SESIÓN 04 :

4.6 Esfuerzo térmico

Un cambio en la temperatura puede causar que un cuerpo cambie sus dimensiones. Por lo general, si la temperatura aumenta, el cuerpo se expande, mientras que si la temperatura disminuye, éste se contraerá. De manera ordinaria, esta expansión o contracción se relaciona *linealmente* con el aumento o disminución que se produce en la temperatura. Si este es el caso, y el material es homogéneo e isotrópico, se ha comprobado experimentalmente que el desplazamiento de un elemento con una longitud L puede calcularse mediante la fórmula

$$\boxed{\delta_T = \alpha \, \Delta T L} \qquad (4\text{-}4)$$

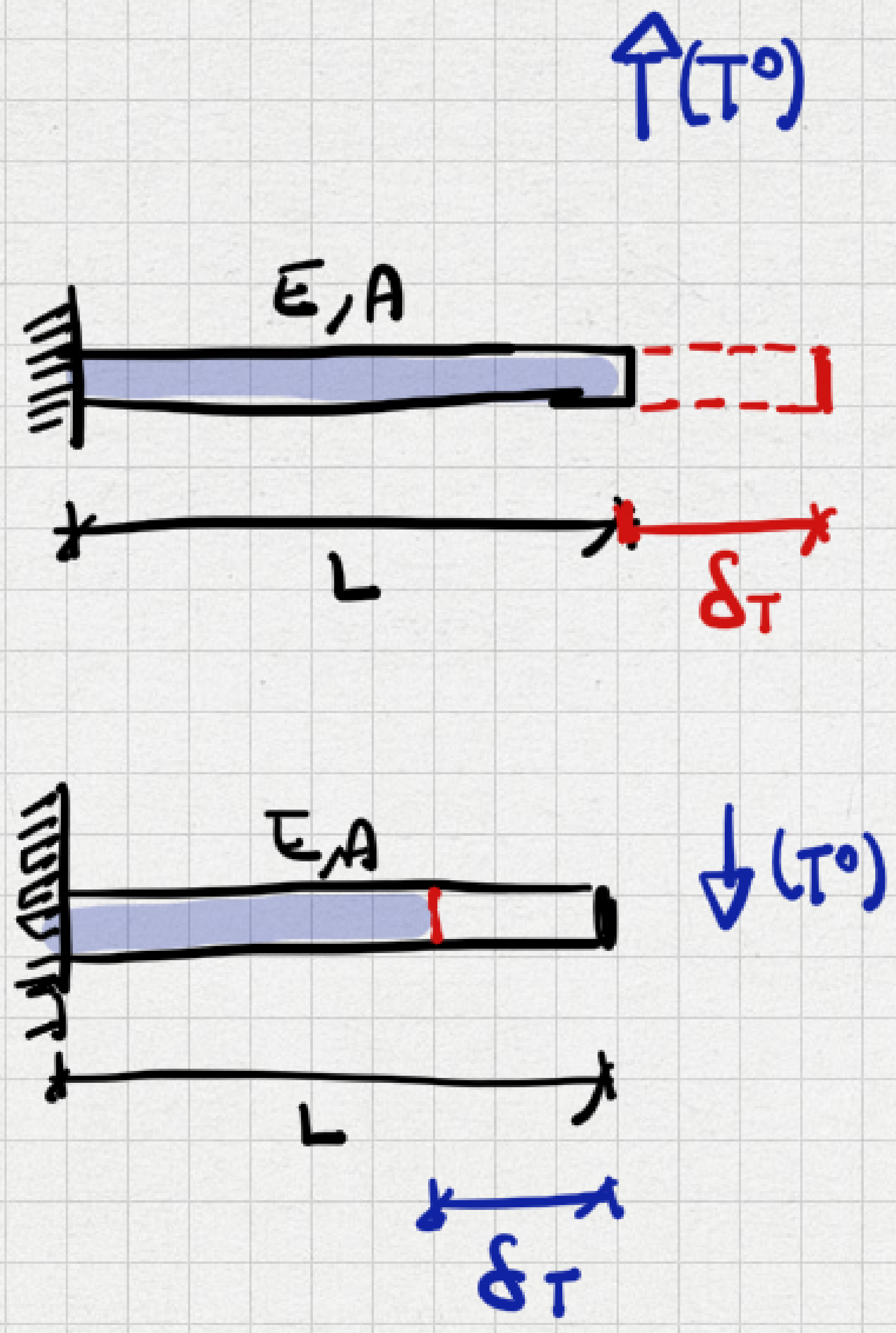
donde

$\alpha =$ una propiedad del material, conocida como ***coeficiente lineal de expansión térmica***. Las unidades miden la deformación por cada grado de temperatura. Son: $1/°F$ (Fahrenheit) en el sistema FPS, y $1/°C$ (grados Celsius) o $1/°K$ (grados Kelvin) en el sistema SI. Los valores típicos se proporcionan en la página final de este libro (al reverso de la contraportada).

$\Delta T =$ el cambio algebraico en la temperatura del elemento

$L =$ la longitud original del elemento

$\delta_T =$ el cambio algebraico en la longitud del elemento

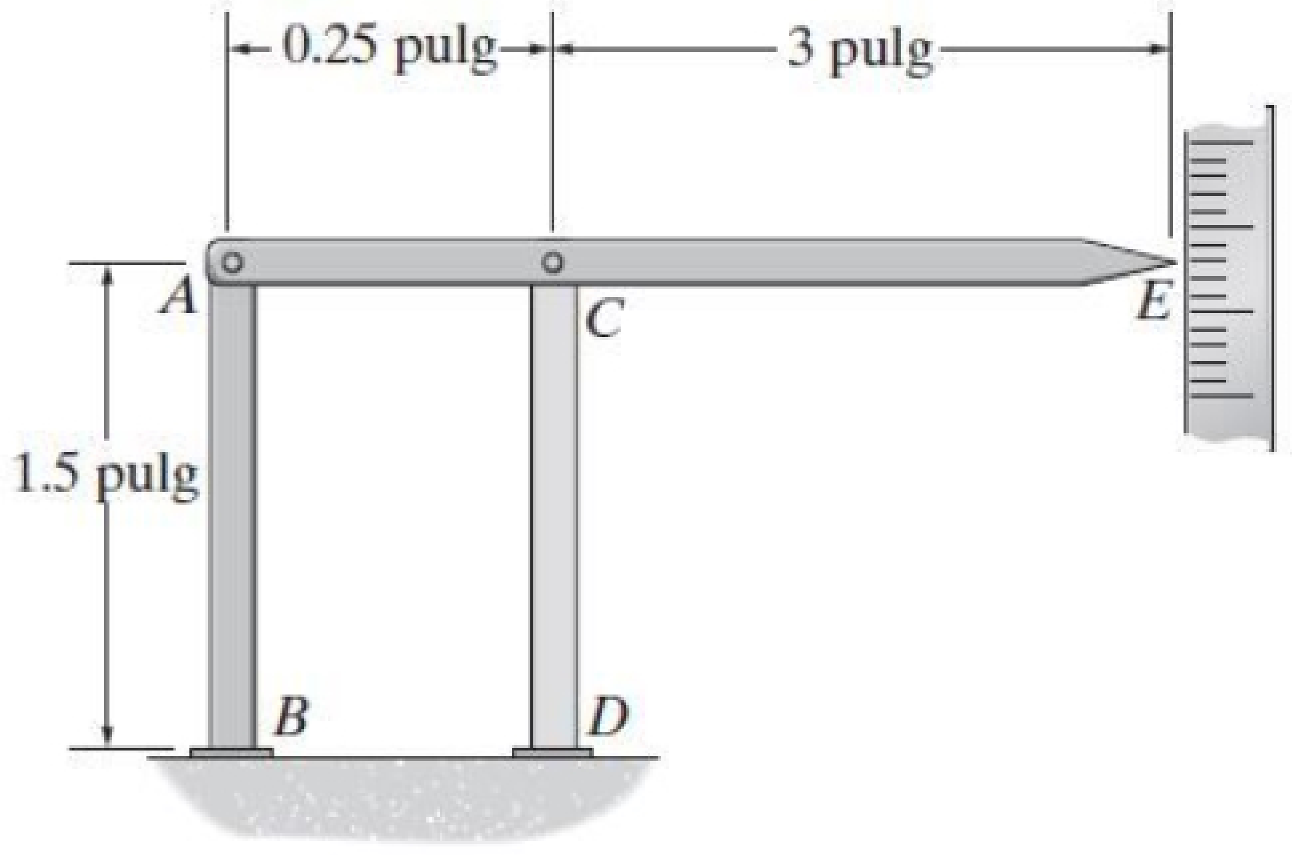


$$\boxed{\delta_T = \alpha(\Delta T)L}$$

UDH CONECTA

Ejemplo:

*4-76. El dispositivo se utiliza para medir un cambio en la temperatura. Las barras AB y CD están fabricadas de acero A-36 y de una aleación de aluminio 2014-T6, respectivamente. Cuando la temperatura es de 75°F, ACE está en posición horizontal. Determine el desplazamiento vertical del puntero en E cuando la temperatura se eleva a 150°F.



