

Quinta edición

Análisis estructural

Aslam Kassimali

Análisis estructural

Aslam Kassimali

Quinta edición



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Análisis estructural

Aslam Kassimali

Quinta edición

Aslam Kassimali

Southern Illinois University-Carbondale

Traducción

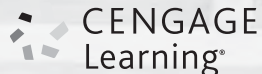
Ing. Alberto Alejandro Andrade Galán

Consorcio ARA – Traductor profesional

Revisión técnica

Ing. Juan Felipe Heredia Mellado

Universidad Iberoamericana



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Análisis estructural

Quinta edición
Aslam Kassimali

**Presidente de Cengage Learning
Latinoamérica:**

Fernando Valenzuela Migoya

**Director Editorial, de Producción y de
Plataformas Digitales para Latinoamérica:**

Ricardo H. Rodríguez

**Editora de Adquisiciones para
Latinoamérica:**

Claudia C. Garay Castro

**Gerente de Manufactura para
Latinoamérica:**

Raúl D. Zendejas Espejel

**Gerente Editorial en Español para
Latinoamérica:**

Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:

Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:

Rafael Pérez González

Editor:

Omegar Martínez

Diseño de portada:

Anneli Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:

Shutterstock.com

Composición tipográfica:

Ediciones y Recursos Tecnológicos, S.A. de C.V.

© D.R. 2015 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de
este trabajo amparado por la Ley Federal del
Derecho de Autor, podrá ser reproducida,
transmitida, almacenada o utilizada en
cualquier forma o por cualquier medio, ya sea
gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo,
pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado,
reproducción, escaneo, digitalización,
grabación en audio, distribución en Internet,
distribución en redes de información o
almacenamiento y recopilación en sistemas
de información a excepción de lo permitido
en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento
por escrito de la Editorial.

Traducido del libro: *Structural Analysis*, Fifth Edition
Publicado en inglés por Cengage Learning
© 2015 ISBN: 978-1-133-94389-1

Datos para catalogación bibliográfica:
Kassimali, Aslam
Análisis estructural, quinta edición
ISBN: 978-607-519-540-7

Visite nuestro sitio en:
<http://latinoamerica.cengage.com>



Contenido

Prefacio xi

Parte Uno INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y CARGAS 1

1 Introducción al Análisis Estructural 3

- 1.1 Antecedentes históricos 3
- 1.2 El papel del Análisis Estructural en los Proyectos de Ingeniería Estructural 5
- 1.3 Clasificación de las Estructuras 7
- 1.4 Modelos analíticos 12
- Resumen 16

2 Cargas en las Estructuras 17

- 2.1 Sistemas estructurales para la transmisión de cargas 18
- 2.2 Cargas muertas 29
- 2.3 Cargas vivas 31
- 2.4 Clasificación de los edificios para cargas ambientales 34
- 2.5 Cargas por viento 34
- 2.6 Cargas por nieve 42
- 2.7 Cargas por sismo 45
- 2.8 Presiones hidrostáticas y de suelo 46
- 2.9 Efectos térmicos y otros 46
- 2.10 Combinación de cargas 47
- Resumen 48
- Problemas 49

Parte Dos ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS 51

3 Equilibrio y Reacciones en los Apoyos 53

- 3.1 Equilibrio de las estructuras 53
- 3.2 Fuerzas internas y externas 56
- 3.3 Tipos de apoyos para estructuras planas 56
- 3.4 Determinación estática, hiperestaticidad e inestabilidad 58
- 3.5 Cálculo de reacciones 69
- 3.6 Principio de superposición 85
- 3.7 Reacciones de estructuras simplemente apoyadas usando proporciones 86
- Resumen 88
- Problemas 89

4 Armaduras Planas y Espaciales 97

- 4.1 Hipótesis para el análisis de armaduras 99
- 4.2 Disposición de elementos de las armaduras planas – Estabilidad interna 103
- 4.3 Ecuaciones de condición para armaduras planas 107
- 4.4 Determinación estática, indeterminación y estabilidad de armaduras planas 107
- 4.5 Análisis de armaduras planas por el método de los nodos 113
- 4.6 Análisis de armaduras planas por el método de las secciones 126
- 4.7 Análisis de estructuras compuestas 132
- 4.8 Armaduras complejas 137
- 4.9 Armaduras espaciales 138
- Resumen 147
- Problemas 148

5 Vigas y Marcos: Cortante y Momento Flexionante 161

- 5.1 Fuerza axial, cortante y momento flexionante 161
- 5.2 Diagramas de cortante y momento flexionante 168
- 5.3 Análisis de la configuración deformada 172
- 5.4 Relaciones entre cargas, cortantes y momentos flexionantes 173
- 5.5 Análisis de marcos planos 192
- 5.6 Análisis de marcos planos 200
- Resumen 213
- Problemas 215

6 Deflexiones en vigas: Métodos geométricos 224

- 6.1 Ecuaciones diferenciales para la deflexión en vigas 225
- 6.2 Método directo de integración 227
- 6.3 Método de superposición 231
- 6.4 Método de área-momento 231
- 6.5 Diagramas de momento flexionante por partes 243
- 6.6 Método de la viga conjugada 247
- Resumen 262
- Problemas 262

7 Deflexiones en armaduras, vigas y marcos: Métodos energéticos (Trabajo y Energía) 268

- 7.1 Trabajo 268
- 7.2 Principio del trabajo virtual 270
- 7.3 Deflexiones de armaduras por el método del trabajo virtual 274
- 7.4 Deflexiones de vigas por el método del trabajo virtual 283
- 7.5 Deflexiones de marcos por el método del trabajo virtual 295
- 7.6 Conservación de la energía y energía de deformación 306
- 7.7 Segundo teorema de Castigliano 309
- 7.8 Ley de Betti y Ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas 317
- Resumen 319
- Problemas 320

8 Líneas de Influencia 329

- 8.1 Líneas de influencia para vigas y marcos por el método de equilibrio 330
- 8.2 Principio de Müller-Breslau y líneas de influencia cualitativa 344
- 8.3 Líneas de influencia para Sistemas de vigas de piso 356
- 8.4 Líneas de influencia para armaduras 366
- 8.5 Líneas de influencia para deflexiones 377
- Resumen 380
- Problemas 380

9 Aplicación de Líneas de Influencia 387

- 9.1 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga concentrada en movimiento 330
- 9.2 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga viva uniformemente distribuida 344

- 9.3 Respuesta en una ubicación determinada debido a una serie de cargas concentradas en movimiento 393
- 9.4 Respuesta máxima absoluta 400
- Resumen 405
- Problemas 406

10 Análisis de Estructuras Simétricas 408

- 10.1 Estructuras simétricas 408
- 10.2 Componentes de carga simétricos y asimétricos 414
- 10.3 Comportamiento de estructuras simétricas bajo cargas simétricas y asimétricas 424
- 10.4 Procedimiento de análisis para estructuras simétricas 428
- Resumen 435
- Problemas 436

Parte Tres ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS (INDETERMINADAS) 439

11 Introducción a las Estructuras Hiperestáticas 441

- 11.1 Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas 442
- 11.2 Análisis de estructuras hiperestáticas 445
- Resumen 449

12 Análisis Aproximado de Marcos Rectangulares de Edificios 450

- 12.1 Suposiciones para el análisis aproximado 451
- 12.2 Análisis de cargas verticales 454
- 12.3 Análisis de cargas laterales–Método del portal 458
- 12.4 Análisis de cargas laterales–Método del cantiliver 473
- Resumen 480
- Problemas 480

13 Método de las Deformaciones Consistentes–Método de las Fuerzas 483

- 13.1 Estructuras con un solo grado de indeterminación 484
- 13.2 Fuerzas y momentos internos como redundantes 504
- 13.3 Estructuras con varios grados de indeterminación 515
- 13.4 Asentamientos en los apoyos, cambios de temperatura y errores de fabricación 537
- 13.5 Método del trabajo mínimo 545
- Resumen 551
- Problemas 552

14	Líneas de Influencia para Estructuras Estáticamente Indeterminadas	559
	14.1 Líneas de influencia de vigas y armaduras 560 14.2 Líneas de influencia cualitativas por el principio de Müller-Breslau 575 - Resumen 579 - Problemas 580	
15	Método de la Pendiente-Deflexión	583
	15.1 Ecuaciones de la pendiente-deflexión 584 15.2 Conceptos básicos del método de la pendiente-deflexión 591 15.3 Análisis de vigas continuas 598 15.4 Análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos 617 15.5 Análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos 625 - Resumen 643 - Problemas 643	
16	Método de la Distribución de Momentos (Método de Cross)	648
	16.1 Definiciones y terminología 649 16.2 Conceptos básicos de la distribución de momentos 657 16.3 Análisis de vigas continuas 665 16.4 Análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos 678 16.5 Análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos 681 - Resumen 696 - Problemas 697	
17	Introducción al Análisis Estructural Matricial	702
	17.1 Modelo Analítico 703 17.2 Relaciones de la Rigidez de Elemento en Coordenadas Locales 707 17.3 Transformación de Coordenadas 714 17.4 Relaciones de la Rigidez de Elemento en Coordenadas Globales 719 17.5 Relaciones de la Rigidez de la Estructuras 721 17.6 Procedimientos de Análisis 728 - Resumen 745 - Problemas 745	
APÉNDICE A	Áreas y centroides de formas geométricas	747

APÉNDICE B Repaso de álgebra de matrices 749

- B.1** Definición de una matriz 749
 - B.2** Tipos de matrices 750
 - B.3** Operaciones con matrices 752
 - B.4** Solución de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan 758
- Problemas 762

APÉNDICE C Ecuación de tres momentos 763

- C.1** Derivación de la ecuación de tres momentos 763
 - C.2** Aplicación de la ecuación de tres momentos 768
- Resumen 774
- Problemas 775
- Bibliografía 777
- Respuestas a problemas seleccionados 779
- Índice 789



Prefacio

El objetivo de este libro es desarrollar una comprensión de los principios básicos del análisis estructural. Haciendo hincapié en un enfoque clásico intuitivo, *Análisis estructural* abarca el análisis isostático y de vigas indeterminadas, armaduras y marcos rígidos. También presenta una introducción al análisis matricial de estructuras.

El libro está dividido en tres partes. La primera parte presenta una introducción general al tema de la ingeniería estructural. Incluye un capítulo dedicado enteramente al tema de cargas porque en muchos programas de estudio de ingeniería civil se presta especial atención a este tema. La segunda parte, que consta de los capítulos 3 a 10, cubre el análisis de vigas estáticamente determinadas, armaduras y marcos rígidos. Los capítulos sobre deflexiones (capítulos 6 y 7) se colocan antes de los dedicados a las líneas de influencia (capítulos 8 y 9), de manera que las líneas de influencia para deflexiones están en estos capítulos. Esta parte también contiene un capítulo sobre el análisis de estructuras simétricas (Capítulo 10). En la tercera parte del libro, los capítulos 11 a 17 cubren el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. El formato del libro es flexible para permitir que los maestros enfatizen temas que son consistentes con los objetivos de sus cursos.

Cada capítulo del libro comienza con una sección introductoria que define su objetivo y termina con un resumen esquemático que enfatiza lo presentado. Una característica importante del libro es la inclusión de procedimientos de análisis paso a paso para que los estudiantes puedan hacer una transición sencilla de la teoría a la resolución de problemas. Numerosos ejemplos resueltos se proporcionan para ilustrar la aplicación de los conceptos fundamentales.

A computer program for analyzing plane framed structures is available on the publisher's website www.cengage.com/engineering. This interactive software can be used to simulate a variety of structural and loading configurations and to determine cause versus effect relationships between loading and various structural parameters, thereby enhancing the students' understanding of the behavior of structures. The software shows deflected shapes of structures to enhance students' understanding of structural response due to various types of loadings. It can also include the effects of support settlements, tem-

perature changes, and fabrication errors in the analysis. A solutions manual, containing complete solutions to over 600 text exercises, is also available for the instructor.

Novedades de esta quinta edición

Basándonos en el tema original de este libro, que es que las explicaciones detalladas de conceptos son la mejor forma de enseñar el análisis estructural, las siguientes mejoras y cambios han sido hechos a esta quinta edición:

- Todo el volumen se ha rediseñado en dos colores para mejorar la comprensión. La carga externa aplicable y las reacciones de la estructura, así como su deformado (forma desviada), se muestran en color azul; mientras que, la estructura deformada, su soportes y dimensiones se ilustran en negro / gris.
- Una nueva sección sobre los sistemas estructurales para cargas de transmisión se ha agregado en el capítulo 2, donde se introducen los conceptos de gravedad, trayectorias de carga laterales y áreas tributarias. También en este capítulo, se han combinado las secciones de cargas vivas e impacto; ha sido añadida una nueva sección sobre la clasificación de los edificios para cargas ambientales de acuerdo con el estándar ASCE / SEI 7-10, y todo el material de cargas se ha revisado para cumplir con las disposiciones de la última, versión 7, del estándar ASCE / SEI.
- En el capítulo 7, el tratamiento del método de trabajo virtual ha sido ampliado mediante la inclusión de un procedimiento gráfico para la evaluación de las integrales de trabajo virtuales, junto con dos nuevos ejemplos para ilustrar la aplicación de este procedimiento.
- Basándonos en las aportaciones de los revisores, el capítulo 14 de la edición anterior se ha eliminado, con el método de trabajo mínimo ahora están cubiertos en el capítulo 13 y el tratamiento de la ecuación de tres momentos ha sido trasladado a un nuevo apéndice D. Los capítulos siguientes del libro se han vuelto a numerar en consecuencia.
- Se han actualizado o cambiado una buena cantidad de los problemas para resolver de la edición anterior.
- Hay muchas otras revisiones menores, incluyendo una amplia discusión sobre la determinación estática de armazones (capítulo 4), además de nuevas fotografías y figuras que ilustran algunas conexiones típicas de marcos de edificios (capítulo 5). El diseño de cada página ha sido rediseñado para mejorar la claridad.

Ancillaries for the Fifth Edition

Worked-out solutions to all end-of-chapter problems are provided in the Instructors Solutions Manual, and available in print or digitally to registered instructors on the instructor resources web site.

Two sets of PowerPoint slides, one of all figures and tables, the other of examples and equations to allow instructors an easier way to prepare their lectures, are also available on the instructor website, at www.cengage.com/engineering. The computer software program is available for students using the text, through www.cengagebrain.com, and for instructors through either site.

Material de apoyo para el profesor

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles únicamente en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio al cliente en las siguientes direcciones de correo electrónico:

- Cengage Learning México y Centroamérica clientes.mexicoca@cengage.com
- Cengage Learning Caribe clientes.caribe@cengage.com
- Cengage Learning Cono Sur clientes.conosur@cengage.com
- Cengage Learning Pacto Andino clientes.pactoandino@cengage.com

Al igual que los recursos impresos adicionales, las direcciones de los sitios web señaladas a lo largo del texto, y que se incluyen a modo de referencia, no son administradas por Cengage Learning Latinoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios y actualizaciones de las mismas.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a Timothy Anderson y Hilda Gowans de Cengage Learning por su constante apoyo y aliento largo de este proyecto, y para Rose Kernan por toda su ayuda durante la fase de producción. Reconozco agradecido todos los comentarios y sugerencias para la mejora del libro que han hecho los colegas y estudiantes que han utilizado las ediciones anteriores. Todas sus sugerencias fueron consideradas cuidadosamente y aplicadas siempre que fue posible. Se agradece a los siguientes revisores por sus cuidadosas revisiones de los manuscritos de las diferentes ediciones, y por sus sugerencias constructivas:

Ayo Abatan
*Virginia Polytechnic Institute
 and State University*
 Riyadh S. Aboutaha
Syracuse University

Osama Abudayyeh
Western Michigan University
 Thomas T. Baber
University of Virginia

Gordon B. Batson	Eugene B. Loverich
<i>Clarkson University</i>	<i>Northern Arizona University</i>
George E. Blandford	L. D. Lutes
<i>University of Kentucky</i>	<i>Texas A&M University</i>
Ramon F. Borges	David Mazurek
<i>Penn State/Altoona College</i>	<i>US Coast Guard Academy</i>
Kenneth E. Buttry	Ghyslaine McClure
<i>University of Wisconsin</i>	<i>McGill University</i>
Steve C. S. Cai	Ahmad Namini
<i>Louisiana State University</i>	<i>University of Miami</i>
William F. Carroll	Farhad Reza
<i>University of Central Florida</i>	<i>Minnesota State University,</i>
Malcolm A. Cutchins	<i>Mankato</i>
<i>Auburn University</i>	Arturo E. Schultz
Jack H. Emanuel	<i>North Carolina State University</i>
<i>University of Missouri—Rolla</i>	Jason Stewart
Fouad Fanous	<i>Arkansas State University</i>
<i>Iowa State University</i>	Kassim Tarhini
Leon Feign	<i>Valparaiso University</i>
<i>Fairfield University</i>	Robert Taylor
Robert Fleischman	<i>Northeastern University</i>
<i>University of Notre Dame</i>	Jale Tezcan
Changhong Ke	<i>Southern Illinois University</i>
<i>SUNY, Binghamton</i>	C. C. Tung
George Kostyrko	<i>North Carolina State University</i>
<i>California State University</i>	Nicholas Willems
E. W. Larson	<i>University of Kansas</i>
<i>California State University/</i>	John Zachar
<i>Northridge</i>	<i>Milwaukee School of Engineering</i>
Yue Li	Mannocherh Zoghi
<i>Michigan Technological</i>	<i>University of Dayton</i>
<i>University</i>	

FPor último, me gustaría expresar mi agradecimiento para mi esposa, Maureen, por su aliento constante y ayuda en la preparación de este manuscrito, y para mis hijos, Jamil y Nadim, por su amor, comprensión y paciencia.

Aslam Kassimali



Parte Uno

Introducción al Análisis Estructural y Cargas



Distrito de la Ciudad Marina, Chicago
Hisham Ibrahim / Photographer's Choice RF / Getty Images

1

Introducción al Análisis Estructural

- 1.1 Antecedentes históricos
 - 1.2 El papel del Análisis Estructural en los Proyectos de Ingeniería Estructural
 - 1.3 Clasificación de las Estructuras
 - 1.4 Modelos analíticos
- Resumen

El análisis estructural es la predicción del desempeño de una estructura ante las cargas prescritas y/o efectos externos, tales como movimientos en los apoyos y cambios de temperatura. Las características de interés en el desempeño del diseño de las estructuras son (1) esfuerzos o resultados de esfuerzos, tales como fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos de flexión; (2) deflexiones; y (3) reacciones en los apoyos. Por lo tanto, el análisis de las estructuras por lo general implica la determinación de esas cantidades como causa de una condición de carga. El objetivo de este texto es el de presentar los métodos de análisis de estructuras en equilibrio estático.

En este capítulo se proporciona una introducción general al tema del análisis estructural. Primero haremos una breve descripción histórica, incluyendo nombres de personas cuyo trabajo es importante en la materia. Después discutiremos la importancia del papel del análisis estructural en los proyectos de ingeniería estructural. Describiremos cinco tipos comunes de estructuras: estructuras sujetas a tensión y compresión, armaduras y estructuras sujetas a cortante y flexión. Finalmente, consideraremos el desarrollo de un método simplificado de análisis para estructuras reales.

1.1 Antecedentes históricos

Desde el comienzo de la historia, la ingeniería estructural ha sido parte esencial del quehacer humano. Sin embargo, no fue sino hasta mediados del siglo XVII que los ingenieros empezaron a aplicar el conocimiento de la mecánica (matemáticas y ciencia) en el diseño de estructuras. En los principios de la

ingeniería, las estructuras fueron diseñadas a prueba y error usando reglas empíricas basadas en experiencias pasadas. El hecho de que algunas de las estructuras impresionantes de épocas anteriores, tales como las pirámides egipcias (3000 A.C.), los templos griegos (500-200 A.C.), el Coliseo y el Acueducto romanos (200 A.C.–200 D.C) y las catedrales góticas (1000–1500 D.C.), aún continúen en pie es testimonio del ingenio de sus constructores (Fig. 1.1).

Galileo Galilei (1564-1642) es considerado como el iniciador de la teoría de las estructuras. En su libro titulado *Dos nuevas ciencias*, el cual fue publicado en 1638, Galileo analizó la falla de un tipo de estructuras simples, incluidas vigas en voladizo. A pesar de que sus predicciones sobre resistencia de las vigas fueron aproximadas, su libro sentó las bases para el futuro desarrollo de la teoría de estructuras y marcó el inicio de una nueva era de la ingeniería estructural, en la cual los principios analíticos de la mecánica y resistencia de materiales tendrían mayor influencia en el diseño de las estructuras.

Después del trabajo pionero de Galileo, el conocimiento de la mecánica estructural avanzó a un ritmo acelerado en la segunda mitad del siglo XVII y durante el siglo XVIII. Entre los investigadores notables de ese período están Robert Hooke (1635-1703), quien postuló la ley de relación lineal entre la fuerza y la deformación de los materiales (Ley de Hooke); sir Isaac Newton (1642-1727), quien formuló las leyes de movimiento y desarrolló el cálculo; John Bernoulli (1667-1748), quien estableció los principios del trabajo virtual; y Leonhard Euler (1707-1783), desarrollador de la teoría del pandeo en



FIG. 1.1 La Catedral de Nuestra Señora de París fue terminada en el siglo XIII.
Ritu Manoj Jethani / Shutterstock.com

columnas; y C. A. de Coulomb (1736-1806), creador del análisis de flexión de vigas elásticas.

En 1826, L. M. Navier (1785-1836) publicó un tratado sobre comportamiento elástico en estructuras, el cual es considerado como el primer libro de texto moderno sobre resistencia de materiales. El avance de la mecánica estructural continuó a un ritmo impresionante durante el resto del siglo XIX y en la primera parte del siglo XX, en los que se desarrolló la mayoría de los métodos clásicos de análisis estructural descritos en este texto. Los principales colaboradores en este período incluyen a B.P. Clapeyron (1835-1884), quien formuló el teorema de los Tres Momentos para el análisis de vigas continuas; J.C. Maxwell (1831-1879), impulsor del método de la deformación constante y de la ley de las deflexiones recíprocas o teorema de reciprocidad; Otto Mohr (1835-1918), desarrollador del método de la viga conjugada para el cálculo de las deflexiones y del Círculo de Mohr para el cálculo de los esfuerzos y deformaciones; Alberto Castigliano (1847-1884), quien formuló el teorema del trabajo mínimo; C. E. Green (1842-1925), creador del método de área momento; H. Muller-Breslau (1851-1925), quien presentó el principio de líneas de influencia; G.A. Maney (1888-1947), autor del método de la pendiente-deflexión, y a quien se le considera el precursor del método matricial de las rigideces; y Hardy Cross (1885-1947), quien desarrolló el método de la distribución de momentos en 1924. Este método proporciona a los ingenieros un proceso iterativo simple para el análisis de estructuras hiperestáticas, el cual fue ampliamente utilizado por los ingenieros estructuristas durante el período de 1930 a 1970, y contribuyó de manera significativa a entender el comportamiento de marcos hiperestáticos o estáticamente indeterminados. Muchas de las estructuras diseñadas durante esta etapa, como los edificios altos de varios niveles, no habrían sido posibles sin el método de distribución de momentos.

La disponibilidad de las computadoras en 1950 revolucionó el análisis estructural, debido a que podían resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas, y los análisis que tomaban varios días y a veces semanas, ahora se ejecutaban en segundos. El desarrollo actual de los métodos orientados al análisis estructural en computadora se puede atribuir, entre otros, a J.H. Argyris, R. W. Clough, S. Kelsey, R. K. Livesley, H. C. Martin, M. T. Turner, E. L. Wilson y O. C. Zienkiewicz.

1.2 El papel del Análisis Estructural en los Proyectos de Ingeniería Estructural

La ingeniería estructural es la ciencia y el arte de planear, diseñar y construir de manera segura y económica estructuras que servirán para dichos propósitos. El análisis estructural es una parte integral de cualquier proyecto de ingeniería estructural, cuya función comienza con la predicción del comportamiento de la estructura. En la Fig. 1.2 se muestra el diagrama de flujo de las diversas etapas de un proyecto de ingeniería estructural típico. Así como lo indica este diagrama, el proceso es iterativo, y generalmente consiste de los siguientes pasos:

1. **Etapla de planeación.** La fase de planeación usualmente involucra el establecimiento de los requisitos funcionales de la estructura propuesta, la disposición general y las dimensiones de la estructura, consideraciones generales de los posibles tipos de estructuras (por ejemplo, marcos rígidos o armaduras) que pueden utilizarse y los tipos de materiales a emplear (por ejemplo, acero estructural o concreto reforza-

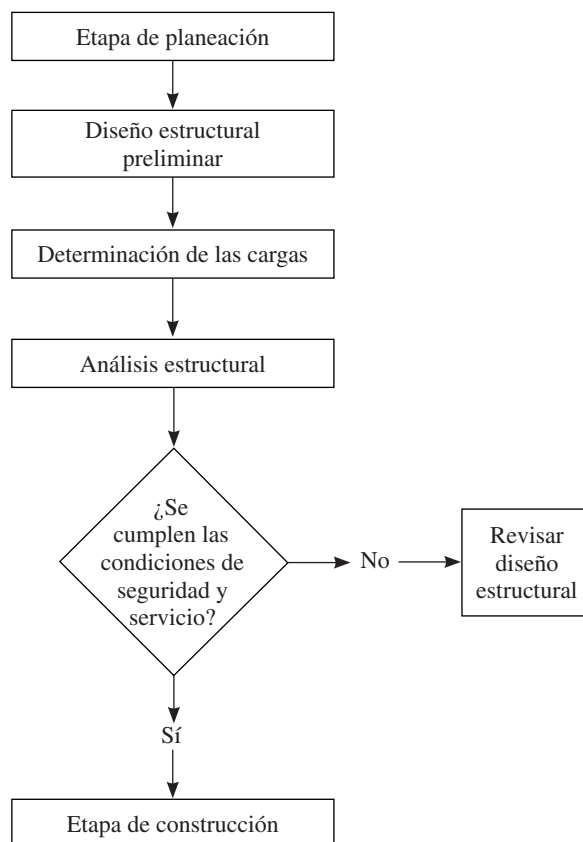


FIG. 1.2 Etapas de un proyecto de Ingeniería Estructural típico

do). Esta etapa también puede tener en cuenta otras consideraciones de factores no estructurales, como aspectos estéticos, de impacto ambiental de la estructura y algunos otros. Su resultado es generalmente un sistema estructural que cumple con los requerimientos de funcionalidad y que se espera sea el más económico. Esta etapa es tal vez la más crucial del proyecto completo y requiere de experiencia y conocimiento de las prácticas de construcción, además de un minucioso entendimiento del comportamiento de las estructuras.

2. **Diseño estructural preliminar.** En la etapa de diseño estructural preliminar se estima el tamaño de los elementos del sistema estructural seleccionados en la etapa de planeación con base en un análisis aproximado, experiencias anteriores y requerimientos de código o reglamento. Así, el tamaño de los elementos seleccionados son utilizados en la siguiente etapa para calcular el peso de la estructura.
3. **Determinación de las cargas.** La estimación de las cargas implica la determinación de todas las cargas que se puede esperar que actúen en la estructura.
4. **Análisis estructural.** En el análisis estructural los valores de las cargas son utilizados para desarrollar un análisis estructural con el fin de determinar los esfuerzos resultantes en los elementos y las deflexiones en distintos puntos de la estructura.
5. **Comprobación de seguridad y servicio.** Los resultados del análisis se usan para determinar si una estructura satisface o no los requerimientos de seguridad y servicio del código de diseño. Si estos

requerimientos son satisfechos, entonces se procede a ejecutar los planos de diseño y las especificaciones de construcción, así comienza la etapa de construcción.

6. **Revisión de diseño estructural.** Si los requisitos de la estructura no se satisfacen, a continuación, se revisan las medidas de los elementos, y las fases 3 a 5 se repiten hasta que todos los requisitos de seguridad y facilidad de servicio se cumplen.

A excepción de discutir qué tipo de cargas se espera que puedan actuar en una estructura (Capítulo 2), nuestro principal objetivo en este texto será el análisis de estructuras.

1.3 Clasificación de las Estructuras

Como se discutió en la sección anterior, quizá la decisión más importante del ingeniero estructurista en la implementación de un proyecto de ingeniería es la selección del tipo de estructura a utilizar para soportar las cargas. Comúnmente las estructuras utilizadas se pueden clasificar en cinco categorías, dependiendo del tipo principal de esfuerzos que puedan desarrollar en sus elementos bajo las cargas de diseño. Sin embargo, se debe tener en cuenta que se pueden combinar dos o más tipos básicos de estructuras, descritos a continuación, en una sola estructura, tal como en un edificio o un puente, para cumplir con los requisitos de funcionalidad de la estructura.

Estructuras en tensión

Los elementos de estructuras en tensión están sujetos a tensión pura bajo la acción de las cargas externas. Debido a que los esfuerzos de tensión están distribuidos de manera uniforme en toda el área de la sección transversal de los elementos, el material de la estructura se utiliza de una manera más eficiente. Las estructuras sujetas a tensión compuestas por cables flexibles de acero son frecuentemente utilizadas para soportar puentes y cubiertas de grandes claros. Gracias a su flexibilidad, los cables tienen una resistencia de flexión despreciable, y son capaces de desarrollar solo tensión. Por lo tanto, en virtud de las cargas externas, el cable adopta la forma que le permite soportar las cargas debido únicamente a fuerzas de tensión. En otras palabras, la forma del cable cambia conforme la carga actuante en él cambia. Como ejemplo, las formas que un solo cable puede asumir bajo dos condiciones distintas de cargas se muestran en la Fig. 1.3.

En la Fig. 1.4 se muestra una forma similar de estructura con cable, *puente colgante*. En un puente colgante la carretera está suspendida a partir de dos cables principales por medio de colgantes verticales. Los cables principales pasan por encima de un par de torres y están anclados en sus extremos al suelo de roca sólida o a una cimentación de concreto. Debido a la suspensión del puente y a que la estructura de cables carece de rigidez en dirección lateral, los puentes son susceptibles a oscilaciones inducidas por el viento (ver Fig. 1.5), por lo que se proporciona un sistema de arriostramiento o de rigidez para evitarlas.

Además de las estructuras con base en cables, hay otros ejemplos de estructuras sujetas a tensión que incluyen varillas verticales que funcionan como colgantes (por ejemplo, para soportar balcones o tanques) y estructuras de membrana tales como carpas y techos de gran envergadura (Fig. 1.6).

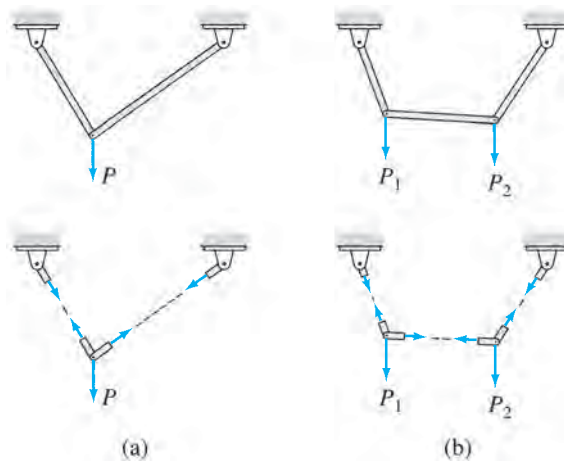


FIG. 1.3

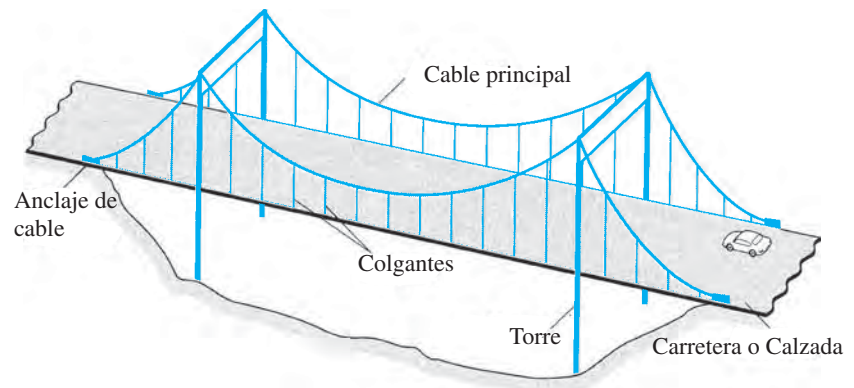


FIG. 1.4 Puente colgante



FIG. 1.5 Puente estrecho de Tacoma oscilando antes de colapsar en 1940. Instituto Smithsonian Foto 72-787, División del Trabajo y la Industria, Museo Nacional de Historia Americana, Instituto Smithsonian

FIG. 1.6 Techo de lona (membrana) del Domo de Tokyo tensada por aire a presión desde el interior del estadio.
© Gavin Hellier / Alamy



Estructuras a compresión

Las estructuras a compresión desarrollan principalmente esfuerzo de compresión bajo la acción de las cargas externas. Dos ejemplos comunes de esas estructuras son las *columnas* y los *arcos* (Fig. 1.7). Las columnas son elementos rectos sujetos a cargas axiales de compresión, como se muestra en la Fig. 1.8. Cuando un elemento recto está sujeto a cargas laterales y/o momentos además de la carga axial, se les llama *viga-columna*.

Un arco es una estructura curva, con una forma similar a un cable invertido, como se muestra en la Fig. 1.9. Esas estructuras son frecuentemente usadas para soportar puentes y techos de gran envergadura. Los arcos

FIG. 1.7 Columnas y arcos del Acueducto de Segovia en España (construido en el siglo I o II)
Bluedog423



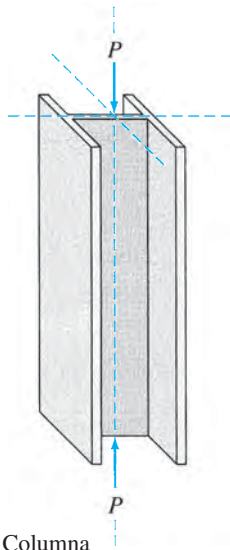


FIG. 1.8 Columna

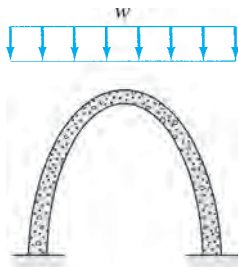


FIG. 1.9 Arco

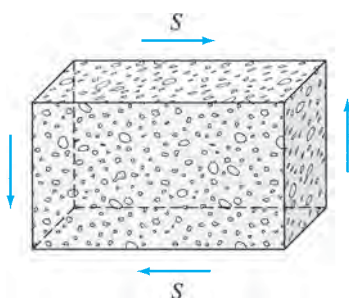


FIG. 1.11 Muro de cortante

desarrollan principalmente esfuerzo de compresión cuando están sujetos a cargas y son generalmente diseñados para que desarrollen solo compresión bajo cargas de diseño. Sin embargo, como los arcos son rígidos y no pueden cambiar su forma como los cables, se presentan otras condiciones de carga que generalmente producen esfuerzos de flexión y cortante adicionales en estas estructuras, los cuales, si son significativos, deberían ser considerados en el diseño.

Dado que las estructuras sujetas a compresión son susceptibles al pandeo o inestabilidad, la posibilidad de tal falla debe ser considerada en el diseño; si fuera necesario, se debe proporcionar arriostramiento adecuado para prevenir este tipo de fallas.

Armaduras

Las armaduras están compuestas de elementos rectos y unidos en sus extremos por conexiones articuladas para formar una configuración estable (Fig. 1.10). Cuando las cargas se aplican a una armadura en sus nodos, sus elementos se estiran o se acortan, por lo tanto, los elementos de una armadura ideal están siempre en tensión o compresión uniforme. Las armaduras reales son generalmente construidas uniendo elementos a placas de refuerzo en conexiones atornilladas o soldadas. Aunque las uniones sean rígidas y puedan causar algo de flexión en los elementos de la armadura cuando está sujeta a cargas, en la mayoría de los casos esos esfuerzos secundarios de flexión son pequeños, y la suposición de que los nodos están articulados proporciona diseños satisfactorios.

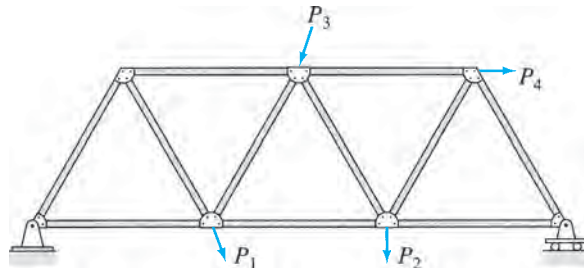


FIG. 1.10 Armadura plana

Las armaduras, debido a su poco peso y gran resistencia, se encuentran entre las estructuras más comúnmente utilizadas. Estas armaduras se emplean en una gran variedad de aplicaciones, desde soportes para cubiertas de edificios hasta estructuras de soporte para estaciones espaciales y estadios deportivos.

Estructuras sujetas a cortante

Las *estructuras sujetas a cortante*, como muros de cortante de concreto reforzado (Fig. 1.11), se emplean en edificios de varios niveles para reducir el movimiento lateral debido al viento y a excitaciones sísmicas (Fig. 1.12). Las estructuras de cortante desarrollan principalmente cortante en su plano, con pequeños esfuerzos de flexión bajo las cargas externas.

FIG. 1.12 El muro de cortante en un lado del edificio fue diseñado para resistir cargas laterales debidas al viento y a sismos.

NISEE, University of California, Berkeley



Estructuras de flexión

Las *estructuras de flexión* presentan principalmente esfuerzos de flexión bajo la acción de las cargas externas. En algunas estructuras, los esfuerzos de cortante asociados con los cambios en los momentos de flexión pueden resultar significativos y deberán ser considerados en el diseño.

Algunas de las estructuras comúnmente usadas, como *vigas*, *marcos rígidos*, *pisos* y *placas*, pueden ser clasificadas como estructuras de flexión. Una *viga* es un elemento recto que está cargado en su plano perpendicular a su eje longitudinal (Fig. 1.13). Recuerde de cursos previos de *Estática* y de *Mecánica de Materiales* que el esfuerzo (*normal*) de flexión varía linealmente en el peralte de una viga en flexión por un esfuerzo máximo de compresión en la fibra extrema o más alejada del eje neutro de su lado cóncavo, a un esfuerzo máximo de tensión en la fibra extrema del lado convexo de la viga. Por ejemplo, en el caso de una viga horizontal sujeta a una carga vertical hacia abajo, como se muestra en la Fig. 1.13, el esfuerzo de flexión varía desde un máximo esfuerzo de compresión en el borde superior a un máximo esfuerzo de tensión en el borde inferior de la viga. Para utilizar de manera más eficiente el material de la sección transversal de una viga bajo esta distribución de esfuerzos, las secciones transversales son a menudo en forma de **I** (ver Fig. 1.13), las cuales tienen más cantidad de material en los patines superior e inferior. Las secciones transversales en forma de **I** son más efectivas para resistir momentos de flexión.

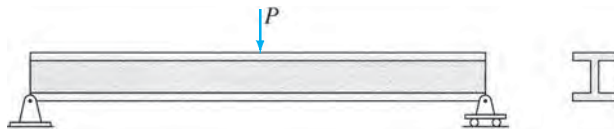


FIG. 1.13 Viga

Los marcos rígidos están compuestos por elementos rectos conectados unos con otros por conexiones rígidas (resistentes a momento) o por conexiones articuladas con configuraciones estables. A diferencia de las armaduras,

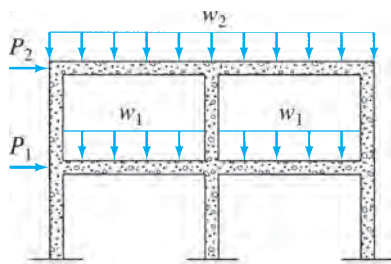


FIG. 1.14 Marco rígido

las cuales están únicamente sujetas a cargas en sus nodos, las cargas externas en los marcos pueden estar aplicadas sobre los elementos además de en los nodos (ver Fig. 1.14). Los elementos de un marco rígido están, por lo general, sujetos a momento flexionante, cortante y compresión o tensión axial bajo la acción de las cargas externas. Sin embargo, el diseño de los elementos horizontales o vigas de marcos rectangulares están normalmente gobernados por esfuerzos de flexión y de cortante, dado que la carga axial en estos elementos es normalmente baja.

Los marcos, como las armaduras, se encuentran entre los tipos de estructuras más usados. Los marcos de acero estructural y de concreto reforzado se usan comúnmente en los edificios de varios niveles (Fig. 1.5), en puentes y plantas industriales. También se utilizan como estructuras de soporte en aviones, barcos, vehículos espaciales y en otras aplicaciones aeroespaciales y mecánicas.



FIG. 1.15 Esqueleto de edificios con marcos

Racheal Grazias / Shutterstock.com

Puede ser de interés tener en cuenta que el término genérico *Estructura de marcos* se utiliza frecuentemente para referirse a cualquier estructura compuesta de elementos rectos, incluida una armadura. En ese contexto, este libro de texto está dedicado principalmente al análisis de estructuras de marcos planos.

1.4 Modelos analíticos

Un modelo analítico es una representación simplificada, o un ideal, de una estructura real para propósitos de análisis. Su objetivo es simplificar el análisis de una estructura complicada. El modelo analítico representa, con la mayor precisión posible y práctica, el comportamiento característico de la estructura de interés para el analista, mientras se descartan muchos de los detalles de los elementos, conexiones, etc., que se espera tengan poco efecto sobre las características deseadas. Crear el modelo es uno de los pasos más importantes en el proceso de análisis, ya que requiere de experiencia y conocimiento de las prácticas de diseño, además de un amplio entendimiento del comportamiento de las estructuras. Recuerde que la predicción de la respuesta estructural predicha a partir del análisis del modelo es válida solo en la medida que el modelo represente la estructura real.

El desarrollo del modelo analítico generalmente implica la consideración de los siguientes factores.

Estructuras planas contra estructuras espaciales

Si todos los elementos de las estructuras y de las cargas aplicadas están en un solo plano, la estructura se denomina *estructura plana*. El análisis de la estructura plana o en dos dimensiones es considerablemente más sencillo que el análisis de la estructura en el espacio o en tres dimensiones. Afortunadamente, muchas de las estructuras en tres dimensiones pueden subdividirse en estructuras planas para el análisis.

Como ejemplo, considere el sistema de marcos del puente mostrado en la Fig. 1.16(a). Los elementos principales del sistema, diseñados para soportar carga vertical, están representados con líneas sólidas, donde los elementos de arriostramiento secundarios, necesarios para resistir las fuerzas de viento lateral y para proporcionar estabilidad, se representan en líneas discontinuas. El piso del puente descansa sobre vigas llamadas *largueros*, que están apoyadas por un sistema de vigas de piso, las cuales, a su vez, están conectadas en sus extremos a los nodos en el tablero inferior de las dos armaduras longitudinales. Por lo tanto, el peso del tránsito, del piso, de los largueros y de las vigas de piso, es transmitido por las vigas de piso a las armaduras de carga en sus nodos; las armaduras, a su vez, envían la carga a la cimentación. Debido a que estas cargas actúan sobre cada armadura en su plano, las armaduras pueden ser tratadas como estructuras planas.

Otro ejemplo. El sistema de marcos de un edificio de varios niveles se muestra en la Fig. 1.17(a). En cada entrepiso, la losa de piso descansa en un sistema de vigas, las cuales transfieren cualquier carga aplicada al piso; el peso de la losa y su peso propio los transmiten a las vigas principales de los marcos rígidos que sirven de apoyo. Esta carga aplicada actúa sobre cada marco en su plano, así que cada marco puede ser analizado como una estructura plana. Las cargas aplicadas a cada marco son además enviadas desde las vigas principales a las columnas y finalmente a la cimentación.

Aunque una gran mayoría de sistemas tridimensionales reales pueden ser subdivididos en estructuras planas para fines de análisis, algunas de ellas, como domos en celosía, estructuras aeroespaciales y torres de transmisión, no deben ser subdivididas en componentes planos debido a su forma, la disposición de sus elementos o aplicación de cargas. Tales estructuras, llamadas *estructuras espaciales*, son analizadas como cuerpos tridimensionales sujetos a sistemas tridimensionales de fuerzas.

Diagramas de línea

El modelo analítico seleccionado para el análisis de dos o tres dimensiones se representa por un diagrama de líneas. En este diagrama, cada elemento de la estructura se representa por una línea que coincide con su eje centroidal. La dimensión de los elementos y el tamaño de la conexión no se representa en el diagrama. Las líneas del diagrama en la armadura del puente de la Fig. 1.16(a), y el marco rígido de la Fig. 1.17(a) se muestran en la Fig. 1.16(b) y 1.17(b), respectivamente. Observe que las líneas (=) son utilizadas algunas veces en este texto para representar elementos del diagrama de líneas. Se hace esto cuando es necesario, para claridad de la representación; en tales casos, la distancia entre las líneas no representa el peralte del elemento.

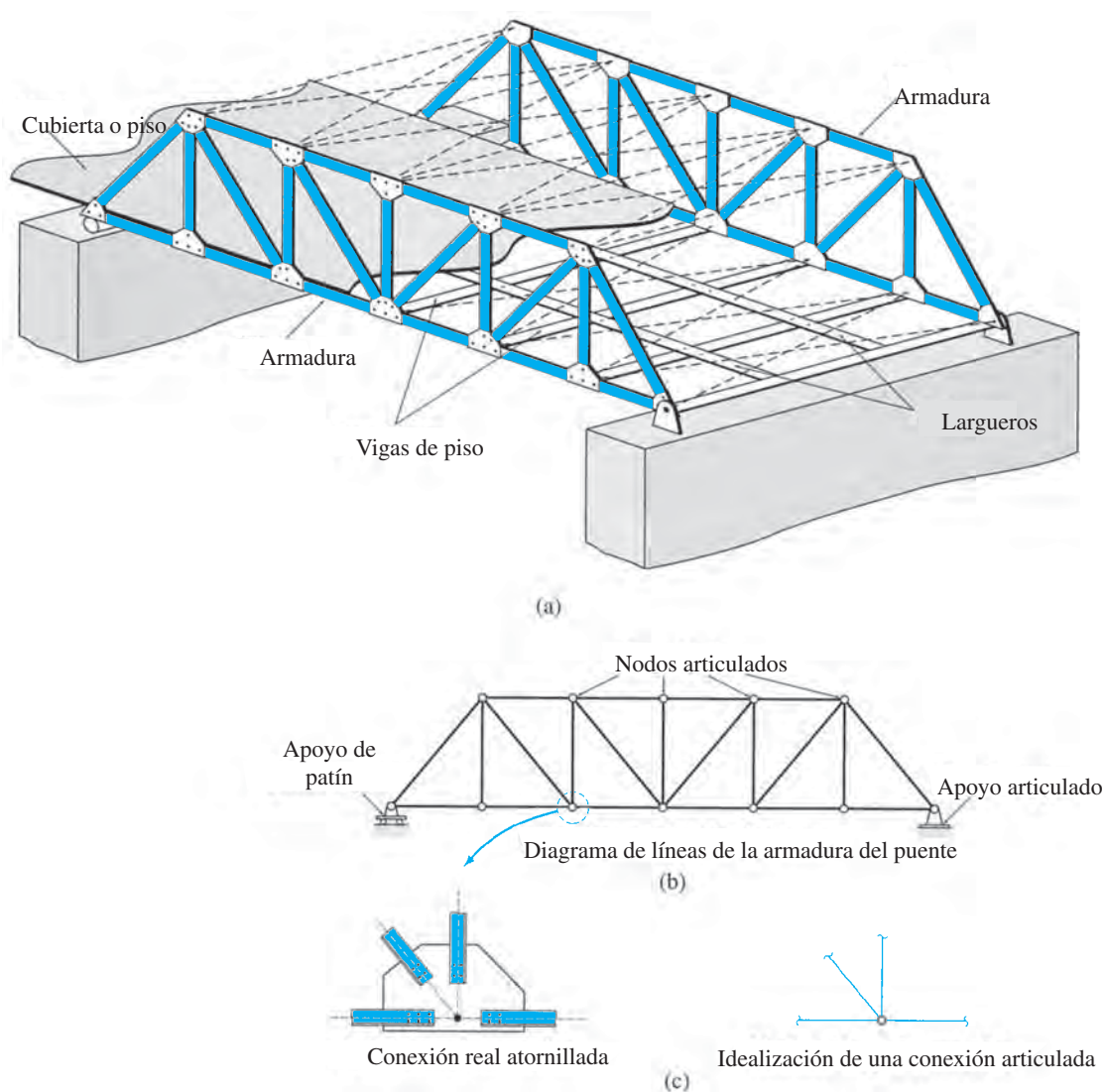


FIG. 1.16 Armadura de un puente

Conexiones

Se usan dos tipos comunes de conexión para unir elementos de una estructura: (1) *conexiones rígidas* y (2) *conexiones flexibles o articuladas*. (Un tercer tipo de conexión, llamada *semirígida*, no está reconocida por los códigos de diseño, pues no es comúnmente usada en la práctica y por lo tanto no es considerada en este texto.)

Una junta o conexión rígida previene traslaciones relativas y rotaciones en los extremos de los elementos conectados a esa conexión; es decir, todos los extremos de los elementos conectados a un nodo rígido tienen las mismas traslaciones y rotaciones. En otras palabras, los ángulos iniciales entre los elementos que se interceptan en el nodo rígido se mantienen después de que la estructura se ha deformado bajo la acción de las cargas. Tales nodos son capaces de transmitir fuerzas al igual que momentos entre los elementos

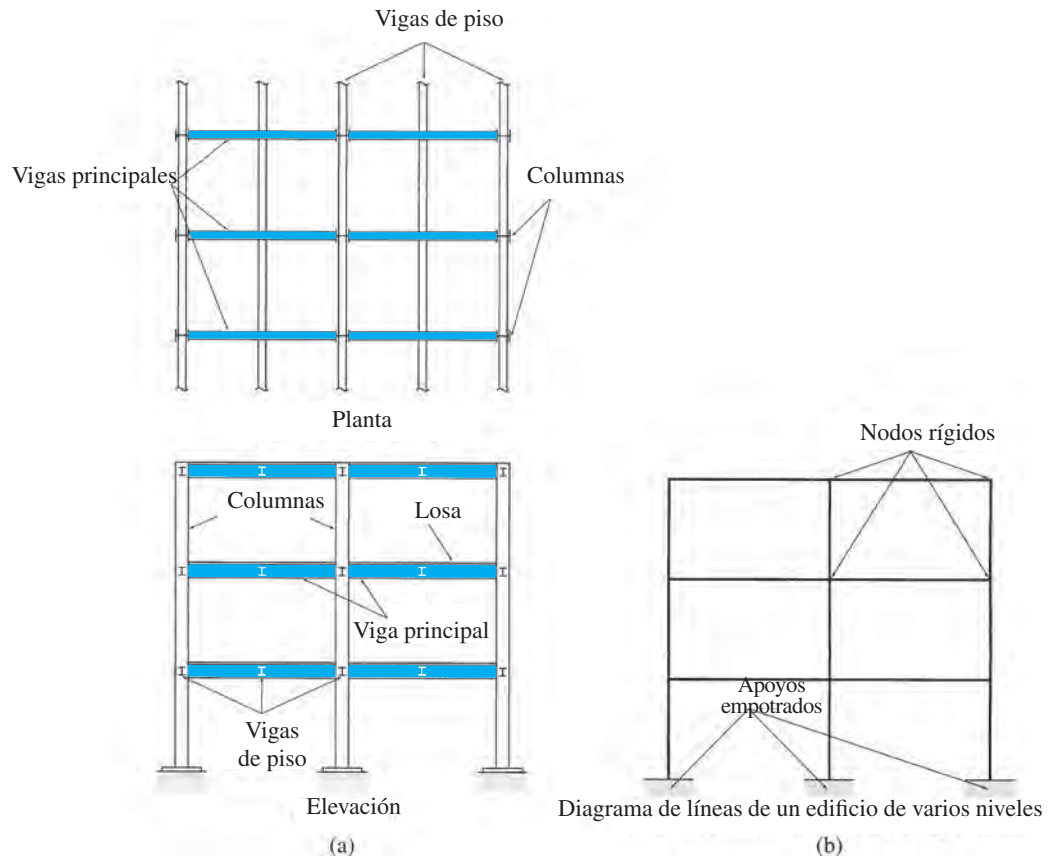


FIG. 1.17 Marco de un edificio de varios niveles

conectados. Las uniones rígidas son comúnmente representadas por puntos en la intersección de los elementos en un diagrama de líneas de la estructura como se muestra en la Fig. 1.17(b).

Una conexión articulada o articulación impide solo traslaciones relativas de los extremos de los elementos conectados a ella; es decir, todos los extremos de los miembros conectados a una articulación tienen la misma traslación pero pueden tener diferentes rotaciones. Tales conexiones son capaces de transmitir fuerzas pero no momentos entre los elementos conectados. Las conexiones articuladas son generalmente representadas por pequeños círculos en las intersecciones de los elementos en el diagrama de líneas de una estructura, como se muestra en la Fig. 1.16(b).

Las conexiones perfectamente rígidas y flexibles sin fricción usadas en el análisis son meramente una idealización de las conexiones reales, las cuales rara vez son perfectamente rígidas o perfectamente flexibles (ver Fig. 1.16(c)). Sin embargo, las conexiones atornilladas o soldadas reales son deliberadamente diseñadas para comportarse como en los casos idealizados. Por ejemplo, las conexiones de las armaduras están diseñadas con los ejes centroidales de los elementos conectados en un punto, como se muestra en la Fig. 1.16(c), para prevenir excentricidades que puedan causar flexión de los elementos. Para tales casos, el análisis basado en conexiones idealizadas u apoyos (descritos en el párrafo siguiente) generalmente producen resultados satisfactorios.

Apoyos

Los apoyos de estructuras planas son comúnmente idealizados tanto como *apoyos empotrados*, los cuales no permiten ningún movimiento; los *apoyos articulados* no permiten traslaciones pero sí rotaciones; o los *apoyos de patines*, los cuales no hacen posible traslaciones en ninguna dirección. Una descripción más detallada de las características de estos apoyos será presentada en el Capítulo 3. Los símbolos comúnmente usados para representar un apoyo de patín o articulado en los diagramas de línea se muestran en la Fig. 1.17(b).

Resumen

En este capítulo hemos aprendido acerca del análisis estructural y su papel en la ingeniería estructural. El *análisis estructural* es la predicción del desempeño de una estructura bajo las cargas establecidas. La ingeniería estructural ha sido por mucho tiempo una parte de la actividad humana, pero Galileo es considerado como el creador de la *teoría* de las estructuras. Después de su trabajo precursor, muchas otras personas han hecho aportaciones significativas. La disponibilidad de las computadoras ha revolucionado el análisis estructural.

La *Ingeniería Estructural* es la ciencia de planificar, diseñar y construir estructuras seguras y económicas. El análisis estructural es una parte integral de este proceso.

Las estructuras pueden ser clasificadas en cinco categorías básicas, a saber, en estructuras en tensión (por ejemplo, cables y colgantes), estructuras en compresión (columnas, arcos y armaduras), estructuras a cortante (muros de cortante), y estructuras a flexión (vigas y marcos rígidos).

Un modelo analítico es una representación simplificada de una estructura real para el análisis. El desarrollo del modelo generalmente implica (1) la determinación de si el modelo puede o no ser tratado como una estructura plana, (2) la construcción del diagrama de líneas de la estructura, y (3) la idealización de las conexiones y apoyos.



Edificio dañado por un sismo
Ints Vikmanis/Shutterstock.com

2

Cargas en las Estructuras

- 2.1 Sistemas estructurales para la transmisión de cargas
- 2.2 Cargas muertas
- 2.3 Cargas vivas
- 2.4 Clasificación de los edificios para cargas ambientales
- 2.5 Cargas por viento
- 2.6 Cargas por nieve
- 2.7 Cargas por sismo
- 2.8 Presiones hidrostáticas y de suelo
- 2.9 Efectos térmicos y otros
- 2.10 Combinación de cargas
- Resumen
- Problemas

El objetivo de un ingeniero estructurista es diseñar una estructura que sea capaz de resistir todas las cargas a las que estará sujeta mientras sirva a su propósito durante su tiempo de vida previsto. En el diseño de una estructura, el ingeniero debe, por lo tanto, considerar todas las cargas reales que actuarán en la estructura. Las cargas que operan en las estructuras de ingeniería civil pueden ser agrupadas de acuerdo con su naturaleza y fuente en tres clases: (1) *cargas muertas*, debidas al peso propio del sistema estructural y a cualquier otro material unido a ella de manera permanente; (2) *cargas vivas*, las cuales son móviles o están en movimiento por la manera en que la estructura es usada; y (3) *cargas debidas al ambiente*, que son causadas por los efectos ambientales como el viento, la nieve y los terremotos.

Además de estimar las magnitudes de las cargas de diseño, el ingeniero también debe considerar la posibilidad de que estas actúen de manera simultánea en la estructura. La estructura finalmente se diseña para que resista las combinaciones de cargas más desfavorables que posiblemente ocurran en su vida útil.

Las cargas mínimas y la combinación de estas, para las que una estructura se debe diseñar, se especifican en los códigos de construcción. El código nacional proporciona una orientación para edificios y puentes y otro tipo de estructuras incluidas en las *Normas para las Cargas de Diseño Mínimo en Edificios y otras Estructuras* de la Sociedad Americana de Ingeniería Civil (ASCE por sus siglas en inglés) (ASCE/SEI 7-10) [1],* en el *Manual para Ingenierías Ferroviarias* [26], en las *Normas Estandarizadas para Puentes de Carreteras* [36], y en el *Código Internacional de Construcción* [15].

* El número entre paréntesis se refiere a la lista de los elementos que aparecen en la bibliografía.

A pesar de que los requerimientos de cargas de los códigos de construcción locales se basan en los códigos aquí listados, los códigos locales pueden contener condiciones adicionales que garanticen los ambientes regionales como terremotos, tornados, huracanes, fuertes nevadas y similares. Por ello, son generalmente documentos oficiales que se promulgan para salvaguardar el bienestar y la seguridad pública, y los ingenieros deben estar familiarizados con el código de diseño donde la estructura será construida.

Estas cargas descritas en los códigos se sustentan usualmente en experiencias pasadas y estudios, y son las mínimas para las que deben ser diseñadas diferentes tipos de estructuras. Sin embargo, el ingeniero debe decidir si la estructura estará sujeta a cualquier otra carga además de las consideradas por el código y, de ser así, tendrá que diseñar la estructura para resistir estas cargas. Recuerde que el ingeniero es el máximo responsable de la seguridad del diseño de una estructura.

El objetivo de este capítulo es describir los tipos de cargas más comunes utilizadas en el diseño de las estructuras e introducir los conceptos básicos de la estimación de cargas. Antes de discutir los tipos de cargas específicas, empezaremos con una breve descripción de sistemas típicos estructurales utilizados en los edificios y puentes para la transmisión de cargas al suelo. En esta primera sección también discutiremos el concepto de carga y área tributaria. Después, describiremos las cargas muertas y hablaremos sobre las cargas vivas para edificios y puentes, incluyendo sus efectos dinámicos o de impacto. Abordaremos las cargas por efectos ambientales, incluyendo cargas de viento, de nieve y de sismo. Mostraremos una breve discusión de las presiones hidrostáticas, del suelo y los efectos térmicos, y concluiremos con una cuestión sobre las combinaciones de cargas usadas para estos propósitos del diseño.

El material presentado en este documento se fundamenta principalmente en las *Normas para las Cargas de Diseño Mínimo en Edificios y otras Estructuras* de la Sociedad Americana de Ingeniería Civil (ASCE/SEI 7-10), comúnmente referido como *Norma ASCE 7*, el cual es quizá la norma más ampliamente usada en la práctica. Puesto que la intención es familiarizar al lector con los temas generales de cargas en las estructuras, no se incluyen muchos detalles. No hace falta decir que las disposiciones completas del código de construcción local o de la *Norma ASCE 7*[†] se deben consultar para el diseño de las estructuras.

2.1 Sistemas estructurales para la transmisión de cargas

En la mayoría de los edificios comunes, puentes y otras instalaciones de ingeniería, dos o más sistemas estructurales básicos, descritos en la sección 1.3 (por ejemplo, vigas, columnas, losas y armaduras, etc.), se ensamblan entre sí para formar sistemas estructurales que transmitan las cargas aplicadas en él al suelo. Tales sistemas estructurales son conocidos como sistemas de *marcos* o *marcos estructurales*, y sus componentes reciben el nombre de *elementos estructurales*.

Ejemplo de un sistema que soporta la carga de un edificio de un solo piso se muestra en la Fig. 2.1(a). Este sistema consiste en una losa de techo de

[†] Las copias de esta norma se pueden comprar en la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles de 1801 Alexander Bell Drive, Reston, Virginia 20191.

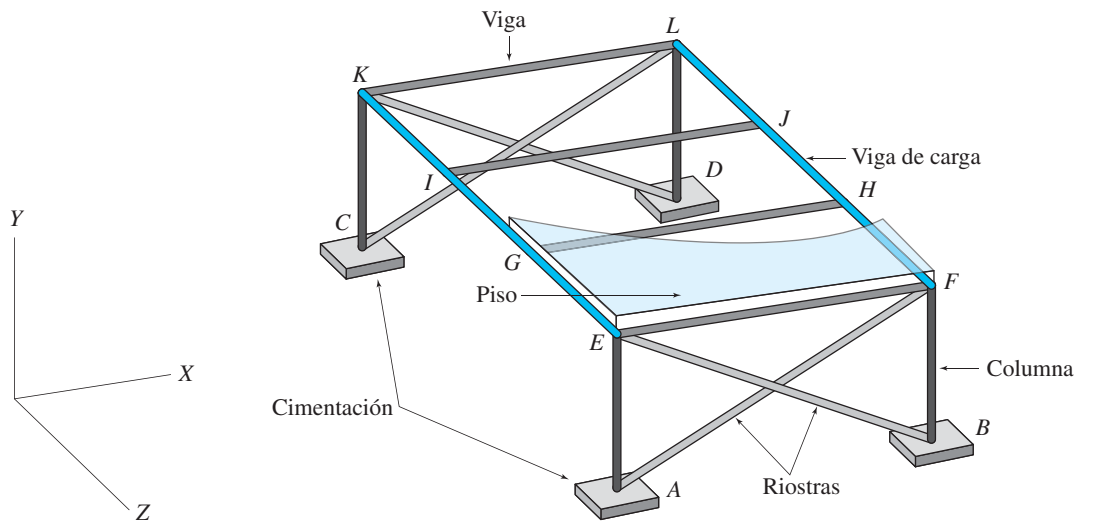
concreto reforzado que descansa sobre cuatro vigas de acero, las cuales, a su vez, están sostenidas por dos vigas grandes llamadas *vigas principales*. Las vigas principales están soportadas por cuatro columnas ancladas a una zapata a nivel de piso. Debido a que las conexiones se asumen como conexiones atornilladas (por ejemplo, a cortante o articuladas), solo pueden transmitir fuerzas pero no momentos. Por lo tanto, se necesitan las riostras diagonales para resistir las cargas horizontales causadas por viento y sismos. En la Fig. 2.1(a) este refuerzo transversal se muestra por sencillez, en dos de los lados del edificio. Tales refuerzos (u otros medios de transmisión de las fuerzas horizontales como muros de contante) se deben colocar en los cuatro lados del edificio para resistir las cargas aplicadas en cualquier dirección en el plano horizontal. Nótese que las características arquitectónicas, como los acabados o muros que no son de carga, puertas y ventanas, no son consideradas para ser parte de la carga a resistir en el sistema estructural, a pesar de que sus pesos están considerados en los cálculos de diseño.

El sistema estructural de la mayoría de los edificios y puentes está diseñado para resistir cargas tanto en dirección horizontal como vertical. Las cargas verticales, principalmente debidas a la ocupación, peso propio, nieve o lluvia, son comúnmente llamadas *cargas gravitacionales* (a pesar de que no todas las cargas verticales son causadas por la gravedad). Las cargas horizontales, que son causadas principalmente por el viento y los sismos, se conocen como *cargas laterales*. El término de trayectoria de carga es usado para describir la manera en que la carga actuante en el edificio (o puente) es transmitida, a través de varios elementos del sistema estructural, hacia el suelo.

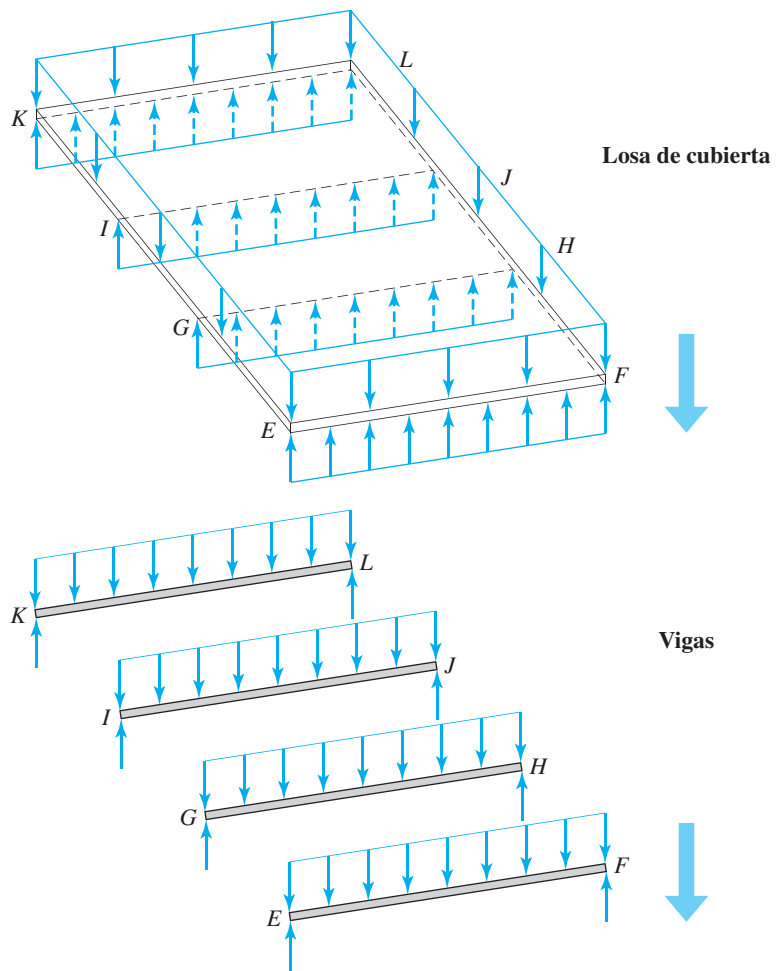
La trayectoria de la carga vertical (gravitacional) de un edificio de un solo piso, Fig. 2.1(a), se presenta en la Fig. 2.1(b). Cualquier carga vertical de área distribuida (fuerza por área), provocada por la nieve y aplicada a la losa de cubierta, se transmite primero a las vigas *EF*, *GH*, *IJ* y *KL* como una carga lineal distribuida (fuerza por unidad de longitud). Como las vigas secundarias están soportadas por las vigas principales *EK* y *FL*, sus reacciones se convierten en fuerzas concentradas sobre estas (en dirección inversa), así se transmiten las cargas del techo a las vigas principales como fuerzas concentradas del punto *A* al *F*. De manera similar, las vigas principales están soportadas por las columnas *AE*, *BF*, *CK* y *DL*, que transfieren la carga, a través de sus reacciones, como fuerza de compresión axial a las columnas. Las columnas a su vez transmiten las cargas hacia las zapatas (de *A* hasta *D*), las cuales finalmente distribuyen la carga al suelo. Nótese que las riostras diagonales no participan en la transmisión de carga gravitacional.

La Fig. 2.1(c) muestra la dirección de la carga horizontal (lateral) para el mismo edificio de un solo piso. Cualquier carga horizontal (como las debidas al viento, o a sismos) se transmite por la losa de azotea como fuerzas laterales en el plano de los dos marcos verticales, *AEFB* y *CKLD*, sin perder el equilibrio. Como se ve en la Fig. 2.1(c), cada marco vertical está compuesto de una viga, dos columnas y dos riostras o refuerzos inclinados, unidos todos por una conexión articulada. Tales marcos, llamados *marcos arriostrados*, esencialmente actúan como armaduras bajo la acción de las cargas laterales, con las riostras transmitiendo la carga del nivel superior a las zapatas.

En algunos edificios, especialmente los diseñados con muros de contante, núcleo de elevadores y marcos resistentes a momento, se emplean en lugar de los marcos arriostrados, para transmitir cargas laterales. A pesar de la preferencia de uso de cualquier sistema estructural, el concepto básico de transmisión de carga



(a) Sistema estructural de un edificio de un nivel



(b) Trayectoria de cargas verticales (Gravedad)

FIG. 2.1

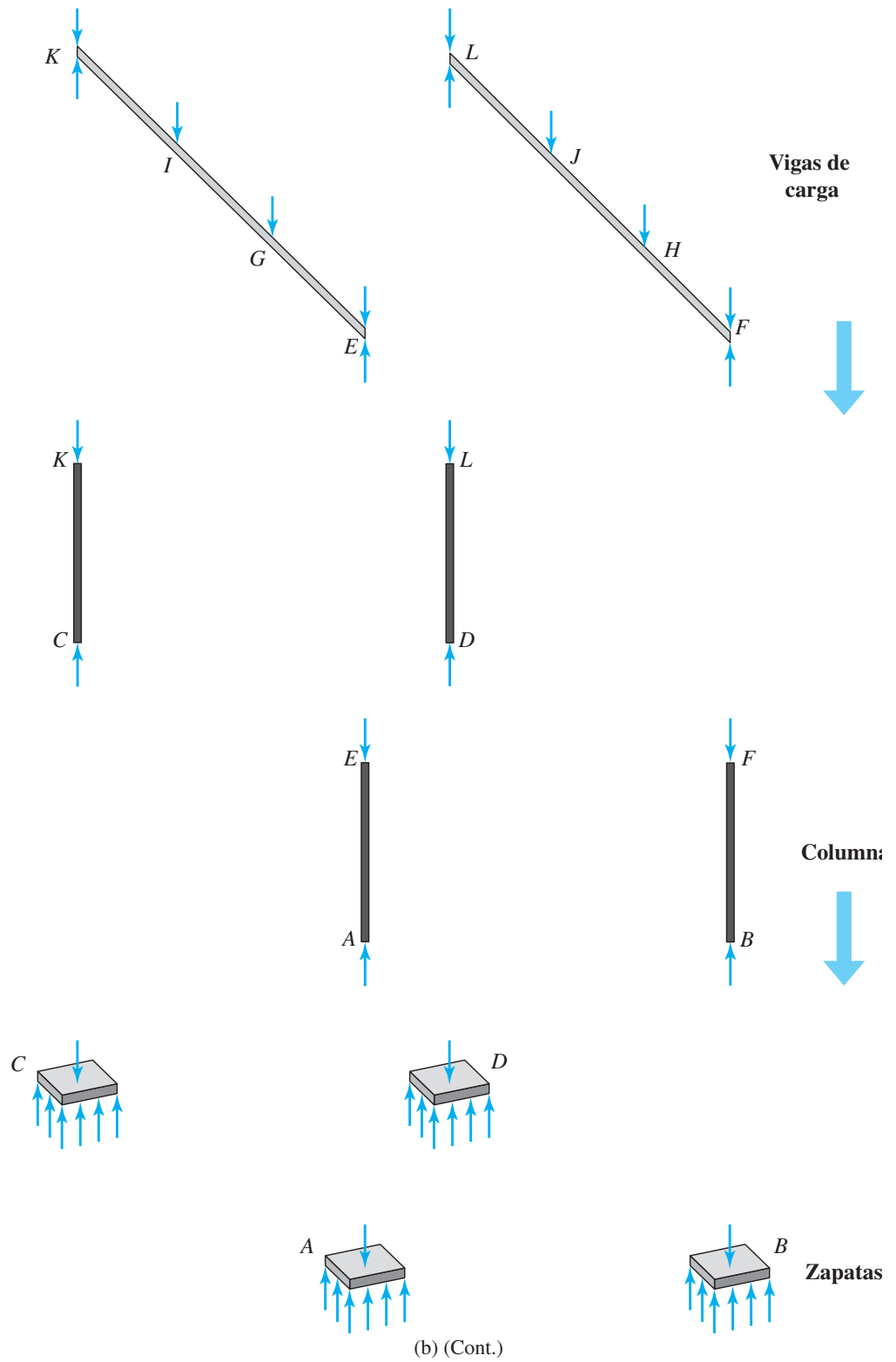
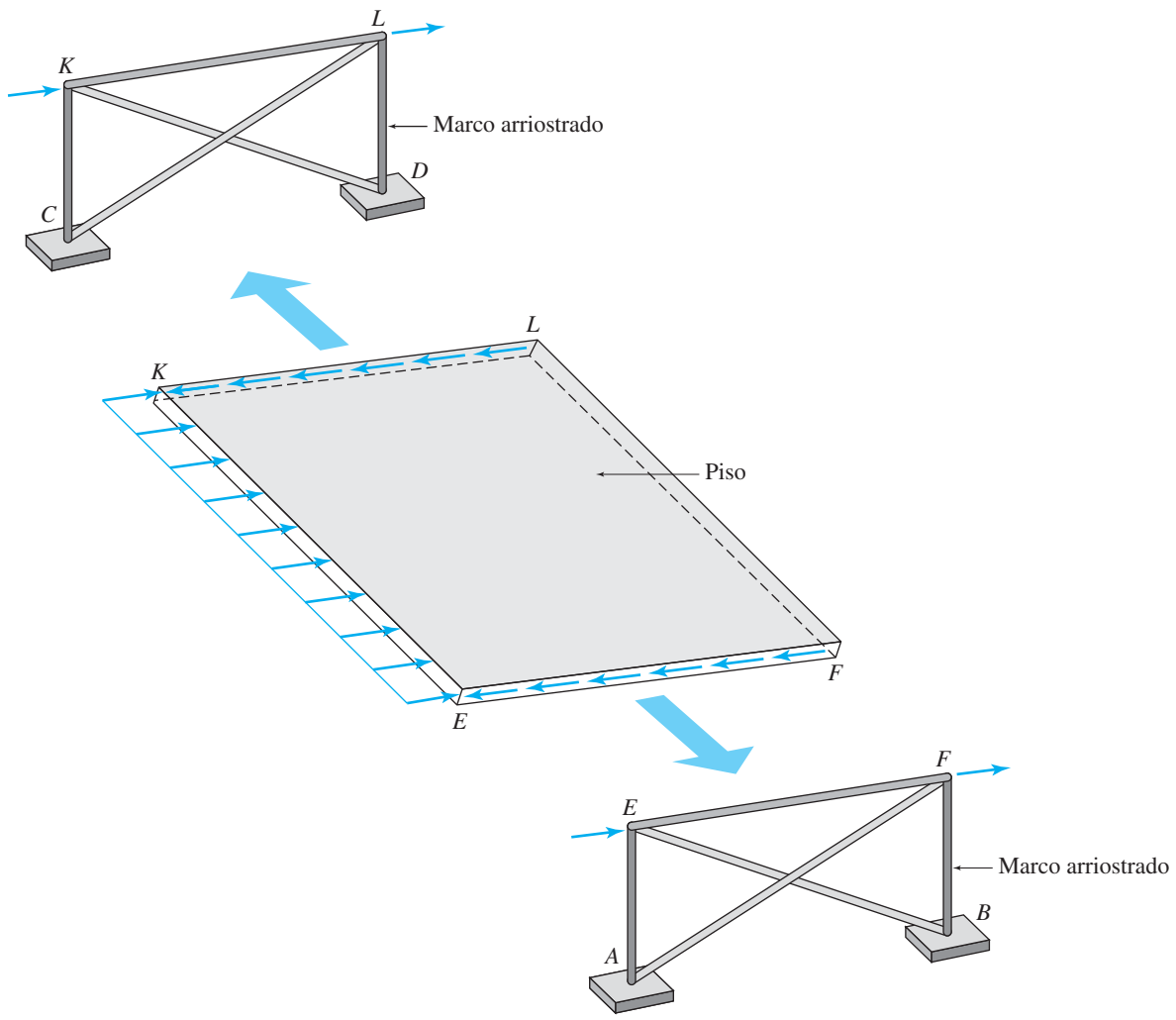


FIG. 2.1 (Cont.)



(c) Trayectoria de cargas (laterales)

FIG. 2.1 (Cont.)



FIG. 2.2 Edificio de varios pisos con marcos arriostrados para transmitir las cargas laterales provocadas por viento y sismos. Courtesy of Walterio A. López

FIG. 2.3 Este edificio con muros de mampostería se emplea para los núcleos de elevadores y escaleras para resistir las cargas laterales debidas al viento y a sismos.

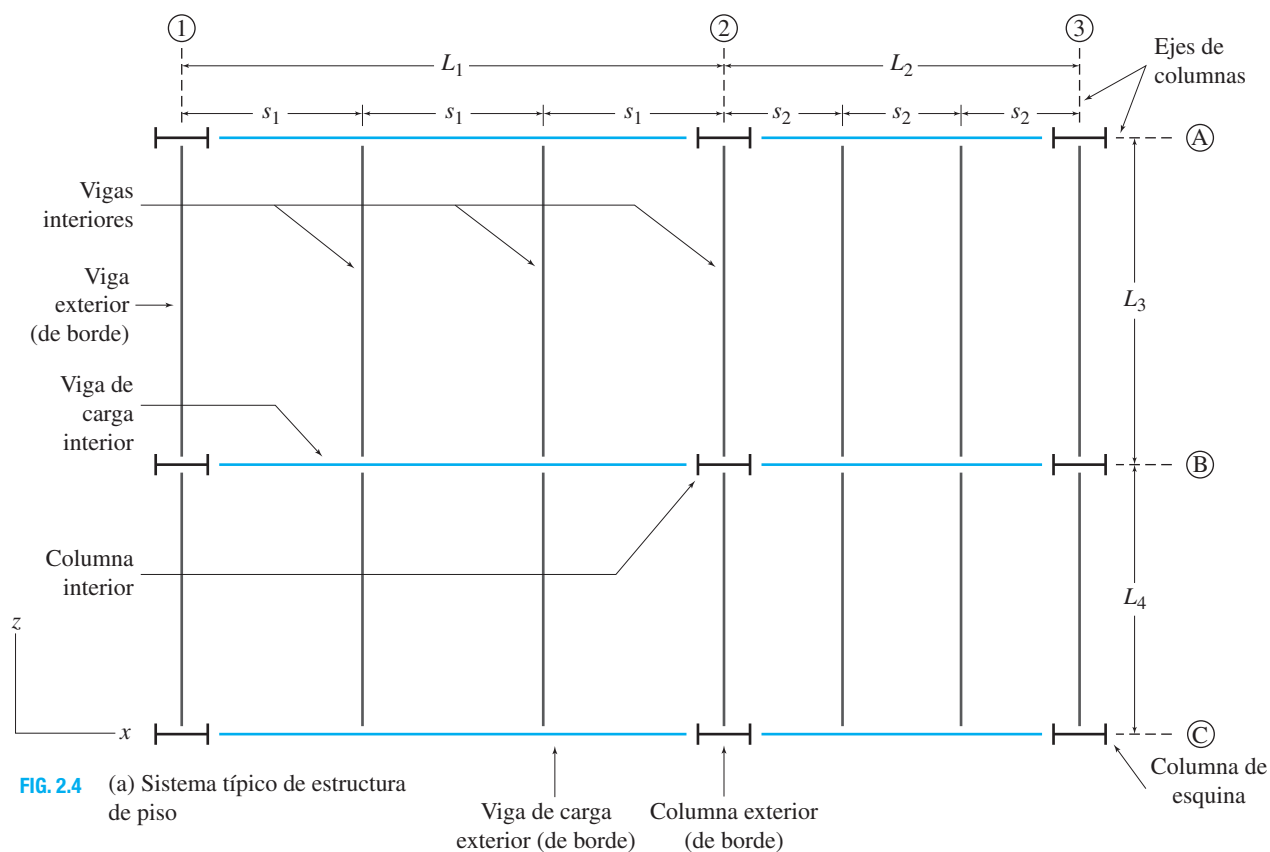
Copyright © American Institute of Steel Construction.
Reprinted with permission. All rights reserved



permanece igual, es decir, las cargas aplicadas se llevan de manera continua de un elemento a otro hasta que han sido completamente transmitidas al suelo.

Sistemas de piso y áreas tributarias

Como en el caso de un edificio de un solo nivel, discutido previamente, los pisos y la losa de techo de un edificio de varios niveles, así como la cubierta de piso de un puente, son normalmente soportados por rejillas rectangulares de vigas secundarias y vigas principales llamadas *sistemas de piso*. La Fig. 2.4 muestra una



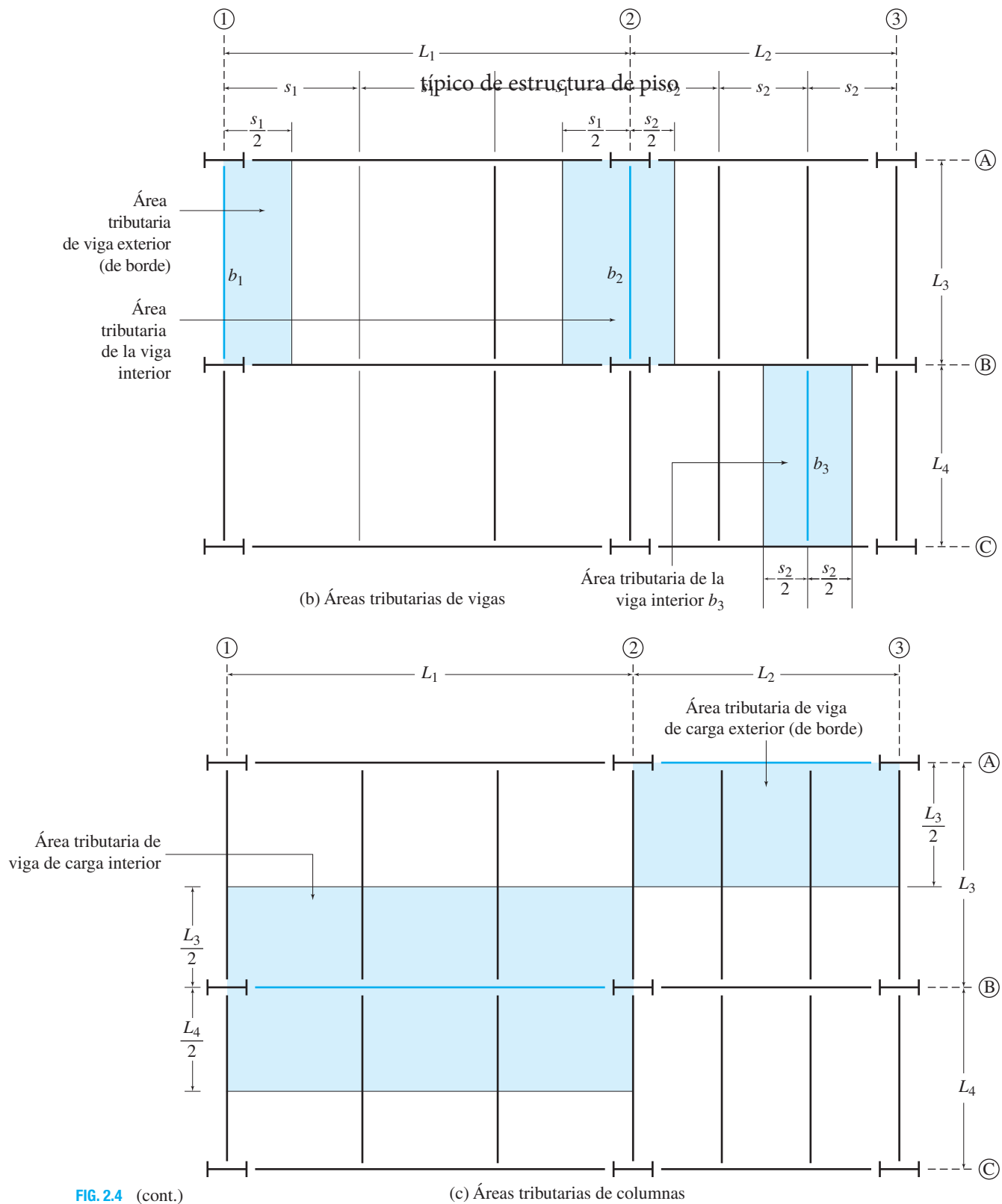


FIG. 2.4 (cont.)

(c) Áreas tributarias de columnas

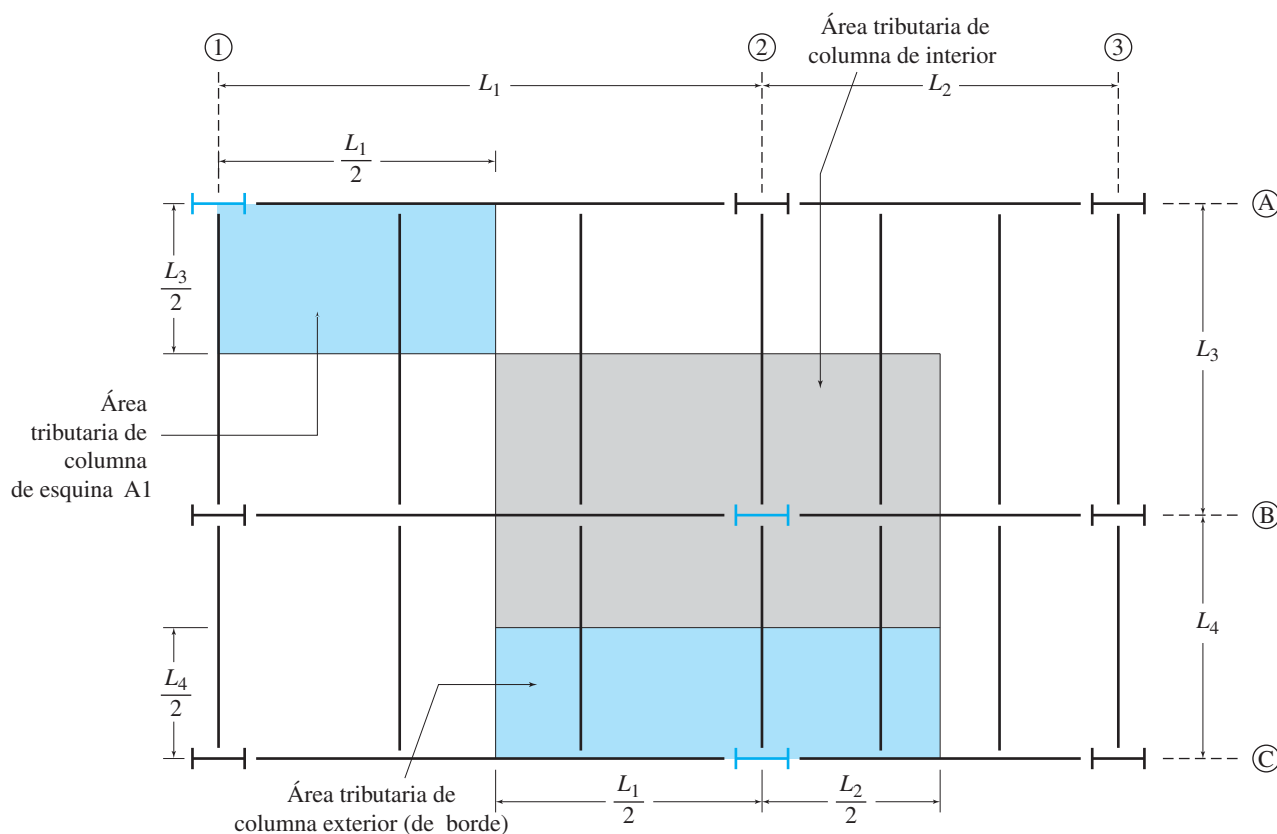


FIG. 2.4 (cont.)

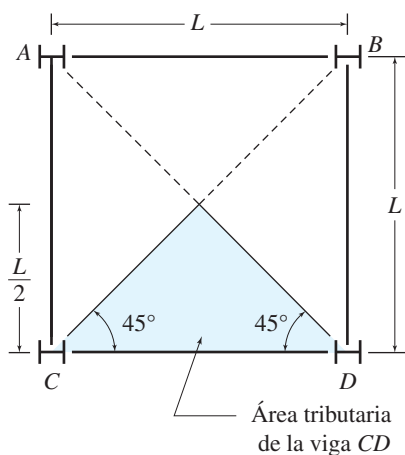
(d) Áreas tributarias de columnas

vista superior, o trabes en planta, de un sistema de piso típico. Como es común en la práctica, los ejes de columnas en dos direcciones (X y Z) son identificados con letras y números respectivamente. Advierta que los pequeños espacios (espacios en blanco) dejados en las intersecciones de los elementos, demuestran que los elementos están conectados por una conexión articulada o de corte (no resistentes a momento). La losa (no mostrada) descansa en las vigas, y transmite su carga a las vigas principales a través de las vigas secundarias y luego a las columnas.

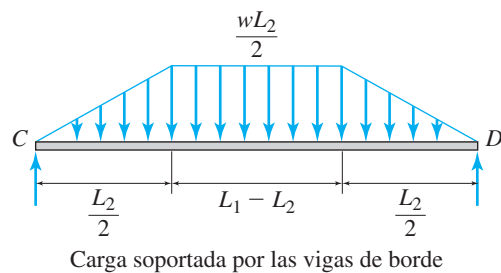
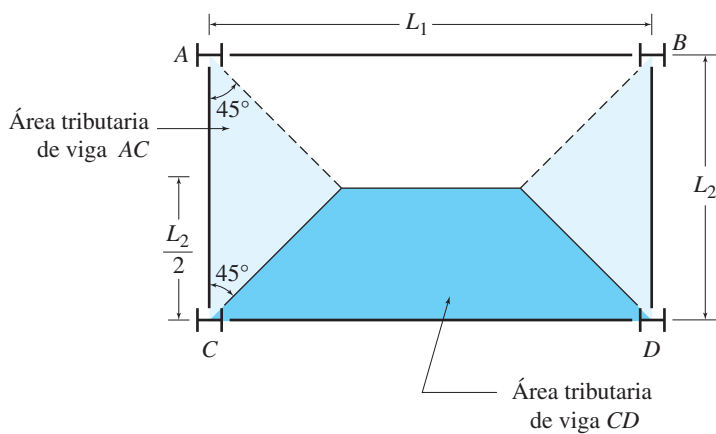
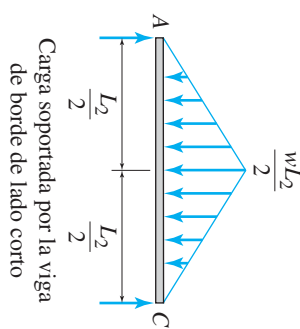
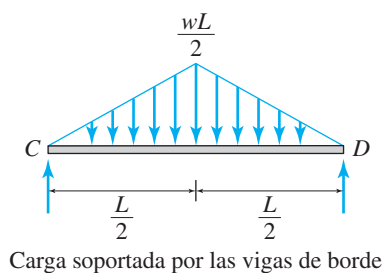
Durante el proceso de diseño, el ingeniero necesita determinar cuánto del total de la carga distribuida sobre el área de la losa será soportada por cada elemento (por ejemplo, la viga secundaria, la principal o la columna) del sistema de piso. La porción de área de losa cuya carga es llevada por algún elemento en particular se denomina *área tributaria* del elemento.

Las losas usadas en los edificios y puentes son generalmente diseñadas como losas en una dirección. Estas losas se supone que están apoyadas en dos lados y se flexionan en una dirección como vigas anchas. Para los sistemas de piso de una dirección, el área tributaria es considerada rectangular, de una longitud igual a la de la viga y de ancho igual a la mitad de la separación de las vigas adyacentes a cada lado, como se muestra en la Fig. 2.4(b). El área tributaria de las vigas principales y columnas se define de manera similar y se muestra en las Figuras 2.4(c) y (d), respectivamente. El procedimiento para el cálculo de las cargas en los elementos de un sistema de piso con losa en una dirección se ilustra en el Ejemplo 2.1.

En los sistemas de piso con vigas cuya relación de espaciamiento entre ellas es menor a 1.5 (por ejemplo $L/s < 1.5$ – ver Fig. 2.4(a)), las losas se diseñarán en dos direcciones, apoyadas en sus cuatro lados. Tales losas se flexionan en dos direcciones como las placas, y transmiten su carga a todas las cuatro vigas de apoyo a lo largo de sus bordes. Las Figuras 2.5(a) y (b) muestran las áreas tributarias de las vigas de borde que soportan las losas cuadradas y rectangulares, respectivamente. Estas figuras también exhiben las cargas que aguantan las vigas debido a la presión uniformemente distribuida w (fuerza por unidad de área) aplicada en la superficie de la losa.



(a) Losa cuadrada en dos direcciones



(b) Losa rectangular en dos sentidos

FIG. 2.5

Ejemplo 2.1

El piso de un edificio, mostrado en la Fig. 2.6(a), está sujeto a una carga uniformemente distribuida de 3.5 kPa sobre su superficie. Determine las cargas actuantes sobre todos los elementos del sistema de piso.

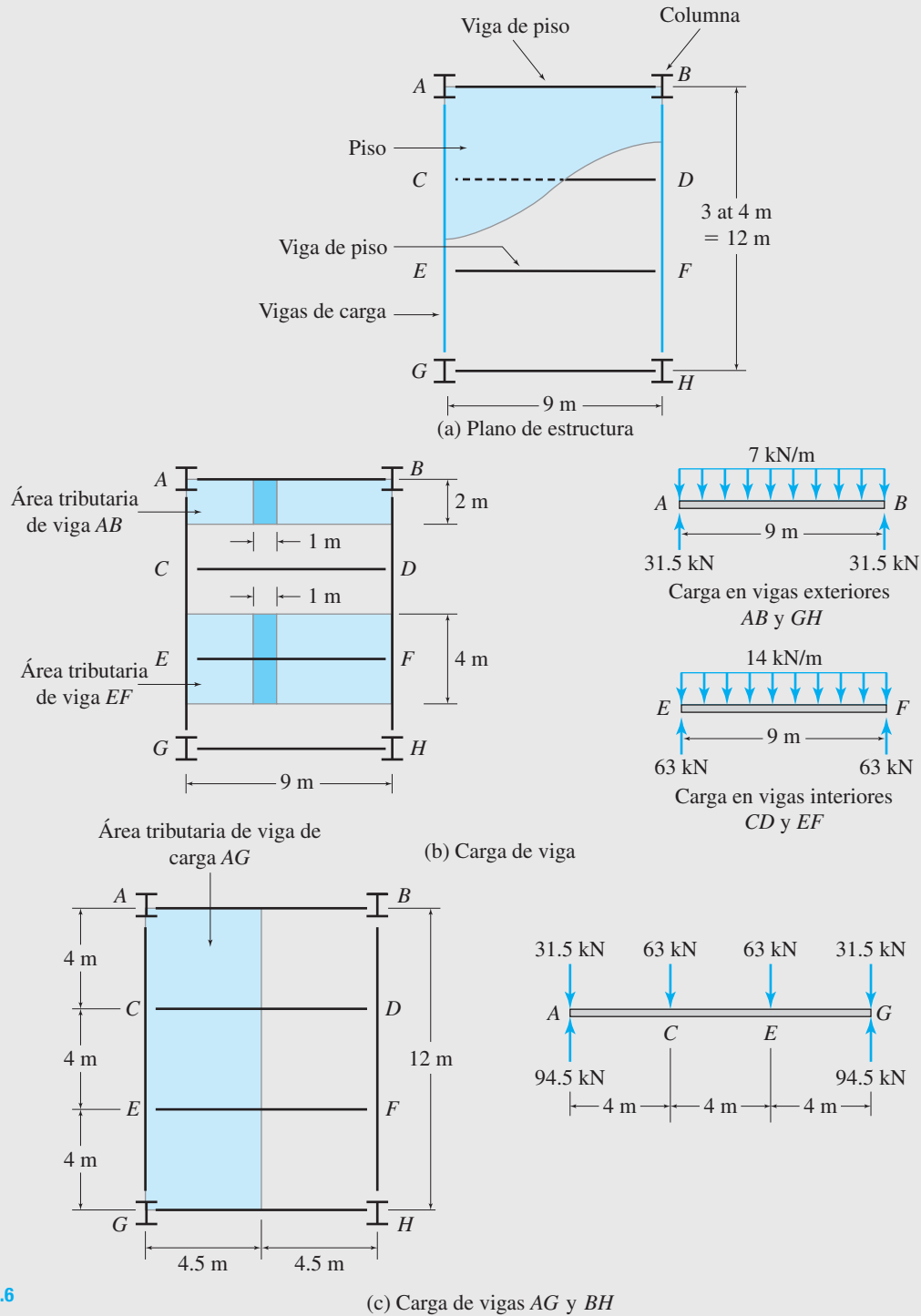
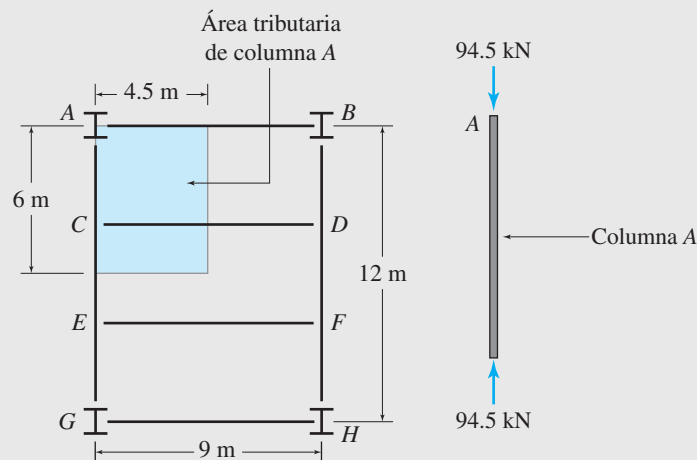


FIG. 2.6

(c) Carga de vigas AG y BH

continúa



(d) Carga axial de compresión en columnas A, B, G, y H

FIG. 2.6 (cont)

Solución

Vigas. Las áreas tributarias de las vigas exteriores AB y las interiores EF se muestran en la Fig. 2.6(b). Considerando las vigas exteriores AB tenemos que, por cada metro de longitud de viga de soporte, la carga aplicada sobre una franja de área de losa es $(= 2\text{ m} \times 1\text{ m}) = 2\text{ m}^2$. Por lo tanto, la carga transmitida de cada viga a cada metro de longitud de la viga AB es:

$$(3.5\text{ kN/m}^2)(2\text{ m})(1\text{ m}) = 7\text{ kN}$$

Esta carga de 7 kN/m se distribuye uniformemente a lo largo de la viga, tal como se muestra en la Fig. 2.6(b). Esta figura también muestra las reacciones que ejercen las vigas de soporte en los extremos de la viga. Mientras se aumenta la carga de la viga simétricamente las magnitudes de las reacciones son iguales a la mitad del total de la carga que actúa sobre la viga:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} (7\text{ kN/m}) (9\text{ m}) = 31.5\text{ kN}$$

La carga en la viga interna EF se calcula de manera similar. A partir de la 2.6(b) sabemos que la carga transmitida a cada tramo de un metro de la viga EF es

$$(3.5\text{ kN/m}^2) (4\text{ m}) (1\text{ m}) = 14\text{ kN}$$

Esta carga se comporta como una carga uniformemente distribuida de magnitud 14 kN/m a lo largo de la longitud de la viga. Las reacciones al interior de la viga son:

$$R_E = R_F = \frac{1}{2} (14\text{ kN/m}) (9\text{ m}) = 63\text{ kN}$$

Debido a la simetría de las vigas y de las cargas, las vigas restantes CD y GH están sujetas a las mismas cargas como las vigas BF y AB, respectivamente.

Respuesta.

Vigas principales. Las cargas de las vigas principales se obtienen de manera conveniente aplicando las reacciones de las vigas secundarias como cargas concentradas (en dirección inversa) en sus correspondientes puntos de apoyo (conexiones) sobre la viga principal o de carga. Como se muestra en la Fig. 2.6(a), la viga AG soporta las vigas exteriores AB y GH en los puntos A y G, por lo que las reacciones (31.5 kN) de las dos vigas exteriores están aplicadas en estos puntos. De manera similar, las reacciones de las dos vigas interiores (CD y EF) están aplicadas en los puntos C y E, donde estas vigas se apoyan sobre las vigas principales. Nótese que la suma de las magnitudes de las cuatro cargas concentradas que se aplican a las vigas principales es igual a su área tributaria (4.5 m x 12 m) multiplicadas por la intensidad de carga en la losa (3.5 kN/m²), es decir (ver Fig. 2.6(c))

$$31.5\text{ kN} + 63\text{ kN} + 63\text{ kN} + 31.5\text{ kN} = (3.5\text{ kN/m}^2)(4.5\text{ m})(12\text{ m}) = 189\text{ kN}$$

continúa

Como se muestra en la Fig. 2.6, las reacciones finales de las vigas principales son

$$R_A = R_G = \frac{1}{2} [2(31.5) + 2(63)] = 94.5 \text{ kN}$$

Debido a la simetría, las cargas de la viga principal BH son las mismas que en la viga AG .

Respuesta.

Columnas. Como se muestra en la Fig. 4.6(d), la carga axial en la columna A se obtiene aplicando las reacciones $R_A = (94.5 \text{ kN})$ de la viga AG en la columna en dirección opuesta. Esta carga axial puede ser evaluada multiplicando el área tributaria ($4.5 \text{ m} \times 6 \text{ m}$) de la columna A por la intensidad de la carga aplicada en la losa (3.5 kN/m^2), es decir (ver Fig. 2.6(d))

$$(3.5 \text{ kN/m}^2)(4.5 \text{ m})(6 \text{ m}) = 94.5 \text{ kN}$$

Debido a la simetría, las tres columnas restantes están sujetas a la misma carga axial de compresión igual que la columna A .

Respuesta.

Finalmente, la suma de las cargas axiales soportadas por las cuatro columnas debe ser igual al producto de la superficie de la losa, multiplicada por la intensidad de la carga en la losa:

$$4(94.5 \text{ kN}) = (3.5 \text{ kN/m}^2)(9 \text{ m})(12 \text{ m}) = 378 \text{ kN}$$

Comprobación.

En el ejemplo anterior hemos considerado solo las cargas externas aplicadas sin tomar en cuenta las del peso propio de la losa y de otros elementos del sistema estructural. En la siguiente sección discutiremos la forma de calcular el peso propio de un sistema estructural.

2.2 Cargas muertas

Las *cargas muertas* son cargas de gravedad de magnitud constante y en ubicaciones fijas que actúan de manera permanente en la estructura. Tales cargas consisten en el peso propio de la estructura, así como de todos los materiales y equipos colocados de manera permanente en el sistema estructural. Por ejemplo, las cargas muertas de una estructura de un edificio incluyen el peso de los marcos, los sistemas de arriostramiento, los pisos, techos, plafones, muros, escaleras, sistemas de calefacción y enfriamiento, plomería y sistemas eléctricos, etcétera.

El peso de la estructura no se conoce con antelación al diseño y normalmente se asume con base en la experiencia. Después de que la estructura se analiza y el tamaño de los elementos es determinado, se calcula el peso real usando el tamaño de los elementos y el peso por unidad de longitud de los materiales. El peso real es entonces comparado con el asumido y, de ser necesario, se revisa el diseño. El peso por unidad de la mayoría de los materiales comunes en la construcción se muestra en la Tabla 2.1. El de los equipos permanentes, tales como sistemas de calefacción o de aire acondicionado, se obtiene generalmente del fabricante.

Tabla 2.1 UNIDADES DE PESO DE MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

Material	Unidad de Peso	
	kg/m ³	kN/m ³
Aluminio	165	25.9
Ladrillo	120	18.8
Concreto reforzado	2400	23.6
Acero Estructural	7850	77
Madera	40	6.3

Ejemplo 2.2

El sistema de piso de un edificio consiste en una losa de concreto reforzado de 5 in de espesor, soportada por cuatro vigas, las cuales a su vez son cargadas por dos vigas principales de acero, como se muestra en la Fig. 2.7(a). El área de la sección transversal de las vigas de la losa es de 14.7 in^2 , y de 52.3 in^2 respectivamente. Determine la carga muerta que actúa sobre las vigas CG , DH y la viga principal AD .

continúa

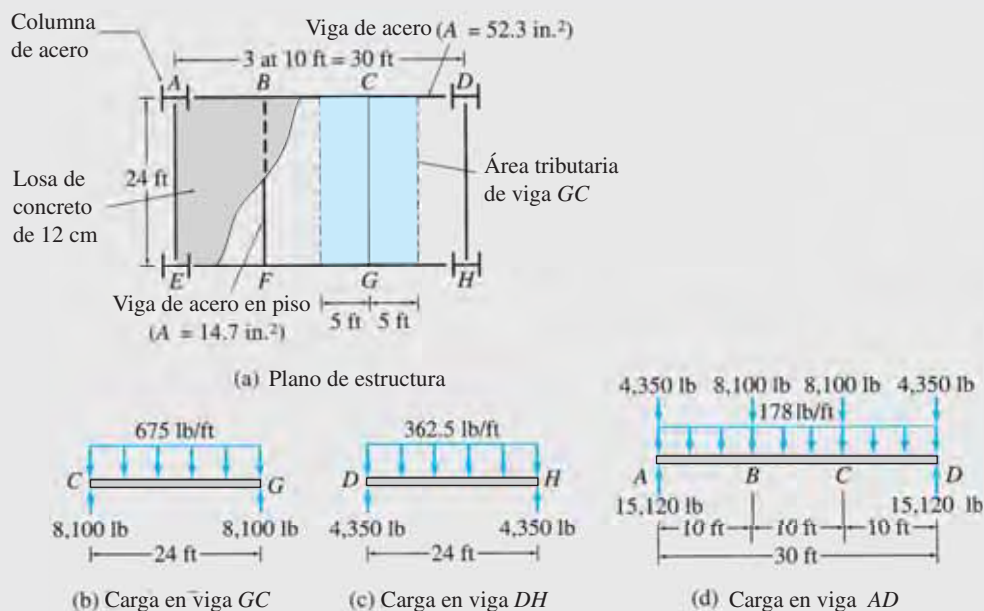


FIG. 2.7

Solución

Viga CG. Como se muestra en la Fig. 2.7(a), el área tributaria de la viga CG tiene un ancho de 3 m (es decir, la mitad de la distancia entre las vigas CG y BF más la mitad de la distancia entre las vigas CG y DH) y una longitud de 7.3 m. Usamos el peso unitario del concreto reforzado y del acero estructural de la Tabla 2.1 para calcular la carga muerta por unidad de longitud de la viga CG como sigue:

$$\text{Losa de concreto: } (150 \text{ lb/ft}^3)(10 \text{ ft})(1 \text{ ft})\left(\frac{5}{12}\right) \text{ ft} = 625 \text{ lb}$$

$$\text{Viga de acero: } (490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{14.7}{144} \text{ ft}^2\right)(1 \text{ ft}) = 50 \text{ lb}$$

$$\text{Total Respuesta} = \overline{675 \text{ lb}}$$

Respuesta.

Así, la carga de 675 lb/ft es uniformemente distribuida en la viga, como se ve en la Fig. 2.7(b). Esta figura también muestra las reacciones ejercidas en la viga principal de soporte por los extremos de la viga. Puesto que la viga está cargada simétricamente, las magnitudes de las reacciones son:

$$R_C = R_G = \frac{1}{2} (675 \text{ lb/ft})(24 \text{ ft}) = 8100 \text{ lb}$$

Tenga en cuenta que estas reacciones representan las cargas hacia abajo, que son transmitidas a la viga principal AD y EH en los puntos C y G , respectivamente.

Viga DH. El área tributaria de la viga DH es de 5 ft de ancho y 24 ftm de largo. La carga muerta por metro de largo de la viga se calcula como:

$$\text{Losa de concreto: } (150 \text{ lb/ft}^3)(5 \text{ ft})(1 \text{ ft})\left(\frac{5}{12}\right) \text{ ft} = 312.5 \text{ lb}$$

$$\text{Viga de acero: } (\text{igual a la viga } CG) = 50.0 \text{ lb}$$

$$\text{Total Respuesta} = \overline{362.5 \text{ lb}}$$

Respuesta.

continúa

Como se muestra en la Fig 2.7(c), las reacciones son:

$$R_D = R_H = 1/2 (362.5 \text{ lb/ft})(24 \text{ ft}) = 4350 \text{ lb}$$

Viga principal AD. Debido a la simetría del sistema de cargas y vigas, las cargas que actúan sobre las vigas *BF* y *AE* son iguales a las de las vigas *CG* y *DH*, respectivamente. La carga sobre la viga *AD* consiste en la distribución uniforme del propio peso de la carga, la cual tiene una magnitud de

$$(490 \text{ lb/ft}^3) \left(\frac{52.3}{144} \text{ ft}^2 \right) (1 \text{ ft}) = 178 \text{ lb}$$

Y la carga concentrada, transmitida por la viga en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, se muestra en la Fig. 2.7(d)

Respuesta.

2.3 Cargas vivas

Las *cargas vivas* son cargas de magnitud variable y/o de posición causadas por el uso de la estructura. Algunas veces, el término carga viva se emplea para referirse a todas las cargas en la estructura que no son cargas muertas, inclusive las cargas ambientales, provocadas por la nieve o el viento. Sin embargo, por la probabilidad de que se den las cargas ambientales, puesto que son diferentes de aquellas debidas al uso de la estructura, los códigos vigentes utilizan el término carga viva para referirse solo a aquellas cargas variables causadas por el uso de la estructura. En este último contexto el presente libro empleará el término.

Las magnitudes de diseño de las cargas vivas son normalmente especificadas en los códigos de diseño. La posición de la carga viva puede cambiar, así es que cada elemento de la estructura debe ser diseñado para la posición de la carga que causa los máximos esfuerzos en el elemento. Distintos elementos de la estructura pueden alcanzar su nivel de esfuerzo máximo en diferentes posiciones de la carga dada. Por ejemplo, así como un camión se mueve a través de un puente de armaduras, los esfuerzos en la armadura varían así como el camión se mueve. Si el elemento *A* está sujeto a su máximo esfuerzo cuando el camión está en cierto punto *x*, entonces otro elemento *B* puede alcanzar su nivel máximo cuando el camión está en una posición diferente y sobre el puente. Los procedimientos para determinar la posición de la carga viva en un punto en el que la respuesta característica, como el esfuerzo resultante o la deflexión, de una estructura es máximo (o mínimo) será discutido en capítulos subsecuentes.

Cargas vivas para edificios

Las cargas vivas para edificios se caracterizan usualmente por estar uniformemente distribuidas sobre superficies en kilos por metro cuadrado (o libras por pie cuadrado). Las cargas vivas de piso más comunes se muestran en la tabla 2.2. Para una lista completa de sus distintos tipos para edificios y para las disposiciones relativas a cargas vivas de azoteas, cargas concentradas y reducción de cargas vivas, el lector puede consultar la *Norma ASCE 7*.

Cargas vivas para puentes

Las cargas vivas causadas por el tránsito vehicular en puentes de autopistas están especificadas por la Asociación Americana de Funcionarios de Carre-

Tabla 2.2 CARGAS VIVAS MÍNIMAS DE PISO PARA EDIFICIOS

Ocupación o Uso	Carga Viva	
	kg/m ³	kN/m ³
Hospitales, viviendas residenciales, departamentos, hoteles y salones de clase	40	1.92
Bibliotecas, salas de operación y laboratorios	60	2.87
Salones y salas de baile, restaurantes, gimnasios	100	4.79
Fábricas de manufactura ligera, bodegas de almacenamiento ligero	125	6.00
Fábricas de manufactura pesada, bodegas de almacenamiento pesado	250	11.97

Fuente: Basada en los datos del ASCE/SEI 7-05 *Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y otras Estructuras*

teras y Transportación del Estado (AASHTO, por sus siglas en inglés) en la *Norma de Especificaciones para Puentes Carreteros* [36], más conocido como *Norma AASHTO*.

Ya que la carga más pesada para puentes carreteros es causada usualmente por camiones, las especificaciones AASHTO definen dos sistemas de camiones tipo, los *camiones H* y los *camiones HS*, para representar las cargas vehiculares para fines de diseño.

Las cargas de camiones tipo *H* (o cargas *H*), representadas por camiones de dos ejes, son designadas por la letra *H*, seguida del peso total del camión y la carga en toneladas, así como del año en que la carga se especificó. Por ejemplo, la carga H20-44 representa un código para un camión de dos ejes, cuyo peso de 20 toneladas fue inicialmente instituido en la edición de 1944 de la Norma AASHTO. La separación de los ejes, la carga por eje y la especificación entre llantas para el camión *H* se muestra en la Fig. 2.8(a).

Las cargas de camión *HS* (o carga *HS*) representan a un tractor de dos ejes con un semirremolque de un eje. Estas cargas se representan por las letras *HS*, seguidas del peso total correspondiente al camión *H* en toneladas y el año en que fue inicialmente especificada. La separación de los ejes, la carga por eje y la separación de entre las llantas para el camión *HS* se muestra en la Fig. 2.8(a). Nótese que la separación entre el eje trasero del camión y el eje del semirremolque debe ser entre 14 ft (4.26 m) y 30 ft (9.14 m), y la separación que genera el máximo esfuerzo debe ser usada para el diseño.

Según el tipo de tránsito que se espera en el puente se debe emplear un tipo particular de camión de carga para su diseño. El H20-44 y el HS20-44 son los más usados; las cargas por eje se muestran en la Fig. 2.8(a).

Además de la carga mencionada de un solo camión, el cual se debe colocar para producir el efecto más desfavorable en un elemento a diseñar, las normas AASHTO especifican que se debe considerar una carga de carril, consistente en una carga distribuida uniformemente y combinada con una carga concentrada. El carril de carga representa el efecto de una carga de vehículos de mediano peso contenido en un camión pesado. La carga de carril debe además ser colocada para que genere los máximos esfuerzos en el elemento considerado. Como ejemplo, la carga de carril correspondiente al camión de carga H20-44 y HS20-44 se muestra en la Fig. 2.8(b). El tipo de carga, como el tipo de camión o carga de carril, que genere el máximo esfuerzo en el elemento,

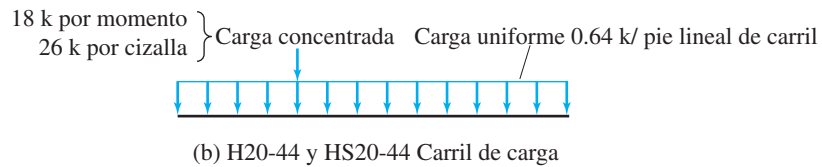
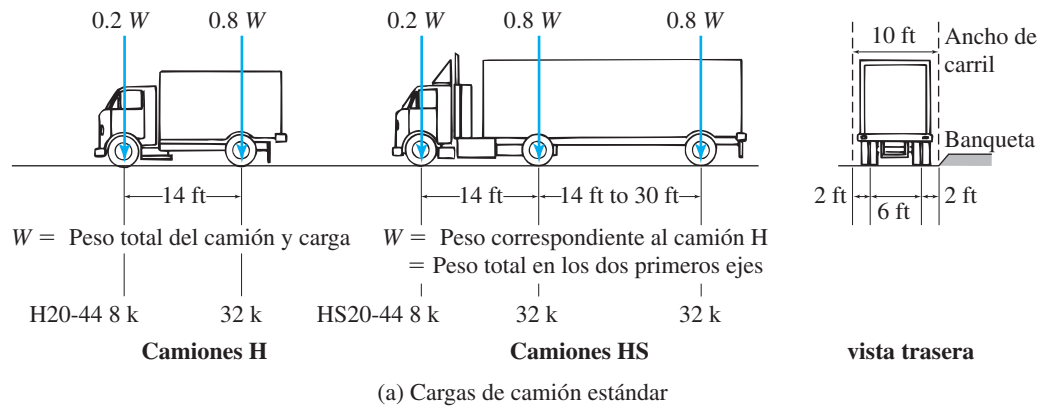


FIG. 2.8 Cargas vivas para puentes de carretera

Fuente: Basados en las *Especificaciones de Puentes de Carretera*. Asociación Americana de Carreteras Estatales y Oficiales del Transporte.

se debe utilizar en el diseño de ese elemento. Información adicional acerca de varios carriles, carga para tramos continuos, reducción de la intensidad de carga, etc., se pueden encontrar en las *Especificaciones AASHTO*.

Las cargas vivas de puentes de ferrocarril son especificadas por la Asociación Americana de Ingeniería Ferroviaria y Mantenimiento de Vías (AREMA por sus siglas en inglés) en el *Manual de Ingeniería Ferroviaria* [26]. Estas cargas, comúnmente conocidas como *Cargas Cooper E*, consisten en dos juegos de nueve cargas concentradas, cada una separada por distancias particulares, que representan dos locomotoras seguidas por una carga uniforme, ejemplificada por el peso de los vagones de carga. Un ejemplo de tales cargas es la llamada E80, mostrada en la Fig. 2.9. Las cargas de diseño de los trenes más pesados y ligeros se pueden obtener al incrementar o disminuir proporcionalmente las magnitudes de las cargas mientras se mantiene la distancia entre las cargas concentradas. Por ejemplo, la carga E40 se puede obtener de la E80 simplemente cuando se dividen las magnitudes entre dos. Como en el caso de los puentes carreteros considerados con anterioridad, las cargas vivas de los puentes de ferrocarriles o ferroviarios deben ser colocadas para que produzcan el efecto más desfavorable en el elemento de consideración.

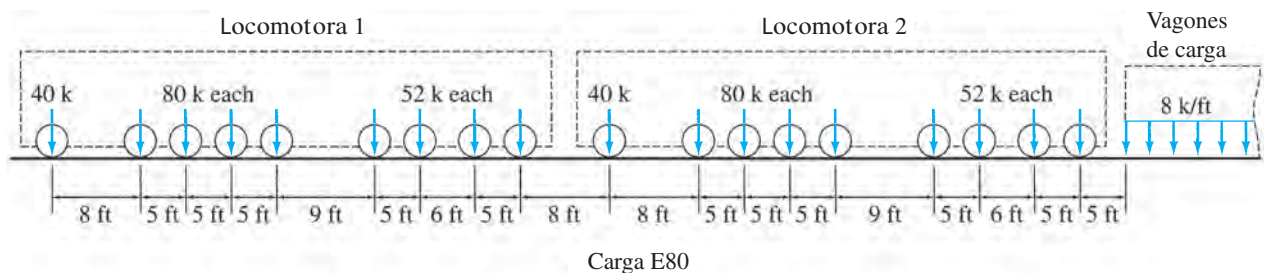


FIG. 2.9 Cargas vivas para puentes ferroviarios

Cargas de impacto

Cuando las cargas vivas se aplican de manera rápida a la estructura, causan mayores esfuerzos que los que se producirían si se aplicaran las cargas gradualmente. El efecto dinámico de la carga que causa este incremento del esfuerzo en la estructura se llama *impacto*. Para tomar en cuenta este incremento de esfuerzo, las cargas vivas que se espera causen un efecto dinámico en la estructura se deben incrementar por cierto porcentaje de impacto o factores de impacto. Dichos porcentajes de impacto, los cuales están basados en experiencias pasadas y/o resultados de experimentos, se especifican en los códigos de construcción. Por ejemplo, la *Norma ASCE 7* señala que los pesos de la maquinaria rotativa y de generación de energía para los edificios se deben de incrementar un 50% para contabilizar el impacto.

Para puentes ferroviarios, la *Norma AASHTO* proporciona expresiones para el factor de impacto como

$$I = \frac{50}{L + 125} \leq 0.3$$

En la que L es la longitud en pies de la proporción del tramo cargado para generar el esfuerzo máximo en un elemento en consideración. Expresiones empíricas similares para los factores de impacto para el diseño de puentes ferroviarios se establecen en [26].

2.4 Clasificación de los edificios para cargas ambientales

Debido a la incertidumbre inherente involucrada en la predicción de las cargas ambientales, que pueden actuar en una estructura durante su vida útil, las consecuencias de la falla de la estructura se suelen considerar en la estimación de las cargas ambientales, como las debidas al viento, la nieve y los terremotos. En general, entre más graves sean las consecuencias de la falla estructural, mayor será la magnitud de las cargas para la que la estructura debe ser diseñada.

La *Norma ASCE 7* clasifica los edificios en cuatro *Categorías de Riesgo*, basada en el riesgo de vidas humanas, salud y conservación en el caso de una falla (o daño) en la estructura debido a su naturaleza de ocupación o uso. Estas categorías de riesgo están descritas en la Tabla 2.3, y serán utilizadas en las siguientes secciones para estimar las cargas ambientales en la estructura.

2.5 Cargas de viento

Las *cargas de viento* son producidas por el flujo de aire alrededor de la estructura. Las magnitudes de las cargas de viento que pueden actuar en una estructura dependen de la localización geográfica de la misma, de obstrucciones alrededor del terreno, tales como edificios vecinos, y de la geometría y las características de vibración de la estructura. A pesar de los procedimientos descritos en varios códigos para estimar las cargas de viento, estas usualmente varían en detalle, la mayoría de ellas están basadas en la misma

Tabla 2.3 CATEGORÍAS DE RIESGO DE LOS EDIFICIOS PARA CARGAS AMBIENTALES

Categoría de riesgo	Ocupación o Uso	Factor de importancia	
		Carga de (I_s)	Carga por sismo (I_e)
I	Edificios que representan riesgo bajo para vidas humanas en caso de falla, tales como instalaciones agrícolas y de almacenamientos ligeros.	0.8	1.0
II	Todos lo demás edificios excepto los mencionados en las categorías de Riesgo I, III y IV. Esta categoría de riesgo aplica a la mayoría de los edificios residenciales, industriales y comerciales (excepto aquellos que han sido específicamente asignados a otra categoría).	1.0	1.0
III	Edificios cuya falla plantearía un riesgo sustancial para la vida humana, y/o podría causar un impacto económico sustancial o perturbación masiva todos los días en la vida pública. Esta categoría contiene los edificios como: teatros, salas de conferencias y salones de asambleas donde se congregan un gran número de personas en una área; escuelas primarias; hospitales pequeños, penitenciarias, estaciones de generación de energía, plantas de tratamiento de agua y aguas residuales, centros de telecomunicaciones; y edificios que contienen sustancias peligrosas y materiales explosivos.	1.1	1.2
IV	Instalaciones esenciales, incluyendo hospitales, estaciones de bomberos y de policía, instalaciones de defensa nacional y refugios de emergencia, centros de comunicación, centrales eléctricas y servicios requeridos en una emergencia, y edificios que contienen materiales extremadamente peligrosos.	1.2	1.5

Fuente: Basada en los datos del ASCE/SEI 7-05, *Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y otras Estructuras*

relación básica entre la velocidad del viento V y la presión dinámica q inducida en una superficie plana normal bajo el flujo del viento, el cual puede ser obtenido aplicando el principio de Bernoulli y la expresión es

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2.1)$$

En ella, ρ indica la densidad de la masa de aire. Usando el peso unitario del aire de 1.2 kg/m^3 , para la presión atmosférica (al nivel del mar, con una temperatura de 15° C), y la expresión de la velocidad del viento en millas por hora, tenemos que la presión q en libras por pulgada pie cuadrado está dada por

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{0.0765}{32.2} \right) \left(\frac{5280}{3600} \right)^2 V^2 = 0.00256 V^2 \quad (2.2)$$

La velocidad V a usar para determinar la carga de diseño en la estructura dependerá de la posición geográfica y se puede obtener por datos meteorológicos de la región. La *Norma ASCE 7* contempla un mapa de isotacas o contornos de velocidades básicas para los Estados Unidos. Este mapa, sustentado en datos recolectados de 458 estaciones meteorológicas, proporciona una ráfaga de 3 segundos en millas por hora (m/s). Las velocidades que muestra son a menudo en terreno abierto y a alturas de 33 ft (10 m), arriba

del nivel de terreno. La Fig. 2.10 expone el mapa de velocidades básicas de viento para estructuras en la categoría de riesgo II, que incluye una vasta mayoría de residencias, edificios comerciales e industriales. Estas velocidades corresponden aproximadamente al 7% de probabilidad de ser excedidas en 50 años. En la *Norma ASCE 7** se presentan mapas de viento similares para estructuras en riesgo categorías I, III y IV. Para dar cuenta de la variación de la velocidad del viento respecto de la altura y el entorno en el cual la estructura está localizada, la *Norma ASCE 7* modifica la Ec. (2.2) como

$$q_z = 0.00256K_zK_{zt}K_dV^2 \quad (2.3)$$

En ella q_z es la velocidad de presión a la altura z en libras por pie cuadrado; V es la velocidad básica de diseño en millas por hora (Fig. 2.10); K_z es el coeficiente de exposición de presión de velocidad; K_{zt} es el factor de topografía; y K_d es el factor de direccionalidad del viento. Cuando convertimos a unidades del SI, la Ec. (2.3) resulta

$$q_z = 0.613K_zK_{zt}K_dV^2 \quad [\text{SI unidades}] \quad (2.4)$$

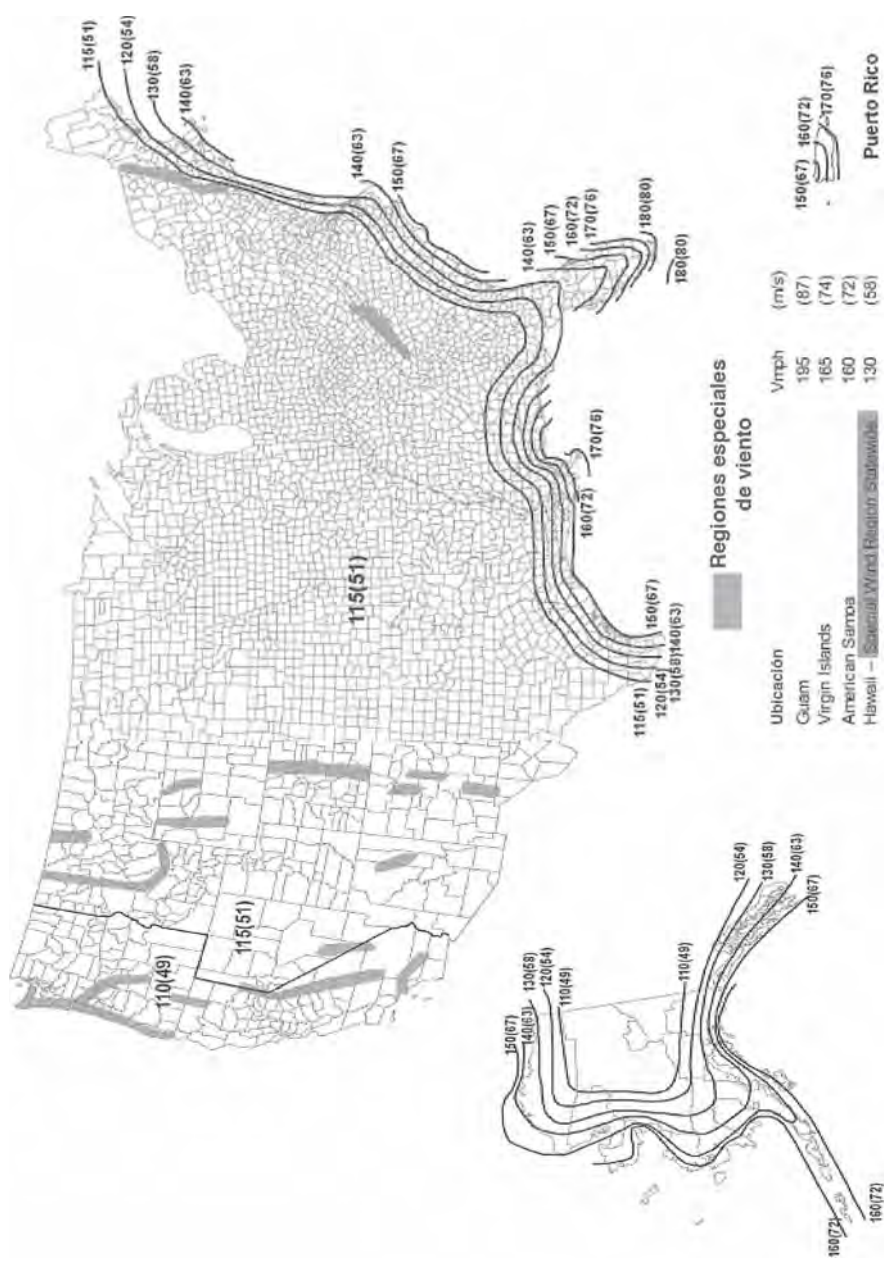
Con q_z y V ahora expresadas en unidades de N/m^2 y m/s respectivamente.

El coeficiente de exposición de presión de velocidad, K_z , está dado por

$$K_z = \begin{cases} 2.01(z/z_g)^{2/\alpha} & \text{para } 15 \text{ ft (4.6 m)} \leq z \leq z_g \\ 2.01 \left[\frac{15 \text{ ft (4.6 m)}}{z_g} \right]^{2/\alpha} & \text{para } z < 15 \text{ ft (4.6 m)} \end{cases} \quad (2.5)$$

En la cual z = a la altura sobre el nivel de terreno en pies (o metros); z_g = gradiente de altura en pies (o metros); y α depende de las obstrucciones en el terreno alrededor de la estructura. La *Norma ASCE 7* clasifica a los terrenos para los cuales las estructuras quedarán expuestas en tres categorías. Estas tres categorías son brevemente descritas en la Tabla 2.4, que proporciona los valores de las constantes de cada una de ellas. Una descripción más detallada de las categorías de exposición se puede encontrar en la *Norma ASCE 7*. El factor topográfico, K_{zt} , toma en cuenta el efecto de incremento en la velocidad del viento debido a los cambios abruptos de la topografía, como colinas y acantilados escarpados. Para estructuras localizadas cerca o en la parte superior de las colinas, el valor de K_{zt} deberá ser determinado usando el procedimiento especificado en la *Norma ASCE 7*. Para otras estructuras: $K_{zt} = 1$. El factor direccional del viento, K_d , toma en cuenta la probabilidad reducida de los vientos máximos que llegan de la dirección más desfavorable para la estructura. Este factor solo se utiliza cuando las cargas de viento están combinadas con otros tipos de cargas (tales como cargas muestras, cargas visa, etc.). Para estructuras sujetas a tales combinaciones, los valores de K_d deberán obtenerse de la *Norma ASCE 7*. Para estructuras sujetas solo a cargas de viento, $K_d = 1$.

* Las velocidades del viento de lugares específicos en Estados Unidos para las cuatro categorías de riesgo están disponibles en el sitio web del Consejo de Tecnología Aplicada: www.atcouncil.org/windspeed/.



Notas:

1. Los valores son de diseño nominal para ráfagas de 3 segundos de velocidad de viento en millas por hora (m/s) a 33 pies por encima del suelo para categoría de exposición C.
2. Se permite Interpolación lineal entre los contornos.
3. Islas y zonas costeras fuera de la última curva se usará la velocidad última de la curva de la zona costera.
4. Terrenos montañosos, barrancas, cabos y regiones de viento especial serán examinadas para condiciones inusuales de viento.
5. La velocidad de viento corresponde aproximadamente a un 7% de probabilidad de excedencia en 50 años (Probabilidad de Excedencia Anual = 0.00143, MRI = 700 años.)

FIG. 2.10 Velocidades Básicas de Viento para los Estados Unidos par Edificios de Categoría I.

Fuente: Basada en los datos del ASCE/SEI 7-10, Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y otras Estructuras.

Tabla 2.4 CATEGORÍAS DE EXPOSICIÓN PARA EDIFICIOS PARA CARGAS DE VIENTO

Exposición	Constante		
	Categoría	z_g ft(m)	α
Áreas urbanas y suburbanas con construcciones estrechamente espaciadas de tamaño de una sola vivienda o más grande. Este terreno debe de prevalecer en dirección contra el viento para una distancia de 2,600 pies (792 m) o 20 veces la altura del edificio, la que sea mayor.	B	1,200(365.76)	7.0
Aplica a todos los edificios para los cuales la exposición B y D no aplican.	C	900(274.32)	9.5
Áreas planas, sin obstáculos y superficies de agua. Este terreno debe de prevalecer en dirección contra el viento para una distancia de 5,000 pies (1524 m) o 20 veces la altura del edificio, la que sea mayor.	D	700(213.36)	11.5

Fuente: Basada en los datos del ASCE/SEI 7-05 *Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y otras Estructuras*

Las presiones externas del viento a ser utilizadas para el diseño de los marcos principales de la estructura están dadas por

$$p_z = q_z G C_p \quad \text{para el muro de barlovento} \quad (2.6)$$

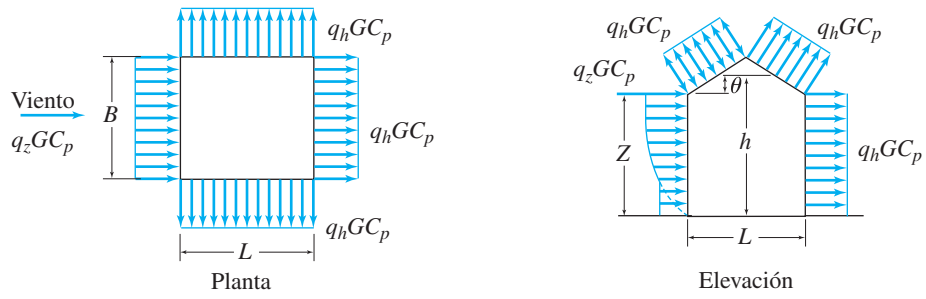
$$p_h = q_h G C_p \quad \text{para el muro de sotavento, muros laterales y techo}$$

En el cual la h = altura del techo sobre el nivel del terreno; q_h = presión dinámica a la altura h (evaluado mediante la sustitución de $z = h$ en la Ec. (2.3) o (2.4)); p_z = presión de diseño a la altura media del techo h ; G = factor de efecto de ráfaga; y C_p = coeficiente de presión externo.

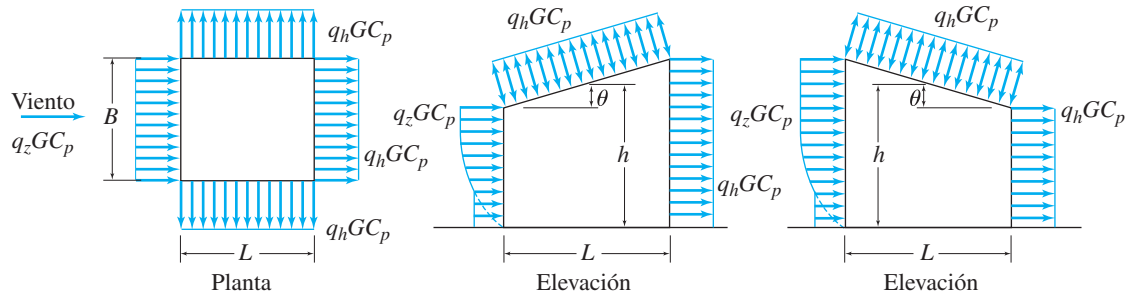
El efecto de factor de ráfaga G es usado para considerar el efecto de carga de la turbulencia del viento en la estructura. Para una estructura rígida, cuya frecuencia fundamental es mayor o igual a 1 Hz, $G = 0.85$. Para estructuras flexibles, el valor de G deberá ser calculado usando las expresiones dadas por la *Norma ASCE 7*.

Los valores del coeficiente de presión externo C_p , basados en pruebas de túnel de viento y experimentos, han sido proporcionados por la *Norma ASCE 7* para varios tipos de estructuras. La Fig. 2.11 muestra los coeficientes especificados para el diseño de la estructura principal. Podemos ver de la figura que la presión externa del viento varía con la altura del muro de barlovento de la estructura, pero es uniforme con el muro de sotavento y los muros laterales. Nótese que las presiones positivas actúan hacia la cara de la superficie, donde las presiones negativas, llamadas succiones, ejercen hacia afuera de la superficie de la estructura.

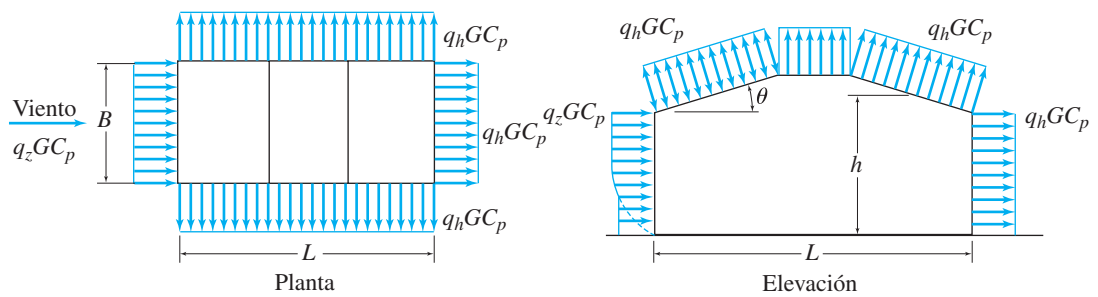
Una vez que la presión externa ha sido calculada, se combina con la presión interna para obtener las presiones de diseño. Con la presión del viento conocida en el diseño, podemos determinar las cargas correspondientes en los elementos de la estructura multiplicando la presión por la correspondiente área tributaria de los elementos.



Cubierta de dos y cuatro



Cubierta de una pendiente (Nota 4)



Mansarda (Nota 6)

FIG. 2.11 Coeficientes de presión extrema C_p , para cargas en los sistemas que resisten principalmente el viento para edificios cerrados y parcialmente cerrados.

 Fuente: Basada en los datos del ASCE/SEI 7-05, *Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y otras Estructuras*.

Coeficientes de Presión en Muros C_p			
Superficie	L/B	C_p	Usar con
Muro de Barlovento	Todos los valores	0.8	q_z
	0–1	–0.5	q_h
Muro de Sotavento	2	–0.3	
	≥ 4	–0.2	
Muro Lateral	Todos los valores	–0.7	q_h

Coeficientes de presión en Techos C_p , para uso con q_h												
Dirección del Viento	Barlovento									Sotavento		
	Ángulo, γ (grados)									Ángulo, γ (grados)		
	h/L	10	15	20	25	30	35	45	$\geq 60\#$	10	15	≤ 20
Normal a la cresta y $\geq 10^\circ$	≤ 0.25	-0.7 -0.18	-0.5 0.0^*	-0.3 0.2	-0.2 0.3	-0.2 0.3	0.0^* 0.4	0.4	$0.01y$	-0.3	-0.5	-0.6
	0.5	-0.9 -0.18	-0.7 -0.18	-0.4 0.0^*	-0.3 0.2	-0.2 0.2	-0.2 0.3	0.0^* 0.4	$0.01y$	-0.5	-0.5	-0.6
	≥ 1.0	-1.3^{**} -0.18	-1.0 -0.18	-0.7 -0.18	-0.5 0.0^*	-0.3 0.2	-0.2 0.2	0.0^* 0.3	$0.01y$	-0.7	-0.6	-0.6
Normal a la cresta y < 10° y paralelo a la cresta para todos los θ	≤ 0.5	Distancia horizontal del borde de Barlovento			C_p		* El valor es proporcionado por Interpolación ** Los valores se pueden reducir con áreas sobre las cuales es aplicable como sigue					
		0 to $h/2$			$-0.9, -0.18$							
		$h/2$ a h			$-0.9, -0.18$							
		h a $2 h$			$-0.5, -0.18$							
		$>2 h$			$-0.3, -0.18$							
	≥ 1.0	0 a $h/2$			$-1.3^{**}, -0.18$		Área (sq ft)		Factor de reducción			
							≤ 100 (9.3 sq m)		1.0			
							250 (23.2 sq m)		0.9			
		$>h/2$			$-0.7, -0.18$		$\geq 1,000$ (92.9 sq m)		0.8			

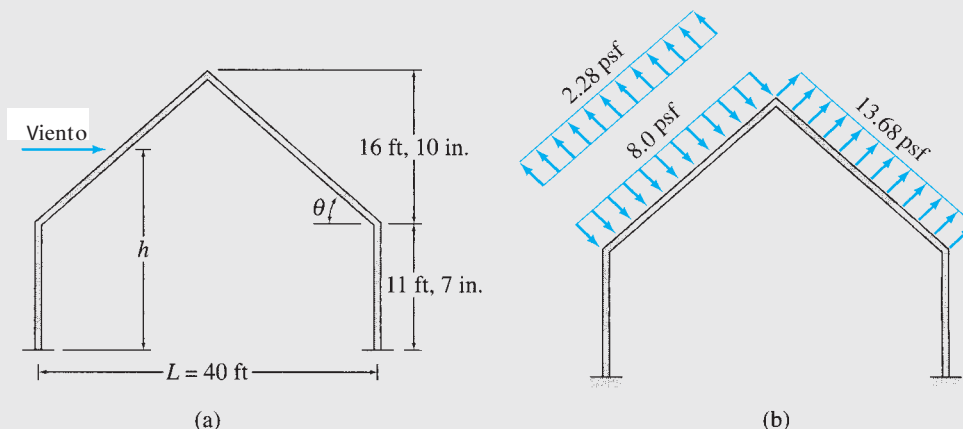
Notas

- Los signos positivo y negativo indican presiones que actúan contra la superficie y hacia afuera de ella, respectivamente.
 - Se permite la interpolación lineal para los valores de L/B , h/L y θ que no sea mostrado. La interpolación se realizará entre los valores del mismo signo. Donde no hay valores del mismo signo se asume 0.0 para propósitos de interpolación.
 - Donde dos valores de C_p se enlistan, se indica que la pendiente de la cubierta de barlovento está sujeta tanto a presiones positivas como a negativas, y la estructura de la cubierta será diseñada para las dos condiciones. La interpolación para relaciones intermedias de h/L en este caso se llevará a cabo entre valores de C_p del mismo signo.
 - Para cubiertas de una pendiente, la superficie completa puede ser en barlovento o sotavento.
 - Notación:
 B : Dimensiones horizontales del edificio, en pies (metros), medidos en dirección normal al viento.
 L : Dimensiones horizontales del edificio, en pies (metros), medidos en paralelo a la dirección del viento.
 h : Altura media del techo en pies (metros), excepto que la altura del alero será utilizada para $\theta \leq 10$ grados.
 z : Altura sobre el nivel de piso, en pies (metros).
 G : Factor de efecto de ráfaga.
 q_z , q_h : Presión dinámica en libras sobre pulgada cuadrada (N/m^2), evaluada a la respectiva altura.
 θ : Ángulo de la pendiente de la cubierta medido a partir de la horizontal, en grados.
 - Para techos enladrillados, la superficie horizontal superior y el techo inclinado de sotavento serán tratados de la tabla como superficies de sotavento.
 - Excepto para el Sistema Resistente Principal de Fuerzas de Viento en la cubierta que consiste en un sistema de marcos de momento, el cortante total horizontal será inferior al determinado, despreciando las fuerzas de viento en la superficie de la cubierta.
- #Para cubierta con pendientes mayores a 80° , use $C_p = 0.8$.

FIG. 2.11 (cont.)

Ejemplo 2.3

Determine la presión externa del viento en la cubierta del marco rígido de dos aguas para un edificio industrial no esencial que se muestra en la Fig. 2.12(a). La estructura está localizada en un suburbio de Boston, Massachusetts, donde el terreno es representativo de la exposición B. La dirección del viento es normal a la cumbrera del marco como se puede ver.

**FIG. 2.12****Solución**

Pendiente de la cubierta y altura media de la cubierta. De la Fig. 2.12(a), obtenemos

$$\tan \theta = \frac{16.83}{20} = 0.842, \quad \text{o} \quad \theta = 40.1^\circ$$

$$h = 11.58 + \frac{16.83}{2} = 20.0$$

$$\frac{h}{L} = \frac{20}{40} = 0.5$$

Presión dinámica a $z = h = 20'$. De la Fig. 2.10, se tiene la velocidad básica de diseño para Boston como sigue

$$V = 130 \text{ mph}$$

De la tabla 2.4, para la categoría de exposición B, resultan los siguientes valores de las constantes:

$$z_g = 1.200 \text{ ft} \quad \text{y} \quad \alpha = 7.0$$

Usando la Ec. (2.5), determinamos el coeficiente de exposición de la presión dinámica:

$$K_h = 2.01 \left(\frac{h}{z_g} \right)^{2/\alpha} = 2.01 \left(\frac{20}{1.200} \right)^{2/7} = 0.62$$

Con $K_{zt} = 1$ y $K_d = 1$, aplicamos la Ec. (2.3) para obtener la presión dinámica a la altura h como

$$\begin{aligned} q_h &= 0.00256 K_h K_{zt} K_d V^2 \\ &= 0.00256 (0.62) (1) (1) (130)^2 \\ &= 26.82 \text{ psf} \end{aligned}$$

Presión externa sobre la cubierta. Para estructuras rígidas, el factor de efecto de ráfaga a la altura h es

$$G = 0.85$$

continúa

Para $\theta \approx 40^\circ$ y $h/L = 0.5$, los valores del coeficiente de presión externa con (Fig. 2.11):

Para el lado de barlovento: $C_p = 0.35$ y -0.1

Para el lado de sotavento: $C_p = -0.6$

Finalmente, sustituyendo los valores de q_h , G , y C_p en la Ec. (2.6), obtenemos las siguientes presiones de viento: para el lado del barlovento,

$$p_h = q_h G C_p = (26.82) (0.85) (0.35) = 8.0 \text{ psf} \quad \text{Respuesta.}$$

y

$$p_h = q_h G C_p = (26.82) (0.85) (-0.1) = -2.28 \text{ psf} \quad \text{Respuesta.}$$

Y para sotavento

$$p_h = q_h G C_p = (26.82) (0.85) (-0.6) = -13.68 \text{ psf} \quad \text{Respuesta.}$$

Estas presiones de viento están aplicadas en la cubierta del marco, como se muestra en la Fig. 2.12(b). Las dos presiones (positiva y negativa) en el lado de barlovento se tratan como condiciones de carga separadas, y la estructura se diseña para ambas condiciones.

2.6 Cargas por nieve

En muchas partes de los Estados Unidos y del mundo se deben considerar las cargas de nieve para el diseño de estructuras. La carga de nieve en el diseño de una estructura se basa en la carga de nieve en el suelo por su localización geográfica, y también puede ser obtenida de los códigos de construcción o de los datos meteorológicos de una cierta región. La *Norma ASCE 7* proporciona un mapa de contornos (similar al de la Fig. 2.10) de cargas de nieve en el suelo para varias partes de los Estados Unidos. Estos mapas, basados en datos recogidos de 204 estaciones meteorológicas y más de 9000 ubicaciones, proporcionan la carga de nieve (en libras por pie cuadrado) que tiene un 2% de probabilidad de ser excedida en un año determinado.

Una vez que la carga de nieve en el suelo se ha establecido, la carga de nieve en el diseño de la cubierta de una estructura se determina considerando los factores de exposición al viento y sus características térmicas, geométricas y funcionales. En la mayoría de los casos, hay menos nieve en la cubierta que en el suelo. La *Norma ASCE 7* recomienda que la carga de nieve en el diseño de techos planos se exprese como

$$p_f = 0.7 C_e C_t I_s p_g \quad (2.7)$$

En la cual p_f = la carga de nieve en el diseño de la cubierta plana en libras por pie cuadrado (kN/m^2); p_g = la carga de nieve en el suelo por pie cuadrado (kN/m^2); C_e = *factor de exposición*; C_t = *factor térmico*; y I_s = *factor de importancia*.

En la Ec. (2.7) el factor numérico 0.7, que se refiere al factor de exposición básico, tiene en cuenta el efecto general del viento, el cual es probable que elimine un poco de nieve del techo. El efecto local del viento, dependiente del terreno en particular que rodea a la estructura y de la exposición de su techo, se evalúa por el factor de exposición C_e . La *Norma ASCE 7* provee valores de C_e en un rango de 0.7, para estructuras en áreas de mucho viento y techos expuestos hasta 1.2 para estructuras con baja exposición.

El factor térmico, C_t , toma en cuenta el hecho de que habrá más nieve en el techo de las estructuras sin calefacción que en las que sí tienen. Los valores de C_t están especificados como 1.0 y 1.2 para estructuras con calefacción y sin calefacción respectivamente. Es importante el factor I_s en la Ec. (2.7) porque toma en cuenta el peligro de las vidas humanas y los daños en la propiedad en caso de que la estructura colapse o falle. Los valores de I_s a considerar para estimar las cargas de nieve en techos se presentan en la Tabla 2.3.

La carga de nieve en el diseño de techos con pendiente se determina multiplicando la carga de nieve para techos planos por un *factor de pendiente* C_s . Por lo tanto,

$$p_s = C_s p_f \quad (2.8)$$

donde p_s es la carga de nieve en el diseño de techos con pendiente que actúan en la proyección horizontal en la superficie del techo, y el factor C_s está dado por

$$\text{para cubiertas cálidas} \begin{cases} C_s = 1 & \text{para } 0 \leq \theta < 30^\circ \\ C_s = 1 - \frac{\theta - 30^\circ}{40^\circ} & \text{para } 30^\circ \leq \theta \leq 70^\circ \\ C_s = 0 & \text{para } \theta > 70^\circ \end{cases} \quad (2.9)$$

($C_t \leq 1.0$)

$$\text{para cubiertas frías} \begin{cases} C_s = 1 & \text{para } 0 \leq \theta < 45^\circ \\ C_s = 1 - \frac{\theta - 45^\circ}{25^\circ} & \text{para } 45^\circ \leq \theta \leq 70^\circ \\ C_s = 0 & \text{para } \theta > 70^\circ \end{cases} \quad (2.10)$$

($C_t = 1.2$)

En las Ec. (2.9) y (2.10) θ representa la pendiente del techo respecto de la horizontal, en grados. Los factores de pendientes están basados en las consideraciones más probables de que la nieve resbale de los techos más empinados comparados con aquellos que no, y también de que la nieve se resbale o se derrita de estructuras cálidas de aquellas que no lo son.

La *Norma ASCE 7* especifica los valores mínimos de carga por nieve para las estructuras con techo de poca pendiente que se deben de diseñar. Para tales estructuras, si $p_g \leq 20$ psf (0.96 kN/m²), entonces p_f no será menor que $P_g I_s$; si $p_g > 20$ psf (0.96 kN/m²), entonces, p_f no será menor que $20 I_s$ psf (0.96 I_s kN/m²). Estos valores mínimos de P_f aplican para el techo de una sola pendiente y para techos de cuatro aguas con $\theta \leq 15^\circ$.

En algunas estructuras, la carga de nieve que se aplica solo en una parte de la cubierta o techo puede causar mayores esfuerzos que si estuviera en todo el techo. Para considerar tal posibilidad, la *Norma ASCE 7* recomienda que los efectos de cargas de nieve no balanceadas sean incluidos en el diseño de las estructuras. En dicha norma se encuentra una descripción detallada de carga de nieve no balanceada para diferentes tipos de cubiertas. Por ejemplo, para una cubierta o techo a cuatro aguas con pendiente $2.38^\circ \leq \theta \leq 30.2^\circ$ y con una distancia horizontal del alero a la cumbrera, $W \leq 20$ ft, la *Norma ASCE 7* especifica que la estructura deberá ser diseñada para cargas uniformes no balanceadas de magnitud $P_g I_s$ aplicada en el lado de sotavento de la cubierta, con el lado de barlovento libre de nieve.

Ejemplo 2.4

Determine la carga de nieve en el diseño para la cubierta del marco de dos aguas de un edificio de departamentos mostrado en la Fig. 2.13(a). El edificio se localiza en Chicago, Illinois, donde la carga de nieve a nivel de suelo es de 25 pfs. Debido a que hay varios árboles cerca de la estructura, se asume que el factor de exposición $C_e = 1$.

Solución

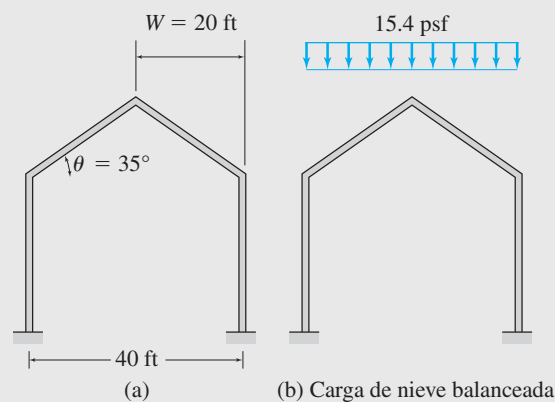
Carga de nieve para cubierta plana.

$$p_g = 25 \text{ psf}$$

$$C_e = 1$$

$$C = 1 \text{ (estructura climatizada)}$$

$$I_s = 1 \text{ (de la Tabla 2.3 para la construcción no esencial, la categoría de riesgo II)}$$

**FIG. 2.13**

De la Ec.(2.7), la carga de nieve para cubierta plana se obtiene como

$$\begin{aligned} p_f &= 0.7C_eC_tI_s p_g = 0.7(1)(1)(1)(25) \\ &= 17.5 \text{ psf} \end{aligned}$$

La pendiente es $\theta = 35^\circ$, la cual es mayor que 15° , de modo que los valores mínimos de p_f no necesitan ser considerados.

Carga de nieve en la cubierta con pendiente. Aplicando la Ec. (2.9), calculamos el factor de pendiente como

$$C_s = 1 - \frac{\theta - 30^\circ}{40^\circ} = 1 - \frac{35^\circ - 30^\circ}{40^\circ} = 0.88$$

De la Ec. (2.8), determinamos la carga de diseño por nieve para la cubierta con pendiente:

$$p_s = C_s p_f = 0.88(17.5) = 15.4 \text{ psf}$$

Respuesta.

Esta carga se conoce como *carga de diseño de nieve balanceada* y se aplica a la cubierta completa de la estructura, como se muestra en la Fig. 2.13(b).

Como la pendiente es $\theta = 35^\circ$, mayor que 30.2° , la carga desbalanceada de nieve no necesita ser considerada.

Respuesta.

2.7 Cargas por sismo

Un terremoto es una ondulación repentina de una porción de la superficie de la tierra. Aunque la superficie del suelo se mueve en ambas direcciones, horizontal y vertical durante el sismo, la magnitud de la componente vertical de la aceleración de la tierra es usualmente menor y no tiene ningún efecto significativo en la mayoría de las estructuras. Es la componente horizontal la que causa los daños estructurales y la que se debe considerar en el diseño de las estructuras localizadas en zonas de actividad sísmica.

Durante un sismo, la cimentación se mueve junto con el suelo debido a la inercia de su masa, resiste el movimiento, causando con ello que la estructura vibre en dirección horizontal (Fig. 2.14). Estas vibraciones producen fuerzas cortantes en la estructura. Para una estimación adecuada de los esfuerzos que se pueden desarrollar en la estructura en caso de un sismo, se debe preferir un análisis dinámico que tome en cuenta la masa y la rigidez características de la estructura. Sin embargo, para edificios de baja a mediana altura los códigos emplean fuerzas estáticas equivalentes para un diseño resistente a sismos. En un enfoque empírico, los efectos dinámicos de un sismo son aproximados a un conjunto de fuerzas laterales (horizontales) aplicadas a la estructura, y se realiza un análisis estático para evaluar los esfuerzos en la estructura.

La *Norma ASCE 7* permite el procedimiento de fuerzas equivalentes laterales para el diseño sísmico de edificios. De acuerdo con ella, el total de fuerza sísmica lateral que debe resistir un edificio está dado por la ecuación

$$V = C_s W \quad (2.11)$$

En la cual V = a la fuerza total lateral o cortante basal, W = peso sísmico efectivo del edificio que incluye la carga muerta y una parte de la carga

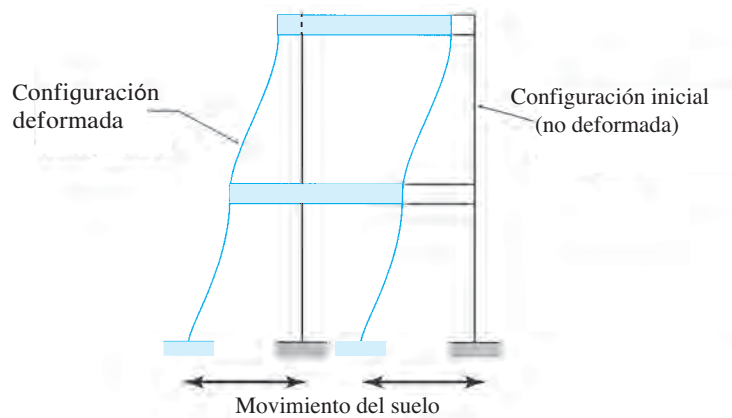


FIG. 2.14 Efectos de un sismo en una estructura

viva, y C_s = al coeficiente de respuesta sísmico. Este último se define por la ecuación

$$C_s = \frac{S_{DS}}{R/I_e} \quad (2.12)$$

Donde S_{RD} es la aceleración del espectro de respuesta de diseño en el rango de periodo corto; R indica el coeficiente de modificación de respuesta; e I_e representa el factor de importancia para las cargas sísmicas con base en la categoría de riesgo del edificio. La *Norma ASCE 7* además especifica los límites superior e inferior para los valores de C_s a usar en el diseño.

La aceleración del espectro de respuesta de diseño (S_{DS}) empleado en la determinación del cortante basal de diseño, depende de la ubicación geográfica de la estructura, que puede ser obtenida con el mapa de contornos provisto en la *Norma ASCE 7*. El coeficiente de modificación de respuesta R toma en cuenta la capacidad de disipación de energía de la estructura; sus valores van del rango de 1 a 8. Por ejemplo, una estructura de muros de contante de mampostería reforzada tiene un $R = 1.5$, donde un marco resistente a momentos posee un $R = 8$. Estos valores de I_e para estimar las cargas sísmicas se muestran en la Tabla 2.3.

Por lo tanto, la carga V total lateral obtenida se distribuye en los pisos del edificio a través de las fórmulas provistas en la *Norma ASCE 7*. Para obtener información adicional de este procedimiento de cargas laterales equivalentes y sus limitaciones en su uso, el lector se debe remitir a la *Norma ASCE 7*.

2.8 Presiones hidrostáticas y de suelo

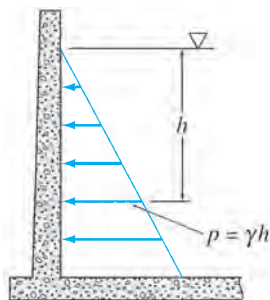


FIG. 2.15 Presión hidrostática

Las estructuras hechas para retener o almacenar agua, como presas y tanques, además de las costeras parcial o completamente sumergidas en agua, deben diseñarse para resistir la presión hidrostática. La presión hidrostática actúa de manera normal en la superficie de la estructura sumergida, con una magnitud que varía de manera lineal con la altura, como se muestra en la Fig. 2.15. Por lo tanto, la presión localizada en un punto a una distancia h bajo la superficie del líquido se puede expresar como

$$p = \gamma h \quad (2.13)$$

Con γ = peso volumétrico del líquido.

Estructuras subterráneas, cimentaciones de muros y losas, y muros de contención deben diseñarse para resistir la presión del suelo. La carga de presión vertical del suelo está dada por la Ec. (2.13), con γ como el peso volumétrico del suelo. La presión lateral del suelo depende del tipo de suelo y es considerablemente menor que la presión vertical. Para las partes de la estructura por debajo del nivel freático, se deben tomar en cuenta los efectos combinados de presión hidrostática y presión del suelo debido al peso del mismo, reducido por flotación.

2.9 Efectos térmicos y otros

Las estructuras hiperestáticas pueden estar sujetas a esfuerzos por cambios de temperatura, contracción de materiales, errores de fabricación, y asen-

tamientos diferenciales en los apoyos. Aunque estos efectos no los suelen abordar los códigos o reglamentos de construcción, pueden causar esfuerzos significativos en las estructuras que deban considerarse en el diseño. Los procedimientos para determinar las fuerzas inducidas en la estructura causadas por estos efectos son considerados en la Parte III.

2.10 Combinación de cargas

Como se dijo anteriormente, una vez determinadas las cargas de diseño de una estructura, el ingeniero debe estimar todas las cargas que puedan actuar simultáneamente en la estructura a un tiempo. Por ejemplo, es poco probable que ocurra un sismo y las cargas de viento máximas al mismo tiempo. Basados en experiencias pasadas y en el análisis de probabilidad, la *Norma ASCE 7* señala que los edificios deben ser diseñados para que su resistencia iguale o exceda las siguientes combinaciones de cargas factorizadas:

$$1.4D \quad (2.14a)$$

$$1.2D + 1.6L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad (2.14b)$$

$$1.2D + 1.6(L_r \text{ o } S \text{ o } R) + (L \text{ o } 0.5W) \quad (2.14c)$$

$$1.2D + W + L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad (2.14d)$$

$$1.2D + E + L + 0.2S \quad (2.14e)$$

$$0.9D + W \quad (2.14f)$$

$$0.9D + E \quad (2.14g)$$

Donde la D = carga muerta, E = carga de sismo, L = carga viva, L_r = carga de techo, R = carga de lluvia, S = carga de nieve, y W = carga por viento.

Es importante notar que la estructura debe estar diseñada para tener una adecuada resistencia en la combinación de cargas más desfavorable.

Además de la fuerza antes mencionada o los requisitos de seguridad, una estructura debe también satisfacer las exigencias de servicio relacionadas con su uso previsto. Por ejemplo, un edificio de gran altura puede ser perfectamente seguro, y aun inservible si presenta deflexiones o vibraciones excesivas causadas por el viento. Los requerimientos de servicio se especifican en los códigos de construcción para la mayoría de los tipos de estructuras, y están generalmente enfocados en las deflexiones, vibraciones, agrietamientos, corrosión y fatiga.

Resumen

En este capítulo aprendimos acerca de las cargas que actúan en una estructura común de la ingeniería civil y del sistema estructural usado para transmitir cargas. Estas cargas pueden ser agrupadas en tres clases: (1) cargas muertas, (2) cargas vivas y (3) cargas de ambiente.

Las cargas muertas tienen magnitudes constantes y posiciones fijas, y actúan de manera permanente en la estructura. Las cargas vivas tienen magnitudes variables y/o posiciones, y son causadas por el uso, destino u ocupación de la estructura. Cada elemento de la estructura debe ser diseñado para la posición en que la carga produzca los efectos más desfavorables en ese elemento. Para estructuras sujetas a cargas vivas de aplicación rápida, el efecto dinámico, o de impacto, de las cargas se debe considerar en el diseño.

La presión externa del viento usada para el diseño de la estructura principal está dado por

$$\begin{aligned} p_z &= q_z G C_p \quad \text{para el muro de barlovento} \\ p_h &= q_h G C_p \quad \text{para el muro de sotavento, muros laterales y techo} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde la h es la altura media del techo, G es el factor por efecto de ráfaga, C_p es el coeficiente de presión externa, y q_z es la presión dinámica a la altura z , la cual se expresa en libras por pie cuadrado como

$$q_z = 0.00256 K_z K_d V^2 \quad (2.3)$$

K_z = coeficiente de exposición de presión de velocidad; k_u = factor de topografía; K_d = factor de direccionalidad del viento, y V = a la velocidad básica de diseño en millas por hora.

El diseño de cubiertas planas con carga de nieve para edificios está dado por

$$p_f = 0.7 C_e C_t I_s p_g \quad (2.7)$$

Donde p_g = la carga de nieve, C_e = factor de exposición; y C_t = factor térmico. El diseño de cubierta con pendiente y con carga de nieve se expresa como

$$p_s = C_s p_f \quad (2.8)$$

Con C_s = factor de pendiente.

La carga total sísmica lateral de diseño para edificios está dada por

$$V = C_s W \quad (2.11)$$

Con C_s = es el coeficiente de respuesta sísmico, y W = peso sísmico efectivo del edificio.

La magnitud de la presión hidrostática en un punto localizada a una distancia h debajo de la superficie de un líquido se define por

$$p = \gamma h \quad (2.13)$$

Con γ = peso volumétrico del líquido.

Los efectos del cambio de temperatura, contracción de materiales, errores de fabricación y asentamientos en los apoyos, se deben considerar en el diseño de estructuras hiperestáticas. La estructura debe estar diseñada para resistir la combinación de cargas más desfavorable.

Problemas

Sección 2.1

2.1 La cubierta de un edificio de almacenamiento de un nivel, mostrada en la Fig. P2.1, está sujeta a una carga uniformemente distribuida de 0.96 kPa sobre toda el área. Determine la carga actuante en la viga de piso BE y la viga de carga AC del sistema estructural.

2.2 Para el edificio descrito en el problema P2.1, calcule la carga axial actuante en la columna C k. Ver Fig. P2.1

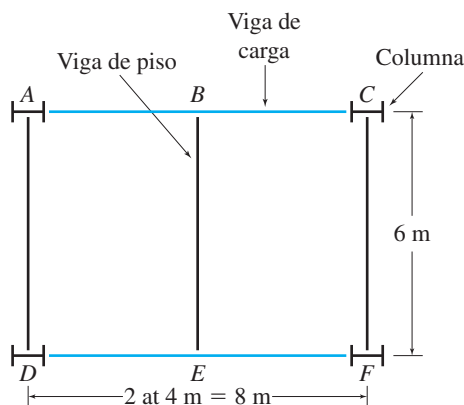


FIG. P2.1, P2.2

2.3 El piso de un edificio de departamentos, Fig. P2.3, está sujeto a una carga uniformemente distribuida de 45 psf en toda la superficie. Establezca la carga actuante en las vigas de piso AF, BG, CH y en la viga de carga FH, del sistema estructural.

2.4 Del edificio descrito en el problema P2.3, deduzca la carga axial que actúa en las columnas A, F, y H. Ver Fig. P2.3

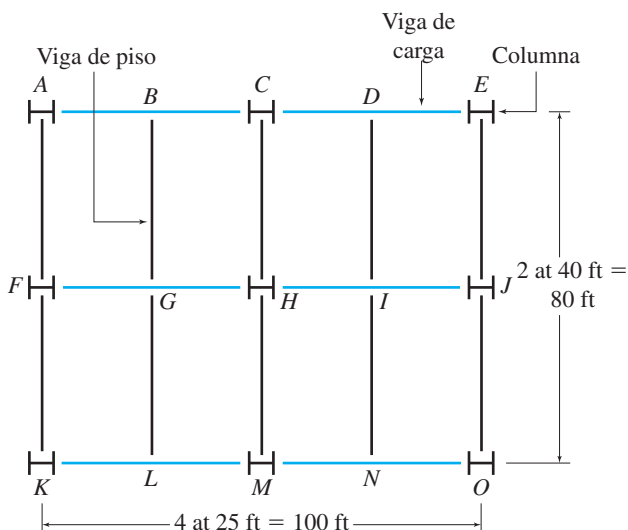


FIG. P2.3, P2.4

Sección 2.2

2.5 El sistema de piso de un edificio de departamentos consiste en una losa de concreto reforzado de 4-in de espesor que descansa sobre tres vigas de acero, las cuales a su vez están soportadas por dos vigas de carga de acero, como se muestra en la Fig. P2.5. Las áreas de la sección transversal de las vigas de piso y de la viga de carga son 18 in^2 y 32.7 in^2 , respectivamente. Determine la carga muestra en la viga CD y la viga de carga AE.

2.6 Resuelva el problema 2.5 si un muro de ladrillo, el cual tiene 7 ft de altura y 25 ft de largo, descansa sobre el patín superior de la viga CD. Ver Fig. P2.5.

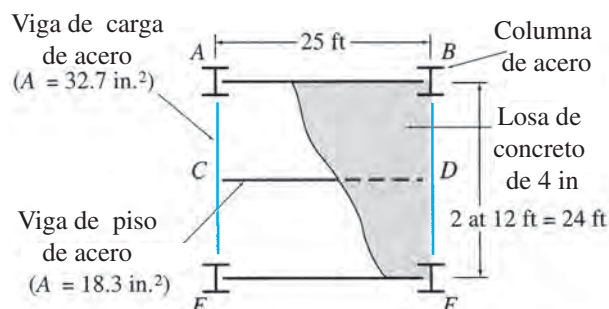


FIG. P2.5, P2.6, P2.9

2.7 El sistema de piso de un gimnasio consiste en una losa de 130 mm de espesor de concreto reforzado, que descansa en cuatro vigas de acero ($A = 9,100 \text{ mm}^2$) que, en cambio, están soportadas por dos vigas de carga de acero ($A = 25,600 \text{ mm}^2$), como se muestra en la Fig. P2.7. Determine la carga actuante en la viga BF y la viga de carga AD.

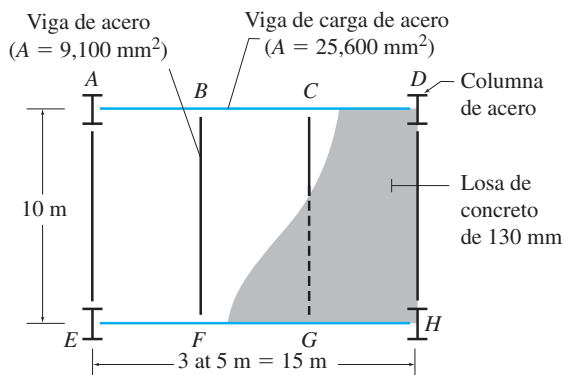


FIG. P2.7, P2.10

2.8 El sistema de piso de un edificio de oficinas consiste en una losa de concreto reforzado de 4 in de espesor y está sostenida por cuatro vigas de acero ($A = 16.2 \text{ in}^2$), las cuales

están soportadas por dos vigas de carga de acero ($A = 42.9 \text{ in}^2$). Las vigas de carga, a su vez, descansan sobre cuatro columnas, como se muestra en la Fig. P.2.8. Determine la carga muerta que trabaja en la viga de carga AG.

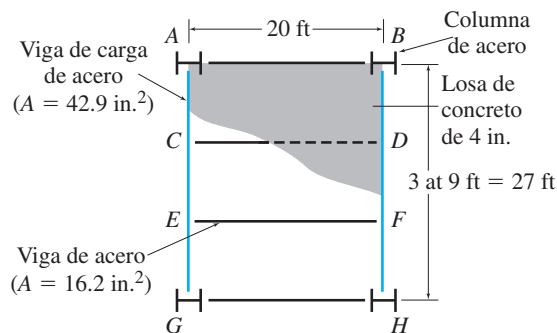


FIG. P.2.8, P.2.11

Sección 2.3

2.9 Para el edificio de departamentos cuyo sistema de piso fue descrito en el problema P.2.5, determine las cargas vivas en la viga CD y en la viga de carga AE . Ver Fig. P.2.5

2.10 Para el gimnasio, cuyo sistema de piso fue descrito en el problema 2.7, calcule las cargas vivas en la viga BF y la viga de carga AD . Ver Fig. P.2.7.

2.11 La cubierta de un edificio de oficinas considerada en el problema 2.8 está sujeta a una carga viva de 20 psf, determine las cargas vivas que actúan en la viga EF , la viga de carga AG , y la columna A. Ver Fig. P.2.8

Sección 2.5

2.12 Determine la presión externa de viento en la cubierta de un marco de dos aguas de un edificio de departamentos mostrado en la Fig. P.2.12. El edificio se ubica en Los Ángeles, California, donde el terreno es representativo de una exposición B. La dirección del viento es normal a la cumbrera como se muestra.

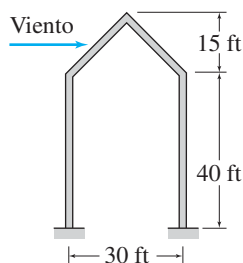


FIG. P.2.12

2.13 Determine la presión externa de viento en la cubierta del marco de dos aguas de un edificio escolar mostrado en la Fig. P.2.13. La estructura se encuentra en el suburbio de Chicago, Illinois, donde el terreno es representativo de una exposición B, y la velocidad básica de diseño para una categoría de riesgo

III es 54 m/s. Asuma que el viento viaja en dirección normal a la cumbrera, como se muestra.

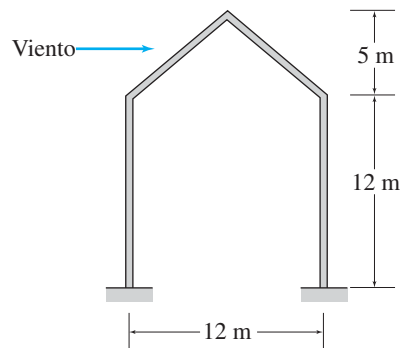


FIG. P.2.13, P.2.17

2.14 Determine la presión externa de viento en la cubierta del marco de dos aguas para un edificio de un centro de operaciones de desastre, ejemplificado en la Fig. P.2.14. La estructura está localizada en el suburbio de Kansas City, Missouri, donde el terreno es representativo de una exposición C, y la velocidad básica de diseño para una categoría de riesgo IV es 120 mph. Asuma que el viento está en dirección normal a la cumbrera, como se muestra en la figura.

2.15 Determine the external wind pressures on the windward and leeward walls of the building of Problem 2.14. See Fig. P.2.14.

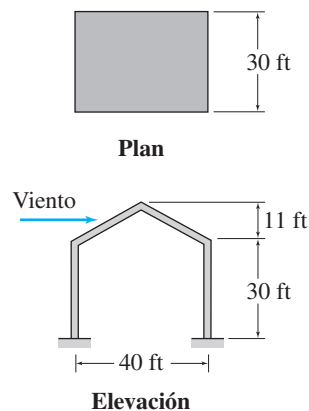


FIG. P.2.14, P.2.15, P.2.16

2.16 Determine la carga de diseño de nieve balanceada del Problema 2.14 para la cubierta de un edificio de un centro de operaciones de desastres. La carga de nieve a nivel de suelo en Kansas City es de 20 psf. Debido a la cercanía de los árboles con el edificio, asuma que el factor de exposición es $C_e = 1$. Ver Fig. P.2.14.

2.17 Del problema 2.13, determine la carga de diseño de nieve balanceada del edificio escolar. La carga de nieve a nivel de suelo en Chicago es de 1.2 kN/m². Asuma que el factor de exposición $C_e = 1$. Ver Fig. P.2.13.



Parte Dos

Análisis de Estructuras Estáticamente Determinadas



Construcción de un puente de autopista

Donovan Reese / Photodisc / Getty Images

3

Equilibrio y Reacciones en los Apoyos

- 3.1 Equilibrio de las estructuras
 - 3.2 Fuerzas internas y externas
 - 3.3 Tipos de apoyos para estructuras planas
 - 3.4 Determinación estática, hiperestaticidad e inestabilidad
 - 3.5 Cálculo de reacciones
 - 3.6 Principio de superposición
 - 3.7 Reacciones de estructuras simplemente apoyadas usando proporciones
- Resumen
Problemas

El objetivo de este capítulo es revisar los conceptos básicos de equilibrio de estructuras bajo la acción de fuerzas y desarrollar el análisis de reacciones ejercidas por apoyos de estructuras planas (dos dimensiones) sujetas a un sistema de fuerzas coplanares.

Primero revisaremos el concepto de equilibrio y el desarrollo de ecuaciones de equilibrio de estructuras. Después discutiremos las fuerzas internas y externas. Luego describiremos los tipos comunes de apoyos usados para restringir el movimiento de estructuras planas. Las estructuras pueden clasificarse como externas indeterminadas o isostáticas, hiperestáticas o inestables. Después desarrollaremos un procedimiento para determinar las reacciones en los apoyos para estructuras planas estáticamente determinadas o isostáticas. Finalmente definiremos el principio de superposición y mostraremos cómo usar proporciones en el cálculo de reacciones de estructuras simplemente apoyadas.

3.1 Equilibrio de las estructuras

Una estructura es considerada que está en equilibrio si inicialmente se encuentra en reposo, y permanece así cuando se sujeta a un sistema de fuerzas y momentos. Si una estructura está en equilibrio, entonces todos sus elementos y sus partes también lo están.

Para que una estructura esté en equilibrio, todas las fuerzas y momentos (incluidas las reacciones en los apoyos) actúan balanceando unas sobre otras, y no debe haber fuerza resultante ni momento resultante que se ejerza sobre la estructura. Recordemos de la *estática* que para una estructura espa-

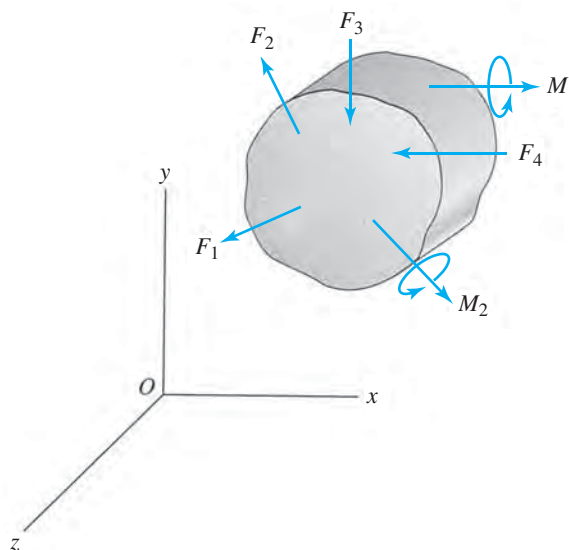


FIG. 3.1

cial (tridimensional) sujeta a un sistema de fuerzas y momentos (Fig. 3.1), la condición de fuerza resultante igual a cero y momento resultante igual a cero se puede expresar en un sistema de coordenadas cartesianas como

$$\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0 \end{array} \quad (3.1)$$

Estas seis ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de equilibrio de estructuras espaciales*, y son condiciones suficientes y necesarias para el equilibrio. Las primeras tres aseguran que no hay fuerzas resultantes actuando en la estructura, y las últimas tres expresan el hecho de que no existe momento resultante actuando en la estructura.

Para una estructura plana que se encuentra en el plano xy y que está sujeta a un sistema de fuerzas y momentos coplanares (Fig. 3.2) las ecuaciones necesarias y suficientes pueden ser expresadas como

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (3.2)$$

Estas tres ecuaciones son referidas como *ecuaciones de equilibrio de estructuras planas*. Las primeras dos expresan, respectivamente, que la suma algebraica de las componentes en x y las componentes en y para todas las fuerzas es cero, por lo tanto indican que la resultante de fuerzas actuantes en la estructura es cero.

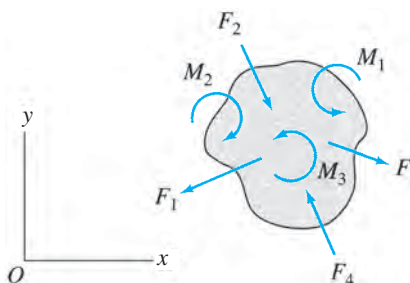


FIG. 3.2

La tercera ecuación señala que la suma algebraica de momentos de todas las fuerzas alrededor de un punto en el plano de la estructura y los momentos de cualquier par actuante en la estructura es cero, por lo tanto se muestra que la resultante de momentos actuantes en la estructura es cero. Todas las ecuaciones de equilibrio se deben satisfacer para que toda estructura esté en equilibrio.

Se debe notar que si la estructura (por ejemplo, un vehículo aeroespacial) inicialmente en movimiento está sujeta a fuerzas que satisfacen las ecuaciones de equilibrio, permanecerá en movimiento con una velocidad constante, debido a que las fuerzas no lo aceleran. Tales estructuras también pueden ser consideradas como en equilibrio. Sin embargo, el término de equilibrio es comúnmente usado para referirse al estado de reposo de las estructuras y es utilizado aquí en este contexto.

Formas alternativas de ecuaciones de equilibrio de estructuras planas

A pesar de que las ecuaciones de equilibrio como las expresadas en la Ec. (3.2) proporcionan los medios más convenientes para analizar la mayoría de las estructuras planas, el análisis de algunas estructuras puede ser representado aplicando una de las siguientes dos formas alternativas de ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_q = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad (3.3)$$

En estas A y B son cualquier punto en el plano de una estructura, a condición de que la línea que conecta A y B no sea perpendicular al eje q , y

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad (3.4)$$

Donde A , B y C son cualquier punto en el plano de la estructura, con la condición de que estos tres puntos no caigan en el mismo plano de la línea recta.

Sistemas de fuerzas concurrentes

Cuando una estructura está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas concurrentes —es decir, las líneas de acción de todas las fuerzas que se interceptan en un solo punto—, las ecuaciones de equilibrio de momento son automáticamente satisfechas, y solo las ecuaciones de equilibrio de fuerzas necesitan ser consideradas. Por lo tanto, para una estructura espacial sujeta a un sistema de fuerzas concurrentes, las ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (3.5)$$

De manera similar, para una estructura plana sujeta a un sistema de fuerzas coplanares, las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar como

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (3.6)$$

Doble fuerza y triple fuerza de estructuras

A lo largo de este texto encontraremos diferentes estructuras y elementos estructurales que estarán en equilibrio bajo la acción de solo dos o tres fuerzas. El análisis de tales estructuras y de estructuras compuestas de tales elementos

puede ser más rápido de resolver recordando de la *estática* las siguientes características de dichos sistemas:

1. Si una estructura está en equilibrio bajo la acción de solo dos fuerzas, las fuerzas deben ser iguales, opuestas y colineales.
2. Si una estructura está en equilibrio bajo la acción de solo tres fuerzas, las fuerzas deben ser concurrentes o paralelas.

3.2 Fuerzas internas y externas

Las fuerzas y momentos a los que una estructura puede estar sujeta se clasifican en dos tipos: fuerzas externas y fuerzas internas.

Fuerzas externas

Las *fuerzas externas* son las acciones de otros cuerpos sobre la estructura en cuestión. Para el propósito de análisis, por lo general, es más conveniente clasificarlas como fuerzas aplicadas y fuerzas de reacción. Las *fuerzas aplicadas* son normalmente llamadas *cargas* (por ejemplo, las cargas vivas y las cargas por viento), tienden a mover a la estructura y son normalmente *conocidas* en el análisis. Las fuerzas de reacción, o *reacciones*, son las fuerzas ejercidas por los apoyos sobre la estructura y tienen una propensión a evitar su movimiento y a mantenerla en equilibrio. Las reacciones son por lo general las *incógnitas* a determinar en el análisis. El estado de equilibrio o movimiento de una estructura en su conjunto está gobernada por las fuerzas externas que actúan sobre ella.

Fuerzas internas

Las *fuerzas internas* son las fuerzas o momentos que se ejercen en un elemento o parte de una estructura sobre el resto de ella; se desarrollan dentro de esta y mantienen sus partes juntas. Las fuerzas internas siempre ocurren en pares iguales pero opuestos, porque cada elemento o porción ejerce sobre el resto de la estructura la misma fuerza a la inversa, actuando sobre ella pero en dirección opuesta, de acuerdo con la tercera ley de Newton. Debido a que se eliminan unas a otras, no aparecen en las fuerzas de equilibrio de la estructura completa. Las fuerzas internas también son las *incógnitas* a determinar en el análisis, al aplicar las ecuaciones de equilibrio a un elemento individual o a partes de la estructura.

3.3 Tipos de apoyos para estructuras planas

Los apoyos son usados para fijar las estructuras al suelo o a otros cuerpos, así restringen sus movimientos bajo la acción de las cargas aplicadas. Las cargas tienden a mover las estructuras, pero los apoyos previenen los movimientos ejerciendo fuerzas opuestas, o reacciones, para neutralizar los efectos de las cargas, de este modo mantienen a la estructura en equilibrio. El tipo de reacción que ejercen los apoyos en la estructura depende del tipo de soporte usado y el tipo de movimiento que advierte. Un apoyo que previene

la translación de la estructura en una dirección particular ejerce una fuerza de reacción en la estructura en esa dirección. De manera similar, un apoyo que anticipa la rotación de la estructura alrededor de un eje en particular ejerce un momento de reacción en la estructura alrededor de ese eje.

Los tipos de apoyos comunes usados en estructuras planas son mostrados en la Fig. 3.3. Estos se agrupan en tres categorías, que dependen del número de reacciones (1, 2 o 3) que ejercen sobre la estructura. La figura también muestra el tipo de reacciones que estos apoyos aplican, además del número de incógnitas que sus distintos tipos introducen en el análisis. De la Fig. 3.4 a la 3.6 se muestran apoyos de patín, basculantes y articulados.

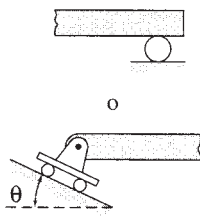
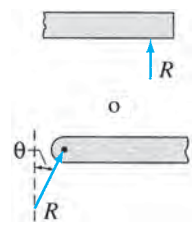
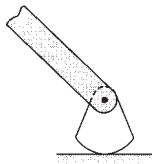
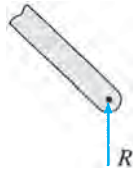
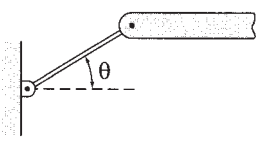
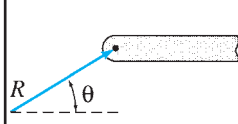
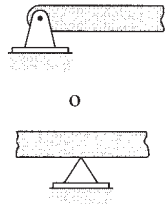
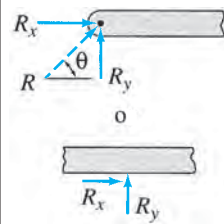
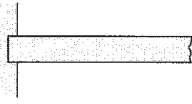
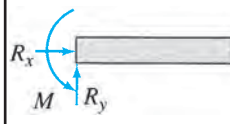
Categoría	Tipo de apoyo	Representación simbólica	Reacción	Número de incógnitas
I	Patín			1 La fuerza de reacción R actúa perpendicular a la superficie de soporte y puede ser direccionado, ya sea hacia adentro o afuera de la estructura. La magnitud de R es la incógnita.
	Basculante			
II	Eslabón			1 La fuerza de reacción R actúa en la dirección del eslabón y puede ser direccionado hacia adentro o afuera de la estructura. La magnitud de R es la incógnita.
II	Articulado			2 La fuerza de reacción R puede actuar en cualquier dirección. Es generalmente conveniente representar R por sus componentes, R_x y R_y . Las magnitudes de R_x y R_y son las incógnitas.
III	Empotrado			3 La fuerza de reacción consiste en dos componentes, R_x , R_y y el momento M . Las magnitudes de R_x , R_y y M son las tres incógnitas.

FIG. 3.3 Tipos de apoyos para estructuras planas



FIG. 3.4 Apoyo de patín
Cortesía del Departamento de Transporte de Illinois



FIG. 3.5 Apoyo basculante o de péndulo
Maureen M. Kassimali

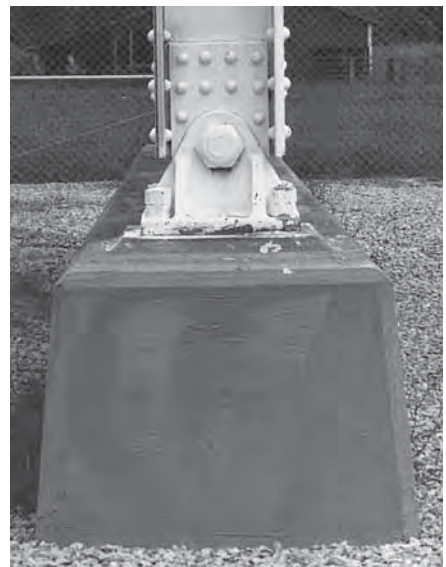


FIG. 3.6 Apoyo articulado
Maureen M. Kassimali

3.4 Determinación estática, hiperestaticidad e inestabilidad

Estabilidad interna

Una estructura es considerada *estable internamente*, o *rígida*, si mantiene su forma y su cuerpo rígidos cuando se desprende de sus apoyos. A la inversa, una estructura es denominada *internamente inestable* (o no rígida) si no puede mantener su forma y puede someterse a grandes deformaciones bajo pequeñas alteraciones cuando no está apoyada externamente. Algunos ejemplos de estas estructuras internamente inestables se exponen en la Fig. 3.7.

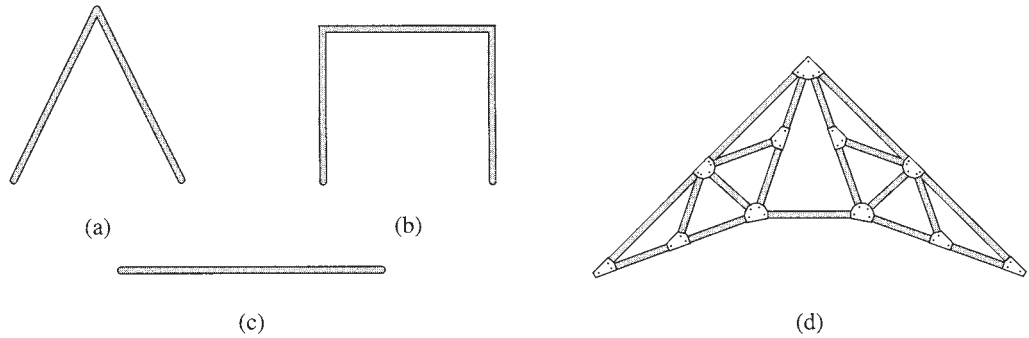


FIG. 3.7 Ejemplo de estructuras estables internamente

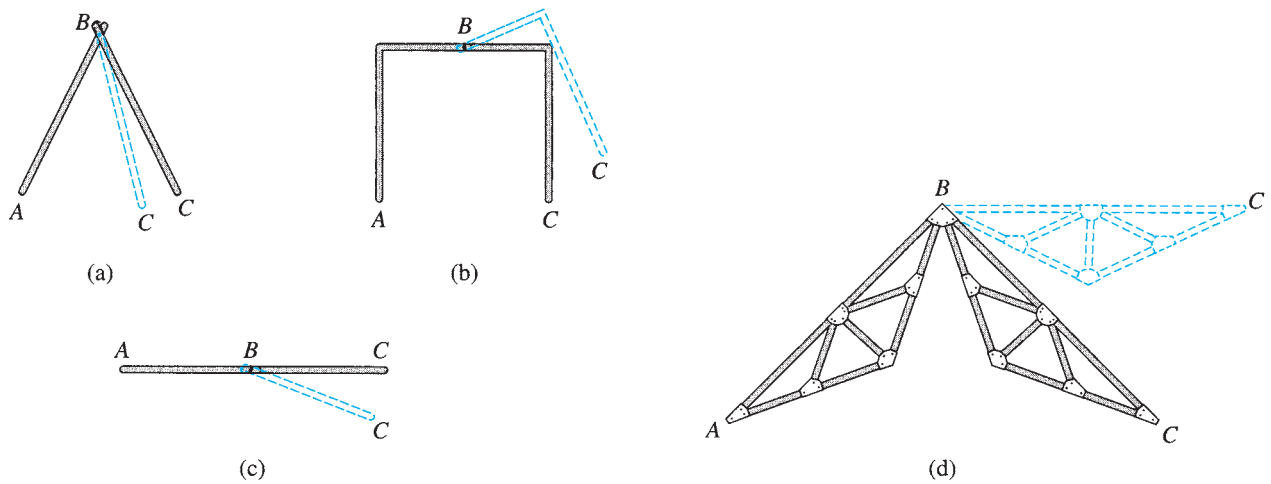


FIG. 3.8 Ejemplo de estructuras inestables internamente

Note que una de ellas forma un cuerpo rígido, y cada una puede mantener su forma bajo la acción de las cargas. La Fig. 3.8 también muestra algunos ejemplos de este tipo de estructuras. Mirando a detalle, estas estructuras enseñan que están formadas por dos cuerpos rígidos, AB y BC , unidas por una articulación en el nodo B , el cual no puede evitar la rotación de una de las partes con relación a la otra.

Se debe hacer notar que todos los cuerpos físicos se deforman cuando están sujetos a cargas; las deformaciones en la mayoría de las estructuras ingenieriles bajo condiciones de servicio son muy pequeñas, tanto que sus efectos en el estado de equilibrio de la estructura pueden despreciarse. El término *estructura rígida* aquí empleado implica que la estructura ofrece una resistencia significativa a cambiar su forma, donde las estructuras no rígidas muestran nula resistencia a cambiar su forma desligadas de sus apoyos, y normalmente colapsan bajo su propio peso cuando no están apoyadas de manera externa.

Determinación estática de las estructuras estables internamente

Una estructura estable internamente se considera que es *estáticamente determinada* o *isostática* si todas las reacciones de sus apoyos se pueden establecer

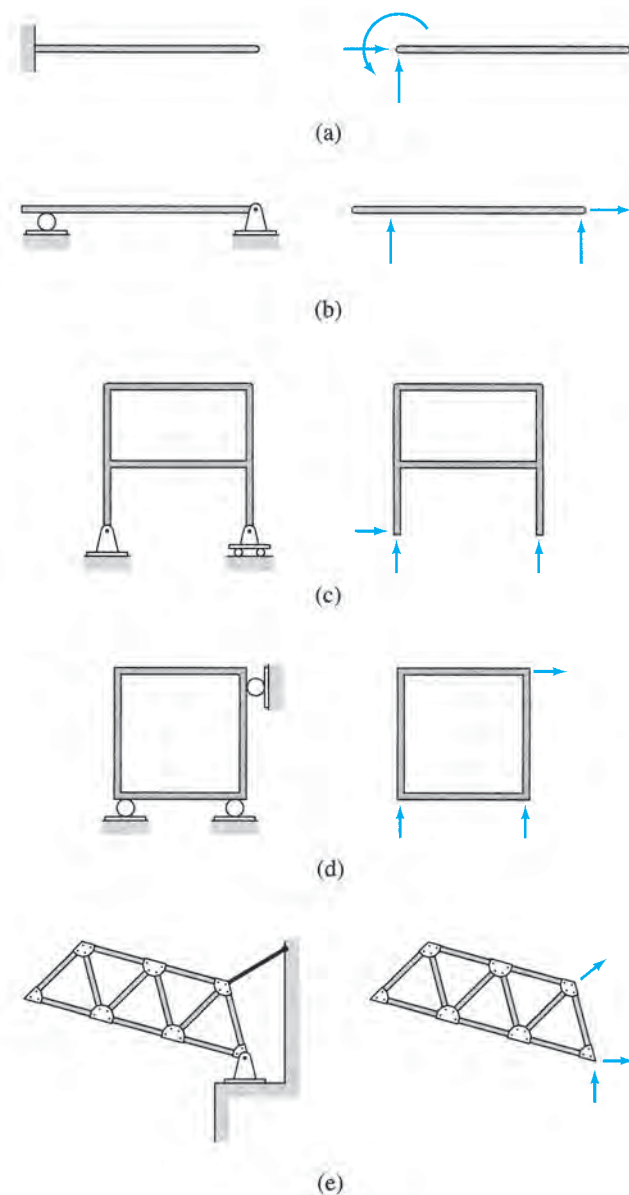


FIG. 3.9 Ejemplos de estructura planas isostáticas

resolviendo las ecuaciones de equilibrio. Dado que una estructura plana estable internamente puede ser tratada como un cuerpo rígido plano, con el fin de mantenerse en equilibrio bajo un sistema general de fuerzas coplanares, debe ser soportada por al menos tres reacciones que satisfagan las ecuaciones de equilibrio (Ecs. 3.2, 3.3 o 3.4). Además, como solo hay tres ecuaciones de equilibrio, estas no pueden ser utilizadas para obtener más de tres reacciones. Por lo tanto, una estructura plana que es isostática de manera externa debe tener exactamente tres reacciones en sus apoyos. Algunos ejemplos de estructuras planas isostáticas de manera externa se muestran en la Fig. 3.9. Se debe hacer notar que una de estas estructuras está soportada por tres reacciones que pueden ser determinadas resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio.

Si una estructura es soportada por más de tres reacciones, entonces todas las reacciones no podrán ser determinadas por las ecuaciones de equilibrio.

Tales estructuras son llamadas *estáticamente indeterminadas o hiperestáticas*. Todas esas reacciones superiores a las necesarias son llamadas *redundantes*, y al número de redundantes se le conoce como *grado de indeterminación externa*. Por lo tanto, si una estructura tiene r reacciones ($r > 3$), entonces el grado de indeterminación se puede escribir como

$$i_e = r - 3 \quad (3.7)$$

La Fig. 3.10 muestra algunos ejemplos de estructuras planas estáticamente hiperestáticas de manera externa.

Si una estructura es soportada por menos de tres reacciones, estas no son suficientes para prevenir todos los posibles movimientos de la estructura en su plano. Tales estructuras no pueden mantener el equilibrio bajo un sistema general de cargas y es, entonces, denominada *estáticamente inestable externamente*. Un ejemplo de tal estructura es la mostrada en la Fig. 3.11. La armadura ejemplificada se apoya en solo dos patines. Debería ser obvio que a pesar de que las dos reacciones pueden prevenir a la armadura de la rotación y translación en dirección vertical, no puedan prevenirla de la translación horizontal. Por lo tanto, la armadura no está completamente restringida y no es estáticamente estable.

Las condiciones de inestabilidad estática, determinación e indeterminación de estructuras planas internamente estables se pueden resumir de la siguiente manera:

$r < 3$	la estructura es estáticamente inestable externamente	
$r = 3$	la estructura es estáticamente determinada o isostática externamente	(3.8)
$r > 3$	la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática internamente	

Donde r = número de reacciones.

Debe tenerse en cuenta que la primera de las tres condiciones indicadas en la Ec. (3.8) es necesaria y suficiente en el sentido de que si $r < 3$, la estructura es definitivamente inestable. Sin embargo, las dos condiciones restantes, $r = 3$ y $r > 3$, además de necesarias no son suficientes para la determinación o indeterminación estática, respectivamente. En otras palabras, una estructura puede estar soportada por un número suficiente de reacciones ($r \geq 3$) pero es posible que sea inestable debido al arreglo inapropiado de sus apoyos. Tales estructuras se conocen como *geoméricamente inestables de manera externa*. Los dos tipos de arreglos en las reacciones que causan inestabilidad geométrica en estructuras planas aparecen en la Fig. 3.12. La armadura de la Fig. 3.12(a) es soportada por tres reacciones paralelas. En ella se puede ver que a pesar de que hay suficiente número de reacciones ($r = 3$), todas ellas están en dirección vertical, así que no pueden prevenir la translación horizontal. La armadura es, entonces, geoméricamente inestable. El otro tipo de disposición o arreglo de reacciones que puede causar inestabilidad geométrica es la que se muestra en la Fig. 3.12(b). En este caso, las vigas están apoyadas por tres reacciones no paralelas, sin embargo, dado que las líneas de acción de las fuerzas de las tres reacciones son concurrentes en el mismo punto A, estas no previenen la rotación de la viga alrededor del punto A. En otras palabras, el momento de equilibrio $\sum M_A = 3$ no se satisface para

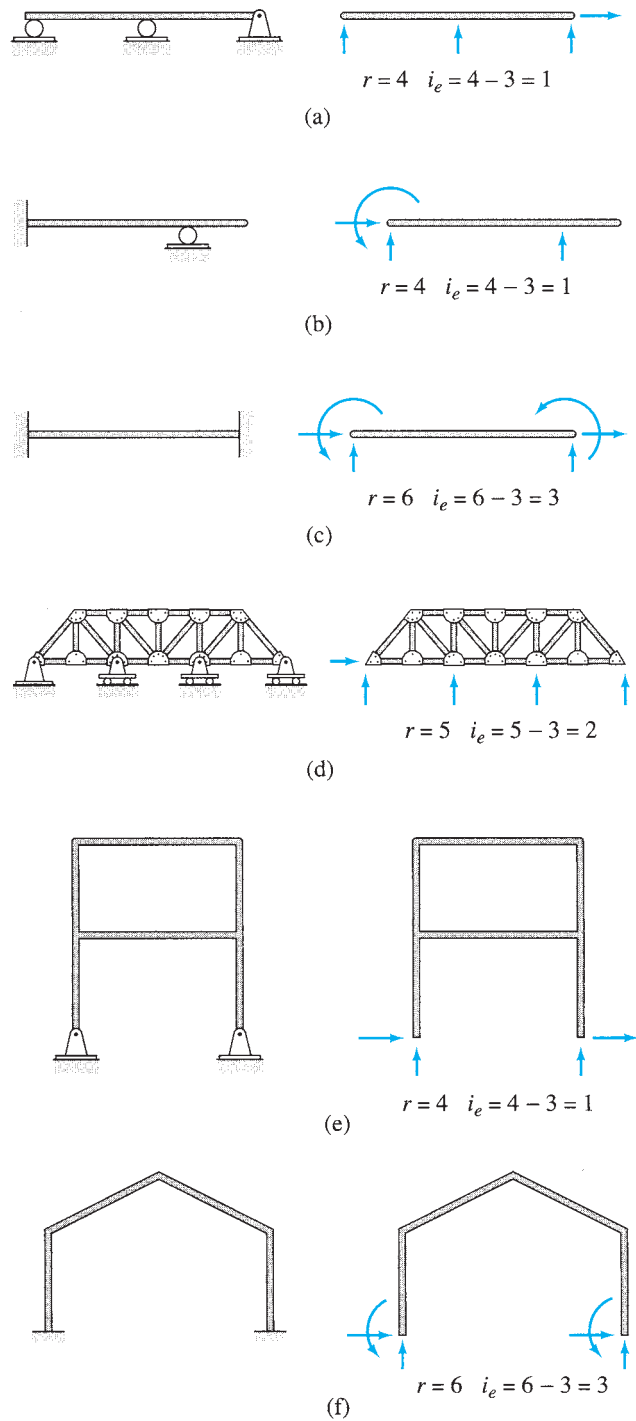
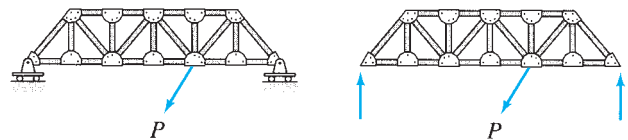


FIG. 3.10 Ejemplos de estructuras planas estáticamente indeterminadas de manera externa

FIG. 3.11 Ejemplos de estructuras planas estáticamente inestables de manera externa



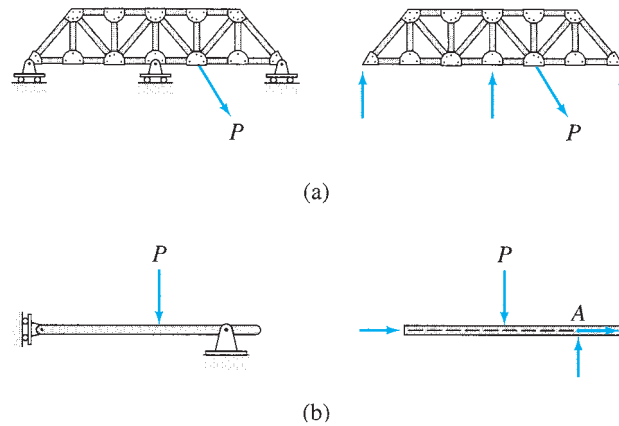


FIG. 3.12 Arreglo de reacciones causantes de inestabilidad geométrica externa en estructuras planas

un sistema de cargas coplanares aplicadas a la viga. Por lo tanto, la viga es geoméricamente inestable.

Basados en la discusión anterior, podemos concluir que para que una estructura plana internamente estable sea geoméricamente estable externamente de manera que pueda permanecer en equilibrio bajo la acción de cualesquiera cargas coplanares arbitrarias, debe ser soportada por al menos tres reacciones, las cuales no deben ser paralelas o concurrentes.

Determinación estática de estructuras inestables internamente—Ecuaciones de condición

Considere una estructura inestable internamente compuesta por dos elementos rígidos AB y BC conectados por una articulación interna en B , como se muestra en la Fig. 3.13(a). La estructura está soportada por un apoyo de patín en A y uno articulado en C , los cuales producen tres reacciones externas no paralelas y no concurrentes. Como indica la figura, estas reacciones deberían ser suficientes para restringir completamente una estructura internamente estable o rígida, pero no lo son para esta estructura. La estructura puede, sin embargo, hacerse externamente estable remplazando el apoyo de patín en A por uno articulado, para prevenir el movimiento horizontal del extremo A . Por lo tanto, como se ve en la Fig. 3.13(b), el número mínimo de reacciones externas para restringir completamente la estructura son cuatro.

Es claro que las tres ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las cuatro reacciones incógnitas en los apoyos de la estructura. No obstante, la presencia de una articulación interna en B proporciona una ecuación adicional que se puede utilizar con las tres ecuaciones de equilibrio para determinar las cuatro incógnitas. La ecuación adicional se sustenta en la condición de que la articulación interna no puede transmitir momento, es decir, el momento en los extremos de los elementos de la estructura conectados a la articulación es cero. Por lo tanto, cuando una articulación interna se usa para conectar dos porciones de una estructura, la suma algebraica de momentos alrededor de la articulación, la suma de cargas y reacciones que actúan en cada parte de la estructura de cada lado de la articulación, debe ser cero. Por consiguiente, para la estructura de la Fig. 3.13(b), la presencia de una articulación interna en B requiere que la suma algebraica de momentos alrededor de B , la suma de las cargas y reacciones que operan en un elemento individual AB y BC , debe ser cero; es decir $\sum M_B^{AB} = 0$ y $\sum M_B^{BC} = 0$. Tales ecuaciones

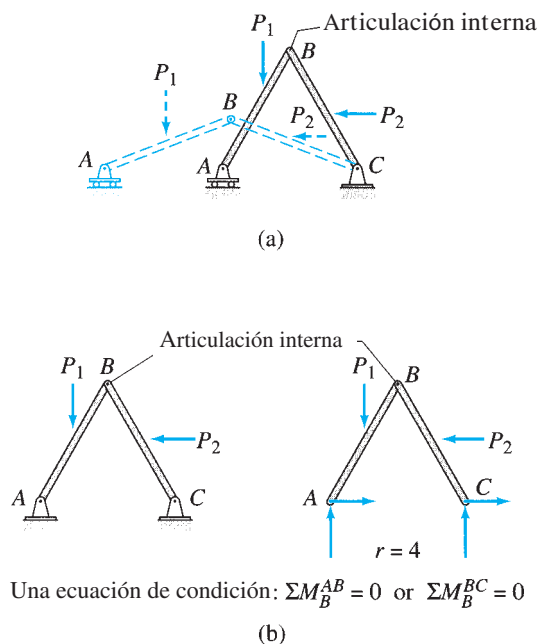


FIG. 3.13

se denominan comúnmente como *ecuaciones de condición o construcción*. Es importante notar que estas dos ecuaciones no son independientes. Cuando una de ellas —por ejemplo, $\sum M_B^{AB} = 0$ — se satisface junto con el momento de equilibrio $\sum M = 0$ para toda la estructura, la ecuación restante $\sum M_B^{BC} = 0$ se cumple automáticamente. Por lo tanto, una articulación interna, conectada a dos elementos o porciones de una estructura, proporciona una ecuación de condición independiente. (Las estructuras que contienen una articulación interna que une a dos o más elementos serán consideradas en capítulos siguientes.) Debido a las cuatro reacciones desconocidas para la estructura de la Fig. 3.13(b), que se pueden determinar mediante la resolución de las tres ecuaciones de equilibrio más una ecuación de condición ($\sum M_B^{AB} = 0$ o $\sum M_B^{BC} = 0$), la estructura es considerada estáticamente determinada externamente. Los empalmes de cortante (Fig. 3.14) son normalmente usados para unir dos vigas en una más grande. Esas conexiones son diseñadas para transmitir (cortante) fuerzas pero no (flexión) momentos, y para el análisis se tratan como articulaciones internas.

Ocasionalmente las conexiones se usan en las estructuras para permitir no solo translaciones relativas de los extremos de los elementos sino también translaciones en ciertas direcciones en los extremos de los elementos conectados. Esas conexiones son modeladas como patines internos para fines de análisis. La Fig. 3.15 muestra una estructura que consta de dos elementos rígidos AB y BC que están conectados por tal conexión interna de patín en B . La estructura es internamente inestable y requiere de un mínimo de cinco reacciones externas de apoyo para estar completamente restringida contra todo posible movimiento bajo un sistema general de fuerzas coplanares. Dado que el patín interno no puede transmitir momento ni fuerza en dirección paralela a la superficie de apoyo, proporciona dos ecuaciones de condición;

$$\sum F_x^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum F_x^{BC} = 0$$

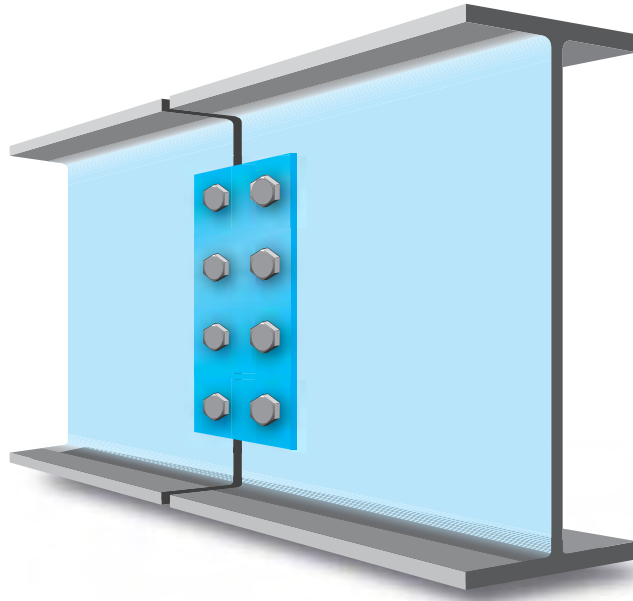


FIG. 3.14 Empalme de cortante

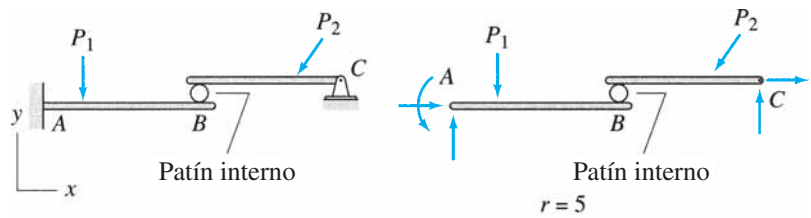


FIG. 3.15

y

$$\sum M_B^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum M_B^{BC} = 0$$

Estas dos ecuaciones de condición pueden ser usadas en conjunción con las tres ecuaciones de equilibrio para determinar las cinco reacciones externas desconocidas. Por lo tanto, la estructura de la Fig. 3.15 es isostática o estáticamente determinada externa.

A partir de la discusión anterior, podemos concluir que si hay e_c ecuaciones de condición (una ecuación por cada articulación interna y dos ecuaciones para patín interno) para una estructura inestable internamente, la cual es soportada por r reacciones externas, entonces

$r < 3 + e_c$	la estructura es estáticamente inestable externa	
$r = 3 + e_c$	la estructura es isostática externa	(3.9)
$r > 3 + e_c$	la estructura es hiperestática externa	

Para estructuras indeterminadas externamente, el grado de indeterminación externa se expresa como

$$i_e = r - (3 + e_c) \quad (3.10)$$

Enfoque alternativo. Un enfoque alternativo puede usarse para determinar la inestabilidad estática, la determinación e indeterminación de las estructuras inestables internas, y se aplica de la siguiente manera:

1. Cuente el número total de elementos de reacciones en los apoyos, r .
2. Enumere el total de fuerzas internas, f_i , que pueden ser transmitidas a través de la articulación interna y del apoyo de patín de la estructura. Recuerde que una articulación interna puede transmitir dos componentes de fuerza y un patín una componente de fuerza.
3. Determine el número total de incógnitas, $r + f_i$.
4. Contabilice los elementos rígidos o porciones, n_r , contenidas en la estructura.
5. Debido a que cada una de las partes rígidas individuales o elementos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la aplicación de las cargas, reacciones, y/o fuerzas internas, cada elemento tiene que satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M = 0$). Por lo tanto, el número total de ecuaciones disponibles para toda la estructura es $3n_r$.
6. Compruebe si la estructura es estáticamente inestable, determinada o indeterminada, comparando el total del número de incógnitas, $r + f_i$, con el total de ecuaciones. Si

$$\begin{aligned} r + f_i < 3n_r & \text{ la estructura es estáticamente} \\ & \text{inestable externa} \\ r + f_i = 3n_r & \text{ la estructura es isostática} \\ & \text{externa} \\ r + f_i > 3n_r & \text{ la estructura es hiperestática} \\ & \text{externa} \end{aligned} \quad (3.11)$$

El grado de indeterminación externa de las estructuras hiperestáticas está dado por

$$i_e = (r + f_i) - 3n_r \quad (3.12)$$

Aplicando este procedimiento alternativo a la estructura de la Fig. 3.13(b), podemos ver que para esta $r = 4$, $f_i = 2$, y $n_r = 2$. Como el total de las incógnitas ($r + f_i = 6$) es igual al número total de ecuaciones de equilibrio ($3n_r = 6$), la estructura es isostática externa. De manera similar, la estructura de la Fig. 3.15, $r = 5$, $f_i = 1$, y $n_r = 2$. Dado que $r + f_i = 3n_r$, esta estructura es también isostática externa.

El criterio para la determinación estática e indeterminación que se describió para las Ecs. (3.9) y (3.11), aunque necesario, no es suficiente ya que no puede dar cuenta de la posibilidad de la inestabilidad geométrica. Para evitar la inestabilidad geométrica, las estructuras inestables internas, como las estructuras estables internas consideradas con anterioridad, deben estar soportadas por reacciones, las cuales no deben ser ni paralelas ni concurrentes. Un tipo adicional de inestabilidad geométrica que puede surgir en la estructura

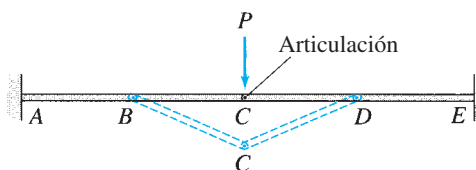


FIG. 3.16

inestable interna se describe en la Fig. 3.16. Para la viga mostrada, la cual contiene tres articulaciones internas en B , C y D , $r = 6$ y $e_c = 3$ (es decir, $r = 3 + e_c$); por lo tanto, y de acuerdo con la Ec. (3.9), la viga es soportada por un número suficiente de reacciones, y debería ser isostática. Sin embargo, se puede ver que la parte BCD de la viga es inestable porque no puede soportar una carga vertical P aplicada en ella en su posición deformada. Los elementos BC y CD tendrán una rotación finita para desarrollar cualquier resistencia a la carga aplicada. Este tipo de inestabilidad geométrica se debe evitar mediante el apoyo externo de cualquier parte de la estructura que pueda contener tres o más articulaciones internas que sean colineales.

Ejemplo 3.1

Clasifique cada una de las estructuras mostradas en la Fig. 3.17 como externamente estables, estáticamente determinadas (isostáticas) o estáticamente indeterminadas (hiperestáticas). Si la estructura es estáticamente indeterminada externa, establezca el grado de indeterminación o hiperestaticidad externa.

Solución

(a) Esta viga es internamente estable con $r = 5 > 3$. Por lo tanto, es estáticamente indeterminada externa con un grado de hiperestaticidad de

$$i_e = r - 3 = 5 - 3 = 2$$

Respuesta.

(b) La viga es internamente estable. Está compuesta por dos elementos rígidos AB y BC conectados por una articulación interna en B . Para esta viga $r = 6$ y $e_c = 1$. Dado que $r > 3 + e_c$, la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática externa con un grado de indeterminación de

$$i_e = r - (3 + e_c) = 6 - (3 + 1) = 2$$

Respuesta.

Método alternativo. $f_i = 2$, $n_r = 2$, $r + f_i = 6 + 2 = 8$, y $3n_r = 3(2) = 6$. Como $r + f_i > 3n_r$, entonces la viga es isostática externa, con

$$i_e = (r + f_i) - 3n_r = 8 - 6 = 2$$

Comprobación

(c) Esta estructura es internamente inestable con $r = 4$ y $e_c = 2$. Dado que $r < 3 + e_c$, entonces la estructura es estáticamente inestable externa. Esto se puede verificar ya que la figura muestra que el elemento BC no está restringido contra el movimiento en dirección horizontal.

Respuesta.

Método alternativo. $f_i = 1$, $n_r = 2$, $r + f_i = 4 + 1 = 5$, y $3n_r = 6$. Dado que $r + f_i < 3n_r$, la estructura es estáticamente inestable externa.

Comprobación

(d) Esta viga es estáticamente inestable interna con $r = 5$, $e_c = 2$. Dado que $r = 3 + e_c$, entonces la viga es estáticamente determinada externa.

Respuesta.

continúa

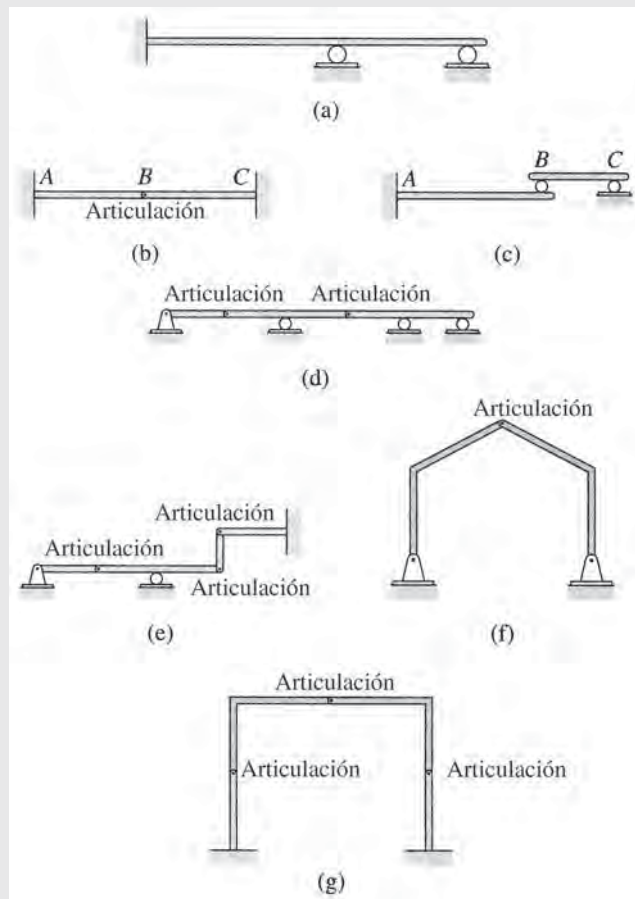


FIG. 3.17

Método alternativo. $f_i = 4$, $n_r = 3$, $r + f_i = 5 + 4 = 9$, y $3n_r = 3(3) = 9$. Por lo tanto $r + f_i = 3n_r$, la viga es estáticamente determinada externa.

Comprobación

(e) Esta es una estructura inestable interna con $r = 6$, y $e_c = 3$. Dado que $r = 3 + e_c$, la estructura es estáticamente determinada externa.

Respuestas.

Método alternativo. $f_i = 6$, $n_r = 4$, $r + f_i = 6 + 6 = 12$, y $3n_r = 3(4) = 12$. Por lo tanto $r + f_i = 3n_r$, la viga es estáticamente determinada externa.

Comprobación

(f) Este marco es internamente inestable con $r = 4$, y $e_c = 1$. Dado que $r = 3 + e_c$, el marco es estáticamente determinado externo.

Respuesta.

Método alternativo. $f_i = 2$, $n_r = 2$, $r + f_i = 4 + 2 = 6$, y $3n_r = 3(2) = 6$. Por lo tanto $r + f_i = 3n_r$, el marco es estáticamente determinado externo.

Comprobación

(g) Este marco es internamente inestable con $r = 6$, y $e_c = 3$. Dado que $r = 3 + e_c$, el marco es estáticamente determinado externo.

Respuesta.

Método alternativo. $f_i = 6$, $n_r = 4$, $r + f_i = 6 + 6 = 12$, y $3n_r = 3(4) = 12$. Por lo tanto $r + f_i = 3n_r$, el marco es estáticamente determinado externo.

Comprobación

3.5 Cálculo de reacciones

El siguiente procedimiento paso a paso se puede usar para determinar las reacciones de estructuras planas isostáticas sujetas a cargas coplanares.

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre (DCL) de la estructura.
 - a. Muestre la estructura en cuestión separada de los apoyos y de otras partes que podrían estar conectadas.
 - b. Indique cada fuerza conocida o momentos en el DCL con una flecha que señale su dirección y sentido. Escriba la magnitud de cada una de las fuerzas conocidas o momentos.
 - c. Exponga la orientación del sistema de coordenadas perpendiculares xy que se usará durante el análisis. Es usualmente conveniente orientar el eje x y el eje y en las direcciones horizontal (positivo a la derecha) y vertical (positivo hacia arriba), respectivamente. Sin embargo, si las dimensiones de la estructura y/o la mayoría de las líneas de acción de las cargas aplicadas están en dirección inclinada, seleccione el eje x (o y) en la dirección que pueda acelerar considerablemente el análisis.
 - d. En cada punto donde la estructura ha sido separada de los apoyos, indique las reacciones externas desconocidas ejercidas sobre la estructura. El tipo de reacciones que pueden ser ejercidas por los diferentes tipos de apoyos se mostraron en la Fig. 3.3. Las reacciones son representadas en el DCL por flechas en la dirección conocida de su línea de acción. Las reacciones de momento son representadas por flechas curvas. El sentido de las reacciones no son conocidas y pueden suponerse en sentido arbitrario. Sin embargo, es usualmente conveniente asumir el sentido de las fuerzas de reacción en las direcciones de los ejes x y y positivos y los momentos de reacción en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El sentido real de las reacciones será determinado después de encontrar las magnitudes de las reacciones resolviendo las ecuaciones de equilibrio y condición (si hubiera). Una magnitud positiva de la reacción implica que el sentido inicialmente asumido fue correcto, mientras que una magnitud negativa indicará que el verdadero sentido es opuesto al asumido en el DCL. Dado que las magnitudes de las reacciones no son conocidas, se indican con letras apropiadas en el DCL.
 - e. Para completar el DCL, dibuje las dimensiones de la estructura, mostrando la localización de las fuerzas externas conocidas y desconocidas.
2. Revise la determinación estática. Usando el procedimiento descrito en la sección 3.4 establezca si la estructura dada es o no estáticamente determinada (isostática) externa. Si la estructura es estática o geoméricamente inestable o indeterminada externa, finalice el análisis en esta etapa.
3. Determine las reacciones incógnitas o desconocidas aplicando las ecuaciones de equilibrio o de condición (si hubiera) a la estructura completa. Para evitar resolver ecuaciones simultáneas, escriba las ecuaciones de equilibrio o de condición para que cada una involu-

cre una sola incógnita. En algunas estructuras inestables internas tal vez no sea posible escribir las ecuaciones que contengan solo una incógnita. Para estas estructuras, las reacciones son determinadas resolviendo simultáneamente las ecuaciones. El análisis de tales estructuras inestables internas puede ser a veces acelerado, y la solución de ecuaciones simultáneas podrá evitarse desconectando la estructura de partes rígidas y aplicando las ecuaciones de equilibrio a las partes individuales para determinar las reacciones. Recuerde que las fuerzas internas que actúan en partes adyacentes de la estructura deben tener las mismas magnitudes pero en sentido opuesto de acuerdo con la tercera Ley de Newton.

4. Aplique una ecuación alternativa de equilibrio que no se haya usado antes para comprobar los resultados de los cálculos. Esta ecuación alternativa debe preferentemente involucrar a todas las reacciones que fueron determinadas en el análisis. Puede usar la ecuación de equilibrio de momentos involucrando la sumatoria de momentos alrededor de un punto que no cae en la línea de acción de las fuerzas de reacción para tales propósitos. Si el análisis se lleva a cabo de manera correcta, entonces esta ecuación alterna de equilibrio debe quedar satisfecha.

Ejemplo 3.2

Determine las reacciones en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 3.18(a).

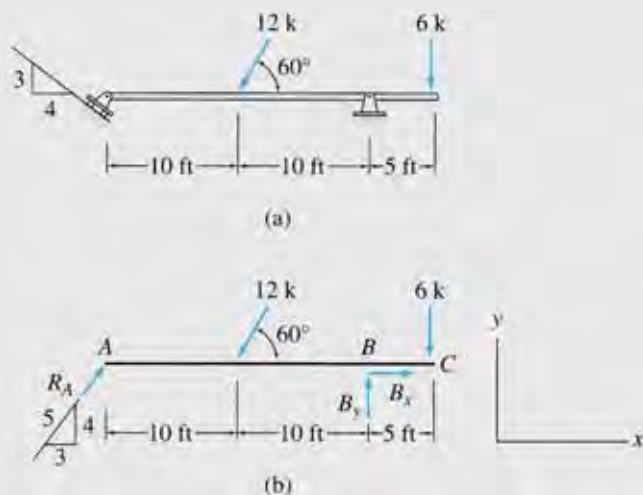


FIG. 3.18

Solución

Diagrama de cuerpo libre (DCL). El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la Fig. 3.18(b). Note que el patín en A ejerce una reacción R_A en dirección perpendicular a la superficie inclinada del apoyo.

Determinación estática. La viga es estable internamente y es soportada por tres reacciones, R_A , B_x y B_y , todas ellas no son ni paralelas ni concurrentes. Por lo tanto, la viga es estáticamente determinada o isostática.

continúa

Reacciones en los apoyos. Dado que dos de las tres reacciones, llamadas B_x y B_y , son concurrentes en B , sus momentos alrededor de B son cero. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio $\sum M_B$, la cual implica la suma de todas las fuerzas alrededor de B , contiene solo una incógnita, R_A . Así,

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_B &= 0 \\
 -\frac{4}{5}R_A(20) + 12 \sin 60^\circ(10) - 6(5) &= 0 \\
 R_A &= 4.62 \text{ k}
 \end{aligned}$$

La respuesta con signo positivo de R_A indica que nuestra suposición inicial del sentido de la reacción es correcta. Por lo tanto,

$$R_A = 4.62 \text{ k} \nearrow \quad \text{Respuesta.}$$

Con el fin de determinar B_x , aplicamos la ecuación de equilibrio,

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 \\
 \frac{3}{5}(4.62) - 12 \cos 60^\circ + B_x &= 0 \\
 B_x &= 3.23 \text{ k} \\
 B_x &= 3.23 \text{ k} \rightarrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

La única incógnita faltante, B_y , podemos ahora calcularla aplicando la ecuación de equilibrio restante:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 \frac{4}{5}(4.62) - 12 \sin 60^\circ + B_y - 6 &= 0 \\
 B_y &= 12.7 \text{ k} \\
 B_y &= 12.7 \text{ k} \uparrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

Con motivo de evitar resolver ecuaciones simultáneas en los cálculos anteriores, aplicamos las ecuaciones de equilibrio de tal manera que cada ecuación contenga solo una incógnita.

Comprobación. Finalmente, para revisar nuestros cálculos, aplicamos una ecuación alternativa de equilibrio (ver Fig. 312(b)).

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_C &= -\frac{4}{5}(4.62)(25) + 12 \sin 60^\circ(15) - 12.7(5) \\
 &= -0.01 \text{ k-ft}
 \end{aligned}$$

Comprobación

Ejemplo 3.3

Determine las reacciones en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 3.19(a).

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Ver la Fig. 3.19(b)

Determinación estática. La viga es estable internamente con $r = 3$, por lo tanto, es estáticamente determinada.

continúa

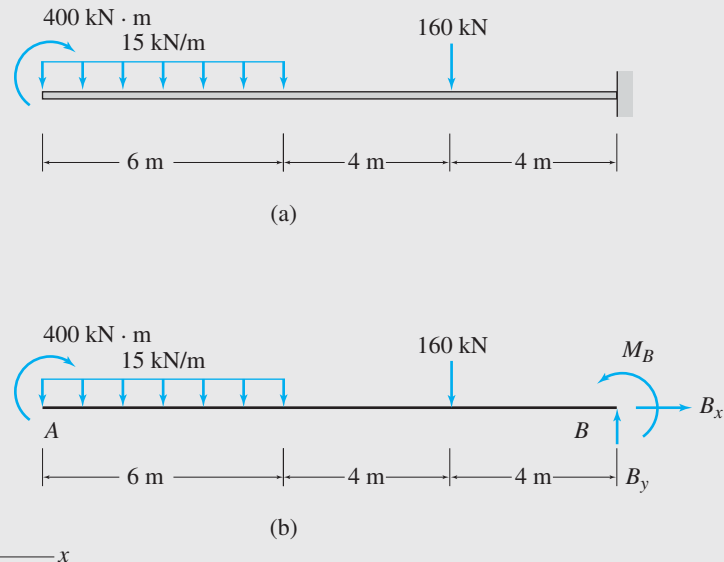


FIG. 3.19

Reacciones en los apoyos. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$B_x = 0$$

Respuesta.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$-15(6) - 160 + B_y = 0$$

$$B_y = 250 \text{ kN}$$

$$B_y = 250 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta.

$$+ \curvearrowright \sum M_B = 0$$

$$-400 + 15(6)(3 + 8) + 160(4) + M_B = 0$$

$$M_B = -1230 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 1230 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft$$

Respuesta.

Comprobación.

$$+ \rightarrow \sum M_A = -400 - 15(6)(3) - 160(10) + 250(14) - 1230 = 0$$

Comprobación.

Ejemplo 3.4

Determine las reacciones de los apoyos del marco mostrado en la Fig. 3.20(a).

Solución

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del marco aparece en la Fig. 3.20(b). Nótese que la carga trapezoidal distribuida ha sido dividida en dos cargas más simples, una uniforme y otra triangular, cuyas áreas y centroides son más fáciles de calcular.

continúa

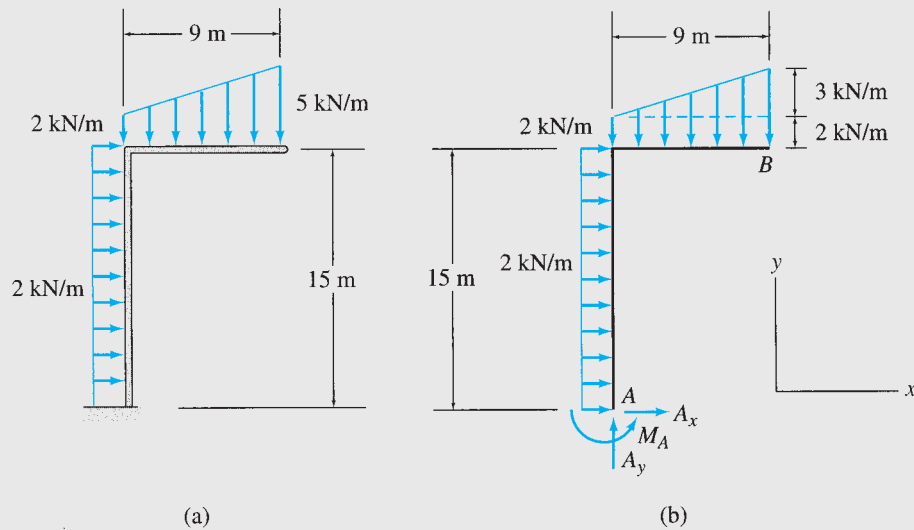


FIG. 3.20

Determinación estática. El marco es estable internamente con $r = 3$. Por lo tanto, es estáticamente determinado.

Reacciones en los apoyos. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x + 2(15) = 0$$

$$A_x = -30 \text{ kN}$$

$$A_x = 30 \text{ kN}$$

Respuesta.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 2(9) - \frac{1}{2}(3)(9) = 0$$

$$A_y = 31.5 \text{ kN}$$

$$A_y = 31.5 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta.

$$+ \curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$M_A - [2(15)]\left(\frac{15}{2}\right) - [2(9)]\left(\frac{9}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(3)(9)\right]\frac{2}{3}(9) = 0$$

$$M_A = 387 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_A = 387 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

Respuesta.

Comprobación.

$$+ \curvearrowright \sum M_B = -30(15) - 31.5(9) + 387 + [2(15)]\left(\frac{15}{2}\right)$$

$$+ [2(9)]\left(\frac{9}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}(3)(9)\right]\left(\frac{9}{3}\right)$$

$$= 0$$

Comprobación

Ejemplo 3.5

Determine las reacciones de los apoyos del marco mostrado en la Fig. 3.21(a).

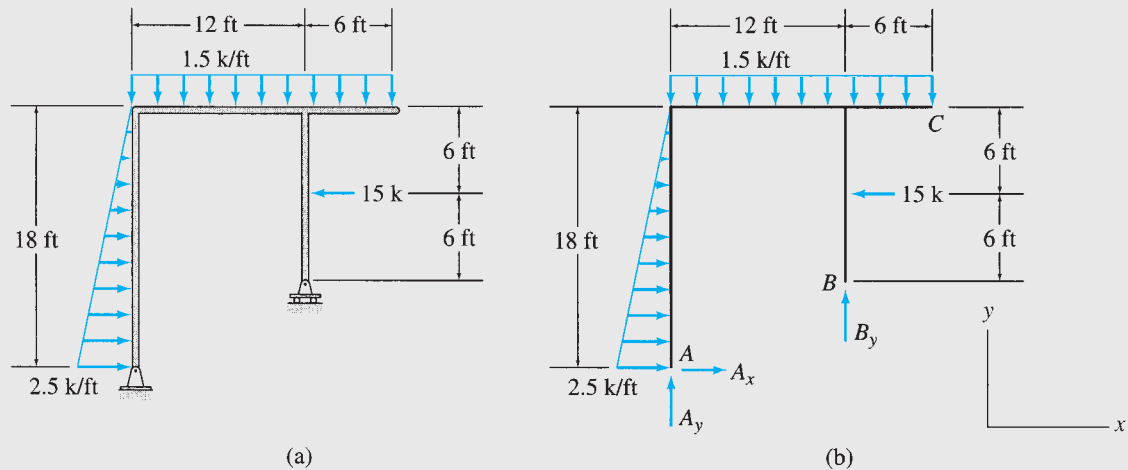
**FIG. 3.21****Solución**

Diagrama de cuerpo libre. Ver la Fig. 3.21(b).

Determinación estática. El marco es estable internamente con $r = 3$. Por lo tanto, es estáticamente determinado.

Reacciones en los apoyos

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x + \frac{1}{2}(2.5)(18) - 15 = 0$$

$$A_x = -7.5 \text{ k}$$

$$A_x = 7.5 \text{ k} \leftarrow$$

Respuesta.

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

$$-\left[\frac{1}{2}(2.5)(18)\right]\left(\frac{18}{3}\right) - [1.5(18)](9) + 15(12) + B_y(12) = 0$$

$$B_y = 16.5 \text{ k}$$

$$B_y = 16.5 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 1.5(18) + 16.5 = 0$$

$$A_y = 10.5 \text{ k}$$

$$A_y = 10.5 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.*continúa*

Comprobación.

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_C &= -7.5(18) - 10.5(18) + \left[\frac{1}{2}(2.5)(18) \right] \frac{2}{3}(18) \\
 &\quad + 1.5(18) \left(\frac{18}{2} \right) - 15(6) - 16.5(6) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Respuesta.

Ejemplo 3.6

Determine las reacciones de los apoyos del marco mostrado en la Fig. 3.22(a).

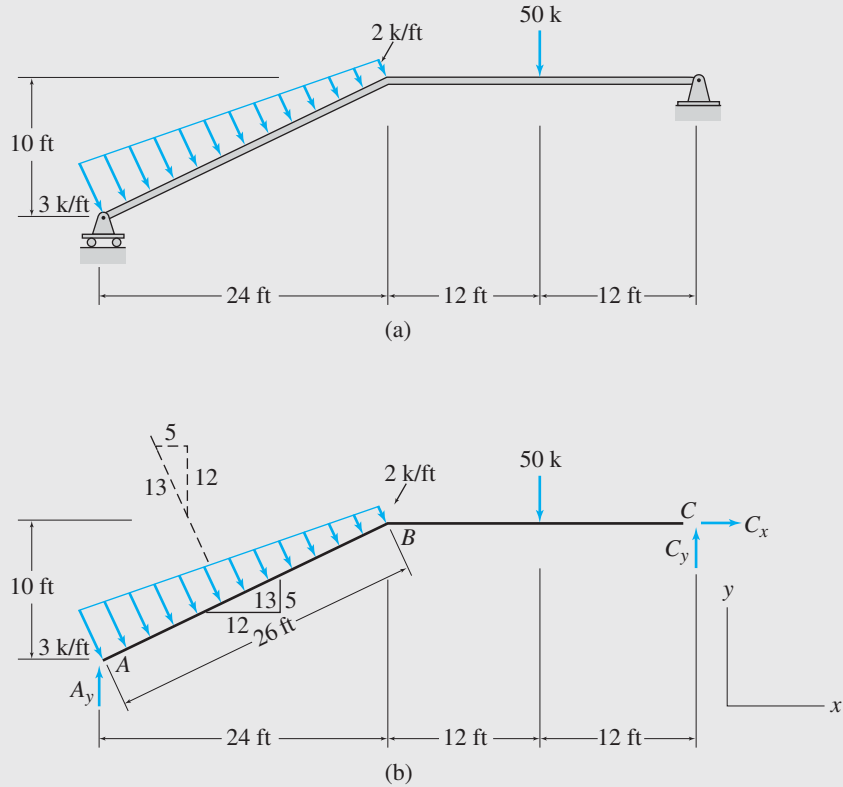


FIG. 3.22

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Ver la Fig. 3.22(b).

Determinación estática. El marco es estable internamente con $r = 3$. Por lo tanto, es estáticamente determinado.

continúa

Reacciones en los apoyos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\left(\frac{2+3}{2}\right)(26)\left(\frac{5}{13}\right) + C_x = 0$$

$$C_x = -25 \text{ k}$$

$$C_x = 25 \text{ k} \leftarrow$$

Respuesta.

$$+ \zeta \sum M_A = 0$$

$$-2(26)(13) - \frac{1}{2}(1)(26)\left(\frac{26}{3}\right) - 50(24 + 12) + 25(10) + C_y(48) = 0$$

$$C_y = 48.72 \text{ k}$$

$$C_y = 48.72 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - \left(\frac{2+3}{2}\right)(26)\left(\frac{12}{13}\right) - 50 + 48.72 = 0$$

$$A_y = 61.28 \text{ k}$$

$$A_y = 61.28 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.**Comprobación**

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum M_B &= -61.28(24) + 2(26)(13) + \frac{1}{2}(1)(26)\left(\frac{2}{3}\right)(26) - 50(12) + 48.72(24) \\ &= -0.107 \text{ k-ft} \approx 0 \end{aligned}$$

Comprobación**Ejemplo 3.7**

Determine las reacciones en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 3.23(a).

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Ver la Fig. 3.23(b)

Determinación estática. La viga es inestable internamente. Está compuesta por tres elementos rígidos, AB , BE , y EF , conectados por dos articulaciones internas en B y E . La estructura tiene $r = 5$ y $e_c = 2$; debido a que $r = 3 + e_c$, la estructura es estáticamente determinada.

Reacciones en los apoyos.

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

Respuesta.

Después, aplicamos la ecuación de condición $\zeta \sum M_B^{AB} = 0$, la cual involucra la sumatoria de momentos alrededor de B de todas las fuerzas actuando en la porción AB .

$$+ \zeta \sum M_B^{AB} = 0$$

$$-A_y(20) + [5(20)](10) = 0$$

$$A_y = 50 \text{ kN}$$

Respuesta.

$$A_y = 50 \text{ kN} \uparrow$$

continúa

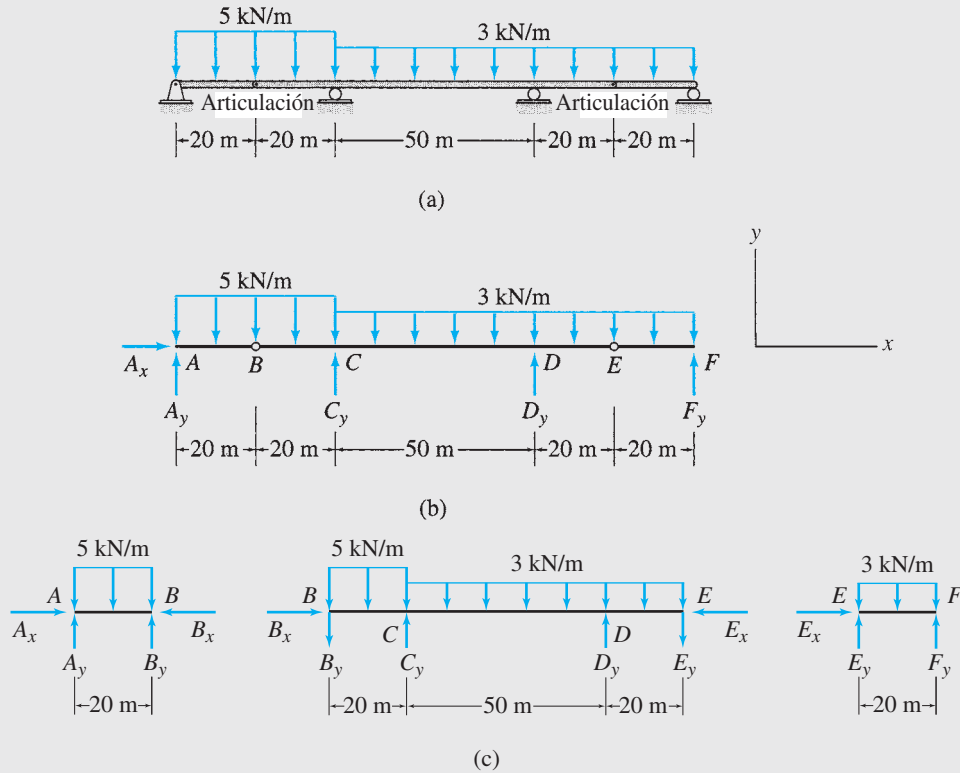


FIG. 3.23

De manera similar, aplicando las ecuaciones de condición $\sum M_E^{EF} = 0$, determinamos las reacciones como sigue:

$$+ \zeta \sum M_E^{EF} = 0$$

$$-[3(20)](10) + F_y(20) = 0$$

$$F_y = 30 \text{ kN}$$

$$F_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta.

Las dos ecuaciones de equilibrio restantes se pueden aplicar para determinar las dos incógnitas restantes, C_y y D_y :

$$+ \zeta \sum M_D = 0$$

$$-50(90) + [5(40)](70) - C_y(50) + [3(90)](5) + 30(40) = 0$$

$$C_y = 241 \text{ kN}$$

$$C_y = 241 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta.

Es importante destacar que las ecuaciones de equilibrio para momento involucran los momentos de *todas* las fuerzas actuando en la estructura, mientras, las ecuaciones de condición de momento involucran solo los momentos de las fuerzas actuando en la porción de la estructura *a un lado* de la articulación interna.

Por último, calculamos D_y utilizando la ecuación de equilibrio,

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$50 - 5(40) + 241 - 3(90) + D_y + 30 = 0$$

$$D_y = 149 \text{ kN}$$

$$D_y = 149 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta.

continúa

Método alternativo. Las reacciones de la viga se pueden determinar alternativamente aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada una de las tres porciones rígidas AB , BE y EF de la viga. Los diagramas del cuerpo libre de estas porciones rígidas se muestran en la Fig. 3.23(c). Estos diagramas muestran las fuerzas internas que se ejercen a través de las articulaciones internas en B y E además de las cargas aplicadas y de las reacciones en los apoyos. Tenga en cuenta que las fuerzas internas actuantes en cada extremo de B de las porciones AB y BE y en cada extremo de E de las porciones BE y EF tienen las mismas magnitudes pero sentido opuesto, de acuerdo a la Ley de Newton de la acción y reacción.

El número total de las incógnitas (incluyendo las fuerzas internas) es de nueve. Dado que hay tres ecuaciones de equilibrio para cada una de las tres porciones rígidas, el número total de ecuaciones disponibles es también nueve ($r + f_i = 3nr = 9$). Por lo tanto, las nueve incógnitas (reacciones más fuerzas internas) se pueden determinar de las ecuaciones de equilibrio, y la viga es estáticamente determinada.

Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a la porción AB , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_A^{AB} &= 0 & - [5(20)](10) + B_y(20) &= 0 & B_y &= 50 \text{ kN} \\ + \uparrow \sum F_y^{AB} &= 0 & A_y - 5(20) + 50 &= 0 & A_y &= 50 \text{ kN} \\ + \rightarrow \sum F_x^{AB} &= 0 & A_x - B_x &= 0 & & \end{aligned} \quad \text{Comprobación (1)}$$

Después, consideremos el equilibrio de la porción EF :

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x^{EF} &= 0 & E_x &= 0 \\ + \zeta \sum M_F^{EF} &= 0 & -E_y(20) + [3(20)](10) &= 0 & E_y &= 30 \text{ kN} \\ + \uparrow \sum F_y^{EF} &= 0 & 30 - 3(20) + F_y &= 0 & F_y &= 30 \text{ kN} \end{aligned} \quad \text{Comprobación}$$

Considerando el equilibrio de la porción BE , escribimos

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x^{BE} &= 0 & B_x &= 0 \\ & & A_x &= 0 \end{aligned} \quad \text{Comprobación}$$

De la Ec. (1), obtenemos

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_C^{BE} &= 0 & 50(20) + [5(20)](10) - [3(70)](35) + D_y(50) - 30(70) &= 0 & D_y &= 149 \text{ kN} & \text{Comprobación} \\ + \uparrow \sum F_y^{BE} &= 0 & -50 - 5(20) + C_y - 3(70) + 149 - 30 &= 0 & C_y &= 241 \text{ kN} & \text{Comprobación} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8

Determine las reacciones en los apoyos para el arco de tres articulaciones mostrado en la Fig. 3.24(a)

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Ver la Fig. 3.24(b)

Determinación estática. El arco es internamente inestable; está compuesto de dos partes rígidas, AB y BC , conectados por una articulación interna en B . El arco tiene $r = 4$ y $e_c = 1$; debido a que $r = 3 + e_c$ es estáticamente determinada.

continúa

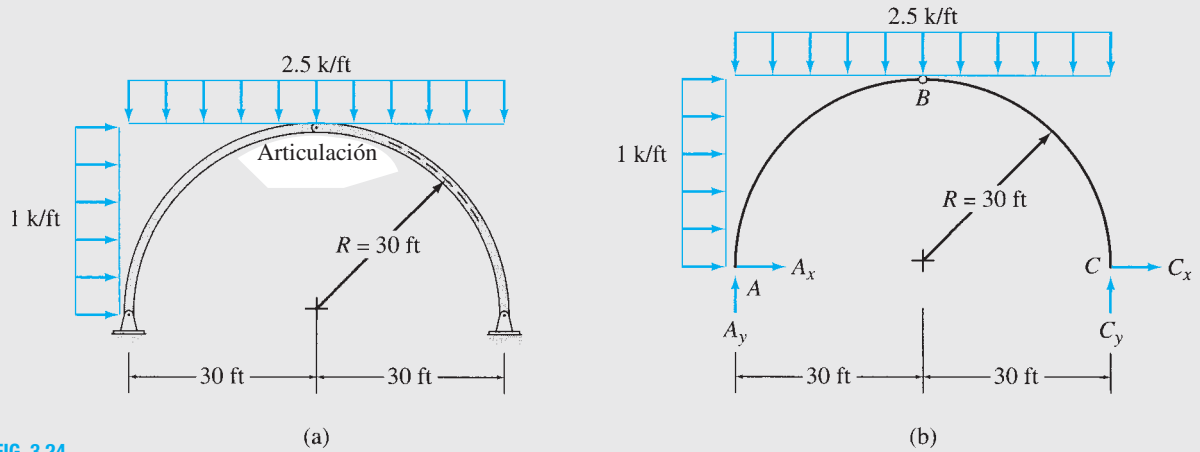


FIG. 3.24

Reacciones en los apoyos

$$+\zeta \sum M_C = 0$$

$$-A_y(60) - [1(30)](15) + [2.5(60)](30) = 0$$

$$A_y = 67.5 \text{ k}$$

$$A_y = 67.5 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

$$+\zeta \sum M_B^{AB} = 0$$

$$A_x(30) - 67.5(30) + [1(30)](15) + [2.5(30)](15) = 0$$

$$A_x = 15 \text{ k}$$

$$A_x = 15 \text{ k} \rightarrow$$

Respuesta.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$15 + 1(30) + C_x = 0$$

$$C_x = -45 \text{ k}$$

$$C_x = 45 \text{ k} \leftarrow$$

Respuesta.

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$67.5 - 2.5(60) + C_y = 0$$

$$C_y = 82.5 \text{ k}$$

$$C_y = 82.5 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

Comprobación de los cálculos. Para comprobar nuestros cálculos, aplicamos las ecuaciones de equilibrio $\sum M_B = 0$ para la estructura completa:

$$+\zeta \sum M_B = 15(30) - 67.5(30) + [1(30)](15) + [2.5(60)](0)$$

$$- 45(30) + 82.5(30)$$

$$= 0$$

Comprobación

Ejemplo 3.9

Determine las reacciones en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 3.25(a).

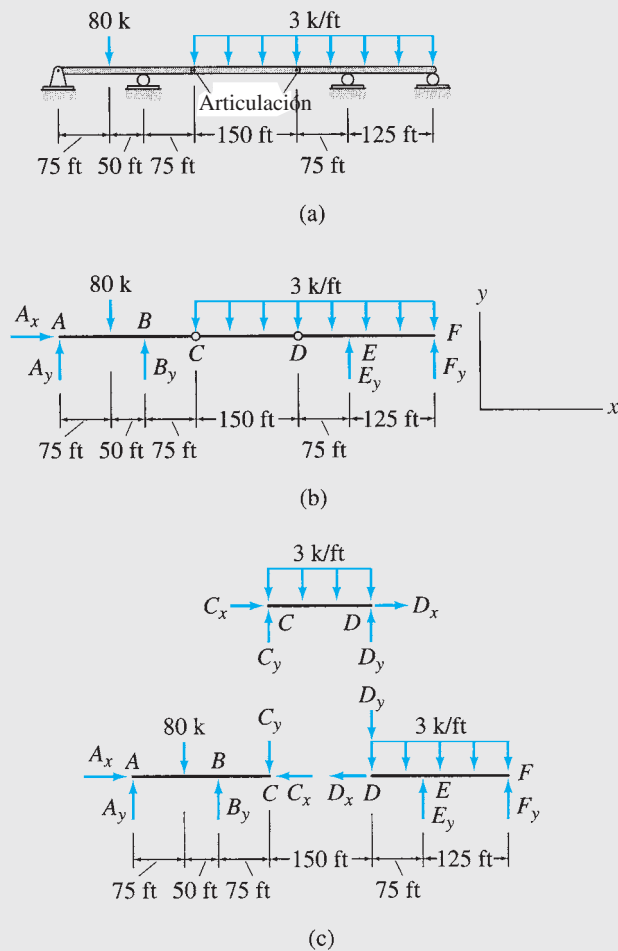
**FIG. 3.25****Solución**

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de toda la estructura se muestra en la Fig. 3.25(b).

Determinación estática. La viga es internamente estable, con $r = 5$ y $e_c = 2$. Como $r = 3 + e_c$, la estructura es estáticamente determinada.

Reacciones en los apoyos. Usando el diagrama de cuerpo libre de toda la viga que se muestra en la Fig. 3.25(b), determinamos las reacciones como sigue:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

Respuesta.

$$+\zeta \sum M_C^{AC} = 0$$

$$-A_y(200) + 80(125) - B_y(75) = 0$$

$$8A_y + 3B_y = 400$$

(1)

continúa

Con el fin de obtener otra ecuación que contenga las mismas dos incógnitas, A_y y B_y , escribimos la segunda ecuación de condición como

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_D^{AD} &= 0 \\
 -A_y(350) + 80(275) - B_y(225) + [(3)(150)](75) &= 0 \\
 14A_y + 9B_y &= 2230 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Resolviendo las Ecs. (1) y (2) simultáneamente, obtenemos

$$A_y = -103 \text{ kN} \quad y \quad B_y = 408 \text{ k}$$

$$A_y = 103 \text{ k} \downarrow$$

Respuesta.

$$B_y = 408 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

Las dos incógnitas restantes, E_y y F_y , son determinadas de las dos ecuaciones de equilibrio restantes como sigue:

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_F &= 0 \\
 103(550) + 80(475) - 408(425) + [3(350)](175) - E_y(125) &= 0 \\
 E_y &= 840 \text{ k} \\
 E_y &= 840 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \\
 -103 - 80 + 408 - 3(350) + 840 + F_y &= 0 \\
 F_y &= -15 \text{ k} \\
 F_y &= 15 \text{ k} \downarrow \quad \text{Respuesta.}
 \end{aligned}$$

Método alternativo. Las reacciones de la viga también se pueden evaluar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada una de las tres porciones, AC , CD , y DF , de la viga. Los diagramas de cuerpo libre de estas partes rígidas son mostrados en la Fig. 3.25 (c). Estos diagramas enseñan, además de las cargas aplicadas y las reacciones en los apoyos, las fuerzas internas que se ejercen a través de las articulaciones internas en C y D .

Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio de la porción CD , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_C^{CD} &= 0 \\
 -[3(150)](75) + D_y(150) &= 0 \\
 D_y &= 225 \text{ k} \\
 +\uparrow \sum F_y^{CD} &= 0 \\
 C_y - 3(150) + 225 &= 0 \\
 C_y &= 225 \text{ k} \\
 +\rightarrow \sum F_x^{CD} &= 0 \\
 C_x + D_x &= 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Después, consideremos el equilibrio de la porción DF :

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum F_x^{DF} &= 0 \\
 -D_x &= 0 \quad o \quad D_x = 0
 \end{aligned}$$

De la Ec. (3), obtenemos $C_x = 0$

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_F^{DF} &= 0 \\
 225(200) + [3(200)](100) - E_y(125) &= 0 \\
 E_y &= 840 \text{ k}
 \end{aligned}$$

Comprobación
continúa

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y^{DF} &= 0 \\
 -225 - 3(200) + 840 + F_y &= 0 \\
 F_y &= -15 \text{ k}
 \end{aligned}$$

Comprobación

Considerando el equilibrio de la porción AC, escribimos

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x^{AC} &= 0 \\
 A_x - 0 &= 0 \\
 A_x &= 0 \\
 + \curvearrowright \sum M_A^{AC} &= 0 \\
 -80(75) + B_y(125) - 225(200) &= 0 \\
 B_y &= 408 \text{ k}
 \end{aligned}$$

Comprobación

Comprobación

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y^{AC} &= 0 \\
 A_y - 80 + 408 - 225 &= 0 \\
 A_y &= -103 \text{ k}
 \end{aligned}$$

Comprobación

Ejemplo 3.10

Un marco de dos aguas que está sujeto a carga de viento se muestra en la Fig. 3.26(a). Determine las reacciones en sus apoyos debido a la carga.

Solución.

Diagrama de cuerpo libre. Ver Fig. 3.26(b)

Determinación estática. El marco es internamente inestable, con $r = 4$ y $e_c = 1$. Debido a que $r = 3 + e_c$, es estáticamente determinada.

Reacciones en los apoyos

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_C &= 0 \\
 -A_y(16) - [250(12)](6) - \left[\frac{3}{5}(50)(10) \right](12+3) \\
 + \left[\frac{4}{5}(50)(10) \right](8+4) - \left[\frac{3}{5}(220)(10) \right](12+3) \\
 - \left[\frac{4}{5}(220)(10) \right](4) - [160(12)](6) &= 0 \\
 A_y &= -3503.75 \text{ lb} \\
 A_y &= 3503.75 \text{ lb} \downarrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_B^{AB} &= 0 \\
 A_x(18) + 3503.75(8) + [250(12)](6+6) - [50(10)](5) &= 0 \\
 A_x &= -3696.11 \text{ lb} \\
 A_x &= 3696.11 \text{ lb} \leftarrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

continúa

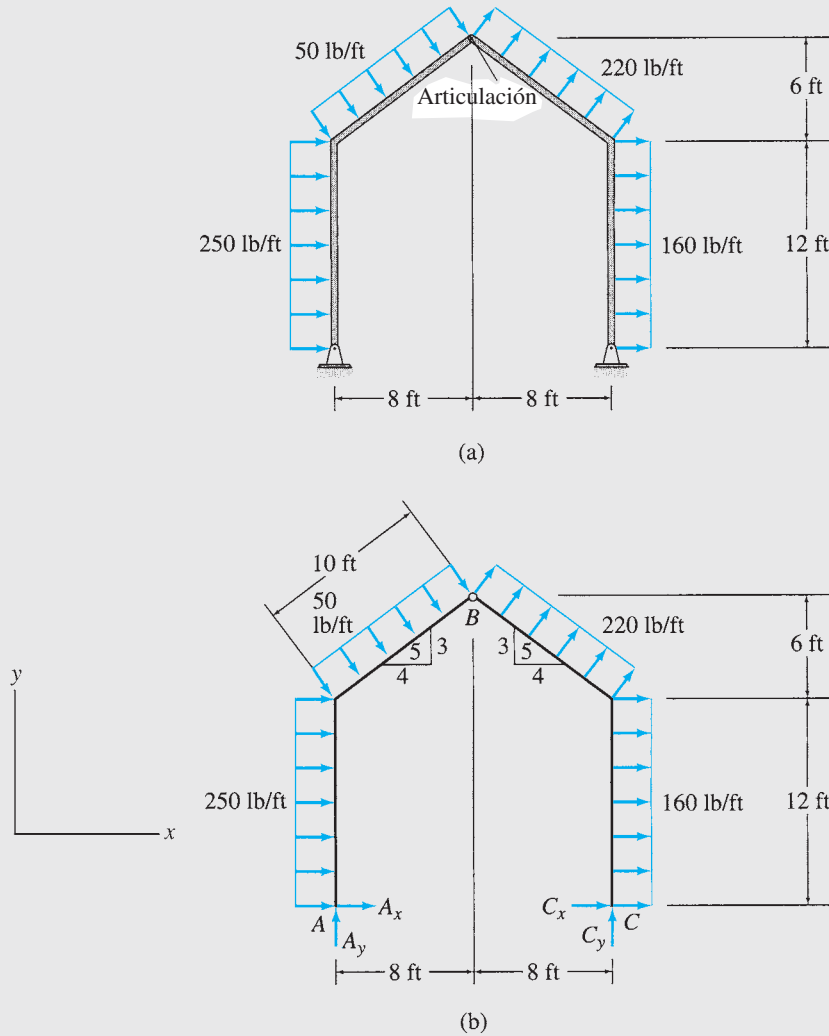


FIG. 3.26

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-3696.11 + 250(12) + \frac{3}{5}(50)(10) + \frac{3}{5}(220)(10) + 160(12) + C_x = 0$$

$$C_x = -2843.89 \text{ lb}$$

$$C_x = 2843.89 \text{ lb} \leftarrow$$

Respuesta.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$-3503.75 - \frac{4}{5}(50)(10) + \frac{4}{5}(220)(10) + C_y = 0$$

$$C_y = 2143.75 \text{ lb}$$

$$C_y = 2143.75 \text{ lb} \uparrow$$

Respuesta.

continúa

Comprobación de los cálculos.

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \sum M_B &= (-3696.11 - 2843.89)(18) \\
 &+ (3503.75 + 2143.75)(8) + [(250 + 160)(12)](12) \\
 &+ [(50 + 220)(10)](5) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Comprobación

Ejemplo 3.11

Determine las reacciones en los apoyos para el marco mostrado en la Fig. 3.27(a).

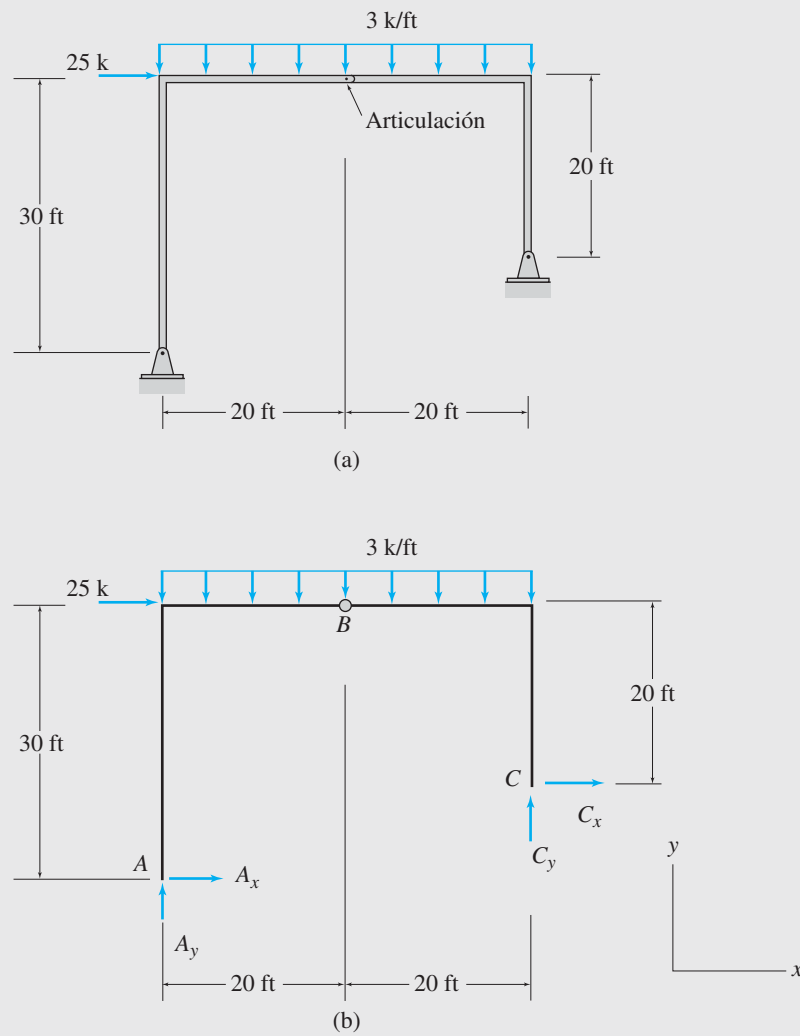


FIG. 3.27

continúa

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Ver Fig. 3.27(b).

Determinación estática. El marco tiene $r = 4$ y $e_c = 1$. Debido a que $r = 3 + e_c$, es estáticamente determinada.

Reacciones en los apoyos.

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_C &= 0 \\
 A_x(10) - A_y(40) - 25(20) + 3(40)(20) &= 0 \\
 A_x - 4A_y &= -190 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_B^{AB} &= 0 \\
 A_x(30) - A_y(20) + 3(20)(10) &= 0 \\
 3A_x - 2A_y &= -60 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Resolviendo las Ecs. (1) y (2) simultáneamente, obtenemos $A_x = 14 \text{ k}$ y $A_y = 51 \text{ k}$

$A_x = 14 \text{ k} \rightarrow$ Respuesta.

$A_y = 51 \text{ k} \uparrow$ Respuesta.

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 \\
 14 + 25 + C_x &= 0 \\
 C_x &= -39 \text{ k} \\
 C_x &= 39 \text{ k} \leftarrow \quad \text{Respuesta.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 51 - 3(40) + C_y &= 0 \\
 C_y &= 69 \text{ k} \\
 C_y &= 69 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta.}
 \end{aligned}$$

Comprobación de los cálculos

$$+ \curvearrowright \sum M_B = 14(30) - 51(20) - 39(20) + 69(20) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

3.6 Principio de superposición

El Principio de superposición establece que *en una estructura elástica, el efecto combinado de varias cargas que actúan simultáneamente es igual a la suma algebraica de cada carga al desarrollarse individualmente*. Por ejemplo, este principio implica que, para la viga de la Fig. 3.28, las reacciones totales debidas a las dos cargas que actúan simultáneamente pueden ser obtenidas por una suma algebraica, o *superponiendo* las reacciones debidas a cada una de las dos cargas individuales.

El Principio de superposición simplifica considerablemente el análisis de las estructuras sujetas a diferentes tipos de cargas que actúan simultáneamente y se utiliza de manera amplia en el análisis estructural. Además, es válido para las estructuras que satisfacen las siguientes dos condiciones: (1) la deformación de la estructura debe ser muy pequeña como para que las ecuaciones de equilibrio se basen en la geometría sin deformar la estructura;

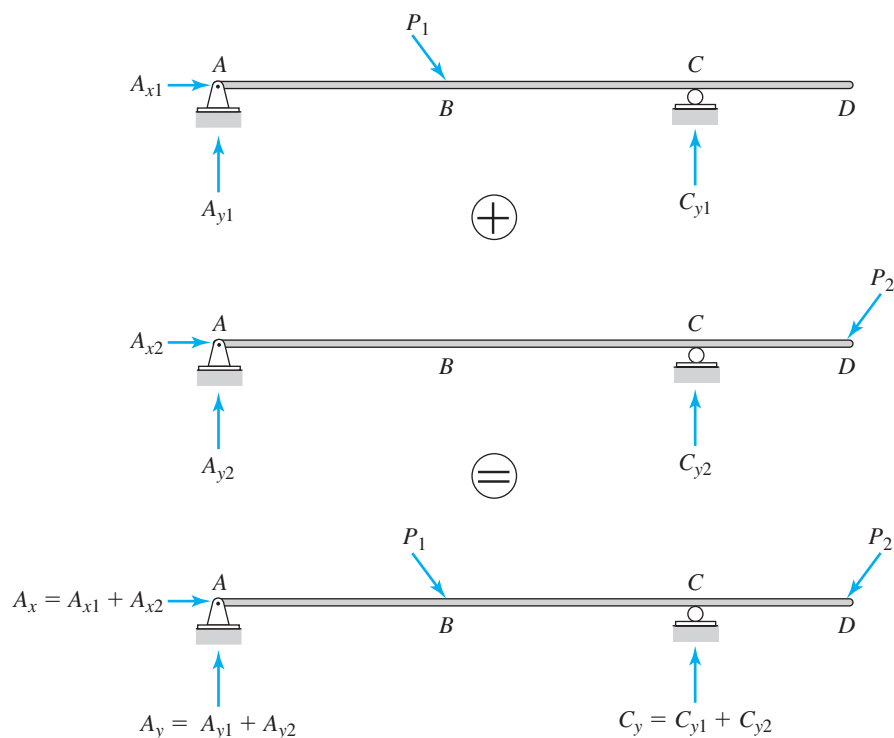


FIG. 3.28 Principio de superposición

y (2) la estructura debe estar compuesta de materiales elásticamente lineales; es decir, la relación esfuerzo-deformación para los materiales de la estructura debe de seguir la ley de Hooke. Las estructuras que satisfacen estas dos condiciones responden linealmente a las cargas aplicadas y son conocidas como *estructuras elásticas lineales*. Las estructuras de ingeniería bajo cargas de servicio se pueden clasificar como elásticas lineales; por lo tanto, el Principio de superposición puede ser usado en su análisis. El Principio de superposición es considerado válido a lo largo de este texto.

El Principio de superposición simplifica considerablemente el análisis

3.7 Reacciones de Estructuras Simplemente Apoyadas Usando Proporciones

Considere una viga simplemente apoyada sujeta a carga vertical concentrada P , como se muestra en la Fig. 3.29. Aplicando la ecuación de equilibrio de momento, $\sum M_B = 0$ y $\sum M_A = 0$, obtenemos la expresión para las reacciones verticales en los apoyos A y B , respectivamente, como

$$A_y = P \left(\frac{b}{s} \right) \quad \text{y} \quad B_y = P \left(\frac{a}{s} \right) \quad (3.13)$$

Donde, como se mostró en la Fig. 3.29, a = la distancia de la carga P del apoyo A (medida positiva a la derecha); b = la distancia de P desde el apoyo B (medida positiva a la izquierda); y s = distancia entre apoyos A y B .

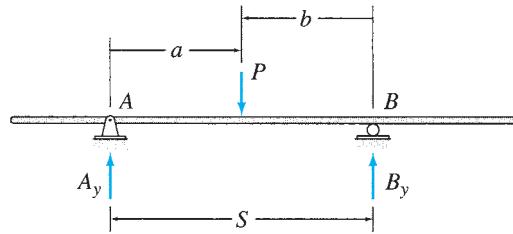
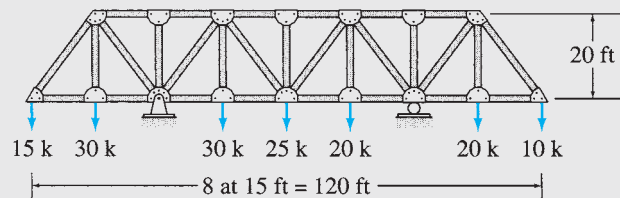


FIG. 3.29

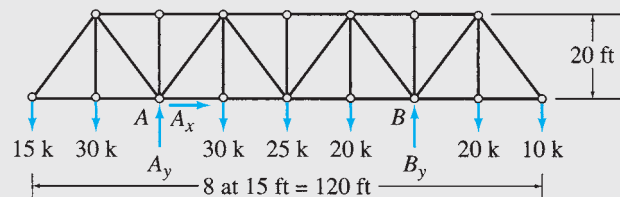
La primera de las dos expresiones en la Ec. (3.13) indica que la magnitud de la reacción vertical en A es igual a la magnitud de la carga P veces la relación de la distancia de P al apoyo B entre la distancia de los apoyos A y B . De manera similar, la segunda expresión en la Ec. (3.13) establece que la magnitud de la reacción vertical en B es igual a la magnitud de la carga P veces la relación de la distancia de P al apoyo A entre la distancia de los apoyos A y B . Estas expresiones involucran proporciones, cuando son usadas en conjunto con el Principio de superposición hacen muy conveniente la determinación de las reacciones de vigas simplemente apoyadas sujetas a una serie de cargas concentradas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.12

Determine las reacciones de los apoyos de la armadura mostrada en la Fig. 3.30(a).



(a)



(b)

FIG. 3.30

continúa

Solución**Diagrama de cuerpo libre.** Ver la Fig. 3.30(b)**Determinación estática.** La armadura es estáticamente estable con $r = 3$; por lo tanto, es estáticamente determinada.**Reacciones en los apoyos**

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

Respuesta.

$$A_y = 15\left(\frac{6}{4}\right) + 30\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) + 25\left(\frac{2}{4}\right) + 20\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 10\left(\frac{-2}{4}\right)$$

$$= 90 \text{ k}$$

$$A_y = 90 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.

$$B_y = 15\left(\frac{-2}{4}\right) + 30\left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 25\left(\frac{2}{4}\right) + 20\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) + 10\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$= 60 \text{ k}$$

$$B_y = 60 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta.**Comprobación**

$$+ \uparrow \sum F_y = -15 - 2(30) - 25 - 2(20) - 10 + 90 + 60 = 0$$

Comprobación**Resumen**

En este capítulo hemos aprendido que una estructura es considerada en equilibrio si inicialmente está en reposo y permanece así cuando se sujeta a un sistema de fuerzas y momentos. Las ecuaciones de equilibrio de estructuras espaciales pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para estructuras planas, las ecuaciones de equilibrio se expresan como

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (3.2)$$

Dos formas alternativas de ecuaciones de equilibrio para estructuras planas están dadas en las Ec (3.3) y (3.4).

El tipo común de apoyos usados en las estructuras planas están resumidas en la Fig. 3.3. Una estructura se considera estable externamente si todas sus reacciones de apoyo pueden ser determinadas resolviendo las ecuaciones de equilibrio y condición.

Una estructura se denomina estáticamente determinada externamente si si las reacciones de sus apoyos se pueden determinar mediante la resolución de las ecuaciones de equilibrio y condiciones. Para una estructura plana estable apoyada por r número de reacciones, si

$r < 3$ la estructura es estáticamente inestable externamente

$r = 3$ la estructura es estáticamente determinada o isostática externamente (3.8)

$r > 3$ la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática internamente

El grado de indeterminación externa está dado por

$$i_e = r - 3 \quad (3.7)$$

Para una estructura plana internamente inestable, la cual tiene r número de reacciones externas y e_c número de ecuaciones de condición, si

$r < 3 + e_c$ la estructura es estáticamente inestable externa

$r = 3 + e_c$ la estructura es isostática externa (3.9)

$r > 3 + e_c$ la estructura es hiperestática externa

El grado de indeterminación externa de tales estructuras está dado por

$$i_e = r - (3 + e_c) \quad (3.10)$$

Para que una estructura sea considerada geoméricamente estable, debe estar soportada por reacciones, todas ellas ni paralelas ni concurrentes. Un procedimiento para determinar las reacciones en los apoyos de estructuras planas fue presentado en la sección 3.5

El Principio de superposición establece que en una estructura elástica lineal los efectos combinados de varias cargas que actúan simultáneamente son igual a la suma algebraica de los efectos de cada carga cuando actúan individualmente. La determinación de las reacciones de las estructuras simplemente apoyadas usando proporciones se discutió en la sección 3.7.

Problemas

Sección 3.4

Del 3.1 al 3.4 Clasifique cada estructura mostrada como inestable externa, estáticamente determinada o isostática, o está-

ticamente indeterminada o hiperestática. Si la estructura es hiperestática externa, entonces determine el grado de hiperestaticidad de la indeterminación externa.

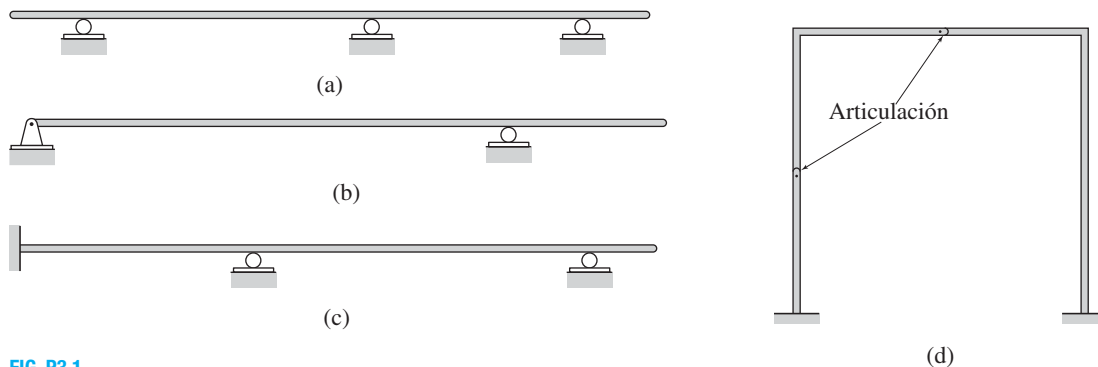
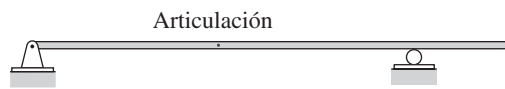
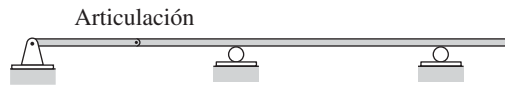


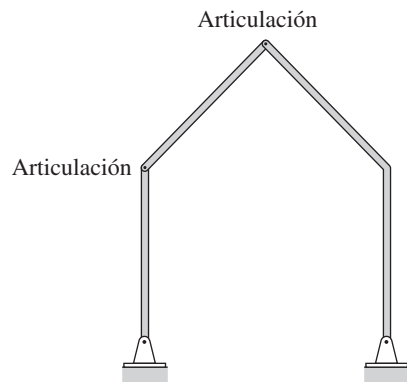
FIG. P3.1



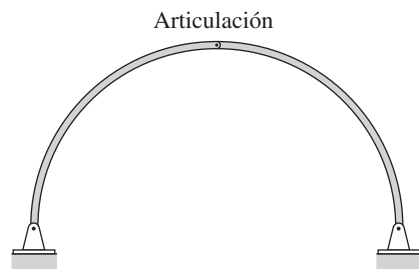
(a)



(b)

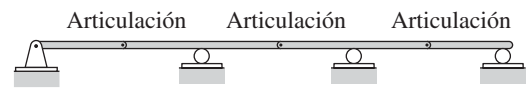


(c)

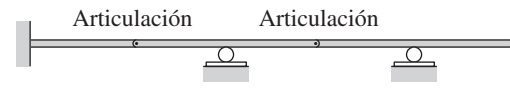


(d)

FIG. P3.2



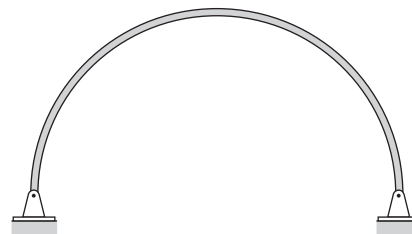
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. P3.3

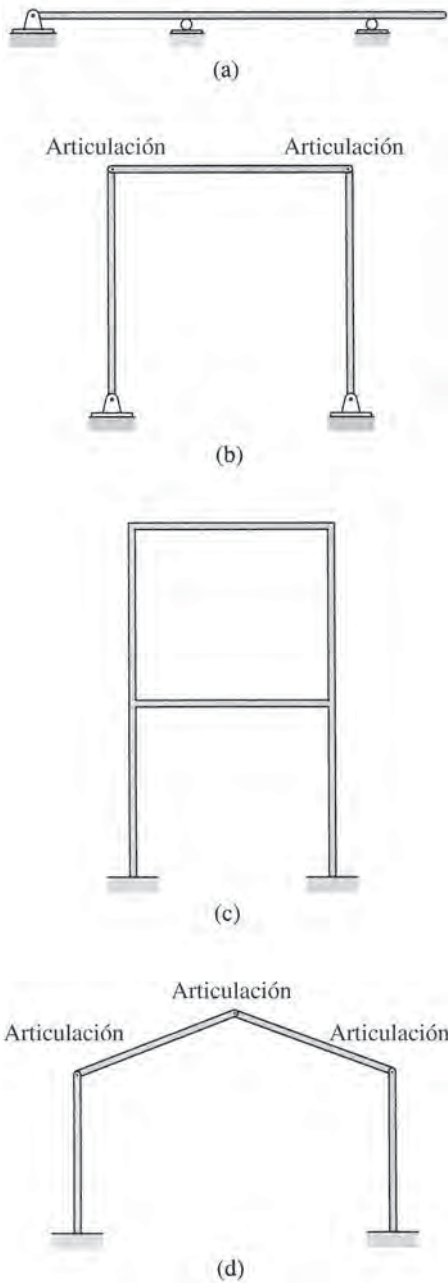


FIG. P3.4

Sección 3.5 y 3.7

Del 3.5 al 3.13 Determine las reacciones en los apoyos para las vigas mostradas.

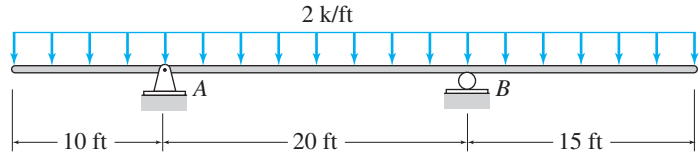


FIG. P3.5

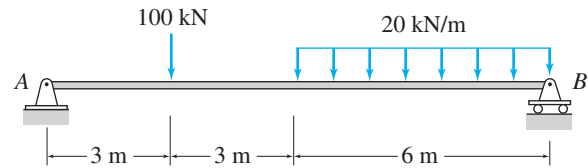


FIG. P3.6

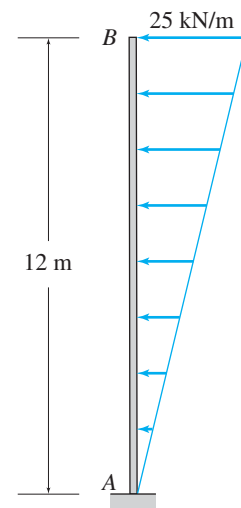


FIG. P3.7

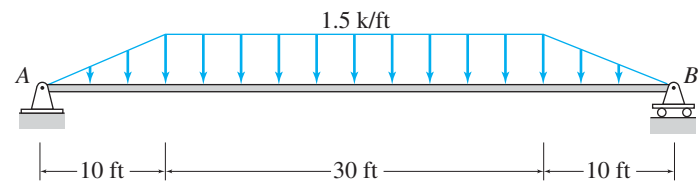


FIG. P3.8

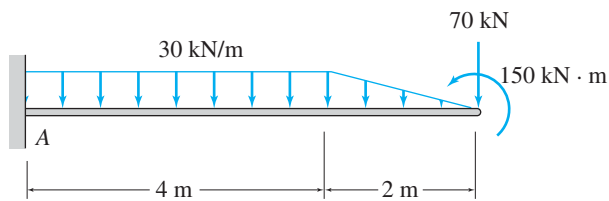


FIG. 3.9

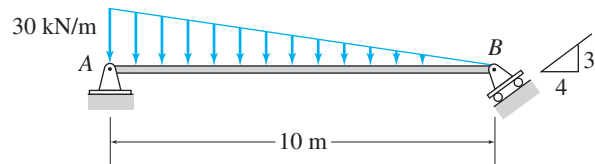


FIG. 3.13

3.14 El peso de un automóvil, que se mueve a velocidad constante sobre una viga puente, está modelado como una carga concentrada simple, como se muestra en la Fig. P3.14. Determine las expresiones para las reacciones verticales en los apoyos en términos de la posición del automóvil como medida de la distancia x , y trace las gráficas mostrando la variación de estas reacciones como función de x .

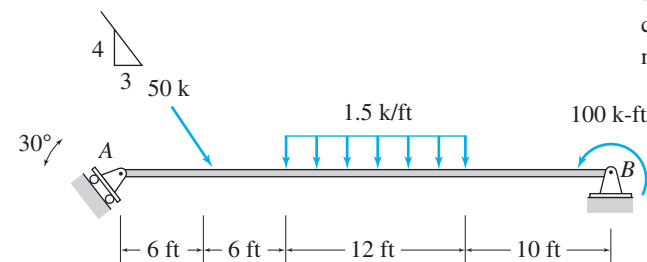


FIG. 3.10

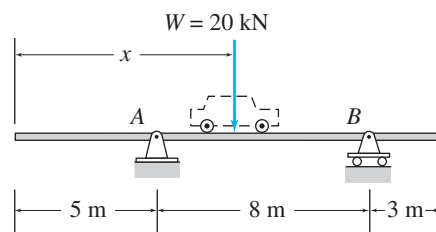


FIG. P3.14

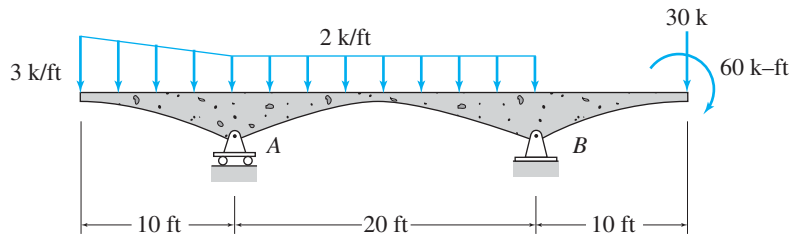


FIG. 3.11

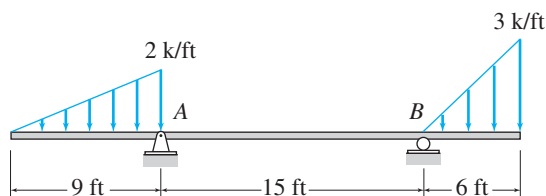


FIG. 3.12

3.15 El peso de un tranvía de 5 m de largo, que avanza a una velocidad constante sobre una viga puente, está modelado como una carga uniformemente distribuida, como se muestra en la Fig. P3.15. Determine las expresiones para las reacciones verticales en los apoyos en términos de la posición del tranvía como medida de la distancia x , y trace las gráficas mostrando la variación de estas reacciones como función de x .

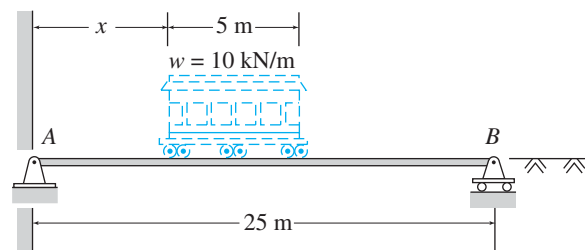


FIG. P3.15

Del 3.16 al 3.42 Determine las reacciones en los apoyos de las estructuras mostradas.

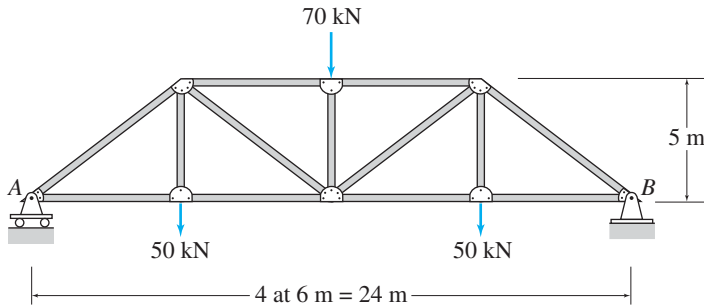


FIG. P3.16

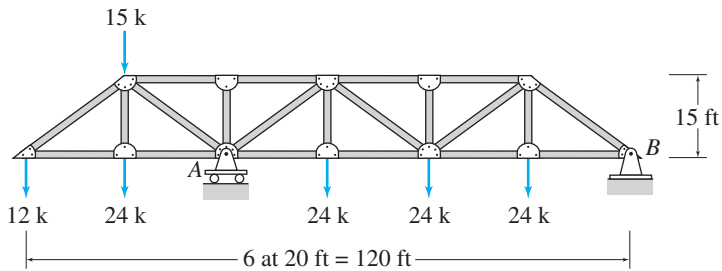


FIG. P3.17

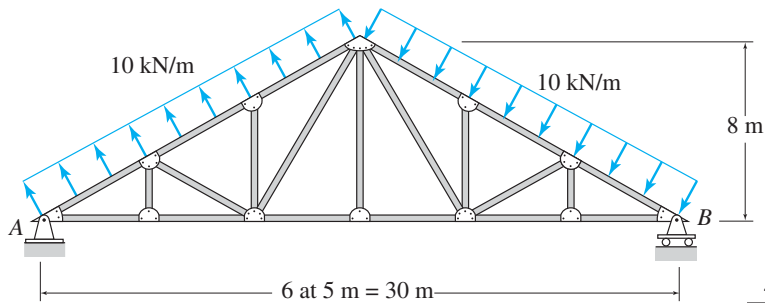


FIG. P3.18

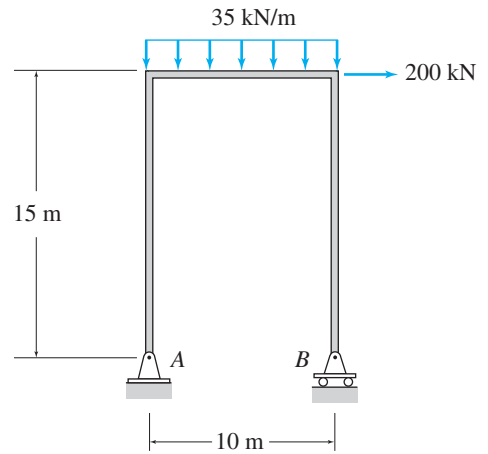


FIG. P3.19

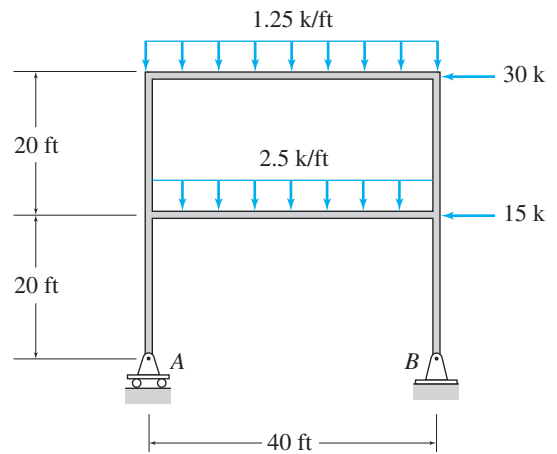


FIG. P3.20

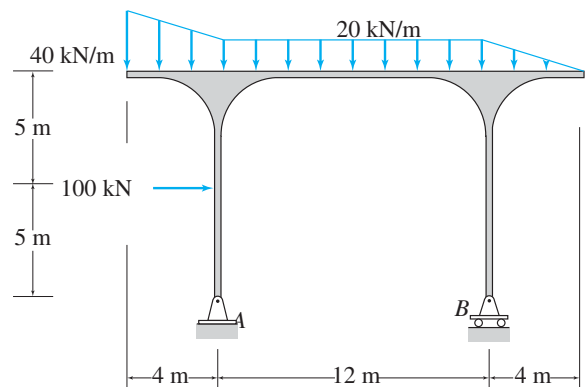


FIG. P3.21

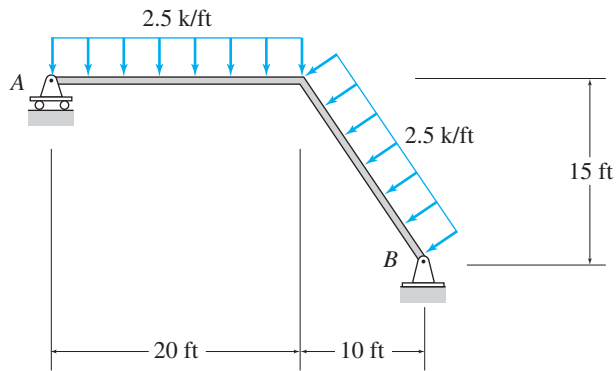


FIG. P3.22

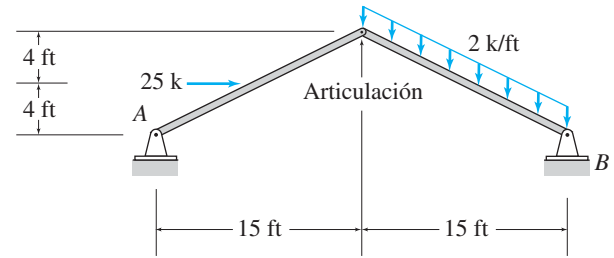


FIG. P3.26

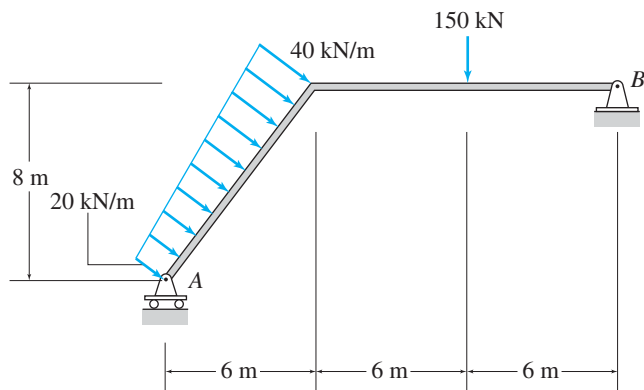


FIG. P3.23

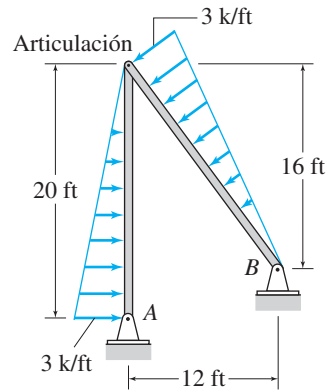


FIG. P3.27

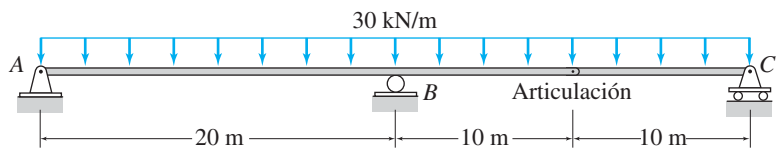


FIG. P3.28

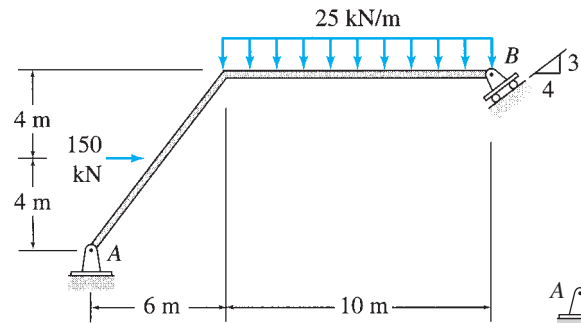


FIG. P3.24

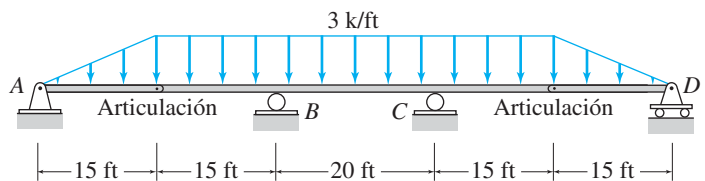


FIG. P3.29

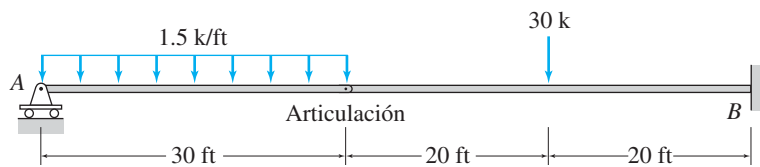


FIG. P3.25

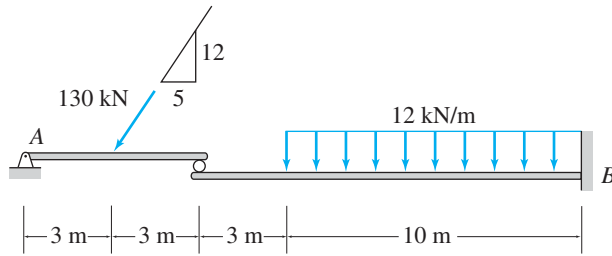


FIG. P3.30

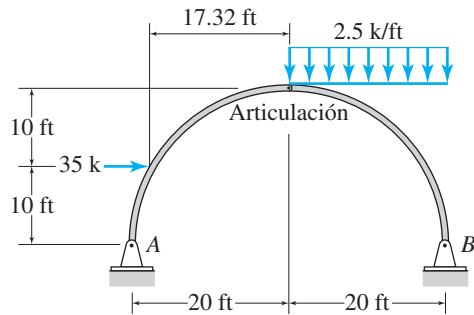


FIG. P3.31

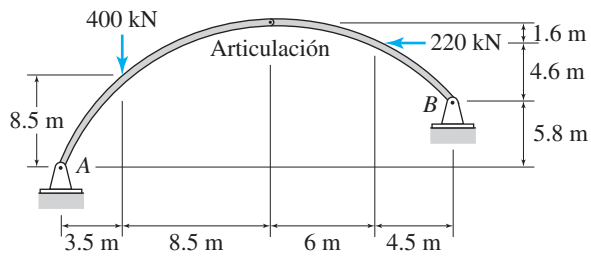


FIG. P3.32

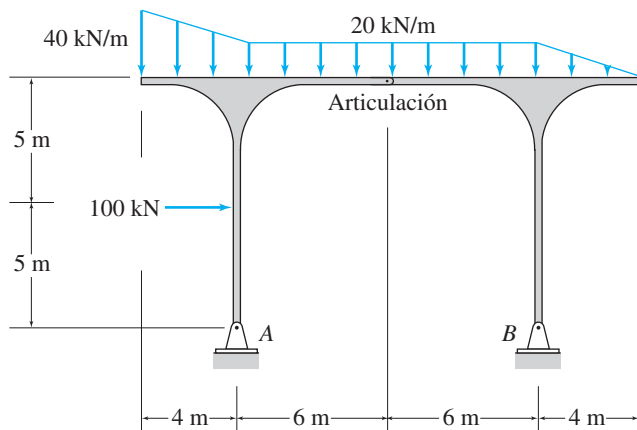


FIG. P3.33

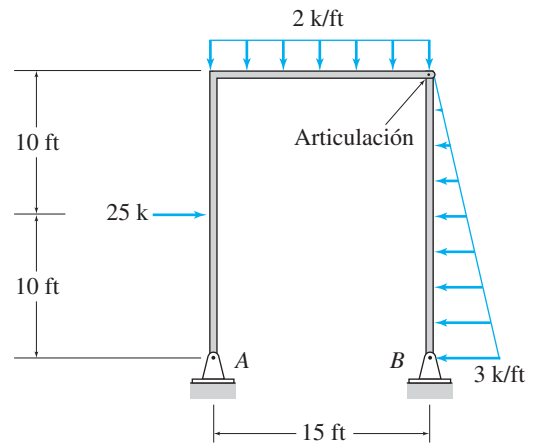


FIG. P3.34

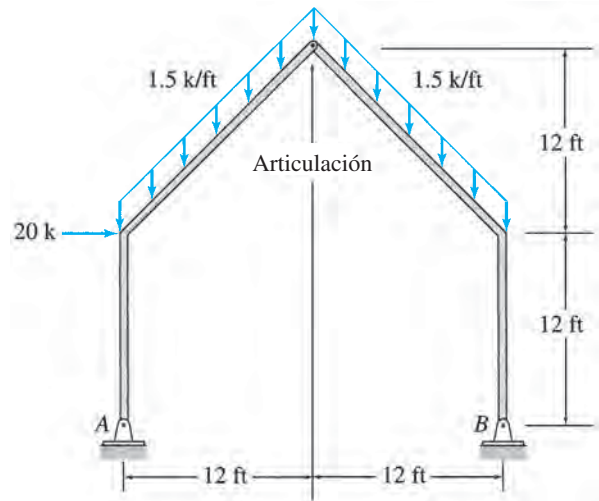


FIG. P3.35

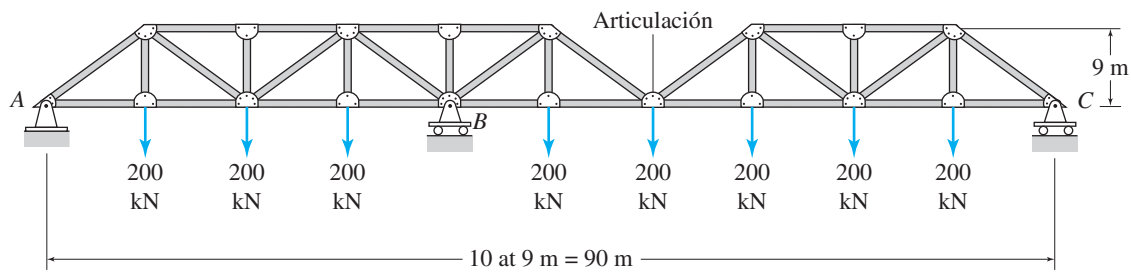


FIG. P3.36

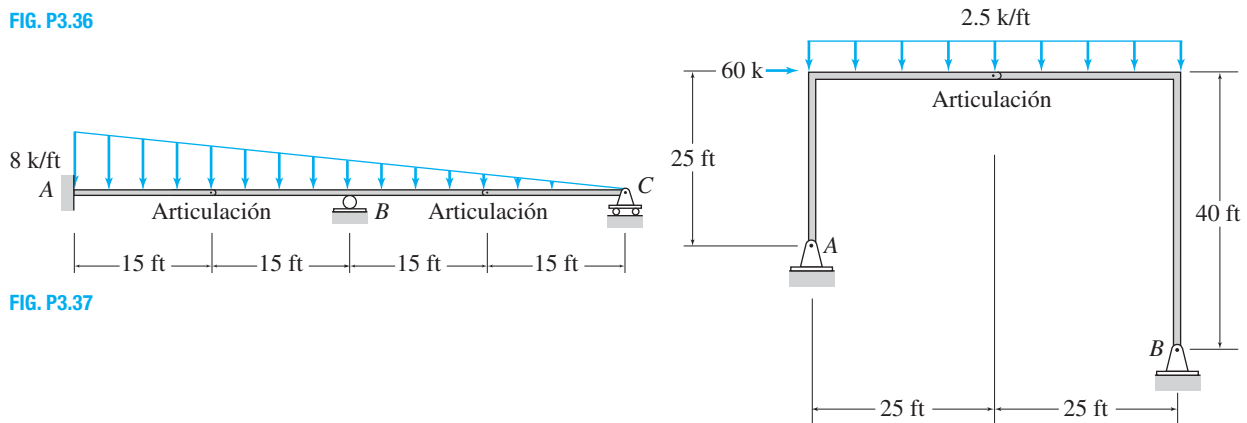


FIG. P3.37

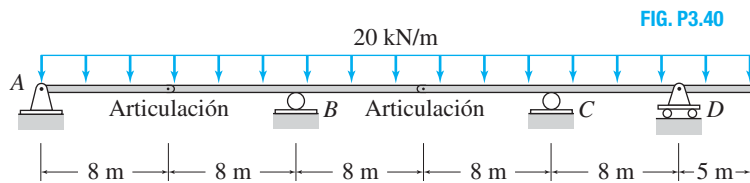


FIG. P3.40

FIG. P3.38

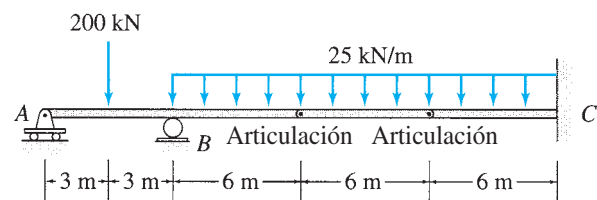
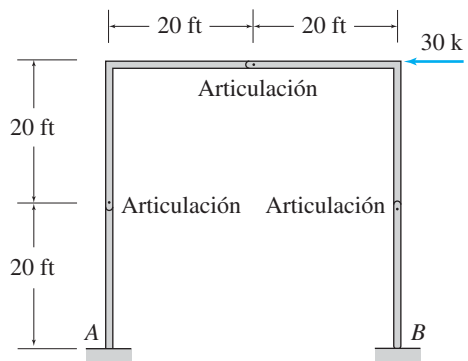


FIG. P3.41

FIG. P3.39

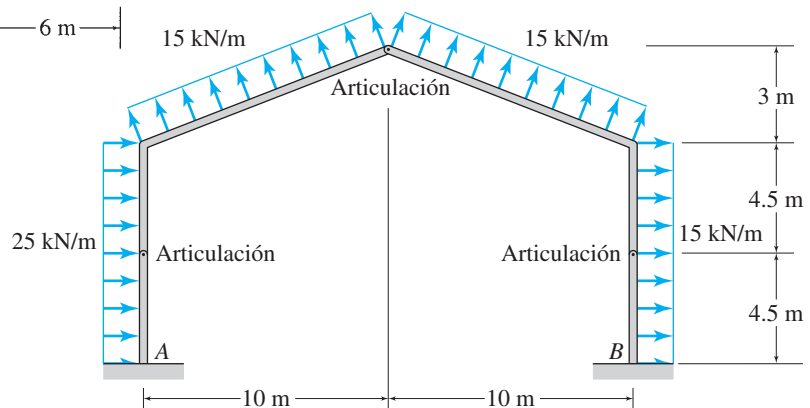


FIG. P3.42



Puentes de armadura

Terry Poche/Shutterstock.com

4

Armaduras Planas y Espaciales

- 4.1 Hipótesis para el análisis de armaduras
- 4.2 Disposición de elementos de las armaduras planas – Estabilidad interna
- 4.3 Ecuaciones de condición para armaduras planas
- 4.4 Determinación estática, indeterminación y estabilidad de armaduras planas
- 4.5 Análisis de armaduras planas por el método de los nodos
- 4.6 Análisis de armaduras planas por el método de las secciones
- 4.7 Análisis de estructuras compuestas
- 4.8 Armaduras complejas
- 4.9 Armaduras espaciales
- Resumen
- Problemas

Una armadura es un montaje de elementos rectos conectados en sus extremos por conexiones flexibles que forman un cuerpo rígido. Debido a su ligereza y alta resistencia, las armaduras son usadas ampliamente, y su rango de aplicación va desde puentes y techos de edificios (Fig. 4.1), hasta estructuras de soporte en estaciones espaciales (Fig. 4.2). Las armaduras modernas están construidas con elementos unidos, los cuales por lo general son de acero, perfiles de aluminio o puntales de madera, sujetos a placas de refuerzo a través de conexiones atornilladas o soldadas.

Como se discutió en la Sección 1.4, si todos los elementos de una armadura y sus cargas se encuentran en un solo plano, la armadura se llama *armadura plana*.

Las armaduras planas son comúnmente usadas para soportar pisos de puentes y techos de edificios. Un sistema estructural típico de un puente con armaduras se describió en la Sección 1.4 (ver Fig. 1.16(a)). La Fig. 4.3 muestra un sistema estructural tipo para un techo soportado por armaduras planas. En este caso, dos o más armaduras están conectadas en sus nodos por vigas, llamadas *largueros*, para formar una estructura en tres dimensiones. El techo está sujeto a los largueros, los cuales transmiten la carga de techo (peso del techo más cualquier otra carga debida a la nieve, viento, etc.), además de su propio peso, a las armaduras de soporte en los nodos. Debido a que las cargas aplicadas actúan en cada armadura en su plano, la armadura puede ser tratada como una armadura plana. Algunas de las configuraciones más comunes de puentes y armaduras para techos, muchas de las cuales han sido llamadas por el nombre de su diseñador original, se muestran en las Figs. 4.4 y 4.5 (ver págs. 100 y 101), respectivamente.

A pesar de que la mayoría de las armaduras pueden ser analizadas como armaduras planas, hay muchos más sistemas de armaduras, tales como torres

FIG. 4.1 Armaduras de techo de la Escuela Secundaria del Ciruelo (Plum High Schol). Grandes armaduras de arco y armaduras de soporte para el gimnasio)

Empresa Camber. <http://cambergroup.com/g87.htm>



FIG. 4.2 Segmento de la armadura que forma parte de la espina dorsal de la Estación Espacial Internacional
Cortesía de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio



de transmisión y domos reticulares (Fig. 4.6), que no pueden ser tratadas como armaduras planas debido a su forma, al arreglo de sus elementos o a las cargas aplicadas. Estas armaduras, llamadas *armaduras espaciales*, son analizadas como cuerpos en tres dimensiones sujetos a un sistema de fuerzas de tres dimensiones.

El objetivo de este capítulo es desarrollar el análisis de las fuerzas de los elementos de armaduras planas y tridimensionales estáticamente determinadas. Empezaremos con la discusión de las hipótesis básicas que subyacen sobre el análisis presentado en este capítulo, y después consideraremos el número y arreglo de elementos necesarios para formar armaduras internas estables o planas rígidas. Como parte de esta discusión, definiremos las armaduras simples y las compuestas. También presentaremos ecuaciones de condición comúnmente encontradas en las armaduras. Después estableceremos la clasificación de armaduras planas como estáticamente determinadas, indeterminadas e inestables,

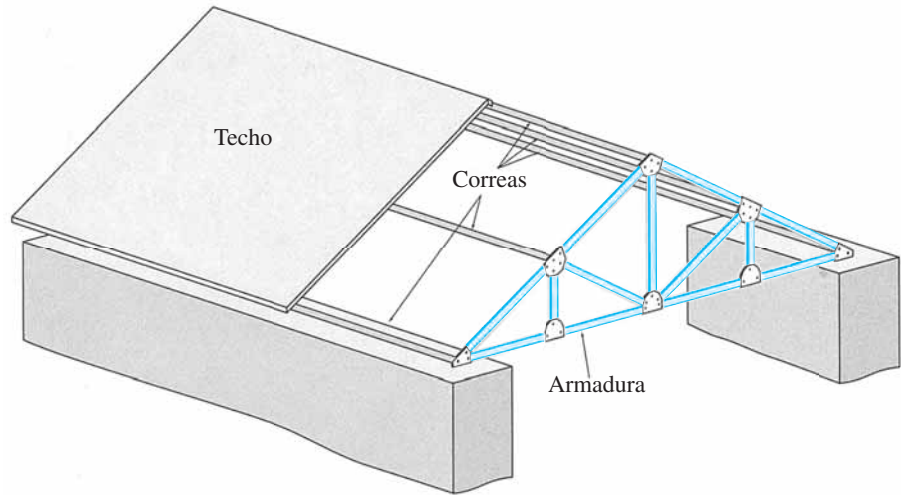


FIG. 4.3 Estructura de techo soportada por armaduras.

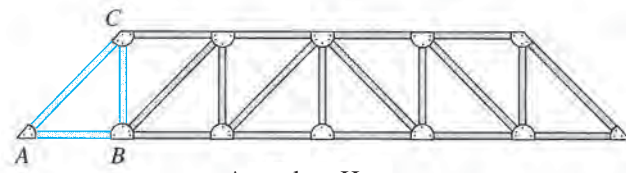
y presentaremos los procedimientos para el análisis de armaduras planas simples por el método de los nodos y el de las secciones. Concluiremos el análisis de armaduras planas compuestas con una breve discusión acerca de las armaduras complejas y el análisis de armaduras espaciales.

4.1 Hipótesis para el análisis de armaduras

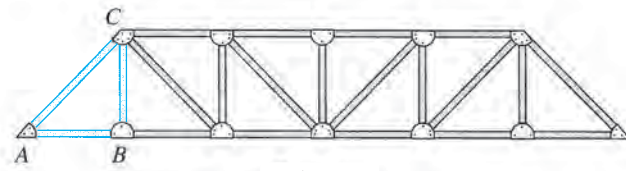
El análisis de las armaduras se basa en las siguientes hipótesis:

1. Todos los elementos están conectados en sus extremos por articulaciones sin fricción en armaduras planas y por rótulas sin fricción en armaduras espaciales o en tres dimensiones.
2. Todas las cargas y las reacciones de los apoyos están aplicadas en los nodos.
3. El eje centroidal de cada elemento coincide con la línea que conecta los centros de los nodos adyacentes.

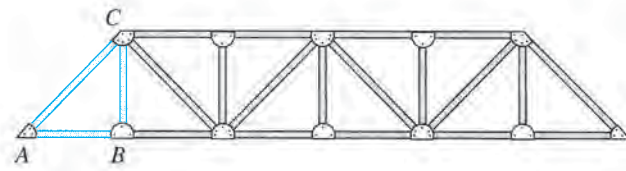
La razón de realizar estas hipótesis es para obtener la *armadura ideal*, cuyos elementos están sujetos solo a carga axial. Dado que cada elemento de la armadura ideal está conectado en sus extremos por articulaciones sin fricción (hipótesis 1) y sin cargas aplicadas entre sus extremos (hipótesis 2), los elementos estarán sujetos solo a dos fuerzas en sus extremos, como se muestra en la Fig. 4.7(a). Asimismo, ya que los elementos están en equilibrio, la fuerza y el par resultantes de las dos fuerzas F_A y F_B deben ser cero; por lo tanto, las fuerzas deben de satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio. En la Fig. 4.7(a) podemos ver que para que la fuerza resultante de las dos fuerzas sea cero ($\sum F^x = 0$ y $\sum F^y = 0$), las dos fuerzas deben ser iguales en magnitud pero de sentido opuesto. Para que el par resultante sea cero ($\sum M = 0$), las dos fuerzas deben ser colineales, por lo tanto, las fuerzas deben tener la misma línea de acción. Por otra parte, dado que el eje centroidal de cada elemento de la armadura es una línea recta con relación a la línea que conecta los centros de las conexiones adyacentes (hipótesis 3), los elementos no están sujetos a momento flexionante o fuerza cortante y pero sí a



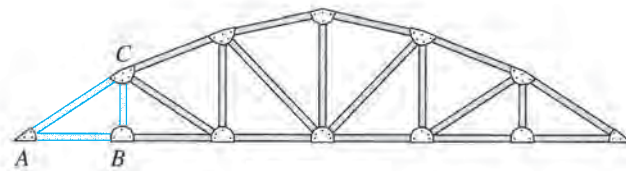
Armadura Howe



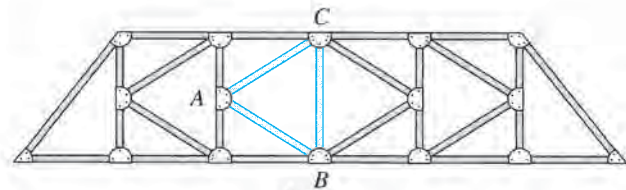
Armadura Pratt



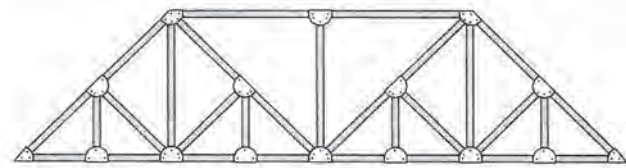
Armadura Warren



Armadura Parker



Armadura K



Armadura Baltimore

FIG. 4.4 Armaduras de puente más comunes

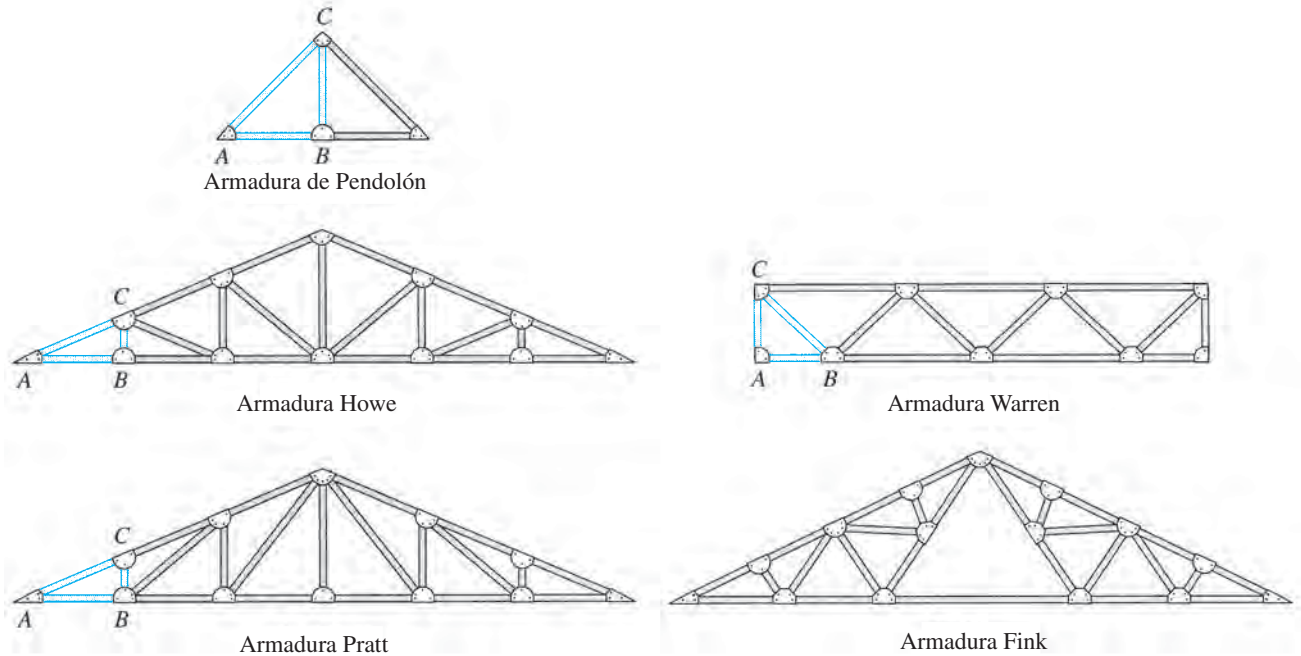


FIG. 4.5 Armaduras de techo más comunes

FIG. 4.6 Domo geodésico Climatron, en el Jardín Botánico de Missouri, St. Luis. Missouri
Cortesía del Jardín Botánico de Missouri



la fuerza de tensión axial (elongación como se muestra en la Fig. 4.7(b)) o en compresión axial (acortamiento como se muestra en la Fig. 4.7(c)). Tales fuerzas axiales en los elementos obtenidas del análisis son llamadas *fuerzas primarias*.

