

Diseño en Concreto Armado

Concordado a
ACI 318

Ing. Roberto Morales Morales

Fundamentos de Diseño

Materiales

Análisis y Diseño por Flexión

Resistencia a la Flexión de
Secciones Simétricas de forma
cualquiera

Diseño de Escaleras

Comportamiento a Flexión de
Secciones de Viga / Diagrama
Momento Curvatura

Evaluación del Ancho de Grietas

Deflexiones en Concreto Armado

Diseño por Fuerza Cortante

Diseño por Torsión

Columnas

Predimensionamiento
de Vigas y Columnas

Cimentaciones

Muros de Contención

Diseño Límite

Análisis y Diseño de Losas

Fuerzas Cortantes de Fluencia
en Sistemas Aperturados de
Concreto Armado

Diseño Sísmico de Estructuras

Muros Estructurales



ICG

INSTITUTO DE LA CONSTRUCCION Y GERENCIA

FONDO EDITORIAL ICG

PT-06

Indice

Capítulo 1	01
FUNDAMENTOS DE DISEÑO EN CONCRETO ARMADO	
Capítulo 2	04
MATERIALES	
Concreto	04
Acero de Refuerzo	07
Confinamiento del Concreto por el Refuerzo	08
Efectos del Tiempo en el Concreto Endurecido	09
Capítulo 3	10
ANÁLISIS Y DISEÑO POR FLEXIÓN	
Hipótesis para determinar la Resistencia Nominal a Flexión ..	10
Viga Simplemente Reforzada	11
Viga Doblemente Reforzada	29
Vigas de Secciones T y L	38
Viga T aislada	39
Capítulo 4	47
RESISTENCIA A LA FLEXIÓN DE SECCIONES SIMÉTRICAS DE FORMA CUALQUIERA	
Capítulo 5	58
DISEÑO DE ESCALERAS	
Capítulo 6	73
COMPORTAMIENTO A LA FLEXIÓN DE SECCIONES DE VIGA Diagrama momento de curvatura	
Capítulo 7	82
EVALUACIÓN DEL ANCHO DE LAS GRIETAS	
Capítulo 8	90
DEFLEXIONES EN ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO	
Capítulo 9	100
DISEÑO POR FUERZA CORTANTE	
Capítulo 10	109
COLUMNAS	

Capítulo 11	123
PREDIMENSIONAMIENTO DE VIGAS Y COLUMNAS	
Capítulo 12	143
CIMENTACIONES	
Zapatatas Aisladas	143
Efecto de Carga Excéntrica sobre Cimentaciones	149
Cimentación Combinada	152
Zapata Conectada	165
Cimentación Excéntrica	173
Capítulo 13	180
MUROS DE CONTENCIÓN	
Muros de Contención	180
Estabilidad de un Muro de Contención	185
Dimensionamiento de un Muro Básico	187
Muros de Gravedad	188
Muro en Voladizo	189
Cálculo de Presiones Laterales considerando Estratos o Rellenos de Materiales diferentes	190
Diseño de un Muro de Contención en Voladizo	192
Diseño de un Muro de Contención con Contrafuertes	199
Capítulo 14	209
DISEÑO LIMITE	
Capítulo 15	226
ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS	
Losas Reforzadas en una Dirección	226
Líneas de Fluencia	230
Losas Reforzadas en Dos Direcciones:	
Método de Diseño Directo	252
Capítulo 16	266
FUERZAS CORTANTES DE FLUENCIA EN SISTEMAS APORTICADOS DE CONCRETO ARMADO	
Capítulo 17	291
DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO ARMADO	
Viga "Dúctil Especial"	299
Columna "Dúctil Especial"	303
Conexión Vigas - Columnas	313
Capítulo 18	318
MUROS ESTRUCTURALES	

FUNDAMENTOS DE DISEÑO EN CONCRETO ARMADO

1.1 EL DISEÑO ESTRUCTURAL

La estructura debe concebirse como un sistema o conjunto de partes y componentes que se combinan ordenadamente para cumplir una función dada. El proceso de diseño de un sistema, comienza con la formulación de los **objetivos** que se pretende alcanzar y de las **restricciones** que deben tenerse en cuenta. El proceso es cíclico; se parte de consideraciones generales, que se afinan en aproximaciones sucesivas, a medida que se acumula información sobre el problema.

Idealmente el objeto del diseño de un sistema es la optimización del sistema, es decir la obtención de todas las **mejores soluciones posibles**. El lograr una solución óptima absoluta es prácticamente imposible, sin embargo, puede ser útil optimizar de acuerdo con determinado criterio, tal como el de peso o costo mínimo; teniendo en cuenta siempre que **no existen soluciones únicas sino razonables**.

1.2 EL DISEÑO POR ESTADO LIMITE

El diseño por estado límite trata de lograr que las características **acción-respuesta** de un elemento estructural o de una estructura estén dentro de **límites aceptables**. Según este método, una estructura o un elemento estructural deja de ser útil cuando alcanza un estado límite, en el que **deja de realizar la función** para el cual fue diseñada.

Se propone que la estructura se diseñe con referencia a varios estados límite. Los estados límite más importantes son: resistencia bajo **carga máxima**, **deflexiones y ancho de grietas** bajo carga de servicio. En consecuencia la teoría de la resistencia máxima se enfoca para el dimensionamiento de las secciones, utilizando la teoría elástica solamente para asegurar el comportamiento bajo cargas de servicio.

Para revisar la seguridad de una estructura, se debe verificar que la resistencia

de cada elemento estructural y de la estructura en conjunto sea mayor que las acciones que actúan sobre los elementos o sobre la estructura.

A continuación se da las recomendaciones de resistencia para la seguridad estructural de acuerdo al ACI, la cual se divide en dos partes: factores de carga y factores de reducción de capacidad.

1.2.1 Factores de Carga

Los factores de carga tienen el propósito de dar seguridad adecuada contra un aumento en las cargas de servicio más allá de las especificaciones en el diseño, para que sea sumamente improbable la falla. Los factores de carga también ayudan a asegurar que las deformaciones bajo cargas de servicio no sean excesivas. El código ACI recomienda que la resistencia requerida U para resistir las cargas sean:

- a) Para combinaciones de carga muerta y carga viva.

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

Donde D es el valor de la carga muerta y L el valor de la carga viva

- b) Para combinaciones de carga muerta, carga viva y carga accidental.

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.7 W) \text{ ó}$$
$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E)$$

Donde W es el valor de la carga de viento y E el de la carga de sismo. Cuando la carga viva sea favorable, se deberá revisar las combinaciones de carga muerta y carga accidental con los siguientes factores de carga.

$$U = 0.9 D + 1.3 W \text{ ó}$$
$$U = 0.9 D + 1.43 E$$

1.2.2 Factores de Reducción de Capacidad

Los factores de reducción de capacidad ϕ , toman en cuenta las inexactitudes en los cálculos y fluctuaciones en la resistencia del material, en la mano de obra y en las dimensiones. En las vigas se considera el más alto valor de ϕ debido a que están diseñadas para fallar por flexión de manera dúctil con fluencia del acero en tracción. En las columnas tienen el valor más bajo de ϕ , puesto que pueden fallar en modo frágil cuando la resistencia del concreto es el factor crítico; adicionalmente la falla de una columna puede significar el desplome de toda la estructura y es difícil realizar la reparación.

Para flexión	:	ϕ	= 0.90
Para cortante	:	ϕ	= 0.85
Para flexo-compresión	:	ϕ	= 0.75 (columnas zunchadas)
		ϕ	= 0.70 (columnas estribadas)

1.3 CONSIDERACIONES SOBRE EL COMPORTAMIENTO PARA CARGAS DE SERVICIO Y CARGAS FACTORADAS

Se debe verificar que las deflexiones bajo cargas de servicio estén dentro de los límites aceptables. El control del agrietamiento también es muy importante para fines de apariencia y durabilidad. El código ACI proporciona recomendaciones para ambos.

Es importante asegurar en el caso de cargas extremas que una estructura se comporte en forma dúctil. Esto significa asegurar que la estructura no falle en forma frágil sin advertencia, sino que sea capaz de sufrir grandes deformaciones bajo cargas cercanas a la máxima. El comportamiento deseable para estructuras sometidas a cargas sísmicas solo se puede obtener si la estructura tiene suficiente ductilidad para absorber y disipar energía mediante deformaciones inelásticas. Para asegurar el comportamiento dúctil, los diseñadores deben dar especial atención a los detalles tales como cuantía de refuerzo longitudinal, anclaje del refuerzo y confinamiento del concreto comprimido, evitando así los tipos frágiles de falla.

MATERIALES

2.1 CONCRETO

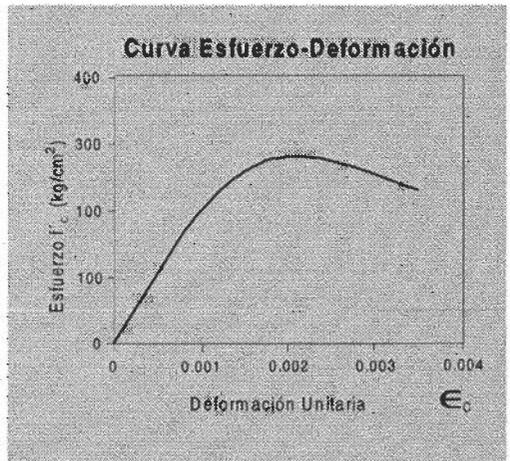
2.1.1 Esfuerzos De Compresión

a. Esfuerzos de Compresión Uniaxial

Por lo general la resistencia a la compresión del concreto se obtiene del ensayo de probetas de 12" de altura por 6" de diámetro. Las probetas se cargan longitudinalmente en una tasa lenta de deformación para alcanzar la deformación máxima en 2 ó 3 minutos. La curva esfuerzo-deformación se obtienen de este ensayo, en el cual se relaciona la fuerza de compresión por unidad de área versus el acortamiento por unidad de longitud.

La curva que se presenta corresponde a un ensayo de **corta duración** del orden de **unos cuantos minutos**.

Se puede observar que el concreto no es un material elástico, sin embargo se puede considerar una porción recta hasta aproximadamente el **40%** de la carga máxima. Además el **colapso** se produce comúnmente a una **carga menor que la máxima**.



En el ensayo de cilindros de concreto simple, la carga máxima se alcanza a una deformación unitaria del orden de **0.002**. El colapso de la probeta

que corresponde al extremo de la rama descendente se presenta en ensayos de corta duración a deformaciones que varían entre 0.003 y 0.007, según las condiciones del espécimen y de la máquina de ensayo.

A continuación se describe los efectos que tienen la edad, la relación agua_cemento, efectos de velocidad de carga, velocidad de deformación, esbeltez y tamaño del espécimen.

- **Efectos de la edad.**- Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto **incrementa su capacidad de carga** con la edad, por tanto el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

- **Efecto de la relación agua/cemento.**- La **resistencia** del concreto depende de la relación agua/cemento : a mayor relación agua/cemento, menor es la resistencia.

- **Efecto de la velocidad de carga.**- Las resistencias de una probeta en el que la carga máxima se alcanza en **centésimas de segundo** es aproximadamente **50% mayor** que la que alcanza sus carga máxima en **66 seg.** Por otra parte para una probeta en que la carga máxima se alcanza en **69 minutos**, la resistencia **disminuye en un 10%.**

- **Efectos de la velocidad de deformación.**- Si la velocidad de deformación es grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave.

- **Efectos de la esbeltez y del tamaño del espécimen.**- Se ha tomado arbitrariamente como 100% la resistencia de una probeta con relación de esbeltez igual a dos. Para **esbelteces mayores de 6** la **resistencia baja** hasta llegar a un 85%. En especímenes geoméricamente semejantes pero de distinto tamaño la resistencia disminuye para un espécimen mayor.

b. Comportamiento a Esfuerzos Combinados

En muchas estructuras el concreto está sujeto a esfuerzos directos y cortantes que actúan en varias direcciones. Considerando el equilibrio de las fuerzas que actúan en un elemento de concreto, se demuestra que se puede **reducir cualquier combinación** de esfuerzos combinados a **tres esfuerzos normales** que actúan en tres planos perpendiculares.

Investigadores han llegado a la conclusión de que la resistencia del concreto sujeto a compresión biaxial puede ser mayor hasta un 27% que la resistencia uniaxial. Para esfuerzos biaxiales iguales de compresión el aumento de resistencia es aproximadamente de un 16%.

Se han hecho ensayos de probetas de concreto sujeto a compresión triaxial. En estos ensayos el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando al espécimen de aceite a cierta presión (presión de confinamiento lateral) y aplicando una carga axial hasta la falla. Se encontró la siguiente relación:

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2$$

Donde:

f_1 = resistencia a la compresión axial del espécimen.

f'_c = resistencia a la compresión uniaxial del espécimen no confinado.

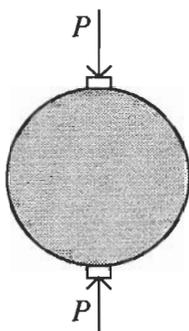
f_2 = presión de confinamiento lateral.

Es evidente que un aumento en la presión lateral produce aumentos significativos en ductilidad al igual que en resistencia.

2.1.2 Esfuerzos de Tensión en el Concreto

El someter al concreto a tensión axial directa, no ha sido muy utilizado para propósitos de investigación debido a dificultades experimentales. En lugar de ello se ha utilizado la prueba brasilera, que en esencia consiste en someter una probeta de concreto a compresión lineal diametral como se muestra en la figura.

El esfuerzo de ruptura de tensión a través del diámetro se encuentra de la relación $2P/(\pi hd)$, en que P es la carga aplicada durante la ruptura, h la longitud del cilindro y d el diámetro.



Para pruebas realizadas se ha encontrado que el esfuerzo de tracción del concreto está dada por la siguiente relación.

$$f_t = 1.5 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

También es posible evaluar la resistencia a la tensión del concreto por medio de pruebas de flexión realizadas en vigas de concreto simple. Esto se determina con frecuencia ensayando un prisma de concreto simplemente apoyado, sujeto a uno o dos cargas concentradas. La resistencia de tensión en flexión, conocida como módulo de rotura f_r se calcula de la fórmula de flexión M/Z en que M es el momento flexionante y Z el módulo de la sección.

Un valor usual aproximado encontrado para el módulo de rotura es:

$$f_r = 2 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

2.1.3 Módulo Elástico del Concreto

Del estudio de las curvas de esfuerzo deformación, resulta obvio que el concepto convencional del módulo de elasticidad no tiene sentido en el concreto, por lo que se recurre a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así se puede definir el módulo tangente inicial, el módulo tangente en un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma.

El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico.

El reglamento ACI ha propuesto la siguiente expresión para estimar el módulo de elasticidad.

$$E_c = w^{1.5} 4000 \sqrt{f'_c}$$

Donde E_c es el módulo de elasticidad en kg/cm^2 , w es el peso volumétrico del concreto en t/m^3 y f'_c resistencia del concreto en kg/cm^2 .

Si consideramos el peso volumétrico $w = 2.4 \text{ t/m}^3$ tenemos

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

En algunos análisis elásticos se suelen emplear G , el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y μ , el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20, con frecuencia se supone μ igual a 0.18.

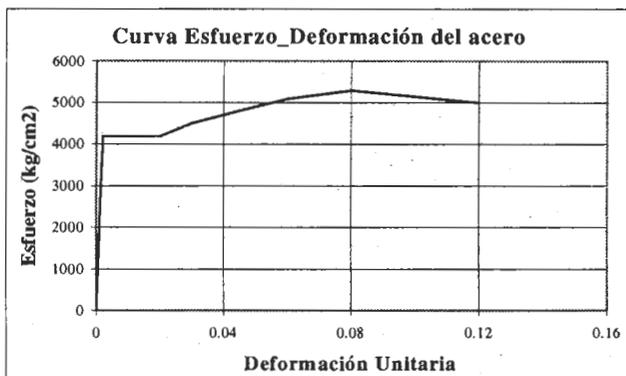
2.2 ACERO DE REFUERZO

El acero de refuerzo en concreto armado son varillas de sección redonda, las cuales tienen corrugaciones cuyo fin es restringir el movimiento longitudinal de las varillas relativo al concreto que las rodea. A continuación damos una tabla con varillas de producción común en nuestro medio.

Barra núm.	Diámetro		Peso kg/m	Area cm ²	Perímetro cms.
	pulg.	cms.			
3	3/8	0.98	0.559	0.71	2.99
4	1/2	1.27	0.993	1.27	3.99
5	5/8	1.59	1.552	1.98	4.99
6	3/4	1.91	2.235	2.85	5.98
7	7/8	2.22	3.042	3.88	6.98
8	1	2.54	3.973	5.07	7.98
9	1 1/8	2.86	5.028	6.41	8.98
10	1 1/4	3.18	6.207	7.92	9.97
11	1 3/8	3.49	7.511	9.58	10.97
12	1 1/2	3.81	8.938	11.40	11.97

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia, entre estos tipos tenemos los de grado 40, 50 y 60, que corresponden a los límites de fluencia de 2800, 3500 y 4200 kg/cm².

Las curvas esfuerzo-deformación del acero muestran una porción inicial elástica lineal, una plataforma de fluencia (es decir donde la deformación continua sin aumento del esfuerzo, a este valor del esfuerzo se le llama esfuerzo de fluencia), una región de endurecimiento por deformación, y finalmente una zona donde el esfuerzo decae hasta ocurrir la fractura.



2.2.1 Módulo de elasticidad del acero

El módulo de elasticidad del acero está dado por la pendiente de la porción elástica lineal de la curva esfuerzo-deformación, el valor del módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco y generalmente se toma igual 2×10^6 Kg/cm².

2.3 CONFINAMIENTO DEL CONCRETO POR EL REFUERZO

En la práctica, se confina al concreto mediante refuerzo transversal por estribos (zunchos y/o aros de acero rectangular). El concreto queda confinado cuando a esfuerzos que se aproximan a la resistencia uniaxial f'_c , las deformaciones transversales se hacen muy elevadas debido al agrietamiento interno progresivo y el concreto se apoya contra el refuerzo transversal, el que entonces aplica una reacción de confinamiento al concreto. El refuerzo transversal proporciona confinamiento pasivo. Las pruebas realizadas por investigadores, han demostrado que el confinamiento por el refuerzo transversal puede mejorar considerablemente las características esfuerzo-deformación del concreto a deformaciones elevadas; además se ha demostrado que los zunchos confinan al concreto con mayor eficiencia que los estribos.

El concreto no está confinado fuera del área del refuerzo transversal, y se puede esperar que este concreto de recubrimiento tenga características esfuerzo-deformación distintas a las del concreto dentro del núcleo. El recubrimiento generalmente comienza a desprenderse cuando se alcanza la resistencia no

confinada, especialmente si la cuantía de acero transversal es elevada debido a la presencia de un gran número de varillas transversales crea un plano de debilidad entre el núcleo y el recubrimiento lo que precipita el desprendimiento.

2.4 EFECTOS DEL TIEMPO EN EL CONCRETO ENDURECIDO

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una **deformación inicial**. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aún cuando no se incrementa la carga. Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: **contracción y flujo plástico**.

Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el **contenido de agua** del concreto a lo largo del tiempo. La contracción tiende a producir esfuerzos debido a la restricción al libre desplazamiento del elemento. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010.

Flujo Plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de la carga; se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un **reacomodo interno de las partículas** que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. Se puede decir con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomar indefinidamente, sin fallar, cargas hasta el 60% de su capacidad. **Cargas mayores del 70-80%, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.**

ANÁLISIS Y DISEÑO POR FLEXIÓN

HIPOTESIS PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA NOMINAL A FLEXIÓN

limite

El concreto no podrá desarrollar una fuerza de compresión mayor a la de su resistencia f'_c .

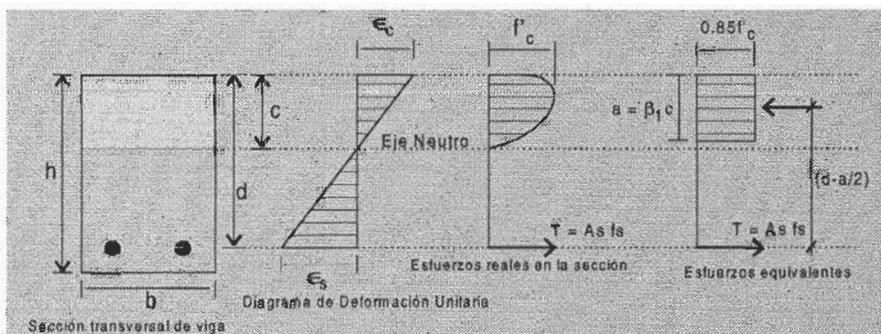
El concreto tiene una resistencia a la tracción muy pequeña y que se agrieta aproximadamente cuando este alcanza un 10% de su resistencia f'_c , por lo que se omite en los cálculos de análisis y diseño y se asume que el **acero toma toda la fuerza total en tracción.**

La relación **esfuerzo-deformación** del concreto se considera **lineal** solo hasta aproximadamente el **50%** de su resistencia.

Prevalece la hipótesis de **Bernoulli** en la que las **secciones** planas antes de la flexión **permanecen planas** y perpendiculares al eje neutro después de la flexión.

La deformación unitaria del **concreto** en la **rotura** es: $\epsilon_{cu} = 0.003$

Según el método de factores de carga y resistencia, para el diseño nos interesa conocer como se encuentra la sección en el estado de falla, a continuación ilustramos esta condición para una sección simplemente reforzada.



La distribución **real** de los esfuerzos en la sección tiene una forma **parabólica**, **Whitney** propuso que esta forma real sea asumida como un bloque **rectangular** cuyas características se muestran en la figura.

El valor de β_1 es 0.85 si la resistencia del concreto es menor que 280 kg/cm². Si este no es el caso este disminuirá en 0.05 por cada incremento de 70 kg/cm² en la resistencia del concreto, no siendo su valor menor a 0.65.

El Código ACI ha adoptado como un valor límite de seguridad una deformación unitaria máxima del concreto de 0.003, para el cual el concreto falla.

VIGA SIMPLEMENTE REFORZADA

Si hacemos el equilibrio en la sección tenemos lo siguiente:

$$C_c = T$$
$$0.85 f'_c b a = A_s f_s$$

$$a = \frac{A_s f_s}{0.85 f'_c b}$$

Donde a es la profundidad del bloque equivalente en compresión del concreto, notaremos que el valor f_s depende de la deformación alcanzada por el acero siendo su mayor valor su esfuerzo de fluencia f_y .

Es de lo anterior que se concibe tres **tipos de falla** de una sección de viga simplemente reforzada.

1. Se conoce como falla **dúctil** cuando **el acero en tracción ha llegado primero** a su estado de fluencia antes que el concreto inicie su aplastamiento en el extremo comprimido; o sea cuando en la falla $\epsilon_s > \epsilon_y$, Donde ϵ_y es el valor de la deformación para el cual se inicia la fluencia del acero.
2. Se conoce como falla **balanceada** si simultáneamente se inicia la fluencia del acero y el aplastamiento del concreto, es decir cuando en la falla $\epsilon_s = \epsilon_y$.
3. Se conoce como falla **frágil** si **primeramente se inicia el aplastamiento del concreto** antes que el inicio de la fluencia del acero en tracción, es decir cuando en la falla $\epsilon_s < \epsilon_y$.

Cuantía del Acero en Tracción

Definimos como cuantía del acero en tracción (ρ):

$$\rho = \frac{A_s}{bd}$$

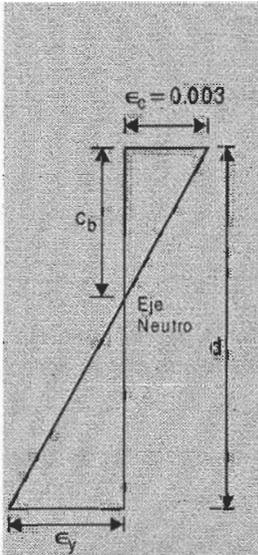
Y, se define como **cuantía mecánica** o **índice de refuerzo** (w) a:

Ing Semens

$$q = w = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

Condición de Falla Balanceada:

Determinaremos el valor de la cuantía para la cual la sección se encuentra en la falla balanceada, por lo que existirá un valor de A_s , a , c , para el estado balanceado.



De la figura tenemos:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} \Rightarrow c_b = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} (d)$$

Conocemos que el valor del módulo de elasticidad del acero es: $E_s = 2 \times 10^6$, entonces:

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{f_y}{2 \times 10^6}$$

Efectuando el reemplazo tenemos:

$$c_b = \frac{6000}{6000 + f_y} (d)$$

Haciendo el equilibrio, $C_c = T$, y despejando A_s tenemos:

$$A_s = 0.85 f'_c b a / f_y$$

Diagrama de Deformación Unitaria

Entonces:

$$A_{s_b} = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} b \beta_1 \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) d$$

Finalmente:

$$\rho_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

Siendo esta última expresión el valor de la cuantía balanceada.

Análisis de secciones de viga con falla dúctil

Partiendo de nuestra expresión de equilibrio tenemos:

$$C_c = T$$
$$0.85 f'_c b a = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Tomando Momentos respecto a un eje que pasa por el centroide del acero tenemos:

$$M_n = A_s f_y (d - a/2)$$
$$M_u = \phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2)$$

Donde ϕ es el factor de resistencia que para vigas su valor es 0.9.

Diseño por Flexión

Para el diseño por flexión debemos saber que el tipo de falla deseable es la falla dúctil con la cual la sección ha desarrollado grandes deformaciones.

El Código ACI da los límites de cuantía para el diseño:

Cuantía Máxima:

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b$$

Para zona sísmica se tomará como cuantía máxima el valor de $0.5\rho_b$

Cuantía Mínima:

Se tomará el valor **mayor** de las dos siguientes expresiones:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y}$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y}$$

Donde f'_c y f_y están en kg/cm^2 .

Teniendo estas consideraciones, seleccionamos un valor para la cuantía con el cual dimensionaremos la sección:

Sabemos:
$$M_u = \phi \rho b d \left(\frac{f_y}{f'_c} \right) f'_c \left(d - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_s f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b} \right)$$

Luego:
$$M_u = \phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2)$$

Finalmente:
$$M_u = \phi b d^2 f'_c w (1 - 0.59 w)$$

Esta última expresión es la expresión de dimensionamiento, donde los valores desconocidos son "b" y "d", los cuales el diseñador **escogerá** apropiadamente.

Cálculo del Acero:

Una vez dimensionada la sección, el cálculo del acero se efectuará simplemente haciendo una **iteración** entre las siguientes dos expresiones

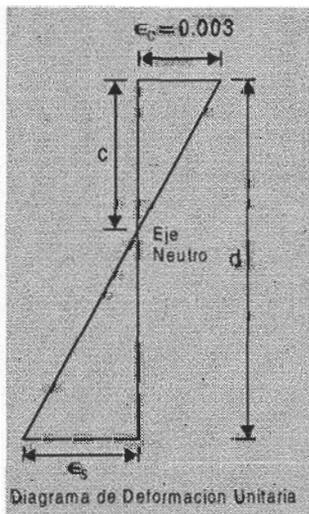
$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Se **sugiere** como primera aproximación que "a" sea igual a "d/5".

Análisis de secciones sobre reforzadas $\epsilon_s < \epsilon_y$

Aunque no es de nuestro interés las secciones de viga sobre reforzadas, presentamos en esta sección el análisis para fines académicos.



De la figura tenemos:

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_c} = \frac{(d - c)}{c} \Rightarrow \epsilon_s = 0.003 \frac{(d - c)}{c}$$

Sabemos que $f_s = E_s \epsilon_s = 2 \times 10^6 \epsilon_s$

Efectuando el reemplazo tenemos:

$$f_s = 6 \frac{(\beta_1 d - a)}{a} \leq f_y \left(t / cm^2 \right)$$

Haciendo el equilibrio $C_c = T$, tenemos:

$$0.85 f'_c b a = A_s f_s, \text{ reemplazando } f_s:$$

$$0.85 f'_c b a^2 = 6 A_s \beta_1 d - 6 A_s a$$

Ordenando los terminos tenemos: $0.85 f'_c b a^2 + 6 A_s a - 6 A_s \beta_1 d = 0$

Donde f'_c esta en t/cm^2 , si resolvemos la **ecuación cuadrática** obtenemos el valor de "a" con el cual obtenemos el valor del momento último resistente.

$$M_u = \phi A_s f_s (d - a/2)$$

Aplicación: Análisis de flexión de una sección simplemente reforzada

Se tiene una viga de sección rectangular, mostrada en figura, con $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ determine si la sección de viga está sobrerreforzada o subrerreforzada, y si satisface los requerimientos del código ACI 318-99 para cuantías máximas y mínimas para:

- a) $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ y
b) $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

a) $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$\rho_b = \beta_1 \cdot 0.85 \cdot \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

$$\rho_b = 0.85 \cdot 0.85 \cdot \frac{280}{4200} \cdot \left(\frac{6000}{6000 + 4200} \right) = 0.0283$$

$$A_s = 6\phi 1" = 6 \cdot 5.07 = 30.42 \text{ cm}^2$$

$$d = 50 \cdot (4 + 0.95 + 2.54 + 2.54/2) = 41.24 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{30.42}{25 \times 41.24} = 0.0295$$

Se tiene que $\rho > \rho_b$ por tanto:

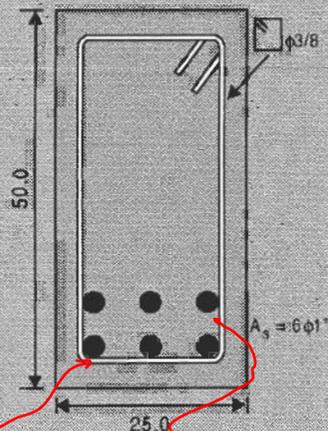
Sobrerreforzado (falla frágil)

Requisitos de Cuantía

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.0212$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{280}}{4200} = 0.0032$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$



7.6 - Límites para el espaciamiento del refuerzo

7.6.1 - La distancia libre mínima entre barras paralelas de una capa debe ser d_s , pero no menor de 25 mm. Véase también la sección 3.3.2.

R7.7 - Recubrimiento de concreto para el refuerzo

El recubrimiento de concreto para protección del refuerzo contra la acción del clima y otros efectos se mide desde la superficie del concreto hasta la superficie exterior del acero, a la cual se aplica el recubrimiento. Cuando se prescriba un recubrimiento mínimo para una clase de elemento estructural, éste debe medirse: hasta el borde exterior de los estribos cerrados, estribos o zunchos, si la armadura transversal confina las barras principales; hasta la capa exterior de barras, si se emplea más de una capa sin estribos cerrados o estribos; hasta los dispositivos metálicos de los extremos o los ductos en el acero de postensado.

$$\rho > \rho_{\min} \Rightarrow \text{Conforme}$$

$$\rho > \rho_{\max} \Rightarrow \text{No cumple}$$

No cumple con los requerimientos de cuantía del ACI ("Diseño No Conforme").

$$b) \quad f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2, \quad f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) = 0.0493$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = 0.0295$$

Tenemos $\rho < \rho_b$ por tanto:

Sección Subreforzado (Falla Dúctil)

Requisitos de Cuantía

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.0369$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{280}}{2800} = 0.0048$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{2800} = 0.005$$

$$\rho < \rho_{\max} \Rightarrow \text{Conforme}$$

$$\rho > \rho_{\min} \Rightarrow \text{Conforme}$$

Aplicación:

Para la sección de la viga que se muestra, calcular el momento nominal con $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ y

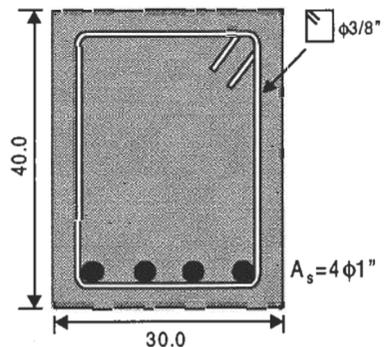
- $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$;
- $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$ y
- $f'_c = 630 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

Calculamos la cuantía de la sección,
 $d = 40 - (4 + 0.95 + 2.54/2) = 33.78 \text{ cm}$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4 \cdot 5.07}{30 \cdot 33.78} = 0.020$$

$$\text{además: } \rho_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$



$$a) \quad f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2, f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_b = 0.85 * 0.85 * \frac{210}{4200} * \left(\frac{6000}{6000 + 4200} \right) = 0.0213$$

Tenemos $\rho < \rho_b$ por tanto:

Sección SUB-REFORZADA

$$\text{Luego: } Mn = A_s f_y (d - a / 2);$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$a = \frac{20.28 * 4.2}{0.85 * 0.21 * 30} = 15.91 \text{ cm}$$

$$Mn = 20.28 * 4.2 * (0.338 - 0.159/2)$$

$$Mn = 22.0 \text{ t-m}$$

Requisitos de Cuantía

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = .0159$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{210}}{4200} = 0.00276$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033 \leftarrow$$

$$\rho = 0.020 > \rho_{\min} \Rightarrow \text{Conforme}$$

$$\rho = 0.020 > \rho_{\max} \Rightarrow \text{No Conforme}$$

De acuerdo al ACI el Diseño No es Conforme.

$$b) \quad f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2, f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_b = 0.80 * 0.85 * \frac{350}{4200} * \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$\rho_b = 0.0333$$

Tenemos $\rho = 0.020 < \rho_b$ por tanto: SUB-REFORZADA

$$\text{Luego: } a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b};$$

$$Mn = A_s f_y (d - a/2)$$

$$a = \frac{20.28 * 4.2}{0.85 * 0.35 * 30} = 9.54 \text{ cm}$$

$$Mn = 20.28 * 4.2 * (0.338 - 0.0954/2)$$

$$Mn = 24.73 \text{ t-m}$$

Requisitos de Cuantía

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.0250$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{350}}{4200} = 0.00356 \leftarrow$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

$$\rho = 0.020 > \rho_{\min} \Rightarrow \text{Conforme}$$

$$\rho = 0.020 < \rho_{\max} \Rightarrow \text{Conforme}$$

De acuerdo al ACI el diseño es conforme

Puede usarse para la condición subreforzada la expresión:

$$Mn = bd^2 f'_c w (1 - 0.59w)$$

donde, $w = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.020 * \frac{4200}{350} = 0.24$

$$Mn = 0.30 * 33.78^2 * 0.35 * 0.24 * (1 - 0.59 * 0.24) = 24.7 \text{ t-m}$$

c) $f'_c = 630 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$\rho_b = 0.65 * 0.85 * \frac{630}{4200} * \left(\frac{6000}{6000 + 4200} \right)$$

$$\rho_b = 0.0488$$

Tenemos $\rho = 0.020 < \rho_b$ por tanto: SUB-REFORZADA

Luego:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}; Mn = A_s f_y (d - a/2)$$

$$a = \frac{20.28 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.63 \cdot 30} = 5.30 \text{ cm}$$

$$M_n = 20.28 \cdot 4.2 \cdot (0.338 - 0.053/2)$$

$$M_n = 26.53 \text{ t-m}$$

Requisitos de Cuantía

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.0366$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{630}}{4200} = 0.00478 \leftarrow$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

$$\rho = 0.020 > \rho_{\min} \Rightarrow \text{Conforme}$$

$$\rho = 0.020 < \rho_{\max} \Rightarrow \text{Conforme}$$

De acuerdo al ACI el Diseño es conforme

Discusión de Resultados

$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$;	$M_n = 22.0 \text{ t-m}$	$M_n = Mn_0$
$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$;	$M_n = 24.73 \text{ t-m}$	$M_n = 1.12 Mn_0$
$f'_c = 630 \text{ kg/cm}^2$;	$M_n = 26.53 \text{ t-m}$	$M_n = 1.21 Mn_0$

La calidad del concreto no influye en forma significativa en el valor del momento nominal.

Aplicación:

Para la sección de la viga que se muestra en la figura determine el momento nominal, indicando el tipo de falla.

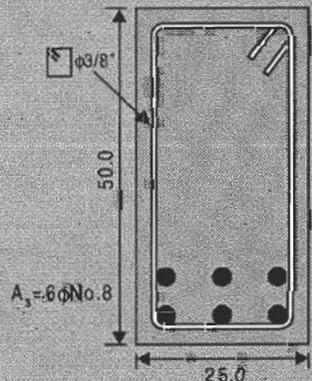
$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Solución:

$$\rho_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

$$\rho_b = 0.85 \cdot 0.85 \cdot \frac{280}{4200} \cdot \left(\frac{6000}{6000 + 4200} \right) = 0.0283$$



$$A_s = 6\phi 1" = 6 \cdot 5.07 = 30.42 \text{ cm}^2$$

$$d = 50 - (4 + 0.95 + 2.54 + 2.54/2) = 41.24 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{30.42}{25 \cdot 41.24} = 0.0295$$

Se tiene $\rho > \rho_b$ que por tanto:
Sección Sobre Reforzada (falla frágil).

Del diagrama de deformaciones unitarias:

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_c} = \frac{(d-c)}{c} \Rightarrow \epsilon_s = 0.003 \frac{(d-c)}{c}$$

$$f_s = E_s \epsilon_s = 2 \times 10^3 \text{ t/cm}^2 \epsilon_s < f_y$$

$$f_s = 6 \frac{(\beta_1 d - a)}{a} \leq f_y \quad (\text{t/cm}^2)$$

Haciendo el equilibrio $C_c = T$, tenemos:

$$0.85 f_c' b a = A_s f_s, \text{ reemplazando } f_s:$$

$$0.85 f_c' b a^2 = 6 A_s \beta_1 d - 6 A_s a$$

Ordenando los terminos tenemos:

$$0.85 f_c' b a^2 + 6 A_s a - 6 A_s \beta_1 d = 0$$

$$0.85 \cdot 0.28 \cdot 25 a^2 + 6 \cdot 30.42 a - 6 \cdot 30.42 \cdot 0.85 \cdot 41.24 = 0$$

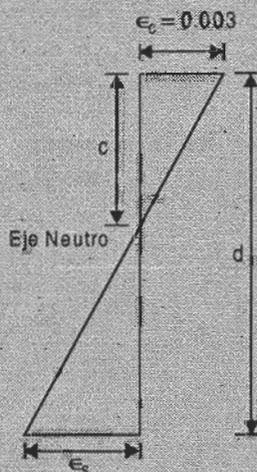
$$5.95 a^2 + 182.52 a - 6398.06 = 0$$

$$\text{Resolviendo } a = 20.86 \text{ cm}$$

$$f_s = 6 \frac{(0.85 \cdot 41.24 - 20.86)}{20.86} = 4.08 \text{ t/cm}^2 \leq f_y$$

$$\text{Luego: } Mn = A_s f_s (d - a/2)$$

$$Mn = 30.42 \cdot 4.08 (0.4124 - 0.2086 / 2) = 38.24 \text{ t-m}$$



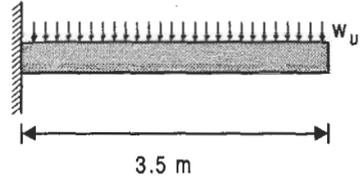
Aplicación:

Diseñar la viga en voladizo que se muestra en la figura. Para el dimensionamiento de la sección rectangular considere una cuantía no mayor de $0.5\rho_b$ se conoce $W_D=1.84$ t/m, $W_L=0.75$ t/m, $b=0.40$ m, $f_c=350$ kg/cm², $f_y=2800$ kg/cm², estribos de ϕ 3/8".

Solución:

$$w_u = 1.4 * 1.84 + 1.7 * 0.75 = 3.85 \text{ t/m}$$

$$-M_u = 3.85 * \frac{3.5^2}{2} = 23.58 \text{ t-m}$$



$$\rho_b = \beta_1 0.85 \frac{f_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) = 0.0580$$

$$\rho \leq 0.5 \rho_b = 0.0290 \Rightarrow \rho = \frac{f_y}{f_c} = 0.2318$$

$$M_u = \phi f_c b d^2 \rho (1 - 0.59 \rho)$$

$$23.58 * 10^5 = 0.9 * 350 * 40d^2 * 0.2318 (1 - 0.59 * 0.2318)$$

$$d^2 = 935.25 \Rightarrow d = 30.58 \text{ cm}$$

$$h = 30.58 + 4 + 0.95 + 2.86/2 = 36.96 \text{ cm}$$

Usar: $h = 40 \text{ cm} \Rightarrow d = 33.62 \text{ cm}$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} = \frac{23.58 * 10^5}{0.9 * 2800 (0.9 * 33.62)} = 30.92 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b} = \frac{30.92 * 2.8}{0.85 * 0.35 * 40} = 7.28 \text{ cm}$$

$$A_s = 31.22 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 7.35 \text{ cm} \quad \text{Es suficiente}$$

Usar: $5 \phi \text{ N}^\circ 9 (5 * 6.42 \text{ cm}^2 = 32.10 \text{ cm}^2)$

$$b_{min} = 4 * 2 + 2 * 0.85 + 5 * 2.86 + 4 * 2.86 = 35.44 < b = 40 \text{ cm},$$

CONFORME

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{32.10}{40 * 33.62} = 0.0239 < 0.0290, \text{ CONFORME}$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.8 \frac{\sqrt{350}}{2800} = 0.00535 \leftarrow$$

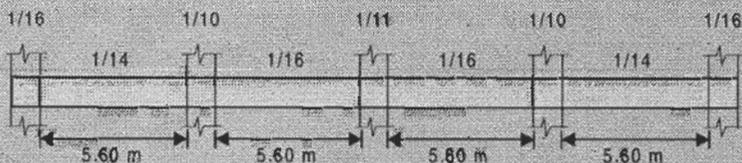
$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{2800} = 0.005$$

$\rho > \rho_{\min}$, CONFORME

Aplicación:

Para la viga continua V-01 (0.25 x h) que se muestra en la figura, se pide:

- a) Dimensionar la viga considerando el momento positivo mayor, $\rho = 1\%$, $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$.
- b) Diseñar por flexión la sección de momento negativo mayor.
 Para el metrado de cargas considere: La sección de viga de $0.25 \times 0.50 \text{ m}^2$, s/c = 400 kg/m^2 , Tab = 100 kg/m^2 , acabado = 100 kg/m^2 , aligerado de 0.20 m , ancho tributario de carga $B = 4.725 \text{ m}$.



a)
$$+M_u = \frac{W_u L_n^2}{14} = \frac{1}{14} * 6.83 * 5.6^2 = 15.31 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi f'_c b d^2 w (1 - 0.59 w) \dots\dots\dots (1)$$

$$w = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.01 * \frac{4200}{350} = 0.12$$

En (1): $15.31 * 10^5 = 0.9 * 350 * 25 * d^2 * 0.12 (1 - 0.59 * 0.12)$

$$d^2 = 1743.55 \rightarrow d = 41.76 \text{ cm}$$

$$h = 41.76 + 4 + 0.95 + 2.54 / 2 = 47.98 \text{ cm}$$

Usar $h = 0.50 \text{ m}$

$$d = 50 - (4 + 0.95 + 2.54 / 2) = 43.78 \text{ cm}$$

$$b) \quad -M_u = \frac{W_u L_n^2}{10} = \frac{1}{10} \cdot 6.83 \cdot 5.6^2 = 21.42 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$a = \frac{d}{5} = \frac{43.78}{5} = 8.76 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{21.42 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot (43.78 - 8.76 / 2)} = 14.38 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{14.38 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.35 \cdot 25} = 8.1 \text{ cm}$$

Usar $A_s = 3\phi 1''$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{3 \cdot 5.07}{25 \cdot 43.78} = 0.0139$$

$\rho = 1.39\%$ CONFORME

Aplicación:

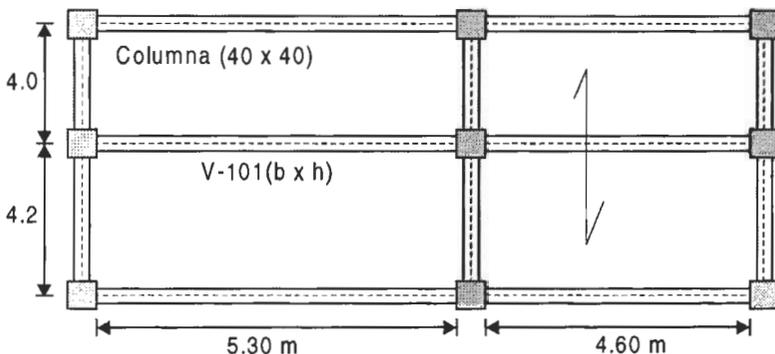
Para la planta que se muestra en la figura determine para la viga V-101 lo siguiente:

- Momentos de diseño.
- Dimensionamiento para $w = 0.18$
- Diseñar la sección de momento máximo.

Considere: Ancho de viga $b = 25\text{cm}$, aligerado de 0.17cm , acabado = 100 kg/m^2 , tabiquería = 150 kg/m^2 , y $s/c = 300 \text{ kg/m}^2$ (Uso de oficinas).

Nota: Para el metrado del peso propio de la viga asuma sección de 25×50 .

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2 \quad f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$



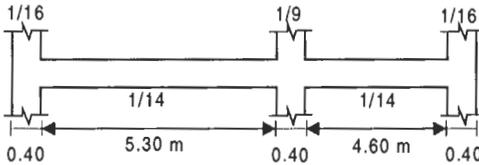
Solución:

Metrado de cargas:

$$\begin{aligned}
 \text{Peso propio viga} &= 0.25 \cdot 0.50 \cdot 2.4 = 0.30 \text{ t/m} \\
 \text{Aligerado} &= 0.28 \text{ t/m}^2 \cdot (4.10 - 0.25) = 1.08 \text{ t/m} \\
 \text{Acabado} &= 0.10 \text{ t/m}^2 \cdot 4.10 = 0.41 \text{ t/m} \\
 \text{Tabiquería} &= 0.15 \text{ t/m}^2 \cdot 4.10 = 0.62 \text{ t/m} \\
 &W_D = 2.41 \text{ t/m} \\
 \text{Sobre carga (s/c)} &= 0.3 \text{ t/m}^2 \cdot 4.10 = W_L = 1.23 \text{ t/m}
 \end{aligned}$$

$$W_u = 1.4 W_D + 1.7 W_L = 5.47 \text{ t/m}$$

a. Momentos de Diseño



$$\frac{1}{16} \cdot 5.47 \cdot 5.30^2 = 9.60 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{9} \cdot 5.47 \cdot 4.95^2 = 14.89 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{16} \cdot 5.47 \cdot 4.60^2 = 7.23 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{14} \cdot 5.47 \cdot 5.30^2 = 10.98 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{14} \cdot 5.47 \cdot 4.60^2 = 8.27 \text{ t-m}$$

b. $w = 0.18 = \rho \frac{f_y}{f'_c} \Rightarrow \rho = \frac{0.18 \cdot 280}{3500} = 0.0144$

$$\rho < \rho_{\max} = 0.0274$$

$$\rho > \rho_{\min} = \begin{cases} \frac{14}{f_y} = 0.004 \leftarrow \\ \frac{0.8 \sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.0038 \end{cases} \text{ CONFORME}$$

$$M_u = \phi f'_c b d^2 w (1 - 0.59 w)$$

$$10.98 \cdot 10^5 = 0.9 \cdot 280 \cdot 25d^2 \cdot 0.18 (1 - 0.59 \cdot 0.18)$$

$$d^2 = 1083.3 \Rightarrow d = 32.91 \text{ cm}$$

$$h = 32.91 + 4 + 0.95 + 1.27 = 39.13 \text{ cm}$$

Usar: $0.25 \times 0.40 \text{ m}^2$

c. $(-)M_u = 14.89 \text{ t-m}$
 $d = 40 - (4 + 0.95 + 2.54 \cdot 1.5) = 31.24 \text{ cm}$ (A_s en dos capas)
 $a = d/5$

$$\Rightarrow A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (0.9d)} = \frac{14.89 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 3500 (0.9 \cdot 31.24)} = 16.81 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{16.81 \cdot 3.5}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 25} = 9.89 \text{ cm}$$

$\Rightarrow A_s = 17.97 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 10.57 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 18.2 \text{ cm}^2$, es suficiente
 Usar $3 \phi 1" + 3 \phi 7/8" = 19.09 \text{ cm}^2$

$\rho_{\max} = 0.0255 \Rightarrow A_{s\max} = 19.92 \text{ cm}^2 > 19.09 \text{ cm}^2$ CONFORME

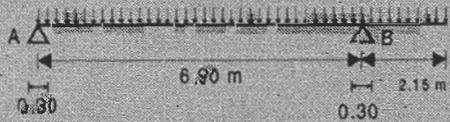
Aplicación:

En la viga que se muestra en la figura obtener:

- Momentos de diseño.
- Dimensionamiento con el momento máximo con $\rho = 1\%$.
- Diseño para el $M_{u\max}$.

$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2; f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

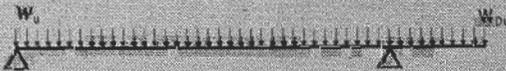
$$W_D = 4.1 \text{ t/m y } W_L = 1.6 \text{ t/m}$$



Solución:

a) $W_u = 1.4 \cdot 4.1 + 1.7 \cdot 1.6 = 8.46 \text{ t/m}$
 $W_{Du} = 1.4 \cdot 4.1 = 5.74 \text{ t/m}$
 $M_u = 5.74 \cdot 2.15^2 / 2 = 13.27 \text{ t-m}$

$$R_A = \frac{W_u L}{2} - \frac{M_u}{L} = 8.46 \cdot \frac{6.9}{2} - \frac{13.27}{6.9} = 27.26 \text{ t}$$



$$V_x = R_A - W_u x_0 = 0 \Rightarrow = \frac{27.26}{8.46} = 3.22 \text{ m}$$

$$+M_{\max} = R_A x_0 - w_u \frac{x_0^2}{2} = 43.92 \text{ t-m}$$

80%

Luego para los momentos de diseno negativos cargamos toda la viga con la carga uniforme W_u .



$$M_v = w_u \frac{L^2}{2} = 8.46 \cdot \frac{2.15^2}{2} = 19.55 \text{ t-m}$$

$$R_A = \frac{w_u L}{2} = \frac{M_v}{L} = 8.46 \cdot \frac{6.9}{2} = \frac{19.55}{6.9} = 26.35 \text{ t}$$

$$R_B = W_u L - R_A = 8.46 \cdot 9.05 - 26.35 = 50.21 \text{ t}$$

$$M_u = R_A \cdot 6.75 - W_u \cdot \frac{(6.75)^2}{2}$$

$$M_u = -14.85 \text{ t-m}$$

$$-M_{\text{CARAVOLADIZO}} = 8.46 \frac{2^2}{2} = 16.92 \text{ t-m}$$

b) $M_u = 43.92 \text{ t-m}$

$$w = \rho \frac{f_y}{f_c} = 0.01 \cdot \frac{2800}{350} = 0.08$$

$$M_u = \phi f_c b d^2 w (1 - 0.59 w)$$

$$43.92 \cdot 10^5 = 0.9 \cdot 350 \cdot 35d^2 \cdot 0.08 (1 - 0.59 \cdot 0.08)$$

$$d^2 = 5226.3 \Rightarrow d = 72.29 \text{ cm}$$

$$h = 72.29 + 4 + 0.95 + 1.27 = 78.51 \text{ cm}$$

Usar: $0.35 \times 0.80 \text{ m}^2$

c) $d = 80 - (4 + 0.95 + 1.27) = 73.78 \text{ cm}$

$$+M_U = 43.92 \text{ t} - \bar{m} \Rightarrow a = \frac{d}{5} \Rightarrow A_s = 24.58 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow a = 6.61 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 23.6 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 6.35 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 23.09 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow a = 6.21 \text{ cm CONFORME}$$

Usar: $A_s = 5 \phi 1$
 $b_{\min} = 2 * 4 + 2 * 0.95 + 9 * 2.54 = 32.76 \text{ cm} < b \text{ CONFORME}$

Aplicación:

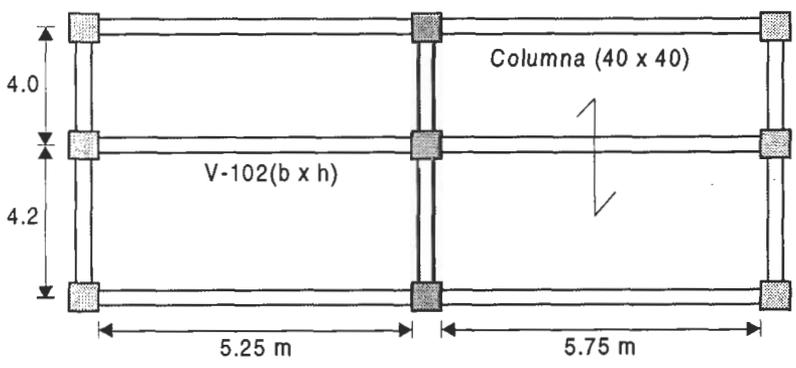
Para la planta que se muestra en la figura determine para la viga V-102 lo siguiente:

- a. Momentos de diseño.
- b. Dimensionamiento para una cuantía igual al 50% de la cuantía balanceada.
- c. Diseñar la sección de momento máximo.
 Considere: Ancho de viga $b = 25 \text{ cm}$, aligerado de 0.17 cm , acabado = 100 kg/m^2 , tabiquería = 120 kg/m^2 , y $s/c = 200 \text{ kg}$ (uso de vivienda).

Para el metrado del peso propio de la viga asuma sección de 25×55 .

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$



Solución:

Metrado de cargas:

$$\text{Peso propio viga} = 0.25 * 0.55 * 2.4 * 1.4 = 0.46 \text{ t/m}$$

$$\text{Aligerado} = 0.28 \text{ t/m}^2 * (4 - 0.25) * 1.4 = 1.47 \text{ t/m}$$

$$\text{Acabado} = 0.10 \text{ t/m}^2 * 4 * 1.4 = 0.56 \text{ t/m}$$

$$\text{Tabiquería} = 0.12 \text{ t/m}^2 * 4 * 1.4 = 0.67 \text{ t/m}$$

$$\text{Sobre carga (s/c)} = 0.2 \text{ t/m}^2 * 4 * 1.7 = 1.36 \text{ t/m}$$

$$w_u = 4.52 \text{ t/m}$$

a) Momentos de Diseño

$$\frac{1}{16} * 4.52 * 5.25^2 = 7.79 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{9} * 4.52 * 5.50^2 = 15.19 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{16} * 4.52 * 5.75^2 = 9.34 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{14} * 4.52 * 5.25^2 = 8.90 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{14} * 4.52 * 5.75^2 = 10.67 \text{ t-m}$$

b) $\rho = 0.5 \rho_b = 0.0142$

$$w = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.0142 \frac{4200}{280} = 0.213$$

$$M_u = \phi f'_c b d^2 w (1 - 0.59 w)$$

$$10.67 * 10^5 = 0.9 * 280 * 25 d^2 * 0.213 (1 - 0.59 * 0.213)$$

$$d = 30.16 \text{ cm}$$

$$h = 30.16 + 4 + 0.95 + 1.27 = 36.4 \text{ cm}$$

Usar: $0.25 * 0.40 \text{ m}^2$

c) (-) $M_u = 15.19 \text{ t-m}$

$$d = 40 - (4 + 0.95 + 1.27) = 33.78 \text{ cm}$$

$$a = d / 5 = 6.8 \Rightarrow A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (0.9 d)} = 13.2 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 9.3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_s = 13.8 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 9.7 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 13.9 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 9.8 \text{ cm, es suficiente}$$

Usar $2 \phi 1" + 1 \phi 7/8"$

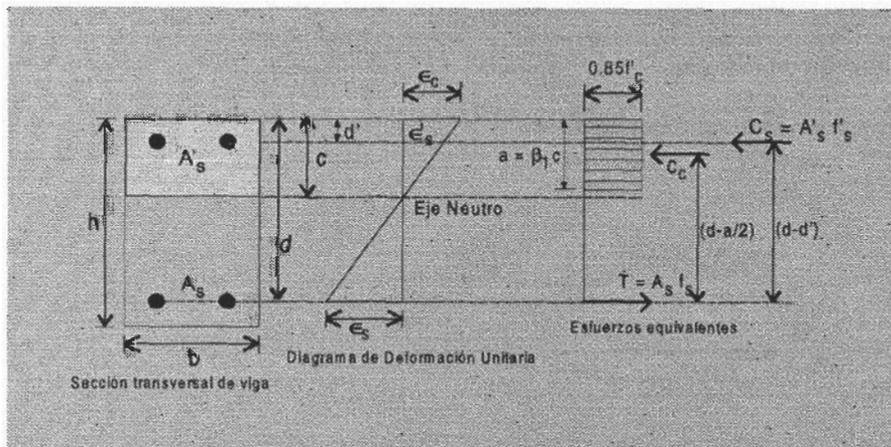
VIGA DOBLEMENTE REFORZADA

Las secciones doblemente reforzadas se vuelven necesarias cuando por limitaciones arquitectónicas, de predimensionamiento y otras, la sección no es capaz de resistir el momento aplicado aunque se le provee de la cuantía máxima permitida.

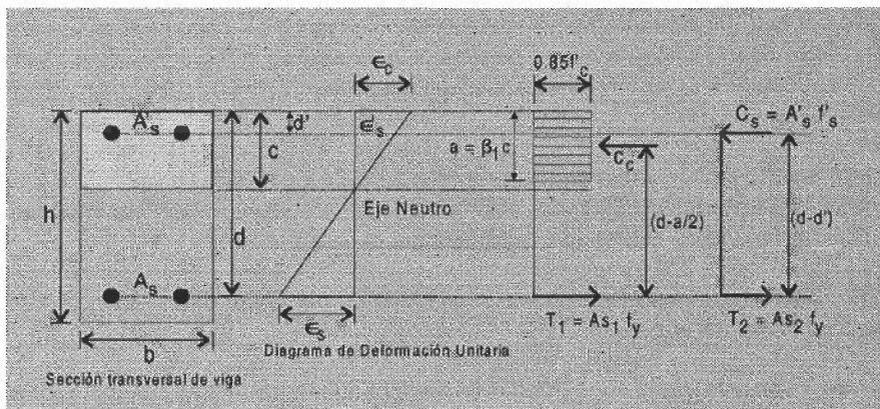
Una sección con refuerzo en compresión tiene una ductilidad mayor al de una sección simplemente reforzada, este comportamiento es conveniente en zonas sísmicas donde se busca una redistribución de esfuerzos.

El refuerzo en compresión sirve para controlar las deflexiones pues evita el acortamiento en el tiempo.

Ensayos de secciones con refuerzo en compresión muestran que se retrasa el aplastamiento del concreto, la viga no colapsará si el acero está sujeto a refuerzo transversal o estribos (confinamientos).



Análisis de la sección de Viga Doblemente Reforzada



Para el análisis empezaremos asumiendo que el refuerzo en tracción está en fluencia, el acero en tracción compensa las fuerzas de compresión del concreto y el acero siendo estas fuerzas: $(A_{s1} f_y)$ y $(A_{s2} f_y)$ respectivamente, tal como se muestra en la figura.

Si hacemos el equilibrio tenemos:

$$C_c = A_{s1} f_y$$

$$0.85 f'_c ab = A_{s1} f_y$$

$$a = \frac{A_{s1} f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$A_{s1} = A_s - A_{s2}$$

$$A_{s1} f_y = A_s f_y - A_{s2} f_y$$

También por equilibrio tenemos:

$$A'_s f'_s = A_{s2} f_y$$

Luego: $A_{s1} f_y = A_s f_y - A'_s f'_s$

Reemplazando tenemos:

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f'_s}{0.85 f'_c b}$$

Para encontrar el momento nominal, bastará con sumar los momentos producidos por los pares de fuerza, entonces:

$$M_n = A_s f_y (d - a/2) + A'_s f'_s (d - d')$$

$$M_n = (A_s f_y - A'_s f'_s)(d - a/2) + A'_s f'_s (d - d')$$

Empleando el diagrama de deformaciones unitarias y por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{c}{c - d'} = \frac{0.003}{\epsilon'_s} \Rightarrow \epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c}, \text{ además: } f'_s = E_s \epsilon'_s$$

$$f'_s = 6 \frac{(c - d')}{c} \Rightarrow f'_s = 6 \frac{(a - \beta_1 d')}{a} t / \text{cm}^2$$

Si $f'_s > f_y \Rightarrow A'_s$ está en fluencia, por tanto $f'_s = f_y$;

Determinación de la cuantía balanceada

Recordemos que la cuantía balanceada se encuentra para el estado en que empieza la fluencia del acero en tracción. Haciendo el equilibrio tenemos:

$$T = C_c + C_s$$

$$A_s f_y = 0.85 f'_c b a_b + A'_s f'_s$$

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} \Rightarrow c_b = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} d$$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{f_y}{2 \cdot 10^6}$$

$$c_b = \frac{6000}{6000 + f_y} \Rightarrow a_b = \beta_1 \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) d$$

$$\frac{A_s}{bd} = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} c_b \beta_1 \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) d \cdot \frac{1}{bd} + \frac{A'_s f'_s}{bd f_y}$$

$$\rho_b = \bar{\rho}_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y}$$

Donde: $\bar{\rho}_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$ y $\rho' = \frac{A'_s}{bd}$

Cuantía Máxima.- El código ACI limita la cuantía a una cuantía máxima permisible para el diseño de vigas doblemente reforzadas según la siguiente expresión:

$$\rho \leq \rho_{\max} = 0.75 \bar{\rho}_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y}$$

Diseño de Secciones Doblemente Reforzadas

Sea " M_u " el valor del momento último actuante en nuestra sección de viga, el diseño de secciones doblemente reforzadas se parte asumiendo un valor de cuantía para la parte de acero en tracción que equilibra el esfuerzo de compresión del concreto.

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{bd} \Rightarrow A_{s1} = \rho_1 bd$$

Con el cual podemos calcular el valor de "a" y el valor de M_{u1} .

$$a = \frac{A_{s1} f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$M_{u1} = \phi M_{n1} = \phi A_{s1} f_y (d - a / 2)$$

Es posible que M_{u1} sea suficiente para soportar el momento último actuante, en todo caso se tendrá que:

Si $M_u \leq M_{u1}$ entonces no necesitamos acero en compresión.

Si $M_u > M_{u1}$ entonces si necesitamos acero en compresión.

Para el caso que necesitemos acero en compresión, procederemos a calcular la cantidad de acero en tracción adicional para compensar el momento último remanente, es decir:

$$M_{u2} = M_u - M_{u1}$$

$$M_{u2} = \phi M_{n2} = \phi A_{s2} f_y (d - d')$$

$$A_{s2} = \frac{M_{u2}}{\phi f_y (d - d')}$$

El acero en compresión será el que equilibra la fuerza de tracción que origina A_{s2} .

$$A'_s f'_s = A_{s2} f_y$$

$$M_{u2} = \phi M_{n2} = \phi A'_s f'_s (d - d')$$

$$A'_s = \frac{M_{u2}}{\phi f'_s (d - d')}$$

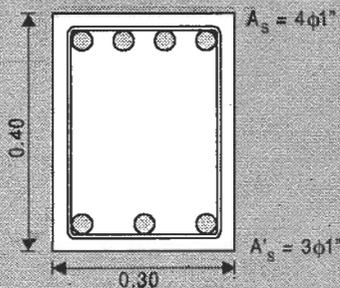
donde: $f'_s = 6 \frac{(a - \beta_1 d')}{a} \leq f_y \quad (\text{t/cm}^2)$

Luego el area total de acero en tracción estará por:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

Aplicación:

Para la sección de viga de momento negativo, que se muestra en la figura, determine el momento confiable:



Estribo de $\phi 3/8''$

$$f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_u = ??$$

Solución:

$$d = 40 - 6.22 = 33.78 \text{ cm}$$

$$d' = 6.22 \text{ cm}$$

a) Asumimos que A'_s está en fluencia, $f'_s = f_y$

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(20.28 - 15.21) 2.8}{0.85 \cdot 0.42 \cdot 30} = 1.33 \text{ cm}$$

$$f'_s = \frac{6(a - \beta_1 d')}{a} = \frac{6(1.33 - 0.75 \cdot 6.22)}{1.33} = -15.05 \text{ t/cm}^2$$

$\therefore f'_s$ no está en fluencia

Entonces:

$$0.85 f'_c b a + A'_s f'_s = A_s f_y$$

$$0.85 f'_c b a^2 + 6 A'_s a - A_s f_y a = 6 A'_s \beta_1 d'$$

$$0.85 f'_c b a^2 + (6 A'_s - A_s f_y) a - 6 A'_s \beta_1 d' = 0$$

$$0.85 \cdot 0.42 \cdot 30 a^2 + (6 \cdot 15.21 - 20.28 \cdot 2.8) a - 6 \cdot 15.21 \cdot 0.75 \cdot 6.22 = 0$$

$$10.71 a^2 + 34.48 a - 425.73 = 0$$

$$a^2 + 3.22 a - 39.75 = 0$$

$$a = 4.9 \text{ cm}$$

$$\therefore f'_s = \frac{6(4.90 - 0.75 \cdot 6.22)}{4.90} = 0.29 \text{ t/cm}^2$$

$$M_n = (A_s f_y - A'_s f'_s) (d - a/2) + A'_s f'_s (d - d')$$

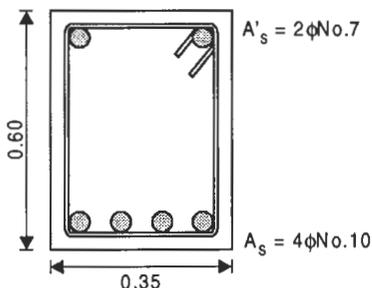
$$M_n = (20.28 \cdot 2.8 - 15.21 \cdot 0.29) \left(0.3378 - \frac{0.049}{2} \right) + 15.21 \cdot 0.29 (0.3378 - 0.0622)$$

$$M_n = 17.62 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi M_n = 15.86 \text{ t-m}$$

Aplicación:

Para la sección de viga que se muestra en la Figura, determine el momento confiable.



Estribo $\phi 1/2''$

$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_u = ??$$

Resolución:

$$\begin{aligned} \phi \text{ No. 7} &= 2.22 \text{ cm} & \phi \text{ No. 10} &= 3.18 \text{ cm} \\ A \phi &= 3.88 \text{ cm}^2 & A \phi &= 7.92 \text{ cm}^2 \\ A'_s &= 7.76 \text{ cm}^2 & A_s &= 31.68 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$d = 60 - \left(4 + 1.27 + \frac{3.18}{2} \right) = 53.14 \text{ cm}$$

$$d' = 4 + 1.27 + \frac{2.22}{2} = 6.38 \text{ cm}$$

$$M_u = \phi M_{n1} + \phi M_{n2}$$

$$M_n = A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{s2} f_y (d - d')$$

a) Si A'_s está en fluencia: $A_{s1} f_y = (A_s - A'_s) f_y$

$$a = \frac{A_{s1} f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(31.68 - 7.76) 4.2}{0.85 * 0.35 * 35} = 9.65 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{9.65}{0.80} = 12.06 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{(c - d')}{c} = \frac{0.003(12.06 - 6.38)}{12.06} = 0.0014129$$

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = 2 * 10^6 \epsilon'_s = 2825.87 \text{ kg / cm}^2 < f_y$$

$\therefore f'_s$ no está en fluencia

Luego:

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f'_s}{0.85 f'_c b} = \frac{31.68 * 4.2 - 7.76 * 2.83}{0.85 * 0.35 * 35} = 10.67 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{10.67}{0.80} = 13.34 \text{ cm}$$

$$f'_s = 6 \frac{(c - d')}{c} = 6 \frac{(13.34 - 6.38)}{13.34} = 3.13 \text{ t / cm}^2$$

con $a = 10.45 \text{ cm} \Rightarrow c = 13.06 \text{ cm} \Rightarrow f'_s = 3.07 \text{ t / m}^2$ conforme

$$M_n = \left(A_s f_y - A'_s f'_s \right) \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s (d - d')$$

$$M_n = (31.68 * 4.2 - 7.76 * 3.07) \left(0.5314 - \frac{0.1045}{2} \right) + 7.76 * 3.07 (0.5314 - 0.0638)$$

$$M_n = 63.48 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi M_n = 57.13 \text{ t-m}$$

b) Alternativamente si A'_s no está en fluencia:

Por equilibrio: $C = T$

$$0.85 f'_c b a + A'_s f'_s = A_s f_y \dots\dots\dots (1)$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{(c - d')}{c}$$

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = 6 \frac{(c - d')}{c} = 6 \frac{(a - \beta_1 d')}{a} \dots\dots\dots (\alpha)$$

(α) en (1):

$$0.85 f'_c b a^2 + A'_s 6 a - A'_s 6 \beta_1 d' = A_s f_y a$$

$$(0.85 f'_c b) a^2 + (6 A'_s - A_s f_y) a - 6 \beta_1 d' A_s = 0$$

$$(0.85 * 0.35 * 35) a^2 + (6 * 7.76 - 31.68 * 4.2) a - 6 * 0.8 * 6.38 * 7.76 = 0$$

$$10.41 a^2 - 86.50 a - 237.64 = 0$$

$$a^2 - 8.31 a - 22.83 = 0$$

$$a = 10.49 \text{ cm} \Rightarrow c = 13.11 \text{ cm}$$

$$f'_s = \frac{6(13.11 - 6.38)}{13.11} = 3.08 \text{ t/cm}^2$$

$$M_n = \left(A_s f_y - A'_s f'_s \right) \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s (d - d')$$

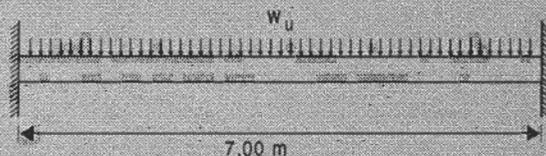
$$M_n = (31.68 * 4.2 - 7.76 * 3.08) \left(0.5314 - \frac{0.1049}{2} \right) + 7.76 * 3.08 (0.5314 - 0.0638)$$

$$M_n = 63.46 \text{ t-m}$$

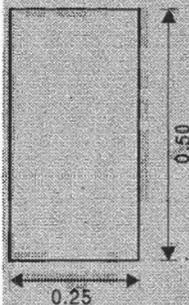
$$M_u = \phi M_n = 57.11 \text{ t-m}$$

Aplicación:

Para la viga que se muestra en la figura, diseñar la sección de momento máximo considerando que está ubicada en zona de alto riesgo sísmico y la sección es rectangular: $b = 25 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, estribo $\phi 3/8$; $W_D = 2.6 \text{ t/m}$, $W_L = 1.4 \text{ t/m}$.



Solución:



$$W_u = 1.4 \cdot W_D + 1.7 \cdot W_L = 1.4 \cdot 2.6 + 1.7 \cdot 1.4 = 6.02 \text{ t/m}$$

$$M_{u \max} = \frac{W_u \cdot L^2}{12} = \frac{6.02 \cdot 7^2}{12} = 24.58 \text{ t-m}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \cdot 0.9 \cdot d} = \frac{24.58 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 41.24} = 17.52 \text{ cm}^2$$

$$d = 50 - (4 + 0.95 + 2.54 + 1.27) = 41.24 \text{ cm}$$

$$b_{\min} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2.54 + 1.91 + 3 \cdot 2.54 = 27.05 \text{ cm}$$

Usar: As en 2 capas

$$\rho_b = 0.02125$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{17.25}{25 \cdot 41.24} = 0.01673$$

$$\text{zona sísmica: } \rho_{\max} = 0.5 \cdot \rho_b = 0.0106 < \rho$$

∴ Se necesita A'_s

$$\rho_1 = 0.0106 \Rightarrow A_{s1} = \rho_1 bd = 10.93 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b} = 10.29 \text{ cm}$$

$$M_{u1} = \phi A_{s1} \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) = 14.91 \text{ t-m}$$

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = 24.58 - 14.91 = 9.67 \text{ t-m}$$

$$A_{s2} = \frac{M_{u2}}{\phi f_y (d - d')} = 7.30 \text{ cm}^2 \quad \therefore A_s = A_{s1} + A_{s2} = 18.23 \text{ cm}^2$$

Usar $4 \phi 1" (20.28 \text{ cm}^2)$ ó $3 \phi 1" + 1 \phi 7/8"$

$$d' = 4 + 0.95 + 1.27 = 6.22 \text{ cm}$$

$$f'_s = 6 \cdot \frac{(c - d')}{c} = 6 \cdot \left(\frac{12.11 - 6.2}{12.11} \right) = 2.921 / \text{cm}^2$$

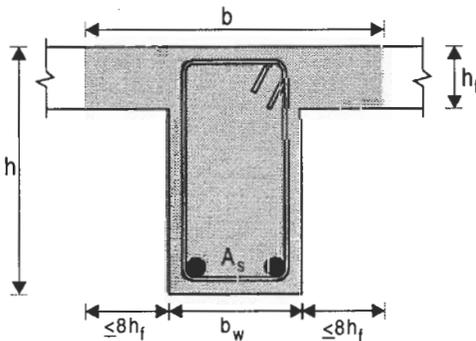
$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{10.29}{0.85} = 12.11 \text{ cm}$$

$$A'_s = \frac{M_{u2}}{\phi f'_s (d - d')} = 10.51 \text{ cm}^2$$

Usar $2 \phi 1" + 1 \phi 5/8" (12.12 \text{ cm}^2)$

VIGAS DE SECCION T y L

Sección T: Losa y Viga Interior



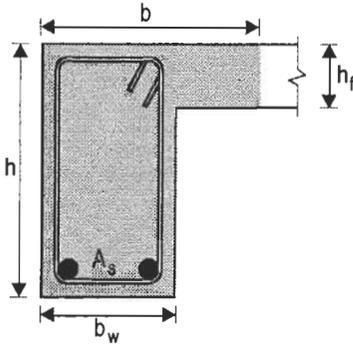
Sección transversal de viga L

$$b \leq b_w + 16h_f$$

$$b \leq b_w + \frac{(s_{i-1} + s_i)}{2}$$

$$b \leq \frac{L_n}{4}$$

Sección L: Losa y Viga Perimetral



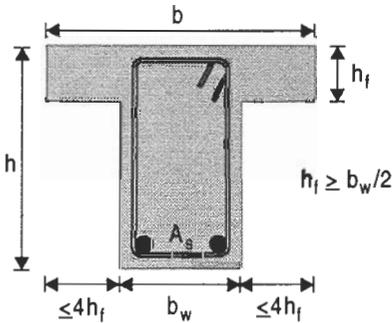
Sección transversal de viga T

$$b \leq b_w + 6h_f$$

$$b \leq b_w + \frac{s}{2}$$

$$b \leq \frac{L_n}{12}$$

VIGAS AISLADAS



Sección transversal de viga

Donde:

- L_n = Luz libre de la viga.
- s = Separación libre entre vigas.
- b_w = Ancho del alma de la viga.
- b = Ancho del ala.
- h_f = Espesor del patín.

Además:

- c = Profundidad del eje neutro.
- a = Profundidad del bloque rectangular en compresión.

Análisis de Vigas de Secciones T y L

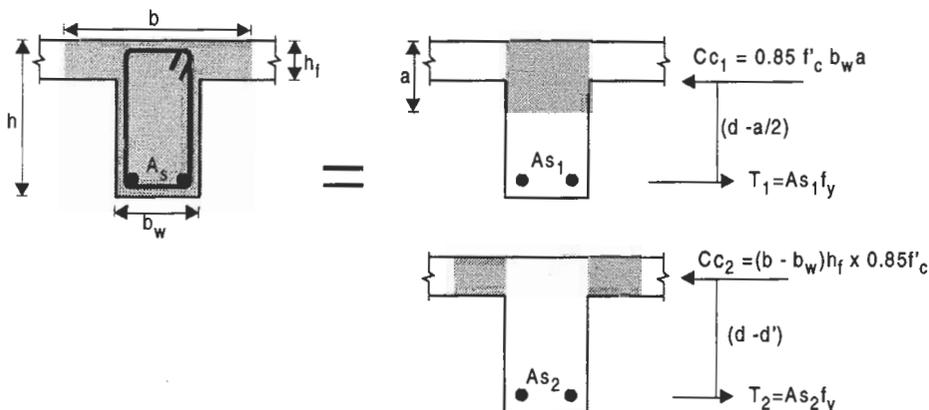
Tenemos tres casos:

- 1.- Si $c \leq h_f$, entonces la viga se analizará como una sección rectangular de ancho "b", es decir:

$$M_u = \phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2)$$

donde,
$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

- 2.- Si $a \leq h_f$, entonces la viga se analizará como una sección rectangular de ancho "b", igual que el caso 1.
- 3.- Si $a > h_f$, el análisis es como sigue:



De la figura tenemos:

$$M_n = A_{s1} f_y (d - a/2) + A_{s2} f_y (d - h_f/2)$$

Además: $A_{s1} = A_s - A_{s2}$;

Del primer estado tenemos:

$$C_{c1} = T_1$$

$$0.85 f'_c a b_w = A_{s1} f_y$$

$$a = \frac{A_{s1} f_y}{0.85 f'_c b_w}, \text{ reemplazando el valor de } A_{s1} \text{ tenemos:}$$

$$a = \frac{(A_s - A_{s2}) f_y}{0.85 f'_c b}$$

Del segundo estado tenemos:

$$C_{c2} = A_{s2} f_y$$

$$0.85 f'_c h_f (b - b_w) = A_{s2} f_y$$

$$A_{s2} = \frac{0.85 f'_c h_f (b - b_w)}{f_y}$$

Finalmente el valor del momento nominal estará dado por:

$$M_n = (A_s - A_{s2}) f_y (d - a / 2) + A_{s2} f_y (d - h_f / 2)$$

Determinación de la cuantía balanceada

Recordemos que la cuantía balanceada se encuentra para el estado en que empieza la fluencia del acero en tracción. Haciendo el equilibrio tenemos:

$$T = C_{c1} + C_{c2}$$

$$A_s f_y = 0.85 f'_c b_w a_b + A_{s2} f_y$$

$$a_b = \beta_1 \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) d$$

$$\frac{A_s}{bd} = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} b_w \beta_1 \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right) d \cdot \frac{1}{bd} + \frac{A_{s2}}{bd}$$

Si definimos: $\rho_2 = \frac{A_{s2}}{b_w d}$, entonces:

$$\frac{A_s b}{bd} = (\bar{\rho}_b + \rho_2) \frac{b_w}{b}$$

Caso 1: Si la cuantía lo definimos como $\rho = \frac{A_s}{b_w d}$, entonces:

$$\rho_b = \bar{\rho}_b + \rho_2$$

Caso 2: Si la cuantía lo definimos como $\rho = \frac{A_s}{bd}$, entonces:

$$\rho_b = (\bar{\rho}_b + \rho_2) \frac{b_w}{b}$$

Donde: $\bar{\rho}_b = \beta_1 0.85 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$

Cuantía Máxima.- El código ACI limita la cuantía de vigas T a lo siguiente:

$$\rho \leq \rho_{\max} = 0.75 \rho_b$$

A_s mínimo

Para el caso que se encuentre el ala en compresión, se tomará el valor mayor de las dos siguientes expresiones:

$$A_s \min = \frac{14}{f_y} bd, \quad A_s \min = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd$$

Donde f'_c y f_y están en kg/cm^2 .

Para el caso que se encuentre el ala en tracción, se tomará el valor mayor de las dos siguientes expresiones:

$$A_s \min = \frac{14}{f_y} bd, \quad A_s \min = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd$$

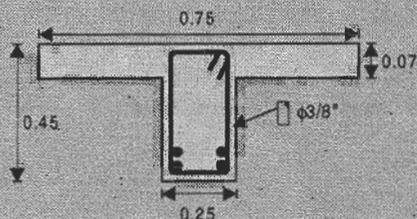
y no siendo mayor a:

$$A_s \min = 1.6 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d$$

Aplicación:

(Análisis de una sección "T"). Calcular el momento confiable de diseño de la sección "T" que se muestra en la figura, considere:

- a) $A_s = 4\phi 1"$
- b) $A_s = 4\phi \text{ No. } 10$



$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Solución:

$$a) \quad A_s = 4\phi 1''$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4 \cdot 5.07}{75 \cdot 36.24} = 0.00746$$

$$d = 45 - (4 + 0.95 + 2.54 + 1.27) = 36.24 \text{ cm}$$

$$\rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.00319$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = 0.0033 \quad \therefore \rho = 0.00746 > \rho_{\min} \text{ conforme}$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \frac{b_w}{b} (\rho_b + \rho_f)$$

donde:

$$\rho_b = 0.0283 \left(f'_c = 280, \quad f_y = 4200 \right)$$

$$\rho_f = \frac{A_{sf}}{b_w d} = \frac{19.83}{25 \cdot 36.24} = 0.02189$$

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

$$A_{sf} = \frac{0.85 \cdot 0.28 (75 - 25) 7}{4.2} = 19.83 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \cdot \frac{25}{75} (0.0283 + 0.02189) = 0.01255$$

$$\rho = 0.00746 < \rho_{\max} \quad \therefore \text{conforme}$$

considerando que actúa como sección rectangular:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{20.28 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 75} = 4.77 \text{ cm}$$

$$a = 4.77 \text{ cm} < h_f = 7.0 \text{ cm} \quad \therefore \text{sección rectangular}$$

$$M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_u = 0.9 \cdot 20.28 \cdot 4.2 \left(0.3624 - \frac{0.0477}{2} \right)$$

b) $A_s = 4\phi \text{ No. } 10 = 4 \cdot 7.92 = 31.68 \text{ cm}^2$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{31.68}{75 \cdot 35.60} = 0.01187$$

$d = 45 - (4 + 0.95 + 3.18 + 1.27) = 35.60 \text{ cm}$

$\rho = 0.01187 > \rho_{\min} = 0.0033$

$\rho = 0.01187 < \rho_{\max} = 0.01255 \quad \therefore \text{conforme}$

Considerando que actúa como sección rectangular:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{31.68 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 75} = 7.45 \text{ cm}$$

$a = 7.45 \text{ cm} > h_f = 7.0 \text{ cm} \quad \therefore \text{sección "T"}$

$$M_u = M_{u1} + M_{u2}$$

$$M_u = \phi A_{s1} f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + \phi A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

donde $A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y} = 19.83 \text{ cm}^2$

$$A_{s1} = A_s - A_{sf} = 31.68 - 19.83 = 11.85 \text{ cm}^2$$

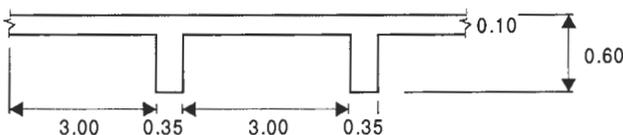
$$a = \frac{A_{s1} f_y}{0.85 f'_c b_w} = \frac{11.85 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 0.25} = 8.36 \text{ cm}$$

$$M_u = 0.9 \cdot 11.85 (4.2) \left(0.356 - \frac{0.0836}{2} \right) + 0.9 \cdot 19.83 \cdot 4.2 \left(0.356 - \frac{0.07}{2} \right)$$

$$M_u = 38.141 - \text{m}$$

Aplicación:

Diseñar la sección T, que se muestra en la figura, para un momento actuante, $+M_u = 88.2 \text{ t-m}$. La luz libre de la viga es de 4.60 m, el espaciamiento libre entre vigas es de 3.00 m. espesor de la losa maciza es de 10 cm, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, estribo $\phi 3/8"$.