Prob. 4-76

Elemento AB: (Acero A36)

$\alpha_{AB} = 6.6\times10^{-6}\ 1/F°$

$L_{AB} = 1.5$ pulg

$T_0 = 75°F$

$T_f = 150°F$

$(T_f - T_0)$

$\delta_{AB} = \alpha_{AB}(\Delta T)L_{AB}$

$\delta_{AB} = (6.6\times10^{-6})(150° - 75°)(1.5\text{ pulg})$

$\delta_{AB} = 7.425\times10^{-4}$ pulg → alargamiento

Elemento CD: (Aluminio 2014-T6)

$\alpha_{CD} = 12.8\times10^{-6}\ 1/F°$

$L_{CD} = 1.5$ pulg

$T_0 = 75°F$

$T_f = 150°F$

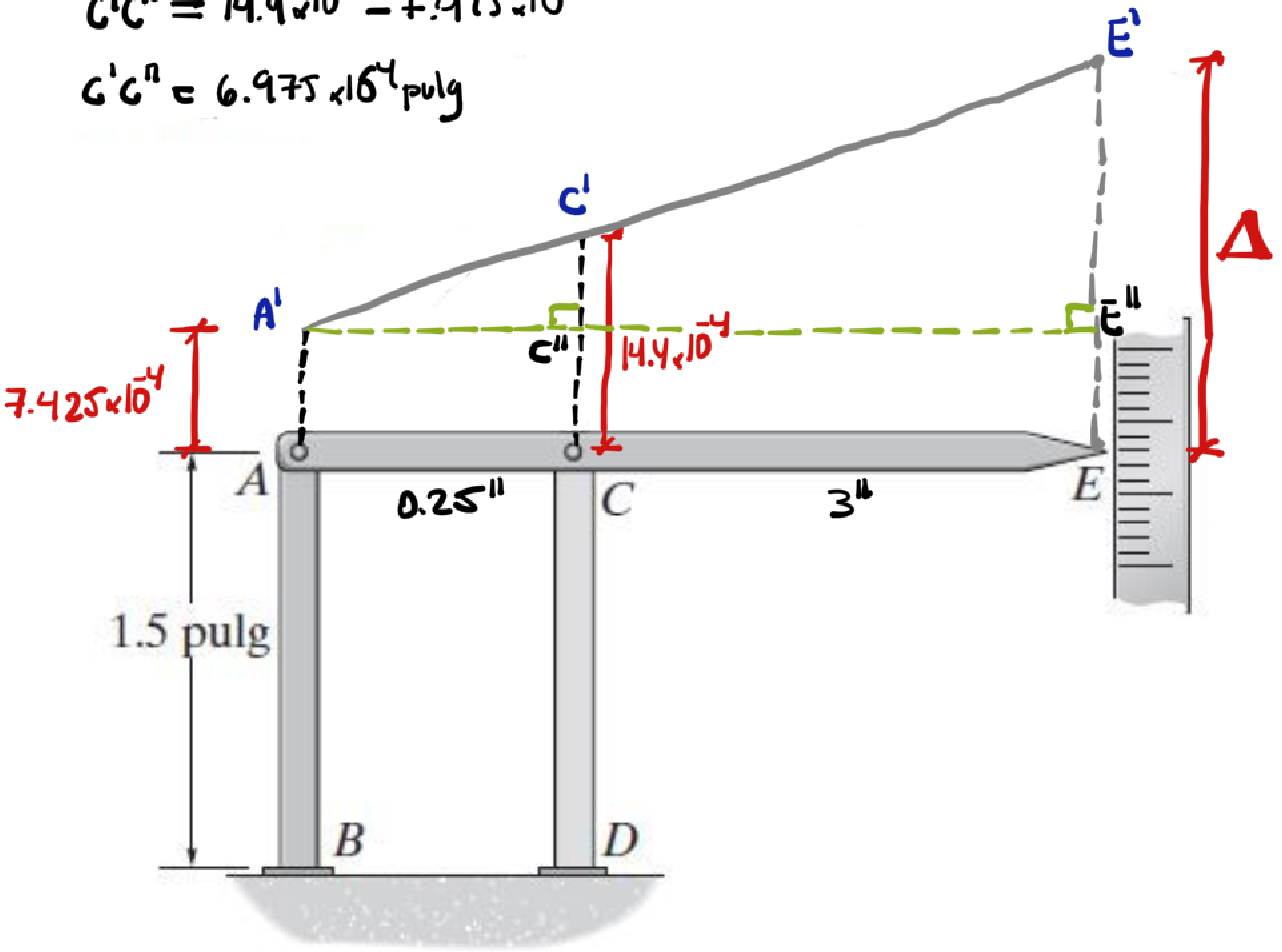
$\delta_{CD} = \alpha_{CD}(\Delta T)L_{CD}$

$\delta_{CD} = (12.8\times10^{-6})(150° - 75°)(1.5\text{ pulg})$

$\delta_{CD} = 14.4\times10^{-4}$ pulg → alargamiento tempe... a. Las barras AB y CD están fabricadas de acero

$C'C'' = 14.4\times10^{-4} - 7.425\times10^{-4}$

$C'C'' = 6.975\times10^{-4}$ pulg



Prob. 4-76

$$\frac{E'E''}{3.25} = \frac{C'C''}{0.25}$$

$\rightarrow E'E'' = 90.675\times10^{-4}$ pulg

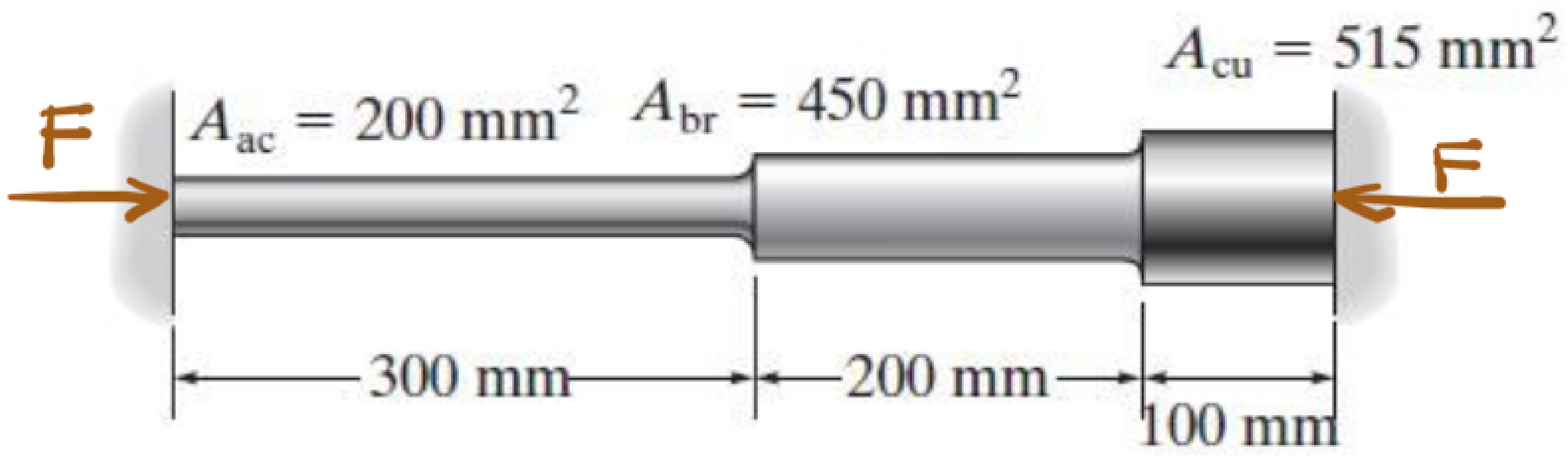
$$\Delta = EE'' + E'E'' = 7.425\times10^{-4} + 90.675\times10^{-4}$$

$$\Delta = 98.1\times10^{-4} \text{ pulg}$$

Ejemplo :

•4-69. Tres barras, cada una fabricada con diferentes materiales, están conectadas entre sí y ubicadas entre dos paredes cuando la temperatura es $T_1 = 12°C$. Determine la fuerza ejercida sobre los soportes (rígidos) cuando la temperatura es $T_2 = 18°C$. Las propiedades del material y el área de la sección transversal de cada barra se muestran en la figura.