En las armaduras reales, estas idealizaciones casi nunca son completamente ciertas. Como se dijo anteriormente, las armaduras reales están construidas con sus elementos conectados a través de placas de refuerzo por conexiones atornilladas o soldadas (Fig. 4.8). Algunos elementos de las armaduras pueden

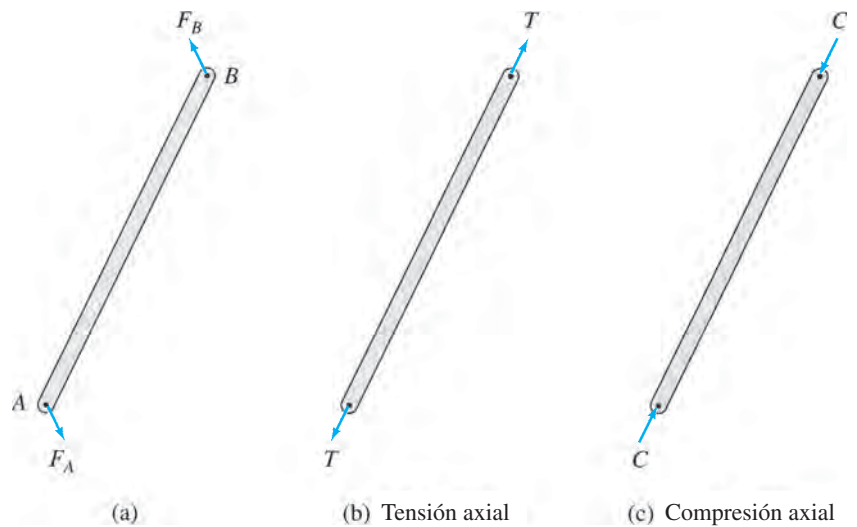
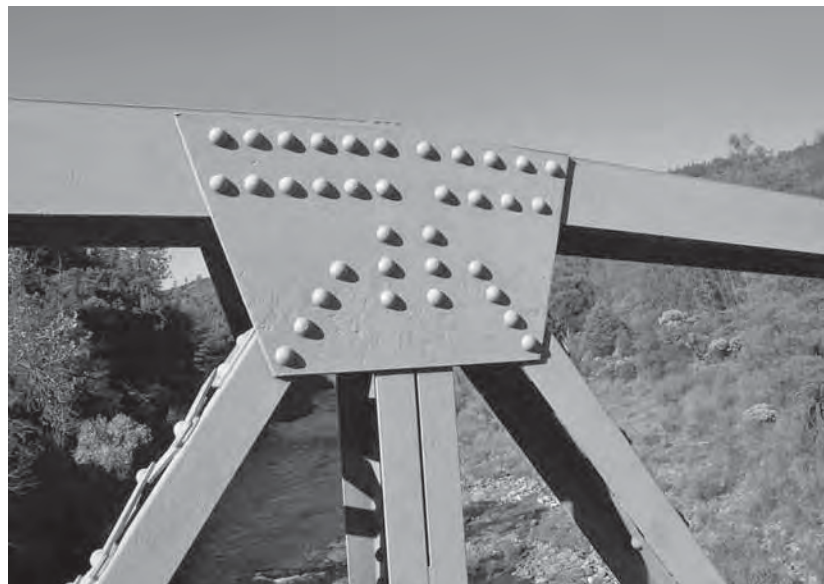


FIG. 4.7

FIG. 4.8 Conexión con placa de refuerzo
Michael Goff

estar conectados de manera continua en los nodos. Además, a pesar de que las cargas externas son transmitidas a la armadura en los nodos por medio de vigas de piso, larguero, y así sucesivamente, el peso muerto de los elementos está distribuido a lo largo de su longitud. Los momentos flexionantes, cortantes y las fuerzas axiales causadas por estas y otras variaciones de las condiciones de idealización antes mencionada son comúnmente llamadas *fuerzas secundarias*. A pesar de que las fuerzas secundarias no pueden ser eliminadas, sí se pueden reducir sustancialmente en la mayoría de las armaduras usando elementos esbeltos y diseñando las conexiones para que los ejes centroidales de los elementos que se unen en el nodo sean concurrentes en ese punto (como se mostró en la Fig. 1.16). Las fuerzas secundarias en tales armaduras son mucho menores que las fuerzas primarias, y usualmente no son consideradas en el diseño. En este

capítulo nos enfocaremos solo a las fuerzas primarias. Si se anticipan grandes fuerzas secundarias, la armadura debe ser analizada como un marco rígido usando los métodos presentados en los capítulos subsecuentes.

4.2 Disposición de los elementos de las armaduras planas—Estabilidad interna

Con los fundamentos de la discusión anterior, de la sección 3.4, podemos definir una armadura plana como internamente estable si el número y arreglo geométrico de sus elementos es tal que la armadura no cambia su forma y se mantiene como un cuerpo rígido cuando no está sujeta a sus apoyos. El término *interno* es usado aquí para referirse al número y arreglo de los elementos contenidos dentro de la armadura. La inestabilidad debida a los apoyos externos insuficientes o al arreglo inapropiado de los apoyos externos se conoce como *externa*.

Elementos básicos de una armadura

La armadura plana interna estable (o rígida) más sencilla puede formarse al conectar tres elementos por sus extremos a una articulación para formar un triángulo, como el que se muestra en la Fig. 4.9(a). Esta armadura triangular recibe el nombre de *armadura básica elemental*. Nótese que esta armadura triangular es internamente estable en el sentido de que es un cuerpo rígido que no cambia su forma bajo la acción de las cargas. En contraste, una armadura rectangular formada por cuatro elementos conectados en sus extremos por articulaciones, como la mostrada en la Fig. 4.9(b), es internamente inestable ya que cambiará su forma y se colapsará cuando se sujete a un sistema general de fuerzas coplanares.

Armaduras simples

Los elementos de la armadura básica ABC de la Fig. 4.10(a) se pueden ampliar conectando dos nuevos elementos, BD y CD , a los dos nodos existentes B y C , y uniéndolos para formar un nuevo nodo D , como el mostrado en la Fig. 4.10(b). Mientras que el nuevo nodo D no se encuentre en línea recta que pasa a través de los nodos existentes B y C , la nueva armadura ampliada será internamente estable. La armadura se puede ampliar aún más repitiendo el mismo

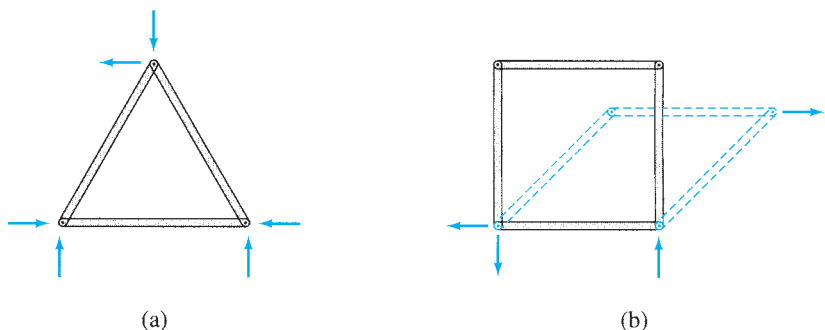


FIG. 4.9

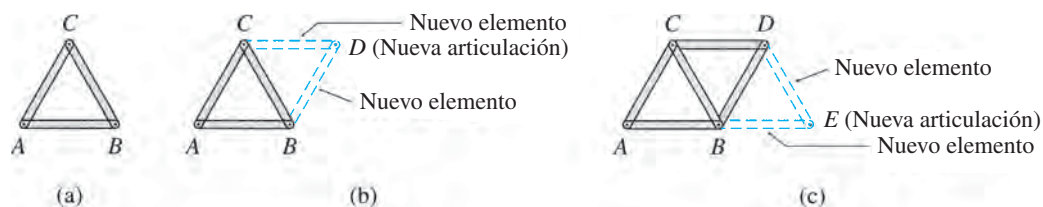


FIG. 4.10 Armadura simple

procedimiento (como el de la Fig. 4.10(c)) tantas veces como se desee. Las armaduras construidas con este procedimiento se llaman *armaduras simples*. El lector debe examinar las armaduras que aparecen en las Figs. 4.4 y 4.5 para verificar que cada una de ellas, con excepción de la armadura de Baltimore (Fig. 4.4) y la armadura Fink (Fig. 4.5), es una armadura simple. El elemento básico de las armaduras simples se identifica como ABC en estas figuras.

Una armadura simple se forma ampliando los elementos básicos de la armadura, la cual contiene tres elementos y tres nodos, y agregando dos elementos por cada nodo adicional, de tal manera que el número de elementos m en una armadura simple esté dado por

$$m = 3 + 2(j - 3) = 2j - 3 \quad (4.1)$$

En la cual j = número total de nodos (incluidos aquellos unidos a los apoyos).

Armaduras compuestas

Las armaduras compuestas están construidas por la unión de dos o más armaduras simples que forman un cuerpo rígido. Para prevenir cualquier movimiento relativo entre las armaduras simples, cada armadura debe estar conectada a la(s) otra(s) por medio de una conexión capaz de transmitir cuando menos tres componentes de fuerza, las cuales no deben ser ni paralelas ni concurrentes. Dos ejemplos de arreglos de conexión usados para formar armaduras com-

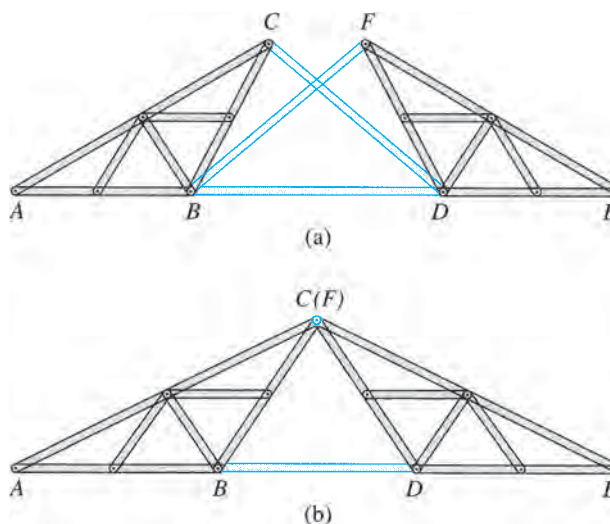


FIG. 4.11 Armaduras compuestas

puestas se muestran en la Fig. 4.11. En la Fig. 4.11(a) dos armaduras simples ABC y DEF están conectadas por tres elementos, BD , CD y BF , que no son paralelos ni concurrentes. Otro tipo de arreglo de conexión se ejemplifica en la Fig. 4.11(b). Esto implica conectar dos armaduras simples ABC y DEF con un nodo común C y un elemento BD . Para que la armadura compuesta sea internamente estable, el nodo común C y los nodos B y D no deben estar en línea recta. La relación entre el número total de elementos m y el número de nodos j para armaduras compuestas internamente estables es igual que para armaduras simples. Esta relación, dada por la Ec. (4.1), puede ser fácilmente verificada para las armaduras compuestas mostradas en la Fig. 4.11.

Estabilidad interna

La ecuación (4.1) expresa los requisitos para el mínimo número de elementos que una armadura plana de j número de nodos que debe contener, si quiere ser internamente estable. Si una armadura plana contiene m elementos y j nodos, entonces si

$$\begin{aligned} m &< 2j - 3 && \text{La armadura es internamente estable} \\ m &\geq 2j - 3 && \text{La armadura es internamente inestable} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es muy importante notar que, si bien es necesario el criterio anterior, no es suficiente para garantizar la estabilidad interna. Una armadura no solo debe contener el suficiente número de elementos para satisfacer la condición $m \geq 2j - 3$, sino que los elementos además deben estar dispuestos adecuadamente para asegurar la rigidez de toda la estructura. Recuerde de nuestra discusión sobre armaduras simples y compuestas que en una armadura estable cada nodo está conectado al resto de la estructura a por lo menos dos elementos no paralelos, y cada parte de la armadura debe estar conectada a la armadura restante por conexiones capaces de transmitir al menos tres componentes de fuerza no paralelos y concurrentes.

Ejemplo 4.1

Clasifique cada una de las armaduras planas que aparecen en la Fig. 4.12 como estables o inestables.

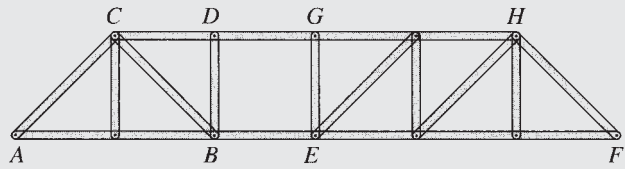
Solución

(a) La armadura de la Fig. 4.12(a) contiene 20 elementos y 12 nodos. Por lo tanto, $m = 20$, y $2j - 3 = 2(12) - 3 = 21$. Dado que m es mejor que $2j - 3$, la armadura no tiene el suficiente número de elementos para formar un cuerpo rígido; por lo tanto, es internamente inestable. Una inspección cuidadosa muestra que contiene dos cuerpos rígidos, $ABCD$ y $EFGH$, conectados por dos elementos paralelos, BE y DG . Estos dos elementos horizontales no pueden prevenir el desplazamiento relativo en dirección vertical de una parte rígida de la armadura con respecto a la otra. **Respuesta.**

(b) La armadura mostrada en la Fig. 4.12(b) es igual a la de la Fig. 4.12(a), excepto que el elemento diagonal DE ha sido agregado para prevenir el desplazamiento relativo entre las dos partes $ABCD$ y $EFGH$. La armadura completa ahora actúa como un cuerpo rígido. La adición de un elemento DE aumenta el número de elementos a 21 (mientras que el número de nodos permanece igual en 12), con ello satisface la ecuación $m = 2j - 3$. La armadura es ahora internamente estable. **Respuesta.**

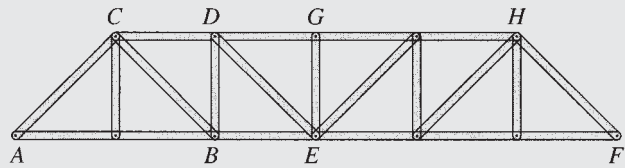
(c) Se agregan cuatro diagonales más a la armadura de la Fig. 4.12(b) para obtener la armadura de la Fig. 4.12(c), con ello se incrementa m a 25, mientras j permanece constante en 12. Debido a que $m > 2j - 3$, la armadura es internamente estable. Además, dado que la diferencia $m - (2j - 3) = 4$, la armadura contiene cuatro elementos más que los requeridos para su estabilidad interna. **Respuesta.**

continúa



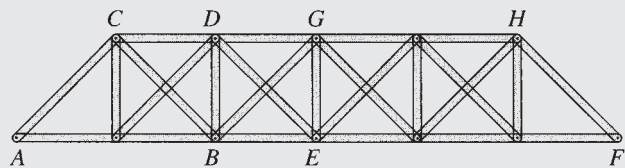
$$m = 20 \quad j = 12 \quad m < 2j - 3$$

(a) Internamente inestable



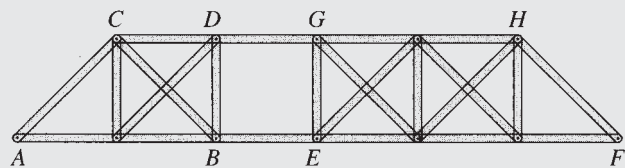
$$m = 21 \quad j = 12 \quad m = 2j - 3$$

(b) Internamente estable



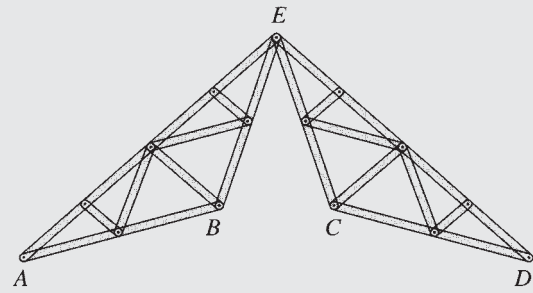
$$m = 25 \quad j = 12 \quad m > 2j - 3$$

(c) Internamente estable



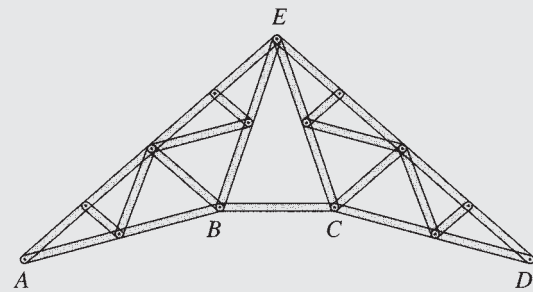
$$m = 23 \quad j = 12 \quad m > 2j - 3$$

(d) Internamente inestable



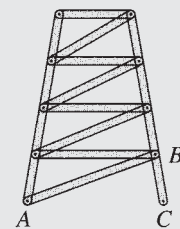
$$m = 26 \quad j = 15 \quad m < 2j - 3$$

(e) Internamente inestable



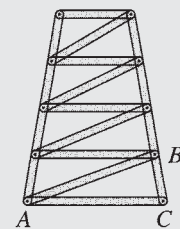
$$m = 27 \quad j = 15 \quad m = 2j - 3$$

(f) Internamente estable



$$m = 16 \quad j = 10 \quad m < 2j - 3$$

(g) Internamente inestable



$$m = 17 \quad j = 10 \quad m = 2j - 3$$

(h) Internamente estable

FIG. 4.12

(d) La armadura de la Fig. 4.12(d) se obtuvo de la Fig. 4.12(c) al remover dos diagonales, BG y DE , del panel BE , por lo tanto, disminuye m a 23; j permanece constante en 12. A pesar de que $m - (2j - 3) = 2$ —es decir, la armadura tiene dos elementos más que el mínimo para garantizar la estabilidad interna— sus dos cuerpos rígidos $ABCD$ y $EFGH$ no están conectados de manera apropiada para formar un solo cuerpo rígido. Por lo tanto, la armadura es internamente inestable.

Respuesta.

(e) La armadura de techo expuesta en la Fig. 4.12(e) es internamente inestable debido a que $m = 26$ y $j = 15$, por lo que se obtiene $m < 2j - 3$. Además, está claro del diagrama de la armadura que dos porciones ABE y CDE pueden rotar una con respecto a la otra. La diferencia $m - (2j - 3) = -1$ indica que la armadura tiene un elemento menos que el requerido para la estabilidad interna.

Respuesta.

(f) En la Fig. 4.12(f), el elemento BC se agregó a la armadura de la Fig. 4.12(e), el cual previene el movimiento relativo de las dos partes ABE y CDE , haciendo a la armadura internamente estable. Como m ahora se ha incrementado a 27, se satisface la ecuación $m < 2j - 3$ para $J = 15$.

Respuesta.

(g) La torre de celosía de la Fig. 4.12(g) tiene 16 elementos y 10 nodos. Debido a que $m < 2J - 3$, la armadura es internamente inestable. Esto es evidente en la Fig. 4.12(g), la cual muestra que el elemento BC puede rotar respecto del resto

continúa

de la estructura. Esta rotación ocurre porque el nodo C está conectado solo por un elemento en lugar de los dos requeridos para restringir completamente la unión de la armadura plana. **Respuesta.**

(h) En la Fig. 4.12(h), el elemento AC se incluyó en la armadura de la Fig. 4.12(g), el cual la hace internamente estable. Aquí $m = 17$ y $j = 10$, por lo tanto la ecuación $m = 2j - 3$ queda satisfecha. **Respuesta.**

4.3 Ecuaciones de condición para armaduras planas

En la Sección 3.4, indicamos que el tipo de conexiones usadas para unir partes rígidas de estructuras internamente inestables proporcionan ecuaciones de condición que, además de las tres ecuaciones de equilibrio, se pueden aplicar para determinar las reacciones necesarias para restringir completamente tales estructuras.

Tres tipos de arreglos de conexiones comúnmente usadas para unir armaduras rígidas para formar una sola armadura (internamente estable) se muestran en la Fig. 4.13. En la Fig. 4.13(a), dos armaduras rígidas, AB y BC , están unidas por una articulación interna en B . Puesto que la articulación interna no puede transmitir momento, esta proporciona una ecuación de condición:

$$\sum M_B^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum M_B^{BC} = 0$$

Otro tipo de arreglo o disposición de conexión se expone en la Fig. 4.13(b). Este arreglo involucra la unión de dos armaduras rígidas, AB y CD , por dos elementos paralelos. Dado que estas barras (horizontales) no pueden transmitir fuerza en la dirección perpendicular a ellas, este tipo de conexiones proporcionan una ecuación de condición:

$$\sum F_y^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum F_y^{CD} = 0$$

Un tercer tipo de arreglo de conexión involucra la unión de dos armaduras rígidas, AB y CD , por un eslabón, BC , como se muestra en la Fig. 4.13(c). Ya que el eslabón tampoco puede transmitir ni momento ni fuerza en la dirección perpendicular a él, este proporciona dos ecuaciones de condición:

$$\sum F_x^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum F_x^{CD} = 0$$

y

$$\sum M_B^{AB} = 0 \quad \text{o} \quad \sum M_C^{CD} = 0$$

Como se indicó en capítulos anteriores, estas ecuaciones de condición pueden aplicarse con las tres ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones desconocidas de una armadura plana estáticamente determinada de manera externa. El lector debe verificar que las tres armaduras mostradas en la Fig. 4.13 sean estáticamente determinadas de manera externa.

4.4 Determinación estática, indeterminación y estabilidad de armaduras planas

Consideremos una armadura *estáticamente determinada* si las fuerzas en todos sus elementos, además de sus reacciones, pueden ser establecidas usando las ecuaciones de equilibrio. Esta caracterización de determinación estática, que abarca tanto las reacciones externas de apoyo y las fuerzas internas de

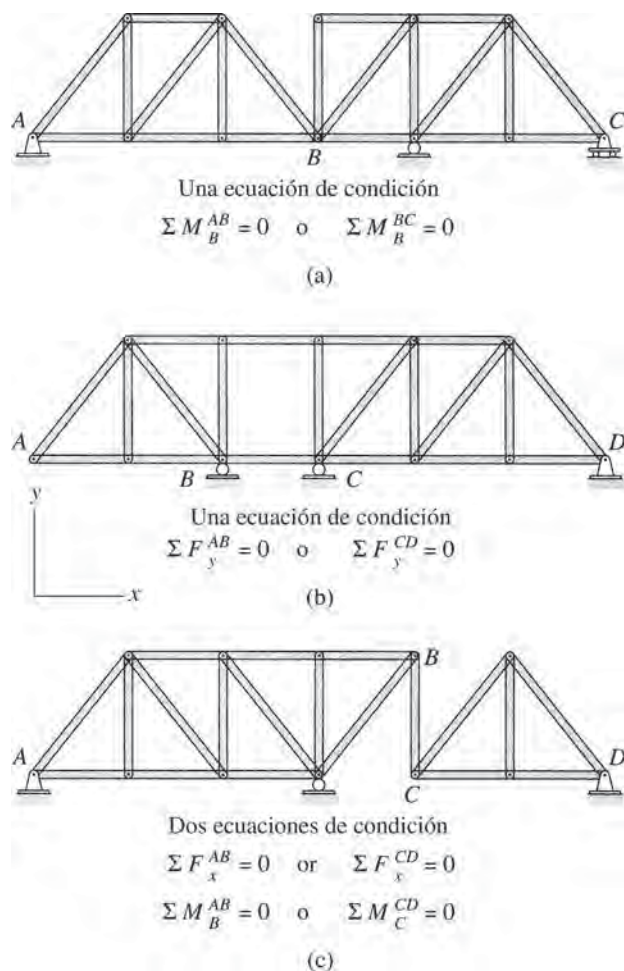


FIG. 4.13 Ecuaciones de condición para armaduras planas

los elementos, también se conoce como *determinación estática combinada*, en comparación con el concepto de *determinación estática externa* (que implica solo reacciones externas) que se utilizó anteriormente en el capítulo 3. Recuerde que, en capítulos anteriores, nos interesamos solo en el Cálculo de las reacciones externas de los apoyos, mientras que en el presente capítulo nuestro objetivo es determinar tanto las fuerzas en los elementos como en las reacciones externas.

Dado que los dos métodos de análisis que se presentan en las siguientes secciones pueden aplicarse para analizar solo armaduras isostáticas o estáticamente determinadas, es importante para el estudiante reconocer las armaduras estáticamente determinadas antes de proceder al análisis.

Considere una armadura plana sujeta a cargas externas P_1 , P_2 y P_3 , como la mostrada en la Fig. 4.14(a). El diagrama de cuerpo libre de los cinco elementos y los cuatro nodos aparecen en la Fig. 4.14(b). Cada elemento está sujeto a dos fuerzas axiales en sus extremos, que son colineales (con eje centroidal del elemento) y de igual magnitud pero de sentido contrario. Note que en la Fig. 4.14(b) se supone que todos los elementos están en tensión, es decir, las fuerzas jalen a los elementos. El diagrama de cuerpo libre de

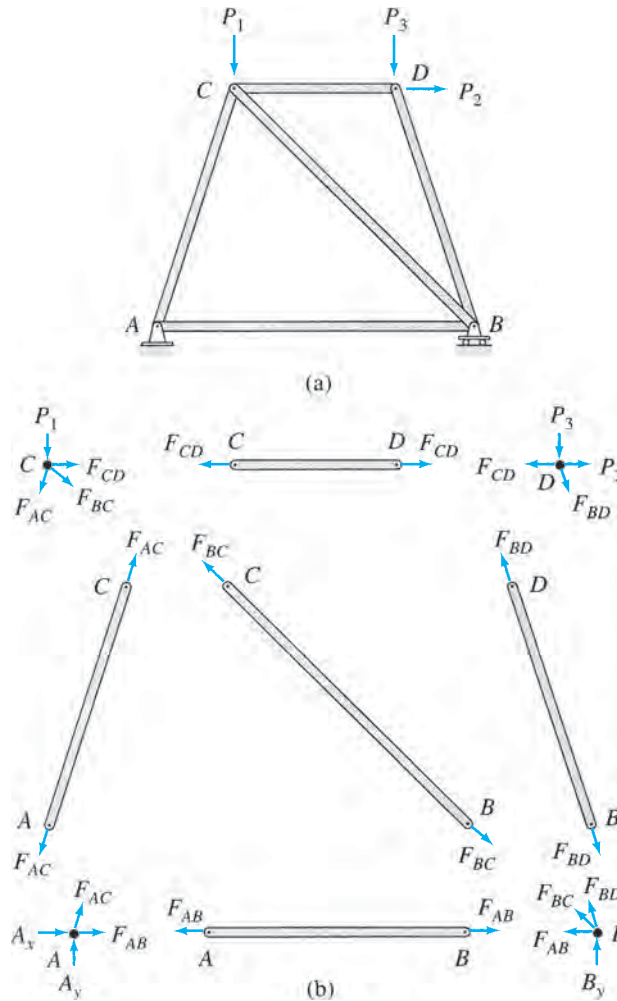


FIG. 4.14

los nodos muestran las mismas fuerzas en los elementos pero en dirección opuesta, de acuerdo con la tercera Ley de Newton. El análisis de la armadura involucra la determinación de las magnitudes de las cinco fuerzas de los elementos, F_{AB} , F_{AC} , F_{BC} , F_{BD} y F_{CD} (las líneas de acción de las fuerzas son desconocidas), y las tres reacciones, A_x , A_y y B_y . Por lo tanto, el número total de cantidades desconocidas a ser determinadas es ocho.

Puesto que la armadura está en equilibrio, cada uno de sus nodos también deben estar en equilibrio. Como se muestra en la Fig. 4.14(b), en cada nodo las fuerzas internas y externas forman un sistema coplanar y concurrente, que satisface las dos ecuaciones de equilibrio, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. Dado que la armadura contiene cuatro nodos, el número total de ecuaciones disponibles es $2(4) = 8$. Las ocho ecuaciones de equilibrio en los nodos pueden ser resueltas para calcular las ocho incógnitas. La armadura plana mostrada en la Fig. 4.14(a) es, por lo tanto, estáticamente determinada.

Las tres ecuaciones de equilibrio de la armadura completa como cuerpo rígido se pueden escribir y resolver las tres reacciones desconocidas (A_x , A_y y B_y). Sin embargo, estas tres ecuaciones (como las ecuaciones de condición

en el caso de armaduras internamente inestables) no son *independientes* de las ecuaciones de equilibrio en los nodos y no proporcionan ninguna información adicional.

Basados en la discusión anterior, podemos desarrollar el criterio para la determinación estática, indeterminación e inestabilidad de armaduras planas en general que contengan m elementos, j nodos y r apoyos (número de) reacciones externas; es decir, necesitamos calcular el total de $m + r$ número de incógnitas. Ya que hay j nodos y que podemos escribir dos ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$) para cada nodo, el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles es $2j$. Si el número de incógnitas es $(m + r)$ de una armadura, es igual el número de ecuaciones de equilibrio ($2j$) —es decir, $m + r = 2j$ — todas las incógnitas pueden ser determinadas resolviendo las ecuaciones de equilibrio, y la armadura es estáticamente determinada.

Si una armadura tiene más incógnitas $(m + r)$ que ecuaciones disponibles de equilibrio ($2j$) —es decir, $m + r > 2j$ —, todas las incógnitas no podrán ser determinadas resolviendo las ecuaciones disponibles de equilibrio, y tal armadura es llamada *estáticamente indeterminada*. Las armaduras estáticamente indeterminadas tienen más elementos o reacciones externas que el mínimo requerido para ser estables. El exceso de elementos y reacciones es conocido como *redundantes*, y el número de elementos y reacciones en exceso es conocido como *grado de indeterminación estática*, i , el cual puede ser expresado como

$$i = (m + r) - 2j \quad (4.3)$$

Si el número de incógnitas $(m + r)$ de una armadura es menor que el número de ecuaciones de equilibrio del nodo ($2j$) —es decir, $m + r < 2j$ —, la armadura es entonces *estáticamente inestable*. La inestabilidad estática puede deberse a que la armadura tiene menor número de elementos que los mínimos requeridos para la estabilidad interna o debido a un número insuficiente de reacciones externas o a ambos.

Las condiciones de inestabilidad estática, determinación e indeterminación de una armadura plana se pueden resumir como sigue:

$$\begin{aligned} m + r < 2j & \text{ armadura estáticamente inestable} \\ m + r = 2j & \text{ armadura estáticamente determinada} \\ m + r > 2j & \text{ armadura indeterminada inestable} \end{aligned} \quad (4.4)$$

La primera condición, para la inestabilidad estática de las armaduras, es tanto necesaria como suficiente en el sentido de que si $m < 2j - r$, la armadura es definitivamente estáticamente inestable; sin embargo, las dos condiciones restantes, para la determinación estática ($m = 2j - r$) y la indeterminación ($m > 2j - r$), son necesarias pero no condiciones suficientes. En otras palabras, estas dos ecuaciones simplemente nos dicen que el número de elementos y reacciones es suficiente para la estabilidad. Ellas no proporcionan más información a pesar de su arreglo o *disposición*. Una armadura puede tener un número suficiente de elementos y reacciones externas, pero aun así ser inestable debido a su arreglo inapropiado de elementos y/o reacciones externas.

Hacemos énfasis en que, para que los criterios de determinación e indeterminación, como los dados por las Ec. (4.3) y (4.4), sean válidos, la armadura debe ser estable y actuar como un solo cuerpo rígido bajo un sistema

de cargas coplanares cuando estas se encuentran sujetas a los apoyos. Las armaduras internamente estables deben estar apoyadas al menos por tres reacciones, y todas ellas no deben ser ni paralelas ni concurrentes. Si una armadura es internamente inestable, entonces debe estar soportada por reacciones en número igual a por lo menos tres más el número de ecuaciones de condición ($3 + e_c$), y todas las reacciones no deben ser ni paralelas ni concurrentes. Además, cada nodo, elemento y segmento de armadura debe de estar restringido contra todo posible movimiento de cuerpo rígido en el plano de la armadura, ya sea por el resto de la armadura o por los apoyos externos. Si una armadura tiene suficiente número de elementos, pero ellos no están adecuadamente dispuestos, la armadura se dice que tiene una *forma crítica*. En algunas armaduras puede no ser obvio a partir de los dibujos si sus elementos están o no dispuestos de manera apropiada. Sin embargo, si la disposición de los elementos no es adecuada, será evidente durante el análisis de la armadura. El análisis de tales armaduras inestables siempre conducirá a inconsistencias, indeterminaciones o resultados infinitos.

Ejemplo 4.2

Clasifique cada armadura plana mostrada en la Fig. 4.15 como inestable, estáticamente determinada o indeterminada. Si la armadura es estáticamente determinada, entonces encuentre el grado de indeterminación estática.

Solución

(a) La armadura mostrada en la Fig. 4.15(a) contiene 17 elementos y 10 nodos, y es soportada por tres reacciones. Por lo tanto, $m + r = 2j$. Dado que las tres reacciones no son ni paralelas ni concurrentes y los elementos de la armadura están dispuestos de manera adecuada, la armadura es estáticamente determinada. **Respuesta.**

(b) Para esta armadura $m = 17$, $j = 10$, y $r = 2$. Porque $m + r < 2j$, la armadura es inestable. **Respuesta.**

(c) Para esta armadura $m = 21$, $j = 10$, y $r = 3$. Debido a que $m + r > 2j$, la armadura es estáticamente indeterminada con un grado de indeterminación $i = (m + r) - 2j = 4$. Debe ser claro que en la Fig. 4.15(c) la armadura contiene cuatro elementos más que los requeridos para la estabilidad. **Respuesta.**

(d) Esta armadura tiene $m = 16$, $j = 10$ y $r = 3$. La armadura es inestable, dado que $m + r < 2j$. **Respuesta.**

(e) Esta armadura está compuesta por dos porciones rígidas, AB y BC , conectadas por una articulación interna en B . La armadura tiene $m = 26$, $j = 15$ y $r = 4$. Por lo tanto, $m + r = 2j$. Las cuatro reacciones no son ni paralelas ni concurrentes, y la armadura completa está adecuadamente restringida, así esta es estáticamente determinada. **Respuesta.**

(f) Para esta armadura, $m = 10$, $j = 7$ y $r = 3$. Debido a que $m + r < 2j$, la armadura es inestable. **Respuesta.**

(g) En la Fig. 4.15(g), el elemento BC se agregó a la armadura de la Fig. 4.15(f), que previene la rotación relativa de las dos partes ABE y CDE . Dado que m ahora se ha incrementado a 27 con j y r constantes en 7 y 3, respectivamente, la ecuación $m + r = 2j$ se satisface. Así, la armadura de la Fig. 4.15(g) es estáticamente determinada. **Respuesta.**

(h) La armadura de la Fig. 4.15(f) está estabilizada por remplazar el apoyo de patín en el soporte D por un apoyo articulado, como se muestra en la Fig. 4.15(h). Así, el número de reacciones se incrementó a cuatro, pero m y j permanecen constantes en 10 y 7, respectivamente. Con $m + r = 2j$, la armadura es ahora estáticamente determinada. **Respuesta.**

(i) Para la torre de celosía de la Fig. 4.15(i), $m = 6$, $j = 10$ y $r = 4$. Debido a que $m + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada. **Respuesta.**

continúa

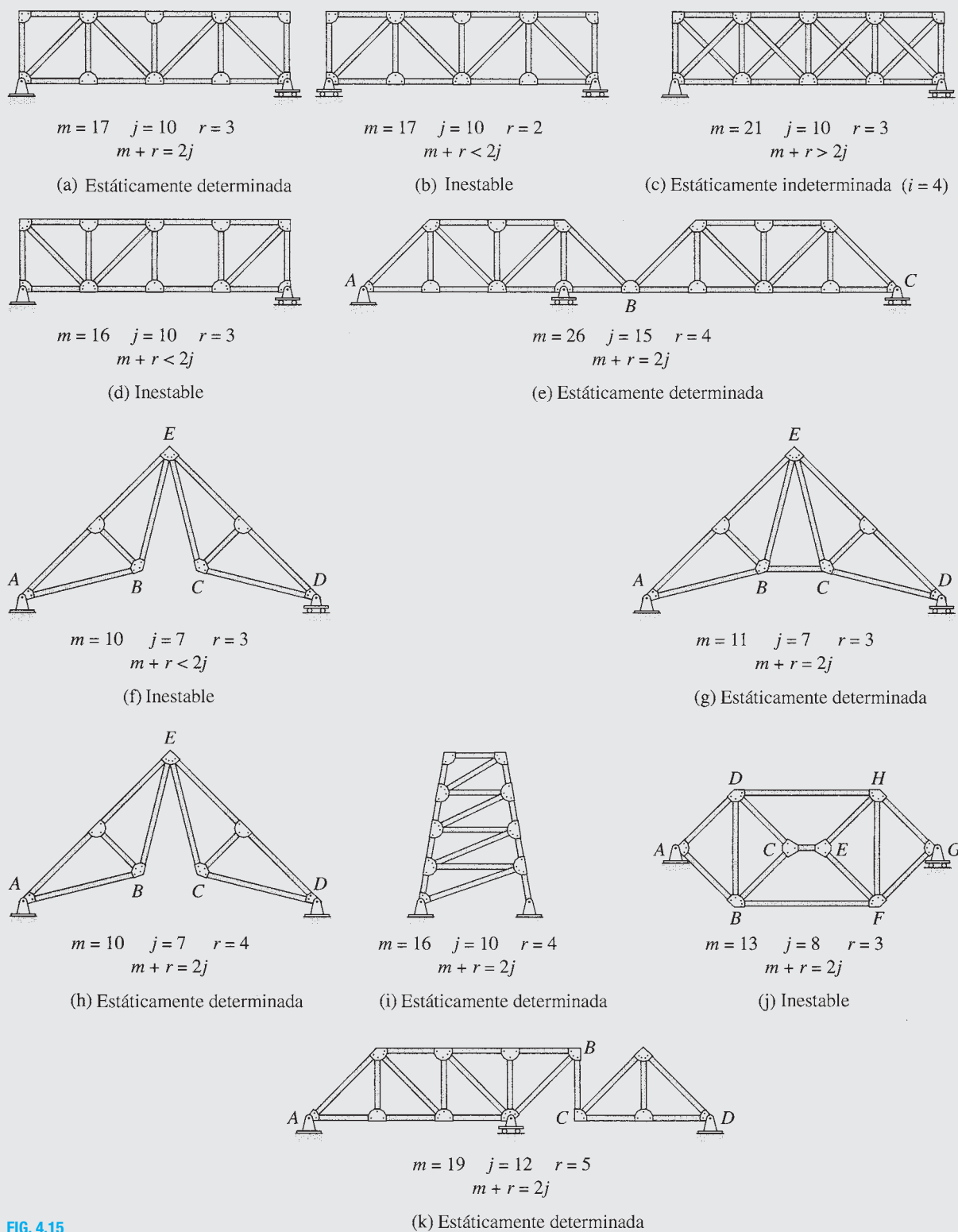


FIG. 4.15

continúa

(j) Esta armadura tiene $m = 13$, $j = 8$ y $r = 3$. A pesar de que $m + r = 2j$, la armadura es inestable, debido a que contiene dos partes $ABCD$ y $EFGH$ conectadas por tres elementos paralelos, BF , CE y DH , los cuales no pueden prevenir el desplazamiento relativo, en la dirección vertical, de una de las partes rígidas de la armadura con respecto a la otra. **Respuesta.**

(k) Para la armadura mostrada en la Fig. 4.15(k), $m = 19$, $j = 12$ y $r = 5$. Debido a que $m + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada. **Respuesta.**

4.5 Análisis de armaduras planas por el método de los nodos

En el *método de los nodos* las fuerzas axiales en los elementos de una armadura estáticamente determinada son comprobadas al considerar las ecuaciones de equilibrio de sus nodos. Dado que la estructura completa está en equilibrio, cada uno de sus nodos también debe estarlo. En cada nodo de la armadura, las fuerzas y cualquier carga aplicada y reacciones forman un sistema de fuerzas coplanar concurrente (ver Fig. 4.14), que debe satisfacer las dos ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$, para que el nodo esté en equilibrio. Estas dos ecuaciones se deben de satisfacer en cada nodo de la armadura. Solo hay dos ecuaciones de equilibrio en cada nodo, así que no pueden ser usadas para determinar más de dos fuerzas desconocidas o incógnitas.

El método de los nodos consiste en seleccionar un nodo con no más de dos fuerzas desconocidas (las cuales no deben ser colineales) que actúen en él y al aplicar las dos ecuaciones de equilibrio se deben de determinar las fuerzas desconocidas. El procedimiento se puede continuar hasta que todas las fuerzas desconocidas hayan sido determinadas. Como se discutió en la sección anterior, todas las fuerzas desconocidas en los elementos y las reacciones pueden ser establecidas con las ecuaciones de equilibrio de los nodos, pero en varias armaduras quizá no sea posible encontrar un nodo con dos o menos incógnitas para empezar el análisis, a menos que las reacciones sean conocidas de antemano. En tales casos, las reacciones son calculadas usando las ecuaciones de equilibrio o de condición (si hubiera) de la armadura completa antes de proceder con el método de los nodos para determinar las fuerzas en los elementos.

Para ilustrar el análisis por este método, considere la armadura mostrada en la Fig. 4.16(a). Esta contiene cinco elementos, cuatro nodos y tres reacciones. Dado que $m + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada. El diagrama de cuerpo libre de todos los elementos y los nodos se representa en la Fig. 4.16(b). Debido a que las fuerzas en los elementos aún no han sido determinadas, el sentido de las fuerzas axiales (tensión o compresión) se asume arbitrariamente. Como se muestra en la Fig. 4.16 (b), se asume que los elementos AB , BC y AD están en tensión, con las fuerzas axiales tendientes a prolongarlos, mientras que los elementos BD y CD se asumen en compresión, con las fuerzas axiales acortando a los elementos. El diagrama de cuerpo libre de los nodos muestra las fuerzas en dirección opuesta a su dirección en los extremos de los elementos, de acuerdo con la Ley de Newton de acción y reacción. Enfocando nuestra atención en el diagrama de cuerpo libre del nodo C , observamos que la fuerza de tensión F_{BC} se aleja del nodo, mientras que la fuerza de compresión F_{CD} empuja hacia el nodo. Este efecto de los elementos en tensión que tiran del nodo y de los elementos en compresión que empujan hacia el nodo puede ser visto en el diagrama de cuerpo Libre de todos los nodos mostrados en la Fig. 4.16(b). El diagrama de cuerpo libre de los elementos es usualmente omi-

tido en el análisis y solo los de los nodos son dibujados, así que es importante entender que una fuerza de tensión axial en el elemento siempre se indica con una flecha jalando del nodo, y una fuerza de compresión axial del elemento, siempre se indica con una flecha empujando hacia el nodo.

El análisis de la armadura por el método de los nodos comienza al seleccionar un nodo que tenga dos o menos fuerzas desconocidas (las cuales no deben ser colineales) actuando en él. Una revisión del diagrama de cuerpo libre de los nodos en la Fig. 4.16(b) indica que ninguno de los nodos satisface este requerimiento. Por lo tanto, calcularemos las reacciones aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa mostrada en la Fig. 4.16 (c),

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & A_x - 28 &= 0 & A_x &= 28 \text{ k} \rightarrow \\
 + \curvearrowright \sum M_C &= 0 & -A_y(35) + 28(20) + 42(15) &= 0 & A_y &= 34 \text{ k} \uparrow \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 & 34 - 42 + C_y &= 0 & C_y &= 8 \text{ k} \uparrow
 \end{aligned}$$

Después de establecer las reacciones, podemos empezar con el cálculo de las fuerzas en los elementos, tanto en el nodo A, el cual ahora tiene dos fuerzas desconocidas, F_{AB} y F_{AD} , o en el nodo C, que también tiene dos incógnitas, F_{BC} y F_{CD} . Empecemos con el nodo A. El diagrama de cuerpo libre de este nodo se muestra en la Fig. 4.16(d). A pesar de que podemos usar los senos y cosenos de los ángulos de inclinación de los elementos para escribir las ecuaciones de equilibrio de los nodos, es más conveniente usar las pendientes de los elementos inclinados. La pendiente de los elementos inclinados es simplemente una relación de la proyección vertical de la longitud del elemento a la proyección horizontal de su longitud. Por ejemplo, en la Fig. 4.16(a) podemos ver que el elemento CD de la armadura se eleva 20 ft en dirección vertical sobre la distancia horizontal 15 ft, por lo tanto, la pendiente de este elemento es 20:15 o 4:3. De manera similar, observamos que la pendiente del elemento AD es igual a 1:1. La pendiente de los elementos inclinados determinada de las dimensiones de la armadura es normalmente indicada en el diagrama de la armadura por pequeños triángulos de ángulos rectos dibujados en los elementos inclinados, como se muestra en la Fig. 4.16(a).

Regresando nuestra atención al diagrama de cuerpo libre del nodo A en la Fig. 4.16(d), podemos determinar las incógnitas F_{AB} y F_{AD} aplicando las dos ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y &= 0 & 34 + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{AD} &= 0 & F_{AD} &= -48.08 \text{ k} \\
 & & & & &= 48.08 \text{ k (C)} \\
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & 28 - \frac{1}{\sqrt{2}} (48.08) + F_{AB} &= 0 & F_{AB} &= +6 \text{ k} \\
 & & & & &= 6 \text{ k (T)}
 \end{aligned}$$

Note que las ecuaciones de equilibrio se aplicaron en tal orden que cada ecuación contiene solo una incógnita. La respuesta negativa de F_{AD} indica que el elemento AD está en compresión en lugar de tensión, como se asumió originalmente, mientras la respuesta positiva de F_{AB} indica que el sentido asumido de la fuerza axial (tensión) en el elemento AB fue correcta.

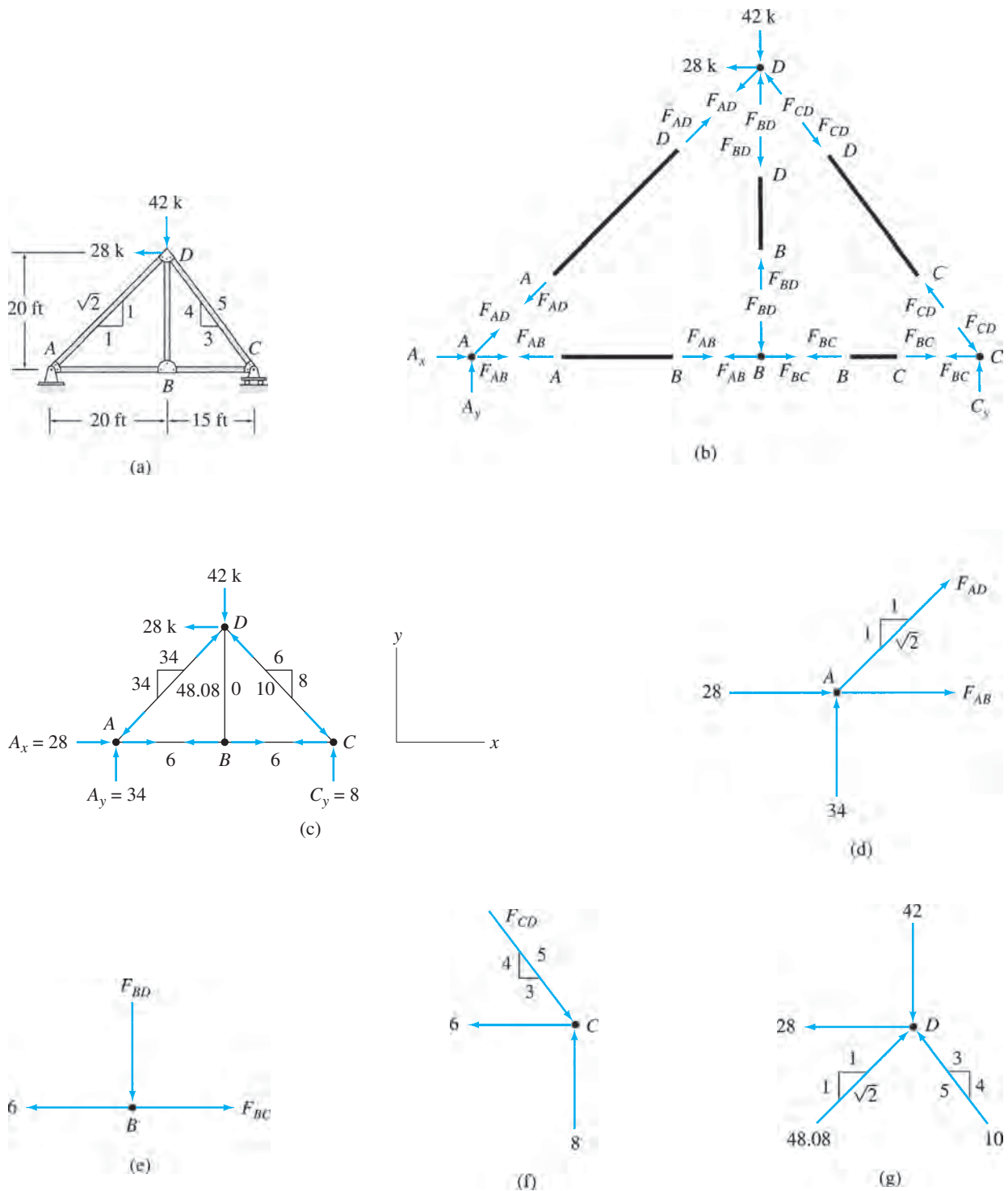


FIG. 4.16

En el siguiente nodo dibujamos el diagrama de cuerpo libre del nodo B , como se muestra en la Fig. 4.16(e), y se determina F_{BC} y F_{BD} como sigue:

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & -6 + F_{BC} &= 0 & F_{BC} &= +6 \text{ k} & \text{o} & F_{BC} = 6 \text{ k (T)} \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 & -F_{BD} &= 0 & F_{BD} &= 0
 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ al diagrama de cuerpo libre del nodo C (Fig. 4.16(f)), obtenemos

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & -6 + \frac{3}{5}F_{CD} &= 0 & F_{CD} &= +10 \text{ k, o} \\
 F_{CD} &= 10 \text{ k (C)}
 \end{aligned}$$

Hemos determinado todas las fuerzas, así que las tres ecuaciones restantes, $\sum F_y = 0$ en el nodo C y $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ del nodo D , pueden utilizarse para verificar nuestros cálculos, por lo tanto, en el nodo C ,

$$+ \uparrow \sum F_y = 8 - \frac{4}{5}(10) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Y en el nodo D (Fig. 4.16(g)),

$$+ \rightarrow \sum F_x = -28 + \frac{1}{\sqrt{2}}(48.08) - \frac{3}{5}(10) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(48.08) - 42 + \frac{4}{5}(10) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

En los párrafos anteriores, el análisis de la armadura se realizó dibujando el diagrama de cuerpo libre y escribiendo las dos ecuaciones de equilibrio de cada nodo. Sin embargo, el análisis de las armaduras puede ser considerablemente más ágil si logramos determinar algunas (preferentemente todas) de las fuerzas por inspección, es decir, sin dibujar el diagrama de cuerpo libre y sin escribir las ecuaciones de equilibrio de los nodos. Este enfoque se puede aplicar convenientemente para los nodos en los cuales al menos una de dos fuerzas desconocidas actúa en dirección horizontal o vertical. Cuando ambas fuerzas desconocidas del nodo tienen direcciones inclinadas, se vuelve necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre del nodo y determinar las fuerzas desconocidas resolviendo las ecuaciones de equilibrio de manera simultánea. Para ilustrar este procedimiento, considere de nuevo la armadura de la Fig. 4.16(a). El diagrama de cuerpo libre de la armadura completa se muestra en la Fig. 4.16(c), la cual también muestra las reacciones de los apoyos calculados previamente. Enfocando nuestra atención en el nodo A de la figura, podemos observar que para satisfacer las ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ en el nodo A , la componente vertical de F_{AD} debe empujar hacia abajo del nodo con magnitud de 34 k para balancear la reacción vertical de 34 k. El hecho de que el elemento AD esté en compresión se indica en el diagrama de la armadura por una flecha cerca del nodo A , y D empujando hacia los nodos, como se muestra en la Fig. 4.16(c). Ya que la magnitud de la componente vertical de F_{AD} se determinó como 34 k, y dado que la pendiente de elementos AD es 1:1, la magnitud de la componente horizontal de F_{AD} debe ser también de 34 k; por lo tanto, la magnitud de la resultante de fuerza F_{AD}

es $F_{AD} = \sqrt{(34)^2 + (34)^2} = 48.08 \text{ k}$. Las componentes de F_{AD} , además de la $F_{AD'}$, así como la misma, se muestran en el lado correspondiente del triángulo del ángulo recto dibujado en el elemento AD , como se ve en la Fig. 4.16(c)). Con la componente horizontal ahora conocida, observamos (de la Fig. 4.16(c)) que para satisfacer la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ del nodo A , la fuerza en el elemento AB (F_{AB}) debe de jalar a la derecha del nodo con una magnitud de 6 k para balancear la componente horizontal de F_{AD} de 34 k que actúa a la izquierda y la reacción horizontal de 28 k hacia la derecha. La magnitud de F_{AB} es ahora escrita en el elemento AB , y las flechas, apartándose del nodo, se dibujan cerca de los nodos A y B para indicar que el elemento AB está en tensión.

A continuación, enfocaremos nuestra atención en el nodo B de la armadura. Debe ser claro en la Fig. 4.16(c) que para satisfacer $\sum F_y = 0$ en B , la fuerza en el elemento BD debe ser cero. Para satisfacer $\sum F_x = 0$, la fuerza en el elemento BC debe tener una magnitud de 6 k y jalar a la derecha del nodo B , indicando tensión en el elemento BC . Esta última información es registrada en el diagrama de la armadura en la Fig. 4.16(c). Considerando ahora el equilibrio del nodo C , podemos ver en la figura que, para satisfacer $\sum F_y = 0$, la componente vertical de F_{CD} debe empujar hacia abajo del nodo con una magnitud de 8 k para balancear la reacción vertical hacia arriba de 8 k. De esta manera, el elemento CD está en compresión. La magnitud en el componente vertical F_{CD} es 8 k, y dado que la pendiente del elemento CD es 4:3, la magnitud de la componente horizontal de F_{CD} es igual a $(3/4)(8) = 6 \text{ k}$; por lo tanto, la magnitud de $F_{CD} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10 \text{ k}$. Por lo tanto, la magnitud de F_{CD} del elemento CD está en compresión. Habiendo determinado todas las fuerzas de los elementos, podemos comprobar nuestros cálculos aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ en el nodo C y $\sum F_y = 0$ y $\sum F_y = 0$ en el nodo D . Las componentes horizontales y verticales de las fuerzas en los elementos están ya disponibles en la Fig. 4.16(c), así que podemos fácilmente comprobar por inspección que estas ecuaciones de equilibrio se satisfacen. Debemos de reconocer que todas las flechas mostradas en el diagrama de la armadura en la Fig. 4.16(c) indican que las fuerzas actúan en los nodos (no en los extremos de los elementos).

Identificación de elementos con fuerza cero

Como las armaduras son usualmente diseñadas para soportar diferentes condiciones de carga, no es poco común encontrar elementos con fuerza cero cuando se analiza una armadura para una condición particular de carga. Elementos de fuerza cero son agregados a la armadura para arriostrar elementos en compresión contra el pandeo y elementos esbeltos en tensión contra vibraciones. El análisis de las armaduras se puede acelerar si logramos identificar los elementos de fuerza cero por simple inspección. Dos tipos de arreglo de elementos que resultan en elementos de fuerza cero son los siguientes:

1. Si solo dos elementos no colineales están conectados a un nodo que no tiene cargas externas o reacciones aplicadas en él, la fuerza en ambos elementos es cero.
2. Si tres elementos, dos de los cuales son colineales y están conectados a un nodo que no tiene cargas externas o reacciones aplicadas en él, la fuerza en el elemento que no es colineal es cero.

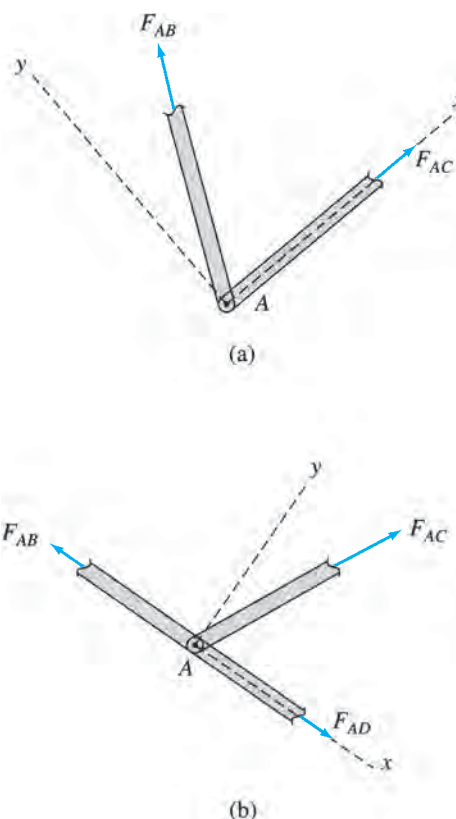


FIG. 4.17

El primero de estos arreglos se muestra en la Fig. 4.17(a). Consiste en dos elementos no colineales AB y AC conectados a un nodo A . Note que no están aplicadas cargas externas al nodo. De esta figura, podemos ver que para satisfacer la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ la componente y de F_{AB} debe ser cero, por lo tanto, $F_{AB} = 0$. Puesto que la componente x de F_{AB} es igual a cero, la segunda ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ solo puede ser satisfecha si F_{AC} es también cero.

El segundo tipo de arreglo se muestra en la Fig. 4.17(b), y consiste de tres elementos, AB , AC y AD , conectados juntos a un nodo A . Note que dos de los tres elementos, AB y AD , son colineales. Podemos ver de la figura que debido a que no hay cargas externas o reacciones aplicadas en los nodos para balancear la componente y de F_{AC} , la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ se puede satisfacer solo si F_{AC} es igual a cero.

Ejemplo 4.3

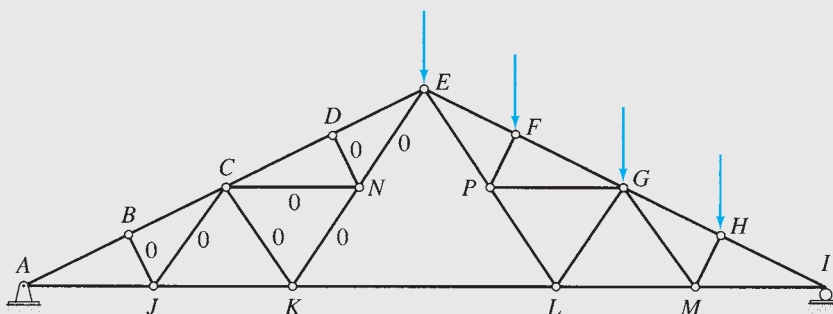
Identifique los elementos de fuerza cero en la armadura de techo tipo Fink sujeta a una carga no balanceada de nieve, como se muestra en la Fig. 4.18

Solución

Se puede observar en la figura que en el nodo B están conectados tres elementos, AB , BC y BJ , de los cuales AB y BC son colineales y BJ no lo es. Debido a que no hay cargas externas aplicadas en el nodo B , el elemento BJ es un elemento de fuerza cero. Un razonamiento similar se puede usar para el nodo D para identificar a DN como elemento de fuerza cero. A

continúa

FIG. 4.18



continuación, enfocaremos nuestra atención en el nodo J , donde los cuatro elementos, AJ , BJ , CJ y JK , están conectados y no tienen cargas externas aplicadas. Ya hemos identificado que BJ es un elemento de fuerza cero. De los tres elementos restantes, AJ y JK son colineales, por lo tanto, CJ debe ser un elemento de fuerza cero. De manera similar, en el nodo N , el elemento CN es identificado como elemento de fuerza cero; el mismo tipo de argumentos se pueden usar para el nodo C para identificar el elemento CK como elemento de fuerza cero y en el nodo K para identificar al elemento KN como elemento de fuerza cero. Finalmente, debemos considerar el nodo N donde cuatro elementos, CN , DN , EN y KN , están conectados, de los cuales tres de ellos, CN , DN y KN , ya han sido identificados como elementos de fuerza cero. No hay cargas externas aplicadas en el nodo N , así que la fuerza del elemento restante EN debe ser igual a cero.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se puede aplicar para el análisis de armaduras simples planas estáticamente determinadas (isostáticas) usando el método de los nodos.

1. Compruebe que la armadura es estáticamente determinada, como se discutió en la sección anterior. Si la armadura se encuentra estáticamente determinada y estable, se procede con el paso 2, de otra manera, termine el análisis en esta etapa. (El análisis de armaduras estáticamente indeterminadas se considera en la Parte Tres de este texto.)
2. Identifique por inspección los elementos de fuerza cero de la armadura.
3. Determine las pendientes de los elementos inclinados (excepto los elementos de fuerza cero) de la armadura.
4. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la armadura completa, muestre todas las cargas externas y las reacciones. Escriba ceros para los elementos que han sido identificados como elementos de fuerza cero.
5. Examine el diagrama de cuerpo libre de la armadura para seleccionar un nodo con no más de dos fuerzas desconocidas o incógnitas (las cuales no deben ser colineales) que actúen en él. Si se encuentra tal nodo, vaya directamente al siguiente paso. De otra manera establezca las reacciones aplicando las tres ecuaciones de equilibrio y ecuaciones de condición (si hubiera) al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa; luego seleccione un nodo con dos o menos incógnitas, y vaya al siguiente paso.
6.
 - a. Dibuje el diagrama de cuerpo libre del nodo seleccionado, indique las fuerzas de tensión con flechas que tiren hacia afuera del nodo e indique fuerzas de compresión con flechas que empujen hacia el nodo. Es usualmente conveniente asumir que las fuerzas desconocidas de los elementos son de tensión.
 - b. Encuentre las fuerzas desconocidas aplicando las dos ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. Una respuesta positiva

para un elemento significa que el elemento está en tensión, como inicialmente se asumió, mientras que una respuesta negativa indica que el elemento está en compresión.

Si cuando menos una de las incógnitas actúa en el nodo seleccionado en la dirección horizontal o vertical, la incógnita puede ser determinada convenientemente satisfaciendo las dos ecuaciones de equilibrio por inspección del nodo en el diagrama de cuerpo libre de la armadura.

7. Si todas las fuerzas de los elementos y las reacciones han sido determinadas, vaya al siguiente paso. De otra manera, seleccione otro nodo con no más de dos incógnitas y regrese al paso 6.
8. Si todas las reacciones ya fueron determinadas en el paso 5 usando las ecuaciones de equilibrio y de condición de la armadura completa, entonces aplique las ecuaciones de equilibrio restantes del nodo que no han sido utilizadas hasta el momento para revisar los cálculos. Si las reacciones fueron calculadas aplicando las ecuaciones de equilibrio del nodo, entonces aplique las ecuaciones de equilibrio en la armadura completa para verificar los cálculos, entonces estas ecuaciones extras de equilibrio deben ser satisfechas.

Ejemplo 4.4

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura tipo Warren mostrada en la Fig. 4.19(a) usando el método de los nodos.

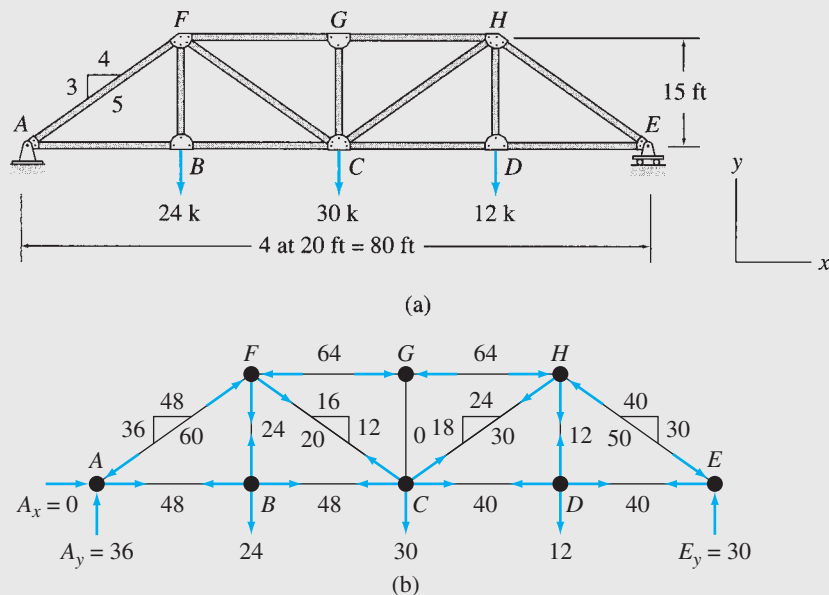


FIG. 4.19

Solución

Determinación estática. La armadura tiene 13 elementos y 8 nodos, y es soportada por tres reacciones, debido a que $m + r = 2j$ y a que las reacciones y los elementos de la armadura están adecuadamente dispuestos, la armadura es estáticamente determinada.

continúa

Elementos con fuerza cero. En la Fig. 4.19(a) se puede apreciar que en el nodo G los tres elementos, CG , FG y GH , están conectados, de los cuales FG y GH son colineales y CG no lo es. Puesto que no hay cargas externas aplicadas en el nodo G , el elemento CG es un elemento de fuerza cero.

$$F_{CG} = 0$$

Respuesta.

De las dimensiones de la armadura podemos estipular que todos los elementos inclinados tienen pendiente de 3:4, como se ve en la Fig. 4.19(a). El diagrama de cuerpo libre de toda la armadura es el que aparece en la Fig. 4.19(b). Como no se puede ubicar un nodo con dos o menos incógnitas –que no debe de ser colineal–, procedemos a calcular las reacciones. (A pesar de que el nodo G tiene solo dos incógnitas de fuerzas F_{FG} y F_{HG} , que actúan en él, estas son colineales, así que no pueden ser determinadas por la ecuación de equilibrio, $\sum F_x = 0$.)

Reacciones. Por uso de proporciones,

$$\begin{aligned} A_y &= 24\left(\frac{3}{4}\right) + 30\left(\frac{1}{2}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right) = 36 \\ \sum F_y &= 0 \quad E_y = (24 + 30 + 12) - 36 = 30 \text{ k} \\ \sum F_x &= 0 \quad A_x = 0 \end{aligned}$$

Nodo A. Enfocando nuestra atención en el nodo A de la Fig. 4.19(b), podemos observar que para satisfacer $\sum F_y = 0$, la componente vertical de F_{AF} debe empujar hacia abajo el nodo con una magnitud de 36 k para balancear la reacción vertical hacia arriba de 36 k. La pendiente del elemento AF es 3:4, así que la magnitud de la componente horizontal de F_{AF} es $(4/3)(36)$, o 48 k. Por lo tanto, la fuerza del elemento AF es de compresión, con una magnitud de $F_{AF} = \sqrt{(48)^2 + (36)^2} = 60 \text{ k}$.

$$F_{AF} = 60 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Con la componente horizontal de F_{AF} ya conocida, observamos en la figura que, para que se cumpla $\sum F_y = 0$, F_{AB} debe jalar hacia la derecha con una magnitud de 48 k, para balancear la componente horizontal de F_{AF} de 48 k que actúa hacia la izquierda. Por lo tanto, el elemento AB está en tensión con una fuerza de 48 k.

$$F_{BC} = 48 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodo B. Consideremos el equilibrio del nodo B . Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos F_{BC}

$$F_{BC} = 48 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

De $\sum F_y = 0$, obtenemos F_{BF}

$$F_{BF} = 24 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodo F. Este nodo tiene ahora dos incógnitas, F_{CF} y F_{FG} , que pueden ser determinadas aplicando las ecuaciones de equilibrio siguiente. Como vemos en la Fig. 4.19 (b), para que $\sum F_y = 0$ se cumpla, la componente vertical de F_{CF} debe empujar hacia abajo del nodo con una magnitud de $36 - 24 = 12 \text{ k}$. Usando la pendiente del elemento CF , establecemos la componente horizontal como $(4/3)(12) = 16 \text{ k}$ y la misma magnitud de F_{CF} como 20 k.

$$F_{CF} = 20 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Considerando el equilibrio en el nodo F en la dirección horizontal ($\sum F_x = 0$), es claro que en la Fig. 4.19(b) F_{FG} debe de empujar a la izquierda del nodo con una magnitud de $48 + 16 = 64 \text{ k}$.

$$F_{FG} = 64 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Nodo G. De manera similar, aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos F_{GH}

$$F_{FG} = 64 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Note que en la segunda ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$, este nodo ya ha sido utilizado en la identificación del elemento CG como un elemento de fuerza cero.

continúa

Nodo C. Considerando la ecuación de equilibrio en la dirección vertical $\sum F_y = 0$, observamos (en la Fig. 4.19(b)) que el elemento CH debería de estar en tensión y que la magnitud de la componente vertical de su fuerza es igual a $30 - 12 = 18$ k. Por lo tanto, las magnitudes de los componentes horizontales de F_{CH} y de la misma F_{CH} es 24 k y 30 k, respectivamente, como se muestra en la Fig. 4.19(b).

$$F_{CH} = 30 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Ahora, si tenemos en cuenta el equilibrio en la dirección horizontal $\sum F_x = 0$, observamos que el elemento CD debe estar en tensión y que la magnitud de su fuerza debe ser igual a $48 + 16 - 24 = 40$ k.

$$F_{CD} = 40 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodo D. Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos F_{DE}

$$F_{DE} = 40 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

De $\sum F_y = 0$, obtenemos F_{DH}

$$F_{DH} = 12 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodo E. Considerando todas las componentes horizontales de las fuerzas actuantes en el nodo E , encontramos que, para satisfacer $\sum F_y = 0$, el componente vertical de F_{EH} debe de empujar hacia abajo del nodo E con magnitud de 30 k para balancear la reacción hacia arriba $E_y = 30$ k. La magnitud del componente horizontal de F_{EH} es igual a $(4/3)(30)$, o 40 k. Así, F_{EH} está en compresión con una magnitud de 50 k.

$$F_{EH} = 50 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Comprobación de cálculos. Para comprobar nuestros cálculos, aplicamos la siguiente ecuación de equilibrio del nodo restante (ver Fig. 4.19(b)). En el nodo E ,

$$+ \rightarrow \sum F_x = -40 + 40 = 0$$

Comprobación

En el nodo H ,

$$+ \rightarrow \sum F_x = 64 - 24 - 40 = 0$$

Comprobación

$$+ \uparrow \sum F_y = -18 - 12 + 30 = 0$$

Comprobación

Ejemplo 4.5

Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. 4.20(a) por el método de los nodos.

Solución

Determinación estática. La armadura está compuesta por siete elementos y cinco nodos, y es soportada por tres reacciones. Así, $m + r = 2j$. Dado que las reacciones y los elementos de la armadura están adecuadamente dispuestos, la armadura es estáticamente determinada.

En las dimensiones de la armadura de la Fig. 4.20(a), encontramos que todos los elementos inclinados tienen pendientes de 12:5. Puesto que el nodo E tiene dos fuerzas desconocidas no colineales, F_{CE} y F_{DE} , que actúan en él, podemos aplicar el método de los nodos sin calcular primero las reacciones en los apoyos.

Nodo E. Enfocando nuestra atención en el nodo E de la Fig. 4.20(b), observamos que para satisfacer $\sum F_x = 0$, la componente horizontal de F_{DE} debe empujar hacia la izquierda del nodo con una magnitud de 25 kN para balancear las 25 kN de carga externa que actúan hacia la derecha. La pendiente del elemento DE es 12:5, así la magnitud de la componente vertical F_{DE} es $(12/5)(25) = 60$ kN. Por tanto, la fuerza del elemento DE está en compresión, con una magnitud de

$$F_{DE} = \sqrt{(25)^2 + (60)^2} = 65 \text{ kN}$$

$$F_{DE} = 65 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

continúa

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos

$$F_{AD} = 65 \text{ kN y } F_{BD} = -130 \text{ kN}$$

$$F_{AD} = 65 \text{ kN (T)}$$

Respuesta.

$$F_{BD} = 130 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

Nodo B. (Ver Fig. 4.20(b)) Considerando el equilibrio en el nodo B en la dirección horizontal ($\sum F_x = 0$), obtenemos, F_{AB}

$$F_{AB} = 50 \text{ kN (T)}$$

Respuesta.

Habiendo determinado todas las fuerzas de los elementos, aplicamos la ecuación de ($\sum F_y = 0$) equilibrio remanente en el nodo B para calcular las reacciones en el soporte B_y .

$$B_y = 120 \text{ kN } \uparrow$$

Respuesta.

Nodo A. Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos A_x .

$$A_x = 75 \text{ kN } \leftarrow$$

Respuesta.

De $\sum F_y = 0$, obtenemos A_y .

$$A_y = 90 \text{ kN } \downarrow$$

Respuesta.

Comprobación de cálculos. Para comprobar nuestros cálculos, consideremos el equilibrio de la armadura completa. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la armadura completa mostrada en la Fig. 4.20(b), obtenemos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 25 + 50 - 75 = 0$$

Comprobación

$$+ \uparrow \sum F_y = -30 - 90 + 120 = 0$$

Comprobación

$$+ \curvearrowright \sum M_B = 30(5) - 25(12) - 50(6) + 90(5) = 0$$

Comprobación

Ejemplo 4.6

Determine las fuerzas en cada uno de los elementos de la armadura de tres articulaciones en la Fig. 4.21(a) por el método de los nodos.

Solución

Determinación estática. La armadura contiene 10 elementos y 7 nodos, y es soportada por cuatro reacciones. Debido a que $m + r = 2j$ y las reacciones y los elementos de la armadura están adecuadamente dispuestos, la armadura es estáticamente determinada. Note que $m < 2j - 3$, la armadura no es internamente estable, y el cuerpo no permanecerá rígido cuando sea desligada de sus apoyos. Sin embargo, cuando esté sujeta a sus apoyos, la armadura conservará su forma y puede ser tratada como cuerpo rígido.

Elementos de fuerza cero. Se puede ver en la Fig. 4.21(a) que en el nodo C los tres elementos, AC , CE y CF , están conectados, de los cuales AC y CF son colineales. Debido a que el nodo C no tiene cargas externas aplicadas a él, el elemento no colineal CE es de fuerza cero.

$$F_{CE} = 0$$

Respuesta.

Con un razonamiento similar, se puede aplicar en el nodo D para identificar al elemento GD como un elemento de fuerza cero.

$$F_{DG} = 0$$

Respuesta.

La pendiente de los elementos inclinados de fuerza no cero se muestran en la Fig. 4.21(a). El diagrama de cuerpo libre de la armadura completa se ejemplifica en la Fig. 4.21(b). El método de los nodos puede ser iniciado tanto en el nodo E , o en el nodo G , debido a que estos dos tienen solo dos incógnitas en cada uno.

continúa

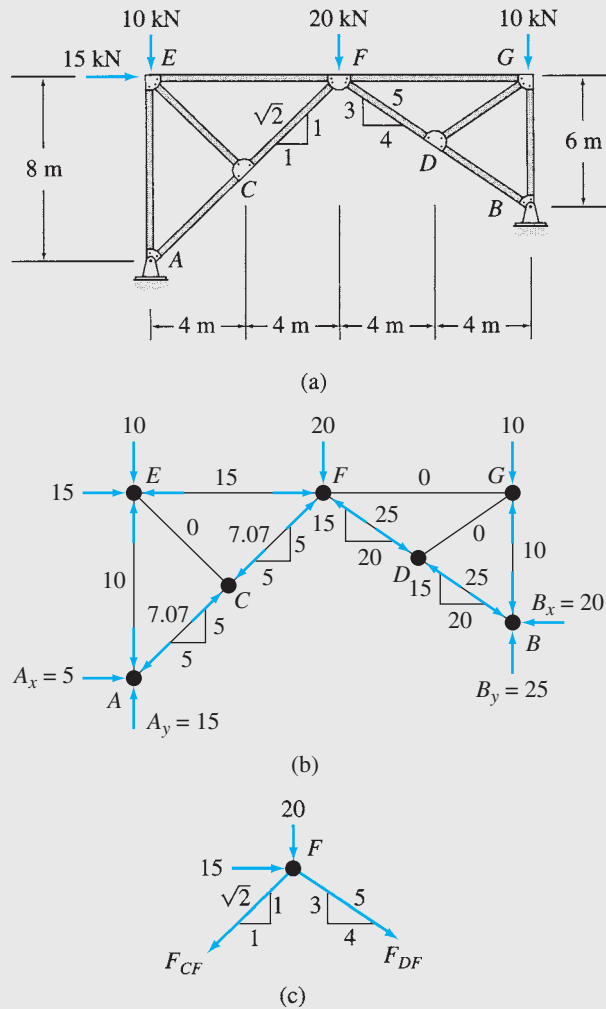


FIG. 4.21

Nodo E. Empezando por el nodo E, observamos en la Fig. 4.21(b) que, para que $\sum F_x = 0$ se cumpla, la fuerza en el elemento EF debe ser de compresión con una magnitud de 15 kN.

$$F_{EF} = 15 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

De manera similar, de $\sum F_y = 0$, obtenemos F_{AE}

$$F_{AE} = 10 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

Nodo G. Considerando la ecuación de equilibrio del nodo G en la dirección horizontal ($\sum F_x = 0$), observamos que la fuerza en el elemento FG es cero.

$$F_{FG} = 0$$

Respuesta.

De manera similar, aplicando $\sum F_y = 0$, obtenemos F_{BG}

$$F_{BG} = 10 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

continúa

Nodo F. Atendamos el nodo *J*. Tanto las fuerzas desconocidas F_{CF} y F_{DF} , que actúan en este nodo tienen la dirección inclinada, así que dibujamos el diagrama de cuerpo libre del nodo como se muestra en la Fig. 4.21(c) y determinamos las incógnitas resolviendo simultáneamente las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & 15 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_{CF} + \frac{4}{5} F_{DF} &= 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & -20 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_{CF} - \frac{3}{5} F_{DF} &= 0 \end{aligned}$$

Solucionando estas ecuaciones, obtenemos

$$F_{DF} = -25 \text{ kN y } F_{CF} = -7.07 \text{ kN}$$

$$F_{DF} = 25 \text{ kN (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$F_{CF} = 7.07 \text{ kN (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo C. (Ver la Fig. 4.21(b)) Para que el nodo *C* pueda estar en equilibrio, las dos fuerzas actuantes colineales que no tienen fuerza cero deben ser iguales y opuestas.

$$F_{AC} = 7.07 \text{ kN (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo D. Empleando el razonamiento similar en el nodo *D*, obtenemos F_{BD}

$$F_{BD} = 25 \text{ kN (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo A. Después de determinar todas las fuerzas en los elementos, utilizamos las dos ecuaciones de equilibrio en el nodo *A* para calcular las reacciones en los apoyos A_x y A_y . Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos A_x

$$A_x = 5 \text{ kN} \rightarrow \quad \text{Respuesta.}$$

Aplicando $\sum F_y = 0$, encontramos que A_y es igual a $10 + 5 = 15 \text{ kN}$

$$A_y = 15 \text{ kN} \uparrow \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo B. Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos B_x

$$B_x = 20 \text{ kN} \leftarrow \quad \text{Respuesta.}$$

De $\sum F_y = 0$, encontramos que $B_y = 15 + 10 = 25 \text{ kN}$.

$$B_y = 25 \text{ kN} \uparrow \quad \text{Respuesta.}$$

Ecuación de equilibrio para la armadura completa. Finalmente, para comprobar nuestros cálculos, consideramos el equilibrio de la armadura completa. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa mostrada en la Fig. 4.21(b), tenemos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 5 + 15 - 20 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 15 - 10 - 20 - 10 + 25 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_B = 5(2) - 15(16) - 15(6) + 10(16) + 20(8) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

4.6 Análisis de armaduras planas por el método de las secciones

El método de los nodos, presentado en la sección anterior, prueba ser muy eficiente cuando las fuerzas en todos los elementos de una armadura son determinados. Sin embargo, si solo se desean las fuerzas de una sección de la armadura, el método de los nodos puede no ser muy eficiente, porque involucra el cálculo de fuerzas en muchos otros elementos de la armadura antes de llegar al nodo ne-

cesario para determinar las fuerzas requeridas de los elementos. El *método de las secciones* ofrece la posibilidad de determinar las fuerzas en elementos específicos de la armadura de manera directa, sin calcular primero las fuerzas de muchos elementos no necesarias, como podría ser requerido en el método de los nodos.

El método de las secciones involucra cortar la armadura en dos partes pasando una sección imaginaria a través de los elementos en los cuales se requiere determinar las fuerzas. Las fuerzas en los elementos requeridas son entonces determinadas considerando el equilibrio de una de las dos partes de la armadura. Cada parte de la armadura se trata como un cuerpo rígido en equilibrio, bajo la acción de cualquier carga aplicada, de reacciones y de las fuerzas de los elementos cortados por la sección imaginaria. Las fuerzas desconocidas de los elementos se determinan aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a una de las dos partes de la armadura; solo hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles, así que no pueden ser usadas para establecer más de tres fuerzas desconocidas. Por lo tanto, en general, *las secciones deben elegirse para que no pasen por más de tres elementos con fuerzas desconocidas.* En algunas armaduras, el arreglo de sus elementos puede ser tal que las secciones pasen a través de más de tres elementos con fuerzas desconocidas. Tales secciones son, sin embargo, empleadas en el análisis solo de cierto tipo de armaduras (ver Ejemplo 4.9).

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento paso a paso sirve para determinar las fuerzas en los elementos de armaduras planas estáticamente determinadas por el método de las secciones.

1. Seleccione la sección que pase a través de tantos elementos como sea posible cuyas fuerzas se quieran determinar, pero no por más de tres elementos con fuerzas desconocidas.
2. A pesar de que cualquiera de las dos partes de la armadura pueden ser usadas para determinar las fuerzas de los elementos, se debe seleccionar la parte de la armadura que requiera el menor número de cálculos para la determinación de las fuerzas desconocidas. Para evitar la necesidad del cálculo de las reacciones, si una de las dos partes de la armadura no tiene ninguna reacción actuante en ella, esta parte se deberá seleccionar para el análisis de las fuerzas de los elementos y pasar al siguiente paso. Si ambas porciones de la armadura están unidas a los apoyos externos, entonces calcule las reacciones aplicando las ecuaciones de equilibrio y de condición (si las hubiera) al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa. Luego, seleccione la porción de la armadura para el análisis de las fuerzas de los elementos que tenga al menos un número de cargas externas y reacciones aplicadas a dicha porción.
3. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la porción seleccionada de la armadura, mostrando las cargas externas y reacciones aplicadas a ella y las fuerzas en los elementos cortados por la sección imaginaria. Las fuerzas desconocidas de los elementos se asumen usualmente en tensión y son, por lo tanto, mostradas en el diagrama de cuerpo libre por flechas *alejándose* de los nodos.
4. Determine las fuerzas desconocidas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio. Para evitar resolver ecuaciones simultáneas, trate de aplicar las ecuaciones de equilibrio de tal manera que cada ecuación tenga solo una incógnita. Esto se puede lograr algunas veces usando

un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$ o $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$) descritos en la Sección 3.1, en lugar del sistema de ecuaciones de dos sumas de fuerzas y momentos ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$).

5. Aplique las ecuaciones alternativas de equilibrio que no fueron usadas para calcular las fuerzas en los elementos, para verificar los cálculos. Estas deben preferentemente involucrar a las tres fuerzas de los elementos obtenidas por el análisis. Si el análisis se desarrolla de manera correcta, estas ecuaciones de equilibrio alternativas deben quedar satisfechas.

Ejemplo 4.7

Determine las fuerzas en los elementos CD , DG y GH de la armadura mostrada en la Fig. 4.22(a) por el método de las secciones.

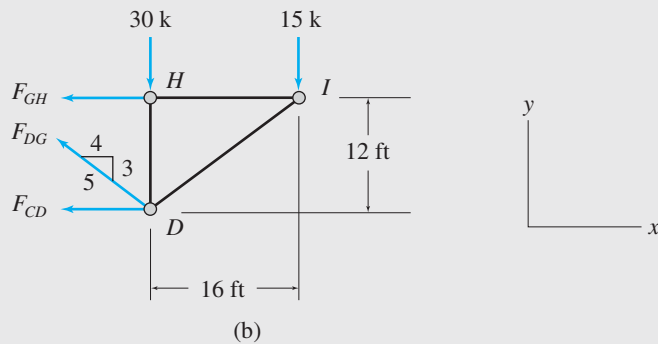
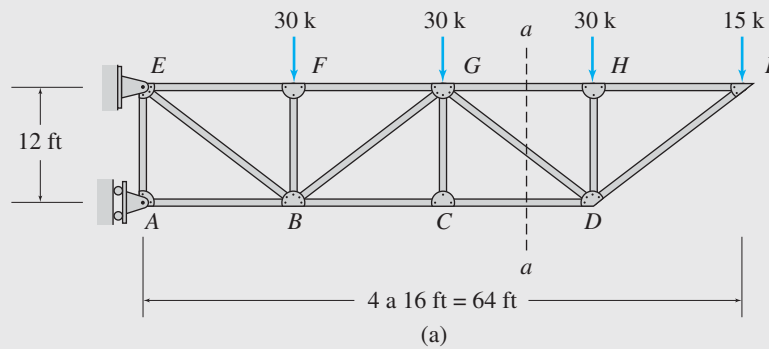


FIG. 4.22

Solución

Sección aa. Como se ve en la Fig. 4.22(a), una sección aa pasa a través de los tres elementos de interés, CD , DG y GH , cortando la armadura en dos partes, $ACGE$ y DHI . Para evitar el cálculo de las reacciones, usaremos la porción derecha de la armadura, DHI , para calcular las fuerzas de los elementos.

Fuerzas en los elementos. El diagrama de cuerpo libre de la porción DHI de la armadura se muestra en la Fig. 4.22(b). Todas las fuerzas desconocidas, F_{CD} , F_{DG} y F_{GH} , se asumen en tensión y están indicadas por flechas que se alejan de los nodos correspondientes del diagrama. La pendiente de las fuerzas inclinadas, F_{DG} , también está representada en el diagrama de cuerpo libre. Se calculan las fuerzas de los elementos deseadas aplicando las ecuaciones de equilibrio como sigue (ver Fig. 4.22(b)).

continúa

$$+ \zeta \sum M_D = 0 \quad -15(16) + F_{GH}(12) = 0$$

$$F_{GH} = 20 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad -30 - 15 + \frac{3}{5}F_{DG} = 0$$

$$F_{DG} = 75 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad -20 - \frac{4}{5}(75) - F_{CD} = 0$$

$$F_{CD} = -80 \text{ k}$$

La respuesta negativa para F_{CD} indica que nuestra suposición inicial acerca de esta fuerza de tensión fue incorrecta, y F_{CD} es en realidad una fuerza de compresión.

$$F_{CD} = 80 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Comprobación de cálculos. (Ver Fig. 4.22(b))

$$+ \zeta \sum M_I = 30(16) - (-80)(12) - \frac{4}{5}(75)(12) - \frac{3}{5}(75)(16) = 0$$

Comprobación

Ejemplo 4.8

Determine las fuerzas en los elementos CJ e IJ de la armadura mostrada en la Fig. 4.23(a) por el método de las secciones.

Solución

Sección aa . Como vemos en la Fig. 4.23(a), una sección aa pasa a través de los elementos CJ , IJ y CD , cortando la armadura en dos partes ACI y DGJ . La porción izquierda ACI se usará para analizar las fuerzas en los elementos.

Reacciones. Antes de proceder al cálculo de las fuerzas en los elementos, necesitamos determinar las reacciones en el apoyo A . A considerando las ecuaciones de equilibrio de la armadura completa (Fig. 4.23(b)), establecemos las reacciones $A_x = 0$, $A_y = 50 \text{ k } \uparrow$ y $G_y = 50 \text{ k } \uparrow$

Fuerzas en los elementos. El diagrama de cuerpo libre de la porción de armadura ACI se expone en la Fig. 4.23(c). Las pendientes de las fuerzas inclinadas F_{JI} y F_{CJ} se obtienen de las dimensiones de la armadura en la Fig. 4.23(a), y se ven en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas desconocidas son determinadas aplicando las ecuaciones de equilibrio como sigue.

Debido a que F_{IJ} y F_{CD} pasan a través del punto C , y asumiendo momentos alrededor del punto C , obtenemos solo una ecuación de condición.

$$+ \zeta \sum M_C = 0 \quad -50(40) + 20(20) - \frac{4}{\sqrt{17}}F_{IJ}(25) = 0$$

$$F_{IJ} = -65.97 \text{ k}$$

La respuesta negativa para F_{IJ} indica que nuestra suposición inicial acerca de esta fuerza de tensión fue incorrecta, y F_{IJ} es en realidad una fuerza de compresión.

$$F_{IJ} = 65.97 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Después, calculamos F_{CJ} sumando los momentos alrededor de O , el cual es el punto de intersección de las líneas de acción de F_{IJ} y F_{CD} . Debido a que la pendiente del elemento IJ es 1:4, la distancia $OC = 4(IC) = 4(25) = 100 \text{ ft}$ (ver la Fig. 4.23(c)). Del equilibrio de momentos alrededor de O resulta

continúa

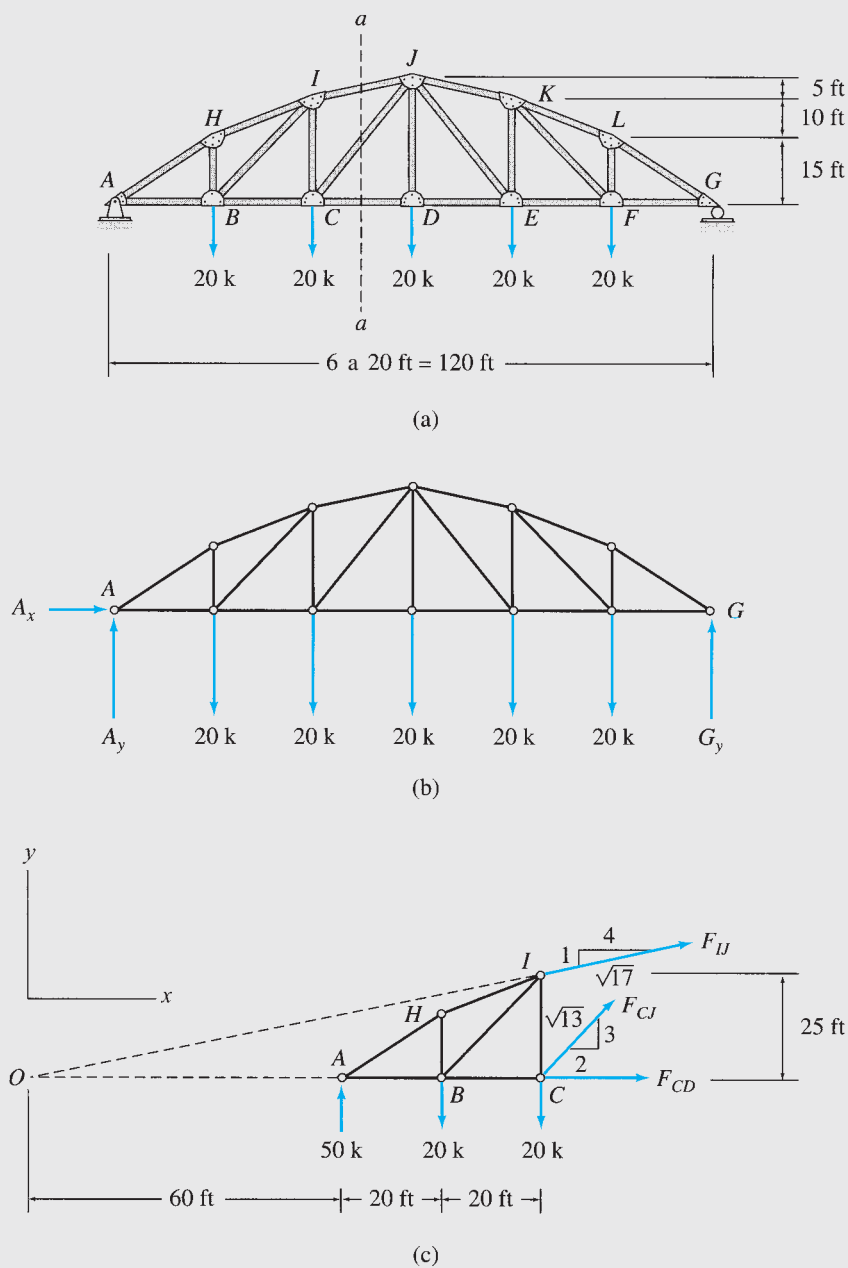


FIG. 4.23

$$+\zeta \sum M_O = 0 \quad 50(60) - 20(80) - 20(100) + \frac{3}{\sqrt{13}} F_{CI} (100) = 0$$

$$F_{CI} = 7.21 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

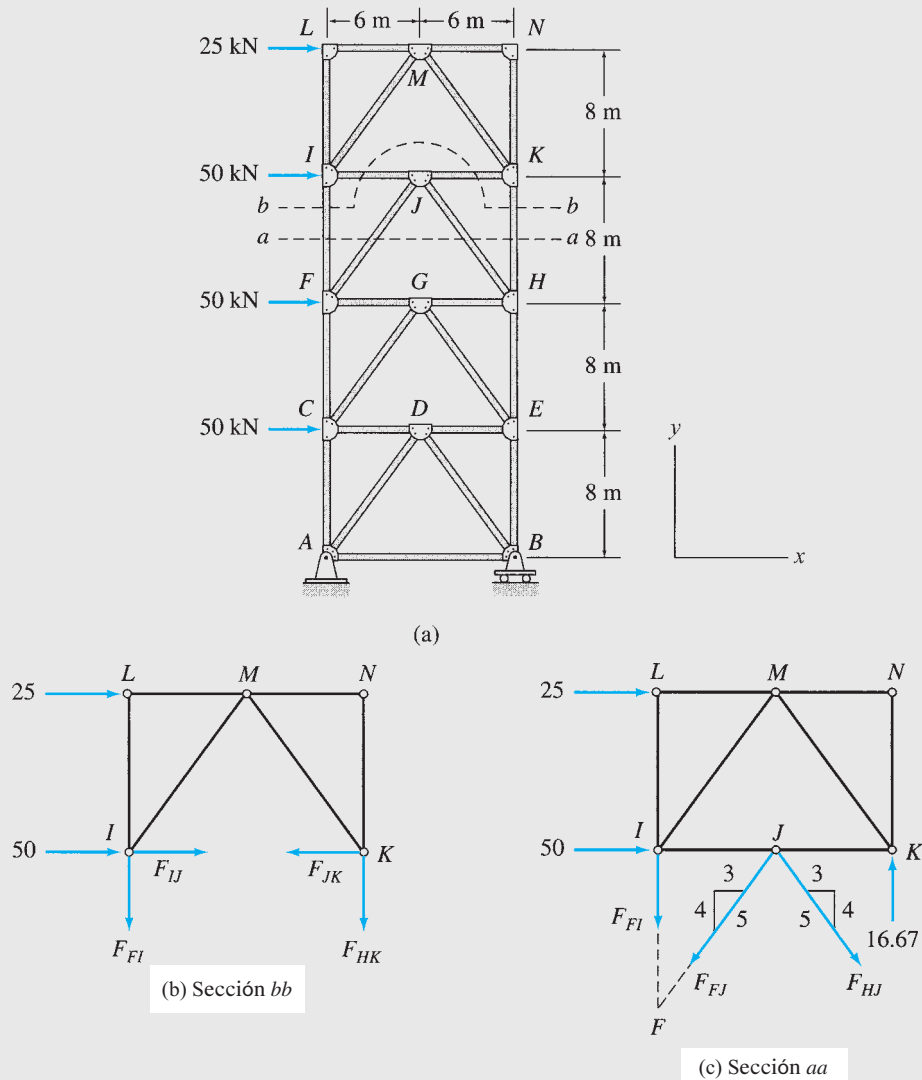
Comprobación de cálculos. Para comprobar los cálculos, aplicamos una ecuación alternativa de equilibrio, la cual involucra dos fuerzas determinadas en los elementos

$$+\uparrow \sum F_y = 50 - 20 - 20 - \frac{1}{\sqrt{17}} (65.97) + \frac{3}{\sqrt{13}} (7.21) = 0$$

Comprobación

Ejemplo 4.9

Determine las fuerzas en los elementos FJ , HJ e HK de la armadura K mostrada en la Fig. 4.24(a) por el método de las secciones.


FIG. 4.24
Solución

De la Fig. 4.24(a), podemos observar que la sección horizontal aa que pasa a través de los tres elementos de interés, FG , HJ y HK , además corta al elemento FI , liberando así cuatro incógnitas, las cuales se pueden determinar de las tres ecuaciones de equilibrio. Las armaduras de arco como la considerada acá con los elementos dispuestos en forma de letra K se pueden analizar mediante una sección curva alrededor del nodo intermedio, como la sección bb se muestra en la Fig. 4.24(a). Para evitar el cálculo de las reacciones, usaremos la parte superior $IKNL$ de la armadura arriba de la sección bb para este análisis. El diagrama de cuerpo libre de esta parte se muestra en la Fig. 4.24(b). Se puede ver que a pesar de que esta sección bb haya cortado los cuatro elementos, FI , IJ , JK , y HK , las fuerzas en los elementos FI y HK se pueden determinar sumando

continúa

los momentos alrededor del punto K e I , respectivamente, debido a que las líneas de acción de los tres elementos de las cuatro incógnitas pasan a través de estos puntos. Por lo tanto, calcularemos en primer lugar F_{HK} considerando la sección bb y después usaremos la sección aa para determinar F_{FI} y F_{HJ} .

Sección bb . Usando la Fig. 4.24(b), escribimos

$$+\zeta \sum M_I = 0 \quad -25(8) - F_{HK}(12) = 0$$

$$F_{HK} = -16.67 \text{ kN}$$

$$F_{HK} = 16.67 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

Sección aa . El diagrama de cuerpo libre de la porción $IKNL$ de la armadura arriba de la sección aa se muestra en la Fig. 4.24(c). Para determinar F_{HJ} , sumamos los momentos alrededor de F , el cual es el punto de intersección de las líneas de acción de F_{FI} y F_{FJ} .

$$+\zeta \sum M_F = 0 \quad -25(16) - 50(8) + 16.67(12) - \frac{3}{5}F_{HJ}(8) - \frac{4}{5}F_{HJ}(6) = 0$$

$$F_{HJ} = -62.5 \text{ kN}$$

$$F_{HJ} = 62.5 \text{ kN (C)}$$

Respuesta.

Sumando las fuerzas en la dirección horizontal, obtenemos

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 25 + 50 - \frac{3}{5}F_{FJ} - \frac{3}{5}(62.5) = 0$$

$$F_{FJ} = 62.5 \text{ kN (T)}$$

Respuesta.

Comprobación de los cálculos. Finalmente, para comprobar nuestros cálculos, aplicamos una ecuación alternativa, la cual involucra las tres fuerzas de los elementos analizados. Usando la Fig. 4.24(c), escribimos

$$+\zeta \sum M_I = -25(8) - \frac{4}{5}(62.5)(6) + \frac{4}{5}(62.5)(6) + 16.67(12) = 0$$

Comprobación

4.7 Análisis de armaduras compuestas

A pesar de que el método de los nodos y el de las secciones descritos en las secciones anteriores pueden realizarse de manera individual en el análisis de armaduras compuestas, el análisis de tales armaduras puede algunas veces ser más ágil al usar una combinación de ambos métodos. Para un tipo de armaduras compuestas, la secuencia de análisis puede fallar cuando no se puede encontrar un nodo con dos o menos fuerzas desconocidas. En tal caso se emplea el método de las secciones para calcular algunas de las fuerzas en los elementos, produciendo así un nodo con dos o menos fuerzas desconocidas, y aplicando posteriormente el método de los nodos. Este enfoque se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.10

Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura compuesta mostrada en la Fig. 4.25(a).

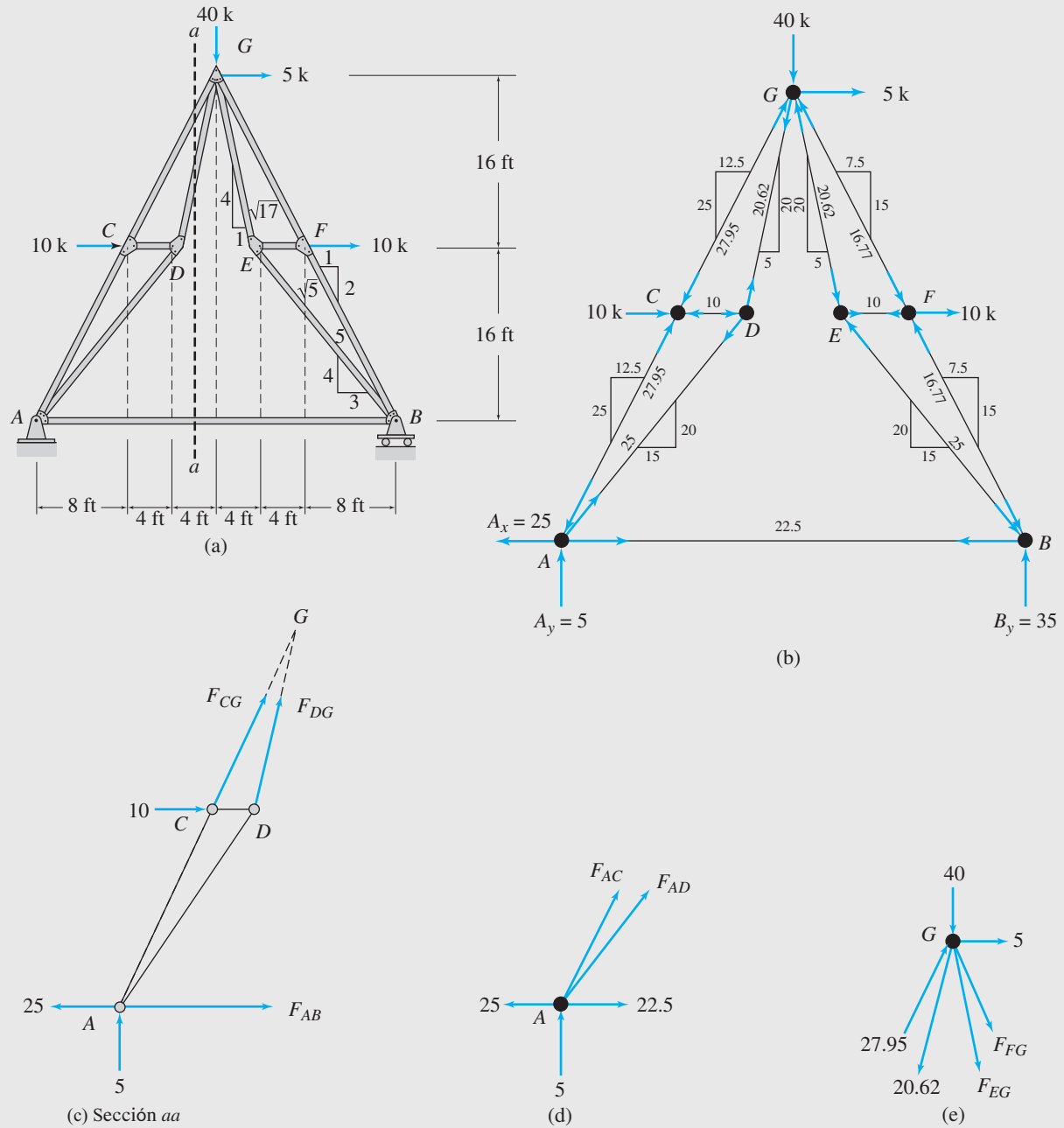


FIG. 4.25

continúa

Solución

Determinación estática. La armadura tiene 11 elementos y 7 nodos y está apoyada por 3 reacciones. Debido a que $m + r = 2j$ y las reacciones y los elementos de la armadura están dispuestos adecuadamente, la armadura es estáticamente determinada.

Las pendientes de los elementos inclinados son determinadas de las dimensiones de la armadura como se muestra en la Fig. 4.25(a).

Reacciones. Las reacciones en los apoyos A y B se calculan aplicando las tres ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre de la armadura completa. (Fig. 4.25(b)), y son

$$A_x = 25 \text{ k} \leftarrow \quad A_y = 5 \text{ k} \uparrow \quad B_y = 35 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta.}$$

Sección aa . Debido a que un nodo con dos o menos incógnitas no se puede identificar para empezar el método de los nodos, primero calcularemos la fuerza F_{AB} usando la sección aa , como se muestra en la Fig. 4.25(a).

El diagrama de cuerpo libre de la porción de la armadura a la izquierda de la sección aa se muestra en la Fig. 4.25(c). Determinamos F_{AB} sumando los momentos alrededor de G , el punto de intersección de las líneas de acción de F_{CG} y F_{DG}

$$+\zeta \sum M_G = 0 \quad -25(32) - 5(16) + 10(16) + F_{AB}(32) = 0$$

$$F_{AB} = 22.5 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

Con F_{AB} ya conocida, el método de los nodos se puede iniciar ya sea en el nodo A o en el nodo B , debido a que estos nodos tienen solo dos incógnitas cada uno. Empezamos por el nodo A .

Nodo A . El diagrama de cuerpo libre del nodo A se muestra en la Fig. 4.25(d).

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -25 + 22.5 + \frac{1}{\sqrt{5}}F_{AC} + \frac{3}{5}F_{AD} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 5 + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{AC} + \frac{4}{5}F_{AD} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos

$$F_{AC} = -27.95 \text{ k} \quad y \quad F_{AD} = 25 \text{ k}$$

$$F_{AC} = 27.95 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$F_{AD} = 25 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodos C y D . Enfocando nuestra atención en los nodos C y D en la Fig. 4.25(b), y satisfaciendo las dos ecuaciones de equilibrio por inspección en cada uno de estos nodos, determinamos

$$F_{CG} = 27.95 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$F_{CD} = 10 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$F_{DG} = 20.62 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo G . Después, consideramos el equilibrio del nodo G (ver Fig. 4.25(e)).

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad 5 + \frac{1}{\sqrt{5}}(27.95) - \frac{1}{\sqrt{17}}(20.62) + \frac{1}{\sqrt{17}}F_{EG} + \frac{1}{\sqrt{5}}F_{FG} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -40 + \frac{2}{\sqrt{5}}(27.95) - \frac{4}{\sqrt{17}}(20.62) - \frac{4}{\sqrt{17}}F_{EG} - \frac{2}{\sqrt{5}}F_{FG} = 0$$

continúa

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos

$$F_{EG} = -20.62 \text{ k} \quad \text{y} \quad F_{FG} = -16.77 \text{ k}$$

$$F_{EG} = 20.62 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{FG} = 16.77 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Nodos E y F. Finalmente, considerando el equilibrio, por inspección, de los nodos E y F (ver Fig. 4.25(b)), obtenemos

$$F_{BE} = 25 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{EF} = 10 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

$$F_{BF} = 16.77 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Ejemplo 4.11

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura Fink que se muestra en Fig. 4.26(a).

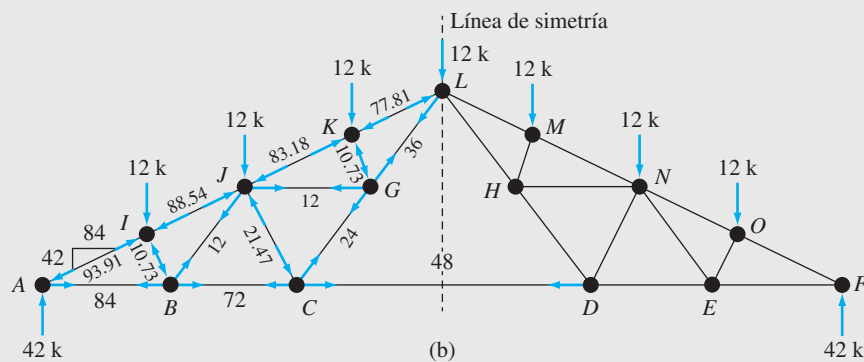
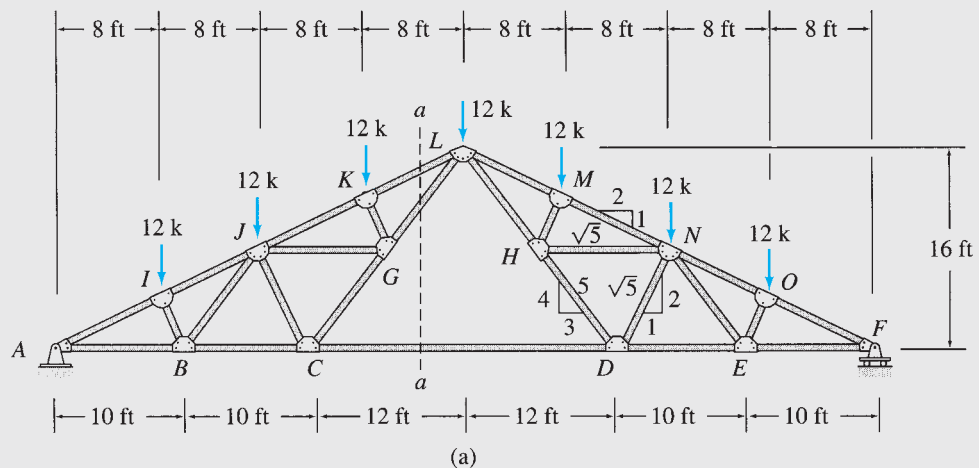


FIG. 4.26

continúa

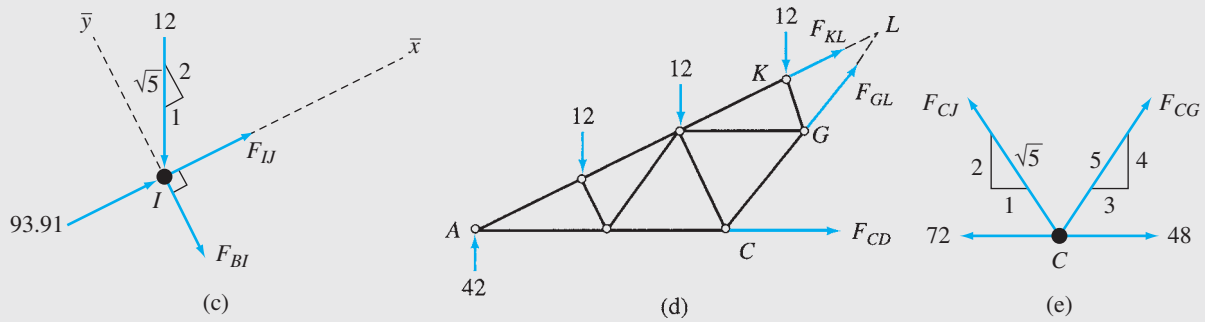


FIG. 4.26 (Continuación)

Solución

La armadura Fink mostrada en la Fig. 4.26(a) es una armadura compuesta que conecta dos armaduras simples, ACL y DFL , por un nodo común L y un elemento CD .

Determinación estática. La armadura contiene 27 elementos y 15 nodos y está apoyada en 3 reacciones. Debido a que $m + r = 2j$ y las reacciones y los elementos de la armadura están dispuestos adecuadamente, la armadura es estáticamente determinada.

Reacciones. Las reacciones en los apoyos A y F de la armadura se calculan aplicando las tres ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la armadura completa (Fig. 4.26(b)).

$$A_x = 0 \quad A_y = 42 \text{ k } \uparrow \quad F_y = 42 \text{ k } \uparrow$$

Nodo A. Se puede iniciar el método de los nodos en A , porque solo tiene dos fuerzas desconocidas, F_{AB} y F_{AI} , actuando en él. Por inspección de las fuerzas actuantes en este nodo (ver Fig. 4.26(b)), obtenemos lo siguiente:

$$F_{AI} = 93.91 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$F_{AB} = 84 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo J. El diagrama de cuerpo libre del nodo J se muestra en la Fig. 4.26(c). El elemento BI es perpendicular a AI e IJ , los cuales son colineales, de modo que el cálculo de las fuerzas en los elementos se puede simplificar usando un eje $\bar{x}$ en la dirección de los elementos colineales, como se muestra en la Fig. 4.26(c).

$$+\curvearrowright \sum F_{\bar{y}} = 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}(12) - F_{BI} = 0$$

$$F_{BI} = -10.73 \text{ k}$$

$$F_{BI} = 10.73 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$+\nearrow \sum F_{\bar{x}} = 0 \quad 93.91 - \frac{1}{\sqrt{5}}(12) + F_{IJ} = 0$$

$$F_{IJ} = -88.54 \text{ k}$$

$$F_{IJ} = 88.54 \text{ k (C)} \quad \text{Respuesta.}$$

Nodo B. Considerando el equilibrio del nodo B , obtenemos (ver Fig. 4.26(b)) lo siguiente:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}(10.73) + \frac{4}{5}F_{BJ} = 0$$

$$F_{BJ} = 12 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -84 + \frac{1}{\sqrt{5}}(10.73) + \frac{3}{5}(12) + F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = 72 \text{ k (T)} \quad \text{Respuesta.}$$

continúa

Sección aa. Debido a que en cada uno de los nodos siguientes, C y J , hay tres incógnitas (F_{CD} , F_{CG} y F_{CJ} en el nodo C y F_{CJ} , F_{GJ} y F_{JK} en el nodo J), calculamos F_{CD} usando la sección aa , como se muestra en la Fig. 4.26(a). (Si nos trasladamos al nodo F y empezamos a calcular las fuerzas en los elementos desde el extremo de la armadura, nos encontraremos con similares dificultades en los nodos D y N .)

El diagrama de cuerpo libre de la armadura a la izquierda de la sección aa se muestra en la Fig. 4.26(d). Determinamos F_{CD} , sumando los momentos alrededor del punto L , el punto de intersección de las líneas de acción de F_{GL} y F_{KL} .

$$+\circlearrowleft \sum M_L = 0 \quad -42(32) + 12(24) + 12(16) + 12(8) + F_{CD}(16) = 0$$

$$F_{CD} = 48 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodo C. Conocida F_{CD} ya solo tenemos dos incógnitas, F_{CG} y F_{CJ} , en el nodo C , por lo tanto podemos determinar estas fuerzas aplicando las dos ecuaciones de equilibrio del cuerpo libre del nodo C , como se muestra en la Fig. 4.26(e).

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}}F_{CJ} + \frac{4}{5}F_{CG} = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -72 + 48 - \frac{1}{\sqrt{5}}F_{CJ} + \frac{3}{5}F_{CG} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones de equilibrio simultáneamente, obtenemos

$$F_{CJ} = -21.47 \text{ k} \quad \text{y} \quad F_{CG} = 24 \text{ k}$$

$$F_{CJ} = 21.47 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{CG} = 24 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Nodos J, K y G. De manera similar, considerando sucesivamente el cálculo de los nodos J , K y G , en ese orden, determinamos lo siguiente:

$$F_{JK} = 83.18 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{GJ} = 12 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

$$F_{KL} = 77.81 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{GK} = 10.73 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$F_{GL} = 36 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

Simetría. Debido a la simetría de la armadura y a que las cargas aplicadas en ella son simétricas alrededor de la línea central de la armadura (mostrada en la Fig. 4.26(b)), las fuerzas en los elementos serán simétricas con respecto a la línea de simetría. Por lo tanto, es suficiente con determinar las fuerzas en los elementos de la mitad de la armadura. Las fuerzas en los elementos determinados aquí para la mitad izquierda de la armadura se muestra en la Fig. 4.26(b). Las fuerzas en la mitad derecha se pueden obtener de la consideración de simetría; por ejemplo, la fuerza en el elemento MN es igual a la del elemento JK , y así sucesivamente. Se insta al lector a verificar esto calculando algunas fuerzas en los elementos en la mitad derecha de la armadura.

Respuesta.

4.8 Armaduras complejas

Las armaduras no se pueden clasificar ni como armaduras simples ni como armaduras compuestas, sino como *armaduras complejas*. Dos ejemplos de armaduras complejas se muestran en la Fig. 4.27. Desde un punto de vista analítico, la principal diferencia entre las armaduras compuestas y las complejas estriba en el hecho de que ni el método de los nodos ni el de las secciones se puede usar en el análisis de armaduras complejas. Podemos ver en la Fig. 4.27 dos armaduras complejas que, a pesar de ser estáticamente determinadas, después de calcular las reacciones no se puede aplicar el método de los nodos porque no es posible identificar un nodo que tenga al menos

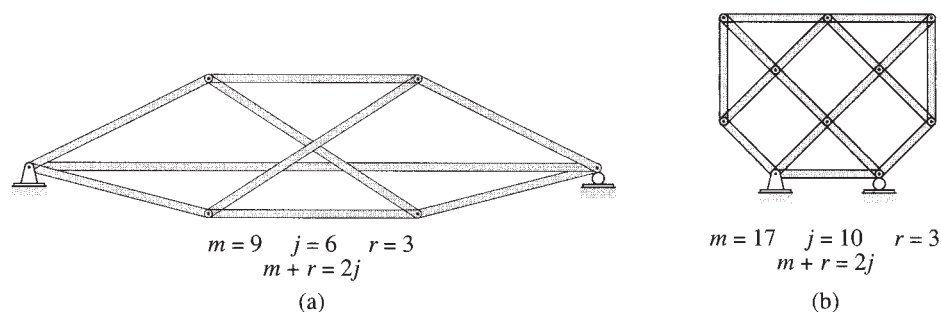


FIG. 4.27 Armaduras complejas

dos o menos fuerzas desconocidas. Igualmente, el método de las secciones no se puede emplear porque cada sección pasa por más de tres elementos con fuerzas desconocidas. Las fuerzas de los elementos de estas armaduras se determinan escribiendo dos ecuaciones de equilibrio en términos de las fuerzas desconocidas para cada nodo de la armadura y luego resolviendo el sistema de $2j$ ecuaciones simultáneamente. En la actualidad las armaduras complejas son usualmente analizadas en computadoras con la formulación matricial presentada en el Capítulo 17.

4.9 Armaduras espaciales

Las armaduras espaciales, debido a su forma, arreglo de elementos, o cargas aplicadas, no pueden subdividirse en armaduras planas para propósitos de análisis, y deben, por lo tanto, analizarse como estructuras en tres dimensiones. Sujetas a un sistema de fuerzas tridimensional. Como quedó asentado en la sección 4.1, para simplificar el análisis de las armaduras espaciales se asume que los elementos están conectados en sus extremos por articulaciones de rótula sin fricción, que las cargas externas y reacciones están aplicadas solo en los nodos y que los ejes Centroidales de cada elemento coinciden con la línea que conecta el centro con los nodos adyacentes. Por estas hipótesis simplificadoras, los elementos de una armadura espacial pueden tratarse como elementos sujetos a carga axial.

La armadura espacial más sencilla internamente estable (o rígida) se puede formar al conectar seis elementos por sus extremos con cuatro articulaciones de rótula, con lo que se obtiene un tetraedro, como se muestra en la Fig. 4.28(a). Esta armadura en forma de tetraedro se considera como un elemento *básico de una armadura espacial*. Se debe notar que esta armadura espacial básica es estable en el sentido de que es un cuerpo rígido espacial que no cambiará su forma bajo un sistema general de cargas aplicadas en sus nodos. La armadura básica $ABCD$ de la Fig. 4.28(a) se puede hacer más grande agregando tres nuevos elementos, BE , CE y DE , a los tres nodos existentes B , C y D , y conectándolos para formar un nuevo nodo E , como se muestra en la Fig. 4.28(b). Siempre y cuando el nuevo elemento no caiga en el plano que contiene a los nodos existentes B , C y D , la nueva armadura ampliada será internamente estable. Es posible ampliar la armadura repitiendo este

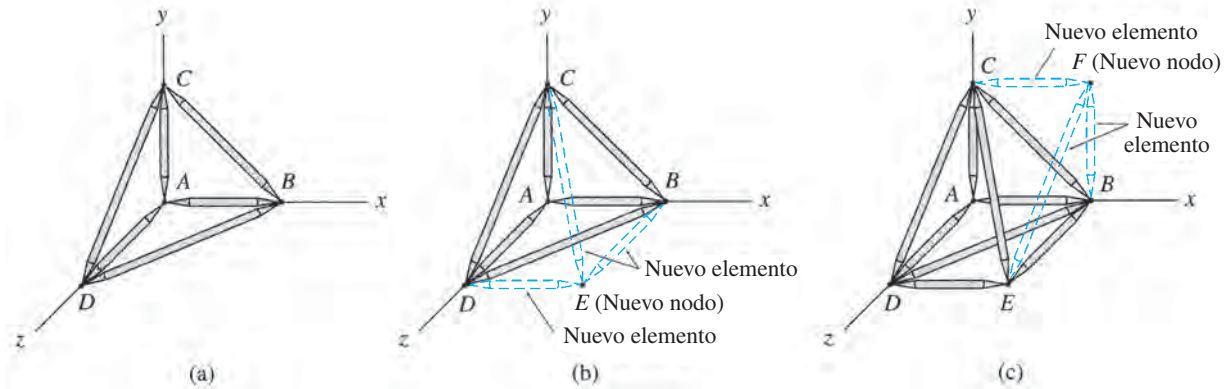


FIG. 4.28 Armaduras espaciales simples

mismo proceso (como se expone en la Fig. 4.28(c)) tantas veces como sea deseado. Las armaduras construidas por este proceso reciben el nombre de *armaduras espaciales simples*.

Una armadura espacial simple se forma cuando se amplía su elemento básico tetraedro, que contiene seis elementos y cuatro nodos con tres elementos adicionales por cada nodo adicional, así que el número de elementos m de una armadura espacial simple está dado por

$$m = 6 + 3(j - 4) = 3j - 6 \quad (4.5)$$

En donde j = número total de nodos (incluidos aquellos atribuidos a los nodos).

Reacciones

Los tipos de apoyos más usados para las armaduras espaciales se muestran en la Fig. 4.29. El número y dirección de las fuerzas de reacción que un apoyo puede ejercer sobre la armadura depende del número y la dirección de traslaciones que puede prevenir.

Como se sugirió en la Sección 3.1, para que una estructura espacial internamente estable se encuentre en equilibrio bajo un sistema general tridimensional de fuerzas, la estructura debe estar soportada por al menos seis reacciones que satisfagan las ecuaciones de equilibrio (Ec. (3.1)):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que solo hay seis ecuaciones de equilibrio, no se pueden usar para determinar más de seis reacciones. Así, la estructura espacial internamente estable, es decir, estáticamente determinada, debe estar soportada exactamente por seis reacciones. Si una estructura espacial está soportada por más de seis reacciones, entonces todas las reacciones no pueden ser determinadas con las seis ecuaciones de equilibrio y la estructura es estáticamente indeterminada de manera externa. A la inversa, si una estructura espacial está soportada por menos de seis reacciones, las reacciones no son suficientes para prevenir todos los posibles movimientos de la estructura en el espacio

Categoría	Tipo de apoyo	Representación simbólica	Reacciones	Número de incógnitas
I	Patín			1 La fuerza de reacción R_y actúa perpendicular a la superficie de soporte y puede ser direccionado hacia adentro o afuera de la estructura. La magnitud de R es la incógnita.
	enlace			1 La fuerza de reacción R actúa en la dirección del eslabón y puede ser direccionado hacia adentro o afuera de la estructura. La magnitud de R es la incógnita.
II	Rodillo			2 Dos fuerzas de reacción, R_x y R_y , actúan en un plano perpendicular a la dirección, en la cual el rodillo es libre de deslizarse. Las magnitudes de R_x y R_y son las incógnitas.
III	Rótula			3 La fuerza de reacción R puede actuar en cualquier dirección. Es generalmente conveniente representar R por sus componentes, R_x , R_y y R_z . Las magnitudes de R_x , R_y y R_z son las tres incógnitas.

FIG. 4.29 Tipos de apoyos para armaduras espaciales

tridimensional, y tal estructura recibe el nombre de externamente inestable. Por lo tanto, si

$$\begin{aligned}
 r &< 6 && \text{la estructura es estáticamente inestable externamente} \\
 r &= 6 && \text{la estructura es estáticamente determinada} \\
 &&& \text{o isostática externamente} \\
 r &> 6 && \text{la estructura es estáticamente indeterminada} \\
 &&& \text{o hiperestática internamente.}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Donde r = número de reacciones.

Como en el caso de las armaduras planas, discutido en el capítulo anterior, la condición de determinación estática e indeterminación, como se dio en la Ec. (4.6), son necesarias pero no suficientes. Para que una estructura espacial sea geoméricamente estable externamente, las reacciones deben estar adecuadamente dispuestas para que prevengan las traslaciones en cualquier dirección, tanto como las rotaciones, en cada uno de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, si las líneas de acción de las tres reacciones de una estructura espacial son paralelas o interceptan un eje común, la estructura será geoméricamente inestable.

Determinación, Indeterminación e Inestabilidad estática

Si una armadura espacial contiene m elementos y está soportada por r reacciones externas, entonces para el análisis necesitamos determinar el total de

$m + r$ fuerzas desconocidas. Dado que la armadura se encuentra en equilibrio, cada uno de sus nodos debe estar también en equilibrio. En cada nodo las fuerzas internas y externas forman un sistema tridimensional de fuerzas concurrentes que deben satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$. Por lo tanto, si la armadura contiene j nodos, el total de número de ecuaciones de equilibrio disponible es $3j$. Si $m + r = 3j$, todas las incógnitas pueden ser determinadas resolviendo las $3j$ ecuaciones de equilibrio y la armadura es estáticamente determinada.

Las armaduras espaciales contienen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio ($m + r > 3j$), son estáticamente indeterminadas, y aquellas con un menor número de incógnitas que las ecuaciones de equilibrio ($m + r < 3j$) son estáticamente inestables. Por lo tanto, las condiciones de inestabilidad estática, determinación e indeterminación de una armadura espacial, se pueden resumir como sigue:

$$\begin{array}{ll} m + r < 3j & \text{armadura espacial estáticamente inestable} \\ m + r = 3j & \text{armadura espacial estáticamente determinada} \\ m + r > 3j & \text{armadura espacial estáticamente indeterminada} \end{array} \quad (4.7)$$

Para que el criterio de determinación estática y de indeterminación, como el presentado en la Ec. (4.7), sea válido, la armadura debe ser estable y actuar como un cuerpo rígido, bajo un sistema general de cargas, cuando está sujeto a sus apoyos.

Análisis de fuerzas en los elementos

Los dos métodos para el análisis de estructuras planas discutidos en las secciones 4.5 y 4.6 se pueden extender al análisis de armaduras espaciales. El método de los nodos esencialmente permanece idéntico, excepto que las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$) ahora se deben satisfacer en cada nodo de la armadura espacial. Dado que las tres ecuaciones de equilibrio no pueden ser determinadas para más de tres fuerzas desconocidas, el análisis empieza en un nodo que tenga como máximo tres fuerzas desconocidas (las cuales no deben ser coplanares) que actúen en él. Las tres incógnitas son determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio. Entonces se procede de un nodo a otro, calculando las tres o menos fuerzas desconocidas en cada nodo posterior, hasta que todas las fuerzas sean calculadas.

Puesto que es difícil visualizar la orientación de los elementos inclinados en el espacio tridimensional, es usualmente conveniente expresar las componentes rectangulares de las fuerzas de tales elementos en términos de la proyección de su longitud en las direcciones x , y y z . Considere el elemento AB de la armadura espacial mostrada en la Fig 4.30. La proyección de su longitud L_{AB} en las direcciones x , y y z son x_{AB} , y_{AB} y z_{AB} , respectivamente, como se muestra con

$$L_{AB} = \sqrt{(x_{AB})^2 + (y_{AB})^2 + (z_{AB})^2}$$

Debido a que la fuerza F_{AB} actúa en la dirección del elemento, sus componentes $F_{x_{AB}}$, $F_{y_{AB}}$ y $F_{z_{AB}}$ en la dirección x , y y z , respectivamente, se pueden expresar como

$$F_{x_{AB}} = F_{AB} \left(\frac{x_{AB}}{L_{AB}} \right)$$

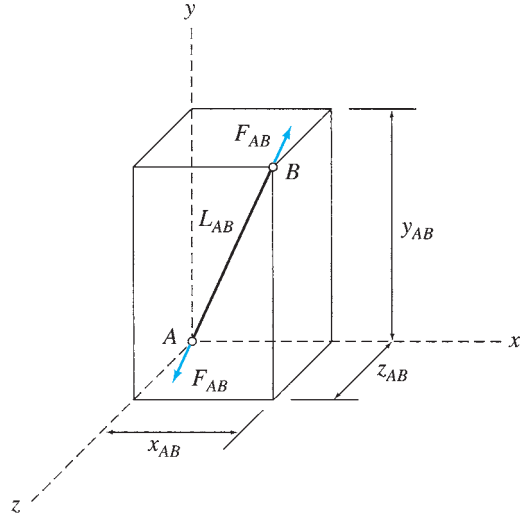


FIG. 4.30

$$F_{yAB} = F_{AB} \left(\frac{y_{AB}}{L_{AB}} \right)$$

$$F_{zAB} = F_{AB} \left(\frac{z_{AB}}{L_{AB}} \right)$$

Y la resultante de la fuerza F_{AB} está dada por

$$F_{AB} = \sqrt{(F_{xAB})^2 + (F_{yAB})^2 + (F_{zAB})^2}$$

El análisis de las armaduras espaciales se puede agilizar identificando los elementos de fuerza cero por inspección. Dos tipos de arreglos de elementos que resultan en elementos de fuerza cero son los siguientes:

1. Si todos excepto uno de los elementos del nodo caen en un solo plano y no hay cargas externas o reacciones aplicadas a este, entonces la fuerza en el elemento que no es coplanar es cero.
2. Si todos excepto dos de los elementos conectados al nodo no tienen fuerza ni carga externa o reacción aplicada en el nodo, entonces, a menos que los dos elementos restantes sean colineales, la fuerza en cada uno de ellos será cero.

El primero de los tipos de arreglo se muestra en la Fig. 4.31(a). Consiste en cuatro elementos AB , AC , AD y AE conectados al nodo A . De estos AB , AC y AD caen en el plano xz , mientras que el elemento AE no lo hace. Nótese que ninguna carga externa o reacción se aplica en el nodo A . Es claro que para satisfacer la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$, la componente y de F_{AB} debe ser cero, y por lo tanto $F_{AE} = 0$.

El segundo tipo de arreglo se expone en la Fig. 4.31(b). Consiste en cuatro elementos AB , AC , AD y AE conectados al nodo A , de los cuales AD y AE son elementos de fuerza cero. Observe que ninguna carga externa o reacción está aplicada en el nodo. Escogiendo la orientación del eje x en dirección del elemento AB , podemos ver que las ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$ solo se pueden satisfacer si $F_{AC} = 0$. Debido a que la componente x de F_{AC} es cero, la ecuación $\sum F_x = 0$ se satisface solo si F_{AB} también es cero.

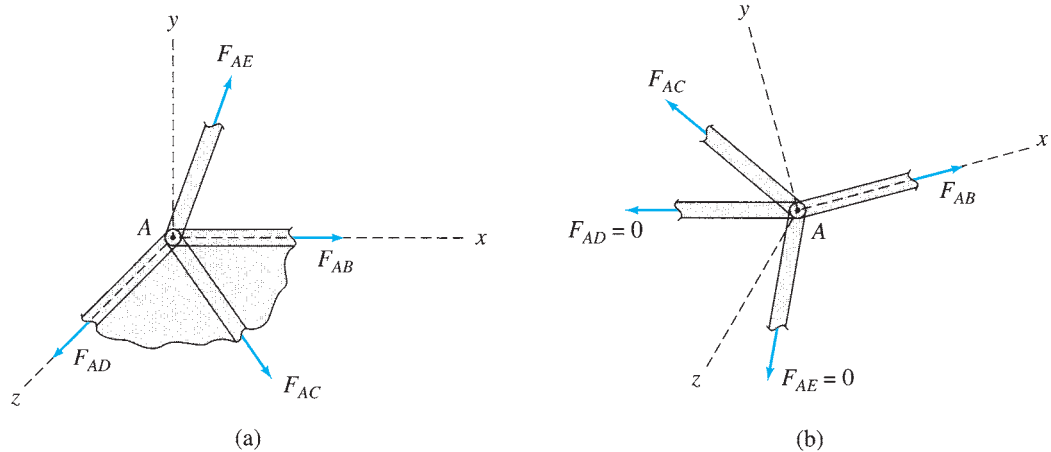


FIG. 4.31

Como en el caso de las armaduras planas, el *método de las secciones* se puede emplear para determinar las fuerzas de los elementos específicos de una armadura espacial. Una sección imaginaria pasa a través de la armadura cortando los elementos cuyas fuerzas se requieren calcular. Las fuerzas de los elementos deseados se calculan aplicando las seis ecuaciones de equilibrio (Ec. (3.1)) a una de las porciones de la armadura. No se puede determinar más de seis fuerzas desconocidas de las seis ecuaciones de equilibrio, por lo tanto, se elige una sección que no corte más de seis elementos con fuerzas desconocidas o por determinar.

Debido a la considerable cantidad de cálculos requeridos, el análisis de armaduras espaciales es preferentemente realizado en la actualidad en computadoras. Sin embargo, es importante analizar cuando menos algunas armaduras espaciales pequeñas para obtener entendimiento de los conceptos básicos involucrados en el análisis de estas armaduras.

Ejemplo 4.12

Determine las reacciones en los apoyos y las fuerzas en cada elemento de la armadura espacial mostrada en la Fig. 4.32(a).

Solución

Determinación estática. La armadura tiene 9 elementos y 5 nodos y está apoyada por 6 reacciones. Debido a que $m + r = 3j$ y las reacciones y los elementos de la armadura están dispuestos adecuadamente, la armadura es estáticamente determinada.

Proyecciones de los elementos. Las proyecciones de los elementos de la armadura en las direcciones x , y y z , se obtienen de la Fig. 4.32(a), así como las longitudes calculadas en estas proyecciones están tabuladas en la Tabla 4.1.

Elementos de fuerza cero. Se puede ver de la Fig. 4.32(a) que el nodo D , los tres elementos AD , CD y DE , están unidos. De estos elementos, AD y CD caen en el mismo plano (xz), mientras que DE no existe. Debido a que no hay cargas externas o reacciones aplicadas en el nodo, el elemento DE es un elemento con fuerza cero.

$$F_{DE} = 0$$

Respuesta.

Habiendo identificado el elemento de fuerza cero DE , podemos ver que debido a que los elementos restantes AD y CD no son colineales, ellos también deben ser elementos con fuerza cero.

$$F_{AD} = 0$$

Respuesta.

$$F_{CD} = 0$$

Respuesta.

continúa

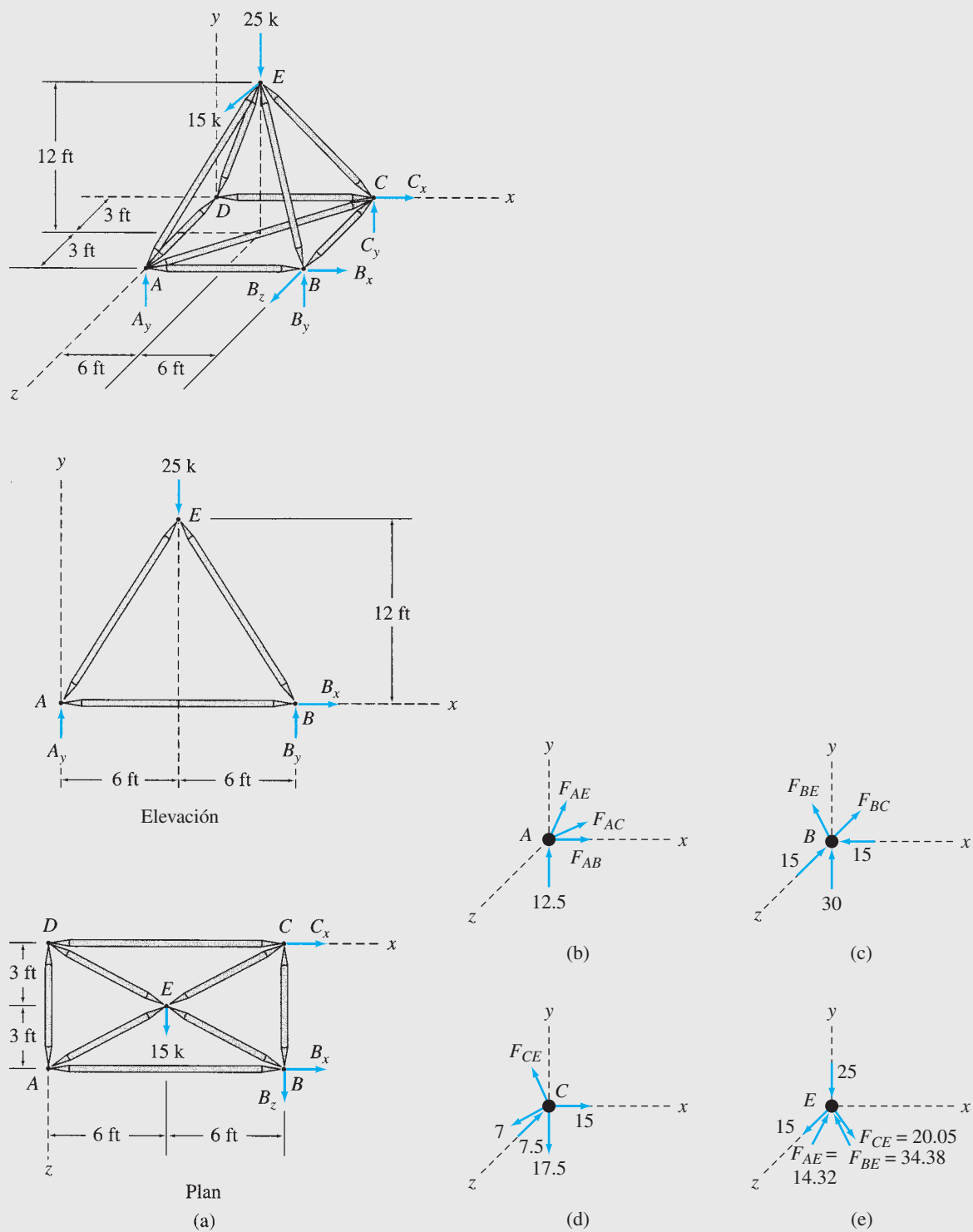


FIG. 4.32

continúa

Reacciones. Ver la Fig. 4.32(a).

$$+ \swarrow \sum F_z = 0$$

$$B_z + 15 = 0$$

$$B_z = -15 \text{ k}$$

$$B_z = 15 \text{ k } \nearrow$$

Respuesta.

$$+ \curvearrowright \sum M_y = 0$$

$$B_x(6) + 15(12) - 15(6) = 0$$

$$B_x = -15 \text{ k}$$

$$B_x = 15 \text{ k } \leftarrow$$

Respuesta.

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-15 + C_x = 0$$

$$C_x = 15 \text{ k } \rightarrow$$

Respuesta.

$$+ \curvearrowleft \sum M_x = 0$$

$$-A_y(6) - B_y(6) + 25(3) + 15(12) = 0$$

$$A_y + B_y = 42.5 \quad (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y + C_y - 25 = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo la Ec. (1) en la Ec. (2), obtenemos

$$C_y = -17.5 \text{ k}$$

$$C_y = 17.5 \text{ k } \downarrow$$

Respuesta.

$$+ \curvearrowright \sum M_z = 0$$

$$B_y(12) - 17.5(12) - 25(6) = 0$$

$$B_y = 30 \text{ k } \uparrow$$

Respuesta.

Sustituyendo $B_y = 30$ en la Ec. (1), obtenemos A_y .

$$A_y = 12.5 \text{ k } \uparrow$$

Respuesta.

Nodo A. Ver la Fig. 4.32(b)

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 12.5 + \left(\frac{y_{AE}}{L_{AE}} \right) F_{AE} = 0$$

En la cual el segundo término a la izquierda de la igualdad representa la componente y de F_{AE} . Sustituyendo los valores de y y L para el elemento AE de la Tabla 4.1, obtenemos

$$12.5 + \left(\frac{12}{13.75} \right) F_{AE} = 0$$

$$F_{AE} = -14.32 \text{ k}$$

$$F_{AE} = 14.32 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

continúa

TABLA 4.1

Elemento	Proyección			Longitud (ft)
	x (ft)	y (ft)	z (ft)	
AB	12	0	0	12.0
BC	0	0	6	6.0
CD	12	0	0	12.0
AD	0	0	6	6.0
AC	12	0	6	13.42
AE	6	12	3	13.75
BE	6	12	3	13.75
CE	6	12	3	13.75
DE	6	12	3	13.75

De manera similar, aplicamos las ecuaciones de equilibrio restantes:

$$+\swarrow \sum F_z = 0 \quad -\left(\frac{6}{13.42}\right)F_{AC} + \left(\frac{3}{13.75}\right)(14.32) = 0$$

$$F_{AC} = 7.0 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad F_{AB} + \left(\frac{12}{13.42}\right)(7) - \left(\frac{6}{13.75}\right)(14.32) = 0$$

$$F_{AB} = 0$$

Respuesta.

Nodo B. (Ver la Fig. 4.32(c)).

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad -\left(\frac{6}{13.75}\right)F_{BE} - 15 = 0$$

$$F_{BE} = -34.38 \text{ k}$$

$$F_{BE} = 34.38 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

$$+\swarrow \sum F_z = 0 \quad -15 - F_{BC} + \left(\frac{3}{13.75}\right)(34.38) = 0$$

$$F_{BC} = -7.5 \text{ k}$$

$$F_{BC} = 7.5 \text{ k (C)}$$

Respuesta.

Todas las fuerzas desconocidas en el nodo B han sido determinadas, usaremos las ecuaciones de equilibrio restantes para comprobar nuestros cálculos.

$$+\uparrow \sum F_y = 30 - \left(\frac{12}{13.75}\right)(34.38) = 0$$

Comprobación

Nodo C. Ver la Fig. 4.32(d).

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -17.5 + \left(\frac{12}{13.75}\right)F_{CE} = 0$$

$$F_{CE} = 20.05 \text{ k (T)}$$

Respuesta.

continúa

Comprobando lo de los cálculos. En el nodo C (Fig. 4.32(d)),

$$+ \rightarrow \sum F_x = 15 - \left(\frac{6}{13.75}\right)(20.05) - \left(\frac{12}{13.42}\right)(7) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \swarrow \sum F_z = -7.5 + \left(\frac{6}{13.42}\right)(7) + \left(\frac{3}{13.75}\right)(20.05) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

En el nodo E (Fig. 4.32(e)).

$$+ \rightarrow \sum F_x = \frac{6}{13.75}(14.32 - 34.38 + 20.05) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = -25 + \left(\frac{12}{13.75}\right)(14.32 + 34.38 - 20.05) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \swarrow \sum F_z = 15 - \left(\frac{3}{13.75}\right)(14.32 + 34.38 + 20.05) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Resumen

Una armadura se define como una estructura que se compone de elementos rectos conectados en sus extremos por conexiones flexibles para formar una configuración rígida. El análisis de las armaduras se basa en tres hipótesis simplificadoras:

1. Todos los elementos están conectados solo en sus extremos por articulaciones sin fricción en armaduras planas y por rótulas sin fricción en armaduras espaciales.
2. Todas las cargas están aplicadas solo en los nodos.
3. El eje centroidal de cada elemento coincide con la línea que conecta el centro de los nodos adyacentes. El efecto de estas hipótesis es que todos los elementos de la armadura se pueden considerar como elementos sujetos a fuerza axial.

Una armadura se considera internamente estable si el número y el arreglo de sus elementos es tal que la armadura no cambia su forma y permanece como cuerpo rígido cuando está desligada de sus apoyos. Los tipos comunes de ecuaciones de condición para una armadura plana están descritos en la Sección 4.3.

Una armadura es estáticamente determinada si todas las fuerzas en sus elementos y las reacciones se pueden determinar usando las ecuaciones de equilibrio. Si una armadura plana contiene m elementos, j nodos, y está soportada por r reacciones, entonces si

$$\begin{aligned} m + r &< 2j && \text{la armadura es estáticamente inestable} \\ m + r &= 2j && \text{la armadura es estáticamente determinada} \\ m + r &> 2j && \text{la armadura es indeterminada inestable} \end{aligned} \quad (4.4)$$

El grado de hiperestaticidad está dado por

$$i = (m + r) - 2j \quad (4.3)$$

Las condiciones anteriores para la determinación estática e indeterminación son necesarias pero no son suficientes. Para que estos criterios sean válidos, la armadura debe ser estable y actuar como un cuerpo rígido bajo un sistema general de cargas coplanares cuando está sujeta a los apoyos.

Para analizar las armaduras planas estáticamente determinadas, podemos usar el método de los nodos, el cual consiste esencialmente en seleccionar un nodo con no más de dos fuerzas desconocidas o incógnitas que actúan en él, y aplicar las dos ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas desconocidas. Este procedimiento se repite hasta haber obtenido todas las fuerzas deseadas. Este método es más efectivo cuando se desea conocer todas o casi todas las fuerzas en los elementos.

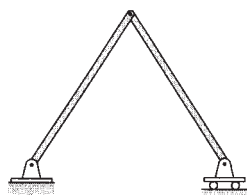
El método de las secciones prueba ser más conveniente cuando se quiere determinar las fuerzas en pocos elementos de una armadura. Este método esencialmente implica cortar la armadura en dos partes, pasando una sección imaginaria a través de los elementos cuyas fuerzas se quiere determinar, y se aplican las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de una porción de la armadura.

El análisis de armaduras compuestas puede ser más ágil usando la combinación de los métodos de los nodos y las secciones. Se presenta un procedimiento para determinar las reacciones y las fuerzas en los elementos en las armaduras espaciales.

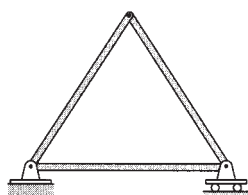
Problemas

Sección 4.4

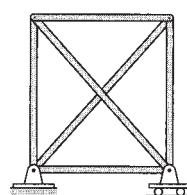
Del 4.1 al 4.5 Clasifique cada armadura plana mostrada como indeterminada o hiperestática, inestable, estáticamente determinada o isostática, o estáticamente



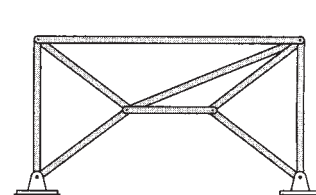
(a)



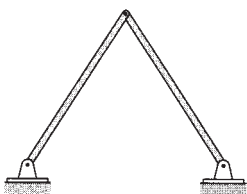
(b)



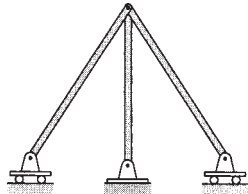
(a)



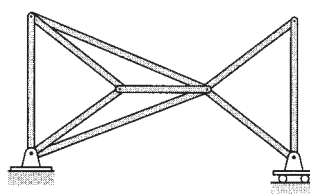
(b)



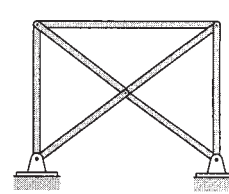
(c)



(d)



(c)



(d)

FIG. P4.1

FIG. P4.2

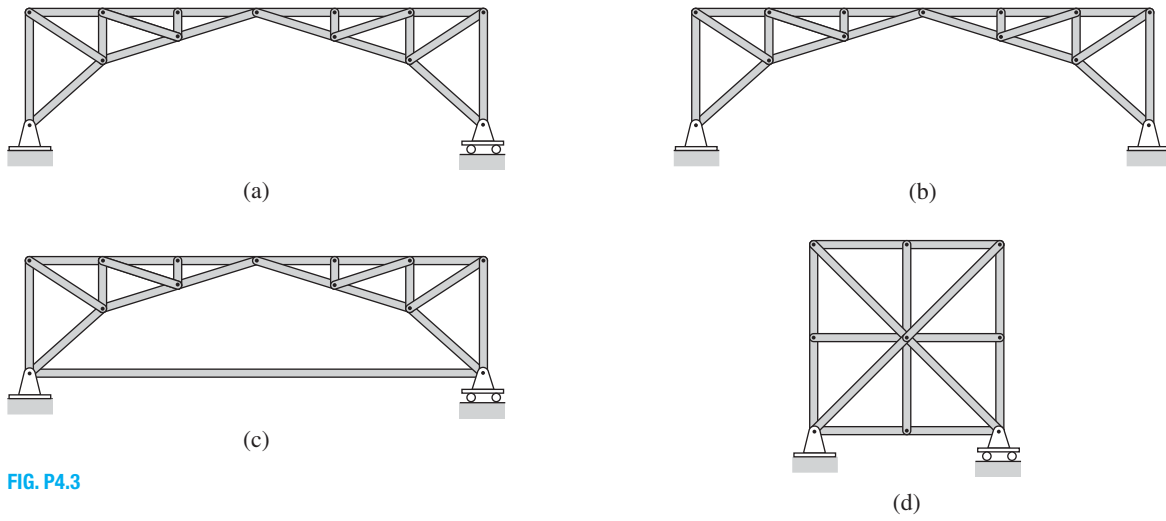


FIG. P4.3

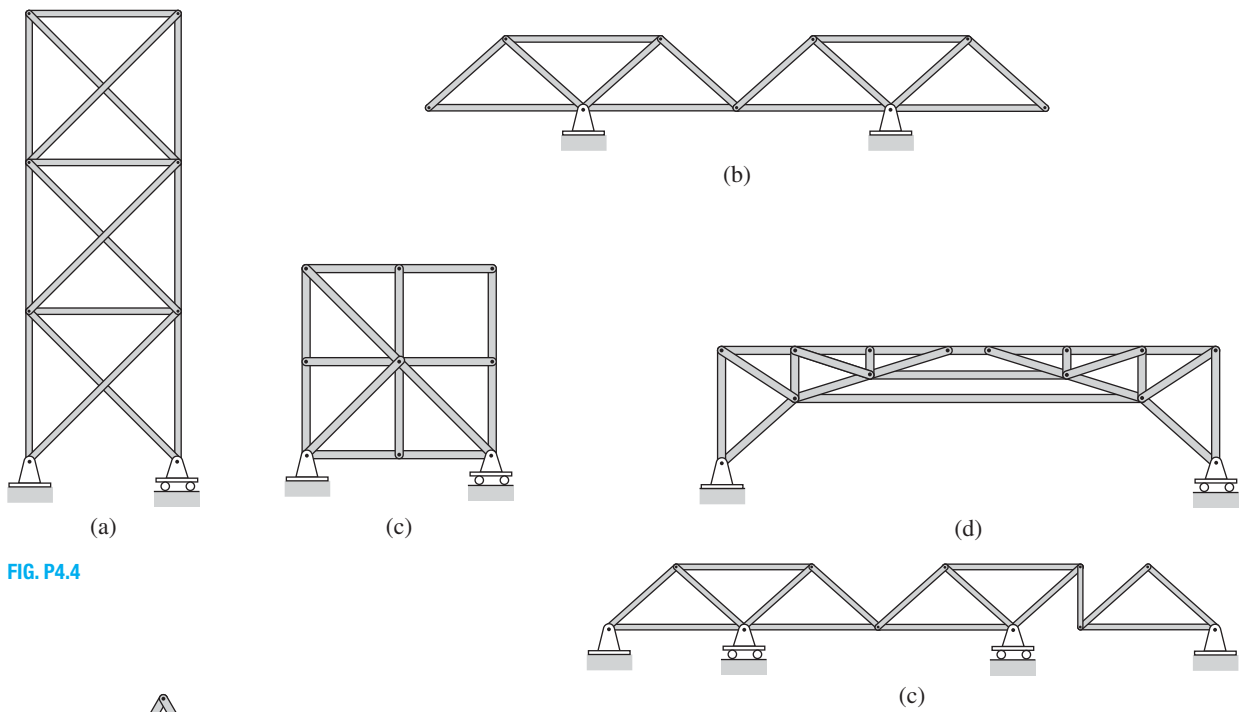


FIG. P4.4

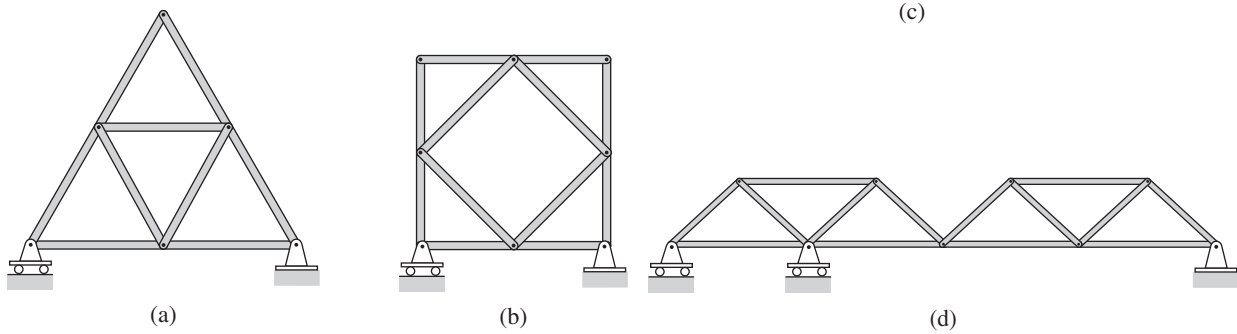


FIG. P4.5

Sección 4.5

Del 4.6 al 4.27 Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada por el método de los nodos.

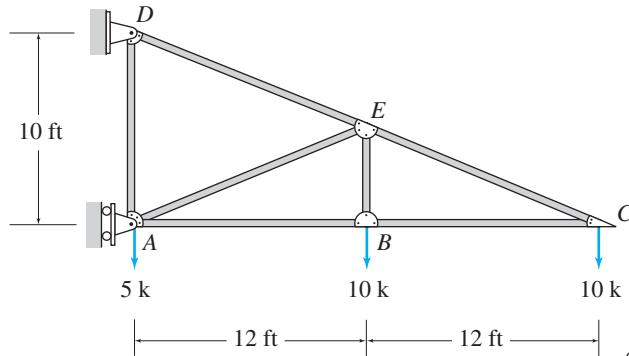


FIG. P4.6

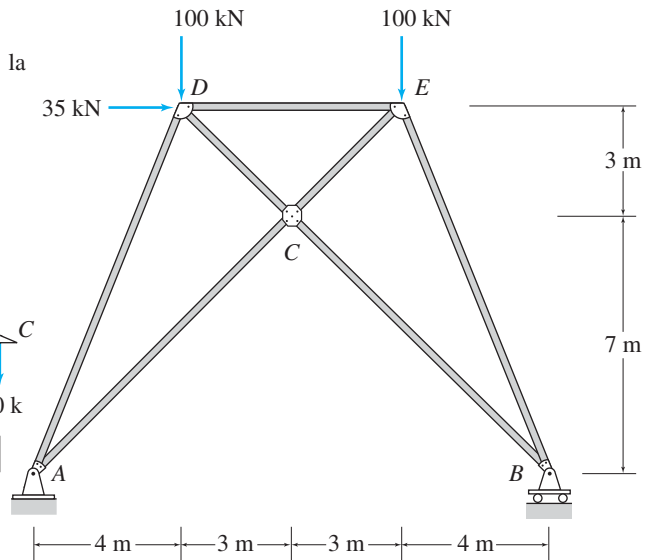


FIG. P4.9

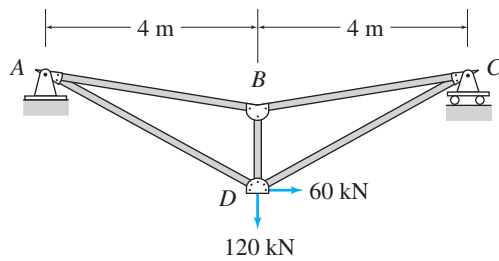


FIG. P4.7

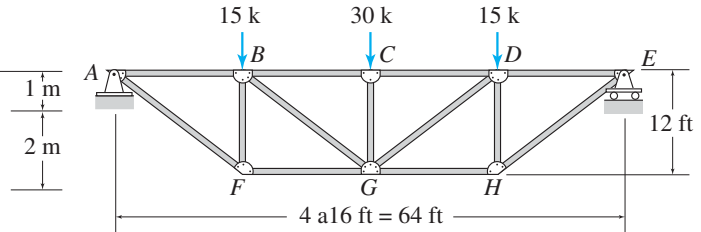


FIG. P4.10

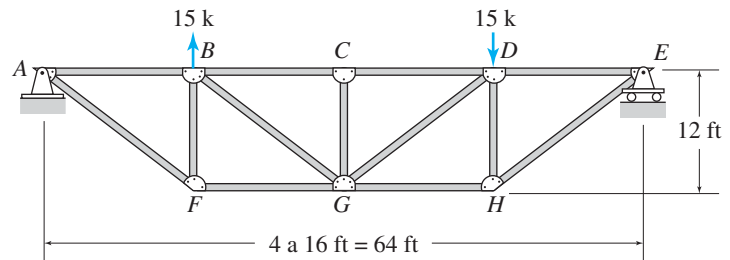


FIG. P4.11

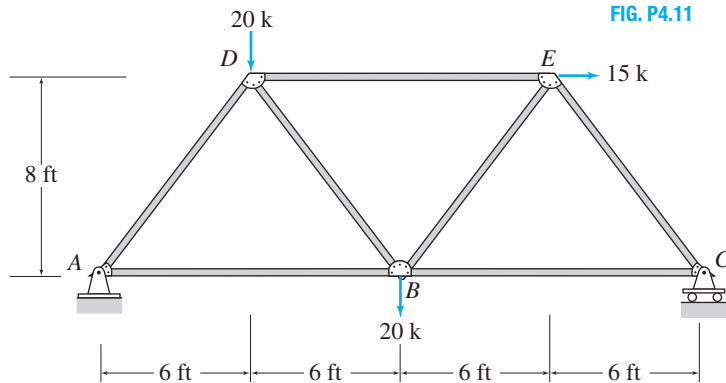


FIG. P4.8

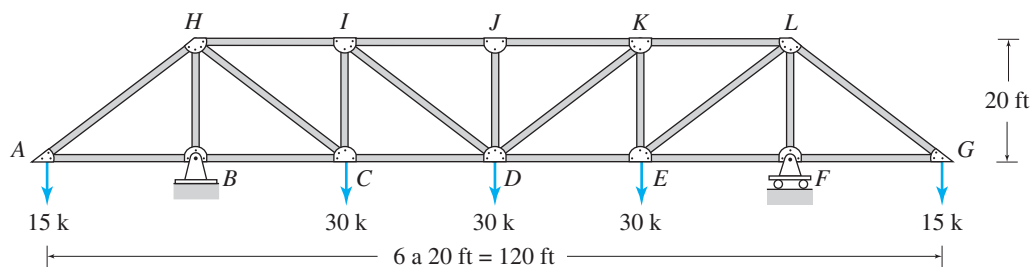


FIG. P4.15

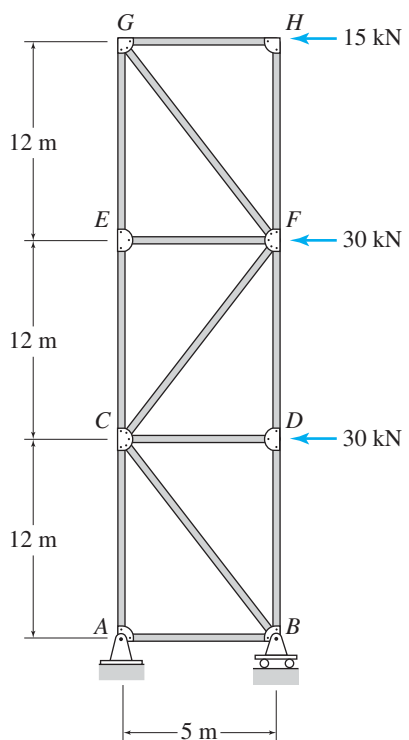


FIG. P4.12

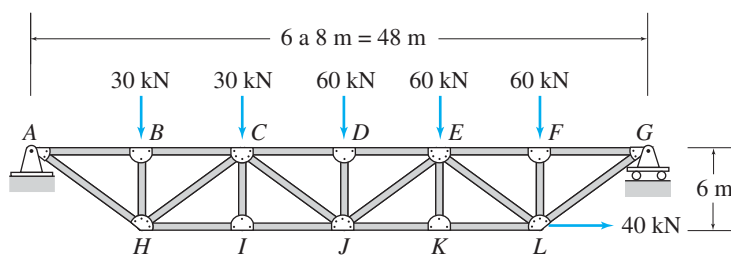


FIG. P4.14

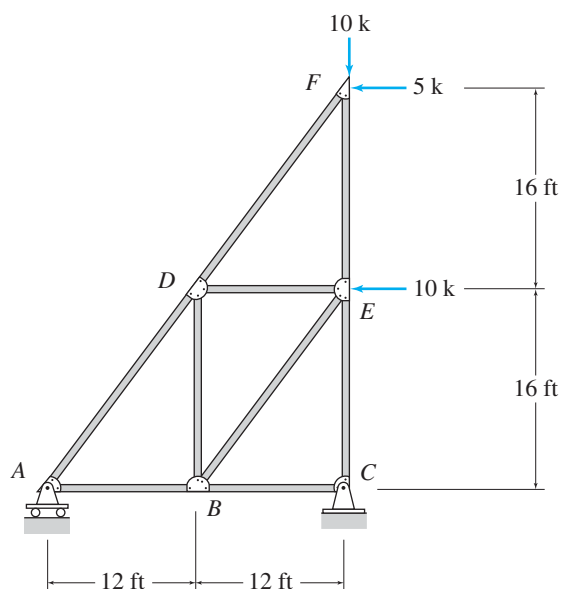


FIG. P4.16

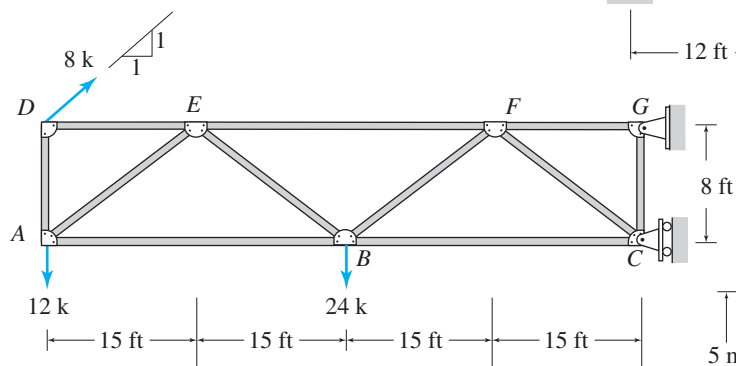


FIG. P4.13

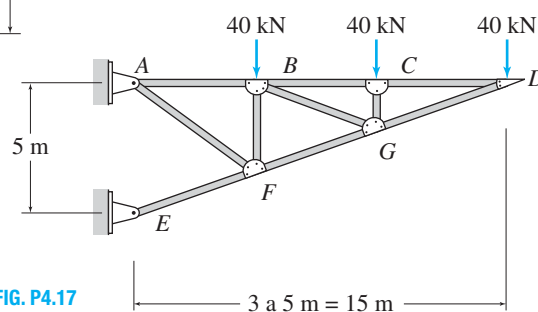


FIG. P4.17

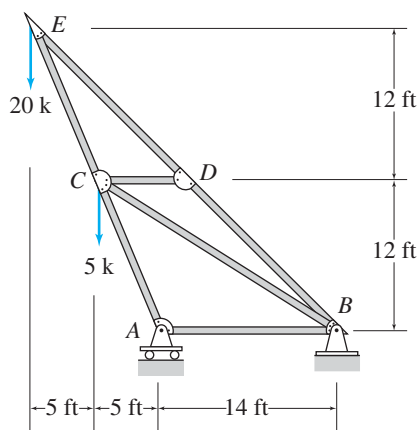


FIG. P4.18

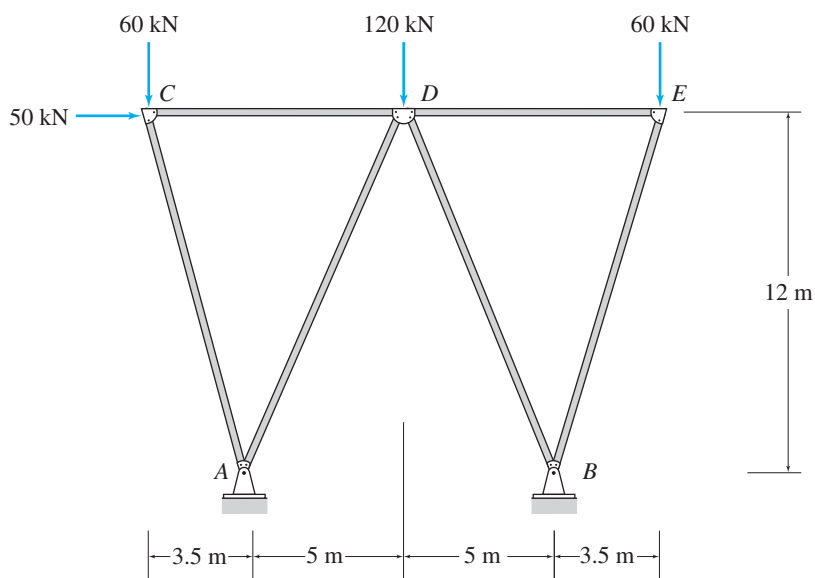


FIG. P4.21

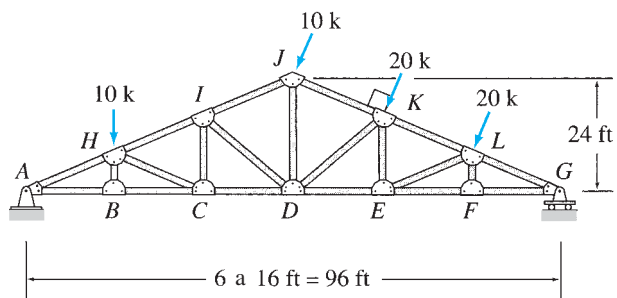


FIG. P4.19

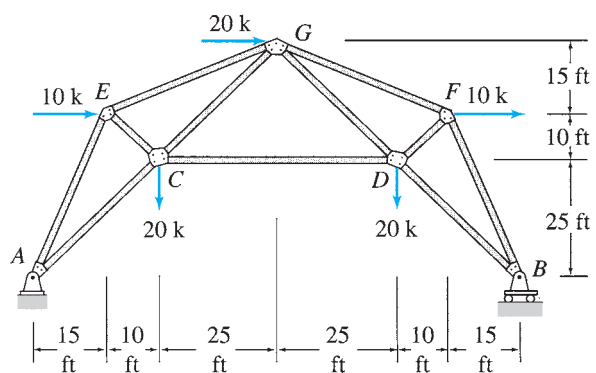


FIG. P4.22

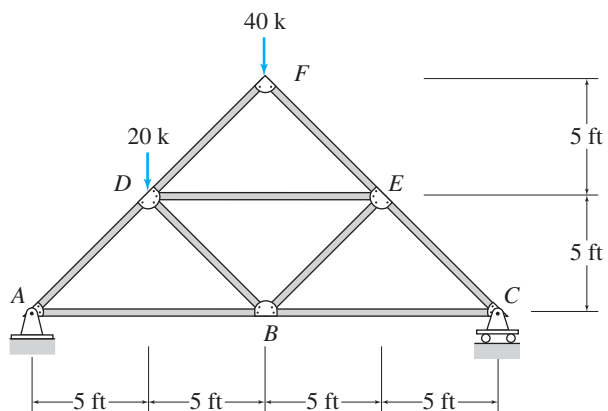


FIG. P4.20

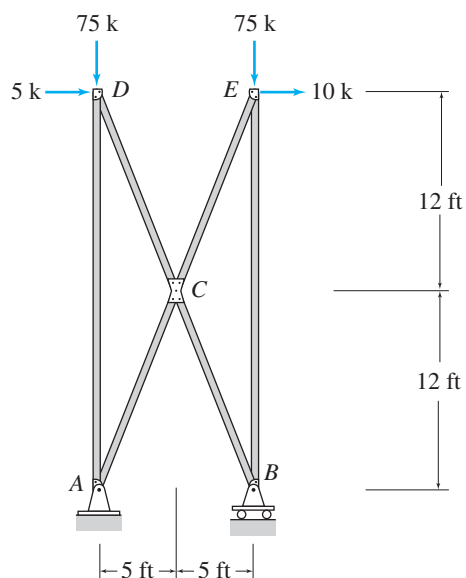


FIG. P4.23

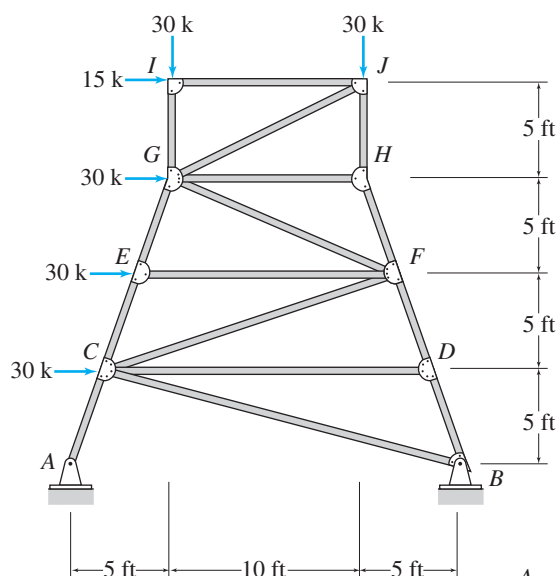


FIG. P4.24

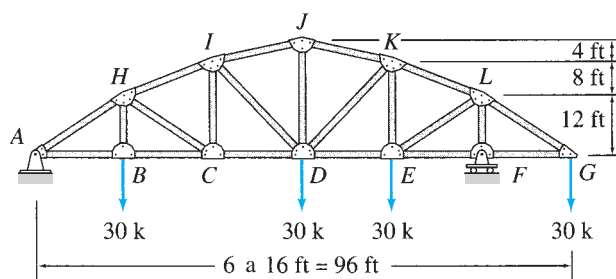


FIG. P4.26

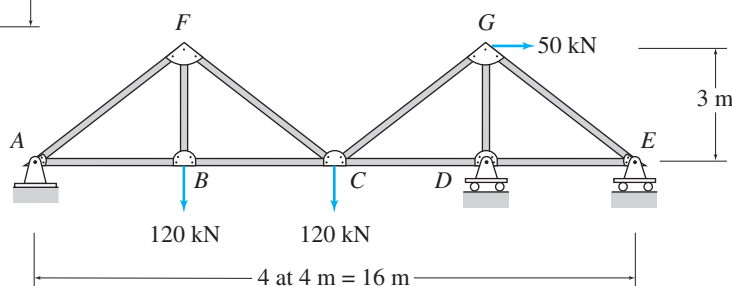


FIG. P4.27

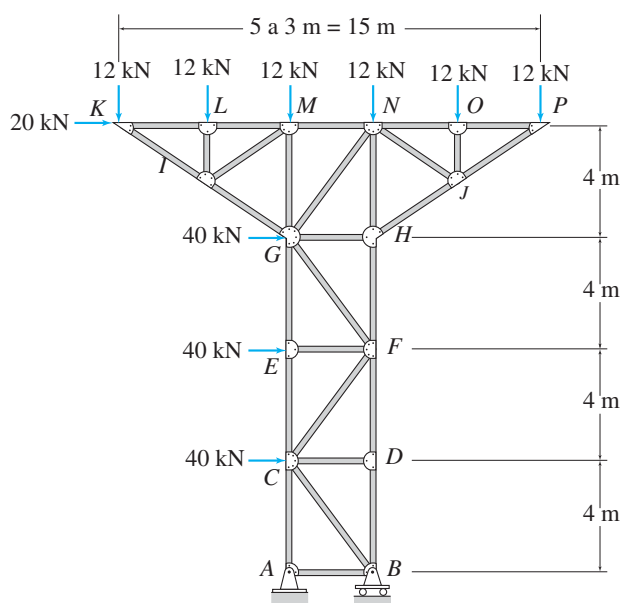


FIG. P4.25

4.28 Establezca las fuerzas en cada elemento de la armadura que soporta una cubierta de piso como se muestra en la Fig. P4.28. El piso está simplemente apoyado en las vigas, las cuales, en cambio, están conectadas a los nodos de las armaduras. Así, la carga uniformemente distribuida en la cubierta es transmitida por las vigas del piso como cargas concentradas en los nodos superiores de la armadura.

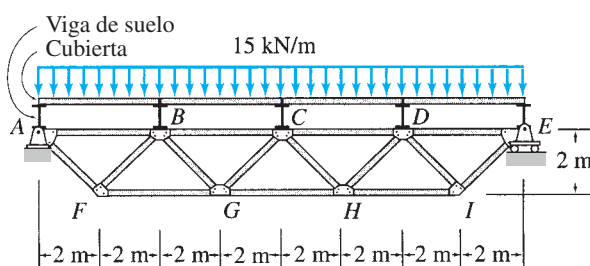


FIG. P4.28

Del 4.29 y 4.30 Determine las fuerzas en cada uno de los elementos de las armaduras mostradas. El techo está simplemente apoyado en los largueros, los cuales están conectados a la cuerda superior de la armadura. Así, la carga uniforme es transmitida por los largueros como cargas concentradas en los nodos de la armadura.

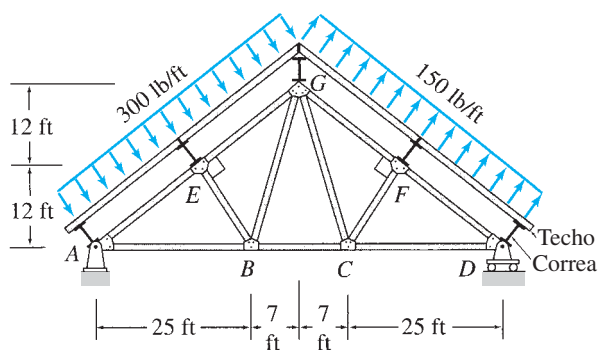


FIG. P4.29

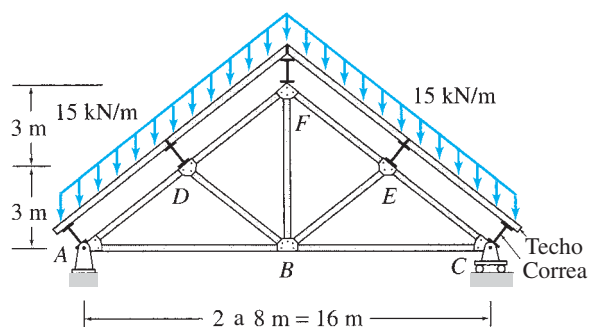


FIG. P4.30

Sección 4.6

4.31 Establezca las fuerzas en la cuerda superior GH y en la cuerda inferior BC de la armadura. Con $h = 1$ m. ¿Cómo cambiarían las fuerzas en estos elementos si la altura fuera de 2 m?

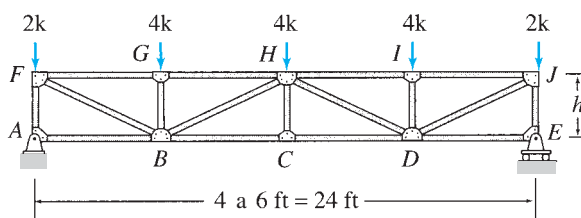


FIG. P4.31

Del 4.32 al 4.45 Encuentre las fuerzas en los elementos identificados por una "X" de la armadura mostrada usando el método de las secciones.

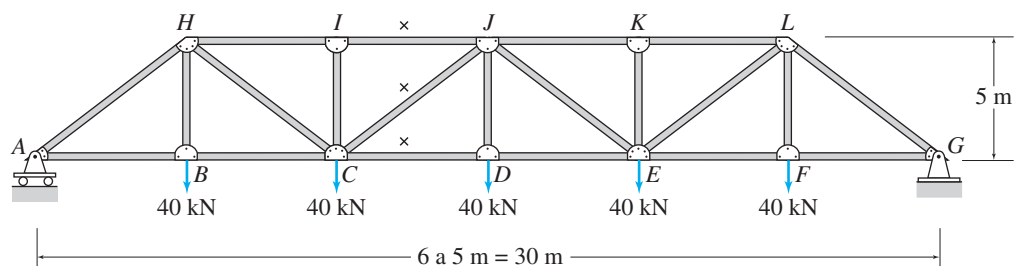


FIG. P4.32

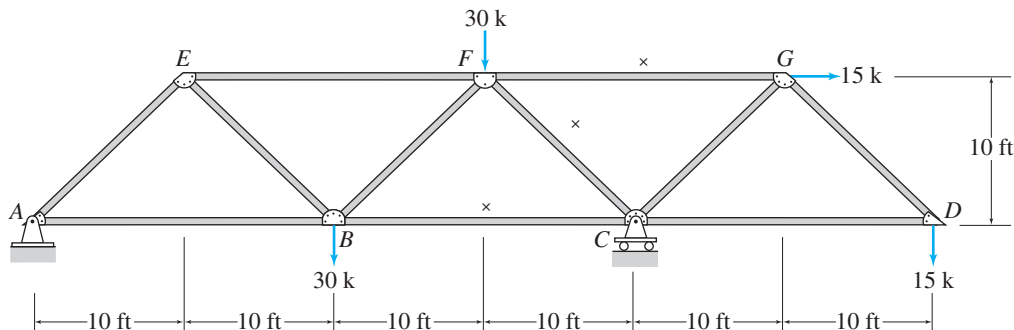


FIG. P4.33

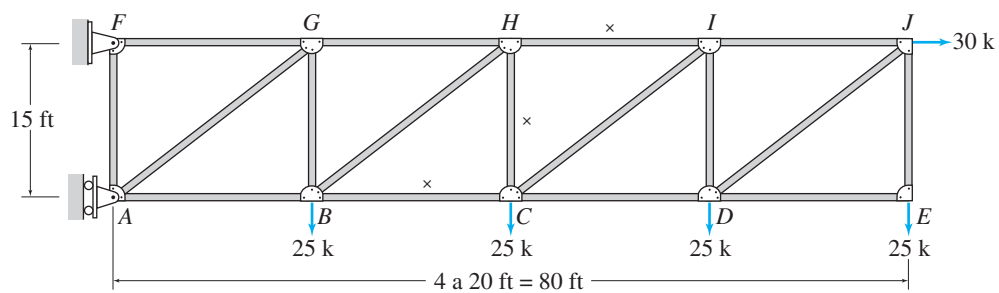


FIG. P4.34

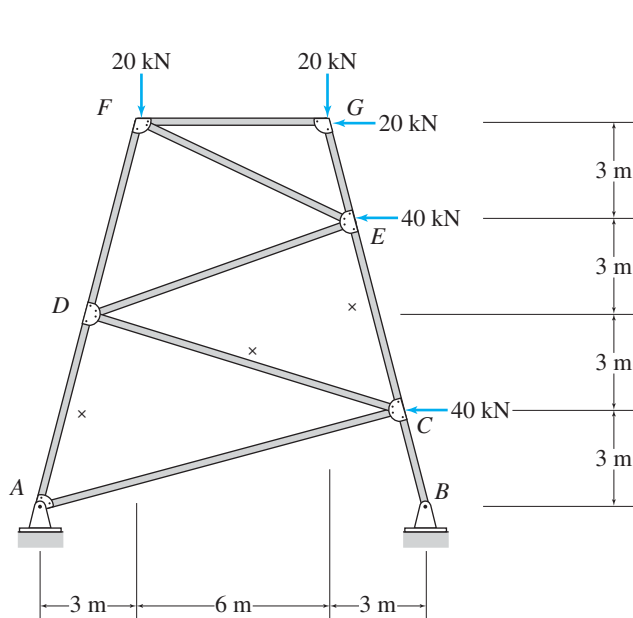


FIG. P4.35

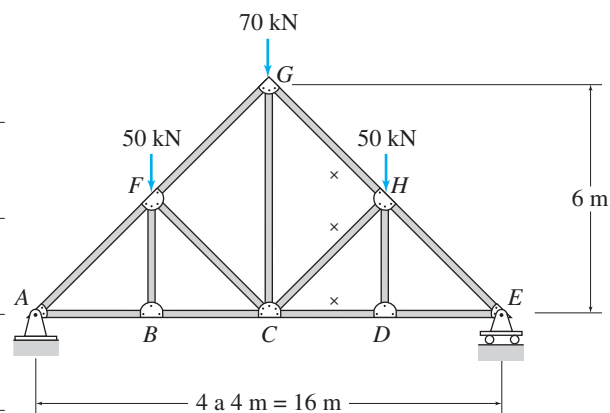


FIG. P4.37

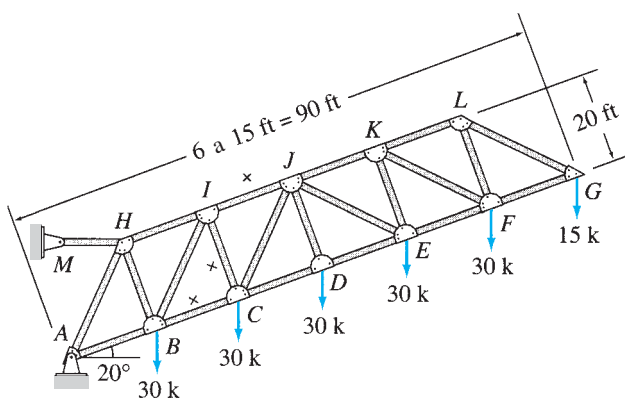


FIG. P4.36

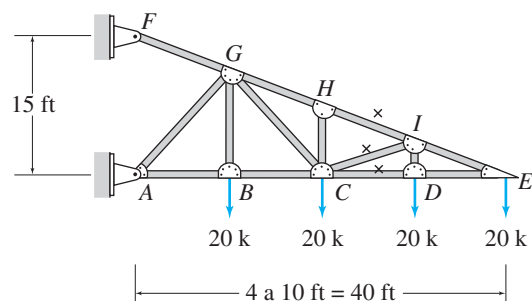


FIG. P4.38

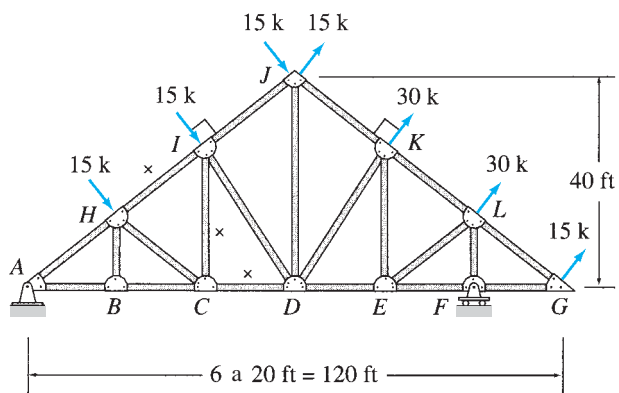


FIG. P4.39

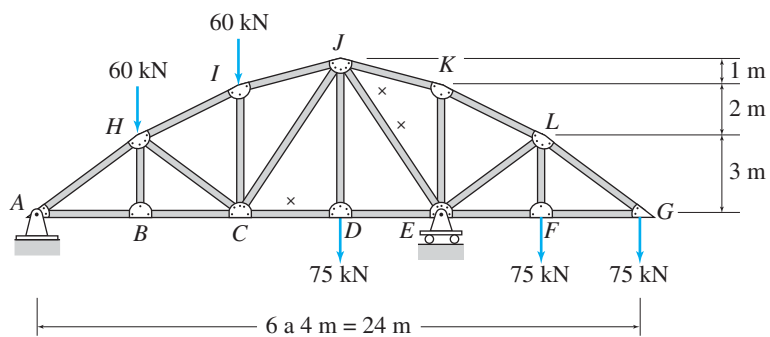


FIG. P4.40

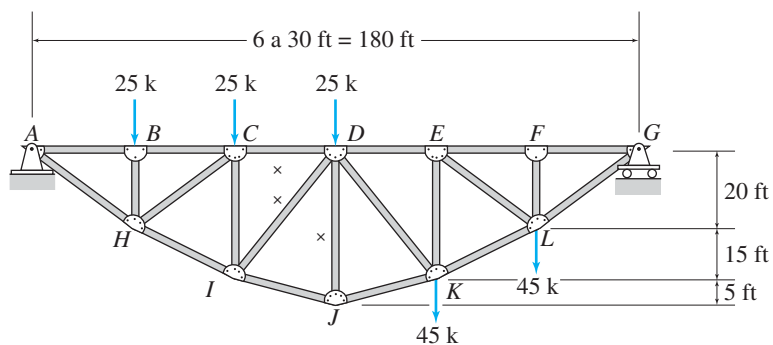


FIG. P4.41

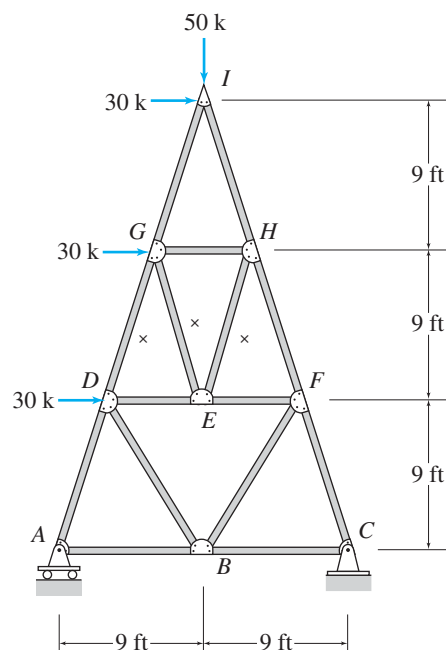


FIG. P4.42

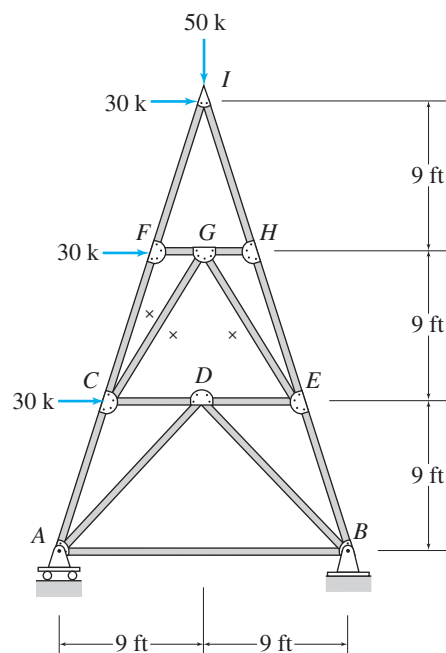


FIG. P4.43

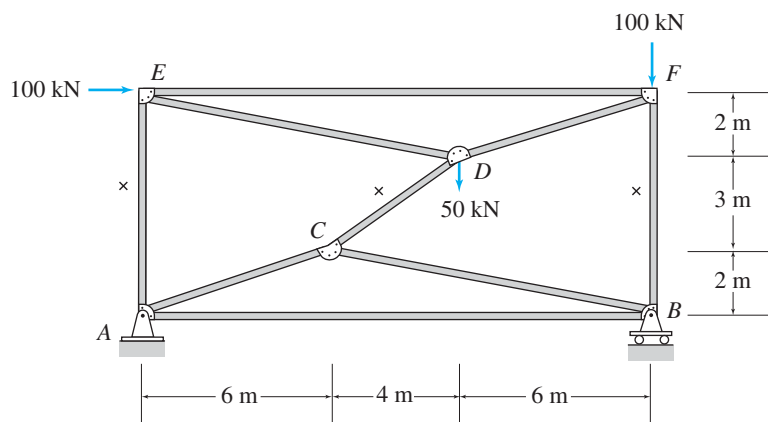


FIG. P4.44

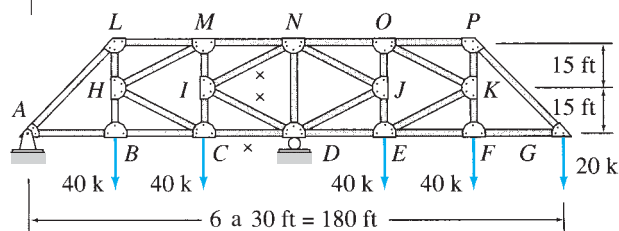


FIG. P4.45

Sección 4.7

Del 4.46 al 4.50 Estipule las fuerzas de cada elemento de la armadura mostrada.

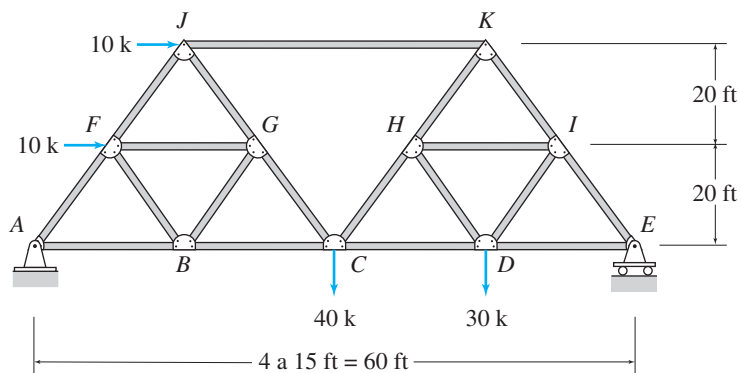


FIG. P4.46

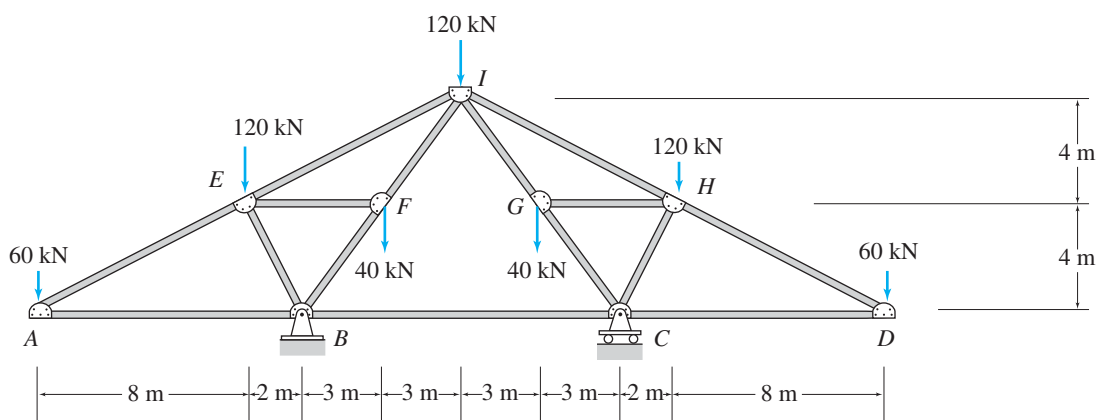


FIG. P4.47

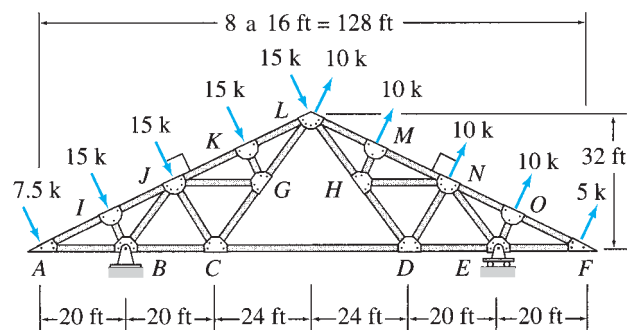


FIG. P4.48

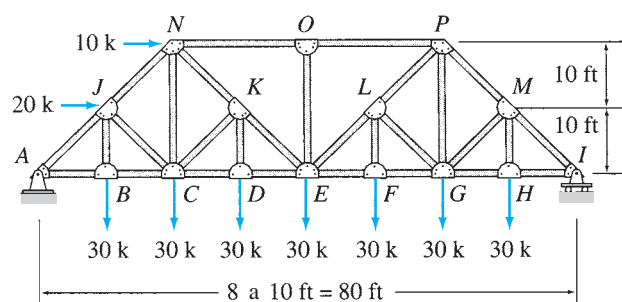


FIG. P4.49

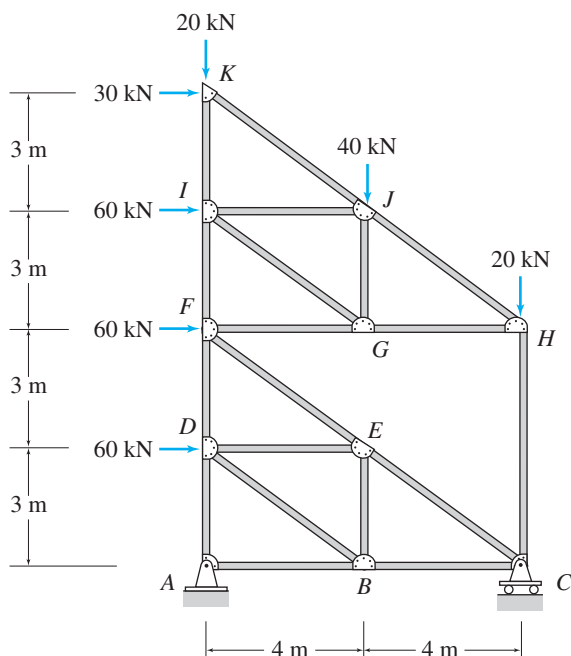


FIG. P4.50

Sección 4.9

Del 4.51 al 4.55 Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada.

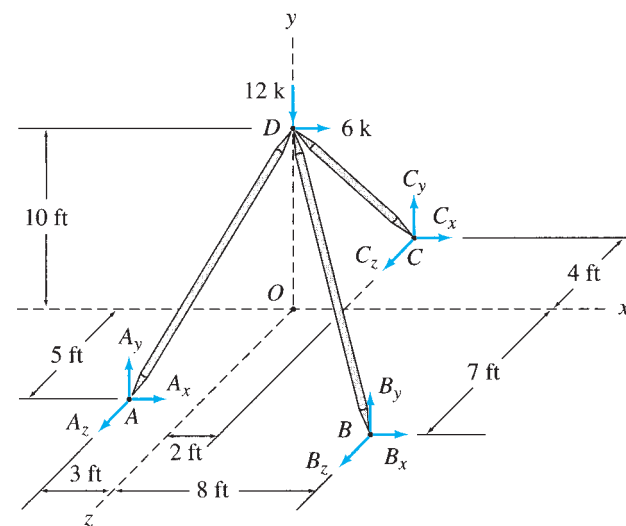


FIG. P4.51

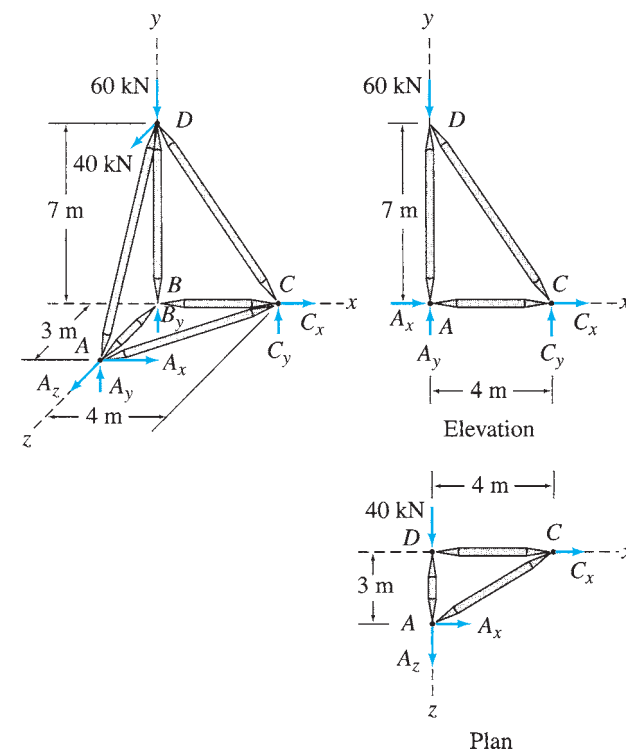


FIG. P4.52

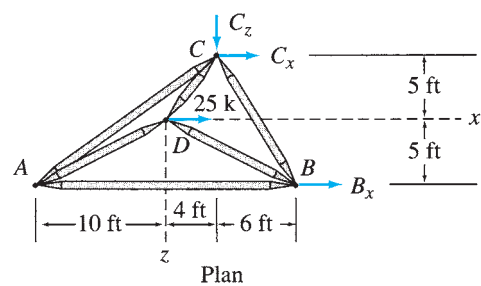
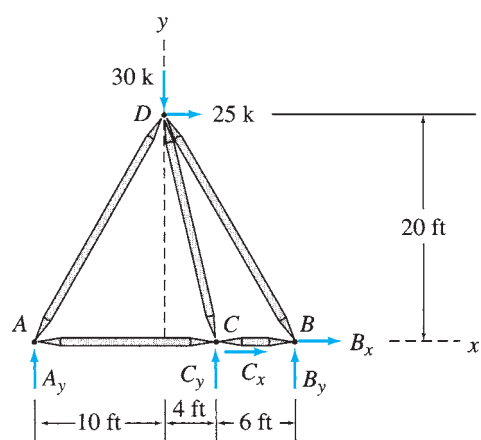
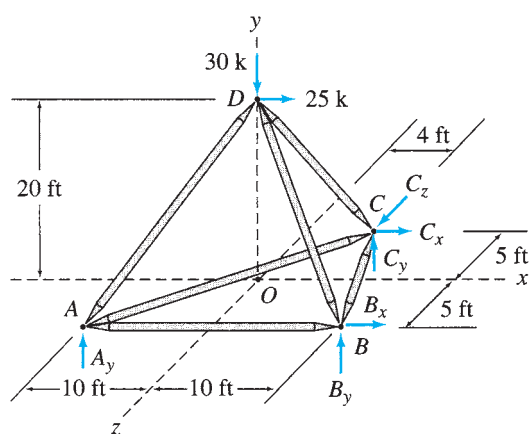


FIG. P4.53

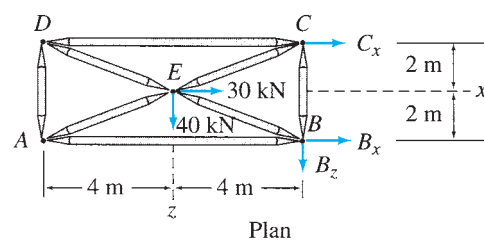
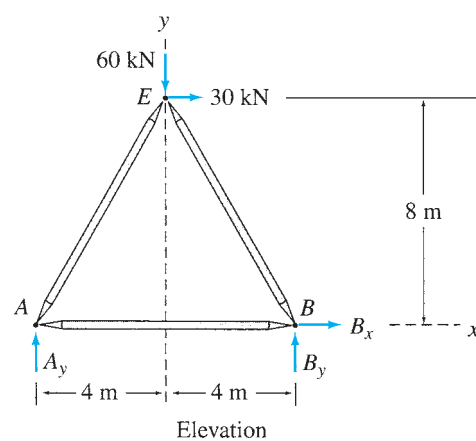
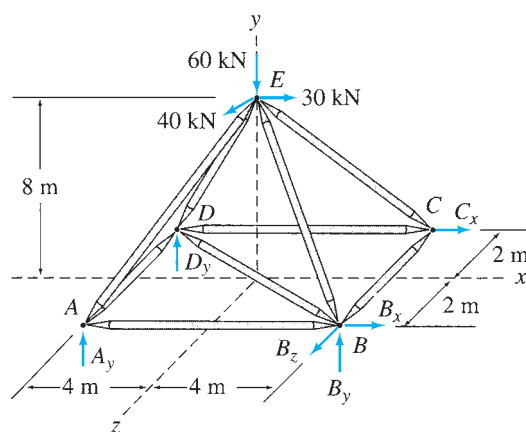


FIG. P4.54

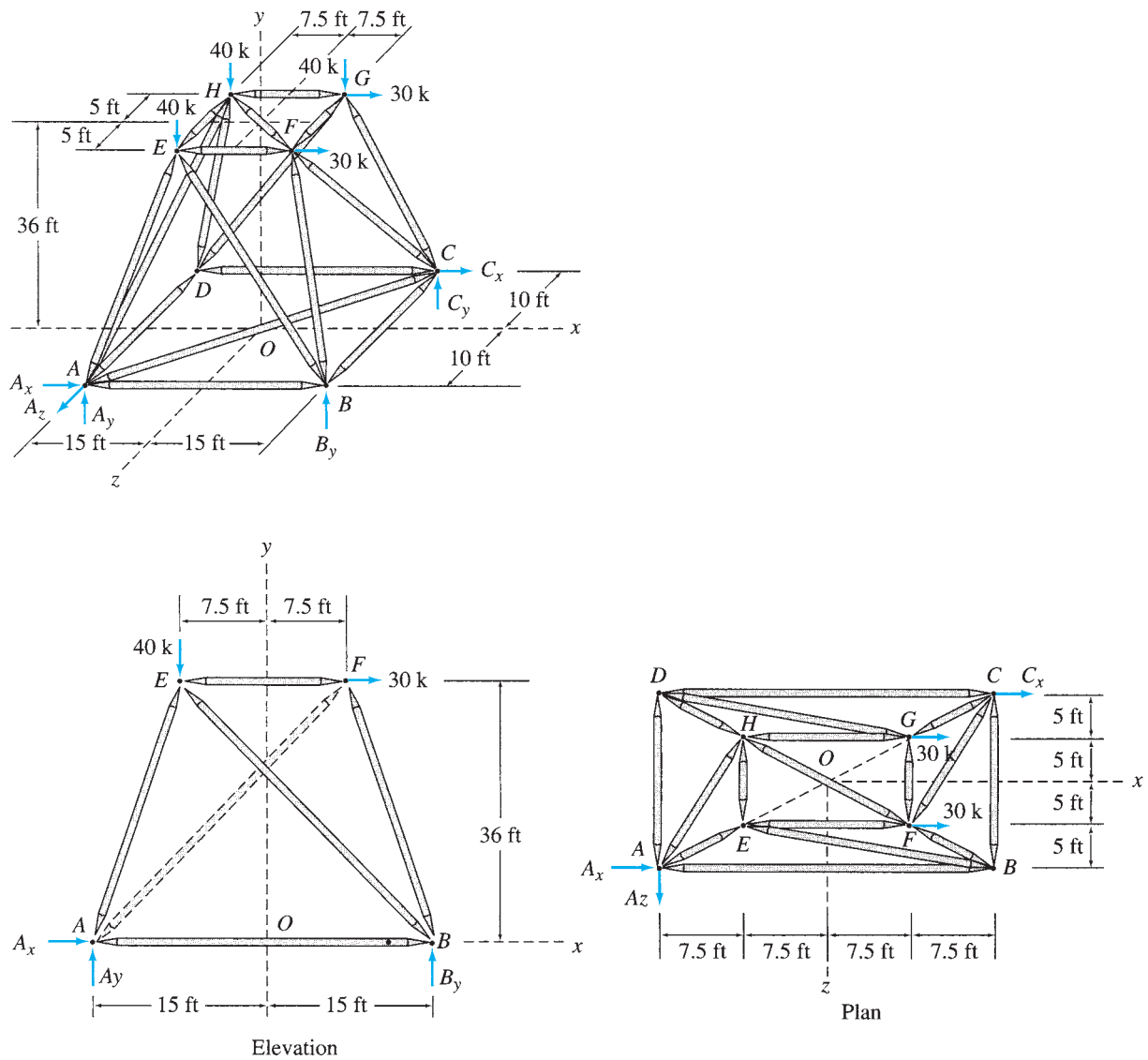


FIG. P4.55



Vigas de acero

Lester Lefkowitz/Stone/Getty Images

5

Vigas y Marcos: Cortante y Momento Flexionante

- 5.1 Fuerza axial, cortante y momento flexionante
 - 5.2 Diagramas de cortante y momento flexionante
 - 5.3 Análisis de la configuración deformada
 - 5.4 Relaciones entre cargas, cortantes y momentos flexionantes
 - 5.5 Determinación estática, indeterminación y estabilidad de marcos planos
 - 5.6 Análisis de marcos planos
- Resumen
Problemas

A diferencia de las armaduras, tratadas en el capítulo anterior y cuyos elementos siempre están sujetos a cargas axiales, los elementos de un marco rígido y de vigas pueden someterse a fuerzas cortantes y a momentos flexionantes, además de a cargas axiales bajo la acción de cargas externas. La obtención de estas fuerzas y momentos internos (resultantes de tensión) es necesaria para el diseño de tales estructuras. El objetivo de este capítulo es el de presentar un análisis de las fuerzas internas y de los momentos que pueden desarrollar las vigas, así como de los elementos de los marcos planos, bajo la acción de un sistema coplanar de fuerzas externas y momentos.

Empezaremos con la definición de los tres tipos de tensiones resultantes —fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes— que pueden actuar en la sección transversal de las vigas y en los elementos de marcos planos. Después discutiremos la elaboración de los diagramas de cortante y de momento por el método de secciones. También consideraremos las configuraciones deformadas de las vigas y la relación entre las cargas, los cortantes y los momentos flexionantes. Además, desarrollaremos un procedimiento para la elaboración de los diagramas de fuerzas cortantes y de momento flexionante usando estas relaciones. Finalmente presentaremos una clasificación de marcos planos como estáticamente determinados, indeterminados e inestables; y el análisis de marcos planos estáticamente determinados.

5.1 Fuerza axial, cortante y momento flexionante

Las fuerzas internas se describieron en la Sección 3.2 como fuerzas o pares ejercidos en una porción de la estructura por el resto de la estructura. Considere, por ejemplo, la viga apoyada de la Fig. 5.1(a).

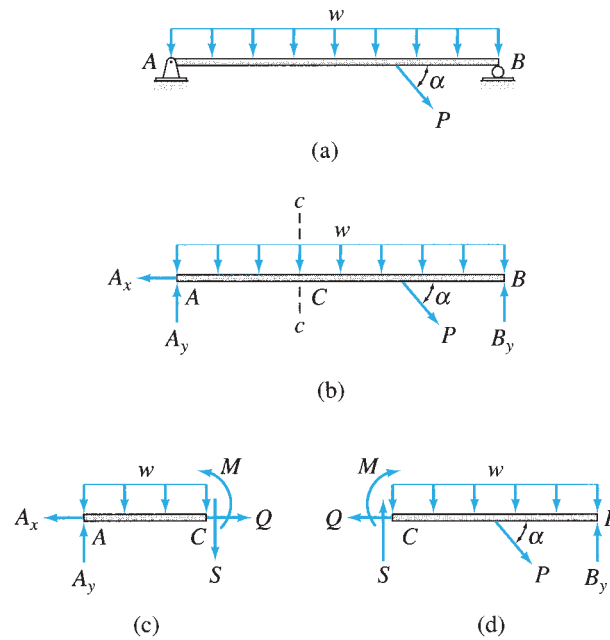


FIG. 5.1

El diagrama de cuerpo libre de la viga completa se muestra en la Fig. 5.1(b), en la que se ven las cargas externas, las reacciones A_x , A_y y B_y en los apoyos A y B respectivamente. Como se discutió en el Capítulo 3, las reacciones de los apoyos pueden calcularse aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la viga completa. Para determinar las fuerzas internas actuantes en la sección transversal de la viga en el punto C , colocamos una sección imaginaria cc a través de C , cortando de este modo la viga en dos partes, AC y CB , como se muestra de la Fig. 5.1(c) a la 5.1(d). El diagrama de cuerpo libre de la porción AC (Fig. 5.1(c)) presenta, además de las cargas externas y las reacciones en los apoyos que actúan en la parte AC , las fuerzas internas Q , S y M ejercidas sobre la porción AC a C por la parte removida de la estructura. Note que sin estas fuerzas internas la porción AC no estaría en equilibrio. Además, bajo el sistema general coplanar de cargas externas y reacciones, son necesarias tres fuerzas internas (dos componentes de fuerza perpendicular y un par) en la sección para mantener la porción de la viga en equilibrio. Estas componentes de fuerza interna se orientan usualmente en la dirección de, y perpendicular a, el eje centroidal de la viga en la sección considerada, como se muestra en la Fig. 5.1(c). La fuerza interna Q en la dirección del eje centroidal de la viga se llama *fuerza axial*, y la fuerza interna S en la dirección perpendicular *fuerza cortante* (o simplemente *cortante*). El momento M del par interno se denomina *momento flexionante*. Recuerde de *mecánica de materiales* que estas fuerzas internas, Q , S y M , representan las resultantes de la distribución de los esfuerzos actuantes en una sección transversal de la viga.

El diagrama de cuerpo rígido de la porción CB de la viga aparece en la Fig. 5.1(d). Este diagrama muestra las mismas fuerzas internas, Q , S , y M , pero en dirección opuesta, y ejercidas sobre la porción CB a C por la porción removida AC de acuerdo con la tercera ley de Newton. Las magnitudes

y el sentido correcto de las fuerzas internas pueden determinarse simplemente aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$ a una de las porciones (AC o CB) de la viga.

En las Figs. 5.1(c) y 5.1(d) se aprecia que, para que las ecuaciones de equilibrio sean satisfechas por una porción de la viga, la fuerza interna Q debe ser igual en magnitud (pero opuesta en dirección) a la suma algebraica (resultante) de las componentes en la dirección paralela al eje de la viga de todas las fuerzas externas actuantes en esa porción. Puesto que la viga completa se encuentra en equilibrio —es decir, $\sum F_x = 0$ —, la aplicación de $\sum F_x = 0$ individualmente a las dos porciones conducirá a la misma magnitud de fuerza axial Q . Así, podemos afirmar lo siguiente:

La fuerza interna Q en cualquier sección de una viga es igual en magnitud pero opuesta en dirección a la suma algebraica (resultante) de las componentes en la dirección perpendicular al eje de la viga de todas las cargas externas y reacciones actuantes en ambos lados de la sección considerada.

Usando un razonamiento similar, podemos definir el cortante y el momento flexionante como sigue:

El cortante S en cualquier sección de una viga es igual en magnitud pero opuesto en dirección a la suma algebraica (resultante) de las componentes en la dirección perpendicular al eje de la viga de todas las cargas externas y reacciones actuantes en ambos lados de la sección considerada.

El momento flexionante M en cualquier sección de una viga es igual en magnitud pero opuesto en dirección a la suma algebraica de los momentos alrededor (del centroide de la dirección transversal al eje de la viga en) de la sección en consideración de todas las cargas y reacciones que actúan en ambos lados de la misma sección.

Convención de signos

La convención de signos más usada para las fuerzas axiales, cortantes y momentos flexionantes se muestra en la Fig. 5.2. Una de sus características importantes, a la que se le llama a menudo *convención de viga*, es que produce los mismos resultados (positivos o negativos), independientemente del lado de la sección que se considere para el cálculo de las fuerzas internas. La dirección positiva de las fuerzas internas actuantes en la porción del elemento a cada lado de la sección se ve en la Fig. 5.2(a).

Desde el punto de vista computacional, es más conveniente expresar la convención de signos en términos de las cargas externas y reacciones actuantes sobre la viga o en el elemento de un marco, como se ejemplifica de las Figs. 5.2(b) a 5.2(d). En la Fig. 5.2(b) se indica que la *fuerza interna Q se considera positiva cuando la fuerza externa actúa en el elemento que produce tensión o tiene una tendencia a jalar el elemento para separarlo de la sección*.

Como se muestra en la Fig. 5.2(c), la *fuerza S se considera positiva cuando la carga externa tiende a empujar la porción del elemento del lado izquierdo de la sección hacia arriba con respecto a la porción del lado derecho de la sección*. En esta figura se puede ver que una fuerza externa que actúa hacia arriba en la parte izquierda o hacia abajo en la parte derecha produce cortante positivo. De manera alternativa, la convención de signos de

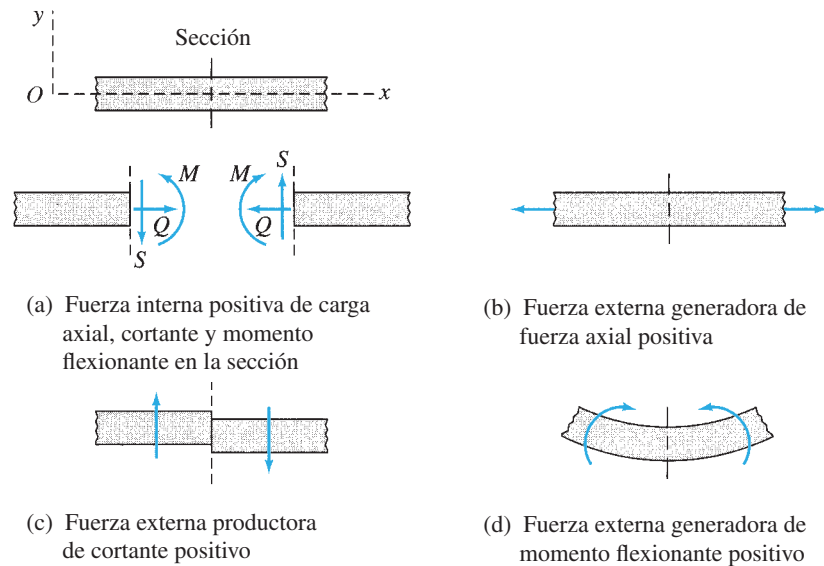


FIG. 5.2 Convención de viga

cortante se puede recordar teniendo en cuenta que cualquier fuerza externa que genere momentos alrededor de la sección en el mismo sentido de las manecillas del reloj produce cortante positivo y viceversa.

El momento positivo por flexión se muestra en la Fig. 5.2(d). *El momento de flexión M se considera positivo cuando las fuerzas externas o pares tienden a deformar la viga cóncava hacia arriba, generando compresión en las fibras superiores y tensión en las fibras inferiores de la viga en la sección.* Cuando se utiliza la parte izquierda de la viga para calcular el momento de flexión, las fuerzas y pares que actúan en la porción que produce momentos alrededor de la sección, en el sentido de las manecillas del reloj, genera momentos de flexión positiva. Cuando se usa la parte derecha de la porción, las fuerzas y pares que se desarrollan en el sentido contrario a las manecillas del reloj generan momentos de flexión positivos y viceversa.

En nuestra discusión se ha asumido que la viga o los elementos del marco son rectos, pero la convención de signos mencionada puede utilizarse para elementos horizontales y verticales empleando el sistema de coordenadas xy , como se muestra en la Fig. 5.2(a). El eje x del sistema de coordenadas está orientado en la dirección del eje centroidal del elemento, y la dirección positiva del eje y se escoge para que el sistema cumpla con la regla de la mano derecha, con el eje z siempre apuntando hacia afuera del plano del papel (plano definido por los ejes x y y). Ahora se puede usar la convención de signos para elementos inclinados y verticales considerando la dirección positiva de y hacia arriba y la porción del elemento cerca del origen O como la porción de la izquierda de la sección.

Procedimiento para el análisis

El procedimiento para determinar las fuerzas internas en una localización específica de la viga se puede resumir como sigue:

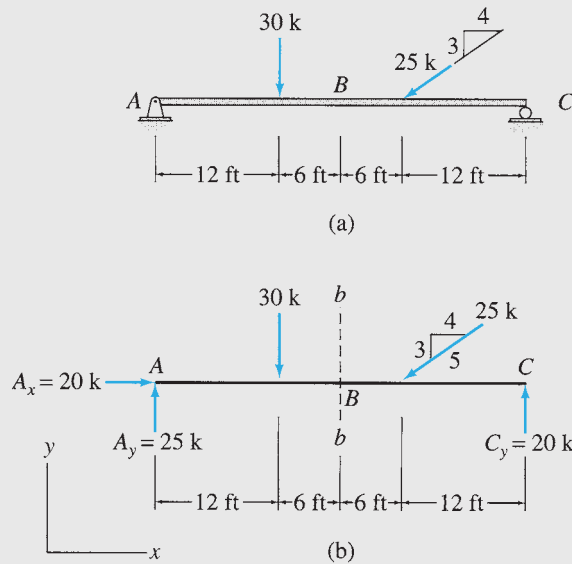
1. Calcule las reacciones de los apoyos empleando las ecuaciones de equilibrio y de condición (si hubiera) al diagrama de cuerpo libre

de la viga completa. (Si es una viga en cantiliver, puede saltarse este paso seleccionando la parte de la viga que no tiene apoyo para el análisis; vea el Ejemplo 5.2.)

2. Pase una sección transversal perpendicular al eje longitudinal de la viga en el punto donde se quiere calcular las fuerzas internas, así se corta la viga en dos partes.
3. A pesar de que las dos partes de la viga se pueden usar para calcular las fuerzas internas, debe elegir aquella que requiere la menor cantidad de esfuerzo de cálculo, como la porción que no tiene reacciones que actúan en ella o la que tiene menor número de cargas externas y reacciones aplicadas.
4. Determine la carga axial de la sección sumando algebraicamente las componentes en la dirección paralela al eje de la viga de todas las cargas externas y reacciones de los apoyos actuantes en la porción seleccionada. De acuerdo con la convención de signos de los párrafos anteriores, si la porción de la viga de la izquierda de la sección se va a usar para el cálculo de las fuerzas axiales, las fuerzas externas que actúan a la izquierda de la sección se consideran positivas, mientras que las fuerzas externas a la derecha de la misma se consideran negativas (ver Fig. 5.2(b)). Si se selecciona la porción derecha de la viga, entonces las fuerzas externas actuantes a la derecha se consideran positivas y viceversa.
5. Determine el cortante en la sección sumando algebraicamente las componentes en la dirección perpendicular al eje de la viga de todas las fuerzas externas y reacciones actuantes en la porción seleccionada. Si se utiliza la porción de la izquierda para el análisis, entonces las fuerzas externas que actúan hacia arriba se consideran positivas, mientras que las fuerzas externas que actúan hacia abajo son negativas (ver Fig. 5.2(c)). Si se elige la porción derecha para el análisis, las fuerzas externas hacia abajo son consideradas positivas y viceversa.
6. Determine el momento flexionante en la sección sumando algebraicamente los momentos de todas las cargas externas alrededor de la sección elegida más los momentos de cualquier par externo que actúe en la misma. Si se selecciona la porción izquierda para el análisis, entonces los momentos en sentido de las manecillas del reloj serán positivos y los que están en contra de las manecillas se considerarán negativos (ver Fig. 5.2(d)). Por el contrario, si se elige la porción derecha, los momentos en contra de las manecillas del reloj se consideran positivos y viceversa.
7. Para revisar los cálculos, los valores de algunas o todas las fuerzas internas pueden deducirse usando la porción de la viga no utilizada en los pasos 4 al 6. Si el análisis se realiza correctamente, entonces los resultados basados en las partes izquierda y derecha de la viga deberán ser idénticos.

Ejemplo 5.1

Determine la fuerza axial, el cortante y el momento flexionante en el punto *B* de la viga que aparece en la Fig. 5.3(a)

**FIG. 5.3****Solución**

Reacciones. Considerando el equilibrio del cuerpo rígido de la viga (Fig. 5.3(b)), escribimos

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x - \left(\frac{4}{5}\right)(25) = 0 \quad A_x = 20 \text{ k} \rightarrow$$

$$+\zeta \sum M_c = 0 \quad -A_y(36) + (30)(24) + \left(\frac{3}{5}\right)(25)(12) = 0 \quad A_y = 25 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 25 - 30 - \left(\frac{3}{5}\right)(25) + C_y = 0 \quad C_y = 20 \text{ k} \uparrow$$

Sección *bb*. Una sección *bb* pasa a través del punto *B*, cortando la viga en dos partes, *AB* y *BC* (ver Fig. 5.3 (b)). La parte *AB*, la cual está a la izquierda de la sección, se utiliza para calcular las fuerzas internas.

Fuerza axial. Al tomar en cuenta las fuerzas axiales externas que actúan hacia la izquierda como positivas, tenemos

$$Q = -20 \text{ k} \quad \text{Respuesta}$$

Cortante. Si se consideran las fuerzas externas que actúan hacia arriba como positivas, tenemos

$$S = 25 - 30 = -5$$

$$S = -5 \text{ k} \quad \text{Respuesta}$$

Momento flexionante. Considerando los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj de las fuerzas externas sobre *B* como positivos, tenemos

$$M = 25(18) - 30(6) = 270$$

$$M = 270 \text{ k-ft}$$

Respuesta*continúa*

Comprobación de resultados. Para comprobar nuestros cálculos, determinaremos las fuerzas internas usando la porción BC , que se encuentra a la derecha de la sección en consideración.

Si las componentes horizontales de las fuerzas externas actuantes a la derecha de la porción BC se estiman positivas, tenemos

$$Q = -\left(\frac{4}{5}\right)(25) = -20 \text{ k} \quad \text{Comprobación}$$

Si se consideran las fuerzas externas actuantes hacia abajo como positivas, tenemos

$$S = -20 + \left(\frac{3}{5}\right)(25) = -5 \text{ k} \quad \text{Comprobación}$$

Finalmente, si se tiene a los momentos de las fuerzas externas en sentido contrario a las manecillas del reloj como positivos alrededor de B , entonces

$$M = 20(18) - \left(\frac{3}{5}\right)(25)(6) = 270 \text{ k-ft} \quad \text{Comprobación}$$

Ejemplo 5.2

Determine el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga que se muestra en la Fig. 5.4.

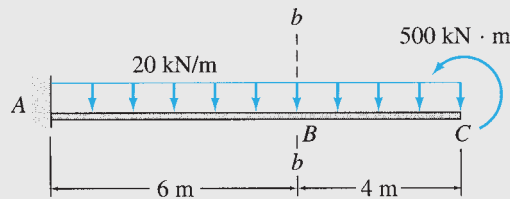


FIG. 5.4

Solución

Sección bb . (Ver Fig. 5.4) Para evitar calcular las reacciones, seleccionamos la porción BC externa sin soportes, la cual está a la derecha de la sección bb , para el cálculo de las fuerzas internas.

Cortante. Considerando las fuerzas axiales externas que actúan hacia abajo como positivas, tenemos

$$S = +20(4) = +80 \text{ kN}$$

$$S = 80 \text{ kN}$$

Respuesta

Tenga en cuenta que el par de $500 \text{ kN} \cdot \text{m}$ no tiene ningún efecto en el cortante.

Momento flexionante. Si se estiman los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj como positivos, tenemos

$$M = 500 - 20(4)(2) = 340 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

$$M = 340 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

El lector debe verificar los resultados sumando las fuerzas y los momentos en la porción AB de la viga, después del cálculo de las reacciones en el apoyo A .

5.2 Diagramas de cortante y momento flexionante

Los diagramas de cortante y de momento flexionante representan la variación cuantitativa a lo largo del elemento. Estos diagramas pueden construirse con el método de secciones descrito en el capítulo anterior. Procediendo de un extremo del elemento al otro (usualmente de la izquierda a la derecha), se pasan secciones, después de cada cambio de carga, a lo largo del elemento para determinar las ecuaciones expresando el cortante y el momento de flexión en términos de la distancia de la sección de un origen fijo. Los valores de cortante y del momento flexionante determinados de estas ecuaciones son graficados en las ordenadas contra la posición respecto de un extremo del elemento en la abscisa para obtener el diagrama de cortante y del momento flexionante. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.3

Dibuje los diagramas del cortante y del momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 5.5(a).

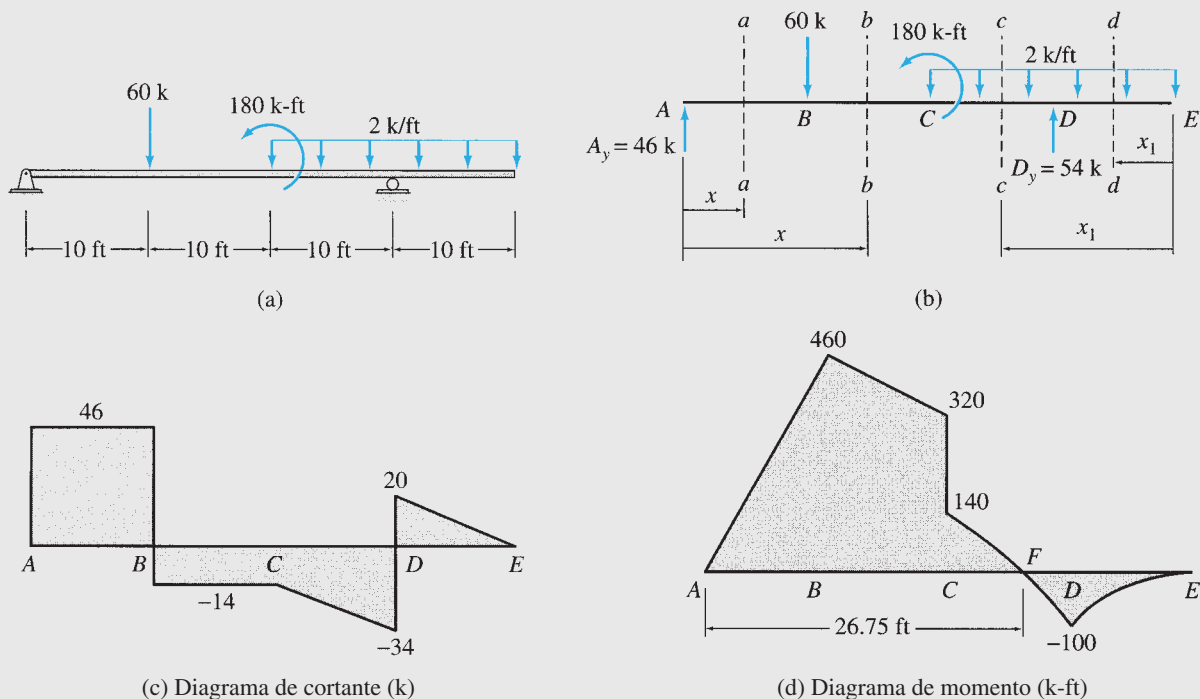


FIG. 5.5

Solución

Reacciones. Ver la Fig. 5.5(b)

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$+\zeta \sum M_D = 0$$

$$-A_y(30) + 60(20) + 180 + 2(20)(0) = 0$$

$$A_y = 46 \text{ k} \uparrow$$

continúa

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 46 - 60 - 2(20) + D_y &= 0 \\
 D_y &= 54 \text{ k} \uparrow
 \end{aligned}$$

Diagrama de cortante. Para determinar la ecuación del cortante para el segmento AB de la viga, pasamos una sección aa a una distancia x del apoyo A , como se muestra en la Fig. 5.5(b). Considerando el diagrama de cuerpo libre a la izquierda de la sección, tenemos

$$S = 46 \text{ k} \quad \text{para } 0 < x < 10 \text{ ft}$$

Como esta ecuación indica, el cortante es constante en 46 k desde una distancia infinitesimal a la derecha del punto A a una distancia infinitesimal a la izquierda del apoyo B . En el punto A , el cortante incrementa abruptamente de 0 a 46 k, de modo que se dibuja una línea vertical de 0 a 46 k en el diagrama de cortante (Fig. 5.5(c)) en A para indicar el cambio. A ella la sigue una línea horizontal desde A a B que indica que el cortante permanece constante en este segmento.

Después, con la sección bb (Fig. 5.5(b)), determinamos la ecuación para el segmento BC como

$$S = 46 - 60 = -14 \text{ k} \quad \text{para } 10 \text{ ft} < x < 20 \text{ ft}$$

El cambio abrupto en el cortante de 46 k a una distancia infinitesimal a la izquierda de B a -14 k a una distancia infinitesimal a la derecha de B se muestra en el diagrama de cortante (Fig. 5.5(c)) por una línea vertical desde $+46$ k hasta -14 . Se dibuja una línea horizontal en -14 desde B a C para indicar que el cortante permanece constante en este valor dentro de este segmento.

Para determinar la ecuación del cortante en la mitad derecha de la viga, es conveniente usar otra coordenada, x_1 , dirigida desde el extremo izquierdo de E de la viga, como se muestra en a Fig. 5.5(b). Las ecuaciones para el cortante en los segmentos ED y DC se obtienen al analizar los cuerpos libres a la derecha de la sección dd y cc , respectivamente; por lo tanto,

$$S = x_1 \quad \text{para } 0 \leq x_1 < 10 \text{ ft}$$

y

$$S = x_1 - 54 \quad \text{para } 10 \text{ ft} < x_1 \leq 20 \text{ ft}$$

Estas ecuaciones indican que el cortante incrementa linealmente desde cero en E hasta $+20$ k a una distancia infinitesimal a la derecha de D ; después, cae abruptamente a -34 k a una distancia infinitesimal a la izquierda de D ; y de ahí incrementa linealmente a -14 k en C . Esta información se grafica en el diagrama de cortante, como se muestra en la Fig. 5.5 (c).

Diagrama de momento flexionante. Usando las mismas secciones y coordenadas empleadas previamente para calcular el cortante, determinamos las siguientes ecuaciones de momento flexionante en los cuatro segmentos de la viga.

Para el segmento AB :

$$M = 46x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 10 \text{ ft}$$

Para el segmento BC :

$$M = 46x - 60(x - 10) = -14x + 600 \quad \text{para } 10 \text{ ft} \leq x < 20 \text{ ft}$$

Para el segmento ED :

$$M = -2x_1 \left(\frac{x_1}{2} \right) = -x_1^2 \quad \text{para } 0 \leq x_1 \leq 10 \text{ ft}$$

Para el segmento DC :

$$M = -x_1^2 + 54(x_1 - 10) = -x_1^2 + 54x_1 - 540 \quad \text{para } 10 \text{ ft} \leq x_1 < 20 \text{ ft}$$

Las primeras dos ecuaciones, para la mitad izquierda de la viga, indican que el momento flexionante incrementa linealmente de 0 en A a 460 k-ft en B ; después decrece linealmente a 320 k-ft en C , como se muestra en el diagrama de momento flexionante en la Fig. 5.5(d). Las últimas dos ecuaciones para la mitad derecha de la viga son cuadráticas en x_1 . El valor de M calculado a partir de estas ecuaciones se grafica en el diagrama de momento flexionante de la Fig. 5.5(d). Se puede ver que M decrece de cero en E a -100 k-ft en D , y después incrementa de $+140$ k-ft a una distancia infinitesimal a la derecha de C . Tenga en cuenta que en C , el momento flexionante cae abruptamente una cantidad $320 - 140 = 180$ k-ft, la cual es igual a la magnitud del momento externo en sentido contrario a las manecillas del reloj actuante en este punto.

continúa

El punto en el cual el momento flexionante es cero se denomina *punto de inflexión*. Para determinar la ubicación del punto de inflexión F (Fig. 5.5(d)), fijamos el momento $M = 0$ en la ecuación para el momento flexionante en el segmento DC para obtener

$$M = -x_1^2 + 54x_1 - 540 = 0$$

Del cual $x_1 = 13.25$ ft; es decir, el punto F está localizado a una distancia 13.25 ft del extremo E o a $40 - 13.25 = 26.75$ ft del apoyo A de la viga, como se muestra en la Fig. 5.5(d). **Respuesta**

Ejemplo 5.4

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 5.6(a).

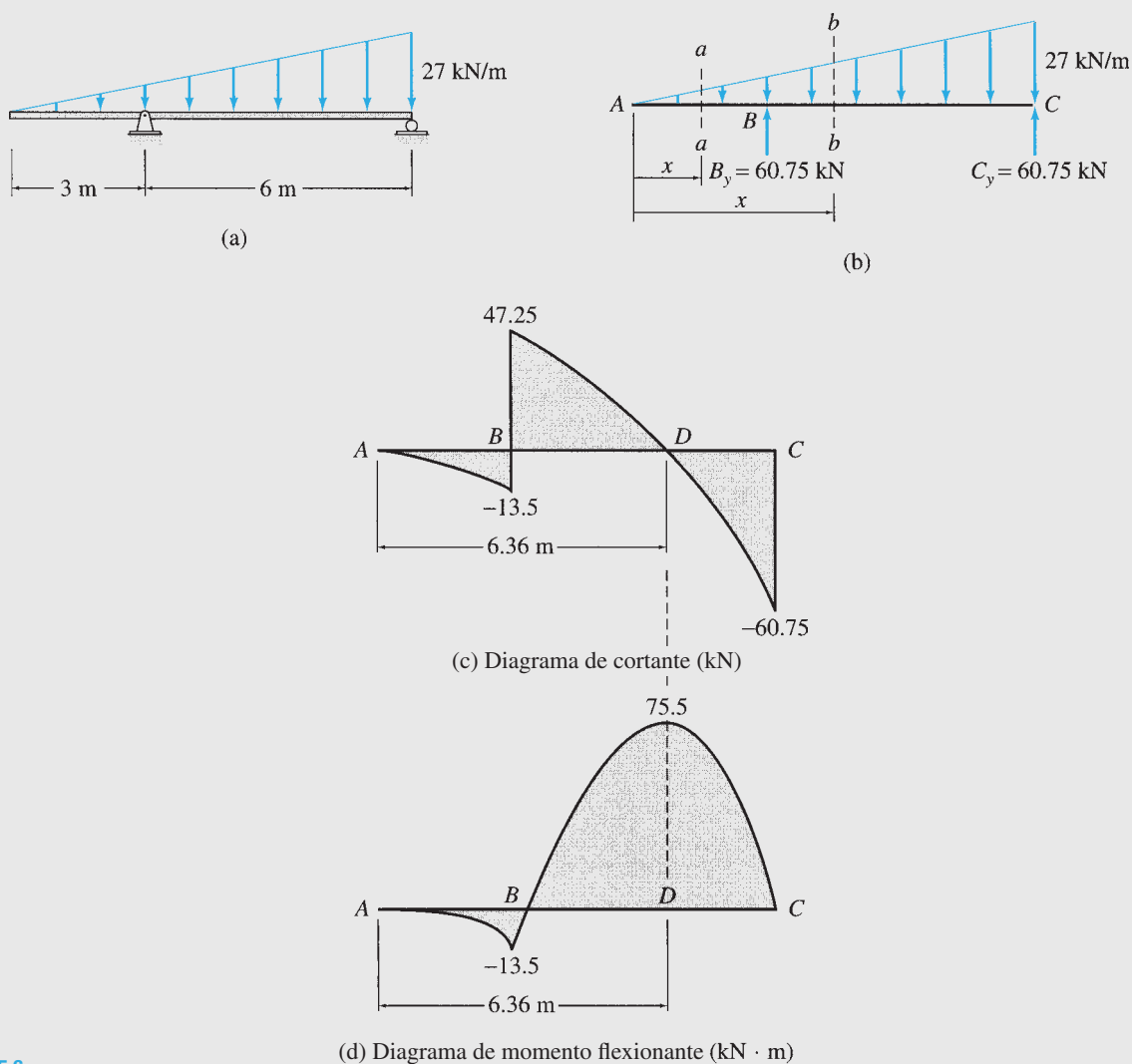


FIG. 5.6

continúa

Solución**Reacciones.** Ver Vig. 5.6(b)

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & B_x &= 0 \\
 + \curvearrowright \sum M_c &= 0 \\
 \left(\frac{1}{2}\right)(9)(27) \left(\frac{9}{3}\right) - B_y(6) &= 0 & B_y &= 60.75 \text{ k } \uparrow \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{2}\right)(9)(27) + 60.75 + C_y &= 0 & C_y &= 60.75 \text{ k } \uparrow
 \end{aligned}$$

Diagrama de cortante. Para determinar las ecuaciones del cortante en el segmento AB y BC de la viga, pasamos una sección aa y bb a través de la viga, como se muestra en la Fig. 5.6(b). Considerando el diagrama de cuerpo libre a la izquierda de la sección e identificando que la magnitud de la carga, $w(x)$, en un punto a una distancia x del extremo A es $w(x) = \left(\frac{27}{9}\right)x = 3x$ kN/m, obtenemos las siguientes ecuaciones del cortante en el segmento AB y BC , respectivamente;

$$\begin{aligned}
 S &= -\left(\frac{1}{2}\right)(x)(3x) = -\frac{3x^2}{2} \quad \text{para } 0 \leq x < 3 \text{ m} \\
 S &= -\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 60.75 \quad \text{para } 3 \text{ m} < x < 9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Los valores de S calculados con estas ecuaciones se grafican para el cálculo del cortante en la Fig. 5.6(c). El punto D en el cual el cortante es cero se obtiene de la ecuación

$$S = -\frac{(3x^2)}{2} + 60.75 = 0$$

Para la cual $x = 6.36$ m**Respuesta**

Diagrama de momento flexionante. Usando la misma sección empleada previamente para calcular el cortante, determinamos las ecuaciones de momento flexionante de los segmentos AB y BC , respectivamente:

$$\begin{aligned}
 M &= -\left(\frac{1}{2}\right)(x)(3x) \left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{x^3}{2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \\
 M &= -\left(\frac{x^3}{2}\right) + 60.75(x - 3) \quad \text{para } 3 \leq x \leq 9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Los valores de M resultados de estas ecuaciones se grafican para obtener el diagrama de momento flexionante que se muestra en la Fig. 5.6(d). Para localizar el punto en el cual el momento es máximo, diferenciamos la ecuación para M en el segmento BC con respecto a x y hacemos la derivada $dM/dx = 0$, es decir,

$$\frac{dM}{dx} = \left(-\frac{3x^2}{2}\right) + 60.75 = 0$$

De la cual $x = 6.36$ m. Esto indica que el momento de flexión máximo ocurre en el mismo punto donde el cortante es cero. Además, una comparación de las expresiones para dM/dx y S en el segmento BC indica que las dos ecuaciones son idénticas; es decir, la pendiente del diagrama de momento flexionante en un punto es igual a la del cortante en ese punto. (Esta relación, la cual es generalmente válida, se discute a detalle en la sección posterior).

Finalmente, la magnitud del momento máximo se determina sustituyendo el valor de $x = 6.36$ m en la ecuación para M del segmento BC :

$$M_{\max} = -\left[\frac{(6.36)^3}{2}\right] + 60.75(6.36 - 3) = 75.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

5.3 Análisis de la configuración deformada

El *análisis de la configuración deformada* (*curva elástica*) de una estructura no es más que un bosquejo (usualmente exagerado) de la superficie neutra de la estructura, en posición modificada, bajo la acción de una condición de carga específica. Tales bosquejos, que pueden ser construidos sin ningún conocimiento de los valores numéricos de las deflexiones, proporcionan información valiosa sobre el comportamiento de la estructura, y son muy útiles en el cálculo de los valores numéricos de las deflexiones. (Procedimientos de análisis cuantitativo de las deflexiones se presentan en los siguientes capítulos).

De acuerdo con la convención de signos adoptada en la Sección 5.1, un momento positivo de flexión dobla una viga cóncava hacia arriba (o hacia el eje positivo en dirección y), mientras que un momento negativo de flexión lo hace hacia abajo (o en dirección negativa de y). Así, el signo (positivo o negativo) de la curvatura en cualquier punto a lo largo del eje de la viga se puede obtener del diagrama de momento de flexión. Aplicando los signos de curvaturas, la configuración deformada (curva elástica) de la viga, consistente con las condiciones de soporte, se puede fácilmente bosquejar (ver. Fig. 5.7).

Por ejemplo, considere una viga analizada en el Ejemplo 5.3. Esta y su diagrama de flexión están dibujados en las Figuras 5.7(a) y (b), respectivamente. Su configuración deformada se muestra en la Fig. 5.7(c). Debido a que el momento de flexión es positivo en el segmento AF , la viga se flexiona de manera cóncava hacia arriba en esta región. A la inversa, el momento de

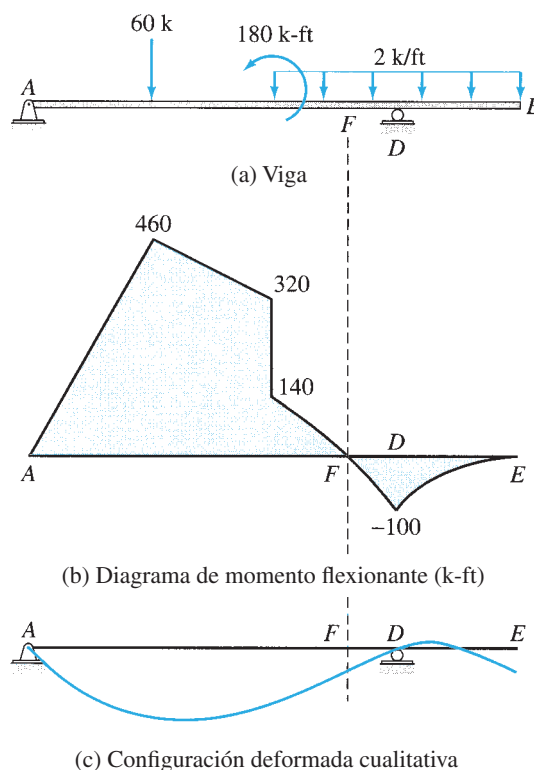


FIG. 5.7

flexión es negativo en el segmento FE ; por lo tanto, en esta región, la viga se flexiona de manera cóncava hacia abajo. En cuanto a la condición de apoyo, note que en ambos apoyos, A y D , la deflexión de la viga es cero, pero la pendiente (rotación) no lo es en estos puntos.

Es importante tener en cuenta que la configuración deformada es aproximada, porque está basada meramente en los signos de curvaturas; los valores numéricos de la deflexión a lo largo del eje de la viga no se muestran (excepto en los apoyos). Por ejemplo, los cálculos numéricos podrían posiblemente indicar que el extremo E de la viga se flexiona en realidad hacia arriba, en lugar de hacia abajo como se supuso en la Fig. 5.7(c).

5.4 Relación entre carga cortante y momento de flexión

La elaboración de los diagramas de cortante y de momento flexionante puede ser considerablemente más rápida empleando las ecuaciones diferenciales básicas que existen entre las cargas, el cortante y los momentos flexionantes.

Para derivar estas relaciones, considere una viga sujeta a cargas arbitrarias, como la de la Fig. 5.8(a). Todas las cargas externas mostradas en esta figura se supone que actúan en dirección positiva. Como se ve, las cargas distribuida y concentrada que actúan hacia arriba (en dirección positiva de y) se consideran positivas; los pares externos que operan en dirección de las manecillas del reloj también se consideran positivos y viceversa. Después estime el equilibrio de un elemento diferencial de longitud dx , aislado de la viga por secciones imaginarias que pasan a una distancia x y $(x + dx)$ del origen O , como se muestra en la Fig. 5.8(a). El diagrama de cuerpo libre se muestra en la Fig. 5.8(b), en la cual S y M representan el cortante y el momento flexionante, respectivamente, que actúan en la cara izquierda del elemento (por ejemplo, a una distancia x desde el origen O), y dS y dM significan los cambios en el cortante y en el momento flexionante, respectivamente, con relación a la distancia dx .

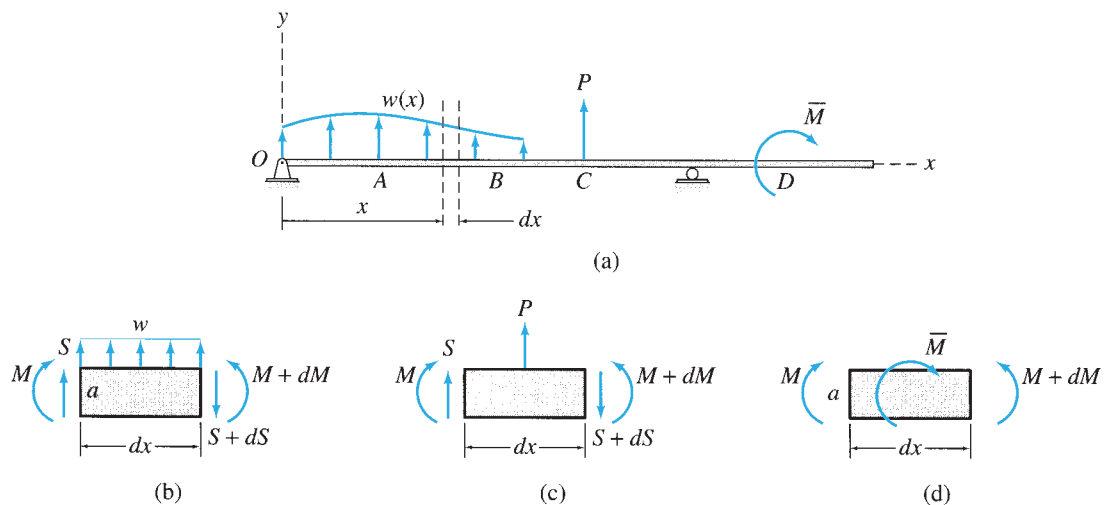


FIG. 5.8

Como la distancia dx es infinitamente pequeña, la carga distribuida w que actúa sobre el elemento se puede considerar como uniforme de magnitud $w(x)$. Para que el elemento se encuentre en equilibrio, las fuerzas y pares que operan en ella deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$. La tercera ecuación de equilibrio, $\sum F_x = 0$, se satisface automáticamente debido a que no hay fuerzas horizontales que se desarrollen en el elemento. Aplicando esta ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$, obtenemos,

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0 \\ S + w \, dx - (S + dS) &= 0 \\ dS &= w \, dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dividiendo entre dx , escribimos la Ec. (5.1) como

$$\frac{dS}{dx} = w \quad (5.2)$$

En la cual dS/dx representa la pendiente del diagrama de cortante. Así, la Ec. (5.2) se puede expresar como

$$\text{pendiente del diagrama de cortante en cualquier punto} = \frac{\text{intensidad de la carga distribuida en cualquier punto}}{\quad} \quad (5.3)$$

Para determinar el cambio en el cortante entre los puntos A y B a lo largo del eje del elemento (ver Fig. 5.8(a)), integramos la Ec. (5.1) de A a B para obtener

$$\int_A^B dS = S_B - S_A = \int_A^B w \, dx \quad (5.4)$$

Donde $(S_B - S_A)$ representa el cambio del cortante entre los puntos A y B , y $\int_A^B w \, dx$ representa el área bajo el diagrama de la carga distribuida entre los puntos A y B . Así, la Ec. (5.4) se puede afirmar que

$$\frac{\text{el cambio del cortante entre los puntos } A \text{ y } B}{\quad} = \frac{\text{el área bajo el diagrama de carga distribuida entre los puntos } A \text{ y } B}{\quad} \quad (5.5)$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de momento al cuerpo libre del elemento de la viga, mostrada en la Fig. 5.8(b), obtenemos

$$+ \curvearrowright \sum M_a = 0 \quad - M + w(dx)(dx/2) - (S + dS) \, dx + (M + dM) = 0$$

Haciendo a un lado los términos que contienen los diferenciales de segundo orden obtenemos

$$dM = S \, dx \quad (5.6)$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{dM}{dx} = S \quad (5.7)$$

En ella dM/dx representa la pendiente del diagrama de momentos. Así, la Ec. (5.7) se puede escribir como

$$\text{la pendiente del diagrama de momentos en cualquier punto} = \text{el cortante en cualquier punto} \quad (5.8)$$

Para obtener el cambio de momento flexionante entre los puntos A y B (ver Fig. 5.8(a)), integramos la Ec. (5.6) para conseguir

$$\int_A^B dM = M_B - M_A = \int_A^B S \, dx \quad (5.9)$$

Donde $(M_B - M_A)$ representa el cambio del diagrama de momentos entre los puntos A y B , y $\int_A^B S \, dx$ representa el área bajo el diagrama de cortante entre los puntos A y B . Así, la Ec. (5.9) se puede escribir como

$$\text{el cambio del momento de flexión entre los puntos } A \text{ y } B = \text{el área bajo el diagrama de cortante entre los puntos } A \text{ y } B \quad (5.10)$$

Cargas concentradas

La relación entre las cargas y los cortantes obtenidos hasta ahora (Ecs. (5.1) a (5.5)) no son válidas en el punto de aplicación de las cargas concentradas. Como ilustramos en el Ejemplo 5.3, en tales puntos el cortante cambia abruptamente en una cantidad igual a la magnitud de la carga concentrada. Para verificar esta relación, consideremos el equilibrio de un elemento diferencial que está aislado de la viga en la Fig. 5.8(a), pasando secciones imaginarias a distancias infinitesimales a izquierda y derecha del punto C de la carga concentrada P . El diagrama de cuerpo libre de este elemento se muestra en la Fig. 5.8(c). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0 \\ S + P - (S + dS) &= 0 \\ dS &= P \end{aligned} \quad (5.11)$$

La cual indica que

$$\text{el cambio del cortante en el punto de aplicación de la carga concentrada} = \text{a la magnitud de la carga concentrada} \quad (5.12)$$

La relación entre el cortante y el momento flexionante (Ecs. (5.6) a (5.10)), derivados previamente, mantienen su validez en los puntos de aplicación de las cargas concentradas. Note que debido a los cambios abruptos en el diagrama de cortante en esos puntos, habrá un cambio drástico en la pendiente del diagrama de momentos en dicho punto.

Pares y momentos concentrados

A pesar de las relaciones entre cortante y cargas obtenidas hasta ahora (Ecs. (5.1) a (5.5), (5.11) y (5.12)), son válidos en los puntos de aplicación de los

pares o momentos concentrados, la relación entre el cortante y el momento flexionante, como se indicó en la Ecs. (5.6) a (5.10), no es válida en tales puntos. Como se ilustró en el Ejemplo 5.3, en el punto de aplicación del par, el momento de flexión cambia abruptamente en una cantidad igual a la magnitud del par de momento. Para obtener esta relación, consideremos el equilibrio en un elemento diferencial aislado de la viga de la Fig. 5.8(a), pasando unas secciones imaginarias a distancias infinitesimales a izquierda y derecha del punto de aplicación D del par $\bar{M}$. El diagrama de cuerpo libre de este elemento se muestra en la Fig. 5.8(d). Aplicando la ecuación de equilibrio, podemos escribir

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_a &= 0 \\ -M - \bar{M} + (M + dM) &= 0 \\ dM &= \bar{M} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La cual indica que

$$\text{el cambio del momento de flexión en el punto de aplicación de un par} = \text{a la magnitud del momento del par} \quad (5.14)$$

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento se usa, paso a paso, para construir los diagramas de cortante y momento flexionante de vigas con la aplicación de las relaciones anteriores entre cargas, cortantes y momentos flexionantes.

1. Calcule las reacciones de los apoyos.
2. Construya el diagrama de cortante como se indica a continuación:
 - a. Determine el cortante en el extremo izquierdo de la viga. Si no tiene ninguna carga concentrada en este punto, el cortante es cero en dicho punto; vaya al paso 2(b). De otra manera, las ordenadas del diagrama de cortante en este punto cambian abruptamente de cero a la magnitud de la carga concentrada. Recuerde que una fuerza hacia arriba aumenta el cortante, mientras que una fuerza hacia abajo causa que el cortante disminuya.
 - b. Procediendo del punto en el cual el cortante está calculado hacia la derecha a lo largo de la longitud de la viga, identifique el próximo punto en el cual el valor numérico de la ordenada del diagrama de cortante se requiere determinar. Es necesario determinar los valores solo en el extremo final de la viga y en el punto donde están aplicadas las cargas concentradas o donde la distribución de cargas cambia.
 - c. Determine la ordenada del diagrama de cortante en el punto seleccionado en el paso 2(b) (o justo a la izquierda de él, si actúa una carga concentrada en el punto) sumando algebraicamente el área bajo el diagrama de carga entre el punto anterior y el punto actual en consideración al cortante del punto anterior (o justo a la derecha de él, si una carga concentrada actúa en el punto).

Las fórmulas de las figuras geométricas comunes se listan en el Apéndice A.

- d. Establezca la forma del diagrama de cortante entre el punto previo y el actual en consideración aplicando la Ec. (5.3), la cual demuestra que la pendiente del diagrama de cortante en cualquier punto es igual a la intensidad de la carga en ese punto.
 - e. Si no hay cargas concentradas que actúen en el punto en consideración, se procede al paso 2(f); de otra manera determine la ordenada del diagrama de cortante justo a la derecha del punto sumando algebraicamente la magnitud de la carga concentrada en el cortante justo a la izquierda del punto. Así, el diagrama de cortante en este punto cambia abruptamente con una cantidad justo igual a la magnitud de la fuerza concentrada.
 - f. Si el punto en consideración no está localizado a la derecha del extremo de la viga, entonces regrese al paso 2(b). De lo contrario, el diagrama de cortante está completo. Si se realizó el análisis de manera adecuada, los valores del cortante justo a la derecha del extremo derecho de la viga deben ser cero, excepto por el error de redondeo.
3. Construya el diagrama de momentos como se indica a continuación:
 - a. Determine el momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga. Si no hay un par aplicado en este punto, entonces el momento flexionante es cero en este punto; y vaya al paso 3(b). De otra manera, la ordenada del diagrama de momentos en este punto cambia abruptamente de cero a la magnitud del par de momento. Recuerde que un par en sentido de las manecillas del reloj incrementa el momento de flexión, mientras que un par en sentido contrario genera que el momento flexionante disminuya en el punto de aplicación.
 - b. Procediendo del punto en el cual el momento se ha calculado del paso anterior hacia la derecha a lo largo de la longitud de la viga, identifique el siguiente punto donde el valor numérico de la ordenada del diagrama de momentos de flexión necesita determinarse. Por lo general es necesario determinar los valores sólo en los puntos donde se calcularon los valores del cortante en el paso 2, donde se aplicaron los pares, y donde ocurren los valores mínimo y máximo del momento de flexión. Además, en los puntos donde están aplicados los pares, y donde los valores máximos y mínimos del momento flexionante se presentan en los puntos, el cortante es cero. En el punto donde el cortante es cero, si el cortante cambia de positivo a la izquierda a negativo a la derecha, la pendiente del diagrama de momentos cambiará de positivo a la izquierda del punto a negativo a la derecha de él, es decir, el momento flexionante será máximo en este punto. A la inversa, en el punto de cortante cero, donde el cortante cambia de negativo a la izquierda a positivo a la derecha, el momento flexionante será mínimo. Para la mayoría de las condiciones de carga, tales como cargas concentradas y uniformemente repartidas, el punto de cortante cero se puede localizar considerando la geometría del diagrama de cortantes. Sin em-

bargo, para algunos casos de cargas linealmente distribuidas, además de las cargas no uniformemente repartidas, se vuelve necesario localizar los puntos de cortante cero resolviendo las expresiones para cortante, como se ilustró en el Ejemplo 5.4.

- c. Establezca la ordenada del diagrama de momento flexionante en el punto seleccionado en el paso 3(b) (o justo a la izquierda de él, si actúa un par de fuerzas en ese punto) sumando algebraicamente el área bajo el diagrama de cortante, entre el punto anterior y el punto actual en consideración, al momento de flexión del punto anterior (o justo a la derecha de él, si actúa un par de fuerzas en ese punto).
- d. Defina la forma del diagrama de momento flexionante entre el punto anterior y el punto actual en consideración aplicando la Ec. (5.8), la cual establece que la pendiente del diagrama de momento flexionante en un punto es igual al cortante en ese punto.
- e. Si no existe un par de fuerzas en el punto en consideración, entonces proceda con el paso 3(f). De otra manera, determine la ordenada del diagrama de momento de flexión justo a la derecha del punto sumando algebraicamente la magnitud del momento del par de fuerzas al momento de flexión justo a la izquierda del punto. Así, el diagrama de momento de flexión cambia abruptamente en este punto a una cantidad igual a la magnitud del momento del par.
- f. Si el punto en consideración no está localizado en el extremo derecho de la viga, regrese al paso 3(b). De otra manera, el diagrama de momento flexionante estará completo. Si se efectuó el análisis de manera adecuada, los valores del momento de flexión justo a la derecha del extremo derecho de la viga deben ser cero, excepto por el error de redondeo.

El procedimiento anterior se puede aplicar para construir el diagrama de cortante y de momento flexionante empezando de la izquierda a la derecha de la viga, como es común en la práctica. Sin embargo, si deseamos construir el diagrama desde el extremo derecho de la viga hacia la izquierda, el procedimiento esencialmente permanece igual, excepto que las fuerzas hacia abajo deben considerar causantes de incremento en el cortante, y los pares en sentido contrario a las manecillas del reloj ahora generan incremento del momento de flexión, y viceversa.

Ejemplo 5.5

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante, y la configuración deformada de la viga que aparece en la Fig. 5.9(a).

Solución

Reacciones. Ver Fig. 5.9(b)

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

continúa

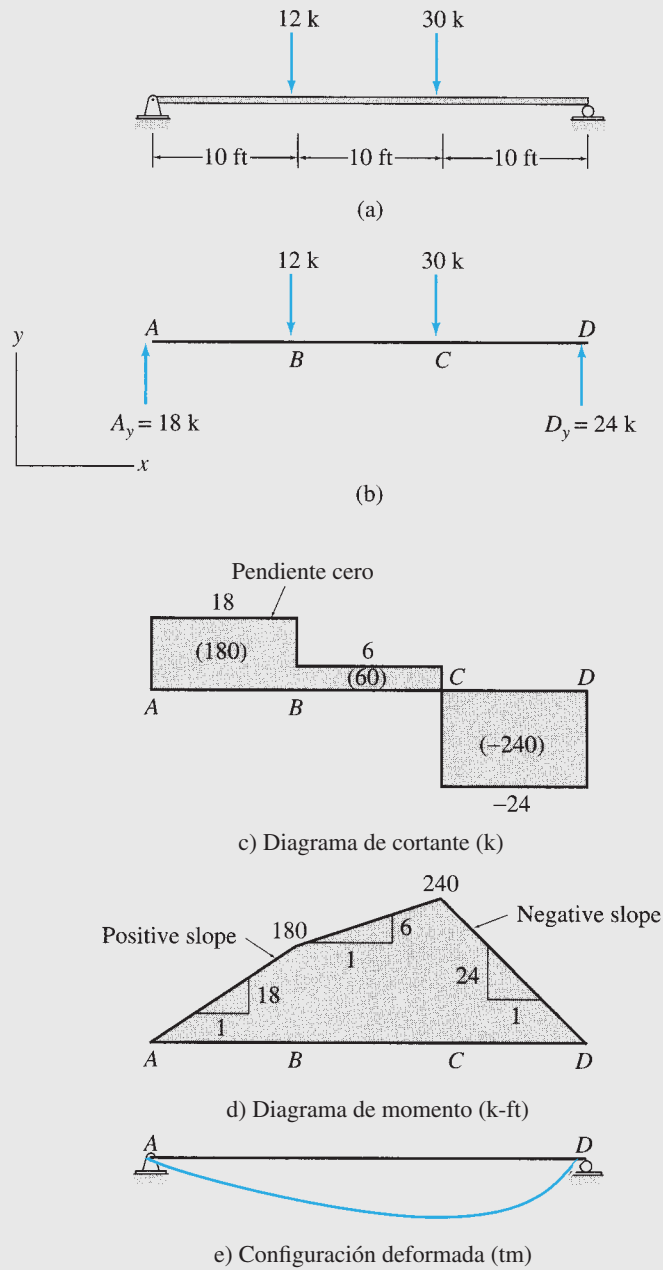


FIG. 5.9

Por proporciones,

$$A_y = 12 \left(\frac{20}{30} \right) + 30 \left(\frac{10}{30} \right) = 18 \text{ k} \quad A_y = 18 \text{ k} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$18 - 12 - 30 + D_y = 0$$

$$D_y = 24 \text{ k}$$

$$D_y = 24 \text{ k} \uparrow$$

continúa

Diagrama de cortante

Punto A. Dado que la fuerza concentrada (hacia arriba) de magnitud 18 k actúa en el punto A, el diagrama de cortante se incrementa abruptamente de 0 a 18 k en este punto.

Punto B. El cortante justo a la izquierda del punto B está dado por

$$S_{B,I} = S_{A,D} + \text{Área bajo la carga del diagrama entre el punto A y el punto B}$$

Donde los subíndices “I” y “D” representan “la izquierda” y “la derecha”, respectivamente. Como ninguna carga se aplica en este segmento de la viga,

$$S_{B,I} = 18 + 0 = 18 \text{ k}$$

Debido a la carga concentrada negativa de magnitud 12 k que actúa en el punto B, el cortante justo a la derecha de B es

$$S_{B,D} = 18 - 12 = 6 \text{ k}$$

Punto C.

$$S_{C,I} = S_{B,D} + \text{Área bajo la carga del diagrama entre el punto B y el punto C}$$

$$S_{C,I} = 6 + 0 = 6 \text{ k}$$

$$S_{C,D} = 6 - 30 = -24 \text{ k}$$

Punto D.

$$S_{D,I} = -24 + 0 = -24 \text{ k}$$

$$S_{D,D} = -24 + 24 = 0$$

Comprobación

Los valores numéricos del cortante calculados en los puntos A, B y D, se usan para construir el diagrama de cortante como se muestra en la Fig. 5.9(c). La forma del diagrama entre estas ordenadas se estableció con claridad en la aplicación de la Ec. (5.3), la cual señala que la pendiente del diagrama de cortante en un punto es igual a la intensidad de la carga en ese punto. Debido a que no hay carga aplicada a la viga entre estos puntos, la pendiente del diagrama de cortante es cero entre esos puntos, y el diagrama de cortante consiste en una serie de líneas horizontales, como se muestra en la figura. Tenga en cuenta que el diagrama de cortante cierra (es decir, regresa a cero) justo a la derecha del extremo D de la viga, indicando que el análisis ha sido desarrollado de manera correcta.

Respuesta

Para facilitar la elaboración del diagrama de momento flexionante, las áreas de varios segmentos del diagrama de cortante se calculan y se muestran entre paréntesis en el diagrama de cortante (Fig. 5.9(c)).

Diagrama de momento flexionante

Punto A. Debido a que no hay un par aplicado en el extremo A, $M_A = 0$.

Punto B. $M_B = M_A + \text{área bajo el diagrama de cortante entre A y B}$

$$M_B = 0 + 180 = 180 \text{ k-ft}$$

Punto C. $M_C = 180 + 60 = 240 \text{ k-ft}$

Punto D. $M_D = 240 - 240 = 0$

Respuesta

Los valores numéricos del momento flexionante calculados en los puntos A, B, C y D se usan para construir el diagrama de momento flexionante que aparece en la Fig. 5.9(d). La forma del diagrama entre estas ordenadas se establece aplicando la Ec. (5.8), la cual indica que la pendiente del diagrama de momento flexionante en un punto es igual al cortante en ese punto. Como el cortante entre estos puntos es constante, la pendiente del diagrama de momento flexionante debe ser constante entre estos puntos.

continúa

Por lo tanto, las ordenadas del momento flexionante están conectadas por líneas rectas inclinadas. En el segmento AB , el cortante es $+18 \text{ k}$; por lo tanto, la pendiente del diagrama de momento flexionante en este segmento es $18:1$, y es positiva —es decir, *hacia arriba a la derecha* (/). En el segmento BC , el cortante cae a $+6 \text{ k}$; por lo tanto, la pendiente del diagrama de momento flexionante se reduce a $6:1$, pero permanece positiva. En el segmento CD , el cortante llega a -24 ; en consecuencia, la pendiente del momento flexionante se convierte en negativa —es decir, *hacia abajo a la derecha* (\), como se muestra en la Fig. 5.9(d). Tenga en cuenta que el momento flexionante máximo se presenta en el punto C , donde el cortante cambia de positivo a la izquierda a negativo a la derecha.

Respuesta

Configuración deformada. La configuración deformada cualitativa de la viga se muestra en la Fig. 5.9(e). Como el momento flexionante es positivo en toda la longitud, la viga se flexiona cóncava hacia arriba, como se muestra. **Respuesta**

Ejemplo 5.6

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante, así como la configuración deformada de la viga mostrada en la Fig. 5.10(a).

Solución

Reacciones. Ver Fig. 5.10(b)

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & A_x &= 0 \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 A_y - 7 &= 0 \\
 A_y &= 7 \text{ t} & A_y &= 7 \text{ t} \uparrow \\
 + \curvearrowright \sum M_A &= 0 \\
 M_A - 7(6) - 20 &= 0 \\
 M_A &= 62 \text{ t} \cdot \text{m} & M_A &= 62 \text{ t} \cdot \text{m} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Diagrama de cortante

Punto A. $S_{A,D} = 70 \text{ kN}$

Punto B. $S_{B,I} = 70 + 0 = 70 \text{ kN}$

$$S_{B,D} = 70 - 70 = 0$$

Punto C. $S_{C,I} = 0 + 0 = 0$

$$S_{C,D} = 0 + 0 = 0$$

Comprobación

Los valores numéricos del cortante evaluado en los puntos A , B y C se utilizan para construir el diagrama de cortante como en la Fig. 5.10(c). Debido a que no hay carga aplicada entre estos puntos, la pendiente del diagrama de cortante es cero entre estos. Para facilitar la construcción del diagrama de momento flexionante, el área del segmento AB del diagrama de cortante se calculó y se ve entre paréntesis en el diagrama de cortante (Fig. 5.10(c)).

continúa

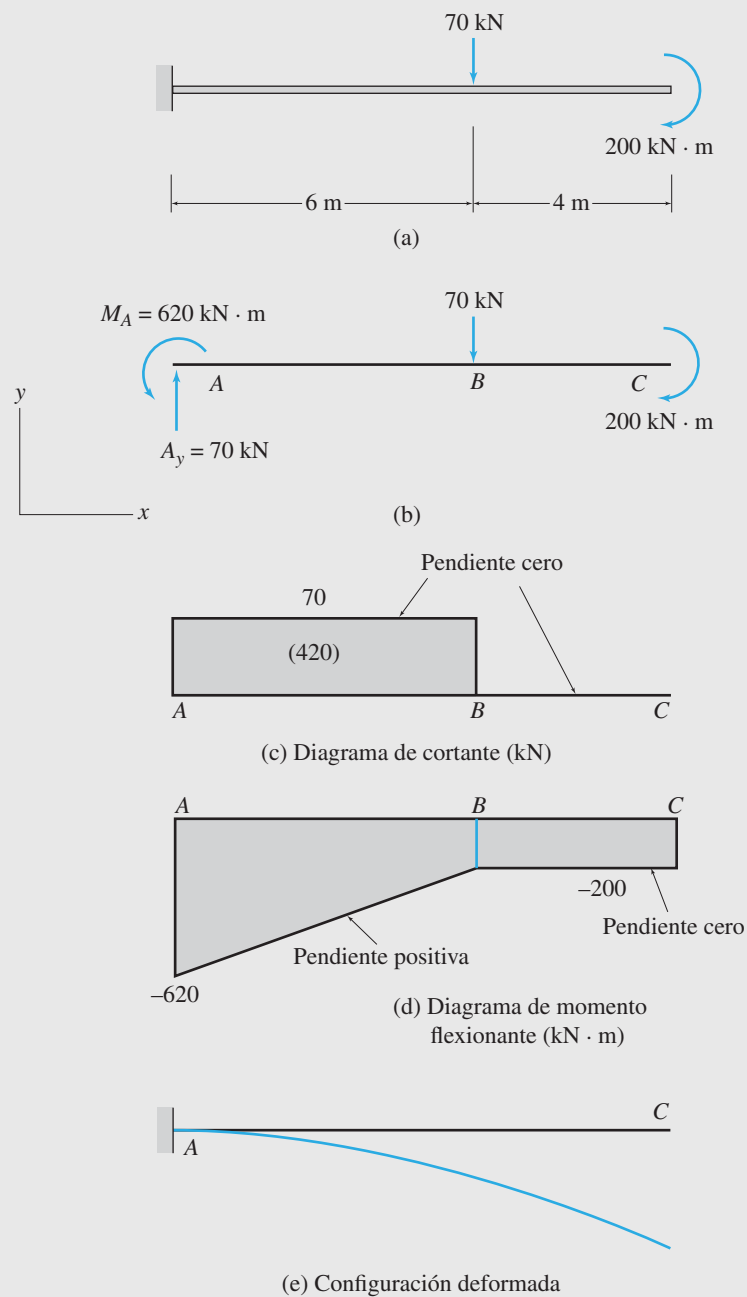


FIG. 5.10

Diagrama de momento flexionante

Punto A. Debido a que un par negativo (contrario a las manecillas del reloj) de 620 kN actúa en el punto A, el diagrama de momento flexionante decrece abruptamente de 0 a -620 kN en este punto, es decir,

$$M_{A,D} = -620 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Punto B.

$$M_B = -620 + 420 = -200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

continúa

Punto C.

$$M_{C,I} = -200 + 0 = -200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{C,D} = -200 + 200 = 0$$

Comprobación

El diagrama de momento flexionante se muestra en la Fig. 5.10(d). La forma de este diagrama entre las ordenadas calculadas se basa en la condición de que la pendiente del diagrama de momento flexionante en un punto es igual al cortante en este punto. Como el cortante en los segmentos AB y BC son constantes, la pendiente del diagrama de momento flexionante debe ser constante en estos segmentos. Por lo tanto, las ordenadas del diagrama de momento flexionante están conectadas por líneas rectas. En el segmento AB , el cortante es positivo, así es la pendiente del diagrama de momento flexionante en este segmento. En el segmento BC , el cortante llega a cero; en consecuencia, la pendiente del diagrama de momento flexionante llega a cero, como se muestra en la Fig. 5.10(d).

Respuesta

Configuración deformada. La configuración deformada cualitativa de la viga se muestra en la Fig. 5.10(e). Como el momento flexionante es negativo en toda la longitud, la viga se flexiona cóncava hacia abajo.

Respuesta**Ejemplo 5.7**

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante, y la configuración deformada de la viga mostrada en la Fig. 5.11(a).

Solución

Reacciones. (Ver Fig. 5.11(b))

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - 30 = 0$$

$$A_x = 30 \text{ kN}$$

$$A_x = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\zeta \sum M_D = 0$$

$$-A_y(27) + 10(15)(19.5) - 162 + 40(6) = 0$$

$$A_y = 111.22 \text{ kN}$$

$$A_y = 111.22 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$111.22 - 10(15) - 40 + D_y = 0$$

$$D_y = 78.78 \text{ kN}$$

$$D_y = 78.78 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de cortante**Punto A.**

$$S_{A,D} = 111.22 \text{ kN}$$

Punto B.

$$S_B = 111.22 - 10(15) = -38.78 \text{ kN}$$

Punto C.

$$S_{C,I} = -38.78 + 0 = -38.78 \text{ kN}$$

$$S_{C,D} = -38.78 - 40 = -78.78 \text{ kN}$$

Punto D.

$$S_{D,I} = -78.78 + 0 = -78.78 \text{ kN}$$

$$S_{D,D} = -78.78 + 78.78 = 0$$

Comprobación

El diagrama de cortante se muestra en la Fig. 5.11(c). En el segmento AB , la viga está sujeta a una carga uniformemente distribuida hacia abajo (negativa) de 10 kN/m . Debido a que la intensidad de la carga es constante y negativa en el segmento AB , el diagrama de cortante en este segmento es una línea recta con pendiente negativa. No hay carga distribuida aplicada en la viga en los segmentos BC y CD , de modo que el cortante en estos segmentos consiste en líneas horizontales, que indican pendiente cero.

Respuesta*continúa*

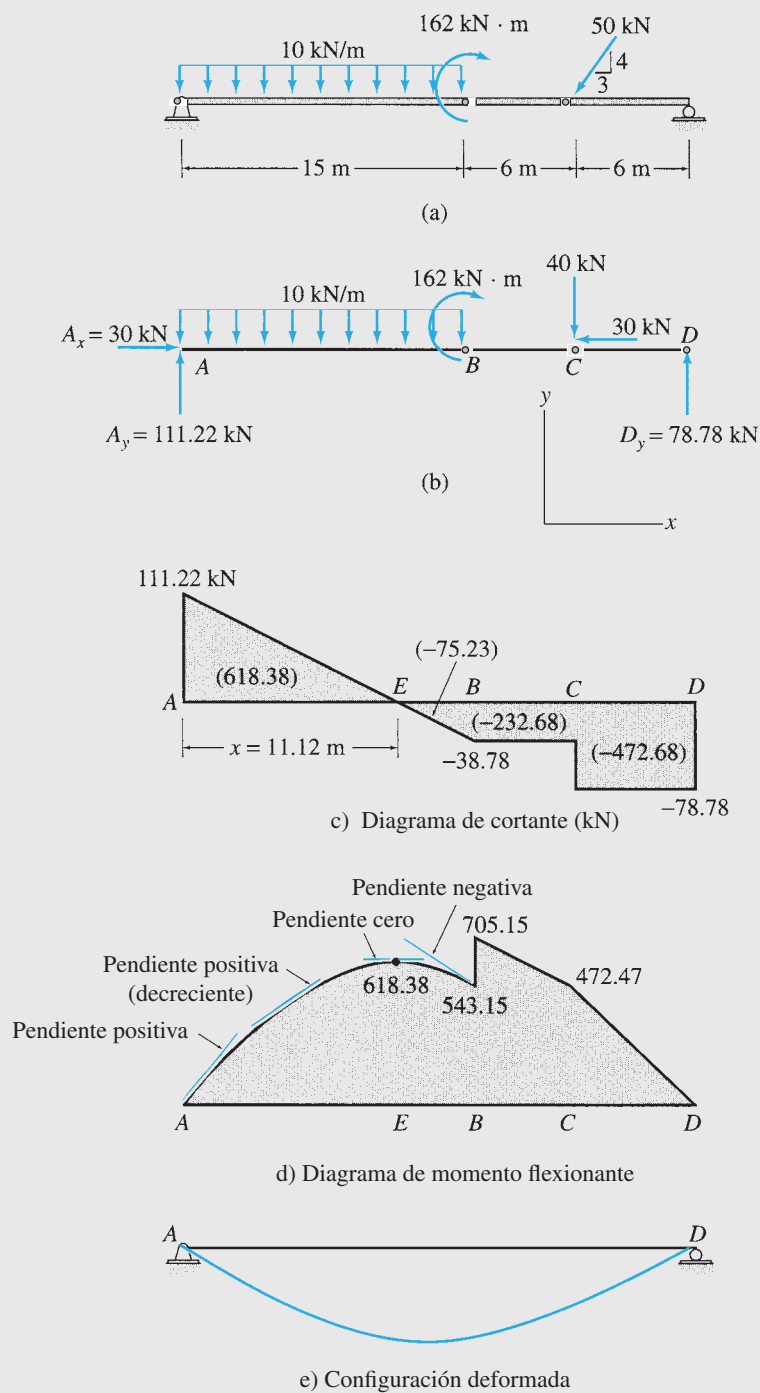


FIG. 5.11

El punto de cortante cero, E , se puede localizar usando triángulos semejantes que forman el diagrama de cortante entre A y B ; por lo tanto,

$$\frac{x}{111.22} = \frac{15}{(111.22 + 38.78)}$$

$$x = 11.12 \text{ m}$$

continúa

Para facilitar la construcción del diagrama de momento flexionante, las áreas de varios segmentos del diagrama de cortante han sido calculadas, y se indican entre paréntesis en el diagrama de cortante (Fig. 5.11(c)).

Diagrama de momento flexionante

Punto A. $M_A = 0$

Punto E. $M_E = 0 + 618.38 = 618.38 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Punto B. $M_{B,I} = \text{kN} \cdot \text{m} - 75.23 = 543.15 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$M_{B,D} = 543.15 + 162 = 705.15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Punto C. $M_C = 705.15 - 232.68 = 472.47 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Punto D. $M_D = 472.47 - 472.68 = -0.21 \approx 0$

Comprobación

El diagrama de momento flexionante se muestra en la Fig. 5.11(d). La forma de este diagrama entre las ordenadas calculadas se basa en la condición de que la pendiente del diagrama de momento flexionante en cualquier punto es igual al cortante en ese punto. Justo a la derecha de A, el cortante es positivo, y también la pendiente del diagrama de momento flexionante en este punto. Conforme nos movemos a la derecha de A, el cortante decrece linealmente (pero permanece positivo), hasta que se convierte en cero en E. Por lo tanto, la pendiente del diagrama de momento flexionante decrece gradualmente, o se vuelve menos inclinada (pero permanece positiva), conforme nos movemos a la derecha de A, hasta que llega a cero en E. Tenga en cuenta que el diagrama de cortante en el segmento AE es lineal, pero el diagrama de momento flexionante en este segmento es parabólico, o una curva de segundo orden, debido a que el diagrama de momento flexionante se obtiene por integración del diagrama de cortante (Ec. 5.11). De esta manera, la curva del momento flexionante será siempre de un grado mayor que el correspondiente a la curva de cortante.

Podemos ver en la Fig. 5.11(d) que el momento flexionante llega a un máximo local en el punto E, donde el cortante cambia de positivo a la izquierda a negativo a la derecha. Conforme nos movemos a la derecha de E el cortante se vuelve negativo a la derecha de E, y decrece continuamente (se inclina más hacia abajo a la derecha) entre E y justo a la izquierda de B. Actúan un par positivo en B, de manera que el momento flexionante incrementa abruptamente en este punto una cantidad igual a la magnitud del momento aplicado. El valor más grande (máximo global) del momento flexionante en toda la viga se presenta justo a la derecha de B. (Note que no hay un cambio abrupto, o discontinuidad, en el diagrama de momento en este punto.) Finalmente, como el cortante en el segmento BC y CD es constante y negativo, el diagrama de momento flexionante en este segmento consiste en líneas rectas con pendiente negativa.

Respuesta

Configuración deformada. Ver Fig. 5.11(e).

Respuesta

Ejemplo 5.8

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante y la configuración deformada de la viga mostrada en la Fig. 5.12(a).

Solución

Reacciones. (Ver Fig. 5.12(b))

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad B_x = 0$$

$$+ \curvearrowright \sum M_C = 0$$

$$\frac{1}{2}(3)(12)(24) - B_y(20) + 3(20)(10) - \frac{1}{2}(3)(6)(2) = 0$$

$$B_y = 50.7 \text{ kN} \quad B_y = 50.7 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$-\frac{1}{2}(3)(12) + 50.7 - 3(20) - \frac{1}{2}(3)(6) + C_y = 0$$

$$C_y = 36.3 \text{ kN} \quad C_y = 36.3 \text{ kN} \uparrow$$

continúa

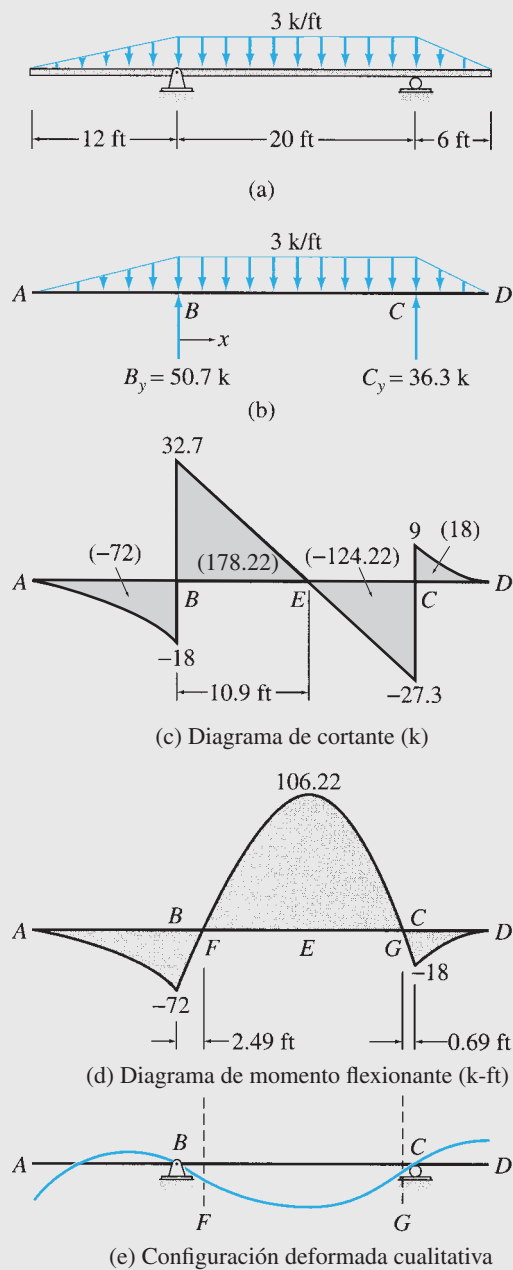


FIG. 5.12

Diagrama de cortante**Punto A.**

$$S_A = 0$$

Punto B.

$$S_{B,I} = 0 - \frac{1}{2}(3)(12) = -18 \text{ k}$$

$$S_{B,D} = -18 + 50.7 = 32.7 \text{ k}$$

continúa

Punto C. $S_{C,L} = 327 - 3(20) = -27.3 \text{ k}$
 $S_{C,R} = -27.3 + 36.3 = 9 \text{ k}$

Punto D. $S_D = 9 - \frac{1}{2}(3)(6) = 0$ **Comprobación**

El diagrama de cortante se muestra en la Fig. 5.12(c). Se obtiene la forma del diagrama entre las ordenadas calculadas mediante la aplicación de la condición de que la pendiente del diagrama de cortante en cualquier punto es igual a la intensidad de la carga en ese punto. Por ejemplo, como la intensidad de la carga A es cero, por lo que es la pendiente del diagrama de cortante en A , entre A y B la intensidad de la carga es negativa y disminuye linealmente desde cero en A a -3 k/ft en B . Por lo tanto, la pendiente del diagrama de cortante es negativa en este segmento, y decrece (inclinándose más) continuamente de A justo a la izquierda de B . El resto del diagrama de cortante se construye mediante un razonamiento similar. **Respuesta**

El punto del cortante cero, E , se ubica con el empleo de los triángulos semejantes que forman el diagrama de fuerza cortante entre B y C .

Para facilitar la elaboración del diagrama de momento flexionante, las áreas o los varios segmentos del diagrama de cortante se calculan y se muestran entre paréntesis en el diagrama de cortante (Fig. 5.12(c)). Cabe señalar que las áreas estrechas, AB y CD , se pueden obtener con la aplicación de la fórmula para el área de esta forma dada en el Apéndice A.

Diagrama de momento flexionante

Punto A. $M_A = 0$
Punto B. $M_B = 0 - 72 = -72 \text{ k-ft}$
Punto E. $M_E = -72 + 178.22 = 106.22 \text{ k-ft}$
Punto C. $M_C = 106.22 - 124.22 = 18 \text{ k-ft}$
Punto D. $M_D = -18 + 18 = 0$ **Comprobación**

La forma del diagrama de momento flexionante entre estas coordenadas se obtiene usando la condición de que la pendiente del diagrama de momento flexionante en cualquier punto es igual a la fuerza cortante en ese punto. El diagrama de momento flexionante construido se muestra en la Fig. 5.12(d).

En esta figura podemos ver que el momento de flexión máximo negativo ocurre en el punto B , mientras que el momento de flexión máximo positivo, que tiene el valor absoluto más grande en toda la longitud de la viga, sucede en el punto E . **Respuesta**

Los puntos de inflexión localizados, F y G , los igualamos a cero con la ecuación de momento flexionante en el segmento BC , en términos de la distancia x desde el punto de soporte izquierdo B (Fig. 5.12(b)).

$$M = -\left(\frac{1}{2}\right)(3)(12)(4+x) + 50.7x - 3(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

O

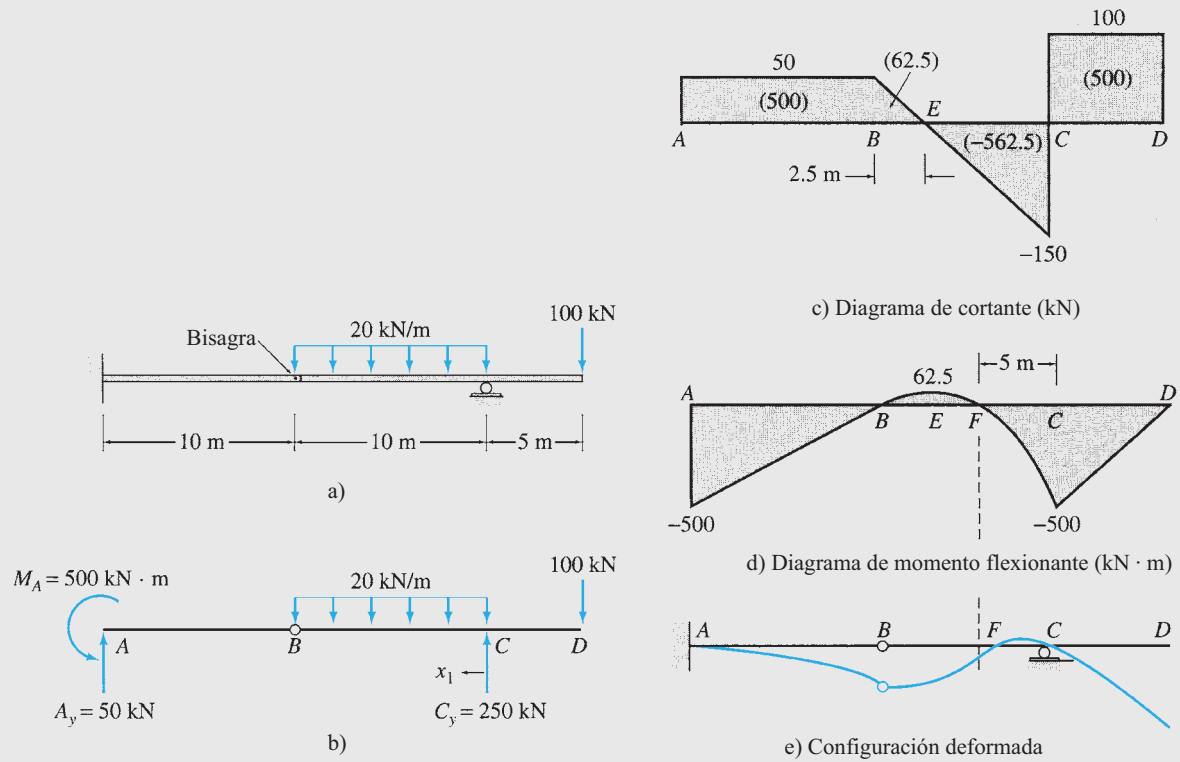
$$-1.5x^2 + 32.7x - 72 = 0$$

A partir del cual $x = 2.49 \text{ ft}$ y $x = 19.31 \text{ ft}$ desde B .

Deflexión cualitativa. Una deflexión cualitativa de cortante de una viga se muestra en la Fig. 5.12(e). El momento flexionante es positivo en el segmento FG , por lo que la viga es cóncava curvada hacia arriba en esta región. Por el contrario, el momento de flexión es negativo en los segmentos AF y GD , la viga es cóncava doblada hacia abajo en estos segmentos. **Respuesta**

Ejemplo 5.9

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante, así como la configuración deformada de la viga mostrada en la Fig. 5.13(a).

**FIG. 5.13****Solución**

Reacciones. (Ver Fig. 5.13(b))

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_B^{BD} &= 0 \\
 -20(10)(5) + C_y(10) - 100(15) &= 0 \\
 C_y &= 250 \text{ kN} & C_y &= 250 \text{ kN} \uparrow \\
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \\
 A_y - 20(10) + 250 - 100 &= 0 \\
 A_y &= 50 \text{ kN} & A_y &= 50 \text{ kN} \uparrow \\
 +\zeta \sum M_A &= 0 \\
 M_A - 20(10)(15) + 250(20) - 100(25) &= 0 \\
 M_A &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_A &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

continúa

Diagrama de cortante

Punto A. $S_{A,D} = 50 \text{ kN}$

Punto B. $S_B = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$

Punto C. $S_{C,I} = 50 - 20(10) = -150 \text{ kN}$

$$S_{C,D} = -150 + 250 = 100 \text{ kN}$$

$$S_{D,I} = 100 + 0 = 100 \text{ kN}$$

Punto D. $S_{D,D} = 100 - 100 = 0$

Comprobación

El diagrama de cortante se muestra en la Fig. 5.13(c).

Diagrama de momento flexionante

Punto A. $M_{A,D} = -500 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Punto B. $M_B = -500 + 500 = 0$

Punto E. $M_E = 0 + 62.5 = 62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Punto C. $M_C = 62.5 - 562.5 = 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Punto D. $M_D = -500 + 500 = 0$

Comprobación

En la Fig. 5.13(d) se muestra un diagrama de momento flexionante. En él, el punto de inflexión F se puede localizar fijando en cero la ecuación del momento flexionante en el segmento BC , en términos de la distancia x_1 de la derecha de apoyo C (Fig. 5.13(b)):

$$M = -100(5 + x_1) + 250x_1 - 20(x_1) \left(\frac{x_1}{2} \right) = 0$$

o

$$-10x_1^2 + 150x_1 - 500 = 0$$

De la cual $x_1 = 5 \text{ m}$ y $x_1 = 10 \text{ m}$ desde C . Tenga en cuenta que $x_1 = 10 \text{ m}$ representa la ubicación de la articulación interna en B , en donde el momento flexionante vale cero. Por lo tanto, el punto de inflexión F está localizado a una distancia de 5 m a la izquierda de C , como se ve en la Fig. 5.13(d).

Respuesta

Configuración deformada. La configuración deformada de la viga aparece en la Fig. 5.13(e). Tenga en cuenta que el empotre en A , tanto la flecha como deflexión son cero, mientras que en el patín C , solo la deflexión es cero, pero no la pendiente. El apoyo interno articulado B no proporciona ninguna restricción a la rotación, de modo que la pendiente en B puede ser discontinua.

Respuesta**Ejemplo 5.10**

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante y la configuración deformada de la viga que se muestra en la Fig. 5.14(a).

Solución

Reacciones. (Ver Fig. 5.14(b))

$$+\zeta \sum M_C^{CD} = 0$$

$$D_y(24) - 2(24)(12) = 0$$

$$D_y = 24 \text{ k} \quad C_y = 24 \text{ k} \uparrow$$

continúa

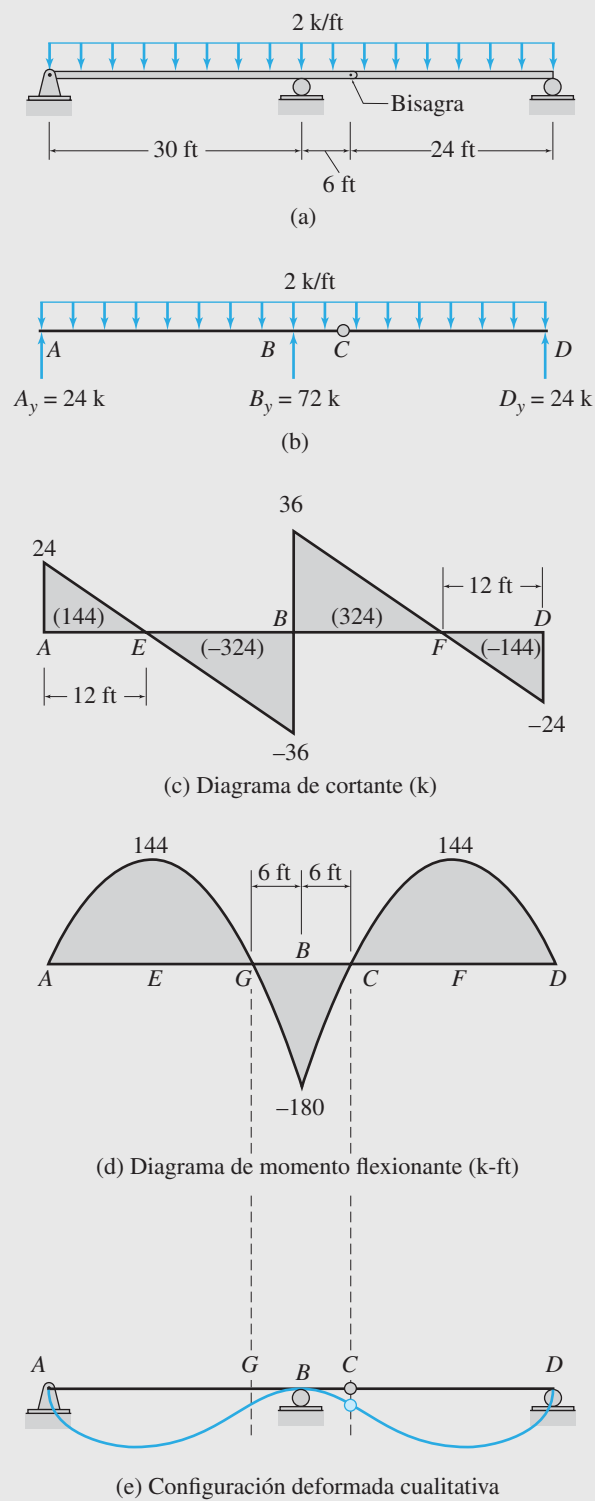


FIG. 5.14

continúa

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

$$24(60) + B_y(30) - 2(60)(30) = 0$$

$$B_y = 72 \text{ k} \quad B_y = 72 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 2(60) + 72 + 24 = 0$$

$$A_y = 24 \text{ k} \quad A_y = 24 \text{ k} \uparrow$$

Diagrama de cortante

Punto A. $S_{A,D} = 24 \text{ k}$

Punto B. $S_{B,I} = 24 - 2(30) = -36 \text{ k}$

$$S_{B,D} = -36 + 72 = 36 \text{ k}$$

Punto D. $S_{D,I} = 36 - 2(30) = -24 \text{ k}$

$$S_{D,D} = -24 + 24 = 0$$

Comprobación

El diagrama de cortante se muestra en la Fig. 5.14(c).

Respuesta

Diagrama de momento flexionante

Punto A. $M_A = 0$

Punto E. $M_E = 0 + 144 = 144 \text{ k-ft}$

Punto B. $M_B = 144 - 324 = -180 \text{ k-ft}$

Punto F. $M_F = -180 + 324 = 144 \text{ k-ft}$

Punto D. $M_D = -144 + 144 = 0$

Comprobación

El diagrama de cortante se muestra en la Fig. 5.14(d)

Respuesta

Configuración deformada. Ver la Fig. (5.14(e).

Respuesta

Ejemplo 5.11

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante, así como la configuración deformada de la viga estáticamente indeterminada que aparece en la Fig. 5.15. Las reacciones en los apoyos, determinadas por el procedimiento para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas (presentado en la Parte tres de este texto), se indican en la Fig. 5.15(a).

Solución

Independientemente de si la viga es estáticamente determinada o indeterminada, una vez que las reacciones en los apoyos se han determinado, el procedimiento para la construcción de los diagramas de cortante y de momento flexionante permanecen iguales. Los diagramas de cortante y momento flexionante para una viga estáticamente indeterminada se muestran en la Fig. 5.15(b) (c), respectivamente, y la configuración deformada de la viga se ve en la Fig. 5.15(d).

continúa

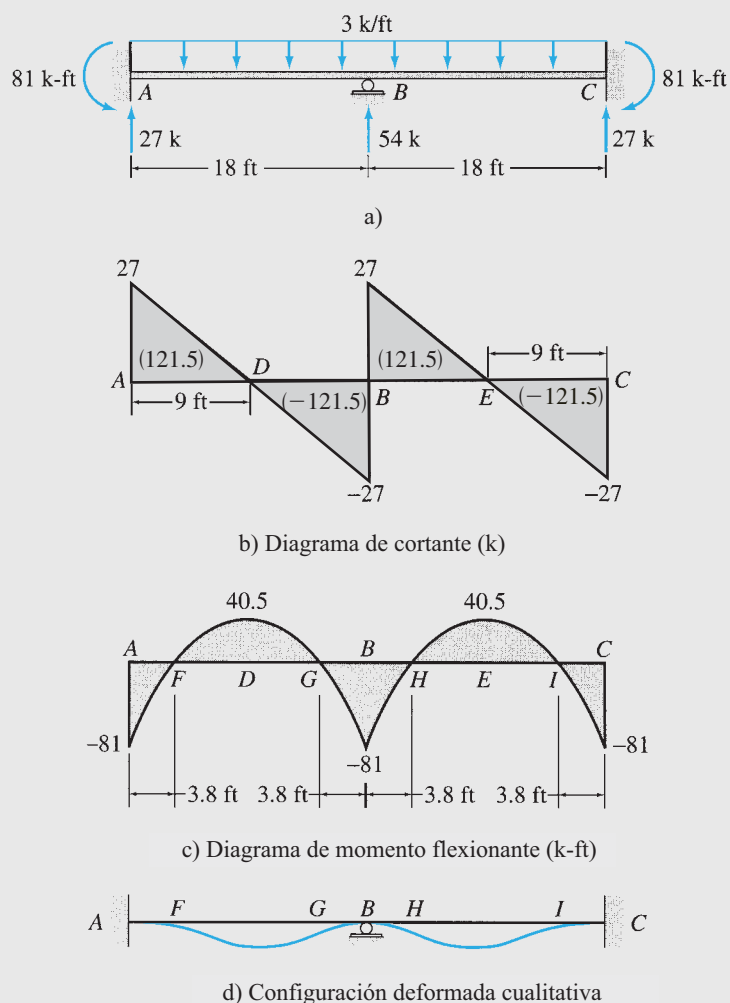
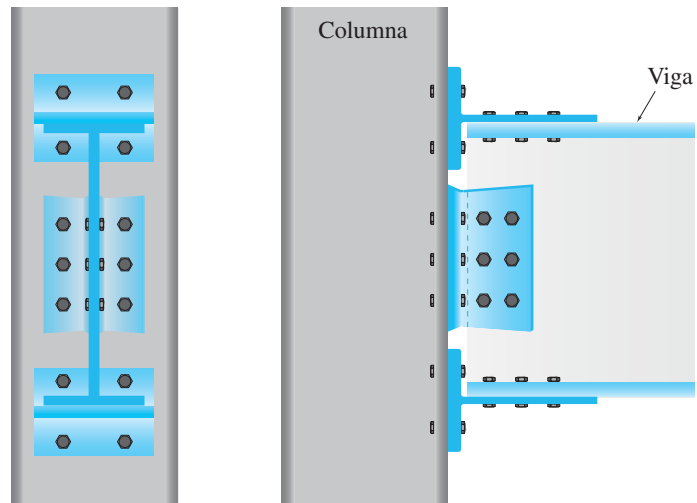


FIG. 5.15

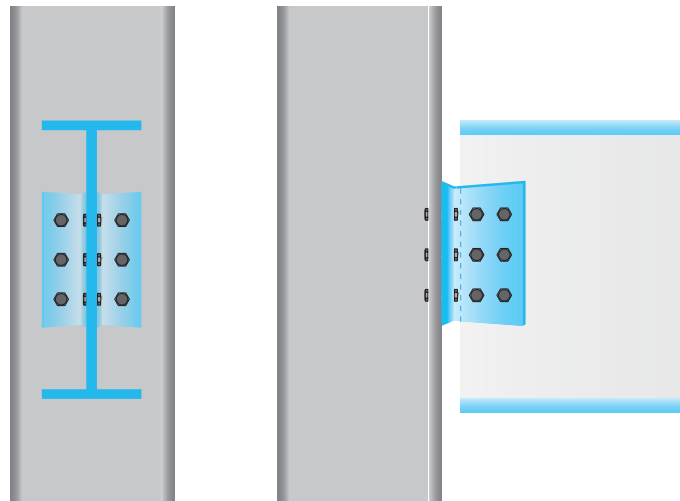
5.5 Determinación estática, indeterminación y estabilidad de marcos planos

Como se describió en la Sección 1.3, los marcos rígidos, referidos usualmente como *marcos*, están compuestos de elementos rectos unidos por conexiones rígidas (resistentes a momento) o conexiones articuladas para formar configuraciones estables. Los elementos de los marcos se conectan por conexiones rígidas, aunque a veces se usan conexiones articuladas (ver Fig. 5.16). Un nodo rígido previene de traslaciones y rotaciones relativas del extremo del elemento conectado a ella, por lo que el nodo es capaz de transmitir dos fuerzas de componentes rectangulares y pares entre los elementos conectados. Bajo la acción de las cargas externas, los elementos de un marco pueden, en general, estar sujetos a momentos de flexión, cortante y tensión o compresión axial.

La combinación (externa e interna) de la determinación estática de marcos se define de manera similar a la de las armaduras. Un marco es considerado *estáticamente determinado* si los momentos de flexión, cortantes y fuerzas axiales en todos sus elementos, además de sus reacciones externas, pueden ser determinados usando las ecuaciones de equilibrio y de condición.



(a) Conexión (rígida) resistente a momento. En esta conexión, los patines superior e inferior y el centro de la viga están conectados a la columna, por lo tanto, previenen la rotación de la viga con respecto a la columna; este tipo de conexión puede transmitir fuerzas así como pares (momentos).



(b) Conexión (flexible) a cortante. En esta conexión solo el centro de la viga está unida a la columna, permitiendo al extremo de la viga rotar con respecto a la columna. Este tipo de conexión puede transmitir fuerzas pero no pares (momentos), y son representadas como articulaciones en los extremos de las vigas para fines de análisis.

FIG. 5.16 Conexión típica atornillada usada en marcos de edificios para conectar vigas a columnas.

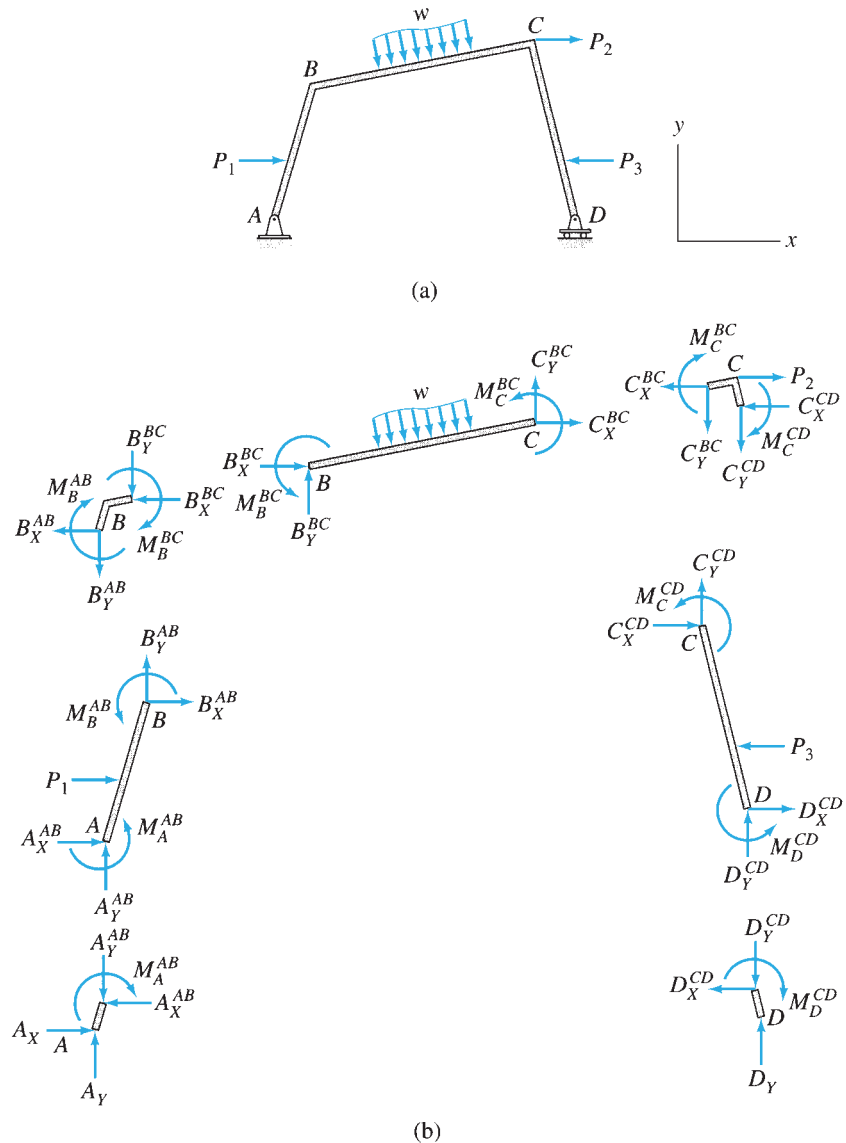


FIG. 5.17

Como el método de análisis que se presenta en la siguiente sección solo puede aplicarse para analizar marcos estáticamente determinados, es importante que el estudiante sea capaz de reconocer los marcos estáticamente determinados antes de proceder con el análisis.

Considere un marco plano sujeto a cargas arbitrarias, como se muestra en la Fig. 5.17(a). El diagrama de cuerpo libre de los tres elementos y de los cuatro nodos del marco aparece en la Fig. 5.17(b). Cada elemento está sujeto, además de a las fuerzas externas, a dos componentes de fuerzas internas y pares internos en cada uno de sus extremos. Por supuesto, el sentido correcto de las fuerzas internas y pares, referidos como *las fuerzas en los extremos de los elementos*, no se conocen antes del análisis y se eligen arbitrariamente. El diagrama de cuerpo libre de los nodos muestra las mismas fuerzas en los extremos del elemento pero en dirección opuesta, de acuerdo con la tercera ley de Newton. El análisis de los marcos involucra la determinación de las

magnitudes de las 18 fuerzas en los extremos de los elementos (seis por elemento) y tres reacciones en los apoyos, A_x , A_y y D_y . Por lo tanto, el número total de incógnitas a determinar es de 21.

Puesto que el marco completo está en equilibrio, cada uno de sus elementos y nodos también lo está. Como se ve en la Fig. 5.17(b), cada elemento y cada nodo está sujeto a un sistema general de fuerzas y pares coplanares, el cual debe satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M = 0$. Como el marco tiene tres elementos y cuatro nodos (más dos conectados a los apoyos), el número total de ecuaciones disponibles es $3(3) + 3(4) = 21$. Estas 21 ecuaciones de equilibrio se pueden resolver para calcular las 21 incógnitas. Las fuerzas en los extremos de los elementos obtenidas de esta manera pueden utilizarse para determinar las cargas axiales, cortantes y momentos flexionantes en varios puntos a lo largo de la longitud de los elementos. El marco de la Fig. 5.17(b) es, por lo tanto, estáticamente determinado.

Las tres ecuaciones de equilibrio del marco completo como cuerpo rígido se pueden escribir y resolver para las tres reacciones desconocidas (A_x , A_y y D_y). Sin embargo, no son independientes de las ecuaciones de equilibrio del elemento y del nodo, y no contienen ninguna información adicional.

Sustentados en la discusión anterior, podemos desarrollar un criterio para la determinación estática, la indeterminación y la inestabilidad de marcos planos cualesquiera que contengan m elementos y j nodos, y soportado por r (número de) reacciones externas. Para el análisis necesitamos determinar $6m$ fuerzas en los elementos y r reacciones externas; es decir, necesitamos calcular un total de $6m + r$ cantidades de incógnitas. Dado que hay m elementos y j nodos y que podemos escribir las tres ecuaciones de equilibrio de cada elemento y cada nodo, el número de ecuaciones disponibles es $3(m + j)$. Además, si un marco contiene articulaciones internas y/o patines internos, estas condiciones internas pueden proporcionar ecuaciones adicionales, las cuales se pueden usar en conjunto para esclarecer las incógnitas. Así, si hay e_c ecuaciones de condición para un marco, el número total de ecuaciones (ecuaciones de equilibrio más ecuaciones de condición) disponibles es $3(m + j) + e_c$. Para un marco, si el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones, es decir,

$$6m + r = 3(m + j) + e_c$$

o

$$3m + r = 3j + e_c$$

entonces todas las incógnitas se pueden determinar resolviendo las ecuaciones de equilibrio y de condición, y el marco es estáticamente determinado. Si un marco tiene más incógnitas que ecuaciones disponibles —es decir, $3m + r > 3j + e_c$ — no se podrán despejar todas las incógnitas con las ecuaciones disponibles, y el marco será estáticamente indeterminado. Los marcos estáticamente indeterminados tienen más elementos y/o reacciones externas que el mínimo requerido para estabilidad. Este exceso de elementos y reacciones se llaman *redundantes*, y el exceso de elementos y reacciones determina el grado de indeterminación estática, i , que puede expresarse como

$$i = (3m + r) - (3j + e_c) \quad (5.15)$$

Un marco, cuyo número de incógnitas es menor que el número de ecuaciones disponibles —es decir, si $3m + r < 3j + e_c$ —, es estáticamente inestable.

Las condiciones para inestabilidad estática, determinación e indeterminación de marcos planos se pueden resumir de la siguiente manera:

$3m + r < 3j + e_c$	Marco estáticamente inestable	
$3m + r = 3j + e_c$	Marco estáticamente determinado	(5.16)
$3m + r > 3j + e_c$	Marco estáticamente indeterminado	

Si se aplica la Ec. (5.16) al extremo del marco unido a un apoyo, así como a cualquier extremo libre, se consideran como nodos. Las condiciones de determinación estática e indeterminación, como en la Ec. (5.16), son necesarias pero no suficientes. Para que estos criterios sean válidos, el arreglo de los elementos, las reacciones de soporte y las articulaciones o patines (si hubiera) internos, debe ser tal que el marco permanezca geoméricamente estable bajo un sistema general coplanar de cargas.

El procedimiento para determinar el número de ecuaciones de condición permanece igual a como se discutió en el Capítulo 3. Recuerde que una articulación interna, dentro de o al final de un elemento, proporciona una ecuación de condición (Fig. 5.18), y un patín o rodillo interno suministra dos de esas ecuaciones. Cuando varios elementos de un marco están conectados a una articulación, el número de ecuaciones de condición para ese nodo es igual al número de elementos conectados a ella menos uno. Por ejemplo, considere una articulación H para el marco de la Fig. 5.19. Como una articulación no puede transmitir momento, los momentos en el extremo H de los elementos EH , GH y HI conectados en el nodo deben ser cero; es decir, $M_H^{EH} = 0$, $M_H^{GH} = 0$, y $M_H^{HI} = 0$. Sin embargo, estas tres ecuaciones no son independientes en el sentido que si dos de las tres ecuaciones son satisfechas junto con la ecuación de equilibrio de momento para el nodo H , la ecuación restante será automáticamente satisfecha, por lo tanto, el nodo articulado H proporciona dos ecuaciones de condición independientes.



FIG. 5.18 Las conexiones de cortante en los extremos de la viga se tratan como articulaciones internas para el análisis.

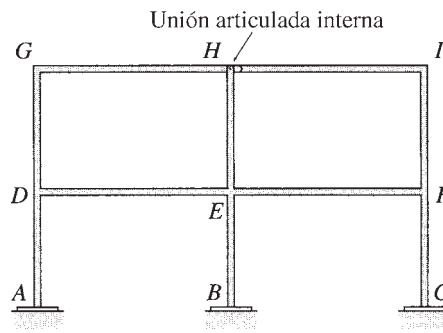
(a) Conexiones a cortante viga-columna



FIG. 5.18 (Continuación)

Instituto Americano de Construcción de Acero.
Reproducido con permiso. Todos los derechos reservados

(b) Conexión a cortante viga a viga



Se pueden elegir dos condiciones cualesquiera de las siguientes:

$$M_H^{EH} = 0, \quad M_H^{GH} = 0, \quad M_H^{HI} = 0$$

FIG. 5.19

Empleando un razonamiento similar, se puede mostrar que un nodo-patín o rodillo interno provee las ecuaciones de condición cuyo número es igual a $2 \times (\text{número de elementos conectados al nodo} - 1)$.

