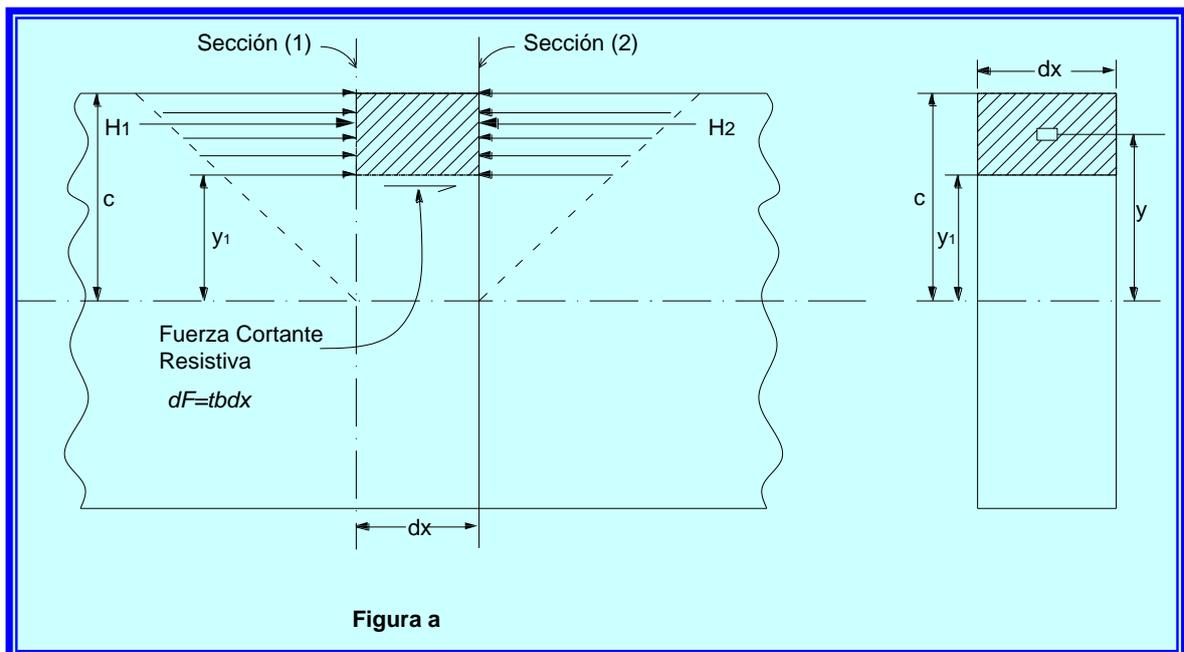
$$\sigma_c = \frac{150,000x100x12.5}{101,666.66}$$

$$\sigma_c = 1,844.26 \text{ kg/ m}^2$$

## DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA TENSIÓN CORTANTE HORIZONTAL

Consideremos dos secciones adyacentes (1) y (2) de una viga, separadas una distancia  $dx$ , como se indica en la figura (a), y aislemos la parte rayada del elemento comprendido entre ellas. La figura (b) representa, en perspectiva, esta parte aislada.

Supongamos que el momento flector en la sección (2) es mayor que en la sección (1), por lo que las tensiones normales también serán distintas,  $\sigma_2$  mayor que  $\sigma_1$ , y la resultante horizontal de las fuerzas de compresión en la sección (2) será mayor que la de la sección (1),  $H_2 > H_1$ . Esta diferencia entre  $H_2$  y  $H_1$  solo puede equilibrarse por la fuerza cortante resistente  $dF$  que actúe en la cara inferior del elemento aislado, ya que en las restantes caras de éste no actúa fuerza exterior alguna.



Como  $H_2 - H_1$  es la suma de las diferencias de las compresiones  $\sigma_2 dA$  y  $\sigma_1 dA$  que actúan en cada elemento diferencial contenido en el elemento aislado, como se observa en la Fig (b), aplicando la condición de la estática  $\Sigma H = 0$  resulta,

$$\left[ \Sigma H = 0 \right] \quad dF = H_2 - H_1$$

$$dF = \int_{y_1}^c \sigma_2 dA - \int_{y_1}^c \sigma_1 dA$$

Sustituyendo  $\sigma$  por su valor  $My/I$ ,

$$dF = \frac{M_2}{I} \int_{y_1}^c y dA - \frac{M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA = \frac{M_2 - M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA$$

De la figura (a),  $dF = V ds$ , siendo  $\tau$  la tensión cortante media en el área diferencial de ancho  $b$  y longitud  $dx$ . Ahora bien,  $M_2 - M_1$  representa el incremento diferencial de momento flector en la longitud  $dx$ , por lo que la relación anterior se puede escribir en la forma,

$$\tau = \frac{dM}{I b dx} \int_{y_1}^c y dA$$

Y como,  $dM/dx = V$ , fuerza cortante vertical, la tensión cortante horizontal viene dada por:

$$\tau = \frac{V}{I b} \int_{y_1}^c y dA = \frac{V}{I b} A \cdot \bar{y} = \frac{V}{I b} M_e \dots \dots \dots (\alpha)$$

Se ha sustituido la integral  $\int_{y_1}^c y dA$ , que representa la suma de los momentos respecto de

la L.N. de las áreas diferenciales  $dA$ , por su equivalente  $A' \bar{y}$ , o sea, el momento estático, respecto de la línea neutra, del área parcial  $A'$  situada entre la paralela a la L.N. a la altura  $y_1$  donde se va a calcular la tensión cortante y el borde superior de la sección. La distancia desde ésta al centro de gravedad de  $A'$  es  $\bar{y}$ . También se puede representar este momento estático por  $M_a$ .

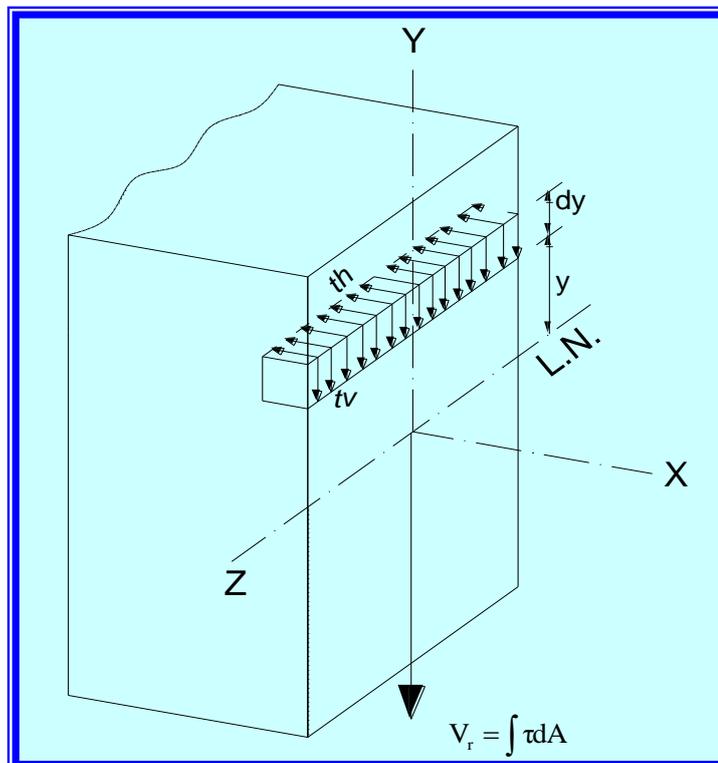
### Flujo Cortante

Multiplicando la tensión cortante  $\tau$  por el ancho  $b$  de la sección se obtiene una cantidad  $q$  denominada flujo cortante, que representa la fuerza longitudinal por unidad de longitud transmitida a través de la sección de ordenada  $y_1$ . Es un concepto análogo al flujo cortante examinado en la torsión de tubos de paredes delgadas. Aplicando a la fórmula (α), obtenemos el siguiente valor:

$$q = tb = \frac{V}{I} M_c$$

### Relación entre la tensión cortante horizontal y vertical

Habrà quien se sorprenda al ver que el término fuerza cortante vertical ( $V$ ) aparece en la fórmula de la tensión cortante horizontal  $\tau_h$ . Sin embargo, como ahora veremos, una tensión cortante horizontal va siempre acompañada de otra vertical del mismo valor. Es precisamente esta última, representada en la figura (c), la que da lugar a la fuerza cortante resistente  $V_r = \int \tau_v dA$  que equilibra a la fuerza cortante vertical  $V$ . Puesto que no es fácil calcular directamente  $\tau_v$ , el problema se resuelve calculando el valor numéricamente igual de  $\tau_h$ .



**Figura (c): Tensión Cortante Horizontal y Vertical**

Para demostrar la equivalencia de  $\tau_h$  y  $\tau_v$  consideremos sus efectos sobre un elemento diferencial cualquiera, que separaremos del resto de la viga de la figura (d-1). En la figura (d) se representa una perspectiva de este elemento, y en la figura (d-2) un alzado lateral. Para el equilibrio horizontal del elemento, la tensión cortante  $\tau_h$  en la cara inferior requiere otra igual en la cara superior, y las fuerzas a que dan lugar estas tensiones, Figura (d-3), forman un par antihorario que requiere otro igual, pero horario para conseguir el equilibrio de momentos. Las fuerzas de este par horario inducen la tensión cortante  $\tau_v$  en las caras verticales del elemento, como se observa en la figura.

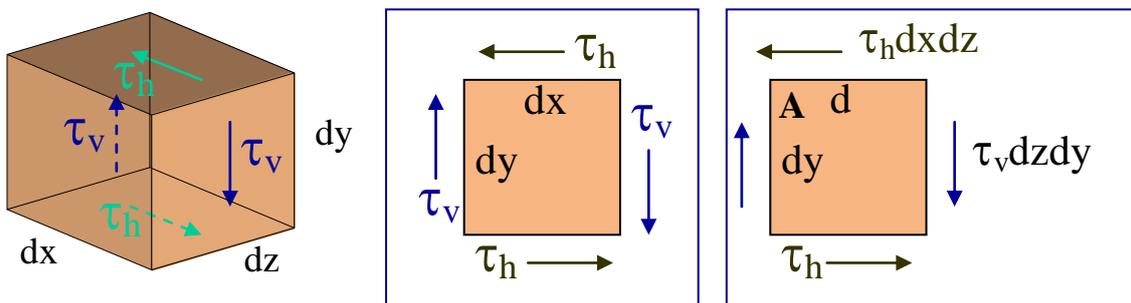


Figura (d-1)

Figura (d-2)

Figura (d-3)

Figura (d): Tensiones Cortantes que actúan sobre un elemento

Tomando momentos respecto de un eje que pase por A se obtiene:

$$\left[ \sum M_A = 0 \right] \quad (\tau_h dx dz) dy - (\tau_v dy dz) dx = 0$$

Dividiendo por  $dx dy dz$  resulta,

$$\tau_h = \tau_v$$

*Se deduce; pues, que una tensión cortante que actúa en la cara de un elemento va acompañada siempre de otra numéricamente igual que actúa en una cara perpendicular a la primera.*

**Aplicación a la sección rectangular:**

La distribución de la tensión cortante en una sección rectangular se puede obtener aplicando la ecuación ( $\alpha$ ) a la figura (e). En un plano a distancia “y” de la línea neutra,

$$\tau = \frac{V}{Ib} A' \bar{y} = \frac{V}{Ib} \left[ b \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \dots \dots \dots (\beta)$$

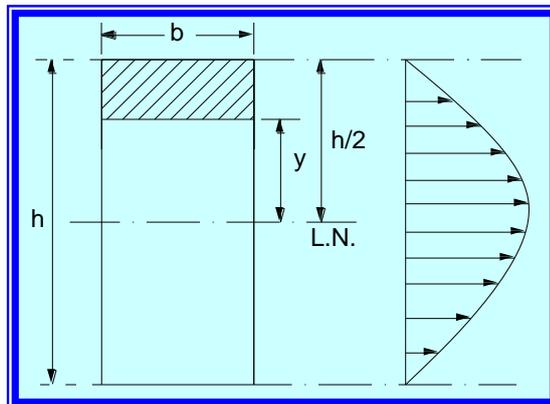
Simplificando,

$$\tau = \frac{V}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Lo que demuestra que la tensión cortante se distribuye conforme a una ley parabólica en la altura de la sección.

La tensión cortante máxima tiene lugar en la L.N. y su valor se obtiene aplicando ( $\alpha$ ) directamente,

$$\tau = \frac{V}{Ib} A' \bar{y} = \frac{V}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} \left( \frac{bh}{2} \right) \left( \frac{h}{4} \right)$$



**Figura (d): Distribución Parabólica de la tensión cortante en una sección rectangular.**

Simplificando;

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \dots\dots\dots(\theta)$$

Naturalmente que se obtiene el mismo valor haciendo  $y=0$  en la expresión ( $\beta$ ).

La fórmula ( $\theta$ ) indica que la tensión cortante máxima en una sección rectangular es un 50% mayor que el valor medio  $V/A$  en la sección total.

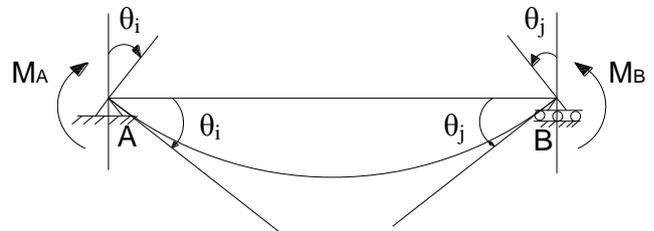
## CAPÍTULO X:

# TEORÍA DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES

## TEORÍA DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES

### Primer Caso:

Si una viga está articulada en ambos extremos y es sometida a un momento  $M$  en ambos puntos de los extremos en el sentido mostrado, la viga girará del modo mostrado.

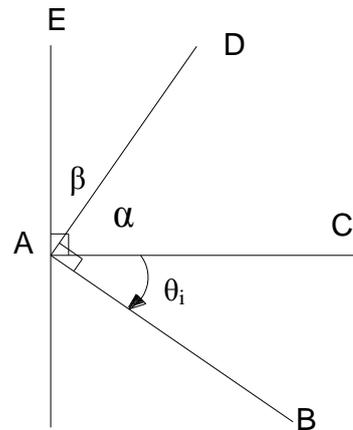


Vemos que la viga al ser flexible gira un ángulo  $\theta_i$  y  $\theta_j$ , respectivamente; haciendo lo propio los nudos A y B.

La demostración es la siguiente:

El ángulo  $\theta_i$  y  $\alpha$  forman  $90^\circ$  ya que los nudos al girar mantienen su rigidez. El ángulo EAC a girado  $90^\circ$  llegando a la posición DAB siendo el ángulo DAB también  $90^\circ$ , entonces  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , y el ángulo DAB =  $90^\circ$ , lo cual implica:

$$\alpha + \theta_i = 90^\circ$$



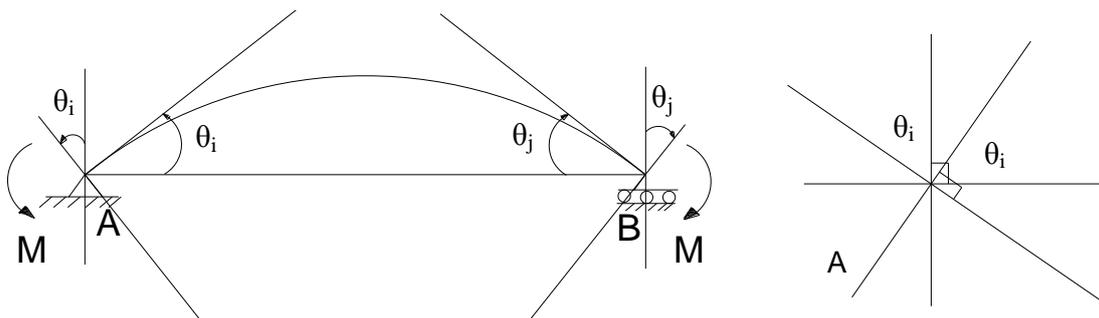
De las ecuaciones:  $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\alpha + \theta_i = 90^\circ$$

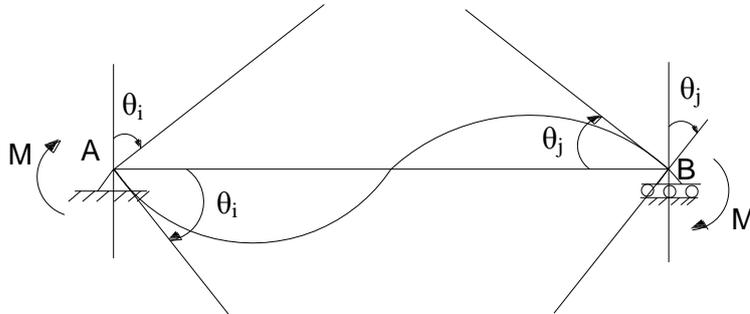
Vemos que  $\beta = \theta_i$

Por lo tanto El ángulo EAD es igual al ángulo CAB; que es lo queríamos demostrar.

Si el momento  $M$  es aplicado en sentido antihorario tendremos:

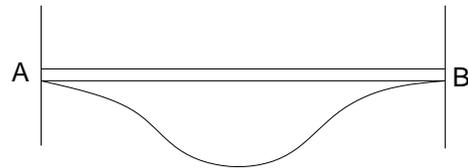


Si el momento  $M$  en  $A$  se aplica en sentido horario y en  $B$  en sentido horario, tendremos:



**Segundo Caso: *Viga Empotrada en sus dos extremos***

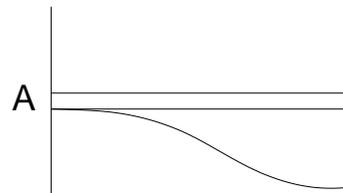
El giro en  $A$  y  $B$  es cero y la tangente trazada en  $A$  y  $B$  son horizontales.



**Tercer Caso: *Viga Empotrada en un extremo y libre en el otro***

Cuando una viga está empotrada en un extremo, el giro es cero y la tangente trazada en el punto de empotramiento es horizontal.

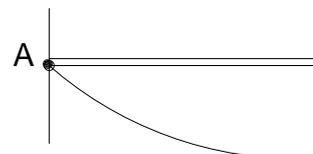
El Empotramiento se esquematiza de la forma mostrada.



**Cuarto Caso: *Viga Articulada en un extremo y libre en el otro.***

El giro es diferente de cero y la tangente trazada no es horizontal.

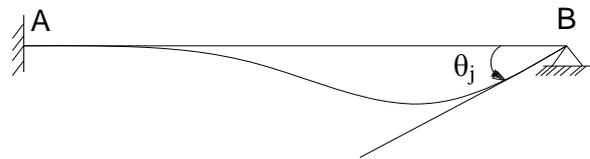
Una viga articulada se esquematiza en este caso de la forma mostrada.



**Quinto Caso: Viga Empotrada en un extremo y articulado en el otro.**

En este caso el giro en A es cero, pero en B es diferente de cero.

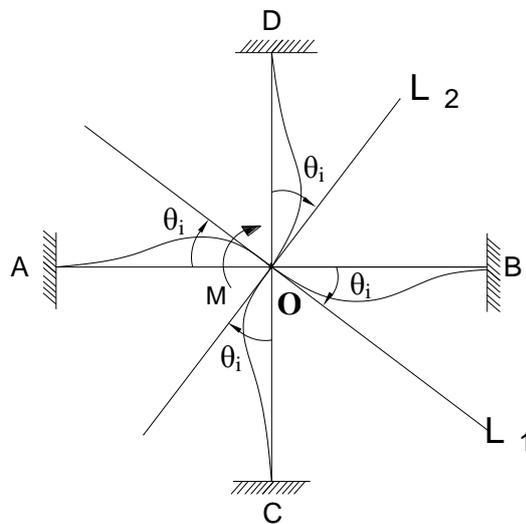
La tangente en A es horizontal más no así en B.



**GIRO EN LOS NUDOS**

Si al nudo O, le aplicamos un momento M en sentido horario, vemos que la estructura mostrada sufre giros como se muestra en la figura.

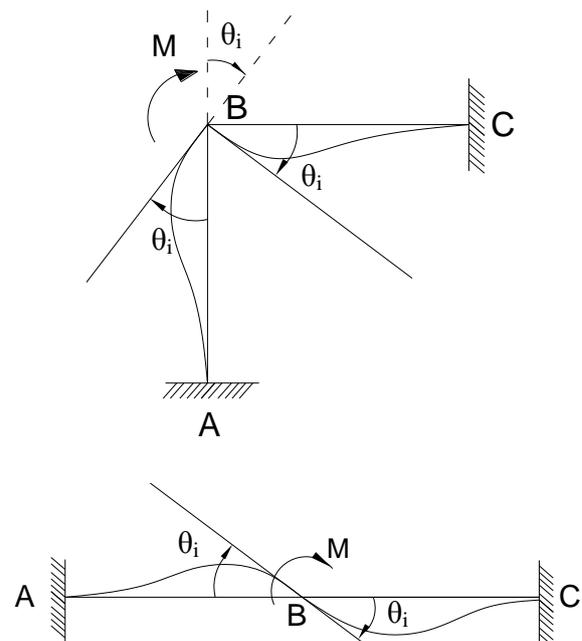
Si las barras AB y CD son perpendiculares, las tangentes trazadas L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub> también lo serán, de modo que las barras OA, OD, OB y OC girarán el mismo ángulo  $\theta$ .



**Casos Particulares:**

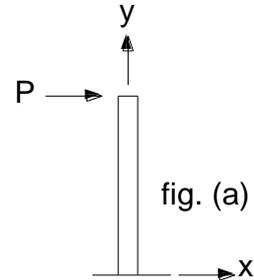
Al aplicar un momento M al pórtico mostrado, en B, vemos que si las barras son mutuamente perpendiculares, las tangentes también lo serán.

Al aplicar un momento en B, las barras giran de la forma mostrada, siendo los giros BA y BC :  $\theta_i$ .



## RIGIDEZ Y ELASTICIDAD DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

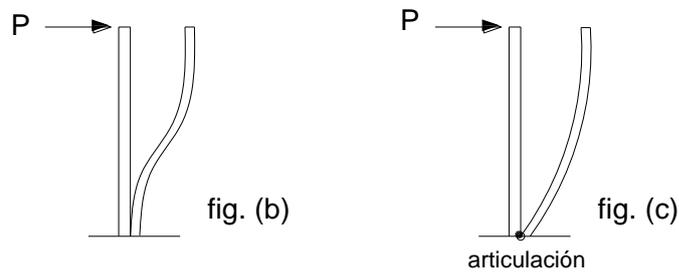
*Si tenemos un elemento vertical columna, por ejemplo, sometido a una carga  $P$  horizontal, el comportamiento estructural será:*



- a) Si  $EA=\infty$ , significa que no hay deformación axial, es decir, no hay incremento o decremento en su longitud en la dirección Y.

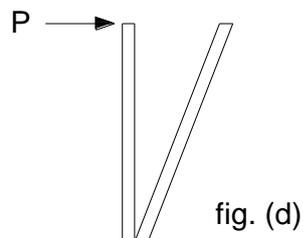
La deformada será la que se muestra en la figura “b” si está empotrado perfectamente en la base.

La deformada que se muestra en la figura “c” es si sólo está articulada en la base.



- b) Si  $EI=\infty$ , significa que tiene gran resistencia a la deformación, ante la carga externa  $P$ .

La deformada es la que se muestra en la figura “d”.

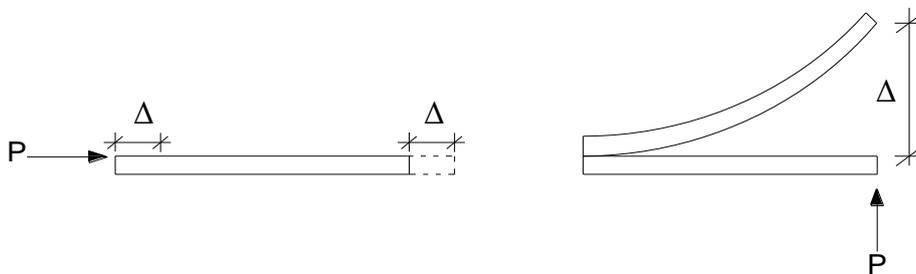


*Si tenemos un elemento horizontal, por ejemplo una viga como se muestra a continuación.*

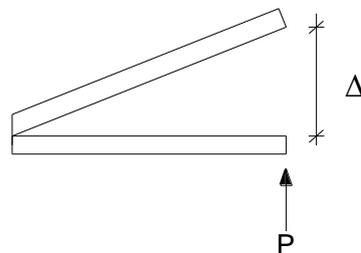


a) Si  $EA=\infty$ , la viga se desplaza en forma constante, es decir todos los puntos sufren el mismo desplazamiento.

Los desplazamientos serán los que se muestran en las figuras siguientes. Observar que depende de cómo actúa la carga.



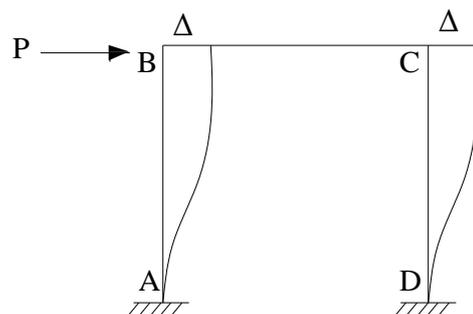
b) Si  $EI=\infty$ , la viga se desplaza rígidamente, como se muestra a continuación.



Como ilustración, hallaremos la deformada del pórtico mostrado, si todos los elementos son como  $EA=\infty$ .

La viga BC sólo se desplaza, debido a que P es axial.

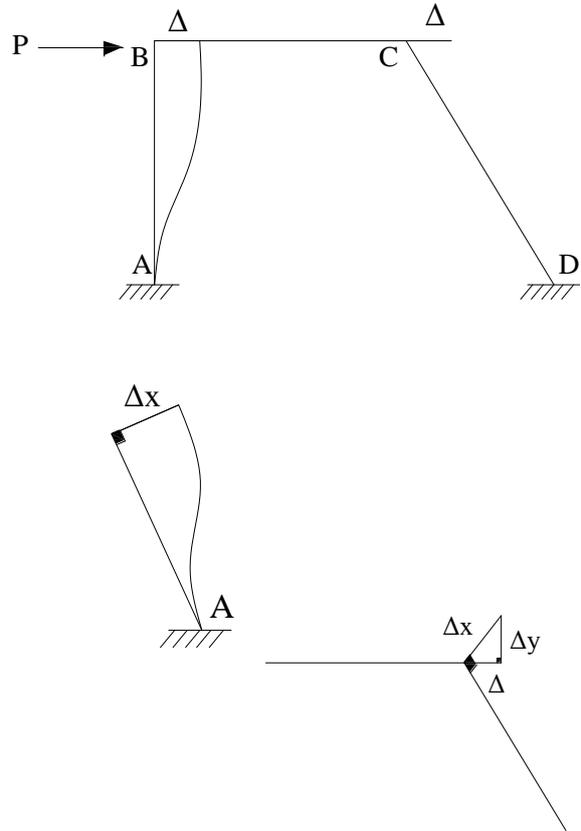
AB y CD, se flexionan como se muestra en la figura.



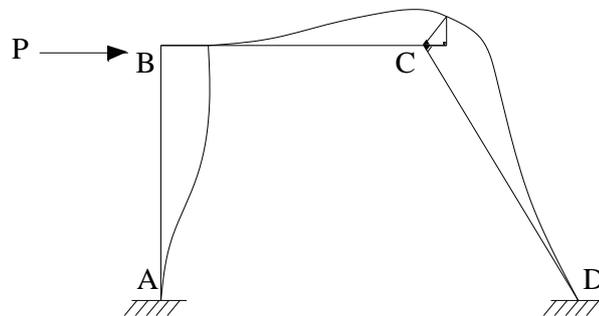
Si la estructura tiene elementos inclinados y todas las barras tienen  $EA=\infty$ , como se muestra en la figura; podemos observar que la barra BC se desplaza porque P es axial.

AB se deforma como se muestra.

CD al no tener deformación axial se desplaza perpendicularmente  $\Delta x$ ; pero, la barra BC se desplaza debido a la carga axial, produciéndose en el punto C una relación como la que se muestra.



La deformada será:

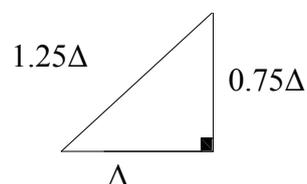
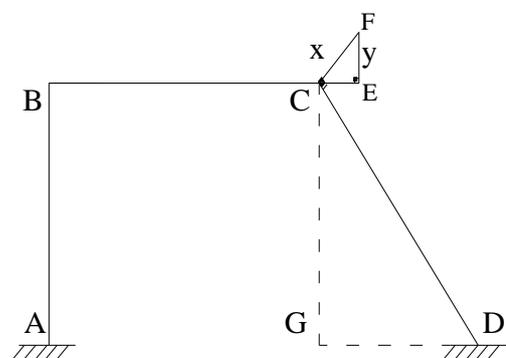


Los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , los hallamos por semejanza de triángulos.

$$\triangle CEF \sim \triangle CGD$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{5}{4}$$

$$\Delta y = \frac{3}{4}\Delta \quad \Delta x = \frac{5}{4}\Delta$$



## CONVENCIÓN DE SIGNOS

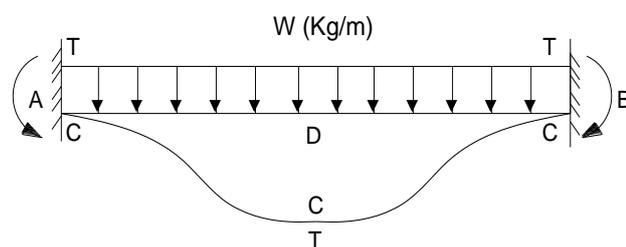
### Para Resistencia de Materiales

Para una viga supuesta horizontal y sometida a cargas dirigidas hacia abajo, un momento flector es positivo si produce esfuerzos de tracción en la parte inferior de la viga, y negativo, si produce esfuerzos de tracción en la parte superior. Este es el convenio clásico utilizado en Resistencia de Materiales.

Así por ejemplo, para la viga empotrada en ambos extremos.

$$M_A = -\frac{wl^2}{12},$$

$$M_B = -\frac{wl^2}{12},$$



C: Zona Comprimida  
 T: Zona Traccionada

Así por ejemplo, los momentos generados debido a P generan tracción en la zona de la viga AB en los puntos A y B.

$$M_A = -\frac{Pl}{8}, \quad M_B = -\frac{Pl}{8}$$

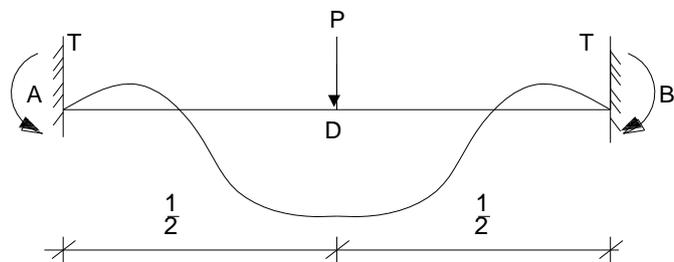


figura (a)

Para pendiente y deflexión, Cross y Kani.

Se considera positivo el sentido horario y negativo el antihorario. Así por ejemplo, la viga de la figura (a) tiene momentos de empotramiento.

$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}$$

Según la convención para Resistencia de Materiales ambos son negativos. Según la convención para pendiente y deflexión

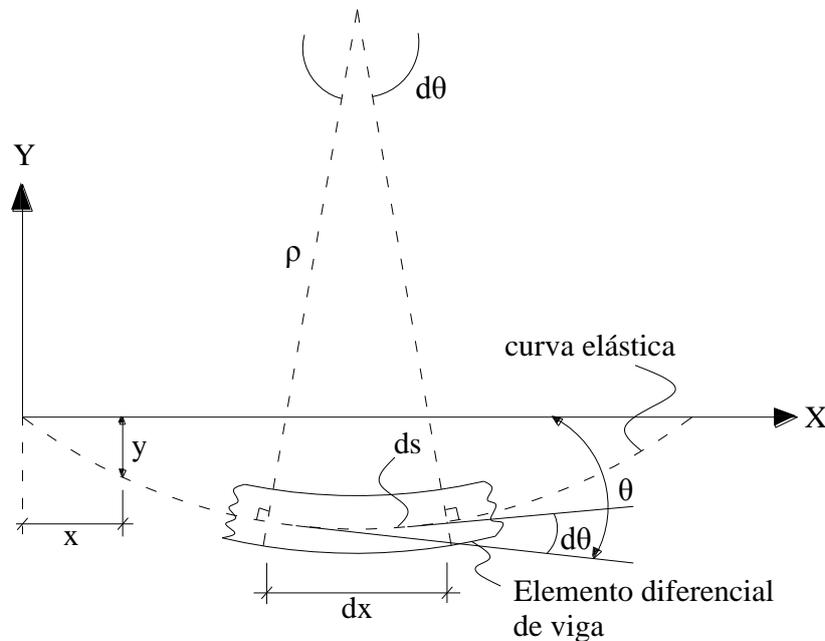
$$M_A = -\frac{Pl}{8} \quad \text{y} \quad M_B = \frac{Pl}{8}$$

## CAPÍTULO XI:

# MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

## MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

La perspectiva lateral de la superficie neutra de una viga flexada se llama CURVA ELÁSTICA, o simplemente ELÁSTICA DE LA VIGA. Es la curva que forma el eje longitudinal, inicialmente recto.



En la figura presentada se muestra este eje sumamente ampliado.

En esta parte vamos a deducir la ecuación de dicha curva, y veremos como calcular el desplazamiento vertical o flecha y de cualquier punto en función de su abscisa x.

Tomando el extremo izquierdo como origen del eje x, dirigido según la dirección inicial de la viga sin flexar, y el eje Y positivo hacia arriba.

Se supone en todo momento que las deformaciones son tan pequeñas que no hay diferencia apreciable entre la longitud inicial de la viga y la proyección de su longitud deformada.

La curva elástica es muy tensa y su pendiente en cualquier punto es también muy pequeña. El valor de esta pendiente,  $\tan \theta$  igual a  $dy/dx$ , puede hacerse sin error apreciable, igual a  $\theta$ .

Por lo tanto:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (a) \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots \dots (b)$$

Considerando la variación de  $\theta$  en una longitud diferencial de producida por la flexión de la viga, es evidente que:

$$ds = \rho d\theta \dots \dots \dots (c)$$

Siendo el radio de curvatura en la longitud del arco  $ds$ .

Como la curva elástica es muy tensa,  $ds$  es prácticamente igual a  $dx$ .

De las ecuaciones (b) y (c) se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots \dots (d)$$

Por otro lado sabemos por la teoría de flexión que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (e)$$

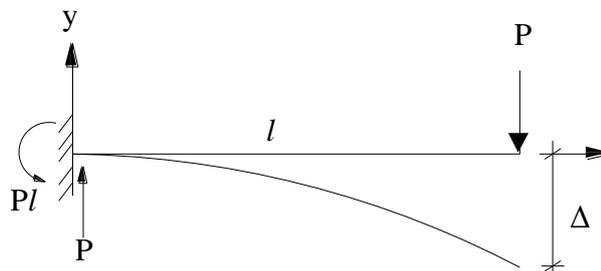
Por lo tanto igualando (d) y (e) obtenemos:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

A esta ecuación se le denomina la ecuación diferencial de la elástica de una viga.

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar la flecha en cada punto de la viga en voladizo, sometida a la carga aislada  $P$ , mostrada en la figura.



**Solución:**

$$M = -Pl + Px$$

La ecuación diferencial de la viga deformada será:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \text{E: Módulo de elasticidad del material}$$

I: Momento de inercia de la sección respecto del eje neutro.

Reemplazando el omento M en la ecuación diferencial.

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -Pl + Px \dots\dots\dots (1)$$

Integrando una vez  $EI \cdot \frac{dy}{dx} = -Plx + \frac{Px^2}{2} + C_1 \dots\dots\dots (2)$

Esta ecuación nos representa la ecuación de la pendiente en la que  $C_1$  es una constante, que puede calcularse utilizando la condición de ser nula la pendiente de la viga en el muro, pues está perfectamente empotrada en él.