Acero	Latón	Cobre
$E_{ac} = 200$ GPa	$E_{br} = 100$ GPa	$E_{cu} = 120$ GPa
$\alpha_{ac} = 12(10^{-6})/°C$	$\alpha_{br} = 21(10^{-6})/°C$	$\alpha_{cu} = 17(10^{-6})/°C$



Prob. 4-69

* Consistencia de unidades:

$$GPa = 1000N/mm^2 = 1KN/mm^2$$

$$E_{ac} = 200\,GPa = 200\,KN/mm^2$$

$$E_{br} = 100\,GPa = 100\,KN/mm^2$$

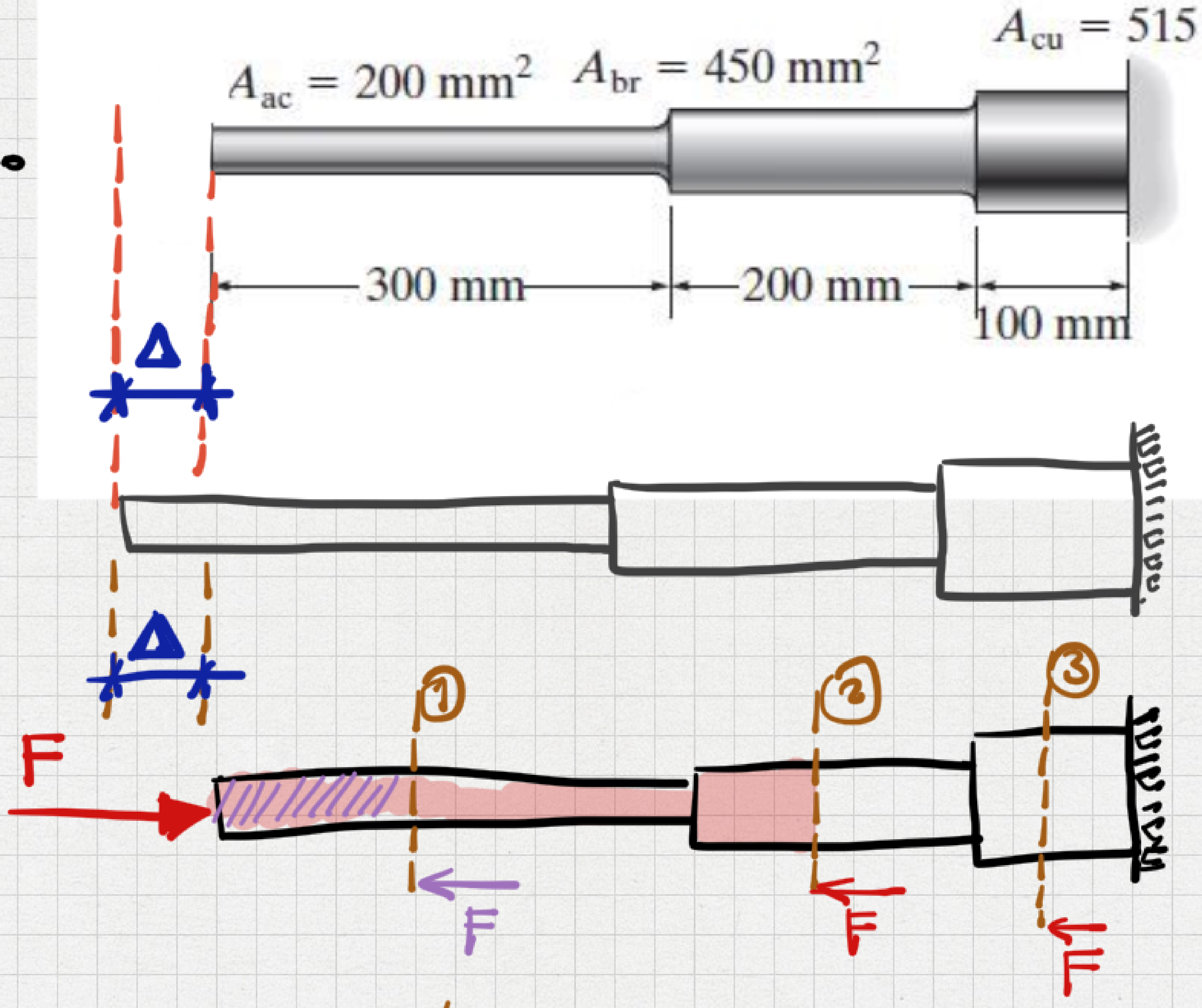
$$E_{cu} = 120\,GPa = 120\,KN/mm^2$$

Acero	Latón	Cobre
$E_{ac} = 200$ GPa	$E_{br} = 100$ GPa	$E_{cu} = 120$ GPa
$\alpha_{ac} = 12(10^{-6})/°C$	$\alpha_{br} = 21(10^{-6})/°C$	$\alpha_{cu} = 17(10^{-6})/°C$

$T_o = 12°C$

$T_f = 18°C$

$T_f - T_o = 6°C = \Delta T°$



Fórmula deformación

$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

Finalmente:

$$F = 4.202\ KN$$

Deformación total por ($\Delta T°$)

$$\Delta = \Delta_{ac} + \Delta_{br} + \Delta_{cu}$$

$$\Delta = (12\times10^{-6})(6)(300mm) + (21\times10^{-6})(6)(200mm) + (17\times10^{-6})(6)(100mm)$$

$$\Delta = 0.057mm$$

Deformación total por la fuerza (F)

$$\Delta = \Delta_{ac} + \Delta_{br} + \Delta_{cu}$$

$$\Delta = \frac{(F)(300)}{(200)(200)} + \frac{(F)(200)}{(100)(450)} + \frac{(F)(100)}{(120)(515)} = 0.057\ mm$$

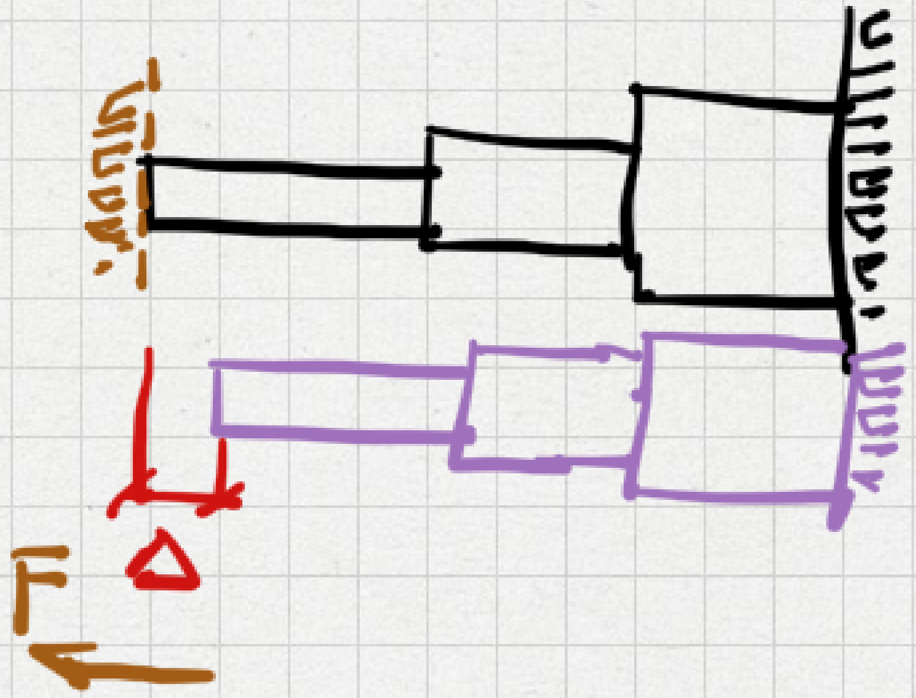
Ejemplo: $T_1 = 12°C$, $T_2 = 8°C$

$$T_f - T_0 = 8° - 12° = -4°$$

$$\Delta = \alpha \Delta T L \rightarrow \text{cada elemento}$$

$$\Delta = (12\times10^{-6})(-4°)(300\,mm) + (21\times10^{-6})(-4°)(200\,mm) + (17\times10^{-6})(-4°)(100\,mm) = -0.038\,mm$$

Para la fuerza F:



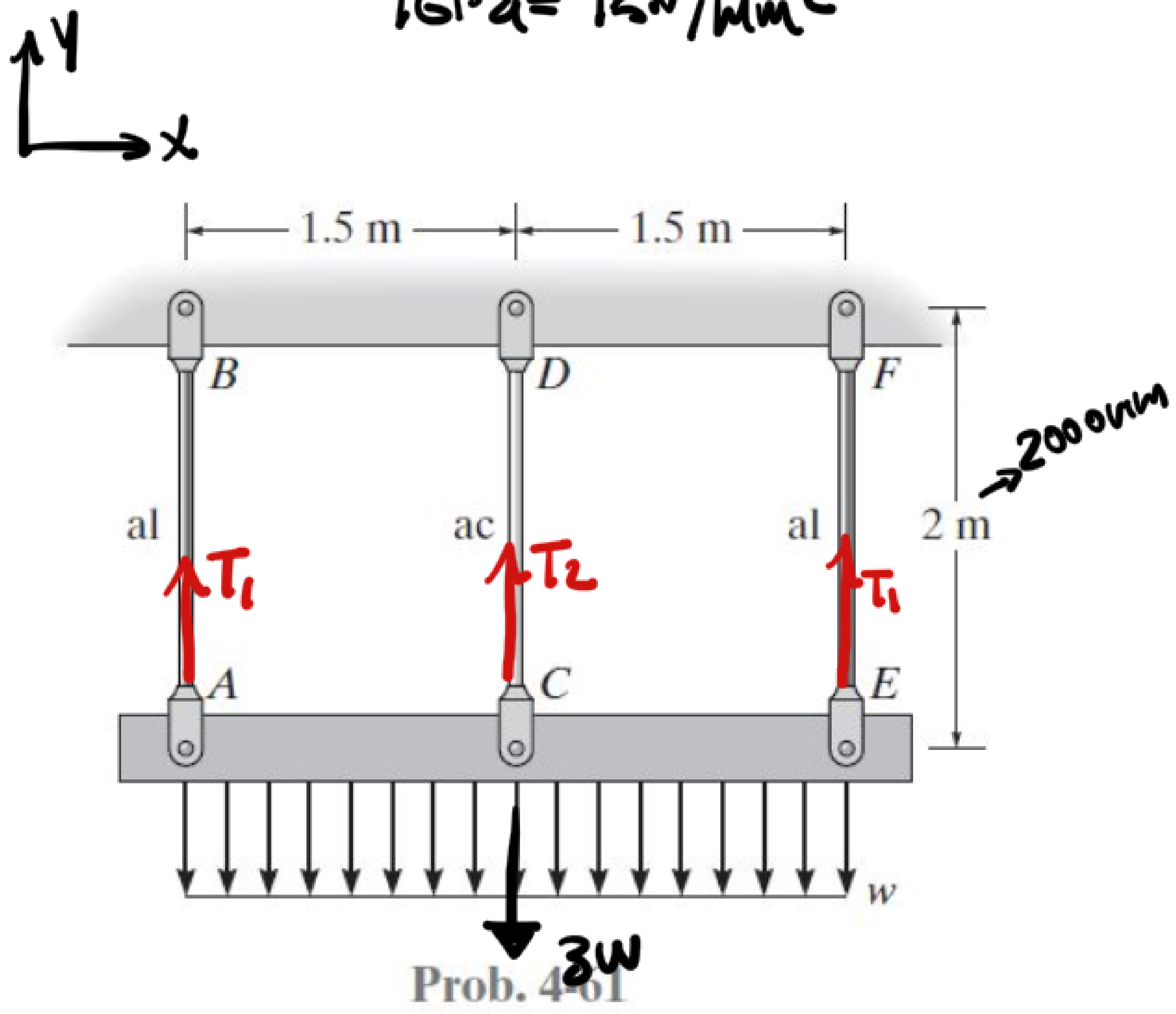
$$\Delta = \frac{(F)(300)}{(200)(200)} + \frac{(F)(200)}{(100)(450)} + \frac{(F)(100)}{(120)(515)} = 0.038\,mm$$