Enfoque alternativo

Un enfoque alternativo para establecer el grado de indeterminación estática de un marco es el de cortar suficientes elementos del marco pasando secciones imaginarias y/o removiendo apoyos suficientes para hacer a la estructura estáticamente determinada. El número total de las restricciones internas y externas eliminadas iguala el grado de indeterminación estática. Como un ejemplo, considere el marco que se muestra en la Fig. 5.20(a). El marco

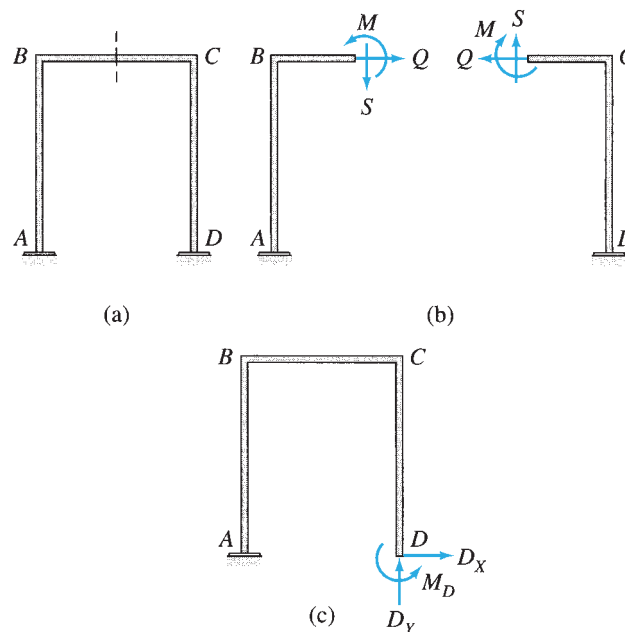


FIG. 5.20

puede hacerse estáticamente determinado pasando una sección imaginaria a través de la viga BC , con lo que se eliminan tres restricciones internas (la fuerza axial Q , el cortante S y el momento de flexión M), como se aprecia en la Fig. 5.20(b). Note que las dos estructuras en cantiliver así generadas son tanto estáticamente determinadas como geoméricamente estables. Debido a que estas tres restricciones (Q , S y M) se eliminaron de la indeterminación estática original del marco de la Fig. 5.20(a) para obtener el marco estáticamente determinado de la Fig. 5.20(b), el grado de indeterminación estática del marco original es tres. Hay muchas opciones posibles respecto de las restricciones que pueden eliminarse de una estructura estáticamente indeterminada para hacerla estáticamente determinada. Por ejemplo, el marco de la Fig. 5.20(a) puede, alternativamente, hacerse estáticamente determinado si se desconecta del apoyo empotrado D , como se muestra en la Fig. 5.20(c). Ya que tres restricciones externas o reacciones, D_x , D_y y M_D , deben ser eliminadas en este proceso, el grado de indeterminación estática del marco es tres, como se concluyó anteriormente.

Este enfoque alternativo para establecer el grado de indeterminación (en lugar de aplicar la Ec. (5.15)) proporciona la manera más conveniente de determinar el grado de indeterminación estática de marcos de edificios de varios niveles. Como ejemplo de tales marcos se expone la Fig. 5.21(a). La estructura se puede hacer fácilmente estáticamente determinada pasando secciones imaginarias a través de cada viga en el marco, como se muestra en la Fig. 5.21(b). Debido a que cada corte quita tres restricciones, el número total de restricciones que debe eliminarse para hacer la estructura estáticamente determinada es igual a tres veces el número de vigas en el marco. Así, el grado de indeterminación estática de un marco de varios niveles con apoyos empotrados es igual a tres veces el número de vigas, con la condición de que el marco no contenga ninguna articulación interna o rodillos.

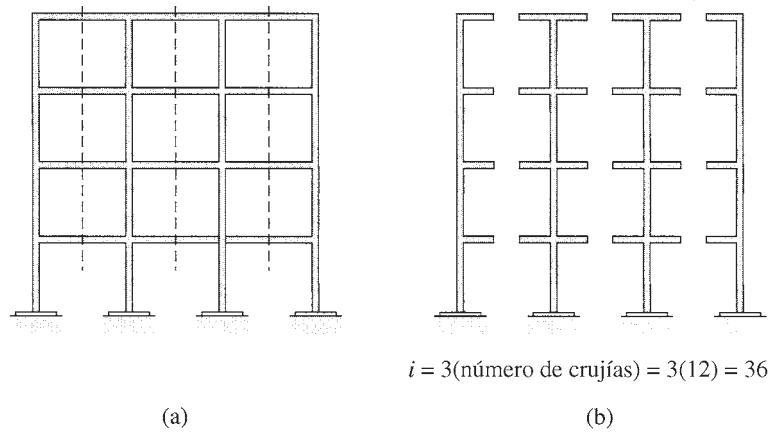
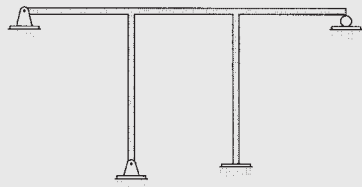


FIG. 5.21

Ejemplo 5.12

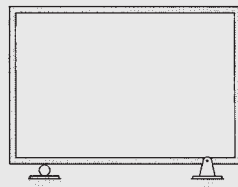
Verifique que cada marco plano que aparece en la Fig. 5.22 es estáticamente indeterminado, y establezca su grado de indeterminación estática.



$$m = 5 \quad j = 6 \quad r = 8 \quad e_c = 0$$

$$3m + r > 3j + e_c$$

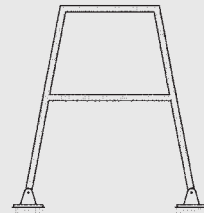
a) Estáticamente indeterminada ($i = 5$)



$$m = 4 \quad j = 4 \quad r = 3 \quad e_c = 0$$

$$3m + r > 3j + e_c$$

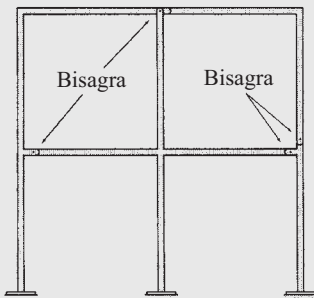
b) Estáticamente indeterminada ($i = 3$)



$$m = 6 \quad j = 6 \quad r = 4 \quad e_c = 0$$

$$3m + r > 3j + e_c$$

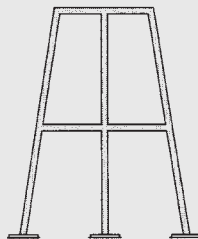
c) Estáticamente indeterminada ($i = 4$)



$$m = 10 \quad j = 9 \quad r = 9 \quad e_c = 5$$

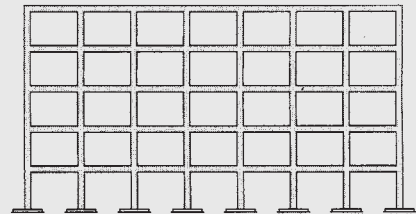
$$3m + r > 3j + e_c$$

d) Estáticamente indeterminada ($i = 7$)



$$i = 3 (\text{número de crujeas}) = 3(4) = 12$$

e)



$$i = 3 (\text{número de crujeas}) = 3(35) = 105$$

f)

FIG. 5.22

Solución

Ver de la Fig. 5.22(a) a la (f).

5.6 Análisis de marcos planos

El siguiente procedimiento, paso a paso, se puede emplear para determinar las fuerzas en los extremos del elemento así como el cortante, el momento flexionante y las cargas axiales en elementos de marcos planos estáticamente determinados.

1. Revise la indeterminación estática. Usando el procedimiento descrito en la sección anterior, defina si el marco dado es o no estáticamente determinado. Si el marco es estáticamente determinado proceda al paso 2. De otra manera, termine el análisis en esta etapa. (El análisis de marcos estáticamente indeterminados se considera en la Parte Tres de este texto).
2. Determine las reacciones en los apoyos. Dibuje el diagrama de cuerpo libre del marco completo, y determine las reacciones aplicando las ecuaciones de equilibrio y cualquier ecuación de condición que pueda ser escrita en términos solo de las reacciones externas (sin involucrar ninguna fuerza interna). Para algunos marcos inestables internamente, pueden expresarse todas las ecuaciones de condición exclusivamente en términos de las reacciones externas, por lo tanto, es posible determinar todas las reacciones. Sin embargo, algunas reacciones de tales estructuras se pueden calcular generalmente usando las ecuaciones disponibles.
3. Establezca las fuerzas en los extremos. Es conveniente especificar la dirección de las fuerzas desconocidas en los extremos de los elementos del marco usando un sistema común (o global) de coordenadas XY , con los ejes X y Y orientados en dirección horizontal (positivo a la derecha) y vertical (positivo hacia arriba), respectivamente. Dibuje los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos y nodos de la estructura. Estos diagramas deben mostrar, además de cualquier carga externa y reacciones en los apoyos, todas las fuerzas externas ejercidas sobre el elemento o el nodo. Recuerde que un nodo rígido puede transmitir dos componentes de fuerza y un par, una articulación transmite dos componentes de la fuerza, y un patín o rodillo solo puede transmitir un componente de la fuerza. Si hay una articulación en el extremo del elemento, el momento interno en ese extremo deberá ser igual a cero. Cualquier carga que actúe en un nodo deberá indicarse en el diagrama de cuerpo libre del nodo y no en el extremo de los elementos conectados al nodo. El sentido de las fuerzas actuantes en el extremo del elemento no es conocido y puede suponerse arbitrariamente. Sin embargo, es más conveniente asumir el sentido de las fuerzas en los extremos del elemento en la dirección positiva de X y Y y los momentos desconocidos en el sentido de las manecillas del reloj. El sentido de las fuerzas internas y de los pares en el diagrama de cuerpo libre del nodo deben señalarse en dirección opuesta a la asumida en los extremos del elemento de acuerdo con la tercera ley de Newton. Calcule las fuerzas en el extremo del elemento como sigue:
 - a. Seleccione un elemento o nodo con tres o menos incógnitas.
 - b. Determine las fuerzas y momentos desconocidos aplicando las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$) del cuerpo libre del elemento o nodo seleccionado en el paso 3(a).

- c. Si se han determinado todas las fuerzas, momentos y reacciones, entonces proceda con el paso 3(d). De otra manera, regrese al paso 3(a).
 - d. Debido a que las reacciones fueron calculadas en el paso 2 con las ecuaciones de equilibrio y condición de la estructura completa, solo habrá algunas ecuaciones no utilizadas hasta el momento. El número de ecuaciones restantes debe ser igual al número de reacciones calculadas en el paso 2. Use estas ecuaciones restantes para verificar los cálculos. Si el análisis se realizó adecuadamente, las ecuaciones restantes deberán ser satisfechas.
- En algunos tipos de marcos no es posible identificar un elemento o nodo que tenga un número de incógnitas igual o menor al número de ecuaciones de equilibrio para empezar o continuar el análisis. En tales casos es necesario escribir las ecuaciones de equilibrio en términos de las incógnitas para dos o más cuerpos libres y resolver las ecuaciones simultáneamente para determinar las fuerzas y momentos desconocidos.
4. Para cada elemento del marco, dibuje el diagrama de cortante, de momento flexionante y de carga axial como sigue:
 - a. Seleccione el elemento (local) con sistema de coordenadas xy , con origen en cada extremo y eje x en dirección del eje longitudinal del mismo. La dirección positiva de y determinará, de acuerdo con el sistema de coordenadas, que cumpla con la regla de la mano derecha y el eje z que apunte hacia afuera del plano del papel.
 - b. Determine todas las cargas externas, reacciones y fuerzas en los extremos que actúan en el elemento en componentes de fuerzas en dirección x y y (es decir, en direcciones paralela y perpendicular al eje del elemento). Establezca la carga axial total (resultante) y cortante en cada extremo del elemento con la sumatoria algebraica de las componentes x y la componente y , respectivamente, de las fuerzas actuantes en cada extremo del elemento.
 - c. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante del elemento usando el procedimiento descrito en la Sección 5.4. Este procedimiento se puede aplicar a elementos no horizontales considerando el extremo del elemento en donde se localiza el origen del sistema coordenado xy como el extremo izquierdo del elemento (con el eje x apuntando hacia la derecha) y el eje positivo y apuntando en dirección ascendente.
 - d. Dibuje el diagrama de carga axial que muestre la variación de la carga axial a lo largo de la longitud del elemento. Este diagrama puede realizarse con el método de las secciones. Procediendo en la dirección x positiva del extremo del elemento en donde está localizado el origen del sistema coordenado xy , se pasan secciones después de cada cambio de carga a lo largo de la longitud del elemento para determinar la fuerza axial en términos de x . De acuerdo con la convención de signos adoptada en la Sección 5.1, las cargas externas que actúan en la dirección negativa de x (generando tensión en la sección) se consideran positivas. Los valores de las fuerzas axiales determinados por estas ecuaciones son graficados como ordenadas en x para obtener el diagrama de carga axial.

- Trace la configuración deformada del marco. Usando el diagrama de momento flexionante dibujado en el paso 4, dibuje la configuración deformada de cada elemento del marco. La configuración deformada del marco completo se obtiene uniendo la configuración deformada de cada elemento individual en los nodos, de manera que los ángulos originales entre los elementos de nodos rígidos se mantengan y las condiciones de apoyo se cumplan.

Se debe notar que el diagrama de momento flexionante, realizado con el procedimiento descrito en el paso 4(c), siempre mostrará los momentos en el *lado de compresión* de los elementos. Por ejemplo, a lo largo de un elemento vertical, si su lado izquierdo está en compresión, entonces el valor del momento en ese punto aparecerá del lado izquierdo. Dado que el lado del elemento donde aparece el momento indica la dirección de este, no es necesario usar el signo de más o de menos en los diagramas de momento. Cuando se diseñan los marcos de concreto reforzado, los diagramas de momento a veces se dibujan del lado de la tensión del elemento para facilitar la ubicación de las barras de acero y reforzar el concreto en la zona donde la tensión es débil. Un diagrama de momento del lado de tensión se puede obtener simplemente invirtiendo (es decir, rotando 180° alrededor del eje del elemento) el diagrama correspondiente de momento del lado de compresión. En este texto solo se consideran los diagramas de momento del lado de compresión.

Ejemplo 5.13

Dibuje los diagramas de cortante, de momento flexionante y de fuerza axial, además de la configuración deformada del marco que se muestra en la Fig. 5.23(a).

Solución

Determinación estática. $m = 3, j = 4, r = 3$, y $e_c = 0$. Debido a que $3m + r = 3j + e_c$ y a que el marco es geoméricamente estable, es estáticamente determinado.

Reacciones. Considerando el equilibrio del marco completo (Fig. 5.23(b)), observamos que para satisfacer $\sum F_x = 0$, la reacción de la componente A_x debe actuar a la izquierda con la magnitud de 18 k para balancear la carga horizontal de 18 k a la izquierda. Por lo tanto,

$$A_x = -18 \text{ k} \quad A_x = 18 \text{ k} \leftarrow$$

Calculamos las dos reacciones restantes aplicando las dos ecuaciones de equilibrio de la siguiente forma:

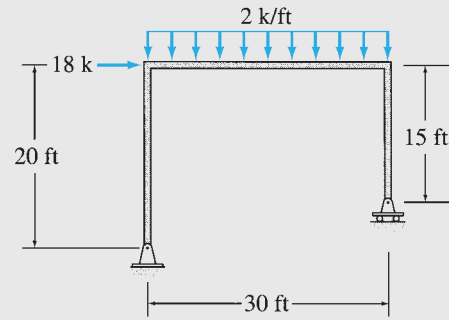
$$\begin{aligned} + \curvearrowright \sum M_A &= 0 & -18(20) - 2(30)(15) + D_y(30) &= 0 & D_y &= 42 \text{ k} \uparrow \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & A_y - 2(30) + 42 &= 0 & A_y &= 18 \text{ k} \uparrow \end{aligned}$$

Fuerza en los extremos de los elementos. Los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos y los nodos del marco aparecen en la Fig. 5.23(c). Podemos empezar el cálculo de las fuerzas internas en el nodo A o en el nodo D, ambos tienen tres incógnitas.

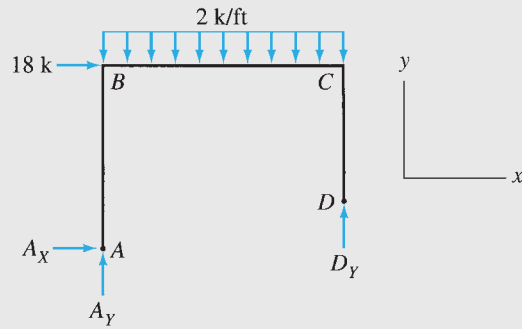
Nodo A. Empezando con el nodo A, podemos ver del diagrama de cuerpo libre que para satisfacer $\sum F_x = 0$, A_x^{AB} debe actuar a la derecha con una magnitud de 18 k a la izquierda. Por lo tanto,

$$A_x^{AB} = -18 \text{ k}$$

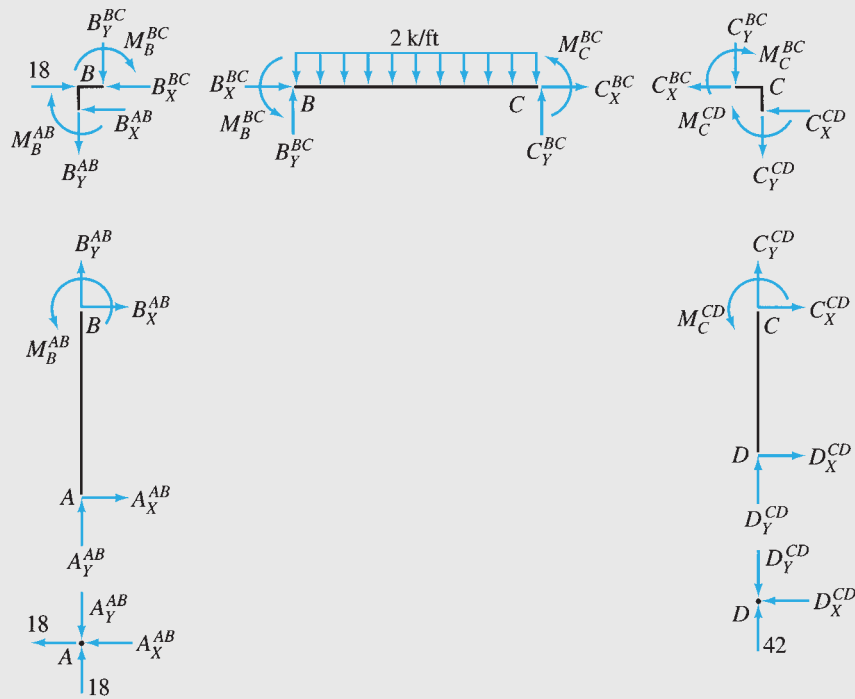
continúa



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.23

continúa

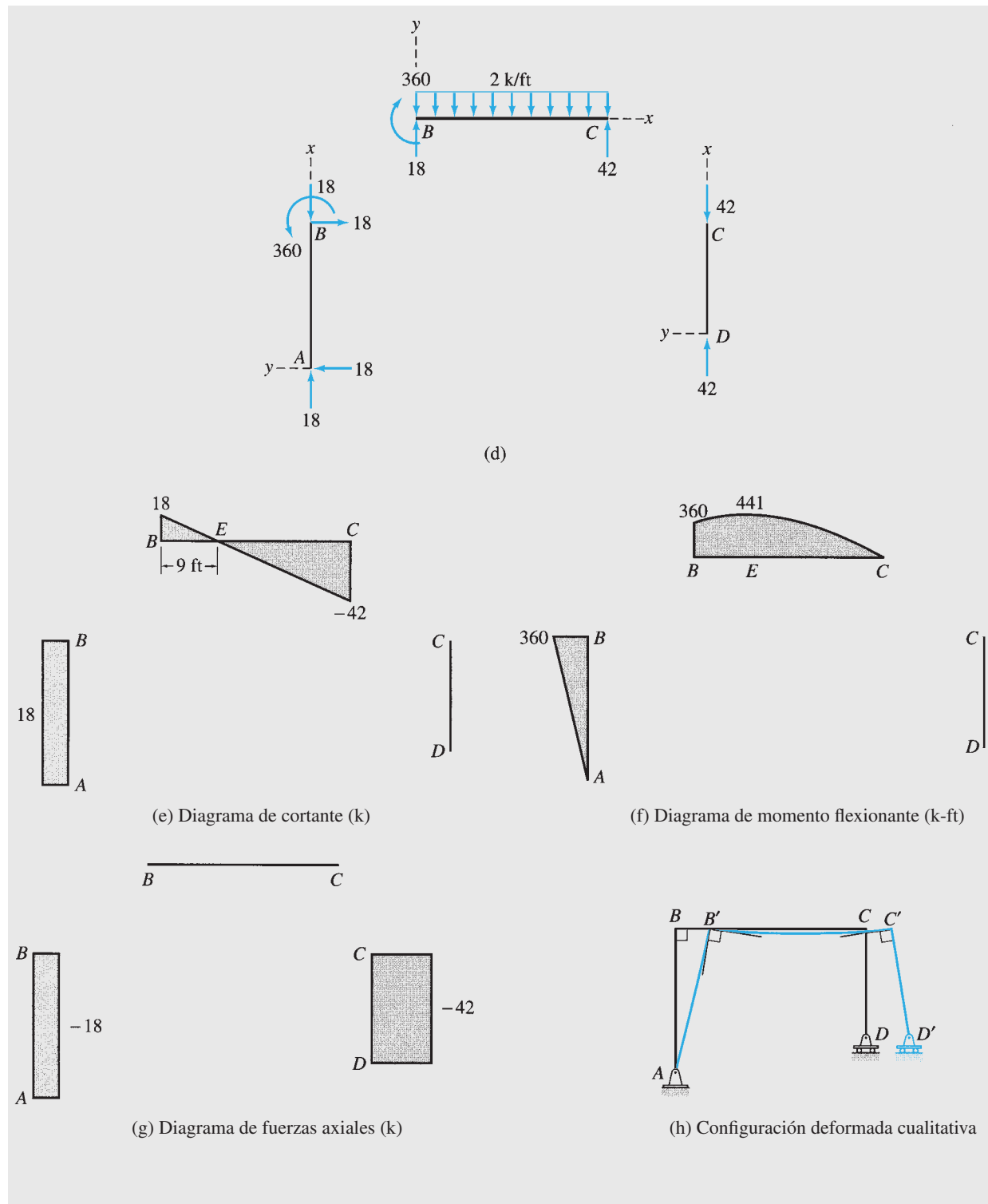


FIG. 5.23 (cont.)

De manera similar, aplicando $\sum F_y = 0$, obtenemos

$$A_Y^{AB} = 18 \text{ k}$$

Elemento AB. Con las magnitudes de A_X^{AB} y A_Y^{AB} conocidas, el elemento AB tiene tres incógnitas B_X^{AB} , B_Y^{AB} , y M_B^{AB} , las cuales se encuentran aplicando $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M_A = 0$. Por lo tanto,

$$B_X^{AB} = 18 \text{ k} \quad B_Y^{AB} = -18 \text{ k} \quad M_B^{AB} = 360 \text{ k-ft}$$

Nodo B. Procediendo con el nodo B y considerando su equilibrio, obtenemos

$$B_X^{BC} = 0 \quad B_Y^{BC} = 18 \text{ k} \quad M_B^{BC} = -360 \text{ k-ft}$$

Elemento BC. Después, considerando el equilibrio del elemento BC, escribimos

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & C_X^{BC} &= 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & 18 - 2(30) + C_Y^{BC} &= 0 & C_Y^{BC} &= 42 \text{ k} \\ + \curvearrowright \sum M_B &= 0 & -360 - 2(30)(15) + 42(30) + M_C^{BC} &= 0 & M_C^{BC} &= 0 \end{aligned}$$

Nodo C. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$C_X^{CD} = 0 \quad C_Y^{CD} = -42 \text{ k} \quad M_C^{CD} = 0$$

Elemento CD. Aplicando $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$, resulta

$$D_X^{CD} = 0 \quad D_Y^{CD} = 42 \text{ k}$$

Ya que todas las fuerzas y momentos se determinaron, revisaremos nuestros cálculos usando la tercera ecuación de equilibrio para el elemento CD.

$$+ \curvearrowright \sum M_D = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Nodo D. (Revisión de cálculos)

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 \quad 42 - 42 = 0 \end{aligned} \quad \text{Comprobación}$$

Diagrama de cortante. El sistema coordenada xy seleccionado para los tres elementos del marco se muestra en la Fig. 5.23(d), y el diagrama de cortante para los elementos (procedimiento descrito en la Sección 5.4) aparece en la Fig. 5.23(e). Respuesta

Diagrama de momento flexionante. Los diagramas de momento flexionante de los tres elementos del marco se muestran en la Fig. 5.23(f).

Diagrama de carga axial. En el diagrama de cuerpo libre del elemento AB de la Fig. 5.23(d), observamos que la fuerza axial a través de toda la longitud del elemento es de compresión, y tiene una magnitud 18 k. Por lo tanto, el diagrama de fuerza axial de este elemento es una línea recta paralela al eje x con un valor de -18 k , como se ve en la Fig. 5.23(g). De manera similar, se aprecia en la Fig. 5.23(d) que la fuerza axial en los elementos BC y CD también son constantes, con magnitudes de 0 y -42 k , respectivamente. Los diagramas de fuerza axial contruidos de esta manera para estos elementos se muestran en la Fig. 5.23(g). Respuesta

Configuración deformada cualitativa. En los diagramas de momento flexionante de los elementos del marco (Fig. 5.23(f)), observamos que los elementos AB y BC se flexionan cóncavos hacia la izquierda y cóncavo hacia arriba, respectivamente. Como no se presenta momento flexionante en el elemento CD, este no se flexiona y permanece recto. La configuración deformada del marco que se obtuvo al unir las configuraciones deformadas de cada elemento en los nodos se muestra en la Fig. 5.23(h). Como se ve en esta figura, la deflexión del marco en el apoyo A es cero. Debido a la carga horizontal en B, el nodo B se deforma hacia la derecha a B' . Así también, como la deformación axial de los elementos no se toma en cuenta y las deformaciones por flexión se asumen pequeñas, el nodo B se deforma solo en la dirección horizontal, y el nodo C se deforma en la misma cantidad que el nodo B; es decir, $BB' = CC'$. Tenga en cuenta que la curvatura de los elementos es consistente con los diagramas de momento flexionante y que los ángulos originales de 90° entre los elementos en los nodos rígido B y C se mantienen. Respuesta

Ejemplo 5.14

Dibuje los diagramas de cortante, de momento flexionante y de fuerza axial, además de la configuración deformada del marco que se muestra en la Fig. 5.24(a).

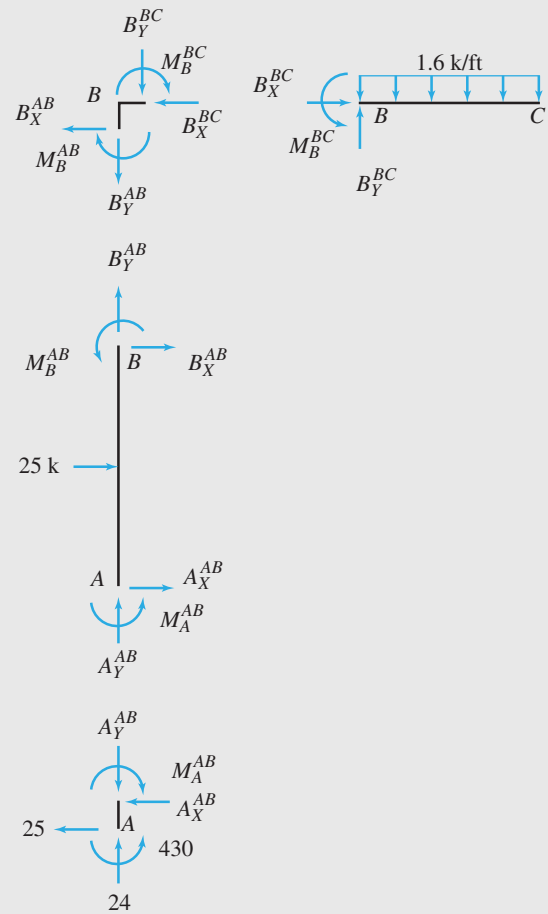
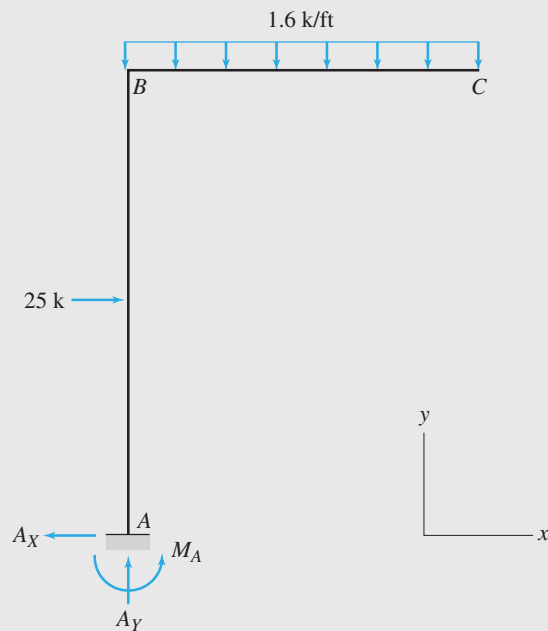
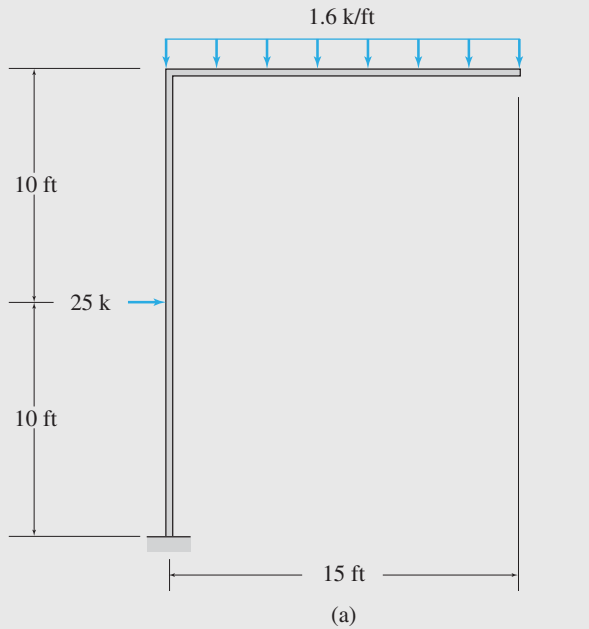


FIG. 5.24

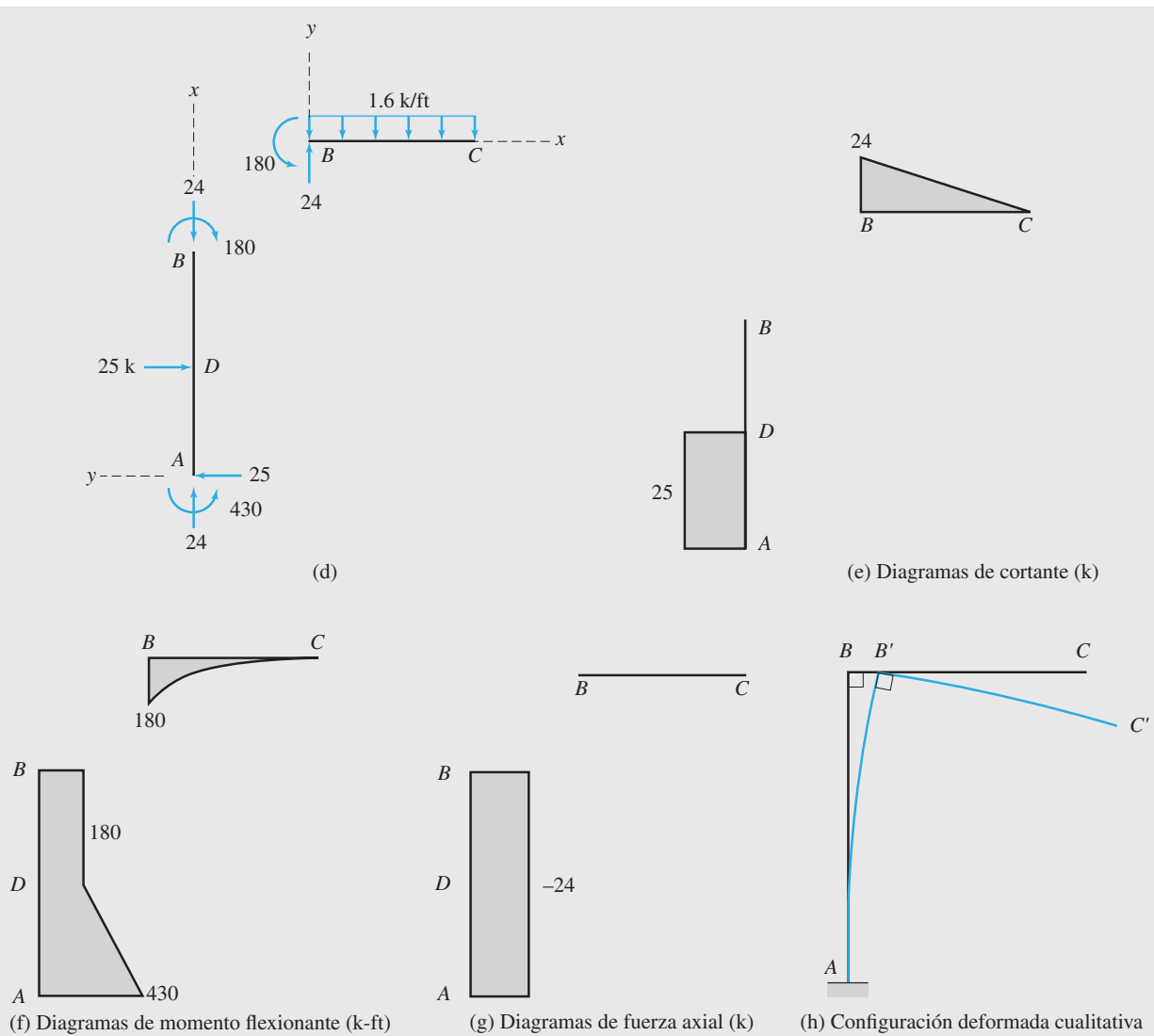


FIG. 5.24 (cont.)

Solución

Determinación estática. $m = 2$, $j = 3$, $r = 3$ y $e_c = 0$. Debido a que $3m + r = 3j + e_c$ y el marco es geoméricamente estable y estáticamente determinado.

Reacciones. (Ver Fig. 5.24 (b)).

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 \\
 -A_x + 25 &= 0 & A_x &= 25 \text{ k} \leftarrow \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 A_y - 1.6(15) &= 0 & A_y &= 24 \text{ k} \uparrow \\
 + \curvearrowright \sum M_A &= 0 \\
 M_A - 25(10) - 1.6(15)(7.5) &= 0 & M_A &= 430 \text{ k-ft} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Fuerzas en los extremos de los elementos. (Ver Fig. 5.24(c)).

Nodo A. Aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_A = 0$, tenemos

$$A_X^{AB} = -25 \text{ k} \quad A_Y^{AB} = 24 \text{ k} \quad M_A^{AB} = 430 \text{ k-ft}$$

Elemento AB. Después, considerando el equilibrio del elemento AB, resulta

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_X &= 0 & -25 + 25 + B_X^{AB} &= 0 & B_X^{AB} &= 0 \\ + \uparrow \sum F_Y &= 0 & 24 + B_Y^{AB} &= 0 & B_Y^{AB} &= -24 \text{ k} \\ + \curvearrowright \sum M_B &= 0 & 430 - 25(10) + M_B^{AB} &= 0 & M_B^{AB} &= -180 \text{ k-ft} \end{aligned}$$

Nodo B. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$B_X^{BC} = 0 \quad B_Y^{BC} = 24 \text{ k} \quad M_B^{BC} = 180 \text{ k-ft}$$

Elemento BC. (Comprobación de cálculos)

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_X &= 0 \\ + \uparrow \sum F_Y &= 0 & 24 - 1.6(15) &= 0 \\ + \curvearrowright \sum M_B &= 0 & 180 - 1.6(15)(7.5) &= 0 \end{aligned}$$

Comprobación

Comprobación

Comprobación

Las fuerzas en los extremos de los elementos se muestran en la Fig. 5.24(d)

Diagrama de cortante. (Ver Fig. 5.24(e))

Respuesta

Diagrama de momento flexionante. (Ver Fig. 5.24(f))

Respuesta

Diagrama de fuerza axial. (Ver Fig. 5.24(g))

Respuesta

Configuración deformada cualitativa. (Ver Fig. 5.24(h))

Respuesta

Ejemplo 5.15

Un marco de dos aguas está sujeto a carga de nieve, como se muestra en la Fig. 5.25(a). Dibuje los diagramas de cortante, momento flexionante, carga axial y configuración deformada cualitativa del marco.

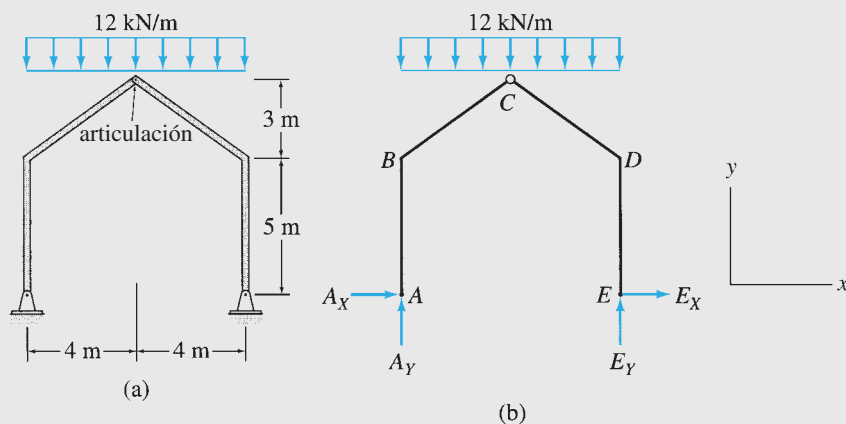
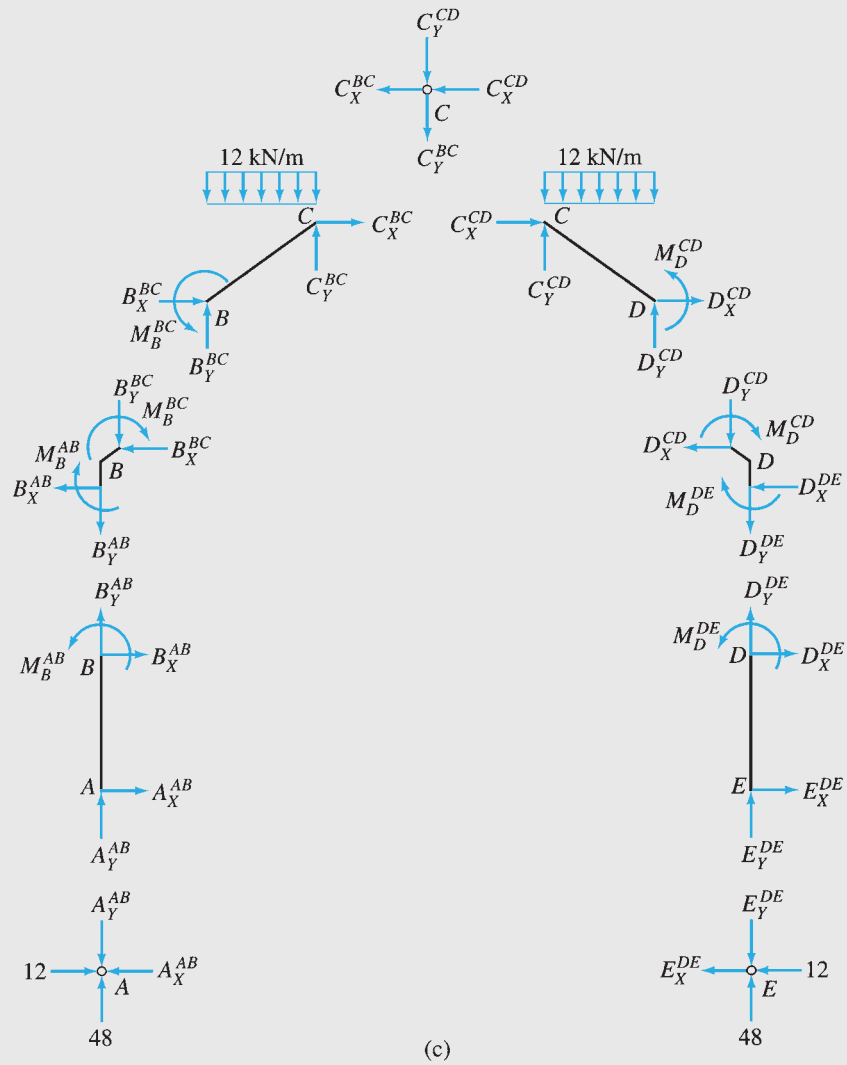
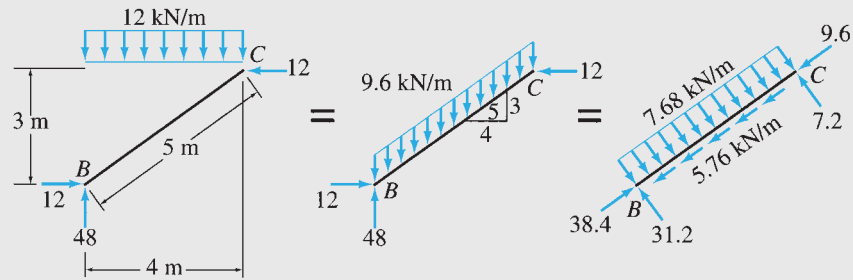


FIG. 5.25

continúa



(c)



(d)

FIG. 5.25 (cont.)

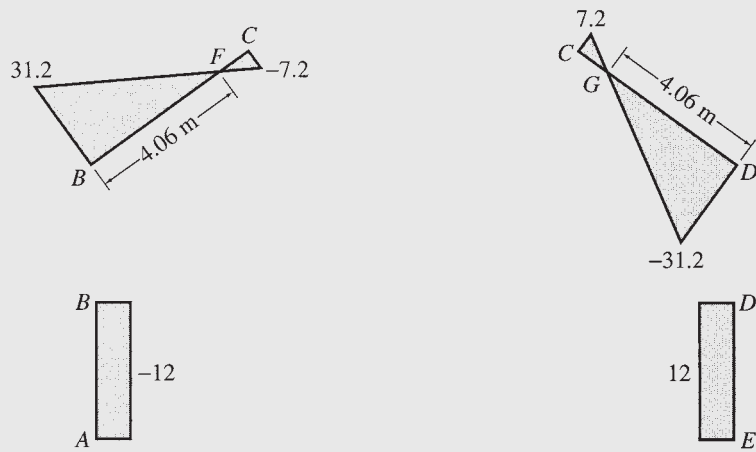
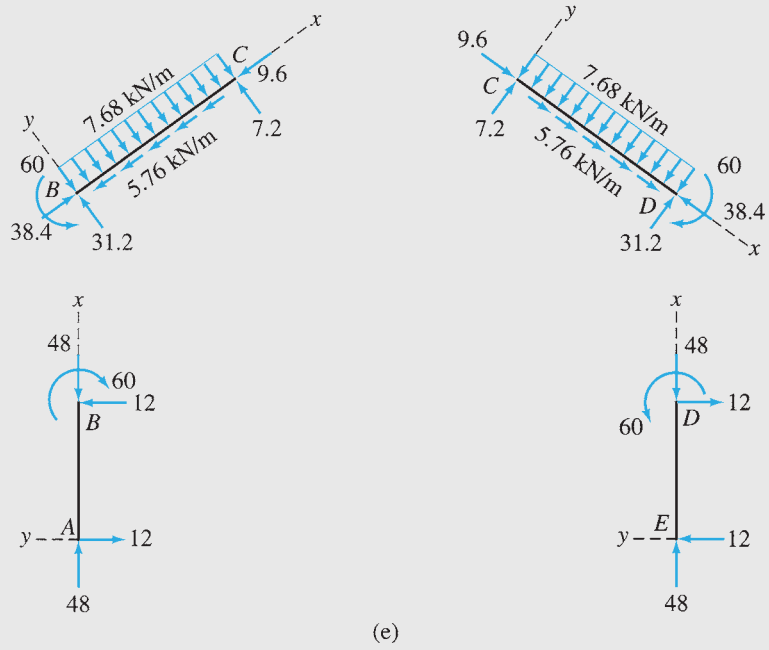


FIG. 5.25 (cont.)

f) Diagramas de cortante (kN)

Reacciones. (Ver Fig. 5.25(b))

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_E &= 0 \\
 -A_y(8) + 12(8)(4) &= 0 & A_y &= 48 \text{ kN } \uparrow \\
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 48 - 12(8) + E_y &= 0 & E_y &= 48 \text{ kN } \uparrow \\
 + \zeta \sum M_C^{AC} &= 0 \\
 A_x(8) - 48(4) + 12(4)(2) &= 0 & A_x &= 12 \text{ kN } \rightarrow \\
 + \rightarrow \sum F_X &= 0 \\
 12 + E_x &= 0 \\
 E_x &= -12 \text{ kN} & E_x &= 12 \text{ kN } \leftarrow
 \end{aligned}$$

Fuerzas en los extremos de los elementos. (Ver Fig. 5.25(c))

Nodo A. Aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$, obtenemos

$$A_X^{AB} = 12 \text{ kN} \quad A_Y^{AB} = 48 \text{ kN}$$

Elemento AB. Considerando el equilibrio del elemento AB, conseguimos

$$B_X^{AB} = -12 \text{ kN} \quad B_Y^{AB} = -48 \text{ kN} \quad M_B^{AB} = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Nodo B. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$B_X^{BC} = 12 \text{ kN} \quad B_Y^{BC} = 48 \text{ kN} \quad M_B^{BC} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Elemento BC.

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_X &= 0 & C_X^{BC} &= -12 \text{ kN} \\
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 48 - 12(4) + C_Y^{BC} &= 0 & C_Y^{BC} &= 0 \\
 + \zeta \sum M_B &= 0 \\
 60 - 12(4)(2) + 12(3) &= 0
 \end{aligned}$$

Comprobación

Nodo C. Considerando el equilibrio del nodo C, determinamos

$$C_X^{CD} = 12 \text{ kN} \quad C_Y^{CD} = 0$$

Elemento CD.

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_X &= 0 & D_X^{CD} &= -12 \text{ kN} \\
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 -12(4) + D_Y^{CD} &= 0 & D_Y^{CD} &= 48 \text{ kN} \\
 + \zeta \sum M_D &= 0 \\
 -12(3) + 12(4)(2) + M_D^{CD} &= 0 & M_D^{CD} &= 60 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Nodo D. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$D_X^{DE} = 12 \text{ kN} \quad D_Y^{DE} = -48 \text{ kN} \quad M_D^{DE} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

continúa

Elemento DE.

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad E_X^{DE} = -12 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad E_Y^{DE} = 48 \text{ kN}$$

$$+ \zeta \sum M_E = 0$$

$$60 - 12(5) = 0$$

Comprobación**Nodo E.**

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad -12 + 12 = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 48 - 48 = 0$$

Carga distribuida en elemento inclinado. Como la carga de nieve de 12 kN/m se especifica por metro de manera horizontal, es necesario resolverla en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección del elemento *BC* y *CD*. Considere, por ejemplo, el elemento *BC*, como se muestra en la Fig. 5.25(d). La carga total actuante en este elemento es de (12 kN/m)(4 m) = 48 kN. Dividiendo esta carga total vertical entre la longitud del elemento, obtenemos la intensidad de la carga vertical distribuida por metro a lo largo de la longitud inclinado del elemento como 48/5 = 9.6 kN/m. La componente de esta carga vertical en la dirección paralela y perpendicular al eje del elemento resulta (3/5)(9.6) = 5.76 kN/m y (4/5)(9.6) = 7.68 kN/m, respectivamente, como se muestra en la Fig. 5.25(d). La carga distribuida para el elemento *CD* se calcula de manera similar y se muestra en la Fig. 5.25(e).

Diagrama de cortante y momento flexionante. Ver la Fig. 2.25(f) y (g).

Diagrama de carga axial. Las ecuaciones para la carga axial en los elementos del marco son:

$$\text{Elemento } AB \quad Q = -48$$

$$\text{Elemento } BD \quad Q = -38.4 + 5.76x$$

$$\text{Elemento } CD \quad Q = -9.6 + 5.76x$$

$$\text{Elemento } DE \quad Q = -48$$

Los diagramas de carga axial se muestran en la Fig. 5.25(h).

Respuesta

Configuración deformada cualitativa. Ver la Fig. 5.25(i).

Respuesta

Resumen

En este capítulo, aprendimos que la fuerza axial interna en cualquier sección de un elemento es igual en magnitud, pero de dirección opuesta, a la sumatoria algebraica de las componentes en la dirección paralela al eje del elemento de todas las fuerzas externas y reacciones que actúan a cada lado de la sección. Consideramos positivas a las fuerzas externas cuando tienden a tensio-nar al elemento. El cortante en cualquier sección del elemento es igual en magnitud, pero de dirección opuesta, a la sumatoria algebraica de las compo-nentes, en la dirección perpendicular al eje del elemento, de todas las cargas externas y reacciones que actúan a cada lado de la sección. Lo tenemos como positivo cuando las cargas externas tienden a empujar la parte del elemento del lado izquierdo de la sección hacia arriba con relación a la parte derecha. El momento flexionante en cualquier sección es igual en magnitud, pero de dirección opuesta, a la sumatoria algebraica de los momentos alrededor de la sección de todas las cargas externas y reacciones que actúan a cada lado de la sección. El momento flexionante es positivo cuando las fuerzas externas y

pares tienden a flexionar el elemento cóncavo hacia arriba, generando compresión en las fibras superiores y tensión en las fibras inferiores de la sección.

Los diagramas de cortante, de momento flexionante y de carga axial muestran la variación de estas cantidades a lo largo de la longitud del elemento. Los diagramas se pueden construir o dibujar trazando las ecuaciones que expresan los esfuerzos resultantes en términos de la distancia de la sección al extremo del elemento. La elaboración de los diagramas de cortante y momento flexionante se agilizan mediante la aplicación de las relaciones existentes entre cargas, cortantes y momentos de flexión:

$$\begin{array}{l} \text{pendiente del diagrama de} \\ \text{cortante en cualquier punto} \end{array} = \begin{array}{l} \text{intensidad de la carga} \\ \text{distribuida en cualquier punto} \end{array} \quad (5.3)$$

$$\begin{array}{l} \text{el cambio del cortante entre} \\ \text{los puntos } A \text{ y } B \end{array} = \begin{array}{l} \text{el área bajo el diagrama de} \\ \text{carga distribuida entre los} \\ \text{puntos } A \text{ y } B \end{array} \quad (5.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{cambio del cortante en el} \\ \text{punto de aplicación de la} \\ \text{carga concentrada} \end{array} = \begin{array}{l} \text{a la magnitud de} \\ \text{la carga concentrada} \end{array} \quad (5.12)$$

$$\begin{array}{l} \text{la pendiente del diagrama de} \\ \text{momentos en cualquier punto} \end{array} = \begin{array}{l} \text{el cortante en cualquier punto} \end{array} \quad (5.8)$$

$$\begin{array}{l} \text{cambio del momento de} \\ \text{flexión entre los puntos } A \text{ y } B \end{array} = \begin{array}{l} \text{el área bajo el diagrama de} \\ \text{cortante entre los puntos } A \text{ y } B \end{array} \quad (5.10)$$

$$\begin{array}{l} \text{cambio del momento} \\ \text{de flexión en el punto de} \\ \text{aplicación de un par} \end{array} = \begin{array}{l} \text{a la magnitud del momento} \\ \text{del par} \end{array} \quad (5.14)$$

Un marco se considera estáticamente determinado si los cortantes, los momentos flexionantes y las cargas axiales en todos sus elementos, además de todas las reacciones externas, se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio y de condición. Si un marco plano contiene m elementos y j nodos y está soportado por r reacciones y tiene e_c ecuaciones de condición, entonces si

$$\begin{array}{ll} 3m + r < 3j + e_c & \text{Marco estáticamente inestable} \\ 3m + r = 3j + e_c & \text{Marco estáticamente determinado} \\ 3m + r > 3j + e_c & \text{Marco estáticamente indeterminado} \end{array} \quad (5.16)$$

El grado de indeterminación estática está dado por

$$i = (3m + r) - (3j + e_c) \quad (5.15)$$

Un procedimiento para la determinación de las fuerzas cortantes, momentos flexionantes y cargas axiales en los extremos de los elementos de marcos planos estáticamente determinados se describió en la Sección 5.6.

Problemas

Sección 5.1

Del 5.1 al 5.11 Determine las fuerzas axiales, cortantes y momentos flexionantes en los puntos A y B de la estructura mostrada.

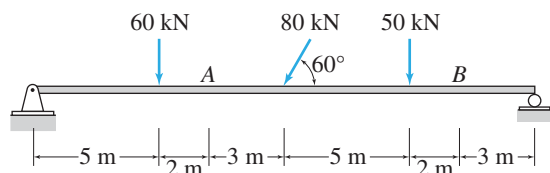


FIG. P5.1

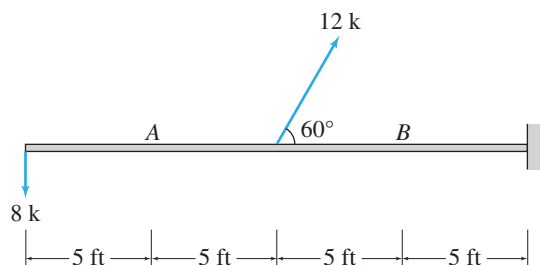


FIG. P5.2

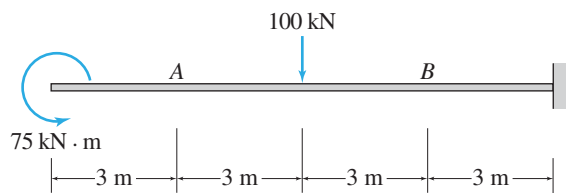


FIG. P5.3

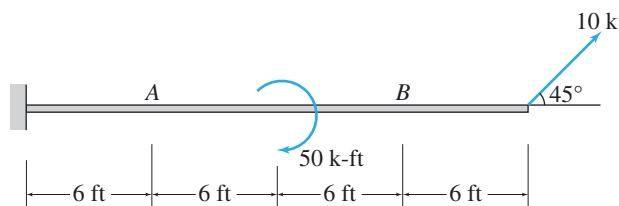


FIG. P5.4

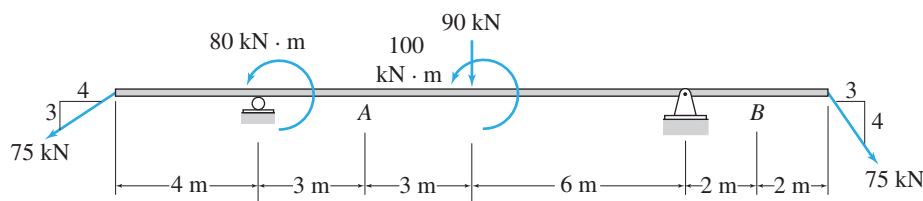


FIG. P5.5

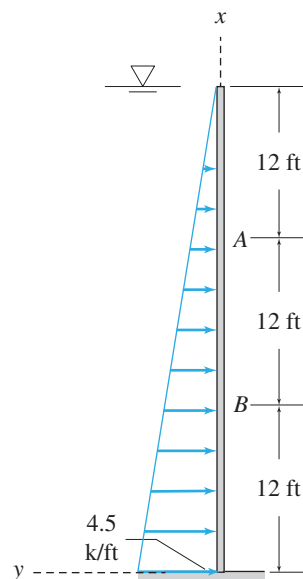


FIG. P5.6

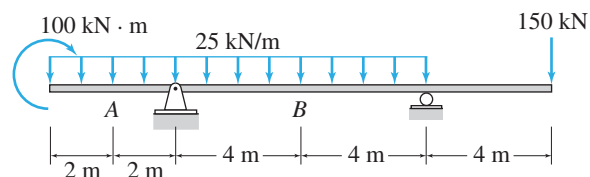


FIG. P5.7

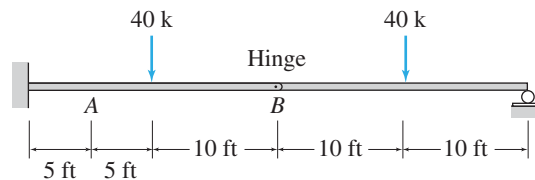


FIG. P5.8

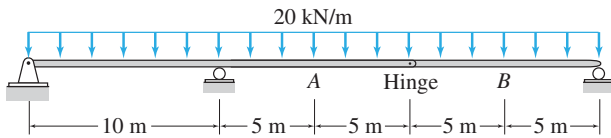


FIG. P5.9

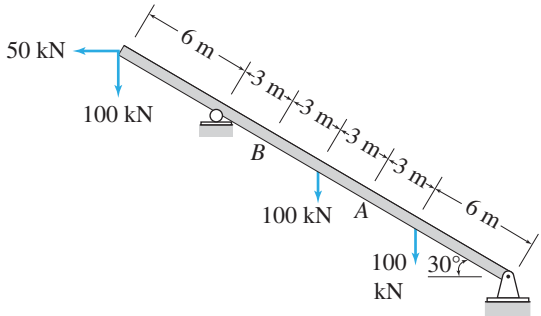


FIG. P5.10

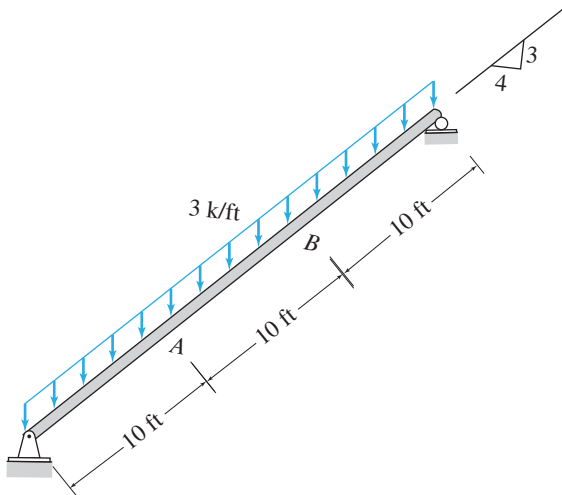


FIG. P5.11

Sección 5.2

Del 5.12 al 5.28 Determine las ecuaciones de cortante y momento flexionante para la viga mostrada. Use las ecuaciones resultantes para dibujar los diagramas de cortante y momento flexionante.

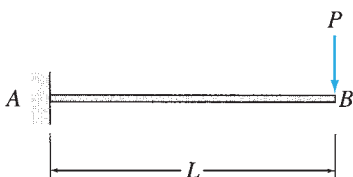


FIG. P5.12

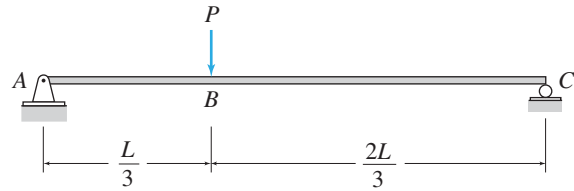


FIG. P5.13

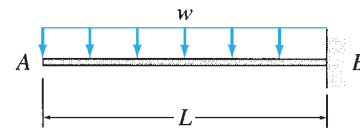


FIG. P5.14

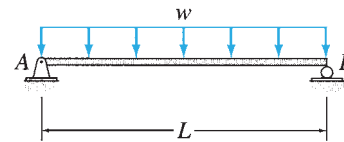


FIG. P5.15

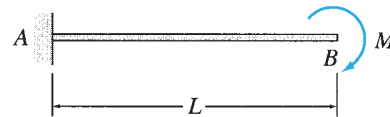


FIG. P5.16

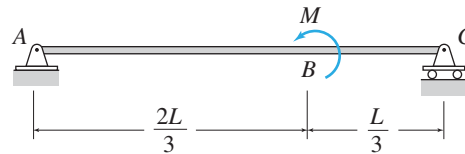


FIG. P5.17

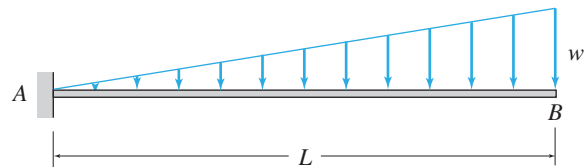


FIG. P5.18

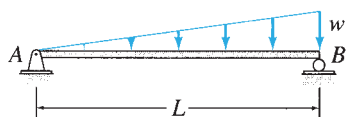


FIG. P5.19

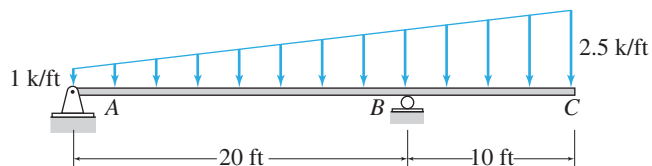


FIG. P5.25

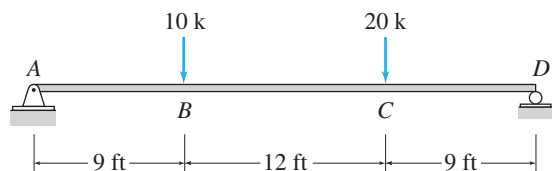


FIG. P5.20

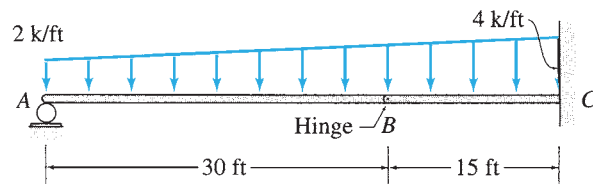


FIG. P5.26

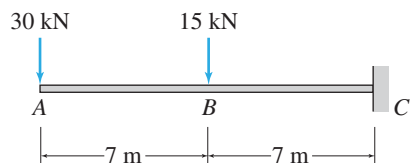


FIG. P5.21

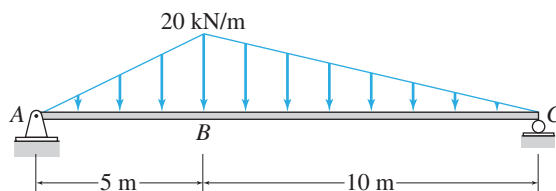


FIG. P5.27

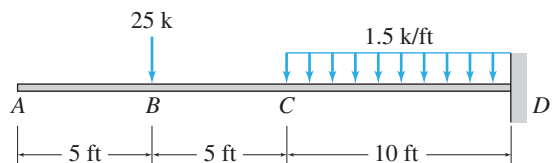


FIG. P5.22

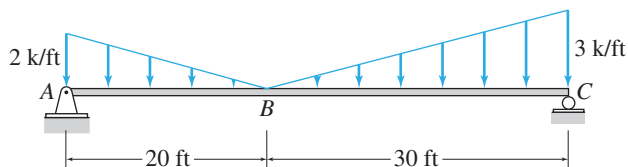


FIG. P5.28

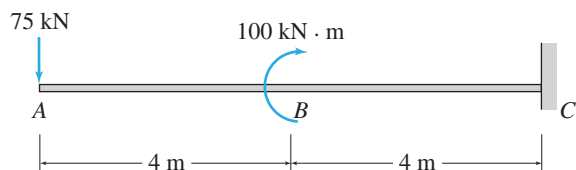


FIG. P5.23

Sección 5.4

Del 5.29 al 5.51 Dibuja los diagramas de cortante y momento flexionante y la configuración deformada cualitativa para la viga mostrada. los puntos A y B de la estructura mostrada.

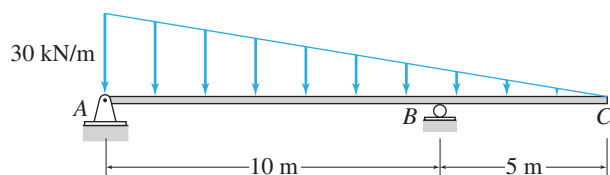


FIG. P5.24

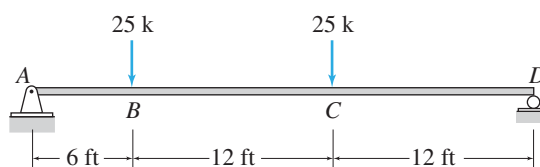


FIG. P5.29

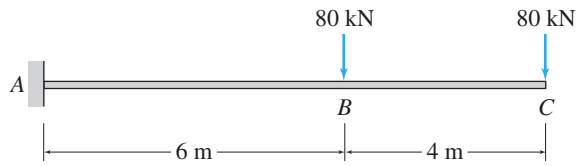


FIG. P5.30

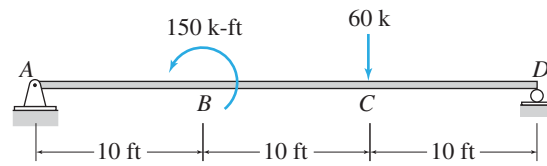


FIG. P5.36

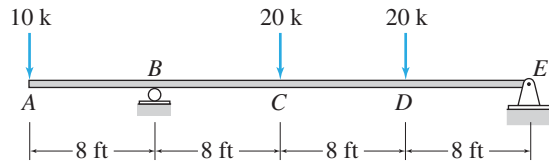


FIG. P5.31

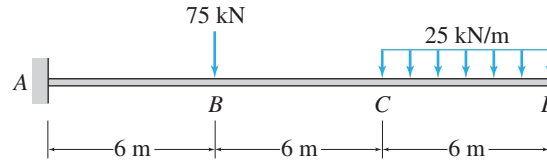


FIG. P5.37

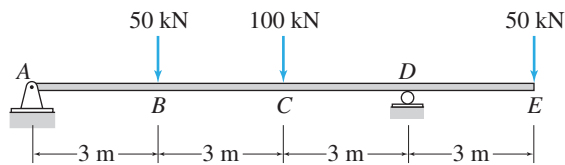


FIG. P5.32

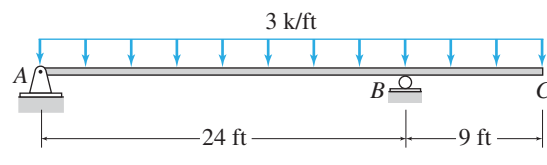


FIG. P5.38

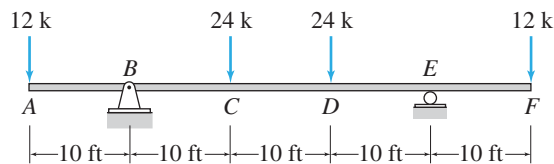


FIG. P5.33

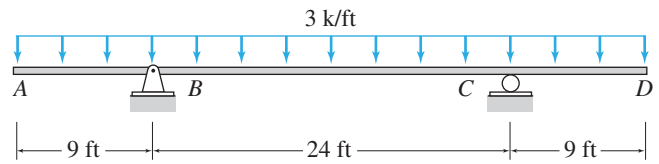


FIG. P5.39

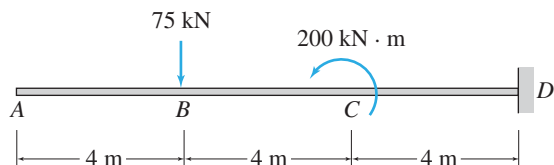


FIG. P5.34

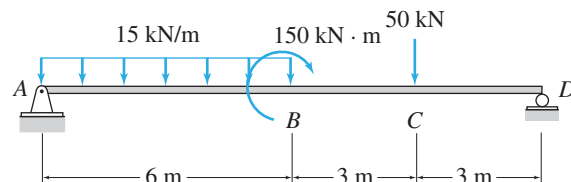


FIG. P5.40

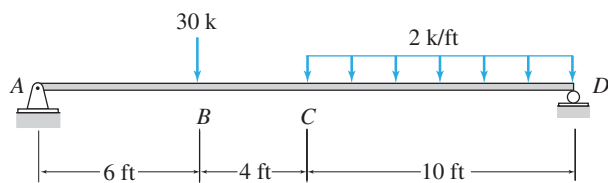


FIG. P5.35

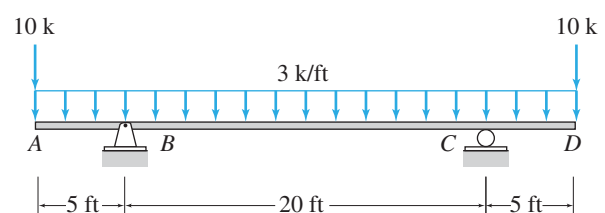


FIG. P5.41

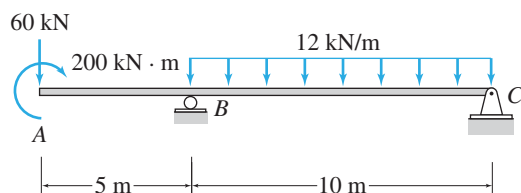


FIG. P5.42

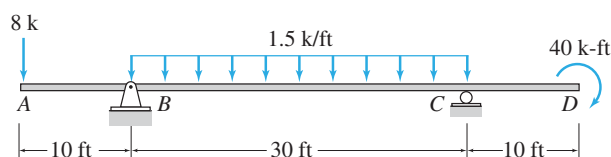


FIG. P5.43

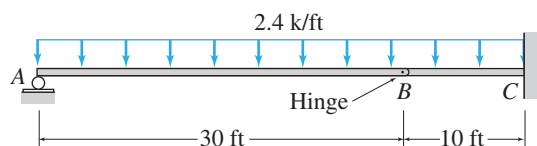


FIG. P5.44

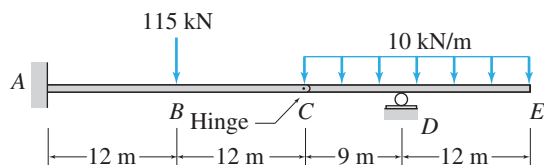


FIG. P5.45

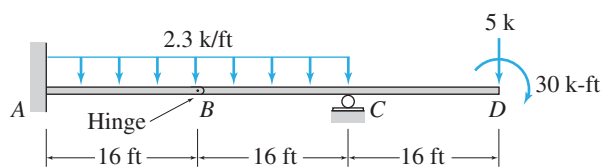


FIG. P5.46

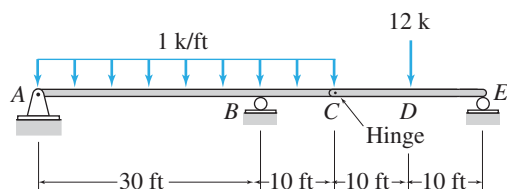


FIG. P5.47

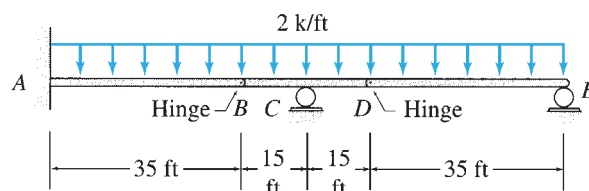


FIG. P5.48

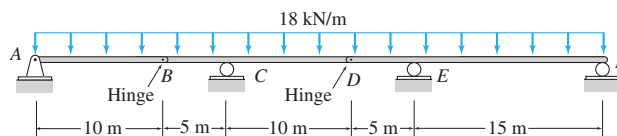


FIG. P5.49

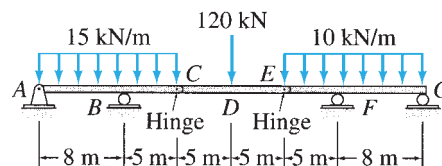


FIG. P5.50

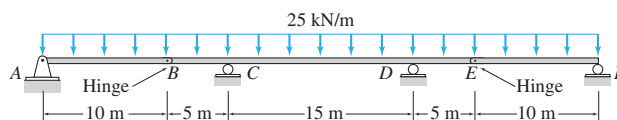


FIG. P5.51

5.52 Dibuja los diagramas de cortante y momento flexionante para la viga de concreto reforzado de cimentación sujeta a una carga de una columna hacia abajo de 22 kN/m y a una carga hacia arriba de la reacción de 6 kN/m, como se muestra en la figura.

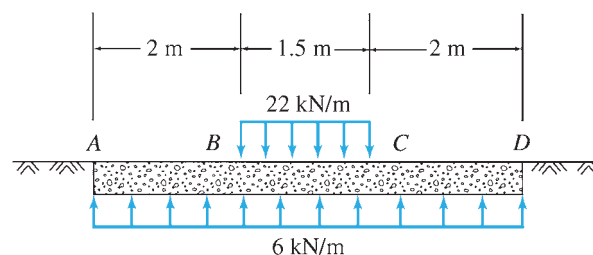


FIG. P5.52

5.53 y 5.54. Para la viga mostrada en (a) determina la distancia a para cual el momento flexionantes máximo positivo y negativo son iguales en la viga; y (b) dibuje los diagramas de cortante y momento flexionante correspondientes para la viga.

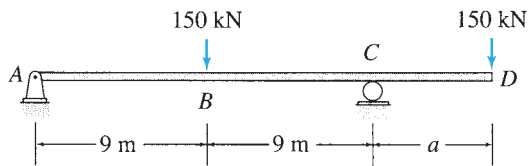


FIG. P5.53

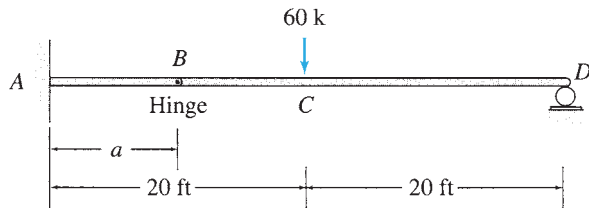


FIG. P5.54

Sección 5.5

5.55 y P5.56. Clasifique cada uno de los marcos mostrados como inestable, estáticamente determinado, o estáticamente indeterminado. Si es estáticamente indeterminado, entonces determina su grado de indeterminación estática.

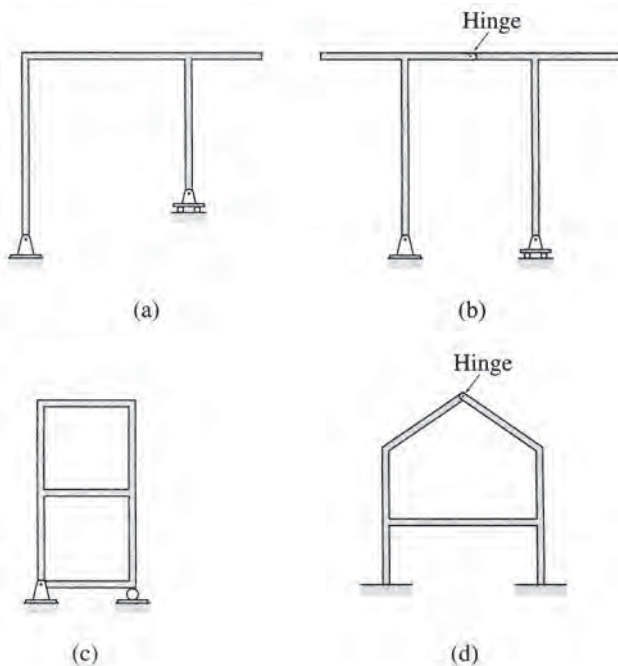


FIG. P5.55

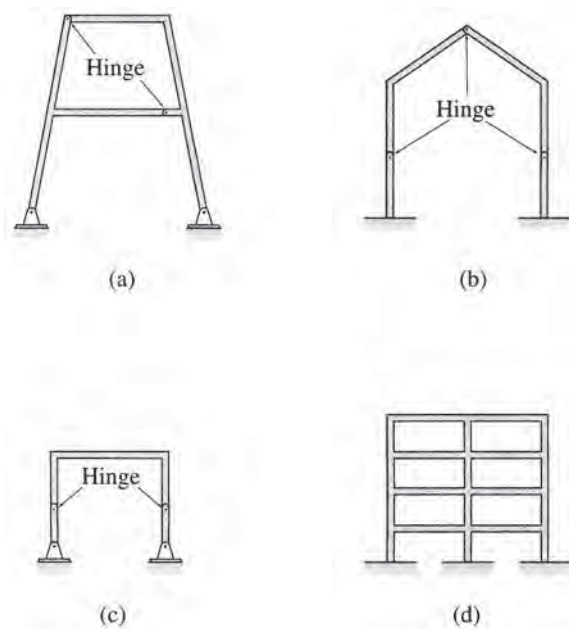


FIG. P5.56

Sección 5.6

5.57 y P5.71. Dibuje los diagramas de cortante, momento flexionante y carga axial y configuración deformada cualitativa de los marcos mostrados.

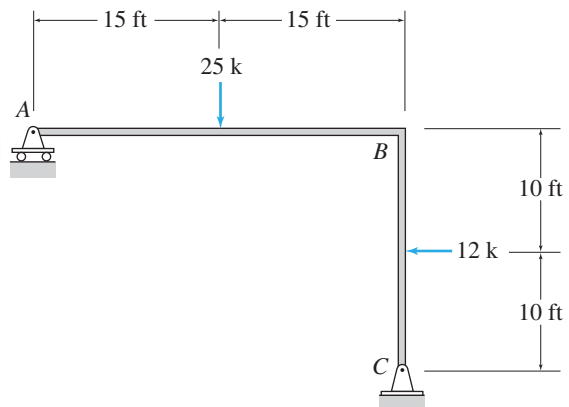


FIG. P5.57

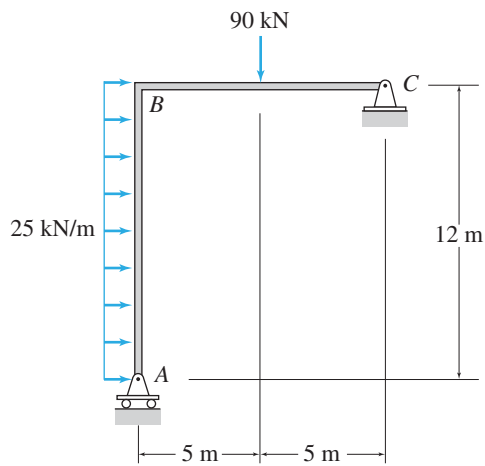


FIG. P5.58

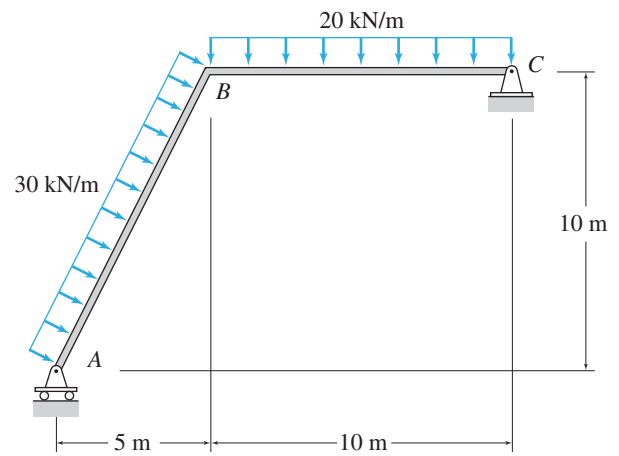


FIG. P5.61

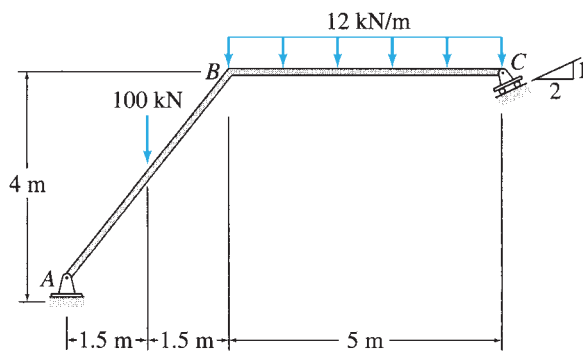


FIG. P5.59

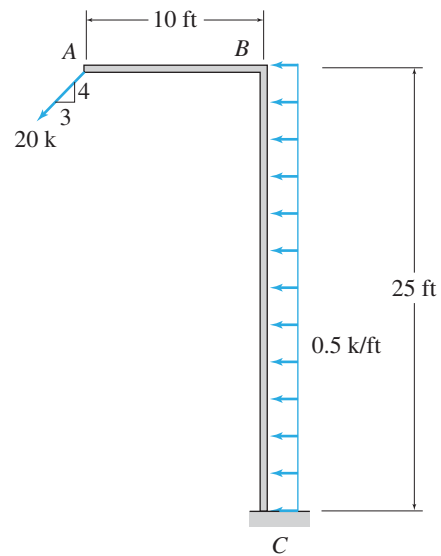


FIG. P5.62

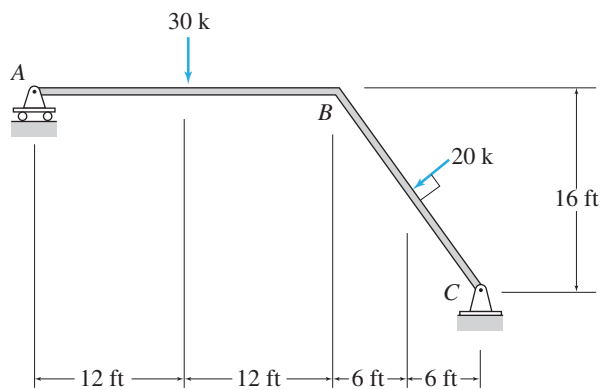


FIG. P5.60

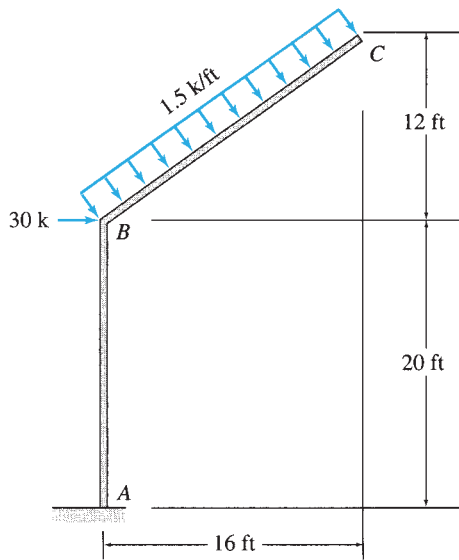


FIG. P5.63

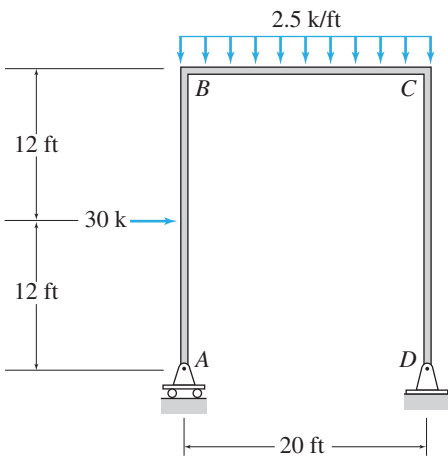


FIG. P5.64

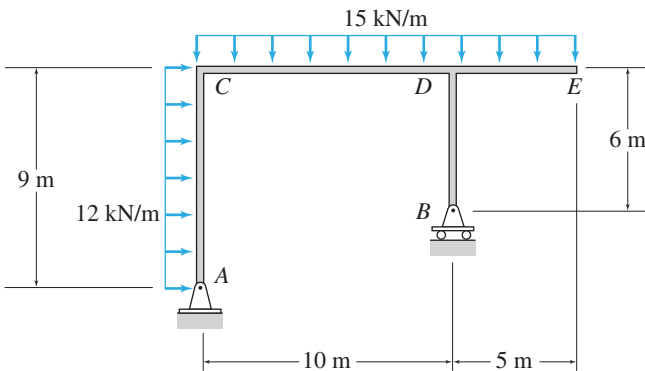


FIG. P5.65

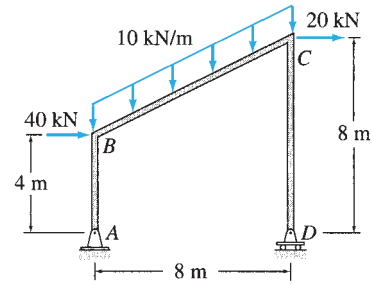


FIG. P5.66

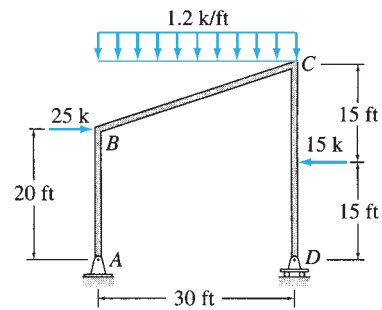


FIG. P5.67

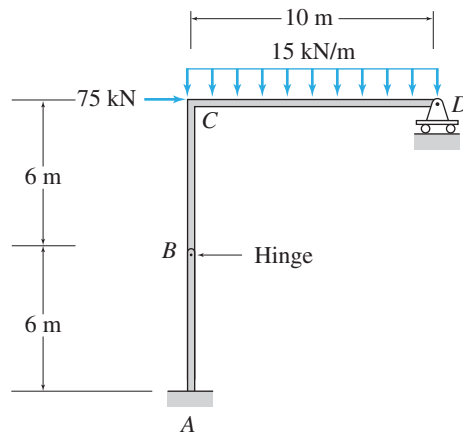


FIG. P5.68

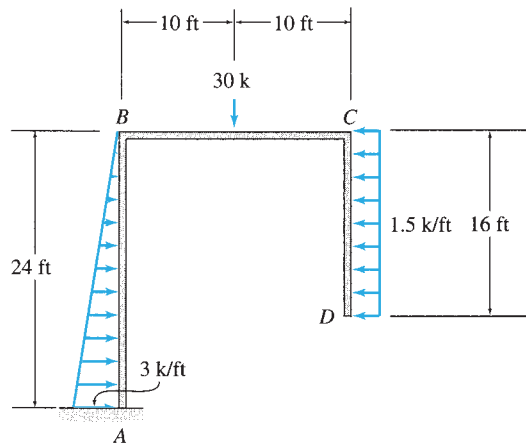


FIG. P5.69

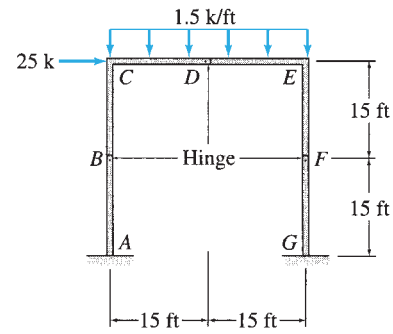


FIG. P5.71

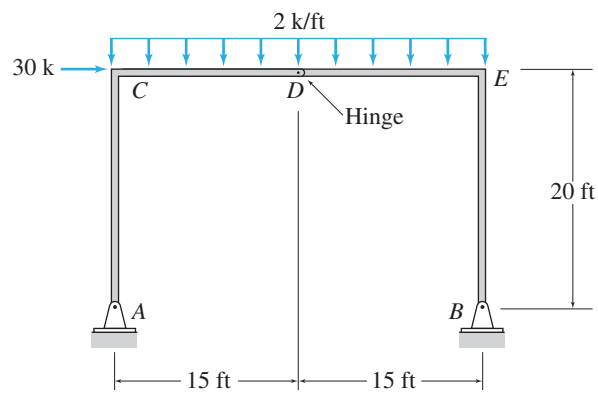


FIG. P5.70



El edificio John Hancock en Chicago, con riostras en cruz en su cara exterior que reducen el movimiento horizontal causado por fuertes vientos.

Joe Mercier/Shutterstock.com

6

Deflexiones en vigas: Métodos geométricos

- 6.1 Ecuaciones diferenciales para la deflexión en viga
- 6.2 Método directo de integración
- 6.3 Método de superposición
- 6.4 Método de área-momento
- 6.5 Diagramas de momento flexionante por partes
- 6.6 Método de la viga conjugada
- Resumen
- Problemas

Las estructuras, así como todos los cuerpos físicos, se deforman y cambian cuando están sujetos a fuerzas. Otras causas comunes que generan deformación en las estructuras son los cambios de temperatura y los asentamientos en los apoyos. Si la deformación desaparece y la estructura recobra su forma original cuando desaparece la acción causante de la deformación, esta se llama *deformación elástica*. Las deformaciones permanentes en una estructura se conocen como *deformaciones inelásticas o deformaciones plásticas*. En este texto, enfocaremos nuestra atención en las deformaciones elásticas lineales. Estas deformaciones varían linealmente con la carga aplicada (por ejemplo, si las magnitudes de las cargas actuantes en una estructura se duplican, su deformación se duplicará también, y así sucesivamente). Recordemos de la Sección 3.6 que para que una estructura responda linealmente a las cargas aplicadas, esta debe estar formada por materiales elásticos lineales y presentar pequeñas deformaciones. El principio de superposición es válido para estas estructuras.

Para la mayoría de las estructuras, las deformaciones excesivas son indeseables, porque pueden poner en peligro su capacidad para servir al propósito que fue creada. Por ejemplo, un edificio de gran altura puede ser perfectamente seguro en el sentido de que los esfuerzos permisibles no son excedidos; sin embargo, sería inútil si se deforma de manera excesiva debido al viento, ya que causaría grietas en los muros y ventanas. Las estructuras se diseñan generalmente para que las deflexiones bajo condiciones normales de servicio no excedan los valores permisibles especificados en los códigos de construcción.

Por la discusión anterior podemos ver que el cálculo de las deformaciones es parte esencial del análisis estructural. El cálculo de las deflexiones es necesario para determinar las reacciones y los esfuerzos resultantes para las estructuras estáticamente indeterminadas, las cuales se estudiarán en la Parte 3 de este texto.

Los métodos desarrollados para el cálculo de las deflexiones se pueden clasificar, en términos generales, en dos categorías: (1) métodos geométricos y (2) métodos energéticos (trabajo-energía). Como el nombre lo indica, los métodos geométricos se basan en la consideración de la geometría deformada de la estructura, mientras que los métodos energéticos (trabajo-energía) lo hacen sobre el principio básico de trabajo y energía.

En este capítulo estudiaremos los métodos comunes usados para determinar las pendientes y las deformaciones de vigas estáticamente determinadas o isostáticas. Discutiremos los métodos energéticos en el siguiente capítulo. Primero derivaremos las ecuaciones diferenciales para la deflexión de la viga; después, seguiremos la derivada con una breve descripción de la integración (doble) directa y métodos de superposición del cálculo de deflexiones. (Aquí asumiremos que el lector está familiarizado con estos métodos de cursos previos en *Mecánica de materiales*). Después, presentaremos el método de área-momento para el cálculo de las pendientes y deflexiones de vigas, dibujaremos los diagramas de momento por partes, y, finalmente, revisaremos el método de la viga conjugada para el cálculo de las pendientes y deformaciones.

6.1 Ecuaciones diferenciales para la deflexión en vigas

Considere una viga elástica, inicialmente recta, sujeta a cargas arbitrarias que actúan perpendicularmente a su eje centroidal y en el plano de simetría de su sección transversal, como se muestra en la Fig. 6.1(a). La superficie neutra de la viga en estado deformado se llama *curva elástica*. Para derivar la ecuación diferencial que define la curva elástica, enfocaremos nuestra atención en el elemento diferencial dx de la viga. El elemento en la posición deformada aparece en la Fig. 6.1(b). Como indica esta imagen, asumiremos que la sección plana perpendicular a la superficie neutra de la viga antes de la deformación permanece plana y perpendicular después de la flexión. La convención de signos para momento flexionante M continúa igual a lo establecido en el Capítulo 5; es decir, un momento de flexión positivo genera compresión en las fibras arriba de la superficie neutra (en la dirección positiva de y). La deformación por tensión y los esfuerzos son considerados positivos. La pendiente de la curva elástica, $\theta = dy/dx$, se asume muy pequeña para que θ^2 sea despreciable comparado con la unidad; $\theta \approx \theta$ y $\theta \approx 1$. Note que $d\theta$ representa el cambio de la pendiente sobre la diferencial de la longitud dx . En la Fig. 6.1(b) se observa que la deformación de una fibra arbitraria ab ubicada a una distancia y de la superficie neutra se puede expresar como

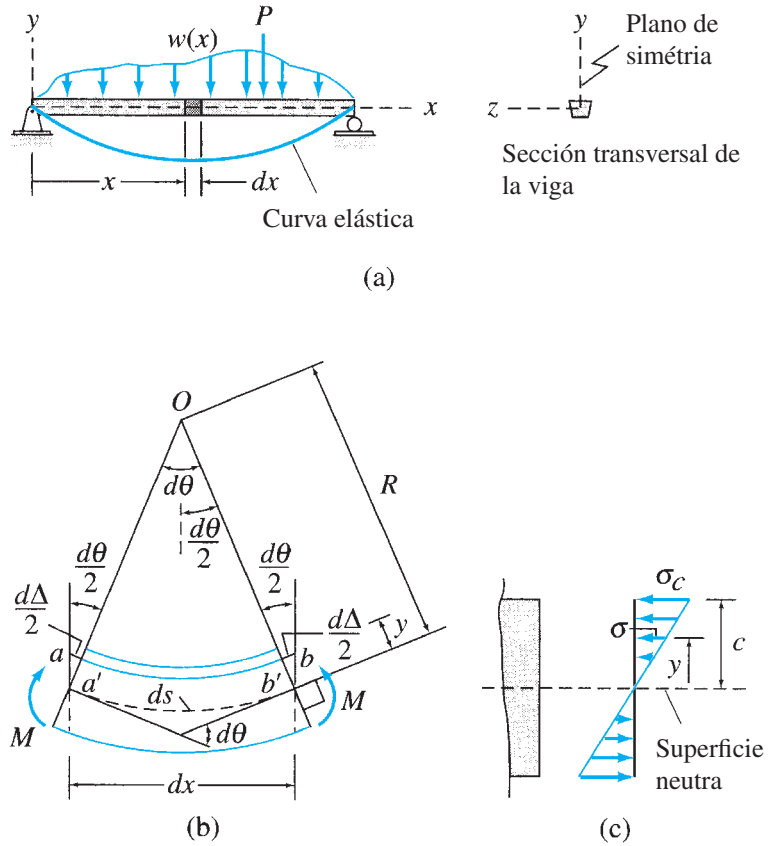
$$d\Delta = a'b' - ab = -2y \left(\frac{d\theta}{2} \right) = -y d\theta$$

Por lo tanto, la deformación en la fibra ab es igual a

$$\varepsilon = \frac{d\Delta}{dx} = \frac{d\Delta}{ds} = -\frac{y d\theta}{R d\theta} = -\frac{y}{R} \quad (6.1)$$

Donde R es el radio de curvatura. Sustituyendo la relación lineal esfuerzo-deformación $\varepsilon = \sigma/E$ en la ec. (6.1), obtenemos

$$\sigma = -\frac{Ey}{R} \quad (6.2)$$



En la que σ es el esfuerzo en la fibra ab , y E representa el módulo de Young o de elasticidad. La Ec. (6.2) indica que los esfuerzos varían linealmente con la distancia y de la superficie neutra, como se muestra en la Fig. 6.1(c). Si σ_c representa el esfuerzo en la fibra superior localizada a una distancia c de la superficie neutra (Fig. 6.1(c)), entonces el esfuerzo σ a una distancia y de la superficie neutra se puede escribir como

$$\sigma = \frac{y}{c} \sigma_c \quad (6.3)$$

Puesto que el momento flexionante M es igual a la suma de momentos, alrededor del eje neutro, de las fuerzas actuantes en todas las fibras de la sección transversal de la viga, tenemos

$$M = \int_A -\sigma y dA \quad (6.4)$$

Sustituyendo la Ec. (6.3) en la Ec. (6.4), tenemos

$$M = -\frac{\sigma_c}{c} \int_A y^2 dA = -\frac{\sigma_c}{c} I$$

o

$$\sigma_c = -\frac{Mc}{I}$$

Usando la Ec. (6.3)

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (6.5)$$

Donde I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Después, combinando las Ec. (6.2) y (6.5), obtenemos la relación Momento-Curvatura

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (6.6)$$

En el cual el producto EI es comúnmente referido como la *rigidez a la flexibilidad* de la viga. Para expresar la Ec. (6.6) en coordenadas cartesianas, recordaremos (de *cálculo*) la relación

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (6.7)$$

En donde y representa la deflexión vertical. Como se dijo anteriormente, para pequeñas pendientes, el cuadrado de las pendientes, $(d_y = d_x)^2$, es insignificante en comparación con la unidad. Así, la Ec. (6.7) se reduce a

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6.8)$$

Sustituyendo la Ec. (6.8) en la Ec. (6.6), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la deflexión de las vigas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (6.9)$$

Esta ecuación es conocida como la Ecuación de la Viga de Bernoulli-Euler. Debido a que $\theta = dy/dx$, la Ec. (6.9) también se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (6.10)$$

6.2 Método directo de integración

El método directo de integración esencialmente implica escribir la expresión M/EI (momento de flexión dividido entre la rigidez de la viga a flexión) en términos de la distancia x a lo largo del eje de la viga, e integrando esta expresión sucesivamente hasta obtener las ecuaciones de la pendiente y de la deflexión de la curva elástica. Las constantes de integración se determinan por las condiciones de frontera. El método directo de integración prueba la manera más conveniente de calcular las pendientes y deflexiones de vigas, en las que M/EI puede expresarse como una función continua de x sobre toda la longitud de la viga. Sin embargo, la aplicación de este método a las estructuras para las cuales la función M/EI no es constante puede ser bastante complicada. Este problema ocurre porque cada discontinuidad, debido a las cargas y/o a la rigidez a flexión (EI), introduce dos constantes de integración adicionales en el análisis, que se deben evaluar aplicando las condiciones de continuidad de la curva elástica, cuyo

proceso puede ser bastante tedioso. La dificultad, sin embargo, es posible de eludir y simplificar, de alguna manera, empleando el análisis de las *funciones de singularidad* definidas en la mayoría de los textos de *mecánica de materiales*.

Ejemplo 6.1

Determine la ecuación de la pendiente y la deflexión de la viga mostrada en la Fig. 6.2(a) por el método de integración directo. También calcule la pendiente en cada extremo y la deflexión en la mitad del claro de la viga. EI es constante.

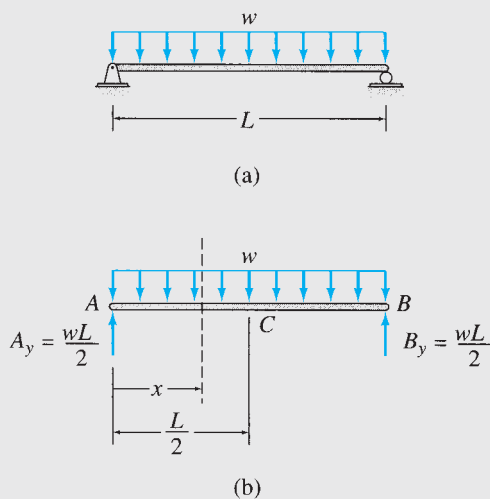


FIG. 6.2

Solución

Reacciones. Ver la Fig. 6.2(b).

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 & A_x &= 0 \\
 + \zeta \sum M_B &= 0 \\
 -A_y(L) + w(L)\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 & A_y &= \frac{wL}{2} \uparrow \\
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 \left(\frac{wL}{2}\right) - (wL) + B_y &= 0 & B_y &= \frac{wL}{2} \uparrow
 \end{aligned}$$

Ecuación para el momento flexionante. Para determinar la ecuación para el momento flexionante de la viga, pasamos una sección a una distancia x del apoyo A, como se muestra en la Fig. 6.2(b). Considerando el cuerpo libre a la izquierda de la sección, obtenemos

$$M = \frac{wL}{2}(x) - (wx)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

Ecuación para M/EI . La rigidez a la flexión, EI , de la viga es constante, así que la ecuación para M/EI se puede escribir como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI}(Lx - x^2)$$

continúa

Ecuación para la pendiente y la deflexión. La ecuación para la deflexión de la curva elástica de la viga se puede obtener integrando la ecuación para M/EI como

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

Integrando una vez más, obtenemos la ecuación para la deflexión

$$y = \frac{w}{2EI} \left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración, C_1 y C_2 , se evalúan aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{At end A.} \quad x = 0. \quad y = 0$$

$$\text{At end B.} \quad x = L. \quad y = 0$$

Aplicando la primera condición de frontera —es decir, fijando $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación para y — obtenemos $C_2 = 0$. Después, usando la segunda condición de frontera —es decir, fijando $x = L$ y $y = 0$ para y —, resulta

$$0 = \frac{w}{2EI} \left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} \right) + C_1L$$

De la cual

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$$

Por lo tanto, las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga son

$$\theta = \frac{w}{2EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12} \right) \quad (1) \quad \text{Respuesta.}$$

$$y = \frac{wx}{12EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{L^3}{2} \right) \quad (2) \quad \text{Respuesta.}$$

Pendientes en los extremos A y B. Sustituyendo $x = 0$ y L , respectivamente, en la ec. (1), obtenemos

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI} \quad \text{o} \quad \theta_A = \frac{wL^3}{24EI} \quad \curvearrowright \quad \text{Respuesta.}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI} \quad \text{o} \quad \theta_B = -\frac{wL^3}{24EI} \quad \curvearrowleft \quad \text{Respuesta.}$$

Deflexión a la mitad del claro. Sustituyendo $x = L/2$ en la Ec. (2), conseguimos

$$y_C = -\frac{5wL^4}{384EI} \quad \text{o} \quad y_C = \frac{5wL^4}{384EI} \downarrow \quad \text{Respuesta.}$$

Ejemplo 6.2

Determine la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. 6.3(a) por el método directo.

Solución

Ecuación de momento flexionante. Pasamos una sección a una distancia x del apoyo A , como se muestra en la Fig. 6.3(b). Considerando el cuerpo libre de la parte derecha de la sección, escribimos la ecuación para el momento flexionante como

$$M = -15(20 - x)$$

continúa

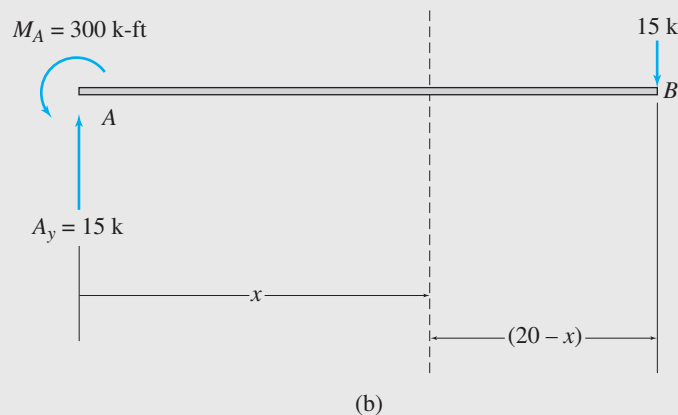
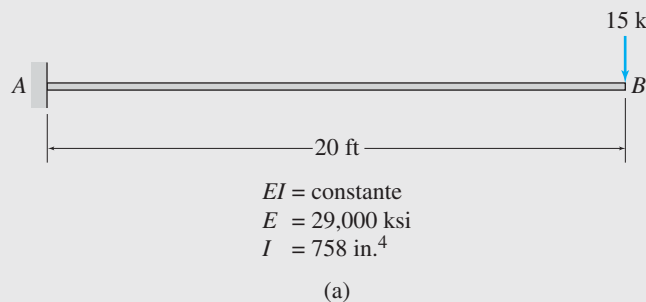


FIG. 6.3

Ecuación para M/EI .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{15}{EI}(20 - x)$$

Ecuación de la pendiente y la deflexión. Integrando la ecuación para M/EI , determinamos la ecuación para la pendiente como

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{15}{EI} \left(20x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Integrando nuevamente, obtenemos la ecuación para la deflexión como

$$y = -\frac{15}{EI} \left(10x^2 - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración, C_1 y C_2 , se evalúan aplicando las siguientes condiciones de frontera $\theta = 0$ en $x = 0$ y $y = 0$ en $x = 0$. En la primera condición de frontera —es decir, fijando $\theta = 0$ y $x = 0$ en la ecuación para θ —, obtenemos $C_1 = 0$. De manera similar, en la segunda condición de frontera —es decir, fijando $y = 0$ y $x = 0$ en la ecuación y —, resulta $C_2 = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga son

$$\theta = -\frac{15}{EI} \left(20x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$y = -\frac{15}{EI} \left(10x^2 - \frac{x^3}{6} \right)$$

La pendiente y la deflexión en el extremo B. Sustituyendo $x = 20 \text{ ft}$, $E = 29,000(12^3)\text{ksf}$, e $I = 758/(12^4)\text{ft}^4$ en las ecuaciones anteriores de la pendiente y de la deflexión, conseguimos

$$\theta_B = -0.0197 \text{ rad} \quad \text{o} \quad \theta_B = 0.0197 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$y_B = -0.262 \text{ ft} = -3.14 \text{ in.} \quad \text{o} \quad y_B = 3.14 \text{ in.} \quad \downarrow$$

Respuesta.

Respuesta.

6.3 Método de superposición

Cuando una viga está sujeta a varias cargas, es conveniente determinar las pendientes y deflexiones causadas por la combinación de los efectos de carga por la superposición (suma algebraica) de la pendiente o deflexiones debidas a cada una de las cargas que actúan individualmente en la viga. La pendiente y la deflexión debidas a cada carga pueden calcularse usando tanto el método directo de integración o uno de los otros métodos discutidos en secciones subsecuentes. Además, muchos manuales de ingeniería estructural (por ejemplo, el *Manual de la Construcción en Acero* publicado por el Instituto Americano de la Construcción en Acero) contienen fórmulas de deflexión para vigas con varios tipos de cargas y condiciones de apoyo, útiles para este propósito. Estas fórmulas de pendientes y deflexiones en vigas para los tipos de cargas más comunes y condiciones de apoyo se encuentran en la parte interior de la portada de este texto para una referencia práctica.

6.4 Método de área-momento

El método de área-momento para el cálculo de pendientes y deflexiones en vigas fue desarrollado por Charles E. Greene en 1873. Este método se sustenta en dos teoremas, llamados de *Área-Momento*, que relacionan la geometría de la curva elástica de una viga a su diagrama de M/EI , el cual se obtiene o se construye dividiendo las ordenadas del diagrama de momento de flexión por la rigidez a la flexión EI . Este método utiliza interpretación gráfica de las integrales involucradas en la solución de la ecuación diferencial de la deflexión (Ec. (6.9)) en términos de las áreas y de los momentos de área del diagrama M/EI . Por lo tanto, es más conveniente usarlo para vigas que tengan cargas distribuidas y la variable EI tal como quedó comparado con el método de integración directa descrito previamente.

Para obtener los teoremas de área-momento, considere una viga sujeta a una carga arbitraria como la que se muestra en la Fig. 6.4. La curva elástica y el diagrama M/EI de la viga también se representan en la figura. Enfocando nuestra atención en el elemento diferencial dx , de la viga, recordamos de secciones previas (Ec. (6.10)) que $d\theta$, el cual representa el cambio en la pendiente de la curva elástica sobre la longitud diferencial dx , está dado por

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (6.11)$$

Note que el término (M/EI) significa un área infinitesimal bajo el diagrama M/EI , como se mostró en la Fig. 6.4. Para determinar el cambio en la pendiente entre dos puntos A y B sobre la viga, integramos la Ec. (6.11) de A a B para obtener

$$\int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

o

$$\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (6.12)$$

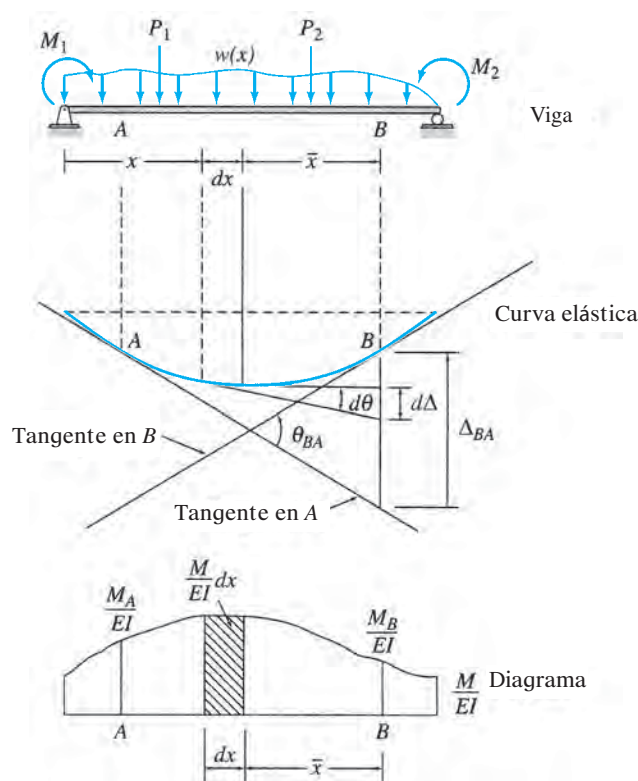


FIG. 6.4

Donde θ_A y θ_B son las pendientes de la curva elástica en los puntos A y B, respectivamente, con relación al eje de la viga en su estado sin deformar (horizontal), θ_{BA} indica el ángulo entre las tangentes de la curva elástica en A y B, y $\int_A^B (M/EI) dx$ representa el área bajo el diagrama de curvatura M/EI entre los puntos A y B.

La ecuación (6.12) representa la expresión matemática del primer teorema de área-momento, el cual se puede establecer como sigue:

El cambio en la pendiente de la tangente de la curva elástica en cualquiera de dos puntos es igual al área bajo el diagrama de curvatura M/EI entre dos puntos, con la condición de que la curva elástica sea continua entre los dos puntos.

Como se ha señalado, este teorema solo funciona para las porciones de la viga que no son discontinuas debido a la presencia de articulaciones internas. En la aplicación del primer teorema de área-momento, si el área del diagrama M/EI entre dos puntos es positivo, entonces el ángulo de la tangente en el punto a la izquierda a la tangente en el punto a la derecha será en sentido contrario a las manecillas del reloj, y este cambio en pendiente se considera positivo; y viceversa.

Retomando de nuevo la viga de la Fig. 6.4, observamos que la derivada $d\Delta$ entre las tangentes dibujadas en los extremos de los elementos diferenciales dx en una línea perpendicular al eje sin deformar de la viga del punto B está dado por

$$d\Delta = \bar{x} (d\theta) \quad (6.13)$$

Donde $\bar{x}$ es la distancia de B al elemento diferencial dx . Sustituyendo la ec. (6.11) en la ec. (6.13) resulta:

$$d\Delta = \left(\frac{M}{EI}\right)\bar{x}dx \quad (6.14)$$

Note que el término del lado derecho de la igualdad de la ec. (6.14) representa el momento del área infinitesimal correspondiente a dx alrededor de B . Integrando la ec. (6.14) entre dos puntos arbitrarios A y B de la viga, obtenemos

$$\int_A^B d\Delta = \int_A^B \frac{M}{EI} \bar{x} dx$$

o

$$\Delta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} \bar{x} dx \quad (6.15)$$

En ella Δ_{BA} representa la *desviación tangencial de B* de la tangente en A , la cual es la deflexión del punto B en la dirección perpendicular al eje sin deformar de la viga de la tangente en el punto A , y $\int_A^B (M/EI)\bar{x}$ el momento del área bajo el diagrama de curvatura M/EI entre los puntos A y B alrededor de B .

La ecuación (6.15) es la expresión matemática del segundo *teorema de área-momento*, el cual se puede establecer como sigue:

La desviación tangencial en la dirección perpendicular al eje no deformado de la viga de un punto de la curva elástica de la tangente a la curva elástica de la tangente en otro punto es igual al momento del área bajo el diagrama de momento M/EI entre dos puntos cerca del punto en el cual se desea la desviación, a condición de que la curva elástica sea continua entre los dos puntos.

Es importante señalar el orden de los subíndices para Δ en la Ec. (6.15). El primer subíndice indica el punto donde la desviación está determinada y sobre el cual se evaluó el momento, mientras que el segundo muestra el punto en que se dibuja la tangente de la curva elástica. Además, puesto que la distancia $\bar{x}$ en la Ec. (6.15) siempre se considera positiva, el signo de Δ_{AB} es el mismo que el del área del diagrama M/EI entre A y B . Si el área del diagrama M/EI entre A y B es positivo, entonces Δ_{AB} es también positivo y el punto B cae (en dirección positiva de y) sobre la tangente de la curva elástica en el punto A y viceversa.

Procedimiento para el análisis

Para aplicar los teoremas de área-momento en el cálculo de las pendientes y deflexiones de la viga, es necesario dibujar la configuración deformada de la viga usando su diagrama de momento de flexión. En este sentido, recuerde de la Sección 5.3 que el momento de flexión positivo flexiona a la viga cóncava hacia arriba, mientras que el momento de flexión negativo flexiona a la viga cóncava hacia abajo. Además, en un apoyo empotrado, tanto la pendiente como la deflexión de la viga deben ser cero; por lo tanto, la tangente de la curva elástica en este punto está en la dirección del eje no deformado,

mientras que en el apoyo articulado o de patín la deflexión es cero, pero la pendiente puede no ser cero. Para facilitar el cálculo de las áreas y del área-momento del diagrama de curvatura M/EI , las fórmulas de las áreas y centroides de figuras geométricas comunes se exponen en el apéndice A.

En lugar de adoptar una convención formal de signos, es práctica común usar un enfoque intuitivo para resolver problemas empleando el método de área-momento. En este enfoque, las pendientes y deflexiones en varios puntos se asumen positivas en la dirección que se muestran en el esquema de la configuración deformada o curva elástica de la estructura. Cualquier área del diagrama de curvatura M/EI que tiende a incrementar la cantidad de en cuestión se considera positivo y viceversa. Una respuesta positiva para la pendiente o deflexión indica que el sentido de esa cantidad en la curva elástica, como se supuso, fue correcto. A la inversa, una respuesta negativa indica que el sentido correcto es opuesto al inicialmente supuesto en la curva elástica.

En la aplicación del teorema de área-momento es importante notar que estos teoremas no proporcionan de manera directa la pendiente y la deflexión en un punto respecto del eje no deformado de la viga (que suelen ser de interés práctico), sino que ofrecen las de un punto relativo a la tangente de la curva elástica en otro punto. Por lo tanto, antes de calcular la pendiente y la deflexión de una viga en un punto arbitrario, se debe definir un punto donde la pendiente y la tangente de la curva elástica es inicialmente conocida o puede calcularse usando las condiciones de apoyo. Una vez que esta *tangente de referencia* ha sido establecida, se determina la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga aplicando los teoremas de área-momento. En vigas en cantiliver, dado que la pendiente de la tangente de la curva elástica en el apoyo empotrado es cero, su tangente se utiliza como tangente de referencia. En el caso de vigas para las que no es posible determinar por inspección una tangente con pendiente cero, es usualmente conveniente usar la tangente en uno de sus apoyos como tangente de referencia. La pendiente de esta tangente de referencia se puede determinar usando la condición de deflexión cero en el apoyo de referencia y en el apoyo adyacente.

Las magnitudes de las pendientes y de las deflexiones en las estructuras son generalmente muy pequeñas, así que desde el punto de vista del cálculo es más conveniente determinar su solución en términos de EI , y luego sustituir el valor numérico de E e I en la etapa final de análisis para obtener el valor numérico de sus magnitudes. Cuando el momento de inercia varía a lo largo de la longitud de la viga, es conveniente expresar los momentos de inercia de varios segmentos de la viga en términos de un solo *momento de inercia de referencia*, el cual se utiliza durante todo el análisis.

Ejemplo 6.3

Determine la pendiente y la deflexión en los puntos B y C de la viga en cantiliver que se muestra en la Fig. 6.5(a) por el método área-momento.

Solución

Diagrama de momento flexionante. El diagrama de momento flexionante aparece en la Fig. 6.5(b).

continúa

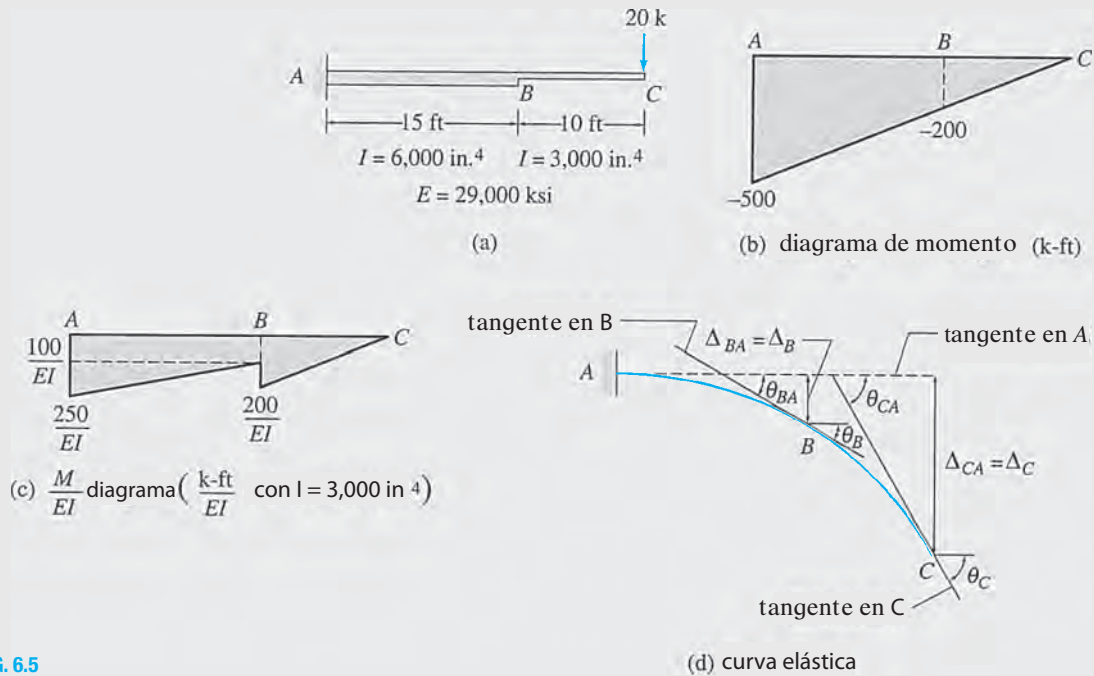


FIG. 6.5

Diagrama de M/EI . Como se indicó en la Fig. 6.5(a), los valores del momento de inercia de los segmentos AB y BC de la viga son $6,006,000 \text{ in.}^4$ y $3,000 \text{ in.}^4$. Usando $I = I_{BC} = 3,000 \text{ in.}^4$ como el momento de inercia de referencia, expresamos I_{AB} en términos de I como

$$I_{AB} = 6,000 = 2(3,000) = 2I$$

La cual indica que para obtener el diagrama de M/EI en términos de EI , debemos dividir el diagrama de momento flexionante para el segmento AB entre 2, como se muestra en la Fig. 6.5(c).

Curva elástica. La curva elástica para la viga se muestra en la Fig. 6.5(d). Tenga en cuenta que debido a que el diagrama para M/EI es negativo, la viga se flexiona cóncava hacia abajo. Como el apoyo A está empotrado, la pendiente en A es cero ($\theta_A = 0$); es decir, la tangente a la curva elástica en A es horizontal, como se muestra en la figura.

Pendiente en B . Conocida la pendiente en A , podemos determinar la pendiente en B evaluando el cambio en la pendiente θ_{BA} entre A y B , (ángulo entre las tangentes a la curva elástica en los puntos A y B , como se muestra en la Fig. 6.5(d)). De acuerdo con el primer teorema del diagrama momento, $\theta_{BA} = \text{área entre } A \text{ y } B$. Esta área se puede obtener convenientemente determinada dividiendo el diagrama M/EI en las partes triangulares y rectangulares, como se muestra en la Fig. 6.5(c). Es decir,

$$\theta_{BA} = \frac{1}{EI} \left[(100)(15) + \frac{1}{2}(150)(15) \right] = \frac{2,625 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

De la Fig. 6.5(d), podemos ver que, ya que la tangente en A es horizontal (en la dirección del eje no deformado de la viga), la pendiente en B (θ_B) es igual al ángulo θ_{BA} entre las tangentes en A y B ; es decir,

$$\theta_B = \theta_{BA} = \frac{2,625 \text{ k-ft}^2}{EI} = \frac{2,625(12)^2 \text{ k-in.}^2}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de $E = 29,000$ e $I = 3,000 \text{ in.}^4$, obtenemos

$$\theta_B = \frac{2,625(12)^2}{(29,000)(3,000)} \text{ rad} = 0.0043 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0.0043 \text{ rad}$$

Respuesta
continúa

Deflexión en B. En la Fig. 6.5(d) vemos que la deflexión en B con respecto al eje no deformado de la viga es igual a la derivada a la desviación tangencial de B de la tangente en A; es decir,

$$\Delta_B = \Delta_{BA}$$

De acuerdo con el segundo teorema de momento-área,

$$\begin{aligned}\Delta_{BA} &= \text{momento del área del diagrama } M/EI \text{ A y B entre B} \\ &= \frac{1}{EI} \left[(100)(15)(7.5) + \frac{1}{2}(150)(15)(10) \right] = \frac{22,500 \text{ k-ft}^3}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_B = \Delta_{BA} &= \frac{22(500 \text{ k-ft}^3)}{EI} \\ &= \frac{22,500(12)^3}{(29,000)(3,000)} = 0.45 \text{ in.} \\ \Delta_B &= 0.45 \text{ in. } \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta

Pendiente en C. De la Fig. 6.5(d), podemos ver que

$$\theta_C = \theta_{CA}$$

Donde

$$\begin{aligned}\theta_{CA} &= \text{momento del área del diagrama } M/EI \text{ entre A y C} \\ &= \frac{1}{EI} \left[(100)(15) + \frac{1}{2}(150)(15) + \frac{1}{2}(200)(10) \right] = \frac{3,625 \text{ k-ft}^2}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\theta_C = \theta_{CA} &= \frac{3,625 \text{ k-ft}^2}{EI} \\ &= \frac{3,625(12)^2}{(29,000)(3,000)} = 0.006 \text{ rad} \\ \theta_C &= 0.006 \text{ rad } \curvearrowright\end{aligned}$$

Respuesta

Deflexión en C. Vemos en la Fig. 6.5(d) que

$$\Delta_C = \Delta_{CA}$$

Donde

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{EI} \left[(100)(15)(7.5 + 10) + \frac{1}{2}(150)(15)(10 + 10) + \frac{1}{2}(200)(10)(6.67) \right] \\ &= \frac{55,420 \text{ k-ft}^3}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_C = \Delta_{CA} &= \frac{55,420 \text{ k-ft}^3}{EI} \\ &= \frac{55,420(12)^3}{(29,000)(3,000)} = 1.1 \text{ in.} \\ \Delta_C &= 1.1 \text{ in. } \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta

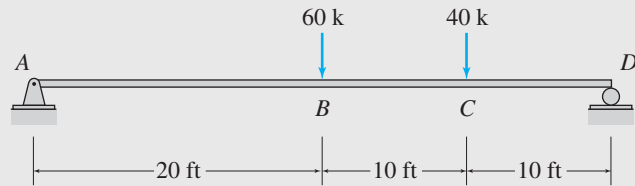
Ejemplo 6.4

Use el método de área-momento para determinar las pendientes en los extremos A y D y las deflexiones en los puntos B y C de la viga mostrada en la Fig. 6.6(a).

Solución

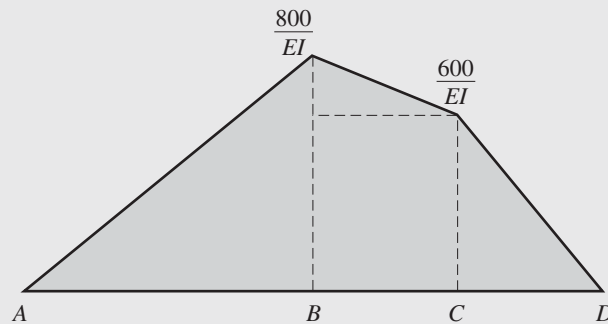
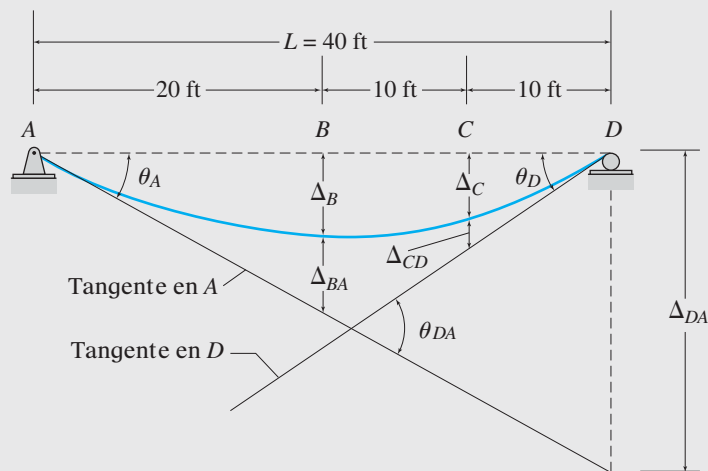
Diagrama M/EI . Debido a que EI es constante a lo largo de la viga, el diagrama de la pendiente M/EI es el mismo que el diagrama de momento. El diagrama para M/EI se muestra en la Fig. 6.6(b).

Curva elástica. La curva elástica de la viga se muestra en la Fig. 6.6(c).



$$\begin{aligned} EI &= \text{constante} \\ E &= 1,800 \text{ ksi} \\ I &= 46,000 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

(a)

(b) $\frac{M}{EI}$ Diagrama $\left(\frac{\text{k-ft}}{EI}\right)$ 

(c) Curva elástica

FIG. 6.6

continúa

Pendiente en A. La pendiente de la curva elástica no se conoce en ningún punto de la viga, así que usaremos la tangente en el apoyo A como tangente de referencia y determinaremos su pendiente, θ_A , de las condiciones de la deflexión en los apoyos A y D, que están en cero. De la Fig. 6.6(c), podemos ver que

$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L}$$

En la cual θ_A se asume que es muy pequeña, de modo que la $\theta_A \approx \theta_A$. Para evaluar la desviación tangencial Δ_{DA} , aplicamos el segundo teorema del área-momento:

Δ_{DA} = entre A y D alrededor de D

$$\begin{aligned}\Delta_{DA} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (800)(20) \left(\frac{20}{3} + 20 \right) + \frac{1}{2} (200)(10) \left(\frac{20}{3} + 10 \right) \right. \\ &\quad \left. + 600(10)(15) + \frac{1}{2} (600)(10) \left(\frac{20}{3} \right) \right] \\ &= \frac{340,000 \text{ k-ft}^3}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pendiente en A es

$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L} = \frac{340,000/EI}{40} = \frac{8,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de E e I, obtenemos

$$\theta_A = \frac{8,500(12)^2}{(1,800)(46,000)} = 0.015 \text{ rad}$$

$$\theta_A = 0.015 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

Respuesta

Pendiente en D. De la Fig. 6.6(c), podemos ver que

$$\theta_D = \theta_{DA} - \theta_A$$

Donde, de acuerdo con el primer teorema de área—momento,

$$\begin{aligned}\theta_{DA} &= \text{entre A y D} \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (800)(20) + \frac{1}{2} (200)(10) + 600(10) + \frac{1}{2} (600)(10) \right] \\ &= \frac{18,000 \text{ k-ft}^2}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_D = \frac{18,000}{EI} - \frac{8,500}{EI} = \frac{9,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

$$\theta_D = \frac{9,500(12)^2}{(1,800)(46,000)} = 0.017 \text{ rad}$$

$$\theta_D = 0.017 \text{ rad} \quad \curvearrowleft$$

Respuesta

Deflexión en B. Considerando la porción AB de la curva elástica en la Fig. 6.6(c), y teniendo en cuenta que θ_A es muy pequeña que $\theta_A \approx \theta_A$, conseguimos

$$\theta_A = \frac{\Delta_B + \Delta_{BA}}{20}$$

De la cual

$$\Delta_B = 20\theta_A - \Delta_{BA}$$

continúa

Donde

$$\begin{aligned}\Delta_{BA} &= M/EI \text{ entre } A \text{ y } B \text{ alrededor de } B \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (800) (20) \left(\frac{20}{3} \right) \right] \\ &= \frac{53,333.33 \text{ k-ft}^3}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_B &= 20 \left(\frac{8,500}{EI} \right) - \frac{53,333.33}{EI} = \frac{116,666.67 \text{ k-ft}^3}{EI} \\ \Delta_B &= \frac{116,666.67 (12)^3}{(1,800) (46,000)} = 2.43 \text{ in.} \\ \Delta_B &= 2.43 \text{ in. } \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta

Deflexión en C. Finalmente, considerando la porción CD de la curva elástica en la Fig. 6.6(c), y asumiendo que θ_D es muy pequeña (tanto como que $\theta_D \approx \theta_D$), obtenemos

$$\theta_D = \frac{\Delta_C + \Delta_{CD}}{10}$$

o

$$\Delta_C = 10\theta_D - \Delta_{CD}$$

Donde

$$\Delta_{CD} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (600) (10) \left(\frac{10}{3} \right) \right] = \frac{10,000 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_C &= 10 \left(\frac{9,500}{EI} \right) - \frac{10,000}{EI} = \frac{85,000 \text{ k-ft}^3}{EI} \\ \Delta_C &= \frac{85,000 (12)^3}{(1,800) (46,000)} = 1.77 \text{ in.} \\ \Delta_C &= 1.77 \text{ in. } \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta

Ejemplo 6.5

Determine la deflexión máxima para la viga de la Fig. 6.7(a) por el método de área-momento.

Solución

Diagrama M/EI . El diagrama M/EI se muestra en la Fig. 6.7(b).

Curva elástica. La curva elástica de la viga se muestra en la Fig. 6.7(c).

continúa

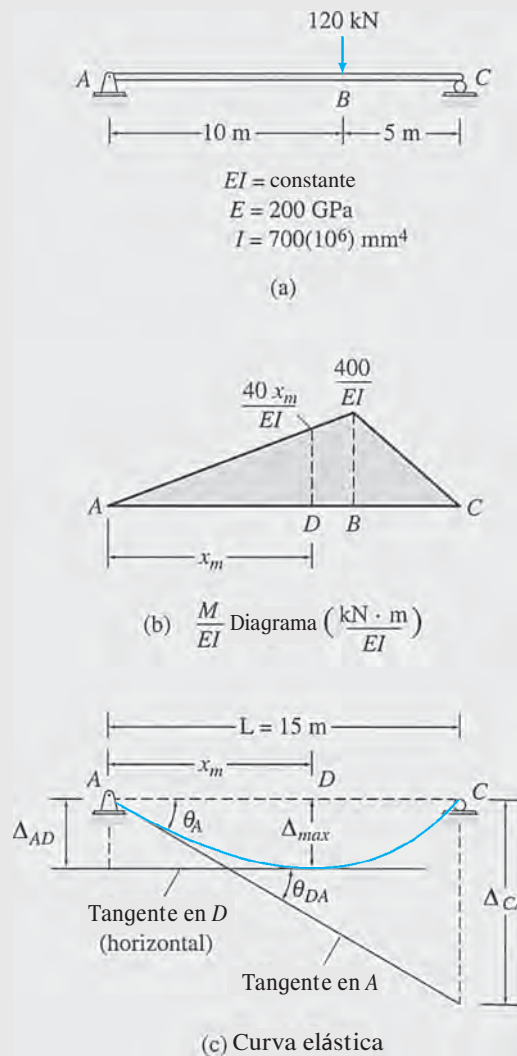


FIG. 6.7

Pendiente en A. La pendiente de la curva elástica no se conoce en ningún punto de la viga, así que usaremos la tangente en el apoyo A como tangente de referencia y determinaremos su pendiente, θ_A , de las condiciones de la deflexión en los apoyos A y C que están en cero. De la Fig. 6.6(c), podemos ver que

$$\theta_A = \frac{\Delta_{CA}}{15}$$

To evaluate the tangential deviation Δ_{CA} , we apply the second moment-area theorem:

Δ_{CA} = moment of the area of the M/EI diagram between A and C alrededor de C

$$\begin{aligned} \Delta_{CA} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (400) (10) \left(\frac{10}{3} + 5 \right) + \frac{1}{2} (400) (5) \left(\frac{10}{3} \right) \right] \\ &= \frac{20,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

continúa

Por lo tanto, la pendiente en A es

$$\theta_A = \frac{20,000/EI}{15} = \frac{1,333.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

Ubicación de la deflexión máxima. Si la deflexión máxima ocurre en el punto D , localizado a una distancia x_m del apoyo izquierdo A (ver Fig. 6.7(c)), entonces la pendiente en D debe ser cero; por lo tanto,

$$\theta_{DA} = \theta_A = \frac{1,333.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

La cual indica que para que la pendiente en D sea cero (es decir, que la deflexión máxima ocurra en D), el diagrama de M/EI entre A y D debe ser igual a $1,333.33/EI$. Entonces utilizamos la condición para determinar la ubicación del punto D :

$$\theta_{DA} = \text{momento del área del diagrama } \frac{M}{EI} \text{ entre } A \text{ y } D = \frac{1,333.33}{EI}$$

o

$$\frac{1}{2} \left(\frac{40x_m}{EI} \right) x_m = \frac{1,333.33}{EI}$$

De la cual

$$x_m = 8.16 \text{ m}$$

Deflexión máxima. De la Fig. 6.7(c), podemos ver que

$$\Delta_{\max} = \Delta_{AD}$$

Donde

$$\begin{aligned} \Delta_{AD} &= \text{moment of the area of the } M/EI \text{ diagram between } A \text{ y } D \text{ alrededor de } A \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{40}{EI} \right) (8.16) \left(\frac{2}{3} \right) (8.16) \\ &= \frac{7,244.51 \text{ ton} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_{\max} = \frac{7,244.51 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

Sustituyendo $E = 200 \text{ GPa} = 200(10^6) \text{ kN/m}^2$ y $I = 700(10^6) \text{ mm}^4 = 700(10^{-6}) \text{ m}^4$, obtenemos

$$\Delta_{\max} = \frac{7,244.51}{200(10^6)(700)(10^{-6})} = 0.0517 \text{ m}$$

$$\Delta_{\max} = 51.7 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.6

Usando el método de área-momento determine la pendiente en el punto A y la deflexión en el punto B de la viga mostrada en la Fig. 6.8(a).

Solución

Diagrama M/EI . El diagrama de momento flexionante se muestra en la Fig. 6.8(b), y el diagrama de M/EI para el momento de inercia de referencia $I = 2,500 \text{ in.}^4$ aparece en la Fig. 6.8(c).

continúa

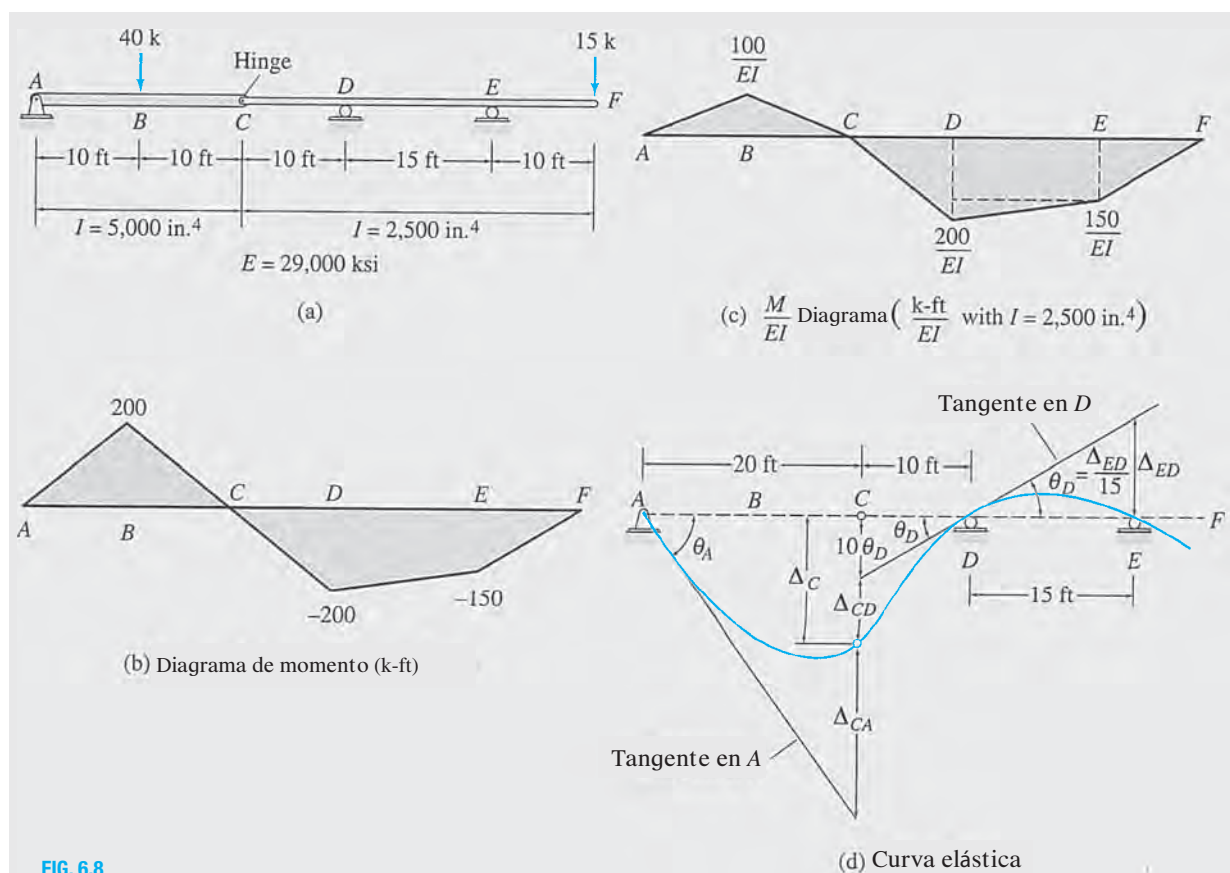


FIG. 6.8

Curva elástica. La curva elástica de la viga se encuentra en la Fig. 6.8(c). Tenga en cuenta que la curva elástica es discontinua en la articulación interna en C, por lo tanto, el teorema de área-momento se debe aplicar por separado en las secciones AC y CF de la curva a cada lado de la articulación.

Pendiente en D. La tangente en el apoyo D se selecciona como tangente de referencia. De la Fig. 6.8(d), podemos ver que la pendiente de esta tangente está dada por la relación

$$\theta_D = \frac{\Delta_{ED}}{15}$$

Donde, del segundo teorema de área-momento,

$$\Delta_{ED} = \frac{1}{EI} \left[150(15)(7.5) + \frac{1}{2}(50)(15)(10) \right] = \frac{20,625 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\theta_D = \frac{20,625}{15(EI)} = \frac{1,375 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Deflexión en C. De la figura. 6.8 (d), podemos ver que

$$\Delta_C = 10\theta_D + \Delta_{CD}$$

En la cual

$$\Delta_{CD} = \frac{1}{2} \left(\frac{200}{EI} \right) (10) \left(\frac{20}{3} \right) = \frac{6,666.67 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

continúa

Por lo tanto,

$$\Delta_C = 10 \left(\frac{1,375}{EI} \right) + \frac{6,666.67}{EI} = \frac{20,416.67 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de E e I , obtenemos

$$\Delta_C = \frac{20,416.67 (12)^3}{(29,000) (2,500)} = 0.487 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 0.487 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta

Pendiente en A. Considerando la porción AC de la curva elástica, podemos ver en la Fig. 6.8(d) que

$$\theta_A = \frac{\Delta_C + \Delta_{CA}}{20}$$

Donde

$$\Delta_{CA} = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{EI} \right) (20) (10) = \frac{10,000 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto

$$\theta_A = \frac{1}{20} \left(\frac{20,416.67}{EI} + \frac{10,000}{EI} \right) = \frac{1,520.83 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{1,520.83 (12)^2}{(29,000) (2,500)} = 0.003 \text{ rad}$$

$$\theta_A = 0.003 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

Respuesta

6.5 Diagramas de momento flexionante por partes

Como se ilustró en la sección anterior, la aplicación del método del área-momento implica calcular las áreas y momentos de áreas de varias partes del diagrama de curvatura M/EI . Se mostrará en la siguiente sección que el método de la viga conjugada para determinar las deflexiones de las vigas también requiere el cálculo de estas cantidades. Cuando una viga está sujeta a diferentes tipos de cargas, tales como la combinación de cargas distribuidas y concentradas, determinar las propiedades del diagrama de curvatura M/EI resultante, debido a la combinación de los efectos de todas las cargas, puede llegar a ser demasiado complicado. Esta dificultad se evita construyendo el diagrama de momento por *partes*, es decir, elaborando por separado cada diagrama de momento de todas las cargas. Las ordenadas de los diagramas de momento resultantes se dividirán por EI para obtener el diagrama de curvatura M/EI . Estos diagramas usualmente consisten de formas sencillas, así que el cálculo de las áreas y momentos de área se calculan fácilmente. Las áreas y momentos de área del diagrama de curvatura M/EI resultante se obtienen mediante la suma algebraica (superposición) de las áreas y momentos de área correspondientes, de los diagramas de momento de flexión individuales de cada carga.

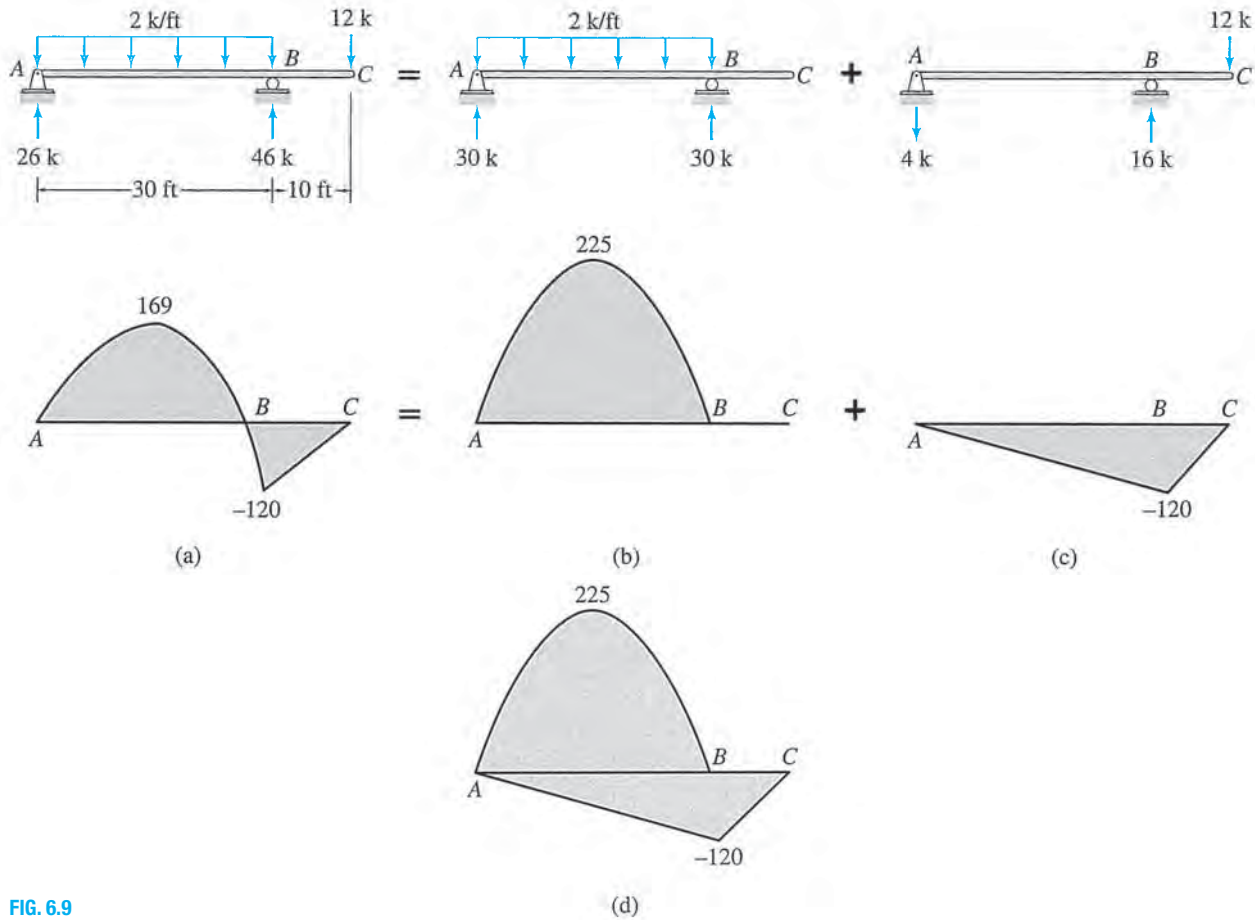


FIG. 6.9

Dos procedimientos se usan comúnmente para la construcción de los diagramas de momento de flexión por partes. El primero involucra la aplicación de carga de manera separada en la viga y la elaboración correspondiente del diagrama de flexión. Considere, por ejemplo, una viga sujeta a la combinación de una carga uniformemente repartida y una carga concentrada, como se muestra en la Fig. 6.9(a). Para construir el diagrama de momentos de flexión por partes, primero aplicamos los dos tipos de cargas de manera separada en la viga, como se ve en las Figuras 6.9(a) y (c), y dibujamos los correspondientes diagramas de momento de flexión. En general, conviene dibujar los diagramas de flexión juntos, como en la Fig. 6.9(d). A pesar de que no es para la aplicación del método de área-momento y del método de la viga conjugada, sí es de desear que el diagrama de momento de flexión resultante, como se muestra en la Fig. 6.9(a), se obtenga por partes, superponiendo las dos partes del diagrama que aparece en las Figuras 6.9(b) y (c).

Un procedimiento alternativo para la obtención de los diagramas de momento flexionante por partes consiste en seleccionar un punto de la viga (usualmente un punto en el apoyo o extremo de la viga) en el que esta se asume como empotrada, se aplica cada carga y las reacciones de manera separada en esta viga en cantiliver imaginaria, y se obtienen los correspondientes diagramas de flexión. A este procedimiento se le conoce como la

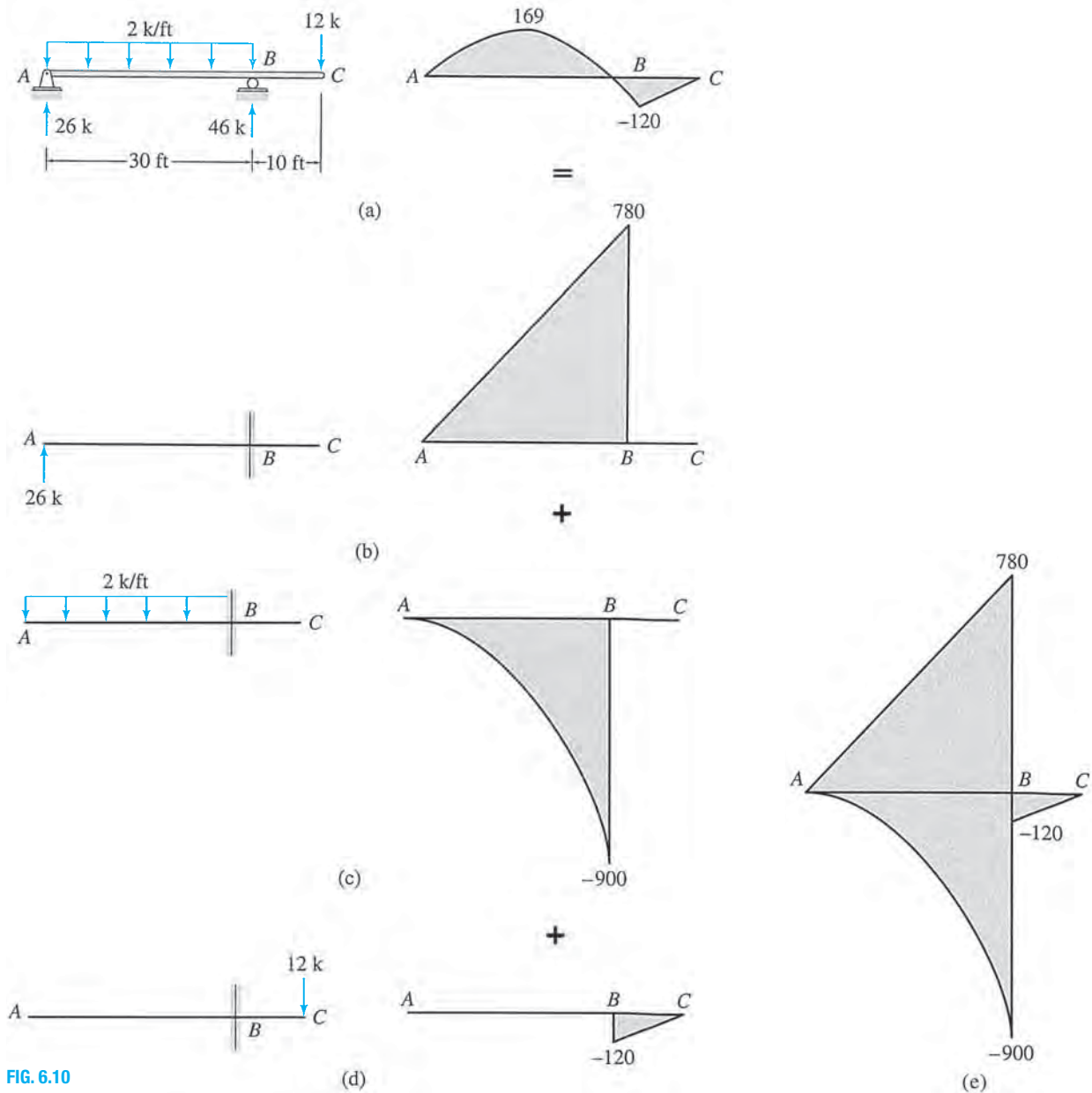


FIG. 6.10

obtención de los *diagramas de momento de flexión de vigas en cantiliver por partes*. Para ilustrarlo, considere de nuevo la viga examinada en la Fig. 6.9. La viga está redibujada en la Fig. 6.10(a), la cual muestra las cargas externas además de las reacciones en los apoyos determinadas por las ecuaciones de equilibrio. Para construir el diagrama de momentos flexionante de vigas en cantiliver por partes con relación al apoyo B, se asume una de estas vigas en cantiliver con un apoyo empotrado en el punto B. Luego se aplican las cargas en el apoyo A de manera separada, como se muestra en la Fig. 6.10(b)-(d), y se dibujan los diagramas de momento flexionante correspondientes, igual que en las figuras. Los diagramas de momento flexionante realizados por

partes normalmente se dibujan juntos, como se aprecia en la Fig. 6.10(e). El diagrama de momentos flexionantes resultante, como el de la Fig. 6.10(a), se puede obtener, si se desea, superponiendo estas tres partes mostradas en la Fig. 6.10(b)-(d).

Ejemplo 6.7

Determine la deflexión en el punto C de la viga que se muestra en la Fig. 6.11(a) con el método de área-momento.

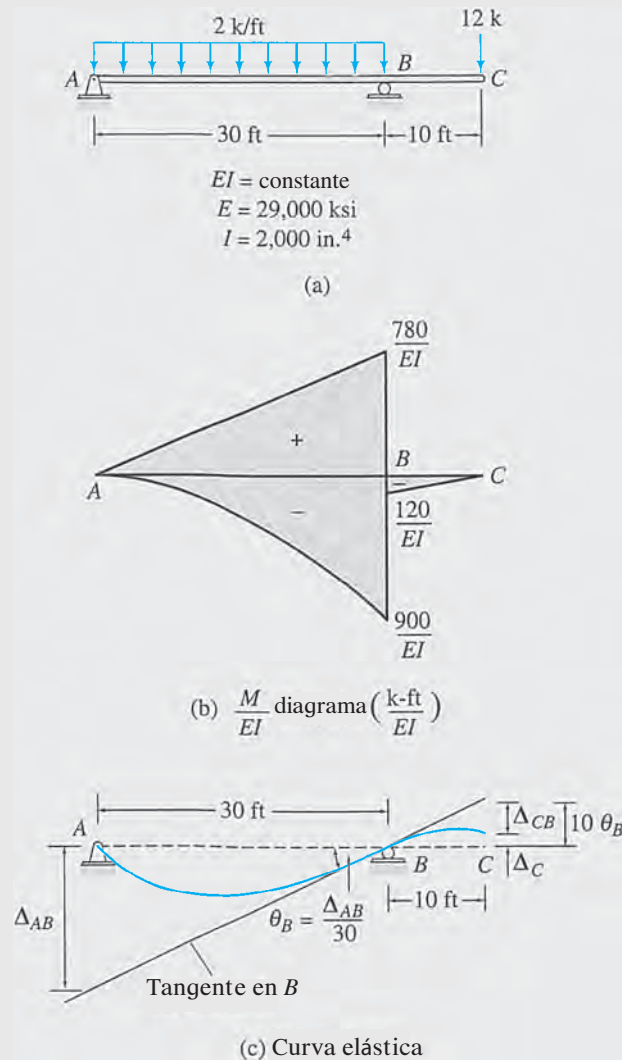


FIG. 6.11

Solución

Diagrama M/EI . El diagrama de momento flexionante para esta viga con una parte en cantiliver con respecto al punto de apoyo B se determinó en la Fig. 6.10. Las ordenadas del diagrama de momento flexionante están divididas entre EI para obtener el diagrama de M/EI mostrado en la Fig. 6.11(b).

Curva elástica. Ver la Fig. 6.11(c).

continúa

Pendiente en B. Seleccionando la tangente en B como la tangente de referencia, se puede ver de la Fig. 6.11(c) que

$$\theta_B = \frac{\Delta_{AB}}{30}$$

Usando el diagrama de M/EI (Fig. 6.11(b)) y las propiedades de la figura geométrica dadas en el Apéndice A, calculamos

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (780) (30) (20) - \frac{1}{3} (900) (30) \left(\frac{3}{4} \right) (30) \right] \\ &= \frac{31,500 \text{ k-ft}^3}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_B = \frac{31,500}{30EI} = \frac{1,050 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Deflexión en C. De la Fig. 6.11(c), podemos ver que

$$\Delta_C = 10\theta_B - \Delta_{CB}$$

Donde

$$\Delta_{CB} = \frac{1}{2} \left(\frac{120}{EI} \right) (10) \left(\frac{20}{3} \right) = \frac{4,000 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto

$$\Delta_C = 10 \left(\frac{1,050}{EI} \right) - \frac{4,000}{EI} = \frac{6,500 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de E e I , obtenemos

$$\Delta_C = \frac{6,500(12)^3}{(29,000)(2,000)} = 0.194 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 0.194 \text{ in. } \uparrow$$

Respuesta

6.6 Método de la viga conjugada

El método de la viga conjugada, desarrollado por Otto Mohr en 1868, por lo general proporciona un medio más conveniente para el cálculo de las pendientes y las deflexiones en las vigas que el método del área-momento. A pesar de que la cantidad de esfuerzo requerido para el cálculo de los dos métodos es esencialmente el mismo, el de la viga conjugada es preferido por muchos ingenieros por su convención de signos sistemáticos y su aplicación directa, ya que no requiere de dibujar la curva elástica de la estructura.

El método de la viga conjugada se basa en la analogía entre la relación entre carga, cortante y momento flexionante y la relación entre M/EI , al pendiente y la deflexión. Estas dos relaciones se obtuvieron en la Sección 5.4 y 6.1, respectivamente, y se reproducen en la Tabla 6.1 para fines de comparación. Como lo indica esta tabla, la relación entre M/EI , la pendiente y la deflexión tiene la misma forma que la relación entre carga, cortante y momento flexionante.

Tabla 6.1

Relación carga, cortante y momento flexionante	Relación M/EI -pendiente-deflexión
$\frac{dS}{dx} = w$	$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$
$\frac{dM}{dx} = S$ o $\frac{d^2M}{dx^2} = w$	$\frac{dy}{dx} = \theta$ o $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

Por lo tanto, la pendiente y la deflexión se pueden determinar de M/EI con las mismas operaciones para calcular el cortante y el momento flexionante, respectivamente, de la carga. Además, si el diagrama de curvatura M/EI para una viga se aplica como la carga en la analogía de viga la ficticia, entonces el cortante y el momento flexionante en cualquier punto de la esta serán igual a la pendiente y la deflexión, respectivamente, en un punto correspondiente de la viga real. La viga ficticia es conocida como la **viga conjugada**, y se define como sigue:

Una viga conjugada que corresponde a una viga real es una viga ficticia de igual longitud que la viga real, pero que se apoya externamente y está conectada internamente, de tal manera que si se carga en el diagrama M/EI de la viga real, el cortante y el momento flexionante en cualquier punto son iguales, respectivamente, a la pendiente y a la deflexión en el punto correspondiente de la viga real.

Como se indicó, el método de la viga conjugada esencialmente implica el cálculo de las pendientes y las deflexiones de las vigas por la determinación del cortante y el momento flexionante en la correspondiente viga conjugada.

Soportes y vigas conjugadas

Los apoyos externos y las conexiones internas para las vigas conjugadas se determinan por la relación análoga entre las vigas conjugadas y las correspondientes vigas reales; es decir, el cortante y el momento flexionante en cualquier punto de la viga conjugada deben ser consistentes con la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga real. Las contrapartes conjugadas de los diferentes tipos de apoyos reales así determinados se muestran en la Fig. 6.12. Como lo indica la figura, un poyo articulado o de patín en el extremo de la viga real permanece idéntico en la viga conjugada. Esto se debe a que en este apoyo puede haber pendiente, pero no deflexión, de la viga real. Por lo tanto, el extremo correspondiente de la viga conjugada puede tener cortante pero no momento flexionante; y el apoyo articulado o de patín en el extremo satisface estas condiciones. Dado que en el apoyo fijo o empotrado de una viga real no hay ni pendiente ni deflexión, tanto el cortante y el momento flexionante en el extremo de la viga conjugada deben ser cero; entonces, la viga conjugada con un apoyo empotrado real está libre en su extremo, como se muestra en la Fig. 6.12. De manera inversa, un extremo libre en la viga real se convierte en un extremo fijo o empotrado en la viga conjugada debido a que puede haber pendiente además de la deflexión en dicho extremo de la viga real, por ello, la viga conjugada debe desarrollar tanto el cortante como el momento flexionante en ese punto. En un apoyo interior de una viga real no hay deflexión, pero la pendiente es continua (es decir, no hay cambio abrupto

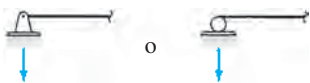
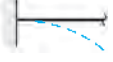
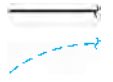
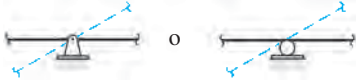
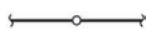
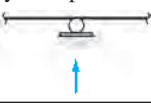
Viga real		Viga conjugada	
Tipo de apoyo	Pendiente y Deflexión	Shear and Bending Moment	Tipo de apoyo
Externo apoyo simple 	$\theta \neq 0$ $\Delta = 0$	$S \neq 0$ $M = 0$	Externo apoyo simple 
Apoyo empotrado 	$\theta = 0$ $\Delta = 0$	$S = 0$ $M = 0$	Externo libre 
Extremo libre 	$\theta \neq 0$ $\Delta \neq 0$	$S \neq 0$ $M \neq 0$	Apoyo empotrado 
Apoyo simple interior 	$\theta \neq 0$ y continuos $\Delta = 0$	$S \neq 0$ y continuos $M = 0$	Articulación interna 
Articulación interna 	$\theta \neq 0$ y discontinuos $\Delta \neq 0$	$S \neq 0$ y discontinuos $M \neq 0$	Apoyo simple interior 

FIG. 6.6 Supoorts for Conjugate Beams

en la pendiente de un lado del apoyo al otro), así que el correspondiente punto en la viga conjugada se convierte en una articulación interna en la cual el momento flexionante es cero y el cortante es continuo. Finalmente, en una articulación interna en la viga real puede haber deflexión, así como una pendiente discontinua de la viga real. En consecuencia, la viga conjugada debe presentar momento flexionante y un cambio abrupto en el cortante en ese punto. Puesto que el apoyo interior satisface ambos requerimientos, una articulación interna en una viga real se convierte en un apoyo interno en la viga conjugada, como se muestra en la Fig. 6.12.

Las vigas conjugadas de algunos de los tipos más comunes de vigas reales se ejemplifican en la Fig. 6.13. Como indica la Fig. 6.13(a)-(e), las vigas conjugadas correspondientes a vigas reales estáticamente determinadas son siempre estáticamente determinadas, mientras que las vigas estáticamente indeterminadas tienen una viga conjugada inestable, como se ve en la Fig. 6.13(f).(h). Sin embargo, dado que las vigas conjugadas inestables serán cargadas con el diagrama M/EI de vigas reales estáticamente indeterminadas, las cuales son autoequilibradas, estas permanecerán en equilibrio. Como lo ilustran los dos últimos ejemplos en la Fig. 6.13, las vigas reales estáticamente inestables tienen vigas conjugadas estáticamente indeterminadas.

Convención de signos

Si las ordenadas positivas del diagrama M/EI están aplicadas a la viga conjugada como cargas hacia arriba (en la dirección positiva de y) y viceversa,

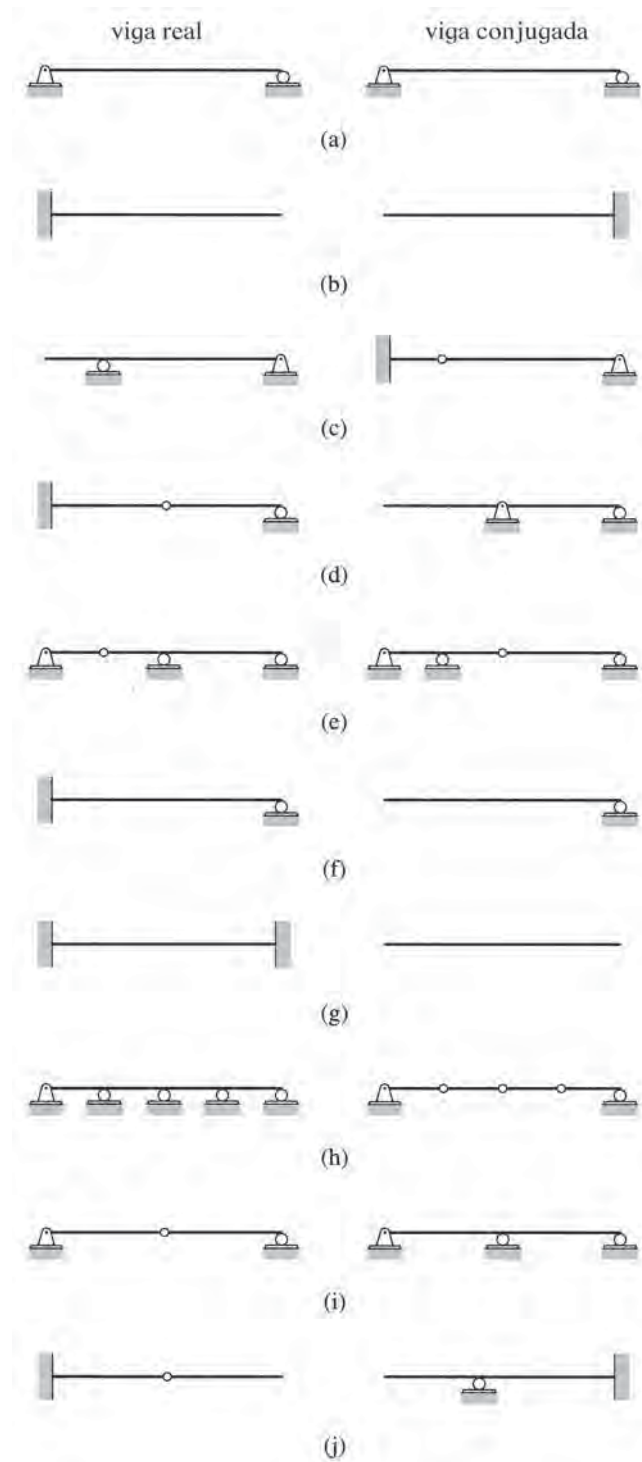


FIG. 6.13

entonces un cortante positivo en la viga conjugada indica una pendiente positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj) de la viga real con respecto al eje sin deformar de la viga real; además, un momento flexionante positivo en una viga conjugada indica una deflexión positiva (hacia arriba

en la dirección positiva de y) de la viga real con respecto al eje sin deformar de la viga real y viceversa.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento, paso a paso, se puede utilizar para determinar las pendientes y deformaciones de vigas por el método de la viga conjugada.

1. Construya el diagrama M/EI para la viga (real) sujeta a las cargas (reales) especificadas. Si la viga está sujeta a una combinación de diferentes tipos de cargas (por ejemplo, cargas concentradas o distribuidas), el análisis puede ser considerablemente más ágil si se elabora el diagrama M/EI por partes, como se discutió en la sección anterior.
2. Determine la viga conjugada correspondiente a la viga real. Los apoyos externos y las conexiones internas para la viga conjugada deben ser seleccionados para que el cortante y el momento flexionante en cualquier punto de la viga conjugada sean consistentes con la pendiente y la deflexión, respectivamente, en cualquier punto de la viga real. Los diferentes tipos de apoyos reales están indicados en la Fig. 6.12.
3. Aplique el diagrama M/EI (del paso 1) como la carga en la viga conjugada. Las ordenadas positivas del diagrama M/EI están aplicadas como cargas hacia arriba en la viga conjugada y viceversa.
4. Calcule las reacciones en los apoyos de la viga conjugada aplicando las ecuaciones de equilibrio y de condición (si hubiera).
5. Determine el cortante en los puntos de la viga conjugada donde se desean las pendientes en la viga real. Encuentre el momento flexionante en los puntos de la viga conjugada donde se desean las deflexiones en la viga real. Estos cortantes y momentos flexionantes en la viga conjugada se consideran positivos o negativos de acuerdo con la convención de signos de la viga (Fig. 5.2)
6. La pendiente en un punto en la viga real con respecto al eje sin deformar es igual al cortante en ese punto en la viga conjugada. Un cortante positivo en la viga conjugada indica una pendiente positiva o en el sentido contrario a las manecillas del reloj de la viga real y viceversa.
7. La deflexión en un punto de la viga real con respecto al eje sin deformar de la viga real es igual al momento flexionante en dicho punto en la viga conjugada. Un momento de flexión positivo en la viga conjugada indica una deflexión positiva o hacia arriba en la viga real y viceversa.

Ejemplo 6.8

Determine las pendientes y deflexiones en los puntos B y C de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. 6.14(a) con el método de la viga conjugada.

Solución

Diagrama M/EI . Esta viga fue analizada en el ejemplo 6.3 por el método de área-momento. El diagrama M/EI para el momento de inercia de referencia $I = 3,000 \text{ in.}^4$ se muestra en la Fig. 6.14 (b).

continúa

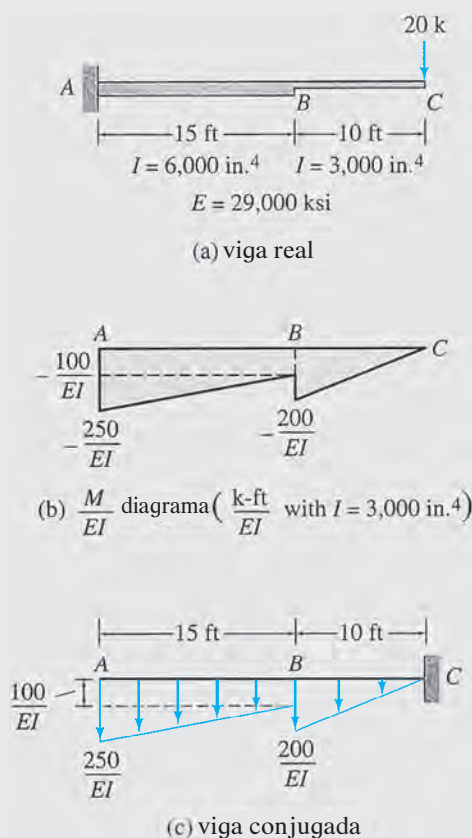


FIG. 6.14

Viga conjugada. En la Fig. 6.14(c) vemos la viga conjugada, cargada con el diagrama M/EI de la viga real. Tenga en cuenta que el punto A, empotrado en la viga real, se convierte en apoyo libre en la viga conjugada, mientras que el punto C, que está libre en la viga real, se convierte en empotrado en la viga conjugada. Debido a que el diagrama M/EI es negativo, se aplican como una carga hacia abajo en la viga conjugada.

Pendiente en B. La pendiente en B en la viga real es igual al cortante en B en la viga conjugada. Usando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B y considerando las fuerzas externas que actúan hacia arriba en el cuerpo libre como positivas, y de acuerdo con la convención de signos (ver Fig. 5.2), calculamos el cortante en B en la viga conjugada como

$$+ \uparrow S_B = \frac{1}{EI} \left[-100(15) - \frac{1}{2}(150)(15) \right] = -\frac{2,625 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Por lo tanto, la pendiente en B en la viga real es

$$\theta_B = -\frac{2,625 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de E e I, obtenemos

$$\theta_B = -\frac{2,625(12)^2}{(29,000)(3,000)} = -0.0043 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0.0043 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

Deflexión en B. La deflexión en B en la viga real es igual al momento flexionante en B de la viga conjugada. Usando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B y considerando los momentos de las fuerzas externas en sentido de

continúa

las manecillas del reloj alrededor de B como positivos, y de acuerdo con la convención de signos (ver Fig. 5.2), determinamos el momento flexionante en B en la viga conjugada como

$$+\zeta M_B = \frac{1}{EI} \left[-100(15)(7.5) - \frac{1}{2}(150)(15)(10) \right] = -\frac{22,500 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto, la deflexión en B de la viga real es

$$\Delta_B = -\frac{22,500 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{22,500(12)^3}{(29,000)(3,000)} = -0.45 \text{ in.}$$

$$\Delta_B = 0.45 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta

Pendiente en C . Con el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de C , obtenemos

$$+\uparrow S_C = \frac{1}{EI} \left[-100(15) - \frac{1}{2}(150)(15) - \frac{1}{2}(200)(10) \right] = -\frac{3,625 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Por lo tanto, la deflexión en C en la viga real es

$$\theta_C = -\frac{3,625 \text{ k-ft}^2}{EI} = -\frac{3,625(12)^2}{(29,000)(3,000)} = -0.006 \text{ rad}$$

$$\theta_C = 0.006 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

Respuesta

Deflection at C . Considering the free body of the conjugate beam to the left of C , we obtain

$$+\zeta M_C = \frac{1}{EI} \left[-100(15)(17.5) - \frac{1}{2}(150)(15)(20) - \frac{1}{2}(200)(10)(6.67) \right]$$

$$= -\frac{55,420 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Therefore, the deflection at C on the real beam is DC

$$\Delta_C = -\frac{55,420 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{55,420(12)^3}{(29,000)(3,000)} = -1.1 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 1.1 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.9

Calcule la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga mostrada en la Fig. 6.15(a) por el método de la viga conjugada.

Solución

Diagrama M/EI . Ver la Fig. 6.15 (b).

Viga conjugada. La viga conjugada, cargada con el diagrama M/EI de la viga real, se muestra en la Fig. 6.15(c).

Pendiente en B . Considerando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B , determinamos el cortante en B como

$$+\uparrow S_B = \frac{M}{EI}(L) = \frac{ML}{EI}$$

continúa

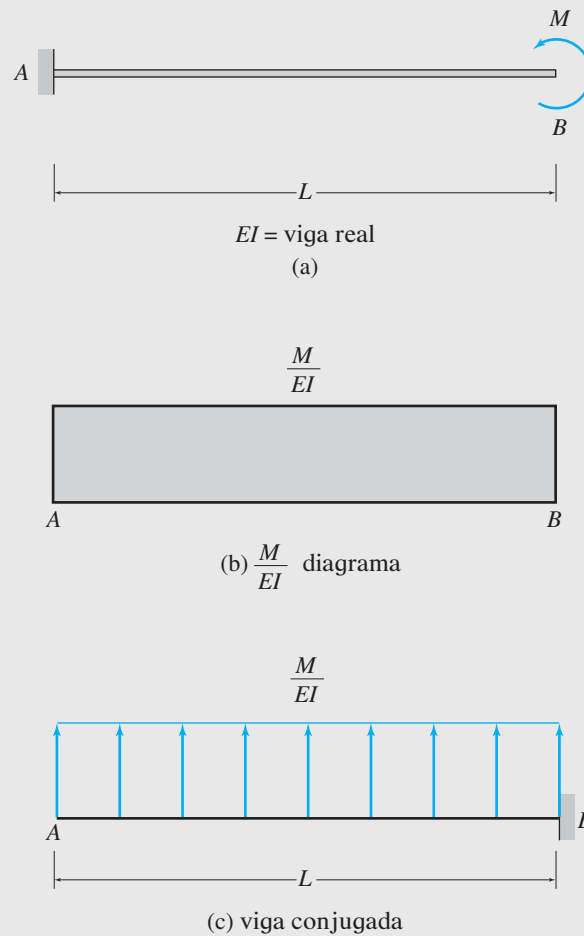


FIG. 6.15

Por lo tanto, la pendiente en B de la viga real es

$$\theta_B = \frac{ML}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{ML}{EI} \quad \curvearrowright$$

Respuesta

Deflexión en B . Utilizando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B , determinamos el momento flexionante en B como

$$+\circlearrowleft M_B = \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{ML^2}{2EI}$$

Por lo tanto, la deflexión en B de la viga real es

$$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI} \uparrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.10

Use el método de la viga conjugada para determinar las pendientes en los extremos A y D y las deflexiones en B y C de la viga mostrada en la Fig. 6.16(a)

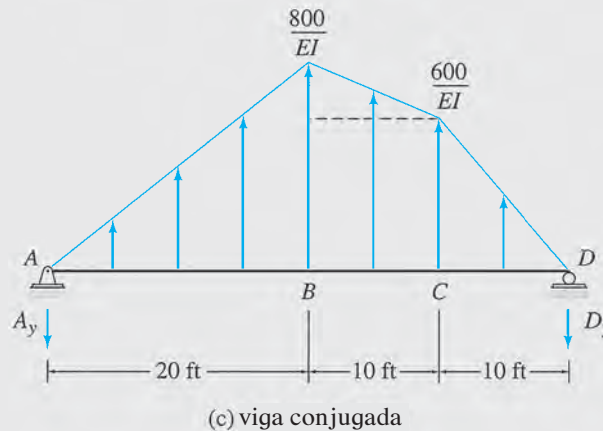
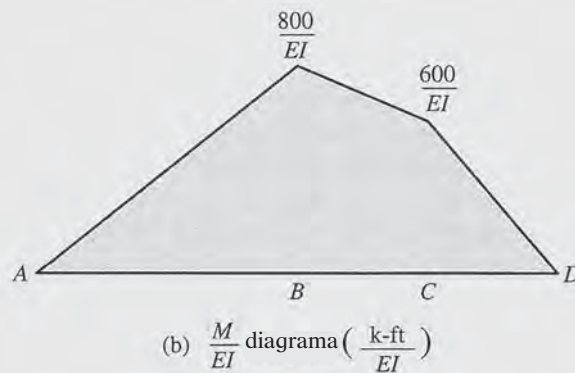
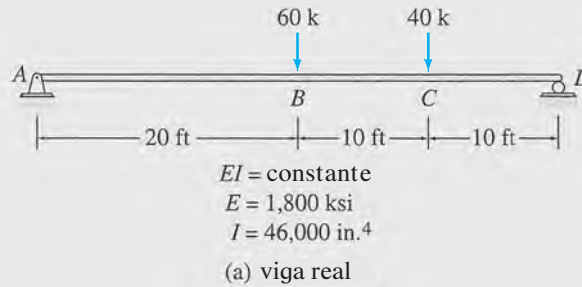
**FIG. 6.16****Solución**

Diagrama M/EI . Esta viga fue analizada en el Ejemplo 6.4 usando el método de área-momento. El diagrama M/EI de esta viga se muestra en la Fig. 6.16(b).

Viga conjugada. La Fig. 6.16(c) muestra la viga conjugada cargada con el diagrama M/EI de la viga real. Los puntos A y D, los cuales son apoyos simples en la viga real, permanecen iguales en la viga conjugada. Debido a que el diagrama M/EI es positivo, se aplica la carga hacia abajo en la viga conjugada.

continúa

Reacciones en la viga conjugada. Aplicando las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre en la viga conjugada, obtenemos lo siguiente:

$$+\curvearrowright \sum M_D = 0$$

$$A_y(40) - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(800)(20) \left(\frac{20}{3} + 20 \right) + 600(10)(15) + \frac{1}{2}(200)(10) \left(\frac{20}{3} + 10 \right) + \frac{1}{2}(600)(10) \left(\frac{20}{3} \right) \right] = 0$$

$$A_y = \frac{8,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[-8,500 + \frac{1}{2}(800)(20) + 600(10) + \frac{1}{2}(200)(10) + \frac{1}{2}(600)(10) \right] - D_y = 0$$

$$D_y = \frac{9,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Pendiente en A. La pendiente en A de la viga real es igual al cortante justo a la izquierda de A en la viga conjugada, la cual es

$$+\uparrow S_{A,R} = -A_y = -\frac{8,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Therefore, the slope at A on the real beam is

$$\theta_A = -\frac{8,500 \text{ k-ft}^2}{EI} = -\frac{8,500(12)^2}{(1,800)(46,000)} = -0.015 \text{ rad}$$

$$\theta_A = 0.015 \text{ rad}$$



Respuesta

Pendiente en D. La pendiente en D de la viga real es igual al cortante justo a la izquierda de D en la viga conjugada, la cual es

$$+\downarrow S_{D,L} = +D_y = \frac{9,500 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Por lo tanto, la pendiente en D de la viga real es

$$\theta_D = \frac{9,500 \text{ k-ft}^2}{EI} = \frac{9,500(12)^2}{(1,800)(46,000)} = 0.017 \text{ rad}$$

$$\theta_D = 0.017 \text{ rad}$$



Respuesta

Deflexión en B. La deflexión en B en la viga real es igual al momento flexionante en B en la viga conjugada. Usando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B, calculamos

$$+\zeta M_B = \frac{1}{EI} \left[-8,500(20) + \frac{1}{2}(800)(20) \left(\frac{20}{3} \right) \right] = -\frac{116,666.67 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto, la deflexión en B de la viga real es

$$\Delta_B = -\frac{116,666.67 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{116,666.67(12)^3}{(1,800)(46,000)} = -2.43 \text{ in.}$$

$$\Delta_B = 2.43 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta
continúa

Deflexión en C. La deflexión en C en la viga real es igual al momento flexionante en C en la viga conjugada. Usando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de C, determinamos

$$+ \uparrow M_C = \frac{1}{EI} \left[-9,500(10) + \frac{1}{2}(600)(10) \left(\frac{10}{3} \right) \right] = -\frac{85,000 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Por lo tanto, la deflexión en C en la viga real es

$$\Delta_C = -\frac{85,000 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{85,000 (12)^3}{(1,800)(46,000)} = -1.77 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 1.77 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.11

Determine la deflexión máxima para la viga de la Fig. 6.17(a) por el método de la viga conjugada.

Solución

Diagrama M/EI . Esta viga fue analizada en el Ejemplo 6.5 usando el método de área-momento. El diagrama M/EI de la viga se muestra en la Fig. 6.17(b).

Viga conjugada. La viga simplemente conjugada, apoyada, cargada con el diagrama M/EI de la viga real, mostrada en la Fig. 6.17(c).

Reacciones en el apoyo A de la viga conjugada. Calculamos la ecuación de equilibrio de momento $\sum M_C = 0$ al cuerpo libre de la viga conjugada completa, determinamos

$$+ \zeta M_C = 0$$

$$A_y (15) - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(400)(10) \left(\frac{10}{3} + 5 \right) + \frac{1}{2}(400)(5) \left(\frac{10}{3} \right) \right] = 0$$

$$A_y = \frac{1,333.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

Ubicación del momento de flexión máximo en la viga conjugada. Si el momento de flexión máximo en la viga conjugada (o la deflexión máxima en la viga real) se presenta en el punto D, ubicado a una distancia x_m a la izquierda del apoyo A (ver la Fig. 6.17(c)), entonces el cortante en la viga conjugada en D debe ser cero. Considerando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de D, escribimos

$$+ \uparrow S_D = \frac{1}{EI} \left[-1,333.33 + \frac{1}{2}(40x_m)(x_m) \right] = 0$$

De donde

$$x_m = 8.16 \text{ m}$$

Deflexión máxima en la viga real. La deflexión máxima de la viga real es igual al momento flexionante en la viga conjugada, el cual se determina considerando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de D, con $x_m = 8.16 \text{ m}$. Por lo tanto,

$$+ \zeta M_{\max} = M_D = \frac{1}{EI} \left[-1,333.33(8.16) + \frac{1}{2}(40)(8.16)^2 \left(\frac{8.16}{3} \right) \right]$$

$$= -\frac{7,244.51 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

continúa

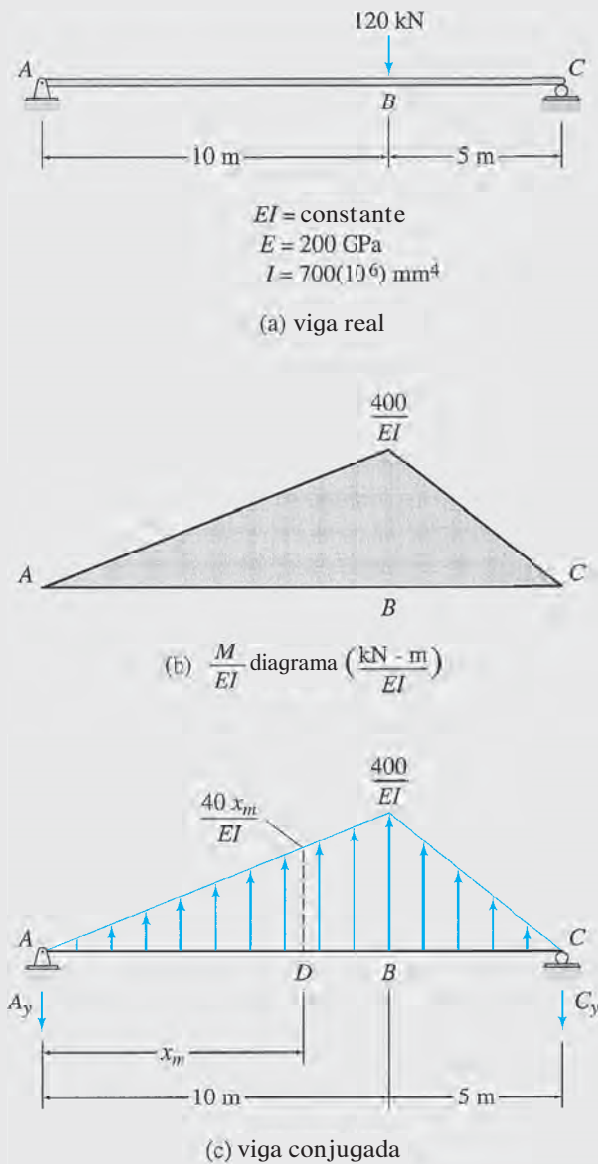


FIG. 6.17

Entonces, la deflexión máxima de la viga real es

$$\Delta_{\max} = -\frac{7,244.51 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = -\frac{7,244.51}{(200)(700)} = -0.0517 \text{ m} = -51.7 \text{ mm}$$

$$\Delta_{\max} = 51.7 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.12

Determine la pendiente en el punto A y la deflexión en el punto C de la viga mostrada en la Fig. 6.18(a) por el método de la viga conjugada.

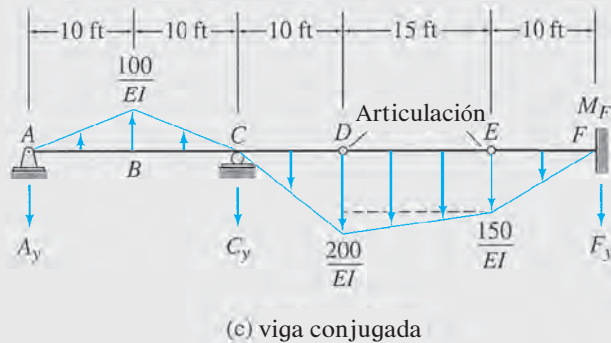
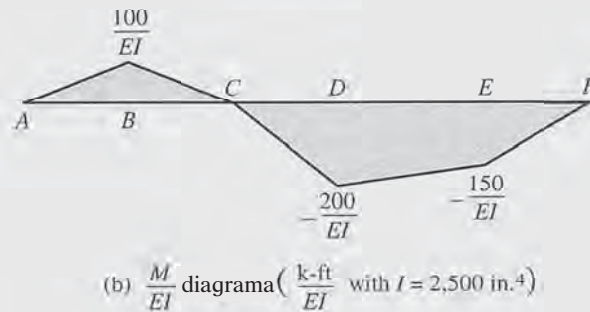
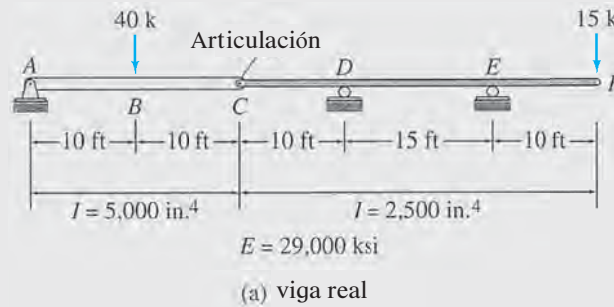
**FIG. 6.18****Solución**

Diagrama M/EI . Esta viga fue analizada en el Ejemplo 6.6 usando el método de área-momento. El diagrama M/EI para el momento de inercia de referencia $I = 2,500 \text{ in.}^4$ se muestra en la Fig. 6.18(b).

Viga conjugada. La Fig. 6.18(c) muestra la viga conjugada cargada con el diagrama M/EI de la viga real. Tenga en cuenta que los puntos D y E, que son apoyos interiores simples en la viga real, se convierten en articulaciones internas en la viga conjugada; el punto C, el cual es una articulación interna en la viga real, se convierte en un apoyo interior simple en la viga conjugada. Además, la parte positiva del diagrama M/EI se aplica como una carga hacia arriba en la viga conjugada, mientras la parte negativa del diagrama M/EI está aplica como carga hacia abajo.

continúa

Reacciones en el apoyo A de la viga conjugada. Determinamos la reacción en A de la viga conjugada aplicando las ecuaciones de condición como sigue:

$$+ \zeta \sum M_D^{AD} = 0$$

$$A_y (30) - \frac{1}{2} \left(\frac{100}{EI} \right) (20) (20) + C_y (10) + \frac{1}{2} \left(\frac{200}{EI} \right) (10) \left(\frac{10}{3} \right) = 0$$

o

$$C_y = -3A_y + \frac{1,666.67}{EI} \quad (1)$$

$$+ \zeta \sum M_E^{AE} = 0$$

$$A_y (45) - \frac{1}{2} \left(\frac{100}{EI} \right) (20) (35) + C_y (25) + \frac{1}{2} \left(\frac{200}{EI} \right) (10) \left(\frac{10}{3} + 15 \right) + \frac{150}{EI} (15) (7.5) + \frac{1}{2} \left(\frac{50}{EI} \right) (15) (10) = 0$$

o

$$45A_y + 25C_y = -\frac{3,958.33}{EI} \quad (2)$$

Sustituyendo la Ec. (1) en la Ec. (2) y resolviendo para A_y , obtenemos

$$A_y = \frac{1,520.83 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Pendiente en A. La pendiente en A de la viga real es igual al cortante justo a la izquierda de A en la viga conjugada, la cual es

$$+ \uparrow S_{A,R} = -A_y = -\frac{1,520.83 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Por lo tanto, la pendiente en A en la viga real es

$$\theta_A = -\frac{1,520.83}{EI} = -\frac{1,520.83 (12)^2}{(29,000) (2,500)} = -0.003 \text{ rad}$$

$$\theta_A = 0.003 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

Respuesta

Deflexión en C. La deflexión en C en la viga real es igual al momento flexionante en C de la viga conjugada. Considerando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de C, obtenemos

$$+ \zeta M_C = \frac{1}{EI} \left[-1,520.83 (20) + \frac{1}{2} (100) (20) (10) \right] = -\frac{20,416.67 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Entonces, la deflexión en C de la viga real es

$$\Delta_C = -\frac{20,416.67 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{20,416.67 (12)^3}{(29,000) (2,500)} = -0.487 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 0.487 \text{ in.} \downarrow$$

Respuesta

Ejemplo 6.13

Use el método de la viga conjugada para determinar la deflexión en el punto C de la viga mostrada en la Fig. 6.19(a).

Solución

Diagrama M/EI . Esta viga fue analizada en el Ejemplo 6.7 usando el método de área-momento. El diagrama M/EI de la viga con cantiliver respecto del punto B se muestra en la Fig. 6.19(b).

continúa

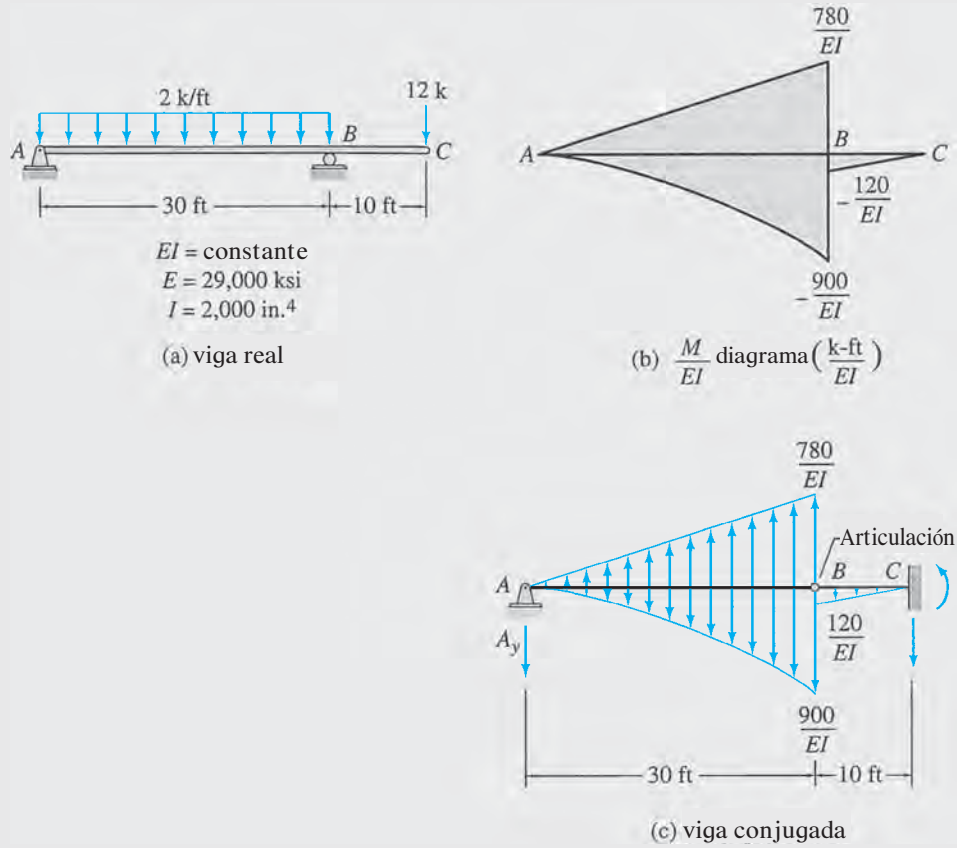


FIG. 6.19

Viga conjugada. Ver la Fig. 6.19(c).

Reacciones en el apoyo A de la viga conjugada. La deflexión en C de la viga real es igual al momento flexionante en C en la viga conjugada. Considerando el cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de C, obtenemos

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_B^{AB} &= 0 \\
 A_y(30) + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (900)(30) \left(\frac{30}{4} \right) - \frac{1}{2} (780)(30) \left(\frac{30}{3} \right) \right] &= 0 \\
 A_y &= \frac{1,650 \text{ k-ft}^2}{EI}
 \end{aligned}$$

Deflexión en C. La deflexión en C de la viga real es igual al momento flexionante en C de la viga conjugada a la izquierda de C, por lo que resulta

$$\begin{aligned}
 +\zeta M_C &= \frac{1}{EI} \left[-1,650(40) - \frac{1}{3} (900)(30) \left(\frac{30}{4} + 10 \right) + \frac{1}{2} (780)(30)(20) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (120)(10) \left(\frac{20}{3} \right) \right] = \frac{6,500 \text{ k-ft}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la deflexión en C de la viga real es

$$\begin{aligned}
 \Delta_C &= \frac{6,500 \text{ k-ft}^3}{EI} = \frac{6,500(12)^3}{(29,000)(2,000)} = 0.194 \text{ in.} \\
 \Delta_C &= 0.194 \text{ in. } \uparrow
 \end{aligned}$$

Respuesta

Resumen

En este capítulo discutimos los métodos geométricos para calcular las pendientes y las deflexiones de vigas estáticamente determinadas. La ecuación diferencial de la deflexión en vigas se puede expresar como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (6.9)$$

El método directo de integración esencialmente implica escribir la(s) expresión(es) para M/EI para la viga en términos de x y la integración de la(s) expresión(es) sucesivas para obtener las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de la curva elástica. Las constantes de integración son determinadas de las condiciones de frontera y de las condiciones de continuidad de la curva elástica. Si una viga está sujeta a varias cargas, la pendiente y la deflexión debidas a la combinación de efectos de las cargas pueden ser determinadas por la sumatoria algebraica de las pendientes y las deflexiones debidas a cada carga que actúan de manera individual sobre la viga.

El método de área-momento se basa en dos teoremas, los cuales pueden ser matemáticamente expresados como sigue:

$$\text{Primer teorema área-momento: } \theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (6.12)$$

$$\text{Segundo teorema área-momento: } \Delta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} \bar{x} dx \quad (6.15)$$

Se presentaron dos procedimientos para construir los diagramas de momento flexionante por partes en la Sección 6.5.

La viga conjugada es una viga ficticia de igual longitud que la viga real, pero se encuentra soportada externamente e internamente conectada de tal manera que, si la viga conjugada está cargada con el diagrama M/EI de la viga real, el cortante y el momento flexionante en cualquier punto de la viga conjugada son iguales, respectivamente, a la pendiente y a la deflexión en el punto correspondiente de la viga real. El método de la viga conjugada implica determinar las pendientes y las deflexiones de las vigas con el cálculo de los cortantes y momentos flexionantes en la correspondiente viga conjugada.

Problemas

Sección 6.2

Del 6.1 al 6.6 Establezca las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de la viga mostrada por el método directo de integración. $EI = \text{constante}$.

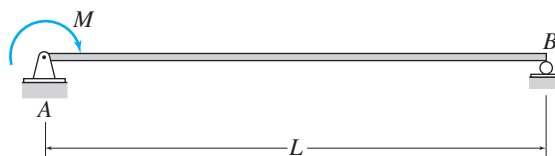


Fig. P6.1



Fig. P6.2

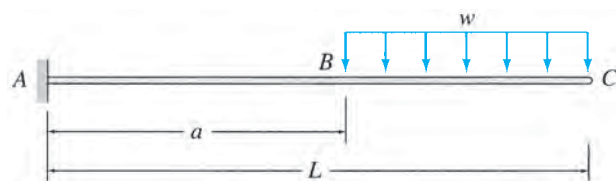


Fig. P6.3



Fig. P6.4

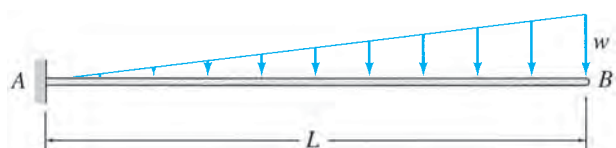


Fig. P6.5

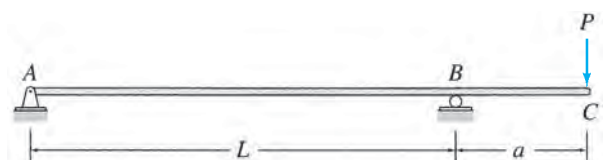


Fig. P6.6

Del 6.7 al 6.8 Calcule la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga mostrada por el método directo de integración.

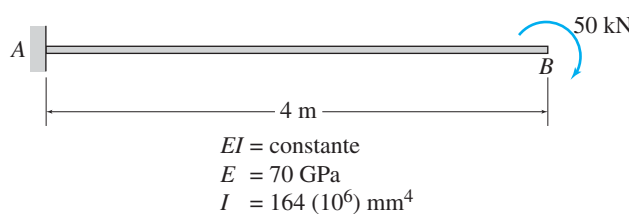
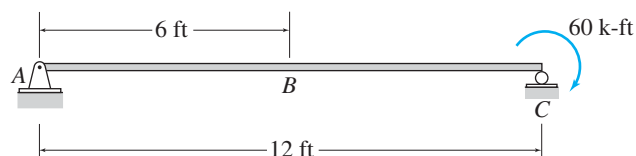


Fig. P6.7

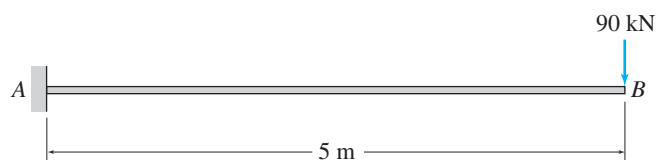


$EI = \text{constante}$
 $E = 10,000 \text{ ksi}$
 $I = 800 \text{ in}^4$

Fig. P6.8

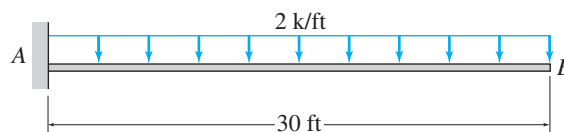
Sección 6.4 al 6.5

Del 6.9 al 6.12 Determine la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga mostrada por el método del área-momento.



$EI = \text{constante}$
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 800 (10^6) \text{ mm}^4$

Fig. P6.9, P6.36



$EI = \text{constante}$
 $E = 29,000 \text{ ksi}$
 $I = 3,000 \text{ in}^4$

Fig. P6.10, P6.36

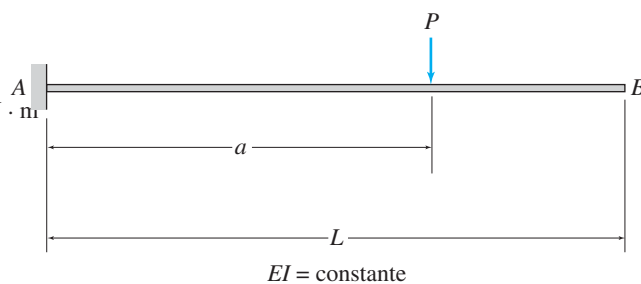


Fig. P6.11, P6.37

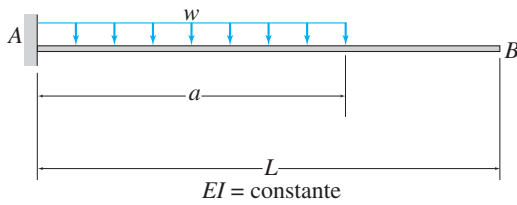


Fig. P6.12, P6.38

Del 6.13 al 6.14 Determine la pendiente y la deflexión en el punto A de la viga mostrada por el método del área-momento.

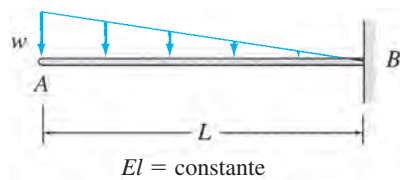


Fig. P6.13, P6.39

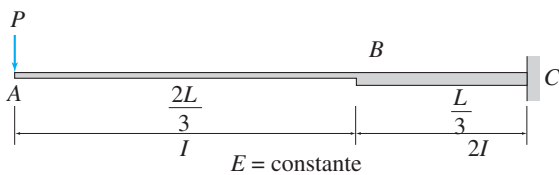


Fig. P6.14, P6.40

Del 6.15 al 6.17 Use el método del área-momento para determinar las pendientes y deflexiones en el punto B y C de la viga mostrada.

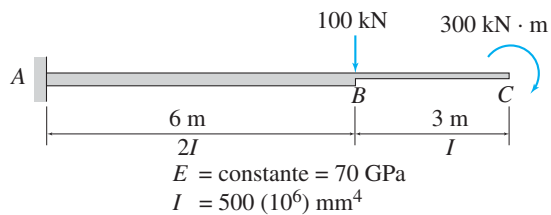


Fig. P6.15, P6.41

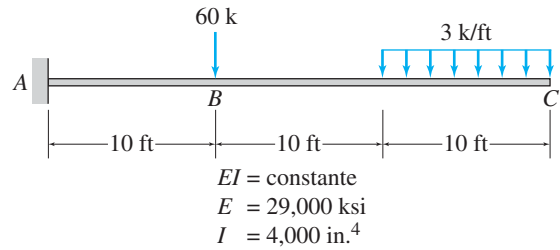


Fig. P6.16, P6.42

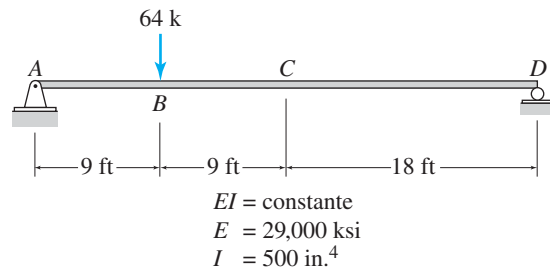


Fig. P6.17, P6.43

Del 6.18 al 6.22 Determine el momento de inercia menor I requerido para la viga mostrada, para que la deflexión máxima no exceda el límite de $1/360$ de la longitud del claro (es decir, $\Delta_{\text{Max}} \leq L/360$). Utilice el método del área-momento.

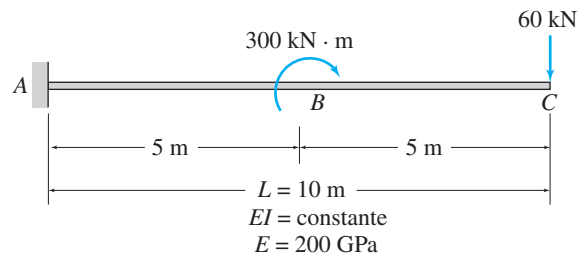


Fig. P6.18, P6.44

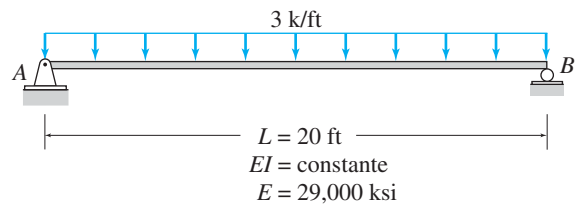


Fig. P6.19, P6.45

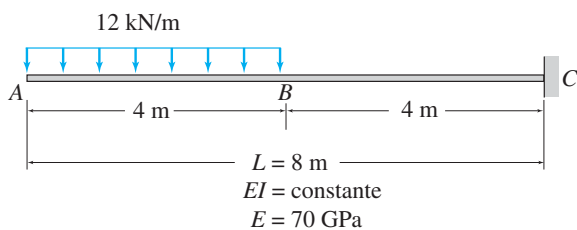


Fig. P6.20, P6.46

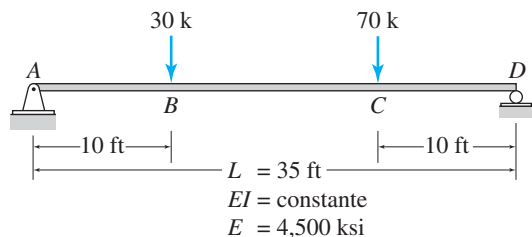


Fig. P6.21, P6.47

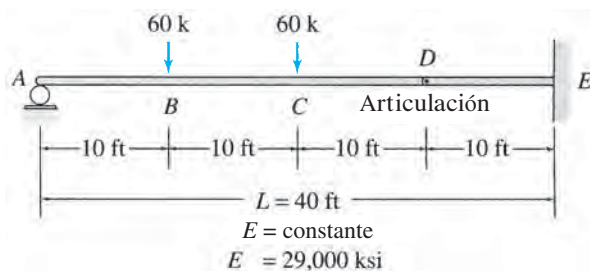
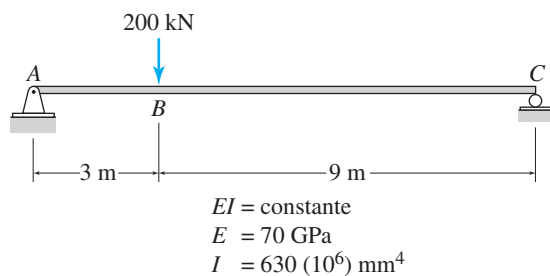
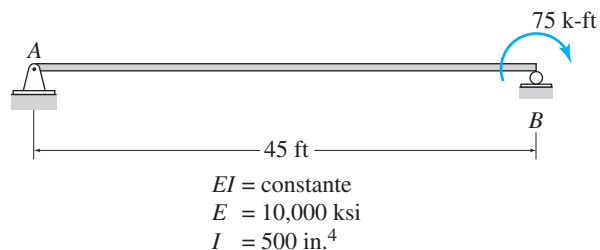


Fig. P6.22, P6.48

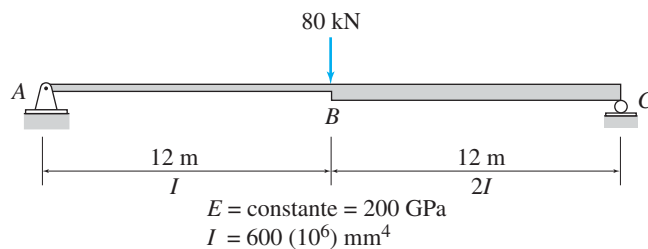
Del 6.23 al 6.30 Calcule la deflexión máxima para la viga mostrada por el método del área-momento.



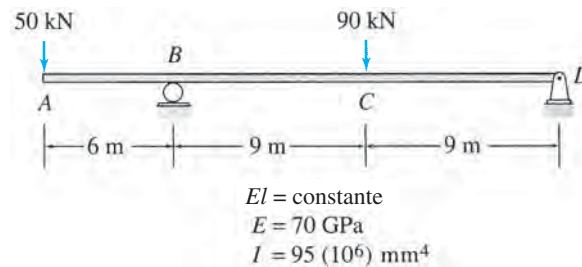
Del 6.23 al 6.49



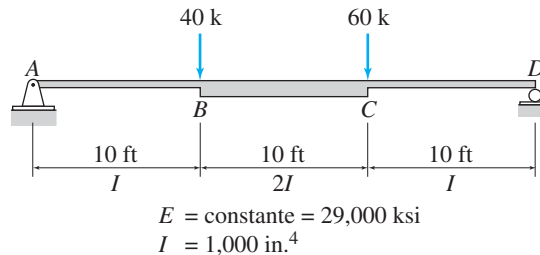
Del 6.24 al 6.50



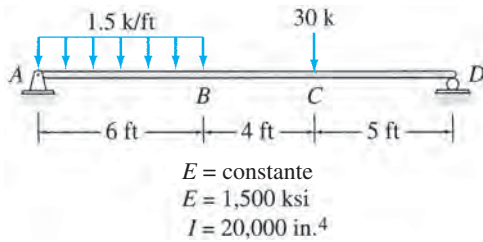
Del 6.25 al 6.51



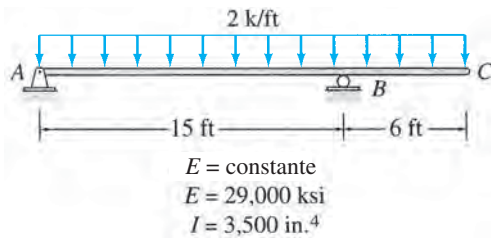
Del 6.26 al 6.52



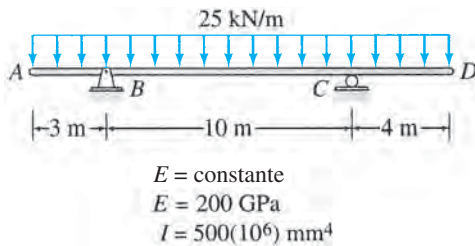
Del 6.27 al 6.53



Del 6.28 al 6.54

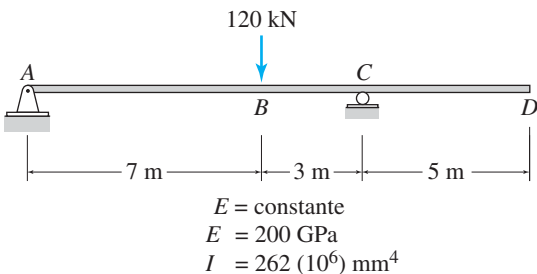


Del 6.29 al 6.55

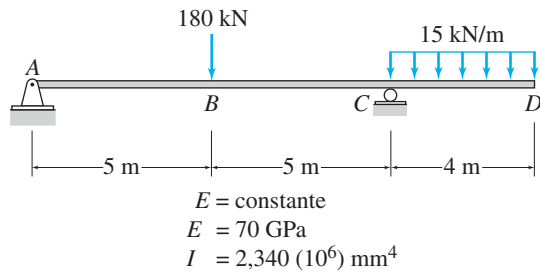


Del 6.30 al 6.56

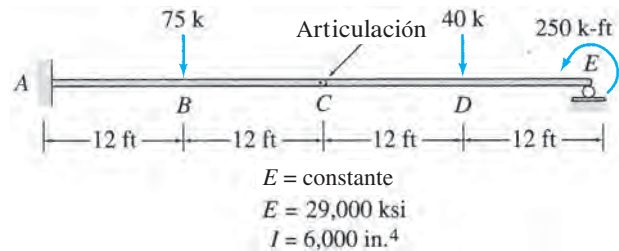
Del 6.31 al 6.32 Utilice el método del área-momento para determinar la pendiente y la deflexión en el punto D de la viga mostrada.



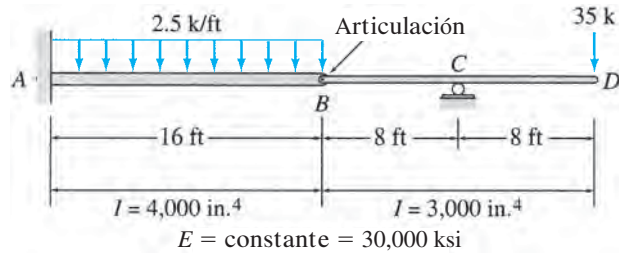
Del 6.31 al 6.57



Del 6.32 al 6.58



Del 6.33 al 6.59



Del 6.34 al 6.60

Sección 6.6

Del 6.35 al 6.38 Utilice el método de la viga conjugada para determinar la pendiente y deflexión en el punto B de las vigas mostradas en las Figs. P.6.9 al P.6.12

Del 6.39 al 6.40 Determine la pendiente y deflexión en el punto B de las vigas mostradas en las Figs. P.6.13 al P.6.14 por el método de la viga conjugada.

Del 6.41 al 6.43 Utilice el método de la viga conjugada para determinar las pendientes y deflexiones en los puntos B y C de las vigas mostradas en las Figs. P.6.15 al P.6.17

Del 6.44 al 6.48 Utilice el método de la viga conjugada y determine los momentos de inercia menores requeridos las vigas

mostradas en las Figs. P.6.18 a P.6.22, para que la deflexión máxima en la viga no exceda el límite de $1/360$ del claro (es decir, $\Delta_{\text{Max}} \leq L/360$).

Del 6.49 al 6.56 Determine la deflexión máxima para las vigas mostradas en las Figs. P.6.23 al P.6.30 usando el método de la viga conjugada.

Del 6.57 al 6.58 Use el método de la viga conjugada para determinar la pendiente y la deflexión en el punto D de las vigas mostradas en las Figs. P.6.31 al P.6.32.

Del 6.59 al 6.60 Aplique el método de la viga conjugada para determinar las pendientes y deflexiones en los puntos B y C de las vigas mostradas en las Figs. P.6.33 al P.6.34.



Colapso del Puente Interestatal
35 W en Minnesota (2007).
AP Photo/Pioneer Press, Brandi Jade Thomas

7

Deflexiones en armaduras, vigas y marcos: Métodos energéticos (Trabajo y Energía)

- 7.1 Trabajo
 - 7.2 Principio del trabajo virtual
 - 7.3 Deflexiones de armaduras por el método del trabajo virtual
 - 7.4 Deflexiones de vigas por el método del trabajo virtual
 - 7.5 Deflexiones de marcos por el método del trabajo virtual
 - 7.6 Conservación de la energía y energía de deformación
 - 7.7 Segundo teorema de Castigliano
 - 7.8 Ley de Betti y Ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas
- Resumen
Problemas

En este capítulo desarrollaremos métodos para el análisis de deflexiones de estructuras estáticamente determinadas usando algunos principios básicos de trabajo y energía. Los métodos energéticos (trabajo-energía) son más generales que los métodos geométricos considerados en el capítulo previo en el sentido de que se pueden aplicar a varios tipos de estructuras, tales como armaduras, vigas y marcos. Una desventaja de estos métodos es que con cada aplicación solo se puede calcular una componente de deflexión, o pendiente, en un punto de la estructura.

Empezaremos con una revisión del concepto básico de trabajo realizado por las fuerzas y pares durante la deformación de la estructura, y luego discutiremos el principio de trabajo virtual. Este principio se usa para formular el método del trabajo virtual para las deflexiones en armaduras, vigas y marcos. Obtendremos las expresiones para la energía de deformación de armaduras, vigas y marcos, y consideraremos el segundo teorema de Castigliano para calcular las deflexiones. Finalmente, presentaremos la Ley de Betti y la Ley de Maxwell para las deflexiones recíprocas.

7.1 Trabajo

El trabajo realizado por la acción de una fuerza en una estructura se define simplemente como el desplazamiento generado por la fuerza en el punto de aplicación de esta. El trabajo se considera positivo cuando la fuerza y el desplazamiento en la dirección de la fuerza tienen el mismo sentido, y es negativo cuando la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos opuestos.

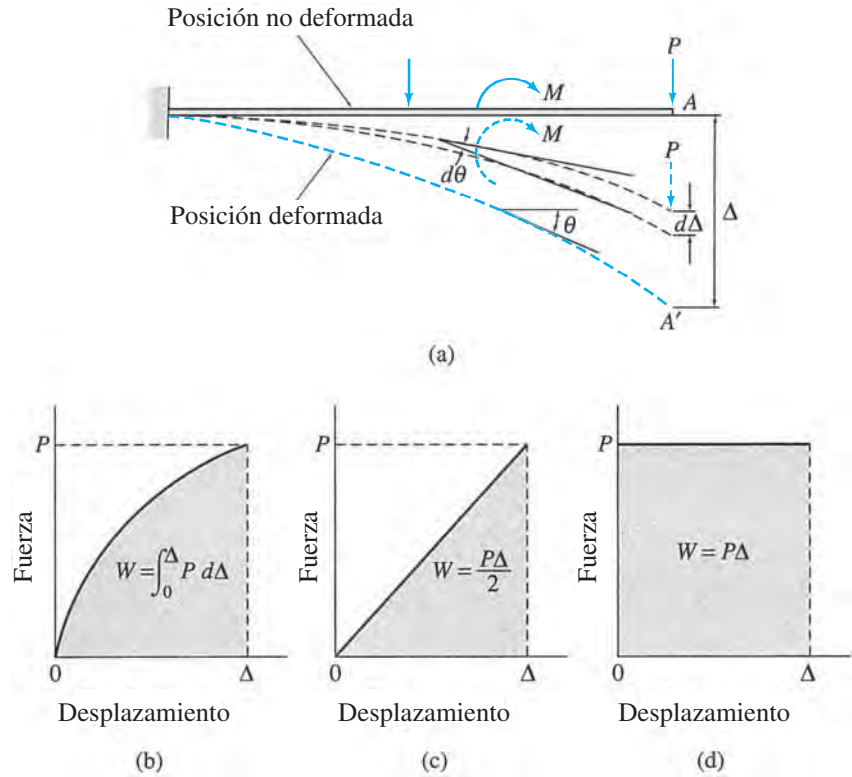


FIG. 7.1

Consideremos el trabajo realizado por la fuerza P durante la deformación de una estructura bajo la acción de un sistema de fuerzas (con P incluida), que se muestra en la Fig. 7.1(a). La magnitud de P puede variar así como su punto de aplicación se desplace de A en la posición no deformada de la estructura hasta A' en la posición deformada final. El trabajo dW que P desarrolla desde el punto de aplicación experimenta un desplazamiento infinitesimal, $d\Delta$ (Fig. 7.1(a)), y se puede escribir como

$$dW = P(d\Delta)$$

El trabajo total W que la fuerza P desarrolla sobre el desplazamiento completo Δ se obtiene mediante la integración de dW como

$$W = \int_0^{\Delta} P d\Delta \quad (7.1)$$

Como indica la Ec. (7.1), el trabajo es igual al área bajo el diagrama de fuerza-desplazamiento, como se ve en la Fig. 7.1(b). En este texto enfocaremos nuestra atención en el análisis de estructuras elásticas lineales, por lo que la expresión de especial interés para el trabajo es para el caso en que la fuerza varía linealmente con el desplazamiento desde cero hasta su valor final, como aparece en la Fig. 7.1(c). El trabajo para tal caso está dado por el área triangular bajo el diagrama de fuerza-desplazamiento, y se expresa como

$$W = \frac{1}{2} P \Delta \quad (7.2)$$

Otro caso de especial interés se muestra en la Fig. 7.1(d). En él, la fuerza permanece constante en P mientras que la aplicación experimenta un desplazamiento Δ causado por otra carga independiente de P . Así, el trabajo que realiza esta fuerza P es igual al área rectangular del diagrama fuerza-deformación y se expresa como

$$W = P\Delta \quad (7.3)$$

Es importante distinguir entre las dos expresiones para el trabajo dadas por las Ecs. (7.2) y (7.3). Note que la expresión para el trabajo en el caso en que la fuerza varía linealmente con el desplazamiento (Ec. 7.2) contiene un factor de $\frac{1}{2}$, mientras que la expresión para el trabajo para el caso de una fuerza constante (Ec. 7.3) no contiene ese factor. Estas dos expresiones para el trabajo se usarán más tarde en el desarrollo de diferentes métodos de cálculo de deflexiones en estructuras.

Las expresiones para el trabajo de un par de fuerzas son similares en forma al trabajo de las fuerzas. El trabajo hecho por un par que actúa en una estructura se define como el ángulo que genera el momento del par a través del cual este rota. El trabajo dW que el par de momento M realiza a través de una rotación infinitesimal $d\theta$ (ver Fig. 7.1(a)) está dado por

$$dW = M(d\theta)$$

Por lo tanto, el total del trabajo W del par con momento variable M sobre la rotación θ se puede escribir como

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta \quad (7.4)$$

Cuando el momento del par varía linealmente con la rotación desde cero hasta su valor final, el trabajo se puede expresar como

$$W = \frac{1}{2} M \theta \quad (7.5)$$

Y si M permanece constante durante la rotación θ , entonces el trabajo lo determinará

$$W = M\theta \quad (7.6)$$

7.2 Principio del trabajo virtual

El *principio del trabajo virtual*, introducido por John Bernoulli en 1717, proporciona una herramienta de análisis poderosa para múltiples problemas de mecánica estructural. En esta sección estudiaremos dos de sus formulaciones, llamados *principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos* y *principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables*. Esta última se aplica en el siguiente apartado para desarrollar el *método del trabajo virtual*, el cual se considera uno de los métodos más generales para determinar las deflexiones en las estructuras.

Principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos

El principio de desplazamientos virtuales para cuerpos rígidos se puede establecer como sigue:

Si un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y si está sujeto a un pequeño desplazamiento virtual como cuerpo rígido, el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas es cero.

El término *virtual* simplemente significa imaginario, no real. Considere la viga de la Fig. 7.2(a). El diagrama de cuerpo libre de ella se muestra en la Fig. 7.2(b), en la cual P_x y P_y representan las componentes de la carga externa P en las direcciones x y y , respectivamente.

Ahora, suponga que la viga experimenta un pequeño desplazamiento virtual como cuerpo rígido desde su posición inicial de equilibrio, posición ABC , hasta otra posición, $A'B'C'$, como se ve en la Fig. 7.2(c). En esta figura, el desplazamiento virtual como cuerpo rígido de la viga se puede descomponer en translación Δ_{vx} y Δ_{vy} en dirección x y y , respectivamente, y rotación θ_v alrededor del punto A . Note que el subíndice v sirve para identificar los desplazamientos como cantidades virtuales. Como la viga se somete a un desplazamiento virtual de la posición ABC a la posición $A'B'C'$, las fuerzas actuantes en ella realizan un

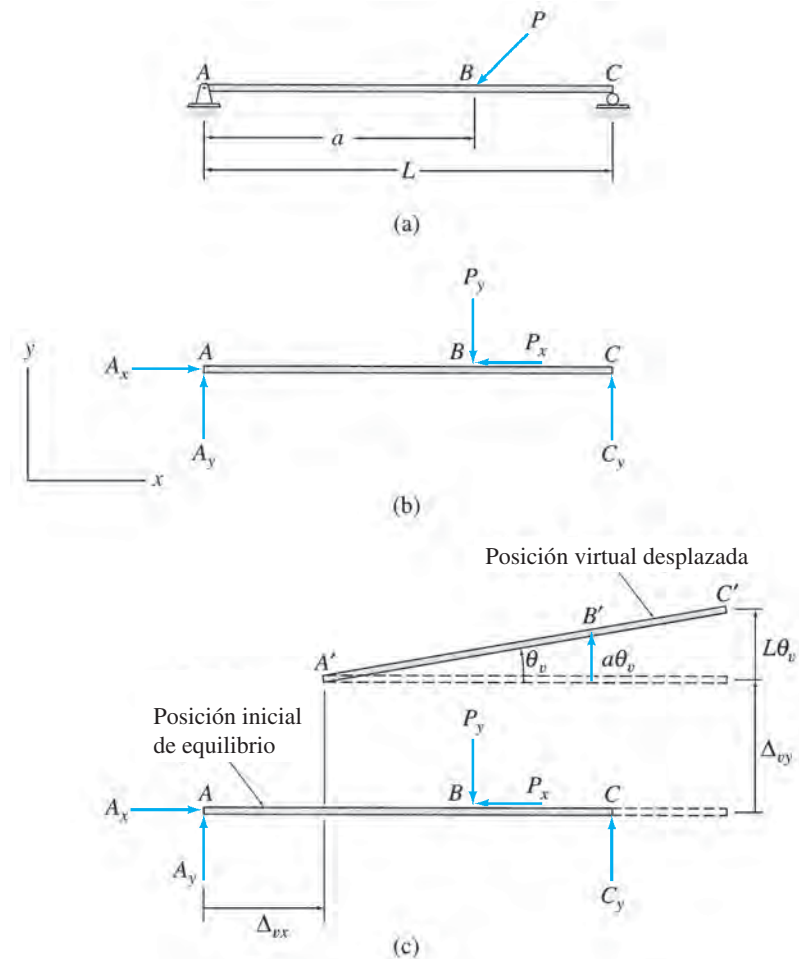


FIG. 7.2

trabajo denominado *trabajo virtual*. El total del trabajo virtual, W_{ve} , desarrollado por las fuerzas externas actuantes en la viga, puede expresarse como la suma del trabajo virtual W_{ux} y W_{vy} realizado durante la translación en las direcciones x y y , respectivamente, y el trabajo virtual W_{vr} , hecho durante la rotación; es decir,

$$W_{ve} = W_{ux} + W_{vy} + W_{vr} \quad (7.7)$$

Durante la translación virtual Δ_{ux} y Δ_{vy} de la viga, el trabajo virtual ejecutado por las fuerzas está dado por

$$W_{ux} = A_x \Delta_{ux} - P_x \Delta_{ux} = (A_x - P_x) \Delta_{ux} = (\sum F_x) \Delta_{ux} \quad (7.8)$$

y

$$W_{vy} = A_y \Delta_{vy} - P_y \Delta_{vy} + C_y \Delta_{vy} = (A_y - P_y + C_y) \Delta_{vy} = (\sum F_y) \Delta_{vy} \quad (7.9)$$

(ver Fig. 7.2(c)). Asimismo, el trabajo virtual desarrollado por las fuerzas durante una pequeña rotación θ_v se puede expresar como

$$W_{vr} = -P_y (a\theta_v) + C_y (L\theta_v) = (-aP_y + LC_y) \theta_v = (\sum M_A) \theta_v \quad (7.10)$$

Con la sustitución de las Ecs. de la (7.8) a la (7.10) en la Ec. (7.7), podemos escribir el trabajo virtual realizado como

$$W_{ve} = (\sum F_x) \Delta_{ux} + (\sum F_y) \Delta_{vy} + (\sum M_A) \theta_v \quad (7.11)$$

Debido a que la viga se encuentra en equilibrio, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M_A = 0$; por lo tanto, la Ec. (7.11) se convierte en

$$W_{ve} = 0 \quad (7.12)$$

La cual es la expresión matemática del principio del desplazamiento virtual para cuerpos rígidos.

Principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables

El principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables se puede expresar como sigue:

Si una estructura deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas virtuales (o pares de fuerzas) y si está sujeta a una pequeña deformación consistente con el apoyo y condiciones de continuidad de la estructura, entonces el trabajo virtual externo realizado por las fuerzas virtuales externas (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos externos virtuales (y rotaciones) es igual al trabajo virtual interno realizado por las fuerzas internas virtuales (y pares de fuerzas) que actúan por los desplazamientos internos reales (y rotaciones).

En la presente definición, el término *virtual* se asocia a las fuerzas para indicar que el sistema de fuerzas es arbitrario y que no depende de la acción que causa la verdadera deformación.

Para demostrar la validez de este principio, considere los dos elementos de la armadura que se muestra en la Fig. 7.3(a). La armadura está en equilibrio bajo la acción de una fuerza externa virtual P_v . El diagrama de cuerpo libre del nodo C de la armadura aparece en la Fig. 7.3(b). Puesto que el nodo

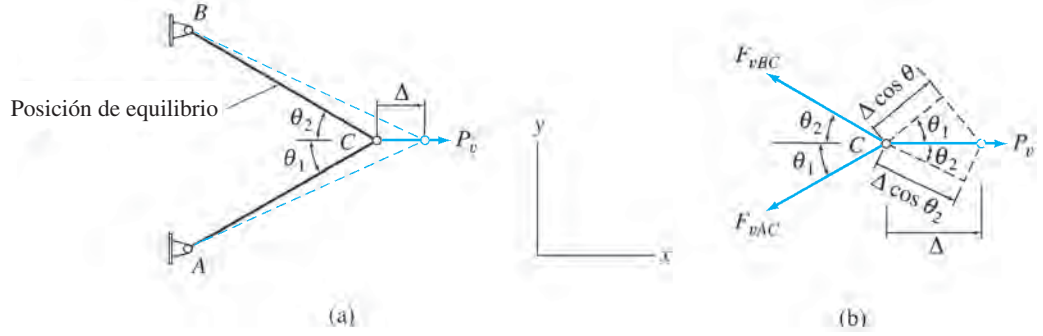


FIG. 7.3

C está en equilibrio, las fuerzas virtuales interna y externa que actúan en él deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & P_v - F_{vAC} \cos \theta_1 - F_{vBC} \cos \theta_2 &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & -F_{vAC} \sin \theta_1 + F_{vBC} \sin \theta_2 &= 0\end{aligned}\quad (7.13)$$

En ellas F_{vAC} y F_{vBC} representan las fuerzas internas virtuales en los elementos AC y BC, respectivamente, y θ_1 y θ_2 indican, respectivamente, los ángulos de inclinación de estos elementos con respecto a la horizontal (Fig. 7.3(a)).

Ahora, asumamos que el nodo C de la armadura tiene un pequeño desplazamiento real, Δ , hacia la derecha de su posición de equilibrio, como se muestra en la Fig. 7.3(a). Note que la deformación es consistente con la condición de apoyo de la armadura; es decir, el nodo A y el B, unidos al apoyo, no están desplazados. Esto se debe a que las fuerzas virtuales que actúan en los nodos A y B no realizan ningún trabajo; el total del trabajo virtual para la armadura (W_v) es igual a la suma algebraica del trabajo de las fuerzas virtuales que actúan en el nodo C, es decir,

$$\begin{aligned}W_v &= P_v \Delta - F_{vAC} (\Delta \cos \theta_1) - F_{vBC} (\Delta \cos \theta_2) \\ \text{o} \quad W_v &= (P_v - F_{vAC} \cos \theta_1 - F_{vBC} \cos \theta_2) \Delta\end{aligned}\quad (7.14)$$

Como se indicó en la Ec. (7.13), el término entre paréntesis del lado derecho de la igualdad de la Ec. (7.14) es cero; por lo tanto, el total del trabajo virtual es $W_v = 0$. Así, la Ec. (7.14) se puede expresar como

$$P_v \Delta = F_{vAC} (\Delta \cos \theta_1) + F_{vBC} (\Delta \cos \theta_2) \quad (7.15)$$

En donde la cantidad del lado izquierdo de la igualdad representa el trabajo externo virtual (W_{ve}) realizado por la fuerza virtual externa, P_v , que actúa por el desplazamiento real externo, Δ . Además, al notar que los términos $\Delta \cos \theta_1$ y $\Delta \cos \theta_2$ son iguales a los desplazamientos externos reales (elongaciones) de los elementos AC y BC, respectivamente, podemos concluir que el lado derecho de la igualdad de la Ec. (7.15) representa el trabajo virtual interno (W_{vi}) desarrollado por las fuerzas virtuales internas que actúan por los desplazamientos reales internos; es decir,

$$W_{ve} = W_{vi} \quad (7.16)$$

Esta expresión es la afirmación matemática del principio de las fuerzas virtuales para cuerpos deformables.

Tenga presente que el principio de fuerzas virtuales tal como se describe aquí es aplicable independientemente de la causa de las deformaciones verdaderas, es decir, deformaciones causadas por las cargas, los cambios de temperatura o cualquier otro efecto que pueda ser determinado por la aplicación del principio. Sin embargo, las deformaciones deben ser lo suficientemente pequeñas para que las fuerzas virtuales permanezcan constantes en magnitud y dirección mientras se desarrolla el trabajo virtual. Además, y aunque la aplicación del principio de fuerzas virtuales en este texto se limita a estructuras elásticas, el principio es válido independientemente de si la estructura es elástica o no.

El método del trabajo virtual se sustenta en el principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables, como se demostró en la Ec. (7.16), la cual puede ser reescrita como

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Trabajo virtual interno} \quad (7.17)$$

O, más específicamente,

$$\sum \left(\overbrace{\text{fuerzas externas virtuales} \times \text{desplazamientos externos reales}}^{\text{Sistema Virtual}} \right) = \sum \left(\underbrace{\text{fuerzas internas virtuales} \times \text{desplazamientos internos reales}}_{\text{Sistema Real}} \right) \quad (7.18)$$

Aquí, los términos *fuerzas* y *desplazamientos* se utilizan en sentido general e incluyen momentos y rotaciones, respectivamente. Tenga en cuenta que, debido a que las fuerzas virtuales son independientes de las acciones que causan las deformaciones reales y que permanecen constantes durante la deformación real, la expresión de trabajo virtual interno y externo en la Ec. (7.18) no contiene el factor 1/2.

Como la Ec. (7.18) indica, el método del trabajo virtual emplea dos sistemas separados: el sistema de fuerzas virtuales y el sistema de cargas reales (u otros efectos), que causan la deformación a determinar. Para establecer la deflexión (o pendiente) en cualquier punto de una estructura, se selecciona un sistema de fuerzas virtuales para que la deflexión deseada (o rotación) sea la única incógnita en la Ec. (7.18). Las expresiones implícitas para el método del trabajo virtual que sirven para calcular las deflexiones en las armaduras, vigas o marcos, se desarrollan en las siguientes tres secciones.

7.3 Deflexiones en armaduras por el método del trabajo virtual

Para desarrollar la expresión del trabajo virtual que se usará para determinar las deflexiones en armaduras, considere una armadura estáticamente determinada, como la que se muestra en la Fig. 7.4(a). Asumamos que queremos calcular la deflexión vertical, Δ , en el nodo *B* de la armadura causada por las cargas externas P_1 y P_2 . Como la armadura es estáticamente determinada, las fuerzas axiales en sus elementos pueden establecerse por el método de los nodos descrito en el Capítulo 4. Si F representa la fuerza axial en un

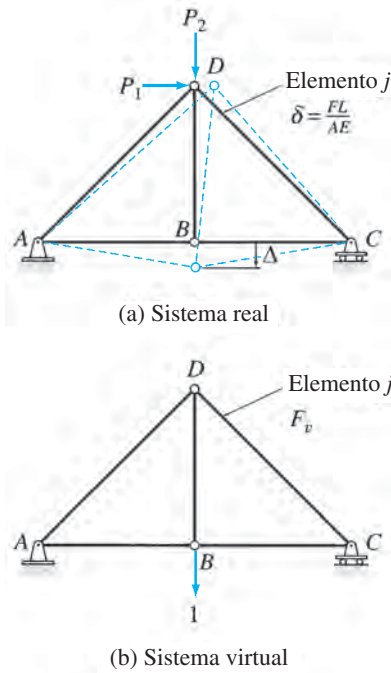


FIG. 7.4

elemento arbitrario j (por ejemplo, el elemento CD en la Fig. 7.4(a)) de la armadura, entonces (de la *mecánica de materiales*) la deformación axial, δ , de este elemento está dado por

$$\delta = \frac{FL}{AE} \quad (7.19)$$

En donde L , A y E significan, respectivamente, la longitud, la sección transversal y el módulo de elasticidad del elemento j .

Para determinar la deflexión vertical, Δ , en el nodo B de la armadura, consideraremos un sistema virtual que consiste en una carga unitaria en el nodo y en la dirección de la deflexión deseada, como se muestra en la Fig. 7.4(b). Note que el sentido (hacia abajo) de la carga unitaria en la Fig. 7.4(b) es el mismo que el supuesto en la deflexión deseada Δ en la Fig. 7.4(a). Las fuerzas en los elementos de la armadura provocadas por la carga virtual unitaria se pueden calcular con el método de los nodos. F_v indica la fuerza virtual en el elemento j . Después, sujetamos la armadura a las cargas reales (Fig. 7.4(a)). El trabajo virtual realizado por la carga unitaria virtual que nos lleva a la deflexión real Δ es igual a

$$W_{ve} = 1(\Delta) \quad (7.20)$$

Para determinar el trabajo virtual interno, enfoquemos nuestra atención en el elemento j (elemento CD en la Fig. 7.4). El trabajo virtual desarrollado en el elemento j por la fuerza virtual F_v , que actúa por la deformación real δ , es igual a $F_v\delta$, por lo tanto, el trabajo virtual interno realizado en todos los elementos de la armadura se puede escribir como

$$W_{vi} = \sum F_v(\delta) \quad (7.21)$$

Al igualar el trabajo virtual externo (Ec. (7.20)) al trabajo virtual interno (Ec. (7.21)), de acuerdo con el principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables, obtenemos la siguiente expresión para el método de trabajo virtual para deflexiones en armaduras:

$$1(\Delta) = \sum F_v(\delta) \quad (7.22)$$

Cuando las deformaciones las causan cargas externas, la Ec. (7.19) se puede sustituir en la Ec. (7.22) para obtener

$$1(\Delta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) \quad (7.23)$$

Debido a que la deflexión deseada, Δ , es la única incógnita en la Ec. (7.23), su valor se puede establecer resolviendo esta ecuación.

Cambios de temperatura y errores de fabricación

La expresión del método del trabajo virtual es resultado de la Ec. (7.22), la cual es general en el sentido de que se puede usar para determinar las deflexiones debidas a cambios de temperatura, errores de fabricación, y a cualquier otro efecto para el cual las deformaciones axiales del elemento, δ , se requieran conocer o evaluar de antemano.

La deformación axial del elemento j de una armadura con longitud L causada por el cambio de temperatura (ΔT) está dada por

$$\delta = \alpha(\Delta T)L \quad (7.24)$$

Aquí, α indica el coeficiente de expansión térmica del elemento j . Sustituyendo la Ec. (7.24) en la Ec. (7.22), obtenemos la siguiente expresión:

$$1(\Delta) = \sum F_v \alpha(\Delta T)L \quad (7.25)$$

La cual se emplea para calcular las deflexiones en la armadura provocadas por los cambios de temperatura.

Las deflexiones en la armadura debidas a errores de fabricación pueden determinarse simplemente al sustituir los cambios en la longitud de los elementos que tienen errores de fabricación por δ en la Ec. (7.22).

Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se puede usar para determinar las deflexiones de armaduras por el método del trabajo virtual.

1. **Sistema Real** Si la deflexión a determinar en la armadura la producen las cargas externas, entonces aplique el método de los nodos y/o el método de las secciones para calcular las fuerzas (F) axiales (reales) en todos los elementos de la armadura. En los ejemplos que se muestran al final de la sección, se considera positiva la fuerza de tensión en los elementos y viceversa. De manera similar, el incremento de temperatura y de longitud de los elementos provocados por errores de fabricación se asumen como positivos y viceversa.
2. **Sistema Virtual** Remueva todas las cargas (reales) de la armadura; luego aplique una carga unitaria en el nodo y en la dirección donde la deflexión se desea para formar el sistema de fuerzas virtuales. Usando el método de los nodos y/o el método de las secciones, calcule las fuerzas virtuales (F_v) en todos los elementos de la armadura. La convención de signos que utilice para las fuerzas virtuales debe ser la misma que adopte para las fuerzas reales en el paso 1, entonces las fuerzas de tensión virtuales también deben considerarse positivas y viceversa.
3. Aplicando la Ec. (7.23) se puede calcular la deflexión de la armadura si la deflexión se debe a cargas externas; para las deflexiones causadas por cambios de temperatura se aplicará la Ec. (7.25), o la Ec. (7.22) si son por errores de fabricación. La aplicación de estas expresiones del trabajo virtual se puede facilitar disponiendo las cantidades reales y virtuales, calculadas en el paso 1 y 2, en forma tabular, como se ilustra en los siguientes ejemplos. Un resultado positivo de la deflexión que se busca significa que esta ocurre en la misma dirección de la carga unitaria, mientras que un resultado negativo indica que sucede en la dirección opuesta a la carga unitaria.

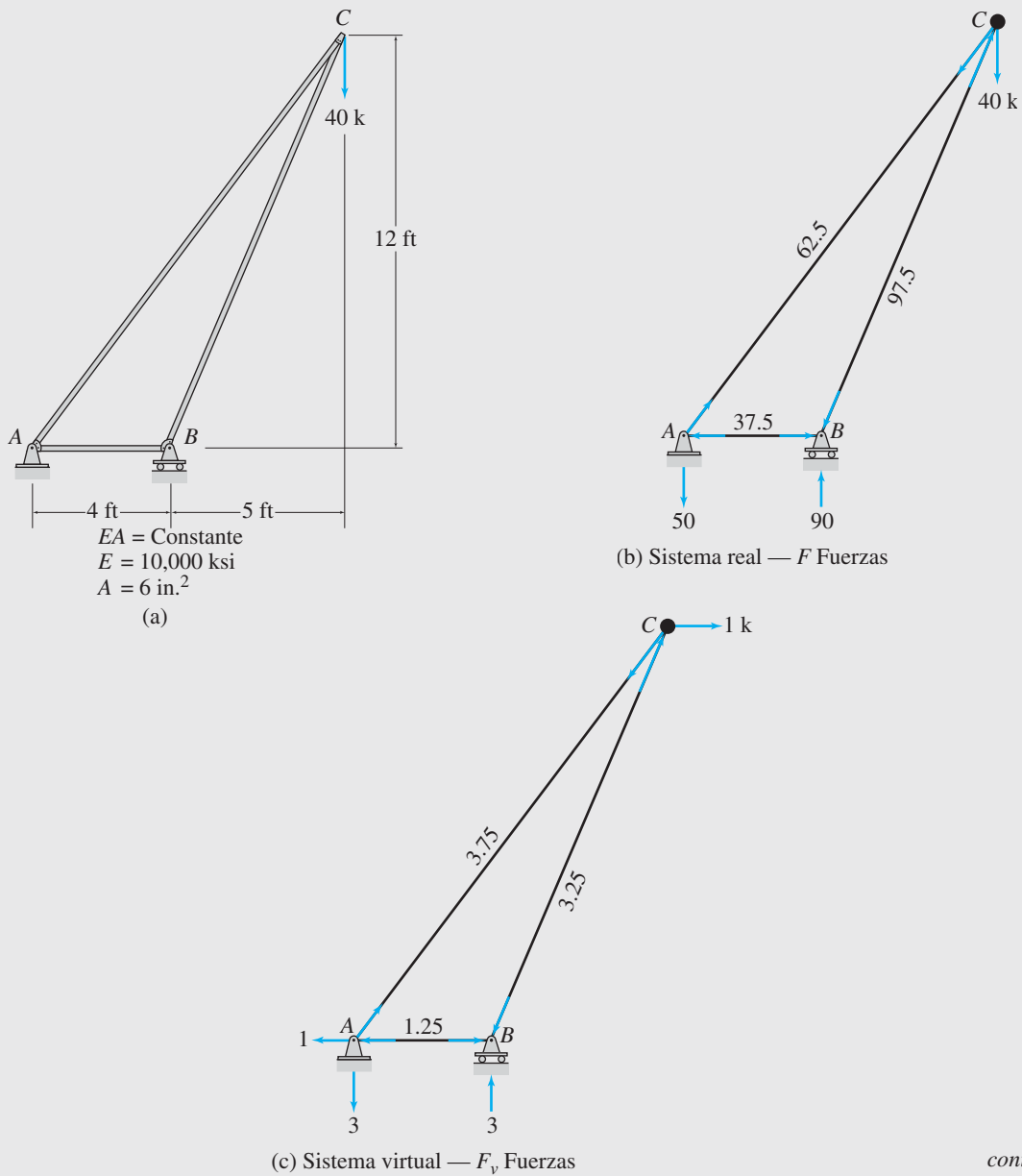
Ejemplo 7.1

Determine la deflexión horizontal en el nodo C de la armadura que se muestra en la Fig. 7.5(a) por el método del trabajo virtual.

Solución.

Sistema real. El sistema real consiste en las cargas dadas en el problema, como se muestra en la Fig. 7.5(b). Las cargas axiales en los elementos causadas por las cargas reales (F) que se obtuvieron con el método de los nodos se exponen en la Fig. 7.5(b).

Sistema virtual. El sistema virtual consiste en una carga unitaria de (1 k) aplicada en la dirección horizontal del nodo C , como se ve en la Fig. 7.5(c). Las fuerzas en los elementos debidas a la carga virtual unitaria 1 k (F_v) se determinan aplicando el método de los nodos. Estas fuerzas aparecen en la Fig. 7.5(c).

**FIG. 7.5**

continúa

Deflexión horizontal en C , Δ_C . Para facilitar el cálculo de la deflexión deseada, las fuerzas reales y virtuales se tabulan junto con la longitud (L) de los elementos, como se muestra en la Tabla 7.1. Como los valores del área de la sección transversal y el módulo de elasticidad, E , son iguales para todos los elementos, estos no se incluyen en la tabla. Tenga en cuenta que la misma convención de signos se emplea tanto para el sistema real como para el virtual; es decir, en ambos, en la tercera y en la cuarta columna de la tabla, las fuerzas de tensión son números positivos y las fuerzas de compresión son números negativos. Entonces, para cada elemento, la cantidad $F_v(FL)$ se calcula, y su valor está en la quinta columna de la tabla.

La suma algebraica de todos los valores en la quinta columna, $\sum F_v(FL)$, se determina, y su valor se registra en la parte baja de la quinta columna, como se muestra. El trabajo interno virtual total realizado por todos los elementos en la armadura está dado por

$$W_{vi} = \frac{1}{EA} \sum F_v(FL)$$

La carga virtual del trabajo externo realizado por la carga de 1-k que actúa a través de la deflexión deseada en C , Δ_C , es

$$W_{ve} = (1 \text{ k}) \Delta_C$$

Finalmente, determinamos la deflexión deseada Δ_C igualando el trabajo virtual externo con el trabajo virtual interno y resolviendo la ecuación resultante para Δ_C como se muestra en la Tabla 7.1. Tenga en cuenta que las respuestas positivas para Δ_C indican que el nodo C se deforma a la derecha, en la dirección de la carga unitaria.

Tabla 7.1

Elemento	$L(\text{in.})$	$F(\text{k})$	$F_{ev}(\text{k})$	$F_{ev}(FL) (\text{k-in.})$
AB	48	-37.5	-1.25	2,250
AC	180	62.5	3.75	42,187.5
BC	156	-97.5	-3.25	49,432.5
				$\sum F_v(FL) = 93,870$

$$1(\Delta_C) = \frac{1}{EA} \sum F_v(FL)$$

$$(1 \text{ k}) \Delta_C = \frac{93,870 \text{ k}^2 \cdot \text{in.}}{(10,000 \text{ k/in.}^2)(6 \text{ in.}^2)}$$

$$\Delta_C = 1.56 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 1.56 \text{ in.} \rightarrow$$

Respuesta.

Ejemplo 7.2

Determine la deflexión horizontal en el nodo G de la armadura de la Fig. 7.6(a) por el método del trabajo virtual.

Solución.

Sistema real. El sistema real consiste en las cargas dadas en el problema, como se muestra en la Fig. 7.6(b). Las cargas axiales en los elementos causadas por las cargas reales (F) que se obtuvieron mediante el método de los nodos se ejemplifica en la Fig. 7.6(b).

Sistema virtual. El sistema virtual consiste en una carga unitaria de (1 k) aplicada en la dirección horizontal del nodo G , como se aprecia en la Fig. 7.6(c). Las fuerzas en los elementos debidas a la carga virtual unitaria 1 k (F_v) se muestran en la Fig. 7.6(c).

continúa

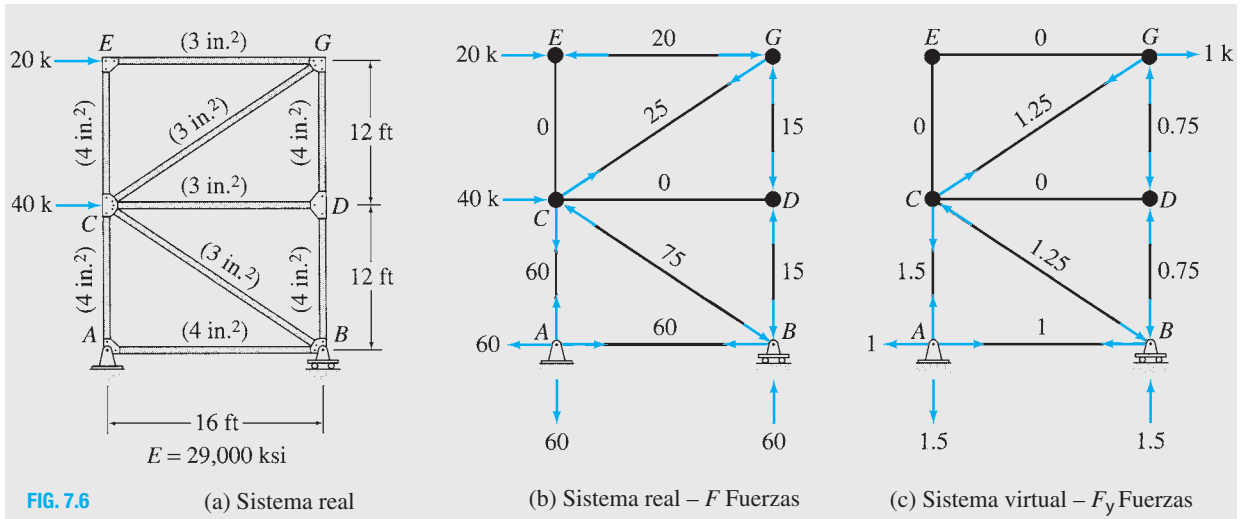


FIG. 7.6 (a) Sistema real (b) Sistema real – F Fuerzas (c) Sistema virtual – F_v Fuerzas

Deflexión horizontal en G , Δ_G . Para facilitar el cálculo de las deflexiones deseadas, las fuerzas reales y virtuales en los elementos están tabuladas con la longitud (L) y el área de la sección transversal (A) de los elementos, como se muestra en la Tabla 7.2. El módulo de elasticidad, E , es el mismo para todos los elementos, así que su valor no se incluye en la tabla. Tenga en cuenta que se usa la misma convención de signos para el sistema real como para el virtual; es decir, tanto en la cuarta y en la quinta columna de la tabla, las fuerzas de tensión están indicadas como números positivos y las fuerzas de compresión como números negativos. Entonces, para cada cantidad de F_v (FL/A) calculada, se indica su valor en la sexta columna de la tabla. La suma algebraica de todas las cantidades de la sexta columna, $\sum F_v$ (FL/A), se determina y se coloca en la parte baja de la sexta columna, como se muestra en la Tabla 7.2. Finalmente, la deflexión deseada Δ_G se encuentra aplicando la expresión del trabajo virtual (Ec. 7.23)) como se muestra en la Tabla 7.2. Considere que la respuesta positiva de Δ_G indica que el nodo G se deforma a la derecha, en la dirección de la carga unitaria.

Tabla 7.2

Elemento	L (in.)	A (in. ²)	F (k)	F_v (k)	$F_v(FL/A)$ (k ² /in.)
AB	192	4	60	1	2,880
CD	192	3	0	0	0
EG	192	3	–20	0	0
AC	144	4	60	1.5	3,240
CE	144	4	0	0	0
BD	144	4	–15	–0.75	405
DG	144	4	–15	–0.75	405
BC	240	3	–75	–1.25	7,500
CG	240	3	25	1.25	2,500

$$\sum F_v \left(\frac{FL}{A} \right) = 16,930$$

$$1(\Delta_G) = \frac{1}{E} \sum F_v \left(\frac{FL}{A} \right)$$

$$(1 \text{ k}) \Delta_G = \frac{16,930 \text{ k}^2/\text{in.}}{29,000 \text{ k/in.}^2}$$

$$\Delta_G = 0.584 \text{ in.}$$

$$\Delta_G = 0.584 \text{ in.} \rightarrow$$

Respuesta.

Ejemplo 7.3

Determine la componente horizontal y la vertical de la deflexión en el nodo B de la armadura que aparece en la Fig. 7.7(a) por el método del trabajo virtual.

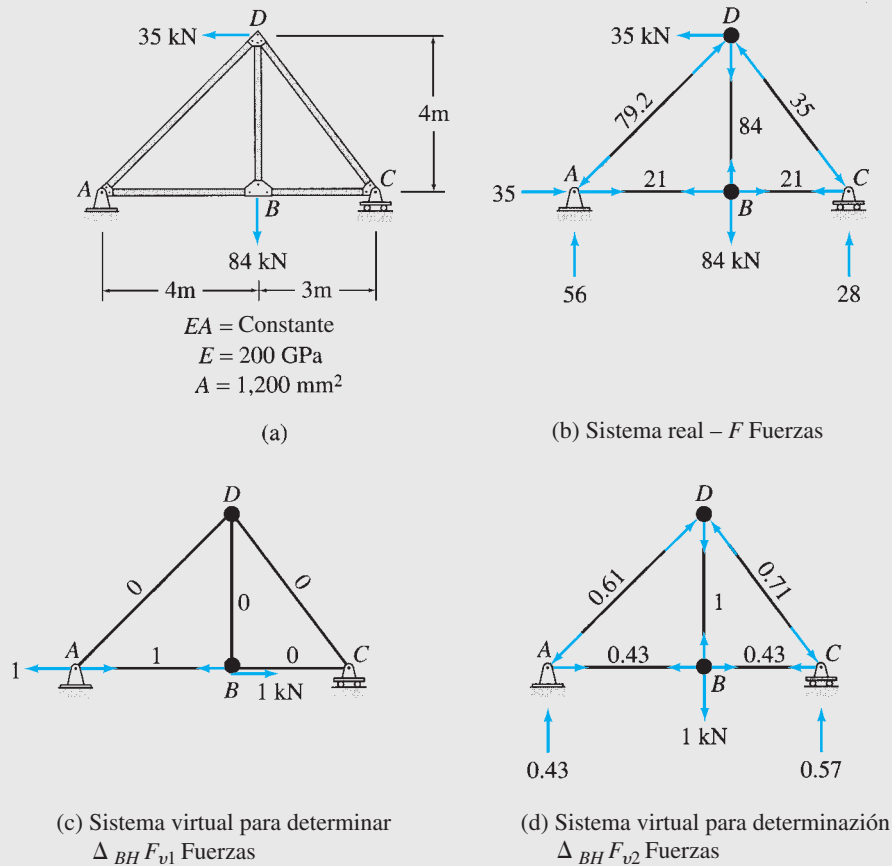


FIG. 7.7

Solución

Sistema real. El sistema real y las correspondientes fuerzas en los elementos (F) se muestran en la Fig. 7.7(b).

Deflexión horizontal en B , Δ_{BH} . El sistema virtual que se utiliza para determinar la deflexión horizontal en B consiste de una carga unitaria de 1-kN aplicada en la dirección horizontal en el nodo B , como se muestra en la Fig. 7.7(c). Las fuerzas axiales en los elementos (F_{v1}) causadas por esta carga virtual se muestran en esta figura. Las fuerzas axiales en los elementos debidas al sistema real (F) y el sistema virtual (F_{v1}) están tabuladas, y la expresión para el trabajo virtual está dado por la Ec. (7.23) y se aplica para determinar Δ_{BH} , como se muestra en la Tabla 7.3

Deflexiones verticales en B , Δ_{BV} . El sistema virtual que se emplea para determinar la deflexión vertical en B consiste de una carga de 1-kN aplicada en la dirección vertical del nodo B , como se muestra en la Fig. 7.7(d). Las fuerzas axiales en los elementos (F_{v2}) provocadas por esta carga virtual se muestran en esta figura. Estas fuerzas en los elementos están tabuladas en la sexta columna de la Tabla 7.3, y Δ_{BV} se calcula aplicando la expresión de trabajo virtual (Ec. (7.23)), como se muestra en la tabla.

continúa

TABLA 7.3

Elemento	L (m)	F (kN)	F_{v1} (kN)	$F_v 1 (FL)$ (kN ² · m)	F_{v2} (kN)	$F_{v2} (FL)$ (kN ² · m)
AB	4	21	1	84	0.43	36.12
BC	3	21	0	0	0.43	27.09
AD	5.66	-79.2	0	0	-0.61	273.45
BD	4	84	0	0	1	336.00
CD	5	-35	0	0	-0.71	124.25
$\sum F_v (FL)$				84		796.91

$$1(\Delta_{BH}) = \frac{1}{EA} \sum F_{v1} (FL)$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{BH} = \frac{84}{200(10^6)(0.0012)} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{BH} = 0.00035 \text{ m}$$

$$\Delta_{BH} = 0.35 \text{ mm} \rightarrow \text{Respuesta.}$$

$$1(\Delta_{BV}) = \frac{1}{EA} \sum F_{v2} (FL)$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{BV} = \frac{796.91}{200(10^6)(0.0012)} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{BV} = 0.00332 \text{ m}$$

$$\Delta_{BV} = 3.32 \text{ mm} \downarrow \text{Respuesta.}$$

Ejemplo 7.4

Determine la deflexión vertical en el nodo C de la armadura que se muestra en la Fig. 7.8(a) causada por la baja de temperatura de 15°F en los elementos AB y BC y por el incremento de temperatura de 60°F en los elementos AF , FG , GH , y EH . Use el método del trabajo virtual.

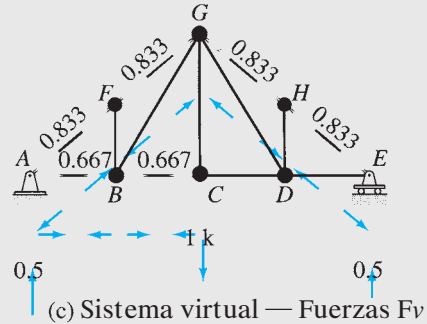
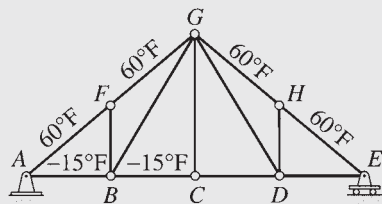
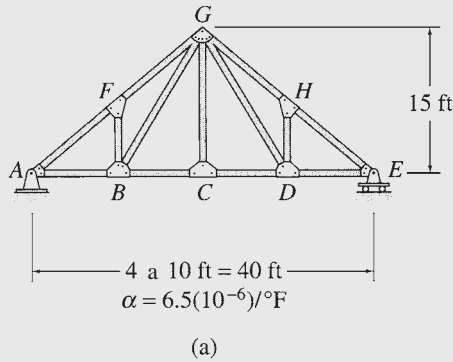


FIG. 7.8

continúa

Solución

Sistema real. El sistema real consiste de cambios de temperatura (ΔT) dada en el problema, como se muestra en la Fig. 7.8(b).

Sistema virtual. El sistema virtual consiste de una carga de 1-k aplicada en la dirección vertical en el nodo C , como se ejemplifica en la Fig. 7.8(c). Tenga en cuenta que las fuerzas virtuales axiales (F_v) se calculan para los elementos sujetos a los cambios de temperatura. Puesto que los cambios de temperatura en los elementos restantes de la armadura son cero, sus deformaciones axiales también son cero; por lo tanto, no se realiza trabajo interno en esos elementos.

Deflexiones verticales en C , Δ_C . Los cambios de temperatura (ΔT) en las fuerzas virtuales (F_v) están tabuladas junto con la longitud (L) de los elementos en la Tabla 7.4. El coeficiente de expansión térmica, α , es la misma para todos los elementos, de modo que su valor no está incluido en la Tabla. La deflexión deseada Δ_C se determina aplicando la expresión del trabajo virtual indicada por la Ec. (7.25), que aparece en la misma tabla. Tenga en cuenta que la respuesta negativa para Δ_C indica que el nodo C se deforma hacia abajo, en la dirección opuesta a la de la carga unitaria.

TABLA 7.4

Elemento	L (ft)	ΔT ($^{\circ}\text{F}$)	F_v (k)	$F_v (\Delta T)L$ (k- $^{\circ}\text{F}$ -ft)
AB	10	-15	0.667	-100
BC	10	-15	0.667	-100
AF	12.5	60	-0.833	-625
FG	12.5	60	-0.833	-625
GH	12.5	60	-0.833	-625
EH	12.5	60	-0.833	-625
				$\sum F_v (\Delta T)L = -2,700$

$$1 (\Delta_C) = \alpha \sum F_v (\Delta T) L$$

$$(1 \text{ k}) \Delta_C = 6.5 (10^{-6}) (-2,700) \text{ k-ft}$$

$$\Delta_C = -0.0176 \text{ ft} = -0.211 \text{ in.}$$

$$\Delta_C = 0.211 \text{ in. } \uparrow$$

Respuesta.**Ejemplo 7.5**

Calcule la deflexión vertical en el nodo D de la armadura de la Fig. 7.9(a) si el elemento CF es 0.6 in. más largo y el elemento EF es 0.4 in. más corto. Use el método del trabajo virtual.

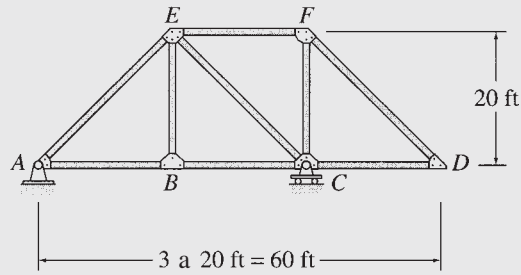
Solución

Sistema real. El sistema real consiste de cambios en la longitud (δ) de los elementos CF y EF de la armadura, como se muestra en la Fig. 7.9(b).

Sistema virtual. El sistema virtual consiste de una carga de 1-k aplicada en la dirección vertical en el nodo D , como se muestra en la Fig. 7.9(c). Las fuerzas virtuales (F_v) necesarias en los elementos CF y EF se pueden calcular usando el método de las secciones.

Deflexiones verticales en D , Δ_D . La deflexión deseada se determina aplicando la expresión del trabajo virtual dada por la Ec. (7.22), mostrada en la Tabla 7.5.

continúa



(a)

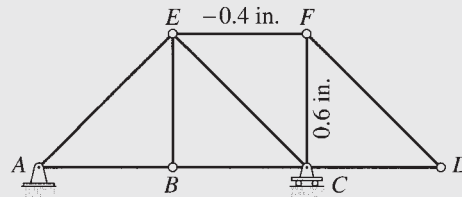
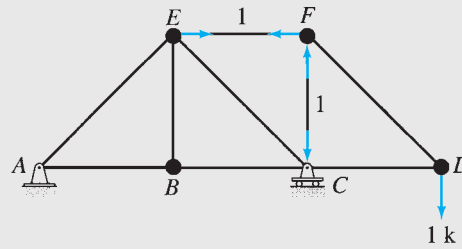

 (b) Sistema δ

 (c) Sistema virtual — Fuerzas F_v

FIG. 7.9

TABLA 7.5

Elemento	δ (in.)	F_v (k)	$F_v(\delta)$ (k-in.)
CF	0.6	-1	-0.6
EF	-0.4	1	-0.4
			$\sum F_v(\delta) = -1.0$

$$1(\Delta_D) = \sum F_v(\delta)$$

$$(1 \text{ k}) \Delta_D = -1.0 \text{ k-in.}$$

$$\Delta_D = -1.0 \text{ in.}$$

$$\Delta_D = 1.0 \text{ in. } \uparrow$$

7.4 Deflexiones en vigas por el método del trabajo virtual

Para desarrollar la expresión del trabajo virtual para determinar las deflexiones en vigas, considere una viga sujeta a una carga arbitraria, como la que se muestra en la Fig. 7.10(a). Asumamos que se desea la deflexión vertical,

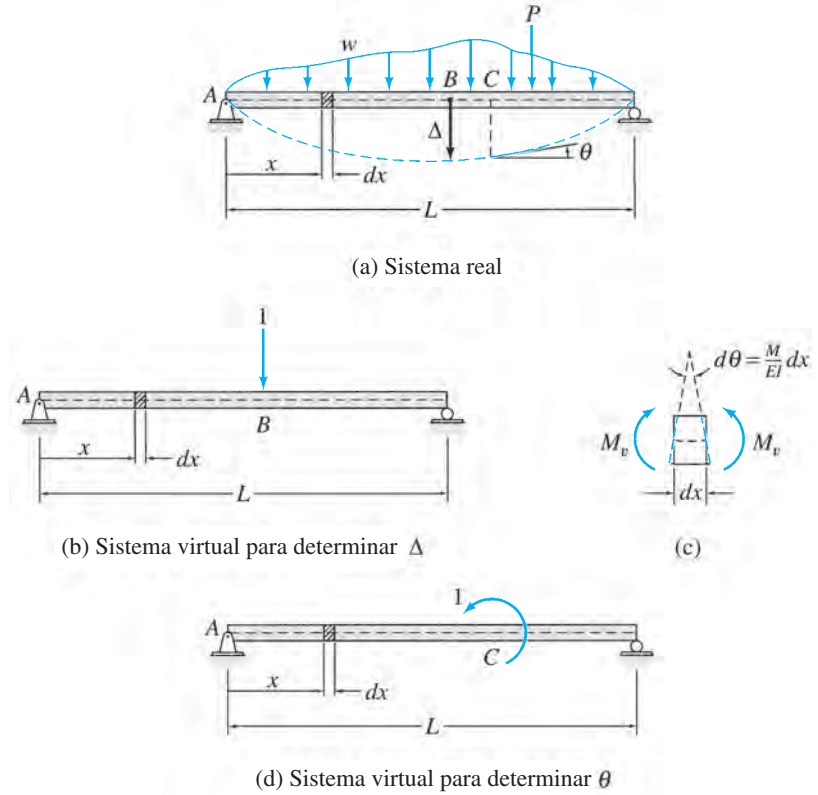


FIG. 7.10

Δ , en el nodo B de la viga. Para calcular esta deflexión, seleccionamos un sistema virtual que consista de una carga unitaria que actúe en el punto y en la dirección de la deflexión deseada, como se ve en la Fig. 7.10(b). Ahora, si sujetamos la viga con la carga virtual unitaria que actúa en ella (Fig. 7.10(b)) a las deformaciones debidas a las cargas reales (Fig. 7.10(a)), el trabajo virtual realizado por la carga virtual unitaria nos lleva a la deflexión Δ que es $W_{ve} = 1 (\Delta)$.

Para obtener el trabajo virtual interno, enfocaremos nuestra atención en un elemento diferencial dx de la viga localizado a una distancia x a partir de la izquierda del apoyo A , como se muestra en las Figuras 7.10(a) y (b). Puesto que la viga con la carga virtual (Fig. 7.10(b)) está sujeta a la deformación con la carga real (Fig. 7.10(a)), el momento interno flexionante virtual, M_v , que actúa en el elemento dx realiza un trabajo interno virtual que nos lleva a la rotación real $d\theta$, como aparece en la Fig. 7.10(c). Así, el trabajo interno virtual realizado en el elemento dx está dado por

$$dW_{vi} = M_v (d\theta) \quad (7.26)$$

Tenga en cuenta que debido a que el momento virtual M_v permanece constante durante la rotación real $d\theta$, Ec. (7.26), no contiene un factor de $1/2$. Recuerde que en la Ec. (6.10) el cambio de pendiente $d\theta$ de la longitud diferencial dx puede expresarse como

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (7.27)$$

Donde M = momento flexionante debido a la carga real que genera la rotación $d\theta$. Sustituyendo la Ec. (7.27) en la Ec. (7.26), escribimos

$$dW_{vi} = M_v \left(\frac{M}{EI} \right) dx \quad (7.28)$$

El trabajo virtual interno total realizado sobre toda la viga puede determinarse mediante la integración de la Ec. (7.28) a lo largo de la longitud L de la viga, como se muestra

$$W_{vi} = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.29)$$

Al igualar el trabajo virtual externo, $W_{ve} = 1(\Delta)$, con el trabajo virtual interno (Ec. (7.29)), obtenemos la siguiente expresión para el método del trabajo virtual para deflexiones en vigas:

$$1(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.30)$$

Si queremos la pendiente θ en el punto C de la viga (Fig. 7.10(a)), entonces usamos el sistema virtual que consiste en un par unitario actuante en el punto, como se muestra en la Fig. 7.10(d). Cuando la viga con el par unitario virtual está sujeta a la deformación causada por las cargas reales, el trabajo externo virtual realizado por el par unitario virtual se somete a una rotación real θ , es $W_{ve} = 1(\theta)$. La expresión para el trabajo interno virtual permanece igual al de la Ec. (7.29), excepto que M_v ahora indica el momento de flexión debido al par unitario virtual. Estableciendo $W_{ve} = W_{vi}$, obtenemos la siguiente expresión para el método del trabajo virtual para la pendiente en vigas:

$$1(\theta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.31)$$

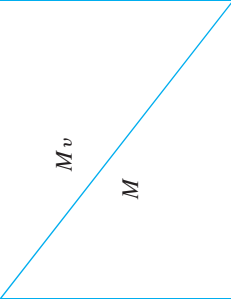
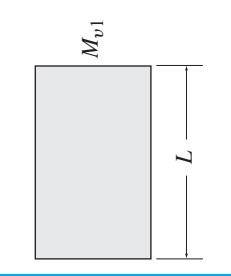
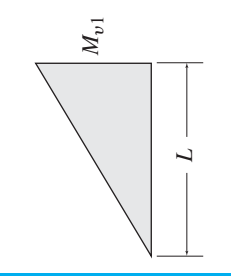
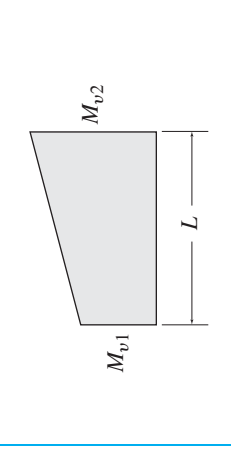
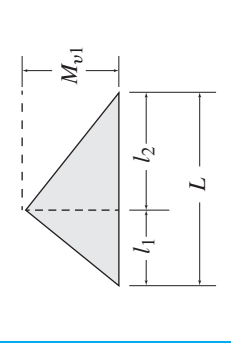
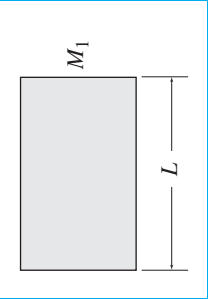
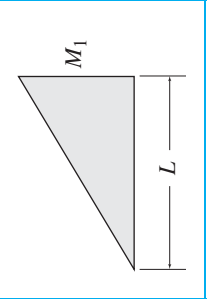
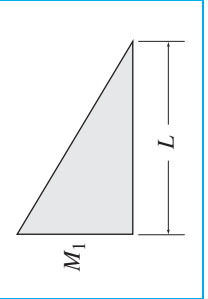
En la deducción de la Ec. (7.29) para el trabajo virtual interno, hemos desatendido el trabajo interno desarrollado por las fuerzas cortantes virtuales que actúan por las deformaciones reales por cortante. Por lo tanto, las expresiones para el método del trabajo virtual como las dadas en las Ecuaciones (7.30) y (7.31) no toman en cuenta las deformaciones por cortante en vigas. Sin embargo, para la mayoría de las vigas (excepto para las de gran peralte), la deformación por cortante es muy pequeña comparada con la deformación por flexión, y sus efectos pueden ser discriminados en el análisis.

Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se realiza para determinar las pendientes y las deflexiones en vigas usando el método del trabajo virtual.

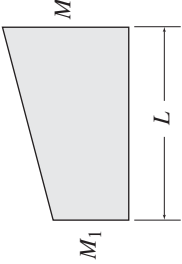
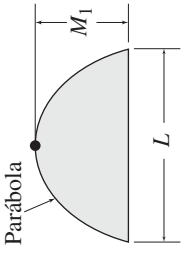
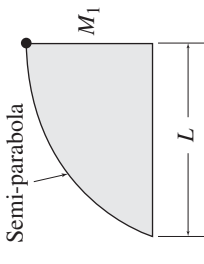
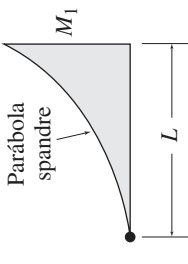
1. **Sistema Real** Dibuje el diagrama de la viga en el que se muestren todas las cargas que actúen en ella.
2. **Sistema Virtual** Dibuje el diagrama de la viga sin las cargas reales. Si se determinará la deflexión, entonces coloque la carga unitaria

TABLA 7.6 Integrales $\int_0^L M_v M dx$ para los diagramas de momento de figuras geométricas simples

				
	$M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{2} M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{2} (M_{v1} + M_{v2}) M_1 L$	$\frac{1}{2} M_{v1} M_1 L$
	$\frac{1}{2} M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{3} M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{6} (M_{v1} + 2M_{v2}) M_1 L$	$\frac{1}{6} M_{v1} M_1 (L + l_1)$
	$\frac{1}{2} M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{6} M_{v1} M_1 L$	$\frac{1}{6} (2M_{v1} + M_{v2}) M_1 L$	$\frac{1}{6} M_{v1} M_1 (L + l_2)$

continued

TABLA 7.6 (continúa)

	$\frac{1}{2} M_{y1} (M_1 + M_2) L$	$\frac{1}{6} M_{y1} (M_1 + 2M_2) L$	$\frac{1}{6} [M_{y1} (2M_1 + M_2) + M_{y2} (M_1 + 2M_2)] L$	$\frac{1}{6} M_{y1} [M_1 (L + l_2) + M_2 (L + l_1)]$
	$\frac{2}{3} M_{y1} M_1 L$	$\frac{1}{3} M_{y1} M_1 L$	$\frac{1}{3} (M_{y1} + M_{y2}) M_1 L$	$\frac{1}{3} M_{y1} M_1 (L + \frac{l_1 l_2}{L})$
	$\frac{2}{3} M_{y1} M_1 L$	$\frac{5}{12} M_{y1} M_1 L$	$\frac{1}{12} (3M_{y1} + 5M_{y2}) M_1 L$	$\frac{1}{12} M_{y1} M_1 (3L + 3l_1 + \frac{l_1^2}{L})$
	$\frac{1}{3} M_{y1} M_1 L$	$\frac{1}{4} M_{y1} M_1 L$	$\frac{1}{12} (M_{y1} + 3M_{y2}) M_1 L$	$\frac{1}{12} M_{y1} M_1 (L + l_1 + \frac{l_1^2}{L})$

en el punto y en la dirección de esta. Si lo que se va a calcular es la pendiente, entonces aplique un par unitario en el punto sobre la viga donde se determinará la pendiente.

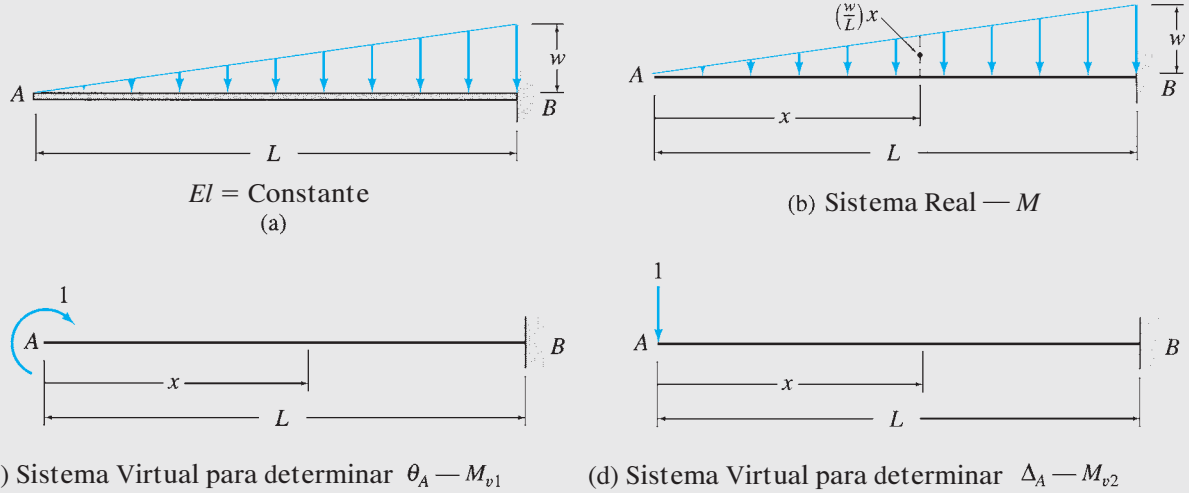
3. Mediante una inspección de los sistemas real y virtual y de la variación de la rigidez a flexión EI especificada a lo largo de la viga, divida la viga en segmentos para que las cargas reales y virtuales, además de EI , sean continuas en cada segmento.
4. Para cada segmento de la viga, establezca una ecuación que exprese la variación del momento de flexión causado por la carga real (M) a lo largo del mismo, en término de una posición coordinada de x . El origen de x puede ubicarse en cualquier lugar de la viga y se debe elegir de modo que el número de términos de M sea el mínimo. Es conveniente considerar los momentos de flexión como positivos o negativos de acuerdo con la *convención de signos de la viga*. (Fig. 5.2).
5. Para cada segmento de la viga, determine la ecuación del momento flexionante debido a la carga virtual o par (M_v), usando la misma coordenada x utilizada para este segmento en el paso 4 para establecer la expresión del momento de flexión real, M . La convención de signos para el momento de flexión virtual (M_v) debe ser el mismo que se adoptó para el momento de flexión real en el paso 4.
6. Calcule la deflexión deseada o la pendiente de la viga aplicando la expresión adecuada del trabajo virtual, Ec. (7.30) o (7.31). Si la viga se divide en segmentos, entonces la integral del lado derecho de la igualdad de la Ec. (7.30) o (7.31) se puede evaluar sumando algebraicamente las integrales de todos los segmentos de la viga.

Evaluación gráfica de las integrales del trabajo virtual

Las integrales en las ecuaciones del trabajo virtual (Ecs. (7.30) y (7.31)) se evalúan matemáticamente integrando las ecuaciones de la cantidad ($M_v M / EI$) de cada segmento de la estructura. Sin embargo, si la estructura consiste en segmentos con EI constante y está sujeta a cargas relativamente sencillas, entonces puede ser más conveniente aplicar un método gráfico para evaluar estas integrales. El procedimiento gráfico esencialmente involucra: (a) el dibujo de los diagramas de momento flexionante de la estructura causado por las cargas reales y virtuales; y (b) la determinación de las expresiones de la integral del trabajo virtual ($\int_0^L M_v M dx$) para cada segmento de la tabla de integrales, en comparación de las formas de los diagramas M y M_v de cada segmento con los indicados en la tabla. La expresión para los diagramas de cada integral de M y M_v de figuras geométricas simples se indican en la Tabla 7.6, y el procedimiento gráfico se ilustra en el Ejemplo 7.10, para vigas, y (en la siguiente sección) en el Ejemplo 7.14, para marcos.

Ejemplo 7.6

Determine la pendiente y la deflexión en el punto A de la viga que se muestra en la Fig. 7.11(a) por el método del trabajo virtual.

**FIG. 7.7****Solución**

Sistema real. Ver Fig. 7.11(b).

Pendiente en A, θ_A . El sistema virtual consiste en un par aplicado en A, como se muestra en la Fig. 7.11(c). De la Fig. 7.11(a) a la (c), podemos ver que no existen discontinuidades de las cargas reales y virtuales o de EI a lo largo de la viga. Por lo tanto, no hay una subdivisión de la viga en segmentos. Para determinar la ecuación de momento flexionante M debido a la carga real, seleccionamos la coordenada x con origen en el extremo A de la viga, como se muestra en la Fig. 7.11(b). Aplicando el método de las secciones, descrito en la Sección 5.2, determinamos la ecuación para M como

$$0 < x < L \quad M = -\frac{1}{2}(x) \left(\frac{wx}{L} \right) \left(\frac{x}{3} \right) = -\frac{wx^3}{6L}$$

De manera similar, la ecuación para el momento flexionante M_{v1} debida al momento virtual unitario en términos de la misma coordenada x es

$$0 < x < L \quad M_{v1} = 1$$

Para determinar la pendiente θ_A , aplicamos la expresión para el trabajo virtual dada por la Ec. (7.31):

$$1(\theta_A) = \int_0^L \frac{M_{v1} M}{EI} dx = \int_0^L 1 \left(-\frac{wx^3}{6LEI} \right) dx$$

$$\theta_A = -\frac{w}{6EIL} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^L = -\frac{wL^3}{24EI}$$

La respuesta negativa para θ_A indica que el punto A rota en contra a las manecillas del reloj, en la dirección opuesta al momento unitario.

$$\theta_A = \frac{wL^3}{24EI} \quad \curvearrowleft$$

Respuesta.

Deflexión en A, Δ_A . El sistema virtual consiste en una carga unitaria aplicada en A, como se muestra en la Fig. 7.11(d). Si usamos la misma coordenada x que utilizamos para el cálculo de θ_A , entonces el cálculo para el momento restante M permanece igual que antes, y la ecuación para el momento M_{v2} debido a la carga virtual unitaria (Fig. 7.11(d)) está dado por

$$0 < x < L \quad M_{v2} = -1(x) = -x$$

continúa

Aplicando la expresión para el trabajo virtual dado por la Ec. (7.30), determinamos la deflexión deseada Δ_A como

$$1(\Delta_A) = \int_0^L \frac{M_{v2}M}{EI} dx = \int_0^L (-x) \left(-\frac{wx^3}{6EI} \right) dx$$

$$\Delta_A = \frac{w}{6EI} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^L = \frac{wL^4}{30EI}$$

El respuesta positiva para Δ_A indica que el punto A se deforma hacia abajo, en la dirección de la carga unitaria.

$$\Delta_A = \frac{wL^4}{30EI} \downarrow$$

Respuesta.

Ejemplo 7.7

Calcule la pendiente en el punto B de la viga de la Fig. 7.12(a) por el método del trabajo virtual.

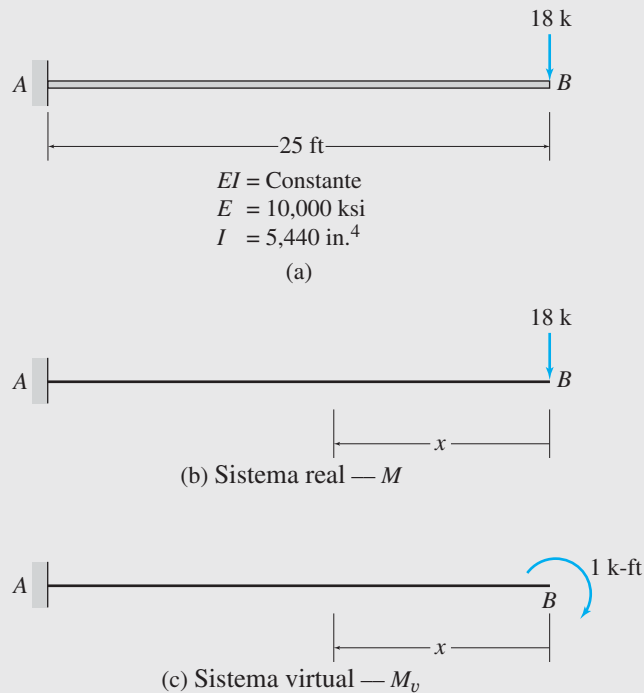


FIG. 7.12

Solución

Los sistemas real y virtual se muestran en la Fig. 7.12(b) y (c) respectivamente. Como se puede ver, una coordenada x con su origen en el extremo B de la viga se selecciona para obtener las ecuaciones del momento flexionante. De la Fig. 7.12(b), observamos que la ecuación para M en términos de la coordenada x es

$$0 < x < 25 \text{ ft} \quad M = -18x$$

De manera similar, de la Fig. 7.12(c) obtenemos la ecuación para M_v como

$$0 < x < 25 \text{ ft} \quad M_v = -1$$

continúa

La pendiente en B se puede calcular aplicando la expresión del trabajo virtual dada por la Ec. (7.31), como sigue:

$$\begin{aligned} 1(\theta_B) &= \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \\ 1(\theta_B) &= \frac{1}{EI} \int_0^{25} -1(-18x) dx \\ (1 \text{ k-ft})\theta_B &= \frac{5,625 \text{ k}^2\text{-ft}^3}{EI} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_B = \frac{5,625 \text{ k-ft}^2}{EI} = \frac{5,625(12)^2}{(10,000)(5,440)} = 0.0149 \text{ rad.}$$

Una respuesta positiva para θ_B indica que el punto B rota en el mismo sentido que las manecillas del reloj, en la dirección del momento unitario.

$$\theta_B = 0.0149 \text{ rad.}$$



Respuesta.

Ejemplo 7.8

Determine la deflexión en el punto D de la viga expuesta en la Fig. 7.13(a) por el método del trabajo virtual.

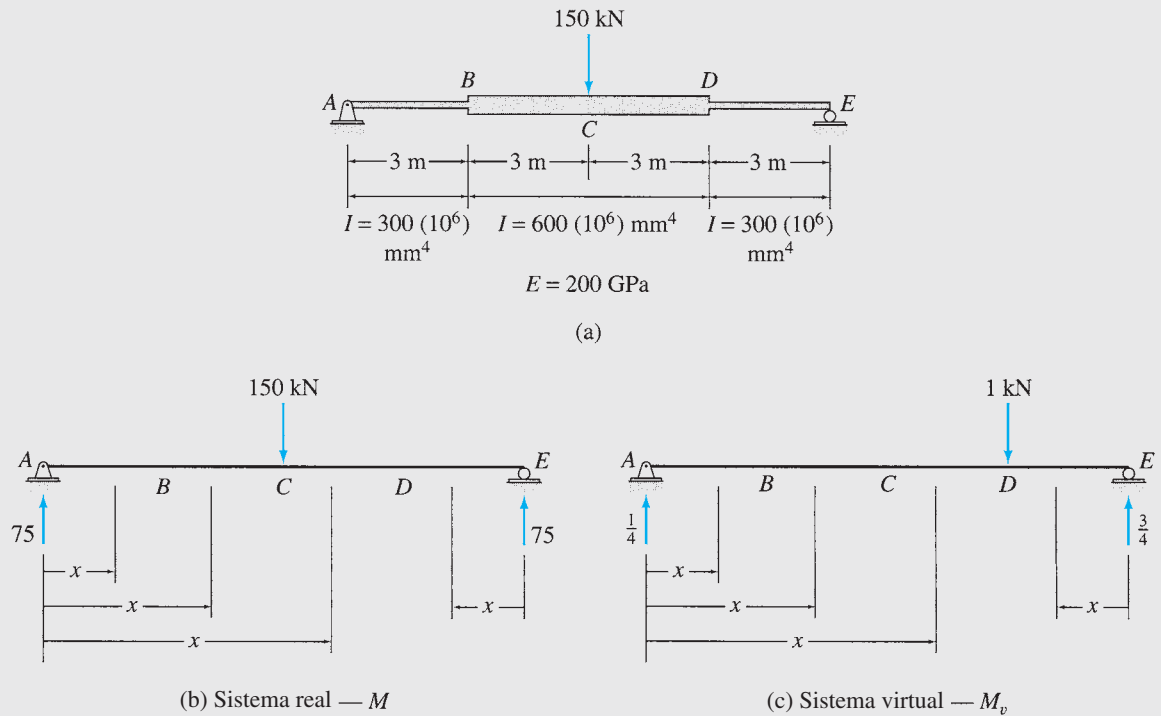


FIG. 7.13

continúa

Solución

Los sistemas real y virtual aparecen en las Figs. 7.13(b) y (c), respectivamente. Se puede ver en la Fig. 7.13(a) que la rigidez a flexión EI de la viga cambia abruptamente en los puntos B y D . Además, las Figs. 7.13(b) y (c) indican que las cargas real y virtual son continuas en los puntos C y D , respectivamente. Consecuentemente, la variación de la cantidad $(M_v M/EI)$ será continuo en los puntos B , C y D . Por lo tanto, la viga debe estar dividida en cuatro segmentos, AB , BC , CD , y DE ; en cada segmento la cantidad $(M_v M/EI)$ será continua y, por lo tanto, se puede integrar.

Las coordenadas x seleccionadas para determinar las ecuaciones del momento flexionante se muestran en la Fig. 7.13(b) y (c). Tenga en cuenta que en cualquier segmento en particular de la viga, la coordenada x se debe usar para escribir las dos ecuaciones, es decir, la ecuación para el momento flexionante real (M) y la ecuación para el momento de flexión virtual (M_v). Las ecuaciones para M y M_v para los cuatro segmentos de la viga, determinadas usando el método de las secciones, están tabuladas en la Tabla 7.7. La deflexión en D se puede determinar aplicando la expresión para el trabajo virtual dado por la Ec. (7.30).

$$1(\Delta_D) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$1(\Delta_D) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 \left(\frac{x}{4}\right)(75x) dx + \frac{1}{2} \int_3^6 \left(\frac{x}{4}\right)(75x) dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_6^9 \left(\frac{x}{4}\right)(-75x + 900) dx + \int_0^3 \left(\frac{3}{4}x\right)(75x) dx \right]$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_D = \frac{2,193.75 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_D = \frac{2,193.75 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{2,193.75}{200(300)} = 0.0366 \text{ m} = 36.6 \text{ mm}$$

$$\Delta_D = 36.6 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta.

TABLA 7.7

Segmento	Coordenada x		EI ($I = 300 \times 10^6 \text{ mm}^4$)	M ($\text{kN} \cdot \text{m}$)	M_v ($\text{kN} \cdot \text{m}$)
	Origen	Límites (m)			
AB	A	0–3	EI	$75x$	$\frac{x}{4}$
BC	A	3–6	$2EI$	$75x$	$\frac{x}{4}$
CD	A	6–9	$2EI$	$75x - 150(x - 6)$	$\frac{x}{4}$
ED	E	0–3	EI	$75x$	$\frac{3}{4}x$

Ejemplo 7.9

Determine la deflexión en el punto C de la viga que se muestra en la Fig. 7.14(a) por el método del trabajo virtual.

Solución

Esta viga fue previamente analizada por los métodos de área-momento y de la viga conjugada en los Ejemplos 6.7 y 6.13, respectivamente.

continúa

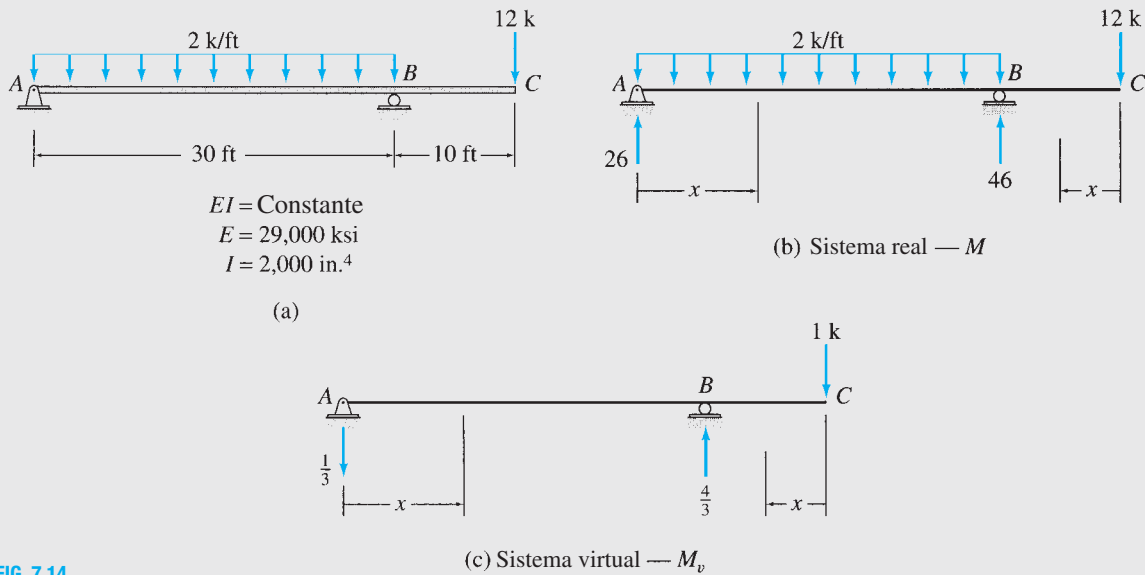


FIG. 7.14

Los sistemas real y virtual para este problema se muestran en las Figs. 7.14(b) y (c), respectivamente. Las cargas reales y virtuales son continuas en el punto B , así que la viga se divide en dos segmentos, AB y BC . Las coordenadas x usadas para determinar las ecuaciones de momento flexionante se muestran en las Figs. 7.14(b) y (c), y la ecuación para M y M_v obtenidas para cada uno de los dos segmentos de la viga están tabulados en la Tabla 7.8. La deflexión en C se puede determinar aplicando la expresión para el trabajo virtual dado por la Ec. (7.30) como sigue:

TABLA 7.8

Segmento	Coordenada x		M (k-ft)	M_v (k-ft)
	Origen	Límites (ft)		
AB	A	$0-30$	$26x - x^2$	$-\frac{x}{3}$
CB	C	$0-10$	$-12x$	$-x$

$$\begin{aligned}
 1(\Delta_C) &= \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \\
 1(\Delta_C) &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{30} \left(-\frac{x}{3} \right) (26x - x^2) dx + \int_0^{10} (-x)(-12x) dx \right] \\
 (1 \text{ k}) \Delta_C &= -\frac{6,500 \text{ k}^2 \cdot \text{ft}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

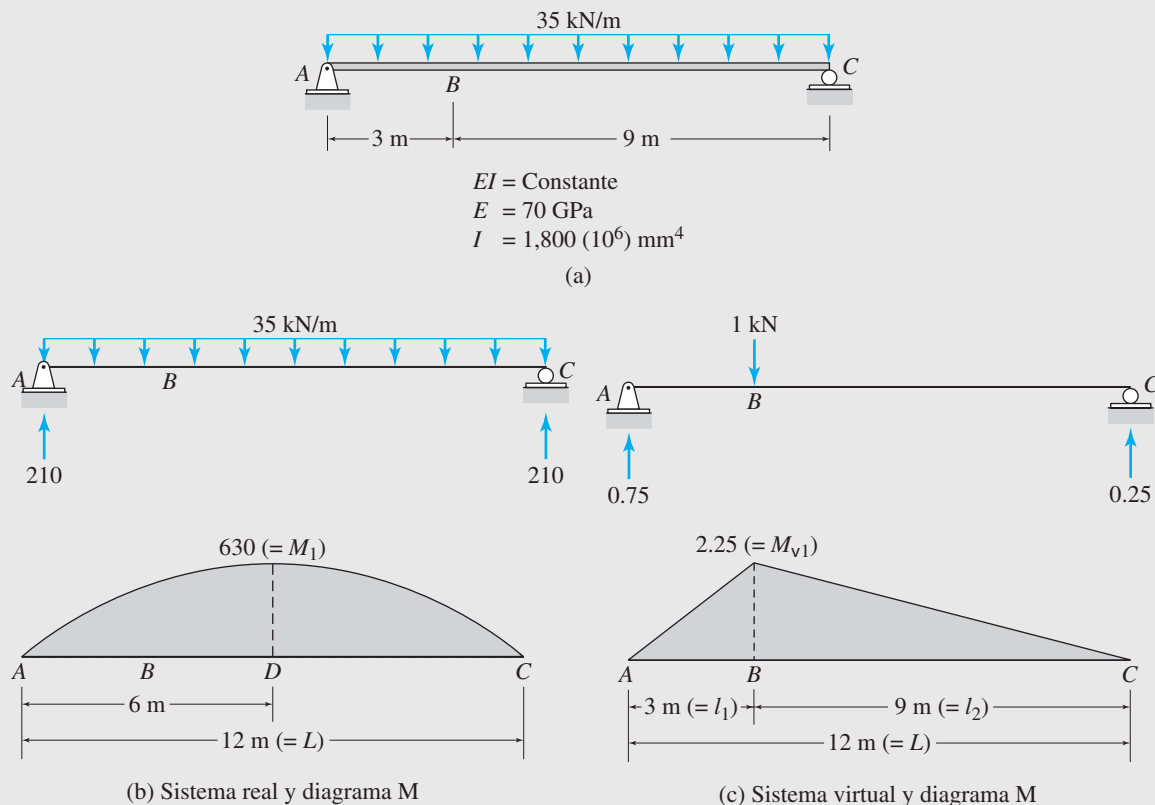
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta_C &= -\frac{6,500 \text{ k} \cdot \text{ft}^3}{EI} = -\frac{6,500(12)^3}{(29,000)(2,000)} = -0.194 \text{ in.} \\
 \Delta_C &= 0.194 \text{ in. } \uparrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

Ejemplo 7.10

Calcule la deflexión en el punto B de la viga de la Fig. 7.15(a) por el método del trabajo virtual. Use el método gráfico (Tabla 7.6) para evaluar la integral del trabajo virtual.

**FIG. 7.15****Solución**

Los sistemas real y virtual, junto con los diagramas de momento flexionante (M y M_v), se muestran en las Figs. 7.15(b) y (c), respectivamente. Como la rigidez a la flexión es constante a lo largo de la longitud de la viga, no hay necesidad de dividir la viga en segmentos, y la ecuación del trabajo virtual, (Ec. (7.30)), para la deflexión en B se puede expresar como

$$1(\Delta_B) = \frac{1}{EI} \int_0^L M_v M dx \quad (1)$$

Para evaluar la integral $\int_0^L M_v M dx$ gráficamente, primero comparamos la forma del diagrama de momento M en la Fig. 7.15(b) con las formas incluidas en la columna de la izquierda de la Tabla 7.6. Tenga en cuenta que el diagrama M coincide con la forma localizada en la sexta fila de la tabla. Después, comparamos la forma del diagrama M_v (Fig. 7.15(c)) con aquellas dadas en la fila superior de la tabla, y teniendo en cuenta que es similar a la forma en la quinta columna. Esto indica que la expresión para evaluar la integral $\int_0^L M_v M dx$, en este caso, está localizada en la intersección de la sexta fila y la quinta columna de la Tabla 7.6, es decir,

$$\int_0^L M_v M dx = \frac{1}{3} M_{v1} M_1 \left(L + \frac{l_1 l_2}{L} \right)$$

continúa

Sustituyendo los valores numéricos para $M_{v1} = 2.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_1 = 630 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $L = 12 \text{ m}$, $l_1 = 3 \text{ m}$ y $l_2 = 9 \text{ m}$ en la ecuación anterior, calculamos la integral como

$$\int_0^{12} M_v M dx = \frac{1}{3} (2.25) (630) \left(12 + \frac{3(9)}{12} \right) = 6,733.13 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3$$

La deflexión deseada en B se puede ya determinar convenientemente aplicando la ecuación del trabajo virtual (Ec. 1) como

$$(1 \text{ kN}) \Delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{12} M_v M dx = \frac{6,733.13 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_B = \frac{6,733.13 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{6,733.3}{70 (1,800)} = 0.0534 \text{ m} = 53.4 \text{ mm}$$

$$\Delta_B = 53.4 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta.

7.5 Deflexiones en marcos por el método del trabajo virtual

La aplicación del método del trabajo virtual para determinar las pendientes y las deflexiones en los marcos es similar al método para vigas. Para calcular la deflexión Δ , o la rotación θ , en un punto del marco, se aplica una carga virtual unitaria o par en el punto deseado. Cuando el sistema virtual está sujeto a las deformaciones del marco debidas a cargas reales, el trabajo virtual externo realizado por la carga unitaria o par unitario es $W_{ve} = 1 (\Delta)$, o $W_{ve} = 1 (\theta)$. Como algunas partes del marco pueden someterse a deformaciones axiales además de las deformaciones por flexión, el total del trabajo interno virtual realizado por el marco es igual a la suma del trabajo interno virtual debido a la flexión y a las deformaciones axiales. Como se discutió en la sección anterior, cuando las cargas reales y virtuales y la rigidez a flexión EI son constantes en el segmento, se puede obtener por integración la cantidad $M_v M / EI$ en toda la longitud del segmento. El trabajo virtual interno provocado por la flexión en el marco entero se puede obtener al sumar el trabajo individual de cada elemento; es decir,

$$W_{vib} = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.32)$$

De manera similar, si las fuerzas axiales F y F_v causadas por las cargas reales y virtuales, respectivamente, y la rigidez axial AE son constantes en toda la longitud L de un segmento del marco, entonces, como se discutió en la Sección 7.3, el trabajo virtual interno para ese segmento debido a la deformación axial es igual a $F_v (FL/AE)$. Así, el trabajo virtual interno manifestado por las deformaciones axiales del marco completo se puede expresar como

$$W_{via} = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) \quad (7.33)$$

Añadiendo las Ecs. (7.32) y (7.33), obtenemos el total del trabajo virtual interno para marcos causado por las deformaciones de flexión y axiales como

$$W_{vi} = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.34)$$

Igualando el trabajo virtual externo al trabajo virtual interno, obtenemos las expresiones para el método del trabajo virtual para deformaciones y rotaciones de marcos, respectivamente, como

$$1(\Delta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.35)$$

y

$$1(\theta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.36)$$

Las deformaciones axiales en los elementos de los marcos compuestos de materiales comunes en la ingeniería son generalmente mucho menores que las deformaciones por flexión y son, por lo tanto, generalmente despreciadas en el análisis. En este texto, a menos que se indique lo contrario, despreciaremos el efecto de la deformación axial en el análisis de marcos. La expresión para el trabajo virtual que considera solo las deformaciones por flexión se pueden obtener simplemente al omitir el primer término de la derecha de la igualdad en las Ecs. (7.35) y (7.36), las cuales quedarían reducidas a

$$1(\Delta) = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.37)$$

y

$$1(\theta) = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.38)$$

Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se puede utilizar para determinar las pendientes y las deflexiones de marcos con el método del trabajo virtual.

1. **Sistema real** Determine las fuerzas internas en los extremos de los elementos del marco causadas por la carga real usando el procedimiento descrito en la Sección 5.6.
2. **Sistema virtual** Si se determinará la deflexión del marco, aplique la carga unitaria en el punto y en la dirección de la deflexión deseada. Si se quiere calcular la rotación, entonces utilice un par unitario en el punto del marco donde se desea conocer la rotación. Encuentre las fuerzas en los extremos de los elementos debidas a la carga virtual.

3. Si es necesario, divida los elementos del marco en segmentos de modo que las cargas reales y virtuales y el EI sean constantes en cada segmento.
4. Para cada segmento de marco, establezca una ecuación que exprese la variación del momento de flexión debido a las cargas reales (M) a lo largo de la longitud de cada segmento en términos de la posición coordenada de x .
5. Para cada segmento de marco, determine la ecuación para el momento flexionante provocado por la carga virtual o par (M_v) usando el mismo sistema coordenado x , utilizado para este segmento en el paso 4 para establecer la expresión del momento de flexión real, M . Se puede utilizar cualquier convención de signos para M y M_v ; sin embargo, es importante que sea la misma para M y M_v en un segmento en particular.
6. Si el efecto de deformación por carga axial se incluye en el análisis, entonces vaya al paso 7. De otra manera, determine la deflexión o rotación deseada del marco aplicando la expresión adecuada para el trabajo virtual, Ec. (7.37) o Ec. (7.38). Termine el análisis en esta etapa.
7. Si es necesario, divida los elementos del marco en segmentos para que las fuerzas axiales reales y virtuales y AE sean constantes en cada uno de los segmentos. No es preciso que cada uno de estos segmentos sean iguales a los usados en el paso 3 para evaluar el trabajo virtual interno debido a la flexión. Es importante, sin embargo, que se use la misma convención de signos para la fuerza axial real F , y para la fuerza axial virtual F_v , en un segmento en particular.
8. Calcule la deflexión deseada o rotación en el marco aplicando la expresión adecuada para el trabajo virtual, Ec. (7.35) o Ec. (7.36).

Ejemplo 7.11

Determine la rotación en el nodo C del marco que se muestra en la Fig. 7.16(a) por el método del trabajo virtual.

Solución

Los sistemas real y virtual se muestran en las Figs. 7.16(b) y (c), respectivamente. Las coordenadas x usadas para determinar las ecuaciones de momento flexionante para los tres segmentos del marco, AB , BC y CD , se aprecian en estas figuras. Las ecuaciones para M y M_v obtenidas para estos tres segmentos se tabulan en la Tabla 7.9. La rotación del nodo C del marco puede ser determinada aplicando la expresión del trabajo virtual por la Ec. (7.38).

$$\begin{aligned}
 1(\theta_C) &= \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^{30} \left(\frac{x}{30} \right) \left(38.5x - 1.5 \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 (1 \text{ k-ft}) \theta_C &= \frac{6,487.5 \text{ k}^2\text{-ft}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_C = \frac{6,487.5 \text{ k-ft}^2}{EI} = \frac{6,487.5(12)^2}{(29,000)(2,500)} = 0.0129 \text{ rad.}$$

$$\theta_C = 0.0129 \text{ rad.} \quad \curvearrowright$$

Respuesta.
continúa

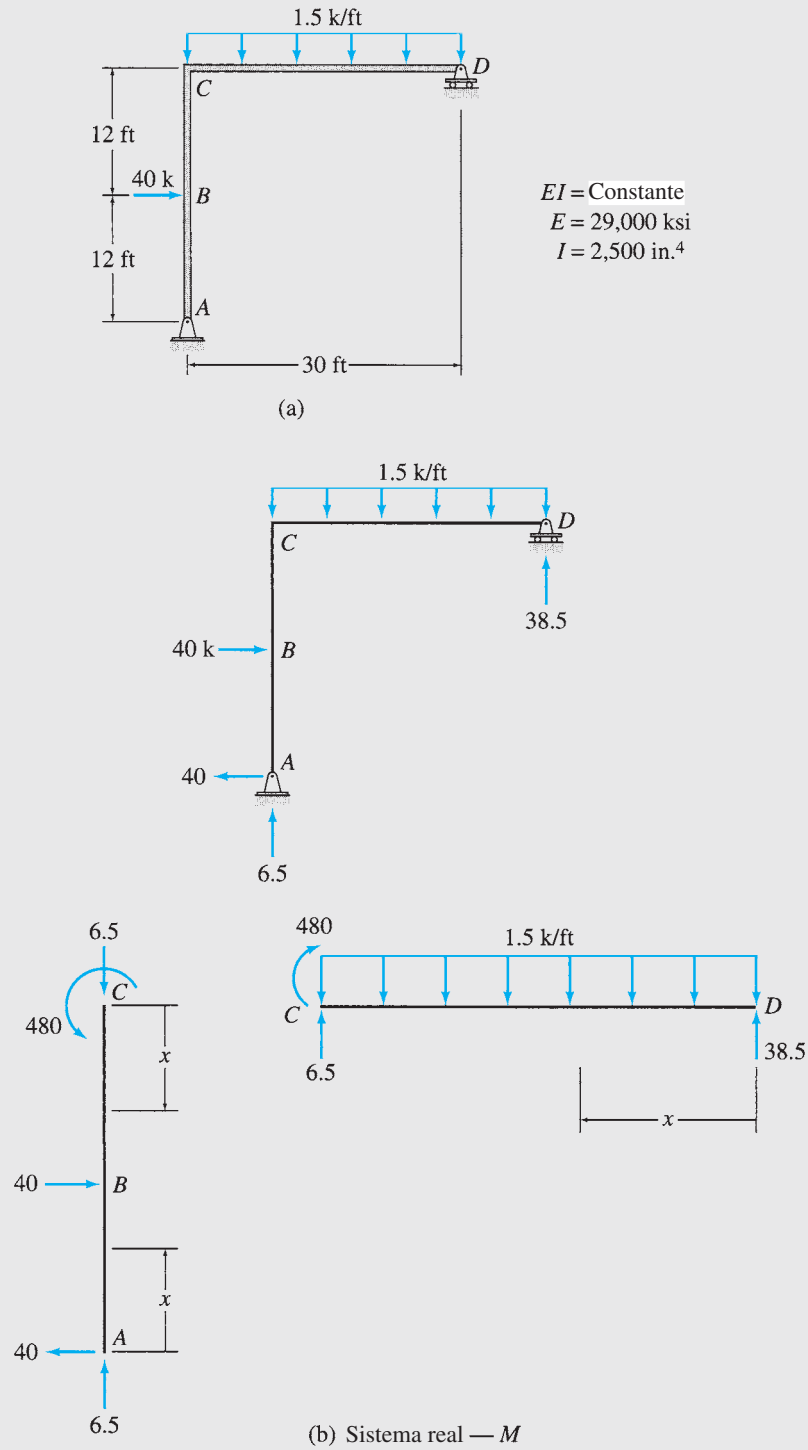


FIG. 7.15

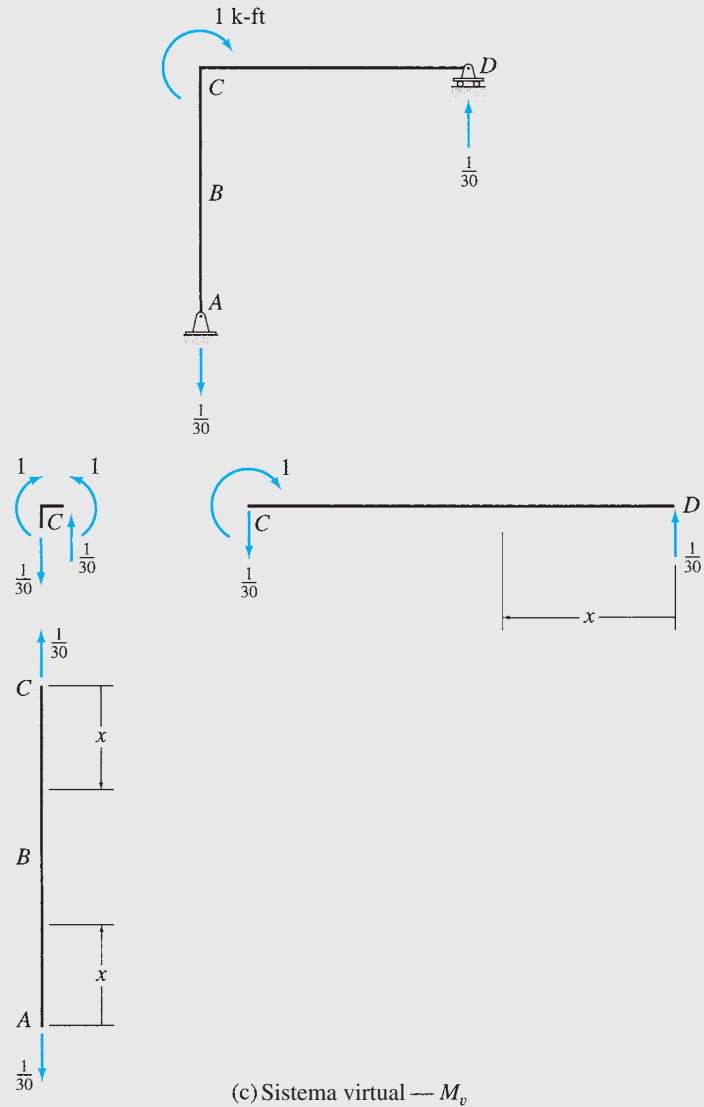


FIG. 7.15 (continuación)

 (c) Sistema virtual — M_v

TABLA 7.9

Segmento	Coordenada x		M (k-ft)	M_v (k-ft)
	Origen	Límites (ft)		
AB	A	0–12	$40x$	0
CB	C	0–12	480	0
DC	D	0–30	$38.5x - 1.5 \frac{x^2}{2}$	$\frac{x}{30}$

Ejemplo 7.12

Utilice el método del trabajo virtual para determinar la deflexión vertical en el nodo C del marco de la Fig. 7.17(a).

Solución

Los sistemas real y virtual se muestran en las Figs. 7.17(b) y (c), respectivamente. Las coordenadas x usadas para determinar las ecuaciones de momento flexionante para los dos segmentos del marco, AB y BC , se muestran en estas figuras. Las ecuaciones para M y M_v obtenidas para estos tres segmentos se tabulan en la Tabla 7.10. La rotación del nodo C del marco puede ser determinada aplicando la expresión del trabajo virtual por la Ec. (7.37):

$$1(\Delta_C) = \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx$$

$$1(\Delta_C) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \int_0^5 (-4)(76x - 530) dx + \int_0^5 \left(-\frac{4}{5}x \right) (-6x^2) dx \right]$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_C = \frac{4,150 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_C = \frac{4,150 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{4,150}{70(554)} = 0.107 \text{ m} = 107 \text{ mm}$$

$$\Delta_C = 107 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta.