Sustituyendo en dos las condiciones para  $x=0$ ,  $dy/dx=0$ .

$$0=0+0+C_1 \quad , \quad C_1=0$$

Integrando la ecuación (2) obtenemos:

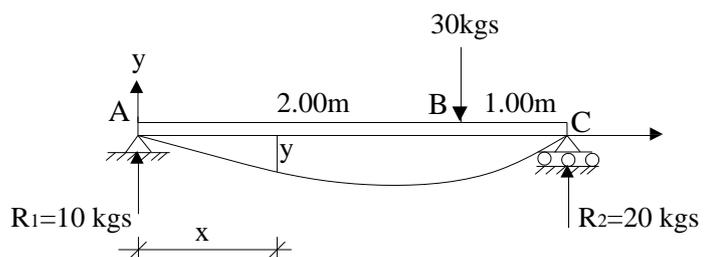
$$EIy = -\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_2 \dots\dots\dots (3)$$

Donde  $C_2$  es una constante de integración que podemos determinarla por la condición del muro en el empotramiento. Allí para  $x=0$  la flecha “y” es cero debido a que la barra está empotrada rígidamente sustituyendo  $y=0$  en la ecuación tres obtenemos  $C_2=0$ .

La flecha máxima será en  $x=1$ , por la ecuación tres obtenemos:

$$EI \cdot y_{\text{máx}} = -\frac{Pl^3}{3} \quad \text{El signo menos significa que este punto está debajo del eje x.}$$

2. Una carga concentrada de 30 Kg actúa sobre la viga como se muestra en la figura. Determinar las ecuaciones de la elástica entre cada dos puntos de discontinuidad de carga y la máxima flecha.



**Solución:**

$$EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M = 10x - 30(x - 2) \dots\dots\dots(1)$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = 5x^2 - 15(x - 2)^2 + C_1 \dots\dots\dots(2)$$

$$EI \cdot y = \frac{5}{3}x^3 - 5(x - 2)^2 + C_1x + C_2 \dots\dots\dots(3)$$

Para determinar las dos constantes de integración que son físicamente iguales a la pendiente y ordenada en el origen, se aplican las condiciones de contorno siguientes.

1. En A  $x=0$ , la ordenada  $y=0$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) se obtiene  $C_2=0$ . Recordemos que  $(x-2)^3$  no existe para valores de  $x$  menores que 2, que harán negativo al paréntesis.
2. En el otro apoyo, para  $x=3$ , la ordenada también es nula. Conocido  $C_2=0$  y sustituyendo en la ecuación tres, se obtiene:

$$0 = \frac{5}{3}(3)^3 - 5(3-2)^3 + 3C_1$$

Donde:  $C_1 = -\frac{40}{3}$

Determinadas las constantes de integración y sustituidos sus valores en 2 y 3 se puede escribir las expresiones de la pendiente y de las ordenadas de la elástica en su forma convencional.

**Tramo AB ( $0 < x < 6$ )**

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = 5x^2 - \frac{40}{3}$$

$$EI \cdot y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{40}{3}x$$

**Tramo BC ( $6 < x < 9$ )**

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = 5x^2 - 15(x - 2)^2 - \frac{40}{3}$$

$$EI \cdot y = \frac{5}{3}x^3 - 5(x - 2)^2 - \frac{40}{3}x$$

**Cálculo de la Flecha Máxima:**

Supondremos que se encuentra en el tramo AB.

La calcularemos derivando la ecuación tres respecto a  $x$  e igualando a cero esta derivada o bien igualando a cero la expresión 4 de la pendiente, es decir hallando el punto de pendiente nula. Por lo tanto.

$$5x^2 - \frac{40}{3} = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1.63\text{m}$$

$EI_{y_{\text{máx}}}$  se encuentra reemplazando el 1.63m en la ecuación 3 dándonos:

$$EI_{y_{\text{máx}}} = -14.5 \text{ m}^3 \text{ kg}$$

El valor obtenido indica que la ordenada  $y$  está por debajo del eje  $x$ .

## CAPÍTULO XII:

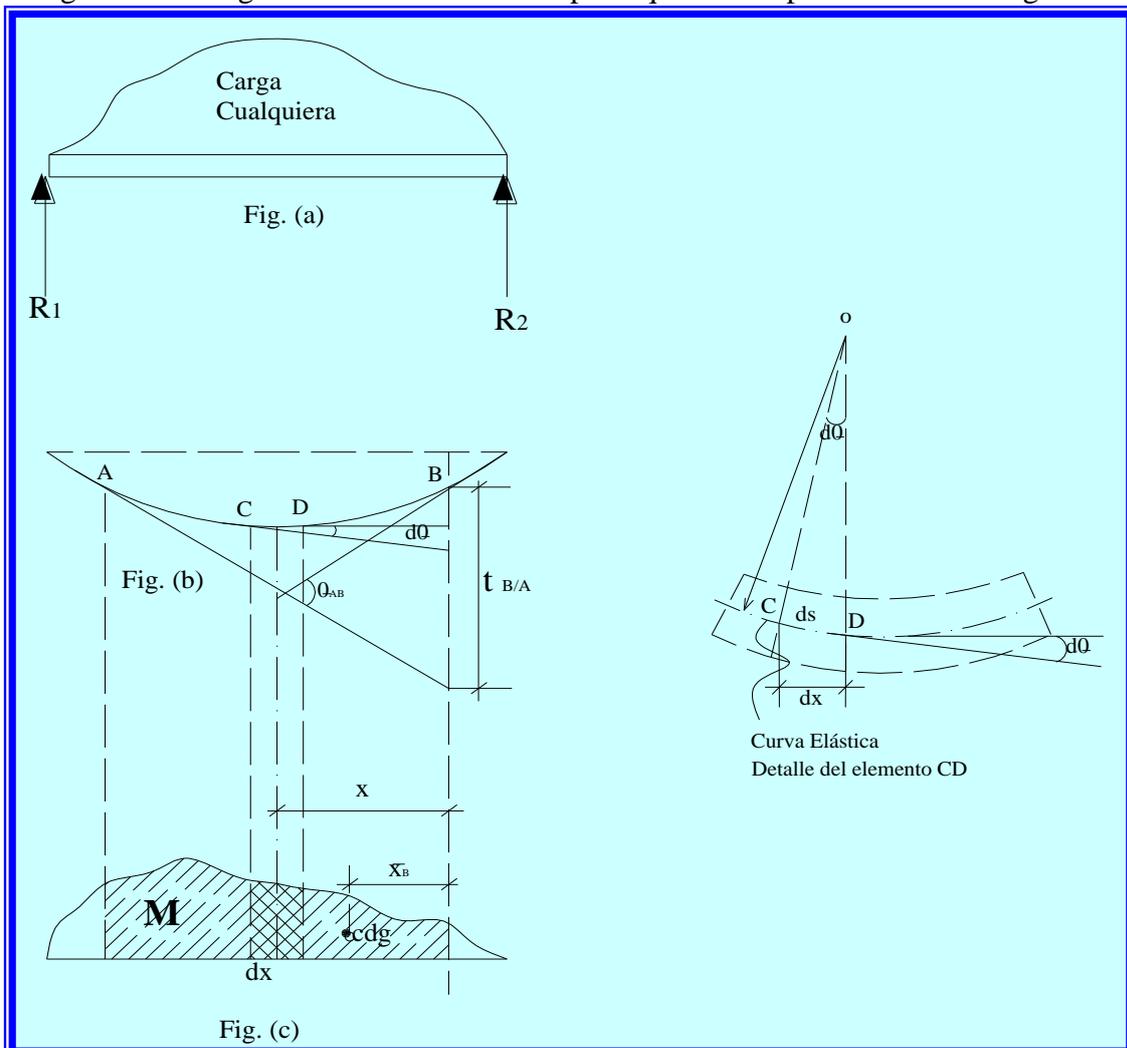
# MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

## MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

Este método sirve para calcular los giros y desplazamientos en cualquier punto de una viga en base al diagrama de momentos trazado. Este método es la base del método de viga conjugada así como el de tres momentos.

En esta parte de nuestro estudio analizaremos los principios de este método así como los teoremas fundamentales.

La figura mostrada representa una viga simplemente apoyada con una carga cualquiera. La elástica como intersección del plano neutro con el plano vertical que pasa por los centros de gravedad de las secciones se representa en la figura b aunque bastante exagerada. El diagrama de momentos se supone que es el representado en la figura c.



Al igual que en la deducción de la fórmula de la flexión dos secciones planas adyacentes, distantes una longitud  $dx$  sobre una viga inicialmente recta, giran un ángulo

$d\theta$  una respecto a la otra. Se puede ver con más detalle en la parte CD ampliada en la figura b. El arco  $ds$  medido a lo largo de la elástica entre las dos secciones es igual  $d\theta$  siendo el radio de curvatura de la elástica en ese punto.

De la ecuación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Y como  $ds = d\theta$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{ds} \quad \text{ó} \quad d\theta = \frac{M}{EI} \cdot ds$$

En la práctica, la elástica es tan tensa que no se comete error apreciable suponiendo que  $ds$  es igual a su proyección  $dx$ .

En estas condiciones, se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{EI} \cdot dx$$

Si trazamos dos tangentes a la elástica en C y D como en la figura b, forman el mismo ángulo  $d\theta$  que el que forman las secciones OC y OD, por lo que la variación e incremento de la pendiente entre las tangentes a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B, es igual a la suma de estos pequeños ángulos:

$$\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M dx \dots \dots (1)$$

De la figura B se puede ver que la distancia desde el punto B de la elástica, medida perpendicularmente a la posición inicial de la viga, hasta la tangente trazada a la curva por otro punto cualquiera A, es la suma de los segmentos  $dt$  interceptados por las tangentes sucesivas trazadas a la elástica en puntos sucesivos. Cada uno de estos segmentos  $dt$  puede considerarse como un arco de radio  $x$  y ángulo  $d\theta$ .

$$dt = x d\theta$$

De donde:

$$t_{B/A} = \int dt = \int x d\theta$$

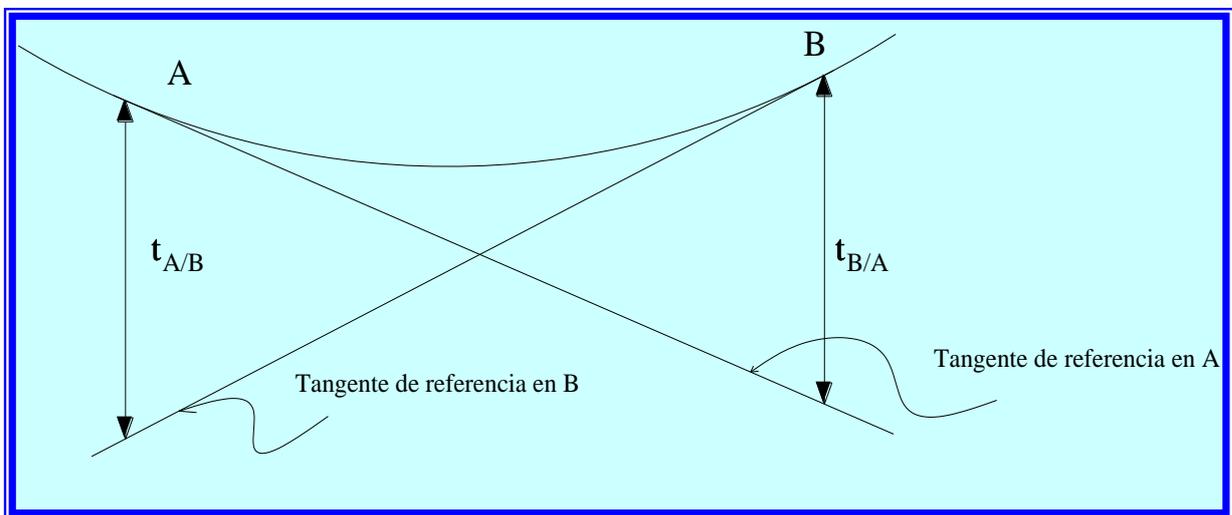
Sustituyendo  $d\theta$  por su valor en la ecuación  $d\theta = M \cdot dx$

Se obtiene:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} x \cdot (M dx) \dots\dots(2)$$

La longitud  $t_{B/A}$  se llama desviación de B respecto de una tangente trazada por A o bien desviación tangencial de B respecto de A.

El subíndice indica que se mide desde B hasta la tangente trazada en A. La figura adjunta aclara la diferencia que existe entre la desviación tangencial  $t_{B/A}$  de B respecto de A y la desviación  $t_{A/B}$  de A respecto de B. Por lo general ambas desviaciones son distintas.



El significado geométrico de las ecuaciones (1) y (2) conduce a los dos teoremas fundamentales del método de área de momentos.

En el diagrama de momentos flectores de la figura c, se observa que  $M dx$  es el área del elemento diferencial rayado situado a distancia  $x$  de la ordenada que pasa por B. como la integral de  $M dx$  es la suma de tales elementos la ecuación 1 se puede escribir:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI} (\text{Area})_{AB}$$

La expresión anterior es la expresión algebraica del teorema número uno cuyo enunciado es:

### **TEOREMA N° 01**

**La variación o incremento de las pendientes entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B es igual al producto de  $1/EI$  por el área del diagrama de momentos flectores entre estos dos puntos.**

La figura c muestra como la expresión  $x(Mdx)$  que aparece dentro de la integral en la ecuación 2 es el momento de área del elemento rayado respecto de la ordenada en B. Por lo tanto el significado geométrico de la integral  $x(Mdx)$  es el momento respecto de la ordenada en B del área de la porción del diagrama de momentos flectores comprendida entre A y B. Con lo expuesto la expresión algebraica del teorema dos es:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{Area})_{AB} \bar{x}_B$$

### **TEOREMA N° 02**

**La desviación de un punto cualquiera B respecto de la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera a, en dirección perpendicular a la inicial de la viga, es igual al producto de  $1/EI$  por el momento respecto de B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B.**

Al producto  $EI$  se le denomina rigidez de la flexión. Obsérvese que se ha supuesto tácitamente que  $E$  e  $I$  son constantes en toda la longitud de la viga, que es un caso muy frecuente.

Cuando la rigidez es variable, no puede sacarse  $EI$  fuera de signo integral, y hay que conocer su ley en función de  $x$ .

En los dos teoremas  $(\text{Área})_{AB}$  representa el área del diagrama de momentos entre las ordenadas correspondientes a los puntos A y B y  $\bar{x}_B$  es el brazo de momento de esta área respectos de B.

#### **Nota Importante:**

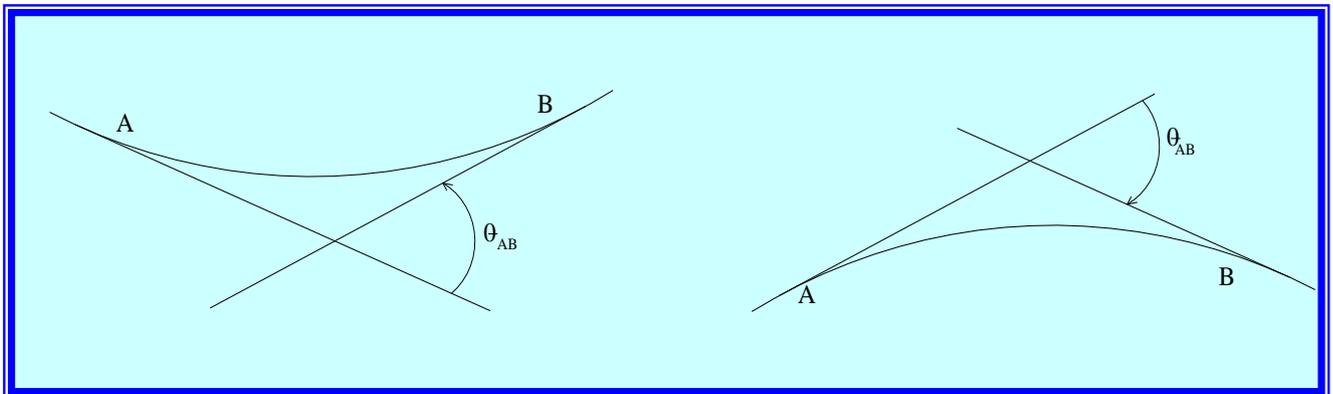
El momento del área toma siempre respecto de la ordenada del punto cuya desviación se quiere obtener.

### CONVENCIÓN DE SIGNOS

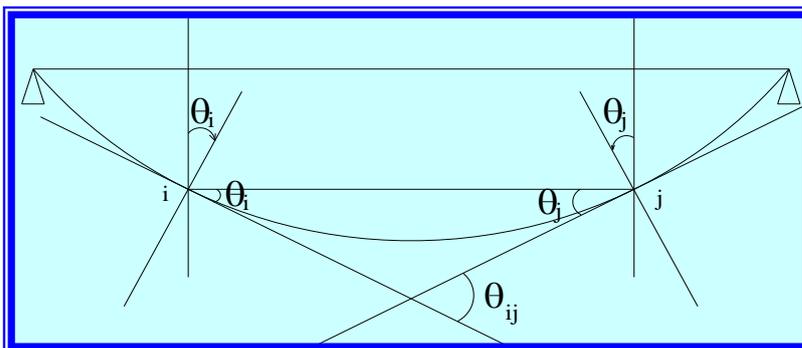
La desviación tangencial de un punto cualquiera es positiva si el punto queda por encima de la tangente respecto de la cual se toma esa desviación y negativa si queda por debajo de dicha tangente.

El signo de pendientes será:

Un valor positivo de la variación de la pendiente  $\theta_{AB}$  indica que la tangente en el punto situado a la derecha, B, se obtiene girando en sentido antihorario la tangente trazada en el punto más a la izquierda, A. es decir, que para pasar de la tangente en A a la tangente en B se gira en sentido antihorario, y viceversa para valores negativos de  $\theta_{AB}$ .



### ECUACIÓN DE BRESSE



$$\theta_{ij} = \theta_i + \theta_j$$

Por convención los giros  
 horarios son positivos.

$$\theta_{ij} = +\theta_i + (-\theta_j)$$

$$\theta_j = \theta_i - \theta_{ij}$$

**Pasos a Seguir para Resolver Problemas por Área de Momentos:**

1. Se trazan los diagramas de momentos para cada tramo de la estructura, para poder bosquejar la concavidad o convexidad de la deformada.
2. Se bosqueja el desplazamiento de cada tramo.
3. Se traza la deformada en cada tramo.
4. Se trazan las tangentes en los extremos de cada barra.
5. Se procede al análisis geométrico.
6. Se calculan los desplazamientos y/o giros.

**CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.**

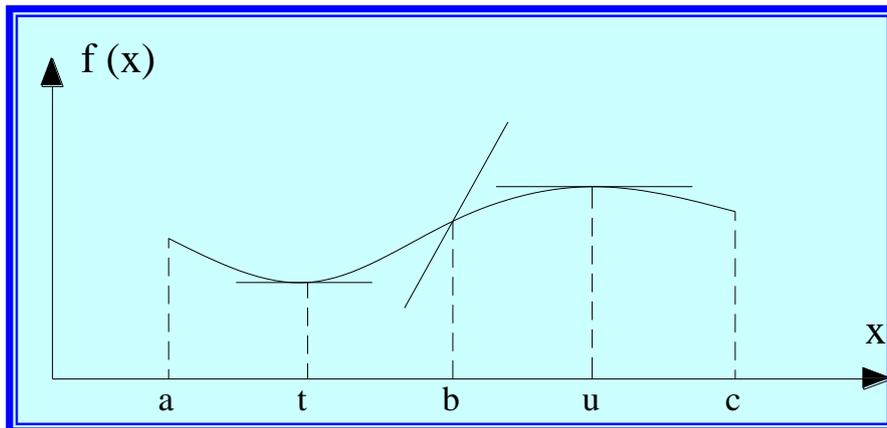
Un arco de curva  $y = f(x)$  es cóncavo, si en cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente.

Al aumentar  $x$ , la derivada de  $x(f'(x))$  o aumenta sin cambiar de signo o cambia de signo pasando de negativa a positiva.

En cualquier caso, la pendiente  $f'(x)$  aumenta y  $f''(x) > 0$ .

Un arco de curva  $y = f(x)$ , es convexo, si en cada uno de sus puntos el arco está situado por debajo de la tangente. Al aumentar  $x$ ,  $f'(x)$  o disminuye sin cambiar de signo o cambia de signo pasando de positiva a negativa.

En cualquier caso, la pendiente  $f'(x)$  disminuye y  $f''(x) < 0$ .



$a < x < b$  Arco Cóncavo

$b < x < c$  Arco Convexo

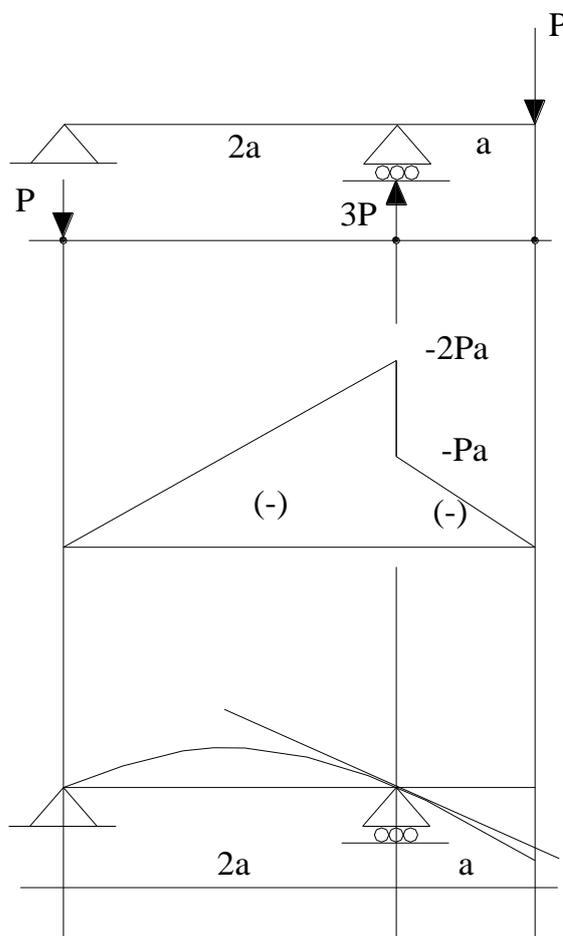
---

---

**CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE DEFORMADAS Y SU RELACION CON  
EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.**

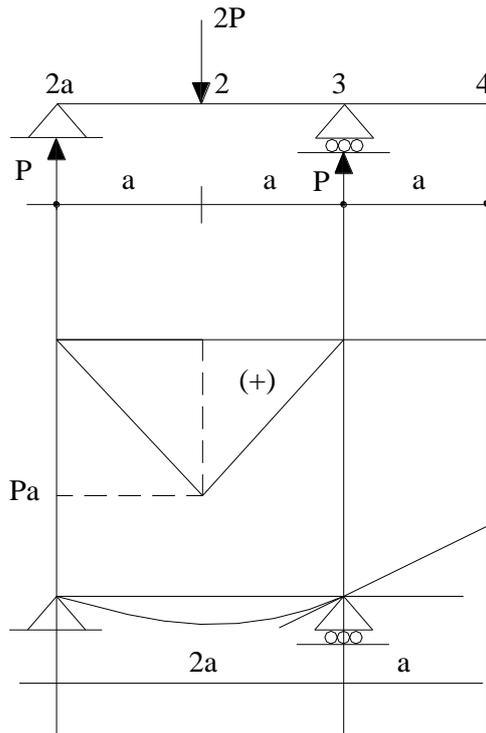
1. Si el diagrama de momentos es positivo en el tramo analizado, entonces la deformada es cóncava.
2. Si el diagrama de momentos es negativo en el tramo analizado, entonces la deformada es convexa.

Ejemplo: Analizar la concavidad y convexidad de la siguiente viga.



Como podemos observar, el diagrama de momentos es negativo en los dos tramos por lo tanto la deformada será convexa en ambos tramos como se ve en el gráfico correspondiente.

En todo momento la deformada está debajo de la tangente trazada.

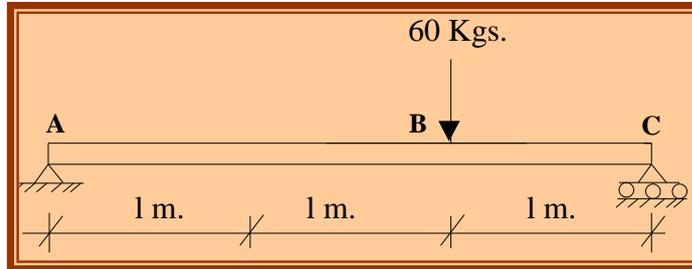


Como podemos observar el diagrama de momentos es positivo en los tramos 1-2 y 2-3. En los tramos 3-4 no hay flexión.

Por lo tanto la deformada será cóncava en los tramos 1-2, 2-3 y en el tramo 3-4 no hay flexión.

**PROBLEMAS RESUELTOS**

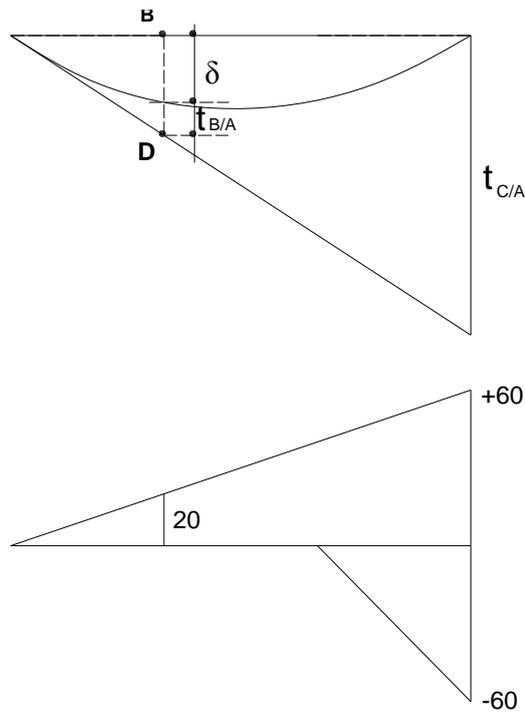
1. Calcular la flecha en el punto B de la viga mostrada.



**Solución:**

$$R_A = 20 \text{ Kgs.}$$

$$R_C = 40 \text{ Kgs.}$$



$$t_{C/A} = \frac{60}{3} \times 3 \times \frac{3}{3} - \frac{60 \times 1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$t_{C/A} = \frac{80}{EI}$$

Del Diagrama de Momentos:

$$\frac{\overline{BD}}{t_{C/A}} = \frac{1}{3} \qquad \overline{BD} = \frac{1}{3}t_{C/A}$$

Por lo tanto: 
$$\overline{BD} = \frac{80}{3.EI}$$

Pero:

$$\overline{BD} = \delta + t_{B/A} \dots\dots\dots(1)$$

Por otro lado:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} \cdot (\text{Área}_{AB}) \cdot \overline{X}_B$$

$$t_{B/A} = \frac{20 \times 1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3.EI}$$

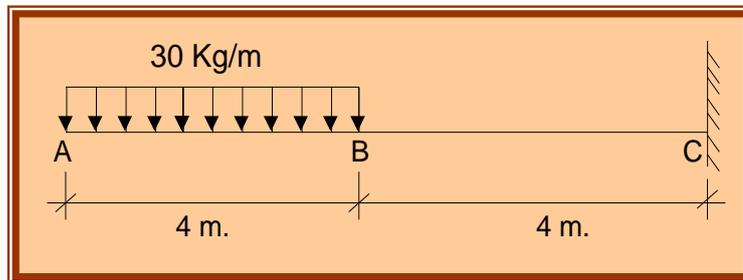
Reemplazando el valor de  $\overline{BD}$  y de  $t_{B/A}$  en (1):

$$\frac{80}{3.EI} = \delta + \frac{10}{3.EI}$$

Finalmente obtenemos que:

$$\delta = \frac{70}{3.EI}$$

2. Para la viga en voladizo, se desea saber cuanto vale la flecha en los puntos A y B.



**Solución:**

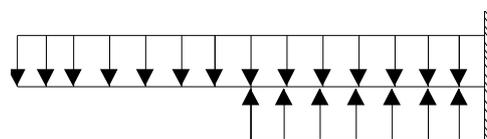
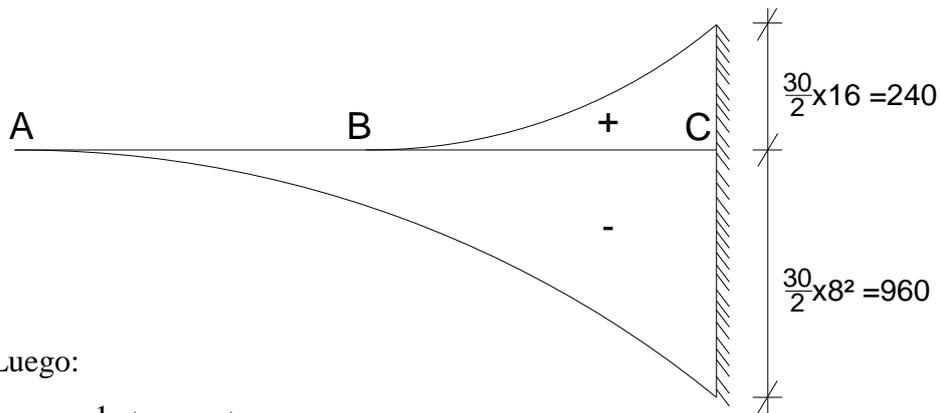


Diagrama de Momentos:



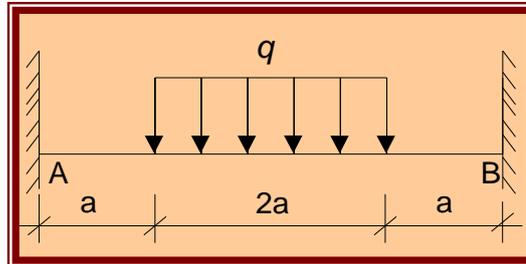
Luego:

$$t_{A/C} = \frac{1}{EI} (\text{Área}_{AC}) \bar{X}_A$$

$$t_{A/C} = -\frac{960}{3} \times 8 \times \frac{3}{4} \times 8 + 240 \times 4 \times \frac{1}{3} \left( 4 + \frac{3}{4} \times 4 \right)$$

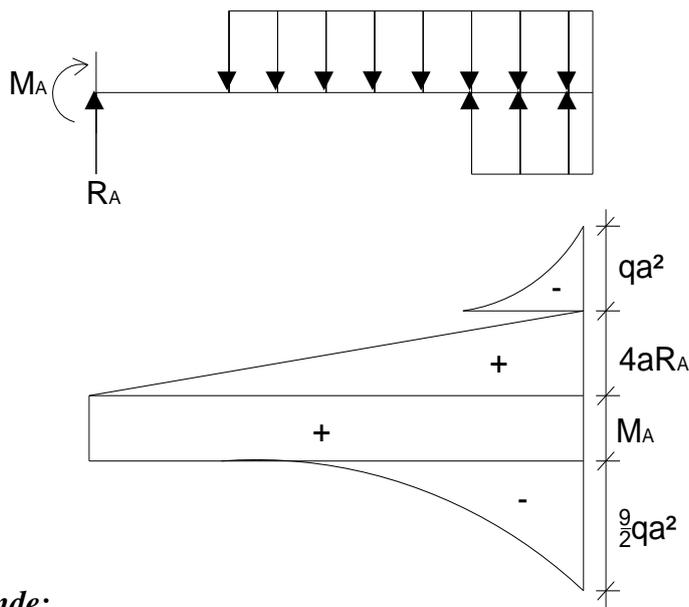
$$t_{A/C} = -\frac{13120}{EI}$$

3. Para la viga mostrada, hallar:
- Las reacciones y los momentos de empotramientos
  - Hallar la flecha en  $x=3a$



**Solución:**

- a) Cálculo de las reacciones y el momento de empotramiento.



**De donde:**

$$EI.\theta_{AB} = 0$$

$$4a. M_A + (4a. R_A)\left(\frac{4}{2}a\right) + \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{9qa^2}{2} \cdot \frac{3a}{3} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$t_{B/A} = 0 = \frac{1}{EI}(\text{Área}_{AB}).\bar{X}_B$$

$$(4a. M_A)(2a) + (4a)( R_A)\left(\frac{4a}{2}\right) \cdot \frac{4a}{3} + \left(\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{a}{4} - \left(\frac{9qa^2}{2} \cdot \frac{3a}{3}\right)\left(\frac{3}{4}a\right) = 0$$

$$\dots\dots\dots(2)$$

*Operando las ecuaciones (1 y (2), obtenemos:*

$$4M_A + 8a R_A + \frac{qa^2}{6} - \frac{9}{2}qa^2 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

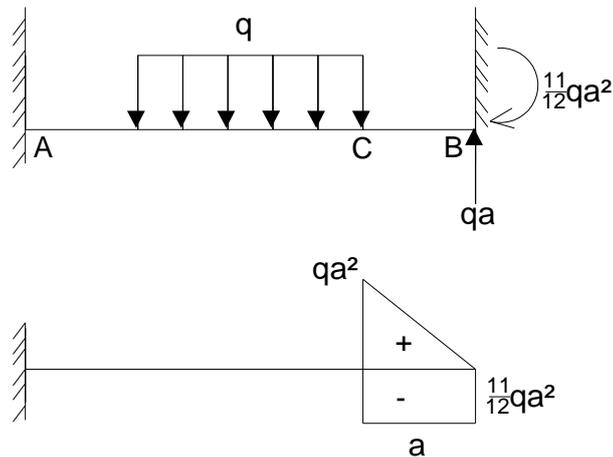
$$8M_A + \frac{32}{3}a.R_A + \frac{q}{24}a^2 - \frac{27}{8}qa^2 = 0 \dots\dots\dots(4)$$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:*

$$R_A = qa$$

$$M_A = -\frac{11}{12}qa^2$$

**b) Cálculo de la flecha en  $x=3a$ .**



**Luego:**

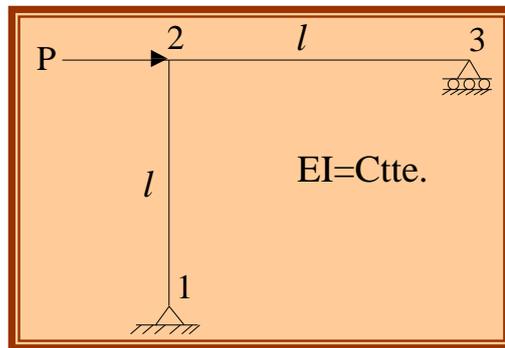
$$EI.t_{C/B} = qa^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{11}{12}qa^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2}$$

$$t_{C/B} = -\frac{7}{24} \frac{q}{EI} a^4$$

**Observación:**

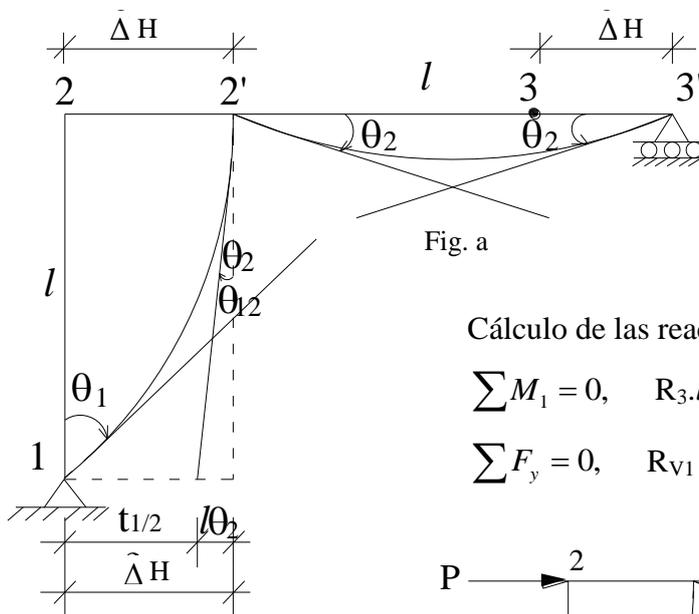
Los valores de las reacciones en B son iguales a los de A; por la simetría de la estructura y carga.

4. Para el marco mostrado. Calcular el desplazamiento  $\Delta$  para el punto n°02.



**Solución:**

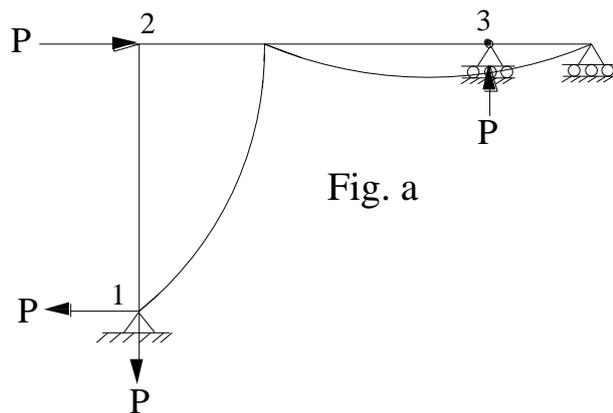
Por la teoría de pequeñas deformaciones la deformada viene dada por la figura a.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_1 = 0, \quad R_3 \cdot l = P \cdot l, \quad R_3 = P$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_{V1} = P$$



El diagrama de momentos es el mostrado en la fig. c.