$$\therefore F = 2.802\,kN$$

•4-61. La carga distribuida está sostenida por las tres barras de suspensión. *AB* y *EF* son de aluminio y *CD* es de acero. Si cada barra tiene un área en su sección transversal de 450 mm², determine la intensidad máxima *w* de la carga distribuida de tal forma que no se exceda un esfuerzo permisible de $(\sigma_{perm})_{ac} = 180$ MPa en el acero y $(\sigma_{perm})_{al} = 94$ MPa en el aluminio. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa. Suponga que *ACE* es rígida.

$1\,MPa = 10^{-3}\,kN/mm^2$

$1\,GPa = 1\,kN/mm^2$



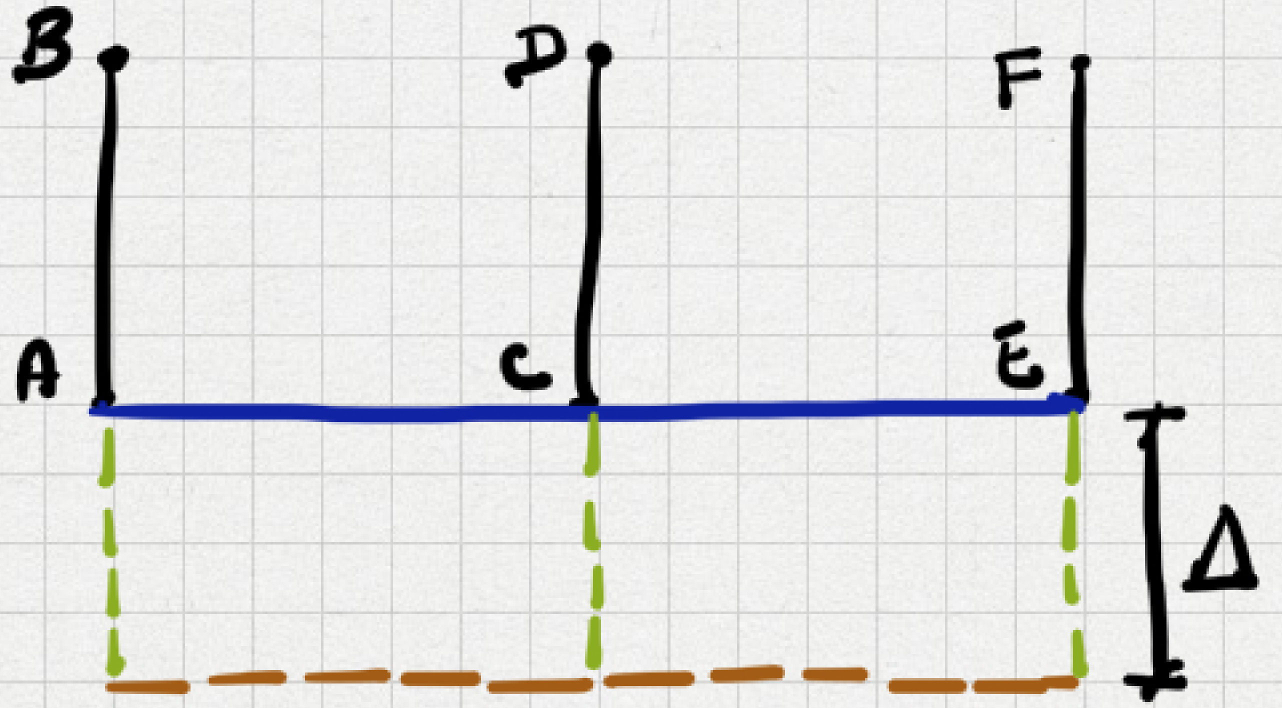
Prob. 4-61

* POR ESTÁTICA:

$$\Sigma F_y = 0; \quad 2T_1 + T_2 = 3W$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad (T_1)(3m) + (T_2)(1.5m) = (W)(3m)(1.5)$$

$$2T_1 + T_2 = 3W$$



Aluminio: $\Delta = \dfrac{(T_1)(2000)}{(70)(450)} = \dfrac{4T_1}{63}$

Acero: $\Delta = \dfrac{(T_2)(2000)}{(200)(450)} = \dfrac{T_2}{45}$

$$\frac{4T_1}{63} = \frac{T_2}{45}$$

$$T_1 = \frac{7}{20}T_2$$

$$T_1 = \frac{21W}{34}$$

$$T_2 = \frac{30W}{17}$$

Esfuerzo permisible acero:

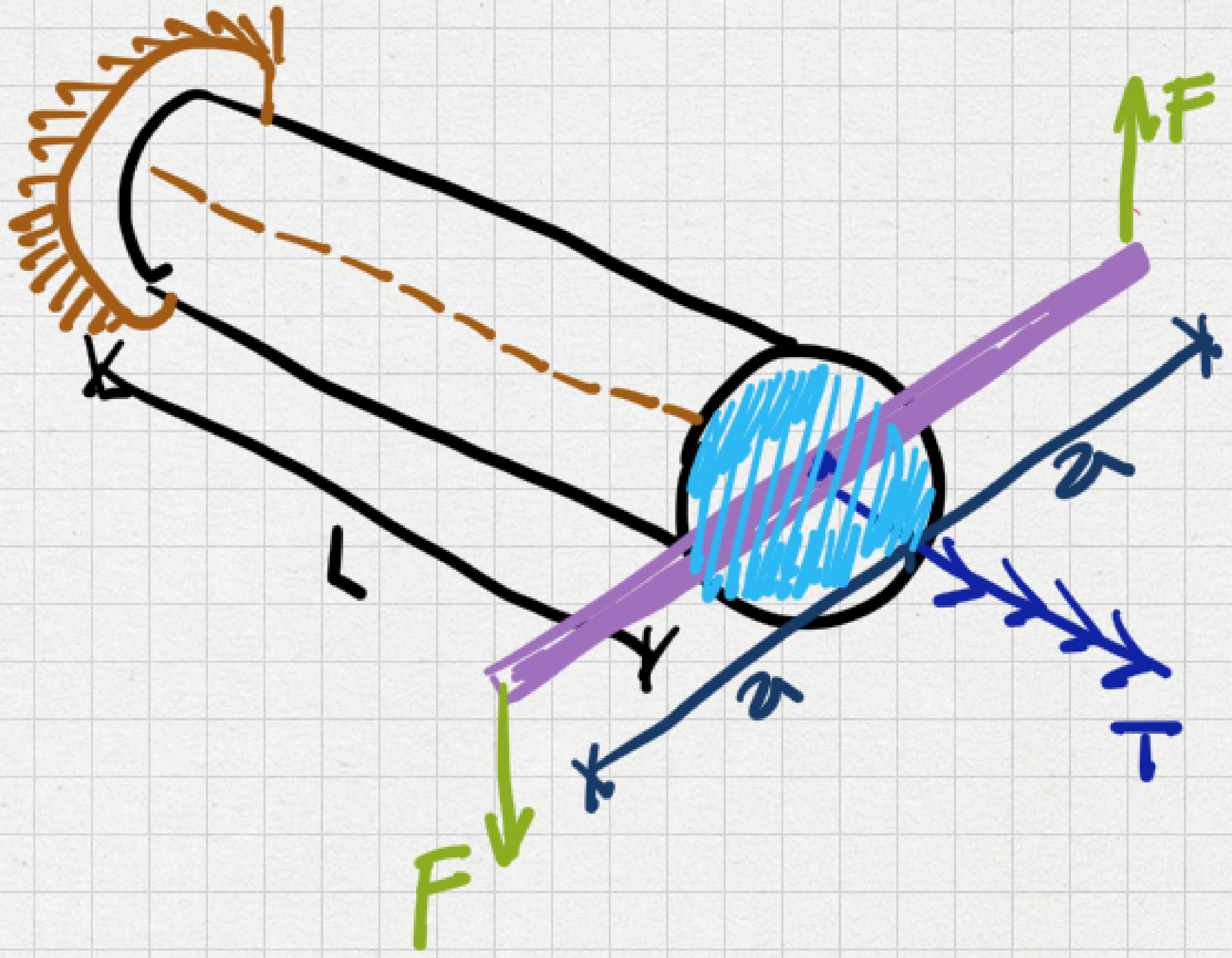
$$\sigma_{ac} = 180\ MPa \rightarrow 180 \times 10^{-3}\ kN/mm^2 = \frac{T_2}{450} = \frac{30W/17}{450} \rightarrow W = 45.9\ kN/m$$