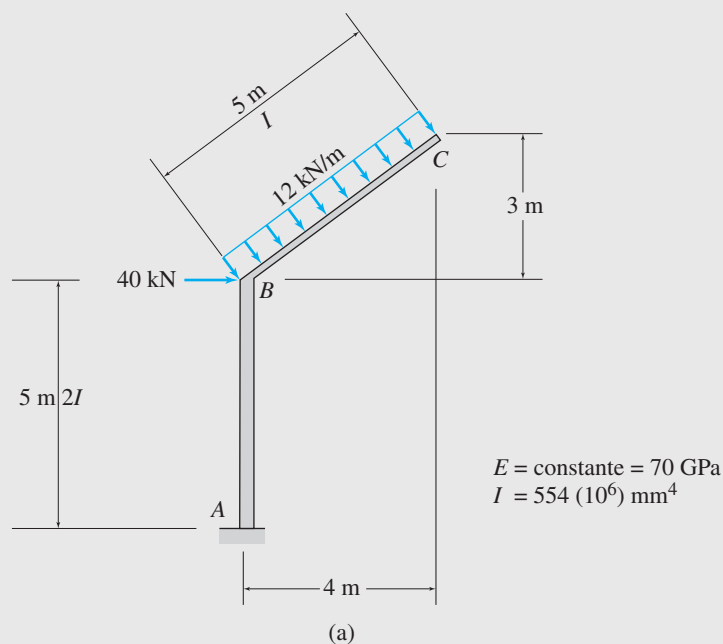


FIG. 7.17

continúa

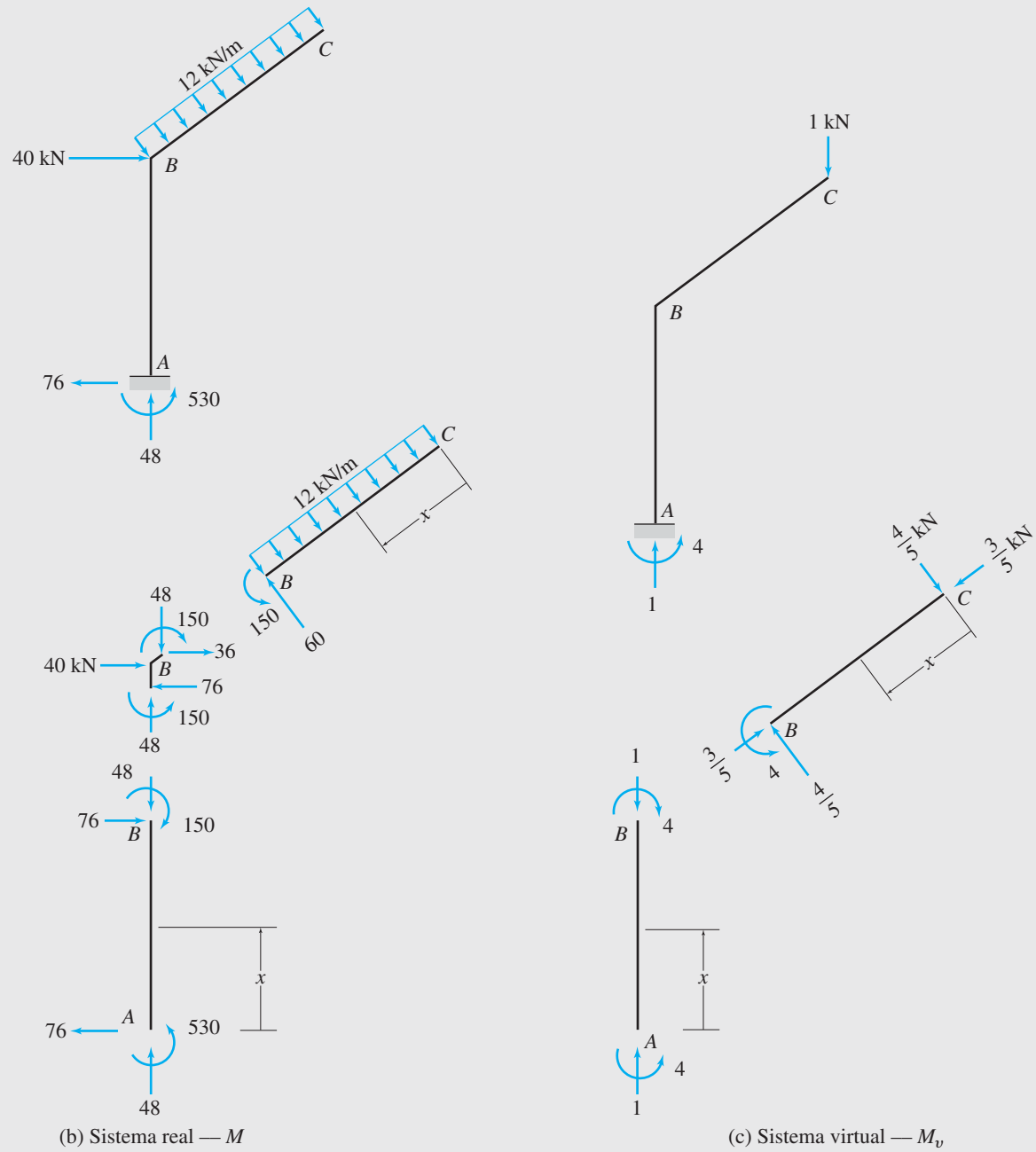


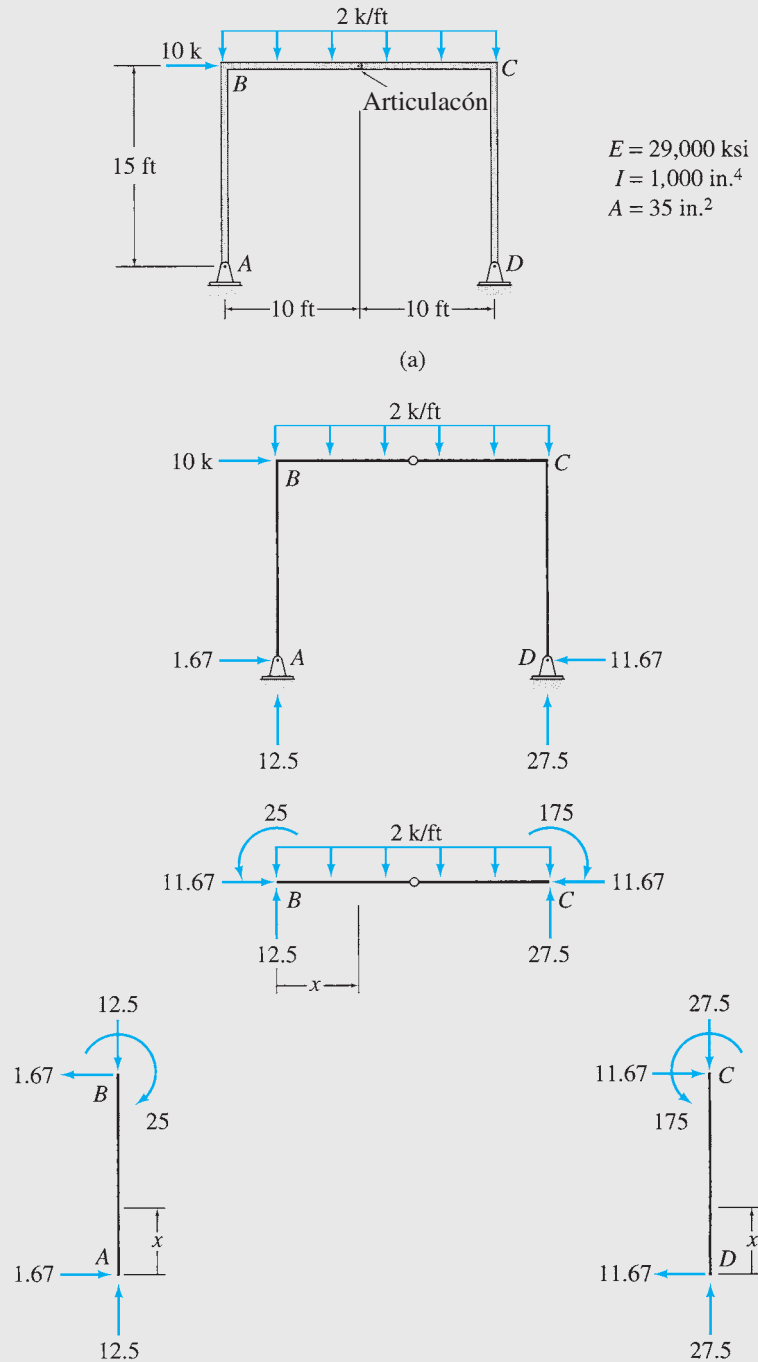
FIG. 7.17 (Continuación)

TABLA 7.10

Segmento	Coordenada x		EI ($I = 554 \times 10^6 \text{ mm}^4$)	M ($\text{kN} \cdot \text{m}$)	M_v ($\text{kN} \cdot \text{m}$)
	Origen	Límites (m)			
AB	A	0–5	$2EI$	$76x - 530$	-4
CB	C	0–5	EI	$-12 \frac{x^2}{2}$	$-\frac{4}{5}x$

Ejemplo 7.13

Encuentre la deflexión horizontal en el nodo C del marco que se ve en la Fig. 7.18(a) incluyendo el efecto de la deformación axial, con el método del trabajo virtual.

**FIG. 7.18**(b) Sistema real — M, F

continúa

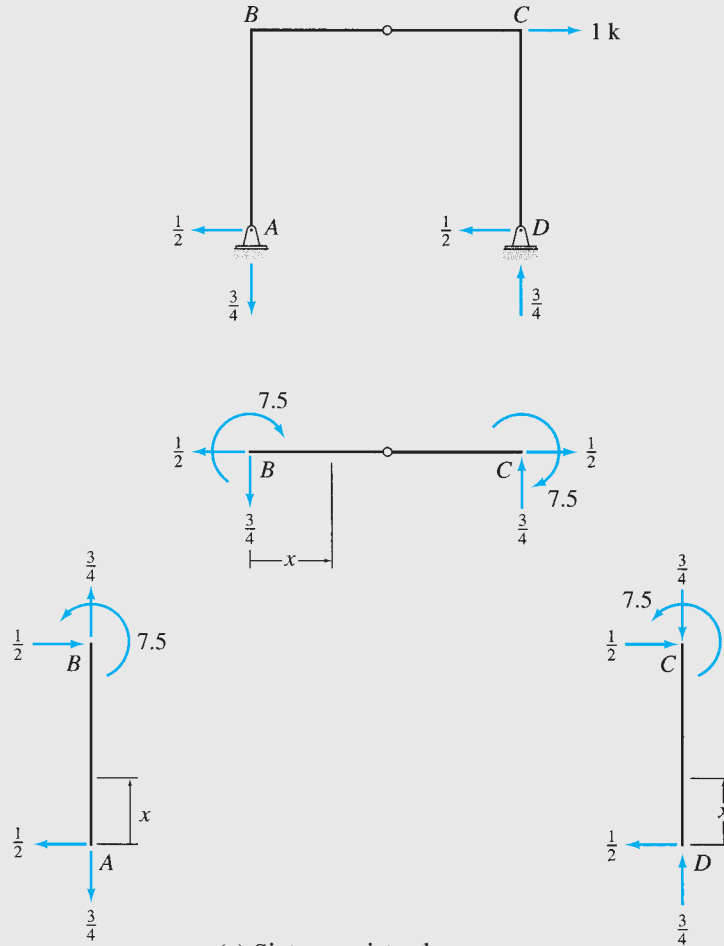


FIG. 7.18 (Continuación)

 (c) Sistema virtual — M_v, F_v

TABLA 7.11

Segmento	Coordenada x		M (k-ft)	F (k)	M_v (k-ft)	F_v (k)
	Origen	Límites(ft)				
AB	A	0–15	$-1.67x$	-12.50	$\frac{x}{2}$	$\frac{3}{4}$
BC	B	0–20	$-25 + 12.5x - x^2$	-11.67	$7.5 - \frac{3}{4}x$	$\frac{1}{2}$
DC	D	0–15	$11.67x$	-27.50	$\frac{x}{2}$	$-\frac{3}{4}$

Solución

Los sistemas real y virtual se muestran en las Figs. 7.18(b) y (c), respectivamente. Las coordenadas x usadas para determinar las ecuaciones de momento flexionante para los dos segmentos del marco, AB y BC, se muestran en estas figuras. Las ecuaciones para M y M_v obtenidas para estos tres segmentos se tabulan en la Tabla 7.11, junto con las fuerzas axiales F y

continúa

F_v de los elementos. Las deflexiones horizontales en el nodo C del marco se pueden determinar aplicando las expresiones del trabajo virtual dadas por la Ec. (7.35):

$$\begin{aligned}
 1(\Delta_C) &= \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \\
 1(\Delta_C) &= \frac{1}{AE} \left[\frac{3}{4} (-12.5)(15) + \frac{1}{2} (-11.67)(20) - \frac{3}{4} (-27.5)(15) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \left[\int_0^{15} \frac{x}{2} (-1.67x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{20} \left(7.5 - \frac{3}{4}x \right) (-25 + 12.5x - x^2) dx + \int_0^{15} \frac{x}{2} (11.67x) dx \right] \\
 (1 \text{ k}) \Delta_C &= \frac{52.08 \text{ k}^2\text{-ft}}{AE} + \frac{9,375 \text{ k}^2\text{-ft}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \Delta_C &= \frac{52.08 \text{ k-ft}}{AE} + \frac{9,375 \text{ k-ft}^3}{EI} \\
 &= \frac{52.08}{(35)(29,000)} + \frac{9,375 (12)^2}{(29,000)(1,000)} \\
 &= 0.00005 + 0.04655 \\
 &= 0.0466 \text{ ft} = 0.559 \text{ in.} \\
 \Delta_C &= 0.559 \text{ in.} \rightarrow
 \end{aligned}$$

Respuesta.

Tenga en cuenta que el término de la magnitud de la deformación axial es insignificamente pequeño en comparación con el término de deformación por flexión.

Ejemplo 7.14

Calcule la deflexión vertical en el nodo A del marco que se aprecia en la Fig. 7.19(a) utilizando el método del trabajo virtual. Aplique el procedimiento gráfico (Tabla 7.6) para evaluar la integral del trabajo virtual.

Solución

Los sistemas real y virtual, junto con los diagramas de momento de flexión (M y M_v), se muestran en la Fig. 7.19(b) y (c), respectivamente. Como la rigidez de la flexión EI es constante, la ecuación para el trabajo virtual (Ec. (7.37)) se puede expresar como

$$1(\Delta_A) = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_v M dx \quad (1)$$

Para evaluar la integral $\int_0^L M_v M dx$ gráficamente, compararemos las formas de los diagramas de M y M_v del elemento AB con los incluidos en la Tabla 7.6, para obtener las ecuaciones relevantes de la octava columna y la segunda fila de la tabla. Por lo tanto,

$$\int_0^L M_v M dx = \frac{1}{4} M_{v1} M_1 L$$

continúa

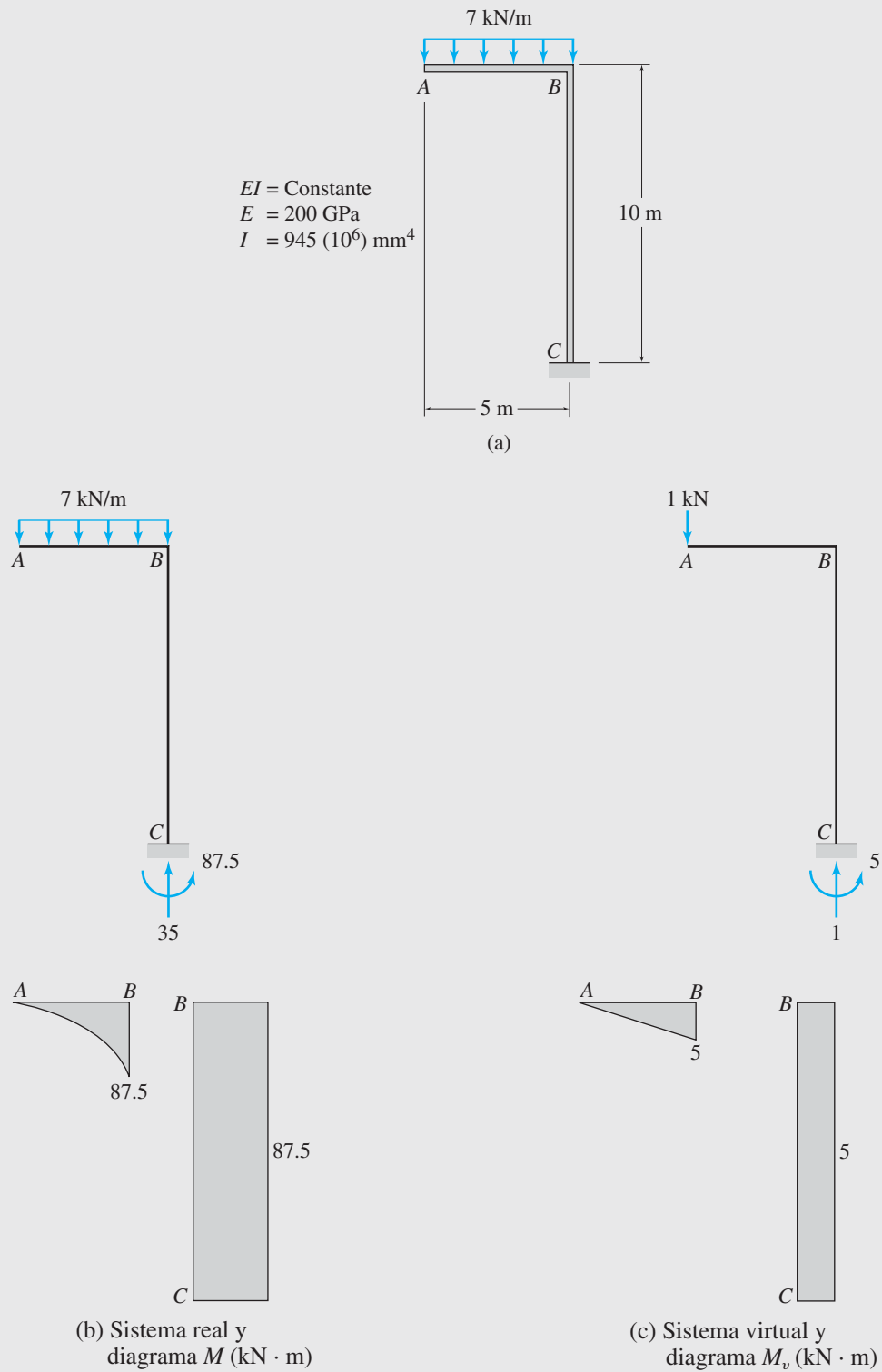


FIG. 7.19

continúa

Sustituyendo $M_{v1} = 5\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_1 = 87.5\text{ kN} \cdot \text{m}$ y $L = 5\text{ m}$, en la ecuación anterior, calculamos el valor de la integral del trabajo virtual del elemento AB como

$$\int_0^5 M_v M dx = \frac{1}{4} (5) (87.5) (5) = 546.9 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3$$

De manera similar, la expresión para la integral del elemento BC se obtiene de la segunda fila y la segunda columna de la Tabla 7.6 como

$$\int_0^L M_v M dx = M_{v1} M_1 L$$

Con $M_{v1} = 5\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_1 = 87.5\text{ kN} \cdot \text{m}$ y $L = 10\text{ m}$, y el valor de la integral para el elemento BC se calcula como

$$\int_0^{10} M_v M dx = (5) (87.5) (10) = 4,375 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3$$

La deflexión deseada en el nodo A ahora se puede determinar sustituyendo los valores numéricos de las integrales para los dos elementos en la ecuación del trabajo virtual (Ec. 1) como

$$(1\text{ kN}) \Delta_A = \frac{1}{EI} (546.9 + 4,375) = \frac{4,921.9 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

Por lo tanto

$$\Delta_A = \frac{4,921.9 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{4,921.9}{200(945)} = 0.026 \text{ m} = 26 \text{ mm}$$

$$\Delta_A = 26 \text{ mm} \downarrow$$

Respuesta.

7.6 Conservación de la energía y energía de deformación

Antes de que podamos desarrollar el método para el cálculo de las deflexiones en estructuras, es necesario entender el concepto de conservación de la energía y energía de deformación.

La *energía* de una estructura se puede definir como su *capacidad de realizar trabajo*. El término *energía de deformación* se atribuye a la *energía que una estructura tiene debido a su deformación*. La relación entre el trabajo y la energía de deformación de una estructura se basa en el *principio de conservación de la energía*, el cual se puede establecer como sigue:

El trabajo realizado en una estructura elástica en equilibrio por un sistema de fuerzas externas aplicado es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas, o energía de deformación almacenada en una estructura.

Este principio se expresa matemáticamente como

$$W_e = W_i \quad (7.39)$$

o

$$W_e = U \quad (7.40)$$

En esta ecuación, W_e y W_i representan el trabajo realizado por las fuerzas externas e internas, respectivamente, y U indica la energía de deformación de

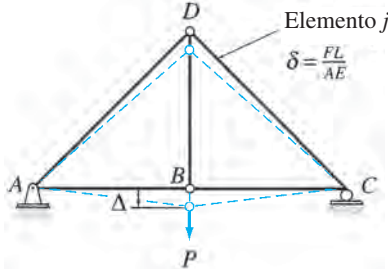


FIG. 7.19

Energía de deformación de las armaduras

Considere la armadura que se muestra en la Fig. 7.20. La armadura está sujeta a la carga P , la cual incrementa gradualmente de cero hasta su valor final, causando deformación en la estructura como se ve en la figura. Puesto que consideramos estructuras linealmente elásticas, la deflexión de la armadura Δ en el punto de la aplicación de P incrementa linealmente con la carga; por lo tanto, como se discutió en la Sección 7.1 (ver Fig. 7.1(c)), el trabajo externo realizado por P durante la deformación se puede expresar como

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$$

Para desarrollar la expresión para el trabajo interno o energía de deformación de la armadura, enfoquemos nuestra atención en un elemento cualquiera j (por ejemplo, el elemento CD de la Fig. 7.20) de la armadura. Si F representa la fuerza axial en el elemento debida a la carga externa P , entonces, como se discutió en la Sección 7.3, la deformación axial de este elemento está dada por $\delta = (FL)/(AE)$, por lo tanto, el trabajo interno o energía de deformación almacenada en el elemento j , U_j , está dada por

$$U_j = \frac{1}{2} F \delta = \frac{F^2 L}{2AE}$$

La energía de deformación de la armadura completa es igual a la suma de las energías de deformación de todos sus elementos y puede escribirse como

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} \quad (7.41)$$

Note que el factor $\frac{1}{2}$ aparece en la expresión de la energía de la deformación provocada por la fuerza axial y la deformación axial δ causada por F en cada elemento de la armadura están relacionadas por la relación lineal $\delta = (FL)/(AE)$.

Energía de deformación en vigas

Para desarrollar las expresiones para la energía de deformación en vigas, considere una viga cualquiera, como la que se ve en la Fig. 7.21(a). Así como la carga P que actúa en la viga incrementando gradualmente de cero a su valor final, el momento flexionante M actuante en un elemento diferencial dx de la viga (Fig. 7.21(a) y (b)) también incrementa gradualmente de cero a su valor final, mientras la sección transversal del elemento dx rota en un ángulo $d\theta$ con respecto al otro. El trabajo interno o energía de deformación almacenada en el elemento dx está, por lo tanto, dado por

$$dU = \frac{1}{2} M (d\theta) \quad (7.42)$$

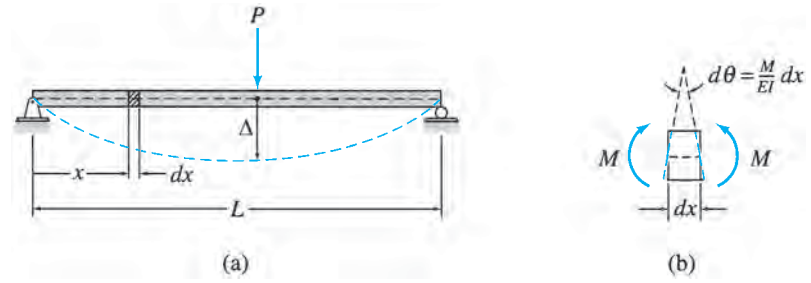


FIG. 7.21

Recuerde de la Sección 7.4 (Ec. (7.27)) que el cambio en la pendiente, $d\theta$, se puede expresar en términos del momento de flexión, M , por la relación $d\theta = (M/EI) dx$, así podemos escribir la Ec. (7.42) como

$$dU = \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.43)$$

La expresión para la energía de deformación de toda la viga ahora se puede conseguir mediante la integración de la Ec. (7.43) a lo largo de la longitud L de la viga:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.44)$$

Cuando la cantidad M/EI no es una función continua de x en toda la longitud de la viga, entonces la viga se debe dividir en segmentos de modo que M/EI sea continua en cada uno de ellos. La integral del lado derecho de la igualdad de la Ec. (7.44) entonces se evalúa por la suma de integrales para todos los segmentos de la viga. Debemos notar que la Ec (7.44) se basa en la consideración de que la deformación por flexión en vigas no incluye los efectos de deformación por cortante, los cuales, como se expresó previamente, son muy pequeños comparados con las deformaciones de flexión en la mayoría de las vigas.

Energía de deformación en marcos

Las partes de marcos pueden estar sujetas a fuerzas axiales además de a momentos flexionantes, así que el total de la energía de deformación (U) de los marcos se expresa como la suma de la energía de deformación causada por las fuerzas axiales (U_a) y la energía de flexión (U_b); es decir,

$$U = U_a + U_b \quad (7.45)$$

Si un marco se divide en segmentos para que la cantidad F/AE sea constante en toda la longitud L de cada segmento, entonces —como se mostró previamente en el caso de las armaduras— la energía de deformación almacenada en cada segmento debida a la carga axial F es igual a $(F^2L)/(2AE)$. Por lo tanto, la energía de deformación causada por la carga axial para el marco completo se puede expresar como

$$U_a = \sum \frac{F^2L}{2AE} \quad (7.46)$$

De manera similar, si el marco está dividido en segmentos para que la cantidad M/EI sea continua en toda la longitud de cada elemento, entonces la energía de deformación almacenada en cada parte debida a la flexión se puede obtener al integrar la cantidad M/EI en toda la longitud del segmento (Ec. (7.44)). La energía de deformación provocada por la flexión en el marco completo es igual a la suma de energías de deformación de flexión de todos los segmentos del marco y se puede escribir como

$$U_b = \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.47)$$

Sustituyendo las Ecs. (7.46) y (7.47) en la Ec. (7.45), obtenemos la siguiente expresión para la energía de deformación de marcos debida tanto a las fuerzas axiales como a la flexión:

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.48)$$

Como se indicó previamente, las deformaciones axiales en marcos son generalmente más pequeñas que las deformaciones por flexión, y son usualmente despreciadas en el análisis. La energía de deformación en marcos causada solo por la flexión se expresa como

$$U = \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.49)$$

7.7 Segundo teorema de Castigliano

En esta sección consideraremos otro método energético para determinar las deflexiones de estructuras. Este método, que puede aplicarse solo a estructuras linealmente elásticas, fue inicialmente presentado por Alberto Castigliano en 1873, y se conoce comúnmente como *el segundo teorema de Castigliano*. (El primer teorema de Castigliano, el cual puede usarse para establecer ecuaciones de equilibrio en las estructuras, no se considera en este texto.) El teorema puede expresarse como sigue:

Para estructuras elásticamente lineales, la derivada parcial de la energía de deformación respecto de la fuerza aplicada (o par) es igual al desplazamiento de la fuerza a lo largo de su línea de acción.

La expresión matemática de este teorema se puede establecer como:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \quad \text{o} \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{M}_i} = \theta_i \quad (7.50)$$

Donde U = a la energía de deformación, Δ_i = a la deflexión en el punto de aplicación de la fuerza P_i ; y θ = a la rotación en el punto de aplicación del par $\bar{M}_i$.

Para probar este teorema, considere la viga que se muestra en la Fig. 7.22. La viga está sujeta a cargas externas P_1 , P_2 , y P_3 , que incrementan gradualmente desde cero hasta sus valores finales, generando flexión en la viga,

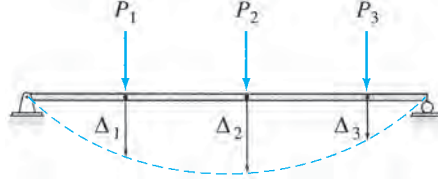


FIG. 7.22

como se ve en la figura. La energía de deformación (U) almacenada en la viga causada por el trabajo externo (W_e) realizado por estas fuerzas está dado por

$$U = W_e = \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + \frac{1}{2}P_3\Delta_3 \quad (7.51)$$

Aquí, Δ_1 , Δ_2 , y Δ_3 son las deflexiones de la viga en los puntos de aplicación de P_1 , P_2 , y P_3 , respectivamente, como se muestra en la figura. Como indica la Ec. (7.51), la energía de deformación U es una función de la carga externa y puede expresarse como

$$U = f(P_1, P_2, P_3) \quad (7.52)$$

Ahora, asuma que se determinará la deflexión Δ_2 de la viga en el punto de aplicación de P_2 . Si P_2 incrementa a una cantidad infinitesimal dP_2 , entonces el incremento de la energía de deformación de la viga debido a la aplicación de dP_2 se puede escribir como

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_2} dP_2 \quad (7.53)$$

y el total de la energía de deformación, U_T , almacenada en la viga está dada por

$$U_T = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_2} dP_2 \quad (7.54)$$

Tome en cuenta que la viga está compuesta por materiales elásticamente lineales, así que a pesar de la secuencia en la que se aplican las cargas P_1 , $(P_2 + dP_2)$, y P_3 , el total de energía de deformación almacenada debería ser la misma.

Considere, por ejemplo, la secuencia en la cual dP_2 se emplea en la viga antes de la aplicación de P_1 , P_2 y P_3 . Si $d\Delta_2$ es la deflexión de la viga en el punto de aplicación de dP_2 debido a dP_2 , entonces la energía de deformación almacenada en la viga está dada por $(1/2)(dP_2)(d\Delta_2)$. Las cargas P_1 , P_2 , y P_3 se aplican a la viga, generando la suma de deflexiones Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , respectivamente, en los puntos de aplicación. Note que, dado que la viga es elásticamente lineal, las cargas P_1 , P_2 y P_3 generan la misma deflexión Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , respectivamente, y desarrollan la misma cantidad de trabajo externo en la viga a pesar de que si otra carga está o no actuando en ella. El total de energía de deformación almacenada en la viga durante la aplicación de dP_2 seguida por P_1 , P_2 y P_3 es resultado de

$$U_T = \frac{1}{2}(dP_2)(d\Delta_2) + dP_2(\Delta_2) + \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + \frac{1}{2}P_3\Delta_3 \quad (7.55)$$

Dado que dP_2 permanece constante durante la deflexión total, Δ_2 , de su punto de aplicación, el término $dP_2(\Delta_2)$ del lado derecho de la igualdad de la Ec. (7.55) no contiene el factor $1/2$. El término $(1/2)(dP_2)(d\Delta_2)$ representa una

cantidad muy pequeña de segundo orden, así que puede ser despreciada, y la Ec. (7.55) se puede reescribir como

$$U_T = dP_2(\Delta_2) + \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 + \frac{1}{2}P_3\Delta_3 \quad (7.56)$$

Sustituyendo la Ec. (7.51) en la Ec. (7.56) obtenemos

$$U_T = dP_2(\Delta_2) + U \quad (7.57)$$

e igualando las Ecs. (7.54) y (7.57), resulta

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_2}dP_2 = dP_2(\Delta_2) + U$$

o

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \Delta_2$$

Esta es la expresión matemática del segundo teorema de Castigliano.

Aplicación en armaduras

Para desarrollar la expresión del segundo teorema de Castigliano, el cual puede utilizarse para determinar las deflexiones en las armaduras, sustituiremos la Ec. (7.41) para la energía de deformación de armaduras en la expresión general del segundo teorema de Castigliano para deflexiones, como se indica en la Ec. (7.50), para obtener

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{F^2 L}{2AE} \quad (7.58)$$

Como la derivada parcial de $\partial F^2 / \partial P = 2F (\partial F / \partial P)$, la expresión del segundo teorema de Castigliano para armaduras se puede escribir como

$$\Delta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{AE} \quad (7.59)$$

La expresión anterior es similar en forma a la del método del trabajo virtual para armaduras (Ec. (7.23)). Como se ilustró en los ejemplos resueltos del final de la sección, el procedimiento de cálculo de deflexiones por el método del segundo teorema de Castigliano es similar al método del trabajo virtual.

Aplicación en vigas

Sustituyendo la Ec. (7.44) de la energía de deformación (U) de vigas en la expresión general del segundo teorema de Castigliano (Ec. (7.59)), obtenemos la siguiente expresión para deflexiones y rotaciones en vigas, respectivamente:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad y \quad \theta = \frac{\partial}{\partial M} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

o

$$\Delta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.60)$$

y

$$\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.61)$$

Aplicación en marcos

De manera similar, al sustituir la Ec. (7.48) de la energía de deformación (U) de marcos debida a fuerzas axiales y flexión en la expresión general del segundo teorema de Castigliano (Ec. (7.50)), resulta la siguiente expresión para deflexiones y rotaciones para marcos, respectivamente:

$$\Delta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.62)$$

y

$$\theta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.63)$$

Cuando el efecto de la carga axial de los elementos del marco se desprecia en el análisis, las Ecs. (7.62) y (7.63) se reducen a

$$\Delta = \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.64)$$

y

$$\theta = \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.65)$$

Procedimiento para el análisis

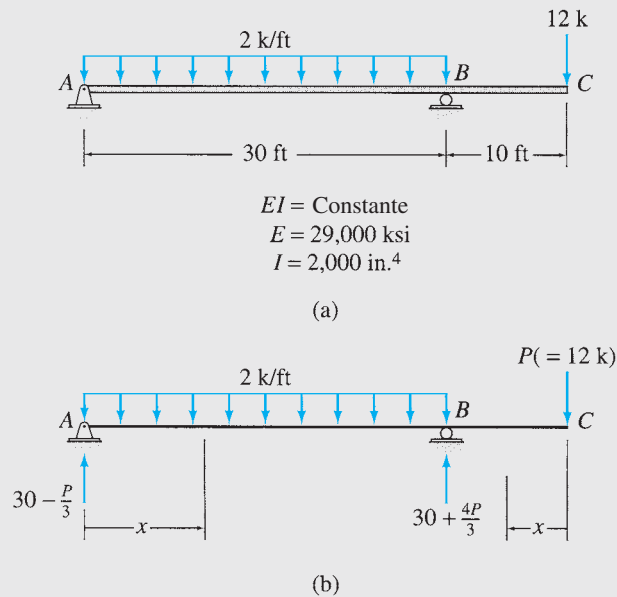
Como se estableció anteriormente, el procedimiento para el cálculo de deflexiones en estructuras por el segundo teorema de Castigliano es similar al del método del trabajo virtual. El proceso involucra esencialmente los siguientes pasos:

1. Si una carga (o par) externa actúa en una estructura dada en el punto y en la dirección de la deflexión (o rotación) deseada, entonces designe a esa carga (o par) como la variable P (o $\bar{M}$) y vaya al paso 2.

- De otra manera, aplique una carga ficticia P (o par $\overline{M}$) en el punto y dirección de la deflexión deseada (o rotación).
2. Determine la fuerza axial F y/o la(s) ecuación(es) para el momento de flexión $M(x)$ en cada elemento de la estructura en términos de P (o $\overline{M}$).
 3. Obtenga la diferencial en los elementos de las fuerzas axiales F y/o de los momentos flexionantes $M(x)$ conseguidos en el paso 2 con relación a la variable P (o $\overline{M}$) para calcular $\partial F/\partial P$ y $\partial M/\partial P$ (o $\partial F/\partial \overline{M}$ y/o $\partial M/\partial \overline{M}$).
 4. Sustituya el valor numérico de P (o $\overline{M}$) en las expresiones de F y/o $M(x)$, y en sus derivadas parciales. Si P (o $\overline{M}$) representa la carga ficticia (o par), su valor numérico es cero.
 5. Aplique la expresión adecuada del segundo teorema de Castigliano (Ecs. (7.59) a la (7.65)) para determinar la deflexión o rotación deseada en la estructura. Una respuesta positiva de la deflexión (o rotación) deseada indica que la deflexión (o rotación) ocurre en la misma dirección que P (o $\overline{M}$) y viceversa.

Ejemplo 7.15

Determine la deflexión en el punto C de la viga que aparece en la Fig. 7.23(a) por el segundo teorema de Castigliano.

**FIG. 7.23****Solución**

Esta viga se analizó previamente con los métodos de área-momento, de la viga conjugada y del trabajo virtual en los ejemplos 6.7, 6.13, y 7.9, respectivamente.

La carga externa de 12-k está actuando en el punto C , donde se determina la deflexión, así que designamos esta carga como la variable P , como se muestra en la Fig. 7.23(b). Después, calculamos las reacciones de la viga en términos de P . Estas se muestran en la Fig. 7.23(b). Debido a que la carga es discontinua en el punto B , la viga se divide en dos segmentos, AB y BC . Las coordenadas de x usadas para determinar las ecuaciones para el momento flexionante en los dos segmentos de viga se muestran en la Fig. 7.23(b). Las ecuaciones para M (en términos de P) obtenidas para los segmentos de la viga se tabulan en la Tabla 7.12 junto con las derivadas parciales de M con respecto a P .

continúa

TABLA 7.12

Segmento	Coordenada x		M (k-ft)	$\frac{\partial M}{\partial P}$ (k-ft/k)
	Origen	Límites (ft)		
AB	A	0–30	$\left(30 - \frac{P}{3}\right)x - x^2$	$-\frac{x}{3}$
CB	C	0–10	$-Px$	$-x$

La deflexión en C se puede determinar ahora sustituyendo $P = 12$ k en la ecuación para M y $\partial M/\partial P$ y aplicando la expresión del segundo teorema de Castigliano según la Ec. (7.60):

$$\begin{aligned}
 \Delta_C &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \left(\frac{M}{EI} \right) dx \\
 \Delta_C &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{30} \left(-\frac{x}{3} \right) \left(30x - \frac{12x}{3} - x^2 \right) dx + \int_0^{10} (-x) (-12x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{30} \left(-\frac{x}{3} \right) (26x - x^2) dx + \int_0^{10} (-x) (-12x) dx \right] \\
 &= -\frac{6,500 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{6,500 (12)^3}{(29,000) (2,000)} = -0.194 \text{ in.}
 \end{aligned}$$

La respuesta negativa para Δ_C indica que el punto C se deforma hacia arriba en la dirección opuesta a P .

$$\Delta_C = 0.194 \text{ in. } \uparrow$$

Respuesta.

Ejemplo 7.16

Aplice el segundo teorema de Castigliano para determinar la deflexión en el punto C de la viga que se muestra en la Fig. 7.24(a).

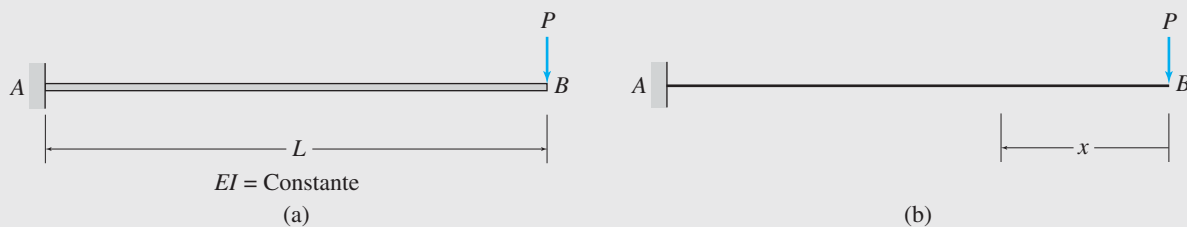


FIG. 7.23

Solución

Con la coordenada x de la Fig. 7.24(b), escribimos la ecuación del momento de flexión en la viga como

$$M = -Px$$

La derivada parcial de M con respecto a P está dada por

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

continúa

La deflexión en B se puede obtener empleando la expresión para el segundo teorema de Castigliano, como en la Ec. (7.60), como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta_B &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \left(\frac{M}{EI} \right) dx \\ \Delta_B &= \int_0^L (-x) \left(-\frac{Px}{EI} \right) dx \\ &= \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{3EI} \\ \Delta_B &= \frac{PL^3}{3EI} \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta.

Ejemplo 7.17

Determine la rotación en el nodo C del marco de la Fig. 7.25(a) usando el segundo teorema de Castigliano.

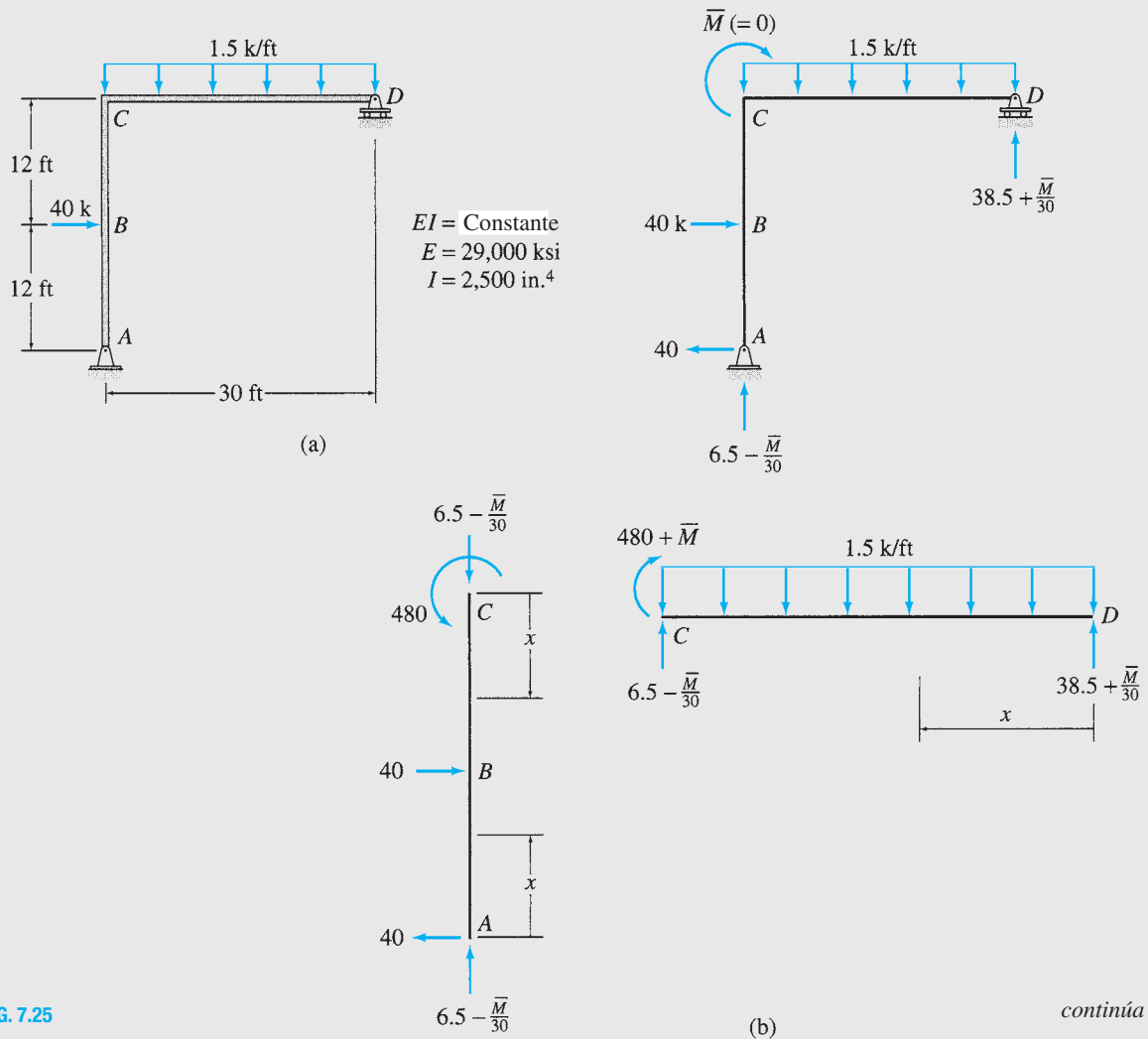


FIG. 7.25

(b)

continúa

Solución

Este ejemplo se resolvió previamente con el método del trabajo virtual en el Ejemplo 7.11.

No actúa ningún par externo en el nodo C , donde se requiere determinar la rotación, así que utilizamos un par ficticio $\bar{M}$ ($= 0$) en C , como se muestra en la Fig. 7.25(b). La coordenada x usada para determinar las ecuaciones del momento de flexión para los tres segmentos del marco se indican en la Fig. 7.25(b), y la ecuación para M en términos de $\bar{M}$ y $\partial M / \partial \bar{M}$, obtenidos para los tres segmentos, están tabulados en la Tabla 7.13. La rotación en el nodo C del marco se puede ahora determinar fijando a $\bar{M} = 0$ en las ecuaciones para M y $\partial M / \partial \bar{M}$ aplicando la expresión para el segundo teorema de Castigliano como está dado en la Ec. (7.65):

$$\begin{aligned}\theta_C &= \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right) \frac{\bar{M}}{EI} dx \\ &= \int_0^{30} \left(\frac{x}{30} \right) \left(38.5x - 1.5 \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{6,487.5 \text{ k-ft}^2}{EI} = \frac{6,487.5 (12)^2}{(29,000) (2,500)} = 0.0129 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$\theta_C = 0.0129 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

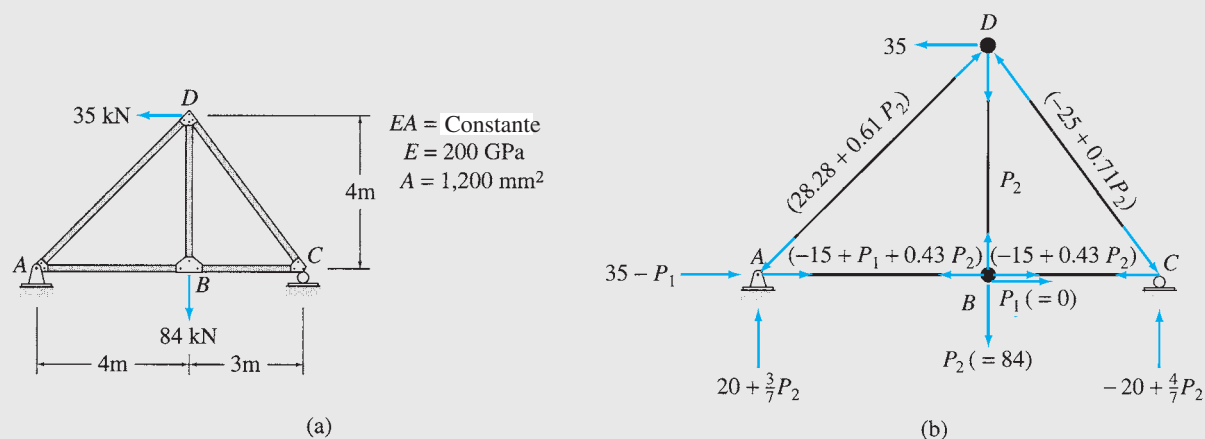
Respuesta.

TABLA 7.13

Segmento	Coordenada x		M (k-ft)	$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}$ (k-ft/k-ft)
	Origen	Límites (ft)		
AB	A	0–12	$40x$	0
CB	C	0–12	480	0
DC	D	0–30	$\left(38.5 + \frac{\bar{M}}{30} \right) x - 1.5 \frac{x^2}{2}$	$\frac{x}{30}$

Ejemplo 7.18

Utilice el segundo teorema de Castigliano para obtener la componente horizontal y vertical de la deflexión en el nodo B de la armadura que se muestra en la Fig. 7.26(a).



Solución

Esta armadura se analizó previamente usando el método del trabajo virtual en el Ejemplo 7.3.

TABLA 7.14

Elemento	L (m)	F (kN)	Para $P_1 = 0$ y $P_2 = 84$ kN			
			$\frac{\partial F}{\partial P_1}$ (kN/ kN)	$\frac{\partial F}{\partial P_2}$ (kN/ kN)	$(\partial F / \partial P_1) FL$ (kN · m)	$(\partial F / \partial P_2) FL$ (kN · m)
AB	4	$-15 + P_1 + 0.43P_2$	1	0.43	84.48	36.32
BC	3	$-15 + 0.43P_2$	0	0.43	0	27.24
AD	5.66	$-28.28 - 0.61P_2$	0	-0.61	0	274.55
BD	4	P_2	0	1	0	336.00
CD	5	$25 - 0.71P_2$	0	-0.71	0	122.97
			$\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) FL$		84.48	797.08

$$\begin{aligned}\Delta_{BH} &= \frac{1}{EA} \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial P_1} \right) FL \\ &= \frac{84.48}{EA} \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= \frac{84.48}{200 (10^6) (0.0012)} = 0.00035 \text{ m} \\ \Delta_{BH} &= 0.35 \text{ mm} \rightarrow\end{aligned}$$

Respuesta .

$$\begin{aligned}\Delta_{BV} &= \frac{1}{EA} \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial P_2} \right) FL \\ &= \frac{797.08}{EA} \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= \frac{797.08}{200 (10^6) (0.0012)} = 0.00332 \text{ m} \\ \Delta_{BV} &= 3.32 \text{ mm} \downarrow\end{aligned}$$

Respuesta.

Como se muestra en la Fig. 7.26(b), una fuerza ficticia horizontal P_1 ($= 0$) se aplica en el nodo B para determinar la componente horizontal de la deflexión, mientras que una carga vertical de 84-kN se designa como la variable P_2 para emplearse en el cálculo de la componente vertical de la deflexión en el nodo B . Las fuerzas axiales en los elementos, en términos de P_1 y P_2 , están tabuladas en la Tabla 7.14. Tenga en cuenta que las fuerzas axiales de tensión se consideran positivas y las fuerzas de compresión negativas. Los valores numéricos de $P_1 = 0$ y $P_2 = 84$ kN son sustituidos en la ecuación de F , y la expresión del segundo teorema de Castigliano, según la Ec. (7.59), se aplica, como se muestra en la tabla, para determinar la componente horizontal y la vertical de la deflexión en el nodo B de la armadura.

7.8 Ley de Betti y Ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas

La ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas, desarrollada inicialmente por James C. Maxwell en 1894, juega un papel importante en el análisis de las estructuras estáticamente determinadas en la Parte de Tres de este texto. La Ley de Maxwell la obtendremos aquí como un caso especial de la ley de Betti, que es más general y que fue presentada por E. Betti en 1872. La ley de Betti se puede establecer como sigue:

Para una estructura linealmente elástica, el trabajo virtual realizado por un sistema P de fuerzas y pares sujeto a la deformación producto del sistema Q de fuerzas y pares es igual al trabajo virtual del sistema Q sujeto a la deformación debida al sistema P .

Para demostrar la validez de esta ley, considere la viga de la Fig. 7.27. Ella está sujeta a dos diferentes sistemas de fuerzas, P y Q , como se muestra en las Figs. 7.27(a) y (b), respectivamente. Ahora, asumamos que sometemos

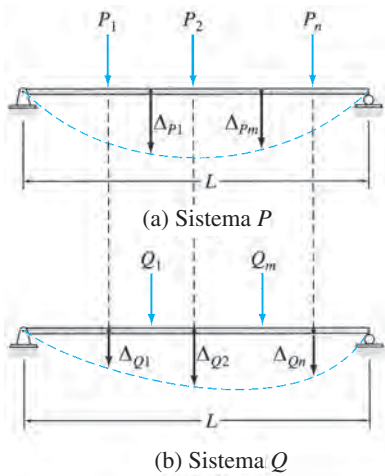


FIG. 7.27

a la viga que tiene las fuerzas P actuando en ella (Fig. 7.29(a)) a las deflexiones causadas por el sistema de fuerzas Q (Fig. 7.29(b)). El trabajo virtual (W_{ve}) realizado se puede escribir como

$$W_{ve} = P_1 \Delta_{Q1} + P_2 \Delta_{Q2} + \cdots + P_n \Delta_{Qn}$$

o

$$W_{ve} = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi}$$

Aplicando el principio de fuerzas virtuales a cuerpos deformables, $W_{ve} = W_{vi}$, y usando la expresión para el trabajo virtual interno realizado en las vigas (Ec. (7.29)), obtenemos

$$\sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi} = \int_0^L \frac{M_P M_Q}{EI} dx \quad (7.66)$$

Después, asumimos que la viga con las fuerzas Q que actúan en ella (Fig. 7.27(b)) está sujeta a las deflexiones causadas por las fuerzas P (Fig. 7.27(a)). Igualando el trabajo virtual externo al trabajo virtual interno, obtenemos

$$\sum_{j=1}^m Q_j \Delta_{Pj} = \int_0^L \frac{M_Q M_P}{EI} dx \quad (7.67)$$

Teniendo en cuenta que los lados derechos de las Ecs. (7.66) y (7.67) son idénticos, equiparamos los lados izquierdos para obtener

$$\sum_{i=1}^n P_i \Delta_{Qi} = \sum_{j=1}^m Q_j \Delta_{Pj} \quad (7.68)$$

La ecuación (7.68) representa la expresión matemática de la ley de Betti.

La ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas establece que *para una estructura linealmente elástica, la deflexión en un punto i debida a una carga unitaria aplicada en el punto j es igual a la deflexión en j debida a una carga unitaria en i .*

En esta definición, los términos *deflexión* y *carga* se utilizan en sentido general para incluir a la rotación y el par, respectivamente. Como se mencionó anteriormente, la ley de Maxwell se puede considerar como un caso especial de la ley de Betti. Para probar la ley de Maxwell, tome en cuenta la viga que se muestra en la Fig. 7.28. La viga está sometida por separado a los sistemas P y Q , que consisten en cargas unitarias en los puntos i y j , respectivamente, como se ve en las Figs 7.28(a) y (b). Como la figura indica, f_{ji} representa la deflexión en i causada por la carga unitaria aplicada en j , mientras que f_{ij} representa la deflexión en j provocada por la carga unitaria aplicada en i . Estas deflexiones por unidad de carga se denominan *coeficientes de flexibilidad*. Aplicando la ley de Betti (Ec. (7.68)), obtenemos

$$1 (f_{ij}) = 1 (f_{ji})$$

o

$$(f_{ij}) = (f_{ji}) \quad (7.69)$$

La cual es la expresión matemática de la ley de Maxwell.

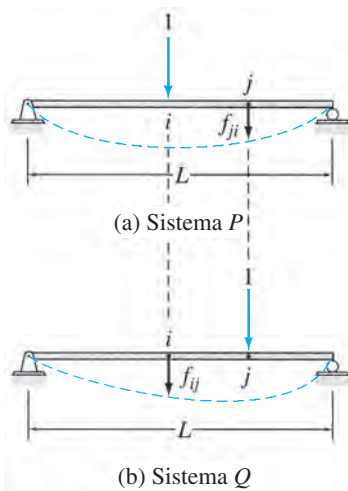


FIG. 7.28

La relación recíproca permanece válida entre las rotaciones causadas por dos pares unitarios y también entre la deflexión y la rotación causada por pares y fuerzas unitarias, respectivamente.

Resumen

En este capítulo aprendimos que el trabajo realizado por la fuerza P (o par de fuerzas) durante el desplazamiento Δ (o rotación θ) de su punto de aplicación en la dirección de su línea de acción está dada por

$$W = \int_0^{\Delta} P d\Delta \quad (7.1)$$

o

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta \quad (7.4)$$

El principio del trabajo virtual de cuerpos rígidos establece que si un cuerpo rígido está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y si está sujeto a un pequeño desplazamiento virtual como cuerpo rígido, el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas es cero.

El principio de fuerzas virtuales para cuerpos deformables puede expresarse matemáticamente como

$$W_{ve} = W_{vi} \quad (7.16)$$

Donde W_{ve} = al trabajo virtual externo realizado por fuerzas externas virtuales (y pares) que actúan por los desplazamientos externos reales (o rotaciones) de la estructura; y W_{vi} = al trabajo virtual interno realizado por las fuerzas internas virtuales (y pares) que actúan por los desplazamientos internos reales (o rotaciones) de la estructura.

El método del trabajo virtual para determinar las deformaciones en estructuras se sustenta en el principio virtual de fuerzas para cuerpos deformables. El método emplea dos sistemas por separado: (1) un sistema real de cargas (o de efectos) que generan la deformación a ser determinada y (2) un sistema virtual consistente en una carga unitaria (o par unitario) aplicado en el punto y en la dirección de la deflexión deseada (o rotación). Las expresiones implícitas del método del trabajo virtual que se utilizan para determinar las deflexiones en las armaduras, vigas y marcos son las siguientes:

$$\text{Para armaduras} \quad 1(\Delta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) \quad (7.23)$$

$$\text{Para vigas} \quad 1(\Delta) = \int_0^L \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.30)$$

$$\text{Para marcos} \quad 1(\Delta) = \sum F_v \left(\frac{FL}{AE} \right) + \sum \int \frac{M_v M}{EI} dx \quad (7.35)$$

El principio de conservación de la energía establece que el trabajo realizado por fuerzas externas estáticas aplicadas en una viga elástica en equilibrio es igual al trabajo realizado por fuerzas internas o por la energía de

deformación en la estructura. Las expresiones para la energía de deformación de armaduras, vigas y marcos son

$$\text{Para armaduras} \quad U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} \quad (7.41)$$

$$\text{Para vigas} \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.44)$$

$$\text{Para marcos} \quad U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.48)$$

El segundo teorema de Castigliano para estructuras linealmente elásticas puede expresarse matemáticamente como

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \quad \text{o} \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{M}_i} = \theta_i \quad (7.50)$$

Las expresiones para el segundo teorema de Castigliano, las cuales pueden utilizarse para determinar las deflexiones, son las siguientes:

$$\text{Para armaduras} \quad \Delta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{AE} \quad (7.59)$$

$$\text{Para vigas} \quad \Delta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.60)$$

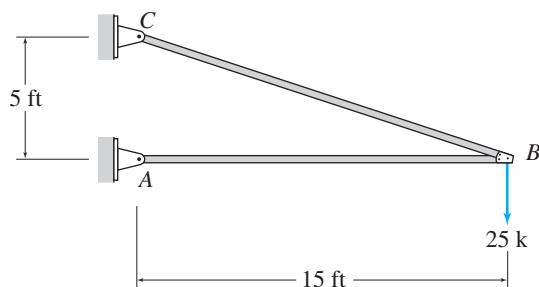
$$\text{Para marcos} \quad \Delta = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \quad (7.62)$$

La ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas establece que, para estructuras elásticamente lineales, la deflexión en un punto j debida a una carga unitaria aplicada en el punto j es igual a la deflexión en j debida a una carga unitaria en i .

PROBLEMAS

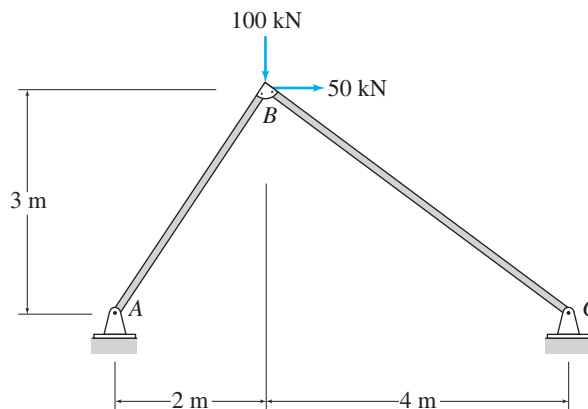
Sección 7.3

Del 7.1 al 7.5 Utilice el método del trabajo virtual para determinar las componentes horizontales y verticales de la deflexión en el nodo B de la armadura que se muestra en las Figs. P7.1–P7.5



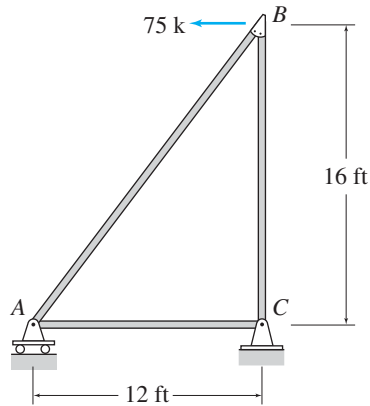
$$\begin{aligned} EA &= \text{constante} \\ E &= 10,000 \text{ ksi} \\ A &= 6 \text{ in.}^2 \end{aligned}$$

FIG. P7.1, P7.51



$$\begin{aligned} EA &= \text{Constante} \\ E &= 70 \text{ GPa} \\ A &= 1,000 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

FIG. P7.2, P7.52

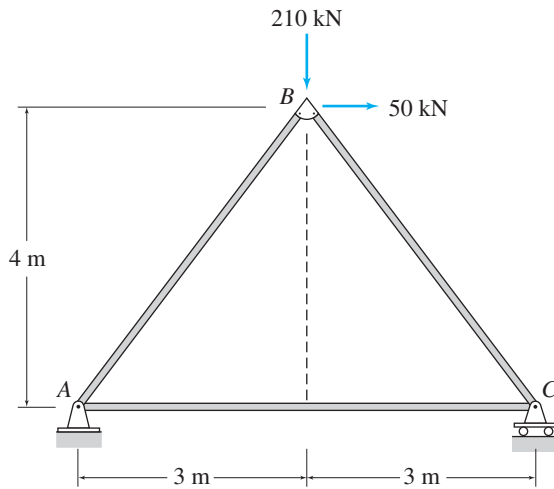


$$EA = \text{Constante}$$

$$E = 29,000 \text{ ksi}$$

$$A = 5.25 \text{ in.}^2$$

FIG. P7.3, P7.53

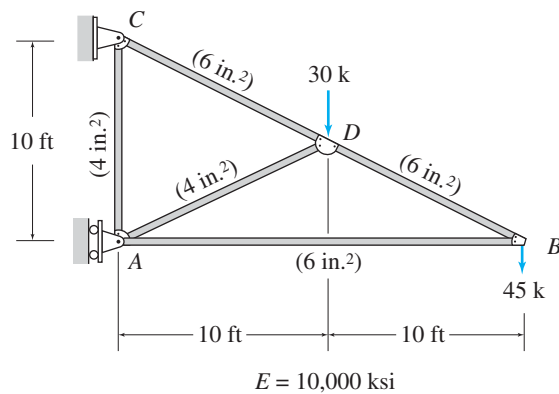


$$EA = \text{Constante}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A = 1,100 \text{ mm}^2$$

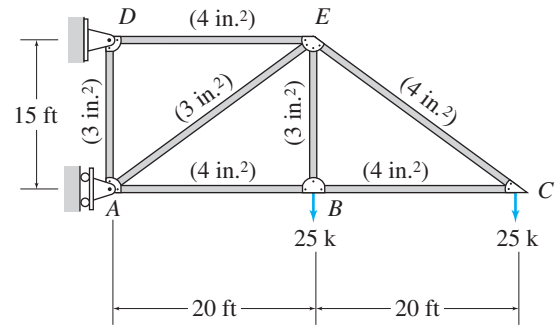
FIG. P7.4, P7.54



$$E = 10,000 \text{ ksi}$$

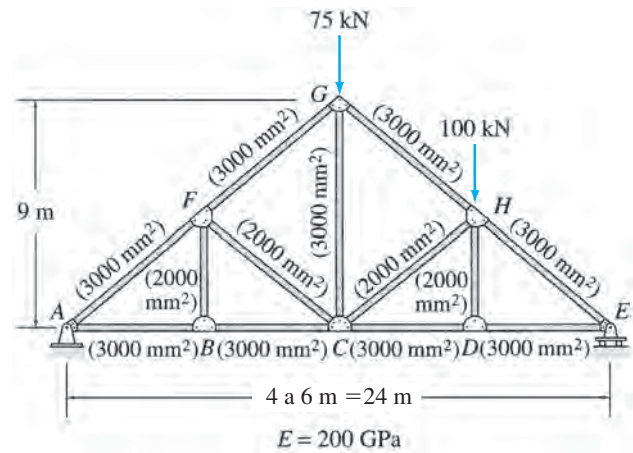
FIG. P7.5, P7.55

Del 7.6 al 7.7 Utilice el método del trabajo virtual para calcular la deflexión en el nodo C de la armadura que se ejemplifica en las Figs. P7.6 –P7.7



$$E = 29,000 \text{ ksi}$$

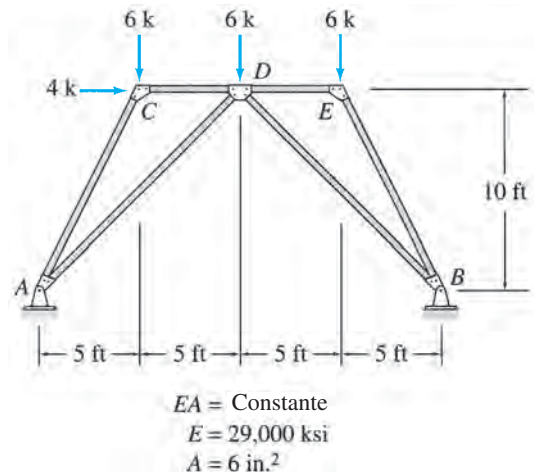
FIG. P7.6



$$E = 200 \text{ GPa}$$

FIG. P7.7

Del 7.8 Utilice el método del trabajo virtual para determinar la deflexión horizontal en el nodo E de la armadura que se aprecia en las Figs. P7.8



$$EA = \text{Constante}$$

$$E = 29,000 \text{ ksi}$$

$$A = 6 \text{ in.}^2$$

FIG. P7.8, P7.56

Del 7.9 Utilice el método del trabajo virtual para determinar la deflexión horizontal en el nodo H de la armadura mostrada en la Fig. P7.9

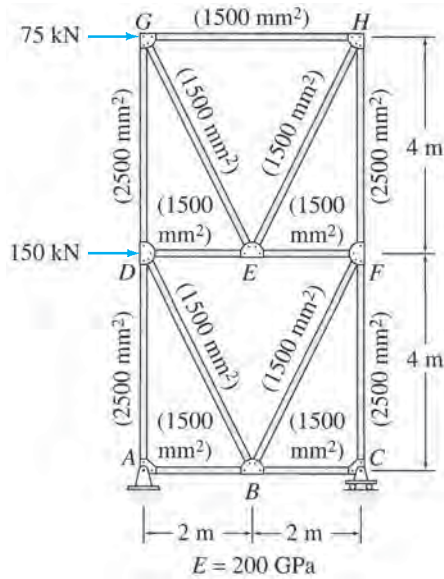


FIG. P7.9

7.10 through 7.12 Determine el área de la sección transversal más pequeña requerida para los miembros de la armadura mostrada, de manera que la deflexión horizontal en el nodo D no exceda de 10 mm. Utilice el método de trabajo virtual.

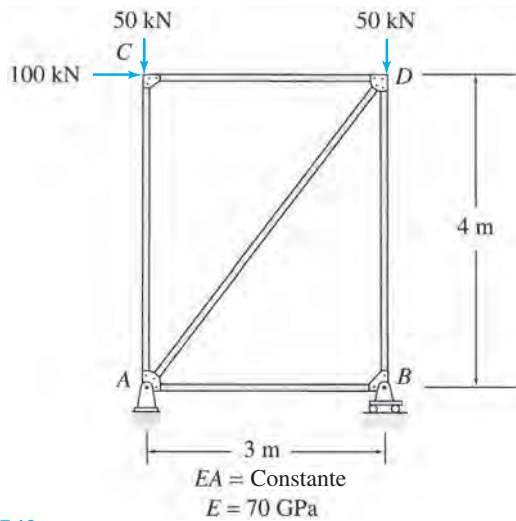


FIG. P7.10

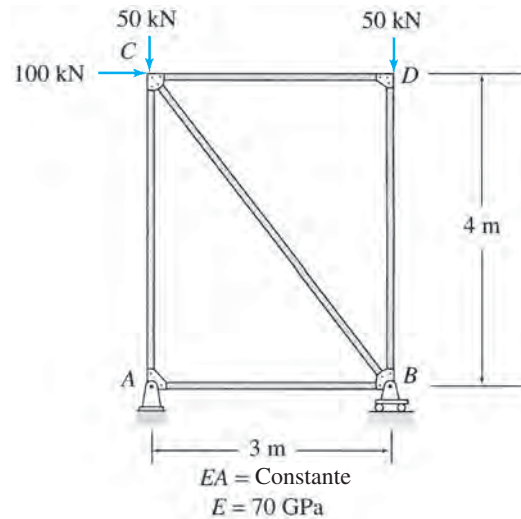


FIG. P7.11

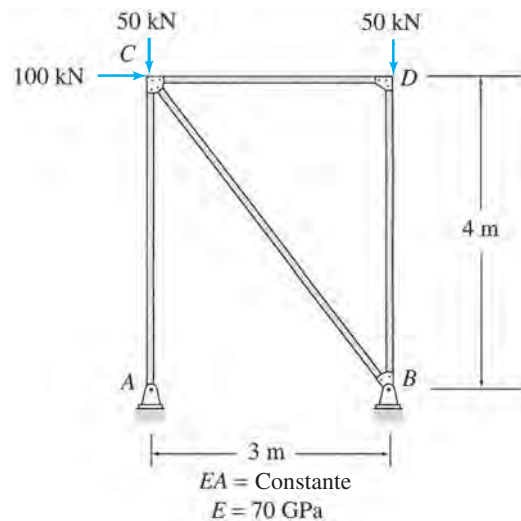


FIG. P7.12

Del 7.13 al 7.15 Use la menor área A de sección transversal requerida para los elementos de la armadura mostrada, para que la deflexión vertical en el nodo B no exceda los 10 mm. Use el método del trabajo virtual.

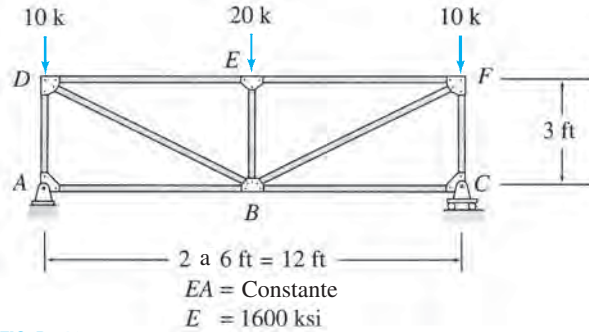


FIG. P7.13

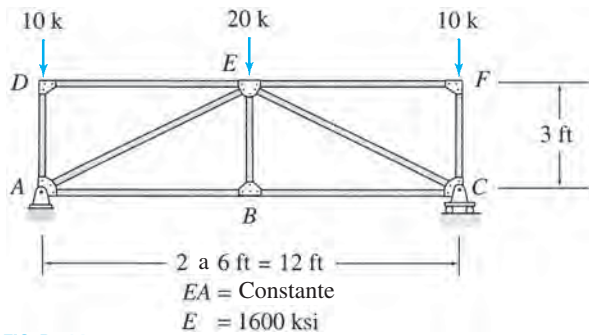


FIG. P7.14

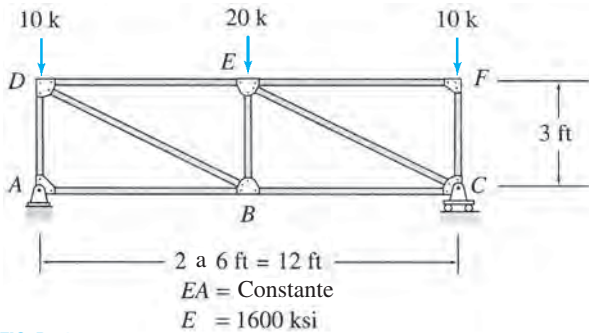


FIG. P7.15

Del 7.16 Calcule la deflexión horizontal en el nodo E de la armadura mostrada en la Fig. P7.16 debido al incremento de temperatura de 50°C en los elementos AC y CE . Utilice el método del trabajo virtual.

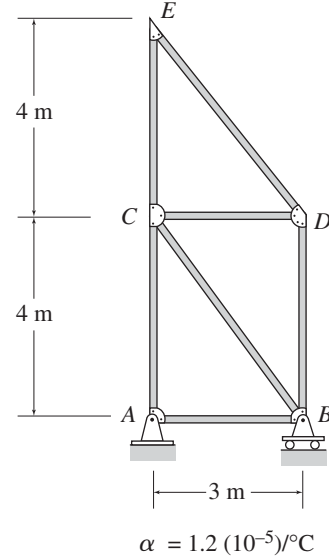


FIG. P7.16, P7.18

Del 7.17 Establezca la deflexión vertical en el nodo B de la armadura mostrada en la Fig. P7.17 debido al incremento de temperatura de 20°C en los elementos AB y BC , y en los elementos AC , DE , EF y CF debido al decremento de temperatura a 1°C . Utilice el método del trabajo virtual.

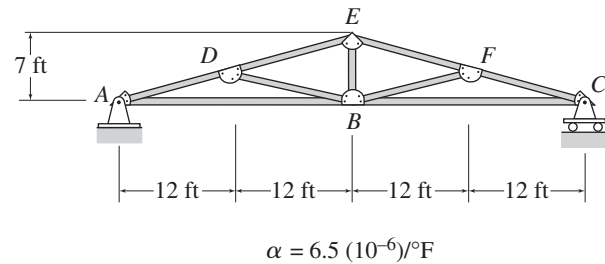


FIG. P7.17, P7.19

Del 7.19 Determine la deflexión vertical en el nodo B de la armadura mostrada en la Fig. P7.17 si los elementos AB y BE se acortan 1 mm. Utilice el método del trabajo virtual.

Del 7.18 Obtenga la deflexión horizontal en el nodo E de la armadura de la Fig. P7.16 si el elemento BC se alarga 18. Utilice el método del trabajo virtual.

Del 7.20 al 7.21 Utilice el método del trabajo virtual para establecer la pendiente y la deflexión en el nodo B de la viga mostrada.

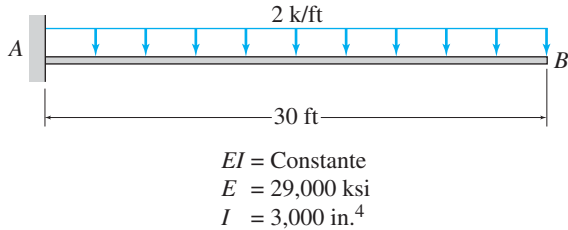


FIG. P7.20, P7.22, P7.57

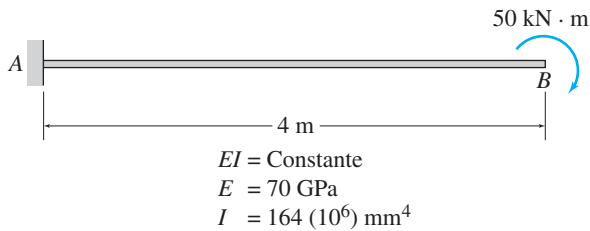


FIG. P7.21, P7.23, P7.58

Del 7.22 al 7.23 Determine la deflexión en el nodo B de la viga de las Figs. 7.20 y P7.21 por el método del trabajo virtual. Use el procedimiento gráfico (Tabla 7.6) para evaluar las integrales del trabajo virtual.

Del 7.24 al 7.27 Utilice el método del trabajo virtual para calcular la deflexión en el nodo C de la viga que se presenta.

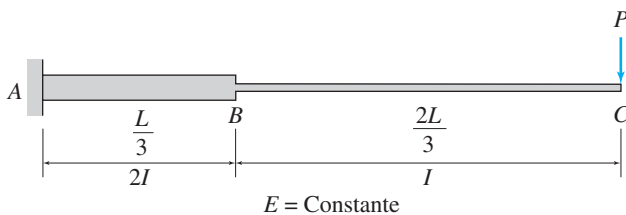


FIG. P7.24, P7.28, P7.59

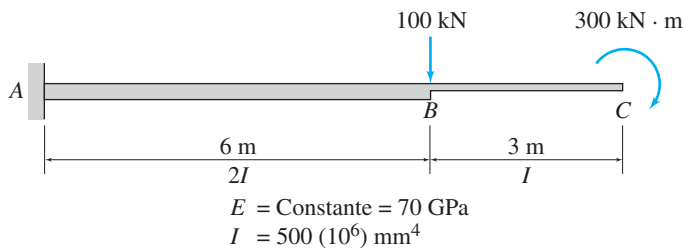


FIG. P7.25, P7.29, P7.60

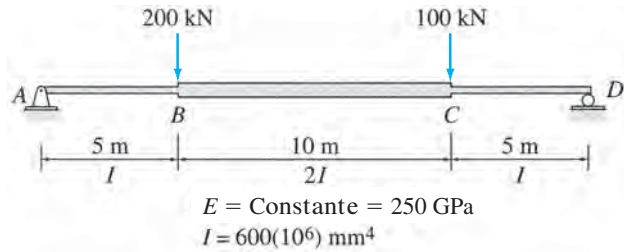


FIG. P7.26, P7.30, P7.61

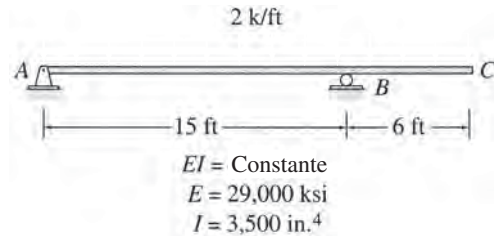


FIG. P7.27, P7.62

Del 7.28 al 7.30 Determine la deflexión en el nodo C de la viga mostrada en las Figs. P7.24-P7.26 por el método del trabajo virtual. Utilice el método gráfico para evaluar las integrales del trabajo virtual.

Del 7.31 al 7.33 Encuentre el momento de inercia I menor requerido, para que la deflexión máxima no exceda el límite de $1/360$ de la longitud del claro (por ejemplo, $\Delta_{\max} \leq L/360$). Utilice el método del trabajo virtual.

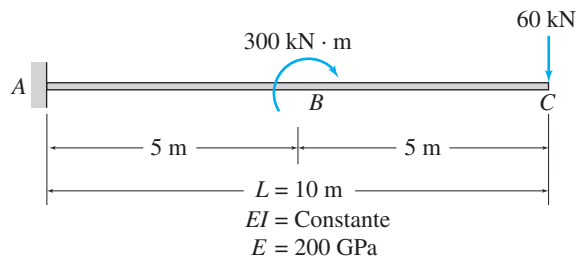


FIG. P7.31

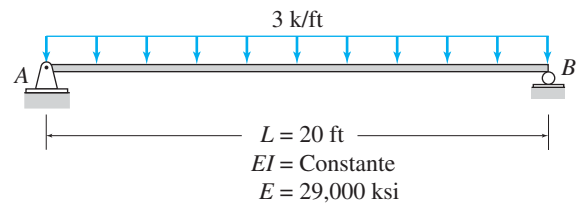


FIG. P7.32

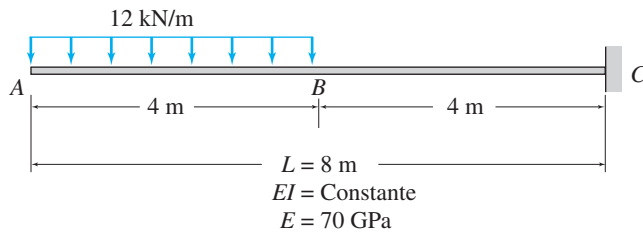


FIG. P7.33

Del 7.34 al 7.35 Utilice el método del trabajo virtual para calcular la pendiente y la deflexión en el punto D de la viga mostrada.

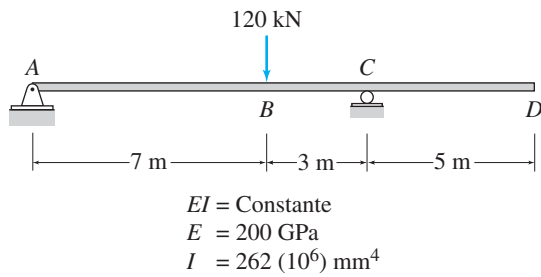


FIG. P7.34, P7.63

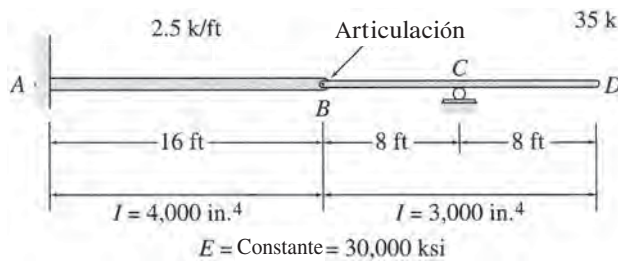


FIG. P7.36, P7.65

Sección 7.5

Del 7.36 al 7.37 Use el método del trabajo virtual para establecer la deflexión vertical en el nodo C del marco mostrado.

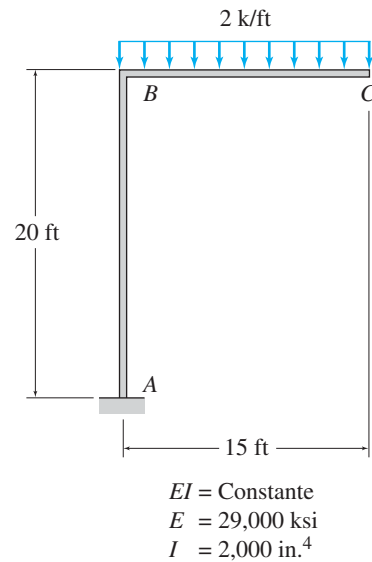


FIG. P7.35, P7.64

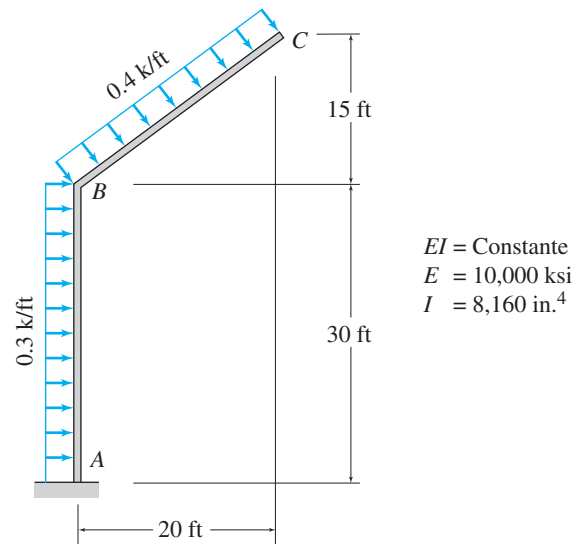


FIG. P7.37

7.38 Con el método del trabajo virtual determine la deflexión horizontal en el nodo C del marco mostrado.

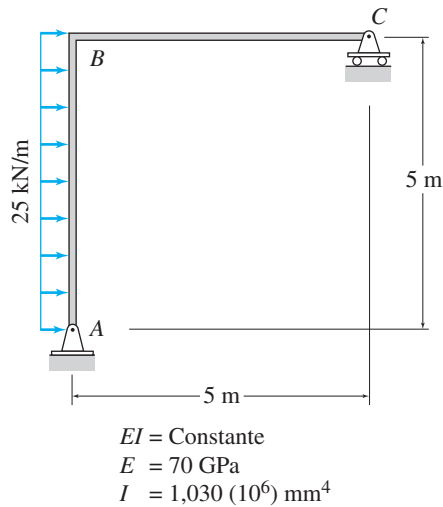


FIG. P7.38, P7.66

7.39 Emplee el método del trabajo virtual para calcular la rotación en el nodo D del marco mostrado.

7.40 Utilice el método del trabajo virtual para determinar la deflexión horizontal en el nodo E del marco mostrado en la Fig. P7.39.

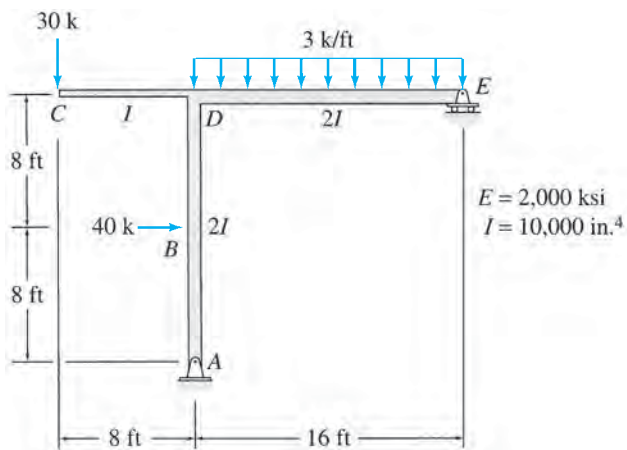


FIG. P7.39, P7.40

7.41 Con el método del trabajo virtual encuentre la rotación en el nodo B del marco mostrado.

7.42 Use el método del trabajo virtual para establecer la deflexión vertical en el nodo B del marco mostrado en la Fig. P7.41.

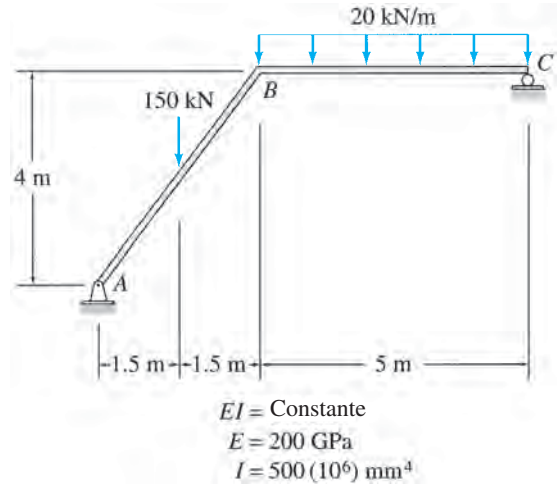


FIG. P7.41, P7.42

7.43 Utilice el método del trabajo virtual para determinar la rotación en el nodo D del marco mostrado.

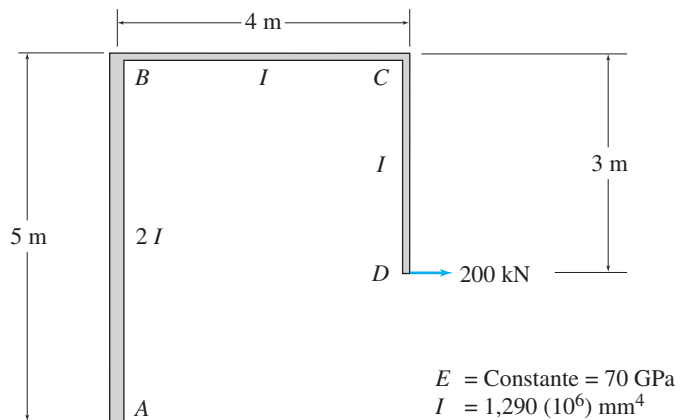


FIG. P7.43, P7.44, P7.67

7.44 Determine la rotación en el nodo D del marco mostrado en la Fig. P7.43 por el método del trabajo virtual. Utilice el procedimiento gráfico (Tabla 7.6) para evaluar las integrales del trabajo virtual.

7.45 y 7.46 Utilice el método del trabajo virtual para calcular la deflexión horizontal en el nodo C del marco mostrado.

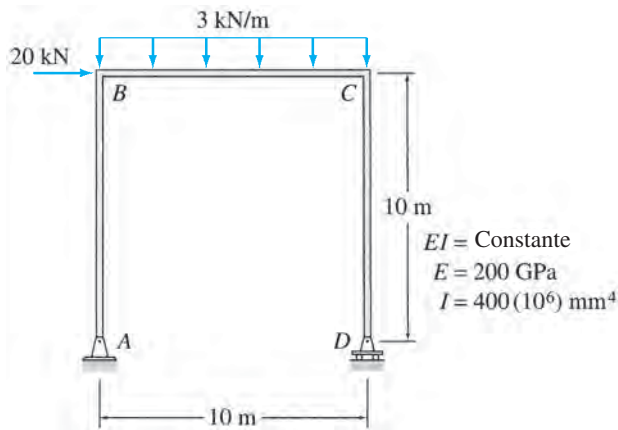


FIG. P7.45, P7.68

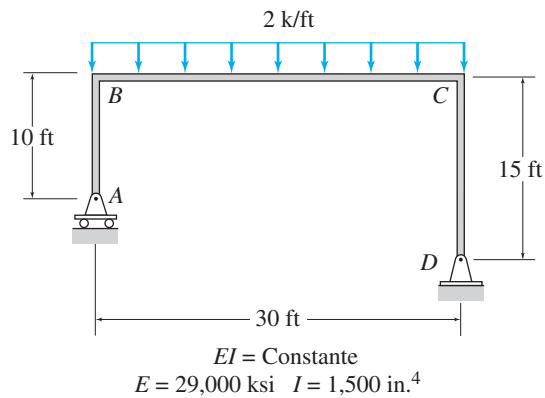


FIG. P7.46, P7.69

7.47 y 7.48 Encuentre el menor momento de inercia I requerido para los elementos del marco mostrado, para que la deflexión horizontal en el nodo C no exceda de 25 mm. Utilice el método del trabajo virtual.

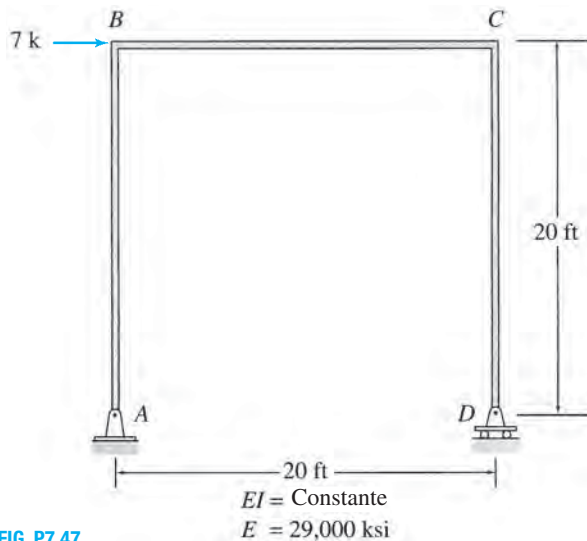


FIG. P7.47

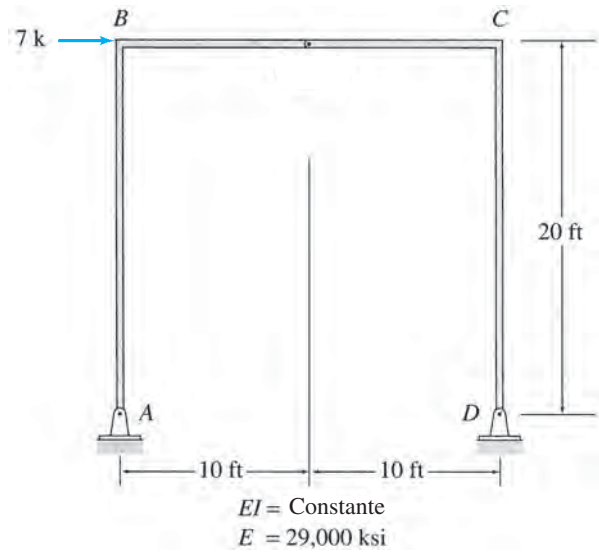


FIG. P7.48

7.49 Con el método del trabajo virtual determine la rotación del nodo D del marco mostrado.

7.50 Usando el método del trabajo virtual, calcule la deflexión vertical del nodo E del marco mostrado.

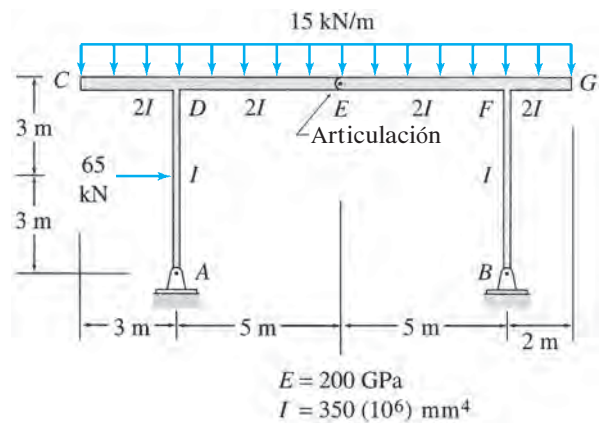


FIG. P7.49, P7.50

Sección 7.7

Del 7.51 al 7.55 Aplique el segundo teorema de Castigliano para determinar las componentes horizontal y vertical de la deflexión en el nodo B de la armadura mostrada en las Figs. P7.1-P7.5

7.56 Con el segundo teorema de Castigliano encuentre la deflexión horizontal en el nodo E de la viga mostrada en las Figs. P7.8

7.57 y 7.58 Utilice el segundo teorema de Castigliano para determinar la pendiente y la deflexión en el nodo B de la viga mostrada en las Figs. P7.20 y P7.21

7.59 y 7.62 Utilice el segundo teorema de Castigliano para determinar la deflexión en el nodo C de la viga mostrada en las Figs. P7.24-P7.27

7.63 y 7.64 Aplique el segundo teorema de Castigliano para calcular la pendiente y la deflexión en el nodo D de la viga mostrada en las Figs. P7.34 y P7.35

7.65 Utilice el segundo teorema de Castigliano para encontrar la deflexión en el nodo C del marco mostrado en la Fig. P7.36

7.66 Utilice el segundo teorema de Castigliano para determinar la deflexión horizontal en el nodo C del marco mostrado en la Fig. P7.38

7.67 Aplique el segundo teorema de Castigliano para establecer la rotación en el nodo D del marco mostrado en la Fig. P7.43

7.68 Con el segundo teorema de Castigliano determine la deflexión horizontal en el nodo C del marco mostrado en las Figs. P7.45 y P7.46

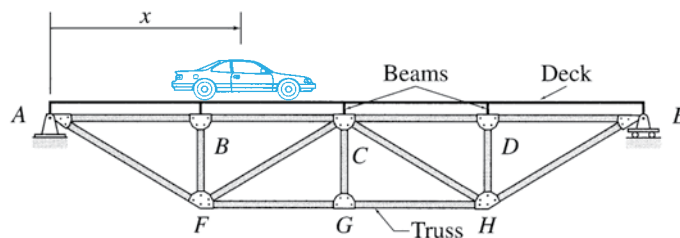


FIG. 8.1

en un elemento de la armadura) llegue a su máximo, y (2) calcular el valor máximo de la función de respuesta.

Un concepto importante que se emplea en el análisis de estructuras sujetas a cargas variables es el de *líneas de influencia*, introducido inicialmente por E. Winkler en 1867. Una *línea de influencia* es una gráfica de una función de respuesta de una estructura como una función de la posición de una carga unitaria moviéndose a través de una estructura.

Comenzamos este capítulo describiendo el procedimiento para la construcción de líneas de influencia para reacciones, cortantes y momentos flexionantes de vigas y marcos usando las ecuaciones de equilibrio. Después discutiremos el *Principio de Müller-Breslau* y su aplicación para establecer las líneas de influencia. Además, consideraremos las líneas de influencia para funciones de respuesta de fuerzas en vigas con sistemas de piso y de armaduras y, finalmente, las líneas de influencia de deflexiones. La aplicación de las líneas de influencia en la determinación de los valores máximos de las funciones de respuesta de estructuras debido a cargas variables se aborda en el próximo capítulo.

8.1 Líneas de influencia para vigas y marcos por el método de equilibrio

Considere una viga simplemente apoyada como la que se muestra en la Fig. 8.2(a). La viga está sujeta a una carga concentrada hacia abajo de magnitud unitaria, que se mueve del extremo izquierdo A hacia el extremo derecho C. La posición de la carga unitaria está definida por la coordenada x , medida a partir del extremo izquierdo A de la viga. Supongamos que queremos dibujar las líneas de influencia de las reacciones verticales de los apoyos A y C y el cortante y momento flexionante en el punto B, el cual se localiza a una distancia a del extremo izquierdo de la viga, como se muestra en la figura.

Líneas de influencia de las reacciones

Para desarrollar las líneas de influencia de las reacciones verticales A_y de la viga, determinamos la expresión para A_y en términos de la variable de la posición de la carga, x , aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_C &= 0 \\
 -A_y(L) + 1(L-x) &= 0 \\
 A_y &= \frac{1(L-x)}{L} = 1 - \frac{x}{L} \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

La Ec. (8.1) indica que A_y es una función lineal de x , con $A_y = 1$ en $x = 0$ y $A_y = 0$ en $x = L$.



*Puente sujeto a cargas variables
provocadas por tránsito vehicular*
Oliver Strewe/Lonely Planet Images/Getty Images

8

Líneas de Influencia

- 8.1 Líneas de influencia para vigas y marcos por el método de equilibrio
- 8.2 Principio de Müller-Breslau y líneas de influencia cualitativa
- 8.3 Líneas de influencia para Sistemas de vigas de piso
- 8.4 Líneas de influencia para armaduras
- 8.5 Líneas de influencia para deflexiones
- Resumen
- Problemas

En capítulos previos consideramos el análisis de estructuras sujetas a cargas cuya posición estaba fija en las estructuras. Un ejemplo de tales cargas estacionarias es la carga muerta que se debe al peso propio de la estructura y a otros materiales y equipo permanentemente en la estructura. Sin embargo, las estructuras están sujetas generalmente a cargas (como cargas vivas y cargas ambientales), cuyo lugar puede variar. En este capítulo estudiaremos el análisis de estructuras determinadas sujetas a cargas variables.

Considere, como ejemplo, el puente de la Fig. 8.1. Cuando el automóvil se mueve sobre el puente, las fuerzas en los elementos de la armadura variarán con respecto a la posición x del automóvil. Se debe tener en cuenta que las fuerzas en los diferentes elementos llegarán a un máximo según las diferentes posiciones del automóvil. Por ejemplo, si la fuerza en el elemento AB llega a su máximo cuando el automóvil está en una posición $x = x_1$, entonces la fuerza en otro elemento —por ejemplo, en CH — puede llegar a un máximo cuando el automóvil está en una posición diferente $x = x_2$. El diseño de cada elemento de la armadura debe realizarse sobre la base de las fuerzas máximas que desarrolle cada elemento conforme el automóvil se mueva sobre el puente. Por lo tanto, el análisis de la armadura implicará, para cada elemento, determinar la posición del vehículo, donde la fuerza sobre el elemento llega a su máximo, y calcular entonces el valor de las fuerzas máximas en cada miembro.

De la discusión anterior, observamos que el análisis de las estructuras con cargas variables consiste en dos pasos: (1) determinar la(s) posición(es) de la(s) carga(s) donde la función de respuesta de interés (por ejemplo, una reacción, cortante o momento de flexión en una sección de la viga, o fuerzas

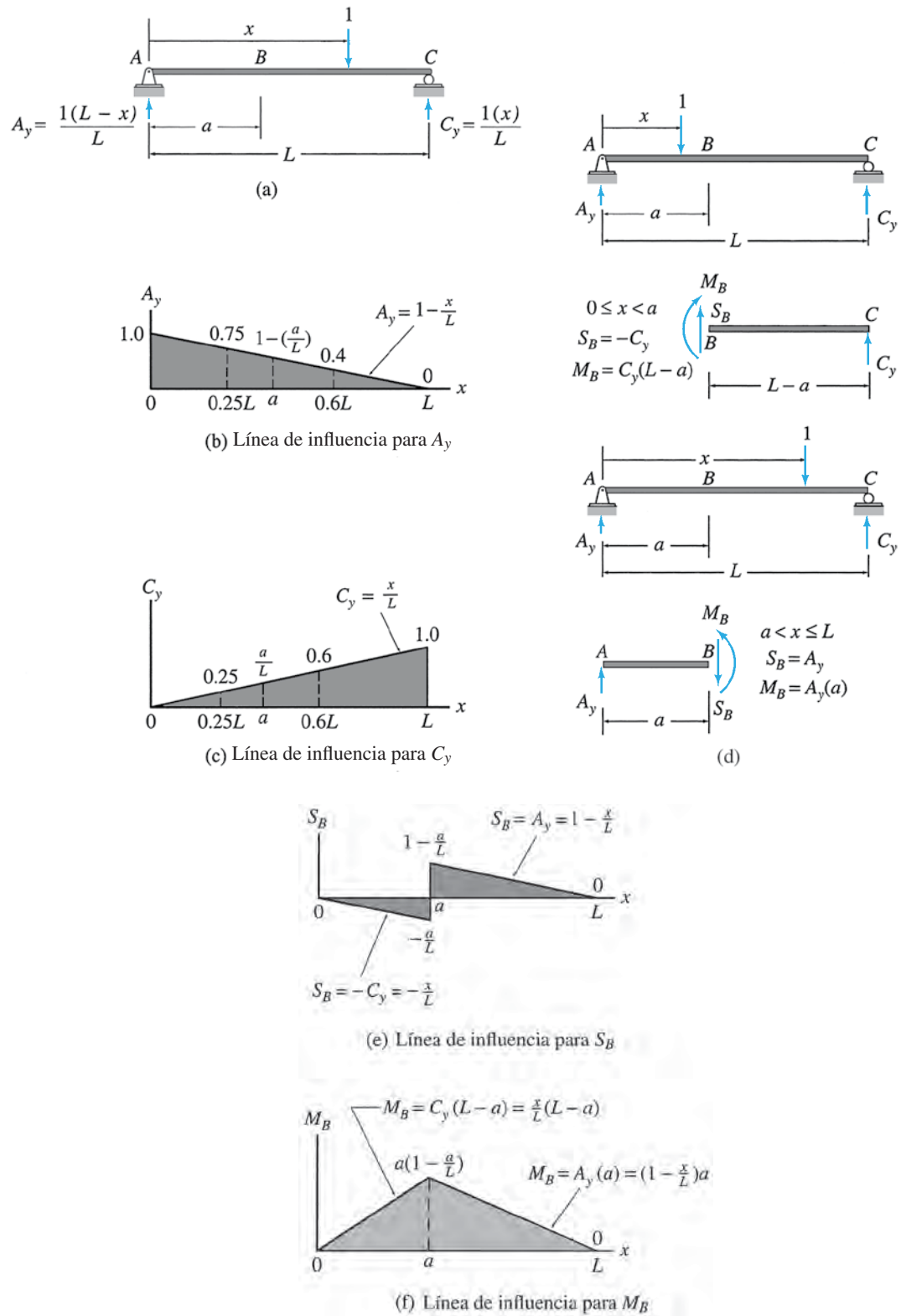


FIG. 8.2

La Ec. (8.1) representa la ecuación para la línea de influencia para A_y , la cual se construye graficando con A_y en la ordenada, y la posición de la carga unitaria, x , en la abscisa, como se muestra en la Fig. 8.2(b). Tenga en cuenta que esta línea de influencia (Fig. 8.2(b)) muestra gráficamente cómo el movimiento de la carga unitaria a lo largo de la longitud de la viga influye en la magnitud de la reacción A_y . Como esta línea de influencia indica, $A_y = 1$ cuando la carga unitaria se localiza en el apoyo izquierdo A de la viga (es decir, cuando $x = 0$). Como la carga unitaria se mueve de A a C , la magnitud de A_y decrece linealmente hasta llegar a cero cuando la carga unitaria alcanza el apoyo derecho C (es decir, cuando $x = L$). Es importante advertir que la ordenada de la línea de influencia en cualquier posición de x es igual a la magnitud de A_y debido a la carga unitaria actuante en la posición sobre la viga. Por ejemplo, de la línea de influencia para A_y (Fig. 8.2(b)) podemos determinar que cuando la carga unitaria está aplicada a una distancia de $0.25L$ a partir del extremo A de la viga, la magnitud de la reacción A_y será de 0.75. De manera similar, cuando la carga unitaria está actuando en $x = 0.6L$, la magnitud de A_y será de 0.4, y así sucesivamente.

La línea de influencia de la reacción vertical C_y de la viga (Fig. 8.2(a)) se puede desarrollar utilizando el procedimiento que acabamos de esbozar. Para determinar la expresión para C_y en términos de x , aplicamos la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_A &= 0 \\ -1(x) + C_y(L) &= 0 \\ C_y &= \frac{1(x)}{L} = \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (8.2)$$

La Ec. (8.2) representa la ecuación de la línea de influencia para C_y , la cual se construye mediante su graficación, como se muestra en la Fig. 8.2(c). Se puede observar en la Fig. 8.2(b) y (c) que la suma de las ordenadas de las líneas de influencia de las reacciones A_y y C_y en cualquier posición de la carga unitaria, x , es igual a 1, lo que indica que la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ se cumple.

Línea de influencia para el cortante en B

Las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante se pueden desarrollar con un procedimiento similar al que se utiliza para construir las líneas de influencia de las reacciones. Para desarrollar la línea de influencia para el cortante en el punto B de la viga (Fig. 8.2(d)), determinamos la expresión para S_B . Observamos de la Fig. 8.2(d) que cuando la carga unitaria se localiza a la izquierda del punto B —es decir, en el segmento AB de la viga ($0 \leq x \leq a$)— el cortante en B de la viga se puede obtener usando el cuerpo libre de la parte BC que está a la derecha de B . Considerando las fuerzas externas hacia abajo y las reacciones actuantes en la porción BC como positivas de acuerdo con la *convención de signos* (sección 5.1), determinamos el cortante en B como

$$S_B = -C_y \quad 0 \leq x < a$$

Cuando la carga unitaria se encuentra a la derecha del punto B —es decir, en el segmento BC de la viga ($a < x \leq L$)— es más sencillo determinar S_B usando el cuerpo libre de la porción AB , el cual está a la izquierda de B . Considerando las fuerzas externas hacia arriba y las reacciones actuantes en la porción AB como positivas, determinamos el cortante en B como

$$S_B = A_y \quad a < x \leq L$$

Así, la ecuación de la línea de influencia para S_B puede escribirse como

$$S_B = \begin{cases} -C_y & 0 \leq x \leq a \\ A_y & a < x \leq L \end{cases} \quad (8.3)$$

Tome en cuenta que la Ec. (8.3) expresa la línea de influencia en términos de las líneas de influencia de las reacciones A_y y C_y . Esta ecuación indica que el segmento de la línea de influencia para S_B entre los puntos A y B ($0 \leq x \leq a$) puede obtenerse multiplicando las ordenadas del segmento de la línea de influencia para C_y entre A y B por -1 . Además, de acuerdo con esta ecuación, el segmento de la línea de influencia para S_B entre los puntos B y C ($a < x \leq L$) es el mismo que para el segmento de la línea de influencia para A_y entre los mismos dos puntos. La línea de influencia de S_B obtenida de las líneas de influencia de A_y y C_y se muestra en la Fig. 8.2(e). Es más conveniente construir las líneas de influencia para cortantes y momentos flexionantes (que serán discutidos más adelante) a partir de las líneas de influencia de las reacciones en lugar de las ecuaciones de las expresiones para el cortante o momento flexionante explícitamente en términos de la posición de la carga unitaria, x . Si se desea, estas ecuaciones para las líneas de influencia de S_B en términos de x pueden conseguirse simplemente sustituyendo las Ecs. (8.1) y (8.2) en la Ec. (8.3); es decir,

$$S_B = \begin{cases} -C_y = -\frac{x}{L} & 0 \leq x \leq a \\ A_y = 1 - \frac{x}{L} & a < x \leq L \end{cases} \quad (8.4)$$

La línea de influencia de S_B (Fig. 8.2(e)) muestra que el cortante en B es cero cuando la carga unitaria se localiza a la izquierda del apoyo A de la viga. Como la carga unitaria se mueve de A a B , el cortante en B disminuye linealmente hasta llegar a $-a/L$ cuando la carga unitaria se coloca a la izquierda del punto B . Como esta disminuye linealmente conforme se mueve hacia C hasta que llega a cero cuando alcanza el apoyo derecho C .

Línea de influencia para el momento flexionante en B

Cuando la carga unitaria se encuentra a la izquierda del punto B (Fig. 8.2(d)), la expresión para el momento flexionante en B se puede obtener convenientemente usando el cuerpo libre de la porción BC de la viga a la derecha de B . Considerando los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj de las fuerzas externas y las reacciones que actúan en el segmento BC como positivos de acuerdo con la *convención de signos de la viga* (sección 5.1), podemos determinar el momento flexionante en B como

$$M_B = C_y(L - a) \quad 0 \leq x \leq a$$

Cuando la carga unitaria se ubica a la derecha del punto B , empleamos el cuerpo libre de la porción AB a la izquierda de B para determinar M_B . Considerando los momentos de las fuerzas externas en sentido de las manecillas del reloj y las reacciones actuantes en la porción AB como positivas, determinamos el momento flexionante en B como

$$M_B = A_y(a) \quad a \leq x \leq L$$

Así las ecuaciones de la línea de influencia para M_B se pueden escribir como

$$M_B = \begin{cases} C_y(L - a) & 0 \leq x \leq a \\ A_y(a) & a \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.5)$$

La Ec. (8.5) indica que el segmento de la línea de influencia de M_B entre los puntos A y B ($0 \leq x \leq a$) se pueden obtener multiplicando las ordenadas del segmento de la línea de influencia para C_y entre A y B por $(L - a)$. Además, de acuerdo con esta ecuación la sección de la línea de influencia de M_B entre los puntos B y C ($a \leq x \leq L$) se consigue multiplicando las ordenadas del segmento de la línea de influencia para A_y entre B y C por a . La línea de influencia de M_B obtenida de esta manera de las líneas de influencia de A_y y C_y se muestra en la Fig. (8.2(f)). Las ecuaciones de equilibrio de la línea de influencia en términos de la posición de la carga unitaria, x , se pueden obtener sustituyendo las Ecs. (8.1) y (8.2) en la Ec. (8.5); es decir,

$$M_B = \begin{cases} C_y(L - a) = \frac{x}{L}(L - a) & 0 \leq x \leq a \\ A_y(a) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)a & a < x \leq L \end{cases} \quad (8.6)$$

A pesar de que la línea de influencia M_B (Fig. 8.2(f)) se parece, en forma, al diagrama de momento flexionante de una viga con carga concentrada aplicada en el punto B , la línea de influencia del momento de flexión tiene un significado completamente diferente, y es esencial entender claramente la diferencia entre los dos. Un diagrama de momento flexionante muestra cómo el momento flexionante varía en *todas las secciones* a lo largo de la longitud del elemento para una condición de carga cuya posición es fija en el elemento, mientras que la línea de influencia para momento flexionante muestra la manera en que el momento flexionante varía en *una sección en particular* conforme la carga unitaria se mueve a través de la longitud del elemento.

Tome en cuenta de la Fig. 8.2 que las líneas de influencia de las reacciones, cortante y momento flexionante de una viga simplemente apoyada consisten de segmentos rectos. Mostraremos en la siguiente sección que esto es cierto para las líneas de influencia para todas las funciones de respuesta que involucran fuerzas y momentos (es decir, reacciones, cortantes, momentos flexionantes y fuerzas en los elementos de armaduras) para todas las estructuras estáticamente determinadas. Sin embargo, las líneas de influencia para las deflexiones de estructuras estáticamente determinadas (discutidas en la Sección 8.5) están compuestas por líneas curvas.

Procedimiento de análisis

El procedimiento de análisis para determinar las líneas de influencia para las reacciones, cortantes y momentos flexionantes de vigas y marcos usando el método de equilibrio se puede resumir de la siguiente manera:

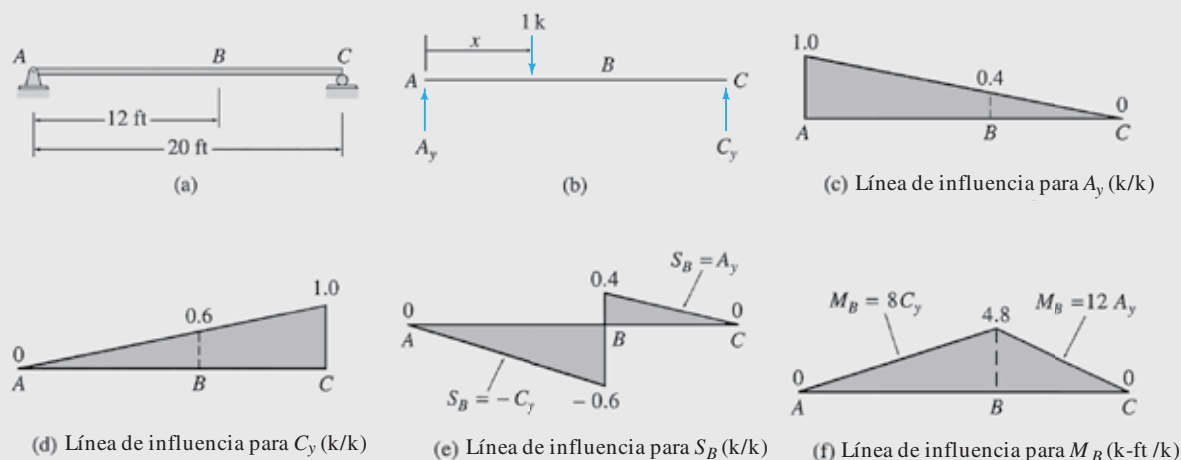
1. Seleccione el origen desde donde la carga concentrada unitaria móvil hacia abajo será medida. Usualmente se asume que la carga unitaria se mueve del extremo izquierdo de la estructura al extremo derecho; con su posición define la coordenada x medida del extremo izquierdo de la estructura.

2. Para construir la línea de influencia para la reacción de soporte:
 - a. Coloque la carga unitaria en la distancia x del extremo izquierdo de la estructura, y determine la expresión para la reacción en término de x aplicando una ecuación de equilibrio o condición. Si la estructura está compuesta de dos o más partes rígidas conectadas entre sí por una articulación interna y/o patín, la expresión para la reacción puede cambiar conforme la carga unitaria se mueve de una parte rígida a la siguiente por el cruce de una articulación interna o patín. Por lo tanto, para tales estructuras, cuando se aplican las ecuaciones de condición la carga unitaria se debe colocar sucesivamente en cada parte rígida de la estructura en su camino, y una expresión para las reacciones se debe determinar para cada posición de la carga.
 - b. Una vez que la(s) expresión(es) para las reacciones de todas las posiciones de la carga unitaria han sido determinadas, construya la línea de influencia graficando la(s) expresión(es) con la magnitud de la reacción en las ordenadas y la posición x de la carga unitaria en las abscisas. Una ordenada positiva de la línea de influencia indica que la carga unitaria aplicada en el punto genera que la reacción actúe en dirección positiva (es decir, en la dirección de la reacción usada en la determinación de la ecuación de la línea de influencia) y viceversa.
 - c. Repita el paso 2 hasta determinar todas las líneas de influencia deseadas de las reacciones.
3. Es práctico construir las líneas de influencia para los cortantes y momentos flexionantes usando las líneas de influencia de las reacciones de los apoyos. Por lo tanto, antes de proceder con la construcción de la línea de influencia para el cortante o momento flexionante en un punto en la estructura, asegúrese de tener determinadas las líneas de influencia de todas las reacciones, ya sea a la izquierda o a la derecha del punto en consideración. De otra manera, dibuje las líneas de influencia requeridas para las reacciones empleando el procedimiento descrito en los pasos previos. Una línea de influencia de cortante (o momento flexionante) en un punto de la estructura se puede construir como sigue:
 - a. Coloque la carga unitaria en la estructura en la posición variable x a la *izquierda* del punto en consideración, y determine la expresión para el cortante (o momento flexionante). Si se conocen las líneas de influencia de todas las reacciones, entonces es conveniente usar la porción de la estructura a la *derecha* del punto para determinar la expresión para el cortante (o momento flexionante), el cual contendrá términos involucrando solo las reacciones. El cortante (o momento flexionante) se considera positivo o negativo de acuerdo con la *convención de signos* establecidos en la Sección 5.1 (ver Fig. (5.2)).
 - b. Después, coloque la carga unitaria a la *derecha* del punto en consideración, y determine la expresión para el cortante (o momento flexionante). Si se conocen las líneas de influencia para todas las reacciones, entonces es conveniente usar la porción de la estructura a la *izquierda* del punto para determinar la expresión deseada, la cual contendrá términos involucrando solo las reacciones.

- c. Si la expresión para el cortante (o momento flexionante) contiene términos involucrando solo reacciones, entonces es más simple construir la línea de influencia para el cortante combinando los segmentos de las líneas de influencia de las reacciones de acuerdo con estas expresiones. De otra manera, sustituya las expresiones para las reacciones en las expresiones para el cortante, y trace las expresiones resultantes, las cuales ahora solo estarán en función de x , para obtener la línea de influencia.
- d. Repita el paso 3 hasta que todas las líneas de influencia de cortantes y momentos flexionantes hayan sido determinados.

Ejemplo 8.1

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales del apoyo A y C, y el cortante y momento flexionante del punto B, de la viga simplemente apoyada mostrada en la Fig. 8.3(a).

**FIG. 8.3****Solución**

El diagrama de cuerpo libre de la viga aparece en la Fig. 8.3(b). Este diagrama muestra a la viga sujeta a una carga móvil de 1-k, cuya posición está definida por la coordenada x medida del extremo izquierdo A de la viga. Las dos reacciones verticales A_y y C_y se suponen positivas en dirección vertical hacia arriba, como se indica en el diagrama de cuerpo libre.

Línea de influencia para A_y . Para determinar la expresión para A_y aplicamos la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_C &= 0 \\
 -A_y(20) + 1(20 - x) &= 0 \\
 A_y &= \frac{1(20 - x)}{20} = 1 - \frac{x}{20}
 \end{aligned}$$

continúa

La línea de influencia para A_y , la cual se obtiene trazando esta ecuación, se muestra en la Fig. 8.3(c). Tenga en cuenta que las ordenadas de la línea de influencia se expresan en las unidades obtenidas dividiendo las unidades de la función de respuesta, A_y , entre las unidades de la carga unitaria, es decir, k/k .

Respuesta

Línea de influencia para C_y .

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_A &= 0 \\ -1(x) + C_y(20) &= 0 \\ C_y &= \frac{1(x)}{20} = \frac{x}{20} \end{aligned}$$

La línea de influencia para C_y , que se obtiene graficando estas ecuaciones, se muestra en la Fig. 8.3(d).

Respuesta

Línea de influencia para S_B . Primero, colocamos la carga unitaria en la posición variable x a la izquierda del punto B —es decir, en el segmento AB de la viga— y determina el cortante en B usando el diagrama de cuerpo libre de la porción BC de la viga, la cual está a la derecha de B :

$$S_B = -C_y \quad 0 \leq x < 12 \text{ ft}$$

Después, la carga unitaria se localiza a la derecha de B —es decir el segmento BC de la viga— y usamos el diagrama de cuerpo libre de la porción AB , la cual está a la izquierda de B , para determinar S_B :

$$S_B = A_y \quad 12 \text{ ft} < x \leq 20 \text{ ft}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para S_B son

$$S_B = \begin{cases} -C_y = -\frac{x}{20} & 0 \leq x < 12 \text{ ft} \\ A_y = 1 - \frac{x}{20} & 12 \text{ ft} < x \leq 20 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para S_B se muestra en la Fig. 8.3(e).

Respuesta

Línea de influencia para M_B . Primero, situamos la carga unitaria en la posición x a la izquierda del punto B y determinamos el momento flexionante en B usando el cuerpo libre de la porción de la viga a la derecha de B :

$$M_B = 8C_y \quad 0 \leq x \leq 12 \text{ ft}$$

Después colocamos la carga unitaria en la posición x a la derecha de B , y empleamos el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga a la izquierda de B para determinar M_B :

$$M_B = 12A_y \quad 12 \text{ ft} \leq x \leq 20 \text{ ft}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para M_B son

$$M_B = \begin{cases} 8C_y = \frac{2x}{5} & 0 \leq x \leq 12 \text{ ft} \\ 12A_y = 12 - \frac{3x}{5} & 12 \text{ ft} \leq x \leq 20 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para M_B se muestra en la Fig. 8.3(f).

Respuesta

Ejemplo 8.2

Dibuje las líneas de influencia para la reacción vertical y el momento flexionante en el apoyo A, y el cortante y momento flexionante del punto B, de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. 8.4(a).

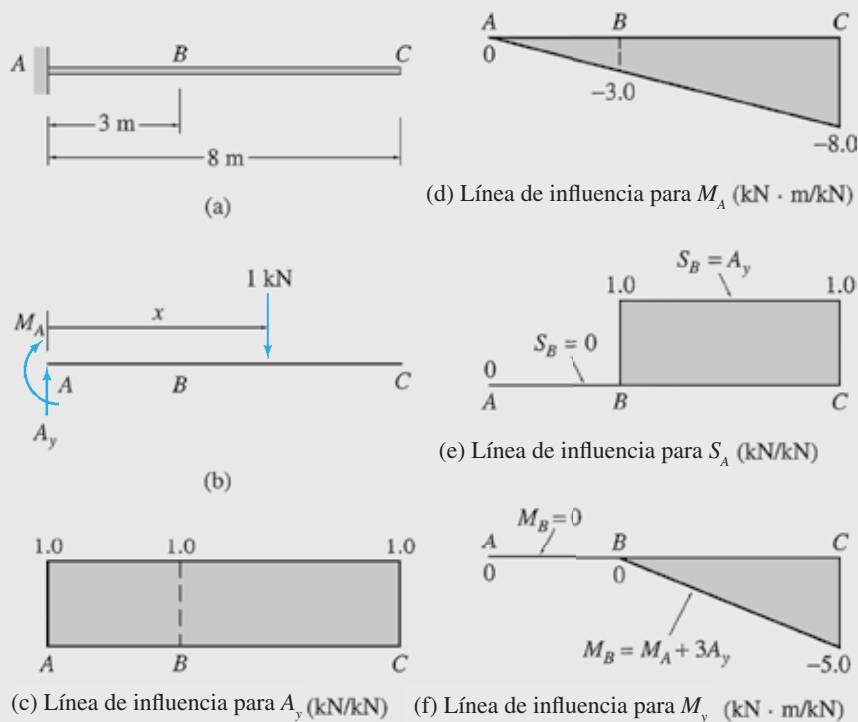


FIG. 8.4

Solución

Línea de influencia para A_y .

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 1 = 0$$

$$A_y = 1$$

La línea de influencia para A_y se muestra en la Fig. 8.4(c).

Respuesta

Línea de influencia para M_A .

$$+ \zeta \sum M_A = 0$$

$$-M_A - 1(x) = 0$$

$$M_A = -1(x) = -x$$

La línea de influencia para M_A , la cual se obtiene graficando esta ecuación, se muestra en la Fig. 8.4(d). Como las ordenadas de la línea de influencia son negativas, estas indican que el sentido de M_A para todas las posiciones de la carga unitaria de la viga están en realidad en sentido contrario a las manecillas del reloj como inicialmente se asumió, (ver Fig. 8.4(b)), derivando la ecuación de la línea de influencia.

Respuesta

Línea de influencia para S_B .

$$S_B = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 3 \text{ m} \\ A_y = 1 & 3 \text{ m} < x \leq 8 \text{ m} \end{cases}$$

La línea de influencia para S_B se observa en la Fig. 8.4(e).

Respuesta

continúa

Línea de influencia para M_B .

$$M_B = \begin{cases} 0 & \leq x \leq 3 \text{ m} \\ M_A + 3A_y = -x + 3(1) = -x + 3 & 3 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \end{cases}$$

La línea de influencia para M_B se muestra en la Fig. 8.4(f).

Respuesta

Ejemplo 8.3

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales del apoyo A , C , y E , el cortante a la derecha del apoyo C y el momento flexionante del punto B de la viga que aparece en la Fig. 8.5(a).

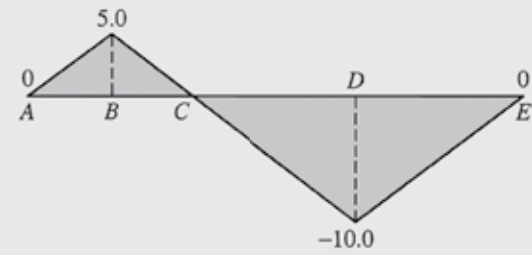
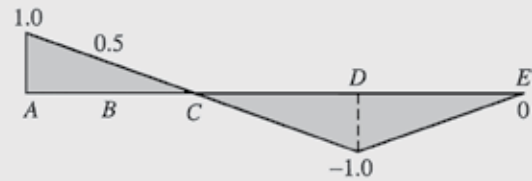
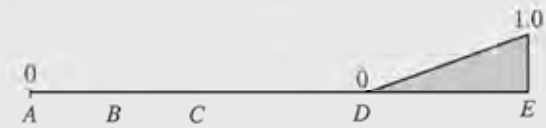
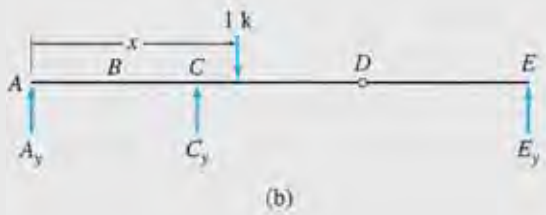
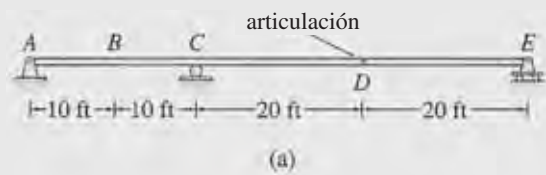


FIG. 8.5

Solución

La viga está compuesta por dos partes rígidas, AD y DE , conectadas por una articulación interna en D . Para evitar resolver ecuaciones simultáneamente en la determinación de las reacciones, aplicaremos las ecuaciones de equilibrio y de condición en tal orden en cada ecuación que involucre una sola una incógnita.

continúa

Línea de Influencia para E_y . Aplicamos la ecuación de condición $\sum M_D^{DE} = 0$, para determinar la expresión para E_y . Primero situamos la carga unitaria en la posición variable x a la izquierda de la articulación D —es decir, en la parte rígida de AD de la viga— para obtener

$$+\zeta \sum M_D^{DE} = 0$$

$$E_y(20) = 0$$

$$E_y = 0 \quad 0 \leq x \leq 40 \text{ ft}$$

Después, la carga unitaria se coloca a la derecha de la articulación D —es decir, en la parte rígida DE de la viga— para obtener

$$+\zeta \sum M_D^{DE} = 0$$

$$-1(x - 40) + E_y(20) = 0$$

$$E_y = \frac{1(x - 40)}{20} = \frac{x}{20} - 2 \quad 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para E_y son

$$E_y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 40 \text{ ft} \\ \frac{x}{20} - 2 & 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para E_y se muestra en la Fig. 8.5(c).

Respuesta

Línea de influencia para C_y . Aplicando la ecuación de equilibrio:

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

$$-1(x) + C_y(20) + E_y(60) = 0$$

$$C_y = \frac{x}{20} - 3E_y$$

Sustituyendo las expresiones para E_y , obtenemos

$$C_y = \begin{cases} \frac{x}{20} - 0 = \frac{x}{20} & 0 \leq x \leq 40 \text{ ft} \\ \frac{x}{20} - 3\left(\frac{x}{20} - 2\right) = 6 - \frac{x}{10} & 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para C_y , la cual se obtiene graficando estas ecuaciones, se muestra en la Fig. 8.5(d).

Respuesta

Línea de influencia para A_y .

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 1 + C_y + E_y = 0$$

$$A_y = 1 - C_y - E_y$$

Sustituyendo las expresiones para C_y y E_y , obtenemos las siguientes ecuaciones de la línea de influencia para A_y :

$$A_y = \begin{cases} 1 - \frac{x}{20} - 0 = 1 - \frac{x}{20} & 0 \leq x \leq 40 \text{ ft} \\ 1 - \left(6 - \frac{x}{10}\right) - \left(\frac{x}{20} - 2\right) = \frac{x}{20} - 3 & 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para A_y se muestra en la Fig. 8.5(e).

Respuesta

Línea de influencia para el cortante a la derecha de C , $S_{C,R}$.

$$S_{C,R} = \begin{cases} -E_y & 0 \leq x < 20 \text{ ft} \\ 1 - E_y & 20 \text{ ft} < x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

continúa

Sustituyendo las expresiones para E_y , obtenemos

$$S_{C,R} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 20 \text{ ft} \\ 1 - 0 = 1 & 20 \text{ ft} < x \leq 40 \text{ ft} \\ 1 - \left(\frac{x}{20} - 2\right) = 3 - \frac{x}{20} & 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para $S_{C,R}$ se muestra en la Fig. 8.5(f).

Respuesta

Línea de influencia para M_B .

$$M_B = \begin{cases} 10A_y - 1(10 - x) & 0 \leq x \leq 10 \text{ ft} \\ 10A_y & 10 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

Sustituyendo las expresiones para A_y , obtenemos

$$M_B = \begin{cases} 10\left(1 - \frac{x}{20}\right) - 1(10 - x) = \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 10 \text{ ft} \\ 10\left(1 - \frac{x}{20}\right) = 10 - \frac{x}{2} & 10 \text{ ft} \leq x \leq 40 \text{ ft} \\ 10\left(\frac{x}{20} - 3\right) = \frac{x}{2} - 30 & 40 \text{ ft} \leq x \leq 60 \text{ ft} \end{cases}$$

La línea de influencia para M_B se muestra en la Fig. 8.5(g).

Respuesta

Ejemplo 8.4

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales y el momento flexionante en el apoyo A del marco de la Fig. 8.6(a).

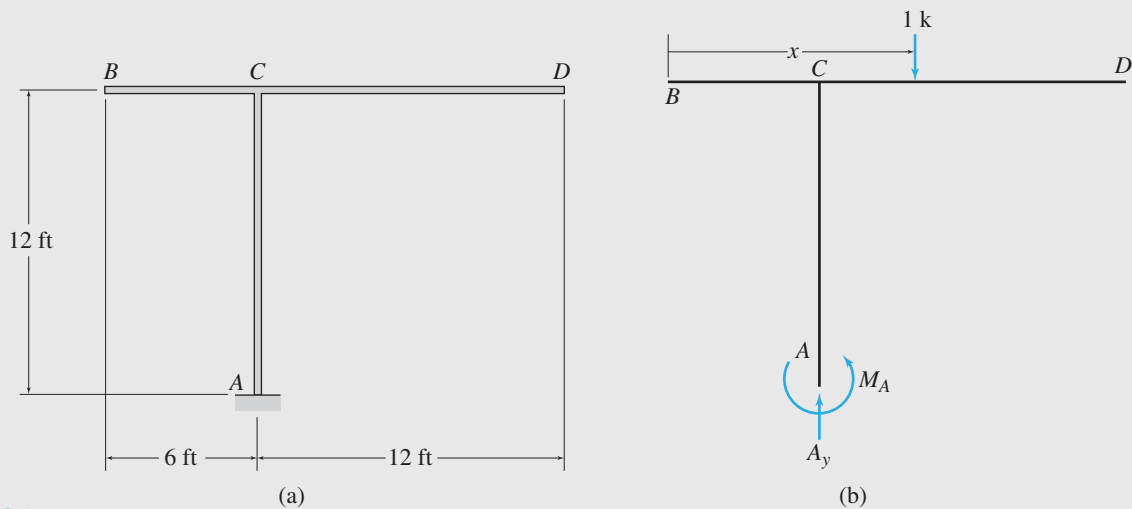


FIG. 8.6

continúa

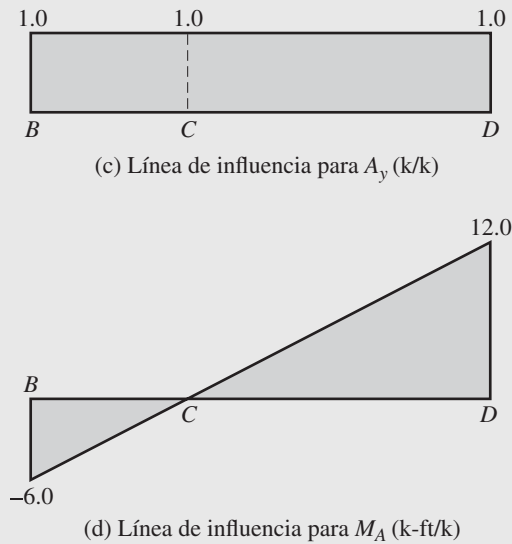


FIG. 8.6 (cont.)

SoluciónLínea de influencia para A_y .

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 1 = 0$$

$$A_y = 1$$

La línea de influencia para A_y se muestra en la Fig. 8.6(c).

Respuesta

Línea de influencia para M_A .

$$+ \zeta \sum M_A = 0$$

$$M_A - 1(x - 6) = 0$$

$$M_A = x - 6$$

Línea de influencia para M_A se muestra en la Fig. 8.6(d).

Respuesta

Ejemplo 8.5

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones horizontales y verticales de los apoyos A y B y el cortante en la articulación E del marco de tres articulaciones en el apoyo A del puente mostrado en la Fig. 8.7(a).

SoluciónLínea de influencia para A_y .

$$+ \zeta \sum M_B = 0$$

$$-A_y(10) + 1(15 - x) = 0$$

$$A_y = \frac{1(15 - x)}{10} = 1.5 - \frac{x}{10}$$

La línea de influencia para A_y se muestra en la Fig. 8.7(e).

Respuesta

continúa

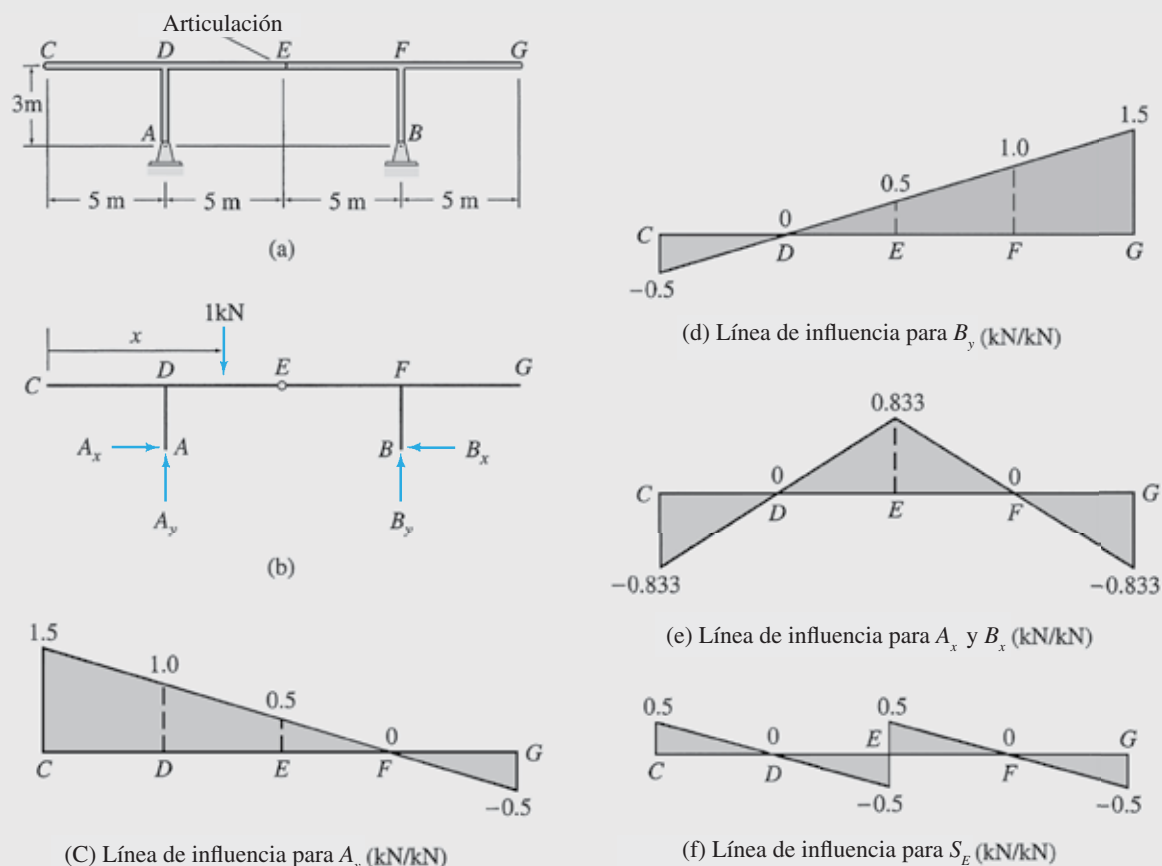


FIG. 8.7

Línea de influencia para B_y .

$$\begin{aligned}
 &= \uparrow \sum F_y = 0 \\
 &A_y - 1 + B_y = 0 \\
 &B_y = 1 - A_y = 1 - \left(1.5 - \frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10} - 0.5
 \end{aligned}$$

La línea de influencia para B_y aparece en la Fig. 8.7(d).

Respuesta

Línea de influencia para A_x . Usaremos la ecuación de condición $\sum M_C^{CE} = 0$ para determinar las expresiones para A_x . Primero, colocamos la carga unitaria a la izquierda de la articulación E —es decir, en la parte rígida CE del marco— para obtener

$$\begin{aligned}
 &+ \zeta \sum M_E^{CE} = 0 \\
 &A_x(3) - A_y(5) + 1(10 - x) = 0 \\
 &A_x = \frac{5}{3}A_y - \frac{1}{3}(10 - x) = \frac{5}{3}\left(1.5 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{3}(10 - x) \\
 &= \frac{x - 5}{6} \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}
 \end{aligned}$$

continúa

Después, la carga unitaria se localiza a la derecha de la articulación E —es decir, en la parte rígida de EG del marco.

$$+\zeta \sum M_E^{CE} = 0$$

$$A_x(3) - A_y(5) = 0$$

$$A_x = \frac{5}{3}A_y = \frac{5}{3}\left(1.5 - \frac{x}{10}\right) = \frac{15-x}{6} \quad 10 \text{ m} \leq x \leq 20 \text{ m}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para A_x son

$$A_x = \begin{cases} \frac{x-5}{6} & 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \\ \frac{15-x}{6} & 10 \text{ m} \leq x \leq 20 \text{ m} \end{cases}$$

La línea de influencia para A_x se muestra en la Fig. 8.7(e).

Respuesta

Línea de influencia para B_x .

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$B_x = A_x$$

La cual indica que la línea de influencia para B_x es la misma que para la línea A_x (Fig. 8.7(e)).

Respuesta

Línea de influencia para S_E .

$$S_E = \begin{cases} -B_y = -\frac{x}{10} + 0.5 & 0 \leq x < 10 \text{ m} \\ A_y = 1.5 - \frac{x}{10} & 10 \text{ m} < x \leq 20 \text{ m} \end{cases}$$

La línea de influencia para S_E se muestra en la Fig. 8.7(f).

Respuesta

8.2 Método de Meüller-Breslau y líneas de deflexiones cualitativas

La construcción de las líneas de influencia para las funciones de respuesta que involucran fuerzas y momentos puede ser más ágil aplicando el procedimiento desarrollado por Müller-Breslau en 1886. El procedimiento, comúnmente conocido como *principio de Müller-Breslau*, se puede establecer como sigue:

La línea de influencia para una función de fuerza (o momento) está dada por la configuración deformada de la estructura liberada eliminando las restricciones correspondientes de las funciones de respuesta de la estructura original, y dando a la estructura liberada una unidad de desplazamiento (o rotación) en la ubicación y en la dirección de la función de respuesta, para que la única función de respuesta y la carga unitaria desarrollen el trabajo externo.

Este principio es válido solo para las líneas de influencia para las funciones de respuesta que involucran fuerzas y momentos (es decir, reacciones, cortantes, momentos flexionantes o fuerzas en los elementos de armaduras), y no aplica para líneas de influencia de deflexiones.

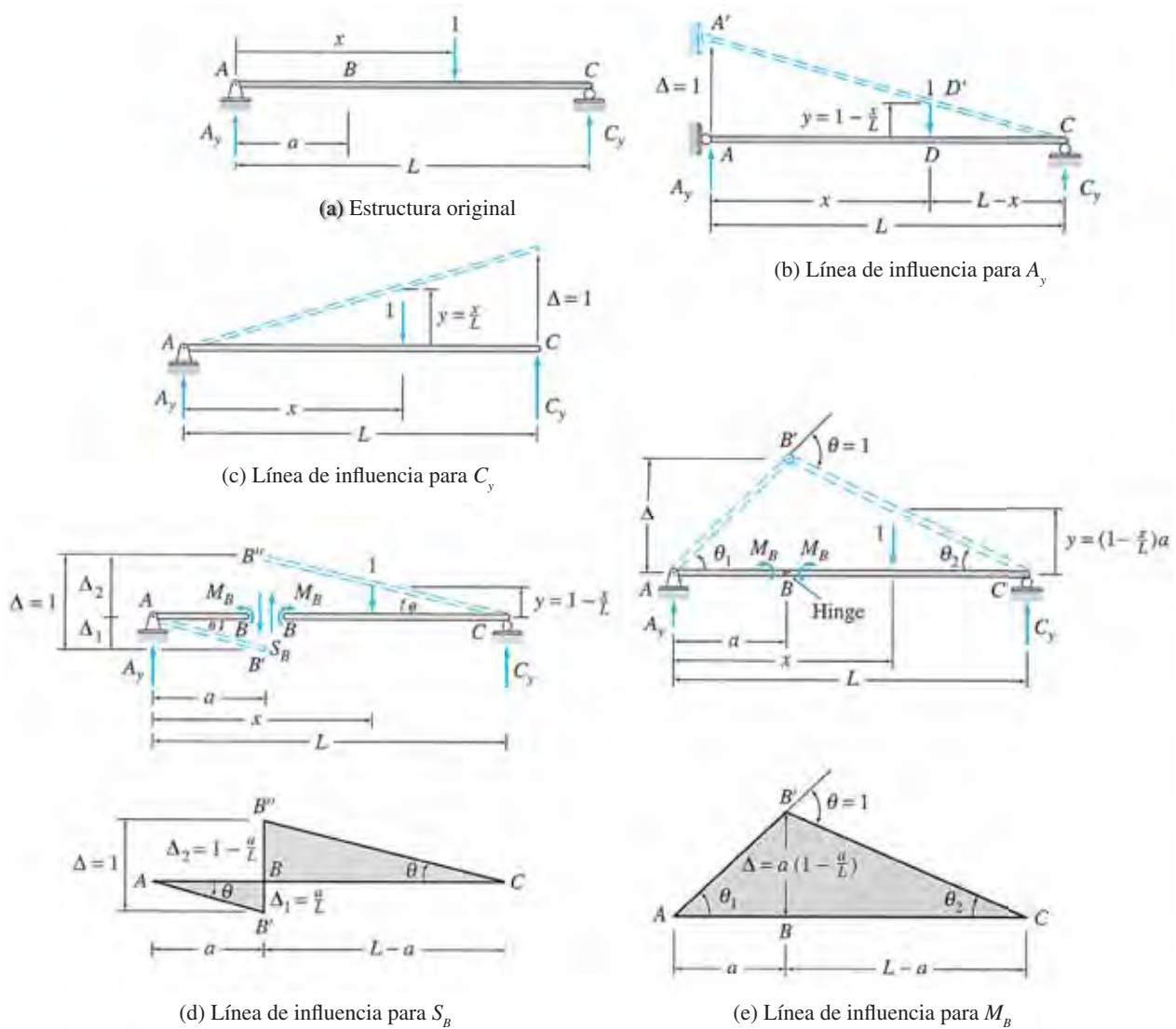


FIG. 8.8

Para probar la validez del principio de Müller-Breslau, considere una viga simplemente apoyada sujeta a una carga unitaria móvil, como se muestra en la Fig. 8.8(a). Las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y C y el cortante y el momento flexionante en el punto B de esta viga se obtuvieron en la sección previa aplicando las ecuaciones de equilibrio (ver Fig. 8.2). Suponga que ahora queremos dibujar las líneas de influencia para las mismas cuatro funciones de respuesta usando el principio de Müller-Breslau.

Para construir la línea de influencia de la reacción vertical A_y , eliminamos la restricción correspondiente a A_y y reemplazamos el apoyo articulado en A por un rodillo o patín, el cual solo ejerce una reacción vertical, como se muestra en la Fig. 8.8(b). Tenga en cuenta que el punto A de la viga ahora está libre para desplazarse en la dirección de A_y . A pesar de que la restricción correspondiente a A_y ha sido removida, la reacción aún actúa en la viga, la cual permanece en equilibrio en la posición horizontal (mostrada por las líneas

continuas en la figura) bajo la acción de la carga unitaria y las reacciones A_y y C_y . A continuación, en el punto A de la viga liberada se aplica un desplazamiento virtual unitario, $\Delta = 1$, en dirección positiva de A_y , generando que se desplace, como se muestra en las líneas punteadas de la Fig. 8.8(b). Considere que el patrón de desplazamiento virtual aplicado es consistente con la condición de soporte de la viga liberada, es decir, los puntos A y C no se pueden mover en las direcciones horizontales y verticales, respectivamente. Además, dado que la viga original es estáticamente determinada, la remoción de una condición de sus restricciones la convierte en una viga estáticamente inestable. Por lo tanto, la viga liberada permanece recta (es decir, no se flexiona) durante el desplazamiento virtual. Dado que la viga está en equilibrio de acuerdo con el principio de desplazamientos virtuales de cuerpos rígidos (Sección 7.2), el trabajo virtual realizado por fuerzas reales externas por conducto de desplazamientos virtuales externos debe ser cero, o sea,

$$W_{ve} = A_y (1) - 1(y) = 0$$

De la cual

$$A_y = y \quad (8.7)$$

Donde y representa el desplazamiento del punto de aplicación de la carga unitaria, como se muestra en la Fig. 8.8(b). La Ec. (8.7) indica que el desplazamiento y de la viga en cualquier posición x es igual a la magnitud de A_y debido a la carga unitaria actuante en la posición x en la viga. Por lo tanto, el desplazamiento y en cualquier posición x es igual a la ordenada de la línea de influencia para A_y en cualquier posición, como se estipuló en el Principio de Müller-Breslau. La Ec. (8.7) se puede expresar en términos de x considerando la geometría de la configuración deformada de la viga. De la Fig. 8.8(b), observamos que el triángulo $A'AC$ y $C'DC$ son similares. Por lo tanto,

$$\frac{y}{(L-x)} = \frac{1}{L} \quad \text{o} \quad y = 1 - \frac{x}{L}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (8.7), obtenemos la ecuación de la línea de influencia para A_y en términos de x como

$$A_y = 1 - \frac{x}{L}$$

La cual es la misma que la Ec. (8.1), obtenida de la consideración de equilibrio.

La línea de influencia para la reacción vertical C_y está determinada de una manera similar, como se ve en la Fig. 8.8(c). Tenga en cuenta que la línea de influencia es idéntica a la que se construyó previamente por la consideración de equilibrio (Fig. 8.2(c)).

Para construir la línea de influencia del cortante S_B en el punto B de la viga, removemos la restricción correspondiente a S_B cortando la viga en B , como se muestra en la Fig. 8.8(d). Considere que los puntos B de las porciones AB y BC de la viga liberada ahora están libres, relativamente, para desplazarse de uno a otro de manera vertical. Para mantener la viga liberada en equilibrio, aplicamos en B las fuerzas cortantes, S_B , y momentos flexionantes, M_B , como se muestra en la figura. Tenga en cuenta que S_B y M_B actúan en dirección positiva de acuerdo con la *convención de signos de la*

viga. Después, en B la viga liberada está sujeta a un desplazamiento unitario virtual relativo, $\Delta = 1$, en la dirección positiva de S_B (Fig. 8.8(d)) moviendo el extremo B de la porción AB hacia abajo, Δ_1 , y en el extremo B de la porción BC hacia arriba, Δ_2 , para que $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta = 1$. Los valores de Δ_1 y Δ_2 dependen del requisito de que la rotación, θ , de las dos partes AB y BC sean iguales (es decir, las partes AB' y $B''C$ en la posición desplazada deben ser paralelos unos a otros), de tal manera que el trabajo neto realizado por los dos momentos M_B es cero, y solo las fuerzas cortantes S_B y la carga unitaria realicen trabajo. Aplicando el principio de trabajo virtual de desplazamientos, podemos escribir

$$\begin{aligned} W_{ve} &= S_B(\Delta_1) + S_B(\Delta_2) - M_B(\theta) + M_B(\theta) - 1(y) \\ &= S_B(\Delta_1 + \Delta_2) - 1(y) \\ &= S_B(\Delta) - 1(y) \\ &= S_B(1) - 1(y) = 0 \end{aligned}$$

Para la cual

$$S_B = y$$

Esto indica que la configuración deformada de la viga (Fig. 8.8(d)) es la línea de influencia para S_B , como lo señaló el Principio de Müller-Breslau. Los valores de las ordenadas de Δ_1 y Δ_2 se pueden establecer de la geometría de la configuración deformada de la viga. De la Fig. 8.8(d), observamos que los triángulos ABB' y BCB'' son similares, por lo tanto,

$$\frac{\Delta_1}{a} = \frac{\Delta_2}{L-a} \quad \text{o} \quad \Delta_2 = \left(\frac{L-a}{a}\right)\Delta_1 \quad (8.8)$$

Además,

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 1, \quad \text{o} \quad \Delta_2 = 1 - \Delta_1 \quad (8.9)$$

Iguando las Ecs. (8.8) y (8.9) y resolviendo para Δ_1 , obtenemos

$$\Delta_1 = \frac{a}{L}$$

Sustituyendo la expresión para Δ_1 en la Ec. (8.9)

$$\Delta_2 = 1 - \frac{a}{L}$$

Estas ordenadas son iguales a las determinadas previamente por el método de equilibrio (Fig. 8.2(e)).

Para construir la línea de influencia del momento flexionante M_B , eliminamos la restricción correspondiente a M_B insertando una articulación en B , como se muestra en la Fig. 8.8(c). Los segmentos de AB y BC de la viga liberada ahora están libres para rotar relativamente entre sí. Para mantener liberada la viga en equilibrio, aplicamos los momentos M_B en B , como se muestra en la figura. El momento flexionante se supone positivo de acuerdo con la *convención de signos de la viga*. Después, se aplica una rotación unitaria, $\theta = 1$, en B (Fig. 8.8(c)) rotando la parte de la viga AB en un giro θ_1 en sentido contrario a las manecillas del reloj, y la parte de BC en un giro θ_2 en

sentido del horario, de modo que $\theta_1 + \theta_2 = 0 = 1$. Aplicando el principio de desplazamientos virtuales, escribimos

$$\begin{aligned} W_{ve} &= M_B(\theta_1) + M_B(\theta_2) - 1(y) \\ &= M_B(\theta_1 + \theta_2) - 1(y) \\ &= M_B(\theta) - 1(y) \\ &= M_B(1) - 1(y) = 0 \end{aligned}$$

De la cual

$$M_B = y$$

Esto indica que la configuración deformada de la viga (Fig. 8.8(c)) es la línea de influencia de M_B , como lo establece el Principio de Müller-Breslau. El valor de la ordenada Δ se puede determinar de la geometría de la configuración deformada de la viga. De la Fig. 8.8(c), podemos ver que

$$\Delta = a\theta_1 = (L - a)\theta_2 \quad (8.10)$$

o

$$\theta_1 = \left(\frac{L - a}{a}\right)\theta_2 \quad (8.11)$$

Además,

$$\theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \text{o} \quad \theta_1 = 1 - \theta_2 \quad (8.12)$$

Igualando las Ecs. (8.11) y (8.12) y resolviendo para θ_2 , obtenemos

$$\theta_2 = \frac{a}{L}$$

Sustituyendo la expresión para θ_2 en la Ec. (8.10)

$$\Delta = (L - a)\frac{a}{L} = a\left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

La cual es la misma que se obtuvo previamente por el método de equilibrio (Fig. 8.2(f)).

En la sección anterior establecimos que las líneas de influencia para las funciones de respuesta de fuerzas y momentos de todas las estructuras estáticamente determinadas constan de segmentos rectos. Podemos explicar esto por medio del Principio de Müller-Breslau. En la aplicación de este principio en la construcción de una línea de influencia, la restricción correspondiente a la función de respuesta de la fuerza o momento de interés tiene que ser removida de la estructura por *un mecanismo*. Cuando esta estructura, liberada estáticamente inestable, está sujeta a un desplazamiento unitario (o una rotación), no se inducen esfuerzos en sus elementos, ya que permanece recta y se desplaza y/o rota como cuerpo rígido, formando de este modo la configuración deformada (y por lo tanto la línea de influencia) que consiste en segmentos rectos. Debido a esta remoción de la fuerza o momento de res-

tricción de una estructura estáticamente indeterminada para estos propósitos de la construcción de la línea de influencia no la hace estáticamente inestable, las líneas de influencia de estas estructuras consisten en líneas curvas.

Líneas de influencia cualitativas

En muchas aplicaciones prácticas, es necesario determinar solo la forma general de la línea de influencia pero no los valores numéricos de las ordenadas. *El diagrama que muestra la forma general de una línea de influencia sin los valores numéricos de su ordenadas se llama línea de influencia cualitativas.* En contraste, una línea de influencia con valores numéricos de sus ordenadas se le conoce como *línea de influencia cuantitativa*.

A pesar de que el principio de Müller-Breslau se puede aplicar para determinar la líneas de influencia cuantitativas como se discutió previamente, es más comúnmente usado para determinar las líneas de influencia de la configuración deformada. Los valores numéricos de las ordenadas de las líneas de influencia, si se desea, son calculadas usando el método de equilibrio.

Procedimiento para el análisis

El procedimiento de análisis de las líneas de influencia de la fuerza y momento para vigas y marcos usando el método de equilibrio se presentó en la Sección 8.1. El siguiente procedimiento alternativo, basado en una combinación del Principio de Müller-Breslau y el método de equilibrio, puede ser considerablemente más ágil para la construcción de las líneas de influencia.

1. Dibuje la forma general de la línea de influencia aplicando el Principio de Müller-Breslau:
 - a. De una estructura dada remueva la restricción correspondiente a la función de respuesta cuya línea de influencia se desea obtener de la estructura liberada.
 - b. Aplique un desplazamiento pequeño (o rotación) a la estructura liberada en la ubicación y en la dirección positiva de la función de respuesta. Dibuje la configuración deformada de la estructura liberada, que es consistente con el apoyo y condiciones de continuidad de la estructura liberada. (Recuerde que las líneas de influencia de las estructuras estáticamente determinadas consisten solo de segmentos de línea recta.) Si solo se desea la línea de influencia, entonces termine el análisis en esta etapa. De otra manera, proceda con el siguiente paso.
2. Determine los valores numéricos de la ordenada de la línea de influencia usando el método de equilibrio y la geometría de la línea de influencia.
 - a. Coloque una carga unitaria en la estructura dada (es decir, en la estructura no liberada) en la ubicación de la función de respuesta, y determine el valor numérico de la ordenada de la línea de influencia en el punto de localización aplicando la(s) ecuación(es) de equilibrio y/o de condición. Si la función de respuesta requerida es el cortante, entonces la carga unitaria deberá estar colocada en dos puntos sucesivos, justo a la izquierda o a la derecha del punto de donde se desea conocer el cortante, y los valores de la ordenada de la línea de influencia se calculan

en estas ubicaciones. Si la ordenada de la línea de influencia en la ubicación de la función de respuesta es cero, entonces coloque la carga unitaria en la ubicación de ordenada máxima o mínima y determine el valor numérico de la ordenada por equilibrio.

- b. Usando la geometría de la línea de influencia, determine los valores numéricos de las ordenadas restantes donde se producen los cambios en la pendiente de la línea de influencia.

Una ventaja del procedimiento anterior es que nos permite determinar la línea de influencia de cualquier función de respuesta de la fuerza o de momento directamente, sin tener que establecer de antemano la línea de influencia para las otras funciones. Por ejemplo, la construcción de las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante aplicando este procedimiento no requiere el uso de las líneas de influencia de las reacciones. El procedimiento se ilustra con los siguientes ejemplos. Se anima al lector a verificar las líneas de influencia desarrolladas en los ejemplos 8.1 al 8.3 aplicando este procedimiento.

Ejemplo 8.6

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en los apoyos B y D y el cortante y momento flexionante en el punto C de la viga mostrada en la Fig. 8.9(a).

Solución

Línea de influencia para B_y . Para determinar la forma general de la línea de influencia para B_y , eliminamos el patín de rodillo o deslizable del apoyo B de la viga dada (Fig. 8.9(a)) para obtener la viga liberada en la Fig. 8.9(b). Después, al punto B de la viga liberada se le da una pequeña deformación, Δ , en la dirección positiva de B_y , y la deformación de la viga se dibuja, como se muestra en la figura con línea discontinua. Tenga en cuenta que la configuración deformada es consistente con las condiciones de apoyo de la estructura liberada; es decir, el extremo derecho de la viga liberada, el cual está unido al apoyo articulado en D , no se desplaza. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada, como se muestra en la Fig. 8.9(b).

Para obtener los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia en B , colocamos una carga de 1-kN en el punto B en la viga original (Fig. 8.9(b)) y aplicamos las ecuaciones de equilibrio para obtener B_y ,

$$+\zeta \sum M_D = 0 \quad 1(9) - B_y(9) = 0 \quad B_y = 1 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el valor de la ordenada de la línea de influencia en B es 1 kN/kN. El valor de la ordenada en A se puede determinar con la geometría de la línea de influencia (Fig. 8.9(b)). Observando que los triángulos $AA'D$ y $BB'D$ son similares, escribimos:

$$AA' = \left(\frac{1}{9}\right)(12) = \frac{4}{3} \text{ kN / kN}$$

La línea de influencia para B_y obtenida de esta manera se muestra en la Fig. 8.9(b).

Respuesta

Línea de influencia para D_y . La línea de influencia para D_y se construye de manera similar y se muestra en la Fig. 8.9(c).

Respuesta

Línea de influencia para S_C . Para determinar la configuración deformada de la línea de influencia para el cortante en el punto C , cortamos la viga dada en C para obtener la estructura liberada de la Fig. 8.9(d). Después, a esta se le da un pequeño desplazamiento en la dirección positiva de S_C moviendo el extremo C en la porción AC hacia abajo un valor Δ_1 y en el extremo C de la porción CD hacia arriba un valor Δ_2 para obtener la configuración deformada mostrada en la Fig. 8.9(d). La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada mostrada en la figura.

continúa

Para obtener los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia en C , colocamos una carga unitaria a la izquierda de C y luego, a la derecha de C , como se muestra mediante la línea continua y la flecha punteada, respectivamente, en la Fig. 8.9(d). Las reacciones B_y y D_y se determinan aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$+\zeta \sum M_D = 0 \quad -B_y(9) + 1(6) = 0 \quad B_y = \frac{2}{3} \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \left(\frac{2}{3}\right) - 1 + D_y = 0 \quad D_y = \frac{1}{3} \text{ kN} \uparrow$$

Observe que las magnitudes de B_y y D_y pueden, alternativamente, conseguirse de la línea de influencia de estas reacciones construidas previamente. Se puede ver en las Figs. 8.9(b) y (c) que las ordenadas en C (a la izquierda o derecha de C) de la línea de influencia para B_y y D_y son de hecho $2/3$ y $1/3$, respectivamente. Cuando la carga unitaria está a izquierda de C (ver Fig. 8.9(d)), el cortante en C es

$$S_C = -D_y = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

Cuando la carga unitaria está a la derecha de C , el cortante en C es

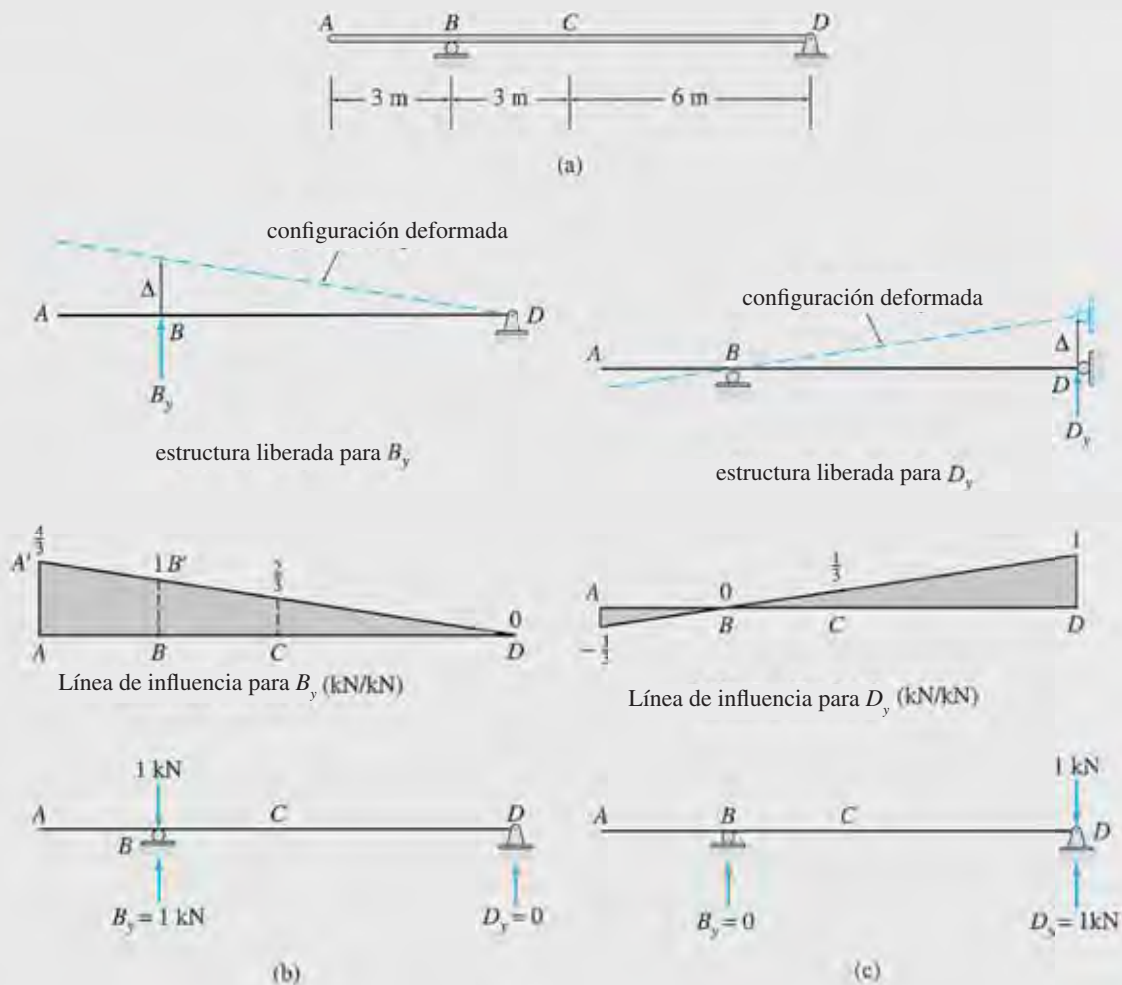


FIG. 8.9

continúa

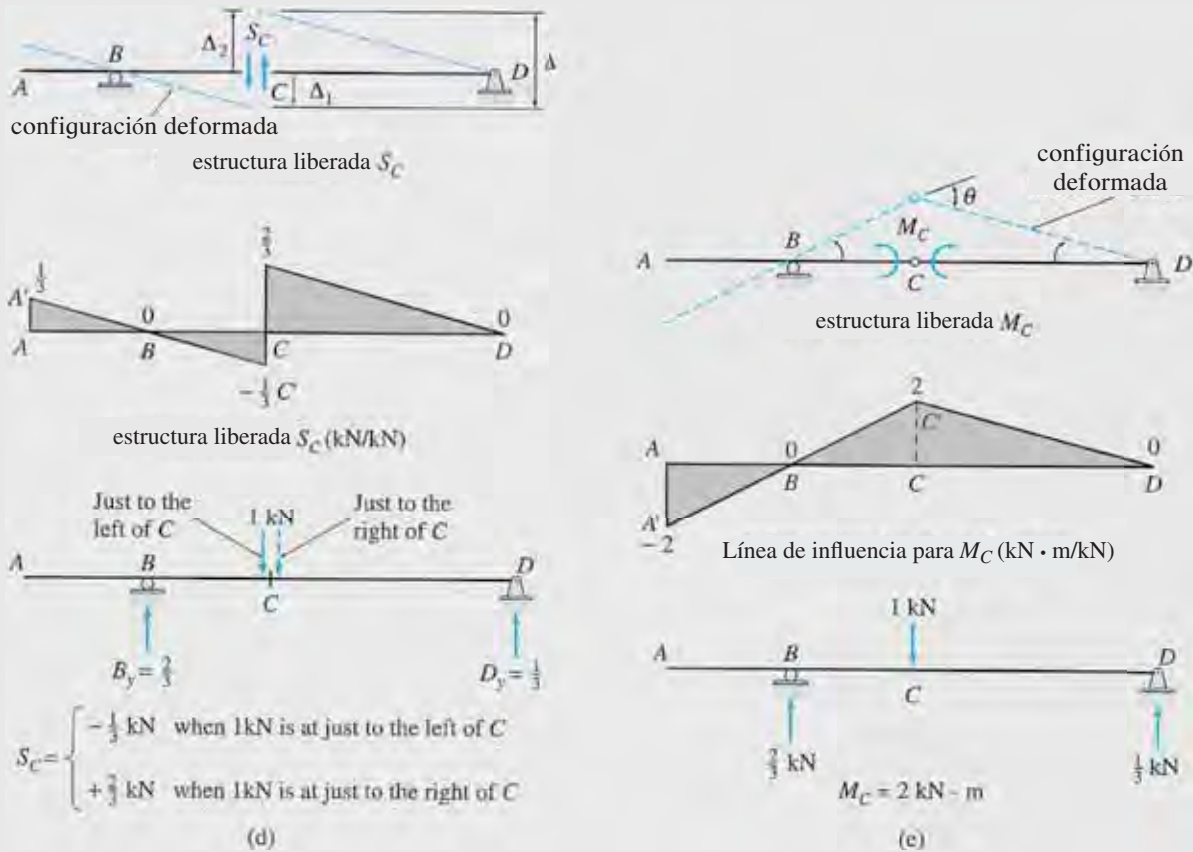


FIG. 8.9 (cont.)

Por lo tanto, los valores de las ordenadas de la línea de influencia en C son $-1/3$ kN/kN (ala izquierda de C) y $2/3$ kN/kN (a la derecha de C), como se muestra en la Fig. 8.9(d). Observando que los triángulos $AA'B$ y BCC' son similares, obtenemos la ordenada en $AA' = 1/3$ kN/kN. La línea de influencia para S_C establecida de esta manera se muestra en la Fig. 8.9(d).

Respuesta.

Línea de influencia para M_C . Para obtener la configuración general de la línea de influencia para el momento flexionante, insertamos una articulación en C en la viga dada para tener la estructura liberada mostrada en la Fig. 8.9(e). Después, se introduce en C una pequeña rotación, θ , en dirección positiva de M_C , mediante una rotación en la porción AC en el sentido contrario a las manecillas del reloj para obtener la configuración deformada que se muestra en la Fig. 8.9(e). La configuración de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada, mostrada en la figura.

Para obtener el valor numérico de las ordenadas de la línea de influencia en C , colocamos una carga unitaria de 1-kN en C en la viga original (Fig. 8.9(e)). Aplicando en orden las ecuaciones de equilibrio $\sum M_D = 0$ y $\sum F_y = 0$, calculamos las reacciones $B_y = 2/3$ kN y $D_y = 1/3$ kN, después de lo cual el momento flexionante en C se determina como

$$M_C = \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo tanto, los valores de la ordenada de la línea de influencia en C es 2 kN · m/kN. Finalmente, para completar la línea de influencia, determinamos la ordenada en A considerando la geometría de la línea de influencia. De la Fig. 8.9(e), observamos que puesto que los triángulos $AA'B$ y BCC' son similares, la ordenada en A es $AA = 2$ kN · m/kN. La línea de influencia obtenida se muestra en la Fig. 8.9 (e).

Respuesta

Ejemplo 8.7

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en los apoyos A y E , el momento de reacción en el apoyo A , el cortante en el punto B y el momento flexionante en el punto D de la viga mostrada en la Fig. 8.10(a).

Solución

Línea de influencia para A_y . Para determinar la configuración deformada de la línea de influencia para A_y , eliminamos la restricción correspondiente a A_y reemplazando el apoyo empotrado en A por un apoyo de patín guiado que previene el desplazamiento horizontal y la rotación en A , pero no el desplazamiento vertical. Después, en el punto A de la estructura liberada se aplica un pequeño desplazamiento Δ , y la configuración deformada de la viga se muestra en la Fig. 8.10(b). Tenga en cuenta que la configuración deformada es consistente con el apoyo y con las condiciones de continuidad de la estructura liberada. El extremo A de la viga, unido al patín guiado, no puede rotar, de modo que la porción AC debe

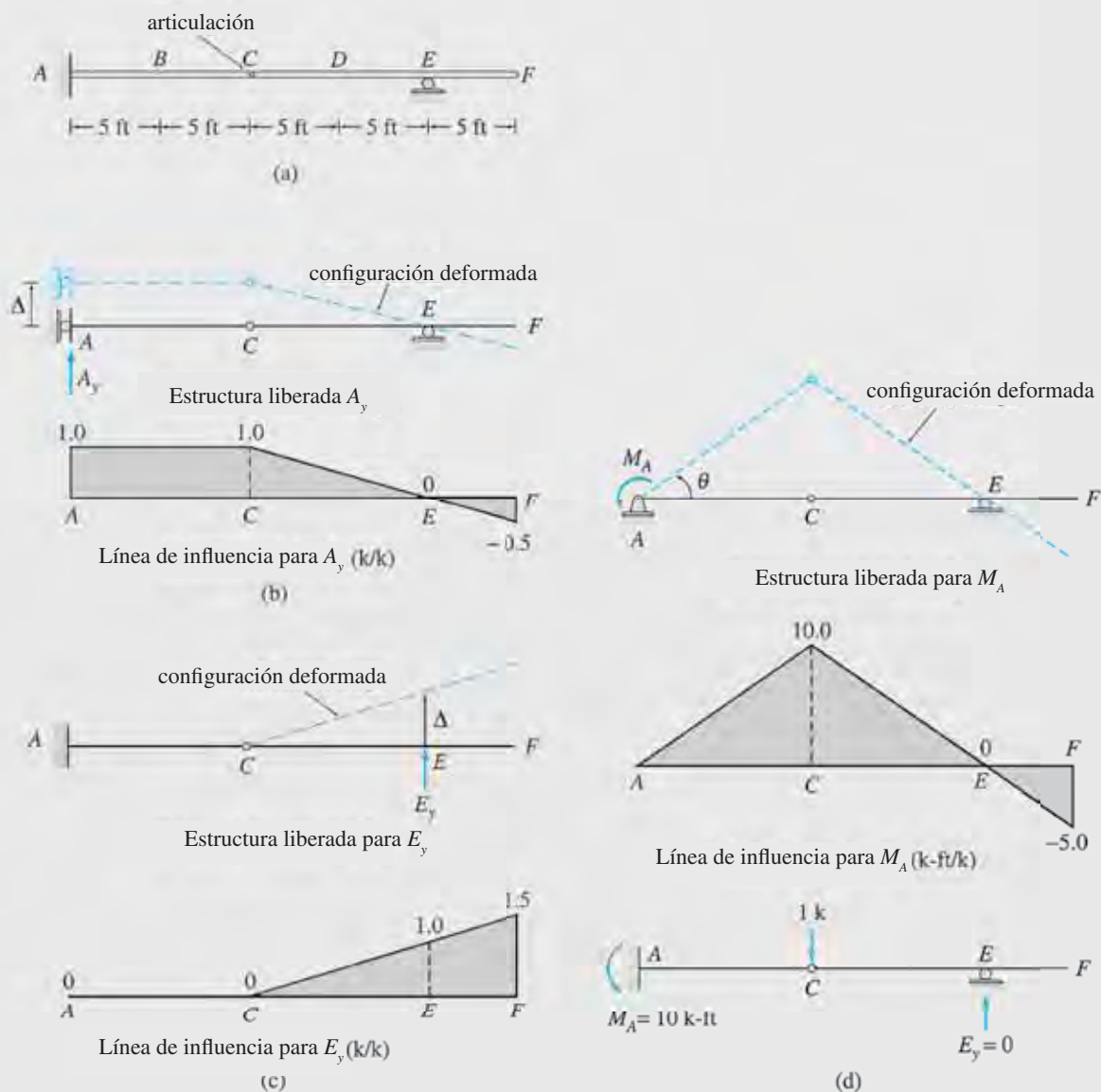
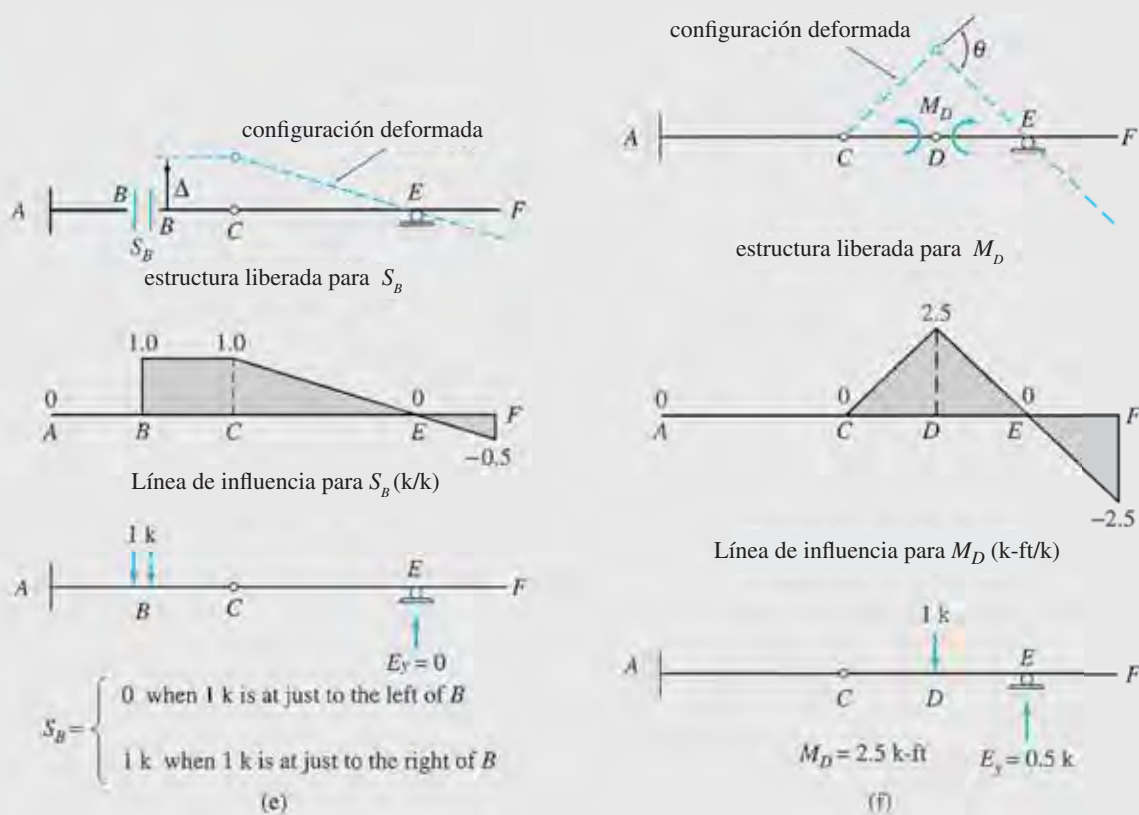


FIG. 8.10

continúa



permanecer horizontal en la configuración desplazada. Además, el punto E está unido al apoyo de patín, por lo tanto no puede desplazarse en dirección vertical. Entonces, la porción CF rota alrededor de E como se muestra en la figura. Las dos partes rígidas AC y CF de la viga permanecen rectas en la configuración deformada y rotan relativamente una con la otra en la articulación interna en C , la cual permite tal rotación. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada, como se muestra en la Fig. 8.10(b).

Al reconocer que $A_y = 1$ k cuando una carga de 1-k se coloca en A , obtenemos el valor de 1 k/k para la línea de influencia en la ordenada A . Las ordenadas en los puntos C y F se determinan a partir de la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia para A_y se muestra en la figura. 8.10 (b). **Respuesta.**

Línea de influencia para E_y . El patín del apoyo E se elimina de la estructura dada, y se aplica un pequeño desplazamiento, Δ , en E para obtener la configuración deformada mostrada en la Fig. 8.10(c). Debido a que el apoyo se empotra en A , la porción AC de la viga liberada no puede desplazarse ni rotar como cuerpo rígido. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada, como se muestra en la figura.

Como $E_y = 1$ k cuando la carga 1-k se coloca en E , se obtiene el valor de 1 k/k para la línea de influencia de la ordenada en E . La ordenada en F se determina entonces a partir de la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia así obtenida se muestra en la Fig. 8.10 (c). **Respuesta.**

Línea de influencia para M_A . Para eliminar la restricción correspondiente a la reacción de momento M_A , reemplazamos el apoyo empotrado en A por uno articulado, como se muestra en la Fig. 8.10(d). Después, aplicamos una pequeña rotación, θ , positiva de M_A (en sentido contrario a las manecillas del reloj) en A en la estructura liberada para lograr la configuración deformada mostrada en la figura. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada.

continúa

Debido a que la ordenada de la línea de influencia en A es cero, determinamos la ordenada en C colocando una carga unitaria 1-k en C en la viga original (Fig. 8.10(d)). Después, calculamos la reacción $E_y = 0$ aplicando la ecuación de condición $\sum M_C^{CF} = 0$, y determinamos el momento en A de la ecuación de equilibrio:

$$+\zeta \sum M_A = 0 \quad M_A - 1(10) = 0 \quad M_A = 10 \text{ k-ft}$$

Por lo tanto, el valor de la ordenada de la línea de influencia en C es 10 k-ft/k. Entonces se establece la ordenada en F considerando la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia obtenida de esta manera se muestra en la Fig. 8.10(d). **Respuesta**

Línea de influencia para S_B . Para eliminar la restricción correspondiente para el cortante en B, cortamos la viga en B para obtener la estructura liberada mostrada en la Fig. 8.10(e). Después, a esta se le aplica un pequeño desplazamiento, Δ , para conseguir la configuración deformada de la figura. El apoyo A está empotrado, así que la porción AB no se puede desplazar ni rotar como cuerpo rígido. Además, las porciones rígidas AB y BC deben permanecer paralelas una con la otra en la configuración deformada. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada, como se observa.

Los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia en B se determinan colocando sucesivamente una carga unitaria 1-k justo a la izquierda y a la derecha de B (Fig. 8.10(e)) y calculando los cortantes en B para las dos porciones de la carga unitaria. Las ordenadas en C y F se pueden establecer de la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia obtenida así se muestra en la Fig. 8.10(e). **Respuesta**

Línea de influencia para M_D . Se agrega una articulación interna en la viga en el punto D, y se aplica una pequeña rotación, θ , en D para obtener la configuración deformada que aparece en la Fig. 8.10(f). La forma de la línea de influencia es la misma que la de la configuración deformada de la estructura liberada, como se muestra en la figura.

Los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia en D se determinan colocando una carga unitaria 1-k en D y calculando el momento flexionante en D para esta posición de la carga unitaria (Fig. 8.10(f)). La ordenada en F entonces se calcula de la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia obtenida así se observa en la Fig. 8.10(f). **Respuesta**

Ejemplo 8.8

Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en los apoyos A y C de la viga mostrada en la Fig. 8.11(a).

Solución

Línea de influencia para A_y . Para obtener la forma general de la línea de influencia para A_y , eliminamos el apoyo de patín en A de la viga dada, y aplicamos un pequeño desplazamiento Δ en el punto A de la viga liberada, como se muestra en la Fig. 8.11(b). La forma de la línea de influencia es igual a la configuración deformada de la viga liberada, como se observa en la figura. Al notar que $A_y = 1 \text{ kN}$ cuando la carga de 1 kN está colocada en A, obtenemos el valor de 1 kN/kN para la ordenada de la línea de influencia en A. La línea de influencia conseguida así se muestra en la Fig. 8.11(b). **Respuesta.**

Línea de influencia para C_y . El patín de apoyo en C se elimina de la estructura dada, y se aplica un pequeño desplazamiento, Δ , en C para obtener la configuración deformada mostrada en la Fig. 8.11(c). Tenga en cuenta que la configuración deformada es consistente con la condición de apoyo de la viga liberada. La forma de la línea de influencia es la misma que la configuración deformada de la estructura liberada. Al darse cuenta que $C_y = 1 \text{ kN}$ cuando la carga de 1 kN está colocada en C, obtenemos el valor de 1 kN/kN para la ordenada de la línea de influencia en C. La ordenada en B y E se determinan de la geometría de la línea de influencia. La línea de influencia para C_y obtenida así se muestra en la Fig. 8.11(c).

Respuesta

continúa

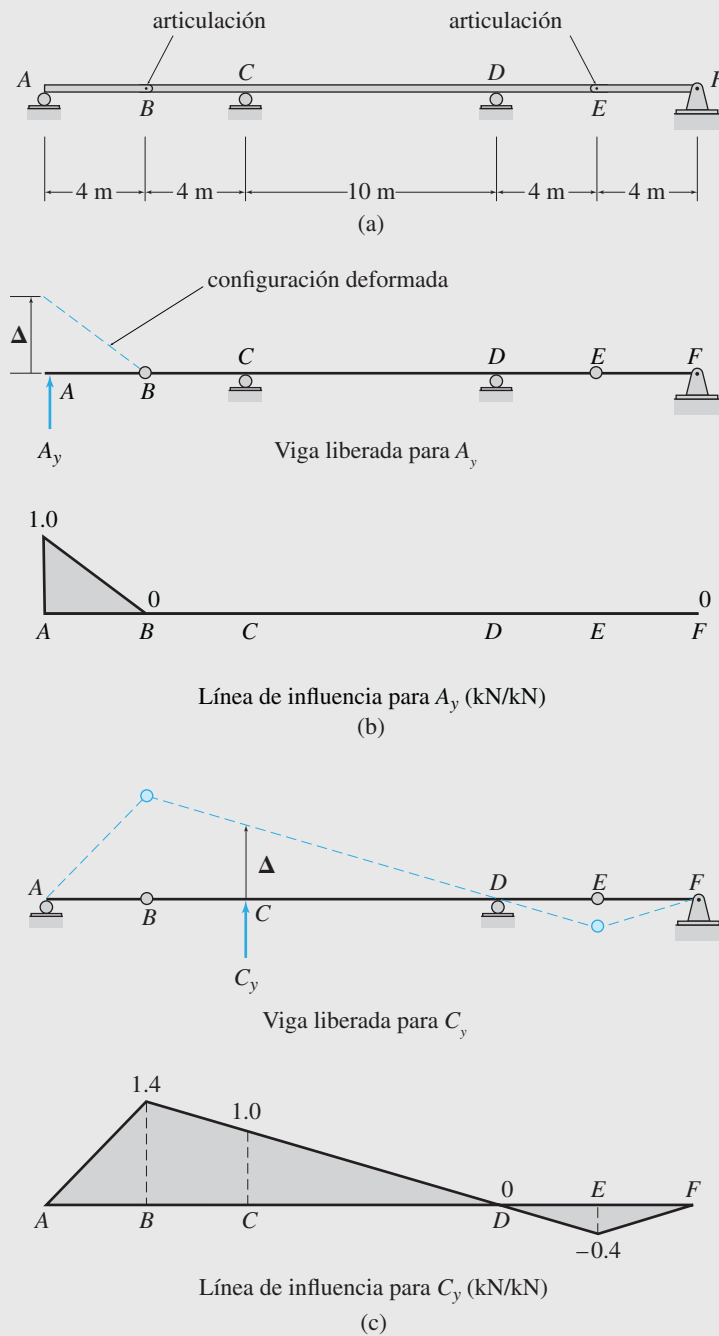


FIG. 8.11

8.3 Líneas de influencia para sistemas de vigas de piso

En la sección previa, consideramos las líneas de influencia de vigas que están sujetas a carga móvil unitaria aplicada directamente sobre la viga. En la mayoría de los puentes y edificios, hay muchos elementos estructurales que no están sujetos directamente a las cargas vivas pero las cuales se transmiten mediante el sistema de vigas de piso. Los sistemas típicos de vigas usados en

puentes y edificios se describieron en la Sección 1.4 (Fig. 1.13 y 1.14, respectivamente). Otro ejemplo de un sistema de vigas de un puente se muestra en la Fig. 8.12. La cubierta de un puente descansa sobre vigas llamadas largueros, las cuales están soportadas por un sistema de *vigas de piso*, y estas, a su vez, están apoyadas en vigas de carga o vigas principales. Por lo tanto, cualquier carga viva (por ejemplo, el peso del tránsito), independientemente de donde esté localizada en la cubierta o si está concentrada o distribuida, siempre se transmite a las vigas de carga como carga concentrada aplicada en puntos donde las vigas de carga soportan a las vigas de piso.

Para ilustrar el procedimiento para la obtención de las líneas de influencia de los cortantes o momentos flexionantes en las vigas principales que soportan a un puente o a un sistema de piso de un edificio, considere una viga de carga simplemente apoyada que se muestra en la Fig. 8.13(a). Como se indica, la carga unitaria se mueve de izquierda a derecha sobre los largueros, los cuales se supone están simplemente apoyados en las vigas de piso. El efecto de la carga unitaria se transmite a la viga principal en los puntos A y F , en los cuales la viga principal soporta a las vigas de piso. Los puntos A y F son comúnmente como puntos del tablero y las partes de la viga principal entre estos puntos (por ejemplo, AB o BC) se conocen como *paneles*. La Fig. 8.13(a) muestra los largueros descansando en la parte superior de las vigas de piso, las cuales descansan en la parte superior de la viga principal. Aunque estos esquemas se usan en el presente documento para ilustrar la manera como las cargas se transfieren de un elemento estructural a otro, en los sistemas de piso reales los elementos rara vez se apoyan en la parte superior del otro, como se ilustra en la Fig. 8.13(a). En realidad, los largueros y las vigas de piso se ubican generalmente para que sus bordes superiores queden alineados uno respecto al otro y que sus bordes inferiores queden más abajo o al mismo nivel que las vigas principales o de carga (ver Fig. 8.12).

Líneas de influencia para reacciones

Las ecuaciones para las líneas de influencia para las reacciones verticales A_y y F_y se pueden determinar aplicando las ecuaciones de equilibrio (Fig. 8.13(a)):

$$+\zeta \sum M_F = 0 \quad -A_y(L) + 1(L - x) = 0 \quad A_y = 1 - \frac{x}{L}$$

$$+\zeta \sum M_A = 0 \quad -1(x) + F_y(L) = 0 \quad F_y = \frac{x}{L}$$

Las líneas de influencia obtenidas graficando estas ecuaciones se muestran en la Fig. 8.13(b) y (c). Tenga en cuenta que estas líneas de influencia son idénticas a aquellas para las reacciones de vigas simplemente apoyadas en las cuales la carga unitaria se aplica directamente.

Líneas de influencia para cortante en el panel BC

Después, suponga que deseamos obtener las líneas de influencia para el cortante en los puntos G y H , los cuales se localizan en el panel BC , como se muestra en la Fig. 8.13(a). Cuando la carga unitaria se ubica a la izquierda del punto B del panel, el cortante en cualquier punto dentro del panel BC (por ejemplo, los puntos G y H) pueden expresarse como

$$S_{BC} = -F_y = -\frac{x}{L} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{5}$$

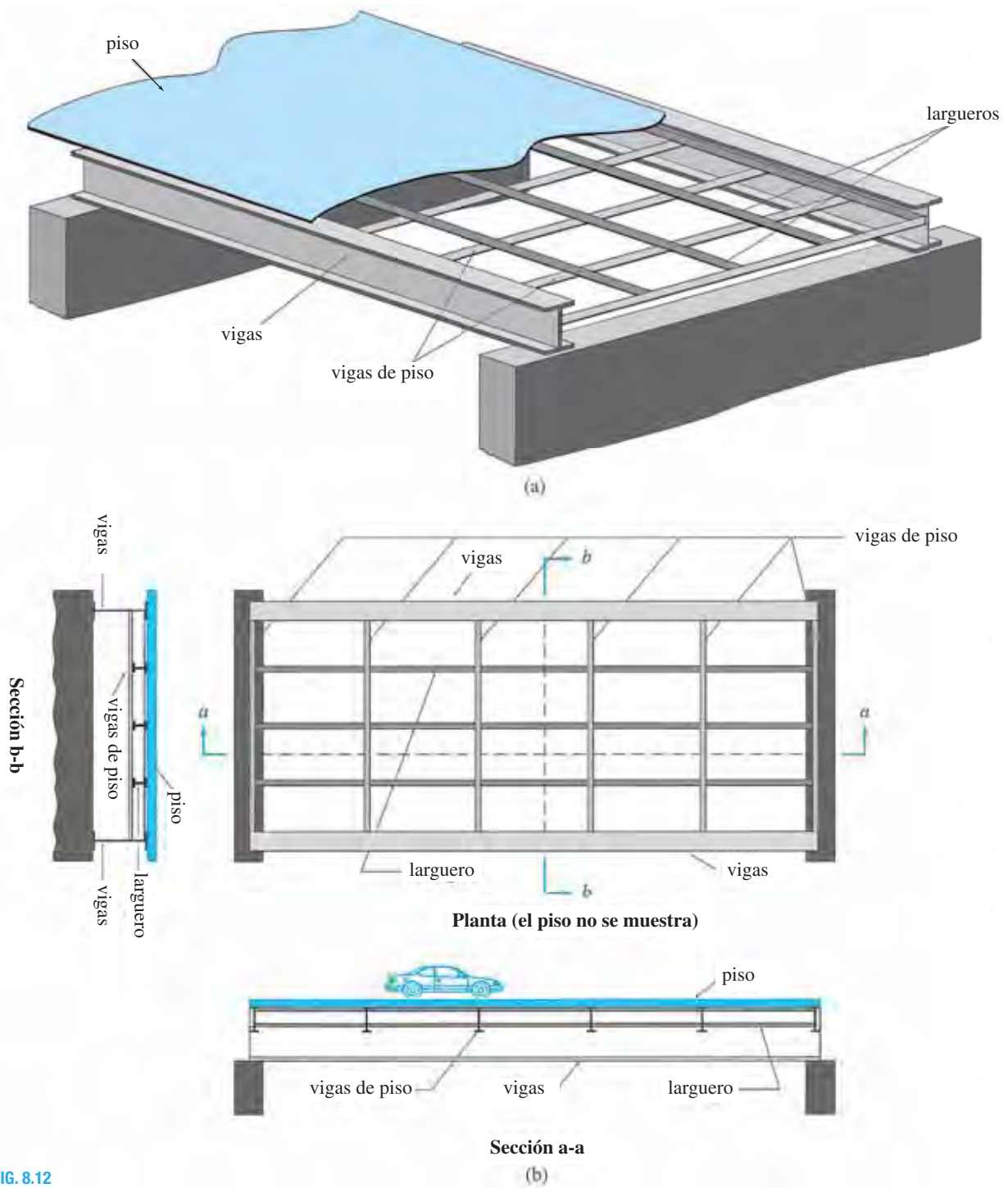
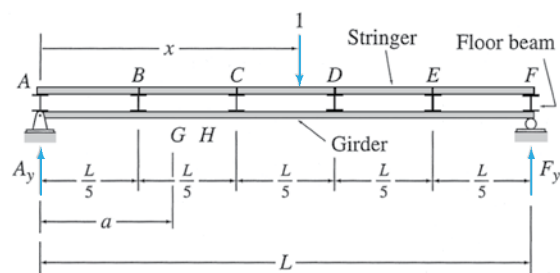
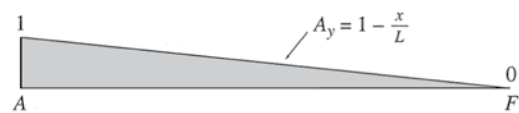
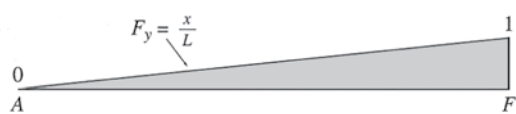
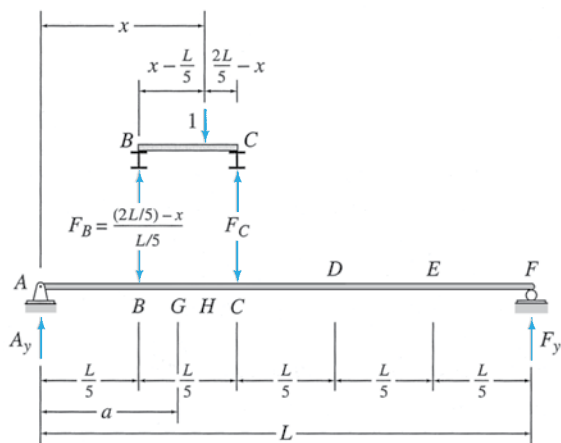


FIG. 8.12



(a)


 (b) línea de influencia para A_y

 (c) línea de influencia para F_y


(d)

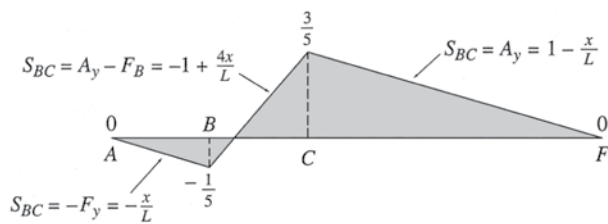
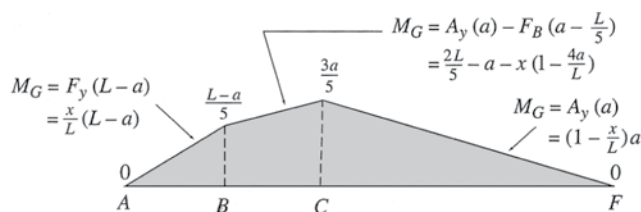
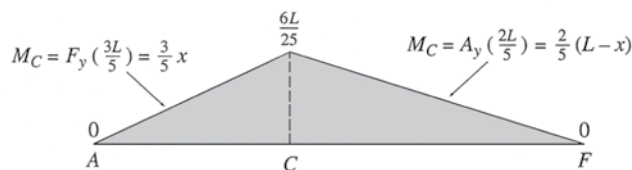

 (e) línea de influencia para S_{BC}

 (f) línea de influencia para M_G

 (g) línea de influencia para M_C

FIG. 8.13

De manera similar, cuando la carga unitaria se coloca a la derecha del punto C del panel, el cortante en cualquier punto dentro del panel BC está dado por

$$S_{BC} = A_y = 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{2L}{5} \leq x \leq L$$

Cuando la carga unitaria se localiza en el panel BC , como se muestra en la Fig. 8.13(d), la fuerza F_B ejercida en la viga principal por la viga de piso en B debe de incluirse en la expresión para el cortante en el panel BC :

$$S_{BC} = A_y - F_B = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \left(2 - \frac{5x}{L}\right) = -1 + \frac{4x}{L} \quad \frac{L}{5} \leq x \leq \frac{2L}{5}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para S_{BC} se pueden escribir como

$$S_{BC} = \begin{cases} -F_y = -\frac{x}{L} & 0 \leq x \leq \frac{L}{5} \\ A_y - F_B = -1 + \frac{4x}{L} & \frac{L}{5} \leq x \leq \frac{2L}{5} \\ A_y = 1 - \frac{x}{L} & \frac{2L}{5} \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.13)$$

Estas expresiones para el cortante no dependen de la ubicación exacta del punto dentro del panel, es decir, permanecen iguales para todos los puntos localizados dentro del panel BC . Estas expresiones no cambian debido a que las cargas se transfieren a la viga principal en los puntos del panel únicamente; por lo tanto, *el cortante en cualquier panel de la viga principal permanece constante a lo largo de la longitud de ese panel*. Así, para vigas principales con sistema de piso, las líneas de influencia del cortante se construyen mediante paneles en lugar de para puntos a lo largo de la viga. La línea de influencia para el cortante en el panel BC se obtiene mediante la Ec. (8.13) y se ilustra en la Fig. 8.13(e).

Líneas de influencia para momento flexionante en G

La línea de influencia para el momento flexionante en el punto G , localizado en el panel BC (Fig. 8.13(a)), se puede construir usando un procedimiento similar. Cuando la carga unitaria se encuentra a la izquierda del punto B del panel, el momento flexionante en G se puede expresar como

$$M_G = F_y (L - a) = \frac{x}{L} (L - a) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{5}$$

Cuando la carga unitaria se localiza a la derecha del punto C del panel, el momento flexionante en G está dado por

$$M_G \leq A_y(a) \leq \left(1 - \frac{x}{L}\right)a \quad \frac{2L}{5} \leq x \leq L$$

Cuando la carga unitaria se ubica dentro del panel BC , como se muestra en la Fig. 8.13(d), el momento de la fuerza F_B ejercida sobre la viga principal por la viga de piso en B , alrededor de G , se debe incluir en la expresión para momento flexionante en G :

$$\begin{aligned} M_G &= A_y(a) - F_B \left(a - \frac{L}{5}\right) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)a - \left(2 - \frac{5x}{L}\right)\left(a - \frac{L}{5}\right) \\ &= \frac{2L}{5} - a - x \left(1 - \frac{4a}{L}\right) \quad \frac{L}{5} \leq x \leq \frac{2L}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para M_G se pueden escribir como

$$M_G = \begin{cases} F_y(L-a) = \frac{x}{L}(L-a) & 0 \leq x \leq \frac{L}{5} \\ A_y(a) - F_B\left(a - \frac{L}{5}\right) = \frac{2L}{5} - a - x\left(1 - \frac{4a}{L}\right) & \frac{L}{5} \leq x \leq \frac{2L}{5} \\ A_y(a) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)a & \frac{2L}{5} \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.14)$$

La Ec. (8.14) indica que a diferencia del cortante, el cual permanece constante a través del panel, las expresiones para el momento flexionante dependen de la ubicación específica del punto G dentro del panel BC . La línea de influencia de M_G , obtenida graficando la Ec. (8.14), se muestra en la Fig. 8.13(f). En esta figura se puede ver que la línea de influencia de M_G , como la línea de influencia para el cortante determinada previamente (Fig. 8.13(e)), consiste de tres segmentos de línea recta, con discontinuidades en los extremos del panel que contiene la función de respuesta en consideración.

Líneas de influencia para momento flexionante en el punto C del panel

Cuando la carga unitaria se encuentra a la izquierda de C (Fig. 8.13(a)), el momento flexionante en C está dado por

$$M_C = F_y\left(\frac{3L}{5}\right) = \frac{x}{L}\left(\frac{3x}{5}\right) = \frac{3}{5}x \quad 0 \leq x \leq \frac{2L}{5}$$

Cuando la carga unitaria se localiza a la derecha de C :

$$M_C = A_y\left(\frac{2L}{5}\right) = \left(1 - \frac{3x}{5}\right)\frac{2L}{5} = \frac{2}{5}(L-x) \quad \frac{2L}{5} \leq x \leq L$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la línea de influencia para M_C se pueden escribir como

$$M_C = \begin{cases} F_y\left(\frac{3L}{5}\right) = \frac{3}{5}x & 0 \leq x \leq \frac{2L}{5} \\ A_y\left(\frac{2L}{5}\right) = \frac{2}{5}(L-x) & \frac{2L}{5} \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.15)$$

La línea de influencia obtenida graficando estas ecuaciones se muestra en la Fig. 8.13(g). Tenga en cuenta que la línea de influencia es idéntica a la que se consiguió para el momento flexionante de una viga correspondiente sin sistema de piso.

Procedimiento de análisis

Como el ejemplo anterior indica, las líneas de influencia para las vigas principales que soportan un sistema de piso con largueros simplemente apoyados consiste en segmentos de línea recta con discontinuidades o cambios en las pendientes que se presentan solo en los puntos del panel. En las líneas de

influencia para cortante y momento flexionante en puntos localizados dentro de los paneles, los cambios en la pendiente ocurren en los puntos extremos del panel que contienen la función de respuesta (Fig. 8.13(e) y (f)), mientras que en las líneas de influencia del momento flexionante en los puntos del panel, el cambio en la pendiente ocurre en el punto del panel donde el momento flexionante se calcula. Las líneas de influencia para vigas pueden, por lo tanto, establecerse convenientemente como sigue.

Determine las ordenadas de la línea de influencia en los puntos de apoyo y en los puntos del panel donde los cambios de pendiente se presentan colocando una carga unitaria sucesivamente en cada uno de estos puntos, y aplique las ecuaciones de equilibrio. En el caso de una línea de influencia para momento flexionante en el punto del panel de una viga en cantiliver, la ordenada de la línea de influencia en la ubicación del momento flexionante será cero.

Si la viga contiene articulaciones internas, su línea de influencia será discontinua en los puntos del panel donde se localizan las articulaciones. Si una articulación interna se encuentra dentro del panel, entonces las discontinuidades serán en los puntos extremos del panel. Determine las ordenadas de la línea de influencia en los puntos del panel donde las discontinuidades tienen origen debido a la presencia de articulaciones internas colocando la carga unitaria en estos puntos y aplicando las ecuaciones de equilibrio y/o de condición.

Termine la línea de influencia conectando las ordenas previamente calculadas con líneas rectas y determinando cualquier ordenada faltante usando la geometría de la línea de influencia.

Ejemplo 8.9

Dibuje las líneas de influencia del cortante en el panel BC y el momento flexionante en B de la viga principal con el sistema de piso en la Fig. 8.14(a).

Solución

Línea de influencia para S_B . Para establecer la línea de influencia para el cortante en el panel BC , colocamos una carga de 1 k sucesivamente en los puntos A , B y C del panel. Para cada posición de la carga unitaria, se determina primero la reacción apropiada por proporciones, y el cortante en el panel BC se calcula, por lo tanto, cuando

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ k is at } A, & D_y = 0 & S_{BC} = 0 \\ 1 \text{ k is at } B, & D_y = \frac{1}{3} \text{ k} & S_{BC} = -\frac{1}{3} \text{ k} \\ 1 \text{ k is at } C, & A_y = \frac{1}{3} \text{ k} & S_{BC} = \frac{1}{3} \text{ k} \\ 1 \text{ k is at } D, & A_y = 0 & S_{BC} = 0 \end{array}$$

La línea de influencia para S_B se construye graficando estas ordenadas y conectándolas mediante líneas rectas, como se muestra en la Fig. 8.14(c).

Respuesta

continúa

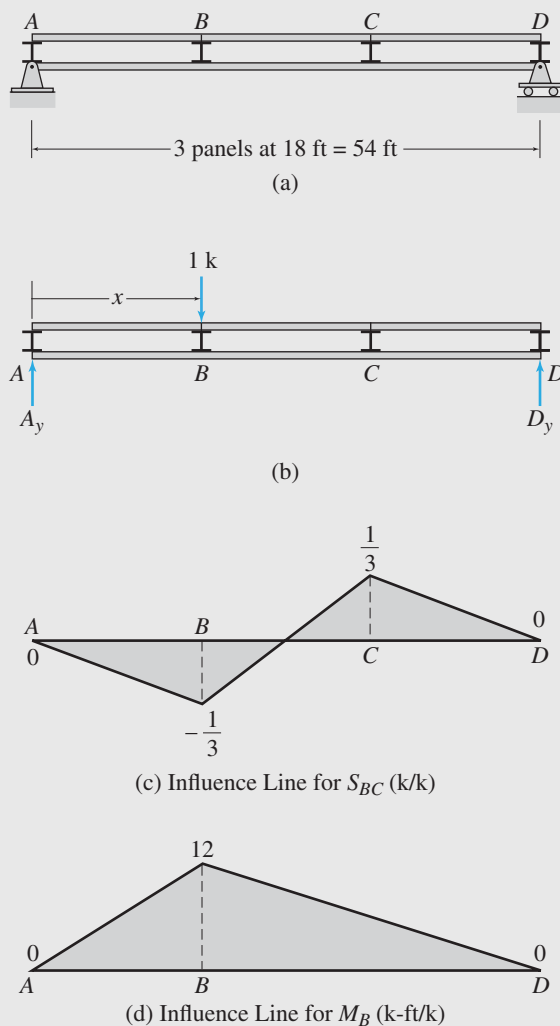


FIG. 8.14

Línea de influencia para M_B . Para determinar la línea de influencia para el momento flexionante en el punto B del panel, colocamos una carga sucesiva de 1 k en los puntos A , B y D . En cada posición de la carga unitaria, calculamos el momento flexionante en B como sigue: cuando

$$\begin{array}{lll}
 1 \text{ k is at } A, & D_y = 0 & M_B = 0 \\
 1 \text{ k is at } B, & A_y = \frac{2}{3} \text{ k} & M_B = \left(\frac{2}{3}\right) 18 = 12 \text{ k-ft} \\
 1 \text{ k is at } D, & A_y = 0 & M_B = 0
 \end{array}$$

La línea de influencia para M_B obtenido así se muestra en la Fig. 8.14(d).

Respuesta

Ejemplo 8.10

Dibuje las líneas de influencia del cortante en el panel CD y el momento flexionante en D de la viga principal con el sistema de piso de la Fig. 8.15(a).

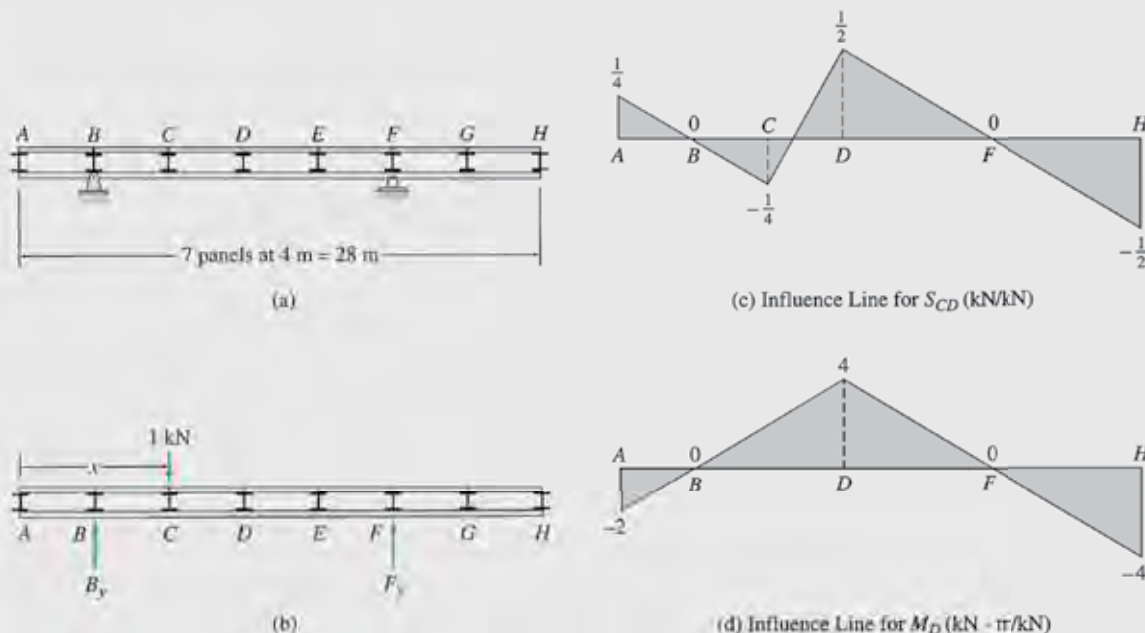


FIG. 8.15

Solución

Línea de influencia para S_{CD} . Para determinar la línea de influencia para el cortante en el panel CD , colocamos una carga de 1 k sucesivamente en los puntos B , C , F y D del panel. Para cada posición de la carga unitaria, se establece primero la reacción apropiada por proporciones, y el cortante en el panel CD se calcula, por lo tanto, cuando

$$\begin{array}{lll}
 1 \text{ kN is at } B, & F_y = 0 & S_{CD} = 0 \\
 1 \text{ kN is at } C, & F_y = \frac{1}{4} \text{ kN} & S_{CD} = -\frac{1}{4} \text{ kN} \\
 1 \text{ kN is at } D, & B_y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ kN} & S_{CD} = \frac{1}{2} \text{ kN} \\
 1 \text{ kN is at } F, & B_y = 0 & S_{CD} = 0
 \end{array}$$

La línea de influencia para S_{CD} se construye graficando estas ordenadas y conectándolas mediante líneas rectas, como se muestra en la Fig. 8.15(c). Las ordenadas en los extremos A y H de la viga se determinan de la geometría de la línea de influencia.

Respuesta

Línea de influencia para M_D . Para determinar la línea de influencia para el momento flexionante en el punto D , colocamos una carga de 1-kN sucesivamente en los puntos B , D y F del panel. Para cada posición de la carga unitaria, calculamos el momento flexionante en D como sigue: cuando

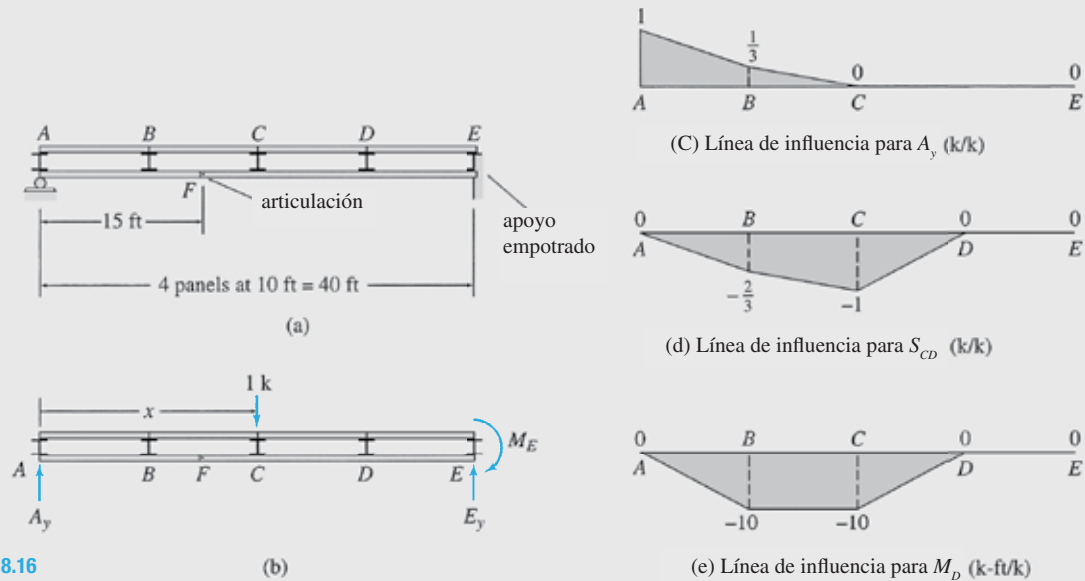
$$\begin{array}{lll}
 1 \text{ kN is at } B, & F_y = 0 & M_D = 0 \\
 1 \text{ kN is at } D, & B_y = \frac{1}{2} \text{ kN} & M_D = \left(\frac{1}{2}\right) 8 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 1 \text{ kN is at } F, & B_y = 0 & M_D = 0
 \end{array}$$

La línea de influencia para M_D obtenido así se muestra en la Fig. 8.15(d).

Respuesta

Ejemplo 8.11

Dibuje las líneas de influencia de la reacción en el apoyo A, del cortante en el panel CD, y del momento flexionante en D de la viga principal o de carga del sistema de piso de la Fig. 8.16(a).


FIG. 8.16
Solución

Línea de influencia para A_y . Para obtener la línea de influencia para la reacción A_y , colocamos una carga de 1-k sucesivamente en los puntos del panel A, B y C. Para cada posición de la carga calculamos la magnitud de A_y aplicando la ecuación de condición $\sum M_F^{AF} = 0$. Por lo tanto, cuando

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ k is at A,} & A_y &= 1 \text{ k} \\
 &1 \text{ k is at B,} & + \zeta \sum M_F^{AF} &= 0 \\
 & & -A_y(15) + 1(5) &= 0 & A_y &= \frac{1}{3} \text{ k} \\
 &1 \text{ k is at C,} & + \zeta \sum M_F^{AF} &= 0 \\
 & & -A_y(15) &= 0 & A_y &= 0
 \end{aligned}$$

La línea de influencia para A_y obtenida así se muestra en la Fig. 8.16(c).

Respuesta

Línea de influencia para S_{CD} . Colocamos una carga de 1-k sucesivamente en cada uno de los cinco puntos del panel y determinamos las ordenadas de la línea de influencia como sigue: cuando

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ k is at A,} & A_y &= 1 \text{ k} & S_{CD} &= 0 \\
 &1 \text{ k is at B,} & A_y &= \frac{1}{3} \text{ k} & S_{CD} &= \left(\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{2}{3} \text{ k} \\
 &1 \text{ k is at C,} & A_y &= 0 & S_{CD} &= -1 \text{ k} \\
 &1 \text{ k is at D,} & A_y &= 0 & S_{CD} &= 0 \\
 &1 \text{ k is at E,} & A_y &= 0 & S_{CD} &= 0
 \end{aligned}$$

La línea de influencia para S_{CD} obtenida así se muestra en la Fig. 8.16(d).

Respuesta

continúa

Línea de influencia para M_D . Colocamos una carga de 1-k sucesivamente en cada uno de los cinco puntos del panel y determinamos las ordenadas de la línea de influencia como sigue: cuando

$$1 \text{ k is at } A, \quad A_y = 1 \text{ k} \quad M_D = 0$$

$$1 \text{ k is at } B, \quad A_y = \frac{1}{3} \text{ k} \quad M_D = \left(\frac{1}{3}\right)30 - 1(20) = -10 \text{ k-ft}$$

$$1 \text{ k is at } C, \quad A_y = 0 \quad M_D = -1(10) = -10 \text{ k-ft}$$

$$1 \text{ k is at } D, \quad A_y = 0 \quad M_D = 0$$

$$1 \text{ k is at } E, \quad A_y = 0 \quad M_D = 0$$

La línea de influencia para M_D obtenida así se muestra en la Fig. 8.16(e).

Respuesta

8.4 Líneas de influencia para armaduras

Los sistemas de piso usados comúnmente para transmitir cargas vivas a las armaduras son similares a los empleados en las vigas principales, discutido en la sección anterior. La Fig. 8.17 muestra un sistema de piso típico para un puente de armadura, descrito previamente en la Sección 1.4 (Fig. 1.13). El piso de un puente descansa en los largueros que están apoyados en las vigas de piso, las cuales, a su vez, están conectadas en sus extremos a los nodos de las cuerdas inferiores de las dos armaduras longitudinales. Por lo tanto, cualquier carga viva (por ejemplo, el peso del tránsito), independientemente de donde se localicen en el piso y de si las cargas están concentradas o distribuidas, siempre se transmiten a las armaduras como cargas concentradas aplicadas en los nodos. Las cargas vivas se transfieren al techo de las armaduras de manera similar. Como en el caso de las vigas en los sistemas de piso, los largueros del sistema de piso de las armaduras se suponen simplemente apoyados en sus extremos en las vigas de piso adyacentes. Así, las líneas de influencia para armaduras también contienen segmentos de líneas rectas entre los puntos del panel.

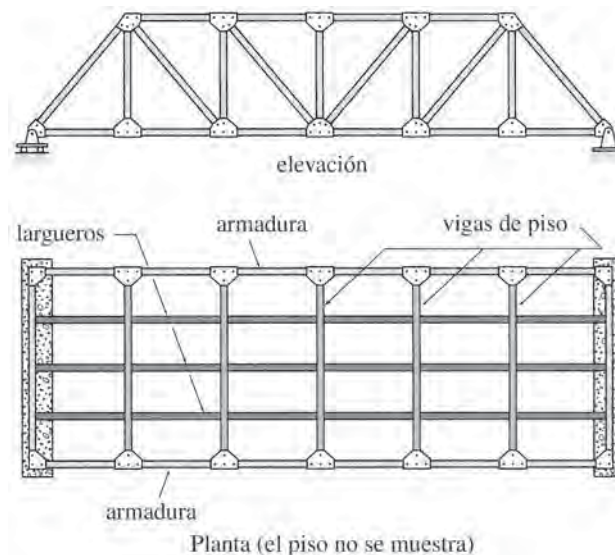


FIG. 8.17

Para ilustrar la construcción de las líneas de influencia de armaduras, considere la armadura de puente Pratt que se muestra en la Fig. 8.18(a). Una carga unitaria (1 ton) se mueve de izquierda a derecha en los largueros del sistema de piso conectados a la cuerda inferior AG de la armadura. El efecto de la carga unitaria se transmite a la armadura en los nodos (o puntos del panel) de A a G , donde las vigas de piso están conectadas a la armadura. Suponga que deseamos dibujar las líneas de influencia de las reacciones verticales en el apoyo A y E y las fuerzas axiales en los elementos CJ , CD , DI , IJ y FL de la armadura.

Línea de influencia para reacciones

Las ecuaciones de las líneas de influencia de las reacciones verticales, A_y y E_y , se pueden determinar aplicando las ecuaciones de equilibrio (Fig. 8.18(b)):

$$+\zeta \sum M_E = 0 \quad -A_y(60) + 1(60 - x) = 0 \quad A_y = 1 - \frac{x}{60}$$

$$+\zeta \sum M_A = 0 \quad -1(x) + E_y(60) = 0 \quad E_y = \frac{x}{60}$$

Las líneas de influencia obtenidas graficando estas ecuaciones se muestran en las Figs. 8.18(c) y (d). Tenga en cuenta que las líneas de influencia son idénticas a las de las reacciones de la viga en la cual la carga unitaria se aplica directamente.

Línea de influencia para las fuerzas en el elemento vertical CI

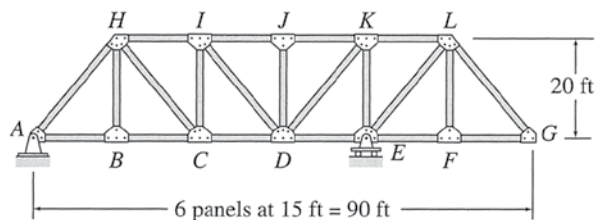
Las expresiones para las fuerzas en los elementos F_{CI} pueden determinarse trazando una sección imaginaria aa a través de los elementos CD , CI y HI , como se muestra en la Fig. 8.18(e), y aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ a una de las dos porciones de la armadura. Se puede apreciar de la Fig. 8.18(e) que cuando la carga unitaria de 1 ton se localiza a la izquierda del nodo C —es decir, en la parte de AC de la armadura—, entonces F_{CI} puede establecerse considerando el equilibrio del cuerpo libre de la parte derecha DG como

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -F_{CI} + E_y = 0 \quad F_{CI} = E_y \quad 0 \leq x \leq 30 \text{ ft}$$

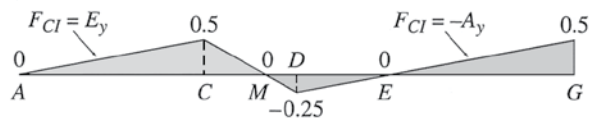
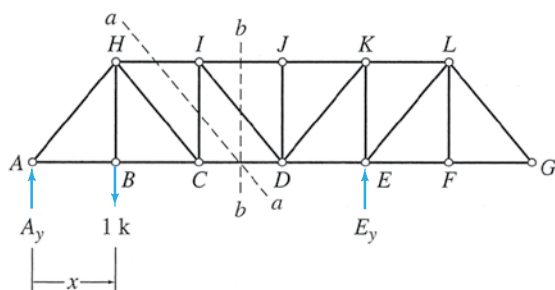
La cual indica que el segmento de línea de influencia para F_{CI} entre A y C es idéntico al segmento correspondiente de la línea de influencia para E_y . Cuando la carga unitaria de 1 k se ubica a la derecha del nodo D , es conveniente determinar F_{CI} usando el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda AC :

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + F_{CI} = 0 \quad F_{CI} = -A_y \quad 45 \text{ ft} \leq x \leq 90 \text{ ft}$$

Esto quiere decir que el segmento de la línea de influencia para F_{CI} entre D y G se puede obtener multiplicando la porción correspondiente de la línea de influencia para A_y por -1 . Los segmentos de la línea de influencia para F_{CI} entre A y C y entre D y G así construidas de las líneas de influencia para E_y y A_y , respectivamente, usando las expresiones anteriores se muestran en la Fig. 8.18(f). Cuando la carga unitaria de 1 k se encuentra entre C y D , la parte de la carga transmitida a la armadura por la viga de



(a)


(f) Línea de influencia para F_{Ci} (k/k)


(b)

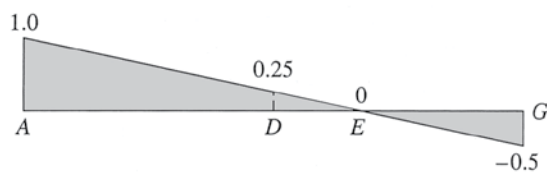
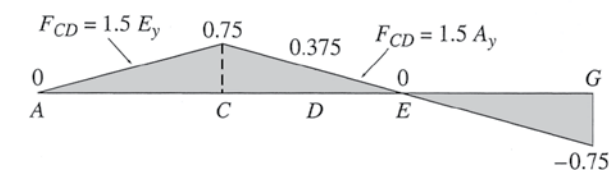
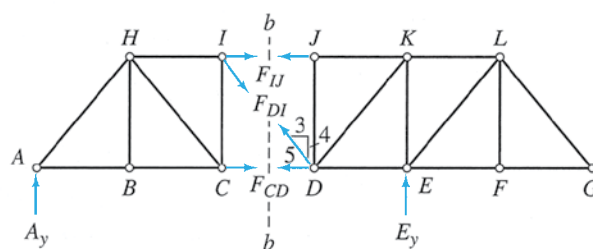
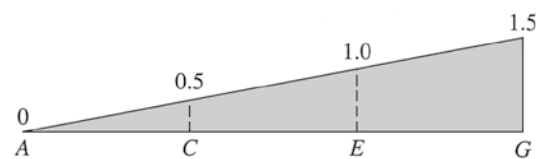
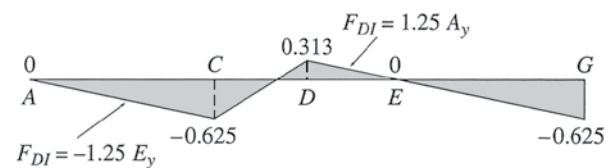
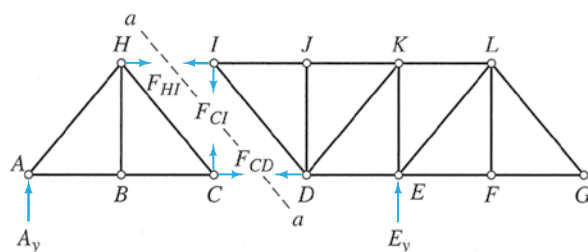
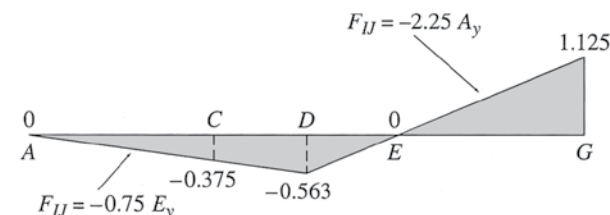

(c) Línea de influencia para A_y (k/k)

(g) Influence Line for F_{CD} (k/k)

(h) Section bb

(d) Línea de influencia para E_y

(i) Línea de influencia para F_{Di} (k/k)

(e) Section aa

(j) Línea de influencia para F_{ij} (k/k)

FIG. 8.18

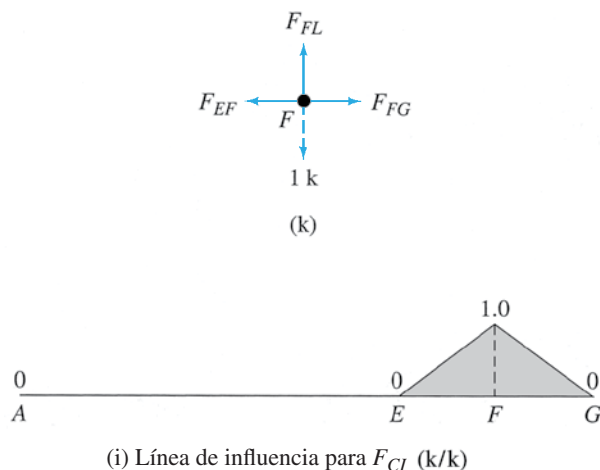


FIG. 8.18 (cont.)

piso en C, $F_C = (45 - x)/15$, debe ser incluido en la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ de la parte izquierda AC para obtener F_{CI} :

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - \left(\frac{45 - x}{15}\right) + F_{CI} = 0$$

$$F_{CI} = -A_y + \left(\frac{45 - x}{15}\right)$$

$$30 \text{ ft} \leq x \leq 45 \text{ ft}$$

Por lo tanto, la línea de influencia para F_{CI} está compuesta de tres segmentos de línea recta, como se muestra en la Fig. 8.18(f). Dado que la fuerza del elemento F_{CI} se asumió como fuerza de tensión (Fig. 8.18(c)) en la obtención de las ecuaciones de la línea de influencia, una ordenada positiva de la línea de influencia indica que la carga unitaria de 1 k aplicada en ese punto genera fuerza de tensión en el elemento CI y viceversa. Por lo tanto, la línea de influencia para F_{CI} (Fig. 8.18(f)) indica que el elemento CI estará en tensión cuando la carga unitaria de 1 k se encuentre entre A y M y entre E y G, mientras esté en compresión cuando se coloca la carga unitaria entre M y E.

Línea de influencia de las fuerzas en la cuerda inferior del elemento CD

Las expresiones para las fuerzas en los elementos F_{CD} se pueden determinar considerando la misma sección aa usada para F_{CI} , pero aplicando la ecuación de equilibrio de momento $\sum M_I = 0$. Se puede ver de la Fig. 8.18(e) que en el momento en que la carga unitaria de 1 ton se localiza a la izquierda del nodo C, entonces F_{CD} se puede determinar convenientemente considerando el equilibrio del cuerpo libre de la parte derecha DG de la armadura:

$$+\zeta \sum M_I = 0 \quad -F_{CD}(20) + E_y(30) = 0$$

$$F_{CD} = 1.5E_y \quad 0 \leq x \leq 30 \text{ ft}$$

Lo cual indica que el segmento de la línea de influencia de F_{CD} entre A y C se puede obtener multiplicando el segmento correspondiente de la línea de

influencia de E_y por 1.5. Cuando la carga unitaria de 1 k se ubica a la derecha de C , es conveniente determinar F_{CD} usando el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda AC :

$$+\zeta \sum M_I = 0 \quad -A_y(30) + F_{CD}(20) = 0$$

$$F_{CD} = 1.5A_y \quad 10 \text{ ft} \leq x \leq 90 \text{ ft}$$

Esto señala que el segmento de línea de influencia para F_{CD} entre C y G se puede obtener multiplicando el segmento correspondiente de la línea de influencia de A_y por 1.5. La línea de influencia para F_{CD} construida de esta manera de las líneas de influencia de A_y y E_y se muestra en la Fig. 8.18(g).

La línea de influencia de F_{CD} se podría determinar alternativamente considerando la sección vertical bb pasando a través de los elementos CD , DI , e IJ , como se muestra en la Fig. 8.18(h), en lugar de la sección inclinada aa .

Línea de influencia de la fuerza en el elemento diagonal DI

Las expresiones para F_{DI} se pueden obtener considerando la sección bb (Fig. 8.18(h)) y aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ a una de las dos porciones o partes de la armadura. Cuando la carga unitaria se localiza a la izquierda del nodo C , aplicando al ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ a la parte derecha DG de la armadura resulta

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{4}{5}F_{DI} + E_y = 0$$

$$F_{DI} = -1.25A_y \quad 0 \leq x \leq 30 \text{ ft}$$

Cuando la carga unitaria de 1 k se ubica a la derecha del nodo D , escribimos

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad -A_y - \frac{4}{5}F_{DI} = 0$$

$$F_{DI} = -1.25E_y \quad 15 \text{ ft} \leq x \leq 90 \text{ ftm}$$

Los segmentos de línea de influencia para F_{DI} entre A y C y entre D y G así determinados de la línea de influencia de E_y y A_y , respectivamente, se muestran en la Fig. 8.18(i). Las ordenadas en C y D están conectadas por líneas rectas para completar la línea de influencia de F_{DI} , como se observa en la figura.

Línea de influencia de la fuerza en la cuerda superior diagonal IJ

Considerando la sección bb (Fig. 8.18(h)), y colocando primero la carga unitaria a la izquierda y luego a la derecha del nodo D , obtenemos las siguientes expresiones para F_{IJ} :

$$+\zeta \sum M_D = 0$$

$$F_{IJ}(20) + E_y(15) = 0$$

$$F_{IJ} = -0.75E_y \quad 0 \leq x \leq 45 \text{ ftm}$$

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_D &= 0 \\
 -A_y(45) + F_{IJ}(20) &= 0 \\
 F_{IJ} &= -2.25A_y \quad 15 \text{ ft} \leq x \leq 90 \text{ ft}
 \end{aligned}$$

La línea de influencia para F_{IJ} obtenida se muestra en la Fig. 8.18(j).

Línea de influencia de la fuerza en el elemento vertical FL

La línea de influencia para F_{FL} se puede construir considerando el equilibrio del nodo F . El diagrama de cuerpo libre de este nodo se muestra en la Fig. 8.18(k). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ al cuerpo libre del nodo F , determinados que F_{FL} es cero cuando la carga 1 k se encuentra en los nodos de A a E , y en el nodo G , y que $F_{FL} = 1$ k cuando la carga unitaria se aplica en el nodo F . Así, las ordenadas de la línea de influencia en F son igual a 1, mientras que las ordenadas en A y hasta E y G son cero. La línea de influencia para F_{FL} , obtenida uniendo estas ordenadas con líneas rectas, se muestra en la Fig. 8.18(l). Como la línea de influencia indica, la fuerza en el elemento FL no será cero solo cuando la carga unitaria se localice en los paneles EF y FG de la armadura.

Procedimiento de análisis

Las líneas de influencia para las reacciones de las armaduras se pueden obtener usando el mismo procedimiento empleado para las reacciones de las vigas descrito en las secciones 8.1 y 8.2.

Quizás, el procedimiento más directo puede ser considerablemente más ágil para construir las líneas de influencia para las fuerzas axiales en los elementos de las armaduras más comunes, así se aplica una carga sucesivamente en cada unión de la armadura y de cada posición de la unidad de carga para determinar la magnitud de la fuerza del elemento considerado mediante el método de las articulaciones y/o de las secciones. Las ordenadas de la línea de influencia de este modo se calculan unidas por líneas rectas para obtener la línea de influencia deseada. Este procedimiento en general, resulta ser muy lento para la construcción de las líneas de influencia para la mayoría de los miembros de una armadura, a excepción de los elementos verticales que están conectados en un extremo a dos miembros horizontales (por ejemplo, los elementos BH , DJ y FL de la armadura mostrada en la Fig. 8.18 (a)), cuyas fuerzas pueden calcularse por inspección.

El siguiente procedimiento alternativo agiliza considerablemente la construcción de las líneas de influencia de las fuerzas axiales en los miembros de los tipos más comunes de armazones:

1. Dibuje las líneas de influencia para las reacciones de las armaduras dadas.
2. Usando el método de las secciones o el método de los nodos, obtenga la ecuación de equilibrio que se utilizará para determinar las expresiones de la fuerza en el elemento del cual se desea la línea de influencia. La fuerza del elemento deseada debe ser la única incógnita en la ecuación de equilibrio. Si tal ecuación de equilibrio no puede encontrarse, entonces será necesario construir líneas de influencia para otras fuerzas en los elementos que aparezcan en la ecuación antes de que se determine la línea de influencia deseada (ver Ejemplos 8.12 y 8.13).

3. Si se usa el método de las secciones, entonces aplique la carga unitaria a la izquierda del extremo izquierdo del panel a través del cual la sección pasa, y determine la expresión para la fuerza en el elemento aplicando la ecuación de equilibrio del cuerpo libre de la armadura a la derecha de la sección. Después, aplique la carga unitaria a la derecha del extremo derecho del panel seccionado, y establezca la expresión para la fuerza en el elemento aplicando la ecuación de equilibrio al cuerpo libre de la izquierda de la sección. Construya la línea de influencia graficando la expresión de la fuerza en el elemento uniendo las ordenadas en los extremos del panel seccionado mediante líneas rectas.
4. Cuando utilice el método de los nodos, si el nodo considerado no se ubica en la cuerda de la armadura con carga, entonces determine la expresión de la fuerza del elemento deseada directamente aplicando la ecuación de equilibrio del cuerpo libre considerando el equilibrio del nodo. De otra manera, aplique la carga unitaria al nodo en consideración y determine la magnitud de la fuerza en el elemento considerando el equilibrio del nodo. Después, establezca la expresión para la fuerza en el elemento para una posición de la carga unitaria afuera del panel adyacente al nodo en consideración. Finalmente, conecte los segmentos de línea de influencia y las ordenadas obtenidas de esta manera mediante líneas rectas para completar la línea de influencia.

Si la fuerza en el elemento fue inicialmente supuesta en tensión en la deducción de las ecuaciones de la línea de influencia, entonces, una ordenada positiva de la línea de influencia indica que la carga unitaria aplicada en el punto genera fuerza de tensión en el elemento y viceversa.

Ejemplo 8.12

Dibuje las líneas de las fuerzas en los elementos AF , CF y CG de la armadura Parker mostrada en la Fig. 8.19(a). Las cargas vivas son transmitidas en la cuerda inferior de la armadura.

Solución

Línea de influencia para las reacciones. Las líneas de influencia para las reacciones A_y y E_y (Fig. 8.19(b)), obtenidas aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum M_E = 0$ y $\sum M_A = 0$, respectivamente, al cuerpo libre de la armadura completa, se muestran en las Figs. 8.19(c) y (d).

Líneas de influencia para F_{AF} . Las expresiones para F_{AF} se pueden determinar aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ al diagrama de cuerpo libre del nodo A mostrado en la Fig. 8.19(e). Cuando la carga de 1-k está en el nodo A , tenemos

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 1 + \frac{3}{5}F_{AF} = 0$$

Debido a que $A_y = 1$ k (ver Fig. 8.19(c)), obtenemos

$$F_{AF} = 0 \quad \text{for } x = 0$$

Cuando la carga de 1-k se ubica a la derecha del nodo B , obtenemos

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + \frac{3}{5}F_{AF} = 0$$

$$F_{AF} = -1.667A_y \quad 20 \text{ ft} \leq x \leq 80 \text{ ft}$$

continúa

Por lo tanto, el segmento de línea de influencia para F_{AF} entre B y E se obtiene multiplicando el segmento correspondiente a la línea de influencia para A_y entre -1.667 , como se muestra en la Fig.8.19(f). Las ordenadas en A y B se unen mediante líneas rectas para completar la línea de influencia.

Respuesta

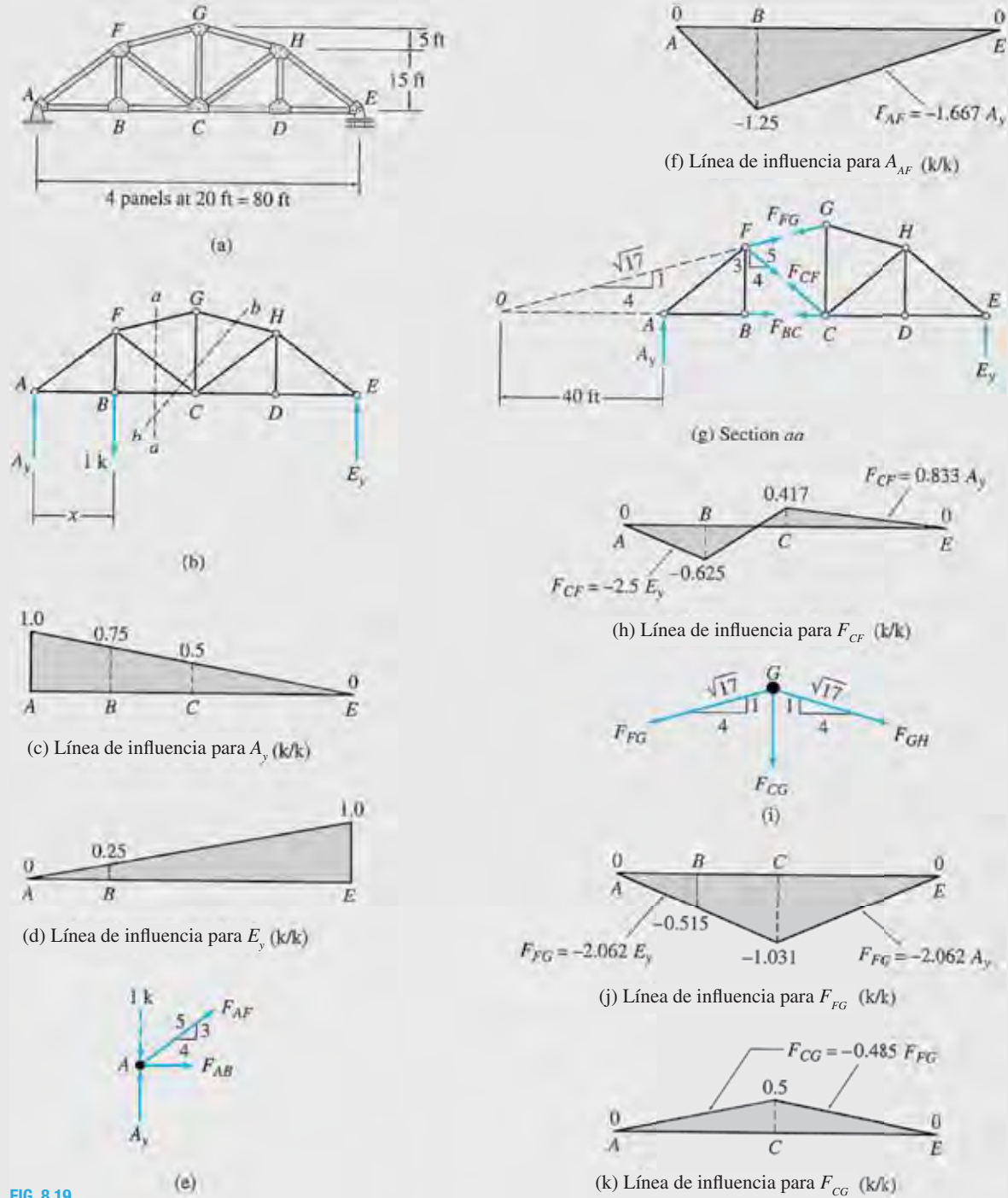


FIG. 8.19

continúa

Líneas de influencia para F_{CF} . Las expresiones para F_{CF} se pueden determinar pasando una sección aa a través de los elementos BC , CF y FG , como se aprecia en la Fig. 8.19(b). El diagrama de cuerpo libre de las dos porciones de la armadura obtenidas así, se muestran en la Fig. 8.19(g). Las líneas de acción de F_{FG} y F_{BC} se interceptan en el punto O , así que la ecuación de equilibrio $\sum M_O = 0$ contiene solo una incógnita, llamada F_{CG} . Debido a que la pendiente del elemento FG es 1:4, la distancia $OB = 4(FB) = 4(15) = 60$ ft. Por lo tanto, la distancia $OA = OB - AB = 60 - 20 = 40$ ft, igual que en la Fig. 8.19(g). Cuando la carga de 1-k se localiza a la izquierda de B , aplicamos la ecuación de equilibrio $\sum M_O = 0$ al cuerpo libre de la porción derecha CE de la armadura para obtener

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum M_O &= 0 \\
 \frac{3}{5} F_{CF}(80) + E_y(120) &= 0 \\
 F_{CF} &= -2.5E_y \quad 0 \leq x \leq 20 \text{ ft}
 \end{aligned}$$

Cuando la carga de 1-k se ubica a la derecha de C , consideramos el equilibrio de la porción izquierda de AB para obtener

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_O &= 0 \\
 A_y(40) - \frac{4}{5} F_{CF}(15) - \frac{3}{5} F_{CF}(60) &= 0 \\
 F_{CF} &= 0.833A_y \quad 40 \text{ ft} \leq x \leq 80 \text{ ft}
 \end{aligned}$$

Los segmentos de la línea de influencia para F_{CF} entre A y B y entre C y E se construyen usando la línea de influencia para E_y y A_y , respectivamente, de acuerdo con las expresiones anteriores. Las ordenadas en B y C se conectan mediante líneas rectas para completar la línea de influencia, como se muestra en la Fig. 8.19(h). **Respuesta**

Línea de influencia para F_{CG} . Determinaremos la línea de influencia para F_{CG} considerando el equilibrio del nodo G . Aplicando la ecuación de equilibrio al diagrama de cuerpo libre del nodo G (Fig. 8.19(i)), obtenemos

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y &= 0 \\
 -F_{CG} - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) F_{GH} &= 0 \\
 F_{CG} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) (F_{FG} + F_{GH}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x &= 0 \\
 -\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} + \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) F_{GH} &= 0 \\
 F_{GH} &= F_{FG} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la Ec. (2) en la Ec. (1)

$$F_{CG} = -\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right) F_{FG} = -0.485 F_{FG} \quad (3)$$

Tenga en cuenta que la Ec. (3), la cual es válida para cualquier posición de la carga unitaria, indica que la línea de influencia para F_{CG} se puede obtener multiplicando la línea de influencia para F_{CG} por -0.485 . Por lo tanto, primero construiremos la línea de influencia para F_{FG} usando la sección aa (Fig. 8.19(g)) y luego aplicando la Ec. (3) para obtener la línea de influencia deseada para F_{CG} .

Se puede ver de la Fig. 8.19(g) que cuando la carga de 1-k se encuentra a la izquierda de B , la expresión para F_{FG} se puede determinar aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M_C = 0$ al cuerpo libre de la porción derecha de CE de la armadura. Así,

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_C &= 0 \\
 \left(\frac{4}{17}\right) F_{FG}(20) + E_y(40) &= 0 \\
 F_{FG} &= -2.062E_y \quad 0 \leq x \leq 20 \text{ ft}
 \end{aligned}$$

continúa

Cuando la carga de 1-k se ubica a la derecha de C , tenemos en cuenta el equilibrio de la porción izquierda AB para obtener

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_C &= 0 \\
 -\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)F_{FG}(20) - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)F_{FG}(15) - A_y(40) &= 0 \\
 F_{FG} &= -2.062A_y \quad 40 \text{ ft} \leq x \leq 80 \text{ ft}
 \end{aligned}$$

La línea de influencia para F_{CG} ahora se puede determinar multiplicando la línea de influencia para F_{FG} por -0.485 , de acuerdo con la Ec. (3). La línea de influencia obtenida de esta manera se muestra en la Fig. 8.19(k). **Respuesta**

La línea de influencia para F_{CG} puede ser también construida considerando la sección bb mostrada en la Fig. 8.19(b). Sumando el momento alrededor del punto de intersección de los ejes de los elementos BC y GH , podemos determinar las expresiones para F_{CG} en términos de F_{CF} y A_y o E_y , cuyas líneas de influencia son conocidas. La línea de influencia para F_{CG} se puede construir graficando estas expresiones. Se recomienda al lector comprobar estas líneas de influencia para F_{CG} mostradas en la Fig. 8.19(k) empleando un enfoque alternativo.

Ejemplo 8.13

Dibuje las líneas de la fuerza en el elemento KL de la armadura K mostrada en la Fig. 8.20(a). Las cargas vivas se transmiten en la cuerda inferior de la armadura.

Solución

Líneas de influencia para las reacciones. Ver las Figs. 8.20(c) y (d).

Línea de influencia para F_{HL} . De la Fig. 8.20(b) se puede observar que cualquier sección, como la sección aa que pasa a través del elemento HL , corta tres o más elementos adicionales, de este modo, primero construiremos la línea de influencia para F_{LM} considerando la sección curva bb , como se muestra en la Fig. 8.20(b), y utilizaremos la sección aa para determinar la línea de influencia deseada para F_{HL} .

Los diagramas de cuerpo libre de las dos porciones de la armadura, obtenidas pasando una sección bb , se muestran en la Fig. 8.20(e). Se puede ver que a pesar de que la sección bb ha cortado cuatro elementos, CD , DH , HM y LM , la fuerza en el elemento LM se puede determinar sumando momentos alrededor del punto D , debido a que las líneas de acción de las tres incógnitas restantes pasan a través de este punto. Cuando la carga de 1-kN se ubica a la izquierda de C , la expresión para F_{LM} se puede obtener como

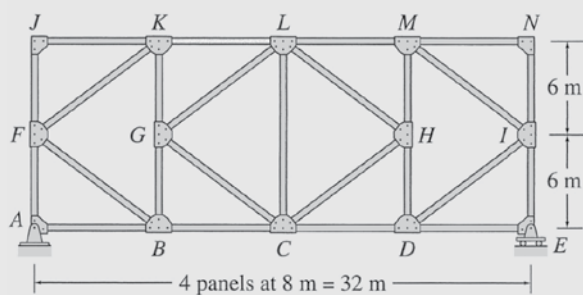
$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_D &= 0 \\
 F_{LM}(12) + E_y(8) &= 0 \\
 F_{LM} &= -0.667E_y \quad 0 \leq x \leq 16 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Cuando la carga unitaria se localiza a la derecha de D , obtenemos

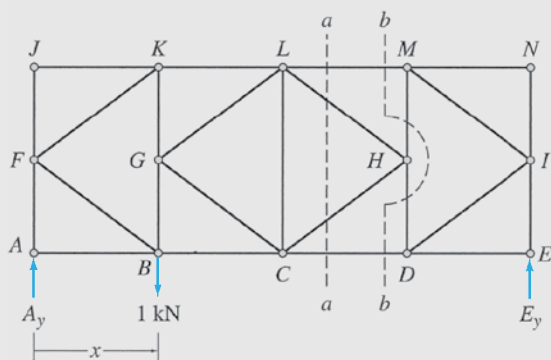
$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_D &= 0 \\
 -F_{LM}(12) - A_y(24) &= 0 \\
 F_{LM} &= -2A_y \quad 24 \text{ m} \leq x \leq 32 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{2}$$

La línea de influencia para F_{LM} así obtenida se muestra en la Fig. 8.20(f).

continúa



(a)



(b)

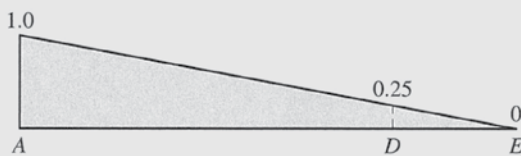
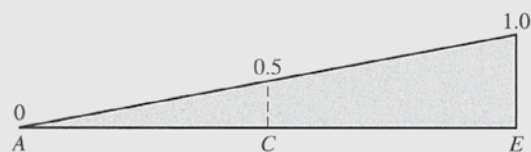
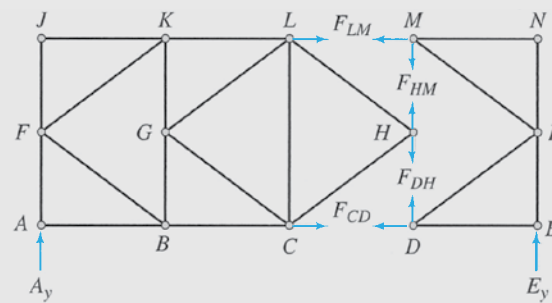
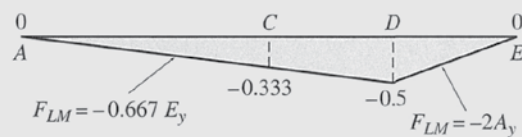
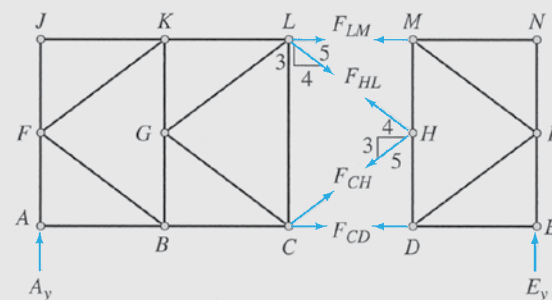
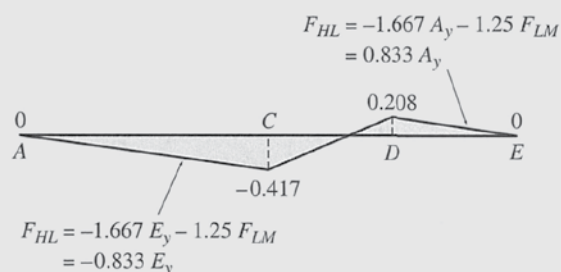

(c) Influence Line for A_y (kN/kN)

(d) Influence Line for E_y (kN/kN)

(e) Section bb

(f) Influence Line for F_{LM} (kN/kN)

(g) Section aa

(h) Influence Line for F_{HL} (kN/kN)

FIG. 8.20

continúa

La línea de influencia para F_{HL} se puede construir considerando la sección aa . Los diagramas de cuerpo libre de las dos porciones de la armadura, obtenidas pasando una sección aa , se muestran en la Fig. 8.20(g). Cuando la carga de 1-kN se encuentra a la izquierda de C , la expresión para F_{HL} se puede determinar aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M_C = 0$:

$$+\zeta \sum M_C = 0$$

$$F_{LM}(12) + \frac{4}{5}F_{HL}(6) + \frac{3}{5}F_{HL}(8) + E_y(16) = 0$$

$$F_{HL} = -1.667E_y - 1.25F_{LM} \quad 0 \leq x \leq 16 \text{ m} \quad (3)$$

Cuando la carga de 1-kN se ubica a la derecha de D , obtenemos

$$+\zeta \sum M_C = 0$$

$$-A_y(16) - F_{LM}(12) - \frac{4}{5}F_{HL}(12) = 0$$

$$F_{HL} = -1.667A_y - 1.25F_{LM} \quad 24 \text{ m} \leq x \leq 32 \text{ m} \quad (4)$$

Para obtener las expresiones para F_{HL} en términos solo de las reacciones, sustituimos las Ecs. (1) y (2) en las Ecs. (3) y (4), respectivamente, para obtener

$$F_{HL} = -0.833E_y \quad 0 \leq x \leq 16 \text{ m} \quad (5)$$

$$F_{HL} = 0.833A_y \quad 24 \text{ m} \leq x \leq 32 \text{ m} \quad (6)$$

La línea de influencia para F_{HL} se puede construir usando las Ecs. (3) y (4) o las Ecs. (5) y (6). La línea de influencia obtenida de esta manera se muestra en la Fig. 8.20(h).

Respuesta

8.5 Líneas de influencia para deflexiones

Una línea de influencia de deflexión muestra la variación de la deflexión de la estructura conforme la carga concentrada de magnitud unitaria se mueve a través de la estructura. Asumamos que se desea construir la línea de influencia de la deflexión vertical en el punto B de una viga simplemente apoyada, que se muestra en la Fig. 8.21(a). Podemos construir la línea de influencia colocando una carga unitaria sucesivamente en puntos arbitrarios de la izquierda a la derecha de B , determinando una expresión para la deflexión vertical en B para cada posición de la carga unitaria usando uno de los métodos de cálculo para deflexiones descrito en los capítulos 6 y 7, y graficando las expresiones.

Un procedimiento más eficiente para construir la línea de influencia para deflexiones se puede aconsejar aplicando la *ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas* (Sección 7.8). Considere de nuevo la viga de la Fig. 8.21(a), si f_{BX} es la deflexión vertical en B cuando la carga unitaria se localiza en un punto arbitrario X , entonces f_{BX} representa la ordenada en X de la línea de influencia para la deflexión vertical en B . Ahora, suponga que colocamos la carga unitaria en B , como se muestra en la Fig. 8.21(b), y calculamos la deflexión vertical en el punto X , f_{XB} . De acuerdo con la *ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas*,

$$f_{XB} = f_{BX}$$

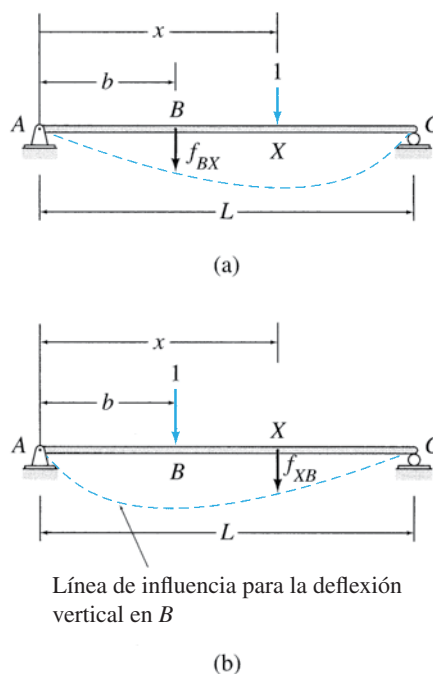


FIG. 8.21

La cual indica que la deflexión en X debido a la carga unitaria en B , f_{XB} , también representa la ordenada en X de la línea de influencia de la deflexión vertical en B . Ya que el punto X fue elegido arbitrariamente, podemos concluir que la configuración deformada (curva elástica) de una estructura debida a la carga unitaria aplicada en un punto representa la línea de influencia de la deflexión en el punto donde la carga se ha aplicado. Por lo tanto, la línea de influencia de la deflexión en un punto de una estructura se puede construir colocando la carga unitaria en el punto donde se desea la deflexión, determinando la correspondiente configuración deformada (curva elástica) de la estructura y usando uno de los métodos de cálculo de las deflexiones descritos en los capítulos 6 y 7; así como graficando la configuración deformada. El procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8.14

Dibuje las líneas de influencia de la deflexión vertical en el extremo B de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. 8.22(a).

Solución

Para determinar la línea de influencia de la deflexión vertical en B , colocamos la carga de 1-k en B , como se observa en la Fig. 8.22(b), y determinamos la expresión para la configuración deformada de la viga usando el método de la viga conjugada descrito en la Sección 6.6. El diagrama M/EI de la viga real debido a la carga de 1-k aplicada en B aparece en la Fig. 8.22(c), y la viga conjugada, cargada con el diagrama M/EI de la viga real, es igual al momento flexionante en X en la viga conjugada. De la Fig. 8.22(d) podemos ver que el momento flexionante en X en la viga conjugada está dado por

$$\begin{aligned}
 M_X &= \frac{1}{EI} \left\{ -15 \left(1 - \frac{x}{15} \right) x \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \left[15 - 15 \left(1 - \frac{x}{15} \right) \right] x \left(\frac{2x}{3} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{6EI} (x^3 - 45x^2)
 \end{aligned}$$

continúa

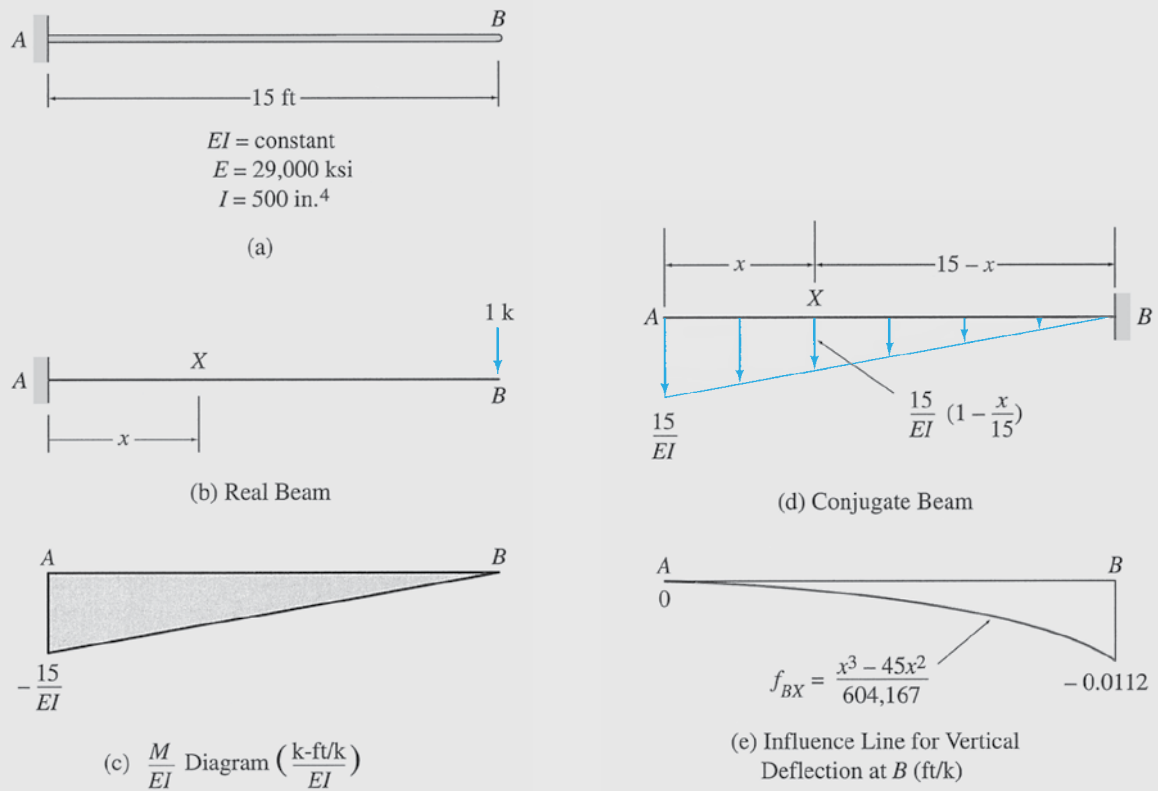


FIG. 8.22

Por lo tanto, la deflexión en X de la viga real es

$$f_{XB} = \frac{1}{6EI}(x^3 - 45x^2)$$

La cual representa la expresión de la configuración deformada de la viga debido a la carga 1-k en B (Fig. 8.22(b)). Aplicando la *ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas*, $f_{BX} = f_{XB}$, obtenemos la ecuación de la línea de influencia para la deflexión vertical en B como

$$f_{BX} = \frac{1}{6EI}(x^3 - 45x^2)$$

Sustituyendo los valores numéricos de E e I, obtenemos

$$f_{BX} = \frac{x^3 - 45x^2}{604,167}$$

La línea de influencia de la deflexión vertical en B se obtiene graficando la ecuación anterior, mostrada en la Fig. 8.22(e).

Respuesta

Resumen

En este capítulo hemos aprendido que una línea de influencia es una gráfica de la función de respuesta de una estructura como una función de la posición de una carga unitaria hacia abajo que se mueve a lo largo de la estructura. Las líneas de influencia de la función de respuesta de la fuerza y momento de todas las estructuras estáticamente determinadas consisten de segmentos rectos de línea.

La línea de influencia para una reacción se puede construir colocando la carga unitaria en una posición variable x en la estructura, aplicando una ecuación de equilibrio para determinar la expresión de la reacción en términos de x , y graficando la expresión. La línea de influencia del cortante (o momento flexionante) en un punto de una viga se puede construir ubicando la carga unitaria sucesivamente a la izquierda y a la derecha del punto en consideración, determinando las expresiones para cortante (o momento flexionante) para dos posiciones de la carga unitaria, y graficando las expresiones.

El Principio de Müller-Breslau establece que la línea de influencia para una función de respuesta de una fuerza (o momento) está dado por la configuración deformada de la estructura liberada, obtenida por remover la restricción correspondiente a la función de respuesta de la estructura original y dando a la estructura liberada un desplazamiento unitario (o rotación) en la ubicación y dirección de la función de respuesta, de modo que la única función de respuesta y carga unitaria realice el trabajo externo. Este principio se emplea comúnmente para determinar las líneas de influencia cualitativas (es decir, la forma general de la línea de influencia). Los valores numéricos de las ordenadas de las líneas de influencia, si se desean, son calculados aplicando las ecuaciones de equilibrio. Los procedimientos para determinar las líneas de influencia de vigas principales o de carga con sistema de piso y de armaduras se presentaron en las Secciones 8.3 y 8.4, respectivamente.

La configuración deformada (curva elástica) de una estructura, causada por la carga unitaria aplicada en un punto, representa la línea de influencia de la deflexión en el punto donde la carga se aplica.

Problemas

Sección 8.1 y 8.2

Del 8.1 al 8.3 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y C y el cortante y momento flexionante en el punto B de las vigas mostradas en las Figs. P8.1 al P8.3

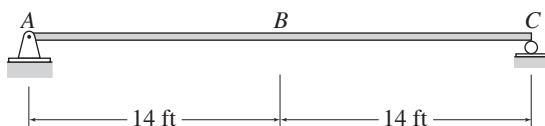


FIG. P8.1, P8.59

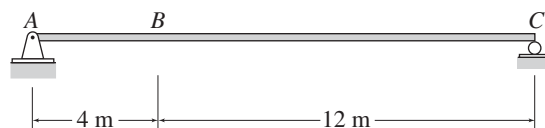


FIG. P8.2, P8.60

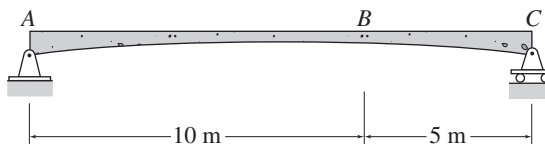


FIG. P8.3

8.4 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. P8.4.

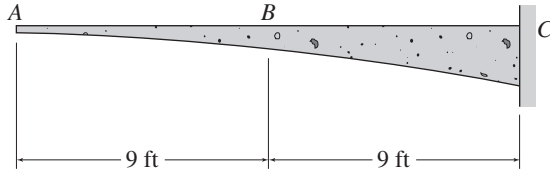


FIG. P8.4

8.5 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga en cantiliver mostrada en la Fig. P8.5.

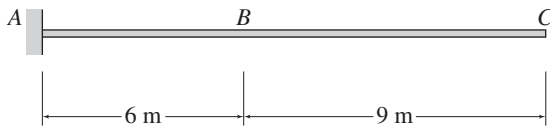


FIG. P8.5, P8.58

8.6 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y C y el cortante y el momento flexionante en el punto B de las vigas mostradas en la Fig. P8.6

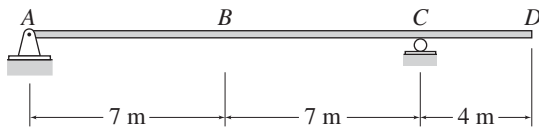


FIG. P8.6, P8.61

8.7 y 8.8 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos B y D y el cortante y el momento flexionante en el punto C de las vigas mostradas en las Fig. P8.7 y P8.8.

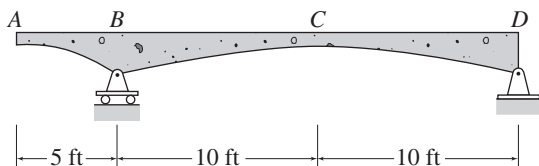
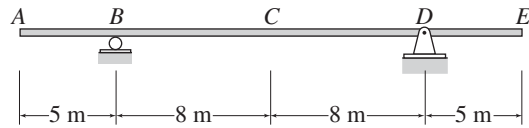


FIG. P8.7



8.9 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y C y el cortante a la derecha del apoyo A, así como el momento flexionante en el punto B de las vigas mostradas en la Fig. P8.9.

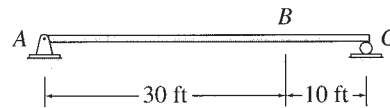


FIG. P8.9

8.10 Dibuje las líneas de influencia del cortante y el momento flexionante en el punto C, y el cortante a la izquierda y derecha del apoyo D de la viga mostrada en la Fig. P8.10

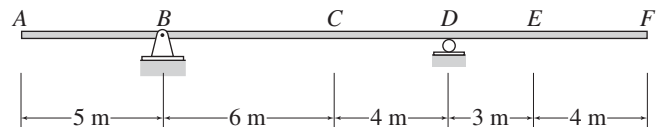


FIG. P8.10, P8.11

8.11 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto E de la viga mostrada en la Fig. 8.10.

8.12 Dibuje las líneas de influencia del cortante y el momento flexionante en el punto B, y el cortante a la izquierda y derecha del apoyo C de la viga mostrada en la Fig. P8.12

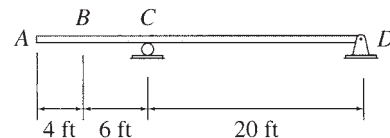


FIG. P8.12

8.13 Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en A y E y la reacción de momento en el apoyo E de la viga mostrada en la Fig. P8.13

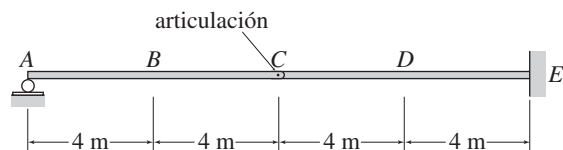


FIG. P8.13, P8.14, P8.15

8.14 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga mostrada en la Fig. P8.13

8.15 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto D de la viga mostrada en la Fig. P8.13

8.16 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y E y el cortante y momento flexionante en el punto D del marco mostrado en la Fig. 8.16

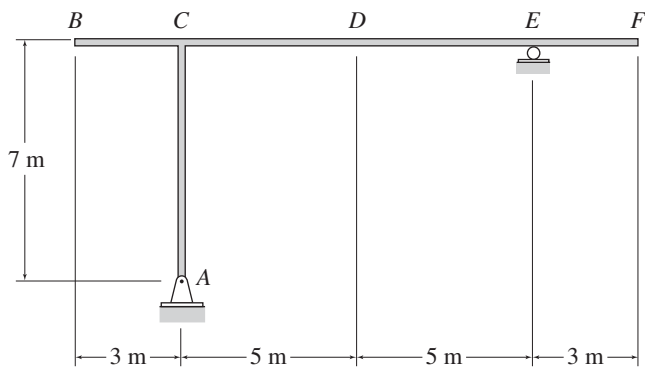


FIG. P8.16

8.17 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y B y el cortante y momento flexionante en el punto D del marco mostrado en la Fig. 8.17

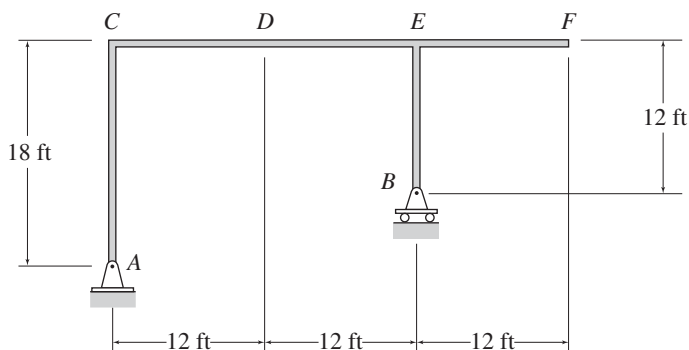


FIG. P8.17

8.18 Dibuje las líneas de influencia de la reacción vertical en los apoyos de A y la reacción de momento en el apoyo A , y el cortante y el momento flexionante en el punto C del marco mostrado en la Fig. 8.18

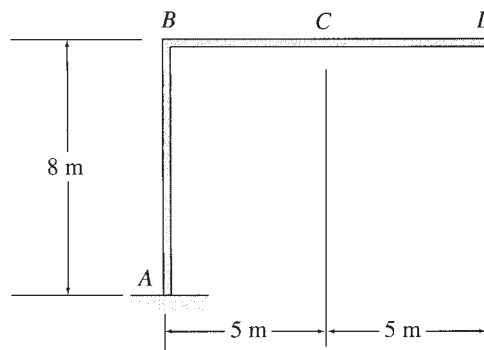


FIG. P8.18

8.19 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A , B y E , y el cortante en la articulación D del marco mostrado en la Fig. 8.19

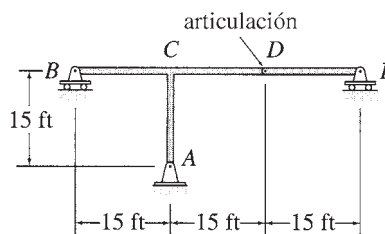


FIG. P8.19

8.20 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos B , E y G de la viga mostrada en la Fig. 8.20

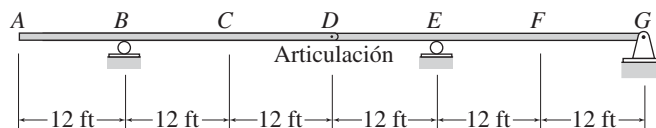


FIG. P8.20

8.21 Dibuje las líneas de influencia del cortante y el momento flexionante en el punto C y el cortante en la articulación interna D de la viga mostrada en la Fig. 8.20

8.22 Dibuje las líneas de influencia del cortante y el momento flexionante en el punto F de la viga mostrada en la Fig. 8.20

8.23 y 8.24 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones verticales en A, C, E y G de la viga mostrada en las Figs. 8.23 y P8.24

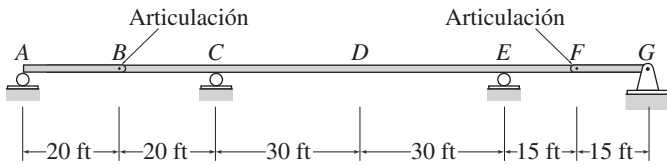


FIG. P8.23 y P8.25

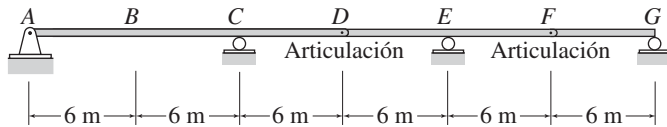


FIG. P8.24 y P8.26

8.25 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto D de la viga mostrada en la Fig. P8.23

8.26 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga mostrada en la Fig. P8.24

8.27 Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en los apoyos B, D y G y la reacción de momento flexionante en el apoyo G de la viga mostrada en las Fig. P8.27

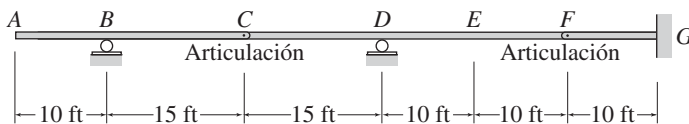


FIG. P8.27 y P8.28

8.28 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en el punto E de la viga mostrada en la Fig. P8.27

8.29 Dibuje las líneas de influencia para la reacción de momento en el apoyo A, E y G de la viga mostrada en la Fig. P8.29

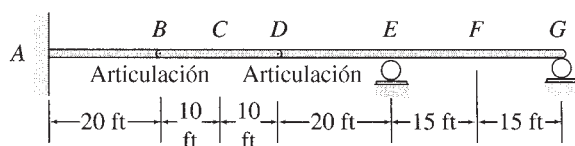


FIG. P8.29, P8.30

8.30 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en los puntos E y F de la viga mostrada en la Fig. P8.29

8.31 Dibuje las líneas de influencia para las reacciones de momentos y reacciones verticales en los apoyos A y F de la viga mostrada en la Fig. P8.31.

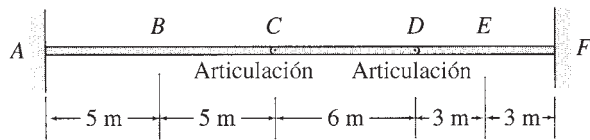


FIG. P8.31, P8.32

8.32 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en los puntos B y E de la viga mostrada en la Fig. P8.31

8.33 Dibuje las líneas de influencia para las reacciones verticales en los apoyos A y B de la viga mostrada en la Fig. P8.33.

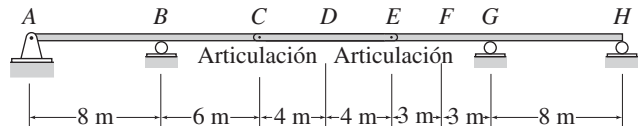


FIG. P8.33, P8.34

8.34 Dibuje las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en los puntos D y F de la viga mostrada en la Fig. P8.33

8.35 y 8.36 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones vertical y horizontal en los apoyos A y B de los marcos mostrados en las Figs. P8.35 y P8.36.

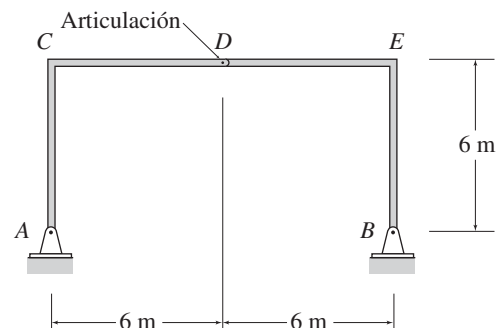


FIG. P8.35

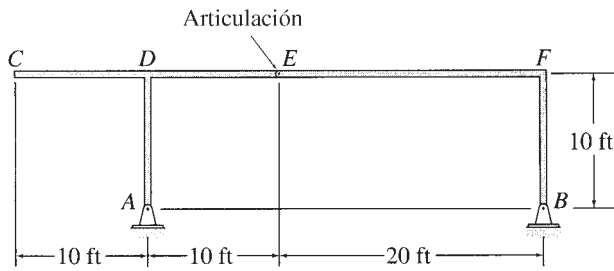


FIG. P8.36

8.37 Dibuje las líneas de influencia de la reacción de momento en A, las reacciones verticales en A y F, y el cortante y el momento flexionante en el punto E del marco mostrado en la Fig. P8.37

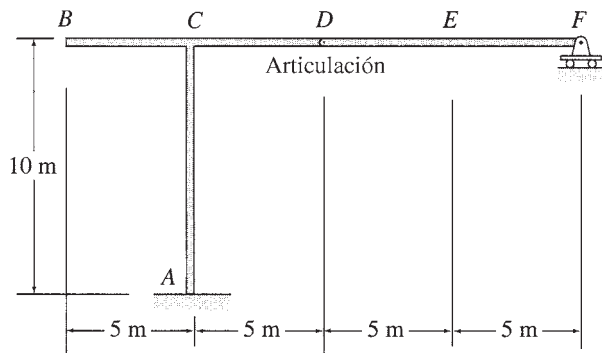


FIG. P8.37

8.38 Dibuje las líneas de influencia de la reacción de momento en A, las reacciones verticales en A y B, y el cortante en la articulación interna C del marco mostrado en la Fig. P8.38

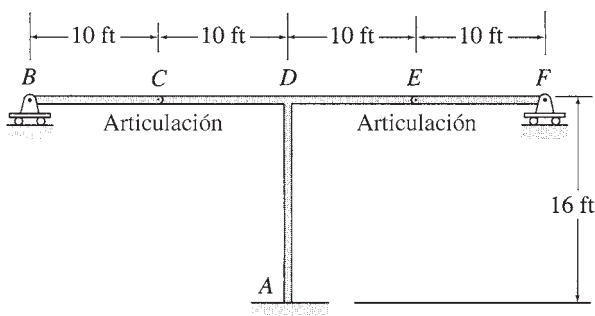


FIG. P8.38

8.39 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos A, B y C, y el cortante y el momento flexionante en el punto E del marco mostrado en la Fig. P8.39

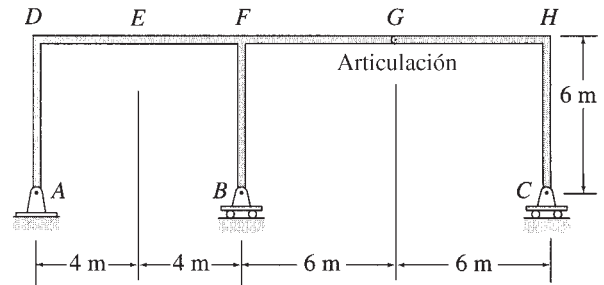


FIG. P8.39

Sección 8.3

P8.40 Dibuje las líneas de influencia para el cortante en el panel CD y el momento flexionante en D de la viga con sistema de piso mostrado en la Fig. P8.40.

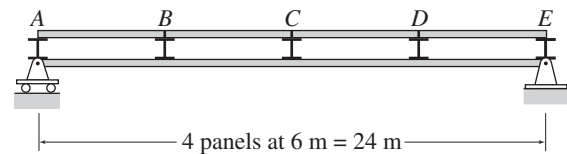


FIG. P8.40

P8.41 Dibuje las líneas de influencia para el cortante en el panel DE y el momento flexionante en E de la viga con sistema de piso mostrado en la Fig. P8.41.

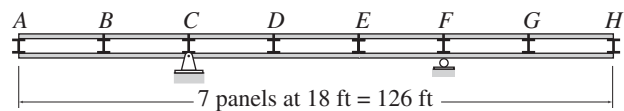


FIG. P8.41, P8.42

P8.42 Dibuje las líneas de influencia para el cortante en el panel BC y el momento flexionante en F de la viga con sistema de piso mostrado en la Fig. P8.41.

P8.43 Dibuje las líneas de influencia para el cortante en el panel BC y el momento flexionante en C de la viga con sistema de piso mostrado en la Fig. P8.43.

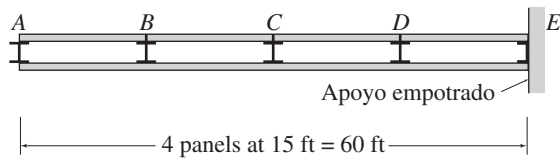


FIG. P8.43

P8.44 Dibuje las líneas de influencia para el cortante en el panel CD y el momento flexionante en D de la viga con sistema de piso mostrado en la Fig. P8.44.

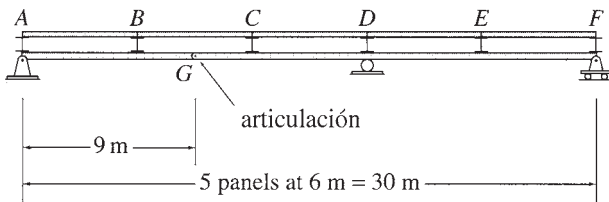


FIG. P8.44

Sección 8.4

P8.45 al P8.52 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas en los elementos identificados con una "X" de las armaduras mostradas en las Figs. P8.45-P8.52. Las cargas vivas son transmitidas a la cuerda inferior de las armaduras.

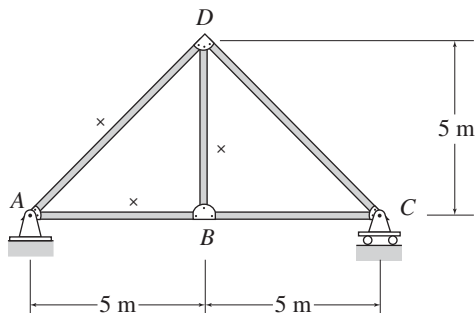


FIG. P8.45

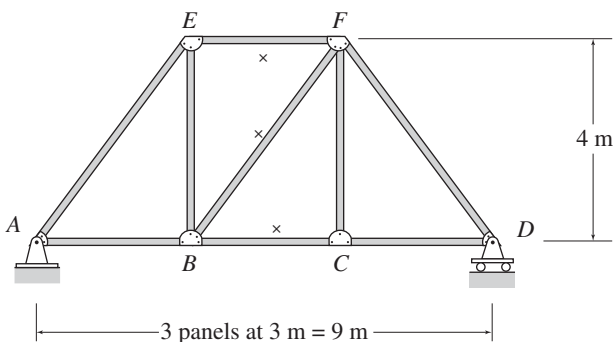


FIG. P8.46

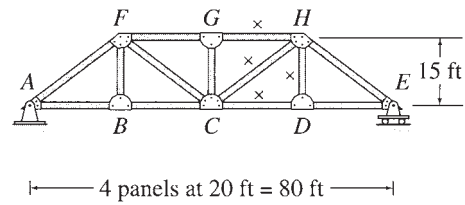


FIG. P8.47

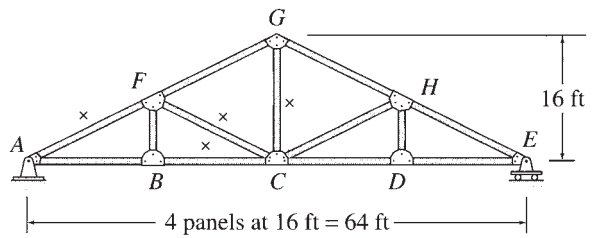


FIG. P8.48

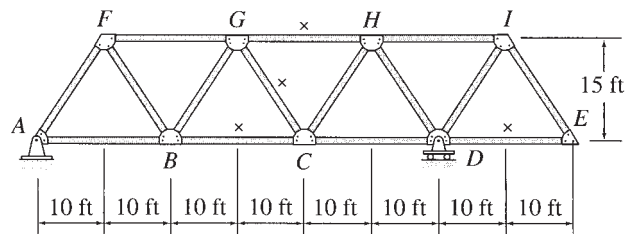


FIG. P8.49

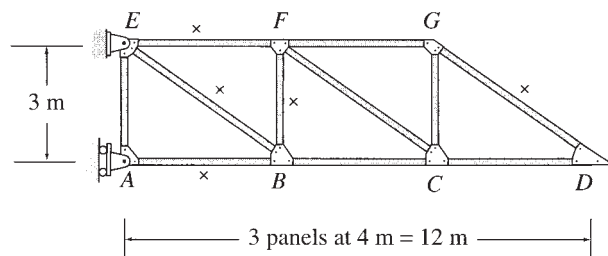


FIG. P8.50

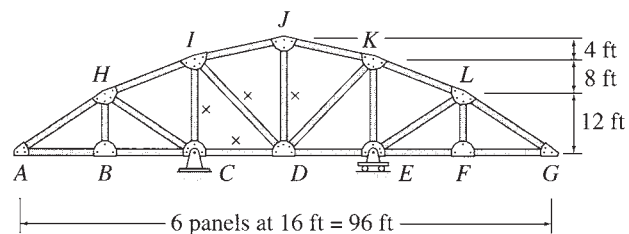


FIG. P8.51

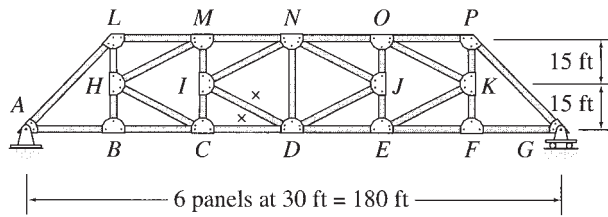


FIG. P8.52

P8.53 al P8.57 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas en los elementos identificados con una “X” de las armaduras mostrada en las Figs. P8.53-P8.57. Las cargas vivas son transmitidas a la cuerda superior de las armaduras.

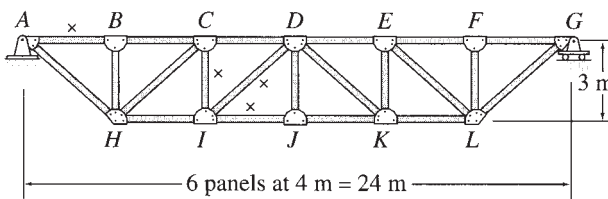


FIG. P8.53

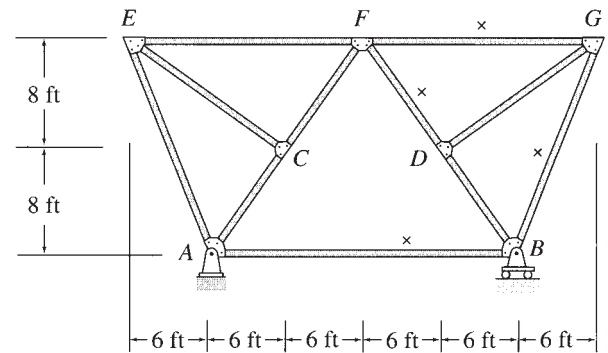


FIG. P8.54

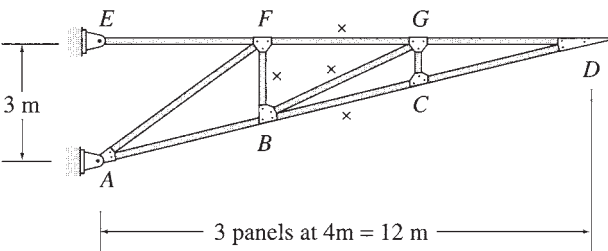


FIG. P8.55

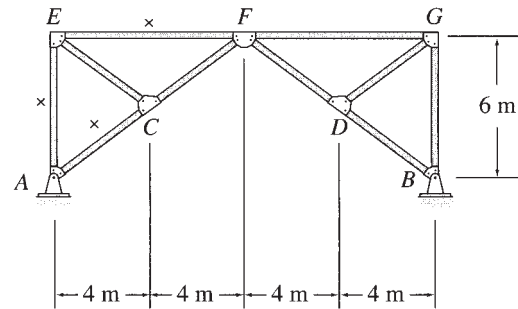


FIG. P8.56

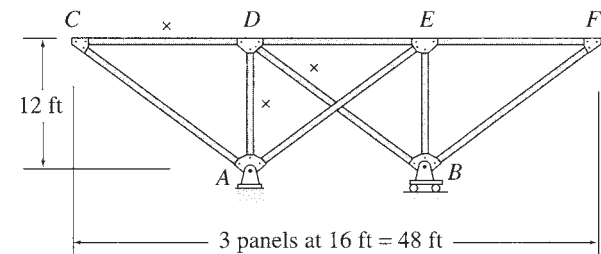


FIG. P8.57

Sección 8.5

P8.58 Dibuje las líneas de influencia de la deflexión vertical en el punto B de la viga en cantiliver del Problema 8.5. $EI = \text{constante}$, Ver Fig. 8.5

P8.59 y P8.60 Dibuje las líneas de influencia de la deflexión vertical en el punto B de la viga simplemente apoyada del Problema 8.1 y 8.2. $EI = \text{constante}$, Ver Fig. 8.1 y P8.2

P8.61 Dibuje las líneas de influencia de la deflexión vertical en el punto D de la viga del Problema 8.6. $EI = \text{constante}$, Ver Fig. 8.6



*Puente de autopista sujeto
a cargas en movimiento*

Caltrans Distrito 4 Departamento de Fotografía
Fotógrafo John Huseby. Copyright 2005. Departamento de
Transporte de California

9

Aplicación de Líneas de Influencia

- 9.1 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga concentrada en movimiento
 - 9.2 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga viva uniformemente distribuida
 - 9.3 Respuesta en una ubicación determinada debido a una serie de cargas concentradas en movimiento
 - 9.4 Respuesta máxima absoluta
- Resumen
Problemas

En capítulos anteriores aprendimos cómo construir líneas de influencia para varios tipos de funciones de respuesta de estructuras. En este capítulo consideraremos la aplicación de las líneas de influencia en la determinación de los valores máximos de las funciones de respuesta en ubicaciones específicas en estructuras debido a cargas variables. Además, discutiremos el procedimiento de evaluación del valor máximo absoluto de una función de respuesta que puede presentarse en cualquier parte de la estructura.

9.1 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga concentrada en movimiento

Como discutimos en el capítulo anterior, cada ordenada de una línea de influencia proporciona valores de la función de respuesta debido a la carga concentrada de magnitud unitaria colocada en la estructura y en la ubicación de esa ordenada, por lo tanto, podemos establecer lo siguiente:

1. El valor de la función de respuesta debido a cualquier carga concentrada se puede obtener multiplicando la magnitud de la carga por la ordenada de la función de respuesta de la línea de influencia en la posición de la carga.
2. Para determinar el valor máximo positivo de la función de respuesta debido a una carga concentrada en movimiento, la carga debe estar colocada en la ubicación de máxima ordenada positiva de la función de respuesta de la línea de influencia; mientras que para determinar

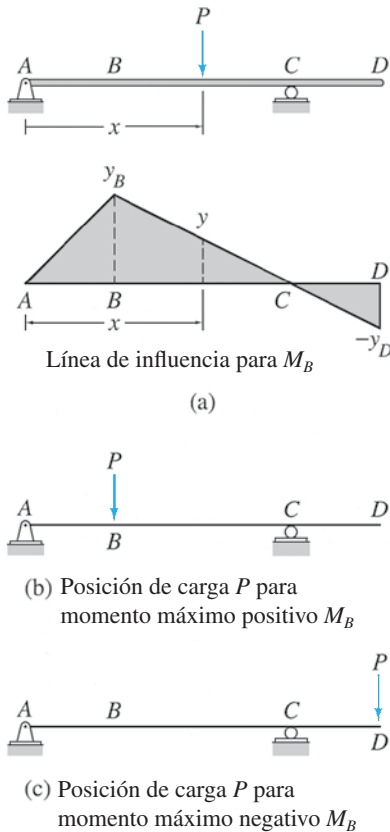


FIG. 9.1

el valor máximo negativo de la función de respuesta, la carga debe estar colocada en la ubicación de ordenada máxima negativa de la función de respuesta.

Considere, por ejemplo, una viga sujeta a una carga concentrada móvil de magnitud P , como se muestra en la Fig. 9.1(a). Suponga que deseamos determinar el momento flexionante en B cuando la carga P se ubica a una distancia x del apoyo izquierdo A . La línea de influencia para M_B , dada en la Fig. 9.1(a), tiene una ordenada y en la posición de la carga P , que indica que la carga unitaria colocada en la posición de P genera un momento flexionante $M_B = y$. Debido a que el principio de superposición es válido, la magnitud de la carga P debe generar un momento flexionante en B , el cual es P veces tan grande como el generado por la carga de magnitud unitaria. Por lo tanto, el momento flexionante en B debido a la carga P es $M_B = Py$.

Después, suponga que nuestro objetivo es determinar el momento máximo positivo y el máximo negativo en B debido a la carga P . De la línea de influencia para M_B (Fig. 9.1(a)), observamos que la ordenada máxima positiva y máxima negativa de la línea de influencia ocurre en los puntos B y D , respectivamente. Por lo tanto, para determinar el momento flexionante máximo positivo en B , colocamos la carga P , como se observa en la Fig. 9.1(b), y calculamos la magnitud del momento flexionante máximo positivo como $M_B = Py_B$, donde y_B es la ordenada de la línea de influencia en B (Fig. 9.1(a)). De manera similar, para obtener el momento flexionante máximo negativo en B , ubicamos la carga P en el punto D , como se ilustra en la Fig. 9.1(c), y calculamos la magnitud del momento flexionante negativo máximo como $M_B = -Py_D$.

Ejemplo 9.1

Para la viga mostrada en la Fig. 9.2(a), determine la máxima reacción hacia arriba en el apoyo C debido a una carga viva concentrada de 50-kN.

Solución

Línea de influencia. La línea de influencia para la reacción vertical en el apoyo C de esta viga fue previamente construida en el Ejemplo 8.8 y mostrada en la Fig. 9.2(b). Recuerde que C_y se supuso positiva en dirección hacia arriba en la construcción de la línea de influencia.

Reacción máxima hacia arriba en C . Para obtener el valor máximo positivo de C_y debido a la carga viva concentrada de 50-kN, colocamos la carga en B (Fig. 9.2(c)), donde la ordenada es máxima positiva (1.4 kN/kN) de la línea de influencia. Multiplicando la magnitud de la carga por el valor de esta ordenada, determinamos la reacción máxima positiva hacia arriba en C como

$$C_y = 50(+1.4) = +70 \text{ kN} = 70 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta

continúa

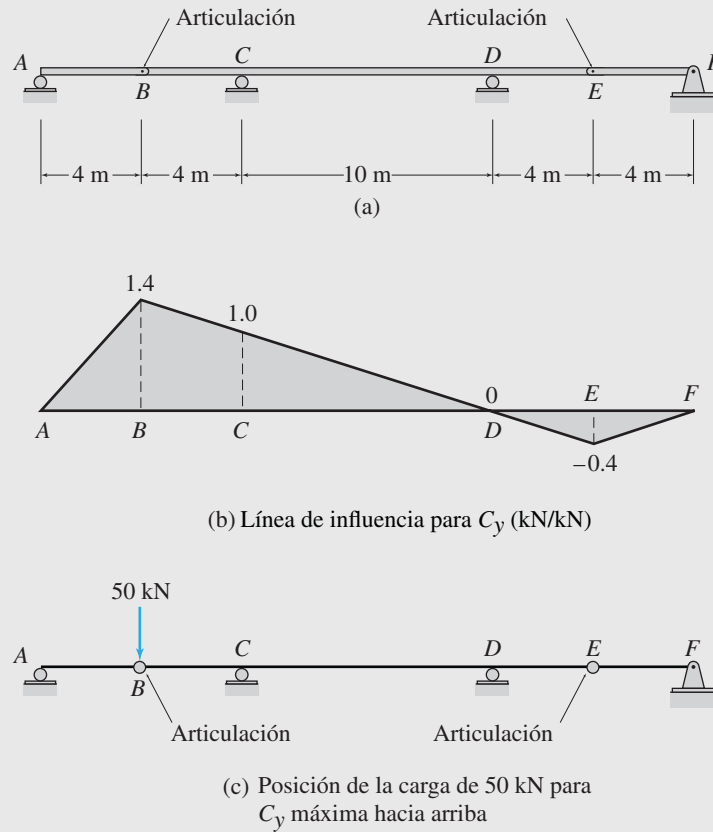


FIG. 9.2

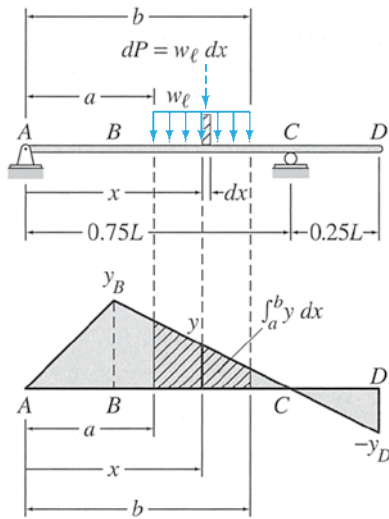
9.2 Respuesta en una ubicación determinada debido a una carga viva uniformemente distribuida

Las líneas de influencia pueden emplearse para determinar los valores de las funciones de respuesta de estructuras debido a cargas distribuidas. Considere, por ejemplo, una viga sujeta a una carga viva uniformemente distribuida de intensidad w_ℓ , como se muestra en la Fig. 9.3(a). Suponga que deseamos determinar el momento flexionante en B cuando la carga se aplica en la viga, desde $x = a$ hasta $x = b$. La línea de influencia para M_B se indica también en la figura. Por el tratamiento de la carga distribuida aplicada sobre una longitud dx de la viga como carga concentrada de magnitud $dP = w_\ell dx$, como se observa en la figura, podemos expresar el momento flexionante en B debido a la carga dP como

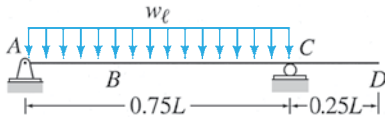
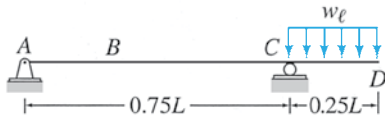
$$dM_B = dP y = w_\ell dx y \quad (9.1)$$

Donde y es la ordenada de la línea de influencia en x , y este es el punto de aplicación de dP , como se muestra en la figura. Para determinar el momento total de flexión en B debido a la carga distribuida desde $x = a$ hasta $x = b$, integramos la Ec. (9.1) entre estos límites para obtener

$$M_B = \int_a^b w_\ell y dx = w_\ell \int_a^b y dx \quad (9.2)$$

Línea de influencia para M_B

(a)

(b) Arreglo de carga viva uniformemente distribuida w_ℓ para máximo positivo M_B (c) Arreglo de carga viva uniformemente distribuida w_ℓ para máximo negativo M_B

Aquí la integral $\int_a^b y dx$ representa el área bajo el segmento de la línea de influencia, la cual corresponde a la porción cargada de la viga. Esta área se muestra sombreada en la línea de influencia de M_B en la Fig. 9.3(a).

La Ec. (9.2) también indica que el momento flexionante en B será máximo positivo en la viga donde las ordenadas de la línea de influencia son positivas y viceversa. De la Fig. 9.3(a) podemos ver que las ordenadas de la línea de influencia de M_B son positivas entre los puntos A y C, y negativas entre los puntos C y D. Por lo tanto, para obtener el momento de flexión máximo positivo en B, colocamos la carga uniformemente distribuida w_ℓ desde A hasta C, como se ilustra en la Fig. 9.3(b), y calculamos la magnitud del momento flexionante máximo positivo como

$$M_B = w_\ell (\text{área bajo la línea de influencia entre A y C})$$

$$= w_\ell \left(\frac{1}{2} \right) (0.75L) (y_B) = 0.375 w_\ell y_B L$$

De manera similar, para obtener el momento de flexión máximo negativo en B, colocamos la carga desde C hasta D, como aparece en la Fig. 9.3(c), y calculamos la magnitud del momento de flexión máximo negativo como

$$M_B = w_\ell (\text{área bajo la línea de influencia entre C y D})$$

$$= w_\ell \left(\frac{1}{2} \right) (0.25L) (-y_D) = -0.125 w_\ell y_D L$$

Basados en la discusión anterior, podemos establecer lo siguiente:

1. El valor de una función de respuesta debida a carga uniformemente distribuida aplicada sobre una parte de la estructura puede obtenerse multiplicando la intensidad de la carga por el área neta bajo la correspondiente porción de la función de respuesta de la línea de influencia.
2. Para determinar el valor máximo positivo (o negativo) de una función de respuesta debida a una carga viva uniformemente distribuida, la carga debe estar colocada sobre la porción de la estructura donde las ordenadas de la función de respuesta de la línea de influencia son positivas (o negativas).

FIG. 9.3

Ejemplo 9.2

De la viga mostrada en la Fig. 9.4(a), determine la máxima reacción hacia arriba en el apoyo C debida a la carga viva uniformemente distribuida de 15 kN/m.

Solución

Línea de influencia. La línea de influencia para la reacción vertical en el apoyo C de esta viga fue previamente construida en el Ejemplo 8.8 y mostrada en la Fig. 9.4(b). Recuerde que C_y se supuso positiva hacia arriba en la construcción de esta línea de influencia.

continúa

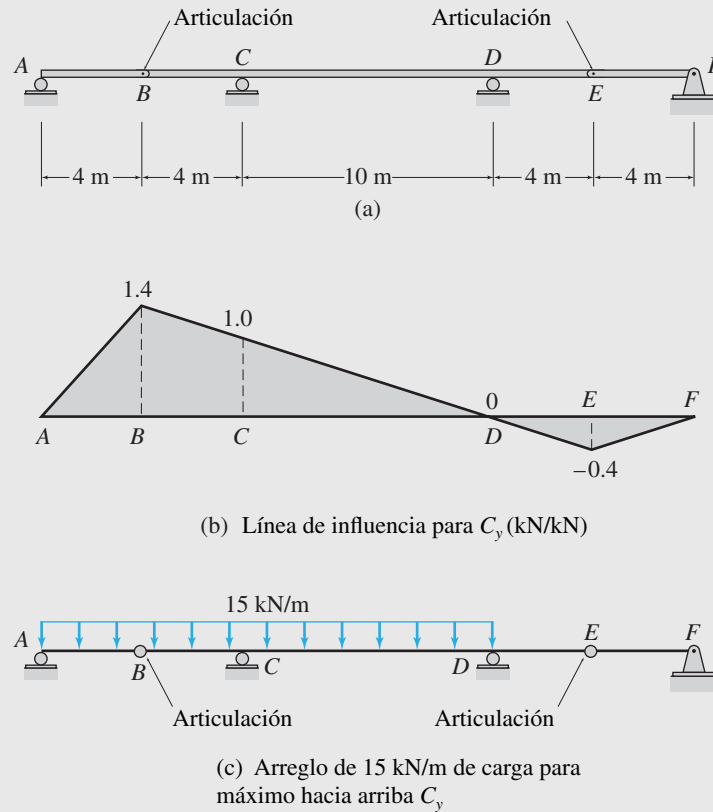


FIG. 9.4

Reacción máxima hacia arriba en C. De la Fig. 9.4(b), observamos que las ordenadas de la línea de influencia para C_y son positivas entre los puntos A y D. Por lo tanto, para obtener el valor máximo positivo de C_y , colocamos la carga uniformemente distribuida de 15-kN/m sobre el segmento AD de la viga, mostrada en la Fig. 9.4(c). Multiplicando la intensidad de la carga por el área bajo el segmento AD de la línea de influencia, determinamos la reacción máxima hacia arriba en C como

$$C_y = 15 \left[\frac{1}{2} (+1.4)(18) \right] = +189 \text{ kN} = 189 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta

Ejemplo 9.3

De la viga mostrada en la Fig. 9.5(a), determine el cortante máximo positivo y el negativo, así como el momento flexionante máximo positivo y negativo en el punto C debido a la carga viva concentrada de 90 kN, una carga viva uniforme de 4 kN/m y una carga muerta distribuida de 20 kN/m.

Solución

Línea de influencia. La línea de influencia para el cortante y el momento flexionante en C de esta viga fueron previamente determinados en el Ejemplo 8.6 y se ilustran en las Figs. 9.5(b) y (c) respectivamente.

Cortante máximo positivo en C. Para obtener el cortante máximo positivo en C debido a la carga viva concentrada de 90 kN, colocamos la carga justo a la derecha de C (Fig. 9.5(c)), donde la ordenada máxima positiva (2/3 kN/kN) de la línea de

continúa

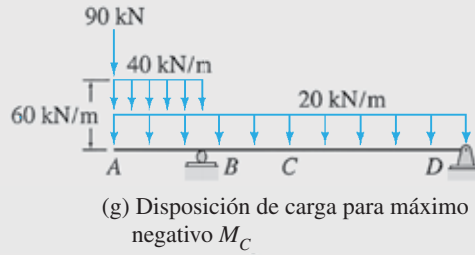
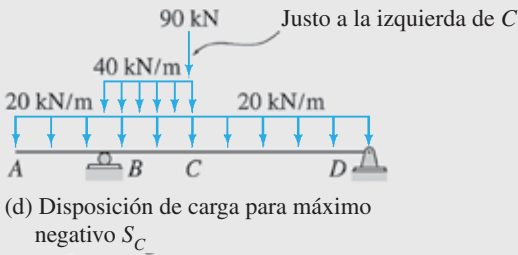
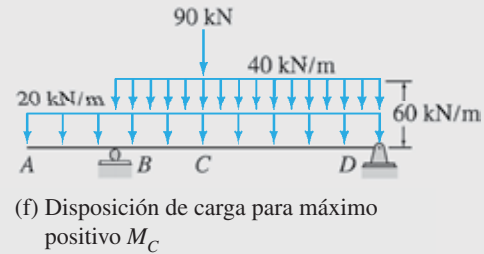
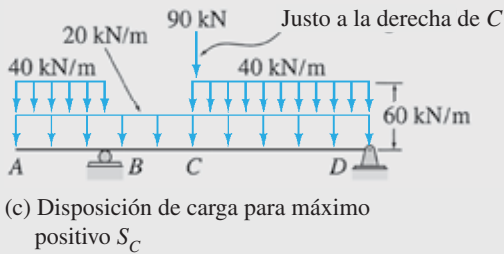
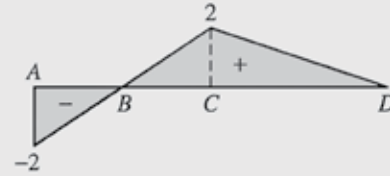
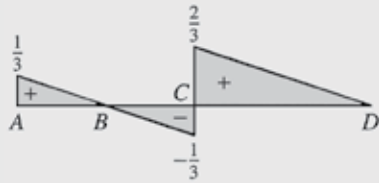
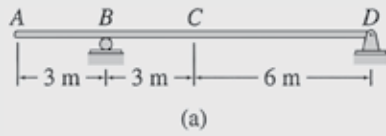


FIG. 9.5

influencia para S_C se presenta. Multiplicando la magnitud de la carga por el valor de esta ordenada, determinamos el valor máximo positivo de S_C debido a la carga viva concentrada como

$$S_C = 90 \left(\frac{2}{3} \right) = 60 \text{ kN}$$

De la Fig. 9.5(b), observamos que las ordenadas de la línea de influencia para S_C son positivas entre los puntos A y B y entre C y D. Por lo tanto, para obtener el cortante máximo positivo en C debido a la carga viva uniformemente distribuida de 40 kN/m, colocamos la carga sobre la porción AB y CD de la viga, como se muestra en la Fig. 9.5(c), y calculamos el valor máximo positivo de S_C debido a esta carga multiplicando la intensidad de la carga por el área bajo la porción AB y CD de la línea de influencia.

$$S_C = 40 \left[\left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (6) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = 100 \text{ kN}$$

A diferencia de las cargas vivas, las cargas muertas siempre actúan en una posición fija en las estructuras, es decir, su posición no varía para maximizar las funciones de respuesta. Por lo tanto, la carga muerta uniformemente distribuida, 20 kN/m, se coloca sobre toda la longitud de la viga, como se muestra en la Fig. 9.5(c), y se determina el cortante correspondiente en C multiplicando la intensidad de la carga muerta por el área neta bajo toda la línea de influencia como

$$S_C = 20 \left[\left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (6) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = 40 \text{ kN}$$

continúa

El cortante máximo positivo total en C se puede ahora obtener sumando algebraicamente los valores de S_C determinado por los tres tipos de cargas.

$$\text{Máximo positivo } S_C = 60 + 100 + 40 = 200 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$

Cortante máximo negativo en C . La disposición de las cargas para obtener el cortante máximo negativo en C se muestra en la Fig. 9.5(d). El cortante máximo negativo en C está dado por

$$\begin{aligned} \text{Máximo negativo } S_C &= 90 \left(-\frac{1}{3} \right) + 40 \left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(-\frac{1}{3} \right) + 20 \left[\left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(\frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \right) (3) \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) (6) \left(\frac{2}{3} \right) \right] \\ &= -10 \text{ kN} \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

Momento flexionante máximo positivo en C . La disposición de las cargas para obtener el momento flexionante máximo positivo en C se muestra en la Fig. 9.5(f). Tenga en cuenta que la carga viva concentrada de 90-kN está colocada en la ordenada máxima positiva de la línea de influencia para M_C (Fig. 9.5(e)); la carga viva de 40 kN/m uniformemente distribuida se encuentra sobre la porción BD de la viga, donde las ordenadas de la línea de influencia son positivas; mientras que la carga muerta uniformemente distribuida de 20-kN/m se ubica sobre toda la longitud de la viga. El momento máximo positivo en C está dado por

$$\begin{aligned} \text{Máximo positivo } M_C &= 90(2) + 40 \left(\frac{1}{2} \right) (9)(2) \\ &\quad + 20 \left[\left(\frac{1}{2} \right) (3)(-2) + \left(\frac{1}{2} \right) (9)(2) \right] \\ &= 660 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

Momento flexionante máximo negativo en C . La disposición de las cargas para obtener el momento flexionante máximo negativo en C se muestra en la Fig. 9.5(g). El momento máximo negativo M_C está dado por

$$\begin{aligned} \text{Máximo negativo } M_C &= 90(-2) + 40 \left(\frac{1}{2} \right) (3)(-2) \\ &\quad + 20 \left[\left(\frac{1}{2} \right) (3)(-2) + \left(\frac{1}{2} \right) (9)(2) \right] \\ &= -180 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

9.3 Respuesta en una ubicación determinada debida a una serie de cargas concentradas en movimiento

Como se discutió en la Sección 2.2, las cargas vivas causadas por el tránsito vehicular en una carretera o puente de ferrocarril se representan por una serie de cargas concentradas con espaciamiento definido entre estas (ver Figs. 2.2 y 2.3). Las líneas de influencia proporcionan un medio conveniente para analizar las estructuras sujetas a tales cargas en movimiento. En esta sección discutiremos cómo la línea de influencia de una función de respuesta puede emplearse para determinar (1) el valor de la función de respuesta de una posición dada de una serie de cargas concentradas y (2) el valor máximo de la función de respuesta debido a la serie de cargas concentradas en movimiento.

Considere, por ejemplo, la viga de un puente mostrado en la Fig. 9.6. Suponga que deseamos determinar el cortante en el punto B de la viga debido a las cargas de las ruedas de un camión HS20-44 cuando el eje del camión

se localiza a una distancia de 16 ft del apoyo izquierdo A , como se muestra en la figura. Las distancias entre las tres cargas así como la ubicación de la carga de 4 k se conocen, además de que la ubicación de las otras dos cargas se puede establecer fácilmente. A pesar de que las ordenadas de la línea de influencia correspondiente a las cargas pueden calcularse usando las propiedades de los triángulos semejantes formados por la línea de influencia, es usualmente conveniente evaluar tales ordenadas multiplicando la pendiente del segmento de la línea de influencia donde se localiza la carga por una distancia de la carga desde el punto en el cual el segmento de la línea de influencia intersecta el eje horizontal (es decir, se vuelve cero). El signo (más o menos) de la ordenada se obtiene por inspección. Por ejemplo, la ordenada de la línea de influencia correspondiente a la carga de 4 k (Fig. 9.6), puede calcularse multiplicando la pendiente (1:100) del segmento de la línea de influencia AB por una distancia (16 ft) de la carga desde el punto A . Así, la ordenada de la línea de influencia para S_B correspondiente a la carga de 4 k es igual a $-(1/100)(16) = -0.16$ k/k. La ordenada correspondiente a las tres cargas obtenidas de esta manera se muestra en la Fig. 9.6.

Cabe recordar que el cortante en B debido a una sola carga concentrada está dado por el producto de la magnitud de la carga y la ordenada de la línea de influencia en la ubicación de la carga. Puesto que la superposición es válida, el total del cortante en B generado por las tres cargas concentradas puede determinarse sumando algebraicamente los cortantes en B debido a las cargas individuales, es decir, sumando el producto de las magnitudes de las cargas y la respectiva ordenada de la línea de influencia. Así

$$S_B = -4(0.16) - 16(0.3) + 16(0.4) = 0.96 \text{ k}$$

El procedimiento anterior se puede emplear para determinar el valor de la función de respuesta de la fuerza o momento de una estructura para una posición dada de una serie de cargas concentradas.

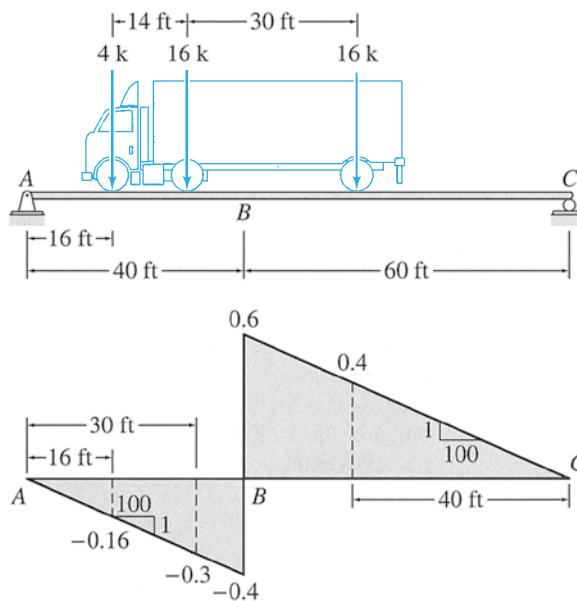


FIG. 9.6

Línea de influencia para S_B (k/k)

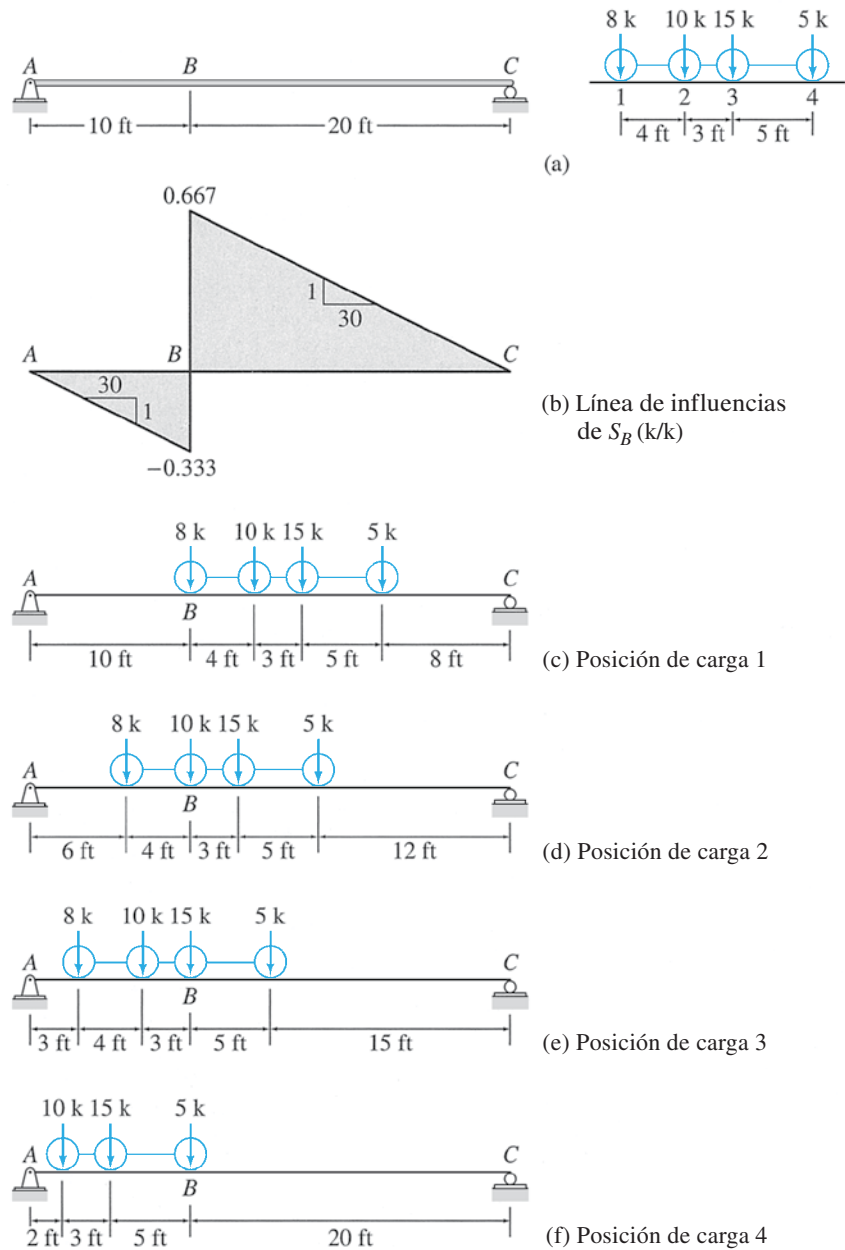


FIG. 9.7

Las líneas de influencia pueden servir para determinar los valores máximos de las funciones de respuesta en ubicaciones específicas de las estructuras debido a una serie de cargas concentradas. Considere la viga mostrada en la Fig. 9.7(a), y suponga que nuestro objetivo es determinar el cortante máximo positivo en el punto B debido a una serie de cuatro cargas concentradas. La línea de influencia para S_B se muestra en la Fig. 9.7(b). Suponiendo que la serie de cargas se mueve de derecha a izquierda sobre la viga, podemos observar que, conforme la serie de cargas se mueve del extremo C de la viga hacia el punto B, el cortante en B incrementa continuamente como aumentan las ordenadas de la línea de influencia bajo las cargas. El cortante en B alcan-

za un máximo relativo cuando la primera carga de la serie de 8-k llega justo a la derecha de B , donde se ubica la ordenada máxima positiva de la línea de influencia. Como la carga de 8-k cruza el punto B , el cortante en B decrece abruptamente en una cantidad igual a $-8(0.667 + 0.333) = -8$ k. Con la serie de cargas moviéndose hacia la izquierda, S_B incrementa nuevamente, y alcanza otro máximo relativo cuando la segunda carga de la serie, el de 10-k, llega justo a la derecha de B , y así sucesivamente. Puesto que S_B llega a un máximo relativo, cuando una de las cargas de la serie alcanza la ordenada máxima positiva de la línea de influencia, podemos concluir que durante el movimiento de la serie de cargas a través de la longitud de la viga, el cortante máximo (absoluto) se presenta en B cuando una de las cargas de la serie se ubica en la ordenada máxima positiva de la línea de influencia de S_B . Como no es posible identificar por inspección la carga que generará el máximo positivo de S_B cuando se encuentre en la ordenada máxima de la línea de influencia, podemos usar el procedimiento de prueba y error para determinar el valor del cortante máximo positivo en B . Como lo muestra la Fig. 9.7(c), la serie de cargas inicialmente colocada sobre la viga con su primera carga, la carga de 8-k situada justo a la derecha de B , donde se ubica la ordenada máxima positiva de la línea de influencia. Note que la pendiente del segmento de la línea de influencia de la porción BC es 1:30 (Fig.9.7(b)), calculamos el valor de S_B para esta posición de la carga como

$$\begin{aligned} S_B &= 8(20) \left(\frac{1}{30} \right) + 10(16) \left(\frac{1}{30} \right) + 15(13) \left(\frac{1}{30} \right) + 5(8) \left(\frac{1}{30} \right) \\ &= 18.5 \text{ k} \end{aligned}$$

Después, la serie completa de cargas se mueve a la izquierda unos 4 ft para colocar la segunda carga de la serie, la carga de 10-k, en la ubicación de la ordenada máxima positiva de la línea de influencia, como se muestra en la Fig. 9.7(d). El cortante en B para esta posición de la carga está dado por

$$\begin{aligned} S_B &= -8(6) \left(\frac{1}{30} \right) + 10(20) \left(\frac{1}{30} \right) + 15(17) \left(\frac{1}{30} \right) + 5(12) \left(\frac{1}{30} \right) \\ &= 15.567 \text{ k} \end{aligned}$$

La serie de cargas entonces se mueve más a la izquierda, unos 3 ft para colocar la tercera carga de la serie, la carga de 15-k justo a la derecha de B (Fig.9.7(e)). El cortante en B está dado ahora por

$$\begin{aligned} S_B &= -8(3) \left(\frac{1}{30} \right) - 10(7) \left(\frac{1}{30} \right) + 15(20) \left(\frac{1}{30} \right) + 5(15) \left(\frac{1}{30} \right) \\ &= 9.367 \text{ k} \end{aligned}$$

Finalmente, la serie se coloca de modo que su última carga, la carga de 5-k, esté justo a la derecha de B , como se muestra en la Fig. 9.7(f). Tenga en cuenta que la carga de 8-k está ahora fuera del claro de la viga; por lo tanto, no contribuye al cortante en B , el cual está dado por

$$S_B = -10(2) \left(\frac{1}{30} \right) - 15(5) \left(\frac{1}{30} \right) + 5(20) \left(\frac{1}{30} \right) = 0.167 \text{ k}$$

Comparando los valores de S_B determinados en las cuatro posiciones, podemos concluir que el cortante máximo positivo en B se presenta para la primera

posición de la carga, es decir, cuando la carga de 8-k está colocada justo a la derecha de B (Fig. 9.7(c)):

$$\text{Máximo positivo de } S_B = 18.5 \text{ k}$$

Procedimiento de análisis

El procedimiento para determinar el valor máximo de una función de respuesta de una fuerza o momento en una ubicación en particular en una estructura debido a una serie de cargas concentradas se puede resumir de la siguiente manera:

1. Construya la línea de influencia de la función de respuesta cuyo valor máximo se desea conocer, y coloque su ordenada máxima positiva o negativa, dependiendo de si se quiere el valor máximo positivo o negativo de la función de respuesta.
2. Seleccione la dirección (ya sea de derecha a izquierda o viceversa) en que la serie de cargas se desplazará sobre la estructura. Si la serie se mueve de derecha a izquierda, entonces la carga del extremo izquierdo de la serie se considera como la primer carga, mientras que si se desplaza de izquierda a derecha, entonces la carga del extremo derecho se considera como la primer carga. Comenzando con la primer carga, numeradas secuencialmente (como 1, 2, 3, . . .) todas las cargas. La posición de la serie completa de cargas se conoce por el número de la carga, la cual está colocada en la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia; por ejemplo, cuando la tercer carga de la serie se encuentre en la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia se le conoce como posición de carga 3, y así sucesivamente (para un ejemplo, vea la Fig. 9.7).
3. Coloque la serie de cargas concentradas en la estructura con la primera carga de la serie en la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia. Establezca la ubicación del resto de las cargas de la serie.
4. Evalúe las ordenadas correspondientes a la serie de cargas y determine el valor de la función de respuesta sumando algebraicamente el producto de las magnitudes de carga y las ordenadas respectivas de la línea de influencia. Si el valor de la función de respuesta determinada aquí es para la última posición (con la última carga de la serie colocada en la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia), entonces vaya al paso 6, de otra manera, continúe con el siguiente punto.
5. Desplace la serie de cargas en la dirección seleccionada en el paso 2 hasta que la siguiente carga de la serie alcance la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia. Establezca la posición de las cargas restantes de la serie, y regrese al paso 4.
6. Comparando las magnitudes de la función de respuesta deseada para todas las posiciones consideradas, obtenga el valor máximo de la función de respuesta.