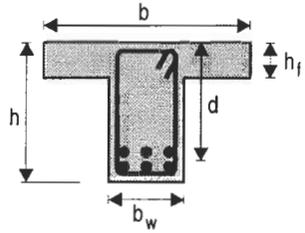
Solución:

$$b \leq \frac{L_n}{4} = \frac{4.60}{4} = 1.15 \text{ m}$$

$$b \leq b_w + s_n = 0.35 + 3.0 = 3.35 \text{ m}$$

$$b \leq 16 \cdot h_f + b_w = 16 \cdot 0.10 + 0.35 = 1.95 \text{ m}$$

Usar: $b = 1.15 \text{ m}$



Considerando que actúa como sección rectangular:

$$d = 60 - (4 + 0.95 + 3.18 + 1.27) = 50.6 \text{ cm (2 capas)}$$

$$\phi \text{ No. 10: } \phi = 3.18 \text{ cm, } A\phi = 7.92 \text{ cm}^2$$

con

$$a = \frac{d}{5} = 10.12 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)} = \frac{88.2 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \left(50.6 - \frac{a}{2} \right)}$$

$$A_s = 51.24 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 10.48 \text{ cm}$$

$\therefore a > 10 \text{ cm} \Rightarrow$ sección "T"

Diseño como sección "T": $A_s = A_{s1} + A_{sf}$

donde:

$$A_{sf} = \frac{0.85 \cdot f'_c \cdot (b - b_w) h_f}{f_y} = \frac{0.85 \cdot 0.21 \cdot (115 - 35) 10}{4.2} = 34.0 \text{ cm}^2$$

$$M_{u2} = \phi A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2} \right) = 0.9 \cdot 34.0 \cdot 4.2 \cdot \left(0.506 - \frac{0.10}{2} \right)$$

$$M_{u2} = 58.61 \text{ t-m}$$

$$M_{u1} = M_u - M_{u2} = 88.2 - 58.61 = 29.59 \text{ t-m}$$

$$a = \frac{d}{5} = 10.12 \text{ cm} \Rightarrow A_{s1} = 17.19 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 11.56 \text{ cm}$$

$$a = 12 \text{ cm} \Rightarrow A_{s1} = 17.56 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 11.80 \text{ cm} \quad \text{conforme}$$

$$\therefore A_s = A_{s1} + A_{s2} = 17.56 + 34.0 = 51.56 \text{ cm}^2$$

Usar: $4\phi \text{ No. 10} + 4\phi 1" = 31.68 + 20.28 = 51.96 \text{ cm}^2$

Verificación de cuantías:

$$\rho_{\max} = 0.75 \cdot \frac{b_w}{b} \cdot (\rho_b + \rho_f)$$

donde, $\rho_b = 0.0213$ ($f'_c = 210$; $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$)

$$\rho_f = \frac{A_{sf}}{b_w d} = \frac{34}{35 \cdot 50.6} = 0.01919$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \cdot \frac{35}{115} \cdot (0.0213 + 0.01919)$$

$$\rho_{\max} = 0.009242$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{51.96}{115 \cdot 50.6} = 0.008929$$

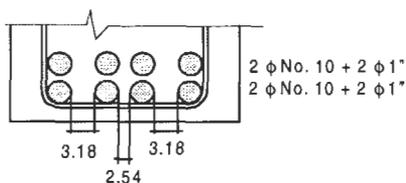
$\rho < \rho_{\max} \therefore$ conforme

$\rho > \rho_{\min} = 0.0033$ conforme

Verificación del ancho requerido:

$$b_{w \min} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0.95 + 2 \cdot 3.18 + 2 \cdot 2.54 + 2 \cdot 3.18 + 2.54$$

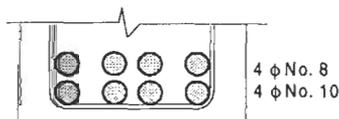
$$b_{w \min} = 30.24 \text{ cm} < b_w = 35 \text{ cm} \text{ conforme}$$



6

$$b_{\min} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0.95 + 4 \cdot 3.18 + 3 \cdot 3.18$$

$$b_{\min} = 32.16 \text{ cm} < b_w = 35 \text{ cm} \text{ conforme}$$



RESISTENCIA A LA FLEXION DE SECCIONES SIMETRICAS DE FORMA CUALQUIERA

Estas secciones tienen el plano de flexión en el plano de simetría. El procedimiento general para encontrar la resistencia de la sección consiste en obtener por un proceso iterativo un estado de deformaciones tal que la sección esté en equilibrio de fuerzas horizontales, es decir que la suma de las fuerzas de compresión que actúa en la sección transversal sea igual a la suma de las fuerzas de tracción.

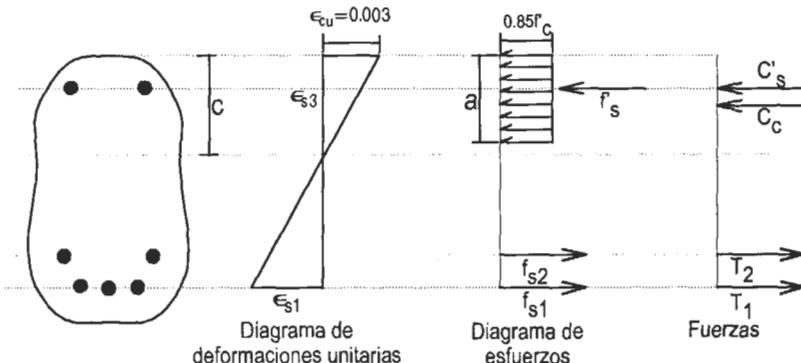
Cuando la forma de la zona de compresión no se presta a una determinación sencilla de sus características (área y centro de gravedad), conviene dividirla en franjas pequeñas paralelas al eje neutro.

Las fuerzas de compresión y de tracción en el acero se calculan mediante:

$$C'_s = A'_s f'_s \text{ donde } f'_s = E'_s \epsilon'_s \leq f_y$$

$$T_s = A_s f_s \text{ donde } f_s = E_s \epsilon_s \leq f_y$$

Una vez establecido el equilibrio se encuentra el momento de todas las fuerzas internas con respecto a un eje cualquiera perpendicular al plano de flexión, dicho momento es la resistencia de la sección.



Las hipótesis fundamentales son las mismas que hemos considerado anteriormente.

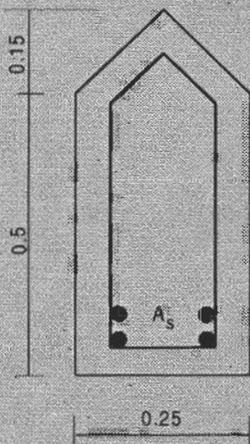
1. La deformación de la fibra extrema del concreto comprimido es $\epsilon_{cu}=0.003$
2. Distribución lineal de las deformaciones para cualquier estado de esfuerzos.
3. Se puede utilizar la distribución rectangular equivalente de esfuerzos en lugar de la distribución real.

Procedimiento:

1. Se asume un valor "c" de la profundidad del eje neutro y se determina las deformaciones en las diversas capas de acero.
2. Se encuentra los esfuerzos en las diversas capas de acero.
3. Se encuentran todas las fuerzas de compresión tanto en el acero como en las áreas de concreto, y las fuerzas de tracción en los aceros respectivos.
4. Se establece un valor de R=C-T para el valor asumido de la profundidad del eje neutro.
5. De acuerdo al valor del paso 4, se realiza otro proceso iterativo con un nuevo valor asumido de la profundidad del eje neutro. Se continúa el mismo proceso iterativo hasta obtener un valor de la profundidad del eje neutro tal que R=C-T sea pequeño y despreciable ($R \approx 0$). Se consideran para el valor último asumido de "c" las fuerzas de compresión y tracción.
6. Se encuentra el momento de todas las fuerzas internas con respecto a un eje cualquiera perpendicular al plano de flexión; dicho momento es la resistencia nominal de la sección. La resistencia de diseño es $M_u = \phi M_n$

Aplicación:

Para la sección de viga que se muestra en la figura:



- a)Cuál es el valor máximo del acero en tracción que permite el código ACI.
 - b) Si el acero en tracción es de 4 varillas No. 9, cuál es el momento confiable?
- Datos: $f'_c=350 \text{ kg/cm}^2$, $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

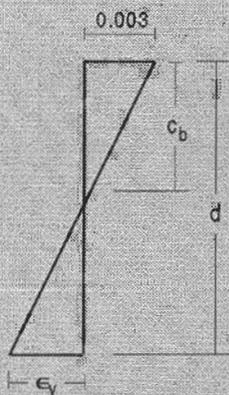
- a) De acuerdo al ACI, $A_s \text{ máx} = 0.75A_{sb}$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

$$\frac{c_b}{0.003} = \frac{d}{0.003 + 0.0021}$$

$$d = 65 - (4 + 0.95 + 1.5 * 2.54) = 56.24 \text{ cm}$$

(2 capas con $\phi 1"$)



$$c_b = \frac{0.003}{0.0051} * 56.24 = 33.08 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.8c_b = 26.47 \text{ cm}$$

Por equilibrio: $T = C$

$$A_{sb}f_y = 0.85 f'_c A_c$$

donde,

$$A_c = 15 * \frac{25}{2} + (26.47 - 15) * 25 = 474.25 \text{ cm}^2$$

$$A_{sb} = \frac{0.85 * 0.35 * 474.25}{4.2} = 33.59 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \text{ max}} = 0.75 A_{sb} = 0.75 * 33.59 = 25.19 \text{ cm}^2$$

Considerando A_s en una capa con ϕ No. 9:

$$\phi \text{ No. 9} = 2.86 \text{ cm}, A_s = 6.41 \text{ cm}^2, b = 2 * 4 + 2 * 0.95 + 4 * 2.86 + 3 * 2.86 = 29.92 \text{ cm}$$

Entonces acero en 2 capas CONFORME.

- b) Con $A_s = 4\phi \text{ No. 9} = 25.64 \text{ cm}^2 > A_{s \text{ max}} = 25.19 \text{ cm}^2$, NO ES CONFORME
 $25.64 \text{ cm}^2 < A_{sb} = 33.59 \text{ cm}^2$, entonces falla por inicio de acero en tracción.
 Por equilibrio: $T = C$

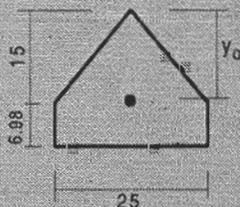
$$A_s f_y = 0.85 f'_c A_c \Rightarrow A_c = \frac{25.64 * 4.2}{0.85 * 0.35} = 361.98 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 15 * \frac{25}{2} + (a - 15) * 25 = 361.98 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow a = 21.98 \text{ cm}$$

$$y_o = \frac{(25 * 15 / 2) * 2 / 3 * 15 + 25 * 6.98 * (15 + 3.49)}{361.98} = 14.09 \text{ cm}$$

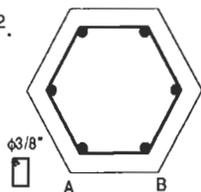
$$M_u = \phi A_s f_y (d - y_o) = 0.9 * 25.64 * 4.2 * (0.5624 - 0.1409) = 40.85 \text{ t-m}$$



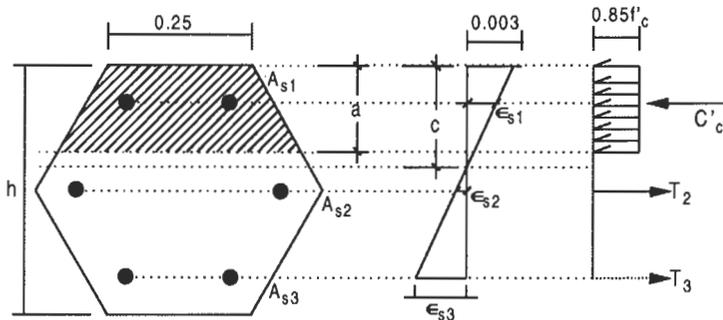
Aplicación:

Para la sección de columna que se muestra en la figura adjunta, determine la resistencia confiable a flexión, sabiendo que AB está en tracción y las cargas están aplicadas en el plano vertical de simetría.

Considere, $A_s = 6\phi 1"$, $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.
 (EXÁGONO REGULAR)



Solución:



$$A_{s1} = 2\phi 1" = 2 \cdot 5.07 = 10.14 \text{ cm}^2, \quad d_1 = 4 + 0.95 + 2.54/2 = 6.22 \text{ cm}$$

$$A_{s2} = 2\phi 1" = 10.14 \text{ cm}^2, \quad d_2 = h/2 = 21.65 \text{ cm}$$

$$A_{s3} = 2\phi 1" = 10.14 \text{ cm}^2, \quad d_3 = 43.3 - 6.22 = 37.08 \text{ cm}$$

Expresando el área en compresión del concreto en función de "a", tenemos:

$$A_c = 25a + 0.577a^2 \quad (\text{en cm}^2), \text{ "a" en cm}$$

luego, la fuerza en compresión del concreto (C_c) será:

$$C_c = 0.85f'_c A_c = 5.95a + 0.137a^2 \quad (\text{en t})$$

Los esfuerzos en el acero estarán dados por la siguiente expresión:

$$f_{s_i} = 6 \frac{(c - d_i)}{c}; \text{ t/cm}^2, \text{ "c" y "d}_i\text{" en cm}$$

1era. Iteración: $a = d/5 = 37.08/5 = 7.42 \text{ cm}$

$$\Rightarrow C_c = 5.95a + 0.137a^2 = 51.69 \text{ t}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{a}{0.85} = 8.73 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 6 \frac{(8.73 - 6.22)}{8.73} = 1.725 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 10.14 \cdot 1.725 = 17.49 \text{ t}$$

$$f_{s2} = -8.87 \Rightarrow f_{s2} = -f_y = -4.2 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s2} = 42.59 \text{ t}$$

$$f_{s3} = -f_y = -4.2 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s3} = 42.59 \text{ t}$$

$$\Sigma C = 69.18 \text{ t}; \quad \Sigma T = 85.18 \text{ t}$$

$$\Sigma C - \Sigma T = -16.00 \text{ t}$$

Por lo tanto, aumentar "a".

2da. Iteración: $a = 8.6 \text{ cm}$

$$\Rightarrow C_c = 61.30T \qquad c = \frac{a}{0.85} = 10.12 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 6 \frac{(10.12 - 6.22)}{10.12} = 2.312t / \text{cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 10.14 * 2.312 = 23.45t$$

$$f_{s2} = -6.84 \Rightarrow f_{s2} = -f_y = -4.2t / \text{cm}^2 \Rightarrow T_{s2} = 42.59t$$

$$f_{s3} = -f_y = -4.2t / \text{cm}^2 \Rightarrow T_{s3} = 42.59t$$

$$\Sigma C = 84.75t; \quad \Sigma t = 85.18t$$

$$\Sigma C - \Sigma T = -0.43t \approx 0, \text{ CONFORME}$$

Luego, $M_n = C_c(d - y_o) + C_{s1}(d - d_1) - T_{s2}(d - d_2)$

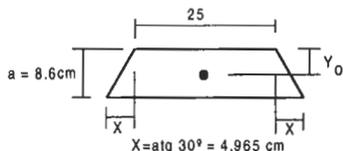
$$y_o = \frac{\frac{8.6}{2} * (25 * 8.6) + (\frac{2}{3} * 8.6) * (8.6 * 4.965)}{(25 * 8.6) + (8.6 * 4.965)}$$

$$y_o = 4.54 \text{ cm}$$

$$M_n = 61.30(0.3708 - 0.0454) + 23.45(0.3708 - 0.0622) - 42.59(0.3708 - 0.2165)$$

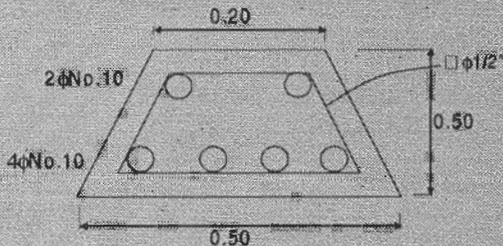
$$M_n = 20.61 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$M_u = \phi M_n = 18.55 \text{ t} \cdot \text{m}$$



Aplicación:

Para la sección de viga que se muestra en la figura, determine el momento confiable, considere, $f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 3500 \text{ Kg/cm}^2$.



Solución:

$$A_{s1} = 2 * 7.92 = 15.84 \text{ cm}^2, \quad d_1 = 4 + 1.27 + \frac{3.18}{2} = 6.86 \text{ cm}$$

$$A_{s2} = 4 * 7.92 = 31.68 \text{ cm}^2, \quad d_2 = 43.14 \text{ cm}$$

$$A_c = 20 * a + X * a \Rightarrow A_c = 20 * a + 0.3 * a^2$$

$$\frac{x}{a} = \frac{15}{50} \Rightarrow X = 0.3 \cdot a \quad C_c = 0.85 \cdot f'_c A_c = 0.85 \cdot 0.42 \cdot (20 \cdot a + 0.3 \cdot a^2)$$

$$C_c = 7.14 \cdot a + 0.1071 \cdot a^2$$

$$f_{s1} = 6 \cdot \frac{(c - d_1)}{c} \cdot f_t / \text{cm}^2 \Rightarrow f_{s1} = \frac{6 \cdot (a \cdot \beta_1 - d_1)}{a}$$

$$C_c = 69.59 \text{ t}$$

$$a = \frac{d}{5} = \frac{43.14}{5} = 8.63 \text{ cm} \Rightarrow c = \frac{a}{0.75} = 11.50 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 2.42 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = f_{s1} \cdot A_{s1} = 38.35 \text{ t}$$

$$f_{s2} = -16.50 / \text{cm}^2 \Rightarrow T_2 = 3.5 \cdot 31.68 = 110.88 \text{ t}$$

$$R = \Sigma C - \Sigma T = C_c + C_{s1} - T_2 = -2.94 \text{ t}$$

$$a = 8.8 \text{ cm} \Rightarrow C_c = 71.13 \text{ t}$$

$$c = 11.73 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 2.49 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 39.45 \text{ t}$$

$$f_{s2} = -3.5 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T = 110.88 \text{ t}$$

$$R = -0.3 = 0 \text{ conforme}$$

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

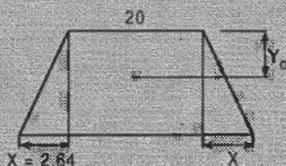
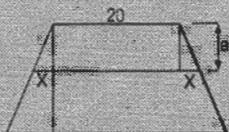
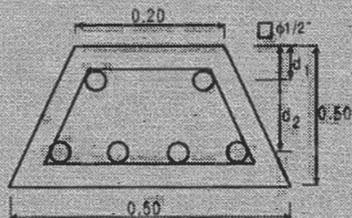
$$M_n = C_c \cdot (d - y_o) + C_{s1} \cdot (d - d_1)$$

$$\text{pero: } y_o = \frac{20 \cdot 8.8 \cdot 4.4 + 2.64 \cdot 8.8 \cdot 2 / 3 \cdot 8.8}{176 + 23.23} = 4.57 \text{ cm}$$

$$M_n = 71.13 \cdot (0.4314 - 0.0457) + 39.45 \cdot (0.4314 - 0.0686)$$

$$M_n = 41.75 \text{ t-m}$$

$$M_u = 37.57 \text{ t-m}$$

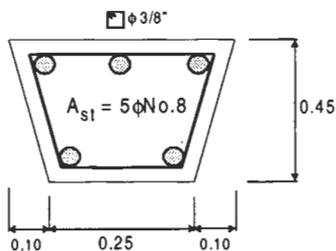
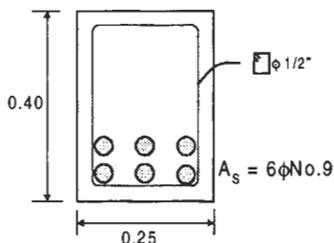


Aplicación:

Para las secciones de viga que se muestran en la figura, determine el momento nominal e indique el tipo de falla.

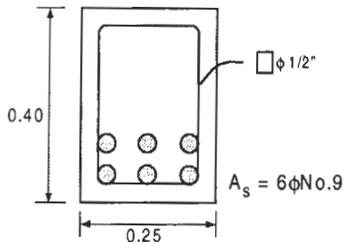
$$f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ Kg/cm}^2$$



Solución:

a)



$$A_{\phi} = 6.41 \text{ cm}^2$$

$$\phi = 2.86 \text{ cm}$$

$$A_s = 38.46 \text{ cm}^2$$

$$d = 40 - (4 + 1.27 + 2.86 + 1.27)$$

$$d = 30.6 \text{ cm}$$

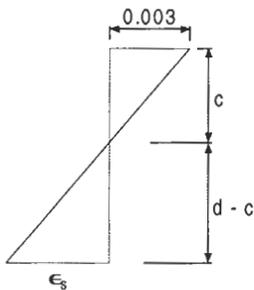
$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{38.46}{25 \cdot 30.6} = 0.05027$$

$$\rho_b = \beta_1 \cdot 0.85 \cdot \frac{f'_c}{f_y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.80 \cdot 0.85 \cdot \frac{350}{3500} \cdot \frac{6000}{9500}$$

$$\rho_b = 0.04295$$

$$\rho > \rho_b \quad \therefore \text{FALLA FRAGIL} \Rightarrow f_s < f_y$$

Por EQUILIBRIO: $C_c = T$ ----- $0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = A_s \cdot f_s$ (1)



$$\frac{\epsilon_s}{d - c} = \frac{0.003}{c}$$

$$f_s = \epsilon_s E_s = 6 \cdot \frac{(d - c)}{c} = 6 \cdot \frac{(\beta_1 d - a)}{a} \text{ t / cm}^2$$

$$\text{En (1): } 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a^2 = A_s \cdot 6 \cdot \beta_1 \cdot d - A_s \cdot 6 \cdot a$$

$$0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a^2 + A_s \cdot 6 \cdot a - A_s \cdot 6 \cdot \beta_1 \cdot d = 0$$

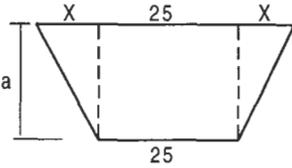
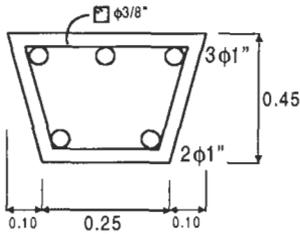
$$0.85 \cdot 0.35 \cdot 2.5 \cdot a^2 + 38.46 \cdot 6 \cdot a - 38.46 \cdot 6 \cdot 0.8 \cdot 30.6 = 0$$

$$7.4375 \cdot a^2 + 230.76 \cdot a - 5649.00 = 0 \Rightarrow a^2 + 31.03 \cdot a - 759.53 = 0$$

$$a = 16.11 \text{ cm} \Rightarrow f_s = 6 \cdot \frac{(0.80 \cdot 30.6 - 16.11)}{16.11} = 3.12 \text{ t / cm}^2$$

$$M_n = A_s \cdot f_s \cdot (d - \frac{a}{2}) = 38.46 \cdot 3.12 \cdot (0.306 - \frac{0.1611}{2}) = 27.05 \text{ t - m}$$

b)



Momento Negativo

$$A'_s = 15.21 \text{ cm}^2 \quad d_1 = 4 + 0.95 + 1.27 = 6.22 \text{ cm}$$

$$A_s = 10.14 \text{ cm}^2 \quad d_2 = 38.78 \text{ cm}$$

$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{x}{a} = \frac{10}{45} \Rightarrow x = \frac{2}{9} * a$$

$$A_c = 25 * a + \frac{2}{9} * a^2$$

$$C_c = 0.85 * f'_c * A_c = 0.85 * 0.35 * A_c$$

$$C_c = 7.4375 * a + 0.0661 * a^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$f_{si} = \frac{6 * (a - \beta_1 * d_i)}{a} \text{ t/cm}^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$a = \frac{d}{5} = \frac{38.78}{5} = 7.8 \text{ cm}$$

$$C_c = 62.03 \text{ t}$$

$$f_{s1} = \frac{6 * (7.8 - 0.8 * 6.22)}{7.8} = 2.17 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = A_{s1} * f_{s1} = 33.01 \text{ t}$$

$$f_{s2} = \frac{6 * (7.8 - 0.8 * 38.78)}{7.8} = -17.80 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow f_y = 3.5 \text{ t/cm}^2$$

$$\therefore T_2 = A_{s2} * f_y = 35.49 \text{ t}$$

$$R = C_c + C_{s1} - T_2 = 62.03 + 33.01 - 35.49 = 59.55 \text{ t}$$

Por tanto reducir "a", "R" tiene que ser cero

$$\text{Con } a = 4.85 \text{ cm} \Rightarrow C_c = 37.63 \text{ t}$$

$$f_{s1} = -0.16 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_1 = 2.37 \text{ t}$$

$$\Rightarrow T_2 = 35.49 \text{ t}$$

$$R = -0.23 \text{ t} \quad \text{CONFORME}$$

$$y_o = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)(25a) + \left(\frac{2}{3}\right)a * a * \frac{2}{9} a}{25a + a * \frac{2}{9} a}$$

$$M_n = C_c (d - y_o) - T_1 (d - d_1)$$

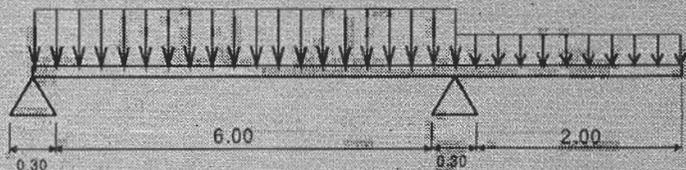
$$M_n = 37.63 * (0.3878 - 0.235) - 2.37 (0.3878 - 0.062)$$

$$a = 4.85 \Rightarrow y_o = 2.35 \text{ cm}$$

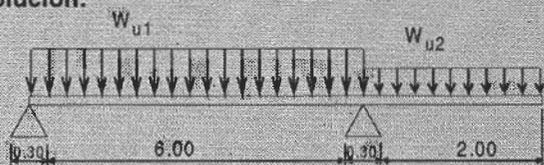
$$M_n = 12.94 \text{ t-m}$$

Aplicación:

Diseñar la vigueta que se muestra en la figura. Considere para el tramo de 6.0 m una sobrecarga de 250 kg/m² y para el voladizo una sobrecarga de 400 kg/m², tabiquería = 120 kg/m²; aligerado de 0.25 m; $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.



Solución:



$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 aligerado de 0.25 m

$$W_{u1} : P.Palig = 350$$

$$\text{acabado} = 100$$

$$\text{tabiquería} = 120$$

$$W_o = 570$$

$$s/c = 250$$

$$W_{u1} = 1.22 \text{ t/m}$$

$$W_{u1y} = 0.489 \text{ t/m}$$

$$W_{u2} = 1.4 \cdot 0.57 + 1.7 \cdot 0.4 = 1.478 \text{ t/m}^2$$

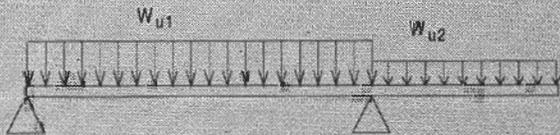
$$W_{u2v} = 0.4 W_{u2}$$

$$W_{u2v} = 0.591 \text{ t/m}$$

$$W_{u2v} = 0.319 \text{ t/m}$$

$$(-)M_{u\text{diseño}} = 0.591 \cdot \frac{2^2}{2} = 1.18 \text{ t-m}$$

$$(+)M_{u\text{dis}} \Rightarrow$$



$$-M = \frac{1}{2} \cdot 319 \cdot 2.15^2 = 0.74 \text{ t-m}$$

$$R_A = \frac{0.489 \cdot 6.3}{2} - \frac{0.74}{6.3} = 1.42 \text{ t}$$

$$R_A = \frac{489 \cdot 6.3}{2} - \frac{0.74}{6.3} = 1421$$

$$V_x = 1.42 - 0.489 \cdot X_0 = 0 \Rightarrow X_0 = 2.91\text{m}$$

$$+M_{u_{\max}} = 1.42 \cdot 2.91 - 0.489 \cdot \frac{2.91^2}{2} = 2.06 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Diseño:

$$(+)_M_u = 1.18 \text{ t}\cdot\text{m} \Rightarrow a = \frac{d}{5} = 4.47 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 1.55 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.65 \text{ m}$$

$$d = 25 - \left(2 + \frac{127}{2} \right) = 22.37 \text{ cm}$$

$$A_s = 1.52 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.58 \text{ cm} \quad \text{Usar } 1 \phi 1/2" + 1 \phi 3/8"$$

$$(+)_M_u = 2.06 \text{ t}\cdot\text{m} \Rightarrow a = 1.6 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 2.65 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.56 \text{ cm}$$

conforme

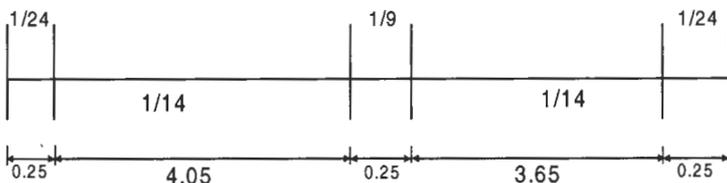
Usar $1\phi 5/8" + 1\phi 3/8" (1.98 + 0.71 = 2.69 \text{ cm}^2)$

$$+_{A_s} \Rightarrow \leq 2 \text{ varillas}$$

$$-_{A_s} \Rightarrow \leq 3 \text{ varillas}$$

Aplicación:

Diseñar la losa aligerada de 0.17 m que se muestra en la figura.



$$\begin{aligned}
 \text{P.P. aligerado} &= 0.280 \text{ t/m}^2 \\
 \text{acabado} &= 0.10 \text{ t/m}^2 \\
 \text{tabiquería} &= 0.12 \text{ t/m}^2 \\
 W_D &= 0.50 \text{ t/m}^2 \\
 W_L &= 0.20 \text{ t/m}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'c &= 210 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Por vigueta: } W_{uv} &= 0.4 \cdot (1.4 \cdot 0.5 + 1.7 \cdot 0.2) \\
 &= 0.416 \text{ t/m}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{14} \cdot 0.416 \cdot 4 \cdot 0.05^2 = 0.49 \text{ t/m}$$

$$\frac{1}{14} \cdot 0.416 \cdot 3.65^2 = 0.40 \text{ t/m}$$

$$\frac{1}{24} \cdot 0.416 \cdot 4 \cdot 0.05^2 = 0.28 \text{ t/m}$$

$$\frac{1}{24} \cdot 0.416 \cdot 3.65^2 = 0.23 \text{ t/m}$$

$$\frac{1}{9} \cdot 0.416 \cdot 3.85^2 = 0.69 \text{ t/m}$$

Diseño:

$$(-)M_U = 0.69 \text{ t-m} \Rightarrow a = \frac{d}{5} = 2.9 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{0.69 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 14.525}$$

$$d = 17 - \left(2 + \frac{0.95}{2} \right) = 14.525 \text{ cm} \quad A_s = 1.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{1.4 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.21 \cdot 10} = 3.3 \text{ cm}$$

$$d - \frac{a}{2} = 12.875 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 1.42 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.3 \text{ cm} \text{ conforme}$$

Usar $2 \phi 3/8$ (1.42 cm²)

$$(-)M_U = 0.28 \text{ t-m} \Rightarrow a = \frac{0.28}{0.69} \cdot 3.3 = 1.3 \text{ cm} \Rightarrow d - \frac{a}{2} = 13.875 \text{ cm}$$

$$A_s = 0.53 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.3 \text{ cm} \text{ conforme}$$

Usar $1 \phi 3/8$ (0.71 cm²)

$$(-)M_U = 0.23 \text{ t-m} \Rightarrow \text{Usar } 1 \phi 3/8$$

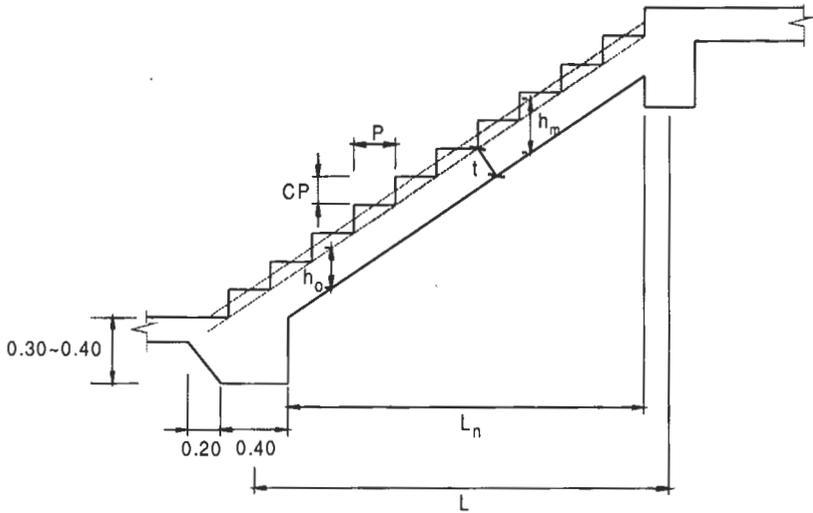
$$(+)M_U = 0.49 \text{ t-m} \Rightarrow a = \frac{0.49}{0.69} \cdot \frac{3.3}{4} = 0.59 \text{ cm} \Rightarrow d - \frac{a}{2} = 14.23 \text{ cm}$$

$$A_s = 0.91 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 0.54 \text{ cm} \text{ conforme Usar } 1 \phi 1/2$$

$$(+)M_U = 0.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 0.48 \text{ cm} \Rightarrow d - \frac{a}{2} = 14.285 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 0.74 \text{ cm}^2$$

$$a = 0.44 \text{ cm} \text{ conforme Usar } 1 \phi 3/8$$

DISEÑO DE ESCALERAS

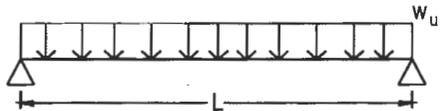


$$t = \frac{L_n}{25} \approx \frac{L_n}{20}$$

Ancho de Escalera: "b"

P = Paso

CP = Contrapaso



Modelo Estructural

Si los apoyos son vigas y/o zapatas.

$${}^+M_{\text{DISEÑO}} = \alpha {}^+M_{u \text{ max}}$$

$$\alpha = 1.0, 0.9, 0.8$$

$$-M_{\text{DISEÑO}} = \frac{1}{3} {}^+M_{\text{DISEÑO}} \rightarrow \text{Apoyos monolíticos poco rígidos.}$$

$$-M_{\text{DISEÑO}} = \frac{1}{2} {}^+M_{\text{DISEÑO}} \rightarrow \text{Apoyos monolíticos rígidos.}$$

Metrado de Cargas

$$\text{p.p.} = h_m(b) * 2.4 = \dots$$

$$\text{acabado} = 0.10 \text{ t/m}^2 * b * 2.4 = \dots$$

$$w_D = \text{p.p.} + \text{acabado}$$

$$s/c = s/c \text{ t/m}^2 * b = w_L$$

$$w_u = 1.4w_o + 1.7w_L$$

$$h_m = h_o + \frac{CP}{2} = \frac{t}{\cos \theta} + \frac{CP}{2}$$

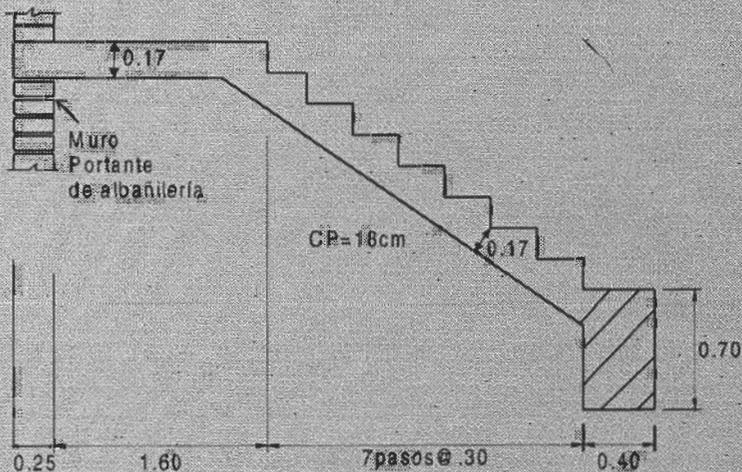
$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{CP}{P} \right)$$

$$\cos \theta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + CP^2}}$$

Aplicación:

Diseñar por flexión el momento positivo de diseño. Considere ancho=1.60m, $s/c=600 \text{ kg/m}^2$, $f_c=280 \text{ kg/cm}^2$, $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:



$$t = \frac{L_n}{25} \cdot \frac{L_n}{20} = \frac{3.7}{25} = 0.15, \frac{3.7}{20} = 0.19 \Rightarrow \text{Usar } t = 17 \text{ cm}$$

$$\cos(\theta) = \frac{30}{\sqrt{18^2 + 30^2}} = 0.8575$$

$$h_m = \frac{17}{\cos(\theta)} + \frac{18}{2} = 28.83 \text{ cm}$$

$$P/P = 0.2883 \cdot 1.60 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \quad 1.55 \text{ t/m}$$

$$\text{acabado} = 0.10 \cdot 1.60 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \quad 0.22 \text{ t/m}$$

$$s/c = 0.6 \cdot 1.60 \cdot 1.7 \quad 1.63 \text{ t/m}$$

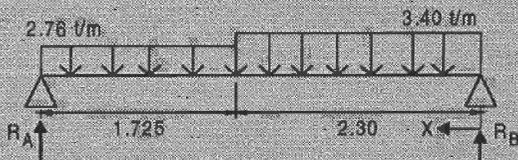
$$w_{u2} = 3.40 \text{ t/m}$$

$$RP = 0.17 \times 1.60 \times 2.4 \times 1.4 \quad 0.91 \text{ t/mw}$$

$$w_{u1} = 2.76 \text{ t/m}$$

$$4.025 \cdot R_B = \frac{2.76 \cdot 4.025^2}{2} + (3.40 - 2.76) \cdot 2.30 \cdot \left(1.725 + \frac{2.30}{2}\right)$$

$$R_B = 6.61 \text{ t}$$



$$V_x = R_B - w_{u2} X_o = 0 \Rightarrow X_o = 1.94 \text{ m}$$

$$+M_{u_{\max}} = 6.61 \cdot 1.94 - 3.40 \cdot \frac{1.94^2}{2} = 6.43 \text{ t-m}$$

$$-M_{u_{\text{dis}}} = \alpha M_{u_{\max}} = 0.8 \cdot 6.50 = 5.14 \text{ t-m}$$

$$\phi 1/2": d = 17 - (2 + 127/2) = 14.37 \text{ cm}$$

$$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 10.17 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_s = 9.85 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.09 \text{ cm} \quad \text{conforme}$$

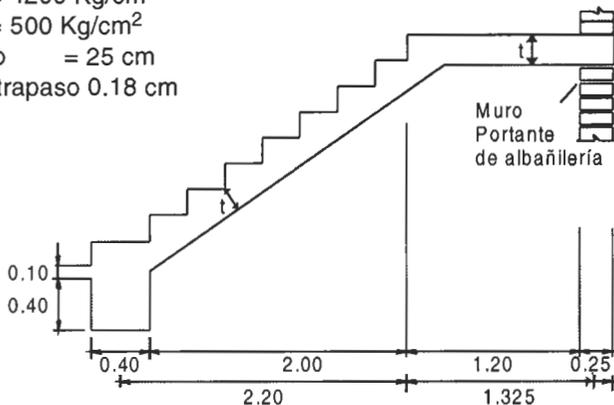
$$\text{Usar } 8 \phi 1/2" @ \frac{160 - (4 \cdot 2 + 127)}{7} = 21.5 \text{ cm}$$

Respuesta: $8 \phi 1/2" @ 0.22$

Aplicación:

Diseñar la escalera de un tramo que se muestra en la figura adjunta.

$f'_c = 175 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$
 $s/c = 500 \text{ Kg/cm}^2$
 Paso = 25 cm
 Contrapaso 0.18 cm



Solución:

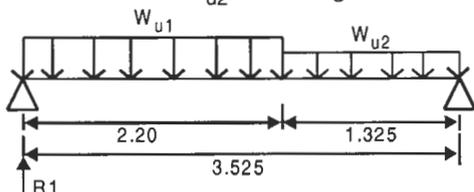
Dimensionamiento: $t = \frac{L_n}{20} \rightarrow \frac{L_n}{25} = 0.176 \rightarrow 0.14$ Usar $t = 15 \text{ cm}$

$$\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + cp^2}} = 0.812$$

$$h = \frac{t}{\cos \theta} = \frac{15}{0.812} = 18.45 \text{ cm} \Rightarrow h_m = 18.45 + \frac{18}{2} = 27.45 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
 w_{u1}: \quad PP &= 0.2745 \cdot 1.00 \cdot 1.00 \cdot 2400 \cdot 1.4 &= 922 \\
 \text{Acab} &= 100 \cdot 1.00 \cdot 1.4 &= 140 \\
 s/c &= 500 \cdot 1.7 &= 850 \\
 w_{u1} &= 1912 \text{ kg/m} &= 1.91 \text{ t/mw}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{u2}: \quad PP &= 0.15 \cdot 1.00 \cdot 1.00 \cdot 2400 \cdot 1.4 = 504 \\
 \text{Acab} &= 100 \cdot 1.00 \cdot 1.4 = 140 \\
 s/c &= 500 \cdot 1.7 = 850 \\
 w_{u2} &= 1494 \text{ kg/m} = 1.49 \text{ t/m}
 \end{aligned}$$



$$R_1 = 1.49 \cdot \frac{3.525}{2} + 0.42 \cdot (2.20) \cdot \frac{2.425}{3.525} = 3.26 \text{ t}$$

$$V_x = R_1 - w_{u1} X = 0 \Rightarrow X = \frac{3.26}{1.91} = 1.71 \text{ m}$$

$$M_{\max} = R_1 X - W_{u1} \cdot \frac{X^2}{2} = 3.26 \cdot 1.71 - 1.91 \cdot \frac{1.71^2}{2} = 2.78 \text{ t-m}$$

$$^+M_{\text{diseño}} = 0.8M_{\max} = 2.22 \text{ t-m}$$

Diseño:

$$A_{s \text{ temperatura}} = 0.0018 \cdot bt = 2.7 \text{ cm}^2$$

$$a = 2 \text{ cm} \rightarrow A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} = \frac{2.22 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 11.37} = 5.17 \text{ cm}^2$$

$$a = 1.46 \text{ cm} \therefore \text{CONFORME}$$

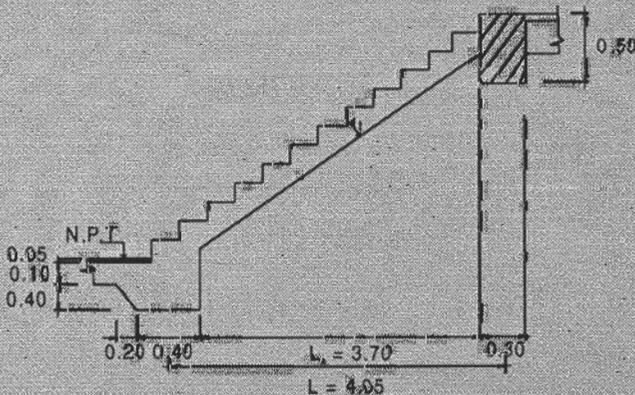
$$\Rightarrow \phi 1/2" @ 0.24$$

$$^-A_s = \frac{^+A_s}{2} = 2.59 \text{ cm}^2 < A_{s \text{ temperatura}} \therefore ^-A_s = 2.7 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \phi 3/8" @ 0.26$$

Aplicación:

Diseñar la escalera que se muestra en la figura adjunta considere el ancho de la escalera de 1.50 m y $f'_c = 175 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, $s/c = 500 \text{ kg/m}^2$.
Pasó = 25 cm, Contrapaso = 17.5 cm.



Solución:

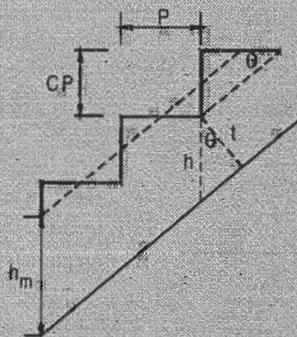
Dimensionamiento: $t = \frac{L_n}{20} \rightarrow \frac{L_n}{25} = 0.185 \rightarrow 0.15$

Usar $t = 15 \text{ cm}$

$$h_m = h + \frac{CP}{2} = \frac{t}{\cos \theta} + \frac{CP}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + CP^2}} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 17.5^2}} = 0.819$$

$$h_m = \frac{15}{0.819} + \frac{17.5}{2} = 27.06 \text{ cm}$$



Metrado de carga:

$$PP = 0.2706 \cdot 1.50 \cdot 2.4 = 0.97 \text{ t/m}$$

$$\text{Acabado} = 0.10 \cdot 1.50 = 0.15 \text{ t/m}$$

$$W_D = 1.12 \text{ t/m}$$

$$s/c = 0.5 \cdot 1.50 = 0.75 \text{ t/m} = W_L$$

$$w_u = 1.4w_D + 1.7w_L = 2.84 \text{ t/m}$$

$$+M_{u\max} = \frac{1}{8} w_u L^2 = \frac{1}{8} \cdot 2.84 \cdot 4.05^2 = 5.82 \text{ t-m}$$

$$+M_{u\text{diseño}} = 0.9M_{u\max} = 5.24 \text{ t-m}$$

Diseño: $d = t - \left(r + \frac{\phi}{2} \right) = 15 - \left(2 + \frac{1.27}{2} \right) = 12.37 \text{ cm}$

$$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{5.24 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot (12.37 - 1)} = 12.19 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{12.19 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.175 \cdot 150} = 2.29 \text{ cm} \text{ CONFORME}$$

Usar $A_s = 10 \phi 1/2'' @ s = \frac{150 - 0.0127}{9} = 0.16 \text{ m}$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{10 \cdot 127}{150 \cdot 12.37} = 0.0068 < \rho_{\max} = 0.0133$$

$$< \rho_{\min} = 0.0018$$

Refuerzo de Momento Negativo:

$$-A_s = \frac{+A_s}{3} = \frac{12.19}{3} = 4.06 \text{ cm}^2$$

Se toma la tercera parte del refuerzo de momento positivo debido a que los apoyos son poco rígidos.

$$A_{s\text{min}} = 0.0018 \cdot b \cdot d = 0.0018 \cdot 150 \cdot 12.37 = 3.34 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar } 6 \phi 3/8" @ s = \frac{150 - 0.04 - 0.0095}{5} = 0.29$$

Refuerzo Transversal por Temperatura:

$$A_{st} = 0.0018 \cdot b \cdot t = 0.0018 \cdot 100 \cdot 15 = 2.7 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$\phi 3/8" @ \frac{A_\phi}{A_s} = \frac{0.71}{2.7} = 0.26 \therefore \text{Usar } \phi 3/8" @ 0.26 \text{ m}$$

Verificación por Cortante:

$$V_{ud} = w_u \frac{L_n}{2} - w_u d = 2.84 \cdot \frac{3.7}{2} - 2.84 \cdot 0.1237$$

$$V_{ud} = 5.25 - 0.35 = 4.90 \text{ t}$$

$$V_{ud} \cdot \cos \theta = 4.01 \text{ t} \Rightarrow V_n = \frac{4.01}{0.85} = 4.72 \text{ t}$$

$$V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot d = 0.53 \cdot \sqrt{175} \cdot 10 \cdot 15 \cdot 0.1237 = 13.01 \text{ t}$$

$$V_n < V_c \therefore \text{CONFORME}$$

Carga de Servicio sobre el Apoyo:

$$w = w_D + w_L = 1.12 + 0.5$$

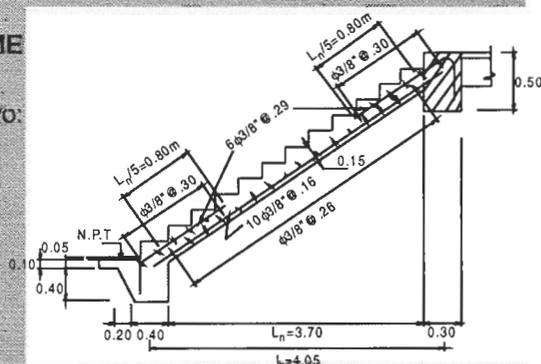
$$w = 1.62 \text{ t/m}$$

$$P = \frac{wL}{2} = \frac{1.62 \cdot 4.05}{2} = 3.28 \text{ t}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{3280}{150 \cdot 40} = 0.55 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore \sigma_1 < \sigma_t = 2 \text{ kg/cm}^2 \text{ CONFORME}$$

$\therefore \sigma_1$ es generalmente pequeño no se necesita una zapata ancha.



Aplicación:

Diseñar la escalera que se muestra en la figura considere: $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$; $s/c = 600 \text{ kg/m}^2$, ancho $b = 1.20 \text{ m}$, $CP = 0.18\text{m}$.

Solución:

$$\text{Dimensionamiento: } t = \frac{4.44}{20} = 0.22 \rightarrow \frac{4.4}{25} = 0.176 \text{ Usar } t = 0.20 \text{ m}$$

Metrado de Cargas

$$w_{u1} \Rightarrow P.P. = 0.20 * 1.2 * 1 * 2.4 * 1.4 = 0.81 \text{ t/m}$$

$$\text{acabado} = 0.10 * 1.2 * 1.4 = 0.17 \text{ t/m}$$

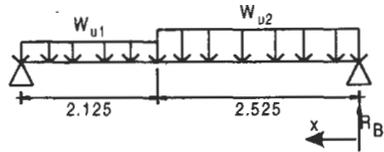
$$s/c = 0.6 * 1.2 * 1.7 = 1.22 \text{ t/m}$$

$$w_{u1} = 2.20 \text{ t/m}$$

$$h_m = h + \frac{CP}{2} = \frac{t}{\cos \theta} + \frac{CP}{2}$$

$$h = \frac{0.20}{\left(\frac{30}{\sqrt{30^2 + 18^2}} \right)} = \frac{0.20}{0.857} = 0.233$$

$$h_m = 0.233 + \frac{0.18}{2} = 0.323 \text{ m}$$



$$w_{u2} \Rightarrow P.P. = 0.323 * 1.2 * 1 * 2.4 * 1.4 = 1.30 \text{ t/m}$$

$$\text{acabado} = 0.10 * 1.2 * 1.4 = 0.17 \text{ t/m}$$

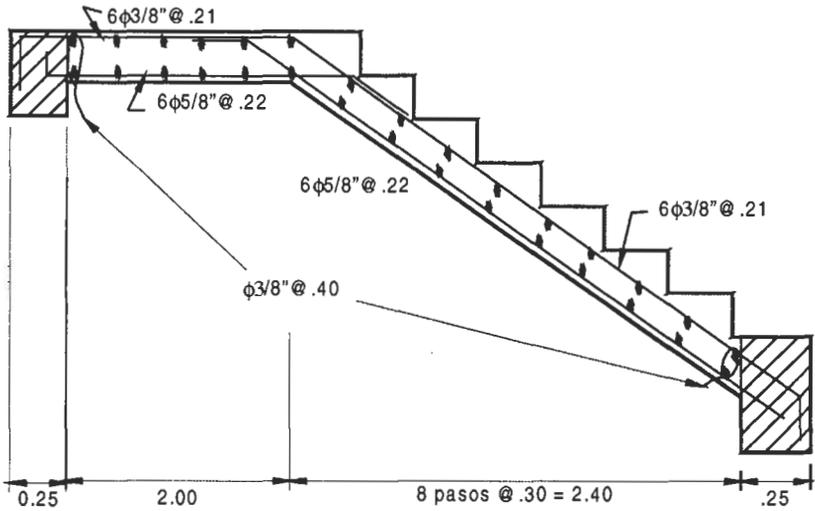
$$s/c = 0.6 * 1.2 * 1.7 = 1.22 \text{ t/m}$$

$$w_{u2} = 2.69 \text{ t/m}$$

$$R_B = 2.20 * \frac{4.65}{2} + (2.69 - 2.2) * 2.525 * \frac{3.3875}{4.65} = 6.02 \text{ t}$$

$$V_x = 0 = R_B - W_{u2} \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{6.02}{2.69} = 2.24 \text{ m}$$

$$+M_{u_{\max}} = R_B \cdot x_0 - W_{u2} \cdot \frac{x_0^2}{2} = 6.74 \text{ t-m}$$



$$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 11.0 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 2.16 \text{ cm CONFORME}$$

$$d = 20 - \left(2 + \frac{1.59}{2} \right) = 17.21 \text{ cm} \quad \text{Usar } 6 \phi 5/8" @ 0.22$$

$$A_{s \min} = 0.0018bd = 0.0018 * 120 * 17.21 = 3.72 \text{ cm}^2$$

$$-A_s = \frac{+A_s}{3} = \frac{11}{3} = 3.67 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar } A_{s \min} = 3.72 \text{ cm}^2$$

$$s = \frac{1.2 - 0.15 - 0.0095}{5} = 0.21 \Rightarrow 6 \phi 3/8" @ 0.21$$

$$s_{\max} = 3t, 45 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

$$A_{s \text{ temp}} = 0.0018bt = 0.0018 * 100 * 20 = 3.6 \text{ cm}^2$$

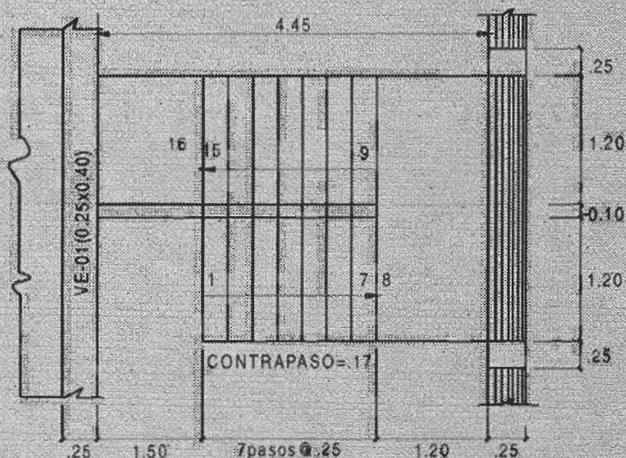
$$\phi 3/8" @ \frac{0.71}{3.6} = 0.20 \therefore \text{Usar } \phi 3/8" @ 0.40 \text{ en 2 CAPAS}$$

$$s_{\max} = 5t, 45 \text{ cm}$$

$$100, 45 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

Aplicación

Diseñar la escalera E₁ que se muestra en la figura adjunta. Considere $f_c = 175 \text{ kg/cm}^2$; $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, $s/c = 400 \text{ kg/m}^2$.



ESCALERA E1 DE CASA-HABITACION

Dimensionamiento:

Primer Tramo:

$$t = \frac{L_n}{20} = \frac{2.50}{20} = 0.125 \text{ m}$$

$$t = \frac{L_n}{25} = 0.10 \text{ m}$$

Usar $t = 0.12 \text{ m}$

Segundo Tramo:

$$t = \frac{4.45}{20} = 0.222 \text{ m}$$

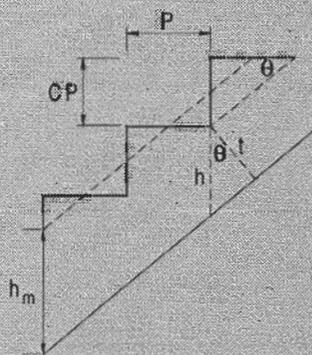
$$t = \frac{4.45}{25} = 0.178 \text{ m}$$

Usar $t = 0.20 \text{ m}$

Diseño 1er. TRAMO:

P.P ----- Tramo Inclinado:

$$h_m = h + \frac{CP}{2}$$



$$h = \frac{l}{\cos \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{P_c}{\sqrt{p^2 + cp^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 17^2}} = 0.827 \Rightarrow h = \frac{12}{0.827} = 14.51 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h_m = 14.51 + \frac{17.2}{2} = 23.11 \text{ cm}$$

Peso Propio = $0.23 \cdot 1.00 \cdot 1.00 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \dots\dots 0.773$

Acabado = $0.1 \cdot 1.00 \cdot 1.00 \cdot 1.4 \dots\dots 0.140$

s/c = $0.4 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 1.7 \dots\dots 0.680$

$$w_{u1} = 1.59 \text{ t/m}$$

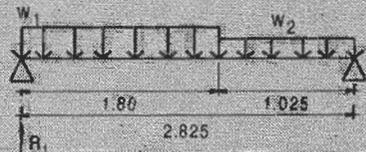
$w_{u2} \Rightarrow$

PP = $0.12 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \cdot 0.40$

Acab = $\dots\dots 0.14$

s/c = $\dots\dots 0.68$

$$w_{u2} = 1.22 \text{ t/m}$$



$$R_1 = 1.22 \cdot \frac{2.825}{2} + (1.59 - 1.22) \cdot 1.80 = \frac{1.925}{2.825} = 2.18 \text{ t}$$

$$V_x = R_1 - w_{u1} X_0 = 0 \Rightarrow X_0 = \frac{R_1}{w_{u1}} = \frac{2.18}{1.59} = 1.37 \text{ m}$$

$$\therefore M_{\max} = R_1 X_0 - w_{u1} \frac{X_0^2}{2} = 2.18(1.37) - 1.59 \frac{(1.37)^2}{2} = 1.49 \text{ t-m}$$

Considerando $\phi 3/8" \Rightarrow d = 12 - 2 - \frac{0.95}{2} = 9.52 \text{ cm}$

$M_{\text{diseño}} = 0.9 \cdot (+)M_{\max} = 1.35 \text{ t-m}$

$$a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{1.35 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot (9.52 - 1)} = 4.19 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = 1.18 \text{ cm}$$

$\Rightarrow A_s = 4.01 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.13 \text{ cm}$ conforme

$\rho_{\min} = 0.0018 \Rightarrow A_{s \min} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d = 0.0018 \cdot 100 \cdot 9.52 = 1.71 \text{ cm}^2$

$$\therefore A_s = 4.01 \text{ cm}^2 \rightarrow s = \frac{A\phi}{A_s} = \frac{0.71}{4.19} = 0.17 \therefore \phi 3/8" @ 0.17$$

Para $b = 1.20 \text{ m}$; $A_s = 1.20 * 4.01 = 4.81 \text{ cm}^2 \therefore 7 \phi 3/8" @ 0.18$

Espaciamiento Máximo:

$$s_{\max} = 3t = 36 \text{ cm}$$

$$s_{\max} = 45 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

Refuerzo Negativo

$$-A_s = \frac{A_s}{2} = \frac{4.81}{2} = 2.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{s\min} = 1.71 \text{ cm}^2 * 1.2 = 2.052 \text{ cm}^2$$

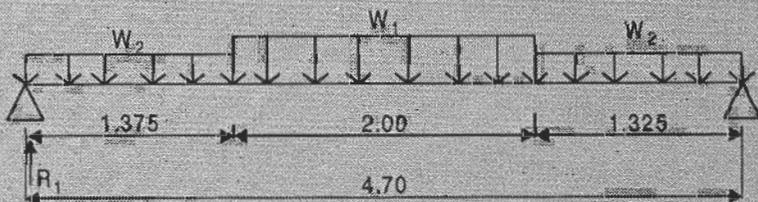
Se considera la mitad del refuerzo de momento positivo debido a que el apoyo de muro de albañilería portante continuo es un apoyo rígido

Usar $4\phi 3/8" @ 0.35$
 $s_{\max} = 3t = 36 \text{ cm}$
 $s_{\max} = 45 \text{ cm}$

$$A_{s\text{transversal}} = A_{st} = 0.0018 * (100) * 12 = 2.16 \text{ cm}^2 \therefore \phi 3/8" @ 0.33$$

Usar $3/8" @ 0.30 \text{ m}$

DISEÑO DEL 2do. TRAMO



Tramo Inclinado:

$$\cos(\alpha) = 0.827$$

$$h = \frac{20}{0.827} = 24.18 \text{ cm}$$

$$h_m = 24.18 + \frac{17}{2} = 32.68 \text{ cm}$$

$$\text{Peso propio} = 0.327 * 1.0 * 2.4 * 1.4 \dots\dots\dots 1.10 \text{ t/m}$$

$$\text{Acabado} = 0.10 * 1.0 * 1.0 * 1.4 \dots\dots\dots 0.14 \text{ t/m}$$

$$\text{s/c} = 0.4 * 1.0 * 1.0 * 1.7 \dots\dots\dots 0.68 \text{ t/m}$$

$$w_{u1} = 1.92 \text{ t/m}$$

$$\begin{aligned}
 W_{u2} &= p.p = 0.20 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \dots\dots\dots 0.67 \text{ t/m} \\
 \text{Acabado} &= \dots\dots\dots 0.14 \text{ t/m} \\
 \text{s/c} &= \dots\dots\dots 0.68 \text{ t/m} \\
 & \qquad \qquad \qquad W_{u2} = 1.49 \text{ t/m}
 \end{aligned}$$

$$R_1 = 1.49 \cdot \frac{4.70}{2} + (1.92 - 1.49) \cdot 2 \cdot \frac{2.325}{4.70} = 3.93 \text{ t}$$

$$V_x = R_1 - W_2 x_0 - (w_1 - w_2) (x_0 - 1.375) = 0$$

$$3.93 - 1.49 x_0 - (0.43) x_0 + 0.591 = 0 \Rightarrow x_0 = 2.35 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 3.93 \cdot 2.35 - 1.49 \left(\frac{2.35^2}{2} \right) - 0.43 \left(\frac{(2.35 - 1.375)^2}{2} \right) = 4.92 \text{ t-m}$$

$$\therefore M_{\text{diseño}} = 0.9 M_{\max} = 4.43 \text{ t-m}$$

$$\text{Usando } \phi 1/2'' \Rightarrow d = 20 - 2 - \frac{127}{2} = 17.36 \text{ cm}$$

$$\text{Para } a = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{4.43 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot (17.36 - 1)} = 7.16 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{7.16 \cdot 4200}{0.85 \cdot 175 \cdot 100} = 2.02 \text{ cm conforme}$$

$$A_{s\min} = 0.0018 bd = 0.0018 \cdot 100 \cdot 17.36 = 3.12 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \phi 1/2'' @ 0.17 \text{ m}$$

$$\text{Para } b = 1.20 \Rightarrow A_s = 1.2 \cdot 7.16 = 8.59 \text{ cm}^2 \Rightarrow 7 \phi 1/2'' @ 0.18 \text{ m}$$

$$A_{s\text{transversal}} = A_{s\text{temp}} = 0.0018 bd = 0.0018 (100)(20) = 3.6 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \phi 3/8'' @ 0.20 \text{ m}$$

Refuerzo para momento negativo en los apoyos:

$$-A_s = \frac{+A_s}{2}$$

$$\text{Para } b = 1.20 \text{ m} \rightarrow -A_s = 4.30 \text{ cm}^2 \therefore 6 \phi 3/8'' @ 0.22 \text{ m}$$

Los espaciamientos son menores que los máximos permisibles

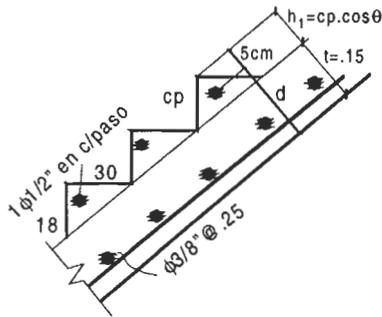
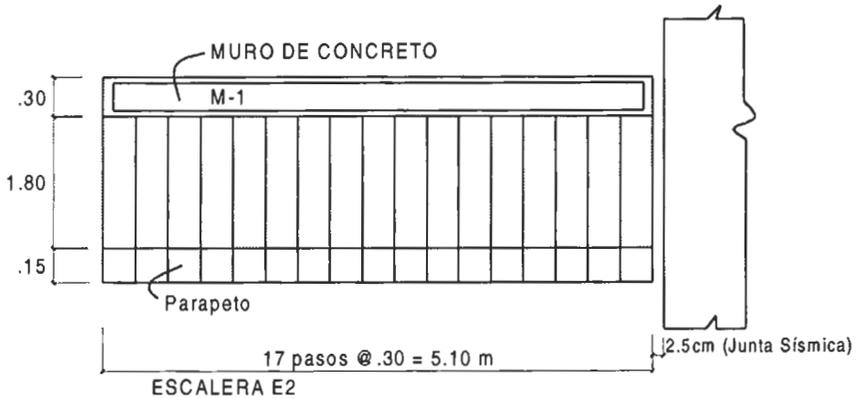
Aplicación:

Diseñar la escalera E₂ que se muestra en la figura adjunta.
 Considere:

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$s/c = 500 \text{ kg/cm}^2$$



$$\cos(\alpha) = \frac{P}{\sqrt{p^2 + cp^2}} = \frac{30}{\sqrt{30^2 + 18^2}} = 0.858$$

$$h_1 = cp * \cos(\alpha) = 0.18 * 0.858 = 0.154$$

$$d = t + (h_1 - 5 \text{ cm}) = 15 + 10.4 = 25.4 \text{ cm}$$

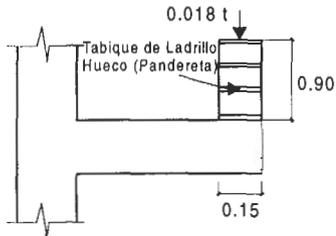
Metrado de Cargas

$$P.P \Rightarrow h_m = h + \frac{cp}{2} = \frac{t}{\cos(\alpha)} + \frac{cp}{2} = \frac{15.015}{0.858} + \frac{18}{2} = 26.5 \text{ cm}$$

Por Paso

$$\begin{aligned}
 P.P. &= 0.265 * 0.3 * 1.0 * 2.4 * 1.4 \dots\dots\dots 0.267 \\
 Acab &= 0.1 * 0.3 * 1.0 * 1.4 \dots\dots\dots 0.042 \\
 s/c &= 0.5 * 0.3 * 1.0 * 1.7 \dots\dots\dots 0.255 \\
 &w_{UV} = 0.564 \text{ t/m (vertical)}
 \end{aligned}$$

$$w_{U\text{efectivo}} = w_{UV} * \cos(\alpha) = 0.48 \text{ t/m}$$



$$\begin{aligned}
 P.P_{\text{tabique (parapeto)}} &= 0.9 * 0.30 * 0.2 * 1.4 = 0.0756 \text{ t } \downarrow \\
 P.P_{\text{tabique efectivo}} &= P_{\text{tab vert}} * \cos(\alpha) = 0.065 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Según normas de cargas:

$$M_U = \begin{cases} 0.5 * 0.48 * 1.80^2 & = 0.778 \text{ t/m} \\ 0.065 * 1.725 & = 0.112 \text{ t/m} \\ (0.018 * 0.858) * 1.725 & = 0.0266 \text{ t/m} \\ (0.018 * 0.515) * 1.725 & = 0.016 \text{ t/m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 M_U &= 0.933 \text{ t/m} \\
 P_{\text{efect}} &= 0.018 * \text{sen}(\alpha) = 0.018 * 0.515
 \end{aligned}$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{18}{\sqrt{18^2 + 30^2}} = 0.515$$

$$\therefore A_s = \frac{0.933 * 10^5}{3780 * 0.9 * 25.4} = 1.08 \text{ cm}^2 \Rightarrow 1\phi 1/2" \text{ en c / paso}$$

Refuerzo en Dirección Longitudinal

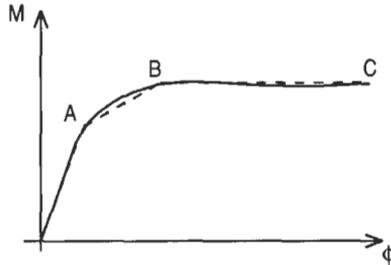
$$\begin{aligned}
 A_{s\text{ temperatura}} &= 0.0018(100)(15) = 2.7 \text{ cm}^2 \\
 &\phi 3/8" @ 0.26
 \end{aligned}$$

Usar $\phi 3/8" @ 0.25$

COMPORTAMIENTO A LA FLEXION DE SECCIONES DE VIGA

DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA

Comportamiento de una sección de viga.



- Condición de inicio del agrietamiento del concreto.
- Condición de inicio de fluencia del acero en tracción.
- Inicio del aplastamiento del concreto.

PUNTO A: Condición de inicio del agrietamiento del concreto (f_{cr} , M_{cr})

ϕ_{cr} = Curvatura de agrietamiento.

M_{cr} = Momento de agrietamiento.

Para momentos actuantes no mayores que el M_{cr} , la sección de viga no está agrietada. Se considera que el comportamiento corresponde al estado elástico. Se tiene:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$$

donde,

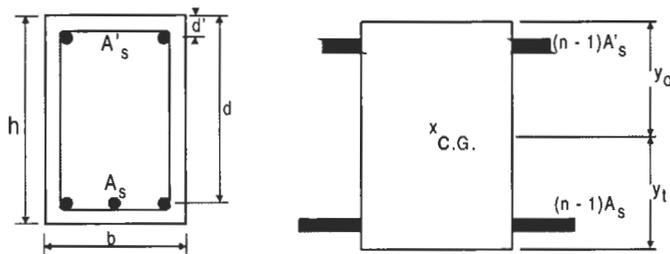
$$f_r = 2\sqrt{f'_c} \quad \text{kg/cm}^2$$

I_g = Momento de inercia de la sección no agrietada.

y_t = Distancia del centroide de la sección a la fibra extrema en tracción.

Determinación de I_g .

a) Sección transformada



$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

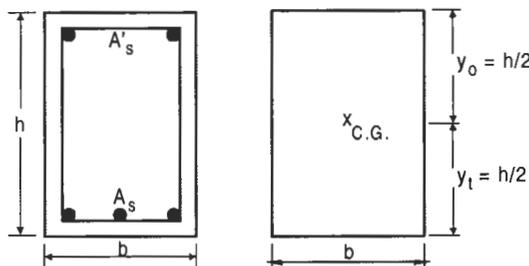
$$E_s = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} \text{ kg/cm}^2 \text{ (Concreto Normal)}$$

$$y_0 = \frac{bh(h/2) + (n-1)A_s d + (n-1)A'_s d}{bh + (n-1)A_s + (n-1)A'_s}$$

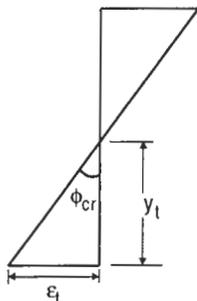
$$I_g = \frac{bh^3}{12} + bh \left(y_0 - \frac{h}{2} \right)^2 + (n-1)A_s (d - y_0)^2 + (n-1)A'_s (y_0 - d')^2$$

b) Sección "Bruta"



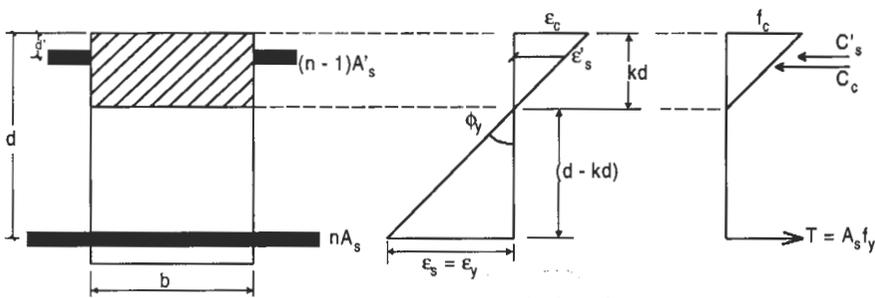
$$I_g = \frac{bh^3}{12}$$

Curvatura Agrietamiento



$$\phi_{cr} = \frac{\epsilon_t}{y_t} = \frac{f}{E_c y_t}$$

PUNTO B: Condición de inicio de Fluencia (f_y , M_y).



Determinación de la profundidad del eje neutro:

$$\left[b(kd) + nA_s + (n-1)A'_s \right] kd = b kd \left(\frac{kd}{2} \right) + nA_s d + (n-1)A'_s d'$$

Resolviendo calculamos kd.

Determinación de la curvatura de fluencia, ϕ_y :

$$\phi_y = \frac{\epsilon_y}{d - kd} = \frac{f_y / E_s}{d - kd}$$

Momento de Fluencia:

De la figura, $C_c = \frac{1}{2} f_c kd b$

$$C_c = A'_s f'_s$$

donde, $f'_s = E_s \epsilon'_s \leq f_y$

$$\epsilon'_s = \epsilon_c \frac{kd - d'}{kd}, \quad \epsilon_c = \epsilon_y \frac{kd}{d - kd}$$

$$M_y = C_c \left(d - \frac{kd}{3} \right) + C'_s (d - d')$$

PUNTO C: Condición de inicio del Aplastamiento. (f_{nu} , M_{nu})

Concreto "no confinado", $\epsilon_{cu} = 0.004$

Concreto "confinado", $\epsilon_{cu} > 0.004$

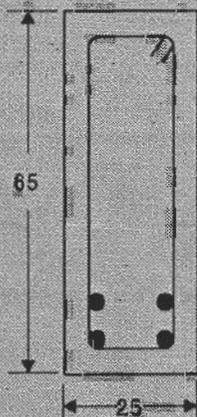
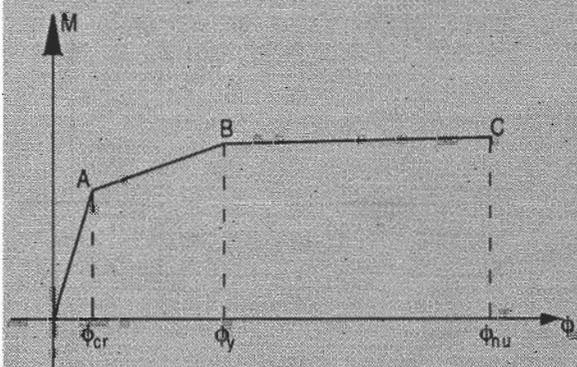
M_{nu} sigue el análisis normal para la obtención de momento resistente de una sección.

$$\phi_{nu} = \frac{\epsilon_{cu}}{c}$$

Capacidad de ductilidad por Curvatura, $\mu_c = \frac{\phi_{nu}}{\phi_y}$

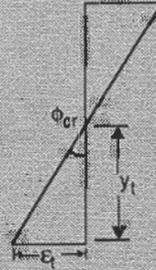
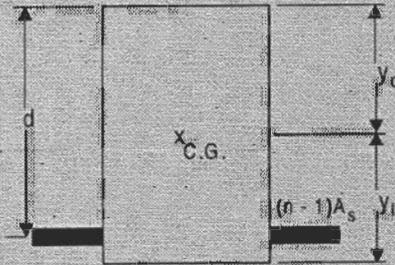
Aplicación:

Para la sección de la viga que se muestra en la figura, determine el diagrama momento-curvatura $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ considere el efecto del refuerzo con el criterio del área transformada, y para el inicio del aplastamiento $\epsilon_{cu} = 0.004$, $A_s = 4\phi 1"$



Solución:

Punto A: Inicio del agrietamiento (f_{cr} , M_{cr})



$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_1}$$

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} = 33.47 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 65 \cdot (4 + 0.96 + 1.5 \cdot 2.54) = 56.24 \text{ cm}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \cdot 10^6}{15000 \cdot \sqrt{280}} = 7.97$$

$$A_s = 4 \cdot 5.07 = 20.28 \text{ cm}^2$$

$$(n-1) \cdot A_s = 141.25 \text{ cm}^2$$

$$y_0 = \frac{25 \cdot 65^3 \cdot 32.5 + 141.25 \cdot 56.24}{25 \cdot 65 + 141.25} = 34.40 \text{ cm}$$

$$y_1 = 65 - 34.40 = 30.60 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} + bh \left(y_0 - \frac{h}{2} \right)^2 + (n-1)A_s (d - y_0)^2$$

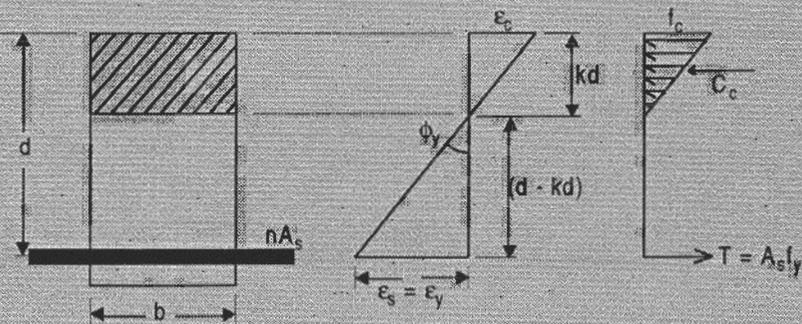
$$I_g = 645423.6 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr} = \frac{33.47 \cdot 645423.6}{30.6 \cdot 10^5} = 7.06 \text{ t-m}$$

$$\phi_{cr} = \frac{\epsilon_t}{y_1} = \frac{f_r / E_c}{y_1} = \frac{2 \cdot \sqrt{280} / 15000 \cdot \sqrt{280}}{30.6}$$

$$\phi_{cr} = 4.36 \cdot 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

Punto B: Inicio de la fluencia del acero en tracción. (f_y , M_y)



$$25 \frac{(kd)^2}{2} + 161.63 \cdot 56.24 = (25 kd + 161.63) kd$$

$$12.5 (kd)^2 + 161.63 \cdot kd - 9090.07 = 0$$

$$(kd)^2 + 12.93 (kd) - 727.21 = 0$$

$$kd = -6.47 + 27.73 = 21.26 \text{ cm}$$

$$\phi_y = \frac{\epsilon_y}{d - kd} = \frac{f_y / E_s}{d - kd}$$

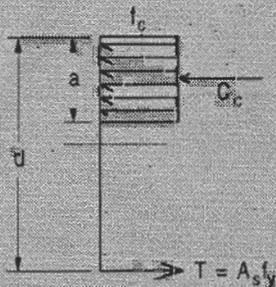
$$\phi_y = \frac{0.0021}{56.24 - 21.26}$$

$$\phi_y = 60.03 \cdot 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

$$\epsilon_c = \phi_y \cdot kd = 0.00127624$$

$$f_c = E_c \cdot \epsilon_c = 320 \text{ kg/cm}^2 > f_c$$

Entonces, la hipótesis no es confiable, por lo que el momento lo determinaremos mediante el bloque equivalente rectangular de esfuerzos.