El desplazamiento:

$$\Delta_H = t_{1/2} + l \cdot \theta_2$$

Variación del punto 1, respecto al punto 2.

$$EI \cdot t_{1/2} = (\text{Área}_{1-2}) \cdot \bar{X}_1$$

$$\frac{Pl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{pl^3}{3}$$

$$t_{1/2} = \frac{Pl^3}{3 \cdot EI}$$

Cálculo del giro del punto 2. ( $\theta_2$ )

$$EI \cdot \theta_2 = \frac{t_{3/2}}{1} \cdot \frac{\frac{Pl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l}{1}$$

$$\theta_2 = \frac{Pl^2}{3EI}$$

Finalmente:

$$\Delta = t_{1/2} + l \cdot \theta_2 = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^3}{3}$$

$$\Delta_H = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

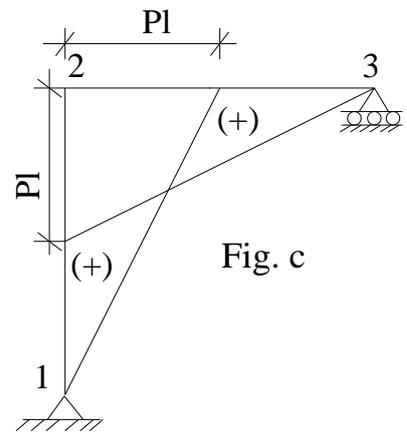
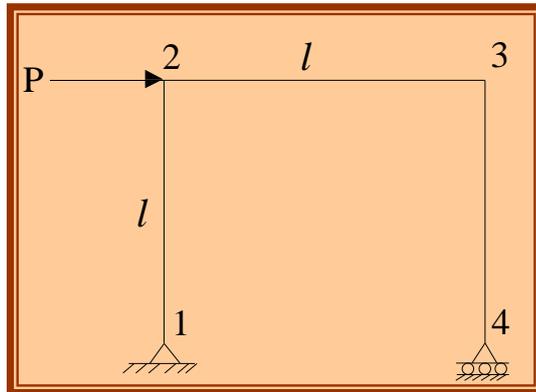
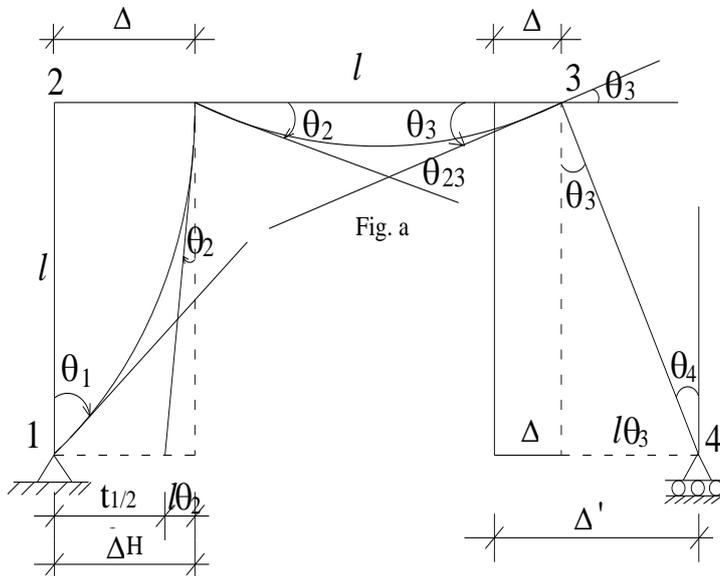


Fig. c

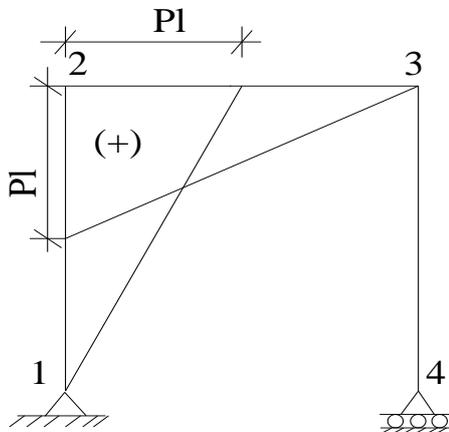
5. Para el pórtico mostrado, hallar el desplazamiento horizontal del punto dos y cuatro.



**Solución:**



**Diagrama de Momentos:**



Cálculo del punto cuatro:

$$EI.t_{2/3} = \frac{Pl^2l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{Pl^3}{6}$$

$$t_{2/3} = \frac{Pl^3}{6.EI}$$

De la geometría del problema vemos que el ángulo  $\theta_3$ , es:

$$\theta_3 = \frac{t_{2/3}}{1} = \frac{Pl^3}{6.EI}$$

$$\theta_3 = \frac{Pl^2}{6EI}$$

Cálculo del desplazamiento horizontal  $\Delta$  del punto 2.

$$\Delta = t_{1/2} + l.\theta_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

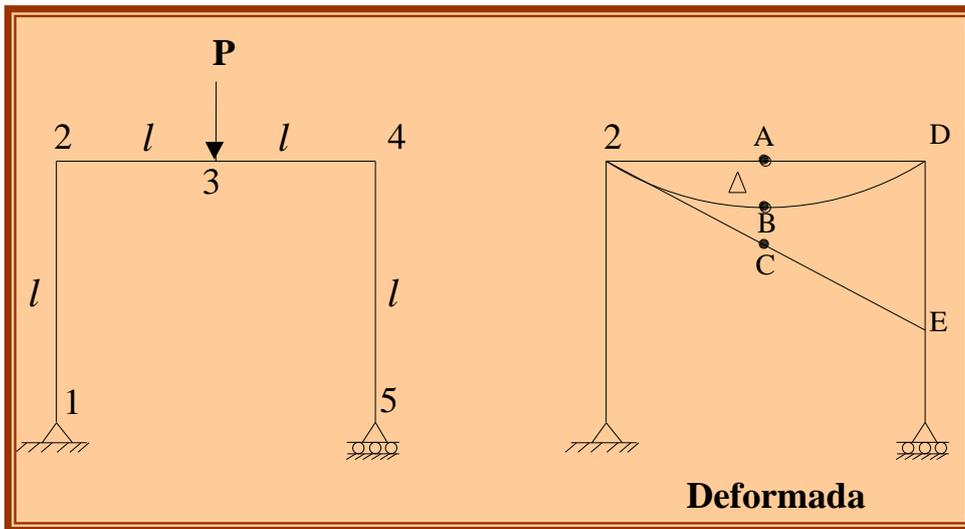
El desplazamiento  $\Delta$  del punto 2 es el mismo que el del punto tres. Pero además de este desplazamiento la barra  $\overline{34}$  se desplaza como se muestra en el gráfico, de modo que el desplazamiento del punto cuatro viene dado por:

$$\Delta' = \Delta + l.\theta_3$$

$$\Delta' = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl^3}{6EI}$$

$$\Delta' = \frac{5.Pl^3}{6EI}$$

6. Para la estructura mostrada, calcular el desplazamiento vertical del punto 3.



**Solución:**

De la geometría de la deformada:

$$t_{B/C} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{Pl^3}{12.EI} \dots\dots\dots(1)$$

$$t_{D/2} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l$$

$$t_{D/2} = \frac{Pl^3}{2.EI}$$

Por Semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{1}{2l} \overline{AC} = \frac{\overline{DE}}{2}$$

Pero;

$$\overline{DE} = t_{D/2} = \frac{Pl^3}{2.EI}$$

Por lo tanto;

$$\overline{AC} = \frac{Pl^3}{4.EI} \dots\dots\dots(2)$$

Por otro lado:  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

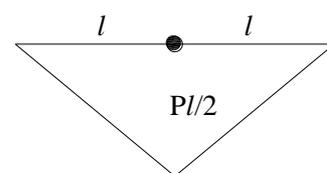


Diagrama de Momentos

Del gráfico de la deformada:

$$\overline{AC} = \Delta + t_{B/C} \dots \dots \dots (3)$$

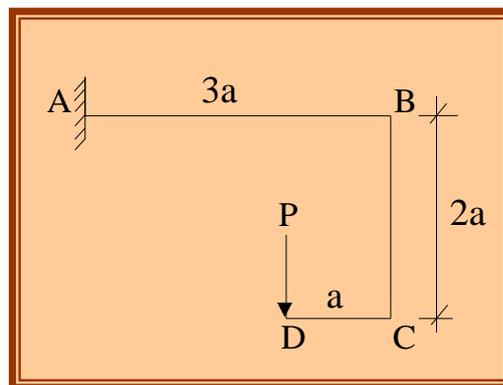
Reemplazando los valores de (1), (2) en la ecuación (3).

$$\frac{Pl^3}{4.EI} = \Delta + \frac{Pl^3}{12EI}$$

De donde:

$$\Delta = \frac{Pl^3}{6EI}$$

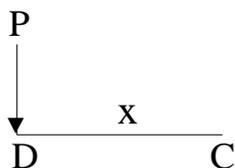
7. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento vertical del punto D y el desplazamiento horizontal del punto C.



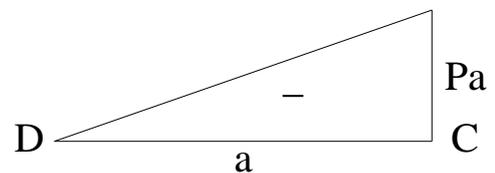
**Solución:**

Trazando el diagrama de momentos por partes para cada tramo.

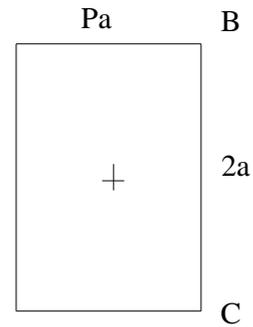
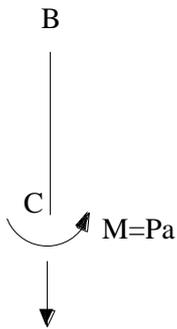
**Tramo DC:**



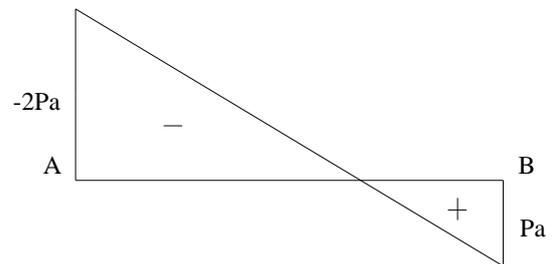
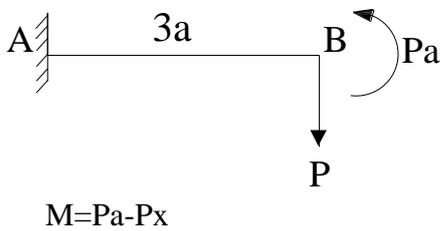
$$M = -Px$$



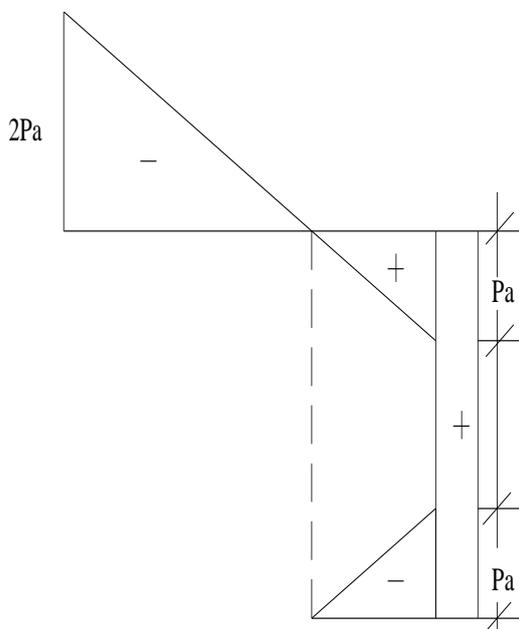
**Tramo BC:**



**Tramo AB:**



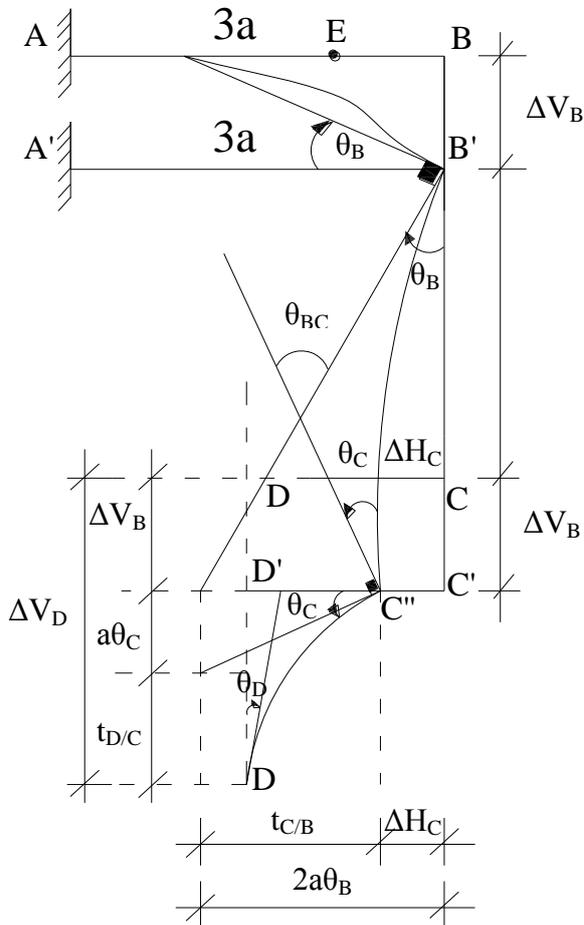
**Diagrama de Momentos**



El tramo AB tiene momento negativo hasta el punto E, lo cual significa que la deformada será convexa hasta el punto E. A partir de ese punto hasta B el diagrama es positivo por lo cual la deformada será cóncava.

El gráfico adjunto ilustra la forma de la deformada de la estructura en los tramos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DC}$  los diagramas de momentos son positivos para  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  por lo tanto las deformadas serán cóncavas en todos sus puntos tal como se ilustra en la figura adjunta.

**Trazo de la Deformada**



Debido a la carga vertical el punto B se desplaza un  $\Delta V_B$  que por el criterio de desplazamiento será el mismo que el desplazamiento del punto C.

Además el punto C tendrá un desplazamiento horizontal.

El punto D se desplaza hasta D'.

El desplazamiento vertical del punto D ( $\Delta V_D$ ):

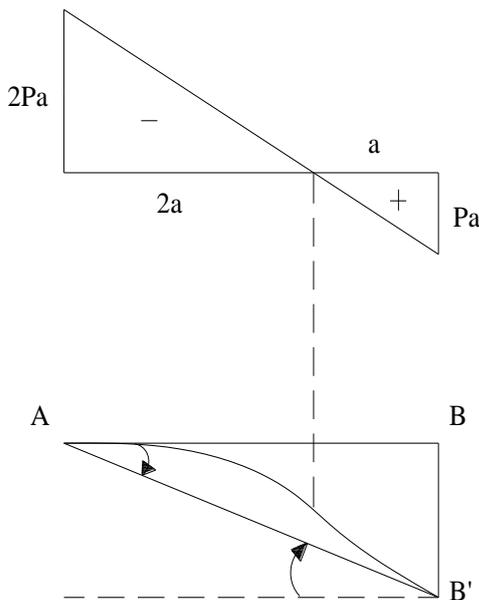
Será:

$$\Delta V_D = \Delta V_B + a\theta_C + t_{D/C}$$

El desplazamiento horizontal del punto C ( $\Delta H_C$ ).

$$\Delta H_C = 2a\theta_B - t_{C/B}$$

**Cálculo de  $\Delta V_B$ :**



Cálculo de la variación del punto B respecto a la tangente trazada por A.

$$EI \cdot t_{B/A} = -(2Pa) \left( \frac{2}{2} a \right) \left( \frac{2}{3} \times 2a + a \right) + (Pa) \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{3} \right)$$

$$t_{B/A} = V_B = -\frac{9}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

**Cálculo del giro en B:**

$$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B \dots (I)$$

$$\theta_B = \frac{t_{B/A}}{3a} = \frac{\frac{9}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI}}{3a}$$

$$\theta_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

Otra forma de calcularlo será:

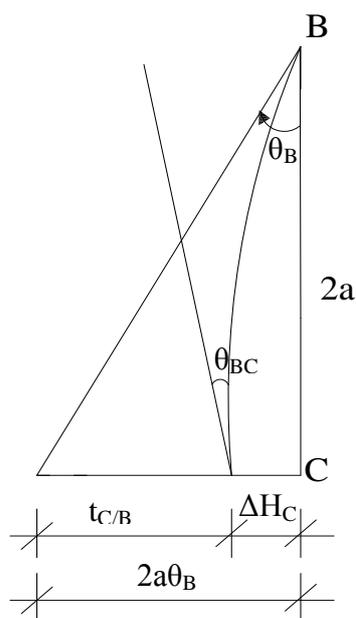
$$EI \cdot \theta_{AB} = -(2Pa)(2a) + (Pa)(a) = -\frac{3}{2} \cdot Pa^2$$

$$\theta_{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI} \dots \dots \dots (II)$$

(II) en (I):

$$\theta_{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

**Cálculo del giro en C:**



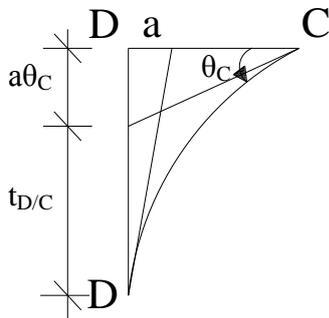
$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C, \quad EI \cdot \theta_{BC} = (Pa)(2a) = 2Pa^2$$

$$\theta_{BC} = \frac{2Pa^2}{EI}$$

$$\theta_C = \theta_B - \theta_{BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI} - 2 \frac{Pa^2}{EI} = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_C = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

**Cálculo del giro en D:**



$$\theta_D = \theta_C - \theta_{DC} \dots \dots \dots (I)$$

$$\theta_{DC} = (Pa)(a) = \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_D = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_D = -\frac{Pa^2}{EI}$$

*Cálculo de la variación del punto C respecto a la tangente de B.*

$$EI.t_{C/B} = (Pa)(2a)$$

$$t_{C/B} = \frac{2Pa^3}{EI}$$

*Cálculo de la variación del punto D respecto a la tangente en C.*

$$EI.t_{D/C} = -(Pa)\left(\frac{a}{2}\right)\frac{2a}{3}$$

$$t_{D/C} = -\frac{Pa^3}{3EI}$$

*Cálculo del desplazamiento vertical del punto D.*

$$\Delta V_D = |\Delta V_B| + |a\theta_C| + |t_{D/C}|$$

$$\Delta V_D = \frac{9}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI} + \frac{a}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI} + \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\Delta V_D = \frac{16}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

*Cálculo del desplazamiento horizontal del punto C.*

$$\Delta H_c = 2a\theta_B - t_{C/B} = 2a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI} - \frac{2Pa^3}{EI}$$

$$\Delta H_c = \frac{Pa^3}{EI}$$

8. Para la estructura mostrada, hallar el giro y desplazamiento vertical del punto C.

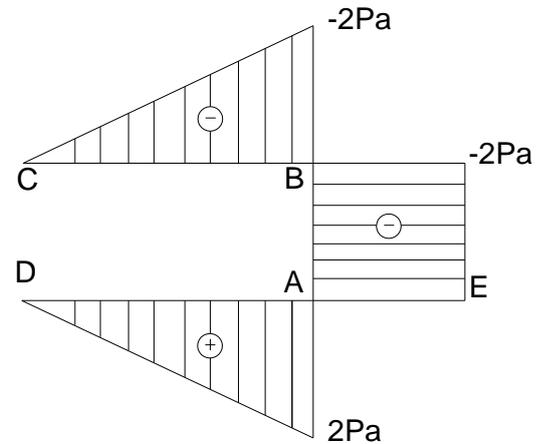
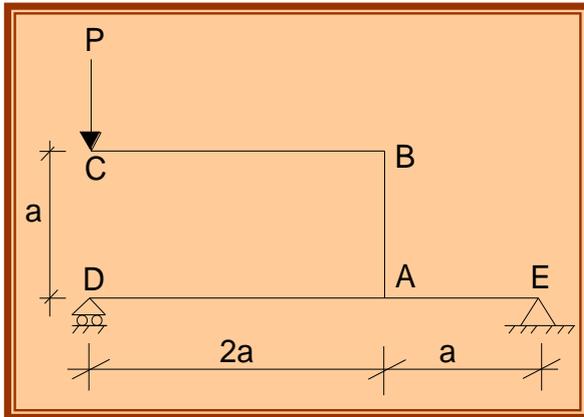
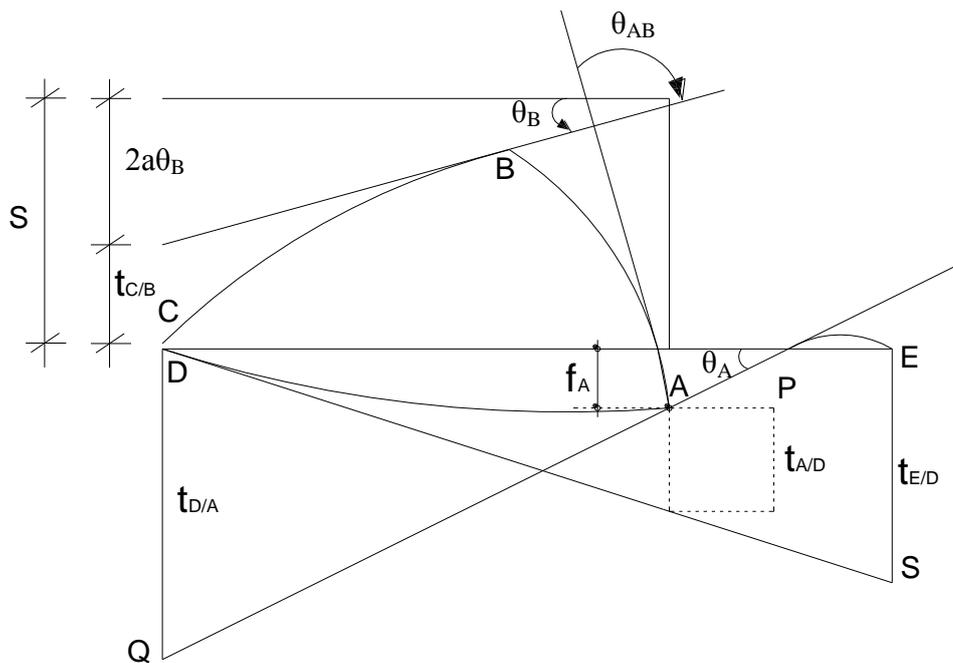


Diagrama de Momentos

**Solución:**

La deformada es la que se muestra a continuación:



En el tramo AB y CB el diagrama de momentos flectores es negativo por lo tanto la deformada será convexa.

En el tramo DA el diagrama de momentos flectores es positivo por consiguiente la deformada es cóncava.

En el tramo AE no hay flexión.

Por lo antes expuesto la deformada es la que se muestra en la figura anterior.

*Cálculo de las Desviaciones de los puntos de la Estructura respecto a las Tangentes.*

$$t_{E/A} = 0$$

$$t_{D/A} = \frac{1}{EI} (\text{Área}_{DA}) \bar{X}_D$$

$$t_{D/A} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times 2a \times 2Pa \times \frac{2}{3} \cdot 2a \right)$$

$$t_{D/A} = \frac{8}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI} (\text{Área}_{BC}) \bar{X}_C$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \times 2a \times 2Pa \times \frac{2}{3} \cdot 2a \right)$$

$$t_{C/B} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$t_{E/D} = \frac{1}{EI} (\text{Área}_{ED}) \bar{X}_E$$

$$t_{E/D} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times 2a \times 2Pa \times \left( \frac{1}{3} \times 2a + a \right) \right)$$

$$t_{E/D} = \frac{10}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$t_{A/D} = \frac{1}{EI} (\text{Área}_{AD}) \bar{X}_A$$

$$t_{A/D} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times 2a \times 2Pa \times \left( \frac{1}{3} \times 2a \right) \right)$$

$$t_{A/D} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

***Cálculo de la Flecha  $f_A$ :***

En el Triángulo PDQ:

$$\frac{f_A}{a} = \frac{t_{D/A}}{3a}$$

Luego:

$$f_A = \frac{1}{3} \cdot t_{D/A} = \frac{1}{3} \left( \frac{8}{3} \cdot \frac{\text{Pa}^3}{\text{EI}} \right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{\text{Pa}^3}{\text{EI}}$$

Del triángulo RDS:

$$\frac{t_{E/D}}{3a} = \frac{f_A + t_{A/D}}{2a}$$

$$2t_{E/D} = 3f_A + 3t_{A/D}$$

$$f_A = \frac{2t_{E/D} - 3t_{A/D}}{3}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$f_A = \frac{8}{9} \cdot \frac{\text{Pa}^3}{\text{EI}}$$

Del Triángulo PDQ:

$$\theta_A = \frac{t_{D/A}}{3a} = \frac{\frac{8}{3} \cdot \text{Pa}^3}{3a} = \frac{8}{9} \cdot \frac{\text{Pa}^2}{\text{EI}}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{\text{EI}} \cdot (\text{Área}_{AB}) = \frac{1}{\text{EI}} (-ax^2Pa) = -2 \frac{\text{Pa}^2}{\text{EI}}$$

$$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B \quad \theta_B = \theta_A - (-\theta_{AB})$$

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{AB} = \left( \frac{8}{9} + 2 \right) \frac{\text{Pa}^2}{\text{EI}} = \frac{26}{9} \frac{\text{Pa}^2}{\text{EI}}$$

De la figura de la deformada hallamos:

$$S = 2a\theta_B + t_{C/B} = \frac{52}{9} \cdot \frac{Pa^3}{EI} + \frac{8}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$S = \frac{76}{9} \frac{Pa^3}{EI}$$

De donde:

$$f_C = f_A + S = \left( \frac{8}{9} + \frac{76}{9} \right) \frac{Pa^3}{EI}$$

$$f_C = \frac{28}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

Hacia Abajo

Luego:

$$\theta_{BC} = \frac{1}{EI} \cdot (\text{Área}_{BC}) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \times 2a \times 2Pa \right) = -2 \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C$$

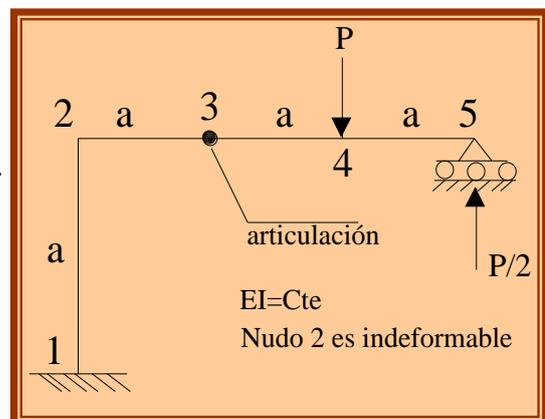
$$\theta_C = \theta_B - (-\theta_{BC}) = \left( \frac{26}{9} + 2 \right) \frac{Pa^2}{EI} = \frac{44}{9} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{44}{9} \frac{Pa^2}{EI}$$

Sentido Antihorario

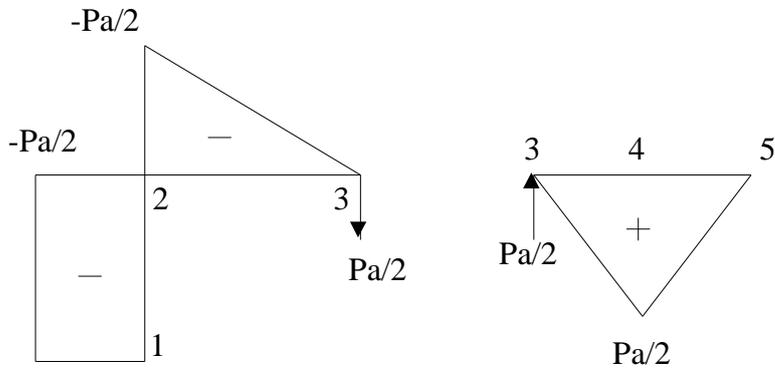
9. Para la estructura mostrada:

- El desplazamiento vertical del punto 4.
- El desplazamiento horizontal del punto 5.

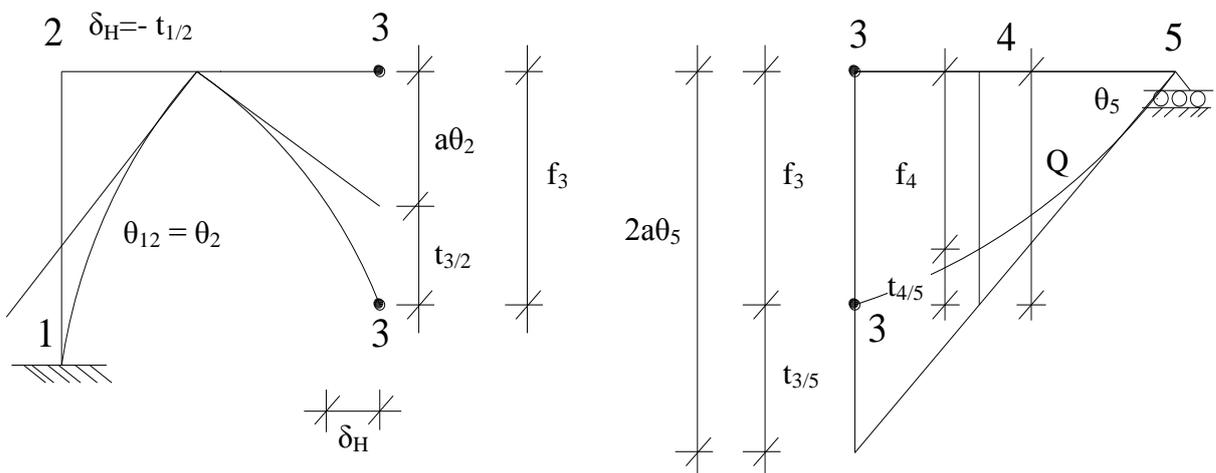


**Solución:**

**Diagrama de Momentos**



**Deformada**



Cálculo de las desviaciones de los puntos respecto a las tangentes.

$$t_{2/1} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{21} \cdot \bar{x}_2$$

$$t_{2/1} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \right)$$

$$t_{2/1} = -\frac{Pa^3}{4EI}$$

Del gráfico de deformada podemos observar que el desplazamiento horizontal del punto 5 es debido al corriente del punto 2, por lo tanto:

$$\delta_{H_5} = -t_{2/1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

Luego:

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{32} \cdot \bar{x}_3$$

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot a \left( -\frac{Pa}{2} \right) \frac{2}{3} a \right) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$t_{3/2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

Cálculo del giro  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \theta_{12} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{12} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Pa^2}{2} \right) = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_2 = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

Cálculo de la desviación  $f_3$ :

$$f_3 = |a\theta_2| + |t_{3/2}|$$

$$f_3 = \frac{Pa^3}{2EI} + \frac{Pa^3}{6EI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$f_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

De donde:

$$t_{3/5} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{35} \cdot \bar{x}_3$$

$$t_{3/5} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot Pa \cdot a \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$t_{3/5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

Del gráfico de deformada, vemos que:

$$2a\theta_5 = f_3 + t_{3/5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI} = \frac{7}{6} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\theta_5 = \frac{7}{12} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

Cálculo de la ordenada Q:

$$Q = a \cdot \theta_5 = \frac{7}{12} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

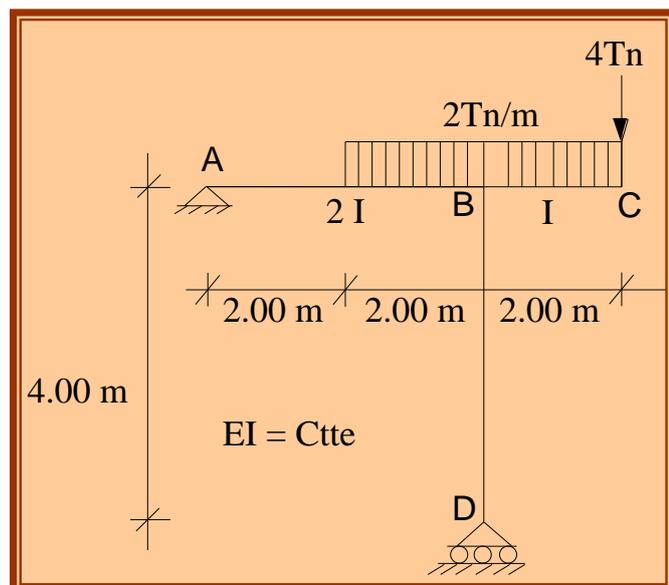
$$t_{4/5} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{45} \cdot \bar{x}_4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

$$f_4 = Q - t_{4/5}$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

10. Para la estructura mostrada; se pide, calcular:

- El giro en A
- La flecha en C
- Desplazamiento horizontal en D



**Solución:**

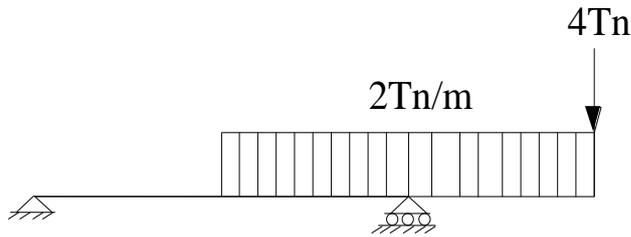
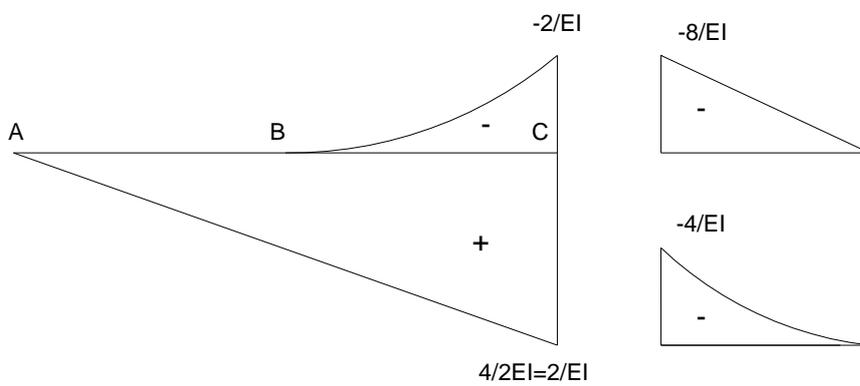
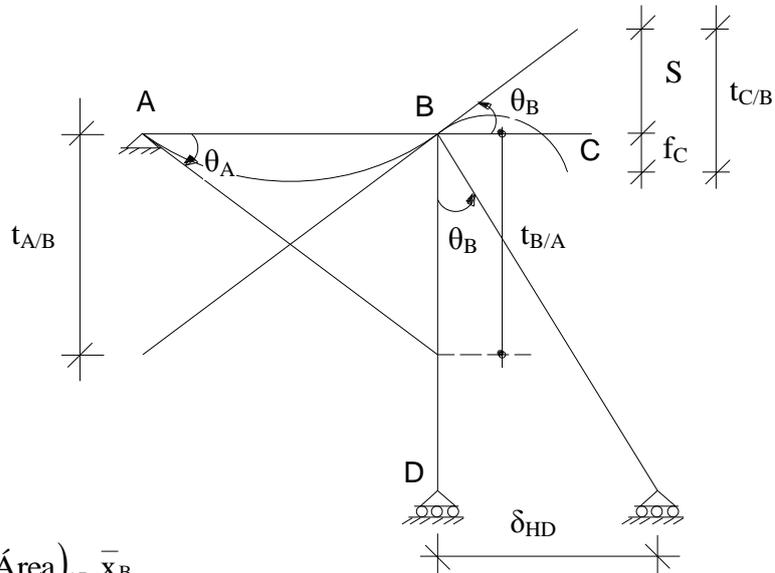


DIAGRAMA DE MOMENTOS REDUCIDOS



DEFORMADA



Luego:

$$t_{B/A} = (\text{Área})_{AB} \cdot \bar{X}_B$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{EI} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_{B/A} = \frac{16}{3EI} - \frac{2}{3EI} = \frac{14}{3EI}$$

De donde:

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{4} = \frac{3EI}{4} = \frac{7}{6EI}$$

$$\theta_A = \frac{7}{6EI}$$

Entonces:

$$t_{A/B} = (\text{Área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{EI} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{EI} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right)$$

$$t_{A/B} = \frac{32}{3EI} - \frac{14}{3EI} = \frac{18}{3EI} = \frac{6}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{t_{A/B}}{4} = \frac{6}{4EI}$$

$$\theta_B = \frac{3}{2EI}$$

$$\delta_{H_D} = 4\theta_B$$

$$\delta_{H_D} = \frac{6}{EI}$$

De donde:

$$t_{C/B} = I(\text{Área})_{CB} \cdot \bar{x}_C$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{8}{EI}\right) \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{EI}\right) \cdot \frac{3}{2}$$

$$t_{C/B} = -\frac{32}{3EI} - \frac{4}{EI} = -\frac{44}{EI}$$

De la deformada, por semejanza de triángulos:

$$\frac{S}{2} = \frac{t_{A/B}}{4}$$

$$S = \frac{3}{EI}$$

La flecha  $f_c$  vale:

$$f_c = t_{C/B} - S$$

$$f_c = \frac{44}{3EI} - \frac{3}{EI} = \frac{35}{3EI}$$

$$f_c = \frac{35}{3EI}$$

## CAPÍTULO XIII:

# MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

## METODO DE LA VIGA CONJUGADA

Este método a igual que el de eje elástico y área de momentos nos permite calcular los giros y flechas de los elementos horizontales denominados vigas o de los verticales llamados columnas.