Si el arreglo de cargas es tal que todas o casi todas las cargas más pesadas se ubican cerca de uno de los extremos de la serie, entonces el análisis

puede ser más rápido seleccionando la dirección de movimiento de la serie, de modo que la carga más pesada alcance la ordenada máxima de la línea de influencia antes que la carga más ligera de la serie. Por ejemplo, una serie de carga en la cual la carga más pesada está a la izquierda debería moverse en la estructura de derecha a izquierda y viceversa. En tal caso, puede no ser necesario examinar todas las posiciones de cargas obtenidas sucesivamente colocando cada carga de la serie en la ubicación de la ordenada máxima de la línea de influencia. En cambio, el análisis puede terminar cuando el valor de la función de respuesta comience a decrecer, es decir, si se encuentra un valor menor de la función de respuesta para una posición de carga que el valor de la siguiente posición de carga, entonces el valor de la función de respuesta se considera como máximo en la ubicación de la carga en la posición anterior. A pesar de que este criterio puede ser útil para las series con cargas pesadas cerca de la mitad del grupo de cargas, no es válido para cualquier serie general de cargas. En general, dependiendo de las magnitudes de carga y espaciado, y de la forma de la línea de influencia, el valor de la función de respuesta, después de haber declinado algunas posiciones de la carga, puede empezar a aumentar de nuevo para la posición de cargas siguientes y alcanzar un máximo más alto.

Ejemplo 9.4

Determine la máxima fuerza axial en el elemento BC de la armadura Warren provocada por una serie de cuatro cargas concentradas móviles mostradas en la Fig. 9.8(a)

Solución

Línea de influencia para F_{BC} . Ver Fig. 9.8(b).

Fuerza máxima en el elemento BC . Para determinar el valor máximo de F_{BC} , movemos la serie de cargas de la derecha a la izquierda, sucesivamente, colocando cada carga en el punto B , donde se localiza la ordenada de la línea de influencia máxima para F_{BC} (ver Figs. 9.8(c) a (f)). El valor de F_{BC} se calcula para cada posición de la carga como sigue.

- Posición de la carga 1 (Fig. 9.8(c)):

$$F_{BC} = [16(60) + 32(50) + 8(35) + 32(15)] \left(\frac{1}{80} \right) = 41.5 \text{ k (T)}$$

- Posición de la carga 2 (Fig. 9.8(d)):

$$F_{BC} = 16(10) \left(\frac{3}{80} \right) + [32(60) + 8(45) + 32(25)] \left(\frac{1}{80} \right) = 44.5 \text{ k (T)}$$

- Posición de la carga 3 (Fig. 9.8(e)):

$$F_{BC} = 32(5) \left(\frac{3}{80} \right) + [8(60) + 32(40)] \left(\frac{1}{80} \right) = 28.0 \text{ k (T)}$$

- Posición de la carga 4 (Fig. 9.8(f)):

$$F_{BC} = 32(60) \left(\frac{1}{80} \right) = 24.0 \text{ k (T)}$$

Comparando los valores de F_{BC} para las cuatro posiciones, concluimos que la magnitud de la fuerza máxima axial que desarrolla el elemento BC es $F_{BC} = 44.5 \text{ k}$ en tensión. Esta fuerza máxima se presenta cuando la segunda carga de la serie se coloca en el nodo B de la armadura, como se muestra en la Fig. 9.8(d).

$$\text{Máxima } F_{BC} = 44.5 \text{ k (T)}$$

Respuesta

continúa

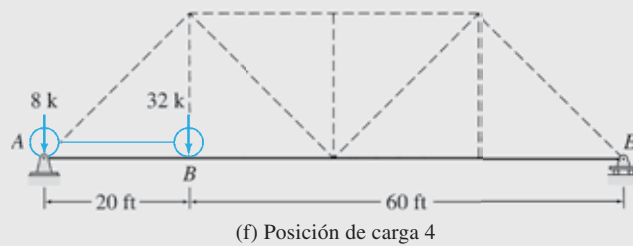
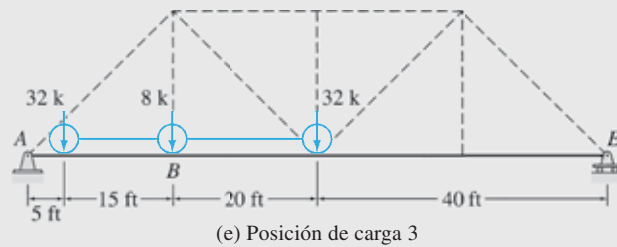
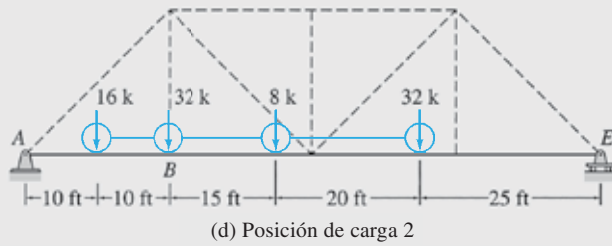
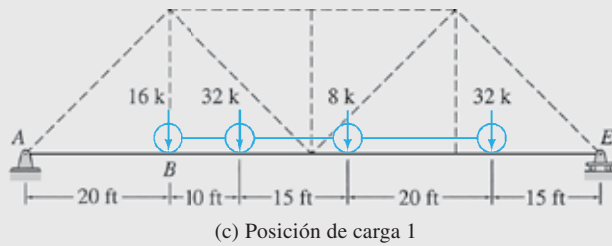
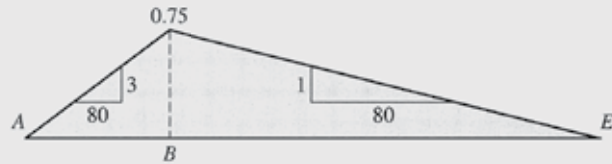
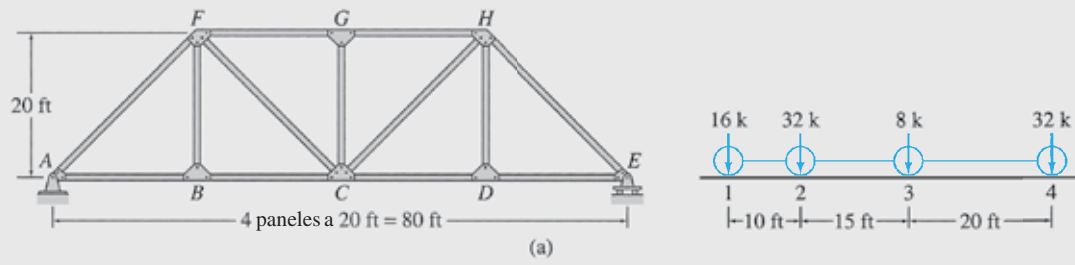


FIG. 9.8

9.4 Respuesta máxima absoluta

Hasta ahora hemos considerado la máxima respuesta que puede ocurrir en una *ubicación en particular* en una estructura. En esta sección, discutiremos cómo determinar el valor *máximo absoluto* de una función de respuesta que puede presentarse en cualquier ubicación a lo largo de una estructura. A pesar de que solo se consideran vigas simplemente apoyadas en esta sección, los conceptos presentados aquí pueden utilizarse para desarrollar procedimientos para el análisis de la respuesta máxima absoluta de otro tipo de estructuras.

Carga individual concentrada

Considere la viga simplemente apoyada de la Fig. 9.9(a). Las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en una sección arbitraria $a'a'$ que se localiza a una distancia a del apoyo izquierdo A se muestra en las Figs. 9.9(b) y (c), respectivamente. Recuerde que estas líneas de influencia se desarrollaron en la Sección 8.1 (Figs. 8.2(e) y (f)).

Suponga que deseamos determinar el cortante máximo absoluto en la viga debido a una carga individual concentrada móvil de magnitud P . Como discutimos en la Sección 9.1, el cortante máximo positivo en la sección $a'a'$

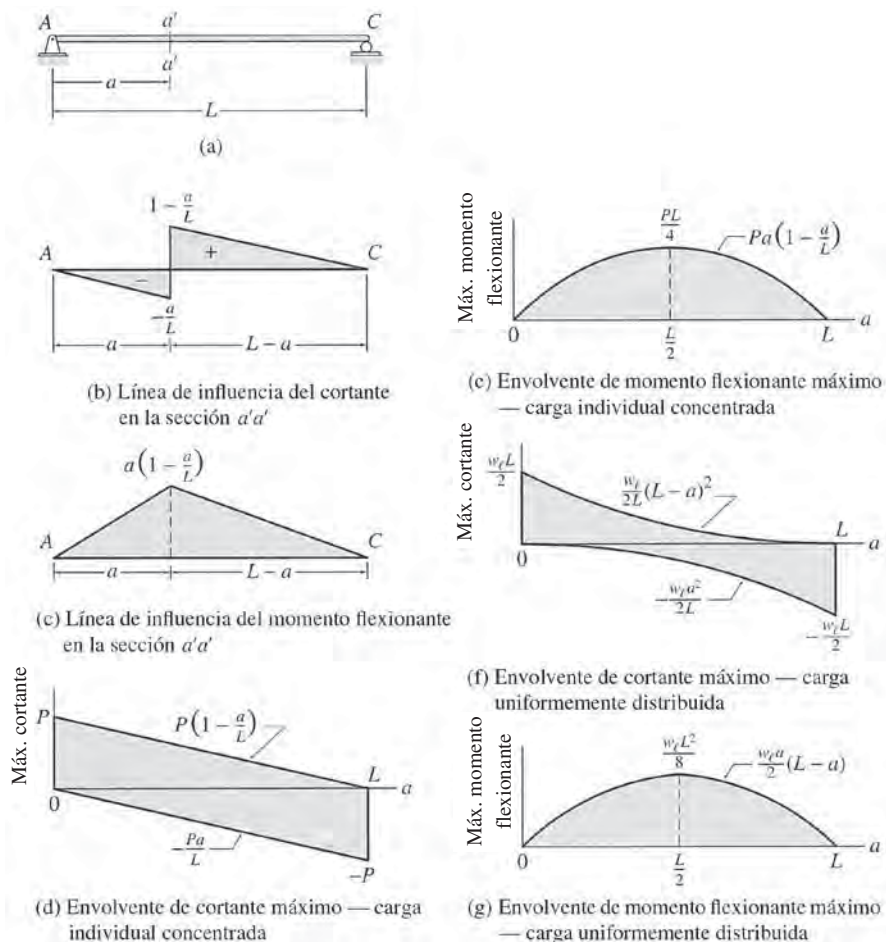


FIG. 9.9

está dado por el producto de la magnitud, P , y la ordenada máxima positiva, $1 - (a/L)$, de la línea de influencia del cortante en la sección $a'a'$ (Fig. 9.9(b)). Por lo tanto,

$$\text{Cortante máximo positivo} = P \left(1 - \frac{a}{L} \right) \quad (9.3)$$

De manera similar, el cortante máximo negativo en la sección $a'a'$ está dado por

$$\text{Cortante máximo negativo} = -\frac{Pa}{L} \quad (9.4)$$

Estas ecuaciones indican que el cortante máximo positivo y el cortante máximo negativo en la sección debido a una carga concentrada móvil varía linealmente con la distancia a de la sección del apoyo izquierdo A de la viga. Una gráfica de las Ecs. (9.3) y (9.4), con cortante máximo como ordenada, contra la ubicación a de la sección como abscisas se muestra en la Fig. 9.9(d). Tal gráfica demuestra la variación del valor máximo de una función de respuesta como una función de la ubicación de la sección, y se denomina *envolvente de valores máximos de una función de respuesta*. Una envolvente de valores máximos de una función de respuesta proporciona un medio conveniente para determinar el valor máximo absoluto de la función de respuesta además de su ubicación. Se puede observar de la envolvente de cortante máximo (Fig. 9.9(d)), que en una viga simplemente apoyada sujeta a una carga concentrada móvil P el valor del cortante máximo absoluto se desarrolla en una sección dentro del apoyo y tiene la magnitud de P .

La envolvente máxima de momento flexionante debido a una carga individual concentrada P se puede establecer de una manera similar. Usando la línea de influencia para el momento flexionante en una sección arbitraria $a'a'$ dado en la Fig. 9.9(c), determine la expresión para el momento flexionante máximo en la sección $a'a'$ como

$$\text{Momento flexionante máximo} = Pa \left(1 - \frac{a}{L} \right) \quad (9.5)$$

La envolvente de momento flexionante construida a partir de graficar la Ec. (9.5) se muestra en la Fig. 9.9(e). De ella se puede ver que el valor máximo absoluto del momento flexionante ocurre en la mitad de la viga y tiene magnitud $PL/4$.

Carga uniformemente distribuida

Después, determinamos el cortante máximo absoluto y el momento flexionante en una viga simplemente apoyada de la Fig. 9.9(a) debido a una carga viva uniformemente distribuida de magnitud w_ℓ . Como se discutió en la Sección 9.2, el cortante máximo positivo o negativo en la sección $a'a'$ se puede obtener colocando la carga sobre la porción de la viga donde las ordenadas de la línea de influencia del cortante (Fig. 9.9(b)) son positivas (o negativas), y multiplicando la intensidad de la carga por el área bajo la línea de influencia de la porción cargada de la viga. Así,

$$\text{Cortante máximo positivo} = \frac{w_\ell}{2L} (L - a)^2 \quad (9.6)$$

$$\text{Cortante máximo positivo} = -\frac{w_\ell a^2}{2L} \quad (9.7)$$

El envolvente de cortante máximo debido a una carga viva uniformemente distribuida, construido a partir de graficar las Ecs. (9.6) y (9.7), se muestra en la Fig. 9.9(f). En él se puede ver que el cortante máximo absoluto se desarrolla en una sección dentro del apoyo y tiene magnitud $w_\ell L/2$.

Para determinar la expresión del momento flexionante máximo en una sección $a'a'$, multiplicamos la intensidad de la carga, w_ℓ , así como el área bajo la línea del momento flexionante (Fig. 9.9(c)), para obtener

$$\text{Momento máximo flexionante} = \frac{w_\ell a}{2} (L - a) \quad (9.8)$$

La envolvente de momento flexionante máximo debido a la carga viva uniformemente distribuida, elaborado a partir de graficar la Ec. (9.8), se muestra en la Fig. 9.9(g). Aquí se puede ver que el momento de flexión máximo absoluto se presenta a la mitad del claro de la viga, con magnitud $w_\ell L^2/8$.

Serie de cargas concentradas

El valor máximo absoluto de una función de respuesta en cualquier estructura sujeta a una serie de cargas concentradas móviles o a cualquier otra condición de carga viva se puede determinar de la envolvente de valores máximos de la función de respuesta. Esta envolvente se puede construir evaluando los valores máximos de la función de respuesta en un número de puntos a lo largo de la longitud de la estructura usando el procedimiento descrito en las secciones 9.1 a 9.3, y graficando los valores máximos. Debido a la cantidad considerable de cálculos, excepto por algunas vigas simples, el análisis de la respuesta máxima absoluta se realiza generalmente con computadora. En las siguientes secciones discutiremos el método directo que comúnmente se usa para determinar el cortante y el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada sujeta a una serie de cargas concentradas móviles.

Como en el caso de una carga individual concentrada y una uniformemente repartida, el cortante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada debido a una serie de cargas concentradas móviles siempre se presenta en la sección justo dentro de los apoyos. De la línea de influencia del cortante en una sección arbitraria $a'a'$ de una viga simplemente apoyada mostrada en la Fig. 9.9(b), podemos ver que para desarrollar el cortante máximo absoluto en la sección, debemos colocar tantas cargas de la serie como sea posible en la porción de la viga en la cual la línea de influencia es positiva y tan pocas como sea posible en la porción de la viga donde la línea de influencia es negativa. Por otra parte, como la sección $a'a'$ se desplaza hacia la izquierda del apoyo de la viga, el valor del cortante máximo positivo se presentará cuando la sección $a'a'$ se localice justo a la derecha del apoyo izquierdo A. Aplicando un razonamiento similar, se puede ver que el cortante máximo absoluto negativo se presenta en la sección localizada justo a la izquierda del apoyo derecho C de la viga simplemente apoyada. Dado que la ubicación del cortante máximo absoluto se desconoce, el procedimiento para calcular la respuesta máxima en la sección debido a una serie de cargas concentradas, desarrollado en la Sección 9.3, se puede emplear para determinar la magnitud del cortante

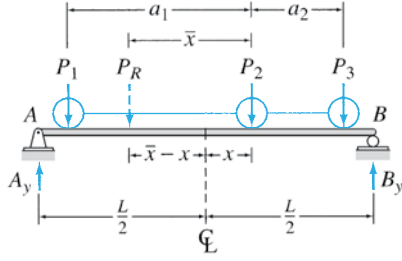


FIG. 9.10

máximo absoluto. Ya que la línea de influencia del cortante en el apoyo izquierdo es idéntica a la línea de influencia de la reacción en el apoyo izquierdo, la reacción puede usarse convenientemente para establecer la magnitud del cortante máximo absoluto.

Para determinar la ubicación del momento flexionante máximo absoluto, considere una viga simplemente apoyada sujeta a una serie de cargas arbitrarias concentradas P_1 , P_2 y P_3 , como la que se ilustra en la Fig. 9.10. La resultante de las cargas P_1 , P_2 y P_3 se denota por P_R , la cual se localiza a una distancia $\bar{x}$ de la carga P_2 , como se muestra en la figura. El diagrama de momento flexionante de la viga consiste de segmentos de línea recta entre los puntos de las cargas independientemente de la posición de estas, de modo que el momento flexionante absoluto se presenta bajo una de las cargas. Asumiendo que el momento flexionante máximo absoluto se presenta bajo la carga P_2 , nuestro objetivo es determinar su posición x de la mitad del claro de la viga, como se muestra en la figura. Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M_B = 0$ y usando la resultante P_R en lugar de las cargas individuales en la ecuación de equilibrio, determinamos la reacción vertical A_y como

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_B &= 0 \\
 -A_y(L) + P_R\left(\frac{L}{2} + \bar{x} - x\right) &= 0 \\
 A_y &= P_R\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{x}}{L} - \frac{x}{L}\right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento flexionante bajo la carga P_2 está dado por

$$\begin{aligned}
 M_2 &= A_y\left(\frac{L}{2} + x\right) - P_1 a_1 \\
 &= P_R\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{x}}{L} - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{L}{2} + x\right) - P_1 a_1 \\
 &= P_R\left(\frac{L}{4} + \frac{\bar{x}}{2} + \frac{x\bar{x}}{L} - \frac{x}{L}\right) - P_1 a_1
 \end{aligned}$$

Para que M_2 sea máximo, su derivada con respecto a x debe ser cero, es decir,

$$\frac{dM_2}{dx} = P_R\left(\frac{\bar{x}}{L} - \frac{2x}{L}\right) = 0$$

De la cual obtenemos

$$x = \frac{\bar{x}}{2} \quad (9.9)$$

Basados en la Ec. (9.9), podemos concluir que *en una viga simplemente apoyada sujeta a una serie de cargas concentradas móviles, el momento de flexión máximo se desarrolla bajo la carga cuando la mitad del claro de la viga se encuentra a medio camino entre la carga y la resultante de todas las cargas en la viga*. Aplicando este criterio, el momento de flexión máximo se puede calcular para cada carga actuante en la viga. El momento de flexión máximo más grande obtenido de esta manera es el momento de flexión

máximo absoluto. Sin embargo, en general no es necesario examinar todas las cargas actuantes en la viga, dado que el momento de flexión máximo absoluto se presenta bajo la carga más cercana a la resultante, previsto que es igual o de mayor magnitud que la siguiente carga adyacente. De otra manera, el momento de flexión máximo debería calcularse para las dos cargas adyacentes a la resultante y compararse para obtener el momento de flexión máximo absoluto.

Ejemplo 9.5

Determine el momento de flexión máximo absoluto en la viga simplemente apoyada debido a la carga de las ruedas del camión HS20-44 mostrado en la Fig. 9.11(a).

Solución

Resultante de la serie de cargas. Las magnitudes de la resultante se obtiene en sumando las magnitudes de la serie de cargas. Por lo tanto

$$P_R = \sum P_i = 4 + 16 + 16 = 36 \text{ k}$$

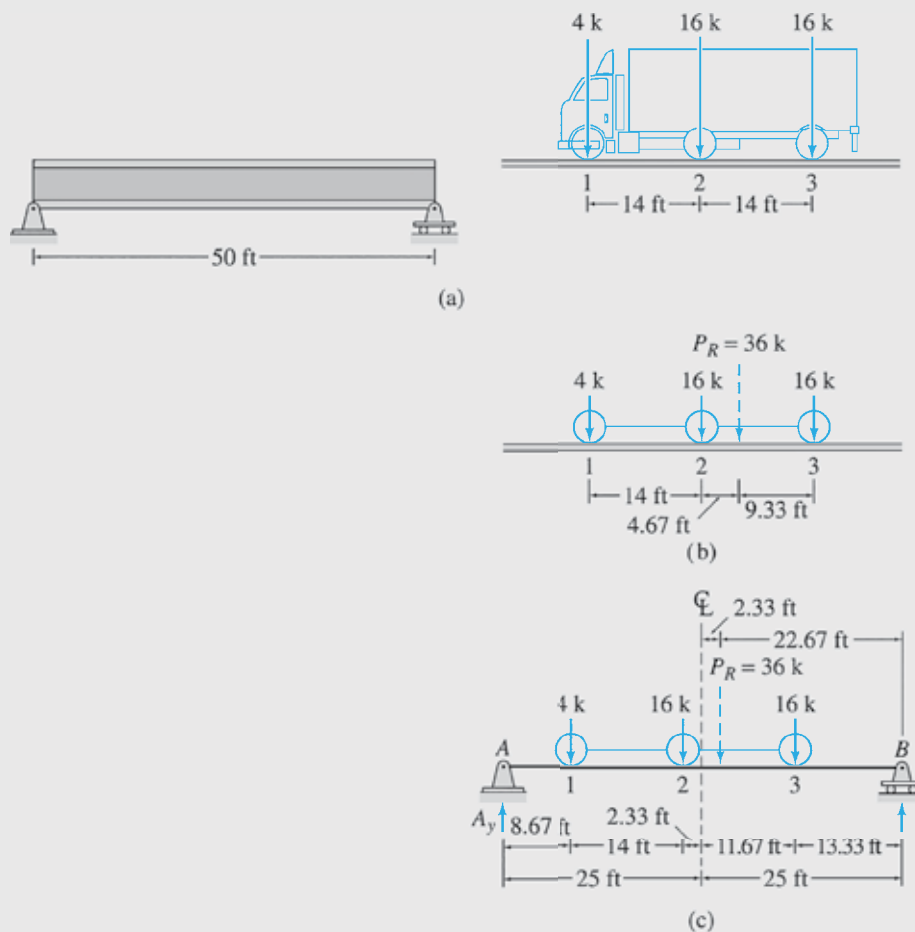


FIG. 9.11

continúa

La ubicación de la resultante se puede determinar usando la condición de que el momento resultante alrededor de un punto es igual a la suma de los momentos de las cargas individuales alrededor del mismo punto. Por lo tanto, de la suma de momentos alrededor de la carga del camión de 16-k obtenemos

$$\begin{aligned}P_R(\bar{x}) &= \sum P_i x_i \\36(\bar{x}) &= 4(28) + 16(14) \\ \bar{x} &= 9.33 \text{ ft}\end{aligned}$$

Momento flexionante máximo absoluto. De la Fig. 9.11(b), observamos que la segunda carga de la serie (la de la llanta trasera de 16-kN) se localiza más cerca de la resultante. Así, el valor del momento de flexión máximo absoluto se presenta bajo la segunda carga cuando la serie está posicionada en la viga de modo que la mitad del claro de la viga se ubica entre la carga y la resultante. La resultante se encuentra a 4.67 ft a la derecha de la segunda carga (Fig. 9.11(b)), así que posicionamos esta carga a la distancia de $4.67/2 = 2.33$ ft a la izquierda de la mitad del claro, como se muestra en la Fig. 9.11(c). Después, calculamos la reacción vertical en A como

$$A_y = 36 \left(\frac{22.67}{50} \right) = 16.32 \text{ k}$$

Así, el momento flexionante máximo absoluto se presenta cuando la segunda carga de la serie está en

$$\begin{aligned}\text{Momento flexionante máximo absoluto} &= M_2 = 16.32(8.67 + 14) - 4(14) \\ &= 313.97 \text{ k-ft}\end{aligned}$$

Respuesta

Resumen

En este capítulo aprendimos que el valor de la función de respuesta debido a una carga individual concentrada se puede determinar multiplicando la magnitud de la carga por la ordenada de la función de respuesta de la línea de influencia en la posición de la carga. Para calcular el valor máximo positivo (o negativo) de una función de respuesta debido a una carga individual concentrada, la carga debe estar aplicada en la ubicación de la ordenada máxima positiva (o negativa) de la función de respuesta de la línea de influencia.

El valor de la función de respuesta debido a una carga uniformemente distribuida aplicada sobre una porción de la estructura se puede obtener multiplicando la intensidad de la carga por el área neta bajo la porción correspondiente de la función de respuesta de la línea de influencia. Para determinar el valor máximo positivo (o negativo) de una función de respuesta debida a una carga viva uniformemente distribuida, la carga debe estar colocada sobre las porciones de la estructura donde las ordenadas de la función de respuesta de la línea de influencia son positivas (o negativas).

El valor máximo de una función de respuesta en una posición en particular en una estructura debido a una serie de cargas concentradas móviles puede determinarse colocando sucesivamente cada carga de la serie sobre la estructura en la posición de la ordenada máxima de la función de respuesta de la línea de influencia, calculando el valor de la función de respuesta para cada posición de la serie a través de la suma algebraica del producto de las magnitudes de la carga y las ordenadas de la línea de influencia, y comparando los valores de la función de respuesta obtenidos de esta manera para calcular el valor máximo de la función de respuesta.

En una viga simplemente apoyada (a) el cortante máximo absoluto se desarrolla en una sección justo dentro de los apoyos, (b) el momento flexionante máximo absoluto debido a una carga individual concentrada, o a una carga viva uniformemente distribuida, se presenta en la mitad del claro de la viga, y (c) el momento flexionante máximo absoluto debido a una serie de cargas concentradas móviles se presenta bajo una de las cargas cerca de la resultante de las cargas cuando la mitad del claro de la viga se localiza a medio camino entre la carga y la resultante.

Problemas

Sección 9.1 y 9.2

9.1 De la viga del Problema 8.6, determine el momento de flexión máximo negativo en el punto *B* debido a una carga viva concentrada de 75-kN.

9.2 De la viga del Problema 8.6, determine la reacción máxima hacia arriba en el apoyo *A* debido a una carga viva uniformemente distribuida de 35-kN/m.

9.3 De la viga del Problema 8.6, determine el cortante máximo negativo en el punto *B* debido a una carga viva uniformemente distribuida de 35-kN/m.

9.4 De la viga del Problema 8.7, determine el cortante máximo positivo y negativo y el momento flexionante máximo positivo y negativo en el punto *C* debido a una carga viva concentrada de 25 k, a una carga viva uniformemente distribuida de 2 k/ft, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 0.5 k/ft.

9.5 De la viga del Problema 8.5, determine la reacción vertical máxima hacia arriba y la reacción de momento máximo en sentido contrario a las manecillas del reloj en el apoyo *A* debido a una carga viva concentrada de 100 kN, a una carga viva uniformemente distribuida de 50 kN/m, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 20 kN/m.

9.6 De la viga del Problema 8.10, determine el cortante máximo positivo y negativo y el momento flexionante máximo positivo y negativo en el punto *C* debido a una carga viva concentrada de 150 kN, a una carga viva uniformemente distribuida de 50 kN/m, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 25 kN/m.

9.7 De la viga del Problema 8.23, determine el cortante máximo positivo y negativo y el momento flexionante máximo positivo y negativo en el punto *D* debido a una carga viva concentrada de 30 k, a una carga viva uniformemente distribuida de 3 k/ft, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 1 k/ft.

9.8 De la viga del Problema 8.27, determine el cortante máximo positivo y negativo y el momento flexionante máximo positivo y negativo en el punto *E* debido a una carga viva concentrada de 40 k, a una carga viva uniformemente distribuida de 2 k/ft, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 1 k/ft.

9.9 Para la armadura del Problema 8.47, determine la máxima compresión axial en el elemento *GH* debido a una carga viva concentrada de 30 k, a una carga viva uniformemente distribuida de 2 k/ft, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 1 k/ft.

9.10 Para la armadura del Problema 8.50, determine la máxima fuerza axial de compresión en el miembro de *BE* y la máxima compresión axial en *BF* debido a una carga viva concentrada de 120 kN, una carga viva uniformemente distribuida de 40 kN/m, y una carga muerta uniformemente distribuida de 20 kN/m.

9.11 Para la armadura del Problema 8.51, determine la máxima compresión y de tensión axial en el elemento *DI* debido a una carga viva concentrada de 40 k, a una carga viva uniformemente distribuida de 4 k/ft, y a una carga muerta uniformemente distribuida de 2 k/ft.

Sección 9.3

9.12 Para la viga del Problema 8.2, determine el cortante máximo positivo y el momento flexionante en el punto *B* debido a la carga de una rueda de un camión H20-44 mostrado en la Fig. P9.12

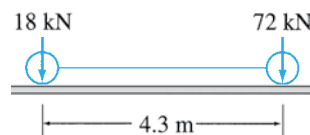


FIG. P9.12, P9.20

9.13 Para la viga del Problema 8.3, determine el cortante máximo positivo y el momento flexionante en el punto *B* debido a una serie de tres cargas concentradas móviles mostradas en la Fig. P9.13.

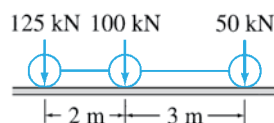


FIG. P9.13, P9.17, P9.18, P9.22

9.14 Para la viga del Problema 8.9, determine el momento flexionante máximo positivo en el punto B debido a una serie de cuatro cargas concentradas móviles mostradas en la Fig. P9.14.

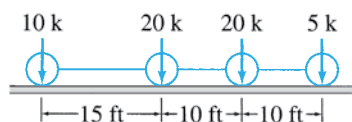


FIG. P9.14, P9.16, P9.19, P9.23

9.15 Para la viga del Problema 8.23, determine el momento flexionante máximo positivo en el punto D debido a una carga de rueda móvil del camión HS15-44 mostrado en la Fig. P9.15.

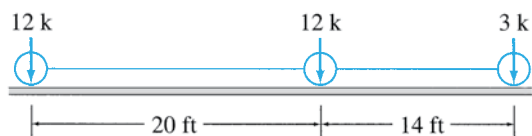


FIG. P9.15, P9.21

9.16 Para la viga del Problema 8.49, determine la máxima compresión axial del elemento GH debido a una serie de cuatro cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.14.

9.17 Para la armadura del Problema 8.53, determine la fuerza de tensión máxima en el elemento DI debido a una serie de tres cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.13.

Sección 9.4

9.18 Determine el cortante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 15 m de claro debido a una serie de tres cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.13.

9.19 Determine el cortante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 60 ft de claro debido a una serie de cuatro cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.14.

9.20 Determine el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 12 m de claro debido a una carga de rueda móvil de camión H20-44 mostrado en la Fig. P9.12.

9.21 Determine el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 75 ft de claro debido a una carga de rueda móvil de camión HS15-44 mostrado en la Fig. P9.15.

9.22 Determine el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 15 m de claro debido a una serie de tres cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.13.

9.23 Determine el momento flexionante máximo absoluto en una viga simplemente apoyada de 60 ft de claro debido a una serie de cuatro cargas móviles concentradas mostradas en la Fig. P9.14.



*Taj Mahal, construido
en el siglo XVII en Agra,
India*

Luciano Mortula/Shutterstock.com

10

Análisis de Estructuras Simétricas

- 10.1 Estructuras simétricas
 - 10.2 Componentes de carga simétricos y asimétricos
 - 10.3 Comportamiento de estructuras simétricas bajo cargas simétricas y asimétricas
 - 10.4 Procedimiento de análisis para estructuras simétricas
- Resumen
Problemas

Muchas estructuras, debido a consideraciones estéticas y/o funcionales, están dispuestas en formas simétricas. Una estructura simétrica dispuesta es linealmente elástica, la respuesta (es decir, las fuerzas en los elementos y deformaciones) de la estructura completa bajo cualquier carga general se obtiene de la respuesta de una de sus partes separadas por el eje de simetría. Así, solo se necesita analizar la parte (generalmente la mitad) de la estructura simétrica. En este capítulo discutiremos la manera de reconocer la simetría estructural y cómo utilizarla para reducir el esfuerzo de cálculo requerido para el análisis de estructuras simétricas.

Primero definiremos las estructuras simétricas y después discutiremos las cargas simétricas y asimétricas. En esta presentación desarrollaremos el procedimiento para descomponer un sistema general de cargas en componentes simétricos y asimétricos. Después examinaremos el comportamiento de estructuras simétricas bajo cargas simétricas y asimétricas; finalmente, presentaremos un procedimiento paso a paso para el análisis de estructuras simétricas.

A pesar de que la discusión en este capítulo está dedicada a las estructuras con un eje de simetría, el concepto desarrollado se puede extender al análisis de estructuras con múltiples ejes de simetría.

10.1 Estructuras simétricas

Reflexión

La definición de simetría puede desarrollarse con el concepto de *reflejo*, o imagen de espejo. Considere una estructura localizada en el plano xy , como se muestra en la Fig. 10.1(a). El reflejo de la estructura alrededor del eje y se

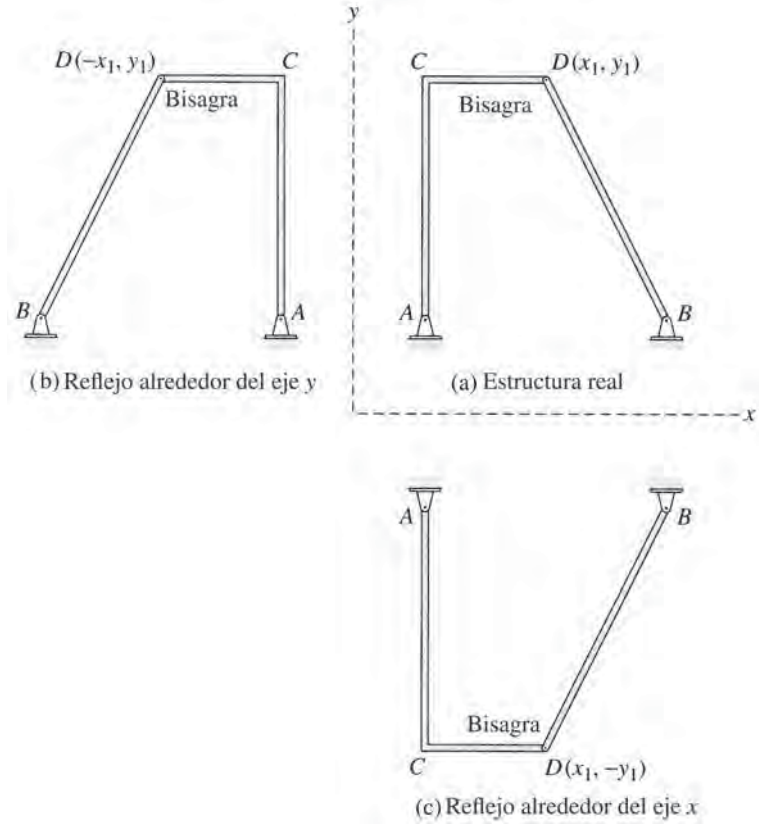


FIG. 10.1

obtiene al rotar la estructura 180° alrededor del eje y, como se ilustra en la Fig. 10.1(b). En las Figs. 10.1(a) y (b) se puede ver que si las coordenadas de un punto D de la estructura son x_1 y y_1 , entonces las coordenadas de ese punto en el reflejo de la estructura alrededor del eje y serán $-x_1$ y y_1 . El reflejo de la estructura alrededor del eje x se puede obtener de manera similar —es decir, rotando la estructura 180° alrededor del eje x, como lo muestra la Fig. 10.1(c). Tenga en cuenta que las coordenadas del punto D en el reflejo de la estructura alrededor del eje x serán x_1 y $-y_1$.

Basado en la discusión anterior, podemos darnos cuenta que la imagen de una estructura alrededor de un eje arbitrario s se puede obtener rotando la estructura 180° alrededor del eje s . Alternativamente, la imagen de la estructura se consigue uniendo las imágenes de varios de sus nodos y/o extremos, los cuales se determinan cambiando los signos de sus coordenadas en la dirección perpendicular al eje s . Para ilustrar este último enfoque, considere la armadura mostrada en la Fig. 10.2(a). Suponga que deseamos establecer su reflejo alrededor del eje y. Como se observa en la Fig. 10.2(b), primero se determinan los reflejos de los cinco nodos de la armadura cambiando los signos de las coordenadas x de los nodos. Entonces se unen las imágenes de los nodos con líneas rectas para obtener la imagen de la armadura completa. Tenga en cuenta que el reflejo del nodo C, el cual se localiza en el eje y, está en la misma posición.

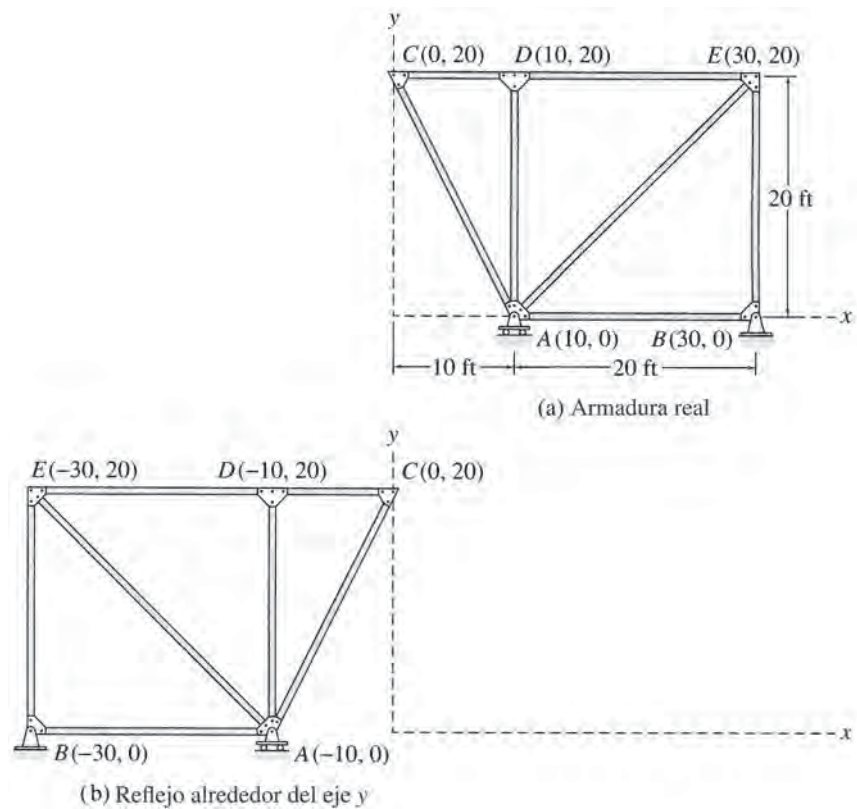


FIG. 10.2

Estructuras simétricas

Una estructura plana se considera simétrica con respecto a un eje de simetría en su plano si la imagen de la estructura sobre el eje es idéntica en geometría, apoyos y propiedades de materiales a la misma estructura.

Algunos ejemplos de estructuras simétricas se muestran en la Fig. 10.3. Para cada una, el eje de simetría se identifica como el eje s . Tenga en cuenta que el reflejo de cada estructura sobre su eje de simetría es idéntico en geometría, apoyos y propiedades de materiales de la misma estructura.

A pesar de que el concepto de reflejo proporciona un significado matemático preciso, no es necesario dibujar el reflejo de una estructura para determinar si es o no una estructura simétrica. En lugar de eso, las estructuras simétricas se pueden identificar por inspección, es decir, por comparación de la geometría, apoyos y propiedades de los materiales de las dos mitades de la estructura en cada lado del eje de simetría. Considere cualquiera de las estructuras de la Fig. 10.3, si imaginamos que la mitad de una estructura en cualquier lado del eje de simetría se hace girar 180° será exactamente igual sobre la mitad, indicando que la estructura es simétrica.

Como se indicó previamente, una estructura, en general, se considera simétrica si su geometría, apoyos y propiedades de materiales son simétricos con respecto al eje de simetría. Sin embargo, cuando examinamos la simetría estructural para propósitos de análisis, es necesario considerar la simetría no

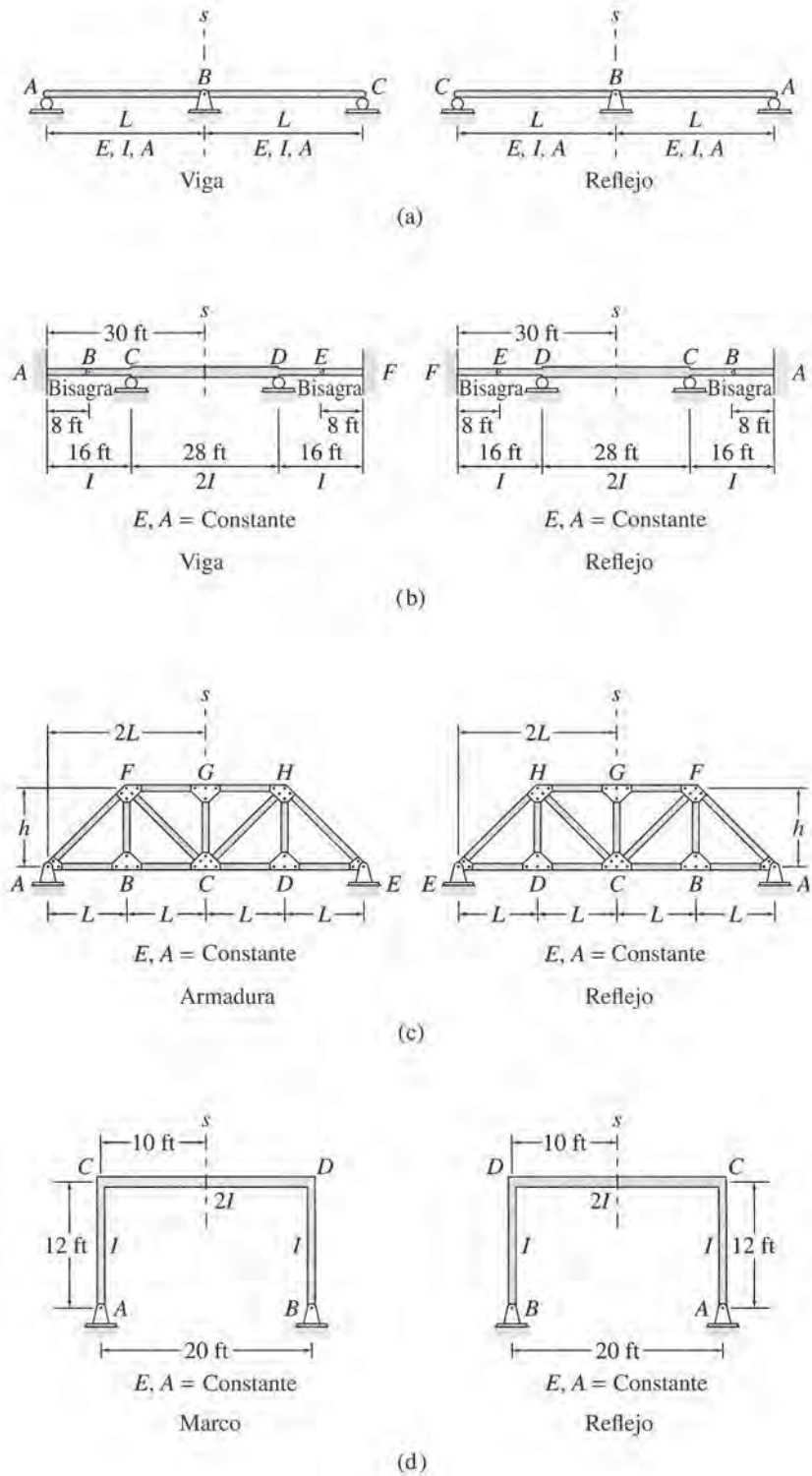


FIG. 10.3 Ejemplos de estructuras simétricas

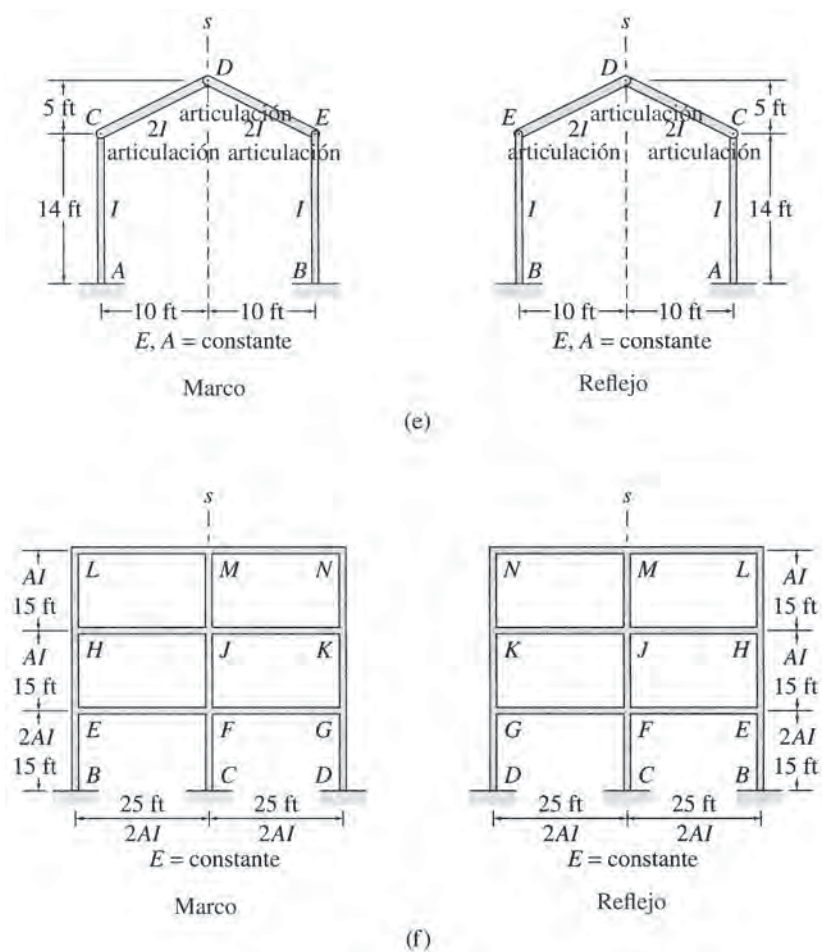


FIG. 10.3 (Continuación)

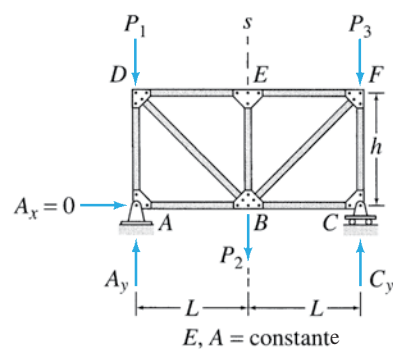


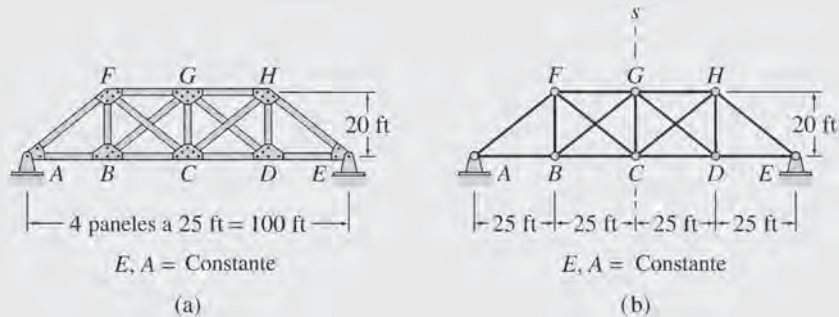
FIG. 10.4

solo de las propiedades estructurales que tienen efecto en el resultado de un particular tipo de análisis. En otras palabras, una estructura se puede considerar simétrica para el propósito de análisis si sus propiedades estructurales que tienen efecto en el resultado del análisis son simétricas.

Considere, por ejemplo, la armadura estáticamente determinada sujeta a cargas verticales que se muestra en la Fig. 10.4. De ella podemos ver que la geometría de la armadura (es decir, sus dimensiones y la disposición de sus elementos) y sus propiedades de materiales y secciones transversales (E y A) son simétricas con respecto al eje s , pero los apoyos no cumplen con la simetría debido a que el apoyo A puede ejercer tanto reacción vertical como horizontal, mientras que el patín en C solo puede ejercer reacción vertical. Sin embargo, la armadura se puede considerar simétrica sujeta solo a cargas verticales puesto que bajo tales cargas, la reacción horizontal en la articulación es cero ($A_x = 0$); por lo tanto, no tendrá ningún efecto en la respuesta (es decir, fuerzas axiales y deflexiones) de la armadura. Por el contrario, esta armadura no puede considerarse simétrica bajo ninguna carga horizontal.

Ejemplo 10.1

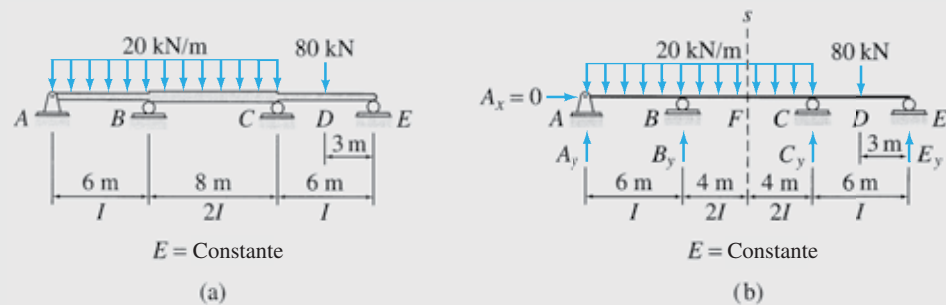
La armadura mostrada en la Fig. 10.5(a) será analizada para determinar las fuerzas axiales y las deflexiones debidas a un sistema general de cargas que actúa en los nodos. ¿Se puede considerar la armadura como simétrica para tal análisis?

**FIG. 10.5****Solución**

Podemos ver en la Fig. 10.5(b) que las dimensiones, la disposición de los elementos, las propiedades de los materiales y de la sección transversal (E y A), y de los apoyos de la armadura dada son simétricos con respecto al eje vertical s que pasa por el elemento CG . Por lo tanto, la armadura es simétrica con respecto al eje s .

Respuesta**Ejemplo 10.2**

La viga mostrada en la Fig. 10.6(a) será analizada para determinar las fuerzas en los extremos y en las deflexiones causadas por cargas verticales. ¿Se puede considerar a la viga como simétrica para tal análisis?

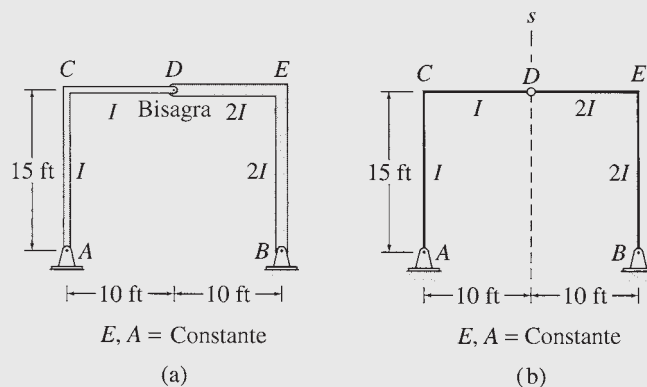
**FIG. 10.6****Solución**

Podemos ver en la viga de la Fig. 10.6(b) que sus dimensiones y sus propiedades (E y I) son simétricas con respecto al eje vertical s que pasa a través del punto medio F , pero los apoyos no son simétricos debido a que el apoyo articulado en A puede desarrollar reacciones verticales y horizontales, mientras que los patín de los apoyos B , C y E solo pueden desarrollar reacción vertical. Sin embargo, la viga se puede considerar simétrica bajo cargas verticales ya que las reacciones horizontales en A son cero ($A_x = 0$); por lo tanto, no tienen ningún efecto en las fuerzas en los extremos del elemento y en las deflexiones de la viga.

Respuesta

Ejemplo 10.3

El marco mostrado en la Fig. 10.7(a) se analizará para determinar las fuerzas en los extremos y deflexiones debido a un sistema general de cargas. ¿Este marco se puede considerar como simétrico?

**FIG. 10.7****Solución**

De la Fig. 10.7(b) podemos ver que a pesar de que la geometría del marco y de sus apoyos son simétricos con respecto al eje vertical s que pasa por la articulación interna D , su momento de inercia (I) no es simétrico. Debido a que el marco es estáticamente determinado, las fuerzas en los extremos de los elementos son independientes de las propiedades de los materiales y de su sección transversal (E, I y A); por lo tanto, el marco puede considerarse simétrico para el propósito del análisis de las fuerzas en los elementos. Sin embargo, este marco no puede estimarse simétrico para el análisis de las deflexiones, las cuales dependen de los momentos de inercia de los elementos del marco.

Respuesta**10.2 Componentes de carga simétricos y asimétricos**

Como se discutió en la sección anterior para estructuras, el reflejo de un sistema de fuerzas (o deflexiones) sobre un eje se puede obtener rotando el sistema de fuerzas (o deflexiones) 180° alrededor del eje. Considere un sistema de fuerzas y momentos, F_x , F_y , y M , que actúan en un punto A en el plano xy , como se muestra en la Fig. 10.8(a). Los reflejos del sistema de fuerzas alrededor de los ejes y y x se ilustran en las Figs. 10.8(b) y (c), respectivamente. Como se observa en estas figuras, el reflejo del momento M en el sentido contrario a la dirección de las manecillas del reloj serán ahora en sentido horario. A la inversa, los reflejos de un momento en el sentido de las manecillas serán siempre en sentido contrario a la dirección de las manecillas del reloj. Los reflejos de las deflexiones Δ_x y Δ_y y la rotación θ en el punto A (Fig. 10.8(a)) se pueden obtener de manera similar y también se muestra en las Figs. 10.8(b) y (c).

Cargas simétricas

Una carga se considera simétrica con respecto a un eje en su plano si el reflejo de la carga sobre el eje es idéntico a la misma carga.

Algunos ejemplos de cargas simétricas se muestran en la Fig. 10.9. El reflejo de cada carga sobre el eje de simetría se muestra también en la figura para

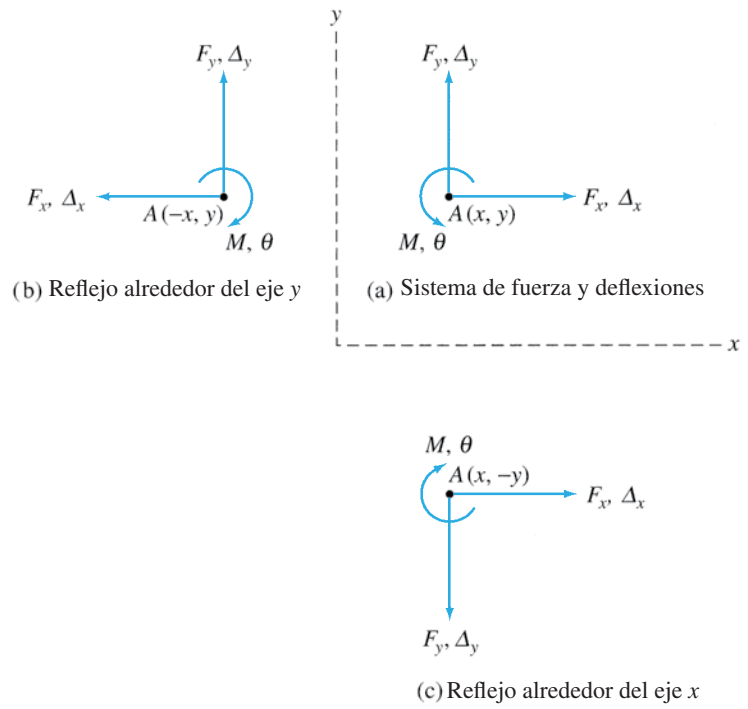


FIG. 10.8

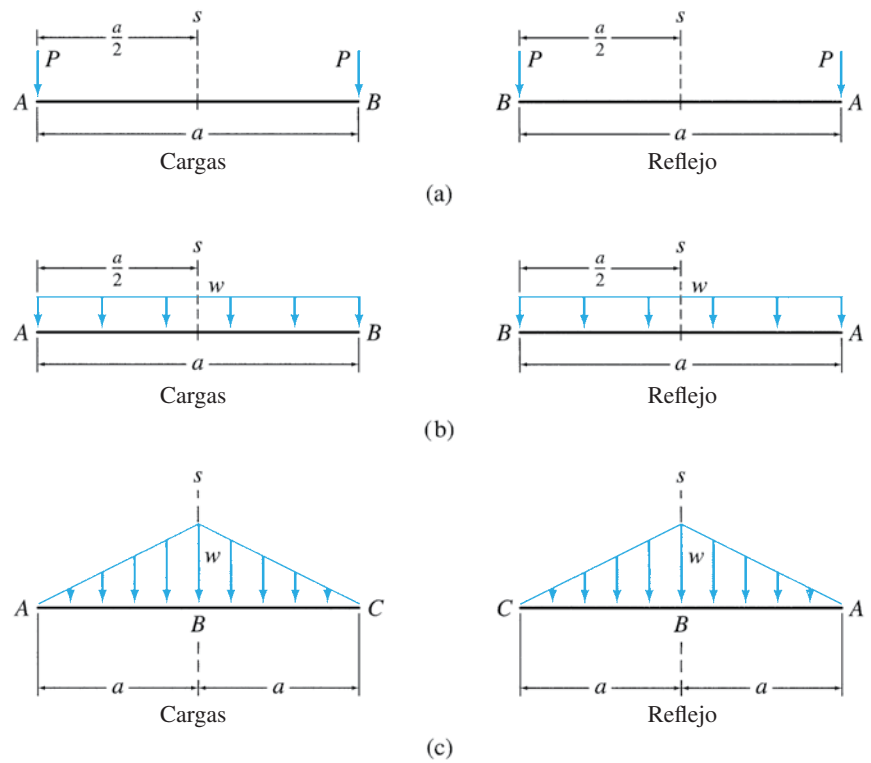


FIG. 10.9 Ejemplos de cargas simétricas

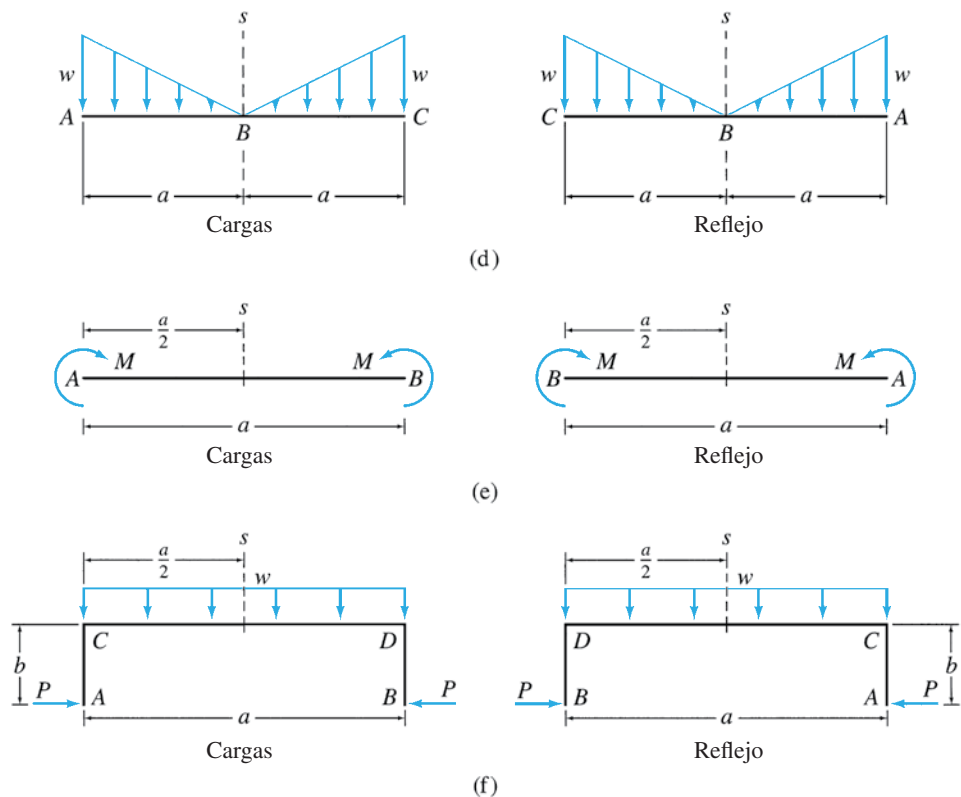


FIG. 10.9 (Continuación)

su verificación. Sin embargo, no es usual dibujar el reflejo debido a que la mayoría de las cargas se pueden identificar como simétricas, o no, por simple inspección.

Cargas asimétricas

Una carga se considera asimétrica con respecto a un eje en su plano si el reflejo negativo de la carga sobre el eje es idéntico a la misma carga.

En la Fig. 10.10 se muestran algunos ejemplos de cargas asimétricas. Para cada caso de carga, el reflejo y el reflejo negativo se muestran también en la

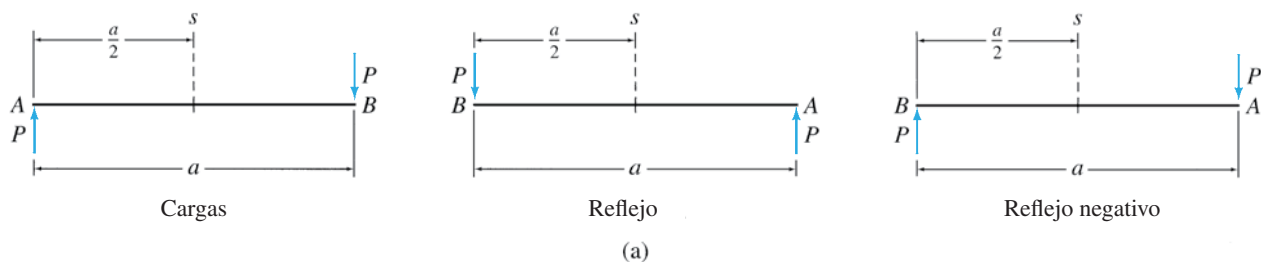


FIG. 10.10 Ejemplos de cargas asimétricas

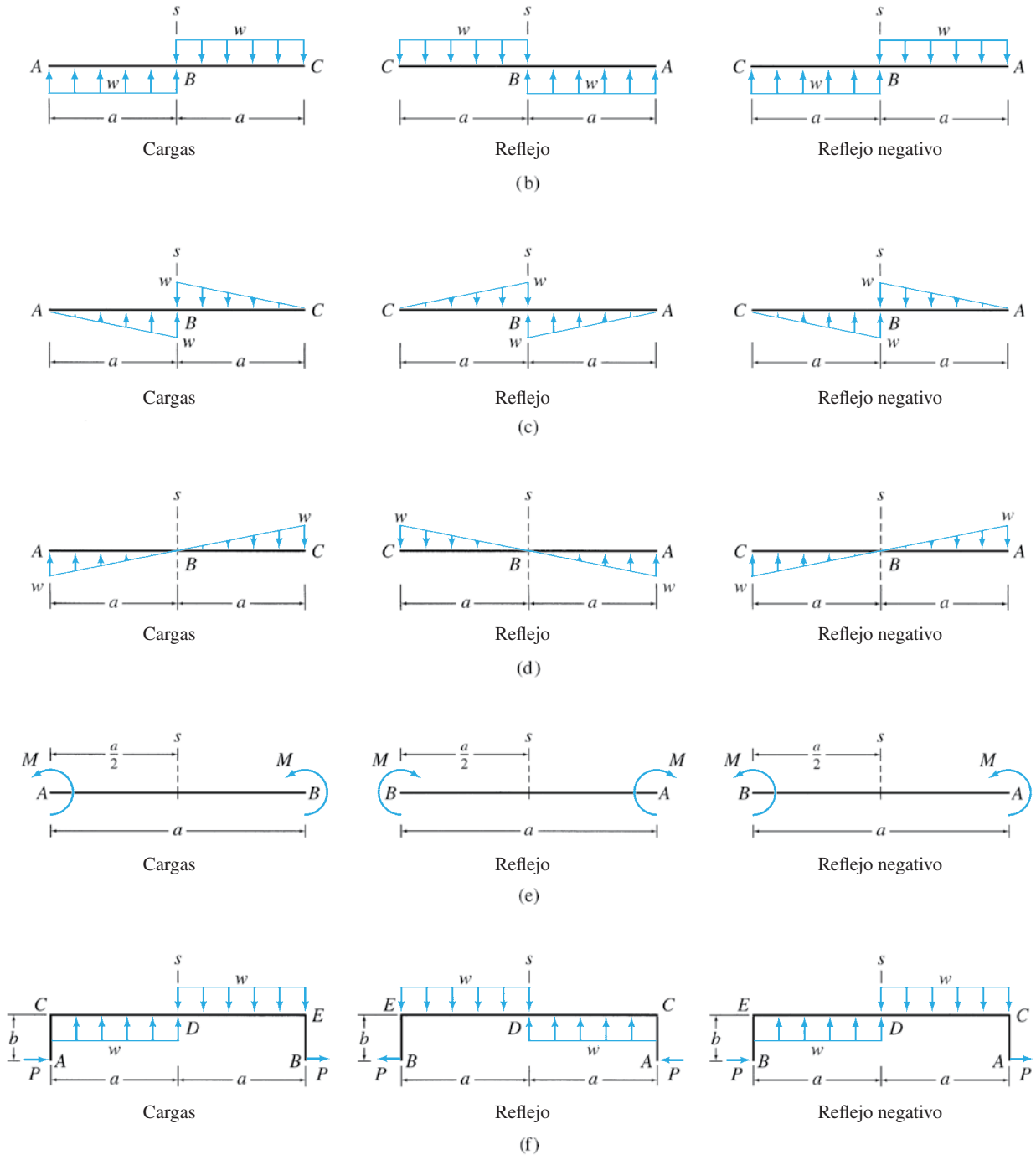


FIG.10.10 (Continuación)

figura. El negativo de un reflejo se obtiene simplemente invirtiendo la dirección de todas las fuerzas y momentos en el reflejo. Se puede ver de la figura que el reflejo negativo de cada carga sobre el eje s es idéntico a su misma carga.

Descomposición de un sistema general de cargas en componentes simétricos y asimétricos

Cualquier carga en general se puede descomponer en componentes de carga simétricos y asimétricos aplicando el siguiente procedimiento:

1. Divida las magnitudes de las fuerzas y/o momentos de las cargas entre 2 para obtener la mitad de la carga.
2. Dibuje el reflejo de la mitad de la carga respecto del eje especificado.
3. Determine el componente simétrico de la carga dada sumando la mitad de la carga a su reflejo.
4. Determine el componente asimétrico de la carga dada extrayendo el componente simétrico de la carga.

Para ilustrar este procedimiento, considere la carga asimétrica mostrada en la Fig. 10.11(a). Suponga que deseamos determinar los componentes de estas cargas, los cuales son simétricos y asimétricos con respecto a un eje s arbitrario mostrado en la figura. Primero calculamos la mitad de la carga dividiendo las magnitudes de la carga distribuida y la carga concentrada entre 2 (Fig. 10.11(b)). Se dibuja el reflejo de esta mitad de carga respecto al eje s , como se muestra en la Fig. 10.11(c). El componente simétrico de la carga se determina sumando la mitad de la carga (Fig. 10.11(b)) a su reflejo (Fig. 10.11(d)). Finalmente, el componente asimétrico se calcula restando el componente simétrico (Fig. 10.11(d)) de la carga dada (Fig. 10.11(a)). El componente de la carga asimétrica obtenida de esta manera se muestra en la Fig. 10.11(e). Tenga en cuenta que la suma de los componentes simétricos y asimétricos es iguala a la carga dada.

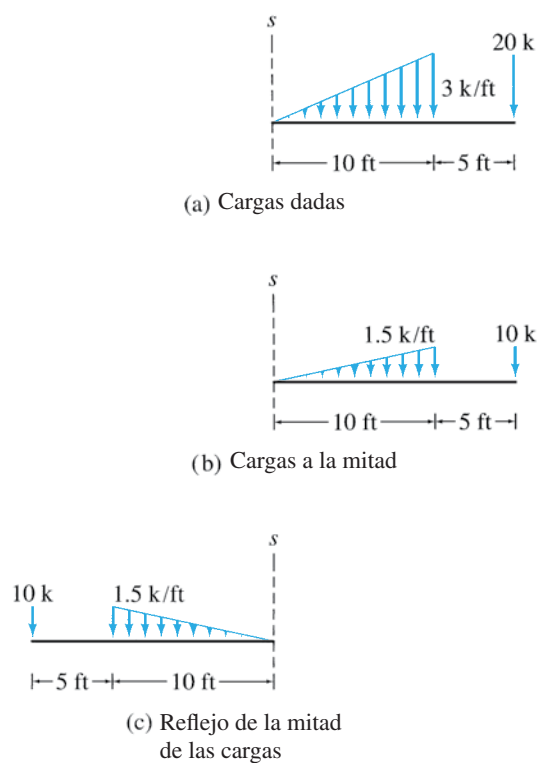


FIG. 10.11

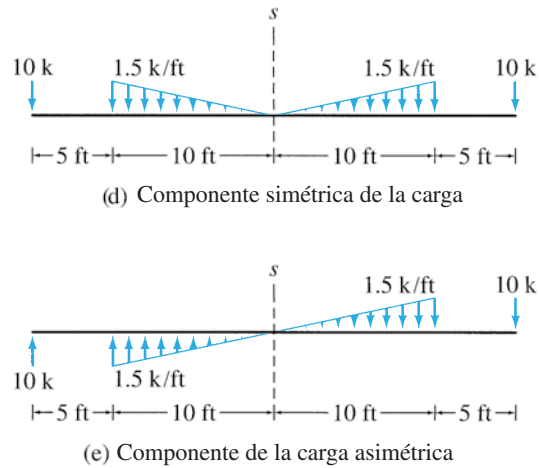


FIG. 10.11 (Continuación)

Ejemplo 10.4

Una viga Pratt está sujeta a la carga mostrada en la Fig. 10.12(a). Determine los componentes simétricos y asimétricos de la carga con respecto al eje de simetría de la armadura.

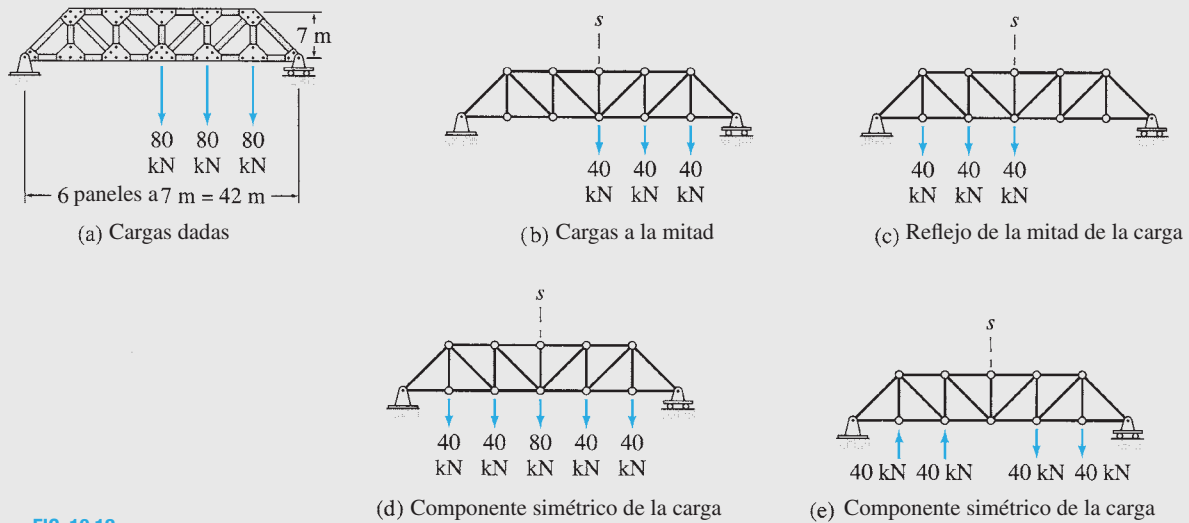


FIG. 10.12

Solución

Componente simétrico de la carga. El eje de simetría (eje s) de la armadura y la mitad de la carga se muestran en la Fig. 10.12(b); el reflejo de la mitad de la carga respecto al eje s de simetría se ilustra en la Fig. 10.12(c). El componente simétrico de la carga dada se determina sumando la mitad de la carga (Fig. 10.12(b)) a su reflejo (Fig. 10.12(c)), como lo muestra la Fig. 10.12(d).

Respuesta

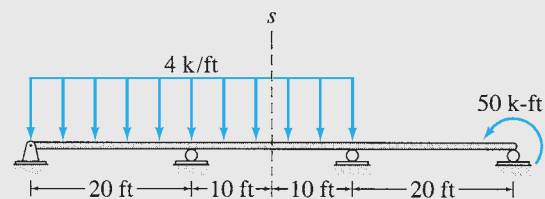
Componente asimétrico de la carga. El componente asimétrico de la carga se obtiene restando el componente de la carga simétrica (Fig. 10.12(d)) de la carga total (Fig. 10.12(a)) y se muestra en la Fig. 10.12(e).

Respuesta

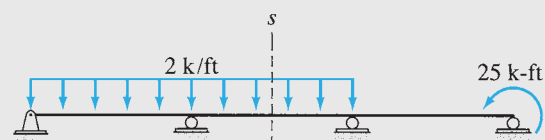
Tenga en cuenta que la suma de los componentes simétrico y asimétrico es igual a la carga dada.

Ejemplo 10.5

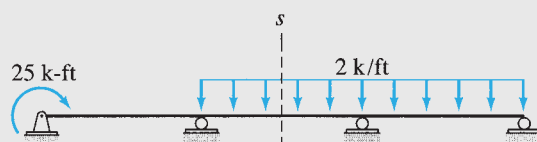
Una viga está sujeta a la carga mostrada en la Fig. 10.13(a). Determine los componentes simétrico y asimétrico de la carga respecto al eje de simetría de la viga.



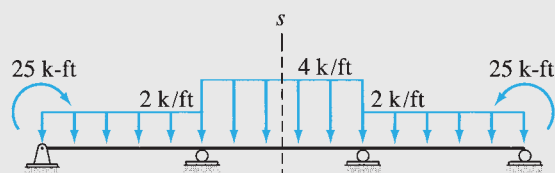
(a) Carga dada



(b) Mitad de la carga



(c) Reflejo de la mitad de la carga



(d) Componente de carga simétrica



(e) Componente de carga asimétrica

FIG. 10.13**Solución**

Componente simétrico de la carga. El eje de simetría (eje s) de la viga y la mitad de la carga se muestran en la Fig. 10.13(b), y el reflejo de la mitad de la carga respecto al eje s se ilustra en la Fig. 10.13(c). El componente simétrico de la carga dada se determina sumando la mitad de la carga (Fig. 10.13(b)) a su reflejo (Fig. 10.13(c)), como se muestra en la Fig. 10.13(d). **Respuesta**

Componente asimétrico de la carga. El componente asimétrico de la carga se obtiene restando el componente simétrico de la carga (Fig. 10.13(d)) de la carga total (Fig. 10.13(a)) y se muestra en la Fig. 10.13(e). **Respuesta**

Tenga en cuenta que la suma de los componentes simétrico y asimétrico es igual a la carga dada.

Solución

Componente simétrico de la carga. La mitad de la carga y su reflejo se muestran en las Figs. 10.14(b) y (c), respectivamente. El componente simétrico de la carga se obtiene sumando la mitad de la carga a su reflejo, como se muestra en la Fig. 10.14(d). **Respuesta**

Componente asimétrico de la carga. Restando el componente simétrico de la carga total (Fig. 10.14(a)), podemos determinar el componente asimétrico como se muestra en la Fig. 10.14(e). **Respuesta**

Ejemplo 10.7

Un marco de dos aguas está sujeto a la carga mostrada en la Fig. 10.15(a). Determine los componentes simétrico y asimétrico de la carga con respecto al eje de simetría del marco.

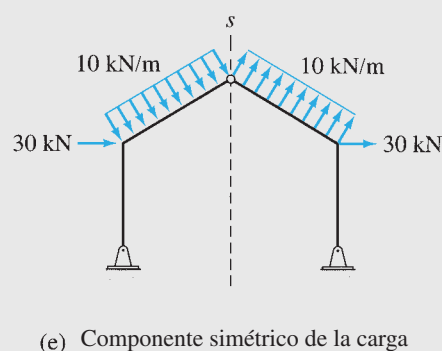
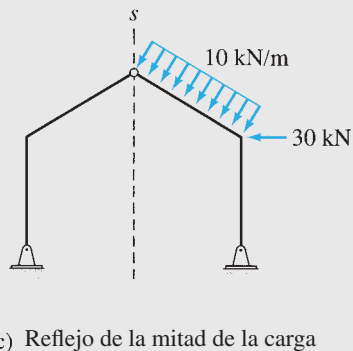
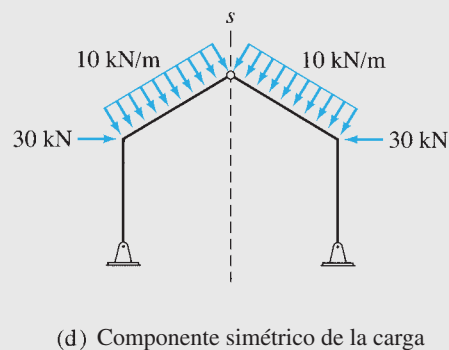
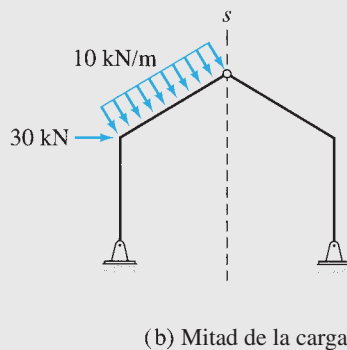
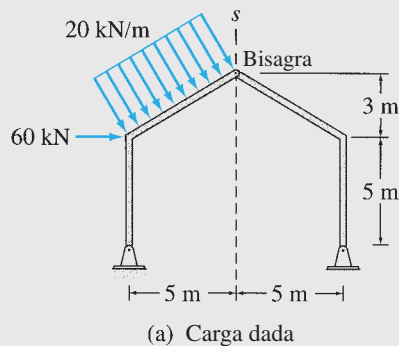


FIG. 10.15

continúa

Solución

Componente simétrico de la carga. La mitad de la carga y su reflejo se muestran en las Figs. 10.15(b) y (c), respectivamente. El componente simétrico de la carga se obtiene sumando la mitad de la carga a su reflejo, como se muestra en la Fig. 10.15(d). **Respuesta**

Componente asimétrico de la carga. Restando el componente simétrico de la carga total (Fig. 10.15(a)), podemos determinar el componente asimétrico como se muestra en la Fig. 10.15(e). **Respuesta**

Ejemplo 10.8

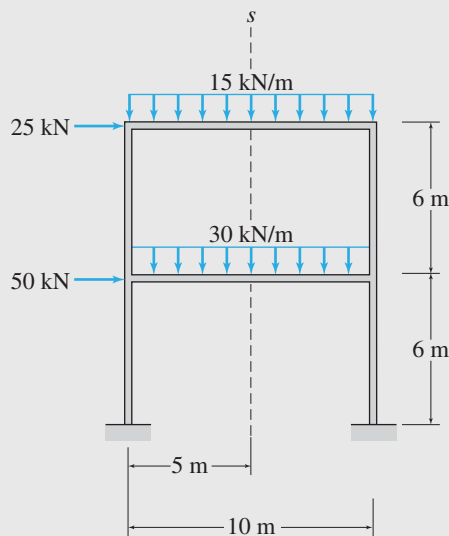
Un marco de dos niveles está sujeto a la carga mostrada en la Fig. 10.16(a). Determine los componentes simétrico y asimétrico de la carga con respecto al eje de simetría del marco.

Solución

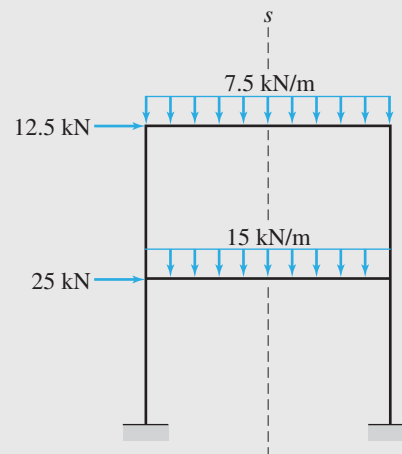
Media carga y su reflejo. Ver Figs. 10.16(b) y (c), respectivamente.

Componente simétrico de la carga. Ver Fig. 10.16(d). **Respuesta**

Componente asimétrico de la carga. Ver Fig. 10.16(e). **Respuesta**



(a) Carga dada



(b) Mitad de la carga

FIG. 10.16

continúa

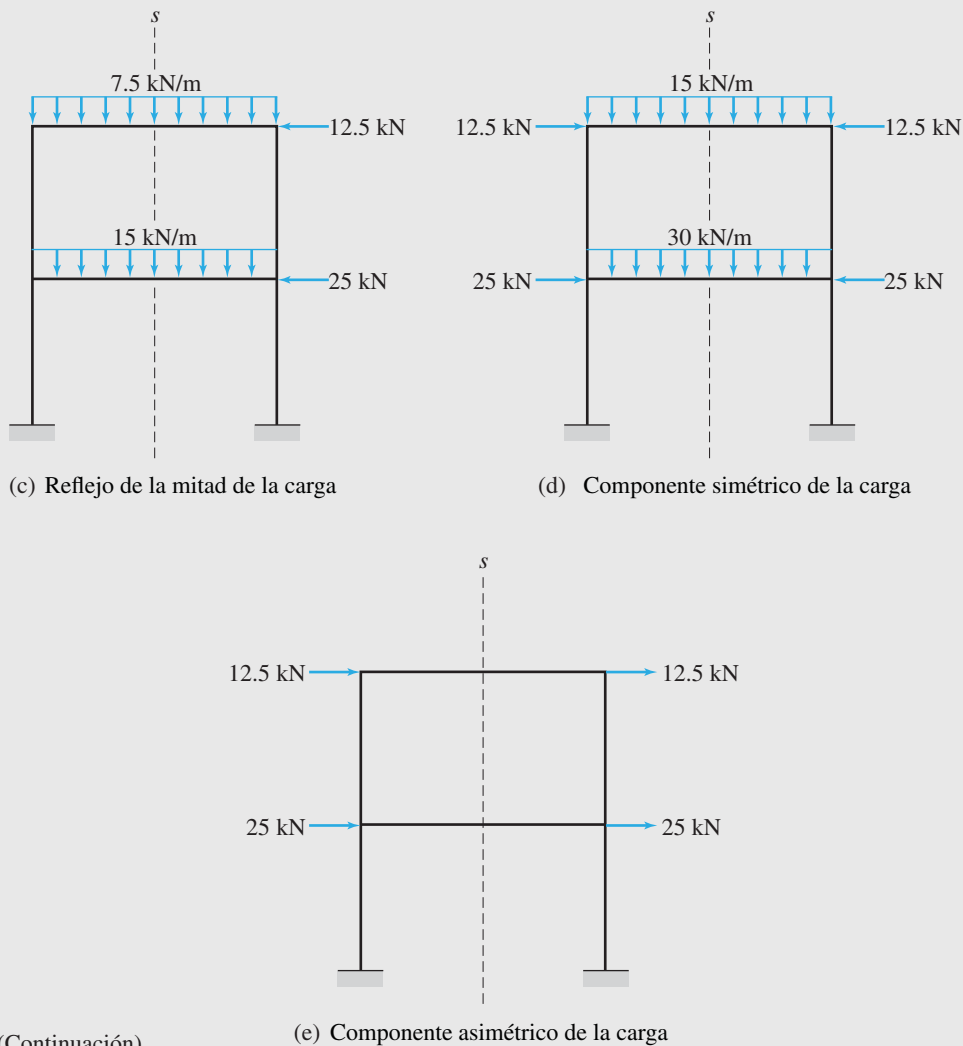


FIG. 10.16 (Continuación)

10.3 Comportamiento de estructuras simétricas bajo cargas simétricas y asimétricas

En la sección anterior discutimos cómo una carga asimétrica cualquiera se puede descomponer en componentes simétricos y asimétricos. En esta sección, examinaremos las características de respuesta de estructuras simétricas bajo condiciones de cargas simétricas y asimétricas. El conocimiento que se obtiene del comportamiento de las estructuras nos permitirá desarrollar, en la siguiente sección, un procedimiento general que puede acelerar considerablemente el análisis de este tipo de estructuras.

Estructuras simétricas sujetas a cargas simétricas

Cuando una estructura simétrica está sujeta a una carga que es simétrica con respecto al eje de simetría de la estructura, la respuesta de la estructura también es

simétrica, con los puntos de la estructura en el eje de simetría no rotado (a menos que haya una articulación en tal punto) ni desviándose perpendicularmente al eje de simetría.

Por lo tanto, para determinar la respuesta (es decir, las fuerzas en los elementos y las deformaciones) de la estructura completa, necesitamos analizar solo la mitad de la estructura en un lado del eje de simetría con condiciones simétricas de frontera (es decir, las pendientes deben ser simétricas o deben ser cero, y las deflexiones perpendiculares al eje de simetría deben ser también cero) en el eje. La respuesta de la mitad de la estructura faltante se puede obtener mediante su reflejo.

Considere, por ejemplo, un marco simétrico sujeto a una carga simétrica con respecto al eje de simetría del marco (eje s), como se muestra en la Fig. 10.17(a). La configuración deformada (o curva elástica) del marco también se muestra en la figura. Se puede ver que, como la carga, la configuración deformada es simétrica con respecto al eje de simetría del marco. Tenga en cuenta que la pendiente y la deflexión horizontal son cero en el punto D , donde el eje de simetría se intercepta con el marco, mientras que la deflexión vertical en D no es cero. La respuesta del marco completo se puede determinar analizando solo la mitad del marco, en un lado del eje de simetría. La mitad izquierda del marco cortado por el eje de simetría se muestra en la Fig. 10.17(b). Tenga en cuenta que las condiciones simétricas de frontera son impuestas por esta subestructura mediante el apoyo en el extremo D por un tipo de apoyo deslizante (indicado con el símbolo —|—| en la Fig. 10.17(b)), el cual previene la rotación de la deflexión horizontal en el eje de simetría pero no restringe la deflexión vertical a lo largo del eje. Una vez que la respuesta de la mitad izquierda del marco ha sido determinada mediante el análisis, la respuesta de la parte derecha se puede obtener de la mitad de la parte izquierda mediante su reflejo.

Considere otro marco simétrico sujeto a una carga simétrica, como el de la Fig. 10.18(a). La mitad izquierda del marco con respecto a su condición simétrica de frontera se muestra en la Fig. 10.18 (b). Como esta figura indica, la rotación y la deflexión horizontal en el nodo E ha sido restringida. El nodo articulado B también está restringido al movimiento horizontal por el apoyo articulado. Tenga en cuenta que en la mitad del marco seleccionada para el análisis (Fig. 10.18(b)), la magnitud de la carga concentrada P , la cual actúa a lo largo del eje de simetría, se ha reducido a la mitad. De manera similar, el

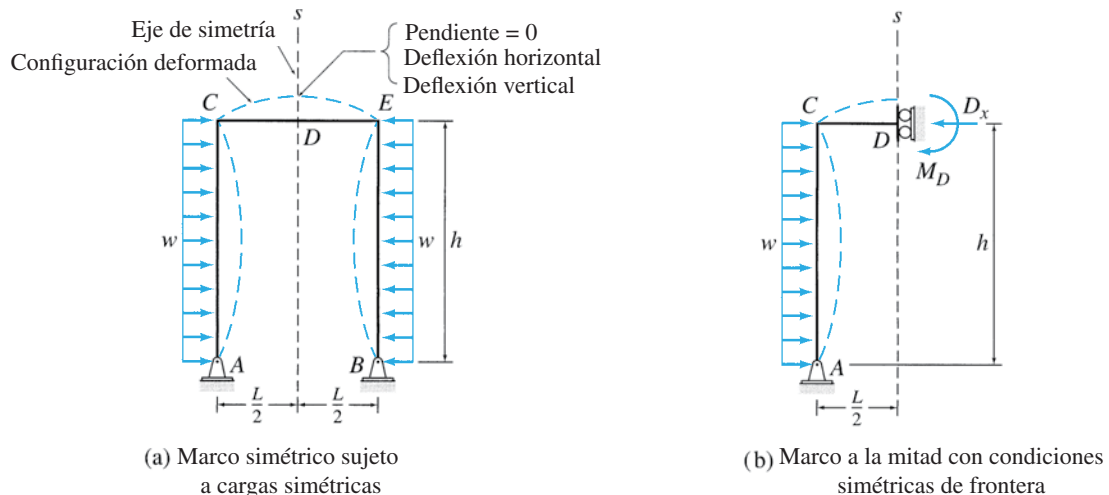
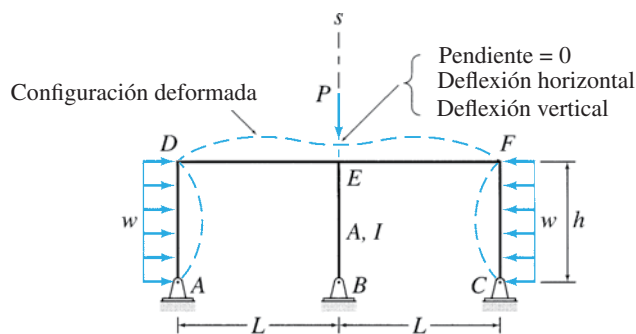
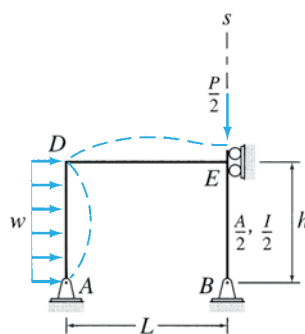


FIG. 10.17



(a) Marco simétrico sujeto a cargas simétricas



(b) Marco a la mitad con condiciones simétricas de frontera

FIG. 10.18

área de la sección transversal (A) y del momento de inercia (I) del elemento BE , el cual se localiza a lo largo del eje de simetría, se ha reducido a la mitad. Aunque es común considerar la reducción a la mitad de las propiedades de A e I de los elementos a lo largo del eje de simetría, debemos notar que no es relevante en el análisis, ya que los elementos localizados a lo largo del eje de simetría se someterán solo a deformación axial sin flexión. Una vez que la respuesta de la mitad izquierda del marco (Fig. 10.18(b)) se ha determinado mediante análisis, la respuesta de la mitad derecha se obtiene mediante su reflejo.

Estructuras simétricas sujetas a cargas asimétricas

Cuando una estructura simétrica está sujeta a una carga que es asimétrica con respecto al eje de simetría de la estructura, la respuesta de la estructura también es asimétrica, con los puntos de la estructura en el eje de simetría sin desviaciones en la dirección del eje de simetría.

Por lo tanto, para determinar la respuesta de la estructura completa, necesitamos analizar solo la mitad de la estructura, de un lado del eje de simetría con las condiciones asimétricas de frontera (es decir, las deflexiones en la dirección del eje de simetría deben ser cero) en el eje. La respuesta de la mitad restante está dada por el negativo de la deflexión de la respuesta de la mitad de la estructura analizada.

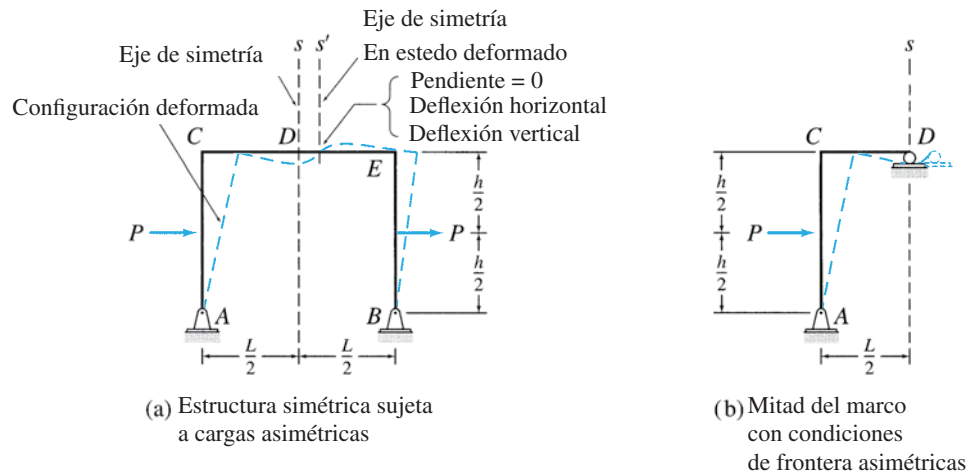


FIG. 5.19

Considere un marco sujeto a una carga asimétrica con respecto al eje de simetría del marco (eje s), como se muestra en la Fig. 10.19(a). Aquí se puede ver que, al igual que la carga, la configuración deformada del marco es asimétrica con respecto al eje de simetría del marco. Tenga en cuenta que la deflexión vertical es cero en el punto D , donde el eje de simetría intercepta al marco, mientras que la deflexión horizontal y la pendiente en D no son cero. La respuesta del marco completo se puede determinar analizando solo la mitad del marco, en un lado del eje de simetría. La mitad izquierda del marco, cortada por el eje de simetría, se muestra en la Fig. 10.19(b). Considere que las condiciones de asimetría de frontera están impuestas en esta subestructura en el apoyo del extremo D por un apoyo de patín, el cual restringe la deflexión vertical en el eje de simetría pero no puede restringir la deflexión horizontal y la rotación en D . Una vez que la respuesta de la mitad izquierda del marco ha sido determinada por el análisis, la respuesta de la mitad derecha se obtiene por el reflejo negativo de la mitad izquierda.

Si una estructura contiene un elemento a lo largo del eje de simetría, las propiedades del elemento, I y A , deberían de reducirse a la mitad en el centro de la estructura seleccionada para el análisis. Tenga en cuenta que los elementos a lo largo del eje de simetría no se someterán a deformación axial, pero se pueden flexionar. Por lo tanto, las fuerzas axiales en los elementos de las armaduras localizadas a lo largo del eje de simetría serán cero, y tales elementos pueden ser removidos de la mitad de la estructura para simplificar el análisis. Las magnitudes de cualquier carga y de pares que actúen en la estructura en el eje de simetría deberán de reducirse a la mitad, en la mitad de la estructura a analizar.

Estructuras simétricas sujetas a cargas generales

Como se mostró en la Sección 10.2, cualquier carga asimétrica general que actúe en una estructura simétrica se puede descomponer en componentes simétricas y asimétricas con respecto al eje de simetría de la estructura. Las respuestas de la estructura debido a los componentes de cargas simétricas y asimétricas se determinan analizando la mitad de la estructura con las

condiciones simétricas y asimétricas de frontera, respectivamente, como se discutió en los párrafos anteriores. Las respuestas simétricas y asimétricas determinadas de esta forma se superponen para obtener la respuesta total de la estructura debida a la carga asimétrica.

10.4 Procedimiento de análisis para estructuras simétricas

El siguiente procedimiento paso a paso se puede usar para tomar ventaja de la simetría estructural en el análisis de estructuras.

1. Revise la simetría de la estructura dada, como se discutió en la Sección 10.1. Si la estructura se considera simétrica, entonces proceda al paso. De otra manera, termine el análisis en esta etapa.
2. Seleccione la subestructura (la mitad de la estructura) de un lado del eje de simetría para el análisis. El área de la sección transversal y los momentos de inercia de los elementos de la subestructura, los cuales se localizan a lo largo del eje de simetría, se deberán de reducir a la mitad, mientras que los valores completos de estas propiedades se deberán de usar para todos los demás elementos.
3. Descomponga la carga dada en componentes simétricos y asimétricos con respecto al eje de simetría de la estructura usando el procedimiento descrito en la Sección 10.2.
4. Determine la respuesta de la estructura debida al componente asimétrico como sigue:
 - a. En cada nodo y extremo de la subestructura, el cual está localizado en el eje de simetría, aplique las restricciones para no permitir la rotación y la deflexión perpendicular en el eje de simetría.
 - b. Aplique los componentes simétricos de carga en la subestructura con las magnitudes de la carga concentrada en el eje de simetría reducidas a la mitad.
 - c. Analice la subestructura para determinar la respuesta.
 - d. Obtenga la respuesta simétrica de la estructura completa mediante el reflejo de la respuesta de la subestructura del otro lado del eje de simetría.
5. Determine la respuesta de la estructura debida al componente de carga asimétrica como sigue:
 - a. En cada nodo y extremo de la subestructura localizado en el eje de simetría, aplique una restricción para impedir la deflexión en la dirección del eje de simetría. En el caso de armaduras, las fuerzas axiales en los elementos localizados a lo largo del eje de simetría serán cero. Elimine estos elementos de la subestructura.
 - b. Aplique el componente de carga asimétrica en la subestructura con las magnitudes de la carga y pares, aplicada en el eje de simetría, reducidas a la mitad.
 - c. Analice la subestructura para determinar la respuesta.
 - d. Obtenga la respuesta simétrica de la estructura completa mediante el reflejo negativo de la respuesta de la subestructura del otro lado del eje de simetría.

- Determine la respuesta total de la estructura debida a la carga dada superponiendo las respuestas simétricas y asimétricas obtenidas en los pasos 4 y 5, respectivamente.

El procedimiento anterior se puede aplicar a las estructuras simétricas estáticamente determinadas además de las indeterminadas. Será obvio en los capítulos subsecuentes que el utilizar la simetría de la estructura reduce considerablemente el cálculo requerido en el análisis de las estructuras estáticamente determinadas.

Ejemplo 10.9

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura tipo Warren mostrada en la Fig. 10.20(a).

Solución

Esta armadura fue analizada en el Ejemplo 4.4 sin tomar en cuenta la ventaja de su simetría.

Simetría. Esta armadura es simétrica con respecto al eje vertical s que pasa por el elemento GC , como se muestra en la Fig. 10.20(b). La armadura está sujeta únicamente a cargas verticales, así que la reacción horizontal en el apoyo A es cero ($A_x = 0$), y la mitad de la armadura a la derecha del eje de simetría, $CEHG$, será utilizada en el análisis.

Componentes simétricos y asimétricos de la carga. Los componentes simétricos y asimétricos de la carga dada con respecto al eje de simetría de la armadura se determinan con el procedimiento descrito en la Sección 10.2. Estos componentes de carga se muestran en las Figs. 10.20(b) y (c). Tenga en cuenta que la suma de los componentes es igual al total de la carga dada en la Fig. 10.20(a).

Fuerzas en los elementos debidas al componente simétrico de la carga. La subestructura (mitad derecha de la armadura) con condiciones simétricas de frontera se muestra en la Fig. 10.20(d). Note que los nodos C y G , que se localizan en el eje de simetría, están apoyados por patines que restringen el movimiento en dirección horizontal (perpendicular al eje s). El componente simétrico de la carga (Fig. 10.20(b)) está aplicado a la subestructura, con la magnitud de una carga concentrada de 30 k que actúa a lo largo del eje de simetría reducida a la mitad, como se muestra en la Fig. 10.20(d). Las reacciones de la subestructura se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{array}{lll}
 + \uparrow \sum F_y = 0 & -15 - 18 + E_y = 0 & E_y = 33 \text{ k } \uparrow \\
 + \curvearrowright \sum M_C = 0 & -G_x(15) - 18(20) + 33(40) = 0 & G_x = 64 \text{ k } \rightarrow \\
 + \rightarrow \sum F_x = 0 & -C_x + 64 = 0 & C_x = 64 \text{ k } \leftarrow
 \end{array}$$

Las fuerzas axiales en los elementos de la subestructura se calculan aplicando el método de los nodos. Estas fuerzas en los elementos se muestran también en la Fig. 10.20(d).

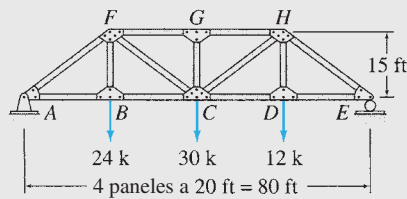
Las fuerzas axiales en los elementos en la mitad izquierda de la armadura se pueden obtener rotando las fuerzas de los elementos en la mitad derecha (Fig. 10.20(d)) 180° alrededor del eje s , como se muestra en la Fig. 10.20(e).

Fuerzas en los elementos debidas al componente asimétrico de carga. La subestructura con condiciones asimétricas de frontera se muestra en la Fig. 10.20(f). Tenga en cuenta que los nodos C y G , localizados en el eje de simetría, están apoyados por patines para restringir sus deflexiones en dirección vertical. Además, el elemento CG , ubicado a lo largo del eje de simetría, se elimina de la subestructura, como se muestra en la figura. (La fuerza en el elemento GC será cero bajo la carga simétrica.) El componente asimétrico de la carga (Fig. 10.20(c)) se aplica a la subestructura, y sus reacciones y fuerzas axiales en los elementos se calculan con las ecuaciones de equilibrio y el método de los nodos (ver Fig. 10.20(f)).

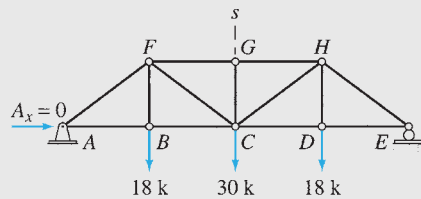
continúa

Las fuerzas axiales en los elementos en la mitad izquierda de la armadura se obtienen reflejando el negativo de las fuerzas de los elementos en la mitad derecha hacia la mitad izquierda del eje de simetría (es decir, las fuerzas de tensión se cambian a fuerzas de compresión y viceversa), como en la Fig. 10.20(g).

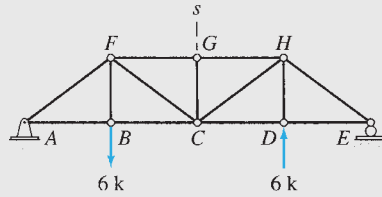
Fuerzas totales en los elementos. Finalmente, las fuerzas axiales totales en los elementos de la armadura se obtienen mediante la superposición de las fuerzas debidas a los componentes simétricos y asimétricos de la carga, como se ve en las Figs. 10.20(e) y (g), respectivamente. Estas fuerzas en los elementos se muestran en la Fig. 10.20(h). **Respuesta**



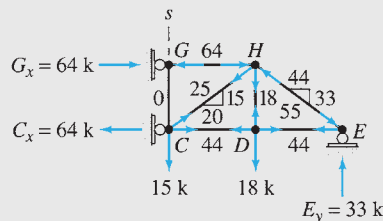
(a) Armadura dada con cargas



(b) Componente simétrica de cargas

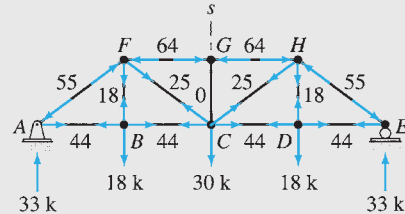


(c) Componente asimétrica de cargas

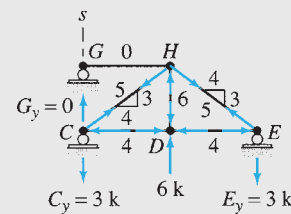


(d) Subestructura con condiciones de frontera simétrica

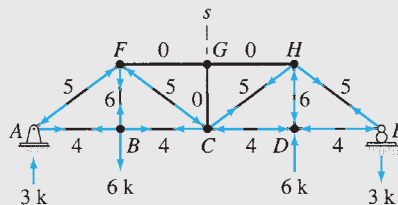
FIG. 10.20



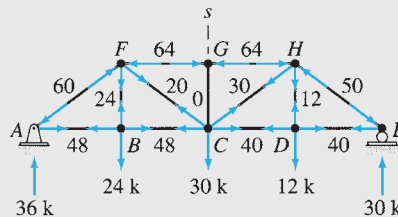
(e) Fuerzas en los elementos debido a la componente simétrica de carga



(f) Subestructura con condiciones de frontera asimétricas



(g) Fuerza en los elementos debido a la componente asimétrica de carga



(h) Fuerza en los elementos debido a la carga total

Ejemplo 10.10

Determine las fuerzas en los extremos de los elementos del marco mostrado en la Fig. 10.21(a).

Solución

Simetría. El marco es simétrico con respecto al eje vertical s que pasa por la articulación en D , como se muestra en la Fig. 10.21(b). Se utilizará la mitad del marco ACD .

Componentes simétricos y asimétricos de la carga. Ver Figs. 10.21(b) y (c).

Fuerzas en los elementos debidas al componente simétrico. La subestructura con condiciones simétricas de frontera se muestra en la Fig. 10.21(d). Las reacciones y las fuerzas en los extremos del elemento de la subestructura, determinadas con las ecuaciones de equilibrio, se muestran en la Fig. 10.21(d) y a la izquierda del eje s en la Fig. 10.21(e), respectivamente. Las fuerzas en los elementos a la derecha del eje s se obtienen por el reflejo (ver Fig. 10.21(g)).

Fuerzas en los elementos debidas al componente asimétrico. La subestructura con condiciones asimétricas de frontera se muestra en la Fig. 10.21(f). Las fuerzas en los elementos se determinan analizando la subestructura y por el reflejo negativo de las fuerzas y momentos calculados alrededor del eje de simetría (ver Fig. 10.21(h)).

Fuerzas totales en los elementos. Las fuerzas totales en los extremos de los elementos, obtenidos por la superposición de las fuerzas en los elementos debidas a los componentes de carga simétricos y asimétricos se muestran en la Fig. 10.21(h).

Respuesta

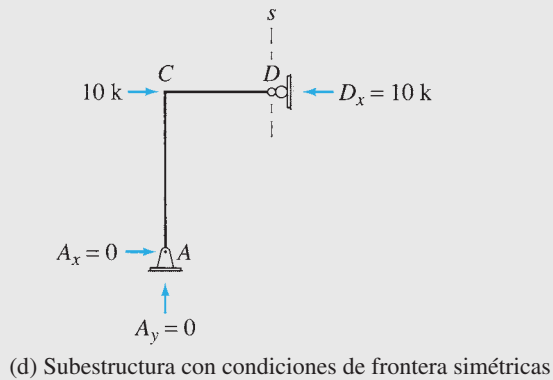
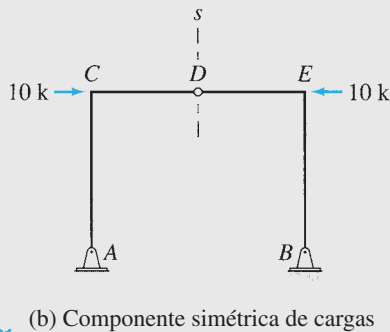
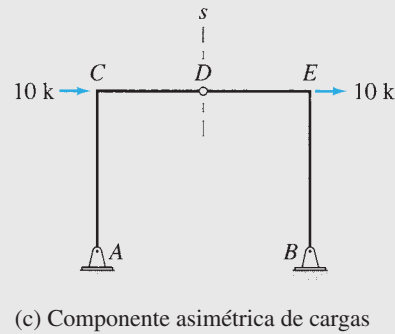
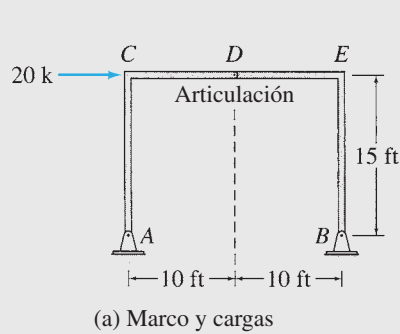
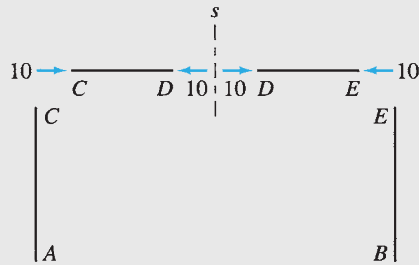
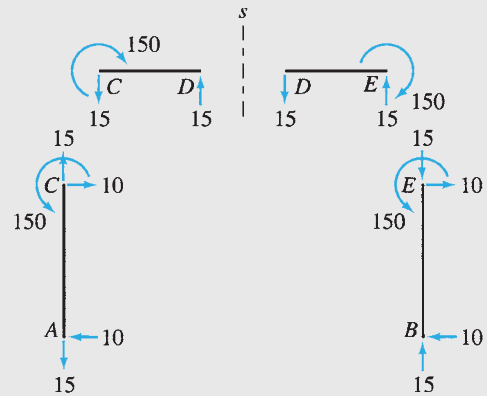


FIG. 10.21

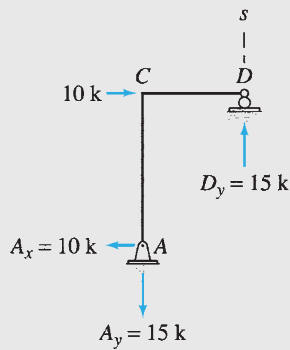
continúa



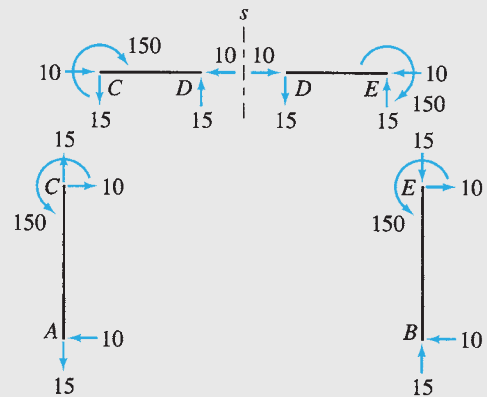
(e) Fuerzas en los elementos debido a la componente simétrica de cargas



(g) Fuerzas en los elementos debido a la componente asimétrica de cargas



(f) Subestructura con condiciones de frontera asimétricas



(h) Fuerzas en los elementos debido a la carga total

FIG. 10.21 (Continuación)

Ejemplo 10.11

Determine las fuerzas en los extremos de los elementos de la viga mostrada en la Fig. 10.22(a).

Solución

Simetría. La viga es simétrica con respecto al eje vertical s mostrado en la Fig. 10.22(b). Se selecciona la mitad izquierda de la viga para el análisis.

Componentes simétricos y asimétricos de la carga. Ver Figs. 10.22(b) y (c).

continúa

Subestructuras. Las subestructuras para el análisis de las respuestas simétricas y asimétricas se muestran en las Figs. 10.22(d) y (e), respectivamente.

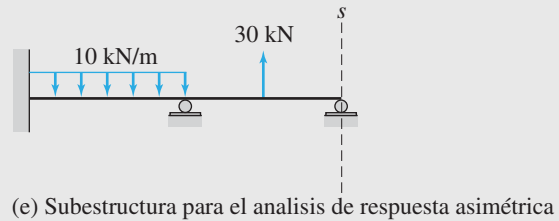
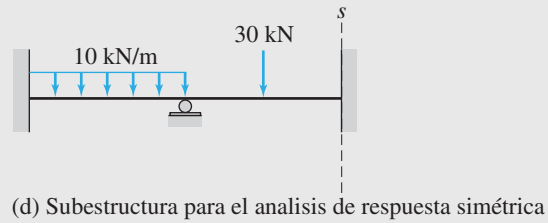
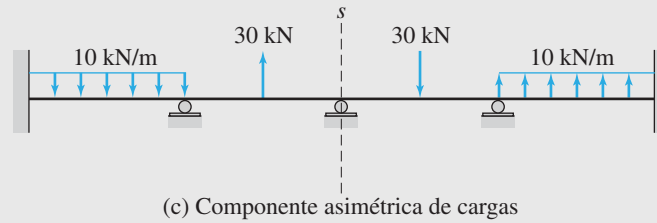
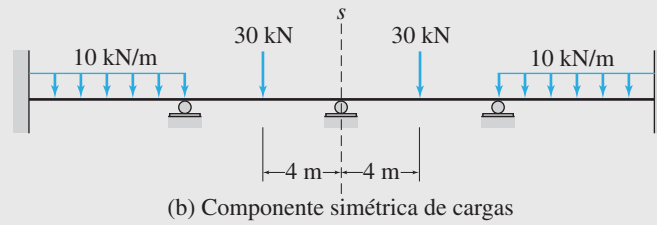
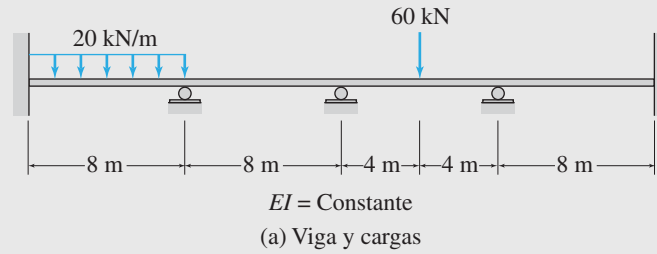


FIG. 10.22

Ejemplo 10.12

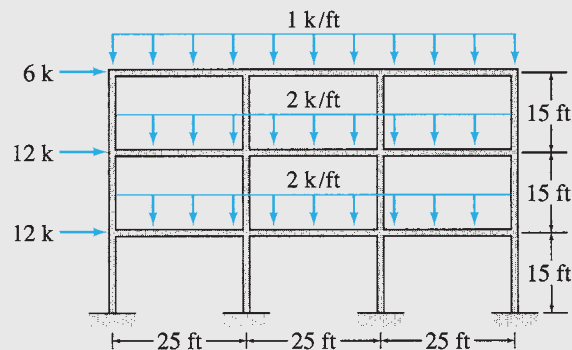
Determine las subestructuras para el análisis de las respuestas simétricas y asimétricas del marco estáticamente determinado mostrado en la Fig. 10.23(a).

Solución

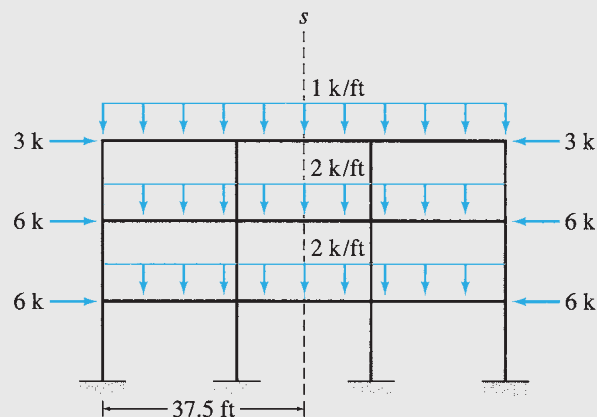
Simetría. El marco es simétrico con respecto al eje vertical s mostrado en la Fig. 10.23(b). Se selecciona la mitad izquierda del marco para el análisis.

Componentes simétricos y asimétricos de la carga. Ver Figs. 10.23(b) y (c).

Subestructuras. Las subestructuras para el análisis de las respuestas simétricas y asimétricas se muestran en las Figs. 10.23(d) y (e), respectivamente.



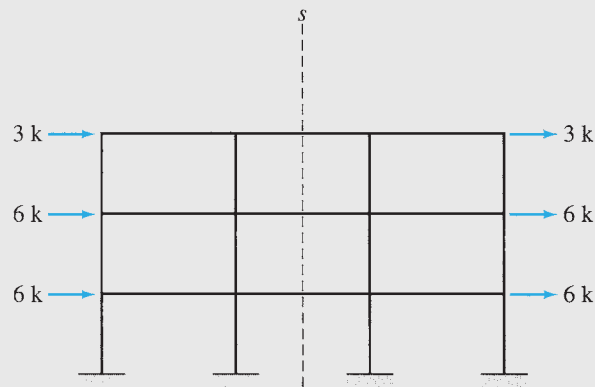
$E, I, A = \text{Constante}$
(a) Estructura y cargas



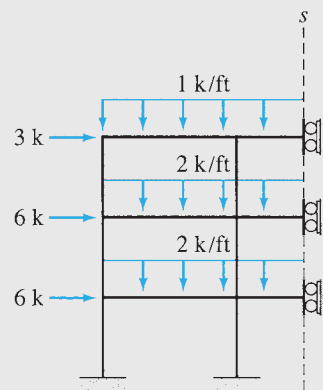
(b) Componente simétrica de cargas

FIG. 10.23

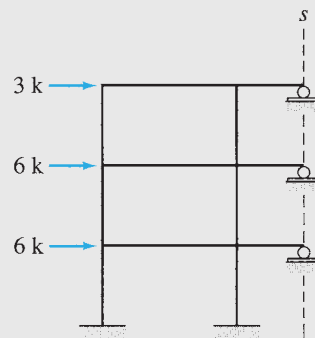
continúa



(c) Componente asimétrica de cargas



(d) Subestructura para el análisis de respuesta simétrica



(e) Subestructura para el análisis de respuesta asimétrica

FIG. 10.23 (Continuación)

Resumen

En este capítulo aprendimos que una estructura plana se considera simétrica con respecto a un eje en su plano si el reflejo de la estructura con respecto a un eje es idéntico en geometría, apoyos y propiedades de materiales a la estructura en sí.

Una carga se considera simétrica con respecto a un eje en su plano si el reflejo de la carga alrededor del eje es idéntico a la carga que lo genera. Una carga se estima asimétrica con respecto a un eje en su plano si el reflejo negativo de la carga con respecto a un eje es idéntico a la carga que lo genera. Una carga cualquiera asimétrica se puede descomponer en componentes simétricos y asimétricos con respecto a un eje.

Cuando una estructura simétrica está sujeta a una carga que es simétrica con respecto al eje de simetría de la estructura, la respuesta de la estructura es también simétrica. Por lo tanto, podemos obtener la respuesta de estructuras

completas analizando solo la mitad de la estructura, de uno de los lados del eje de simetría, con condiciones simétricas de frontera, y reflejando la respuesta calculada con respecto a un eje de simetría.

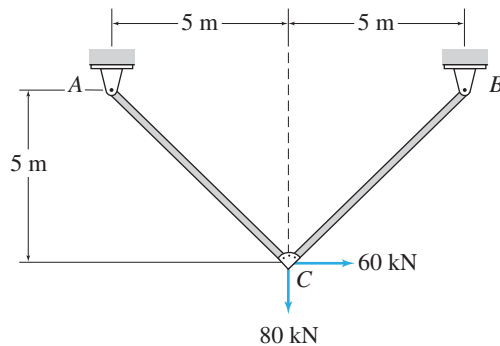
Cuando una estructura simétrica está sujeta a una carga que es asimétrica con respecto al eje de simetría de la estructura, la respuesta es también asimétrica. Por lo tanto, la respuesta de la estructura completa se puede obtener analizando la mitad de la estructura, de uno de los lados del eje de simetría, con condiciones asimétricas de frontera, y reflejando el negativo de la respuesta calculada con respecto a un eje de simetría.

La respuesta de una estructura simétrica debida a un sistema asimétrico de carga se puede obtener determinando las respuestas de la estructura debidas a los componentes simétricos y asimétricos de carga, y superponiendo las dos respuestas.

Problemas

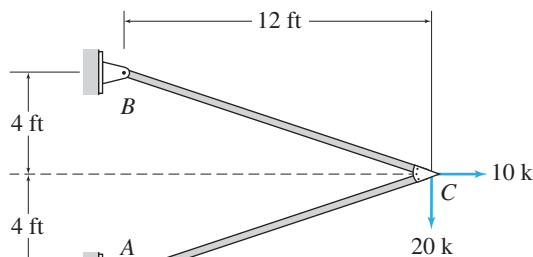
Secciones 10.1 y 10.2

10.1 a 10.15 Determine los componentes simétrico y asimétrico de las cargas mostradas en la Fig. P10.1-P10.15 con respecto al eje de simetría de la estructura.



$E, A = \text{Constante}$

FIG. P10.1, P10.16



$E, A = \text{Constante}$

FIG. P10.2, P10.17

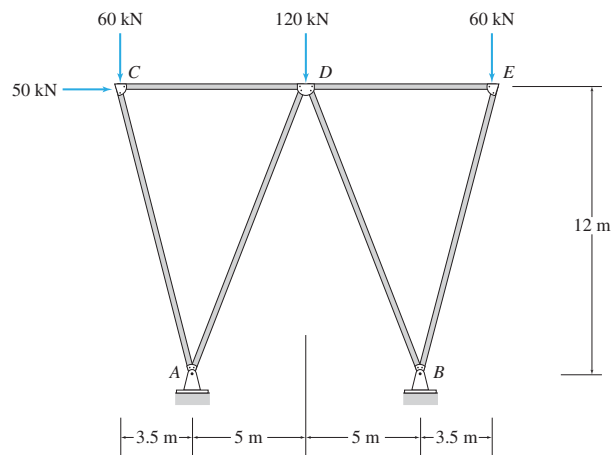


FIG. P10.2, P10.17

Secciones 10.3 y 10.4

10.16 a 10.20 Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. P10.1-P10.2 utilizando la simetría de la estructura.

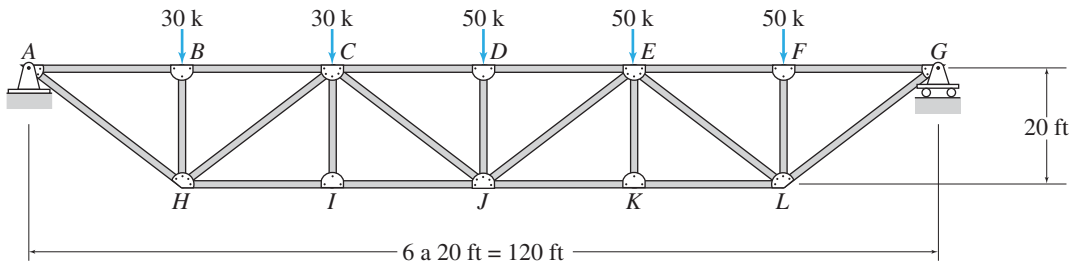


FIG. P10.4, P10.19

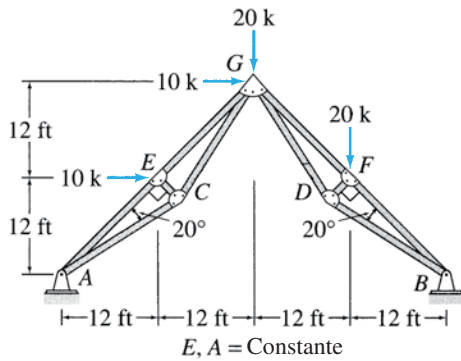


FIG. P10.5, P10.20

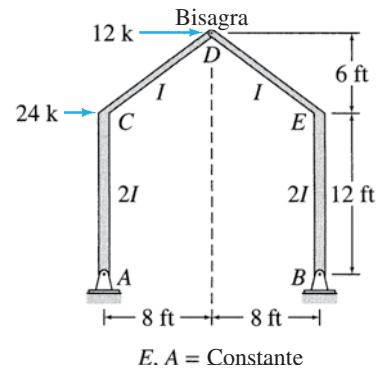


FIG. P10.7, P10.22

10.21 a 10.23 Determine las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. P10.6-P10.8 utilizando la simetría de la estructura.

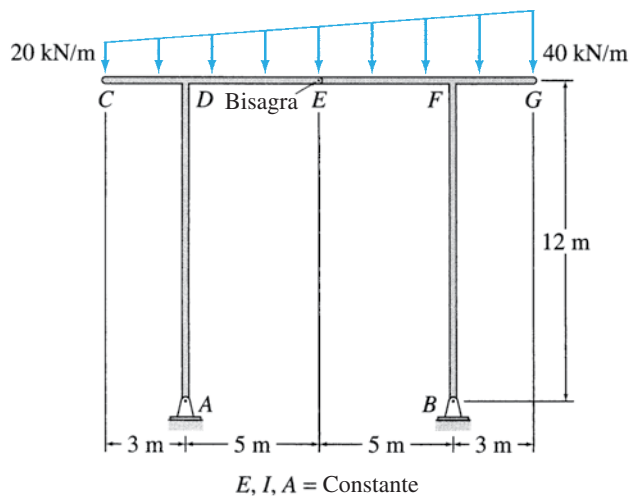


FIG. P10.6, P10.21

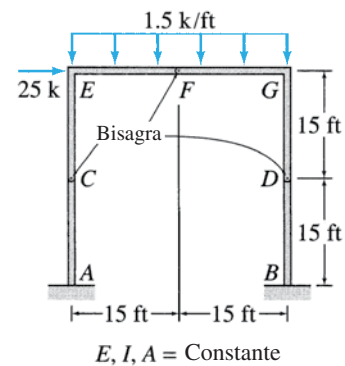


FIG. P10.8, P10.23

10.24 a 10.30 Determine las subestructuras para el análisis de la respuesta simétrica y asimétrica de las estructuras mostradas en las Figs. P10.9-P10.15.

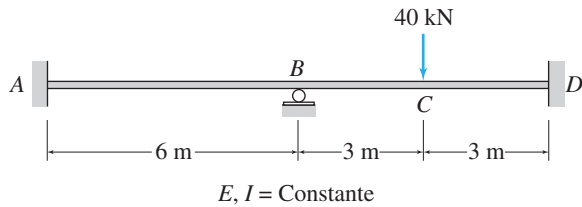


FIG. P10.9, P10.24

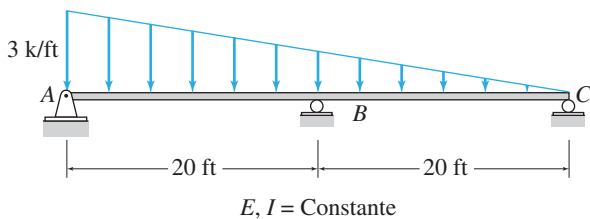


FIG. P10.10, P10.25

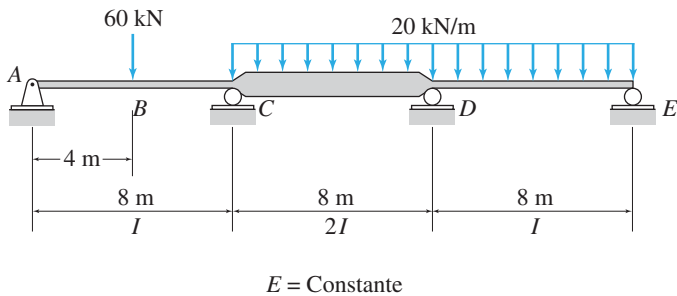


FIG. P10.11, P10.26

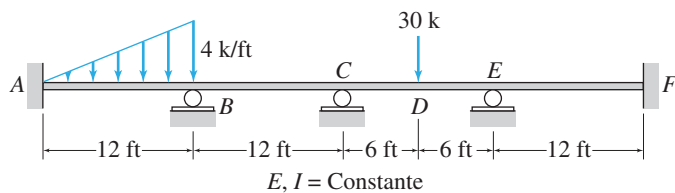


FIG. P10.12, P10.27

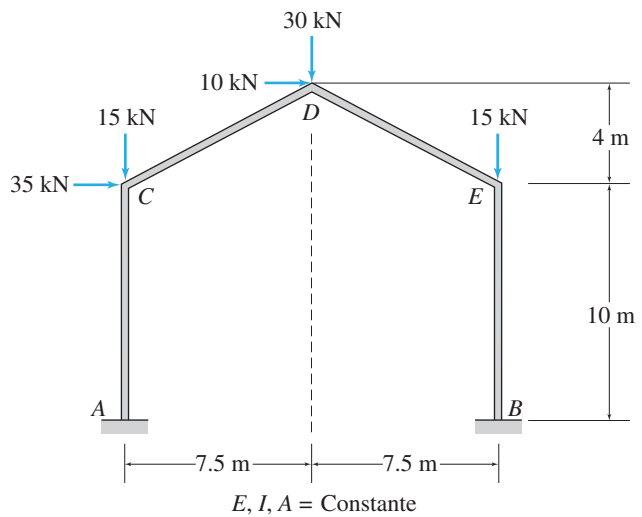


FIG. P10.13, P10.28

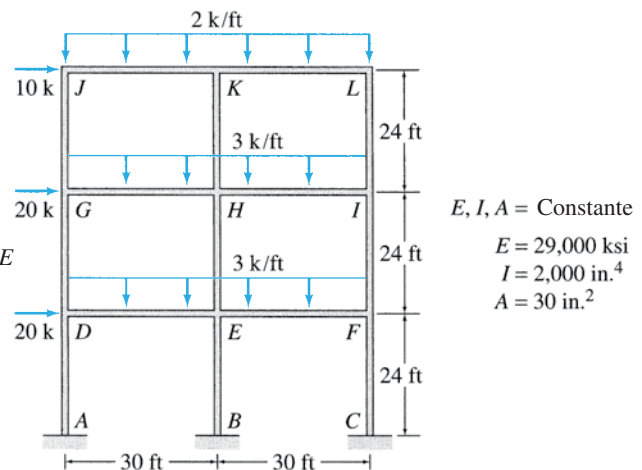


FIG. P10.14, P10.29

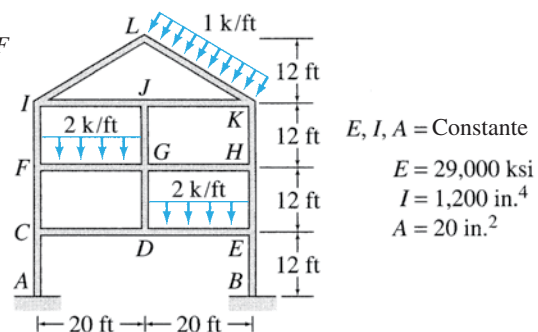


FIG. P10.15, P10.30



Parte Tres

**Análisis de Estructuras
Hiperestáticas (Indeterminadas)**





Puerto de Sydney, Australia
Aliciahh / Shutterstock.com

11

Introducción a las Estructuras Hiperestáticas

11.1 Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas

11.2 Análisis de estructuras hiperestáticas

Resumen

En la segunda parte del texto hemos considerado el análisis de estructuras estáticamente determinadas o isostáticas. En esta sección (capítulos 11 al 17), enfocaremos nuestra atención en el análisis de estructuras hiperestáticas o estáticamente indeterminadas.

Como se discutió previamente, las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de las estructuras estáticamente determinadas se pueden obtener con la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático (*incluyendo ecuaciones de condiciones, si las hubiera*). Sin embargo, ya que las estructuras hiperestáticas tienen más reacciones en los apoyos y/o en sus elementos que las requeridas para su estabilidad estática, las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las reacciones y las fuerzas internas de tales estructuras, y deben complementarse con relaciones adicionales basadas en la geometría de deformación de las estructuras.

Estas relaciones adicionales, que se denominan *condiciones de compatibilidad*, aseguran que se mantenga la continuidad de los desplazamientos a lo largo de la estructura y que todas las partes de la estructura se conserven unidas. Por ejemplo, en un nodo rígido las deformaciones y rotaciones de todos los elementos que concurren en él deben ser iguales. Por lo tanto, el análisis de las estructuras hiperestáticas implica, adicionalmente, el de las dimensiones y la disposición de los elementos de la estructura, las propiedades de los materiales y su sección transversal (tales como el área de la sección transversal, momento de inercia, módulo de elasticidad, etc.), que a su vez dependen de las fuerzas internas de la estructura. De esta manera, el diseño de las estructuras hiperestáticas se puede llevar a cabo de una manera iterativa, por lo que el tamaño (relativo) de los elementos de la estructura se suponen inicialmente y se usa para analizar la estructura, y las fuerzas internas obtenidas de esta manera se utilizan para revisar el tamaño

de los elementos; si el tamaño de los elementos obtenidos no se acerca a los inicialmente supuestos, entonces la estructura tiene que ser reanalizada usando estos últimos valores.

A pesar de la dificultad en el diseño de las estructuras hiperestáticas, la mayor parte de las construidas actualmente son estructuras hiperestáticas; por ejemplo, los edificios más modernos de concreto reforzado son estructuras indeterminadas o hiperestáticas. En este capítulo discutiremos algunas de las ventajas y desventajas más importantes de las estructuras hiperestáticas en comparación con las estructuras isostáticas, e introduciremos los conceptos fundamentales para el análisis de las estructuras hiperestáticas.

11.1 Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas

Las ventajas de las estructuras hiperestáticas en relación a las estructuras isostáticas son las siguientes.

1. **Esfuerzos menores** Los esfuerzos máximos en las estructuras hiperestáticas son generalmente más bajos en comparación con aquellos obtenidos en las estructuras determinadas. Considere, por ejemplo, las vigas isostáticas e hiperestáticas en las Figs. 11.1(a) y (b), respectivamente. Se muestran los diagramas de momento flexionante de la viga debidos a la carga uniforme, w . (El procedimiento para el análisis de las vigas hiperestáticas se considerará en capítulos siguientes.) Se puede observar en la figura que el momento máximo de flexión –y en consecuencia, el esfuerzo máximo de flexión– en la viga hiperestática es significativamente menor que en la viga isostática.

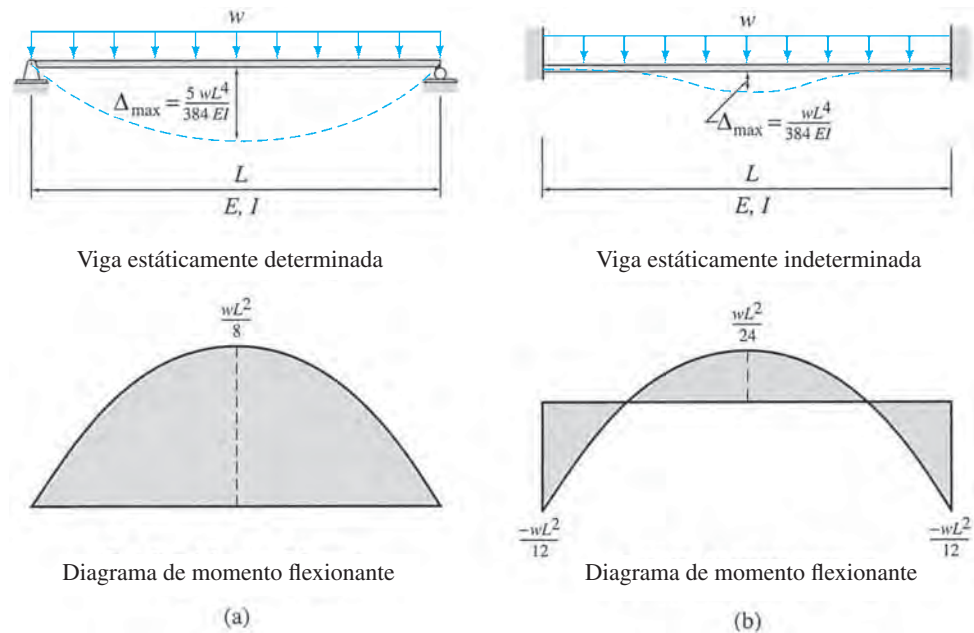


FIG. 11.1

2. **Mayor rigidez** Las estructuras hiperestáticas generalmente tienen mayor rigidez (es decir, menor deformación), en comparación con las estructuras determinadas. De la Fig. 11.1, observamos que la deflexión de la viga hiperestática es solo $1/5$ del de la viga isostática.
3. **Redundancias** Las estructuras hiperestáticas, si están diseñadas adecuadamente, cuentan con la capacidad de redistribuir cargas cuando cierta parte de la estructura se sobre esfuerza o colapsa en caso de una sobrecarga causada por sismo, tornados, impacto (por ejemplo, explosión de gas, impacto de vehículos), o cualquier otro evento. Las estructuras hiperestáticas tienen más elementos y/o reacciones en los apoyos que los requeridos por estabilidad estática, así que aunque una parte (elemento o apoyo) de la estructura falle, la estructura completa no necesariamente colapsará, y las cargas serán redistribuidas a los elementos adyacentes de la estructura. Considere, por ejemplo, la viga isostática e hiperestática mostrada en las Figs. 11.2(a) y (b), respectivamente. Suponga que la viga soporta el puente sobre un canal y la columna central, *B*, es destruida cuando una barcaza accidentalmente la daña. Debido a que la viga isostática solo posee un número suficiente de reacciones requeridas para la estabilidad estática, eliminar el apoyo *B* causará que la estructura completa colapse, como se muestra en la Fig. 11.2(a). Sin embargo, en la viga hiperestática (Fig. 11.2(b)) sucede una reacción extra en dirección vertical, por lo tanto, esta estructura no colapsará necesariamente y puede permanecer estable, incluso aun cuando el apoyo *B* falle. Suponiendo que la viga haya sido diseñada adecuadamente para soportar solo la carga muerta en caso de tal accidente, el puente permanecerá cerrado al tránsito hasta que el pilar *B* sea reparado y posteriormente será reabierto.

Las principales desventajas de las estructuras estáticamente indeterminadas o hiperestáticas en comparación con las estructuras estáticamente determinadas o isostáticas son las siguientes.

1. **Esfuerzos debidos a los asentamientos del apoyo** Los asentamientos en los apoyos no causan ningún esfuerzo en las estructuras isostáticas, y pueden, sin embargo, inducir grandes esfuerzos en las estruc-

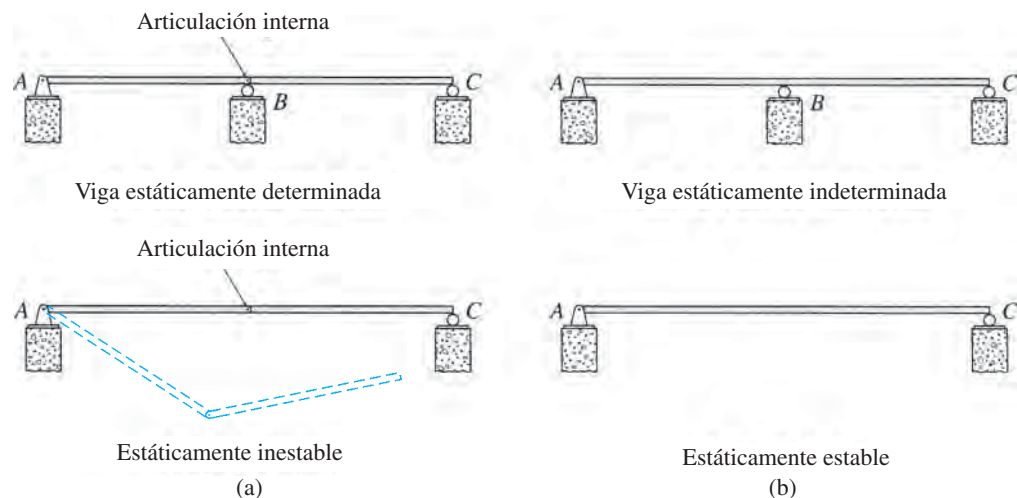


FIG. 11.2

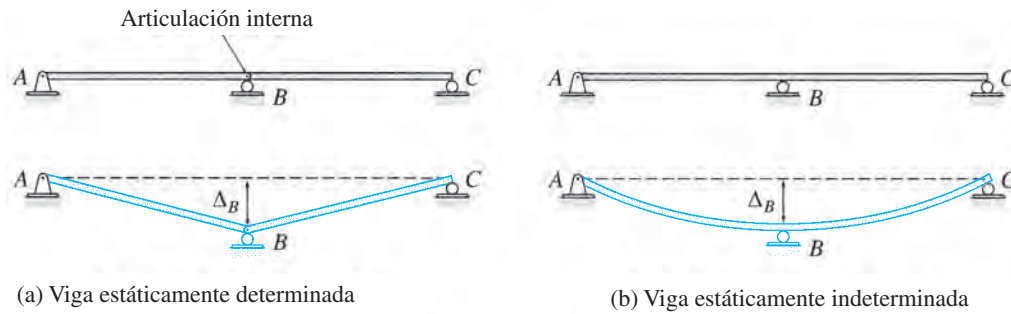


FIG. 11.3

turas hiperestáticas, los cuales deben tomarse en cuenta cuando se diseñen las estructuras hiperestáticas. Considere una viga isostática e hiperestática mostrada en la Fig. 11.3. Se puede observar de la Fig. 11.3(a) que cuando el apoyo B de la viga isostática sufre un pequeño asentamiento Δ_B , el segmento de viga AB y BC , que está unido por una articulación interna en B , se mueve como cuerpo rígido sin producir flexión —es decir— permanece la viga recta. Así que no se desarrolla esfuerzo en la viga isostática. Sin embargo, cuando la viga hiperestática continua de la Fig. 11.3(b) está sujeta a un asentamiento similar, se flexiona como se muestra en la figura; así que se presenta un momento de flexión en la viga.

2. **Esfuerzos debidos a cambios de temperatura y errores de fabricación** Así como los asentamientos en los apoyos, estos efectos no causan esfuerzos en ciertas estructuras isostáticas, pero pueden producir esfuerzos considerables en las vigas hiperestáticas. Considere la viga isostática e hiperestática de la Fig. 11.4. Se puede observar de la Fig. 11.4(a) que, cuando la viga isostática está sujeta a un incremento uniforme de temperatura ΔT , simplemente se estira con una deformación axial $\delta = \alpha(\Delta T)L$ (Ec. 7.24). No se desarrolla ningún esfuerzo en la viga isostática, ya que su elongación no está restringida. Sin embargo, cuando la viga hiperestática de la Fig. 11.4(b), la cual está restringida a la deformación axial por los

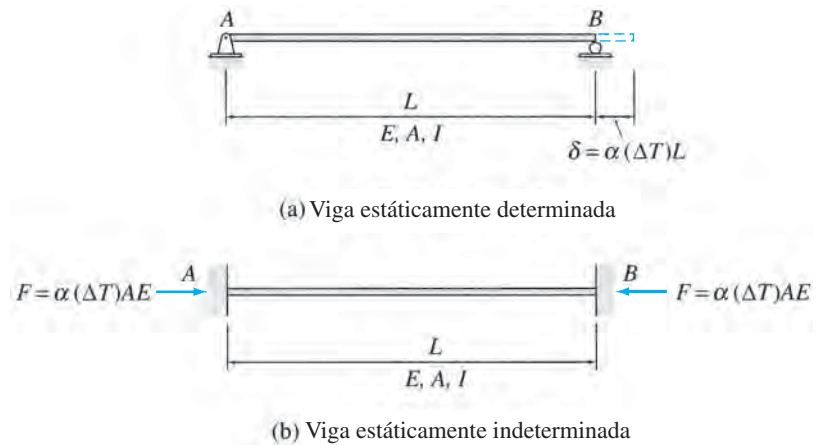


FIG. 11.4

apoyos empotrados, está sujeta a un cambio de temperatura similar, ΔT , una fuerza de compresión $F = \delta(AE/L) = \alpha(\Delta T) AE$ se presenta en ella, como se muestra en la figura. Los efectos por error de fabricación son similares a aquellos de cambio de temperatura en las estructuras isostáticas e hiperestáticas.

11.2 Análisis de estructuras hiperestáticas

Relaciones fundamentales

Independientemente de si una estructura es estáticamente determinada (isostática) o indeterminada (hiperestática), su análisis requiere del uso de los tres tipos de relaciones:

- Ecuaciones de equilibrio
- Condiciones de compatibilidad
- Relaciones fuerza-deformación en los elementos

Las ecuaciones de equilibrio relacionan las fuerzas actuantes en la estructura (o en sus partes), asegurando que la estructura completa así como sus partes permanezcan en equilibrio; las condiciones de compatibilidad relacionan los desplazamientos de la estructura de modo que todos sus elementos se mantengan unidos; y las relaciones de esfuerzo-deformación, las cuales incluyen el material y las propiedades de sección transversal (E , I y A) de los elementos, proporcionan el vínculo necesario entre las fuerzas y los desplazamientos de la estructura.

En el análisis de las estructuras isostáticas se usan primero las ecuaciones de equilibrio para obtener las reacciones y las fuerzas internas de la estructura; luego se utilizan las relaciones de fuerza-deformación y las condiciones de compatibilidad para determinar los desplazamientos de la estructura. Por ejemplo, considere la armadura isostática mostrada en la Fig. 11.5(a). La fuerza axial en los elementos de la armadura se pueden determinar considerando las ecuaciones de equilibrio en el nodo A (ver Fig. 11.5(b)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & -0.6F_{AB} + 0.6F_{AC} &= 0 & F_{AB} &= F_{AC} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & 2(0.8F_{AB}) - 500 &= 0 & F_{AB} = F_{AC} &= 312.5 \text{ k (T)} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Del mismo modo, las reacciones en los apoyos B y C pueden obtenerse considerando el equilibrio de los nodos B y C , respectivamente (Fig. 11.5(c)). Para determinar el desplazamiento Δ del nodo A de la armadura, primero emplearemos las relaciones de fuerza-deformación, $\delta = F(L/AE)$, para calcular las deformaciones axiales de los elementos:

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} = 312.5 \left(\frac{20}{20,000} \right) = 0.313 \text{ ft} \quad (11.2)$$

A continuación, estas deformaciones axiales de los elementos se relacionan con el desplazamiento Δ del nodo mediante el uso de las condiciones de compatibilidad (ver Fig. 11.5(d)):

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} = \Delta \sin \theta = 0.8\Delta \quad (11.3)$$

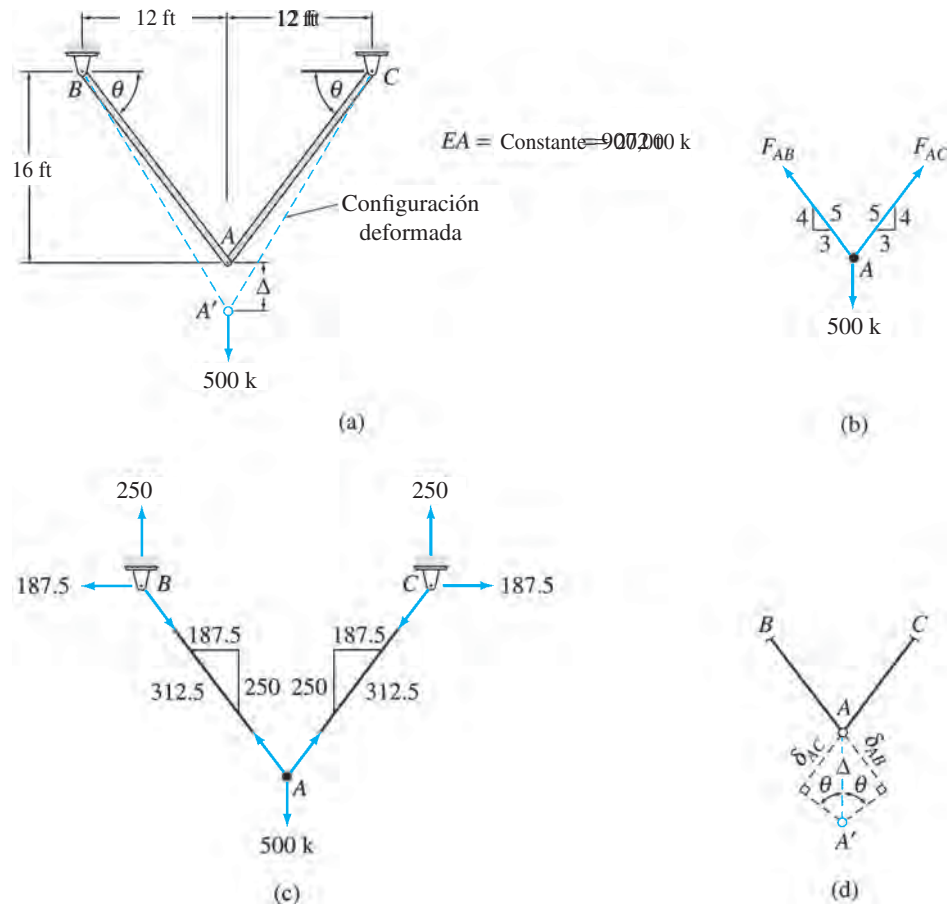


FIG. 11.5

Donde Δ se supone pequeño. Tome en cuenta que la Ec. (11.3) establece el requisito de compatibilidad en el que los desplazamientos verticales en el extremo A del elemento AB y AC deben ser iguales al desplazamiento vertical, Δ , del nodo A. Sustituyendo la Ec. (11.2) en la Ec. (11.3), encontramos que el desplazamiento del nodo A es

$$\Delta = \frac{0.313}{0.8} = 0.391 \text{ ft} = 4.69 \text{ in.} \quad (11.4)$$

El desplazamiento Δ también puede calcularse empleando el *método del trabajo virtual* formulado en el Capítulo 7, el cual automáticamente satisface las relaciones de fuerza-deformación y las condiciones de compatibilidad necesarias.

Estructuras hiperestáticas

En el análisis de las estructuras hiperestáticas, el uso de las ecuaciones de equilibrio no es suficiente para determinar las reacciones y las fuerzas internas. Por lo tanto, se vuelve necesario resolver las ecuaciones de equilibrio en conjunto con las condiciones de compatibilidad de la estructura para determinar su respuesta. Debido a que las ecuaciones de equilibrio contienen

las fuerzas desconocidas, mientras que las condiciones de compatibilidad contienen los desplazamientos desconocidos, se utilizan las relaciones de fuerza-deformación para expresar ya sea las fuerzas desconocidas en términos de los desplazamientos desconocidos o viceversa. El sistema resultante de ecuaciones contiene solo un tipo de incógnita, entonces se resuelve para las fuerzas o desplazamientos desconocidos, los cuales luego se sustituyen en las relaciones fundamentales para determinar las características de respuesta restantes de la estructura.

Considere, por ejemplo, la armadura hiperestática mostrada en la Fig. 11.6(a). La armadura se obtiene agregando un elemento vertical AD a la armadura isostática de la Fig. 11.5(a), considerada previamente. El diagrama de cuerpo libre del nodo A de la armadura se muestra en la Fig. 11.6(b). Las ecuaciones de equilibrio para este nodo están dadas por:

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad F_{AB} = F_{AC} \quad (11.5)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 1.6F_{AB} + F_{AD} = 500 \quad (11.6)$$

Tome en cuenta que las dos ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las tres incógnitas de fuerza axial en los elementos. Las ecuaciones de compatibilidad se basan en los requisitos de que los desplazamientos verticales en el extremo A de los tres elementos conectados en el nodo A deben ser iguales al desplazamiento vertical Δ del nodo A . El diagrama de desplazamiento del nodo A se muestra en la Fig. 11.6(c). Asumiendo que el desplazamiento Δ es pequeño, escribimos las ecuaciones de compatibilidad como

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} = \Delta \sin \theta = 0.8\Delta \quad (11.7)$$

$$\delta_{AD} = \Delta \quad (11.8)$$

Sustituyendo la Ec. (11.8) en la Ec. (11.7) obtenemos la relación deseada entre la deformación axial del elemento:

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} = 0.8\delta_{AD} \quad (11.9)$$

La cual indica que las deformaciones axiales de los elementos inclinados AB y AC son igual a 0.8 veces la deformación axial del elemento vertical AD . Para expresar la Ec. (11.9) en términos de fuerzas axiales en los elementos, utilizaremos las relaciones de fuerza-deformación de los elementos:

$$\delta_{AB} = F_{AB} \left(\frac{L_{AB}}{EA} \right) = F_{AB} \left(\frac{20}{20,000} \right) = 0.001F_{AB} \quad (11.10)$$

$$\delta_{AC} = F_{AC} \left(\frac{L_{AC}}{EA} \right) = F_{AC} \left(\frac{20}{20,000} \right) = 0.001F_{AC} \quad (11.11)$$

$$\delta_{AD} = F_{AD} \left(\frac{L_{AD}}{EA} \right) = F_{AD} \left(\frac{12}{20,000} \right) = 0.0006F_{AD} \quad (11.12)$$

Sustituyendo de la Ec. (11.10) a la Ec. (11.12) en la Ec. (11.9) obtenemos

$$0.001F_{AB} = 0.001F_{AC} = 0.8(0.0006F_{AD})$$

o

$$F_{AB} = F_{AC} = 0.48F_{AD} \quad (11.13)$$

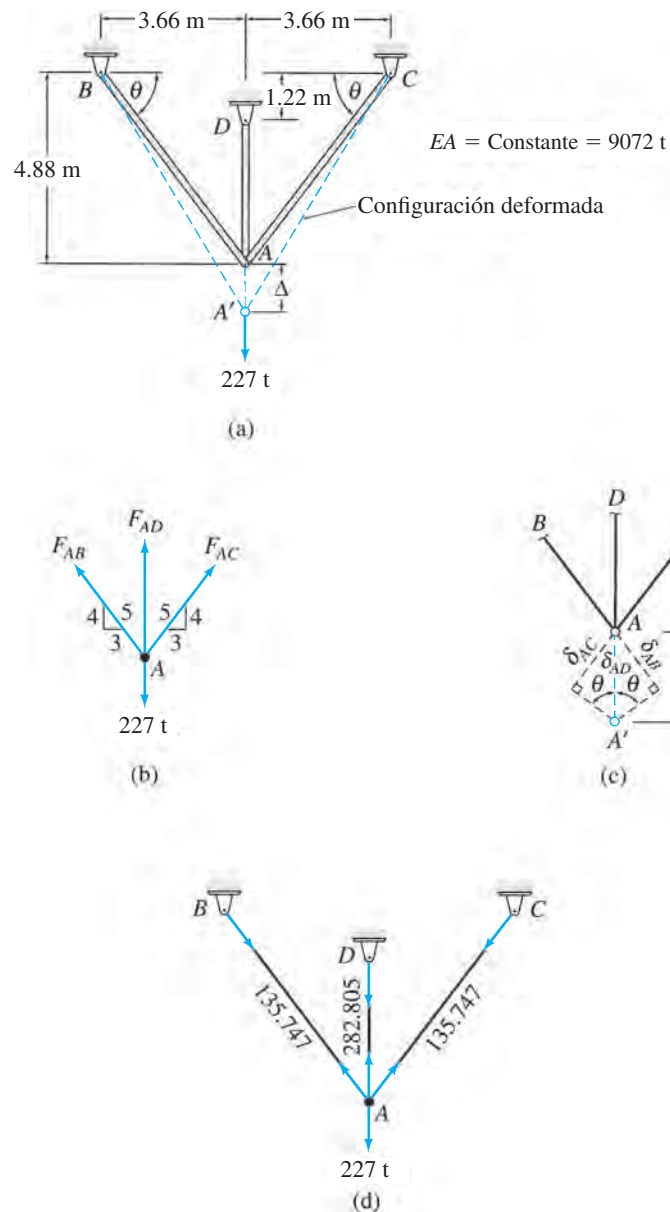


FIG. 11.6

Ahora podemos determinar la fuerza axial en los tres elementos de la armadura resolviendo la Ec. (11.13) simultáneamente con las dos ecuaciones de equilibrio (Ec. (11.5) y Ec. (11.6)). Así (Fig. (11.6(d)):

$$F_{AB} = F_{AC} = 135.747 \text{ k (T)} \quad \text{y} \quad F_{AD} = 282.805 \text{ k (T)}$$

Las deformaciones axiales de los elementos pueden calcularse sustituyendo los valores de fuerza axial de los elementos en las relaciones de fuerza-deformación de los elementos (Ec. (11.10) a la Ec. (11.12)) para obtener

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} = 0.136 \text{ ft} = 1.629 \text{ in.} \quad \text{y} \quad \delta_{AD} = 0.17 \text{ ft} = 2.036 \text{ in.}$$

Finalmente, sustituyendo estos valores de deformación axial de los elementos en las condiciones de compatibilidad (Ec. (11.7) y Ec. (11.8)) podemos encontrar el desplazamiento del nodo A como

$$\Delta = 0.17 \text{ ft} = 2.036 \text{ in.}$$

Métodos de análisis

Desde mediados de 1800 se han desarrollado muchos métodos para analizar estructuras estáticamente indeterminadas. Estos métodos pueden clasificarse de manera general en dos categorías llamados: *método de las fuerzas (flexibilidades)* y *método de los desplazamientos (Rigideces)*, dependiendo del tipo de incógnitas (fuerzas o desplazamientos, respectivamente), que participan en las ecuaciones que rigen la solución. El método de las fuerzas, el cual se presentó en los capítulos 13 y 14, es el más conveniente para analizar estructuras pequeñas con algunas redundancias (es decir, un menor número de elementos y/o reacciones que los requeridos para estabilidad estática). Estos métodos también se utilizan para obtener las relaciones de fuerza-deformación de los elementos necesarias para desarrollar el método de los desplazamientos. Estos métodos de los desplazamientos se abordan del capítulo 15 al 17; son más sistemáticos, pueden fácilmente aplicarse a las computadoras, y son, por lo tanto, preferidos para el análisis de estructuras más grandes y con mayor grado de redundancia.

Resumen

En este capítulo aprendimos que las ventajas de las estructuras estáticamente determinadas sobre las indeterminadas incluyen menores esfuerzos máximos, grandes rigideces y redundancias. Los asentamientos en los apoyos, el cambio de temperatura y los errores de fabricación pueden inducir esfuerzos significativos en ciertas estructuras, y deben considerarse en el diseño de las mismas.

El análisis de las estructuras involucra las tres relaciones fundamentales: ecuaciones de equilibrio, condiciones de compatibilidad y relaciones de fuerza-deformación de los elementos. En el análisis de estructuras indeterminadas o hiperestáticas las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con las condiciones de compatibilidad basadas en la geometría de deformación de la estructura. La relación entre las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de compatibilidad se establece por medio de la relación fuerza-deformación de los elementos de la estructura.

Los métodos de análisis de estructuras hiperestáticas se pueden clasificar de manera general en dos categorías: *métodos de las fuerzas (Flexibilidades)* y *método de los desplazamientos (Rigideces)*. El método de las fuerzas es más conveniente para el análisis de estructuras con pocas redundantes (es decir, un menor número de elementos y/o reacciones que los requeridos para estabilidad estática). El método de los desplazamientos, el cual puede ser fácilmente implementado en las computadoras, se prefiere para analizar grandes estructuras con mayor grado de redundancia.



Arco de escape de St. Louis
y Antiguo Palacio de Justicia

R. Gino Santa Maria/Shutterstock.com

12

Análisis Aproximado de Marcos Rectangulares de Edificios

- 12.1 Suposiciones para el análisis aproximado
 - 12.2 Análisis de cargas verticales
 - 12.3 Análisis de cargas laterales—Método del portal
 - 12.4 Análisis de cargas laterales—Método del cantiliver
- Resumen
Problemas

El análisis de estructuras estáticamente indeterminadas usando el método de las fuerzas y el de los desplazamientos presentados en el capítulo anterior se puede considerar como *exacto* en el sentido de que la compatibilidad y las condiciones de equilibrio se satisfacen completamente en él. Sin embargo, los resultados de este análisis exacto representan la respuesta de la estructura real solo en la medida en que el modelo analítico de la estructura representa a la estructura real. Los resultados experimentales han demostrado que la respuesta de la mayoría de los tipos comunes de estructuras bajo cargas de servicio se puede predecir de manera confiable por los métodos de las fuerzas y los desplazamientos, siempre que se use en el análisis un modelo analítico preciso de la estructura.

El análisis exacto de las estructuras indeterminadas implica el cálculo de las deflexiones y la solución simultánea de ecuaciones, de modo que se puede consumir bastante tiempo. Más aun, tal análisis depende de las medidas relativas (área de la sección transversal y/o momentos de inercia) de los elementos de la estructura. Debido a estas dificultades asociadas a un análisis exacto, se utilizan diseños preliminares para las estructuras indeterminadas de manera frecuente, basados en los resultados de *análisis aproximados*, en los cuales las fuerzas internas se estiman haciendo ciertas suposiciones acerca de las deformaciones y/o de la distribución de fuerzas entre los elementos de la estructura, evitando así la necesidad de calcular las deflexiones.

El análisis aproximado resulta bastante conveniente en la fase de planeación del proyecto, cuando se evalúan distintas alternativas de diseño de la estructura para determinar el tamaño de los diferentes elementos estructurales utilizados para un análisis exacto. Los diseños preliminares de los elementos

se revisan de manera iterativa, usando los resultados exactos de los análisis consecutivos, para determinar los diseños finales. Además, los análisis aproximados son útiles para comprobar los resultados del análisis exacto, el cual, debido a su complejidad, puede estar sujeto a errores. Finalmente, en años recientes, ha habido un aumento en la tendencia hacia la renovación y reacondicionamiento de estructuras antiguas. Muchas de estas estructuras construidas antes de 1960, inclusive edificios altos, fueron diseñadas solamente con la base de los análisis aproximados, por lo que el conocimiento y el entendimiento de los métodos aproximados utilizados por los diseñadores originales suele ser muy útil en las tareas de reacondicionamiento.

A diferencia de los métodos exactos, los cuales son generales en el sentido de que pueden aplicarse a distintos tipos de estructuras sujetas a varios tipos de condición de cargas, en mayor medida se requiere de un método específico para un tipo particular de estructura con una condición de carga específica. Por ejemplo, se puede emplear un método aproximado distinto para el análisis de un marco rectangular sujeto a cargas verticales (gravitacionales) que para el análisis del mismo marco sujeto a cargas laterales. Se han desarrollado distintos métodos para el análisis aproximado de estructuras indeterminadas. En este capítulo se presentarán algunos de los métodos aproximados más comunes pertenecientes a los marcos rectangulares. Con estos métodos se pueden obtener resultados dentro del 20% de la solución exacta.

El objetivo de este capítulo es considerar los análisis aproximados de marcos rectangulares de edificios, además de obtener un entendimiento de las técnicas empleadas en el análisis aproximado de las estructuras en general. Presentaremos una discusión general de las suposiciones simplificadas necesarias para el análisis aproximado y la consideración del análisis aproximado de marcos rectangulares sujetos a cargas verticales. Finalmente, mostraremos los dos métodos más comunes para el análisis aproximado de marcos sujetos a cargas laterales.

12.1 Suposiciones para el análisis aproximado

Como se discutió en los capítulos del 3 al 5, las estructuras estáticamente indeterminadas tienen más reacciones en los apoyos y/o elementos que los requeridos para la estabilidad estática; por lo tanto, las reacciones y fuerzas internas (incluidos los momentos) de estas estructuras no se pueden determinar a partir de las ecuaciones de equilibrio. Las reacciones adicionales y fuerzas internas de una estructura indeterminada se conocen como *redundantes*, y el número de ellas (es decir, la diferencia entre el total de las incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio) se conoce como *grado de indeterminación* de la estructura. Así, con el fin de determinar las reacciones y las fuerzas internas de las estructuras indeterminadas, las ecuaciones de equilibrio se deben complementar con ecuaciones adicionales, cuyo número debe ser igual al grado de indeterminación de la estructura. En un análisis aproximado, estas ecuaciones adicionales se establecen a partir del juicio ingenieril para hacer suposiciones simplificadoras acerca de la respuesta de una estructura. El total de las suposiciones debe ser igual al grado de indeterminación de la estructura; cada suposición proporciona una relación independiente entre las

reacciones desconocidas y/o las fuerzas internas. Las ecuaciones basadas en las suposiciones se resuelven en conjunto con las ecuaciones de equilibrio de la estructura para determinar los valores aproximados de sus reacciones y fuerzas internas.

Los dos tipos de suposiciones más comunes se emplean en el análisis aproximado.

Suposiciones sobre la ubicación de los puntos de inflexión

En el primer enfoque, la configuración deformada cualitativa de la estructura indeterminada se bosqueja y se usa para asumir la ubicación de los puntos de inflexión —es decir, los puntos donde la curva elástica cambia de signo o se convierte en cero. Dado que el momento flexionante debe ser cero en los puntos de inflexión, se introducen articulaciones internas en la estructura indeterminada en la ubicación supuesta de los puntos de inflexión para obtener una estructura determinada simplificada. Cada una de las articulaciones internas proporciona una ecuación de condición, de modo que el número de puntos de inflexión supuestos deberá ser tal que la estructura determinada resultante sea estática y estable. La estructura determinada simplificada obtenida así se analiza para determinar los valores de las reacciones y las fuerzas internas de la estructura indeterminada original.

Considere, por ejemplo, el marco sujeto a carga lateral P que se muestra en la Fig. 12.1(a). Como el marco está apoyado en cuatro componentes de reacciones y puesto que solo hay tres ecuaciones de equilibrio, el marco es estáticamente indeterminado en primer grado. Por lo tanto, necesitamos hacer una suposición simplificadora sobre la respuesta del marco. Mediante la inspección de la configuración deformada del bosquejo del marco en la Fig. 12.1(a), observamos que existe un punto de inflexión cerca de la mitad de la viga CD . Debido a que el momento flexionante en este punto debe ser cero, insertamos una articulación interna en el punto medio E de la viga CD para obtener el marco determinado de la Fig. 12.1(b). Las cuatro reacciones del marco ahora se pueden determinar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_c = 0$, y una ecuación de condición, $\sum M_E^{BE} = 0$, al marco determinado (Fig. 12.1(b)):

$$\begin{aligned}
 + \zeta \sum M_B &= 0 & A_Y(L) - Ph &= 0 & A_Y &= \frac{Ph}{L} \downarrow \\
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 & -\frac{Ph}{L} + B_Y &= 0 & B_Y &= \frac{Ph}{L} \uparrow \\
 + \zeta \sum M_E^{BE} &= 0 & \frac{Ph}{L} \left(\frac{L}{2} \right) - B_X(h) &= 0 & B_X &= \frac{P}{2} \leftarrow \\
 + \rightarrow \sum F_X &= 0 & P - A_X - \frac{P}{2} &= 0 & A_X &= \frac{P}{2} \leftarrow
 \end{aligned}$$

Con estas reacciones aproximadas se pueden construir los diagramas aproximados del cortante, del momento flexionante y de la fuerza axial del marco considerando el equilibrio de sus elementos y nodos. Los diagramas de momento flexionante de los elementos del marco se muestran en la Fig. 12.1(c).

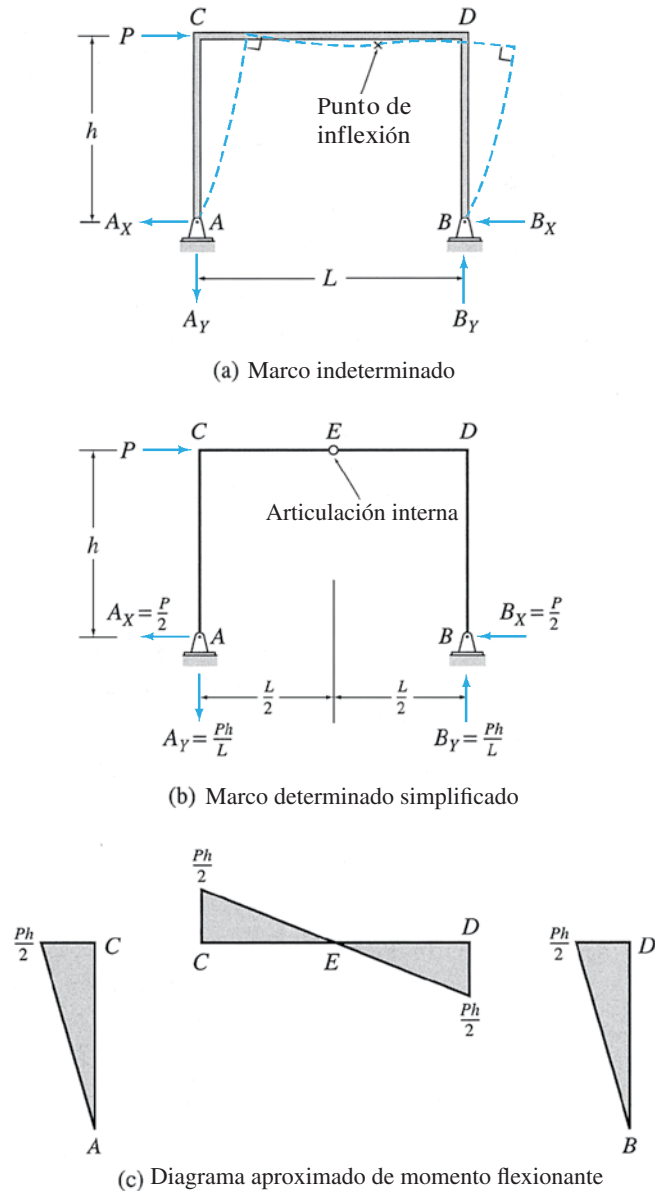


FIG. 12.1

Suposiciones sobre la distribución de fuerzas entre elementos y/o reacciones

El análisis aproximado de las estructuras indeterminadas algunas veces se realiza haciendo suposiciones sobre la distribución de fuerzas entre los elementos y/o las reacciones de las estructuras. El número de suposiciones que se requieren para el análisis de una estructura es igual al grado de indeterminación de la estructura, cada suposición proporciona una ecuación independiente que relaciona las fuerzas desconocidas de cada elemento y/o reacción. Las ecuaciones basadas en estas suposiciones se resuelven simultáneamente con las ecuaciones de equilibrio de la estructura para determinar las reacciones aproximadas y las fuerzas internas. Por ejemplo, el marco de la Fig. 12.1(a)

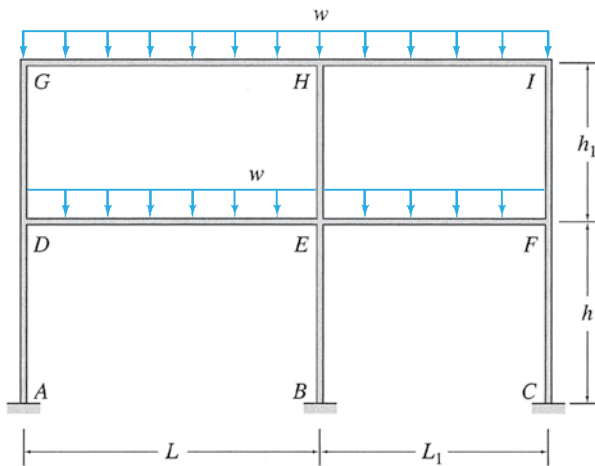
puede ser analizado alternativamente suponiendo que las reacciones horizontales A_x y B_x son iguales; es decir, $A_x = B_x$. Resolviendo esta ecuación simultáneamente con las tres ecuaciones de equilibrio del marco, obtenemos las mismas reacciones que las determinadas previamente por la suposición de un punto de inflexión en la mitad de la viga CD del marco.

Los dos tipos de suposiciones descritos en esta sección pueden emplearse de manera individual o combinados unos con el otro y/o con otro tipo de suposiciones basadas en el juicio de ingeniería sobre la respuesta de la estructura, con el fin de desarrollar métodos de análisis aproximados para distintos tipos de estructuras. En el resto del capítulo enfocaremos nuestra atención en el análisis aproximado de marcos rectangulares de edificios.

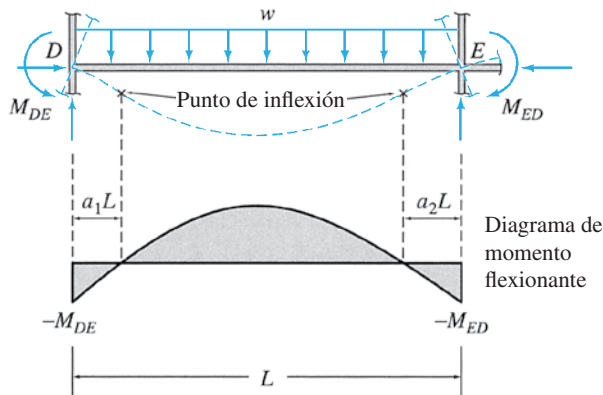
12.2 Análisis de cargas verticales

Recuerde de la Sección 5.5 que el grado de indeterminación de un marco rectangular de un edificio con apoyos empotrados es igual a *tres veces el número de vigas* en el marco mientras que este no contenga ninguna articulación interna o patines. Por lo tanto, en el análisis aproximado de tal marco, el total de suposiciones requeridas es igual a tres veces el número de vigas en el marco.

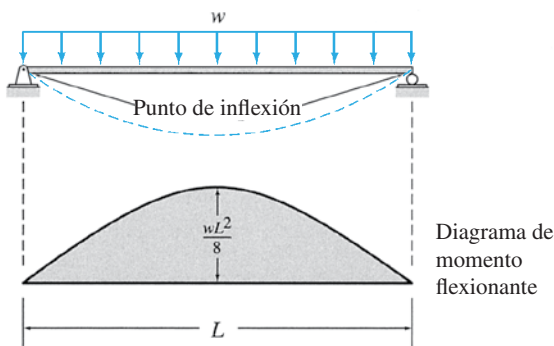
Un procedimiento utilizado comúnmente para el análisis aproximado de marcos rectangulares de edificios sujetos a carga vertical (gravitacional) implica realizar tres suposiciones sobre el comportamiento de cada viga del marco. Considere un marco sujeto a carga uniformemente distribuida w , como el que se muestra en la Fig. 12.2(a). El diagrama de cuerpo libre de una viga tipo DE del marco se ilustra en la Fig. 12.2(b). De la configuración deformada de la viga bosquejada en la figura, observamos que existen dos puntos de inflexión cerca de ambos extremos de la viga. Estos puntos de inflexión se desarrollan debido a las columnas y a las vigas adyacentes unidas a los extremos de la viga DE , que ofrecen restricción parcial o resistencia contra la rotación ejerciendo momentos negativos M_{DE} y M_{ED} en los extremos D y E de la viga, respectivamente. Aunque la ubicación exacta de los puntos de inflexión depende de las rigideces relativas de los elementos del marco y de que se pueden determinar solo mediante un análisis exacto, podemos establecer las regiones a lo largo de la viga en donde se localizan estos puntos de inflexión examinando las dos condiciones extremas de restricción a la rotación en los extremos de la viga mostrada en las Figs. 12.2(c) y (d). Si los extremos de la viga estuvieran libres a la rotación, en el caso de la viga simplemente apoyada (Fig. 12.2(c)), se presentarían momentos flexionantes —y por lo tanto los puntos de inflexión— en los extremos que serían igual a cero. En el otro caso, si los extremos de la viga estuvieran perfectamente empotrados y restringidos a la rotación, podríamos mostrar, mediante un análisis exacto presentado en capítulos posteriores, que los puntos de inflexión ocurrirían a una distancia de $0.211L$ a partir de cada extremo de la viga, como se ilustra en la Fig. 12.2(d). Por lo tanto, cuando los extremos de la viga están parcialmente restringidos contra la rotación (Fig. 12.2(b)), los puntos de inflexión se presentarán en algún lugar dentro de una distancia de $0.211L$ a partir de cada extremo. Para el propósito del análisis aproximado, es práctica común asumir que los puntos de inflexión se ubican a la mitad entre las dos condiciones extremas —es decir, a una distancia de $0.1L$ de cada extremo de



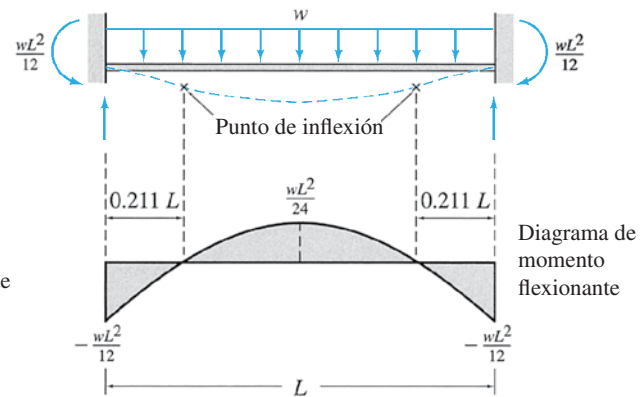
(a) Marco de edificio



(b) Viga típica



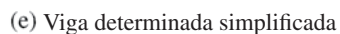
(c) Viga simplemente apoyada



(d) Viga empotrada

FIG. 12.2

la viga. La estimación de los dos puntos de inflexión implica establecer dos suposiciones sobre el comportamiento de la viga. La tercera suposición se basa en la experiencia obtenida de los análisis exactos de marcos rectangulares sujetos solo a cargas verticales, lo cual indica que la fuerza axial en la viga de tales marcos es generalmente muy pequeña. Por lo tanto, en un análisis aproximado, es razonable asumir que la carga axial de la viga sea cero.



1. Los puntos de inflexión se localizan a un décimo del claro a partir de cada extremo de la viga.
2. La carga axial en la viga es cero.

El efecto de estas simplificaciones es que la medida de ocho décimos de claro ($0.8L$) de cada extremo se pueda considerar como apoyo simple en las dos porciones extremas de la viga, cada uno de los cuales es igual a un décimo del claro de la viga ($0.1L$), como se muestra en la Fig. 12.2(e). Tenga en cuenta que las vigas ahora son estáticamente determinadas, y que sus fuerzas y momentos en los extremos se pueden determinar a partir de la estática, como se muestra en la figura. Se debe tener en cuenta que haciendo estas tres suposiciones sobre el comportamiento de cada viga del marco, hemos hecho un número total de suposiciones igual al grado de indeterminación del marco, estableciendo así el marco completo estáticamente determinado, como se muestra en la Fig. 12.2(f). Una vez que las fuerzas en los extremos se han calculado, las fuerzas en los extremos de las columnas y de las reacciones se pueden determinar de las consideraciones de equilibrio.

Ejemplo 12.1

Dibuje los diagramas aproximados del cortante y del momento flexionante de las vigas del marco mostrado en la Fig. 12.3(a).

Solución

Como el claro de la viga y las cargas son iguales para las cuatro vigas del marco (Fig. 12.3(a)), los diagramas aproximados de cortante y de momento flexionante para las vigas también serán iguales. Aplicando las suposiciones discutidas en esta sección a cualquier viga del marco, obtenemos una viga estáticamente determinada, expuesta en la Fig. 12.3(b). Tenga en cuenta que la porción media de la viga, que tiene una longitud de $0.8L = 0.8(30) = 24$ ft, está simplemente apoyada en dos porciones extremas, cada una con una longitud de $0.1L = 0.1(30) = 3$ ft.

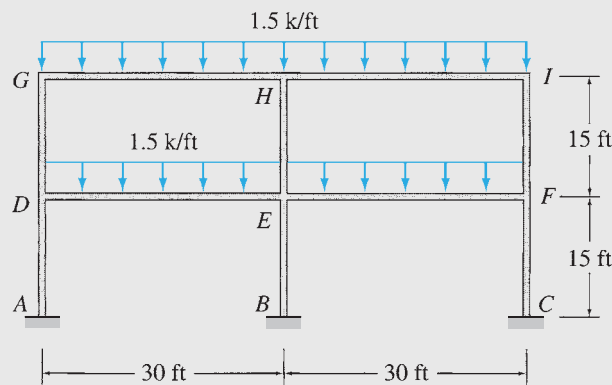
Considerando el equilibrio de la porción media de la viga simplemente apoyada, obtenemos las reacciones verticales en los extremos de la porción como $1.5(24/2) = 18$ k. Estas fuerzas entonces se aplicarán en las direcciones opuestas (ley de Newton de la acción y la reacción) a las dos partes extremas de la viga, como se muestra en la figura. Las fuerzas verticales (cortantes) y los momentos en los extremos de la viga se pueden determinar considerando las ecuaciones de equilibrio en las porciones extremas. Aplicando las ecuaciones de equilibrio a la porción del extremo izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 & S_L - 1.5(3) - 18 &= 0 & S_L &= 22.5 \text{ k } \uparrow \\
 + \curvearrowright \sum M_L &= 0 & M_L - 1.5(3)\left(\frac{3}{2}\right) - 18(3) &= 0 & M_L &= 60.75 \text{ k-ft } \curvearrowright
 \end{aligned}$$

De manera similar, aplicando las ecuaciones de equilibrio a la parte extrema derecha:

$$S_R = 22.5 \text{ k } \uparrow \quad y \quad M_R = 60.75 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Usando estos valores aproximados de las fuerzas y los momentos en los extremos de la viga, construimos los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga, como se muestra en la Fig. 12.3(b). Respuesta



(a)

FIG. 12.3

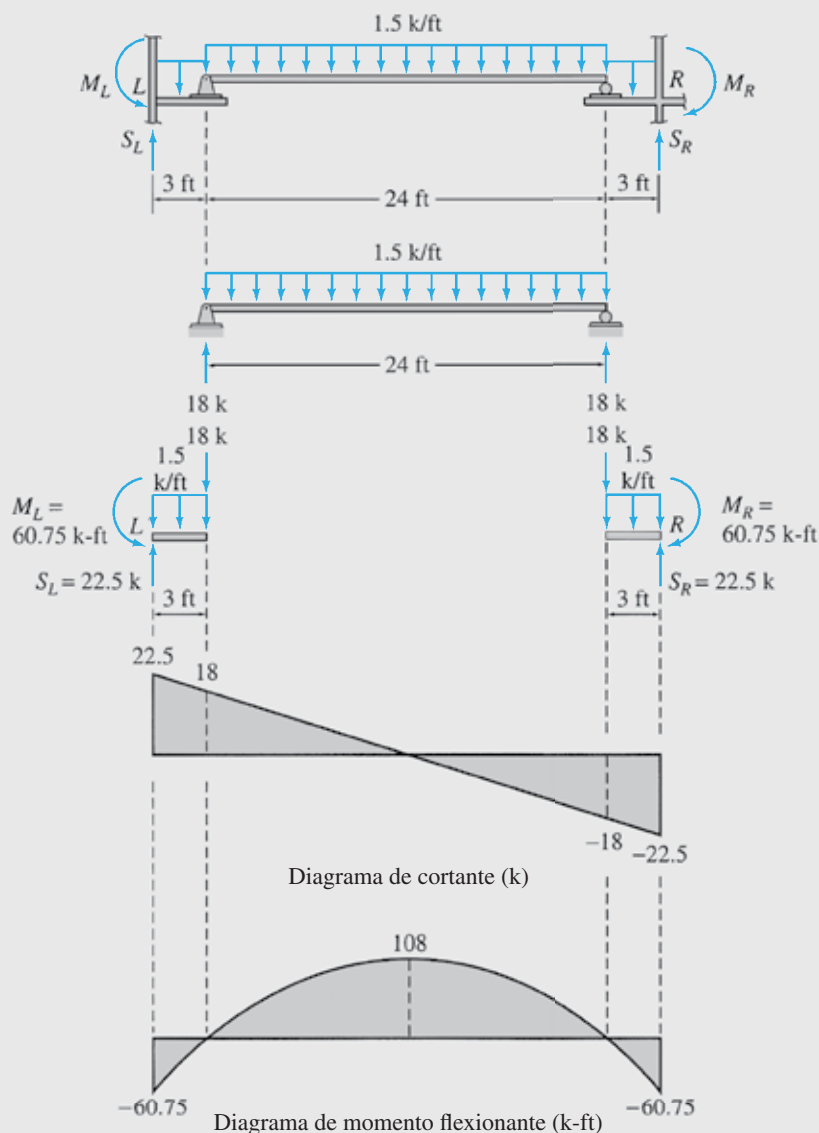


FIG. 12.3 (cont.)

(b)

12.3 Análisis de cargas laterales-Método del portal

El comportamiento de los marcos rectangulares de edificios es diferente bajo cargas laterales (horizontales) que bajo cargas verticales, de modo que se deben usar diferentes suposiciones en el análisis aproximado para cargas laterales a las que se emplean en el caso de cargas verticales, considerado previamente. Por lo común se emplean dos métodos para el análisis aproximado para marcos rectangulares de edificios sujetos a cargas laterales. Estos son (1) *el método del portal* y (2) *el método del cantiliver*. El método del portal se describe en esta sección, mientras que el método del cantiliver se considera en la siguiente.

El método del portal fue desarrollado inicialmente por A. Smith en 1915, y generalmente se considera apropiado para el análisis aproximado de marcos de edificios de relativa baja altura. Antes de considerar el análisis de varios pisos, de varias cruías usando el método del portal, examinemos el comportamiento de un pórtico con apoyos empotrados bajo cargas laterales, como el que se muestra en la Fig. 12.4(a). El grado de indeterminación de este marco es de tres, por lo tanto, se necesitan tres suposiciones para su análisis apropiado. De la configuración deformada del marco bosquejado en la Fig. 12.4(a), observamos que los puntos de inflexión se localizan cerca de la mitad de cada elemento del marco. Por lo tanto, en el análisis aproximado, es razonable asumir que los puntos de inflexión están a la mitad de los tres elementos del marco. Debido a que los momentos de flexión en los puntos de inflexión son cero, se insertan las articulaciones internas en los puntos intermedios de los tres elementos para obtener un marco estáticamente determinado, mostrado en la Fig. 12.4(b). Para determinar las seis reacciones, pasamos una sección *aa* a través de las articulaciones *E* y *G*, como se ve en la Fig. 12.4(b), y aplicamos las ecuaciones de equilibrio (y condición, si la hay) a las tres porciones del marco. Utilizando las tres ecuaciones de equilibrio y una ecuación de condición a la porción *ECDG* (Fig. 12.4(c)), calculamos las fuerzas en las articulaciones internas *E* y *G* como

$$\begin{aligned}
 +\zeta \sum M_G = 0 \quad & E_Y(L) - P\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad E_Y = \frac{Ph}{2L} \downarrow \\
 +\uparrow \sum F_Y = 0 \quad & -\frac{Ph}{2L} + G_Y = 0 \quad G_Y = \frac{Ph}{2L} \uparrow
 \end{aligned}$$

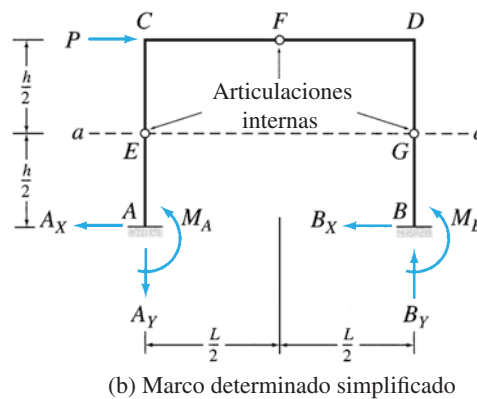
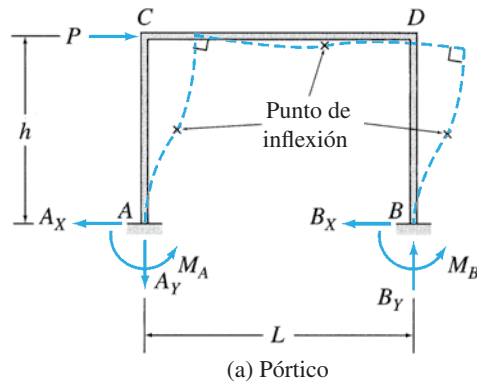


FIG. 12.4

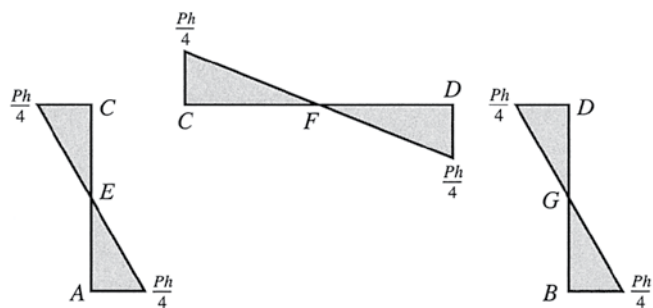
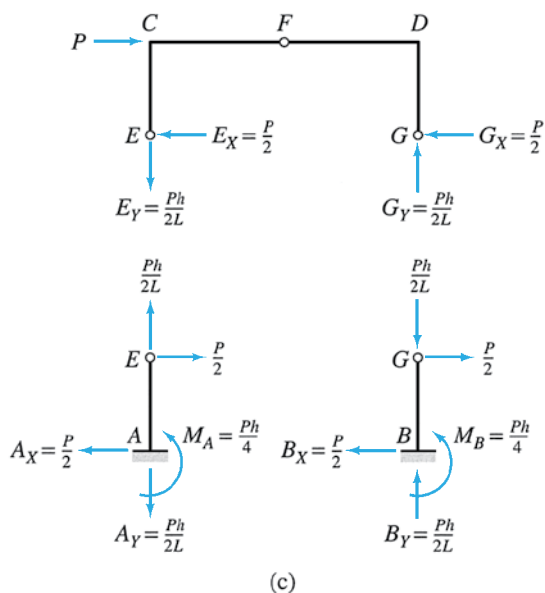


FIG. 12.4 (cont.)

(d) Diagrama aproximado del momento flexionante

$$+ \curvearrowright \sum M_F^{EF} = 0 \quad \frac{Ph}{2L} \left(\frac{L}{2} \right) - E_X \left(\frac{h}{2} \right) = 0 \quad E_X = \frac{P}{2} \leftarrow$$

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad P - \frac{P}{2} - G_X = 0 \quad G_X = \frac{P}{2} \leftarrow$$

Las reacciones en los apoyos A y B ahora se pueden determinar considerando las ecuaciones de equilibrio de las porciones AE y BG, respectivamente. Para la porción AE (Fig. 12.4(c)):

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad A_X = \frac{P}{2} \leftarrow$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad A_Y = \frac{Ph}{2L} \downarrow$$

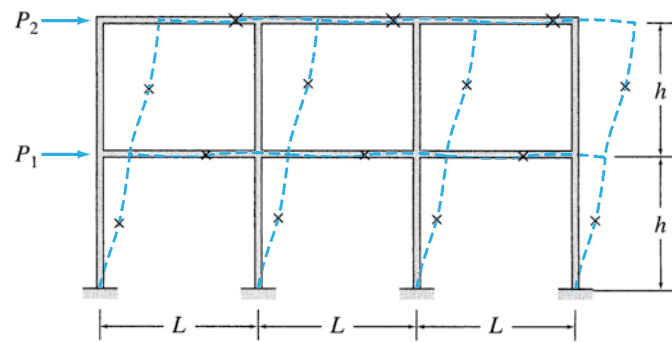
$$+ \curvearrowright \sum M_A = 0 \quad -\frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} \right) + M_A = 0 \quad M_A = \frac{Ph}{4} \curvearrowright$$

De manera similar, para la porción BG (Fig. 12.4(c)):

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_X &= 0 & B_X &= \frac{P}{2} \leftarrow \\
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 & B_Y &= \frac{Ph}{2L} \downarrow \\
 + \zeta \sum M_B &= 0 & -\frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} \right) + M_B &= 0 & M_B &= \frac{Ph}{4} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

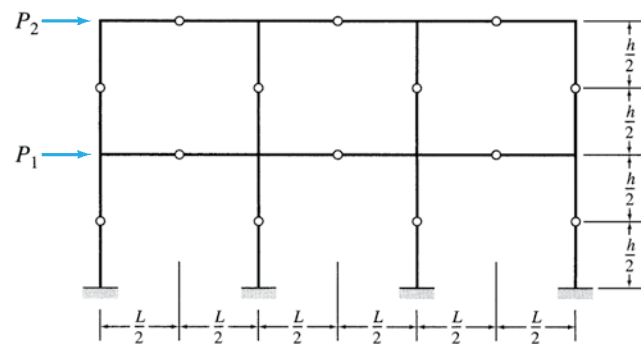
Tenga en cuenta que las reacciones horizontales en los apoyos A y B son iguales (es decir, $A_x = B_x$), lo que indica que los cortantes en las dos columnas del marco deben ser iguales. Los diagramas de momento flexionante del pórtico se muestran en la Fig. 12.4(d).

Para desarrollar el método del portal para el análisis aproximado para marcos, considere el marco de dos niveles con tres crujías mostrado en la Fig. 12.5(a). Este marco contiene seis vigas, así que el grado de indeterminación es $3(6) = 18$. De la configuración deformada del marco bosquejado en la Fig. 12.5(a), observamos que el comportamiento de la deflexión de este marco es similar al del pórtico considerado previamente (Fig. 12.4(a)), en el sentido que el punto de inflexión existe cerca de la mitad de cada elemento del marco. En el método del portal se asume que estos puntos de inflexión se localizan a la mitad de los elementos, y, por lo tanto, se inserta una articulación interna en la mitad de cada elemento del marco para obtener un marco simplificado, como el de la Fig. 12.5(b). Tenga en cuenta que este marco simplificado no es estáticamente determinado debido a que se obtuvo insertando solo 14 articulaciones internas (es decir, una articulación en cada uno de los 14 elementos) en el marco original, el cual es indeterminado en grado 18. Por lo tanto, el grado de indeterminación del marco simplificado de la Fig. 12.5(b) es $18 - 14 = 4$; en consecuencia, se requieren cuatro suposiciones adicionales antes de realizar el análisis aproximado que involucre solo la estática. En el método del portal se supone además que el marco está compuesto por una serie de pórticos, como se muestra en la Fig. 12.5(c), cada uno con una columna interior del marco de múltiples crujías representando dos piernas del portal. Hemos mostrado previamente (Fig. 12.4) que cuando el pórtico con articulaciones internas en la mitad de sus elementos está sujeto a carga lateral, se desarrolla igual cortante en las dos piernas del pórtico. Ya que una columna interior del marco original de múltiples crujías representa dos piernas, y una columna exterior representa solo una pierna, podemos razonablemente asumir que el cortante en una columna interior de un marco de varias crujías y varios pisos es dos veces más el cortante en la columna exterior de cada piso (Fig. 12.5(c)). La suposición anterior respecto a la distribución del cortante entre las columnas proporciona una ecuación adicional para cada piso del marco con varias crujías que las necesarias para el análisis aproximado. Por ejemplo, para cada piso del marco de la Fig. 12.5 esta suposición se puede usar para expresar los cortantes en cualquiera de las tres columnas en términos del cortante en la cuarta columna. Por lo tanto, para el marco completo, esta suposición proporciona un total de seis ecuaciones, es decir, dos ecuaciones más que las necesarias para el análisis aproximado. Sin embargo, como estas ecuaciones extras son consistentes con el resto, no se puede causar ninguna dificultad en el análisis.

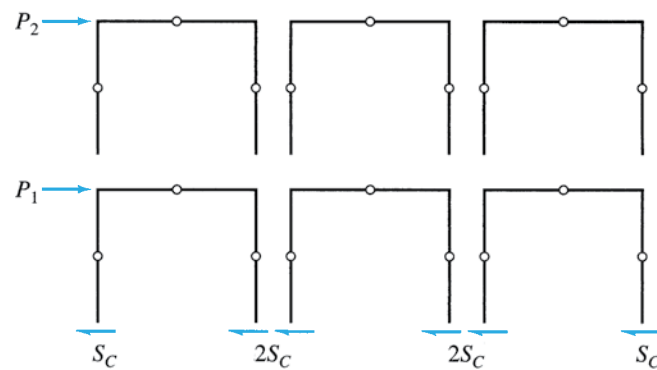


× Punto de inflexión

(a) Marco de edificio



(b) Marco simplificado



(c) Serie equivalente de los pórticos

FIG. 12.5

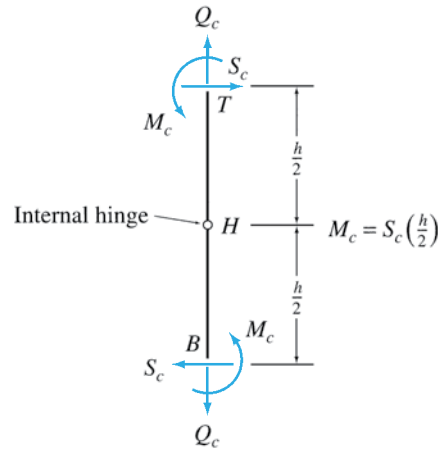
De la discusión anterior, deducimos que las suposiciones anteriores hechas para el método del portal son como sigue:

1. Un punto de inflexión se localiza a la mitad de cada elemento del marco.
2. En cada piso del marco, las columnas interiores toman el doble del cortante que las exteriores.

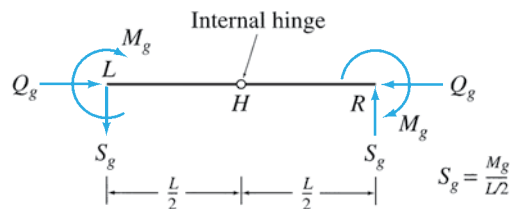
Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se puede usar para el análisis aproximado para marcos de edificios por el método del portal.

1. Dibuje un boceto del marco simplificado colocando articulaciones internas a la mitad de cada elemento del marco.
2. Determine el cortante en las columnas. Para cada entrepiso del marco:
 - a. Pase una sección horizontal a través de las columnas del entrepiso, cortando el marco en dos partes.
 - b. Asuma que el cortante en las columnas interiores es el doble de las exteriores, determine el cortante aplicando la ecuación del equilibrio horizontal ($\sum F_x = 0$) al cuerpo libre de la parte superior del marco.
3. Bosqueje los diagramas de cuerpo libre de las columnas para todos los elementos y nodos del marco, muestre las fuerzas externas y los cortantes en los extremos calculados en el paso anterior.
4. Determine los momentos en las columnas. Establezca el cortante en los extremos de cada columna aplicando las ecuaciones de condición en donde el momento flexionante es cero en la mitad de la columna, donde el punto de inflexión (articulación interna) ha sido supuesto. Como se muestra en la Fig. 12.6(a), aplicando la ecuación de condición, $\sum M_H^{BH} = 0$ y $\sum M_H^{TH} = 0$, al diagrama de cuerpo libre de la columna de altura h , encontramos que los momentos en los dos extremos de las columnas son iguales en magnitud y tienen



(a) Column End Forces and Moments



(b) Girder End Forces and Moments

FIG. 12.6

el mismo sentido (es decir, ambos momentos están en el sentido de las manecillas del reloj o son contrarios a ellas). La magnitud de los momentos en los extremos de las columnas (M_c) es igual a la magnitud de los cortantes en las columnas multiplicados por la mitad de la altura de las columnas, es decir,

$$M_c = S_c \left(\frac{h}{2} \right) \quad (12.1)$$

Calcule los momentos de todas las columnas del marco.

5. Determine las fuerzas axiales, los momentos y los cortantes de las vigas. Procediendo de la parte superior a la parte inferior del marco, calcule las fuerzas axiales, momentos y cortantes en los extremos de las vigas en cada entrepiso, empezando de la parte más alejada de la izquierda de los nodos de entrepiso y continuando hacia la derecha, como se indica a continuación:
 - a. Aplique las ecuaciones de equilibrio, $\sum F_x = 0$, $\sum M_c = 0$, al cuerpo libre de los nodos en consideración para calcular la fuerza axial y el momento, respectivamente, en el extremo izquierdo de la viga al lado derecho del nodo.
 - b. Considerando el cuerpo libre de la viga, determine el cortante en la izquierda de la viga dividiendo el momento de la viga entre la mitad de la longitud de la misma (ver Fig. 12.6(b)); es decir,

$$S_g = \frac{M_g}{(L/2)} \quad (12.2)$$

La Ec. (12.2) se basa en la condición de que el momento de flexión en la mitad de la viga es cero.

- c. Aplicando las condiciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_c = 0$ al cuerpo libre de la viga, determine la carga axial, el cortante y el momento flexionante, respectivamente, en el extremo derecho. Como se muestra en la Fig. 12.6(b), las fuerzas axiales y cortantes en los extremos de la viga deben ser iguales pero de sentido contrario, mientras los dos momentos en los extremos deben ser iguales entre ellos tanto en magnitud y dirección.
 - d. Seleccione el nodo a la derecha de la viga considerada previamente y repita los pasos del 5(a) al 5(c) hasta que las fuerzas axiales, momentos y cortantes hayan sido determinadas del piso. Las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M_c = 0$ no se han aplicado para el nodo extremo de la derecha hasta ahora, así que estas ecuaciones se pueden usar para comprobar los cálculos.
 - e. Empezando por el nodo izquierdo más alejado del entrepiso inferior, repetimos los pasos del 5(a) al 5(d) hasta determinar las fuerzas axiales, momentos y cortantes de todas las vigas del marco.
6. Determine las fuerzas axiales en las columnas. Empezando por el piso superior, aplique la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ sucesivamente al cuerpo libre de cada nodo para determinar las fuerzas axiales en las columnas del entrepiso. Repita el procedimiento para cada entrepiso, trabajando en grupos de arriba hacia abajo, hasta que todas las fuerzas axiales de las columnas se determinen.

7. Teniendo en cuenta que las fuerzas y momentos en los extremos inferiores de las columnas del piso de planta baja representan las reacciones, utilice las ecuaciones de equilibrio para el marco completo para verificar los cálculos; si el análisis se realizó de manera correcta, entonces las ecuaciones de equilibrio deben quedar satisfechas.

En los pasos 5 y 6 del procedimiento anterior, si deseáramos calcular las fuerzas y momentos en los elementos partiendo del extremo derecho del entrepiso hacia la izquierda, tendríamos que remplazar el término *izquierda* por el término *derecha* y viceversa.

Ejemplo 12.2

Determine de manera aproximada las fuerzas, cortantes y momentos flexionantes del marco mostrado en la Fig. 12.7(a) usando el método del portal.

Solución

Marco simplificado. El marco simplificado para el análisis aproximado se obtiene insertando una articulación interna a la mitad de los elementos del marco en la Fig. 12.7(b).

Cortante en columnas. Para determinar el cortante en las columnas del marco, pasamos una sección imaginaria *aa* a través de las columnas justo arriba del nivel de apoyo, como se muestra en la Fig. 12.7(b). El diagrama de cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección se muestra en la Fig. 12.7(c). Tenga en cuenta que en la columna interior *BE* ha sido supuesto como el doble del cortante de las columnas exteriores *AD* y *CF*. Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$, obtenemos (ver la Fig. 12.7(c))

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad 60 - S - 2S - S = 0 \quad S = 15 \text{ kN}$$

Por lo tanto, las fuerzas cortantes en los extremos inferiores de las columnas son

$$S_{AD} = S_{CF} = S = 15 \text{ kN} \leftarrow \quad S_{BE} = 2S = 30 \text{ kN} \leftarrow$$

Las fuerzas cortantes en los extremos superiores de las columnas se obtienen aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ al diagrama de cuerpo libre de cada columna. Por ejemplo, del diagrama de cuerpo libre de la columna *AD* mostrada en la Fig. 12.7(d), observamos que para satisfacer $\sum F_x = 0$, el cortante en el extremo superior, S_{AD} , debe actuar a la derecha con una magnitud de 15 kN para equilibrar la fuerza cortante en el extremo inferior, $S_{AD} = 15 \text{ kN}$. Por lo tanto, $S_{AD} = 15 \text{ kN} \rightarrow$. La fuerza cortante en el extremo superior en las columnas restantes se determina de manera similar y se ilustra en la Fig. 12.7(e), la cual muestra los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos y nodos del marco.

Momentos en las columnas. Conocidos los cortantes en las columnas, los momentos en los extremos de la columna se pueden calcular multiplicando el cortante de las columnas por sus alturas. Por ejemplo, debido a que la columna *AD* (ver Fig. 12.7(d)) es de 8 m de altura y tiene un cortante en el extremo de 15 kN, sus momentos en el extremo son

$$M_{AD} = M_{DA} = 15 \left(\frac{8}{2} \right) = 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

Tenga en cuenta que los momentos del extremo, M_{AD} y M_{DA} , son contrarios a las manecillas del reloj, es decir, opuestos a los momentos del cortante de 15 kN en los extremos alrededor de la articulación interna a la mitad de la columna. Los momentos en los extremos de las columnas restantes del marco se calculan de manera similar y se muestran en la Fig. 12.7(e).

Fuerzas axiales, momentos y cortantes en la viga. Empezamos el cálculo de las acciones en el extremo de la viga en el nodo *D* superior de la izquierda. El cortante de la columna S_{AD} y el momento M_{AD} calculados previamente se aplican al cuerpo libre del nodo *D* en dirección opuesta de acuerdo con la tercera ley de Newton, como se muestra en la Fig. 12.7(d). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$, obtenemos la fuerza axial de la viga Q_{DE} 45 kN $\leftarrow$ en el nodo *D*. Tenga en cuenta que Q_{DE} debe actuar en dirección opuesta —es decir, a la derecha— del extremo *D* de la viga *DE*.

continúa

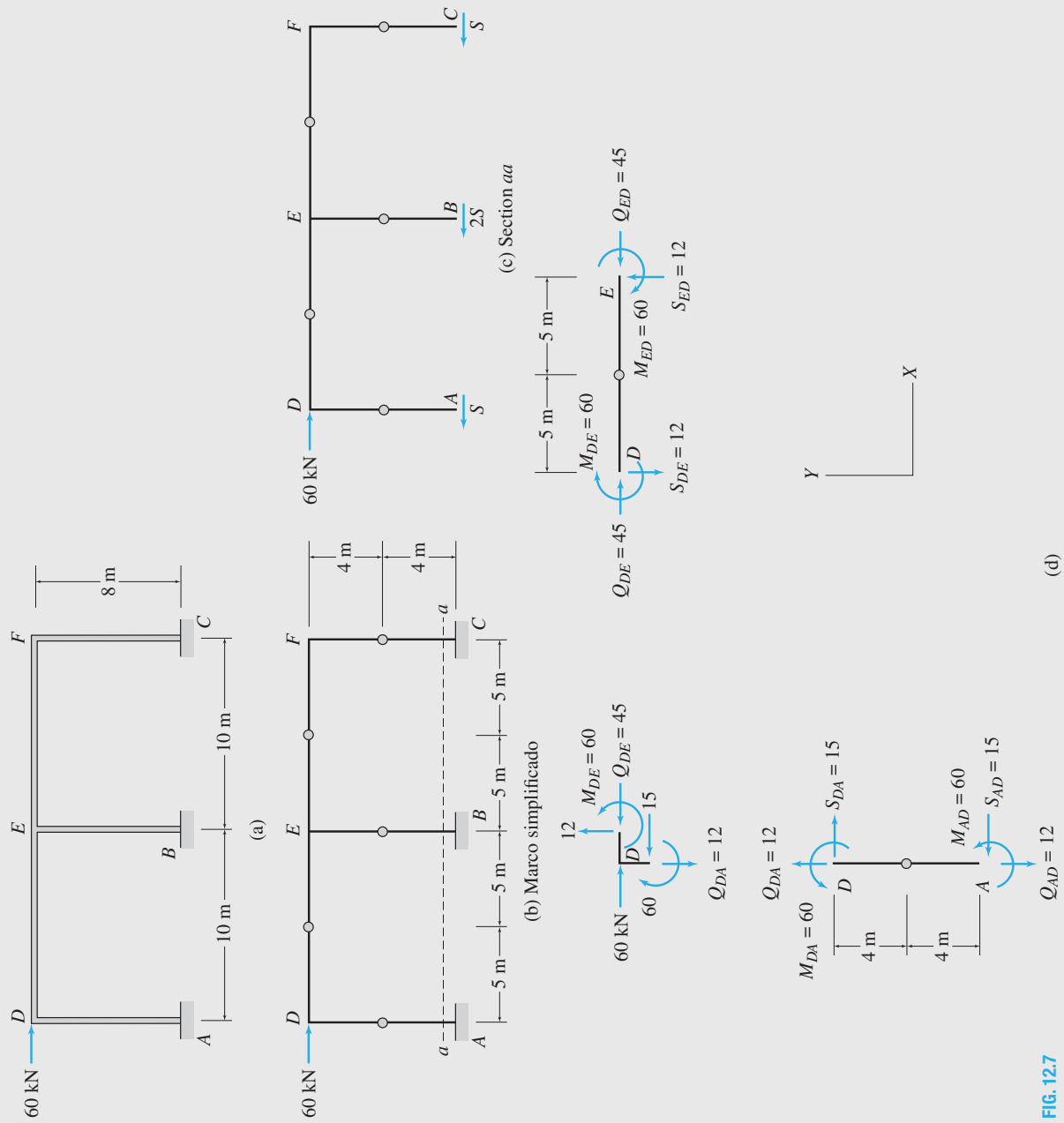
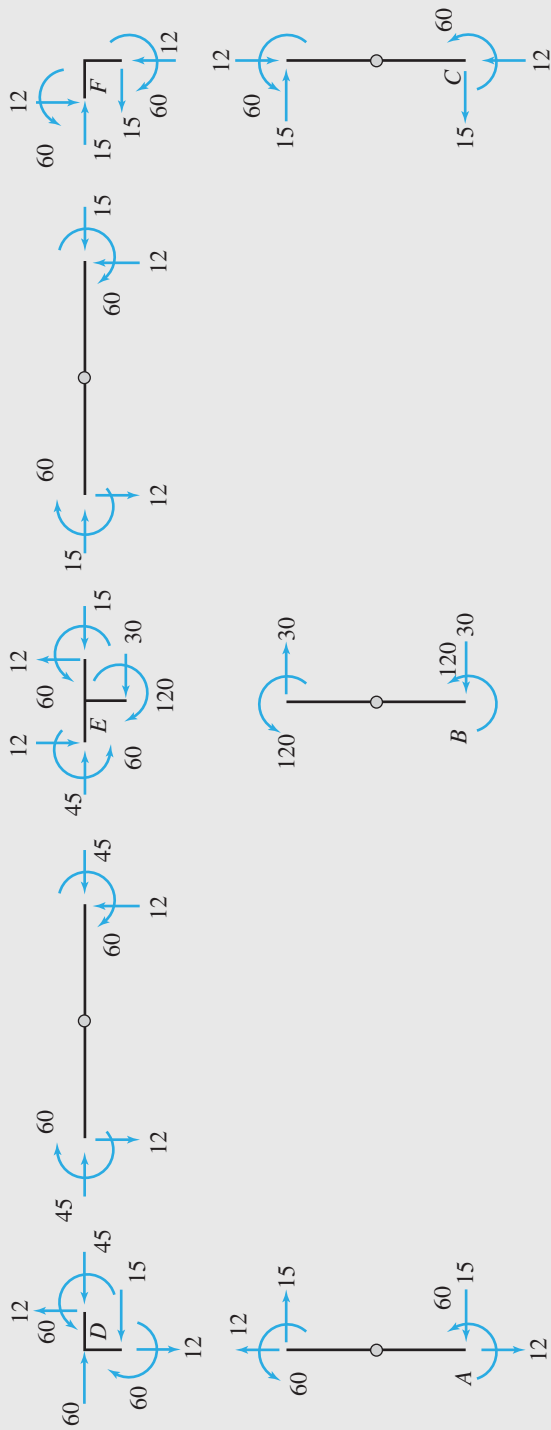
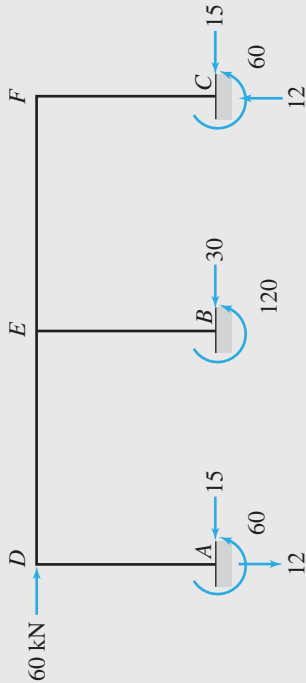


FIG. 12.7

continúa



(e) Fuerzas y momentos en los extremos



(f) Reacciones en los apoyos

FIG. 12.7 (cont.)

Del diagrama de cuerpo libre del nodo D (Fig. 12.7(d)) podemos ver que para satisfacer la ecuación de equilibrio de momento $\sum M = 0$, el momento del extremo de la viga M_{DE} debe ser igual y opuesto al momento del extremo de la columna de $60 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Por lo tanto, $M_{DE} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$, con la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj en el nodo D pero con dirección de las manecillas del reloj en el extremo D de la viga DE .

Para evaluar el cortante S_{DE} en la viga, considere el momento de equilibrio a la izquierda de la mitad de la viga DE . Del cuerpo libre de la viga DE en la Fig. 12.7(d), podemos ver que la fuerza cortante S_{DE} debe actuar hacia abajo con la magnitud de $M_{DE} / (L/2)$ de modo que pueda desarrollar un momento en sentido contrario a las manecillas del reloj de magnitud, M_{DE} , alrededor de la articulación interna para equilibrar el momento M_{DE} en el extremo sentido de las manecillas. Por lo tanto,

$$S_{DE} = \frac{M_{DE}}{(L/2)} = \frac{60}{(10/2)} = 12 \text{ kN} \downarrow$$

La fuerza axial, el cortante y el momento flexionante en el extremo derecho E se pueden determinar aplicando las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la viga DE (Fig. 12.7(d)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_X &= 0 & 45 - Q_{ED} &= 0 & Q_{ED} &= 45 \text{ kN} \leftarrow \\ + \uparrow \sum F_Y &= 0 & -12 + S_{ED} &= 0 & S_{ED} &= 12 \text{ kN} \uparrow \\ + \zeta \sum M_D &= 0 & -60 - M_{ED} + 12(10) &= 0 & M_{ED} &= 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que los momentos en el extremo de la viga M_{DE} y M_{ED} son iguales en magnitud y tienen la misma dirección.

Después, calculamos las acciones finales para la viga EF . Primero aplicamos la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M = 0$ al cuerpo libre en el nodo E (Fig. 12.7(e)) para obtener la fuerza axial $Q_{EF} = 15 \text{ kN} \rightarrow$ y el momento $M_{EF} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$ en el extremo izquierdo E de la viga. Podemos obtener el cortante $S_{EF} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$ dividiendo el momento M_{EF} entre la mitad de la longitud de la viga, y aplicamos las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la viga para obtener $Q_{EF} = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \leftarrow$, $S_{EF} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$, y $M_{EF} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$ en el extremo derecho F de la viga (ver Fig. 12.7(e)).

Debido a que todos los momentos y las fuerzas horizontales que actúan en la parte superior derecha del nodo F ya se conocen, podemos verificar nuestros cálculos, que se han realizado de esta manera hasta ahora aplicando las dos ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M_C = 0$ al cuerpo libre de este nodo. Del diagrama de cuerpo libre del nodo F mostrado en la Fig. 12.7(e), es obvio que estas ecuaciones de equilibrio se satisfacen.

Fuerzas axiales en la columna. Empezamos el cálculo de las fuerzas axiales en las columnas en la parte superior izquierda del nodo D . Del diagrama de cuerpo libre de este nodo mostrado en la Fig. 12.7(d), observamos que la fuerza axial en la columna AD es $Q_{AD} = 12 \text{ kN} \uparrow$. Aplicando $\sum F_y = 0$ al cuerpo libre de la columna AD , obtenemos la fuerza axial en el extremo inferior A de la columna como $Q_{AD} = 12 \text{ kN} \downarrow$. Por lo tanto, la columna AD está sujeta a una fuerza axial de tensión de 12 kN . Las fuerzas axiales de las columnas restantes BE y CF se calculan de manera similar considerando el equilibrio de los nodos E y F , respectivamente. Las fuerzas axiales obtenidas de esta manera se muestran en la Fig. 12.7(e). **Respuesta**

Reacciones. Las fuerzas y momentos en los extremos inferiores de las columnas AD , BE y CF representan las reacciones en los apoyos empotrados A , B y C , respectivamente, como se muestra en la Fig. 12.7(f). **Respuesta**

Comprobación de cálculos. Para comprobar nuestros cálculos, aplicamos las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre del marco completo (Fig. 12.7(f)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_X &= 0 & 60 - 15 - 30 - 15 &= 0 & \text{Comprobación} \\ + \uparrow \sum F_Y &= 0 & -12 + 12 &= 0 & \text{Comprobación} \\ + \zeta \sum M_C &= 0 & -60(8) + 12(20) + 60 + 120 + 60 &= 0 & \text{Comprobación} \end{aligned}$$

Ejemplo 12.3

Determine de manera aproximada las fuerzas, los cortantes y los momentos flexionantes del marco mostrado en la Fig. 12.8(a) usando el método del portal.

Solución

Marco simplificado. El marco simplificado para el análisis aproximado se obtiene insertando una articulación interna a la mitad de los elementos del marco en la Fig. 12.8(b).

Cortante en columnas. Para calcular el cortante del segundo nivel del marco, pasamos una sección imaginaria aa a través de las columnas DG , EH y FI justo arriba del nivel de piso, como se muestra en la Fig. 12.8(b). El diagrama de cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección se muestra en la Fig. 12.8(c). Tenga en cuenta que la cortante en la columna interior EH se ha supuesto como el doble del cortante de las columnas exteriores DG y FI . Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$, obtenemos (ver la Fig. 12.8(c))

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad 10 - S_2 - 2S_2 - S_2 = 0 \quad S_2 = 2.5 \text{ k}$$

Por lo tanto, las fuerzas cortantes en los extremos inferiores de las columnas del segundo nivel son

$$S_{DG} = S_{FI} = S_2 = 2.5 \text{ k} \quad S_{EH} = 2S_2 = 5 \text{ k} \leftarrow$$

De manera similar, empleando la sección bb (Fig. 12.8(b)), determinamos las fuerzas cortantes en los extremos inferiores de las columnas del primer piso AB , BE , y CF como (ver Fig. 12.8(d)):

$$S_{AD} = S_{CF} = S_1 = 7.5 \text{ k} \quad S_{BE} = 2S_1 = 15 \text{ k} \leftarrow$$

Las fuerzas cortantes en los extremos superiores de las columnas se determinan aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ al cuerpo libre de cada columna. Por ejemplo, del diagrama de cuerpo libre de la columna DG mostrada en la Fig. 12.8(e), podemos ver que para satisfacer $\sum F_x = 0$, la fuerza cortante en el extremo superior, S_{GD} , debe actuar a la derecha con una magnitud de 2.5 k. Por lo tanto, $S_{GD} = 2.5 \text{ k} \rightarrow$. Las fuerzas cortantes en los extremos superiores de las columnas restantes se obtienen de manera similar y se muestran en la Fig. 12.8(f), la cual ilustra los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos y nodos del marco.

Momentos en columnas. Conocidos los cortantes en las columnas, podemos calcular los momentos en los extremos de la columna multiplicando los cortantes de las columnas por la mitad de su altura. Por ejemplo, dado que la columna DG (ver Fig. 12.8(e)) es de 12 ft de alto y tiene cortantes en los extremos de 2.5 k, sus momentos en los extremos son

$$M_{DG} = M_{GD} = 2.5 \left(\frac{12}{2} \right) = 15 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Tenga en cuenta que los momentos del extremo, M_{DG} y M_{GD} , son contrarios a las manecillas del reloj, es decir, opuestos a los momentos del cortante de 2.5 kN en los extremos alrededor de la articulación interna a la mitad de la columna. Los momentos en los extremos de las columnas restantes del marco se calculan de manera similar y se muestran en la Fig. 12.8(f).

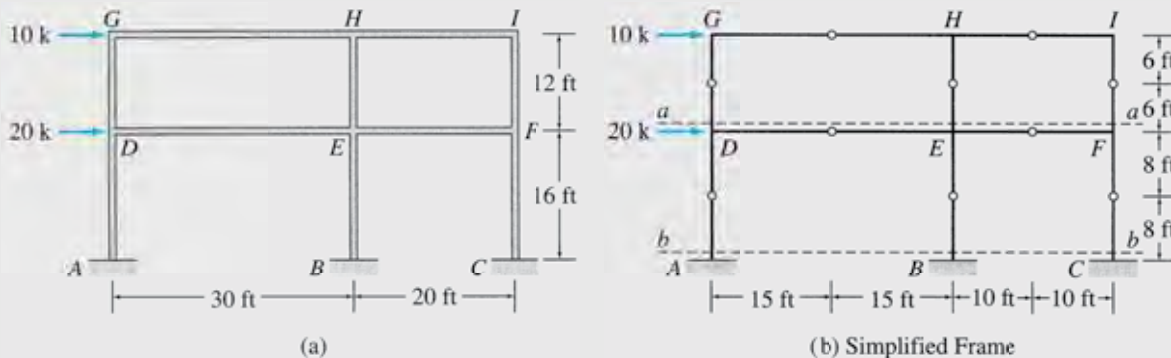
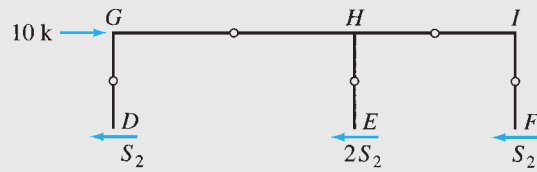
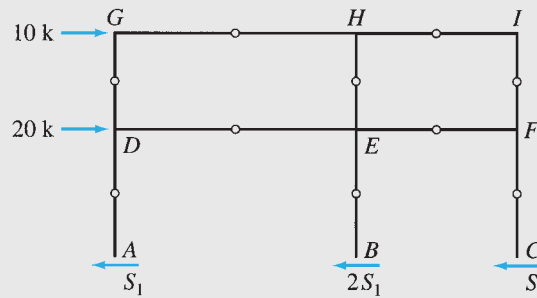


FIG. 12.8

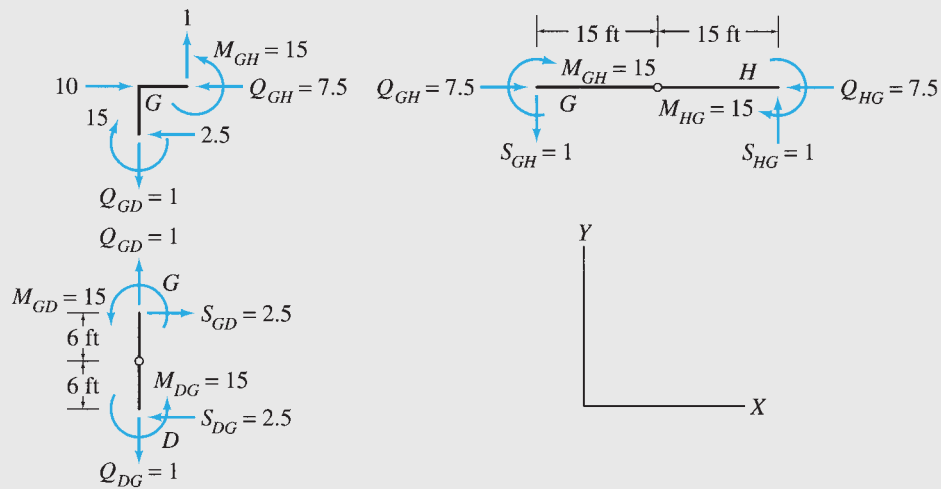
continúa



(c) Section *aa*



(d) Section *bb*



(e)

FIG. 12.8 (cont.)

continúa

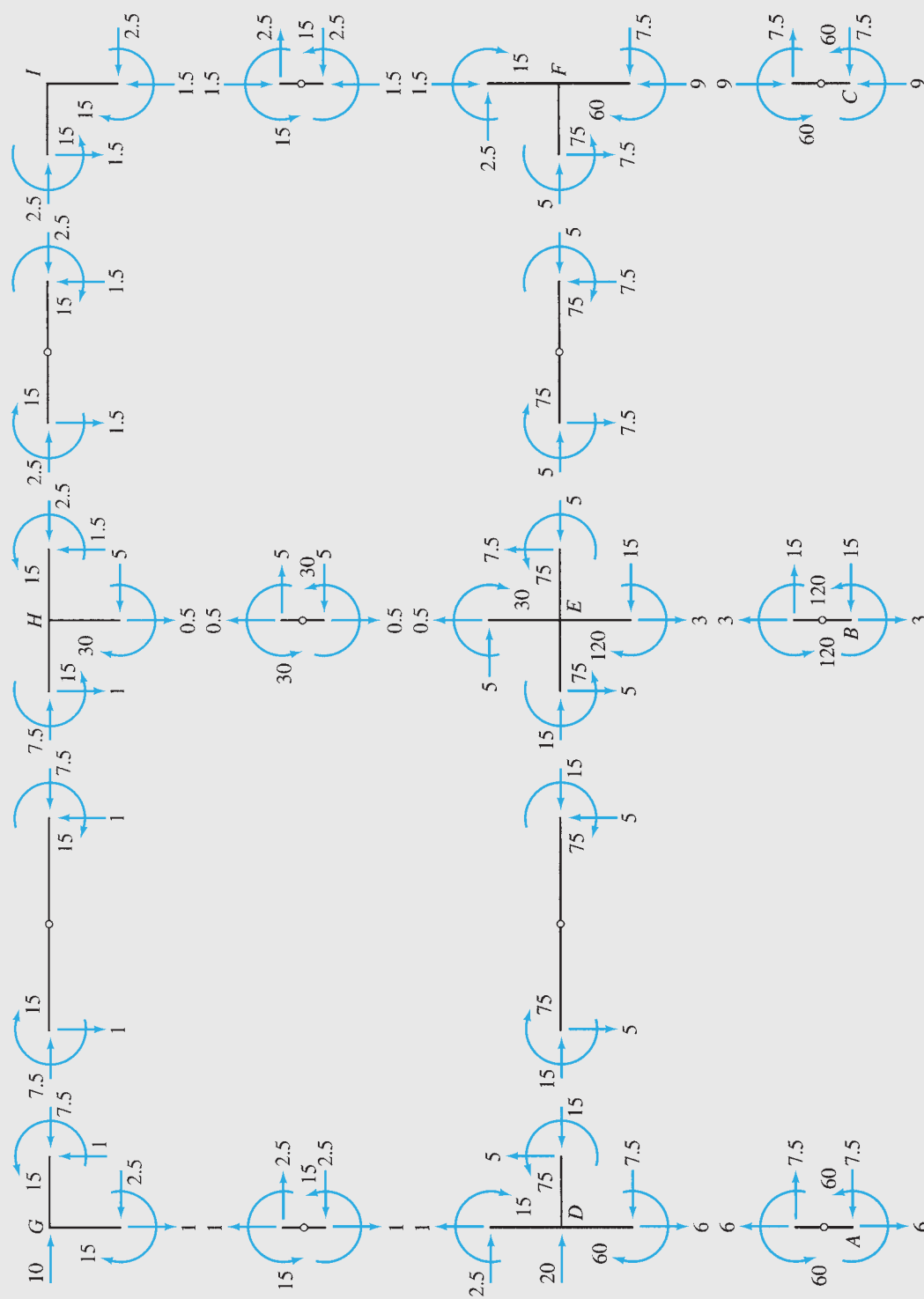


FIG. 12.8 (cont.)

continúa

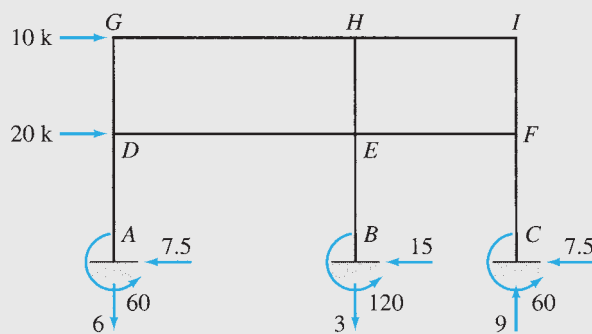


FIG. 12.8 (cont.)

(g) Reacciones en los apoyos

Fuerzas axiales, momentos y cortantes en la viga. Empezamos el cálculo de las acciones en el extremo de la viga en el nodo G superior de la izquierda. El cortante de la columna S_{GD} y el momento M_{GD} calculados previamente se aplican al cuerpo libre del nodo G en dirección opuesta de acuerdo con la tercera ley de Newton, como se muestra en la Fig. 12.8(e). Sumando las fuerzas en la dirección horizontal, obtenemos la fuerza axial de la viga $Q_{GH} = 7.5 \text{ k} \leftarrow$ en el nodo G . Tenga en cuenta que Q_{GH} debe actuar en dirección opuesta —es decir, a la derecha— al extremo D de la viga DE . Del diagrama de cuerpo libre del nodo G (Fig. 12.8(e)), podemos ver que para satisfacer la ecuación de equilibrio de momento $\sum M = 0$, el momento del extremo de la viga M_{GH} debe ser igual y opuesto al momento del extremo de la columna de $15 \text{ k} - \text{ft}$. Por lo tanto, $M_{GH} = 15 \text{ k} - \text{ft}$, con la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj en el nodo G pero con dirección de las manecillas del reloj en el extremo G de la viga GH .

Para determinar el cortante S_{GH} en la viga, consideramos el momento de equilibrio a la mitad de la izquierda de la viga GH . Del cuerpo libre de la viga DE en la Fig. 12.8(e), podemos ver que la fuerza cortante S_{GH} debe actuar hacia abajo con la magnitud de $M_{GH} / (L/2)$ de modo que pueda desarrollar un momento en sentido contrario a las manecillas del reloj de magnitud M_{GH} alrededor de la articulación interna para equilibrar el momento M_{GH} en el extremo sentido de las manecillas. Por lo tanto,

$$S_{GH} = \frac{M_{GH}}{(L/2)} = \frac{15}{(30/2)} = 1 \text{ k} \downarrow$$

La fuerza axial, el cortante y el momento flexionante en el extremo derecho H se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la viga GH (Fig. 12.7(e)). Aplicando $\sum F_x = 0$, obtenemos $Q_{HG} = 7.5 \text{ k} \leftarrow$. De $\sum F_y = 0$, obtenemos $S_{HG} = 1 \text{ k} \uparrow$, y calculamos M_{HG} , aplicamos la ecuación de equilibrio:

$$+\zeta \sum M_G = 0 \quad -15 - M_{HG} + 1(30) = 0 \quad M_{HG} = 15 \text{ k} - \text{ft} \curvearrowright$$

Tenga en cuenta que los momentos en el extremo de la viga M_{GH} y M_{HG} son iguales de magnitud y tienen la misma dirección.

Después, calculamos las acciones finales para la viga HI . Primero aplicamos las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M = 0$ al cuerpo libre en el nodo H (Fig. 12.8(f)) para obtener la fuerza axial $Q_{HI} = 2.5 \text{ k} \rightarrow$ y el momento $M_{HI} = 15 \text{ k} - \text{ft} \curvearrowright$ en el extremo izquierdo H de la viga. Podemos obtener el cortante $S_{HI} = 1.5 \text{ k} \downarrow$ dividiendo el momento M_{HI} entre la mitad de la longitud de la viga, y aplicamos las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la viga para obtener $Q_{IH} = 2.5 \text{ k} \leftarrow$, $S_{IH} = 1.5 \text{ k} \uparrow$, y $M_{IH} = 15 \text{ k} - \text{ft} \curvearrowright$ en el extremo derecho I de la viga (ver Fig. 12.8(f)).

Debido a que todos los momentos y las fuerzas horizontales actuantes en la parte superior derecha del nodo I ya se conocen, podemos verificar nuestros cálculos, realizados hasta ahora aplicando las dos ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M = 0$ al cuerpo libre de este nodo. Del diagrama de cuerpo libre del nodo F mostrado en la Fig. 12.8(f), es obvio que estas ecuaciones de equilibrio se satisfacen.

Las acciones finales para las vigas DE y EF del primer entrepiso se calculan de manera similar, empezando por el nodo D de la izquierda y continuando hacia la derecha. Las acciones finales de la viga obtenida de esta manera se muestran en la Fig. 12.8(f).

Fuerzas axiales en la columna. Empezamos el cálculo de las fuerzas axiales en las columnas en la parte superior izquierda del nodo G . Del diagrama de cuerpo libre del nodo G mostrado en la Fig. 12.8(e), observamos que la fuerza axial en la columna DG debe ser igual y opuesta al cortante de la viga GH . Así, la fuerza axial en el extremo superior G de la columna DG es $Q_{GD} = 1 \text{ k} \uparrow$. Aplicando $\sum F_y = 0$ al cuerpo libre de la columna DG , obtenemos la fuerza axial en el extremo inferior de la columna que es $Q_{DG} = 1 \text{ k} \downarrow$. Por lo tanto, la columna DG está sujeta a una fuerza axial de tensión de 1 k . Las fuerzas axiales de las columnas restantes del segundo piso EH y FI se calculan de manera similar considerando el equilibrio de los

continúa

nodos H e I , respectivamente; después de eso, las fuerzas axiales de las columnas del primer piso, AD , BE y CF , se calculan de las consideraciones de equilibrio de los nodos D , E , y F , respectivamente. Las fuerzas axiales obtenidas de esta manera se muestran en la Fig. 12.8(f).

Respuesta

Reacciones. Las fuerzas y momentos en los extremos inferiores de las columnas del entrepiso de planta baja AD , BE y CF , representan las reacciones en los apoyos empotrados A , B y C , respectivamente, como se muestran en la Fig. 12.8(g).

Respuesta

Comprobación de cálculos. Para comprobar los cálculos, aplicamos las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre del marco completo (Fig. 12.8(g)):

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad 10 + 20 - 7.5 - 15 - 7.5 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad -6 - 3 + 9 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_C = 0 \quad -10(28) - 20(16) + 60 + 6(50) + 120 + 3(20) + 60 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

12.4 Análisis de cargas laterales—Método del cantiliver

El método del cantiliver fue desarrollado inicialmente por A. C. Wilson en 1908 y generalmente se considera apropiado para el análisis aproximado de marcos de edificios de altura relativa. El método del cantiliver se basa en la suposición de que bajo cargas laterales los marcos de un edificio se comportan como vigas en cantiliver, como se muestra en la Fig. 12.9. Recuerde (*de mecánica de materiales*) que los esfuerzos axiales en la sección transversal de la viga en cantiliver sujeta a cargas laterales varía linealmente con la distancia de eje centroidal (superficie neutra), de modo que las fibras longitudinales de la viga en el lado cóncavo de la superficie neutra están en compresión, mientras que aquellas en el lado convexo están en tensión. En el método del cantiliver, la distribución de los esfuerzos axiales entre las columnas de un marco a la mitad de las columnas se supone para ser análogos con la distribución de esfuerzos axiales entre las fibras longitudinales de una viga en cantiliver. En otras palabras, se asume que los esfuerzos axiales a la mitad de la altura de cada columna es linealmente proporcional a la distancia de la columna del centroide de las áreas de todas las columnas en ese piso. Si después asumimos que las áreas de la sección transversal de todas las columnas en cada entrepiso del marco son iguales, entonces la fuerza axial en cada columna será linealmente proporcional de la distancia de la columna del centroide de todas las columnas en dicho piso. Cuando las cargas laterales actúan en el marco hacia la derecha, como se muestra en la Fig. 12.9, entonces las columnas a la derecha del eje centroidal estarán en compresión, mientras que aquellas del lado izquierdo estarán en tensión y viceversa.

Además de las suposiciones anteriores, el método del cantiliver establece las mismas suposiciones con relación a los puntos de inflexión usadas en el método del portal. Por lo tanto, estas suposiciones hechas en el método del cantiliver se pueden establecer como siguen:

1. Un punto de inflexión se localiza en la mitad de cada elemento del marco.
2. En cada piso del marco, las fuerzas axiales en las columnas son linealmente proporcionales a sus distancias a partir del centro de las áreas de la sección transversal de todas las columnas en dicho piso.

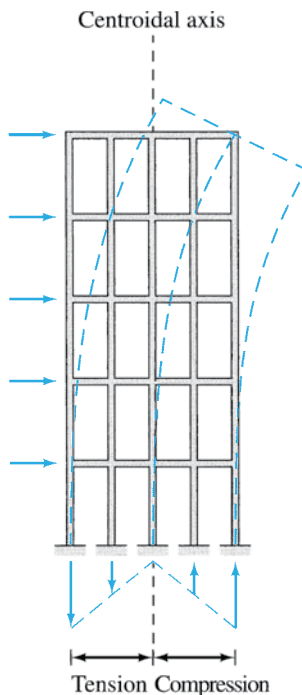


FIG. 12.9

Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento paso a paso se puede usar para el análisis aproximado de marcos de edificios por el método del cantiliver.

1. Dibuje un boceto del marco simplificado obtenido mediante la inserción de una articulación interna a la mitad de cada elemento del marco.
2. Determine las fuerzas axiales. Para cada entrepiso del marco:
 - a. Pase una sección horizontal a través de las articulaciones internas a la mitad de la altura de las columnas, cortando el marco en dos partes.
 - b. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección. Debido a que la sección pasa a través de las columnas en las articulaciones internas, solo los cortantes y las fuerzas axiales (sin momentos internos) actúan en el cuerpo libre en los puntos donde las columnas se cortaron.
 - c. Establezca el centroide de todas las columnas en el entrepiso en consideración.
 - d. Asumiendo que las fuerzas axiales en las columnas son proporcionales a sus distancias a partir del centroide, determine las fuerzas axiales aplicando la ecuación de momento $\sum M = 0$ al cuerpo libre del marco arriba de la sección. Para eliminar las incógnitas, los momentos deberán sumarse alrededor de las articulaciones internas en la mitad de la altura de las columnas por las cuales han pasado las secciones.
3. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de todos los elementos y nodos del marco mostrando las cargas externas y las fuerzas axiales calculadas en el paso anterior.
4. Determine los cortantes y los momentos en las vigas. Para cada entrepiso del marco, los cortantes y los momentos en los extremos de las vigas se calculan empezando por el nodo más lejano de la izquierda y se continua hacia la derecha (o viceversa), como sigue:
 - a. Aplique la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ al cuerpo libre del nodo en consideración para calcular el cortante en el extremo izquierdo de la viga que está a la derecha del nodo.
 - b. Considerando el cuerpo libre de la viga, determine el momento en el extremo izquierdo de la viga multiplicando el cortante de esta por la mitad de su longitud, es decir,

$$M_g = S_g \left(\frac{L}{2} \right) \quad (12.3)$$

La Ec. (12.3) se basa en la condición de que el momento flexionante a la mitad de la viga es cero.

- c. Aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$ al cuerpo libre de la viga, determine el cortante y el momento, respectivamente, en el extremo derecho.
- d. Seleccione el nodo a la derecha de la viga considerada previamente, y repita los pasos del 4(a) al 4(c) hasta que los cortantes y los momentos en todas las vigas del entrepiso hayan sido determinados. Como la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ para el nodo del extremo derecho no se ha utilizado hasta ahora, se puede usar para comprobar los cálculos.

- Determine los momentos y los cortantes en la columna. Empezando por el piso superior, aplique la ecuación de equilibrio $\sum M = 0$ al cuerpo libre en cada nodo del piso para determinar el momento en el extremo superior de la columna perteneciente al nodo. Después, para cada columna del entrepiso, calcule el cortante en el extremo superior de la columna dividiendo el momento de la columna entre la mitad de la altura de la columna; es decir,

$$S_C = \frac{M_C}{(h/2)} \quad (12.4)$$

Determine el cortante y el momento en el extremo inferior de la columna aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M = 0$, respectivamente, al cuerpo libre de la columna. Repita este procedimiento sucesivamente para cada entrepiso, hasta que los cortantes y los momentos flexionantes de todas las columnas del marco hayan sido determinados.

- Determine la fuerza axial en las vigas. Para cada entrepiso del marco, determine las fuerzas axiales de la viga empezando por el nodo izquierdo más lejano y aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ sucesivamente al cuerpo libre de cada nodo del entrepiso.
- Teniendo en cuenta que las fuerzas y momentos en los extremos inferiores de las columnas del piso de planta baja representan las reacciones en los apoyos, use las ecuaciones de equilibrio en el marco completo para verificar los cálculos. Si el análisis se ha realizado correctamente, entonces las ecuaciones de equilibrio se deben satisfacer.

Ejemplo 12.4

Determine de manera aproximada las fuerzas, cortantes y momentos flexionantes del marco mostrado en la Fig. 12.10(a) usando el método del cantiliver.

Solución

Este marco fue analizado por el método del portal en el Ejemplo 12.3.

Marco simplificado. El marco simplificado, obtenido mediante la inserción de articulaciones internas a la mitad de los elementos del marco dado, se muestra en la Fig. 12.10(b).

Cortante en columnas. Para calcular el cortante del segundo nivel del marco, pasamos una sección imaginaria *aa* a través de las columnas *DG*, *EH* y *FI* como se muestra en la Fig. 12.10(b). El diagrama de cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección se muestra en la Fig. 12.10(c). Debido a que la sección corta las columnas en las articulaciones internas, solo actúan cortantes internos y fuerzas axiales (no hay momentos) en el cuerpo libre en los puntos donde las columnas han sido cortadas. Suponiendo que las áreas de las secciones transversales de las columnas son iguales, podemos determinar la ubicación del centroide de las tres columnas a la izquierda de la columna *DG* usando esta relación

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{A(0) + A(30) + A(50)}{3A} = 26.67 \text{ ft}$$

Las cargas laterales actúan en el marco hacia la derecha, así que la carga axial de la columna *DG*, la cual está a la izquierda del centroide, debe estar en tensión, mientras que las fuerzas axiales de las columnas *EH* y *FI*, ubicadas a la derecha del centroide, deben estar en compresión, como se muestra en la Fig. 12.10(c). Además, y debido a que las cargas axiales en

continúa

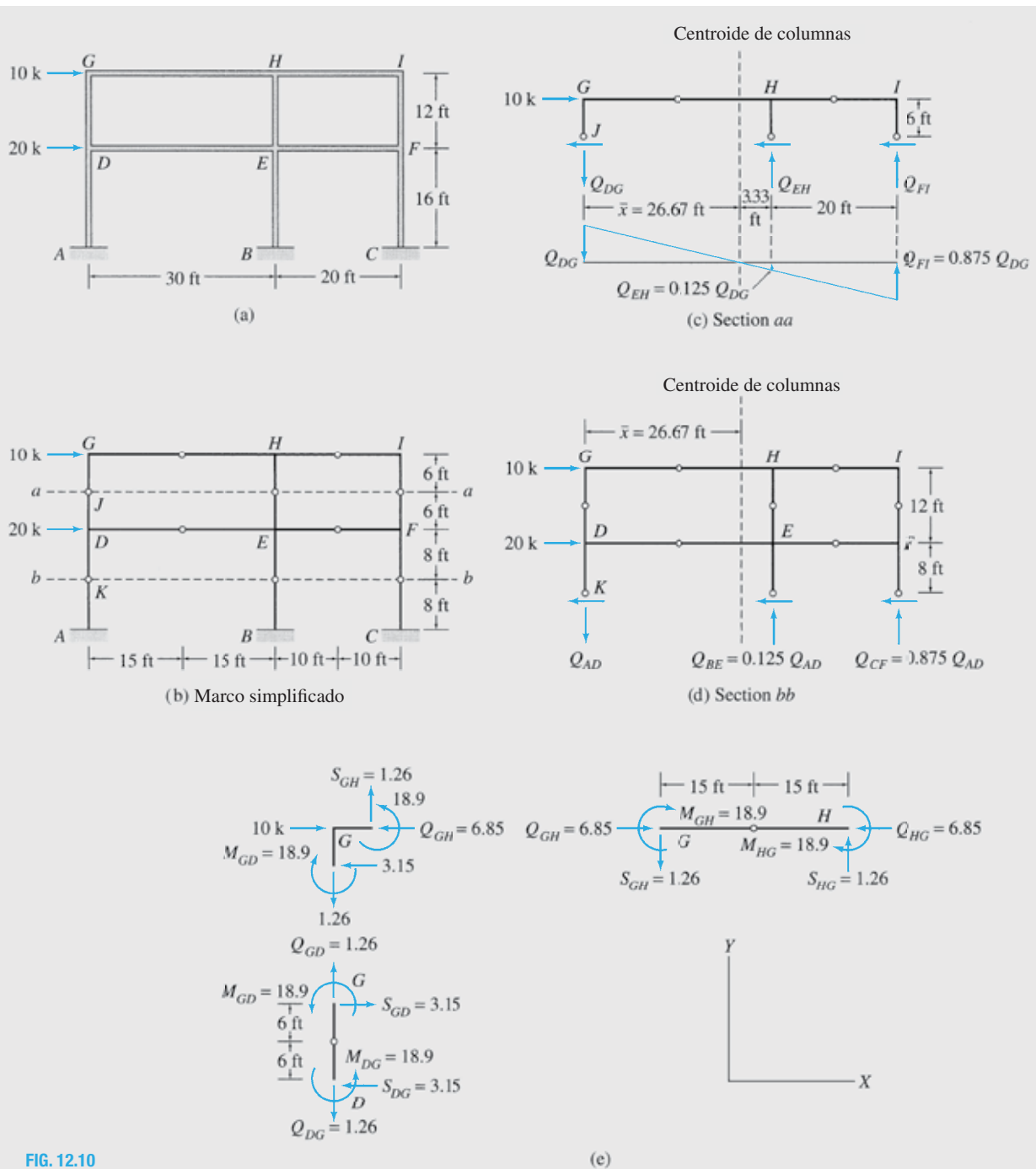
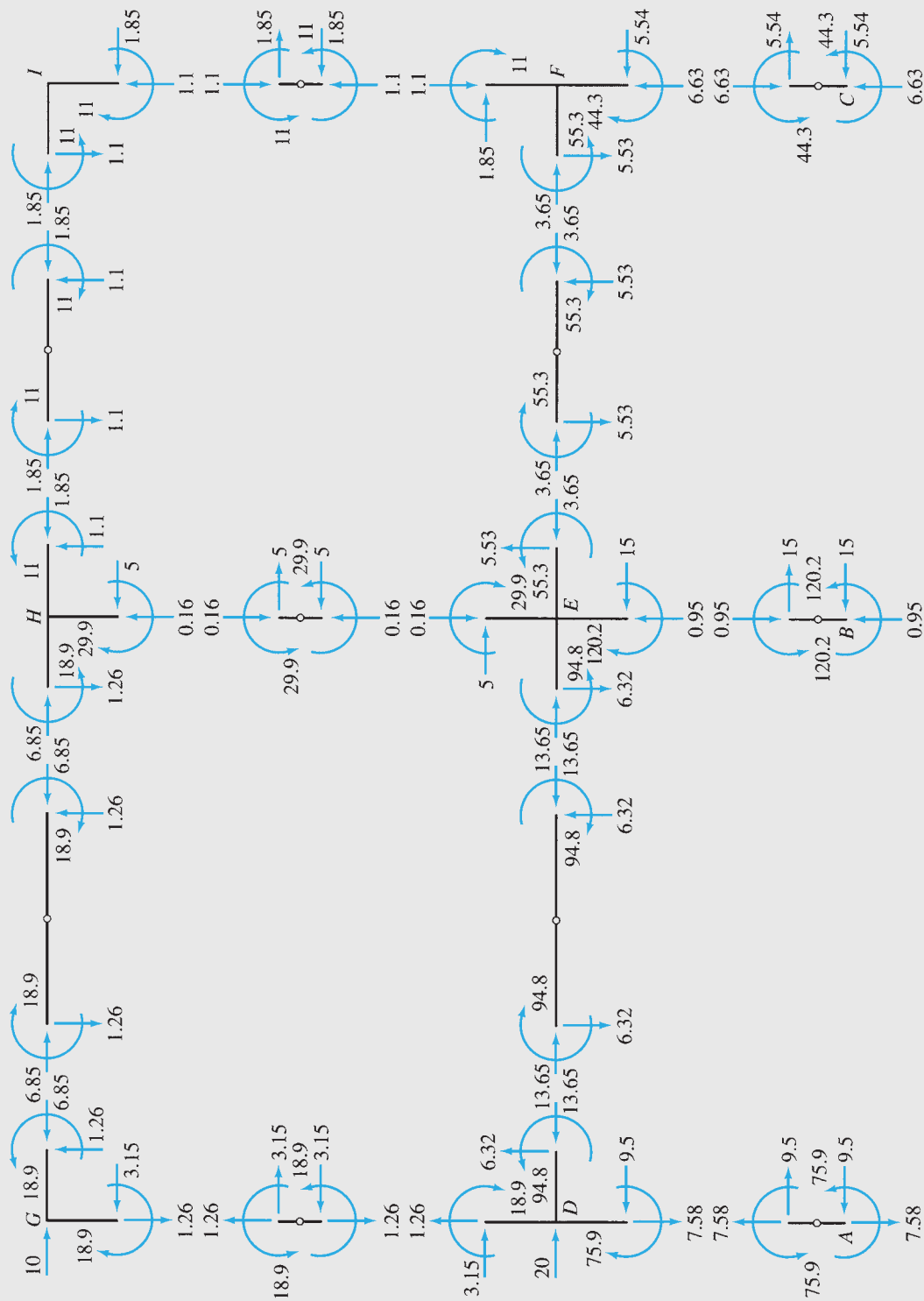


FIG. 12.10

continúa



(f) Fuerzas y momentos en los extremos

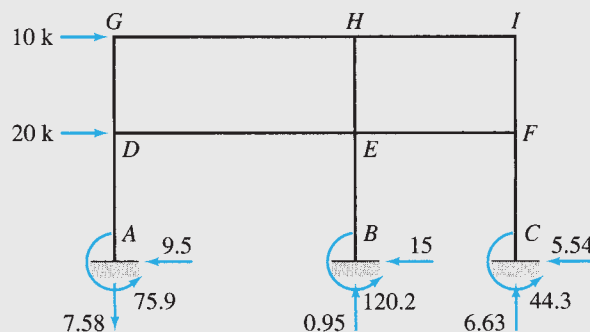


FIG. 12.10 (cont.)

(g) Reacciones en los apoyos

las columnas se supusieron linealmente proporcionales a sus distancias a partir del centroide, las relaciones entre ellas se pueden establecer por triángulos semejantes mostrados en la Fig. 12.10(c); es decir,

$$Q_{EH} = \frac{3.33}{26.67} Q_{DG} = 0.125 Q_{DG} \quad (1)$$

$$Q_{FI} = \frac{23.33}{26.67} Q_{DG} = 0.875 Q_{DG} \quad (2)$$

Sumando los momentos alrededor de la articulación interna J , se tiene

$$+\zeta \sum M_J = 0 \quad -10(6) + Q_{EH}(30) + Q_{FI}(50) = 0$$

Sustituyendo las Ecs. (1) y (2) en la ecuación anterior y resolviendo para Q_{DG} , obtenemos

$$-60 + (0.125 Q_{DG})(30) + (0.875 Q_{DG})(50) = 0$$

$$Q_{DG} = 1.26 \text{ k}$$

Por lo tanto, de las Ecs. (1) y (2)

$$Q_{EH} = 0.125(1.26) = 0.16 \text{ k}$$

$$Q_{FI} = 0.875(1.26) = 1.1 \text{ k}$$

Las fuerzas axiales en las columnas del primer entrespacio se pueden determinar de manera similar, empleando la sección bb mostrada en la Fig. 12.10(b). El diagrama de cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección se muestra en la Fig. 10.12(d). La disposición de las columnas en ambos pisos del marco es la misma, de modo que los centroides —además de las relaciones entre las fuerzas axiales— de las columnas de los dos entrespacios son los mismos, por lo tanto,

$$Q_{BE} = 0.125 Q_{AD} \quad (3)$$

$$Q_{CF} = 0.875 Q_{AD} \quad (4)$$

Sumando los momentos alrededor de la articulación interna K , se tiene

$$+\zeta \sum M_K = 0 \quad -10(20) - 20(8) + Q_{BE}(30) + Q_{CF}(50) = 0$$

Sustituyendo las Ecs. (3) y (4), obtenemos

$$-360 + (0.125 Q_{AD})(30) + (0.875 Q_{AD})(50) = 0$$

$$Q_{AD} = 7.58 \text{ k}$$

Por lo tanto,

$$Q_{BE} = 0.95 \text{ k}$$

$$Q_{CF} = 6.63 \text{ k}$$

continúa

Las fuerzas axiales en las columnas se muestran en la Fig. 12.10(f), la cual ilustra los diagramas de cuerpo libre de todos los elementos y nodos del marco.

Cortantes y momentos en la viga. Conociendo las fuerzas axiales en las columnas, se pueden determinar los cortantes en la viga considerando el equilibrio en la dirección vertical de los nodos. Empezando con el nodo superior izquierdo G , aplicamos la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ al cuerpo libre del nodo (ver Fig. 12.10(e)) para obtener el cortante $S_{GH} = 1.26 \text{ k} \downarrow$ en el extremo izquierdo de la viga GH . El momento en el extremo izquierdo se determina multiplicando el cortante por la mitad de la longitud de la viga, es decir,

$$M_{GH} = 1.26 (15) = 18.9 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

El cortante y el momento en el extremo derecho, H , se pueden calcular aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$, respectivamente, al cuerpo libre de la viga GH (Fig. 12.10(e)). Aplicando estas ecuaciones, obtenemos $S_{GH} = 1.26 \text{ k} \uparrow$ y $M_{HG} = 18.9 \text{ k-ft} \curvearrowleft$. Tenga en cuenta que los momentos en el extremo de la viga, M_{GH} y M_{HG} , tienen la misma magnitud y dirección.

Después, los cortantes y los momentos para la viga HI se calculan considerando el equilibrio de los nodos H y de la viga HJ (ver Fig. 12.10(f)), y la ecuación de equilibrio $\sum F_y = 0$ se aplica al cuerpo libre del nodo de la derecha I para comprobar los cálculos realizados hasta ahora.

Los cortantes y los momentos en las vigas del primer piso DE y EF se calculan de manera similar empezando por el nodo D izquierdo y continuando hacia la derecha. Los cortantes y momentos de la viga obtenidos así se muestran en la Fig. 12.10(f).

Cortante y momento en columnas. Con los momentos de la viga conocidos, los momentos de la columna se pueden determinar considerando el equilibrio de momentos en los nodos. Empezando en el segundo piso y aplicando $\sum M = 0$ al cuerpo libre del nodo G (Fig. 12.10(e)), obtenemos el momento en el extremo superior de la columna DG como $M_{DG} = 18.9 \text{ k-ft} \curvearrowleft$. El cortante en el extremo superior de la columna DG se calcula dividiendo M_{DG} entre la mitad de la altura de la columna; es decir,

$$S_{GD} = \frac{18.9}{6} = 3.15 \text{ k} \rightarrow$$

Tenga en cuenta que S_{GD} debe actuar a la derecha, de modo que se pueda desarrollar un momento en sentido de las manecillas del reloj para equilibrar el momento en el extremo M_{GD} . El cortante y el momento flexionante en el extremo inferior D se determinan aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum M = 0$ al diagrama de cuerpo libre de la columna DG (ver Fig. 12.10 (e)). Después, los momentos y el cortante en el extremo de las columnas EH y FI se calculan de manera similar, enseguida se repite el procedimiento para determinar los momentos y los cortantes en las columnas del primer piso AD , BE y CF (ver Fig. 12.10(f)).

Fuerzas axiales en la viga. Empezamos con los cálculos de las fuerzas axiales de la viga en el nodo superior izquierdo G . Aplicando $\sum F_x = 0$ al diagrama de cuerpo libre del nodo G mostrado en la Fig. 12.10(e), encontramos la fuerza axial en la viga GH como 6.85 k en compresión. La fuerza axial para la viga HI se determina de manera similar considerando el equilibrio del nodo H , después de que la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ se aplica al cuerpo libre del nodo I de la derecha para comprobar los cálculos. Las fuerzas axiales de las vigas del primer piso DE y EF se determinan de las consideraciones de equilibrio de los nodos D y E , en orden. Las fuerzas axiales obtenidas así se muestran en la Fig. 12.10(f). **Respuesta**

Reacciones. Las fuerzas y los momentos en el extremo inferior de las columnas del primer piso AD , BE y CF representan las reacciones en los apoyos empotrados A , B y C , respectivamente, como se muestra en la Fig. 12.10(g). **Respuesta**

Comprobación de cálculos. Para comprobar los cálculos, aplicamos las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre del marco completo (Fig. 12.10(g)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & 10 + 20 - 9.5 - 15 - 5.54 &= -0.04 \approx 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & -7.58 + 0.95 + 6.63 &= 0 \\ + \curvearrowright \sum M_C &= 0 & -10(28) - 20(16) + 75.9 + 7.58(50) + 120.2 - 0.95(20) + 44.3 &= 0.4 \approx 0 \end{aligned}$$

Comprobación

Resumen

En este capítulo aprendimos que en el análisis aproximado de estructuras indeterminadas, se usan dos tipos de suposiciones comúnmente: (1) suposiciones acerca de la ubicación de los puntos de inflexión y (2) suposiciones acerca de la distribución de las fuerzas entre los elementos y/o reacciones. El número total de suposiciones requeridas es igual al grado de indeterminación de la estructura.

El análisis aproximado de marcos rectangulares sujetos a carga vertical se basa en las siguientes suposiciones para cada viga del marco: (1) los puntos de inflexión se localizan a un décimo del claro a partir del extremo de la viga y (2) la carga axial en la viga es cero.

Los dos métodos usados comúnmente para el análisis aproximado de marcos rectangulares sujetos a cargas laterales son: el método del portal y el método del cantiliver.

El método del portal implica hacer suposiciones acerca de que un punto de inflexión se localiza en cada elemento y que, en cada entrepiso, las columnas interiores tienen el doble de cortante que las columnas exteriores.

En el método del cantiliver, las siguientes suposiciones se realizan sobre el comportamiento del marco: el punto de inflexión se encuentra a la mitad de cada elemento y que, en cada entrepiso, las fuerzas axiales en las columnas son proporcionales linealmente a sus distancia a partir del centroide de las áreas de la sección transversal de todas las columnas en cada piso.

Problemas

Sección 12.2

12.1 al 12.5 Dibuje los diagramas de cortantes y de momentos aproximados para las vigas de los marcos mostrados en las Figs. P12.1 a la P12.5

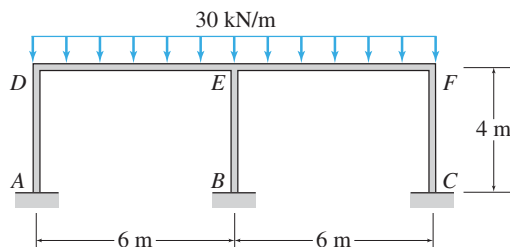


FIG. P12.1

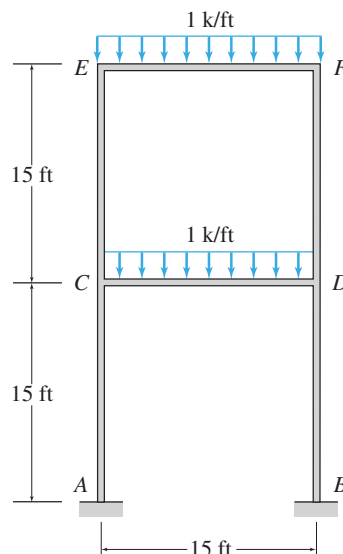


FIG. P12.2

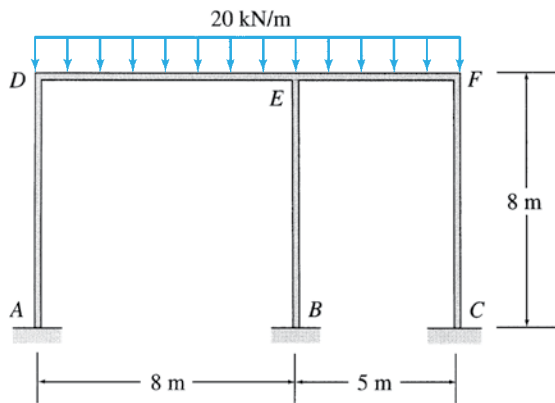


FIG. P13

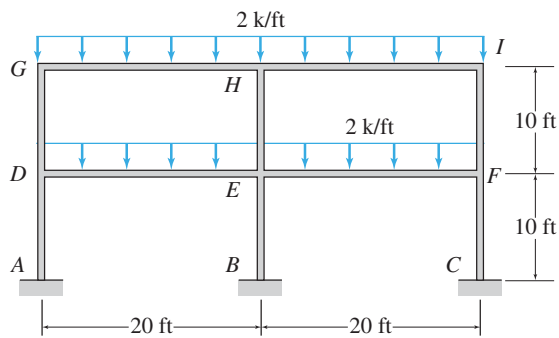


FIG. P12.4

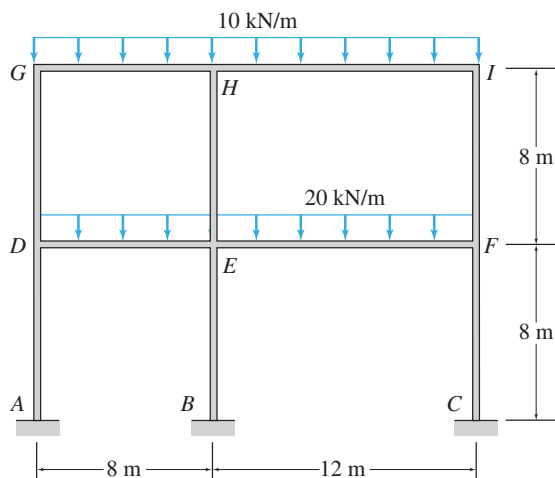


FIG. P12.15

Sección 12.3

12.6 al 12.13 Determine las fuerzas axiales, los cortantes y los momentos aproximados para todos los elementos de los marcos de las Figs. P.126 a la P12.13 usando el método del portal.

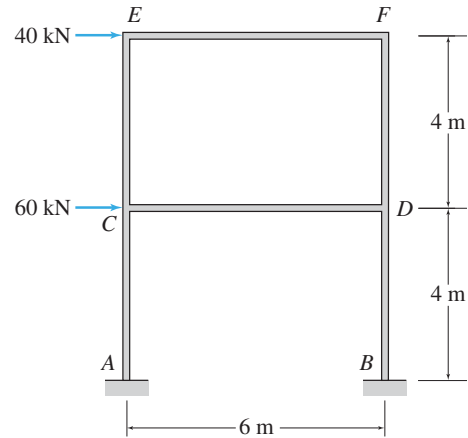


FIG. P12.6, P12.14

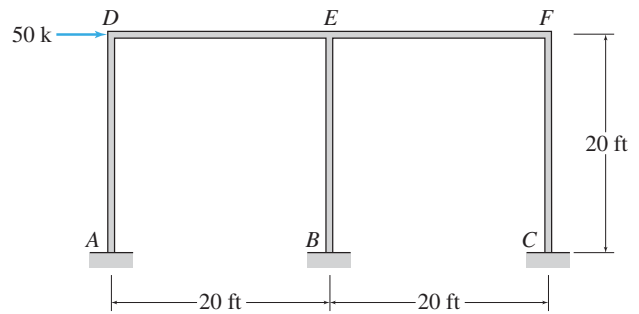


FIG. P12.7, P12.15

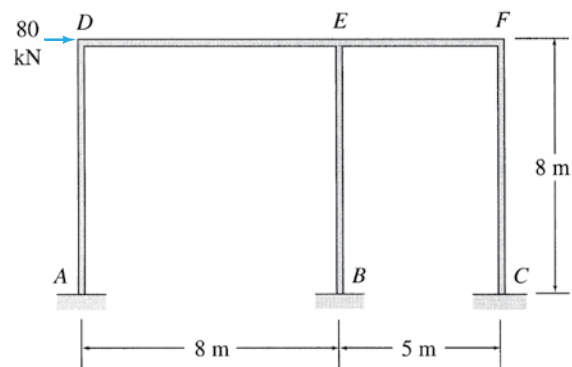


FIG. P12.8, P12.16

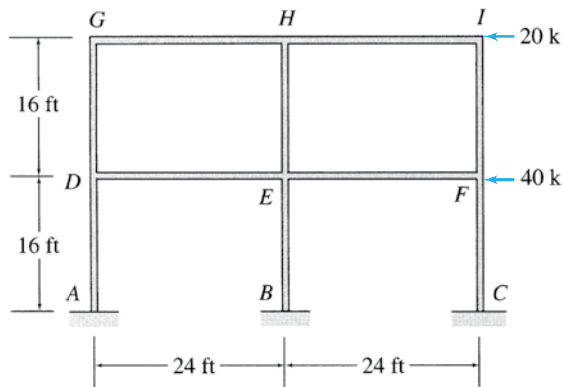


FIG. P12.9, P12.17

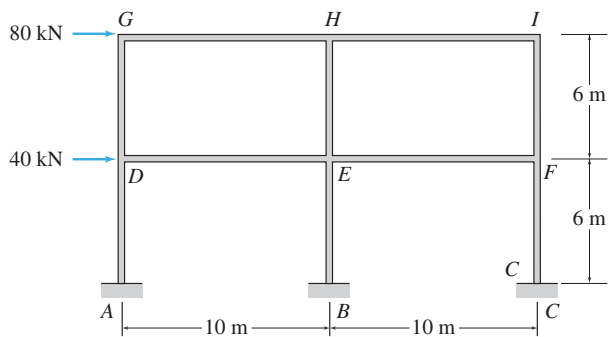


FIG. P12.10, P12.18

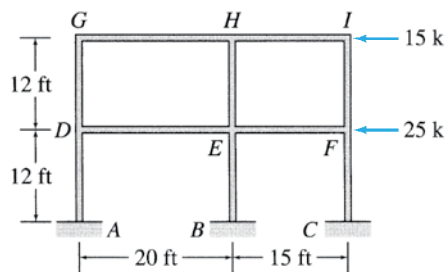


FIG. P12.11, P12.19

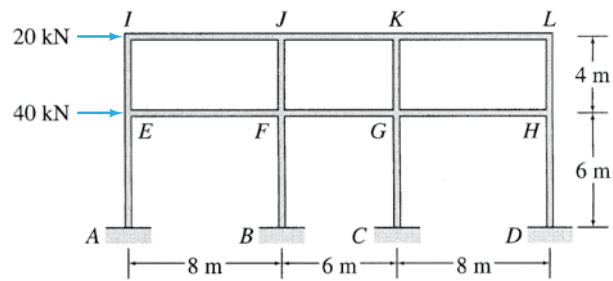


FIG. P12.12, P12.20

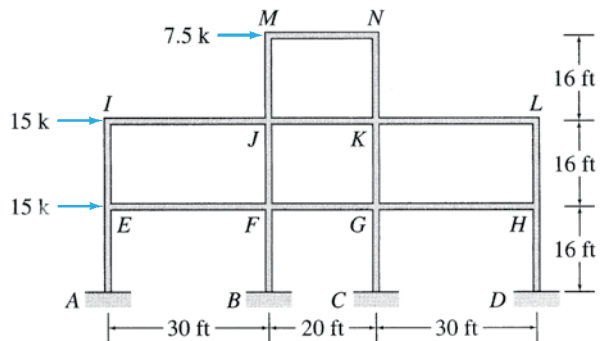


FIG. P12.13, P12.21

Sección 12.4

12.14 al 12.21 Determine las fuerzas axiales, los cortantes y los momentos aproximados para todos los elementos de los marcos de las Figs. P.126 a la P12.13 usando el método del cantiliver.



Puente de la bahía
Chesapeake
JoMo333/Shutterstock.com

13

Método de las Deformaciones Consistentes-Método de las Fuerzas

- 13.1 Estructuras con un solo grado de indeterminación
 - 13.2 Fuerzas y momentos internos como redundantes
 - 13.3 Estructuras con varios grados de indeterminación
 - 13.4 Asentamientos en los apoyos, cambios de temperatura y errores de fabricación
 - 13.5 Método del trabajo mínimo
- Resumen
Problemas

En este capítulo estudiaremos la formulación general del método de las fuerzas (flexibilidades) llamado *método de las deformaciones* para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. El método, que fue introducido por James C. Maxwell en 1864, esencialmente implica la remoción de las restricciones necesarias de la estructura indeterminada para convertirla en estáticamente determinada. Esta estructura determinada, la cual debe ser estáticamente (y geoméricamente) estable se conoce como *estructura primaria*. Al exceso de restricciones removidas de la estructura indeterminada para convertirla en estructura primaria determinada se le llama *restricciones redundantes*, y las reacciones o fuerzas internas asociadas con estas restricciones se denominan *redundantes*. Las redundantes entonces se aplican como cargas desconocidas en la estructura primaria, y sus valores se determinan resolviendo las ecuaciones de compatibilidad basadas en la condición de que las deformaciones de la estructura primaria causadas por la combinación de efectos de las redundantes y las cargas externas dadas deben ser las mismas que las deformaciones de la estructura indeterminada original.

Debido a que las variables independientes o incógnitas en el método de las deformaciones consistentes son fuerzas redundantes (y/o momentos), los cuales deben determinarse antes de que otras características de respuesta puedan evaluarse (por ejemplo, desplazamientos), el método es clasificado como *método de las fuerzas*.

Una formulación alternativa del método de las fuerzas, llamado *método del trabajo mínimo*, también se analiza en este capítulo. Este método alternativo, basado en el segundo teorema de Castigliano, es esencialmente similar al método de las deformaciones consistentes, excepto que las ecuaciones de compatibilidad en el método del trabajo mínimo se establecen minimizan-

do la energía de deformación de la estructura expresada en términos de las incógnitas redundantes por la superposición de una deflexión, como en el método de las deformaciones consistentes.

En este capítulo, primero desarrollaremos el análisis para vigas, marcos y armaduras con un solo grado de indeterminación utilizando el método de las deformaciones consistentes. Después aplicaremos este método a las estructuras con varios grados de indeterminación. Posteriormente consideraremos el análisis de los efectos de los asentamientos en los apoyos, los cambios de temperatura y los errores de fabricación, y, finalmente, presentaremos el método del trabajo mínimo.

13.1 Estructuras con un solo grado de indeterminación

Para ilustrar el concepto básico del método de las deformaciones consistentes, considere la viga sujeta a una carga concentrada P que se muestra en la Fig. 13.1(a). Debido a que la viga está soportada por cuatro reacciones A_x , A_y , M_A y C_y , las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$) no son suficientes para determinar todas las reacciones. Por lo tanto, la viga es estáticamente indeterminada. El grado de indeterminación de la viga es igual el número de incógnitas menos el número de ecuaciones de equilibrio —es decir, $4 - 3 = 1$ —, el cual indica que la viga tiene una reacción de más, o *redundante*, que las necesarias para la estabilidad estática. Así, si podemos determinar una de las cuatro reacciones con las ecuaciones de compatibilidad basadas en la geometría de la deformación de la viga, las tres reacciones restantes se pueden obtener de las tres ecuaciones de equilibrio.

Para establecer las ecuaciones de compatibilidad, seleccionamos una de las reacciones de la viga para que sea la redundante. Suponga que seleccionamos la reacción vertical C_y ejercida por el apoyo C para que sea la redundante. De la Fig. 13.1(a), podemos ver que si el patín de apoyo C se elimina de la viga, esta se convertirá en determinada mientras permanece estáticamente estable debido a que el apoyo empotrado en A puede prevenirla de la translación y/o rotación como cuerpo rígido. Por lo tanto, el patín en C no es necesario para la estabilidad estática de la viga, y su reacción C_y puede designarse como redundante. Tenga en cuenta, sin embargo, que la presencia del apoyo C impone la condición de compatibilidad en la configuración deformada de la viga por lo que la deflexión en C debe ser cero (Fig. 13.1(a)); es decir,

$$\Delta_C = 0 \quad (13.1)$$

Para determinar la redundante C_y usando esta condición de compatibilidad, eliminamos el patín en C de la viga indeterminada para convertirla en una viga en cantiliver determinada, como se ilustra en la Fig. 13.1(b). Esta viga determinada se conoce como *viga primaria*. La redundante C_y entonces se aplica como carga incógnita o desconocida sobre la viga primaria, junto con la carga externa $P = 32$ k, como se muestra en la Fig. 13.1(b). La redundante C_y se puede determinar usando el razonamiento de que si el valor de la carga desconocida C_y que actúa en la viga primaria (Fig. 13.1(b)) es igual que la reacción C_y ejercida en la viga indeterminada por el patín del apoyo C (Fig. 13.1(a)), entonces la deflexión en el extremo libre C de la viga primaria debida a la combinación de efectos de la carga externa P y de la redundante C_y debe

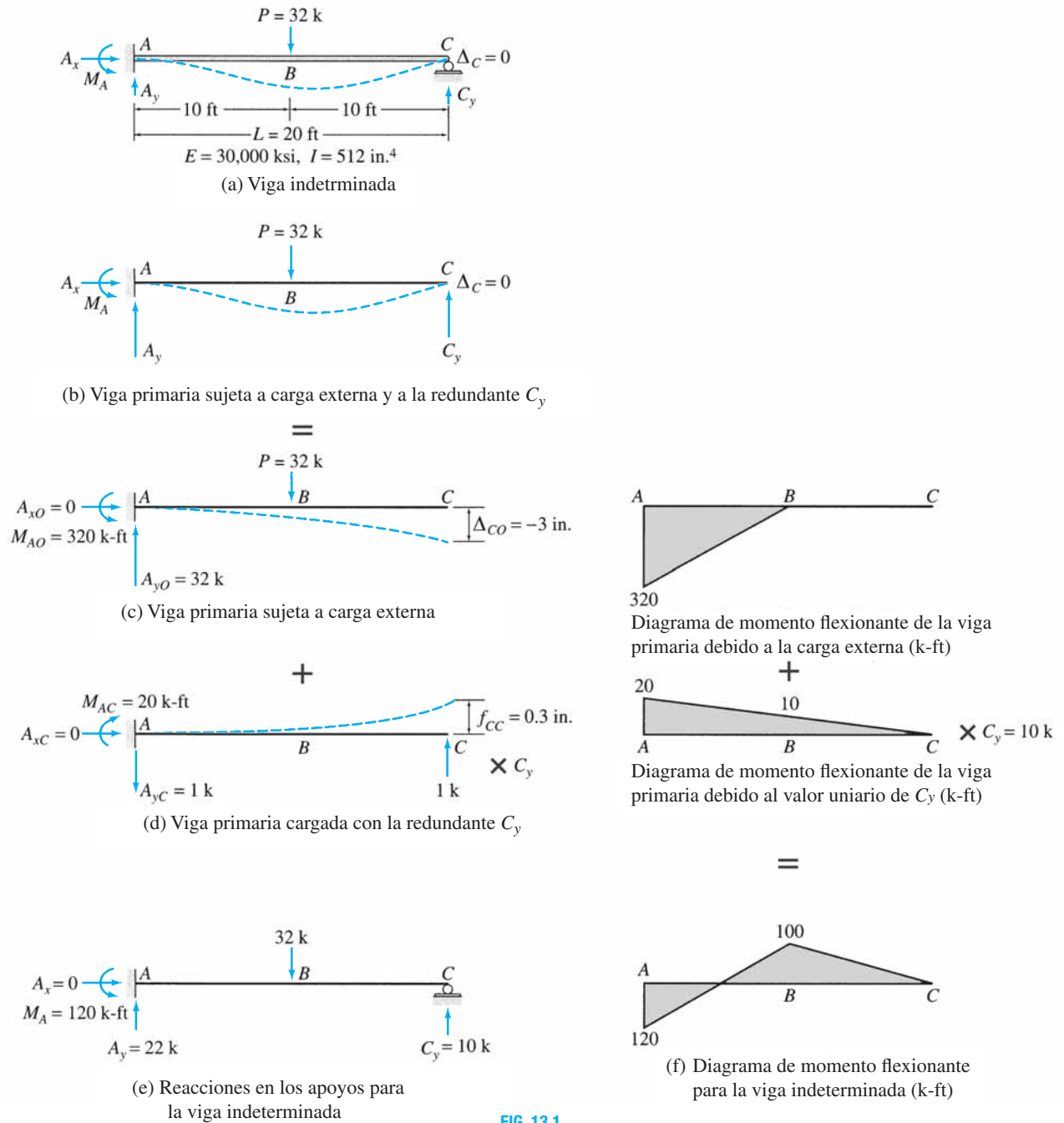


FIG. 13.1

ser igual a la deflexión de la viga indeterminada en el apoyo C. Como la deflexión de Δ_C en el apoyo C de la viga indeterminada es cero (Ec. 13.1), la deflexión en el extremo C de la viga primaria debido a la combinación de efectos de la carga externa P y la redundante C_y debe ser también cero. La deflexión total Δ_C en el extremo C de la viga primaria causada por la combinación de P y C_y se puede expresar convenientemente superponiendo (suma

algebraica) las deflexiones debidas a la carga externa P y a la redundante C_y que actúa individualmente en la viga; es decir,

$$\Delta_C = \Delta_{CO} + \Delta_{CC} \quad (13.2)$$

En donde Δ_{CO} y Δ_{CC} representan, respectivamente, las deflexiones en el extremo C de la viga primaria debido a la carga externa P y la redundante C_y , cada una actuando en la viga. Tenga en cuenta que los dos subíndices se utilizan para indicar las deflexiones Δ_{CO} y Δ_{CC} de la viga primaria. El primer subíndice, C , indica la ubicación de estas deflexiones; el segundo subíndice, O , señala que Δ_{CO} es causada por una carga externa, mientras que el segundo subíndice C de Δ_{CC} implica que se debe a la redundante C_y . Ambas deflexiones se consideran positivas si se presentan en la dirección de la redundante C_y , la cual se supone hacia arriba, como se muestra en la Fig. 13.1(b).

Debido a que la redundante C_y es una incógnita, es mejor determinar Δ_{CC} primero evaluando la deflexión en C debida a una carga unitaria de la redundante C_y , como se muestra en la Fig. 13.1(d), y después multiplicar la deflexión obtenida de esta manera por la magnitud de la incógnita de la redundante. Por lo tanto,

$$\Delta_{CC} = f_{CC} C_y \quad (13.3)$$

En la cual f_{CC} representa la deflexión en el punto C de la viga primaria debida a una carga unitaria de la redundante C_y . Recuerde de la Sección 7.8 que f_{CC} , que tiene unidades de deflexión por unidad de fuerza, se conoce como *coeficiente de flexibilidad*. Sustituyendo las Ecs. (13.1) y (13.3) en la Ec. (13.2), obtenemos la ecuación de compatibilidad

$$\Delta_C = \Delta_{CO} + f_{CC} C_y = 0 \quad (13.4)$$

La cual se puede resolver para expresar la redundante C_y en términos de la deflexión Δ_{CO} y f_{CC} en la viga primaria:

$$C_y = -\frac{\Delta_{CO}}{f_{CC}} \quad (13.5)$$

Las ecuaciones (13.4) y (13.5) se pueden establecer intuitivamente al considerar la redundante C_y como la fuerza necesaria para corregir la configuración deformada de la estructura primaria, de modo que coincida con la configuración deformada de la viga original indeterminada. Cuando el apoyo C se eliminó de la viga indeterminada de la Fig. 13.1(a), la carga externa P generó una deflexión hacia abajo de Δ_{CO} en el extremo C , como se muestra en la Fig. 13.1(c). Como la deflexión en C en la viga original indeterminada es cero, la fuerza redundante C_y debe ser de una magnitud suficiente para empujar el extremo C de regreso a su posición original produciendo una deflexión hacia arriba Δ_{CO} en el extremo C de la viga primaria. Para evaluar el efecto de C_y en la viga, calculamos el coeficiente de flexibilidad f_{CC} , el cual es la deflexión en C debida a la carga unitaria de la redundante (Fig. 13.1(d)). Puesto que la superposición es válida, la deflexión es directamente proporcional a la carga; es decir, si la carga unitaria genera una deflexión de f_{CC} , entonces una carga de diez veces acusará una deflexión hacia arriba de $10f_{CC}$. Es decir, la redundante de magnitud C_y causará una deflexión de $C_y f_{CC}$ en el extremo C de la viga primaria. Puesto que la deflexión ($C_y f_{CC}$) hacia arriba

causada por la redundante C_y debe ser igual a la deflexión causada hacia abajo (Δ_{CO}) por la carga externa P , podemos escribir

$$C_y f_{CC} = -\Delta_{CO} \quad (13.6)$$

En la cual ambas deflexiones, f_{CC} y Δ_{CO} , se asumen positivas hacia arriba. Tenga en cuenta que la Ec. (13.6) es equivalente a las Ecs. (13.4) y (13.5) obtenidas previamente.

Debido a que la viga primaria es estáticamente determinada, las deflexiones f_{CC} y Δ_{CO} se pueden calcular usando uno de los métodos descritos en los capítulos 6 y 7, o empleando las fórmulas de la deflexión de vigas dadas en el interior de la portada del libro. Con las fórmulas de las deflexiones en vigas determinamos la deflexión en el extremo C de la viga primaria debido a la carga externa P ($= 32$ k):

$$\Delta_{CO} = -\frac{5PL^3}{48EI} = -\frac{5(32)(20)^3}{48(30,000)(512)/144} = -0.25 \text{ ft} = -3 \text{ in.}$$

(Ver la Fig. 13.1(c)). Aquí, el signo negativo ha sido asignado a la magnitud de Δ_{CO} para indicar que la deflexión ocurre hacia abajo, es decir, en la dirección opuesta a la redundante C_y . De manera similar, el coeficiente de flexibilidad f_{CC} se evalúa como

$$f_{CC} = \frac{L^3}{3EI} = \frac{(20)^3}{3(30,000)(512)/144} = 0.025 \text{ ft/k} = 0.3 \text{ in./k}$$

(Ver la Fig. 13.1(d)). Sustituyendo las expresiones o los valores numéricos de Δ_{CO} y f_{CC} en la Ec. (13.5), determinamos la redundante C_y como

$$C_y = -\left(-\frac{5PL^3}{48EI}\right)\left(\frac{3EI}{L^3}\right) = \frac{5}{16}P = 10 \text{ k } \uparrow$$

La respuesta positiva para C_y indica que nuestra suposición inicial acerca de la dirección hacia arriba de C_y fue correcta.

Con la reacción C_y conocida, las tres reacciones restantes se pueden ahora determinar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio del cuerpo libre de la viga indeterminada (Fig. 13.1(e)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & A_x &= 0 \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & A_y - 32 + 10 &= 0 & A_y &= 22 \text{ k } \uparrow \\ + \zeta \sum M_A &= 0 & M_A - 32(10) + 10(20) &= 0 & M_A &= 120 \text{ k-ft } \curvearrowright \end{aligned}$$

Después de que la redundante C_y ha sido calculada, las reacciones de todas las respuestas características de la viga también pueden determinarse empleando las relaciones de superposición de manera similar a las relaciones de superposición de la deflexión expresada en la Ec. (13.4). Por lo tanto, las relaciones pueden determinarse alternativamente usando las relaciones de superposición (ver Figs. 13.1(a), (c) y (d)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow A_x &= A_{xO} + A_{xC}(C_y) = 0 \\ + \uparrow A_y &= A_{yO} + A_{yC}(C_y) = 32 - 1(10) = 22 \text{ k } \uparrow \\ + \zeta M_A &= M_{AO} + M_{AC}(C_y) = 320 - 20(10) = 120 \text{ k-ft } \curvearrowright \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que el segundo subíndice O se usa para indicar las reacciones debidas solo a las cargas externas (Fig. 13.1(c)), mientras que el segundo subíndice C indica las reacciones causadas por la carga unitaria de la redundante C_y (Fig. 13.1(d)).

De manera similar, el diagrama de momento flexionante de la viga se puede obtener superponiendo el diagrama de momento flexionante de la viga primaria debido solo a la carga externa, en el diagrama de momento flexionante de la viga primaria debido a la carga unitaria de la redundante C_y multiplicada por el valor de C_y . El diagrama de momento flexionante de la viga indeterminada queda determinado como se muestra en la Fig. 13.1(f).

Momento como redundante

En el siguiente análisis de la viga de la Fig. 13.1(a), seleccionamos arbitrariamente la reacción vertical del apoyo de patín C como redundante. Cuando analizamos una estructura por el método de las deformaciones consistentes, podemos escoger cualquier apoyo o fuerza interna (o momento) como la redundante, probando que al eliminar la correspondiente restricción de la estructura indeterminada resulta en una estructura primaria que es estáticamente determinada y estable.

Considerando de nuevo la viga mostrada en la Fig. 13.1(a), redibujada en la Fig. 13.2(a), podemos ver que eliminar la restricción correspondiente a la

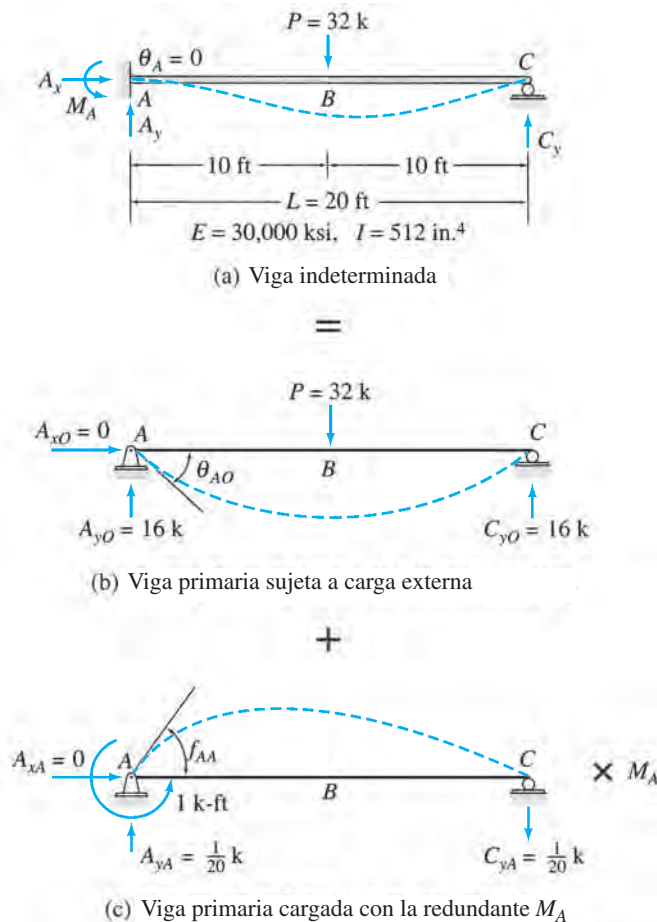


FIG. 13.2

reacción horizontal A_x convierte a la viga en estáticamente inestable. Por lo tanto, la A_x no puede usarse como redundante. Sin embargo, alguna de las otras dos reacciones del apoyo A puede emplearse.

Consideremos el análisis de la viga usando la reacción de momento M_A como la redundante. En sentido estricto M_A no se conoce y se asume arbitrariamente en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 13.2(a). Para obtener la viga primaria, eliminamos la restricción contra la rotación en el extremo A remplazándola por un apoyo empotrado por uno articulado, como se muestra en la Fig. 13.2(b). Tenga en cuenta que la viga obtenida de esta manera es estáticamente determinada y estable. La redundante M_A ahora se trata como una carga desconocida en la viga primaria, y su magnitud se puede determinar de la condición de compatibilidad de la pendiente en A por la combinación de efectos de la carga externa P , y la redundante M_A debe ser cero.

La viga primaria está sujeta de manera separada a la carga externa $P = 32$ k y a una carga unitaria de la redundante desconocida M_A , como se muestra en las Figs. 13.2(b) y (c), respectivamente. Como se muestra en estas figuras, θ_{AO} representa la pendiente en el extremo A debido a la carga externa P , mientras que f_{AA} indica el coeficiente de flexibilidad, es decir, la pendiente en A debido a la carga unitaria de la redundante M_A . Así, la pendiente de A debido a M_A es igual a $\theta_{AA} = f_{AA}M_A$. Como la suma algebraica de las pendientes en el extremo A debidas a la carga externa P y a la redundante M_A debe ser cero, podemos expresar la compatibilidad como

$$\theta_{AO} + f_{AA} M_A = 0 \quad (13.7)$$

Las pendientes θ_{AO} y f_{AA} pueden calcularse fácilmente usando las fórmulas de deflexión que están en el interior de la portada del libro. Por lo tanto,

$$\theta_{AO} = -\frac{PL^2}{16EI} = -\frac{32(20)^2}{16(30,000)(512)/144} = -0.0075 \text{ rad}$$

$$f_{AA} = \frac{L}{3EI} = \frac{20}{3(30,000)(512)/144} = 0.0000625 \text{ rad/k-ft}$$

Tenga en cuenta que el signo negativo se incluye en la magnitud de θ_{AO} , debido a que esta rotación se presenta en la dirección a las manecillas del reloj, es decir, opuesta al sentido contrario a las manecillas del reloj asumida para la redundante M_A (Fig. 13.2(a)). Sustituyendo los valores numéricos de θ_{AO} y f_{AA} en la ecuación de compatibilidad (Ec. 13.7) tenemos

$$-0.0075 + (0.0000625)M_A = 0$$

Para la cual tenemos,

$$M_A = \frac{0.0075}{0.0000625} = 120 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

La respuesta positiva implica que el sentido contrario a las manecillas del reloj inicialmente asumido para M_A fue correcto. Tenga en cuenta que el valor del momento de reacción $M_A = 120 \text{ k-ft } \curvearrowright$ calculado aquí es idéntico al obtenido previamente usando la reacción vertical C_y como redundante

(Fig. 13.2). Una vez que ha sido determinada la redundante M_A , las reacciones restantes al igual que las otras respuestas características de la viga se pueden determinar ya sea por consideraciones de equilibrio o por superposición, como se discutió previamente.

Procedimiento de análisis

Basados en la discusión anterior, podemos desarrollar el siguiente procedimiento paso a paso para el análisis de estructuras externamente indeterminadas con un solo grado de indeterminación.

1. Determine el grado de indeterminación de la estructura dada. Si el grado de indeterminación es mayor que 1, y/o si la estructura es internamente indeterminada, entonces termine el análisis en esta etapa.
2. Seleccione una de las reacciones redundantes. La elección de la redundante es de manera conveniente, y si ninguna reacción se puede seleccionar como redundante, asegúrese que la eliminación de la restricción correspondiente resulte en una estructura primaria que sea estáticamente determinada y estable. El sentido de la redundante no se conoce y se puede asumir arbitrariamente. El sentido verdadero de la redundante se conocerá después de que la magnitud sea determinada resolviendo la ecuación de compatibilidad. Una magnitud positiva de la redundante implicará que el sentido inicialmente supuesto fue correcto, mientras que un valor negativo señalará que el sentido real es opuesto al asumido inicialmente.
3. Elimine la restricción correspondiente a la redundante de la estructura indeterminada para obtener la estructura primaria determinada.
4.
 - a. Dibuje el diagrama de la estructura primaria únicamente con la carga externa aplicada en ella. Dibuje la configuración deformada de la estructura, y muestre con el símbolo adecuado.
 - b. Después, dibuje el diagrama de la estructura primaria solamente con el valor unitario de la redundante aplicada a ella. La fuerza unitaria (o momento) debe aplicarse en la dirección de la redundante. Dibuje la configuración deformada de la estructura, y muestre mediante un símbolo adecuado el coeficiente de flexibilidad representando la deflexión (o pendiente) en el punto de la aplicación de la carga y en la dirección de la redundante. Para indicar que tanto la carga como la respuesta de la estructura se deberán multiplicar por la redundante, muestre la redundante precedida del símbolo de multiplicación ($\times$) enseguida del diagrama de la estructura. La deflexión (o pendiente) en la ubicación de la redundante desconocida iguala el coeficiente de flexibilidad multiplicado por la magnitud desconocida de la redundante.
5. Escriba las ecuaciones de compatibilidad estableciendo la suma algebraica de las deflexiones (o pendientes) de la estructura primaria en la ubicación de la redundante debida a la carga externa y a la redundante igual al desplazamiento dado (o rotación) del apoyo redundante de la estructura real indeterminada. Puesto que supusimos que los apoyos son inflexibles, la suma algebraica de las deflexiones

debidas a la carga externa y a la redundante se pueden simplificar fijándolas a cero para obtener la ecuación de compatibilidad. (El caso de los movimientos en el apoyo se considera en secciones subsecuentes.)

6. Calcule las deflexiones de la estructura primaria en la ubicación de la redundante debido a la carga externa y al valor unitario de la redundante. Una deflexión se considera positiva si tiene el mismo sentido que el asumido originalmente para la redundante. Las deflexiones se pueden determinar usando cualquiera de los métodos discutidos en los capítulos 6 o 7. Para vigas con rigidez EI a la flexión constante, es generalmente conveniente determinar estas cantidades usando las fórmulas de deflexiones dadas en la parte interna de la portada de este libro calculadas usando el método del trabajo virtual.
7. Sustituya los valores de las deflexiones (o pendientes) calculadas en el paso 6 en la ecuación de compatibilidad, y resuelva para la redundante desconocida.
8. Determine las reacciones en los apoyos restantes de la estructura indeterminada, ya sea aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la estructura indeterminada o por superposición de reacciones de la estructura primaria debido a la carga externa y debido a la redundante.
9. Una vez que las reacciones han sido calculadas, las otras respuestas características (es decir, los diagramas de cortante y momento flexionante y/o fuerzas en los elementos) de la estructura indeterminada se pueden obtener mediante consideraciones de equilibrio o por superposición de las respuestas de la estructura primaria debido a las cargas externas y a la redundante.

Ejemplo 13.1

Determine las reacciones y dibuje el diagrama de cortante y el de momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 13.3(a) usando el método de deformaciones consistente.

Solución

Grado de indeterminación. La viga está soportada por cuatro reacciones A_x , A_y , M_A y B_y (Fig. 13.3(a)); es decir, $r = 4$, debido a que solo hay tres ecuaciones de equilibrio, el grado de indeterminación de la viga es igual a $r - 3 = 1$.

Viga primaria. La reacción vertical B_y en el apoyo de patín B se selecciona como la redundante. El sentido de B_y se asume hacia arriba, como se muestra en las Fig. 13.3(a). La viga primaria obtenida por eliminación de la reacción del patín en B de la viga indeterminada se muestra en la Fig. 13.3(b). Tenga en cuenta que la viga en cantiliver es estáticamente determinada y estable. A continuación, la viga primaria se somete de manera separada al momento externo M y a una carga unitaria de redundante desconocida B_y , como se muestra en las Figs. 13.3(b) y (c), respectivamente. Como se muestra en la figura, Δ_{BO} indica la deflexión en B debido al momento externo M , mientras que f_{BB} indica el coeficiente de flexibilidad representando la deflexión en B debida a la carga unitaria de la redundante B_y . Por lo tanto, la deflexión en B debida a la redundante desconocida B_y es igual a $f_{BB}B_y$.

continúa

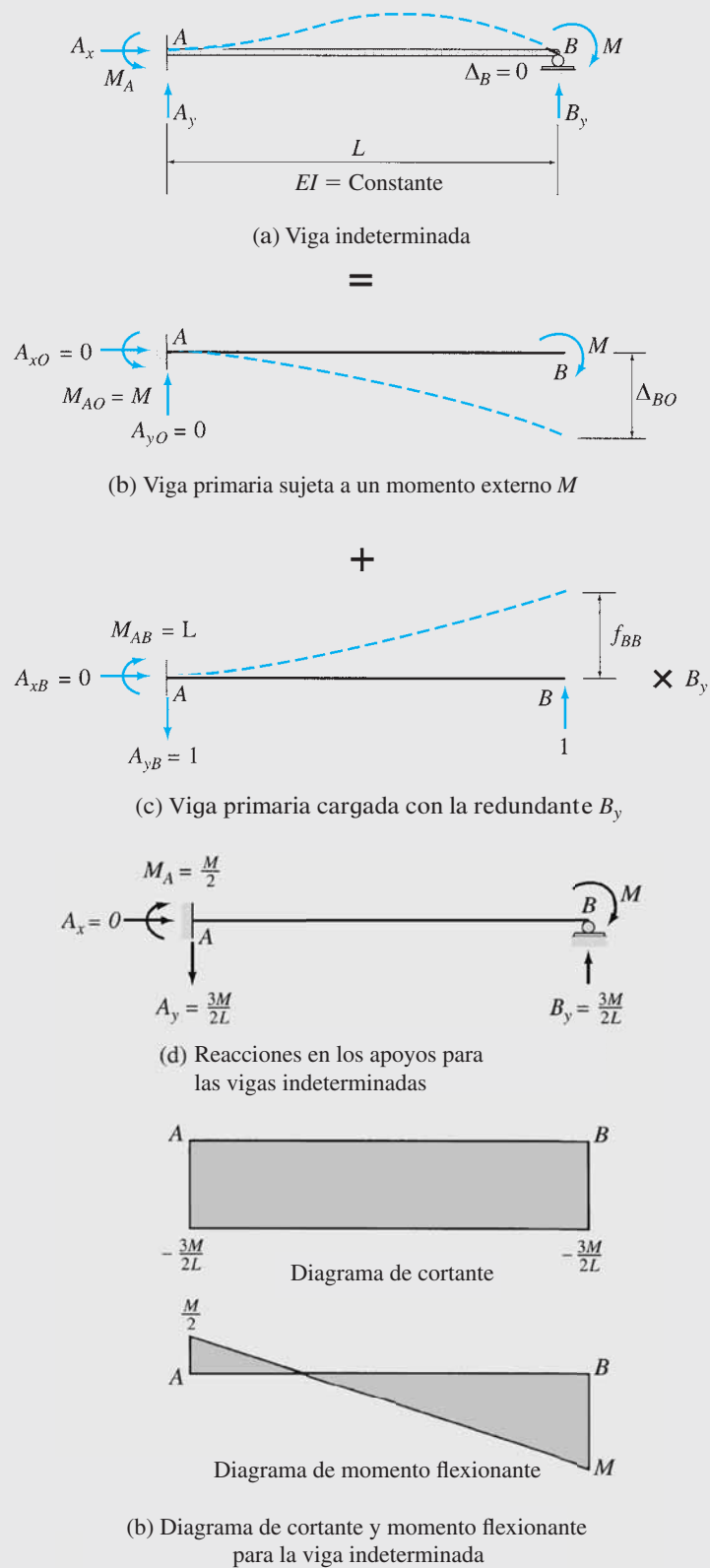


FIG. 13.3

continúa

Ecuación de compatibilidad. La deflexión en el apoyo B de la viga real indeterminada es cero, así que la suma algebraica de las deflexiones de la viga en B debido al momento externo M y a la redundante B_y también deben ser cero. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se puede escribir como

$$\Delta_{BO} + f_{BB}B_y = 0 \quad (1)$$

Deflexiones de la viga primaria. Usando las fórmulas de deflexiones en vigas, obtenemos la deflexión Δ_{BO} y f_{BB} como

$$\Delta_{BO} = -\frac{ML^2}{2EI} \quad \text{y} \quad f_{BB} = \frac{L^3}{3EI}$$

en el que el signo negativo para Δ_{BO} indica que esta desviación se produce en la dirección hacia abajo, es decir, opuesta a la dirección hacia arriba supuesta para la redundante B_y .

Magnitud de la redundante. Sustituyendo las expresiones para Δ_{BO} y f_{BB} en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), determinamos la redundante B_y como

$$-\frac{ML^2}{2EI} + \left(\frac{L^3}{3EI}\right)B_y = 0 \quad B_y = \frac{3M}{2L} \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

La respuesta positiva para B_y indica que nuestra suposición acerca de la dirección hacia arriba de B_y fue correcta.

Reacciones. Las reacciones restantes de la viga indeterminada se pueden determinar superponiendo las reacciones de la viga primaria debido al momento externo y a la redundante B_y , mostrada en las Figs. 13.3(b) y (c) respectivamente:

$$+ \rightarrow A_x = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Respuesta}$$

$$+ \uparrow A_y = -1\left(\frac{3M}{2L}\right) = -\frac{3M}{2L} \quad A_y = \frac{3M}{2L} \downarrow \quad \text{Respuesta}$$

$$+ \zeta M_A = M - L\left(\frac{3M}{2L}\right) = -\frac{M}{2} \quad M_A = \frac{M}{2} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

Las reacciones se muestran en la Fig. 13.3(d).

Diagramas de cortante y momento flexionante. Usando las reacciones, se elaboran los diagramas de cortante y de momento flexionante. Estos diagramas se muestran en la Fig. 13.3(e).

Ejemplo 13.2

Determine las reacciones y dibuje el diagrama de cortante y el de momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 13.4(a) usando el método de deformaciones consistentes. Seleccione la reacción de momento en el apoyo empotrado como la redundante.

Solución

Grado de indeterminación. La viga está soportada por cuatro reacciones (Fig. 13.4(a)), de modo que su grado de indeterminación es igual a $4 - 3 = 1$.

Viga primaria. La reacción de momento M_A en el apoyo empotrado A se selecciona como la redundante. El sentido de M_A se asume en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 13.4(a). Para obtener la viga primaria, removemos la restricción contra la rotación en el extremo A reemplazando el empotrado con un apoyo articulado, como se muestra en la Fig. 13.4(b). La viga primaria está sujeta por separado a la carga externa y a una carga unitaria de la redundante desconocida M_A , como se muestra en las Figs. 13.4(b) y (c), respectivamente. Como se muestra en estas figuras, θ_{AO} representa la pendiente en A debido a la carga externa, mientras f_{AA} denota el coeficiente de flexibilidad representando la pendiente en A debido a la carga unitaria de la redundante de M_A .

continúa

Ecuación de compatibilidad. Fijando la suma algebraica de las pendientes de la viga primaria en A debido a la carga externa y a la redundante M_A igual a la pendiente en el apoyo empotrado A de la viga real indeterminada, la cual es cero, escribimos la ecuación de compatibilidad:

$$\theta_{AO} + f_{AA} M_A = 0 \quad (1)$$

Pendiente de la viga primaria. De las fórmulas de deflexión en vigas,

$$\theta_{AO} = -\frac{1,800 \text{ k-ft}^2}{EI} \quad y \quad f_{AA} = \frac{10 \text{ k-ft}^2/\text{k-ft}}{EI}$$

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{AO} y f_{AA} en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), obtenemos,

$$-\frac{1,800}{EI} + \left(\frac{10}{EI}\right) M_A = 0 \quad M_A = 180 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

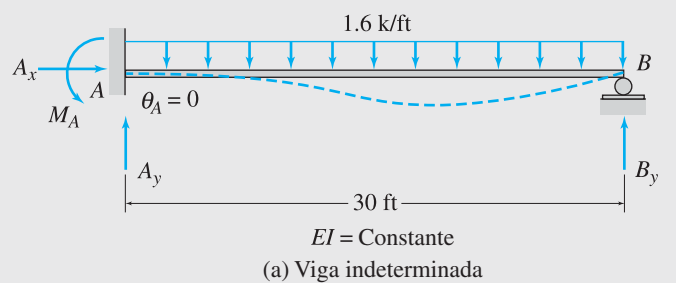
Reacciones. Para determinar las reacciones restantes de la viga indeterminada, aplicamos las ecuaciones de equilibrio (Fig. 13.4(d)):

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Respuesta}$$

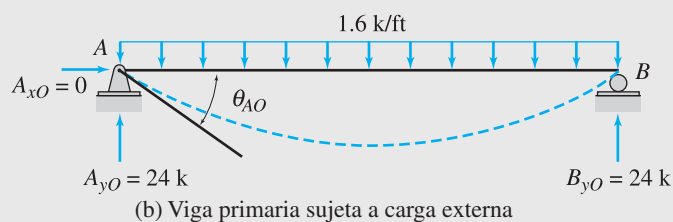
$$+ \curvearrowright M_B = 0 \quad 180 - A_y(30) + 1.6(30)(15) = 0 \quad A_y = 30 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 30 - 1.6(30) + B_y = 0 \quad B_y = 18 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

Diagrama de cortante y momento flexionante. Ver Fig. 13.4(e).



=



+

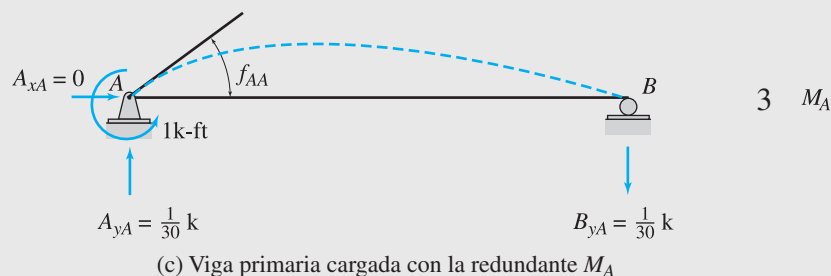
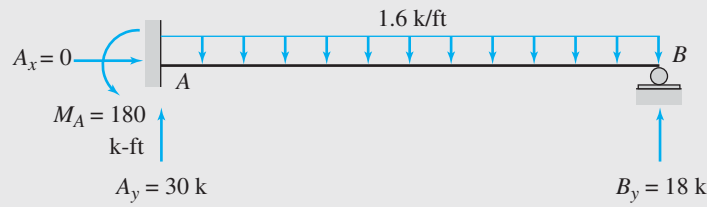


FIG. 13.4

continúa



(d) Reacciones en los apoyos para las vigas indeterminadas

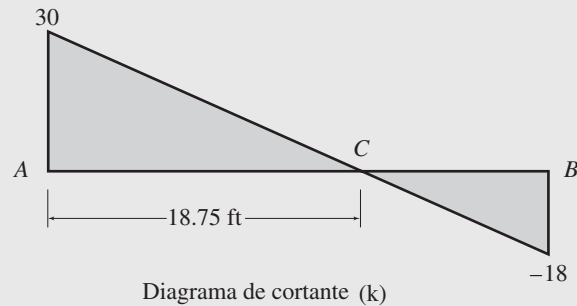


Diagrama de cortante (k)

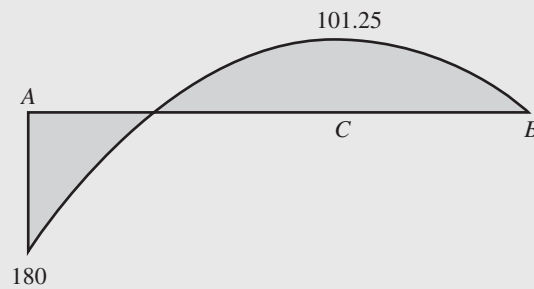


Diagrama de momento flexionante (k-ft)

(e) Diagrama de cortante y momento flexionante para la viga indeterminada

FIG. 13.4 (Continuación)

Ejemplo 13.3

Determine las reacciones y dibuje el diagrama de cortante y el de momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 13.5(a) usando el método de deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. La viga está soportada por cuatro reacciones, de modo que su grado de indeterminación es igual a $4 - 3 = 1$.

Viga primaria. La reacción vertical B_y en el apoyo de patín B se selecciona como la redundante, y la viga primaria se obtiene eliminando el apoyo de patín en B de la viga indeterminada, como se muestra en la Fig. 13.5(b). Después, la viga primaria se sujeta por separado a la carga externa y a la carga unitaria de la redundante desconocida o incógnita B_y , como

continúa

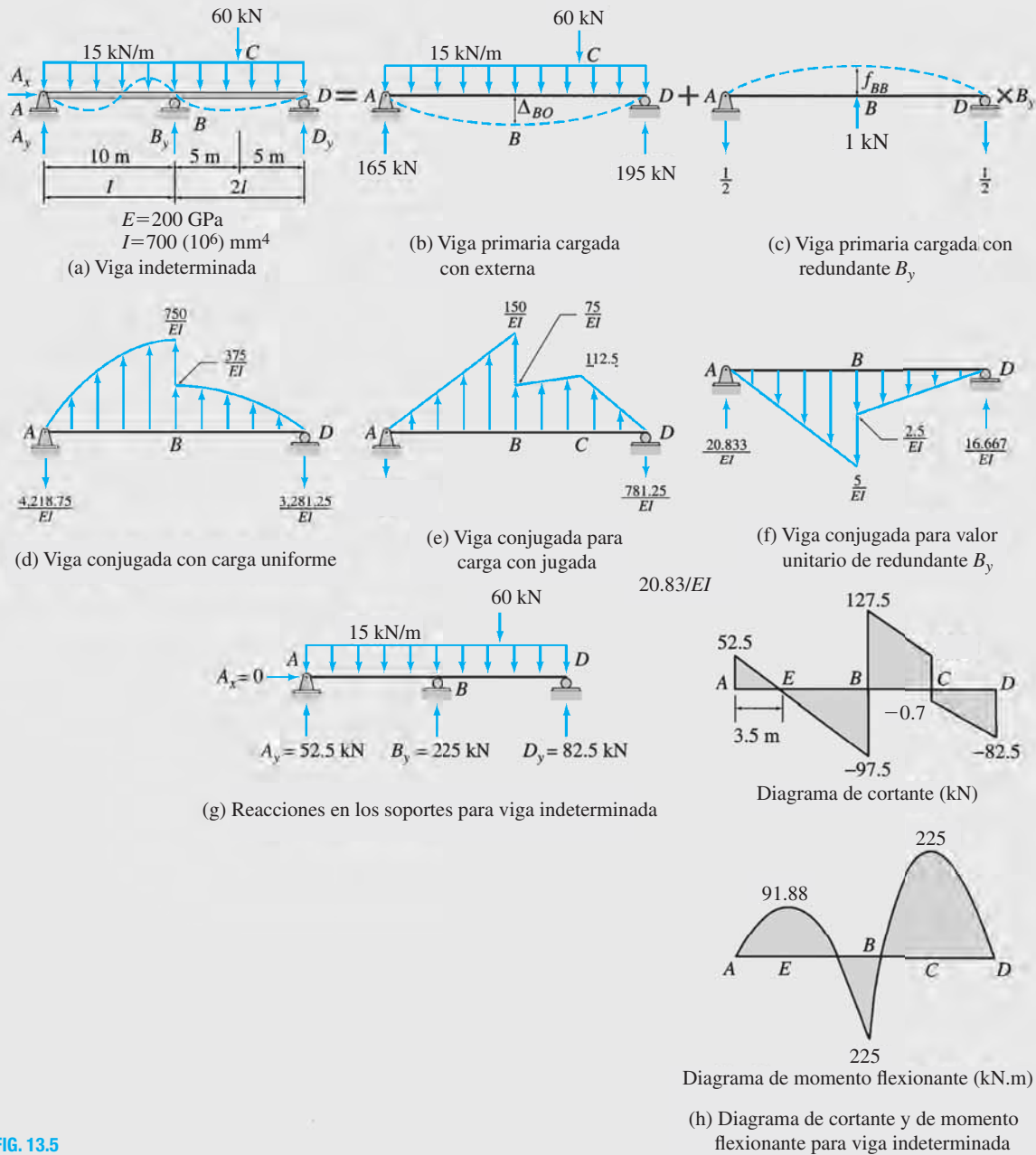


FIG. 13.5

se muestra en las Figs. 13.5 (b) y (c), respectivamente. Como se muestra en estas figuras, Δ_{BO} indica la deflexión en B debido a la carga externa, mientras que f_{BB} indica el coeficiente de flexibilidad representando la deflexión en B debido a la carga unitaria de la redundante B_y .