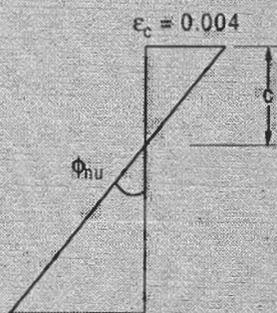


$$a = \beta_1 \cdot kd = 0.85 \cdot 21.26 = 18.07 \text{ cm}$$

$$M_y = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 20.28 \cdot 4.2 \left(0.5624 - \frac{0.1807}{2} \right)$$

$$M_y = 40.20 \text{ t-m}$$

Punto C: Inicio del aplastamiento



$$a = \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c' \cdot b} = \frac{20.28 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 25} = 14.32 \text{ cm}$$

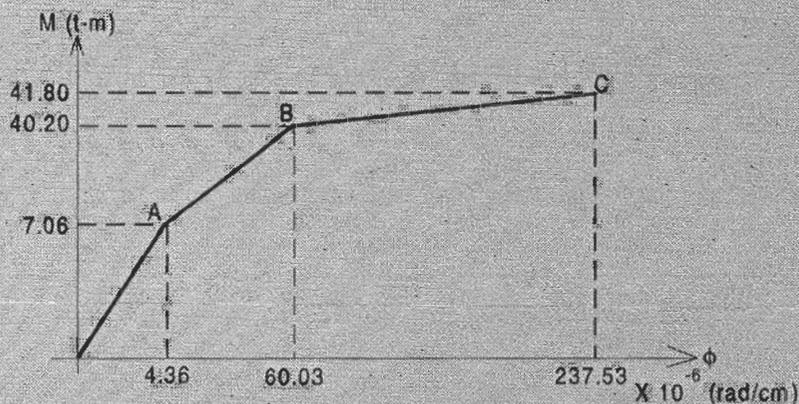
$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{14.32}{0.85} = 16.85 \text{ cm}$$

$$\phi_{nu} = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.004}{16.84} = 237.53 \cdot 10^{-6} \text{ rad/cm}$$

$$M_{nu} = A_s \cdot f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 41.80 \text{ t-m}$$

Capacidad de ductilidad:

$$\mu = \frac{\phi_{nu}}{\phi_y} = \frac{237.53}{60.03} = 3.96$$



Aplicación:

Para la sección de viga que se muestra en la figura, considerando sección confinada, $\epsilon_{cu}=0.006$ determine la capacidad de ductilidad m_c .

$$A'_s = A_s = 2 \phi \text{ No. 8}$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

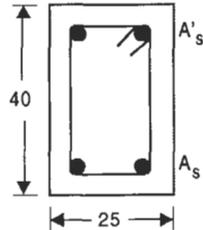
Estribos $\phi 3/8''$

Solución:

$$A'_s = A_s = 2 * 5.07 = 10.14 \text{ cm}^2$$

$$d = 40 - (4 + 0.95 + 1.27) = 33.78 \text{ cm}$$

$$d' = 6.22 \text{ cm}$$



i) ϕ_{nu} :

$$\epsilon_{cu} = 0.006$$

$$\frac{\epsilon'_s}{0.006} = \frac{c - d'}{c}$$

$$f'_c = 12 * \frac{c - d'}{c} = 12 \frac{(a - 0.85 * 6.22)}{a}$$

$$f'_s = \frac{12 * a - 63.44}{a} \Rightarrow C'_s = f'_s * A'_s$$

$$C_c + C'_s = T$$

$$0.85 * f'_c * a^2 * b + 121.68 * a - 643.28 = 29.39 * a$$

$$5.95 * a^2 + 93.29 * a - 643.28 = 0$$

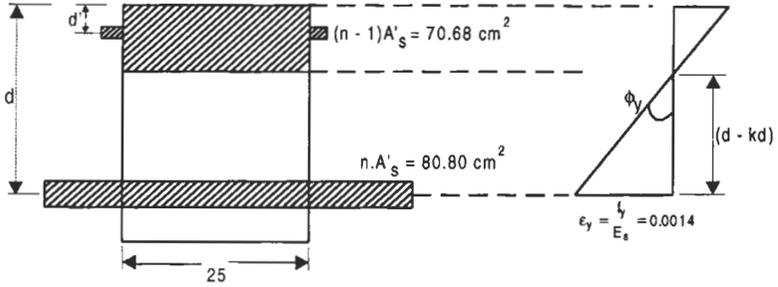
$$a^2 + 15.68 * a - 108.11 = 0 \Rightarrow a = 5.18 \text{ cm}$$

$$\therefore f'_s = -0.25 t / \text{cm}^2 < f_y \text{ conforme}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{5.18}{0.85} = 6.09 \text{ cm}$$

$$\therefore \phi_{nu} = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = 9.85 * 10^{-4} \text{ rad / cm}$$

ii)



$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \cdot 10^6}{15000 \sqrt{280}} = 7.97$$

$$(25 \cdot kd + 80.8 + 7068) \cdot kd = \frac{25}{2} (kd)^2 + 80.8 \cdot 33.78 + 70.68 \cdot 6.22$$

$$25 \cdot (kd)^2 + 151.48 \cdot kd = 12.5 \cdot (kd)^2 + 3169.05$$

$$(kd)^2 + 12.12 \cdot kd - 253.52 = 0 \Rightarrow kd = 10.98 \text{ cm}$$

$$\therefore \phi_y = \frac{0.0014}{33.78 - 10.98} = 0.614 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$$

Luego:
$$\mu_c = \frac{\phi n_u}{\phi_y} = 16.04$$

EVALUACION DEL ANCHO DE LAS GRIETAS

Las grietas se presentan en el concreto en forma inevitable cuando se excede su resistencia a la tensión, por lo tanto lo que se busca es tan solo limitar el ancho de éstas.

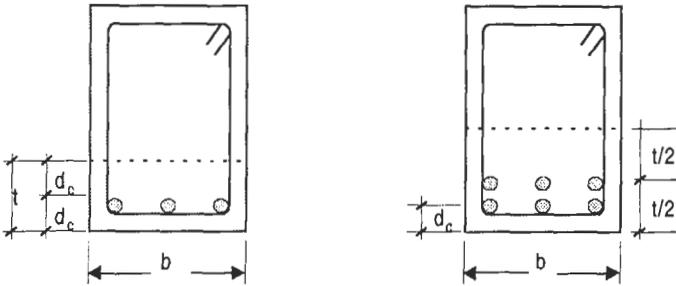
Para evaluar el ancho de las grietas se puede usar la expresión propuesta por Gergely-Lutz:

$$w_{\max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} \beta_s \sqrt[3]{d_c A}$$

Donde:

- w_{\max} = ancho de la grieta en mm.
- b = $(h-c)/(d-c)$ = valor promedio del factor de profundidad, puede tomarse igual a 1.2.
- f_s = esfuerzo máximo en el acero al nivel de carga de servicio, en kg/cm^2 .
Puede usarse $0.6 f_y$, si no se dispone de resultado de análisis.
- d_c = espesor, en cm, del recubrimiento medido hasta el centro de la primera línea de refuerzo.
- A = área de concreto en tensión entre el número de barras, en cm^2 .
- $A = \frac{bt}{\gamma_{bc}}$ donde, b = ancho de la sección.
- t = profundidad del concreto en tensión. Se determina considerando el centro de gravedad de las barras en tensión como el centroide del área de concreto en tensión.
- γ_{bc} = se define como el número de barras en el lado de tensión si todas las barras son del mismo diámetro; o el área total de acero entre el área de la barra mayor.

La fórmula anterior no es aplicable a losas armadas en dos direcciones.



Es de notar que el refuerzo permisible de $f_s = 0.6 f_y$ en lugar del valor real del esfuerzo en el acero sólo es aplicable a estructuras normales. Deben tomarse precauciones especiales para estructuras expuestas a climas muy agresivos, tales como en instalaciones químicas o en estructuras portuarias.

En el caso de usar paquetes de barras como refuerzo, el ancho de la grieta, $w_{m\acute{a}x}$ en mm, se estima con la siguiente expresión:

$$w_{m\acute{a}x} = 0.1086 * 10^{-4} \beta f_s \sqrt[3]{d'_c A'}$$

Donde:

d'_c = profundidad del recubrimiento al centro de gravedad del paquete.

$$A' = \frac{bt}{\gamma_{bc}}$$

Para paquetes de dos barras	⇒	γ_{bc}	=	0.815 γ_{bc}
Para paquetes de tres barras	⇒	γ_{bc}	=	0.650 γ_{bc}
Para paquetes de cuatro barras	⇒	γ_{bc}	=	0.570 γ_{bc}

Anchos de Grieta Permisibles

Condición de exposición	Ancho Permisible
Aire seco o con membrana de protección	0.41 mm
Aire húmedo o suelo	0.30 mm
Agentes químicos	0.18 mm
Agua de mar	0.15 mm
Estructuras de contención de agua	0.10 mm

Factor z para verificación de control de grietas en Vigas y Losas

La verificación de control de grietas sólo es necesario cuando se usa acero en tensión con resistencia de fluencia, f_y , que excede a 2800 kg/cm². El código ACI, en orden de reducir el tamaño de los cálculos, recomienda usar un factor z, donde:

$z = f_s \sqrt[3]{d_c A}$, en kg/cm para barras aisladas.

$z = f_s \sqrt[3]{d'_c A}$, en kg/cm para paquetes de barras.

El valor de z no debe ser mayor que los valores indicados:

$z \leq 31\ 000$ kg/cm para vigas en interiores, corresponde a $w_{m\acute{a}x}=0.40$ mm

$z \leq 23\ 200$ kg/cm para vigas en exteriores, corresponde a $w_{m\acute{a}x}=0.30$ mm

$z \leq 27\ 500$ kg/cm para losas en interiores, corresponde a $w_{m\acute{a}x}=0.40$ mm

$z \leq 20\ 600$ kg/cm para losas en exteriores, corresponde a $w_{m\acute{a}x}=0.30$ mm

Debe enfatizarse que barras pequeñas de refuerzo a espaciamiento menores dentro de la zona de tensión dan una mejor distribución del agrietamiento, por lo tanto son preferibles para conseguir el control del agrietamiento. El uso del factor z no es alentador, desde que no da indicación directa de la magnitud del ancho de la grieta.

CONTROL DEL ANCHO DE GRIETAS

El código ACI-99 (sección 10.6), menciona que el control de fisuras estará de acuerdo a una adecuada distribución del refuerzo; para lo cual indica que el acero de refuerzo en tensión, cercano a una superficie no deberá exceder a:

$$s = \frac{96000}{f_s} - 2.5c_c$$

y no mayor a:

$$s \leq 30 \left(\frac{2520}{f_s} \right)$$

Donde, c_c es el recubrimiento en (cm) y f_s (kg/cm²) es el esfuerzo calculado mediante:

$$f_s = \frac{M}{A_s jd}$$

M, es el momento bajo cargas de servicio (no factorizado).

A_s , área de acero en tracción.

jd, es el brazo del momento interno, pudiendo ser: $d - \frac{a}{2}$ ó $d - \frac{c}{3}$

Se permite tomar un valor de f_s igual a $0.6 f_y$

Las fórmulas anteriores han sido evaluadas para un ancho de grieta de 0.041 cm, por lo que se pueden modificar estas fórmulas dadas por el ACI para otros anchos permisibles de grietas "w".

$$s = \left(\frac{96000}{f_s} - 2.5 c_c \right) \frac{w}{0.041}$$

y no mayor a:

$$s \leq 30 \left(\frac{2520}{f_s} \right) \frac{w}{0.041}$$

Anchos de Grieta Permisibles

Condición de exposición	Ancho Permissible "w"
Aire seco o con membrana de protección	0.041 cm
Aire húmedo o suelo	0.030 cm
Agentes químicos	0.018 cm
Agua de mar	0.015 cm
Estructuras de contención de agua	0.010 cm

Vigas Peralgadas

Para el caso en que el peralte efectivo de las vigas sea mayor que 90 cm. se tendrá que proveer refuerzo adicional en las caras para evitar fisuramiento. El código ACI recomienda que este refuerzo se reparta en la mitad inferior del elemento, el refuerzo adicional en cada lado deberá ser:

$$A_{sk} \geq 0.1 (d - 75) \text{ cm}^2 / \text{m}$$

donde,

A_{sk} = refuerzo adicional para cada lado del elemento dado en cm^2 por metro de alto.

d = peralte efectivo en cm.

El espaciamiento entre varillas deberá ser menor a 30 cm. ó $d/6$; el área total del refuerzo adicional en ambas caras ($2A_{sk}$), no necesita exceder la mitad del refuerzo longitudinal en tensión dada por el diseño por flexión.

Aplicación:

Para una viga de sección rectangular simplemente apoyada, estimar el ancho máximo de grieta. La luz de la viga es de 9 m. y la viga soporta una carga de servicio de 1,55 t/m.

Considere: $f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$ (concreto normal)

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

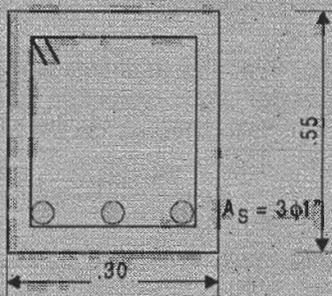
$$E_s = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 3 \phi \text{ No. 8}$$

$$h = 0,55 \text{ m}$$

$$b = 0,30 \text{ m}$$

Estribos de ϕ 3/8



Solución:

El peralte efectivo, d , será:

$$d = 55 - (4 + 0,95 + 1,27) = 48,78 \text{ cm}$$

Sin considerar la sección transformada, se tiene:

$$I_g = bh^3/12 = 30 \cdot 55^3 / 12 = 415\,937,5 \text{ cm}^4$$

$$f_r = 2\sqrt{f_c} = 2\sqrt{350} = 37,42 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{cr} = I_g f_r / y_t = 415\,937,5 \cdot 37,42 / (55/2) = 5,66 \cdot 10^5 \text{ kg/cm} = 5,66 \text{ t-m}$$

El momento actuante será el momento positivo máximo,

$$M_a = W L^2 / 8 = 1,55 \cdot 9^2 / 8 = 15,89 \text{ t-m} > M_{cr} = 5,66 \text{ t-m}$$

⇒ Sección agrietada.

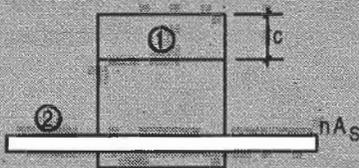
Para la condición de sección agrietada, calculamos la profundidad del eje neutro, c , y el momento de la inercia de la sección agrietada, I_{cr} .

$$(1) \quad bc \Rightarrow b c^2 / 2$$

$$(2) \quad n A_s \Rightarrow n A_s d$$

$$(b s + n A_s) c = b c^2 / 2 + n A_s d$$

$$b c^2 / 2 + n A_s c - A_s d = 0$$



donde, $n = E_s / E_c = 218^6 / 150000 \sqrt{350} = 7,13$

$$A_s = 3 \phi \text{ No. 8} = 3 \cdot 5,07 = 15,21 \text{ cm}^2$$

$$d = 48,78 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

Reemplazando se tiene, $c^2 + 7.23 c - 352.67 = 0$ $c = 15.51 \text{ cm}$

Luego

$$I_{cr} = b c^3 / 3 + n A_s (d - c)^2 = 157\,350.4 \text{ cm}^4$$

El esfuerzo en el acero será:

$$\begin{aligned} f_s &= n M c / I = n M a (d - c) / I_{cr} \\ f_s &= 15.69 \cdot 10^{10} (48.78 - 15.51) 7.13 / 157350.4 \\ f_s &= 2365 \text{ kg/cm}^2 < 0.6 f_y = 2520 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Se tiene,

$$w_{max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} b \sqrt[3]{d_c A} \dots\dots\dots(1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \beta &= (h-c) / (d-c) = (55-15.51) / (48.78 - 15.51) = 1.18 \\ d_c &= 4 + 0.95 + 2.54/2 = 6.22 \text{ cm} \\ A &= b t / \gamma b_c = 30 \cdot 2 \cdot 6.22/3 = 124.4 \text{ cm}^2 \\ A &= b t / b_e = 30 \cdot 2 \cdot 6.22/3 = 124.4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

En la expresión (1)

$$w_{max} = 0.1086 \times 10^{-4} \cdot 1.18 \cdot 2365 \sqrt[3]{6.22 \cdot 124.4} = 0.28 \text{ mm Rpta.}$$

b) Usando el criterio simplificado

$$\begin{aligned} f_s &= 0.6 f_y = 0.6 \cdot 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2 \\ \beta &= 1.2 \end{aligned}$$

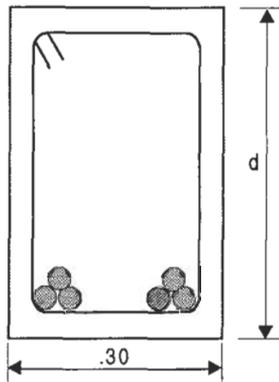
En la expresión (1):

$$w_{max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} \cdot 1.2 \cdot 2520 \sqrt[3]{6.22 \cdot 124.4} = 0.30 \text{ mm Rpta.}$$

Aplicación:

Para una viga de concreto armado que tiene la sección mostrada en la figura adjunta hallar el ancho máximo de grieta.

Considere, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $f_s = 0.6 f_y$
 $A_s = 2$ paquetes de 3 barras No. 8
Estribos de $\phi 1/2''$
 $b = 0.25 \text{ cm}$



Solución:

Se tiene, $w_{\max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} \beta f_s \sqrt[3]{d' c A'}$

Donde, $\beta = 1.2$

$f_s = 0.6 f_y = 2520 \text{ kg/cm}^2$

$d' c = (4 + 1.27) + (2 \cdot 1.27 + 1 \cdot 1.5 \cdot 2.54) / 3 = 5.27 + 2.12$

$d' c = 7.39 \text{ cm}$

Luego, la profundidad del concreto en tensión, t será:

$$t = 2 d' c = 2 \cdot 7.39 = 14.77 \text{ cm}$$

Como son paquetes de 3 barras = $\gamma' b_c = 0.65 \cdot 6$

Luego,

$$A' = bt / \gamma b_c = 25 \cdot 14.77 / 0.65 \cdot 6 = 94.70 \text{ cm}^2$$

En (1) : $w_{\max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} \cdot 1.2 \cdot 2520 \sqrt[3]{14.77 \cdot 94.7} = 0.367 \text{ mm}$. Rpta.

Aplicación:

Verificar si la viga del ejemplo satisface el criterio en condiciones de cargas de servicios para control de agrietamiento para las tres condiciones ambientales siguientes usando $f_s = 0.6 f_y$:

(a) Exposición interior usando la expresión de Gergely-Lutz

$$w_{\max} = 0.1086 \cdot 10^{-4} \beta f_s \sqrt[3]{d' c A'}$$

(b) Exposición interior usando el procedimiento del factor Z,

(c) Exposición a agentes químicos

Solución:

(a) Del ejemplo 1, $w_{\max} = 0.30 \text{ mm}$
para exposición interior se tiene
 $w_{\text{permisibles}} = 0.41 \text{ mm}$

Luego, $w_{\max} < w_{\text{permisibles}} \Rightarrow$ conforme

(b) Calculamos el valor del factor Z;

$$Z = f_s \sqrt[3]{d_c A} = 2520 \sqrt[3]{6.22 * 124.4} = 23\ 135 \text{ kg/cm}$$

Para exposición interior es necesario que,
 $Z < 31\ 000 \text{ kg/cm}$

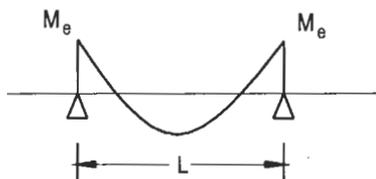
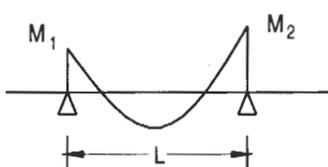
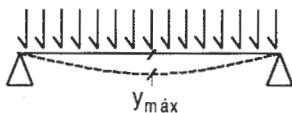
Luego, $Z = 23\ 135 \text{ kg/cm} < 31\ 000 \text{ kg/cm} \Rightarrow$ conforme

(c) De la tabla 1 para exposición a agentes químicos:

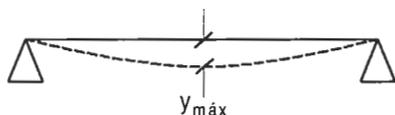
$w_{\text{permisible}} = 0.18 \text{ mm}$

Se tiene, $w_{\max} = 0.30 \text{ mm} > 0.18 \text{ mm} \Rightarrow$ No es conforme

DEFLEXIONES EN ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO



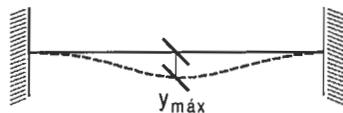
$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{8} \frac{m_e L^2}{EI}$$



Casos particulares:

Elementos simplemente Apoyados

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} = 1.30 \cdot 10^{-2} \frac{wL^4}{EI}$$



Elementos Empotrados en sus Extremos

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{12} wL^2 \right) \frac{L^2}{EI} = \frac{1}{384} \frac{wL^4}{EI} = 0.26 \cdot 10^{-2} \frac{wL^4}{EI}$$

Generalizando, la deflexión de un elemento por flexión con carga uniformemente distribuida está dada por la expresión:

$$y_{\max} = \delta \frac{wL^4}{EI}$$

Determinación de Parámetros: (ACI)

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} \text{ kg / cm}^2$$

I_e = Momento de inercia efectivo.

El momento de inercia efectivo en elementos parcialmente fisurados están comprendidos entre el valor del momento de inercia de la sección agrietada, I_{cr} , y el momento de inercia de la sección total del concreto respecto al eje centroidal despreciando el refuerzo del acero.

$$I_{cr} < I_e < I_g$$

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g$$

ó

$$I_e = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 (I_g - I_{cr}) \leq I_g$$

siendo:

$$M_{cr} = \text{Momento de agrietamiento. } M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$$

$$f_r = \text{Módulo de rotura del concreto. } f_r = 2\sqrt{f'_c} \text{ (kg / cm}^2\text{)}$$

I_g = Momento de inercia de la sección total del concreto

y_t = Distancia del eje centroidal a la fibra extrema en tracción.

M_a = Momento actuante máximo en un elemento al instante de calcular su deflexión.

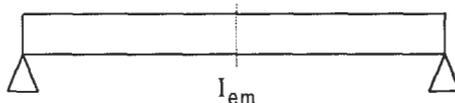
I_{cr} = Momento de inercia de la sección agrietada transformada a concreto.

$$\text{Si } \frac{M_{cr}}{M_a} < \frac{1}{3}, \text{ es aceptable utilizar } \Rightarrow I_e = I_{cr}$$

Momentos de Inercia para elementos simplemente apoyados

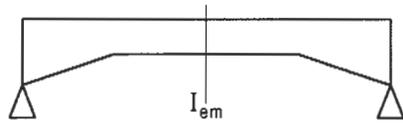
Miembro Prismático

$I_e = I_{em}$ = Momento de inercia efectivo para la sección central.



Miembros No Prismáticos

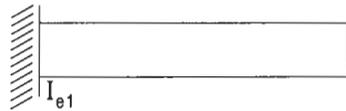
$$I_e = I_{em}$$



Elementos En Voladizo

- a) Miembros Prismáticos.

$$I_{e1} = I_{em}$$

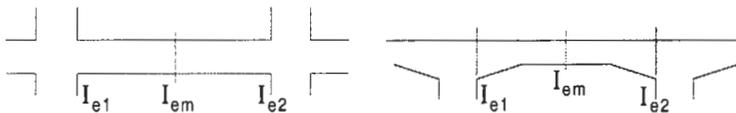


- b) Miembros No Prismáticos

$$I_e = \frac{1}{2}(I_{e1} + I_{e2})$$



Elementos Continuos



- a) I_e puede tomarse como el promedio de valores obtenidos para las zonas críticas de momento positivo y negativo.
 b) I_e puede tomarse como I_{em} para miembros prismáticos.
 c) Para miembros no prismáticos.

$$I_e = \frac{I_{em}}{2} + \frac{1}{2}(I_{e1} + I_{e2})$$

- d) Se pueden mejorar los resultados para miembros prismáticos y no prismáticos usando las expresiones siguientes:

- Para ambos extremos continuos:

$$I_e = 0.75 I_{em} + 0.15 (I_{e1} + I_{e2})$$

- Para un solo extremo continuo:

$$I_e = 0.85 I_{em} + 0.15 I_e \text{ Extremo Continuo}$$

Notas:

- Deben usarse las envolventes de los momentos para determinar el valor positivo y negativo del I_e .
- Para el caso de tener una sólo carga concentrada pesada debe considerarse solo el I_e en el tramo medio.

Deflexión adicional por cargas de Larga Duración

La retracción y la fluencia debido a cargas sostenidas causan deflexiones adicionales mayores que las que ocurren cuando se aplican inicialmente las cargas a la estructura. Estas deflexiones dependen de la temperatura, humedad, condiciones de curado, la edad al momento de la carga, cantidad de acero de compresión, magnitud de las cargas sostenidas y de otros factores.

Ningún procedimiento simple puede considerar esos factores sin embargo el ACI-99, da una expresión que da unos resultados satisfactorios.

La deflexión adicional de cargas sostenidas para miembros flexionantes se determina multiplicando la deflexión inmediata debida a cargas sostenidas por el factor λ :

$$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'}$$

ρ' = cuantía del acero en compresión en la sección central para tramos simples y continuos, y en el apoyo para voladizos.

ξ = factor dependiente del tiempo.

ξ = 2.0 si $t \geq 5$ años

ξ = 1.4 si $t = 12$ meses

ξ = 1.2 si $t = 6$ meses

ξ = 1.0 si $t = 3$ meses

Cargas sostenidas o permanentes

Que se deben considerar son la carga muerta y una parte de la carga viva, que depende de la utilidad o uso de la estructura.

$$W_P = W_D + \alpha W_L$$

$\lambda = 0.20$ a 0.25 para viviendas u oficinas.

$\lambda = 1.00$ para almacén o depósito.

Estas cargas permanentes dan lugar a deflexiones instantáneas y de larga duración.

Cargas No Permanentes

Constituída por la diferencia de las cargas vivas que no se consideran como cargas permanentes.

$$W_{NP} = (1 - \alpha) W_L$$

Estas dan lugar a deflexiones instantáneas o de corta duración.

Procedimiento Práctico para Cálculo de Deflexiones

Si no se dispone de los resultados del análisis estructural se puede estimar las deflexiones en forma práctica considerando para las cargas permanentes que el elemento está empotrado en sus extremos; y para las cargas no permanentes

se considera un momento positivo máximo igual a $+M = \frac{1}{14} wL^2$.

$$\therefore \text{Cargas Permanentes: } y = 0.26 \times 10^{-2} \frac{w_p (1+\lambda)L^4}{EI}$$

y Cargas No Permanentes:

$$m_e = \frac{1}{8} wL^2 - \frac{1}{14} wL^2 = 0.0536 wL^2$$

$$y = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{8} \frac{m_e L^2}{EI} = 0.6325 \times 10^{-2} w_{NP} \frac{L^4}{EI}$$

Finalmente la deflexión total será:

$$y = 0.26 \times 10^{-2} w_p (1+\lambda) \frac{L^4}{E_c I_{e1}} + 0.6325 \times 10^{-2} w_{NP} \frac{L^4}{E_c I_{e2}}$$

Aplicación:

Se tiene una viga simplemente apoyada, que se muestra en la figura, sometida a cargas uniformemente repartida. Considerando el efecto del área transformada del acero, se pide determinar:

- El momento de inercia efectivo de la sección de momentos máximos.
- La flecha máxima instantánea considerando la carga total de servicio.

La viga V-101 soporta una losa aligerada de

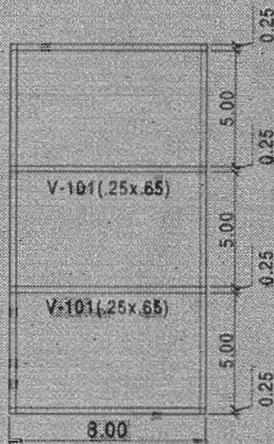
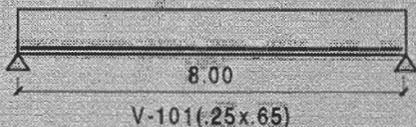
$$h = 0.20 \text{ m}$$

$$\text{Acabado} = 80 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Sobre carga} = 150 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



$$d = 65 - (4 + 0.95 + 2.54 \times 1.5)$$

$$d = 56.24 \text{ cm}$$

p.p. viga	:	$0.25 \times 0.65 \times 2.4$	=	0.39	t/m
aligerado	:	0.30×5	=	1.50	t/m
acabado	:	0.80×5.25	=	0.42	t/m
s/c	:	0.15×5.25	=	0.79	t/m
		Σ	=	3.10	t/m

$$I_e = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 (I_g - I_{cr}) \leq I_g$$

$$M_a = \frac{wL^2}{8} = 3.10 \times \frac{8^2}{8} = 24.8 \text{ t-m}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{15000 \times \sqrt{280}} = 7.97$$

$$(n-1) A_s = 6.97 \times 20.28 = 141.35 \text{ cm}^2$$

$$y_o = \frac{25 + 65 \times 32.5 + 141.35 \times 56.24}{1625 + 14135} = 34.40 \text{ cm}$$

$$y_t = h - y_o = 30.6 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} + bh \left(y_o - \frac{h}{2} \right)^2 + (n-1)A_s(d-y_o)^2$$

$$I_g = 572135.4 + 5866.3 + 67421.9 = 645423.6 \text{ cm}^4$$

$$M_{cr} = \frac{f_t I_g}{y_t} = \frac{2\sqrt{280} \cdot 645423.6}{30.6} = 7.06 \text{ t-m}$$

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = \frac{7.06}{24.8} = 0.285 < \frac{1}{3} \Rightarrow I_e = I_{cr}$$

Entonces calculemos I_{cr}

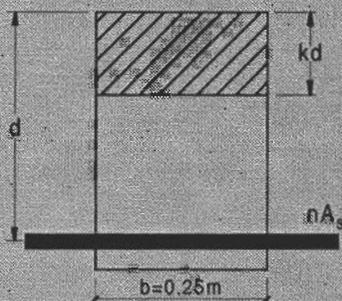
$$25 \frac{(kd)^2}{2} + 16163 \cdot 56.24 = (25kd + 16163)kd$$

$$12.5 (kd)^2 + 12.93kd - 727.21 = 0$$

$$kd = 21.26 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{b(kd)^3}{3} + nA_s(d-kd)^2 = 277847.5 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_e = I_{cr} = 277847.5 \text{ cm}^2$$



Cálculo de la flecha máxima bajo la carga total de servicio

$$y_{\max} = \frac{5 w L^4}{384 E_c I_e} = \frac{5 \cdot 3.1 \cdot (800)^4}{384 \cdot 2 \cdot \sqrt{280} \cdot 277847.5}$$

$$y_{\max} = 2.37 \text{ cm}$$

Aplicación:

Para la viga V-102 (0.25*0.45) doble empotrada que se muestra en la figura, determine la flecha máxima.

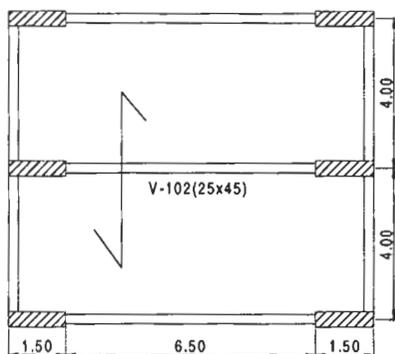
Aligerado de 17 cm

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Uso de Vivienda

Tiempo de construida: 5 años



Metrado de Carga

P.P.viga	=	$0.25 * 0.45 * 2.4$	=	0.27 t/m
Aligerado	=	$0.28 \text{ t/m}^2 * 3.75\text{m}$	=	1.05 t/m
Acabado	=	$0.1 \text{ t/m}^2 * 4\text{m}$	=	0.40 t/m
Tabiquería	=	$0.1 \text{ t/m}^2 * 4\text{m}$	=	0.40 t/m
		w_D	=	2.12 t/m

$$s/c = .2 \text{ t/m}^2 * 4 \text{ m} = 0.8 \text{ t/m} = w_L$$

$$\therefore w_U = 1.4 * w_D + 1.7 * w_L = 4.33 \text{ t/m}$$

Momentos de Diseño

$$-M_U = \frac{1}{12} w_U L^2 = \frac{1}{12} * 4.33 * 6.5^2 = 15.25 \text{ t-m}$$

$$-M_U = \frac{1}{24} w_U L^2 = 7.62 \text{ t-m}$$

Diseño por flexión

$$d = 45 - (4 + 0.95 + 1.27) = 38.78 \text{ cm}$$

$$-M_U = 15.25 \text{ t-m} \Rightarrow a = \frac{d}{5} = 7.8 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 11.6 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 10.9 \text{ cm}$$

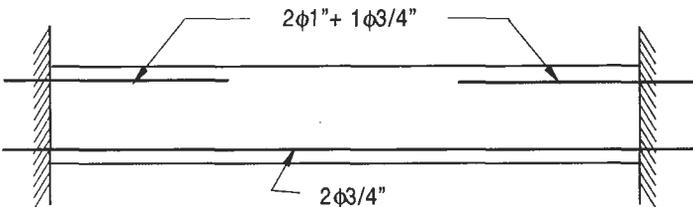
para $a = 12 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 12.3 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 11.6 \text{ cm}$ conforme

Usar $2 \phi 1 + 1 \phi 3/4$ (12.99 cm²)

$$+M_U = 7.62 \text{ t-m} \Rightarrow a = 6 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 5.63 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 5.3 \text{ cm}$$

(conforme)

Usar $2 \phi 3/4$ (5.7 cm²)



$$y = \frac{\delta w L^4}{EI} \quad \text{donde, } \delta = \frac{1}{384}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{384} W_P \frac{(1+\lambda)L^4}{E_c I_{e1}} + \frac{1}{384} \frac{W_{NPL}^4}{E_c I_{e2}}$$

$$W_P = W_D + 0.2 * W_L ; 2.12 + 0.2 * 0.8 = 2.28 \text{ t/m}$$

$$W_{Np} = (1.02) * W_L = 0.82 \text{ t/m}$$

$$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'} = \frac{2}{1+0} = 2$$

Cálculo de las inercias efectivas

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g$$

ó

$$I_e = I_{cr} + \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 * (I_g - I_{cr}) \leq I_g$$

Criterio de la sección bruta.

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{25 * 45^3}{12} = 189843.75 \text{ cm}^4$$

$$y_t = \frac{h}{2} = \frac{45}{2} = 22.5 \text{ cm}$$

$$M_{cr} = \frac{f_r * I_g}{y_t} = \frac{2 * \sqrt{210} * 189843.75}{22.6 * 10^5} = 2.43 \text{ t-m}$$

Cálculo de la inercia de la sección agrietada

$$d = 45 - \left(4 + 0.95 + \frac{1.91}{2} \right) = 39.10 \text{ cm}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 * 10^6}{15000 * \sqrt{210}} = 9.20$$

$$n. A_s = 9.2 * 5.7 = 52.44 \text{ cm}^2$$

$$(25 \cdot kd + 52.44)kd = \frac{25}{2} \cdot (kd)^2 + 52.44 \cdot 39.10$$

$$(kd)^2 + 4.20 \cdot kd - 164.03 = 0 \Rightarrow kd = 10.88 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = 25 \cdot \frac{10.88^3}{3} + 52.44 \cdot (39.10 - 10.88)^2 = 52494.17 \text{ cm}^4$$

$$M_{a1} = \frac{w_p L^2}{24} = \frac{2.28 \cdot 6.5^2}{24} = 4.01 \text{ t-m}; \frac{M_{cr}}{M_a} = 0.61$$

$$M_{a2} = \frac{w_p L^2}{24} = \frac{(2.28 \cdot 6.4) \cdot 6.5^2}{24} = 5.14 \text{ t-m}; \frac{M_{cr}}{M_a} = 0.48$$

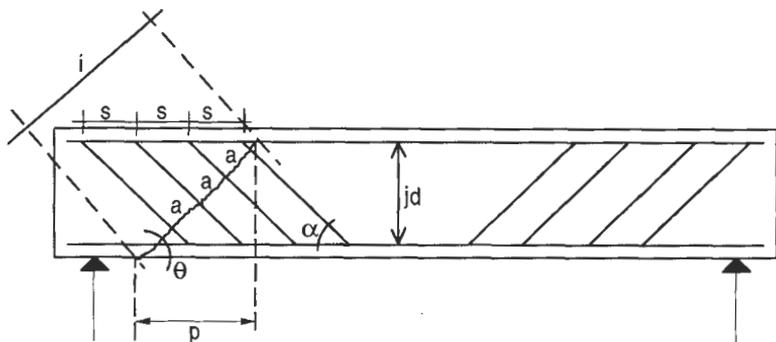
$$\therefore I_{e1} = 83669.92 \text{ cm}^4; I_{e2} = 67683.93 \text{ cm}^4$$

$$Y_{\max} = \frac{1}{384} \cdot \frac{22.8 \cdot (1+2) \cdot 650^4}{1500 \sqrt{210} \cdot 83669.92} + \frac{1}{384} \cdot \frac{6.4 \cdot 650^4}{15000 \sqrt{210} \cdot 67683.93}$$

$$Y_{\max} = 1.75 + 0.20 = 1.95 \text{ cm} = \frac{L}{333} < \frac{L}{200} \text{ conforme}$$

DISEÑO POR FUERZA CORTANTE

DISEÑO POR FUERZA CORTANTE CON REFUERZO EN EL ALMA



Donde:

- i = Longitud de la grieta
- p = Proyección horizontal de la grieta
- a = Espaciamiento en la dirección de la grieta del refuerzo transversal
- s = Espaciamiento en la dirección horizontal del refuerzo transversal

La fuerza cortante que resiste una viga será las que proporcionan el concreto y el acero transversal, es decir:

$$V_n = V_c + V_s$$

Las grietas diagonales se forman debido a la tensión diagonal, los cuales son esfuerzos principales de tensión perpendiculares a la grieta.

$$V = V_c + \sum A_v f_v \text{sen}(\alpha)$$

A_v = Área de cada estribo

f_v = Esfuerzo del refuerzo transversal

Si existen n estribos inclinados dentro de la grieta entonces:

$$V = V_c + \sum n A_v f_v \text{sen}(\alpha)$$

siendo: $n = \frac{i}{a}$

además: $i = \frac{p}{\cos \theta}$

Por trigonometría tenemos:

$$a = \frac{s \cdot \text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

$$a = \frac{s}{\text{sen}(\theta)(\cot \alpha + \cot \theta)}$$

Reemplazando los valores de i y a tenemos:

$$n = \frac{p}{s} \text{tg}(\theta)(\cot \alpha + \cot \theta)$$

Para el instante que se origina la grieta por tracción diagonal, se puede suponer que:

$$\theta = 45^\circ, p = jd \approx d$$

$$n = \frac{d}{s} (\cot \alpha + 1)$$

$$V_n = V_c + \frac{d}{s} (\cot \alpha + 1) A_v f_y \text{sen}(\alpha)$$

$$V_n = V_c + \frac{A_v f_y d}{s} (\cos \alpha + \text{sen} \alpha)$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi}$$

V_n = Fuerza cortante nominal.

V_u = Fuerza cortante factorada.

ϕ = Factor de resistencia, para fuerza cortante es igual a 0.85.

Fuerza cortante que resiste el concreto (V_c)

El código ACI sugiere la siguiente expresión simplificada para la determinación de V_c .

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \quad f'_c \text{ en kg/cm}^2 \quad b_w, d \text{ en cm}$$

El código ACI presenta diferentes expresiones de V_c para diferentes situaciones:

- Elementos sometidos a flexión y corte.

$$V_c = \left(0.5\sqrt{f'_c} + 176\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$$

donde: $\rho_w = \frac{A_s}{b_w d}$

además: $\frac{V_u d}{M_u} \leq 1$

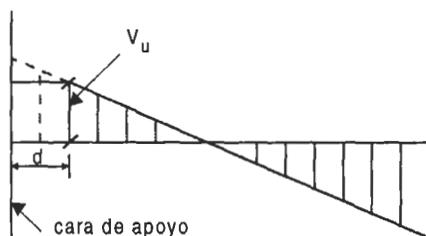
La resistencia del concreto no será mayor que:

$$V_c \leq 0.93\sqrt{f'_c} b_w d \quad f'_c \text{ en kg/cm}^2 \quad b_w, d \text{ en cm}$$

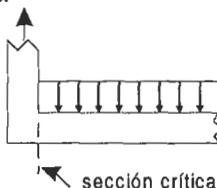
- Elementos sometidos a considerable esfuerzo de tracción se puede efectuar el diseño considerando despreciable la resistencia del concreto.

Consideraciones de Diseño:

- Si la reacción del apoyo induce compresión al elemento y no existe carga concentrada entre la cara del apoyo y una sección ubicada a "d" de ella, entonces este tramo se diseñará para un cortante último que corresponde a la sección ubicada a "d" de la cara de apoyo. Esta sección se denomina sección crítica y es la que se encuentra sometida al mayor cortante de diseño del elemento.



- Si la reacción del apoyo induce tracción al elemento, la sección crítica se encuentra en la cara de apoyo.



Cálculo del refuerzo transversal

El refuerzo que se necesitará tendrá que resistir:

$$V_s = V_n - V_c$$

entonces de la expresión: $V_s = \frac{A_v f_y d}{s} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$, despejamos "s".

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$

Que será el espaciamiento a que se encuentre los estribos que tienen un área A_v .

Si se usan estribos verticales es decir $\alpha = 90^\circ$. Se tendrá:

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$$

Requisitos Mínimos para el Diseño por Corte.

(Válido para vigas)

ACI-99

1. Si $V_n \leq \frac{V_c}{2}$, entonces no se necesita ningún tipo de refuerzo transversal.
2. Si $V_n \geq \frac{V_c}{2} \wedge V_n \leq V_c$, entonces un refuerzo transversal mínimo.

$$A_{v \min} = 3.5 b_w \frac{s}{f_y}$$

donde $s \leq \frac{d}{2} \wedge s \leq 60 \text{ cm}$

3. Si $V_n \geq V_c$, tenemos:

- Si $V_s \leq 1.06 \sqrt{f'_c} b_w d$, entonces: $s \leq \frac{d}{2} \vee s \leq 60 \text{ cm}$

- Si $V_s > 1.06 \sqrt{f'_c} b_w d \wedge V_s \leq 2.12 \sqrt{f'_c} b_w d$,

Entonces: $s \leq \frac{d}{4} \vee s \leq 30 \text{ cm}$

4. $V_s > 2.12 \sqrt{f'_c} b_w d$, entonces:

- Cambiar la sección.
- Mejorar la calidad del concreto.

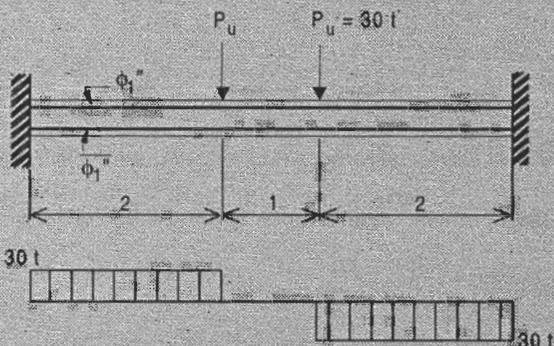
Aplicación:

Diseñar por corte la viga que se muestra en la figura. Considere estribos verticales de dos ramas de $\phi 3/8"$.

$$P_u = 30 \text{ t}$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Solución:

$$d = 45 - (4 + 0.95 + 1.27) = 38.78 \text{ cm}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{280} (10) (0.25) (0.39) = 8.65 \text{ t}$$

$$V_{ud} = 30 \text{ t}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = \frac{30}{0.85} = 35.29 \text{ t}$$

$$V_s = V_n - V_c = 26.64 \text{ t}$$

$$V_s = 2.12 \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_s \leq 2.12 \sqrt{280} (10) (0.25) (0.39) = 34.6 \text{ t}$$

$$V_s = 26.64 \leq V_{s \text{ max}} \text{ CONFORME}$$

$$s \leq \frac{d}{4} = \frac{38.78}{4} = 9.7 \text{ cm}$$

Diseño por corte usando estribos $\phi 3/8"$: $A_v = 2 \cdot 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{2 \times 0.71 \times 4.2 \times 38.78}{26.64} = 8.7 \text{ cm} \approx 9 \text{ cm}$$

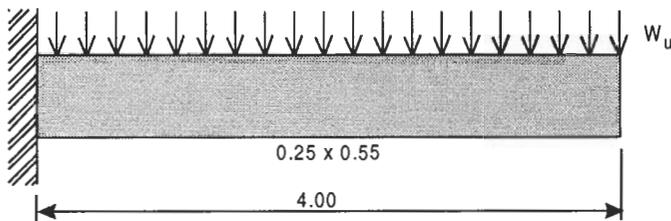
$$\text{Número de varillas: } \frac{2 - 0.05}{0.09} = 21.6$$

Usar estribos $\phi 3/8"$, 1 @ 0.05, 22 @ 0.09 en c/ extremo.

Aplicación:

Diseñar por fuerza cortante la viga en voladizo que se muestra en la figura.

$$w_u = 4.5 \text{ t/m; Refuerzo por flexión en dos capas} = 6\phi 1"$$



$$V_{u \text{ cara}} = w_u L_v = 18 \text{ t}$$

$$V_{u d} = 18 - w_u d = 15.92 \text{ t}$$

$$d = 55 - (4 + 0.95 + 2.54 + 1.27) = 46.24 \text{ cm}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{210} * 10 * 0.25 * 0.4624 = 8.88 \text{ t}$$

Diseño de la sección más crítica

$$V_s = V_n - V_c = \frac{15.92}{0.85} - 8.88 = 9.91 \text{ t}$$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{1.42 * 4.2 * 46.24}{9.91} = 27.83 \text{ cm}$$

$$V_s < 1.06 \sqrt{f'_c} b_w d = 17.76 \text{ t} \therefore s \leq \frac{d}{2} = 23 \text{ cm; } 60 \text{ cm}$$

Usar estribos $\phi 3/8"$ @ 0.23 m

$$\text{Sección de refuerzo mínimo: } V_{no} = \frac{V_c}{2} = 4.44 \text{ t}$$

$$V_{u0} = 3.77 \text{ t} = V_{u \text{ cara}} - w_u m_0$$

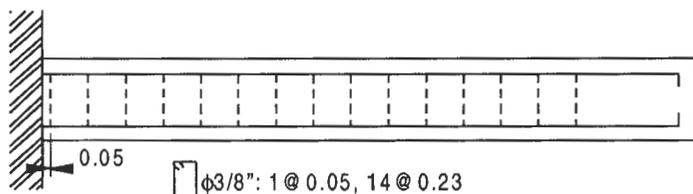
$$3.77 \text{ t} = 18 - 4.5 m_0 \Rightarrow m_0 = 3.16 \text{ m}$$

$$A_v \text{ min} = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} \Rightarrow s = \frac{1.42 * 4200}{3.5 * 25} = 68.16 \text{ cm}$$

$$(3.16 - 0.05) / 0.23 = 14 \text{ estribos}$$

Usar estribos $\phi 3/8"$ 1@0.05m, 14@0.23 m

Longitud utilizada = $0.05 + 14 \cdot 0.23 = 3.27 \text{ m}$.



Aplicación:

Diseñar por corte la viga que se muestra en la figura adjunta. La viga está sometida a una carga uniformemente repartida. (Refuerzo de flexión son varillas de 1").

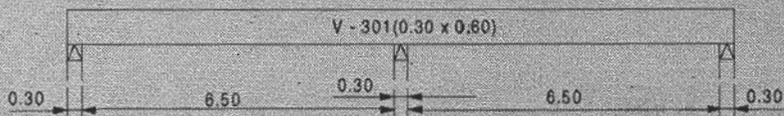
$$W_D = 4.1 \text{ t/m}$$

$$W_L = 1.6 \text{ t/m}$$

Utilice estribos de $\phi 3/8"$ de dos ramas verticales.

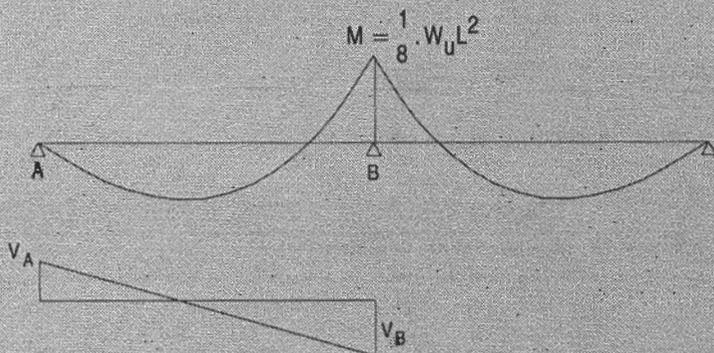
$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



$$w_u = 1.4 \cdot 4.1 + 1.7 \cdot 1.6 = 8.46 \text{ t}$$

$$\frac{1}{8} w_u L^2 = \frac{1}{8} \cdot 8.46 \cdot 6.8^2 = 48.90 \text{ t-m}$$

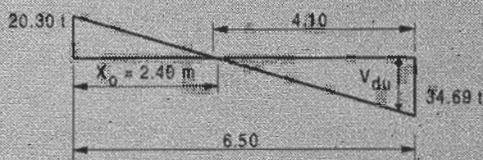


$$V_{Au} = w_u \frac{L}{2} - \frac{M}{L} = 21.57 L \Rightarrow V_{A \text{ cara}} = V_{A \text{ eje}} - w_u \cdot 0.15 = 20.30 \text{ t}$$

$$V_{Bu} = w_u \frac{L}{2} + \frac{M}{L} = 35.96 \text{ t} \Rightarrow V_{B \text{ cara}} = 34.69 \text{ t}$$

$$\frac{x_o}{20.30} = \frac{6.5}{20.3 + 34.69} \Rightarrow x_o = 2.40$$

$$d = 60 - (4 + 0.95 + 1.27) = 53.78 \text{ cm}$$



Cortantes en el Apoyo B

$$V_{du} = 34.64 - 8.46 \cdot 0.5378 = 30.14 \text{ t}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{210(10)} \cdot 0.3 \cdot 0.54 = 12.44 \text{ t}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{30.14}{0.85} - 12.44 = 23.02 \text{ t}$$

$$V_s < 1.06 \sqrt{f_c} b_w d = 24.88 \text{ t} \therefore s \leq \frac{d}{2} = 27 \text{ cm}, 60 \text{ cm}$$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s} = \frac{142 \cdot 42 \cdot 53.78}{23.02} = 13.9 \text{ cm}$$

Usar estribos ϕ 3/8" @ 0.14

$$S_o = 20 \text{ cm} \Rightarrow V_s = 16.04 \text{ t} \Rightarrow V_n = 28.48 \text{ t} \Rightarrow V_u = 24.21 \text{ t}$$

$$24.21 = 34.69 - 8.46 \cdot m_o \Rightarrow m_o = 1.24 \text{ m}$$

$$A_{v \text{ min}} = 3.5 b_w \frac{s}{f_y} \Rightarrow s = \frac{142 \cdot 4200}{3.5 \cdot 30} = 56.8 \text{ cm}$$

$$s \leq \frac{d}{2} = 27 \text{ cm}$$

$$V_n = \frac{V_c}{2} = 6.22 \text{ t} \Rightarrow V_u = 5.29 \text{ t}$$

$$5.29 = 34.69 - 8.46 m_o \Rightarrow m_o = 3.48 \text{ m}$$

estribos $\phi 3/8" \cdot 1 @ 0.05, 9 @ 0.14$

$$0.05 + 9 \cdot 0.14 = 1.31 \text{ m}$$

$$S_o = 27 \text{ cm} \Rightarrow V_s = 11.88 \text{ t} \Rightarrow V_n = 24.32 \text{ t} \Rightarrow V_u = 20.67 \text{ t}$$

$$20.67 = 34.69 - 8.46 m_o \Rightarrow m_o = 1.66 \text{ m}$$

$$L_{\text{disp}} = 1.66 - 1.31 = 0.35 \text{ m} \therefore \frac{0.35}{s_o} = \frac{0.35}{0.20} = 2 @ 0.20 \text{ m}$$

$$1.31 + 0.40 = 1.71 \text{ m}$$

$$3.48 - 1.71 = 1.77 \text{ m} \therefore \frac{1.77}{s_o} = \frac{1.77}{0.27} = 7 @ 0.27 \text{ m}$$

Estribos $\phi 3/8" \cdot 1 @ 0.05, 9 @ 0.14, 2 @ 0.20, 7 @ 0.27$

Cortantes en el apoyo A

$$V_{d_u} = 20.30 - 8.46 \cdot 0.5378 = 15.73 \text{ t} \Rightarrow V_n = 18.51 \text{ t}$$

$$V_s = 6.08 \text{ t} < 1.06 \sqrt{f'_c} b_w d = 24.88 \text{ t} \therefore s \leq \frac{d}{2} = 27 \text{ cm}; 60 \text{ cm}$$

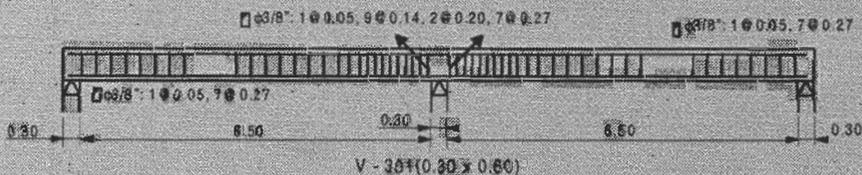
$$s = \frac{A_v l_y d}{V_s} = \frac{142 \cdot 4.2 \cdot 53.78}{6.08} = 52.75 \text{ cm}$$

Usar estribos $\phi 3/8" @ 0.27$

$$V_n = \frac{V_c}{2} = 6.22 \text{ t} \Rightarrow V_u = 5.29 \text{ t}$$

$$5.29 = 20.30 - 8.46 m_o \Rightarrow m_o = 1.77 \text{ m}$$

estribos $\phi 3/8" \cdot 1 @ 0.05, 7 @ 0.27 \text{ m}$



COLUMNAS

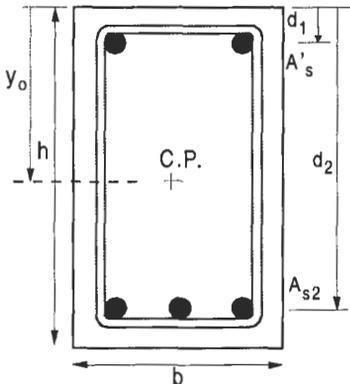
Definición

Básicamente la columna es un elemento estructural que trabaja en compresión, pero debido a su ubicación en el sistema estructural deberá soportar también solicitaciones de flexión, corte y torsión.

La falla en columnas

Las columnas llegan a la falla debido a tres casos: por fluencia inicial del acero en la cara de tensión, por aplastamiento del concreto en la cara en compresión o por pandeo.

Centroide Plástico



El punto en la sección de columna donde la fuerza axial actúa produciendo en toda la sección deformaciones iguales se denomina centroide plástico de la sección. Se determina de la siguiente manera:

$$y_0 = \frac{A_g 0.85 f'_c h / 2 + A'_s f_y d_1 + A_{s2} f_y d_2}{A_g 0.85 f'_c + A'_s f_y + A_{s2} f_y}$$

siendo A_g = área de la sección bruta (bh).

Columnas Cortas

Cuando el proceso de falla en la columna se debe a la falla inicial del material se clasifica a la columna como corta. Según el ACI si la relación de esbeltez kL_u/r es menor a 22, la columna se clasificará como corta.

Columnas Cortas con Carga Axial

Si la carga axial actúa en el centroide plástico, se obtendrá la capacidad máxima de la columna sumando la contribución del concreto y la del acero; recordemos que el concreto alcanza su máxima resistencia cuando la deformación unitaria es aproximadamente 0.003, para ésta deformación entonces todo el acero ya estará en fluencia. Luego expresaremos la resistencia nominal a la carga axial de la columna como sigue:

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

El factor 0.85 se ha afectado a la resistencia del concreto f'_c , debido a que se ha determinado experimentalmente que en estructuras reales, el concreto tiene una resistencia a la rotura aproximada del 85% del f'_c .

Lo anterior es un caso poco probable de tener excentricidad cero, en estructuras reales la excentricidad se da por varias causas. El ACI con el objeto de tomar en cuenta éstas excentricidades reduce la resistencia a la carga axial y da las siguientes expresiones:

- Para columnas con estribos

$$P_n = 0.8 \left(0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y \right)$$

- Para columnas zunchadas

$$P_n = 0.85 \left(0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y \right)$$

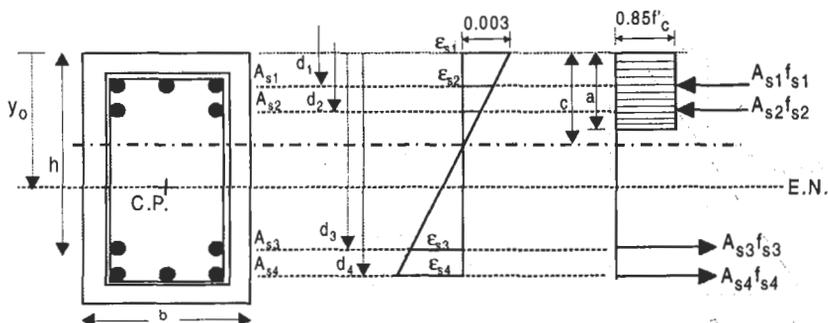
Las dos expresiones anteriores nos dan la capacidad máxima de carga axial de las columnas.

Columnas Cortas sometidas a Carga Axial y Flexión

La flexión se produce por que hay un momento flector actuante, o si la carga axial actuante es excéntrica.

La excentricidad (e) es igual a: $e = M/P$; donde P es la carga axial actuante en el centroide plástico de la sección y M el momento actuante total.

En la figura siguiente se tiene un posible estado de esfuerzos del concreto y fuerzas del acero en el estado de falla.



Denominemos:

$$C_c = 0.85 f'_c b a$$

$$C_{s1} = A_{s1} f_{s1}$$

$$C_{s2} = A_{s2} f_{s2}$$

$$T_{s3} = A_{s3} f_{s3}$$

$$T_{s4} = A_{s4} f_{s4}$$

Luego la fuerza axial nominal será:

$$P_n = C_c + C_{s1} + C_{s2} - T_{s3} - T_{s4}$$

Y el momento nominal resistente será:

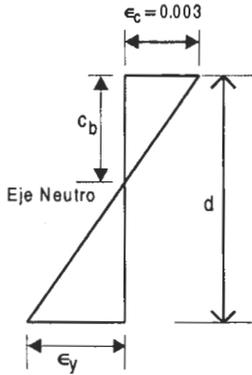
$$M_n = C_c (y_o - a / 2) + C_{s1} (y_o - d_1) + C_{s2} (y_o - d_2) + T_{s3} (d_3 - y_o) - T_{s4} (d_4 - y_o)$$

Además: $M_n = P_n e$

Condición de falla balanceada

Falla balanceada en columnas es la condición para el cual se produce simultáneamente la falla del concreto y la fluencia de la capa exterior en tensión del acero.

De la figura tenemos:



$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} \Rightarrow c_b = \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_y} (d)$$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{f_y}{2 \cdot 10^6}$$

$$c_b = \frac{6000 d}{6000 + f_y}$$

Donde "d" es la distancia de la fibra extrema al centroide de la capa de acero exterior.

Para esta condición tendremos también una excentricidad balanceada:

$$e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}}$$

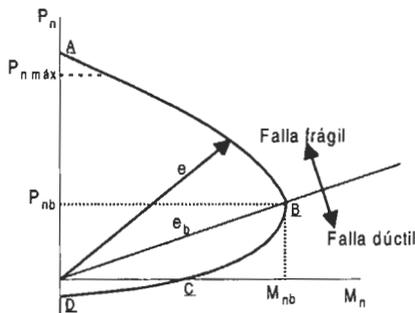
Falla Dúctil

Falla primero el acero, para ésta condición tenemos. $c < c_b$

Falla Frágil

Falla primero el concreto para ésta condición tenemos: $c > c_b$

Diagrama de interacción de columna



El punto A representa la condición teórica de compresión pura o carga concéntrica, pero debemos recordar que el código ACI nos limita a un valor P_n máx, el punto B es la condición balanceada, el punto C la condición de flexión pura, el punto D de tracción pura y el tramo de CD de flexo-tracción.

Factor de Reducción de Resistencia en Columnas (ϕ)

Según el ACI el parámetro ϕ no es constante, y depende de la magnitud de carga axial, este parámetro afecta tanto al momento nominal como a la carga axial nominal de la columna. Así tenemos:

Si $P_u > 0.1 f'_c A_g$

$$\phi = 0.70 \text{ (Para columnas estribadas)}$$

$$\phi = 0.75 \text{ (Para columnas zunchadas)}$$

Si $P_u \leq 0.1 f'_c A_g$

$$\phi = 0.9 - \frac{2P_u}{f'_c A_g} \geq 0.70 \text{ (Para columnas estribadas)}$$

$$\phi = 0.9 - \frac{1.5P_u}{f'_c A_g} \geq 0.75 \text{ (Para columnas zunchadas)}$$

Donde P_u deberá tomar como máximo el menor valor entre $0.1 f'_c A_g$ y ϕP_{nb}

Refuerzo Máximo y Mínimo en Columnas

El código ACI recomienda lo siguiente:

Refuerzo máximo: $A_{st} = 0.08 A_g$, esto además deberá estar sujeto a la facilidad de armado del acero y vaciado del concreto.

Refuerzo mínimo: $A_{st} = 0.01 A_g$

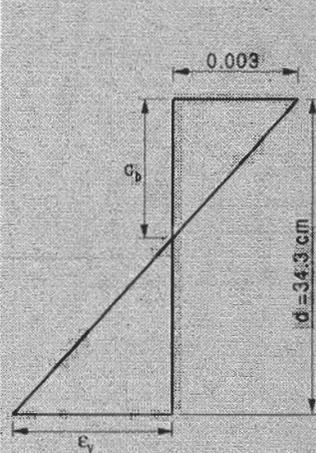
Distribución del Acero Longitudinal y Transversal

Columnas Estribadas

Las columnas con estribos rectangulares o circulares requieren cuatro varillas longitudinales como mínimo.

En cualquier tipo de sección de columna deberá proporcionarse una varilla longitudinal en cada esquina y además toda varilla longitudinal deberá estar apoyado sobre estribos.

b) Condición balanceada



$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = 0.0021$$

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.0051} \Rightarrow c_b = 20.15 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.8 * c_b = 16.12 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 6 * \frac{(c - d_f)}{c}$$

$$f_{s1} = 6 * \frac{(20.15 - 5.75)}{20.15} = 4.29 \Rightarrow f_{s1} = f_y = 4.2 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s2} = 0.045 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4.2 \text{ t/cm}^2$$

Ahora podemos calcular las fuerzas en el acero y el concreto, y hacer el equilibrio:

$$C_{s1} = 24.95 \text{ t}$$

$$C_{s2} = 0.18 \text{ t}$$

$$T_{s3} = 24.95 \text{ t}$$

$$C_c = 0.85 * f'_c * b * a = 143.87 \text{ t}$$

$$P_{nb} = C_c + C_{s1} + C_{s2} - T_{s3} = 144.05 \text{ t}$$

$$M_{nb} = C_c * \left(0.20 - \frac{0.1612}{2}\right) + C_{s1} * (0.20 - 0.0575) + C_{s2} * (0.20 - 0.20) + T_{s3} * (0.3426 - 0.20) = 24.29 \text{ t-m}$$

Luego: $e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}} = 0.125 \text{ m}$

c) Un punto de falla en la zona de fluencia del acero en tracción.

$$C < C_b$$

$$C = 15 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a = 12 \text{ cm} \Rightarrow C_c = 107.1 \text{ t}$$

$$f_{s1} = 3.7 \text{ t/cm}^2$$

$$\Rightarrow C_{s1} = 21.98 \text{ t}$$

$$f_{s2} = -2 \text{ t/cm}^2$$

$$\Rightarrow T_{s2} = 7.92 \text{ t}$$

$$f_{s3} = f_y = 4.2 \text{ t/cm}^2$$

$$\Rightarrow T_{s3} = 24.95 \text{ t}$$

$$P_n = 96.21 \text{ t}$$

$$M_n = 21.68 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow e = 0.225 \text{ m}$$

Aplicación:

Para la sección de columna que se muestra en la figura, determine la capacidad nominal de carga axial y de momento para una excentricidad de $e = 1.5 e_b$.

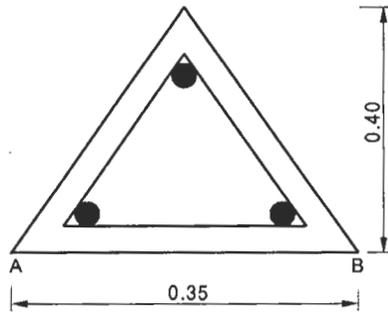
Consideraciones: AB en tracción:

$$A_{st} = 3 \phi \text{ No. 9}$$

$$f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Estribos } \phi \text{ 3/8"}$$



Solución:

$$d_2 = 40 - \left(4 + 0.95 + \frac{2.86}{2} \right) = 33.62 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{4 + 0.95 + \frac{2.86}{2}}{X}$$

$$\Rightarrow X = \frac{6.38}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{17.5}{40} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0.40$$

$$d_1 = X = 15.95 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{X_0} = \frac{40}{17.5} \Rightarrow X_0 = 0.4375 a$$

$$2X_0 = 0.875 a \Rightarrow A_c = 0.4375 a^2$$

$$C_c = 0.85 f'_c A_c = 0.85 \cdot 0.42 A_c$$

$$C_c = 0.156 a^2$$

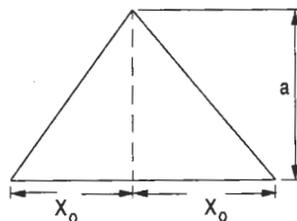
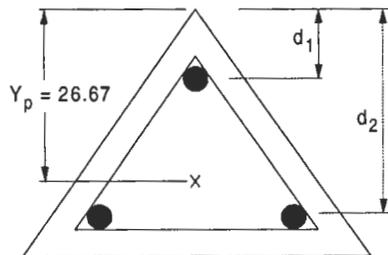
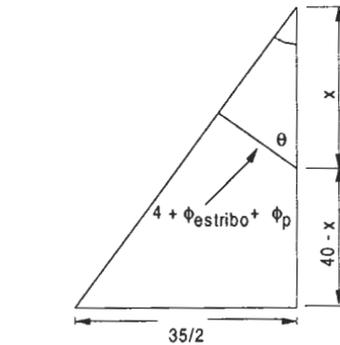
Condición Balanceada:

$$\epsilon_y = \frac{3500}{2 \times 10^6} = 0.00175$$

$$C_b = 0.003 \left(\frac{33.62}{0.003 + 0.00175} \right) = 21.23 \text{ cm}$$

$$a_b = \beta_1 \cdot c_b = 0.75 c_b = 15.93 \text{ cm}$$

$$C_c = 39.59 \text{ t}$$



$$\frac{\epsilon_{si}}{0.003} = \frac{C - d_i}{C} \Rightarrow f_{si} = 6 * \left(\frac{C - d_i}{C} \right) t / \text{cm}^2$$

$$f_{si} = 6 * \frac{(c - d_i)}{c} t / \text{cm}^2 \leq f_y = 3.5 t / \text{cm}^2$$

$$f_{s1} = 1.50 t / \text{cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = f_{s1} \cdot A_{s1} = 9.60 t$$

$$f_{s2} = -3.50 t / \text{cm}^2 \Rightarrow T_{s2} = f_{s2} \cdot A_{s2} = 44.87 t$$

$$P_{nb} = C_c + C_{s1} - T_{s2} = 4.32 t$$

$$M_{nb} = C_c \cdot \left(0.2667 - \frac{2}{3} * 0.1593 \right) + C_{s1} (0.2667 - 0.1595) + T_s (0.3362 - 0.2667)$$

$$M_{nb} = 10.50 t \cdot \text{m}$$

$$e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}} = 2.43 \text{ m}$$

Para $e = 1.5 e_b = 3.65 \text{ m}$ (zona de fluencia del acero en tracción)

Asumimos: $c = 18 \text{ cm} \Rightarrow C_c = 28.43 t$

$$a = 13.5 \text{ cm} \Rightarrow f_{s1} = 0.68 t / \text{cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 4.38 t$$

$$T_{s2} = 44.87 t \quad \therefore P_n = -12.06 t$$

$$c = 20 \text{ cm} \Rightarrow a = 15 \Rightarrow C_c = 35.1 t$$

$$C_{s1} = 7.79 t$$

$$P_n = -1.98 t$$

$$c = 20.4 \text{ cm} \Rightarrow a = 15.6 \text{ cm} \quad C_c = 36.52 t$$

$$C_{s1} = 8.39 t$$

$$P_n = 0.04 t$$

$$c = 20.8 \text{ cm} \Rightarrow a = 15.6 \text{ cm} \quad C_c = 37.96 t$$

$$C_{s1} = 8.97 t$$

$$P_n = 2.06 t$$

$$M_n = 10.24 t \cdot \text{m} \Rightarrow e = \frac{10.24}{2.06} = 4.97 \text{ m}$$

$$c = 21 \text{ cm} \Rightarrow a = 15.75 \text{ cm} \Rightarrow C_s = 38.70 t \quad C_{s1} = 9.25 t$$

$$P_n = 3.08 t$$

$$M_n = 10.35 t \cdot \text{m} \quad \therefore e = 3.36 \text{ m} \text{ conforme}$$

Aplicación:

Para la sección de columna que se muestra en la figura, determine la carga axial y el momento nominal (P_n , M_n) para una excentricidad $e = 0.8e_b$

$f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 estribos de $\phi 1/2"$, $A_{s1} = 8 \phi 7/8"$

Solución:

$$\begin{aligned} A_{s1} &= 11.64 \text{ cm}^2 & d_1 &= 6.38 \text{ cm} \\ A_{s2} &= 7.76 \text{ cm}^2 & d_2 &= 30.00 \text{ cm} \\ A_{s3} &= 11.64 \text{ cm}^2 & d_3 &= 53.62 \text{ cm} \end{aligned}$$

La posición del centroide plástico se encuentra a la mitad de la sección: $y_o = 30 \text{ cm}$



$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{3500}{2 \cdot 10^6} = 0.00175$$

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + 0.00175} \Rightarrow c_b = 33.87 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.75 c_b = 25.40 \text{ cm}$$

$$f_{s1} = 6 \cdot \frac{(c - d_1)}{c}$$

$$f_{s1} = 6 \cdot \frac{(33.87 - 6.38)}{33.87} = 4.87 \Rightarrow f_{s1} = f_y = 3.5 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s2} = 0.69 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 3.5 \text{ t/cm}^2$$

$$C_{s1} = 11.64 \cdot 3.5 = 40.74 \text{ t}$$

$$C_{s2} = 7.76 \cdot 0.69 = 5.32 \text{ t}$$

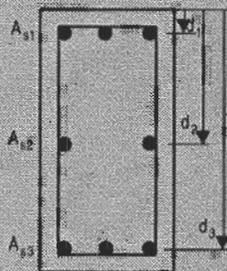
$$T_{s3} = 11.64 \cdot 3.5 = 40.74 \text{ t}$$

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = 0.85 \cdot 0.42 \cdot 30 \cdot 25.40 = 272.03 \text{ t}$$

$$P_{nb} = C_c + C_{s1} + C_{s2} - T_{s3} = 277.35 \text{ t}$$

$$M_{nb} = C_c \cdot \left(0.30 - \frac{0.254}{2}\right) + C_{s1} \cdot (0.30 - 0.0638) + T_{s3} \cdot (0.5362 - 0.30)$$

$$M_{nb} = 66.31 \text{ t-m}$$



Luego:

$$e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}} = 0.239 \text{ m}$$

Para: $e = 0.8 e_b = 0.191 \text{ m}$

Asumiendo:

$$c = 38 \text{ cm} \Rightarrow a = \beta_1 c = 28.5 \text{ cm}$$

$$C_c = 0.85 f_c b a = 305.24 \text{ t}$$

$$f_{s1} = 3.5 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 40.74 \text{ t}$$

$$f_{s2} = 1.26 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s2} = 9.8 \text{ t}$$

$$f_{s3} = -2.47 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s3} = 28.71 \text{ t}$$

$$\therefore P_n = 327.07 \text{ t}; M_n = 64.48 \text{ t-m}$$

$$e = 0.197 \text{ m}$$

La excentricidad debe disminuir, entonces "c" debe ser algo mayor;

Asumiendo:

$$c = 39 \text{ cm} \Rightarrow a = \beta_1 c = 29.25 \text{ cm}$$

$$C_c = 0.85 f_c b a = 313.27 \text{ t}$$

$$C_{s1} = 40.74 \text{ t}; C_{s2} = 10.74 \text{ t}; T_{s3} = 26.18 \text{ t}$$

$$\therefore P_n = 338.57 \text{ t}; M_n = 63.97 \text{ t-m}$$

$$e = 0.189 \text{ m} = 0.191 \text{ m (CONFORME)}$$

Aplicación:

Para la sección de columna circular que se muestra, determinar su diagrama de interacción.

$$f_c = 280 \text{ kg/cm}^2, f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2, \text{zuncho de } \phi 1/2". A_{st} = 8\phi N^{\circ} 8$$

Solución:

$$A_{s1} = A_{s5} = 5.07 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 10.14 \text{ cm}^2$$

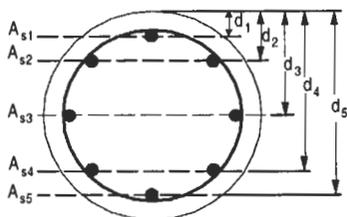
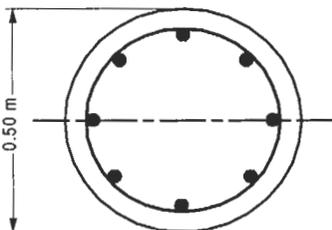
$$d_1 = 4 + 1.27 + (2.54/2) = 6.54 \text{ cm}$$

$$d_2 = 25 - (25 - 6.54) * \cos 45^{\circ} = 11.95 \text{ cm}$$

$$d_3 = 25 \text{ cm}$$

$$d_4 = 25 + (25 - 6.54) * \cos 45^{\circ} = 38.05 \text{ cm}$$

$$d_5 = 50 - 6.54 = 43.46 \text{ cm}$$

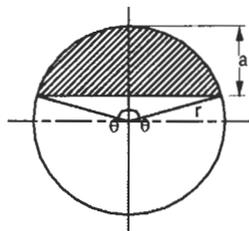


El centroide plástico se encuentra a la mitad de la sección: $y_o = 25$ cm

El área en compresión del concreto será:

$$\theta = \arccos\left(\frac{25 - a}{25}\right)$$

$$A_c = 25^2 (\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta)$$



Condición de carga concéntrica

$$A_g = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \times \frac{50^2}{4} = 1963 \text{ cm}^2; A_{st} = 40.56 \text{ cm}^2$$

$$P_{no} = 0.85 f_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y = 628 \text{ t}$$

Condición balanceada

$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{0.003 + 0.0021} \Rightarrow c_b = 25.56 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.85 c_b = 21.73 \text{ cm}$$

$$f_{si} = 6 \cdot \frac{(c - d_i)}{c}$$

$$f_{s1} = 6 \times \frac{(25.56 - 6.54)}{25.56} = 4.46 \Rightarrow f_{s1} = f_y = 4.2 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s2} = 3.19 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s3} = 0.13 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s4} = 2.93 \text{ t/cm}^2$$

$$f_{s5} = 4.2 \text{ t/cm}^2$$

$$C_{s1} = 5.07 \cdot 4.2 = 21.30 \text{ t}$$

$$C_{s2} = 10.14 \cdot 3.19 = 32.35 \text{ t}$$

$$C_{s3} = 10.14 \cdot 0.13 = 1.32 \text{ t}$$

$$T_{s4} = 10.14 \cdot 2.93 = 21.71 \text{ t}$$

$$T_{s5} = 5.07 \cdot 4.02 = 21.29 \text{ t}$$

$$\theta = 1.439 \text{ rad} \Rightarrow A_c = 8.18 \text{ cm}^2$$

$$\frac{2 R^3 (\operatorname{sen}\theta)^3}{3 A_c} = 0.124 \text{ m}$$

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c = 0.85 \cdot 0.28 \cdot 8.18.7 = 194.85 \text{ t}$$

$$P_{nb} = C_c + C_{s1} + C_{s2} + C_{s3} - T_{s4} - T_{s5} = 198.82 \text{ t}$$

$$M_{nb} = C_c \cdot (0.124) + C_{s1} \cdot (0.25 - 0.0654) + C_{s2} \cdot (0.25 - 0.1195) \\ + T_{s4} \cdot (0.3805 - 0.25) + T_{s5} \cdot (0.4346 - 0.25)$$

$$M_{nb} = 40.12 \text{ t-m}$$

Luego:

$$e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}} = 0.2018 \text{ m}$$

Condición de Flexión Pura

Asumiendo: $c = 13.5 \text{ cm} \Rightarrow a = \beta_1 c = 11.475 \text{ cm}$

Un punto en la zona de falla frágil

$c > c_b \Rightarrow$ Asumimos: $c = 30 \text{ cm} \Rightarrow a = \beta_1 c = 25.5 \text{ cm}$

$\theta = 1.5908 \text{ rad} \Rightarrow A_c = 1006.75 \text{ cm}^2$

$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c = 0.85 \cdot 0.28 \cdot 1006.75 = 239.6 \text{ t}$

$$\frac{2 R^2 (\text{sen}\theta)^3}{3 A_c} = 0.1034 \text{ m}$$

$$f_{si} = 6 \cdot \frac{(c - d_i)}{c}$$

$f_{s1} = 4.2 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 5.07 \cdot 4.2 = 21.29 \text{ t}$

$f_{s2} = 3.61 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s2} = 10.14 \cdot 3.61 = 36.61 \text{ t}$

$f_{s3} = 1.0 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s3} = 10.14 \cdot 1.0 = 10.14 \text{ t}$

$f_{s4} = -1.61 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s4} = 10.14 \cdot 1.61 = 16.32 \text{ t}$

$f_{s5} = -2.69 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s5} = 5.07 \cdot 2.69 = 13.64 \text{ t}$

$P_n = C_c + C_{s1} + C_{s2} + C_{s3} - T_{s4} - T_{s5} = 277.7 \text{ t}$

$M_n = C_c \cdot (0.1034) + C_{s1} \cdot (0.25 - 0.0654) + C_{s2} \cdot (0.25 - 0.1195) \\ + T_{s4} \cdot (0.3805 - 0.25) + T_{s5} \cdot (0.4346 - 0.25)$

$M_n = 38.13 \text{ t-m}$

Un punto en la zona de falla dúctil.

$c < c_b \Rightarrow$ Asumimos: $c = 20 \text{ cm} \Rightarrow a = \beta_1 c = 17 \text{ cm}$

$\theta = 1.245 \text{ rad} \Rightarrow A_c = 588.68 \text{ cm}^2$

$$\frac{2 R^3 (\text{sen } \theta)^3}{3 A_c} = 0.1505 \text{ m}$$

$$C_c = 0.85 * f'_c * A_c = 0.85 * 0.28 * 588.68 = 140.11 \text{ t}$$

$$f_{si} = 6 * \frac{(c - d_i)}{c}$$

$$f_{s1} = 4.04 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s1} = 5.07 * 4.04 = 20.47 \text{ t}$$

$$f_{s2} = 2.42 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow C_{s2} = 10.14 * 2.42 = 24.49 \text{ t}$$

$$f_{s3} = 1.5 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s3} = 10.14 * 1.5 = 15.21 \text{ t}$$

$$f_{s4} = 4.2 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s4} = 10.14 * 4.2 = 42.59 \text{ t}$$

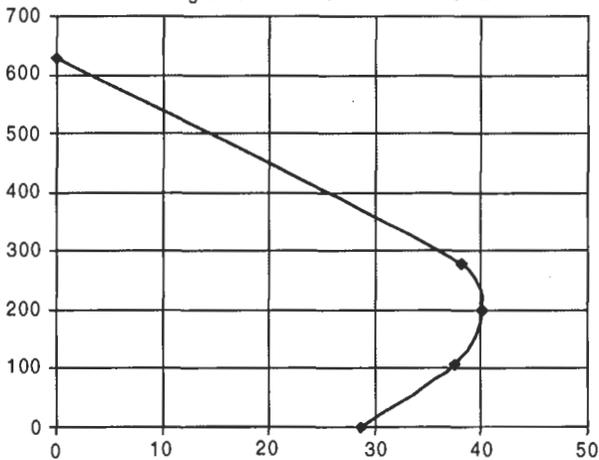
$$f_{s5} = -4.2 \text{ t/cm}^2 \Rightarrow T_{s5} = 5.07 * 4.2 = 21.29 \text{ t}$$

$$P_n = C_c + C_{s1} + C_{s2} - T_{s3} - T_{s4} - T_{s5} = 105.98 \text{ t}$$

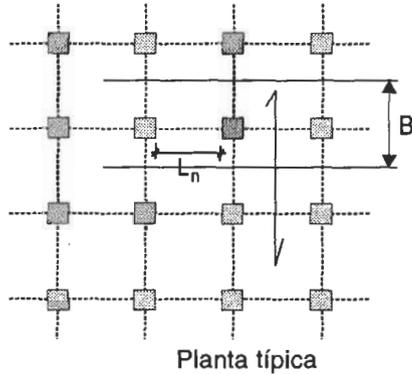
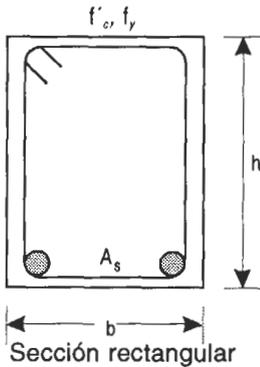
$$M_n = C_c * (0.1505) + C_{s1} * (0.25 - 0.0654) + C_{s2} * (0.25 - 0.1195) + T_{s4} * (0.3805 - 0.25) + T_{s5} * (0.4346 - 0.25)$$

$$M_n = 37.55 \text{ t-m}$$

Diagrama de Interacción Resultante



PREDIMENSIONAMIENTO DE VIGAS Y COLUMNAS



El momento flector último de una sección cualquiera puede expresarse como sigue:

$$M_u = (w_u \cdot B) \cdot L_n^2 / \alpha \dots \dots \dots (1)$$

Donde:

- w_u = Carga por unidad de área.
- L_n = Longitud libre.
- B = Dimensión transversal tributaria.
- α = Coeficiente de Momento.

(Depende de la ubicación de la sección y de las restricciones en el apoyo.)