En este capítulo estudiaremos este importante método aplicándolo tanto a vigas como marcos.

### Fundamentos Teóricos

Derivando cuatro veces la ecuación de la elástica se obtiene.

$EI y$  = Deformación (Ordenada de la elástica)

$$EI \frac{dy}{dx} = \text{pendiente}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \text{Momento} = M$$

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = \text{Fuerza cortante} = V = \frac{dM}{dx}$$

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = \text{Carga} = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

Las relaciones entre ordenadas, pendientes y momento son las mismas que la que existen entre momento, fuerza cortante y carga. Esto sugiere que puede aplicarse el método de área de momentos para determinar el momento flector. Partiendo del diagrama de cargas, de la misma manera que se ha empleado para determinar las ordenadas a partir del diagrama de momentos.

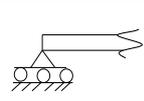
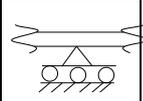
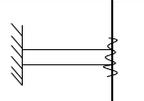
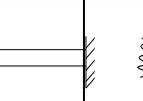
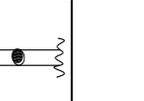
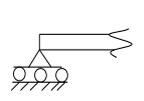
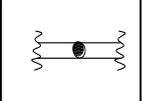
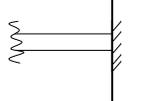
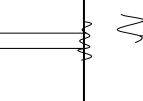
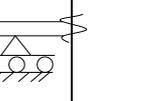
La analogía entre las relaciones entre carga – fuerza cortante – momento flector y entre momento – pendiente - ordenadas sugiere que estas últimas se puedan establecer con los métodos de diagramas de fuerza cortante y el momento flector a partir de las cargas. Para ello hay que suponer que la viga esta cargada, no con las cargas reales, sino con el diagrama de  $M/EI$  correspondiente a dichas cargas.

Considerando entonces este diagrama de  $M/EI$  como una carga ficticia, se calcula la fuerza cortante y momento flector ficticios, en un punto cualquiera, que se corresponden

con la pendiente y las ordenadas de la elástica en los mismos puntos de la viga inicial. A este método se le denomina METODO DE LA VIGA CONJUGADA.

Aplicando a una viga cargada con el diagrama de  $M/EI$  los principios estudiados para hallar la fuerza cortante y momento flector se tiene:

1. PENDIENTE REAL = FUERZA CORTANTE FICTICIA.
  2. ORDENADA REAL = MOMENTO FLECTOR FICTICIO.
- 
- a) Un apoyo extremo en la viga principal (ordenada, o sea segunda integración, nula) ha de transformarse en un apoyo (M ficticio, o sea segunda integración, nula) en la viga conjugada.
  - b) Un apoyo intermedio en la viga principal (ordenada, o sea segunda integración, nula y pendiente o primera integración, cualquiera pero igual a ambos lados) ha de transformarse en una articulación de la viga conjugada (M ficticio, segunda integración nula, V ficticio o sea primera integración, cualquiera pero igual a ambos).
  - c) Un extremo empotrado en la viga principal (pendiente y ordenada o sea primera y segunda integración nulas) ha de transformarse en un extremo libre en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea primera y segunda integración, nulas).
  - d) Un extremo libre en la viga principal (pendiente y ordenada o sea primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y momentos flectores) ha de transformarse en un extremo empotrado en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias).
  - e) Una articulación en la viga principal (pendiente o primera integración distinta a cada lado, y ordenada o segunda integración igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las demás condiciones de sujeción y momentos flectores) ha de transformarse en un apoyo intermedio de la viga conjugada (V ficticia, o sea primera integración distinta a cada lado, y M ficticio o segunda integración, igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias.)

<b>Viga Real</b>	$\theta$	f					
<b>Viga Conjugada</b>	V	W					

**Definición de Viga Conjugada:**

Es una viga ficticia de longitud igual a la de la viga real y cuya carga es el diagrama de momento flector reducido aplicado del lado de la compresión.

La viga conjugada es siempre una viga estáticamente determinada.

**Conclusión:**

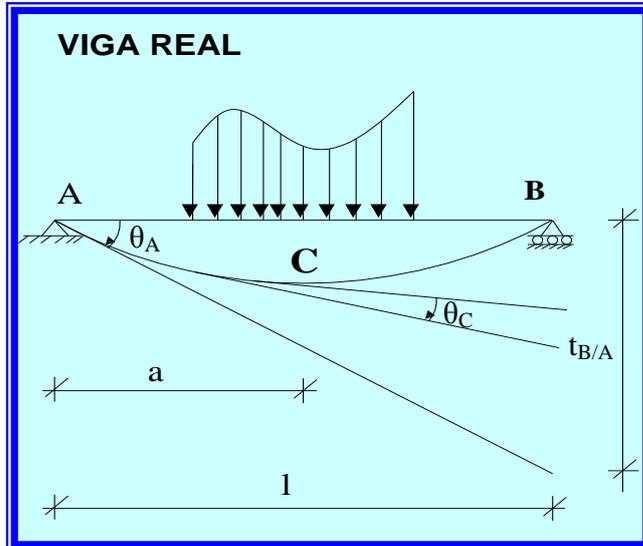
El cortante en cualquier sección de la viga conjugada es el giro en la viga real en dicha sección.

El momento flector en una sección de la viga conjugada es la flecha en la viga real en dicha sección.

**Relación entre la Viga Real y la Viga Conjugada:**

$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \text{Carga}$	$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \text{Momento}$
$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V$	$EI \frac{d y}{dx} = \theta \text{ (Primera integración)}$
$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$	$EI \frac{d y}{dx} = Y \text{ (Segunda integración)}$

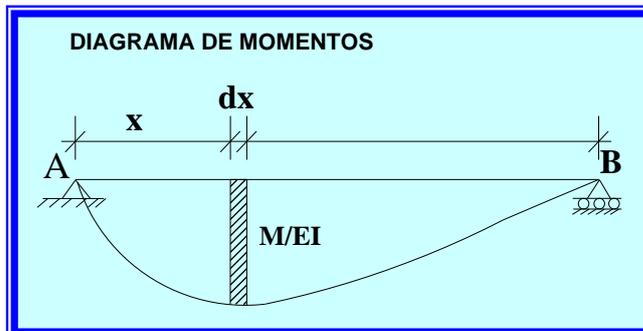
Demostración analítica de la relación entre fuerza cortante ficticia y pendiente real y Momento flector ficticio y ordenada real.



$$t_{B/A} = \int_0^l \left( \frac{M}{EI} dx \right) (\bar{x})$$

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{l}$$

$$\theta_A = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{M}{EI} dx \right) (\bar{x}) \dots \dots \dots (1)$$

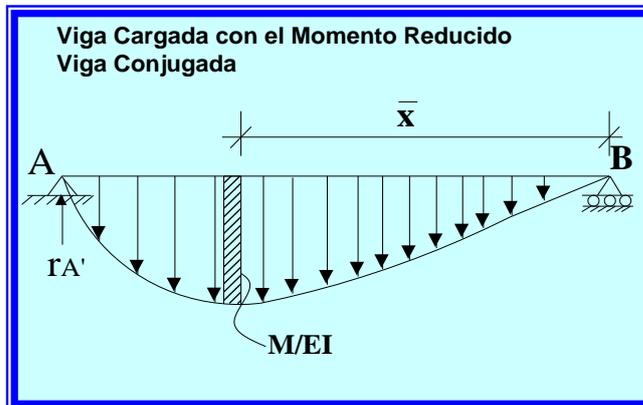


En la viga conjugada calculamos el valor de  $r'_A$ :

$$\sum M_{B'} = 0$$

$$r_{A'} \cdot l = \int_0^l \left( \frac{M}{EI} dx \right) (\bar{x})$$

$$r_{A'} = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{M}{EI} dx \right) (\bar{x}) \dots \dots \dots (2)$$



De (1) y (2):

Concluimos que:

$$\theta_A = r_{A'}$$

El giro en el apoyo es igual a la fuerza cortante en el apoyo correspondiente de la viga conjugada:

Según la ecuación de Breese:  $\theta_C = \theta_A - \theta_{AC}$

$$\theta_C = r_{A'} - \int_0^a \left( \frac{M}{EI} dx \right) (\bar{x}) \dots \dots \dots (3)$$

Calculando en la viga conjugada la fuerza cortante en C:

$$V_{C'} = r_{A'} - \int_0^a \left( \frac{M}{EI} dx \right) \dots\dots\dots(4)$$

De (3) y (4) concluimos que:

$$\theta_C = V_{C'}$$

Por lo tanto podemos concluir:

EL GIRO EN UNA SECCIÓN CUALESQUIERA DE LA VIGA REAL ES IGUAL A LA FUERZA CORTANTE EN LA SECCIÓN CORRESPONDIENTE DE LA VIGA CONJUGADA:

En la viga Real vemos que la flecha del punto C es:

$$f_c = a\theta_C - t_{C/A}$$

$$f_c = a.r_{A'} - \int_0^a \left( \frac{M}{EI} dx \right) x \dots\dots\dots(5)$$

En la Viga Conjugada:

$$M_{f_c} = r_{A'}(a) - \int_0^a \left( \frac{M}{EI} dx \right) x \dots\dots\dots(6)$$

Donde:

$M_{f_c}$  : Es el momento flector de C' en la viga conjugada.

De las ecuaciones (5) y (6) concluimos que:



Es decir:

LA FLECHA O DEFLEXIÓN VERTICAL EN UNA SECCIÓN CUALESQUIERA DE LA VIGA REAL ES IGUAL AL MOMENTO FLECTOR EN LA SECCIÓN CORRESPONDIENTE DE LA VIGA CONJUGADA.

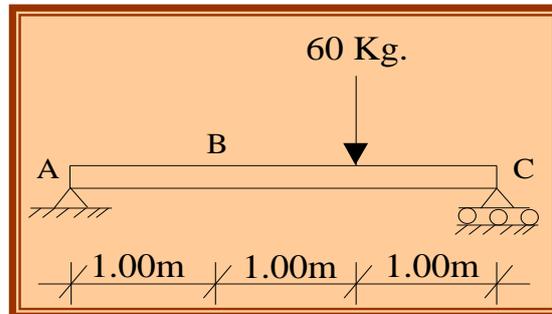
**Convención de Signos:**

Si la FUERZA CORTANTE sale con signo POSITIVO el GIRO es HORARIO

Si el MOMENTO FLECTOR sale con signo NEGATIVO la FLECHA es HACIA ABAJO.

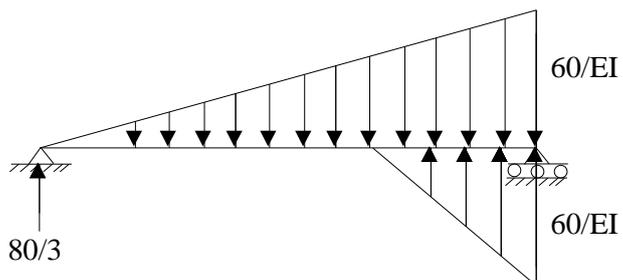
### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el desplazamiento vertical del punto B en la viga mostrada.



**Solución:**

Viga Conjugada con los momentos reducidos:



Cálculo de la reacción:

$$3R = \frac{60 \times 3}{2} \times \frac{3}{3} - \frac{60 \times 1}{2} \times \frac{1}{3}$$

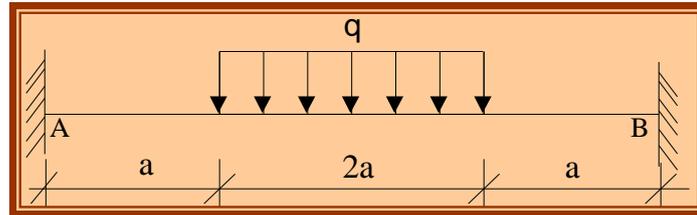
$$R = \frac{80}{3}$$

Luego:

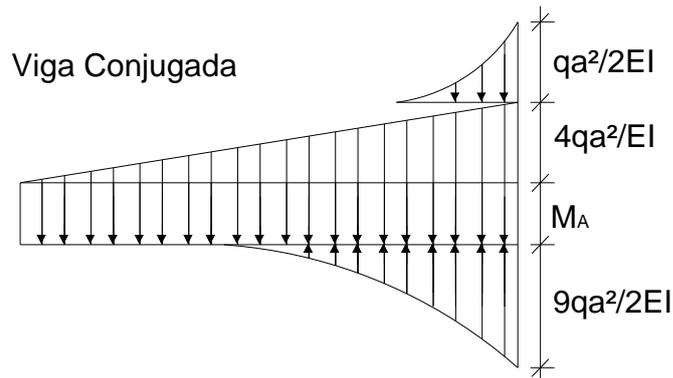
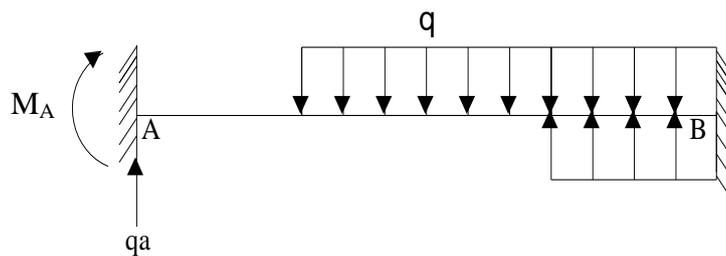
$$M_{x=1} = \frac{80}{3}x - \frac{20}{6}x^3$$

$$M_{x=1} = f_{x=1} = \frac{70}{3EI}$$

2. Para la viga mostrada se pide calcular el momento de empotramiento en A, así como la flecha en  $x=3a$



**Solución:**



Por la simetría de la estructura y de la carga deducimos que las reacciones verticales valen  $qa$ .

**Cálculo del Momento de Empotramiento:**

Hallándolo por Área de momentos, tenemos:

$$4M_A + (4qa^2) \left( \frac{4}{2} a \right) + \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{9qa^2}{2} \cdot \frac{3a}{3}$$

$$M_A = -\frac{11}{12} qa^2$$

**Cálculo de la Flecha en  $x=3a$ .**

Hallándola por viga conjugada, tenemos:

Tomando momentos de izquierda a derecha en la viga conjugada.

$$= 3a \left( -\frac{11}{12} \cdot \frac{qa^2}{EI} \right) \left( \frac{3}{2}a \right) + \left( \frac{3}{2}a \right) \left( \frac{3qa^2}{EI} \right) \frac{3a}{3} - \frac{4a^2}{2EI} q \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{4}$$

$$M_{x=3a} = f_{x=3a} = -\frac{7}{24} \cdot \frac{qa^4}{EI}$$

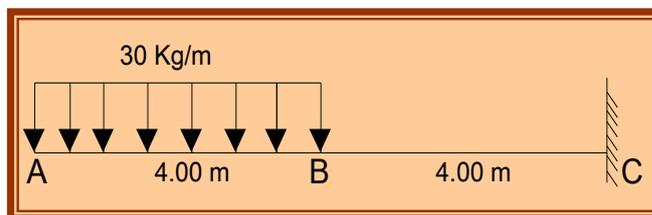
Para el problema anterior, calcular el giro en  $x=3a$ .

Calculando el cortante en  $x=3a$  en la viga conjugada.

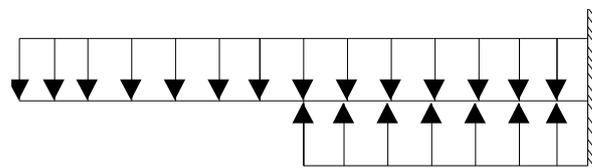
$$V_{x=3a} = \left( \frac{3}{2}a \right) \left( \frac{3qa^2}{EI} \right) - \frac{4}{2} \cdot \frac{a^2q}{EI} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{11}{12} \cdot \frac{qa^2}{EI} (3a)$$

$$V_{x=3a} = \theta_{x=3a} = \frac{5}{12} \frac{qa^3}{EI}$$

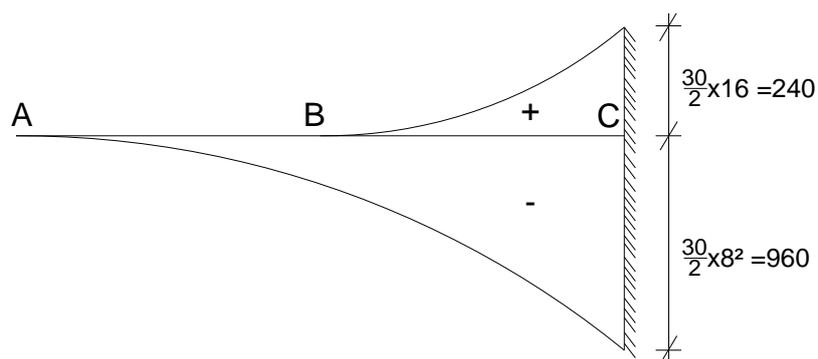
3. Calcular la flecha en los puntos A y B de la viga mostrada.



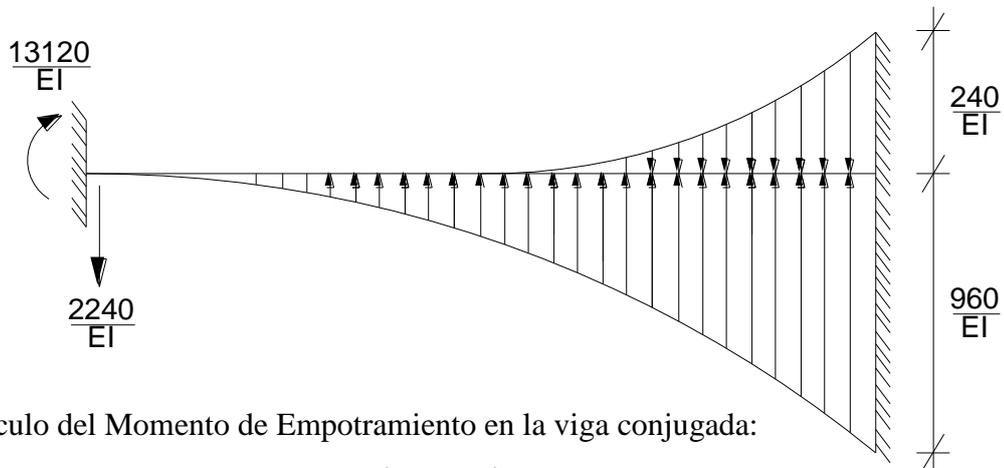
**Solución:**



**Diagrama de Momentos**



Viga Conjugada cargada con los momentos reducidos:



Cálculo del Momento de Empotramiento en la viga conjugada:

$$M = \frac{960}{3EI} \times 8 \times \frac{3}{4} \times 8 - \frac{240}{3EI} \times 4 \times \left( 4 + \frac{3}{4} \times 4 \right)$$

$$M = \frac{13120}{EI} \quad \text{sentido horario}$$

Cálculo de la reacción en la viga conjugada:

$$R = \frac{960}{3EI} \times 8 - \frac{240}{3EI} \times 4 = \frac{2240}{EI} \quad \text{hacia abajo}$$

Cálculo de la flecha en el punto A.

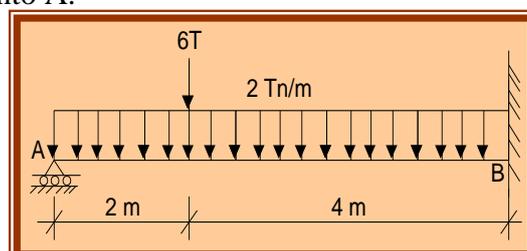
$$f_A = M_{x=0} = -\frac{13120}{EI}$$

Cálculo de la flecha en el punto B.

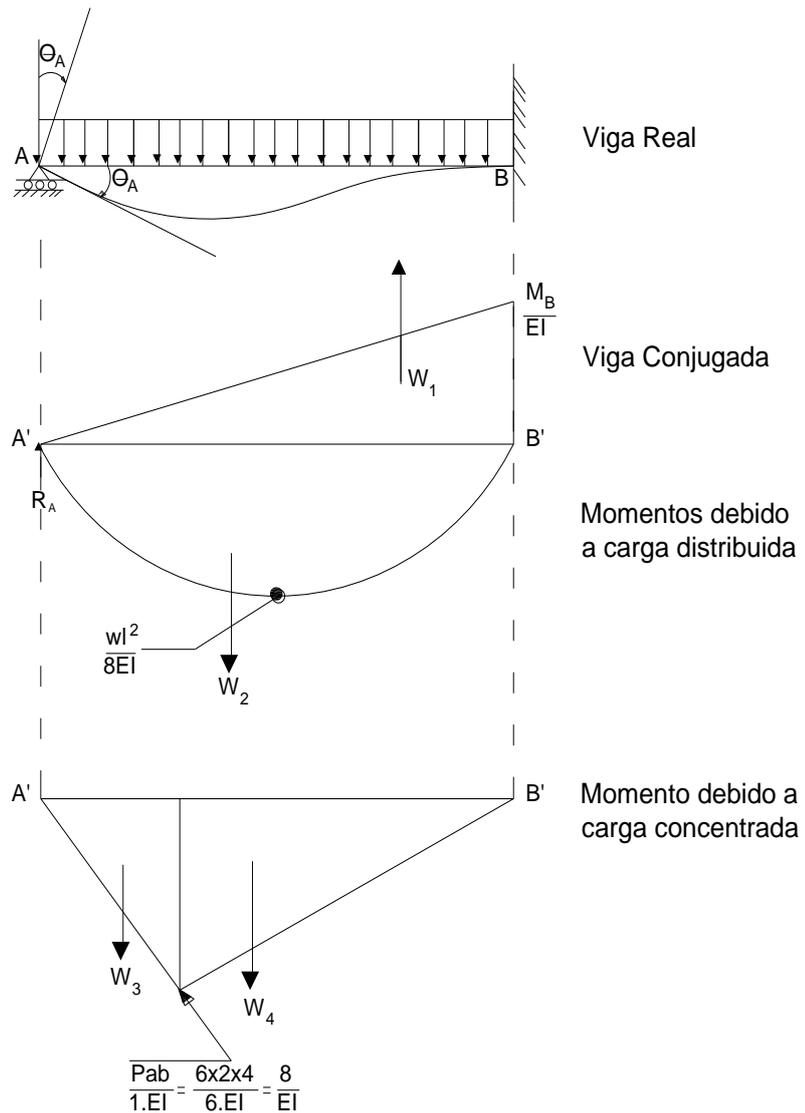
$$f_B = M_{x=4} = -\frac{13120}{EI} + \frac{2240}{EI} \times 4 - \frac{30}{2} \times \frac{16}{EI} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{4}$$

$$f_B = -\frac{4480}{EI}$$

4. Para la viga mostrada, calcular el momento en el punto B, así como el giro producido en el punto A.



**Solución:**



**Cálculo de los w:**

$$w_1 = \frac{1}{2}(6)\left(\frac{M_B}{EI}\right) = \frac{3.M_B}{EI}$$

$$w_2 = \frac{2}{3}(6)\left(\frac{9}{EI}\right) = \frac{36}{EI}$$

$$w_3 = \frac{1}{2}(2)\left(\frac{8}{EI}\right) = \frac{8}{EI}$$

$$w_4 = \frac{1}{2}(4)\left(\frac{8}{EI}\right) = \frac{16}{EI}$$

**Equilibrio en la viga conjugada:**

**Tomando momentos respecto al punto A' de la viga conjugada:**

$$w_2 x 3 + w_3 x 2 x 2 + w_4 \left( 2 + \frac{1}{3} x 4 \right) = w_1 x \frac{2}{3} x 6$$

$$3w_2 + \frac{4}{3}w_3 + \frac{10}{3}w_4 = 4w_1$$

Reemplazando los valores de  $w$  en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{108}{EI} + \frac{32}{EI} + \frac{160}{EI} = \frac{12M_B}{EI}$$

De donde; obtenemos el valor de  $M_B$ :

Siendo  $M_B = 14.33 \text{ Tn}\cdot\text{m}$

Al salir el valor del momento en B (Positivo), significa que la suposición fue la correcta:

### Cálculo del giro en A.

El giro del punto A de la viga es igual a la fuerza cortante en la viga conjugada; es decir, el valor de la fuerza cortante en A' de la viga conjugada:

$$\theta_B = V'_A$$

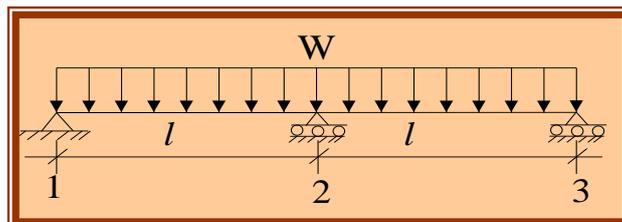
La sumatoria de fuerzas verticales en el eje Y nos dá:

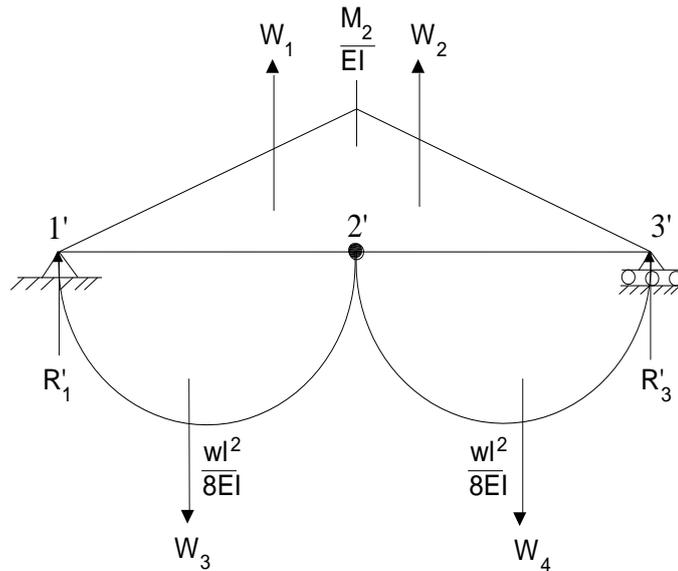
$$R'_A + w_1 = w_2 + w_3 + w_4$$

$$R'_A + 3 \left( \frac{14.33}{EI} \right) = \frac{36}{EI} + \frac{8}{EI} + \frac{16}{EI}$$

$$\theta_A = R'_A = \frac{17}{EI}$$

5. Para la estructura mostrada, calcular el momento en el punto número dos.





*Viga Conjugada cargada con los momentos reducidos*

**Cálculo de w:**

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left( \frac{M_2}{EI} \right) = \frac{M_2}{2 \cdot EI} \cdot l$$

$$w_3 = w_4 = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \left( \frac{wl^2}{8EI} \right) = \frac{wl^3}{12 \cdot EI}$$

Trabajando con la viga conjugada y tomando momentos respecto al punto 2' que es una rótula, y tomando el tramo izquierdo tenemos:

$$R'_1 \cdot l + w_1 \cdot \frac{1}{3} - w_3 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$R'_1 = \frac{wl^3}{24EI} - \frac{M_2 \cdot l}{6EI} \dots \dots \dots (1)$$

Tomando el equilibrio en el eje Y y considerando:

$$w_1 = w_2, \quad w_3 = w_4, \quad R'_1 = R'_3$$

Por la simetría de la estructura tenemos:

$$2 \cdot R'_1 + 2 \cdot w_1 = 2 \cdot w_3, \quad R'_1 + w_1 = w_3$$

Remplazando valores tenemos:

$$R'_1 = \frac{wl^3}{12.EI} - \frac{M_2.l}{2.EI} \dots\dots\dots(2)$$

(2) en (1):

$$\frac{wl^3}{12.EI} - \frac{M_2.l}{2.EI} + \frac{M_2.l}{6.EI} - \frac{wl^3}{24.EI} = 0$$

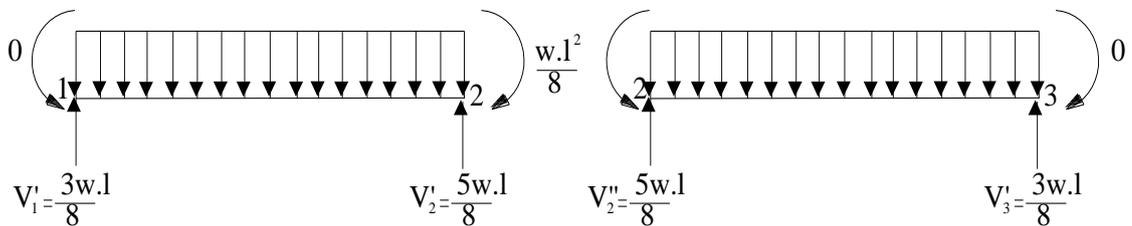
$$2wl^2 - 12M_2 + 4M_2 - wl^2 = 0$$

$$8M_2 = wl^2$$

$$M_2 = \frac{wl^2}{8}$$

Al salirnos el valor del momento positivo significa que los hemos asumido correctamente.

Para el problema anterior, calcular el valor de las reacciones.



Tomando momentos respecto al punto 1 en la viga real isostatizada y trabajando sólo con el tramo izquierdo obtenemos:

$$wl \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} \cdot wl^2 = v'_2 \cdot l$$

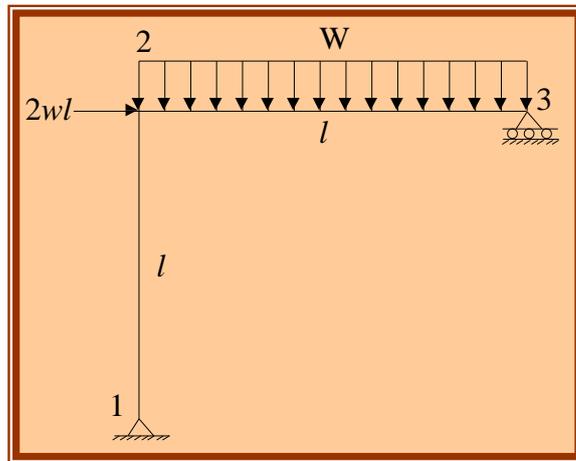
$$v'_2 = \frac{5}{8} \cdot wl$$

Para el otro tramo el cortante también tiene el mismo valor, siendo el valor de R<sub>2</sub>:

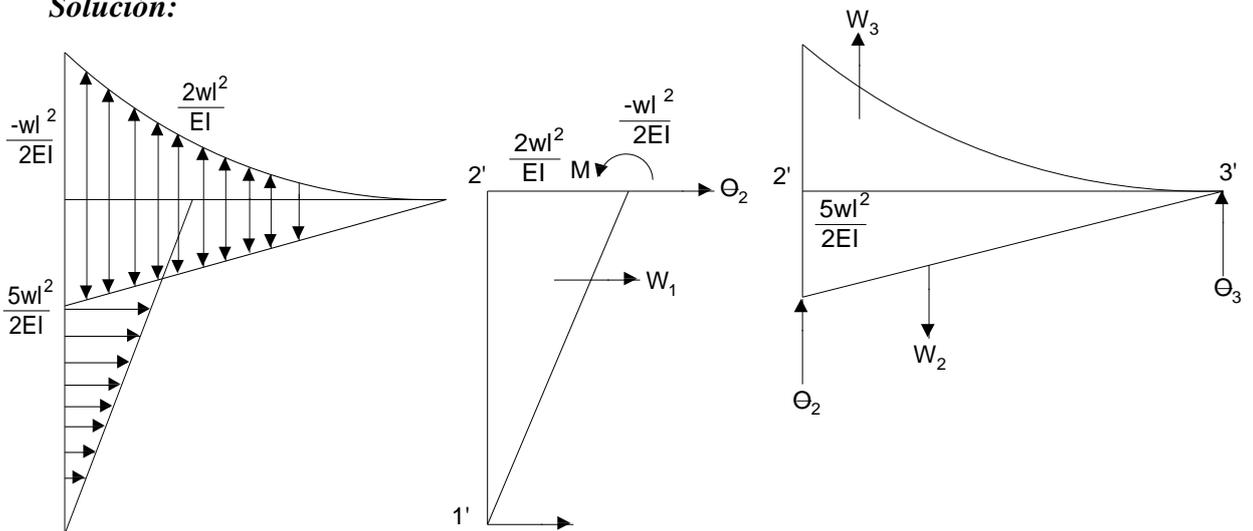
$$R_2 = \frac{5}{8} \cdot wl + \frac{5}{8} \cdot wl = \frac{5}{4} \cdot wl$$

$$R_2 = \frac{5}{4} \cdot wl$$

6. Para la estructura mostrada; se pide calcular el desplazamiento horizontal del punto número dos.



**Solución:**



**Luego:**

$$W_1 = 2 \cdot \frac{wl^2}{EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{wl^3}{EI}$$

$$W_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{wl^2}{EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{wl^3}{EI}$$

$$W_3 = \frac{wl^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} = \frac{wl^2}{6EI}$$

En la barra 2'3', tomando momentos respecto a 3':

$$l \cdot \theta_2 - \frac{5}{4} \cdot \frac{wl^3}{EI} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{wl^3}{6EI} \cdot \frac{3}{4} l = 0$$

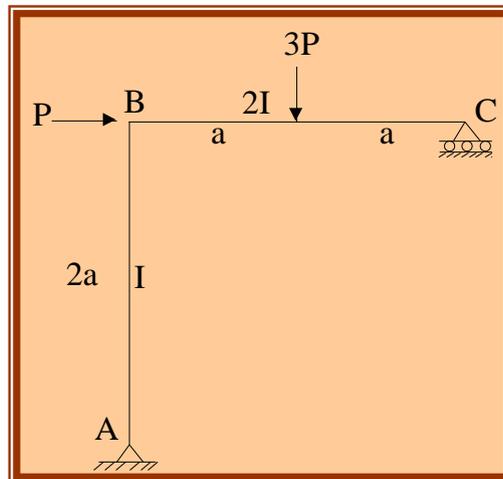
De donde obtenemos  $\theta_2 = \frac{17}{24} \cdot \frac{wl^3}{EI}$

En la barra 1'2', tomando momentos respecto a 1'.

$$\frac{wl^3}{EI} \cdot \frac{2}{3}l + \theta_2 \cdot l = \Delta H_2$$

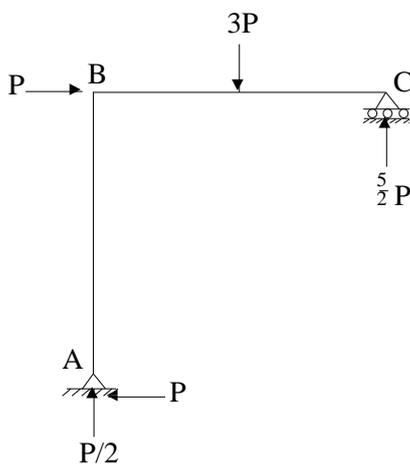
$$\Delta H_2 = \frac{11}{8} \cdot \frac{wl^4}{EI}$$

7. Para la estructura mostrada, se desea saber cuánto vale el desplazamiento horizontal del punto B.

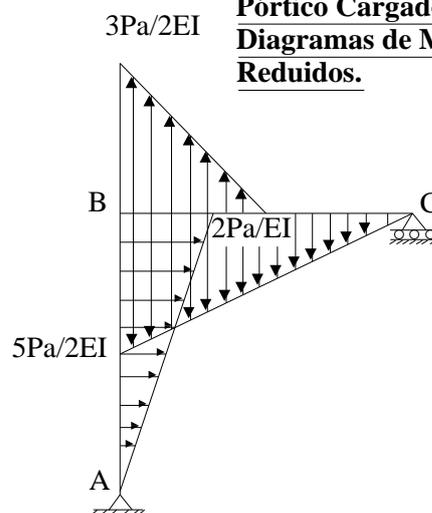


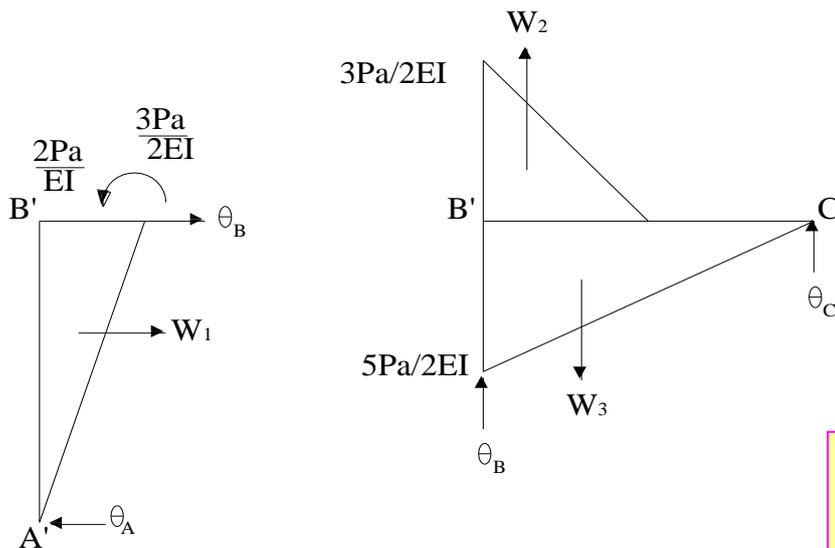
**Solución:**

Pórtico Real con sus reacciones.