Esfuerzo permisible al:

$$\sigma_{al} = 94\ MPa = 94 \times 10^{-3}\ kN/mm^2 = \frac{T_1}{450} = \frac{21W/34}{450} \rightarrow W = 68.48\ kN/m$$

$$\boxed{W_{max} = 45.9\ kN/m}$$

Deformaciones por torsión

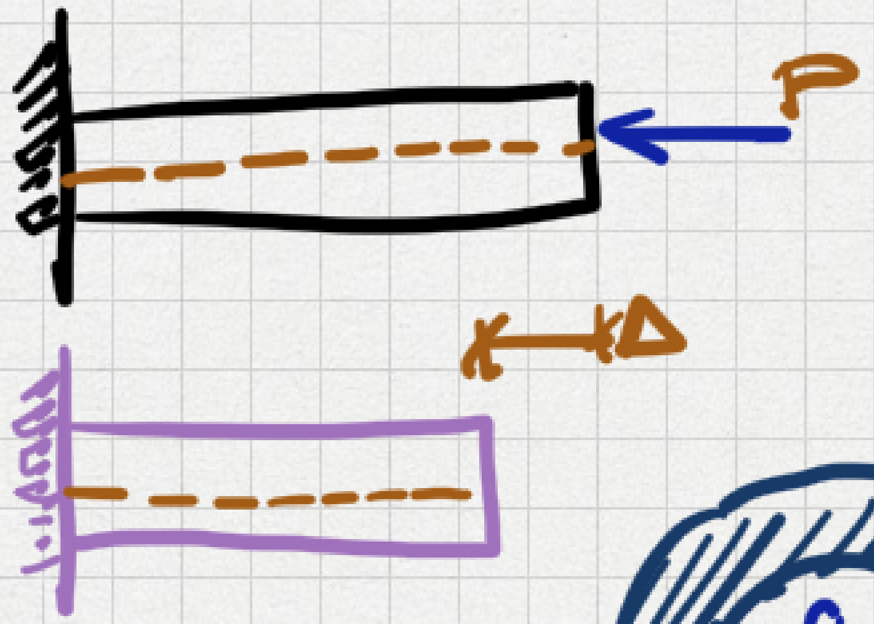


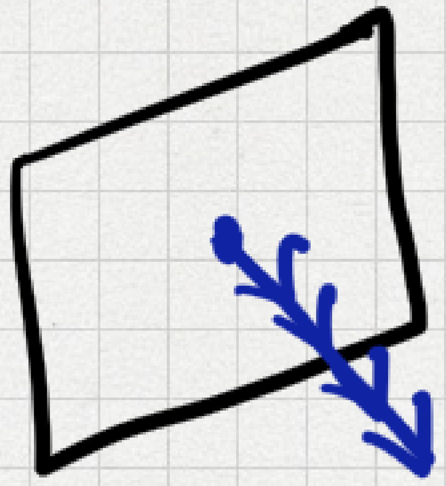
Momento Torsor

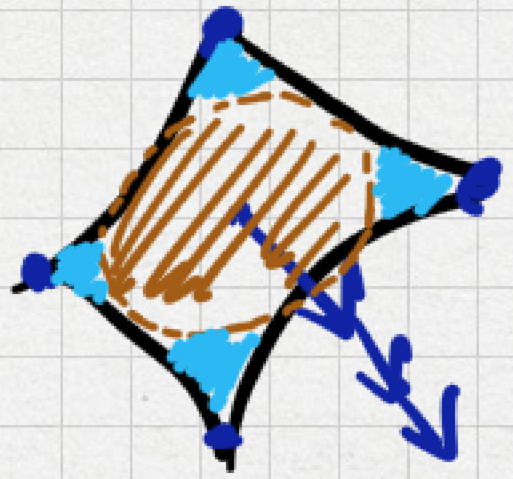
$$T = Fa + Fa = 2Fa$$

F → Deformación por longitud.

M, T → Deformación por rotación.