Para una sección rectangular con acero solo en tracción, de acuerdo al ACI 318-99 se tiene:

$$M_u / \phi = f_c \cdot b d^2 \cdot w (1 - 0.59w) \dots \dots \dots (2)$$

donde: $w = \rho \cdot f_y / f_c$

De las expresiones (1) y (2):

$$(w_u B) L_n^2 / \alpha \phi = f_c \cdot b d^2 \cdot w (1 - 0.59w)$$

de donde:

$$d = L_n \sqrt{\frac{w_u B}{\alpha \phi f'_c b w (1 - 0.59w)}} \dots\dots\dots (3)$$

Considerando la sección de momento positivo máximo, asumimos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 16 & b &= B / 20 \\ \phi &= 0.9 & f'_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ f'_c &= 210 \text{ kg/cm}^2 & w_u &\Rightarrow \text{en kg/cm}^2, \text{ por consiguiente:} \\ \rho &= 0.007 \text{ (0.7\%)} & w &= \rho f'_y / f'_c = 0.007 * 4200 / 210 = 0.14 \end{aligned}$$

$$\frac{h}{1.1} = L_n \sqrt{\frac{w_u B}{16 * 0.9 * 210 * \frac{B}{20} * 0.14(1 - 0.59 * 0.14)}}$$

de donde:

$$h = \left(\frac{L_n}{\sqrt{\frac{4.01}{w_u}}} \right)$$

∴ redondeando valores

$$h = \left(\frac{L_n}{\sqrt{\frac{4}{w_u}}} \right) \dots\dots\dots (4)$$

Aplicaciones:

Oficinas y Departamentos: s/c = 250 kg/m²

Definición de $w_u \Rightarrow$ p. aligerado = 350 kg/m²

p. acabado = 100 kg/m²

tabiquería móvil = 150 Kg/m²

$W_D = 600 \text{ kg/m}^2$

$W_L = 250 \text{ kg/m}^2$

$w_u = 1.4 W_D + 1.7 W_L = 1\ 265 \text{ Kg/m}^2$

usamos: $w_u = 0.13 \text{ kg/cm}^2$

en (4):
$$h = \left(\frac{L_n}{\sqrt{\frac{4}{0.13}}} \right) = \frac{L_n}{11.09}$$

$$\Rightarrow h = \frac{L_n}{11.09}$$

Garajes y tiendas: s/c = 500 kg/m²

Determinación de $w_u \Rightarrow$ p. aligerado = 350 kg/m²

$$p. \text{ acabado} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$W_D = 450 \text{ kg/m}^2$$

$$W_L = 500 \text{ kg/m}^2$$

$$w_u = 1.4 W_D + 1.7 W_L = 1\,480 \text{ kg/m}^2 = 0.15 \text{ kg/cm}^2$$

$$h = \frac{L_n}{\left(\frac{4}{\sqrt{0.15}} \right)} = \frac{L_n}{10.33}$$

$$\Rightarrow h = \frac{L_n}{10.3}$$

Depósitos A : s/c = 750 kg/m² (Almacenaje pesado en biblioteca)

Determinación de $w_u \Rightarrow$ p. aligerado = 350 kg/m²

$$p. \text{ acabado} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$W_D = 450 \text{ kg/m}^2$$

$$W_L = 750 \text{ kg/m}^2$$

$$w_u = 1.4 W_D + 1.7 W_L = 1\,905 \text{ kg/m}^2 = 0.19 \text{ kg/cm}^2$$

$$h = L_n / (4 / (0.19)^{1/2}) = L_n / 9.18$$

$$\Rightarrow h = L_n / 9.2$$

Depósitos B : s/c = 1000 kg/m²

Determinación de $w_u \Rightarrow$ p. aligerado = 350 kg/m²

$$p. \text{ acabado} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$W_D = 450 \text{ kg/m}^2$$

$$W_L = 1000 \text{ kg/m}^2$$

$$w_u = 1.4 W_D + 1.7 W_L = 2\,330 \text{ kg/m}^2 = 0.23 \text{ kg/cm}^2$$

$$h = L_n / (4 / (0.23)^{1/2}) = L_n / 8.34$$

$$\Rightarrow h = L_n / 8.3$$

Modificaciones de las dimensiones de las Vigas

a) Criterios de igualdad de cuantía, el momento actuante, M_u es el mismo para dos juegos diferentes de dimensiones de viga ("b h" y "b₀ h₀")

$$M_u = M_{u0}$$

$$M_u = \phi f'_c b d^2 w (1 - 0.59 w) = \phi f'_c b_0 d_0^2 w (1 - 0.59 w)$$

de donde,

$$b d^2 = b_0 d_0^2$$

Para casos prácticos se puede intercambiar los peraltes efectivos "d" por su altura h.

$$b h^2 = b_0 h_0^2$$

b) Criterios de igualdad de rigideces, las rigideces de las dos secciones es la misma, por lo tanto,

$$b h^3 = b_0 h_0^3$$

Este criterio se recomienda para sistemas apertados en zonas de alto riesgo sísmico. También es recomendable para el dimensionamiento de vigas "chatas".

Es recomendable que las vigas chatas no tengan luz libre mayor de 4m. Para vigas chatas menores que 4m se estima que su costo es igual al de una viga peraltada. Para vigas chatas mayores de 4 m el costo es algo mayor.

Recomendaciones del ACI 318-99: Zonas de alto riesgo sísmico

Elementos de Flexión si $P_u \leq A_g f'_c / 10$

$$L_n \geq 4h$$

$$b \geq 0.3h$$

$$b \geq 0.25 \text{ m}$$

$$\rho_{\max} = 0.025$$

Dimensionamiento de Vigas Simplemente Apoyadas

1) Igualdad de cuantía:

En este caso: $\alpha = 8$

$$d = L_n [w_u B / \alpha \phi f'_c b w (1 - 0.59 w)]^{1/2}$$

$$\therefore d_{\alpha=8} / d_{\alpha=16} = [(1/8)/(1/16)]^{1/2} = (2)^{1/2} = 1.41$$

$d_{\alpha=8}$ Peralte para una viga simplemente apoyada.

$d_{\alpha=16}$ Peralte para una viga continua con la misma luz y cargas de la viga simplemente apoyada.

$$\therefore b = B / 20; \quad h_s = 1.4h$$

Considerando cierta restricción en los extremos de la viga de un tramo, se usará: $\alpha = 10$

de la ecuación (3)

$$\therefore d_{\alpha=10} / d_{\alpha=16} = [(1/10)/(1/16)]^{1/2} = (1.6)^{1/2} = 1.26$$

$$b = B / 20; h_s = 1.25h$$

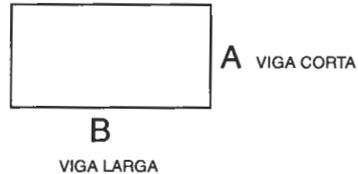
Este procedimiento se basa en el análisis de cargas de gravedad, sin embargo puede utilizarse en edificios de C.A. de mediana altura (unos ocho pisos aproximadamente si la edificación está en zona de alto riesgo sísmico)

I. PREDIMENSIONAMIENTO DE VIGAS

Para vigas que corresponden a losas reforzadas en dos sentidos:

$$b = \frac{A}{20} \quad h_A = \frac{A}{\alpha}; \quad h_B = \frac{B}{\beta}$$

donde:



b = ancho de la viga

h = peralte de la viga

A = dimensión menor del panel

B = dimensión mayor del panel

α y β = coeficientes obtenidos de la tabla B.1

Tabla B - 1

A/B	Sobrecarga (kg/m ²)	α	β
A/B > 0.67 ó A/B = 1.0	250	13	13
	500	11	11
	750	10	10
	1000	9	9
A/B < 0.67	250	13	11
	500	11	10.3
	750	10	9.2
	1000	9	8.3

II. PREDIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS

Según ensayos experimentales en Japón: $n = \frac{P}{f_c bD}$

$n > \frac{1}{3}$ Falla frágil por aplastamiento debido a cargas axiales excesivas.

$n < \frac{1}{3}$ Falla dúctil

Las columnas se predimensionan con: $bD = \frac{P}{nf'_c}$

donde:

D = dimensión de la sección en la dirección del análisis sísmico de la columna

b = la otra dimensión de la sección de la columna

P = carga total que soporta la columna (ver tabla B.2)

n = valor que depende del tipo de columna y se obtiene de la Tabla B.2

f'_c = resistencia del concreto a la compresión simple

Tipo C1 (para los primeros pisos)	Columna interior	$P = 1.10 P_G$ $n = 0.30$
Tipo C1 (para los 4 últimos pisos superiores)	Columna interior	$P = 1.10 P_G$ $n = 0.25$
Tipo C2, C3	Columnas Extremas de pórticos interiores	$P = 1.25 P_G$ $n = 0.25$
Tipo C4	Columna de esquina	$P = 1.50 P_G$ $n = 0.20$

Nota, se considera primeros pisos a los restantes de los 4 últimos pisos.

Tabla B.2 Valores de P y n para el predimensionamiento de columnas.

P_G es el peso total de cargas de gravedad que soporta la columna.

PREDIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS USANDO EL CRITERIO DEL AREA TRIBUTARIA

Tabla 1. Coeficientes K para determinar el área de columnas cuadradas para diferentes luces entre ejes, $\rho_t = 0.02$.

$$A_g = KA_t \dots\dots\dots (1)$$

Donde:

A_g = Sección de la columna

A_t = Area tributaria acumulada

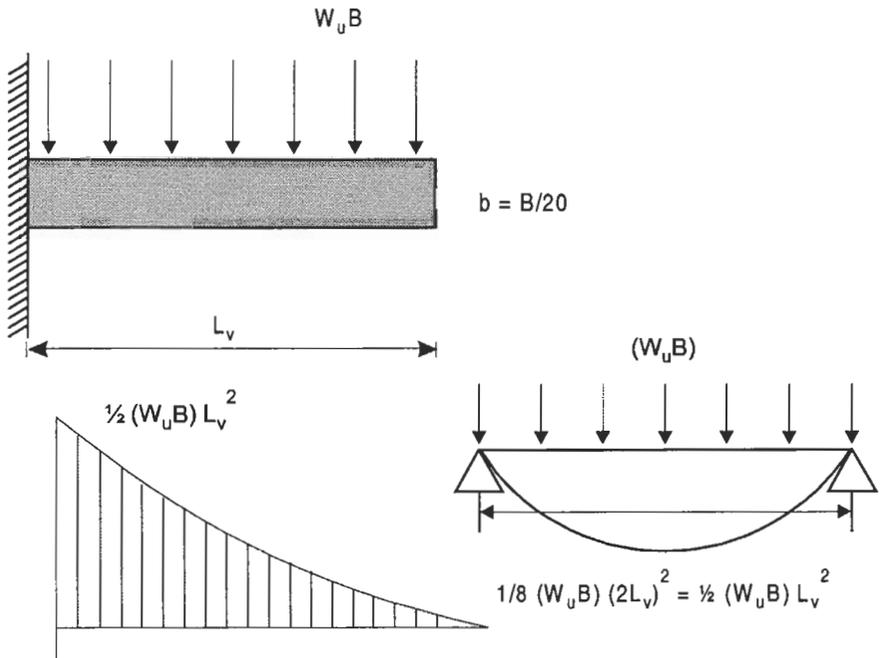
PISO	LUZ (m)	Area Trib. Por piso, m ²	TIPO DE COLUMNA			
			1	2	3	4
Antepenúltimo	4	16	0,0013	0,0025	0,0022	0,0040
Antepenúltimo	6	36	0,0011	0,0020	0,0016	0,0028
Antepenúltimo	8	64	0,0011	0,0017	0,0015	0,0023
Segundo	4	16	0,0011	0,0014	0,0014	0,0021
Segundo	6	36	0,0012	0,0014	0,0014	0,0015
Segundo	8	64	0,0012	0,0014	0,0014	0,0015

PROCEDIMIENTO DE DIMENSIONAMIENTO

1. Determine las secciones A_g de las columnas del segundo y del antepenúltimo piso mediante la siguiente fórmula: $A_g = K A_t$, donde K se obtiene de la tabla y A_t es el área tributaria de la columna considerada.
2. Determine los lados de las columnas de los pisos considerados suponiéndolas cuadradas.
3. Calcule las dimensiones de las columnas de los pisos intermedios por interpolación lineal.
4. Calcule las dimensiones de las columnas del primer piso de la siguiente manera:
 - a) Por extrapolación lineal, si la altura del primer piso es igual a la del segundo piso.
 - b) Sumando 7 cm a las del segundo piso, si la altura del primer piso es 1.5 veces la del segundo.
 - c) Por interpolación o extrapolación lineal, entre los valores calculados según a y b para otras proporciones entre las alturas del primer y segundo piso.
5. Use las dimensiones de la columna del antepenúltimo piso para los pisos superiores.

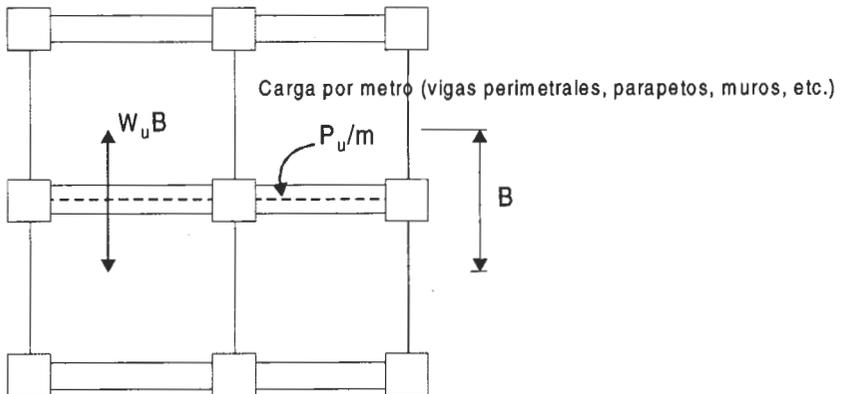
Aplicación de predimensionamiento de Vigas

1. Dimensionamiento de una viga en voladizo



$h_v = 1.4 h = 1.4 L_v / \alpha = 1.4 (2L_v) / \alpha$

Influencia de una carga repartida directamente sobre una viga



Se considera el ancho tributario añadiendo un ancho adicional de P/W ó P_u/W_u

$$B^* = B + \frac{P_u}{W_u}$$

Ejemplo ilustrativo de dimensionamiento de vigas

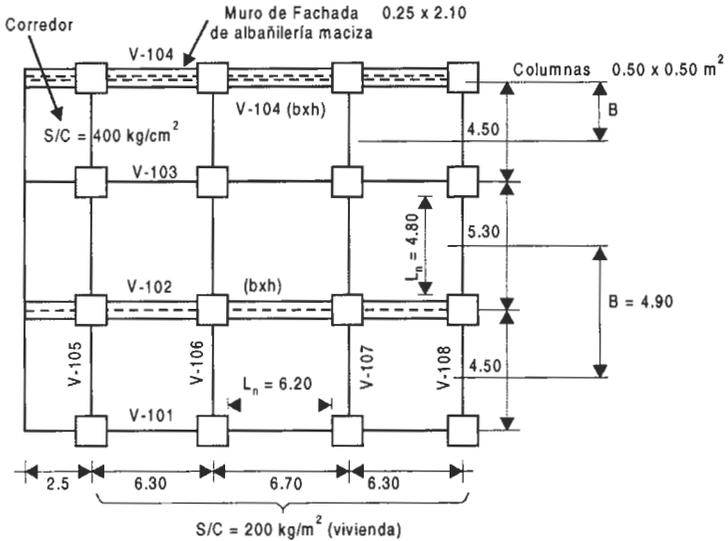


figura : 1era. Planta
Uso \Rightarrow Viviendas

1. Dimensionamiento de la viga V - 102 (b * h)

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{B}{20} = \frac{4.9}{20} = 0.245\text{m} & h &= 0.55\text{m} \\ h &= \frac{l_n}{\alpha} = \frac{6.2}{11} = 0.56 & b &= 0.25\text{m} \end{aligned} \right\} \text{Usar } 0.25 * 0.55\text{m}^2$$

Si consideramos un ancho de $b_0 = 0.40 \text{ m}$; por ser un sistema aporticado usamos el criterio de rigideces:

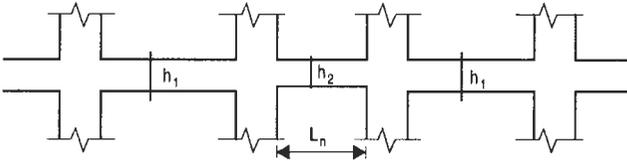
$$\begin{aligned} b_0 &= 0.40 \text{ m} \Rightarrow \text{zona alto riesgo sísmico} \Rightarrow bh^3 = b_0h_0^3 \\ 0.2458 * 0.56^2 &= 0.40 * h_0^2 \Rightarrow h_0 = 0.48 \text{ m} \\ \text{Usar } &= 0.40 * 0.50 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Para una zona medianamente sísmica usamos el criterio de igualdad de cuantías

$$\begin{aligned} 0.245 * 0.56 \text{ m}^2 &= 0.40 h_0^2 \Rightarrow h_0 = 0.44 \text{ m} \\ \text{Usar } &0.40 * 0.45 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

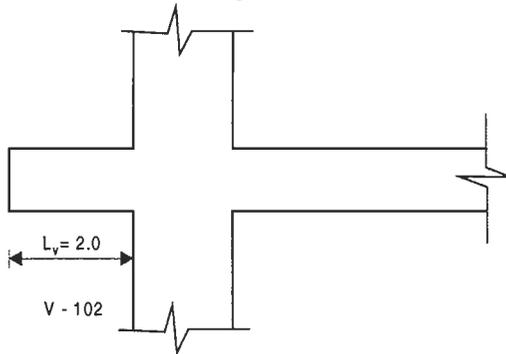
Comentario

Para un caso particular :



Cambio de sección en el tramo menor con rigidez grande que origina momentos mayores que en los tramos aledaños.

Para predimensionar el VOLADIZO de la viga V-102



$$b = B/20 = 0.245 \text{ m}$$

$$h = 1.4h_s = 1.4\left(\frac{L_n}{\alpha}\right) = 1.4\left(\frac{2L_v}{\alpha}\right) = 1.4\left(\frac{2 \cdot 2}{11}\right) = 0.54 \text{ m}$$

$h_s = h$ de una viga simplemente apoyada Usar $0.25 \cdot 0.55 \text{ m}^2$

2. Dimensionamiento V - 104 (b * h)

$$B = B^*/20 \quad B^* = B + B_{ad}$$

$$h = \frac{L_n}{\alpha} \quad B_{ad} = \frac{P_u}{W_u} \approx \frac{P}{W} \quad (\text{El ejemplo está calculado con cargas sin factorar})$$

$$P = 0.25 \cdot 2.10 \cdot 1.8 = 0.95 \text{ t/m}$$

$$W = (p.p.alig.) + (p.acab.) + (p.tab) + (S/C)$$

$$W = 300 + 100 + 50 + 200 = 650 \text{ kg/m}^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{4.50}{2} + 0.125 = 2.25 + 0.125 = 2.375$$

$$B_{ad} = \frac{990 \text{ kg}}{650 \text{ kg/m}} = 1.46 \text{ m}$$

Luego $B^* = 2.375 + 1.46 = 3.835$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{3.84}{20} = 0.192 \text{ m} \\ h = \frac{3.84}{11} = 0.56 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zona de alto} \\ \text{Riesgo sísmico} \\ Bh^3 = b_0 h_0^3 \rightarrow \\ \Rightarrow 0.192 * 0.56^3 = 0.25 h_0^3 \\ \Rightarrow h_0 = 0.51 \text{ m} \end{array}$$

Usar $0.25 * 0.50 \text{ m}^2$

3. Dimensionar: V-108 (b * h)

- i) Se considerará el criterio de dimensionamiento de la viga de luz libre menor que corresponde a una losa aligerada reforzada en dos direcciones.

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{A}{20} = \frac{4.80}{20} = 0.24 \text{ m} \\ h = \frac{A}{\alpha} = \frac{4.80}{13} = 0.36 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ Usar } 0.25 * 0.35 \text{ m}^2$$

- ii) Tomando otro criterio, asumiendo un ancho tributario arbitrario de 2 m a 3 m.

Zona de alto riesgo sísmico: Sistema netamente Aporticado:

$$B = 3 \text{ m} \Rightarrow b = \frac{B}{20} = \frac{3}{20} = 0.15 \text{ m}$$

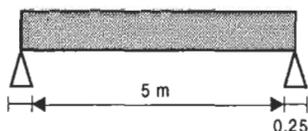
$$h = \frac{Ln}{\alpha} = \frac{4.80}{11} = 0.43 \text{ m} \Rightarrow$$

Cambiando el ancho de la viga : $b_0 = 0.25 \text{ m}$

$$0.15 * 0.43^3 = 0.25 * h_0^3 \Rightarrow h_0 = 0.36 \text{ m}$$

Usar: $0.25 * 0.40 \text{ m}^2$

4. Dimensionar la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura adjunta.



Considere:

$$B = 4\text{ m}$$

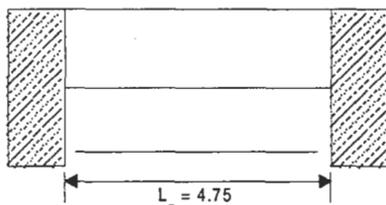
$$S/C = 250\text{ kg/m}^2$$

Solución:

$$b = \frac{B}{20} = \frac{4}{20} = 0.20\text{ m} \quad h_s = \frac{L_n}{\alpha} = \frac{L_n}{11} * 1.4 = \frac{5}{11} * 1.4 = 0.64\text{ m}$$

$$\text{Si } b_0 = 0.25\text{ m} \Rightarrow bh^3 = b_0h_0^3 \Rightarrow h_0 = 0.59\text{ m} \quad \therefore \text{Usar } 0.25 * 60\text{ m}^2$$

5. Dimensionar la viga de un tramo con apoyos monolíticos



Considere:

$$B = 4\text{ m}$$

$$S/C = 250\text{ kg/m}^2$$

Solución:

$$b = \frac{B}{20} = 0.20\text{ m} \quad h = 1.25 \left(\frac{L_n}{\alpha} \right) = 1.25 * \frac{4.75}{11} = 0.54\text{ m}$$

Usando el criterio de igualdad de cuantías:

$$\Rightarrow bh^2 = b_0h_0^2$$

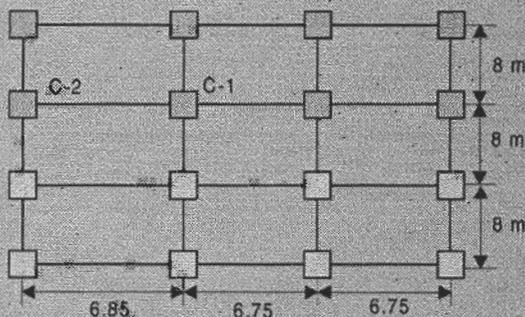
$$0.20 * 0.54^2 = 0.25 * h_0^2$$

$$h_0 = 0.487$$

$$\text{Usar } 0.25 * 0.50\text{ m}^2$$

Aplicación de Predimensionamiento de Columnas

Se tiene un edificio aporricado de 10 pisos cuya planta típica se muestra en la figura adjunta; el uso es de oficinas, considere los techos de aligerados de 0.25 m, tabiquería de 120 kg/m², acabado de 100 kg/m², f_c = 420 kg/cm², f_y = 4200 kg/cm². Se pide dimensionar las columnas señaladas en el gráfico.



Solución:

Realizamos como primer paso el metrado de las cargas de la estructura :

P. aligerado	: 350 kg/m ²
Tabiquería	: 120 kg/m ²
Acabado	: 100 kg/m ²
Peso de Vigas	: 100 kg/m ²
Peso de Columnas	: 60 kg/m ²

La sobrecarga para esta estructura se puede considerar: S/C = 250 kg/m²
 entonces: PG = P.muerta + P.viva = 730 + 250 = 980 kg/m²
 (esta es la carga a considerarse por piso)

Columna C-2 : (exterior)

El área tributaria para esta columna se puede considerar:

$$A = \frac{(8 + 8) \cdot 6.85}{2} = 27.4 \text{ m}^2$$

Luego el valor de P sería igual a : P = 980 (kg/m²) * 27.4 (m²) = 26852 kg
 reemplazando los valores hallados en las fórmulas proporcionadas en la teoría:

$$b \cdot D = \frac{1.25 \cdot P}{n \cdot f_c} \quad \text{donde } n = 0.25$$

$$\text{entonces } b \cdot D = \frac{1.25 \cdot 26852 \cdot 10}{0.25 \cdot 420} = 3197 \text{ cm}^2 ; \text{ considerando que } b = D = t$$

t = 56.5 cm por lo tanto usamos t = 60 cm

C-2 : 0.60*0.60

Columna C-1: (interior)

El área tributaria para esta columna se puede considerar :

$$A = \frac{(8 + 8) \cdot (6.85 + 6.75)}{2 \cdot 2} = 54.4 \text{ m}^2$$

luego el valor de P sería igual a : $P = 980 \text{ (Kg/m}^2\text{)} \cdot 54.4 \text{ (m}^2\text{)} = 53312 \text{ Kg}$
reemplazando los valores hallados en las fórmulas proporcionadas en la teoría

$$b \cdot D = \frac{1.10 \cdot P}{n \cdot f_c} \quad \text{donde } n = 0.30$$

$$\text{entonces : } b \cdot D = \frac{1.10 \cdot 53312 \cdot 10}{0.30 \cdot 420} = 4654 \text{ cm}^2, \text{ considerando que } b = D = t$$

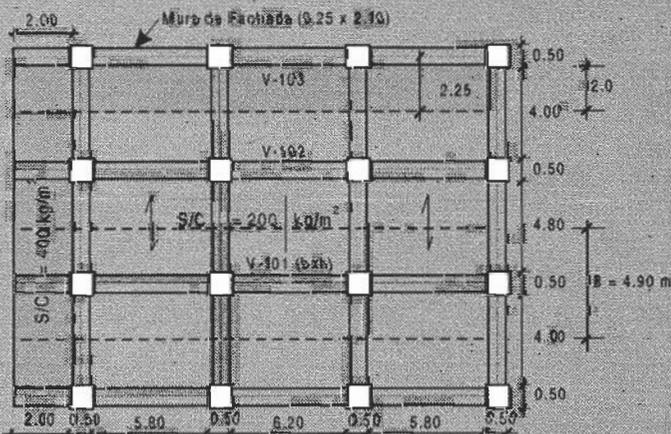
$t = 68.2 \text{ cm}$ por lo tanto usamos $t = 70 \text{ cm}$

C-1 : $0.70 \cdot 0.70$

OBSERVACIONES: Las otras columnas de la estructura se pueden dimensionar de la misma manera que las mostradas anteriormente.

Como se puede observar, en ambos casos el factor que acompaña a la carga de gravedad varía según la posición de la columna en la estructura (ya sea esta una interna o exterior e inclusive de esquina) así como el valor de n, estos coeficientes se encuentran en las tablas proporcionadas en la parte teórica, otro factor a considerar es el área tributaria de cada columna.

Otra observación que se debe hacer es que en la fórmula utilizada el valor de P nos representa el valor total del peso de la estructura que correspondería a cada columna, por eso multiplicamos por 10 (que viene a ser el número de pisos)



Figura, planta típica de un edificio de 6 pisos destinado a vivienda

Consideramos que las dimensiones de las columnas no varían a medida que aumenta el número de pisos solo para facilitar el proceso constructivo.

$$\text{Peso muro de fachada} = 0.25 \cdot 2.10 \cdot 1.8 \text{ t/m}^3 = 0.95 \text{ t/m}$$

1. Dimensionar la viga continua interior V-101 que se muestra en la Fig. 3, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{B}{20} = \frac{4.90}{20} = 0.245 \text{ m} \\ h &= \frac{L'}{11} = \frac{6.20}{11} = 0.56 \text{ m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Usar:} \\ 0.25 \cdot 0.55 \text{ m} \end{array}$$

Si cambiamos el ancho de la viga : $b_0 = 0.40 \text{ m}$ usando el criterio de igualdad de cuantía:

$$\left. \begin{aligned} bh^2 &= b_0 h_0^2 \\ h_0 &= \sqrt{\frac{0.245 \cdot 0.56^2}{0.40}} = 0.44 \text{ m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Usar:} \\ 0.40 \cdot 0.45 \text{ m} \end{array}$$

Usando el criterio de igualdad de rigideces:

$$\left. \begin{aligned} bh^3 &= b_0 h_0^3 \\ h_0 &= \sqrt[3]{\frac{0.245 \cdot 0.56^3}{0.40}} = 0.48 \text{ m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Usar:} \\ 0.40 \cdot 0.50 \text{ m} \end{array}$$

2. Dimensionar la viga en voladizo de V-102, que se muestra en la figura.

Una viga en voladizo puede dimensionarse como una viga equivalente de luz igual al doble de luz del voladizo.

$$Mu_V = W \frac{a^2}{2} = Mu_s = \frac{1}{8} W_u (2a)^2 = \frac{W_u a^2}{2}$$

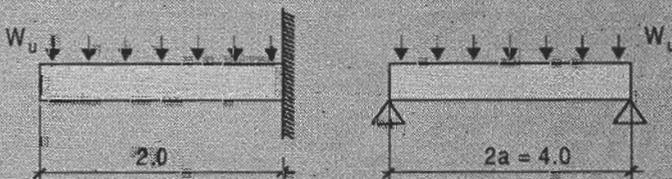


Figura: viga en voladizo:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{B}{20} = 0.245 \text{ m} \\ h &= 1.4h_1 = 1.4 \left(\frac{L_1}{10.3} \right) = 1.4 \cdot \frac{4}{10.3} = 0.54 \end{aligned} \right\} \text{ Usar: } 0.25 \cdot 0.55$$

3. Dimensionar la viga perimétrica V-103 que se muestra en la figura.

Para dimensionar una viga perimétrica se considera una dimensión adicional tributaria debido al peso del muro de fachada.

$$W = P \cdot P + P_{\text{acab}} + t_{\text{ab}} + s/c = 300 + 100 + 50 + 20 \text{ kg/m}^2$$

$$W = 650 \text{ kg/m}^2$$

$$l_{\text{adicional}} = \frac{P(\text{kg/m})}{W(\text{kg/m}^2)} = \frac{950 \text{ kg/m}}{650 \text{ kg/m}^2} = 1.46 \text{ m}$$

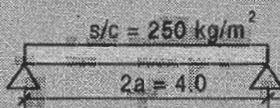
$$P = 0.25 \cdot 2.10 \cdot 1.0 \cdot 1.8 = 0.95 \text{ t/m}$$

Luego: $b = \frac{B}{20} = \frac{2.50 + 1.46}{20} = \frac{3.96}{20} = 0.198 \text{ m} = 0.20 \text{ m}$

$$h = \frac{L_1}{11} = \frac{6.20}{11} = 0.56$$

Si $b = 0.30 \text{ m} \rightarrow h = 0.49 \text{ m}$ Usar: 30 * 50

4. Dimensionar una viga simplemente apoyada de 5 m de luz, si la dimensión tributaria $B = 4 \text{ m}$ y la sobrecarga es de 250 kg/m^2



$$B = 4.00 \text{ m} \Rightarrow b = \frac{B}{20} = 0.20 \text{ m}$$

$$h = \frac{L_1}{11} \cdot 1.4 = \frac{5}{11} \cdot 1.4 = 0.64 \text{ m}$$

Si $b_{\text{min}} = 0.25 \Rightarrow bh^3 = b_0 h_0^3 \Rightarrow 0.20 \cdot 0.61^3 = 0.25 h_0^3 \Rightarrow h_0 = 0.59$

\therefore Usar: 0.25 * 0.60 m

Si la viga de un tramo es monolítica con sus apoyos:

$$b = 4 / 20 = 0.20$$

$$h = 1.25 \left(\frac{L_1}{11} \right) = 1.25 \left(\frac{5}{11} \right) = 0.57$$

$$\text{Si: } b_0 = 0.25$$

$$0.20 \cdot 0.57^3 = 0.25 h_0^3$$

$$h_0 = 0.53$$

∴ Usar : 0.25 * 0.55 m

Discusión de Dimensionamiento de Vigas Chatas:

Si: $S/C = 750 \text{ kg/m}^2 \Rightarrow b = 0.245 \quad B = 4.90 \text{ m}$

$$h = \frac{L_1}{9.2} = \frac{6.20}{9.2} = 0.67$$

Si: $b_0 = 0.30 \text{ m} \Rightarrow 0.245 \cdot 0.67^3 = 0.30 h_0^3 \Rightarrow h_0 = 0.63 \text{ m}$
 ∴ Usar: 0.30 * 0.65 m

Si: $b_0 = 0.40 \text{ m} \Rightarrow 0.245 \cdot 0.67^3 = 0.4 h_0^3 \Rightarrow h_0 = 0.57 \text{ m}$
 ∴ Usar: 0.40 * 0.60 m

Si: $S/C = 1000 \text{ kg/m}^2 \Rightarrow b = 0.245$

$$h = \frac{L_1}{8.3} = \frac{6.20}{8.3} = 0.75 \text{ m}$$

∴ Usar : 0.25 * 0.75 m²

Si: $b_0 = 0.40 \text{ m} \Rightarrow h_0 = 0.64 \text{ m}$

∴ Usar : 0.40 * 0.65 m²

Vigas Chatas:

Uso: vivienda

$$B = 5.0 \text{ m} \Rightarrow b = \frac{B}{20} = \frac{5}{20} = 0.25 \text{ m}$$

$$L_n = 4.0 \text{ m} \quad h = \frac{L_n}{11} = \frac{4}{11} = 0.36 \text{ m}$$

Criterio de igualdad de cuantía $0.25 \cdot 0.36^2 = b_0 \cdot l^2$

aligerado de 0.17 $\Rightarrow 0.25 \cdot 0.36^3 = b_0 \cdot 0.17^3 \Rightarrow b_0 = 2.40$

aligerado de 0.20 $\Rightarrow b_0 = 1.45 \text{ m} \quad \therefore 1.45 \cdot 0.20 \text{ m}$

aligerado de 0.25 $\Rightarrow b_0 = 0.75 \text{ m} \quad \therefore 0.75 \cdot 0.25 \text{ m}$

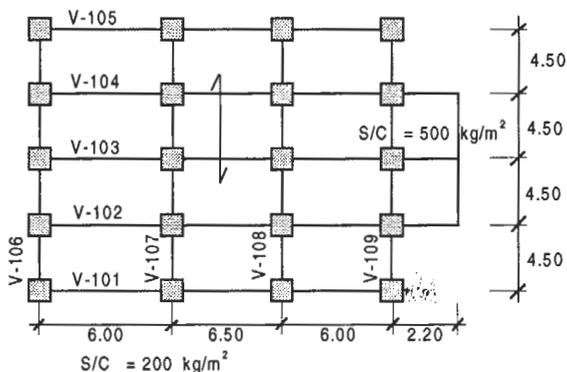
criterio de igualdad de cuantía: $0.25 \cdot 0.36^2 = b_0 \cdot l^2$

aligerado de 0.17 $\Rightarrow b_0 = 1.12 \text{ m} \quad \therefore 1.10 \cdot 0.17 \text{ m}$

aligerado de 0.20 $\Rightarrow b_0 = 0.81 \text{ m} \quad \therefore 0.80 \cdot 0.20$

aligerado de 0.25 $\Rightarrow b_0 = 0.52 \text{ m} \quad \therefore 0.50 \cdot 0.25$

Ejemplo de aplicación



Columnas: 6 pisos $\Rightarrow 0.50 \times 0.50$

Edificio de c.a. destinado a oficinas

1. Dimensionar la viga V - 103

$$L_n = 6.00 \text{ m} \Rightarrow h = \frac{L_n}{11} = 0.55 \text{ m}$$

$$b = \frac{B}{20} = \frac{4.50}{20} = 0.225 \text{ m}$$

Usando:

$$h_0 = 0.50 \Rightarrow bh^3 = b_0 h_0^3$$

$$0.225 \times 0.55^3 = b_0 \times 0.50^3 \Rightarrow b_0 = 0.30 \text{ m}$$

Usar: 0.30×0.50

Voladizo:

$$L_n = 2.20 - 0.25 = 1.95 \text{ m}$$

$$h = \frac{2 \times 1.95 \times 1.4}{10} = 0.546 \quad S/C = 500 \text{ kg/m}^2$$

$$b = \frac{B}{20} = \frac{4.50}{20} = 0.225$$

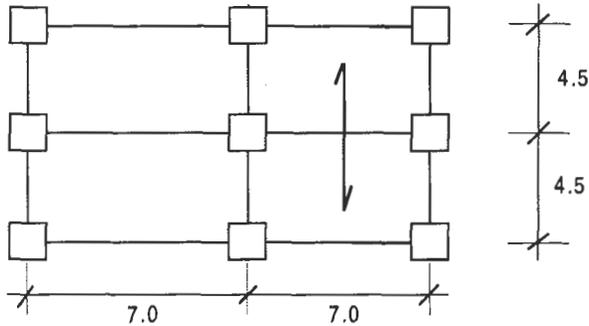
$$0.225 \times 0.546^3 = b_0 \times 0.50^3$$

$$b_0 = 0.29$$

Usar: 0.30×0.50

Dimensionamiento de Columnas

Aligerado	= 300 kg/m ²
Acabado	= 100 kg/m ²
P.P. vigas	= 100 kg/m ²
P.P. columnas	= 50 kg/m ²
Estacionamiento, Tiendas s/c	= 500 kg/m ²



$$W = 1.05 \text{ t/m}^2$$

$$P_G = W A_{Ta}$$

$$c_1 \Rightarrow bD = \frac{1.1P_G}{-0.30f'_c} = \frac{1.1 \cdot (7 \cdot 4.5 \cdot 6) \cdot 1.05}{0.30 \cdot 0.28} = 2598.75 \text{ cm}^2$$

$$\therefore 0.50 \cdot 0.50 \text{ m}^2$$

$$c_2 \Rightarrow bD = \frac{1.25P_G}{-0.25f'_c} = \frac{1.25 \cdot 7 \cdot \frac{4.5}{2} \cdot 1.05 \cdot 6}{0.25 \cdot 0.28} = 177 \text{ cm}^2$$

$$c_3$$

Usar 0.45 * 0.45

$$c_4 \Rightarrow bD = \frac{1.5 \cdot \frac{198}{4}}{0.20 \cdot 0.28} = 1266 \text{ cm}^2 = 35.6 \cdot 35.6$$

Usar 0.40 * 0.40

Vigas:

$$V-101: b = \frac{2.25 + 0.20}{20} = 0.1225 \text{ m}$$

$$V-103: h = \frac{L_n}{10} = \frac{7 - 0.20 - 0.225}{10} = 0.658 \text{ m}$$

$$b_o = 25 \text{ cm} \Rightarrow 0.1225 * 0.658^3 = 0.25 h_o$$

$$\therefore h_o = \sqrt[3]{0.1396} = 0.52 \text{ m}$$

Usar $0.25 \times 0.55 \text{ m}^2$

$$V-102: b = \frac{4.50}{20} = 0.225 \text{ m}; h = \frac{7 - 0.225 - 0.25}{10} = 0.653$$

$$0.225 * 0.225 \text{ m}; 0.25 * h_o^3 \Rightarrow h_o = 0.63 \text{ m}$$

Usar $0.25 * 0.65 \text{ m}^2$

$$V-104: b = \frac{2}{20} = 0.10; h = \frac{L_n}{10} = \frac{4.50 - 0.20 - 0.225}{10} = 0.408$$

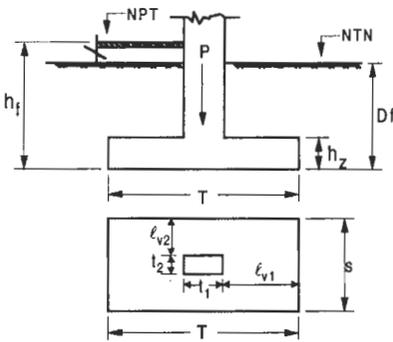
$$V-105: 0.10 * 0.4083 = 0.25 h_o^3 \Rightarrow h_o = 0.30$$

V-106

Usar 0.25×0.30 ó 0.25×0.40

CIMENTACIONES

1. ZAPATAS AISLADAS



σ_n = Esf. Neto del terreno

$\sigma_n = \sigma_t - h_f \gamma_m - S/C$

S/C (sobrecarga sobre el NPT)

γ_m = Densidad Promedio

Debemos trabajar con condiciones de carga de servicio, por tanto no se factoran las cargas.

$$A_{zap} = \frac{P}{\sigma_n}$$

En el caso que la carga P, actúe sin excentricidad, es recomendable buscar que:

$$L_{v1} = L_{v2}$$

Para la cual podemos demostrar que:

$$T = \sqrt{A_z} + \frac{(T_1 - T_2)}{2}$$

$$T = \sqrt{A_z} - \frac{(T_1 - T_2)}{2}$$

Dimensionamiento de la altura h_z de la zapata

La condición para determinar el peralte efectivo de zapatas, se basa en que la sección debe resistir el cortante por penetración (punzonamiento).

Se asume que ese punzonamiento es resistido por la superficie bajo la línea punteada.

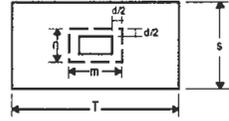
(Debemos trabajar con cargas factoradas)

$$W_{nu} = \frac{P_u}{A_{zap}}$$

$$V_u = P_u - W_{nu} m \times n$$

$$V_u = \text{Cortante por punzonamiento actuante}$$

$$V_c = \text{Resistencia al cortante por punzonamiento en el concreto}$$



$$V_c = 0.27 \left(2 + \frac{4}{\beta_c} \right) \sqrt{f'_c} b_0 d \leq 1.06 \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (\text{en kg y cm})$$

$$\beta_c = \frac{D_{mayor}}{D_{menor}}, \beta_c \leq 2 \Rightarrow V_c = 1.06 \sqrt{f'_c} b_0 d$$

$$b_0 = 2m + 2n \quad (\text{perímetro de los planos de falla})$$

Luego, se debe cumplir: $\frac{V_u}{\phi} \leq V_c$

Esta última nos dará una expresión en función a "d", que debemos resolver.

- Finalmente en la zapata se debe de verificar la capacidad cortante como viga a una distancia "d" de la cara de la columna de apoyo.

Peralte Mínimo: El peralte de la zapata (por encima del refuerzo de flexión), será mayor a 15 cm.

DISTRIBUCIÓN DEL REFUERZO POR FLEXION (ACI 318-99)

- En zapatas en una dirección y zapatas cuadradas en dos direcciones, el refuerzo será distribuido uniformemente a través de todo el ancho de la zapata.
- En zapatas rectangulares en dos direcciones, el refuerzo será distribuido de acuerdo a las siguientes recomendaciones:
 - * El refuerzo en la dirección larga será distribuido uniformemente a través de todo el ancho de la zapata.
 - * El refuerzo en la dirección corta, se deberá repartir en dos partes, una porción (la mayor) será distribuida uniformemente sobre una franja central igual al ancho de la zapata en la dirección corta, siendo este refuerzo el dado por:

$$\frac{A_s \text{ en la franja central}}{A_s \text{ total}} = \frac{2}{\beta + 1}$$

$$\beta = \frac{\text{longitud larga de la zapata}}{\text{longitud corta de la zapata}}$$

El refuerzo restante será distribuido uniformemente sobre las franjas laterales.

TRANSFERENCIA DE LA FUERZA EN LA BASE DE LA COLUMNA

Las fuerzas y los momentos en la base de la columna es transferido a la zapata por apoyo sobre el concreto, con refuerzo de acero y/o dowells.

El esfuerzo de contacto entre la columna y la zapata no deberá exceder la resistencia de aplastamiento del concreto. La resistencia de aplastamiento del concreto será:

Para la columna : $\phi (0.85f'_c) \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$
 Para la zapata : $\phi (0.85f'_c) \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$, siendo: $\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \leq 2$

A_1 = Área cargada

A_2 = Área máxima en la zapata que es geoméricamente igual al área de la columna

$\phi = 0.70$ para columnas estribadas

En caso que se exceda la resistencia de aplastamiento del concreto, se usarán refuerzos o dowels. Pero sea este o no el caso, deberá tenerse un mínimo de refuerzos o dowels igual a $0.005 A_g$ y no menor a 4 varillas.

Aplicación ilustrativa: Diseño de una zapata aislada

Diseñar una zapata aislada para:

$P_D = 180 \text{ tn}$

$P_L = 65 \text{ tn}$

$\sigma_1 = 3.5 \text{ kg/cm}^2$

$D_i = 1.70 \text{ m}$

$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$\gamma_m = 2.1 \text{ t/m}^3$

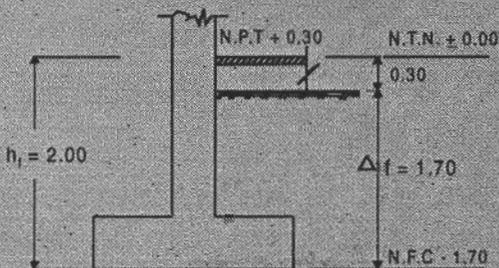
S/C_piso = 500 kg/m^2

Dimensionar la columna con:

$n = 0.25$

$P_g = 1.25P$

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$



Solución:

Dimensionamiento de la Columna $b \cdot D = \frac{P_g}{n \cdot f'_c} = \frac{(125)(245)}{(0.25)(280)} = 4375 \text{ cm}^2$

Usar: $0.55 \times 0.80 \text{ m}^2$

Esfuerzo neto del Terreno

$$\sigma_n = \sigma_t - \gamma_{prom} h_t - S/C = 35 - (2.1)(2) - 0.5 = 30.30 \text{ t/m}^2$$

$$A_{ZAP} = P / \sigma_n = 245 / 30.3 = 8.09 \text{ m}^2 \quad 2.85 * 2.85 \text{ m}^2$$

Para cumplir $L_{v1} = L_{v2} \rightarrow T = 2.85 + (0.80 - 0.55) / 2 = 2.975 \text{ m}$

$$S = 2.85 - (0.80 - 0.55) / 2 = 2.725 \text{ m}$$

Usar $3.00 * 2.75 \text{ m}^2$

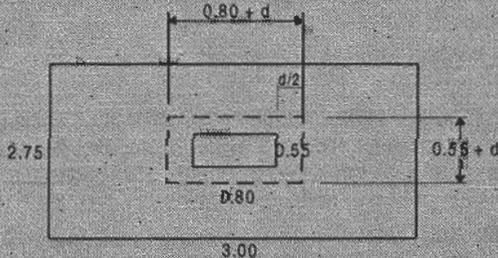
$$L_{v1} = L_{v2} = (3.0 - 0.8) / 2 = 1.10$$

$$= (2.75 - 0.55) / 2 = 1.10 \quad \text{CONFORME}$$

Reacción neta del Terreno

$$W_{NU} = P_L / A_{ZAP} = (180 * 1.4 + 65 * 1.7) / (3 * 2.75) = 362.5 / 8.25 = 43.94 \text{ t/m}^2$$

Dimensionamiento de la Altura h_2 de la Zapata por punzonamiento



Condición de Diseño: $V_u / f = V_c$

$$V_u / \phi = 1 / \phi \{ P_u - W_u (0.80 + d) (0.55 + d) \} \dots \dots \dots (1)$$

$$\beta_c = D_{mayor} / D_{menor} = 0.80 / 0.55 = 1.46 < 2$$

$$V_c = 0.27 \left(2 + \frac{4}{\beta} \right) \sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d \leq 1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d$$

$$V_c = 1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d \dots \dots \dots (2)$$

donde: $b_o = 2 * (0.80 + d) + 2 * (0.55 + d) = 2.7 + 4d$

(1) = (2):

$$362.5 - 43.94 * (0.44 + 1.35 * d + d^2) = 0.85 * 1.06 * \sqrt{210} * 10 * (2.7d + 4d^2)$$

Resolviendo: $d = 0.496 \text{ m}$

Usar: $h = 0.60 \text{ m} \rightarrow d_{prom} = 60 - (7.5 + \phi) = 60 - (7.5 + 1.91) \phi 3 / 4"$
 $R = 7.5 \text{ cm} \quad d_{prom} = 50.59 \text{ cm}$

Verificación de Cortante

$$V_{du} = (W_u \cdot S) (L_v - d) = (43.94 \cdot 2.75) (1.10 - 0.51)$$

$$V_{du} = 71.29 \text{ t}$$

$$V_n = V_{du} / \phi = 83.87 \text{ t}$$

$$V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b \cdot d = 0.53 \cdot \sqrt{210} \cdot 10 \cdot 2.75 \cdot 0.51$$

$$V_c = 107.72 \text{ t} > V_n \quad \text{CONFORME}$$

Diseño por Flexión

$$M_u = (W_u \cdot S) \cdot L_v^2 / 2 = (43.92 \cdot 2.75) \cdot 1.1^2 / 2 = 73.11 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot f_y \cdot (d - \frac{a}{2})} = \frac{73.11 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot (0.9 \cdot 50.59)} = 42.48 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} = \frac{42.48 \cdot 4200}{0.85 \cdot 210 \cdot 275} = 3.63 \text{ cm}, \quad A_s = 39.66 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow a = 3.39 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

Verificación de A_s min:

$$A_{s \text{ min}} = \rho_{\text{TEMP}} \cdot b \cdot d = 0.0018 \cdot 275 \cdot 50.59 = 25.04 \text{ cm}^2 \quad \text{CONFORME}$$

Usar: $A_s = 39.66 \rightarrow n = A_s / A_\phi = 39.66 / 2.85 = 13.92 \approx 14$

$$s = \frac{2.75 - 2r - \phi}{n - 1} = \frac{2.75 - 0.15 - 0.019}{13} = 0.20 \text{ m}$$

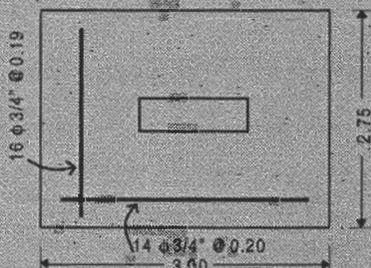
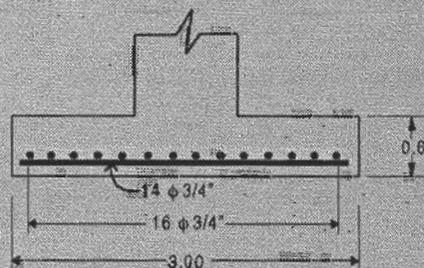
Usar: $14 \phi 3/4" @ 0.20 \text{ m}$

En Dirección Transversal

$$A_{sT} = A_s \cdot 3.00 / 2.75 = 43.27 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow n = 15.18 \approx 16, \quad s = 0.19 \text{ m}$$

Usar: $16 \phi 3/4" @ 0.19 \text{ m}$



Longitud de Desarrollo del Refuerzo

En este caso la sección crítica para la longitud de desarrollo es la misma que la sección crítica para flexión.

Longitud disponible para cada barra, $L_d = L_v - r$
 $L_d = 1.10 - 0.075 = 1.025 \text{ m}$

Para barras en tracción:

$$\phi \leq \text{No.11} \rightarrow L_d = 0.06 \left(\frac{A_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}} \right) \geq 0.0057 d_b f_y$$

$$\geq 30 \text{ cm}$$

Como el espaciamiento es $s = 19 \text{ cm} > 15 \text{ cm}$

$$L_{de} = \lambda_d L_d = 0.80 L_d$$

$$L_d = 0.06 \frac{2.85 \cdot 4200}{\sqrt{210}} = 49.6 \text{ cm} \quad \begin{matrix} > 45.7 \text{ cm} \\ > 30 \text{ cm} \end{matrix} \quad \text{GONFORME}$$

$$L_d = 0.0057 (1.91) 4200 = 45.7 \text{ cm}$$

$$L_{de} = 0.8 \cdot 49.6 = 39.7 \text{ cm} < L_{disD} = 102.5 \text{ cm} \quad \text{GONFORME}$$

Transferencia de fuerza en la interfase de columna y cimentación

a. Resistencia al Aplastamiento sobre la Columna

Se tiene $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$$P_u = 362.50 \text{ t} \quad P_n = P_u / \phi = 362.5 / 0.7 = 517.86 \text{ t}$$

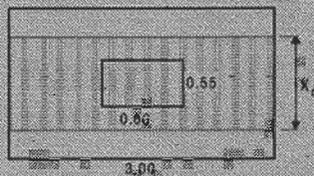
Resistencia al Aplastamiento en la Columna, P_{nb}

$$P_{nb} = 0.85 f'_c A_c = 0.85 \cdot 280 \cdot (10) \cdot 0.55 \cdot 0.80 = 1047.20 \text{ t}$$

$$P_n < P_{nb} \quad \text{GONFORME}$$

b. Resistencia al Aplastamiento en el Concreto de la Cimentación

$$P_n = 517.86 \text{ t} \quad P_{nb} = 0.85 f'_c A_o$$



donde:
$$A_o = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} A_{col} \leq 2A_{col}$$

A_2 Es el área máxima de la superficie de apoyo que es geoméricamente similar y concéntrica con el área cargada A_1 .

$$X_o / 3.0 = 0.55 / 0.80 \rightarrow X_o = 2.06 \quad A_2 = 3.0 X_o = 6.19 \text{ m}^2$$

$$\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{6.19}{0.55 \cdot 0.8}} = 3.75 > 2$$

∴ Usar: $A_o = 2A_c$, $P_{nb} = 0.85 f_c A_o$, $P_{nb} = 0.85 (210) 10^2 \cdot 0.55 \cdot 0.80$
 $= 1570.8 \text{ t} > P_n$ CONFORME

Dowells entre Columna y Cimentación

Si $P_n \leq P_{nb} \Rightarrow A_{s \text{ min}} = 0.005 A_{col}$ Con 4 ϕ como mínimo

2. EFECTO DE CARGA EXCENTRICA SOBRE CIMENTACIONES

2.1 Definición

Las cimentaciones de columna exterior pueden estar sujetas a carga excéntrica. Si la excentricidad es grande, puede resultar esfuerzo de tracción sobre un lado de la cimentación. Es recomendable dimensionar de manera que la carga está dentro del tercio central de manera de evitar esfuerzos de tracción en el suelo que teóricamente puede ocurrir antes de la redistribución de esfuerzos.

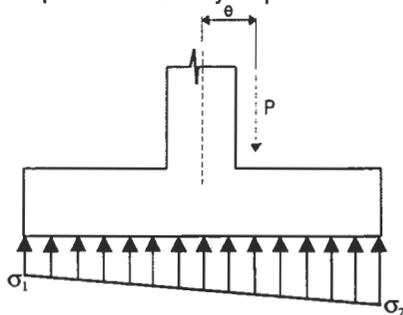
Caso 1: Excentricidad $e < T / 6$

En este caso, el esfuerzo directo de compresión es mayor que el esfuerzo de flexión

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{A_z} \pm \frac{M_c}{I}$$

donde:

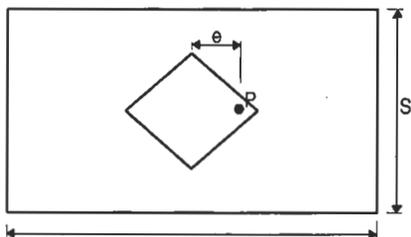
$$\frac{P}{A_z} > \frac{M_c}{I}$$



$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{P}{A_z} + \frac{Pe(T/2)}{ST^3/12}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_z} + \frac{6Pe}{ST^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{P}{A_z} - \frac{6Pe}{ST^2}$$

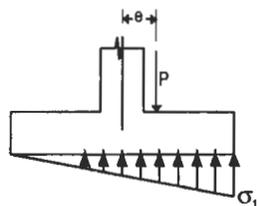


Caso 2: Excentricidad $e = T/6$

En este caso el esfuerzo directo es igual al esfuerzo de flexión.

$$\frac{Mc}{I} = \frac{Pec}{I} = \frac{P\left(\frac{T}{6}\right)\left(\frac{T}{2}\right)}{S\left(\frac{T^3}{12}\right)} = \frac{P}{ST} = \frac{P}{A_z}$$

$$\sigma_1 = 2 \frac{P}{A_z}, \sigma_2 = 0$$



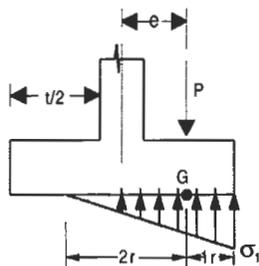
Caso 3: Excentricidad $e > T/6$

Si la carga actúa fuera del tercio central, resulta esfuerzos de tracción en el lado opuesto a la excentricidad. Si el esfuerzo máximo debido a la carga P no excede el esfuerzo admisible neto, no se espera que se levante ese lado de la cimentación y el centro de gravedad de la distribución triangular de esfuerzos portantes debe coincidir con el punto de acción de la carga P.

$$r = T/2 - e$$

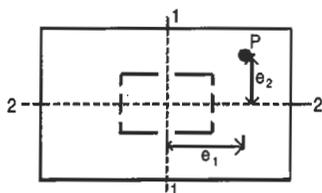
$$P = 1/2 (3r) \sigma_1 S$$

$$\sigma_1 = \frac{2P}{3rS} = \frac{2P}{3\left(\frac{T}{2} - e\right)}$$



Caso 4: Excentricidad al rededor de dos ejes (Carga Biaxial)

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_z} + \frac{Pe_1c_1}{I_1} + \frac{Pe_2c_2}{I_2}$$



2.2 Aplicación Ilustrativa: Influencia de la Excentricidad de la carga

Dimensionar en planta la cimentación de la zapata aislada que se muestra en la figura adjunta.

$$P_D = 180 \text{ t}$$

$$P_L = 65 \text{ t}$$

$$\sigma_1 = 3.5 \text{ kg/cm}^2 \text{ para } D_f = 1.70 \text{ m}$$

$$\gamma_m = 2.1 \text{ t/m}^3 \quad S/C_{\text{piso}} = 500 \text{ kg/m}^2$$

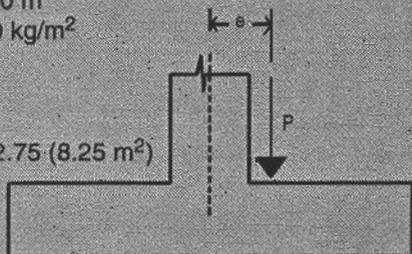
Columna: $0.55 \times 0.80 \text{ m}^2$

a) $e = 0.00 \text{ m}$ Area: $= 3.00 \times 2.75 (8.25 \text{ m}^2)$

b) $e = 0.25 \text{ m}$

c) $e = 0.70 \text{ m}$

d) $e = 0.90 \text{ m}$



Solución:

b) $e = 0.25 \text{ m}$ ($M = Pe = 61.25 \text{ t}\cdot\text{m}$)

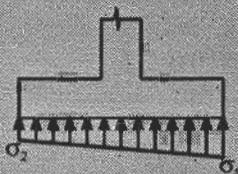
1er. Tanteo:

$$\sigma_n = 30.3 \text{ t/m}^2 \quad T = 3.40 \text{ m}$$

$$\sigma_1 S = q_1 = P/T + 6 P e / T^2 = 245 / 3.4 + 6 \cdot 245 \cdot 0.25 / (3.4)^2$$

$$\sigma_1 S = 72.06 + 31.79 = 103.85 \text{ t/m}$$

$$\sigma_1 = \sigma_n$$



Por tanto: $S = 103.85 / 30.3 = 3.43 \text{ m}$

$$3.45 \times 3.40 \text{ m}^2$$

2do. Tanteo:

$$T = 3.80 \text{ m}$$

$$\sigma_1 S = 64.47 + 25.45 = 89.92 \text{ t/m} \Rightarrow S = 2.97 \text{ m}$$

Usar: $S \times T = 3.00 \times 3.80$ CONFORME $(11.4 \text{ m}^2) = 1.38 S_0$

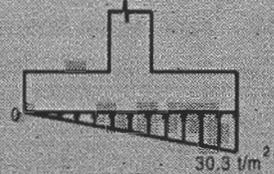
$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{A_z} \pm \frac{6Pe}{ST^2} = \frac{245}{3 \cdot 3.80} \pm \frac{6 \cdot 245 \cdot 0.25}{3 \cdot 3.80^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{21.49 + 8.48}{21.49 - 8.48} \right) = \left(\frac{29.98}{13.01} \right) \text{ t/m}^2 < \sigma_n = 30.3 \text{ t/m}^2$$

c) $e = 0.70 \text{ m}$ (171.5 t·m)
 $\Rightarrow T = 4.2 \text{ m}$

$$\sigma_1 S = q_1 = 2 \frac{P}{T} = 116.7 \text{ t/m}$$

$$S = 116.67 / 30.3 = 3.85 \text{ m}$$



Usar: $S \cdot T = 3.85 \text{ m} \cdot 4.20 \text{ m} = 16.17 \text{ m}^2 = 1.96 S_0$

d) $e = 0.90 \text{ m}$ ($M = 220.5 \text{ t·m}$)

ter. Tanteo:

$$T = 4.50 \text{ m} \quad T/6 = 0.75 < e$$

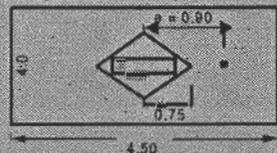
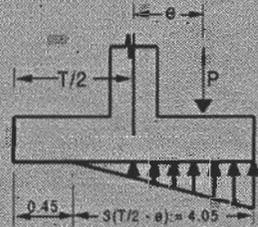
$$\sigma_1 S = \frac{2P}{3\left(\frac{T}{2} - e\right)} = \frac{2 \cdot 245}{3\left(\frac{4.5}{2} - 0.9\right)} = 120.99 \text{ t/m}$$

$$S = \frac{\sigma_1 S}{\sigma_n} = 3.99 \text{ m}$$

Usar: $S \cdot T = 4 \text{ m} \cdot 4.50 \text{ m} = (18.00 \text{ m}^2) = 2.18 S_0$

$$\sigma_1 = \frac{120.99}{S} = 30.25 \text{ m}$$

$$\sigma_2 = 0$$



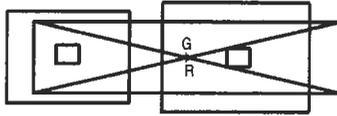
3. CIMENTACION COMBINADA

3.1 Definiciones

Este tipo de cimentación puede ser conveniente principalmente en los siguientes casos:

a. **Columnas muy Cercanas entre si**

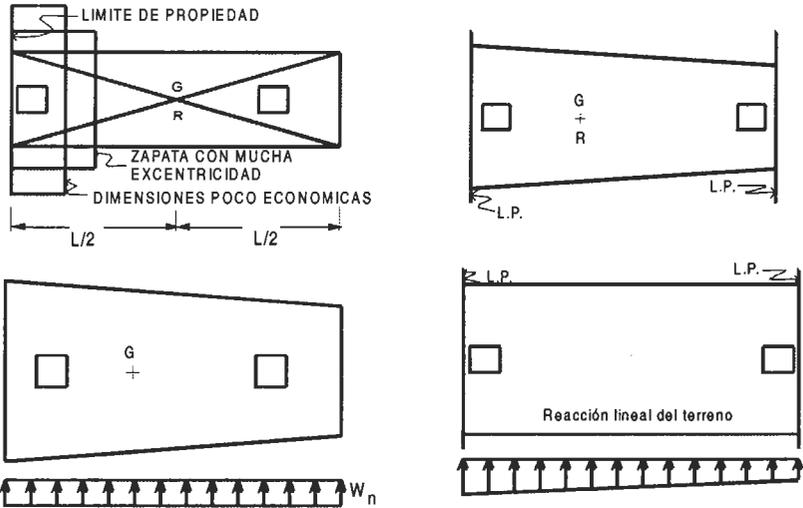
Para esta condición si se usarán zapatas aisladas, podrían traslaparse o bien podrían resultar de proporciones poco económicas.



Es conveniente que el punto de aplicación de la resultante de las cargas actuantes coincida con el centro de gravedad de la zapata combinada para poder considerar una reacción uniforme repartida del terreno.

b. Columna Exterior muy cercana del límite de propiedad

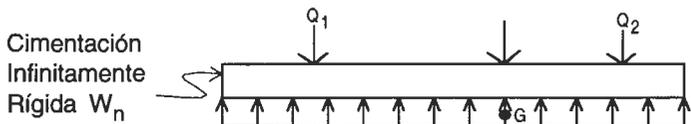
El punto G fija la longitud de la zapata para una reacción uniforme repartida del terreno.

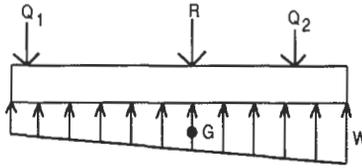


Para el análisis de zapatas combinadas se usará el método convencional:

Método Rígido, de acuerdo a las siguientes hipótesis:

- La cimentación es infinitamente rígida, por lo tanto la deflexión de la cimentación no influye en la distribución de las presiones.
- La presión del terreno está distribuida en una línea recta o en una superficie plana.

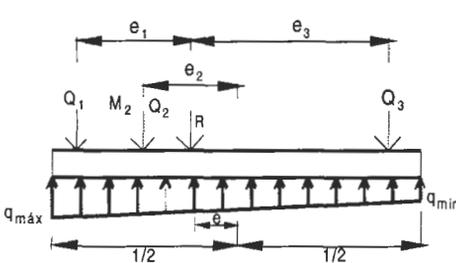




3.2 Diseño de Cimentaciones combinadas por el método convencional

3.2.1 Procedimiento:

- Determinación de las resultantes de las cargas actuantes (R) y la ubicación de la resultante.
 $R = \Sigma Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$
 Si cualquier columna esta sujeto a momento flexionante, el efecto del momento deberá ser tomado en consideración.
- Determinación de la distribución de presiones.
- Determine el ancho de la cimentación.
- Determinar el diagrama de fuerza cortante.
- Determinar el diagrama de momentos flectores.
- Diseñar la cimentación como una viga continua.
- Diseñar la cimentación en dirección transversal en forma equivalente al de zapatas aisladas.



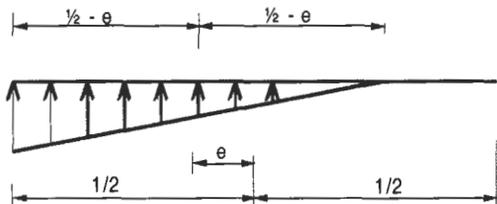
$$e = \frac{Q_1 e_1 + Q_2 e_2 - Q_3 e_3 - M_2}{R}$$

$$\text{Si } e \leq \frac{L}{6}$$

$$q_{1,2} = \frac{R}{L} (1 \pm 6 e / L)$$

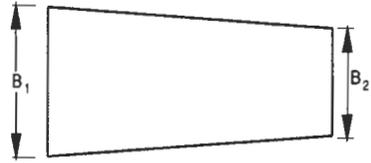
$$\text{Si } e \leq \frac{L}{6}$$

$$q_1 = \frac{2R}{3(1/2 - e)}$$



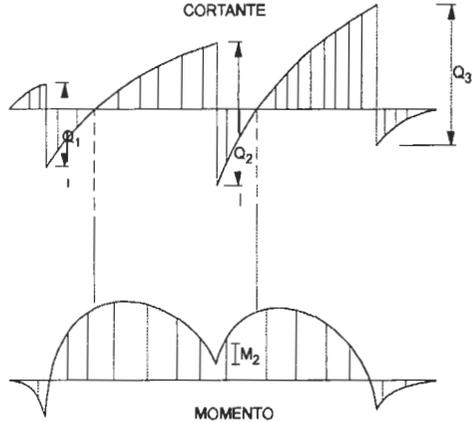
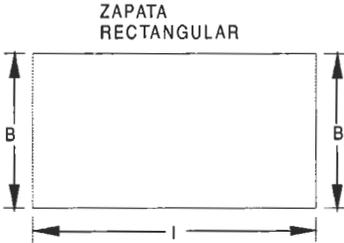
3.2 Determinación del ancho de la cimentación

$$B_1 = q_1 / \sigma_n = \frac{t/m}{t/m^2} \rightarrow (m)$$



q esta expresado en t / unidad de longitud de la cimentación

Si $e = 0$



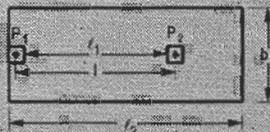
3.3 Aplicación de Diseño de una Zapata combinada

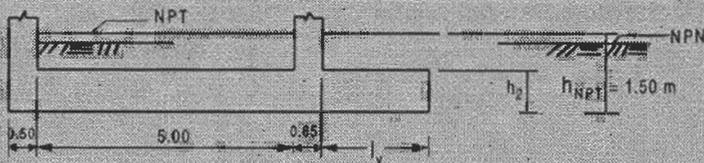
Diseñar la zapata combinada que se muestra en la figura. La columna exterior esta sujeta a $P_D = 75 \text{ t}$, $P_L = 35 \text{ t}$ y la columna interior esta sujeta a $P_D = 125 \text{ t}$, $P_L = 50 \text{ t}$. El esfuerzo permisible del terreno al nivel del fondo de cimentación es de 2.0 kg/cm^2 y $D_f = 1.20 \text{ m}$.

$h_f = h_{NPT} = 1.50 \text{ m}$. Considere un peso promedio del suelo y la cimentación de $\gamma_{prom} = 2.0 \text{ t/m}^3$, S/C = 400 kg/cm^2 (sobre el piso); $f_c = 175 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Columnas: $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

C1: $0.50 * 0.50 \text{ m}^2 \Rightarrow P_D = 75 \text{ t} \quad P_L = 35 \text{ t}$
 C2: $0.65 * 0.65 \text{ m}^2 \Rightarrow P_D = 125 \text{ t} \quad P_L = 50 \text{ t}$





Solución:

$$A_{zap} = \frac{PT}{\sigma_n}$$

$$P_T = P_1 + P_2 = 110 + 175 = 285 \text{ t}$$

$$\sigma_n = \sigma_t - h_{NPT} \cdot \gamma_m - S / C$$

$$= 20 - 1.5 \cdot 2.0 - 0.4 = 16.60 \text{ tn/m}^2$$

$$A_{ZAP} = \frac{285}{16.60} = 17.17 \text{ m}^2$$

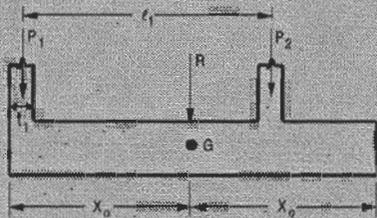
$$R \cdot X_0 = P_1 \cdot \frac{t_1}{2} + P_2 \cdot (L_1 + \frac{t_1}{2})$$

$$X_0 = \frac{110 \cdot 0.25 + 175 \cdot 0.825}{285} = 3.67 \text{ m}$$

$$L_z = 2 \cdot X_0 = 7.35 \text{ m} \Rightarrow L_v = 7.35 - (0.5 + 5.0 + 0.65) \Rightarrow L_v = 1.2 \text{ m}$$

$$b = \frac{A_z}{L_z} = \frac{17.17}{7.35} = 2.34 \text{ m}$$

Usar : $b = 2.40 \text{ m}$



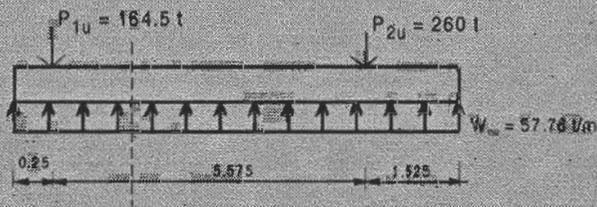
Reacción neta por unidad de Longitud será:

$$W_{NU} = \frac{P_{1U} + P_{2U}}{L_z} = \frac{164.5 + 260}{7.35} = 57.76 \text{ t/m}$$

Reacción neta por unidad de área:

$$W_{nu} = \frac{W_{NU}}{b} = \frac{57.76}{2.40} = 24.07 \text{ t/m}^2 = 2.41 \text{ kg/cm}^2$$

Diseño en el sentido longitudinal



$$V_z = 0 = -P_{1U} + W_{nu} \cdot X_o = 0 \rightarrow X_o = \frac{164,5}{57,76} = 2,85 \text{ m}$$

$$M_{m\acute{a}x} = W_{nu} \cdot \frac{X_o^2}{2} - P_{1U} \cdot (X_o - \frac{t_1}{2}) = 57,76 \cdot \frac{2,85^2}{2} - 164,5 \cdot 2,60$$

$$M_{m\acute{a}x} = -193,12 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Dimensionamiento de la altura h_z de la zapata

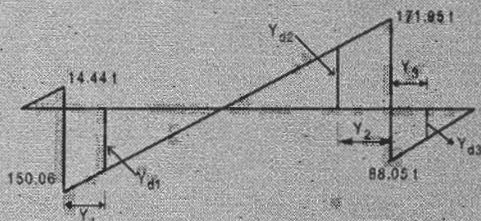
$$M_u = \phi^2 f_c b d^2 w (1 - 0,59 w)$$

$$193,12 = 0,9 \cdot 0,175 \cdot 2,4 \cdot d^2 \cdot 0,09 (1 - 0,59 \cdot 0,09)$$

$$d = 77,43 \text{ cm}$$

$$h_z = 77,43 + 5 + 1,27 = 83,7 \text{ cm}$$

$$\text{Usar: } h_z = 85 \text{ cm}$$



Verificación por Cortante

$$d = 85 - (5 + \frac{\phi}{2}) = 85 - (5 + 1,27) = 78,73 \text{ cm}$$

$$y_1 = \frac{t_1}{2} + d = 0,25 + 0,79 = 1,04 \text{ m } V_{d1} = -150,06 + 57,76 \cdot 1,04 = -89,99 \text{ t}$$

$$y_2 = \frac{t_2}{2} + d = 0,325 + 0,79 = 1,12 \text{ m } V_{d2} = 171,95 - 57,76 \cdot 1,12 = 107,55 \text{ t}$$

$$d = 85 - (7,50 + \frac{\phi}{2}) = 85 - (7,50 + 0,95) = 76,55 \text{ m}$$

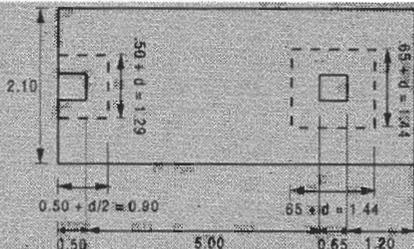
$$y_3 = \frac{t_2}{2} + d = 0,325 + 0,766 = 1,09 \text{ m } V_{d3} = 57,76 (1,525 - 1/3) = 25,10 \text{ t}$$

$$V_u = V_{d2} = 107,55 \text{ t} \rightarrow \frac{V_u}{\phi} = 126,53 \text{ t}$$

$$V_c = 0,53 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b \cdot d = 0,53 \cdot \sqrt{175} (10) \cdot 2,40 \cdot 0,79 = 132,93 \text{ t}$$

$$\frac{V_u}{\phi} \leq V_c \quad \therefore \text{CONFORME}$$

Diseño por Punzonamiento



a) **Columna Exterior**

$$V_u = P_{u1} - W_{un} (0.90) (1.29)$$

$$= 164.5 - 24.17 \cdot 0.90 \cdot 1.29 = 136.55 \text{ t}$$

$$\frac{V_u}{\phi} = 160.65 \text{ t}$$

$$V_c = 0.27 \left(2 + \frac{4}{\beta} \right) \sqrt{f'_c} b_o d \leq 1.1 \sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d$$

$$\beta = \frac{D_{\text{mayor}}}{D_{\text{menor}}} = 1.0 \Rightarrow 0.27 \left(2 + \frac{4}{1} \right) = 1.62 \Rightarrow \text{Usar } 1.1$$

$$V_c = 1.1 \sqrt{175} (10) (3.09) 0.79 = 355.22 \text{ t} \geq V_n$$

$$b_o = 0.90 \cdot 2 + 1.29 = 3.09 \text{ cm}$$

b) **Columna Interior**

$$V_u = 260 - 24.05 \cdot 1.44 \cdot 1.44 = 210.13 \text{ t} \Rightarrow V_n = 247.21 \text{ t}$$

$$V_c = 1.1 \sqrt{175} (10) (4 \cdot 1.44) 0.79 = 662.16 \text{ t} > V_n \therefore \text{CONFORME}$$

Diseño por Flexión

a) **Refuerzo Superior**

$$M_u = 193.12 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$a = \frac{79}{5} = 15.80 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{193.12 \cdot 10^5}{0.4 \cdot 4200 \cdot 79 \cdot 0.9} = 7186 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{7186 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 175 \cdot 240} = 8.45 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 68.3 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 8.04 \text{ cm}$$

Usar: $14 \phi 1" (70.98 \text{ cm}^2)$

$$s = \frac{240 - 0.15 - 0.0254}{13} = 0.17 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{70.98}{240 \cdot 79} = 0.00374 > \rho_{\text{min}} = 0.0018 \text{ CONFORME}$$

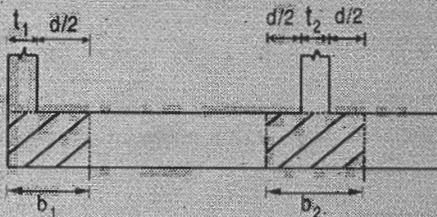
b) Refuerzo Inferior

$$M_u = 57.76 \cdot 1.20^2 / 2 = 41.59 \text{ t-m} \quad A_s = 15.5 \text{ cm}^2$$

$$A_{s\min} = 0.0018 b d = 0.0018 \cdot 240 \cdot 76.55 = 33.07 \text{ cm}^2$$

Usar: $12 \phi 3/4" @ s = \frac{2.40 - 0.15 \cdot 0.0191}{11} = 0.20 \text{ m}$

Diseño en Dirección Transversal



$$b_1 = 50 + 79/2 = 89.5 \text{ cm}$$

$$b_2 = 65 + 79 = 144.0 \text{ cm}$$

Usar: $b_1 = 0.90 \text{ m}$

$b_2 = 1.45 \text{ m}$

Diseño de Viga Exterior

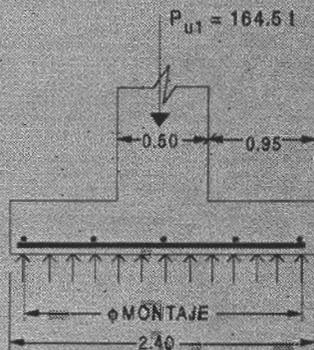
$$q_{Nu} = \frac{P_{u1}}{b} = \frac{164.5}{2.40} = 68.54 \text{ t/m}$$

$$M_{u\max} = \frac{68.54 \cdot 0.95^2}{2} = 30.93 \text{ t-m}$$

$$A_s = \frac{30.93 \cdot 10^5}{3780 \cdot 0.9 \cdot 76.55} = 119 \text{ cm}^2$$

$$A_{s\min} = 0.0018 \cdot 90 \cdot 7655 = 12.40 \text{ cm}^2$$

Usar: $5 \phi 3/4"$



Refuerzo por Montaje

$$A_s \Rightarrow s = 36 \phi = 36 \cdot 1.91 = 68.6 \text{ cm}$$

Usar: $5 \phi 3/8" @ s = \frac{2.40 - 0.20}{4} = 0.55 \text{ m}$

Diseño de Viga Interior

$$q_{Nu} = \frac{Pu_2}{b} = \frac{260}{2.4} = 108.33 \text{ t/m}$$

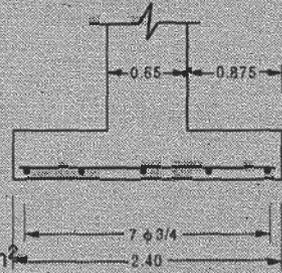
$$M_u = 108.33 \left(\frac{0.875^2}{2} \right) = 41.47 \text{ t/m}$$

$$A_s = 16.3 \text{ cm}^2$$

$$d = 85 - (7.5 + 1.9 + 1.9/2) = 74.65 \text{ cm}$$

$$A_{s \text{ min}} = 0.0018 \cdot 145 \cdot 74.65 = 19.48 \text{ cm}^2$$

Usar: $7 \phi 3/4''$ (19.95 cm²)



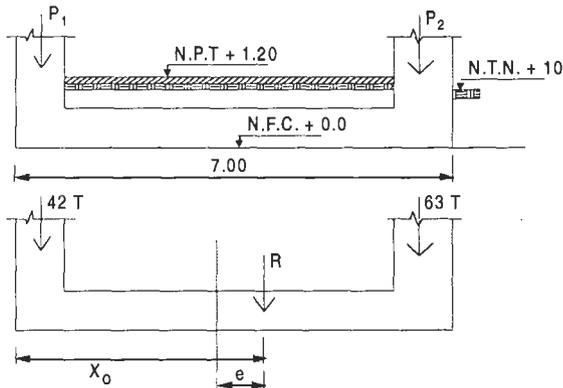
Aplicación:

Diseñar la zapata combinada sólo por flexión en sentido longitudinal para la sección de momento máximo. Considere una solución rectangular.