Pórtico Cargado con los Diagramas de Momentos Reduidos.





$$W_1 = \frac{2Pa^2}{EI}$$

$$W_2 = \frac{3Pa^2}{4EI}$$

$$W_3 = \frac{5Pa^2}{2EI}$$

Analizando la viga B'C'.

Tomando momentos respecto a B'.

$$\theta_C (2a) + W_2 \cdot \frac{a}{3} = W_3 \cdot \frac{2}{3} a$$

$$2\theta_C + \frac{1}{4} \cdot \frac{Pa^2}{EI} = \frac{5}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{17}{24} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

Analizando la sumatoria de fuerzas en el eje Y.

$$\theta_B + \theta_C + W_2 = W_3$$

$$\theta_B + \frac{17}{24} \cdot \frac{Pa^2}{EI} + \frac{3}{4} \cdot \frac{Pa^2}{EI} = \frac{5}{2} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{25}{24} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

Analizando la columna A'B'.

El equilibrio de las fuerzas horizontales es:

$$\theta_A = \theta_B + W_1$$

$$\theta_A = \frac{25}{24} \cdot \frac{Pa^2}{EI} + \frac{2Pa^2}{EI} = \frac{73}{24} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$$

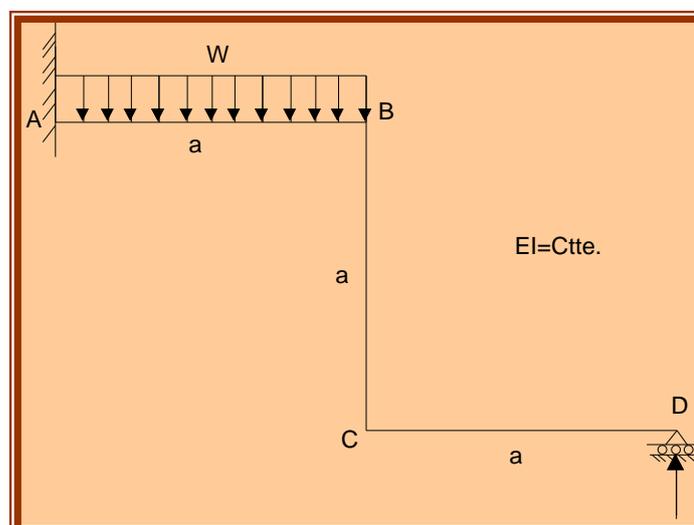
Tomando momentos respecto a B'.

$$\theta_A (2a) = \Delta H_B + W_1 \cdot \frac{2a}{3}$$

$$\frac{73}{12} \cdot \frac{Pa^3}{EI} = \Delta H_B + \frac{4}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

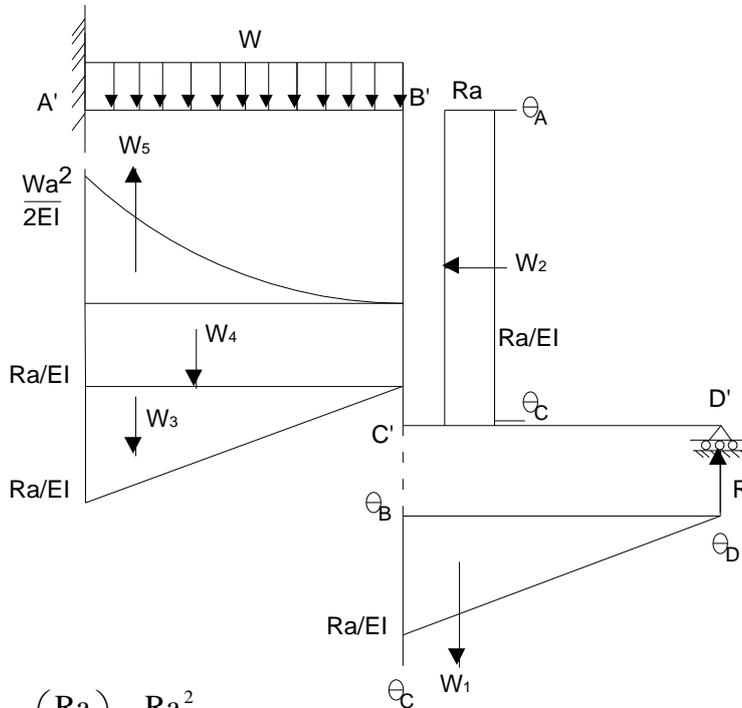
$$\Delta H_B = \frac{19}{4} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

8. Para la estructura mostrada; calcular el giro, desplazamiento horizontal y vertical del punto D.



**Solución:**

A Continuación presentamos la estructura con los momentos reducidos para cada elemento:

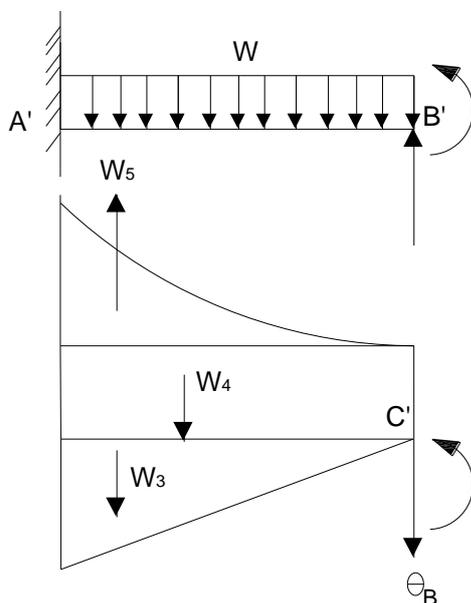


$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( \frac{Ra}{EI} \right) = \frac{Ra^2}{2EI}$$

$$W_2 = \frac{Ra^2}{EI} \quad , \quad W_3 = \frac{Ra^2}{EI}$$

$$W_4 = \frac{Ra^2}{2EI} \quad , \quad W_5 = \frac{1}{3} \cdot (a) \cdot \left( \frac{wa^2}{2EI} \right) = \frac{wa^3}{6EI}$$

De donde:



La Sumatoria de fuerzas verticales para el tramo mostrado es;

$$\theta_B + W_3 + W_4 = W_5$$

$$\theta_B + \frac{Ra^2}{EI} + \frac{Ra^2}{2EI} = \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{wa^3}{6EI} - \frac{3Ra^2}{2EI}$$

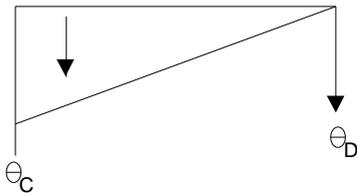
Tomando momentos respecto a B':

$$W_5 \cdot \frac{3}{4} a = \Delta V_C + W_4 \cdot \frac{2}{3} a + W_3 \cdot \frac{1}{2} a$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{wa^4}{EI} = \Delta V_c + \frac{1}{3} \cdot \frac{Ra^3}{EI} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ra^3}{EI}$$

$$\Delta V_c = \frac{1}{8} \cdot \frac{wa^4}{EI} - \frac{5}{6} \cdot \frac{Ra^3}{EI}$$



Tomando momentos en D' para el tramo mostrado:

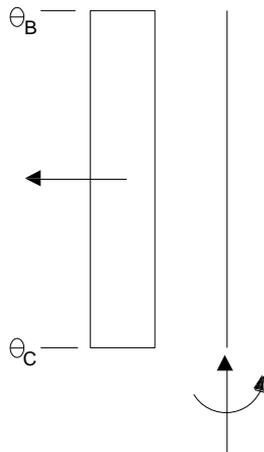
$$\theta_c(a) + \Delta V_c = W_1 \cdot \frac{2}{3}a$$

Reemplazando valores tenemos:

$$a \cdot \theta_c + \frac{1}{8} \cdot \frac{wa^4}{EI} - \frac{5}{6} \cdot \frac{Ra^3}{EI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Ra^3}{EI}$$

$$\theta_c = \frac{7}{6} \cdot \frac{Ra^2}{EI} - \frac{1}{8} \cdot \frac{wa^3}{EI}$$

Por otro lado:



$$\theta_B = W_2 + \theta_C$$

$$\frac{wa^3}{6EI} - \frac{3}{2} \cdot \frac{Ra^2}{EI} = \frac{Ra^2}{EI} + \frac{7}{6} \cdot \frac{Ra^2}{EI} - \frac{1}{8} \cdot \frac{wa^3}{EI}$$

De donde:

$$R = \frac{7}{88} wa$$

## CAPÍTULO XIV:

# MÉTODO DE LOS TRES MOMENTOS

## MÉTODO DE LOS TRES MOMENTOS

### Ecuación Generalizada:

Sea una viga sometida a una carga cualesquiera y soportada de forma arbitraria.

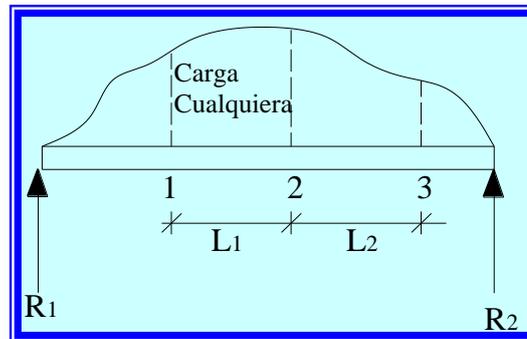


Figura n°01

A esta viga le hemos cortado por tres puntos cualesquiera (1), (2) y (3). Además hemos reemplazado los efectos de cargas y fuerzas a la derecha o izquierda de cada sección de corte por la fuerza cortante y momento flector como se muestra a continuación:

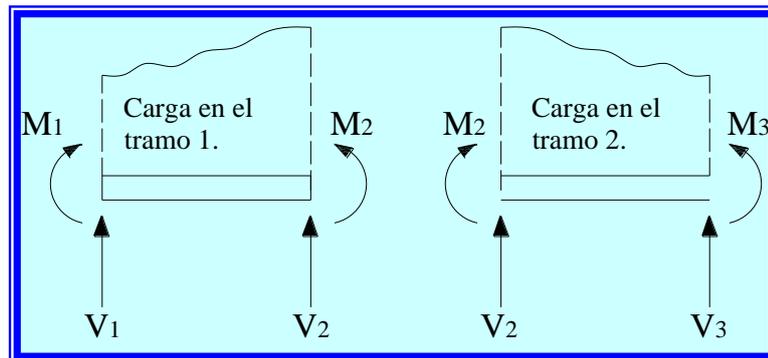


Figura n°02

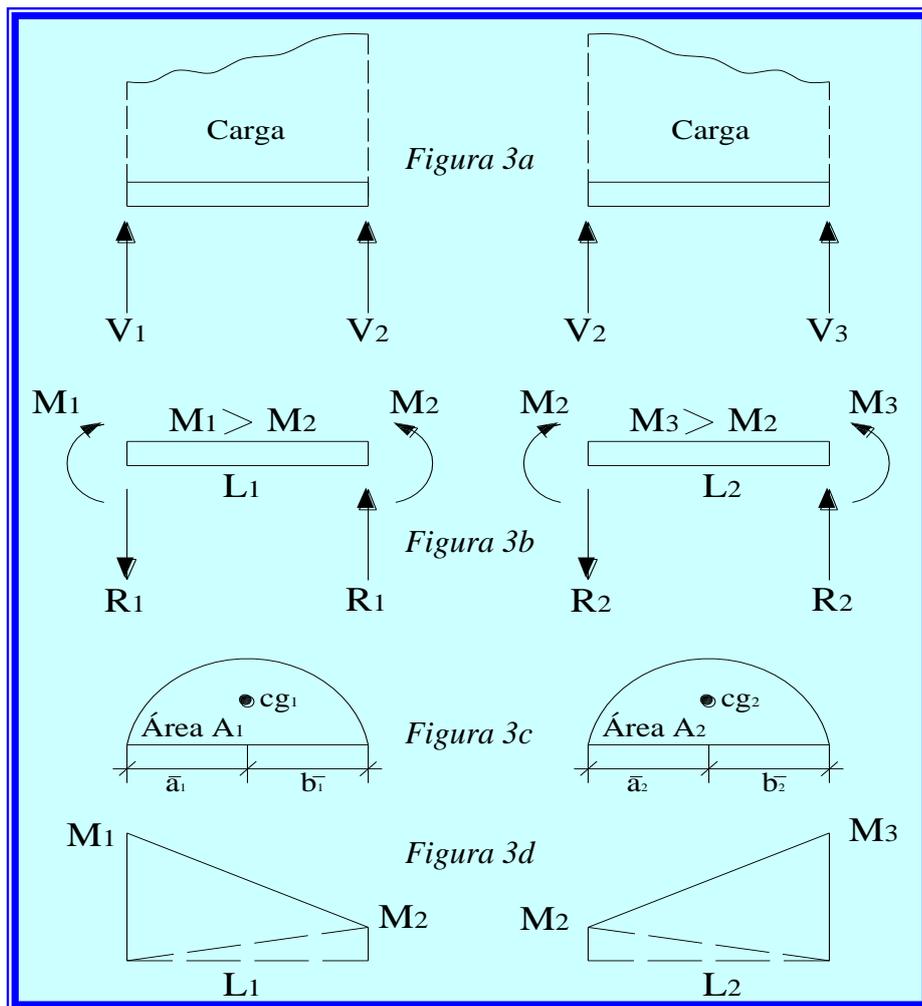
Las longitudes de los tramos será  $L_1$  y  $L_2$ ; y los momentos flectores serán  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  que como están presentadas serán positivos.

Los cortantes serán  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_2''$  y  $V_3$ .  $V_2$  y  $V_2''$  no necesariamente son iguales dependiendo de lo que haya en el punto (2).

De acuerdo a la convención  $V_1$  y  $V_2''$  son positivos y  $V_2$  y  $V_3$  son negativos.

De esta manera hemos transformado cada uno de los tramos en una viga simplemente apoyada con dos estados de carga.

Por un lado la carga real del tramo y por otro lado los pares aplicados en sus extremos, como se muestra a continuación.

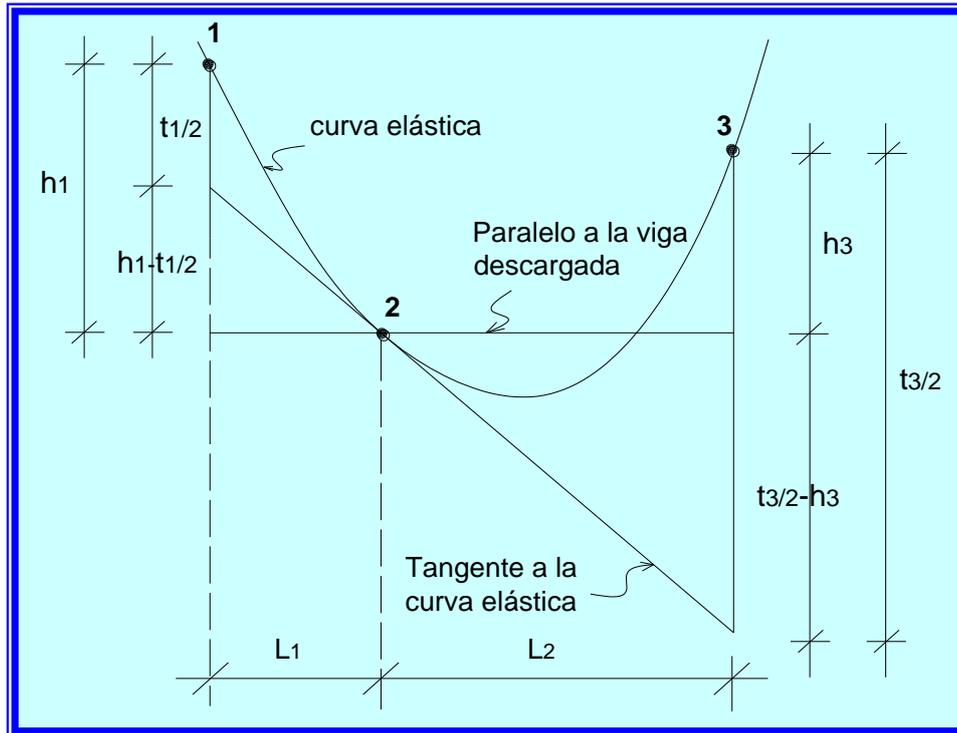


**Figura 3**

Para la demostración de la fórmula de tres momentos lo haremos en base al método de área de momentos.

En nuestro análisis hemos considerado que los momentos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son positivos. En el esquema anterior se presentan en forma genérica los diagramas de momentos debido a cargas (ver figura c) y los diagramas debido a los momentos en los nudos (figura d).

A continuación mostraremos la elástica de la viga analizada. La tangente trazada a la elástica en el punto (2) determina las desviaciones tangenciales  $t_{1/2}$  y  $t_{3/2}$  de los puntos (1) y (3) respectivamente y la recta trazada por dos paralelas a la posición inicial de la viga que por comodidad supondremos horizontal determinan la altura de los puntos (1) y (3) respecto del dos, alturas que son  $h_1$  y  $h_3$ .



Del gráfico tenemos que:

$$\frac{h_1 - t_{1/2}}{L_1} = \frac{t_{3/2} - h_3}{L_2}$$

De donde:

$$\frac{t_{1/2}}{L_1} + \frac{t_{3/2}}{L_2} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \dots\dots (a)$$

Los valores de las desviaciones tangenciales vienen dadas por:

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{12} \cdot \bar{x}_1$$

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} (\text{Área})_{32} \cdot \bar{x}_3$$

Donde  $(\text{Área})_{12} \cdot \bar{x}_1$  es el momento del área del diagrama de momentos flectores entre los puntos 1 y 2 respecto del punto 1.

Como se puede ver en la figura 3 de este capítulo el diagrama de momentos flectores se ha descompuesto en el área  $A_1$  (fig. 3c) y las dos áreas triangulares en que se descompone el área trapezoidal producida por los dos pares extremos (fig 3d). Lo mismo sucede con el área del tramo 32.

De esta manera y con la ayuda de la figura tres podemos concluir que:

La desviación del punto (1) respecto de la tangente en (2), viene dada por:

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI} \left( A_1 \cdot \bar{a}_1 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot L_1 \cdot \frac{1}{3} L_1 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot L_1 \cdot \frac{2}{3} L_1 \right) \dots \dots \dots (1)$$

Y la desviación tangencial de 3 respecto de la misma tangente en dos:

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} \left( A_2 \cdot \bar{b}_2 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot L_2 \cdot \frac{2}{3} L_2 + \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot L_2 \cdot \frac{1}{3} L_2 \right) \dots \dots \dots (2)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1 y 2 en a y simplificando:

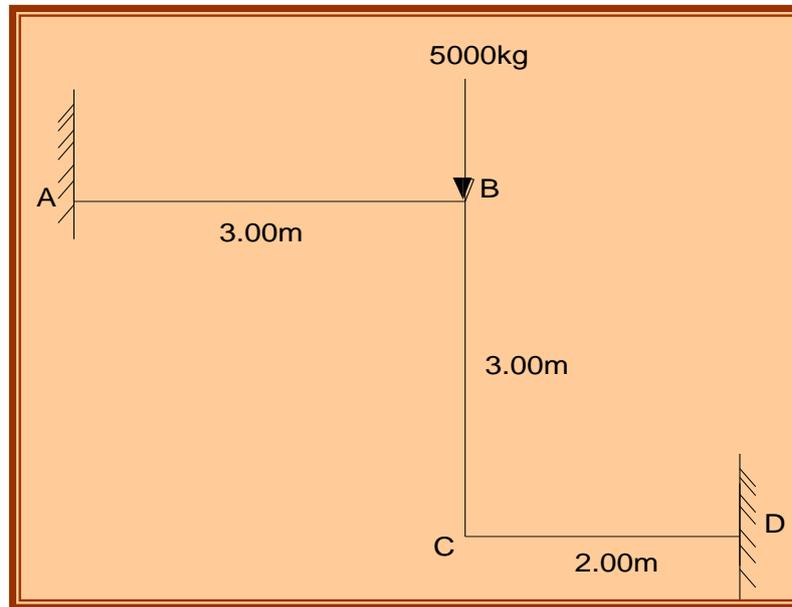
$$M_1 \cdot L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3 \cdot L_2 + \frac{6A_1 \cdot \bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2 \cdot \bar{b}_2}{L_2} = 6EI \left( \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

**Ecuación general de tres momentos  
CASOS PARTICULARES**

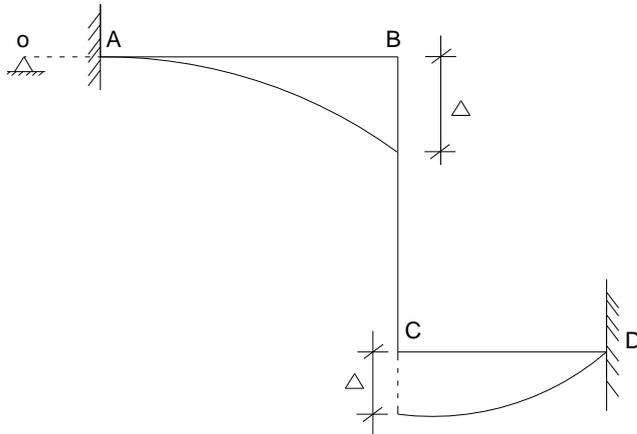
La ecuación deducida expresa una relación general entre los momentos flectores en tres puntos cualesquiera de la viga. Si los puntos 1, 2 y 3 están al mismo nivel de la viga flexada, las alturas  $h$  y  $h$  se anulan y lo mismo ocurre con el segundo de la ecuación general.

**PROBLEMAS DE APLICACIÓN**

1. Para la estructura mostrada, se pide calcular los momentos en los puntos A,B y C.



**Solución:**



**Tramo OAB:**

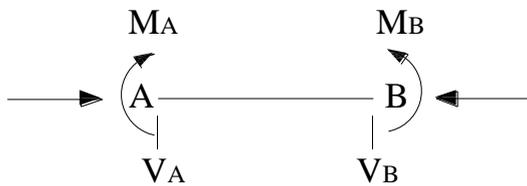
$$2M_A(3) + M_B(3) = 6EI\left(-\frac{\Delta}{3}\right)$$

**Tramo ABC:**

$$M_A(3) + 2M_B(6) + M_C(3) = 6EI\left(\frac{\Delta}{3}\right)$$

**Tramo BCD:**

$$M_B(3) + 2M_C(5) = 6EI\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$



$$\sum M_B = 0$$

$$3V_A + M_A = M_B$$

$$V_A = \frac{1}{3}(M_B - M_A)$$



$$\sum M_C = 0$$

$$V_A(2) = M_C$$

$\sum F_y = 0$  en toda la estructura.

$$V_A + V_D = 5000$$

Las ecuaciones a resolver son:

$$6M_A + 3M_B = -2EI\Delta$$

$$3M_A + 12M_B + 3M_C = 2EI\Delta$$

$$3M_B + 10M_C = 3EI\Delta$$

$$\frac{1}{3}(M_B - M_A) + \frac{1}{2}M_C = 5000$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos para:

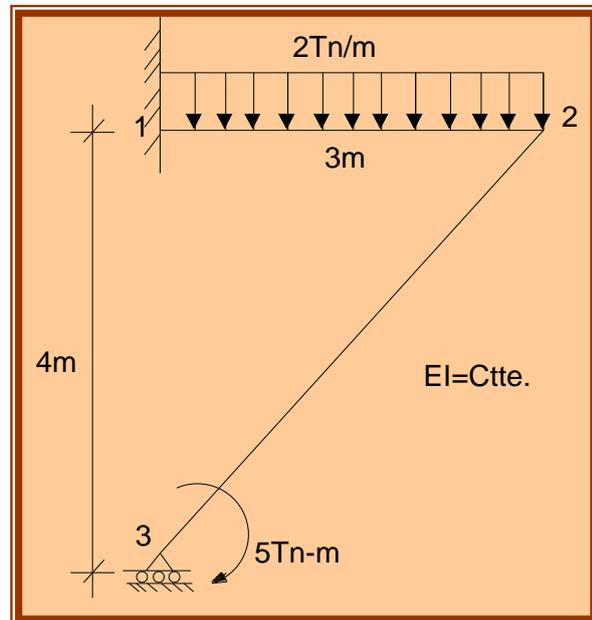
$$M_A = -6555.22 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 3239.10 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

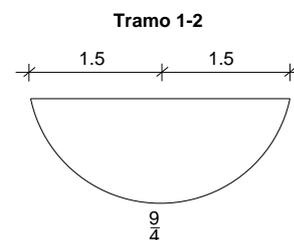
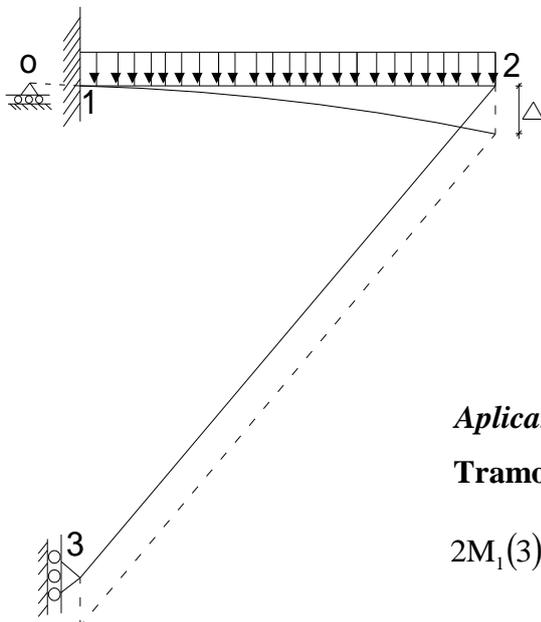
$$M_C = 3470.44 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$EI = 14807.19$$

2. Para la estructura mostrada se desea saber el valor de:
- Momento en 1 y 2.
  - EL desplazamiento vertical.



**Solución:**



$$\text{Área} = \frac{2}{3}(3)\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{2}$$

**Aplicando la ecuación general de Tres Momentos:**

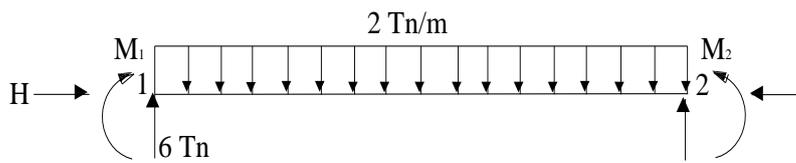
**Tramo 0-1-2:**

$$2M_1(3) + M_2(3) + \frac{6}{3}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 6EI\left(-\frac{\Delta}{3}\right)$$

**Tramo 1-2-3:**

$$M_1(3) + 2M_2(3+5) + (-5)(5) + \frac{6}{3}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 6EI\left(-\frac{\Delta}{3}\right)$$

De la Estática nos apoyamos para analizar la viga 1-2:



**Luego:**

$$\sum M_2 = 0$$

$$M_1 + 6(3) = M_2 + 2(3)(1.5)$$

$$M_1 - M_2 = -9$$

**Las ecuaciones a resolver son:**

$$12M_1 + 6M_2 + 27 = -4EI\Delta$$

$$6M_1 + 32M_2 - 23 = 4EI\Delta$$

$$M_1 - M_2 = -9$$

**Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:**

$$M_1 = -6.178 \text{ T} - \text{m}$$

$$M_2 = 2.8214 \text{ T} - \text{m}$$

$$\Delta = \frac{7.5536}{EI}$$

**CAPÍTULO XV:**

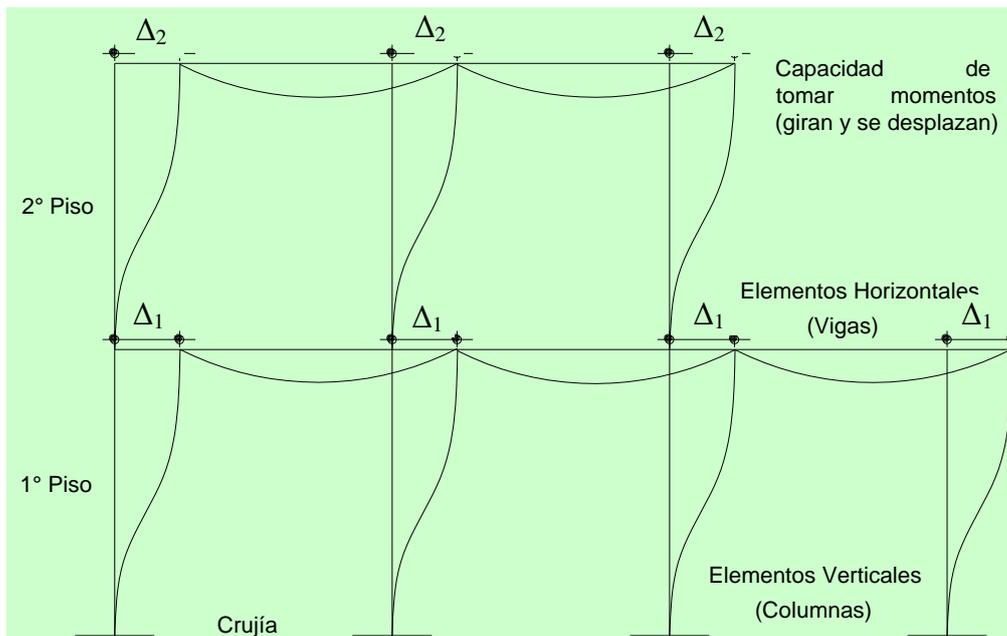
**MÉTODO DE LAS  
DEFORMACIONES  
ANGULARES**

## MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES (SLOPE DEFLECTION)

Este método se utiliza para casos hiperestáticos.

Su aplicación es en estructuras aperticadas y vigas continuas.

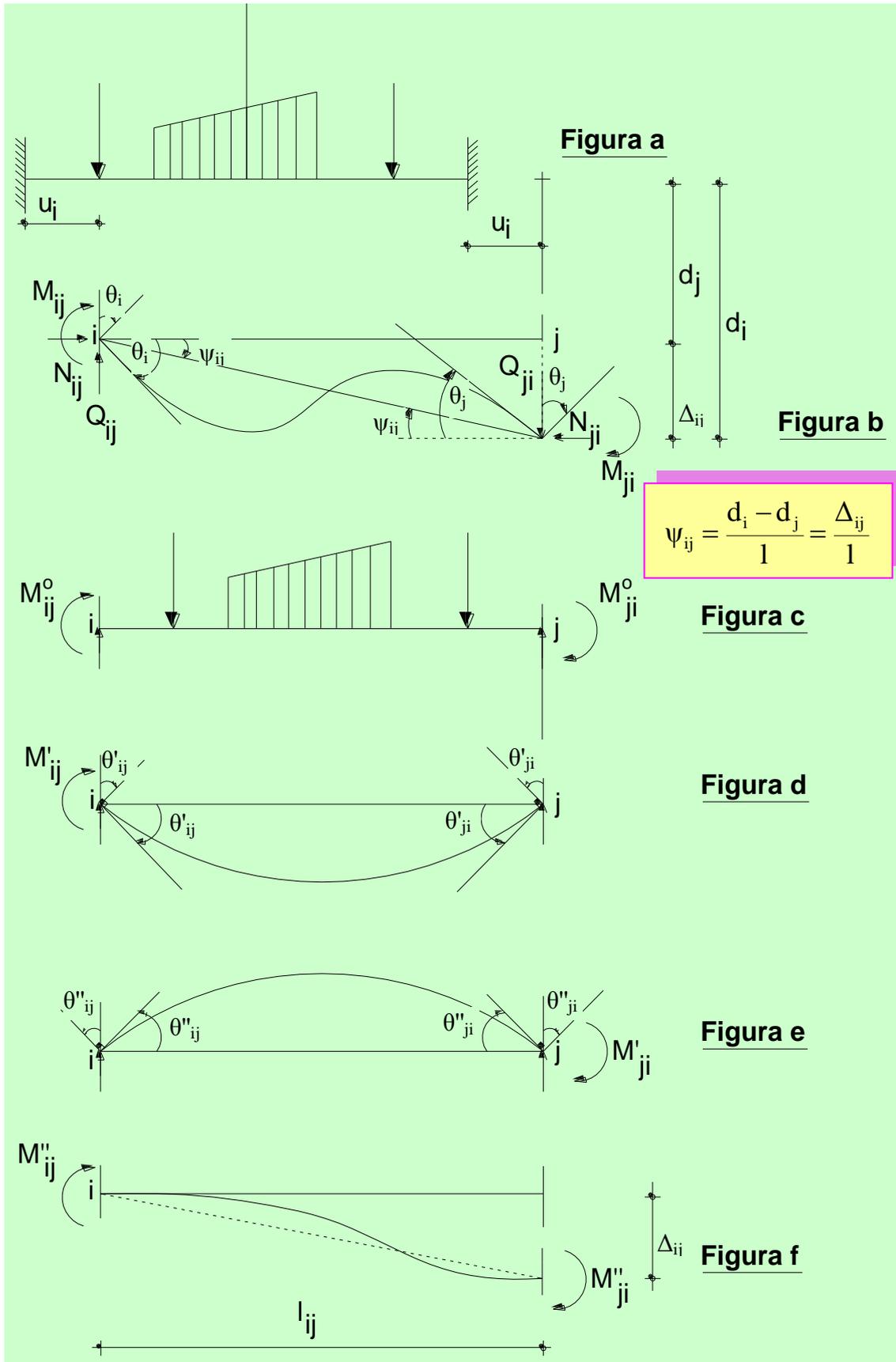
Los desplazamientos en un mismo nivel son iguales y no se consideran esfuerzos normales.



Considerando un elemento  $i'j'$  de una estructura aperticada.

Las cargas que actúan en el elemento  $i'j'$  pasa a la posición  $ij$  generándose desplazamientos y giros así como los momentos  $M_{ij}$  y  $M_{ji}$ . Se supone que los desplazamientos  $u_i = u_j$  son iguales, despreciándose la variación del elemento debido a la fuerza axial o fuerza normal. La longitud del elemento no varía.

La figura "b" por superposición puede descomponerse en la suma de los casos de las figuras "c", "d", "e" y "f".