Ecuación de compatibilidad. Debido a que la deflexión en el apoyo B de la viga indeterminada real es cero, la sumatoria algebraica de la deflexión de la viga primaria en B debido a la carga externa y a la redundante B_y también debe ser cero. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se puede escribir como

$$\Delta_{BO} + f_{BB}B_y = 0 \quad (1)$$

continúa

Deflexión de la viga primaria. La rigidez a flexión EI de la viga primaria no es constante (debido a que el momento de inercia de la mitad derecha de la viga, BD , tiene el doble del momento de inercia de la mitad izquierda, AB), así que no podemos usar las fórmulas dadas en el interior de la portada del libro para el cálculo de las deflexiones. Por lo tanto, usaremos el método de la viga conjugada, descrito en el Capítulo 6, para determinar las deflexiones de la viga primaria.

Para determinar la deflexión Δ_{BO} debido a la carga externa, dibujamos la viga conjugada para la carga uniformemente distribuida de 15-kN/m y la carga concentrada de 60-kN, como se muestra en las Figs. 13.5(d) y (e), respectivamente. Recordando que la deflexión en un punto de la viga real es igual al momento flexionante en dicho punto en la viga conjugada correspondiente, determinamos la deflexión Δ_{BO} debido a los efectos combinados de la carga distribuida y de la carga concentrada como

$$EI \Delta_{BO} = \left[-4,218.75 (10) + \left(\frac{2}{3} \right) (10) (750) \left(\frac{30}{8} \right) \right] + \left[-718.75 (10) + \left(\frac{1}{2} \right) (10) (150) \left(\frac{10}{3} \right) \right]$$

$$\Delta_{BO} = - \frac{28,125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

En la cual el valor negativo indica que la deflexión ocurre en dirección hacia abajo. Tenga en cuenta que a pesar de que se indican los valores numéricos de EI , es conveniente realizar el análisis en términos de EI . El coeficiente de flexibilidad f_{BB} se puede calcular de manera similar usando la viga conjugada mostrada en la Fig. 13.5(f), por lo tanto,

$$EI f_{BB} = 20.833 (10) - \left(\frac{1}{2} \right) (10) (5) \left(\frac{10}{3} \right) = 125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}$$

$$f_{BB} = \frac{125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{BO} y f_{BB} en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), obtenemos

$$-\frac{28,125}{EI} + \left(\frac{125}{EI} \right) B_y = 0 \quad B_y = 225 \text{ kN} \uparrow$$

Reacciones. Para determinar las reacciones de la viga indeterminada, aplicamos las ecuaciones de equilibrio (Fig. 13.5(g)):

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= 0 & A_x &= 0 & \text{Respuesta} \\ + \zeta \sum M_D &= 0 & -A_y(20) - 225(10) + 15(20)(10) + 60(5) &= 0 & \\ & & A_y &= 52.5 \text{ kN} \uparrow & \text{Respuesta} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 & 52.5 + 225 - 15(20) - 60 + D_y &= 0 & \\ & & D_y &= 82.5 \text{ kN} \uparrow & \text{Respuesta} \end{aligned}$$

Diagrama de cortante y momento flexionante. Ver Fig. 13.5(h).

Respuesta

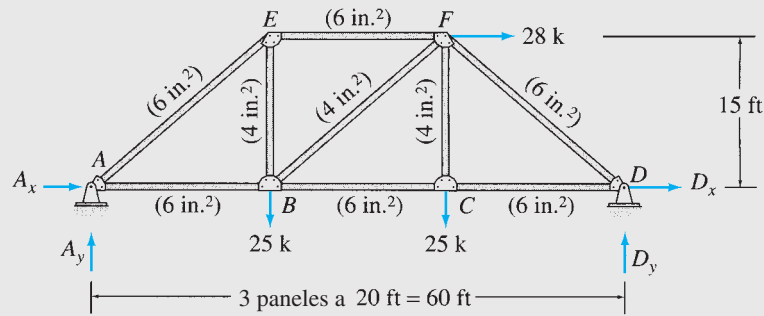
Ejemplo 13.4

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. 13.6(a) usando el método de deformaciones consistentes.

Solución

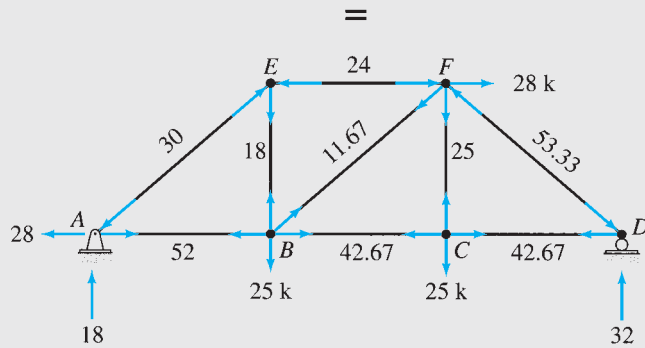
Grado de indeterminación. La armadura es indeterminada en primer grado.

continúa

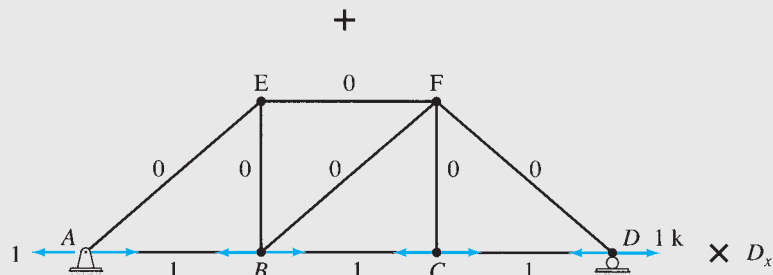


$$E = 29,000 \text{ ksi}$$

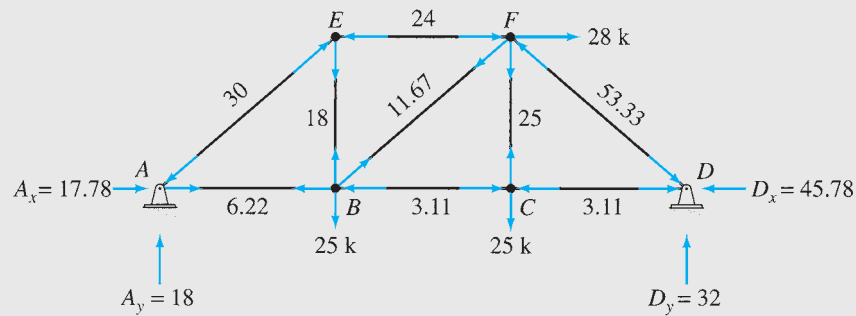
(a) Armadura indeterminada



(b) Armadura primaria sujeta a carga externa—fuerza F_O



(c) Armadura primaria sujeta al valor unitario de la redundante D_y —fuerza u_D



(d) Armadura primaria sujeta a fuerza de tensión unitaria

FIG. 13.6

continúa

Armadura primaria. La reacción horizontal D_x en la articulación del apoyo D se selecciona como la redundante. La dirección D_x se asume arbitrariamente a la derecha, como se muestra en la Fig. 13.6(a). La armadura primaria se obtiene eliminando la restricción contra el desplazamiento horizontal en el nodo D y remplazando el apoyo articulado por un apoyo de patín, como se observa en la Fig. 13.6(b). Después, la armadura primaria se sujeta por separado a la carga externa y a la carga unitaria de la redundante desconocida D_x , como en las Figs. 13.6(b) y (c), respectivamente.

Ecuación de compatibilidad. Si Δ_{DO} indica la deflexión horizontal en el nodo D de la armadura primaria debido a la carga externa y si f_{DD} indica el coeficiente de flexibilidad representando la deflexión horizontal en D debido a la carga unitaria de la redundante D_x , entonces la ecuación de compatibilidad se puede escribir como

$$\Delta_{DO} + f_{DD}D_x = 0 \quad (1)$$

Deflexión primaria. Las deflexiones Δ_{DO} y f_{DD} se pueden evaluar usando el método del trabajo virtual. Recuerde del Capítulo 7 que la expresión del trabajo virtual para armaduras está dada por la (Ec. (7.23)).

$$\Delta = \sum \frac{FF_v L}{AE} \quad (2)$$

En donde F simbólicamente representa las fuerzas axiales en los elementos de la armadura debido a la carga real que genera la deflexión Δ , y F_v representa las fuerzas axiales en los elementos de la armadura debido a la carga virtual unitaria que actúa en el nodo y en la dirección de la deflexión deseada Δ .

Para el cálculo de la deflexión Δ_{DO} de la armadura primaria, el sistema real consiste en la carga externa, como se muestra en la Fig. 13.6(b). Las fuerzas axiales en los elementos debido a esta carga se indican simbólicamente como fuerzas F_O y sus valores numéricos, obtenidos por el método de los nodos, se muestran en la Fig. 13.6(b). El sistema virtual para Δ_{DO} consiste de una carga unitaria aplicada en la ubicación y en la dirección de la redundante D_x , la cual es la misma que en el sistema mostrado en la Fig. 13.6(c) (sin el multiplicador D_x). Las fuerzas axiales en los elementos debido a la carga unitaria de la redundante D_x se muestran simbólicamente como fuerzas u_D , y los valores numéricos de los nodos se muestran en la Fig. 13.6(c). Por lo tanto, la expresión para el trabajo virtual de Δ_{DO} se puede escribir como

$$\Delta_{DO} = \sum \frac{F_O u_D L}{AE} \quad (3)$$

Las fuerzas en los elementos F_O y u_D están tabuladas, y la Ec. (3) se aplica para determinar Δ_{DO} , como se muestra en la Tabla 13.1. Por lo tanto,

$$\Delta_{DO} = \frac{5,493.6 \text{ k/in.}}{E}$$

La magnitud positiva de Δ_{DO} indica que la deflexión se presenta a la derecha, es decir, en la misma dirección en la que fue supuesta la redundante D_x .

Para el cálculo del coeficiente de flexibilidad f_{DD} , tanto para el sistema real como el virtual consiste de una carga unitaria de la redundante D_x aplicada a la armadura primaria, como se muestra en la Fig. 13.6(c) (sin el multiplicador D_x). Por lo tanto, la expresión del trabajo virtual para f_{DD} se convierte en

$$f_{DD} = \sum \frac{u_D^2 L}{AE} \quad (4)$$

La ecuación (4) se aplica para determinar f_{DD} , como se muestra en la Tabla 13.1. Por lo tanto,

$$f_{DD} = \frac{120 (1/\text{in.})}{E}$$

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{DO} y f_{DD} en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), determinamos la redundante D_x como

$$\begin{aligned} \frac{5,493.6}{E} + \left(\frac{120}{E} \right) D_x &= 0 \\ D_x &= -45.78 \text{ k} \end{aligned}$$

continúa

TABLA 13.1

Miembro	L (in.)	A (in. ²)	F_O (k)	u_D (k/k)	$\frac{F_O u_D L}{A}$ (k/in.)	$\frac{u_D^2 L}{A}$ (1/in.)	$F = F_O + u_D D_x$ (k)
AB	240	6	52	1	2,080	40	6.22
BC	240	6	42.67	1	1,706.8	40	-3.11
CD	240	6	42.67	1	1,706.8	40	-3.11
EF	240	6	-24	0	0	0	-24
BE	180	4	18	0	0	0	18
CF	180	4	25	0	0	0	25
AE	300	6	-30	0	0	0	-30
BF	300	4	11.67	0	0	0	11.67
DF	300	6	-53.33	0	0	0	-53.33
Σ					5,493.6	120	

$$\Delta_{DO} = \frac{1}{E} \Sigma \frac{F_O u_D L}{A} = \frac{5,493.6 \text{ k/in.}}{E} \quad f_{DD} = \frac{1}{E} \Sigma \frac{u_D^2 L}{A} = \frac{120 (1/\text{in.})}{E}$$

$$D_x = -\frac{\Delta_{DO}}{f_{DD}} = -45.78 \text{ k}$$

La respuesta negativa para D_x indica que nuestra suposición inicial acerca de que D_x actuaba a la derecha fue incorrecta y que realmente actúa a la izquierda.

$$D_x = 45.78 \leftarrow$$

Respuesta

Reacciones. Las reacciones restantes de la armadura indeterminada se pueden determinar superponiendo las reacciones de la armadura primaria debido a la carga externa (Fig. 13.6(b)) y debido a la carga redundante D_x (Fig. 13.6)).

$$A_x = -28 - 1(-45.78) = 17.78 \text{ k} \rightarrow$$

Respuesta

$$A_y = 18 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta

$$D_y = 32 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta

Las reacciones se muestran en la Fig. 13.6(d).

Fuerzas axiales en los elementos. Las fuerzas axiales en los elementos de la armadura indeterminada pueden determinarse superponiendo las fuerzas de los elementos de la armadura primaria debido a las cargas externas y debido a la redundante D_x ; es decir,

$$F = F_O + u_D D_x \quad (5)$$

El cálculo final de las fuerzas en los elementos se puede realizar convenientemente en forma tabular, como se muestra en la Tabla 13.1. Para cada elemento, la fuerza final F se calcula sumando algebraicamente cada entrada de la cuarta columna (F_O), con la entrada correspondiente de la quinta columna (u_D) multiplicando la magnitud de la redundante $D_x = -45.78 \text{ k}$. El valor de la fuerza final en la armadura calculada de esta manera está registrado en la octava columna de la Tabla 13.1. Las fuerzas en los elementos obtenidas se muestran en la Fig. 13.6(d).

Respuesta

Ejemplo 13.5

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante del marco mostrado en la Fig. 13.7(a) usando el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. El marco es indeterminado en primer grado.

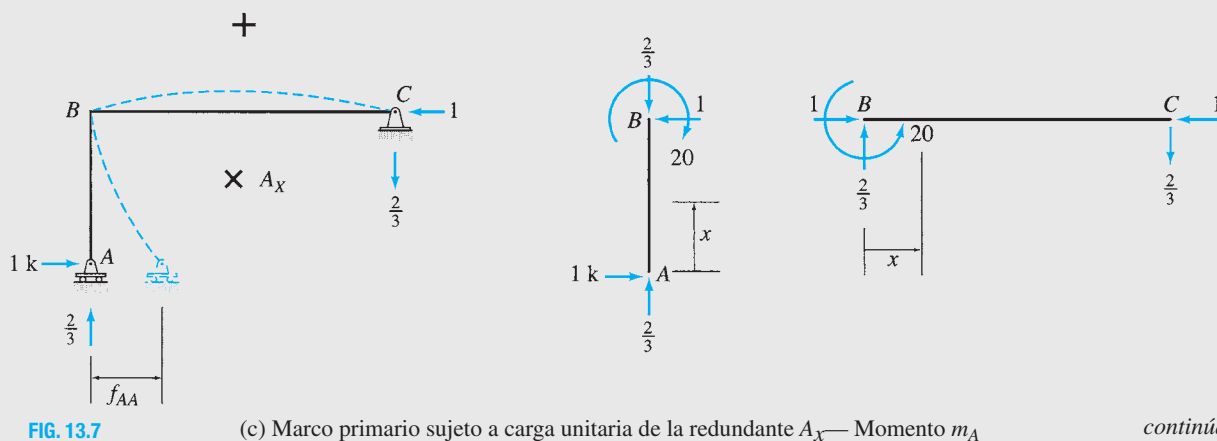
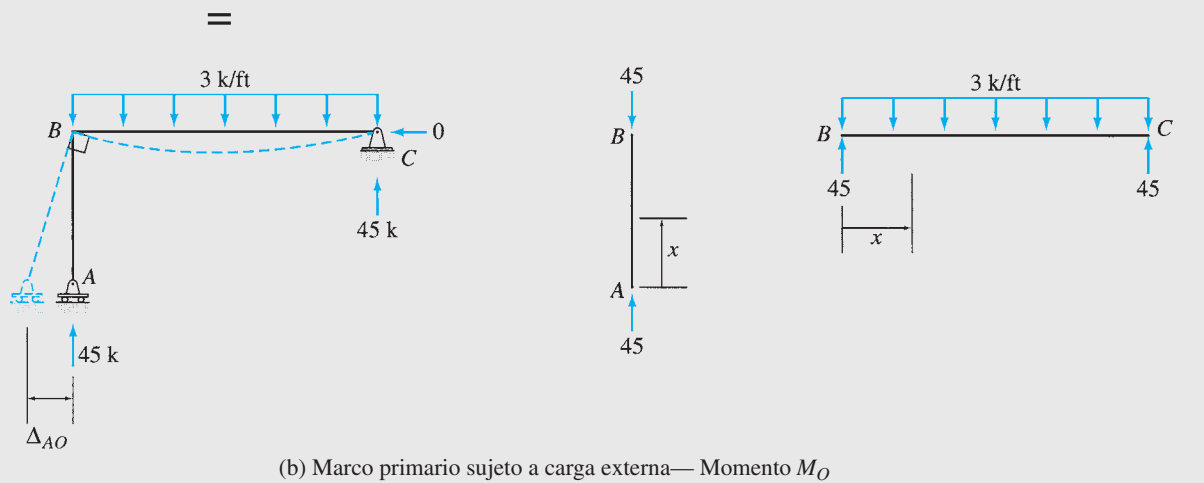
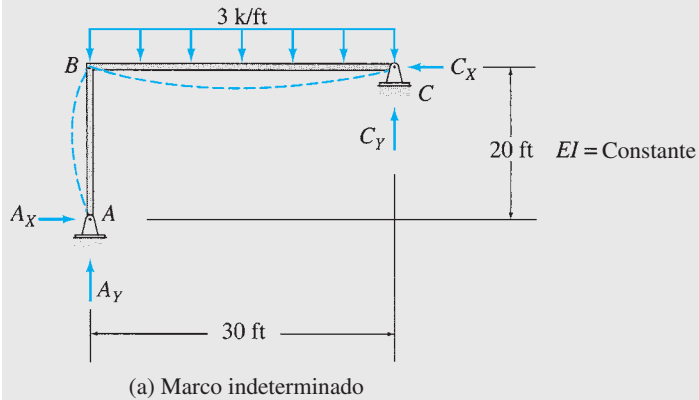
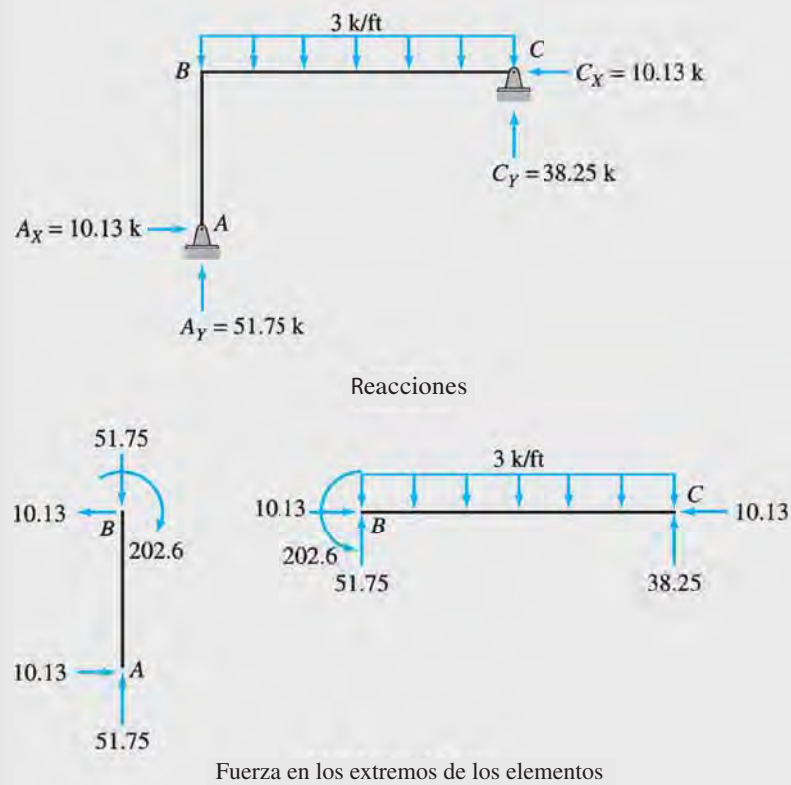
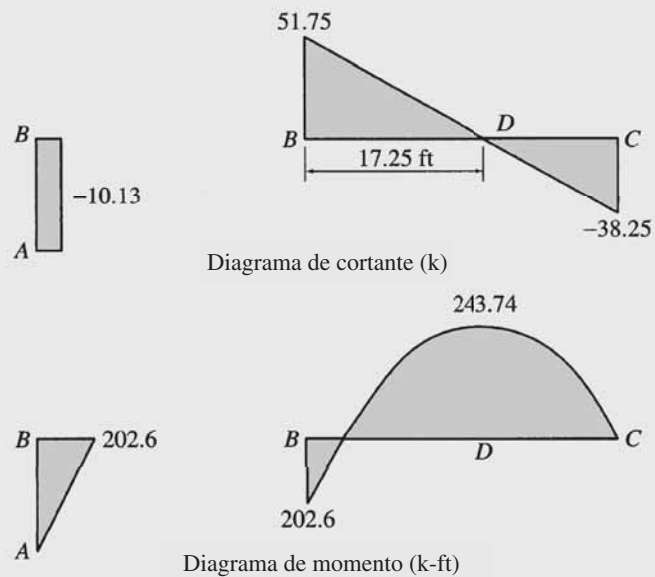


FIG. 13.7

continúa



(d) Reacciones en los apoyos y fuerza en los extremos de los elementos para el marco indeterminado



(e) Diagrama de cortante y momento flexionante para el marco indeterminado

FIG. 13.7 (Continuación)

continúa

TABLA 13.2

Elementos	x Coordenada		M_O (k-ft)	m_A (k-ft/k)
	Origen	Límites (ft)		
AB	A	0–20	0	$-1x$
BC	B	0–30	$45x - \frac{3}{2}x^2$	$-20 + \frac{2}{3}x$

Marco primario. La reacción horizontal A_X en el apoyo articulado A se selecciona para que sea la redundante. El marco primario se obtiene eliminando la restricción contra el desplazamiento horizontal en el nodo A , lo cual se logra al reemplazar la articulación por un apoyo de patín, como se muestra en la Fig. 13.7(b). Después, el marco primario se sujeta por separado a la carga externa y a la carga unitaria de la redundante desconocida A_X , como se ve en las Figs. 13.7(b) y (c), respectivamente.

Ecuación de compatibilidad. En las Figs. 13.7(a), (b) y (c), observamos que

$$\Delta_{AO} + f_{AA} A_X = 0 \quad (1)$$

Deflexión de marco primario. Las deflexiones Δ_{AO} y f_{AA} del marco primario se evaluarán usando el método del trabajo virtual descrito en el Capítulo 7. La expresión del trabajo virtual para Δ_{AO} , que representa la deflexión horizontal en el nodo A del marco primario debido a la carga externa, se puede escribir como

$$\Delta_{AO} = \sum \int \frac{M_O m_A}{EI} dx \quad (2)$$

Donde M_O indica el momento flexionante debido a la carga (real) externa (Fig. 13.7(b)) y m_A indica el momento flexionante debido a la carga (virtual) unitaria en la ubicación y en la dirección de la redundante (Fig. 13.7(c)). La coordenada x que se emplea para determinar las ecuaciones de momento flexionante para los elementos AB y BC del marco primario se muestra en las Figs. 13.7(b) y (c), y las ecuaciones para M_O y m_A se indican en la Tabla 13.2. Aplicando la Ec. (2) obtenemos

$$\Delta_{AO} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} \left(45x - \frac{3}{2}x^2 \right) \left(-20 + \frac{2}{3}x \right) dx = -\frac{67,500 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

Para el cálculo del coeficiente de flexibilidad f_{AA} , tanto el sistema real como el virtual consisten de un valor unitario de la redundante A_X aplicada al marco primario, como se muestra en la Fig. 13.7(c) (sin el multiplicador A_X). Por lo tanto, la expresión para el trabajo virtual de f_{AA} es

$$f_{AA} = \sum \int \frac{m_A^2}{EI} dx \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones para m_A de la Tabla 13.2, obtenemos

$$f_{AA} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} (-x)^2 dx + \int_0^{30} \left(-20 + \frac{2}{3}x \right)^2 dx \right] = \frac{6,666.66 \text{ ft}^3}{EI}$$

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{AO} y de f_{AA} en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), determinamos la redundante A_X como

$$-\frac{67,500}{EI} + \left(\frac{6,666.66}{EI} \right) A_X = 0$$

$$A_X = 10.13 \text{ k}$$

Respuesta

Reacciones. Las reacciones restantes y las fuerzas en los extremos de los elementos del marco indeterminado ahora se pueden determinar de las ecuaciones de equilibrio. Las reacciones y fuerzas en los extremos de los elementos obtenidos se muestran en la Fig. 13.7(d).

Respuesta

Diagramas de cortante y momento flexionante. Ver Fig. 13.7(e).

Respuesta

13.2 Fuerzas y momentos internos como redundantes

Hasta ahora hemos analizado las estructuras externamente indeterminadas con un solo grado de indeterminación y seleccionando un apoyo como la redundante. El análisis de estas estructuras se puede desarrollar eligiendo una fuerza o momento interno como la redundante, con la condición de que la eliminación de la restricción interna de la estructura indeterminada resulte en una estructura estáticamente determinada y estable.

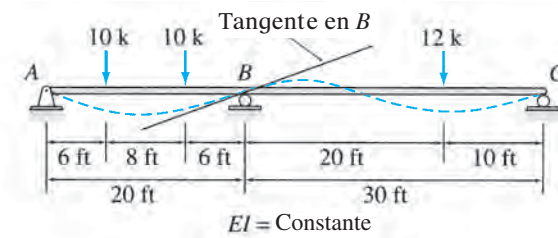
Considere una viga de dos claros continuos como la de la Fig. 13.8(a). La viga es indeterminada en primer grado. Como se discutió en la sección anterior, esta viga se puede analizar tratando una de sus reacciones verticales como la redundante. Sin embargo, es más recomendable analizar la viga continua (especialmente aquellas vigas con claros iguales) seleccionando un momento interno como redundante. Consideremos el análisis de la viga de la Fig. 13.8(a) usando el momento flexionante, M_B , en el apoyo interno B como la redundante. De la Fig. 13.8(a), podemos ver que la pendiente de la curva elástica de la viga indeterminada es continua en B . En otras palabras, no hay cambio en la pendiente de las tangentes de la curva elástica justo a la izquierda de B y justo a la derecha de B ; es decir, el ángulo entre las tangentes es cero. Cuando la restricción correspondiente al momento redundante M_B se elimina insertando una articulación interna en B , como se muestra en la Fig. 13.8(b), se desarrolla una discontinuidad en la curva elástica en B , en el sentido de que la tangente justo a la izquierda de B rota con relación a la tangente justo a la derecha de B . El cambio en la pendiente (o ángulo) entre las dos tangentes debido a la carga externa se denota por $\theta_{BO \text{ rel.}}$ y se puede expresar como

$$\theta_{BO \text{ rel.}} = \theta_{BL} + \theta_{BR} \quad (13.8)$$

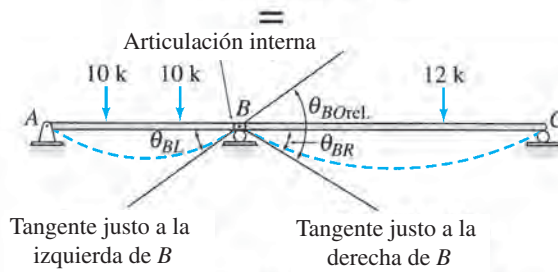
(ver la Fig. 13.8(b)) en donde θ_{BL} y θ_{BR} indican las pendientes en los extremos B de la izquierda y de la derecha del claro de la viga, respectivamente, debido a la carga externa dada.

Debido a que el momento flexionante M_B proporciona la continuidad en la curva elástica en B en la viga real indeterminada, debe ser de suficiente magnitud para remover la discontinuidad $\theta_{BO \text{ rel.}}$ de la viga primaria devolviendo las tangentes nuevamente a una misma. Para evaluar el efecto de M_B en la viga primaria, determinemos el coeficiente de flexibilidad $f_{BB \text{ rel.}}$ representando el cambio en la pendiente (o el ángulo) entre las tangentes de la curva elástica justo a la izquierda de B y justo a la derecha de B debido al momento unitario M_B , como se muestra en la Fig. 13.8(c). El momento interno flexionante está definido por un *par* de igual magnitud pero en sentido contrario, por lo tanto, se deben de aplicar dos pares opuestos unitarios para determinar el coeficiente de flexibilidad, como se ve en la Fig. 13.8(c). Tenga en cuenta que la redundante M_B se considera positiva de acuerdo con la *convención de signos de la viga* —es decir, cuando el momento genere compresión en las fibras superiores y tensión en las fibras inferiores de la viga. De la Fig. 13.8(c), podemos ver que el coeficiente de flexibilidad expresado como

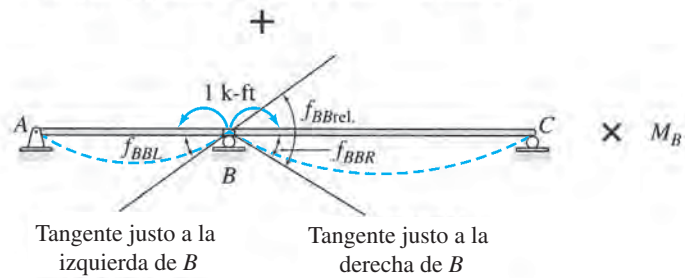
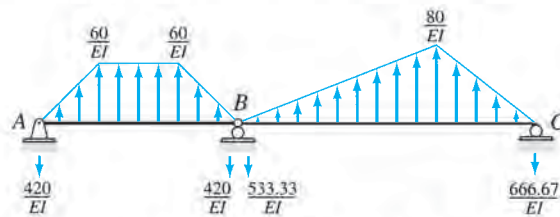
$$f_{BB \text{ rel.}} = f_{BBL} + f_{BBR} \quad (13.9)$$



(a) Viga indeterminada



(a) Viga primaria sujeta a carga externa


 (a) Viga primaria sujeta al momento redundante M_B


(d) Viga conjugada para las cargas externas

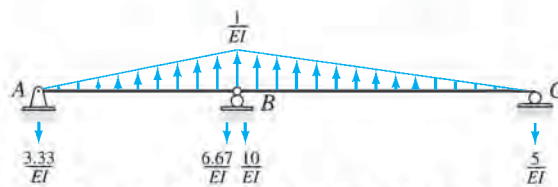
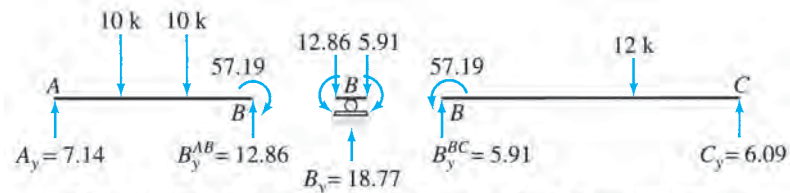
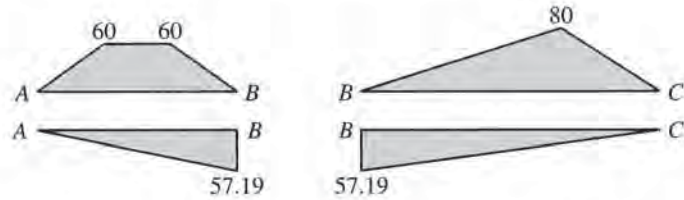

 (e) Viga conjugada para la carga unitaria de la redundante M_B

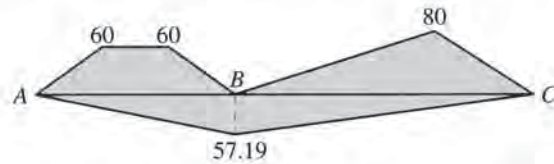
FIG. 13.8



(f) Fuerza en los extremos del elemento y reacciones en los apoyos de la viga indeterminada



(g) Diagrama de momento flexionante para los elementos AB y BC (k-ft)



(h) Diagrama de momento flexionante para la viga continua (k-ft o t-m)

FIG. 13.8 continuación

En la cual f_{BBL} y f_{BBR} indican las pendientes en los extremos B de los claros de la izquierda y la derecha de la viga, respectivamente, debido a la carga unitaria de la redundante M_B .

La ecuación de compatibilidad se basa en el requerimiento de que la pendiente de la curva elástica de la viga real indeterminada se considera continua en B; es decir, que no haya cambio de la pendiente del lado izquierdo y del derecho de B. Por lo tanto, la sumatoria algebraica de los ángulos entre las tangentes a la izquierda y a la derecha de B debido a la carga externa y a la redundante M_B debe ser cero. En consecuencia,

$$\theta_{BO \text{ rel.}} + f_{BB \text{ rel.}} M_B = 0 \quad (13.10)$$

La cual se puede resolver para la redundante M_B después de que el cambio de las pendientes $\theta_{BO \text{ rel.}}$ y $f_{BB \text{ rel.}}$ han sido evaluadas.

Debido a que cada claro de la viga primaria se puede tratar como una viga simplemente apoyada, las pendientes en los extremos de B de los claros izquierdo y derecho se pueden calcular fácilmente usando el método de la viga conjugada. Las vigas conjugadas para las cargas externas se muestran en la Fig. 13.8(d). Recordando que la pendiente en un punto de una viga real es igual al cortante en dicho punto en la correspondiente viga conjugada, determinamos las pendientes θ_{BL} y θ_{BR} en el extremo B de los claros izquierdo y derecho, respectivamente, como

$$\theta_{BL} = \frac{420 \text{ k-ft}^2}{EI} \quad y \quad \theta_{BR} = \frac{533.33 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

Por lo tanto, de la Ec. (13.8), obtenemos

$$\theta_{BO \text{ rel.}} = \theta_{BL} + \theta_{BR} = \frac{420 + 533.33}{EI} = \frac{953.33 \text{ k-ft}^2}{EI}$$

El coeficiente de flexibilidad $f_{BB \text{ rel.}}$ se puede calcular de manera similar usando la viga conjugada para un momento flexionante redundante unitario M_B mostrado en la Fig. 13.8(e). Por lo tanto

$$f_{BBL} = \frac{6.67 \text{ k-ft}^2/\text{k-ft}}{EI} \quad \curvearrowright \quad \text{y} \quad f_{BBR} = \frac{10 \text{ k-ft}^2/\text{k-ft}}{EI} \quad \curvearrowleft$$

De la Ec. (13.9), obtenemos

$$f_{BB \text{ rel.}} = f_{BBL} + f_{BBR} = \frac{6.67 + 10}{EI} = \frac{16.67 \text{ k-ft}^2/\text{k-ft}}{EI}$$

Sustituyendo los valores de $\theta_{BO \text{ rel.}}$ y $f_{BB \text{ rel.}}$ en la ecuación de compatibilidad (Ec. (13.10)), determinamos la magnitud del momento redundante M_B como

$$\frac{953.33}{EI} + \left(\frac{16.67}{EI} \right) M_B = 0$$

o

$$M_B = -57.19 \text{ k-ft}$$

Con la redundante M_B determinada, las fuerzas en los extremos de los elementos además de las reacciones en los apoyos se pueden determinar considerando el equilibrio de los cuerpos libres de los elementos AB y BC y del nodo B , como se muestra en la Fig. 13.8(f). Tenga en cuenta que el momento flexionante negativo M_B está aplicado en el extremo B de los elementos AB y BC de modo que genera tensión en las fibras superiores y compresión en las fibras inferiores de los elementos.

Cuando los momentos en los extremos de los elementos de una viga continua se conocen, es conveniente construir los diagramas de momento flexionante en dos partes; uno para la carga externa y otro para los momentos en los extremos del elemento. Este procedimiento se conoce comúnmente como *diagrama de momento flexionante formado por vigas simplemente apoyadas*, debido a que cada elemento de la viga continua se trata como simplemente apoyado, para el cual las cargas externas y los momentos en los extremos se aplican de manera separada y se dibujan los correspondientes diagramas de momento flexionante. Tales diagramas de los elementos AB y BC de la viga continua en consideración se muestran en la Fig. 13.8(g). Los diagramas de momento flexionante se pueden dibujar juntos, como se muestra en la Fig. 13.8(h), para obtener el diagrama de momento flexionante de la viga continua completa.

Estructuras internamente indeterminadas

Como la discusión anterior muestra, las estructuras con un solo grado de indeterminación que son externamente indeterminadas se pueden analizar seleccionando ya sea una reacción o una fuerza o momento interno como la redundante. Sin embargo, si la estructura es internamente indeterminada pero externamente determinada, solo se puede usar la fuerza o momento interno

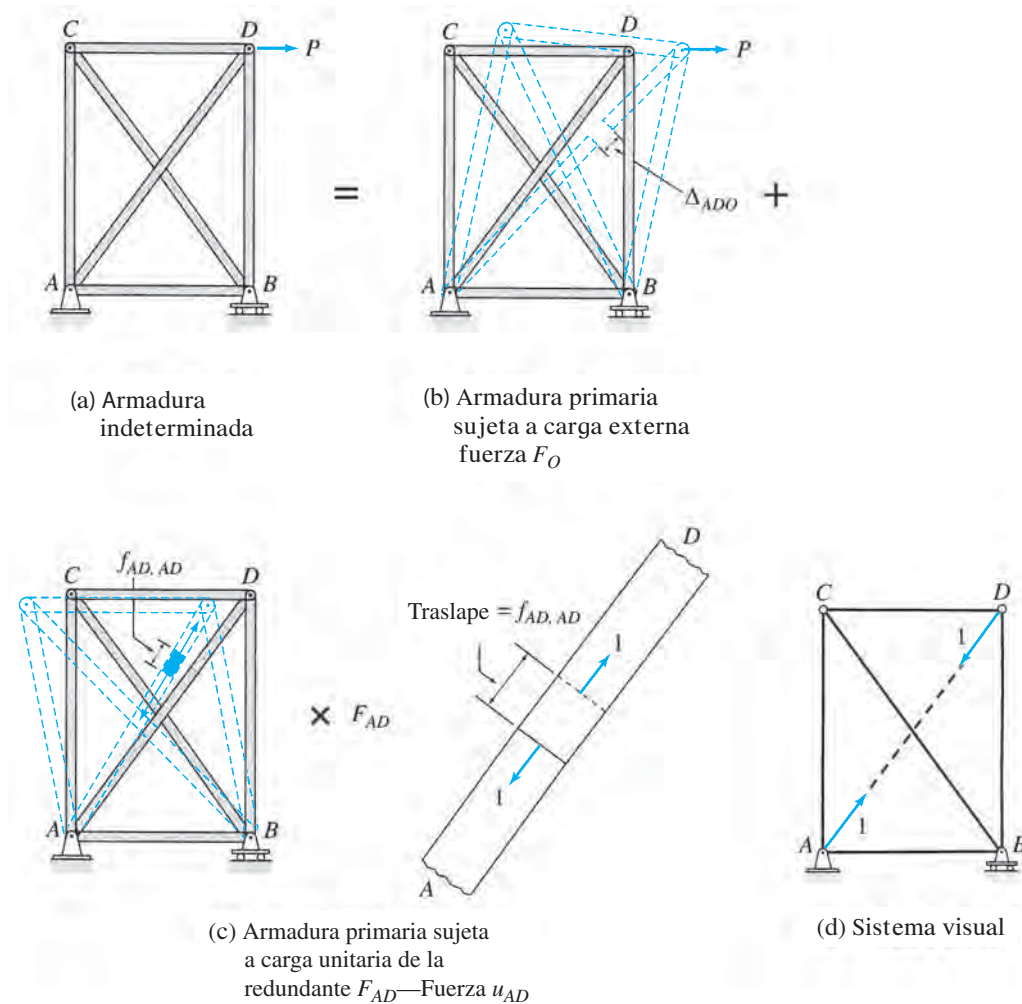


FIG. 13.9

como redundante, debido a que la eliminación de una reacción externa de tal estructura conducirá a una estructura primaria estáticamente inestable.

Considere, por ejemplo, la armadura mostrada en la Fig. 13.9(a). Esta armadura consiste de seis elementos conectados por cuatro nodos y apoyada por tres componentes de reacciones. Por lo tanto, como se discutió en la Sección 4.4, el grado de indeterminación de la armadura es igual a $(m + r) - 2j = (6 + 3) - 2(4) = 1$. Debido a que las tres reacciones se pueden determinar mediante las tres ecuaciones de equilibrio de la armadura completa, la armadura es internamente indeterminada en primer grado; es decir, contiene un elemento adicional a los requeridos para la estabilidad interna.

Para analizar la armadura, debemos seleccionar la fuerza axial de uno de sus elementos como la redundante. Suponga que seleccionamos la fuerza F_{AD} en el elemento diagonal AD como la redundante. Se elimina la restricción correspondiente a F_{AD} de la armadura cortando al elemento AD para obtener la armadura primaria mostrada en la Fig. 13.9(b). Tenga en cuenta que debido a que el elemento AD no puede mantener una fuerza, la armadura primaria es estáticamente determinada. Cuando la viga primaria está sujeta a una carga externa P , se deforma y un espacio Δ_{ADO} se abre entre los extremos de las

partes del elemento AD , como se muestra en la Fig. 13.9(b). Debido a que tal espacio existe en la armadura indeterminada actual, concluimos que la fuerza redundante F_{AD} debe ser de magnitud suficiente para que los extremos del elemento AD regresen y cierren el espacio. Para evaluar el efecto de F_{AD} cerrando el espacio, sujetamos a la armadura primaria una carga unitaria de F_{AD} aplicando una carga axial igual unitaria en sentido opuesto a los dos extremos del elemento AD , como se observa en la Fig. 13.9(c). Tenga en cuenta que el sentido de la redundante F_{AD} no se conoce aún y se asume arbitrariamente como de tensión, con la fuerza axial unitaria tendiendo a estirar las partes del elemento AD . La carga unitaria de F_{AD} deforma la armadura primaria y genera que los extremos del elemento AD se traslapen en una cantidad $f_{AD,AD}$, como se muestra en la Fig. 13.9(c). por lo tanto, el traslape en el elemento AD debido a la fuerza axial de magnitud F_{AD} es igual a $f_{AD,AD}F_{AD}$.

Debido a que ni el traslape ni el espacio entre el elemento AD existe en la armadura indeterminada real, podemos expresar la ecuación de compatibilidad como

$$\Delta_{ADO} + f_{AD,AD}F_{AD} = 0 \quad (13.11)$$

La cual se puede resolver para la redundante de la fuerza axial F_{AD} después de que las magnitudes de Δ_{ADO} y $f_{AD,AD}$ han sido determinadas.

Tenga en cuenta que Δ_{ADO} y $f_{AD,AD}$ son desplazamientos relativos entre los nodos A y D de la armadura primaria. Estos desplazamientos se pueden calcular usando el método del trabajo virtual y empleando un sistema virtual que consiste de dos cargas unitarias aplicadas en sentido opuesto en la dirección del elemento AD en los nodos A y D , como se muestra en la Fig. 13.9(d). Una comparación entre las Figs. 13.9(c) y (d) indica que las fuerzas axiales en los elementos de la armadura primaria debido a cargas unitarias virtuales (Fig. 13.9(d)) serán iguales como las fuerzas u_{AD} debido a las fuerzas axiales unitarias en el elemento AD (Fig. 13.9(c)). Por lo tanto, la armadura con fuerzas axiales unitarias en el elemento AD se puede usar como sistema virtual para calcular los desplazamientos relativos. Si las fuerzas axiales debido a la carga externa P son simbólicamente indicadas como fuerzas F_O (Fig. 13.9(b)), entonces la expresión para el trabajo virtual Δ_{ADO} se puede escribir como

$$\Delta_{ADO} = \sum \frac{F_O u_{AD} L}{AE} \quad (13.12)$$

Para calcular el coeficiente de flexibilidad $f_{AD,AD}$, ambos sistemas reales y virtuales consisten de una fuerza unitaria en el elemento AD , como se muestra en la Fig. 13.9(c). Por lo tanto, la expresión para el trabajo virtual para $f_{AD,AD}$ está dada por

$$f_{AD,AD} = \sum \frac{u_{AD}^2 L}{AE} \quad (13.13)$$

En la cual la fuerza en el elemento redundante AD debe incluirse en la suma para tomar en cuenta la deformación de este elemento.

Una vez que los desplazamientos relativos Δ_{ADO} y $f_{AD,AD}$ se han evaluado, sus valores se sustituyen en la ecuación de compatibilidad (Ec. (13.11)), la cual entonces se resuelve para la redundante F_{AD} . Con la redundante F_{AD} determinada, las fuerzas axiales en los elementos de la armadura indeter-

minada se pueden obtener mediante la superposición de las fuerzas en los elementos de la armadura primaria debido a la carga externa P y debido a la redundante F_{AD} ; es decir,

$$F = F_O + u_{AD} F_{AD} \quad (13.14)$$

Ejemplo 13.6

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de momento flexionante de la viga continua de dos claros mostrada en la Fig. 13.10(a) por el método de las deformaciones consistentes. Seleccione el momento flexionante en el apoyo interior B como la redundante.

Solución

Esta viga fue analizada en el Ejemplo 13.3 seleccionando la reacción vertical en el apoyo B como al redundante.

Viga primaria. La viga primaria se obtiene eliminando la restricción correspondiente al momento flexionante redundante M_B e insertando una articulación interna en B en la viga indeterminada, como se muestra en la Fig. 13.10(b). Después, la viga primaria se sujeta a carga externa y a una carga unitaria de la redundante M_B por separado, como se muestra en las Figs. 13.10(b) y (c), respectivamente.

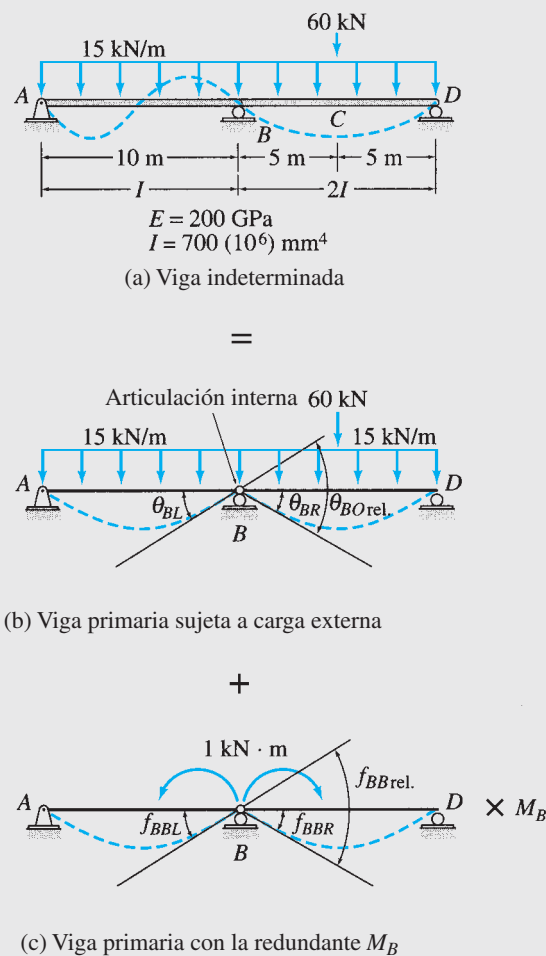
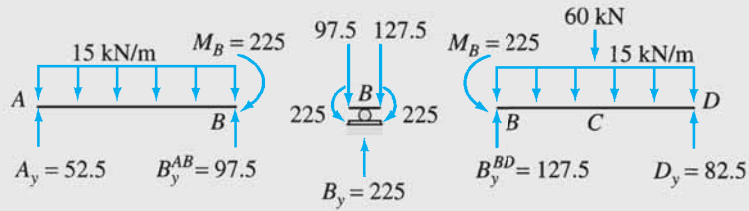


FIG. 13.10

continúa



(d) Fuerza en los extremos de los elementos y reacciones en los apoyos para la viga indeterminada

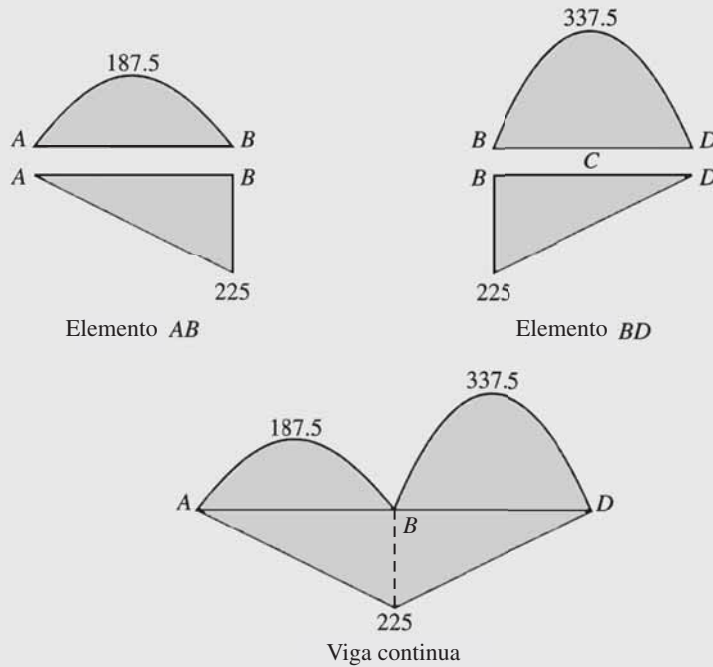


FIG. 13.10 (Continuación)

(e) Diagrama de momento flexionante (kN · m)

Ecuación de compatibilidad. Ver las Figs. 13.10(b) y (c):

$$\theta_{BO \text{ rel.}} + f_{BB \text{ rel.}} M_B = 0 \quad (1)$$

Pendientes en la viga primaria. Cada uno de los claros en la viga primaria se puede tratar como una viga simplemente apoyada de rigidez constante EI , de modo que podemos usar las fórmulas de la deflexión en vigas dadas en la parte interna de la portada del libro para evaluar los cambios de pendientes $\theta_{BO \text{ rel.}}$ y $f_{BB \text{ rel.}}$. De la Fig. 13.10(b), podemos ver que

$$\theta_{BO \text{ rel.}} = \theta_{BL} + \theta_{BR}$$

En la cual θ_{BL} y θ_{BR} son las pendientes en los extremos de los claros a la izquierda y a la derecha de B de la viga primaria, respectivamente, debido a la carga externa. Usando las fórmulas para la deflexión, obtenemos

$$\theta_{BL} = \frac{15(10)^3}{24EI} = \frac{625 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

$$\theta_{BR} = \frac{15(10)^3}{24E(2I)} + \frac{60(10)^2}{16E(2I)} = \frac{500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

continúa

Por lo tanto,

$$\theta_{BO \text{ rel.}} = \frac{625}{EI} + \frac{500}{EI} = \frac{1,125 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

El coeficiente de flexibilidad $f_{BB \text{ rel.}}$ se puede calcular de manera similar. De la Fig. 13.10(c), podemos ver que

$$f_{BB \text{ rel.}} = f_{BBL} + f_{BBR}$$

En la cual

$$f_{BBL} = \frac{10}{3EI} = \frac{3.33 \text{ m}}{EI} \quad \text{y} \quad f_{BBR} = \frac{10}{3E(2I)} = \frac{1.67 \text{ m}}{EI}$$

Por lo tanto,

$$f_{BB \text{ rel.}} = \frac{3.33}{EI} + \frac{1.67}{EI} = \frac{5 \text{ m}}{EI}$$

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de $\theta_{BO \text{ rel.}}$ y $f_{BB \text{ rel.}}$ en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), obtenemos

$$\frac{1,125}{EI} + \left(\frac{5}{EI}\right)M_B = 0$$

$$M_B = -225 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

Reacciones. Las fuerzas en los extremos de los elementos AB y BD de la viga continua se pueden ahora determinar mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de los cuerpos libres de los elementos mostrados en la Fig. 13.10(d). Considerando el equilibrio del elemento AB , obtenemos

$$A_y = \left(\frac{1}{2}\right)(15)(10) - \left(\frac{225}{10}\right) = 52.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_y^{AB} = \left(\frac{1}{2}\right)(15)(10) + \left(\frac{225}{10}\right) = 97.5 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta

De manera similar, para el elemento BD ,

$$B_y^{BD} = \left(\frac{1}{2}\right)(15)(10) + \left(\frac{60}{2}\right) + \left(\frac{225}{10}\right) = 127.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$D_y = \left(\frac{1}{2}\right)(15)(10) + \left(\frac{60}{2}\right) - \left(\frac{225}{10}\right) = 82.5 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta

Considerando el equilibrio del nodo B en la dirección vertical, obtenemos

$$B_y = B_y^{AB} + B_y^{BD} = 97.5 + 127.5 = 225 \text{ kN} \uparrow$$

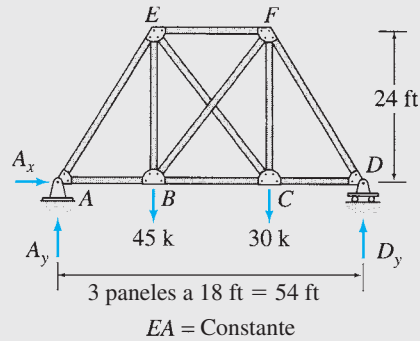
Respuesta

Diagrama de momento flexionante. El diagrama de momento flexionante para la viga continua, construido en partes por vigas simples, se muestra en la Fig. 13.10(e). Las dos partes del diagrama debido a la carga externa y a los momentos en los extremos del elemento se pueden superponer, si se desea, para obtener el diagrama de momento flexionante resultante mostrado en el ejemplo 13.3.

Respuesta

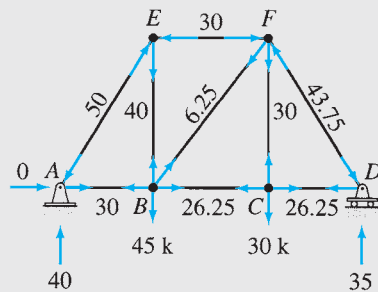
Ejemplo 13.7

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. 13.11(a) mediante el método de las deformaciones consistentes.

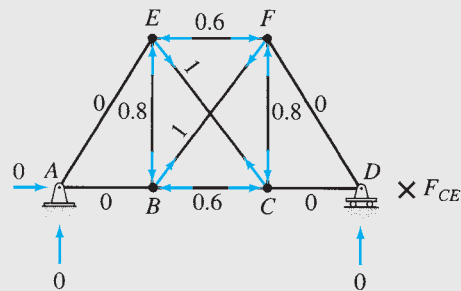
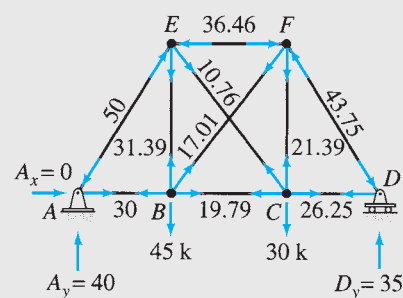


(a) Armadura indeterminada

=


 (b) Armadura primaria sujeta a cargas externas – Fuerzas F_O

+


 (c) Armadura primaria sujeta a fuerza de tensión unitaria en el elemento CE Fuerzas u_{CE}


(d) Reacciones en los apoyos y fuerzas en los elementos de la armadura indeterminada

FIG. 13.11

continúa

Solución

Grado de indeterminación. La armadura consiste de diez elementos conectados por seis nodos y se apoya en tres reacciones. Así, el grado de indeterminación de la armadura es igual a $(m + r) - 2j = (10 + 3) - 2(6) = 1$. Las tres reacciones se pueden determinar mediante las tres ecuaciones de equilibrio externo, de modo que la armadura es internamente indeterminada en primer grado.

Armadura primaria. La fuerza axial F_{CE} en el elemento diagonal CE se selecciona como la redundante. El sentido de F_{CE} se asume arbitrario en tensión. La armadura primaria obtenida eliminando el elemento CE se muestra en la Fig. 13.11(b). Después, la armadura primaria se sujeta de manera separada a la carga externa y a la fuerza unitaria redundante del elemento CE en tensión, como se muestra en las Figs. 13.11(b) y (c), respectivamente.

Ecuación de compatibilidad. La ecuación de compatibilidad se puede expresar como

$$\Delta_{CEO} + f_{CE, CE} F_{CE} = 0 \quad (1)$$

En la cual Δ_{CEO} indica el desplazamiento relativo entre los nodos C y E de la armadura primaria debido a las cargas externas, y el coeficiente de flexibilidad $f_{CE, CE}$ señala el desplazamiento relativo entre los mismos nodos debido a la carga unitaria de la redundante F_{CE} .

Deflexiones de la armadura primaria. La expresión para el trabajo virtual para Δ_{CEO} se puede escribir como

$$\Delta_{CEO} = \sum \frac{F_O u_{CE} L}{AE} \quad (2)$$

En donde F_O y u_{CE} representan, respectivamente, las fuerzas en los elementos debidas a las cargas externas y a la fuerza de tensión unitaria en el elemento CE . Los valores numéricos de estas fuerzas se calculan mediante el método de los nodos (Fig. 13.11(b) y (c)) y se tabulan en la Tabla 13.3. La ecuación (2) se aplica como se muestra en la Tabla 13.3, para obtener

$$\Delta_{CEO} = -\frac{1,116 \text{ k-ft}}{AE}$$

Después, el coeficiente de flexibilidad $f_{CE, CE}$ se calcula usando la expresión para el trabajo virtual (ver Tabla 13.3):

$$f_{CE, CE} = \sum \frac{u_{CE}^2 L}{AE} = \frac{103.68 \text{ ft}}{AE}$$

TABLA 13.3

Elemento	L (ft)	F_O (k)	u_{CE} (k/k)	$F_O u_{CE} L$ (k-ft)	$u_{CE}^2 L$ (ft)	$F = F_O + u_{CE} F_{CE}$ (k)
AB	18	30	0	0	0	30
BC	18	26.25	-0.6	-283.5	6.48	19.79
CD	18	26.25	0	0	0	26.25
EF	18	-30	-0.6	324	6.48	-36.46
BE	24	40	-0.8	-768	15.36	31.39
CF	24	30	-0.8	-576	15.36	21.39
AE	30	-50	0	0	0	-50
BF	30	6.25	1	187.5	30	17.01
CE	30	0	1	0	30	10.76
DF	30	-43.75	0	0	0	-43.75
Σ				-1,116	103.68	

$$\Delta_{CEO} = \frac{1}{AE} \sum F_O u_{CE} L = -\frac{1,116 \text{ k-ft}}{AE}$$

$$f_{CE, CE} = \frac{1}{AE} \sum u_{CE}^2 L = \frac{103.68 \text{ ft}}{AE}$$

$$F_{CE} = -\frac{\Delta_{CEO}}{f_{CE, CE}} = 10.76 \text{ k (T)}$$

continúa

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{CEO} y $f_{CE, CE}$ en la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), determinamos la redundante F_{CE} como

$$-\frac{1,116}{AE} + \left(\frac{103.68}{AE}\right)F_{CE} = 0$$

$$F_{CE} = 10.76 \text{ k (T)}$$

Respuesta

Reacciones. Ver Fig. 13.11(d). Tenga en cuenta que las reacciones debidas a la redundante F_{CE} son cero, como se muestra en la Fig. 13.11(c).

Respuesta

Fuerzas axiales en los elementos. Las fuerzas restantes en los elementos de la armadura indeterminada se pueden obtener mediante las relaciones de superposición:

$$F = F_O + u_{CE}F_{CE}$$

Las fuerzas en los elementos obtenidas de esta manera se muestran en la Tabla 13.3 y en la Fig. 13.11(d).

Respuesta

13.3 Estructuras con varios grados de indeterminación

El método de las deformaciones consistentes desarrollado en las secciones anteriores para analizar estructuras con un solo grado de indeterminación se puede fácilmente extender al análisis de estructuras con varios grados de indeterminación. Considere, por ejemplo, la viga continua de cuatro claros sujeta a carga uniformemente distribuida w que se muestra en la Fig. 13.12(a). La viga está soportada por seis reacciones; por lo tanto, su grado de indeterminación es igual a $6 - 3 = 3$. Para analizar esta viga, debemos seleccionar tres reacciones como las redundantes. Seleccionamos las reacciones verticales B_y , C_y y D_y en el interior de los apoyos B , C y D , respectivamente, como las redundantes. Se eliminan los patines en B , C y D de la viga indeterminada para obtener la viga primaria determinada y estable, como se muestra en la Fig. 13.12(b). Las tres redundantes ahora se tratan como cargas desconocidas en la viga primaria, y sus magnitudes se pueden determinar de las condiciones de compatibilidad que las deflexiones de la viga primaria en las ubicaciones B , C y D de las redundantes debido a la combinación de efectos de la carga externa w y de las redundantes desconocidas B_y , C_y y D_y , que deben ser iguales a cero. Esto es porque las deflexiones en la viga indeterminada en los patines B , C y D son cero.

Para establecer las ecuaciones de compatibilidad, sometemos a la viga primaria de manera separada a la carga externa w (Fig. 13.12(b)) y a una carga unitaria en cada redundante B_y , C_y y D_y (Fig. 13.12(c), (d), y (e), respectivamente). Como se muestra en la Fig. 13.12(b), las deflexiones en la viga primaria en los puntos B , C y D debidas a la carga externa w se indican mediante Δ_{BO} , Δ_{CO} y Δ_{DO} , respectivamente. Tenga en cuenta que el primer subíndice de la deflexión Δ indica la localización de la deflexión, mientras que el segundo subíndice, O , se usa para señalar que la deflexión se debe a la carga externa. Los coeficientes de flexibilidad que representan las deflexiones de la viga primaria debido a las cargas unitarias de las redundantes también se definen por el doble subíndice, como se muestra de la Fig. 13.12(c) a la (e). El primer subíndice de un coeficiente de flexibilidad indica la localización de la deflexión, el segundo subíndice señala la ubicación de la carga unitaria que

genera la deflexión. Por ejemplo, el coeficiente de flexibilidad f_{CB} indica que la deflexión en el punto C de la viga primaria debido a la carga unitaria en el punto B (Fig. 13.12(c)), mientras que f_{BC} indica la deflexión en B debido a la carga unitaria en C (Fig. 13.12(d)), y así sucesivamente. De manera alternativa, un coeficiente de flexibilidad f_{ij} puede ser interpretado como la deflexión correspondiente a la redundante i debido a la carga unitaria de una redundante j ; por ejemplo, f_{CB} indica la deflexión correspondiente a la redundante C_y debido a la carga unitaria de la redundante B_y (Fig. 13.12(c)), f_{BC} indica la deflexión correspondiente a la redundante B_y debido a la carga unitaria C_y , y así sucesivamente. Una deflexión o coeficiente de flexibilidad en la ubicación de una redundante se considera positiva si tiene el mismo sentido que el asumido para la redundante.

Enfoquemos nuestra atención en el punto B de la viga primaria. Vemos que la deflexión en este punto causado por la carga externa es Δ_{BO} (Fig. 13.12 (b)), la deflexión debida a B_y es $f_{BB}B_y$ (Fig. 13.12 c)), la deflexión provocada por C_y es $f_{BC}C_y$ (Fig. 3.12(d)), por lo tanto, el total de la deflexión en B por la combinación de efectos de la carga externa y de todas las redundantes es $\Delta_{BO} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y + f_{BD}D_y$. Debido a que la deflexión de la viga real indeterminada (Fig. 13.12(a)), en el apoyo B es cero, fijamos la suma algebraica de las deflexiones de la viga primaria en B igual a cero para obtener las ecuaciones de compatibilidad, $\Delta_{BO} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y + f_{BD}D_y = 0$. Después, enfocamos nuestra atención en el punto C de la viga primaria; sumando algebraicamente las deflexiones en C debido a la carga externa y a las redundantes y fijando la suma igual a cero, obtenemos la segunda ecuación de compatibilidad, $\Delta_{CO} + f_{CB}B_y + f_{CC}C_y + f_{CD}D_y = 0$; de manera similar, fijamos igual a cero la suma algebraica de las deflexiones de la viga primaria en D debido a la carga externa y a las redundantes, obtenemos la tercera ecuación de compatibilidad, $\Delta_{DO} + f_{DB}B_y + f_{DC}C_y + f_{DD}D_y = 0$. Las tres ecuaciones de compatibilidad obtenidas son

$$\Delta_{BO} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y + f_{BD}D_y = 0 \quad (13.15)$$

$$\Delta_{CO} + f_{CB}B_y + f_{CC}C_y + f_{CD}D_y = 0 \quad (13.16)$$

$$\Delta_{DO} + f_{DB}B_y + f_{DC}C_y + f_{DD}D_y = 0 \quad (13.17)$$

Debido a que el número de las ecuaciones de compatibilidad es igual al número de las redundantes desconocidas, estas ecuaciones se pueden resolver para las redundantes. Como las Ecs. (13.15) a la (13.17) indican, las ecuaciones de compatibilidad de estructuras con varios grados de indeterminación son, en general, *empatadas*, en el sentido de que cada ecuación puede contener más de una redundante desconocida. El emparejamiento ocurre porque la deflexión en la ubicación de la redundante se puede generar no solo por una redundante en particular (y la carga externa), sino por una o todas las redundantes restantes. Debido a tal emparejamiento, las ecuaciones de compatibilidad se deben resolver simultáneamente para determinar las redundantes desconocidas.

La viga primaria es estáticamente determinada, así que sus deflexiones debidas a la carga externa además de los coeficientes de flexibilidades se pueden evaluar usando los métodos discutidos previamente en este texto. El número total de deflexiones (incluidos los coeficientes de flexibilidad) involucrados en el sistema de ecuaciones de compatibilidad depende del grado de indeterminación de la estructura. De las Ecs. (13.15) a la (13.17), podemos

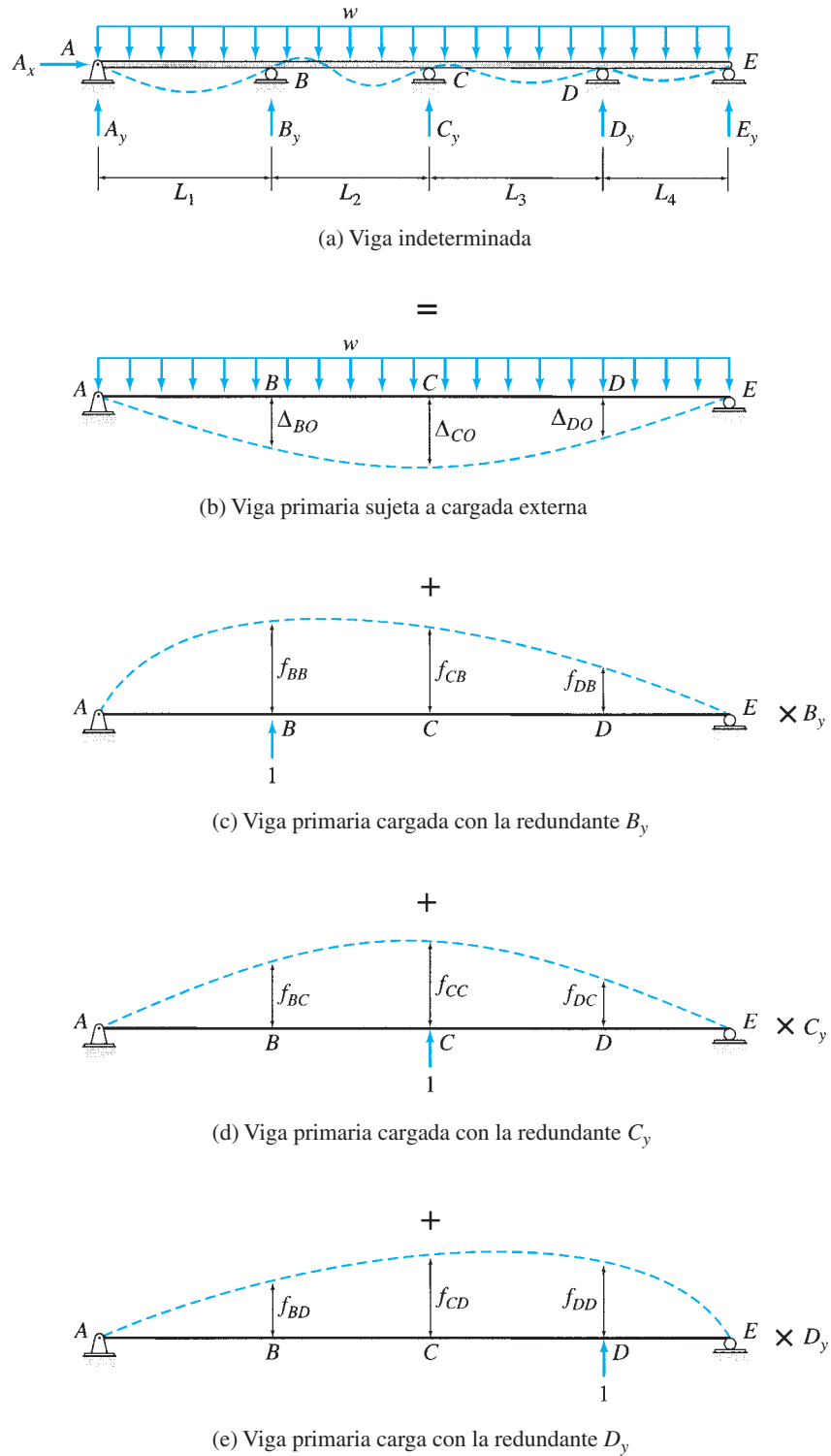


FIG. 13.12

ver que para la viga en consideración, la cual es indeterminada en tercer grado, las ecuaciones de compatibilidad contienen un total de 12 deflexiones (es decir, 3 deflexiones debidas a la carga externa más 9 coeficientes de flexi-

bilidad); sin embargo, de acuerdo con la *ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas* (Sección 7.8), $f_{CB} = f_{BC}$, $f_{DB} = f_{BD}$ y $f_{DC} = f_{CD}$. Por lo tanto, tres de los coeficientes de flexibilidad se pueden obtener aplicando la ley de Maxwell, reduciendo de este modo el número de deflexiones a calcular a 9. Usando un razonamiento similar, se puede mostrar que el número total de deflexiones necesarias para el análisis de una estructura con el grado de indeterminación de i igual a $(i + i^2)$, de los cuales $(3i + i^2)/2$ deflexiones se deben de calcular, mientras que las restantes se pueden obtener con la aplicación de la Ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas.

Una vez que las redundantes han sido determinadas resolviendo las ecuaciones de compatibilidad, las otras respuestas características de la estructura se pueden evaluar mediante equilibrio o superposición.

Procedimiento de análisis

Basados en la discusión anterior, podemos desarrollar el siguiente procedimiento paso a paso para el análisis de estructuras mediante el método de las deformaciones consistentes:

1. Determine el grado de indeterminación de la estructura.
2. Seleccione las fuerzas redundantes y/o momentos. El total de las redundantes debe ser igual al grado de indeterminación de la estructura. Además, las redundantes se deben escoger de modo que una vez eliminadas las restricciones de la estructura indeterminada el resultado sea una estructura primaria estáticamente determinada y estable. El sentido de las redundantes se desconoce y se puede suponer arbitrariamente. Una respuesta positiva para la redundante implicará que el sentido supuesto inicialmente para la redundante fue correcto.
3. Elimine las restricciones correspondientes a las redundantes de la estructura indeterminada obteniendo la estructura primaria (determinada).
 - a. Dibuje el diagrama de la estructura primaria únicamente con la carga externa aplicada en ella. La fuerza unitaria (o momento) se debe aplicar en la dirección positiva de la redundante. Bosqueje la configuración deformada de la estructura, y muestre la deflexión (o pendiente) en el punto de la aplicación y en la dirección de cada redundante mediante un símbolo adecuado.
 - b. Después, para cada redundante, dibuje un diagrama de la estructura primaria con la carga unitaria de la redundante aplicada en ella solamente. La fuerza unitaria (o momento) debe de aplicarse en la dirección positiva de la redundante. Bosqueje la configuración deformada de la estructura, y muestre mediante un símbolo adecuado los coeficientes de flexibilidad en las ubicaciones de todas las redundantes. Para indicar que tanto la carga como la respuesta estructural se multiplicarán por la redundante en consideración, muestre la redundante seguida del signo ($\times$) junto al diagrama de la estructura. La deflexión (o pendiente) en la ubicación de cualquier redundante debida a la redundante en consideración es igual al coeficiente de flexibilidad en la ubicación multiplicada por la magnitud desconocida de la redundante.
5. Escriba una ecuación de compatibilidad para la ubicación de cada redundante fijando la suma algebraica de las deflexiones (o pendientes)

tes) de la estructura primaria debido a la carga externa y cada una de las redundantes igual al desplazamiento desconocido (o rotación) en la correspondiente ubicación de la estructura indeterminada real. El total de ecuaciones de compatibilidad obtenidas de esta manera deben ser igual al número de redundantes.

6. Calcule las deflexiones (y los coeficientes de flexibilidad) involucrados en las ecuaciones de compatibilidad usando el método discutido previamente en este texto y mediante la aplicación de la ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas. Una deflexión (o coeficiente de flexibilidad) en la ubicación de una redundante se considera positiva si tiene el mismo sentido que el supuesto para la redundante.
7. Sustituya los valores de las deflexiones calculadas en el paso 6 en las ecuaciones de compatibilidad, y resuélvalas para las redundantes desconocidas.
8. Una vez determinadas las redundantes, las otras respuestas características (es decir, reacciones, diagrama de cortante y momento flexionante, y/o fuerzas en los elementos) de la estructura indeterminada se deben evaluar ya sea con las consideraciones de equilibrio o mediante superposición de las respuestas de la estructura primaria debido a las cargas externas y debido a cada una de las redundantes.

Ejemplo 13.8

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 13.13(a) usando el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. $i = 2$.

Viga primaria. Las reacciones verticales B_y y C_y en el apoyo interior B y C , respectivamente, se seleccionan como redundantes. El apoyo de patín en B y C se eliminan para obtener la viga primaria mostrada en la Fig. 13.13(b). Después, la viga primaria se somete de manera separada a la carga externa de 2-k/ft y a la carga unitaria de la redundante B_y y C_y , como se muestra en las Figs. 13.13(b), (c) y (d), respectivamente.

Ecuaciones de compatibilidad. Debido a que las deflexiones de la viga real indeterminada en los apoyos B y C son cero, fijamos a cero la sumatoria algebraica de las deflexiones en los puntos B y C , respectivamente, de la estructura primaria debido a la carga externa de 2-k/ft y en cada una de las redundantes para obtener las ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta_{BO} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{CO} + f_{CB}B_y + f_{CC}C_y = 0 \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. Usando las fórmulas de deflexiones en vigas, obtenemos

$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -\frac{293,333.333 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

$$f_{BB} = f_{CC} = \frac{3,555.556 \text{ ft}^3}{EI}$$

$$f_{CB} = \frac{3,111.111 \text{ ft}^3}{EI}$$

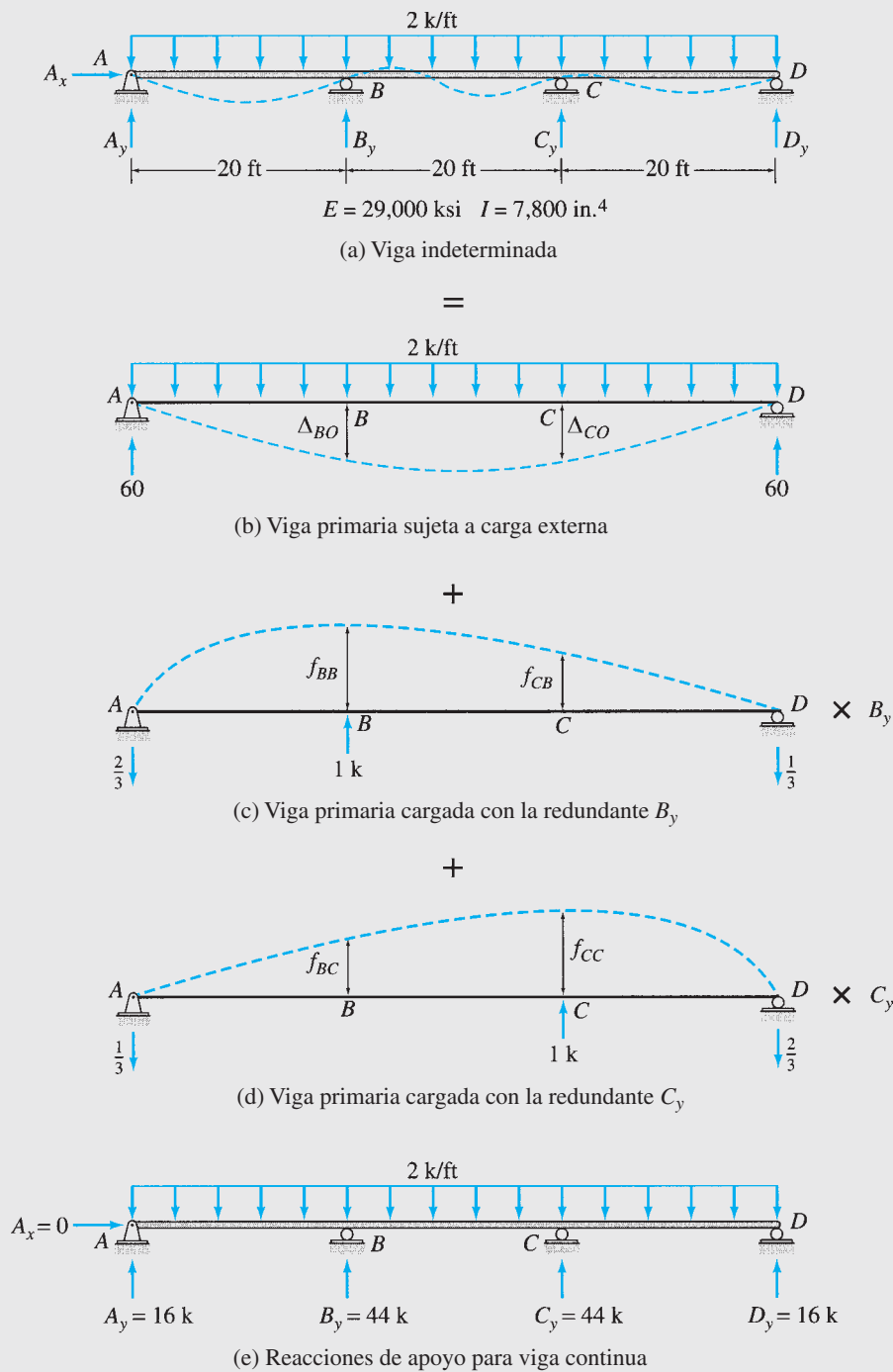


FIG. 13.13

continúa

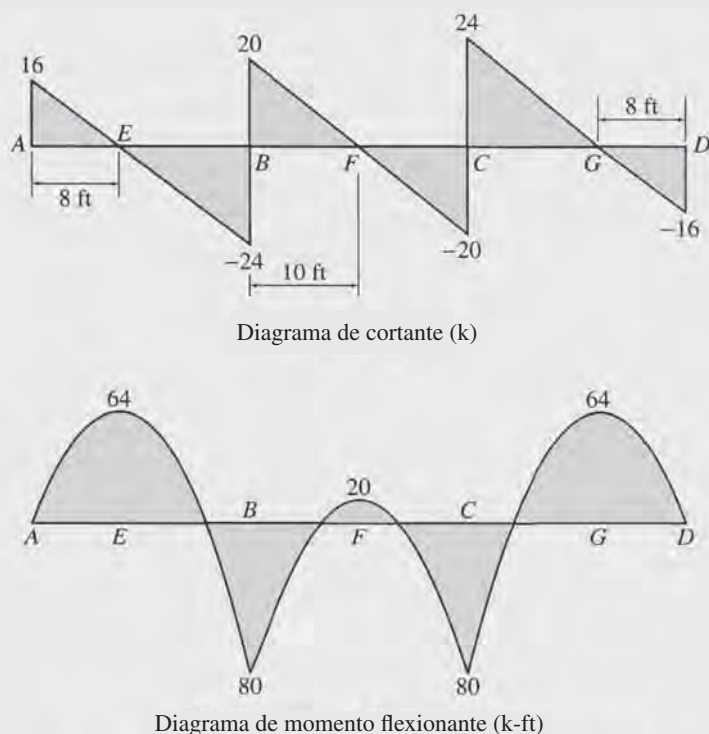


FIG. 13.10 (Continuación) (f) Diagrama de momento flexionante y cortante de la viga continua

Aplicando la ley de Maxwell,

$$f_{BC} = \frac{3,111.111 \text{ ft}^3}{EI}$$

Magnitud de las redundantes. Sustituyendo los valores de las deflexiones y los coeficientes de flexibilidad de la viga primaria en las ecuaciones de compatibilidad (Ecs. (1) y (2)), obtenemos

$$-293,333.333 + 3,555.556B_y + 3,111.111C_y = 0$$

$$-293,333.333 + 3,111.111B_y + 3,555.556C_y = 0$$

o

$$3,555.556B_y + 3,111.111C_y = 293,333.333 \quad (1a)$$

$$3,111.111B_y + 3,555.556C_y = 293,333.333 \quad (2a)$$

Resolviendo las Ecs. (1a) y (2a) simultáneamente para B_y y C_y , obtenemos

$$B_y = C_y = 44 \text{ k } \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

Reacciones. Las reacciones restantes se pueden determinar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la viga continua como sigue (Fig. 13.13(e)):

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Respuesta}$$

$$+\zeta \sum M_D = 0 \quad -A_y(60) + 2(60)(30) - 44(40 + 20) = 0$$

$$A_y = 16 \text{ k } \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 16 - 2(60) + 44 + 44 + D_y = 0$$

$$D_y = 16 \text{ k } \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

continúa

Diagrama de cortante y momento flexionante. Los diagramas de cortante y momento flexionante de la viga se muestran en la Fig. 13.13(f). **Respuesta**

Las formas de los diagramas de cortante y de momento flexionante de vigas continuas, en general, son similares a aquellos para la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 13.13(f). Como se muestra en estas figuras, los momentos flexionantes negativos generalmente se presentan en los apoyos interiores de las vigas continuas, mientras que el diagrama de momento flexionante es usualmente positivo sobre la mitad de los claros. El momento flexionante de un apoyo articulado en un extremo de la viga es cero, y es generalmente negativo en un apoyo de extremo empotrado. Además, la forma del diagrama de momento flexionante es parabólica para los claros sujetos a cargas uniformemente distribuidas, y consiste de segmentos lineales para los claros sujetos a cargas concentradas. Los valores reales de los momentos flexionantes, por supuesto, dependen de la magnitud de las cargas además de la longitud y la rigidez a flexión de los claros de las vigas continuas.

Ejemplo 13.9

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga mostrada en la Fig. 13.14(a) usando el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. $i = 2$.

Viga primaria. Las reacciones verticales C_y y E_y en el apoyo interior C y E , respectivamente, se eligen como redundantes. Estos apoyos se eliminan para obtener la viga primaria mostrada en la Fig. 13.14(b). Después, la viga primaria se somete de manera separada a la carga externa y a la carga unitaria de las redundantes C_y y E_y , como se muestra en las Figs. 13.14(b), (c) y (d), respectivamente.

Ecuaciones de compatibilidad. Ver Figs. de la 13.14(a) a la (d).

$$\Delta_{CO} + f_{CC} C_y + f_{CE} E_y = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{EO} + f_{EC} C_y + f_{EE} E_y = 0 \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. Usando las fórmulas de las deflexiones en vigas, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{CO} &= -\frac{82,500 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} & \Delta_{EO} &= -\frac{230,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \\ f_{CC} &= \frac{333.333 \text{ m}^3}{EI} & f_{EC} &= \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI} \\ f_{EE} &= \frac{2,666.667 \text{ m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Aplicando la ley de Maxwell,

$$f_{CE} = \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI}$$

Magnitudes de las redundantes. Sustituyendo las deflexiones de la viga primaria en las ecuaciones de compatibilidad, obtenemos

$$-82,500 + 333.333 C_y + 833.333 E_y = 0$$

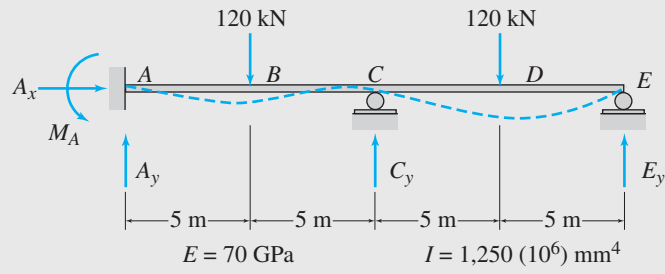
$$-230,000 + 833.333 C_y + 2,666.667 E_y = 0$$

o

$$333.333 C_y + 833.333 E_y = 82,500 \quad (1a)$$

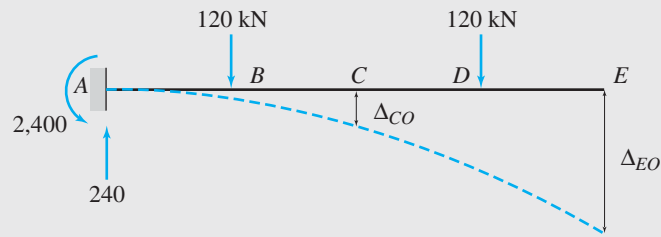
$$833.333 C_y + 2,666.667 E_y = 230,000 \quad (2a)$$

continúa



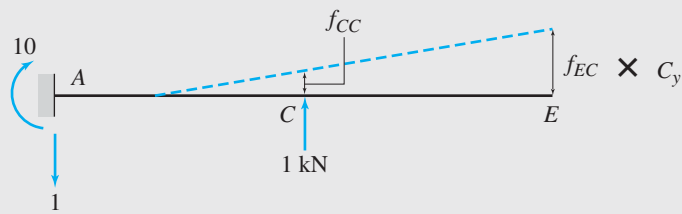
(a) Viga indeterminada

=

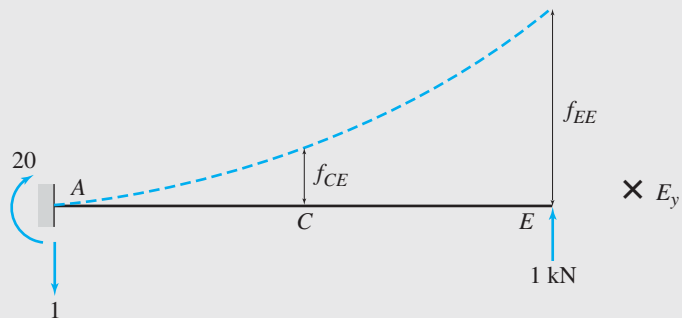


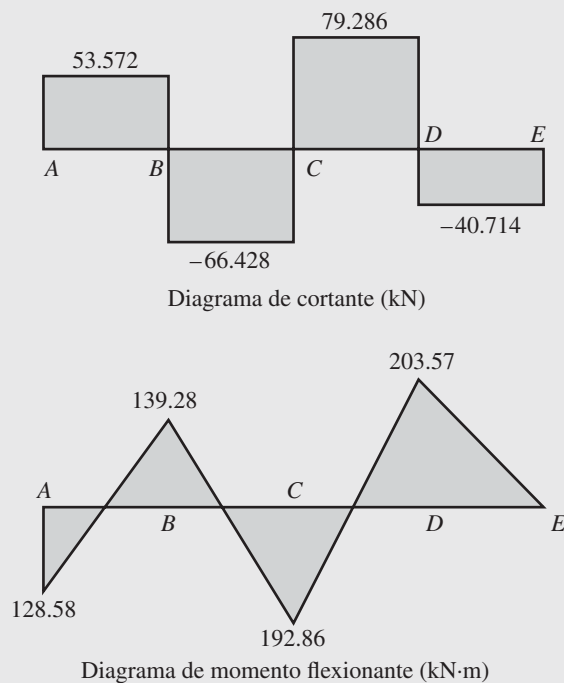
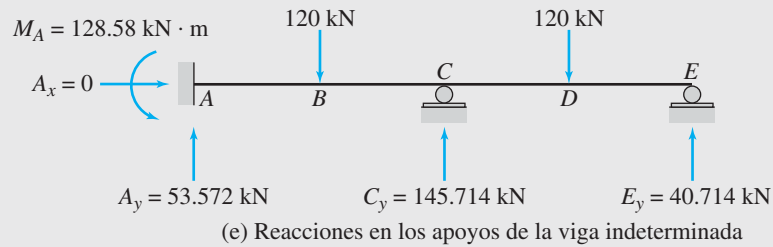
(b) Viga primaria sujeta a carga externa

+


 (c) Viga primaria cargada con la redundante C_y

+


 (d) Viga primaria cargada con la redundante E_y



(f) Diagrama de momento flexionante y cortante de la viga indeterminada

FIG. 13.14 (Continuación)

Resolviendo las Ecs. (1a) y (2a) simultáneamente para C_y y E_y , obtenemos

$$C_y = 145.714 \text{ kN } \uparrow \quad E_y = 40.714 \text{ kN } \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

Reacciones. Las reacciones restantes se pueden determinar aplicando las tres ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la viga continua como sigue (Fig. 13.14(e)):

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Respuesta}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 120 + 145.714 - 120 + 40.714 = 0$$

$$A_y = 53.572 \text{ kN } \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \quad M_A - 120(5) + 145.714(10) - 120(15) + 40.714(20) = 0$$

$$M_A = 128.58 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

Diagrama de cortante y momento flexionante. Ver Fig. 13.14(f).

Respuesta

Ejemplo 13.10

Determine los momentos en los apoyos empotrados de la viga mostrada en la Fig. 13.15(a) usando el método de las deformaciones consistentes. Además, dibuje el diagrama de momento flexionante de la viga.

Solución

Grado de indeterminación. La viga está soportada por seis reacciones; por lo tanto, su grado de indeterminación es $i = 6 - 3 = 3$. Sin embargo, debido a que la viga está sujeta solo a carga vertical, las reacciones horizontales A_x y C_x deben ser cero. Entonces, para analizar esta viga, necesitamos seleccionar solo dos de las cuatro reacciones como redundantes.

Viga primaria. El momento M_A y M_C en los apoyos empotrados A y C , respectivamente, se seleccionan como redundantes. Las restricciones contra la rotación en los apoyos extremos A y C se eliminan para obtener la viga primaria simplemente apoyada mostrada en la Fig. 13.15(b). Después, la viga primaria se somete de manera separada a la carga externa de P y a la carga unitaria de la redundante M_A y M_C , como se muestra en las Figs. 13.15(b), (c) y (d), respectivamente.

Ecuaciones de compatibilidad. Nada más que las pendientes de la viga indeterminada en los apoyos empotrados A y C son cero, escribimos las ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_{AO} + f_{AA} M_A + f_{AC} M_C = 0 \quad (1)$$

$$\theta_{CO} + f_{CA} M_A + f_{CC} M_C = 0 \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. Las pendientes en los extremos A y C de la viga primaria debidas a la carga externa P y a la carga unitaria de cada una de las redundantes obtenidas usando las fórmulas de deflexión o del método de la viga conjugada son

$$\theta_{AO} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$$

$$\theta_{CO} = -\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$$

$$f_{AA} = f_{CC} = \frac{L}{3EI}$$

$$f_{CA} = \frac{L}{6EI}$$

Aplicando la ley de Maxwell,

$$f_{AC} = \frac{L}{6EI}$$

Magnitudes de las redundantes. Sustituyendo las deflexiones de la viga primaria en las ecuaciones de compatibilidad, obtenemos

$$-\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} + \left(\frac{L}{3EI}\right)M_A + \left(\frac{L}{6EI}\right)M_C = 0 \quad (1a)$$

$$-\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL} + \left(\frac{L}{6EI}\right)M_A + \left(\frac{L}{3EI}\right)M_C = 0 \quad (2a)$$

Las cuales se pueden simplificar

$$2M_A + M_C = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{L^2} \quad (1b)$$

$$M_A + 2M_C = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{L^2} \quad (2b)$$

continúa

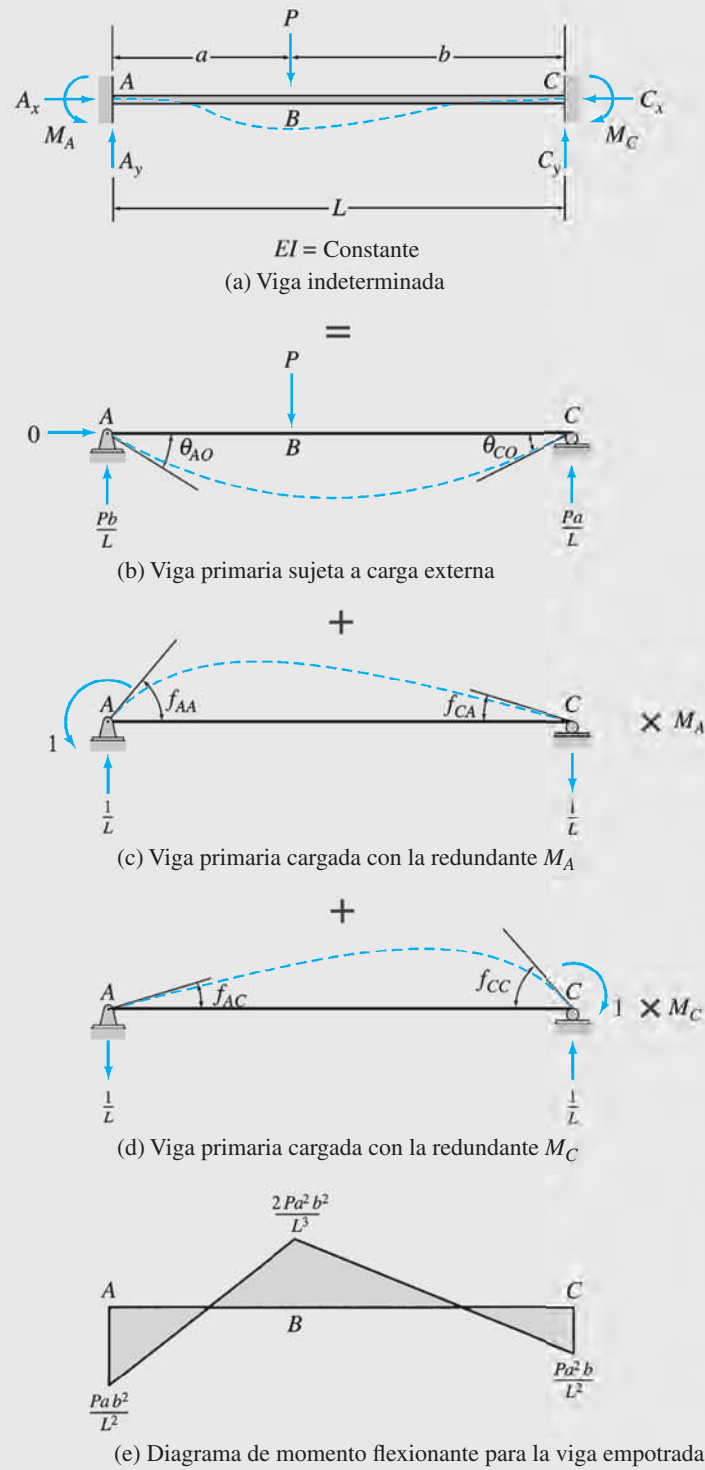


FIG. 13.15

continúa

Para resolver las Ecs. (1b) y (2b) para M_A y M_C , multiplicamos la Ec (1b) por 2 y se resta de la Ec. (2b):

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{P}{3L^2} [a(L^2 - a^2) - 2b(L^2 - b^2)] \\ &= -\frac{P}{3L^2} [a(L-a)(L+a) - 2b(L-b)(L+b)] \\ &= -\frac{Pab}{3L^2} [(L+a) - 2(L+b)] \\ &= \frac{Pab^2}{L^2} \\ M_A &= \frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{)} \end{aligned}$$

Respuesta

Sustituyendo la expresión para M_A en la Ec. (1b) o Ec. (2b) y resolviendo para M_C , obtenemos lo siguiente.

$$M_C = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad \text{)} \quad \text{Respuesta}$$

Diagrama de momento flexionante. Las reacciones verticales A_y y C_y se pueden determinar ahora superponiendo las reacciones de la viga primaria debido a la carga externa P y a cada redundante (Figs. 13.15(b) a la (d)). Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_y &= \frac{Pb}{L} + \frac{1}{L}(M_A - M_C) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \\ C_y &= \frac{Pa}{L} - \frac{1}{L}(M_A - M_C) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \end{aligned}$$

El diagrama de momento flexionante de la viga se muestra en la Fig. 13.15(e).

Respuesta

Los momentos en los extremos de la viga cuyos extremos están empotrados contra la rotación generalmente se denominan *apoyos de momento*. Tales momentos juegan un papel importante en el análisis de las estructuras por el método de los desplazamientos, que serán considerados en capítulos posteriores. Como se ilustró aquí, las expresiones para los momentos en los extremos empotrados debido a varias condiciones de cargas se pueden obtener usando el método de las deformaciones consistentes. Las expresiones para los momentos en los extremos empotrados para algunos tipos de condiciones de carga están dadas en la parte interna de la portada de este libro como referencia.

Ejemplo 13.11

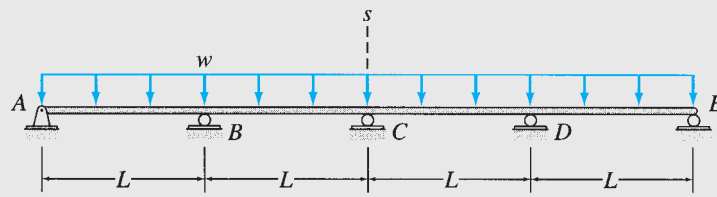
Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de cuatro claros mostrada en la Fig. 13.16(a) usando el método de las deformaciones consistentes.

Solución

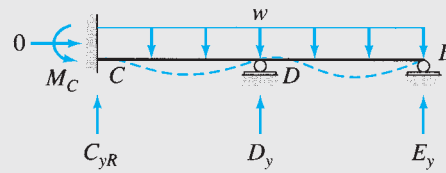
Simetría. Como la viga y las cargas son simétricas con respecto al eje vertical que pasa a través del patín de soporte C (Fig. 13.16(a)), analizaremos solo la mitad derecha de la viga con respecto a las condiciones de frontera simétricas, como se muestra en la Fig. 13.16(b). La respuesta de la mitad izquierda de la viga se obtendrá del reflejo de la respuesta de la mitad derecha del otro lado del eje de simetría.

Grado de indeterminación. El grado de indeterminación de la subestructura (Fig. 13.16(b)) es 2. Tenga en cuenta que puesto que el grado de indeterminación de la viga continua completa (Fig. 13.16(a)) es tres, utilizar la simetría de la estructura reducirá los cálculos requeridos en el análisis.

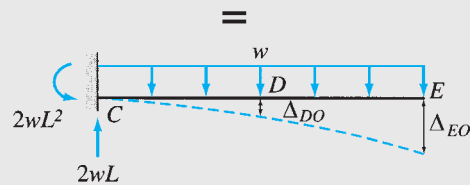
continúa


 $EI = \text{Constante}$

(a) Viga indeterminada



(b) Subestructura para el análisis



(c) Viga primaria sujeta a carga externa

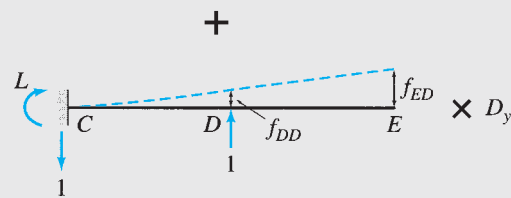
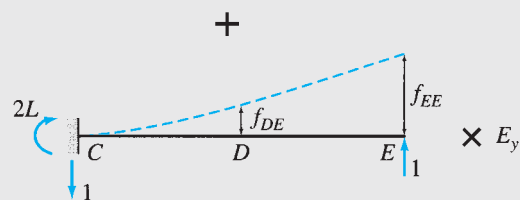
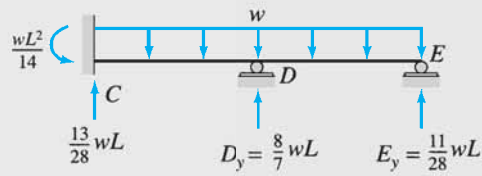
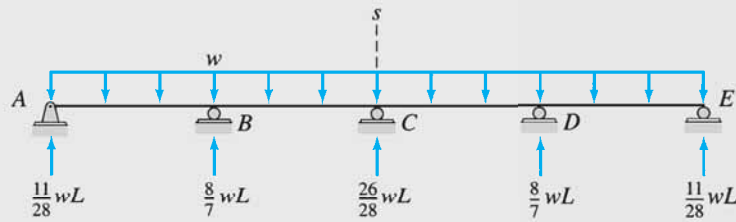

(d) Viga primaria cargada con la redundante D_y

(e) Viga primaria cargada con la redundante E_y

FIG. 13.16

continúa



(f) Reacciones de la subestructura



(g) Reacciones en los apoyos para la viga continua

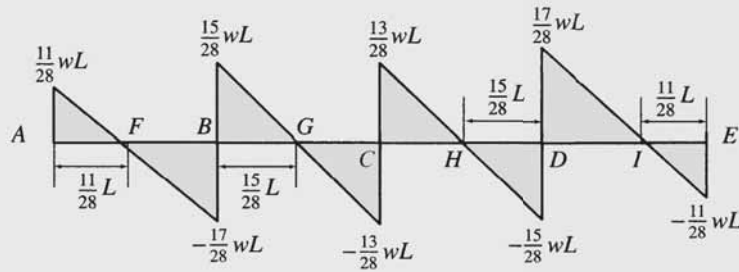


Diagrama de cortante

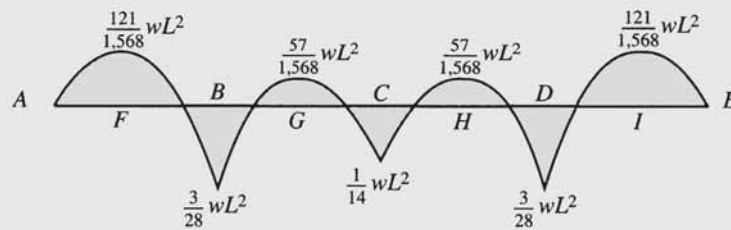


Diagrama de momento flexionante

(h) Diagrama de cortante y momento flexionante para la viga continua

Viga primaria. Las reacciones verticales D_y y E_y en el apoyo de patín D y E , respectivamente, se seleccionan de la subestructura como las redundantes. Los apoyos de patines se eliminan para obtener la viga primaria en cantiliver que se muestra en la Fig. 13.16(c).

Ecuaciones de compatibilidad. Ver las Figs. 13.16(b) a la (e).

$$\Delta_{DO} + f_{DD}D_y + f_{DE}E_y = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{EO} + f_{ED}D_y + f_{EE}E_y = 0 \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. Usando las fórmulas de deflexión, obtenemos

$$\Delta_{DO} = -\frac{17wL^4}{24EI} \quad \Delta_{EO} = -\frac{2wL^4}{EI}$$

$$f_{DD} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{ED} = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$f_{EE} = \frac{8L^3}{3EI}$$

Aplicando la ley de Maxwell,

$$f_{DE} = \frac{5L^3}{6EI}$$

Magnitudes de las redundantes. Sustituyendo las deflexiones de la viga primaria en las ecuaciones de compatibilidad, obtenemos,

$$-\frac{17wL^4}{24EI} + \left(\frac{L^3}{3EI}\right)D_y + \left(\frac{5L^3}{6EI}\right)E_y = 0 \quad (1a)$$

$$-\frac{2wL^4}{EI} + \left(\frac{5L^3}{6EI}\right)D_y + \left(\frac{8L^3}{3EI}\right)E_y = 0 \quad (2a)$$

Las cuales se pueden simplificar a

$$8D_y + 20E_y = 17wL \quad (1b)$$

$$5D_y + 16E_y = 12wL \quad (2b)$$

Resolviendo las Ecs. (1b) y (2b) simultáneamente para D_y y E_y , obtenemos

$$D_y = \frac{8}{7}wL \quad \uparrow \quad E_y = \frac{11}{28}wL \quad \uparrow$$

Respuesta

Reacciones. Las reacciones restantes de la subestructura, obtenidas por la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, se muestran en la Fig. 13.16(f). Las reacciones a la derecha del eje s se obtienen mediante reflexión, como se muestra en la Fig. 13.16(g).

Respuesta

Diagrama de cortante y momento flexionante. Usando las reacciones de la viga continua, se construye el cortante y el momento flexionante. Estos diagramas se muestran en la Fig. 13.16(h).

Respuesta

Ejemplo 13.12

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. 13.17(a) usando el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. $i = (m + r) - 2j = (14 + 4) - 2(8) = 2$.

Armadura primaria. La reacción vertical D_y en el apoyo de patín D y la fuerza axial F_{BG} en el elemento diagonal BG se seleccionan como las redundantes. El apoyo de patín D y el elemento BG se eliminan de la armadura indeterminada para obtener la armadura primaria que se muestra en la Fig. 13.17(b). La armadura primaria está sujeta de manera separada a la carga externa (Fig. 13.17(b)), a una carga unitaria redundante D_y (Fig. 13.17(c)) y a una fuerza de tensión en el elemento redundante BG (Fig. 13.17(d)).

Ecuaciones de compatibilidad. Las ecuaciones de compatibilidad se pueden expresar como

$$\Delta_{DO} + f_{DD}D_y + f_{D,BG}F_{BG} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{BGO} + f_{BG,D}D_y + f_{BG,BG}F_{BG} = 0 \quad (2)$$

En las que Δ_{DO} = a la reacción vertical en el nodo D de la armadura primaria debido a la carga externa; Δ_{BGO} = desplazamiento relativo entre los nodos B y G debido a la carga externa; f_{DD} = deflexión vertical en el nodo D debida a la carga unitaria en el nodo D ; $f_{BG,D}$ = desplazamiento relativo entre el nodo B y el G debido a la carga unitaria en el nodo D ; $f_{BG,BG}$ = desplazamiento relativo entre los nodos B y G debido a la carga unitaria de tensión en el elemento BG ; y $f_{D,BG}$ = deflexión vertical en el nodo D debida a la fuerza unitaria de tensión en el elemento G .

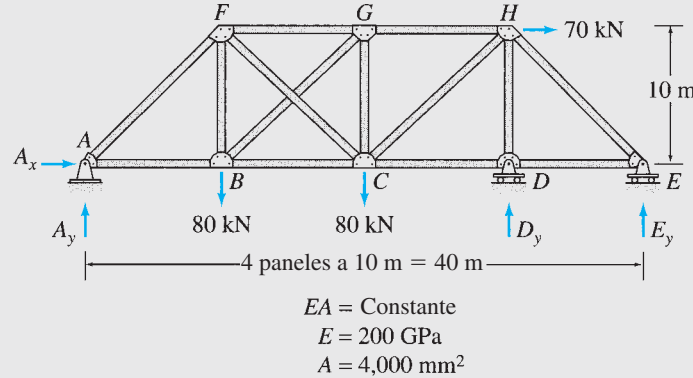
Deflexiones de la armadura primaria. Las expresiones para el trabajo virtual para las deflexiones anteriores son

$$\Delta_{DO} = \sum \frac{F_O u_D L}{AE} \quad \Delta_{BGO} = \sum \frac{F_O u_{BG} L}{AE}$$

$$f_{DD} = \sum \frac{u_D^2 L}{AE} \quad f_{BG,BG} = \sum \frac{u_{BG}^2 L}{AE}$$

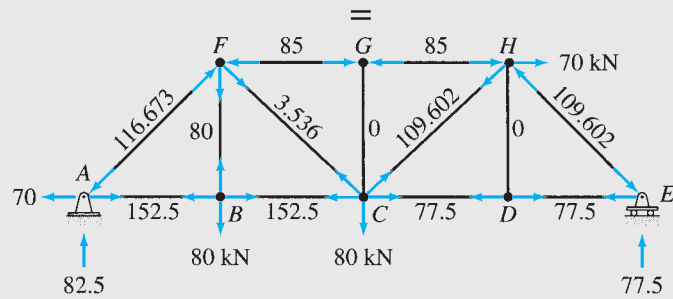
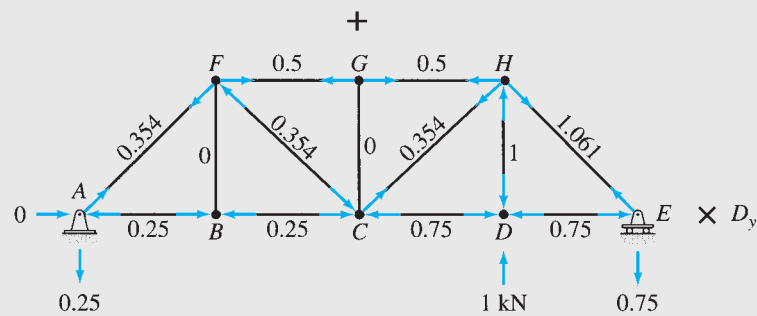
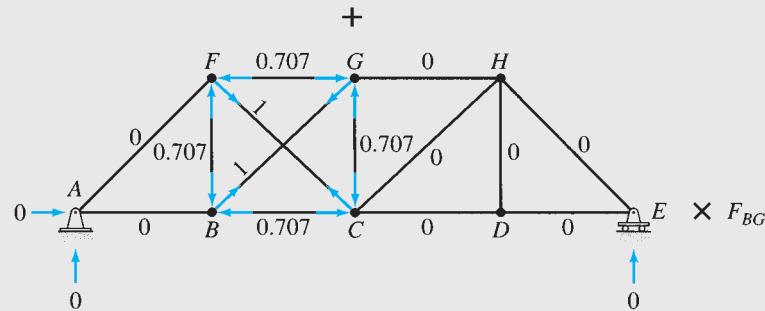
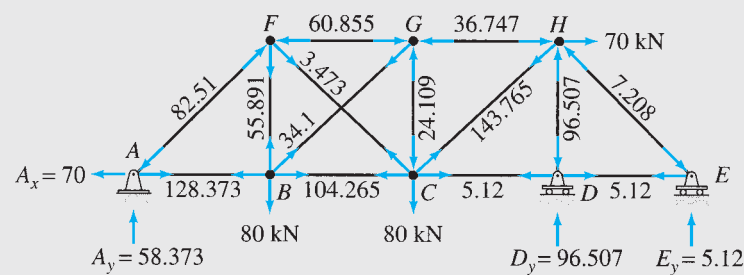
$$f_{BG,D} = f_{D,BG} = \sum \frac{u_D u_{BG} L}{AE}$$

En ellas F_O , u_D y u_{BG} representan las fuerzas en los elementos causadas por la carga externa, a una carga unitaria en D y a una fuerza unitaria de tensión en el elemento BG , respectivamente. Los valores numéricos de las fuerzas en los elementos,

**FIG. 13.17**

(a) Armadura indeterminada

continúa


(b) Armadura primaria sujeta a carga externa – Fuerzas F_O

(c) Armadura primaria sujeta a carga unitaria de la redundante D_y – las Fuerzas u_D

(c) Armadura primaria sujeta a fuerza de tensión unitaria en el elemento B_G – las Fuerzas u_{BG}


(e) Reacciones en los apoyos y fuerzas en los elementos de la armadura indeterminada

FIG. 13.17 (Continuación)

continúa

como se calcularon por el método de los nodos (Figs. 13.17(b) a la (d)), se tabulan en la Tabla 13.4. Tenga en cuenta que la rigidez axial AE es la misma para todos los elementos, solo los numeradores de las expresiones del trabajo virtual se evalúan en la Tabla 13.4, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_{DO} &= -\frac{4,472.642 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} & \Delta_{BGO} &= -\frac{992.819 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \\ f_{DD} &= \frac{48.736 \text{ m}}{AE} & f_{BG, BG} &= \frac{48.284 \text{ m}}{AE} \\ f_{BG, D} = f_{D, BG} &= -\frac{6.773 \text{ m}}{AE}\end{aligned}$$

Magnitudes de las redundantes. Sustituyendo estas deflexiones y los coeficientes de flexibilidad en las ecuaciones de compatibilidad (Ec.s (1) y (2)), podemos escribir

$$-4,472.642 + 48.736D_y - 6.773F_{BG} = 0 \quad (1a)$$

$$-992.819 - 6.773D_y + 48.284F_{BG} = 0 \quad (2a)$$

Resolviendo las Ecs (1a) y (2a) simultáneamente para D_y y F_{BG} , obtenemos

$$D_y = 96.507 \text{ kN} \uparrow \quad F_{BG} = 34.1 \text{ kN (T)} \quad \text{Respuesta}$$

Reacciones. Las reacciones restantes de la armadura indeterminada se pueden obtener mediante la superposición de las reacciones de la armadura primaria debido a la carga externa y por cada una de las redundantes. Las reacciones obtenidas de esta forma se muestran en la Fig. 13.17(e). Respuesta

Fuerzas axiales en los elementos. Las fuerzas restantes en los elementos de la armadura indeterminada se pueden obtener mediante el uso de las relaciones de superposición:

$$F = F_O + u_D D_y + u_{BG} F_{BG}$$

Las fuerzas en los elementos obtenidas se muestran en la Tabla 13.4 y en la Fig. 13.17(e).

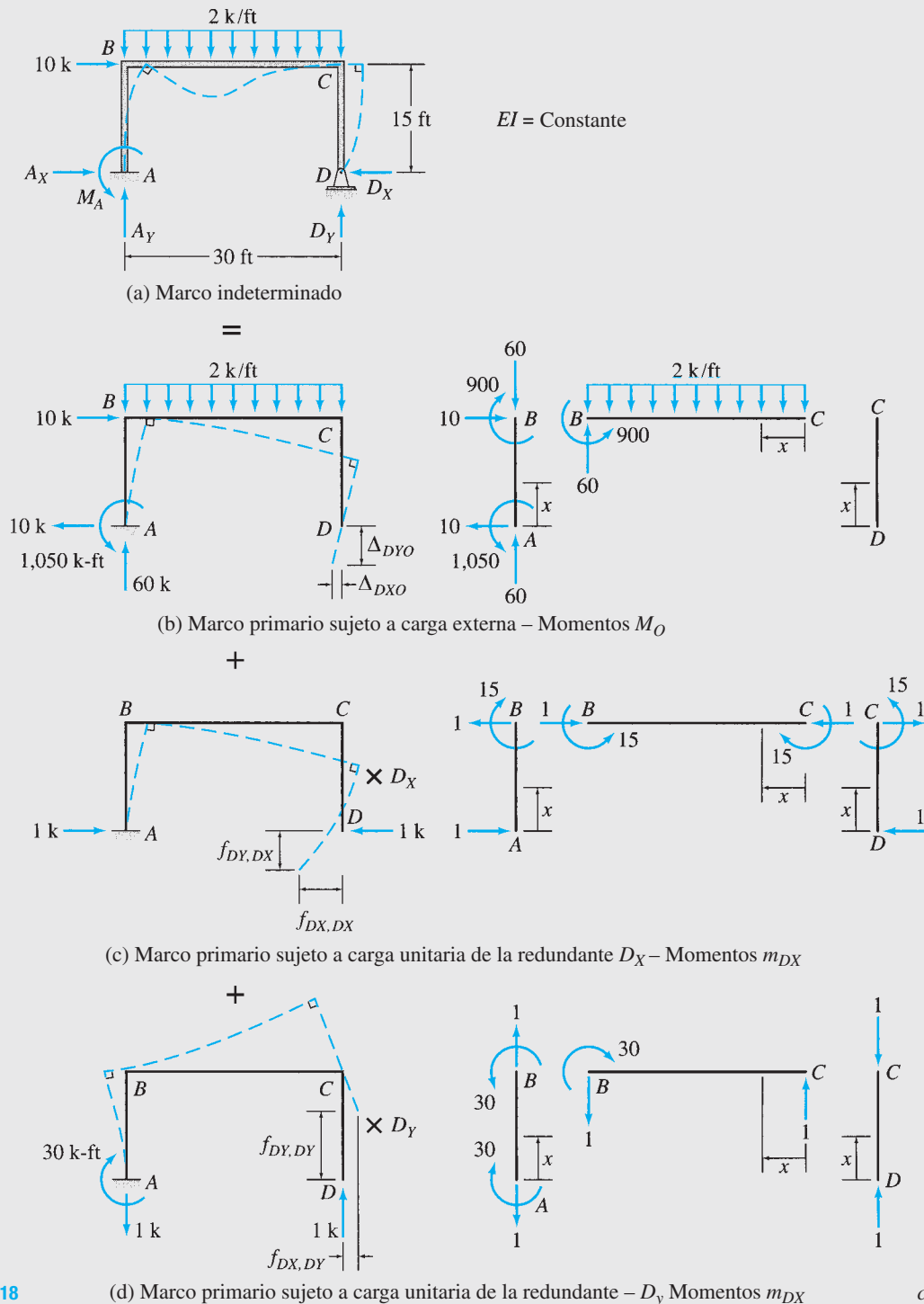
Respuesta

TABLA 13.4

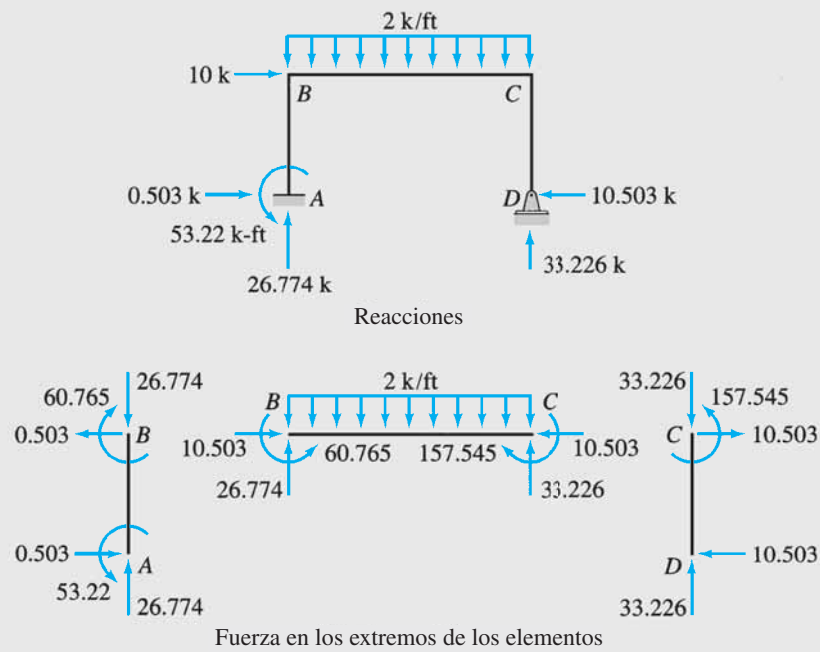
Elemento	L (m)	F_O (kN)	u_D (kN/kN)	u_{BG} (kN/kN)	$F_O u_D L$ (kN · m)	$F_O u_{BG} L$ (kN · m)	$u_D^2 L$ (m)	$u_{BG}^2 L$ (m)	$u_D u_{BG} L$ (m)	$F = F_O + u_D D_y + u_{BG} F_{BG}$ (kN)
AB	10	152.5	-0.25	0	-381.25	0	0.625	0	0	128.373
BC	10	152.5	-0.25	-0.707	-381.25	-1,078.175	0.625	5	1.768	104.265
CD	10	77.5	-0.75	0	-581.25	0	5.625	0	0	5.12
DE	10	77.5	-0.75	0	-581.25	0	5.625	0	0	5.12
FG	10	-85	0.5	-0.707	-425	600.95	2.5	5	-3.535	-60.855
GH	10	-85	0.5	0	-425	0	2.5	0	0	-36.747
BF	10	80	0	-0.707	0	-565.60	0	5	0	55.891
CG	10	0	0	-0.707	0	0	0	5	0	-24.109
DH	10	0	-1	0	0	0	10	0	0	-96.507
AF	14.142	-116.673	0.354	0	-584.096	0	1.772	0	0	-82.51
BG	14.142	0	0	1	0	0	0	14.142	0	34.1
CF	14.142	3.536	-0.354	1	-17.702	50.006	1.772	14.142	-5.006	3.473
CH	14.142	109.602	0.354	0	548.697	0	1.772	0	0	143.765
EH	14.142	-109.602	1.061	0	-1,644.541	0	15.92	0	0	-7.208
Σ					-4,472.642	-992.819	48.736	48.284	-6.773	

Ejemplo 13.13

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante del marco mostrado en la Fig. 13.18(a) por el método de las deformaciones consistentes.

**FIG. 13.18**

continúa



(e) Reacciones en los apoyos y fuerzas en los extremos de los elementos para el marco indeterminado

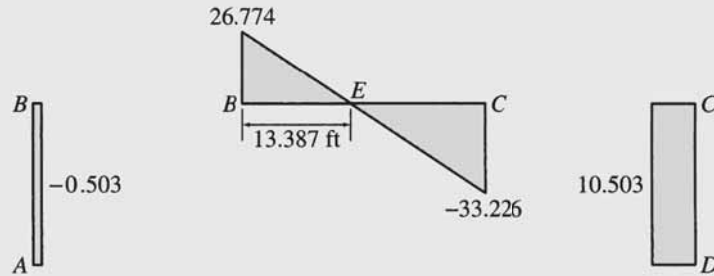


Diagrama de cortante (k)

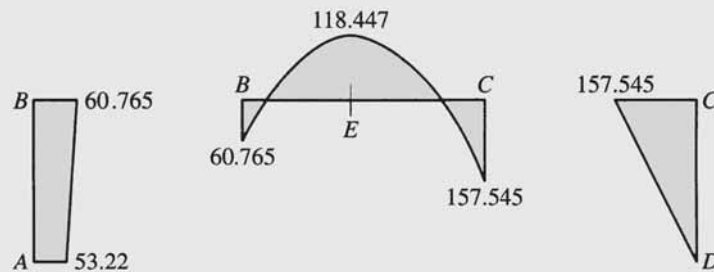


Diagrama de momento (k-ft)

(f) Diagrama de cortante y momento flexionante para el marco indeterminado

FIG. 13.18 (Continuación)

continúa

Solución**Grado de indeterminación.** $i = 2$.

Marco primario. Las reacciones D_X y D_Y en el apoyo articulado D se seleccionan como las redundantes. El apoyo articulado D se elimina para obtener el marco primario que se muestra en la Fig. 13.18(b), después, el marco primario se sujeta por separado a carga externa y a carga unitaria de la redundante D_X y D_Y , como se muestra en la Fig. 13.18(b), (c) y (d), respectivamente.

Ecuaciones de compatibilidad. Tenga en cuenta que las deflexiones horizontales y verticales del marco indeterminado real en el apoyo articulado D son cero; escribimos las ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta_{DXO} + f_{DX,DX} D_X + f_{DX,DY} D_Y = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{DYO} + f_{DY,DX} D_X + f_{DY,DY} D_Y = 0 \quad (2)$$

Deflexiones del marco primario. Las ecuaciones para el momento flexionante para los elementos del marco debido a carga externa y a la carga unitaria de las redundantes se tabulan en la Tabla 13.5. Aplicando el método del trabajo virtual, obtenemos

$$\Delta_{DXO} = \sum \int \frac{M_O m_{DX}}{EI} dx = \frac{241,875 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

$$\Delta_{DYO} = \sum \int \frac{M_O m_{DY}}{EI} dx = -\frac{641,250 \text{ k-ft}^3}{EI}$$

$$f_{DX,DX} = \sum \int \frac{m_{DX}^2}{EI} dx = \frac{9,000 \text{ ft}^3}{EI}$$

$$f_{DY,DY} = \sum \int \frac{m_{DY}^2}{EI} dx = \frac{22,500 \text{ ft}^3}{EI}$$

$$f_{DX,DY} = f_{DY,DX} = \sum \int \frac{m_{DX} m_{DY}}{EI} dx = -\frac{10,125 \text{ ft}^3}{EI}$$

Magnitudes de las redundantes. Sustituyendo estas deflexiones y los coeficientes de flexibilidad en las ecuaciones de compatibilidad, escribimos

$$241,875 + 9,000D_X - 10,125D_Y = 0 \quad (1a)$$

$$-641,250 - 10,125D_X + 22,500D_Y = 0 \quad (2a)$$

Resolviendo las Ecs. (1a) y (2a) simultáneamente para D_X y D_Y , obtenemos

$$D_X = 10.503 \text{ k} \leftarrow \quad D_Y = 33.226 \text{ k} \uparrow \quad \text{Respuesta}$$

Reacciones. Las reacciones restantes y las fuerzas en los extremos de los elementos del marco indeterminado se pueden obtener aplicando las ecuaciones de equilibrio. Las reacciones y fuerzas en los extremos de los elementos obtenidos se muestran en la Fig. 13.18(e). Respuesta

Diagramas de cortante y momento flexionante. Ver Fig. 13.18(f).

TABLA 13.5

Elemento	Coordenada x		M_O (k-ft)	m_{DX} (k-ft/k)	m_{DY} (k-ft/k)
	Origen	Límites (ft)			
AB	A	0–15	$-1,050 + 10x$	$-x$	30
CB	C	0–30	$-x^2$	-15	x
DC	D	0–15	0	x	0

13.4 Asentamientos en los apoyos, cambios de temperatura y errores de fabricación

Asentamientos de los apoyos

Hasta ahora, hemos considerado el análisis de estructuras con apoyos sin deformaciones. Como se discutió en el Capítulo 11, los movimientos en los apoyos debidos a la poca capacidad de carga del suelo o similar pueden inducir esfuerzos importantes en las estructuras indeterminadas externamente y deben considerarse en su diseño. Sin embargo, los asentamientos en los apoyos no tienen efecto en las condiciones de esfuerzo de las estructuras que son internamente indeterminadas pero sí en las externamente determinadas. Esta falta de efecto se debe al hecho de que los asentamientos generan que la estructura se desplace y/o rote como cuerpo rígido sin cambiar su forma. El método de las deformaciones consistentes, como se describió en las secciones anteriores, se puede modificar fácilmente para incluir en el análisis el efecto del asentamiento en el apoyo.

Considere, por ejemplo, una viga continua de dos claros sujeta a carga uniformemente distribuida w , como la que se muestra en la Fig. 13.19(a). Suponga que los apoyos B y C de la viga sufren pequeños asentamientos Δ_B y Δ_C , respectivamente, indicados en la figura. Para analizar la viga, consideremos las reacciones verticales B_y y C_y como las redundantes. Se eliminan los apoyos B y C de la viga indeterminada para obtener la viga primaria, la cual entonces se sujeta de manera separada a la carga externa w y a la carga unitaria de las redundantes B_y y C_y , como se muestra en las Figs. 13.19(b), (c) y (d), respectivamente. Al darse cuenta que las deflexiones de la viga en los apoyos B y C son iguales a los asentamientos Δ_B y Δ_C , respectivamente, obtenemos las ecuaciones de compatibilidad

$$\Delta_{BO} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y = \Delta_B \quad (13.18)$$

$$\Delta_{CO} + f_{CB}B_y + f_{CC}C_y = \Delta_C \quad (13.19)$$

Las cuales se resuelven para las redundantes B_y y C_y . Tenga en cuenta que el lado derecho de la igualdad de las ecuaciones de compatibilidad (Ecs. (13.18) y (13.19)) no son iguales a cero, como en el caso de los apoyos rígidos considerados en las secciones previas, pero son iguales a los valores prescritos de los asentamientos en los apoyos B y C , respectivamente. Una vez que las redundantes han sido determinadas resolviendo las ecuaciones de compatibilidad, las otras respuestas características de la viga se pueden evaluar ya sea por equilibrio o por superposición.

A pesar de que los asentamientos en los apoyos generalmente se especifican con respecto a la posición no deformada de la estructura indeterminada, las magnitudes de tales asentamientos utilizados en las ecuaciones de compatibilidad se deben de medir de la cuerda que conecta la posición deformada del apoyo de la estructura primaria a la posición deformada de los apoyos redundantes. Cualquier desplazamiento en tales apoyos se considera positivo si tiene el mismo sentido que la supuesta para la redundante. En el caso de la viga de la Fig. 13.19(a), dado que los apoyos extremos A y D no sufren ningún asentamiento, la cuerda AD de la viga primaria coincide con la posición no deformada de la viga indeterminada; por lo tanto, los asentamientos en los apoyos B y C relativos a la cuerda de la viga primaria son iguales a los asentamientos prescritos Δ_B y Δ_C , respectivamente.

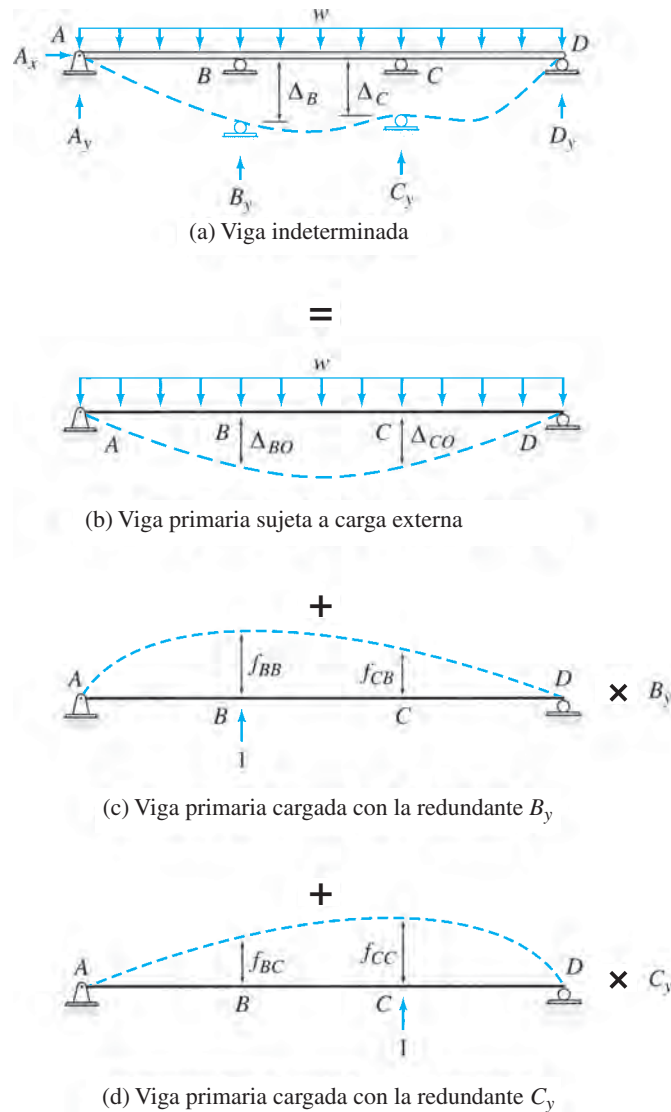


FIG. 13.19

Ahora, suponga que todos los apoyos de la viga sufren asentamientos como se muestra en la Fig. 13.20. Si consideramos las reacciones B_y y C_y como las redundantes, entonces los desplazamientos Δ_{BR} y Δ_{CR} de los apoyos B y C , respectivamente, relativos a la cuerda de la viga primaria, deberían utilizarse en las ecuaciones de compatibilidad en lugar de los desplazamientos especificados Δ_B y Δ_C . Esto es porque solo los desplazamientos relativos a la cuerda generan esfuerzos en la viga. En otras palabras, si los apoyos de la viga se asentarán en una cantidad igual o por una cantidad de modo que la posición deformada de todos los apoyos fuera una línea recta, entonces la viga permanecería recta sin deflexión, y no se desarrollaría ningún esfuerzo en la viga.

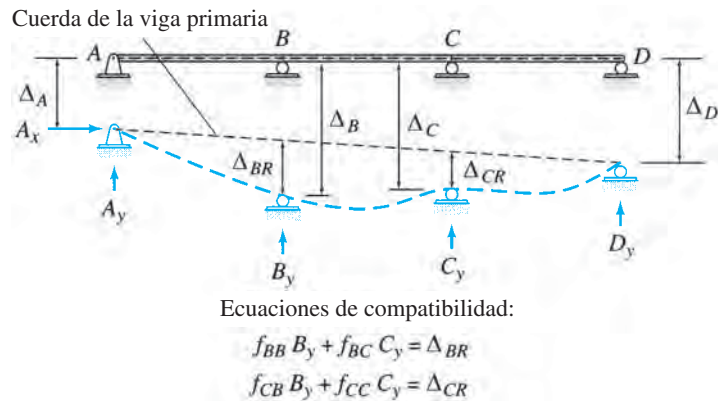


FIG. 13.20

Ejemplo 13.14

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de tres claros que se ilustra en la Fig. 13.21(a), debido a una carga uniformemente distribuida y al asentamiento de los apoyos de 5/8 in en B , y 1 1/2 in en C , y de 3/4 in en D . Use el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Esta viga ya fue analizada previamente en el Ejemplo 13.8 para una carga uniformemente distribuida de 2 k/ft, en la que se seleccionaron las reacciones en los apoyos interiores B y C como redundantes. Usaremos la misma viga primaria como la usada antes.

Asentamientos relativos. Los asentamientos especificados se muestran en la Fig. 13.21(b) usando una escala exagerada. Se puede ver de esta figura que los asentamientos en los apoyos B y C relativos a la cuerda de la viga primaria (que es la línea que une los apoyos A y D) son

$$\Delta_{BR} = -0.375 \text{ in.} \quad \text{y} \quad \Delta_{CR} = -1.0 \text{ in.}$$

en el que los signos negativos para las magnitudes de Δ_{BR} y Δ_{CR} indican que estos asentamientos se encuentran hacia abajo, es decir, opuestas a la dirección hacia arriba asumido para las redundantes B_y y C_y .

Ecuaciones de compatibilidad. Las ecuaciones de compatibilidad para la viga siguen siendo los mismos que en el Ejemplo 13.8, excepto que el lado derecho de las ecuaciones deben ahora igualarse con los asentamientos Δ_{BR} y Δ_{CR} . Así

$$\Delta_{BO} + f_{BB} B_y + f_{BC} C_y = \Delta_{BR} \quad (1)$$

$$\Delta_{CO} + f_{CB} B_y + f_{CC} C_y = \Delta_{CR} \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. En el Ejemplo 13.8, las deflexiones y los coeficientes de flexibilidad de la viga fueron expresados en términos de EI . Debido a que el lado derecho de la igualdad fue cero, el término EI se eliminó de los cálculos. En el presente ejemplo, sin embargo, debido a la presencia de los asentamientos en el lado derecho de la igualdad de las ecuaciones de compatibilidad, el término EI no puede eliminarse; por lo tanto, los valores numéricos reales de las deflexiones y coeficientes de flexibilidad se deben de calcular.

$$\Delta_{BO} = \Delta_{CO} = -\frac{293,333.333 \text{ k-ft}^3}{EI} = -\frac{293,333.333(12)^3}{(29,000)(7,800)} = -2.241 \text{ in.}$$

$$f_{BB} = f_{CC} = \frac{3,555.556 \text{ ft}^3}{EI} = \frac{3,555.556(12)^3}{(29,000)(7,800)} = 0.0272 \text{ in./k}$$

$$f_{CB} = f_{BC} = \frac{3,111.111 \text{ ft}^3}{EI} = \frac{3,111.111(12)^3}{(29,000)(7,800)} = 0.0238 \text{ in./k}$$

continúa

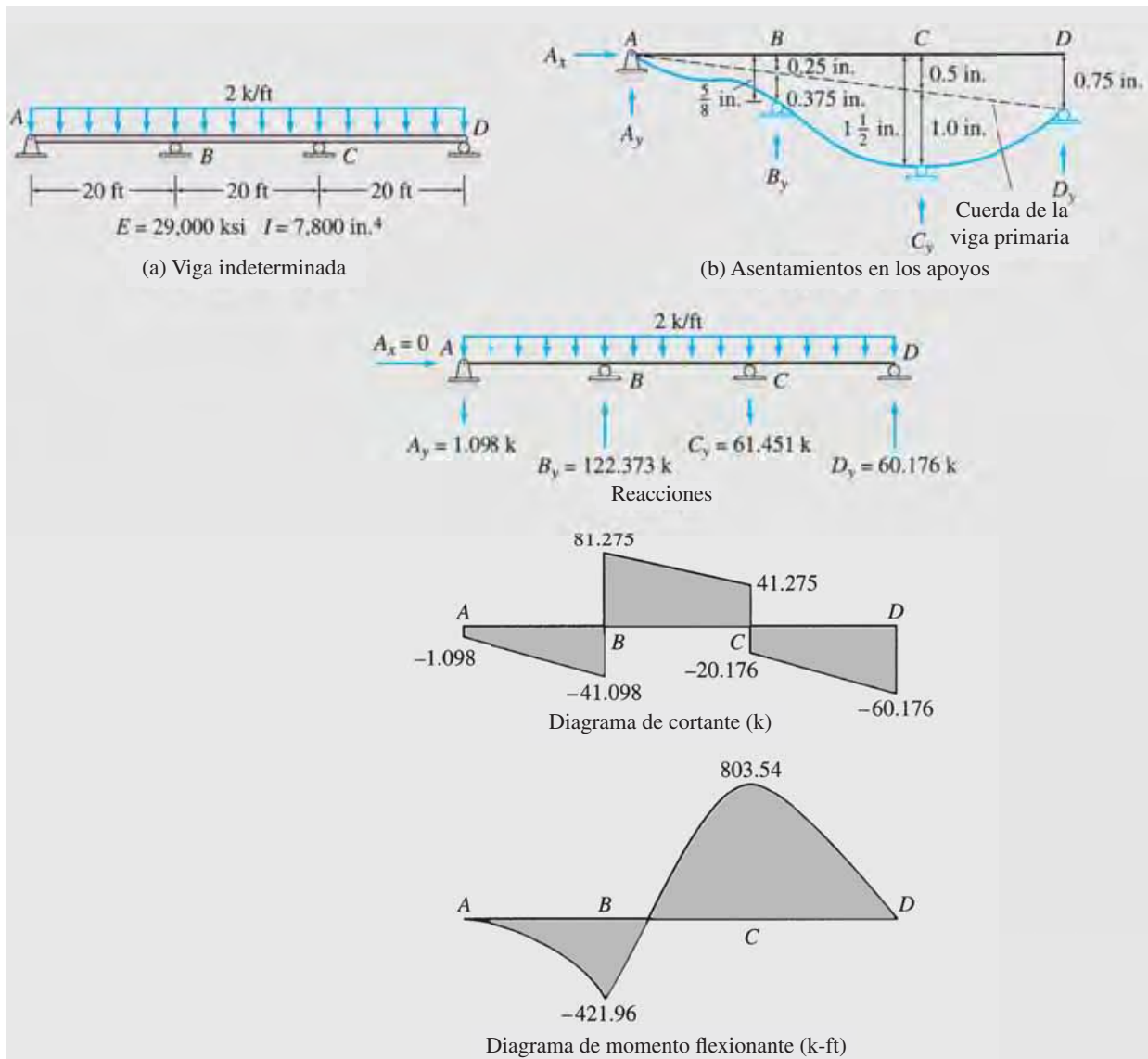


FIG. 13.21

(c) Reacciones en los apoyos y diagramas de cortante y momento flexionante para la viga continua

Magnitud de las redundantes. Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones de compatibilidad, escribimos

$$-2.241 + 0.0272B_y + 0.0238C_y = -0.375 \quad (1a)$$

$$-2.241 + 0.0238B_y + 0.0272C_y = -1 \quad (2a)$$

Resolviendo las Ecs. (1a) y (2a) simultáneamente para B_y y C_y , obtenemos

$$B_y = 122.373 \text{ k } \uparrow \quad \text{y} \quad C_y = -61.451 \text{ k} = 61.451 \text{ k } \downarrow$$

Respuesta

Reacciones y diagramas de cortante y momento flexionante. Las reacciones restantes de la viga continua se pueden determinar mediante el equilibrio. Las reacciones y diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga se muestran en la Fig. 13.21(c). Una comparación de estos resultados con los del Ejemplo 13.8 (sin asentamientos) indican que incluso un pequeño asentamiento puede tener un efecto significativo en las reacciones y diagramas de momento de cortante y momento flexionante en las estructuras indeterminadas.

Respuesta

Ejemplo 13.15

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 13.22(a), debido a una carga mostrada y a un asentamiento de 40 mm en C y de 25 mm en E . Utilice el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 13.9 para la carga externa, seleccionando las reacciones verticales de los apoyos de patín en C y E como redundantes. Usaremos la misma viga primaria.

Asentamientos en los apoyos. Los asentamientos en los apoyos especificados se representan en la Fig. 13.22(b), de la que se puede ver que la cuerda AE de la viga primaria coincide con la posición no deformada de la viga indeterminada; por lo tanto, los asentamientos de los apoyos C y E relativos a la cuerda de la viga primaria son iguales a los asentamientos prescritos, es decir,

$$\Delta_{CR} = \Delta_C = -0.04 \text{ m} \quad \text{y} \quad \Delta_{ER} = \Delta_E = -0.025 \text{ m}$$

Ecuaciones de compatibilidad

$$\Delta_{CO} + f_{CC}C_y + f_{CE}E_y = \Delta_{CR} \quad (1)$$

$$\Delta_{EO} + f_{EC}C_y + f_{EE}E_y = \Delta_{ER} \quad (2)$$

Deflexiones de la viga primaria. Del Ejemplo 13.9,

$$\Delta_{CO} = -\frac{82,500 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = -\frac{82,500}{70(10^6)(1,250)(10^{-6})} = -0.943 \text{ m}$$

$$\Delta_{EO} = -\frac{230,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = -\frac{230,000}{70(10^6)(1,250)(10^{-6})} = -2.629 \text{ m}$$

$$f_{CC} = \frac{333.333 \text{ m}^3}{EI} = \frac{333.333}{70(10^6)(1,250)(10^{-6})} = 0.00381 \text{ m/kN}$$

$$f_{EC} = f_{CE} = \frac{833.333 \text{ m}^3}{EI} = \frac{833.333}{70(10^6)(1,250)(10^{-6})} = 0.00952 \text{ m/kN}$$

$$f_{EE} = \frac{2,666.667 \text{ m}^3}{EI} = \frac{2,666.667}{70(10^6)(1,250)(10^{-6})} = 0.0305 \text{ m/kN}$$

Magnitudes de las reacciones. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación de compatibilidad, tenemos

$$-0.943 + 0.00381C_y + 0.00952E_y = -0.04 \quad (1a)$$

$$-2.629 + 0.00952C_y + 0.0305E_y = -0.025 \quad (2a)$$

Resolviendo las Ecs. (1a) y (2a) simultáneamente para C_y y E_y , obtenemos

$$C_y = 107.6 \text{ kN} \uparrow \quad \text{y} \quad E_y = 51.8 \text{ kN} \uparrow$$

Respuesta

Reacciones y diagramas de cortante y momento flexionante. Las reacciones restantes de la viga indeterminada ahora pueden determinarse por el equilibrio. Las reacciones y los diagramas de momento de cortante y de flexión se muestran en la Fig. 13.22(c).

Respuesta

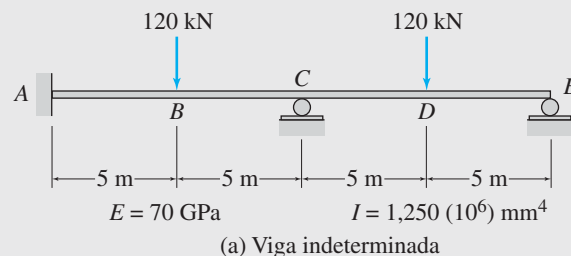
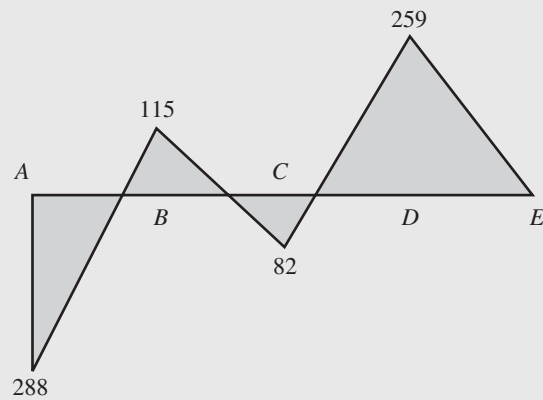
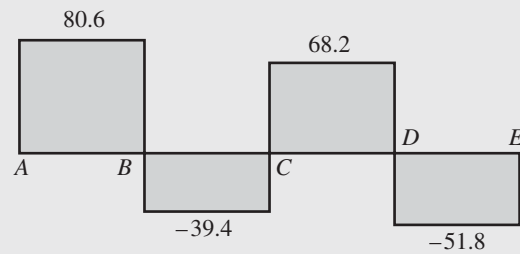
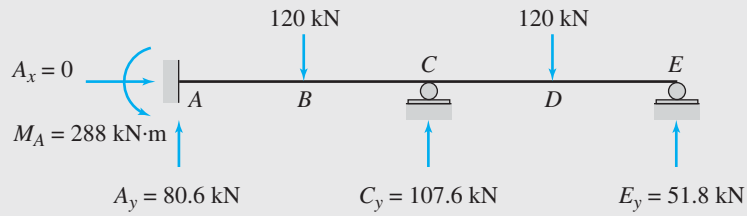
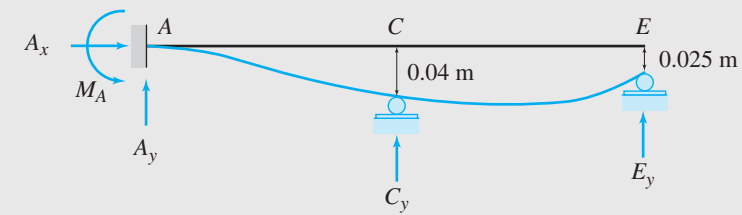


FIG. 13.22

continúa



(c) Reacciones en los apoyos y diagramas de cortantes y momento flexionante para la viga indeterminada

FIG. 13.22 (Continuación)

Cambios de temperatura y errores de fabricación

A diferencia de los asentamientos en los apoyos, los cuales solo afectan a las estructuras externamente indeterminadas, los cambios de temperatura y los errores de fabricación pueden afectar las condiciones de esfuerzo de estructuras externamente y/o internamente indeterminadas. El procedimiento para el análisis de estructuras sujetas a cambios de temperatura y/o errores de fabricación es el mismo usado previamente para el caso de las cargas externas. La única diferencia es que la estructura primaria está sujeta ahora a los cambios de temperatura y/o errores de fabricación (en lugar de las cargas externas) para evaluar sus deflexiones en las ubicaciones de las redundantes debido a estos efectos. Las redundantes entonces se determinan aplicando las condiciones de compatibilidad usuales de las deflexiones de la estructura primaria en lugar de las redundantes debido a la combinación de cambios de temperatura y/o errores de fabricación, y las redundantes deben ser iguales a las deflexiones conocidas en las correspondientes ubicaciones de la estructura indeterminada real. El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.16

Determine las reacciones y las fuerzas de cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. 13.23(a) debido al incremento de 45°C en el elemento AB y a la caída de temperatura de 20°C en el elemento CD . Use el método de las deformaciones consistentes.

Solución

Grado de indeterminación. $i = (m + r) - 2j = (6 + 3) - 2(4) = 1$. La armadura es internamente indeterminada en primer grado.

Armadura primaria. La fuerza axial F_{AD} en el elemento diagonal AD se selecciona como redundante. La armadura primaria se obtiene eliminando el elemento AD como se muestra en la Fig. 13.23(b). Después, la armadura primaria está sujeta por separado al cambio de temperatura prescrito y a una fuerza de tensión de 1 kN en el elemento redundante AD , como se muestra en las Figs. 13.23(b) y (c), respectivamente.

Ecuación de compatibilidad. La ecuación de compatibilidad se puede expresar como

$$\Delta_{ADO} + f_{AD,AD} F_{AD} = 0 \quad (1)$$

Donde Δ_{ADO} indica el desplazamiento relativo entre los nodos A y D de la armadura primaria debido al cambio de temperatura y el coeficiente de flexibilidad $f_{AD,AD}$ indica el desplazamiento relativo entre los mismos nodos debido a la carga unitaria de la redundante F_{AD} .

Deflexiones de la armadura primaria. Como se discutió en la Sección 7.3, la expresión del trabajo virtual para Δ_{ADO} se puede escribir como

$$\Delta_{ADO} = \sum \alpha(\Delta T)Lu_{AD}$$

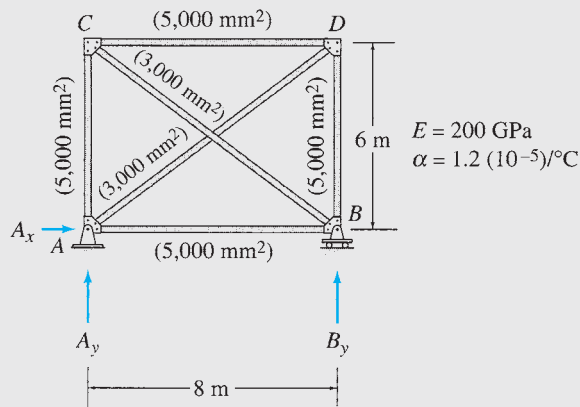
En la cual el producto $\alpha(\Delta T)L$ es igual a la deformación axial de un elemento de la armadura primaria debido al cambio de temperatura ΔT y u_{AD} representa la fuerza axial en el mismo elemento debido a la fuerza de tensión de 1 kN en el elemento AD . Los valores numéricos de estas cantidades se tabulan en la Tabla 13.6, de la cual Δ_{ADO} se obtiene como

$$\Delta_{ADO} = -1.92 \text{ mm}$$

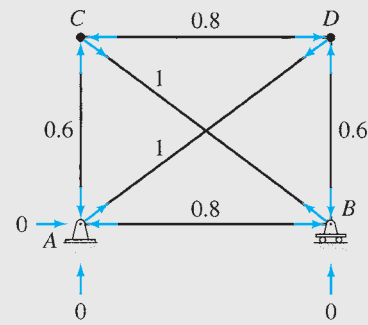
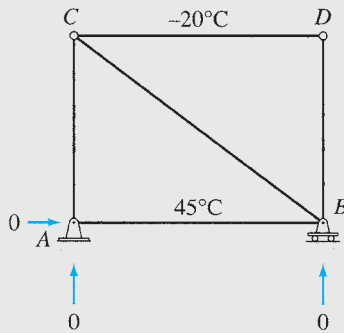
Después, el coeficiente de flexibilidad $f_{AD,AD}$ se calcula usando la expresión del trabajo virtual (ver Tabla 13.6):

$$f_{AD,AD} = \sum \frac{u_{AD}^2 L}{AE} = 0.0479 \text{ mm}$$

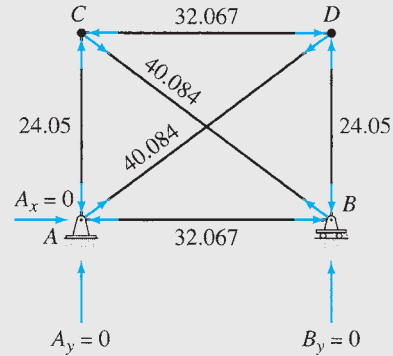
continúa



(a) Armadura indeterminada

(c) Armadura primaria sujeta a una carga unitaria de tensión en el elemento AD – Fuerzas u_{AD} 

(b) Armadura primaria sujeta a cambios de temperatura



(d) Fuerza en los elementos de la armadura indeterminada

FIG. 13.23

TABLA 13.6

Elemento	L (m)	A (mm ²)	ΔT (°C)	u_{AD} (kN/kN)	$(\Delta T) Lu_{AD}$ (°C · m)	$u_{AD}^2 L/A$ (1/m)	$F = u_{AD} F_{AD}$ (kN)
AB	8	0.005	45	-0.8	-288	1,024	-32.067
CD	8	0.005	-20	-0.8	128	1,024	-32.067
AC	6	0.005	0	-0.6	0	432	-24.05
BD	6	0.005	0	-0.6	0	432	-24.05
AD	10	0.003	0	1.0	0	3,333.333	40.084
BC	10	0.003	0	1.0	0	3,333.333	40.084
Σ					-160	9,578.667	

$$\Delta_{ADO} = \alpha \Sigma (\Delta T) Lu_{AD} = 1.2(10^{-5})(-160) = -0.00192 \text{ m} = -1.92 \text{ mm}$$

$$f_{AD,AD} = \frac{1}{E} \Sigma \frac{u_{AD}^2 L}{A} = \frac{9,578.667}{200(10^6)} = 47.893(10^{-6}) \text{ m/kN} = 0.0479 \text{ mm/kN}$$

$$F_{AD} = -\frac{\Delta_{ADO}}{f_{AD,AD}} = 40.084 \text{ kN (T)}$$

continúa

Magnitud de la redundante. Sustituyendo los valores de Δ_{ADO} y de $f_{AD, AD}$ de la ecuación de compatibilidad (Ec. (1)), obtenemos

$$-1.92 + (0.0479) F_{AD} = 0$$

$$F_{AD} = 40.084 \text{ kN (T)}$$

Respuesta

Reacciones. Debido a que la armadura es externamente indeterminada, sus reacciones debidas al cambio de temperatura son cero, de modo que las fuerzas en los elementos de la armadura indeterminada se pueden expresar como

$$F = u_{AD} F_{AD}$$

Las fuerzas en los elementos obtenidas de esta manera se tabulan en la Tabla 13.6 y se muestran en la Fig. 13.23(d).

Respuesta

13.5 Método del trabajo mínimo

En esta sección consideraremos una formulación alternativa del método de las fuerzas llamada *método del trabajo mínimo*. En este método, las ecuaciones de compatibilidad se establecen usando el *segundo teorema de Castigliano* en lugar de la superposición de deflexiones, como en el método de las deformaciones consistentes considerado en la sección previa. Con esta excepción, los dos métodos son similares y requieren esencialmente de la misma cantidad de esfuerzo de cálculo. El método del trabajo mínimo usualmente prueba ser más conveniente para analizar estructuras compuestas que contienen tanto elementos como fuerzas axiales y elementos en flexión (es decir, vigas soportadas por cables). Sin embargo, el método no es tan general como el método de las deformaciones consistentes en el sentido de que, en su forma original (como fue presentado aquí), el método del trabajo virtual no puede usarse para analizar los efectos de asentamiento en los apoyos, cambio de temperatura y errores de fabricación.

Para desarrollar el método del trabajo virtual, consideremos una viga estáticamente indeterminada con apoyos rígidos sujeta a una carga externa w , como la que aparece en la Fig. 13.24. Suponga que seleccionamos la reacción vertical B_y en el apoyo interior B como la redundante. Tratando la redundante como una carga incógnita aplicada a la viga junto con la carga prescrita w , se puede escribir una expresión para la energía de deformación en términos de la carga desconocida w y de la redundante desconocida B_y como

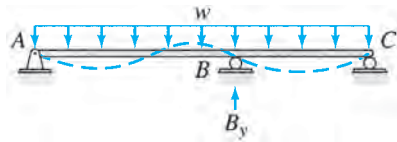


FIG. 13.24

$$U = f(w, B_y) \quad (13.20)$$

La Ec. (13.29) indica simbólicamente que la energía de deformación de la viga se expresa como función de la carga externa w conocida y de la redundante desconocida B_y .

De acuerdo con el segundo teorema de Castigliano (Sección 7.7), la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a la fuerza es igual a la deflexión del punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. Debido a que la deflexión en el punto de aplicación de la redundante B_y es cero, y aplicando el segundo teorema de Castigliano, podemos escribir

$$\frac{\partial U}{\partial B_y} = 0 \quad (13.21)$$

Debe tenerse en cuenta que la Ec. (13.21) representa la ecuación de compatibilidad en la dirección de la redundante B_y , y que puede resolverse para la redundante.

Como la Ec. (13.21) indica, la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a la redundante debe ser cero. Esto implica que para el valor de la redundante que satisface las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, la energía de deformación de la estructura es un mínimo o un máximo. Debido a que para una estructura linealmente elástica no hay valores máximos de energía de deformación, porque se puede incrementar indefinidamente aumentando el valor de la redundante, concluimos que para un valor real de la redundante la energía de deformación debe ser un mínimo. Esta conclusión se conoce como *principio del trabajo mínimo*:

Las magnitudes de las redundantes de una estructura estáticamente indeterminada deben ser tales que la energía de deformación almacenada en la estructura sea mínima (es decir, el trabajo interno realizado es el menor).

El método del trabajo mínimo, como aquí se describe, se puede extender fácilmente al análisis de las estructuras con múltiples grados de indeterminación. Si una estructura es indeterminada en grado n , entonces se seleccionan n redundantes, y la energía de deformación para la estructura se expresa en términos de la carga externa conocida y de la redundante desconocida n como

$$U = f(w, R_1, R_2, \dots, R_n) \quad (13.22)$$

En donde w representa todas las cargas conocidas y $R_1, R_2, \dots, R_n$ indican las n redundantes. Después, el principio de trabajo mínimo se aplica por separado para cada redundante diferenciando parcialmente la expresión de la energía de deformación (Ec. (13.22)) con respecto a cada una de las redundantes y estableciendo la derivada parcial igual a cero; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial R_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial U}{\partial R_n} &= 0 \end{aligned} \quad (13.23)$$

Esto representa un sistema de n ecuaciones simultáneas en términos de n redundantes y puede resolverse para las redundantes.

El procedimiento para el análisis de las estructuras indeterminadas por el método del trabajo mínimo se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 13.17

Determine las reacciones de la viga mostrada en la Fig. 13.25 usando el método del trabajo mínimo.

Solución

Esta viga fue analizada en el Ejemplo 13.2 por el método de las deformaciones consistentes.

continúa

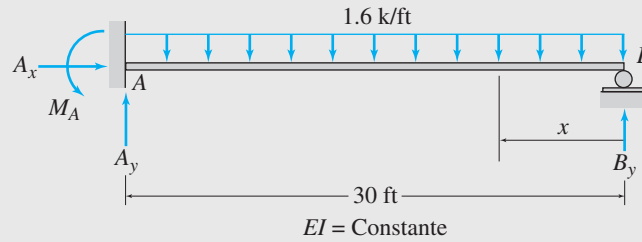


FIG. 13.25

La viga está apoyada por cuatro reacciones, así que su grado de indeterminación es igual a 1. La reacción vertical B_y en el apoyo de patín B se selecciona como la redundante. Evaluaremos la magnitud de la redundante minimizando la energía de deformación de la viga respecto a B_y .

Como se discutió en la Sección 7.6, la energía de deformación de una viga sujeta solo a flexión se puede expresar como

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1)$$

De acuerdo con el principio de trabajo mínimo, la derivada parcial de la energía de tensión con respecto a B_y debe ser cero; es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial B_y} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial B_y} \right) \frac{M}{EI} dx = 0 \quad (2)$$

Usando la coordenada x mostrada en la Fig. 13.25, escribimos la ecuación para momento flexionante, M , en términos de B_y , como

$$M = B_y(x) - \frac{1.6x^2}{2}$$

Después, diferenciaremos la expresión para M con respecto a B_y , para obtener

$$\frac{\partial M}{\partial B_y} = x$$

Sustituyendo las expresiones para M y $\partial M / \partial B_y$ en la Ec. (2), escribimos

$$\frac{1}{EI} \left[\int_0^{30} x (B_y x - 0.8x^2) dx \right] = 0$$

Integrando, obtenemos

$$9,000B_y - 162,000 = 0$$

De la cual

$$B_y = 18 \text{ k } \uparrow$$

Respuesta

Para determinar las reacciones restantes de la viga indeterminada, aplicamos las ecuaciones de equilibrio (Fig. 13.25):

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

Respuesta

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 1.6(30) + 18 = 0$$

$$A_y = 30 \text{ k } \uparrow$$

Respuesta

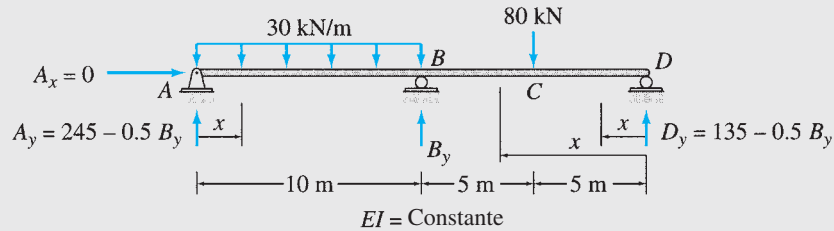
$$+ \curvearrowright \sum M_A = 0 \quad M_A - 1.6(30)(15) + 18(30) = 0$$

$$M_A = 180 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Respuesta

Ejemplo 13.18

Determine las reacciones de la viga continua de dos claros que se muestra en la Fig. 13.26, usando el método del trabajo mínimo.

**FIG. 13.26****Solución**

Esta viga está soportada por cuatro reacciones A_x , A_y , B_y y D_y . Debido a que hay solo tres ecuaciones de equilibrio, el grado de indeterminación es igual a 1. Seleccionamos la reacción B_y como la redundante. La magnitud de la redundante será determinada minimizando la energía de deformación de la viga con respecto a B_y .

La energía de deformación de una viga sujeta solo a flexión se expresa como

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1)$$

De acuerdo con el principio del trabajo mínimo,

$$\frac{\partial U}{\partial B_y} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial B_y} \right) \frac{M}{EI} dx = 0 \quad (2)$$

Antes de que podamos obtener las ecuaciones para los momentos de flexión, M , debemos expresar las reacciones en el apoyo A y D de la viga en términos de la redundante B_y . Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, escribimos

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

Respuestas

$$+ \curvearrowright \sum M_D = 0$$

$$-A_y(20) + 30(10)(15) - B_y(10) + 80(5) = 0$$

$$A_y = 245 - 0.5B_y \quad (3)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$(245 - 0.5B_y) - 30(10) + B_y - 80 + D_y = 0$$

$$D_y = 135 - 0.5B_y \quad (4)$$

Para determinar las ecuaciones para los momentos flexionantes, M , la viga se divide en tres segmentos, AB, BC y CB. Las coordenadas x se usan para determinar las ecuaciones mostradas en la Fig. 13.26, y las ecuaciones para momento flexionante, en términos de B_y , se tabulan en la Tabla 13.7. Después, las derivadas del momento de flexión con respecto a B_y se calculan. Estas derivadas se listan en la última columna de la Tabla 13.7.

TABLA 13.7

Segmento	Coordenada x		M	$\partial M / \partial B_y$
	Origen	Límites (m)		
AB	A	0–10	$(245 - 0.5B_y)x - 15x^2$	$-0.5x$
DC	D	0–5	$(135 - 0.5B_y)x$	$-0.5x$
CB	D	5–10	$(135 - 0.5B_y)x - 80(x - 5)$	$-0.5x$

continúa

Sustituyendo las expresiones para M y $\partial M / \partial B_y$ en la Ec. (2), escribimos

$$\frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} (-0.5x)(245x - 0.5B_y x - 15x^2) dx + \int_0^5 (-0.5x)(135x - 0.5B_y x) dx + \int_5^{10} (-0.5x)(55x - 0.5B_y x + 400) dx \right] = 0$$

Integrando, tenemos

$$-40,416.667 + 166.667B_y = 0$$

De la cual

$$B_y = 242.5 \text{ kN } \uparrow$$

Respuesta

Sustituyendo el valor de B_y en las Ecs. (3) y (4), respectivamente, determinamos las reacciones verticales en los apoyos A y D .

$$A_y = 123.75 \text{ kN } \uparrow$$

Respuesta

$$D_y = 13.75 \text{ kN } \uparrow$$

Respuesta

Ejemplo 13.19

Determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada en la Fig. 13.27(a) usando el método del trabajo mínimo.

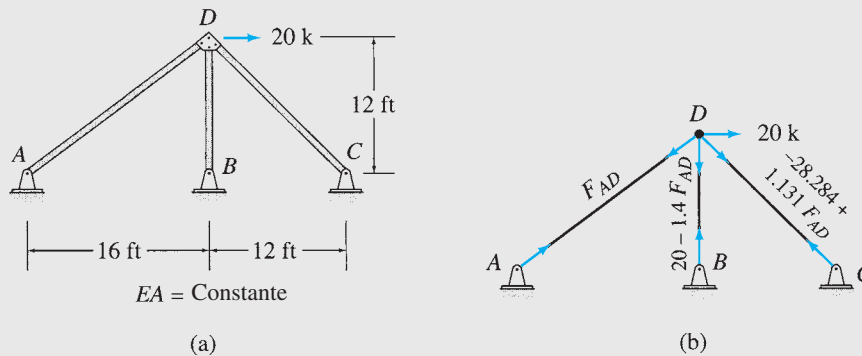


FIG. 13.27

Solución

La armadura contiene un elemento más de lo necesario para la estabilidad interna; por lo tanto, su grado de indeterminación es igual a 1. Seleccionemos la fuerza F_{AD} en el elemento AD como la redundante. Determinaremos la magnitud de F_{AD} minimizando la energía de deformación de la armadura respecto a F_{AD} .

Como se discutió en la Sección 7.6, la energía de deformación de una armadura puede expresarse como

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} \quad (1)$$

De acuerdo con el principio del trabajo mínimo, la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a F_{AD} debe ser cero; es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial F_{AD}} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial F_{AD}} \right) \frac{FL}{AE} = 0 \quad (2)$$

continúa

TABLA 13.8

Segmento	L (ft)	F	$\frac{\partial F}{\partial F_{AD}}$	$\left(\frac{\partial F}{\partial F_{AD}}\right)FL$	F (k)
AD	20	F_{AD}	1	$20F_{AD}$	13.474
BD	12	$20 - 1.4F_{AD}$	-1.4	$-336 + 23.52F_{AD}$	1.136
CD	16.971	-28.284 $+ 1.131F_{AD}$	1.131	-542.889 $+ 21.709F_{AD}$	-13.045
Σ				$-878.889 + 65.229F_{AD}$	

$$\frac{1}{AE} \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial F_{AD}} \right) FL = 0$$

$$-878.889 + 65.229F_{AD} = 0$$

$$F_{AD} = 13.474 \text{ k (T)}$$

Las fuerzas axiales en los elementos AB y CD están expresadas en términos de la redundante F_{AD} considerando el equilibrio del nodo J (Fig. 13.27(b)). Estas fuerzas en los elementos F junto con sus derivadas parciales con respecto a F_{AD} , están tabuladas en la Tabla 13.8. Para aplicar la Ec. (2), los términos de $\partial F / \partial F_{AD}$ se calculan para los elementos individuales y se suman como se muestra en la Tabla 13.8, para determinar la magnitud de la redundante.

$$F_{AD} = 13.474 \text{ k (T)}$$

Respuesta

Finalmente, las fuerzas en los elementos BD y CD se evalúan sustituyendo el valor de F_{AD} en la expresión para las fuerzas de los elementos dados en la tercer columna de la Tabla 13.8

$$F_{BD} = 1.136 \text{ k (T)}$$

Respuesta

$$F_{CD} = 13.045 \text{ k (C)}$$

Respuesta

Ejemplo 13.20

Una viga está soportada por un apoyo empotrado A y un cable BD , como se muestra en la Fig. 13.28(a). Determine la tensión en el cable usando el método del trabajo mínimo.

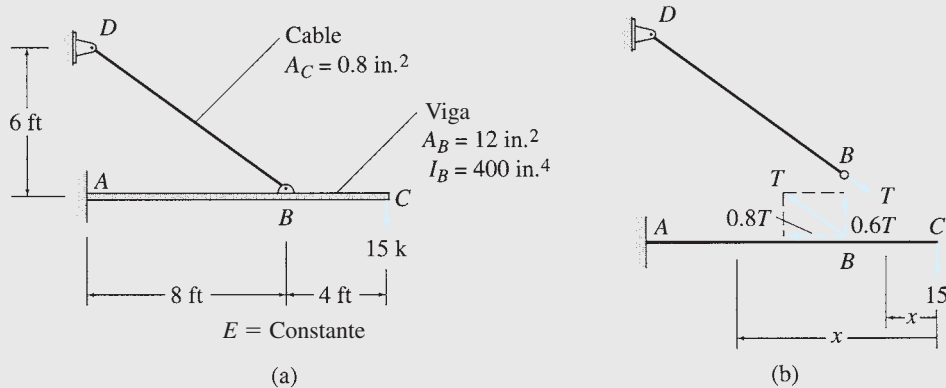


FIG. 13.28

continúa

TABLA 13.9

Segmento	Coordenada x		M	F	$\frac{\partial M}{\partial T}$	$\frac{\partial F}{\partial T}$
	Origen	Límites (ft)				
CB	C	0–4	$-15x$	0	0	0
BA	C	4–12	$-15x + 0.6T(x - 4)$	$-0.8T$	$0.6(x - 4)$	-0.8
BD	—	—	0	T	0	1

Solución

Analizaremos la estructura considerando la tensión T en el cable BD como la redundante. La magnitud de la redundante se determinará minimizando la energía de deformación de la estructura con respecto a T .

Debido a que la estructura contiene elementos con carga axial y en flexión, su energía total de deformación se expresa como la suma de la energía de deformación debido a la carga axial y la energía de deformación debido a la flexión, es decir,

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2AE} + \sum \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1)$$

De acuerdo con el principio del trabajo mínimo,

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \frac{FL}{AE} + \sum \int \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right) \frac{M}{EI} dx = 0 \quad (2)$$

Las expresiones para los momentos flexionantes M y las fuerzas axiales F en términos de la redundante T y de sus derivadas con respecto a T están tabuladas en la Tabla 13.9. Sustituyendo estas expresiones y sus derivadas en la Ec. (2), tenemos

$$\frac{1}{E} \left[\frac{(-0.8)(-0.8T)(8)(12)^2}{12} + \frac{1(T)(10)(12)^2}{0.8} + \frac{(12)^4}{400} \int_4^{12} 0.6(x-4)(-15x+0.6Tx-2.4T) dx \right] = 0$$

$$T = 27.612 \text{ k}$$

Respuesta

Resumen

En este capítulo discutimos dos formulaciones del método de la fuerza (flexibilidad) para el análisis de estructuras indeterminadas estáticamente: (1) el método de las deformaciones consistentes y (2) el método del trabajo mínimo.

El método de las deformaciones consistentes implica la eliminación de las restricciones necesarias de la estructura indeterminada para convertirla en estáticamente determinada. La estructura determinada se llama estructura primaria, y las reacciones o fuerzas internas asociadas con este exceso de restricciones eliminadas de la estructura indeterminada se conocen como redundantes. Las redundantes se tratan como cargas desconocidas aplicadas a la estructura primaria, y sus magnitudes se determinan resolviendo las ecuaciones de compatibilidad basadas en la condición de que las deflexiones de la estructura primaria en las ubicaciones (y en la dirección) de las redundantes, ya que la combinación de las cargas prescritas y de las redundantes desconocidas deben ser iguales a las deflexiones en las correspondientes ubicaciones

de la estructura indeterminada original. Una vez que las redundantes han sido determinadas, las otras respuestas características de la estructura indeterminada se pueden evaluar ya sea mediante las consideraciones de equilibrio o mediante la superposición de las respuestas de la estructura primaria debido a las cargas externas y debido a cada una de las redundantes.

El principio del trabajo mínimo establece que las *magnitudes de las redundantes de una estructura indeterminada deben ser tales que la energía de deformación almacenada en la estructura sea mínima*. Para analizar una estructura indeterminada por el método del trabajo mínimo, la energía de deformación de la estructura se expresa primero en términos de las redundantes. Luego se determinan las derivadas parciales de la energía de deformación con respecto a cada redundante y se igualan a cero para obtener un sistema de ecuaciones simultáneas que puedan resolverse para las redundantes. El método del trabajo mínimo no puede usarse para analizar los efectos de los asentamientos, cambios de temperatura y errores de fabricación.

Problemas

Sección 8.1 y 8.2

13.1 al 13.4 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P13.1 y P13.4 usando el método de las deformaciones consistentes. Seleccione la reacción en el apoyo de patín como la redundante.

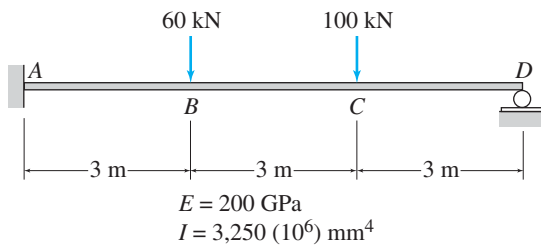


FIG. P13.1, P13.5, P13.49

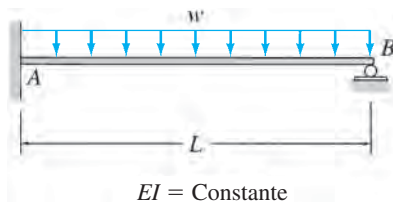


FIG. P13.2, P13.6

13.5 al 13.8 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas

en las Figs. P13.1 y P13.4 usando el método de las deformaciones consistentes. Seleccione la reacción en el apoyo empotrado como la redundante.

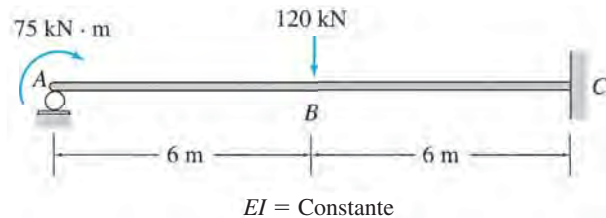


FIG. P13.3, P13.7

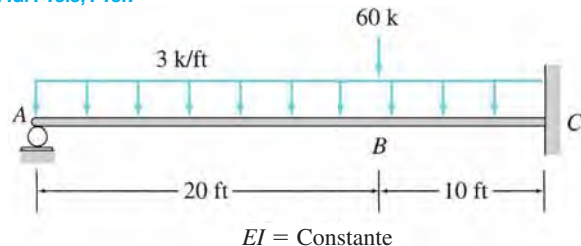


FIG. P13.4, P13.8

13.9 al 13.12 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P13.9 y P13.12 usando el método de las deformaciones consistentes. Seleccione la reacción en el apoyo interior como la redundante.

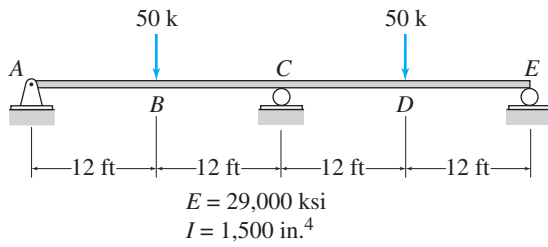


FIG. P13.9, P13.30, P13.50

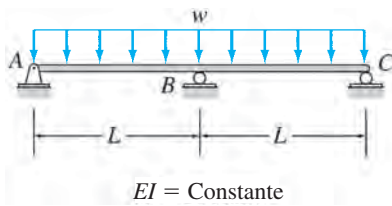


FIG. P13.10, P13.31

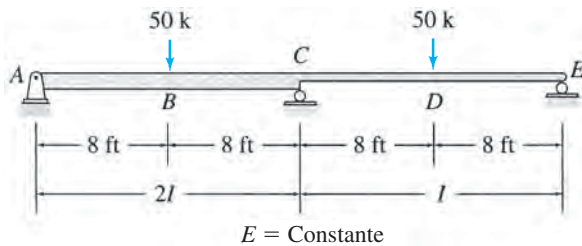


FIG. P13.11, P13.32

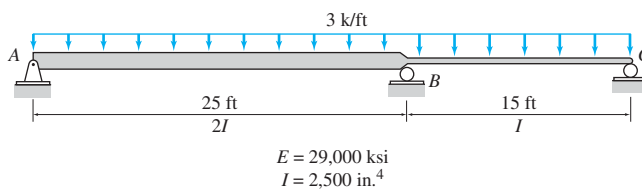


FIG. P13.12, P13.33, P13.51

13.13 al 13.25 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P13.13 y P13.25 usando el método de las deformaciones consistentes.

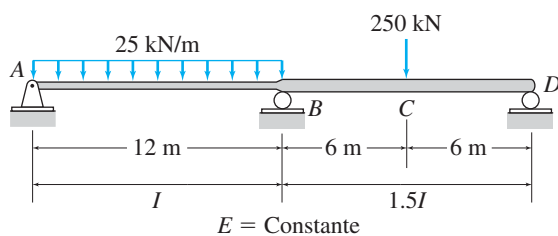


FIG. P13.13

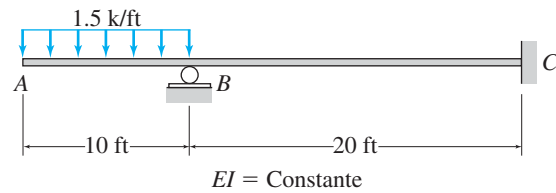


FIG. P13.14

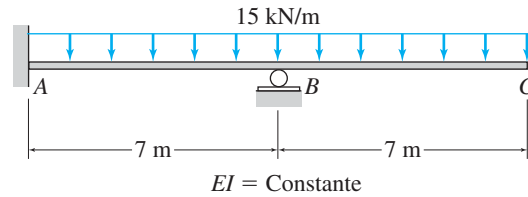


FIG. P13.15, P13.58

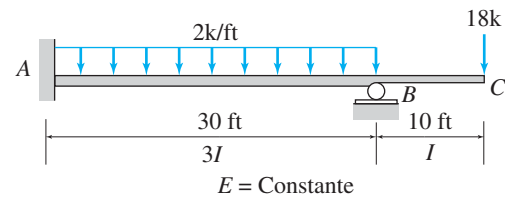


FIG. P13.16, P13.59

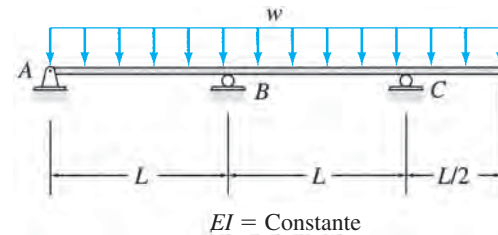


FIG. P13.17

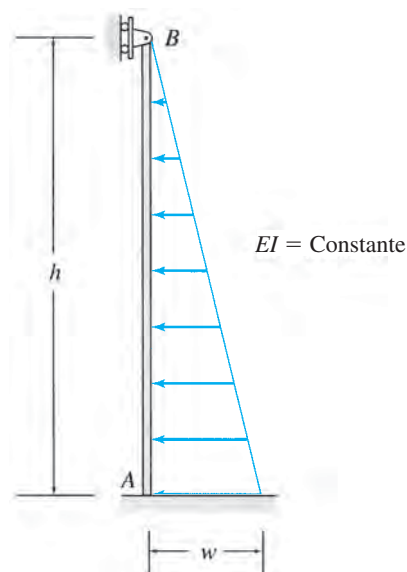


FIG. P13.18

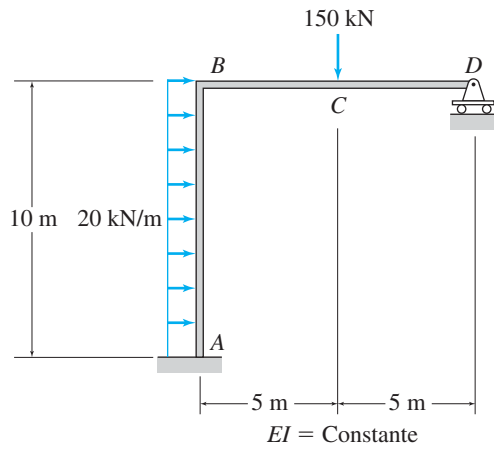


FIG. P13.19

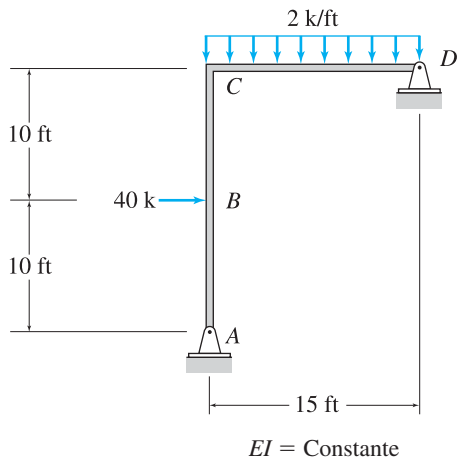


FIG. P13.20

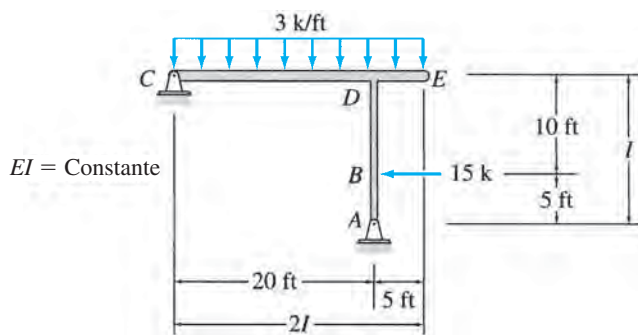


FIG. P13.21

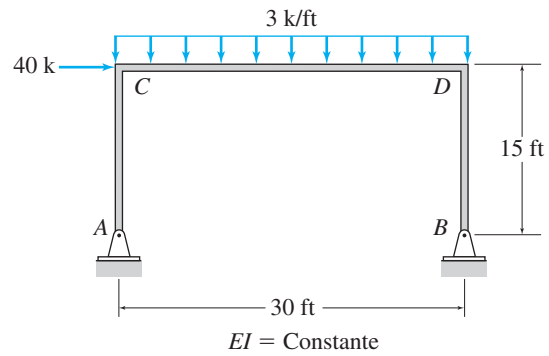


FIG. P13.22

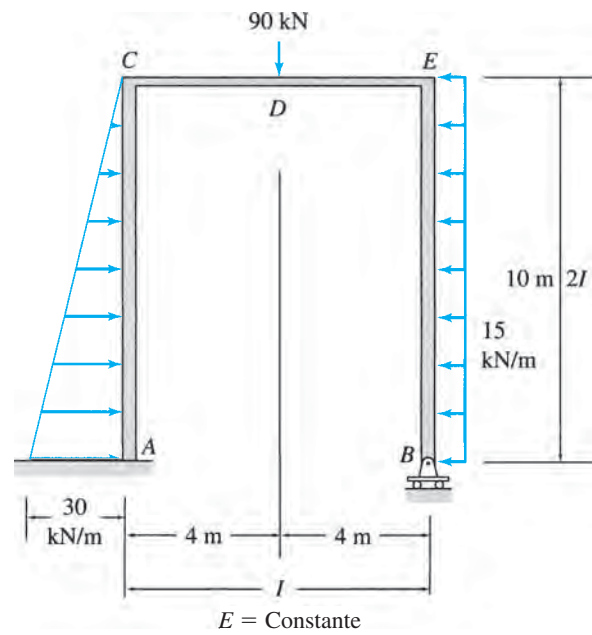


FIG. P13.23

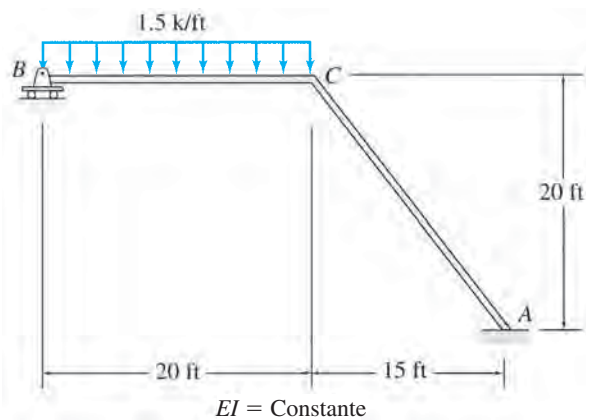


FIG. P13.24

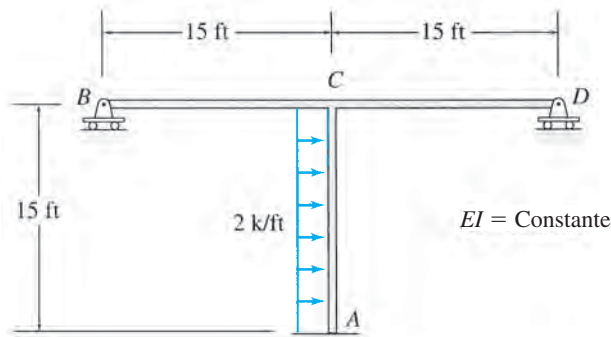


FIG. P13.25

13.26 al 13.29 Determine las reacciones y las fuerzas en los elementos de la armadura mostrada de la Fig. P13.26 a la P13.29 usando el método de las deformaciones consistentes.

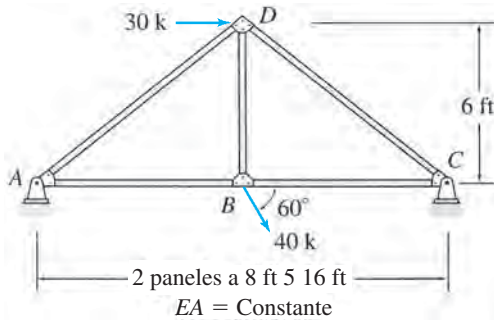


FIG. P13.26

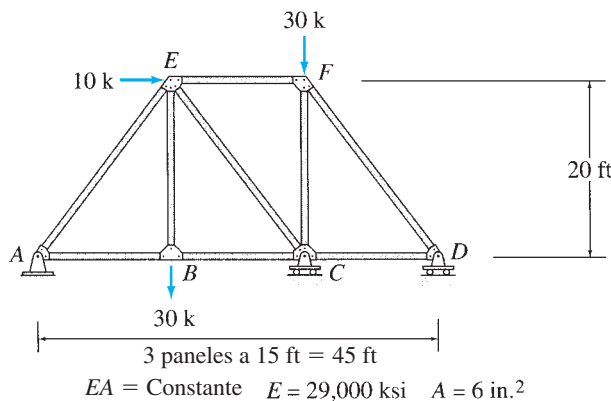


FIG. P13.27, P13.52

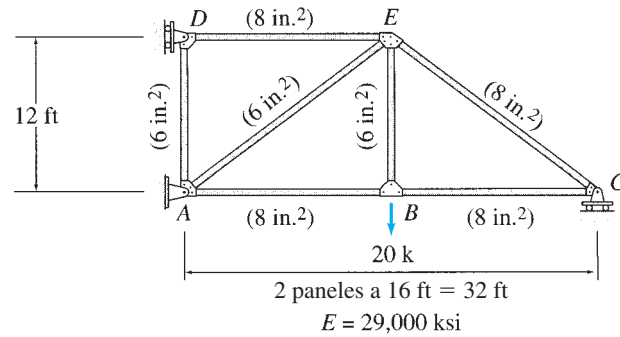


FIG. P13.28

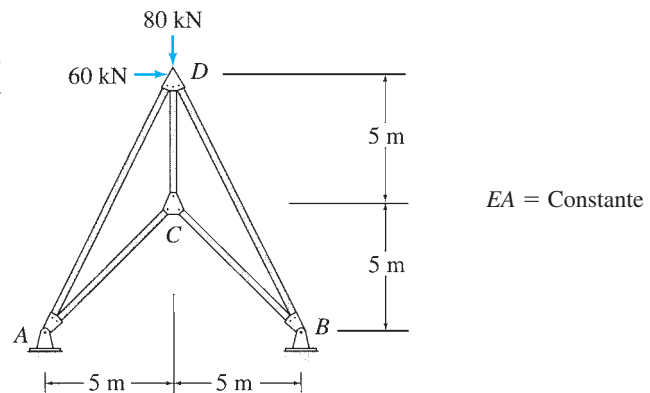


FIG. P13.29

Sección 13.2

13.30 al 13.33 Resuelva los problemas 13.9 al 13.12 seleccionando el momento flexionante en el apoyo interior como la redundante. Ver Figs. P13.9-P13.12.

13.34 al 13.36 Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en las Figs. P13.43-P13.36 usando el apoyo interior como la redundante. Ver Figs. P13.9-P13.12.

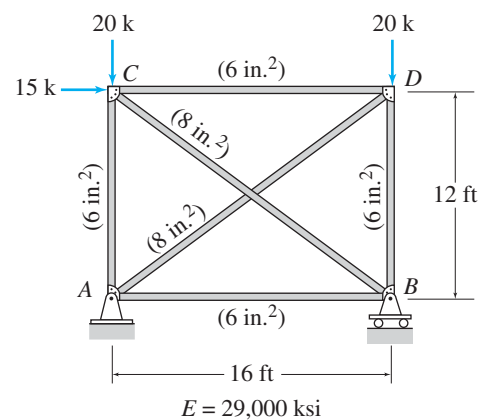


FIG. P13.34

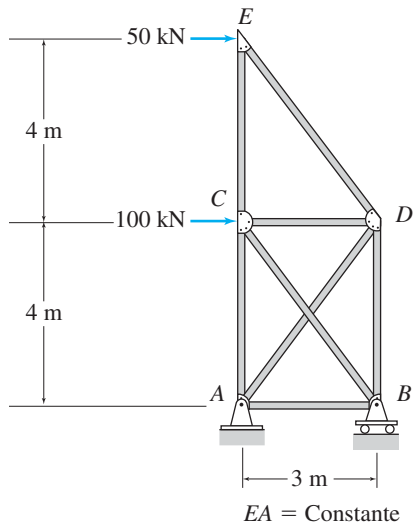


FIG. P13.35, P13.60

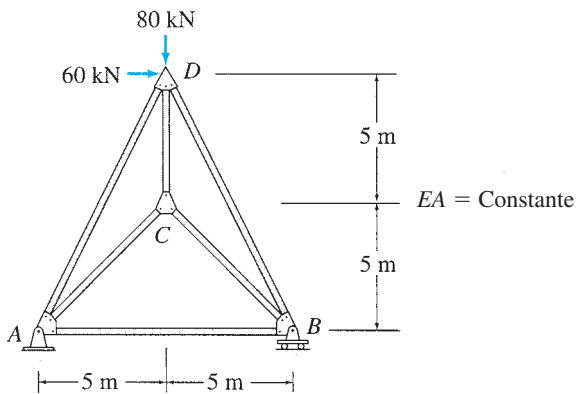


FIG. P13.36

Sección 13.3

13.37 al 13.45 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las estructuras mostradas en las Figs. P13.37-P13.45 usando el método de las deformaciones consistentes.

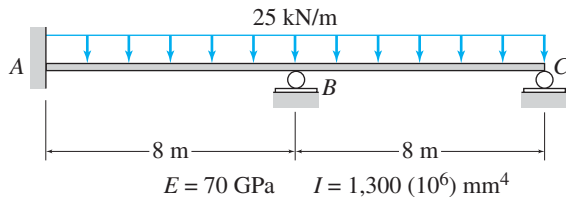


FIG. P13.37, P13.53

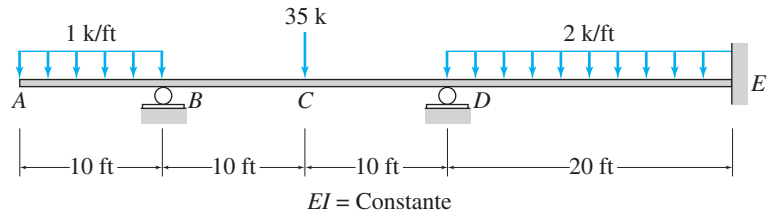


FIG. P13.38

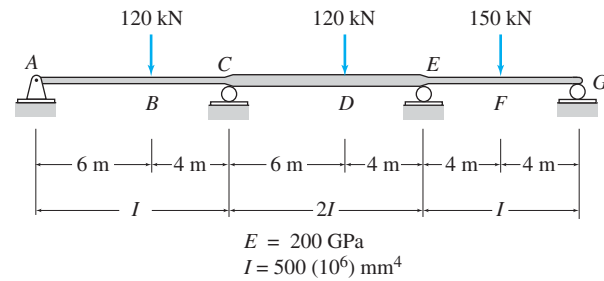


FIG. P13.39, P13.54

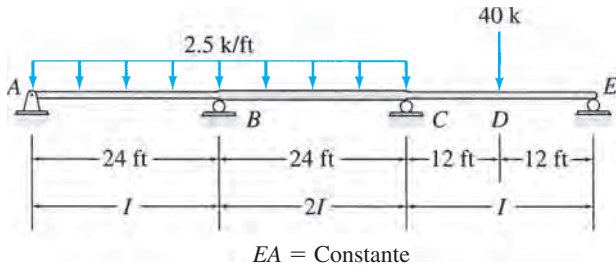


FIG. P13.40

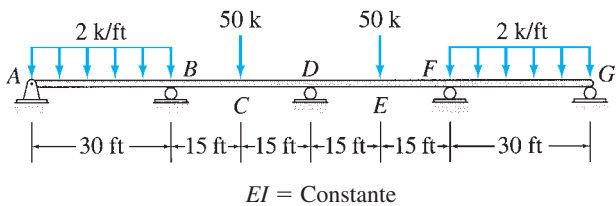


FIG. P13.41

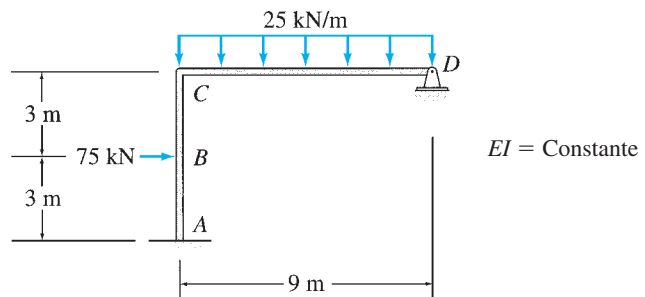


FIG. P13.42

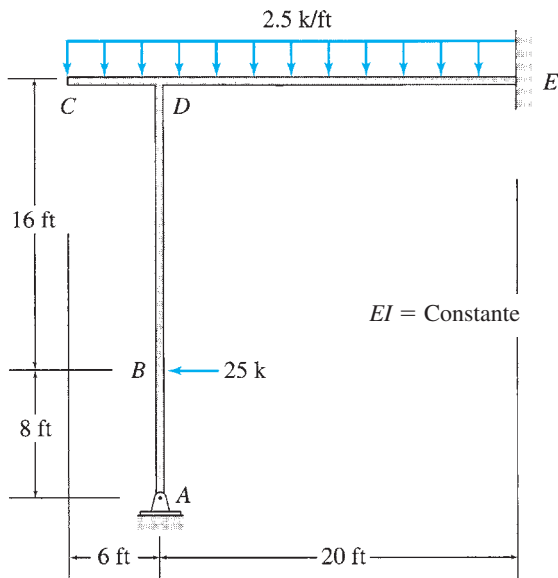


FIG. P13.43

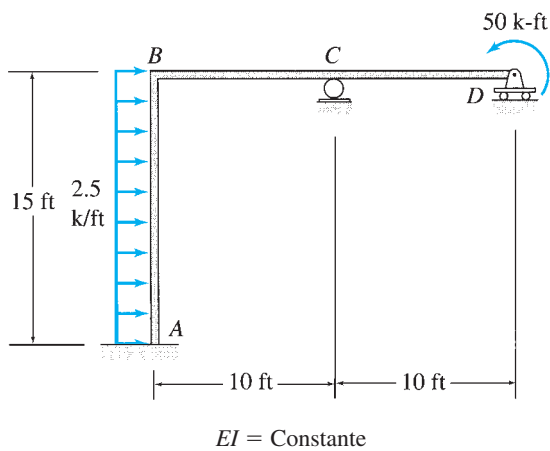


FIG. P13.44

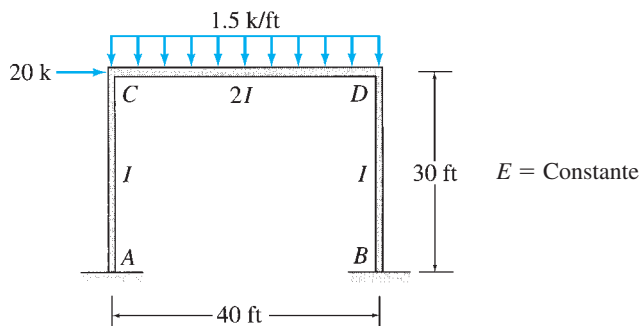


FIG. P13.45

13.46 al 13.47 Determine las reacciones y fuerzas en los elementos de las armaduras mostradas en las Figs. P13.46 y P13.47 usando el método de las deformaciones consistentes.

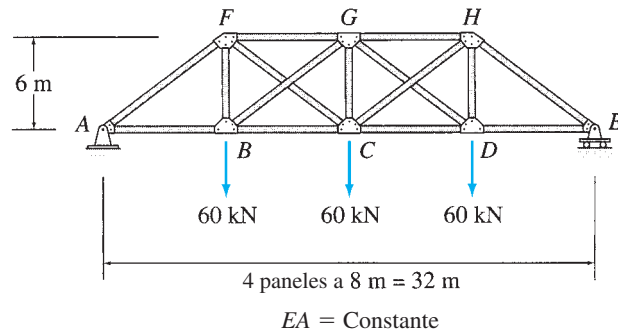


FIG. P13.46

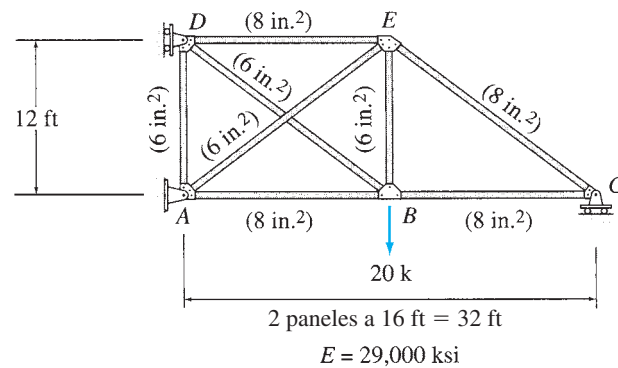


FIG. P13.47

Sección 13.4

13.48 Determine las reacciones de la viga mostrada en la Fig. P13.48 debidas a un asentamiento pequeño D en el apoyo del patín C.

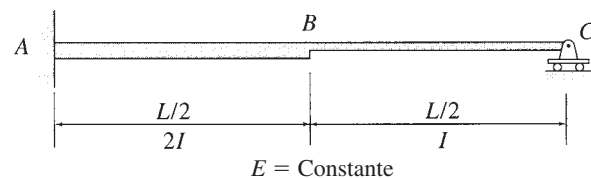


FIG. P13.48

13.49 Resuelva el Problema 13.1 para la carga mostrada y un asentamiento de 30 mm en el apoyo D. Ver Fig. P13.1

13.50 Resuelva el Problema 13.9 para la carga mostrada en la Fig. P13.9 y un asentamiento de 1 1/4 in en el apoyo C.

13.51 Resuelva el Problema 13.12 para la carga mostrada en la Fig. P13.12 y un asentamiento de $1/4$ in en el apoyo A, 1 in en B, y $3/4$ in en C.

13.52 Resuelva el Problema 13.27 para la carga mostrada en la Fig. P13.27 y un asentamiento de 1 in en el apoyo A, 3 in en C, y $1\ 3/4$ in en D.

13.53 Resuelva el Problema 13.37 para la carga mostrada en la Fig. P13.37 y un asentamiento de 50 mm en el apoyo B y 25 mm en C.

13.54 Resuelva el Problema 13.39 para la carga mostrada en la Fig. P13.39 y un asentamiento de 10 mm en el apoyo A, 65 mm en C, 40 mm en E y 25 mm en G.

13.55 Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. P13.55 debido a la caída de temperatura de 25°C en los elementos AB, BC y CD y un incremento de temperatura de 60°C en el elemento EF. Utilice el método de las deformaciones consistentes.

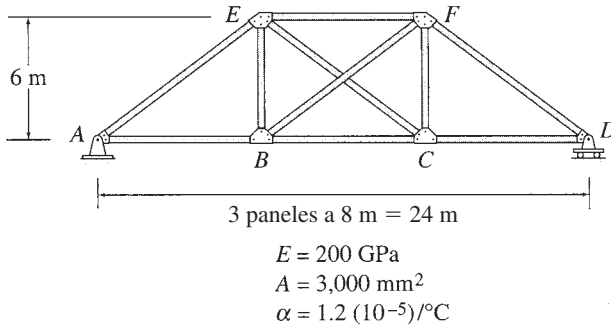


FIG. P13.55, P13.56

13.56 Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. P13.55 si el elemento EF es 300 mm más corto. Utilice el método de las deformaciones consistentes.

13.57 Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en la Fig. P13.57 debido al incremento de temperatura de 70°F en el elemento AB. Utilice el método de las deformaciones consistentes.

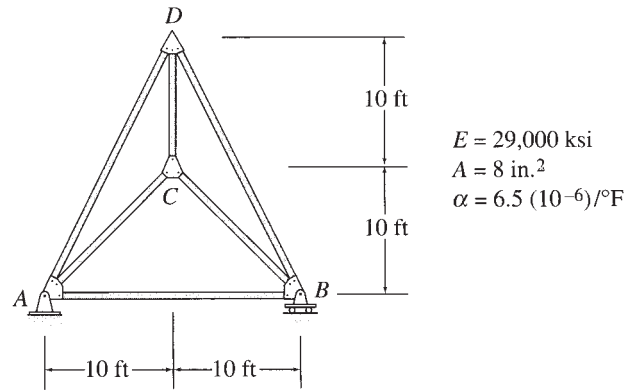


FIG. P13.57

Sección 13.5

13.58 Resuelva el Problema 13.15 por el método del trabajo mínimo. Ver Fig. P13.15.

13.59 Resuelva el Problema 13.16 por el método del trabajo mínimo. Ver Fig. P13.16.

13.60 Resuelva el Problema 13.35 por el método del trabajo mínimo. Ver Fig. P13.35.

13.61 Una viga está soportada por un apoyo empotrado B y un cable AC, como se muestra en la Fig. P13.61. Determine la tensión en el cable por el método del trabajo mínimo.

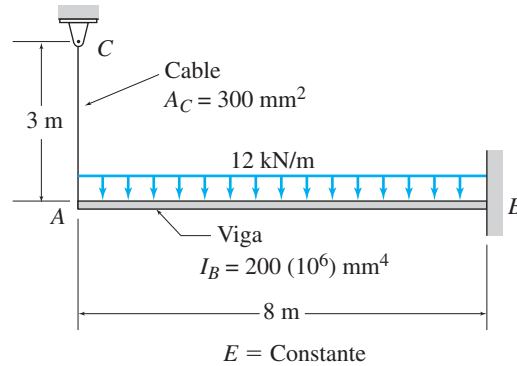


FIG. P13.61

método de las deformaciones consistentes, discutido en el Capítulo 13, para este propósito. Una vez que se han construido las líneas de influencia de las estructuras indeterminadas, se pueden usar de la misma manera que aquellas para las estructuras determinadas discutidas en el Capítulo 9. En este capítulo se desarrollará el procedimiento para construir las líneas de influencia para vigas y armaduras estáticamente indeterminadas, y se discutirá la aplicación del principio de Müller-Breslau para construir líneas de influencia cualitativas para vigas y marcos indeterminados.

14.1 Líneas de influencia para vigas y armaduras

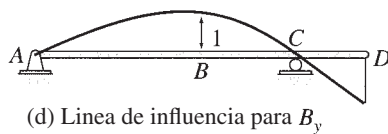
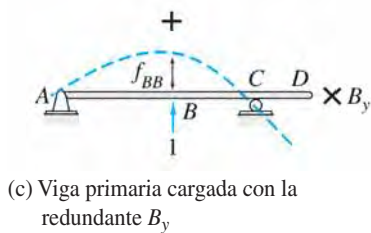
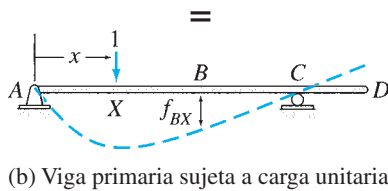
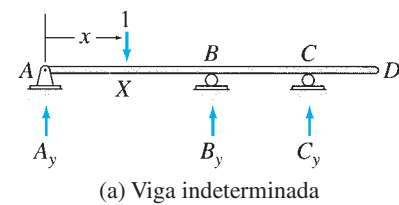


FIG. 14.1

Considere la viga continua mostrada en la Fig. 14.1(a). Suponga que deseamos dibujar la línea de influencia para la reacción vertical en el apoyo interno B de la viga. La viga está sujeta a una carga móvil hacia abajo concentrada de magnitud unitaria, la posición está definida por la coordenada x medida desde el extremo A a la izquierda de la viga, como se muestra en la figura.

Para desarrollar la línea de influencia para la reacción B_y , necesitamos determinar la expresión para B_y en términos de la posición variable x de la carga unitaria. Tenga en cuenta que la viga es estáticamente indeterminada en primer grado. Seleccionamos la reacción B_y como la redundante. El apoyo de patín en B se elimina de la viga indeterminada real para obtener la viga primaria estáticamente determinada, la cual está sujeta por separado a una carga unitaria posicionada en un punto arbitrario X a una distancia x del extremo izquierdo, y de la redundante B_y , como se muestra en las Figs. 14.1 (b) y (c), respectivamente. La expresión para B_y se puede determinar ahora usando las condiciones de compatibilidad en las que la deflexión de la viga primaria en B , debido a la combinación de efectos de la carga externa unitaria y de la redundante desconocida B_y , debe ser igual a cero. Por lo tanto,

$$f_{BX} + f_{BB}B_y = 0$$

De la cual

$$B_y = -\frac{f_{BX}}{f_{BB}} \quad (14.1)$$

Donde el coeficiente de flexibilidad f_{BX} indica la deflexión de la viga primaria en B debido a la carga unitaria en X (Fig. 14.1(b)), mientras que el coeficiente de flexibilidad f_{BB} indica la deflexión en B debida a la carga unitaria de la redundante B_y (Fig. 14.1(c)).

Podemos usar la Ec. (14.1) para construir la línea de influencia para B_y colocando la carga unitaria sucesivamente a una posición X a lo largo de la viga, evaluando f_{BX} para cada posición de la carga unitaria, y graficando los valores de la relación $-f_{BX}/f_{BB}$. Sin embargo, un procedimiento más eficiente se puede idear aplicando la *ley de las deflexiones recíprocas de Maxwell* (Sección 7.8), de acuerdo con la cual, la deflexión en B debida a la carga unitaria en X debe ser igual a la deflexión en X debida a la carga unitaria en B ; es decir, $f_{BX} = f_{XB}$. Por lo tanto la Ec. (14.1) se puede reescribir como

$$B_y = -\frac{f_{XB}}{f_{BB}} \quad (14.2)$$

La cual representa la ecuación de la línea de influencia para B_y . Tenga en cuenta que las deflexiones f_{XB} y f_{BB} se consideran positivas cuando la dirección es hacia arriba (es decir, en la dirección positiva de la redundante B_y) de acuerdo con la convención de signos adoptada por el método de las deformaciones consistentes en el Capítulo 13.

La Ec. (14.2) es más conveniente de aplicar que la Ec. (14.1) para la construcción de las líneas de influencia, porque de acuerdo con la Ec. (14.2), la carga unitaria necesita colocarse en la viga primaria solo en B , y se calculan las deflexiones f_{XB} en un número de puntos X a lo largo de la viga. La línea de influencia se puede construir entonces trazando los valores de la relación $-f_{XB}/f_{BB}$ como ordenadas contra la distancia x , la cual representa la posición del punto X como las abscisas.

La ecuación para una línea de influencia, cuando se expresa en la forma de la Ec. (14.2), muestra la validez del *principio de Müller-Breslau* para estructuras estáticamente indeterminadas. Se puede ver de la Ec. (14.2) para la construcción de la línea de influencia para B_y que si f_{BB} es constante, la ordenada de la línea de influencia en cualquier punto X es proporcional a la deflexión f_{XB} de la viga primaria en ese punto debido a la carga unitaria en B . Además, esta ecuación indica que la línea de influencia para B_y se puede obtener multiplicando la configuración deformada de la viga primaria debido a la carga unitaria en B por un factor $-1/f_{BB}$. Tenga en cuenta que esta escala produce una configuración deformada, con un desplazamiento unitario en B , como se muestra en la Fig. 14.1(d). La observación anterior muestra la validez del principio de Müller-Breslau para estructuras indeterminadas. Recuerde de la Sección 8.2 que, de acuerdo con el principio, la línea de influencia para B_y se puede obtener eliminando el apoyo B de la viga original y dando un desplazamiento unitario a la viga liberada en la dirección de B_y . Además, tenga en cuenta de la Fig. 14.1(d) que, a diferencia del caso de las estructuras estáticamente indeterminadas consideradas en el Capítulo 8, la eliminación del apoyo B de la viga indeterminada no la vuelve estáticamente estable; por lo tanto, la línea de influencia para su reacción B_y es una línea curva. Una vez que ha sido determinada la redundante B_y , las líneas de influencia para las reacciones restantes y cortantes y momentos flexionantes de la viga se pueden obtener mediante las consideraciones de equilibrio.

Líneas de influencia para estructuras con múltiples grados de indeterminación

El procedimiento para la construcción de las líneas de influencia para estructuras con múltiples grados de indeterminación es similar a aquellas estructuras con un solo grado de indeterminación. Considere, por ejemplo, la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 14.2(a). Debido a que la viga es estáticamente indeterminada en segundo grado, seleccionamos las reacciones B_y y C_y como las redundantes. Para determinar las líneas de influencia de las redundantes, colocamos la carga unitaria sucesivamente en un número X de posiciones a lo largo de la viga; y para cada posición de la carga unitaria, evaluamos las ordenadas de las líneas de influencia de B_y y C_y aplicando las ecuaciones de compatibilidad (ver de la Fig. 14.2(a) a la (d))

$$f_{BX} + f_{BB}B_y + f_{BC}C_y = 0 \quad (14.3)$$

$$f_{CX} + f_{CB}B_y + f_{CC}C_y = 0 \quad (14.4)$$

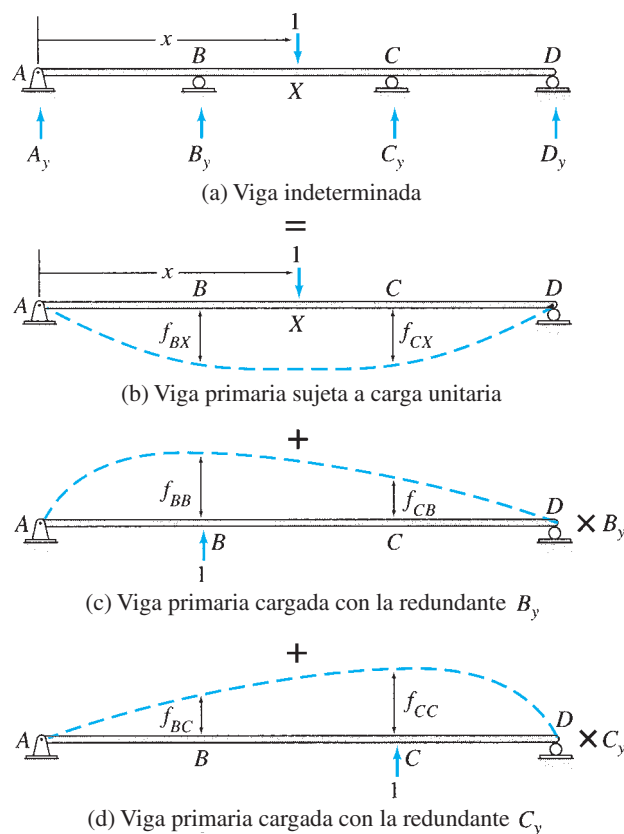


FIG. 14.2

Una vez que las líneas de influencia de las redundantes se han obtenido, las líneas de influencia de las reacciones restantes, los cortantes y los momentos flexionantes de la viga se pueden determinar mediante estática.

Como discutimos previamente, el análisis puede ser considerablemente más ágil aplicando la *ley de deflexiones recíprocas de Maxwell*, de acuerdo con $f_{BX} = f_{XB}$ y $f_{CX} = f_{XC}$. Por lo tanto, la carga unitaria necesita colocarse sucesivamente en los puntos B y C , y se calculan las deflexiones f_{XB} y f_{XC} en un número de puntos X a lo largo de la viga en lugar de calcular las deflexiones f_{BX} y f_{CX} en los puntos B y C , respectivamente, para cada una de las posiciones de la carga unitaria.

Procedimiento de análisis

El procedimiento para construir las líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas por el método de las deformaciones consistentes se puede resumir como sigue:

1. Determine el grado de indeterminación de la estructura y seleccione las redundantes.
2. Seleccione el número de puntos a lo largo de la longitud de la estructura en la cual los valores numéricos de las ordenadas de las líneas de influencia se evaluarán.

3. Para construir las líneas de influencia para las redundantes, colocamos sucesivamente una carga unitaria en cada punto seleccionado en el paso 2; y para cada posición de la carga unitaria aplicamos el método de las deformaciones consistentes para calcular los valores de las redundantes. Grafique los valores de las redundantes obtenidas en las ordenadas contra la posición de la carga unitaria en las abscisas, para construir las líneas de influencia de las redundantes. (La evaluación de las deflexiones que intervienen en las ecuaciones de compatibilidad se pueden acelerar considerablemente mediante la aplicación de la *ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas*, como se ilustró en los Ejemplos del 14.1 al 14.3.)
4. Una vez que las líneas de influencia de las redundantes se han determinado, las líneas de influencia de las otras funciones de respuesta de fuerzas y/o momentos de la estructura se pueden obtener mediante las consideraciones de equilibrio.

Ejemplo 14.1

Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en el apoyo B y para el momento flexionante en el punto C de la viga mostrada en la Fig. 14.3(a).

Solución

La viga tiene primer grado de indeterminación. Seleccionamos la reacción vertical B_y en el apoyo de patín como la redundante. Las ordenadas de las líneas de influencia se calcularán en intervalos de 3 m de los puntos A al E , como se muestra en la Fig. 14.3(a).

Líneas de influencia para la redundante B_y . El valor de la redundante B_y para una posición arbitraria x de la carga unitaria se puede determinar resolviendo la ecuación de compatibilidad (ver Figs. 14.3(b) y (c)).

$$f_{BX} + \bar{f}_{BB}B_y = 0$$

De la cual

$$B_y = -\frac{f_{BX}}{\bar{f}_{BB}} \quad (1)$$

Por la ley de las deflexiones recíprocas de Maxwell, $f_{BX} = f_{XB}$, colocamos la carga unitaria en B sobre la viga primaria (Fig. 14.3(d)) y calculamos las deflexiones en los puntos A al E usando las fórmulas para vigas conjugadas que se encuentran en el interior de la portada del libro; por lo tanto,

$$f_{BA} = f_{AB} = -\frac{364.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{BB} = -\frac{243 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{BC} = f_{CB} = -\frac{126 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{BD} = f_{DB} = -\frac{36 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{BE} = f_{EB} = 0$$

En ellas los signos negativos indican que estas deflexiones están en dirección hacia abajo. Tenga en cuenta que el coeficiente de flexibilidad $\bar{f}_{BB}$ en la Ec. (1) señala que la deflexión positiva (hacia arriba) de la viga primaria en B se debe a la

continúa

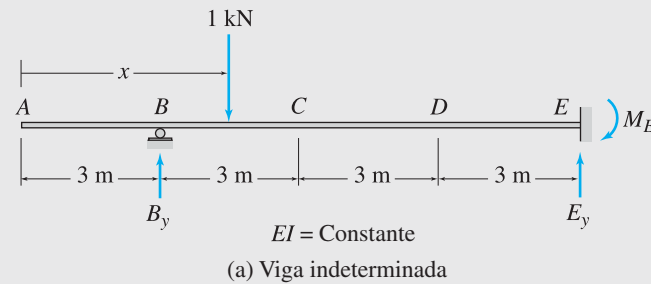
carga unitaria de la redundante B_y (Fig. 14.3(c)), mientras que la deflexión f_{BB} representa la deflexión hacia abajo (negativa) en B debido a la carga externa unitaria en B (Fig. 14.3(d)); por lo tanto,

$$\bar{f}_{BB} = -f_{BB} = +\frac{243 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

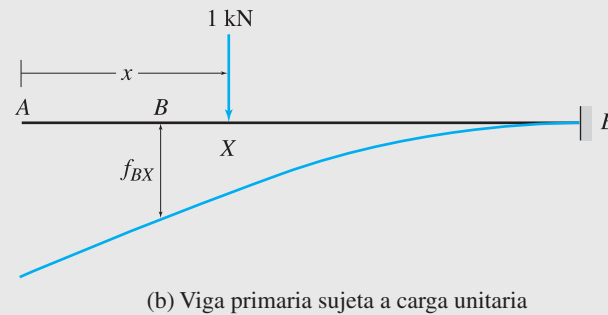
Las ordenadas de la línea de influencia para B_y se pueden evaluar ahora aplicando la Ec. (1) sucesivamente para cada posición de la carga unitaria. Por ejemplo, cuando la carga unitaria se localiza en A , el valor de B_y se obtiene como

$$B_y = -\frac{f_{BA}}{\bar{f}_{BB}} = \frac{364.5}{243} = 1.5 \text{ kN/kN}$$

Las ordenadas restantes de la línea de influencia para B_y se calculan de manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.1 y la línea de influencia para B_y se muestra en la Fig. 14.3(e). **Respuesta**



=



+

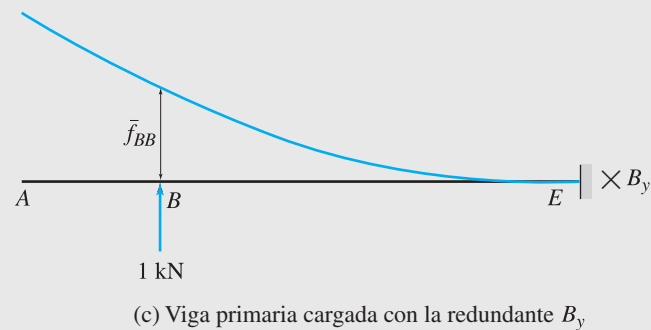
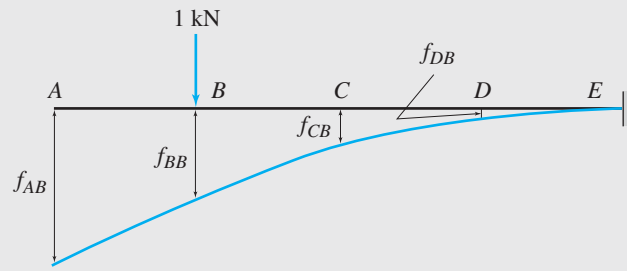
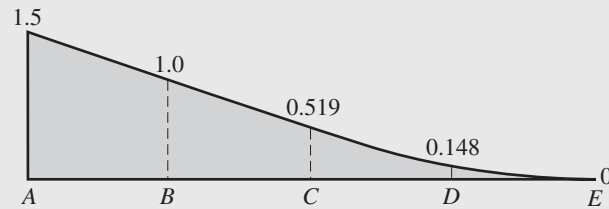
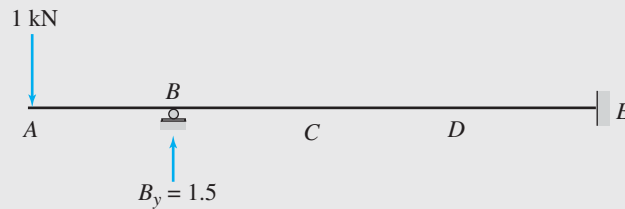


FIG. 14.3

continúa



(d) Viga primaria sujeta a carga unitaria en B


 (e) Línea de influencia para B_y (kN/kN)


(f)

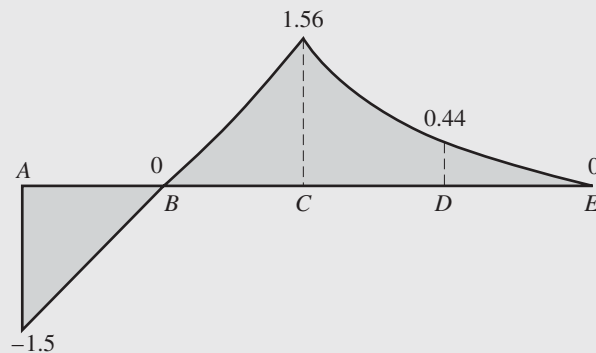

 (g) Línea de influencia para M_C (kN · m/kN)

FIG. 14.3 (continuación)

Línea de influencia para M_C . Con la línea de influencia para B_y determinada, las ordenadas de la línea de influencia para el momento flexionante en C se puede determinar colocando la carga unitaria sucesivamente en los puntos de A hasta E en la viga indeterminada y utilizando los valores correspondientes de B_y calculados previamente. Por ejemplo, como se muestra en la Fig. 14.3(f), cuando la carga unitaria se ubica en el punto A, el valor de la reacción en B es $B_y = 1.5$ kN/kN. Considerando el equilibrio del cuerpo libre de la porción de la viga a la izquierda de C, obtenemos,

$$M_C = -1(6) + 1.5(3) = -1.5 \text{ kN} \cdot \text{m/kN}$$

continúa

Tabla 14.1

Carga unitaria en	Ordenadas de la línea de influencia	
	B_y (kN/kN)	M_c (kN · m/kN)
A	1.5	-1.5
B	1.0	0
C	0.519	1.56
D	0.148	0.44
E	0	0

Los valores de las ordenadas restantes de la línea de influencia se calculan de manera similar. Estas ordenadas están indicadas en la Tabla 14.1, y la línea de influencia para M_c se muestra en la Fig. 14.3(g).

Respuesta**Ejemplo 14.2**

Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y el cortante y momento flexionante en el punto C de la viga continua de dos claros mostrada en la Fig. 14.4(a).

Solución

La viga es indeterminada en primer grado. Seleccionamos la reacción vertical D_y en el apoyo interior D como la redundante. Las ordenadas de la línea de influencia se evaluarán a intervalos de 10 ft de los puntos A al F mostrados en la Fig. 14.4(a).

Líneas de influencia para la redundante D_y . El valor de la redundante D_y para una posición arbitraria x de la carga unitaria se puede determinar resolviendo la ecuación de compatibilidad (ver Figs. 14.4(b) y (c)).

$$f_{DX} + \bar{f}_{DD} D_y = 0$$

De la cual

$$D_y = -\frac{f_{DX}}{\bar{f}_{DD}} \quad (1)$$

Debido a que $f_{DX} = f_{XD}$ de acuerdo con la ley de las deflexiones recíprocas de Maxwell, colocamos la carga unitaria en D sobre la viga primaria (Fig. 14.4(d)) y calculamos las deflexiones en los puntos A al F usando el método de la viga conjugada. La viga conjugada se muestra en la Fig. 14.4(e), de la cual obtenemos lo siguiente:

$$f_{DA} = f_{AD} = 0$$

$$f_{DB} = f_{BD} = -\frac{1}{EI} \left[86(10) - \left(\frac{1}{2}\right)(10)(2) \left(\frac{10}{3}\right) \right] = -\frac{826.667 \text{ k-ft}^3/\text{k}}{EI}$$

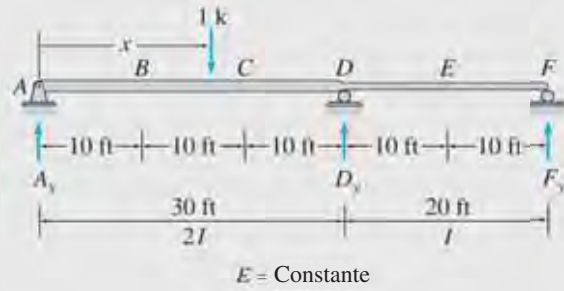
$$f_{DC} = f_{CD} = -\frac{1}{EI} \left[86(20) - \left(\frac{1}{2}\right)(20)(4) \left(\frac{20}{3}\right) \right] = -\frac{1,453.333 \text{ k-ft}^3/\text{k}}{EI}$$

$$f_{DD} = -\frac{1}{EI} \left[86(30) - \left(\frac{1}{2}\right)(30)(6)(10) \right] = -\frac{1,680 \text{ k-ft}^3/\text{k}}{EI}$$

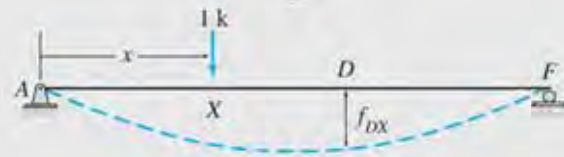
$$f_{DE} = f_{ED} = -\frac{1}{EI} \left[124(10) - \left(\frac{1}{2}\right)(10)(6) \left(\frac{10}{3}\right) \right] = -\frac{1,140 \text{ k-ft}^3/\text{k}}{EI}$$

$$f_{DF} = f_{FD} = 0$$

continúa



(a) Viga indeterminada



(b) Viga primaria sujeta a carga unitaria

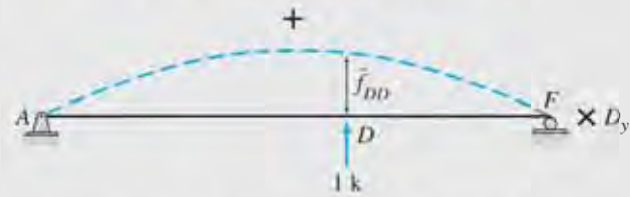
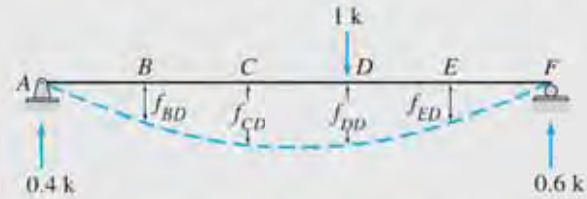
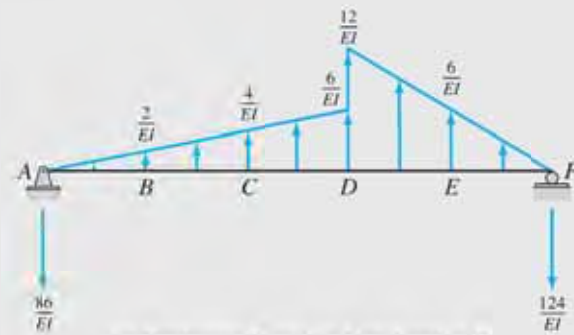
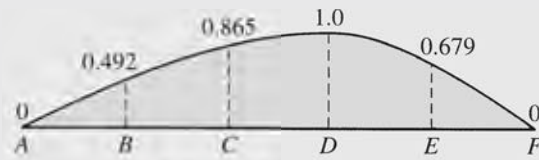
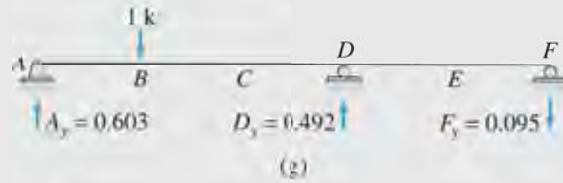

 (c) Viga primaria cargada con la redundante D_y

 (d) Viga primaria sujeta a la carga unitaria D

 (e) Viga conjugada para la carga unitaria en D

FIG. 14.4

continúa


(f) Línea de influencia para D_y (k/k)


(g)

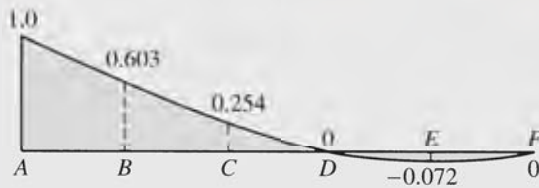
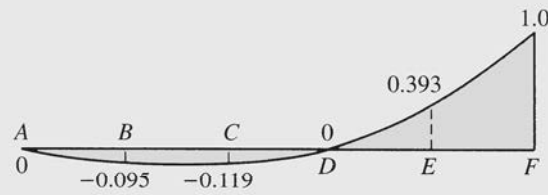
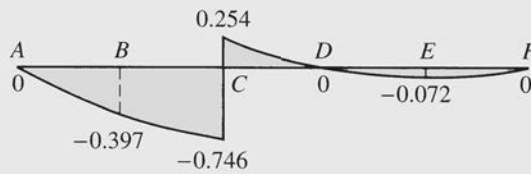
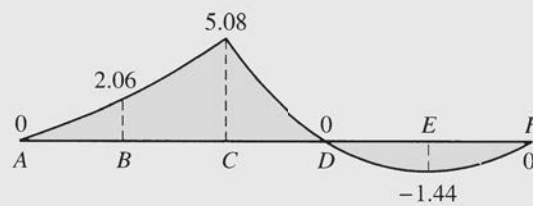

(h) Línea de influencia para A_y (k/k)

(i) Línea de influencia para F_y (k/k)

(j) Línea de influencia para S_C (k/k)

(k) Línea de influencia para M_C (k-ft/k)

FIG. 14.4 continuación

TABLA 14.2

Carga unitaria en	Ordenadas de la línea de Influencia				
	D_y (k/k)	A_y (k/k)	F_y (k/k)	S_c (k/k)	M_c (k-ft/k)
A	0	1.0	0	0	0
B	0.492	0.603	-0.095	-0.397	2.06
C	0.865	0.254	-0.119	-0.746 (Izquierda) 0.254 (Derecha)	5.08
D	1.0	0	0	0	0
E	0.679	-0.072	0.393	-0.072	-1.44
F	0	0	1.0	0	0

Aquí los signos negativos indican que estas deflexiones ocurren en dirección hacia abajo. Tenga en cuenta que el coeficiente de flexibilidad $\bar{f}_{DD}$ en la Ec. (1) muestra que la deflexión es (positiva) hacia arriba de la viga primaria en D debido a la carga unitaria de la redundante D_y (Fig. 14.4(c)), mientras que la deflexión f_{DD} representa la deflexión (negativa) hacia abajo debido a la carga externa unitaria en D (Fig. 14.4(d)). Por lo tanto,

$$\bar{f}_{DD} = -f_{DD} = + \frac{1,680 \text{ k-ft}^3/\text{k}}{EI}$$

Las ordenadas de la línea de influencia para D_y se puede calcular aplicando la Ec. (1) sucesivamente para cada posición de la carga unitaria. Por ejemplo, cuando la carga unitaria se localiza en B, el valor de D_y está dado por

$$D_y = -\frac{f_{DB}}{\bar{f}_{DD}} = \frac{826.667}{1,680} = 0.492 \text{ k/k}$$

Las ordenadas restantes de la línea de influencia para D_y se calculan de una manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.2, y la línea de influencia para D_y se muestra en la Fig. 14.4 (f). **Respuesta**

Líneas de influencia para A_y y F_y . Con la línea de influencia para D_y conocida, las líneas de influencia de las reacciones restantes se pueden determinar aplicando las ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, para la posición de la carga unitaria en el punto B, como se muestra en la Fig. 14.4(g), el valor de la redundante D_y ha sido determinado como 0.492 k/k. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, determinamos los valores de las reacciones A_y y F_y como

$$\begin{aligned} + \zeta \sum M_F = 0 \quad & -A_y(50) + 1(40) - 0.492(20) = 0 \\ & A_y = 0.603 \text{ k/k} \uparrow \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \quad & 0.603 - 1 + 0.492 + F_y = 0 \\ & F_y = -0.095 \text{ k/k} = 0.095 \text{ k/k} \downarrow \end{aligned}$$

Los valores de las ordenadas de las líneas de influencia restantes se calculan de manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.2, y las líneas de influencia para A_y y F_y se muestran en las Figs. 14.4(h) e (i), respectivamente. **Respuesta**

Líneas de influencia para S_c y M_c . Las ordenadas de las líneas de influencia para el cortante y el momento flexionante en C se pueden evaluar ahora colocando la carga unitaria sucesivamente en los puntos A al F en la viga indeterminada y usando los valores correspondientes de las reacciones calculadas previamente. Por ejemplo, como se muestra en la Fig. 14.4(g), cuando la carga unitaria se localiza en el punto B, los valores de las reacciones son $A_y = 0.603 \text{ k/k}$; $D_y = 0.492 \text{ k/k}$; $F_y = -0.095 \text{ k/k}$. Considerando el equilibrio del cuerpo libre en la parte de la viga a la izquierda de C, tenemos

$$\begin{aligned} S_c &= 0.603 - 1 = -0.397 \text{ k/k} \\ M_c &= 0.603(20) - 1(10) = 2.06 \text{ k-ft/k} \end{aligned}$$

Los valores restantes de las ordenadas de las líneas de influencia se calculan de manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.2, y las líneas de influencia del cortante y momento flexionante en C se muestran en las Figs. 14.4(j) y (k), respectivamente. **Respuesta**

Ejemplo 14.3

Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 14.5(a).

Solución

La viga es indeterminada en segundo grado. Seleccionamos las reacciones verticales D_y y G_y en los apoyos de patín D y G , respectivamente, como las redundantes. Las ordenadas de la línea de influencia se evaluarán a intervalos de 5 m de los puntos A al G mostrados en la Fig. 14.5(a).

Líneas de influencia para las redundantes D_y y G_y . El valor de las redundantes D_y y G_y para una posición arbitraria x de la carga unitaria se pueden determinar resolviendo la ecuación de compatibilidad (ver Figs. de 14.5(b) a (d)):

$$f_{DX} + \bar{f}_{DD}D_y + \bar{f}_{DG}G_y = 0 \quad (1)$$

$$f_{GX} + \bar{f}_{GD}D_y + \bar{f}_{GG}G_y = 0 \quad (2)$$

Por la ley de Maxwell, $f_{DX} = f_{XD}$, colocamos la carga unitaria en D en la viga primaria (Fig. 14.5(e)) y calculamos las deflexiones de los puntos A al G usando las fórmulas del método de la viga conjugada que se encuentran en el interior de la portada del libro; por lo tanto,

$$f_{DA} = f_{AD} = 0$$

$$f_{DB} = f_{BD} = -\frac{166.667 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DC} = f_{CD} = -\frac{583.333 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DD} = -\frac{1,125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DE} = f_{ED} = -\frac{1,687.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DF} = f_{FD} = -\frac{2,250 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{DG} = f_{GD} = -\frac{2,812.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

De manera similar, las deflexiones $f_{GX} = f_{XG}$ se calculan colocando la carga unitaria en G (Fig. 14.5(f)):

$$f_{GA} = f_{AG} = 0$$

$$f_{GB} = f_{BG} = -\frac{354.167 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{GC} = f_{CG} = -\frac{1,333.333 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{GE} = f_{EG} = -\frac{4,666.667 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{GF} = f_{FG} = -\frac{6,770.833 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

$$f_{GG} = -\frac{9,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^3/\text{kN}}{EI}$$

En estas ecuaciones los signos negativos indican que las deflexiones son en dirección hacia abajo.

continúa

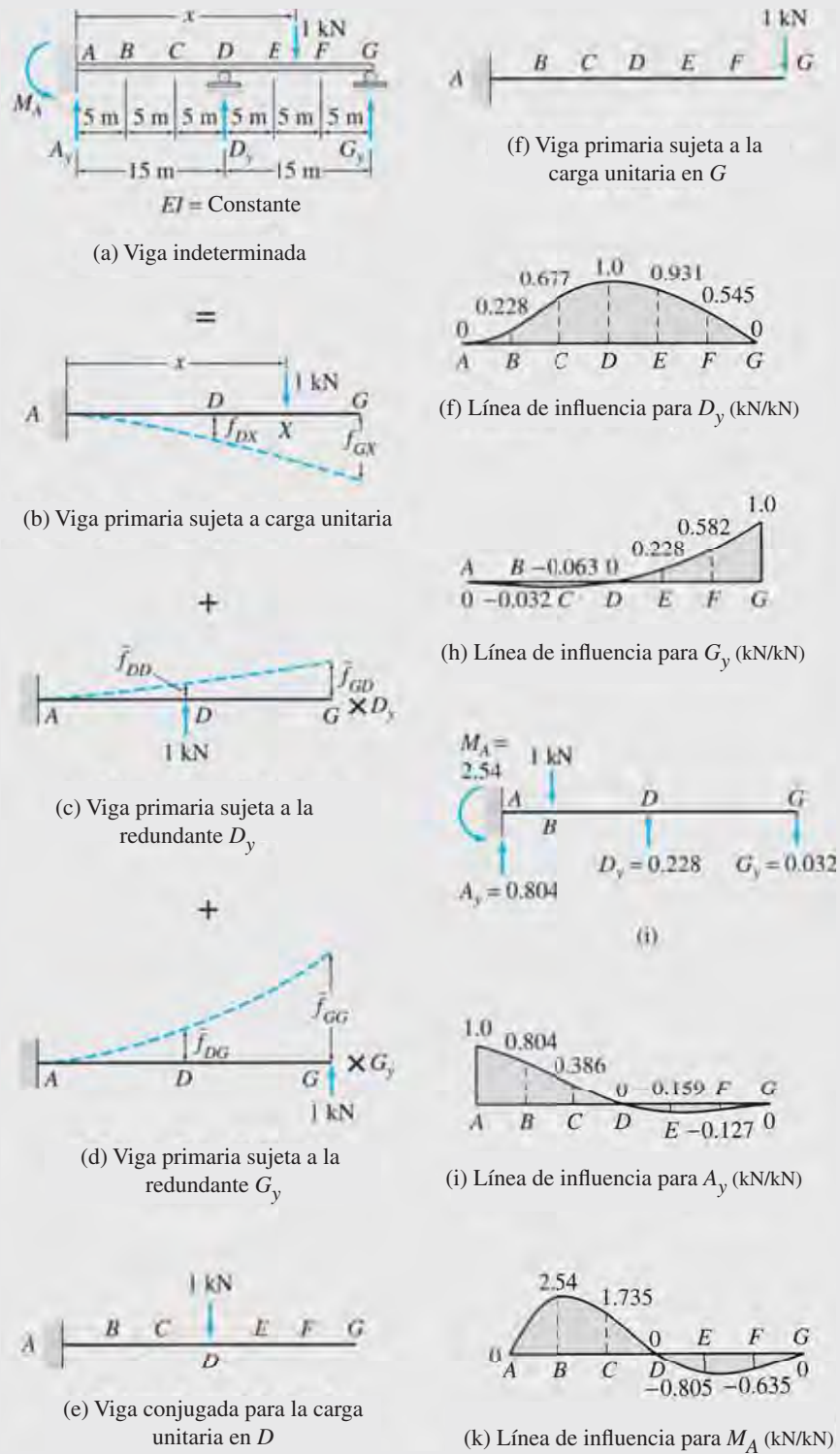


FIG. 14.5

continúa

TABLA 14.3

Carga unitaria en	Ordenadas de la línea de Influencia			
	D_y (kN/kN)	G_y (kN/kN)	A_y (kN/kN)	M_A (kN · m/kN)
A	0	0	1.0	0
B	0.228	-0.032	0.804	2.540
C	0.677	-0.063	0.386	1.735
D	1.0	0	0	0
E	0.931	0.228	-0.159	-0.805
F	0.545	0.582	-0.127	-0.635
G	0	1.0	0	0

Las deflexiones hacia arriba debido a las cargas unitarias de las redundantes (Figs. 14.5(c) y (d)) están dadas por

$$\bar{f}_{DD} = + \frac{1,125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 / \text{kN}}{EI}$$

$$\bar{f}_{DG} = \bar{f}_{GD} = + \frac{2,812.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 / \text{kN}}{EI}$$

$$\bar{f}_{GG} = + \frac{9,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 / \text{kN}}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de estos coeficientes de flexibilidad en las ecuaciones de compatibilidad (Ecs. (1) y (2)), y resolviendo para D_y y G_y , tenemos

$$D_y = \frac{EI}{1,968.75} (-8f_{DX} + 2.5f_{GX}) \quad (3)$$

$$G_y = \frac{EI}{1,968.75} (2.5f_{DX} - f_{GX}) \quad (4)$$

Los valores de las redundantes D_y y G_y , para cada posición de la carga unitaria, se pueden determinar sustituyendo los valores correspondientes de las deflexiones f_{DX} y f_{GX} en las Ecs. (3) y (4). Por ejemplo, las ordenadas de las líneas de influencia para D_y y G_y para la posición de la carga unitaria en B se pueden calcular sustituyendo $f_{DX} = f_{DB} = -166.667 / EI$ y $f_{GX} = f_{GB} = -354.167 / EI$ en las Ecs. (3) y (4):

$$D_y = \frac{EI}{1,968.75} \left[-8 \left(-\frac{166.667}{EI} \right) + 2.5 \left(-\frac{354.167}{EI} \right) \right] = 0.228 \text{ kN/kN} \uparrow$$

$$G_y = \frac{EI}{1,968.75} \left[2.5 \left(-\frac{166.667}{EI} \right) + \frac{354.167}{EI} \right] = -0.032 \text{ kN/kN}$$

$$= 0.032 \text{ kN/kN} \downarrow$$

Las ordenadas restantes de las líneas de influencia para las redundantes se calculan de manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.3, y las líneas de influencia para D_y y G_y se muestran en las Figs. 14.5(g) y (h), respectivamente.

Respuesta

Líneas de influencia para A_y y M_A . Las ordenadas de las líneas de influencia para las reacciones restantes se pueden determinar colocando la carga unitaria sucesivamente en los puntos de A a G en la viga indeterminada aplicando las ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, para la posición de la carga unitaria en B (Fig. 14.5(i)), los valores de las reacciones D_y y G_y se determinaron como 0.228 kN/kN y -0.032 kN/kN, respectivamente. Considerando el equilibrio de la viga, calculamos los valores de las reacciones A_y y M_A como sigue:

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y - 1 + 0.228 - 0.032 = 0$$

$$A_y = 0.804 \text{ kN/kN} \uparrow$$

continúa

$$+ \zeta \sum M_A = 0 \quad M_A - 1(5) + 0.228(15) - 0.032(30) = 0$$

$$M_A = 2.54 \text{ kN} \cdot \text{m/kN} \quad \rangle$$

Los valores de las líneas de influencia restantes son calculados de manera similar. Estas ordenadas están tabuladas en la Tabla 14.3, y las líneas de influencia para A_y y M_A se muestran en las Figs. 14.5(j) y (k), respectivamente. **Respuesta**

Ejemplo 14.4

Dibuje las líneas de influencia para las fuerzas en los elementos BC , BE y CE de la armadura mostrada en la Fig. 14.6(a). Las cargas vivas se transmiten por la cuerda superior de la armadura.

Solución

La armadura es estáticamente indeterminada en primer grado. Seleccionamos la fuerza axial F_{CE} en el elemento diagonal CE como la redundante.

Líneas de influencia para la redundante F_{CE} . Para determinar la línea de influencia para F_{CE} , colocamos la carga unitaria sucesivamente en los nodos B y C , y para cada posición de la carga unitaria aplicamos el método de las deformaciones consistentes para calcular la fuerza F_{CE} . La armadura primaria, obtenida eliminando el elemento CE , se sujeta por separado a la carga unitaria en B y C , como se muestra en las Figs. 14.6(b) y (c), respectivamente, y la fuerza de tensión en la redundante del elemento CE , como se muestra en la Fig. 14.6(d).

Cuando la carga unitaria se localiza en B , la ecuación de compatibilidad se puede expresar como

$$f_{CE,B} + f_{CE,CE} F_{CE} = 0$$

En la cual, f_{CE} indica el desplazamiento relativo entre los nodos C y E de la armadura primaria debido a la carga unitaria en B , y $f_{CE,CE}$ señala el desplazamiento relativo entre los mismos nodos debido al valor de la carga unitaria de la redundante F_{CE} . Aplicando el método del trabajo virtual (ver Figs. 14.6(b) y (d) y la Tabla 14.4), obtenemos

$$f_{CE,B} = \frac{1}{E} \sum \frac{u_B u_{CE} L}{A} = -\frac{37.856}{E}$$

$$f_{CE,CE} = \frac{1}{E} \sum \frac{u_{CE}^2 L}{A} = \frac{233.6}{E}$$

Sustituyendo estos valores numéricos en la ecuación de compatibilidad, determinamos la ordenada de la línea de influencia para F_{CE} en B como

$$F_{CE} = 0.162 \text{ k/k (T)}$$

De manera similar, cuando la carga unitaria se ubica en C , la ecuación de compatibilidad está dada por

$$f_{CE,C} + f_{CE,CE} F_{CE} = 0$$

(Ver Figs. 14.6(c) y (d) y la Tabla 14.4) en la cual

$$f_{CE,C} = \frac{1}{E} \sum \frac{u_C u_{CE} L}{A} = \frac{91.856}{E}$$

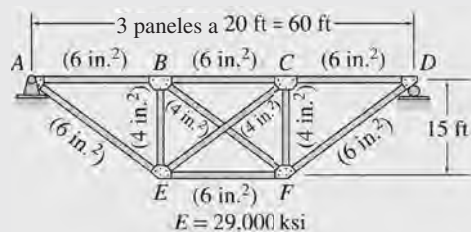
Sustituyendo los valores numéricos de f_{CE} y $f_{CE,CE}$ en la ecuación de compatibilidad, determinamos la ordenada de la línea de influencia para F_{CE} en C como

$$F_{CE} = -0.393 \text{ k/k} = 0.393 \text{ k/k (C)}$$

La línea de influencia para F_{CE} se muestra en la Fig. 14.6(e).

Respuesta

continúa



(a) Armadura indeterminada

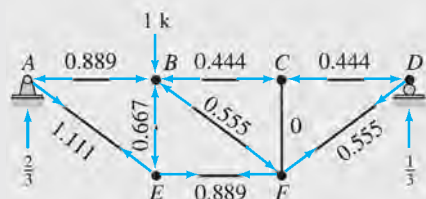
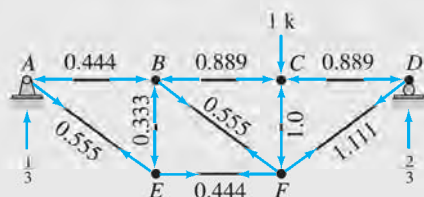
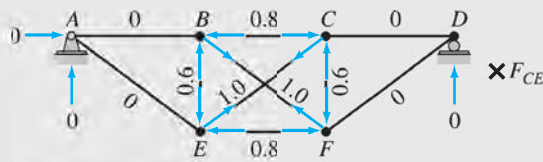
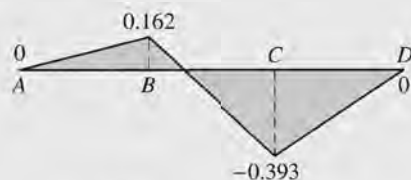
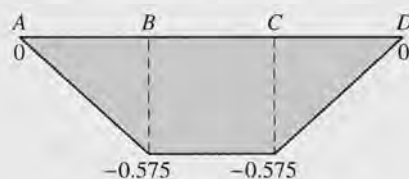
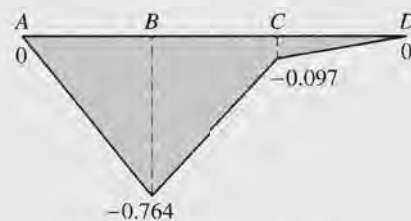
(b) Armadura primaria sujeta a unidad de carga B - u_B Fuerzas(c) Armadura primaria sujeta a unidad de carga C - u_C Fuerzas(d) Armadura primaria sujeta a unidad de tensión fuerza en el elemento CE - u_{CE} Fuerzas(e) Línea de influencia para F_{CE} (k/k)(f) Línea de influencia para F_{BC} (k/k)(g) Línea de influencia para F_{BE} (k/k)

FIG. 14.6

Línea de influencia para F_{BC} y F_{BE} . La ordenada en B de la línea de influencia para la fuerza en cualquier elemento de la armadura se puede determinar por la relación de superposición (Ver Figs. 14.6(b) y (d) y la Tabla 14.4).

$$F = u_B + u_{CE} F_{CE}$$

En la cual, F_{CE} indica la ordenada en B de la línea de influencia para la redundante F_{CE} . Por lo tanto, las ordenadas en B de la línea de influencia F_{BC} y F_{BE} son

$$F_{BC} = -0.444 + (-0.8)(0.162) = -0.575 \text{ k/k} = 0.575 \text{ k/k (C)}$$

$$F_{BE} = -0.667 + (-0.6)(0.162) = -0.764 \text{ k/k} = 0.764 \text{ k/k (C)}$$

De manera similar, las ordenadas de las líneas de influencia para F_{BC} y F_{BE} en C se pueden determinar usando las relaciones de superposición (ver Figs. 14.6(c) y (d) y la Tabla 14.4)

$$F = u_C + u_{CE} F_{CE}$$

continúa

TABLA 14.4

Elemento	L (in.)	A (in. ²)	u_B (k/k)	u_C (k/k)	u_{CE} (k/k)	$\frac{u_B u_{CE} L}{A}$	$\frac{u_C u_{CE} L}{A}$	$\frac{u_{CE}^2 L}{A}$
AB	240	6	-0.889	-0.444	0	0	0	0
BC	240	6	-0.444	-0.889	-0.8	14.208	28.448	25.6
CD	240	6	-0.444	-0.889	0	0	0	0
EF	240	6	0.889	0.444	-0.8	-28.448	-14.208	25.6
BE	180	4	-0.667	-0.333	-0.6	18.009	8.991	16.2
CF	180	4	0	-1.0	-0.6	0	27.0	16.2
AE	300	6	1.111	0.555	0	0	0	0
BF	300	4	-0.555	0.555	1.0	-41.625	41.625	75.0
CE	300	4	0	0	1.0	0	0	75.0
DF	300	6	0.555	1.111	0	0	0	0
Σ						-37.856	91.856	233.6

En la cual, F_{CE} ahora indica la ordenada en C de la línea de influencia para la redundante F_{CE} . Por lo tanto

$$F_{BC} = -0.889 + (-0.8)(-0.393) = -0.575 \text{ k/k} = 0.575 \text{ k/k (C)}$$

$$F_{BE} = -0.333 + (-0.6)(-0.393) = -0.097 \text{ k/k} = 0.097 \text{ k/k (C)}$$

Las líneas de influencia para F_{BC} y F_{BE} se muestran en las Figs. 14.6(f) y (g), respectivamente.

Respuesta

14.2 Líneas de influencia cualitativas por el principio de Müller-Breslau

En muchas aplicaciones prácticas, tales como a la hora de diseñar una viga continua o un edificio de marcos sujeto a cargas vivas uniformemente distribuidas, generalmente es suficiente dibujar solo las líneas de influencia cualitativas para decidir dónde colocar las cargas vivas para maximizar las funciones de respuesta de interés. Como en el caso de las estructuras estáticamente indeterminadas (Sección 8.2), el *principio de Müller-Breslau* proporciona un medio conveniente para establecer la línea de influencia cualitativa (o configuración deformada) para las estructuras indeterminadas.

Recordando de la Sección 8.2 que el principio de Müller-Breslau se puede establecer como:

La línea de influencia para una función de respuesta de una fuerza (o momento) está dada por la configuración deformada de la estructura liberada eliminando la restricción correspondiente de la función de respuesta de la estructura original y dando a la estructura liberada un desplazamiento unitario (o rotación) en la ubicación y en la dirección de la función de respuesta, de modo que solo la función de respuesta y la carga unitaria realicen un trabajo externo.

El procedimiento para la construcción de líneas de influencia cualitativas para estructuras indeterminadas es el mismo que para estructuras determinadas discutido en la Sección 8.2. El procedimiento esencialmente involucra: (1) la eliminación de la restricción correspondiente a la función de respuesta de interés de la estructura dada para obtener la estructura liberada; (2) la aplicación de un pequeño desplazamiento (o rotación) a la estructura liberada de la ubicación en la dirección positiva de la función de respuesta; y (3)

la ilustración de la configuración deformada de la estructura liberada consistente con sus apoyos y condiciones de continuidad. Las líneas de influencia para las estructuras indeterminadas son generalmente líneas curvas.

Una vez que la línea de influencia cualitativa para una función de respuesta estructural ha sido construida, se puede usar para decidir dónde colocar las cargas vivas para maximizar los valores de la función de respuesta. Como se discutió en la Sección 9.2, el valor de una función de respuesta debido a una carga viva uniformemente distribuida es un máximo positivo (o negativo) cuando la carga se localiza sobre aquellas partes de la estructura donde las ordenadas de la función de respuesta de la línea de influencia son positivas (o negativas). Debido a que las ordenadas de la línea de influencia tienden a disminuir rápidamente con la distancia desde el punto de aplicación de la carga de la función de respuesta, las cargas vivas colocadas más allá de tres veces el claro de longitud de la ubicación de la función de respuesta generalmente es despreciable en los valores de la función de respuesta. Con el patrón de carga viva conocido, se puede realizar un análisis indeterminado de la estructura para determinar el valor máximo de la función de respuesta.

Ejemplo 14.5

Dibuje las líneas de influencia cualitativas de las reacciones verticales en los apoyos A y B , el momento de flexión en el punto B , y el cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga continua de cuatro claros mostrada en la Fig. 14.7(a). Además, muestre el arreglo de una carga viva uniformemente distribuida hacia abajo w_ℓ para generar las reacciones máximas positivas en los apoyos A y B , el momento de flexión máximo negativo en B y el cortante máximo negativo en C , y el momento flexionante máximo positivo en C .

Solución

Línea de influencia para A_y . Para determinar la línea de influencia cualitativa para la reacción vertical A_y en el apoyo A , eliminamos la restricción en A de la viga real y le damos a la viga liberada un pequeño desplazamiento en la dirección positiva de A_y . La configuración deformada de la viga liberada obtenida así (Fig. 14.7(b)) representa la forma general de la línea de influencia (es decir, la línea de influencia cualitativa) para A_y . Tenga en cuenta que la configuración deformada es consistente con las condiciones de apoyo de la viga liberada; es decir, los puntos B , D , E y F de la viga liberada, la cual está ligada a los apoyos de patín, no se desplazan.

Respuesta

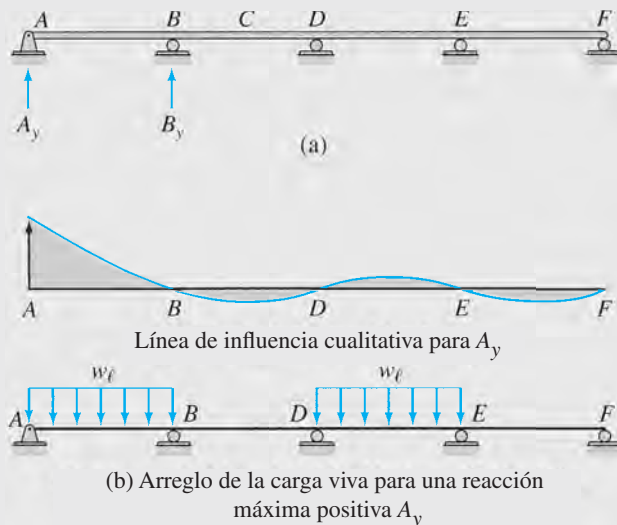


FIG. 14.7

continúa

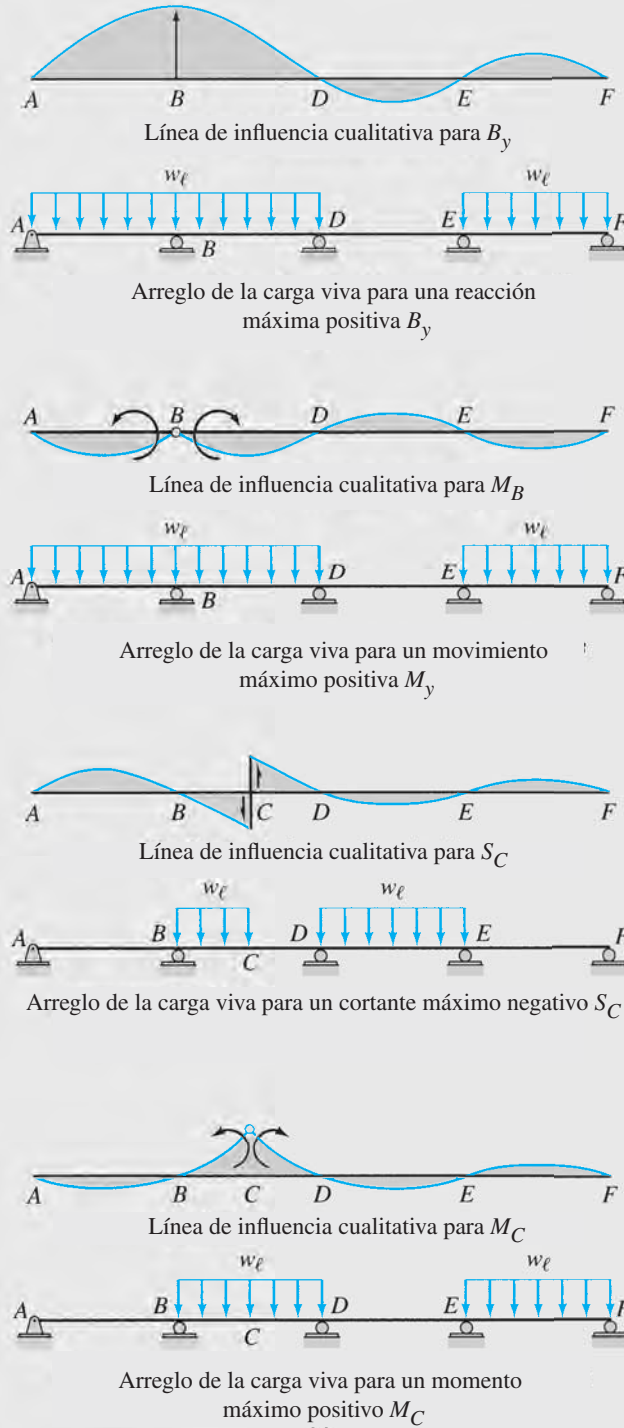


FIG. 14.7 (continuación)

Para maximizar el valor positivo de A_y , la carga viva w_l se coloca sobre el claro AB y DE de la viga, donde las ordenadas de la línea de influencia para A_y son positivas, como se muestra en la Fig. 14.7(b).

Respuesta

Línea de influencia para B_y . La línea de influencia cualitativa para B_y y el arreglo de carga viva para el valor máximo positivo de B_y se determinan de manera similar, y se muestran en la Fig. 14.7(c).

Respuesta

Línea de influencia para M_B . Para determinar la línea de influencia cualitativa del momento flexionante en B , insertamos una articulación en B en la viga real y le damos a la viga liberada una pequeña rotación en la dirección positiva de M_B girando la parte a la izquierda de B en el sentido contrario a las manecillas del reloj y la parte a la derecha de B en el sentido de las manecillas, como se muestra en la Fig. 14.7(d). La configuración deformada de la viga liberada obtenida de esta manera representa la línea de influencia cualitativa para M_B .

Respuesta

Para generar el momento flexionante máximo negativo en B , colocamos la carga viva w_l sobre el claro AB , BD y EF de la viga, donde las ordenadas negativas máximas del momento flexionante para M_B son negativas, como se muestra en la Fig. 14.7(d).

Respuesta

Línea de influencia para S_C . La línea de influencia cualitativa para S_C se determina cortando la viga real en C y dando a la viga liberada un desplazamiento relativo en la dirección positiva de S_C moviendo el extremo C de la izquierda del corte de la viga hacia abajo y el extremo C a la derecha del corte de la porción hacia arriba, como se muestra en la Fig. 14.7(e).

Respuesta

Para obtener el esfuerzo cortante máximo negativo en C , la carga viva se coloca sobre el palmo DE y la porción BC de la extensión BD de la viga, donde las ordenadas de la línea de influencia para S_C son negativos, como se muestra en la Fig. 14.7 (e).

Respuesta

Línea de influencia para M_C . Para determinar la línea de influencia cualitativa del momento flexionante en C y el arreglo de la carga viva para el valor de momento máximo de M_C se muestran en la Fig. 14.7(f).

Respuesta

Ejemplo 14.6

Dibuje las líneas de influencia cualitativas para el momento de flexión y el cortante en el punto A del marco del edificio mostrado en la Fig. 14.8(a). Además, muestre el arreglo de una carga viva uniformemente distribuida hacia abajo w_l para generar el momento de flexión máximo positivo y el cortante máximo negativo en A .

Solución

Línea de influencia para M_A . La línea de influencia cualitativa para el momento de flexión en A se muestra en la Fig. 14.8(b). Tenga en cuenta que debido a que los elementos del marco están conectados por nodos rígidos, los ángulos entre los elementos que se intersectan en el nodo se deben de mantener en la configuración deformada del marco. Para obtener el valor máximo positivo de momento flexionante en A , la carga viva w_l se coloca sobre los claros del marco donde las ordenadas de la línea de influencia para M_A son positivas, como se muestra en la Fig. 14.8(b). Este tipo de patrón de carga viva algunas veces se conoce como *patrón de carga de ajedrez*.

Respuesta

Línea de influencia para S_A . La línea de influencia cualitativa de la fuerza cortante en A y la disposición por carga viva para el valor máximo negativo de S_A se muestran en la Fig. 14.8 (c).

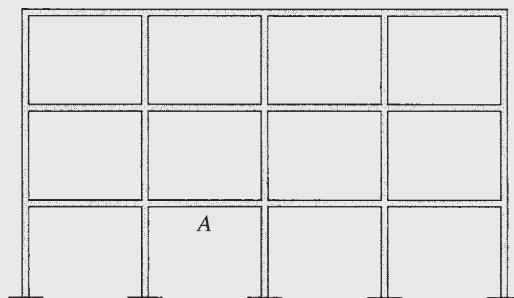
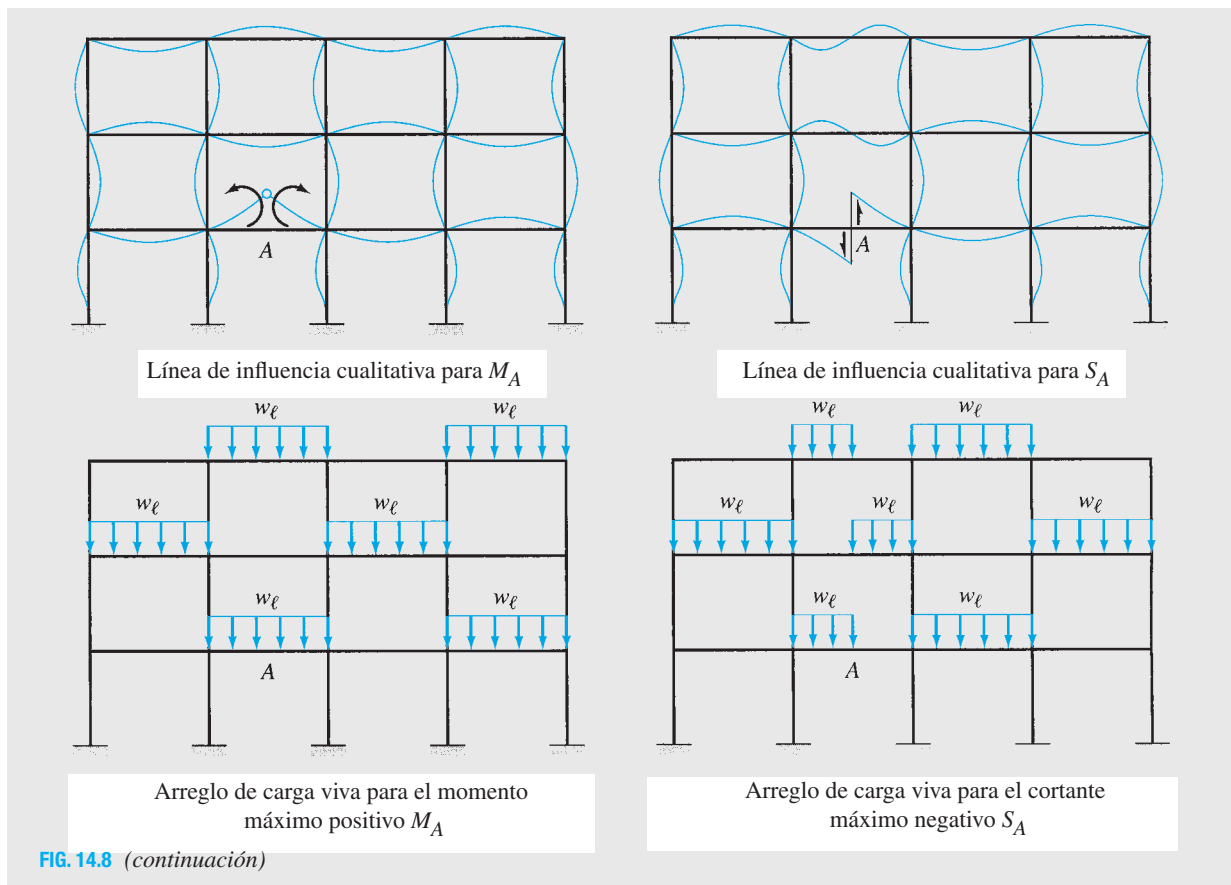
Respuesta

FIG. 14.8

(a)

continúa



Resumen

En este capítulo discutimos sobre las líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas. El procedimiento para la construcción de tales líneas de influencia por el método de las deformaciones consistentes esencialmente implica (1) la construcción de líneas de influencia de las redundantes colocando la carga unitaria sucesivamente en un número de puntos a lo largo de la estructura y, para cada posición de la carga unitaria, el cálculo de los valores de las redundantes aplicando el método de las deformaciones consistentes, y (2) usando las líneas de influencia para las redundantes y aplicando las ecuaciones de equilibrio, se determinan las líneas de influencia de las otras funciones de respuesta de la estructura.

La evaluación de las deflexiones involucra la aplicación del método de las deformaciones consistentes que se puede acelerar considerablemente mediante el uso de la ley de las deflexiones recíprocas de Maxwell. El procedimiento para la construcción de las líneas de influencia cualitativas para estructuras indeterminadas por el método de Müller-Breslau se presentó en la Sección 14.2.

Problemas

Sección 14.1

14.1 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y el cortante y el momento flexionante en el punto B de la viga mostrada en la Fig. P14.1. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 3 m. Seleccione la reacción en el apoyo C como la redundante.

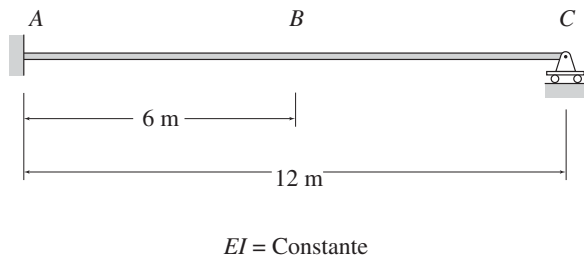


FIG. P14.1, P14.2

14.2 Determine las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de la viga del Problema 14.1 seleccionando el momento en el apoyo A como la redundante. Ver Fig. P14.1.

14.3 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en el apoyo C y el cortante y el momento flexionante en B de la viga mostrada en la Fig. P14.3. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 5 ft.

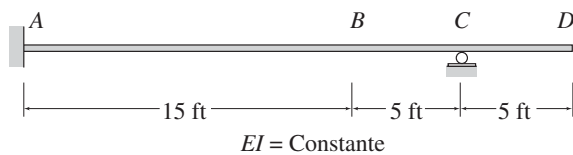


FIG. P14.3

14.4 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en el apoyo C de la viga mostrada en la Fig. P14.4. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 10 ft.

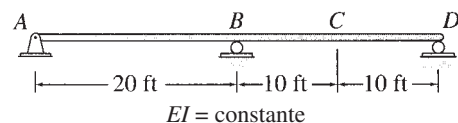


FIG. P14.4

14.5 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y el cortante y el momento flexionante en C de la viga mostrada en la Fig. P14.5. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 5 m.

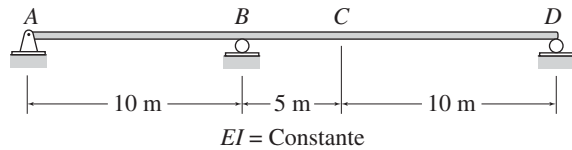


FIG. P14.5

14.6 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y el cortante y el momento flexionante en C de la viga mostrada en la Fig. P14.6. Establezca las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 4 m.

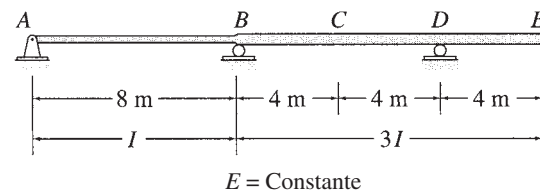


FIG. P14.6

14.7 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y las fuerzas en los elementos BC , CE y EF de la armadura mostrada en la Fig. P14.7. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda inferior de la armadura.

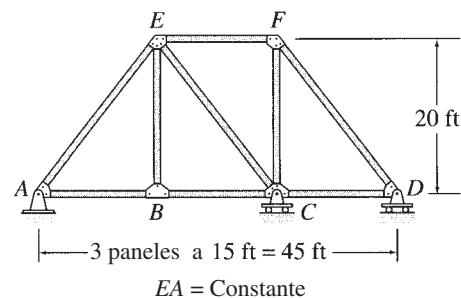


FIG. P14.7

14.8 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos y las fuerzas en los elementos CD , CH y GH de la armadura mostrada en la Fig. P14.8. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda inferior de la armadura.

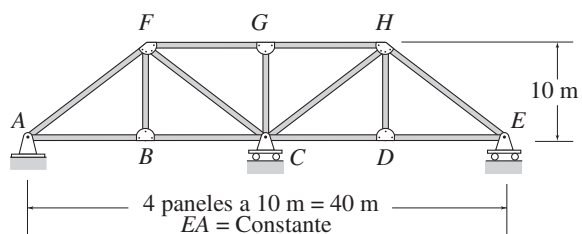


FIG. P14.8

14.9 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas en los elementos BC y CD de la armadura mostrada en la Fig. P14.9. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda superior de la armadura.

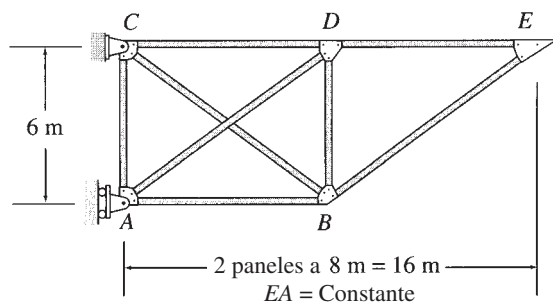


FIG. P14.9

14.10 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas en los elementos BC , BF y CF de la armadura mostrada en la Fig. P14.10. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda inferior de la armadura.

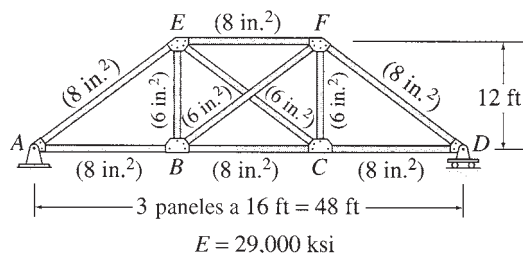


FIG. P14.10

14.11 Dibuje las líneas de influencia en los apoyos B y D , y el cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga mostrada en la Fig. P14.11. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 5 m.

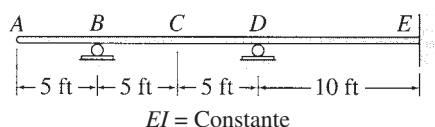


FIG. P14.11

14.12 Dibuje las líneas de influencia de las reacciones de la viga mostrada en la Fig. P14.12. Determine las ordenadas de la línea de influencia a intervalos de 3 m.

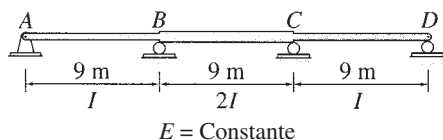


FIG. P14.12

14.13 Dibuje las líneas de influencia de la reacción en el apoyo C y las fuerzas en los elementos BC , CE y EF de la armadura mostrada en la Fig. P14.13. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda inferior de la armadura.

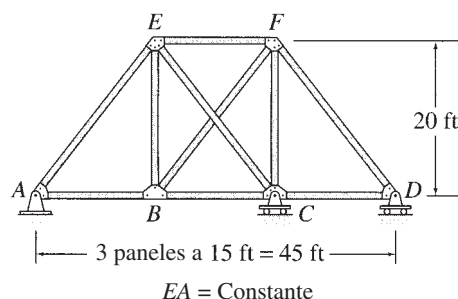


FIG. P14.13

14.14 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas en los elementos BG , CD y DG de la armadura mostrada en la Fig. P14.14. Las cargas vivas se transmiten a la cuerda inferior de la armadura.

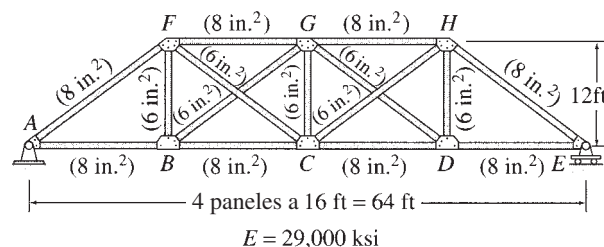


FIG. P14.14

Sección 14.2

Del 14.15 al 14.18 Dibuje las líneas de influencia cualitativas de las reacciones verticales en los apoyos A y B , el diagrama de momento flexionante en el punto B , y el cortante y momento flexionante en el punto C de la viga mostrada. Fig. P14.15.-P14.18. Además, muestre el arreglo de la carga viva uniformemente distribuida w_L que genera las reacciones máximas hacia arriba en los apoyos A y B , el momento flexionante máximo negativo en B , el cortante máximo negativo en C , y el momento flexionante máximo positivo en C .

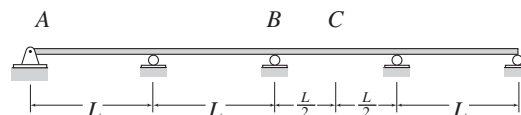


FIG. P14.15

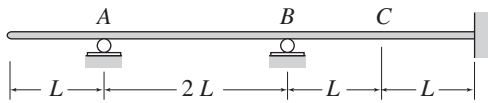


FIG. P14.16

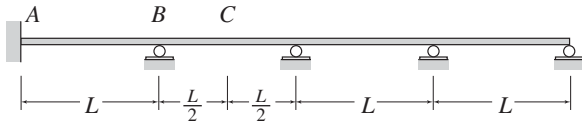


FIG. P14.17

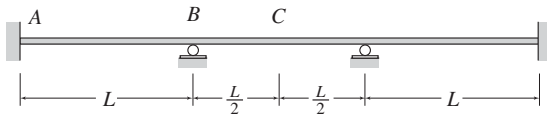


FIG. P14.18

14.19 Dibuje las líneas de influencia cualitativas para el momento flexionante y cortante en A del marco del edificio mostrado en la Fig. P14.19. Además, muestre el arreglo de la carga viva uniformemente distribuida hacia abajo w_ℓ que genera el momento flexionante máximo positivo en A, y el cortante máximo negativo en A.

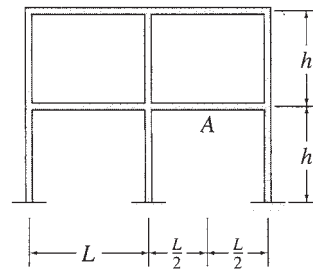


FIG. P14.19

14.20 Para el marco del edificio mostrado en la Fig. P14.20, determine el arreglo de la carga viva uniformemente distribuida w_ℓ que genera el momento flexionante máximo negativo en el punto A y el momento flexionante máximo positivo en B.

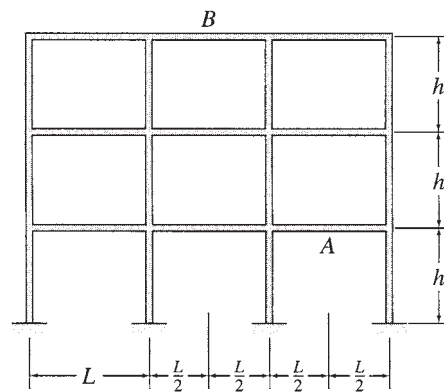


FIG. P14.20



*Torres Petronas, Kuala Lumpur,
Malasia*

Andrea Seemann/Shutterstock.com

15

Método de la Pendiente-Deflexión

- 15.1. Ecuaciones de la pendiente-deflexión
 - 15.2. Conceptos básicos del método de la pendiente-deflexión
 - 15.3. Análisis de vigas continuas
 - 15.4. Análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos
 - 15.5. Análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos
- Resumen
Problemas

En el capítulo 13 consideramos el método de análisis de las fuerzas (flexibilidades) para estructuras estáticamente indeterminadas. Recuerde que en el método de las fuerzas primero se determinan las *fuerzas* redundantes desconocidas resolviendo las ecuaciones de compatibilidad; entonces las otras respuestas características de la estructura se evalúan con las ecuaciones de equilibrio o de superposición. Un enfoque alternativo llamado *método de los desplazamientos (rigideces)* se puede utilizar para analizar las estructuras indeterminadas. A diferencia del método de las fuerzas, en el método de los desplazamientos se determinan en primer lugar los *desplazamientos* desconocidos resolviendo las ecuaciones de la estructura; enseguida se evalúan las otras respuestas características a través de las condiciones de compatibilidad y de las relaciones de fuerza-deformación de los elementos.

En este capítulo consideraremos la formulación clásica del método de los desplazamientos, llamado *método de la distribución del momento*, que se presentará en el siguiente capítulo, seguido de una introducción al *método matricial de las rigideces* en el Capítulo 17.

El método de la pendiente-deflexión para el análisis de las vigas indeterminadas lo presentó George A. Maney en 1915. El método toma en cuenta solo las deformaciones por flexión de las estructuras. A pesar de que se considera una herramienta útil para el análisis de vigas y marcos indeterminados, la comprensión de los fundamentos de este método proporciona una introducción invaluable en el método matricial de las rigideces, el cual forma la base de la mayoría de los programas de cómputo usados en el análisis estructural.

Primero obtendremos las relaciones fundamentales necesarias para la aplicación del método de la pendiente-deflexión y después desarrollaremos los conceptos básicos de este método. Consideraremos la aplicación del método de análisis para las vigas continuas y presentaremos el análisis de marcos con traslaciones restringidas en los nodos. Finalmente, consideraremos el análisis de marcos con nodos que se desplazan.

15.1 Ecuaciones de la pendiente-deflexión

Cuando una viga continua o un marco está sujeto a cargas externas, se desarrollan momentos internos en los extremos de sus elementos individuales.

Las ecuaciones de la pendiente-deflexión relacionan los momentos en los extremos de un elemento con las rotaciones y los desplazamientos en sus extremos y las cargas aplicadas al elemento.

Para obtener las ecuaciones de la pendiente-deflexión, enfocaremos nuestra atención en un elemento arbitrario AB de la viga continua mostrada en la Fig. 15.1(a). Cuando una viga está sujeta a cargas externas y tiene asentamientos en sus apoyos, el elemento AB se deforma, como se muestra en la Fig. 15.1(b). Como se indica en esta figura, la notación de doble subíndice se usa para los momentos en los extremos del elemento, el primer subíndice identifica el extremo del elemento en el cual actúa el momento y el segundo subíndice el otro extremo del elemento. Por lo tanto, M_{AB} señala el momento en el extremo A del elemento AB , mientras que M_{BA} representa el momento en el extremo B del elemento AB . Además, como se muestra en la Fig. 15.1(b), θ_A y θ_B indican, respectivamente, las rotaciones en los extremos A y B del elemento con respecto a la posición no deformada (horizontal) del elemento; Δ representa la traslación relativa entre los dos extremos del elemento en la dirección perpendicular al eje no deformado del elemento; y ψ denota la rotación de la cuerda del elemento (es decir, la línea recta que conecta la posición de los extremos del elemento) debido a la traslación relativa Δ . Ya que se suponen las deformaciones pequeñas, la rotación de la cuerda se puede expresar como

$$\psi = \frac{\Delta}{L} \quad (15.1)$$

La convención de signos usados en este capítulo es como sigue:

Los momentos en el extremo del elemento y la rotación de la cuerda son positivos cuando están en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tenga en cuenta que todos los elementos y las rotaciones se muestran en sentido positivo en la Fig. 15.1(b).

Las ecuaciones de la pendiente-deflexión se pueden obtener relacionando los momentos en el extremo del elemento y las rotaciones y la cuerda aplicando el segundo teorema de área-momento (Sección 6.4). De la Fig. 15.1(b) podemos ver que

$$\theta_A = \frac{\Delta_{BA} + \Delta}{L} \quad \theta_B = \frac{\Delta_{AB} + \Delta}{L} \quad (15.2)$$

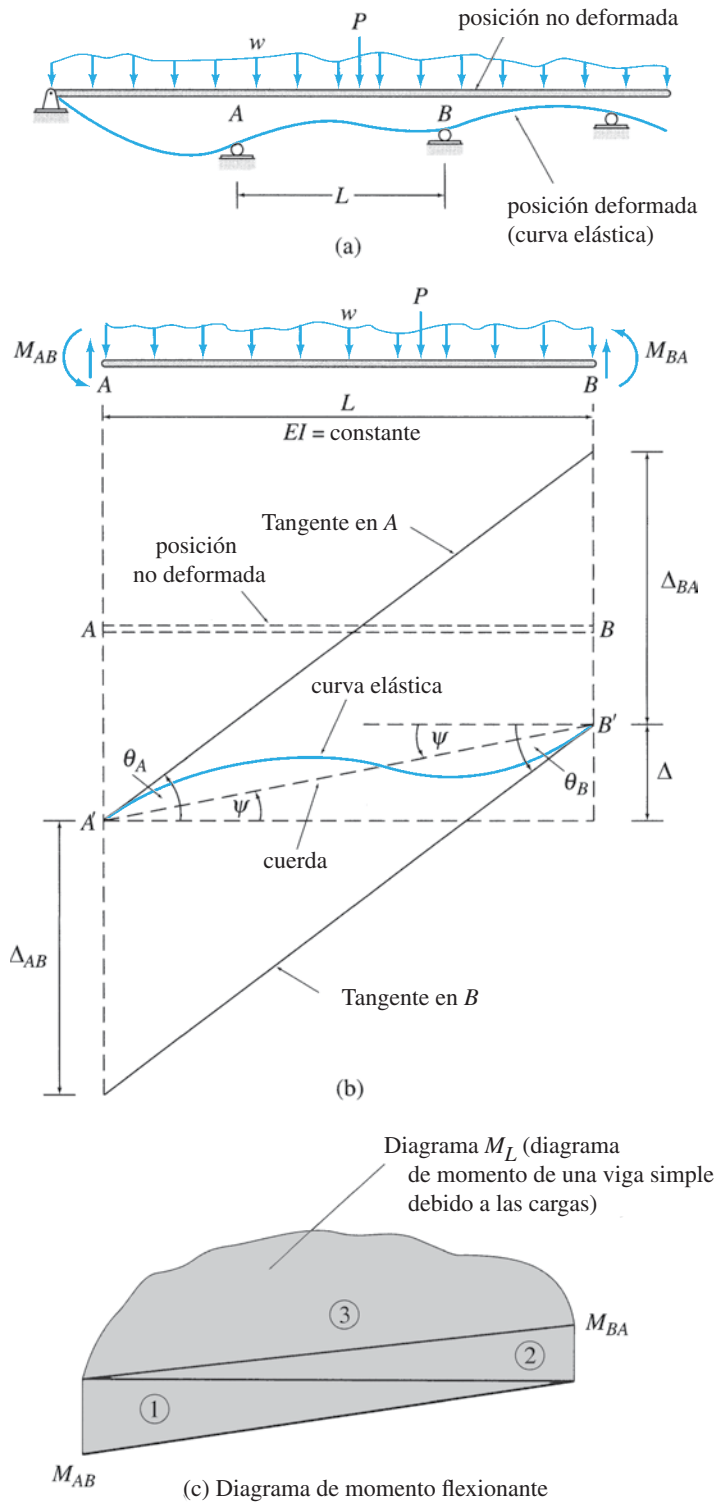
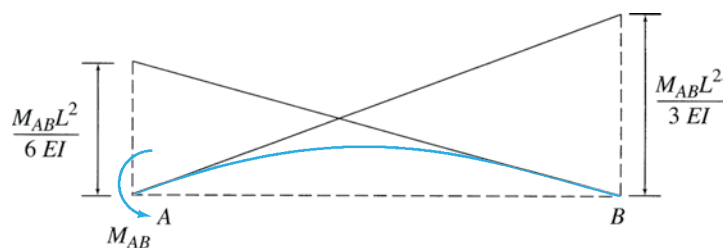
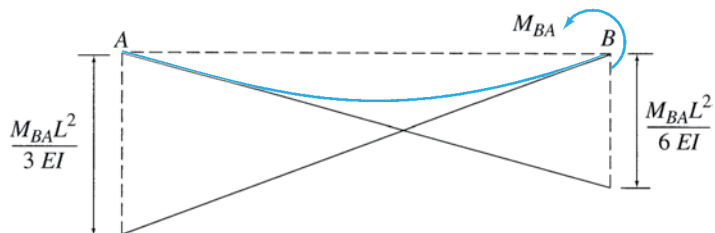
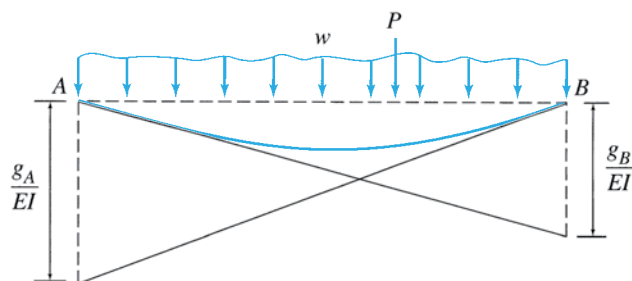
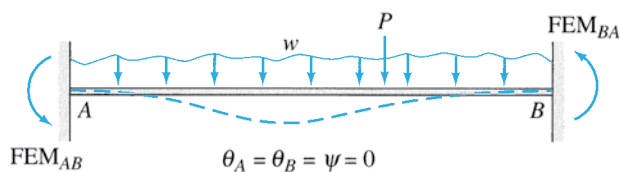


FIG. 15.1

Desviación tangencial debido a M_{AB} Desviación tangencial debido a M_{BA} 

Desviación tangencial debido a la carga externa

(d)



(e) momento en el extremo empotrado

FIG. 15.1 (cont.)

Sustituyendo $\Delta/L = \psi$ en las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\theta_A - \psi = \frac{\Delta_{BA}}{L} \quad \theta_B - \psi = \frac{\Delta_{AB}}{L} \quad (15.3)$$

Aquí, como se muestra en la Fig. 15.1(b), Δ_{BA} es la desviación tangencial del extremo B desde la tangente a la curva elástica en el extremo A, y Δ_{AB} es la desviación tangencial del extremo A desde la tangente de la curva elástica del extremo B. De acuerdo con el segundo teorema de área-momento, las expresiones para las desviaciones tangenciales Δ_{AB} y Δ_{BA} se pueden obtener sumando momentos alrededor de los extremos A y B, respectivamente, del área bajo el diagrama M/EI entre los dos extremos.

El diagrama de momento flexionante para el elemento se construye en partes aplicando M_{AB} y M_{BA} , y las cargas externas por separado en el elemento con apoyos simples en los extremos. Los *tres diagramas de momento flexionante de la viga simple* obtenidos se ilustran en la Fig. 15.1(c). Asumiendo que el elemento es prismático —es decir, que tiene EI constante en toda su longitud—, sumamos los momentos del área bajo el diagrama EI alrededor de los extremos A y B , respectivamente, para determinar las desviaciones tangenciales:

$$\Delta_{BA} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{M_{AB}L}{2} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) - \left(\frac{M_{BA}L}{2} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - g_B \right]$$

o

$$\Delta_{BA} = \frac{M_{AB}L^2}{3EI} - \frac{M_{BA}L^2}{6EI} - \frac{g_B}{EI} \quad (15.4a)$$

y

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{M_{AB}L}{2} \right) \left(\frac{L}{3} \right) + \left(\frac{M_{BA}L}{2} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) + g_A \right]$$

o

$$\Delta_{AB} = - \frac{M_{AB}L^2}{6EI} + \frac{M_{BA}L^2}{3EI} + \frac{g_A}{EI} \quad (15.4b)$$

En las cuales g_A y g_B son los momentos alrededor de los extremos A y B , respectivamente, del área bajo el diagrama de momento flexionante de la viga simple debido a la carga externa (diagrama M_L en la Fig. 15.1(c)). Los tres términos en las Ecs. (15.4a) y (15.4b) representan las desviaciones tangenciales debido a M_{AB} , M_{BA} y la carga externa, que actúan por separado en el elemento (Fig. 15.1(d)), con un término negativo que indica que la correspondiente desviación tangencial está en la dirección opuesta a la que se muestra en la curva elástica del elemento en la Fig. 15.1(b).

Sustituyendo las expresiones para Δ_{BA} y Δ_{AB} (Ecs. (15.4)) en la Ec. (15.3), escribimos

$$\theta_A - \psi = \frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} - \frac{g_B}{EIL} \quad (15.5a)$$

$$\theta_B - \psi = - \frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{M_{BA}L}{3EI} + \frac{g_A}{EIL} \quad (15.5b)$$

Para expresar los momentos en el extremo del elemento en términos de las rotaciones en el extremo, la rotación de la cuerda y la carga externa, resolvemos las Ecs. (15.5a) y (15.5b) simultáneamente para M_{AB} y M_{BA} . Reescribimos la Ec. (15.5a) como

$$\frac{M_{BA}L}{3EI} = \frac{2M_{AB}L}{3EI} - \frac{2g_B}{EIL} - 2(\theta_A - \psi)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (15.5b) y resolviendo la ecuación resultante para M_{AB} , obtenemos

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + \frac{2}{L^2} (2g_B - g_A) \quad (15.6a)$$

Y sustituyendo la Ec. (15.6a) en la Ec (15.5a) o en la Ec. (15.5b), obtenemos la expresión para M_{BA} :

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + \frac{2}{L^2}(g_B - 2g_A) \quad (15.6b)$$

Como la Ec. (15.6) indica, los momentos desarrollados en los extremos de un elemento dependen de las rotaciones y traslaciones de sus extremos, además de la carga externa aplicada entre sus extremos.

Ahora, suponga que el elemento en consideración, en lugar de ser parte de una gran estructura, es una viga aislada con ambos extremos completamente restringidos a las rotaciones y las traslaciones, como se muestra en la Fig. 15.1(e). El momento que se desarrollaría en los extremos de la *viga empotrada* se denominan *momentos de empotre*, y sus expresiones se pueden obtener de las Ecs. (15.6) fijando $\theta_A = \theta_B = \psi = 0$; es decir,

$$FEM_{AB} = \frac{2}{L^2}(2g_B - g_A) \quad (15.7a)$$

$$FEM_{BA} = \frac{2}{L^2}(g_B - 2g_A) \quad (15.7b)$$

En donde FEM_{AB} y FEM_{BA} indican los momentos de empotre debido a la carga externa en los extremos A y B , respectivamente, de la viga empotrada AB (ver Fig. 15.1(e)).

Comparando las Ecs. (15.6) y (15.7), encontramos que el segundo término del lado derecho de las igualdades de las Ecs. (15.6) son iguales a los momentos de empotre que se desarrollarían si los extremos del elemento estuvieran restringidos contra las rotaciones y las traslaciones. Por lo tanto, sustituyendo las Ecs. (15.7) en las Ecs. (15.6), obtenemos

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + FEM_{AB} \quad (15.8a)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + FEM_{BA} \quad (15.8b)$$

Las Ecs. (15.8), que expresan los momentos en los extremos de un elemento en términos de las rotaciones y las traslaciones de sus extremos para una carga externa específica, se llaman *ecuaciones de la pendiente-deflexión*. Estas ecuaciones son válidas solo para elementos prismáticos compuestos por un material elástico lineal y sujetos a pequeñas deformaciones. Además, a pesar de que las ecuaciones toman en cuenta las deformaciones de los elementos por flexión, las deformaciones debidas a las fuerzas axiales y cortantes se desprecian.

De las Ecs. (15.8) observamos que las dos ecuaciones de la pendiente-deflexión tienen la misma forma y que una de las ecuaciones se puede obtener de la otra simplemente intercambiando los subíndices A y B . Por lo tanto, es más conveniente expresar estas ecuaciones por una sola ecuación de la pendiente-deflexión:

$$M_{nf} = \frac{2EI}{L}(2\theta_n + \theta_f - 3\psi) + FEM_{nf} \quad (15.9)$$

En la cual el subíndice n representa el extremo cercano del elemento donde el momento M_{nf} actúa y el subíndice f identifica el extremo (el otro) *lejano* del elemento.

Momentos de empotre

Las expresiones para los momentos de empotre debidos a cualquier condición de carga se pueden obtener usando el método de las deformaciones consistentes, como se discutió en el Capítulo 13 (ver ejemplo 13.10). Sin embargo, es más conveniente determinar las expresiones de los momentos de empotre aplicando las Ecs. (15.7), las cuales solo requieren de un cálculo de los momentos bajo el diagrama de momento flexionante de la viga simple al rededor de los extremos de la viga.

Para ilustrar la aplicación de las Ecs. (15.7), considere una viga empotrada sujeta a una carga concentrada P , como la que se muestra en la Fig. (15.2a). Los momentos de empotre de esta viga se determinaron previamente en el Ejemplo 13.10 por el método de las deformaciones consistentes. Para aplicar las Ecs. (15.7) reemplazamos los extremos empotrados de la viga por apoyos simples y construimos el momento flexionante de la viga simple, como se ve en la Fig. 15.2(b). Los momentos del área bajo el diagrama de momento flexionante de la viga simple alrededor de A y B están dados por

$$g_A = \frac{1}{2}a\left(\frac{Pab}{L}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) + \frac{1}{2}b\left(\frac{Pab}{L}\right)\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$g_B = \frac{1}{2}a\left(\frac{Pab}{L}\right)\left(\frac{a}{3} + b\right) + \frac{1}{2}b\left(\frac{Pab}{L}\right)\left(\frac{2b}{3}\right)$$

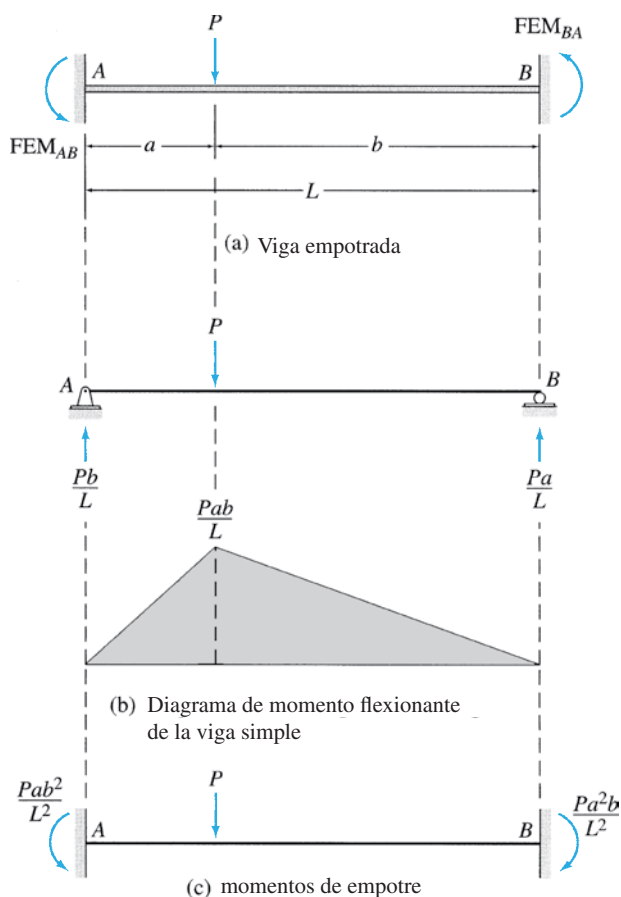


FIG. 15.2

Sustituyendo $L = a + b$ en estas ecuaciones y simplificando, obtenemos

$$g_A = \frac{Pab}{6}(2a + b) \quad g_B = \frac{Pab}{6}(a + 2b)$$

Sustituyendo las expresiones para g_A y g_B en las Ecs. (15.7), determinamos los momentos de empotre

$$\text{FEM}_{AB} = \frac{2}{L^2} \left[\frac{2Pab}{6}(a + 2b) - \frac{Pab}{6}(2a + b) \right] = \frac{Pab^2}{L^2} \curvearrowright$$

$$\text{FEM}_{BA} = \frac{2}{L^2} \left[\frac{Pab}{6}(a + 2b) - \frac{2Pab}{6}(2a + b) \right] = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

Recuerde que las Ecs. (15.7) se basan en la convención de signos puesto que los momentos en el extremo son positivos a favor de las manecillas del reloj; es decir,

$$\text{FEM}_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2} \curvearrowright$$

Como se muestra en la Fig. 15.2(c).

Las expresiones para el momento de empotre para algunos tipos de condiciones de carga están dadas en el interior de la contraportada del libro para referencia.

Elementos con un extremo articulado

Las ecuaciones de la pendiente-deflexión obtenidas previamente (Ecs. (15.8) y (15.9)) se fundan en la condición de que el elemento está rígidamente conectado a los nodos en ambos extremos, de modo que las rotaciones θ_A y θ_B en el extremo del elemento son iguales a las rotaciones de los nodos adyacentes. Las ecuaciones de la pendiente-deflexión se pueden modificar fácilmente para reflejar esta condición. Con referencia a la Fig. 15.1(b), si el extremo B del elemento AB está articulado, el momento en el extremo B debe ser cero. Sustituyendo $M_{AB} = 0$ en la Ecs. (15.8), obtenemos

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + \text{FEM}_{AB} \quad (15.10a)$$

$$M_{BA} = 0 = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + \text{FEM}_{BA} \quad (15.10b)$$

Resolviendo la Ec. (15.10b) para θ_B , obtenemos

$$\theta_B = -\frac{\theta_A}{2} + \frac{3}{2}\psi - \frac{L}{4EI}(\text{FEM}_{BA}) \quad (15.11)$$

Para eliminar θ_B de las ecuaciones de la pendiente-deflexión, sustituimos la Ec. (15.11) en la Ec. (15.10a), obteniendo así las *ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada* para el elemento AB con una articulación en el extremo B :

$$M_{AB} = \frac{3EI}{L}(\theta_A - \psi) + \left(\text{FEM}_{AB} - \frac{\text{FEM}_{BA}}{2} \right) \quad (15.12a)$$

$$M_{BA} = 0 \quad (15.12b)$$

De manera similar, se puede mostrar que para un elemento AB con una articulación en el extremo A , la rotación del extremo articulado está dada por

$$\theta_A = -\frac{\theta_B}{2} + \frac{3}{2}\psi - \frac{L}{4EI}(\text{FEM}_{AB}) \quad (15.13)$$

Y las ecuaciones de la pendiente-deflexión se pueden expresar como

$$M_{BA} = \frac{3EI}{L}(\theta_B - \psi) + \left(\text{FEM}_{BA} - \frac{\text{FEM}_{AB}}{2}\right) \quad (15.14a)$$

$$M_{AB} = 0 \quad (15.14b)$$

Como las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada dadas por las Ecs. (15.12) y (15.14) son similares en forma, se pueden resumir convenientemente como

$$M_{rh} = \frac{3EI}{L}(\theta_r - \psi) + \left(\text{FEM}_{rh} - \frac{\text{FEM}_{hr}}{2}\right) \quad (15.15a)$$

$$M_{hr} = 0 \quad (15.15b)$$

Donde el subíndice r indica el extremo *rígidamente conectado* del elemento en el extremo del elemento donde el momento M_{rh} actúa y el subíndice h indica el extremo articulado del elemento. La rotación del extremo articulado se puede escribir como

$$\theta_h = -\frac{\theta_r}{2} + \frac{3}{2}\psi - \frac{L}{4EI}(\text{FEM}_{hr}) \quad (15.16)$$

15.2 Conceptos básicos del método de la pendiente-deflexión

Para ilustrar el concepto básico del método de la pendiente-deflexión, considere la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 15.3(a). A pesar de que la estructura es en realidad una viga con un claro continuo entre los apoyos empotrados A y D , para el propósito del análisis se considera compuesta

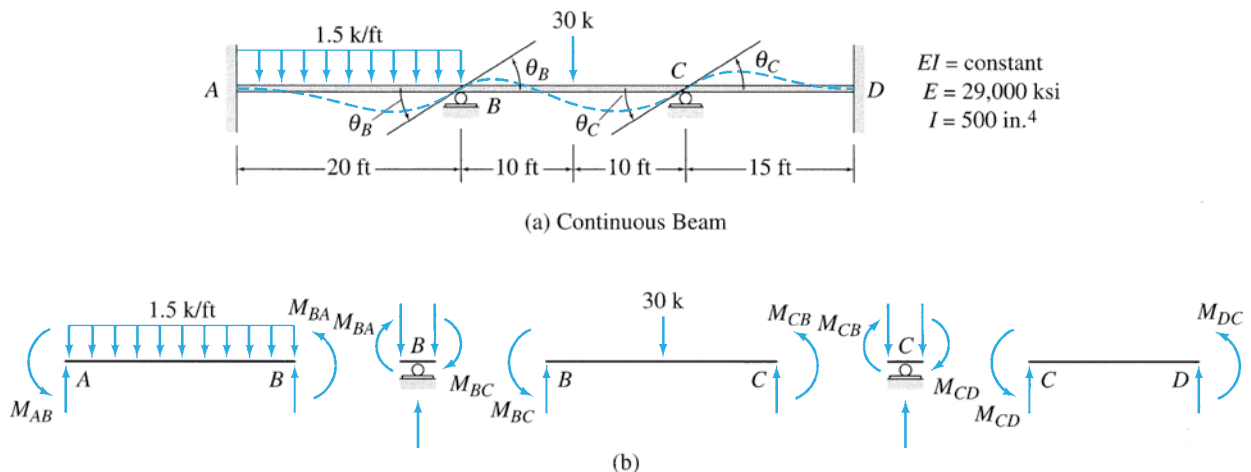
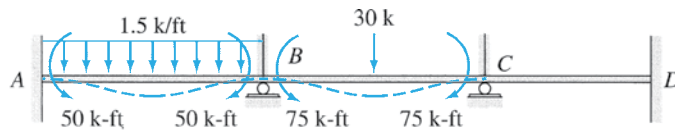
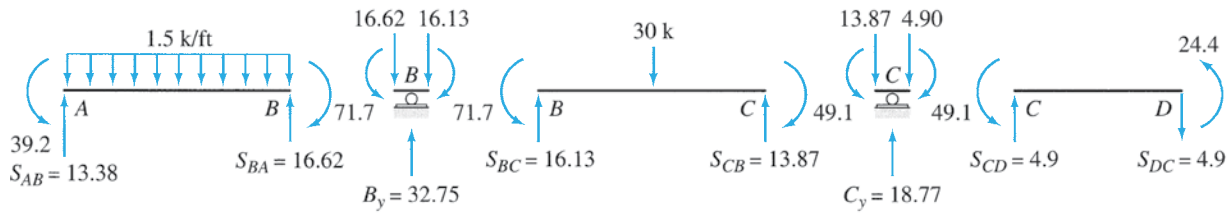


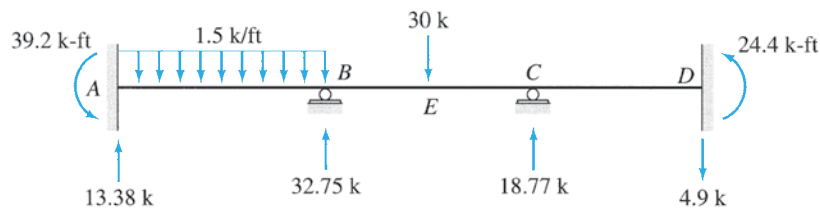
FIG. 15.3



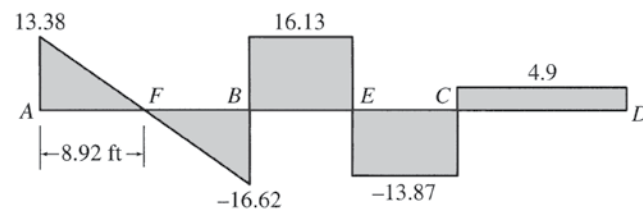
(c) momento de empotre



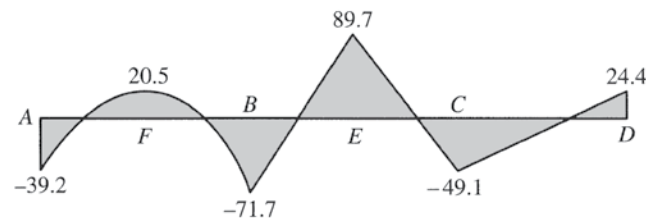
(d) Momentos y cortantes en los extremos



(e) Reacciones en los apoyos



(f) Diagrama de cortante



(g) Diagrama de momento flexionante (k-ft)

FIG. 15.3 (cont.)

de tres elementos, AB , BC y CD , conectados rígidamente a los nodos A , B y C , localizados en los apoyos de la estructura. Tenga en cuenta que la viga continua ha sido dividida en elementos y nodos, de modo que las reacciones externas desconocidas actúan solo en los nodos.

Grados de libertad

Con las ubicaciones de los nodos establecidas, identificamos los desplazamientos independientes (traslaciones y rotaciones) de los nodos de la estructura. Estos desplazamientos desconocidos en los nodos se llaman *grados de libertad* de la estructura. De la configuración deformada cualitativa de la viga continua que se ilustra en la Fig. 15.3(a), podemos ver que ninguno de sus nodos puede desplazarse. Además, los nodos empotrados A y D no pueden rotar, mientras que los nodos B y C sí lo pueden hacer. De este modo, la viga continua tiene dos grados de libertad, θ_B y θ_C , los cuales representan las incógnitas de rotación de los nodos B y C , respectivamente.

El número de grados de libertad algunas veces recibe el nombre de *grado de indeterminación cinemática* de la estructura. Debido a que la viga de la Fig. 15.3(a) tiene dos grados de libertad, se considera cinéticamente indeterminada en segundo grado. Una estructura sin ningún grado de libertad se denomina *cinéticamente determinada*. En otras palabras, si los desplazamientos de todos los nodos de la estructura son cero o desconocidos, la estructura se considera cinéticamente determinada.

Ecuaciones de equilibrio

Las rotaciones desconocidas de los nodos se determinan resolviendo las ecuaciones de equilibrio de los nodos que están libres a la rotación. Los diagramas de cuerpo libre de los elementos y nodos B y C de la viga continua se muestran en la Fig. 15.3(b). Además de las cargas externas, los elementos están sujetos a un momento interno en cada uno de sus extremos. Debido a que el sentido correcto de los momentos en los extremos del elemento no están identificados aún, se supone que los momentos en los extremos de todos los elementos son positivos (en sentido contrario a las manecillas del reloj) de acuerdo con la convención de signos de la pendiente-deflexión adoptada en la sección anterior. Tenga en cuenta que los diagramas de cuerpo libre de los nodos muestran los momentos en el extremo del elemento que actúa en una dirección opuesta (sentido horario), de acuerdo con la ley de Newton de la acción y la reacción.

Puesto que la estructura completa está en equilibrio, cada uno de sus elementos y sus nodos también lo está. Aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum M_B = 0$ y $\sum M_C = 0$, respectivamente, a los cuerpos libres de los nodos B y C , obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (15.17a)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (15.17b)$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

Las ecuaciones de equilibrio anteriores (Ecs. (15.17)) se pueden expresar en términos de las rotaciones desconocidas de los nodos, θ_B y θ_C usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión que relacionan los momentos en los extremos del elemento con las rotaciones desconocidas de los nodos. Sin embargo, antes de que podamos escribir las ecuaciones de la pendiente-deflexión, necesitamos calcular los momentos de empotre debido a las cargas externas que actúan en los elementos de la viga continua.

Para calcular los momentos de empotre, aplicamos un par de momentos en los nodos B y C para restringirlos de la rotación, como se muestra en la Fig. 15.3(c). Los momentos de empotre se desarrollan en los extremos de los

elementos de esta estructura completamente restringida o cinemáticamente determinada que pueden ser fácilmente evaluados aplicando ya las Ecs. (15.7) o usando las expresiones del momento de empotre dadas en el interior de la contraportada del libro. Aplicando las expresiones del momento de empotre, calculamos los momentos como sigue:

Elemento AB :

$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1.5(20)^2}{12} = 50 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +50 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = 50 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -50 \text{ k-ft}$$

Elemento BC :

$$FEM_{BC} = \frac{PL}{8} = \frac{30(20)}{8} = 75 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +75 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CB} = 75 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -75 \text{ k-ft}$$

Tenga en cuenta que, de acuerdo con la convención de signos de la pendiente-deflexión, los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj se consideran positivos. Puesto que ninguna carga externa actúa en el elemento CD , los momentos en sus extremos son cero; es decir,

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = 0$$

Los momentos de empotre se muestran en el diagrama de la estructura restringida en la Fig. 15.3(c).

Las ecuaciones de la pendiente-deflexión para los tres elementos de la viga continua se pueden escribir usando la Ec. (15.9). Debido a que ninguno de los apoyos de la viga continua se desplazan, las rotaciones de la cuerda de los tres elementos es cero (es decir, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$). Además, ya que los apoyos A y D están empotrados, las rotaciones $\theta_A = \theta_D = 0$. Aplicando la Ec. (15.9) al elemento AB , con A como el extremo cercano y B como el extremo más alejado, obtenemos la ecuación de la pendiente-deflexión

$$M_{AB} = \frac{2EI}{20} (0 + \theta_B - 0) + 50 = 0.1EI \theta_B + 50 \quad (15.18a)$$

Después, considerando B como el extremo cercano y A como el extremo más alejado, tenemos

$$M_{BA} = \frac{2EI}{20} (2\theta_B + 0 - 0) - 50 = 0.2EI \theta_B - 50 \quad (15.18b)$$

De manera similar, aplicando la Ec. (15.9) al elemento BC , conseguimos

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20} (2\theta_B + \theta_C) + 75 = 0.2EI \theta_B + 0.1EI \theta_C + 75 \quad (15.18c)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{20} (2\theta_C + \theta_B) - 75 = 0.2EI \theta_C + 0.1EI \theta_B - 75 \quad (15.18d)$$

Y para el elemento CD ,

$$M_{CD} = \frac{2EI}{15} (2\theta_C) = 0.267EI \theta_C \quad (15.18e)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{15} (\theta_C) = 0.133EI \theta_C \quad (15.18f)$$

Estas ecuaciones de la pendiente-deflexión automáticamente satisfacen las condiciones de compatibilidad de la estructura. Debido a que los extremos del elemento están rígidamente conectados a los nodos adyacentes, las rotaciones de los extremos del elemento son iguales a la rotación de los nodos adyacentes. Por lo tanto, el término θ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (15.18)) representa las rotaciones de los extremos del elemento además de las rotaciones de los nodos.

Rotaciones de los nodos

Para determinar las rotaciones de los nodos θ_B y θ_C , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (15.18)) en las ecuaciones de equilibrio del nodo (Ecs. (15.17)) y resolvemos el sistema resultante de ecuaciones simultáneas para θ_B y θ_C . Por lo tanto, mediante la sustitución de las Ecs. (15.18b) y (15.18c) en la Ec. (15.17a), obtenemos

$$(0.2EI\theta_B - 50) + (0.2EI\theta_B + 0.1EI\theta_C + 75) = 0$$

o

$$0.4EI\theta_B + 0.1EI\theta_C = -25 \quad (15.19a)$$

Y sustituyendo las Ecs. (15.18d) y (15.18e) en la Ec. (15.17b), obtenemos

$$(0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_B - 75) + 0.267EI\theta_C = 0$$

o

$$0.1EI\theta_B + 0.467EI\theta_C = 75 \quad (15.19b)$$

Resolviendo las Ecs. (15.19a) y (15.19b) simultáneamente, para $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$:

$$EI\theta_B = -108.46 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_C = 183.82 \text{ k-ft}^2$$

Sustituyendo los valores numéricos de $E = 29,000 \text{ ksi} = 29,000(12)^2 \text{ ksf}$ e $I = 500 \text{ in}^4 = (500/12) \text{ ft}^4$, determinamos las rotaciones del nodo B y C como

$$\theta_B = -0.0011 \text{ rad} \quad \text{o} \quad 0.0011 \text{ rad } \curvearrowright$$

$$\theta_C = 0.0018 \text{ rad } \curvearrowright$$

Momentos en el extremo del elemento

Los momentos en los extremos de los tres elementos de la viga continua se pueden determinar ahora sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (15.18)). Por lo tanto

$$M_{AB} = 0.1(-108.46) + 50 = 39.2 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{BA} = 0.2(-108.46) - 50 = -71.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 71.7 \text{ k-ft } \curvearrowleft$$

$$M_{BC} = 0.2(-108.46) + 0.1(183.82) + 75 = 71.7 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{CB} = 0.2(183.82) + 0.1(-108.46) - 75$$

$$= -49.1 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 49.1 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

$$M_{CD} = 0.267(183.82) = 49.1 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

$$M_{DC} = 0.133(183.82) = 24.4 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Tenga en cuenta que una respuesta positiva para el momento en el extremo indica que su sentido es contrario a las manecillas del reloj, mientras que una respuesta negativa para el momento en el extremo implica un sentido a favor de las manecillas del reloj.