C1 : 0.35 * 0.35 m²
 $P_D = 30 \text{ t}, P_L = 12 \text{ t}$

C2 : 0.40 * 0.40 m².
 $P_D = 45 \text{ t}, P_L = 18 \text{ t}$

$f'_c = 175 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_t = 1.5 \text{ kg/cm}^2$
 $s / c_{\text{piso}} = 400 \text{ kg/m}^2$
 $\gamma_m = 2.1 \text{ t/m}^3$



Solución:

$$\sigma_n = \sigma_t - \gamma_m h_f - s / c$$

$$\sigma_n = 15 - 2.10 \cdot 1.20 - 0.40 = 12.08 \text{ t/m}^2$$

$$L_z = 7.00 \text{ m} \Rightarrow A_{\text{zap}} = B L_z = 7.0 B$$

$$R X_0 = 42 \cdot 0.175 + 63 \cdot 6.80 \Rightarrow X_0 = 435.75 / 105 = 4.15 \text{ m}$$

$$e = X_0 - L_z / 2 = 4.15 - 3.50 = 0.65 \text{ m} < L_z / 6 = 1.17$$

$$\therefore q_{1,2} = \frac{P}{L_z} \pm \frac{6Pe}{L_z^2} = \frac{105}{7} \pm \frac{6(105)0.65}{7^2}$$

$$q_1 = 23.36 \text{ t/m}, q_2 = 6.64 \text{ t/m}$$

$$q_1 = \sigma_n \cdot B \Rightarrow B = 23.36 / 12.08 = 1.93 \text{ m} \quad \text{Usar: } B = 2.00 \text{ m}$$

Diseño por Flexión en sentido longitudinal

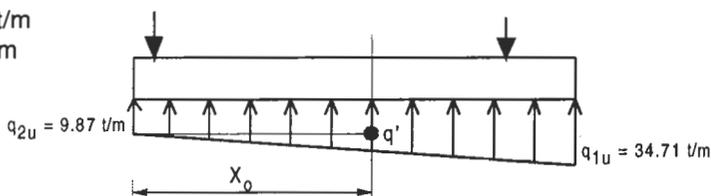
$$R X_o = 62.4 * 0.175 + 93.6 * 6.80$$

$$X_o = 4.15 \text{ m}$$

$$e = 0.65 \text{ m}$$

$$q_{u1} = 34.71 \text{ t/m}$$

$$q_{u2} = 9.87 \text{ t/m}$$



Secciones de momento máximo $V_x = 0$

$$V_x = -62.4 + 9.87 \cdot X_o + q' \cdot \frac{X_o}{2} = 0 \quad \frac{q'}{X_o} = \frac{q_{u1} - q_{u2}}{L_z} \Rightarrow q' = 3.55 \cdot X_o$$

$$-62.4 + 9.87 \cdot X_o + 1.77 \cdot X_o^2 = 0 \quad X_o^2 + 5.56 \cdot X_o - 35.16 = 0$$

$$X_o = -2.78 + 6.55 = 3.77 \text{ m}$$

$$M_{\text{máx}} = -66.4(X_o - 0.175) + 9.87 \cdot \frac{X_o^2}{2} + 3.55 \cdot \frac{X_o^2}{2} \cdot \left(\frac{X_o}{3}\right)$$

$$M_{\text{máx}} = -224.26 + 70.14 + 31.70 = -122.4 \text{ t-m}$$

$$\therefore 122.4 * 10^5 = 0.9 * 175 * b * d^2 * w (1 - 0.59 w)$$

$$\text{Si: } \rho = 0.004 \Rightarrow w = \rho \frac{f_y}{f_c} = 0.004 \frac{4200}{175} = 0.10$$

$$b = 200 \text{ cm}$$

$$122.4 * 10^5 = 2964.15 d^2 \Rightarrow d = 64.3 \text{ cm}$$

Usar:

$$h = 75 \text{ cm} \quad \Rightarrow d = 75 - 5 - 1.91 / 2 = 69.05 \text{ cm}$$

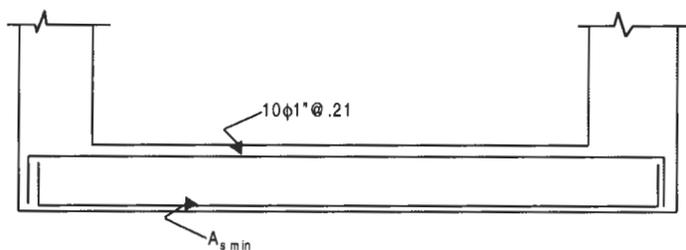
$$A_s = 52.11 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow a = 7.4 \text{ cm}$$

$$A_s = 49.5 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow 18 \phi 3/4 \text{ " @ } 0.11 \text{ m}$$

$$s = \frac{2 - 0.15 - 0.0019}{17} = 0.11$$

Alternativa:

$$\text{Usando } \phi 1 \text{ " } \Rightarrow 10 \phi 1 \text{ " @ } 0.21 \text{ m}$$



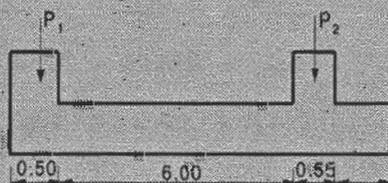
Aplicación:

Se tiene una zapata combinada de solución rectangular en planta. Dimensionar la altura de la zapata para el momento máximo y considerando:

$$\begin{aligned} \rho &= 0.6\% \\ f'_c &= 175 \text{ kg/cm}^2 \\ f_y &= 2800 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_1 &= 1.3 \text{ kg/cm}^2 \\ h_f &= 1.00 \text{ m. } s/c_{\text{piso}} = 0.4 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1: P_D &= 85 \text{ t } P_L = 15 \text{ t} \\ P_2: P_D &= 95 \text{ t } P_L = 25 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &: 0.45 \times 0.50 \\ C_2 &: 0.50 \times 0.55 \end{aligned}$$



Solución:

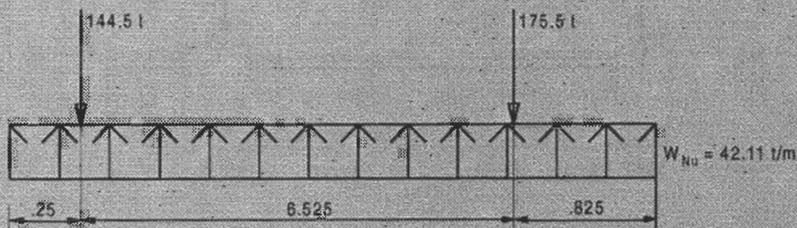
$$\begin{aligned} \sigma_n &= 13 - 1 \cdot 2.1 - 0.4 = 10.5 \text{ t/m}^2 \\ 100 \cdot 0.25 + 120 \cdot 6.775 &= 220 X_o \Rightarrow X_o = 3.80 \text{ m} \\ L_z = 2 X_o &= 7.60 \Rightarrow L_v = 0.55 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$b = \frac{A_z}{L_z} = \frac{220}{10.5 \cdot 7.60} = 2.75 \text{ m}$$

$$W_{Nu} = \frac{P_{1u} + P_{2u}}{L_z} = \frac{144.5 + 175.5}{7.60} = 42.11 \text{ t/m}$$

$$V_u = -144.5 + 42.11 X_o = 0 \Rightarrow X_o = 3.43 \text{ m}$$

$$M_{umax} = 42.11 \cdot 3.43^2 / 2 - 144.5(3.18) = -211.80 \text{ t-m}$$



Dimensionamiento de la Altura (h_z)

$$M_u = \phi f'_c b d^2 w (1 - 0.59 w)$$

$$\rho = 0.006 \Rightarrow w = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.006 \frac{2800}{175} = 0.096$$

$$221.8 \cdot 10^5 = 0.9 \cdot 175 \cdot 275 d^2 \cdot 0.096 (1 - 0.59 \cdot 0.096)$$

$$d = 73.34 \text{ cm} \Rightarrow h = d + 5 + 1.27 = 76.61 \text{ cm}$$

Usar: $h_z = 0.80 \text{ m}$

Zapata combinada trapezoidal

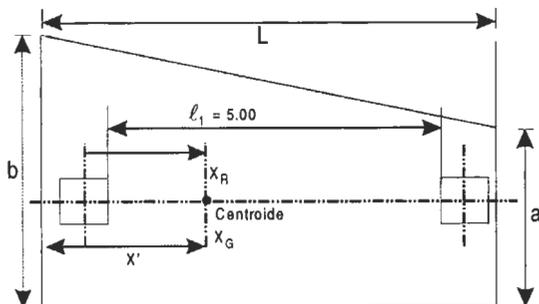
Dimensionar en planta la zapata combinada que se muestra en la figura. La columna exterior está sujeta a $P_D = 120 \text{ t}$, $P_L = 80 \text{ t}$ y la columna inferior está sujeta a $P_D = 90 \text{ t}$; $P_L = 65 \text{ t}$. El esfuerzo permisible del terreno al nivel del fondo de cimentación es de 2 Kg/cm^2 y $D_f = 1.20 \text{ m}$.

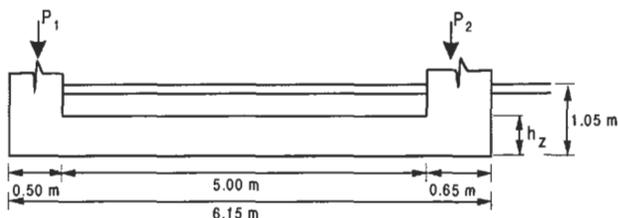
$h_f = h_{NPT} = 1.50 \text{ m}$. Considere un peso promedio del suelo y la cimentación de $\gamma_{prom} = 2.0 \text{ t/m}^3$, $S/C = 400 \text{ kg/m}^2$ (sobre el piso); $f'_c = 175 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Columnas: $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

$$C_1: 0.50 \cdot 0.50 \text{ m}^2 \Rightarrow P_D = 120 \text{ t} \quad P_L = 80 \text{ t}$$

$$C_2: 0.65 \cdot 0.65 \text{ m}^2 \Rightarrow P_D = 90 \text{ t} \quad P_L = 65 \text{ t}$$





Solución:

$$\sigma_n = \sigma_t - h_{NPT} \cdot \gamma_m - S/C$$

$$\sigma_n = 20 - 1.5 \cdot 2.0 - 0.4 = 16.60 \text{ t/m}^2$$

Dimensionamiento:

Para llegar a conseguir que la excentricidad (e) sea igual a cero se debe tomar en consideración que el centro de gravedad del trapecio (X_G) coincide con el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas actuantes (X_R).

$$A_{ZAPATA} = \frac{R}{\sigma_n}$$

$$R = P_1 + P_2 = (120 + 30) + (90 + 65) = 200 \text{ t} + 155 \text{ t} = 355 \text{ t}$$

$$\sigma_n = 16.60 \text{ t/m}^2$$

$$\Rightarrow A_{zapata} = \frac{355 \text{ t}}{16.60 \text{ t/m}^2} = 21.39 \text{ m}^2$$

$$R_x(X_R) = P_1 \cdot t_1/2 + P_2(t_1 + L_1 + t_2 / 2)$$

$$355 \cdot (X_R) = 200 \cdot (0.50/2) + 155(0.5 + 5.0 + 0.65/2)$$

$$\Rightarrow X_R = \frac{50 + 902.875}{355} = \frac{952.875}{355} = 2.68 \text{ m}$$

(distancia horizontal desde el extremo izquierdo de la zapata)

OBS.: Cumple que X_R esta entre $L/3$ y $L/2$

$$\frac{L}{3} = \frac{6.15}{3} = 2.05 \text{ m}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{6.15}{2} = 3.07 \text{ m}$$

$$X_R = 2.68 \text{ m} \quad \text{OK!}$$

Como

$$A_{zapata} = 21.39 \text{ m}^2$$

$$A_{zapata} = \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad L = 21.39 \text{ m}^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2} \right) (6.15 \text{ m}) = 21.39 \text{ m}^2 \Rightarrow a + b = 6.96 \text{ m} \dots\dots\dots(1)$$

Como
$$x' = X_R = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2a + b}{a + b}\right) = 2.68 \text{ m}$$

$$\left(\frac{6.15}{3}\right)\left(\frac{2a + b}{6.96}\right) = 2.68$$

$$\Rightarrow 2a + b = 9.10 \text{ m} \dots\dots\dots(2)$$

de (1) y (2):

$a = 2.14 \text{ m}$
 $b = 4.82 \text{ m}$

Usar : $a = 2.15 \text{ m}$
 $b = 4.85 \text{ m}$

4. ZAPATA CONECTADA

4.1 Definición

La zapata conectada está constituida por una zapata excéntrica y una zapata interior unida por una viga de conexión rígida, que permite controlar la rotación de la zapata excéntrica correspondiente a la columna perimetral. Se considera una solución económica, especialmente para distancias entre ejes de columnas mayores de 6 m. Usualmente es más económico que la zapata combinada.

Estructuralmente se tienen dos zapatas aisladas, siendo una de ellas excéntricas, la que está en el límite de propiedad y diseñada bajo la condición de presión uniforme del terreno; el momento de flexión debido a que la carga de la columna y la resultante de las presiones del terreno no coinciden, es resistido por una viga de conexión rígida que une las dos columnas que forman la zapata conectada.

La viga de conexión debe ser muy rígida para que sea compatible con el modelo estructural supuesto. La única complicación es la interacción entre el suelo y el fondo de la viga. Algunos autores recomiendan que la viga no se apoye en el terreno, o que se apoye debajo de ella de manera que solo resista su peso propio. Si se usa un ancho pequeño de 30 ò 40 cm, este problema es de poca importancia para el análisis

4.2 Dimensionamiento de la viga de conexión

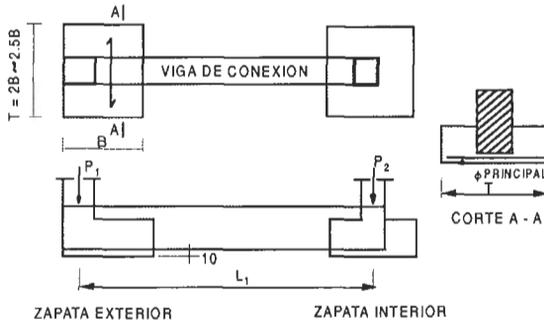
$$h = \frac{L_1}{7} \quad b = \frac{P_1}{31.L_1} \geq \frac{h}{2}$$

donde:

L_1 : espaciamiento entre la columna exterior y la columna interior.

P_1 : carga total de servicio de la columna exterior.

4.3 Dimensionamiento de la Zapata Exterior



La zapata exterior transfiere su carga a la viga de conexión, actuando la zapata como una losa en voladizo a ambos lados de la viga de conexión. Se recomienda dimensionarla en planta considerando una dimensión transversal igual a 2 ó 2.5 veces la dimensión en la dirección de la excentricidad.

4.4 Viga de Conexión

Debe analizarse como una viga articulada a las columnas exterior e interior, que soporta la reacción neta del terreno en la zapata exterior y su peso propio.

4.5 Zapata Interior

Se diseña como una zapata aislada. Puede considerarse la reacción de la viga de conexión. En el diseño de cortante por punzonamiento se considera la influencia de la viga de conexión en la determinación de la zona crítica.

4.6 Aplicación ilustrativa: Diseño de una Zapata Conectada

Diseñar la zapata conectada que se muestra en la figura adjunta.

La columna exterior P_1 está sujeta a $P_D = 70$ t, $P_L = 26$ t

La columna interior P_1 está sujeta a $P_D = 120$ t, $P_L = 45$ t

La capacidad permisible del terreno al nivel del fondo de cimentación es de:

$$h_1 = 1.50 \text{ m}$$

$$\gamma_m = 2.0 \text{ t/m}^3$$

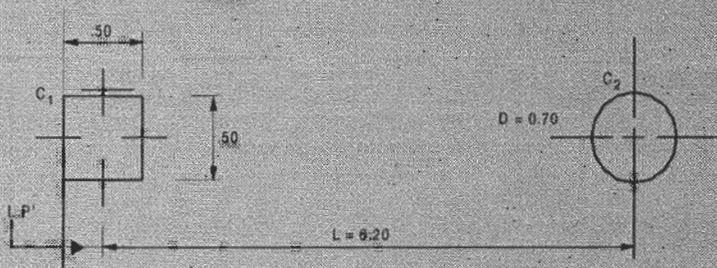
$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$s/c_{\text{pliso}} = 0.4 \text{ t/m}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_1: 0.50 \times 0.50 \text{ m}^2$$

$$C_2: D = 0.70 \text{ m} \quad (\text{Columna Circular})$$

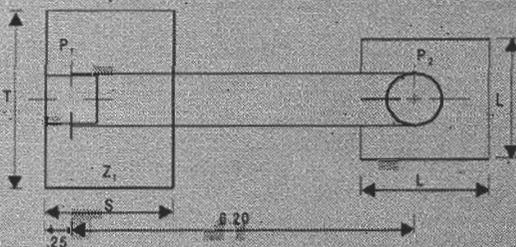


Solución:

Dimensionamiento

Zapata Exterior:

$$\text{Estimamos: } A_z = \frac{120P_1}{\sigma_n}$$



Donde:

$$P_1 = 70 + 26 = 96 \text{ t}$$

$$\sigma_n = 35 - 1.50 \times 2 - 0.4 = 31.6 \text{ t/m}^2$$

$$\text{luego: } A_z = \frac{120 \times 96}{31.6} = 3.65 \text{ m}^2$$

Dimensionamiento en planta:

$$T = 2S \Rightarrow 2S^2 = 3.65$$

$$S = 1.35 \text{ m} \Rightarrow \text{Usar: } S = 1.35 \text{ m}$$

Viga de Conexión

$$h = \frac{L_1}{7} = \frac{6.2}{7} = 0.89 \text{ m}$$

$$b = \frac{P_1}{31 \times L_1} = \frac{96}{31 \times 6.2} = 0.50 \text{ m} > \frac{h}{2}$$

$$\text{Usar: } 0.50 \times 0.90 \text{ m}^2$$

Dimensionamiento de Zapata Exterior

$$W_v = 0.50 \cdot 0.90 \cdot 2.4 = 1.08 \text{ t/m}$$

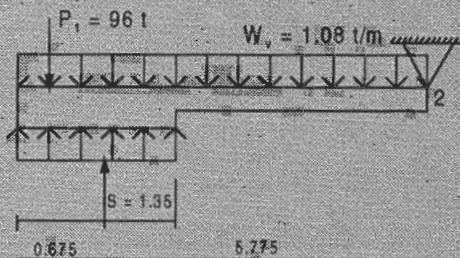
$$\Sigma M_2 = 0$$

$$R_N(5.775) = P_1 \cdot 6.20 + 1.08 \cdot 6.45^2 / 2$$

$$R_N = 106.96 \text{ t}$$

$$A_z = \frac{R_N}{\sigma_n} = \frac{106.96}{31.6} = 3.39 \text{ m}^2$$

$$3.39 = T \cdot S = T \cdot 1.35 \Rightarrow T = 2.51 \text{ m}$$



Diseño de la Viga de Conexión

$$P_{1u} = 142.2 \text{ t}$$

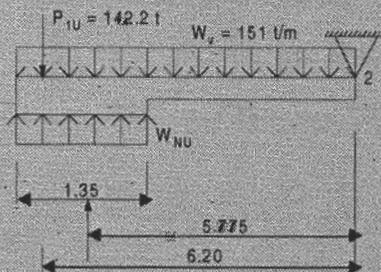
$$W_{vu} = 1.51 \text{ t/m}$$

$$\Sigma M_2 = 0$$

$$R_{Nu}(5.775) = P_{1u} \cdot 6.2 + 1.51 \cdot 6.45^2 / 2$$

$$R_{Nu} = 158.10 \text{ t}$$

$$W_{Nu} = \frac{R_{Nu}}{S} = \frac{158.1}{1.35} = 117.11 \text{ t/m}$$



Sección de momento máximo, $X_o \leq S$

$$V_x = (W_{Nu} - W_{Vu})X_o - P_{1u} = 0$$

$$X_o = \frac{142.2}{117.11 - 1.51} = 1.23 \text{ m} < S = 1.35 \text{ m} \quad \text{CONFORME}$$

$$M_{u \text{ máx}} = (W_{Nu} - W_{Vu}) \frac{X_o^2}{2} - P_{1u} \left(X_o - \frac{l_1}{2} \right)$$

$$M_{u \text{ máx}} = 115.6 \cdot 1.23^2 / 2 - 142.2 (1.23 - 0.25)$$

$$M_{u \text{ máx}} = -51.91 \text{ t-m}$$

$$A_s = \frac{51.91 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 82.78}$$

$$A_s = 18.4 \text{ cm}^2 \rightarrow a = 8.6 \text{ cm}$$

$$A_s = 17.5 \text{ cm}^2 \rightarrow a = 8.2 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

$$d = 90 - (5 + 0.95 + 2.54/2) = 82.78 \text{ cm}$$

Usar:

$$4 \phi 1" \quad (4 \cdot 5.07 = 20.28 \text{ cm}^2)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{20.28}{50 \cdot 82.78} = 0.0049 > \rho_{\text{mín}} = \frac{14}{f_y} = 0.0033 \quad \text{CONFORME}$$

Refuerzo en la carga inferior

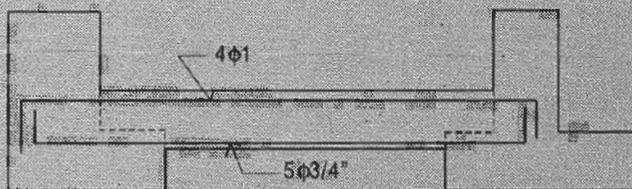
$$A_s^+ = \left(\frac{A_s^-}{3}, \frac{A_s^-}{2} \right) \geq A_{s \text{ mín}}$$

$$A_s = 20.28 / 2 = 10.14 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \text{ mín}} = 0.0033 \cdot 50 \cdot 82.78 = 13.8 \text{ cm}^2$$

Como

$$A_s < A_{s \text{ mín}} \Rightarrow \text{Usar } 5 \phi 3/4"$$



Diseño por corte

$$V_{1u} = (W_{Nu} - W_{Vu}) (t_1 + d) - P_{1u}$$

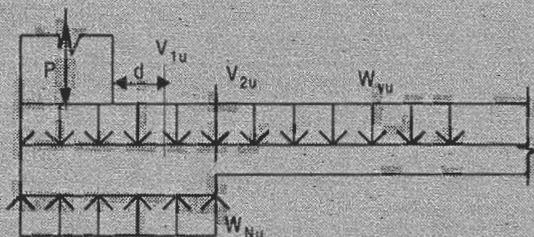
$$V_{1u} = 115.6 (0.50 + 0.83) - 142.2 = 11.55 \text{ t}$$

$$V_{2u} = (W_{Nu} - W_{Vu}) S - P_{1u}$$

$$V_{2u} = 115.6 (1.35) - 142.2 = 13.86 \text{ t}$$

$$\frac{V_u}{\phi} = \frac{13.86}{0.85} = 16.31 \text{ t}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{210} (10)(0.50)(0.83) = 31.88 \text{ t} > V_u \quad \therefore \text{CONFORME}$$



Usar: Estribo de Montaje $\Rightarrow S = 36 \phi = 36 * 1.91 = 68.8 \text{ cm}$
 Estribo $\phi 3/8" @ 0.65 \text{ m}$

Nota: En zonas muy sísmicas deben confinarse los extremos de la viga de conexión (viga dúctil).

Diseño de la Zapata Exterior

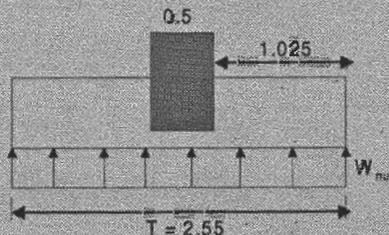
$$W_{Nu} = \frac{R_{Nu}}{T} = \frac{158.1}{2.55} = 62.0 \text{ t/m}$$

$$M_{u \text{ max}} = 62.0 \left(\frac{1.025^2}{2} \right) = 32.57 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi * f_c * b * d^2 * w * (1 - 0.59 w)$$

$$\rho = 0.004 \rightarrow w = \rho \frac{f_y}{f_c}$$

Si:
$$W = 0.004 \left(\frac{4200}{210} \right) = 0.08$$



$$32.57 \cdot 10^5 = 0.9 \cdot 210 \cdot b \cdot d^2 \cdot 0.08 (1 - 0.59 \cdot 0.08)$$

$$b = 135 \text{ cm} \Rightarrow d = 40.9 \text{ cm}$$

$$\text{Usar } h = 50 \text{ cm} \Rightarrow d = 50 - (7.5 + 1.91 / 2) = 41.6 \text{ cm}$$

Diseño por Corte

$$V_{ud} = W_{Nu} (L_v - d)$$

$$V_{ud} = 62 (1.025 - 0.416) = 37.76 \text{ t}$$

$$V_n = \frac{V_{ud}}{\phi} = 44.42 \text{ t} \quad V_c = 0.53 \sqrt{210} (10) 1.35 \times 0.416 = 43.13 \text{ t} = V_n$$

∴ CONFORME

Diseño por Flexión

$$A_s = \frac{32.57 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 416} = 230 \text{ cm}^2$$

$$a = 4.0 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 21.8 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.8 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

$$\text{Usar: } 8 \phi 3/4" @ \quad s = \frac{1.35 - 0.15 - 0.019}{7} = 0.17 \text{ m}$$

Refuerzo Transversal

$$A_{s \text{ Temp}} = 0.0018 b t = 0.0018 \cdot 255 \cdot 50 = 22.95 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar: } 12 \phi 5/8" @ 0.22 \text{ m}$$

Diseño de la Zapata Interior

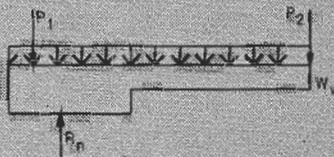
$$P_{2 \text{ efectivo}} = -P_2 - P_1 - w_v L_v + R_N$$

$$P_{2 \text{ efectivo}} = -165 - 96 - 1.08 \cdot 6.45 + 106.96 = -161.0 \text{ t}$$

$$P_{2u \text{ efectivo}} = -P_{2u} - P_{1u} - w_{vu} L_{vu} + R_{Nu}$$

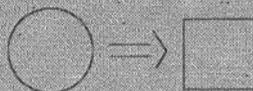
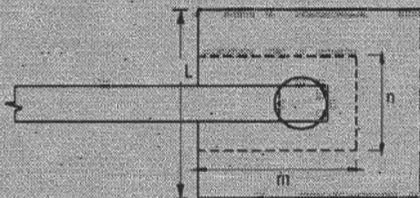
$$P_{2u \text{ efectivo}} = -244.5 - 142.2 - 1.51 \cdot 6.45 + 158.1 = -238.6 \text{ t}$$

$$A_z = \frac{P_{2 \text{ efectivo}}}{\sigma_n} = \frac{1610}{31.6} = 51.0 \text{ cm}^2 \quad (2.26 \cdot 2.26 \text{ m}^2)$$



Usar:

$$W_{nu} = \frac{2.30 \cdot 2.30 \text{ m} (5.29 \text{ m}^2)}{A_z} = \frac{P_2 \text{ efectivo}}{A_z} = \frac{238.6}{5.29} = 45.10 \text{ t/m}^2$$



$$\pi r^2 = a^2$$

$$a^2 = \pi 35^2 \Rightarrow a = 62.04 \text{ cm} \quad L_v = \frac{2.30 - 0.62}{2} = 0.84 \text{ m}$$

$$M_{u_{\max}} = W_{un} L_v^2 / 2 = (45.1 \cdot 2.30) 0.84^2 / 2 = 36.60 \text{ t-m}$$

Usar: $h_{\min} = 0.50 \text{ m} \Rightarrow d_{pr.} = 50 - (7.5 + 1.91) = 40.59 \text{ cm}$

Verificación por Punzonamiento

$$V_u = P_{u_z \text{ efect.}} - W_{nu} (m) (n)$$

$$m = 0.84 + 0.62 + 0.41 / 2 = 1.66 \text{ m}$$

$$n = 0.50 + 0.41 = 0.91 \text{ m}$$

$$V_u = 238.6 - 45.1 \cdot 1.6 \cdot 0.91 = 170.47 \text{ t}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = 200.56 \text{ t}$$

$$V_c = 1.06 \sqrt{f'_c} b_o d = 1.06 \cdot \sqrt{210} (10)(4.23)(0.41) = 266.40 \text{ t}$$

$$b_o = 2m + n = 2 \cdot 1.66 + 0.91 = 4.23 \text{ m}$$

$$V_c = 266.40 \text{ t} > V_n \quad \text{CONFORME}$$

Verificación por corte

$$V_{ud} = (W_{nu} L) (L_v - d) = (45.10 \cdot 2.30) (0.84 - 0.41) = 44.60 \text{ t}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = 52.48 \text{ t} \quad V_c = 0.53 \sqrt{210} (10)(2.30 \cdot 0.41) = 72.43 \text{ t} > V_n$$

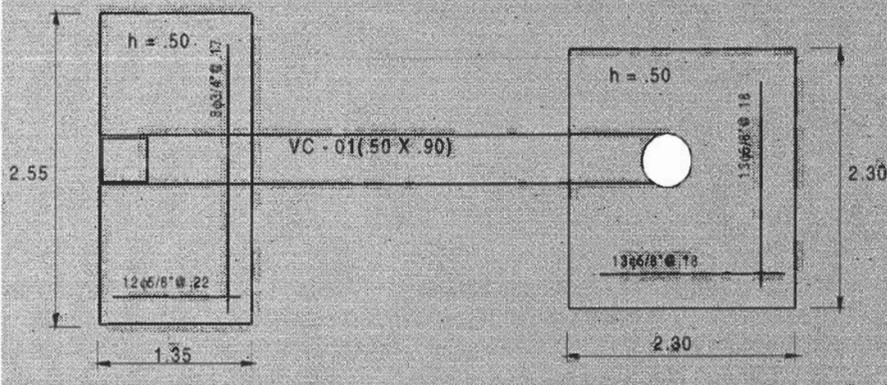
CONFORME

Diseño por Flexión

$$A_s = \frac{36.6 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 40.59} = 26.5 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 2.7 \text{ cm}$$

$$A_s = 24.7 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 2.5 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

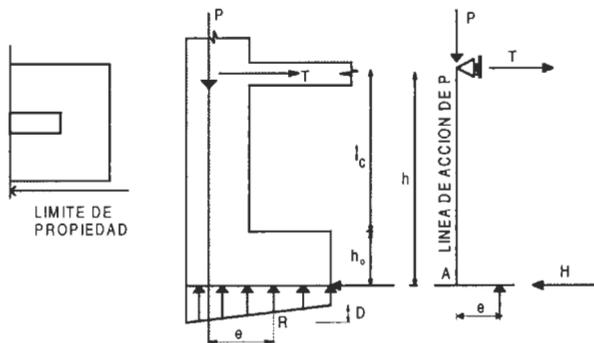
$$\text{Usar: } 13 \phi 5/8" @ s = \frac{2.30 - 0.15 - 0.016}{12} = 0.18 \text{ m}$$



5. CIMENTACIÓN EXCÉNTRICA

La cimentación excéntrica es una solución cuando la columna está en un límite de propiedad o cerca de dicho límite.

Puede ser una solución económica si la excentricidad es moderada y la columna puede agrandarse lo suficiente para que tenga la rigidez necesaria para que controle la rotación de la zapata.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_e - Th = 0 \Rightarrow T = \frac{R_e}{h} = \frac{P_e}{h}$$

La viga del primer nivel debe diseñarse considerando adicionalmente la fuerza de tracción resultante, T

Para el diseño de la columna debe considerarse una combinación adicional: P

$$M_{1-1} = Re - Hh_0 = Pe - Th_0 \dots\dots\dots (2)$$

$$M_{1-1} = Pe - \frac{Pe}{h}h_0 = Pe \frac{(h - h_0)}{h}$$

$$M_{1-1} = Pe \frac{L_c}{L_c + h_0} = \frac{Pe}{L + s}$$

donde:

$$s = \frac{h_0}{L_c}$$

Si la zapata tiene una rigidez apropiada, y si además la rigidez de la columna es la suficiente para mantener la diferencia de las presiones del terreno máxima y mínima a un valor máximo de 1 kg/cm², entonces para el diseño de la zapata en la dirección de la excentricidad puede considerarse como aproximación aceptable una presión uniforme del terreno.

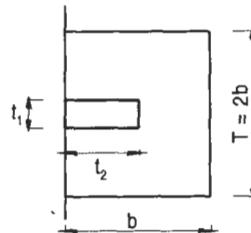
Del estudio realizado por el Dr. Ricardo Yamashiro y desarrollado en el trabajo de tesis del Ing. Manuel Acevedo "ALGUNOS PROBLEMAS ESTRUCTURALES EN EL DISEÑO DE CIMENTACIONES" - UNI - 1971, se tiene, criterios para dimensionamiento de zapata excéntricas y de columnas para cumplir con las condiciones expuestas en el párrafo anterior.

5.1 Zapata Excéntrica

$$h_0 \geq 2.1 b \sqrt[3]{\frac{k_0 b}{E}}$$

Donde:

- h_0 = altura de la zapata
- b = ancho de la zapata
- K_0 = Coeficiente de balasto del terreno
- E = Módulo de elasticidad del concreto



5.2 Columna del Primer Nivel

Condición: $D = \sigma_1 - \sigma_2 \leq 1 \text{ kg/cm}^2$

donde: $D = -12 \phi \epsilon \frac{P}{A_z} = -12 \phi \epsilon \frac{P}{A_z}$

$\phi \rightarrow$ figura 1 (gráfica para la determinación de presiones bajo la cimentación de la tesis de Acevedo).

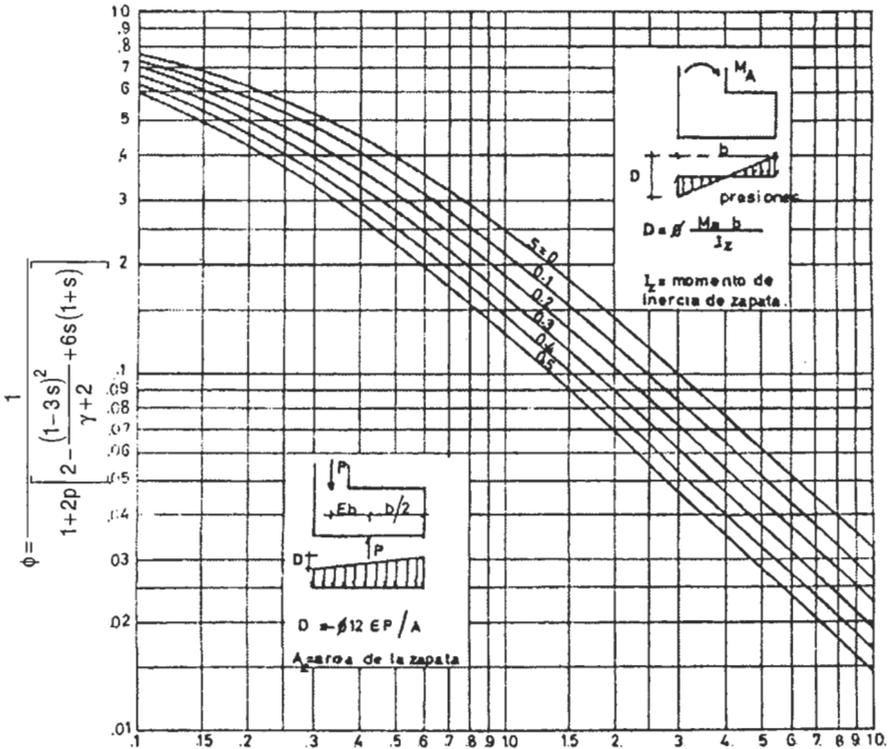


Fig. 1: Gráfico para la determinación de presiones bajo la cimentación

Se entra con los valores:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{h_o}{I_c} \\ \rho &= \frac{E k_c}{k_o I_z} \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi$$

donde:

$$E = 15000 \sqrt{f'_c} \text{ kg / cm}^2$$

$$k_c = \frac{I_c}{I_c} = \frac{t_1 t_2^3}{12 * I_c}$$

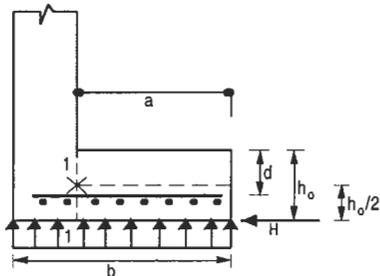
$$I_z = \frac{(T)(b)^3}{12} \quad \epsilon = \frac{e}{b}$$

P = carga axial de servicio

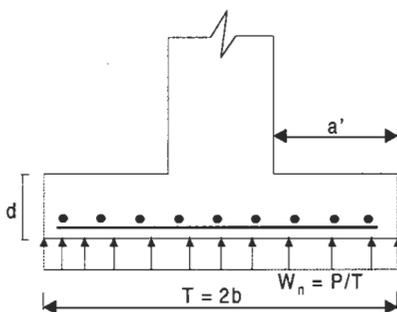
Az = (T) b = área de la zapata

5.3 Diseño de la Zapata

$$M_{\text{máx}} = W_n \frac{a^2}{2} - H \frac{h_o}{2}$$



$$M_{\text{máx}} = W_n \frac{a'^2}{2}$$

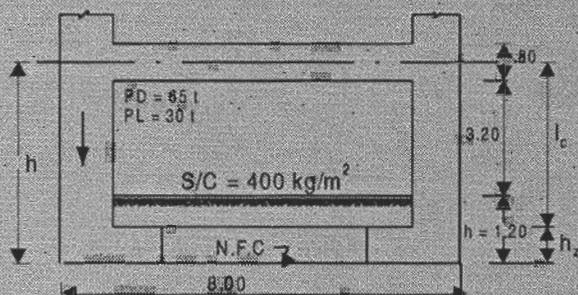


Ejemplo de Diseño de una Cimentación Excentrica

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad \gamma_m = 2.1 \text{ t/m}^3$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad k_c = 12 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_f = 4 \text{ kg/cm}^2 \quad s/c = 0.4 \text{ t/m}^2$$



Solución:

$$\sigma_n = \sigma_f + b_f \gamma_m - s/c = 40 - 1.20 \cdot 2.1 - 0.4 = 37.08 \text{ t/m}^2$$

$$A_z = \frac{P}{\sigma_n} = \frac{95}{37.08} = 2.56 \text{ m}^2$$

$$A_z = (2b) b = 2.56 \text{ m}^2 \Rightarrow b = 1.13 \text{ m}$$

Usar: $b = 1.10 \text{ m}$ $T = A_z / b = 2.35 \text{ m}$

Altura de la zapata para considerarla rígida:

$$h_z = 2.35 \sqrt[3]{\frac{k_o b}{E}} \quad h_z > 2.3 \cdot 1.10 \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 110}{15000 \cdot \sqrt{210}}} = 0.46 \text{ m}$$

Usar: $h_{z \text{ mín}} = 0.60 \text{ m}$ $L_c = 4.80 - 0.60 \text{ m}$

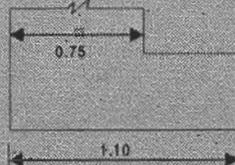
Dimensionamiento de la Columna del 1er. Nivel

Tipo C2: $bD = \frac{125P}{f'_c n} = \frac{125 \cdot 95}{0.21 \cdot 0.25} = 2262 \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow 50 \cdot 50, 30 \cdot 75, 40 \cdot 60$$

Tanteo: $30 \cdot 75$

$$n = \frac{125 \cdot 95}{0.21 \cdot 30 \cdot 75} = 0.251 \quad h_z = 0.60 \text{ m} \Rightarrow L_c = 4.20 \text{ m}$$



$$\rho = \frac{E k_c}{k_o I_z} = \frac{15000 \cdot \sqrt{210 \cdot 30 \cdot 75^3}}{12 \cdot 420 \cdot 12 \cdot 235 \cdot \frac{110^3}{12}} = 1.75$$

$$s = \frac{h_z}{L_c} = \frac{0.60}{4.20} = 0.143 \quad \therefore \phi = 0.19$$

$$D = -12\phi \epsilon \frac{P}{A_z} = -12 \cdot 0.13 \cdot \frac{0.175}{1.10} \cdot \frac{95}{2.35 \cdot 110} = 9.12 \text{ t/m}^2 < 10$$

CONFORME

$$e = \frac{1.10 - 0.75}{2} = 0.175$$

Diseño por Flexión

a) Dirección de la excentricidad:

$$d = h - (1.5\phi + 7.5)$$

$$d = 60 - (1.5 \cdot 1.9 + 7.5) = 49.65 \text{ cm}$$

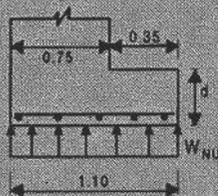
$$W_{Nu} = P_u / b = (6.15 \cdot 1.4 + 30 \cdot 1.7) / 1.10$$

$$W_{Nu} = 142 / b = 129.09 \text{ t/m}$$

$$M_{u_{m\acute{a}x}} = 129.09 \cdot 0.35^2 / 2$$

$$a_s = d / 5 \Rightarrow A_s = 4.68 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_{\min}} = 0.0018 bd = 0.0018 \cdot 235 \cdot 49.65 = 21.00 \text{ cm}^2$$



Usar: 11 ϕ 5/8" @ 0.22 m. $s = (2.35 - 0.15 - 0.016) / 10 = 0.22$ m

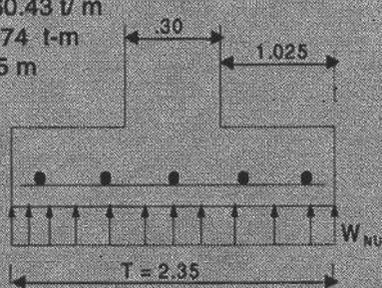
b) Dirección Transversal:

$$d = 60 - (7.5 + 1.9 / 2) = 50.60 \text{ cm}$$

$$W_{Nu} = P_u / T = 142 / 2.35 = 60.43 \text{ t/m}$$

$$M_{u_{m\acute{a}x}} = 60.43 \cdot 1.025^2 / 2 = 31.74 \text{ t-m}$$

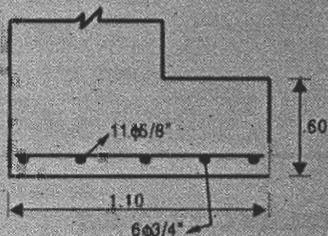
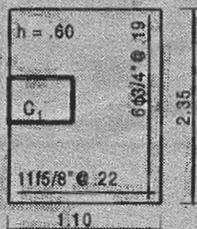
$$L_v = (2.35 - 0.30) / 2 = 1.025 \text{ m}$$



$$A_s = 18.44 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.94 \text{ cm}$$

$$A_s = 17.27 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 3.70 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

Usar: $6 \phi 3/4" @ 0.19 \text{ m}$



Viga

$$T_u = \frac{P_u e}{h} = \frac{142 \cdot 0.175}{4.80} = 5.18 \text{ t} \quad A_s = \frac{T_u}{\phi f_y} = \frac{5.18 \text{ t}}{0.9 \cdot 4.2 \text{ t/cm}^2} = 1.37 \text{ cm}^2$$

Refuerzo adicional

Columna: Condición de Diseño Adicional

$$P_u = 142$$

$$M_u = \frac{P_u e}{L + s} = \frac{142 \cdot 0.175}{1 + 0.143} = 17.59 \text{ t-m}$$

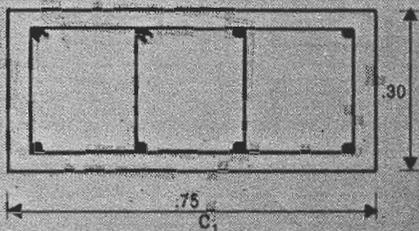
$$K = \frac{P_u}{f_c b t} = \frac{142}{0.21 \cdot 30 \cdot 75} = 0.30$$

$$e/t = 0.175 / 0.75 = 0.233$$

$$g = \frac{75 - (8 + 2 \cdot 0.95 + 2.54)}{75} = \frac{62.56}{75} = 0.83$$

$$\rho_t < 1\%$$

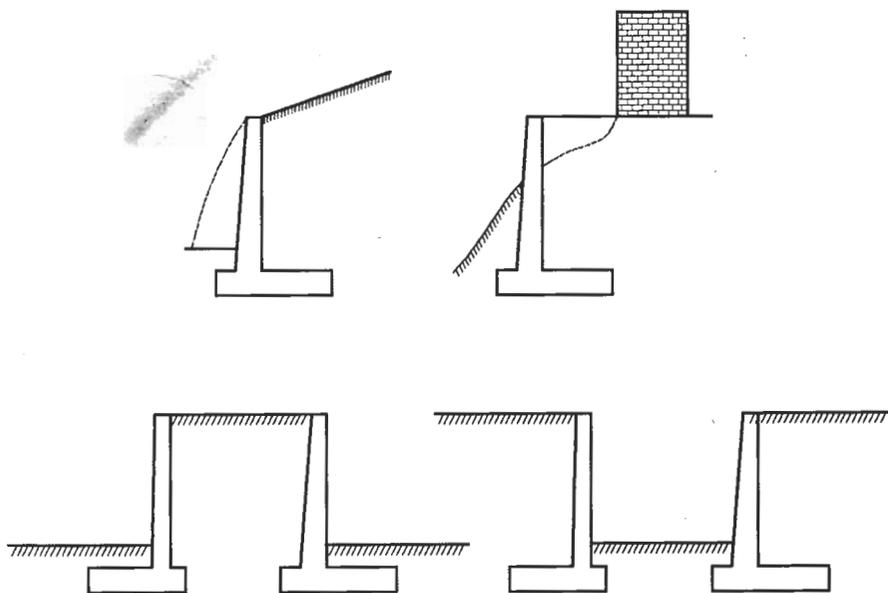
Usar: $\rho_t = 0.01 \Rightarrow A_s = 22.5 \text{ cm}^2 \quad 8 \phi 3/4"$



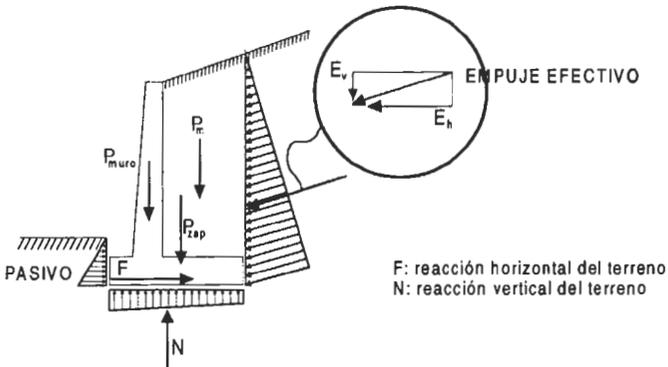
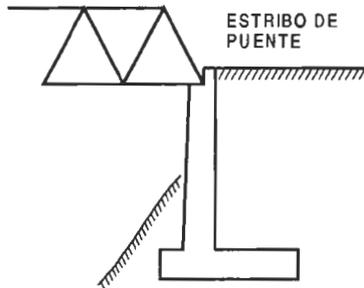
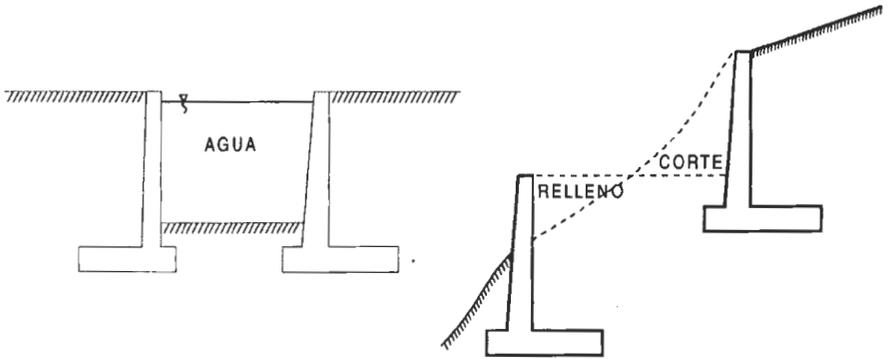
MUROS DE CONTENCION

1. Muros de Contención

Un muro de contención es una estructura que proporciona soporte lateral a una masa de material, y en algunos casos soporta cargas verticales adicionales.



La estabilidad se debe principalmente a su peso propio y al material que se encuentra directamente sobre su base.



1.1 Tipos de falla en Muros de Contención

1.1.1 Deslizamiento horizontal del muro, en el plano de contacto sobre la base del muro y el suelo

$$E_H \geq E_P + F \therefore \text{falla por deslizamiento}$$

En suelos no cohesivos: $F \rightarrow$ resistencia al corte por fricción

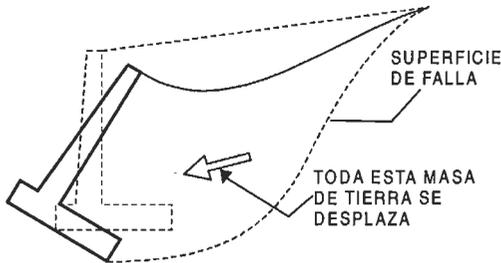
En suelos cohesivos : $F \rightarrow$ resistencia al corte por cohesión

1.1.2 Por volteo alrededor de la arista delantera de la base

$$\Sigma M_{\text{actuantes}} \geq \Sigma M_{\text{resistentes}}$$

1.1.3 Por presiones excesivas en el terreno (área de contacto), las presiones son máximas en la parte delantera del muro.

1.1.4 Por falla generalizada del suelo, debe hacerse esta verificación cuando el talud es importante.



1.2 Determinación de las fuerzas de empuje debido al suelo: Teoría de Rankine

Empuje Activo

p_a = presión debida al empuje activo

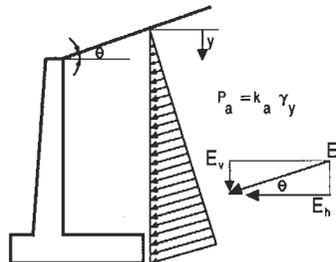
k_a = coeficiente de empuje activo

γ = peso específico del material

y = profundidad a partir del extremo superior

ϕ = ángulo de fricción interna

θ = ángulo sobre la horizontal del talud del material



De la figura:

$$p_{ay} = k_a \gamma y$$

E_{ay} = empuje activo hasta una profundidad "y"

$$E_{ay} = \frac{1}{2} P_{ay} y = \frac{1}{2} k_{ay} \gamma y$$

Donde:
$$k_a = \cos \theta \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \phi}}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \phi}}$$

Si: $\theta = 0$ (talud horizontal) $K_a = \text{tg}^2 (45^\circ - \phi / 2)$

Si existe una sobrecarga uniforme repartida, s/c $P_{S/C} = k_a \cdot s/c$

Empuje Pasivo

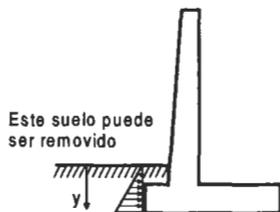
$$P_p = k_p \gamma y$$

$$E_{py} = \frac{1}{2} k_p \gamma y^2$$

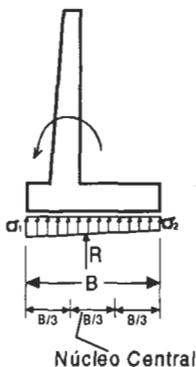
$$k_a = \cos \theta \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \phi}}{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \phi}}$$

Donde:

Si $\theta = 0$: $k_p = \text{tg}^2 (45^\circ + \phi)$



1.3 Presiones del Suelo



- No se permite esfuerzos de tracción en la superficie de contacto.
- La presión máxima no puede exceder el valor admisible determinado mediante un estudio de suelos.
- Para evitar la inclinación del muro por asentamientos diferenciales de la cimentación, es deseable que la resultante de las presiones en el suelo

actúe en el núcleo central de la superficie resistente. Si se cimienta en suelo muy duro o roca se puede permitir salir del núcleo central, aunque se considera prudente que la excentricidad no exceda 0.25 veces la dimensión paralela de la zapata.

Recomendaciones

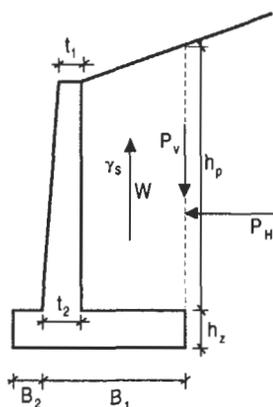
w = peso muerto

$tg\delta$ = coeficiente de fricción

δ = ϕ para concreto vaciado in situ

δ = $2/3 \phi$ para otros casos

$tg \delta \leq 0.6$ si el terreno de cimentación es el suelo.



Normalmente la tabla deberá ser usada para el procedimiento simplificado

c = cohesión entre el terreno de cimentación y la losa inferior (t/m), pero deberá usarse $c = 0$ si el coeficiente de fricción $tg\delta$ se obtiene de la tabla 1.

B = ancho de la losa de fondo del muro de contención

H_r = fuerza resistente a deslizamiento

$$H_r = (W + P_v) tg\delta + cB$$

H_a = fuerza de deslizamiento = P_H

$$\frac{H_r}{H_a} \geq 1.5$$

Tabla

CLASES DE TERRENO DE CIMENTACION Y CONSTANTES DE DISEÑO

CLASES DE TERRENO DE CIMENTACIÓN		Esfuerzo Permisible del Terreno σ_k (t/m ²)	Coefficiente de Fricción para Deslizamiento, f
ROCOSO	Roca dura uniforme con pocas grietas	100	0.7
	Roca dura con muchas fisuras	60	0.7
	Roca blanda	30	0.7
ESTRATO DE GRAVA	Densa	60	0.6
	No densa	30	0.6
TERRENO ARENOSO	Densa	30	0.6
	Media	20	0.5
TERRENO COHESIVO	Muy dura	20	0.50
	Dura	10	0.45
	Media	5	0.45

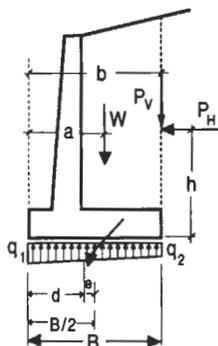
Nota: Para ser usado en el cálculo de estabilidad contra deslizamiento abajo del muro de contención, basado en concreto in situ, y considerar $c = 0$.

2. ESTABILIDAD DE UN MURO DE CONTENCION

2.1 Estabilidad contra el volteo

$$d = \frac{w_a + P_v b - P_H h}{w + P_v}$$

$$e = \frac{B}{2} - d \leq \frac{B}{6}$$



2.2 Estabilidad para capacidad portante del terreno de cimentación

$$q_1 = \frac{w + P_v}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right)$$

$$q_2 = \frac{w + P_v}{B} \left(1 - \frac{6e}{B} \right)$$

$$q_1, q_2 \leq q_a = \frac{q_u}{F_s}$$

donde:

q_a = capacidad portante admisible del terreno

q_u = capacidad portante última del terreno

F_s = factor de seguridad para capacidad portante del terreno = B

Nota: Para muros menores de 8 m puede usarse la Tabla.

2.3 Estabilidad durante el sismo

Consideremos para su evaluación:

- Presión de tierra durante sismo
- Fuerza sísmica de inercia

Usando fórmula de Mononobe-Okabe (concepto de fuerza de inercia durante el sismo)

$$FSD \geq 1.2$$

$$FSD \geq 1.5 \text{ (si se considera la presión de tierra pasiva)}$$

$$e \leq \frac{B}{3}$$

$$FS = 2$$

$$\text{Con } e \leq \frac{B}{6} \rightarrow q_1 = \frac{P_{vg} + w}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right)$$

$$\text{Con } \frac{B}{6} < e < \frac{B}{3} \rightarrow q_1 = \frac{2(P_{vg} + w)}{3\alpha}$$

Donde: P_{vg} = Componente vertical de la resultante de la presión de tierra durante el sismo.

2.4 Consideraciones para dimensionar muros

2.4.1 Muros de gravedad

La resultante de la presión de tierra y el peso muerto no producirá esfuerzos de tensión en la sección horizontal del cuerpo del muro.

$$B = 0.5 \text{ a } 0.7H$$

$$t_1 > 35 \text{ cm (para considerar la trabajabilidad)}$$

2.4.2 Muros en voladizo

$$B = 0.5H \text{ a } 0.8H$$

$$t_1 \geq 30 \text{ cm}$$

2.4.3 Muros con contrafuertes

$$B = 0.5H \text{ a } 0.7H$$

$$t_1 = t_2 \geq 30 \text{ cm} \quad s = \frac{h}{3} \quad \text{a} \quad \frac{2h}{3}$$

Peso Muerto

Concreto armado	2.40 t/m ³
Concreto	2.35 t/m ³
Grava, suelo gravoso, arena	2.00 t/m ³
Suelo arenoso	1.90 t/m ³
Suelo cohesivo	1.80 t/m ³

Sobrecarga 1.00 t/m²

3. DIMENSIONAMIENTO DE UN MURO BASICO

3.1 Dimensionamiento por estabilidad al deslizamiento

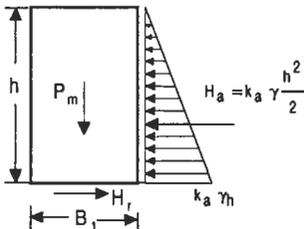
El muro básico es un paralelepípedo rectangular, el que soporta un relleno horizontal sin sobrecarga. Se considerará una longitud de un metro.

$$P_m = \text{peso muerto} = \gamma_m B_1 h$$

$$H_a = \frac{1}{2} k_a \gamma h^2$$

$$H_v = f P_m = f \gamma_m B_1 h$$

$$\frac{H_r}{H_a} \geq \text{FSD} \dots\dots\dots (1)$$



En (1) :

$$\frac{fB_1h\gamma_m}{\frac{1}{2}k_a\gamma h^2}$$

$$\frac{B_1}{h} \geq \text{FSD} \frac{k_a\gamma}{2f\gamma_m} \dots\dots\dots (I)$$

3.2 Dimensionamiento por estabilidad al volteo

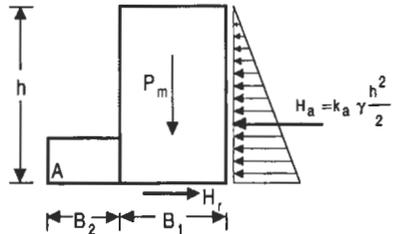
$$\frac{M_r}{M_a} \geq \text{FSV} \dots\dots\dots 2)$$

$$M_a = H_a \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{k_a\gamma h^2}{2} \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{k_a\gamma h^3}{6}$$

$$M_r = P_m \left(B_2 + \frac{B_1}{2}\right) = \gamma_m B_1 h \left(B_2 + \frac{B_1}{2}\right)$$

En (2):

$$\frac{\gamma_m B_1 h \left(B_2 + \frac{B_1}{2}\right)}{\frac{k_a\gamma h^3}{6}} \geq \text{FSV}$$



$$\frac{B_2}{h} + \frac{B_1}{2h} \left(\frac{6\gamma_m \text{FSD}}{k_a}\right) \frac{k_a}{2f\gamma_m} \geq \text{FSV}$$

$$\frac{B_2}{h} \geq \frac{f}{3} \frac{\text{FSV}}{\text{FSD}} - \frac{B_1}{2h} \dots\dots\dots (II)$$

A partir de las expresiones (I) y (II) pueden derivarse expresiones para los distintos tipos de muros de contención.

4. MUROS DE GRAVEDAD

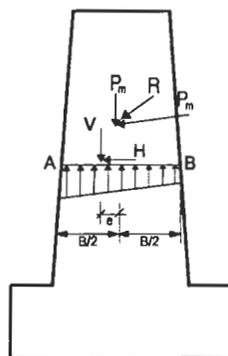
Debe dimensionarse de manera que no se produzcan esfuerzos de tracción en el muro, o si se permiten, que no excedan de un valor admisible.

La estabilidad de los muros de gravedad se asegura con dimensiones de la base prácticamente iguales a las del modelo básico.

Para el dimensionamiento pueden usarse las expresiones (I) y (II) con un valor ponderado para el peso específico m ; si el muro es de concreto puede usarse $m = 2.1 \text{ t/m}^3$.

El muro de gravedad es económico para alturas pequeñas, hasta aproximadamente 3 m.

- P_a = empuje activo total
- P_m = peso del muro sobre la sección AB
- R = resultante de P_a y P_m
- B = ancho de la sección horizontal del muro en estudio
- H = componente horizontal de la fuerza R
- V = componente vertical de fuerza R



a) $P_{\max} = \frac{V}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right) \leq \sigma_{\text{compresible admisible}}$

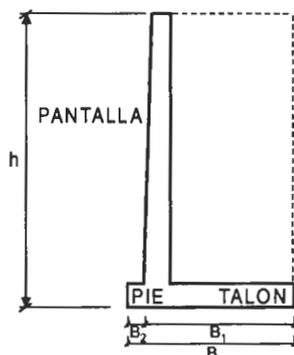
b) $P_{\min} = \frac{V}{B} \left(1 - \frac{6e}{B} \right) \geq 0$

c) $v = \frac{H}{B} \leq v_{\text{permisible (corte)}}$

5. MURO EN VOLADIZO

Para el dimensionamiento de la base de la zapata se pueden usar las expresiones (I) y (II) con un valor ponderado $\gamma_m = 2 \text{ t/m}^3$.

Si el muro es vaciado "in situ" es económico para alturas menores de 6m.



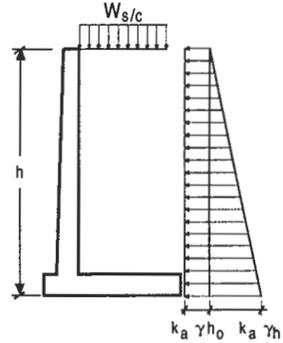
5.1 Muros con sobrecarga

$$W_{s/c} \text{ (t/m}^2\text{)} = (1) (1) (h_a) \gamma$$

$$h_0 = \frac{W_{s/c}}{\gamma}$$

Para el dimensionamiento se usará una altura efectiva h_e , en lugar de h :

$$h_e = h + h_0 = h + \frac{W_{s/c}}{\gamma}$$



5.2 Muros con Talud

$$h_e = h + B_1 S$$

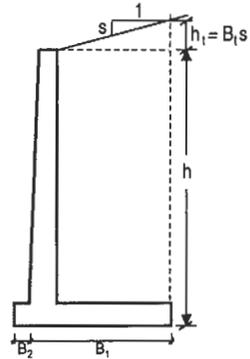
En (1):

$$\frac{B_1}{h + B_1 s} = FSD \frac{k_a \gamma}{2 \gamma_m} = \beta$$

$$B_1 = \beta h + B_1 s \beta$$

$$B_1 (1 - s \beta) = \beta h$$

$$\frac{B_1}{h} = \frac{\beta}{1 - s \beta}$$



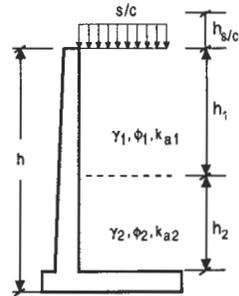
6. CALCULO DE PRESIONES LATERALES CONSIDERANDO ESTRATOS O RELLENOS DE MATERIALES DIFERENTES

$$P_1 = k_{a1} \gamma_1 h_{s/c} = k_{a1} \gamma_1 \frac{s/c}{\gamma_1} = k_{a1} s/c$$

$$P_2 = k_{a1} \gamma_1 (h_1 + h_{s/c})$$

$$h_e = \frac{s/c_{total}}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 h_1 + s/c}{\gamma_2}$$

$$P_3 = k_{a2} \gamma_2 (h_2 + h_e)$$



Considera una altura equivalente de relleno de estrato 2.

6.1 Influencia del nivel freatico

El peso específico del terreno con agua γ' , se puede estimar con la expresión:

$$\gamma' = \gamma - m \gamma_a \quad (1)$$

Donde:

γ = peso específico del terreno sin agua

γ_a = peso específico del agua = 1 t/m^3 .

$P_a = \gamma_a h = h \text{ t/m}^2$ (h en metros).

m = coeficiente que se obtiene de un estudio de mecánica de suelos depende principalmente del índice de vacíos del terreno.

∴ Si no hay la posibilidad de realizar ensayos, considerar:

m = 0.8 Terrenos Compactos

m = 0.6 Terrenos Arenosos

Si el nivel del agua al otro lado del muro de contención es el mismo, el empuje del agua se elimina. Si hay una diferencia h de nivel de agua en la parte interna externa del muro se considera el empuje del agua debido a la diferencia h de niveles.

Si se usan drenes en los muros de contención se puede reducir el valor del empuje de agua, anulando ese empuje si los drenes son perfectos.

6.2 Ejemplo de Aplicación

$$m = 0.7$$

$$k_{a1} = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi_1}{2} \right) = 0.307$$

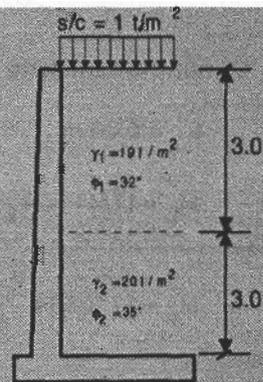
$$K_{a1} \gamma_{s1} = 0.583 \text{ t/m}^3$$

$$k_{a2} = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi_2}{2} \right) = 0.271$$

$$\gamma_2 = \gamma_2 - m \gamma_a = 2.0 - 0.7$$

$$\gamma_2 = 1.3 \text{ t/m}^3$$

$$P_1 = K_{a1} s/c = 0.307 * 1 = 0.31 \text{ t/m}^2$$

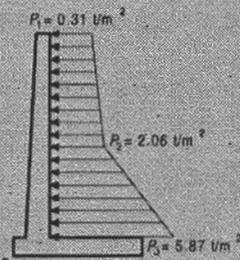


$$P_2 = k_a \gamma_1 \left(3 - \frac{1}{1.9} \right) = 2.06 \text{ t/m}^2$$

$$h_{\theta 2} = \frac{w_{\text{total}}}{\gamma'_2} = \frac{1 + 1.9 \cdot 3}{1.3} = 5.15 \text{ m}$$

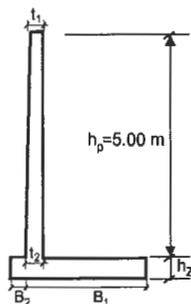
$$P_3 = K_{a2} \gamma_2 (h_{\theta 2} + h_2) + 1.0 \times h_2$$

$$P_3 = 0.271 \cdot 1.3 \cdot (5.15 + 3.0) + 3.0 = 5.87 \text{ t/m}^2$$



7. DISEÑO DE UN MURO DE CONTENCIÓN EN VOLADIZO

$\gamma_s =$	1.9 t/m ³	(S. Arenoso denso)
$\phi =$	32°	
$f'_c =$	175 kg/cm ²	
$f_y =$	4200 kg/cm ²	
$\sigma_t =$	3.0 kg/cm ²	
FSD	= 1.5	
FSV	= 1.75	



7.1 Solución

De $\phi = 32^\circ \Rightarrow$ VACIADO IN SITU $f = t_g \phi = 0.625 \leq 0.60$

Usar $f = 0.6$ para cálculo de la estabilidad contra deslizamiento

$$k_a = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) = 0.554^2 = 0.307$$

$$k_a \gamma_s = 0.584 \text{ t/m}^3$$

7.2 Dimensionamiento de la Pantalla

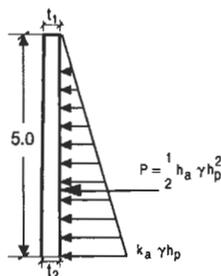
$$t_1 = 0.20 \text{ m}$$

$$M_u = 1.7M = 1.7 k_a \gamma \frac{h_p^3}{6}$$

$$M_u = 1.7 \cdot 0.584 \frac{h_p^3}{6} = 0.16546 h^3 = 20.68 \text{ t-m}$$

Además:

$$M_u = \phi b d^2 f'_c \omega (1 - 0.59 \omega) \dots \dots \dots (1)$$



Considerando para la ecuación (1):

$$\phi = 0.9$$

$$b = 100 \text{ cm}$$

$$f'_c = 175 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 0.004 \rightarrow w = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.004 \frac{4200}{175} = 0.096$$

$$M_u = 0.9 * 100 * d^2 * 175 * 0.096 * (1 - 0.59 * 0.096)$$

$$d = 38.08 \text{ cm} \quad t_2 = d + r + \frac{\phi_{\text{acero}}}{2}$$

$$t_2 = 38.08 + 4 + 1.59/2 = 42.88 \text{ cm}$$

Usar $t_2 = 0.45 \text{ m}$ $d = 40.21 \text{ cm}$

7.3 Verificación por corte

$$V_{du} = 1.7 V_d = 1.7 (1/2) \gamma_s K_a (h_p - d)^2$$

$$V_{du} = 1.7 * (1/2) * 0.584 * (5 - 0.40)^2 = 10.50 \text{ t}$$

$$\frac{V_{du}}{\phi} = 12.36 \text{ t}$$

$$V_c = 0.53 * \sqrt{f'_c} * b * d = 0.53 * \sqrt{175} * 10 * 1 * 0.38 = 26.64 \text{ t}$$

Si As se traslapa en la base: $V_{ce} = \frac{2}{3} V_c = 17.76 \text{ T} < \frac{V_u}{\phi} \therefore$ conforme

7.4 Dimensionamiento de la zapata

$$H_z = t_2 + 5 \text{ cm} = 45 + 5 = 50 \text{ cm}$$

$$\therefore h = h_p + h_z = 5.50 \text{ m}$$

usando las expresiones I y II:

$$\frac{B_1}{h} \geq \text{FSD} \frac{k_a \gamma_s}{2f \gamma_m} = \frac{15 * 0.584}{2 * 2 * 0.6} = 0.365$$

$$B_1 \geq 2.01 \text{ m}$$

$$B_1 = 2.01 + \frac{t_2 - t_1}{2} = 2.01 + 0.125 = 2.13 \text{ m}$$

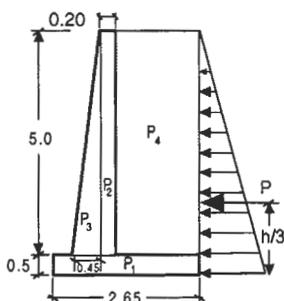
Usar $B_1 = 2.15 \text{ m}$

$$\frac{B_2}{h} \geq \frac{f \cdot \text{FSV}}{3 \cdot \text{FSD}} - \frac{B_1}{2h} = \frac{0.6 \cdot 1.75}{3 \cdot 1.5} - \frac{2.15}{2 \cdot 5.5} = 0.038$$

$$B_2 \geq 0.21 \text{ m}$$

Usar $B_2 (\text{mín}) = h_z = 0.50 \text{ m}$

7.5 Verificación de Estabilidad



P_i	Pesos (P) t	Brazo de giro (X) mt	$P \cdot X$ (T*mt.)
P_1	$0.50 \cdot 2.65 \cdot 2.4 = 3.18$	1.325	4.21
P_2	$0.20 \cdot 5.00 \cdot 2.4 = 2.40$	0.850	2.04
P_3	$0.50 \cdot 0.25 \cdot 5 \cdot 2.4 = 1.50$	0.670	1.00
P_4	$1.70 \cdot 5.00 \cdot 1.9 = 16.15$	1.800	29.07
TOTAL	$N = 23.23$		$M = 36.32$

$$\text{FSD} = \frac{H_r}{H_a} = \frac{fN}{H_a} = \frac{0.6 \cdot 23.23}{8.83} = 1.58 > 1.5 \quad \text{conforme}$$

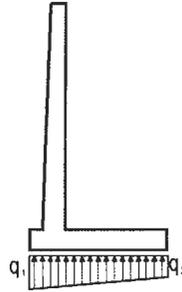
$$\text{FSV} = \frac{M_r}{M_a} = \frac{36.32}{8.83 \cdot 1.83} = 2.25 > 1.75 \quad \text{conforme}$$

7.6 Presiones sobre el terreno

$$x_0 = \frac{M_r - M_a}{P} = \frac{36.32 - 16.16}{23.23}$$

$$x_0 = 0.87 \text{ m}$$

$$\frac{B}{6} = \frac{2.65}{6} = 0.44 < e \therefore \text{cae fuera del tercio central}$$



Aumentar B:

Usar B = 2.70 m

Pi	Pesos (P) Ton.	Brazo de giro (X) mt.	P*X (T*mt)
P ₁	0.50*2.70*2.4 = 3.24	1.350	4.37
P ₂	0.20*5.00*2.4 = 2.40	0.850	2.04
P ₃	0.50*0.25*5*2.4 = 1.50	0.670	1.00
P ₄	1.75*5.00*1.9 = 16.63	1.825	30.35
	TOTA N = 23.77		M = 37.76

$$\text{FSD} = 1.62 > 1.50 \text{ conforme}$$

$$\text{FSV} = 2.34 > 1.75 \text{ conforme}$$

$$x_0 = 0.91 \text{ m} \quad e = 1.35 - 0.91 = 0.44 \text{ m} < \frac{B}{6} = \frac{2.7}{6} = 0.45 \text{ m}$$

CONFORME

Luego:

$$q_1 = \frac{P}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right) = \frac{23.77}{2.7} \left(1 + \frac{6 \cdot 0.44}{2.70} \right) = 17.41 \text{ t/m}^2$$

$$q_2 = \frac{P}{B} \left(1 - \frac{6e}{B} \right) = 0.20 \text{ t/m}^2 \therefore q_1 < \sigma_t \quad \text{conforme}$$

7.7 Diseño de la Pantalla

En la base:

$$M_u = 20.68 \text{ t-m}$$

$$t_2 = 0.45 \text{ m} \rightarrow d = 0.40 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{20.68 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 40.21} = 15.11 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 4.3 \text{ cm}$$

$$A_s = 14.37 \text{ cm}^2 \quad a = 4.1 \text{ cm} \quad \text{conforme}$$

$$\phi \text{ 5/8" @ 0.14 m}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{14.14}{100 \cdot 40.21} = 0.0035 > \rho_{\min}$$

Refuerzo mínimo:

$$0.0018 \cdot 100 \cdot 40.21 = 7.24 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$0.0018 \cdot 100 \cdot 15.21 = 2.74 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como la pantalla es de sección variable, se tiene:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a / 2)} \qquad a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Asumiendo $a = d / 5$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y 0.9d} \dots\dots\dots (1)$$

De (1):

$$\frac{A_{s1}}{A_{s2}} = \frac{M_{u1} d_2}{M_{u2} d_1} \Rightarrow M_{u2} = \left(\frac{A_{s2}}{A_{s1}} \right) \left(\frac{d_2}{d_1} \right) M_{u1} \dots\dots\dots (2)$$

Si $A_{s1} = A_{s2}$, entonces:

$$M_{u2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right) M_{u1} \dots\dots\dots (3)$$

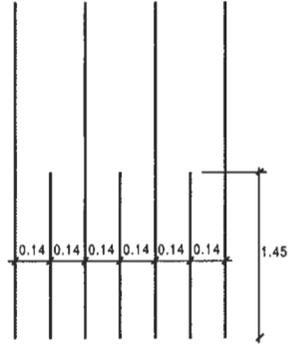
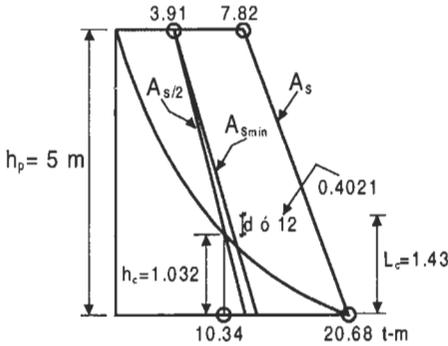
Si el peralte de la pantalla varía linealmente, el momento resistente varía también linealmente. Por lo tanto se puede trazar líneas de resistencia para determinar los puntos de corte.

$$M_{\text{MAX}} / 2 = 10.34 = 0.16546 (5 - hc)^3 \Rightarrow hc = 1.032 \text{ m}$$

$$L_c = 1.032 + 0.4021 = 1.43 \text{ m}$$

Usar $L_c = 1.45 \text{ m}$

DETERMINACION DE PUNTO DE CORTE

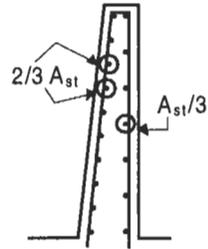


Refuerzo Horizontal:

$$A_{st} = \rho_t b_t$$

ρ_t :

- 1) 0.0020; $\phi \leq 5/8"$ y $f_y > 4200 \text{ kg/cm}^2$
- 2) 0.0025; otros casos



Si $t_2 \geq 25 \text{ cm}$: usar refuerzo horizontal en 2 capas

Arriba: $0.0020 \cdot 100 \cdot 20 = 4 \text{ cm}^2/\text{m}$

$$\frac{2}{3} A_{st} = 2.68 \text{ cm}^2 \phi 3/8" @ 0.26 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} A_{st} = 1.33 \text{ cm}^2 \phi 3/8" @ 0.53 \text{ m}$$

$$s_{\text{m}ax} = 45 \text{ cm}$$

Intermedio: $0.0020 \cdot 100 \cdot 32.5 = 6.5 \text{ cm}^2/\text{m}$

$$\frac{2}{3} A_{st} = 4.36 \text{ cm}^2 \phi 3/8" @ 0.16 \text{ m} \text{ ó } \phi 1/2" @ 0.29 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} A_{st} = 1.33 \text{ cm}^2 \phi 3/8" @ 0.33 \text{ m}$$

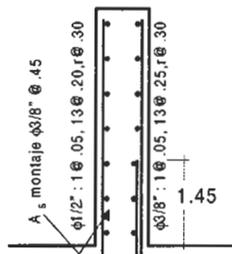
Abajo: $0.0020 \cdot 100 \cdot 45 = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$

$$\frac{2}{3} A_{St} = 6.00 \text{ cm}^2 \phi 1/2" @ 0.21 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} A_{St} = 3.00 \text{ cm}^2 \phi 3/8" @ 0.24 \text{ m}$$

$$A_{s \text{ montaje}} = \phi 3/8" @ 0.45$$

$$s = 36 \phi = 36 \cdot 1.27 = 45.7 \text{ cm}$$

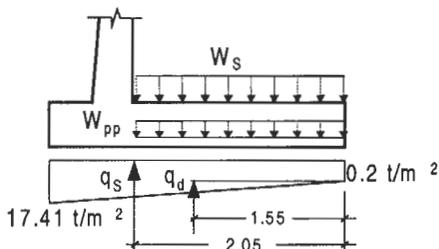


usar $\phi 1/2" @ 0.45 \text{ m}$

7.8 Diseño de la Zapata

$$W_s = 1.9 \cdot 5 = 9.5 \text{ t/m}$$

$$W_{pp} = 0.5 \cdot 1 \cdot 2.4 = 1.2 \text{ t/m}$$



7.8.1 Zapata anterior

$$W_{u \text{ max}} = q_1 \cdot 1.7 - W_z \cdot 0.9 = 17.41 \cdot 1.7 - 1.2 \cdot 0.9 = 28.52 \text{ t/m}$$

conservadoramente.

$$M_u = 28.52 \cdot \frac{0.50^2}{2} = 3.56 \text{ t-m} \Rightarrow A_s = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \text{ min}} = 0.0018 \cdot b \cdot d = 0.0018 \cdot 100 \cdot 41.7 = 7.5 \text{ cm}^2$$

$d = 50 - \left(7.5 + \frac{1.6}{2} \right) = 41.7 \text{ cm} \phi 5/8" @ 0.26 \text{ m}$ pasar la mitad del refuerzo vertical de la pantalla

Verificación por cortante: Por inspección, conforme

7.8.2 Zapata posterior

$$q'_b = \frac{(17.41 - 0.2) \cdot 1.75}{2.70} = 12.16 \text{ t/m}$$

$$q_B = q_2 + q_B = 11.36 \text{ t/m}$$

$$w_u = (9.5 + 1.2) * 1.4 = 14.98 \text{ t/m}$$

$$M_u = (14.98 - 0.2 * 1.4) * \frac{1.75^2}{2} - 11.16 * 1.4 * \frac{1.75^2}{6} = 14.54 \text{ t-m}$$

$$A_s = 8.98 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar: } \phi \text{ 5/8" @ 0.22 m}$$

$$V_{du} = (14.98 - 0.2 * 1.4) * (1.75 - 0.44) - 0.5 * 8.35 * 1.31 = 13.79 \text{ t}$$

$$q'_d = 11.16 * 0.748 = 8.35 \text{ t/m}$$

$$V_n = 16.22 \text{ t}$$

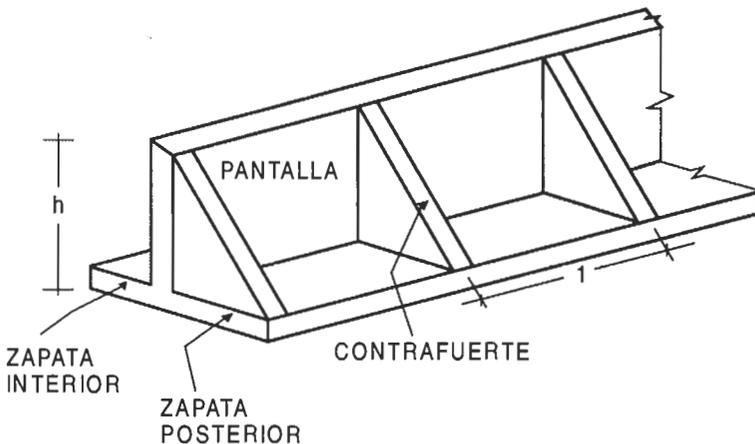
$$V_c = 0.53 * \sqrt{175} * 10 * 1 * 0.44 = 30.85 \text{ t CONFORME}$$

Refuerzo transversal:

a) $A_{s \text{ temp}} = 0.0018 * b t = 0.0018 * 100 * 50 = 9 \text{ cm}^2$
 $\phi \text{ 5/8" @ 0.22 m}$

b) $A_{s \text{ montaje}} = 36 \phi = 36 * 1.59 = 57.2 \text{ cm}^2$
 $\phi \text{ 5/8" @ 0.50 m}$

8. DISEÑO DE UN MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE



8.1 Criterios de dimensionamiento

- a. Contrafuertes:
espaciamiento : $h/3$ a $2h/3$
espesor ≥ 20 cm
según Yamashiro : $L = 2.5$ m relleno de suelo
 $L = 3$ m silo de granos
- b. Pantalla: espesor ≥ 20 cm
- c. Zapata: espesor ≥ 40 cm; la base de la zapata B_1 y B_2 , se dimensionan en forma igual que el muro en voladizo.

8.2 Diseño de la pantalla

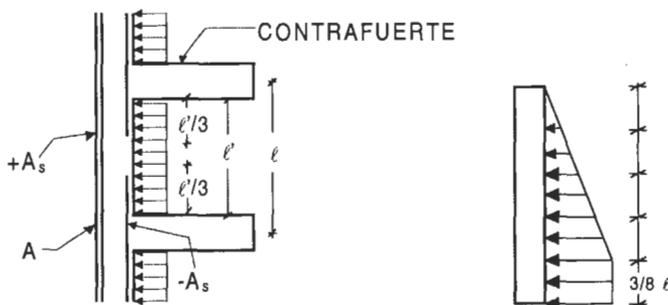
La pantalla es una losa apoyada en los contrafuertes y en la zapata; generalmente el borde superior no tiene apoyo. Sin embargo la pantalla puede ser diseñada como una losa continua apoyada en los contrafuertes sin considerar la influencia de la zapata como apoyo.