Luego; se tiene que los momentos:

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + M'_{ij} + M''_{ij} \dots\dots\dots(\alpha)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^0 + M'_{ji} + M''_{ji} \dots\dots\dots(\beta)$$

Considerando como positivo el sentido horario para:

$$M_{ij}, M_{ji}, \theta_i, \theta_j, \psi_{ij}$$

Tendremos de las figuras c, d, e y f.

$$\theta_i = \theta'_{ij} - \theta''_{ij} \dots\dots\dots(I)$$

$$\theta_j = \theta'_{ji} - \theta''_{ji}$$

Sabemos de las figuras d y e:

$$\theta'_{ij} = M'_{ij} \cdot l_{ij} / 3EI \dots\dots\dots(1)$$

$$\theta'_{ji} = M'_{ji} \cdot l_{ji} / 6EI \dots\dots\dots(2)$$

$$\theta''_{ij} = M'_{ji} \cdot l_{ij} / 6EI \dots\dots\dots(3)$$

$$\theta''_{ji} = M'_{ij} \cdot l_{ji} / 3EI \dots\dots\dots(4)$$

Reemplazando (1), (2), (3), (4) en (I) y despejando obtenemos:

$$M'_{ij} = \frac{2EI}{l_{ij}} (2\theta_i + \theta_j) \dots\dots\dots(5)$$

$$M'_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}} (2\theta_j + \theta_i) \dots\dots\dots(6)$$

De la figura “f” encontramos:

$$M''_{ij} = -M''_{ji} = -6EI\Delta_{ij} / l_{ij}^2$$

$$\text{tg}\psi_{ij} = \psi_{ij} = \Delta_{ij} / l_{ij}$$

$$M''_{ij} = -M''_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}} \psi_{ij} \dots\dots\dots(7)$$

Finalmente: (5), (6) y (7) en ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ):

$$M_{ij} = M^o_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) \dots\dots\dots(8)$$

$$M_{ji} = M^o_{ji} + \frac{2EI}{l_{ij}}(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij}) \dots\dots\dots(9)$$

A las expresiones (8) y (9) se les denomina Ecuaciones de SLOPE DEFLECTION o de PENDIENTE Y DEFLEXIÓN.

Llamando a  $K=I / l$  rigidez

$$M_{ij} = M^o_{ij} + 2EK(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

$$M_{ji} = M^o_{ij} + 2EK(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij})$$

$$M_{ij} = M^o_{ij} + K_{ij}(2(2E\theta_i) + (2E\theta_j)(6E\psi_{ij}))$$

$$M_{ji} = M^o_{ji} + K_{ij}(2(2E\theta_j) + (2E\theta_i)(6E\psi_{ij}))$$

Llamando:

$$2E\theta_i = \theta'_i$$

$$2E\theta_j = \theta'_j$$

$$6E\psi_{ij} = \phi_{ij}$$

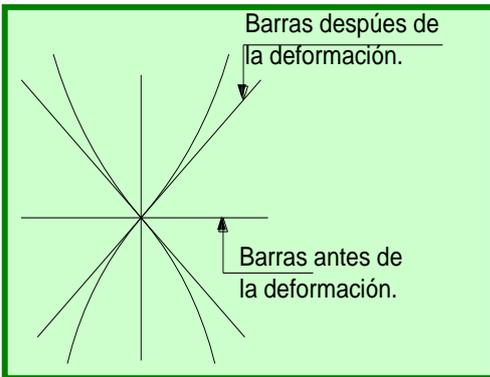
Tendremos:

$$M_{ij} = M^o_{ij} + K_{ij}(2\theta'_i + \theta'_j - \phi_{ij}) \dots\dots\dots(10)$$

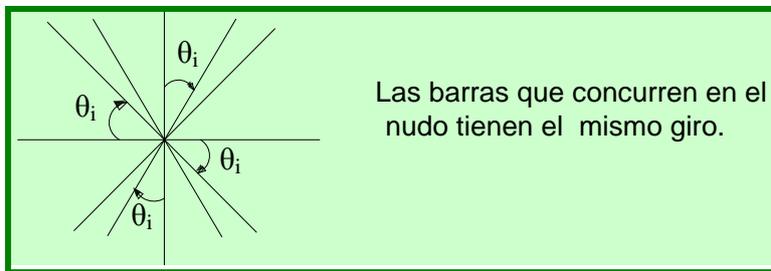
$$M_{ji} = M^o_{ji} + K_{ij}(2\theta'_j + \theta'_i - \phi_{ij}) \dots\dots\dots(11)$$

En las ecuaciones (10) y (11) los giros y desplazamientos son incógnitas.

**Hipótesis en el Análisis de Estructuras:**

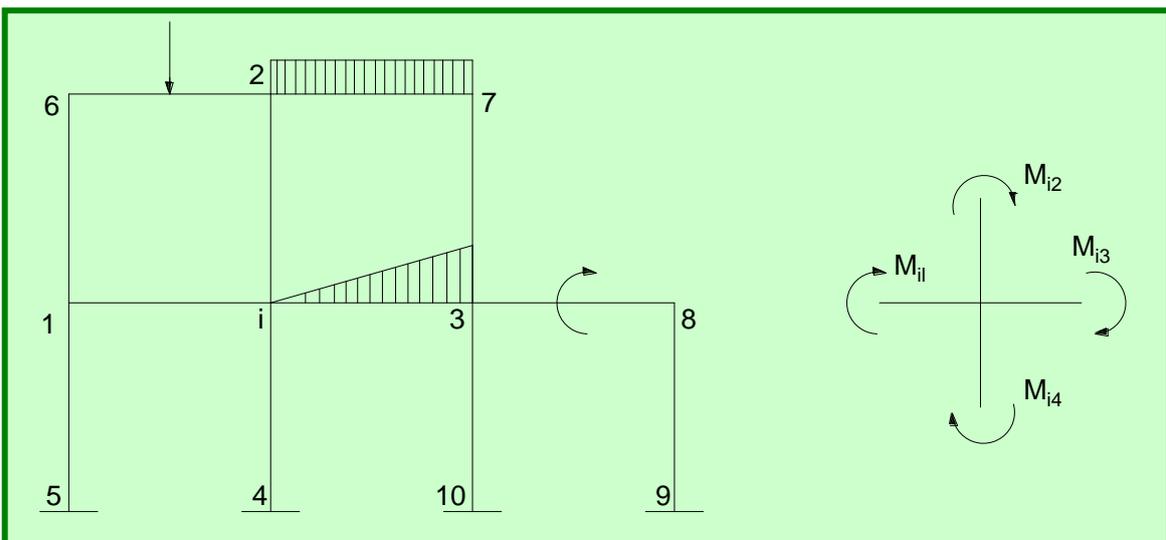


Los nudos son indeformables.



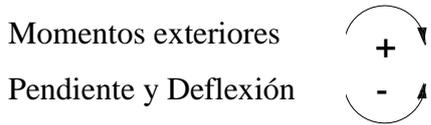
**Hipergeometría.-** Es el número total de giros y desplazamientos que tiene la estructura.  
 Son las incógnitas del problema.

**Ecuaciones de Equilibrio:**

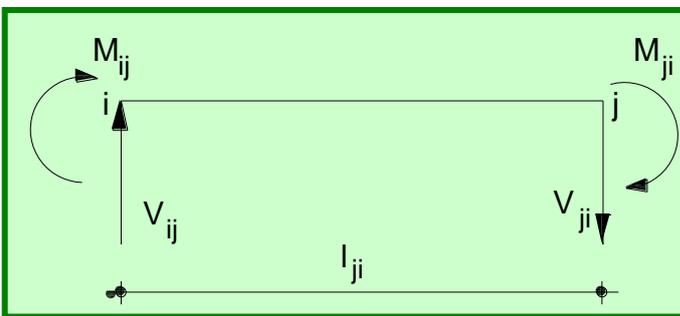


$$\sum_{j=i}^4 M_{ij} = 0 \quad M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + M_{i4} = 0$$

<b>Hipergeometría</b>	giros	: 07
	Desplazamientos	: 02
	Incógnitas	: 09



Trabajando con los momentos exteriores se tiene:



$$M_{ij}, M_{ji}$$

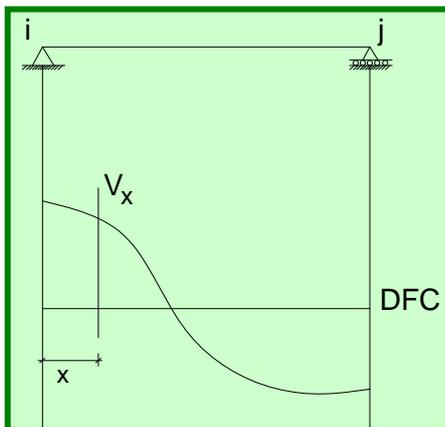
**Momentos Hiperestáticos:**

$$M_j = 0$$

$$M_{ij} + M_{ji} + V_{ij} \cdot l_{ij} = 0$$

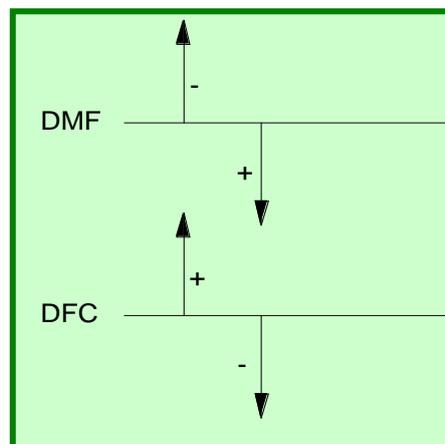
$$V_{ij} = -\frac{1}{l_{ij}}(M_{ij} + M_{ji})$$

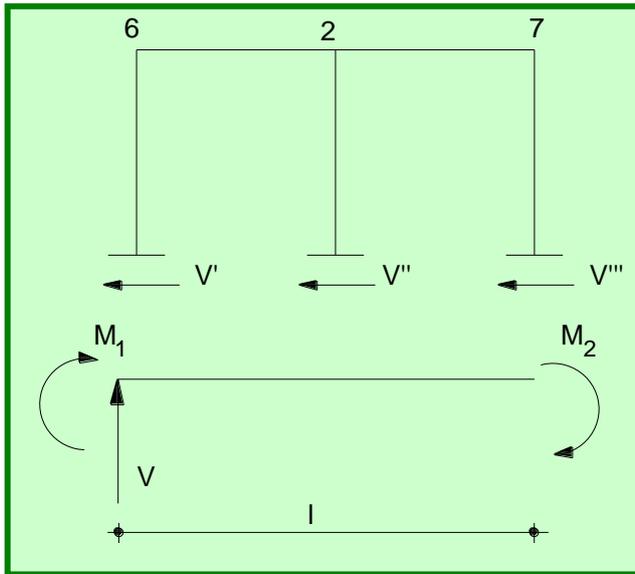
**Corte Isostático:**



$$V_T = V_{0 \text{ isostático}} - \frac{1}{l_{ij}}(M_{ij} + M_{ji})$$

Los diagramas de momento flector se dibujan del lado de la tracción.

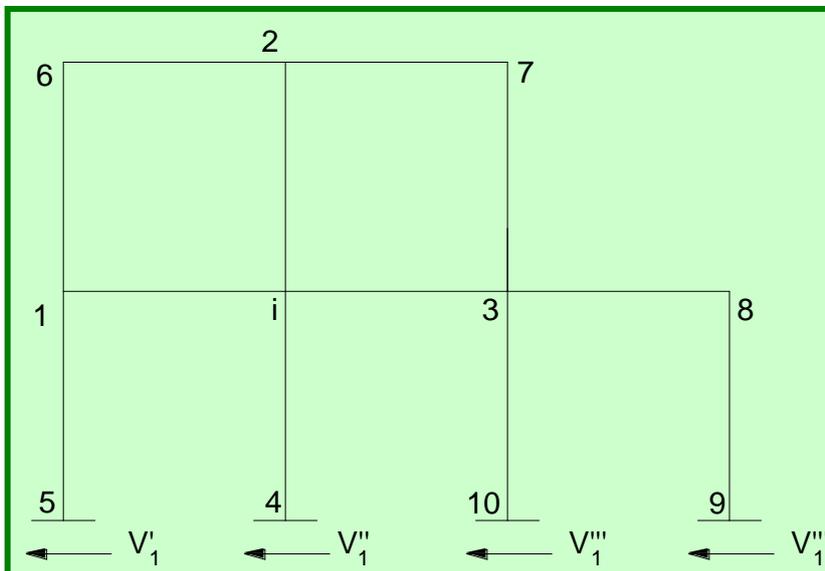




$$V' + V'' + V''' = 0$$

$$V = -\frac{1}{l}(M_1 + M_2)$$

Se aplica a  $V'$ ,  $V''$ ,  $V'''$



$$V = -\frac{1}{l}(M_1 + M_2)$$

$$V'_1 = -\frac{1}{l_{15}}(M_{51} + M_{15})$$

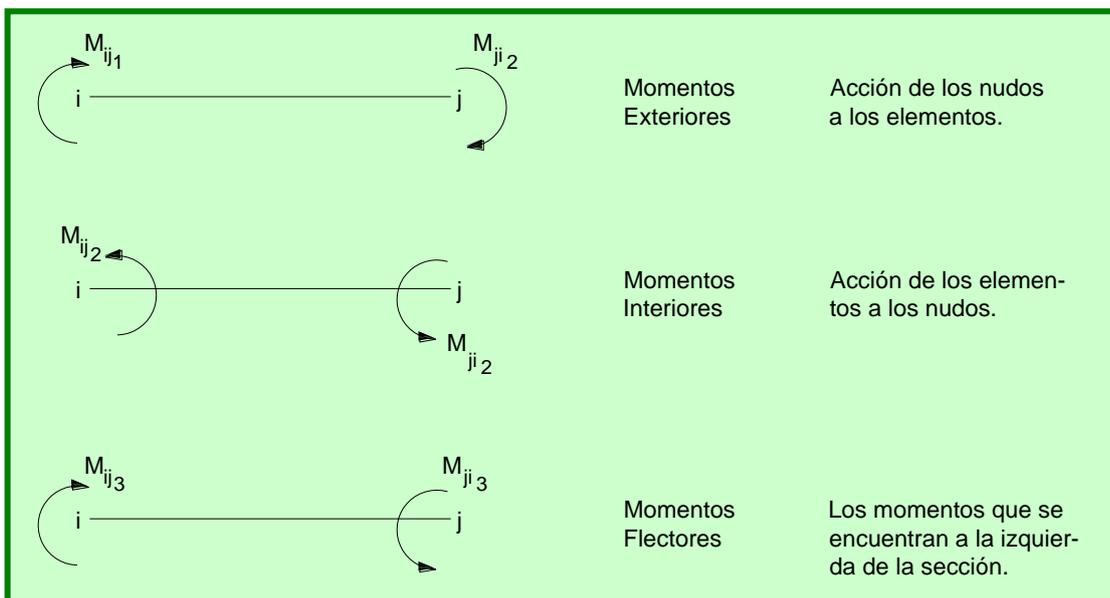
Igualmente se hará para:

$$V_1', V_1'', V_1''', V_1''''$$

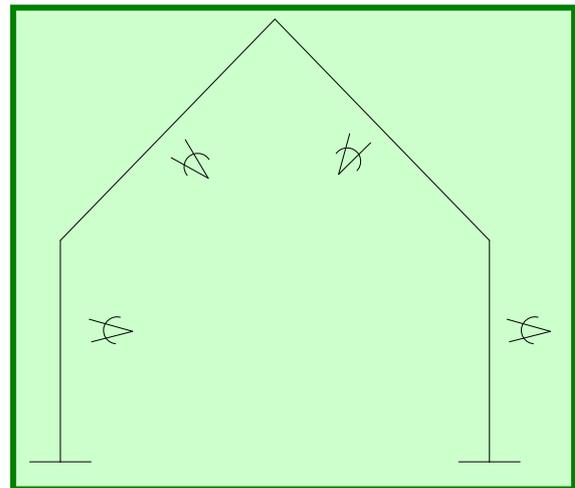
Luego:

$$V_1' + V_1'' + V_1''' + V_1'''' = 0$$

### Tipos de momentos para trabajar con el Método de Pendiente y Deflexión



**Convención para trazar los Diagramas de Momentos y Fuerza Cortante.**

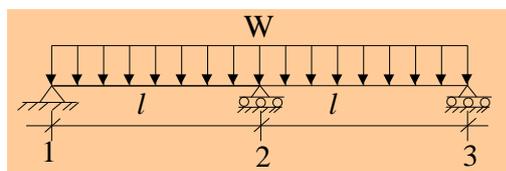


Para trazar los diagramas correspondientes nos ubicamos en la parte interior de la estructura analizada y desde esa posición trazamos los diagramas respectivos.

Para el tramo derecho de una estructura nos ubicamos en la parte de afuera de dicha estructura y de allí seguimos la convención correspondiente.

**APLICACIONES**

1. Para la estructura mostrada. Calcular los giros en A, B y C.



**Solución:**

**Hipergeometría:**

Por los apoyos que tiene la estructura, sólo hay giros. No hay desplazamiento horizontal ni vertical.

**Momentos de Empotramiento Perfecto:**

$$M_{AB} = -M_{BA} = -\frac{wl^2}{12}$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = -\frac{wl^2}{12}$$

**Ecuaciones en la Barras:**

$$M_{AB} = -\frac{wl^2}{12} + \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{wl^2}{12} + \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A)$$

$$M_{BC} = -\frac{wl^2}{12} + \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = \frac{wl^2}{12} + \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \theta_B)$$

**Equilibrio de Nudos:**

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{CB} = 0$$

*Reemplazando los valores de los momentos, tenemos:*

$$4\frac{EI}{l}\theta_A + 2\frac{EI}{l}\theta_B + 0 = \frac{wl^2}{12}$$

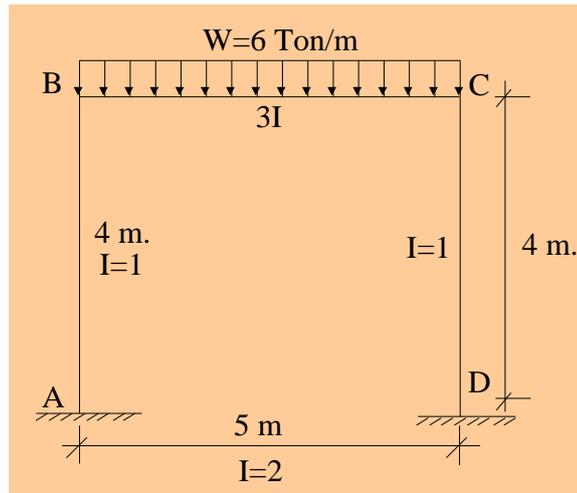
$$2\frac{EI}{l}\theta_A + 8\frac{EI}{l}\theta_B + 2\frac{EI}{l}\theta_C = 0$$

$$0 + 2\frac{EI}{l}\theta_B + 4\frac{EI}{l}\theta_C = -\frac{wl^2}{12}$$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos:*

$$\theta_A = \frac{wl^3}{48EI}, \quad \theta_B = 0, \quad \theta_C = -\frac{wl^3}{48EI}$$

2. Para la estructura mostrada. Hallar los giros en B y C, así como los momentos en cada nudo.



**Solución:**

Como la estructura es simétrica solo hay giro en B y C ya que por la simetría no hay empotramiento.

**Momentos de Empotramiento:**

$$M_{BC} = -\frac{6 \times 25}{12} = -12.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = \frac{6 \times 25}{12} = +12.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

**Aplicando las ecuaciones de pendiente y deflexión para cada nudo:**

$$M_{AB} = 0 + \frac{2EI}{4}(\theta_B)$$

$$M_{BA} = 0 + \frac{2EI}{4}(2\theta_B)$$

$$M_{BC} = -12.5 + \frac{4EI}{5}(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = +12.5 + \frac{4EI}{5}(2\theta_C + \theta_B)$$

$$M_{CD} = 0 + \frac{2EI}{4}(2\theta_C)$$

$$M_{DC} = 0 + \frac{2EI}{4}(\theta_C)$$

**Equilibrio de Nudos:**

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

Sustituyendo los valores de los momentos en las ecuaciones de equilibrio y reduciendo términos, se obtiene respectivamente:

$$\frac{13}{5}EI\theta_B + \frac{4}{5}EI\theta_C = 12.5$$

$$\frac{4}{5}EI\theta_B + \frac{13}{5}EI\theta_C = -12.5$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{EI}{5} \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ -12.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.944 \\ -6.944 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EI}$$

Reemplazando estos valores se obtienen los momentos:

$$M_{AB} = +3.472 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{BA} = +6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{BC} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

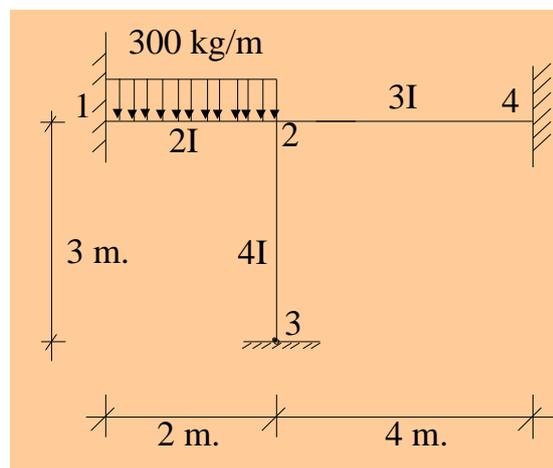
$$M_{CB} = +6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{CD} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{DC} = -3.472 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Finalmente los momentos con sus respectivos signos serán:

$$M_{AB} = +3.472 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{BA} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{BC} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{CD} = -6.944 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_{DC} = +3.472 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

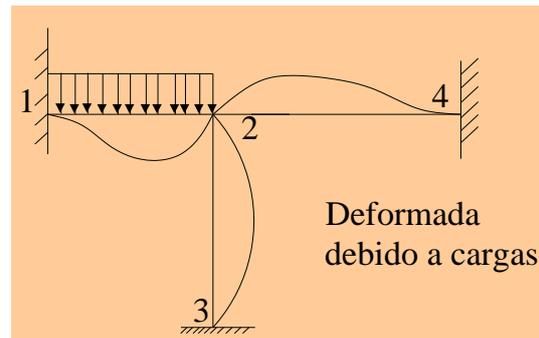
3. Para la estructura mostrada. Calcular los giros en los puntos 2 y 3, así como los momentos en cada nudo.



**Solución:**

**Hipergeometría:**

Debido a los empotramientos no hay desplazamiento, habiendo sólo giro en los puntos 2 y 3. En los nudos 1 y 4 los giros son nulos por ser empotramientos perfectos. En el nudo hay tres giros debido a la rótula.



**Momentos de Empotramiento Perfecto:**

$$M_{12}^0 = -\frac{3000(2)^2}{12} = -1000 \text{ kg - m}, \quad M_{21}^0 = +1000 \text{ kg - m}$$

**Ecuaciones de Barras:**

$$M_{12} = -1000 + \frac{4EI}{2}(\theta_2)$$

$$M_{21} = 1000 + \frac{4EI}{2}(2\theta_2)$$

$$M_{23} = \frac{8EI}{3}(2\theta_2 + \theta_3)$$

$$M_{32} = \frac{8EI}{3}(2\theta_3 + \theta_2)$$

$$M_{24} = \frac{6EI}{4}(2\theta_2)$$

$$M_{42} = \frac{6EI}{4}(\theta_2)$$

**Equilibrio de Nudos:**

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

Sustituyendo los valores de los momentos en la ecuación de equilibrio y reduciendo términos se obtiene:

$$\frac{37}{3}EI.\theta_2 + \frac{8}{3}EI.\theta_3 = -1000$$

$$\frac{16}{3}EI.\theta_3 + \frac{8}{3}EI.\theta_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{EI}{3} \begin{bmatrix} 37 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90.78 \\ +45.30 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores en las ecuaciones de momentos obtenemos:

$$M_{12} = -1181.82 \text{ kg - m}$$

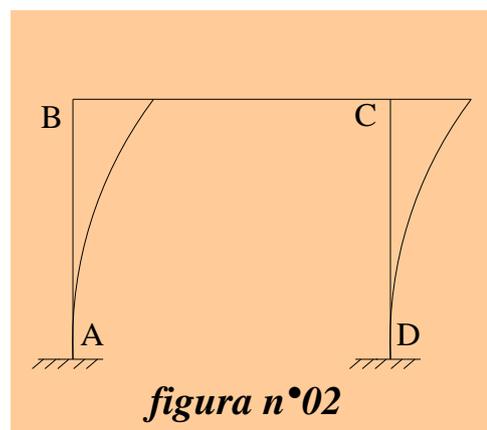
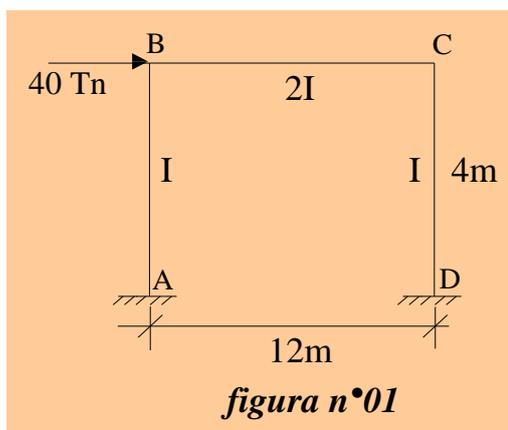
$$M_{21} = -636.35 \text{ kg - m}$$

$$M_{24} = -272.74 \text{ kg - m}$$

$$M_{42} = +136.37 \text{ kg - m}$$

Y los momentos con sus respectivos signos:  $M_{23} = +363.65 \text{ kg - m}$      $M_{32} = 0$

4. Para la estructura mostrada. Calcular los momentos en cada nudo.



**Solución:**

**Hipergeometría:**

Por la carga externa actuante, la estructura tendrá giro en B y C, así como un desplazamiento horizontal. La deformada se muestra en la figura número dos.

**Ecuaciones en las barras:**

$$M_{AB} = \frac{2}{4}EI\left(\theta_B - \frac{3\Delta}{4}\right)$$

$$M_{BA} = \frac{2}{4}EI\left(2\theta_B - \frac{3\Delta}{4}\right)$$

$$M_{BC} = \frac{4}{12}EI(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = \frac{4}{12}EI(2\theta_C + \theta_B)$$

$$M_{CD} = \frac{2}{4}EI\left(2\theta_C - \frac{3\Delta}{4}\right)$$

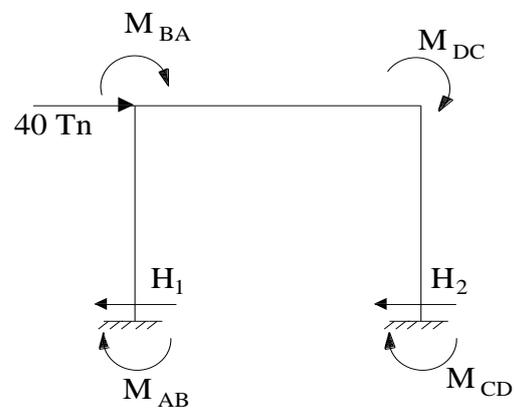
$$M_{DC} = \frac{2}{4}EI\left(\theta_C - \frac{3\Delta}{4}\right)$$

**Equilibrio de Nudos:**

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$H_1 + H_2 = 40$$



Reemplazando los valores de los momentos en las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\frac{3}{8}EI - \frac{3}{8}EI.\theta_C - \frac{3}{8}EI.\theta_B = 40$$

$$-\frac{3}{8}EI + \frac{5}{3}EI.\theta_C + \frac{1}{3}EI.\theta_B = 0$$

$$-\frac{3}{8}EI + \frac{1}{3}EI.\theta_C + \frac{5}{3}EI.\theta_B = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos:

$$\Delta = \frac{170.68}{EI} \quad \theta_B = \frac{32}{EI} \quad \theta_C = \frac{32}{EI}$$

Reemplazando los valores hallados en las ecuaciones de momentos obtenemos:

Momento	Pendiente y Deflexión (Tn-m)	Resistencia de Materiales (Tn-m)
$M_{AB}$	- 48	- 48
$M_{BA}$	- 32	32
$M_{BC}$	32	32
$M_{CB}$	32	- 32
$M_{CD}$	- 32	- 32
$M_{DC}$	- 48	48

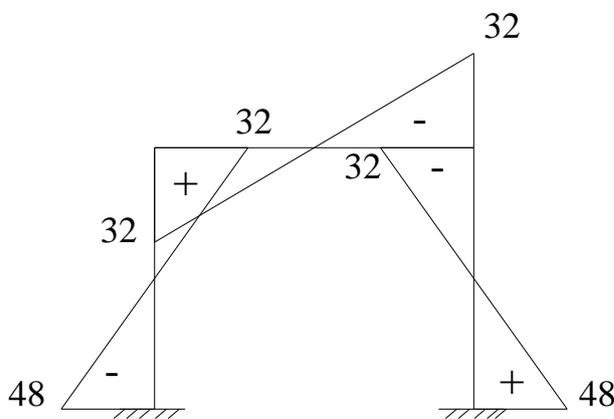
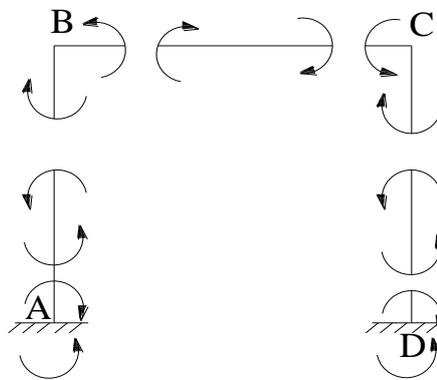
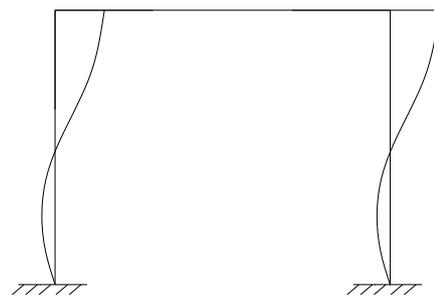
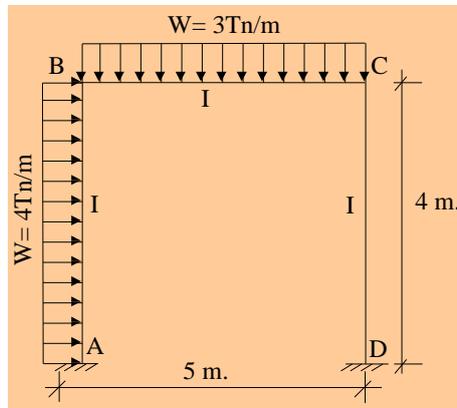


Diagrama de Momentos



Bosquejo de la Deformada

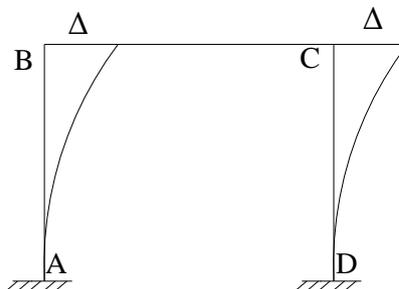
5. Para la estructura mostrada. Calcular los giros en B y C así como el desplazamiento de la estructura. Calcular también los momentos en cada nudo.



**Solución:**

**Hipergeometría:**

Por las fuerzas externas que actúan en la estructura, ésta tendrá un desplazamiento horizontal y giro en los nudos B y C.



*Deformada de la estructura*

**Momento de Empotramiento Perfecto:**

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{4 \times 16}{12} = 5.33 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = \frac{3 \times 25}{12} = 6.25 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

**Ecuaciones de las Barras:**

$$M_{AB} = -5.33 + \frac{2EI}{4} \left( \theta_B - \frac{3}{4} \Delta \right)$$

$$M_{BA} = +5.33 + \frac{2EI}{4} \left( 2\theta_B - \frac{3}{4}\Delta \right)$$

$$M_{BC} = -6.25 + \frac{2EI}{5} (2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = +6.25 + \frac{2EI}{5} (2\theta_C + \theta_B)$$

$$M_{CD} = 0 + \frac{2EI}{4} \left( 2\theta_C - \frac{3}{4}\Delta \right)$$

$$M_{DC} = 0 + \frac{2EI}{4} \left( \theta - \frac{3}{4}\Delta \right)$$

**Equilibrio de Nudos:**

$$H_1 = -\frac{1}{4} (M_{AB} + M_{BA})$$

$$H_2 = -\frac{1}{4} (M_{CD} + M_{DC})$$

Luego:

$$H_1 + H_2 = 8$$

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} = 8$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

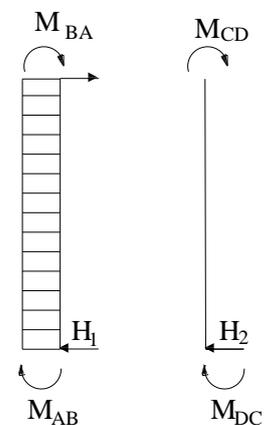
$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

Sustituyendo los valores de los momentos en las ecuaciones de equilibrio y reduciendo términos, se obtiene:

$$\frac{3}{8}EI.\Delta - \frac{3}{8}EI.\theta_B - \frac{3}{8}EI.\theta_C = 8$$

$$-\frac{3}{8}EI.\Delta + \frac{9}{5}EI.\theta_B + \frac{2}{5}EI.\theta_C = 0.92$$

$$-\frac{3}{8}EI.\Delta + \frac{2}{5}EI.\theta_B + \frac{9}{5}EI.\theta_C = -6.25$$



*Resolviendo el sistema de ecuaciones:*

$$EI \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0.92 \\ -6.25 \end{bmatrix}$$

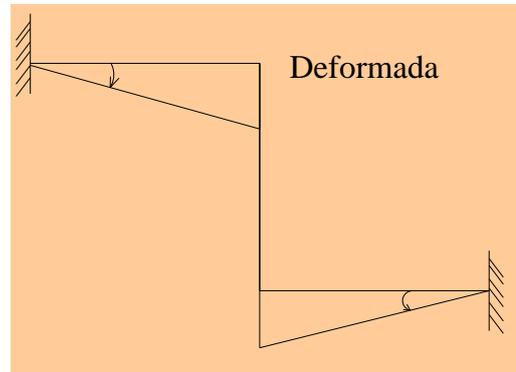
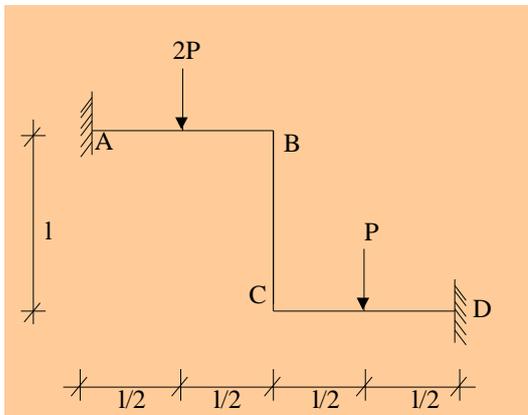
$$\begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.046 & 0.689 & 0.689 \\ 0.689 & 0.702 & 0.012 \\ 0.689 & -0.012 & 0.702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0.92 \\ -6.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.69 \\ 6.23 \\ 1.11 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

*Reemplazando los valores hallados en las ecuaciones de momentos obtenemos:*

<b>Momento</b>	<b>Por Pendiente y Deflexión (Tn-m)</b>	<b>Por Resistencia de Materiales (Tn-m)</b>
$M_{AB}$	-12.97	-12.97
$M_{BA}$	+0.90	-0.80
$M_{BC}$	-0.82	-0.82
$M_{CB}$	+9.63	-9.63
$M_{CD}$	-9.65	-9.65
$M_{DC}$	-10.20	-10.20

6. Para la estructura mostrada. Calcular los giros en B y C así como el desplazamiento vertical.



**Solución:**

**Hipergeometría:**

Por las fuerzas externas que actúan sobre la estructura podemos observar que habrá un desplazamiento vertical y giro en los puntos b y c.

