TRACCION
Y
COMPRESION

Dr. GENNER VILLARREAL CASTRO
PROFESOR EXTRAORDINARIO UPAO
PROFESOR PRINCIPAL UPC, USMP
PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

1.2 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

PROBLEMA 1.1 Una varilla de acero de 100cm de longitud y 5mm de diámetro está sometida a tracción y se mide que su alargamiento es 0,3mm y el incremento de volumen $\Delta V = 2{,}28\text{mm}^3$. Determinar el coeficiente de Poisson μ.

Solución:

Se sabe que para barras prismáticas se cumple:

$$\delta = \frac{N_x L}{EA} = \frac{PL}{EA}$$

Donde:

P - carga de tracción a la que está sometida la varilla

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$\frac{P.1}{E.\frac{\pi}{4}.5^2.10^{-6}} = 0{,}3.10^{-3}$$

De donde:

$$\frac{P}{E} = 5{,}89.10^{-9}$$

Luego, aplicamos la fórmula de variación de volumen:

$$\Delta V = V_o \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$$

Donde:

V_o - volumen inicial

Reemplazamos valores:

$$2{,}28.10^{-9} = A.L.\frac{P}{EA}(1-2\mu)$$

$$2{,}28.10^{-9} = 1.5{,}89.10^{-9}.(1-2\mu)$$

De donde:

$$\mu = 0{,}306$$

PROBLEMA 1.2 Se diseñará un tirante de acero para resistir una fuerza de tracción de 50 toneladas, siendo la longitud del tirante 50 metros y la sección transversal rectangular con proporción de lados en relación 2/3. Considerar que el esfuerzo de fluencia del acero es $\sigma_y = 4200 \text{kgf}/\text{cm}^2$, el factor de seguridad $n = 2$, el módulo de elasticidad $E = 2{,}1.10^6 \text{kgf}/\text{cm}^2$ y el coeficiente de Poisson $\mu = 0{,}25$. Determinar las deformaciones longitudinal y transversal.

Solución:

Esquematizamos al tirante sometido a la fuerza de tracción y su sección transversal.

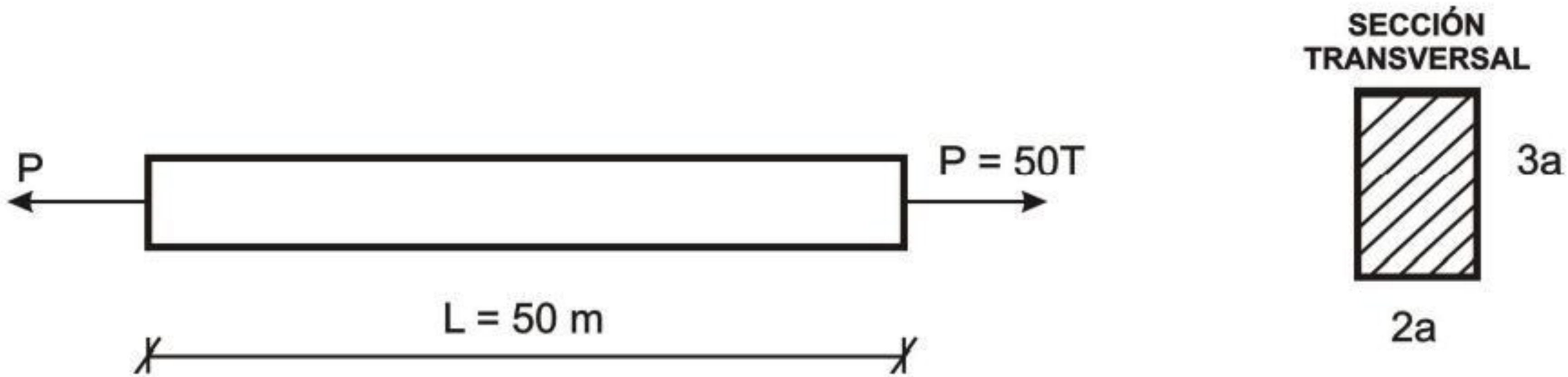


Fig. 1.4

Se sabe que:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{4200}{2} = 2100 \text{kgf} / \text{cm}^2$$

Como, por condición de resistencia se debe de cumplir que:

$$\sigma \leq [\sigma]$$

$$\frac{50.10^3}{6a^2} \leq 2100$$

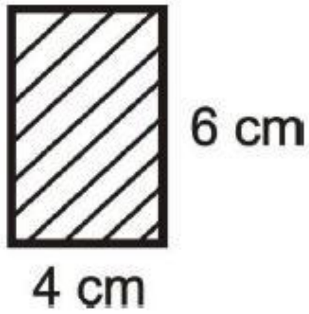
De donde.

$$a \geq 1{,}99\text{cm}$$

Asumimos:

$$a = 2\text{cm}$$

En consecuencia, la sección transversal será:



Calculamos el alargamiento:

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{50.10^3.50.10^2}{2{,}1.10^6.24} = 4{,}96\text{cm}$$

La deformación longitudinal será

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{4{,}96}{50.10^2} = 9{,}92.10^{-4}$$