Para verificar que la solución de las ecuaciones simultáneas (Ecs. (15.19)) se ha realizado de manera correcta, los valores numéricos de los momentos en el extremo del elemento deben sustituirse en las ecuaciones de equilibrio del nodo (Ecs. (15.17)). Si la solución es correcta, las ecuaciones de equilibrio deberán quedar satisfechas.

$$M_{BA} + M_{BC} = -71.7 + 71.7 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{CB} + M_{CD} = -49.1 + 49.1 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Cortantes en los extremos del elemento

Los momentos en los extremos del elemento recién calculados se muestran en los diagramas de cuerpo libre de los elementos y nodos en la Fig. 15.3(d). Las fuerzas cortantes en los extremos de los elementos se pueden determinar aplicando las ecuaciones de equilibrio a los cuerpos libres de los elementos. Así, el elemento AB ,

$$+\zeta \sum M_B = 0 \quad 39.2 - S_{AB}(20) + 1.5(20)(10) - 71.7 = 0$$

$$S_{AB} = 13.38 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 13.38 - 1.5(20) + S_{BA} = 0$$

$$S_{BA} = 16.62 \text{ k} \uparrow$$

De manera similar, para el elemento BC ,

$$+\zeta \sum M_C = 0 \quad 71.7 - S_{BC}(20) + 30(10) - 49.1 = 0$$

$$S_{BC} = 16.13 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 16.13 - 30 + S_{CB} = 0$$

$$S_{CB} = 13.87 \text{ k} \uparrow$$

Y para el elemento CD ,

$$+\zeta \sum M_D = 0 \quad 49.1 - S_{CD}(15) + 24.4 = 0 \quad S_{CD} = 4.9 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad S_{DC} = 4.9 \text{ k} \downarrow$$

Los cortantes y momentos anteriores, alternativamente, se pueden evaluar mediante la superposición de cortantes en el extremo debido a la carga externa y cada uno de los momentos en el extremo que actúan por separado en el elemento. Por ejemplo, el cortante en el extremo A del elemento AB está dado por

$$S_{AB} = \frac{1.5(20)}{2} + \frac{39.2}{20} - \frac{71.7}{20} = 13.38 \text{ k} \uparrow$$

En el cual, el primer término es igual al cortante debido a una carga uniformemente distribuida de 1.5-k/ft, mientras que el segundo y el tercer término son los cortantes debido a los momentos de 39.2-k-ft y 71.7-k-ft, respectivamente, en los extremos A y B del elemento.

Reacciones en los apoyos

Del diagrama de cuerpo libre del nodo B en la Fig. 15.3(d), podemos ver que la reacción vertical en el apoyo de patín B es igual a la suma de los cortantes en el extremo B de los elementos AB y BC ; es decir,

$$B_y = S_{BA} + S_{BC} = 16.62 + 16.13 = 32.75 \text{ k } \uparrow$$

De manera similar, la reacción vertical en el apoyo de patín C es igual a la suma de los cortantes en los extremos C de los elementos BC y CD . Por lo tanto,

$$C_y = S_{CB} + S_{CD} = 13.87 + 4.9 = 18.77 \text{ k } \uparrow$$

Las reacciones en el apoyo empotrado A es igual al cortante y el momento en el extremo A del elemento AB , es decir,

$$A_y = S_{AB} = 13.38 \text{ k } \uparrow$$

$$M_A = M_{AB} = 39.2 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Análogamente, las reacciones en el apoyo empotrado D son igual al cortante y al momento en el extremo D del elemento CD . Por lo tanto,

$$D_y = S_{DC} = 4.9 \text{ k } \downarrow$$

$$M_D = M_{DC} = 24.4 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Las reacciones en los apoyos se muestran en la Fig. 15.3(e).

Comprobación de equilibrio

Para comprobar nuestros cálculos de cortante al extremo del elemento y apoyar a las reacciones, aplicamos las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de toda la estructura. Así (Fig. 15.3(e)),

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$13.38 - 1.5(20) + 32.75 - 30 + 18.77 - 4.9 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_D = 0$$

$$39.2 - 13.38(55) + 1.5(20)(45) - 32.75(35) + 30(25)$$

$$- 18.77(15) + 24.4 = -0.1 \quad 0 \quad \text{Comprobación}$$

Esta comprobación de equilibrio, además de la comprobación realizada previamente en la solución de las ecuaciones simultáneas, no detecta ningún error involucrado en las ecuaciones de pendiente-deflexión. Por lo tanto, las ecuaciones de la pendiente-deflexión deberían desarrollarse cuidadosamente y siempre deben comprobarse antes de proceder con el resto del análisis.

Diagramas de cortante y momento flexionante

Con las reacciones en los apoyos ya determinadas, se pueden construir los diagramas de cortante y momento flexionante de una manera usual usando la *convención de signos de la viga* descrito en la Sección 5.1. Los diagramas de momento y de cortante así obtenidos se muestran en las Figs. 15.3(f) y (g), respectivamente.

15.3 Análisis de vigas continuas

Basados en nuestra discusión presentada en la sección anterior, se puede resumir un procedimiento para el análisis de vigas continuas por el método de la pendiente-deflexión como sigue:

1. Identifique el grado de libertad de la estructura. Para vigas continuas, el grado de libertad consiste en las rotaciones desconocidas de los nodos.
2. Calcule los momentos de empotre. Para cada elemento de la estructura, evalúe los momentos de empotre debido a las cargas externas usando las expresiones que se encuentran en el interior de la cubierta del libro. Los momentos de empotre en sentido contrario a las manecillas del reloj son positivos.
3. En el caso de asentamientos en los apoyos, determine las rotaciones de las cuerdas del elemento adyacente al apoyo que se asienta, dividiendo la traslación relativa entre los dos extremos del elemento por la longitud ($\psi = \Delta/L$). Las rotaciones de las cuerdas se miden desde la posición no deformada (horizontal) de los elementos, con rotaciones consideradas como positivas en sentido contrario a las manecillas del reloj.
4. Escriba las ecuaciones de la pendiente-deflexión. Para cada elemento, aplique la Ec. (15.9) para escribir las dos ecuaciones de la pendiente-deflexión relacionando los momentos en el extremo del elemento con las rotaciones desconocidas de los nodos adyacentes.
5. Escriba las ecuaciones de equilibrio. Para cada nodo que está libre a la rotación, escriba una ecuación de equilibrio, $\sum M = 0$, en términos de los momentos en los extremos del elemento conectado al nodo. El número total de tales ecuaciones de equilibrio debe ser igual al número de grados de libertad de la estructura.
6. Determine las rotaciones desconocidas en los nodos. Sustituya las ecuaciones de la pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio y resuelva el sistema de ecuaciones resultante para las rotaciones desconocidas en los nodos.
7. Calcule los momentos en el extremo del elemento sustituyendo los valores numéricos de las rotaciones en los nodos determinados en el paso 6 en la ecuación de la pendiente-deflexión. Una respuesta positiva indica que su sentido es contrario a las manecillas del reloj, mientras que una respuesta negativa indica que para el momento en el extremo implica un sentido a favor de las manecillas del reloj.
8. Verifique si la solución de las ecuaciones simultáneas se realizó correctamente en el paso 6, sustituya los valores numéricos de los momentos en el extremo del elemento en las ecuaciones de equilibrio del nodo desarrolladas en el paso 5. Si la solución fue correcta, entonces las ecuaciones de equilibrio deberán quedar satisfechas.

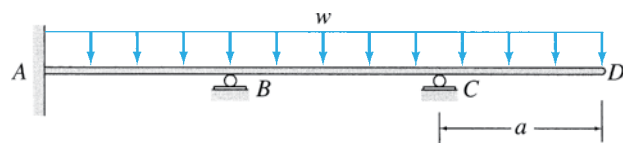
9. Calcule los cortantes y el momento. Para cada elemento, (a) dibuje un diagrama de cuerpo libre mostrando las cargas externas y los momentos en el extremo del elemento y (b) aplique las ecuaciones de equilibrio para calcular las fuerzas cortantes en los extremos de los elementos.
10. Determine las reacciones en los apoyos considerando el equilibrio de los nodos de la estructura.
11. Para verificar los cálculos de los cortantes en los extremos de los elementos y las reacciones en los apoyos, aplique las ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la estructura completa. Si los cálculos se realizaron correctamente, entonces las ecuaciones de equilibrio quedarán satisfechas.
12. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la estructura usando la *convención de signos*.

Vigas con apoyos simples en sus extremos

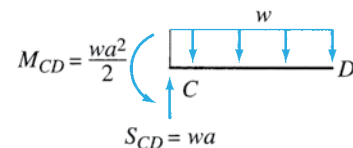
A pesar de que el procedimiento anterior se puede usar para analizar vigas continuas que están simplemente apoyadas en uno o en dos de sus extremos, el análisis de tales estructuras se puede realizar rápidamente aplicando las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada (Ecs. (15.15)) para claros adyacentes a los apoyos simples en los extremos, así, eliminando las rotaciones de los apoyos simples del análisis (ver Ejemplo 15.3). Sin embargo, este enfoque simplificado puede emplearse solo para ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada en las cuales no hay momentos externos aplicados. Esto se debe a que las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada para elementos con un extremo articulado (Ecs. (15.15)) están basadas en la condición de que el momento en el extremo articulado es cero.

Estructuras en con voladizos en cantiliver

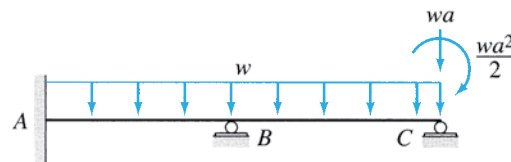
Considere una viga continua con un voladizo en cantiliver, como se muestra en la Fig. 15.4(a). Debido a que la porción del cantiliver CD de la viga es



(a) Viga Real



(b) Porción en cantiliver estáticamente determinado



(c) Porción estáticamente determinado para ser analizada

FIG. 15.4

estáticamente determinado en el sentido de que el cortante y el momento en su extremo C se pueden obtener aplicando las ecuaciones de equilibrio (Fig. 15.4(b)), no es necesario incluir esta porción en el análisis. Así, para el propósito de análisis, la porción en cantiliver CD se puede eliminar de la estructura, con la condición de que el momento y la fuerza ejercida por el cantiliver en la estructura restante sean incluidos en el análisis. La parte indeterminada AC de la estructura, la cual necesita ser analizada, se muestra en la Fig. 15.4(c).

Ejemplo 15.1

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de dos claros mostrada en la Fig. 15.5(a) por el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Grado de libertad. De la Fig. 15.5(a) podemos ver que solo el nodo B de la viga puede rotar. Así, la estructura tiene un solo grado de libertad, el cual es la rotación desconocida en el nodo, θ_B .

Momentos de empotre. Usando las expresiones para el momento de empotre proporcionadas en la parte interior de la contraportada del libro de texto, evaluamos los momentos en el extremo empotrado debidos a la carga externa aplicada en cada elemento:

$$FEM_{AB} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{18(10)(15)^2}{(25)^2} = 64.8 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{o} \quad +64.8 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{18(10)^2(15)}{(25)^2} = 43.2 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{o} \quad -43.2 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{o} \quad +150 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CB} = 150 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{o} \quad -150 \text{ k-ft}$$

Tenga en cuenta que de acuerdo con la convención de signos de la pendiente-deflexión, los momentos de empotre se consideran positivos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que los momentos de empotre en sentido de las manecillas del reloj serán negativos.

Rotación de la cuerda. Debido a que no se presentan asentamientos en los apoyos, las rotaciones de la cuerda de ambos elementos son cero; es decir, $\psi_{AB} = \psi_{AC} = 0$.

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Para relacionar los momentos en el extremo del elemento con las rotaciones desconocidas en los nodos, θ_B , escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión para los dos elementos de la estructura aplicando la Ec. (15.9). Tenga en cuenta que los apoyos A y C están empotrados, la rotación $\theta_A = \theta_C = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones de la pendiente-deflexión para el elemento AB se pueden expresar como

$$M_{AB} = \frac{2EI}{25} (\theta_B) + 64.8 = 0.08EI \theta_B + 64.8 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{25} (2\theta_B) - 43.2 = 0.16EI \theta_B - 43.2 \quad (2)$$

De manera similar, aplicando la Ec. (15.9) para el elemento BC obtenemos las ecuaciones de la pendiente-deflexión:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{30} (2\theta_B) + 150 = 0.133EI \theta_B + 150 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{30} (\theta_B) - 150 = 0.0667EI \theta_B - 150 \quad (4)$$

continúa

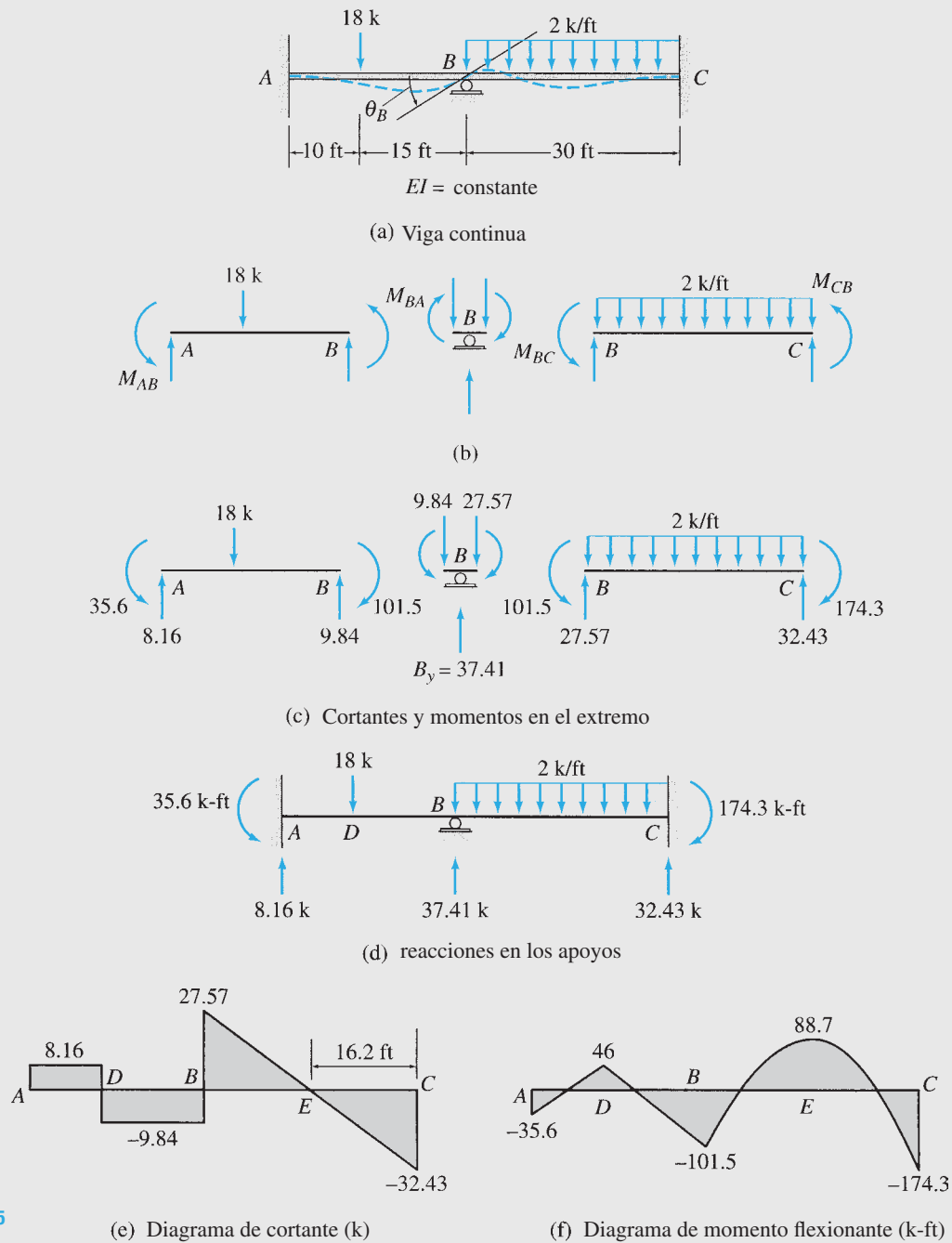


FIG. 15.5

Ecuación de equilibrio. El diagrama de cuerpo libre del nodo B se muestra en la Fig. 15.5(b). Tenga en cuenta que el momento en el extremo del elemento, el cual se supone en dirección contraria a las manecillas del reloj en los extremos de los elementos, debe aplicarse en la dirección (opuesta) a favor de las manecillas del reloj en el diagrama de cuerpo libre del nodo, de acuerdo con la tercera ley de Newton. Aplicando el momento de equilibrio $\sum M_B = 0$ al cuerpo libre del nodo B , obtenemos la ecuación de equilibrio

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

continúa

Reacciones en los nodos. Para determinar la incógnita de la rotación en el nodo, θ_B , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (2) y (3)) en la ecuación de equilibrio Ec. (5)) obtenemos

$$(0.16EI\theta_B - 43.2) + (0.133EI\theta_B + 150) = 0$$

o

$$0.293EI\theta_B = -106.8$$

De la cual

$$EI\theta_B = -364.5 \text{ k-ft}^2$$

Momentos en el extremo del elemento. Los momentos en el extremo del elemento se pueden calcular sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_B$ de nuevo en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (19 a la (4))). Así,

$$M_{AB} = 0.08(-364.5) + 64.8 = 35.6 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{BA} = 0.16(-364.5) - 43.2 = -101.5 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 101.5 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{BC} = 0.133(-364.5) + 150 = 101.5 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{CB} = 0.0667(-364.5) - 150 = -174.3 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 174.3 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Tenga en cuenta que una respuesta positiva para el momento en el extremo indica que su sentido es contrario a las manecillas del reloj, mientras que si la respuesta es negativa para el momento en el extremo implica que el sentido es a favor de las manecillas. Debido a que el momento en los extremos M_{BA} y M_{BC} son iguales pero de sentido contrario, el equilibrio de la ecuación, $M_{BA} + M_{BC} = 0$, se cumple.

Cortante en el extremo del elemento. Los cortantes en el extremo del elemento, obtenidos considerando el equilibrio en cada elemento, se muestran en la Fig. 15.5(c).

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en los apoyos empotrados A y C son iguales a las fuerzas y momentos en los extremos de los elementos conectados a estos nodos. Para determinar las reacciones en el apoyo de patín B, consideremos el equilibrio del cuerpo libre del nodo B en la dirección vertical (ver Fig. 15.5(c)), para obtener

$$B_y = S_{BA} + S_{BC} = 9.84 + 27.57 = 37.41 \text{ k } \uparrow$$

Las reacciones en los apoyos se muestran en la Fig. 15.5(d).

Respuesta

Comprobación de equilibrio. Para comprobar nuestros cálculos de los cortantes en el extremo del elemento y las reacciones en los apoyos, aplicamos las ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre de la estructura completa. Así, (ver Fig. 1.5.5(d)),

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$8.16 - 18 + 37.41 - 2(30) + 32.43 = 0$$

Comprobación

$$+ \curvearrowright \sum M_C = 0$$

$$35.6 - 8.16(55) + 18(45) - 37.41(30) + 2(30)(15) - 174.3 = 0.2 \approx 0$$

Comprobación

Diagramas de cortante y momento flexionante. Los diagramas de cortante y de momento flexionante se pueden construir usando la *convención de signos para vigas* descrita en la Sección 5.1. Estos diagramas se muestran en las Figs. 15.5(e) y (f).

Respuesta

Ejemplo 15.2

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 15.6(a) por el método de la pendiente-deflexión.

continúa

Solución

 Grado de libertad. θ_B y θ_C

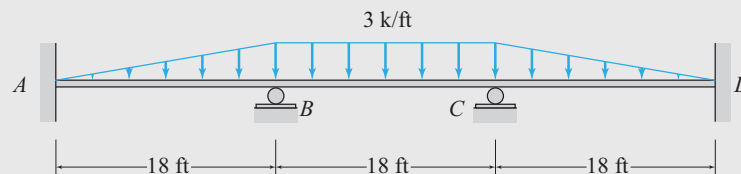
Momentos de empotre

$$FEM_{AB} = \frac{3(18)^2}{30} = 32.4 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +32.4 \text{ k-ft}$$

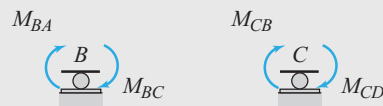
$$FEM_{BA} = \frac{3(18)^2}{20} = 48.6 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -48.6 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = \frac{3(18)^2}{12} = 81 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +81 \text{ k-ft}$$

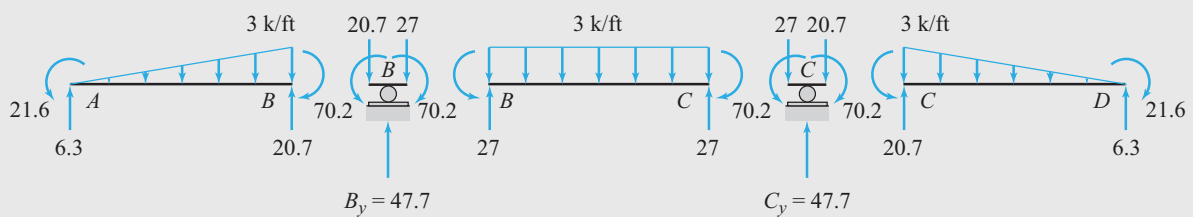
$$FEM_{CB} = 81 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -81 \text{ k-ft}$$


 $EI = \text{constant}$

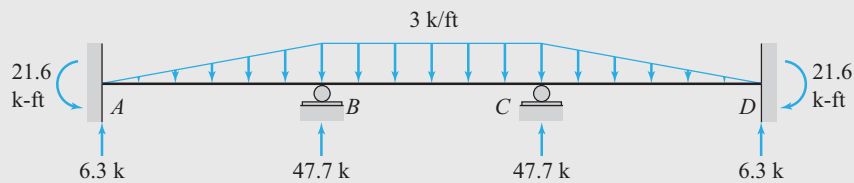
(a) Continuous Beam



(b) Free-Body Diagrams of Joints B and C



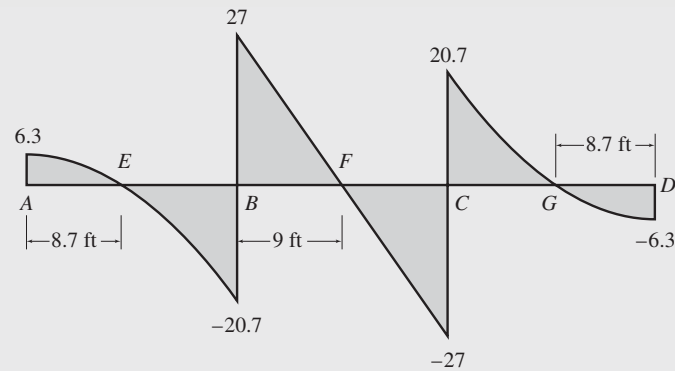
(c) Member End Moments and Shears



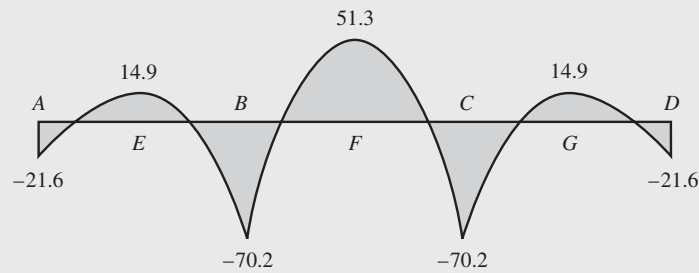
(d) Support Reactions

FIG. 15.6

continúa



(e) Shear Diagram (k)



(f) Bending Moment Diagram (k-ft)

FIG. 15.6 (cont.)

$$FEM_{CD} = \frac{3(18)^2}{20} = 48.6 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad +48.6 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DC} = \frac{3(18)^2}{30} = 32.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad -32.4 \text{ k-ft}$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Usando la Ec. (15.9) para los elementos AB, BC y CD, tenemos:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18} (\theta_B) + 32.4 = 0.111EI \theta_B + 32.4 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18} (2\theta_B) - 48.6 = 0.222EI \theta_B - 48.6 \quad (2)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{18} (2\theta_B + \theta_C) + 81 = 0.222EI \theta_B + 0.111EI \theta_C + 81 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{18} (\theta_B + 2\theta_C) - 81 = 0.111EI \theta_B + 0.222EI \theta_C - 81 \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{18} (2\theta_C) + 48.6 = 0.222EI \theta_C + 48.6 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{18} (\theta_C) - 32.4 = 0.111EI \theta_C - 32.4 \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.6(b.)

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

continúa

Reacciones en los apoyos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) y (8)), obtenemos

$$0.444EI\theta_B + 0.111EI\theta_C = -32.4 \quad (9)$$

$$0.111EI\theta_B + 0.444EI\theta_C = 32.4 \quad (10)$$

Resolviendo las Ecs. (9) y (10) simultáneamente, determinamos los valores $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ como

$$EI\theta_B = -97.3 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_C = 97.3 \text{ k-ft}^2$$

Momentos en los extremos del elemento. Para calcular los momentos en los extremos del elemento, sustituimos los valores numéricos de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ de nuevo en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)) para obtener

$$M_{AB} = 0.111(-97.3) + 32.4 = 21.6 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = 0.222(-97.3) - 48.6 = -70.2 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 70.2 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BC} = 0.222(-97.3) + 0.111(97.3) + 81 = 70.2 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= 0.111(-97.3) + 0.222(97.3) - 81 \\ &= -70.2 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 70.2 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta} \end{aligned}$$

$$M_{CD} = 0.222(97.3) + 48.6 = 70.2 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = 0.111(97.3) - 32.4 = -21.6 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 21.6 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

Tenga en cuenta que los valores numéricos de M_{BA} , M_{BC} , M_{CB} y M_{CD} satisfacen las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) y (8)).

Reacciones en los apoyos y cortantes en el extremo del elemento. Ver las Figs. 15.6(c) y (d).

Comprobación de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se comprueban.

Diagrama de cortante y momento flexionante. Ver la Fig. 15.6(e) y (f).

Ejemplo 15.3

Determine las reacciones y los momentos en el extremo del elemento para la viga continua mostrada en la Fig. 15.7(a) por el método de la pendiente-deflexión.

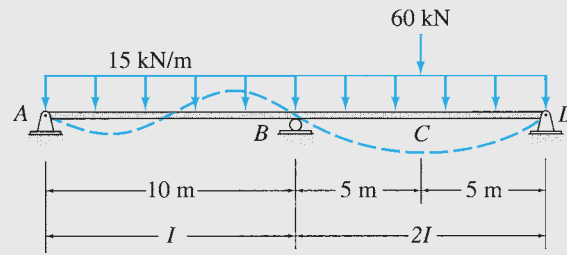
Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 13.6 por el método de las deformaciones consistentes.

De la Fig. 15.7(a) podemos ver que los tres nodos están libres para rotar. Así que la viga se considera que tiene tres grados de libertad, θ_A , θ_B y θ_D , y se puede analizar usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ec. (15.9)) para elementos conectados rígidamente en ambos extremos. Sin embargo, este enfoque consume bastante tiempo, debido a que requiere resolver simultáneamente las ecuaciones para determinar las tres rotaciones incógnitas de los nodos.

Puesto que los apoyos de los extremos A y D de la viga son apoyos simples en los cuales no hay momento externo aplicado, los momentos en el extremo A, del elemento AB, y en el extremo D, del elemento BD, deben ser cero. (Esto se puede verificar fácilmente considerando el equilibrio de momentos en el cuerpo libre de los nodos A y D mostrados en la Fig. 15.7(b)). Así que el extremo A, del elemento AB, y el extremo D, del elemento BD, se pueden considerar como extremos articulados, y las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada (Ecs. (15.15)) se puede usar para estos elementos. Además, debido a que las ecuaciones de la pendiente-deflexión no pueden contener las rotaciones en los extremos articulados, usando estas ecuaciones la rotación, θ_A y θ_D , de los apoyos simples pueden eliminarse del análisis, el cual entonces involucrara solo una incógnita de rotación del nodo θ_B . Se debe notar que una vez que θ_B se ha evaluado, los valores de la rotación θ_A y θ_D , si se desea, se pueden calcular usando la Ec. (15.16). En lo siguiente usaremos el enfoque simplificado para analizar las vigas continuas.

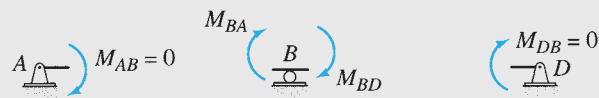
continúa



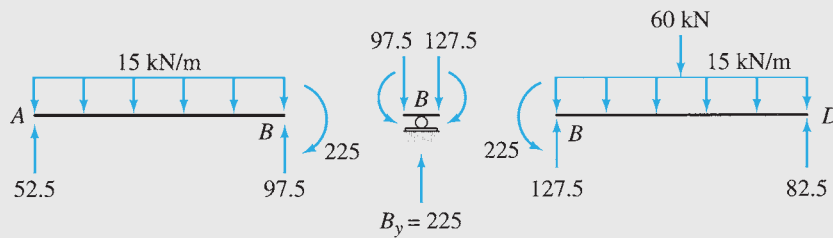
$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$I = 700(10^6) \text{ mm}^4$$

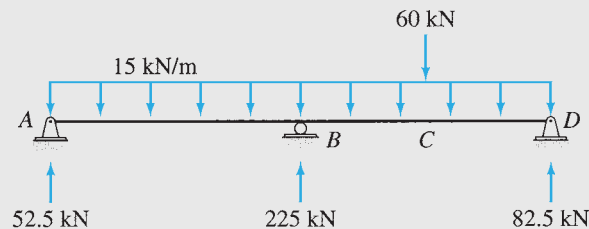
(a) Continuous Beam



(b) Free-Body Diagrams of Joints



(c) Member End Moments and Shears



(d) Support Reactions

FIG. 15.7

Grado de libertad. θ_B

Momentos de empotre

$$\text{FEM}_{AB} = \frac{15(10)^2}{12} = 125 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad +125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{BA} = 125 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad -125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{BD} = \frac{60(10)}{8} + \frac{15(10)^2}{12} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad +200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{DB} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad -200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

continúa

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Dado que ambos elementos de la viga tienen un extremo articulado, usaremos la Ec. (15.15) para obtener las ecuaciones de la pendiente-deflexión de ambos elementos. Así,

$$M_{AB} = 0 \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{10}(\theta_B) + \left(-125 - \frac{125}{2}\right) = 0.3EI\theta_B - 187.5 \quad (1)$$

$$M_{BD} = \frac{3E(2I)}{10}(\theta_B) + \left(200 + \frac{200}{2}\right) = 0.6EI\theta_B + 300 \quad (2)$$

$$M_{DB} = 0 \quad \text{Respuesta}$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos del cuerpo libre en el nodo B (Fig. 15.7(b)), obtenemos la ecuación de equilibrio

$$M_{BA} + M_{BD} = 0 \quad (3)$$

Rotación en los nodos. Para determinar las incógnitas de la rotación en los nodos θ_B , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) y (2)) en la ecuación de equilibrio (Ec. (3)) para obtener

$$(0.3EI\theta_B - 187.5) + (0.6EI\theta_B + 300) = 0$$

o

$$0.9EI\theta_B = -112.5$$

De la cual

$$EI\theta_B = -125 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Momentos en el extremo del elemento. Los momentos en el extremo del elemento se pueden determinar sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_B$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) y (2)). Así,

$$M_{BA} = 0.3(-125) - 187.5 = -225 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 0.6(-125) + 300 = 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta}$$

Reacciones en los apoyos y cortantes en el extremo del elemento. Ver las Figs. 15.7(c) y (d).

Comprobación de equilibrio. Ver la Fig. 15.7(d).

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad 52.5 - 15(20) + 225 - 60 + 82.5 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_D = 0$$

$$-52.5(20) + 15(20)(10) - 225(10) + 60(5) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

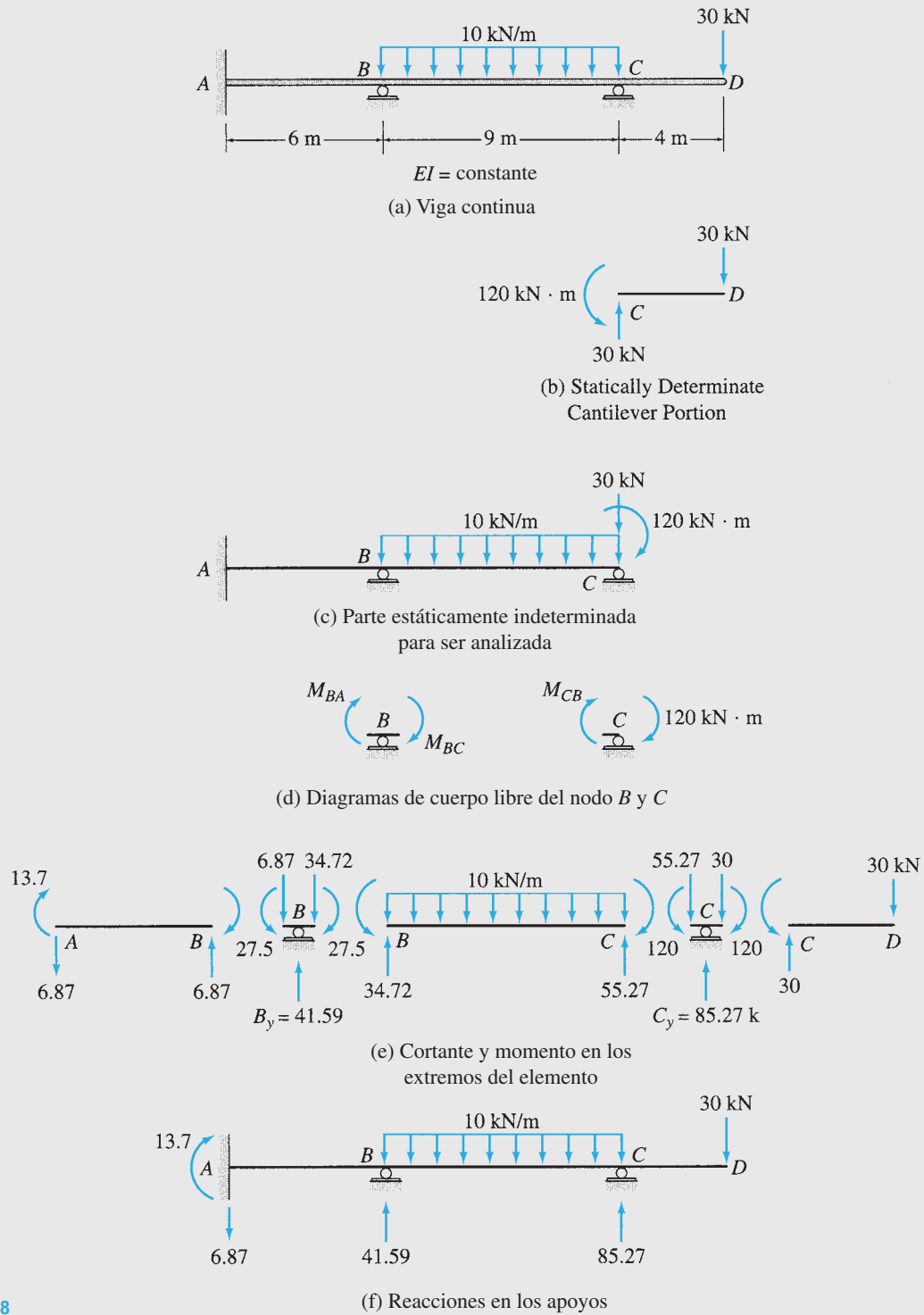
Ejemplo 15.4

Determine las reacciones y los momentos en el extremo de elemento para la viga continua mostrada en la Fig. 15.8(a) por el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Debido a que el momento y el cortante en el extremo C del elemento en cantiliver se pueden calcular directamente aplicando las ecuaciones de equilibrio (ver Fig. 15.8(b)), no es necesario incluir este elemento en el análisis. Por lo tanto, solo la parte indeterminada AC de la viga, mostrada en la Fig. 15.8(c), necesita ser analizada. Tenga en cuenta que, como se muestra en esta figura, el momento de 120 kN-m y las fuerzas ejercidas de 30 kN en el nodo C por el cantiliver CD se debe de tomar en cuenta en el análisis.

continúa



continúa

Grado de libertad. De la Fig. 15.8(c) podemos ver que los nodos B y C están libres para la rotación, por lo tanto la estructura a analizar tiene dos grados de libertad, los cuales son las incógnitas de las rotaciones de los nodos θ_B y θ_C .

Momentos de empotre

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = 0$$

$$FEM_{BC} = \frac{10(9)^2}{12} = 67.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{o} \quad +67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{CB} = 67.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{o} \quad -67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Aplicando la Ec. (15.9) a los elementos AB y BC , escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{6}(\theta_B) = 0.333EI\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6}(2\theta_B) = 0.667EI\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{9}(2\theta_B + \theta_C) + 67.5 = 0.444EI\theta_B + 0.222EI\theta_C + 67.5 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{9}(2\theta_C + \theta_B) - 67.5 = 0.222EI\theta_B + 0.444EI\theta_C - 67.5 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el momento en el equilibrio de los cuerpos libres de los nodos B y C (Fig. 15.8(d)), obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

$$M_{CB} + 120 = 0 \quad (6)$$

Rotaciones de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (2) a la (4)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)), resulta

$$1.111EI\theta_B + 0.222EI\theta_C = -67.5 \quad (7)$$

$$0.222EI\theta_B + 0.444EI\theta_C = -52.5 \quad (8)$$

Resolviendo las Ecs. (7) y (8) de forma simultánea, determinamos los valores de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ como

$$EI\theta_B = -41.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI\theta_C = -97.62 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Momentos en el extremo del elemento. Los momentos en el extremo del elemento se pueden calcular sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)):

$$M_{AB} = 0.333(-41.25) = -13.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 13.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = 0.667(-41.25) = -27.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 27.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta}$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= 0.444(-41.25) + 0.222(-97.62) + 67.5 \\ &= 27.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= 0.222(-41.25) + 0.444(-97.62) - 67.5 \\ &= -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 120 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que los valores numéricos de M_{AB} , M_{AC} y M_{CB} satisfacen las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)).

Cortante en el extremo del elemento y reacciones en los apoyos. Ver las Figs. 15.8(e) y (f).

Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

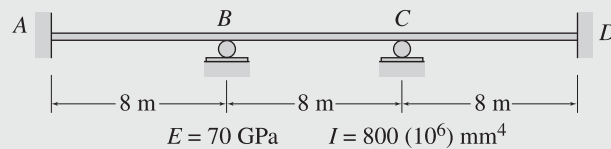
Ejemplo 15.5

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de la Fig. 15.9(a) provocados por un asentamiento de 20 mm en el apoyo B . Utilice el método de la pendiente-deflexión.

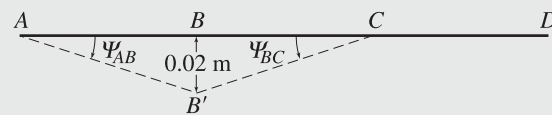
Solución

Grados de libertad. θ_B y θ_C

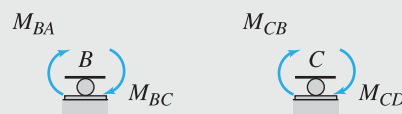
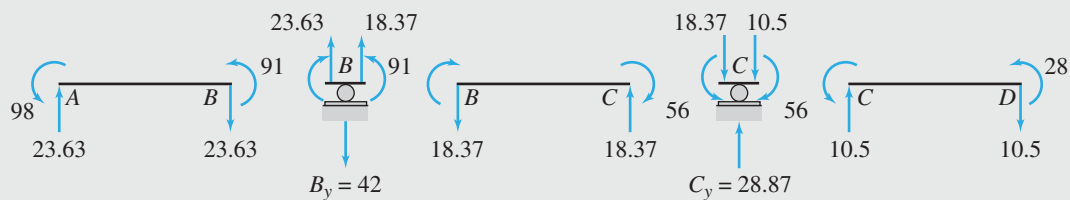
Momentos de empotre. Debido a que no hay cargas externas que actúen en la viga, los momentos de empotre son cero.



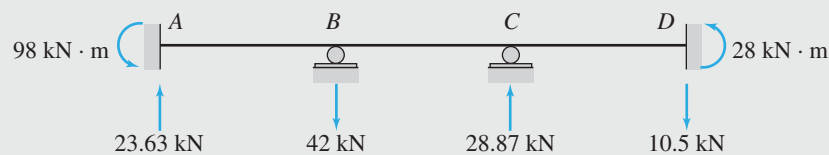
(a) Viga continua



(b) Rotación de la cuerda debido al asentamiento del apoyo

(c) Diagrama de cuerpo libre de los nodos B y C 

(d) Cortantes y momentos en el extremo del elemento



(e) Reacciones en los apoyos

FIG. 15.9

continúa

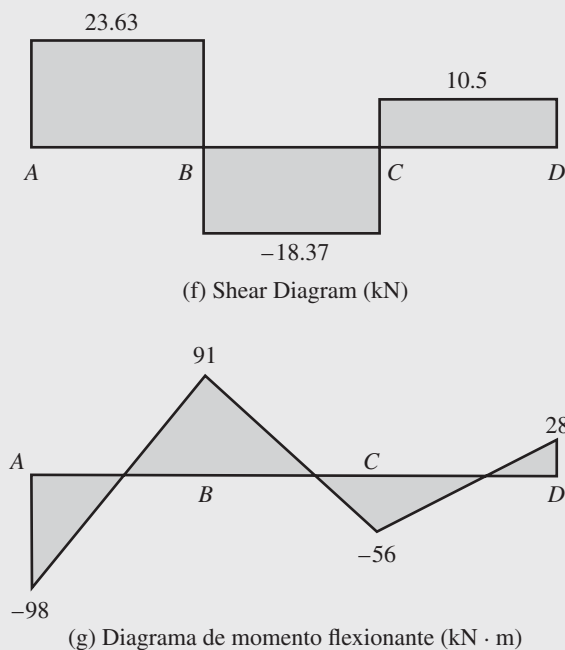


FIG. 15.9 (cont.)

Rotación de la cuerda. El asentamiento especificado se muestra en la Fig. 15.9(b), usando una escala exagerada. La línea inclinada punteada en esta figura indica las cuerdas (no la curvatura elástica) de los elementos en la posición deformada. Debido a que la longitud del elemento AB es de 8m, la rotación de la cuerda es

$$\psi_{AB} = -\frac{0.02}{8} = -0.0025$$

Donde el signo negativo ha sido asignado al valor de ψ_{AB} para indicar que su dirección es en el mismo sentido de las manecillas del reloj, como en la Fig. 15.9(b). De manera similar, la rotación de la cuerda del elemento BC es

$$\psi_{BC} = \frac{0.02}{8} = 0.0025$$

De la Fig. 15.9(b) podemos ver que

$$\psi_{CD} = 0$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Aplicando la Ec. (15.9) a los elementos AB , BC y CD , obtenemos

$$M_{AB} = \frac{2EI}{8} (\theta_B + 0.0075) \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{8} (2\theta_B + 0.0075) \quad (2)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{8} (2\theta_B + \theta_C - 0.0075) \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{8} (\theta_B + 2\theta_C - 0.0075) \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{8} (2\theta_C) \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{8} (\theta_C) \quad (6)$$

continúa

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.9(c).

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Rotación de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) y (8)), obtenemos

$$4\theta_B + \theta_C = 0 \quad (9)$$

$$\theta_B + 4\theta_C = 0.0075 \quad (10)$$

Resolviendo las Ecs. (9) y (10) simultáneamente, determinamos

$$\theta_B = -0.0005 \text{ rad}$$

$$\theta_C = 0.002 \text{ rad}$$

Momentos en el extremo del elemento. Para calcular los momentos en el extremo del elemento, sustituimos los valores numéricos de θ_B y θ_C y $EI = (70)(80) = 56,000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ en los lados derechos de la igualdad de las ecuaciones (Ecs. (1) a la (6)) para obtener

$$M_{AB} = 98 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = 91 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BC} = -91 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 91 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CB} = -56 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 56 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 56 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = 28 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

Cortante en el extremo y reacciones en los apoyos. Ver las Figs. 15.9(d) y (e).

Comprobación de equilibrio. Ver las Figs. 15.9(f) y (g).

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 23.63 - 42 + 28.87 - 10.5 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+\zeta \sum M_A = 0$$

$$98 - 42(8) + 28.87(16) - 10.5(24) + 28 = -0.08 \quad 0 \quad \text{Comprobación}$$

Diagramas de cortante y momento flexionante. Ver las Figs. 15.9(f) y (g).

Respuesta

Ejemplo 15.6

Determine los momentos del extremo del elemento y las reacciones de la viga de cuatro claros continuos mostrada en la Fig. 15.10(a) debidas a la carga uniformemente repartida, y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de la Fig. 15.9(a), debido a un carga uniformemente distribuida y a un asentamiento de $\frac{5}{8}$ in en B y de $1\frac{1}{2}$ in en C , y de $\frac{3}{4}$ in en D . Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Grados de libertad. A pesar de que los cuatro nodos de la viga están libres para presentar rotaciones, podemos eliminar las rotaciones de los apoyos simples en los extremos A y D del análisis usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificada para los elementos AB y CD , respectivamente. Por lo tanto, el análisis solo involucrará las dos incógnitas de la rotación de los nodos θ_B y θ_C .

continúa

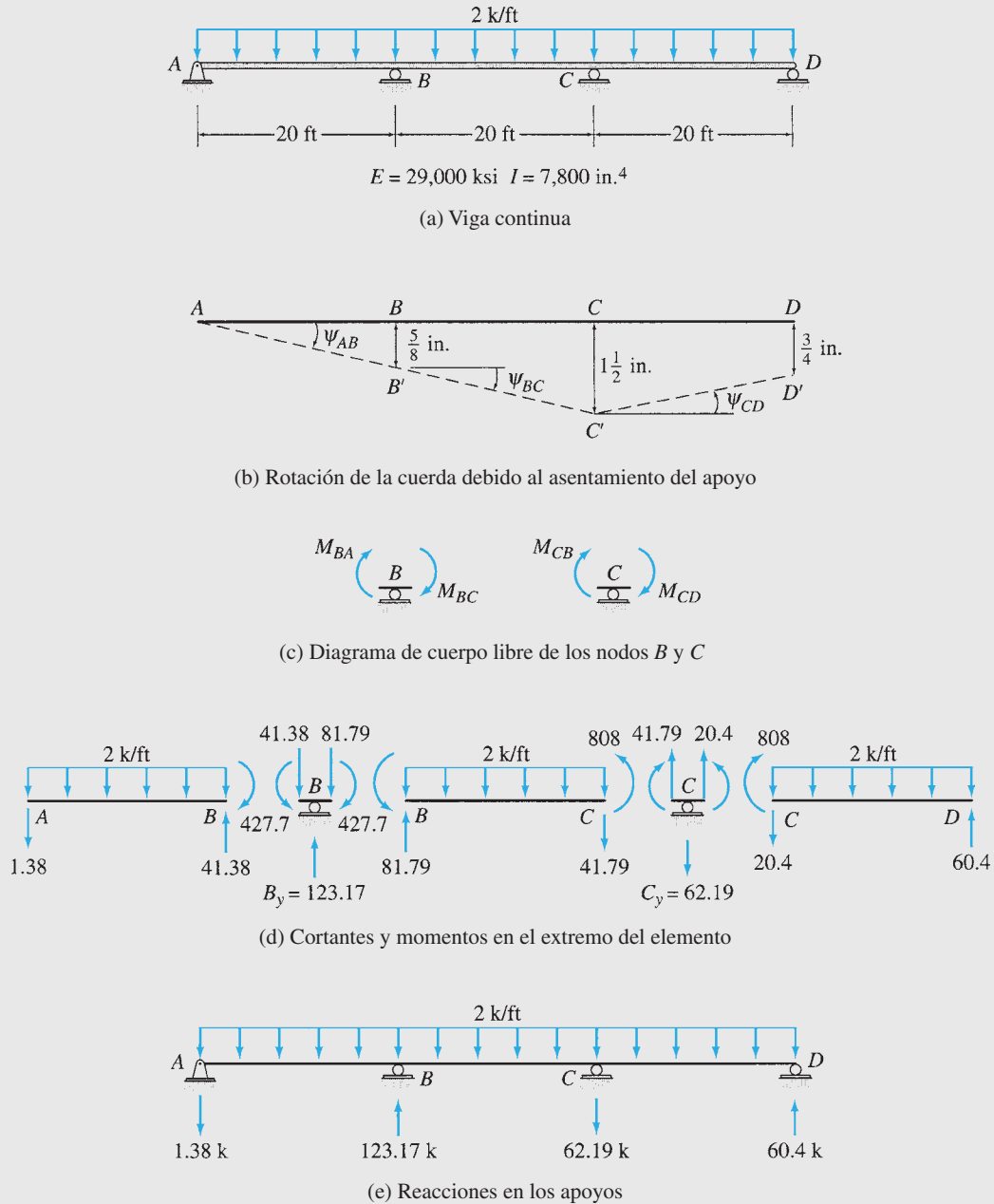


FIG. 15.10

Momentos de empotre. Debido a que no hay cargas externas que actúen en la viga, los momentos de empotre son cero.

$$FEM_{AB} = FEM_{BC} = FEM_{CD} = \frac{2(20)^2}{12} = 66.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad +66.7 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = FEM_{CB} = FEM_{DC} = 66.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad -66.7 \text{ k-ft}$$

Rotaciones de la cuerda. El asentamiento especificado se muestra en la Fig. 15.10(b) en una escala exagerada. La línea punteada inclinada en esta figura indica la cuerda (no las curvas elásticas) de los elementos en la posición deformada. Se puede ver de esta figura que debido a que el apoyo A no tiene ningún asentamiento pero el apoyo B se asienta $\frac{5}{8}$ in, el asen-

continúa

tamiento relativo entre los dos extremos del elemento AB es $\frac{5}{8}$ in = 0.0521 ft. Debido a que la longitud del elemento AB es de 20 ft, la rotación de la cuerda del elemento AB es

$$\psi_{AB} = -\frac{0.0521}{20} = -0.0026$$

Aquí el signo negativo ha sido asignado al valor de ψ_{AB} para indicar que su dirección es en sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 15.10(b). La rotación de la cuerda del elemento BC se puede calcular de manera similar usando los asentamientos de los apoyos B y C . De la Fig. 15.10 (b) observamos que el asentamiento relativo entre los extremos del elemento BC es $1\frac{1}{2}$ in $-\frac{5}{8}$ in = 0.875 in = 0.0729 ft, y así sucesivamente.

$$\psi_{BC} = -\frac{0.0729}{20} = -0.00365$$

De manera similar, la rotación de la cuerda del elemento CD es

$$\psi_{CD} = \frac{1.5 - 0.75}{(12)(20)} = 0.00313$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AB} = 0 \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{20}(\theta_B + 0.0026) - 100 = 0.15EI\theta_B + 0.00039EI - 100 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= \frac{2EI}{20} = 2\theta_B + \theta_C - 3(-0.00365)] + 66.7 \\ &= 0.2EI\theta_B + 0.1EI\theta_C + 0.0011EI + 66.7 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= \frac{2EI}{20} = 2\theta_C + \theta_B - 3(-0.00365)] - 66.7 \\ &= 0.1EI\theta_B + 0.2EI\theta_C + 0.0011EI - 66.7 \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_{CD} = \frac{3EI}{20}(\theta_C - 0.00313) + 100 = 0.15EI\theta_C - 0.00047EI + 100 \quad (4)$$

$$M_{DC} = 0 \quad \text{Respuesta}$$

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.10(c).

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (6)$$

Rotaciones del nodo. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (5) y (6)), obtenemos

$$0.35EI\theta_B + 0.1EI\theta_C = -0.00149EI + 33.3$$

$$0.1EI\theta_B + 0.35EI\theta_C = -0.00063EI - 33.3$$

Sustituyendo $EI = (29,000)(7,800)/(12)^2$ k $\cdot$ ft² en el lado derecho de la igualdad de las ecuaciones anteriores, resulta

$$0.35EI\theta_B + 0.1EI\theta_C = -2,307.24 \quad (7)$$

$$0.1EI\theta_B + 0.35EI\theta_C = -1,022.93 \quad (8)$$

Resolviendo las Ecs. (7) y (8) simultáneamente, determinamos los valores de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ como

$$EI\theta_B = -6,268.81 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

$$EI\theta_C = -1,131.57 \text{ k}\cdot\text{ft}^2$$

continúa

Momentos de empotre. Para calcular los momentos en el extremo del elemento, sustituimos los valores numéricos de $EI\theta_B$ y $EI\theta_C$ nuevamente en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (4)) para obtener

$$M_{BA} = -427.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 427.7 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BC} = 427.7 \text{ k-ft} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CB} = 808 \text{ k-ft} \curvearrowleft \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = -808 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 808 \text{ k-ft} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

Cortante en el extremo y reacciones en los apoyos. Ver las Figs. 15.10(d) y (e). Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

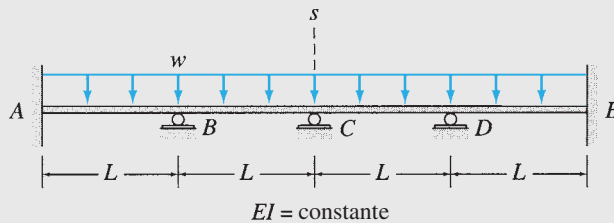
Previamente analizamos la viga continua considerada en el Ejemplo 13.14 usando el método de las deformaciones consistentes. Teóricamente, el método de la pendiente-deflexión y el método de las deformaciones consistentes deberían obtener resultados idénticos para la estructura. Las pequeñas diferencias entre los resultados aquí mostrados y los resultados obtenidos en el Ejemplo 13.14 se deben a los errores por redondeo.

Ejemplo 15.7

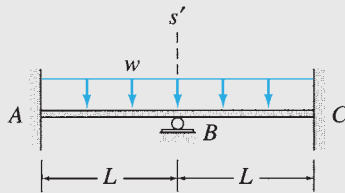
Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga continua de cuatro claros mostrada en la Fig. 15.11(a).

Solución

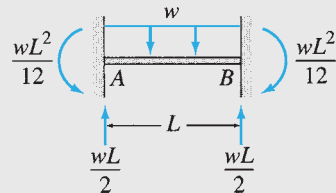
Debido a que la viga y las cargas son simétricas con respecto al eje vertical s que pasa por el apoyo de patín C (Fig. 15.11(a)), la respuesta de la viga completa se puede determinar analizando solo la mitad izquierda, CA , de la viga, con condiciones simétricas de frontera como se muestra en la Fig. 15.11(b). Además, de la Fig. 15.11(b) podemos ver que la mitad de la viga con condiciones de frontera simétricas es también simétrica con respecto al eje s que pasa por el patín del



(a) Viga continua



(b) Mitad de viga con condiciones de frontera simétrica



(c) Un cuarto de viga con condiciones de frontera simétrica

FIG. 15.11

continúa

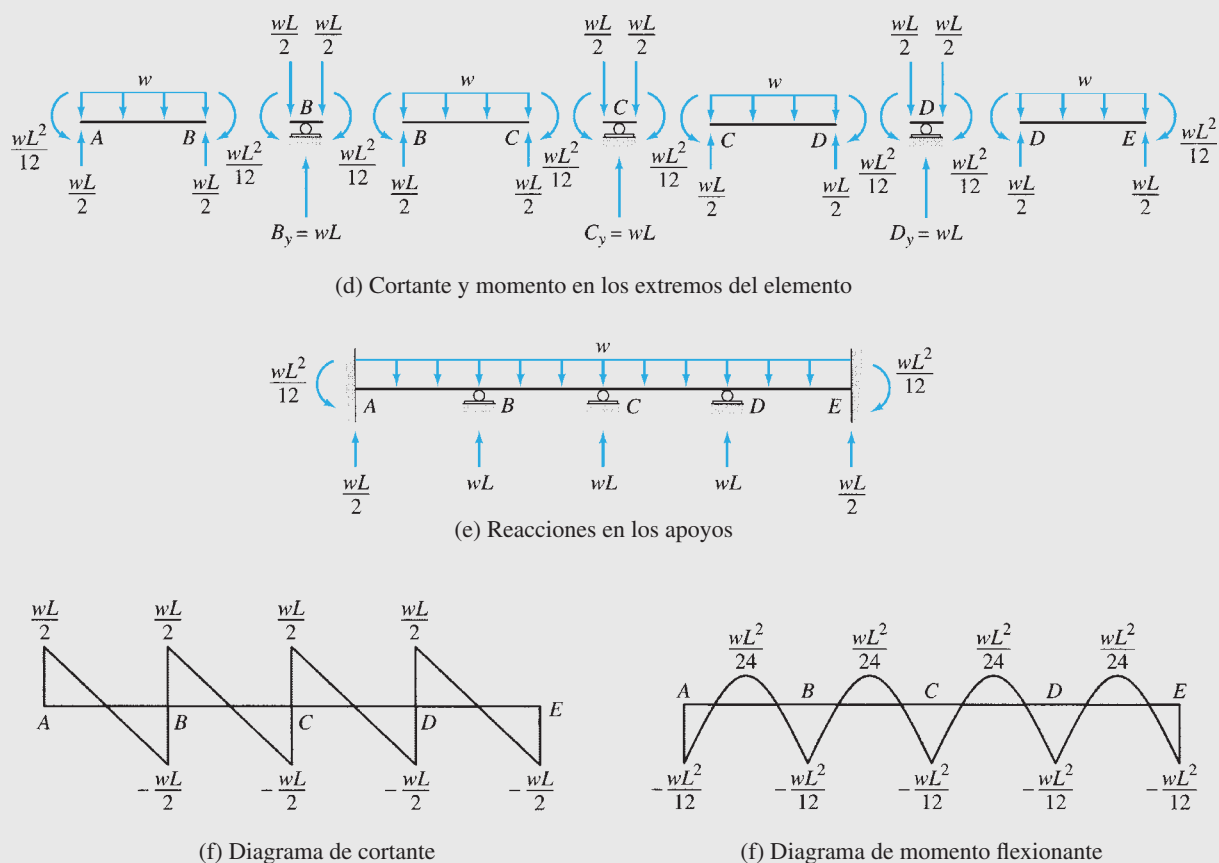


FIG. 15.11 (cont.)

apoyo B . Por lo tanto, necesitamos analizar solo una cuarta parte de la viga —es decir, la porción AB — con condiciones de frontera simétrica, como se muestra en la Fig. 15.11(c).

Debido a que la subestructura a ser analizada consiste simplemente de una viga empotrada AB (Fig. 15.11(c)), sus momentos en los extremos se pueden obtener directamente de las expresiones de momentos de empotro dados en la parte interior de la contraportada del libro. Por lo tanto,

$$M_{AB} = \text{FEM}_{AB} = \frac{wL^2}{12} \curvearrowright$$

$$M_{BA} = \text{FEM}_{BA} = \frac{wL^2}{12} \curvearrowleft$$

Los cortantes en los extremos del elemento AB se determinan considerando el equilibrio del elemento.

Los cortantes y momentos en los extremos del elemento BC se pueden determinar reflejando las respuestas correspondientes de la mitad izquierda hacia el otro lado del eje s . Los momentos y el cortante obtenidos así en el extremo del elemento, se muestran en la Fig. 15.11(d), y las reacciones están dadas en la Fig. 15.11(e).

Los diagramas de cortante y de momento flexionante de la viga se ilustran en las Figs. 15.11(f) y (g), respectivamente.

Respuesta

Como este ejemplo muestra, utilizar la simetría estructural reduce considerablemente los cálculos requeridos en el análisis. La viga considerada en este ejemplo (Fig. 15.11(a)) tiene tres grados de libertad, θ_B , θ_C y θ_D . Sin embargo, tomando en ventaja de la simetría de la estructura, hemos sido capaces de eliminar los tres grados de libertad del análisis.

15.4 Análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos

El método de la pendiente-deflexión puede utilizarse para el análisis de marcos. Debido a que la deformación axial de los elementos de los marcos compuestos comúnmente por materiales de ingenierías son normalmente mucho menores que las deformaciones por flexión, las deformaciones axiales de los elementos se desprecian en el análisis, y los elementos se suponen como indeformables (es decir, que no pueden someterse a un alargamiento o acortamiento axial).

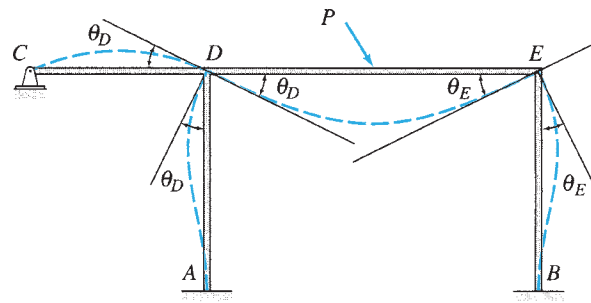
Considere el marco mostrado en la Fig. 15.12(a). La configuración deformada cualitativa del marco para una carga arbitraria P también se indica en la misma figura. De esta se puede ver que los nodos empotrados A y B no pueden rotar ni desplazarse, mientras que el nodo C , el cual está localizado en el apoyo articulado, puede rotar, pero no puede desplazarse. En cuanto al nodo D , mientras que está libre a la rotación, su traslación está restringida por los elementos AD y CD , los cuales se suponen indeformables axialmente. De manera similar, el nodo E está libre a la rotación, pero los elementos BE y DE no pueden deformarse axialmente y debido a que los nodos B y D no se desplazan, el nodo E no puede desplazarse. Por lo tanto, ningún de los nodos del marco puede desplazarse.

Ahora suponga que eliminamos el elemento CD del marco de la Fig. 15.12(a) para obtener el marco mostrado en la Fig. 15.12(b). Debido a que las deformaciones axiales de las columnas AD y BE se desprecian, los nodos D y E no se desplazan en la dirección vertical. Sin embargo, no hay restricciones para prevenir que estos nodos roten, y se desplacen en la dirección horizontal, como se muestra en la Fig. 15.12(b). Tenga en cuenta que debido a que la viga DE se supone indeformable axialmente, los desplazamientos horizontales de los nodos D y E deben ser iguales.

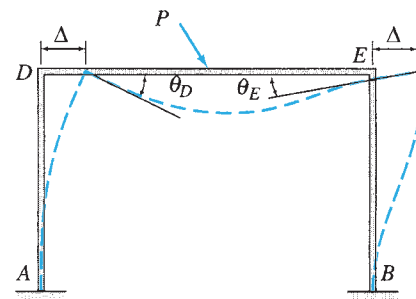
A los desplazamientos laterales del marco del edificio, así como a los del marco de la Fig. 15.12(b), se conocen comúnmente como *desplazamientos laterales permitidos*, mientras que los marcos sin desplazamientos de los nodos se conocen como *marcos sin desplazamientos laterales permitidos*. En la aplicación del método de la pendiente-deflexión conveniente distinguir entre los marcos sin desplazamiento lateral (es decir, sin desplazamiento lateral desconocido), y aquellos con desplazamiento lateral permitido. Para un macro plano cualquiera sujeto a cargas coplanares cualquiera, el número de desplazamientos de nodos independientes —los cuales se conocen como grados de desplazamiento lateral permitido, ss — se pueden expresar como

$$ss = 2j - [2(f + h) + r + m] \quad (15.20)$$

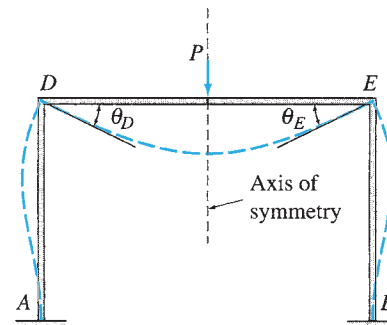
En la cual j = número de nodos; f = número de apoyos empotrados; h = número de apoyos articulados; r = número de apoyos de patín; y m = número de elementos no deformables axialmente. La expresión anterior está basada en el razonamiento de que dos desplazamientos (es decir, en dirección vertical y horizontal) son necesarios para definir la posición de la deformación en cada nodo libre de un marco plano; y que cada apoyo empotrado y articulado previene ambos desplazamientos, cada apoyo de patín previene el desplazamiento en una dirección (del nodo unido a él), y cada elemento no deformable axialmente conectado a dos nodos previene un desplazamiento en su dirección axial. El número de desplazamientos independientes, ss , se obtiene restando del número total de posibles desplazamientos j de los nodos libres el número de desplazamientos restringidos por los apoyos y elementos



(a) Marco sin desplazamientos laterales permitidos



(b) Marco con desplazamientos laterales permitidos



$$EI = \text{constante}$$

(c) Marco simétrico sujeto a cargas simétricas
-- Sin desplazamiento lateral permitido

FIG. 15.12

del marco. Podemos verificar nuestras conclusiones acerca de los marcos de las Figs. 15.12(a) y (b) aplicando la Ec. (15.20). Debido a que el marco de la Fig. 15.12(a) contiene cinco nodos ($j = 5$), cuatro elementos ($m = 4$), dos apoyos empotrados ($f = 2$), y un apoyo articulado ($h = 1$), la aplicación de la Ec. (15.20) resulta $ss = 2(5) - [2(2 + 1) + 4] = 0$, la cual indica que este marco puede considerarse sin desplazamientos laterales permitidos. Como para el marco de la Fig. 15.12(b), $j = 4$, $m = 3$, y $f = 2$, el número de grados de libertad permitidos lateralmente está dado por $ss = 2(4) - [2(2 + 3)] = 1$, la cual indica que el marco puede presentar un desplazamiento en el nodo. Tenga en cuenta que este desplazamiento está definido como desplazamiento horizontal Δ de los nodos D y E en la Fig. 15.12(b).

Es importante notar que un marco puede contener nodos que estén libres a desplazamiento, pero puede considerarse para fines de análisis como un marco sin desplazamientos laterales permitidos bajo una condición de carga en particular si no hay desplazamientos del nodo cuando el marco está sujeto a esa condición de carga. Un ejemplo de dicho marco se muestra en la Fig. 15.12(c). A pesar de que los nodos D y E del marco simétrico están libres al desplazamiento horizontal, ellos no se desplazarán cuando el marco esté sujeto a una carga que sea simétrica con respecto al eje de simetría. Por lo tanto, este marco cuando está sujeto a una carga simétrica, puede analizarse como un marco sin desplazamiento lateral permitido. En el siguiente apartado discutiremos la aplicación del método de la pendiente-deflexión para el análisis de marcos sin desplazamiento lateral permitido. El análisis de marcos con desplazamiento lateral permitido se considera en la siguiente sección.

El procedimiento para el análisis de marcos sin desplazamiento lateral permitido es casi idéntico al análisis de vigas continuas presentado en la sección anterior. Estas similitudes se presentan porque, al igual que la viga continua, los grados de libertad de los marcos sin desplazamiento lateral permitido consisten de solo una incógnita de rotación en el nodo, con la rotación del nodo siendo cero o desconocida (como en el caso de los asentamientos en los apoyos). Sin embargo, a diferencia de la viga continua, más de dos elementos pueden estar unidos al nodo de un marco, y la ecuación de equilibrio para este nodo podría involucrar más de dos momentos en el extremo del elemento. El análisis de los marcos sin desplazamiento lateral permitido se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 15.8

Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.13(a) mediante el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Grados de libertad. Los nodos C , D y E del marco están libres a la rotación. Sin embargo, eliminaremos la rotación del apoyo simple en el extremo E usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión modificadas para el elemento DE . Así, el análisis solo involucrará dos incógnitas de rotación de los nodos, θ_C y θ_D .

Momentos de empotre. Usando las expresiones de los momentos de empotre dadas en el interior de la cubierta posterior del libro, obtenemos

$$FEM_{AC} = \frac{40(20)}{8} = 100 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +100 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CA} = 100 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -100 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$$

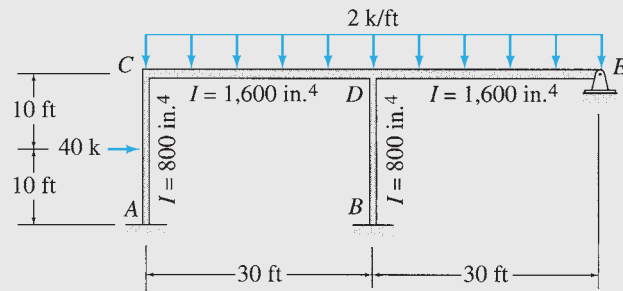
$$FEM_{CD} = FEM_{DE} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +150 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DC} = FEM_{ED} = 150 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -150 \text{ k-ft}$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Como se indicó en la Fig. 15.13(a), los momentos de inercia de las columnas y de las vigas del marco son 800 in^4 y $1,600 \text{ in}^4$, respectivamente. Usando $I = I_{\text{columnas}} = 800 \text{ in}^4$ como momento de inercia de referencia, expresamos la I_{viga} en términos de I como

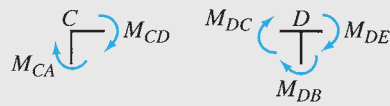
$$I_{\text{viga}} = 1,600 = 2(800) = 2I$$

continúa

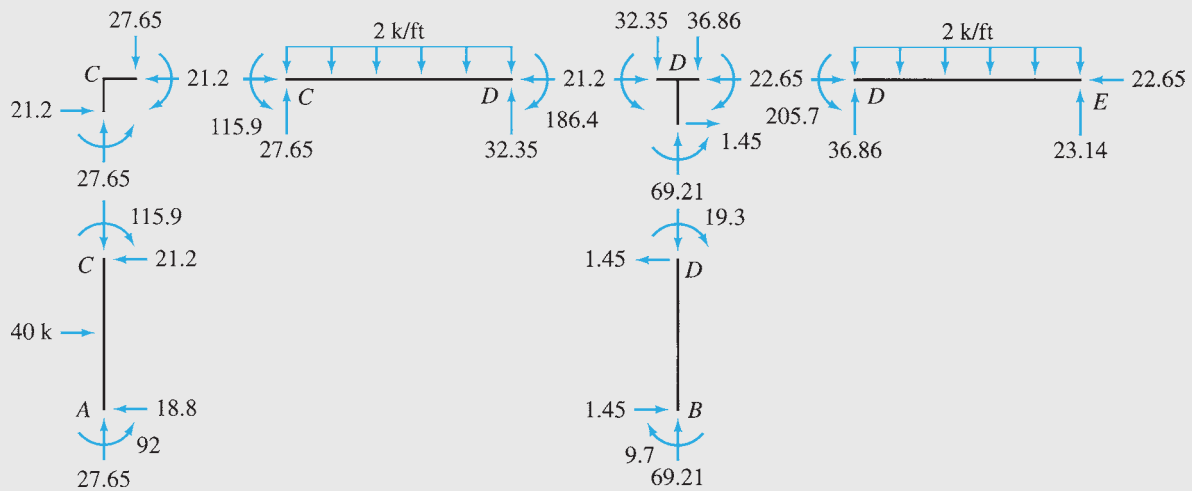


$E = 29,000 \text{ ksi}$

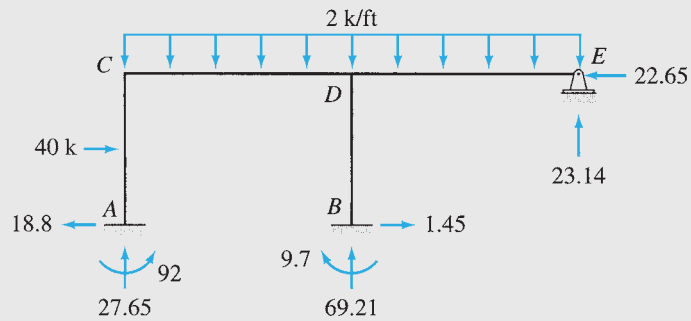
(a) Marco



(b) Diagrama de cuerpo libre de los nodos C y D



(c) Momentos en los extremos cortantes y carga axial



(d) Reacciones en los apoyos

FIG. 15.13

continúa

Después, escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión usando la Ec. (15.9) para los elementos CA , BD y CD , y la Ec. (15.15) al elemento DE . Por lo tanto,

$$M_{AC} = \frac{2EI}{20}(\theta_C) + 100 = 0.1EI\theta_C + 100 \quad (1)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{20}(2\theta_C) - 100 = 0.2EI\theta_C - 100 \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{20}(\theta_D) = 0.1EI\theta_D \quad (3)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{20}(2\theta_D) = 0.2EI\theta_D \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2E(2I)}{30}(2\theta_C + \theta_D) + 150 = 0.267EI\theta_C + 0.133EI\theta_D + 150 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{30}(2\theta_D + \theta_C) - 150 = 0.133EI\theta_C + 0.267EI\theta_D - 150 \quad (6)$$

$$M_{DE} = \frac{3E(2I)}{30}(\theta_D) + \left(150 + \frac{150}{2}\right) = 0.2EI\theta_D + 225 \quad (7)$$

$$M_{ED} = 0$$

Respuesta

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum M = 0$ al cuerpo libre de los nodos C y D (Fig. 15.13(b)), obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$

Rotaciones de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio resulta

$$0.467EI\theta_C + 0.133EI\theta_D = -50 \quad (10)$$

$$0.133EI\theta_C + 0.667EI\theta_D = -75 \quad (11)$$

Resolviendo las Ecs. (10) y (11) simultáneamente, determinamos los valores de $EI\theta_C$ y $EI\theta_D$

$$EI\theta_C = -79.545 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -96.591 \text{ k-ft}^2$$

Momentos en los extremos del elemento. Los momentos en los extremos del elemento pueden calcularse mediante la sustitución de los valores numéricos de $EI\theta_C$ y $EI\theta_D$ en las ecuaciones de pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (7)).

$$M_{AC} = 92 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -115.9 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 115.9 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = -9.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 9.7 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = -19.3 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 19.3 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 115.9 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -186.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 186.4 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DE} = 205.7 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

continúa

Para verificar que la solución de las ecuaciones simultáneas (Ecs. (10) y (11)) ha sido realizada correctamente, sustituimos los valores numéricos de los momentos de los extremos del elemento de nuevo en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (8) y (9)) para obtener

$$M_{CA} + M_{CD} = -115.9 + 115.9 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = -19.3 - 186.4 + 205.7 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Cortante en los extremos del elemento. Los cortantes en los extremos del elemento, obtenidos considerando el equilibrio de cada elemento, se muestran en la Fig. 15.12(c).

Fuerzas axiales en los elementos. Con los cortantes en los extremos del elemento conocidos, las fuerzas axiales de los elementos se pueden evaluar considerando el equilibrio de los nodos C y D en orden. Las fuerzas axiales obtenidas así se muestran en la Fig. 15.12(c).

Reacciones de los apoyos. Ver la Fig. 15.12(d).

Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Ejemplo 15.9

Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.18(a) debidos al asentamiento de $\frac{3}{4}$ in en el apoyo B . Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Solución

El marco se muestra en la Fig. 15.14(a).

Grados de libertad. θ_C y θ_D son los grados de libertad.

Rotación de la cuerda. Debido a que la deformación axial del elemento BD se desprecia, el asentamiento de $\frac{3}{4}$ in en el apoyo B genera que el nodo D se desplace hacia abajo en la misma cantidad, como se muestra en la Fig. 15.14(b). Las líneas punteadas inclinadas en esta figura representan las cuerdas (no las curvas elásticas) de los elementos CD y DE en la posición deformada. La rotación de la cuerda del elemento CD es

$$\psi_{CD} = -\frac{\frac{3}{4}}{(12)(30)} = -0.00208$$

En donde el signo negativo ha sido asignado al valor de ψ_{CD} para indicar que es en el sentido de las manecillas del reloj. De manera similar, para el elemento DE ,

$$\psi_{DE} = 0.00208$$

Ecuación de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = 0.1EI\theta_C \quad (1)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C \quad (2)$$

$$M_{BD} = 0.1EI\theta_D \quad (3)$$

$$M_{DB} = 0.2EI\theta_D \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_{CD} &= \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_C + \theta_D - 3(-0.00208)] \\ &= 0.267EI\theta_C + 0.133EI\theta_D + 0.000832EI \end{aligned} \quad (5)$$

continúa

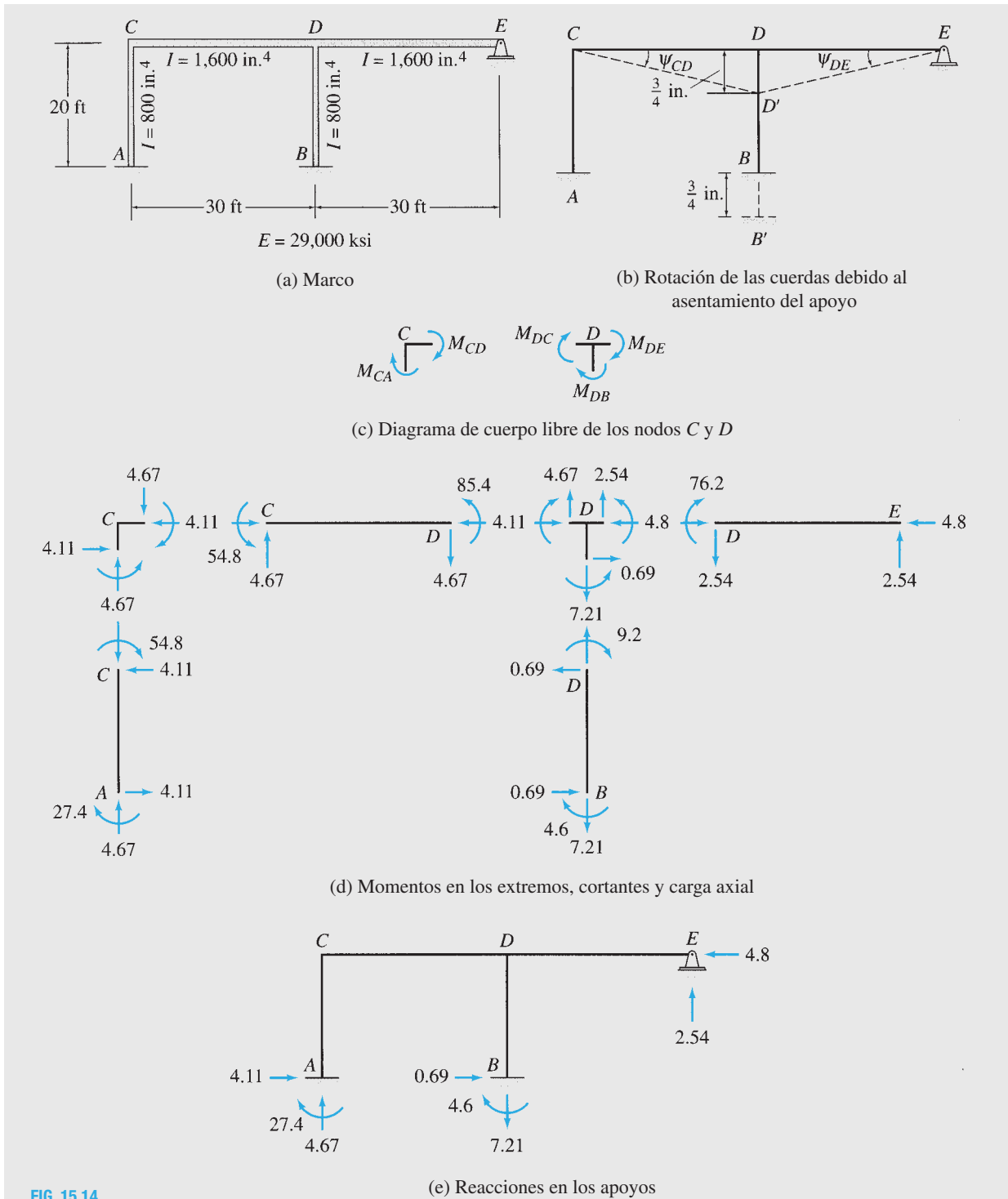


FIG. 15.14

continúa

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{30} [2\theta_D + \theta_C - 3(-0.00208)]$$

$$= 0.133EI\theta_C + 0.267EI\theta_D + 0.000832EI \quad (6)$$

$$M_{DE} = \frac{3E(2I)}{30} (\theta_D - 0.00208) = 0.2EI\theta_D - 0.000416EI \quad (7)$$

$$M_{ED} = 0 \quad \text{Respuesta}$$

Ecuaciones de equilibrio. Ver la Fig. 15.14(c).

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (9)$$

Rotación de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio, obtenemos

$$0.467EI\theta_C + 0.133EI\theta_D = -0.000832EI$$

$$0.133EI\theta_C + 0.667EI\theta_D = -0.000416EI$$

Sustituyendo $EI = (29,000)/(800)/(12)^2 \text{ k-ft}^2$ en los lados derechos de las ecuaciones anteriores

$$0.467EI\theta_C + 0.133EI\theta_D = -134 \quad (10)$$

$$0.133EI\theta_C + 0.667EI\theta_D = -67 \quad (11)$$

Resolviendo las Ecs. (10) y (11) simultáneamente, obtenemos

$$EI\theta_C = -273.883 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -45.838 \text{ k-ft}^2$$

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_C$ y $EI\theta_D$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión, obtenemos

$$M_{AC} = -27.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 27.4 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -54.8 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 54.8 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = -4.6 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 4.6 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = -9.2 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 9.2 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 54.8 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = 85.4 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DE} = -76.2 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 76.2 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

Volviendo a sustituir los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones (Ecs. (8) y (9)), resulta

$$M_{CA} + M_{CD} = -54.8 + 54.8 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DE} = -9.2 + 85.4 - 76.2 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.14(e).

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

15.5 Análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos

Un marco, en general, tendrá desplazamientos laterales si sus nodos no están restringidos contra los desplazamientos, a menos que esté sujeto a cargas simétricas. Para desarrollar el análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos, considere el marco rectangular mostrado en la Fig. 15.15(a). La configuración deformada cualitativa del marco para una carga arbitraria también se muestra en la figura usando una escala exagerada. Mientras que los nodos empotrados A y B del marco están completamente restringidos contra la rotación además de los desplazamientos, los nodos C y D están libres a la rotación y al desplazamiento. Sin embargo, debido a las columnas AC y BD se suponen indeformables axialmente y las deformaciones del marco se suponen pequeñas, los nodos C y D se pueden desplazar solo en dirección horizontal, es decir, en la dirección perpendicular de las columnas CA y BD , respectivamente. Además, como CD se supone también indeformable axialmente, los desplazamientos horizontales de los nodos C y D deben ser iguales. Así, el marco tiene 3 incógnitas de desplazamiento de los nodos o grados de libertad, las rotaciones θ_C y θ_D de los nodos C y D , respectivamente, y el desplazamiento horizontal Δ de ambos nodos C y D .

Como se muestra en la Fig. 15.15(a), el desplazamiento Δ de los nodos C y D generan que las cuerdas de las columnas AC y BD roten, y estas rotaciones de las cuerdas se pueden expresar en términos de los desplazamientos desconocidos Δ como

$$\psi_{AC} = \psi_{BD} = -\frac{\Delta}{h} \quad (15.21)$$

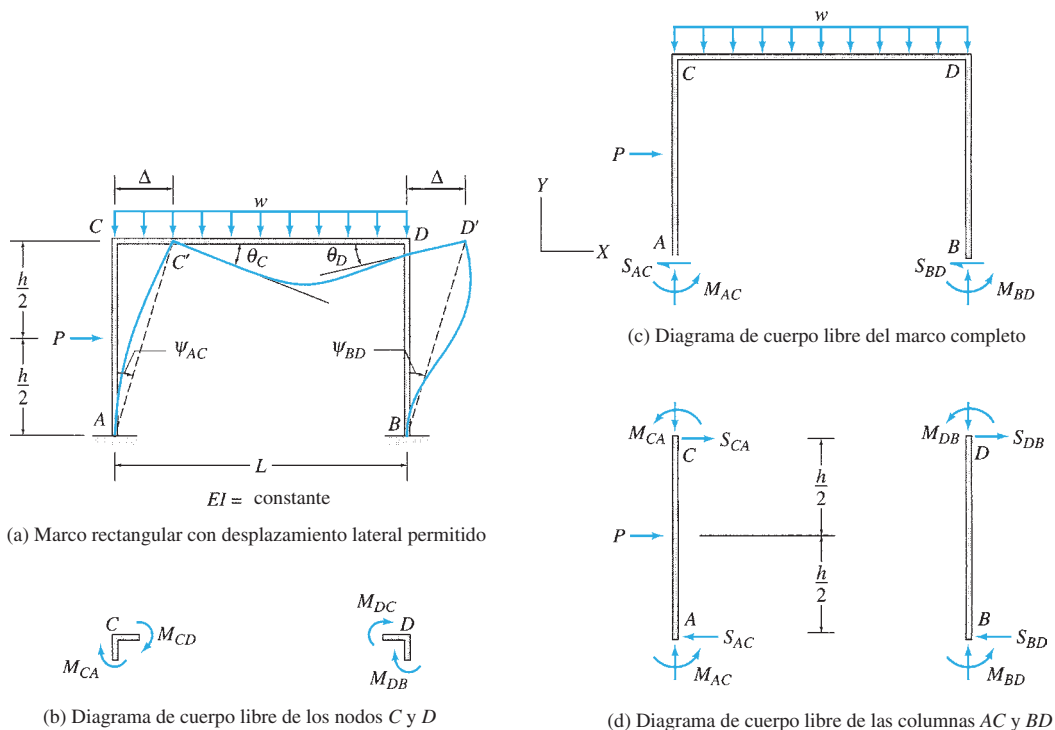


FIG. 15.15

En la cual el signo negativo indica que la rotación es de las cuerdas en el mismo sentido de las manecillas del reloj. Debido a que los nodos C y D no pueden desplazarse verticalmente, las rotaciones verticales de la viga CD son cero; es decir, $\psi_{CD} = 0$.

Para relacionar los momentos en los extremos del elemento con las incógnitas de desplazamiento de los nodos, θ_C y θ_D y Δ , escribimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión para los tres elementos del marco. Así, aplicando la Ec. (15.9), obtenemos

$$M_{AC} = \frac{2EI}{h} \left(\theta_C + \frac{3\Delta}{h} \right) + \text{FEM}_{AC} \quad (15.22a)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{h} \left(2\theta_C + \frac{3\Delta}{h} \right) + \text{FEM}_{CA} \quad (15.22b)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{h} \left(\theta_D + \frac{3\Delta}{h} \right) \quad (15.22c)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{h} \left(2\theta_D + \frac{3\Delta}{h} \right) \quad (15.22d)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{L} (2\theta_C + \theta_D) + \text{FEM}_{CD} \quad (15.22e)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{L} (2\theta_D + \theta_C) + \text{FEM}_{DC} \quad (15.22f)$$

Tenga en cuenta que las ecuaciones anteriores de la pendiente-deflexión contienen tres incógnitas, θ_C y θ_D y Δ , las cuales deben determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio independientes antes de que podamos determinar los valores de los momentos de en los extremos del elemento. Dos de las tres ecuaciones de equilibrio necesarias para la solución de las incógnitas de desplazamiento en los nodos se obtienen considerando el equilibrio de momento en los nodos C y D (Fig. 15.15(b)):

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (15.23a)$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad (15.23b)$$

La tercera ecuación de equilibrio, comúnmente llamada *ecuación de cortante*, se basa en la condición de que la suma de todas las fuerzas horizontales que actúan en el cuerpo libre del marco completo deben ser cero. El diagrama de cuerpo libre del marco, conseguido trazando una sección imaginaria justo arriba del nivel de apoyo, se muestra en la Fig. 15.12(c). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$, escribimos

$$P - S_{AC} - S_{BD} = 0 \quad (15.23c)$$

En la cual, S_{AC} y S_{BD} son los cortantes en el extremo inferior de las columnas CA y BD , respectivamente, como se muestra en la Fig. 15.15(c). Para expresar la tercera ecuación de equilibrio (Ec. 15.23(c)) en términos de los momentos en el extremo de la columna, consideremos el equilibrio del cuerpo libre de las columnas AC y BD mostradas en la Fig. 15.15(d). Sumando los momentos alrededor de las partes superiores de cada columna, obtenemos lo siguiente:

$$+ \zeta \sum M_C^{AC} = 0 \quad M_{AC} - S_{AC}(h) + P \left(\frac{h}{2} \right) + M_{CA} = 0$$

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{h} + \frac{P}{2} \quad (15.24a)$$

$$\begin{aligned}
+\zeta \sum M_D^{BD} &= 0 & M_{BD} + M_{DB} - S_{BD}(h) &= 0 \\
S_{BD} &= \frac{M_{BD} + M_{DB}}{h}
\end{aligned} \tag{15.24b}$$

Sustituyendo las Ecs. (15.24a) y (15.24b) en la Ec (15.23c), obtenemos la tercera ecuación de equilibrio en términos de los momentos en los extremos del elemento:

$$P - \left(\frac{M_{AC} + M_{CA}}{h} + \frac{P}{2} \right) - \left(\frac{M_{BD} + M_{DB}}{h} \right) = 0$$

La cual se reduce a

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} - \frac{Ph}{2} = 0 \tag{15.25}$$

Con las tres ecuaciones de equilibrio (Ecs. (15.23a), (15.23b), y (15.25)) ya establecidas, podemos proceder con el resto del análisis de manera normal. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (12.22)) en las ecuaciones de equilibrio, resulta el sistema de ecuaciones que pueden resolver las incógnitas de los desplazamientos en los nodos θ_c y θ_d y Δ . Los desplazamientos de los nodos obtenidos de esta manera se pueden volver a sustituir en las ecuaciones de la pendiente-deflexión para determinar los momentos en los extremos del elemento, de los cuales los cortantes en los extremos y las fuerzas axiales de los elementos y las reacciones en los apoyos se pueden calcular, como se discutió previamente.

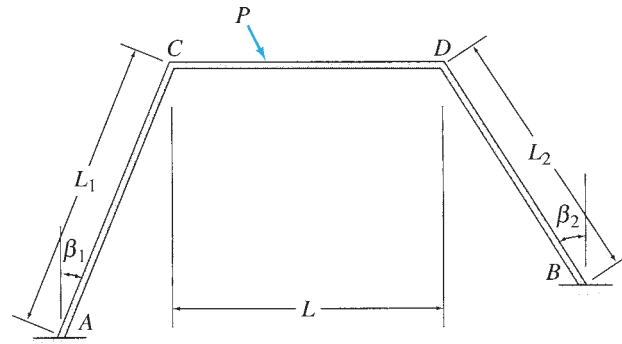
Marcos con columnas inclinadas

El análisis de marcos con columnas inclinadas es similar al de los marcos rectangulares considerado previamente, excepto que cuando los marcos con columnas inclinadas están sujetos al desplazamiento lateral permitido, sus elementos horizontales también presentarán rotaciones, las cuales deben incluirse en el análisis. Recuerde de la discusión anterior que las cuerdas de los elementos horizontales de los marcos rectangulares, sujetos a desplazamientos laterales, son cero.

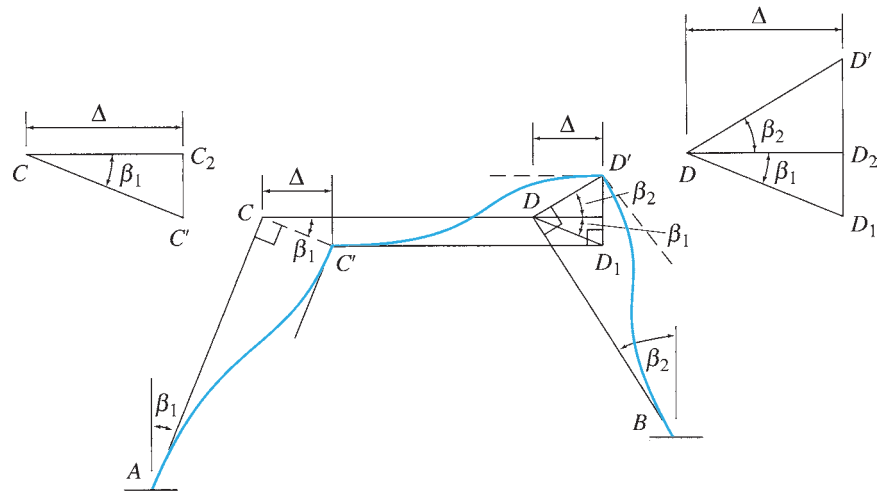
Considere el marco con columnas inclinadas mostrado en la Fig. 15.16(a). Para analizar este marco por el método de la pendiente-deflexión, debemos relacionar las rotaciones de la cuerda de sus tres elementos entre sí o con un desplazamiento independiente. Para ello, sometemos al nodo C del marco a un desplazamiento arbitrario horizontal Δ y dibujamos la configuración deformada cualitativa del marco, la cual se muestra en la Fig. 15.16(b), primero imaginamos que los elementos BC y CD están desconectados del nodo D . Debido a que el elemento AC se supone indeformable axialmente, el nodo C solo se puede mover en un punto de arco alrededor de A . Además, ya que el desplazamiento del nodo C se supone pequeño, podemos considerar el marco como una línea recta perpendicular al elemento AC .

Así, para mover el nodo C horizontalmente a una distancia Δ , debemos desplazarlo en la dirección perpendicular al elemento AC a una distancia CC' (Fig. 15.16(b)), de modo que la componente horizontal de CC' sea igual a Δ . Tenga en cuenta que a pesar de que el nodo C está libre a la rotación, su rotación se desprecia en esta etapa del análisis, y la curva elástica AC' del elemento AC se dibuja con la tangente en C' paralela a la dirección

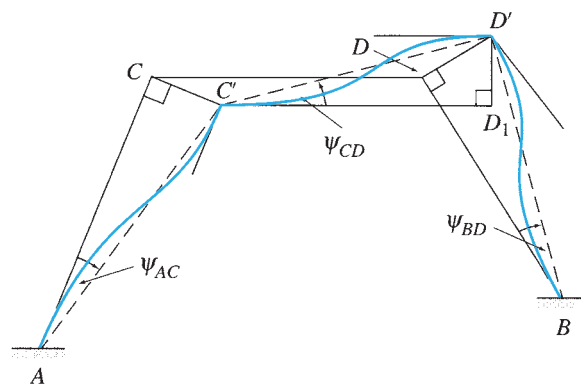
no deformada del elemento. El elemento CD permanece horizontal y se desplaza como cuerpo rígido en la posición CD_1 con el desplazamiento DD_1 igual a CC' , como se muestra en la figura. Debido a que el elemento horizontal CD se supone como indeformable axialmente y el desplazamiento del



(a) Marco con columnas inclinadas



(b) Configuración deformada debido al desplazamiento lateral



(c) Rotación de la cuerda debido al desplazamiento lateral

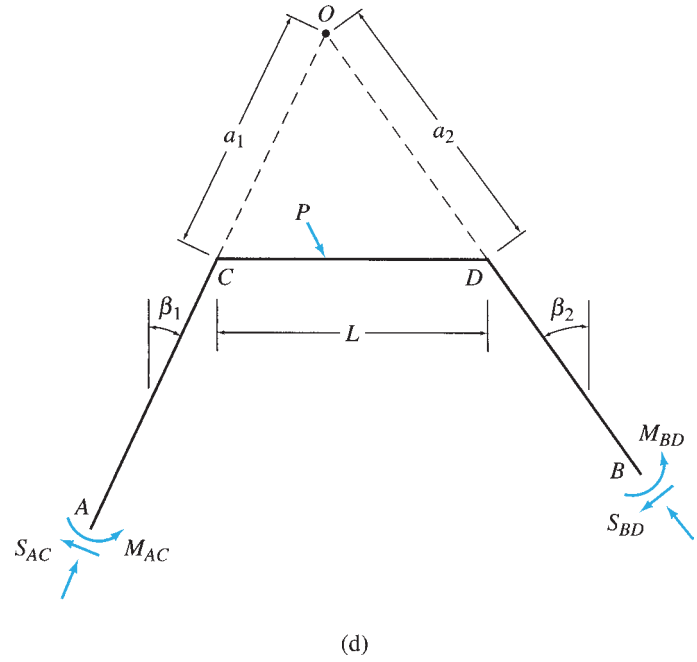


FIG. 15.16 (cont.)

nodo D se supone pequeño, el extremo D del elemento se puede mover de su posición deformada D_1 solo en dirección vertical. De manera similar, y puesto que el elemento BD se supone como indeformable axialmente, su extremo D se puede mover solo en la dirección perpendicular al elemento. Por lo tanto, para obtener la posición deformada del nodo D , movemos el extremo D del elemento CD de su posición deformada D_1 en dirección vertical y el extremo D del elemento BD en dirección perpendicular a BD , hasta que los dos extremos se encuentren en el punto D' , donde están conectados para obtener la posición desplazada D del nodo. Suponiendo que el nodo D no rota, dibujamos las curvas elásticas $C'D'$ y BD' , respectivamente, de los elementos CD y BD para completar la configuración deformada de todo el marco.

La rotación de la cuerda de un elemento se puede obtener dividiendo el desplazamiento relativo entre los dos extremos del elemento en la dirección perpendicular al elemento, entre su longitud. Así podemos ver de la Fig. 15.16(b) que la rotación de la cuerda de los tres elementos del marco está dada por

$$\psi_{AC} = -\frac{CC'}{L_1} \quad \psi_{BD} = -\frac{DD'}{L_2} \quad \psi_{CD} = \frac{D_1D'}{L} \quad (15.26)$$

En la cual las rotaciones de la cuerda de los elementos AC y BD se consideran negativas porque están en sentido de las manecillas del reloj (Fig. 15.16(c)). Las tres rotaciones de la cuerda se pueden expresar en términos de los desplazamientos de los nodos Δ , considerando los diagramas de desplazamiento de los nodos C y D mostrados en la Fig. 15.16(b). Debido a que CC' es perpendicular al elemento AC , el cual está inclinado en un ángulo β_1 con respecto

a la vertical, CC' debe tener el mismo ángulo β_1 con la horizontal. Así, del diagrama de desplazamiento del nodo C (triángulo $CD'C_2$), podemos ver que

$$CC' = \frac{\Delta}{\cos \beta_1} \quad (15.27)$$

Después, consideremos el diagrama de desplazamiento del nodo D (triángulo DD_1D'). Se demostró previamente que DD_1 es igual en magnitud y paralelo a CC' . Por lo tanto,

$$DD_2 = DD_1 \cos \beta_1 = \Delta$$

Debido a que DD' es perpendicular a BD , que forma un ángulo β_2 con la horizontal. Así, del diagrama de desplazamiento del nodo D ,

$$DD' = \frac{DD_2}{\cos \beta_2} = \frac{\Delta}{\cos \beta_2} \quad (15.28)$$

y

$$D_1D' = DD_1 \sin \beta_1 + DD' \sin \beta_2 = \frac{\Delta}{\cos \beta_1} \sin \beta_1 + \frac{\Delta}{\cos \beta_2} \sin \beta_2$$

o

$$D_1D' = \Delta(\tan \beta_1 + \tan \beta_2) \quad (15.29)$$

Sustituyendo la Ec. (15.27) a la (15.29) en la Ec. (15.26), obtenemos las rotaciones de la cuerda de los tres elementos en términos de Δ :

$$\psi_{AC} = -\frac{\Delta}{L_1 \cos \beta_1} \quad (15.30a)$$

$$\psi_{BD} = -\frac{\Delta}{L_2 \cos \beta_2} \quad (15.30b)$$

$$\psi_{CD} = \frac{\Delta}{L}(\tan \beta_1 + \tan \beta_2) \quad (15.30c)$$

Las expresiones anteriores de las rotaciones de las cuerdas se pueden usar para escribir las ecuaciones de la pendiente-deflexión, relacionando los momentos en los extremos del elemento con las tres incógnitas de los desplazamientos de los nodos, θ_B , θ_D y Δ . Como en el caso de los marcos rectangulares considerados previamente, las ecuaciones de equilibrio necesarias para la solución de las incógnitas de los desplazamientos de los nodos se pueden establecer sumando los momentos que actúan en los nodos C y D sumando las fuerzas horizontales actuantes en el marco completo. Sin embargo, el marco con las columnas inclinadas, es más conveniente establecer la tercera ecuación de equilibrio sumando los momentos de todas las fuerzas y pares que actúan en el marco completo alrededor de un momento central O , el cual se ubica en la intersección del eje longitudinal de los elementos inclinados, como se muestra en la Fig. 15.16(d). La ubicación del centro de momentos O se puede determinar usando las condiciones (ver la Fig. 15.16(d)).

$$a_1 \cos \beta_1 = a_2 \cos \beta_2 \quad (15.31a)$$

$$a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 = L \quad (15.31b)$$

Resolviendo las Ecs. (15.31a) y (15.31b) simultáneamente para a_1 y a_2 , obtenemos

$$a_1 = \frac{L}{\cos \beta_1 (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)} \quad (15.32a)$$

$$a_2 = \frac{L}{\cos \beta_2 (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)} \quad (15.32b)$$

Una vez que las ecuaciones de equilibrio se han establecido, se puede completar el análisis de manera usual, como se discutió previamente.

Marcos de varios niveles

El método anterior se puede extender al análisis de marcos de varios niveles sujetos a desplazamiento lateral, como se ilustró en el Ejemplo 15.12. Sin embargo, debido a la considerable cantidad de cálculos requeridos, el análisis de estas estructuras se realiza en computadoras usando la formulación matricial del método de desplazamientos presentado en el Capítulo 17.

Ejemplo 15.10

Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.17(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Grados de libertad. Los grados de libertad son θ_C y θ_D y Δ . (ver la Fig. 15.17(b)).

Momentos de empotre. Usando las expresiones del momento de empotre que se encuentran en el interior de la portada del libro, obtenemos

$$FEM_{CD} = \frac{40(3)(4)^2}{(7)^2} = 39.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{o} \quad +39.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{DC} = \frac{40(3)^2(4)}{(7)^2} = 29.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft \quad \text{o} \quad -29.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$$

Rotación de las cuerdas. De la Fig. 15.17(b) podemos ver que

$$\psi_{AC} = -\frac{\Delta}{7} \quad \psi_{BD} = -\frac{\Delta}{5} \quad \psi_{CD} = 0$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = \frac{2EI}{7} \left[\theta_C - 3 \left(-\frac{\Delta}{7} \right) \right] = 0.286EI\theta_C + 0.122EI\Delta \quad (1)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{7} \left[2\theta_C - 3 \left(-\frac{\Delta}{7} \right) \right] = 0.571EI\theta_C + 0.122EI\Delta \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{5} \left[\theta_D - 3 \left(-\frac{\Delta}{5} \right) \right] = 0.4EI\theta_D + 0.24EI\Delta \quad (3)$$

continúa

$$M_{DB} = \frac{2EI}{5} \left[2\theta_D - 3 \left(-\frac{\Delta}{5} \right) \right] = 0.8EI\theta_D + 0.24EI\Delta \quad (4)$$

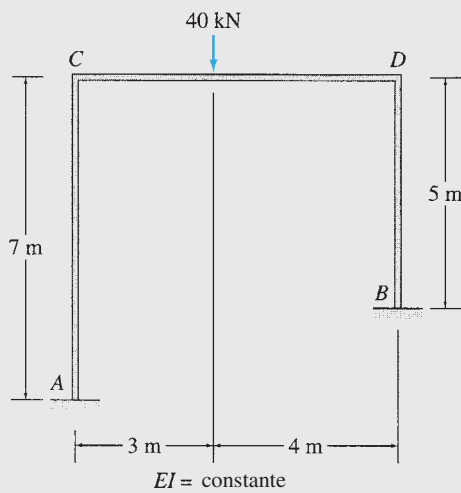
$$M_{CD} = \frac{2EI}{7} (2\theta_C + \theta_D) + 39.2 = 0.571EI\theta_C + 0.286EI\theta_D + 39.2 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{7} (\theta_C + 2\theta_D) - 29.4 = 0.286EI\theta_C + 0.571EI\theta_D - 29.4 \quad (6)$$

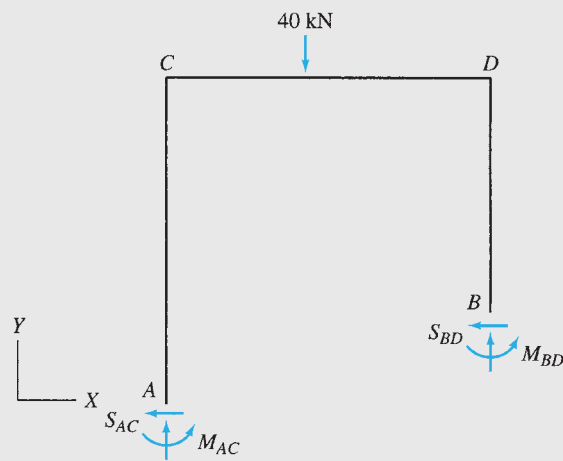
Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos de los nodos C y D , obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (7)$$

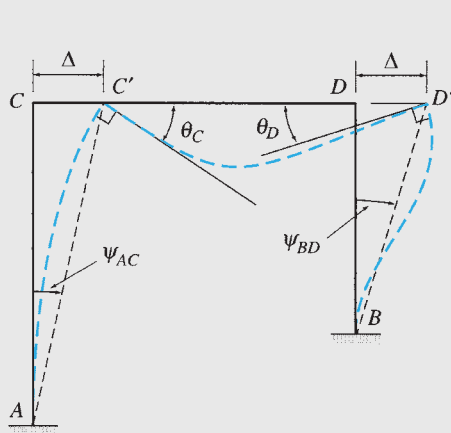
$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad (8)$$



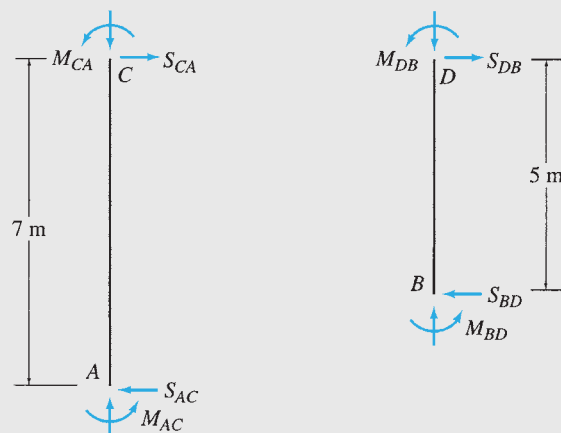
(a) Marco



(c) Diagrama de cuerpo libre del marco completo



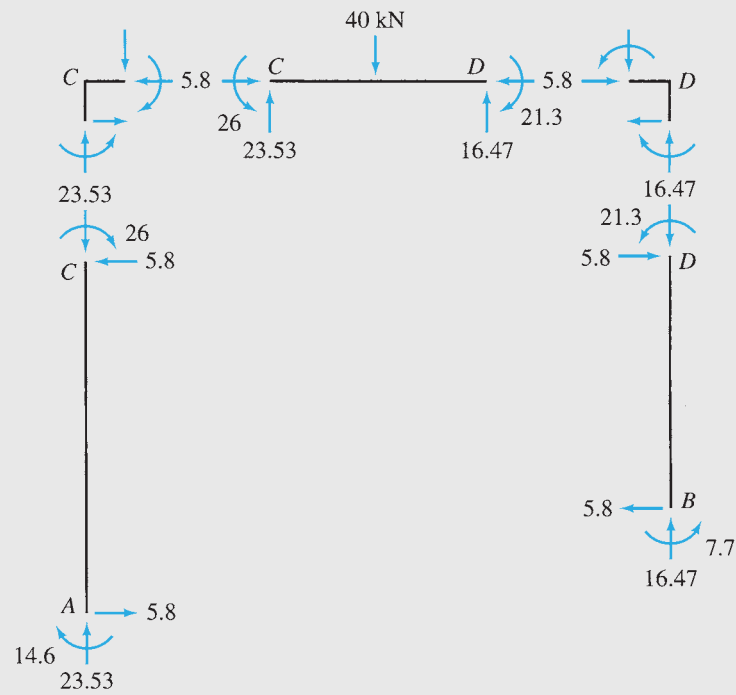
(b) Configuración deformada del marco



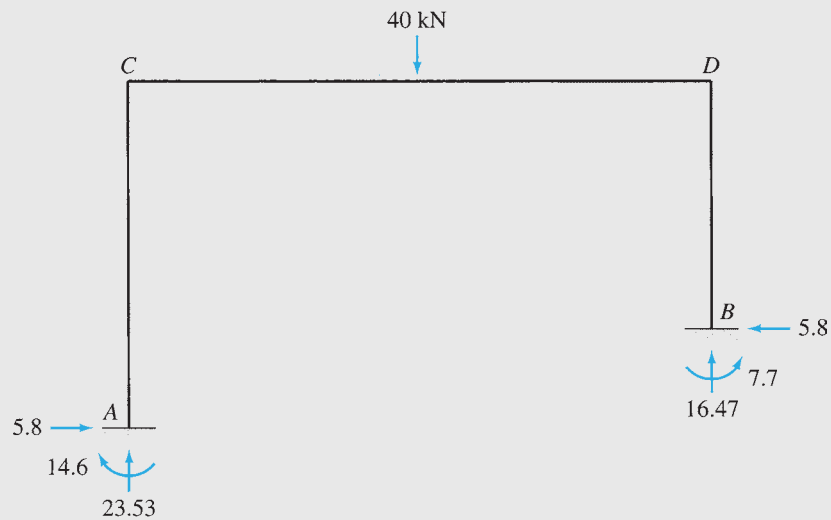
(d) Diagramas de cuerpo libre de las columnas AC y BD

FIG. 15.17

continúa



(c) Momentos en los extremos de los elementos, cortantes y fuerzas axiales



(d) Reacciones en los apoyos

FIG. 15.7 (cont.)

continúa

Para establecer la tercera ecuación de equilibrio, aplicamos la ecuación de equilibrio de la fuerza $\sum F_x = 0$ al diagrama del marco completo (Fig. 15.17(c)), para obtener

$$S_{AC} + S_{BD} = 0$$

En la cual S_{AD} y S_{BD} representan los cortantes en los extremos inferiores de las columnas AC y BD , respectivamente, como se muestra en la Fig. 15.17(c). Para expresar los cortantes en los extremos de la columnas en términos de los momentos en los extremos de la columna, dibujamos los diagramas de cuerpo libre de las dos columnas (Fig. 15.17(d)), y sumamos los momentos alrededor del extremo superior de cada columna:

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{7} \quad \text{y} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{5}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la tercera ecuación de equilibrio, obtenemos

$$\frac{M_{AC} + M_{CA}}{7} + \frac{M_{BD} + M_{DB}}{5} = 0$$

Que podemos reescribir como

$$5(M_{AC} + M_{CA}) + 7(M_{BD} + M_{DB}) = 0 \quad (9)$$

Desplazamientos de los nodos. Para determinar las incógnitas de los desplazamientos de los nodos θ_C y θ_D y Δ , sustituimos las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6), en las Ecs. (7) a la (9)) para obtener

$$1.142EI\theta_C + 0.286EI\theta_D + 0.122EI\Delta = -39.2 \quad (10)$$

$$0.286EI\theta_C + 1.371EI\theta_D + 0.24EI\Delta = 29.4 \quad (11)$$

$$4.285EI\theta_C + 8.4EI\theta_D + 4.58EI\Delta = 0 \quad (12)$$

Resolviendo las Ecs. (10) a la (12) simultáneamente, resulta

$$EI\theta_C = -40.211 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI\theta_D = 34.24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI\Delta = -25.177 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_C$, $EI\theta_D$ y $EI\Delta$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)), obtenemos

$$M_{AC} = -14.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 14.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -26 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 7.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = 21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad 21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Respuesta}$$

Para verificar que la solución de las ecuaciones simultáneas (Ecs. (10) a la (12)) se realizó correctamente, sustituimos los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento de nuevo en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) a la (9)):

$$M_{CA} + M_{CD} = -26 + 26 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 21.3 - 21.3 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$5(M_{AC} + M_{CA}) + 7(M_{BD} + M_{DB}) = 5(-14.6 - 26) + 7(7.7 + 21.3) = 0 \quad \text{Comprobación}$$

Cortante en los extremos del elemento. Los cortantes en los extremos de los elementos, obtenidos considerando el equilibrio en cada elemento, se muestran en la Fig. 15.17(e).

Fuerzas axiales en los elementos. Con los cortantes en los extremos determinados, las fuerzas axiales se pueden evaluar considerando el equilibrio de los nodos C y D . Las fuerzas axiales obtenidas así se muestran en la Fig. 15.17(e).

Reacciones en los apoyos. Ver la Fig. 15.17(f).

Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Ejemplo 15.11

Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 15.18(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Solución

Grados de libertad. Los grados de libertad son θ_C y θ_D y Δ .

Momentos de empotre. Debido a que no hay cargas externas aplicadas a los elementos, los momentos de empotre son cero.

Rotación de las cuerdas. De la Fig. 15.18(b) podemos ver que

$$\psi_{AC} = -\frac{CC'}{20} = -\frac{\left(\frac{5}{4}\right)\Delta}{20} = -0.0625\Delta$$

$$\psi_{BD} = -\frac{DD'}{16} = -\frac{\Delta}{16} = -0.0625\Delta$$

$$\psi_{CD} = \frac{C'C_1}{20} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\Delta}{20} = 0.0375\Delta$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión

$$M_{AC} = \frac{2EI}{20} [\theta_C - 3(-0.0625\Delta)] = 0.1EI\theta_C + 0.0188EI\Delta \quad (1)$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{20} [2\theta_C - 3(-0.0625\Delta)] = 0.2EI\theta_C + 0.0188EI\Delta \quad (2)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{16} [\theta_D - 3(-0.0625\Delta)] = 0.125EI\theta_D + 0.0234EI\Delta \quad (3)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{16} [2\theta_D - 3(-0.0625\Delta)] = 0.25EI\theta_D + 0.0234EI\Delta \quad (4)$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{20} [2\theta_C + \theta_D - 3(0.0375\Delta)] = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_D - 0.0113EI\Delta \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{20} [2\theta_D + \theta_C - 3(0.0375\Delta)] = 0.2EI\theta_D + 0.1EI\theta_C - 0.0113EI\Delta \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos del nodo C y D , obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \quad (7)$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \quad (8)$$

La tercera ecuación de equilibrio se establece sumando los momentos de todas las fuerzas y pares que actúan en el cuerpo libre del marco completo alrededor del punto O , el cual se localiza en la intersección del eje longitudinal de las dos columnas, como se muestra en la Fig. 15.18(c). Así,

$$+ \zeta \sum M_O = 0 \quad M_{AC} - S_{AC}(53.33) + M_{BD} - S_{BD}(42.67) + 30(26.67) = 0$$

Donde el cortante en los extremos inferiores de las columnas se puede expresar en término de los momentos de los extremos de la columna como (ver la Fig. 15.18(d)):

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{20} \quad \text{y} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{16}$$

continúa

Sustituyendo estas expresiones en la tercera ecuación de equilibrio, obtenemos

$$1.67M_{AC} + 2.67M_{CA} + 1.67M_{BD} + 2.67M_{DB} = 800 \quad (9)$$

Desplazamientos de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de equilibrio de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6) en las ecuaciones de equilibrio (Ecs. (7) a la (9)), resulta que

$$0.4EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.0075EI\Delta = 0 \quad (10)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.45EI\theta_D + 0.0121EI\Delta = 0 \quad (11)$$

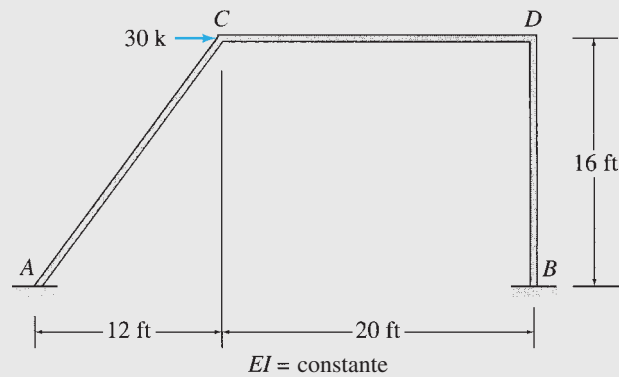
$$0.71EI\theta_C + 0.877EI\theta_D + 0.183EI\Delta = 800 \quad (12)$$

Resolviendo las Ecs. (10) a la (12) simultáneamente, determinamos:

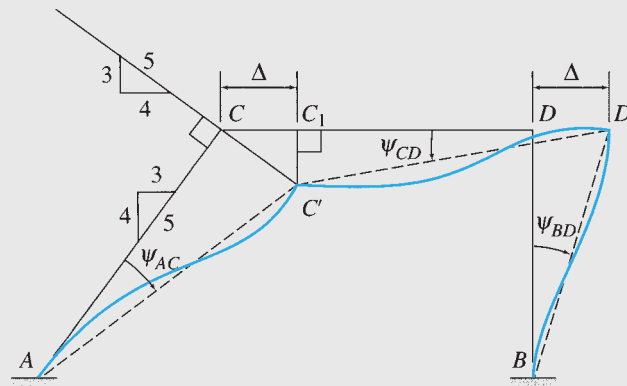
$$EI\theta_C = -66.648 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -125.912 \text{ k-ft}^2$$

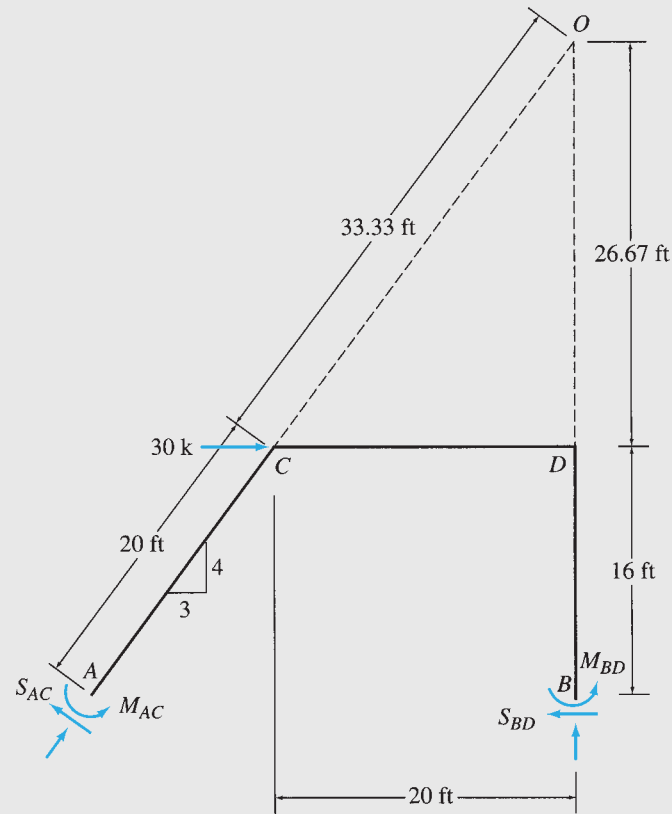
$$EI\Delta = 5,233.6 \text{ k-ft}^3$$



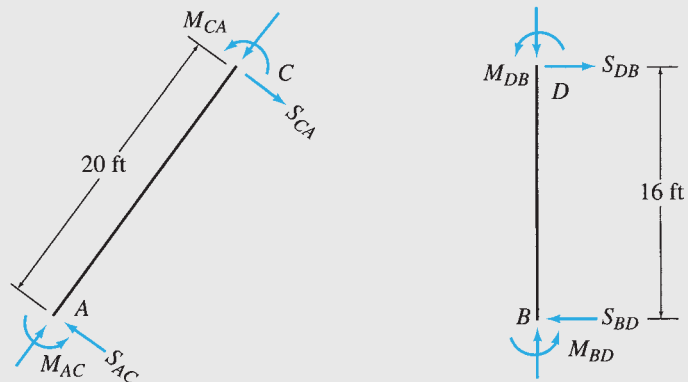
(a) Marco



(b) Rotaciones de la cuerda debido al desplazamiento lateral permitido



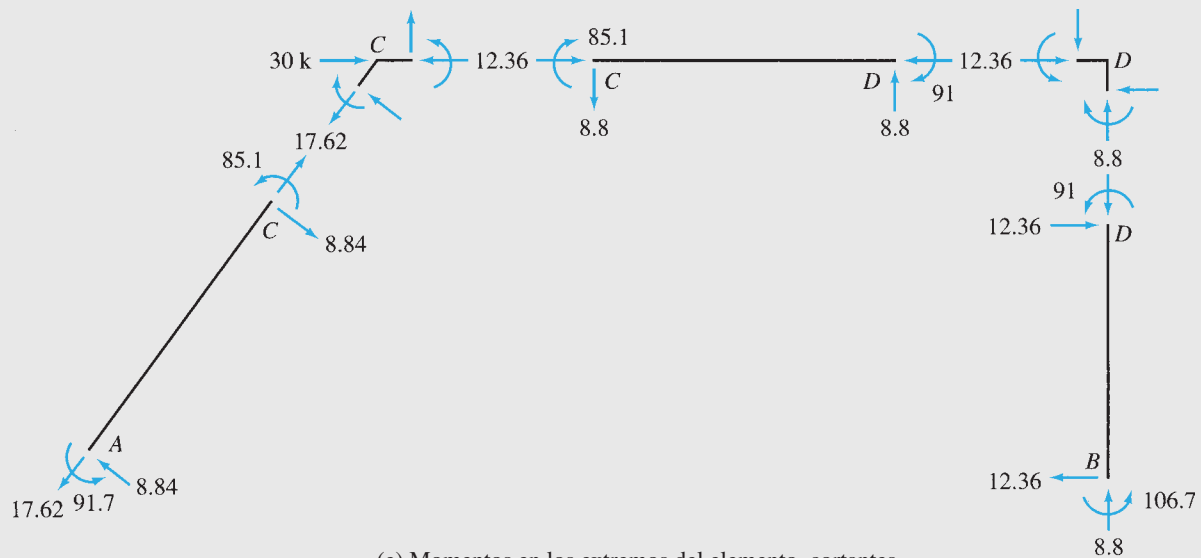
(c) Diagrama de cuerpo libre del marco completo



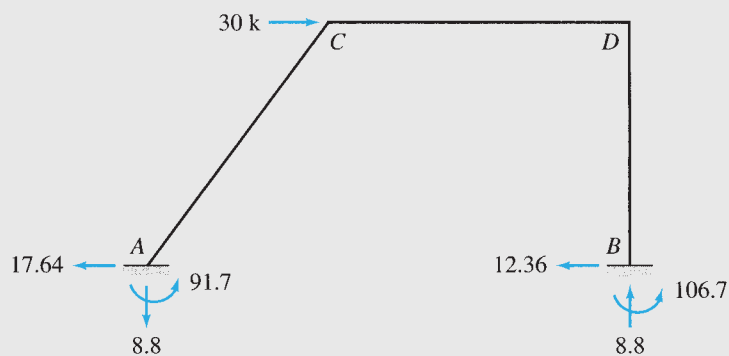
(d) Diagramas de cuerpo libre de las columnas AC y BD

FIG. 15.18 (cont.)

continúa



(e) Momentos en los extremos del elemento, cortantes y fuerzas axiales



(f) Reacciones en los apoyos

FIG. 15.1 (cont.)

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de $EI\theta_C$, $EI\theta_D$ y $EI\Delta$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (6)), obtenemos

$$M_{AC} = 91.7 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = 85.1 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 106.7 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DB} = 91 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = -85.1 \text{ k-ft } \quad \text{o} \quad 85.1 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -91 \text{ k-ft } \quad \text{o} \quad 91 \text{ k-ft } \quad \text{Respuesta}$$

Sustituyendo nuevamente los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones de equilibrio resulta que

$$M_{CA} + M_{CD} = 85.1 - 85.1 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 91 - 91 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

continúa

$$\begin{aligned}
 1.67M_{AC} + 2.67M_{CA} + 1.67M_{BD} + 2.67M_{DB} &= 1.67(91.7) + 2.67(85.1) \\
 &+ 1.67(106.7) + 2.67(91) \\
 &= 801.5 \approx 800
 \end{aligned}$$

Comprobación

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.18(e).

Reacciones en los apoyos. Ver la Fig. 15.18(f).

Respuesta

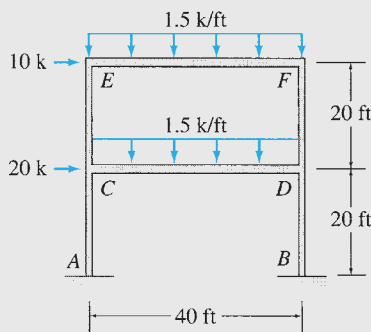
Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Ejemplo 15.12

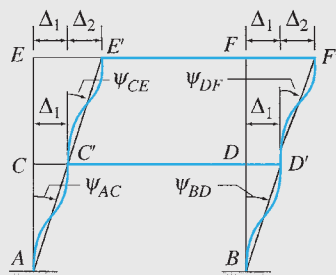
Determine los momentos en los extremos del elemento, las reacciones en los apoyos y la deflexión horizontal del nodo F del marco de dos niveles de la Fig. 15.19(a). Utilice el método de la pendiente-deflexión.

Solución

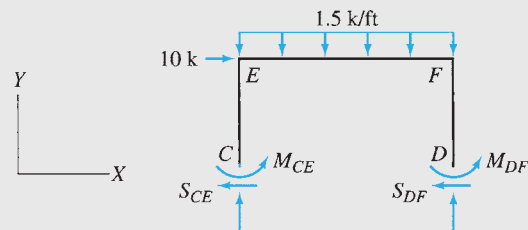
Grados de libertad. En la Fig. 15.19(a) podemos ver que los nodos C, D, E y F del marco están libres a la rotación, y el desplazamiento en dirección horizontal. Como se muestra en la Fig. 15.19(b), el desplazamiento horizontal de los nodos del primer entrepiso en los nodos C y D se designa como Δ_1 , mientras que el desplazamiento horizontal del segundo entrepiso de los nodos E y F se expresa como Δ_2 , representando el desplazamiento relativo de los nodos del segundo entrepiso con los nodos del primer entrepiso. Por lo tanto, el marco tiene seis grados de libertad, es decir, θ_C , θ_D , θ_E y θ_F , Δ_1 y Δ_2 .



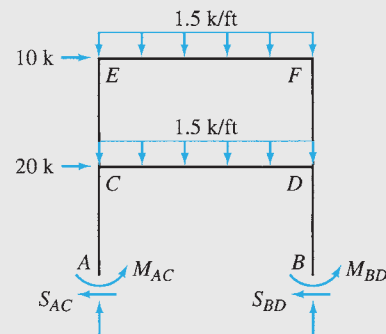
(a) Marco



(b) Rotación de las cuerdas debido al desplazamiento lateral permitido



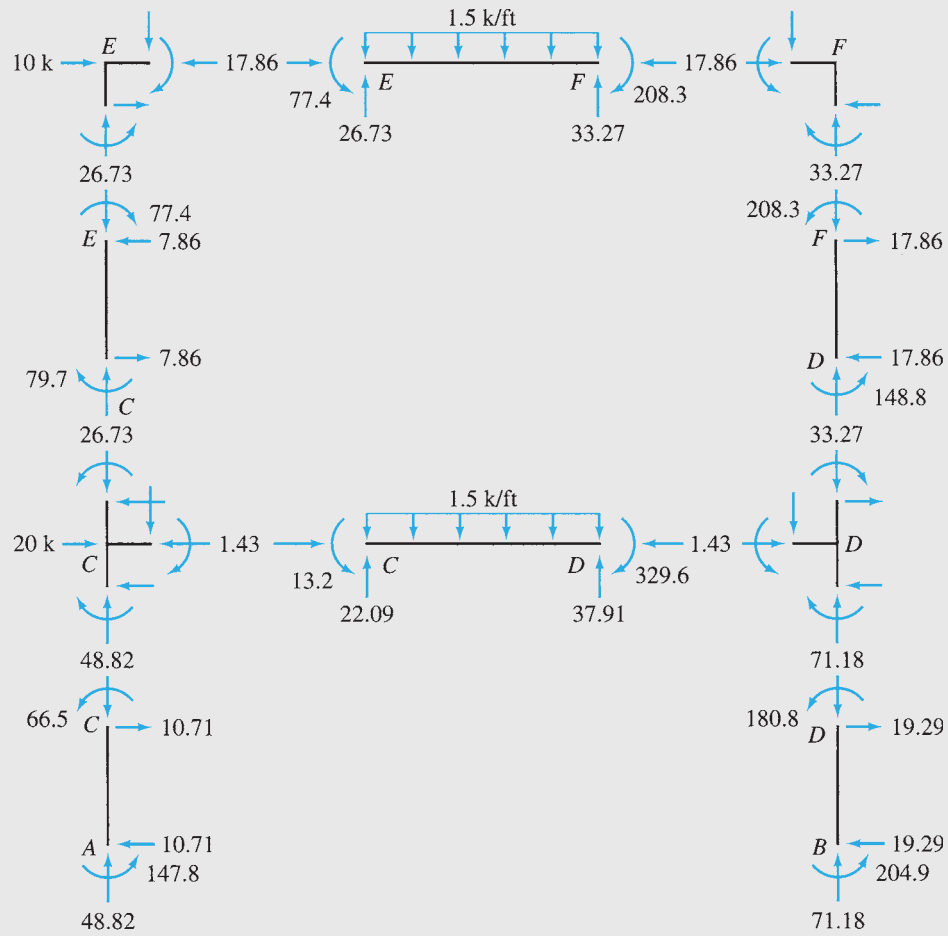
(c) Diagramas de cuerpo libre del piso superior



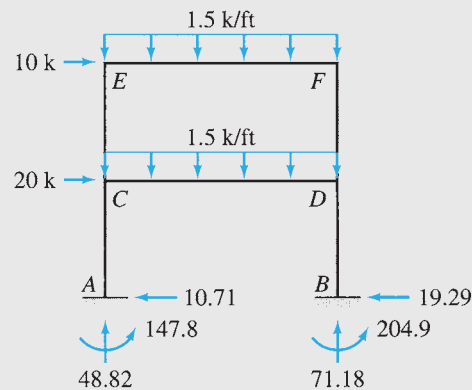
(d) Diagrama de cuerpo libre del marco completo

FIG. 15.19

continúa



(e) Momentos en los extremos del elemento, cortantes y fuerzas axiales



(f) Reacciones en los apoyos

FIG. 15.19 (cont.)

continúa

Momentos de empotre. Los momentos de empotre son:

$$FEM_{CD} = FEM_{EF} = 200 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DC} = FEM_{FE} = -200 \text{ k-ft}$$

Rotación de las cuerdas. Ver la Fig. 15.19(b).

$$\psi_{AC} = \psi_{BD} = -\frac{\Delta_1}{20}$$

$$\psi_{CE} = \psi_{DF} = -\frac{\Delta_2}{20}$$

$$\psi_{CD} = \psi_{EF} = 0$$

Ecuaciones de la pendiente-deflexión. Usando $I_{columna} = I$ e $I_{viga} = 2I$, escribimos

$$M_{AC} = 0.1EI\theta_C + 0.015EI\Delta_1 \quad (1)$$

$$M_{CA} = 0.2EI\theta_C + 0.015EI\Delta_1 \quad (2)$$

$$M_{BD} = 0.1EI\theta_D + 0.015EI\Delta_1 \quad (3)$$

$$M_{DB} = 0.2EI\theta_D + 0.015EI\Delta_1 \quad (4)$$

$$M_{CE} = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_E + 0.015EI\Delta_2 \quad (5)$$

$$M_{EC} = 0.2EI\theta_E + 0.1EI\theta_C + 0.015EI\Delta_2 \quad (6)$$

$$M_{DF} = 0.2EI\theta_D + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 \quad (7)$$

$$M_{FD} = 0.2EI\theta_F + 0.1EI\theta_D + 0.015EI\Delta_2 \quad (8)$$

$$M_{CD} = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 200 \quad (9)$$

$$M_{DC} = 0.2EI\theta_D + 0.1EI\theta_C - 200 \quad (10)$$

$$M_{EF} = 0.2EI\theta_E + 0.1EI\theta_F + 200 \quad (11)$$

$$M_{FE} = 0.2EI\theta_F + 0.1EI\theta_E - 200 \quad (12)$$

Ecuaciones de equilibrio. Considerando el equilibrio de momentos de los nodos C , D , E y F , obtenemos

$$M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \quad (13)$$

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 0 \quad (14)$$

$$M_{EC} + M_{EF} = 0 \quad (15)$$

$$M_{FD} + M_{FE} = 0 \quad (16)$$

Para establecer las dos ecuaciones de equilibrio restantes, pasamos sucesivamente una sección horizontal justo arriba del extremo inferior de las columnas de cada entrepiso del marco y aplicamos la ecuación de equilibrio horizontal ($\sum F_x = 0$) al cuerpo libre de la porción del marco arriba de la sección. Los diagramas de cuerpo libre obtenidos así se muestran en las Figs. 15.19(c) y (d). Aplicando la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ al entrepiso superior del marco (Fig. 15.19(c)), obtenemos

$$S_{CE} + S_{DF} = 10$$

De manera similar, aplicando $\sum F_x = 0$ al marco completo (Fig. 15.19(d)), escribimos

$$S_{AC} + S_{BD} = 30$$

Expresando los cortantes en los extremos de las columnas en términos de los momentos en los extremos:

$$S_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{20} \quad S_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{20}$$

$$S_{CE} = \frac{M_{CE} + M_{EC}}{20} \quad S_{DF} = \frac{M_{DF} + M_{FD}}{1}$$

continúa

Y sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio de fuerza, obtenemos

$$M_{CE} + M_{EC} + M_{DF} + M_{FD} = 200 \quad (17)$$

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = 600 \quad (18)$$

Desplazamiento de los nodos. Sustituyendo las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (12)) en las ecuaciones de equilibrio Ecs. (13) a la (18)), resulta

$$0.6EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.1EI\theta_E + 0.015EI\Delta_1 + 0.015EI\Delta_2 = -200 \quad (19)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.6EI\theta_D + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_1 + 0.015EI\Delta_2 = 200 \quad (20)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.4EI\theta_E + 0.1EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 = -200 \quad (21)$$

$$0.1EI\theta_D + 0.1EI\theta_E + 0.4EI\theta_F + 0.015EI\Delta_2 = 200 \quad (22)$$

$$0.3EI\theta_C + 0.3EI\theta_D + 0.3EI\theta_E + 0.3EI\theta_F + 0.06EI\Delta_2 = 200 \quad (23)$$

$$0.1EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0.02EI\Delta_1 = 200 \quad (24)$$

Resolviendo las Ecs. (19) a la (24) por el método de eliminación de Gauss-Jordan (Apéndice B), determinamos

$$EI\theta_C = -812.988 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_D = -241.556 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_E = -789.612 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\theta_F = 353.248 \text{ k-ft}^2$$

$$EI\Delta_1 = 15;272.728 \text{ k-ft}^3 \quad \text{o} \quad \Delta_1 = 0.0758 \text{ ft} = 0.91 \text{ in.} \rightarrow$$

$$EI\Delta_2 = 10;787.878 \text{ k-ft}^3 \quad \text{o} \quad \Delta_2 = 0.0536 \text{ ft} = 0.643 \text{ in.} \rightarrow$$

Por lo tanto, la deflexión horizontal del nodo F del marco es como sigue:

$$\Delta_F = \Delta_1 + \Delta_2 = 0.91 + 0.643 = 1.553 \text{ in.} \rightarrow$$

Respuesta

Momentos en los extremos del elemento. Sustituyendo los valores numéricos de los desplazamientos de los nodos en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (1) a la (12)), obtenemos

$$M_{AC} = 147.8 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{CA} = 66.5 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{BD} = 204.9 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{DB} = 180.8 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{CE} = -79.7 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 79.7 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{EC} = -77.4 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 77.4 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{DF} = 148.8 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{FD} = 208.3 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{CD} = 13.2 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{DC} = -329.6 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 329.6 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{EF} = 77.4 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

$$M_{FE} = -208.3 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 208.3 \text{ k-ft} \curvearrowright$$

Respuesta

Sustituyendo nuevamente los valores numéricos de los momentos en los extremos del elemento en las ecuaciones de equilibrio resulta que

$$M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 66.5 + 13.2 - 79.7 = 0$$

Comprobación

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 180.8 - 329.6 + 148.8 = 0$$

Comprobación

$$M_{EC} + M_{EF} = -77.4 + 77.4 = 0$$

Comprobación

continúa

$$M_{FD} + M_{FE} = 208.3 - 208.3 = 0$$

Comprobación

$$M_{CE} + M_{EC} + M_{DF} + M_{FD} = -79.7 - 77.4 + 148.8 + 208.3 = 200$$

Comprobación

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = 147.8 + 66.5 + 204.9 + 180.8 = 600$$

Comprobación

Cortantes en los extremos del elemento y fuerzas axiales. Ver la Fig. 15.19(e).

Reacciones en los apoyos. Ver la Fig. 15.19(f).

Respuesta

Comprobación del equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Resumen

En este capítulo estudiamos la formulación clásica del método de los desplazamientos (rigideces), llamado método de la pendiente-deflexión, para el análisis de vigas y marcos. Este método se basa en la ecuación de la pendiente-deflexión:

$$M_{nf} = \frac{2EI}{L}(2\theta_n + \theta_f - 3\psi) + FEM_{nf} \quad (15.9)$$

La cual relaciona los momentos en los extremos de un elemento con la rotación y el desplazamiento de sus extremos y las cargas externas aplicadas al elemento.

El procedimiento para el análisis esencialmente implica (1) la identificación de las incógnitas de desplazamientos de los nodos (grados de libertad) de la estructura; (2) para cada elemento, la escritura de las ecuaciones de la pendiente-deflexión relacionando los momentos en los extremos del elemento con las incógnitas de desplazamientos de los nodos; (3) el establecer las ecuaciones de equilibrio de la estructura en términos de los momentos en los extremos del elemento; (4) la sustitución de las ecuaciones de la pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio y resolver el sistema resultante de ecuaciones para determinar las incógnitas de los desplazamientos de los nodos; y (5) el cálculo de los momentos en los extremos del elemento con la sustitución de los valores de los desplazamientos de los nodos de nuevo en las ecuaciones de la pendiente-deflexión. Una vez que los momentos en los extremos del elementos se han evaluado, los cortantes en los extremos del elemento, fuerzas axiales y las reacciones en los apoyos se pueden determinar a través de las consideraciones de equilibrio.

Problemas

Sección 15.3

15.1 al 15.5 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P15.1-P15.5, usando el método de la pendiente-deflexión.

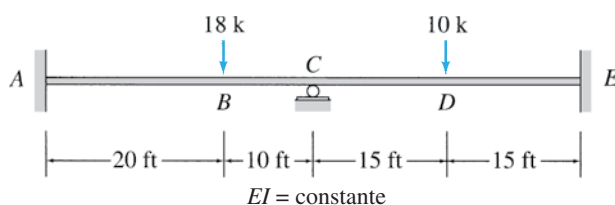


FIG. P15.1

15.6 Resuelva el Problema 15.2 para las cargas mostradas en la Fig. P15.2 y el asentamiento de $\frac{1}{2}$ in en el apoyo B.

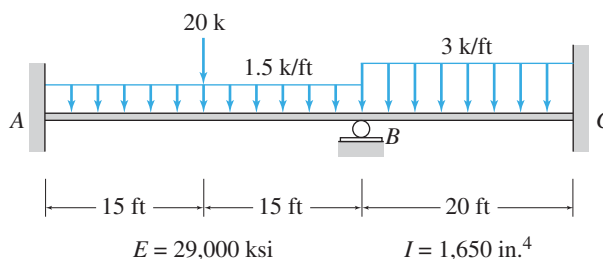


FIG. P15.2, P15.6

15.7 Resuelva el Problema 15.4 para las cargas mostradas en la Fig. P15.4 y el asentamiento de 1 in en el apoyo B y de $\frac{1}{4}$ in en C .

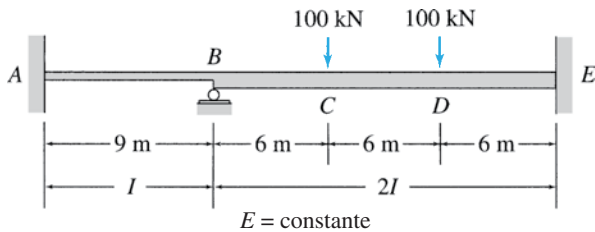


FIG. P15.3

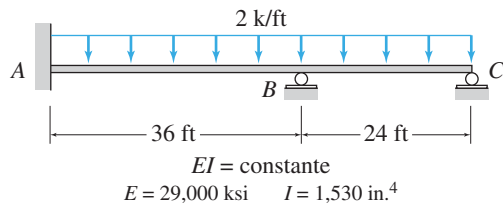


FIG. P15.4, P15.7

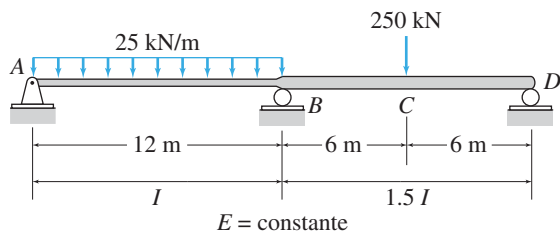


FIG. P15.5

15.8 al 15.14 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y de momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P15.8-P15.14, usando el método de la pendiente-deflexión.

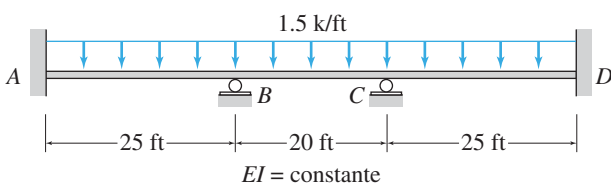


FIG. P15.8

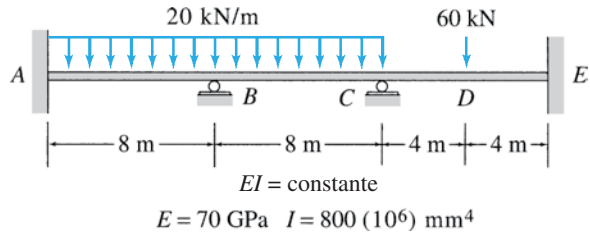


FIG. P15.9, P15.15

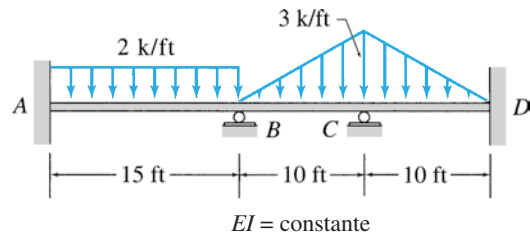


FIG. P15.10

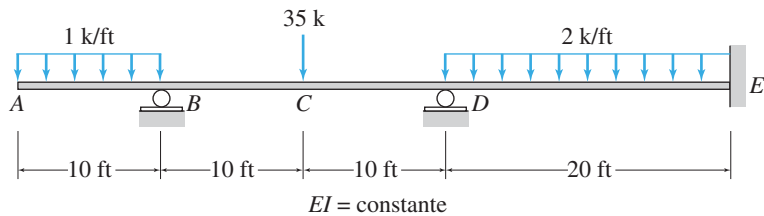


FIG. P15.11

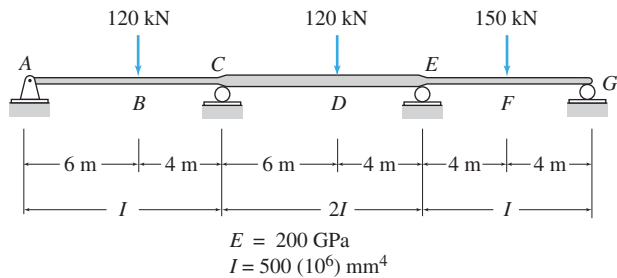


FIG. P15.12, P15.16

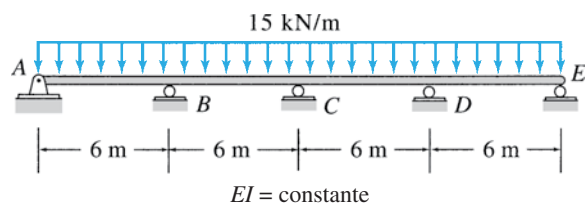


FIG. P15.13

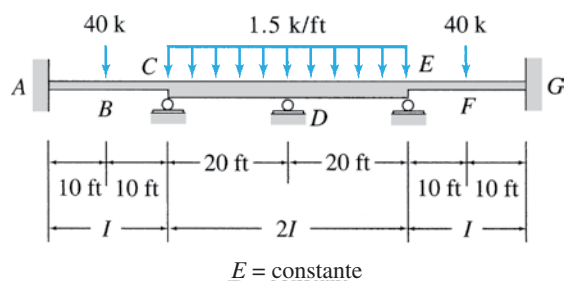


FIG. P15.14

15.15. Resuelva el Problema 15.9 para la carga mostrada en la Fig. 15.19 y el asentamiento de 25 mm en el apoyo C.

15.16. Resuelva el Problema 15.12 para la carga mostrada en la Fig. 15.12 y el asentamiento de 10 mm en el apoyo A; 65 mm en C; 40 mm en E; y 25 mm en G.

Sección 15.4

15.17 al 15.20 Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en las Figs. P15.17-P15.20, usando el método de la pendiente-deflexión.

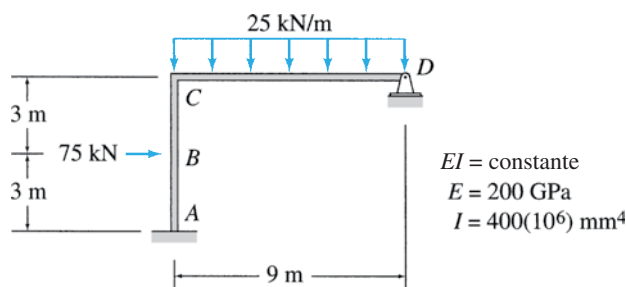


FIG. P15.17, P15.21

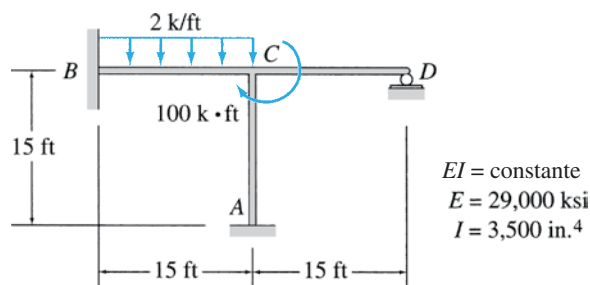


FIG. P15.18, P15.22

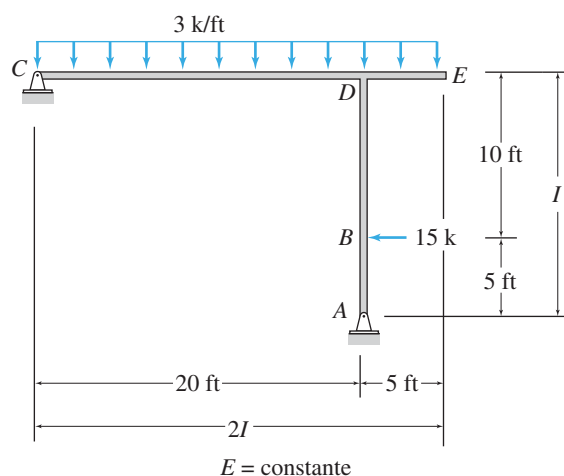


FIG. P19

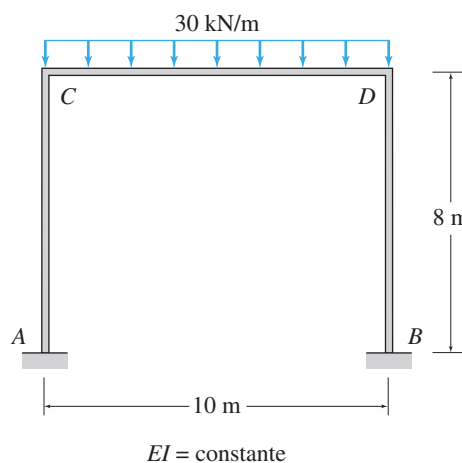


FIG. P15.20

15.21. Resuelva el Problema 15.17 para la carga mostrada en la Fig. 15.17 y el asentamiento de 50 mm en el apoyo D.

15.22. Resuelva el Problema 15.18 para la carga mostrada en la Fig. 15.18 y el asentamiento de $\frac{1}{4}$ in en el apoyo A.

15.23. Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en la Fig. P15.23 y el asentamiento de 1 in en A y de $1\frac{1}{2}$ in en D. Utilice el método de la pendiente-deflexión.

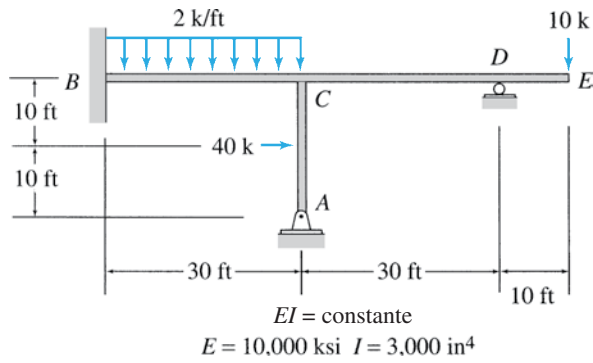


FIG. P15.23

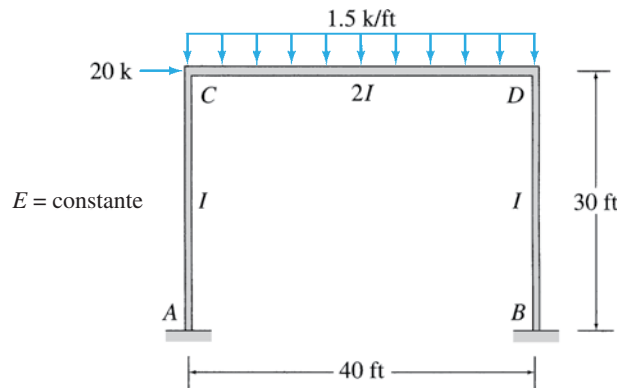


FIG. P15.25

Sección 15.5

15.24 a 15.31 Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones para los marcos mostrados en las Figs. P15.24-P15.31, usando el método de la pendiente-deflexión.

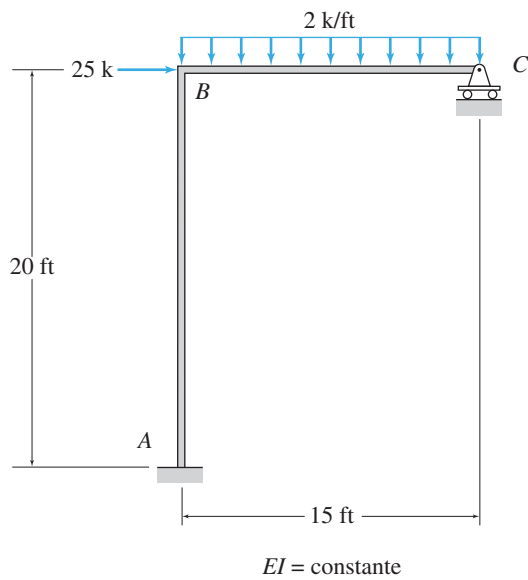


FIG. P15.24

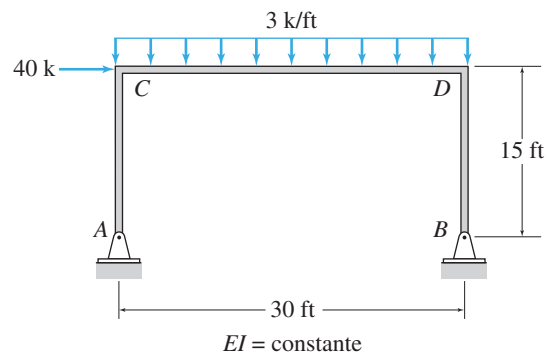


FIG. P15.26

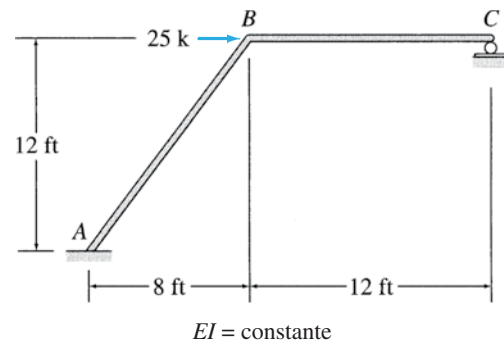


FIG. P15.27

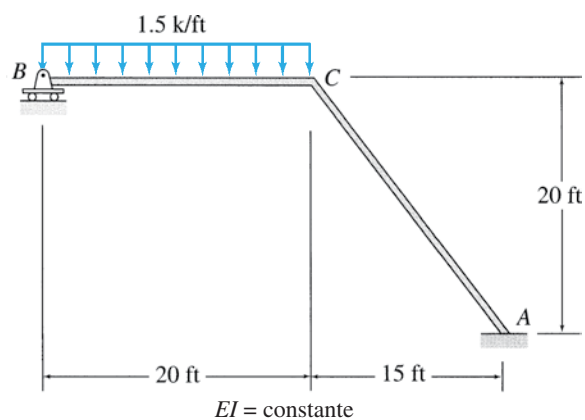


FIG. P15.28

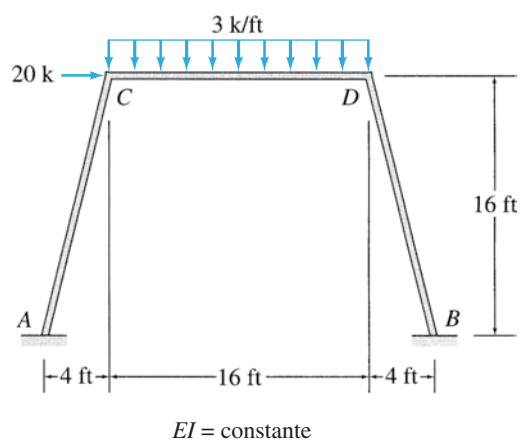


FIG. P15.30

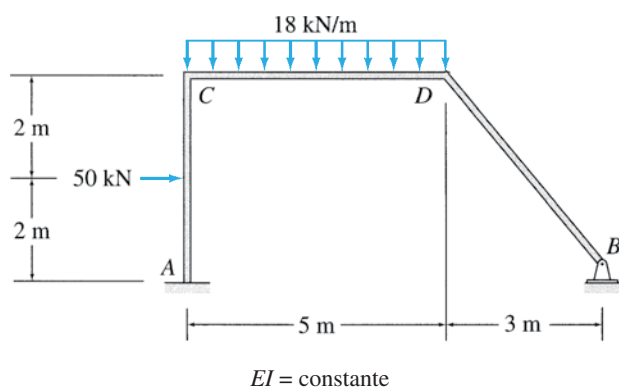


FIG. P15.29

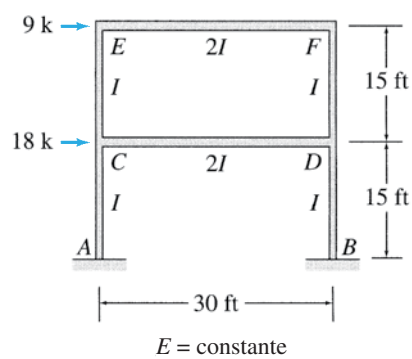


FIG. P15.31



*Edificio Empire State,
New York*

Keith Levit/Shutterstock.com

16

Método de la Distribución de Momentos (Método de Cross)

- 16.1 Definiciones y terminología
- 16.2 Conceptos básicos de la distribución de momentos
- 16.3 Análisis de vigas continuas
- 16.4 Análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos
- 16.5 Análisis de marcos con desplazamientos laterales permitidos
- Resumen
- Problemas

En este capítulo, consideraremos la formulación de otro método clásico del método de los desplazamientos, el *método de la distribución de momentos*. Como el método de la pendiente-deflexión, el método de la distribución de momentos se puede usar solo para el análisis de vigas continuas y marcos, tomando en cuenta que solo las deformaciones por flexión. Este método, fue inicialmente desarrollado por Hardy Cross en 1924, fue el método de análisis estructural más ampliamente utilizado desde 1930, cuando se publicó por primera vez, hasta la década 1960. Debido a que a principios de la década de 1970, con el incremento de las computadoras, el uso del método de distribución de momentos disminuyó en favor de los métodos matriciales orientados a la computadora para el análisis estructural. No obstante, el método de la distribución de momentos aun se prefiere por varios ingenieros para analizar estructuras pequeñas, debido a que proporciona una mejor comprensión del comportamiento de las estructuras. Además, este método se puede utilizar para el diseño preliminar además de para verificar resultados de análisis mediante computadora.

La razón principal para la popularidad del método de distribución de momentos en la era pre computacional fue debido al hecho de que no requiere la solución de ecuaciones simultáneas como las requeridas por los métodos clásicos. En el caso de vigas continuas y marcos sin desplazamiento lateral permitido, el método de la distribución de momentos evita completamente el resolver las ecuaciones simultáneas, mientras que en el caso de los marcos con desplazamiento lateral permitido, el número de ecuaciones simultáneas requeridas usualmente es igual al número de desplazamientos de los nodos.

El método de la distribución de momentos está clasificado como un método de desplazamientos, y desde un punto de vista teórico, es muy similar al método de las deflexiones considerado en el capítulo anterior. Sin embargo, a diferencia del método de la pendiente-deflexión en el cual todas las ecuacio-

nes de equilibrio de la estructura se cumple simultáneamente, en el método de la distribución de momentos las ecuaciones de equilibrio de momento de los nodos se resuelven de manera iterativa considerando el equilibrio de momento en un nodo a la vez, mientras que los nodos restantes de la estructura se suponen restringidos al desplazamiento.

Primero determinaremos las relaciones fundamentales necesarias para la aplicación del método de la distribución de momentos y luego desarrollaremos los conceptos básicos del método. Después consideraremos la aplicación del método al análisis de las vigas continuas y marcos sin desplazamiento lateral permitido y, finalmente, discutiremos el análisis de marcos con desplazamiento lateral permitido.

16.1 Definiciones y Terminología

Antes de que podamos desarrollar el método de la distribución de momentos, es necesario adoptar una convención de signos y definir varios temas usados en el análisis.

Convención de Signos

En la aplicación del método de la distribución de momentos, adoptaremos la misma convención de signos usada para el método de la pendiente-deflexión:

Los momentos en los extremos del elementos serán positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Debido a que el momento en sentido contrario a las manecillas del reloj en el extremo del elemento debe actuar un momento en sentido de las manecillas del reloj en el nodo adyacente, la convención anterior implica que *los momentos en sentido de las manecillas del reloj en los nodos son considerados positivo*.

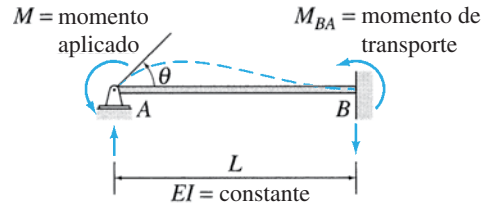
Rigidez de los Elementos

Considere un elemento prismático AB , el cual está articulado en el extremo A y empotrado en el extremo B , como se muestra en la Fig. 16.1(a). Si aplicamos el Momento M en el extremo A , la viga rota un ángulo θ en el apoyo articulado A y desarrolla un momento M_{AB} en el extremo B , como se muestra en la figura. La relación entre el momento aplicado M y la rotación θ se puede establecer usando la ecuación de la pendiente-deflexión obtenida en la Sección 15.1. Sustituyendo $M_{nf} = M$, $\theta_n = \theta$ y $\theta_f = \psi = FEM_{nf} = 0$ en la ecuación de la pendiente-deflexión (Ec. (15.9)), obtenemos

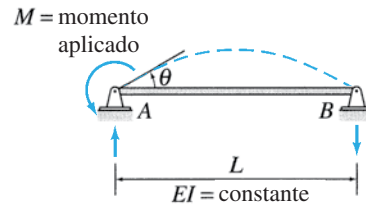
$$M = \left(\frac{4EI}{L} \right) \theta \quad (16.1)$$

La rigidez a la flexión, $\bar{K}$, de una elemento se define como el momento que se debe aplicar en el extremo del elemento para generar una rotación unitaria en ese extremo. Por lo tanto, fijando $\theta = 1$ rad en la Ec. (16.1), obtenemos la expresión de la rigidez a flexión de la viga de la Fig. 16.1(a) como

$$\bar{K} = \frac{4EI}{L} \quad (16.2)$$



(a) Viga con extremo lejano empotrado



(b) Viga con extremo lejano articulado

FIG. 16.1

Cuando el módulo de elasticidad de todos los elementos de una estructura es el mismo (es decir, $E = \text{constante}$), es conveniente trabajar con la *rigidez a la flexión relativa* del elemento en el análisis. La *rigidez a la flexión relativa*, K , de un elemento se obtiene dividiendo la rigidez relativa entre $4E$. por lo tanto, la rigidez relativa de la viga de la Fig. 16.1(a) está dada por

$$K = \frac{\bar{K}}{4E} = \frac{I}{L} \quad (16.3)$$

Ahora, suponga que el extremo lejano B de la viga de la Fig. 16.1(a) está articulado, como se muestra en la Fig. 16.1(b). La relación entre el momento aplicado M y la rotación θ del extremo A de la viga se puede determinar usando la ecuación de la pendiente-deflexión (Ecs. (15.15)) obtenida en la Sección 15.1. sustituyendo $M_{rh} = M$, $\theta_r = \theta$ y $\psi = FEM_{rh} = FEM_{rh} = 0$ en la Ec. 15.15(a), obtenemos

$$M = \left(\frac{3EI}{L} \right) \theta \quad (16.4)$$

Fijando $\theta = 1$ rad, obtenemos la expresión para la rigidez a flexión de la viga de la Fig. 16.1(b) como

$$\bar{K} = \frac{3EI}{L} \quad (16.5)$$

Una comparación de la Ec. (16.2) y (16.5) indica que la rigidez de la viga está reducida en un 25 por ciento cuando el apoyo empotrado en B se reemplaza por el apoyo articulado. La rigidez relativa a flexión de la viga se puede obtener dividiendo la rigidez a flexión entre $4E$:

$$K = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{L} \right) \quad (16.6)$$

De las Ec.s (16.1) a (16.4), podemos ver que la relación entre el momento M aplicado en el extremo y la rotación θ del correspondiente momento en el extremo se puede resumir como sigue:

$$M = \begin{cases} \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta & \text{si el extremo lejano del elemento está empotrado} \\ \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta & \text{si el extremo lejano del elemento está articulado} \end{cases} \quad (16.7)$$

De manera similar, basados en la Ec. (16.2) y (16.5), la rigidez a flexión de un elemento está dada por

$$\bar{K} = \begin{cases} \frac{4EI}{L} & \text{si el extremo lejano del elemento está empotrado} \\ \frac{3EI}{L} & \text{si el extremo lejano del elemento está articulado} \end{cases} \quad (16.8)$$

Y la rigidez relativa a flexión de un elemento se puede expresar como (ver la Ecs. (16.3) y (16.6))

$$K = \begin{cases} \frac{I}{L} & \text{si el extremo lejano del elemento está empotrado} \\ \frac{3}{4} \left(\frac{I}{L}\right) & \text{si el extremo lejano del elemento está articulado} \end{cases} \quad (16.9)$$

Momento de Transporte

Consideremos de nuevo la viga empotrada-articulada de la Fig. 16.1(a). Cuando un momento M se aplica en el extremo articulado A de la viga, un momento M_{BA} se desarrolla en el extremo empotrado B , como se muestra en la figura. El momento M_{BA} es llamado *momento de transporte*. Para establecer la relación entre el momento aplicado M y el momento de transporte M_{BA} , escribimos la ecuación de la pendiente-deflexión para M_{BA} sustituyendo $M_{nf} = M_{BA}$, $\theta_f = \theta$ y $\theta_n = \psi = FEM_{nf} = 0$ en la Ec. (15.9):

$$M_{BA} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta \quad (16.10)$$

sustituyendo $\theta = ML/(4EI)$ de la Ec. (16.1) en la Ec. (16.10), obtenemos

$$M_{BA} = \frac{M}{2} \quad (16.11)$$

Como la Ec. (16.11) indica, cuando un momento de magnitud M es aplicado en el extremo articulado de una viga, la mitad del momento aplicado es *transportado* al extremo lejano, siempre que el extremo lejano sea empotrado. Tenga en cuenta que la dirección del momento transportado, M_{BA} , es el mismo que el del momento aplicado, M .

Cuando el extremo lejano de la viga está articulado, como se muestra en la Fig. 16.1(b), el momento transportado M_{BA} es cero. Así, expresamos el momento e transporte como

$$M_{BA} = \begin{cases} \frac{M}{2} & \text{si el extremo lejano del elemento está empotrado} \\ 0 & \text{si el extremo lejano del elemento está articulado} \end{cases} \quad (16.12)$$

La relación del momento de transporte con el momento aplicado (M_{BA}/M) se llama *factor de transporte* del elemento. Representa la fracción del momento aplicado M que es *transportado* al extremo lejano del elemento. Dividiendo la Ec. (16.12) entre M ; podemos expresar el factor de transporte (FT) como

$$\text{COF} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si el extremo lejano del elemento está empotrado} \\ 0 & \text{si el extremo lejano del elemento está articulado} \end{cases} \quad (16.13)$$

Obtención de la Rigidez del Elemento y el Factor de Transporte por el Método del Área-Momento

Las expresiones anteriores de la rigidez a flexión del elemento y del momento de transporte puede, alternativamente, ser obtenida aplicando el método del área-momento discutidos en el Capítulo 6.

La viga con articulación y empotre de la Fig. 16.1(a) se redibuja en la Fig. 16.2(a), el cual además muestra el diagrama M/EI de la viga. Debido a que el extremo B de la viga está empotrado, la tangente a la curva elástica en B es horizontal, y pasa a través del extremo A . Por lo tanto, la desviación tangencial del extremo A de la tangente en el extremo B es igual a cero (es decir, $\Delta_{AB} = 0$). Dado que, de acuerdo al segundo teorema del área-momento, esta desviación tangencial es igual al momento del diagrama M/EI entre A y B alrededor de A , podemos escribir

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \left(\frac{L}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \left(\frac{2L}{3} \right) = 0$$

De la cual

$$M_{BA} = \frac{M}{2}$$

Tenga en cuenta que las expresiones anteriores para el momento de transporte es idéntico a la Ec. (16.11), la cual fue determinada previamente usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión.

Con la tangente en B horizontal, el ángulo θ en A es iguala a al cambio en la pendiente θ_{BA} entre A y B . Dado que de acuerdo al primer teorema de área momento, θ_{BA} es igual al diagrama M/EI entre A y B , escribimos

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L - \frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L$$

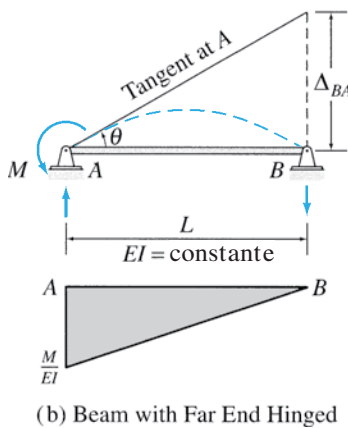
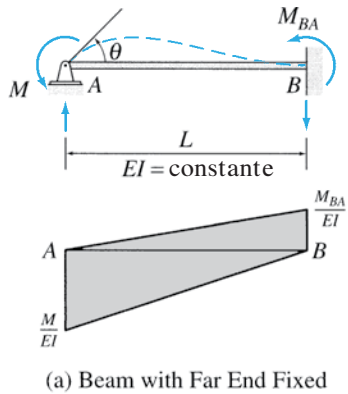


FIG. 16.2

Sustituyendo $M_{BA} = M/2$, obtenemos

$$\theta = \left(\frac{L}{4EI} \right) M$$

De la cual

$$M = \left(\frac{4EI}{L} \right) \theta$$

La cual es la misma que la Ec. (16.1), obtenida previamente.

La curva elástica y el diagrama M/EI de la viga, cuando el extremo lejano B está articulado, se muestra en la Fig. 16.2(b). De la curva elástica podemos ver que

$$\theta = \frac{\Delta_{BA}}{L}$$

La cual, de acuerdo al segundo teorema de área-momento,

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= \text{Momento del diagrama } M/EI \text{ entre } A \text{ y } B \text{ alrededor de } B \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \left(\frac{2L}{3} \right) = \left(\frac{L^2}{3EI} \right) M \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \frac{\Delta_{BA}}{L} = \left(\frac{L}{3EI} \right) M$$

De la cual

$$M = \left(\frac{3EI}{L} \right) \theta$$

La cual es idéntica a la Ec. (16.4), obtenida previamente usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución

Cuando analizamos una estructura por el método de la distribución de momento, se levanta una importante pregunta en cómo distribuir el momento aplicado en el nodo entre varios elementos conectados a ese nodo. Considere el marco de tres elementos mostrado en la Fig. 16.3(a), y suponga que un momento M es aplicado en el nodo B , generando que rote un ángulo θ , como se muestra en la figura. Para determinar qué fracción del momento aplicado M es resistido por cada uno de los tres elementos conectados al nodo, dibujamos los diagramas de cuerpo libre del nodo B y de los tres elementos AB , BC y BD , como se muestra en la Fig. 16.3(b). Considerando el equilibrio de momento de los tres cuerpos del nodo B (es decir, $\sum M_C = 0$, escribimos

$$M + M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

O

$$M = -(M_{BA} + M_{BC} + M_{BD}) \quad (16.14)$$

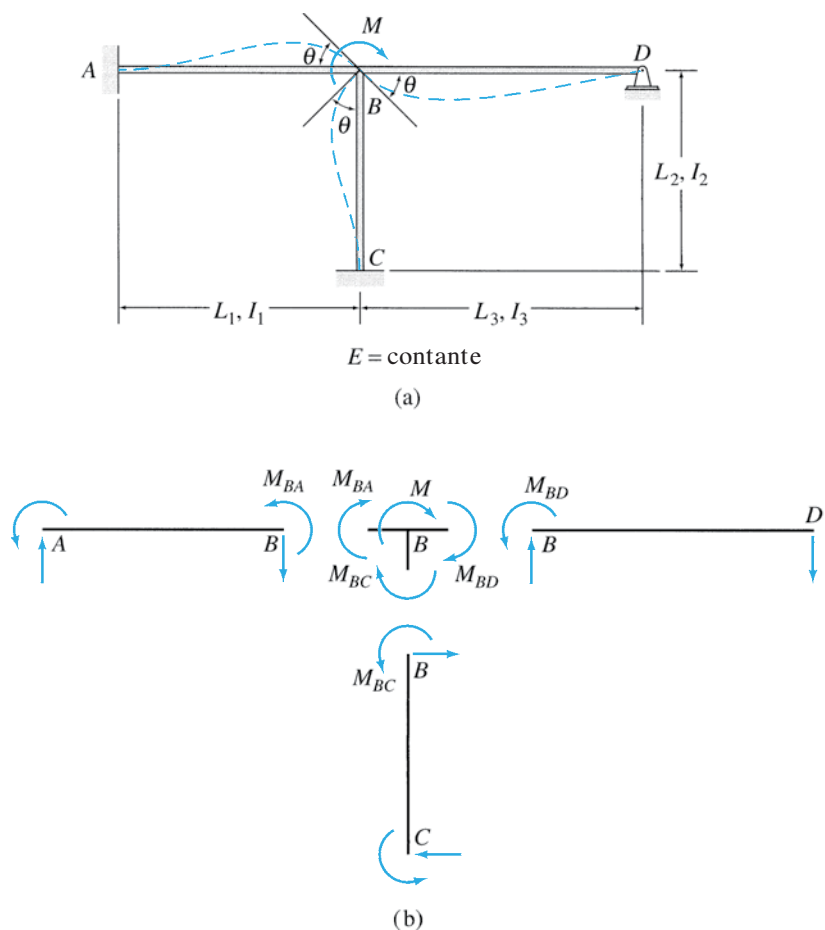


FIG. 16.3

Dado que los elementos AB , BC y BD , están rígidamente conectados el nodo B , la rotación de los extremos B de estos elementos son los mismos que los del nodo. Los momentos en los extremos de B de los elementos se pueden expresar en términos de la rotación del nodo θ aplicando la Ec. (16.7). Tenga en cuenta que el extremo lejano A y C , del elemento BD está articulado, aplicamos las Ecs. (16.7) a la (16.9) par cada elemento para obtener

$$M_{BA} = \left(\frac{4EI_1}{L_1} \right) \theta = \bar{K}_{BA} \theta = 4EK_{BA} \theta \quad (16.15)$$

$$M_{BC} = \left(\frac{4EI_2}{L_2} \right) \theta = \bar{K}_{BC} \theta = 4EK_{BC} \theta \quad (16.16)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{3EI_3}{L_3} \right) \theta = \bar{K}_{BD} \theta = 4EK_{BD} \theta \quad (16.17)$$

La sustituyendo las Ec.s (16.15) a la (16.17) en la ecuación de equilibrio (Ec. (16.14)) resulta

$$\begin{aligned} M &= -\left(\frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} + \frac{3EI_3}{L_3}\right)\theta \\ &= -(\bar{K}_{BA} + \bar{K}_{BC} + \bar{K}_{BD})\theta = -(\sum \bar{K}_B)\theta \end{aligned} \quad (16.18)$$

En la cual $\sum \bar{K}_B$ representa la suma de las rigideces de flexión para todos los elementos conectados al nodo B .

La rigidez rotacional de un nodo está definida como el momento requerido para generar una rotación unitaria del nodo. De la Fig.(16.18), podemos ver que la rigidez rotacional de un nodo es igual a la suma de la rigideces por flexión de todos los elementos rígidamente conectados al nodo. El signo negativo en la Ec. (16.18) aparece debido a la convención de signos que hemos adoptado, según la cual los momentos en el extremo es considerado positivo cuando en la dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que los momentos actuando en los nodos se consideran positivo cuando ellos actúan en la dirección de las manecillas del reloj.

Para expresar los momentos en los extremos del elemento en términos del momento aplicado M , escribimos la Ec. (16.18) en términos de la rigidez a flexión relativa de los elementos como

$$M = -4E(K_{BA} + K_{BC} + K_{BD})\theta = -4E(\sum K_B)\theta$$

De la cual

$$\theta = -\frac{M}{4E \sum K_B} \quad (16.19)$$

Sustituyendo la Ec. (16.19) en las Ecs. (16.15) a la (16.17), obtenemos

$$M_{BA} = -\left(\frac{K_{BA}}{\sum K_B}\right)M \quad (16.20)$$

$$M_{BC} = -\left(\frac{K_{BC}}{\sum K_B}\right)M \quad (16.21)$$

$$M_{BD} = -\left(\frac{K_{BD}}{\sum K_B}\right)M \quad (16.22)$$

De las Ecs. (16.20) a la (16.22), podemos ver que el momento aplicado M está distribuido a los tres elementos en la proporción en términos de su rigidez a flexión relativa. La relación $K/\sum K_B$ para un elemento en términos del *factor de distribución* de dicho elemento para el extremo B , y se presenta la fracción del momento aplicado M que es distribuido el extremo B del elemento. Por lo tanto, las Ecs. (16.20) a la (16.22) se pueden expresar como

$$M_{BA} = -DF_{BA}M \quad (16.23)$$

$$M_{BC} = -DF_{BC}M \quad (16.24)$$

$$M_{BD} = -DF_{BD}M \quad (16.25)$$

En la cual $DF_{BA} = K_{BA}/\sum K_B$, $DF_{BC} = K_{BC}/\sum K_B$ y $DF_{BD} = K_{BD}/\sum K_B$ son los factores de distribución para los extremos B de los elementos AB , BC , y BD , respectivamente.

Por ejemplo, si el nodo B del marco de la Fig. 16.3(a) está sujeto a un momento en sentido horario de 150 k-ft (es decir $M = 150$ k-ft) y si $L_1 = L_2 = 20$ ft, $L_3 = 30$ ft y $L_1 = L_2 = L_3$, de modo que

$$K_{BA} = K_{BC} = \frac{I}{20} = 0.05I$$

$$K_{BD} = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{30} \right) = 0.025I$$

Entonces los factores de distribución de los extremos B de los elementos AB , BC y BD están dados por

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}} = \frac{0.05I}{(0.05 + 0.05 + 0.025)I} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}} = \frac{0.05I}{0.125I} = 0.4$$

$$DF_{BD} = \frac{K_{BD}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}} = \frac{0.025I}{0.125I} = 0.2$$

Estos factores de distribución indica que el 40 por ciento del momento aplicado de 150 k-ft en el nodo B se ejerce en el extremo B del elemento AB , 40 por ciento en el extremo B del elemento BC , y el 20 por ciento restante en el extremo B del elemento BD . Así, los momentos en los extremos B de los tres elementos son

$$M_{BA} = -DF_{BA}M = -0.4(150) = -60 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 60 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{BC} = -DF_{BC}M = -0.4(150) = -60 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 60 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

$$M_{BD} = -DF_{BD}M = -0.2(150) = -30 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad 30 \text{ k-ft } \curvearrowright$$

Basados en la discusión anterior, podemos establecer que, en general, el factor de distribución (FT) de un extremo de un elemento es que está rígidamente conectado al nodo adyacente es igual a la relación de la rigidez a flexión relativa del elemento entre la suma de las rigideces relativas de todos los elementos conectados al nodo; es decir,

$$DF = \frac{K}{\sum K} \quad (16.26)$$

Además, el momento distribuido a (o resistido por) un extremo de un elemento conectado de forma rígida es igual al factor de distribución para ese extremo multiplicado por el momento negativo en el nodo adyacente.

Momentos de Empotre

Las expresiones para los momentos de empotre se los tipos más comunes de condiciones de carga además de los desplazamientos relativo de los extremos del elemento están dados en el interior de la contraportada del libro para una referencia práctica. En el método de la distribución de momentos, los efectos de los desplazamientos de los nodos debido a los asentamientos de los apoyos y los desplazamientos laterales son tomados en cuenta por medio de los momentos de empotramiento.

Considera la viga empotrada de la Fig. 16.4(a). Como se muestra en la figura, un pequeño asentamiento Δ en el extremo izquierdo A de la viga con

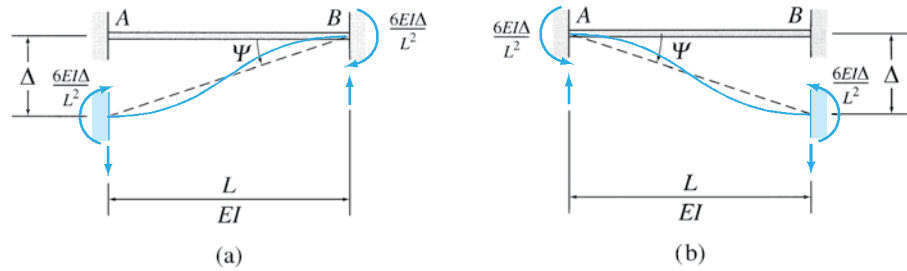


FIG. 16.4

respecto al extremo derecho genera que la cuerda de la viga rote en sentido contrario a las manecillas del reloj un ángulo $\psi = \Delta/L$ y fijando θ_A , ψ_B y el momento de empotre FEM_{AB} y FEM_{BA} debido a la carga externa, igual a cero, obtenemos

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

En la cual FEM_{AB} y FEM_{BA} ahora indican los momentos de empotre debido al desplazamiento Δ entre los dos extremos de la viga. Tenga en cuenta que las magnitudes al igual que las direcciones de los dos momentos de empotre son los mismos. Se puede ver de la Fig. 16.4(a) que cuando un desplazamiento relativo genera que la cuerda rote en el sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces actúan dos momentos de empotre en el sentido de las manecillas del reloj (negativo) para mantener las pendientes en cero en los dos extremos de la viga. A la inversa, si la cuerda rote debido a un desplazamiento en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 16.4(b), entonces se presenta ambos momentos de empotre en el sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo) para prevenir que los extremos de la viga roten.

16.2 Conceptos Básicos del Método de la Distribución de Momentos

El método de la distribución de momentos es un procedimiento iterativo, en el cual es esencial asumir que todos los nodos de la estructura que están libres a la rotación están temporalmente restringidos contra la rotación mediante un anclaje imaginario aplicado a ellos. Las cargas externas y los desplazamientos de los nodos (si hubiera) están aplicadas a estas estructuras fijas hipotéticas, y se calculan los momentos de empotre en los extremos de sus elementos. Estos momentos de empotre en general no están en equilibrio en esos nodos de la estructura que en realidad está libre a la rotación. Las condiciones de equilibrio de estos nodos se satisfacen de manera iterativa liberando un nodo a la vez, con los demás nodos restantes anclados. Se selecciona un nodo en el cual los momentos no están equilibrados o balanceados y se calculan los momentos sin balancear. El nodo entonces se libera eliminando el anclaje permitiendo de este modo que rote bajo el momento sin balancear hasta que se alcance el estado de equilibrio. La rotación del nodo induce momentos en los extremos de los elementos unidos a él. Tales extremos momentos en el extremo del elemento se les conoce como *momentos distribuidos*, y sus valores son determinados multiplicando el valor negativo del momento en el nodo sin balancear por los factores de distribución de los extremos de los elementos conectados al nodo. La flexión de estos elementos debido a los momentos de distribución genera momentos de transporte que se desarrollan en el extremo lejano del elemento, los cuales pueden ser fácilmente evaluado

usando los factores de transporte del elemento. El nodo, que ahora está en equilibrio, se ancla nuevamente a su posición rotada. Después, se selecciona otro nodos sin momentos balanceados y se libera, balanceando y anclando en la misma manera. El procedimiento se repite hasta que los momentos no balanceados de todos los nodos de la estructura son demasiado pequeños como para despreciarlos. Los momentos finales en los extremos de los elementos son obtenidos sumando algebraicamente el momento de empotre y todos los momentos distribuidos y de transporte en cada extremo del elemento. Este proceso iterativo para determinar los momentos en los extremos de los elementos distribuyendo sucesivamente los momentos sin balancear en cada nodo es llamado *proceso de distribución de momentos*.

Con los momentos en los extremos de los elementos determinados, los cortantes en los extremos y las fuerzas axiales, y las reacciones en los apoyos se pueden determinar mediante las consideraciones de equilibrio, como se discutió en el Capítulo 15.

Para ilustrar el método de la distribución de momento, considere una viga continua de tres claros mostrada en la fig. 16.5(a). Esta estructura fue previamente analizada en la Sección 15.2 mediante el método de la pendiente-deflexión. Es conveniente realizar el análisis de la distribución de momentos en forma tabular, como se muestra en la fig. 16.5(a). tenga en cuenta que la tabla, la cual es a veces llamada *tabla de distribución de momentos*, consiste de seis columnas, una para cada extremo de elemento de la estructura. Todos los cálculos de un elemento en particular se registran en la columna para ese extremo del elemento.

Factores de Distribución

El primer paso en el análisis es calcular los factores de distribución en os nodos de la estructura que está libre a la rotación.

Como se discutió en la Sección 16.18 Ec. (16.26)), el factor de distribución para un extremo de un elemento es igual a la rigidez a flexión relativa del elemento dividida entre la suma de las rigideces a flexión relativas de todos los elementos unidos al nodo. De la Fig. 16.5(a), podemos ver que solo los nodos *B* y *C* de la viga continua están libres a la rotación. Los factores de distribución del nodo *B* son

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/20}{2I/20} = 0.5$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/20}{2I/20} = 0.5$$

De manera similar, en el nodo *C*

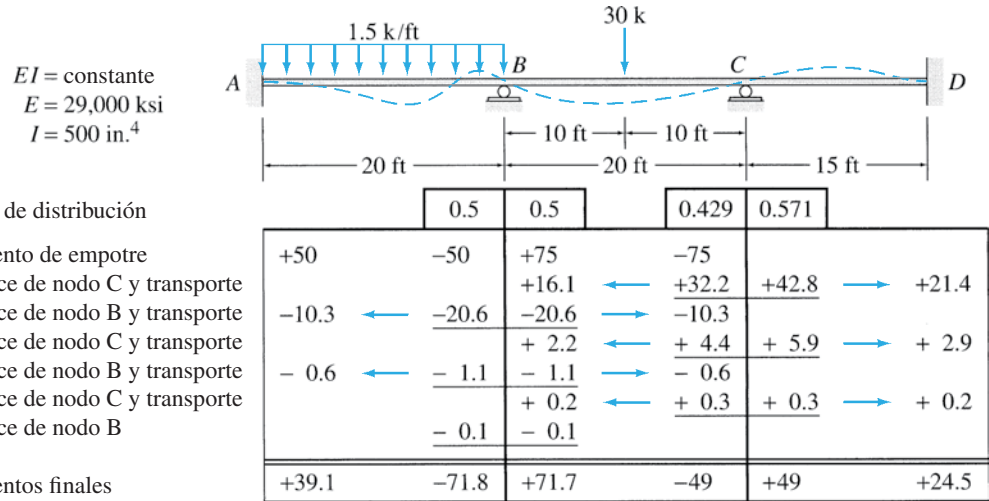
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CD}} = \frac{I/20}{(I/20) + (I/15)} = 0.429$$

$$DF_{CD} = \frac{K_{CD}}{K_{CB} + K_{CD}} = \frac{I/15}{(I/20) + (I/15)} = 0.571$$

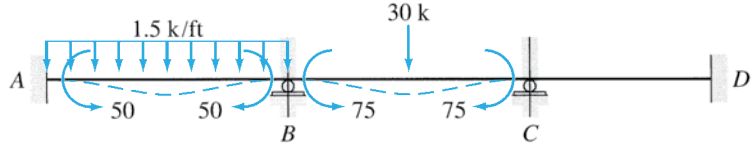
Tenga en cuenta que la suma de los factores de distribución en cada nodo siempre debe ser igual a 1. Los factores de distribución son registrados en la caja directamente debajo de los extremos de los elementos correspondientes en la parte superior de la tabla de distribución de momentos, como se muestra en la Fig. 16.5(a).

Momentos de Empotre

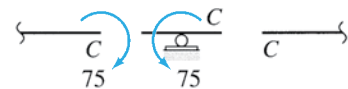
Después, asumiendo que los nodos B y C están restringidos a la rotación mediante anclajes imaginarios aplicados a ellos (Fig. 16.5(b)), calculamos los momentos de empotre que se desarrollan en los extremos de cada elemento.



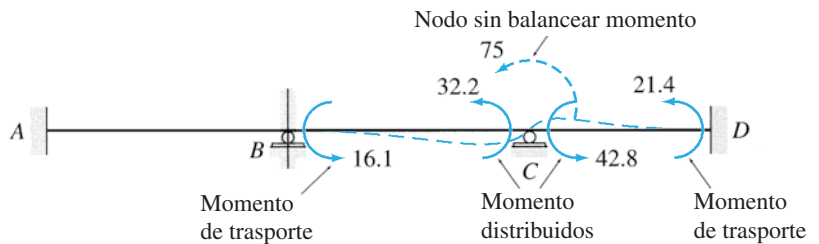
(a) Viga continua y tabla de momentos de distribución



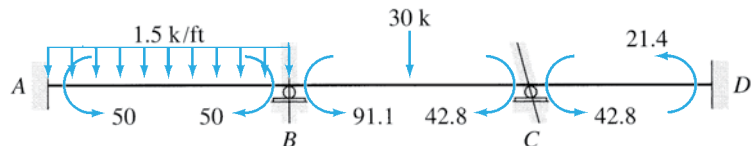
(b) Momentos de empotre



(c) Momentos sin balancear en el nodo C

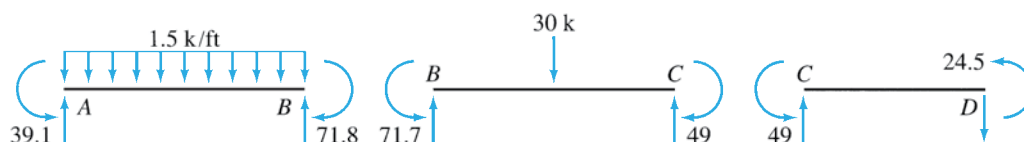
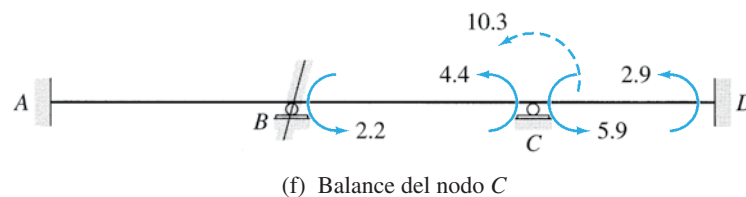
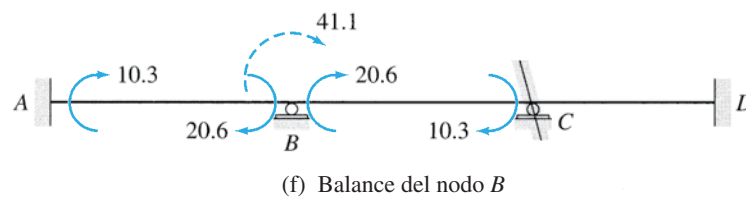


(d) Balanceo del nodo C



(e) Momentos en los extremos de los elementos con el nodo C balanceado

FIG. 16.5



Factores d distribución
en los extremos
de los elementos

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
		0.5	0.5	0.429	0.571	
1. Momento de empotre	+50	-50	+75	-75		
2. Balance de los nodo		-12.5	-12.5	+32.2	+42.8	
3. Transporte	- 6.3		+16.1	- 6.3		+21.4
4. Balance de los nodo		- 8.1	- 8.1	+ 2.7	+ 3.6	
5. Transporte	- 4.1		+ 1.4	- 4.1		+ 1.8
6. Balance de los nodo		- 0.7	- 0.7	+ 1.8	+ 2.3	
7. Transporte	- 0.4		+ 0.9	- 0.4		+ 1.2
8. Balance de los nodo		- 0.5	- 0.5	+ 0.2	+ 0.2	
9. Transporte	- 0.3		+ 0.1	- 0.3		+ 0.1
10. Balance de los nodo		- 0.05	- 0.05	+ 0.1	+ 0.2	
11. Transporte	+38.9	-71.8	+71.7	-49.1	+49.1	+24.5

FIG. 16.5 (cont.)

(i)

Usando las expresiones dada en el interior de la cubierta posterior del libro, obtenemos

$$FEM_{AB} = \frac{1.5(20)^2}{12} = 50 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad +50 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = 50 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad -50 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = \frac{30(20)}{8} = 75 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad +75 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CB} = 75 \text{ k-ft} \quad \text{o} \quad -75 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = 0$$

Tenga en cuenta que de acuerdo con la convención de distribución de momentos, los momentos de empotre en sentido contrario a las manecillas del reloj se consideran positivo. Los momentos de empotre son registrados en la primer línea de la tabla de distribución de momentos, como se muestra en la Fig. 16.5(a).

Balanceo del Nodo C

Dado que el nodo B y C no están realmente anclados, los liberamos, uno a la vez. Podemos liberar ya sea el nodo B o el nodo C ; empecemos por el nodo C . De la Fig. 16.5(b), podemos ver que hay un momento de empotre de -75 -k-ft (contrario a las manecillas del reloj) en el extremo C del elemento BC , donde no existe momento en el extremo C del elemento CD . Siempre que el nodo C este restringido contra la rotación mediante un anclaje, el momento sin balancear de -75 -k-ft se absorbe mediante el anclaje. Sin embargo, cuando el anclaje imaginario es removido para liberar al nodo, el momento sin balancear de -75 -k-ft actúa en el nodo, como se muestra en la Fig. 16.5(c), generando que rote en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta que esté en equilibrio (Fig. 16.5(d)). La rotación del nodo C genera momentos de distribución, DM_{CD} , para desarrollarse en los extremos C de los elementos BC y CD , los cuales se pueden evaluar multiplicando el momento negativo sin balancear (es decir, $+75$ -k-ft) por los factores de distribución DF_{CB} y DF_{CD} , respectivamente, por lo tanto,

$$DM_{CB} = 0.429(+75) = +32.2 \text{ k-ft}$$

$$DM_{CD} = 0.571(+75) = +42.8 \text{ k-ft}$$

Estos momentos distribuidos son registrados en la línea 2 de la tabla de distribución de momentos (Fig. 16.5(a)), y se dibuja una línea debajo de ellos para indicar que el nodo C está balanceado. Tenga en cuenta que la suma de los tres momentos arriba de la línea en el nodo C es igual a cero. (es decir, $-75 + 32.2 + 42.8 = 0$).

El momento distribuido en el extremo C del elemento BC induce un momento de transporte en el extremo lejano B (Fig. 16.5(d)), el cual puede ser determinado multiplicando el momento de distribución por el factor de transporte del elemento. Debido a que el nodo B permanece anclado, el factor de transporte del elemento BC es $\frac{1}{2}$ (Ec. (16.13)). Por lo tanto, el momento de transporte en el extremo B del elemento BC es

$$COM_{BC} = COF_{CB}(DM_{CB}) = \frac{1}{2}(+32.2) = +16.1 \text{ k-ft}$$

De manera similar, el momento de transporte en el extremo D del elemento CD se calcula como

$$COM_{DC} = COF_{CD}(DM_{CD}) = \frac{1}{2}(+42.8) = +21.4 \text{ k-ft}$$

Estos momentos de transporte se registran en la misma línea de la tabla de distribución de momentos como momentos distribuidos, con una flecha

horizontal de cada momento de distribución a su momento de transporte, como se muestra en la Fig. 16.5(a)

Los momentos totales en los extremos del elemento en este punto en el análisis se muestran en la Fig. 16.5(e). Se puede ver de la figura que el nodo C ahora está en equilibrio, porque está sujeto a dos momentos iguales, pero opuestos. El nodo B , sin embargo, no está en equilibrio, y necesita estar balanceado. Antes de que liberemos el nodo B , se aplica un anclaje imaginario al nodo C en su posición rotada, como se muestra en la Fig. 16.5(e).

Balanceo del Nodos B

Se libera el nodo B . El momento sin balancear en este nodos se obtiene sumando todos los omentos actuando en los extremos b de los elemento AB y BC , los cuales están rígidamente conectados al nodo B . de la tabla de distribución de momentos (líneas 1 y 2), podemos ver que hay un momento de empotre de -50 -k-ft en el extremo B del elemento AB , mientras el extremo B del elemento BC está sujeto a un momento de empotre de $+75$ -k-ft y a un momento de transporte de $+16.1$ -k-ft. Así, le momento sin balancear en el nodo B es

$$UM_B = -50 + 75 + 16.1 = +41.1 \text{ k-ft}$$

Estos momentos distribuidos se registran en la línea 3 de la tabal de distribución de momentos, y una se dibuja una línea abajo de ellos para indicar que el nodo está balanceado. Se transportan la mitad de los momentos distribuidos sobre el extremo más alejado A y C de los elementos AB y BC , respectivamente, como se indica con la flecha horizontal en la línea 3 de la tabla. El nodo B se vuelve a anclar en su posición rotada.

Balanceo del nodo C

Con el nodo B ahora balanceado, podemos ver de la tabla de distribución de momentos (línea 3) que, debido al efecto de transporte, hay un momento sin balancear de -10.3 -k-ft en el nodo C . recuerde que los momentos arriba de la línea horizontal en el nodo C estaban previamente balanceados. Por lo tanto, liberamos el nodo C de nuevo y distribuimos el momento balanceado en los extremos C de los elementos BC y CD como (Fig. 16.5(g))

$$DM_{CB} = 0.429(+10.3) = +4.4 \text{ k-ft}$$

$$DM_{CD} = 0.571(+10.3) = +5.9 \text{ k-ft}$$

Estos momentos distribuidos son registrados en la línea 4 de la tabla de momentos, y la mitad de estos momentos son distribuidos sobre el extremo más lejano B y D de los elementos BC y CD , respectivamente, como se indica en la tabla. El nodo C se nuevamente anclado.

Balanceo del Nodos *B*

El momento sin balancear de $+2.2\text{-k-ft}$ en el nodo *B* (línea 4 de la tabla de distribución de momentos) se balancea de manera similar. El momento distribuido y de transporte calculado se muestra en la línea 5 de la tabla. El nodo *B* nuevamente anclado.

Se puede ver de la línea 5 de la tabla de momentos distribuido que el momento sin balancear del nodo *C* ahora se ha reducido solo a -0.6-k-ft . Otro balanceo del nodo *C* produce un momento incluso más pequeño al de $+0.2\text{-k-ft}$ en el nodo *B*, como se muestra en la línea 6 de la tabla de distribución de momentos. Debido que los momentos distribuido por este momento sin balancear son despreciables, terminamos el proceso de distribución de momentos. Los momentos finales en los extremos de los elementos se obtiene sumado algebraicamente las entradas de la columna en la tabla de distribución de momentos. Los momentos finales obtenidos se registran en la línea 8 de la tabla y se muestran en los diagramas de cuerpo libre de los elementos en la Fig. 16.5(h). Tenga en cuenta que los momentos finales satisfacen las ecuaciones de equilibrio en los nodos *B* y *C*.

Con los momentos en los extremos de los elemento ya determinados, los cortantes en los extremos y las reacciones en los apoyos se pueden determinar considerando el equilibrio de cuerpo libre de los elementos y nodos de la viga continua, como se discutió en la Sección 15.2. Los diagramas de cortante y momento flexionante se pueden construir de manera usual usando la convención de signos de la viga (ver la Fig. 15.3).

Aplicación Práctica del Proceso de Distribución de Momentos

En la discusión anterior, determinamos los momentos en los extremos del elemento balanceando sucesivamente uno de los nodos de la estructura a la vez. A pesar de que este enfoque proporciona una visión más clara de los conceptos básicos del proceso de distribución de momentos, desde un punto de vista claro, es más conveniente usar un enfoque alternativo en el cual todos los nodos de la estructura están libre a la rotación y se equilibran de forma simultánea en el mismo paso. Todos los factores de transporte que son inducidos el extremo más lejano de los elementos se calculan simultáneamente en los siguientes pasos, y el proceso de balanceo de los nodos y transporte de momentos se repite hasta que los momentos sin balancear en los nodos sean demasiado pequeños para ser considerados.

Para ilustrar este enfoque alternativo, considere de nuevo la viga de tres claros continuos de la Fig. 16.5(a). La tabla de distribución de momentos usada para realizar los cálculos se muestra en la Fig. 16.5(i). Los factores de distribución previamente calculados y los momentos de empotre se registran en la parte superior y en la primera línea, respectivamente, de la tabla, como se muestra en la figura. El proceso de distribución de momentos se empieza balanceando los nodos *B* y *C*. de la línea 1 de la tabla de distribución de momentos (Fig. 16.5(i)), podemos ver que el momento sin balancear en el nodo *B* es

$$UM_B = -50 + 75 = +25 \text{ k-ft}$$

Como discutimos previamente, el nodo balanceado *B* induce distribución de momentos en los extremos *B* de los elementos *AB* y *BC*, los cuales se pueden

evaluar multiplicando por 1 momento sin balancear negativo por los factores de distribución, por lo tanto,

$$DM_{BA} = 0.5(-25) = -12.5 \text{ k-ft}$$

$$DM_{BC} = 0.5(-25) = -12.5 \text{ k-ft}$$

El nodo C se balancea de manera similar. De la línea de la tabal de distribución de momentos, podemos ver que el momento sin balancear en el nodo C es

$$UM_C = -75 \text{ k-ft}$$

Así, el balanceo del nodo C induce las siguientes distribuciones de momentos en los extremos C de los elementos BC y CD , respectivamente:

$$DM_{CB} = 0.429(+75) = +32.2 \text{ k-ft}$$

$$DM_{CD} = 0.571(+75) = +42.8 \text{ k-ft}$$

Los cuatro momentos distribuidos se registran en la línea 2 de la tabal de distribución de momentos, y la línea se dibuja debajo de ellos. A todo lo largo de la tabla, para indicar que todos los nodos están balanceados.

En el siguiente paso del análisis los momentos de transporte que se desarrollan en los extremos más lejanos de los elementos se calculan multiplicando los momentos de distribución por los factores de transporte.

$$COM_{AB} = \frac{1}{2}(DM_{BA}) = \frac{1}{2}(-12.5) = -6.3 \text{ k-ft}$$

$$COM_{CB} = \frac{1}{2}(DM_{BC}) = \frac{1}{2}(-12.5) = -6.3 \text{ k-ft}$$

$$COM_{BC} = \frac{1}{2}(DM_{CB}) = \frac{1}{2}(+32.2) = +16.1 \text{ k-ft}$$

$$COM_{DC} = \frac{1}{2}(DM_{CD}) = \frac{1}{2}(+42.8) = +21.4 \text{ k-ft}$$

Esos momentos de transporte se registran en la siguiente línea (línea 3) de la tabal de distribución de momentos con una flecha inclinada señalando de cada momento distribuido a su momento de transporte, como se muestra en la fig. 16.5(i). Podemos ver de la línea 3 de la tabal de distribución de momentos que, debido al efecto de transporte, ahora hay $+16.1\text{-k-ft}$ y -6.3-k-ft momentos sin balancear, y los momentos distribuidos obtenidos se registran en la línea 4 de la tabla de distribución de momentos. La mitad del momento distribuido es transportado al extremo más lejano del elemento (línea 5), y el proceso se continúa hasta que los momentos sin balancear sean demasiado pequeños para ignorarlos. Los momentos finales en los extremos de los elementos, obtenidos sumando algebraicamente las entradas en cada columna de la tabal de distribución de momentos se registran en la línea 11 de la tabla (Fig. 16.5(i)). Tenga en cuenta que los momentos finales están de acuerdo con aquellos determinados previamente en la Fig. 16.5(a) y en la Sección 15.2 mediante el método de la pendiente-deflexión. Las pequeñas diferencias entre los resultados obtenidos por diferentes enfoques son debido al error por redondeo.

16.3 Análisis de Vigas Continuas

Basados en la discusión presentada en la sección pasada, el proceso para el análisis de vigas continuas mediante el método de la distribución de momentos es como sigue:

1. Calcule los factores de distribución. En cada nodo que está libre a la rotación, calcule el factor de distribución para cada elemento conectado rígidamente al nodo. El factor de distribución para cada extremo del elemento se calcula dividiendo la rigidez a flexión relativa (I/L) del elemento rígidamente conectado al nodo. La suma de todos los factores de distribución en un nodo debe ser igual a 1.
2. Calcule los momentos de empotre. Asumiendo que todos los nodos están anclados contra la rotación, evalúe, para cada elemento, los momentos de empotre debido a las cargas externas y los asentamientos en los apoyos (si hubiera) usando las expresiones de los momentos de empotre dadas en el interior de la cubierta posterior del libro. Los momentos de empotre contrarios a las manecillas del reloj se consideran positivos.
3. Balance los momentos de todos los nodos que están libres a la rotación aplicando el proceso de distribución de momentos como sigue:
 - a. En cada nodo evalúe el momento sin balancear y distribuya el momento sin balancear en cada elemento conectado al nodo. El momento distribuido en cada extremo conectado rígidamente al nodo se obtiene multiplicando el momento negativo sin balancear por el factor de distribución del extremo del elemento.
 - b. Transporte la mitad del momento de distribuido al extremo opuesto del elemento.
 - c. Repita los pasos 3(a) y 3(b) hasta que todos los nodos libres estén balanceados o que los momentos sin balancear en esos nodos sean demasiados pequeños para ser considerados.
4. Determine los momentos finales en el extremo del elemento sumando algebraicamente los momentos de empotre y los momentos de distribución y transporte en cada extremo del elemento. Si el momento distribuido ha sido transportado correctamente, los momentos finales deben de cumplir con las ecuaciones de equilibrio de momento en todos los nodos de la estructura que está libres a la rotación.
5. Calcule los cortante en los extremos de los elementos considerando el equilibrio de los elementos de la estructura.
6. Determine las reacciones en los apoyos considerando el equilibrio de los nodos de la estructura.
7. Dibuje los diagramas de cortante y momento flexionante usando la convención de signos de la viga.

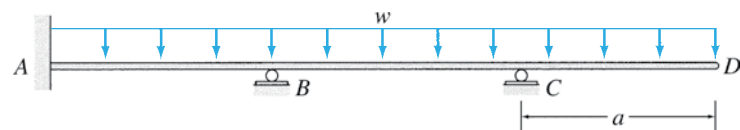
Vigas con Apoyos Simples en los Extremos

A pesar de que el procedimiento anterior se puede usar para analizar vigas continuas que están simplemente apoyada y uno o dos extremos, el análisis para tales estructuras puede ser considerablemente más simplificado usando la rigidez relativa a flexión reducida, $K = 3I/(4L)$, para claros adyacentes al

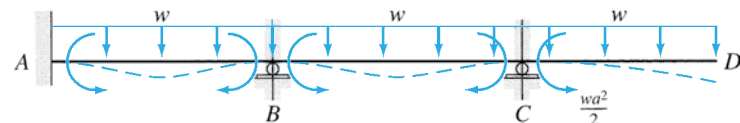
apoyo extremo simple, de acuerdo con la Ec. (16.9). Cuando se use la rigidez reducida, los nodos de los apoyos extremos simples se balancean solo durante el proceso de distribución de momentos, después de lo cual se dejan sin anclar de modo que ningún momento se puede transportar sobre ellos como en nodos internos de la estructura que están equilibrados (ver Ejemplo 16.3).

Estructuras con Voladizos en Cantiliver

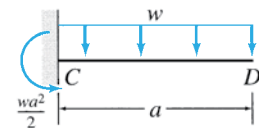
Considera una viga continua con voladizos en cantiliver, como se muestra en la Fig. 16.6(a). debido a que el porción CD del cantiliver no contribuye a la rigidez rotacional del nodo C , el factor de distribución para su extremo C es cero. ($DF_{CD} = 0$). Por lo tanto, el nodo C se puede tratar como un apoyo de extremo simple en el análisis. El momento en el extremo C del cantiliver, sin embargo, afecta el momentos sin balancear en el nodo C y debe ser incluido junto con los otros momentos de empotre en el análisis (Fig. 16.6(b)). Tenga en cuenta que la parte del cantiliver CD es estáticamente determinada; por lo tanto, el momento en su extremo C se puede calcular fácilmente aplicando la ecuación de equilibrio de momento (Fig. 16.6(c)).



(a) Viga continua



(b) Momento de empotre



(c) Parte del cantiliver estáticamente determinado

FIG. 16.6

Ejemplo 16.1

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga de dos claros continuos mostrada en la Fig. 16.7(a), usando método de distribución de momentos.

Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.1 por el método de la pendiente-deflexión.

continúa

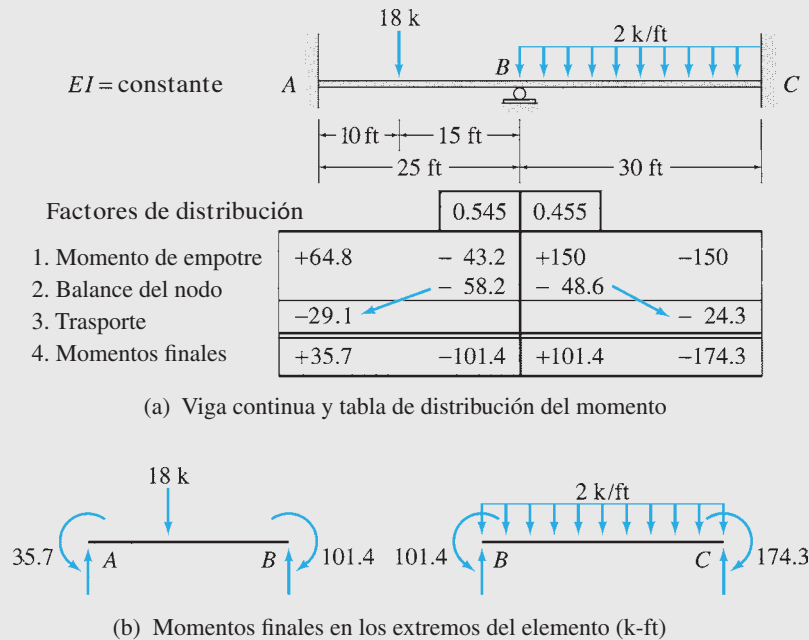


FIG. 16.7

Factores de Distribución. Solo el nodo B está libre a la rotación. Los factores de distribución en este nodo son

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/25}{(I/25) + (I/30)} = 0.545$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/30}{(I/25) + (I/30)} = 0.455$$

Tenga en cuenta que la suma de los factores de distribución es igual a 1, es decir;

$$DF_{BA} + DF_{BC} = 0.545 + 0.455 = 1$$

Comprobación

Los factores de distribución son registrado en las cajas debajo de los extremos correspondientes en la parte superior de la tabla de distribución de momentos, como se muestra en la Fig. 16.7(a).

Momentos de Empotre. Asumiendo que el nodo B está anclado contra la rotación, calculamos los momentos de empotre debido a las cargas externas usando las expresiones de los momentos de empotre dados en la parte interior de la contraportada de libro:

$$FEM_{AB} = \frac{18(10)(15)^2}{(25)^2} = 64.8 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +64.8 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = \frac{18(10)^2(15)}{(25)^2} = 43.2 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -43.2 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad +150 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CB} = 150 \text{ k-ft } \curvearrowright \quad \text{o} \quad -150 \text{ k-ft}$$

Estos momentos de empotre están registrados en la primera línea de la tabla de distribución de momentos, como se muestra en la Fig. 16.7(a).

Distribución de Momentos. Debido a que el nodo B no está en realidad anclado, liberamos el nodo y determinamos el momento sin balancear actuando en el sumando los momentos en los extremos B de los elementos AB y BC :

$$UM_B = -43.2 + 150 = +106.8 \text{ k-ft}$$

continúa

Este momentos sin balancear en el nodo B induce momentos en los extremos B de los elementos AB y BC , los cuales pueden ser determinados multiplicando el negativo del momento sin balancear por los factores de distribución:

$$DM_{BA} = DF_{BA} (-UM_B) = 0.545 (-106.8) = -58.2 \text{ k-ft}$$

$$DM_{BC} = DF_{BC} (-UM_B) = 0.455 (-106.8) = -48.6 \text{ k-ft}$$

Estos momentos distribuidos están registrados en la línea 2 de la tabla de distribución de momentos, y se dibuja una línea una línea debajo de ellos para indicar que el nodo B está balanceado. Los momentos de transporte al extremo A y C más lejano del elemento AB y BC , respectivamente, se calculan como

$$COM_{AB} = \frac{1}{2}(DM_{BA}) = \frac{1}{2}(-58.2) = -29.1 \text{ k-ft}$$

$$COM_{CB} = \frac{1}{2}(DM_{BC}) = \frac{1}{2}(-48.6) = -24.3 \text{ k-ft}$$

Los momentos de transporte se registran en la siguiente línea (línea 3) de la tabla de distribución de momentos, con una flecha inclinada apuntando desde cada distribución a su momento de transporte, como se muestra en la Fig. 16.7(a).

El nodo B es el único nodo de la estructura que está libre a la rotación, y debido a que ya está balanceado, terminamos el proceso de distribución.

Momentos Finales. Los momentos finales en los extremos de los elementos obtenidos sumando algebraicamente todos los momentos en cada columnas de la tabla de distribución de momentos. Los momentos finales obtenidos se registran en la última línea de la tabla en la Fig. 16.7(a). Tenga en cuenta que estos momento finales satisfacen la ecuación de equilibrio de momento en el nodo B . Una respuesta positiva para un momento en el extremo indica que el sentido es en contra de las manecillas del reloj, mientras que una respuesta negativa para el momento en el extremo implica un sentido en favor de las manecillas del reloj. Los momentos finales en los extremos de los elementos se muestran en la Fig. 16.7(b).

Respuesta

Los cortantes en los extremos de los elementos y las reacciones en los apoyos se pueden determinar considerando el equilibrio de los elementos y nodos de la viga continua, como se discutió en el Ejemplo 15.1. Los diagramas de cortante y momento flexionante de la viga también fueron construido en el Ejemplo 15.1.

Ejemplo 16.2

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga de tres claros continuos mostrada en la Fig. 16.8(a), usando método de distribución de momentos.

Solución

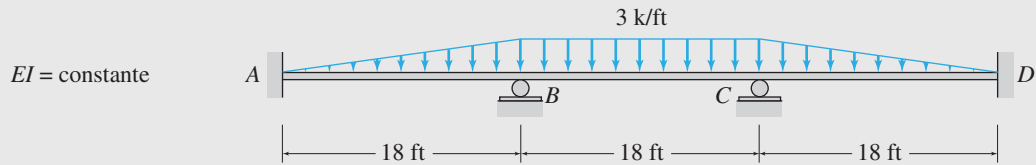
Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.2 por el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. De la Fig. 16.8(a), podemos ver que los nodos B y C de la viga están libres a la rotación. Los factores de distribución en el nodo B son

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/18}{(I/18) + (I/18)} = 0.5$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/18}{(I/18) + (I/18)} = 0.5$$

continúa



Factores de distribución

	0.5	0.5	0.5	0.5
1. Momentos de empotre	+32.4	-48.6	+81	-81
2. Balance de nodo B y C		-16.2	-16.2	+16.2
3. Transporte	-8.1		+8.1	-8.1
4. Balance de nodo B y C		-4.1	-4.1	+4.1
5. Transporte	-2.0		+2.0	-2.0
6. Balance de nodo B y C		-1.0	-1.0	+1.0
7. Transporte	-0.5		+0.5	-0.5
8. Balance de nodo B y C		-0.2	-0.2	+0.2
9. Transporte	-0.1		+0.1	-0.1
10. Balance de nodo B y C		-0.05	-0.05	+0.05
11. Momentos finales	+21.7	-70.2	+70.2	-21.7

(a) Viga continua y tabla de distribución de momento



(b) Momentos finales en los extremos del elemento (k-ft)

FIG. 16.8

De manera similar, en el nodo C,

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CD}} = \frac{I/18}{(I/18) + (I/18)} = 0.5$$

$$DF_{CD} = \frac{K_{CD}}{K_{CB} + K_{CD}} = \frac{I/18}{(I/18) + (I/18)} = 0.5$$

Momentos de Empotre

$$FEM_{AB} = +\frac{3(18)^2}{30} = +32.4 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BA} = -\frac{3(18)^2}{20} = -48.6 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = +\frac{3(18)^2}{12} = +81 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CB} = -81 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CD} = +\frac{3(18)^2}{20} = +48.6 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{DC} = -\frac{3(18)^2}{30} = -32.4 \text{ k-ft}$$

continúa

Distribución de Momentos. Después de registrar los factores de distribución y los momentos de empotre en la tabla de distribución de momentos Fig. 16.8(A), comenzamos el proceso de distribución de momentos balanceando los nodos B y C . el momento sin balancear en el nodo B es igual a $-48.6 + 81 = +32.4$ -k-ft. Por lo tanto, los momentos de distribución en los extremos B de los elementos AB y BC son

$$DM_{BA} = DF_{BA} (-UM_B) = 0.5 (-32.4) = -16.2 \text{ k-ft}$$

$$DM_{BC} = DF_{BC} (-UM_B) = 0.5 (-32.4) = -16.2 \text{ k-ft}$$

De manera similar, observando que el momento sin balancear en el nodo C es igual a $-81 + 48.6 = -32.4$ -k-ft, determinamos los momentos de distribución en los extremos C de los elementos BC y CD , como

$$DM_{CB} = DF_{CB} (-UM_C) = 0.5 (+32.4) = +16.2 \text{ k-ft}$$

$$DM_{CD} = DF_{CD} (-UM_C) = 0.5 (+32.4) = +16.2 \text{ k-ft}$$

La mitad de estos momentos distribuidos se transportan al extremo más lejano de los elementos, como se muestra en la tercer alineación de la tabla de distribución de momentos en la Fig. 16.8(a). se repite el proceso, como se muestra en la figura, hasta que los momentos sin balancear sean muy pequeños como para despreciarse.

Momentos Finales. Los momentos finales en los extremos de los elementos obtenidos sumando los momentos en cada columna de la tabla de distribución de momentos, se registran en la última línea de la tabla de la Fig. 16.8(a). Estos momentos se muestran en la Fig. 16.8(b).

Respuesta

Los cortantes en los extremos de los elementos y las reacciones en los apoyos se pueden determinar considerando el equilibrio de los elementos y nodos de la viga continua, como se discutió en el Ejemplo 15.1. Los diagramas de cortante y momento flexionante de la viga también fueron construido en el Ejemplo 15.1.

Ejemplo 16.3

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y momento flexionante para la viga de dos claros continuos mostrada en la Fig. 16.9(a), usando método de distribución de momentos.

Solución

Factores de Distribución. De la Fig. 16.9(a), podemos ver que los nodos B y C de la viga están libres a la rotación. Los factores de distribución en el nodo B son

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{1.5I/10}{(1.5I/10) + (I/10)} = 0.6$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{I/10}{(1.5I/10) + (I/10)} = 0.4$$

De manera similar, en el nodo C ,

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB}} = \frac{0.1I}{0.1I} = 1$$

Momentos de Empotre

$$FEM_{AB} = + \frac{80(10)}{8} = +100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{BA} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.2 por el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. De la Fig. 16.8(a), podemos ver que los nodos B y C de la viga están libres a la rotación. Los factores de distribución en el nodo B son

continúa

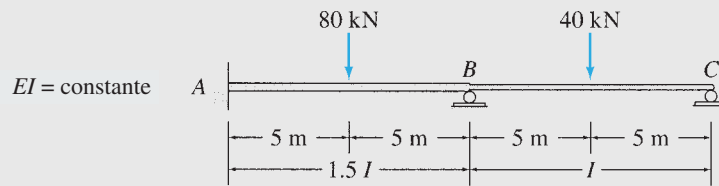
$$FEM_{BC} = + \frac{40(10)}{8} = +50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{CB} = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Distribución de Momentos. Después de registrar los factores de distribución y los momentos de empotre en la tabla de distribución de momentos Fig. 16.9(a), comenzamos el proceso de distribución de momentos balanceando los nodos B y C . El momento sin balancear den el nodo B es igual a $-100 + 50 = -50$ -kN-m. Por lo tanto, los momentos de distribución en los extremos B de los elementos AB y BC son

$$DM_{BA} = DF_{BA} (-UM_B) = 0.6 (+50) = +30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$DM_{BC} = DF_{BC} (-UM_B) = 0.4 (+50) = +20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(a) Continua viga

Factores de distribución		0.6	0.4	1.0
1. Momentos de empotre	+100	-100	+50	-50
2. Balance de nodo B y C		+ 30	+20	+50
3. Transporte	+ 15		+25	+10
4. Balance de nodo B y C		- 15	-10	-10
5. Transporte	- 7.5		- 5	- 5
6. Balance de nodo B y C		+ 3	+ 2	+ 5
7. Transporte	+ 1.5		+ 2.5	+ 1
8. Balance de nodo B y C		- 1.5	- 1	- 1
9. Transporte	- 0.8		- 0.5	- 0.5
10. Balance de nodo B y C		+ 0.3	+ 0.2	+ 0.5
11. Transporte	+ 0.2		+ 0.3	+ 0.1
12. Balance de nodo B y C		- 0.2	- 0.1	- 0.1
13. Momentos finales	+108.4	- 83.4	+83.4	0

 (b) Tabla de distribución de momeno: $K_{BC} = \frac{I}{10}$

Factores de distribución		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
1. Momentos de empotre	+100	-100	+50	-50
2. Balance de nodo B y C		+ 33.3	+16.7	+50
3. Transporte	+ 16.7		+25	
4. Balance de nodo B y C		- 16.7	- 8.3	
5. Transporte	- 8.3			
12. Balance de nodo B y C	+108.4	- 83.4	+83.4	0

 (c) Tabla de distribución de momeno: $K_{BC} = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{10} \right)$

FIG. 16.9

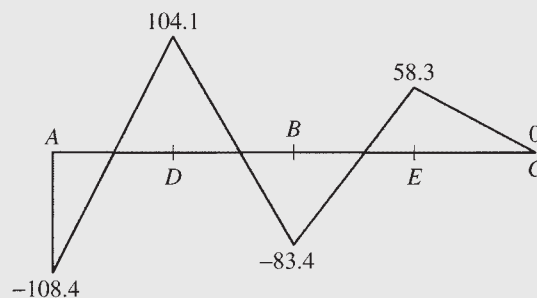
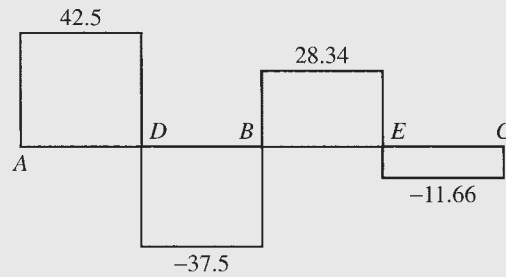
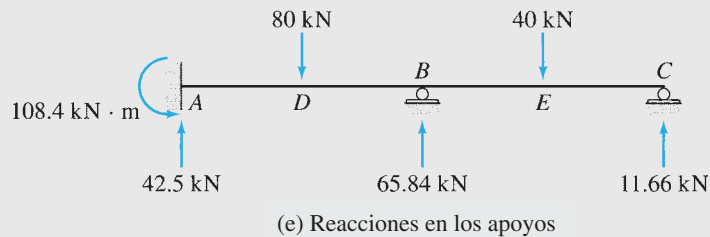
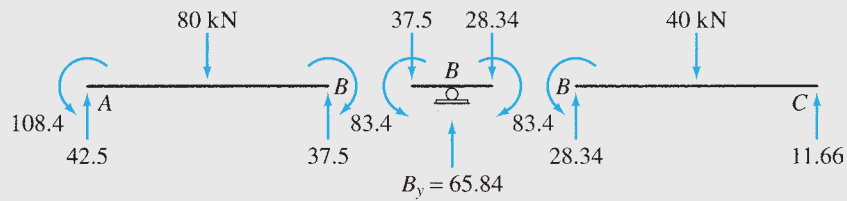


FIG. 16.9 (cont.)

De manera similar, observando que el momento sin balancear en el nodo C es igual a $-50 \text{ kN}\cdot\text{m}$, determinamos el momento distribuido en el nodo C del elemento BC como

$$DM_{CB} = DF_{CB} (-UM_C) = 1 (+50) = +50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

La mitad de estos momentos distribuidos se transportan al extremo más lejano de los elementos, como se muestra en la tercera línea de la tabla de distribución de momentos en

continúa

Momentos Finales. Los momentos finales en los extremos de los elementos obtenidos sumando los momentos en cada columna de la tabla de distribución de momentos, se registran en la última línea de la tabla de la Fig. 16.9(a). **Respuesta**

Método Alternativo. Debido a que el soporte del extremo C de la viga continua es un apoyo simple, el análisis se puede simplificar usando la rigidez reducida a flexión relativa del elemento BC , el cual es adyacente al apoyo simple C :

$$K_{BC} = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{10} \right)$$

En el nodo C , $DF_{CB} = K_{CB}/K_{CB} = 1$. Estos factores de distribución, y los momentos de empotre que permanecen como antes, se registran en la tabla de distribución de momentos, cómo se muestra en la Fig. 16.9(c).

Debido a que estamos usando una rigidez a flexión reducida y relativa para el elemento BC , el nodo C necesita ser balanceado solo una vez en el proceso de distribución de momentos. Por lo tanto el nodo B y C están balanceados y los momentos distribuidos se calculan de la manera usual, como se indica en la segunda línea de la tabla de distribución de momentos (Fig. 16.9(c)). Sin embargo, como se muestra en la tercera línea de la tabla Fig. 16.9(c), no se transporta momento en el extremo C del elemento BC . El nodo B se balancea una vez más, y le momento se transporta en el extremo A del elemento AB (líneas 4 y 5). Debido a que ambos nodos B y C están balanceados ahora, podemos terminar el proceso de distribución de momentos y determinar los momentos finales sumando los momentos en cada columna de la tabla de distribución de momentos. **Respuesta**

Cortantes en los Extremos de los Elementos. Los cortantes en los extremos de los elementos, obtenidos considerando el equilibrio en cada elementos, se muestran en la Fig. 16.9(d). **Respuesta**

Reacciones en los Apoyos. Ver la Fig. 16.9(e). **Respuesta**

Diagramas de Cortante y Momento Flexionante. Ver la Fig. 16.9(f) y (g). **Respuesta**

Ejemplo 16.4

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga continua mostrada en la Fig. 16.10(a), usando método de distribución de momentos.

Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.4 por el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. Debido a que la porción en cantiliver CD no contribuye al rigidez rotacional del nodo C , podemos tratar al nodo C como en apoyo simple y usar la rigidez a a flexión relativa reducida del elemento BC en el análisis:

$$K_{BA} = \frac{I}{6} \quad \text{y} \quad K_{BC} = \frac{3}{4} \left(\frac{I}{9} \right) = \frac{I}{12}$$

En el nodo B ,

$$DF_{BA} = \frac{I/6}{(I/6) + (I/12)} = \frac{2}{3}$$

$$DF_{BC} = \frac{I/12}{(I/6) + (I/12)} = \frac{1}{3}$$

En el nodo C ,

$$DF_{CB} = 1$$

continúa

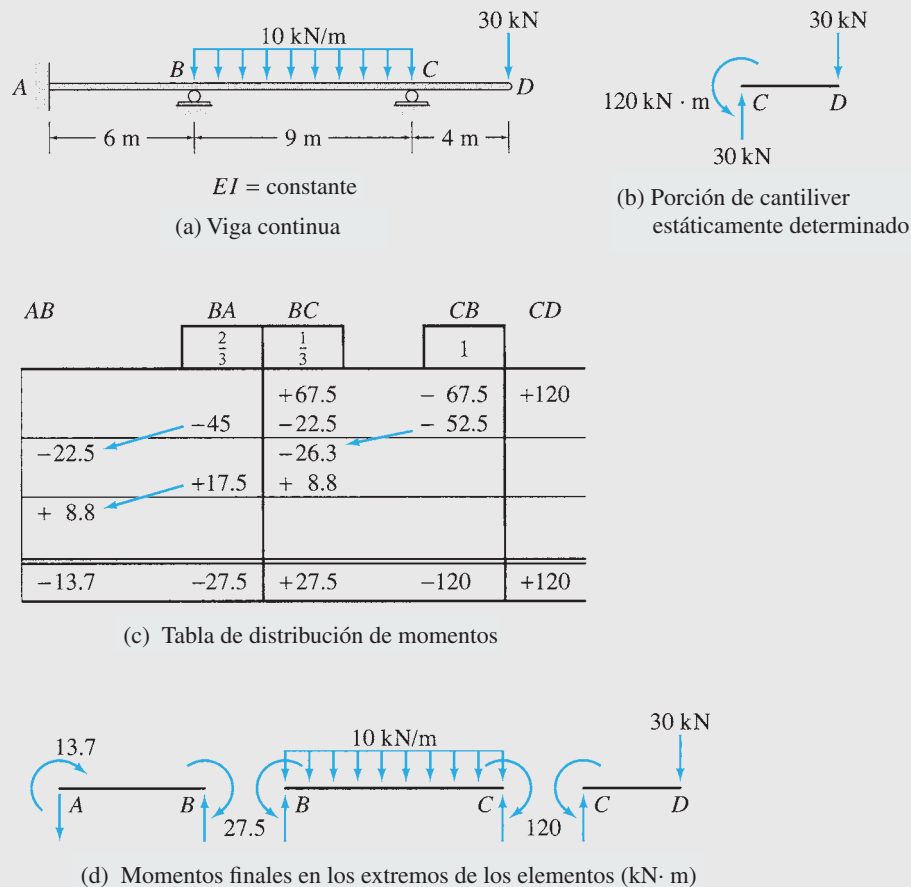


FIG. 16.10

Momentos de Empotre. Usando las expresiones de los momentos empotrados y la Fig. 16.10(b), obtenemos

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = 0$$

$$\text{FEM}_{BC} = +67.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{FEM}_{CB} = -67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{CD} = +30(4) = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Distribución de Momentos. La distribución de momentos se realiza como se muestra en la tabla de distribución de momentos en la Fig. 16.10(c).

Momentos Finales. Ver la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.10(d).

Respuesta

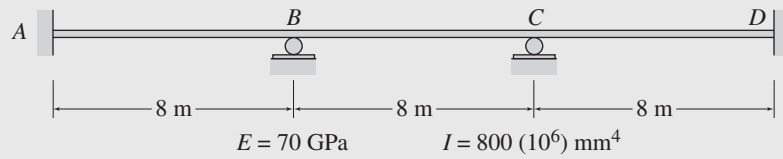
Ejemplo 16.5

Determine los momentos en los extremos del elemento para una viga continua mostrada en la Fig. 16.11(a), debido a un asentamiento de 20 mm en el apoyo B. Utilice el método de distribución de momentos.

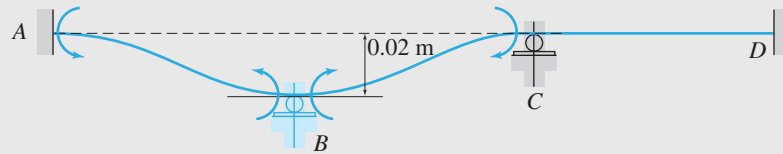
Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.5 por el método de la pendiente-deflexión.

continúa



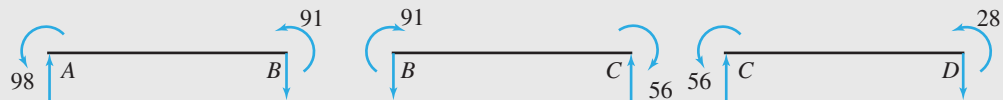
(a) Viga continua



(b) Fixed-End Moments Due to Support Settlement

AB	BA	BC	CB	CD	DC
	0.5	0.5	0.5	0.5	
+105	+105	-105	-105	+52.5	+52.5
		+26.3			+26.3
	-13.1	-13.1			
-6.6			-6.6	+3.3	+3.3
		+1.6			+1.6
	-0.8	-0.8			
-0.4			-0.4	+0.2	+0.2
		+0.1			+0.1
	-0.05	-0.05			
+98	+91.1	-91	-56	+56	+28

(c) Tabla de distribución de momento



(d) Momentos finales en los extremos de los elementos (kN·m)

FIG. 16.11

Factores de Distribución. En el nodo B,

$$DF_{BA} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

$$DF_{BC} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

En el nodo C,

$$DF_{CB} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

$$DF_{CD} = \frac{I/8}{(I/8) + (I/8)} = 0.5$$

continúa

Momentos de Empotre. La configuración deformada del viga continua con todos los nodos anclados contra la rotación y sujeta a un asentamiento en el apoyo se muestra en la Fig. 16.11(b) usando una escala exagerada. Se puede ver de esta figura que los asentamientos relativos para los tres elementos son $\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = 0.02 \text{ m}$ y $\Delta_{CD} = 0$.

Usando las expresiones del momento de empotre, determinamos los momentos de empotre debido al asentamiento del poyo como

$$\text{FEM}_{AB} = \text{FEM}_{BA} = +\frac{6EI\Delta}{L^2} = +\frac{6(70)(800)(0.02)}{(8)^2} = +105 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{BC} = \text{FEM}_{CB} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -\frac{6(70)(800)(0.02)}{(8)^2} = -105 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{FEM}_{CD} = \text{FEM}_{DC} = 0$$

Distribución de Momentos. La distribución de momentos se lleva acabo de manera usual, como se muestra en la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.11(c).

Momentos Finales. Ver la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.11(d).

Respuesta

Ejemplo 16.6

Determine los momentos en los extremos del elemento de la viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 16.12(a) debido a la carga uniformemente repartida y debido a el asentamiento del apoyo de $\frac{5}{8}$ in en B, de $1\frac{1}{2}$ in en C, y de $\frac{3}{4}$ in en D. Utilice el método de distribución de momentos.

Solución

Esta viga fue previamente analizada en el Ejemplo 15.6 usando el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. En el nodo A.

$$\text{DF}_{AB} = 1$$

En el nodo B,

$$\text{DF}_{BA} = \frac{3I/80}{(3I/80) + (I/20)} = 0.429$$

$$\text{DF}_{BC} = \frac{I/20}{(3I/80) + (I/20)} = 0.571$$

En el nodo C,

$$\text{DF}_{CB} = \frac{I/20}{(3I/80) + (I/20)} = 0.571$$

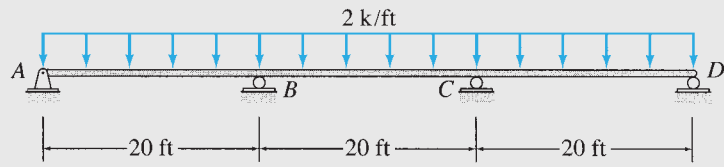
$$\text{DF}_{CD} = \frac{3I/80}{(3I/80) + (I/20)} = 0.429$$

En el nodo D,

$$\text{DF}_{DC} = 1$$

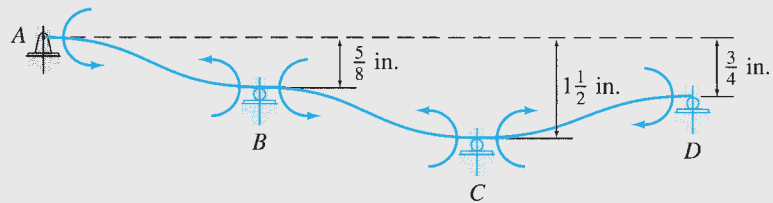
Momentos de Empotre. La configuración deformada del viga continua con todos los nodos anclados contra la rotación y sujeta a un asentamiento en el apoyo se muestra en la Fig. 16.12(b) usando una escala exagerada. Se puede ver de esta figura que los asentamientos relativos para los tres elementos son $\Delta_{AB} = \frac{5}{8}$ in, $\Delta_{BC} = 1\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$ y $\Delta_{CD} = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ in.

continúa



$$E = 29,000 \text{ ksi} \quad I = 7,800 \text{ in.}^4$$

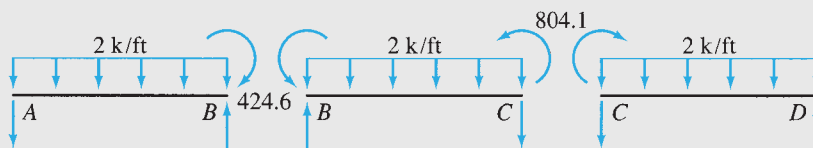
(a) Viga continua



(b) Fixed-End Moments Due to Support Settlements

AB	BA	BC	CB	CD	DC
1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
+1293.9	+1160.5	+1784.8	+1651.4	-1406	-1539.4
-1293.9	-1263.5	-1681.8	-140.1	-105.3	+1539.4
-647	-647	-70.1	-840.9	+769.7	
+307.6	+307.6	+409.5	+40.7	+30.5	
		+20.4	+204.8		
-8.8	-8.8	-11.6	-116.9	-87.9	
		-58.5	-5.8		
+25.1	+25.1	+33.4	+3.3	+2.5	
		+1.7	+16.7		
-0.7	-0.7	-1.0	-9.5	-7.2	
		-4.8	-0.5		
+2.1	+2.1	+2.7	+0.3	+0.2	
		+0.2	+1.4		
-0.1	-0.1	-0.1	-0.8	-0.6	
		-0.4			
+0.2	+0.2	+0.2			
0	-424.6	+424.6	+804.1	-804.1	0

(c) Tabla de distribución de momento



(d) Momentos finales en los extremos de los elementos (kN·m)

FIG. 16.12

Usando las expresiones de los momentos de empotre, determine los momentos de empotre debido al asentamiento en el apoyo como

$$\begin{aligned} FEM_{AB} = FEM_{BA} &= +\frac{6EI\Delta}{L^2} = +\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{5}{8}\right)}{(20)^2(12)^3} \\ &= +1,227.2 \text{ k-ft} \\ FEM_{BC} = FEM_{CB} &= +\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{7}{8}\right)}{(20)^2(12)^3} = +1,718.1 \text{ k-ft} \\ FEM_{CD} = FEM_{DC} &= -\frac{6(29,000)(7,800)\left(\frac{3}{4}\right)}{(20)^2(12)^3} = -1,472.7 \text{ k-ft} \end{aligned}$$

Los momentos de empotre debido a la carga externa de 2-k/ft son

$$\begin{aligned} FEM_{AB} = FEM_{BC} = FEM_{CD} &= +\frac{2(20)^2}{12} = +66.7 \text{ k-ft} \\ FEM_{BA} = FEM_{CB} = FEM_{DC} &= -66.7 \text{ k-ft} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los momentos de empotre debido a la combinación de efectos de las cargas externas y del asentamiento del apoyo son

$$\begin{aligned} FEM_{AB} &= +1,293.9 \text{ k-ft} & FEM_{BA} &= +1,160.5 \text{ k-ft} \\ FEM_{BC} &= +1,784.8 \text{ k-ft} & FEM_{CB} &= +1,651.4 \text{ k-ft} \\ FEM_{CD} &= -1,406 \text{ k-ft} & FEM_{DC} &= -1,539.4 \text{ k-ft} \end{aligned}$$

Distribución de Momento. la distribución de momento se realiza de manera usual, como se muestra en la tabla de distribución de momentos en la Fig. 16.12(c). Tenga en cuenta que los nodos *A* y *D* en el apoyo extremos simple están balanceados solo una vez y no transportan momentos a esos nodos.

Momentos Finales. Ver la tabla de distribución de momentos y la Fig. 16.12(d).

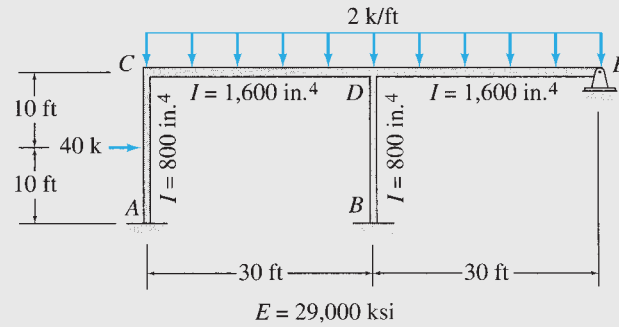
Respuesta

16.4 Análisis de Marcos Sin Desplazamiento Laterales Permitidos

El procedimiento para el análisis de marcos sin desplazamientos laterales permitidos es similar al análisis de vigas continuas presentado en la Sección anterior. Sin embargo, a diferencia de las vigas continuas, se pueden unir más de dos elementos en el mismo nodo de un marco. En tales casos, debemos tener cuidado en tomar registro de los cálculos de tal manera que no cometamos errores. Mientras algunos ingenieros les gusta registrar los cálculos de la distribución de momentos directamente en los bosquejos del marco, otros prefieren usar el formato tabular para estos propósitos. Nosotros usaremos la forma tabular para los cálculos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.7

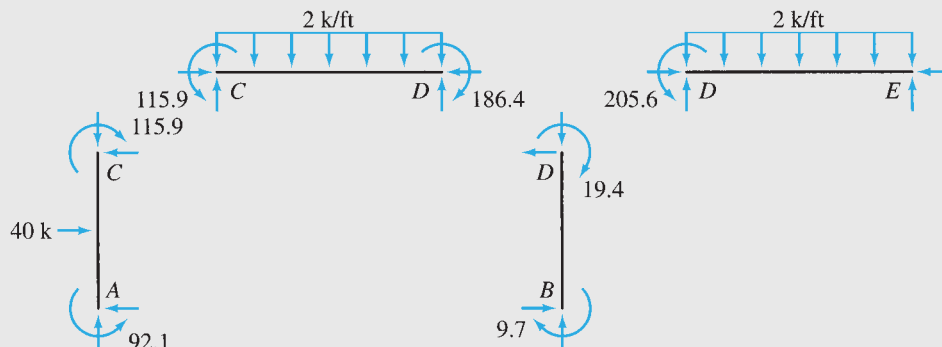
Determine los momentos en los extremos del marco en la Fig. 16.13(a) usando el método de distribución de momentos.



(a) Marco

	AC	CA	CD	DC	DB	DE	ED	BD
Factores de distribución		0.429	0.571	0.4	0.3	0.3	1	
1. Momento de empotre	+100	-100	+150	-150		+150	-150	
2. Balance del nodo		-21.4	-28.6	-14.3		+75	+150	
3. Transporte				-24.3	-18.2	-18.2		
4. Balance del nodo			-12.2					-9.1
5. Transporte			+7					
6. Balance del nodo		+5.2		+3.5				
7. Transporte				-1.4	-1.1	-1.1		
8. Balance del nodo			-0.7					-0.6
9. Transporte			+0.4					
10. Balance del nodo		+0.3		+0.2				
11. Transporte				-0.1	-0.1	-0.1		
12. Momentos finales	+92.1	-115.9	+115.9	-186.4	-19.4	+205.6	0	-9.7

(c) Tabla de distribución de momento



(h) Momentos finales en los extremos de los elementos (f-ft)

FIG. 16.13

continúa

Solución

Este marco fue analizado previamente analizada en el Ejemplo 15.8 por el método de la pendiente-deflexión.

Factores de Distribución. En el nodo C.

$$DF_{CA} = \frac{\left(\frac{800}{20}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.429 \quad DF_{CD} = \frac{\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.571$$

$$DF_{CA} + DF_{CD} = 0.429 + 0.571 = 1$$

Comprobación

En el nodo D,

$$DF_{DB} = \frac{\left(\frac{800}{20}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.3$$

$$DF_{DC} = \frac{\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.4$$

$$DF_{DE} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)}{\left(\frac{800}{20}\right) + \left(\frac{1600}{30}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1600}{30}\right)} = 0.3$$

$$DF_{DB} + DF_{DE} + DF_{DC} = 2(0.3) + 0.4 = 1$$

Comprobación

En el nodo E,

$$DF_{ED} = 1$$

Momentos de Empotre. Usando las expresiones para los momentos de empotre, obtenemos,

$$FEM_{AC} = +100 \text{ k-ft} \quad FEM_{CA} = -100 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DE} = +150 \text{ k-ft} \quad FEM_{DC} = FEM_{ED} = -150 \text{ k-ft}$$

Distribución de Momentos. El proceso para la distribución de momentos se realiza en forma tabular, como se muestra en la Fig. 16.13(b). La tabla, la cual es similar en la forma a aquellas usada previamente para el análisis de vigas continuas, tiene una columna para cada extremo del elemento de la estructura. Tenga en cuenta que todos los extremos de los elementos, los cuales están conectados al mismo nodos, están agrupados, de modo que cualquier momento no balanceado en el nodo puede ser distribuido convenientemente entre los elementos conectado a él. Además, cuando las columnas de dos extremos de un elemento no pueden ser localizada adyacentes una de la otra, entonces una flecha encima conectando a las columnas para los extremos de los elementos puede servir de recordatorio para realizar trasladar momentos de un extremo del elemento a otro. En la Fig. 16.13(b), la flecha se usa entre las columnas de los extremos del elemento BD. Esta flecha indica que un momento distribuido en el extremo D del elemento BD induce un momento de transporte en el extremo más alejado B. Tenga en cuenta, sin embargo, que no se puede transportar del extremo B al extremo D del elemento BD, porque el nodo B, el cual está empotrado, no será liberado durante el procedo de distribución de momentos.

La distribución de momentos se realiza de la misma manera que la discutida para vigas continuas. Tenga en cuenta que cualquier momento no balanceado en el nodo D deberá de ser distribuido a los extremos D de los tres elementos conectados a él de acuerdo con sus factores de distribución.

Momentos Finales. Los momentos finales en los extremos de los elementos se obtiene sumando todos los momentos en cada una de las columnas de la tabal de distribución de momentos. Tenga en cuenta que los momentos finales, los cuales están registrados en la última línea de la tabal de distribución de momentos se muestran en la Fig. 16.13 (c), satisface las ecuaciones de equilibrio de momento en el nodo C y D del marco.

Respuesta

16.5 Análisis de Marcos Con Desplazamiento Lateral Permitidos

Hasta ahora, hemos considerado el análisis de estructuras con desplazamientos en los nodos donde eran cero o desconocidos (como en el caso de los apoyos con asentamientos). En esta sección aplicaremos el método de análisis de distribución de momentos cuyos nodos pueden presentar tanto rotaciones como traslaciones que no han prescrito. Como se discutió en la Sección 15.6.4, tales marcos son comúnmente llamados como marcos con desplazamientos laterales permitidos.

Considere, por ejemplo, el marco rectangular de la Fig. 16.14(a). La configuración deformada del marco para una carga arbitraria se muestra en la figura con una escala exagerada. Mientras los nodos empotrados A y B del marco están completamente restringido contra la rotación además de la translación, los nodos C y D están libres a la rotación y translación. Sin embargo, debido a que los elementos del marco se supone que son indeformables axialmente y las deformaciones se suponen pequeñas, los nodos C y D se desplazarán la misma cantidad, Δ , en la dirección horizontal, como se muestra en la figura.

El análisis de la distribución de momentos de tal marco, con desplazamientos laterales permitidos, se desarrolla en dos partes. En la primera parte, el desplazamiento lateral permitido del marco se previene agregando un patín imaginario en la estructura, como se muestra en la Fig. 16.14(b). Las cargas externas están aplicadas en el marco y los momentos en los extremos del elemento se calculan aplicando el proceso de distribución de momentos de mansera usual. Con los momentos en los extremos conocidos, la fuerza retención (reacción) R que se desarrolla en el apoyo imaginario se evalúa aplicando las ecuaciones de equilibrio.

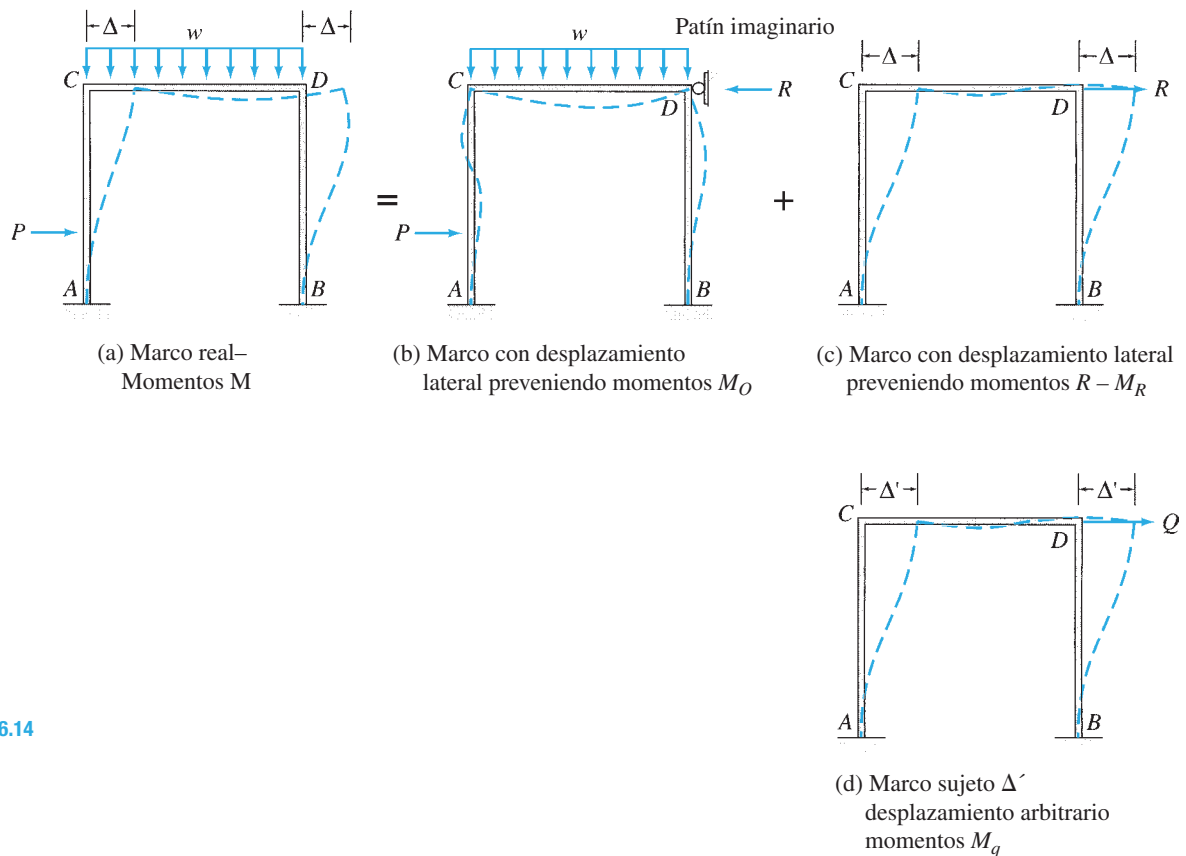


FIG. 16.14

En la segunda parte del análisis, el marco se sujeta a la fuerza R , la cual es aplicada en la dirección opuesta, como se muestra en la Fig. 16.14(c). los momentos desarrollados en los extremos de los elementos se determinan y superponen a los momentos calculados en la primera parte (Fig. 16.14(b)) para obtener los momentos en los extremos de los elementos del marco real. (fig. 16.14(a)). Si, M , M_o y M_R indican, respectivamente, los momentos en los extremos de los elementos del marco real, el marco con desplazamiento lateral restringido, y el marco sujeto a R , entonces podemos escribir (verla Fig. 16.14(a), (b), y (c))

$$M = M_o + M_R \quad (16.27)$$

Una pregunta importante que surge en la segunda parte del análisis, es como determinar los momentos en los extremos de los elementos M_R que se desarrollan cuando el marco sufre desplazamiento lateral bajo la acción de R , (fig. 16.14(c)). Debido a que el método de distribución de momentos no puede ser usado directamente para calcular los momentos debido a la carga lateral desconocida R , empleamos un enfoque directo en el cual el marco está sujeto a una traslación arbitraria conocida en el nodo Δ' generada por la carga desconocida Q actuando en la ubicación y en la dirección de R , como se muestra en la Fig. 16.14(d). de la traslación desconocida en el nodo, Δ' , determinamos la traslación relativa entre los extremos de cada elemento, y calculamos los momentos de empotre de los elementos de la misma manera en que se realizó previamente en el caso de los apoyos con asentamientos. Los momentos de empotre obtenidos de esta manera son distribuidos mediante el proceso de distribución para determinar los momentos en los extremos de los elementos M_o generado por la carga un desconocida Q . Una vez habiendo determinado los momentos en los extremos de los elementos M_o , se evalúa la magnitud de Q aplicando las ecuaciones de equilibrio.

Con la carga Q y los correspondientes momentos M_o ya conocidos, los momentos deseados M_R debidos a la carga lateral R se pueden determinar fácilmente multiplicando M_o por la relación R/Q ; es decir,

$$M_R = \left(\frac{R}{Q}\right) M_o \quad (16.28)$$

Sustituyendo la Ec. (16.28) en la Ec. (16.27), podemos expresar los momentos en los extremos del marco real (Fig. 16.14(a)) como

$$M = M_o + \left(\frac{R}{Q}\right) M_o \quad (16.29)$$

Este método de análisis se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 16.8

Determine los momentos en los extremos del marco en la Fig. 16.15(a) usando el método de distribución de momentos.

Solución

Este marco ya fue analizado en el Ejemplo 15.10 mediante el método de la pendiente-deflexión.

continúa

Factores de Distribución. En el nodo C ,

$$DF_{CA} = DF_{CD} = \frac{I/7}{2(I/7)} = 0.5$$

En el nodo A ,

$$DF_{DC} = \frac{I/7}{(I/7) + (I/5)} = 0.417$$

$$DF_{DB} = \frac{I/5}{(I/7) + (I/5)} = 0.583$$

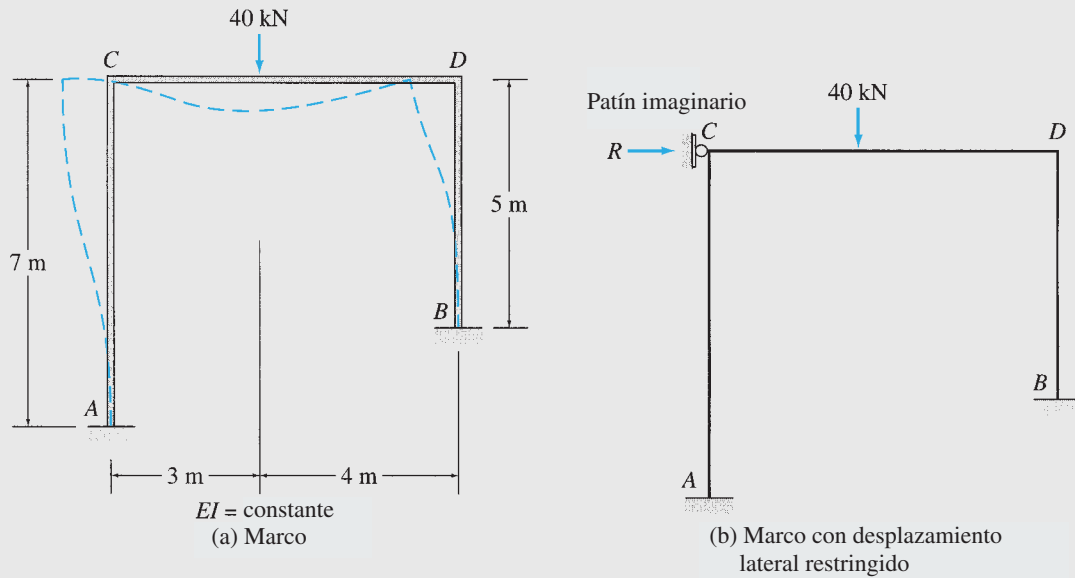
$$DF_{DC} + DF_{DB} = 0.417 + 0.583 = 1$$

Comprobación

Parte I: Desplazamiento Lateral Restringido. En la primera parte del análisis, el desplazamiento lateral del marco se restringe agregando un patín en el nodo C , como se muestra en la fig. 16.15(b). Asumiendo que los nodos C y D de este marco están anclados contra la rotación, calculamos los momentos de empotre debido a las cargas laterales como

$$FEM_{CD} = +39.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad FEM_{DC} = -29.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$$

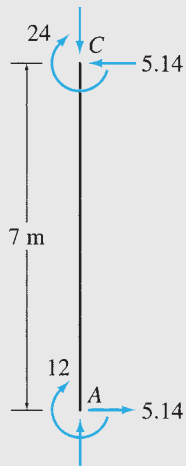


AC	CA	CD	DC	DB	BD
	0.5	0.5	0.417	0.583	
		+39.2	-29.4		
	-19.6	-19.6	+12.3	+17.1	
-9.8		+6.2	-9.8		+8.6
	-3.1	-3.1	+4.1	+5.7	
-1.6		+2.1	-1.6		+2.9
	-1.1	-1.1	+0.7	+0.9	
-0.6		+0.4	-0.6		+0.5
	-0.2	-0.2	+0.3	+0.3	
-12	-24	+23.9	-24	+24	+12

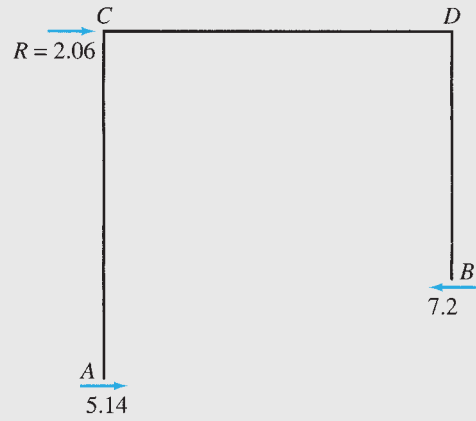
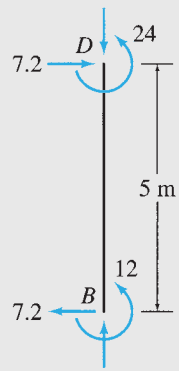
(c) Momentos en los extremos de los elementos con desplazamiento lateral restringido momentos M_O

FIG. 16.15

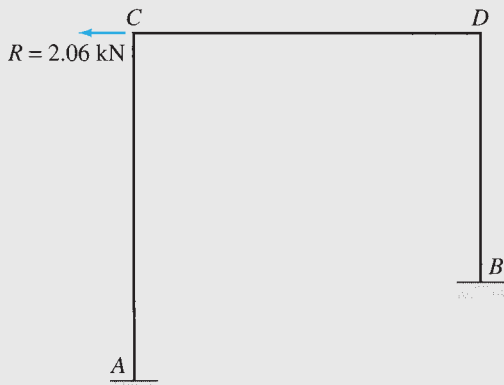
continúa



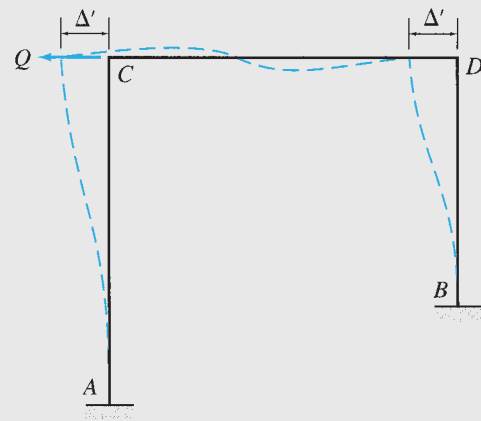
(d)



(e)



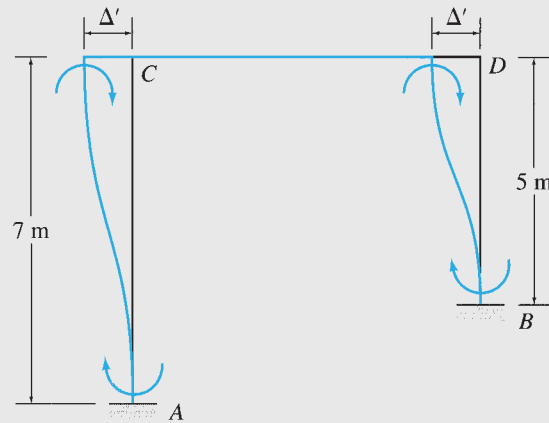
(f) Marco sujeto a $R = 2.06$ kN
—momentos M_R



(g) Marco sujeto a una traslación arbitraria
 Δ' —momentos M_Q

FIG. 16.15 (cont.)

continúa


 (h) Momentos de empotre debido a la traslación desconocida Δ'

AC	CA	CD	DC	DB	BD
	0.5	0.5	0.417	0.583	
-50	-50	+25	+40.9	-98	-98
+12.5	+25	+20.5	+12.5	+57.1	+28.6
-5.2	-10.3	-10.3	-5.2	-7.3	-3.7
+0.7	+1.3	+1.3	+2.2	+3	+1.5
-0.3	-0.6	-0.6	-0.3	-0.4	-0.2
	+0.1	+0.1	+0.1	+0.2	
-42.3	-34.5	+34.3	+45.4	-45.4	-71.8

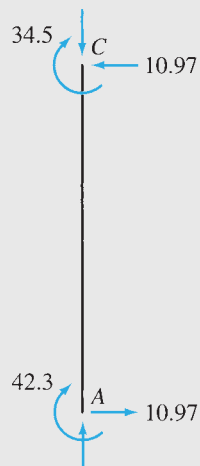
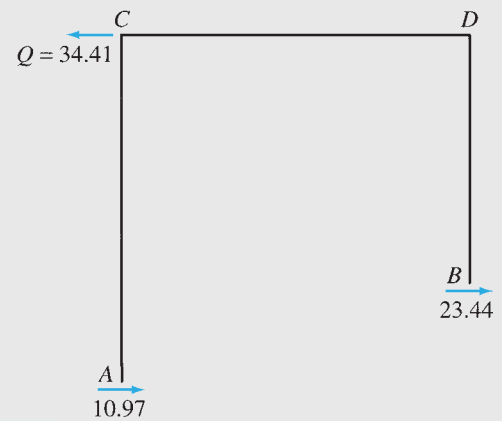
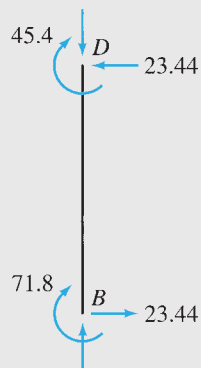
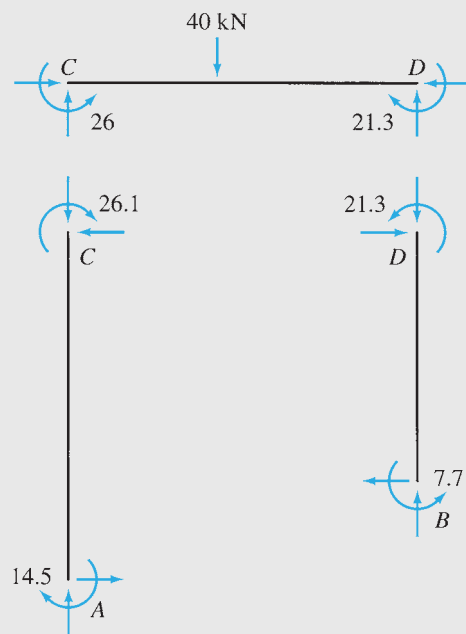
 (i) Momentos de empotre debido a la traslación desconocida $\Delta' - M_Q$


FIG. 16.15 (cont.)


 (j) Evaluación de Q

continúa



(k) Momentos de empotre reales (kN·m)

FIG. 16.15 (cont.)

La distribución de momentos de estos momentos de empotre se realiza, como se muestra en tabla de distribución de momentos en la Fig. 16.15(c), para determinar los momentos en los extremos de los elementos M_o en el marco con desplazamientos laterales restringidos.

Para evaluar la fuerza de restricción R que se desarrolla en el apoyo de patín imaginario, primero calculamos los cortantes en los extremos inferiores de las columnas AC y BD considerando el equilibrio de momento de los cuerpos libres de las columnas mostradas en la Fig. 16.15(d). Después, considerando el equilibrio de fuerzas horizontales actuando en el marco completo, (Fig. 16.15(e)), determinamos la fuerza de restricción R como

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad R + 5.14 - 7.2 = 0$$

$$R = 2.06 \text{ kN} \rightarrow$$

Tenga en cuenta que la fuerza de restricción actúa a la derecha, indicando que si el patín no tuviera la placa, el marco se habría desplazado al izquierda.

Parte II: Desplazamiento Lateral Permitido. Debido a que el marco real no está soportado en el nodo C por un patín, neutralizaremos el efecto de la fuerza de restricción aplicando la carga lateral $R = 2.06 \text{ kN}$ en la dirección opuesta (es decir, a la izquierda) del marco, como se muestra en la Fig. 16.15(f). Como se discutió previamente, si el método de la distribución de momentos no se puede aplicar directamente para calcular los momentos en los extremos de los elementos M_o debido a la carga lateral $R = 2.06 \text{ kN}$, usamos un enfoque indirecto en el cual el marco está sujeto a una traslación arbitraria desconocida Δ' generado por la carga desconocida Q actuando en la ubicación y en la dirección de R , como se muestra en la Fig. 16.15(h). suponiendo que los nodos c y D del marco están anclados contra la rotación, como se muestra en la Fig. 16.15(h), los momentos de empotre debido a la traslación Δ' están dados por

$$\text{FEM}_{AC} = \text{FEM}_{CA} = -\frac{6EI\Delta'}{(7)^2} = -\frac{6EI\Delta'}{49}$$

$$\text{FEM}_{BD} = \text{FEM}_{DB} = -\frac{6EI\Delta'}{(5)^2} = -\frac{6EI\Delta'}{25}$$

$$\text{FEM}_{CD} = \text{FEM}_{DC} = 0$$

En la cual el signo negativo ha sido asignado a los momentos de empotre de las columnas, porque estos momentos deben actuar en la dirección contraria a las manecillas del reloj, como se muestra en la Fig. 16.15(h).

continúa

En lugar de suponer arbitrariamente un valor numérico de Δ' para calcular los momentos de empotre, es más conveniente suponer un valor numérico para uno de los momentos empotre, evalúe Δ' de las expresiones de los momentos de empotre, y use los valores de Δ' obtenidos para calcular los momentos de empotre restantes. Por lo tanto, suponemos arbitrariamente el momento de empotre FEM_{AC} como $-50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, es decir,

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = -\frac{6EI\Delta'}{49} = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Resolviendo para Δ' , obtenemos

$$\Delta' = \frac{408.33}{EI}$$

Sustituyendo los valores de Δ' en las expresiones para FEM_{BD} y FEM_{DB} determinamos los valores consistentes de estos momentos como

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = -\frac{6(408.33)}{25} = -98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Los momentos de empotre anteriores se distribuyen mediante procesos naturales de distribución, como se muestra en la Fig. 16.15 (i), para determinar los momentos en los extremos de los elementos M_Q generadas por la aun carga desconocida Q .

Para evaluar la magnitud de Q que corresponda a estos momentos en los extremos de los elementos, primero calculamos los cortantes en los extremos inferiores de las columnas considerando su ecuación de equilibrio de momentos (Fig. 16.15(j)) y aplicando la ecuación de equilibrio horizontal en la dirección del marco completo.

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0$$

$$-Q + 10.97 + 23.44 = 0$$

$$Q = 34.41 \text{ kN}$$

La cual indica que los momentos M_Q calculados en la Fig. 16.15(i) son generados por la carga lateral $Qk = 43.41 \text{ kN}$. Debido a que los momentos son linealmente proporcionales a la magnitud de la carga, los momentos deseados M_R debido a la carga lateral $R = 2.06 \text{ kN}$ deben ser iguales a los momentos M_Q . (Fig. 16.15(i)) multiplicando la relación $R/Q = 2.06/34.41$.

Momentos en los Extremos del Elementos Real. Los momentos en los extremos reales de los elementos, M , se pueden determinar sumando algebraicamente los momentos en los extremos de los elementos M_Q calculados en la Fig. 16.15(c) y $2.06/34.41$ veces los momentos en los extremos de los elementos M_Q calculados en la Fig. 16.15(i). Por lo tanto

$$M_{AC} = -12 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(-42.3) = -14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CA} = -24 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(-34.5) = -26.1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CD} = 23.9 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(34.3) = 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{DC} = -24 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(45.4) = -21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

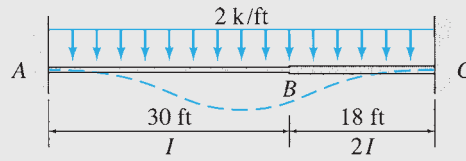
$$M_{DB} = 24 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(-45.4) = 21.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BD} = 12 + \left(\frac{2.06}{34.41}\right)(-71.8) = 7.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Respuesta}$$

Estos momentos está mostrados en la Fig. 16.15(k).

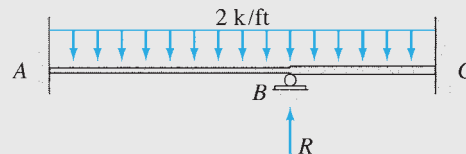
Ejemplo 16.9

Determine las reacciones de la viga no prismática mostrada en la Fig. 16.16(a) usando el método de distribución de momentos.



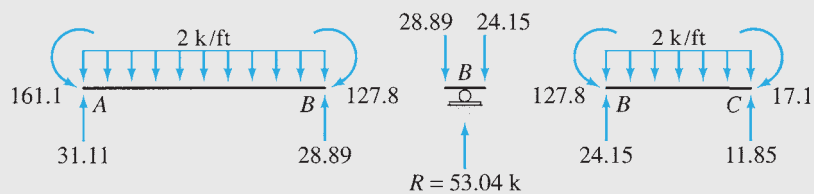
$E = \text{constante}$

(a) Viga

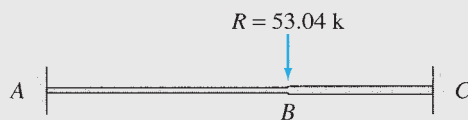


	0.231	0.769	
+150	-150	+ 54	- 54
	+ 22.2	+ 73.8	
+ 11.1			+ 36.9
+161.1	-127.8	+127.8	- 17.1

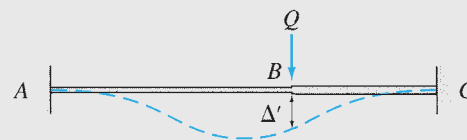
(b) Viga de traslación de nodo restringido – momento M_O



(c) Evaluación de fuerza de resistente R



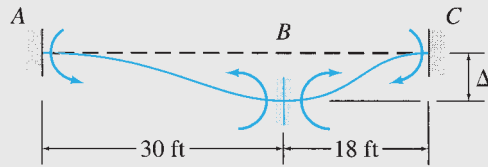
(d) Viga sujeta a $R = 53.04$ momento M_g



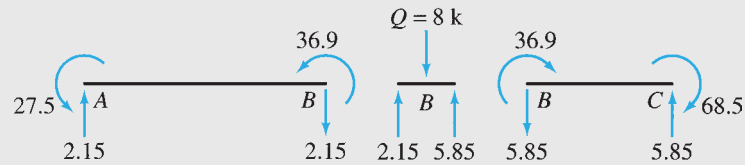
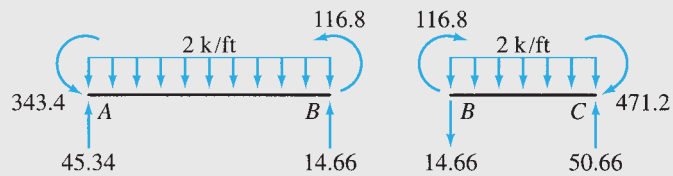
(e) Viga sujeta a una traslación arbitraria – momento M_g

FIG. 16.16

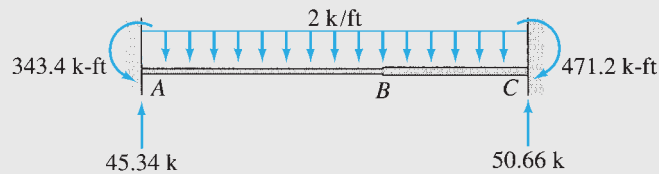
continúa


 (f) Fixed-End Moments Due to Known Translation Δ'

	0.231	0.769	
+18	+18	-100	-100
+ 9.5	+18.9	+ 63.1	+ 31.5
+27.5	+36.9	- 36.9	- 68.5

 (g) Member End Moments Due to Known Translation Δ' — M_Q Moments

 (h) Evaluation of Q


(i) Actual Member End Moments (k-ft)



(j) Support Reactions

FIG. 16.16 (cont.)

Solución

Debido a la relación de la rigidez y el transporte obtenidos en la Sección 16.1 así como las expresiones de los momentos de empotre dada en la parte interior de la contraportada del libro son validas solo para elementos prismáticos, analizaremos las vigas no prismáticas como si fueran elementos compuestos por dos elementos prismáticos, AB , BC , rígidamente conectados en el nodo B . Tenga en cuenta que el nodo B está libre a la rotación así como a la traslación en la dirección vertical, como se muestra en la Fig. 16.16(a).

Factores de Distribución. Los factores de distribución en el nodo B son

$$DF_{BA} = \frac{I/30}{(I/30) + (2I/18)} = 0.231$$

$$DF_{BC} = \frac{2I/18}{(I/30) + (2I/18)} = 0.769$$

Parte I: Traslación de Nodos Restringida. En la primera parte del análisis, el desplazamiento lateral del nodo B está restringido por un apoyo de patín imaginario, como se muestra en la fig. 16.16(b). Los momentos de empotre debidos a la cargas externa son

$$FEM_{AB} = +150 \text{ k-ft} \quad FEM_{BA} = -150 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{BC} = +54 \text{ k-ft} \quad FEM_{CB} = -54 \text{ k-ft}$$

Se realiza la distribución de momentos de los momentos de empotre, como se muestra en la Fig. 16.16(b), para determinar los momentos de los extremos de los elementos M_o . La fuerza de restricción R se evalúa en el apoyo de patín considerando el equilibrio de los elementos AB y BC y del nodo B como se muestra en la Fig. 176.16(c). La fuerzas restante se resulta ser

$$R = 53.04 \text{ k} \uparrow$$

Parte II: Traslación de Nodos Permitida. Debido que la viga real no está apoyada por un patín en el apoyo B , neutralizamos su efecto de restricción aplicando una carga hacia abajo $R = 53.04 \text{ k}$ a la viga, como se muestra en la Fig. 16.16(d). Para determinar los momentos en los extremos de los elementos M_R debidos R , sujetamos a la viga a un desplazamiento arbitrario desconocido Δ' , como se muestra en la Fig. 16.16(e). los momentos de empotre debido a Δ' están dados por (ver la Fig. 16.16(f))

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = \frac{6EI \Delta'}{(30)^2} = \frac{EI \Delta'}{150}$$

$$FEM_{BC} = FEM_{CB} = -\frac{6E(2I) \Delta'}{(18)^2} = -\frac{EI \Delta'}{27}$$

Si suponemos arbitrariamente que

$$FEM_{BC} = FEM_{CB} = -\frac{EI \Delta'}{27} = -100 \text{ k-ft}$$

Entonces

$$EI \Delta' = 2,700$$

Y, por lo tanto,

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = \frac{2,700}{150} = 18 \text{ k-ft}$$

Estos momentos de empotre son distribuidos mediante el proceso de distribución de momentos, como se muestra en la Fig. 16.16(g), para determinar los momentos en los extremos de los elementos M_o . La carga Q en la ubicación y en la dirección de R que corresponde a estos momentos se puede ahora ya evaluar mediante las consideraciones de equilibrio de los elementos AB y BC y el nodo B , como se muestra en la Fig. 16.16(h). La magnitud de Q resulta ser

$$Q = 8 \text{ k} \downarrow$$

continúa

Por lo tanto, los momentos deseados M_R debido a la carga vertical $R = 53.04$ k (Fig. 16.16(d)) deben ser igual a los momentos M_Q (Fig. 16.16(g)) multiplicados por la relación $R/Q = 53.04/8 = 6.63$.

Momentos Reales en los Extremos del Elemento. Los momentos reales en los extremos de los elementos, M , se pueden obtener sumando algebraicamente los momentos en los extremos del elemento M_Q calculados en la Fig. 16.16(b) más 6.63 por los momentos en los extremos del elemento M_Q calculados en la Fig. 16.16(g).

$$M_{AB} = 161.1 + 6.63(27.5) = 343.4 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BA} = -127.8 + 6.63(36.9) = 116.8 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{BC} = 127.8 + 6.63(-36.9) = -116.8 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

$$M_{CB} = -17.1 + 6.63(-68.5) = -471.2 \text{ k-ft} \quad \text{Respuesta}$$

Los cortante en los extremos obtenidos aplicando las ecuaciones de equilibrio se muestran en la Fig. 16.16(i)

Reacciones en los Apoyos. Ver la Fig. 16.16(j) Respuesta

Comprobación del Equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Ejemplo 16.10

Determine los momentos en los extremos de los elementos y las reacciones del marco mostrado en la Fig. 16.17(a) usando el método de distribución de momentos.

Solución

Factores de Distribución. En el nodo C,

$$DF_{CA} = DF_{CD} = \frac{I/20}{2(I/20)} = 0.5$$

En el nodo D,

$$DF_{DC} = \frac{I/20}{(I/20) + (3/4)(I/14.42)} = 0.49$$

$$DF_{DB} = \frac{(3/4)(I/14.42)}{(I/20) + (3/4)(I/14.42)} = 0.51$$

Momentos en los Extremos del Elemento Debidos una Carga Arbitraria de Desplazamiento Lateral Δ' . Debido a que no hay cargas aplicadas a los elementos del marco, los momentos de los extremos M_Q en el marco restringido contra el desplazamiento lateral serán cero. Para determinar los momentos en los extremos M debido a la carga lateral aplicada de 30-k, sujetamos al marco a una carga arbitraria desconocida horizontal de traslación Δ' en el nodo C. La figura (16.17(b)) muestra la configuración deformada cualitativa del marco con todos los nodos anclados contra la rotación y sujeta a una desplazamiento horizontal Δ' en el nodo C. El procedimiento para la construcción de tales configuraciones deformadas se discutió en la Sección 15.5. Tenga en cuenta que, dado que los elementos de marco se suponen como indeformables axialmente y que las deformaciones muy pequeñas, un extremo del elemento se puede trasladar solo en la dirección perpendicular al elemento. De la figura, podemos ver que la traslación relativa Δ_{AC} entre los extremos del elemento AC en la dirección perpendicular al elemento se puede expresar en términos de la traslación Δ' del nodo como

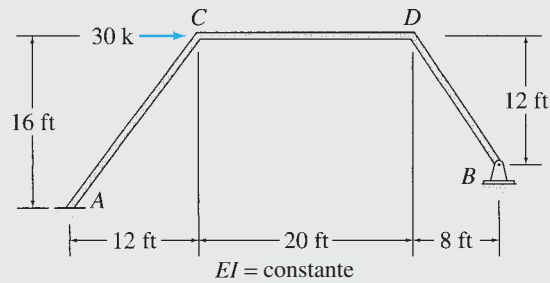
$$\Delta_{AC} = CC' = \frac{5}{4}\Delta' = 1.25\Delta'$$

continúa

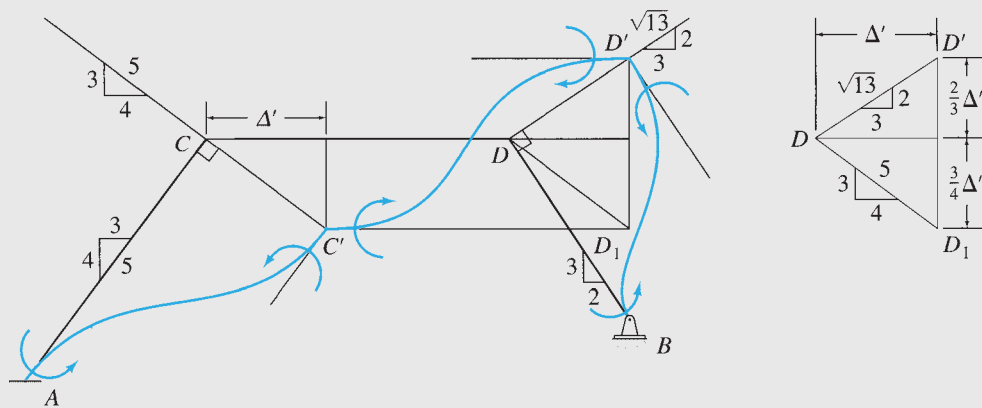
De manera similar, las traslaciones relativas de los elementos CD y BD están dadas por

$$\Delta_{CD} = D_1D' = \frac{2}{3}\Delta' + \frac{3}{4}\Delta' = .4171\Delta'$$

$$\Delta_{BD} = DD' = \frac{\sqrt{13}}{3}\Delta' = 1.202\Delta'$$



(a) Marco



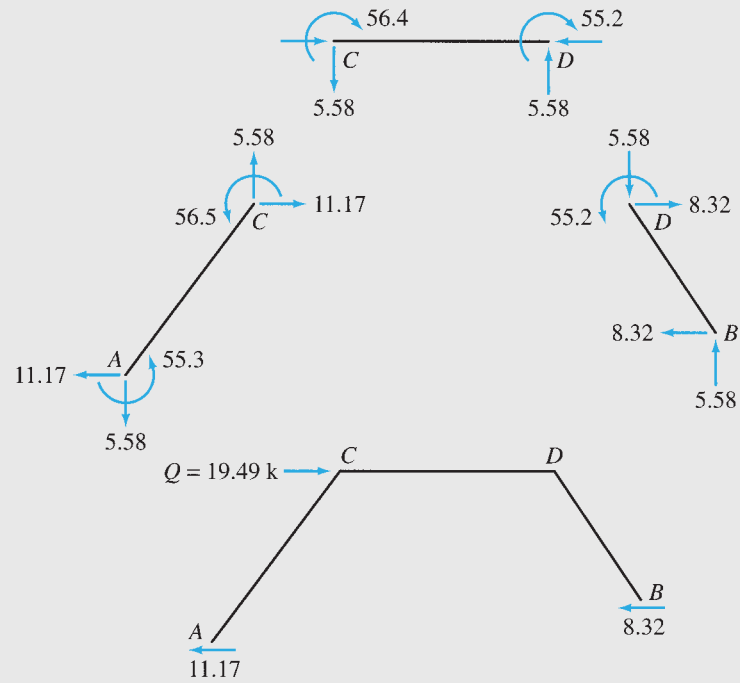
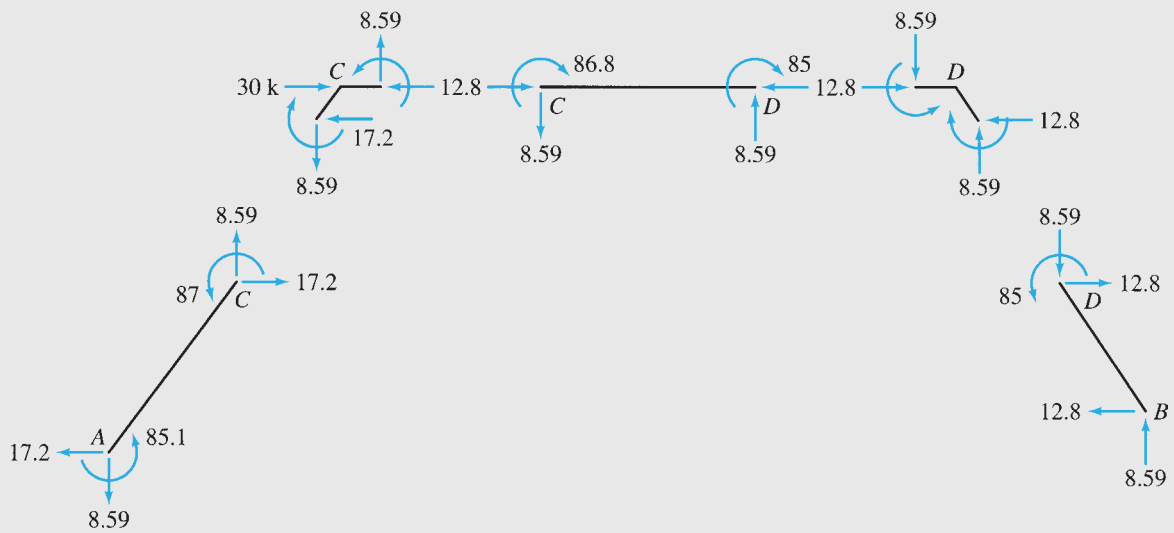
(b) Momentos de empotre debidos a una traslación arbitraria Δ'

AC	CA	CD	DC	DB	BD
	0.5	0.5	0.49	0.51	1
+54.1	+54.1	-61.3	-61.3	+100	+100
+ 1.8	+ 3.6	+ 3.6	-19	- 19.7	-100
+ 2.4	+ 4.8	+ 4.8	+23.6	+ 24.6	
- 3	- 5.9	- 5.9	- 1.2	- 1.2	
+ 0.2	+ 0.3	+ 0.3	+ 1.5	+ 1.5	
- 0.2	- 0.4	- 0.4	- 0.1	- 0.1	
			+ 0.1	+ 0.1	
+55.3	+56.5	-56.4	-55.2	+ 55.2	0

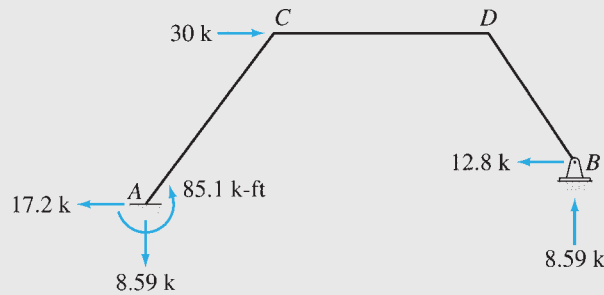
(c) Momentos en los extremos debidos a una traslación conocida Δ' — momento M_Q

FIG. 16.17

continúa


 (a) Evaluación de Q


(e) Momento y fuerzas en los extremos del elemento



(a) Reacciones en los apoyos

FIG. 16.17 (cont.)

Los momentos de empotre debido a la traslación relativa son

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = \frac{6EI (1.25\Delta')}{(20)^2}$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = -\frac{6EI (1.417\Delta')}{(20)^2}$$

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = \frac{6EI (1.202\Delta')}{(14.42)^2}$$

En la cual, como se muestra en la Fig. 16.17(b), los momentos de empotre de los elementos AC y BD son en sentido contrario de las manecillas del reloj (negativos). Si suponemos arbitrariamente que

$$FEM_{BD} = FEM_{DB} = \frac{6EI (1.202\Delta')}{(14.42)^2} = 100 \text{ k-ft}$$

Entonces

$$EI \Delta' = 2,883.2$$

$$FEM_{AC} = FEM_{CA} = 54.1 \text{ k-ft}$$

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = -61.3 \text{ k-ft}$$

Los momentos de empotre son distribuidos mediante el proceso de distribución, como se muestra en la Fig. 16.17(e), para determinar los momentos en los extremos del elemento M_Q .

Para determinar la magnitud de la carga Q que corresponde a los momentos en los extremos del elemento calculados en la Fig. 16.17(c), primero calculamos los cortantes en los extremos del elemento de la viga CD considerando el equilibrio de momento del cuerpo libre de la viga mostrada en la Fig. 16.17(d). El cortante de la viga (5.58 k) obtenidos de esta forma se aplican entonces a los cuerpos libres de los elementos inclinados AC y BD, como se muestra en la figura. Después, aplicamos las ecuaciones de equilibrio de momento a los elementos AC y BD para calcular las fuerzas horizontales actuando en el marco como (ver la Fig. 16.17(d))

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$Q - 11.17 - 8.32 = 0$$

$$Q = 19.49 \text{ k} \rightarrow$$

Momentos Reales en los Extremos del Elemento. Los momentos reales en los extremos del elemento, M , debidos a la carga lateral de 30-k se pueden evaluar multiplicando los momentos M_Q calculados en la Fig. 16.17(c) por la relación $30/Q = 30/19.49$:

$$M_{AC} = \frac{30}{19.49} (55.3) = 85.1 \text{ k-ft}$$

$$M_{CA} = \frac{30}{19.49} (56.5) = 87 \text{ k-ft}$$

continúa

$$M_{CD} = \frac{30}{19.49} (-56.4) = -86.8 \text{ k-ft}$$

$$M_{DC} = \frac{30}{19.49} (-55.2) = -85 \text{ k-ft}$$

$$M_{DB} = \frac{30}{19.49} (55.2) = 85 \text{ k-ft}$$

$$M_{BD} = 0$$

Respuesta

Fuerzas en los Extremos. Ver las Fig. 16.17(e).

Reacciones en los Apoyos. Ver la Fig. 16.17(f).

Respuesta

Comprobación del Equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio se cumplen.

Análisis de Marcos de Varios Pisos

El procedimiento anterior se puede extender a estructuras de varios grados de libertad con desplazamiento lateral permitido. Considere un marco rectangular de dos piso mostrado en la Fig. 16.18(a). El análisis de la distribución de momentos para este marco se realiza en tres partes. En la primera parte, se restringe en desplazamiento lateral e los dos pisos agregando patines en los niveles del piso, como se muestra en la Fig. 16.18(b). Los momentos en los extremos de los elementos M_O que desarrollan en este marco debido a las cargas externas se calculan mediante el proceso de distribución de momentos, y las fuerzas de restricción R_1 y R_2 en los apoyos imaginarios se evalúan aplicando las ecuaciones de equilibrio. En la segunda parte del análisis, el piso inferior del marco se permite el desplazamiento una cantidad conocida Δ'_1 mientras que el desplazamiento lateral del piso superior está restringido, como se muestra en la Fig. 16.18(c). Los momentos de empotre generados por este desplazamiento se calculan y distribuyen para obtener los momentos M_{Q1} en el extremo del elemento. Determinados los momentos en los extremos del elemento, las fuerzas Q_{11} y Q_{21} en las ubicaciones de los apoyos de patín se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio. De manera similar, en la tercera parte del análisis, en el nivel superior del marco se permite el desplazamiento una cantidad conocida Δ'_2 como se muestra en la Fig. 16.18(d), y los momentos correspondientes en los extremos del elemento M_{Q2} , y las fuerzas Q_{21} y Q_{22} , se evalúan. Los momentos en los extremos del elemento M del marco real (Fig. 16.18A)) se determinaran superponiendo los momentos calculados en las tres partes como

$$M = M_O + c_1 M_{Q1} + c_2 M_{Q2} \quad (16.30)$$

En la cual c_1 , c_2 son constantes cuyos valores se obtienen resolviendo las ecuaciones de superposición de fuerzas horizontales de los apoyos imaginarios. Superponiendo las fuerzas horizontales mostradas en la Fig. 16.18(a) a la (d) en los nodos D y F , respectivamente, obtenemos

$$-R_1 + c_1 Q_{11} - c_2 Q_{12} = 0$$

$$-R_2 - c_1 Q_{21} + c_2 Q_{22} = 0$$

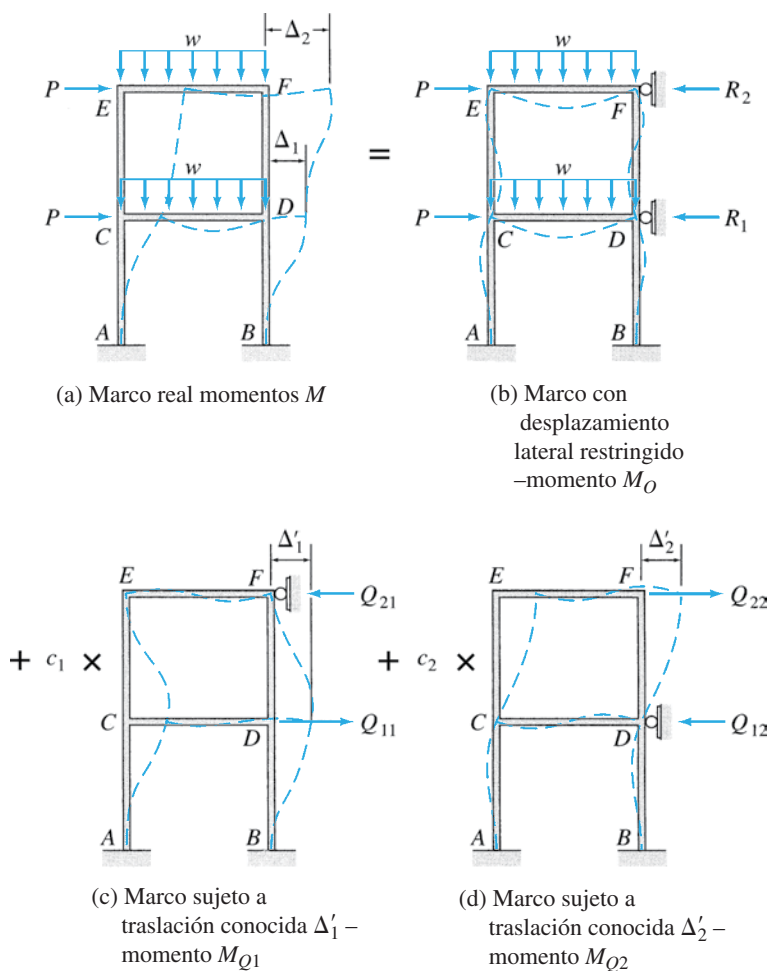


FIG. 16.18

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos los valores de las constantes c_1 , c_2 , las cuales son usadas en la Ec. (16.30) para determinar los momentos en los extremos del elemento deseado, M .

Como se indicó en la discusión anterior, el análisis de marcos por el método de distribución de momentos es bastante tedioso y requiere de mucho tiempo. Por lo tanto, los análisis de estas estructuras se realizan hoy en día con computadoras usando formulaciones matriciales del método de desplazamientos presentado en el Capítulo 17.

Resumen

En este capítulo, hemos estudiado la formulación clásica del método de los desplazamientos (rigideces), llamado método de la pendiente-deflexión, para el análisis de vigas y marcos.

Este procedimiento para el análisis de vigas continuas y de marcos sin desplazamiento lateral permitido involucra el cálculo de los momentos de empotre debido a las cargas externas suponiendo todos los nodos de la estructura están temporalmente restringidos contra la rotación y balanceando los momentos en los nodos libres por el proceso de distribución de momentos. El este proceso, cada nodo libre de la estructura, el momento sin balancear se evalúa y se distribuye a los extremos de los elementos conectados a él. Los momentos

de transporte inducidos a los extremos más lejanos de los elementos se calcula, y se repite el proceso de balanceo de los nodos y distribución de momentos hasta que los momentos desbalanceados sean demasiado pequeños para ignorarlos. Los momentos finales en los extremos de los elementos se obtienen sumando algebraicamente los momentos de empotre y todos los momentos distribuidos y de transporte en cada extremo del elemento.

Al análisis de marco con un solo grado de libertad con desplazamiento lateral permitido se desarrolla en dos partes. En la primera parte, el desplazamiento lateral se restringe agregando un patín imaginario a la estructura. Los momentos en los extremos de los elementos que se desarrollan en este marco restringido, debido a las cargas externas, se calculan por el proceso de distribución de momentos; y la fuerza de restricción R en el patín imaginario se evalúa aplicando las ecuaciones de equilibrio. En la segunda parte del análisis, para calcular los momentos en los extremos de los elementos debido a la fuerza R aplicada en la dirección opuesta, la estructura desarrolla está posibilitada para desplazarse una cantidad *desconocida* arbitraria; y los momentos de los elementos y la correspondiente fuerza Q en la ubicación de R se calcula como antes. Los momentos reales en los extremos de los elementos se determinan sumando algebraicamente los momentos calculados en la primera parte y multiplicando por R/Q los momentos de la segunda parte.

Una vez determinados los momentos en los extremos de los elementos, se pueden obtener mediante las consideraciones de equilibrio los cortantes en los extremos y las fuerzas axiales y reacciones en los apoyos.

Problemas

Sección 16.3

16.1 al 16.5 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y momento flexionante de las vigas mostradas en las Figs. P16.1-P16.5 usando el método de la distribución de momentos.

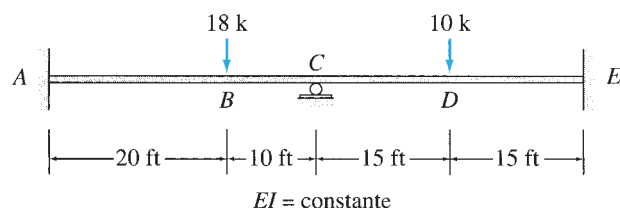


FIG. P16.1

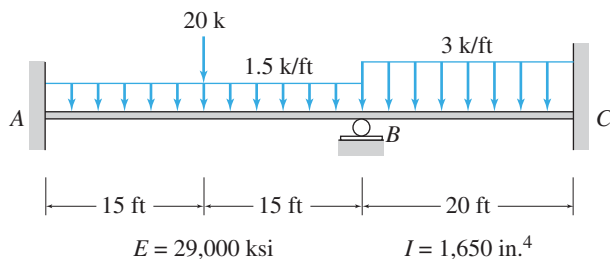


FIG. P16.2, P16.6

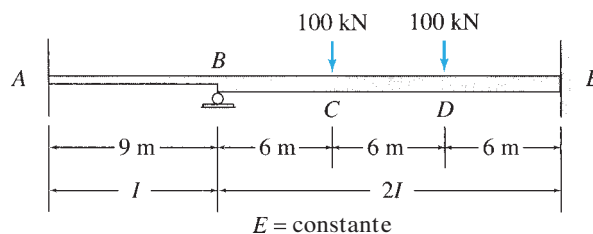


FIG. P16.3

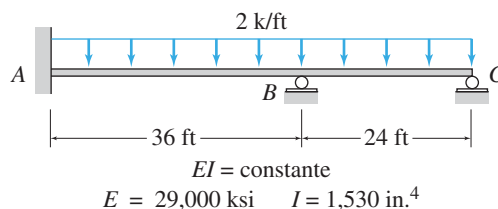


FIG. P16.4, P16.7

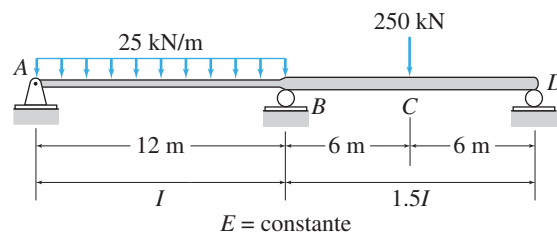


FIG. P16.5

16.6 Resuelva los Problemas 16.2 para las cargas mostrada en la Fig. P16.2 y el asentamiento de $\frac{1}{2}$ in en el apoyo B.

16.7 Resuelva los Problemas 16.4 para las cargas mostrada en la Fig. P16.4 y el asentamiento de 1 in en el apoyo B y de $\frac{1}{4}$ in en C.

16.8 al 16.14 Determine las reacciones y dibuje los diagramas de cortante y momento flexionante de las vigas mostrada en las Figs. P16.8-P16.14 usando el método de la distribución de momentos.

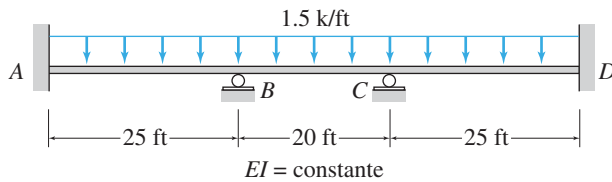


FIG. P16.8

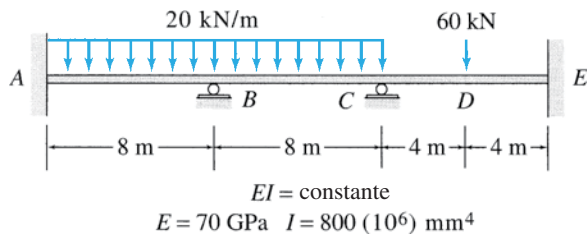


FIG. P16.9, P16.15

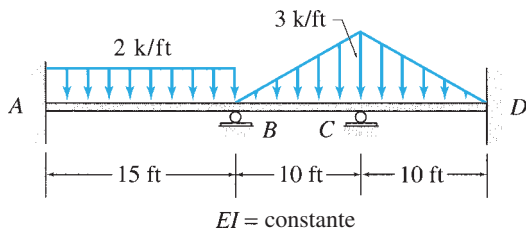


FIG. P16.10

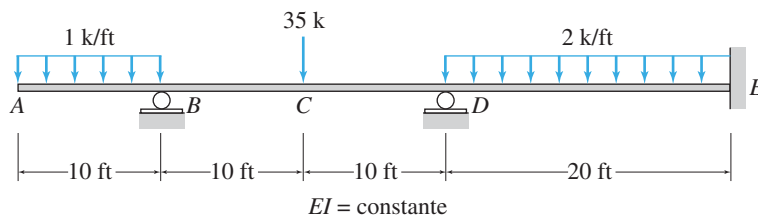


FIG. P16.11

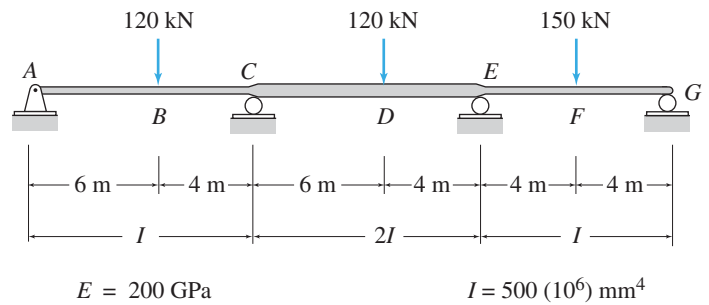


FIG. P16.12, P16.16

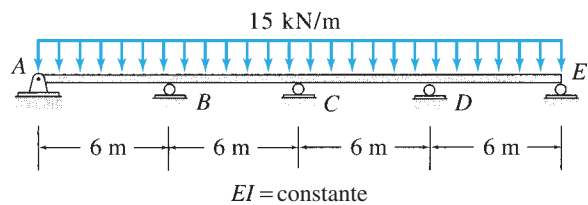


FIG. P16.13

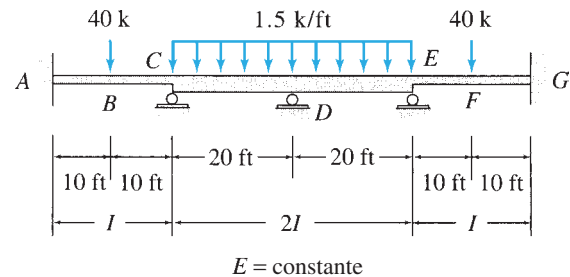


FIG. P16.14

16.15 Resuelva el Problema 16.9 para la carga mostrada en la Fig. 16.19 y el asentamiento de 25 mm en el apoyo C.

16.16 Resuelva el Problema 16.12 para la carga mostrada en la Fig. 16.12 y el asentamiento de 10 mm en el apoyo A; 65 mm en C; 40 mm en E; y 25 mm en G.

Sección 16.4

16.17 al P16.20 Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en las Figs. P16.17-P16.20 usando el método de la distribución de momentos.

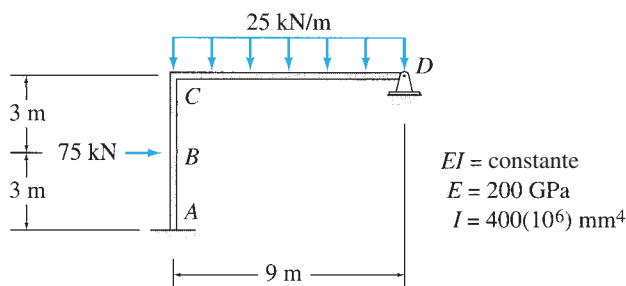


FIG. P16.17, P16.21

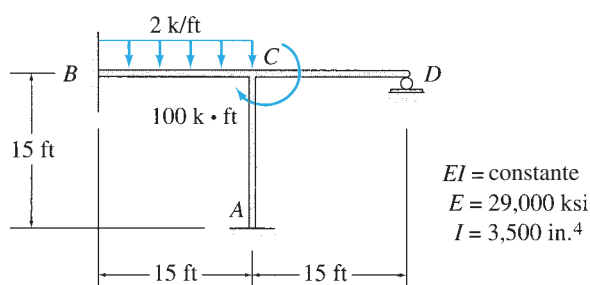


FIG. P16.18, P16.22

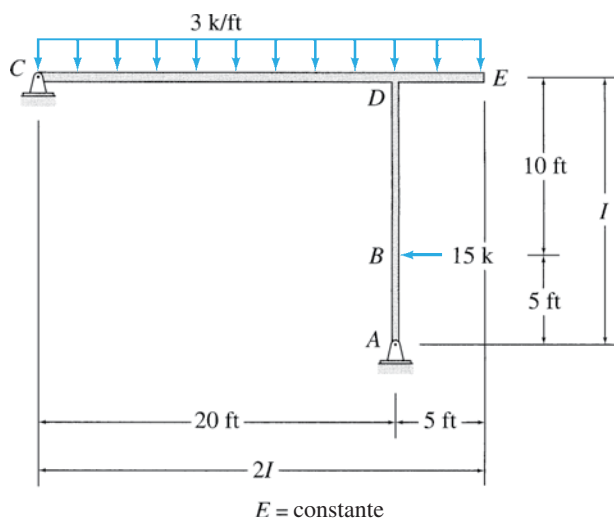


FIG. P16.19

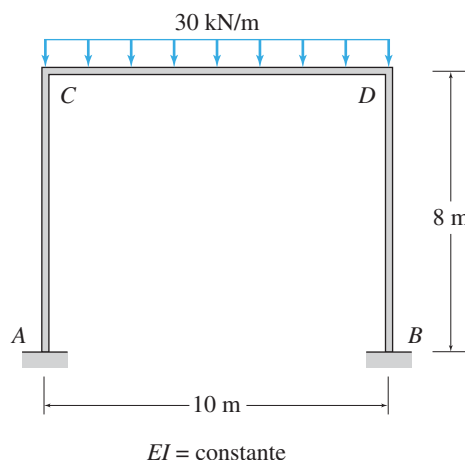


FIG. P16.20

16.21 Resuelva el Problema 16.17 para la carga mostrada en la Fig. 16.17 y el asentamiento de 50 mm en el apoyo D.

16.22 Resuelva el Problema 16.18 para la carga mostrada en la Fig. 16.18 y el asentamiento de $\frac{1}{4}$ in en el apoyo A.

16.23 Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en las Figs. P16.23 y el asentamiento de 1 in en A y de $1\frac{1}{2}$ in en D. Utilice el método de la distribución de momentos.

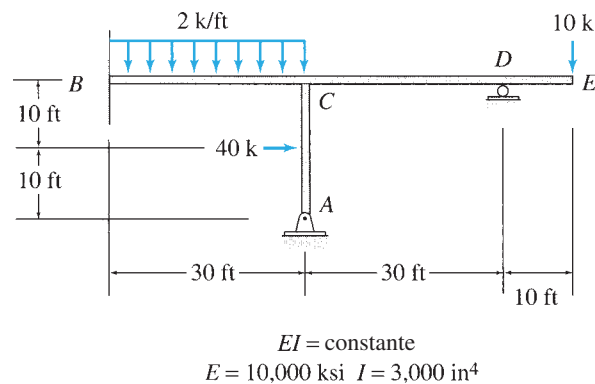


FIG. P16.23

Sección 16.5

16.24 al P16.31 Determine los momentos en los extremos del elemento y las reacciones del marco mostrado en las Figs. P16.24-P16.31 usando el método de la distribución de momentos.

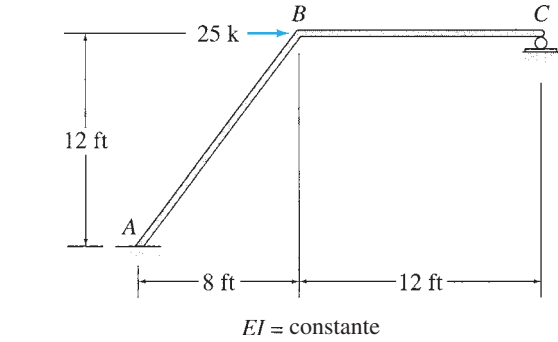
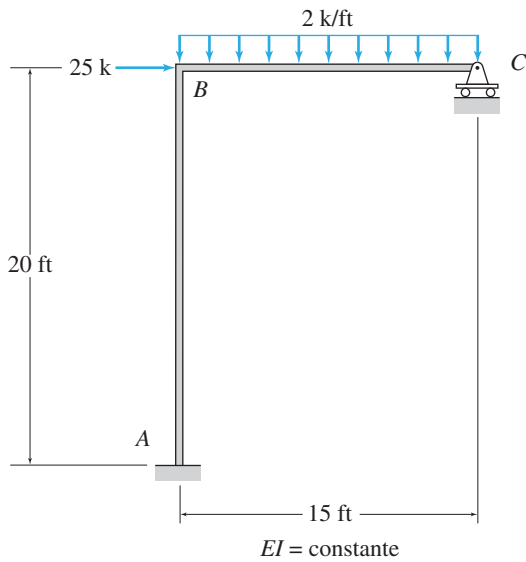


FIG. P16.24

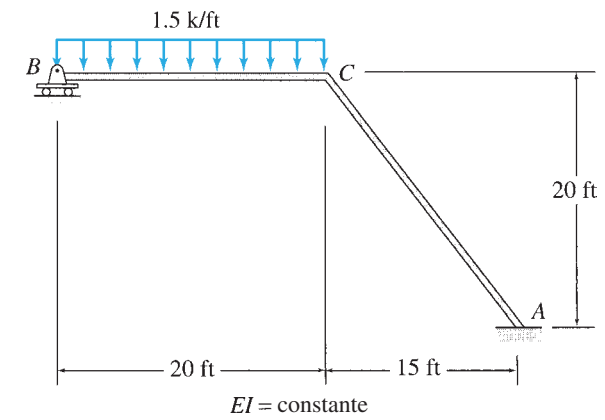
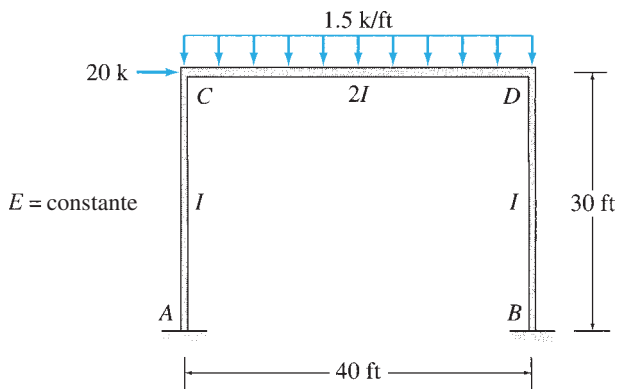


FIG. P16.25

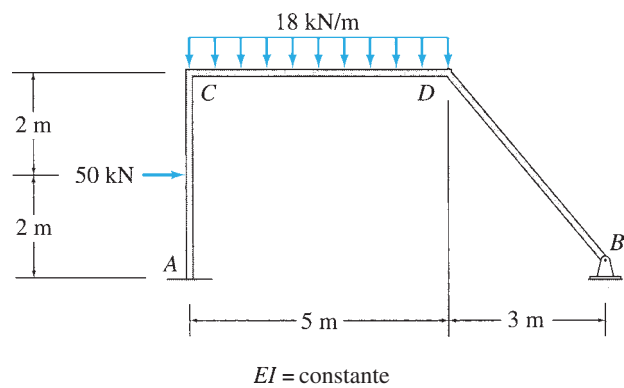
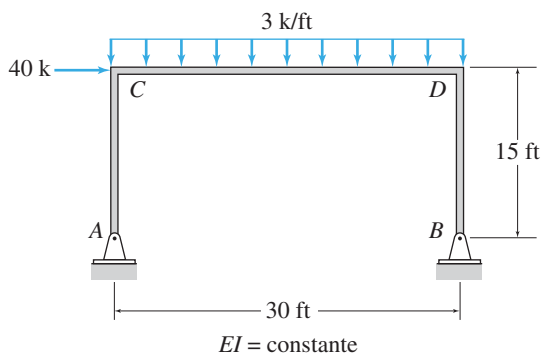


FIG. P16.29

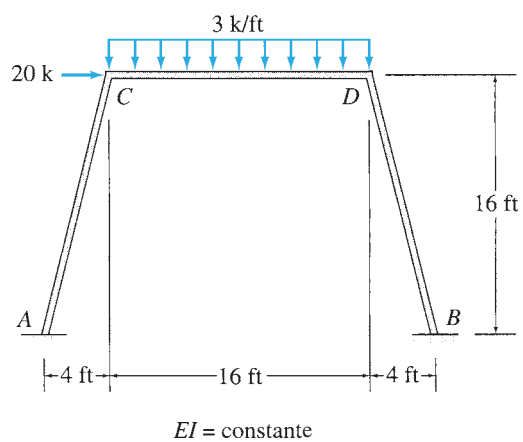


FIG. P16.30

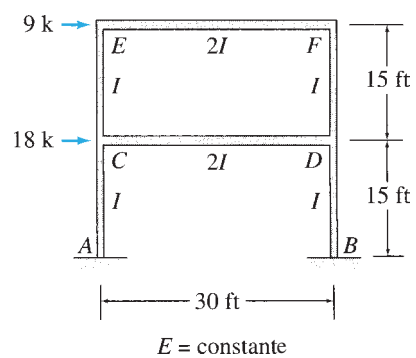
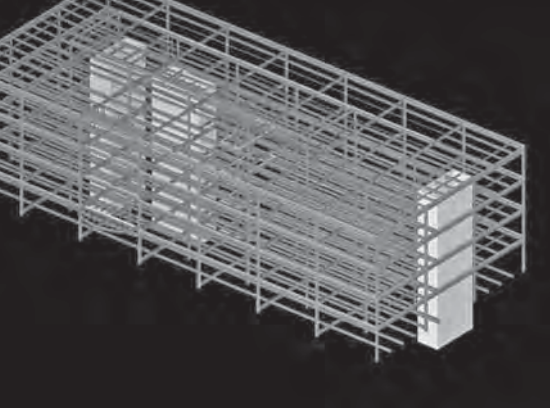


FIG. P16.31



*Modelo Computacional de un
Marco de Acero de un Edificio*

©Instituto Americano de la Construcción en Acero (AISC)

17

Introducción al Análisis Estructural Matricial

- 17.1 Modelo Analítico
- 17.2 Relaciones de la Rigidez de Elemento en Coordenadas Locales
- 17.3 Transformación de Coordenadas
- 17.4 Relaciones de la Rigidez de Elemento en Coordenadas Globales
- 17.5 Relaciones de la Rigidez de la Estructuras
- 17.6 Procedimientos de Análisis
 - Resumen
 - Problemas

En este texto hemos enfocado nuestra atención en los métodos clásico de análisis estructura. A pesar de que un método clásico es esencial para desarrollar un entendimiento del comportamiento de las estructuras y de los principios del análisis estructural, el análisis de grandes estructuras usando estos método manuales de cálculo pueden ser bastante lento. Con la disponibilidad de de microcomputadoras baratas, y poderosas, el análisis estructural en la mayoría de las oficinas de diseño se realiza rutinariamente hoy en día mediante computadoras usando programas de análisis estructural basados en métodos matriciales.

El objetivo de este capítulo es introducir al lector al emocionante y aun creciente campo de análisis estructural matricial. Sin embargo, solo se presentaran los conceptos básicos aquí. Para un estudio más detallado, el lector deberá de consultar uno de los muchos libros de texto dedicado íntegramente al tema del análisis estructural matricial.

Los métodos matriciales no involucran ningún nuevo principio fundamental; pero las relaciones fundamentales de equilibrio, compatibilidad, y relaciones de fuerzas deformación serán expresadas en ecuaciones matriciales, de modo que los cálculos numéricos se pueden realizar eficientemente en una computadora. Por lo tanto, es requisito previo estar familiarizado con las operaciones básicas de álgebra matricial para entender el análisis estructural matricial. Se presenta en el Apéndice B, para conveniencia del lector, una revisión de conceptos de álgebra matricial necesaria para la formulación métodos matriciales para el análisis estructural.