**Momentos de Empotramiento Perfecto:**

$$M_{ab}^0 = -M_{ba}^0 = -\frac{2Pl}{8} = -\frac{Pl}{4}$$

$$M_{cd}^0 = -M_{dc}^0 = -\frac{Pl}{8}$$

**Ecuaciones de Equilibrio:**

$$M_{ab} = -\frac{Pl}{4} + \frac{2EI}{l} \left( 2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l} \right)$$

$$M_{ba} = \frac{Pl}{4} + \frac{2EI}{l} \left( 2\theta_b + \theta_a - \frac{3\Delta}{l} \right)$$

$$M_{cd} = -\frac{Pl}{8} + \frac{2EI}{l} \left( 2\theta_c + \theta_d + \frac{3\Delta}{l} \right)$$

$$M_{dc} = \frac{Pl}{8} + \frac{2EI}{l} \left( 2\theta_d + \theta_c + \frac{3\Delta}{l} \right)$$

$$M_{bc} = \frac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_c)$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{l}(2\theta_c + \theta_b)$$

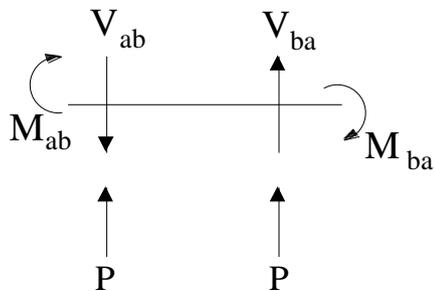
**Equilibrio de los Nudos:**

$$M_{bc} + M_{ba} = 0$$

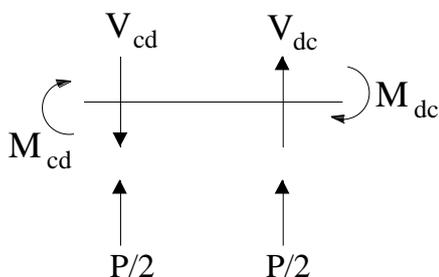
$$M_{cb} + M_{cd} = 0$$

$$H_a + H_d = 3P$$

**Determinación de los cortantes:**



$$V_{ab} = -\frac{M_{ab} + M_{ba}}{l}$$



$$V_{dc} = -\frac{M_{cd} + M_{dc}}{l}$$

$$H_a = P - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l}$$

$$H_d = \frac{P}{2} + \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l}$$

Reemplazando los valores de los momentos en las ecuaciones de equilibrio, obtenemos:

$$\frac{24}{l^3}EI.\Delta - \frac{6}{l^2}EI.\theta_b + \frac{6}{l^2}EI.\theta_c = \frac{3}{2}P$$

$$-\frac{6}{l^2}EI.\Delta + \frac{8}{l^2}EI.\theta_b + \frac{2}{l}EI.\theta_c = -\frac{Pl}{4}$$

$$\frac{6}{l^2}EI.\Delta + \frac{2}{l}EI.\theta_b + \frac{8}{l}EI.\theta_c = \frac{Pl}{8}$$

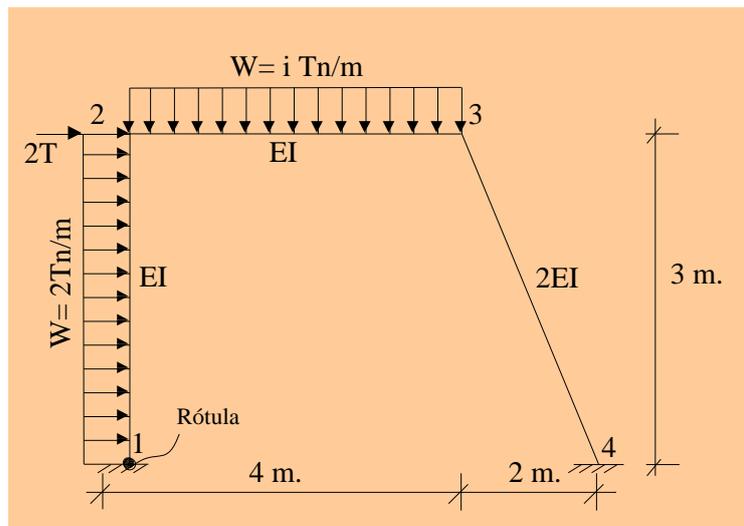
Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\theta_b = \frac{9Pl^2}{160EI}$$

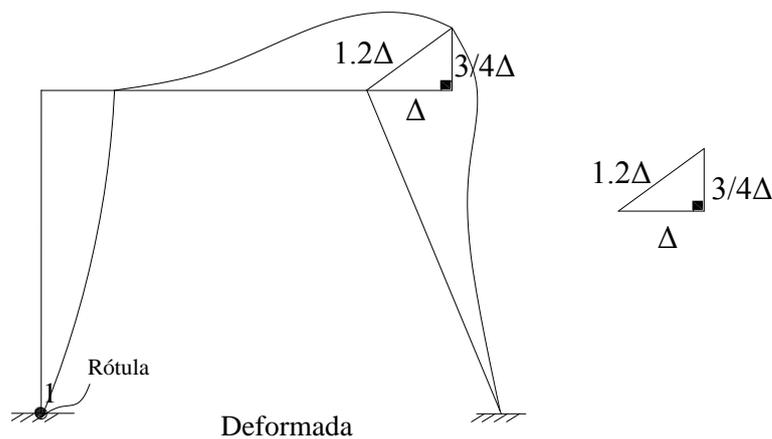
$$\theta_c = -\frac{11Pl^2}{160EI}$$

$$\Delta = \frac{77Pl^3}{1284EI}$$

7. Para la estructura mostrada. Calcular los giros en 1, 2 y 3; así como el desplazamiento horizontal. Todas las barras tiene  $EA=\infty$



**Solución:**



**Hipergeometría:**

Debido a las fuerzas externas actuantes la estructura tendrá giro en los nudos 1,2 y 3 y desplazamiento horizontal.

**Momentos de Empotramiento Perfecto:**

$$M_{12} = -M_{21} = -1.5 \text{ Tn} - \text{m}, \quad M_{23} = -M_{32} = -1.33 \text{ Tn} - \text{m}$$

$$M_{34} = M_{43} = 0$$

**Ecuaciones en las Barras:**

$$M_{12} = -1.5 + \frac{2}{3}EI \left( 2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\Delta}{3} \right)$$

$$M_{21} = 1.5 + \frac{2}{3}EI \left( 2\theta_2 + \theta_1 - \frac{3\Delta}{3} \right)$$

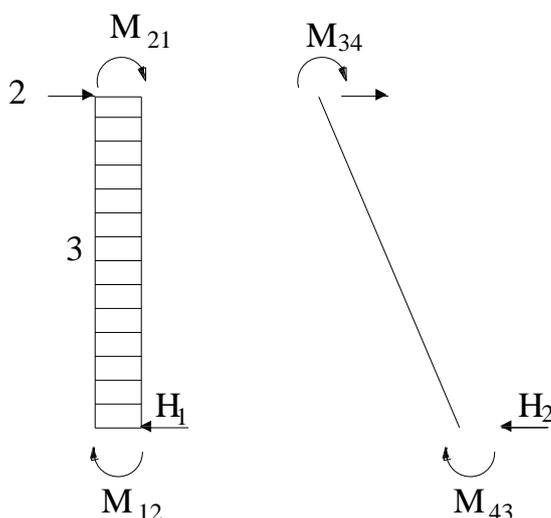
$$M_{23} = -1.33 + \frac{2}{4}EI \left( 2\theta_2 + \theta_3 + \frac{3x(2/3)}{4}\Delta \right)$$

$$M_{32} = 1.33 + \frac{2}{4}EI \left( 2\theta_3 + \theta_2 + \frac{3x(2/3)}{4}\Delta \right)$$

$$M_{34} = 0 + \frac{4}{\sqrt{13}}EI \left( 2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3x1.20}{\sqrt{13}}\Delta \right)$$

$$M_{43} = 0 + \frac{4}{\sqrt{13}}EI \left( 2\theta_4 + \theta_3 - \frac{3x1.20}{\sqrt{13}}\Delta \right)$$

**Equilibrio de Nudos:**



$$H_1 + H_2 = 8$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$M_{12} = 0$$

Las ecuaciones para cada equilibrio será:

$$1.266EI\Delta - 0.417\theta_2 - 0.667\theta_1 - 0.857\theta_3 = 3.67$$

$$-0.417EI\Delta + 2.333\theta_2 + 0.667\theta_1 + 0.500\theta_3 = -0.17$$

$$-0.666EI\Delta + 0.666\theta_2 + 1.333\theta_1 = 1.50$$

$$-0.857EI\Delta + 0.500\theta_2 + 0 + 3.218\theta_3 = -1.33$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$EI \begin{bmatrix} 1.266 & -0.417 & -0.667 & -0.857 \\ -0.417 & 2.333 & 0.666 & 0.500 \\ -0.666 & 0.666 & 1.333 & 0 \\ -0.857 & 0.500 & 0.000 & 3.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.67 \\ -0.17 \\ 1.50 \\ -1.33 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{5.808}{EI}, \quad \theta_2 = -\frac{0.522}{EI}, \quad \theta_1 = \frac{4.291}{EI}, \quad \theta_3 = \frac{1.216}{EI}$$

## CAPÍTULO XVI:

# MÉTODOS ENERGÉTICOS

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

Todos los métodos estudiados para la solución de giros y flechas por la mecánica de materiales es haciendo uso de la geometría; pero existen métodos que sólo se analiza la parte energética, sin importar la deformación.

En este capítulo haremos una presentación de dichos métodos para la solución de problemas de estructuras; haciendo énfasis en el método de la Carga Unitaria, base para los métodos avanzados de energía.

Con este capítulo haremos un enlace entre la Mecánica de Materiales y el Análisis de Estructuras, que llevaron a estudios del método de las Fuerzas que son la base de todo el Análisis Matricial de Estructuras.

Iniciaremos nuestro Estudio.

### **MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA PARA FLEXIÓN**

En el capítulo de efectos axiales utilizaremos un método energético para el cálculo de desplazamientos. En este capítulo haremos extensión dicho método para casos de flexión.

La fórmula a utilizar, será:

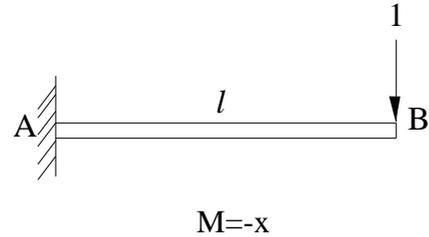
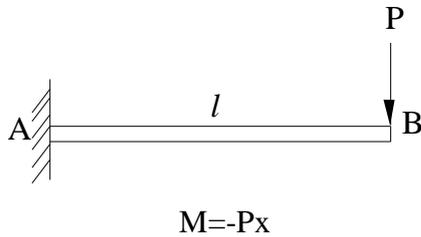
$$\delta = \frac{1}{EI} \int M m dx$$

Donde:

M : Es el momento flector de cada elemento analizando la estructura con sus cargas reales.

M : Es el momento flector de cada elemento considerando una carga unitaria en el punto que queremos analizar.

Así por ejemplo, si nos piden el  $\delta_{VB}$  de la barra mostrada.



$$\delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Px)(-x) dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Px^3}{3} \Big|_0^l$$

$$\delta_{VB} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

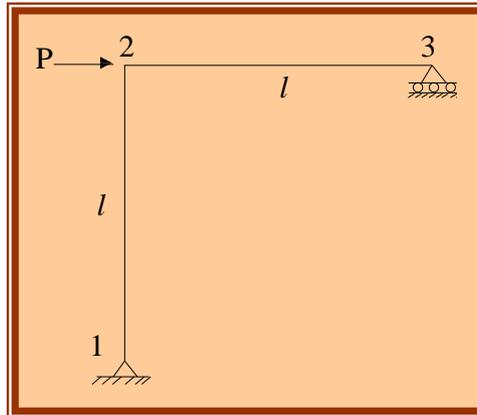
Es bueno aclarar que si nos piden el desplazamiento vertical se colocará en el punto a analizar una carga unitaria vertical.

Si nos piden el desplazamiento horizontal se colocará en dicho punto una carga unitaria horizontal.

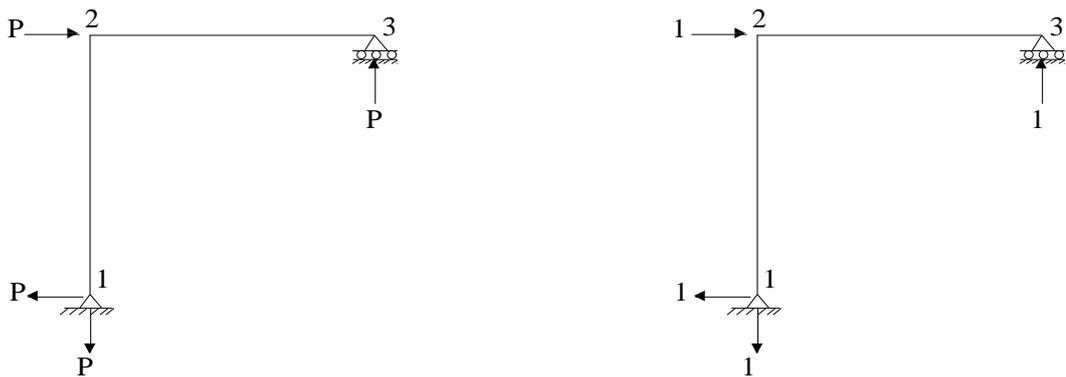
Si nos piden el giro en dicho punto se aplicará un giro unitario.

**Problemas de Aplicación**

1. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento horizontal del punto 2.  
 EI es constante.



**Solución:**



Luego:

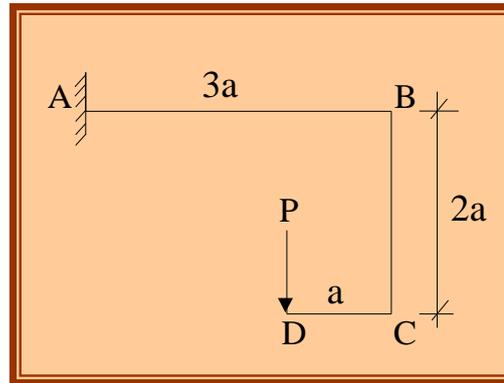
Tramo	Longitud Del tramo	M	m
1-2	$0 < x < l$	$Px$	$x$
2-3	$0 < x < l$	$Pl - Px$	$l - x$

De donde:

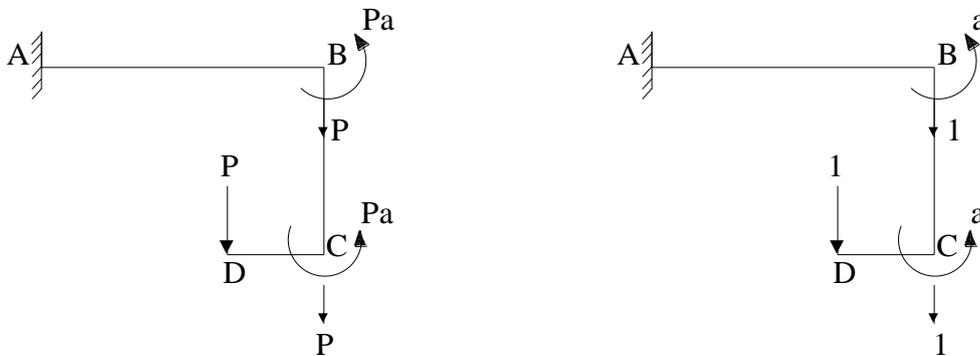
$$\Delta H_2 = \frac{1}{EI} \left( \int_0^l Px^2 dx + \int_0^l P(l-x)^2 dx \right)$$

$$\Delta H_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

2. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento vertical del punto D.



**Solución:**



Luego:

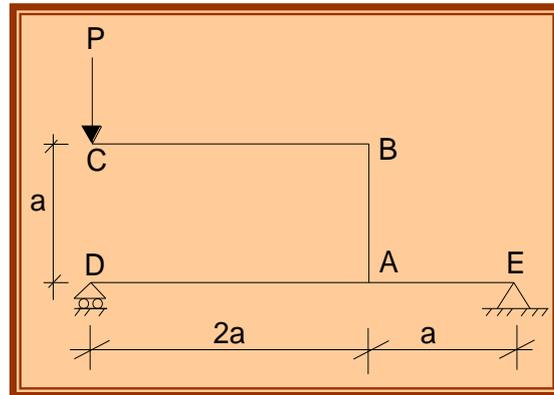
Tramo	Longitud Del tramo	M	m
DC	$0 < x < a$	$- Px$	$- x$
BC	$0 < x < 2a$	$Pa$	$a$
AB	$0 < x < 3a$	$Pa - Px$	$a - x$

Asimismo:

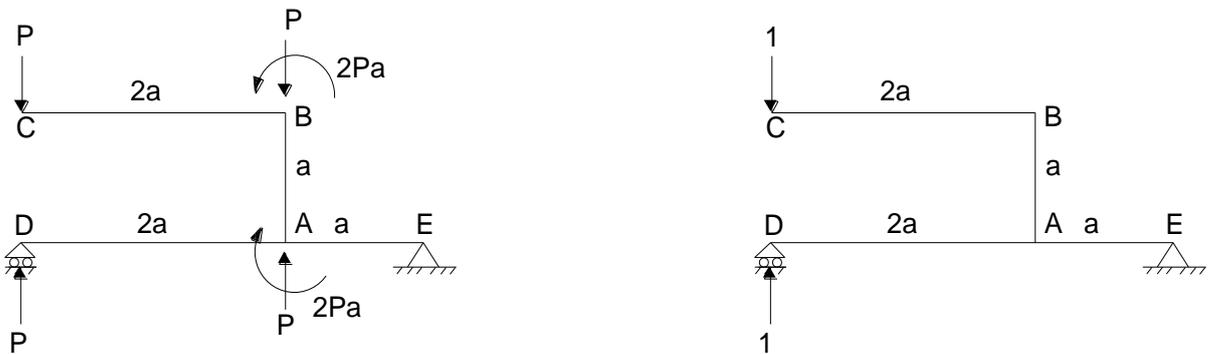
$$EI\Delta V_D = \int_0^{3a} P(a-x)^2 dx + \int_0^{2a} Pa^2 dx + \int_0^a Px^2 dx$$

$$\Delta V_D = \frac{16}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

3. Calcular el desplazamiento vertical del punto C de la estructura mostrada.



**Solución:**



Luego:

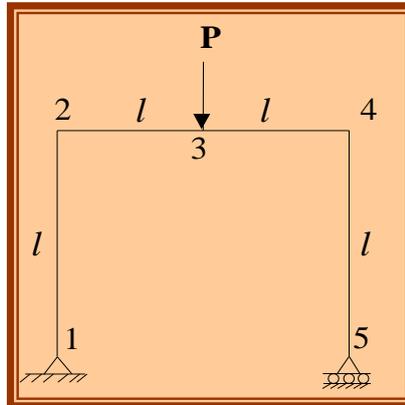
Tramo	Longitud Del tramo	M	m
AB	$0 < x < a$	$-2Pa$	$-2a$
BC	$0 < x < 2a$	$-Px$	$-x$
AD	$0 < x < 2a$	$Px$	$x$
AE	$0 < x < a$	$0$	$0$

De donde:

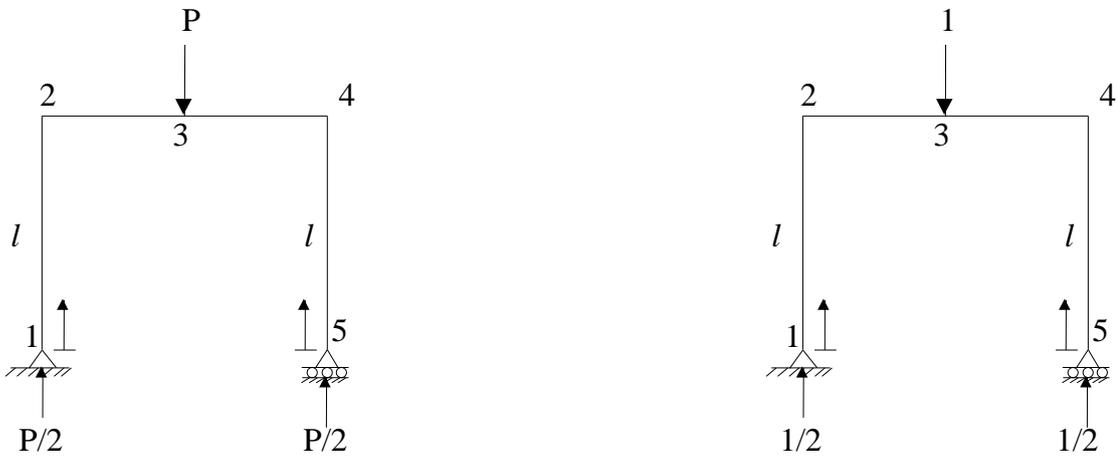
$$\Delta V_C = \frac{1}{EI} \left( \int_0^a (-2Pa)(-2a)dx + \int_0^{2a} (-Px)(-x)dx + \int_0^{2a} Px \cdot x dx \right)$$

$$\Delta V_C = \frac{28}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

4. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento vertical del punto número tres.



**Solución:**



Luego:

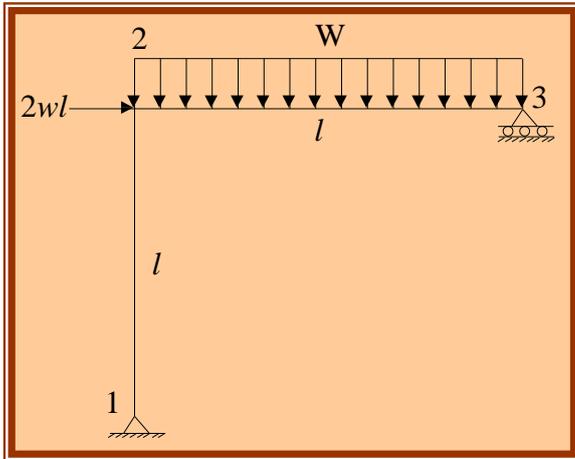
Tramo	Longitud Del tramo	M	m
1-2	$0 < x < l$	0	0
2-3	$0 < x < l$	$P/2x$	$x/2$
3-4	$0 < x < l$	$P/2x$	$x/2$
4-5	$0 < x < l$	0	0

De donde:

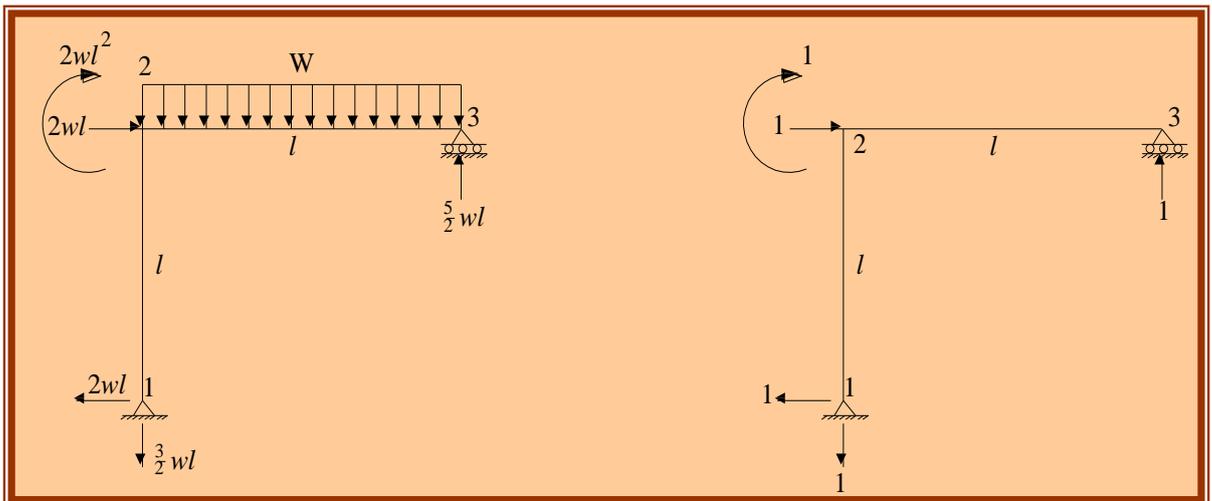
$$\Delta V_3 = \frac{2}{EI} \int_0^l \frac{P}{2} x \cdot \frac{x}{2} dx$$

$$\Delta V_3 = \frac{Pl^3}{6EI}$$

5. Para la estructura mostrada. Calcular el desplazamiento horizontal del punto dos.  
 $EI=Ctte.$



**Solución:**



Luego:

$$M_{12} = 2wlx, \quad 0 < x < l$$

$$M_{23} = 2wl^2 - \frac{3}{2}wlx - \frac{w}{2}x^2, \quad 0 < x < l$$

$$m_{12} = x, \quad 0 < x < l$$

$$m_{23} = 1, \quad 0 < x < l$$

De donde:

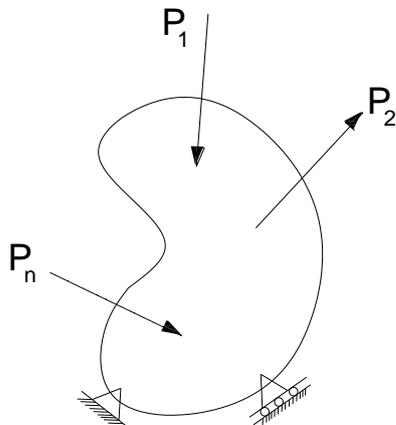
$$\Delta = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^1 2wlx^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^1 \left( 2wl^2 - \frac{3}{2}wlx - \frac{wx^2}{2} \right) (1-x) dx$$

$$\Delta_{H_2} = \frac{11}{8} wl^4$$

**METODO DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN**

**Consideraciones:**



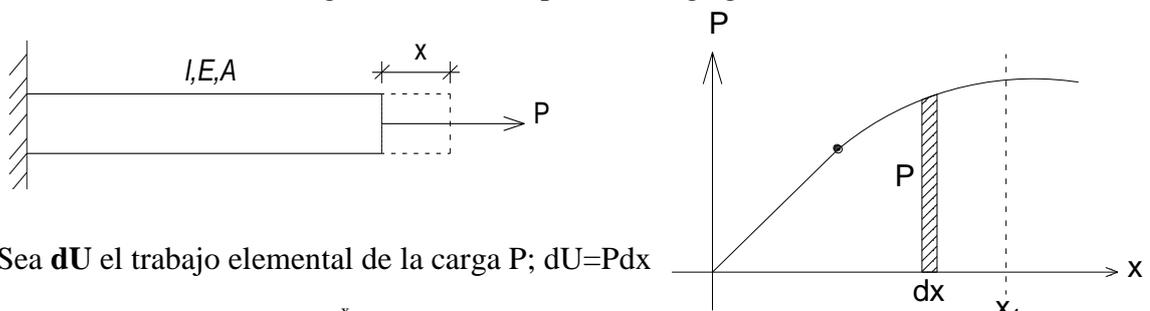
- ✍ Sea un cuerpo constituido por un material en comportamiento elástico.
- ✍ Las fuerzas  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  son inicialmente nulas y se van incrementando gradualmente de modo de no producir aceleraciones sensibles.
- ✍ En el proceso de la deformación, las fuerzas aplicadas realizan un cierto trabajo que denominaremos **TRABAJO DE DEFORMACIÓN**.

- ✍ Las reacciones no realizan trabajo.
- ✍ El trabajo realizado por las fuerzas exteriores se utiliza para **VENCER LA RESISTENCIA DE LAS FUERZAS MOLECULARES**, que intentan que no cambien las distancias relativas que hay entre las moléculas del estado no deformado.

**Trabajo realizado por las fuerzas exteriores = -T (de las fuerzas moleculares)**

Queda almacenado en el cuerpo a manera de Energía Potencial, que es la que utilizaría para recuperar su forma y dimensiones cuando cesan las fuerzas, la que se denominaría **ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA**.

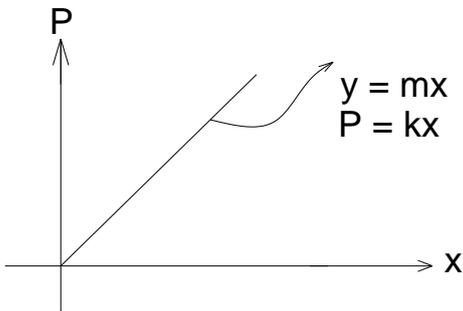
Sea una barra elástica cargada axialmente por una carga gradual.



Sea  $dU$  el trabajo elemental de la carga  $P$ ;  $dU = P dx$

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \text{area bajo el diagrama } P \text{ vs } x$$

En el comportamiento lineal y elástico del material:

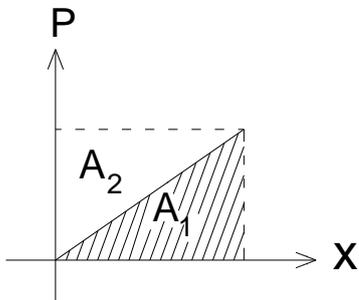


$$U = \int P dx = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{P}{x} \right) x^2$$

$$U = \frac{1}{2} Px$$

$U =$  Trabajo Total realizado ó Energía de Deformación Elástica Almacenada.



$$U = \frac{1}{2} Px \text{ (Ecuación de Clapeyrón)}$$

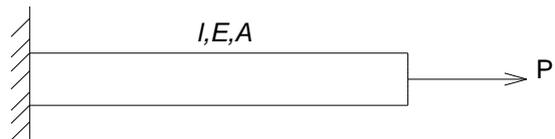
El área  $A_1$  es la energía de deformación almacenada.

$A_2$  se denomina energía complementaria de deformación.

**Analogía con un Resorte**



$$U = \frac{1}{2} kx^2$$



$$U = \frac{1}{2} Px \quad ; \quad x = \frac{Pl}{EA} \rightarrow P = \frac{xEA}{l}$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{xEA}{l} \right) x \rightarrow U = \frac{1}{2} \left( \frac{EA}{l} \right) x^2$$

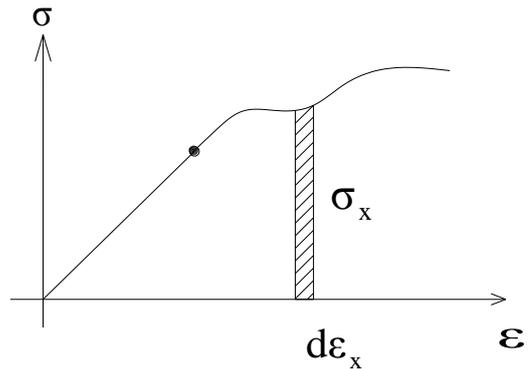
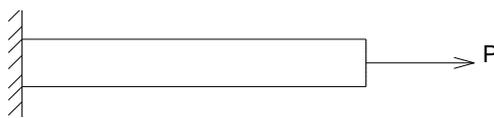
∴ La rigidez axial de la barra será:

$$k = \frac{EA}{l}$$

**Densidad de Energía de Deformación o Energía Específica de Deformación ( $\mu$ )**

La energía de deformación  $U = \int Pdx$  involucra las características geométricas de la barra.

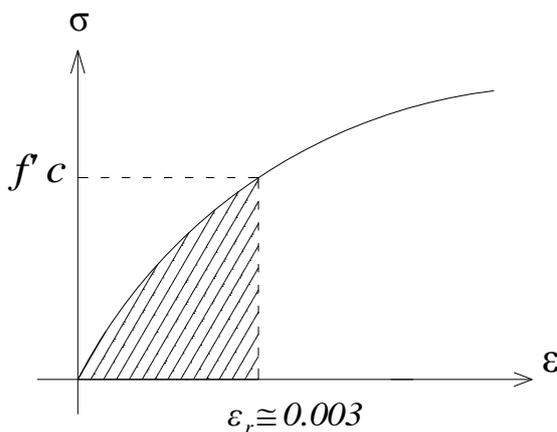
Si queremos dirigir nuestra atención a las propiedades del material, debemos considerar la energía de deformación por unidad de volumen, la que denominaremos densidad de energía de deformación.



$$\mu = \frac{U}{Vol} = \frac{\int P \cdot dx}{A \cdot l}$$

$$\mu = \int \frac{P}{A} \cdot \frac{dx}{l} \Rightarrow \mu = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \cdot d\epsilon_x = \text{Área bajo el diagrama } \sigma \text{ vs } \epsilon$$

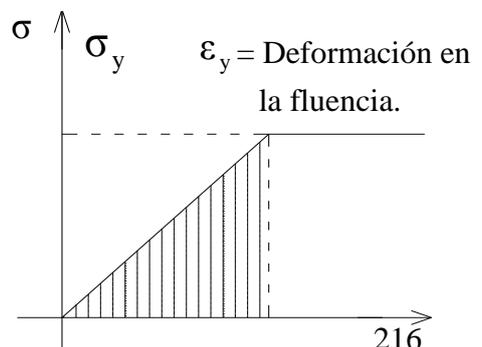
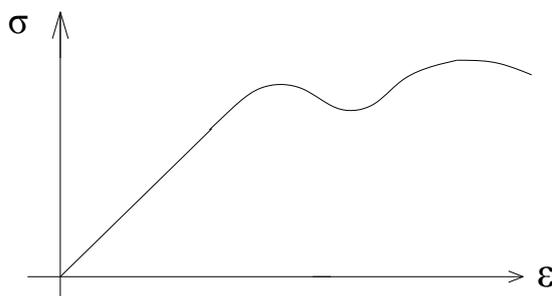
Para el caso de **materiales frágiles:** (como el concreto)



Sea “ $\epsilon_r$ ” la deformación de rotura.

La energía de deformación por unidad de volumen que se almacena cuando se alcanza el valor de  $\epsilon_r$ , se denomina **MODULO DE TENACIDAD** del material.

Para el caso de **materiales dúctiles:** (caso del acero)



La densidad de energía de deformación ( $\mu_y$ ) que se almacena cuando el material alcanza la fluencia se denomina MÓDULO DE RESILENCIA.

$$\mu_y = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_y \cdot \sigma_y$$

$$\mu_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_y}{E} \right) \sigma_y$$

$$\mu_y = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

**Nota:** La Capacidad de una estructura para soportar cargas de impacto sin que se produzcan deformaciones permanentes depende de la Resiliencia del Material utilizado.