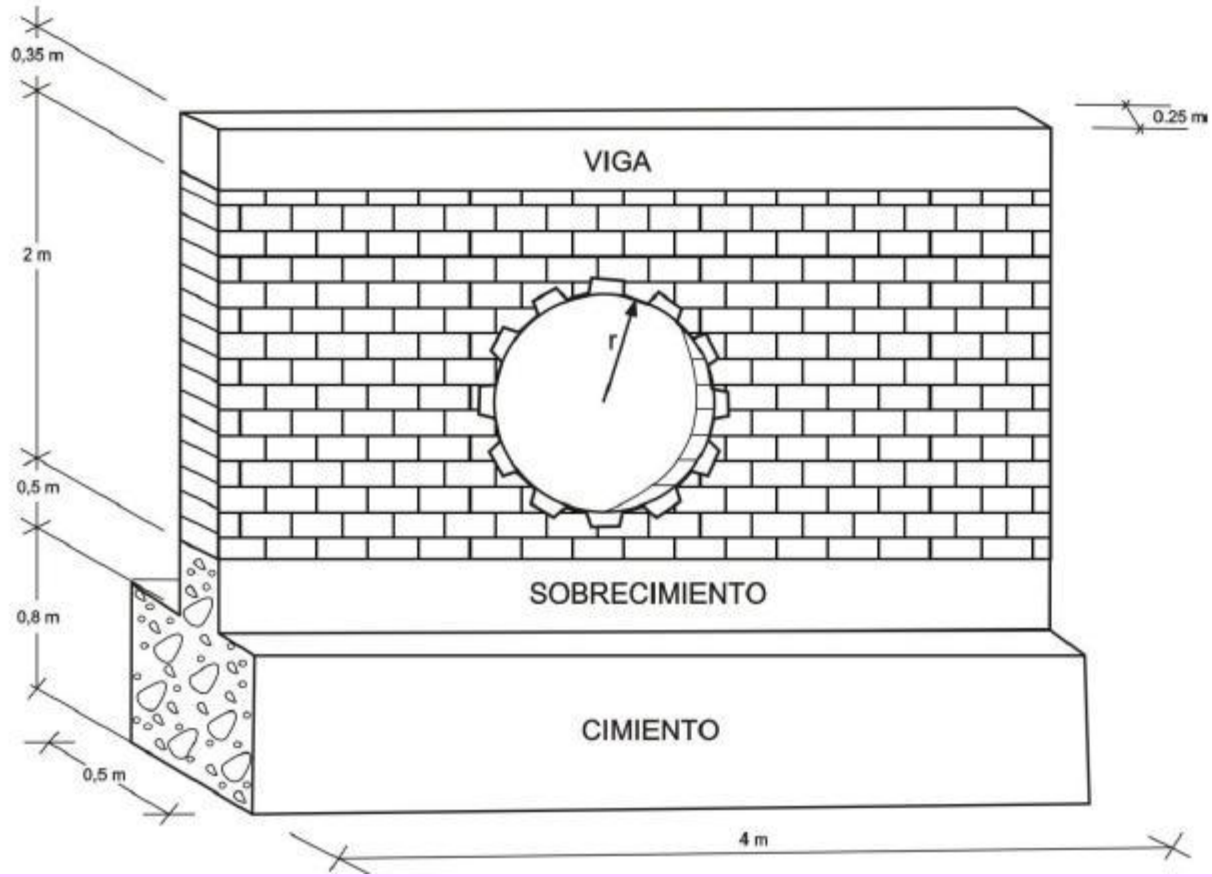
La deformación transversal lo obtenemos a través de Poisson:

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$$

$$|\varepsilon'| = \mu|\varepsilon| = 0{,}25.9{,}92.10^{-4} = 2{,}48.10^{-4}$$

PROBLEMA 1.3 Se tiene la siguiente estructura, cuyo cimiento y sobrecimiento está construido con concreto ciclópeo, el muro de albañilería con ladrillo sólido macizo y la viga de concreto armado. Sabiendo que el peso de la estructura es de 9142kgf, determinar el radio "r" del agujero circular y la capacidad portante del terreno.

MATERIAL	PESO ESPECIFICO
Concreto ciclópeo	2300 kgf/m^3
Muro de albañilería sólido – macizo	1800 kgf/m^3
Concreto armado	2400 kgf/m^3



Solución:

Calculamos los pesos de cada parte de la estructura, conocido como metrado de cargas. En este caso se trata de la carga muerta, es decir, el peso propio de la estructura.

$$P_{cimiento} = \gamma_c . A_{cimiento} . h_{cimiento} = 2300.0{,}5.4.0{,}8 = 3680 kgf$$

$$P_{sobrecimiento} = 2300.0{,}5.4.0{,}25 = 1150 kgf$$

$$P_{muro} = 1800.0{,}25.(4.2 - \pi.r^2) = 450.(8 - \pi.r^2) kgf$$

$$P_{viga} = 2400.0{,}25.0{,}35.4 = 840 kgf$$

Sumamos todos los pesos y obtenemos:

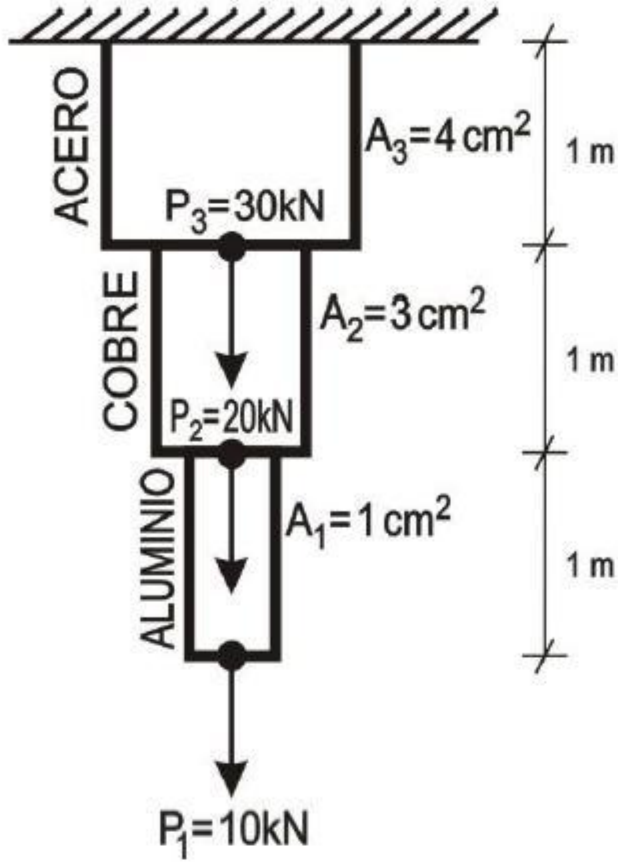
$$3680 + 1150 + 450.(8 - \pi.r^2) + 840 = 9142$$