Es razonable considerar los siguientes valores aproximados de los momentos:

$$+M = pL^2 / 16 \qquad -M = pL^2 / 12$$

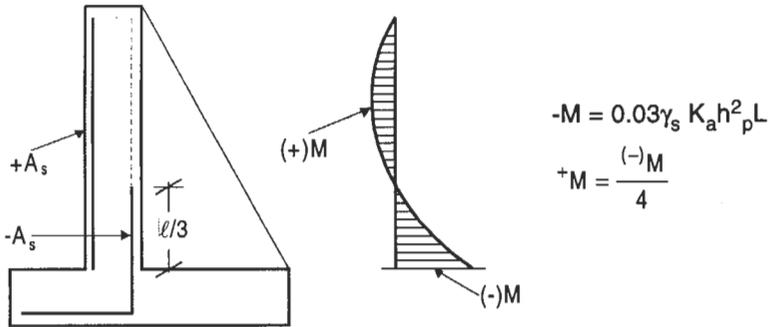
donde: p = presión del relleno al nivel considerado
 L = distancia entre ejes de los contrafuertes

Como las presiones varían a lo alto de la pantalla, el diseño se realiza por franjas horizontales con el valor mayor de p en cada franja como carga uniformemente repartida. Para las franjas inferiores el apoyo proporcionado por la losa de la zapata contribuye a una disminución de los momentos actuantes, esto puede tomarse en cuenta considerando como presión máxima la que corresponde a un nivel situado a $3/8$ de la distancia entre ejes de los contrafuertes contados a partir de la base de la pantalla.



Refuerzo vertical

- a. Considerando la influencia de la zapata como apoyo

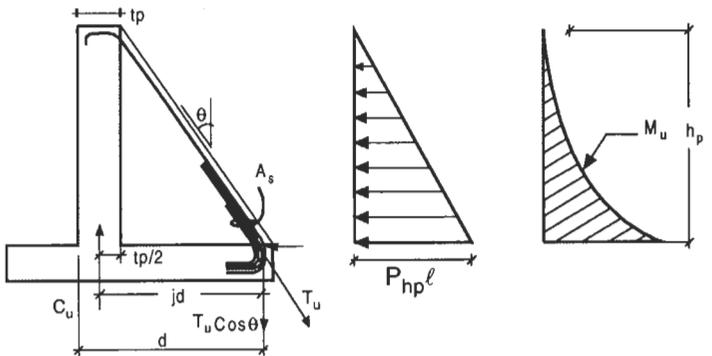


- b. Debe verificarse el refuerzo mínimo.

8.3 Diseño de los contrafuertes

- a. Por flexión

Los contrafuertes son vigas en voladizo empotradas en la losa de la cimentación, sirven de apoyo a la pantalla, por consiguiente resisten toda la presión del relleno en un ancho igual a la distancia entre ejes de los contrafuertes.



$$M_u = (T_u \cos \theta) jd = (T_u \cos \theta) \left(d - \frac{t_p}{2} \right)$$

$$T_u = \frac{M_u}{\cos \theta (d - t_p / 2)}$$

$$A_s = \frac{T_u}{\phi f_y}, \phi = 0.9$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - t_p / 2) \cos \theta}$$

b. Por fuerza cortante (refuerzo horizontal)

La fuerza cortante de diseño para la sección en estudio será:

$$V_{u1} = V_{ui} - T_{ui} \text{ sen } \theta \quad (\text{sección variable})$$

$$V_{ui} = V_u - \frac{M_u}{\left(d - \frac{t_p}{2}\right) \tan \theta}$$

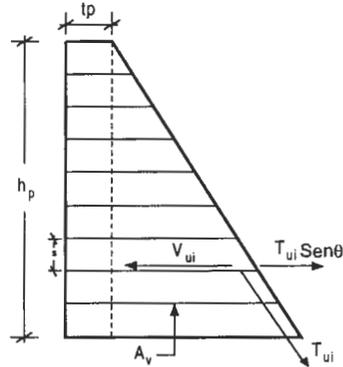
$$V_n = \phi V_c + \phi V_s$$

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

$$s = \frac{A_v df_y}{V_s}$$

donde: $\phi = 0.85$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d$$



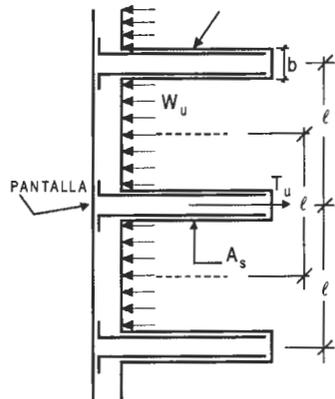
c. Por tracción de la pantalla al contrafuertes (refuerzo horizontal)

$$T_u = 1.7 PL$$

$$A_s = T_u / \phi f_y;$$

$$\phi = 0.9$$

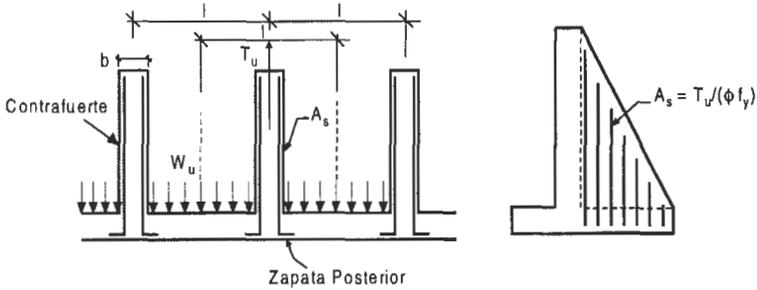
como refuerzo horizontal se considera el mayor de (b) y (c)



d. Por tracción de la zapata al contrafuerte (refuerzo vertical)

$$T_u = W_u L$$

donde: W_u = carga última en la zapata posterior



8.4 Diseño de las zapatas

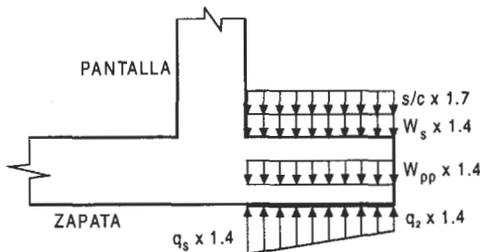
8.4.1 Zapata anterior

Igual que la correspondiente a un muro en voladizo

8.4.2 Zapata posterior

Se analiza y diseña en forma similar a la pantalla, es una losa que se apoya en los contrafuertes.

Pueden usarse los mismos coeficientes indicados para la pantalla para la determinación de los momentos positivos y negativos.



9. DISEÑO DE UN MURO DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTE

$$\gamma_s = 1.9 \text{ t/m}^3$$

(S. Arenoso denso)

$$\phi = 32^\circ$$

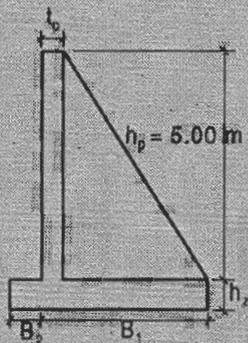
$$f_c = 175 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_t = 3.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{FSD} = 1.5$$

$$\text{FSV} = 1.75$$



Solución:

De $\phi = 32^\circ \Rightarrow$ VACIADO IN SITU $f = t_g \phi = 0.625 \leq 0.60$

Usar $f = 0.6$ para cálculo de la estabilidad contra deslizamiento

$$K_a = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) = 0.554^2 = 0.307$$

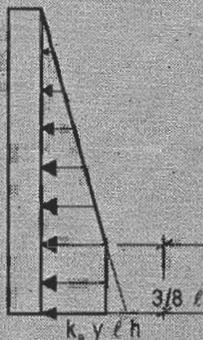
$$K_a \gamma_s = 0.584 \text{ t/m}^3$$

DIMENSIONAMIENTO DE LA PANTALLA

$$t_p = 0.20 \text{ m}$$

$$L = 2.5 \text{ m}$$

$$K_a \gamma h_p = 2.92 \text{ t/m}^2$$

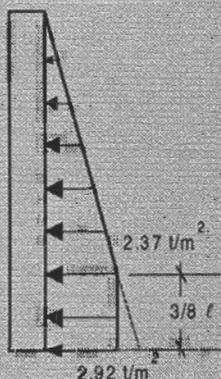


Refuerzo Horizontal

$$p = 2.37 \text{ t/m}^2, \quad L = 2.5 \text{ m}$$

Consideraciones :

- Se tomará una sola franja para el refuerzo horizontal
- Se tomarán los siguientes valores aproximados de momentos:



$$+M = \frac{pL^2}{16} = \frac{2.37 \cdot 2.5^2}{16} = 0.93 \text{ t-m}$$

$$-M = \frac{pL^2}{12} = \frac{2.37 \cdot 2.5^2}{12} = 1.23 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi b d^2 f_c \omega (1 - 0.59 \omega) \dots\dots\dots (1)$$

Considerando para la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \phi &= 0.9 \\ b &= 100 \text{ cm} \\ f_c &= 175 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\rho = 0.004 \rightarrow \omega = \rho \frac{f_y}{f_c} = 0.004 \frac{4200}{175} = 0.096$$

$$M_u = 1.7 M = 0.9 \cdot 100 \cdot d^2 \cdot 175 \cdot 0.096 \cdot (1 - 0.59 \cdot 0.096)$$

$$+M \Rightarrow d = 38.08 \text{ cm}$$

$$-M \Rightarrow d = 38.08 \text{ cm}$$

$$d = t_p - r - \frac{\phi_{\text{acero}}}{2}$$

$$d = 20 - 4 - 1.59/2 = 15.21 \text{ cm}$$

DIMENSIONAMIENTO DE LA ZAPATA

$$h_z = t_p + 5 \text{ cm} = 20 + 5 = 25 \text{ cm}, \quad h_z = 40 \text{ cm}$$

$$\therefore h = h_p + h_z = 5.40 \text{ m}$$

usando las expresiones I y II:

$$\frac{B_1}{h} \geq \text{FSD} \frac{k_a \gamma_s}{2f\gamma_m} = \frac{1.5 \cdot 0.307 \cdot 1.9}{2 \cdot 2 \cdot 0.6} = 0.365$$

$$B_1 \geq 1.97 \text{ m}$$

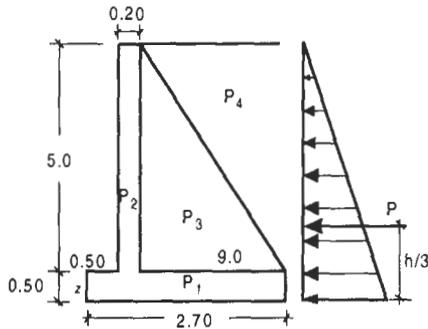
Usar $B_1 = 2.20 \text{ m}$

$$\frac{B_2}{h} \geq \frac{f \cdot \text{FSV}}{3 \text{ FSD}} - \frac{B_1}{2h} = \frac{0.6 \cdot 1.75}{3 \cdot 1.5} - \frac{2.15}{2 \cdot 5.5} = 0.048$$

$$B_2 \geq 0.27 \text{ m}$$

Usar: $B_2 (\text{min}) = h_z = 0.50 \text{ m}$

VERIFICACION DE ESTABILIDAD



P_i	Pesos (P) t	Brazo de giro (X) mt.	$P \cdot X$ (T*mt.)
P_1	$0.50 \cdot 2.70 \cdot 2.4 = 3.24$	1.350	4.37
P_2	$0.20 \cdot 5.00 \cdot 2.4 = 2.40$	0.600	1.44
P_3	$(2.00 \cdot 5.00 \cdot 0.5 \cdot 0.2) \cdot 2.4 / 2.5 = 0.96$	1.367	1.31
P_4	$2.00 \cdot 5.00 \cdot 1.9 = 19.00$	2.033	38.63
	TOTAL	$N = 25.60$	$M = 45.75$

$$FSD = \frac{H_r}{H_a} = \frac{fN}{H_a} = \frac{0.6 \cdot 25.60}{8.51} = 1.80 > 1.5 \quad \text{conforme}$$

$$FSV = \frac{M_r}{M_a} = \frac{45.75}{8.51 \cdot 1.80} = 2.99 > 1.75 \quad \text{conforme}$$

PRESIONES SOBRE EL TERRENO

$$d = \frac{M_r - M_a}{P} = \frac{45.75 - 15.32}{24.95}$$

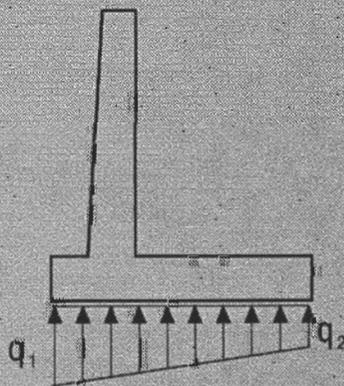
$$d = 1.22 \text{ m}$$

$$e = \frac{B}{2} - d = 0.13 \text{ m}$$

$$\frac{B}{6} = \frac{2.70}{6} = 0.45 < e \therefore$$

$$q_1 = \frac{P}{B} \left(1 + \frac{6e}{B} \right) = 12.22 \text{ t/m}^2$$

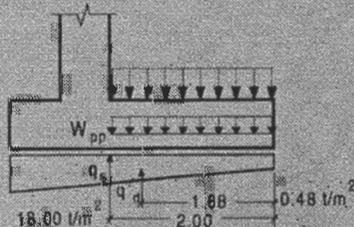
$$q_2 = \frac{P}{B} \left(1 - \frac{6e}{B} \right) = 6.74 \text{ t/m}^2 \therefore q_1 < \sigma_t \quad \text{conforme}$$



DISEÑO DE LA ZAPATA

$$W_s = 1.9 \cdot 5 = 9.5 \text{ t/m}$$

$$W_{pp} = 0.4 \cdot 1 \cdot 2.4 = 0.96 \text{ t/m}$$



Zapata Anterior

$$W_{u \max} = q_1 \cdot 1.7 - W_z \cdot 0.9 = 18.00 \cdot 1.7 - 0.96 \cdot 0.9 = 29.74 \text{ t/m}$$

conservadoramente

$$M_u = 29.74 \cdot \frac{0.50^2}{2} = 3.72 \text{ t-m} \Rightarrow A_s = 3.15 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \min} = 0.0018 \cdot b \cdot d = 0.0018 \cdot 100 \cdot 32.0 = 5.76 \text{ cm}^2$$

$$d = 40 - \left(7.5 + \frac{16}{2} \right) = 32.0 \text{ cm } \phi 5 / 8" @ 0.35 \text{ m}$$

pasar la mitad del refuerzo vertical de la pantalla.

Verificación por cortante: Por inspección, conforme

Zapata Posterior

Se analiza y diseña en forma similar a la pantalla, es una losa que se apoya en los contrafuertes.

Pueden usarse los mismos coeficientes indicados para la pantalla para la determinación de los momentos positivos y negativos.

DISEÑO LIMITE

Métodos de Análisis

- a) Elástico
- b) Elastoplástico
- c) Inelástico
- d) Elástico Corregido

Métodos de Diseño:

- a) Elástico
- b) Rotura
- c) Inelástico
- d) Plástico

Ductilidad

Capacidad de soportar grandes deformaciones sin pérdida significativa de su resistencia.

Resistencia y Ductilidad de Pórticos

Introducción

Consideraciones del comportamiento de sistemas apórticados de concreto armado para cargas últimas o cercanas es necesario para determinar la distribución posible de momentos flectores, fuerza cortante y fuerza axiales que podrían ser usadas en el diseño estructural.

Es posible usar una distribución de momentos y fuerzas diferentes que las obtenidas por un análisis estructural elástico lineal si las secciones críticas tienen suficiente ductilidad para permitir la redistribución de acciones a ocurrir cuando la carga última es alcanzada.

En países ubicados dentro de zonas sísmicas, un aspecto importante del diseño estructural es la ductilidad de la estructura cuando esta sometida a movimientos

sísmicos. Actualmente la filosofía del diseño sísmico para sismos severos, se basa en la disipación de energía por deformación inelástica

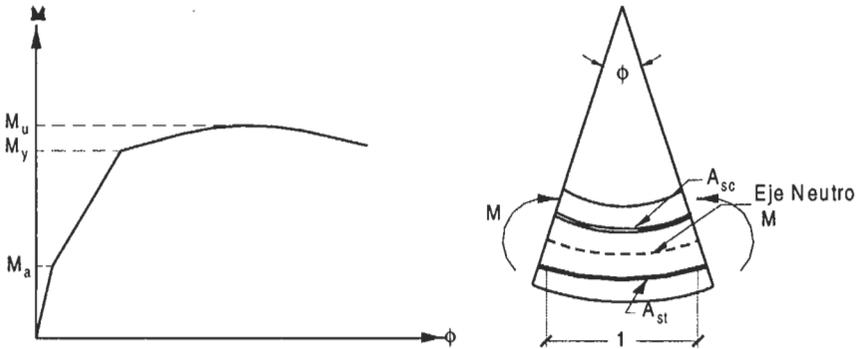


Figura: Diagrama Típico de Momento-Curvatura para secciones de Concreto Armado

Redistribución de Momentos-Formación de Rótulas Plásticas

La redistribución de momentos puede tener una influencia acentuada sobre la carga última en una estructura estáticamente indeterminada.

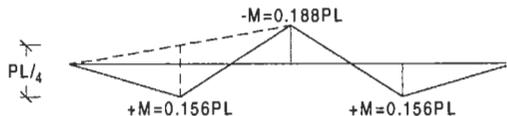
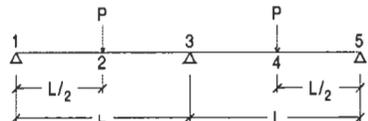
Consideremos como ejemplo, una viga continua de 2 tramos de sección constante.

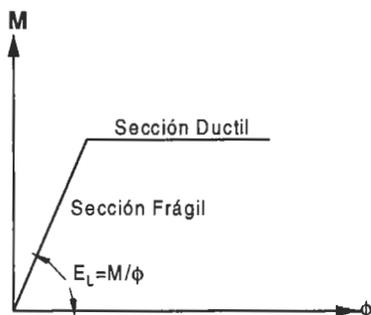
Asumimos que la viga ha sido diseñada adecuadamente para fuerzas cortantes \Rightarrow permite que alcancen los momentos últimos sin que ocurra falla por corte.

$$\left. \begin{array}{l} -M_u \\ +M_u \end{array} \right\} \text{ Momentos últimos de resistencia para momentos}$$

Por equilibrio: $\frac{-M}{+M} = 1.2$

$$\frac{PL}{4} = \frac{-M}{2} + M \Rightarrow P = \frac{4}{L} \left(+M + \frac{-M}{2} \right)$$



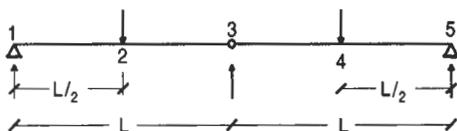


Si: $\frac{-M_u}{+M_u} = \frac{-M}{+M} = 1.2$ (se formarán simultáneamente rótulas plásticas en las secciones 2, 3 y 4)

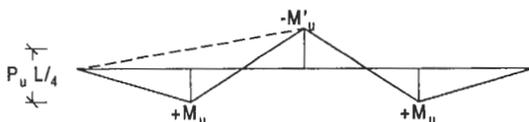
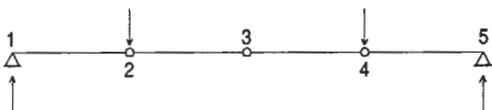
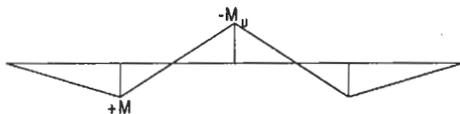
Si: $\frac{-M_u}{+M_u} < 1.2$ (se formará la primera rótula plástica en 3)

Si: $\frac{-M_u}{+M_u} > 1.2$ (se formarán las primeras rótulas plásticas en 2 y 4)

Suponiendo que la primera rótula plástica se forme en 3 (sección de momento negativo).

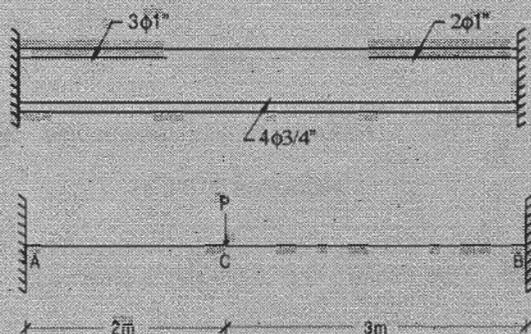


$$P_{\text{limite}} = P_u = \frac{4}{L} \left(+M_u + \frac{-M_u}{2} \right)$$



Aplicación:

La viga que se muestra en la figura adjunta es de sección constante de $b \times h = 30 \times 55 \text{ cm}^2$, $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$; el refuerzo negativo en A es de $3 \phi 1''$, el refuerzo negativo en B es de $2 \phi 1''$ y el refuerzo positivo en C es de $4 \phi 3/4''$. Considerando que la viga falla de manera dúctil, por flexión, determine la carga máxima ($P_{\text{límite}}$) que puede soportar.



Solución:

Sección A:

$$A_s = 3 \phi 1'' = 3 \cdot 5.07 = 15.21 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{15.21 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 0.30} = 8.95 \text{ cm}$$

$$M \equiv M_y = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 15.21 \cdot 4.2 \left(0.49 - \frac{0.0895}{2} \right) = 28.44$$

$$\Rightarrow M_y = 28.44 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Sección B:

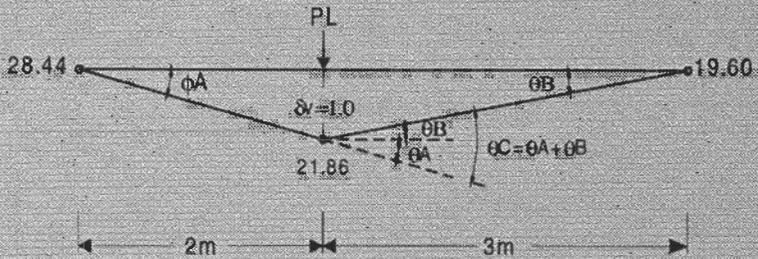
$$A_s = 2 \phi 1'' = 2 \cdot 5.07 = 10.14 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 5.96 \text{ cm} \Rightarrow M_y = 19.60 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Sección C:

$$A_s = 4 \phi 3/4'' = 4 \cdot 2.85 = 11.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 6.71 \text{ cm} \Rightarrow M_y = 21.86 \text{ t}\cdot\text{m}$$

a) Por trabajos virtuales:

$$W_{\text{exterior}} = W_{\text{interior}} \Rightarrow W_E = \sum P_i \delta_i$$

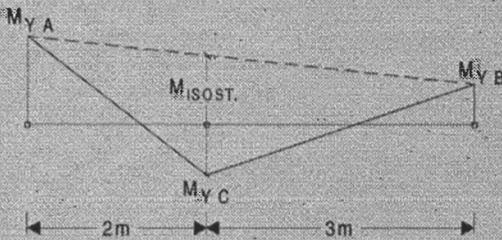


$$W_I = \sum M_{y\alpha} \theta_\alpha$$

$$\theta_A = \frac{1}{2}$$

$$\theta_B = \frac{1}{3}$$

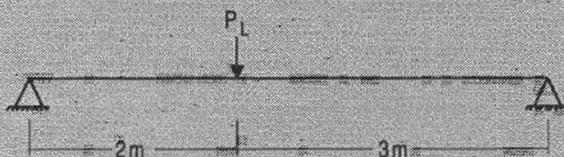
$$\theta_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$



$$P_L = 28.44 \cdot \frac{1}{2} + 19.6 \cdot \frac{1}{3} + 21.86 \cdot \frac{5}{6} = 38.97$$

$$P_L = 38.97 \text{ t}$$

b) Por momento isostático:

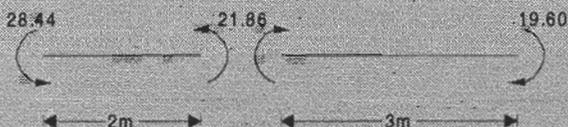


$$M_{ISOST} = \left(\frac{3}{5}P\right)^2 = \frac{6}{5}P_L$$

$$\frac{6}{5}P_L = 19.6 + (28.44 - 19.6) \cdot \frac{3}{5} + 21.86 = 46.76 \text{ t}$$

$$\Rightarrow P_L = 38.97 \text{ t}$$

c) Por Equilibrio:



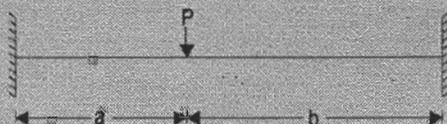
$$R_A = \frac{28.44 + 21.86}{2} = 25.15 \text{ t}$$

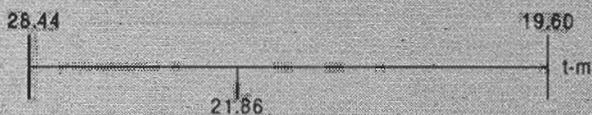
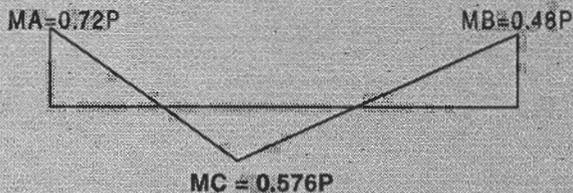
$$R_B = \frac{21.86 + 19.6}{3} = 13.82 \text{ t}$$

$$\Rightarrow P_L = 38.97 \text{ t}$$

d) Secuencia de formación de rótulas plásticas

$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pba^2}{L^2} \quad M_C = 2\frac{Pa^2b^2}{L^3}$$





Momentos Resistentes

$$r_i = \frac{M_{\text{actuante}}}{M_{\text{resistente}}}$$

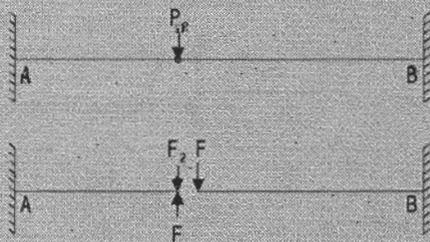
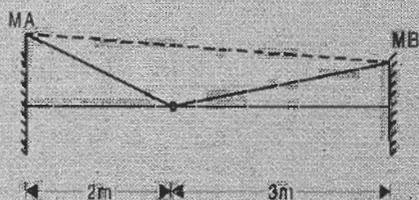
En la sección de mayor valor de r_i se formara las primeras rótulas plásticas para $r_i = 1$

$$r_A = \frac{0.72P}{28.44} = 0.0253 P$$

$$r_B = \frac{0.48P}{19.6} = 0.0245 P$$

$$r_C = \frac{0.576P}{21.86} = 0.0263 P = |r_i|_{\text{max}}$$

∴ Primera rótula plástica en la sección C, para un valor de $P_1 = 37.95 \text{ t}$



$$\Delta = (P - F) \frac{2^3}{3EI} = \frac{F 3^3}{3EI} \Rightarrow 8P - 8F = 7F$$

$$F = \frac{8}{35} P \Rightarrow P - F = \frac{27}{35} P$$

$$M_A = \frac{54}{35} P ; M_B = \frac{24}{35} P$$

$$M_B = 0.69 P_2$$

$$M_A = 1.54 P_2$$

$$M_{rA} = M_y - M_{1A} = 28.44 - 0.72 P_1 = 1.12 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_{rB} = 19.6 - 0.48 P_1 = 1.38 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$r_A = \frac{M}{M_{rA}} = \frac{1.54 P_2}{1.12} = 1.38 P_2 \Rightarrow 1.38 P_2 = 1 \cdot P_2 = 0.72 t$$

$$r_B = \frac{0.69 P_2}{1.38} = 0.50 P_2$$

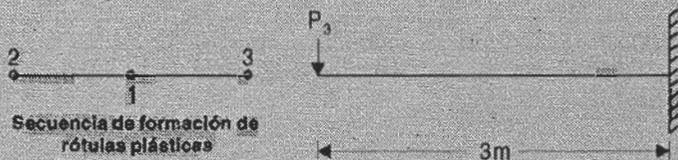
$$P_1 + P_2 = 37.95 + 0.72 = 38.67 \text{ t} \Rightarrow \text{Segunda rótula en A}$$

$$M_B = 3 P_3$$

$$M_{rB} = 1.38 - 0.69 P_2 = 0.88 t$$

$$3 P_3 = 0.88 \Rightarrow P_3 = 0.29 t$$

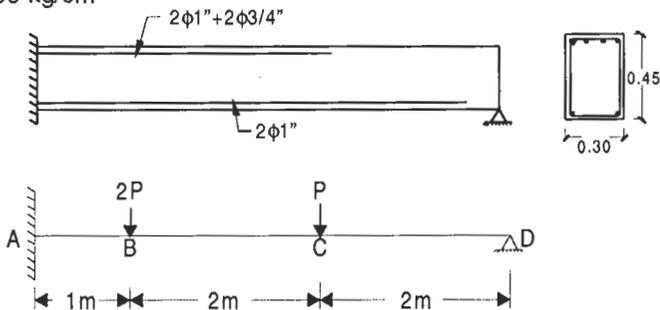
$$P_1 + P_2 + P_3 = 38.96 \text{ t} \Rightarrow \text{Tercera rótula en B}$$



Aplicación:

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

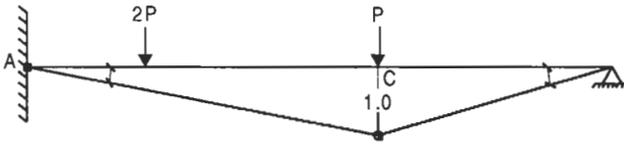
$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Solución:

Usando el métodos de trabajos virtuales:

a) Asumiendo rótulas en A y C



$$A_s = 2 \phi 1" + 2 \phi 3/4" = 2 * 5.07 + 2 * 2.85 = 15.84 \text{ cm}^2$$

$$d = 45 - (4 + 0.95 + 1.27) = 38.78 \text{ cm}$$

$$a = \frac{15.84 * 4.2}{0.85 * 0.28 * 0.30} = 9.32 \text{ cm}$$

$$M_y = 15.84 * 4.2 \left(0.388 - \frac{0.093}{2} \right) = 22.72$$

$$\Rightarrow M_y = 22.72 \text{ t-m}$$

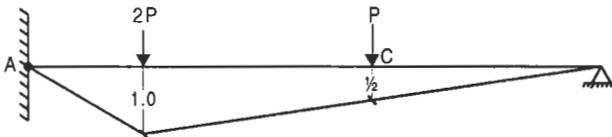
$$A_s = 2 \phi 1" = 10.14 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 5.96 \text{ cm} \Rightarrow M_y = 15.25 \text{ t-m}$$

$$W_E = 2P \left(\frac{1}{3} \right) + P(1) = \frac{5}{3} P$$

$$W_i = 22.72 \left(\frac{1}{3} \right) + 15.25 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 20.28$$

$$P = 12.17 \text{ t}$$

b) Asumiendo rótulas en A y B



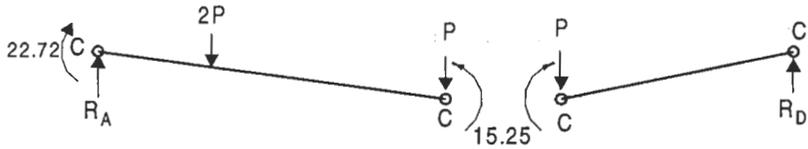
$$W_E = 2P + 0.5P = 2.5P$$

$$W_i = 22.72(1) + 15.25 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 41.78$$

$$P = 16.71 \text{ t}$$

$$P_{\text{limite}} = P_{\text{menor}} = 12.17 \text{ t}$$

Usando el método de equilibrio:



$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 22.72 + 15.25 + 2P(2) - R_A 3 = 0 \Rightarrow R_A = 12.66 + 1.33P$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 15.25 - R_D 2 = 0 \Rightarrow R_D = 7.63 \text{ t}$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow 3P = R_A + R_D$$

$$3P = 12.66 + 1.33P + 7.63$$

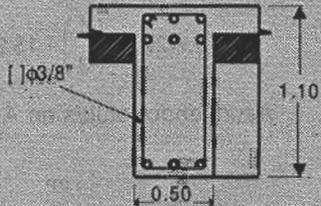
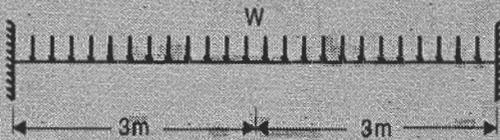
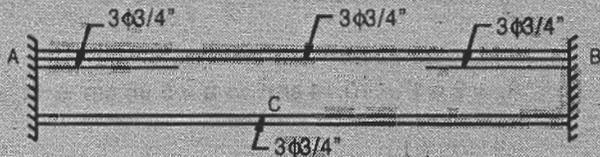
$$P_L = \frac{20.29}{1.67} = 12.15 \text{ t}$$

Aplicación:

Para el sistema que se muestra en la figura, determine la carga uniforme límite de la viga.

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Solución:

$$d = 55 - (4 + 0.95 + 1.91 + 1.27) = 55 - 8.13 = 46.87 \text{ cm}$$

Momentos de Fluencia:

$$M_y = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Sección A:

$$A_s = 6 \phi 3/4 = 17.10 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 16.09 \text{ cm} \quad d = 46.87 \text{ cm}$$

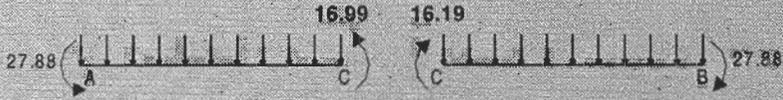
$$M_y = 17.10 \cdot 4.2 \left(0.469 - \frac{0.161}{2} \right) = 27.88 \Rightarrow M_y = 27.88 \text{ t-m}$$

Sección C:

$$A_s = 3 \phi 3/4" = 8.55 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 8.047 \text{ cm}$$

$$d = 55 - (4 + 0.95 + 1.91/2) = 55 - 5.91 = 49.10 \text{ cm} \Rightarrow M_y = 16.19 \text{ t-m}$$

Usando el método de equilibrio:



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 27.88 + 16.19 - W(3)^2/2 = 0 \Rightarrow W = 9.79 \text{ t/m}$$

Usando el método de trabajos virtuales:

$$\theta_A = \frac{1}{3}$$

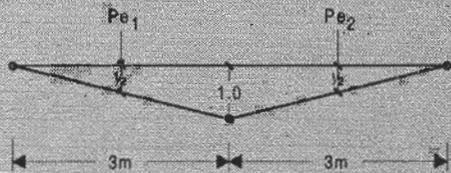
$$\theta_B = \frac{1}{3}$$

$$\theta_C = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$W_{\text{exterior}} = W_{\text{interior}}$$

$$\Rightarrow P\theta_1 \left(\frac{1}{2}\right) + P\theta_2 \left(\frac{1}{2}\right) = 27.88 \left(\frac{1}{3}\right) + 27.88 \left(\frac{1}{3}\right) + 16.19 \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(3W \frac{1}{2}\right) 2 = 29.38 \Rightarrow W = 9.79 \text{ t/m}$$



Aplicación:

WL = ?

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

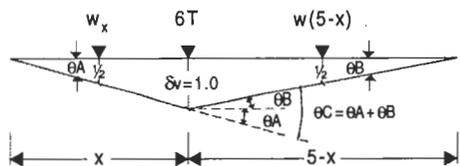
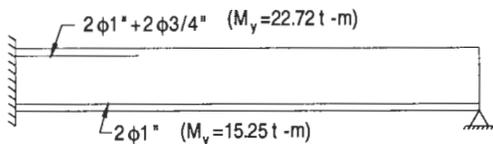
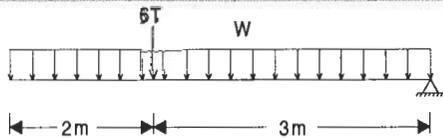
$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Usando el método de trabajos virtuales:

$$\delta_1 = \frac{2}{x}$$

$$W_E = wx \left(\frac{1}{2}\right) + w(5-x) \frac{1}{2} + 6 \left(\frac{2}{x}\right)$$

$$W_i = 22.72 \left(\frac{1}{x}\right) + 15.25 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5-x}\right)$$



$$5w \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{12}{x} = \frac{37.97}{x} + \frac{15.25}{5-x}$$

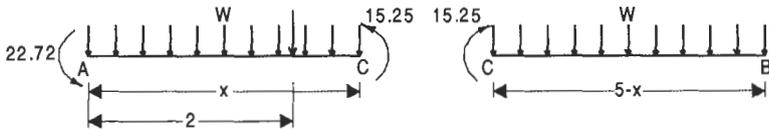
$$w = \frac{10.39}{x} + \frac{6.1}{5-x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{10.39}{x^2} + \frac{6.1}{(5-x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2.47}{5-x} = \frac{3.22}{x} \Rightarrow x = 2.83 \text{ cm}$$

En (1):

$$w = 3.67 + \frac{6.1}{2.17} = 6.48 \Rightarrow w = 6.48 \text{ t/m}$$

Usando el método de equilibrio:



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 22.72 + 15.25 - 6 \cdot 2 - wx^2 / 2 = 0 \Rightarrow w = \frac{51.94}{x^2} \dots\dots (1)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow w = 15.25 - w \frac{(5-x)^2}{2} = 0 \Rightarrow w = \frac{30.5}{(5-x)^2} \dots\dots\dots (2)$$

(1) = (2)

$$\frac{51.94}{x^2} = \frac{30.5}{(5-x)^2} \Rightarrow 7.2(5-x) = 5.52x \Rightarrow w = \frac{36.05}{12.73} = 2.83 \text{ m}$$

$$\therefore W = \frac{51.94}{2.83^2} = 6.48 \text{ t/m}$$

Redistribución de Momentos

El requerimiento de ductilidad en las rótulas plásticas puede ser excesivo, especialmente en las primeras en formarse, para permitir el desarrollo de todas las rótulas hasta alcanzar la carga última de colapso plástico, sin que ninguna de las anteriores haya empezado a perder resistencia.

Por otro lado, es obvio que ciertas combinaciones de momento de diseño pueden producir diseños con esfuerzos de servicio en el acero muy elevados (incluso

en algunos casos se llega a la fluencia), lo que puede dar origen a un agrietamiento del elemento fuera del límite tolerable.

Para fines de diseño puede tomarse como base la distribución elástica de los momentos flectores. Cualquier variación respecto de esta distribución es una REDISTRIBUCION DE MOMENTOS y requiere ductilidad en las secciones de rótulas plásticas que se forman primero. El grado de ductilidad requerido es función directa de la magnitud de la redistribución efectuada.

Redistribución de momentos negativos en elementos continuos en flexión no preesforzados

DE ACUERDO AL ACI 318-99 (Sección 8.4):

Excepto en los casos en los cuales se usan valores aproximados para los momentos flectores, los momentos negativos calculados con la teoría elástica, para cualquier configuración de carga asumida, en los apoyos de elementos continuos en flexión, pueden ser cada uno aumentados o disminuidos en no más de:

$$20 \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} \right) \%$$

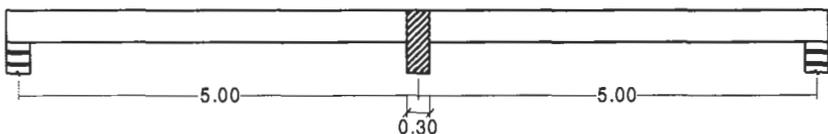
Estos momentos negativos modificados se usarán para el cálculo de los momentos en secciones de los tramos. Tal variación solo se hará en secciones dúctiles, con $\rho, \rho - \rho' \leq 0.50 \rho_b$
donde:

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

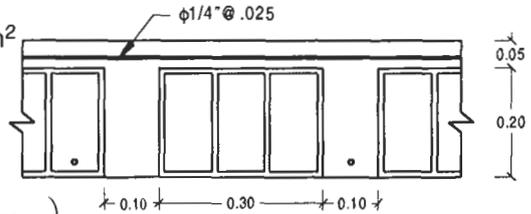
∴ Los elementos así diseñados deberán ser verificados por agrietamiento

Aplicación:

Diseñar el refuerzo para la losa aligerada que se muestra en la figura adjunta, redistribuyendo los momentos para reducir el acero total requerido.



$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $PP_{\text{aligerado}} = 350 \text{ kg/m}^2$
 $S/C = 300 \text{ kg/m}^2$
 $\text{Acabados} = 100 \text{ kg/m}^2$



Solución:

a) **Cuantía Balanceada:**

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

$$\rho_b = 0.85 * 0.85 * \frac{210}{4200} * \left(\frac{6000}{6000 + 4200} \right) = 0.0213$$

$0.5\rho_b = 0.0106$ (cuantía máxima para la redistribución de momentos)

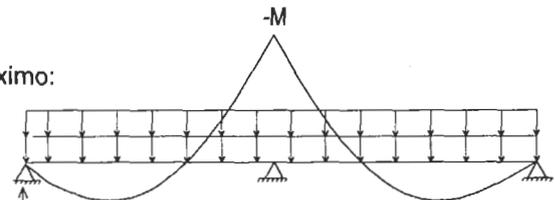
b) **Cargas de Diseño por Vigueta:**

$$W_{DU} = 1.4 * 450 * 0.4 = 252 \text{ kg/m}$$

$$W_{LU} = 1.7 * 300 * 0.4 = 204 \text{ kg/m} \Rightarrow W_u = 456 \text{ kg/m} = 0.456 \text{ t/m}$$

c) **Momentos Elásticos:**

Momento Negativo Máximo:



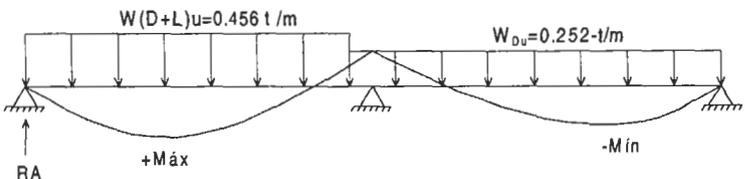
$$RA = 0.456 * 5/2 - 1.43/5 = 0.855T$$

$$W_u = 0.456 \text{ t/m}$$

$$-M_{\text{máx}} = W_u L^2 / 8 = 0.456 * 5^2 / 8 = 1.43 \text{ t-m}$$

$$-M_{\text{cara}} = 0.855 * (5.00 - 0.15) - 0.456 * 4.85^2 / 2 = -1.22 \text{ t-m}$$

Momento Positivo Máximo:



$$M_{BA} = W_u L^2 / 8 = 0.456 * 5^2 / 8 = 1.43 \text{ t-m}$$

$$M_{BC} = W_{DU} L^2 / 8 = 0.252 * 5^2 / 8 = 0.79 \text{ t-m}$$

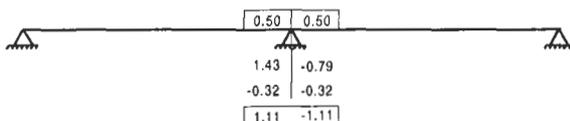
$$R_A = W_{D+L} L / 2 - M_B / L = 0.456 * 5 / 2 - 1.11 / 5 = 0.918 \text{ t}$$

$$M_B = 1.11 \text{ t-m}$$

$$V = 0.918 - 0.456 X_o = 0 \Rightarrow X_o = 2.013 \text{ m}$$

$$+M_{m\acute{a}x} = 0.918 * 2.013 - 0.456 * 2.013^2 / 2 = 0.92 \text{ t-m}$$

d) Refuerzo para Momentos Elásticos:



$$\phi 1/2" \Rightarrow d = 25 - (2 + \phi / 2) = 25 - (2 + 1.27/2) = 22.36 \text{ cm}$$

$$a = 0.72 \text{ cm} \Rightarrow d - a / 2 = 22 \text{ cm}$$

$$+A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)} = \frac{0.92 * 10^5}{0.9 * 4200 * 22} = 1.11 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = 0.65 \quad \text{conforme} \quad \text{usar: } 1 \phi 1/2"$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = 0.65 \Rightarrow a = \frac{1.58 * 4200}{0.85 * 210 * 10} = 3.72 \text{ cm (conforme)}$$

$$a = 4 \text{ cm} \therefore \text{ Usar} = 1 \phi 1/2" + 1 \phi 3/8" \Rightarrow A_s = 1.98 \text{ cm}^2$$

Redistribución de Momentos

1. Momento Negativo Máximo:

Probar $2 \phi 3/8"$ (1.42 cm^2)

$$d = 25 - (2 + 0.95/2) = 22.52 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{1.42}{10 * 22.52} = \frac{A_s}{bd} = 0.0063 < 0.5 \rho_b = 0.0107 \text{ (conforme)}$$

Ignorando ρ' , el porcentaje de redistribución permisible es:

$$20 \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} \right) \% = 20 \left(1 - \frac{0.0063}{0.0214} \right) = 14.1\%$$

Momento Negativo Redistribuido

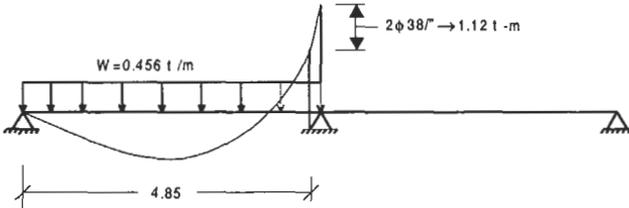
$$2 \phi 3/8" \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{1.42 * 4200}{0.85 * 210 * 10} = 3.34 \text{ cm}$$

$$M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 0.9 * 1.42 * 4.2 \left(0.2252 - \frac{0.334}{2} \right) = 1.12 \text{ t-m}$$

$$\% \text{ Redistribuido} = \frac{-M - M_R}{-M} * 100 = \frac{1.22 - 1.12}{1.22} * 100$$

$$\Rightarrow 8.0 \% < 14.1 \% \text{ (conforme)}$$

Momento Positivo Máximo Redistribuido:



$$R_A = 0.456 * 4.85 / 2 - 1.12 / 4.85 = 0.876 \text{ t}$$

$$V = 0.876 - 0.456 X_o = 0 \Rightarrow X_o = 1.92 \text{ m}$$

$$+M_{\text{máx}} = 0.876 * 1.92 - 0.456 * 1.92^2 / 2 = 0.84 \text{ t-m} < 0.92 \text{ t-m (conforme)}$$

2. Redistribución de Momento Positivo Máximo:

$$\text{Probar } +A_s \Rightarrow 1 \phi 3/8" + 1 \phi 1/4" (0.71 + 0.31 = 1.02 \text{ cm}^2)$$

$$\rho = \frac{1.02}{40 * 22.52} = 0.0013 < 0.5 \rho_b = 0.0107 \text{ (conforme)}$$

$$20 \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} \right) \% = 20 \left(1 - \frac{0.00113}{0.0214} \right) = 18.9 \%$$

Momento Positivo Redistribuido:

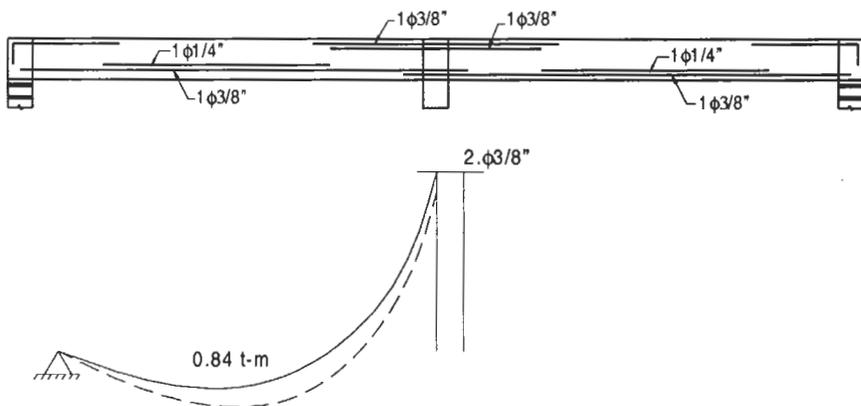
$$1 \phi 3/8" + 1 \phi 1/4" \Rightarrow a = \frac{1.02 * 4200}{0.85 * 210 * 40} = 0.6 \text{ cm}$$

$$+M_R = 0.9 * 1.02 * 4.2 \left(0.2252 - \frac{0.6}{2} \right) = 0.86 \text{ t-m}$$

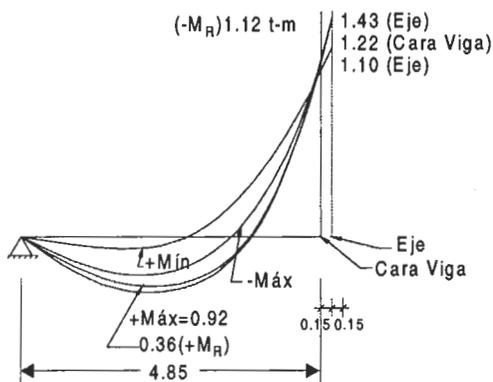
$$\Rightarrow +M_R = 0.86 \text{ t-m} > 0.84 \text{ t-m (conforme)}$$

$$\% \text{ Re}_{\text{distribuido}} = \frac{+M - +M_R}{+M} * 100 = \frac{0.92 - 0.86}{0.92} * 100$$

$$\Rightarrow 6.5 \% < 18.9 \% \text{ (conforme)}$$



Va ser algo menor que 1.12 t-m (2 φ 3/8")
 ∴ Conforme para la distribución de momento positivo



Puntos de corte de la armadura:

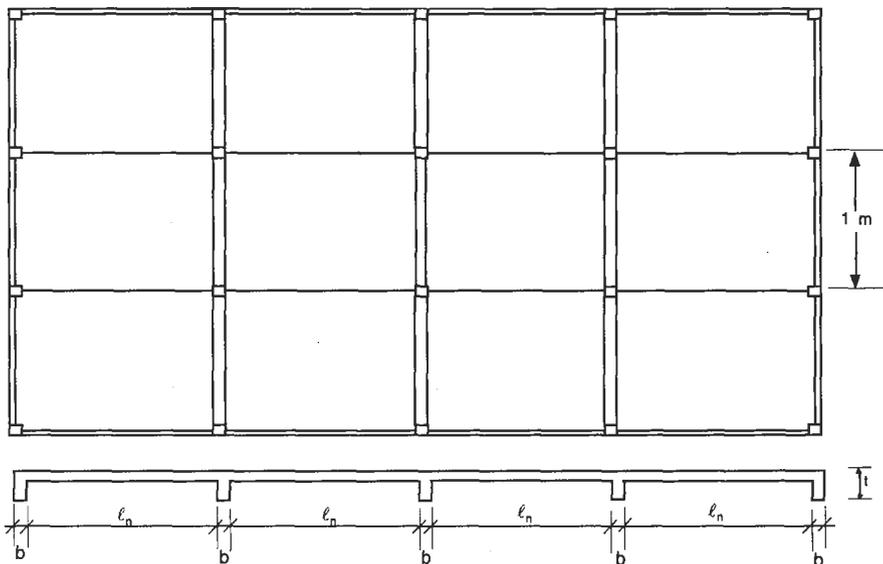
Si bien es correcto diseñar las secciones críticas para los momentos redistribuidos, debe tenerse en cuenta que la redistribución ocurre para cargas elevadas. En condiciones de servicio es probable que los momentos se distribuyan cercanamente a las condiciones elásticas. Por consiguiente, para evitar secciones sin reforzar es conveniente usar las envolventes elásticas para la determinación de los puntos de terminación de las barras.

ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS

LOSAS EN UNA DIRECCION

Las losas armadas en una dirección son paneles de piso de concreto para los cuales la relación de luz mayor a la luz menor es igual o mayor que 2.0. Cuando esta relación es menor que 2 el panel de piso llega a ser una losa en dos direcciones.

Una losa en una dirección es diseñada como un paño de viga de ancho de 1m usando el mismo procedimiento de análisis y diseño que el de vigas con refuerzo simple.



En el diseño de losas, normalmente se asume un espesor. Las losas normalmente para cargas típicas no requieren de refuerzo por corte.

REFUERZO TRANSVERSAL

$$A_{\text{stemp}} = 0.0020 \text{ bt} \quad \text{para } f_y = 2800, 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$= 0.0018 \text{ bt} \quad \text{para } f_y = 4200$$

$$A_{\text{st}} = 0.0018 \text{ bt} \left(\frac{4200}{f_y} \right) \geq 0.0014 \text{ bt}$$

$$s \leq 5t, 45 \text{ cm} \quad \text{con } \epsilon_y = 0.35\%$$

Aplicación:

Diseñar la losa simplemente apoyada reforzada en una dirección, que se muestra en la figura.

Considere:

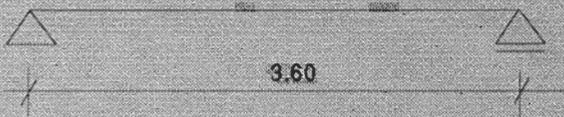
$$f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$w_D = 0.56 \text{ t/m}^2$$

$$w_L = 0.50 \text{ t/m}^2$$

Dimensionar la losa para una cuantía de 0.004



Solución:

Considerando un ancho de 1m

$$W_u = 1.4 w_D + 1.7 w_L = 1.4 \cdot 0.56 + 1.7 \cdot 0.5 = 1.63 \text{ t/m}^2$$

$$M_u = W_u \frac{l^2}{8} = 1.63 \cdot \frac{3.60^2}{8} = 2.65 \text{ t-m}$$

$$M_u = \phi f_c b d^2 w (1 - 0.59 w)$$

$$w = \rho \frac{f_y}{f_c} = 0.004 \cdot \frac{4200}{280} = 0.060$$

$$2.65 \cdot 10^5 = 0.9 \cdot 280 \cdot 100 d^2 \cdot 0.060 (1 - 0.59 \cdot 0.060) =$$

$$d = 13.78 \text{ cm} \Rightarrow h = d + p + \frac{\phi}{2} = 13.48 + 2 + \frac{1.27}{2} = 16.12 \text{ cm}$$

Usar: $h = 16 \text{ cm} \Rightarrow d = 16 - (2 + 0.635) = 13.36 \text{ cm}$
 $\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.0213 > 0.004$ Conforme
 $\rho_{\min} = \rho_{\text{temp}} = 0.0018 < 0.004$ Conforme

Diseño:

$a = 2 \text{ cm}$ $d = 13.36 \text{ cm}$

$$d - \frac{a}{2} = 12.36 \text{ cm} \Rightarrow A_s = \frac{M_n}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)} = \frac{2.65 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 (12.36)}$$

$$A_s = 5.67 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{5.67 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.28 \cdot 100} = 1.00 \text{ cm}$$

$$d - \frac{a}{2} = 12.86 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 5.45 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 0.96 \text{ cm} \therefore \text{CONFORME}$$

$$\rho = A_s / bd = \frac{5.45}{100 \cdot 13.36} = 0.00408$$

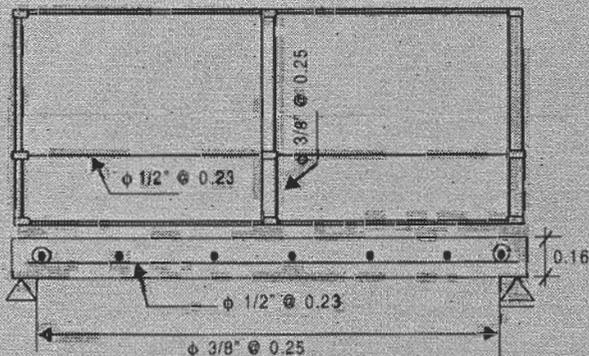
Usar: $A_s = n A \phi \Rightarrow s = \frac{b}{n} = \frac{A \phi}{A_s / m} = \frac{1.27}{5.45} = 0.23 \text{ m}$

$\phi 1/2" @ 0.23$ Respuesta

REFUERZO TRANSVERSAL

$$A_{st} = 0.0018 \text{ bt} = 0.0018 \cdot 100 \cdot 16 = 2.88 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Usar: $\phi 3/8" @ s = \frac{0.71}{2.88} = 0.25 \text{ m}$



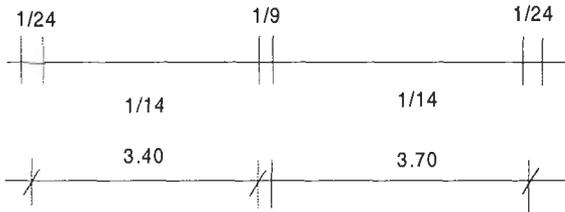
Diseño de una losa maciza

Diseñar la losa maciza por flexión reforzada en una dirección. Considere: espesor = 14 cm, s/c = 600 kg/m², f_c = 210 kg/cm², f_y = 4200 kg/cm².

Solución:

$$\begin{aligned} P.P. &= 0.14 \cdot 1 \cdot 2.4 \cdot 1.4 \dots\dots\dots 0.47 \text{ t/m}^2 \\ \text{acab} &= 0.10 \cdot 1.4 \dots\dots\dots 0.14 \\ \text{s/c} &= 0.60 \cdot 1.7 \dots\dots\dots 1.02 \\ W_U &= 1.63 \text{ t/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s/c} &= 600 \text{ kg/m}^2 \\ f_c &= 210 \text{ kg/cm}^2 \\ f_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{24} \Rightarrow 0.79 \text{ t-m} \Rightarrow a = 0.46 \text{ cm} \Rightarrow A_S = 1.88 \text{ cm}^2 \therefore \phi 3 / 8" @ 0.38$$

$$\frac{1}{9} \Rightarrow 2.28 \text{ t-m}$$

$$\frac{1}{24} \Rightarrow 0.93 \text{ t-m} \Rightarrow a = 0.54 \text{ cm} \Rightarrow A_S = 2.22 \text{ cm}^2 \therefore \phi 3 / 8" @ 0.32 \text{ m}$$

$$\frac{1}{14} \Rightarrow 1.35 \text{ t-m} \Rightarrow a = 0.79 \text{ cm} \Rightarrow A_S = 3.25 \text{ cm}^2 \therefore \phi 3 / 8" @ 0.22 \text{ m}$$

$$\frac{1}{14} \Rightarrow 1.59 \text{ t-m} \Rightarrow a = 0.93 \text{ cm} \Rightarrow A_S = 3.86 \text{ cm}^2 \therefore \phi 3 / 8" @ 0.18 \text{ m}$$

Diseño:

$$-M_U = 2.28 \text{ t-m} \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

$$d = 14 - \left(2 + \frac{1.27}{2} \right) = 11.37 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{2.28 \cdot 10^5}{0.9 \cdot 4200 \left(11.37 - \frac{a}{2} \right)} = 5.82 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c 100} = 1.37 \text{ cm}$$

$$A_s = 5.65 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 1.33 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$$

Usar $\phi 1/2" @ \frac{1.27}{5.65} = 0.22 \text{ m}$

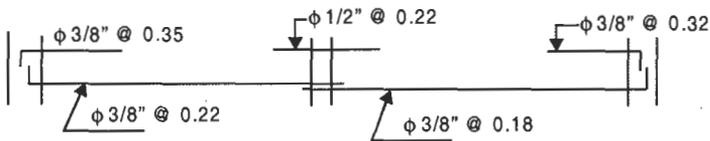
2.28 t-m 1.33 cm

M_u x

$$A_{s \text{ min}} = 0.0018 bd = 0.0018 \cdot 100 \cdot 11.37 = 2.05 \text{ cm}^2$$

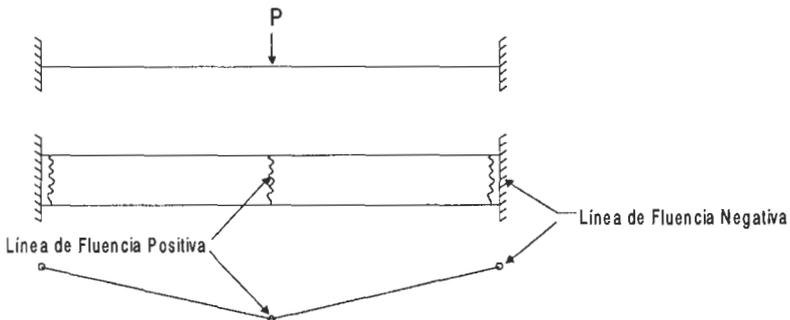
$\phi 3/8" @ 0.35$

$s \leq 3t, 45 \text{ cm} = 42, 45 \text{ cm} \quad \text{CONFORME}$



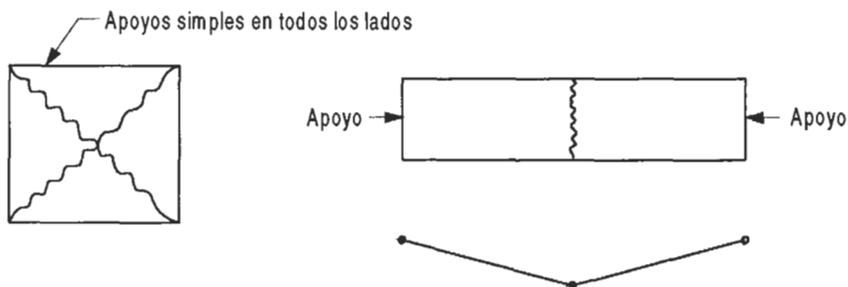
LÍNEAS DE FLUENCIA

Los terminos "Líneas de Fluencia Positiva" y "Líneas de Fluencia Negativa" son usados para distinguir las asociados a tracción en la parte inferior de la losa y tracción en la parte superior de la losa respectivamente.

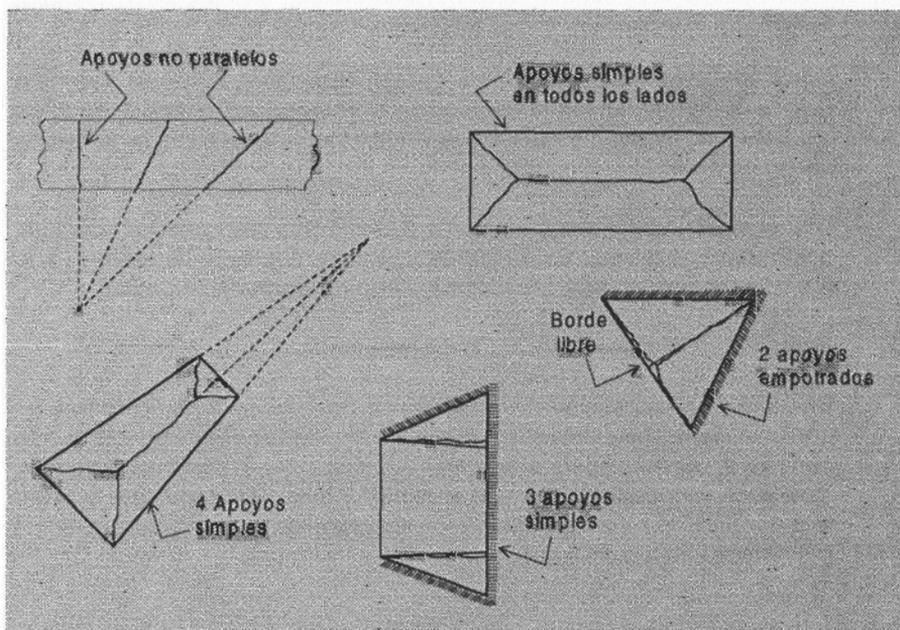


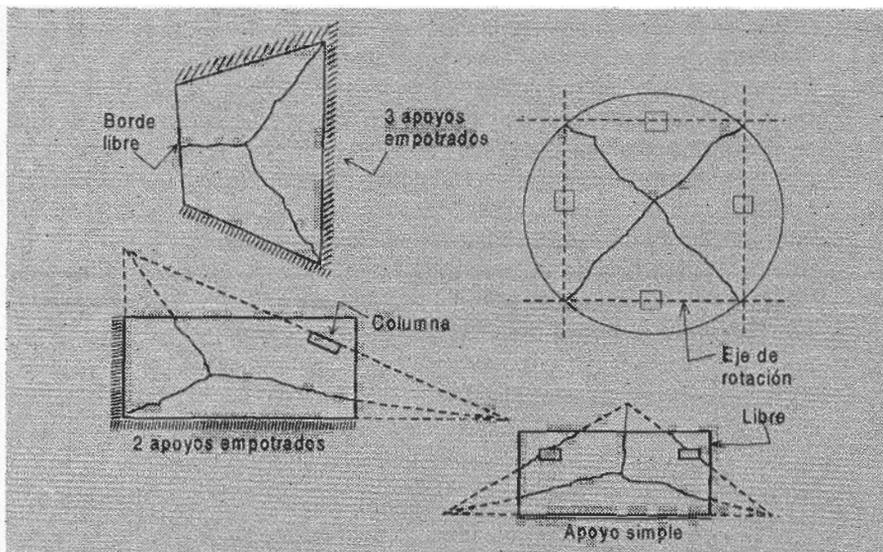
Las orientaciones para establecer los ejes de rotación y líneas de fluencia son:

1. Las líneas de fluencia son generalmente rectas.
2. Los ejes de rotación generalmente se encuentran a lo largo de las líneas de apoyo, las cuales pueden ser rótulas reales o líneas de fluencia que actúan como rótulas plásticas.
3. Los ejes de rotación pasan por los puntos de apoyo (como las columnas).
4. La línea de fluencia común a dos porciones de losa pasa por el punto de intersección de los ejes de rotación de dichas porciones.
5. Las deformaciones en la estructura plastificada se producen alrededor de un eje de rotación y se hallan concentradas en las líneas de fluencia. Las porciones limitadas por ellas permanecen planas.



Formas típicas de línea de fluencia:





MÉTODOS DE ANALISIS

a) Análisis por el método de equilibrio

A partir de una configuración aproximada de las líneas de fluencia puede encontrarse la verdadera, considerando el equilibrio de las porciones de la losa.

Cada porción considerada como cuerpo libre, debe estar en equilibrio bajo la acción de las cargas aplicadas, momentos flectores a lo largo de las líneas de fluencia y reacciones o fuerzas cortantes a lo largo de las líneas de apoyo.

Debe notarse que los momentos de fluencia son momentos principales, por lo tanto los momentos de torsión son nulos a lo largo de las líneas de fluencia y generalmente las fuerzas cortantes son también nulas.

b) Análisis por el método de los trabajos virtuales

En base a una configuración de líneas de fluencia se le da al sistema un conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con la configuración supuesta, siendo posible calcular las rotaciones correspondientes. Igualando el trabajo exterior con el trabajo interior realizado para obtener la deformación, se encuentra la relación entre las cargas aplicadas y los momentos últimos de la losa.

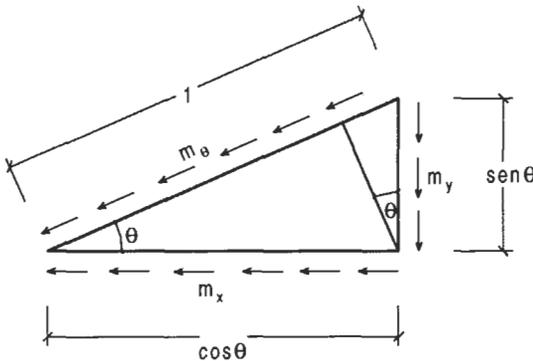
LOSAS ISOTROPICAS Y ORTOTROPICAS

Si una losa es reforzada idénticamente en direcciones ortogonales, los momentos resistentes últimos son los mismos en esas dos direcciones y a lo largo de cualquier otra línea. Estas losas son llamadas Isotrópicamente reforzadas.

Si una losa es reforzada diferentemente en dos direcciones ortogonales, la losa es llamada anisotrópica u ortotrópica.

MOMENTOS ULTIMOS EN EJES NO PERPENDICULARES A LAS ARMADURAS

El problema es calcular el momento último en una dirección cualesquiera si se conocen los momentos últimos resistentes en dos direcciones perpendiculares.



m_θ, m_x, m_y : momentos últimos por unidad de longitud.

Tenemos:

$$m_\theta = (m_x \cos \theta) \cos \theta + (m_y \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta$$

$$m_\theta = m_x \cos^2 \theta + m_y \operatorname{sen}^2 \theta$$

En caso de losas isotrópicas

$$\Rightarrow m_x = m_y$$

$$\therefore m_\theta = m_x \cos^2 \theta + m_x \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$m_{\theta} = m_x (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$m_{\theta} = m_x = m_y$$

(Los momentos son iguales en cualquier dirección)

Ejemplos de Aplicación

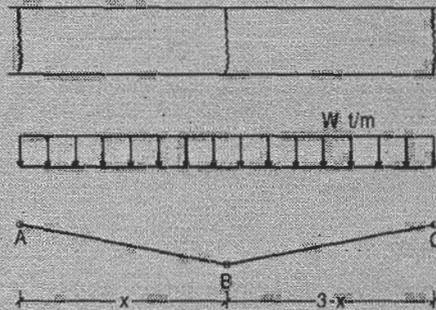
a) Métodos de Equilibrio

Aplicación:

Se tiene una losa continua uniformemente cargada como se muestra en la figura adjunta. La losa tiene una luz de 3 m y esta reforzada para proveer una resistencia a flexión positiva de 0,70 t-m. A flexión negativa tiene una resistencia de 0.70 t-m en la sección A y de 1.05 t-m en C. Hallar la capacidad de carga última de la losa.

Solución:

Considerando un metro de ancho tendremos:



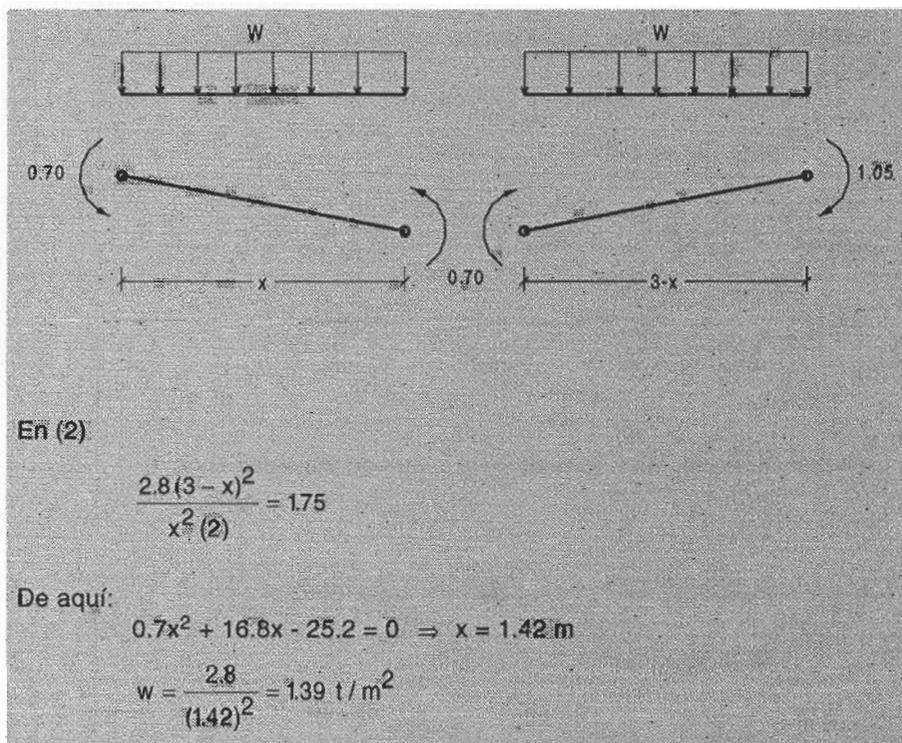
Analizando cada parte de la losa como cuerpo rígido:

$$\sum M_A = \frac{wx^2}{2} - 0.70 - 0.70 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum M_C = \frac{w(3-x)^2}{2} - 0.70 - 1.05 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

De (1)

$$w = \frac{2.8}{x^2}$$

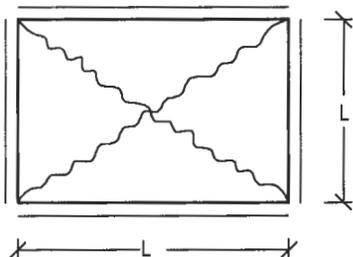


Aplicación:

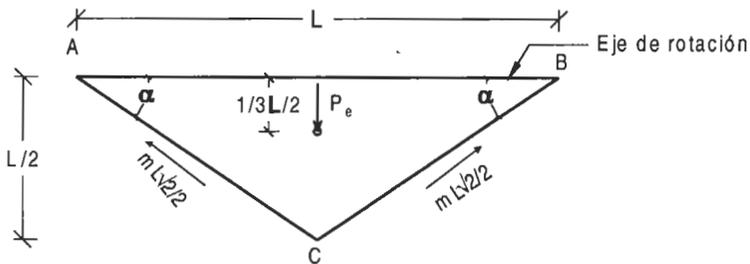
Se tiene una losa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro lados e isotrópicamente reforzada. Determinar el momento resistente límite por metro lineal requerido para sostener una carga uniformemente distribuida de $W \text{ t/m}^2$.

Solución:

Tenemos la configuración de falla



Considerando una de las cuatro partes iguales y su equilibrio alrededor de su eje de rotación.



La carga distribuida concentrada en el centro de gravedad será:

$$P_e = \frac{wL^2}{4}$$

La proyección de los momentos sobre el eje de rotación será:

$$M_p = M_{BC} \cos \alpha = m_\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{m_\ell}{2}$$

Luego:

$$M_{EJE} = \left(\frac{wL^2}{4} \right) \frac{1}{3} \frac{L}{2} - \frac{mL}{2} - \frac{mL}{2} = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{wL^2}{24}$$

Aplicación:

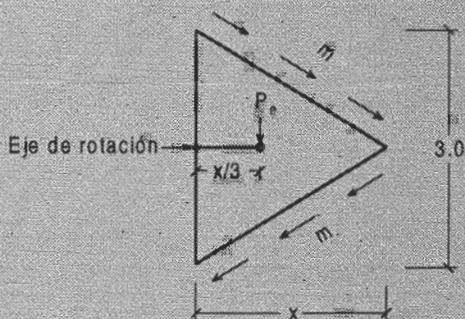
Para la losa que se muestra simplemente apoyada, determinar el momento resistente último para una carga límite uniformemente distribuida W . La losa es isotrópicamente reforzada.



Solución:

Porción 1:

La carga concentrada será: $P_e = W \frac{3x}{2}$



Considerando el equilibrio en el eje tendremos:

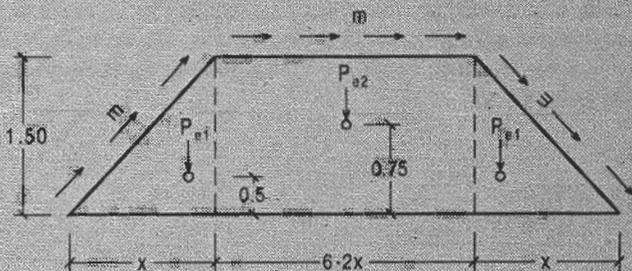
$$M_{EJE} = \frac{3wx}{2} \left(\frac{x}{3} \right) - 3m = 0$$

De aquí:

$$m = \frac{wx^2}{6} \dots \dots \dots (1)$$

Porción 2:

Las cargas concentradas considerando las secciones mostradas serán:



$$P_{e1} = wx \frac{1.5}{2}$$

$$Pe_2 = w(6 - 2x)1.5$$

Hacemos:

$$\sum M_{EJE} = 0$$

$$6m - 2 \left[wx \left(\frac{1.5}{2} \right) (0.5) \right] - w(6 - 2x)1.5(0.75) = 0$$

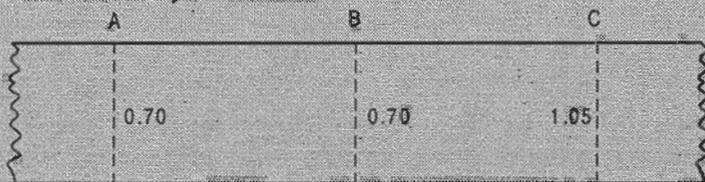
$$6m + 1.5wx - 6.75w = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) en (2)

$$6 \left(\frac{wx^2}{6} \right) + 1.5wx - 6.75w = 0 \rightarrow x = 1.95 \text{ m}$$

$$m = \frac{wx^2}{6} \Rightarrow m = 0.634 w$$

b) Método de Trabajos Virtuales



Aplicación:

Se tiene una losa continua uniformemente cargada. La losa tiene una luz de 3 m y está reforzada para proveer una resistencia a flexión positiva de 0.70 t-m y a flexión negativa de 0.70 t-m en A y 1.05 t-m en C. Determinar la capacidad de carga última de la losa.

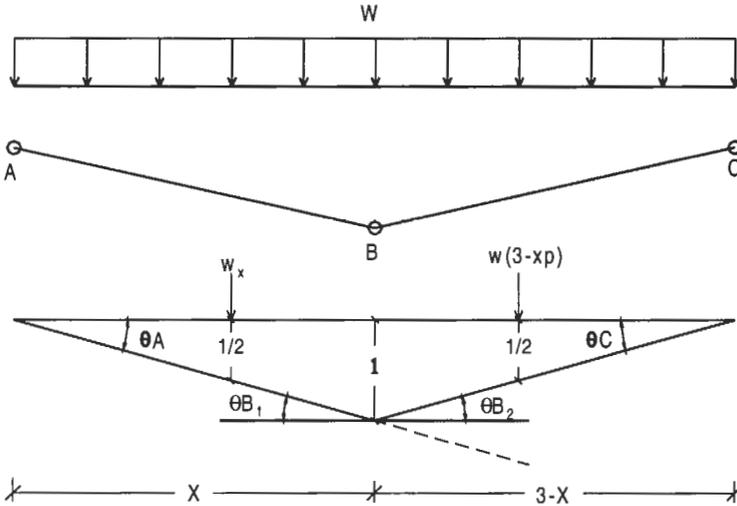
Solución:

Tenemos las rotaciones:

$$\theta_A = \frac{1}{x}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \theta_A + \theta_C$$

$$\theta_C = \frac{1}{3-x}$$



Cuando tenemos una deflexión unitaria en B, se desarrolla un trabajo externo de:

$$W_E = wx \left(\frac{1}{2} \right) + w(3-x) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Y un trabajo interno de:

$$W_I = \sum M_\theta = 0.70 \left(\frac{1}{x} \right) + 0.70 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} \right) + 1.05 \left(\frac{1}{3-x} \right)$$

Si: $W_I = W_E$

$$\therefore \frac{wx}{2} + \frac{3w}{2} - \frac{wx}{2} = \frac{1.4}{x} + \frac{1.75}{3-x}$$

$$W = \frac{0.933}{x} + \frac{1.167}{3-x} \dots\dots\dots (1)$$

Para determinar el valor mínimo de w diferenciamos (1) e igualamos a cero:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{0.933}{x^2} + \frac{1.167}{(3-x)^2} = 0$$

Resolviendo:

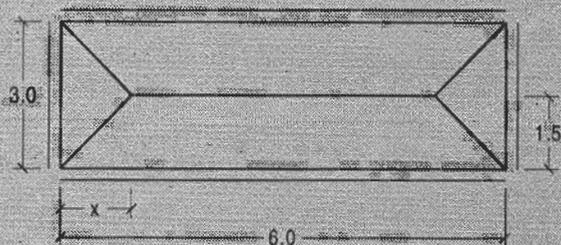
$$x = 1.42 \text{ m}$$

En (1)

$$\rightarrow w = 0.657 + 0.738 = 1.39 \text{ t/m}^2$$

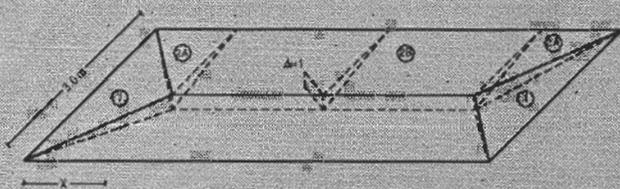
Aplicación:

Para la losa que se muestra en la figura adjunta determinar el momento último resistente para una carga última uniforme W . La losa es isotrópicamente reforzada.

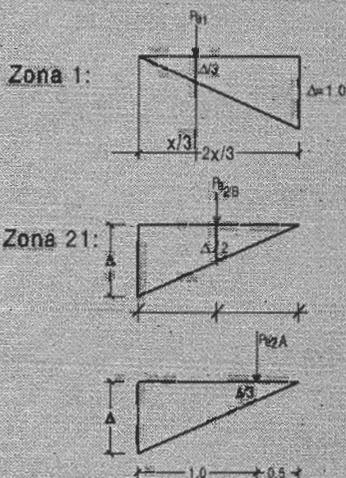


Solución:

Considerando un desplazamiento virtual de $\Delta=1$ de la línea de fluencia paralela a los lados mayores.



Tendremos:



$$We_1 = Pe_1 \frac{\Delta}{3} = \left(w \frac{3x}{2} \right) \frac{1}{3} = \frac{wx}{2}$$

$$We_{2A} = Pe_{2A} \frac{\Delta}{3} = x \left(\frac{1.5w}{2} \right) \frac{1}{3} = \frac{wx}{4}$$

$$We_{2B} = Pe_{2B} \frac{\Delta}{2} = (6 - 2x) 1.5w \left(\frac{1}{2} \right) = 4.5w - 1.5wx$$

$$W_i = \Sigma M_0$$

$$W_i = 3m \left(\frac{L}{x} \right) + 6m \left(\frac{L}{1.5} \right)$$

Igualemos el trabajo exterior al trabajo interior para el total de la losa:

$$2 \left(\frac{wx}{2} \right) + 4 \left(\frac{wx}{4} \right) + 2(4.5w - 1.5wx) = 2 \left(\frac{3m}{x} + \frac{6m}{1.5} \right)$$

$$-wx + 9w = m \left(\frac{6}{x} + 8 \right)$$

$$m = \frac{w(9-x)}{\frac{6}{x} + 8} \dots\dots\dots (1)$$

Para hallar el momento último tenemos que diferenciar con respecto a x e igualar a cero.

$$\frac{dm}{dx} = (9-x)(-1) \left(\frac{6}{x} + 8 \right)^{-2} (-6x^{-2}) + (-1) \left(\frac{6}{x} + 8 \right)^{-1} = 0$$

simplificando:

$$x^2 + 1.5x - 6.75 = 0$$

Que viene a ser la misma ecuación que se obtuvo usando el método de equilibrio.