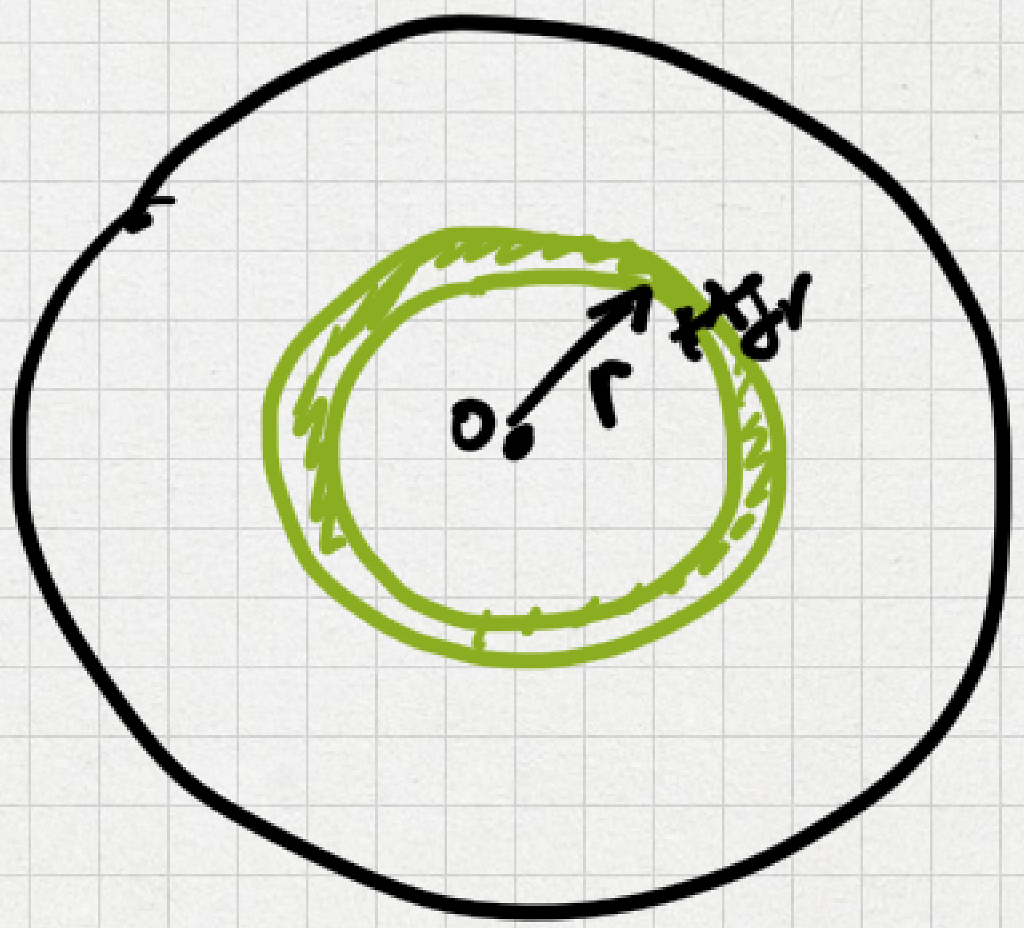


Momento polar de inercia

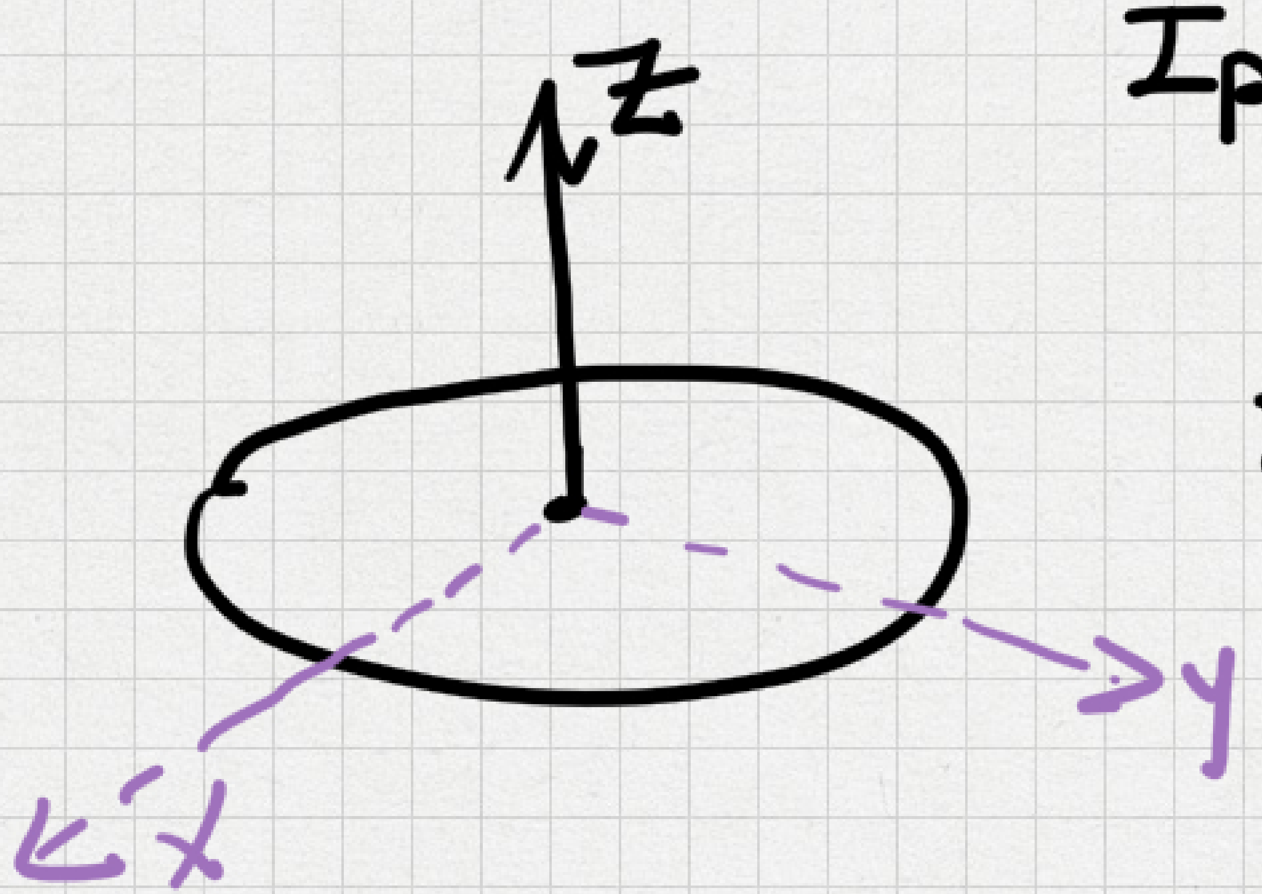
Coordenadas polares: $I_p = \int_A \rho^2 dA$

PLANO

$R = \frac{D}{2}$



$dA = 2\pi r dr$



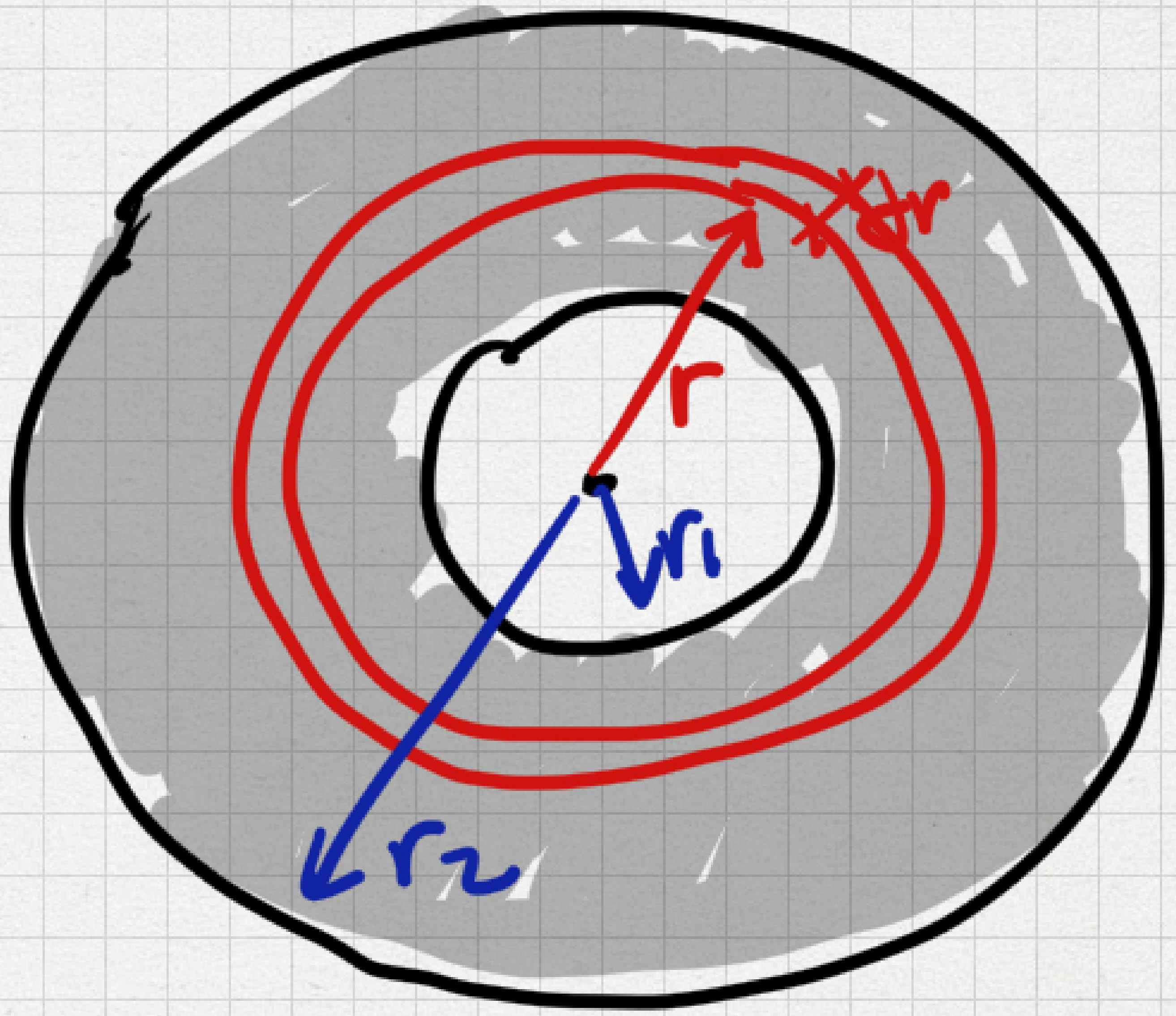
$I_p = \int r^2 dA = \int r^2 (2\pi r) dr$

$I_p = 2\pi \int r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R$

$I_p = \frac{2\pi}{4} \cdot R^4 = \frac{\pi R^4}{2}$

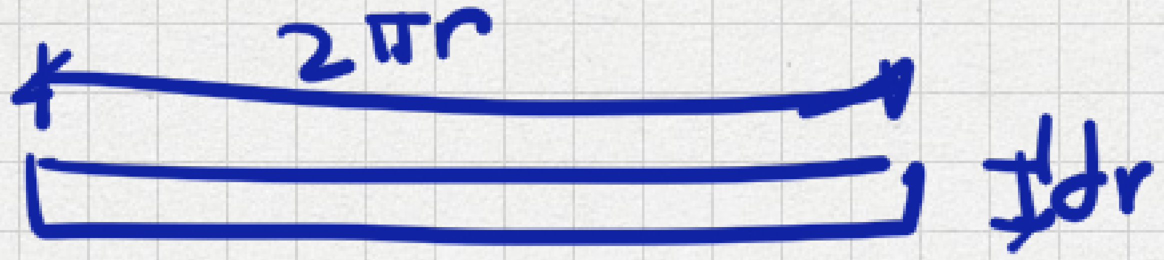
$I_p = \frac{\pi}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^4$