$$r = 0{,}3 m$$

Ahora, calculamos la capacidad portante del terreno, que viene a ser la resistencia mínima del suelo:

$$q_a = \frac{P}{A_{contacto}} = \frac{9142}{4.0{,}5} = 4571 kgf / m^2 = 0{,}457 kgf / cm^2 \text{ (SUELO FLEXIBLE)}$$

PROBLEMA 1.5 Graficar los diagramas de fuerza axial o normal, esfuerzo normal y determinar el alargamiento total. Considerar $E_{al} = 0{,}7.10^5\,\text{MPa}$, $E_c = 10^5\,\text{MPa}$, $E_a = 2.10^5\,\text{MPa}$.



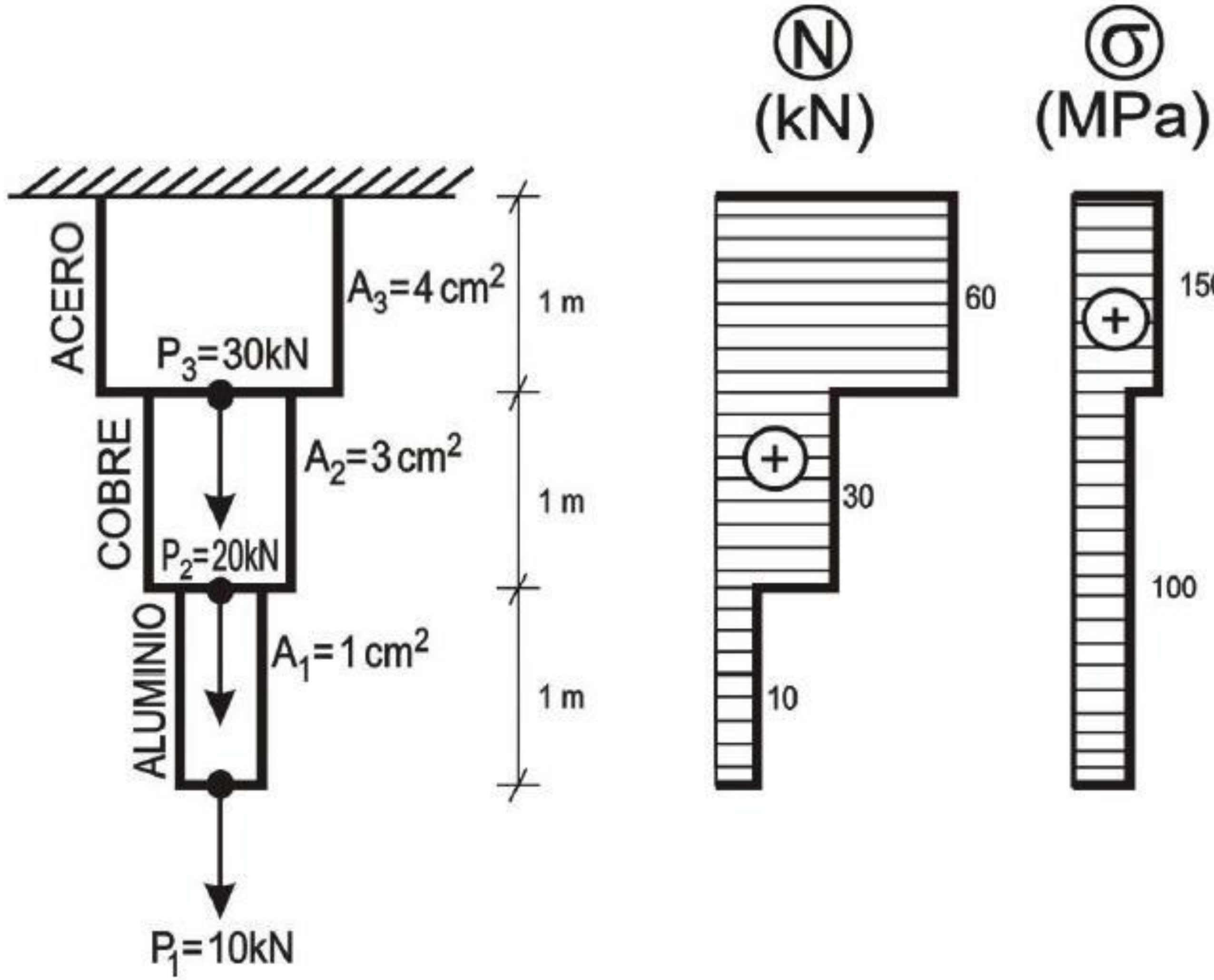
Solución:

Graficamos el diagrama de fuerza axial o normal y determinamos los esfuerzos en cada parte de la barra escalonada, por ser de áreas diferentes.