En (1)

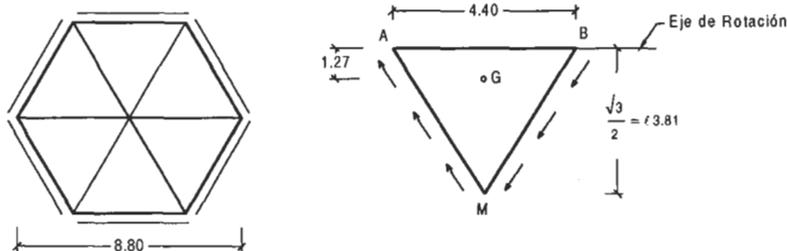
$$\Rightarrow x = 1.95m \rightarrow m = 0.634w$$

Aplicación:

Para la losa exagonal inscrita en un círculo de diámetro 8.80 m determine el valor de la carga uniforme última. La losa tiene 20 cm de espesor y está reforzada con $\phi 1/2'' @ 0.15$ en cada sentido (inferior). Esta simplemente apoyada en sus bordes. Considere $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

Por simetría la hipótesis de falla corresponde a las líneas de fluencia que pasan por las bisectrices. Las zonas delimitadas son iguales.



Por metro de Losa:

$$A_s = \frac{1}{0.15} * 1.27 = 8.45 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$a = 1.99 \text{ cm}$$

a) Método de Equilibrio

$$m = 8.45 * 4.2 (0.167 - 0.001) = 5.58 \text{ t-m}$$

$$m = 5.58 \text{ t-m/m}$$

$$\Sigma M_{AB} = 0$$

$$5.58 * 4.40 - 0.5 * 4.40 * 3.81W * 1.27 = 0$$

$$W = 2.31 \text{ t/m}^2$$

b) Método de Trabajo Virtual

$$\Delta M = 1.0$$

$$W_E: 6 * 4.40 * 3.81 * 0.5 W \frac{1}{3} = 16.76 W$$

$$W_i: 6 * 5.58 * 4.40 * \left(\frac{1}{3.81} \right) = 38.66$$

$$W_E = W_i \Rightarrow W = 2.31 \text{ t/m}^2$$

Si damos al punto F un desplazamiento virtual encontramos los desplazamientos de los otros puntos por relaciones geométricas.

$$\Delta_F = 1$$

$$\Delta_E = \frac{1.10}{1.80} = 0.61$$

$$\Delta_{IB} = \frac{1.00}{1.85} = 0.54$$

$$\Delta_{3A} = \frac{0.95}{1.80} = 0.53$$

$$\Delta_{IA} = \Delta_4 = \frac{\Delta_E}{3} = 0.203$$

$$\Delta_2 = \Delta_{3B} = \frac{1}{3} \Delta_F = \frac{1}{3}$$

Luego:
 W_E :

$$(1) (IA): \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1.20 \cdot W \cdot 0.203 = 0.61 W$$

$$(IB): \frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot 1.30 \cdot W \cdot 0.54 = 1.58 W$$

$$(2) \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1.85 \cdot \frac{1}{3} = 1.54 W$$

$$(3) (3A): \frac{1}{2} \cdot 4.10 \cdot 0.50 \cdot W \cdot 0.53 = 0.54 W$$

$$(3B): \frac{1}{2} \cdot 6.83 \cdot 1.80 \cdot W \cdot \frac{1}{3} = 2.05 W$$

$$(4) \frac{1}{2} \cdot 1.83 \cdot 1.10 \cdot W \cdot 0.203 = 0.20 W$$

$$\Sigma = 6.52 W$$

W_I :

$$(1) 5 \cdot 1.73 \cdot \frac{1}{1.85} = 4.68 \text{ t-m}$$

$$(2) 5 \cdot 1.73 \cdot \frac{1}{1.85} = 4.68 \text{ t-m}$$

$$(3) 6.83 \cdot 1.73 \cdot \frac{1}{1.80} = 6.56 \text{ t-m}$$

$$(4) 1.83 \cdot 1.73 \cdot \frac{0.61}{1.10} = 1.76 \text{ t-m}$$

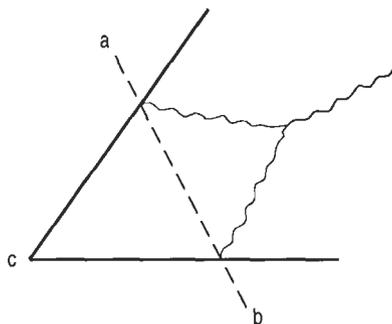
$$\Sigma = 17.68 \text{ t-m}$$

$$W_E = W_L$$

$$6.52 W = 17.68 \quad \Rightarrow \quad W = 2.71 \text{ t/m}^2$$

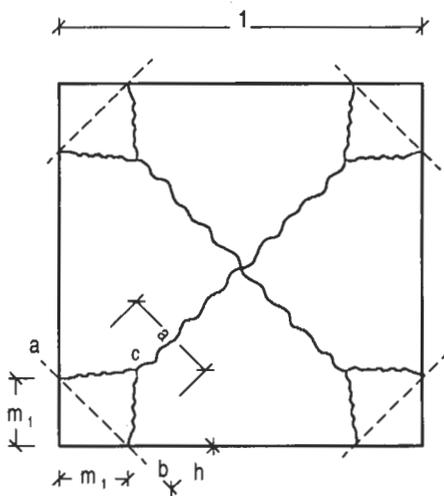
EFFECTOS DE ESQUINA EN LINEAS DE FLUENCIA

En el estudio anterior se ha considerado que las líneas de fluencia llegan hasta los ángulos entre dos lados que se cortan. Otra posibilidad es que las líneas de fluencia se bifurquen antes de llegar al ángulo, como se muestra en la figura adjunta.

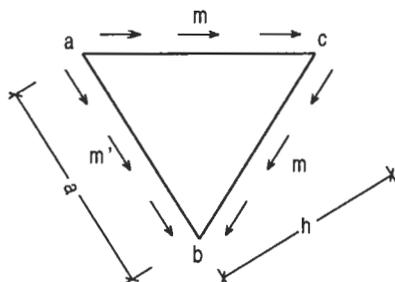


Si el ángulo de la losa está anclado ocurre que el eje de rotación es el eje a-b y la línea ab se convierte en una línea de fluencia.

Las distribuciones de las líneas de fluencia con líneas bifurcadas en los ángulos conducen a una menor capacidad de la losa, que aquellas que no presentan estas características. Sin embargo frecuentemente se ignora en el análisis correspondiente, debido a que el error que se comete ignorando el efecto de esquina usualmente es pequeño y el incluirlo conduce a un análisis complicado.



Análisis del ejemplo de losa cuadrada con carga uniforme repartida.



Por equilibrio:

$$\Sigma M_{ab} = 0$$

$$(m + m')a - \frac{1}{2} a h w \left(\frac{1}{3} h \right) = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{6(m + m')}{w}} \dots\dots\dots (1)$$

Se tiene:

Si: $h < 1/2$ diagonal \rightarrow Hay efecto de esquina

Si: $h > 1/2$ diagonal \rightarrow No hay efecto de esquina

Si la esquina no está anclada el elemento triangular abc giraría alrededor del eje ab levantándose de los apoyos.

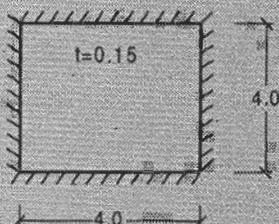
$$m' = 0 \quad \Rightarrow \text{En (1):} \quad h = \sqrt{\frac{6m}{w}}$$

Aplicación:

Calcular la carga uniformemente repartida que produce la falla de una losa cuadrada de 4 m de lado, continua en sus cuatro bordes y reforzada en dos sentidos con ϕ 3/8" @ 0.25 m en cada sentido inferior y ϕ 3/8" @ 0.20 m en cada sentido superior.

$$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Solución:

Calculamos los momentos positivos y negativos por unidad de longitud.

$$m: A_s = 4 \cdot 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{2.84 \cdot 4200}{0.85 \cdot 210 \cdot 100} = 0.67 \text{ cm}$$

$$d_{\text{prom}} = 15 - \left(2 + \frac{2\phi}{2} \right) = 15 - (2 + 0.95) = 12.05 \text{ cm}$$

$$m = 2.84 \cdot 4.2 \left(0.1205 - \frac{0.0067}{2} \right) = 1.397 \text{ t-m}$$

$$m = 1.40 \text{ t-m/m}$$

$$m': A_s = 5 \cdot 0.71 = 3.55 \text{ cm}^2$$

$$a = 0.84 \text{ cm}$$

$$m' = 1.734 \quad \Rightarrow \quad m = 1.73 \text{ t-m/m}$$

a) Sin considerar efectos de esquina

$$4(1.4 + 1.73) - \frac{1}{2}(4)2w \frac{1}{3}2 = 0$$

El triángulo abc trabaja con un apoyo más, ya que no se deforma, por eso no se considera para efectos de energía.

W_E :

$$(A) \frac{1}{2} \cdot 0.7 \cdot 12.11 \cdot W \cdot \frac{1}{3} (0.88) = 0.220 W$$

$$(B) \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot W \cdot \frac{1}{3} (1.00) = 1.333 W$$

$$(\text{achurado}) = 2(2 - 0.5 \cdot 1.76) \cdot \frac{1}{3} \cdot (0.88) = -0.258 W$$

$$\frac{W_E}{4} = 1.295 W$$

W_L :

$$(A) (1.40 + 1.73) \cdot 0.71 \cdot \frac{0.88}{2.11} = 0.927 \text{ t-m}$$

$$(B) (1.40 + 1.73) \cdot 3.0 \cdot \frac{1}{2.0} = 4.695 \text{ t-m}$$

$$\frac{W_E}{4} = 5.622 \text{ t-m}$$

$$\therefore W_E = W_L \Rightarrow W_E = 4.34 \text{ t/m}^2$$

Con respecto al valor sin considerar efectos de esquina da:

$$W_E = 4.34 = 0.92 W$$

$$W = 4.70$$

Verificando:

$$W_A = 4.21 \text{ t/m}^2$$

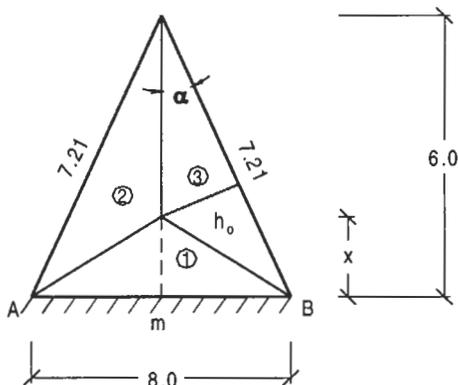
$$W_A = 4.21 \text{ t/m}^2$$

$$W_B = 4.37 \text{ t/m}^2 \text{ (Conforme)}$$

Para fines prácticos se podrá diseñar sin considerar efectos de esquina tomando una seguridad disminuyendo el valor de W en un 10% a 15%.

Aplicación:

Diseñar la losa maciza que se muestra en la figura adjunta. Considere que los momentos resistentes últimos positivos y negativos son iguales; espesor de la losa es de 20 cm; $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$; $W_u = 3 \text{ t/m}^2$.



Solución:

$$h_o = (6 - x) 0.5547$$

1º Tanteo:

$$x = 3.0 \text{ m} \Rightarrow h_o = 1.66 \text{ m}$$

W_E :

$$(1) \frac{1}{2}(8)(3)3\left(\frac{1}{3}\right) = 12$$

$$(2) (7.21)\frac{1.66}{2} \cdot 3\left(\frac{1}{3}\right) = 5.98$$

$$(3) = 5.98$$

$$W_E = 23.97 \text{ t-m}$$

W_i :

$$(1) (m + m')8\left(\frac{1}{3}\right) = 5.33 \text{ m}$$

$$(2) 7.21 \text{ m}\left(\frac{1}{1.66}\right) = 4.34 \text{ m}$$

$$= 4.34 \text{ m}$$

$$W_i = 14.02 \text{ m}$$

$$W_E = W_i \Rightarrow \therefore m = 1.71 \text{ t-m/m}$$

Verificación por zonas

$$(1) m = 2.25 \text{ t-m/m}$$

$$(2) m = 1.38 \text{ t-m/m}$$

$$(3) m = 1.38 \text{ t-m/m}$$

Consideramos:

$$m = 1.7 \text{ t-m/m}$$

$$\Rightarrow \text{Zona 1: } \frac{8x}{2} 3 \left(\frac{1}{3} \right) = 16 \text{ m} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$x = 4 \times 0.7 \quad \Rightarrow \quad x = 2.61 \text{ m}$$

2º Tanteo:

$$x = 2.60 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad h_o = 1.89 \text{ m}$$

W_E :

$$(1) 8 \times 2.60 \times 0.5 \times 3 \left(\frac{1}{3} \right) = 10.4 \text{ t-m}$$

$$(2) 7.21 \times 1.89 \times 0.5 \times 3 \frac{1}{3} = 6.81$$

$$(3) = 6.81$$

$$W_E = 24.03 \text{ t-m/m}$$

W_i :

$$(1) 16 \text{ m} \left(\frac{1}{2.60} \right) = 6.15 \text{ m}$$

$$(2) 7.21 \text{ m} \left(\frac{1}{1.89} \right) = 3.81 \text{ m}$$

$$(3) = 3.81 \text{ m}$$

$$W_i = 13.78 \text{ m}$$

$$\therefore m = 1.74 \text{ t-m/m}$$

- (1) $m_1 = 1.69 \text{ t-m/m}$
 (2) $m_2 = 1.79 \text{ t-m/m}$ CONFORME

Diseño:

$$A_s = \frac{1.74 \cdot 10^5}{4200 \left(d - \frac{a}{2} \right)} = 2.58 \text{ cm}^2 \rightarrow a = 0.36 \Rightarrow A_s = 2.45 \text{ cm}^2 / \text{m (conforme)}$$

$$a = 2 \text{ cm}$$

$$dp = 20 - (2 + \phi) = 17.05 \text{ cm}$$

$$\phi \text{ 3/8} = 0.95 \text{ cm}$$

$$A_{s \text{ mIn}} = 0.0018 \cdot 100 \cdot 20 = 3.6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

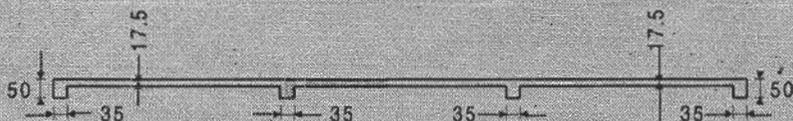
Usar $\phi \text{ 3/8" @ } 0.20 \text{ m}$

METODO DE DISEÑO DIRECTO

Diseño de una Losa Armada en dos direcciones y con vigas de borde

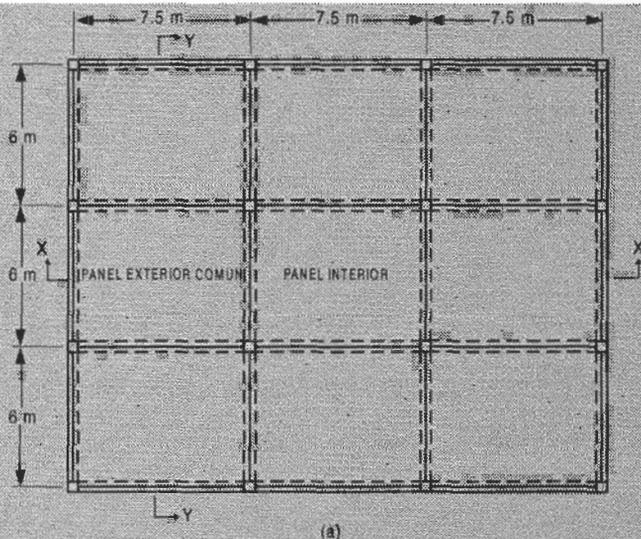
Aplicación:

Un sistema de piso armado en dos direcciones para un edificio de concreto armado está compuesto por paneles de losa con dimensiones $6 \cdot 7.5 \text{ m}^2$ en planta, apoyados en vigas peraltadas en los ejes de columnas y vaciadas monolíticamente con la losa, como aparece en la figura 1. Utilizando concreto con $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y acero con $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, diseñese un panel exterior común para soportar una carga viva de servicio de 600 kg/m^2 , además del propio peso del piso.



(b)

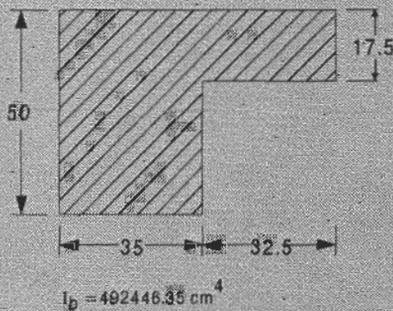
Figura, losa de piso armada en dos direcciones con vigas en los ejes de columnas: (a) Planta parcial del piso; (b) Sección X-X (la sección Y-Y es similar).



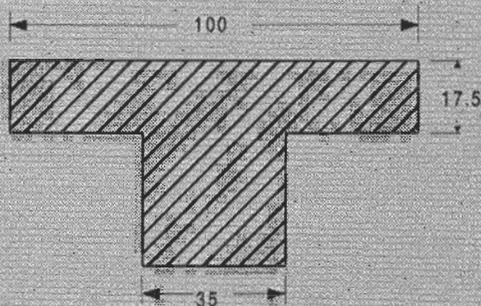
Solución:

sistema de piso satisface todos los límites establecidos en el Método de Diseño Directo del código ACI. Con propósitos ilustrativos, se diseñará únicamente un panel exterior común como se ilustra en la figura. Los límites de espesor que indica el código ACI, se utilizarán como guía para obtener el espesor deseado de la losa. Para utilizar las ecuaciones que indica el código (referidas al espesor) se introducirá un valor tentativo de $h=17.5$ cm y se supondrán las dimensiones de las vigas en 35×50 cm² como en la figura. La proyección efectiva del ala más allá de la cara de las armaduras de las vigas es la menor de $4h_f$ o $h - h_f$, que en este caso es igual a 32.5 cm. Los momentos de inercia de las vigas T, se determinarán con respecto a su centro de gravedad.

Viga de Borde (Exterior)



Viga Interior



Franja de Columna

$$I_b = 575656.37 \text{ cm}^4$$

El código del ACI divide los paños en franjas para facilitar la distribución de los momentos en ellos. La franja de columna es una franja con un ancho a cada lado del eje de las columnas igual al menor valor entre $L_1/4$ y $L_2/4$, donde L_1 y L_2 son las longitudes centro a centro del paño de la losa.

$$\frac{L_1}{4} = \frac{7.5}{4} = 1.875 \text{ m}$$

$$\frac{L_2}{4} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ m}$$

∴ Ancho de franja = 1.5 m

Para las Franjas de Losa

En este caso es el ancho entre las líneas centrales de los paneles a cada lado de la viga.

- Para un ancho de 3.93 m (Viga de borde exterior):

$$I_s = \frac{393 \cdot 17.5^3}{12} = 175519.53 \text{ cm}^4$$

- Para un ancho de 6 m:

$$I_s = \frac{600 \cdot 17.5^3}{12} = 267968.75 \text{ cm}^4$$

- Para un ancho de 7.5 m:

$$I_s = \frac{750 \cdot 17.5^3}{12} = 334960.94 \text{ cm}^4$$

Rígidez relativa de la Viga y de la Losa (α)

$$\alpha = \frac{E_{cb} L_b}{E_{cs} L_s}$$

- Para la viga de borde:

$$\alpha = \frac{492446.35}{175519.53} = 2.8 \Rightarrow \alpha = 2.8$$

- Para las dos vigas de 7.5 m de largo:

$$\alpha = \frac{575656.37}{267968.75} = 2.1 \Rightarrow \alpha = 2.1$$

- Para la viga de 6 m de largo:

$$\alpha = \frac{575656.37}{334960.94} = 1.7 \Rightarrow \alpha = 1.7$$

Rígidez Promedio (α_m)

$$\alpha_m = \frac{2.8 + 2.1 + 1.7}{3} = 2.2 \Rightarrow \alpha_m = 2.2$$

Relación entre la luz libre en dirección larga y la luz libre en la corta (β)

$$\text{Luz larga} = 750 - 35 = 715 \text{ cm}$$

$$\text{Luz corta} = 600 - 35 = 565 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{715}{565} = 1.27 \Rightarrow \beta = 1.27$$

El espesor mínimo de losas con vigas entre apoyos es función de (α_m)

Espesor mínimo de la losa

$$h = \frac{l_n \left(0.8 + \frac{l_y}{14000} \right)}{36 + 5\beta \left[\alpha_m - 0.12 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]}$$

Donde:

$$L_n: \text{Luz libre en dirección larga en cm}$$

$$L_n = 750 - 35 = 715 \text{ cm}$$

$$h = \frac{715 \left(0.8 + \frac{4200}{14000} \right)}{36 + 5 \cdot 127 \left[2.2 - 0.12 \left(1 + \frac{1}{127} \right) \right]} = 16.18 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 16.18 \text{ cm}$$

Sin embargo, el espesor mínimo no debe ser menor que el determinado por la ecuación.

$$h = \frac{L_n \left(0.8 + \frac{t_y}{14000} \right)}{36 + 9\beta}$$

$$h = \frac{715 \left(0.8 + \frac{4200}{14000} \right)}{36 + 9 \cdot 127} = 16.58 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 16.58 \text{ cm}$$

y el límite necesita no ser mayor que el valor de la ecuación:

$$h = \frac{L_n \left(0.8 + \frac{t_y}{14000} \right)}{36}$$

$$h = \frac{715 \left(0.8 + \frac{4200}{14000} \right)}{36} = 21.85 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 21.85 \text{ cm}$$

* Para losas con vigas de borde rígidas relativamente altas, con valores de $\alpha_m \geq 2$, la ecuación que controla es:

$$h = \frac{L_n \left(0.8 + \frac{t_y}{14000} \right)}{36 + 9\beta}$$

De donde:

$$h = 16.58 \text{ cm (mínimo)}$$

El límite de 9 cm de la ecuación si $\alpha_m \geq 2 \Rightarrow 9 \text{ cm (mínimo)}$.

Evidentemente no controla en este caso y el espesor tentativo adoptado de 17.5 cm será la base para los demás cálculos.

Sea:

$$W_c = 2400 \text{ kg/m}^3 \text{ (peso específico del concreto)}$$

Para una losa de 17.5 cm la carga muerta es:

$$W_D = \left(\frac{17.5}{100} \right) * 2400 = 420 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Carga viva:

$$W_L = 600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Si se aplican los coeficientes de carga usuales para obtener las cargas de diseño, se obtiene:

$$W_u = 1.4W_D + 1.7W_L$$

$$W_u = 1.4 * 420 + 1.7 * 600 = 1608 \text{ kg/m}^2$$

$$\Rightarrow W_u = 1.608 \text{ t/m}^2$$

MOMENTO ESTÁTICO TOTAL PARA CARGAS MAYORADAS

$$M_o = \frac{W_u L_2 L_n^2}{8}$$

Donde:

L_n : Se define como la luz en la dirección del análisis de los momentos

L_2 : Se define como la luz en la dirección transversal

Para la dirección de la luz corta considerando la franja de losa y viga centrada en el eje interior de columnas, el momento estático total de diseño es:

$$M_o = \frac{1.608 * 7.5 * 5.65^2}{8} = 48.121 \text{ - m}$$

$$\Rightarrow M_o = 48.12 \text{ t-m}$$

Esto se distribuye de la siguiente manera:

$$\text{Momento Negativo de Diseño} = 48.12 \cdot 0.65 = 31.28 \text{ t-m}$$

$$\text{Momento Positivo de Diseño} = 48.12 \cdot 0.35 = 16.84 \text{ t-m}$$

La franja de columna tiene un ancho de $2 \cdot 6/4 = 3 \text{ m}$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{7.5}{6} = 1.25 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_2}{L_1} = 1.25$$

$$\alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 1.7 \cdot \frac{7.5}{6} = 2.13 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 2.13$$

Tabla, factores de distribución aplicados al momento estático M_o para calcular momentos positivos y negativos en la luz extrema.

	Borde exterior sin restricción	Losa con vigas entre todos los apoyos	Losas sin vigas entre los apoyos interiores		Borde exterior totalmente restringido
			Sin viga de borde	Con viga de borde	
Momento negativo interior	0.75	0.7	0.7	0.7	0.65
Momento positivo	0.63	0.57	0.52	0.5	0.35
Momento negativo exterior	0	0.16	0.26	0.3	0.65

Tabla, momentos en la franja de columna como porcentaje del momento total en la sección crítica.

		L_2/L_1		
		0.5	1.0	2.0
Momento negativo interior				
$\alpha_1 L_2/L_1 = 0$		75	75	75
$\alpha_1 L_2/L_1 \geq 1.0$		90	75	45
Momento negativo exterior				
$\alpha_1 L_2/L_1 = 0$	$\beta_1 = 0$	100	100	100
	$\beta_1 \geq 2.5$	75	75	75
$\alpha_1 L_2/L_1 \geq 1.0$	$\beta_1 = 0$	100	100	100
	$\beta_1 \geq 2.5$	90	75	45
Momento positivo				
$\alpha_1 L_2/L_1 = 0$		60	60	60
$\alpha_1 L_2/L_1 \geq 1.0$		90	75	45

Los factores de distribución para el momento de la franja de columna, se obtendrá a partir de la tabla.

Interpolando linealmente tenemos:

Momento Negativo

Que la franja de columna toma el $67.5 \approx 68\%$ del momento negativo, o sea 21.27 t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 18.08 t-m y la losa toma el resto o sea 3.19 t-m. Los 10.01 t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

Momento Positivo

Que la franja de columna toma el $67.5 \approx 68\%$ del momento positivo, o sea 11.45 t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 9.73 t-m y la losa toma el resto o sea 1.72 t-m. Los 5.39 t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

Un análisis similar se realiza para la dirección de luz corta, teniendo en cuenta la franja de losa y viga en el borde del edificio, con base en un momento estático total de diseño igual a:

$$M_0 = \frac{1.608 \cdot 3.93 \cdot 5.65^2}{8} = 25.22 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M_0 = 25.22 \text{ t-m}$$

Del cual el 65% se asigna a la sección de flexión negativa y el 35% a la sección de flexión positiva, como antes:

$$\text{Momento Negativo de Diseño} = 25.22 * 0.65 = 16.39 \text{ t-m}$$

$$\text{Momento Positivo de Diseño} = 25.22 * 0.35 = 8.83 \text{ t-m}$$

En este caso:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{7.5}{6} = 1.25 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_2}{L_1} = 1.25$$
$$\alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 2.8 * \frac{7.5}{6} = 3.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 3.5$$

Momento Negativo

Que la franja de columna toma el $67.5 \approx 68\%$ del momento negativo, o sea 11.15 t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 9.47 t-m y la losa toma el resto o sea 1.68 t-m. Los 5.24 t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

Momento Positivo

Que la franja de columna toma el $67.5 \approx 68\%$ del momento positivo, o sea 6 t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 5.10 t-m y la losa toma el resto o sea 0.9 t-m. Los 2.83 t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

Momento estático total de diseño en la dirección larga del panel exterior, es:

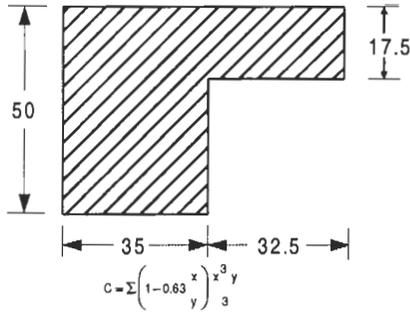
$$M_0 = \frac{1.608 * 6 * 7.5^2}{8} = 61.65 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M_0 = 61.65 \text{ t-m}$$

Este se repartirá a las secciones de momento negativo y positivo de acuerdo con la tabla y se distribuirá lateralmente a través del ancho de las secciones críticas de momento con la ayuda de la tabla.

De la tabla, las relaciones de momento que deben aplicarse para obtener los momentos exteriores negativo y positivo y el momento negativo interior son respectivamente: 0.16, 0.57 y 0.70.

La constante torsional para la viga de borde se encuentra a partir de la siguiente ecuación para una forma rectangular de $35 * 50$ cm con un ala sobresaliente de $17.5 * 32.5$ cm.



Donde:

x: dimensión menor
y: dimensión mayor

$$C = \left(1 - 0.63 \cdot \frac{35}{50} \right) \frac{35^3 \cdot 50}{3} + \left(1 - 0.63 \cdot \frac{17.5}{32.5} \right) \frac{17.5^3 \cdot 32.5}{3} = 437816.28 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow C = 437816.28 \text{ cm}^4$$

En este caso:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{6}{7.5} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_2}{L_1} = 0.8$$

$$\alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 2.1 \cdot \frac{6}{7.5} = 1.7 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \frac{L_2}{L_1} = 1.7$$

La restricción relativa proporcionada por la resistencia torsional de la viga de borde transversal efectiva se refleja mediante el parámetro β_t .

$$\beta_t = \frac{E_{cb} C}{2E_{cs} I_s}$$

En el problema:

$$\beta_t = \frac{437816.28}{2 \cdot 267968.75} = 0.82$$

$$\Rightarrow \beta_t = 0.82$$

Momento Negativo Exterior

El factor de distribución para el momento de la franja de columna, se obtendrá a partir de la tabla.

Que la franja de columna toma el 93% del momento negativo exterior, o sea $(61.65 \cdot 0.16) \cdot 0.93 = 9.17 \text{ t-m}$, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 7.80 t-m y la losa toma el resto o sea 1.37 t-m . Los $(61.65 \cdot 0.16) \cdot 0.07 = 0.69 \text{ t-m}$ restantes se asignan a la franja central de la losa.

Momento Positivo

Que la franja de columna toma el 81% del momento positivo, o sea $(61.65 * 0.57) * 0.81 = 28.46$ t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 24.19 t-m y la losa toma el resto o sea 4.27 t-m. Los $(61.65 * 0.57) * 0.19 = 6.68$ t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

Momento Negativo Interior

Que la franja de columna toma el 81% del momento negativo interior, o sea $(61.65 * 0.70) * 0.81 = 34.96$ t-m, de los cuales las vigas toman el 85%, o sea 29.71 t-m y la losa toma el resto o sea 5.25 t-m. Los $(61.65 * 0.70) * 0.19 = 8.20$ t-m restantes se asignan a la franja central de la losa.

REFUERZO DE LA LOSA

Es conveniente tabular el refuerzo de diseño de la losa.

- En la dirección de 7.5 m, las dos medias franjas de columna pueden combinarse con el propósito de realizar los cálculos en una sola franja de 265 cm de ancho.
- En la dirección de 6 m, la media franja de columna exterior y la media franja de columna interior generalmente son diferentes y se tratan en forma independiente.

Los momentos de diseño determinados con base en las distribuciones anteriores se resumen en la columna 3 de la tabla.

Primero se colocará el acero positivo en la dirección corta, seguido de las barras positivas en la dirección larga. Si se deja una distancia libre de 2 cm por debajo del acero y se utilizan barras de $\phi 1/2"$, el espesor efectivo en la dirección corta será de 15 cm mientras que en la larga será de 14 cm; una situación similar se obtiene para el acero superior.

Después de calcular los momentos de diseño por metro de franja de losa (columna 6); debe encontrarse el espesor efectivo mínimo de losa que se requiere por razones de flexión.

Para las resistencias de los materiales utilizados, la máxima cuantía determinada de acero es:

$$0.75\rho_b = 0.02125$$

Donde:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} * \frac{6000}{6000 + f_y}$$

$$\rho_b = 0.85 * 0.85 * \frac{280}{4200} * \frac{6000}{6000 + 4200} = 0.02833$$

$$\rho_b = 0.02833 \quad \Rightarrow \quad 0.75\rho_b = 0.02125$$

- Luz de 7.5 m:

$$b = \left(\frac{600}{4} - \frac{35}{2} \right) * 2 = 265 \text{ cm}$$

- Luz de 6 m:

$$b = \left(\frac{600}{4} - \frac{35}{2} \right) = 132.5 \text{ cm}$$

Observese que debe proveerse una área mínima de acero igual a 0.0018 veces el área bruta de concreto para control del agrietamiento por temperatura y retracción de fraguado.

Para una franja de losa de 100 cm el área correspondiente es:

$$0.0018 * 17.5 * 100 = 3.15 \text{ cm}^2$$

Expresado en términos de la cuantía de acero mínima para los espesores efectivos reales, se obtiene:

- En dirección de 7.5 m:

$$\rho_{\min} = \frac{3.15}{14 * 100} = 0.0023$$

- En dirección de 6 m:

$$\rho_{\min} = \frac{3.15}{15 * 100} = 0.0021$$

Tabla, diseño del refuerzo de la losa.

(1)	(2) Ubicación	(3) M_u (t-m)	(4) b (cm)	(5) d (cm)	(6) M_u/b (t-m/m)	(7) ρ	(8) A_s (cm ²)	(9) Cantidad de barras $\phi 1/2''$
Luz de 7.5 m las dos medias franjas de columna	Exterior Negativa	1.37	265	14	0.5170	0.0023*	8.53	7
	Positiva	4.27	265	14	1.6115	0.0023*	8.53	7
	Interior Negativa	5.25	265	14	1.9811	0.0027	10.17	9
Franja central	Exterior Negativa	0.69	300	14	0.2300	0.0023*	9.66	8**
	Positiva	6.68	300	14	2.2267	0.0031	12.98	11
	Interior Negativa	8.20	300	14	2.7333	0.0038	16.04	13
Luz de 6 m media franja de columna exterior	Negativa	1.68	132.5	15	1.2679	0.0021*	4.17	4
	Positiva	0.90	132.5	15	0.6792	0.0021*	4.17	4
Franja central	Negativa	10.01	450	15	2.2244	0.0027	18.08	15
	Positiva	5.39	450	15	1.1978	0.0021*	14.18	12**
Media franja de columna exterior	Negativa	1.60	132.5	15	1.2075	0.0021*	4.17	4
	Positiva	0.86	132.5	15	0.6491	0.0021*	4.17	4

(*) Corresponde a: cuantía de acero controlada por los requisitos de retracción de fraguado y temperatura.

(**) Corresponde a: cantidad de barras controlada por los requisitos de espaciamiento máximo

Estos requisitos controlan en los sitios indicados en la tabla el área total de acero en cada franja. Se obtiene fácilmente a partir de la cuantía de acero y está determinada en la columna 8.

Finalmente se obtiene la cantidad necesaria de barras. Obsérvese que en dos sitios, la cantidad exigida de barras la controlan los requisitos de espaciamiento máximo de $2 \cdot 17.5 = 35$ cm.

La capacidad a cortante de la losa se verifica con base en las áreas tributarias. A una distancia d de la cara de la viga larga.

$$V_u = 1.608 \left(3 - \frac{0.35}{2} - 0.15 \right) = 4.30 \text{ T}$$

La resistencia a cortante de diseño de la losa es: $\phi V_c = 0.85 \cdot 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d$

Donde:

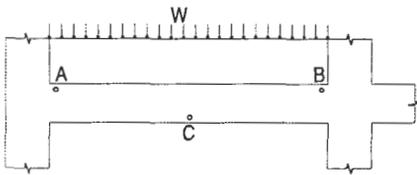
$$b_w = 100 \text{ cm} \quad d = 15 \text{ cm}$$

$$\phi V_c = 0.85 \cdot 0.53 \sqrt{280} \cdot 100 \cdot 15/1000 = 11.31 \text{ t}$$

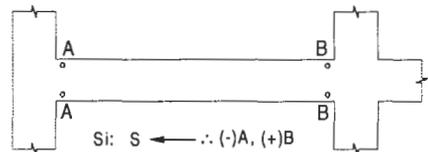
$$V_u = 4.30 \text{ t} < \phi V_c = 11.31 \text{ t} \quad \text{CONFORME}$$

FUERZAS CORTANTES DE FLUENCIA EN SISTEMAS APORTICADOS DE CONCRETO ARMADO

SECCIONES CRITICAS EN SISTEMAS APORTICADOS

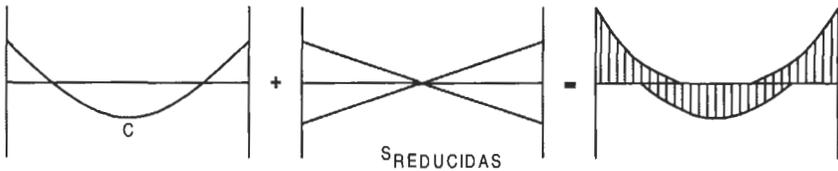


SECCIONES CRITICAS PARA CARGAS DE GRAVEDAD

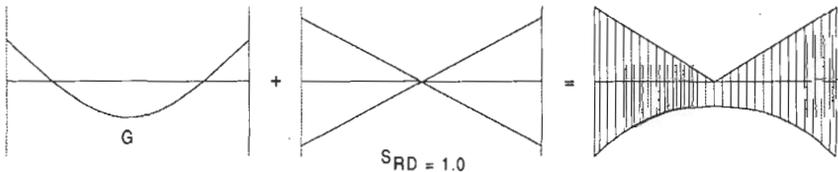


Si: $S \leftarrow \therefore (-)A, (+)B$
 $S \rightarrow \therefore (+)A, (-)B$

SECCIONES CRITICAS PARA CARGAS SISMICAS



Envolvente usando fuerzas sísmicas reducidas (código)



Envolvente usando fuerzas sísmicas sin reducir

CRITERIOS PARA EVALUAR LA DUCTILIDAD DE ENTREPISO

a) Igualdad de Desplazamientos ($d_u = d_e$)

Se considera que el desplazamiento máximo considerando comportamiento elástico es igual al desplazamiento máximo bajo comportamiento inelástico.

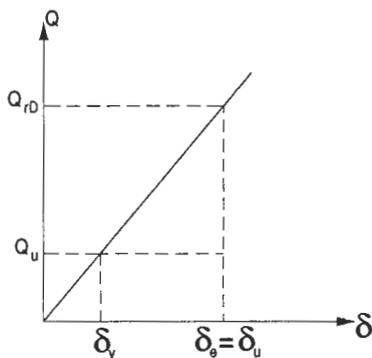
De la figura:

$$\frac{Q_{rD}}{Q_u} = \frac{\delta_u}{\delta_y}$$

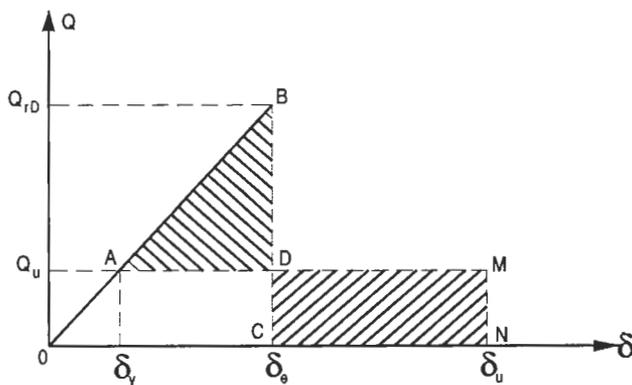
$$\therefore R_D = U_r$$

$$U_r = \frac{Q_{rD}}{Q_u}$$

Q_u = Carga última de fluencia



b) Igualdad de Inercia



De la figura:

$$A_{OBC} = A_{OAMN}$$

$$A_{\Delta ABD} = A_{DMNC}$$

$$\frac{1}{2}(\delta_e - \delta_y)(Q_{rD} - Q_u) = Q_u(\delta_u - \delta_e)$$

De donde se obtiene:

$$R_D = \frac{Q_{rD}}{Q_u} = \sqrt{2u_r - 1} \qquad u_r = \frac{\left(\frac{Q_{rD}}{Q_u}\right)^2 + 1}{2}$$

Si: $Q_{rD} \leq Q_u$: $u_r = \frac{Q_{rD}}{Q_u}$

Y los desplazamientos inelásticos máximos son: $\delta_u = u_r \delta_y$

donde: $\delta_y = \frac{Q_u}{k}$

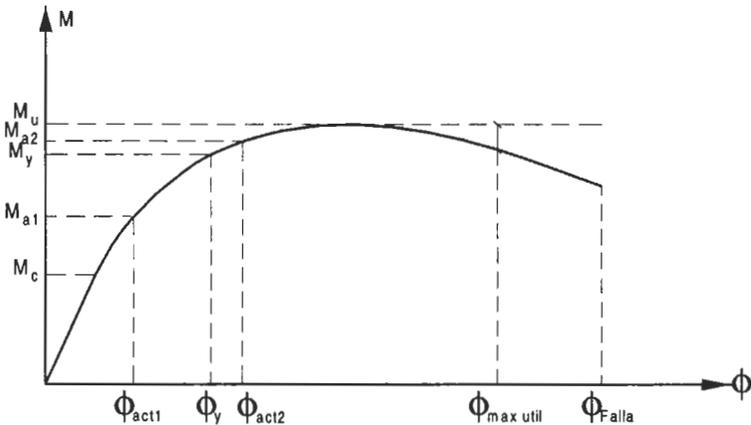


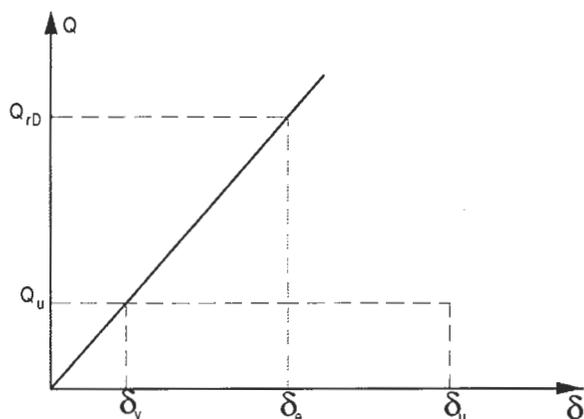
Diagrama Momento - Curvatura de una sección crítica

- M_a : Momento de agrietamiento
- M_y : Momento de fluencia
- M_u : Momento último

$\therefore M_u = M_y$

$U_R = \text{Requerimiento de ductilidad} = \frac{\Phi_{ACTUANTE}}{\Phi_{FLUENCIA}} = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$

\therefore Para cada sección crítica: $u_r \leq u_c$



Q_{rD} : Fuerza cortante elástica de piso.

Q_u : Fuerza cortante última (de fluencia de piso).

δ_e : Desplazamiento de entrepiso elástico (desplazamiento elástico máximo).

δ_y : Desplazamiento de entrepiso de fluencia.

δ_u : Desplazamiento de entrepiso último máximo (desplazamiento inelástico máximo).

Modelo Elástico - Plástico y Modelo Elástico

Se define:

$$\text{Requerimiento de ductilidad} = u_r = \frac{\delta_u}{\delta_y}$$

$$\text{Factor de reducción por ductilidad} = R_D = \frac{R_{rD}}{R_u}$$

Coficiente Sísmico último de piso

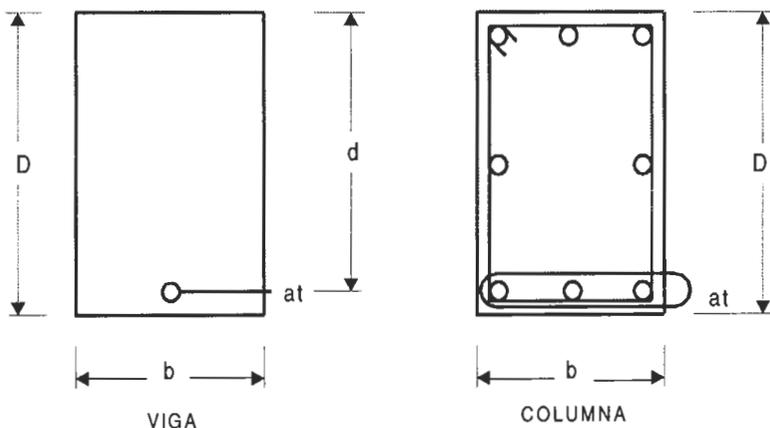
$$C_{ru} = \frac{Q_{ru}}{\sum_{j=r}^n W_j}$$

donde:

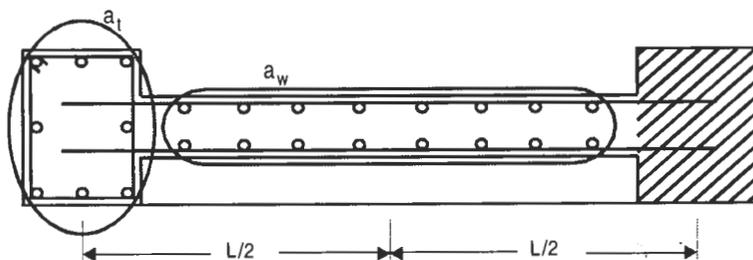
Q_{ru} = Fuerza cortante última de entrepiso

W_j = Peso concentrado del piso j

EXPRESIONES PARA ESTIMAR LA CAPACIDAD ULTIMA EN FLEXION DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO



f_y = Esfuerzo de fluencia del acero
 f'_c = Resistencia del concreto
 M_y = Momento último en t-m



Si: $a_t = \text{cm}^2$
 $f_y = \text{t/cm}^2$
 $D, d = \text{metros}$
 N en t
 $\frac{N}{b D f'_c}$ Adimensional

a_t = Área de acero en tracción por flexión
 a_w = Área total de acero vertical del muro

Viga: $M_y = 0.9a_t f_y d$

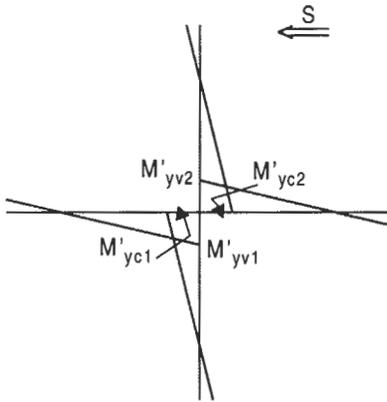
Columna: $M_y = 0.8a_t f_y D + 0.5 ND \left(1 - \frac{N}{bDf'_c} \right)$; $N \leq 0.4bD f'_c$

$M_y = 0.8a_t f_y D + 0.12 b D^2 f'_c$; Si: $N > 0.4b D f'_c$

Muros: $M_y = a_t f_y L + 0.5a_w f_y L + + 0.5 NL$

No considera el efecto de los pórticos transversales.

MECANISMOS DE ROTULAS PLASTICAS EN NUDOS



Momentos Nodales

Momentos Nodales de columna:

$$M'_{YC1} + M'_{YC2} = \Sigma M'_{YC}$$

Momentos Nodales de viga:

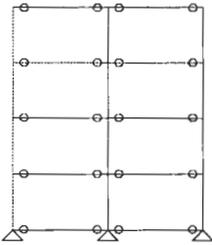
$$M'_{YV1} + M'_{YV2} = \Sigma M'_{YV}$$

Si: $\Sigma M'_{YC} > \Sigma M'_{YV}$

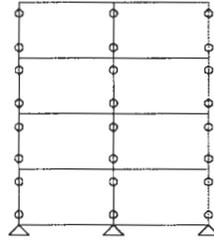
∴ Las rótulas plásticas se forman en las secciones críticas de vigas

Si: $\Sigma M'_{YC} < \Sigma M'_{YV}$

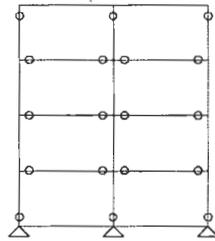
TIPOS DE MECANISMO DE ROTULAS PLASTICAS



a) Viga Debil - Columna Fuerte



b) Viga Fuerte - Columna Debil



c) Mixto

Reglamento del ACI

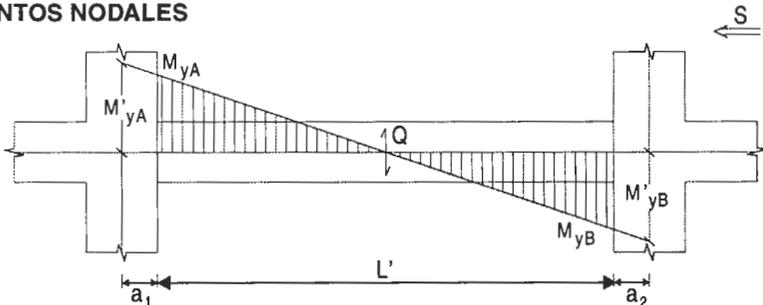
$$\Sigma M'_{YC} \geq 1.2 \Sigma M'_{YV}$$

Reglamento Peruano E.060 - Concreto Armado, ACI-89

$$\Sigma M'_{YC} \geq 1.4 \Sigma M'_{YV}$$

ACI-99: $\Sigma M_{YC} \geq 1.2 \Sigma M_{YV}$

MOMENTOS NODALES



$$Q = \frac{(-)M_{YA} + (+)M_{YB}}{L'}$$

$$(-) M'_{YA} = (-) M_{YA} + Q_{a1}$$

$$(-) M'_{YB} = (+) M_{YB} + Q_{a2}$$

ESFUERZO EN COLUMNAS Y MUROS

Una fórmula aproximada para hallar el momento último de una columna es dada en la Norma AIJ.

$$M_u = 0.8a_t f_y + 0.5ND \left(1 - \frac{N}{bDf'_c} \right)$$

Donde:

M_u : Momento último

N : Carga axial

a_t : Área de refuerzo axial en el lado de tensión (la cantidad asumida es igual en ambos lados)

f_y : Esfuerzo de fluencia del refuerzo

D : Profundidad total de la sección

b : Ancho de la sección

f'_c : Resistencia del concreto

Esto es asumido en todas las columnas del primer piso, los cuales colapsaran en su parte superior e inferior. El esfuerzo de flexión es calculado como sigue:

$$Q_f = \frac{2M_u}{h_o}$$

Donde:

Q_f : Esfuerzo de flexión en la columna

M_u : Momento último

h_o : Altura libre

Una fórmula para hallar el esfuerzo de corte en una columna es dada en la Norma AIJ

$$Q_u = \left[\frac{0.053P_t^{0.23} (180 + f'_c)}{\frac{M}{QD} + 0.12} + 2.7 \sqrt{P_w \sigma_{wy} + 0.1\sigma_o} \right] b_j$$

Donde, Si $M/(QD)$ es menor que 1, esto es igual a 1 y si $M/(QD)$ es mayor que 3, esto es igual a 3.

- Q_u : Esfuerzo último de corte
- D : Profundidad de la columna
- b : Ancho de la columna
- j : 0.8D
- P_t : Proporción del refuerzo a tensión
- P_w : Proporción del refuerzo de corte
- σ_{wy} : Esfuerzo de fluencia del refuerzo por corte
- σ_o : Esfuerzo axial en la columna
- $M/(QD)$: Proporción de la luz de corte

Una fórmula aproximada para hallar los máximos momentos de flexión en muros es dada en la Norma AIJ.

$$M_w = a_t f_y L_w + 0.5 a_w s_{wy} L_w + 0.5 N L_w$$

Donde:

- M_w : Máximo momento de flexión del muro
- a_t : Area total del refuerzo axial en el lado de tensión de la columna
- f_y : Esfuerzo de fluencia del refuerzo axial en el lado de tensión de la columna
- a_w : Area de refuerzo del muro
- σ_{wy} : Esfuerzo de fluencia del refuerzo vertical en el muro
- L_w : Distancia entre los centroides del lado de tensión y compresión de la columna
- N : Carga axial del muro

Esfuerzo lateral debido a la fluencia por flexión en la parte inferior del muro, el cual se calcula como sigue;

$$Q_{tw} = \frac{M_w}{h_o}$$

Donde:

- h_o : Altura al punto de inflexión del momento flector del muro

Una fórmula para hallar el esfuerzo de corte en los muros es dada en la Norma AIJ.

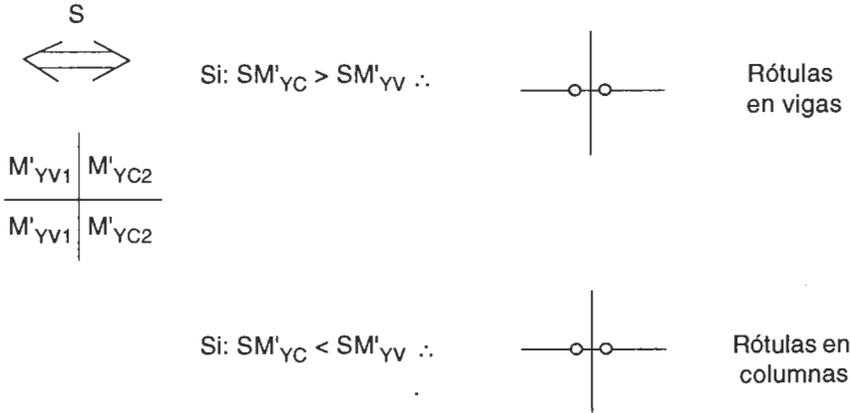
$$Q_w \left[\frac{0.053 P_t e^{0.23} (180 + f'_c)}{\frac{M}{QD} + 12} + 2.7 \sqrt{P_{wh} \sigma_{wh}} + 0.1 \sigma_o \right] b e j$$

Donde, si $M/(QD)$ es menor que 1, esto es igual a 1 y si $M/(QD)$ es mayor que 3, esto es igual a 3

- Q_w : Esfuerzo ultimo de corte
- D : Longitud del muro
- be : Ancho de la sección que es el resultado de dividir el área de la sección tipo L por D
- D_c : Profundidad de la columna
- d : $D-D_c/2$
- j : $7/8d$
- P_{te} : Proporción del refuerzo tensor equivalente (%)
- P_{wh} : Proporción del refuerzo lateral de corte en caso de que se considere el espesor del muro
- σ_{wh} : Esfuerzo de fluencia del refuerzo lateral del muro (kg/cm^2)
- σ_o : Esfuerzo axial promedio basado en el área total (kg/cm^2)
- f'_c : Resistencia del concreto
- M : Momento de la sección crítica

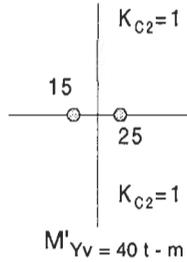
METODO DE REDISTRIBUCION DE MOMENTOS PARA EL CALCULO DE LA CAPACIDAD ULTIMA DE SISTEMAS APORTICADOS

- 1) Momento último en secciones críticas de vigas y columnas
- 2) Momentos nodales
- 3) Mecanismo de rótulas plásticas



4) Redistribución de momentos nodales

$M'_{YV1} = 15 \text{ t} \cdot \text{m}$	$M'_{YC2} = 30 \text{ t} \cdot \text{m}$
$M'_{YC1} = 40 \text{ t} \cdot \text{m}$	$M'_{YV2} = 25 \text{ t} \cdot \text{m}$



5) Fuerza cortante última de columnas

6) Fuerza cortante última de entrepiso y coeficiente sísmico último de piso

$$Q_U = \sum_{\text{Piso}} Q_{\text{COLU}}$$

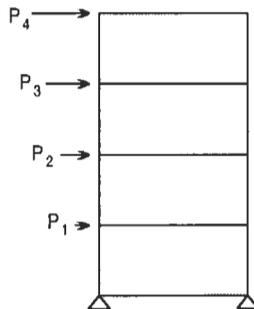
$$C_{ru} = \frac{Q_{ru}}{\sum_{j=1}^n W_j}$$

7) Evaluación de requerimientos de ductilidad y desplazamiento de entrepiso ultimos

METODO DEL TRABAJO VIRTUAL PARA EL CALCULO DE LA CAPACIDAD ULTIMA DE SISTEMAS APORTICADOS

1), 2) y 3) igual al método de redistribución de momentos

4) Asumir distribución de fuerzas sísmicas laterales



$$P_1 = \alpha_1 P$$

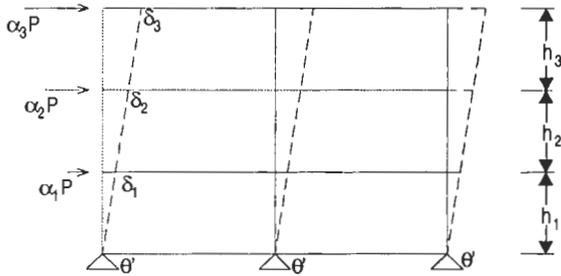
$$P_2 = \alpha_2 P$$

$$P_3 = \alpha_3 P$$

$$P_4 = \alpha_4 P$$

Los valores de α_1 son asumidos, por lo tanto son conocidos

- 5) Capacidad última considerando igualdad de trabajo exterior e interior del sistema



$$W_E = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3$$

$$W_E = P_1 h_1 \theta' + P_2 (h_1 + h_2) \theta' + P_3 (h_1 + h_2 + h_3) \theta'$$

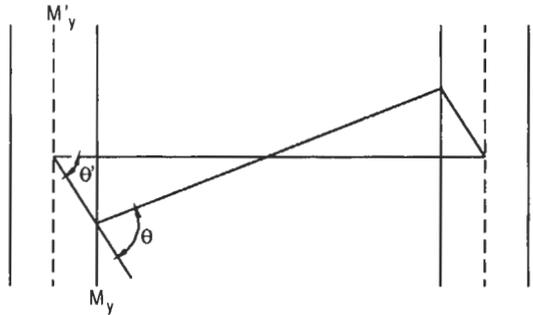
$$= \theta' (\alpha_1 P h_1 + \alpha_2 P (h_1 + h_2) + \alpha_3 P (h_1 + h_2 + h_3))$$

$$W_E = \theta' M_{\text{BASE}}$$

$$W_i = \Sigma M_Y \theta = \Sigma M'_Y \theta' = \theta' \Sigma M'_Y$$

De (1) y (2):

$$M_{\text{BASE}} = \sum_{\alpha=1}^m (M'_Y)_{\alpha}$$



- 6) Fuerzas laterales ultimas, fuerzas cortantes ultimas y coeficiente sísmico último de piso

$$P_i = \alpha_i P$$

$$Q_{IU} = \sum_{j=1}^n P_j$$

$$C_{IU} = \frac{Q_{IU}}{\sum_{j=1}^n W_j}$$

- 7) Evaluación de requerimientos de ductilidad y desplazamientos ultimos

CASOS PARTICULARES DE DISTRIBUCION DE FUERZAS LATERALES

i) Distribución "Triangular Inversa" ($P_i = iP$)

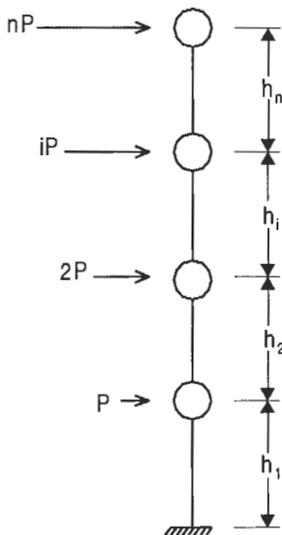
$$M_{BASE} = \sum M_y$$

$$M_{BASE} = Ph_1 + 2P(h_1 + h_2) + iP(h_1 + \dots + h_i) + nP(h_1 + \dots + h_n)$$

$$M_{BASE} = P \sum_{r=1}^n \left(r \sum_{j=1}^r h_j \right)$$

En (1)

$$P = \frac{\sum_{\alpha=1}^m (M'_{Y'})_{\alpha}}{\sum_{r=1}^n \left(r \sum_{j=1}^r h_j \right)}$$



ii) Distribución "Uniforme" ($P_i = P$)

$$M_{BASE} = Ph_1 + P(h_1 + h_2) + P(h_1 + \dots + h_i) + P(h_1 + \dots + h_n)$$

$$M_{BASE} = P \sum_{r=1}^n \left(r \sum_{j=1}^r h_j \right)$$

$$P = \frac{\sum_{\alpha=1}^m (M'_{Y'})_{\alpha}}{\sum_{r=1}^n \left(r \sum_{j=1}^r h_j \right)}$$

Aplicación:

Vigas

$$V - 101 \rightarrow V - 301: 0.25 \times 0.50$$

$$A_s = 2 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 0.9 a_t f_y d$$

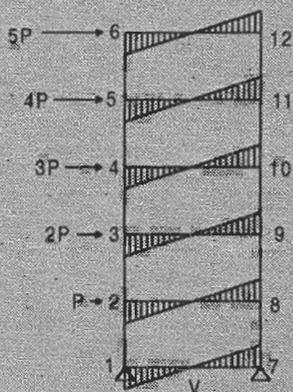
$$M_y = 0.9 \cdot 5.70 \cdot 4.2 \cdot 0.44 = 9.48 \text{ t-m}$$

$$A_s = 4 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 18.96 \text{ t-m}$$

$$V - 401 \rightarrow V - 501: 0.25 \times 0.45$$

$$A_s = 2 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 8.40 \text{ t-m}$$

$$A_s = 4 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 16.81 \text{ t-m}$$



Momentos Nodales

$$V - 101: Q = \frac{9.48 + 18.96}{5.60} = 5.08 \text{ t}$$

$$\Rightarrow M'_{y1} = 9.48 + 5.08 \cdot 0.20 = 10.50 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M'_{y7} = 18.96 + 5.08 \cdot 0.20 = 19.98 \text{ t-m}$$

$$V - 401: Q = 4.50 \text{ t}$$

$$\Rightarrow M'_{y5} = 9.30 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M'_{y11} = 17.71 \text{ t-m}$$

Columnas

$$0.4b_b D f_c = 0.4 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 0.28 = 179.2 \text{ t}$$

$$\therefore N < 0.4b_b D f_c \Rightarrow M_y = 0.8 a_t f_y D + 0.5ND \left(1 - \frac{N}{b_b D f_c} \right)$$

$$M_y = 0.8 (10.14) 4.2 \cdot 0.40 + 0.2N \left(1 - \frac{N}{448} \right)$$

$$M_y = 13.63 + 0.2N \left(1 - \frac{N}{448} \right)$$

$$C_5 \rightarrow N = 10.8 \text{ t} \Rightarrow M_y = 13.63 + 2.11 = 15.74 \text{ t-m}$$

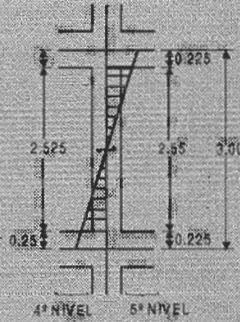
$$C_4 \rightarrow N = 21.6 \text{ t} \Rightarrow M_y = 13.63 + 4.11 = 17.74 \text{ t-m}$$

$$C_3 \rightarrow N = 32.4 \text{ t} \Rightarrow M_y = 13.63 + 6.01 = 19.64 \text{ t-m}$$

$$C_2 \rightarrow N = 43.2 \text{ t} \Rightarrow M_y = 13.63 + 7.81 = 21.44 \text{ t-m}$$

$$C_1 \rightarrow N = 54.0 \text{ t} \Rightarrow M_y = 13.63 + 9.50 = 23.13 \text{ t-m}$$

Momentos Nodales



$$\text{Nivel } 5^{\circ} \Rightarrow Q = \frac{16.7 \cdot 2}{2.55} = 12.35 \text{ t}$$

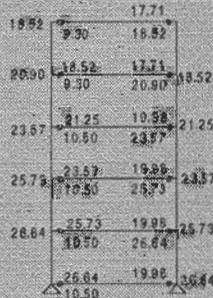
$$M'_y = 18.52 \text{ t-m}$$

$$\text{Nivel } 4^{\circ} \Rightarrow Q = 14.05 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_s} = 20.90 \text{ t-m} \\ M'_{y_i} = 21.25 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 3^{\circ} \Rightarrow Q = 15.71 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_s} = 23.57 \text{ t-m} \\ M'_{y_i} = 23.57 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 2^{\circ} \Rightarrow Q = 17.15 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_s} = 25.73 \text{ t-m} \\ M'_{y_i} = 25.73 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 1^{\circ} \Rightarrow Q = \frac{23.13 \cdot 2}{3.30} = 14.02 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_s} = 26.64 \text{ t-m} \\ M'_{y_i} = 26.64 \text{ t-m} \end{cases}$$



$$\sum_m (M'_y) = (9.30 + 17.71)2 + (10.50 + 19.98)4 = 175.94 \text{ t-m}$$

$$M_{\text{BASE}} = P \cdot 93.80 + 2P \cdot 96.8 + 3P \cdot (9.8) + 4P \cdot (12.8) + 5P \cdot (15.8) = 177P$$

$$P = \frac{\sum (M'_y)}{177} = \frac{175.94}{177} = 0.991$$

$$Q_{Y5} = 5P = 4.97 \text{ t}$$

$$Q_{Y4} = 9P = 8.95 \text{ t}$$

$$Q_{Y3} = 12P = 11.93 \text{ t}$$

$$Q_{Y2} = 14P = 13.92 \text{ t}$$

$$Q_{Y1} = 15P = 14.91 \text{ t}$$

Aplicación:

a) Momentos de Fluencia en secciones críticas de vigas

$$V - 101 \rightarrow V - 301: 0.25 \times 0.50$$

$$A_s = 2 \phi 3/4" = 5.70 \text{ cm}^2 \Rightarrow M_y = 0.9a_t f_y d$$

$$M_y = 0.9 \times 5.70 \times 4.2 \times 0.44 = 9.48 \text{ t-m}$$

$$A_s = 4 \phi 3/4" = 11.40 \text{ cm}^2 \Rightarrow M_y = 18.96 \text{ t-m}$$

$$V - 401 \rightarrow V - 501: 0.25 \times 0.45$$

$$A_s = 2 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 8.40 \text{ t-m}$$

$$A_s = 4 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 16.81 \text{ t-m}$$

Momentos Nodales de Vigas:

$$M'_y = M_y + Q_a$$

$$V - 101: Q = \frac{9.48 + 18.96}{5.65} = 5.03 \text{ t}$$

$$\Rightarrow M'_{yi} = 10.36 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M'_{yd} = 19.84 \text{ t-m}$$

$$V - 401: Q = \frac{8.40 + 16.81}{5.65} = 4.46 \text{ t}$$

$$\Rightarrow M'_{yi} = 9.18 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M'_{yd} = 17.59 \text{ t-m}$$

b) Momentos en secciones de columnas

$$0.4BbDf'_c = 0.4 * 35 * 35 * 0.28 = 137.2 \text{ t}$$

$$\therefore N < 137.2 \text{ t} \Rightarrow M_y = 0.8a_t f_y D + 0.5ND \left(1 - \frac{N}{bDf'_c}\right)$$

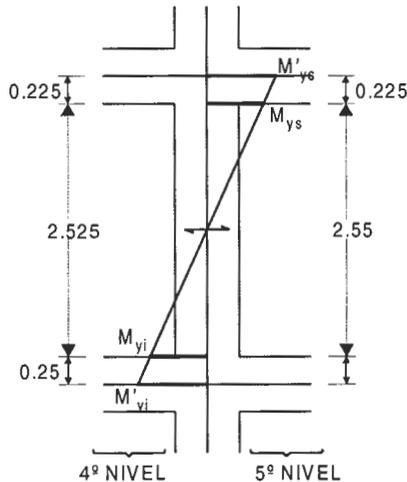
$$M_y = 0.8 (3 * 1.98) 4.2 * 0.35 + 0.5 * N * 0.35 \left(1 - \frac{N}{35 * 35 * 0.28}\right)$$

$$M_y = 6.99 + 0.175N \left(1 - \frac{N}{343}\right)$$

$C_5 \rightarrow N = 10.8 \text{ t}$	\Rightarrow	$M_y = 6.99 + 1.83 = 8.82 \text{ t-m}$
$C_4 \rightarrow N = 21.6 \text{ t}$	\Rightarrow	$M_y = 6.99 + 3.54 = 10.53 \text{ t-m}$
$C_3 \rightarrow N = 32.4 \text{ t}$	\Rightarrow	$M_y = 6.99 + 5.13 = 12.12 \text{ t-m}$
$C_2 \rightarrow N = 43.2 \text{ t}$	\Rightarrow	$M_y = 6.99 + 6.60 = 13.60 \text{ t-m}$
$C_1 \rightarrow N = 54.0 \text{ t}$	\Rightarrow	$M_y = 6.99 + 7.96 = 14.95 \text{ t-m}$

Momentos Nodales

$$M'_y = M_y + Q_a$$



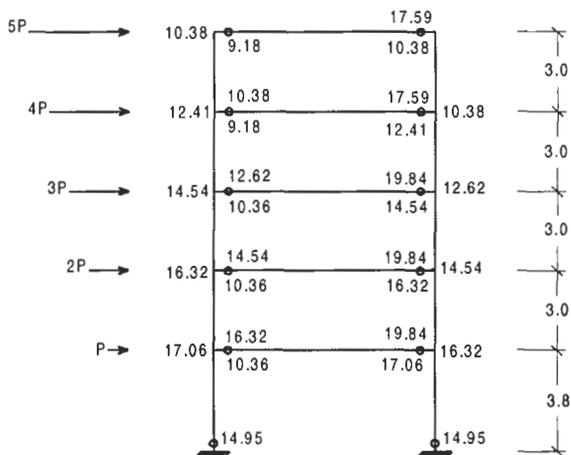
$$\text{Nivel } 5^\circ \Rightarrow Q = \frac{8.82 + 8.82}{2.55} = 6.92 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ys} = 12.41 \text{ t-m} \\ M'_{yi} = 10.38 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 4^{\circ} \Rightarrow Q = 8.34 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ys} = 12.41 \text{ t-m} \\ M'_{yi} = 12.62 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 3^{\circ} \Rightarrow Q = 9.70 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ys} = 14.54 \text{ t-m} \\ M'_{yi} = 14.54 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 2^{\circ} \Rightarrow Q = 10.88 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ys} = 16.36 \text{ t-m} \\ M'_{yi} = 16.36 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Nivel } 1^{\circ} \Rightarrow Q = \frac{14.95 * 2}{3.55} = 8.42 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{ys} = 17.06 \text{ t-m} \\ M'_{yi} = 14.95 \text{ t-m} \end{cases}$$



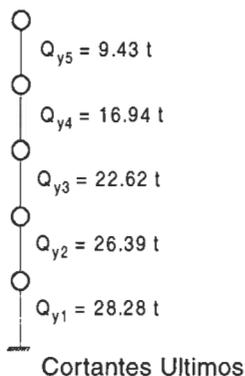
$$\sum (M'_y) = 9.18 + 10.38 + 9.18 + 17.59 + (10.36 + 9.84)3 + 14.95 * 2 = 166.83 \text{ t-m}$$

$$M_{\text{BASE}} = 5P (15.8) + 4P (12.8) + 3P(9.8) + P(3.8) = 177 P$$

$$P = \frac{\sum (M'_y)}{177} = \frac{166.83}{177} = 0.94 \text{ t}$$

Como se tiene dos pórticos iguales: $P_T = 2P = 1.89 \text{ t}$

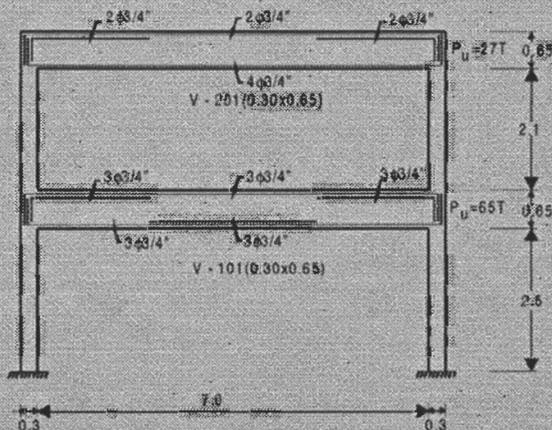
$$\begin{aligned}
 Q_{Y5} &= 5P_T = 9.43 \text{ t} \\
 Q_{Y4} &= 9P_T = 16.97 \text{ t} \\
 Q_{Y3} &= 12P_T = 22.62 \text{ t} \\
 Q_{Y2} &= 14P_T = 26.39 \text{ t} \\
 Q_{Y1} &= 15P_T = 28.28 \text{ t}
 \end{aligned}$$



Aplicación:

Para el pórtico que se muestra en la figura determine:

- Los momentos últimos de vigas y columnas en las caras de los elementos usando las expresiones empíricas japonesas.
- Los momentos nodales y la distribución probable de las rótulas plásticas (mecanismo de rótulas plásticas).
- Usando el método de redistribución de momentos las fuerzas cortantes últimas (de fluencia) de cada entrepiso.



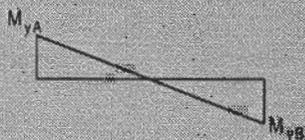
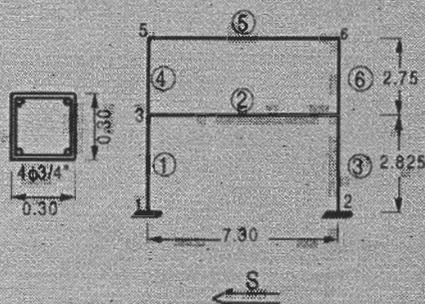
Columna C1

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Solución:

a) V - 101:



$$M_{yA} \Rightarrow 6 \phi 3/4" = 17.10 \text{ cm}^2$$

$$d = 65 - (4 + 0.95 + 1.91 + 1.27) = 65 - 8.13 = 56.87 \text{ cm}$$

$$M_y = 0.9a_1 f_y d = 0.9 \cdot 17.1 \cdot 4.2 \cdot 0.57 = 36.84 \text{ t-m}$$

$$M_{yB} \Rightarrow 3 \phi 3/4" = 8.55 \text{ cm}^2$$

$$d = 65 - (4 + 0.95 + 0.95) = 65 - 5.9 = 59.10 \text{ cm}$$

$$M_y = 19.10 \text{ t-m}$$

V - 201:

$$M_{yA} = 4 \phi 3/4" \Rightarrow d = 59.1 \text{ cm} \Rightarrow M_y = 25.47 \text{ t-m}$$

$$M_{yB} = 4 \phi 3/4" \Rightarrow M_y = 25.47 \text{ t-m}$$

Columnas:

2do. Nivel: $P_u = 27 \text{ t}$

$$0.4b D f'_c = 0.4 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 0.21 = 75.60 \text{ t}$$

$$N < 0.4b D f'_c \Rightarrow M_y = 0.8a_1 f_y D + 0.5 ND \left(1 - \frac{N}{bDf'_c} \right)$$

$$M_y = 0.8 (2 \cdot 2.85) 4.2 \cdot 0.30 + 0.5 \cdot 27 \cdot 0.30 \left(1 - \frac{27}{30 \cdot 30 \cdot 0.21} \right)$$

$$\therefore M_y = 5.75 + 3.47 = 9.22 \text{ t-m}$$

1er. Nivel: $P_u = 65 \text{ t}$

$$\therefore M_y = 5.75 + 6.40 = 12.15 \text{ t-m}$$

b) Puntos Nodales

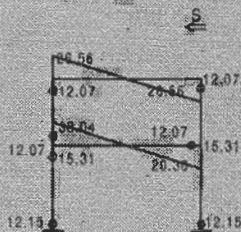
$$V - 01: \quad Q = \frac{36.84 + 19.10}{7.00} = 7.99 \text{ t}$$

$$\Rightarrow M'_{yA} = 36.84 + 0.15 \cdot 7.99 = 38.04 \text{ t-m}$$

$$\Rightarrow M'_{yB} = 20.30 \text{ t-m}$$

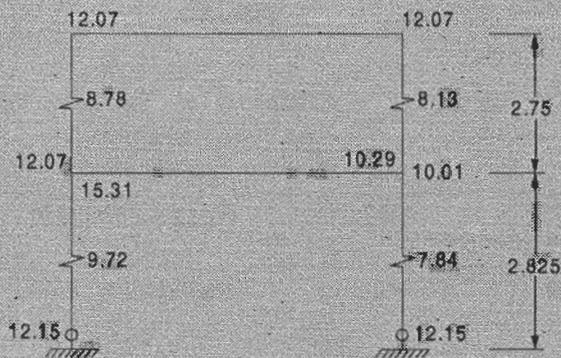
$$\text{Columna Superior} \Rightarrow Q = \frac{9.22 \cdot 2}{2.10} = 8.78 \text{ t} \Rightarrow M'_{yc} = 12.07 \text{ t-m}$$

$$\text{Columna Inferior} \Rightarrow Q = \frac{12.15 \cdot 2}{2.50} = 9.72 \text{ t} \Rightarrow M'_{yc} = 15.31 \text{ t-m}$$



MOMENTOS NODALES Y MECANISMOS DE ROTULAS PLÁSTICAS

c)



$$\frac{1}{2.75} = 0.36 \left. \begin{array}{l} M_{CS} = 10.29 \text{ t-m} \\ M_{CI} = 10.01 \text{ t-m} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2.825} = 0.35 \left. \begin{array}{l} M_{CS} = 10.29 \text{ t-m} \\ M_{CI} = 10.01 \text{ t-m} \end{array} \right\}$$

$$0.71$$

$$V_{y2} = 8.78 + 8.13 = 16.91 \text{ t}$$

$$V_{y1} = 9.72 + 7.84 = 17.56 \text{ t}$$

Aplicación:

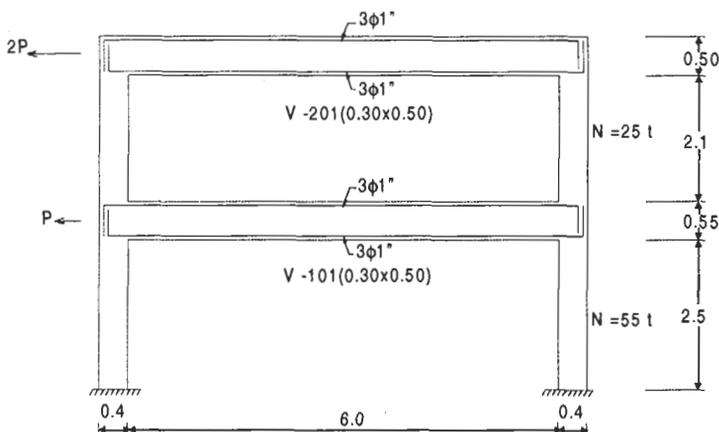
$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

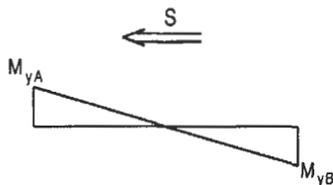
Columnas:

$$0.40 \times 0.40$$

$$A_{st} = 4 \phi 1''$$



a) Momentos últimos de vigas y columnas



$$V - 101: \quad 0.30 \times 0.55$$

$$M_{yA} \Rightarrow 3 \phi 1'' = 15.21 \text{ cm}^2$$

$$d = 55 - (4 + 0.95 + 1.27) = 55 - 6.22 = 48.78 \text{ cm}$$

$$M_y = 0.9a_t f_y d = 0.9 \times 15.21 \times 4.2 \times 0.49 = 28.18 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow M_{yB} = 28.18 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$V - 201: \quad 0.30 \times 0.50$$

$$d = 43.78 \text{ cm} \Rightarrow M_{yA} = M_{yB} = 25.30 \text{ t} \cdot \text{m}$$

Columnas del 2do. Nivel $N = 25 \text{ t}$

$$0.4b D f'_c = 0.4 \times 40 \times 40 \times 0.28 = 179.2 \text{ t}$$

$$N < 0.4b D f'_c \Rightarrow M_y = 0.8a_t f_y D + 0.5ND \left(1 - \frac{N}{bDf'_c} \right)$$

$$M_y = 0.8 (2 * 5.07) 4.2 * 0.40 + 0.5 * 25 * 0.40 \left(1 - \frac{25}{40 * 40 * 0.28} \right)$$

$$\therefore M_y = 13.63 + 4.72 = 18.35 \text{ t-m}$$

Columnas del 1er. Nivel

$$\therefore M_y = 13.63 + 9.65 = 23.28 \text{ t-m}$$

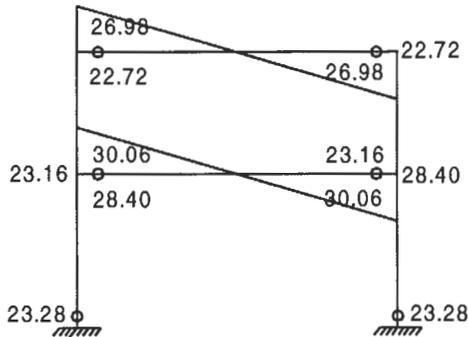
b) Momentos Nodales

$$V - 101 \Rightarrow Q = \frac{28.18 + 28.18}{6} = 9.39 \text{ t} \Rightarrow M'_{yA} = 28.18 + 9.39 * 0.20 = 30.06 \text{ t-m}$$

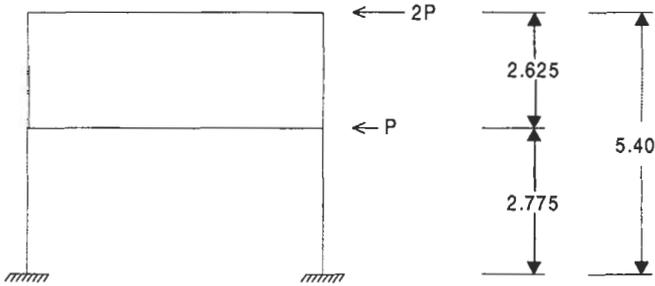
$$V - 201 \Rightarrow Q = \frac{25.30 * 2}{6} = 8.4 \text{ t} \Rightarrow M'_{yA} = 26.98 \text{ t-m}$$

$$\text{Columna Superior} \Rightarrow Q = \frac{18.35 * 2}{2.10} = 17.48 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{yCS} = 22.72 \text{ t-m} \\ M'_{yCI} = 23.16 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$\text{Columna Inferior} \Rightarrow Q = 18.62 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{yCS} = 23.28 + 5.12 = 28.40 \text{ t-m} \\ M'_{yCI} = 23.28 \text{ t-m} \end{cases}$$



MOMENTOS NODALES Y MECANISMOS DE ROTULAS PLASTICAS



$$M_B = \sum_{B=1}^m M'_{yB}$$

m = Número de modos

$$W_E = P(h_1)\theta + 2P(h_2)\theta = P(2.775)\theta + 2P(5.40)\theta = 13.575 P\theta \dots (1)$$

$$W_i = \Sigma(M_{yNUDO}) \theta \dots \dots \dots (2)$$

$$W_E = W_i$$

$$W_i = (22.72 * 2 + 30.06 * 2 + 23.28 * 2)\theta = 152.12\theta$$

$$P = 11.21 \text{ t}$$

$$V_{2y} = 2P = 22.41 \text{ t}$$

$$V_{1y} = 3P = 33.63 \text{ t}$$

Variante

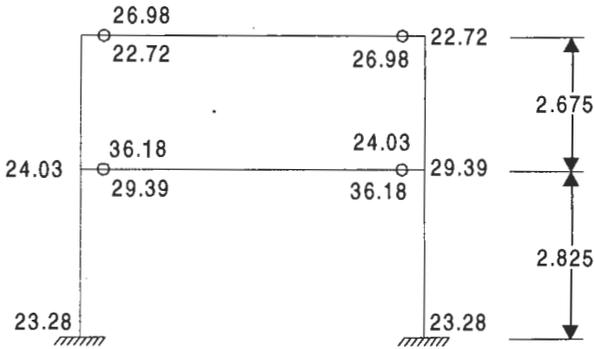
$$h = 0.65 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad d = 58.78 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad M_{yA} = M_{yB} = 33.92 \text{ t-m}$$

$$M'_{yA} \quad \Rightarrow \quad Q = 11.31 \text{ t} \quad \Rightarrow \quad M'_{yA} = 36.18 \text{ t-m}$$

Columnas

$$1\text{er. Nivel} \Rightarrow Q = 18.62 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_{cs}} = 29.39 \text{ t-m} \\ M'_{y_{ci}} = 23.28 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$2\text{do. Nivel} \Rightarrow Q = 17.48 \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} M'_{y_{cs}} = 22.72 \text{ t-m} \\ M'_{y_{ci}} = 24.03 \text{ t-m} \end{cases}$$



$$W_E = \theta(P \cdot 2.825 + 2P \cdot 5.50) = 13.825\theta P$$

$$W_I = 2(22.72 + 36.18 + 23.28)\theta = 164.36\theta \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore P = 11.89 \text{ t}$$

$$V_{2y} = 23.78 \text{ t}$$

$$V_{1y} = 35.67 \text{ t}$$

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

DEFINICIONES

Algunas definiciones de especial importancia:

Elementos de borde (Boundary elements) – Partes de los muros estructurales y los diafragmas, localizadas en los bordes y alrededor de las aberturas, a las cuales se les da resistencia adicional por medio de armaduras longitudinales y transversales.