A pesar de que ambos métodos de flexibilidades (fuerzas) y rigideces (desplazamientos) se pueden expresar en forma matricial, el método de las rigideces es más sistemático y se puede implementar más fácilmente en las computadoras. Por lo tanto, la mayoría de los programas comerciales de

computadora para análisis estructural están basados en el método de las rigideces. En este capítulo, solo consideraremos el método matricial de rigideces (desplazamientos) para el análisis estructural. Este método se puede usar también para analizar estructuras estáticamente determinadas además de las estructuras indeterminadas.

Empezaremos por discutir el proceso de preparación para el modelo analítico de la estructura por analizar. Además, definiremos el sistema de coordenadas globales y locales y explicaremos el concepto de grados de libertad. Después obtendremos las relaciones de fuerza-deformación en coordenadas locales. Consideraremos la transformación de las fuerzas en los extremos del elemento y de desplazamientos en los extremos de coordenadas locales a globales y viceversa, y desarrollaremos las relaciones de rigidez del elemento de coordenadas globales. Formularemos las relaciones de rigidez de la estructura completa combinando las relaciones de rigidez del elemento y, finalmente, desarrollaremos un procedimiento paso a paso para el análisis de armaduras, vigas continuas, y marcos por el método de las rigideces.

17.1 Modelo Analítico

En el método de análisis matricial de rigideces, la estructura está considerada ser un conjunto de elementos rectos conectados en sus extremos por nodos. *Un elemento está definido como la parte de la estructura por la cual las relaciones de fuerza-desplazamientos a ser usadas en el análisis son válidas.* En otras palabras, dados los desplazamientos en los extremos del elemento, uno debería de ser capaz de determinar las fuerzas y momentos en sus extremos usando las relaciones de fuerza-desplazamiento. Tales relaciones para elementos prismáticos serán obtenidas en la siguiente sección. *Un nodo está definido como una parte de la estructura de tamaño infinitesimal en la cual los extremos de los elementos están conectados.* Los elementos y nodos de la estructura se les conoce como *elementos* y *nodos*, respectivamente.

Antes de proceder con el análisis, se debe de preparar un modelo analítico. Este modelo se presenta por una diagrama de líneas de la estructura, en la cual los nodos y elementos están definidos mediante números. Considere, por ejemplo, el marco mostrado en la Fig. 17.1(a). El modelo analítico del marco se muestra en la Fig. 17.1(b), en la cual los números de los nodos están encerrados en círculos para distinguirlos de los números de los elementos, los cuales están encerrados en rectángulos. Como se mostró en esta figura, el marco es considerado está formado por cuatro elementos y cinco nodos para propósito del análisis. Tenga en cuenta que, debido a que las relaciones de fuerza-desplazamiento de los elementos usadas en el análisis son válidas solo para elementos prismáticos, las columnas verticales del marco han sido subdivididas en os elementos, cada uno con propiedades constantes de sección transversal (I y A) a lo largo de su longitud.

Sistema de Coordenadas Globales y Locales

En el método de las rigideces, la geometría general y el comportamiento de la estructura se descrito con referencia a un *sistema coordenado global* (o *estructural*) cartesiano o rectangular. El sistema global coordenado usado

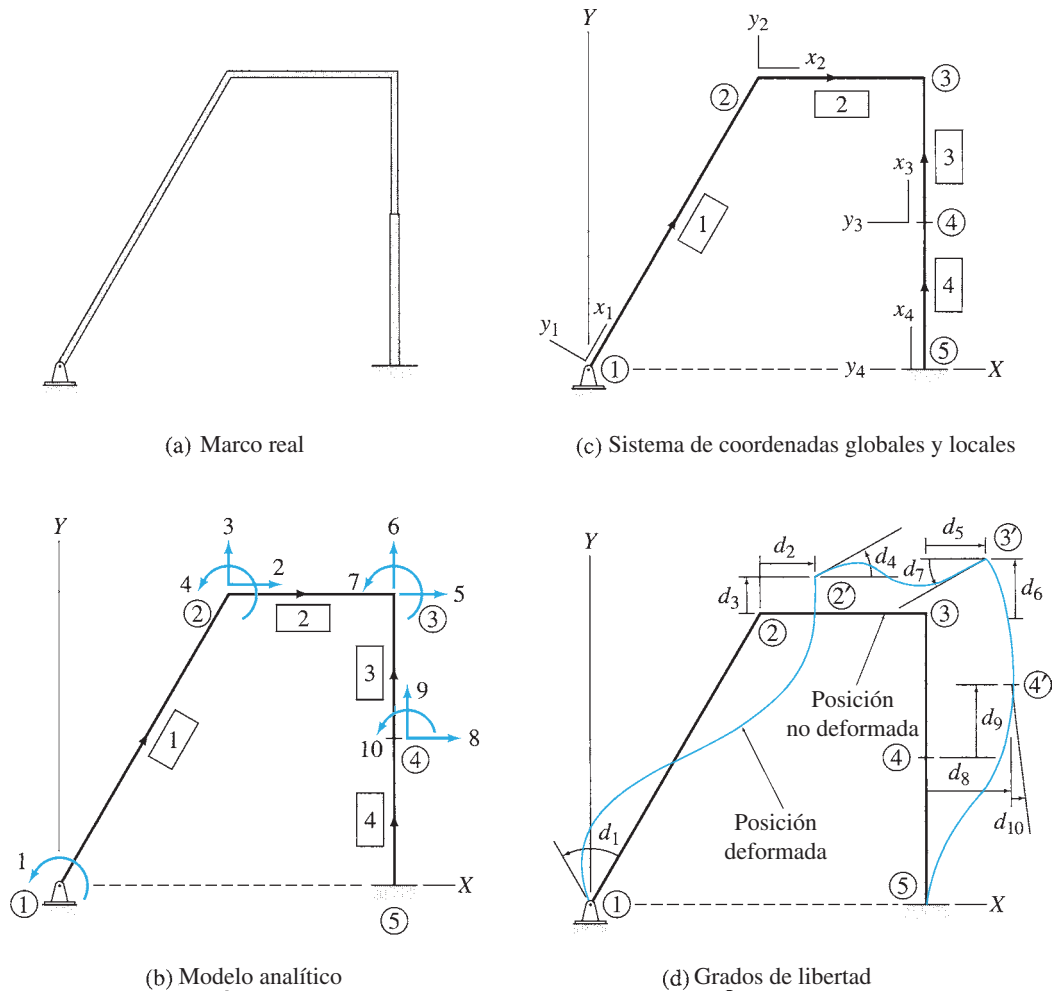


FIG. 17.1

en este capítulo es el sistema XYZ de la mano derecha, con la ubicación del plano estructura en plano XY , como se muestra en la Fig. 17.1(b).

Dado que es usualmente conveniente obtener las relaciones básicas de fuerza-desplazamiento en términos de fuerzas y desplazamientos en la dirección a lo largo y perpendicular al elemento, se define un *sistema coordenado local (o de elemento)* para cada elementos de la estructura. El origen del sistema de coordenadas locales XYZ para un elemento se puede ubicar arbitrariamente en uno de los extremos del elemento, con el eje x dirigido a lo largo del eje centroidal del elemento. La dirección positiva del eje y se elige de modo que el sistema coordenado sean de la mano derecha, con el eje local z apuntado en la dirección positiva del eje global Z . En la Fig. 17.1(b), la dirección positiva del eje x para cada elemento está indicada dibujando una flecha a lo largo de cada elemento en el diagrama de líneas de la estructura. Por ejemplo, esta figura indica que el origen del sistema de coordenadas locales para el elemento 1 está localizada en su extremo conectada al nodo 1, con el eje x_1 dirigido del nodo 1 al nodo 2. Al nodo en el extremo del elemento con el origen del sistema de coordenadas locales está conectado se le conoce como

nodo de inicio del elemento, mientras que el nodo adyacente en el extremo opuesto se llama *nodo final*. Por ejemplo, en la Fig. 17.1(b), el elemento 1 empieza en el nodo 1 y termina en el nodo 2, mientras que el elemento 2 empieza en el nodo 2 y termina en el nodo 3, y así sucesivamente. Una vez que el eje local x ha sido definido para un elemento, el correspondiente eje y se puede establecer aplicando la regla de la mano derecha. El eje local y obtenido para los elementos del marco en consideración se muestra en la Fig. 17.1(c). *Tenga en cuenta que para cada elemento, si apuntamos el dedo índice de nuestra mano derecha de la dirección de eje x , y el dedo medio en la dirección del eje y , entonces el pulgar apuntará dirección de nuestro pulgar, fuera del plano de la página, la cual es la dirección positiva*

Grados de Libertad

Los grados de libertad de una estructura son los desplazamientos independientes (traslaciones o rotaciones) que son necesarios para una forma específica de configuración deformada de la estructura cuando está sujeta a una carga arbitraria. Considere de nuevo el marco plano de la Fig. 17.1(a). la configuración deformada del marco, para una carga arbitraria, se muestra en la Fig. 17.1(d) usando una escala exagerada. A diferencia de los métodos clásicos de análisis considerados repavimente, no es necesario despreciar las deformaciones axiales cuando se analizan los marcos por el método de rigidez matricial. De la Fig. 17.1(d), podemos ver que el nodo 1, el cual está localizado en el apoyo articulado, puede rotar, pero no puede desplazarse. Así el nodo 1 tiene solo un grado de libertad, el cual se designa como d_1 en la figura. Debido a que el nodo 2 del marco no está unido a un apoyo, los tres desplazamientos —los desplazamientos d_2 y d_3 en las direcciones X y Y , respectivamente y la rotación d_4 alrededor del eje Z —son necesarias para definir completamente su posición deformada $2'$. Por lo tanto en nodo 2 tiene tres grados de libertad. De manera similar, el nodo 3 y el nodo 3 y 4, los cuales son nodos libres, tiene tres grados de libertad cada uno. Finalmente, el nodo 5, el cual está unido al apoyo empotrado, no puede desplazarse ni rotar; por lo tanto, no tiene ningún grado de libertad. Así, el marco completo tiene un total de 10 grados de libertad. Como se muestra en la Fig. 17.1(d), los desplazamientos del nodo están definidos relativamente al sistema coordenado global, con los desplazamientos del nodo considerados positivos se desplazan los nodos en las direcciones positivas de los ejes X y Y y se considera positiva la rotación cuando es en sentido contrario a las manecillas del reloj. Tenga en cuenta que todos los desplazamientos de nodo se muestran en el sentido positivo en la Fig. 17.1(d). Los desplazamientos de los nodos del marco se pueden escribir en conjunto en una forma matricial como

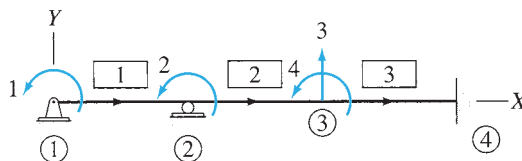
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix}$$

En la cual $\mathbf{d}$ se denomina *vector de desplazamientos* de la estructura..

Cuando se aplica el método de las rigideces, no es necesario dibujar la configuración deformada de la estructura, como se muestra en la Fig. 17.1(d),



(a) Viga continua real



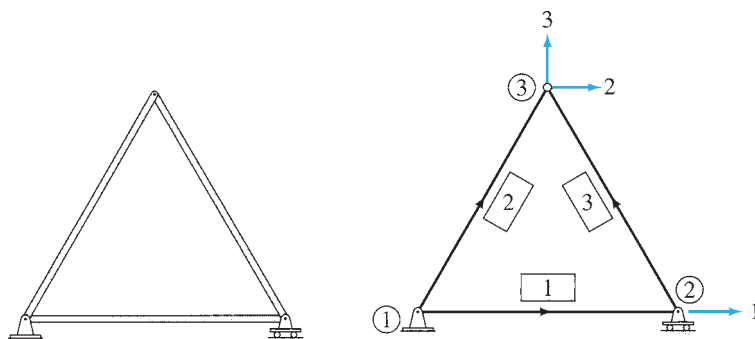
(b) Modelo analítico y grados de libertad

FIG. 17.2

para identificar sus grados de libertad, en lugar de eso, los grados de libertad se pueden especificar directamente en el diagrama de líneas de la estructura dibujando flechas en los nodos, como se muestra en la Fig. 17.1(b). Como se indica en esta figura, los grados de libertad están numerados empezando por el número más bajo del nodo y procediendo secuencialmente hasta el número más alto del nodo. En el caso de que haya más de un grado de libertad en un nodo, el desplazamiento en la dirección X se numera primero, siguiendo al desplazamiento en la dirección Y , y luego la rotación.

En vigas continuas sujetas a cargas laterales, la deformación axial de los elementos es cero. Por lo tanto, no es necesario considerar el desplazamiento en la dirección del eje centroidal de la viga en el análisis. Por lo tanto un nodo de una viga continua puede tener hasta dos grados de libertad, llamados, a saber, desplazamiento perpendicular del eje centroidal de la viga y rotación. Por ejemplo, la viga continua de la Fig. 17.2(a) tiene cuatro grados de libertad, como se muestra en la Fig. 17.2(b).

Debido a que los nodos de las armaduras se suponen que son articulaciones sin fricción, no están sujetas a momentos, por lo tanto, sus rotaciones son cero. Así, cuando analizamos una armadura plana, solo se necesitan considerar dos grados de libertad, a saber, desplazamientos en la dirección X y Y para cada nodo. Por el ejemplo, la armadura de la Fig. 17.3(a) tiene tres grados de libertad como se muestra en la Fig. 17.3(b).



(a) Armadura real

(b) Modelo analítico y grados de libertad

FIG. 17.3

17.2 Relaciones de la Rigidez del Elemento en Coordenadas Locales

En el método de análisis de rigideces matricial, los desplazamientos en los nodos de la estructura son determinados resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas, el cual es expresado en forma

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{S}\mathbf{d} \quad (17.1)$$

En la cual la $\mathbf{d}$ indica el vector de desplazamientos de los nodos, como se discutió previamente; $\mathbf{P}$ representa los efectos de las cargas externas en los nodos de la estructura y $\mathbf{S}$ se llama *rigidez de la estructura*. Como discutiremos en la Sección 17.5, la matriz de rigideces de la estructura completa, $\mathbf{S}$, se obtiene ensamblando la matriz de rigideces de los elementos individuales de la estructura. *La matriz de rigideces de un elemento se utiliza para expresar las fuerzas en los extremos del elemento como función de los desplazamientos de los extremos del elemento.* Tenga en cuenta que los términos *fuerzas* y *los desplazamientos* se usan en sentido general para incluir a los momentos y las rotaciones, respectivamente. En esta sección, obtendremos las matrices de rigideces de los elementos de marcos planos, vigas continuas, y armaduras planas en el sistema de coordenadas locales de los elementos.

Elementos del Marco

Para establecer las relaciones de rigidez de los elementos de los marcos planos, enfoquemos nuestra atención en un elemento prismático arbitrario m del marco mostrado en la Fig. 17.4(a). Cuando el marco está sujeto a cargas externas, el elemento m se deforma y las fuerzas internas se incluyen en sus extremos. La posición no deformada y deformada de los elementos se muestra en la Fig. 17.4(b). Como se indica en esta figura, los tres desplazamientos —desplazamiento en las direcciones x y y y la rotación alrededor de z — son necesarias para definir la posición deformada de cada extremo del elemento. Así, el elemento tiene seis desplazamientos en los extremos o grados de libertad. Como se muestra en la Fig. 17.4(b), los desplazamientos en los extremos se indican desde u_1 hasta u_6 , y las fuerzas en los extremos correspondientes son indicadas mediante Q_1 hasta Q_6 . Tenga en cuenta que estos desplazamientos y fuerzas están definidas de manera relativa al sistema de coordenadas locales del elemento, considerando los desplazamientos y fuerzas positivos cuando se presentan en las direcciones positivas de los ejes locales x y y , y las rotaciones y momentos positivos cuando se presentan en sentido contrario a las manecillas del reloj. Como se indica en la Fig. 17.4(b), los desplazamientos y las fuerzas en los extremos del elemento están numerados empezando por el extremo b , donde está localizado el origen del sistema de coordenadas locales, numerado primero el desplazamiento y la fuerza en la dirección x , seguido de el desplazamiento y la fuerza en la dirección y , y luego la rotación y el momento. Los desplazamientos y las fuerzas en el extremo opuesto e del elemento se numeran después en el mismo orden secuencial.

Nuestro objetivo aquí es determinar las relaciones entre las fuerzas en los extremos del elemento y los desplazamientos en términos de las cargas externas aplicadas al elemento. Tales relaciones se pueden establecer de manera conveniente, sometiendo a un elemento, de manera separada, a cada uno de los seis desplazamientos en el extremo y cargas externas, y expresando el número total de fuerzas en los extremos como la suma algebraica de las

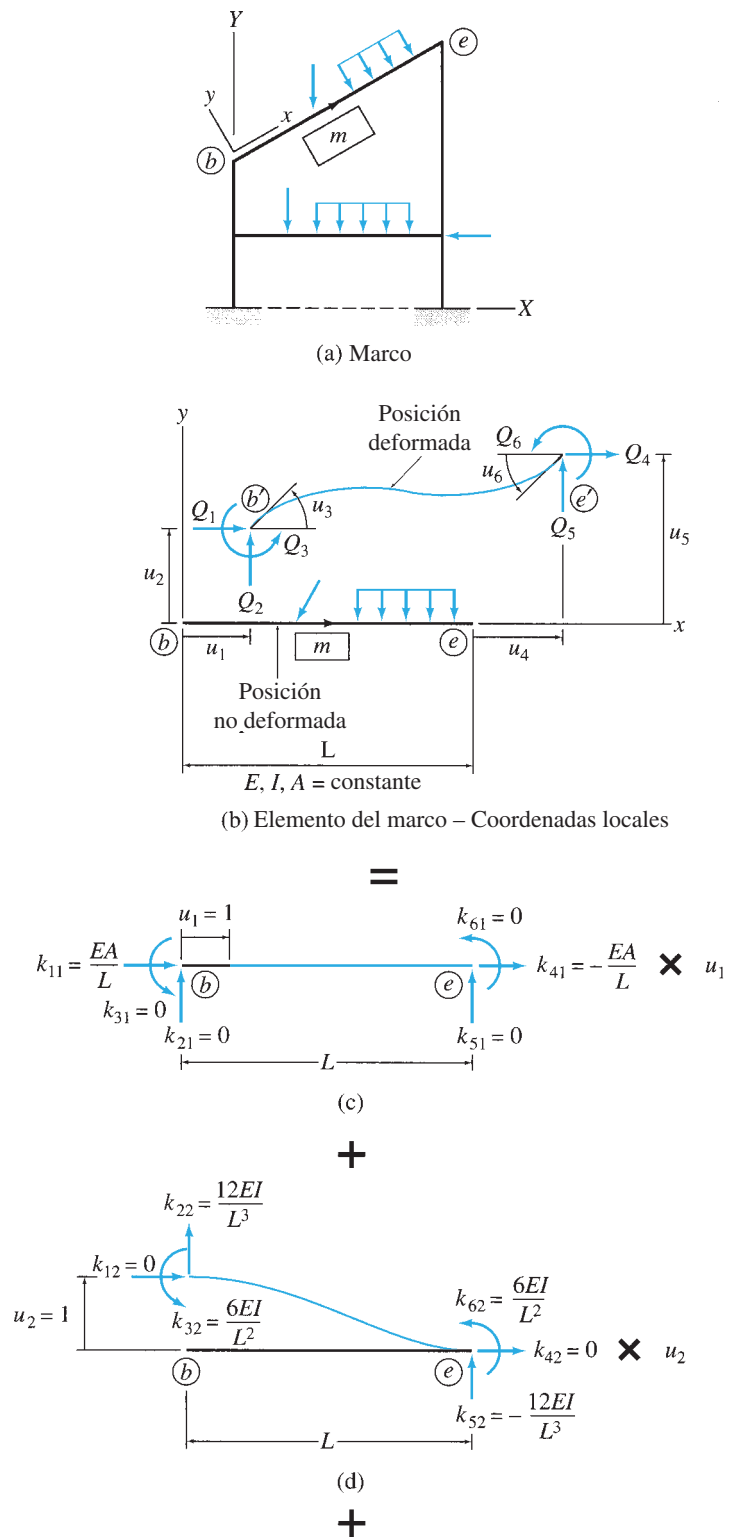


FIG. 17.4

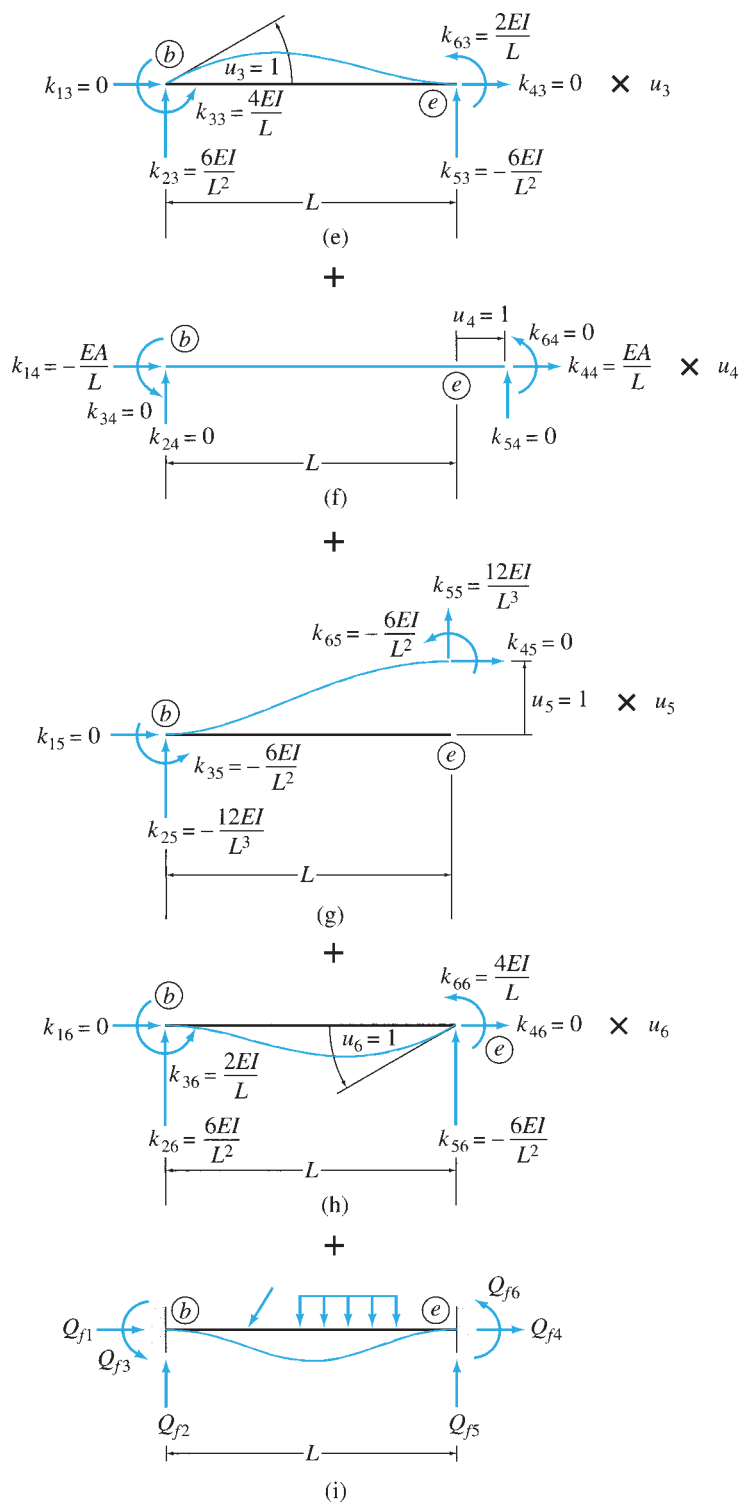


FIG. 17.4 (cont.)

fuerzas en el extremo requeridas para generar desplazamientos individuales y fuerzas en el extremo causadas por una carga externa. Así, de la Fig. 17.4(b) a la (i), podemos ver que

$$Q_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + k_{14}u_4 + k_{15}u_5 + k_{16}u_6 + Q_{f1} \quad (17.2a)$$

$$Q_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 + Q_{f2} \quad (17.2b)$$

$$Q_3 = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{34}u_4 + k_{35}u_5 + k_{36}u_6 + Q_{f3} \quad (17.2c)$$

$$Q_4 = k_{41}u_1 + k_{42}u_2 + k_{43}u_3 + k_{44}u_4 + k_{45}u_5 + k_{46}u_6 + Q_{f4} \quad (17.2d)$$

$$Q_5 = k_{51}u_1 + k_{52}u_2 + k_{53}u_3 + k_{54}u_4 + k_{55}u_5 + k_{56}u_6 + Q_{f5} \quad (17.2e)$$

$$Q_6 = k_{61}u_1 + k_{62}u_2 + k_{63}u_3 + k_{64}u_4 + k_{65}u_5 + k_{66}u_6 + Q_{f6} \quad (17.2f)$$

En la cual k_{ij} representa la fuerza en la ubicación y en la dirección de Q_i requerida, junto con las fuerzas en el extremo, para generar un valor unitario de desplazamiento u_j mientras que los otros desplazamientos en el extremo son cero. Estas fuerzas por unidad de desplazamiento son denominadas como *coeficientes de rigideces*. Tenga en cuenta que la notación de doble subíndice se usa para los coeficientes de rigidez, con el primer subíndice identificando la fuerza y el segundo subíndice identificando el desplazamiento. Los últimos términos del lado derecho de las igualdades de las Ec. (17.2) representan las fuerzas de empotre debido a las cargas externas (Fig. 17.4(i)), las cuales pueden ser determinadas usando las expresiones de los momentos de empotre dadas dentro de la contraportada del libro y aplicando las ecuaciones de equilibrio.

Mediante el uso de la definición de la multiplicación de matricial, la Ec. (17.2) se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{f1} \\ Q_{f2} \\ Q_{f3} \\ Q_{f4} \\ Q_{f5} \\ Q_{f6} \end{bmatrix} \quad (17.3)$$

O simbólicamente como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_f \quad (17.4)$$

En la cual $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{u}$ son las fuerzas en el extremo del elemento y los desplazamientos en el extremo del elemento, respectivamente, en coordenadas locales; $\mathbf{k}$ se denomina *matriz de rigideces en coordenadas locales*, y $\mathbf{Q}_f$ es el *vector de fuerzas en el extremo fijo en coordenadas locales*.

Los coeficientes, k_{ij} , se pueden evaluar sometiendo al elemento, por separado, a valores unitarios de cada uno de los seis desplazamientos. Las fuerzas en el extremo del elemento requeridas para generar un desplazamiento unitario individual son determinadas usando los principios de mecánica de materiales y las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Capítulo 15) y aplicando las ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas en el extremo del elemento obtenidas de esta manera representan los coeficientes de rigidez del elemento.

Vamos a evaluar los coeficientes correspondientes a los valores unitarios del desplazamientos u_1 en el extremo b del elemento, como se muestra en la Fig. 17.4(c). Tenga en cuenta que todos los demás desplazamientos del elemento son cero. Recordando de *mecánica de materiales* que la deformación axial u_1 de un elemento generada por la fuerza Q_1 esta dada por $u_1 = Q_1 L / EA$, determinamos la fuerza k_{11} que se debe aplicar al extremo b del elemento (Fig. 17.4(c)) para generar un desplazamiento $u_1 = 1$ como

$$k_{11} = \frac{EA}{L}$$

La fuerza axial k_{41} en el extremo lejano e del elemento se puede obtener aplicando la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x = 0 \quad k_{11} + k_{41} &= 0 \\ k_{41} &= -k_{11} = -\frac{EA}{L} \end{aligned}$$

En la cual el signo negativo indica que esta fuerza actual en la dirección negativa de x , debido a que la posición del desplazamiento en el extremo $u_1 = 1$ no genera flexión en el elemento, no se desarrollan momentos o fuerzas en la dirección y en el extremo del elemento. Por lo tanto,

$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

De manera similar, las fuerzas en el extremo necesarias para generar un desplazamiento axial $u_4 = 1$ en el extremo e del elemento con (Fig. 17.4(f))

$$k_{14} = -\frac{EA}{L} \quad k_{44} = \frac{EA}{L} \quad k_{24} = k_{34} = k_{54} = k_{64} = 0$$

La configuración deformada de la viga debido a la valor unitario del desplazamiento u_2 mientras que todos los demás desplazamientos son cero se muestra en la Fig. 17.4(d). Los momentos en los extremos requeridos (junto con las fuerzas en los extremos en la dirección y) para generar esta configuración deformada se pueden determinar usando las ecuaciones de la pendiente-deflexión obtenida en la Sección 15.1. Sustituyendo $M_{AB} = k_{32}$, $M_{BA} = k_{62}$, $\theta_A = \theta_B = 0$, $\psi = -1/L$ y $FEM_{AB} = FEM_{BA} = 0$ en las Ecs. (15.8), obtenemos

$$k_{32} = k_{62} = \frac{6EI}{L^2}$$

Las fuerzas en los extremos en la dirección y se pueden obtener aplicando las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \sum M_e = 0 \quad 2\left(\frac{6EI}{L^2}\right) - k_{22}(L) &= 0 \\ k_{22} &= \frac{12EI}{L^3} \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{12EI}{L^3} + k_{52} &= 0 \\ k_{52} &= -\frac{12EI}{L^3} \end{aligned}$$

Debido a que no hay deformación axial en el elemento, las fuerzas axiales en los extremos del elementos son cero: es decir,

$$k_{12} = k_{42} = 0$$

Las fuerzas en el extremo del elementos necesarias para generar un desplazamientos $u_5 = 1$ (Fig. 17.4(g)) se pueden determinar de manera similar:

$$k_{15} = k_{45} = 0 \quad k_{25} = -\frac{12EI}{L^3} \quad k_{35} = k_{65} = -\frac{6EI}{L^2} \quad k_{55} = \frac{12EI}{L^3}$$

La configuración deformada del elemento debido a la rotación $u_3 = 1$, con $u_1 = u_2 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$, se muestra en la Fig. 17.4(e). Sustituyendo $M_{AB} = k_{33}$, $M_{BA} = k_{63}$, $\theta_B = \psi = FEM_{AB} = FEM_{BA} = 0$ en las ecuaciones de la pendiente-deflexión (Ecs. (15.8)), obtenemos los momentos en el extremo del elemento como

$$k_{33} = \frac{4EI}{L} \quad k_{63} = \frac{2EI}{L}$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio, determinamos

$$k_{23} = \frac{6EI}{L^2} \quad k_{53} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Procediendo de manera similar, los coeficientes correspondientes al desplazamiento unitario $u_6 = 1$ resultan ser (Fig. 17.4(h))

$$k_{16} = k_{46} = 0 \quad k_{26} = -k_{56} = \frac{6EI}{L^2} \quad k_{36} = \frac{2EI}{L} \quad k_{66} = \frac{4EI}{L}$$

Sustituyendo los valores anteriores de los coeficientes de rigidez en la Ec. (17-3) obtenemos la siguiente matriz de rigideces del los elementos del marco plano en coordenadas locales:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17.5)$$

Tenga en cuenta que la i -ésima columna de la matriz de rigideces consiste de las fuerzas en los extremos del elemento para generar un valor unitario de desplazamiento u_i mientras que los demás desplazamientos son cero. Por ejemplo, la segunda columna de $\mathbf{k}$ consiste de seis fuerzas en los extremos necesarias para generar un desplazamiento $k_{ij} = k_{ji}$. Se puede mostrar mediante la ley de Betti (sección 7.8) que las matrices de rigideces para estructuras linealmente elásticas son siempre simétricas.

Elementos de la Viga Continua

Debido a que las deformaciones axiales en los elementos de las vigas continuas sujetas a cargas laterales son cero, no necesitamos considerar los grados de libertad en la dirección del eje centroidal del elemento en el análisis. Así, solo se necesitan considerar cuatro grados de libertad necesarios para ser considerados en el análisis de las vigas continuas en el plano. Los grados de libertad y las fuerzas en los extremos correspondientes para los elementos de la viga continua se muestran en la Fig. 17.5.

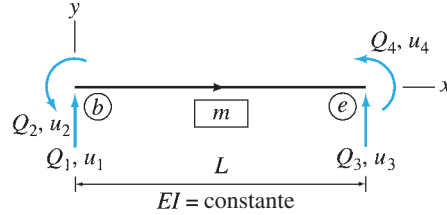


FIG. 17.5

Elemento de la viga continua – Ejes locales

Las relaciones relativas expresadas en forma simbólica o de matriz condensada en la Ec. (17.4) permanecen válidas para elementos de la viga continua. Sin embargo, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{Q}_f$ son ahora vectores 4×1 , y la matriz de rigideces del elemento en coordenadas locales, $\mathbf{k}$, está dada por

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17.6)$$

Tenga en cuenta que la matriz $\mathbf{k}$ de 4×4 se obtuvo eliminando la primera y cuarta columna y la primer y la cuarta fila de la matriz correspondiente del elemento del marco obtenida previamente (Ec. (17.5)).

Elementos de la Armadura

Un elemento de una armadura está sujeta solo a carga axial, la cual se puede determinar de los desplazamientos de los extremos del elemento en la dirección del eje centroidal de los elementos de la armadura plana. Los grados de libertad y las fuerzas en los extremos correspondientes para un elemento de la armadura se muestra en la Fig. 17.6.

Las relaciones de rigidez para los elementos de la armadura en coordenadas locales son expresadas como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (17.7)$$

Tenga en cuenta que la Ec. (17.7) se obtiene de la Ec. (17.4) fijando $\mathbf{Q}_f = \mathbf{0}$. Esto es porque los elementos de las armaduras no están sujetos a ninguna

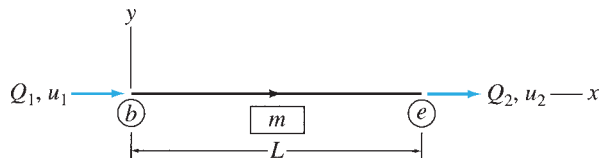


FIG. 17.6

Elemento de armadura – coordenadas locales

carga externa y, por lo tanto, las fuerzas en los extremos del elementos son cero. En la Ec. (17.7), $\mathbf{Q}$, y $\mathbf{u}$ son vectores de 2×1 que consiste de fuerzas en los extremos del elemento y de desplazamientos en los extremos, respectivamente (Fig. 17.6); y $\mathbf{k}$ es la matriz de rigideces del elemento en coordenadas locales, la cual está dada por

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.8)$$

La matriz de rigidez anterior para elementos de una armadura se pueden también obtener directamente usando el procedimiento descrito anteriormente (ver la Fig. 17.4(c) y (f)) o se puede obtener eliminando las columnas 2, 3, 5 y 6 y las filas 2, 3, 5 y 6 de la matriz correspondiente para los elementos del marco (Ec. 17.5).

17.3 Transformación de Coordenadas

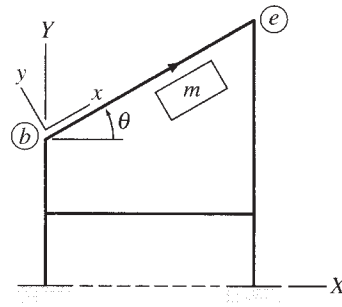
Cuando los elementos de una estructura están orientados en diferentes direcciones, puede ser necesario transformar las relaciones de rigidez para cada elemento del sistema de coordenadas locales del elemento a un sistema coordenado global común. Las relaciones de rigidez del elemento en coordenadas globales obtenidos de esta manera se combinan para establecer las relaciones de rigidez para la estructura completa. En esta sección discutiremos la transformación de las fuerzas en los extremos del elemento y los desplazamiento en los extremos del elemento de coordenadas locales a coordenadas globales, y viceversa, de elementos de los marcos planos, vigas continuas y armaduras planas.

Elementos del Marco

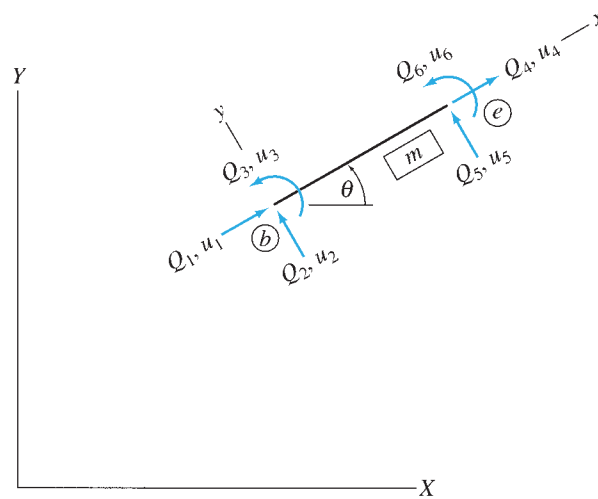
Considere un elemento arbitrario m del marco mostrado en la Fig. 17.7(a). la orientación del elemento con respecto al sistema de coordenadas global XY está definido por el ángulo θ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la dirección positiva del eje global X a la dirección positiva del eje local x , como se muestra en la figura. Las relaciones de rigidez obtenidas en la sección anterior son validas solo para las fuerzas $\mathbf{Q}$ en los extremos del elemento y los desplazamientos en los extremos $\mathbf{u}$ describo con referencia al eje local del sistema de coordenadas xy de el elemento, como se muestra en la Fig. 17.7(b).

Ahora, supongamos que las fuerzas y los desplazamientos en los extremos del elemento se especifican con relación al sistema de fuerzas y desplazamientos en los extremos, en coordenadas locales xy , que tiene el mismo efecto en el elemento. Como se mostro en la Fig. 17.7(c), las fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas globales están indicadas por F_1 a la F_6 y los desplazamientos en el extremo del elemento están indicados por v_1 a la v_6 . Estas fuerzas y desplazamientos en el extremo del elemento globales están numerados empezando por el extremo b del elemento, donde está localizado el sistema de coordenadas locales, con la fuerza y el desplazamiento en la dirección X numerado primero, seguido de la fuerzas y el desplazamiento en la dirección Y y después el momento y la rotación. Las fuerzas y desplazamientos en el extremo opuesto e del elemento se numeran después en la misma orden secuencial.

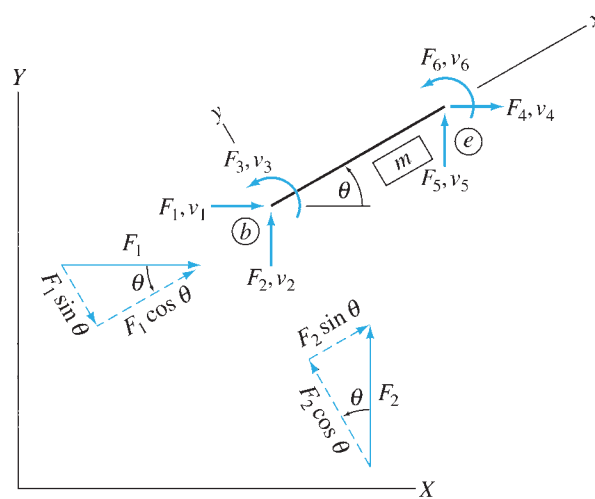
Una comparación de la Fig. 17.7(b) y (c) indica que en el extremo b del elemento, las fuerza local Q_1 debe ser igual a la suma algebraica de las com-



(a) Marco



(b) Fuerzas y desplazamiento en el extremo del elemento en coordenadas locales



(c) Fuerzas y desplazamiento en el extremo del elemento en coordenadas globales

FIG. 17.7

ponentes de las fuerzas F_1 y F_2 en el sistema global en la dirección de eje local x . por lo tanto,

$$Q_1 = F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta \quad (17.9a)$$

De manera similar, la fuerza local Q_2 es igual a la suma algebraica de las componentes de F_1 y F_2 en la dirección del eje local y ; es decir,

$$Q_2 = -F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta \quad (17.9b)$$

Debido a que la dirección del eje local z y el eje global Z son iguales —es decir, hacia afuera del plano de la página— el momento local Q_3 en el extremo es igual al momento global F_3 en el extremo. Por lo tanto

$$Q_3 = F_3 \quad (17.9c)$$

Usando un procedimiento similar en el extremo e del elemento, expresamos las fuerzas locales en términos de las fuerzas globales como

$$Q_4 = F_4 \cos \theta + F_5 \sin \theta \quad (17.9d)$$

$$Q_5 = -F_4 \sin \theta + F_5 \cos \theta \quad (17.9e)$$

$$Q_6 = F_6 \quad (17.9f)$$

Las ecuaciones (17.9a) a la (17.9f) se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (17.10)$$

O simbólicamente como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{TF} \quad (17.11)$$

En la cual

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.12)$$

Es conocida como *matriz de transformación*. Los cosenos directores del elemento, necesarios para evaluar a $\mathbf{T}$, se pueden determinar fácilmente usando las relaciones

$$\cos \theta = \frac{X_e - X_b}{L} = \frac{X_e - X_b}{\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}} \quad (17.13a)$$

$$\sin \theta = \frac{Y_e - Y_b}{L} = \frac{Y_e - Y_b}{\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}} \quad (17.13b)$$

En la cual X_b y Y_b representan las coordenadas globales de nodos b de inicio del elemento; X_e y Y_e indican las coordenadas globales del nodo extremo e ; y L es la longitud del elemento.

Al igual que las fuerzas, los desplazamientos en el extremo del elemento son vectores los cuales están definidos en la misma dirección como asl fuerzas correspondientes. Por lo tanto, la matriz de transformación $\mathbf{T}$ desarrollada en el caso de las fuerzas en el extremo (Ec. (17.12)) se puede usar también para transformar los desplazamientos en el extremo del elemento de las coordenadas globales a las coordenadas locales:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v} \quad (17.14)$$

Después, determinamos la transformación de las fuerzas y desplazamientos en el extremo del elemento de las coordenadas locales a las coordenadas globales. De la Fig. 17.7(b) y (c), observamos que en el extremo b del elemento, las fuerzas globales F_1 deben ser iguales a la suma algebraica de las componentes de las fuerzas locales Q_1 y Q_2 en la dirección del eje global X . Por lo tanto

$$F_1 = Q_1 \cos \theta - Q_2 \sin \theta \quad (17.15a)$$

De manera similar, las fuerzas globales F_2 son iguales a la suma algebraica de las componentes de Q_1 y Q_2 en la dirección del eje global Y ; es decir,

$$F_2 = Q_1 \sin \theta + Q_2 \cos \theta \quad (17.15b)$$

Y, como se discutió previamente,

$$F_3 = Q_3 \quad (17.15c)$$

De manera similar, en el extremo e del elemento,

$$F_4 = Q_4 \cos \theta - Q_5 \sin \theta \quad (17.15d)$$

$$F_5 = Q_4 \sin \theta + Q_5 \cos \theta \quad (17.15e)$$

$$F_6 = Q_6 \quad (17.15f)$$

Las ecuaciones (17.15a) a la (17.15f) se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} \quad (17.16)$$

Una comparación de las Ecs. (17.19) y (17.16) indica que la matriz de transformación en la Ec. (17.16), la cual transforma las fuerzas de coordenadas globales a locales, es la transpuesta de la matriz de transformación. Por lo tanto la Ec. (17.16) se puede escribir como

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \quad (17.17)$$

La matriz T^T se puede también definir de la transformación de los desplazamientos del extremo del elemento de las coordenadas locales a las coordenadas globales; es decir,

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^T \mathbf{u} \quad (17.18)$$

Elementos de la Viga Continua

Cuando analizamos las vigas continuas, las coordenadas locales de los elementos están orientadas de modo que las direcciones positivas de los ejes locales x y y sean las mismas que las direcciones positivas de los ejes globales X y Y , respectivamente (Fig. 17.8). Esta orientación nos permite evitar la transformación de coordenadas porque las fuerzas y los desplazamientos en los extremos del elementos en las coordenadas globales y locales con las mismas, es decir,

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (17.19)$$

Elementos de la Armadura

Considere un elemento arbitrario m de la armadura mostrada en la Fig. 17.9(a). Las fuerzas y los desplazamientos en los extremos para el elemento en coordenadas locales y globales, se muestran en la Fig. 17.9(b) y (c), respectivamente. Tenga en cuenta que para cada extremo del elemento se necesitan dos grados de libertad y dos fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas globales para representar las componentes del desplazamiento axial del elemento y fuerza axial, respectivamente. Así, en las coordenadas globales los elementos de la armadura tienen un total de cuatro grados de libertad, de v_1 al v_4 , y cuatro fuerzas en los extremos, F_1 a la F_4 , como se muestra en la Fig. 17.9(c).

La matriz de transformación $\mathbf{T}$ para los elementos de la armadura se puede establecer expresando las fuerzas locales en los extremos, $\mathbf{Q}$, en términos de las fuerzas globales en los extremos, $\mathbf{F}$, como (Fig. 17.9(b) y (c))

$$Q_1 = F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta \quad (17.20a)$$

$$Q_2 = F_3 \cos \theta + F_4 \sin \theta \quad (17.20b)$$

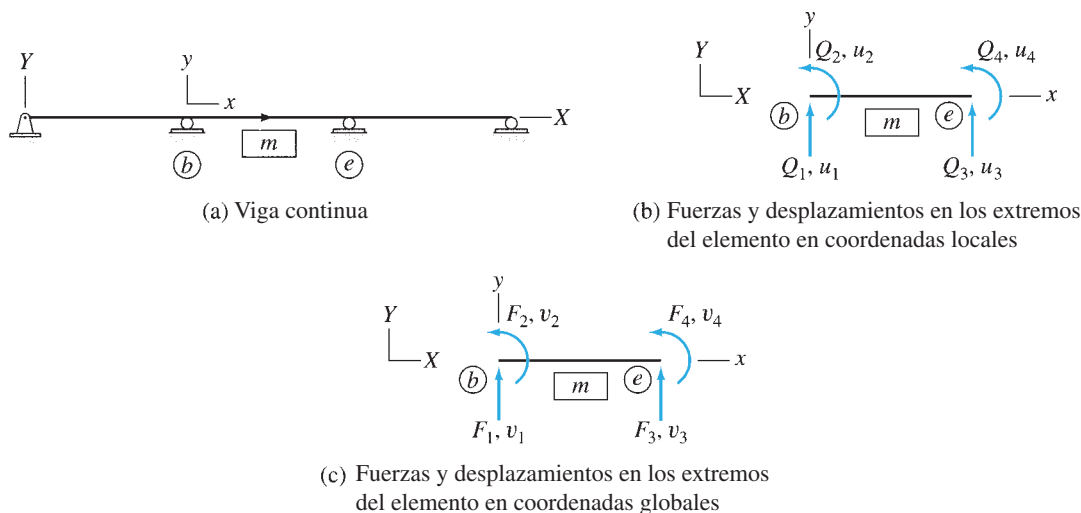
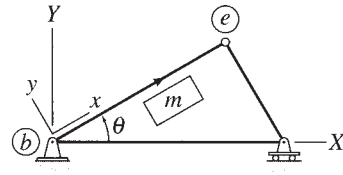
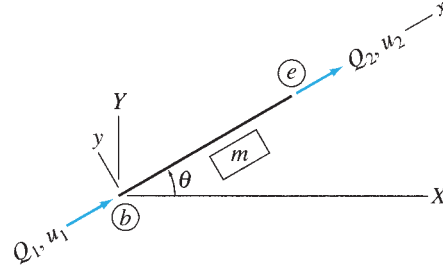


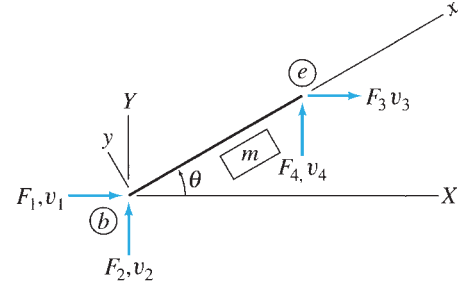
FIG. 17.8



(a) Armadura



(b) Fuerzas y desplazamientos en los extremos del elemento en coordenadas locales



(c) Fuerzas y desplazamientos en los extremos del elemento en coordenadas globales

FIG. 17.9

O en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (17.21)$$

De la cual obtenemos la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (17.22)$$

Las relaciones de transformación dadas en forma simbólica o de matriz condensada en las Ecs. (17.11), (17.14), (17.17) y (17.18) siguen siendo validas para un elemento de una armadura, con los vectores $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}$, y $\mathbf{v}$ representando las fuerzas y los desplazamientos en los extremo del elemento de la armadura, como se muestra en las Figs. 17.9(b) y (c), y la matriz $\mathbf{T}$ representando la matriz de transformación definida en la Ec. (17.22).

17.4 Relación de la Rigidez del Elemento en Coordenadas Globales

Usando las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas locales (Sección 17.2) y las relaciones de transformación (Sección 17.3), ahora podemos desarrollar las relaciones de la rigidez para los elementos en coordenadas globales.

Elementos del Marco

Para establecer las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas globales, primero sustituimos las relaciones de la rigidez en coordenadas locales $\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_f$ (Ec. (17.4)) en las relaciones de la transformación de la fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}$ (Ec. (17.17)) para obtener

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} = \mathbf{T}^T (\mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_f) = \mathbf{T}^T \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_f \quad (17.23)$$

Entonces, sustituimos las relaciones de la transformación de los desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v}$ (ec. (17.14)) en la Ec. (17.23), determinamos las relaciones deseadas entre las fuerzas en el extremo del elemento, $\mathbf{F}$, y los desplazamientos en el extremo, $\mathbf{v}$, como

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \mathbf{v} + \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_f \quad (17.24)$$

La ecuación (17.24) se puede escribir convenientemente como

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{F}_f \quad (17.25)$$

Donde

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (17.26)$$

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_f \quad (17.27)$$

La matriz $\mathbf{K}$ se llama *matriz de rigideces del elemento en coordenadas globales* y $\mathbf{F}$ es el *vector de fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas globales*.

Elementos de la Viga Continua

Como se estipuló anteriormente, las coordenadas locales del elemento de una viga continua están orientadas de manera que las direcciones positivas de los ejes locales x y y sean las mismas que las direcciones positivas de los ejes globales X y Y , respectivamente. Por lo tanto, no es necesaria la transformación de coordenadas, y las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas locales y globales son las mismas.

Elementos de la Armadura

Las relaciones de la rigidez para elementos de la armadura en coordenadas globales está expresada como

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} \quad (17.28)$$

Tenga en cuenta que la Ec. (17.28) se obtiene de la Ec. (17.25) fijando el vector de las fuerzas en el extremo fijo $\mathbf{F}_f = 0$.

Cuando analizamos las armaduras, es conveniente usar la forma explícita de la matriz de rigideces del elemento $\mathbf{K}$, sustituyendo las Ecs. (17.8) y (17.22) en la Ec. (17.26), obtenemos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

Y realizando la multiplicaciones matriciales, obtenemos

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (17.29)$$

La matriz $\mathbf{K}$ de la Ec. (17.29) se puede obtener de manera alternativa sometiéndolo a un elemento inclinado de la armadura, por separado, a valores unitarios de cada uno de los cuatro desplazamientos globales en el extremo evaluando las fuerzas en el extremo en coordenadas globales necesarias para generar un desplazamiento unitario individual. Las fuerzas en el extremo necesarias para genera un valor unitario de desplazamiento v_i mientras que todos los demás desplazamiento son cero representa la i -ésima columna de la matriz de rigideces global del elemento.

17.5 Relación de la Rigidez del la Estructura

Una vez que se han determinado las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas globales, las relaciones de la rigidez para la estructura completa se pueden establecer escribiendo las ecuaciones de equilibrio de los nodos de la estructura y aplicando las condiciones de compatibilidad en que los desplazamientos de los extremos del elemento están rígidamente conectados a los nodos deben ser iguales a los desplazamientos de los nodos correspondientes.

Para ilustrar este procedimiento, considere el marco de dos elemento mostrado en la Fig. 17.10(a). El modelo analítico del marco está dado en la Fig. 17.10(b), el cual indica que la estructura tiene tres grados de libertad, d_1 , d_2 y d_3 . Las cargas en los nodos correspondientes a estos grados de libertad están designadas por P_1 , P_2 , y P_3 , respectivamente. Las fuerzas globales en el extremo $\mathbf{F}^{(i)}$ y los desplazamientos en el extremo $\mathbf{v}^{(i)}$ para los dos elementos del marco se muestran en la Fig. 17.10(c), en la cual el subíndice (i) indica el número de elemento. Nuestro objetivo es expresar las cargas en los nodos $\mathbf{P}$ como funciones de los desplazamientos en los nodos $\mathbf{d}$.

Ecuaciones de Equilibrio

Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, y $\sum M_c = 0$, al cuerpo libre del nodo 2 mostrado en la Fig. 17.10(c), obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$P_1 = F_4^{(1)} + F_1^{(2)} \quad (17.30a)$$

$$P_2 = F_5^{(1)} + F_2^{(2)} \quad (17.30b)$$

$$P_3 = F_6^{(1)} + F_3^{(2)} \quad (17.30c)$$

Relaciones de la Rigidez del Elemento

Para expresar las cargas en los nodos $\mathbf{P}$ en términos de los desplazamientos $\mathbf{d}$, primero relacionamos las fuerzas $\mathbf{F}^{(i)}$ en el extremo del elemento con los

desplazamientos en el extremo $\mathbf{v}^{(i)}$, usando las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas globales obtenidas en la sección anterior. Escribiendo la Ec. (17.25) en forma expandida para el elemento 1, obtenemos

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \\ F_5^{(1)} \\ F_6^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\ K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\ K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ v_4^{(1)} \\ v_5^{(1)} \\ v_6^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{f1}^{(1)} \\ F_{f2}^{(1)} \\ F_{f3}^{(1)} \\ F_{f4}^{(1)} \\ F_{f5}^{(1)} \\ F_{f6}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (17.31)$$

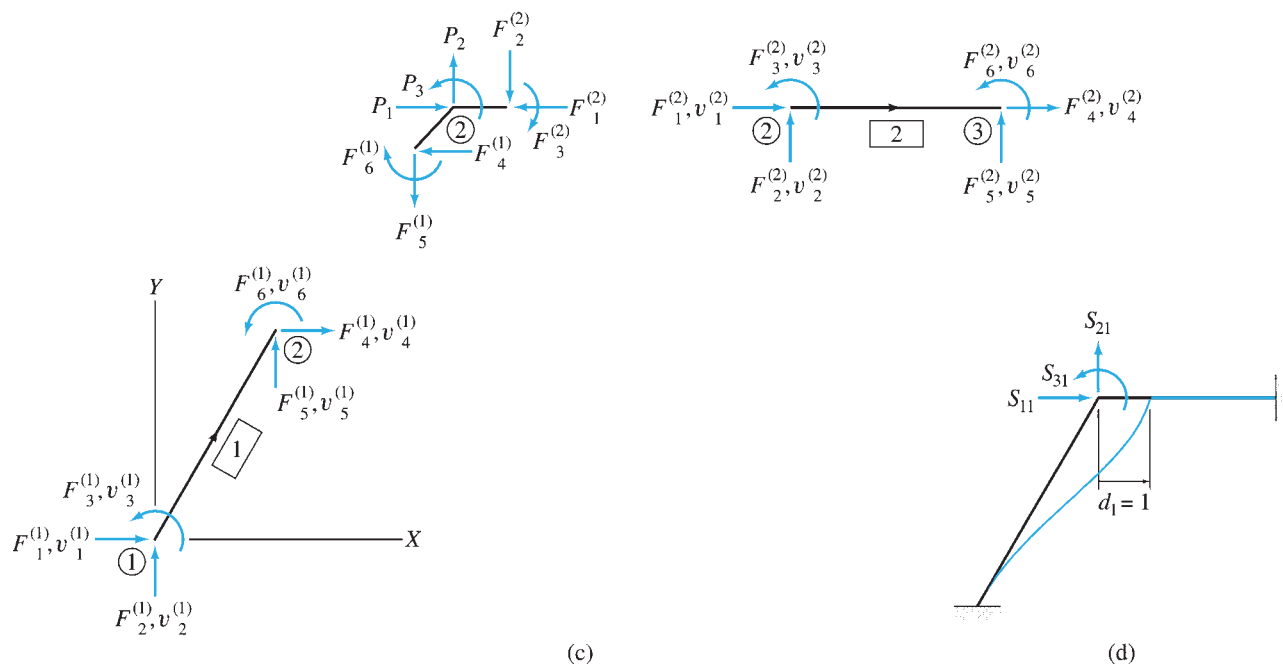
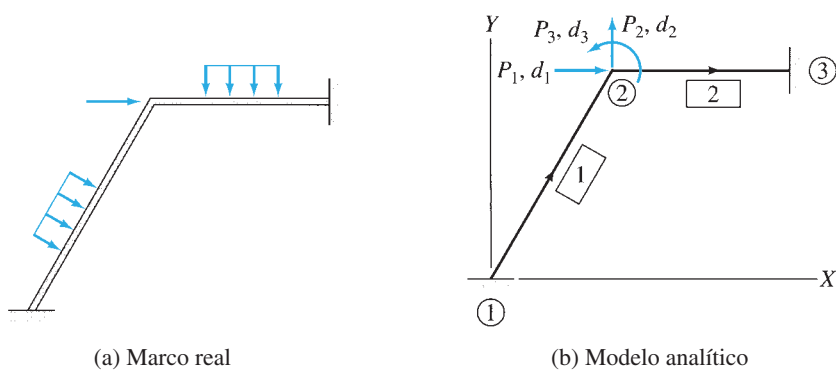


FIG. 17.10

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\ K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\ K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & K_{15}^{(2)} & K_{16}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{25}^{(2)} & K_{26}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} \\ K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(2)} & K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(2)} & K_{55}^{(2)} & K_{56}^{(2)} \\ K_{61}^{(2)} & K_{62}^{(2)} & K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(2)} & K_{65}^{(2)} & K_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ K_{44}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{45}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{46}^{(1)} + K_{13}^{(2)} \\ K_{54}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{55}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{56}^{(1)} + K_{23}^{(2)} \\ K_{64}^{(1)} + K_{31}^{(2)} & K_{65}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{66}^{(1)} + K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

(e)

$$\mathbf{F}_{f1} = \begin{bmatrix} F_{f1}^{(1)} \\ F_{f2}^{(1)} \\ F_{f3}^{(1)} \\ F_{f4}^{(1)} \\ F_{f5}^{(1)} \\ F_{f6}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{F}_{f2} = \begin{bmatrix} F_{f1}^{(2)} \\ F_{f2}^{(2)} \\ F_{f3}^{(2)} \\ F_{f4}^{(2)} \\ F_{f5}^{(2)} \\ F_{f6}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} F_{f4}^{(1)} + F_{f1}^{(2)} \\ F_{f5}^{(1)} + F_{f2}^{(2)} \\ F_{f6}^{(1)} + F_{f3}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

(f)

FIG. 17.10 (cont.)

De la cual determinamos las expresiones para las fuerzas en el extremo 2 del elemento como

$$F_4^{(1)} = K_{41}^{(1)} v_1^{(1)} + K_{42}^{(1)} v_2^{(1)} + K_{43}^{(1)} v_3^{(1)} + K_{44}^{(1)} v_4^{(1)} \quad (17.32a)$$

$$+ K_{45}^{(1)} v_5^{(1)} + K_{46}^{(1)} v_6^{(1)} + F_{f4}^{(1)}$$

$$F_5^{(1)} = K_{51}^{(1)} v_1^{(1)} + K_{52}^{(1)} v_2^{(1)} + K_{53}^{(1)} v_3^{(1)} + K_{54}^{(1)} v_4^{(1)} \quad (17.32b)$$

$$+ K_{55}^{(1)} v_5^{(1)} + K_{56}^{(1)} v_6^{(1)} + F_{f5}^{(1)}$$

$$F_6^{(1)} = K_{61}^{(1)} v_1^{(1)} + K_{62}^{(1)} v_2^{(1)} + K_{63}^{(1)} v_3^{(1)} + K_{64}^{(1)} v_4^{(1)} \quad (17.32c)$$

$$+ K_{65}^{(1)} v_5^{(1)} + K_{66}^{(1)} v_6^{(1)} + F_{f6}^{(1)}$$

De manera similar, escribimos la Ec. (17.25) para el elemento 2, y obtenemos

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \\ F_6^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & K_{15}^{(2)} & K_{16}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{25}^{(2)} & K_{26}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} \\ K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(2)} & K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(2)} & K_{55}^{(2)} & K_{56}^{(2)} \\ K_{61}^{(2)} & K_{62}^{(2)} & K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(2)} & K_{65}^{(2)} & K_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \\ v_4^{(2)} \\ v_5^{(2)} \\ v_6^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{f1}^{(2)} \\ F_{f2}^{(2)} \\ F_{f3}^{(2)} \\ F_{f4}^{(2)} \\ F_{f5}^{(2)} \\ F_{f6}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17.33)$$

De la cual determinamos las fuerzas en el extremo 2 del elemento como

$$F_1^{(2)} = K_{11}^{(2)} v_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} v_2^{(2)} + K_{13}^{(2)} v_3^{(2)} + K_{14}^{(2)} v_4^{(2)} \quad (17.34a)$$

$$+ K_{15}^{(2)} v_5^{(2)} + K_{16}^{(2)} v_6^{(2)} + F_{f1}^{(2)}$$

$$F_2^{(2)} = K_{21}^{(2)} v_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} v_2^{(2)} + K_{23}^{(2)} v_3^{(2)} + K_{24}^{(2)} v_4^{(2)} \quad (17.34b)$$

$$+ K_{25}^{(2)} v_5^{(2)} + K_{26}^{(2)} v_6^{(2)} + F_{f2}^{(2)}$$

$$F_3^{(2)} = K_{31}^{(2)} v_1^{(2)} + K_{32}^{(2)} v_2^{(2)} + K_{33}^{(2)} v_3^{(2)} + K_{34}^{(2)} v_4^{(2)} \quad (17.34c)$$

$$+ K_{35}^{(2)} v_5^{(2)} + K_{36}^{(2)} v_6^{(2)} + F_{f3}^{(2)}$$

Ecuaciones de Compatibilidad

Comparando las Fig.17.10(b) y (c), observamos que debido a que el extremo inferior 1 del elemento 1 está rígidamente conectado al nodo empotrado 1, el cual no puede desplazarse ni rotar, los tres desplazamientos del extremo 1 del elemento deben ser cero. De manera similar, debido a que el extremo 2 de este elemento está rígidamente conectado en nodo 2, el desplazamiento del extremo 2 de este elemento debe ser el mismo que el desplazamiento del nodo 2. Por lo tanto, las ecuaciones de compatibilidad para el elemento 1 con

$$v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0 \quad v_4^{(1)} = d_1 \quad v_5^{(1)} = d_2 \quad v_6^{(1)} = d_3 \quad (17.35)$$

De manera similar, las ecuaciones de compatibilidad para el elemento 2 resultan ser

$$v_1^{(2)} = d_1 \quad v_2^{(2)} = d_2 \quad v_3^{(2)} = d_3 \quad v_4^{(2)} = v_5^{(2)} = v_6^{(2)} = 0 \quad (17.36)$$

Sustituyendo las ecuaciones de compatibilidad para el elemento 1 (Ec. (17.35)) en las relaciones del elemento fuerza-desplazamiento como las dadas en las Ecs. (17.32), expresamos las fuerza en el extremo del elemento $\mathbf{F}^{(1)}$ en términos de los desplazamiento del nodo $\mathbf{d}$ como

$$F_4^{(1)} = K_{44}^{(1)} d_1 + K_{45}^{(1)} d_2 + K_{46}^{(1)} d_3 + F_{f4}^{(1)} \quad (17.37a)$$

$$F_5^{(1)} = K_{54}^{(1)} d_1 + K_{55}^{(1)} d_2 + K_{56}^{(1)} d_3 + F_{f5}^{(1)} \quad (17.37b)$$

$$F_6^{(1)} = K_{64}^{(1)} d_1 + K_{65}^{(1)} d_2 + K_{66}^{(1)} d_3 + F_{f6}^{(1)} \quad (17.37c)$$

De manera similar, para el elemento 2, sustituyendo de la Ec. (17.36) en las Ecs. (17.34) resulta

$$F_1^{(2)} = K_{11}^{(2)} d_1 + K_{12}^{(2)} d_2 + K_{13}^{(2)} d_3 + F_{f1}^{(2)} \quad (17.38a)$$

$$F_2^{(2)} = K_{21}^{(2)} d_1 + K_{22}^{(2)} d_2 + K_{23}^{(2)} d_3 + F_{f2}^{(2)} \quad (17.38b)$$

$$F_3^{(2)} = K_{31}^{(2)} d_1 + K_{32}^{(2)} d_2 + K_{33}^{(2)} d_3 + F_{f3}^{(2)} \quad (17.38c)$$

Relaciones de la rigidez de la Estructura

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (17.37) en (17.38) en las ecuaciones de equilibrio del nodo (Ecs. (17.30)), obtenemos las relaciones deseadas entre las cargas del nodo $\mathbf{P}$ y los desplazamientos del nodo $\mathbf{d}$ del marco como

$$P_1 = (K_{44}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) d_1 + (K_{45}^{(1)} + K_{12}^{(2)}) d_2 + (K_{46}^{(1)} + K_{13}^{(2)}) d_3 + (F_{f4}^{(1)} + F_{f1}^{(2)}) \quad (17.39a)$$

$$P_2 = (K_{54}^{(1)} + K_{21}^{(2)}) d_1 + (K_{55}^{(1)} + K_{22}^{(2)}) d_2 + (K_{56}^{(1)} + K_{23}^{(2)}) d_3 + (F_{f5}^{(1)} + F_{f2}^{(2)}) \quad (17.39b)$$

$$P_3 = (K_{64}^{(1)} + K_{31}^{(2)}) d_1 + (K_{65}^{(1)} + K_{32}^{(2)}) d_2 + (K_{66}^{(1)} + K_{33}^{(2)}) d_3 + (F_{f6}^{(1)} + F_{f3}^{(2)}) \quad (17.39c)$$

Las ecuaciones (17.39) se pueden expresar convenientemente en forma de matriz condensada como

$$\mathbf{P} = \mathbf{Sd} + \mathbf{P}_f \quad (17.40)$$

O

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{Sd} \quad (17.41)$$

En la cual

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} K_{44}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{45}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{46}^{(1)} + K_{13}^{(2)} \\ K_{54}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{55}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{56}^{(1)} + K_{23}^{(2)} \\ K_{64}^{(1)} + K_{31}^{(2)} & K_{65}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{66}^{(1)} + K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17.42)$$

Es llamada *matriz de rigideces de la estructura* y

$$\mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} F_{f4}^{(1)} + F_{f1}^{(2)} \\ F_{f5}^{(1)} + F_{f2}^{(2)} \\ F_{f6}^{(1)} + F_{f3}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17.43)$$

Es llamado *vector de fuerzas en los nodos de la estructura*. El procedimiento anterior de la determinación de las relaciones de la rigidez de la estructura combinando las relaciones de la rigidez del elemento se le conoce a menudo como *método de la rigidez directa* [39].

La matriz de rigideces la estructura $\mathbf{S}$ es interpretada de manera análoga a la matriz de rigideces del elemento; es decir, *los coeficientes de rigidez de una estructura S_{ij} representan la fuerza en la ubicación y en la dirección de P_i requerida, junto con las otras fuerzas en los nodos, para generar un valor unitario de desplazamiento d_j en los nodos d_j mientras todos los demás desplazamientos en los nodos son cero*. Por lo tanto, la j -ésima columna de la matriz $\mathbf{S}$ consiste de las cargas en los nodos necesarias para generar un valor unitario de desplazamiento d_j mientras que todos los demás desplazamientos son cero. Por ejemplo, la primera columna de $\mathbf{S}$ consiste de tres cargas en los nodos necesarias para generar el desplazamiento $d_1 = 1$, como se muestra en la Fig. 17.10(d), y así sucesivamente.

La interpretación anterior de la matriz de rigidez de la estructura $\mathbf{S}$ indica que tal matriz puede, alternativamente, ser determinada sometiendo a la estructura, por separado, a valores unitarios en cada uno de sus desplazamientos en el nodo. Sin embargo, tal procedimiento no puede implementarse fácilmente en computadoras y ser rara vez su utiliza en la práctica.

Ensamble de $\mathbf{S}$ y $\mathbf{P}_f$ usando los Números de Código del Elemento

En los párrafos anteriores, determinamos la matriz de rigideces de la estructura $\mathbf{S}$ (Ec. (17.42)) y el vector de fuerzas en los nodos $\mathbf{P}_f$ (Ec. 17.43)) sustituyendo las ecuaciones de compatibilidad del elemento en las relaciones de la rigidez global del elemento y luego sustituyendo las relaciones resultantes en las ecuaciones de equilibrio de los nodos. Este procedimiento que consiste en escribir de tres tipos de ecuaciones y luego hacer las sustituciones puede ser bastante tedioso y consumir mucho tiempo para grandes estructuras.

De la Ec. (17.42), observamos que la rigidez de un nodo en una dirección es igual a la suma de las rigideces en esa dirección de los elementos que se unen en el nodo. Este hecho indica que la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura se puede formular directamente agregando los elementos de la matriz de rigideces en la posición correcta en la matriz de la estructura, evitando de este modo la necesidad de escribir cualquier ecuación. La técnica de formar directamente una matriz de rigideces de la estructura ensamblando los elementos de la matriz de rigidez global del elemento fue presentada por S.S. Tezcan en 1963 [38] y algunas veces es llamada como *técnica del número de código*.

Para ilustrar esta técnica, considere de nuevo el marco de dos elementos de la Fig. 17.10. las matrices de rigidez en coordenadas globales del elemento 1 y 2 del marco están designadas como $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, respectivamente. (Fig. 17.10(e)). Nuestro objetivo es el formar la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura ensamblando los elementos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$. Antes de que podamos determinar la posición de los elementos de la matriz $\mathbf{K}$ de un elemento en la matriz $\mathbf{S}$ de la estructura, necesitamos identificar, para cada grado de libertad del elemento en coordenadas globales, el número del correspondiente grado de libertad de la estructura. Si el grado de libertad de la estructura corresponde a un grado de libertad de un elemento que no está definido (es decir, el desplazamiento del nodo correspondiente es cero) se debe usar un cero para el número del grado de libertad de la estructura. Por lo tanto, comparando los grados globales de libertad del elemento 1 mostrado en la Fig. 17.10(c) con los grados de libertad de la estructura dada en la Fig. 17.10(b), determinamos los números de grados de libertad para el elemento como 0, 0, 0, 1, 2, 3. Tenga en cuenta que estos números están en el mismo orden que los grados de libertad del elemento; por ejemplo, el cuarto numero, 1, corresponde al cuarto grado de libertad, $v_4^{(1)}$, del elemento, y así sucesivamente. En otras palabras, los primeros tres números identifican, en orden, al desplazamiento X , al desplazamiento Y , y la rotación del nodo de inicio del elemento, mientras que los últimos tres números identifican al desplazamiento X , el desplazamiento Y y la rotación, respectivamente, del nodo final del elemento. De manera similar, determinamos los números del grado de libertad de la estructura para el elemento 2 como 1, 2, 3, 0, 0, 0.

Los números del grado de libertad de la estructura para un elemento se pueden usar para definir las ecuaciones de compatibilidad del elemento. Por ejemplo. Los números del grado de libertad de la estructura 0, 0, 0, 1, 2, 3, implican las siguientes ecuaciones de compatibilidad para el elemento 1:

$$v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0 \quad v_4^{(1)} = d_1 \quad v_5^{(1)} = d_2 \quad v_6^{(1)} = d_3$$

Los cuales son idénticos a los dados en la Ec. (17.35).

La posición de los elementos del matriz de rigideces $\mathbf{K}_1$ de un elemento en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura se puede determinar escribiendo los números de los grados de libertad de la estructura (0, 0, 0, 1, 2, 3) del lado derecho y en la parte superior de $\mathbf{K}_1$, como se muestra en la Fig. 17.10(e). Tenga en cuenta que los números del lado derecho de $\mathbf{K}_1$ representan los números de columnas de $\mathbf{S}$. Por ejemplo, el elemento $K_{65}^{(1)}$ de $\mathbf{K}_1$ debe estar localizado en la fila 3 y en la columna 2 de $\mathbf{S}$, como se muestra en la Fig. 17.10(e). usando este enfoque, los elementos restantes de $\mathbf{K}_1$, excepto aquellos correspondientes a la fila o columna cero de $\mathbf{S}$, están almacenados en sus propias posiciones en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura.

Se repite el mismo procedimiento para el elemento 2. Cuando dos o más coeficientes de rigidez de un elemento están localizados en la misma posición en $\mathbf{S}$, los coeficiente se deben sumar algebraicamente. La matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura completa se muestra en la Fig. 17.10(e). tenga en cuenta que esta matriz es idéntica a la obtenida previamente (Ec. (17.42)) sustituyendo las ecuaciones de compatibilidad del elemento y las relaciones de rigidez en las ecuaciones de equilibrio del nodo.

El procedimiento anterior de formar directamente la matriz de rigideces de la estructura ensamblando los coeficientes de rigidez de los elementos puede ser fácilmente implementado en computadoras. Para salvar espacio de

almacenamiento en las computadoras, se genera uno a uno la matriz de rigideces de un elemento; se almacena en la matriz de rigideces de la estructura, y el espacio se reutiliza para generar la matriz de rigideces para el siguiente elemento y así sucesivamente.

El vector de fuerzas en los nodos, $\mathbf{P}_f$, se pueden ensamblar usando un procedimiento similar al usado en el ensamblaje de la matriz de rigideces de la estructura. Para generar el vector $\mathbf{P}_f$, para el marco en consideración, los números del grado de libertad de la estructura para el elemento 1 se escriben primero del lado derecho del vector de fuerzas $\mathbf{F}_{f1}$, en los nodos del elemento, como se muestra en la Fig. 17.10(f). Cada uno de estos números representa el número de fila de $\mathbf{P}_f$, en el cual se almacenará el número correspondiente de fuerza. Por ejemplo, el elemento $F_{f5}^{(1)}$ debe estar almacenado en la fila 2 de $\mathbf{P}_f$, como se muestra en la figura. De manera similar, los elementos restantes de $\mathbf{F}_{f1}$, excepto aquellos correspondientes a la número de fila cero de $\mathbf{P}_f$, almacenados en su posición correcta en $\mathbf{P}_f$. Se repite el mismo procedimiento para el elemento 2. El vector de fuerzas $\mathbf{P}_f$ de los nodos de la estructura obtenido de esta manera se muestra en la Fig. 17.10(f). Tenga en cuenta que este vector es idéntico al que está dado en la Ec. (17.43).

Una vez que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{P}_f$ han sido evaluados, las relaciones de la rigidez de la estructura (Ec. (17.41)), que ahora representan un sistema de ecuaciones simultáneas lineales algebraicas, se puede resolver para un desplazamiento $\mathbf{d}$ del nodo desconocido. Una vez determinado $\mathbf{d}$, los desplazamientos en los extremos para cada elemento se pueden determinar aplicando las ecuaciones de compatibilidad definidas por sus números de grado de libertad de la estructura; las fuerzas en el extremo correspondientes se pueden calcular usando las relaciones de rigidez de los elementos.

El procedimiento para generar la matriz $\mathbf{S}$ de rigideces de la estructura y el vector de fuerza $\mathbf{P}_f$ en los nodos, como se describió acá para los marcos, se puede aplicar a las vigas y armaduras también, excepto en el caso de las armaduras $\mathbf{P}_f = \mathbf{0}$.

17.6 Procedimiento para el Análisis

Basados en la discusión presentada en la sección anterior, podemos desarrollar el siguiente procedimiento paso a paso para el análisis de estructuras por el método de rigideces matricial.

1. Prepare un modelo analítico de la estructura como sigue:
 - a. Dibuje un diagrama de líneas de la estructura, en la que cada nodo y elemento deben estar identificado por un número.
 - b. Seleccione un sistema de coordenadas globales XY , con los ejes X y Y orientados en la dirección horizontal (positivos a la derecha) y verticales (positivo hacia arriba), respectivamente. Es conveniente localizar el origen del sistema de coordenadas en el nodo inferior izquierdo de la estructura, de modo que las coordenadas X y Y de la mayoría de los nodos sean positivas.
 - c. Para cada elemento, establezca un sistema de coordenadas locales xy uno de los nodos y sus extremos como el nodo origen y el otro como el nodo final. En el diagrama de líneas de la estructura, para cada elemento indique la dirección positiva del eje local x dibujando una flecha a lo largo del elemento apuntando hacia

- el nodo final. Para elementos horizontales, la transformación de coordenadas se puede evitar seleccionando el nodo del extremo izquierdo del elemento como el nodo de inicio.
- d. Identifique el grado de libertad o los desplazamientos desconocidos de los nodos, $\mathbf{d}$, de la estructura. Los grados de libertad son especificados en el diagrama de líneas de la estructura dibujando flechas en los nodos y se numeran empezando por el número de nodo más bajo y procediendo secuencialmente hacia el número de nodo más alto. En el caso de que más de un grado de libertad tenga el nodo, primero se numera el desplazamiento en X , seguido del desplazamiento en Y , y luego la rotación. Recuerde que un nodo de un marco plano puede tener hasta tres grados de libertad (dos desplazamientos y una rotación); un nodo de una viga continua puede tener dos grados de libertad (un desplazamiento perpendicular al eje centroidal de la viga y una rotación); y un nodo de una armadura plana puede tener hasta dos grados de libertad (dos desplazamientos). Tenga en cuenta que los desplazamientos de los nodos se consideran positivos cuando se presentan en las direcciones de los ejes X y Y ; las rotaciones son consideradas positivas cuando se presentan en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
 2. Evalúe la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura y el vector de fuerzas en los nodos $\mathbf{P}_f$. Para cada elemento de la estructura, realice las siguientes operaciones:
 - a. Para armaduras, vaya directamente al paso 2(d). De otra manera calcule la matriz de rigideces del elemento en coordenadas locales, $\mathbf{K}$. Las expresiones para $\mathbf{K}$ para los elementos del marco y vigas continuas están dadas en las Ecs. (17.5) y (17.3).
 - b. Si el elemento está sujeto a cargas externas, evalúe el vector de fuerzas en los nodos en coordenadas locales $\mathbf{Q}_f$, usando las expresiones para momentos de empotre dadas en el interior de la contra portada de libro y aplicando las ecuaciones de equilibrio (ver Ejemplos 17.2 y 17.3).
 - c. Para elementos horizontales con el eje local positivo a la derecha, (es decir, en la misma dirección del eje global X), las relaciones de la rigidez del elemento en coordenadas locales y globales con las mismas (es decir, $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{F}_f = \mathbf{Q}_f$); vaya al paso 2(e). De otra manera calcule la matriz de transformación $\mathbf{T}$ del elemento usando la Ec. (17.12).
 - d. Determine la matriz de rigideces del elemento en coordenadas globales, $\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ (Ec. (17.26)), y el vector de fuerzas en los nodos, $\mathbf{F}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_f$ (Ec. (17.27)). La matriz $\mathbf{K}$ debe ser simétrica. Para armaduras, es usualmente conveniente adoptar la forma explícita de $\mathbf{K}$ dada en la Ec. (17.29). Además, para armaduras, $\mathbf{F}_f = \mathbf{0}$.
 - e. Identifique los números de los grados de libertad de los elementos de la estructura y almacene los elementos correspondientes de $\mathbf{K}$ y $\mathbf{F}_f$ en sus posiciones correctas en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura y el vector de fuerzas en los nodos $\mathbf{P}_f$, respectivamente, usando el procedimiento descrito en la Sección 17.5. La matriz de rigideces $\mathbf{S}$ completa de la estructura obtenida ensamblando los coeficientes de rigidez de todos los elementos de la estructura debe ser simétrica.
 3. Forme el vector de carga $\mathbf{P}$ en los nodos.

4. Determine los desplazamientos desconocidos. Sustituya $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_f$ y $\mathbf{S}$ en las relaciones de la rigidez de la estructura, $\mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{S}\mathbf{d}$ (ec. (17.41)), y resuelva el sistema de ecuaciones resultantes para cada incógnita del desplazamientos $\mathbf{d}$ del nodo.
5. Calcule los desplazamientos y las fuerzas en los extremos del elemento. Para cada elemento haga lo siguiente:
 - a. Obtenga los desplazamientos en el extremo del elemento en coordenadas globales, $\mathbf{v}$ de los desplazamientos de los nodos, $\mathbf{d}$, usando los números de los grados de libertad de los elementos de la estructura.
 - b. Determine los desplazamientos en el extremo del elemento en coordenadas locales usando la relación $\mathbf{U} = \mathbf{T}\mathbf{v}$ (Ec. (17.4)). Para armaduras.
 - c. Calcule las fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas locales usando la relación $\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_f$ (Ec. (17.4)). Para armaduras, $\mathbf{Q}_f = \mathbf{0}$.
 - d. Calcule las fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas globales usando las relaciones de transformación, $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}$ (Ec. (17.17)). Para elementos horizontales con el eje local x positivo a la derecha, $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$.
6. Determine las reacciones en los apoyos considerando el equilibrio de los nodos localizados en los apoyos de la estructura.

Programas de Computadora

Un programa de computadora para el análisis de estructuras de marcos planos usando el método de las rigideces está disponible en la página web del editor www.cengage.com/engineerinf para uso del lector. Una breve descripción del programa además de información sobre cómo usar este programa, incluyendo una ejemplo ilustrativo, se presenta en el Apéndice C.

Ejemplo 17.1

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura mostrada en al Fig. 17.11(a) usando el método de las rigideces matricial.

Solución

Grados de libertad. Del modelo analítico de la armadura mostrada en la Fig. 17.11(b), observamos que solo el nodo 3 está libres al desplazamiento. Así la armadura tiene dos grados de libertad, d_1 y d_2 , los cuales son las incógnitas de desplazamientos del nodo 3 en las direcciones X y Y , respectivamente.

Matriz de Rigideces de la Estructura.

Elemento 1 Como se muestra en la Fig. 17.11(b), el nodo 1 ha sido seleccionado como el nodo de inicio y el nodo 3 como el nodo del extremo final para el elemento 1. Aplicando al Ecs. (17.13), determinamos

$$L = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = \sqrt{(15 - 0)^2 + (20 - 0)^2} = 25 \text{ ft}$$

$$\cos \theta = \frac{X_3 - X_1}{L} = \frac{15}{25} = 0.6$$

$$\sin \theta = \frac{Y_3 - Y_1}{L} = \frac{20}{25} = 0.8$$

continúa

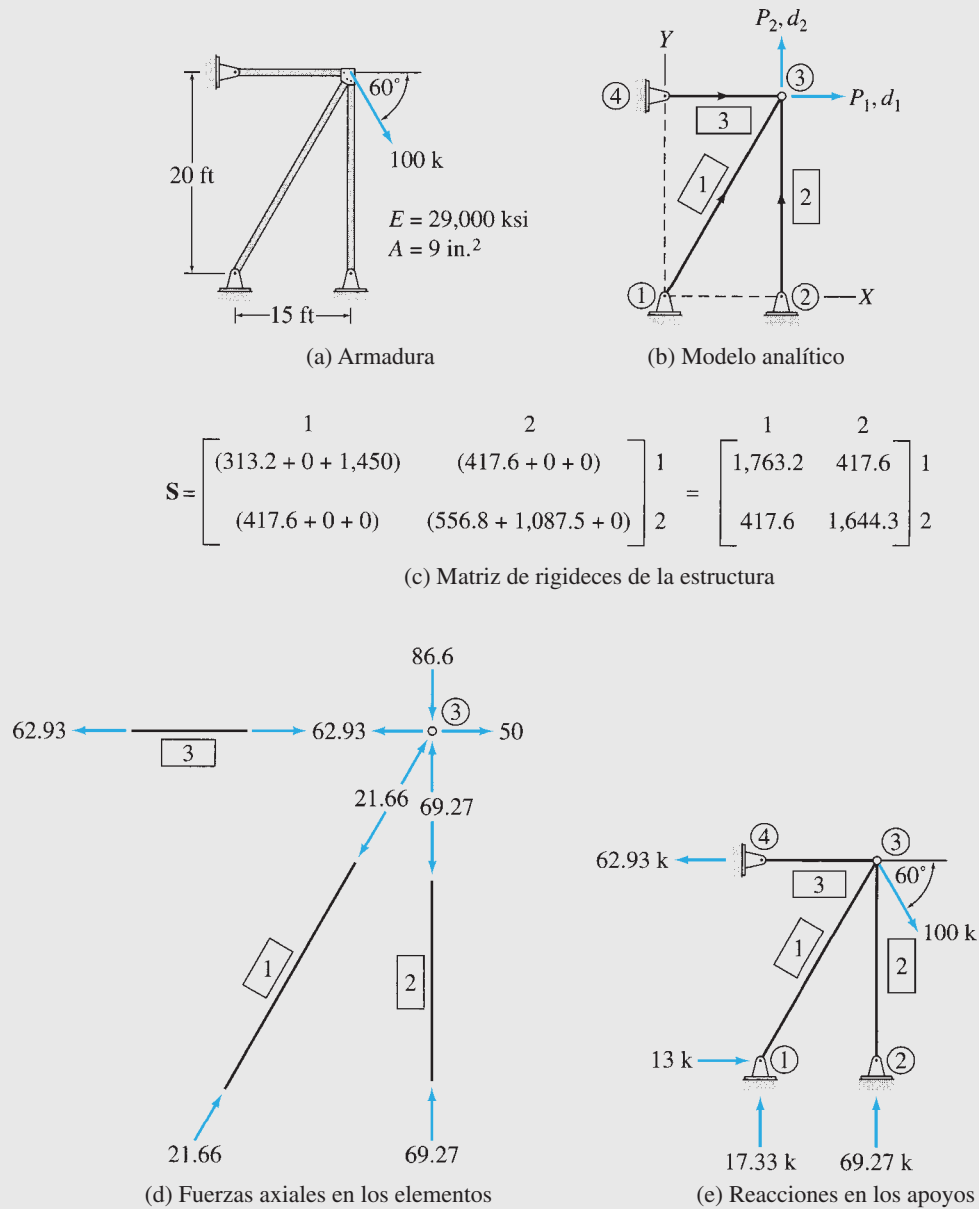


FIG. 17.11

La matriz de rigideces de la estructura en coordenadas globales se puede ser evaluada usando la Ec. (17.29)

$$K_1 = \frac{(29,000)(9)}{(25)(12)} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

continúa

o

$$\mathbf{K}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 313.2 & 417.6 & -313.2 & -417.6 \\ 417.6 & 556.8 & -417.6 & -556.8 \\ -313.2 & -417.6 & 313.2 & 417.6 \\ -417.6 & -556.8 & 417.6 & 556.8 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad (1)$$

De la Fig. 17.11(b), observamos que el desplazamiento del nodo de inicio 1 del elemento es cero, mientras que el desplazamiento del extremo del nodo 3 son d_1 y d_2 , por lo tanto, los números del grado de libertad de la estructura para este elemento son 0, 0, 1, 2. Estos están escritos del lado derecho y en la parte superior de $\mathbf{K}_1$ (ver la Ec. (1)) para indicar las filas y columnas, respectivamente, de la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura, donde los elementos $\mathbf{K}_1$ debe ser almacenado. Tenga en cuenta que los elementos de $\mathbf{K}_1$, los cuales corresponden al número cero del grado de libertad de la estructura, simplemente se ignoran. Por lo tanto, el elemento en la fila 3 y columnas 3 de $\mathbf{K}_1$ se almacena en la fila 1 y columna 2 de $\mathbf{S}$, como se muestra en la Fig. 17.11(c). De manera similar, el elemento de la fila 3 y columna 4 de $\mathbf{K}_1$ se almacena en la fila 1 y columna 2 de $\mathbf{S}$. Los elementos restante de $\mathbf{K}_1$ son almacenados en $\mathbf{S}$ de manera similar (Fig. 17.11(c)).

Elemento 2 De la Fig. (17.11(b)), podemos ver que el nodo 2 es el nodo de inicio y el nodo 3 es el nodo final del elemento 2. Aplicando las Ecs. (17.13), obtenemos

$$\cos \theta = \frac{X_3 - X_2}{L} = \frac{15 - 15}{20} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{Y_3 - Y_2}{L} = \frac{20 - 0}{20} = 1$$

Por lo tanto, usando la Ec. (17.29)

$$\mathbf{K}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,087.5 & 0 & -1,087.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,087.5 & 0 & 1,087.5 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

De la Fig. 17.11 (b), podemos ver que los números de los grados de libertad de la estructura para este elemento son 0, 0, 1, 2. Estos números son usados para almacenar los elementos correspondientes de $\mathbf{K}_2$ de manera adecuada en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura, como se muestra en la Fig. 17.11(c).

Elemento 3 $\cos \theta = 1$ $\sin \theta = 0$

Usando la Ec. (17.29),

$$\mathbf{K}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1,450 & 0 & -1,450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,450 & 0 & 1,450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Los números de los grados de libertad para este elemento con 0, 0, 1, 2. Usando estos números, los elementos de $\mathbf{K}_3$ son almacenados en $\mathbf{S}$, como se muestra en la Fig. 17.11(c).

Tenga en cuenta que las matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura (Fig. 17.11(c)), obtenidas ensamblando los coeficientes de rigidez de los tres elementos, es simétrica.

Vector de carga en los Nodos. Comparando la Fig. 17.11(a) y (b), nos damos cuenta que

$$P_1 = 100 \cos 60^\circ = 50 \text{ k} \quad P_2 = -100 \sin 60^\circ = -86.6 \text{ k}$$

continúa

Por lo tanto el vector de carga en los nodos es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Desplazamientos en los Nodos. Las relaciones de rigidez de la armadura completa se pueden expresar como (Ec. (17.41) con $\mathbf{P}_f = 0$)

$$\mathbf{P} = \mathbf{Sd} \quad (3)$$

Sustituyendo $\mathbf{P}$ de la Ec. (2) y $\mathbf{S}$ de la Fig. 17.11(c), escribimos la Ec. (3) en forma expandida como

$$\begin{bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,763.2 & 417.6 \\ 417.6 & 1,644.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, determinamos los desplazamientos de los nodos como

$$d_1 = 0.0434 \text{ in.} \quad d_2 = -0.0637 \text{ in.}$$

O

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

Desplazamientos y Fuerzas en los Extremos del Elemento.

Elemento 1 Los desplazamientos en el extremo del elemento en coordenadas globales, $\mathbf{v}$, se pueden obtener simplemente comparando los números de los grados de libertad global del elemento con los números de los grados de libertad de la estructura para el elemento, como sigue:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} \text{ in.} \quad (4)$$

Tenga en cuenta que los números de los grados de libertad de la estructura para el elemento (0, 0, 1, 2) están escritos en el lado derecho de $\mathbf{v}$, como se muestra en la Ec. (4). Debido a que los números de los grados de libertad de la estructura correspondientes a v_1 y v_2 con cero, esto indica que $v_1 = v_2 = 0$. De manera similar, los números 1 y 2 correspondientes a v_3 y v_4 , respectivamente, indica que $v_3 = d_1$ y $v_4 = d_2$. Debe tenerse en cuenta que estas ecuaciones de compatibilidad se podrían haber establecido como alternativamente simplemente con la inspección visual del diagrama de líneas de la estructura (Fig. 17.11(b)). Sin embargo, el uso de los números de los grados de libertad de la estructura nos permite programar convenientemente este procedimiento en una computadora.

Los desplazamientos en el extremo del elemento en coordenadas locales se pueden determinar usando la relación $\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v}$ (ec. 17.14)), con $\mathbf{T}$ como se define en la Ec. (17.22):

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0249 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

Usando la Ec. (17.7), calculamos las fuerzas en los extremo del elemento como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 870 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0249 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.66 \\ -21.66 \end{bmatrix} \text{ k}$$

Por lo tanto, como se muestra en la Fig. 17.11(d), la fuerza axial en el elemento 1 es

$$21.66 \text{ k (C)}$$

Respuesta

continúa

Aplicando la Ec. (17.17), podemos determinar las fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas globales como

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.66 \\ -21.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 17.33 \\ -13 \\ -17.33 \end{bmatrix} \text{ k}$$

Elemento 2 Los desplazamientos en el extremo del elemento en coordenadas globales están dados por

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

Usando la relación $\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v}$, determinados los desplazamientos en los extremos del elemento como

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0637 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

Después, las fuerzas en el extremo de elemento en coordenadas locales se calculan usando la relación $\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u}$:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 1,087.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0637 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69.27 \\ -69.27 \end{bmatrix} \text{ k}$$

Por lo tanto, como se muestra en la Fig. 17.11(d), la fuerza axial en el elemento 2 es

$$69.27 \text{ k (C)}$$

Respuesta

Usando las relaciones $\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}$, calculamos las fuerzas en los extremos del elemento en coordenadas globales como

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69.27 \\ -69.27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 69.27 \\ 0 \\ -69.27 \end{bmatrix} \text{ k}$$

Elemento 3

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0637 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0434 \end{bmatrix} \text{ in.}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 1,450 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0434 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62.93 \\ 62.93 \end{bmatrix} \text{ k}$$

continúa

Por lo tanto, la fuerza axial en el elemento 3 es (fig. 17.11(d))

$$62.93 \text{ k (T)}$$

Respuesta

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -62.93 \\ 62.93 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62.93 \\ 0 \\ 62.93 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ k}$$

Reacciones en los Apoyos. Como se muestra en la Fig. 17.11(e), las reacciones en los apoyos del nodo 1 y 2 y 4 son iguales a las fuerzas en coordenadas globales en el extremo del elemento conectados a estos nodos

Respuesta

Comprobación del Equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio del cuerpo libre de la estructura completa (fig. 17.11(e)), obtenemos

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad 13 - 62.93 + 100 \cos 60^\circ = 0.07 \quad 0$$

Comprobación

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad 17.33 + 69.27 - 100 \sin 60^\circ = 0$$

Comprobación

$$+ \curvearrowright \sum M_\odot = 0 \quad 69.27(15) + 62.93(20) - 100 \cos 60^\circ(20) - 100 \sin 60^\circ(15) \\ = -1.39 \approx 0$$

Comprobación

Ejemplo 17.2

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la viga continua de cuatro claros mostrada en al Fig. 17.12(a) usando el método de las rigideces matricial.

Solución

Grados de libertad. Del modelo analítico de la armadura mostrada en la Fig. 17.12(b), observamos que la estructura tiene dos grados de libertad, d_1 y d_2 , los cuales son las incógnitas de rotación de los nodos 2 y 3, respectivamente. Tenga en cuenta que el sistema de coordenadas locales del elemento se eligieron de manera que las direcciones positivas de los eje locales y globales sean las mismas. Por lo tanto no es necesario la transformación de coordenadas; es decir, las relaciones de la rigidez del elemento de los ejes locales y globales son las mismas.

Matriz de Rigideces de la Estructura.

Elemento 1 Sustituyendo $L = 10 \text{ m}$ en la Ec. (17.6), obtenemos

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Usando las expresiones de los momentos de empotre dado en la parte interna de la contraportada del libro, evaluamos los momentos de empotre debidos a la carga de 80-kN como

$$Q_{f2} = \frac{80(6)(4)^2}{(10)^2} = 76.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$Q_{f4} = -\frac{80(6)^2(4)}{(10)^2} = -115.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

continúa

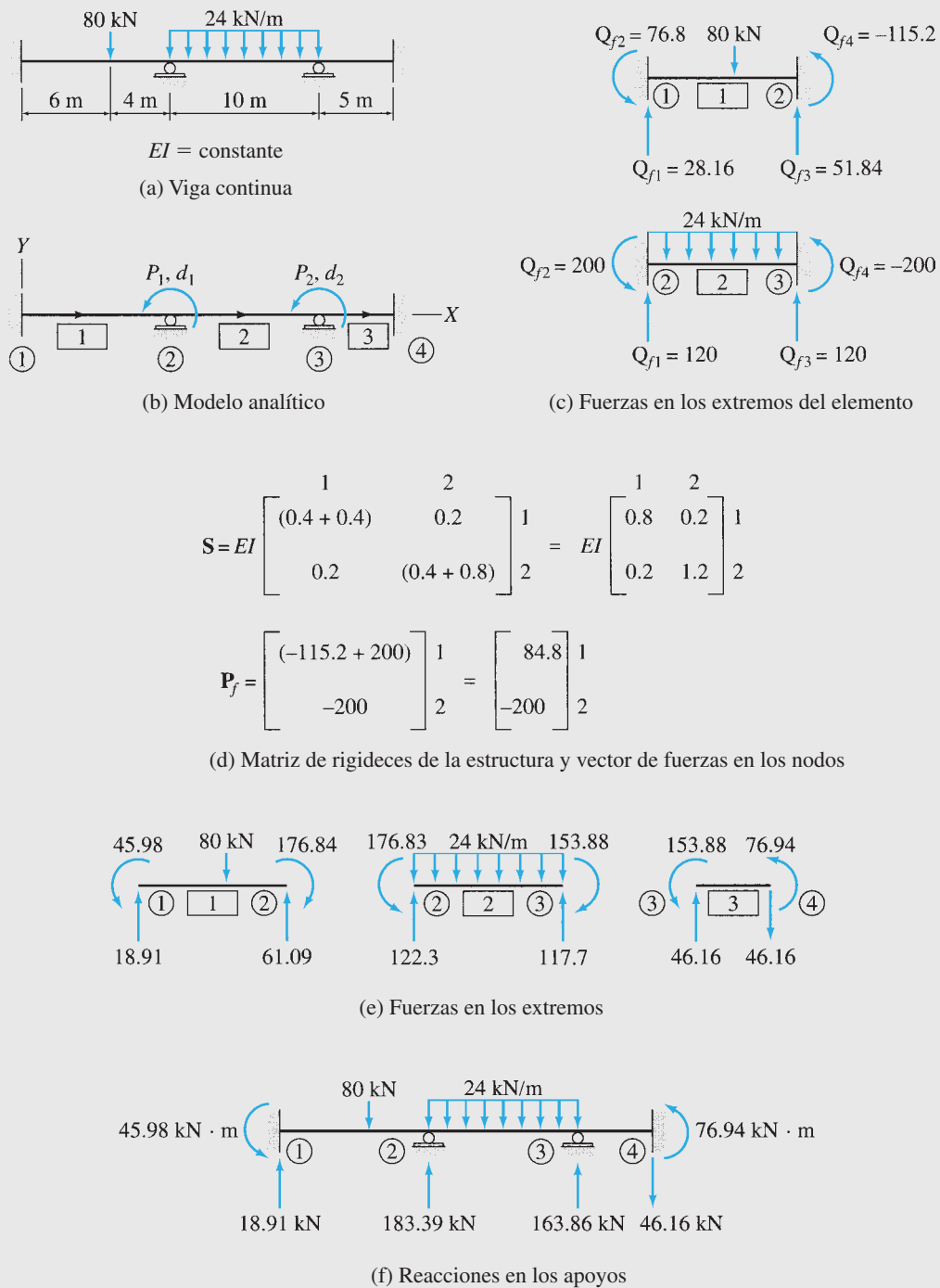


FIG. 17.12

continúa

Los cortantes en los extremos de elemento Q_{f1} y Q_{f2} ahora pueden ser determinados considerando el cuerpo libre del elemento 1, mostrado en la Fig. 17.12(c):

$$+\zeta \sum M_2 = 0 \quad 76.8 - Q_{f1}(10) + 80(4) - 115.2 = 0$$

$$Q_{f1} = 28.16 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 28.16 - 80 + Q_{f3} = 0$$

$$Q_{f3} = 51.84 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el vector de fuerzas en los nodos para el elemento 1 es

$$\mathbf{F}_{f1} = \mathbf{Q}_{f1} = \begin{bmatrix} 28.16 \\ 76.8 \\ 51.84 \\ -115.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

De la Fig. 17.12(b), observamos que los números de los grados de libertad de la estructura para este elemento son 0, 0, 0, 1. Usando estos números, los elementos correspondientes de $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{F}_{f1}$ son almacenados en sus respectivas posiciones en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura y el vector de fuerzas $\mathbf{P}$ en los nodos, respectivamente, como se muestra en la Fig. 17.12(d), obtenemos

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Los momentos de empotre debido a la carga de 24-kN/m son

$$Q_{f2} = -Q_{f4} = \frac{24(10)^2}{12} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio del cuerpo libre del elemento 2 resulta (Fig. 17.12(c))

$$Q_{f1} = Q_{f3} = 120 \text{ kN}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}_{f2} = \mathbf{Q}_{f2} = \begin{bmatrix} 120 \\ 200 \\ 120 \\ -200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Usando los números de los grados de libertad de la estructura, 0, 1, 0, 2, para este elemento, almacenamos los elementos correspondientes de $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{F}_{f2}$ en $\mathbf{S}$ y $\mathbf{P}_{f2}$, respectivamente, como se muestra en la Fig. 17.12(d).

Elemento 3 $L = 5 \text{ m}$:

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{k}_3 = EI \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Los elementos de $\mathbf{K}_3$ están almacenados en $\mathbf{S}$ usando los números de los grados de libertad de la estructura 0, 2, 0, 0. Tenga en cuenta que dado que el elemento 3 no está sujeto a ninguna carga externa,

$$\mathbf{F}_{f3} = \mathbf{Q}_{f3} = \mathbf{0}$$

continúa

Desplazamientos y Fuerzas en los Extremos del Elemento.

Elemento 1 Usando los números de los grados de libertad de la estructura, obtenemos los desplazamientos en el extremo del elemento:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -154.09 \end{bmatrix}$$

Usando las relaciones de la rigidez del elemento $\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q}_f$ (Ec. 17.4)), calculamos las fuerzas en el extremos del elemento como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 &= EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -154.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28.16 \\ 76.8 \\ 51.84 \\ -115.2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18.91 \text{ kN} \\ 45.98 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 61.09 \text{ kN} \\ -176.84 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Respuesta**Elemento 2**

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ -154.09 \\ 0 \\ 192.35 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q}_f$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -154.09 \\ 0 \\ 192.35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120 \\ 200 \\ 120 \\ -200 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 122.3 \text{ kN} \\ 176.83 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 117.7 \text{ kN} \\ -153.88 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Respuesta*continúa*

Elemento 3

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 192.35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q}_f$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 192.35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.16 \text{ kN} \\ 153.88 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -46.16 \text{ kN} \\ 76.94 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta}$$

Las fuerzas en el extremo del elemento de los tres elementos de la viga continua se muestran en la Fig. 17.12 (e).

Reacciones en los Apoyos. Debido a que el apoyo en el nodos 1 es el nodo de inicio del elemento 1, las consideraciones de equilibrio requieren que las reacciones en el nodo 1, $\mathbf{R}_{①}$, se igual a la mitad superior de $\mathbf{F}_1$ (es decir, las fuerzas en el extremo 1 del elemento1).

$$\mathbf{R}_{①} = \begin{bmatrix} 18.91 \text{ kN} \\ 45.98 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta}$$

En la cual el primer elemento de $\mathbf{R}_{①}$, representa la fuerza vertical y el segundo elemento representa el momento, como se muestra en la Fig. 17.12(f). De manera similar, dado que el apoyo del nodo 2 es el nodo extremo del elemento 1 pero le nodo del inicio para el elemento 2, el vector de reacción en el nodo 2, $\mathbf{R}_{②}$, debe ser igual a la suma algebraica de la mitad inferior de $\mathbf{F}_1$ y la mitad superior de $\mathbf{F}_2$.

$$\mathbf{R}_{②} = \begin{bmatrix} 61.09 \\ -176.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 122.3 \\ 176.83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183.39 \text{ kN} \\ -0.01 \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta}$$

De manera similar, en apoyo en el nodo 3, $\mathbf{R}_{③}$, se puede determinar sumando algebraicamente la mitad inferior de $\mathbf{F}_2$ y la mitad superior de $\mathbf{F}_3$.

$$\mathbf{R}_{③} = \begin{bmatrix} 117.7 \\ -153.88 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46.16 \\ 153.88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163.86 \text{ kN} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta}$$

Finalmente, el vector de reacciones en el nodo 4 debe ser igual a la mitad inferior de $\mathbf{F}_3$:

$$\mathbf{R}_{④} = \begin{bmatrix} -46.16 \text{ kN} \\ 76.94 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta}$$

Las reacciones en los apoyos se muestra en la Fig. 17.12(f).

Comprobación del Equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estructura completa (Fig. 17.12(f)), obtenemos

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$18.91 - 80 + 183.39 - 24(10) + 163.86 - 46.16 = 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+\zeta \sum M_4 = 0$$

$$45.98 - 18.91(25) + 80(19) - 183.39(15) + 24(10)(10) - 163.86(5) + 76.94 = 0.02 \quad 0 \quad \text{Comprobación}$$

Ejemplo 17.3

Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento del marco mostrado en al Fig. 17.13(a) usando el método de las rigideces matricial.

Solución

Grados de libertad. Del modelo analítico de la armadura mostrada en la Fig. 17.13(b), observamos que mientras en nodo 1 y 3 de la estructura no pueden ni desplazarse rotar, el nodo 2 está libre al desplazamiento y la rotación. Así el marco tiene tres grados de libertad, el desplazamiento d_1 y d_2 en las direcciones X y Y , respectivamente, y la rotación d_3 del nodo 2.

Matriz de Rigideces de la Estructura.

Elemento 1 dado que el sistema de coordenadas locales para este elemento coincide con el sistema global de coordenadas XY , no se necesitan coordenadas de transformación; es decir, las relaciones de la rigidez del elemento son las mismas en las coordenadas locales y globales. Sustituyendo $E = 29,000(12)^2$ ksf, $I = 800/(12)^4$ ft⁴, $A = 16/(12)^2$ ft², y $L = 30$ ft en la Ec. (17.5), obtenemos

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 15,466.67 & 0 & 0 & -15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6 & 1,074.07 & 0 & -71.6 & 1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 21,481.48 & 0 & -1,074.07 & 10,740.74 \\ -15,466.67 & 0 & 0 & 15,466.67 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6 & -1,074.07 & 0 & 71.6 & -1,074.07 \\ 0 & 1,074.07 & 10,740.74 & 0 & -1,074.07 & 21,481.48 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (1)$$

Usando las expresiones de los momentos de empotre dadas en la parte interior de la contraportada del libro, evaluamos los momentos de empotre debido a la carga de 2-k/ft como

$$Q_{f3} = -Q_{f6} = \frac{2(30)^2}{12} = 150 \text{ k-ft}$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio al cuerpo libre del elemento, obtenemos (fig. 17.13(c))

$$Q_{f2} = Q_{f5} = 30 \text{ k}$$

Por lo tanto,

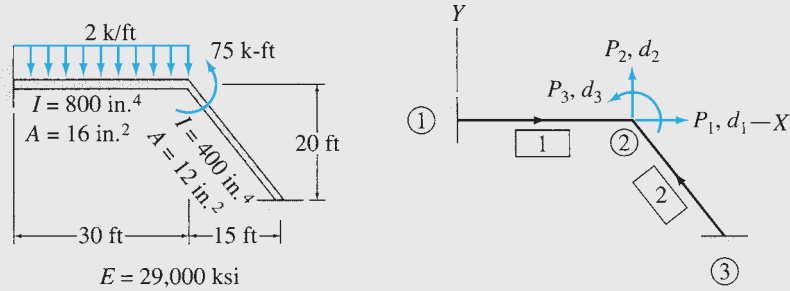
$$\mathbf{F}_{f1} = \mathbf{Q}_{f1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 150 \\ 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (2)$$

Usando los números de los grados de libertad 0, 0, 0, 1, 2, 3, para este elemento, los elementos correspondientes de $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{F}_{f1}$ están almacenados en las posiciones adecuadas en la matriz de rigideces $\mathbf{S}$ de la estructura y el vector de fuerzas en los nodos $\mathbf{P}_j$, respectivamente, como se muestra en la Fig. 17.13(d).

Elemento 2 Sustituyendo $E = 29,000(12)^2$ ksf, $I = 400/(12)^4$ ft⁴, $A = 12/(12)^2$ ft², y $L = 25$ ft en la Ec. (17.5), obtenemos

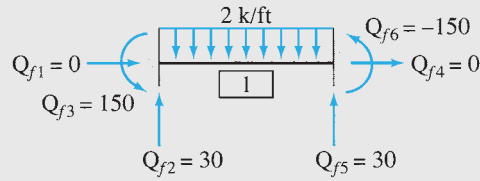
$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 13,920 & 0 & 0 & -13,920 & 0 & 0 \\ 0 & 61.87 & 773.33 & 0 & -61.87 & 773.33 \\ 0 & 773.33 & 12,888.89 & 0 & -773.33 & 6,444.44 \\ -13,920 & 0 & 0 & 13,920 & 0 & 0 \\ 0 & -61.87 & -773.33 & 0 & 61.87 & -773.33 \\ 0 & 773.33 & 6,444.44 & 0 & -773.33 & 12,888.89 \end{bmatrix} \quad (3)$$

continúa



(a) Marco

(b) Modelo analítico



(c) Fuerza en el extremo del elemento

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (15,466.67 + 5,050.8) & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & (71.6 + 8,931.07) & (-1,074.07 + 464) \\ 618.67 & (-1,074.07 + 464) & (21,481.48 + 12,888.89) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

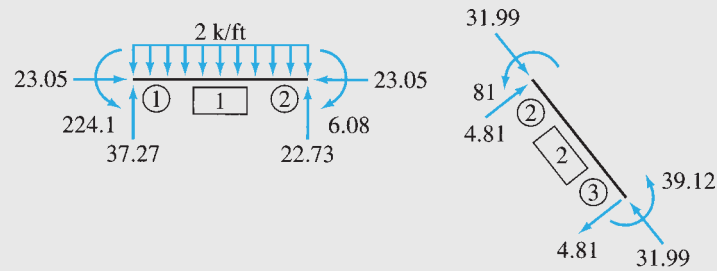
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

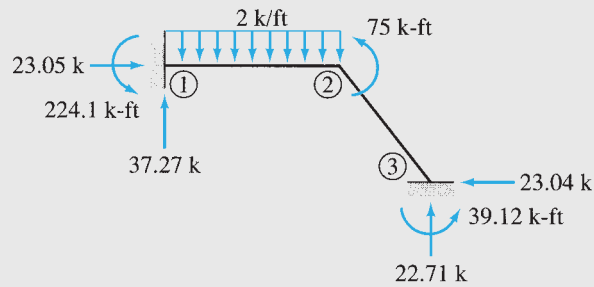
(d) Matriz de rigideces de la estructura y vector de fuerzas en los nodos

FIG. 17.13

continúa



(e) Fuerzas en el extremo del elemento en coordenadas locales



(f) Reacciones en los apoyos

FIG. 17.13 (cont.)

Debido a que el elemento 2 no está sujeto a ninguna carga externa,

$$\mathbf{Q}_{f2} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Usando las coordenadas globales del nodo de inicio 3 y del nodo final 2., Determinamos los cosenos del elemento 2 como (Ec. (17.13))

$$\cos \theta = \frac{X_2 - X_3}{L} = \frac{30 - 45}{25} = -0.6$$

$$\sin \theta = \frac{Y_2 - Y_3}{L} = \frac{0 - (-20)}{25} = 0.8$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (17.12) resulta la siguiente matriz de transformación para el elemento:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

continúa

Para determinar la matriz de rigideces del elemento en coordenadas globales, $\mathbf{K}_2$, sustituimos las matrices $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{T}_2$ en la relación $\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}$ (Ec. (17.26)) y llevando a cabo la multiplicación matricial obtenemos

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5,050.8 & -6,651.9 & -618.67 & -5,050.8 & 6,651.9 & -618.67 \\ -6,651.9 & 8,931.07 & -464 & 6,651.9 & -8,931.07 & -464 \\ -618.67 & -464 & 12,888.89 & 618.67 & 464 & 6,444.44 \\ -5,050.8 & 6,651.9 & 618.67 & 5,050.8 & -6,651.9 & 618.67 \\ 6,651.9 & -8,931.07 & 464 & -6,651.9 & 8,931.07 & 464 \\ -618.67 & -464 & 6,444.44 & 618.67 & 464 & 12,888.89 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (6)$$

Tenga en cuenta que $\mathbf{K}_2$ es simétrica. Usando los números de los grados de libertad 0, 0, 0, 1, 2, 3, para el elemento 2, los elementos correspondientes de $\mathbf{K}_2$ se suman en sus posiciones en la matriz $\mathbf{S}$, como se muestra en la Fig. 17.13(d). Tenga en cuenta que $\mathbf{F}_{f2} = \mathbf{0}$.

Vector de carga en los Nodos. Comparando la Fig. 17.13(a) y (b), escribimos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos en los Nodos. Las relaciones de rigidez del marco completo $\mathbf{P} - \mathbf{P}_f = \mathbf{Sd}$, están escritas en forma expandida como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

O

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,517.47 & -6,651.9 & 618.67 \\ -6,651.9 & 9,002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34,370.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones simultaneas, determinamos los desplazamientos en los nodos como

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y Fuerza en los Extremos del Elemento.

Elemento 1

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{Q}_{f1}$, y $\mathbf{u}_2$ en la relación de la rigidez del elemento $\mathbf{Q} = \mathbf{ku} + \mathbf{Q}_f$ (Ec. (17.4)), determinamos las fuerzas en los extremos como

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \\ -23.05 \text{ k} \\ 22.73 \text{ k} \\ -6.08 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

continúa

Elemento 2

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \text{ ft} \\ -0.00399 \text{ ft} \\ 0.0065 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{F}_{f2} = 0$ en las relaciones de la rigidez del elemento en las coordenadas globales, $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{F}_f$ (ec. 17.25)), determinamos las fuerzas en los extremos del elemento en coordenadas globales como

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ 23.04 \text{ k} \\ -22.71 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Las fuerzas en los extremos del elemento en coordenadas locales se pueden evaluar sustituyendo $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{T}_2$ en las relaciones $\mathbf{Q} = \mathbf{TF}$ (Ec. (17.11)).

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 31.99 \text{ k} \\ 4.81 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \\ -31.99 \text{ k} \\ -4.81 \text{ k} \\ 81 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Respuesta

Las fuerzas locales en el extremo del elemento en coordenadas locales se muestran en la Fig. 17.13(e).

Respuesta

Reacciones en los Apoyos. Debido a que los apoyos en el nodo 1 y 3 son los nodos de inicio para los elemento 1 y 2, respectivamente, el vector de reacciones $\mathbf{R}_{\textcircled{1}}$ y $\mathbf{R}_{\textcircled{2}}$ deben ser iguales a las mitades superiores de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, respectivamente.

$$\mathbf{R}_{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 23.05 \text{ k} \\ 37.27 \text{ k} \\ 224.1 \text{ k-ft} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} -23.04 \text{ k} \\ 22.71 \text{ k} \\ 39.12 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

Respuesta

Las reacciones en los apoyos se muestran en la Fig. 17.13(f).

Respuesta

Comprobación del Equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al marco completo (Fig. 17.13(f)), obtenemos

$$+ \rightarrow \sum F_X = 0 \quad 23.05 - 23.04 = 0.01 \approx 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \uparrow \sum F_Y = 0 \quad 37.27 - 2(30) + 22.71 = -0.02 \approx 0 \quad \text{Comprobación}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_{\textcircled{O}} = 0 \quad 224.1 - 2(30)(15) + 75 - 23.04(20) + 22.71(45) + 39.12 = -0.63 \approx 0 \quad \text{Comprobación}$$

Resumen

En este capítulo hemos estudiado los conceptos básicos del método de las rigideces matriciales para el análisis de estructuras de marcos planos. Se presenta un diagrama de flujo resumiendo varios pasos involucrados en el análisis en la Fig. 17.14.

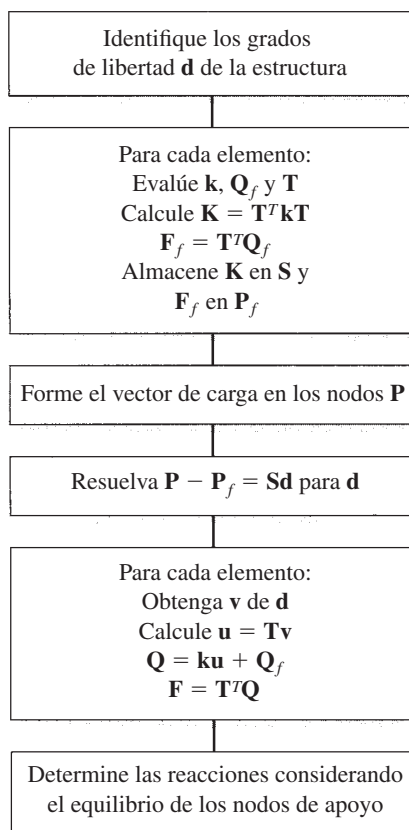


FIG. 17.14

Problemas

Sección 17.6

17.1 al 17.3 Determine las reacciones y las fuerzas en cada elemento de la armadura en la Fig. P17.1- P17.3 usando el método de las rigideces matriciales.

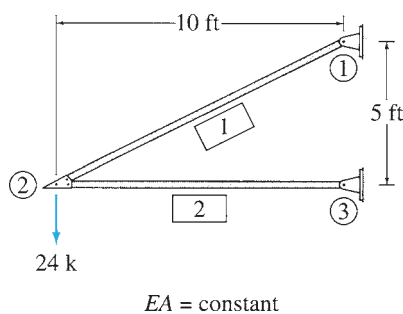


FIG. P17.1

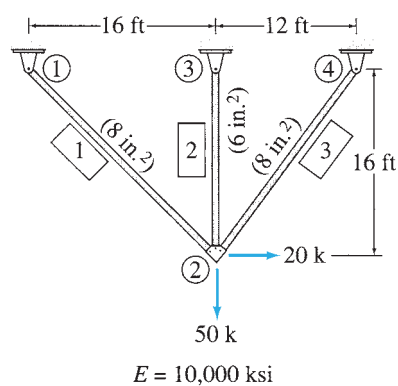


FIG. P17.2

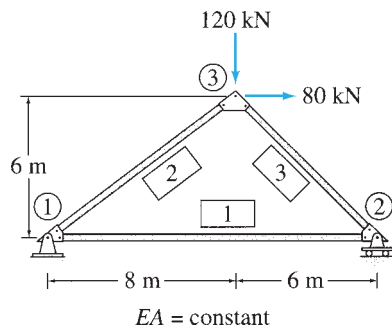


FIG. P17.3

17.4 al 17.6

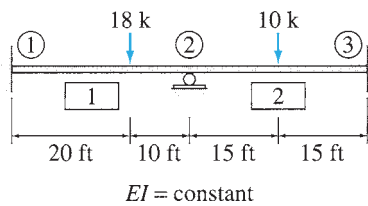


FIG. P17.4

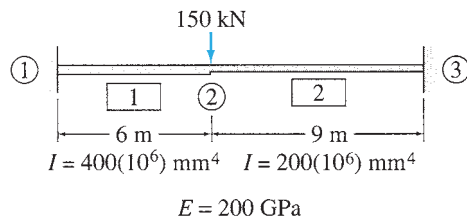


FIG. P17.5

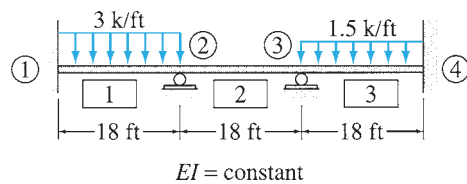


FIG. P17.6

17.4 al 17.9 Determine las reacciones y las fuerzas en los extremos de los elementos en coordenadas locales del marco mostrado en las Figs. P17.7-P17.9 usando el método de las rigideces matriciales.

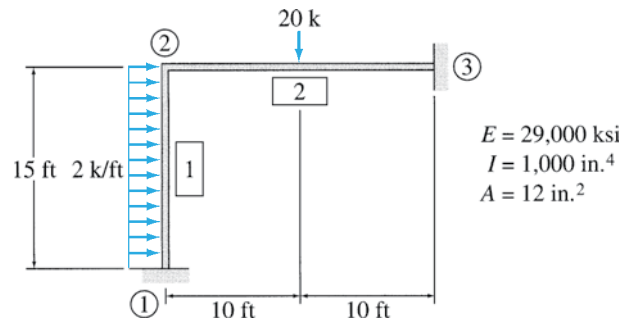


FIG. P17.7

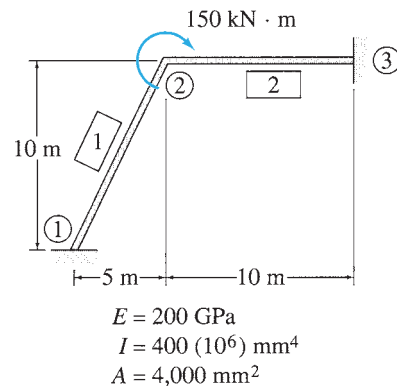


FIG. P17.8

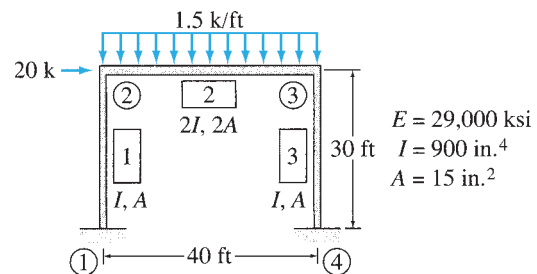
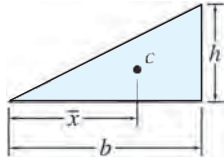
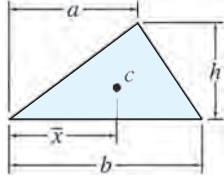
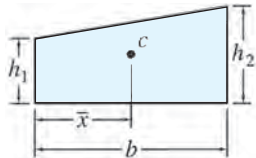
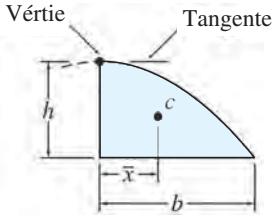


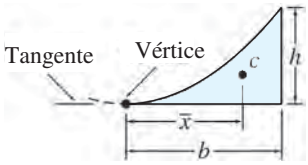
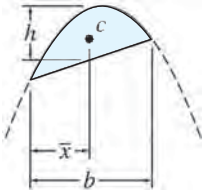
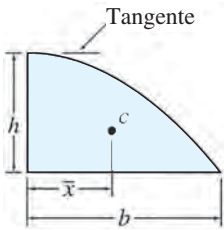
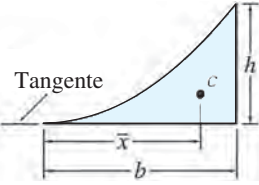
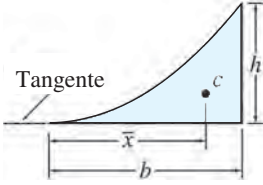
FIG. P17.9



Apéndice A

Áreas y centroides de formas geométricas

Forma	Área	Centroide
Triángulo de ángulo recto 	$A = \frac{bh}{2}$	$\bar{x} = \frac{2b}{3}$
Triángulo 	$A = \frac{bh}{2}$	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$
Trapezoide 	$A = \frac{b(h_1 + h_2)}{2}$	$\bar{x} = \frac{b(h_1 + 2h_2)}{3(h_1 + h_2)}$
Semiparábola 	$A = \frac{2bh}{3}$	$\bar{x} = \frac{3b}{8}$

Forma	Área	Centroide
Enjuta parabólica 	$A = \frac{bh}{3}$	$\bar{x} = \frac{3b}{4}$
Segmento parabólico 	$A = \frac{2bh}{3}$	$\bar{x} = \frac{b}{2}$
Note: When the segment represents a part of the bending moment diagram of a member subjected to uniformly distributed load w, then $h = wb^2/8$.		
Un cuarto de áreamm 	$A = \frac{3bh}{4}$	$\bar{x} = \frac{2b}{5}$
Enjuta de un cuarto de área 	$A = \frac{bh}{4}$	$\bar{x} = \frac{4b}{5}$
Enjuta general de n grados $y = ax^n, n \geq 1$ 	$A = \frac{bh}{n+1}$	$\bar{x} = \frac{(n+1)b}{(n+2)}$



Apéndice B

Repaso de álgebra de matrices

- B.1** Definición de una matriz
- B.2** Tipos de matrices
- B.3** Operaciones con matrices
- B.4** Solución de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan
Problemas

En este apéndice repasamos algunos conceptos básicos de álgebra de matrices necesarias para la formulación del análisis computarizado de estructuras. Un tratamiento más completo y riguroso de estos conceptos matemáticos se puede encontrar en cualquier libro de texto sobre el álgebra de matrices, tales como [11] y [28].

B.1 Definición de una matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de cantidades dispuestas en filas y columnas. Una matriz que contiene m filas y n columnas se puede expresar como:

$$\mathbf{A} = [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & A_{ij} & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} i\text{-ésima fila} \\ \\ \\ j\text{-ésima columna} \end{matrix} \quad m \times n \quad (\text{B.1})$$

Como indica la ecuación. (B.1), las matrices se denotan generalmente ya sea en negritas (por ejemplo, $\mathbf{A}$) o en cursivas encerradas entre corchetes (por ejemplo, $[A]$). Las cantidades que forman una matriz se llaman los elementos de la matriz, y cada elemento está representado por un subíndice doble, con el primer subíndice va la identificación de la fila y el segundo subíndice identifica la columna en la que se encuentra el elemento. Así, en la ecuación. (B.1), A_{12} representa el elemento situado en la primera fila y la segunda columna de la matriz $\mathbf{A}$, y A_{21} representa el elemento en la segunda fila y la primera columna de $\mathbf{A}$. En general, un elemento situado en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz $\mathbf{A}$ se designa como los ejemplos anteriores. Es una práctica común encerrar toda la matriz de elementos entre corchetes o paréntesis, como se muestra en la ecuación. (B.1).

El *tamaño* de una matriz se mide por su *orden*, que se refiere al número de filas y columnas de la misma matriz. Por lo tanto la matriz $\mathbf{A}$ en la ecuación. (B.1), que consiste en m filas y n columnas, se considera que es

de orden $m \times n$ (m por n). Como ejemplo, considere una matriz $\mathbf{B}$ dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 3 & -7 \\ 40 & -6 & 19 & 23 \\ -8 & 12 & 50 & 22 \end{bmatrix}$$

El orden de esta matriz es 3×4 , y sus elementos pueden ser simbólicamente representados por B_{ij} , con $i = 1$ a 3 y $j = 1$ a 4 ; por ejemplo, $B_{23} = 19$, $B_{31} = 8$, $B_{34} = 22$, etcétera.

B.2 Tipos de Matrices

Matriz de fila

Si todos los elementos de una matriz están dispuestos en una sola fila (es decir, $m = 1$), la matriz se llama una matriz fila. Un ejemplo de una matriz de fila es

$$\mathbf{C} = [50 \quad -3 \quad -27 \quad 35]$$

Matriz de columna

Una matriz con una sola columna de elementos (es decir, $n = 1$) se llama una matriz de columna. Por ejemplo,

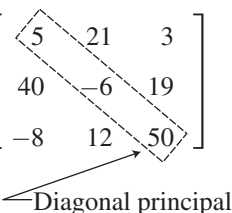
$$\mathbf{D} = \{D\} = \begin{bmatrix} -10 \\ 33 \\ -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Las matrices de columna también se conocen como vectores y, a veces se indican en cursivas encerradas entre llaves (por ejemplo, $\{D\}$).

Matriz cuadrada

Una matriz con el mismo número de filas y columnas ($m = n$) se denomina matriz cuadrada. Un ejemplo de una matriz cuadrada 3×3 es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 3 \\ 40 & -6 & 19 \\ -8 & 12 & 50 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$



Los elementos con los mismos subíndices, es decir, A_{11} ; A_{22} ; $\dots$; A_{nn} forman la diagonal principal de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Estos elementos se denominan los elementos de la diagonal. Como se muestra en la ecuación. (B.2), la diagonal principal se extiende desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha de la matriz cuadrada. Los elementos restantes de la matriz (es decir, A_{ij} con $i \neq j$) que no están a lo largo de la diagonal principal se denominan los elementos o no-diagonales.

Matriz simétrica

Si los elementos de una matriz cuadrada son simétricos alrededor de su diagonal principal (Es decir, $A_{ij} = A_{ji}$), la matriz se llama una matriz simétrica. Un ejemplo de una matriz simétrica 4×4 es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 13 & 5 \\ -6 & 7 & -28 & 31 \\ 13 & -28 & 10 & -9 \\ 5 & 31 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Si todos los elementos no-diagonales de una matriz cuadrada son cero (es decir, $A_{ij} = 0$ para $i \neq j$), la matriz se conoce como una matriz diagonal. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Matriz unitarias o de identidad

Una matriz diagonal con todos sus elementos diagonales iguales a 1 (es decir, $I_{ii} = 1$ y $I_{ij} = 0$ para $i \neq j$) se llama una matriz unitaria o matriz de identidad. Las matrices unitarias por lo general se denotan con una $\mathbf{I}$ o $[I]$. Un ejemplo de una matriz unitaria de 4×4 es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula o matriz cero

Cuando todos los elementos de una matriz son cero (es decir, $O_{ij} = 0$), la matriz se llama una matriz nula o matriz cero. Las matrices nulas son comúnmente anotadas con $\mathbf{O}$ o $[O]$. Por ejemplo,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B.3 Operaciones con matrices

Igualdad

Dos matrices **A** y **B** son iguales si son del mismo orden y si sus elementos correspondientes son idénticos (es decir, $A_{ij} = B_{ij}$). Consideremos, por ejemplo, las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \\ 12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \\ 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que tanto **A** como **B** son de orden 3×3 , y a que cada elemento de **A** es igual al elemento correspondiente de **B**, las matrices se consideran ser iguales entre sí; es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Suma y resta

La suma (o resta) de dos matrices **A** y **B**, que debe ser con matrices del mismo orden, se lleva a cabo mediante la adición (o resta) de los elementos correspondientes de las dos matrices. Así, si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, entonces $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$; y si $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D}$, entonces $D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 9 & 7 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -3 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que las matrices **C** y **D** tienen el mismo orden que las matrices **A** y **B**.

Multiplicación por un escalar

Para obtener el producto de un escalar y una matriz, cada elemento de la matriz debe ser multiplicado por el escalar. Por lo tanto, si

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c = -3$$

entonces

$$c\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -21 & -9 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

La multiplicación de dos matrices puede llevarse a cabo sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. Tales matrices se conocen como *conformables* para la multiplicación. Considere, por ejemplo, las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

en las que $\mathbf{A}$ es de orden 2×2 y $\mathbf{B}$ es de orden 2×3 . Note que el producto $\mathbf{AB}$ de estas matrices está definido, debido a que la primera matriz, $\mathbf{A}$, de la secuencia $\mathbf{AB}$ tiene dos columnas y la segunda matriz, $\mathbf{B}$, tiene dos filas. Sin embargo, si la secuencia de las matrices se invierte, el producto $\mathbf{BA}$ no existe, porque ahora la primera matriz, $\mathbf{B}$, tiene tres columnas y la segunda matriz, $\mathbf{A}$, tiene dos filas. El producto $\mathbf{AB}$ se llama generalmente ya sea $\mathbf{A}$ postmultiplicado por $\mathbf{B}$ o $\mathbf{B}$ premultiplicado por $\mathbf{A}$. Por el contrario, el producto $\mathbf{BA}$ se conoce ya sea como $\mathbf{B}$ postmultiplicado por $\mathbf{A}$ o como $\mathbf{A}$ premultiplicado por $\mathbf{B}$.

Cuando se multiplican dos matrices conformables, la matriz del producto obtenido de este modo tendrá el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz. Por lo tanto, si una matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ es postmultiplicada por una matriz $\mathbf{B}$ de orden $n \times s$, entonces el producto matriz $\mathbf{C}$ será de orden $m \times s$; es decir,

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \qquad \qquad \mathbf{B} = \mathbf{C} \\ m \times n \leftarrow \text{igual} \rightarrow n \times s \qquad m \times s \\ \hline i\text{-ésima fila} \left[\begin{array}{c} \boxed{A_{i1} \rightarrow A_{in}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \boxed{B_{1j}} \\ \downarrow \\ \boxed{B_{nj}} \end{array} \right] = \left[\boxed{C_{ij}} \right] i\text{-ésima fila} \\ \qquad \qquad \qquad j\text{-ésima columnesa} \qquad \qquad \qquad j\text{-ésima columna} \end{array} \quad (\text{B.4})$$

Como se ilustra en la ecuación (B.4), cualquier elemento C_{ij} del producto matriz $\mathbf{C}$ puede ser evaluado por la multiplicación de cada elemento de la fila i -ésima de $\mathbf{A}$ por el correspondiente elemento de la columna j de $\mathbf{B}$ y sumando algebraicamente los productos resultantes; es decir,

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \quad (\text{B.5})$$

La ecuación (B.5) puede ser convenientemente expresada como

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad (\text{B.6})$$

en la que n representa el número de columnas de la matriz $\mathbf{A}$ y el número de filas de la matriz $\mathbf{B}$. Obsérvese que la ecuación (B.6) se puede utilizar para determinar cualquier elemento de la matriz producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Para ilustrar el procedimiento de la multiplicación de matrices, calculemos el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dada en la ecuación (B.3) como

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -43 & 51 \\ 2 & 45 & -69 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 3 \qquad 2 \times 3$

en el que el elemento de C_{11} de la matriz del producto $\mathbf{C}$ se obtiene multiplicando cada elemento de la primera fila de $\mathbf{A}$ por el elemento correspondiente de la primera columna de $\mathbf{B}$ y sumando los productos resultantes; es decir,

$$C_{11} = -1(2) + 5(4) = 18$$

Del mismo modo, el elemento C_{21} se determina multiplicando los elementos de la segunda fila de $\mathbf{A}$ por los elementos correspondientes de la primera columna de $\mathbf{B}$ y la adición de los productos resultantes; es decir,

$$C_{21} = 7(2) - 3(4) = 2$$

Los elementos restantes de $\mathbf{C}$ se determinan de una manera similar:

$$C_{12} = -1(3) + 5(-8) = -43$$

$$C_{22} = 7(3) - 3(-8) = 45$$

$$C_{13} = -1(-6) + 5(9) = 51$$

$$C_{23} = 7(-6) - 3(9) = -69$$

Note que el orden de la matriz del producto $\mathbf{C}$ es 2×3 , que es igual al número de filas de $\mathbf{A}$ y el número de columnas de $\mathbf{B}$.

Una aplicación común de la multiplicación de matrices es expresar simultáneamente ecuaciones en forma matricial compacta. Considere el sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= P_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= P_2 \\ &+ \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 &= P_3 \end{aligned} \tag{B.7}$$

en las que x_1 , x_2 y x_3 son las incógnitas y las A s y P s representan a los coeficientes y constantes respectivamente. Mediante el uso de la definición de la multiplicación de una matriz, este sistema de ecuaciones simultáneas se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

o, simbólicamente, como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{P} \tag{B.9}$$

Incluso cuando dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son de tales órdenes que ambos productos $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ se pueden determinar, los dos productos no son generalmente iguales; es decir,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{B.10}$$

Es, por lo tanto, necesario mantener el orden secuencial correcto de las matrices al calcular productos de matrices. Aunque la multiplicación de matrices generalmente no es conmutativa, como se indica por la ecuación (B.10), sí es asociativa y distributiva, a condición de que el orden secuencial en el que las matrices se han de multiplicar se mantenga. Así

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{B.11})$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{B.12})$$

La multiplicación de cualquier matriz $\mathbf{A}$ por una matriz nula conformable $\mathbf{O}$ produce una matriz nula; es decir,

$$\mathbf{OA} = \mathbf{O} \quad \text{y} \quad \mathbf{AO} = \mathbf{O} \quad (\text{B.13})$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de cualquier matriz $\mathbf{A}$ por una matriz unitaria conformable produce la misma matriz $\mathbf{A}$, es decir,

$$\mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad (\text{B.14})$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Como indican las ecuaciones (B.13) y (B.14), las matrices nulas y unitarias sirven propósitos análogos en el álgebra de matrices como son los números 0 y 1, respectivamente, en el álgebra escalar.

Inversa de una matriz cuadrada

La inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se define como una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ con elementos de tales magnitudes que la multiplicación de la matriz original $\mathbf{A}$ por su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ produce una matriz unitaria $\mathbf{I}$; es decir,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{B.15})$$

Consideremos, por ejemplo, la matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

La inversa de $\mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

de manera que los productos $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ satisfacen la ecuación (B.15):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2+3) & (4-4) \\ (-1.5+1.5) & (3-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2+3) & (1-1) \\ (-6+6) & (3-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

La operación de inversión está definida sólo para matrices cuadradas. La inversa de una matriz de este tipo es también una matriz cuadrada del mismo orden que la matriz original. Un procedimiento para determinar inversas de las matrices se presenta en la siguiente sección. La operación de la inversión de una matriz sirve el mismo propósito que la operación de división en álgebra escalar. Considere un sistema de ecuaciones simultáneas expresada en forma de matriz como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}$$

en la que $\mathbf{A}$ representa la matriz cuadrada de coeficientes conocidos; $\mathbf{x}$ representa el vector de las incógnitas; y $\mathbf{P}$ representa el vector de las constantes. Dado que la operación de división no está definida en el álgebra de matrices, no podemos resolver la ecuación de la matriz anterior para $\mathbf{x}$ dividiendo $\mathbf{P}$ entre $\mathbf{A}$ (Es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{P}/\mathbf{A}$). En su lugar, para determinar la incógnita $\mathbf{x}$, premultiplicamos ambos lados de la ecuación por $\mathbf{A}^{-1}$ para obtener

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

Ya que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, podemos escribir

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

lo que indica que un sistema de ecuaciones simultáneas se puede resolver premultiplicando el vector de las constantes por la inversa de matriz coeficiente.

Una propiedad importante de la inversión de una matriz es que *la inversa de una matriz simétrica es siempre una matriz simétrica*.

Transpuesta de una matriz

La *transpuesta* de una matriz se obtiene intercambiando su filas y columnas correspondientes. La matriz transpuesta es generalmente identificado por el superíndice T colocado en el símbolo de la matriz original. Consideremos, por ejemplo, la matriz 2×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de $\mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 8 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Note que la primera columna de $\mathbf{A}$ se convierte en la primera fila de $\mathbf{A}^T$. Del mismo modo, las segunda y tercera columnas de $\mathbf{A}$ se convierten, respectivamente, en la segunda y tercera filas de $\mathbf{A}^T$. El orden de $\mathbf{A}^T$ obtenido de este modo es 3×2 .

Como otro ejemplo, considere la matriz 3×3

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 7 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Puesto que los elementos de $\mathbf{B}$ son simétricos alrededor de la diagonal principal (es decir, $B_{ij} = B_{ji}$), intercambiar las filas y las columnas de esta matriz produce $\mathbf{B}^T$ una matriz que es idéntica a la matriz $\mathbf{B}$ en sí; es decir,

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$$

Por lo tanto, la transpuesta de una matriz simétrica produce la misma matriz.

Otra propiedad útil de la transpuesta de una matriz es que la transposición de un producto de matrices es igual al producto de las transpuestas en orden inverso; es decir,

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{B.16})$$

Del mismo modo,

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{B.17})$$

Partición de Matrices

El *particionamiento* es un proceso por el cual una matriz se subdivide en un número de matrices más pequeñas llamada submatrices. Por ejemplo, una matriz $\mathbf{A}$ 3×4 se divide en cuatro submatrices dibujando líneas divisorias punteadas horizontales y verticales:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 7 & 9 \\ \hline 6 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

en la que las submatrices son

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las operaciones con matrices, tales como suma, resta y multiplicación puede llevarse a cabo en matrices particionadas en la misma forma descrita previamente tomando a las submatrices como elementos, siempre que las matrices se dividen de tal manera que sus correspondientes submatrices sean conformes a la operación en particular. Por ejemplo, supongamos que deseamos postmultiplicar la matriz $\mathbf{A}$ 3×4 de la ecuación. (B.18) por una matriz $\mathbf{B}$ 4×2 , que se divide en dos submatrices así

$$[\text{fórmula}] \quad (\text{B.19})$$

El producto $\mathbf{AB}$ se expresa en términos de las submatrices como

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Tome en cuenta que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ han sido divididas en una manera tal que sus correspondientes submatrices son conformables para la multiplicación; es decir, que los órdenes de las submatrices son tales que los productos $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}$, $\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}$ y $\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}$ están definidos. Como se muestra en las ecuaciones (B.18) y (B.19), esto se consigue mediante la partición de las filas de la segunda matriz $\mathbf{B}$ del producto $\mathbf{AB}$ de la misma manera que se particionan las columnas de la primera matriz $\mathbf{A}$. Los productos de las submatrices están dados por

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 28 \\ -43 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 63 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (B.20) se obtiene

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 & 28 \\ -43 & 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 63 & -9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -8 & 68 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 & -4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 26 \\ 20 & 25 \\ 20 & 64 \end{bmatrix}$$

B.4 Solución de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan

El *método de eliminación de Gauss-Jordan* es uno de los procedimientos más utilizados para la resolución de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Para ilustrar el método, considere el siguiente sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 44 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 &= -35 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 &= 28 \end{aligned} \quad (\text{B.21a})$$

Para resolver las incógnitas x_1 , x_2 y x_3 , comenzamos dividiendo la primera ecuación por el coeficiente de su término x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 - 2.5x_2 + 2x_3 &= 22 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 &= -35 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 &= 28 \end{aligned} \quad (\text{B.21b})$$

A continuación, la incógnita x_1 se elimina de las ecuaciones restantes restando de cada ecuación restante el producto del coeficiente de su término x_1 y la primera ecuación sucesivamente. Por lo tanto, para eliminar x_1 de la segunda ecuación, multiplicamos la primera ecuación por 3 y restamos el resultado de la segunda ecuación. Del mismo modo, eliminamos x_1 de la tercera ecuación multiplicando la primera ecuación por 4 y restando el resultado de la tercera ecuación. El sistema de ecuaciones obtenido de este modo es

$$\begin{aligned}x_1 - 2.5x_2 + 2x_3 &= 22 \\8.5x_2 - 14x_3 &= -101 \\3x_2 - 9x_3 &= -60\end{aligned}\tag{B.21c}$$

Con x_1 eliminada de todas, excepto de la primera ecuación, ahora dividimos la segunda ecuación entre el coeficiente de su término x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 - 2.5x_2 + 2x_3 &= 22 \\x_2 - 1.647x_3 &= -11.882 \\3x_2 - 9x_3 &= -60\end{aligned}\tag{B.21d}$$

A continuación, eliminamos x_2 de la primera y de la tercera ecuación, sucesivamente, multiplicando la segunda ecuación por -2.5 y restando de la primera ecuación y, a continuación, multiplicando la primera ecuación por 3 y restando de la tercera ecuación. Esto produce

$$\begin{aligned}x_1 - 2.118x_3 &= -7.705 \\x_2 - 1.647x_3 &= -11.882 \\-4.059x_3 &= -24.354\end{aligned}\tag{B.21e}$$

Dividiendo la tercera ecuación por el coeficiente de su término x_3 , obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 - 2.118x_3 &= -7.705 \\x_2 - 1.647x_3 &= -11.882 \\x_3 &= 6\end{aligned}\tag{B.21f}$$

Finalmente, multiplicando la tercera ecuación por -2.118 y restando de la primera ecuación, y multiplicando la tercera ecuación por -1.647 y restando de la segunda ecuación, se determina la solución del sistema dado de ecuaciones (Ecuación (B.21a)) como

$$\begin{aligned}x_1 &= 5 \\x_2 &= -2 \\x_3 &= 6\end{aligned}\tag{B.21g}$$

Es decir, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 6$. Para comprobar que la solución es correcta, sustituimos los valores numéricos de x_1 , x_2 y x_3 de nuevo en las ecuaciones originales (Ecuación (B.21a)):

$$\begin{aligned}2(5) - 5(-2) + 4(6) &= 44 && \text{verdadero} \\3(5) - 2 - 8(6) &= -35 && \text{verdadero} \\4(5) - 7(-2) - 6 &= 28 && \text{verdadero}\end{aligned}$$

Como muestra el ejemplo anterior, el método de Gauss-Jordan implica esencialmente la eliminación sucesiva de cada incógnita de todas menos una de las ecuaciones del sistema mediante la realización de las siguientes operaciones: (1) dividiendo una ecuación entre un escalar; y (2) multiplicando una ecuación por un escalar y restando la ecuación resultante de otra ecuación. Estas operaciones, que no cambian la solución del sistema original de ecuaciones, se aplican varias veces hasta que se obtiene un sistema con cada ecuación que contiene una sola incógnita.

La solución de ecuaciones simultáneas en forma de matriz se lleva a cabo, por lo general, mediante una operación en las filas de la matriz coeficiente y el vector que contiene los términos constantes de las ecuaciones. Las operaciones subsecuentes se llaman *operaciones elementales de filas*. Estas se aplican tanto a la matriz coeficiente como al vector de las constantes de forma simultánea, hasta que la matriz coeficiente se reduce a una matriz de unidad. Los elementos del vector, que contenían inicialmente los términos constantes de las ecuaciones originales, representan entonces la solución de las ecuaciones simultáneas originales. Para ilustrar este procedimiento, considere de nuevo el sistema de tres ecuaciones simultáneas dadas en la ecuación (B.21a). El sistema se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 \\ 4 & -7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ -35 \\ 28 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Al aplicar el método de Gauss-Jordan, suele ser conveniente escribir la matriz coeficiente $\mathbf{A}$ y el vector de constantes $\mathbf{P}$ como submatrices de una *matriz aumentada* con particiones:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 44 \\ 3 & 1 & -8 & -35 \\ 4 & -7 & -1 & 28 \end{array} \right] \quad (\text{B.23a})$$

Para determinar la solución, comenzamos dividiendo la fila 1 de la matriz aumentada entre $A_{11} = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.5 & 2 & 22 \\ 3 & 1 & -8 & -35 \\ 4 & -7 & -1 & 28 \end{array} \right] \quad (\text{B.23b})$$

Luego, multiplicamos la fila 1 por $A_{21} = 3$ y restamos de la fila 2, y luego multiplicamos la fila 1 por $A_{31} = 4$ y restamos de la fila 3. Esto produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.5 & 2 & 22 \\ 0 & 8.5 & -14 & -101 \\ 0 & 3 & -9 & -60 \end{array} \right] \quad (\text{B.23c})$$

Dividimos la fila 2 entre $A_{22} = -8.5$, obteniendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.5 & 2 & 22 \\ 0 & 1 & -1.647 & -11.882 \\ 0 & 3 & -9 & -60 \end{array} \right] \quad (\text{B.23d})$$

Multiplicamos la fila 2 por $A_{12} = -2.5$ y restamos de la fila 1; luego se multiplica fila 2 por $A_{32} = 3$ y restamos de la fila 3. Esto produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2.118 & -7.705 \\ 0 & 1 & -1.647 & -11.882 \\ 0 & 0 & -4.059 & -24.354 \end{array} \right] \quad (\text{B.23e})$$

Dividimos la fila 3 entre $A_{33} = -4.059$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2.118 & -7.705 \\ 0 & 1 & -1.647 & -11.882 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \quad (\text{B.23f})$$

Multiplicamos la línea 3 por $A_{13} = -2.118$ y restamos de la fila 1; luego se multiplica la fila 3 por $A_{23} = -1.647$ y restamos de la fila 2. Esto produce

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \quad (\text{B.23g})$$

Por lo tanto $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, y $x_3 = 6$.

Inversión de una matriz

El método de eliminación de Gauss-Jordan también se puede utilizar para determinar las inversas de matrices cuadradas. El procedimiento es similar al descrito previamente para la resolución de ecuaciones simultáneas, excepto que en la matriz aumentada, la matriz coeficiente ha sido sustituida por la matriz $\mathbf{A}$ que va a ser invertida y el vector de constantes $\mathbf{P}$ se sustituye por la matriz unitaria $\mathbf{I}$ del mismo orden que la matriz $\mathbf{A}$. A continuación, se llevan a cabo las operaciones elementales por filas en la matriz aumentada para reducir la matriz $\mathbf{A}$ a una matriz unitaria. La matriz $\mathbf{I}$, que era inicialmente la matriz unitaria, representará entonces la inversa de la matriz original $\mathbf{A}$.

Para ilustrar el procedimiento anterior, vamos a calcular la inversa de una matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

La matriz aumentada está dada por

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{B.25a})$$

Al multiplicar la fila 1 por $A_{21} = 3$ y restar de la fila 2, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{B.25b})$$

A continuación, dividiendo la fila 2 entre $A_{22} = 2$, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 & 0.5 \end{array} \right] \quad (\text{B.25c})$$

Por último, al multiplicar la fila 2 por 2 y restar de la fila 1, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1.5 & 0.5 \end{array} \right] \quad (\text{B.25d})$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Los cálculos se pueden comprobar mediante el uso de la relación $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Hemos demostrado en la Sección B.3 que la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, calculada aquí, de hecho satisface esta relación.

PROBLEMAS

Sección B.3

B.1 Determine la matriz [fórmula] si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 15 \\ -8 & 7 & 10 \\ 15 & 10 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

B.2 Determine la matriz [fórmula] si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

B.3 Determine los productos [fórmula] y [fórmula] si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

B.4 Determine los productos [fórmula] y [fórmula] si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

B.5 Demuestre que [fórmula] mediante el uso de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ a continuación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Sección B.4

B.6 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan.

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15$$

$$5x_1 - x_2 + 3x_3 = 27$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14$$

B.7 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan.

$$-12x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 45$$

$$5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9$$

$$10x_1 + x_2 - 7x_3 = -32$$

B.8 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas por el método de Gauss-Jordan.

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 18$$

$$6x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -29$$

$$3x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 11$$

B.9 Determine la inversa de la matriz que se muestra usando el método de Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

B.10 Determine la inversa de la matriz que se muestra usando el método de Gauss-Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



Apéndice C

Ecuación de tres momentos

- C.1** Derivación de la ecuación de tres momentos
- C.2** Aplicación de la ecuación de tres momentos
- Resumen
- Problemas

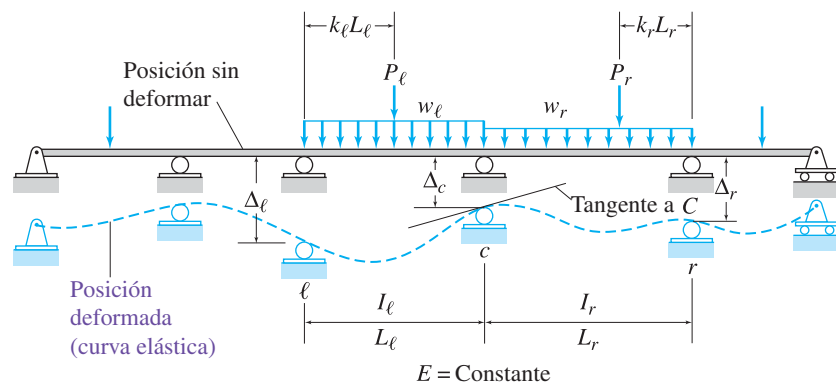
En el capítulo 13, se estudiaron dos formulaciones del método de análisis de fuerza (flexibilidad) de las estructuras estáticamente indeterminadas, a saber, el método de las deformaciones consistentes y el método del trabajo mínimo. En este apéndice, consideramos una tercera formulación del método de fuerza, la llamada ecuación de tres momentos.

La ecuación de tres momentos, que fue introducida por Clapeyron en 1857, es una cómoda herramienta para el análisis de vigas continuas. La ecuación de tres momentos representa, de forma general, la condición de compatibilidad de que la pendiente de la curva elástica sea continua en un apoyo interior de la viga continua. Como la ecuación implica tres momentos —los momentos de flexión en el apoyo que se examina y en los dos apoyos adyacentes— se conoce comúnmente como la ecuación de tres momentos. Al utilizar este método, los momentos de flexión en los apoyos interiores (y cualquiera que estén fijos) de la viga continua se consideran como redundantes. La ecuación de tres momentos se aplica entonces en la ubicación de cada uno de los redundantes para obtener un conjunto de ecuaciones de compatibilidad que pueda ser resuelto para momentos redundantes desconocidos.

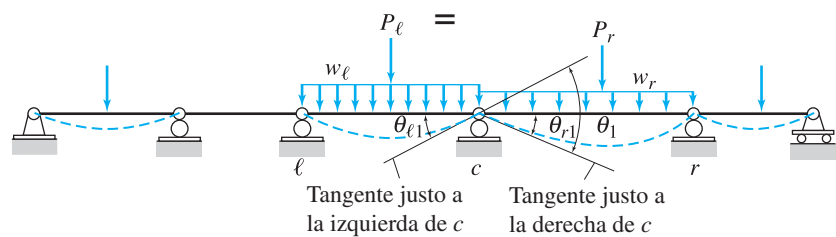
Comenzamos este apéndice con la derivación de la ecuación de tres momentos para vigas con longitudes prismáticas y se sometidas a cargas externas y con asentamientos de apoyo. A continuación, se presenta un procedimiento para la aplicación de esta ecuación para el análisis de vigas continuas.

C.1 Derivación de la Ecuación de tres Momento

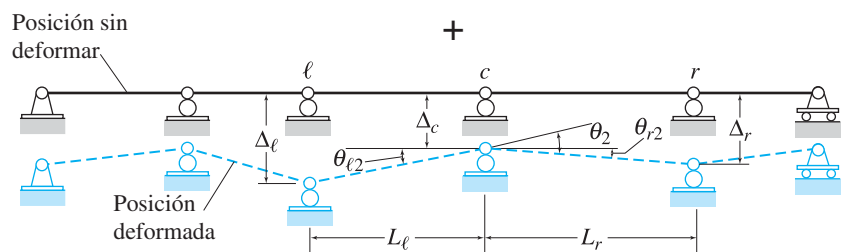
Consideremos una viga continua arbitraria sometida a cargas externas y con asentamientos de apoyo como se muestra en la figura. C.1 (a). Como se discutió previamente en capítulo 13, esta viga puede ser analizada por el método de las deformaciones consistentes al considerar que los momentos de flexión en el interior apoya son redundantes. De la figura. C.1 (a), podemos ver que la pendiente de la elástica curva de la viga indeterminada es continua en los apoyos interiores. Cuando los sistemas de retención correspondientes a los momentos de flexión redundante se eliminan mediante la inserción de bisagras internas en los puntos de apoyo interior, la estructura primaria así



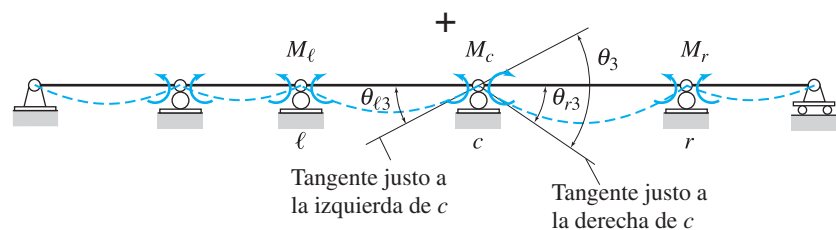
(a) Viga continua



(b) Estructura primaria sometida a cargas externas



(c) Estructura primaria sometida a apoyos de asentamiento



(d) Estructura primaria cargada con momentos de doblado redundantes

FIG. C.1

obtenida consiste entonces de una serie de vigas simplemente soportadas. Como se muestra en las Figs. C.1 (b) y (c), respectivamente, cuando esta estructura primaria se somete a cargas y asentamientos de apoyos externos conocidos, se desarrollan discontinuidades en la pendiente de la curva elástica en las ubicaciones de los apoyos interiores. Como el momento de flexión redundante proporciona continuidad a la pendiente de la curva elástica, estos momentos desconocidos se aplican como cargas en la estructura primaria como se muestra en la figura C.1 (d), y sus magnitudes se determinan mediante la resolución de la ecuación de compatibilidad basada en la condición de que, en cada apoyo interior de la estructura primaria, la pendiente de la curva elástica, debido al efecto de la combinación de la carga externa, los asentamientos de apoyos y los redundantes desconocidos, debe ser continua.

La ecuación de tres momentos utiliza la condición de compatibilidad interior de continuidad de pendiente en un apoyo interior para proporcionar una relación general entre los momentos de flexión desconocidos en el apoyo donde la compatibilidad se está considerando y en los apoyos adyacentes a su izquierda y a su derecha, en función de las cargas en los tramos intermedios y cualquier asentamiento de los tres apoyos.

Para derivar la ecuación de tres momentos, centramos nuestra atención en la ecuación de compatibilidad a un apoyo interior c de la viga continua, de longitudes prismáticas y un módulo de elasticidad constante, como se muestra en la figura C.1 (a). Como se indica en esta figura, los apoyos adyacentes a la izquierda y a la derecha de c se identifican como ℓ y r , respectivamente; los subíndices ℓ y r se usan para indicar las cargas y propiedades de la extensión izquierda, ℓ , y la extensión derecha, r , respectivamente; y los asentamientos de apoyos ℓ , c y r se denotan por Δ_ℓ , Δ_c , y Δ_r , respectivamente. Los asentamientos de apoyo se consideran positivos cuando están en dirección hacia abajo, como se muestra en la figura.

De la figura C.1 (a), podemos ver que la pendiente de la curva elástica la viga indeterminada es continua en c . En otras palabras, no existe cambio en la pendiente de las tangentes de la curva elástica justo a la izquierda de c ni justo a la derecha de c ; es decir, el ángulo entre las tangentes es cero. Sin embargo, cuando la estructura primaria obtenida mediante la inserción de bisagras internas en los puntos de apoyo interior se somete a cargas externas, como se muestra en la figura C.1 (b), se desarrolla una discontinuidad en la pendiente de la curva elástica en c , en el sentido de que la tangente a la curva elástica justo a la izquierda de c gira con relación a la tangente justo a la derecha de c . El cambio de pendiente (o el ángulo) entre las dos tangentes debido a las cargas externas es denotado por θ_1 , y se puede expresar como (vea la figura C.1 (b))

$$\theta_1 = \theta_{\ell 1} + \theta_{r 1} \quad (C.1)$$

en el que $\theta_{\ell 1}$ y $\theta_{r 1}$ denotan, respectivamente, las pendientes en los extremos de c se extienden a la izquierda y a la derecha del apoyo c , debido a las cargas externas. Del mismo modo, la discontinuidad de pendiente en c en la estructura primaria debido a asentamientos de apoyo (figura C.1 (c)), puede ser escrita como

$$\theta_2 = \theta_{\ell 2} + \theta_{r 2} \quad (C.2)$$

en la que $\theta_{\ell 2}$ y $\theta_{r 2}$ representan, respectivamente, las pendientes de los tramos a la izquierda y a la derecha de c , debido a los asentamientos de apoyo. Finalmente, cuando la estructura primaria se carga con el momento de flexión de

apoyo redundantes, como se muestra en la figura. C.1 (d), la discontinuidad de pendiente en c puede ser expresada como

$$\theta_3 = \theta_{\ell 3} + \theta_{r3} \quad (\text{C.3})$$

en la que [fórmula] y [fórmula] denotan, respectivamente, las pendientes al final del tramo c a la izquierda y a la derecha del apoyo c , debido a momentos redundantes desconocidos.

La ecuación de compatibilidad se basa en el requisito de que la pendiente de la curva elástica de la viga indeterminada real sea continua en c ; es decir, que no haya ningún cambio en la pendiente de justo a la izquierda de c o justo a la derecha de c . Por lo tanto, la suma algebraica de los ángulos entre las tangentes justo a la izquierda y justo a la derecha de c debido a cargas externas, asentamientos de apoyo y momentos de flexión redundantes deben ser cero.

Por lo tanto,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.1) a (C.3) en la ecuación. (C.4), obtenemos

$$(\theta_{\ell 1} + \theta_{r1}) + (\theta_{\ell 2} + \theta_{r2}) + (\theta_{\ell 3} + \theta_{r3}) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Puesto que cada tramo de la estructura primaria puede ser considerada como una viga simplemente apoyada, las pendientes en los extremos c de izquierda y derecha, debido a las cargas externas (Fig. C.1 (b)), se puede determinar convenientemente ya sea por el método de la viga conjugada o mediante el uso de las fórmulas de viga-deflexionada. Mediante el uso de las fórmulas de deflexión, obtenemos

$$\theta_{\ell 1} = \sum \frac{P_{\ell} L_{\ell}^2 k_{\ell} (1 - k_{\ell}^2)}{6EI_{\ell}} + \frac{w_{\ell} L_{\ell}^3}{24EI_{\ell}} \quad (\text{C.6a})$$

$$\theta_{r1} = \sum \frac{P_r L_r^2 k_r (1 - k_r^2)}{6EI_r} + \frac{w_r L_r^3}{24EI_r} \quad (\text{C.6b})$$

en la que se han añadido signos de suma a los primeros términos del lado derecho de estas ecuaciones, por lo que varias cargas concentradas pueden ser aplicadas a cada tramo (en lugar de una sola carga concentrada como se muestra en las Figs. C.1 (a) y (b) por simplificar). Como las vigas continuas generalmente son cargadas con cargas distribuidas uniformemente sobre tramos enteros y cargas concentradas, los efectos de sólo estos dos tipos de cargas, en general, son considerados en la ecuación de tres momentos. Sin embargo, los efectos de otros tipos de cargas se pueden incluir simplemente, añadiendo las expresiones de las pendientes provocadas por estas cargas en los lados derechos de las ecuaciones. (C.6a) y (C.6b).

Debido a los asentamientos de apoyo, las pendientes $\theta_{\ell 2}$ y θ_{r2} de los tramos derechos e izquierdos, respectivamente, se puede obtener directamente a partir de las posiciones deformadas de los tramos representados en la figura. C.1 (c). Dado que se asume que los asentamientos son pequeños, las pendientes pueden ser expresadas como

$$\theta_{\ell 2} = \frac{\Delta_{\ell} - \Delta_c}{L_{\ell}} \quad \theta_{r2} = \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} \quad (\text{C.7})$$

Debido a los momentos de flexión de apoyo redundantes, las pendientes a los extremos c de las extensiones izquierda y derecha, (Fig. C.1 (d)), se pueden determinar convenientemente mediante el uso de las fórmulas de deflexión de vigas. Por lo tanto,

$$\theta_{\ell 3} = \frac{M_{\ell} L_{\ell}}{6EI_{\ell}} + \frac{M_c L_{\ell}}{3EI_{\ell}} \quad (\text{C.8a})$$

$$\theta_{r3} = \frac{M_c L_r}{3EI_r} + \frac{M_r L_r}{6EI_r} \quad (\text{C.8b})$$

en las que [fórmula], M_c y M_r denotan los momentos de flexión en los apoyos [fórmula], c y r , respectivamente. Como se muestra en la figura. C.1 (d), estos momentos de flexión redundante se consideran positivos de acuerdo con el *acuerdo de la viga* —esto es, cuando provocan compresión en las fibras superiores y tensión en las fibras inferiores de la viga.

Sustituyendo las ecuaciones (C.6) a (C.8) en la ecuación. (C.5), escribimos la ecuación de compatibilidad como

$$\begin{aligned} & \sum \frac{P_{\ell} L_{\ell}^2 k_{\ell} (1 - k_{\ell}^2)}{6EI_{\ell}} + \frac{w_{\ell} L_{\ell}^3}{24EI_{\ell}} + \sum \frac{P_r L_r^2 k_r (1 - k_r^2)}{6EI_r} + \frac{w_r L_r^3}{24EI_r} + \frac{\Delta_l - \Delta_c}{L_{\ell}} \\ & + \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} + \frac{M_{\ell} L_{\ell}}{6EI_{\ell}} + \frac{M_c L_{\ell}}{3EI_{\ell}} + \frac{M_c L_r}{3EI_r} + \frac{M_r L_r}{6EI_r} = 0 \end{aligned}$$

Mediante la simplificación de la ecuación anterior y la reordenación para separar los términos que contienen momentos redundantes de los que implican cargas y asentamientos de apoyo, se obtiene la forma general de la ecuación de tres momentos:

$$\begin{aligned} & \frac{M_{\ell} L_{\ell}}{I_{\ell}} + 2M_c \left(\frac{L_{\ell}}{I_{\ell}} + \frac{L_r}{I_r} \right) + \frac{M_r L_r}{I_r} \\ & = - \sum \frac{P_{\ell} L_{\ell}^2 k_{\ell}}{I_{\ell}} (1 - k_{\ell}^2) - \sum \frac{P_r L_r^2 k_r}{I_r} (1 - k_r^2) - \frac{w_{\ell} L_{\ell}^3}{4I_{\ell}} - \frac{w_r L_r^3}{4I_r} \\ & - 6E \left(\frac{\Delta_{\ell} - \Delta_c}{L_{\ell}} + \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} \right) \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

en la que M_c = al momento de flexión en el apoyo c donde la compatibilidad está siendo considerado; M_{ℓ} , M_r = a los momentos de flexión en los apoyos adyacentes a la izquierda y a la derecha de c , respectivamente; E = al módulo de elasticidad; L_{ℓ} , L_r = longitudes de los tramos situados a la izquierda y a la derecha de c , respectivamente; [fórmula], I_{ℓ} = los momentos de inercia de los tramos situados a la izquierda ya la derecha de c , respectivamente; P_{ℓ} , P_r = las cargas concentradas que actúan sobre las extensiones izquierda y derecha, respectivamente; k_{ℓ} (o k_r) = la relación de la distancia P_{ℓ} (o P_r) desde el apoyo izquierdo (o derecho) a la longitud del tramo; w_{ℓ} , w_r = las cargas uniformemente distribuidas aplicadas a los tramos izquierdo y derecho, respectivamente; Δ_c = asentamiento del apoyo c a consideración; y Δ_{ℓ} , Δ_r = asentamientos de los apoyos adyacentes a la izquierda y a la derecha de c , respectivamente. Como se ha señalado antes, los de momentos de flexión de apoyo se consideran positivos de conformidad con el acuerdo de la viga —es decir, al provocar compresión en las fibras superiores y la tensión en las fibras inferiores de la viga. Además, se considera que las cargas externas

y asentamientos de apoyo son positivas en dirección hacia abajo, como se muestra en la figura. D.1 (a).

Si los momentos de inercia de dos tramos adyacentes de una viga continua son iguales (es decir, $I_\ell = I_r = I$), entonces la ecuación de tres momentos se simplifica a

$$\begin{aligned} M_\ell L_\ell + 2M_c(L_\ell + L_r) + M_r L_r \\ = - \sum P_\ell L_\ell^2 k_\ell (1 - k_\ell^2) - \sum P_r L_r^2 k_r (1 - k_r^2) - \frac{1}{4}(w_\ell L_\ell^3 + w_r L_r^3) \\ - 6EI \left(\frac{\Delta_\ell - \Delta_c}{L_\ell} + \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} \right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

Si tanto los momentos de inercia como las longitudes de dos tramos adyacentes son iguales (es decir, $I_\ell = I_r = I$ y $L_\ell = L_r = L$), como consecuencia la ecuación de tres momentos se convierte en

$$\begin{aligned} M_\ell + 4M_c + M_r \\ = - \sum P_\ell L k_\ell (1 - k_\ell^2) - \sum P_r L k_r (1 - k_r^2) \\ - \frac{L^2}{4}(w_\ell + w_r) - \frac{6EI}{L^2}(\Delta_\ell - 2\Delta_c + \Delta_r) \end{aligned} \quad (C.11)$$

Las anteriores ecuaciones de tres momentos son aplicables a tres apoyos consecutivos cualquiera, c y r , de una viga continua, a condición de que no haya discontinuidades, tales como bisagras internas, en la extensión entre el apoyo izquierdo ℓ y el apoyo derecho r .

C.2 Aplicación de la ecuación de tres momentos

El siguiente procedimiento paso a paso se puede utilizar para el análisis continuo de vigas por la ecuación de tres momentos:

1. Señale como redundantes a los momentos de flexión desconocidos en todos los apoyos internos de la viga.
2. Al tratar sucesivamente a cada apoyo interno como si fuera el apoyo intermedio c , escriba una ecuación de tres momentos para cada uno. Al escribir estas ecuaciones, debe tomar en cuenta que se conocen los momentos de flexión en los extremos simples. Para un apoyo tal con un voladizo colgado, el momento de flexión es igual que debido que las cargas externas que actúan sobre la parte en voladizo lo hacen también sobre el apoyo de del extremo. El número total de ecuaciones de tres momento así obtenida debe ser igual al número de momentos de apoyo de flexión redundantes, que deben ser las únicas incógnitas en estas ecuaciones.
3. Resuelva el sistema de ecuaciones de tres de momentos para sus incógnitas: momentos de flexión de apoyo.
4. Calcule la extensión y los quiebres finales. Para cada tramo de la viga: (a) dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las cargas externas y los momentos finales y, (b) aplique las ecuaciones de equilibrio para calcular las fuerzas de quiebre en los extremos del tramo.

5. Determine las reacciones de apoyo, considerando el equilibrio de las articulaciones de apoyo de la viga.
6. Si así lo desea, dibuje diagramas de momentos de ruptura y de flexión de la viga utilizando la convención de signos para las vigas.

Apoyos fijos

Las ecuaciones de tres momentos, como están dadas por las ecuaciones (C.9) a (C.11), se derivaron para satisfacer la condición de compatibilidad de continuidad pendiente en los apoyos internos de vigas continuas. Sin embargo, estas ecuaciones pueden ser usadas para satisfacer la condición de compatibilidad de pendiente cero en los apoyos de extremos fijos de vigas. Esto se puede lograr mediante la sustitución del apoyo fijo por un apoyo de rodillo interior imaginario con una extensión final contigua de longitud cero apoyada simplemente en su extremo exterior, como se muestra en la figura. C.2. El momento de reacción en el apoyo fijo real ahora se usa como el momento de flexión redundante en el apoyo interno imaginario, y la ecuación de tres momentos, cuando se aplica a este apoyo imaginario, satisface la condición de compatibilidad de pendiente cero de la curva elástica en el apoyo fijo real. Al analizar una viga por sus asentamientos de apoyo, ambos apoyos imaginarios —el apoyo de rodillo interno y el simple del extremo externo— se consideran como sometidos al mismo asentamiento que el apoyo fijo real.

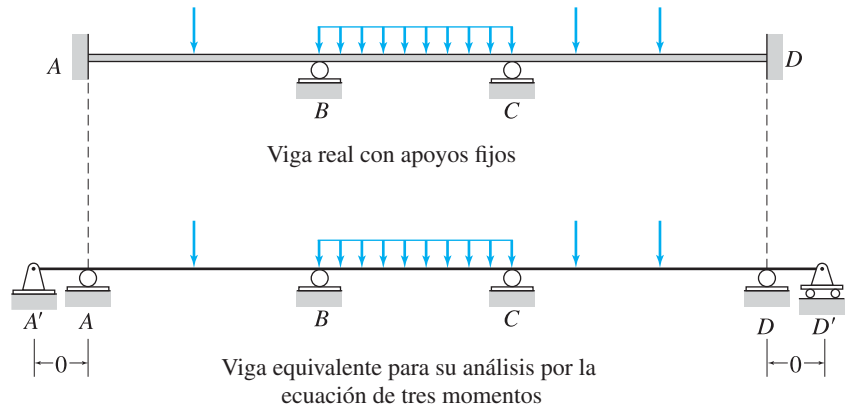
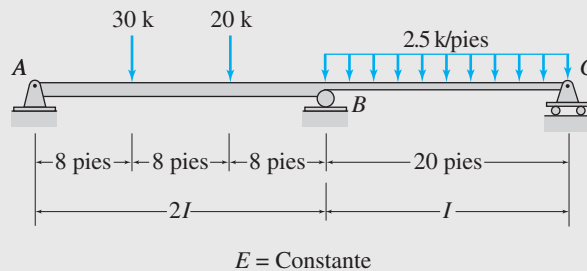


FIG. C.2

Ejemplo C.1

Determine las reacciones y dibuje los diagramas de los momentos de ruptura y doblado para la viga de la figura. C.3 (a) mediante la ecuación de tres momentos.



(a) Viga indeterminada

FIG. C.2

continúa

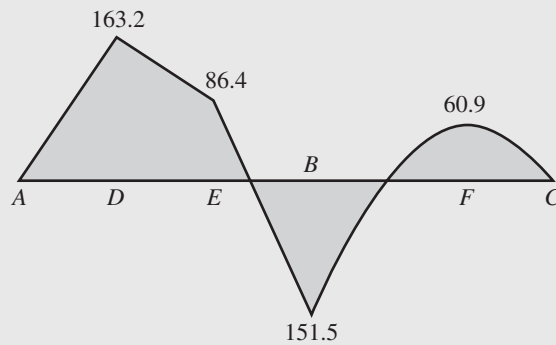
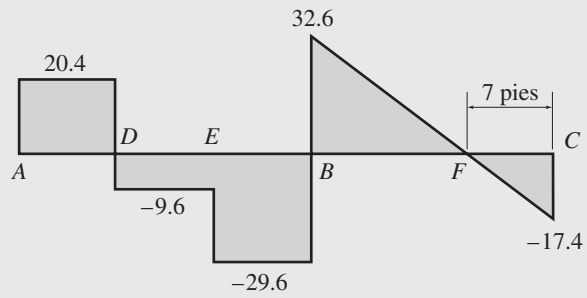
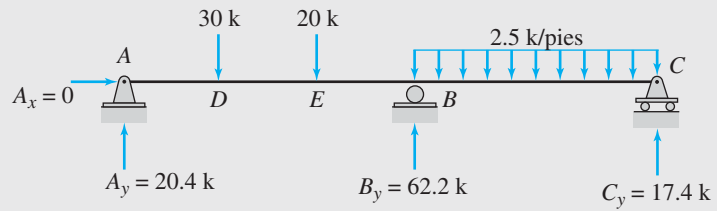
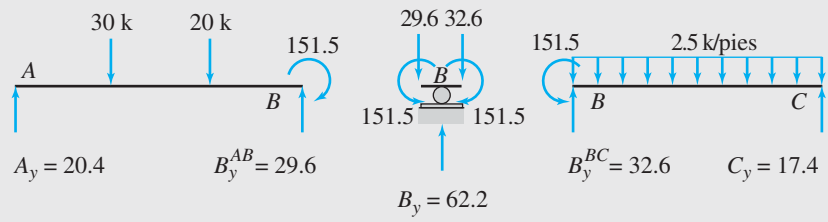


FIG. C.3 (continuación.)

(d) Diagramas de momentos de doblado y ruptura

Solución

Redundante. La viga tiene un grado de indeterminación. El momento de flexión M_B , en el apoyo interior B , es el redundante.

Ecuación de tres momentos en la unión B . Teniendo en cuenta los apoyos A , B , y C como ℓ , c , y r , respectivamente, y sustituyendo

$L_\ell = 24$ ft, $L_r = 20$ ft, $I_\ell = 2I$, $I_r = I$, $P_{\ell 1} = 30$ k, $k_{\ell 1} = 1/3$, $P_{\ell 2} = 20$ k, $k_{\ell 2} = 2/3$, $w_r = 2.5$ k/ft, y $P_r = w_\ell = \Delta_\ell = \Delta_c = \Delta_r = 0$, en la ecuación (C.9), obtenemos

$$\frac{M_A(24)}{2I} + 2M_B\left(\frac{24}{2I} + \frac{20}{I}\right) + \frac{M_C(20)}{I} = -\frac{30(24)^2(1/3)}{2I}[1 - (1/3)^2] - \frac{20(24)^2(2/3)}{2I}[1 - (2/3)^2] - \frac{2.5(20)^3}{4I}$$

Puesto que A y C son apoyos extremos simples, tenemos, mediante inspección

$$M_A = M_C = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de tres momentos se convierte en

$$64M_B = -9,693.33$$

a partir de la cual se obtiene el momento de flexión redundante, que es

$$M_B = -151.5 \text{ k-ft}$$

Respuesta

Ruptura y reacciones de extremos de extensión. Ahora se puede determinar la ruptura en los extremos de los tramos AB y BC de la viga continua mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de los cuerpos libres en los tramos que se muestran en la figura D.3 (b). Tome en cuenta que el momento de flexión negativo M_B se aplica en los extremos B de tramos AB y BC de manera que causa tensión en las fibras superiores y compresión en las fibras inferiores de la viga. Al tener en cuenta el equilibrio de la extensión AB , obtenemos

$$+\zeta \sum M_B = 0 \quad -A_y(24) + 30(16) + 20(8) - 151.5 = 0$$

$$A_y = 20.4 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 20.4 - 30 - 20 + B_y^{AB} = 0$$

$$B_y^{AB} = 29.6 \text{ k} \uparrow$$

Del mismo modo, para el tramo BC ,

$$+\zeta \sum M_C = 0 \quad -B_y^{BC}(20) + 151.5 + 2.5(20)(10) = 0$$

$$B_y^{BC} = 32.6 \text{ k} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad 32.6 - 2.5(20) + C_y = 0$$

$$C_y = 17.4 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta

Al considerar el equilibrio de la articulación de la unión B en dirección vertical, se obtiene

$$B_y = B_y^{AB} + B_y^{BC} = 29.6 + 32.6 = 62.2 \text{ k} \uparrow$$

Respuesta

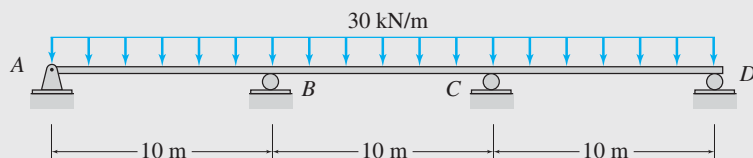
Las reacciones se muestran en la figura C.3 (c).

Diagramas de momentos de doblado y ruptura. Vea las figuras C.3 (d). **Respuesta**

Respuesta

Ejemplo C.2

Determine las reacciones para la viga continua que se muestra en la figura. C.4 (a) debido a la carga distribuida de manera uniforme y debido a los asentamientos de apoyo de 10 mm en A, 50 mm en B, 20 mm en C, y 40 mm en D. Use la ecuación de tres momentos.

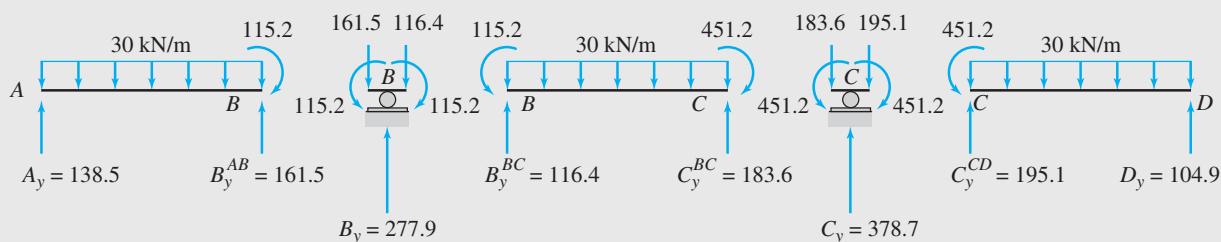


$EI = \text{Constante}$

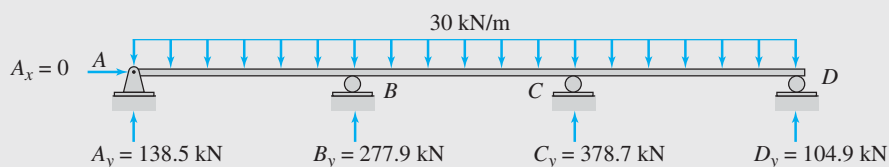
$E = 200 \text{ GPa}$

$I = 700 (10^6) \text{ mm}^4$

(a) Viga indeterminada



(b) Momentos de final de extensión y de ruptura



(c) Reacciones de apoyo

FIG. C.4

Solución

Redundantes. Los momentos de flexión MB y MC , en los apoyos internos B y C , respectivamente, son los redundantes.

Ecuación de tres momentos en la unión B . Considerando a los apoyos A , B y C como ℓ , c , y r respectivamente, y sustituyendo

$L = 10 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa} = 200(10^6) \text{ kN/m}^2$, $I = 700(10^6) \text{ mm}^4 = 700(10^{-6}) \text{ m}^4$, $w_\ell = w_r = 30 \text{ kN/m}$, $\Delta_\ell = \Delta_A = 10 \text{ mm} = 0.01 \text{ m}$, $\Delta_c = \Delta_B = 50 \text{ mm} = 0.05 \text{ m}$, $\Delta_r = \Delta_C = 20 \text{ mm} = 0.02 \text{ m}$ y $P_\ell = P_r = 0$, en la ecuación (C.11), escribimos

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{(10)^2}{4}(30 + 30) - \frac{6(200)(700)}{(10)^2}[0.01 - (2)(0.05) + 0.02]$$

Como A es un apoyo de extremo simple, $M_A = 0$. Así pues, la ecuación anterior se simplifica a

$$4M_B + M_C = -912 \quad (1)$$

Ecuación de tres momentos en la unión C . De forma similar, considerando los apoyos B , C y D [fórmula], c , y r , respectivamente, y mediante la sustitución de los valores numéricos apropiados en la ecuación (D.11), obtenemos

$$M_B + 4M_C + M_D = -\frac{(10)^2}{4}(30 + 30) - \frac{6(200)(700)}{(10)^2}[0.05 - 2(0.02) + 0.04]$$

continúa

Dado que D es un apoyo de extremo simple, $M_D = 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$M_B + 4M_C = -1,920 \quad (2)$$

Momentos de flexión en los apoyos. Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) de forma simultánea para M_B y M_C , obtenemos

$$M_B = -115.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

$$M_C = -451.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Respuesta

Ruptura y reacciones de extremos de extensión. Al conocer las redundantes M_B y M_C , la ruptura y reacciones de extremos de extensión en los apoyos se pueden determinar tomando en cuenta el equilibrio de los cuerpos libres de los tramos AB; AC, y CD, y las articulaciones B y C, como se muestra en la figura. C.4 (b). Las reacciones se muestran en la figura. C.4 (c).

Respuesta

Ejemplo C.3

Determine las reacciones para la viga continua que se muestra en la figura. C.5 (a) por la ecuación de tres momentos.

Solución

Dado que el apoyo A de la viga es fija, lo reemplazamos con un rodillo de apoyo interno imaginario con una extensión final contigua de longitud cero, como se muestra en la figura. C.5 (b).

Redundantes. En la figura. C.5 (b) podemos ver que los momentos de flexión M_A y M_B en los apoyos A y B, respectivamente, son los redundantes.

Ecuación de tres momentos en la unión A. Mediante el uso de la ecuación (D.10) en los apoyos A', A y B, obtenemos

$$2M_A(0 + 20) + M_B(20) = -45(20)^2(1/2)[1 - (1/2)^2]$$

o

$$2M_A + M_B = -337.5 \quad (1)$$

Ecuación de tres momentos en la unión B. De forma similar, aplicando la ecuación (D.10) en los apoyos A, B y C, escribimos

$$\begin{aligned} M_A(20) + 2M_B(20 + 30) + M_C(30) \\ = -45(20)^2(1/2)[1 - (1/2)^2] - (1/4)(1.8)(30)^3 \end{aligned}$$

El momento de flexión en el extremo C de la saliente voladiza CD se calcula como

$$M_C = -1.8(10)(5) = -90 \text{ k-ft}$$

Respuesta

Sustituyendo $M_C = -90$ k-pies en la anterior ecuación de tres momentos y simplificando, obtenemos

$$MA + 5M_B = -810 \quad (2)$$

Momentos de flexión en apoyos. Resolviendo las ecuaciones. (1) y (2), obtenemos

$$M_A = -97.5 \text{ k-ft}$$

Respuesta

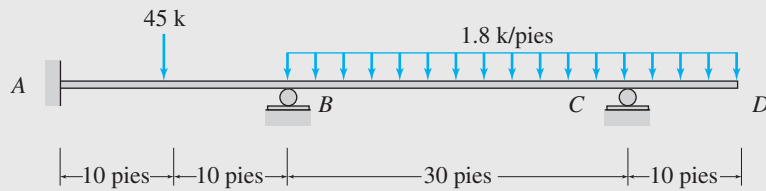
$$M_B = -142.5 \text{ k-ft}$$

Respuesta

Ruptura y reacciones de extremos de extensión. Vea las figuras C.5 (c) y (d). **Respuesta**

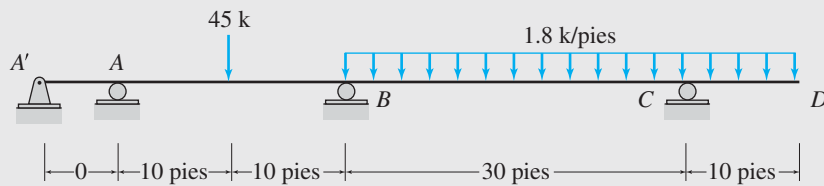
Respuesta

continúa

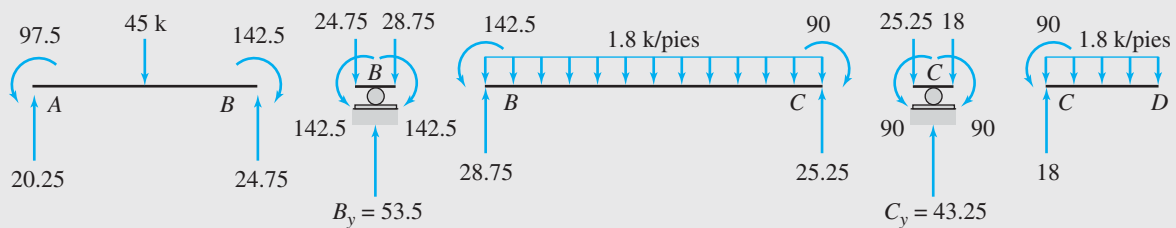


$EI = \text{Constante}$

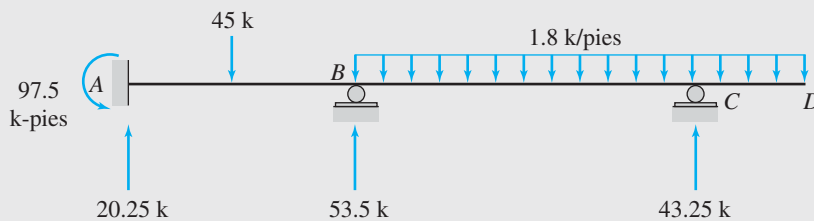
(a) Viga indeterminada



(b) Viga equivalente que para análisis con la ecuación de tres momentos



(c) Ruptura y reacciones de extremos de extensión



(d) Reacciones de apoyo

FIG. C.5

Resumen

En este apéndice se ha considerado una formulación del método de fuerza (flexibilidad) para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, llamada la ecuación de tres momentos.

La ecuación de tres momentos representa, en forma general, la condición de compatibilidad de que la pendiente de la curva elástica sea continua en un apoyo interno de la viga continua. Este método, que se puede utilizar para el análisis de vigas continuas sometidas a cargas y asentamientos de apoyos externos, involucra el tratamiento de los momentos de flexión en los apoyos internos (y cualquiera fijo) de

la viga como los redundantes. La ecuación de tres momentos se aplica entonces a la ubicación de cada redundante para obtener un conjunto de ecuaciones de compatibilidad que se pueden resolver para el momento de flexión redundante.

PROBLEMAS

Sección C.2

C.1 a C.8 Determine las reacciones y dibuje diagramas de la ruptura y momento de flexión para las vigas que se muestran en las figuras PC.1 a PC.8 utilizando la ecuación de tres momentos.

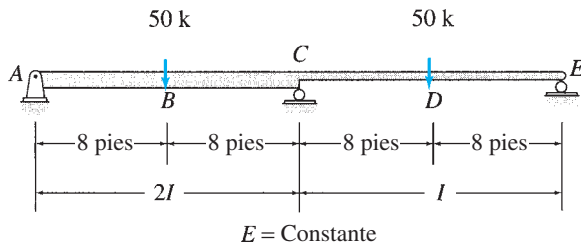


FIG. PC.1

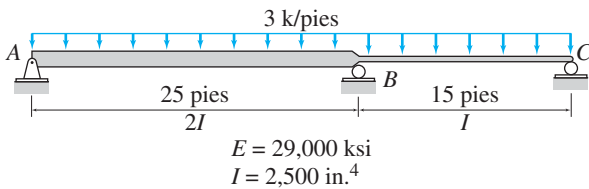


FIG. PC.2, PC.9

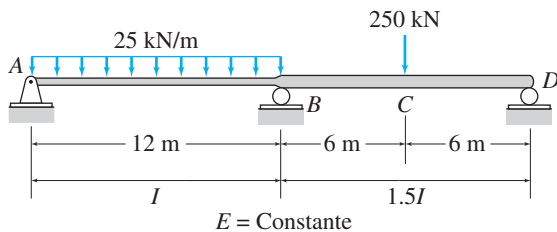


FIG. PC.3

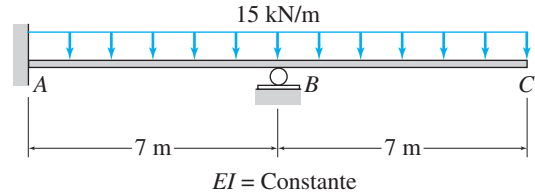


FIG. PC.4

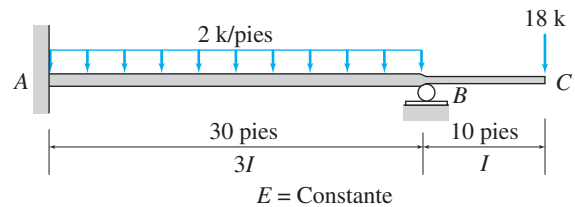


FIG. PC.5

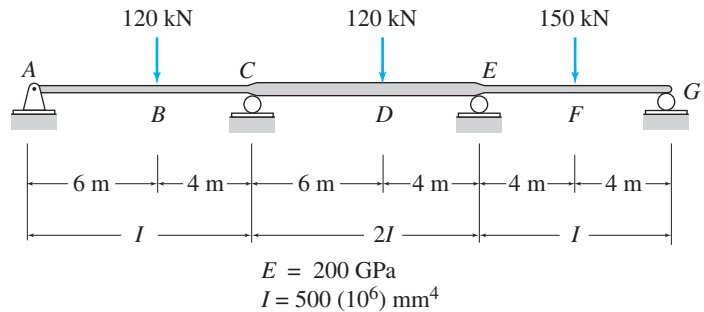


FIG. PC.6, PC.10

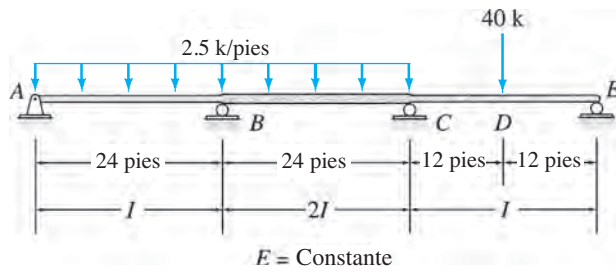


FIG. PC.7

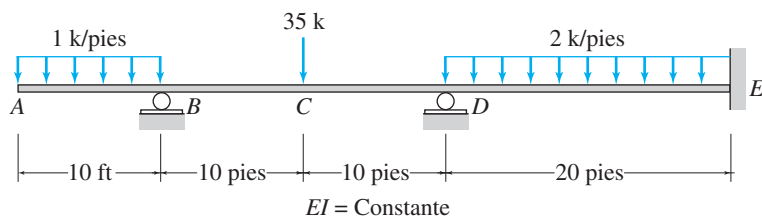


FIG. PC.8

C.9 Resuelva el problema C.2 para la carga que se muestra en Figura PC.2 con asentamientos de apoyo de 1/4 de pulgada en A, 1 pulgada en B, y 3/4 de pulgada en C.

D.10 Resuelva el problema C.6 para la carga que se muestra en Figura PC.6 con asentamientos de apoyo de 10 mm en A, 65 mm en C, 40 mm en E, y 25 mm en G.



Bibliografía

1. ASCE *Standard Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*. Virginia: ASCE/SEI 7-10, American Society of Civil Engineers, 2010.
2. Arbabi, F. *Structural Analysis and Behavior*. Nueva York: McGraw-Hill, 1991.
3. Bathe, K.J. y Wilson, E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976.
4. Beer, F.P. y Johnston, E.R., Jr. *Mechanics of Materials*. Nueva York: McGraw-Hill, 1981.
5. Betti, E. *Il Nuovo Cimento*. Segunda serie, vols. 7 y 8, 1872.
6. Boggs, R.G. *Elementary Structural Analysis*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston, 1984.
7. Chajes, A. *Structural Analysis*, 2a ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990.
8. *Colloquium on History of Structures*. Proceedings. Londres: International Association for Bridge and Structural Engineering/ Cambridge, 1982.
9. Cross, H. "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments" en *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 56, pp. 919–928, 1930.
10. Elias, Z.M. *Theory and Methods of Structural Analysis*. Nueva York: Wiley, 1986.
11. Gere, J.M. y Weaver, W., Jr. *Matrix Algebra for Engineers*. Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1965.
12. Glockner, P.G. "Symmetry in Structural Mechanics" en *Journal of the Structural Division*, ASCE 99, pp. 71–89, 1973.
13. Hibbler, R.C. *Structural Analysis*, 2a ed. Nueva York: Macmillan, 1990.
14. Holzer, S.M. *Computer Analysis of Structures*. Nueva York: Elsevier Science, 1985.
15. *International Building Code*. Chicago: International Code Council, 2012.
16. Kassimali, A. *Matrix Analysis of Structures*, 2a ed., Stamford: Cengage Learning, 2011.
17. Kennedy, J.B. y Madugula, M.K.S. *Elastic Analysis of Structures: Classical and Matrix Methods*. Nueva York: Harper & Row, 1990.
18. Laible, J.P. *Structural Analysis*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston, 1985.
19. Langhaar, H.L. *Energy Methods in Applied Mechanics*. Nueva York: Wiley, 1962.
20. Laursen, H.A. *Structural Analysis*, 3a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1988.
21. Leet, K.M. *Fundamentals of Structural Analysis*. Nueva York: Macmillan, 1988.
22. McCormac, J. *Structural Analysis*, 4a ed. Nueva York: Harper & Row, 1984.
23. McCormac, J. y Elling, R.E. *Structural Analysis: A Classical and Matrix Approach*. Nueva York: Harper & Row, 1988.
24. McGuire, W. y Gallagher, R.H. *Matrix Structural Analysis*. Nueva York: Wiley, 1979.
25. Maney, G.A. *Studies in Engineering, Bulletin 1*. Minneapolis: University of Minnesota, 1915.
26. *Manual for Railway Engineering*. Maryland: American Railway Engineering and Maintenance of Way Association, 2011.
27. Maxwell, J.C. "On the Calculations of the Equilibrium and Stiffness of Frames" en *Philosophical Magazine* 27, pp. 294–299, 1864.
28. Noble, B. *Applied Linear Algebra*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1969.
29. Norris, C.H., Wilbur, J.B. y Utku, S. *Elementary Structural Analysis*, 3a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1976.
30. Parcel, J.H. y Moorman, R.B.B. *Analysis of Statically Indeterminate Structures*. Nueva York: Wiley, 1955.
31. Petroski, H. *To Engineer Is Human—The Role of Failure in Successful Design*. Nueva York: St. Martin's Press, 1985.
32. Popov, E.P. *Introduction to Mechanics of Solids*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1968.

33. Sack, R.L. *Matrix Structural Analysis*. Boston: PWSKENT, 1989.
34. Smith, J.C. *Structural Analysis*. Nueva York: Harper & Row, 1988.
35. Spillers, W.R. *Introduction to Structures*. Londres: Ellis Horwood, 1985.
36. *Standard Specifications for Highway Bridges*, 17a ed. Washington, D.C.: American Association of State Highway and Transportation Officials, 2002.
37. Tartaglione, L.C. *Structural Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1991.
38. Tezcan, S.S. "Discussion of 'Simplified Formulation of Stiffness Matrices' by P.M. Wright" en *Journal of the Structural Division*, ASCE 896, pp. 445–449, 1963.
39. Turner, J.J., Clough, R.W., Martin, H.C. y Topp, L.J. "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" en *Journal of Aeronautical Sciences* 239, pp. 805–823, 1956.
40. Wang, C.K. *Intermediate Structural Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1983.
41. West, H.H. *Analysis of Structures: An Integration of Classical and Modern Methods*, 2a ed. Nueva York: Wiley, 1989.



Respuestas a problemas

CAPÍTULO 2

2.1 Viga BE : $w = 3.84 \text{ kN/m}$, Trabe AC . $P_A = P_C = 5.76 \text{ kN}$, $P_B = 11.52 \text{ kN}$

2.3 Viga AF : $w = 562.5 \text{ libras/pie}$, Vigas BG y CH : $w = 1,125 \text{ libras/pie}$, Trabe AC . $P_A = P_C = 11,250 \text{ libras}$, $P_B = 22,500 \text{ libras}$, Trabe FH . $PF = PH = 22,500 \text{ libras}$, $PG = 45,000 \text{ libras}$

2.5 Viga CD : $w = 662.3 \text{ libras/pie}$, Trabe AE : $w = 111.3 \text{ libras/pie}$, $P_C = 8,279 \text{ libras}$, $P_A = P_E = 4,529 \text{ libras}$

2.7 Viga BF : $w = 16.04 \text{ kN/m}$, Trabe AD : $w = 1.97 \text{ kN/m}$, $P_B = P_C = 80.2 \text{ kN}$, $P_A = P_D = 41.85 \text{ kN}$

2.9 Viga CD : $w = 480 \text{ libras/pie}$, Trabe AE : $P_C = 6,000 \text{ libras}$, $P_A = P_E = 3,000 \text{ libras}$

2.11 Viga EF : $w = 180 \text{ libras/pie}$, Trabe AG : $P_C = P_E = 1,800 \text{ libras}$, $P_A = P_G = 900 \text{ libras}$, Columna A : $P = 2,700 \text{ libras}$

2.13 Barlovena. -121.6 N/m^2 y 303.9 N/m^2 ; Sotavena. -729.3 N/m^2

2.15 Pared de Barlovena. $21.3 \text{ libras por pie cuadrado}$ para $0 \leq z \leq 15 \text{ pies}$; $24.57 \text{ libras por pie cuadrado}$ para $z = 30 \text{ pies}$, Pared de sotavena. $-12.8 \text{ libras por pie cuadrado}$

2.17 0.7 kN/m^2

CAPÍTULO 3

3.1 (a) Inestable, (b) Determpulgada, (c) Indetermpulgada, $i_e = 2$, (d) Indetermpulgada, $i_e = 1$

3.3 (a) Inestable, (b) Determpulgada, (c) Indetermpulgada, $i_e = 3$, (d) Indetermpulgada, $i_e = 1$

3.5 $A_x = 0$, $A_y = 33.75 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_y = 56.25 \text{ k}$ $\uparrow$

3.7 $A_x = 150 \text{ kN}$ $\rightarrow$, $A_y = 0$, $M_A = 1,200 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\curvearrowright$

3.9 $A_x = 0$, $A_y = 220 \text{ kN}$ $\uparrow$, $M_A = 650 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\curvearrowright$

3.11 $A_y = 33.67 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 0$, $B_y = 61.33 \text{ k}$ $\uparrow$

3.13 $A_x = 37.5 \text{ kN}$ $\rightarrow$, $A_y = 100 \text{ kN}$ $\uparrow$, $R_B = 62.5 \text{ kN}$ $\nwarrow$

3.15 Para $0 \leq x \leq 20 \text{ m}$: $A_y = 45 - 2x \text{ kN}$ $\uparrow$, $B_y = 5 + 2x \text{ kN}$ $\uparrow$; Para $20 \text{ m} \leq x \leq 25 \text{ m}$: $A_y = (25 - x)^2/5 \text{ kN}$ $\uparrow$; $B_y = (625 - x^2)/5 \text{ kN}$ $\uparrow$

3.17 $A_y = 102.75 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 0$, $B_y = 20.25 \text{ k}$ $\uparrow$

3.19 $A_x = 200 \text{ kN}$, $A_y = 125 \text{ kN}$ $\downarrow$, $B_y = 475 \text{ kN}$ $\uparrow$

3.21 $A_x = 100 \text{ kN}$, $A_y = 216.11 \text{ kN}$ $\uparrow$, $B_y = 183.89 \text{ kN}$ $\uparrow$

3.23 $A_y = 244.07 \text{ kN}$ $\uparrow$, $B_x = 240 \text{ kN}$, $B_y = 85.93 \text{ kN}$ $\uparrow$

3.25 $A_y = 22.5 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 0$, $B_y = 52.5 \text{ k}$ $\uparrow$, $M_B = 1,500 \text{ k-pies}$ $\curvearrowright$

3.27 $A_x = 20 \text{ k}$, $A_y = 20 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 14 \text{ k}$ $\rightarrow$, $B_y = 2 \text{ k}$ $\uparrow$

3.29 $A_x = 0$, $A_y = D_y = 7.5 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_y = C_y = 90 \text{ k}$ $\uparrow$

3.31 $A_x = 13.75 \text{ k}$ $\leftarrow$, $A_y = 3.75 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 21.25 \text{ k}$ $\leftarrow$, $B_y = 46.25 \text{ k}$ $\uparrow$

3.33 $A_x = 55 \text{ kN}$ $\leftarrow$, $A_y = 216.11 \text{ kN}$ $\uparrow$, $B_x = 45 \text{ kN}$ $\leftarrow$, $B_y = 183.89 \text{ kN}$ $\uparrow$

3.35 $A_x = 8.63 \text{ k}$ $\leftarrow$, $A_y = 15.46 \text{ k}$ $\uparrow$, $B_x = 11.37 \text{ k}$ $\leftarrow$, $B_y = 35.45 \text{ k}$ $\uparrow$

3.37 $A_x = 0$, $A_y = 115 \text{ k}$ $\uparrow$, $M_A = 900 \text{ k-pies}$ $\curvearrowright$, $B_y = 120 \text{ k}$ $\uparrow$, $C_y = 5 \text{ k}$ $\uparrow$

3.39 $A_y = 50 \text{ kN}$ $\downarrow$, $B_y = 475 \text{ kN}$ $\uparrow$, $C_x = 0$, $C_y = 225 \text{ kN}$ $\uparrow$, $M_C = 900 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\curvearrowright$

3.41 $A_x = 15 \text{ k} \rightarrow, A_y = 15 \text{ k} \uparrow, M_A = 300 \text{ k-pies [flecha baja]}, B_x = 15 \text{ k} \rightarrow, B_y = 15 \text{ k} \downarrow, M_B = 300 \text{ k-pies [flecha baja]}$

CAPÍTULO 4

4.1 (a) Inestable, (b) Determpulgada, (c) Determpulgada, (d) Inestable

4.3 (a) Inestable, (b) Determpulgada, (c) Determpulgada, (d) Indetermpulgada, $i_e = 1$

4.5 (a) Determpulgada, (b) Inestable, (c) Determpulgada, (d) Determpulgada

4.7 $F_{AB} = F_{BC} = 77.31 \text{ kN (C)}, F_{AD} = 168.75 \text{ kN (T)}, F_{BD} = 37.5 \text{ kN (C)}, F_{CD} = 93.75 \text{ kN (T)}$

4.9 $F_{AD} = 197.46 \text{ kN (C)}, F_{AC} = 153.21 \text{ kN (T)}, F_{CD} = 117.85 \text{ kN (T)}, F_{DE} = 191.67 \text{ kN (C)}$

4.11 $F_{AB} = 10 \text{ k (T)}, F_{AF} = 12.5 \text{ k (C)}, F_{BF} = 7.5 \text{ k (T)}, F_{BG} = 12.5 \text{ k (T)}, F_{FG} = 10 \text{ k (C)}, F_{BC} = F_{CD} = F_{CG} = 0$

4.13 $F_{BC} = 80.67 \text{ k (C)}, F_{BE} = 13.47 \text{ k (C)}, F_{BF} = 64.47 \text{ k (T)}, F_{EF} = 18.12 \text{ k (T)}$

4.15 $F_{CD} = F_{DE} = 30 \text{ k (T)}, F_{CI} = F_{EK} = 15 \text{ k (C)}, F_{DI} = F_{DK} = 21.21 \text{ k (T)}, F_{IJ} = F_{JK} = 45 \text{ k (C)}, F_{DJ} = 0$

4.17 $F_{BC} = 120 \text{ kN (T)}, F_{BF} = 60 \text{ kN (C)}, F_{BG} = 63.25 \text{ kN (T)}, F_{FG} = 189.74 \text{ kN (C)}$

4.19 $F_{CD} = 17.85 \text{ k (T)}, F_{DI} = 4.71 \text{ k (C)}, F_{DJ} = 25.69 \text{ k (T)}, F_{IJ} = 41.21 \text{ k (C)}$

4.21 $F_{AC} = F_{BE} = 62.5 \text{ kN (C)}, F_{AD} = 0, F_{CD} = 32.5 \text{ kN (C)}$

4.23 $F_{AC} = F_{CE} = 26 \text{ k (T)}, F_{AD} = 63 \text{ k (C)}, F_{BC} = F_{CD} = 13 \text{ k (C)}$

4.25 $F_{GH} = 27 \text{ kN (C)}, F_{GM} = 18 \text{ kN (C)}, F_{GN} = 33.33 \text{ kN (T)}, F_{HN} = 44.67 \text{ kN (C)}, F_{MN} = 7 \text{ kN (T)}$

4.27 $F_{BC} = 130 \text{ kN (T)}, F_{CD} = 190 \text{ kN (C)}, F_{CF} = 100 \text{ kN (C)}, F_{CG} = 300 \text{ kN (T)}$

4.29 $F_{BC} = 6.1 \text{ k (T)}, F_{BE} = 6 \text{ k (C)}, F_{BG} = 5 \text{ k (T)}, F_{EG} = 2.625 \text{ k (C)}$

4.31 $F_{BC} = 48 \text{ k-pies/h (T)}, F_{GH} = 36 \text{ k-pies/h (C)}$

4.33 $F_{BC} = 18.75 \text{ k (T)}, F_{CF} = 68.94 \text{ k (C)}, F_{FG} = 45 \text{ k (T)}$

4.35 $F_{AD} = 61.85 \text{ kN (C)}, F_{CD} = 45.34 \text{ kN (T)}, F_{CE} = 6.87 \text{ kN (T)}$

4.37 $F_{CD} = 113.33 \text{ kN (T)}, F_{CH} = 41.67 \text{ kN (C)}, F_{GH} = 100 \text{ kN (C)}$

4.39 $F_{CD} = 58.87 \text{ k (T)}, F_{CI} = 9.01 \text{ k (T)}, F_{HI} = 9.24 \text{ k (T)}$

4.41 $F_{CD} = 102.86 \text{ k (C)}, F_{DI} = 6.17 \text{ k (C)}, F_{DJ} = 35.63 \text{ k (C)}$

4.43 $F_{CF} = 21.08 \text{ k (T)}, F_{CG} = 27.04 \text{ k (T)}, F_{EG} = 27.04 \text{ k (C)}$

4.45 $F_{CD} = 80 \text{ k (C)}, F_{DI} = 111.8 \text{ k (C)}, F_{IN} = 111.8 \text{ k (T)}$

4.47 $F_{BC} = 45 \text{ kN (C)}, F_{BF} = 215 \text{ kN (C)}, F_{EF} = 30 \text{ kN (T)}, F_{EI} = 161 \text{ kN (T)}$

4.49 $F_{EF} = 110 \text{ k (T)}, F_{EL} = 28.28 \text{ k (T)}, F_{LP} = 49.5 \text{ k (T)}, F_{OP} = 130 \text{ k (C)}$

4.51 $F_{AD} = 1.12 \text{ k (T)}, F_{BD} = 7.56 \text{ k (C)}, F_{CD} = 8.54 \text{ k (C)}$

4.53 $F_{AB} = 2.18 \text{ k (C)}, F_{AC} = 6.24 \text{ k (C)}, F_{AD} = 16.63 \text{ k (T)}, F_{BC} = 8.61 \text{ k (T)}$

4.55 $F_{AB} = 29.17 \text{ k (T)}, F_{CD} = 15.83 \text{ k (C)}, F_{AE} = 4.12 \text{ k (T)}, F_{EF} = 28.33 \text{ k (T)}$

CAPÍTULO 5

5.1 $Q_A = -40 \text{ kN}, S_A = 32.14 \text{ kN}, M_A = 524.98 \text{ kN} \cdot \text{m}, Q_B = 0, S_B = 87.14 \text{ kN}, M_B = 261.42 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.3 $Q_A = S_A = Q_B = 0, M_A = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}, S_B = -100 \text{ kN}, M_B = -375 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.5 $Q_A = 60 \text{ kN}, S_A = 55 \text{ kN}, M_A = -95 \text{ kN} \cdot \text{m}, Q_B = 45 \text{ kN}, S_B = 60 \text{ kN}, M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.7 $Q_A = Q_B = 0, S_A = -50 \text{ kN}, M_A = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}, S_B = -62.5 \text{ kN}, M_B = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.9 $Q_A = Q_B = S_B = 0, S_A = 200 \text{ kN}, M_A = -750 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_B = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.11 $Q_A = -9 \text{ k}, S_A = 12 \text{ k}, M_A = M_B = 240 \text{ k-pies}, Q_B = 9 \text{ k}, S_B = -12 \text{ k}$

5.13 Para $0 < x < (L/3)$: $S = 2P/3, M = 2Px/3$
Para $(L/3) < x < L$: $S = -P/3, M = P(L - x)/3$

5.15 $S = w(L - 2x)/2, M = wx(L - x)/2$

5.17 $S = M/L$
Para $0 < x < (2L/3)$: Momena de flexión = Mx/L
Para $(2L/3) < x < L$: Momena de flexión = $M(x - L)/L$

5.19 $S = w(L^2 - 3x^2)/(6L), M = wx(L^2 - x^2)/(6L)$

5.21 Para $0 < x < 7 \text{ m}$: $S = -30 \text{ kN}, M = -30x \text{ kN} \cdot \text{m}$
Para $7 \text{ m} < x < 14 \text{ m}$: $S = -45 \text{ kN}, M = -45x + 105 \text{ kN} \cdot \text{m}$

5.23 Para $0 < x < 4$ m: $S = -75$ kN, $M = -75x$ kN · m

Para $4 \text{ m} < x < 8$ m: $S = -75$ kN, $M = -75x + 100$ kN · m

5.25 Para $0 < x < 20$ pies: $S = -(x^2/40) - x + 7.5$, $M = -(x^3/120) - (x^2/2) + 7.5x$

Para $20 \text{ pies} < x < 30$ pies: $S = -(x^2/40) - x + 52.5$, $M = -(x^3/120) - (x^2/2) + 52.5x - 900$

5.27 Para $0 < x \leq 5$ m (de A a B): $S = -2x^2 + 83.33$, $M = -(2x^3/3) + 83.33x$

Para $0 < x_1 \leq 10$ m (de C a B): $S = S = 2x_1^2 - 66.7$, $M = -(x_1^3/3) + 66.67x_1$

5.29 $S_{A'R} = S_{B,L} = 30$ kN, $S_{B,R} = S_{C,L} = 5$ kN, $S_{C,R} = S_{D,L} = 20$ kN, $M_B = 180$ kN · m, $M_C = 240$ kN · m

5.31 $S_{A'R} = S_{B,L} = 10$ k, $S_{B,R} = S_{C,L} = 23.33$ k, $S_{C,R} = S_{D,L} = 3.33$ k, $S_{D,R} = S_{E,L} = 16.67$ k, $M_B = -80$ k-pies, $M_C = 106.67$ k-pies, $M_D = 133.33$ k-pies

5.33 $S_{A'R} = S_{B,L} = 12$ k, $S_{B,R} = S_{C,L} = 24$ k, $S_{C,R} = S_{D,L} = 0$, $S_{D,R} = S_{E,L} = 24$ k, $S_{E,R} = S_{F,L} = 12$ k, $M_B = M_E = 120$ k-pies, $M_C = M_D = 120$ k-pies

5.35 $S_{A'R} = S_{B,L} = 26$ k, $S_{B,R} = S_C = 4$ k, $S_{D,L} = -24$ k, $M_A = M_D = 0$, $M_B = 156$ k-pies, $M_C = 140$ k-pies

5.37 $S_{A'R} = S_{B,L} = 225$ kN, $S_{B,R} = S_C = 150$ kN, $S_D = 0$, $M_A = 2,700$ kN · m, $M_B = -1,350$ kN · m, $M_C = -450$ kN · m, $M_D = 0$

5.39 $S_{B,L} = 27$ k, $S_{B,R} = 36$ k, $S_{C,L} = 36$ k, $S_{C,R} = 27$ k, $M_B = M_C = -121.5$ k-pies, $+ M_{\max} = 94.5$ k-pies, en 21 pies de A

5.41 $S_{A,R} = 10$ k, $S_{B,L} = 25$ k, $S_{B,R} = 30$ k, $S_{C,L} = -30$ k, $S_{C,R} = 25$ k, $S_{D,L} = 10$ k, $M_B = M_C = -87.5$ k-pies; $+ M_{\max} = 62.5$ k-pies, en 15 pies de A

5.43 $S_{A'R} = S_{B,L} = 8$ k, $S_{B,R} = 23.83$ k, $S_{C,L} = -21.17$ k, $S_{C,R} = S_D = 0$, $M_B = -80$ k-pies, $M_C = M_D = -40$ k-pies, $+ M_{\max} = 109.3$ k-pies, en 25.89 pies de A

5.45 $S_{A'R} = S_{B,L} = 80$ kN, $S_{B,R} = S_C = -35$ kN, $S_{D,L} = -125$ kN, $S_{D,R} = 120$ kN, $M_A = -540$ kN · m, $M_B = 420$ kN · m, $M_D = -720$ kN · m

5.47 $S_{A'R} = 11.33$ k, $S_{B,L} = 18.67$ k, $S_{B,R} = 16$ k, $S_C = S_{D,L} = 6$ k, $S_{D,R} = S_{E,L} = 6$ k, $M_B = 110$ k-pies, $M_D = 60$ k-pies, $+ M_{\max} = 64.18$ k-pies, en 11.33 pies de A

5.49 $S_{A'R} = 90$ kN, $S_{C,L} = -180$ kN, $S_{C,R} = 157.5$ kN, $S_{E,L} = -112.5$ kN, $S_{E,R} = 157.5$ kN, $S_{F,L} = -112.5$ kN, $M_C = 675$ kN · m, $M_E = -337.5$ kN · m, $+ M_{\max} = 351.6$ kN · m, en 6.25 m a la izquierda de F

5.51 $S_{A'R} = 125$ kN, $S_{C,L} = 250$ kN, $S_{C,R} = 187.5$ kN, $S_{D,L} = -187.5$ kN, $S_{D,R} = 250$ kN, $S_{F,L} = -125$ kN, $M_C = M_D = -937.5$ kN · m, $+ M_{\max} = 312.5$ kN · m, a 5 m de A y F

5.53 (a) $a = 3$ m, (b) $S_{A'R} = S_{B,L} = 50$ kN, $S_{B,R} = S_{C,L} = -100$ kN, $S_{C,R} = S_{D,L} = 150$ kN, $M_B = 450$ kN · m, $M_C = -450$ kN · m

5.55 (a) Determpulgada, (b) Inestable, (c) Indetermpulgada, $i = 6$, (d) Indetermpulgada, $i = 5$

5.57 Miembro AB: $S_{\max} = 16.5$ k, $M_{\max} = 247.5$ k-pies, $Q = 0$
Miembro BC: $S_{\max} = -12$ k, $M_{\max} = 120$ k-pies, $Q = -8.5$ k

5.59 Miembro AB: $S_{\max} = 48$ kN, $M_{\max} = 120$ kN · m, $Q_{\max} = 104$ kN

Miembro BC: $S_{\max} = -48$ kN, $M_{\max} = 96$ kN · m, $Q = -24$ kN

5.61 Miembro AB: $S_{\max} = -204.97$ kN, $M_{\max} = 416.67$ kN · m, $Q = -260.87$ kN

Miembro BC: $S_{\max} = 141.67$ kN, $M_{\max} = 416.67$ kN · m, $Q = -300$ kN

5.63 Miembro AB: $S = 48$ k, $M_{\max} = 1,260$ k-pies, $Q = -24$ k
Miembro BC: $S_{\max} = 30$ k, $M_{\max} = 300$ k-pies, $Q = 0$

5.65 Miembro AC: $S_{\max} = 108$ kN, $M_{\max} = 486$ kN · m, $Q = 7.65$ kN

Miembro BD: $S = M = 0$, $Q = -217.35$ kN

Miembro CE: $S_{\max} = -142.35$ kN, $M_{\max} = 487.95$ kN · m, $Q = 0$

5.67 Miembro AB: $S = 10$ k, $M_{\max} = 200$ k-pies, $Q = 8.83$ k
Miembro BC: $S_{\max} = -30.51$ k, $M_{\max} = 225$ k-pies, $Q_{\max} = -17.02$ k

Miembro CD: $S_{\max} = 15$ k, $M_{\max} = 225$ k-pies, $Q = -27.17$ k

5.69 Miembro AB: $S_{\max} = -24$ k, $M_{\max} = 492$ k-pies, $Q = -30$ k

Miembro BC: $S_{\max} = 30$ k, $M_{\max} = 492$ k-pies, $Q = -24$ k

Miembro CD: $S_{\max} = 24$ k, $M_{\max} = 192$ k-pies, $Q = 0$

5.71 Miembro AC: $S = 1.25$ k, $M_{\max} = 18.75$ k-pies, $Q = -10$ k

Miembro CE: $S_{\max} = -35$ k, $M_{\max} = 356.25$ k-pies, $Q = -23.75$ k

Miembro EG: $S = 23.75$ k, $M_{\max} = 356.25$ k-pies, $Q = -35$ k

CAPÍTULO 6

$$6.1 \theta = -\frac{M}{6EIL}(3x^2 - 6Lx + 2L^2),$$

$$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$$

782 Respuestas a problemas

6.3 Para $0 \leq x \leq a$. $\theta = \frac{wx}{2EI} \left[a^2 - L^2 + (L-a)x \right],$

$y = \frac{wx^2}{2EI} \left[\frac{a^2 - L^2}{2} + \frac{(L-a)x}{3} \right]$

Para $a \leq x \leq L$. $\theta = \frac{w}{2EI} \left[xL(x-L) - \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right],$

$y = \frac{w}{2EI} x^2 L \left(\frac{x}{3} - \frac{L}{2} \right) - \frac{x^4}{12} - \frac{a^4}{12} + \frac{a^3 x}{3}$

6.5 $\theta = \frac{wx}{24EIL} (-x^3 + 6L^2x - 8L^3),$

$y = \frac{wx^2}{120EIL} (-x^3 + 10L^2x - 20L^3)$

6.7 $\theta = 0.0174 \text{ rad } \curvearrowright, y = 34.8 \text{ mm } \downarrow$

6.9 y 6.35 $\theta_B = 0.00703 \text{ rad } \curvearrowright \Delta_B = 23.4 \text{ mm } \downarrow$

6.11 y 6.37 $\theta_B = Pa^2/2EI \curvearrowright \Delta_B = Pa^2(3L-a)/6EI \downarrow$

6.13 y 6.39 $\theta_A = wL^3/8EI \curvearrowright \Delta_B = 11wL^4/120EI \downarrow$

6.15 y 6.41 $\theta_B = 0.0514 \text{ rad } \curvearrowright \Delta_B = 180 \text{ mm } \downarrow \theta_C = 0.0771 \text{ rad } \Delta_C = 373 \text{ mm } \downarrow$

6.17 y 6.43 $\theta_B = 0.0257 \text{ rad } \curvearrowright = 4.17 \text{ pulg. } \downarrow, \theta_C = 0.00644 \text{ rad } \curvearrowright \Delta_C = 5.1 \text{ pulg. } \downarrow$

6.19 y 6.45 559 pulg^4

6.21 y 6.47 $22,342 \text{ pulg}^4$

6.23 y 6.49 $\Delta_{\max} = 114.1 \text{ mm } \downarrow, \text{ en } 5.29 \text{ m de } A$

6.25 y 6.51 $\Delta_{\max} = 146 \text{ mm } \downarrow, \text{ en } 10.95 \text{ m de } A$

6.27 y 6.53 $\Delta_{\max} = 1.92 \text{ pulg. } \downarrow, \text{ en } 15.42 \text{ pies de } A$

6.29 y 6.55 $0.0139 \text{ pulg. } \downarrow$

6.31 y 6.57 $\theta_D = 0.0136 \text{ rad } \curvearrowleft \Delta_D = 68.13 \text{ mm } \uparrow$

6.33 y 6.59 $\theta_B = 0.0099 \text{ rad } \curvearrowright \Delta_B = 0.86 \text{ pulg. } \downarrow$ [fórmula] $\theta_D = 0.0084 \text{ rad } \curvearrowleft \Delta_D = 1.44 \text{ pulg. } \downarrow$

CAPÍTULO 7

7.1 y 7.51 $\Delta_{BH} = 0.225 \text{ pulg. } \leftarrow \Delta_{BV} = 1.466 \text{ pulg. } \downarrow$

7.3 y 7.53 $\Delta_{BH} = 0.497 \text{ pulg. } \leftarrow \Delta_{BV} = 0.126 \text{ pulg. } \uparrow$

7.5 y 7.55 $\Delta_{BH} = 0.36 \text{ pulg. } \leftarrow \Delta_{BV} = 1.894 \text{ pulg. } \downarrow$

7.7 $9.1 \text{ mm } \downarrow$

7.9 $23 \text{ mm } \rightarrow$

7.11 $3,050 \text{ mm}^2$

7.13 11.91 pulg^2

7.15 11.07 pulg^2

7.17 $0.693 \text{ pulg. } \downarrow$

7.19 $1.357 \text{ pulg. } \uparrow$

7.21 y 7.58 $\theta_B = 0.0174 \text{ rad } \curvearrowright = \theta_B 34.8 \text{ mm } \downarrow$

7.23 $34.8 \text{ mm } \downarrow$

7.25, 7.29 y 7.60 $373 \text{ mm } \downarrow$

7.27 y 7.62 $0.0048 \text{ pulg. } \uparrow$

7.31 $5,625 (10^6) \text{ mm}^4$

7.33 $3,374 (10^6) \text{ mm}^4$

7.35 y 7.64 $\theta_D = 0.0071 \text{ rad } \curvearrowright \theta_D = 0.62 \text{ pulg. } \downarrow$

7.37 $3.63 \text{ pulg. } \downarrow$

7.39 $0.0034 \text{ rad } \curvearrowright$

7.41 $0.0011 \text{ rad } \curvearrowright$

7.43 y 7.67 $0.0393 \text{ rad } \curvearrowleft$

7.45 y 7.68 $182 \text{ mm } \rightarrow$

7.47 $2,225 \text{ pulg}^4$

7.49 $0.00386 \text{ rad } \curvearrowright$

CAPÍTULO 8

8.1 A_y : 1 en A, 0 en C

C_y : 0 en A, 1 en C

S_B : 0 en A y C, 0.5 en B_L , 0.5 en B_R

M_B : 0 en A y C, 7.0 en B

8.3 A_y : 1 en A, 0 en C

C_y : 0 en A, 1 en C

S_B : 0 en A y C, -0.667 en B_L , 0.333 en B_R

M_B : 0 en A y C, 3.33 en B

8.5 A_y : 1 en A y C

M_A (+ $\curvearrowright$): 0 en A, 15 en C

S_B : 0 en A y B_L , 1 en B_R y C

M_B : 0 en A y B, -9 en C

8.7 B_y : 1.25 en A, 0 en D

D_y : 0.25 en A, 0 en B, 1 en D

S_C : 0.25 en A, 0 en B y D, -0.5 en C_L , 0.5 en C_R

M_C : -2.5 en A, 0 en B y D, 5 en C

8.9 A_y : 1 en A, 0 en C

C_y : 0 en A, 1 en C

$S_{A'R'}$: 1 en A, 0 en C

M_B : 0 en A y C, 7.5 en B

8.11 S_E . 0 en B , D , y E_L , 1 en E_R y F
 M_E . 0 en B , D , y E , -4 en F

8.13 A_y . 1 en A , 0 en C y E
 E_y . 0 en A , 1 en C y E
 M_E (+ Δ). 0 en A y E , 8 en C

8.15 S_D . 0 en A , D_R , y E , -1 en C y D_L
 M_D . 0 en A , D , y E , -4 en C

8.17 A_y . 1 en C , 0 en E , -0.5 en F
 B_y . 0 en C , 1.5 en F
 S_D . 0 en C y E , -0.5 en D_L y F , 0.5 en D_R
 M_D . 0 en C y E , 6 en D , -6 en F

8.19 A_y . 0 en B y E , 2 en D
 B_y . 1 en B , 0 en C y E , -1 en D
 E_y . 0 en B , C , y D , 1 en E
 S_D . 0 en B , C , D_L , y E , 1 en D_R

8.21 S_C . 0.5 en A , 0 en B , D , E , F , y G ,
-0.5 en C_L , 0.5 en C_R
 M_C . 6 en A , 0 en B , D , E , F , y G , 6 en C
 S_D . 0.5 en A , 0 en B , D_R , E , F , y
 G , -0.5 en C , -1 en D_L

8.23 A_y . 1 en A , 0 en B , C , E , F , y G
 C_y . 0 en A , E , y G , 1.333 en B , -0.25 en F
 E_y . 0 en A , C , y G , -0.333 en B , 1.25 en F
 G_y . 0 en A , B , C , E , y F , 1 en G

8.25 S_D . 0 en A , C , E , y G , 0.333 en B , -0.5 en D_L ,
0.5 en D_R , -0.25 en F
 M_D . 0 en A , C , E , y G , -10 en B , 15 en D ,
-7.5 en F

8.27 B_y . 1.67 en A , 1 en B , 0 en C , D , E , F y G
 D_y . -1.17 en A , 0 en B , F y G , 1.75 en C , 1 en D
 G_y . 0.5 en A , 0 en B y D , -0.75 en C , 1 en F y G
 M_G (+ Δ). 5 en A , 0 en B , D y G , -7.5 en C , 10 en F

8.29 A_y . 1 en A y B , 0 en D , E , y G
 E_y . 0 en A , B , y G , 1.667 en D
 G_y . 0 en A , B , y E , -0.667 en D , 1 en G
 M_A (+ Δ). 0 en A , D , E , y G , 20 en B

8.31 A_y . 1 en A y C , 0 en D y F
 F_y . 0 en A y C , 1 en D y F
 M_A (+ Δ). 0 en A , D , y F , 10 en C
 M_F (+ Δ). 0 en A , C , y F , -6 en D

8.33 A_y . 1 en A , 0 en B , E , G y H , -0.75 en C
 B_y . 0 en A , E , G y H , 1.75 en C

8.35 A_x . 0 en C y E , 0.5 en D
 A_y . 1 en C , 0 en E
 B_x . 0 en C y E , -0.5 en D
 B_y . 0 en C , 1 en E

8.37 A_y . 1 en B , C , y D , 0 en F
 M_A (+ Δ). -5 en B , 0 en C y F , 5 en D
 F_y . 0 en B , C , y D , 1 en F
 S_E . 0 en B , C , D , y F , -0.5 en E_L , 0.5 en E_R
 M_E . 0 en B , C , D , y F , 2.5 en E

8.39 A_y . 1 en D , 0 en F y H , -0.75 en G
 B_y . 0 en D y H , 1 en F , 1.75 en G
 C_y . 0 en D , F , y G , 1 en H
 S_E . 0 en D , F , y H , -0.5 en E_L , 0.5 en E_R , -0.75 en G
 M_E . 0 en D , F , y H , 2 en E , -3 en G

8.41 S_{DE} . 0.667 en A , 0 en C y F , -0.333 en D , 0.333 en E ,
-0.667 en H
 M_E . -12 en A , 0 en C y F , 12 en E , -24 en H

8.43 S_{BC} . -1 en A y B , 0 en C , D , y E
 M_C . 30 en A , 0 en C , D , y E

8.45 F_{AB} . 0 en A y C , 0.5 en B
 F_{AD} . 0 en A y C , -0.707 en B
 F_{BD} . 0 en A y C , 1 en B

8.47 F_{DH} . 0 en A , B , C , y E , 1 en D
 F_{CD} . 0 en A y E , 1 en D
 F_{GH} . 0 en A y E , -1.33 en C
 F_{CH} . 0 en A y E , 0.833 en C , -0.417 en D

8.49 F_{DE} . 0 en A , B , C , y D , -0.667 en E
 F_{CG} . 0 en A y D , -0.401 en B y E , 0.401 en C
 F_{GH} . 0 en A y D , -0.889 en C , 0.889 en E
 F_{BC} . 0 en A y D , 0.667 en B y C , -0.667 en E

8.51 F_{CD} . -1.6 en A , 0 en C , D , E , F , y G
 F_{CI} . -1.8 en A , 0 en C y E , -0.5 en D , 1 en G
 F_{DI} . 1.494 en A , 0 en C y E , 0.534 en D , -1.067 en G
 F_{DJ} . -0.333 en A y G , 0 en C y E , 0.167 en D

8.53 F_{AB} . 0 en A y G , -1.11 en B
 F_{DI} . 0 en A y G , 0.556 en C , -0.833 en D
 F_{IJ} . 0 en A y G , 2 en D
 F_{CI} . 0 en A y G , -0.333 en C , 0.5 en D

784 Respuestas a problemas

8.55 F_{BC} . 0 en E , F , y G , -4.123 en D

F_{BF} . 0 en E , F , y D , 0.5 en G

F_{BG} . 0 en E , F , y D , -2.236 en G

F_{FG} . 0 en E y F , 2 en G , 4 en D

8.57 F_{AD} . 0 en C y E , -1 en D , 1 en F

F_{BD} . 0 en C , D , y E , -1.67 en F

F_{CD} . 1.33 en C , 0 en D , E , y F

8.59 DB. 0 en A y C , $-457.33/(EI)$ en B

8.61 DD. 0 en A y C , $-96/(EI)$ en D

CAPÍTULO 9

9.1 $-150 \text{ kN} \cdot \text{m}$

9.3 -81.25 kN

9.5 Máximo $A_y = 1,150 \text{ kN} \uparrow$, Máximo $M_A = 9,375 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

9.7 Máximo positivo $S_D = 60.417 \text{ k}$,

Máximo negativo $S_D = 45.833 \text{ k}$

Máximo positivo $M_D = 1,937.5 \text{ k-pies}$,

Máximo negativo $M_D = 1,100 \text{ k-pies}$

9.9 200 k(C)

9.11 Máximo tensil $F_{DI} = 220.3 \text{ k (T)}$,

Máximo compresivo $F_{DI} = 80.2 \text{ k (C)}$

9.13 $S_B = 61.67 \text{ kN}$, $M_B = 733.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$

9.15 264 k-pies

9.17 88.56 kN (T)

9.19 42.5 k

9.21 370.1 k-pies

9.23 601.8 k-pies

CAPÍTULO 10

10.17 $F_{AC} = 26.35 \text{ k (C)}$, $F_{BC} = 36.89 \text{ k (T)}$

10.19 $F_{DE} = 195 \text{ k (C)}$, $F_{DJ} = 50 \text{ k (C)}$,

$F_{EJ} = 21.21 \text{ k (T)}$, $F_{JK} = 180 \text{ k (T)}$

10.21 $A_X^{AD} = 20 \text{ kN} \rightarrow$, $A_Y^{AD} = 197.33 \text{ kN} \uparrow$, $D_X^{AD} = 20 \text{ kN}$, $D_Y^{AD} = 197.33 \text{ kN} \downarrow$, $M_D^{AD} = 240 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

10.23 $B_X^{BG} = 23.75 \text{ k}$, $B_Y^{BG} = 35 \text{ k} \uparrow$, $M_B^{BG} = 356.25 \text{ k-pies} \curvearrowright$, $G_X^{BG} = 23.75 \text{ k} \rightarrow$, $G_Y^{BG} = 35 \text{ k} \downarrow$, $M_G^{BG} = 356.25 \text{ k-pies} \curvearrowright$

CAPÍTULO 12

12.1 $S_L = S_R = 90 \text{ kN} \uparrow$, $M_L = 48.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ [flecha], $M_R = 48.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

12.3 Trabe DE. $S_L = S_R = 80 \text{ kN}$, $M_L = 57.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$, $M_R = 57.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Trabe EF. $S_L = S_R = 50 \text{ kN}$, $M_L = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$, $M_R = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

12.5 Trabe DE. $S_L = S_R = 80 \text{ kN}$, $M_L = 57.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$, $M_R = 57.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Trabe HI. $S_L = S_R = 60 \text{ kN}$, $M_L = 64.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$, $M_R = 64.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

12.7 Miembro AD. $Q = 12.5 \text{ k (T)}$, $S = 12.5 \text{ k}$, $M = 125 \text{ k-pies}$

Miembro BE. $Q = 0$, $S = 25 \text{ k}$, $M = 250 \text{ k-pies}$

Miembro EF. $Q = 12.5 \text{ k (C)}$, $S = 12.5 \text{ k}$, $M = 125 \text{ k-pies}$

12.9 Miembro AD. $Q = 16.67 \text{ k (C)}$, $S = 15 \text{ k}$, $M = 120 \text{ k-pies}$

Miembro CF. $Q = 16.67 \text{ k (T)}$, $S = 15 \text{ k}$, $M = 120 \text{ k-pies}$

Miembro DE. $Q = 10 \text{ k (C)}$, $S = 13.33 \text{ k}$, $M = 160 \text{ k-pies}$

Miembro HI. $Q = 15 \text{ k (C)}$, $S = 3.33 \text{ k}$, $M = 40 \text{ k-pies}$

12.11 Miembro AD. $Q = 10.5 \text{ k (C)}$, $S = 10 \text{ k}$, $M = 60 \text{ k-pies}$

Miembro CF. $Q = 14 \text{ k (T)}$, $S = 10 \text{ k}$, $M = 60 \text{ k-pies}$

Miembro DE. $Q = 6.25 \text{ k (C)}$, $S = 8.25 \text{ k}$, $M = 82.5 \text{ k-pies}$

Miembro HI. $Q = 11.25 \text{ k (C)}$, $S = 3 \text{ k}$, $M = 22.5 \text{ k-pies}$

12.13 Miembro AE. $Q = 7.33 \text{ k (T)}$, $S = 6.25 \text{ k}$, $M = 50 \text{ k-pies}$

Miembro CG. $Q = 9.67 \text{ k (C)}$, $S = 12.5 \text{ k}$, $M = 100 \text{ k-pies}$

Miembro EF. $Q = 12.5 \text{ k (C)}$, $S = 5.33 \text{ k}$, $M = 80 \text{ k-pies}$

Miembro JK. $Q = 7.5 \text{ k (C)}$, $S = 6 \text{ k}$, $M = 60 \text{ k-pies}$

12.15 Miembro AD. $Q = 12.5 \text{ k (T)}$, $S = 12.5 \text{ k}$, $M = 125 \text{ k-pies}$

Miembro BE. $Q = 0$, $S = 25 \text{ k}$, $M = 250 \text{ k-pies}$

Miembro EF. $Q = 12.5 \text{ k (C)}$, $S = 12.5 \text{ k}$, $M = 125 \text{ k-pies}$

12.17 Miembro AD. $Q = 16.67 \text{ k (C)}$, $S = 15 \text{ k}$, $M = 120 \text{ k-pies}$

Miembro CF. $Q = 16.67 \text{ k (T)}$, $S = 15 \text{ k}$, $M = 120 \text{ k-pies}$

Miembro DE. $Q = 10 \text{ k (C)}$, $S = 13.33 \text{ k}$, $M = 160 \text{ k-pies}$

Miembro HI. $Q = 15 \text{ k (C)}$, $S = 3.33 \text{ k}$, $M = 40 \text{ k-pies}$

12.19 Miembro AD. $Q = 12.66 \text{ k (C)}$, $S = 12.06 \text{ k}$, $M = 72.4 \text{ k-pies}$

Miembro CF. $Q = 11.51 \text{ k (T)}$, $S = 8.24 \text{ k}$, $M = 49.43 \text{ k-pies}$

Miembro DE. $Q = 7.55 \text{ k (C)}$, $S = 9.95 \text{ k}$, $M = 99.5 \text{ k-pies}$

Miembro HI. $Q = 12.1 \text{ k (C)}$, $S = 2.46 \text{ k}$, $M = 18.45 \text{ k-pies}$

12.21 Miembro AE . $Q = 9.18 \text{ k (T)}$, $S = 3.97 \text{ k}$, $M = 31.75 \text{ k-pies}$
 Miembro CG . $Q = 2.29 \text{ k (C)}$, $S = 14.78 \text{ k}$, $M = 118.25 \text{ k-pies}$
 Miembro EF . $Q = 17.65 \text{ k (C)}$, $S = 5.65 \text{ k}$, $M = 84.75 \text{ k-pies}$
 Miembro JK . $Q = 7.49 \text{ k (C)}$, $S = 1.41 \text{ k}$, $M = 14.1 \text{ k-pies}$

CAPÍTULO 13

13.1 y 13.5 $A_y = 99.26 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 233.3 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $D_y = 60.74 \text{ kN } \uparrow$

13.3 y 13.7 $A_y = 28.13 \text{ kN } \uparrow$, $C_y = 91.87 \text{ kN } \uparrow$, $M_C = 307.4 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$

13.9 y 13.30 $A_y = E_y = 15.625 \text{ k } \uparrow$, $C_y = 68.75 \text{ k } \uparrow$

13.11 y 13.32 $A_y = E_y = 15.63 \text{ k } \uparrow$, $C_y = 68.75 \text{ k } \uparrow$

13.13 $A_y = 108.75 \text{ kN } \uparrow$, $B_y = 357.5 \text{ kN } \uparrow$, $D_y = 83.75 \text{ kN } \uparrow$

13.15 y 13.58 $A_y = 13.125 \text{ kN } \downarrow$, $M_A = 91.875 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $B_y = 223.125 \text{ kN } \uparrow$

13.17 $A_y = (13 \text{ wL})/32 \uparrow$, $B_y = (17 \text{ wL})/16 \uparrow$, $C_y = (33 \text{ wL})/32 \uparrow$

13.19 $A_x = 200 \text{ kN}$, $A_y = 57.03 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 820.3 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $DY = 92.97 \text{ kN } \uparrow$

13.21 $A_x = 5.7 \text{ k } \rightarrow$, $A_y = 50.1 \text{ k } \uparrow$, $C_x = 9.3 \text{ k } \rightarrow$, $C_y = 24.9 \text{ k } \uparrow$

13.23 $A_x = 0$, $A_y = 8.23 \text{ kN } \downarrow$, $M_A = 675.8 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $B_y = 98.23 \text{ kN } \uparrow$

13.25 $A_x = 30 \text{ k}$, $A_y = 0$, $M_A = 160.8 \text{ k-pies } \curvearrowright$, $B_y = 2.14 \text{ k } \downarrow$, $D_y = 2.14 \text{ k } \uparrow$

13.27 $A_x = 10 \text{ k}$, $A_y = 11.7 \text{ k } \uparrow$, $C_y = 41.5 \text{ k } \uparrow$, $D_y = 6.8 \text{ k } \uparrow$

13.29 $A_x = 2.7 \text{ kN}$, $A_y = 20 \text{ kN } \downarrow$, $B_x = 57.3 \text{ kN}$, $B_y = 100 \text{ kN } \uparrow$

13.35 y 13.60 $F_{BC} = 119.8 \text{ kN (C)}$, $F_{AD} = 130.2 \text{ kN (T)}$, $F_{AC} = 162.5 \text{ kN (T)}$, $F_{BD} = 170.8 \text{ kN (C)}$

13.37 $A_y = 92.8 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 114.3 \text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$, $B_y = 228.6 \text{ kN } \uparrow$, $C_y = 78.6 \text{ kN } \uparrow$

13.39 $A_y = 29.1 \text{ kN } \uparrow$, $C_y = 138.7 \text{ kN } \uparrow$, $E_y = 171 \text{ kN } \uparrow$, $G_y = 51.2 \text{ kN } \uparrow$

13.41 $A_y = G_y = 23 \text{ k } \uparrow$, $B_y = F_y = 63 \text{ k } \uparrow$, $D_y = 48 \text{ k } \uparrow$

13.43 $A_x = 15 \text{ k } \rightarrow$, $A_y = 34.13 \text{ k } \uparrow$, $E_x = 10 \text{ k } \rightarrow$, $E_y = 30.87 \text{ k } \uparrow$, $M_E = 122.4 \text{ k-pies } \curvearrowright$

13.45 $A_x = 4.29 \text{ k}$, $A_y = 23.25 \text{ k } \uparrow$, $M_A = 107.9 \text{ k-pies } \curvearrowright$, $B_x = 15.71 \text{ k}$, $B_y = 36.75 \text{ k } \uparrow$, $M_B = 222.1 \text{ k-pies } \curvearrowright$

13.47 $A_x = 10.04 \text{ k } \rightarrow$, $A_y = 13.77 \text{ k } \uparrow$, $C_y = 6.23 \text{ k } \uparrow$, $D_x = 10.04 \text{ k}$, $F_{BD} = 12.16 \text{ k (T)}$

13.49 $A_y = 179.5 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 955.5 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $D_y = 19.5 \text{ kN } \downarrow$

13.51 $A_y = 39.94 \text{ k } \uparrow$, $B_y = 53.49 \text{ k } \uparrow$, $C_y = 26.57 \text{ k } \uparrow$

13.53 $A_y = 165.2 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 449.4 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$, $B_y = 125.8 \text{ kN } \uparrow$, $C_y = 109 \text{ kN } \uparrow$

13.55 $F_{BC} = F_{EF} = 37.34 \text{ kN (C)}$, $F_{BF} = F_{CE} = 46.67 \text{ kN (T)}$

13.57 $F_{AB} = 3.35 \text{ k (C)}$, $F_{AC} = F_{BC} = 9.46 \text{ k (T)}$, $F_{CD} = 13.38 \text{ k (T)}$

CAPÍTULO 14

14.1 y 14.2 A_y . 1 en A, 0.688 en B, 0 en C

M_A . 0 en A y C, 2.25 en B

C_y . 0 en A, 0.313 en B, 1 en C

S_B . 0 en A y C, -0.313 en B_L , 0.687 en B_R

M_B . 0 en A y C, 1.875 en B

14.3 C_y . 0 en A, 0.633 en B, 1 en C, 1.375 en D

S_B . 0 en A y C, -0.633 en B_L , 0.367 en B_R , -0.375 en D

M_B . 0 en A y C, 3.164 en B, -3.125 en D

14.5 A_y . 1 en A, 0 en B y D, -0.167 en C

B_y . 0 en A y D, 1 en B, 0.944 en C

D_y . 0 en A y B, 0.222 en C, 1 en D

S_C . 0 en A, B y D, -0.222 en C_L , 0.778 en C_R

M_C . 0 en A, B y D, 2.222 en C

14.7 A_y . 1 en A, 0.479 en B, 0 en C y D

C_y . 0 en A y D, 0.563 en B, 1 en C

D_y . 0 en A y C, -0.042 en B, 1 en D

F_{BC} . 0 en A, C y D, 0.359 en B

F_{CE} . 0 en A, C y D, -0.652 en B

F_{EF} . 0 en A, C y D, 0.032 en B

14.9 F_{BC} . 0 en C, 0.833 en D, 0.938 en E

F_{CD} . 0 en C, 0.667 en D, 1.917 en E

14.11 B_y . 1.643 en A, 1 en B, 0.393 en C, 0 en D y E, -0.054 en $x = 20 \text{ pies}$

D_y . -0.857 en A, 0 en B y E, 0.767 en C, 1 en D, 0.447 en $x = 20 \text{ pies}$

S_C . 0.643 en A, 0 en B, D, y E, -0.607 en C_L , 0.393 en C_R , -0.054 en $x = 20 \text{ pies}$

M_C . -1.79 en A, 0 en B, D, y E, 1.97 en C, -0.27 en $x = 20 \text{ pies}$

14.13 C_y , 0 en A y D, 0.582 en B, 1 en C

F_{BC} , 0 en A, C, y D, 0.11 en B

F_{CE} , 0 en A, C, y D, -0.252 en B

F_{EF} , 0 en A, C, y D, -0.203 en B

CAPÍTULOS 15 Y 16

15.1 y 16.1 $M_{AC} = 50.6$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CA} = 58.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CE} = 58.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{EC} = 26.9$ k-pies $\curvearrowright$

15.3 y 16.3 $M_{AB} = 100$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BA} = 200$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BE} = 200$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{EB} = 500$ kN · m $\curvearrowright$

15.5 y 16.5 $M_{AB} = M_{CB} = 0$, $M_{BA} = 495$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BC} = 495$ kN · m $\curvearrowright$

15.7 y 16.7 $M_{AB} = 334$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BA} = 84.9$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BC} = 84.9$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CB} = 0$

15.9 y 16.9 $M_{AB} = 103.5$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BA} = 113$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BC} = 113$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CB} = 85$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CE} = 85$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{EC} = 47.5$ kN · m $\curvearrowright$

15.11 y 16.11 $M_{BA} = 50$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BD} = 50$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DB} = 89.3$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DE} = 89.3$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{ED} = 55.4$ k-pies $\curvearrowright$

15.13 y 16.13 $M_{AB} = M_{ED} = 0$, $M_{BA} = M_{DC} = 57.9$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BC} = M_{DE} = 57.9$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CB} = 38.6$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CD} = 38.6$ kN · m $\curvearrowright$

15.15 y 16.15 $M_{AB} = 68.6$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BA} = 183$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BC} = 183$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CB} = 29$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CE} = 29$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{EC} = 170.2$ kN · m $\curvearrowright$

15.17 y 16.17 $M_{AC} = 9.4$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CA} = 187.5$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CD} = 187.5$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{DC} = 0$

15.19 y 16.19 $M_{AD} = M_{CD} = M_{ED} = 0$, $M_{DA} = 65$ k-pies², $M_{DC} = 102.5$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DE} = 37.5$ k-pies $\curvearrowright$

15.21 y 16.21 $M_{AC} = 58.6$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CA} = 286$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CD} = 286$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{DC} = 0$, $M_{CD} = 286$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{DC} = 0$

15.23 y 16.23 $M_{AC} = 0$, $M_{DE} = 100$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CA} = 69.6$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BC} = 301.5$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CB} = 37$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CD} = 32.1$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DC} = 100$ k-pies $\curvearrowright$

15.25 y 16.25 $M_{AC} = 107.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CA} = 20.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BD} = 222$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DB} = 249.2$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CD} = 20.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{DC} = 249.2$ k-pies $\curvearrowright$

15.27 y 16.27 $M_{AB} = 127$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BA} = 103.4$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{BC} = 103.4$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CB} = 0$

15.29 y 16.29 $M_{AC} = 11.7$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CA} = 43.9$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{CD} = 43.9$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{DC} = 14.7$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{DB} = 14.7$ kN · m $\curvearrowright$, $M_{BD} = 0$

15.31 y 16.31 $M_{AC} = M_{BD} = 119$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CA} = M_{DB} = 83.5$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CE} = M_{DF} = 23.3$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{EC} = M_{FD} = 44.2$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{CD} = M_{DC} = 106.8$ k-pies $\curvearrowright$, $M_{EF} = M_{FE} = 44.2$ k-pies $\curvearrowright$

CAPÍTULO 17

17.1 $Q_1 = 53.5$ k (T), $Q_2 = 48$ k (C)

17.3 $Q_1 = 102.8$ kN (T), $Q_2 = 28.6$ kN (C), $Q_3 = 145.4$ kN (C)

$$\mathbf{17.5} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 104.4 \text{ kN} \\ 394 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -104.4 \text{ kN} \\ 232 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} -45.6 \text{ kN} \\ -232 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 45.6 \text{ kN} \\ -178 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{17.7} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9.36 \text{ k} \\ 14.72 \text{ k} \\ 37.65 \text{ k-ft} \\ -9.36 \text{ k} \\ 15.29 \text{ k} \\ -41.92 \text{ k-ft} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 15.28 \text{ k} \\ 9.36 \text{ k} \\ 41.92 \text{ k-ft} \\ -15.28 \text{ k} \\ 10.64 \text{ k} \\ -54.65 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{17.9} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 23.26 \text{ k} \\ 4.3 \text{ k} \\ 108 \text{ k-ft} \\ -23.26 \text{ k} \\ -4.3 \text{ k} \\ 21 \text{ k-ft} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 15.7 \text{ k} \\ 23.26 \text{ k} \\ -21 \text{ k-ft} \\ -15.7 \text{ k} \\ 36.74 \text{ k} \\ -249 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 36.74 \text{ k} \\ 15.7 \text{ k} \\ 222 \text{ k-ft} \\ -36.74 \text{ k} \\ -15.7 \text{ k} \\ 249 \text{ k-ft} \end{bmatrix}$$

APÉNDICE B

$$\mathbf{B.1} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 18 & -11 & 18 \\ -11 & 19 & 28 \\ 18 & 28 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.3} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & -30 \\ 12 & -4 & 20 \\ -6 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = -32$$

$$\mathbf{B.5} \ (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -6 & -27 & 2 \\ -55 & -14 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.7} \ x_1 = -7, x_2 = 3, x_3 = -5$$

$$\mathbf{B.9} \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.22 & -0.04 \\ 0.08 & 0.28 & 0.04 \\ 0.44 & 0.04 & -0.28 \end{bmatrix}$$

APÉNDICE D

$$\mathbf{D.1} \ A_y = E_y = 15.63 \text{ k } \uparrow, C_y = 68.75 \text{ k } \uparrow$$

$$\mathbf{D.3} \ A_y = 108.75 \text{ kN } \uparrow, B_y = 357.5 \text{ kN } \uparrow, D_y = 83.75 \text{ kN } \uparrow$$

$$\mathbf{D.5} \ A_y = 28.5 \text{ k } \uparrow, M_A = 135 \text{ k-pies [flecha]}, B_y = 49.5 \text{ k } \uparrow$$

$$\mathbf{D.7} \ A_y = 23.6 \text{ k } \uparrow, B_y = 66.4 \text{ k } \uparrow, C_y = 56.4 \text{ k } \uparrow, E_y = 13.6 \text{ k } \uparrow$$

$$\mathbf{D.9} \ A_y = 39.94 \text{ k } \uparrow, B_y = 53.49 \text{ k } \uparrow, C_y = 26.57 \text{ k } \uparrow$$



Índice

A

- AASHTO - Especificaciones estándar para puentes de carreteras, 17, 32-34
- Aleros voladizos, 599-600, 666
- Álgebra matricial, 749-762
 - elementos, 749
 - inversión, 755-756, 761-762
 - método de eliminación de Gauss-Jordan para, 758-762
 - operaciones, 752-758
 - particionamiento, 757-758
 - soluciones de ecuaciones simultáneas por, 758-762
 - tamaño de las matrices, 749-750
 - tipos de matrices, 750-751
 - transposición, 756-757
- Análisis aproximado, 450-482
 - carga vertical, 454-458
 - cargas laterales, 458-479
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 450-482
 - fuerzas, distribución de, 453-456
 - grado de indeterminación (i), 451
 - marcos de edificios rectangulares, 450-482
 - método de umbral para, 458-473
 - método voladizo para, 473-479
 - procedimientos para el análisis por, 463-465, 474-475
 - puntos de inflexión para, 452-455
 - reacciones y, 451-454
 - redundantes, 451
 - supuestos para, 451-454
 - uso de, 450-451
- Análisis de cargas verticales, 454-458
 - análisis aproximado para, 454-458
 - fuerzas de viga y, 454-457
 - marcos de edificios rectangulares, 454-458
 - puntos de inflexión para, 454-455
- Análisis de la carga lateral, 458-479
 - eje centroidal para, 473
 - fuerzas de bisagra y, 459-461
 - fuerzas de columna y, 461-462
 - método del umbral para, 458-473
 - método voladizo para, 473-479
 - procedimientos para el análisis por, 463-465, 474-475
 - puntos de inflexión para, 459
- Análisis estructural, 3-16, 17-50, 53-96, 99-103, 329-407, 483-746. Ver también Estructuras estáticamente determinadas;
- Apoyos (soportes), 16, 56-68, 138-140, 248-249, 443-444, 537-542, 588-591, 594, 597, 775 a 788
 - balanceo, 57-58
 - bisagras, 16, 57-58, 248-249, 590-591
 - bola, 140
 - bola-y-cavidad, 138, 140
 - de equilibrio y, 56-67
 - deflexión y, 248-249
 - determinación estática y, 59-68
 - ecuación de tres momentos para, 775-788
 - ecuaciones de compatibilidad para, 537-539
 - enlace, 57, 140
 - entramados espaciales, 138-140
 - estabilidad interna y, 58-63
 - estructuras estáticamente determinadas, 138-140, 248-249
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 443-444, 537-542, 588-591
 - estructuras planas, 56-58
 - extremo de apoyo de la viga continua, 588-591
 - extremo libre, 248-249
 - fijos, 16, 57, 248-249, 588-590, 594, 781
 - finales, 588-591, 599
 - inestabilidad interna y, 63-67
 - internos simples, 248-249
 - método de deformaciones consistentes y, 537-542
 - método de pendiente-deflexión para, 588-591, 594, 597
 - reacciones y, 56-58, 139-140, 597
 - rodillo, 57-58, 140

tensión debida al asentamiento, 443-444
 uso estructural, 16, 56-67
 vigas conjugadas, 248-249
 vigas, 248-249, 588-591
 Apoyos balanceantes, 57-58
 Apoyos de rodillos, 16, 57-58, 140
 Arcos, estructura de, 9-10
 Área de formas geométricas, 747-748
 Áreas tributarias, 23-26
 ASCE - Diseño de cargas mínimas estándar para edificios y otras estructuras, 17-18, 34-40

C

Cambios de temperatura, 275-276, 444-445, 543-545
 deformación y, 275-276, 444-445, 543-545
 entramados y, 275-276
 método de deformaciones consistente y, 543-545
 tensión debida a, 444-445
 Carga de camiones, puentes, 32-33
 Carga de carriles, puentes, 32-33
 Cargado, 408-438
 antisimétrico, 416-419, 426-427
 componentes de, 414-424
 descomposición de, 418-424
 en general, 418-419, 427-428
 estructuras simétricas y, 408-438
 simétrico, 414-416, 418-419, 424-426
 Cargas (P), 6-12, 17-50, 56, 173-192, 247-249, 387-407, 454-479
 AASHTO - Especificaciones estándar para puentes de carreteras, 17, 32-34
 ambientales, 17, 34-47
 análisis aproximado para, 454-479
 aplicaciones de línea de influencia, 387-407
 ASCE - Diseño de cargas mínimas estándar para edificios y otras estructuras, 17-18, 34-40
 axial, 9
 camiones, 32-33
 carril (combinado), 32-33
 clasificación y estructura, 7-12
 Código Internacional de Construcción, 17
 combinaciones, 47
 concentradas, 175, 387-389, 393-399, 400-404
 deflexión y, 247-249
 efectos térmicos en, 46-47
 estimación para el diseño estructural, 6
 estructuras estáticamente determinadas, 173-192, 247-249, 387-407
 estructuras estáticamente indeterminadas, 454-479
 externas, 7-12
 factor de impacto (I), 34
 fuerzas aplicadas como, 56
 horizontal (lateral), 19, 22, 458-479
 laterales (horizontal), 19, 22, 458-479
 Manual de Ingeniería de Ferrocarriles, 17
 marcos (rectangulares), 12, 454-479
 método del umbral para, 458-473
 método voladizo para, 473-479
 muertas, 17, 29-31
 nieve, 42-44
 peso de material de construcción para 29
 presión del suelo, 46-47
 presión hidrostática, 46-47
 procedimiento para el análisis de, 176-178, 397-398, 463-465, 474-475
 puentes de ferrocarril, 33
 relaciones momento de fuerza de corte-flexión, 173-192, 247-249
 respuesta máxima absoluta, 400-405
 respuestas debido a, 387-407
 sísmicas, 45-46
 sistemas estructurales para, 18-29
 transmisión, 18-29
 uniformemente distribuidas, 389-393, 401-402
 verticales (gravidad), 19-21, 454-458
 viento, 34-42
 vigas, 173-192, 247-249
 vivas, 17, 31-34, 389-393, 401-402
 Cargas ambientales, 34-47
 ASCE - Diseño de cargas mínimas estándar para edificios y otras estructuras, 34-40
 clasificación de categoría de riesgo, 34-35
 coeficientes de presión externos (C_p) para, 38-40
 efectos térmicos en las estructuras, 46-47
 nieve, 42-44
 presión del suelo, 46-47
 presión hidrostática, 46-47
 terremotos, 45-46
 viento, 34-42
 Cargas antisimétricas, 416-419, 426-427
 Cargas axiales, estructura de clasificación y, 9
 Cargas concentradas, 175, 387-389, 393-399, 400-404
 aplicaciones de línea de influencia para, 387-389, 393-399, 400-404
 procedimientos para el análisis de, 397-398
 respuesta a las series de movimiento, 393-399, 402-404
 respuesta a un solo movimiento, 387-389, 400-401
 Cargas de nieve, 42-44
 factor de exposición (C_e) para, 42-43
 factor de importancia (I), 42
 factor de pendiente (C_s) para, 43
 factor térmico (C_t) para, 42-43
 techos inclinados (ps), 43
 techos planos (pf), 42
 Cargas de viento, 34-42
 categorías de exposición de edificios, 38
 clasificaciones de construcción para, 34-35
 coeficiente de exposición a presión por velocidad (K_z), 36
 coeficientes de presión externa (C_p) para, 38-40
 efectos de ráfagas (G) de, 38
 factor de direccionalidad del viento (K_d), 36
 factores topográficos (K_{zt}), 36

- presión dinámica (Q) y, 35-36
- velocidad del viento (V) y, 35-37
- Cargas externas, 7-12
- Cargas horizontales (laterales), 19, 22. Ver también Lateral análisis de la carga
- Cargas muertas, 17, 29-31
- Cargas simétricas, 414-416, 418-419, 424-426
- Cargas sísmicas, 45-46
- Cargas verticales (gravedad), 19-21
- Cargas vivas uniformemente distribuidas, 389-393, 401-402
 - aplicaciones de línea de influencia para, 389-393, 401-402
 - respuesta máxima absoluta a, 401-402
- Cargas vivas, 17, 31-34, 389-393, 401-402
 - aplicaciones de línea de influencia para, 389-393, 401-402
 - camiones, 32-33
 - edificios, 31-32
 - factor de impacto (I), 34
 - ferrocarriles, 32-33
 - mínimos de piso, 31-32
 - puentes, 31-33
 - respuesta máxima absoluta a, 401-402
 - respuestas debido a, 389-393, 401-402
 - uniformemente distribuidas, 389-393, 401-402
- Categorías de riesgo, clasificación edificio, 34-35
- Centroides de formas geométricas, 747-748
- Clasificación de estructuras, 7-12
 - cargas axiales y, 9
 - cargas externas y, 7-12
 - de compresión, 9-10
 - entramadas, 10
 - flexión, 11-12
 - fuerzas de corte, 10-11
 - tensión, 7-9
- Código Internacional de Construcción, 17
- Coefficiente de exposición a presión y velocidad (K_z), 36
- Coefficiente de flexibilidad (f), 318, 486-487, 504-507, 516-518
 - ley de Maxwell de la deflexión recíproca para, 318, 518
 - múltiples grados de indeterminación y, 516-518
 - pendiente de la curva elástica (θ) y, 504-507
 - redundantes y, 486-487, 516-518
 - un solo grado de indeterminación y, 486-487
- Coefficientes de presión externa (C_p), 38-40
- Conexiones de fuerza de corte, 196-197
- Conexiones flexibles, 14
- Conexiones resistentes a momentos, 193
- Conexiones rígidas, 14-15
- Conexiones semirrígidas, 14
- Conexiones, 14-15, 103-105, 107, 138-139, 192-197. Ver también Articulaciones
 - arreglos entramados, 103-105, 138-139
 - atornillado, 193
 - ecuaciones de estado para, 107
 - elemento tetraédrico, 138-139
 - elemento triangular (básico), 103-104
 - fuerza de corte, 196-197
 - marcos, 192-197
 - momento-resistencia, 193
 - uso estructural, 14-15
- Correas, 97
- Cubiertas inclinadas (ps), 43
- Cuerpos deformables, fuerzas virtuales para, 272-274
- Curva elástica, 172-173, 225-226, 231-232, 504-507
 - análisis geométrico usando, 172-173
 - coeficiente de flexibilidad (f) y, 504-507
 - deflexión (Δ) y, 172-173, 225-226
 - método de área-momento utilizando, 231-232
 - método de deformación coherente utilizando, 504-507
 - pendiente (θ), 225-226, 231-232, 504-507
- D**
- Deformación (δ), 275-276, 444-449, 543-545
 - axial, 275-276
 - cambios de temperatura y, 275-276, 444-445, 543-545
 - errores de fabricación y, 275-276, 444-445, 543-545
 - relaciones de fuerza con, 445-449
- Deformación axial (δ), 275-276
- Deformaciones consistentes, método de, 483-581
 - asentamientos de apoyo y, 537-542
 - cambios de temperatura y, 543-545
 - coeficiente de flexibilidad para, 486-487, 504-507, 516-518
 - ecuaciones de compatibilidad para, 516-518
 - entramados, 507-510
 - errores de fabricación y, 543-545
 - estructura primaria, 483 a 504
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 483-581
 - estructuras internas indeterminadas, 507-510
 - fuerzas internas y, 488-490, 504-515
 - método de trabajo mínimo para, 483-484, 545-551
 - momentos de flexión (M) y, 488-490, 504-515
 - múltiples grados de indeterminación y, 515-536
 - pendiente de la curva elástica (θ) y, 504-507
 - procedimientos para el análisis utilizando, 490-491, 518-519
 - redundantes para, 483-490, 504-536
 - Segundo teorema de Castigliano para, 545-546
 - un solo grado de indeterminación y, 484-515
 - viga primaria, 484-490
 - vigas, 484-515
- Descomposición de carga, 418-424
- Desplazamiento lateral, 617-643, 678-696
 - desplazamiento articular y, 617-619, 625-627
 - grados de libertad, 617-618
 - marcos con, 625-643, 681-696
 - marcos de varios pisos y, 631, 695-696
 - marcos sin, 617-624, 678-680
 - método de momento-distribución y, 678-696
 - método de pendiente-deflexión y, 617-643
 - patas inclinadas y, 627-631
- Desplazamientos de cuerpo rígido, 271-272

Desviación (Δ), 172-173, 224-267, 268-328, 377-379, 543-545
 cambio de temperatura y, 275-276, 543-545
 coeficientes de flexibilidad, 318
 curva elástica para, 172-173, 225-226
 diagramas de momento de flexión y, 172-173, 243-247
 ecuación diferencial para, 225-227
 elástica, 224
 energía de deformación (U) y, 306-309
 entramados, 274-283, 307, 311
 error de fabricación y, 275-276, 543-545
 formas cualitativas desviadas, 172-173
 ley de Betti de reciprocidad, 317-319
 ley de Maxwell de reciprocidad, 317-319, 377-378
 líneas de influencia para, 377-379
 marcos, 295-306, 308-309, 312
 método de área-momento para, 231-243
 método de deformación constante y, 543-545
 método de integración directa, 227-230
 método de la viga conjugada para, 247-261
 método de superposición de, 231
 método de trabajo virtual para, 270-306
 métodos de trabajo de energía para, 268-328
 métodos geométricos para, 224-267
 plástico (inelástico), 224
 procedimientos para el análisis de, 233-234, 251, 276, 285, 288, 312-313
 rigidez a la flexión (IE), 227
 segundo teorema de Castigliano para, 309-317
 vigas, 172-173, 224-267, 283-295, 307-308, 311-312, 318-319

Desviación tangencial, 233-234

Determinación / indeterminación estática, ver Determinación

Determinación, 59-68, 107-113, 140-141, 192-199, 451, 593
 cinemáticamente indeterminada, 593
 entramados espaciales, 140-141
 entramados planos, 107-113
 entramados, 107-113, 140-141
 estabilidad de la estructura, 59-68
 estabilidad externa y, 59-68
 estructuras internamente estables, 59-63
 estructuras internamente inestables, 63-67
 grado de indeterminación estático (i), 110, 195-196, 451
 grado de indeterminación externo, 61
 grado de libertad, 593
 marcos, 192-199, 451

Diagramas de cuerpo libre (FBD), 69, 113-117

Diagramas de fuerza de corte, 168-171, 176-178, 592, 598
 ecuaciones para, 169, 171
 método de la pendiente-deflexión y, 592, 598
 procedimientos para la construcción de, 176-178
 vigas, 168-171, 176-178

Diagramas de fuerza-desplazamiento, 269-270

Diagramas de líneas, representación del modelo analítico, 13-14

diagramas de momento de flexión, 168-192, 243-247, 286-287, 592, 598
 cargas y, 173-192
 curva elástica, 172-173
 flexión de vigas y, 172-173, 243-247
 formas deflectivas cualitativas y, 172-173
 integrales para, 286-287
 método de partes, 243-247
 método de pendiente-deflexión y, 592, 598
 método de vigas en voladizo, 244-246
 procedimientos para la construcción de, 176-178
 rompimiento (S) y, 168-171, 173-192

E

Ecuación de tres momentos, 775-788
 aplicación de, 780-787
 continuidad de pendiente (θ) y, 775-779
 derivación de, 775-780
 momentos de flexión (M) y, 779-780
 soportes fijos, 781

Ecuación diferencial para la desviación de la viga, 225-227

Ecuaciones de condición de compatibilidad, 441-442, 445-447, 516-518, 537-539, 724-725
 asentamiento de apoyos y, 537-539
 equilibrio y, 446-449
 matriz de análisis estructural, 724-725
 método de deformaciones consistente y, 516-517, 537-539
 múltiples grados de indeterminación, 516-518
 relaciones de la rigidez de la estructura y, 724-725
 relaciones fuerza-deformación y, 445-447

Edificios, 7-12, 19-29, 31-32, 34-47, 450-482
 análisis aproximado de, 450-482
 análisis de carga lateral, 458-479
 análisis de la carga vertical, 454-458
 áreas tributarias, 23-26
 cargas ambientales, 34-47
 cargas de nieve, 42-44
 cargas de viento, 34-42
 cargas sísmicas, 45-46
 cargas vivas en, 31-32
 categorías de exposición, 38
 clasificación de categorías de riesgo, 34-35
 coeficientes externos de presión (C_p) para, 38-40
 efectos térmicos en, 46-47
 estructuras de fuerza de corte en, 10-11
 factor de impacto (I), 34
 flexión en estructuras, 11-12
 marcos, 450-482
 método de umbral para, 458-473
 método voladizo para, 473-479
 peso del material de construcción, 29
 presión del suelo y, 46-47
 presión hidrostática y, 46-47
 procedimientos para el análisis de, 463-465, 474-475
 sistemas de estructura de una sola planta, 19-22
 sistemas de estructuras de varios pisos, 19, 22-26

- sistemas de transmisión de carga de, 18-29
- tensión de estructuras en, 7-9
- Efectos térmicos sobre las estructuras, 46-47, 444-445
- Eje de simetría (s), 410-412
- Elemento de entramados tetraédrico, 138-139
- Elemento triangular de entramado (básico), 103
- Energía de esfuerzo (U), 306-311
 - conservación de la energía y, 306-307
 - deflexión y, 306-311
 - entramados, 307
 - marcos, 308-309
 - segundo teorema de Castigliano y, 309-311
 - vigas, 307-308
- Energía, conservación de, 306-307. Ver también Esfuerzo
- Entramado de Baltimore, 100
- Entramado de Fink, 101
- Entramado de Howe, 100-101
- Entramado de Parker, 100
- Entramado de postes tipo rey, 101
- Entramado de Pratt, 100-101
- Entramado de Warren, 100-101
- Entramado ideal, 99-101
- Entramado K, 100
- Entramados complejos, 137-138
- Entramados compuestos, 98, 104-105, 132-137
 - análisis de, 132-137
 - disposiciones de conexión, 104-105
- Entramados planos, 97-138
 - articulaciones, método, 113-126
 - complejo, 137-138
 - compuesto, 98, 104-105, 132-137
 - configuraciones de, 98-99
 - determinación estática de, 107-113
 - disposiciones de conexión, 104-105
 - ecuaciones de estado para, 107-108
 - elemento triangular (básico), 103-104
 - equilibrio de, 109-110
 - estabilidad interna de, 105-107
 - forma crítica de, 111
 - grado de indeterminación (i), 110
 - miembros de fuerza cero, 117-119
 - reacciones, 110-111, 113-114
 - secciones, método de, 126-132
 - sencillo, 98, 103
 - supuestos para el análisis, 99-103
 - uso de, 97
- Entramados simples, 98, 103-104, 138-139
 - conexiones (articulaciones) para, 103-104, 138-139
 - espaciales, 138-139
 - planos, 103-104
- Entramados, 10, 97-160, 274-283, 307, 311, 366-377, 507-510, 560-575, 713-714, 718-719, 720-721
 - articulaciones, método de, 113-126, 142-143
 - cambios de temperatura y, 275-276
 - complejo, 137-138
 - compuesto, 98, 104-105, 132-137
 - deflexión, 274-283, 307, 311
 - determinación de, 107-113, 140-141
 - elemento básico (triangular), 103
 - elemento para el tetraedro, 138-139
 - energía de deformación (U), 307
 - equilibrio y, 107-110
 - errores de fabricación y, 275-276
 - espaciales, 97, 138-147
 - estabilidad externa, 103
 - estabilidad interna, 105-107, 141
 - estáticamente determinados, 97-160, 274-283, 307, 311, 366-377
 - estáticamente indeterminados, 507-510, 560-575
 - estructura de, 10, 97-99
 - fuerza en los elementos, 367-371
 - fuerzas axiales en, 99, 101-103
 - fuerzas primarias en, 101
 - fuerzas secundarias en, 102-103
 - ideal, 99-101
 - líneas de influencia para, 366-377, 560-575
 - matriz de análisis estructural, 713-714, 718-719, 720-721
 - método consistente para deformaciones, 507-510
 - método de trabajo virtual para, 274-283
 - métodos de trabajo-energía para, 274-283, 307, 311
 - miembros de fuerza cero, 117-119, 142-143
 - planos, 97-138
 - procedimientos para el análisis de, 119-120, 127-128, 276, 371-372, 562-563
 - puentes, 100, 366-377
 - reacciones, 110-111, 113-114, 139-140, 367-369
 - relaciones de rigidez en los miembros, 713-714, 720-721
 - secciones, método de, 126-132, 143
 - segundo teorema de Castigliano para, 311
 - sencillos, 98-104, 138-139
 - sistema de coordenadas global, 720-721
 - sistema de coordenadas local, 713-714
 - sistemas de piso con, 366-377
 - supuestos para el análisis, 99-103
 - tejados, 99, 101
 - transformaciones de coordenadas, 718-719
- Equilibrio, 53-96, 107-110, 445-449, 452-454, 593, 597, 721
 - análisis aproximado y, 452-454
 - cálculo de reacciones para, 69-85
 - determinación estática, 59-68
 - diagramas de cuerpo libre (FBD) para, 69
 - ecuaciones de compatibilidad y, 446-449
 - ecuaciones de condición, 63-65, 107-108
 - ecuaciones de, 54-55, 445-447, 452, 593, 597, 721
 - entramados, 107-110
 - estructuras de fuerza de dos y de tres, 55-56
 - estructuras en, 53-56
 - estructuras espaciales, 54
 - estructuras estáticamente determinadas, 53-96
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 445-449, 593, 597

- estructuras internamente estables (rígidas), 58-63
- estructuras internamente inestables (no rígidas), 63-67
- estructuras planas, 54-55, 56-58
- fuerza y, 53-56
- fuerzas externas y, 56
- fuerzas internas y, 56
- matriz de análisis estructural, 721
- método de pendiente-deflexión y, 593, 597
- reacciones de apoyo y, 56-58
- reacciones de estructuras simplemente apoyadas y, 86-89
- reacciones y, 53-96
- relaciones de rigidez en las estructuras, 721
- relaciones de fuerza-deformación, 445-449
- sistemas de fuerzas concurrentes y, 55
- superposición, principio de en, 85-86
- Errores de fabricación, 275-276, 444-445, 543-545
 - deformación y, 275-276, 444-445, 543-545
 - entramados y, 275-276
 - método de deformaciones consistente y, 543-545
 - tensiones debido a, 444-445
- Esfuerzo de flexión, 442
- Estabilidad de la estructura externa, 59-68, 103
- Estabilidad estructural, 58-68, 105-113, 192-199
 - determinación y, 59-68, 107-113, 192-199
 - ecuaciones de estado para, 63-68
 - entramados, 105-113
 - externo, 59-68
 - inestabilidad interna y, 63-67
 - interna, 58-63, 105-107
 - pórticos planos, 192-199
- Estabilidad interna, 58-63, 105-107
- Estabilidad, ver Equilibrio; Estabilidad interna; Estabilidad estructural
- Estructura enmarcada, 12
- Estructura primaria, 483. Ver también Deformaciones consistentes
- Estructuras de compresión, 9-10
- Estructuras de flexión, 11-12
- Estructuras de fuerza de corte, 10-11
- Estructuras de fuerza-equilibrio de dos y de tres, 55-56
- Estructuras elásticas lineales, 85-86
- Estructuras espaciales, 13, 54, 97, 99-103, 138-147
 - articulaciones, método, 141-143
 - determinación de, 140-141
 - elemento para el tetraedro, 138-139
 - entramados, 99-103, 138-147
 - equilibrio, ecuaciones de, 54
 - estabilidad de, 141
 - estructura, 54
 - miembros de fuerza cero, 142-143
 - reacciones, 139-140
 - secciones, método de, 143
 - soportes para, 138-140
 - supuestos para el análisis, 99-103
- Estructuras estáticamente determinadas, 51-438, 442-445
 - deflexión (Δ), 172-173, 224-267, 268-328, 377-379
 - determinación de, 59-68, 107-113
 - ecuaciones de condiciones para, 63-68, 107
 - efectos de carga en, 387-438
 - elasticidad lineal, 85-86
 - entramados, 97-160, 274-283, 307, 311, 366 a 377
 - equilibrio de, 53-96, 109-110
 - estabilidad externa de, 50-58
 - estabilidad interna de, 58-63
 - estructuras indeterminadas en comparación con, 442-445
 - fuerza de corte (S), 161-223
 - fuerzas externas y, 56
 - fuerzas internas y, 56
 - geoméricamente inestables (externamente), 61-63
 - inestabilidad interna de, 63-67
 - líneas de influencia, 329-407
 - marcos, 192-213, 295-306, 308-309, 312, 330-344
 - métodos de trabajo-energía para, 268-328
 - métodos geométricos para, 224-267
 - momentos de flexión (M), 161-223
 - principio de superposición, 85-86
 - reacciones de apoyo, 56-67
 - respuesta a las cargas, 387-438
 - simétricas, 408-438
 - simplemente apoyadas, 86-88
 - sistemas de piso, 356-377
 - trabes, 356-366
 - vigas, 161-222, 224-267, 283-295, 307-308, 311-313, 317-319, 330-344
- Estructuras estáticamente indeterminadas, 59-68, 439-746
 - análisis aproximado para, 450-482
 - análisis de, 445-449
 - apoyos y, 16
 - cálculos para reacciones, 69-85
 - características de rendimiento de, 3
 - cargas, 7-10, 17-50
 - clasificación de las estructuras, 7-12
 - coeficiente flexibilidad para, 486-487
 - condiciones de compatibilidad para, 441-442, 445-447, 516-518, 537-539
 - conexiones y, 14-15
 - controles de seguridad y capacidad de servicio, 6-7
 - deformaciones consecuentes, método de, 483-558
 - desplazamiento lateral, 625-643
 - desventajas de, 443-445
 - determinación de, 59-68
 - determinación estática, 58-85
 - diagramas de cuerpo libre (FBD) a favor, 69
 - diagramas de línea para, 13-14
 - diseño estructural y, 6, 7
 - entramados, 10, 99-103, 366-377
 - entramados, 507-510, 560-575, 713-714, 720-721
 - equilibrio de, 445-449
 - equilibrio, 53-96
 - estabilidad interna y, 59-68
 - estabilidad interna, 58-68
 - estimación de cargas para, 6

- estructuras de fuerzas de corte, 10-111
 - estructuras de compresión, 9-10
 - estructuras de edificios, 450-482
 - estructuras de flexión, 11-12
 - estructuras determinadas en comparación con, 442-445
 - estructuras tensas, 7-9
 - fase de planificación, 5-6
 - fuerza (flexibilidad) métodos para, 449, 483-558
 - historia de, 3-5
 - indeterminación interna, 507-510
 - líneas de influencia para, 329-407, 559-582
 - marcos, 330-344
 - marcos, 450-482, 575-579, 617-643, 678-696, 707-712, 720
 - matriz de análisis estructural de, 702-746
 - método de momento-distribución para, 648-701
 - método de pendiente-deflexión para, 583-647
 - método de trabajo mínimo, 483-484, 545-551
 - métodos de desplazamiento (rigidez), 449, 583-746
 - modelo de espacio estructural, 13
 - modelos de análisis para, 12-16
 - múltiples grados de indeterminación, 515-536
 - planeación de modelo estructural, 13
 - principio de superposición, 85-86
 - procedimientos para el análisis de, 463-465, 474-475, 490-491, 518-519, 562-563, 598-599, 728-730
 - proyectos de ingeniería en función de, 5-7
 - puntos de inflexión para, 452-455, 459
 - reacciones, 56-88
 - redundantes, 61, 443, 451, 483-490, 504-536
 - relaciones de fuerza-deformación, 445-449
 - rigidez de, 443
 - superposición, principio de para, 85-86
 - tensión en, 442-445
 - trabes, 330-356, 484-515, 560-575
 - un solo grado de indeterminación, 484-515
 - ventajas de, 442-443
 - vigas, 484-515, 560-575, 584-616, 665-678, 713, 720
 - Estructuras geoméricamente inestables (externamente), 61-63
 - Estructuras internamente indeterminadas, 507-510. Ver también Entramados
 - Estructuras no rígidas (internamente inestables), 63-67
 - Estructuras planas, 13, 54-55, 56-67, 192-213
 - determinación estática, 59-68
 - ecuaciones de equilibrio de, 54-55
 - geoméricamente inestables externamente, 61-62
 - internamente estables (rígida), 58-63
 - internamente inestables (no rígida), 63-67
 - marcos, 192-213
 - soportes para, 56-58
 - Estructuras rígidas (internamente estables), 59
 - Estructuras simétricas, 408-438
 - cargas antisimétricas, 416-419, 426-427
 - cargas generales, 418-419, 427-428
 - cargas simétricas, 414-416, 418-419, 424-426
 - comportamiento de cargas bajo, 424-428
 - descomposición de la carga, 418-424
 - determinación de, 410-414
 - eje de simetría (s) para, 410-412
 - ejemplos de, 410-412
 - flexión y, 408-410
 - procedimiento para el análisis de, 428-429
 - Estructuras simplemente apoyadas, reacciones de, 86-88
 - Estructuras tensadas, 7-9
 - Estructuras, ver Puentes; Edificios; Entramados
 - Factor de direccionalidad del viento (Kd), 36
- F**
- Factor de distribución (DF), 653-656, 658
 - articulaciones, determinación de en, 658
 - método momento-distribución y, 653-656, 658
 - rigidez de miembro (K), 653-656
 - Factor de efectos de ráfagas (G), 38
 - Factor de exposición (Ce) para, 42-43
 - Factor de impacto (I), 34
 - Factor de importancia (I), 42, 46
 - Factor de pendiente (Cs), 43
 - Factor de remanentes (COF), 664
 - Factor térmico (Ct), 42-43
 - Factor topográfico (Kzt), 36
 - Formas geométricas, 747-748
 - Fuerza axial (Q), 99, 101-103, 161-167, 454-456
 - análisis aproximado y, 454-456
 - convención de signos para, 163-164
 - entramados, 99, 101-103
 - momentos de quebrado y de flexión, y, 161-167
 - primaria, 101
 - procedimiento para el análisis de, 164-165
 - secundaria, 102-103
 - trabes, 454-456
 - vigas, 161-167
 - Fuerza final, trabes, 454-457
 - Fuerzas aplicadas, 56. Ver también Cargas
 - Fuerzas de corte (S), 161-171, 161-223, 247-249, 332-333, 357, 359-360, 596-597
 - cargas concentradas (P) y, 175
 - convención de signos, 163-164
 - deflexión y, 247-249
 - estructuras enmarcadas, 192-213
 - fuerza axial (Q) y, 161-167
 - líneas de influencia para, 332-333, 357, 359-360
 - marcos, 332-333
 - método de equilibrio para, 332-333
 - método de pendiente-deflexión y, 596-597
 - miembros extremos, 596-597
 - momentos de flexión (M) y, 161-171
 - procedimientos para el análisis de, 164-165, 176-178
 - relaciones de momentos de flexión por cargas, 173-192, 247-249
 - sistemas de pisos, 357, 359-360
 - vigas, 161-223, 247-249, 332-333

Fuerzas externas, 56, 271-274
 Fuerzas finales de miembros, marcos, 194-195
 Fuerzas internas, 56, 161-167, 272-274, 284-285, 295-296, 488-490, 504-515
 cuerpos deformables y, 272-274
 entramados, 284-285
 estructuras indeterminadas individuales, 488-490, 504-515
 fuerza axial (Q) como, 161-167
 fuerza de corte (S) como, 161-167
 fuerzas externas y, 272-274
 marcos, 295-296
 método de deformación coherente utilizando, 488-490, 504-515
 procedimiento para el análisis de, 164-165
 reacciones estructurales a, 56
 redundantes, 488-490, 504-515
 trabajo virtual (W_{vi}), 272-274, 284-285, 295-296
 vigas, 488-490, 504-515
 Fuerzas primarias, 101
 Fuerzas secundarias, 102-103
 Fuerzas, 53-56, 99, 101-103, 161-167, 268-274, 367-371, 445-449, 453-456. Ver también Cargas
 análisis aproximado y, 453-456
 aplicada, 56
 axial (Q), 99, 101-103, 161-167
 condiciones de compatibilidad para, 445-447
 cuerpos deformables y, 272-274
 de corte (S), 161-167
 de equilibrio y, 53-56, 445-449
 deflexión de vigas y, 161-167
 desplazamiento de los cuerpos rígidos, 271-272
 distribución entre los miembros del marco, 453-456
 entramados, 99, 101-103, 367-371
 estructura estáticamente indeterminada, 445-449
 estructuras de fuerza de dos y de tres, 55-56
 estructuras estáticamente determinadas, 161-167, 268-274, 367-371
 externa, 56, 271-274
 interna, 56, 161-167, 272-274, 472-473
 líneas de influencia para, 367-371
 momento de flexión (M) y, 161-167
 primaria, 101
 reacciones, 56
 relaciones de deformación, 445-449
 secundaria, 102-103
 sistemas concurrentes, 55
 trabajo (W) por, 268-270
 trabajo virtual, principio de, 270-274
 Funciones de respuesta, 330, 387-407
 aplicaciones de línea de influencia para, 330, 387-407
 cargas concentradas, 387-389, 393-399, 400-404
 cargas uniformemente distribuidas, 389-393, 401-402
 cargas vivas, 389-393, 401-402
 máximo absoluto, 400-405
 procedimiento para el análisis de, 396-397

G

Grado individual de indeterminación, 484-515.
 Ver también Vigas
 Grados de libertad, 593, 617-618, 705-706
 Gravedad, 19-21. Ver también Análisis de carga vertical

I

Indeterminación (i), grado de, 61, 110, 195-196, 451
 Indeterminación estática (i), grado de, 110, 195-196
 Indeterminación externa, el grado de, 61
 Inestabilidad interna, 63-67
 Ingeniería: fases de proyectos, 5-7,
 Integrales, 285-288
 diagramas de momento utilizando, 286-287
 evaluación gráfica de, 288
 trabajo virtual y, 285-288
 Inversión de matrices, 755-756, 761-762

L

Largueros, 13, 357-358
 Ley de Betti de deflexiones recíprocas, 317-319
 Ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas, 317-319, 377-378, 560-562
 coeficiente de flexibilidad (f) para, 318
 estructuras estáticamente determinadas, 317-319, 377-378
 estructuras estáticamente indeterminadas, 560-562
 líneas de influencia diseñadas utilizando, 377-378, 560-562
 métodos de trabajo-energía que utilizan, 317-319
 Líneas de influencia cualitativas, 349
 Líneas de influencia, 329-407, 559-582
 aplicación de cargas uniformemente distribuidas, 389-393, 401-402
 aplicaciones de carga viva, 389-393, 401-402
 aplicaciones de cargas concentradas, 387-389, 393-399, 400-404
 aplicaciones de respuestas máximas absolutas, 400-405
 aplicaciones de, 387-407
 cualitativa, 349, 575-579
 deflexiones, 377-379
 entramados, 366-377, 560-575
 estructuras estáticamente determinadas, 329-407
 estructuras estáticamente indeterminadas, 559-582
 fuerza de corte (S), 332-333, 357, 359-360
 funciones de respuesta, 330, 387-407
 ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas para, 377-378, 560-562
 marcos, 330-344, 575-579
 método de equilibrio para, 330-344
 miembros de fuerza, 367-371
 momentos de flexión (M), 333-334, 360-361
 múltiples grados de indeterminación y, 561-562
 principio de Müller-Breslau para, 344-356, 561, 575-579
 procedimientos para el análisis de, 334-336, 349-350, 361-362, 371-372, 397-398, 562-563

reacciones, 330-332, 357, 359, 367-369
 sistemas de piso, 356-377
 trabes, 356-366
 uso de en el análisis, 329-330
 vigas, 330-344, 560-575

Losas, 11-12, 25-26

M

Manual de Construcción con Acero, 231
 Manual de Ingeniería de Ferrocarriles, 17
 Marcos apuntalados, 19-22
 Marcos de varios pisos, 631, 695-696
 Marcos rígidos, estructura de la flexión de 11 a 12,
 Marcos, 11-12, 19-22, 192-213, 295-306, 308-309, 312, 330-344, 450-482, 575-579, 584-591, 617-643, 678-696, 707-712, 714-718, 720
 análisis aproximado de, 450-482
 análisis de carga lateral, 458-479
 análisis de carga vertical, 454-458
 análisis de, 200-213, 617-643, 678-696
 apuntalados, 19-22
 conexiones, 192-197
 de varios pisos, 631, 695-696
 deflexión (Δ), 295-306, 308-309, 312
 desplazamiento de articulaciones, 617-619, 627-631
 desplazamiento en las articulaciones, 590-595, 617-619, 627-631
 desplazamiento lateral, análisis de con, 625-643, 681-696
 desplazamiento lateral, análisis de desde, 617-624, 680-687
 determinación de, 192-199
 distribución de la fuerza de entre sus miembros, 453-456
 ecuaciones de estado, 196-197
 edificios (rectangulares), 450-482
 eje centroidal de, 473
 energía de deformación (U) para, 308-309
 estáticamente determinados, 192-213, 295-306, 308-309, 312, 330-344
 estáticamente indeterminados, 450-482, 575-579, 584-591, 617-643, 678-696, 707-712, 714-718, 720
 estructura de flexión, 11-12
 fuerza de corte (S), 192-213, 332-333
 fuerzas de miembros extremos, 194-195
 fuerzas de trabes y, 454-457
 grados de libertad, 617-618
 indeterminación (i), el grado de, 195-196, 451
 líneas de influencia para, 330-344, 575-579
 matriz de análisis estructural, 707-712, 714-718, 720
 método de equilibrio para, 330-344
 método de momento-distribución para, 678-696
 método de pendiente-deflexión para, 617-643
 método de trabajo virtual para, 295-306
 método del umbral para, 458-473
 método voladizo para, 473-479
 métodos de trabajo-energía para, 295-306, 308-309, 312

miembros de fuerzas de corte, 596-597
 momentos de final fijo (FEM), 588-590, 594
 momentos de flexión (M), 192-213, 333-334, 584-588
 momentos de miembros extremos, 587-588, 626-627
 patas inclinadas y, 627-631
 procedimientos para el análisis de, 200-202, 296-297, 334-336, 463-465, 474-475
 puntos de inflexión para, 452-455, 459
 reacciones, 330-332, 451-454
 relaciones de rigidez entre sus miembros, 707-712, 720
 rígidos, 11-12, 192
 rotaciones (θ) y, 584-588
 segundo teorema de Castigliano para, 312
 sistema de coordenadas global, 720
 sistema de coordenadas local, 707-712
 trabajo interno (Wvi), 295-296
 transformaciones de coordenadas, 714-718
 Matrices de rigidez, 707-714, 719-728
 cargas conjuntas (P), 721-723, 725-728
 estructura (S), 707, 725-728
 matriz de análisis estructural utilizando, 707-714, 719-728
 matriz de transformación (T), 714-719
 miembro global (K), 719-720
 miembro local (k), 707-714
 miembros de fuerzas finales (F), 721-723

Matriz columna, 750

Matriz cuadrada, 750

Matriz de análisis estructural, 702-746
 código de números de los miembros, 726-728
 ecuaciones de compatibilidad para, 724-725
 ecuaciones de equilibrio para, 721
 elementos de viga continua, 713, 718, 720
 entramados, 713-714, 718-719, 720-721
 grados de libertad, 705-706
 marcos, 707-712, 714-718, 720
 matriz de carga conjunta (P), 721-723, 725-728
 matriz de rigidez de miembro (K) global, 719-721
 matriz de rigidez de miembro (k), local, 707-714
 matriz de rigidez estructural (S), 707, 721-728
 matriz de transformación (T), 714-719
 matriz extrema de miembros de fuerza (F), 721-723
 modelo de análisis para, 703-706
 procedimiento para el análisis utilizando, 728-730
 relaciones de rigidez (k), 707-714, 719-728
 sistema de coordenadas global, 703-705, 719-721
 sistema de coordenadas local, 703-705, 707-714
 transformaciones de coordenadas, 714-719
 uso de, 702-703
 Matriz de carga conjunta (P), 721-723, 725-728
 Matriz de identidad, 751
 Matriz de rigidez estructural (S), 707, 721-728
 Matriz de transformación (T), 714-719
 Matriz de unitaria, 751
 Matriz diagonal, 751
 Matriz extrema de miembros de fuerza (F), 721-723
 Matriz fila, 750

- Matriz nula, 751
- Matriz simétrica, 751
- Método de área-momento, 231-243
 - desviación de vigas por, 231-243
 - desviación tangencial y, 233-234
 - primer teorema de, 231-233
 - procedimiento para el análisis, 233-234
 - segundo teorema de, 233
- Método de eliminación de Gauss-Jordan, 758-762
- Método de equilibrio, 330-344
 - fuerza de corte (S), 332-333
 - líneas de influencia por, 330-344
 - marcos, 330-344
 - momentos de flexión (M), 334-335
 - procedimiento para el análisis utilizando, 334-336
 - reacciones, 330-332
 - vigas, 330-344
- Método de integración directa de desviación de la viga, 227-230
- Método de la viga conjugada, 247-261
 - convención de signos, 249-251
 - desviación de viga por, 247-261
 - procedimiento para el análisis utilizando, 251
 - relaciones entre momentos de carga-corte-flexión, 247-249
 - relaciones pendiente-deflexión, 247-249
 - soportes para, 248-249
- Método de momento-distribución, 648-701
 - aplicación de, 663-664
 - articulaciones, el equilibrio, 661-663
 - concepto de, 657-664
 - convención de signos para, 649
 - desplazamiento lateral y, 678-696
 - factor de distribución (DF), 653-656, 658
 - factor de remanentes (COF), 664
 - marcos, 678-696
 - momentos de empotramiento (FEM), 656-657, 659-661
 - momentos remanentes, 651-657
 - procedimiento para el análisis de, 665
 - rigidez (K), 649-651, 652-657
 - uso de, 648-649
 - vigas continuas, 665-678
- Método de pendiente-deflexión, 583-647
 - análisis de marcos, 617-643
 - análisis de viga continua, 598-616
 - apoyos extremos, 588-591, 599
 - articulaciones y, 590-595, 617-619, 627-631
 - concepto de, 591-598
 - convención de signos para, 593, 598
 - desplazamiento lateral y, 617-643
 - diagramas de fuerzas de corte para, 592, 598
 - diagramas de momentos de flexión para, 592, 598
 - ecuaciones de equilibrio para, 593, 597
 - ecuaciones, 584-591, 593-595
 - grados de libertad, 593, 617-618
 - miembros con bisagras, 590-591
 - miembros de fuerzas de corte extremos, 596-597
 - momentos de empotramiento (FEM), 588-590, 594
 - momentos de flexión (M), 584-588
 - momentos en los miembros extremos, 587-588, 595-596, 626-627
 - procedimiento para el análisis utilizando, 598-599
 - reacciones de apoyo, 597
 - rotación de cuerdas (ψ), 584-588, 625-626, 629-630
 - rotaciones (θ) y, 584-588, 595
 - salientes en voladizo y, 599-600
 - vigas, 584-616
- Método de proporciones para estructuras simplemente apoyadas, 86-88
- Método de trabajo mínimo, 483-484, 545-551
- Método de voladizos para cargas laterales, 473-479
- Método del umbral para cargas laterales, 458-473
- Métodos de análisis geométrico, 224-267
 - área-momento, 231-243
 - curva elástica para, 172-173
 - desviación de vigas por, 224-267
 - diagramas de momentos de flexión por partes, 243-247
 - integración directa, 227-230
 - procedimientos para el análisis de, 233-234, 251
 - superposición, 231
 - viga conjugada, 247-261
- Métodos de desplazamiento (rigidez), 449, 583-746
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 449, 583-746
 - matriz de análisis estructural, 702-746
 - método momento-distribución, 648-701
 - pendiente-deflexión, 583-647
- Métodos de flexibilidad, ver Métodos de fuerza
- Métodos de fuerza (flexibilidad), 449, 483-582
 - análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, 449, 483-582
 - deformaciones consistentes, 483-558
 - líneas de influencia para, 483-582
- Métodos de rigidez, ver Métodos de desplazamiento
- Métodos de trabajo-energía, 268-328
 - deflexión (Δ) por, 268-328
 - deflexión de entramados por, 274-283, 307, 311
 - desviación de vigas por, 283-295, 307-308, 311-312
 - energía de tensión (U), 306-309
 - energía, conservación de, 306-309
 - fuerzas y, 268-270
 - ley de Betti de deflexiones recíprocas, 317-319
 - ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas, 317-319
 - marco de deflexión, 295-306, 308-309, 312
 - pares, obra de, 270
 - procedimientos para el análisis utilizando, 276, 285, 288, 312-313
 - segundo teorema de Castigliano, 309-317
 - trabajo total (W), 268-270
 - trabajo virtual, 270-306
- Miembros de columna, 9-10, 461-462
- Miembros de fuerza cero, 117-119, 142-143
- Miembros de fuerzas de corte finales, 596-597
- Miembros viga-columna, 9

- Modelos analíticos, 12-16, 702-706
 - conexiones para, 14-15
 - diagramas de línea, 13-14
 - estructura de espacio, 13
 - estructura plana, 13
 - grados de libertad, 705-706
 - matriz de análisis estructural, 702-706
 - propósito de, 12
 - sistema de coordenadas global, 702-705
 - sistema de coordenadas local, 702-705
 - soportes para, 16
- Momento de inercia, 234
- Momentos concentrados (M), 175-176
- Momentos de flexión (M), 161-192, 247-249, 333-334, 360-361, 488-490, 504-515, 584-588, 595-596, 626-627, 779-780
 - cargas concentradas y, 175
 - convención de signos para, 163-164
 - ecuación de tres momentos y, 779-780
 - ecuaciones para, 169-171
 - estructuras estáticamente determinadas, 161-192, 247-249, 333-334, 360-361
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 488-490, 504-515
 - fuerza axial (Q) y, 161-167
 - fuerza de corte (S) y, 161-167
 - líneas de influencia para, 333-334, 360-361
 - marcos, 333-334, 626-627
 - método de deformación constante y, 488-490, 504-515
 - método de equilibrio para, 333-334
 - método de pendiente-deflexión y, 595-596, 626-627
 - miembros finales, 584-588, 595-596, 626-627
 - pares o momentos concentrados, 175-176
 - pendiente (θ) y, 504-508
 - procedimiento para el análisis de, 164-165, 176-178
 - punto de inflexión, 170
 - redundantes, como, 488-490, 504-515
 - relaciones de carga de fuerza de corte, 173-192, 247-249
 - relaciones pendiente-deflexión, 247-249, 584-588
 - sistemas de piso, 360-361
 - vigas, 161-192, 247-249, 333-334, 584-588
- Momentos de momentos finales (FEM), 588-590, 594, 656-657, 659-661
 - método de momento-distribución, 656-657, 659-661
 - método de pendiente-deflexión, 588-590, 594
- Momentos distribuidos, 657-658
- Momentos en los miembros extremos, 587-588, 595-596, 626-627
- Momentos en pares (M), 175-176
- Momentos remanentes, 651-657
- N**
- Nodos, 703
- P**
- Paredes, estructura de fuerzas de corte de, 10-11
- Partición de una matriz, 757-758
- Pendiente (θ), 225-226, 231-232, 504-507, 775-779
 - cambio de ($d\theta$), 225-226, 231-232
 - continuidad, 775-779
 - curva elástica, 225-226, 231-232, 504-507
 - deflexión de vigas, 225-226, 231-232
 - ecuación de tres momentos para, 775-779
 - método de deformación constante y, 504-507
 - momentos de flexión (M) y, 504-508
- Peso del material de construcción, 29
- Peso sísmico efectivo (W), 45
- Placas de unión, 97, 102
- Placas, estructura de curvatura de, 11-12
- Presión del suelo, 46-47
- Presión dinámica (q), 35-36
- Presión hidrostática, 46-47
- Presión, 35-36, 38-40, 46-47
 - cargas de viento, 35-36, 38-40
 - coeficiente de velocidad (Kz), 36
 - coeficientes externos (Cp), 38-40
 - dinámica (q), 35-36
 - hidrostática, 46-47
 - suelo, 46-47
- Principio de Müller-Breslau, 344-356, 561, 575-579
 - construcción de la línea de influencia, 344-356, 561, 575-579
 - estructuras estáticamente determinadas, 344-356
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 561, 575-579
 - líneas de influencia y cualitativas, 349, 575-579
 - procedimiento para el análisis, 349-350
- Puentes colgantes, 7-8
- Puentes de apoyo, 9-10
- Puentes, 7-10, 13, 18-26, 31-33, 100, 366-377. Ver también
 - Entramados
 - AASHTO - Especificaciones estándar para puentes de carreteras, 17, 32-34
 - áreas tributarias, 23-26
 - cargas de camiones, 32-33
 - cargas de ferrocarriles, 32-33
 - cargas horizontales (laterales), 19, 22
 - cargas verticales (gravedad), 19-21
 - cargas vivas en, 31-33
 - carril de carga (combinado), 32-33
 - entramados, 10, 100, 366-367
 - estructura de tensión como, 7-9
 - factor de impacto (I), 34
 - fuerza de los miembros, 367-371
 - largueros, 13
 - líneas de influencia para, 366-377
 - reacciones, 367-369
 - sistemas de piso, 23-26
 - soporte, 9-10
 - suspensión, 7-8
 - trabes, 19-21, 23-24
 - transmisión de carga para, 19-29
 - vigas de piso, 13
- Punto de inflexión, 170

Puntos de inflexión, 452-455, 459

Puntos de panel, 357, 359

R

Reacciones, 56-88, 110-111, 113-114, 139-140, 330-332, 357, 359, 367-369, 451-454
 análisis aproximado y, 451-454
 cálculo de, 69-85
 determinación estática de estructuras, 59-68
 diagramas de cuerpo libre (FBD) a favor, 69
 distribución de la fuerza y, 453-454
 entramados espaciales, 139-140
 entramados planos, 110-111, 113-114
 entramados, 110-111, 113-114, 139-140, 367-369
 estabilidad externa y, 59-68
 estabilidad interna y, 58-63
 estructuras simplemente apoyadas, 86-88
 fuerzas externas como, 56
 inestabilidad interna y, 63-67
 líneas de influencia para, 330-332, 357, 359, 367-369
 marcos, 330-332, 451-454
 método de equilibrio para, 330-332
 método de las proporciones para, 86-88
 procedimiento para la determinación de, 69-85
 redundantes, 61, 110, 451
 sistemas de pisos, 357, 367-369
 soportes y, 56-58, 139-140
 vigas, 330-332

Redundantes externos, 61

Redundantes, 61, 110, 443, 451, 483-490, 504-536
 análisis aproximado y, 451
 coeficiente de flexibilidad (f) para, 486-487, 516-518
 ecuaciones de compatibilidad y, 515-518
 entramados planos, 110
 estructuras estáticamente indeterminadas, 443, 451
 estructuras internas indeterminadas, 507-510
 externa, 61, 110
 fuerzas internas como, 504-515
 grado de indeterminación (i) y, 61, 110, 451
 marcos, 451
 método de deformaciones consistentes y, 483-490, 504-536
 momentos de flexión (M) como, 488-490, 504-515
 múltiples grados de indeterminación y, 515-536
 restricciones, 483
 un solo grado de indeterminación y, 484-490

Referencia tangente, 234

Reflexión, simetría y, 408-410

Relaciones de fuerza-deformación, 445-449

Relaciones de pendiente-deflexión, 247-249

Respuesta sísmica, coeficiente de (CS), 46

Rigidez a la flexión (IE), 227

Rigidez, 443, 649-651, 652-657, 707-714, 719-728
 coordenadas de las relaciones globales (K), 719-721
 coordenadas de las relaciones locales (k), 707-714
 ecuaciones de compatibilidad para, 724-725
 ecuaciones de equilibrio para, 721

entramados, 713-714, 720-721

estructuras estáticamente indeterminadas, 443, 707-714, 719-728

factores de distribución (DF) para, 653-656

flexión, 649-651, 653-656

marcos, 707-712, 720

matriz de análisis estructural, 707-714, 719-728

matriz de rigidez estructural (S), 707, 721-728

método de momento-distribución y, 649-651, 652-657

números de código para miembros, 726-728

relaciones de estructura (matriz), 725-726

relaciones de miembros (matriz), 721-724

vigas continuas, 713, 720

vigas, 652-653, 713

Rotación de cuerdas (ψ), 584-588, 625-626, 629-630

desplazamiento lateral y, 625-626, 629-630

ecuación pendiente-deflexión para, 584-588

marcos, 625-626, 629-630

momentos de tramos finales y, 588

patas inclinadas y, 629-630

Rotaciones (θ), 271-272, 584-588, 595, 658

articulaciones, 595, 658

cuerdas (ψ), 584-588, 625-626, 629-630

marcos, 625-626, 629-630

método de momento-distribución, 658

método de pendiente-deflexión y, 584-588, 595

virtual (θ_v), 271-272

Ruta de carga, 19

S

Secciones, método de, 126-132, 143

análisis de entramado espacial por, 143

análisis de entramados planos por, 126-132

procedimiento para el análisis, 127-128

Segundo teorema de Castigliano, 309-317, 545-546

deflexión de entramados por, 311

deflexión de marco por, 312

desviación de viga por, 311-312

energía de tensión (U) y, 309-311

método del trabajo mínimo y, 545-546

procedimiento para el análisis utilizando, 312-313

Seguridad y funcionalidad, 6-7

Sistema de coordenadas global, 703-705, 719-721

Sistema de coordenadas locales, 703-705, 707-714

Sistemas de coordenadas, 703-705, 707-721

elementos de viga continua, 713, 718, 720

entramados, 713-714, 718-719, 720-721

global, 703-705, 719-721

locales, 703-705, 707-714

marcos, 707-712, 714-718, 720

matriz de rigidez de estructura (S), 707, 725-728

matriz de rigidez de miembro (k), 707-714

matriz de rigidez de miembro (K), 719-720

matriz de transformación (T), 714-719

Sistemas de fuerzas concurrentes, 55

Sistemas de marcos (marcos), 18-23

cargas horizontales (laterales), 19, 22

- cargas verticales (gravedad), 19-21
- pórticos apuntalados, 19-22
- trabes, 19-21
- Sistemas de suelo, 13, 23-29, 31-33, 356-377
 - áreas tributarias, 23-26
 - edificios, 23-29
 - entramados en, 366-377
 - fuerza de corte (S) en, 357, 359-360
 - fuerza en los elementos, 367-371
 - largueros, 13, 357-358
 - líneas de influencia para, 356-377
 - losas, 25-26
 - mínimos de carga directa, 31-32
 - momentos de flexión (M) en, 360-361
 - planos de armazón, 23-25
 - procedimientos para el análisis de, 361-362, 371-372
 - puentes, 23-26
 - puntos de panel, 357, 359
 - reacciones en, 357, 367-369
 - trabes de, 23-24, 356-366
 - transmisión de carga de, 23-29
 - vigas, 13
- Sistemas estructurales, 18-30
 - áreas tributarias, 23-26
 - edificios de una sola planta, 19-22
 - edificios de varios pisos, 19, 22-26
 - miembros estructurales, 18
 - puentes, 18-26
 - ruta de carga vertical (gravedad), 19-21
 - sistemas de encuadre (marcos), 18
 - sistemas de piso, 23-29
 - transmisión de carga de, 18-29
 - trayectoria de carga horizontal (lateral), 19, 22
 - vigas, 19-21, 23-24
- Soporte de extremo libre, 248-249
- Soporte interno simple, 248-249
- Soportes abatibles, 14-16, 57-58, 248-249, 459-461, 590-591
 - deflexión de vigas y, 248-249, 590-591
 - marcos, 459-461
 - método del umbral para, 459-461
 - reacciones de estructuras planas, 57-58
 - relaciones entre momentos de carga-corte-flexión, 248-249
 - relaciones pendiente-deflexión, 248-249, 590-591
 - uso estructural, 14-16
 - vigas conjugadas, 248-249
- Soportes de bola y cavidad, 138, 140
- Soportes de bola, 140
- Soportes fijos, 16, 57, 248-249, 781
- Superposición, 85-86, 231
 - deflexión de vigas, método por, 231
 - principio de, 85-86
- T**
- Tabla de momento-distribución, 658-659
- Techos planos (pf), 42
- Techos, 7-9, 42-44, 99, 101
 - cargas de nieve sobre, 42-44
 - entramados, 99, 101
 - estructura de la tensión como, 7-9
- Técnica del número de código, 726-728
- Tensión, 442-445
 - asentamiento apoyo causando, 443-444
 - cambios de temperatura y, 444-445
 - errores de fabricación y, 444-445
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 442-445
 - flexión, 442
- Trabajo (W), 268-270, 306-307. Ver también Trabajo virtual
- Trabajo virtual, 270-306
 - cambio de temperatura y, 275-276
 - deflexión (Δ) por, 270-306
 - deflexión de entramados por, 274-283
 - deformación axial (δ), 275-276
 - desplazamiento (Δ), 271-272
 - desplazamientos de cuerpos rígidos, 271-272
 - desviación de vigas por, 283-295
 - error de fabricación y, 275-276
 - externo (W_{ve}), 271-274
 - fuerzas para cuerpos deformables, 272-274
 - integrales para, 285-288
 - interno (W_{vi}), 272-274, 284-285, 295-296
 - marco de deflexión por, 295-306
 - principio de, 270-274
 - procedimientos para el análisis utilizando, 276, 285, 288, 296-297
 - rotación (θ_v), 271-272,
- Trabes, 19-21, 23-24, 356-366, 454-457. Ver también
 - Sistemas de suelo
 - análisis aproximado de, 454-457
 - estructuras de edificios, 454-457
 - fuerza axial, 454-456
 - fuerza final de, 454-457
 - líneas de influencia para, 356-366
 - sistemas de piso con, 23-24, 356-366
 - transmisión de la carga y, 19-21
- Transposición de una matriz, 756-757
- U**
- Unión de apoyos, 16, 57, 140
- Uniones atornilladas, 193
- Uniones, 14-15, 103-104, 589-593, 595, 617-619, 627-631, 658, 661-663, 703-706
 - abatible (flexible), 14-15, 590-591
 - análisis de marcos y, 617-619, 627-631
 - conexiones, 14-15
 - desplazamiento lateral y, 617-619, 625-627
 - desplazamiento lateral, 617-619, 627-631
 - ecuaciones de equilibrio para, 593
 - elementos de los miembros, 703
 - entramados simples, 103-104
 - equilibrio, 661-663
 - factores de distribución (DF) para, 658

- grados de libertad, 593, 617, 705 a 706
 - matriz de análisis estructural, 703-706
 - método de momento-distribución y, 658, 661-663
 - método de pendiente-deflexión y, 589-593, 595, 617-619, 627-631
 - modelos analíticos, 14-15, 703-706
 - momentos de final fijo (FEM) para, 589-591
 - nodos, 703
 - reacciones externas en, 591-592
 - rígidas, 14-15
 - rotaciones (θ), 595, 658
 - sistemas para, 703-705 coordinar
 - Uniones, método de, 113-126, 141-143
 - análisis de entramado plano mediante, 113-126
 - análisis entramado espacial por, 141-143
 - diagramas de cuerpo libre (FBD) para, 113-117
 - miembros de fuerza cero y, 117-119, 142-143
 - procedimiento para el análisis, 119-120
- V**
- Varios grados de indeterminación, 515-536, 561-562
 - coeficiente de flexibilidad (f) para, 516-518
 - deformaciones consistentes y método para, 515-536
 - ecuaciones de compatibilidad para, 516-518
 - líneas de influencia para, 561-562
 - procedimiento para el análisis de, 518-519
 - Vector de conjunto de desplazamiento (d), 705
 - Velocidad del viento (V), 35-37
 - Viga conjugada 248
 - Viga primaria, 484-490
 - Vigas continuas, 504-507, 584-591, 598-616, 665-678, 713, 718, 720
 - aleros voladizos, 599-600, 666
 - análisis de, 598-616, 665-678
 - matriz de análisis estructural, 713, 718, 720
 - método consistente para deformaciones, 504-507
 - método de momento-distribución para, 665-678
 - método de pendiente-deflexión para, 584-591, 598-616
 - momentos de bisagras finales, 590-591
 - momentos de final fijo (FEM), 588-590
 - procedimiento para el análisis de, 598-599
 - redundantes, 504-507
 - relaciones de rigidez en los miembros, 713, 720
 - rotación de la cuerda (ψ), 584-588
 - sistema de coordenadas global, 720
 - sistema de coordenadas local, 713
 - soportes extremos simples, 599, 665-666
 - transformaciones de coordenadas, 718
 - Vigas, 10-11, 161-222, 224-267, 283-295, 307-308, 311-313, 317-319, 330-356, 484-515, 560-575, 584-616, 652-657, 665-678, 713, 718, 720
 - aleros voladizos, 599-600, 666
 - coeficiente flexibilidad, 486-487
 - continua, 504-507, 584-591, 598-616, 665-678, 713, 718, 720 801
 - convención de signos para, 163-164
 - deformaciones consistentes y método para, 484-515
 - desviación, 172-173, 224-267, 283-295, 307-308, 311-313, 317-319
 - diagramas de fuerza de corte, 168-171, 592, 598
 - diagramas de momento de flexión, 168-173, 243-247, 592, 598
 - energía de esfuerzo (U) para, 307-308
 - estructura de flexión, 11-12
 - estructuras estáticamente determinadas, 161-222, 224-267, 307-308, 311-313, 317-319, 330-344
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 484-515, 560-575, 584-616, 665-678
 - formas cualitativas desviadas para, 172-173
 - fuerza axial (Q) y, 161-167
 - fuerza de corte (S) y, 161-167, 332-333
 - fuerza de corte de miembros finales, 596-597
 - fuerzas internas, 161-167, 488-490, 504-515
 - grados de libertad, 593, 617
 - integrales para el trabajo virtual, 285-288
 - ley de Betti de deflexiones recíprocas, 317-319
 - ley de Maxwell de las deflexiones recíprocas, 317-319, 560-561
 - líneas de influencia para, 330-344, 560-575
 - matriz de análisis estructural, 713, 718, 720
 - método de área-momento para, 231-243
 - método de equilibrio para, 330-344
 - método de integración directa, 227-230
 - método de la viga conjugada para, 247-261
 - método de pendiente-deflexión para, 584-616
 - método de superposición de, 231
 - método de trabajo virtual para, 283-295
 - método momento-distribución, 665-678
 - métodos de trabajo de energía para, 283-295, 307-308, 311-313, 317-319
 - métodos geométricos para, 224-267
 - miembros con bisagras, 590-591
 - momentos de final fijo (FEM), 588-590, 594
 - momentos de flexión (M), 161-167, 247-249, 333-334, 584-588
 - momentos de miembros extremos, 587-588, 595-596
 - momentos redundantes en, 488-490, 504-515
 - múltiples grados de determinación, 561-562
 - primaria, 484-490
 - principio de Müller-Breslau, 344-356, 561
 - procedimientos para el análisis de, 164-165, 176-178, 233-234, 251, 285, 288, 312-313, 334-336, 490-491, 562-563, 598-599, 665
 - reacciones en, 330-332
 - redundantes en, 488-490, 504-515
 - relaciones entre momentos de carga-corte-flexión, 173-192, 247-249
 - rigidez de, 652-657, 713, 720
 - rigidez en la flexión (EI) de, 227
 - segundo teorema de Castigliano para, 311-313
 - soportes extremos simples, 599, 665-666
 - soportes para, 248-249



Análisis estructural es distinto desde su enfoque. El autor lo ha orientado para estudiantes de ingeniería de nivel licenciatura y posgrado y ha tenido especial cuidado en dar explicaciones comprensibles y excepcionalmente claras de los conceptos, de los procedimientos para el análisis paso a paso y de los diagramas que ilustran cada capítulo. El volumen cuenta con ejemplos interesantes y modernos, al mismo tiempo que es técnica y matemáticamente preciso en cuanto a los temas que aborda. En esta edición se han actualizado los ejemplos conforme a los estudios más recientes y se han incluido secciones de evaluación y ejercicios en cada uno de los capítulos.