$$\sigma_{al} = \frac{10.10^3}{10^{-4}} = 100\text{MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{30.10^3}{3.10^{-4}} = 100\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{60.10^3}{4.10^{-4}} = 150\text{MPa}$$



Luego, determinamos el alargamiento de la barra escalonada, analizando cada material por separado, en virtud de tener diferentes fuerzas axiales y material.

$$\delta = \frac{10.10^3.1}{0,7.10^5.10^6.10^{-4}} + \frac{30.10^3.1}{10^5.10^6.3.10^{-4}} + \frac{60.10^3.1}{2.10^5.10^6.4.10^{-4}} = 3,178.10^{-3}\,\mathrm{m} = 3,178\mathrm{mm}$$

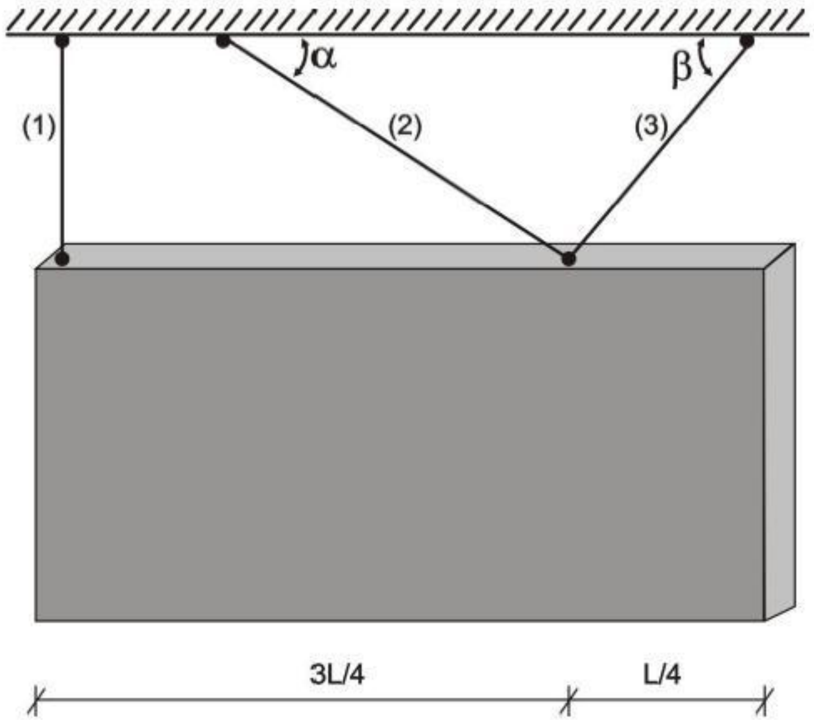
PROBLEMA 1.7 La figura muestra un cartel publicitario rectangular de espesor constante, cuyo peso específico es "γ" y volumen "V". Dicho cartel está sostenido por tres cables (1), (2) y (3) que tienen la misma área de sección transversal "A" y son del mismo material con módulo de elasticidad "E".

De las siguientes afirmaciones, diga cuales son verdaderas y justifique su respuesta:

a) El módulo de tracción en el cable (1) es $\dfrac{V\gamma}{3}$

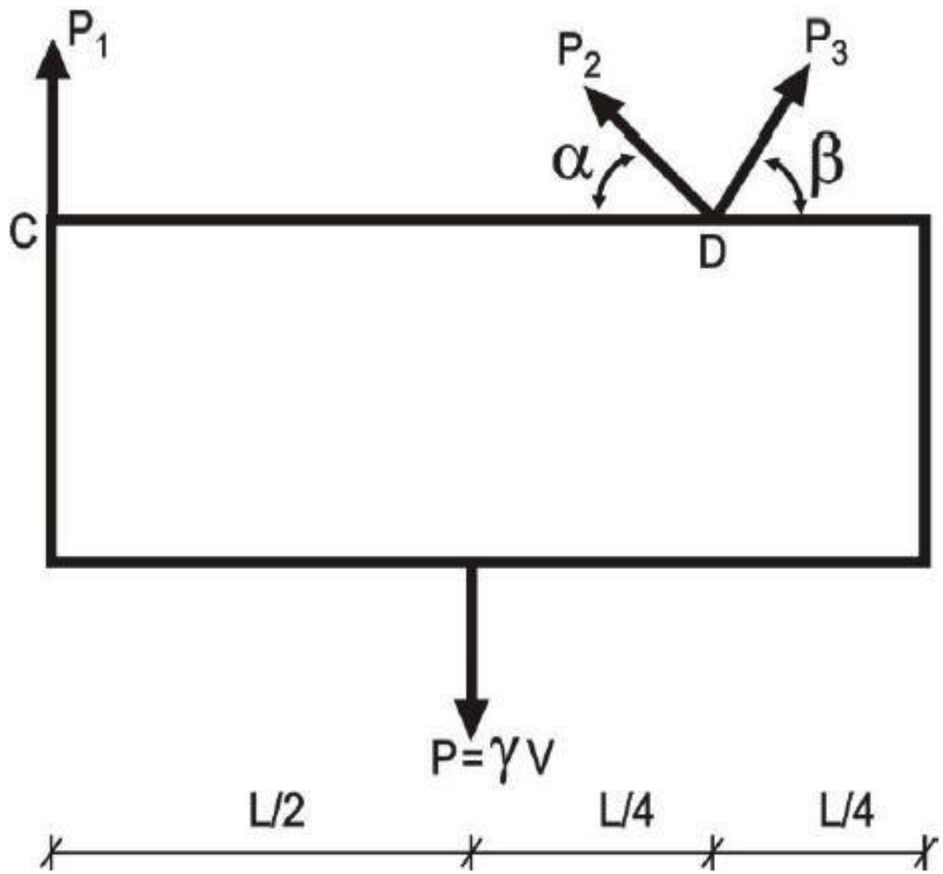
b) El módulo de tracción en el cable (3) es $\dfrac{2V\gamma\cos\alpha}{3(\cos\beta\,\text{sen}\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\beta)}$

c) La deformación longitudinal en el cable (1) es $\dfrac{V\gamma L\,\text{tg}\beta}{6EA}$