**Energía de Deformación Elástica para esfuerzos Normales**

En general:

$$\mu = \int \sigma_x \cdot d\epsilon_x = \int E \cdot \epsilon_x \cdot d\epsilon_x = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \epsilon_x^2$$

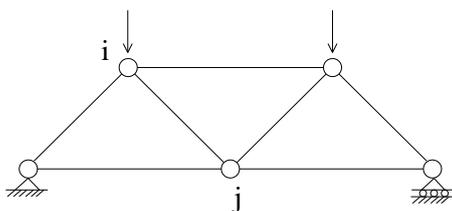
$$\mu = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \left( \frac{\sigma_x}{E} \right)^2$$

$$\mu = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad ; \text{ donde } \mu = \frac{dU}{dv}$$

$$\frac{dU}{dv} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \rightarrow dU = \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dv$$

$$U = \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dv$$

Para el caso de estructuras constituidas por elementos biarticulados:



$$\sigma_x = \frac{N_{ij}}{A_{ij}} \quad ; \quad dV = A_{ij} \cdot dx$$

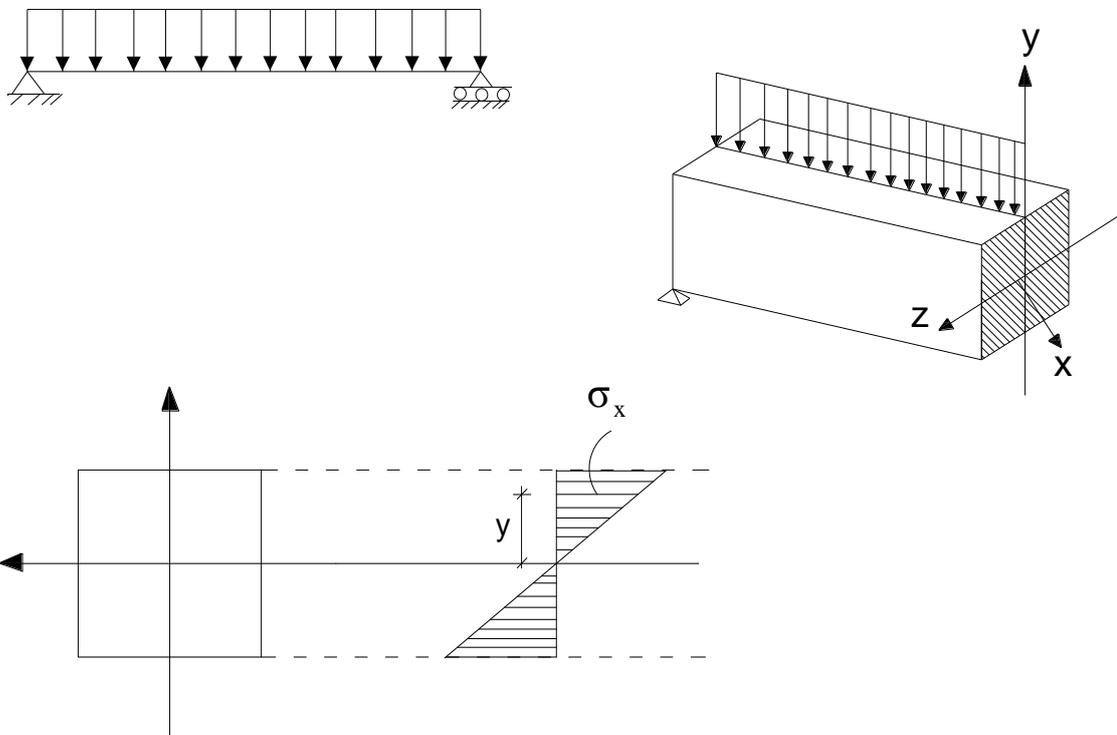
$$U_{ij} = \iiint \frac{N_{ij}^2}{A_{ij}^2 \cdot 2E} \cdot A_{ij} \cdot dx = \int \frac{N_{ij}^2}{2E \cdot A_{ij}} \cdot dx$$

$$U_{ij} = \frac{N_{ij}^2 \cdot L_{ij}}{2EA_{ij}} \text{ (Energía de deformación elástica para la barra } ij\text{)}$$

Para toda la estructura:

$$U = \sum \frac{N_{ij}^2 \cdot L_{ij}}{2EA_{ij}}$$

**Energía de Deformación Elástica en la Flexión**



$$U = \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dV = \iiint \frac{M_z^2}{2E \cdot I_z^2} \cdot y^2 \cdot dV = \int \left( \frac{M_z^2}{2E \cdot I_z^2} \cdot \int y^2 \cdot dA \right) \cdot dx$$

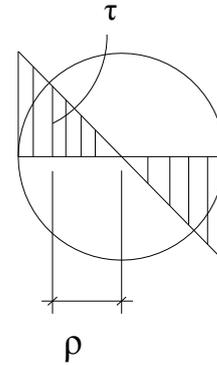
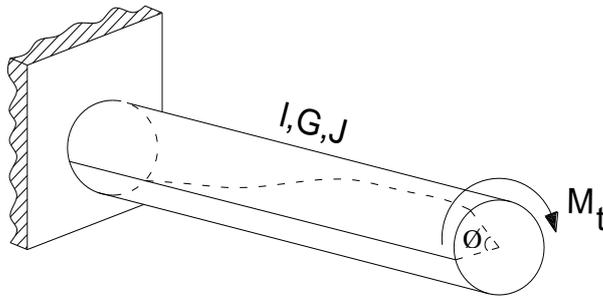
$$U = \int \frac{M_z^2}{2E \cdot I_z} \cdot dx$$

$$U = \int \frac{M_z^2}{2E \cdot I_z} \cdot dx$$

**Energía de Deformación Elástica para Esfuerzos Cortantes**

$$U = \iiint \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

**Energía de Deformación Elástica en Torsión**



$$\tau = \frac{M_t}{J} \cdot \rho$$

$$U = \iiint \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV$$

$$U = \iiint \frac{M_t^2}{2GJ^2} \cdot \rho^2 \cdot dV = \int \left( \frac{M_t^2}{2GJ^2} \int \rho^2 \cdot dA \right) dx$$

$$U = \int \frac{M_t^2}{2GJ^2} \cdot J dx$$

$$U = \int \frac{M_t^2}{2GJ} \cdot dx$$

**Energía de Deformación Elástica en Corte por Flexión**

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad ; \quad U = \iiint \frac{V^2 \cdot Q^2}{2G \cdot I^2 \cdot t^2} dV = \int \left( \frac{V^2}{2GA} \int \frac{Q^2 AdA}{I^2 \cdot t^2} \right) dx$$

Sea:  $k = \int \frac{Q^2 AdA}{I^2 t^2} = \text{factor de forma}$

$$U = \int \frac{V^2}{2GA} \cdot k dx$$

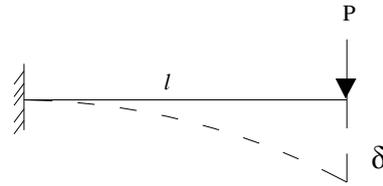
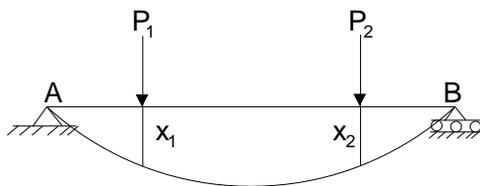
$$U = \int \frac{k v^2}{2GA} \cdot dx$$

**En secciones rectangulares: k=1.2**

**En secciones circulares: k=10/9**

**Trabajo y Energía bajo varias cargas**

**Objetivo.-** Mostrar como la energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas se puede expresar en función de las cargas y de las deflexiones resultantes.



$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot EI}$$

$$\delta = f(P); \quad \frac{l^3}{3EI} = \text{coeficiente de influencia}$$

En general:

$X_{ij}$  = Deflexión en  $i$  debido a una carga actuando en  $j$ .

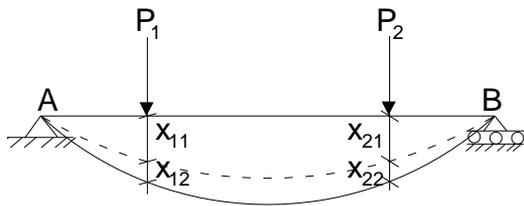
$X_{ij} = \alpha_{ij} \cdot P_j$  Donde  $\alpha_{ij}$  = coeficiente de influencia

$$\begin{cases} X_1 = X_{11} + X_{12} = \alpha_{11} \cdot P_1 + \alpha_{12} \cdot P_2 \\ X_2 = X_{21} + X_{22} = \alpha_{21} \cdot P_1 + \alpha_{22} \cdot P_2 \end{cases}$$

**Cálculo del Trabajo hecho por  $P_1$  y  $P_2$ .**

- a) **Primera Alternativa:** Suponiendo que primero se aplica lentamente  $P_1$  y luego se aplica  $P_2$ .
- b) **Segunda Alternativa:** Suponiendo que primero se aplica lentamente  $P_2$  y luego se aplica  $P_1$ .

**Primera Alternativa:**



Al aplicar  $P_1$  se producen:  $X_{11}$  y  $X_{21}$ .

$$\text{Trabajo de } P_1 = \frac{1}{2} P_1 \cdot X_{11} = \frac{1}{2} P_1 \cdot \alpha_{11} \cdot P_1$$

$$\text{Trabajo de } P_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{11} \cdot P_1^2$$

Cuando se aplica  $P_2$ :

$$\text{Trabajo de } P_2 \text{ para producir } X_{22} = \frac{1}{2} P_2 X_{22} = \frac{1}{2} P_2 \alpha_{22} P_2$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2$$

Cuando actúa  $P_2$  ya está aplicada  $P_1$ :

$$\text{Trabajo realizado por } P_1 \text{ para producir } X_{12} = P_1 X_{12} = P_1 \alpha_{12} P_2$$

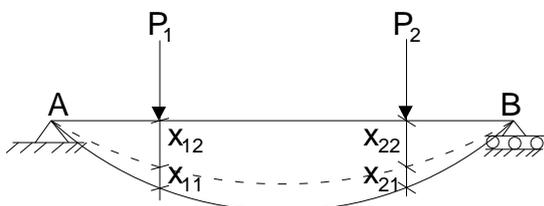
$$= \alpha_{12} P_1 P_2$$

Por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{11} \cdot P_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{22} \cdot P_2^2 + \alpha_{12} \cdot P_1 P_2$$

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11} \cdot P_1^2 + 2\alpha_{12} \cdot P_1 P_2 + \alpha_{22} \cdot P_2^2) \dots \dots \dots \text{(I)}$$

**Segunda Alternativa:**



Al aplicar  $P_2$  se producen:  $X_{22}$  y  $X_{12}$ .

$$\text{Trabajo de } P_2 = \frac{1}{2} P_2 \cdot X_{22} = \frac{1}{2} P_2 \cdot \alpha_{22} \cdot P_2$$

$$\text{Trabajo de } P_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{22} \cdot P_2^2$$

$$\text{Cuando se aplica } P_1: \text{ Trabajo de } P_1 = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot X_{11} = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot \alpha_{11} \cdot P_1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \alpha_{11} \cdot P_1^2$$

Trabajo realizado por  $P_2$  para producir:  $X_{21} = P_2 \cdot X_{21}$   
 $= P_2 \cdot \alpha_{21} \cdot P_1 = \alpha_{21} \cdot P_1 \cdot P_2$

Por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{22} \cdot P_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{11} \cdot P_1^2 + \alpha_{21} \cdot P_1 \cdot P_2$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot \alpha_{21} \cdot P_1 \cdot P_2 + \alpha_{22} \cdot P_2^2) \dots\dots\dots (II)$$

(I) en (II):

$\alpha_{12}$  en  $\alpha_{21}$

$\underbrace{\alpha_{12} \times (P_2 = 1)}$	=	$\underbrace{\alpha_{21} \times (P_1 = 1)}$
Deflexión en 1 producida. por una carga unitaria actuante en 2.		Deflexión en 2 producida. por una carga unitaria actuante en 1.



**TEOREMA RECIPROCO DE MAXWELL**

**Primer Teorema de Alberto Castigliano:**

De la ecuación  $U = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_{11} \cdot P_1^2 + 2 \cdot \alpha_{21} \cdot P_1 \cdot P_2 + \alpha_{22} \cdot P_2^2)$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} \cdot P_1 + \alpha_{12} \cdot P_2 = X_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{22} \cdot P_2 + \alpha_{12} \cdot P_1 = \alpha_{22} \cdot P_2 + \alpha_{21} \cdot P_1 = X_2$$

**Generalizando:** Si una estructura elástica es sometida a “n” cargas  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , la deflexión “ $X_j$ ” del punto de aplicación de  $P_j$  puede expresarse como la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a  $P_j$ .

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

En la práctica el cálculo de deflexiones mediante este teorema se simplifica si la derivada con respecto a  $P_j$  se efectúa antes de la integración o la suma.

$$U = \sum \int \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int \frac{M_t^2 dx}{2GJ} + \sum \int \frac{kv^2}{2GA} dx$$

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum \int \frac{2N \frac{\partial N}{\partial P_j} dx}{2EA} + \sum \int \frac{2M \frac{\partial M}{\partial P_j} dx}{2EI} + \dots$$

$$X_j = \sum \int N \cdot \frac{\partial N}{\partial P_j} \cdot \frac{dx}{EA} + \sum \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P_j} \cdot \frac{dx}{EI} + \sum \int M_t \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P_j} \cdot \frac{dx}{GJ} + \sum \int kv \cdot \frac{\partial v}{\partial P_j} \cdot \frac{dx}{GA}$$

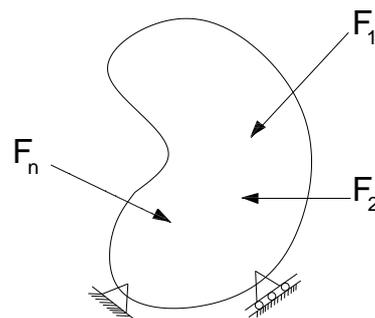
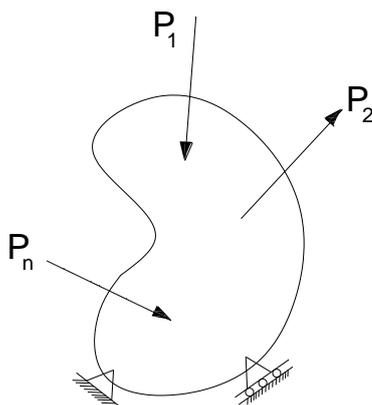
La deflexión “ $X_j$ ” se obtiene directamente cuando la carga “ $P_j$ ” está aplicada en el punto donde se va a obtener  $X_j$ . Si no fuese así porque la carga  $P$  no actúa en  $j$ ,

aplicamos una carga ficticia o simulada “ $Q_j$ ” en el punto “ $j$ ” y aplicamos  $X_j = \frac{\partial V}{\partial Q_j}$

para luego hacer  $Q_j=0$ .

**Teorema de Betti:**

Sea un cuerpo sometido a dos sistemas de cargas diferentes.



**Sistema A**, cuyas fuerzas “ $P_i$ ” se han aplicado gradualmente en forma simultánea.

**Sistema B**, cuyas fuerzas “ $F_j$ ” se han aplicado gradualmente en forma simultánea.

a) Si se aplica el sistema A y después el Sistema B sobre el cuerpo:

$$T = U = \frac{1}{2}P_i\delta_i + \frac{1}{2}F_j\delta_j + P_i\Delta_{ij} \quad (\text{Notación Indicial})$$

Donde:  $P_i\Delta_{ij}$  = Trabajo del primer sistema de fuerzas debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce el segundo sistema de fuerzas.

b) Si se aplica el sistema B y después el A:

$$T = U = \frac{1}{2}F_j\delta_j + \frac{1}{2}P_i\delta_i + F_j\Delta_{ji}$$

Donde:  $F_j\Delta_{ji}$  = Trabajo del segundo sistema de fuerzas debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce el primer sistema de cargas.

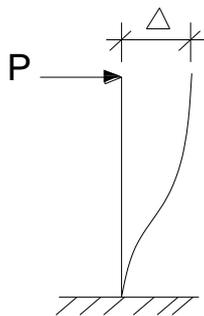
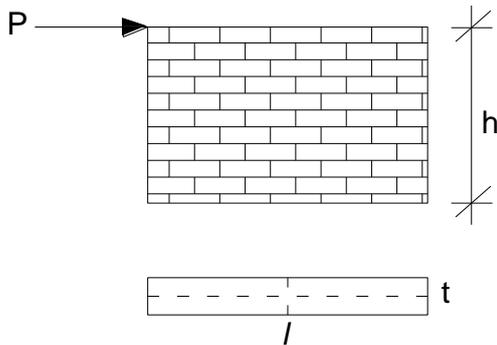
$$\therefore \frac{1}{2}P_i\delta_i + \frac{1}{2}F_j\delta_j + P_i\Delta_{ij} = \frac{1}{2}F_j\delta_j + \frac{1}{2}P_i\delta_i + F_j\Delta_{ji}$$

$P_i\Delta_{ij} = F_j\Delta_{ji}$
-----------------------------------

“El Trabajo de las fuerzas de un sistema debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce otro sistema de cargas es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sistema debido a la aplicación de las cargas del primer sistema”.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN**

***DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE RIGIDEZ DE UN MURO***



$$\Delta = \Delta_{\text{flexión}} + \Delta_{\text{corte}}$$

$$\Delta = \int_0^h \frac{M \cdot m}{EI} dx + \int_0^h k \cdot \frac{P}{GA} dx$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad k=1.2; \quad \mu=0.25$$

Luego:  $G=0.40E$

$$\Delta = \int_0^h \frac{Px^2}{EI} dx + \int_0^h \frac{Pdx}{GA}$$

$$\Delta = \frac{Px^3}{3EI} \Big|_0^h + 1.2 \frac{Ph}{0.4E \cdot lt} \Big|_0^h$$

$$\Delta = \frac{Ph^3}{3E \cdot \frac{tl^3}{12}} + 1.2 \frac{Ph}{0.4E \cdot lt}$$

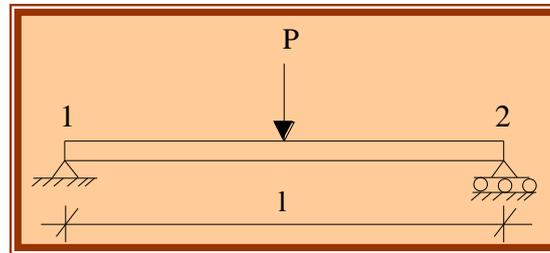
$$k = \frac{Et}{4\left(\frac{h}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{l}\right)}$$

**CAPÍTULO XVII:**

**MISCELANEA  
DE  
PROBLEMAS**

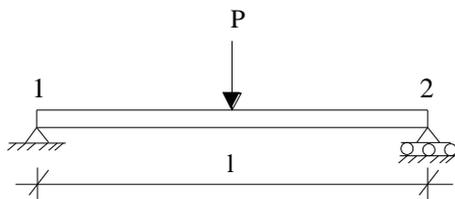
**MISCELANEA DE PROBLEMAS**

1. Calcular el giro en 1.



Solución:

El Método de Solución que se utilizará para este problema; es el de la **Carga Unitaria y Área de Momentos, respectivamente.**



$$M = \frac{P}{2}x \quad 0 < x < l/2 \rightarrow$$

$$M = \frac{P}{2}x \quad 0 < x < l/2 \rightarrow$$



$$m = 1 - \frac{x}{l} \quad 0 < x < l/2 \rightarrow$$

$$m = \frac{x}{l} \quad 0 < x < l/2 \rightarrow$$

Luego:

$$EI\theta_1 = \int_0^{l/2} \frac{P}{2}x \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx + \int_0^{l/2} \frac{P}{2}x \cdot \frac{x}{l} dx$$

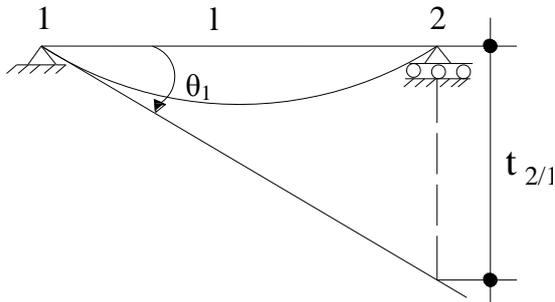
$$\theta_1 = \int \left( \frac{P}{2}x - \frac{P}{2l}x^2 \right) dx + \int \frac{Px^2}{2l} dx$$

$$\frac{Px^2}{4} \Big|_0^{l/2} - \frac{Px^3}{6l} \Big|_0^{l/2} + \frac{Px^3}{6l} \Big|_0^{l/2}$$

$$EI\theta_1 = \frac{Pl^2}{16} - \frac{Pl^2}{48} + \frac{Pl^2}{48}$$

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

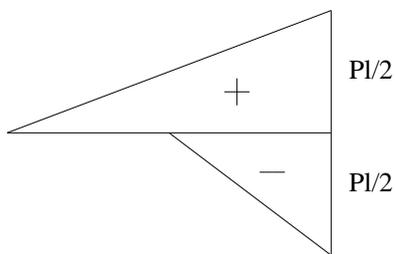
$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$



$$\text{Tg } \theta_1 = \theta_1 = \frac{t_{2/1}}{l}$$

De donde:

$$EI \cdot t_{2/1} = (\text{Área de Momentos}) \cdot x_2 \rightarrow$$



$$EI \cdot t_{1/2} = \frac{Pl}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} - \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6}$$

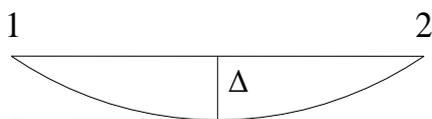
$$\frac{Pl^3}{12} - \frac{Pl^3}{48} = \frac{Pl^3}{16}$$

$$t_{1/2} = \frac{Pl^3}{16EI}$$

Entonces:

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

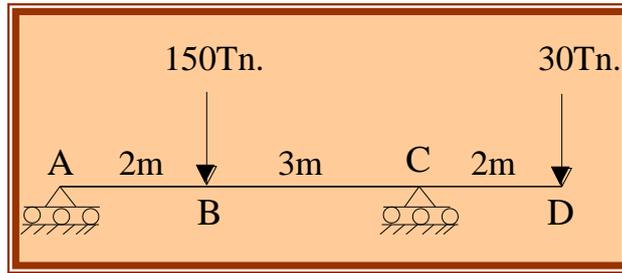
$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$



$$EI \cdot t_{1/2} = \Delta = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^3}{48}$$

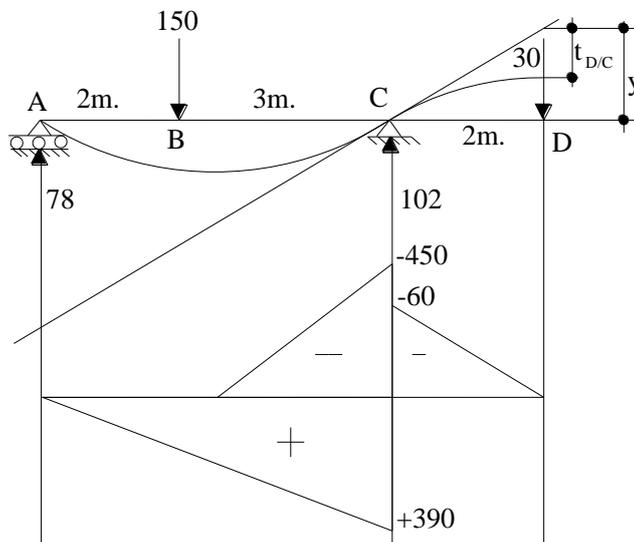
$$t_{1/4} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

2. Calcular la flecha en D.



**Solución:**

El Método de Solución que se utilizará para este problema, es el de Área de Momentos.



$$y = \frac{80}{EI} + \delta = \frac{2}{5} \cdot \frac{550}{EI}$$

$$\delta = \frac{220}{EI} - \frac{80}{EI}$$

$$\delta = \frac{140}{EI}$$

Luego:

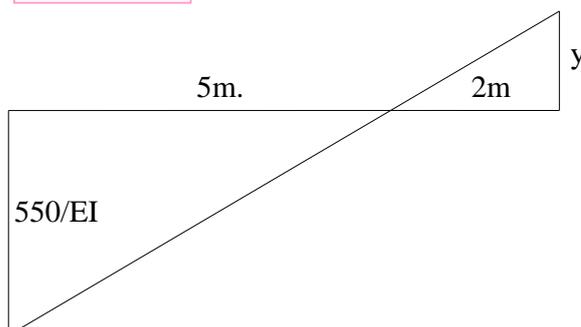
$$EI \cdot t_{D/C} = \frac{60 \times 2}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = -80$$

$$t_{D/C} = \frac{80}{EI}$$

De otro lado:

$$EI \cdot t_{A/C} = \frac{390 \times 5}{2} \times \frac{2}{3} \times 5 - \frac{450 \times 3}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \times 3\right)$$

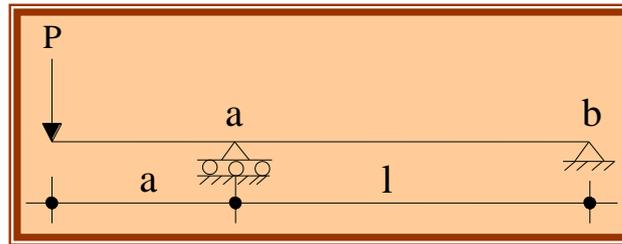
$$t_{A/C} = \frac{550}{EI}$$



$$y = \frac{2}{5} \cdot \frac{550}{EI} = \frac{80}{EI} + \delta$$

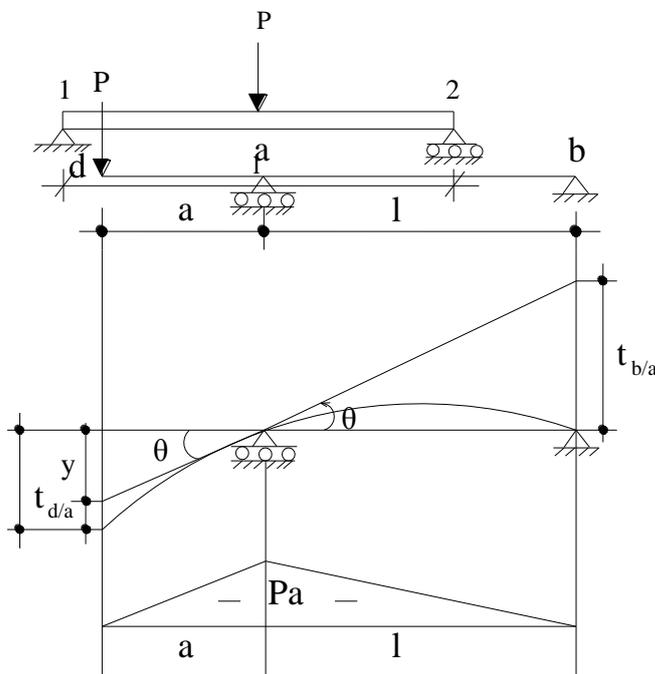
$$\delta = \frac{140}{EI}$$

3. Calcular  $\delta_v$  en "d".



**Solución:**

El Método de Solución que se utilizará para este problema; es el Área de Momentos y Carga Unitaria, respectivamente.



$$EI \cdot t_{b/a} = Pa \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l$$

$$= \frac{Pa l^2}{3EI}$$

$$t_{b/a} = \frac{Pa l^2}{3EI}$$

Luego:

$$EI \cdot t_{d/a} = Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a$$

$$= \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$t_{d/a} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

De donde:

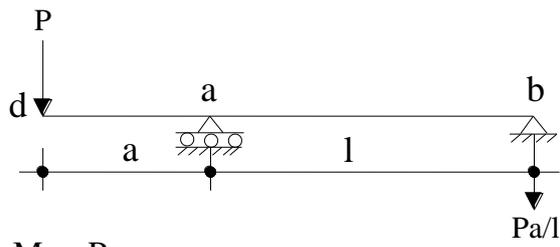
$$\theta = \frac{Pa l}{3EI}$$

$$y = a \cdot \frac{Pa l}{3EI} = \frac{Pa l^2}{3EI}$$

Luego:

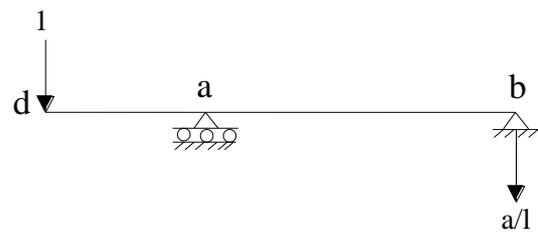
$$\delta = y + t_{d/a} = \frac{Pa^2 l}{3EI} + \frac{Pa^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{Pa^2}{3EI} (l + a)$$



$$M = -Px$$

$$M = -\frac{Pa}{l} \cdot x$$



$$M = -x$$

$$M = -\frac{a}{l} \cdot x$$

Luego:

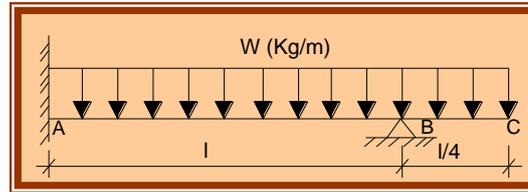
$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^a Px^2 \cdot dx + \int_0^l \frac{Pa^2}{l^2} x^2 \cdot dx$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Px^3}{3} \Big|_0^a + \frac{Pa^2 \cdot x^3}{3l^2} \Big|_0^l$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2 l}{3l}$$

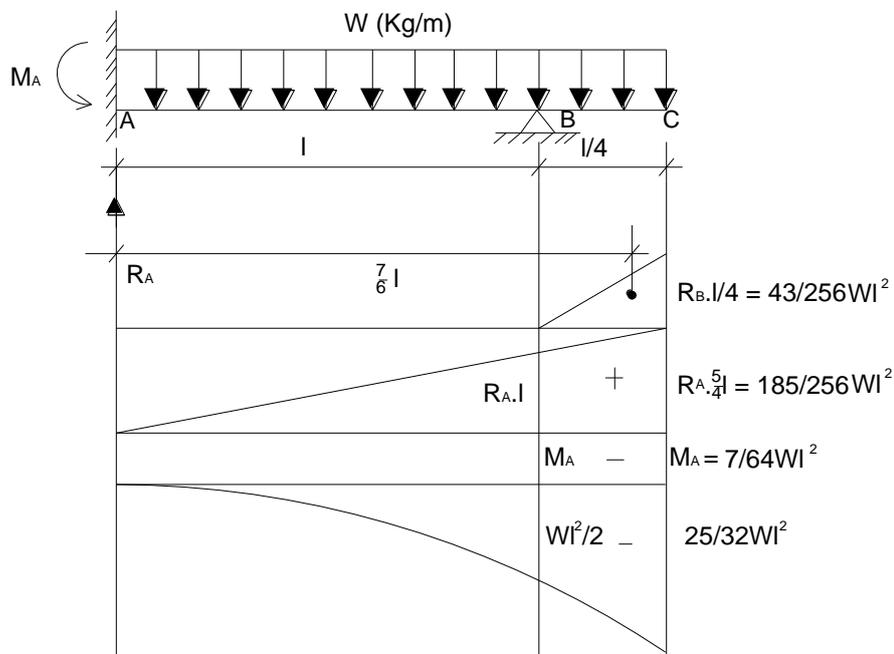
$$\delta_v = \frac{1}{EI} \cdot Pa^2 \cdot (a+l)$$

4. Calcular  $\theta_B$ .



**Solución:**

El Método de Solución que se utilizará para este problema, es el **Área de Momentos**.



$$EI \cdot t_{B/A} = 0$$

$$R_A \cdot l = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - M_A \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{wl^2}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$R_A \cdot \frac{l^3}{6} - M_A \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{wl^4}{24} = 0$$

$$4R_A \cdot l - 12M_A = wl^2 \dots\dots\dots(1)$$

Luego:

$$\sum M_B = 0$$

$$M_A - R_A \cdot l + \frac{wl^2}{2} - \frac{wl^2}{32} = 0$$

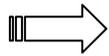
$$-R_A l + M_A = -\frac{15}{32} w l^2 \dots\dots\dots(2)$$

De donde:

$$4R_A l - 12M_A = w l^2$$

$$-4R_A l + 4M_A = -\frac{15}{8} w l^2$$

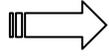
$$-8M_A = -\frac{7}{8} w l^2$$



$$M_A = \frac{7}{64} w l^2$$



$$R_A = \frac{37}{64} w l$$



$$R_B = \frac{43}{64} w l$$

## CAPÍTULO XVIII:

# ESFUERZOS COMBINADOS

## ESFUERZOS COMBINADOS

Los cuatro efectos que sufre una estructura que son axiales, corte, flexión y torsión se combinan en la realidad, siendo uno de ellos la unión del efecto axial más la flexión generando la flexo compresión que viene dada por:

$$\sigma_z = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} x \pm \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_{\text{axial}} = \frac{N_z}{A} \quad \sigma_{\text{flexión}} = \frac{M_y}{I_y} x \quad \sigma_{\text{flexión}} = \frac{M_x}{I_x} y$$

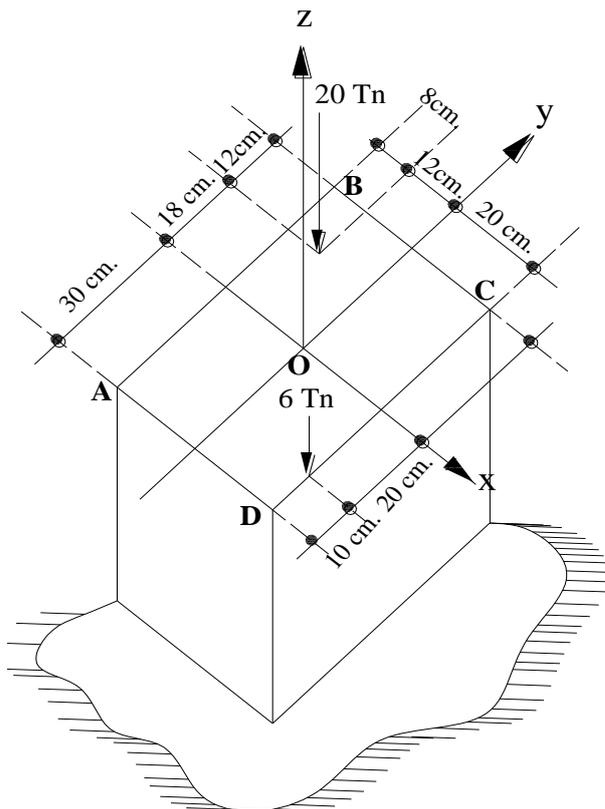
### **Flexo-Compresión Bi-Axial. Par Elementos Cortos:**

Cuando el elemento es corto no se considera la interacción entre la carga axial y los efectos de flexión de modo que resulta válido el principio de superposición de efectos.

Podrán seguirse cuando las ecuaciones de la flexión oblicua, bastaría con añadir el término correspondiente a la carga axial. ( $N_z/A$ ).

### **Ejemplo:**

Determinar los máximos efectos de tracción y compresión en la base de la columna corta.



***I\*:* Propiedades de la sección.**

$$A = 60 \times 40 \text{ cm}^2$$

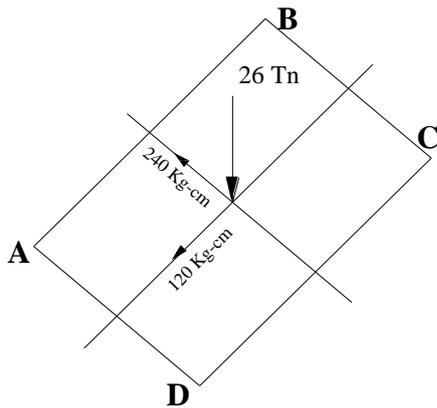
$$I_x = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{60 \times 40^3}{12} = 320\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

**2°: Trasladamos las cargas excéntricas al centro de gravedad de la sección de empotramiento.**

$$\sigma_z = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} x \pm \frac{M_x}{I_x} y$$



Luego

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

$$(-12\vec{i} + 18\vec{j}) \times (-20\vec{k}) + (20\vec{i} - 20\vec{j}) \times (-6\vec{k})$$

$$= -240\vec{j} - 360\vec{i} + 120\vec{j} + 120\vec{i}$$

$$\sum \vec{M}_o = -120\vec{j} - 240\vec{i}$$

De otro lado; en la sección de empotramiento, tenemos:

$$\sigma_z = -\frac{26000}{2400} \pm \frac{120 \times 1000}{320,000} x \pm \frac{240 \times 1000}{720,000} y$$

$$\sigma_z = -10.8 \pm 7.5 \pm 10$$

Luego; en las esquinas:

$$x = 20 \text{ cm.}$$

$$y = 30 \text{ cm.}$$

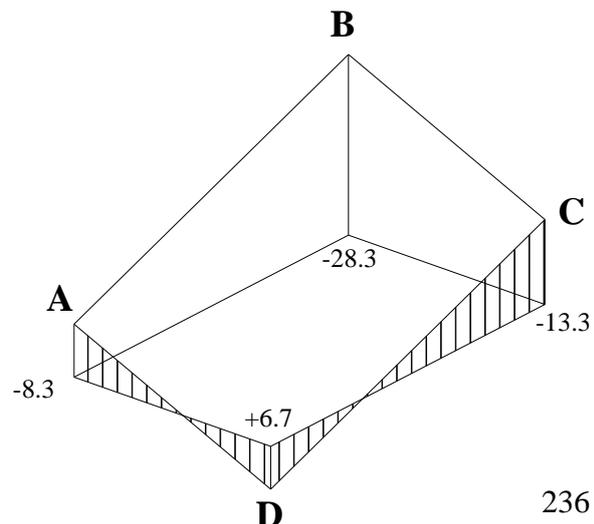
Asimismo:

$$\sigma_{z_A} = -10.8 - 7.5 + 10 = -8.3 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{z_B} = -10.8 - 7.5 - 10 = -28.3 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{z_C} = -10.8 + 7.5 - 10 = -13.3 \text{ Kg/cm}^2$$

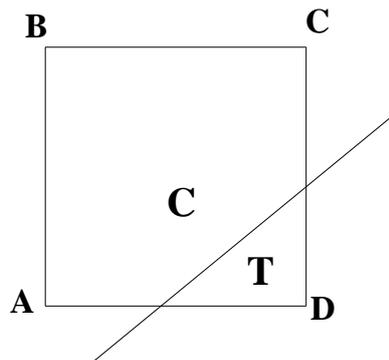
$$\sigma_{z_D} = -10.8 + 7.5 + 10 = +6.7 \text{ Kg/cm}^2$$



*Finalmente;*

$$\sigma_{\text{mx. de tracción}} = + 6.70 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx. de compresión}} = - 28.30 \text{ kg/cm}^2$$





**Genaro Delgado Contreras;** Ingeniero Civil, egresado de la Universidad Nacional de Ingeniería en 1979. Especialista y asesor en el área de Costos y Presupuestos en Ingeniería Civil.

Catedrático Universitario, Ingeniero Consultor en el área de Construcciones. Expositor a nivel Nacional en el área de Costos y Presupuestos en Ingeniería Civil.

Con estudios de maestría en Gestión y Desarrollo en la Universidad Nacional de Ingeniería, egresando en 1996.

#### **OTRAS OBRAS PUBLICADAS :**

- *Costos y Presupuestos en Edificaciones de un Núcleo básico de 30 m<sup>2</sup>*
- *Diseño Estructural de una vivienda económica de 160.00 m<sup>2</sup> de área techada.*
- *Diseño Estructural de Viviendas Económicas.*
- *Diseño de Estructuras Aporticadas de concreto armado*
- *Análisis y diseño estructural de edificaciones de albañilería confinada (Diseño de un Edificio de cuatro pisos)*
- *Dinámica Estructural*
- *Estática y Dinámica para Ingenieros*
- *Resistencia de Materiales*
- *Análisis Sísmico de Edificios*
- *Análisis de Costos Unitarios*
- *Encofrado y Ferrería*
- *Procedimiento de Construcción*
- *Finanzas e Inflación en la Construcción*
- *Análisis Estructural*



[www.edicivil.com.pe](http://www.edicivil.com.pe)