$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$



$$I_p = \int r^2 dA$$

$$dA = 2\pi r\,dr$$

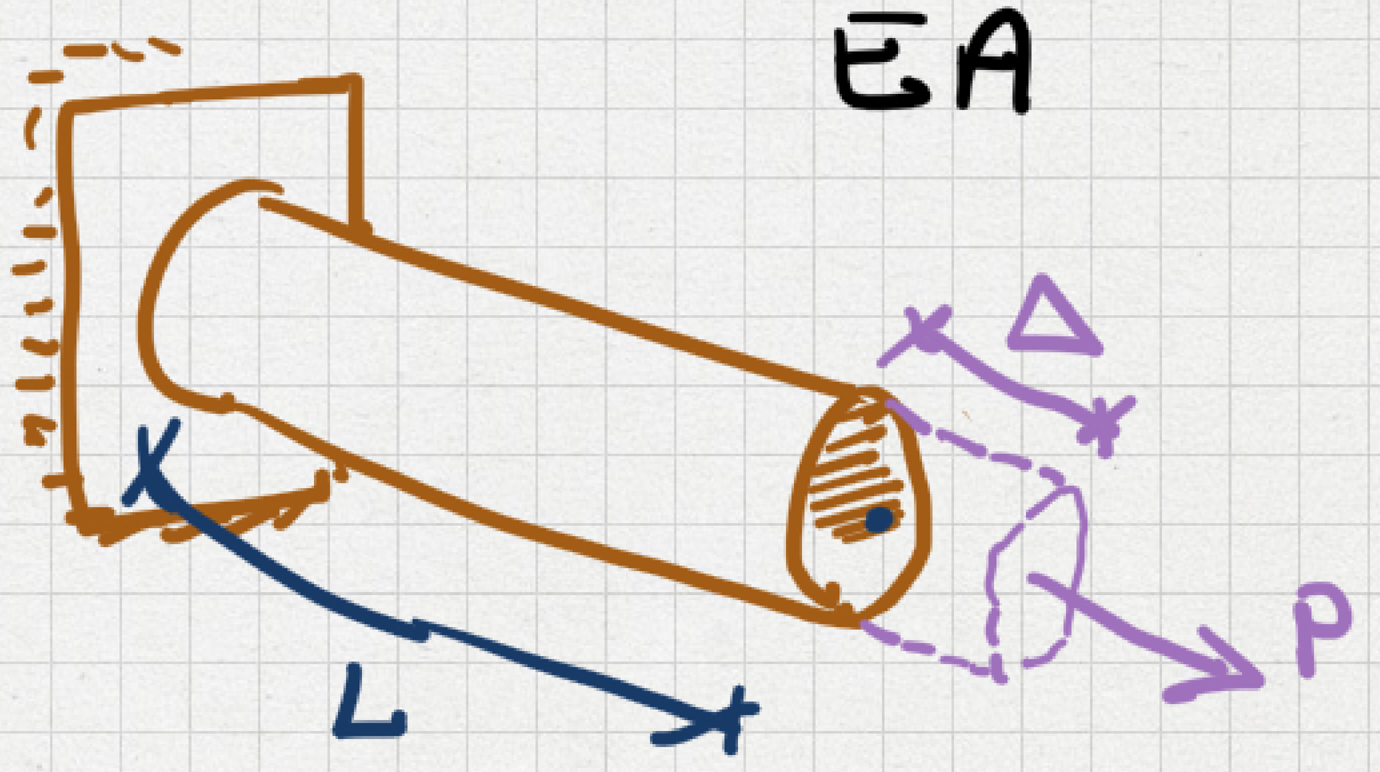


$$I_p = \int r^2 (2\pi r\,dr) = 2\pi \int r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$\boxed{I_p = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right)}$$

DEFORMACIÓN AXIAL

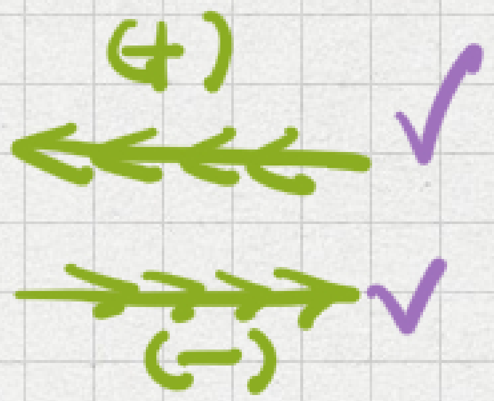
$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

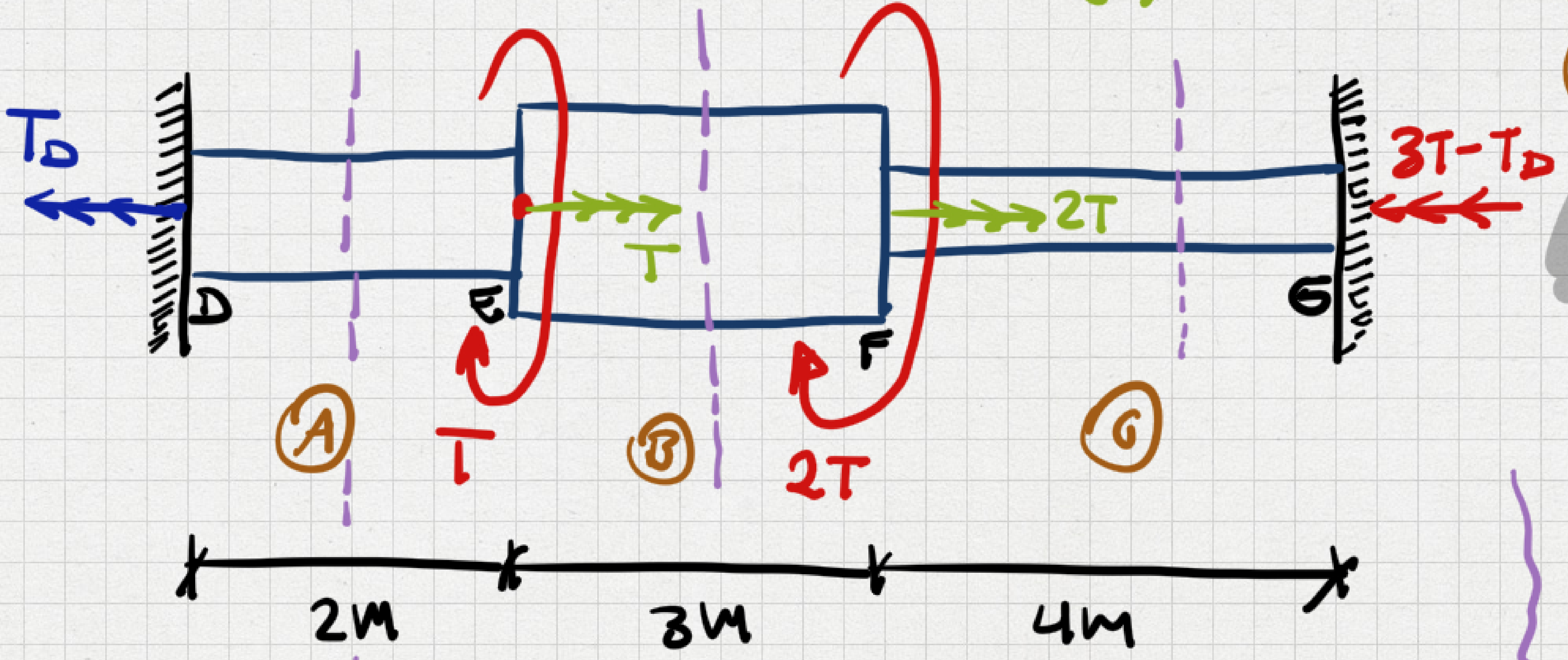


DEFORMACIÓN POR TORSIÓN

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

Ejemplo: Mismo material





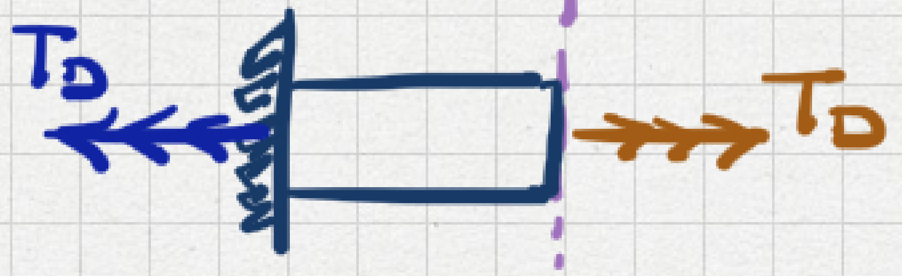
Ⓐ $r_A = 2r \rightarrow I_P = \frac{\pi}{2}(2r)^4 = 8\pi r^4$

Ⓑ $r_B = 3r \rightarrow I_P = \frac{\pi}{2}(3r)^4 = 40.5\pi r^4$

Ⓒ $r_C = r \rightarrow I_P = \frac{\pi}{2}(r)^4 = 0.5\pi r^4$

$$\sum \phi_{\text{todas las barras}} = 0$$

$$\phi = \frac{TL}{G I_P}$$

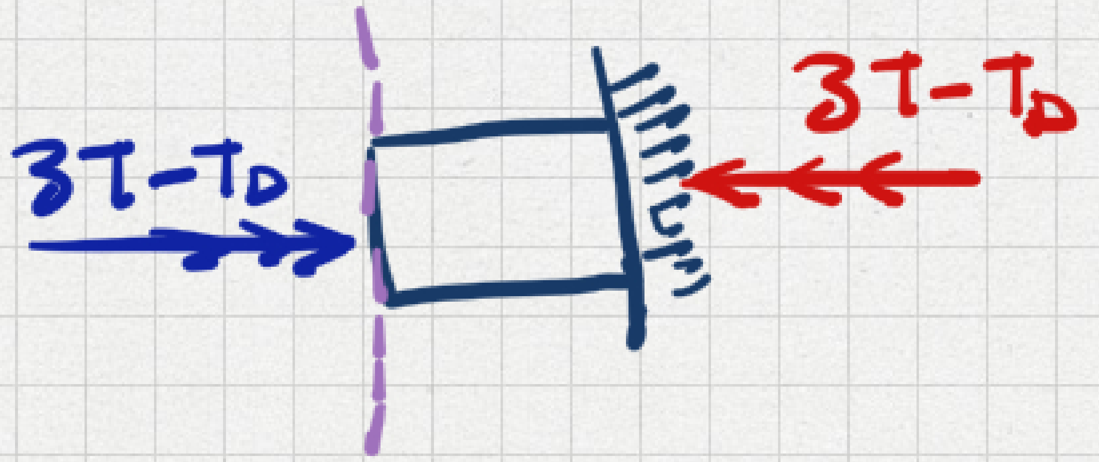


$$\phi_A = \frac{(-T_D)(2)}{(G)(8\pi r^4)}$$

$T_D < T$

$$\phi_B = \frac{(T-T_D)(3)}{(G)(40.5\pi r^4)}$$

$$\phi_C = \frac{-(3T-T_D)(4)}{(G)(0.5\pi r^4)}$$



$$3T - T_D = 3T - 3.117T$$
$$= -0.117T$$

$$\sum \phi_{\substack{\text{Todas}\\ \text{barras}}} = 0 \quad (\text{extremos empotrados})$$