Solución:

Efectuamos un corte y analizamos su equilibrio:



a) $\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_1\left(\frac{3L}{4}\right) + \gamma V\left(\frac{L}{4}\right) = 0$

$$P_1 = \frac{V\gamma}{3} \text{ (VERDADERO)}$$

b) $\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_3 \cos\beta = P_2 \cos\alpha$

$$P_2 = P_3 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 \text{sen}\alpha + P_3 \text{sen}\beta = V\gamma$

$$\frac{V\gamma}{3} + \left(P_3 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\text{sen}\alpha + P_3 \text{sen}\beta = V\gamma$$

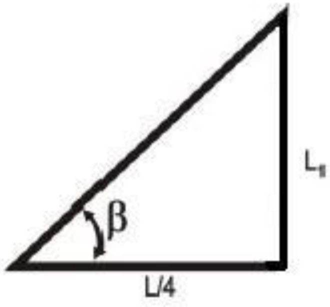
$$P_3 = \frac{2V\gamma\cos\alpha}{3(\cos\beta\,\text{sen}\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\beta)} \text{ (VERDADERO)}$$

c) Calculamos el alargamiento del cable (1):

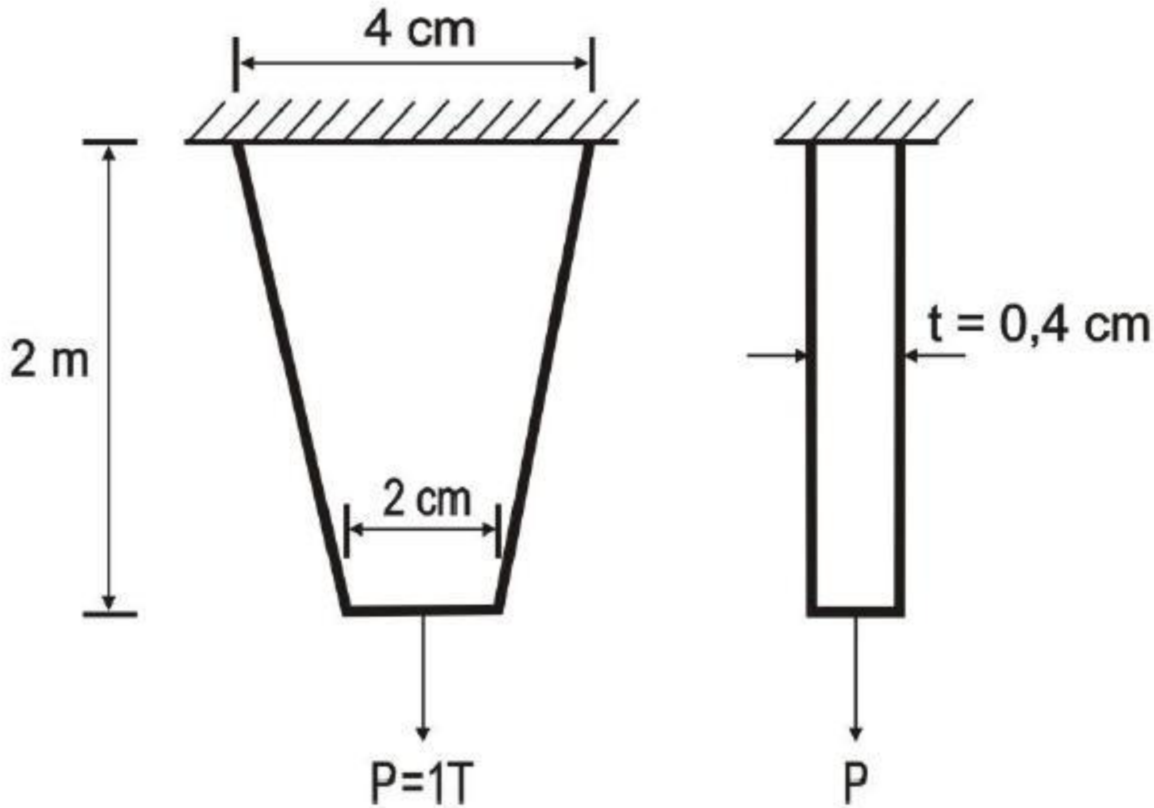
$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA} = \frac{\frac{V\gamma}{3} \cdot \frac{L\text{tg}\beta}{4}}{EA} = \frac{V\gamma L\text{tg}\beta}{12EA} \text{ (FALSO)}$$

Siendo:

$$\text{tg}\beta = \frac{L_1}{L/4} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{L\text{tg}\beta}{4}$$

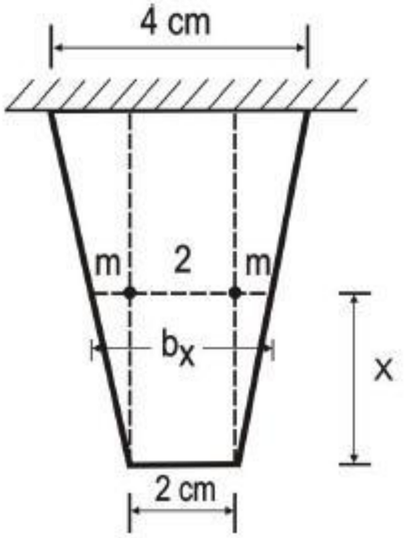


PROBLEMA 1.8 Determinar el alargamiento de la barra, si es de espesor constante $t = 0{,}4\text{cm}$ y su ancho varía de 2cm en la parte inferior hasta 4cm en la parte superior. Considerar $E = 2.10^6 \text{kgf}/\text{cm}^2$.