Elementos colectores (Collector elements) – Elementos, localizados dentro de los diafragmas, que transmiten las fuerzas inerciales al sistema de resistencia ante fuerzas horizontales.

Estribo suplementario (Crosstie) – Barra de refuerzo que tiene un gancho sísmico en un extremo y en el otro extremo un gancho de no menos de 90° con una extensión de $6d_b$. Los ganchos deben abrazar el refuerzo longitudinal. Los ganchos de 90° se deben alternar en la altura.

Desplazamiento de diseño (Design displacement) – Desplazamiento horizontal total esperado para el sismo de diseño, tal como lo prescribe el Código general.

Estribo de confinamiento (Hoop) – Un estribo cerrado o enrollado continuo. Puede estar compuesto por uno o varios elementos, cada uno de los cuales debe tener ganchos sísmicos en sus extremos.

Sistema de resistencia sísmica (Lateral-force resisting system) – Aquella parte de la estructura compuesta por elementos diseñados para resistir las fuerzas provenientes de los efectos sísmicos.

Pórtico de Momento (Moment frame) – Pórtico espacial en el cual los elementos y nudos (o conexiones) resisten las solicitaciones por medio de flexión, fuerzas cortantes y fuerzas axiales. Existen las siguientes clases de pórticos.

Pórtico de momento intermedio (Intermediate moment frame) – Un pórtico que cumple con los requisitos de 21.2.2.3 y 21.10 adicionalmente a los de pórticos comunes.

Pórtico de momento ordinario (Ordinary moment frames) – Un pórtico que cumple con los requisitos de los Capítulos 1 a 18.

Pórtico de momento especial (Special moment frame) – Un pórtico que cumple con los requisitos de las Secciones 21.2 a 21.5 adicionalmente a los de pórticos comunes.

REQUISITOS GENERALES

Alcance

El Capítulo 21 contiene lo que se considera deben ser los requisitos mínimos que se deben emplear en las estructuras de concreto armado para que sean capaces de resistir una serie de oscilaciones en el rango inelástico de respuesta sin que se presente un deterioro crítico de su resistencia.

Por lo tanto el objetivo es dar capacidad de disipación de energía en el rango inelástico de respuesta.

Capacidad de Disipación de Energía

- Común (Ordinary)
- Intermedia (Intermediate)
- Especial (Special)

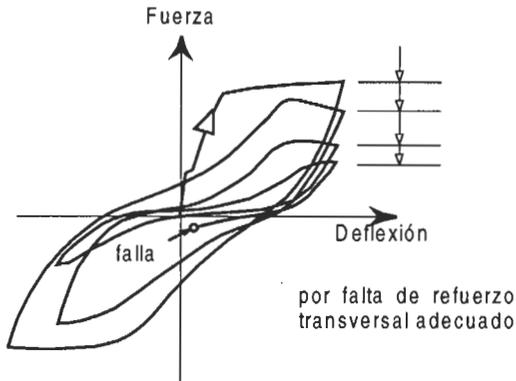
Muros estructurales (Structural walls) – Muros dispuestos para que resistan combinaciones de fuerzas cortantes, momentos y fuerzas axiales inducidas por los movimientos sísmicos. Un muro de corte (shear wall) es un muro estructural. Existen las siguientes clases de muros estructurales:

Muro estructural común de concreto armado (Ordinary reinforced concrete structural wall) – Un muro que cumple con los requisitos de los Capítulos 1 a 18.

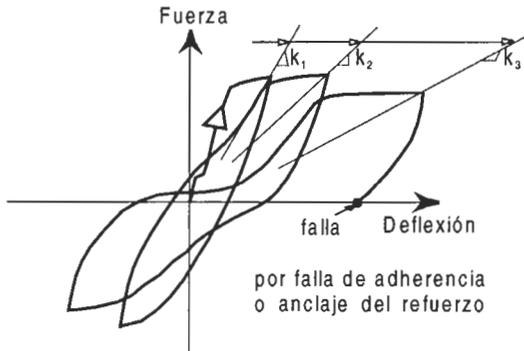
Muro estructural común de concreto simple (Ordinary structural plain concrete wall) – Un muro que cumple con los requisitos de Capítulo 22.

Muro estructural especial de concreto armado (Special reinforced concrete structural wall) – Un muro que cumple con los requisitos de 21.2 y 21.6 adicionalmente a los requisitos de muros estructurales comunes.

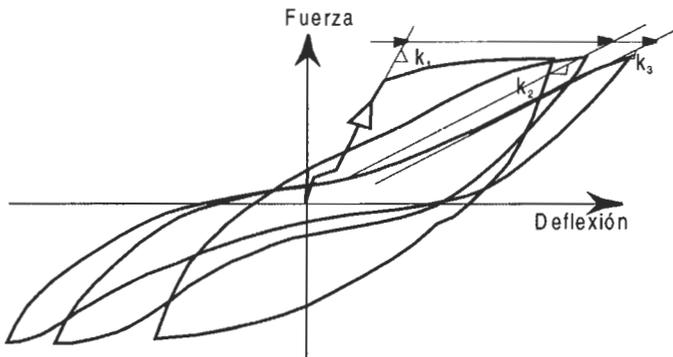
Degradación de la Resistencia



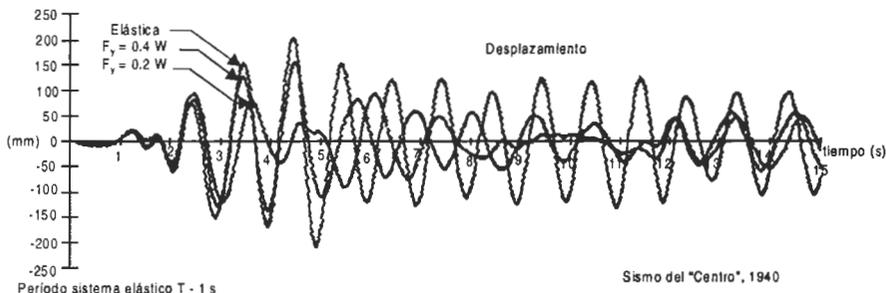
Degradación de Rigidez y de Resistencia



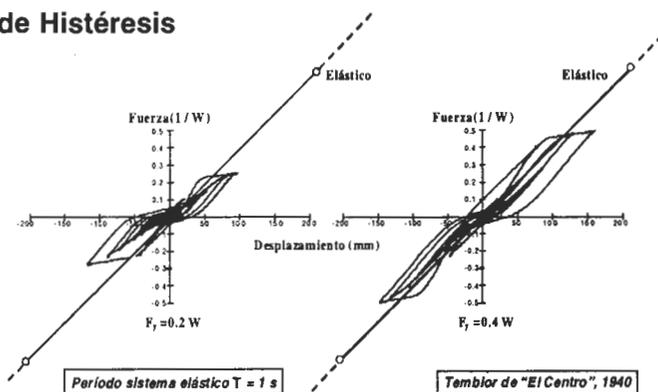
Degradación de la Rigidez sin falla



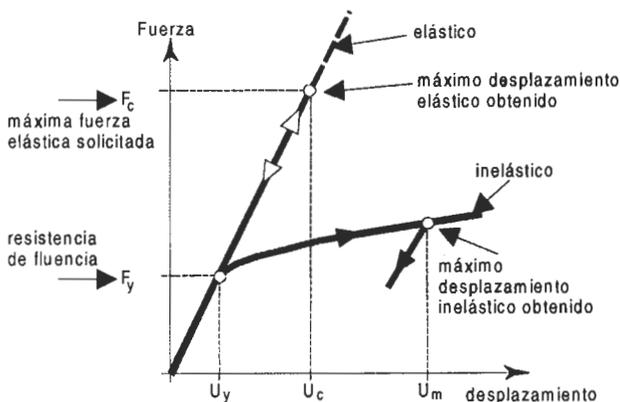
Respuesta Inelástica



Ciclos de Histéresis



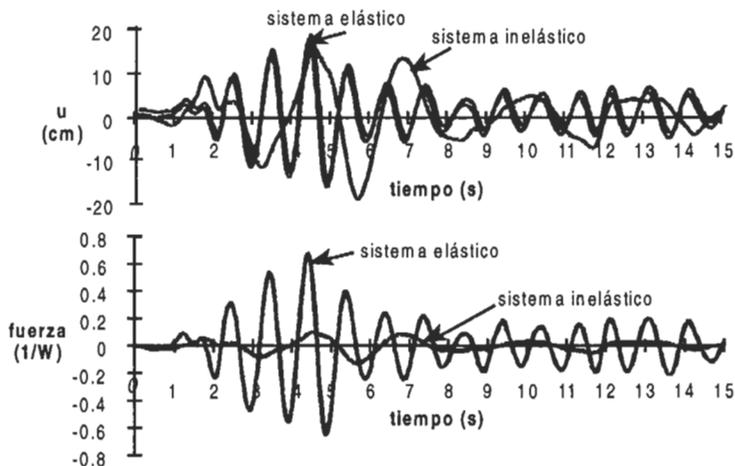
Capacidad Global de Disipación de Energía



En los Códigos de diseño sísmico resistente se describe por medio del coeficiente de reducción de resistencia R

$$R = \frac{F_e}{F_y} = \frac{u_e}{u_y}$$

Respuesta Elástica vs. Inelástica



Estrategia Actual de Diseño Sísmico

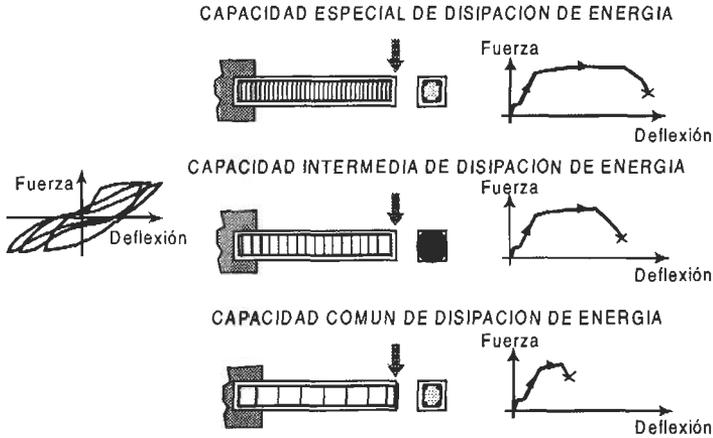
Dada una capacidad de disipación de energía para el material y el sistema estructural, definida por medio de R y dependiente de la manera como se detalle (despiece) el material estructural, se obtiene la fuerza sísmica de diseño por medio de:

$$F_y = \frac{F_e}{R}$$

y la fuerza elástica máxima solicitada es a su vez:

$$F_e = \text{masa} \times S_a(T, \xi) \quad \text{espectro de aceleraciones del Código general}$$

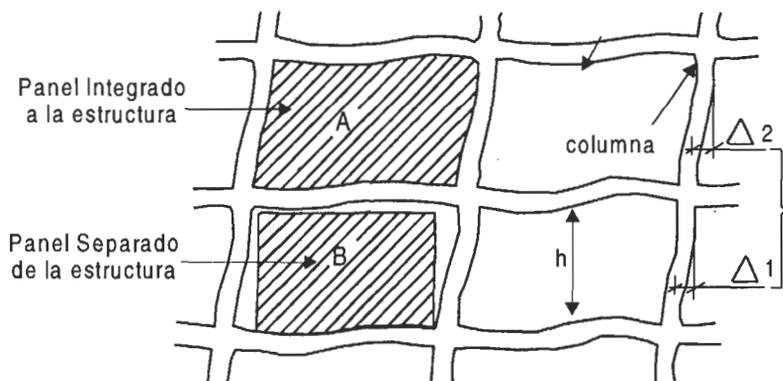
Capacidad de Disipación de Energía en el Rango Inelástico



Limitaciones al empleo de la Capacidad de Disipación de Energía

CAPACIDAD DE DISIPACION DE ENERGIA	ZONA DE AMENAZA SISMICA		
	BAJA	INTERMEDIA	ALTA
COMUN	✓	no	no
INTERMEDIA	✓	✓	no
ESPECIAL	✓	✓	✓

Esto es lo que indica directamente el ACI 318-99. Los diferentes Códigos generales realizan variaciones a estas limitaciones en función de otros parámetros tales como la importancia de la edificación en la recuperación con posterioridad a un temblor, su localización en sitios con suelos blandos que amplifican las ondas sísmicas, y otros.



El ACI 318-99 exige (21.2.2) que se tenga en cuenta la interacción entre elementos estructurales y no estructurales que puedan afectar la respuesta elástica e inelástica de la estructura durante el sismo. Los elementos rígidos que no se consideren parte del sistema de resistencia sísmica se permiten, siempre y cuando se estudie su efecto en la respuesta de la estructura y el diseño se acomode a estos efectos. Los elementos estructurales que se suponga que no hace parte del sistema de resistencia sísmica deben cumplir los requisitos de 21.9.

REQUISITOS GENERALES

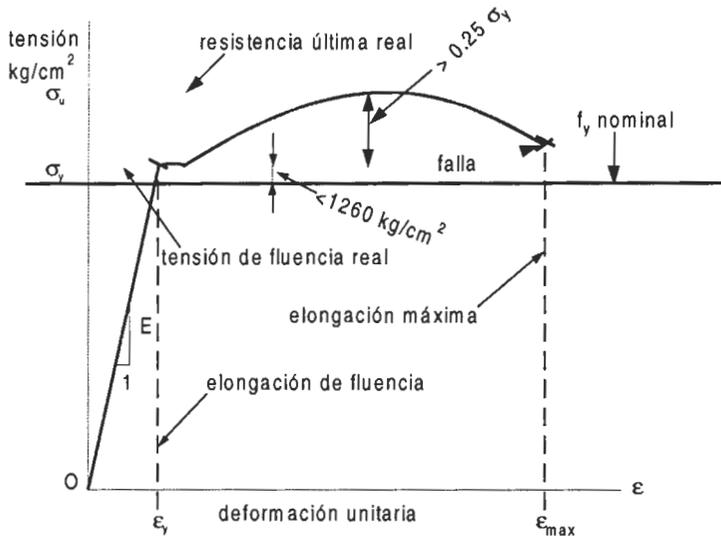
Resistencia mínima del concreto: 210 kg/cm^2

La resistencia empleada en el diseño de hormigón con agregados ligeros no debe exceder: 280 kg/cm^2

El acero de refuerzo debe cumplir la norma ASTM A 706, en su defecto para los aceros Grado 40 y 60 se deberá cumplir:

- La resistencia a la fluencia real medida por medio de ensayos no debe exceder la resistencia a la fluencia nominal en más de 1260 kg/cm^2 .
- La relación entre la resistencia a la tensión real y la resistencia a la fluencia real no debe ser menor de 1.25.

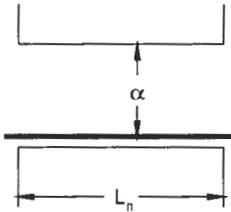
Acero de Refuerzo



Pórticos Dúctiles Especiales

Diseño de Vigas Dúctiles Especiales

DISEÑO POR FLEXION



- REQUISITOS GENERALES

$$P_u \leq A_s f'_c$$

$$10$$

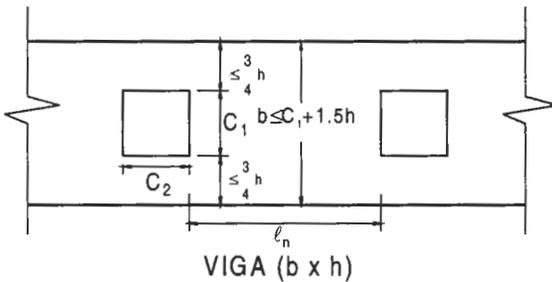
$$\ell_n \geq 4d;$$

$$b \geq 0.3 h$$

$$b \geq 25 \text{ cm}$$

$$b \geq c + 1.5 h$$

$$f'_c \geq 210 \text{ kg/cm}^2$$



Cuantías de Refuerzo:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y}; \rho_{\min} = 0.8 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y}$$

$$\rho_{\max} = 0.025$$

El refuerzo de momento positivo en la cara el nudo debe cumplir: $+M_n \geq \frac{-M_n}{2}$

que es equivalente a considerar: $+A_s \geq \frac{-A_s}{2}$

En cualquier sección a lo largo del elemento:

$$+M_{n\text{sección}} \geq \frac{-M_{n\text{max de la cara del nudo}}}{4}$$

$$y \quad M_{n\text{sección}} \geq \frac{-M_{n\text{max de la cara del nudo}}}{4}$$

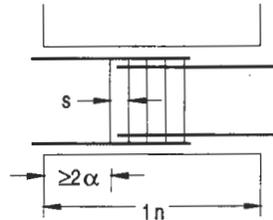
que es equivalente a:

$$+A_s \geq \frac{A_{s\text{max de la cara del nudo}}}{4}$$

$$y \quad A_s \geq \frac{A_{s\text{max de la cara del nudo}}}{4}$$

- Los empalmes por traslape sólo serán permitidos si existen estribos o espirales de refuerzo sobre la longitud de traslape:

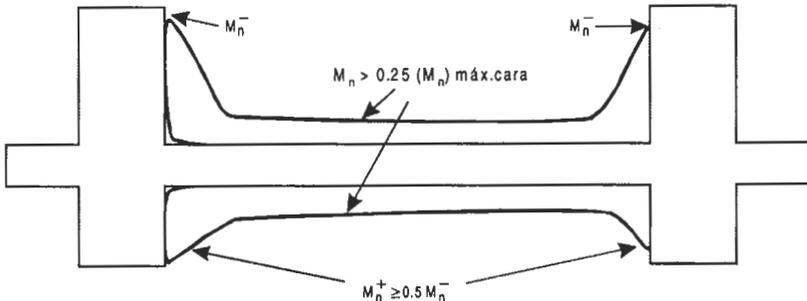
$$s \leq \frac{d}{4} \quad \text{o} \quad s \leq 10 \text{ cm}$$



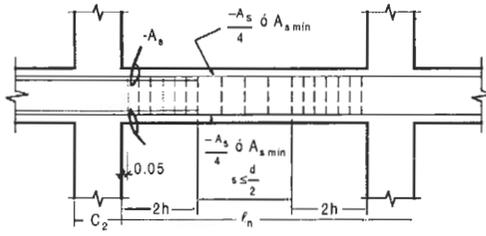
ELEMENTOS A FLEXIÓN EN PÓRTICOS ESPECIALES

Refuerzo longitudinal

Las resistencias a momento en cualquier sección deben cumplir:



Refuerzo Transversal



$$A_{s \text{ min}} = \frac{14}{f_y} bd; \quad 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd$$

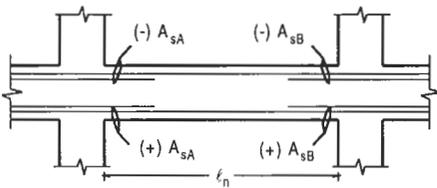
Espaciamiento del refuerzo transversal en la zona de confinamiento:

$$s \leq d/4, \quad 8\phi_{L \text{ menor}}, \quad 24\phi_{\text{estribo}}, \quad 30 \text{ cm}$$

Donde no se requiera estribos de confinamiento $\Rightarrow s \leq \frac{d}{2}$

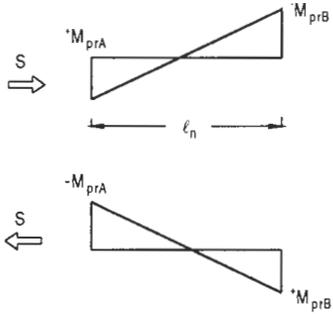
Todos estos requisitos aseguran una capacidad de ductilidad alta para todas las secciones críticas de vigas.

Fuerzas Cortantes de Diseño



Las fuerzas de diseño se calcularán en base a las cargas por gravedad factorizadas y los momentos resistentes de las secciones en el elemento.

Considerando la dirección del sismo: $\leftrightarrow s$



$$V_A = \frac{W_u \cdot l_n}{2} + \frac{(-)M_{prA} + (+)M_{prB}}{l_n}$$

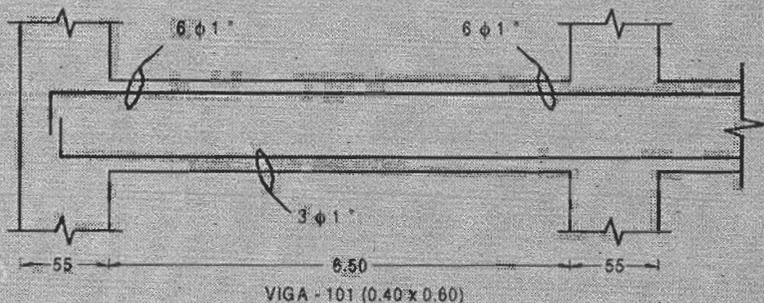
$$V_B = \frac{W_u \cdot l_n}{2} + \frac{(+M_{prA} + (-)M_{prB}}{l_n}$$

Los M_{Du} se encuentran considerando que el esfuerzo en el acero es $f_s = \alpha f_y$; ($\alpha = 1.25$) y el factor de reducción de capacidad $\phi = 1$.

Aplicación:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2, \quad f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2, \quad W_u = 6.2 \text{ t/m}$$

a) Diseño de la Viga V-101 (0.40 * 0.60) por cortante



$$d = 60 - \left(4 + 0.95 + \frac{2.54}{2} \right) \quad d = 53.78 \text{ cm}$$

$$6 \phi 1" \rightarrow A_s = 6 \cdot 5.07 = 30.42 \text{ cm}^2 \rightarrow a = \frac{\alpha A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{125 \cdot 30.42 \cdot 4.2}{0.85 \cdot 0.21 \cdot 40}$$

$$a = 22.37 \text{ cm}^2 \rightarrow M_y = \alpha A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 68.03 \text{ t-m}$$

$$3 \phi 1" \rightarrow A_s = 15.21 \text{ cm}^2 \rightarrow a = 1.18 \text{ cm} \rightarrow M_y = 38.48 \text{ t-m}$$

$$V_{uA} = 6.2 \cdot \frac{6.50}{2} + \frac{68.03 + 38.48}{6.50} = 20.15 + 16.39 = 36.54 \text{ t}$$

$$V_{nA} = \frac{V_{uA}}{\phi} = 42.98 \text{ t}$$

usando: estribos ϕ 3/8" de dos ramas: $s = \frac{A_v f_y d}{V_n} = 7.5 \text{ cm}$

usando: estribos ϕ 3/8" de tres ramas: $s = \frac{3 \cdot 0.71 \cdot 4.2 \cdot 53.78}{42.98} = 11.19 \text{ cm}$

además: $s_{\max} = \frac{d}{4} = 13.5 \text{ cm} = 8 \phi_{\min} = 8 \cdot 2.54 = 20.32 \text{ cm}$

$$= 24 \phi_{\text{estribo}} = 22.8 \text{ cm} \quad = 30 \text{ cm}$$

usar: estribo ϕ 3/8" de dos ramas: 2h \rightarrow 1 @ 0.05, 15 @ 0.075

o estribos ϕ 3/8" de tres ramas: 120 cm \rightarrow 1 @ 0.05, 11 @ 0.11

Zona > 2h: Considerando la contribución del concreto

$$V_{2h} = 36.54 - 6.2 \cdot 1.20 = 29.10 \text{ t} \quad \rightarrow \quad V_n = 34.2 \text{ T}$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d = 16.52 \text{ t} \quad \rightarrow \quad s = \frac{A_v f_y d}{V_n - V_c} = 27.2 \text{ cm}$$

$$s_{\text{max}} = \frac{d}{2} = 26.89 \text{ cm}; 60 \text{ cm}; \therefore s = 0.27$$

Usar estribos ϕ 3/8" de dos ramas: 1 @ 0.05, 16 @ 0.075 R @ 0.18 Rpta.

COLUMNAS DUCTILES ESPECIALES

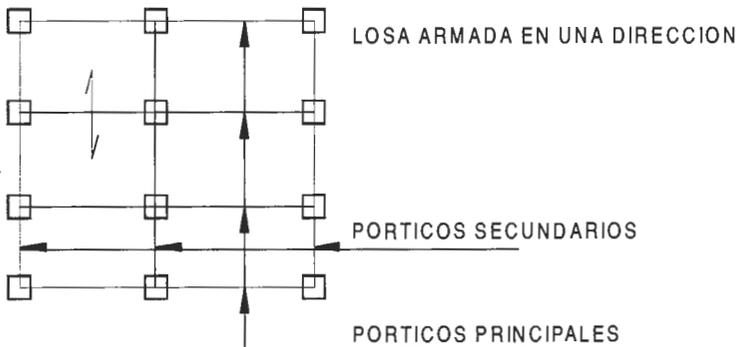
Consideraciones de Análisis

Análisis Dirección X

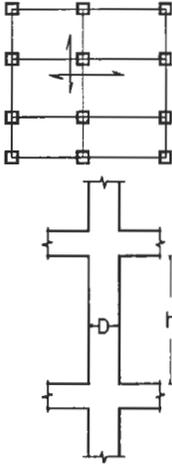
Flexión por cargas de gravedad en dirección Y
 Flexión por cargas laterales sísmicas en dirección X
 \therefore Flexión Biaxial

Análisis Dirección Y

Flexión por cargas de gravedad en dirección Y
 Flexión por cargas laterales sísmicas en dirección Y
 \therefore Flexión Uniaxial



Debe considerarse el efecto de esbeltez



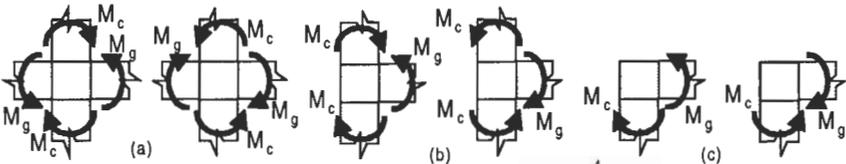
Losa de Techo Armado en dos sentidos en las dos de análisis sísmico las columnas estan sometidas a flexión biaxial

Criterios de dimensionamiento

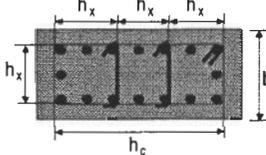
- a) $D \leq \frac{h'}{4}$
- b) $n = \frac{P_s}{f'_c bD} \leq \frac{1}{3} \therefore n \leq 0.25$
- c) $D \geq 30 \text{ cm}$
- d) $\frac{D_{\min}}{D_{\text{mayor}}} \geq 0.4$

ELEMENTOS A FLEJO-COMPRESIÓN EN PÓRTICOS ESPECIALES

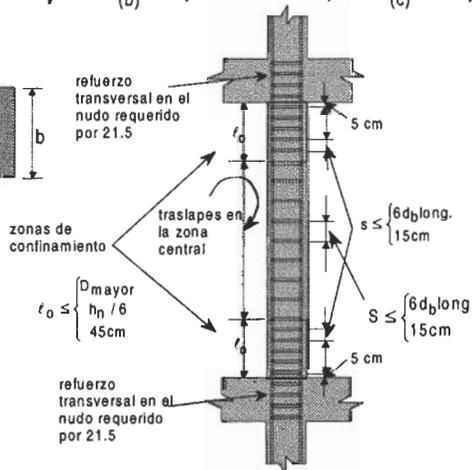
La resistencia a flexión de las columnas debe cumplir: $\sum M_c \geq \frac{6}{5} \sum M_g$



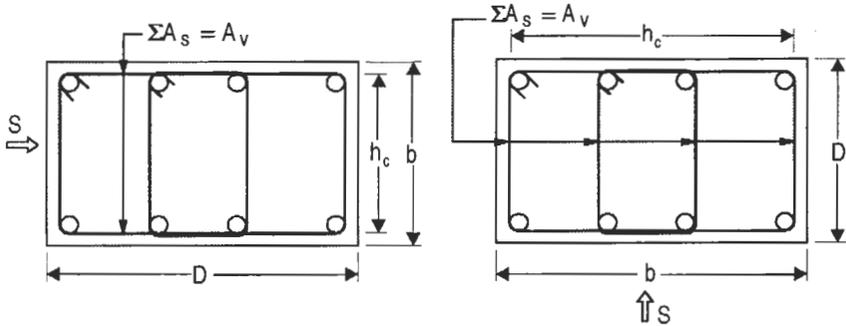
$h_x \leq 35 \text{ cm}$



$$S_x = \begin{cases} 10 + \frac{(35 - h_x)}{3} \\ \leq 15 \text{ cm} \\ \geq 10 \text{ cm} \end{cases}$$



DEFINICIÓN DE PARAMETROS DE CONFINAMIENTO

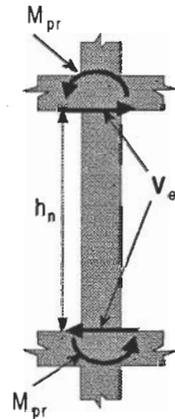


Diseño a cortante

$$V_e = \frac{(M_{pr})_{\text{arriba}} + (M_{pr})_{\text{abajo}}}{h_n}$$

M_{pr} corresponde a la máxima resistencia a momento para el rango de cargas axiales en el elemento (1.25 f_y y $\phi = 1$). No puede ser mayor del obtenido del análisis.

Para el diseño se debe tomar $V_c = 0$ si V_e es más del 50% del cortante solicitado, o la fuerza axial es menor de $0.05 f'_c A_g$.



CONSIDERACIONES DE COLUMNAS DUCTILES

Consideraciones de Diseño

Cuantía $p_{\min} = 0.01$
 $p_{\max} = 0.06$

Los traslapes sólo son permitidos dentro de la mitad central de la columna. Sinó satisface lo anterior, se tendrá que considerar refuerzo por confinamiento.

Usando expresiones empíricas se calculan los momentos últimos para todas las secciones críticas de posible formación de rótulas plásticas (secciones positivas y negativas en las caras de los apoyos de las vigas y columnas, que son los MOMENTOS M_y).

El Reglamento ACI - 99 considera para zonas muy sísmicas que en cada nudo, la suma de las capacidades últimas en flexión de las columnas sean por lo menos igual a 1.2 la suma de las capacidades últimas de las vigas que concurren a las caras del nudo.

$$\therefore \sum M_{yc} \geq 6/5 \sum M_{yv} \quad \text{ACI 318-99}$$

Refuerzo Transversal (Columnas Confinadas)

- La cuantía volumétrica en espiral ó estribos circulares será:

$$\rho_{s \min} = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

- Refuerzo por confinamiento:

$$A_{sh} = 0.30 \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) s h_c \frac{f'_c}{f_y}$$

$$A_{sh} = 0.09 s h_c \frac{f'_c}{f_y}$$

A_{sh} = Área total del refuerzo transversal en la dirección de análisis.

h_c = Dimensión centro a centro de las ramas extremas del refuerzo de confinamiento.

A_{ch} = Área dentro de la sección transversal medida de afuera a afuera del refuerzo transversal.

A_g = Área total de la sección transversal de la columna.

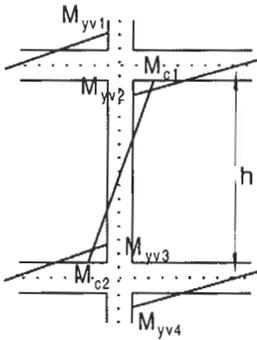
s = espaciamiento del refuerzo transversal.

Diseño por Fuerza Cortante

Mecanismo de rótulas plásticas en vigas:

(ACI 318-99)

Las columnas se diseñarán para fuerzas cortantes obtenidas con la hipótesis de la formación de rótulas plásticas en las secciones críticas de vigas y considerando un esfuerzo de 1.25 f_y del refuerzo de acero.



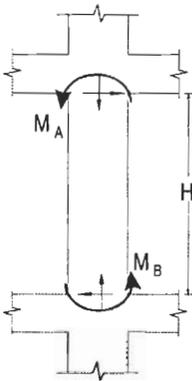
$$V_u = \frac{M_{c1} + M_{c2}}{h}$$

$$M_{c1} = \left(M_{yv1} + M_{yv2} \right) \frac{k_c}{k_c + k_{cs}}$$

$$M_{c2} = \left(M_{yv3} + M_{yv4} \right) \frac{k_c}{k_c + k_{cl}}$$

$$V = \frac{M_A + M_B}{H}$$

Observaciones:



- V depende de cargas por gravedad y el corte generado por los momentos.
- M_y ; está calculado en base al esfuerzo del acero: $1.25 f_y$.
- En la unión viga - columna, el momento M_y de la columna no necesita ser mayor que el momento M_{pr} generado por la viga. El cortante nunca será menor al obtenido por el análisis estructural.

$M_{yv} \rightarrow$ Momentos últimos en la cara del apoyo

$$M_{yv} \rightarrow a = \frac{\alpha A_s f_y}{0.85 f'_c b} \rightarrow M_{yv} = \alpha A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$\alpha = 1.25$

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_n}$$

(Despreciando la Contribución del Concreto)
Para la zona de contribución del concreto:

$$V_c = 0.53 \left(1 + 0.0071 \frac{P_u}{A_g} \right) \sqrt{f'_c} b d; \text{ kg, cm}^2, \text{ cm}$$

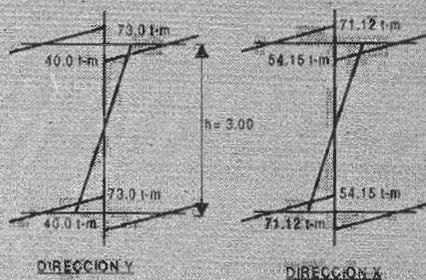
$$s = \frac{A_v f_y d}{V_n - V_c}$$

Aplicación de Diseño de Columna Ductil Especial

Se tiene una columna interior de un pórtico de C A, cuya condición de diseño es $P_u = 254 \text{ t}$, $M_u = 71 \text{ t}\cdot\text{m}$.

La sección es de $0.60 \times 0.60 \text{ m}^2$; $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$; $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. $P_{US} = 201 \text{ t}$; $P_{UI} = 300.0 \text{ t}$; $\sum M_{YV} = 125.27 \text{ t}\cdot\text{m}$ (Suma de momentos de la viga que concurren en las caras del nudo).

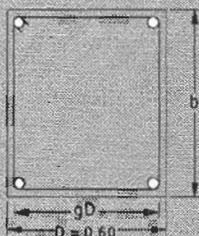
Considere que las rigideces de elemento de la columna del nivel superior y del nivel inferior son iguales a la columna en estudio.



Los valores indicados corresponden a los momentos probables últimos de las secciones de vigas en la cara de la conexión. Han sido obtenidos considerando:

$$\phi = 1.00 \quad f_s = 1.25 f_y$$

1. Diseño usando los Abacos del SP-7



$$gt = 60 - 12 = 48 \text{ cm}$$

$$g = \frac{48}{60} = 0.80$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$K = \frac{P_u}{f'_c b t} = \frac{254}{0.28 \cdot 60 \cdot 60} = 0.25$$

$$\rho_f m = 0.30$$

$$K_e / t = 0.25 \cdot \frac{71}{254 \cdot 0.60} = 0.12$$

$$A_s = 61.2 \text{ cm}^2$$

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = 17.65$$

Usar: 12 ϕ 1" (60.84 cm²)

$$\rho_t = 0.017 < \rho_{\max} = 0.06 \\ > \rho_{\min} = 0.01$$

2. Revisión de la condición de: $\Sigma M_{yc} \geq 1.2 \Sigma M_{yv}$ rótulas en secciones críticas de vigas

Dirección más favorable: Dirección x

Del dato tenemos $\Sigma M_{yv} = 125.27 \text{ t-m}$

Calculo de ΣM_{yc} :

$$M_{yc} \rightarrow 0.4 b D f'_c = 0.4 (60) (60) 0.28 = 403.20 \text{ t}$$

$$P_u = 254 \text{ t.} \rightarrow P_u < 0.4 b D f'_c$$

$$\therefore M_y = 0.8 a_t f_y D + 0.5 P_u D \left(1 - \frac{P_u}{0.4 b D f'_c} \right)$$

$$M_y = 0.8 * 20.28 * 4.2 * 0.60 + 0.5 * 254 * 0.6 \left(1 - \frac{254}{60 * 60 * 0.28} \right) \\ = 40.88 + 57.00 = 97.88 \text{ t-m}$$

Para el nivel superior: $P_{us} = 201.0 \text{ t.}$

$$M_y = 0.8 * 20.28 * 4.2 * 0.60 + 0.5 * 254 * 0.6 \left(1 - \frac{2010}{60 * 60 * 0.28} \right)$$

$$M_y = 40.88 + 48.28 = 89.16 \text{ t-m}$$

$$\therefore \text{Nudo Superior: } \Sigma M_{yc} = 97.88 + 89.16 = 187.04 \text{ t-m}$$

$$\Sigma M_{yc} = 187.04 > 1.2 \Sigma M_{yv} = 150.32 \text{ t-m} \quad \therefore \text{Conforme}$$

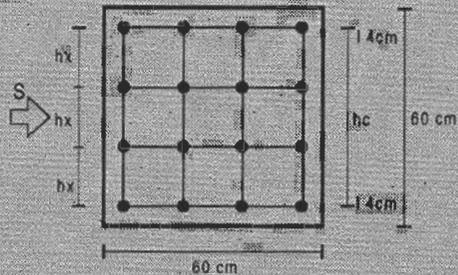
Por simple inspección cumple para el nudo inferior. **Conforme**

Diseño del Refuerzo Transversal

$$h_c = 60 - 2 \left(4 + \frac{1.27}{2} \right)$$

$$h_c = 50.73 \text{ cm}$$

$$h_x = \frac{h_c}{3} = 16.91 \text{ cm}$$



a) Diseño por confinamiento

Cálculo de la longitud de confinamiento

$$l_o \geq \begin{cases} D = 0.6 \text{ m} \\ h/6 = 3/6 = 0.5 \text{ m} \\ 0.45 \text{ m} \end{cases}$$

$$\therefore l_o = 0.6 \text{ m}$$

Cálculo del espaciamiento

$$s \leq \begin{cases} D_{\text{mayor}}/4 = 0.15 \text{ m} \\ 6\phi_p = 6 \cdot 0.0254 = 0.1524 \text{ m} \\ s_x \end{cases}$$

$$s_x = \begin{cases} \leq 10 + \frac{(35 - h_x)}{3} = 0.16 \text{ m} \\ \leq 0.15 \text{ m} \\ \geq 0.10 \text{ m} \end{cases}$$

$$\therefore 10 \text{ cm} \leq s \leq 15 \text{ cm}$$

$$s = 15 \text{ cm}$$

Cálculo del acero de refuerzo

$$A_g = (0.6)^2 = 0.36 \text{ m}^2$$

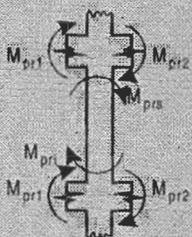
$$A_{ch} = (0.6 - 0.04)^2 = 0.2704 \text{ m}^2$$

$$A_{sh} \geq \begin{cases} 0.3 \cdot s \cdot h_c \cdot \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) = 3.78 \text{ cm}^2 \\ 0.09 \cdot s \cdot h_c \cdot \frac{f'_c}{f_y} = 3.42 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Usar: $\bar{A}_{sh} = 2 \phi 1/2" + 2 \phi 3/8"$
 $A_{sh} = 3.96 \text{ cm}^2$

b) Diseño por Cortante

Cálculo de las fuerzas cortantes de diseño



$$M_{prcs} = (M_{pr1} + M_{pr2}) \frac{k_c}{k_c + k_{cs}}$$

$$M_{prcs} = \sum M_{YV} \cdot \frac{1}{1+1} = 125.27 \cdot \frac{1}{2}$$

$$M_{prcs} = M_{prc} = 62.635 \text{ t-m}$$

$$\therefore V_e = \frac{62.635 \cdot 2}{h=3} = 41.76 \text{ t}$$

$$V_e = 41.76 \text{ t}$$

Verificación de la resistencia al corte

$$\phi V_n = \phi (V_c + V_s)$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b \cdot d = 0.53 \cdot 14.5 \cdot 60 \cdot 53.365 = 24.6 \text{ t}$$

$$V_s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{5} = \frac{3.96 \cdot 12 \cdot 53.365}{12} = 74.85 \text{ t}$$

$$V_s \leq 2.1 \sqrt{f'_c} b \cdot d = 97.5 \text{ t} \quad (\text{OK})$$

$$\therefore \phi V_n = 0.85 (24.6 + 74.85) = 84.53 \text{ t}$$

$$\therefore \phi V_n > V_e$$

$$84.53 \text{ t} > 41.76 \text{ t}$$

CONFORME

c) Zona Intermedia

- Cálculo del espaciamiento

ϕ_p = diámetro de la barra principal de refuerzo

$$s \leq \begin{cases} b/2 = 0.3\text{m} \\ 6\phi_p = 6 \cdot 0.0254 = 0.1524\text{m} \\ 0.15\text{m} \end{cases}$$

$\therefore s = 15\text{ cm}$

- Verificación de la resistencia al corte

$V_c = 24.6066\text{ t}$

$V_s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{s} = \frac{3.96 \cdot 4.2 \cdot 53.365}{15} = 53.17\text{ t}$

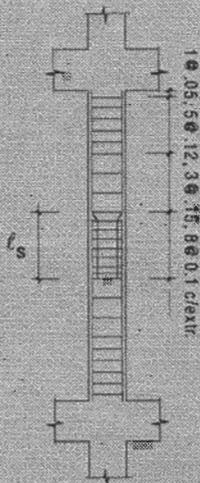
$\phi V_n = 0.85 (24.6066 + 59.17) = 71.21\text{ t}$

$\phi V_n > V_e$

$71.21\text{ t} > 41.76\text{ t}$ CONFORME

d) Zona de Empalmes

Longitud de empalme



$l_s = (0.013 f_y - 24) \phi_p$

$l_s = (0.013 \cdot 4200 - 24) \cdot 2.54$

$l_s = 77.724 = 80\text{ cm}$

ϕ_p = diámetro de la barra de refuerzo principal

- Espaciamiento

$$s \leq \begin{cases} d/4 = \frac{60}{4} = 15\text{ cm} \\ 10\text{ cm} \end{cases}$$

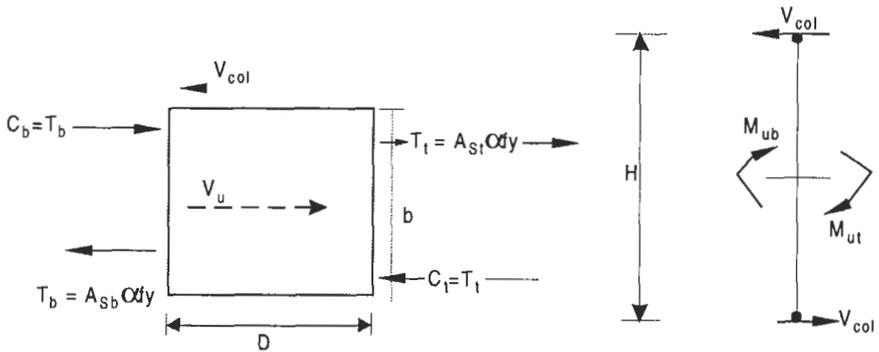
$s = 10\text{ cm}$

CONEXION VIGA - COLUMNA

1. Por Confinamiento

Se deberá proporcionar el mismo refuerzo que en los extremos de la columna. Si existen vigas en los cuatro lados de la conexión con anchos $b_i \geq 3/4 c_i$, la separación de estribos puede aumentar al doble.

2. Por Cortante



$$V_u = C_b + T_1 - V_{col}$$

$$V_u = \alpha f_y (A_{sb} + A_{st}) - V_{col}$$

$$V_u = 1.25 f_y (A_{st} + A_{sb}) - V_{col}$$

$$V_{col} = \frac{M_{ub} + M_{ut}}{H}$$

a) Fuerza cortante de diseño en la conexión

b) Fuerza cortante de columna

Para una conexión extrema:

$$V_u = T_1 - V_{col} = \alpha A_{st} f_y - V_{col}$$

Diseño por cortante: $V_n = \frac{V_u}{\phi}$

$$V_n \leq 5.3 \sqrt{f'_c} A_j$$

Unión confinada

$$V_n \leq 4 \sqrt{f'_c} A_j$$

Para otras uniones

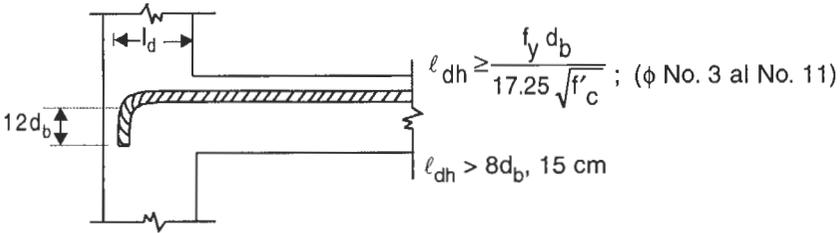
donde:

A_j = Área mínima de la sección transversal de la unión en un plano paralelo al eje del refuerzo que genera la fuerza cortante.

Puede considerarse como el área resistente al corte igual a "bd" de la conexión.

3. Longitudes de Anclaje

a) Si se usan gancho estándar.



b) Para barras del No. 3 al No. 11, la longitud de desarrollo, l_d , para una barra recta no debe ser menor de 2.5 veces la longitud requerida con gancho estándar si el espesor del concreto debajo de la barra no excede de 30 cm; y no debe ser menor de 3.5 l_{dh} si el espesor del concreto debajo es mayor de 30 cm.

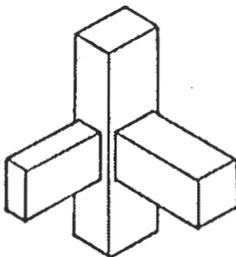
c) Cualquier porción de la longitud recta de empotramiento fuera del núcleo confinado, debe incrementarse en un factor de 1.6.

$$l_{dm} = 1.6 (l_d - l_{dc}) + l_{dc}$$

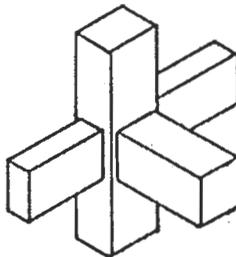
l_{dm} = longitud de desarrollo requerida cuando la barra no está completamente empotrada en concreto confinado.

l_d = longitud de desarrollo requerida en concreto confinado.

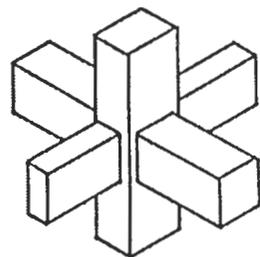
l_{dc} = longitud de la barra en concreto confinado.



Esquina



Exterior



Interior

Geometría de las Conexiones

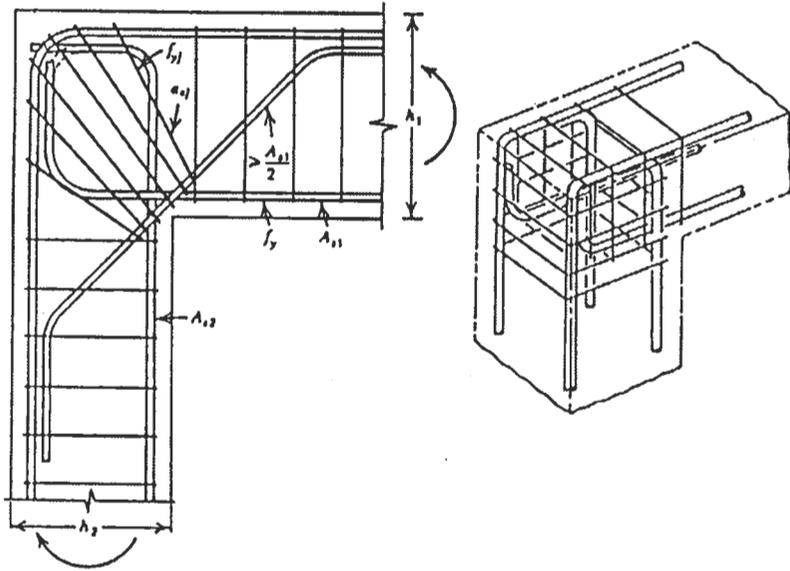


Fig. 1: Conexiones Viga Columna

Conexión exterior viga columna

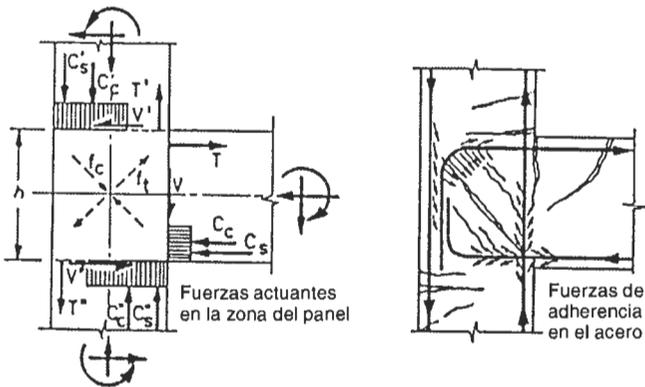


Fig. 1: Conexión Viga - Columna Exterior

$$V_j = T - V'$$

$$V_j = A_s T_y - V'$$

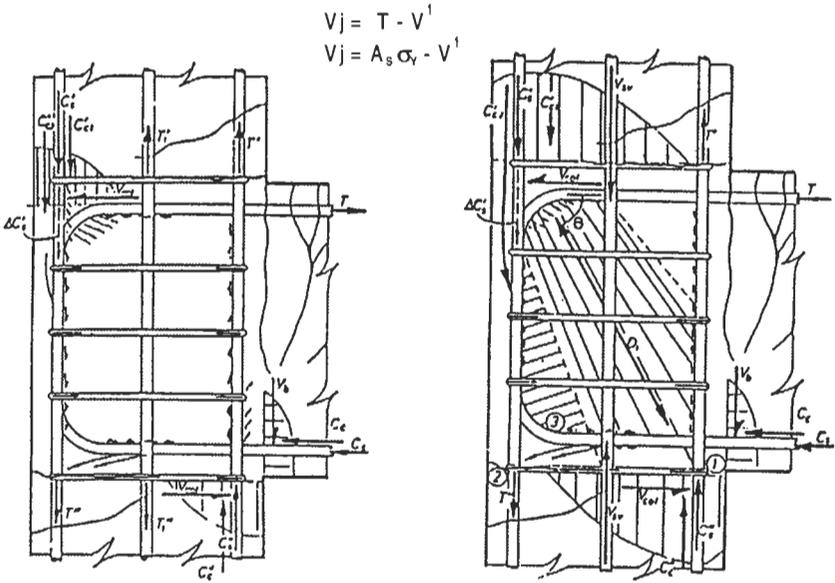


Fig. 2: Conexión Viga - Columna Exterior

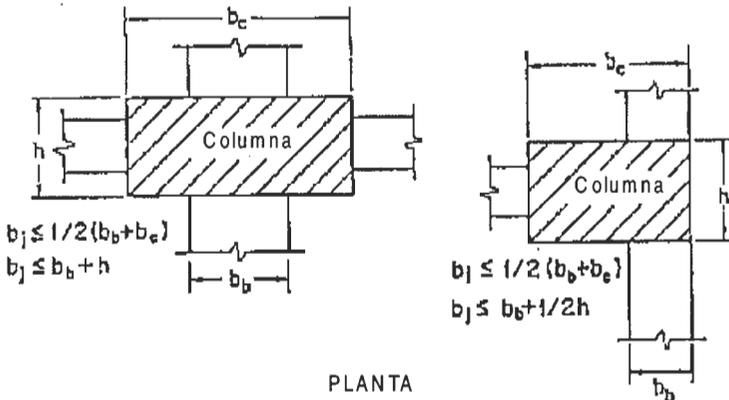


Fig. 3: Area efectiva de cortante de una conexión Viga - Columna (ACI - ASCE 352)

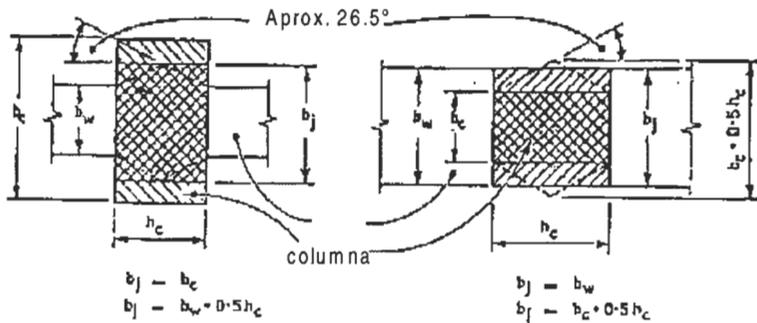


Fig. 4: Area efectiva de cortante de una conexión Viga - Columna (Nzs 3101)

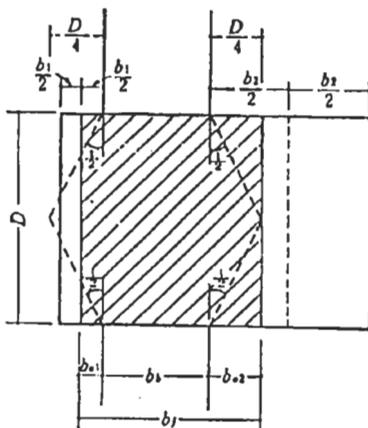


Fig. 5: Area efectiva de cortante de una conexión Viga - Columna (AIJ)

MUROS ESTRUCTURALES

MUROS ESTRUCTURALES DE CONCRETO ARMADO

Refuerzo Mínimo en Muros

El código define un refuerzo mínimo para controlar el agrietamiento de la estructura.

Refuerzo Mínimo Vertical

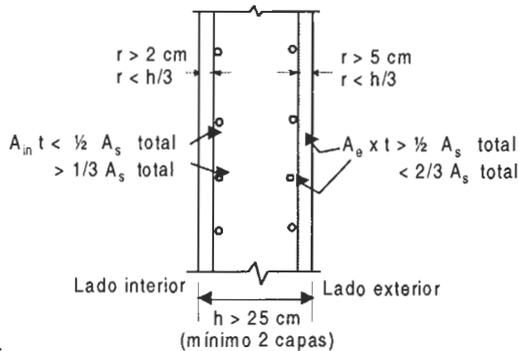
- Para varillas menores o igual que No.5, $f_y \geq 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $A_{v \text{ mín}} = 0.0012 bh$
- Para cualquier otro tipo de varilla
 $A_{v \text{ mín}} = 0.0015 bh$
- Para mallas electrosoldadas, de alambre liso o corrugado no mayor que W31 y D31
 $A_{v \text{ mín}} = 0.0012 bh$

Refuerzo Mínimo Horizontal

- Para varillas menores o igual que No.5 y $f_y \geq 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $A_{h \text{ mín}} = 0.0020 bh$
- Para cualquier otro tipo de varilla
 $A_{h \text{ mín}} = 0.0025 bh$
- Para mallas electrosoldadas, de alambre liso o corrugado no mayor que W31 y D31
 $A_{h \text{ mín}} = 0.0020 bh$

Distancia entre juntas Refuerzo mínimo

7 - 9 m	0.0025 bh
9 - 12 m	0.0030 bh
12 - 15 m	0.0035 bh
15 - 20 m	0.0040 bh

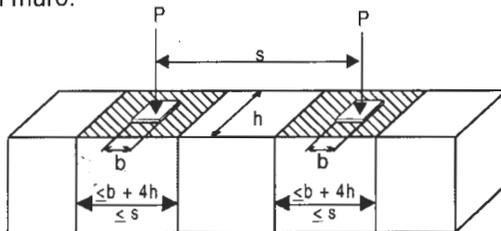


Consideraciones:

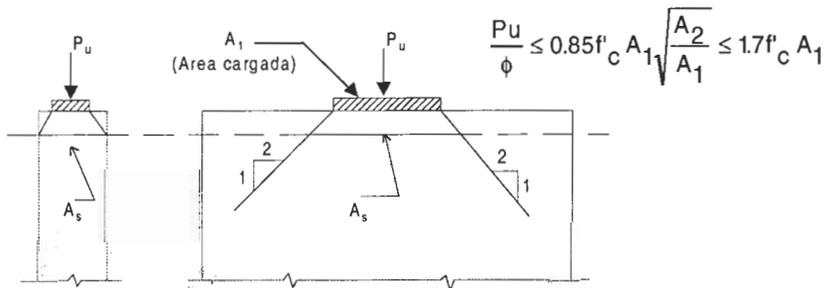
- Espaciamiento del refuerzo horizontal y vertical no será mayor que tres veces el espesor del muro ni mayor que 45 cm.
- El acero vertical no necesita estribos laterales si la cuantía vertical < 0.01 o si este refuerzo no trabaja a compresión.
- Si $h \geq 25$ cm \Rightarrow Refuerzo horizontal y vertical debe distribuirse en dos capas.

Cargas concentradas en Muros

Si una carga concentrada es aplicada, se considera que ésta es resistida sólo por una porción del muro:



Se debe verificar que las cargas concentradas no ocasionen el aplastamiento del concreto debajo de ellas.



Compresión y flexo-compresión en muros de Concreto Armado

Método Empírico

Se emplea si satisface las siguientes condiciones:

1. La sección del muro es rectangular y la excentricidad de la carga axial es menor que un sexto de la dimensión del muro, es decir el muro está sometido integralmente a compresión.
2. El espesor del muro es:

$$h \geq \frac{\text{menor dimensión del muro}}{25} \quad \text{y } h \geq 10\text{cm}$$

Para muros de sótano el espesor mínimo es 20 cm.

Se estima la resistencia a la compresión del muro a través de la siguiente fórmula:

$$\phi P_{nw} = 0.55 \phi'_c A_g \left(1 - \left(\frac{kL_c}{32h} \right)^2 \right)$$

$\phi = 0.70$ (La sollicitación es de flexocompresión)

$L_c =$ Altura libre del muro.

$A_g =$ Area de la sección transversal del muro

$k =$ factor de altura efectiva

Tipo de Muro	Condiciones de Apoyo	k
Muro apoyado arriba y abajo	Si uno de los apoyos tiene el giro restringido	0.8
	Si ambos apoyos tienen el giro restringido	1.0
Muro con apoyos que admite desplazamiento relativo	Si ambos apoyos tienen desplazamiento relativo	2.0

Método General de Diseño

Si la carga axial se ubica fuera del tercio central, parte de su sección central estará sometido a tracción y por lo tanto, se diseñará siguiendo los criterios para columnas sometido a flexocompresión. Será necesario tomar en cuenta el efecto de la esbeltez para el análisis y por lo tanto se emplea el método de amplificación de momentos siempre que:

$$\frac{kL}{r} < 100$$

Según este método, el parámetro EI deberá tomarse según las siguientes expresiones:

$$EI = \frac{E_c I_g}{\beta} \left(0.5 - \frac{e}{h} \right) \quad \begin{array}{l} E_c = \text{Modulo de elasticidad del concreto} \\ I_g = \text{Momento de Inercia de la seccion bruta} \end{array}$$

$$\beta = 0.9 + 0.5 \beta_d^2 - 12\rho$$

$$EI \geq 0.1 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad \beta_d : \text{Para pórticos arriostrados, } \beta_d = \frac{P_{Du}}{P_u}$$

$$EI \leq 0.4 \frac{E_c I_g}{\beta} \quad \beta_d : \text{Para pórticos no arriostrados, } \beta_d = \frac{V_{Du}}{V_u}$$

ρ = cuantía de acero vertical respecto al área bruta de concreto.

e = Excentricidad de la carga axial.

h = Espesor del muro.

Fuerzas cortantes generados por cargas Paralelas a la cara del muro

Resistencia del concreto al corte

Se tomará el menor valor de:

$$V_c = 0.88 \sqrt{f'_c} h d + \frac{N_u d}{4 L_w}$$

$$V_c = \left[0.16 \sqrt{f'_c} + \frac{L_w \left(0.33 \sqrt{f'_c} + 0.2 \frac{N_u}{L_w h} \right)}{\frac{M_u}{V_u} - \frac{L_w}{2}} \right] h d$$

(Unidades en kg y cm)

N_u : Carga axial amplificada en el muro, positiva si es de compresión y negativa si es de tracción.

M_u : Momento flector amplificado en la sección analizada.

V_u : Fuerza cortante amplificada en la sección analizada.

d : Peralte efectivo del muro, se estima como $d = 0.8 L_w$

L_w : Longitud del muro.

El código ACI recomienda que la resistencia del concreto al corte entre el apoyo y la sección ubicada al valor menor entre $l_w/2$, $h_w/2$ deberá considerarse para el cálculo en dicha sección.

En lugar de estas fórmulas se puede usar las siguientes que resultan ser más prácticas.

- Si el muro está en compresión:

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} h d$$

- Si el muro está en tracción.

$$V_c = 0.53 \left(1 + \frac{0.029 N_u}{A_g} \right) \sqrt{f'_c} h d$$

Resistencia nominal máxima del muro

$$V_n \leq 2.7 \sqrt{f'_c} h d$$

Consideraciones:

Si:

$$V_u \leq \frac{\phi V_c}{2}$$

se considerará el refuerzo mínimo considerado anteriormente.

Si:

$$\frac{\phi V_c}{2} < V_u \leq \phi V_c$$

la cuantía mínima del refuerzo horizontal será 0.0025 y el espaciamiento del acero será menor que:

$$\frac{l_w}{5}, 3h, 45 \text{ cm}$$

Diseño Por Corte

Si $V_u > \phi V_c$, el área de acero horizontal se determinará de la siguiente forma:

$$A_{vh} = \frac{(V_u - \phi V_c) s_2}{\phi f_y d}$$

Siendo A_{vh} el área del refuerzo horizontal en una franja del muro de ancho s_2 . La cuantía del refuerzo vertical, ρ_v , respecto a una sección bruta horizontal, deberá cumplir:

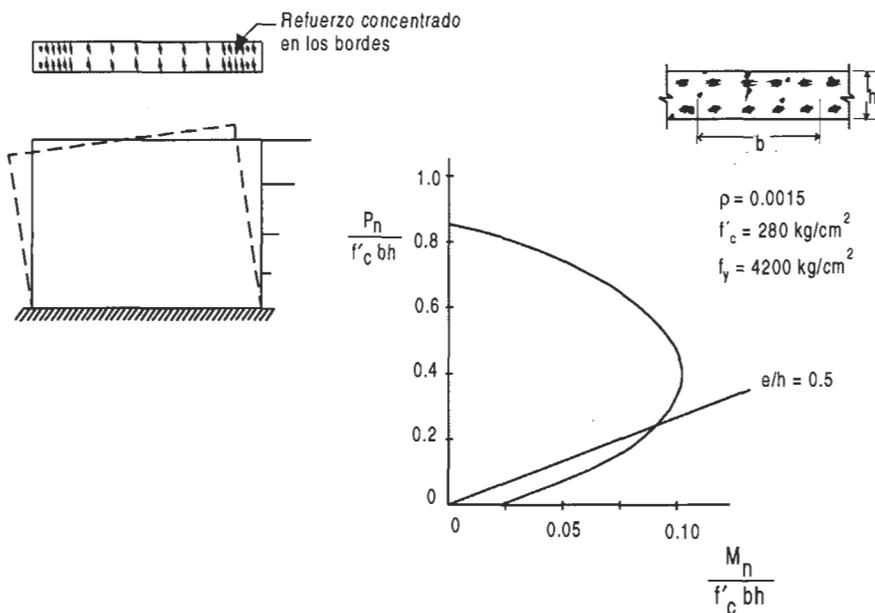
$$\rho_v \geq 0.0025 + 0.5 \left(2.5 - \frac{h_w}{L_w} \right) (\rho_h - 0.0025)$$

ó ≥ 0.0025 , pero no necesita ser mayor que el requerido por refuerzo horizontal, su espaciamiento no excederá

$$\frac{L_w}{3}, 3h, 45 \text{ cm}$$

Diseño por Flexo-compresión

Teniéndose la distribución del acero vertical, se elabora el diagrama de interacción del muro con la cual verificamos que nuestros valores M_u/ϕ y P_u/ϕ se encuentren dentro de la zona del diagrama de interacción. En caso contrario será necesario hacer uso de diagramas hechos para una distribución dada de acero y calcular nuestra área de acero necesaria.



REQUISITOS DEL CODIGO ACI PARA RESITENCIA SIMICA "MUROS ESTRUCTURALES"

Consideraciones de diseño de muros dúctiles (ACI 318-99, Cap. 21)

Muros Esbeltos:

$$\frac{h_w}{L_w} \geq 2$$

- Comportamiento similar a una viga en voladizo.
- Momentos grandes en la base del muro: Formación de rótulas plásticas
- En una longitud apreciable ($0.5 d_w$ a $1.0 d_w$).
- Fuerzas cortantes significativas: Fisuramiento por tracción diagonal.

$$h_{\min} = 1.5L_w \text{ Longitud probable de rótulas plásticas} \Rightarrow V_u = V_{\text{base}}$$

Muros Cortos:

$$\frac{h_w}{L_w} < 2$$

- Cargas verticales relativamente pequeñas.
- Requerimientos menores por flexión (momentos de volteo).
- La fuerza cortante significativa: Fisuramiento por tracción diagonal.

Refuerzos en Muros Estructurales

$$\rho_n \geq 0.0025$$
$$\rho_v \geq 0.0025$$

Si $V_u \geq 0.53 \sqrt{f'_c} A_{cv}$, entonces se pondrán 2 capas de refuerzo o más.

Para muros bajos: $h_w / L_w \leq 2 \Rightarrow \rho_v \geq \rho_h$

Espaciamientos Máximos

- Horizontal: 45 cm
- Vertical: 45 cm

Resistencia al Cortante de Muros Estructurales

$$V_n = A_{cv} (\alpha \sqrt{f'_c} + \rho_n f_y)$$

$$\alpha_c = 0.80 \text{ para } \frac{h_w}{L_w} \leq 1.5$$

$$\alpha_c = 0.53 \text{ para } \frac{h_w}{L_w} \geq 2.0$$

Para valores de h_w / L_w entre 1.5 y 2.0, se interpolará linealmente los valores de α_c .

Elementos de Borde o de Confinamiento en Muros Estructurales

- a) Los muros continuos desde la cimentación hasta el extremo superior que tienen una sección crítica por flexión y carga axial, la zona de compresión será reforzada con elementos de borde especiales:

$$c \geq \frac{L_w}{600(\delta_u / h_w)}$$

$$\delta_u / h_w \geq 0.007$$

donde:

c = profundidad del eje neutro.

δ = desplazamiento de diseño.

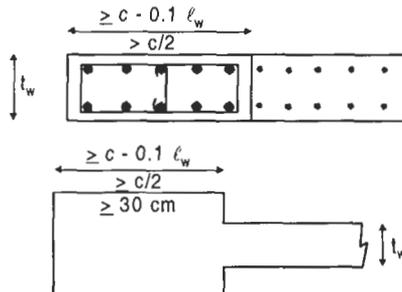
Verticalmente el refuerzo deberá extenderse una distancia: $\geq \frac{L_w}{2}; \geq \frac{M_u}{4V_u}$

- b) Se pondrán elementos de confinamiento especiales, donde el esfuerzo de compresión máxima que ocurre en la fibra extrema es mayor que $0.20 f'_c$.

Se puede discontinuar estos elementos si el esfuerzo de compresión es menor de $0.15 f'_c$.

Estos esfuerzos se determinaran mediante un análisis lineal elástico, usando las propiedades de la sección.

- Deberá confinarse hasta una distancia no menor que el mayor valor de: $c - 0.1 L_w$ ó $c/2$.
- En los bordes con alas está deberá extenderse de la fibra superior en compresión por lo menos 30 cm.

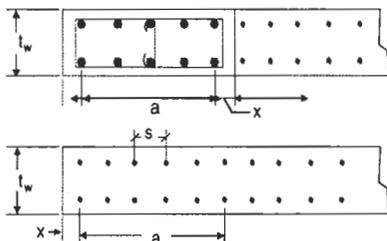


El refuerzo transversal de los elementos de borde deberá satisfacer los requerimientos para columnas especiales; este deberá extenderse por lo menos 30 cm en la base.

- Donde no se requiera elementos de borde deberá satisfacerse lo siguiente:

- a) Si $\rho > \frac{28.2}{f_y}$, se colocará refuerzo transversal especificado para columnas, a un espaciamiento no mayor de 20 cm.
- b) Si $V_u < 0.27 A_{cv} \sqrt{f'_c}$, el refuerzo horizontal deberá terminar en ganchos de 90° o se colocará un estribo en U.

Determinación de la cuantía longitudinal en Elementos de Borde



$$\rho = \frac{n A_b}{t_w (2x + a)}$$

$$\rho = \frac{2 A_b}{t_w s}$$

n = número de varillas

A_b = Area de una varrilla

Aplicación de diseño de un muro estructural

Diseñar el muro estructural que debe ser capaz de resistir en el primer nivel la siguiente combinación de fuerzas de diseño:

$$P_D = 1280 \text{ t}$$

$$V_u = 406 \text{ t}$$

$$P_L = 195 \text{ t}$$

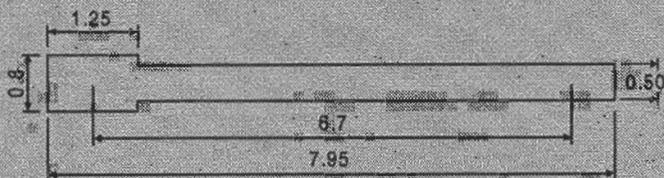
$$h_w = 45 \text{ m}$$

$$L_w = 7.95 \text{ m}$$

M_B = Momento en la base debido al sismo = 4778 t·m

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



Del análisis y diseño estructural de las columnas considerando la dirección transversal se obtiene dimensiones de 1.25m * 0.80m y refuerzo longitudinal de 30 ϕ No.11.

Verificación de necesidad de elementos de confinamiento

Debe disponerse necesariamente de elementos de confinamiento si el esfuerzo máximo de compresión en la fibra extrema es mayor de $0.2 f_c$.

$$A_g = 795 \times 50 + (125 \times 30) \cdot 2 = 47250 \text{ cm}^2$$

$$I = \left\{ \frac{80 \cdot 125^3}{12} + 80 \cdot 125(335)^2 \right\} \cdot 2 + 50 \cdot \frac{545^3}{12} = 2,945'035,937.5 \text{ cm}^4$$

$$f_c' = \frac{P_u}{A_g} + \frac{M_u \cdot \frac{L_w}{2}}{L_g} = \frac{2065 \cdot 10^3}{47250} + \frac{6689.2 \cdot 10^5 \cdot 795 / 2}{2945'035,937.5} = 133.99 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c' = 133.9 \text{ kg/cm}^2 > 0.2 f_c = 0.2 \cdot 280 = 56 \text{ kg/cm}^2$$

\therefore necesita elementos de confinamiento.

Determinación de los refuerzos del muro y columna de confinamiento

a) Muro

1. Determinación de los requerimientos de refuerzo mínimo longitudinal y transversal en el muro:

a. Verificar si se requiere refuerzo en dos capas.

Se necesita refuerzo en dos capas si:

- la fuerza cortante factorada en el muro excede

$$V_u > 0.53 \sqrt{f_c'} A_{cv} \text{ ó}$$

- si: $h \geq 25 \text{ cm}$

$$V_u = 406 \text{ t} > 0.53 \sqrt{f_c'} A_{cv} = 0.53 \sqrt{280} (10)(0.5)(7.95) = 352.53 \text{ t}$$

$$h = 50 \text{ cm} > 25 \text{ cm}$$

\therefore necesita refuerzo en dos capas.

b. Refuerzo longitudinal y transversal requerido en el muro.

Requerimiento mínimo de cuantía.

$$\rho_v = \frac{A_{sv}}{A_{cv}} = \rho_n \geq 0.0025$$

Espaciamiento Máximo = 45 cm ó 3h (el menor)

$$A_{cv}/m = (100)(50) = 5000 \text{ cm}^2/m$$

El área de acero en cada dirección por cada metro de muro

$$\rho \times A_{cv} = 0.0025 \times 5000 = 12.5 \text{ cm}^2/m$$

$$\text{Usando } \phi 5/8" \Rightarrow A_s = 2 \times 1.98 = 3.96 \text{ cm}^2$$

$$"s" \text{ requerido} = \frac{A_s}{A_{s/m}} = \frac{3.96 \text{ cm}^2}{12.5 \text{ cm}^2 / m} = 0.32 \text{ m} < 0.45 \text{ CONFORME}$$

Considerar $\phi 5/8" @ 0.32$ en 2 capas para el Ref. vertical.

2) Determinar requerimiento de refuerzo por cortante

$$V_n = A_{cv}(\alpha_c \sqrt{f'_c} + \rho_n f_y)$$

$$\alpha_c = 0.80 \text{ para } \frac{h_w}{L_w} \leq 1.5$$

$$\alpha_c = 0.53 \text{ para } \frac{h_w}{L_w} \geq 2.0$$

Se tiene $\frac{h_w}{L_w} = \frac{45 \text{ m}}{7.95 \text{ m}} = 5.66 > 2 \therefore \alpha_c = 0.53$

$$A_{cv} = 50 \times 795 = 39750 \text{ cm}^2$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} A_{cv} = 0.53 \sqrt{280} (10)(0.50 \times 7.95) = 352.53 \text{ t}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{4.06}{0.6} \times 352.53 = 324.14 \text{ t}$$

El valor de ϕ para el cortante es de 0.85. Sin embargo deberá usarse $\phi = 0.6$ si la resistencia al cortante nominal V_n es menor que el cortante correspondiente al desarrollo de la resistencia a flexión nominal. En forma conservadora se tomará $\phi = 0.6$.

$$s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{V_s} = \frac{3.96 \times 4.2 \times 636}{324.14} = 32.63 \text{ cm}$$

pero:

$$s = 32.63 \leq 45 \text{ cm}$$

$$s = 32.63 \leq 3h = 150 \text{ cm}$$

$$s = 32.63 \leq 32 \text{ cm (cuantía mínima)}$$

Usar $s = 32 \text{ cm}$

$$\phi 5/8" \text{ en 2 capas: } A_v = 2 \times 1.98 = 3.96 \text{ cm}^2$$

$$d = 0.8 L_w = 0.8 \times 795 = 636 \text{ cm}$$

Usar $\phi 5/8"$ en dos capas @ 0.32m. para el Ref. Horizontal

b) Columna de confinamiento

1. Verificar si los elementos de confinamiento actuando como columna corta toman las cargas verticales debido a cargas de gravedad y de sismo.

Fuerza axial máxima sobre el elemento de confinamiento:

$$P_{u\max} = \frac{P_u(\text{muro})}{2} + \frac{M_u}{L'_w}$$

$$P_{u(\text{muro})} = 1.4 (P_D + P_L + P_E)$$

$$P_{u(\text{muro})} = 1.4 (1280 + 195 + 0) = 2065 \text{ t}$$

Momento factorado en la base $M_u = 1.4 M_{\text{BASE}}$

$$M_u = 1.4 \cdot 4778 = 6689 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$P_{u\max} = \frac{2065}{2} + \frac{6689.2}{6.70} = 2030.89 \text{ t}$$

Sobre el elemento de confinamiento:

$$P_u = 2030.89 \text{ t}$$

$$b \cdot h = 80 \cdot 125 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = 30 \phi \text{ No. 11} = 30 \cdot 9.58 = 287.4 \text{ cm}^2$$

$$\rho_t = \frac{A_{st}}{b \cdot h} = 0.029 > \rho_{\min} = 0.01$$

$$< \rho_{\max} = 0.06$$

$$P_{n\max} = 0.80 (0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} \cdot f_y)$$

Columnas estribadas

$$P_{u\max} = \phi P_{n\max} = 0.70 P_{n\max}$$

$$P_{u\max} = 0.7(0.80) [0.85 \cdot 280(80 \cdot 125 - 287.4) + 287.4 \cdot 4.2] = 1970.46 \text{ t}$$

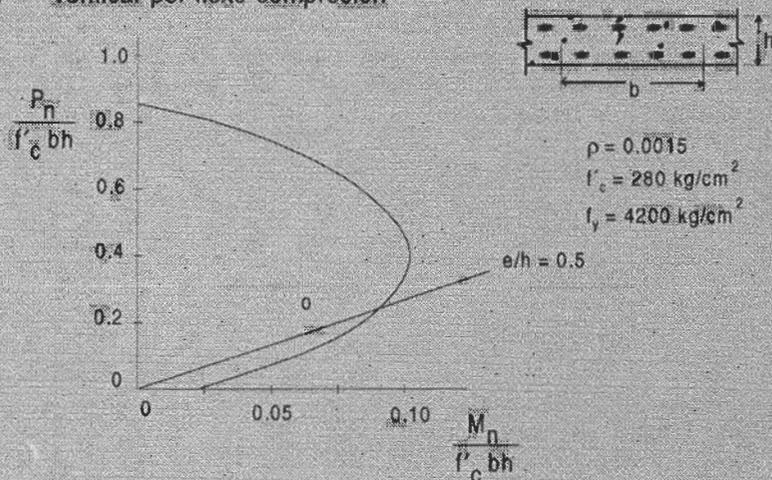
$$P_{u\max} < P_u \quad \therefore \text{NO ES CONFORME}$$

Usar 34 ϕ No. 11 $\rightarrow A_{st} = 34 \cdot 9.58 = 325.72 \text{ cm}^2$

$$P_{u\max} = 0.70 \cdot 0.8 [0.85 \cdot 0.28 (80 \cdot 125 - 325.72) + 325.72 \cdot 4.2]$$

$$P_{u\max} = 2055.48 \text{ t} > P_u = 2030.89 \text{ t} \quad \therefore \text{CONFORME}$$

2. Verificar por flexo-compresión



3. Determinar los requerimientos de refuerzo transversal por confinamiento

$$s \approx \frac{t_{\text{menor}}}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ cm}$$

s, en la dirección de la longitud menor

$$A_{sh} \geq \begin{cases} 0.3 s h_c \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \\ 0.09 s h_c \frac{f'_c}{f_y} \end{cases}$$

Considerando estribos de $\phi 1/2" @ 0.10 \text{ cm}$

$$h_c = 125 - (2 \cdot 4 + 1.27) = 115.73 \text{ cm}$$

$$A_{sh} \geq \begin{cases} 0.3 \cdot 10 \cdot 115.73 \left(\frac{80 \cdot 125}{8424} - 1 \right) \frac{280}{4200} = 4.33 \text{ cm}^2 \\ 0.09 \cdot 10 \cdot 115.73 \cdot \frac{280}{4200} = 6.94 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Usando $6 \phi 1/2" \rightarrow 6 \cdot 1.27 = 7.62 \text{ cm}^2 > 6.94 \text{ cm}^2$ CONFIRMAR

En la dirección de longitud mayor:

$$h_c = 80 - (2 \cdot 4 + 1.27) = 70.73 \text{ cm}$$

$$A_{sh} \geq \begin{cases} 0.3 \cdot 10 \cdot 70.73 \left(\frac{80 \cdot 125}{8424} - 1 \right) \frac{280}{4200} = 2.65 \text{ cm}^2 \\ 0.09 \cdot 10 \cdot 70.73 \cdot \frac{280}{4200} = 4.24 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$\text{Usando } 4 \phi 1/2'' \rightarrow A_{sh} = 4 \cdot 1.27 = 5.08 \text{ cm}^2$$