$$\phi_A + \phi_B + \phi_C = 0$$

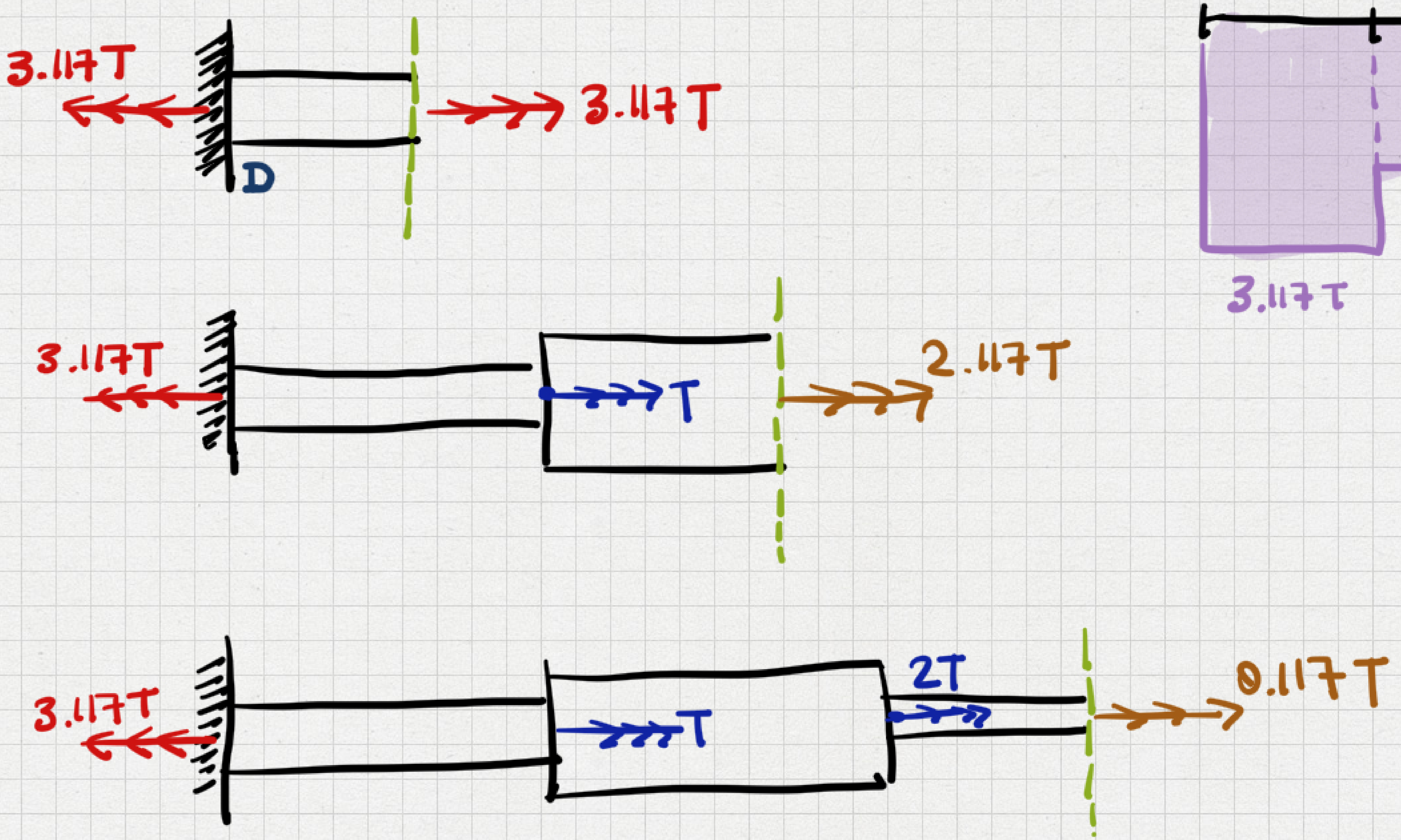
$$\frac{(-T_D)(2)}{(\cancel{G})(8\cancel{\pi r^4})} + \frac{(T-T_D)(3)}{(\cancel{G})(40.5\cancel{\pi r^4})} + \frac{-(3T-T_D)(4)}{(\cancel{G})(0.5\cancel{\pi r^4})} = 0$$

$$\boxed{T_D = 3.117\,T}$$

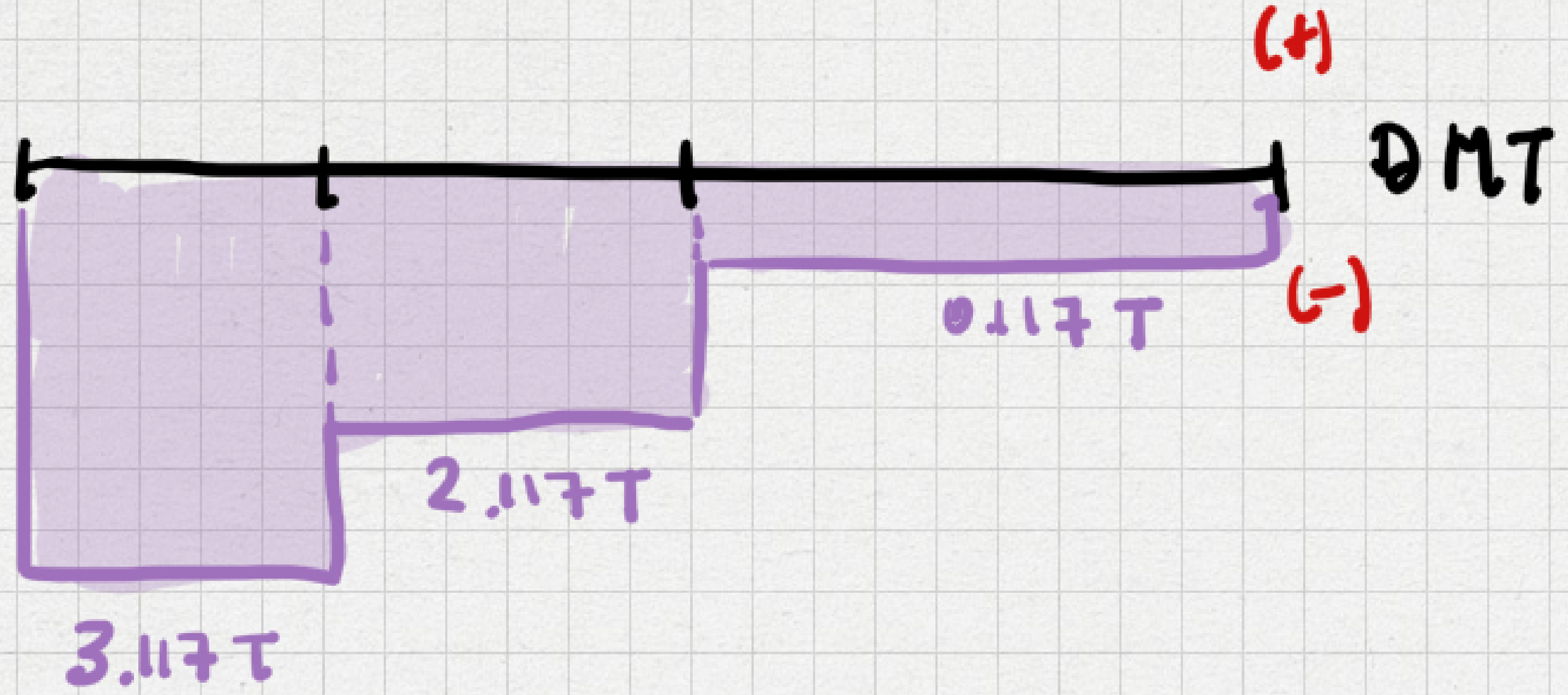
$$-\frac{2T_D}{8} + \frac{3(T-T_D)}{40.5} - \frac{4(3T-T_D)}{0.5} = 0$$

$$-\frac{T_D}{4} + \frac{3T}{40.5} - \frac{3T_D}{40.5} - \frac{12T}{0.5} + \frac{4T_D}{0.5} = 0; \quad \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{40.5} + \frac{4}{0.5}\right)T_D + \left(\frac{3}{40.5} - \frac{12}{0.5}\right)T = 0$$

$$7.6759\,T_D + (-23.9259)\,T = 0$$



3.117T
3.117T
D
3.117T
T
2.117T
3.117T
T
2T
0.117T



(+)
DMT
(-)
0.117T
2.117T
3.117T