Solución:

A una distancia x del extremo libre, se tendrá:



$$b_x = 2 + 2m = 2 + 2\left(\frac{x}{200}\right) = 2 + \frac{x}{100}$$

Siendo:

$$\frac{m}{x} = \frac{1}{200} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{x}{200}$$

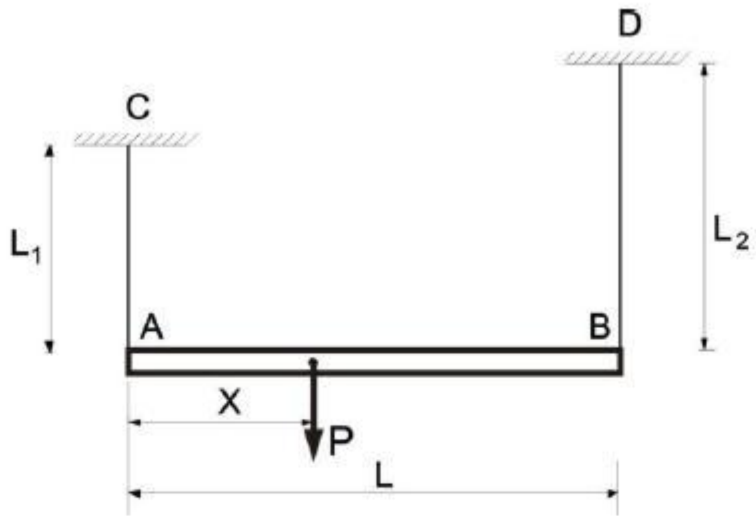
Luego, su área de sección transversal será:

$$A_x = b_x t = \left(2 + \frac{x}{100}\right)(0{,}4) = 0{,}8 + \frac{x}{250} = 0{,}8 + 0{,}004x$$

De esta manera, el alargamiento se obtendrá como una integración:

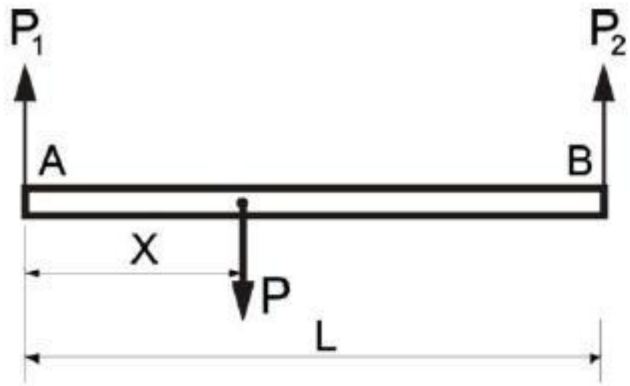
$$\delta = \int_0^L \frac{N_x dx}{EA_x} = \int_0^{200} \frac{10^3 dx}{2.10^6 (0{,}8 + 0{,}004x)} = \frac{\ln 2}{8} = 0{,}0866\text{cm} = 0{,}866\text{mm}$$

PROBLEMA 1.10 Una barra uniforme AB de longitud "L" se suspende en una posición horizontal, mediante dos cables verticales fijos a sus extremos. Ambos cables están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero las longitudes son L_1 y L_2. Obtenga una fórmula para la distancia "x" (desde el extremo A) al punto sobre la barra donde debe de aplicarse una carga "P", para que la barra permanezca horizontal.



Solución:

Ejecutamos un corte en las barras AC y BD y analizamos su equilibrio:



$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 + P_2 = P$$

$$\sum M_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Px = P_2 L$$

$$x = \frac{P_2 L}{P}$$

Por dato del problema $\delta_{AC} = \delta_{BD}$

De donde:

$$\frac{P_1 L_1}{EA} = \frac{P_2 L_2}{EA}$$

$$P_1 = \frac{P_2 L_2}{L_1}$$

Reemplazamos en la primera ecuación de equilibrio:

$$\frac{P_2 L_2}{L_1} + P_2 = P$$

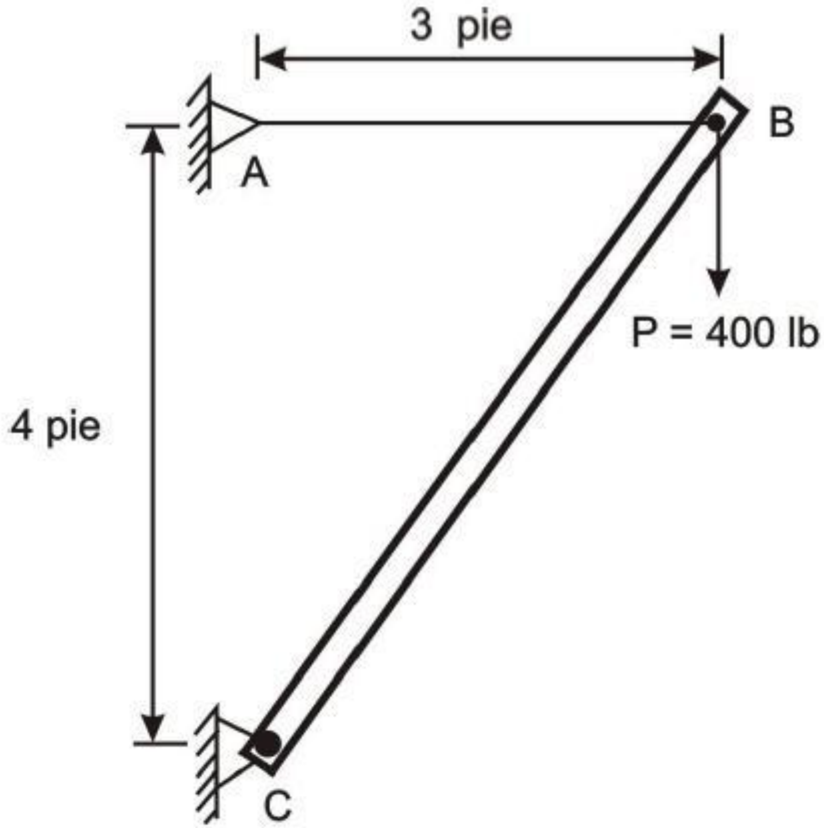
De donde:

$$P_2 = \frac{P L_1}{L_1 + L_2}$$

Luego:

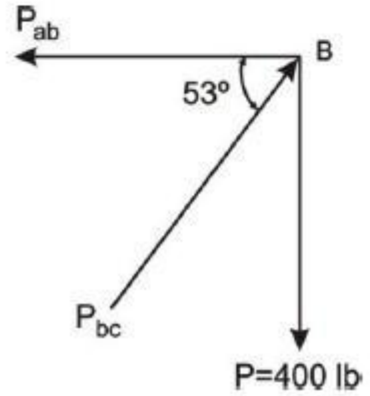
$$x = \frac{L L_1}{L_1 + L_2}$$

PROBLEMA 1.11 Determinar los desplazamientos horizontal y vertical del nudo B del sistema estructural mostrado en la figura, debido a la fuerza $P = 400 lb$, si el miembro AB es una cable de acero $(E_a = 30.10^6 psi)$ de 0,125plg de diámetro y el miembro BC es un puntal de madera $(E_m = 1{,}5.10^6 psi)$ de sección transversal cuadrada de 1plg de lado.



Solución:

Analizamos el equilibrio del nudo B.



$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_{bc}\text{sen}53^\circ = 400$$

$$P_{bc} = 500\text{lb (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_{ab} = 500\cos 53^\circ$$

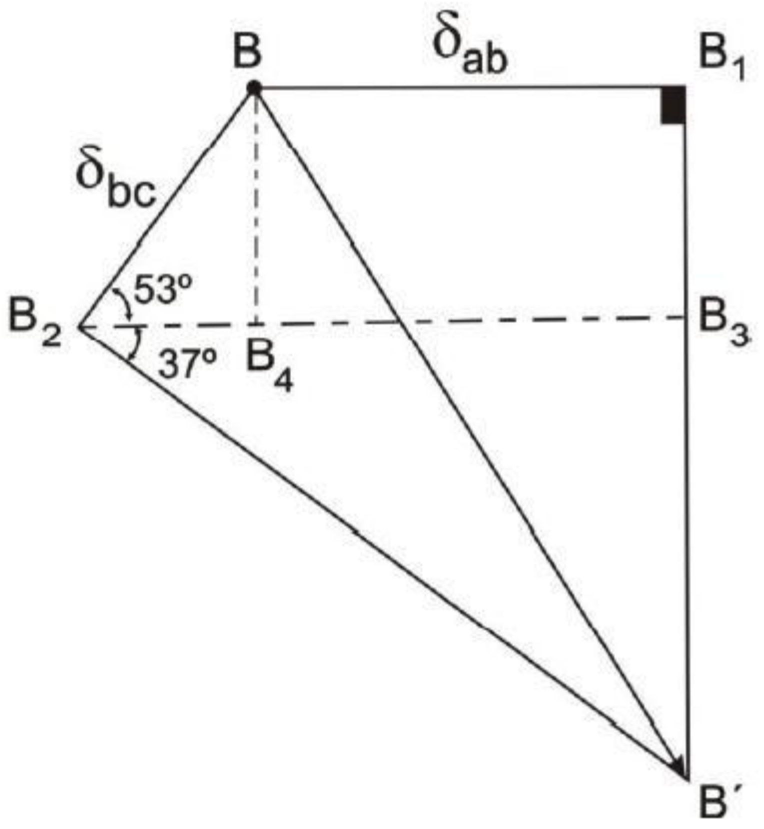
$$P_{ab} = 300\text{lb (TRACCION)}$$

En consecuencia:

$$\delta_{ab} = \frac{P_{ab}L_{ab}}{E_{ab}A_{ab}} = \frac{300.3.12}{30.10^6.\frac{\pi}{4}.0{,}125^2} = 0{,}0293\,\text{plg (ALARGAMIENTO)}$$

$$\delta_{bc} = \frac{P_{bc}L_{bc}}{E_{bc}A_{bc}} = \frac{500.5.12}{1{,}5.10^6.1^2} = 0{,}02\,\text{plg (ACORTAMIENTO)}$$

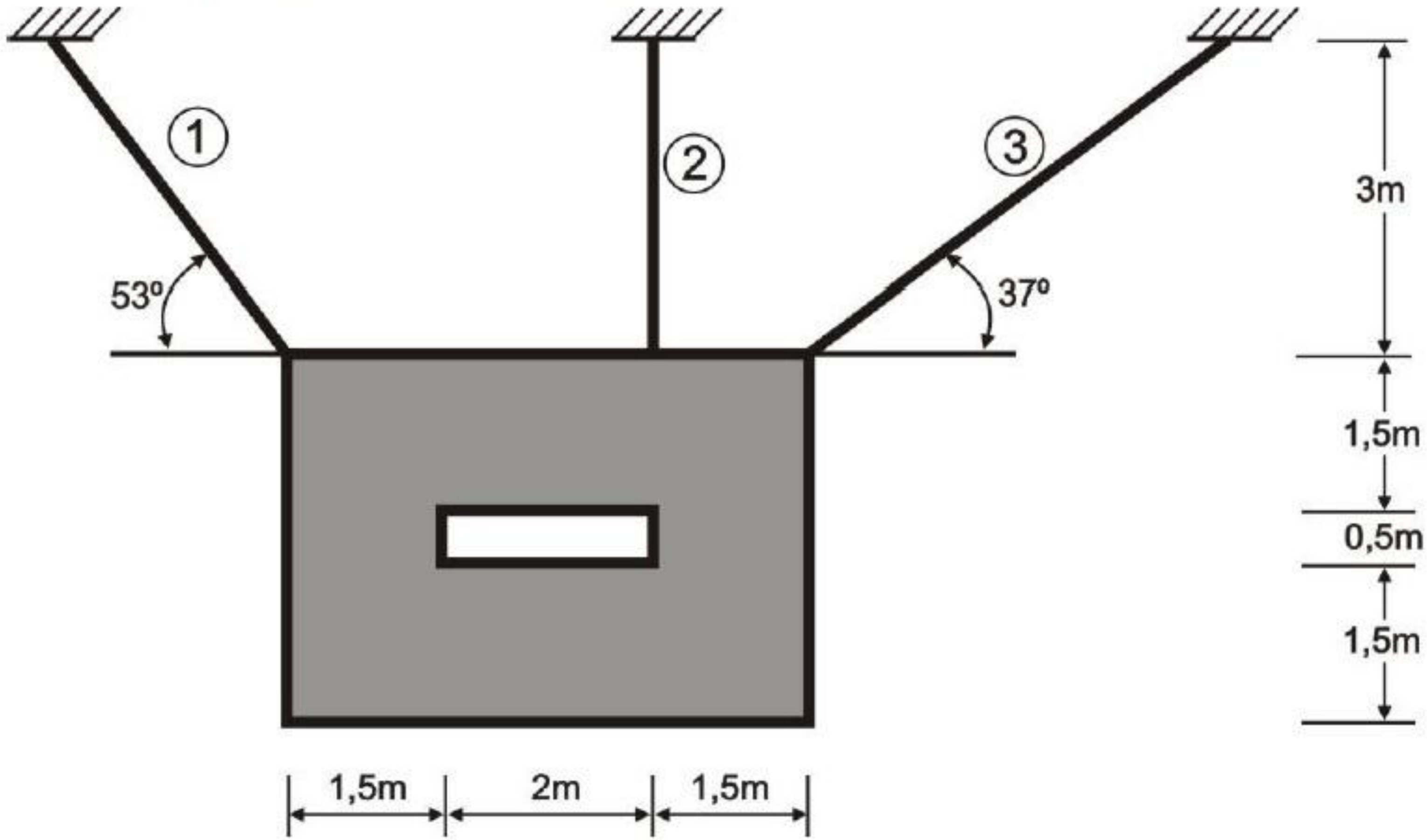
Por lo tanto, el diagrama de desplazamiento del nudo B será:



$$\delta_H^B = \delta_{ab} = 0{,}0293\,plg \rightarrow$$

$$\delta_V^B = \delta_{bc}\text{sen}53^\circ + \frac{\delta_{bc}\cos 53^\circ + \delta_{ab}}{\text{ctg}37^\circ} = 0{,}02.0{,}8 + \frac{0{,}02.0{,}6 + 0{,}0293}{4/3} = 0{,}0470\,plg \downarrow$$

PROBLEMA 1.16 El cartel publicitario de la figura tiene un peso específico $\gamma = 650\text{kg}/\text{m}^3$, se pide diseñar los cables 1, 2, 3 y calcular sus deformaciones, sabiendo que tienen un módulo de elasticidad $E = 2{,}1.10^6\text{kg}/\text{cm}^2$, esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 4200\text{kg}/\text{cm}^2$. Considerar un factor de seguridad de 1,5 y un espesor del cartel de 45cm.



Solución:

Calculamos el peso del cartel:

$$P = \gamma V = \gamma A e = 650.[5.3,5 - 2.0,5].0,45 = 4826,25\text{kg}$$

Efectuamos un corte en las 3 barras y analizamos el equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_3 \cos 37^\circ = P_1 \cos 53^\circ$$

$$P_3 = \frac{3P_1}{4} \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 \text{sen} 53^\circ + P_2 + P_3 \text{sen} 37^\circ = 4826,25$$

$$P_1\left(\frac{4}{5}\right) + P_2 + \left(\frac{3P_1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = 4826,25$$

$$5P_1 + 4P_2 = 19305 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_2.(3,5) + P_3.\text{sen}37^\circ.(5) - 4826,25.(2,5) = 0$$

$$3{,}5P_2 + \left(\frac{3P_1}{4}\right).(3) - 12065{,}625 = 0$$

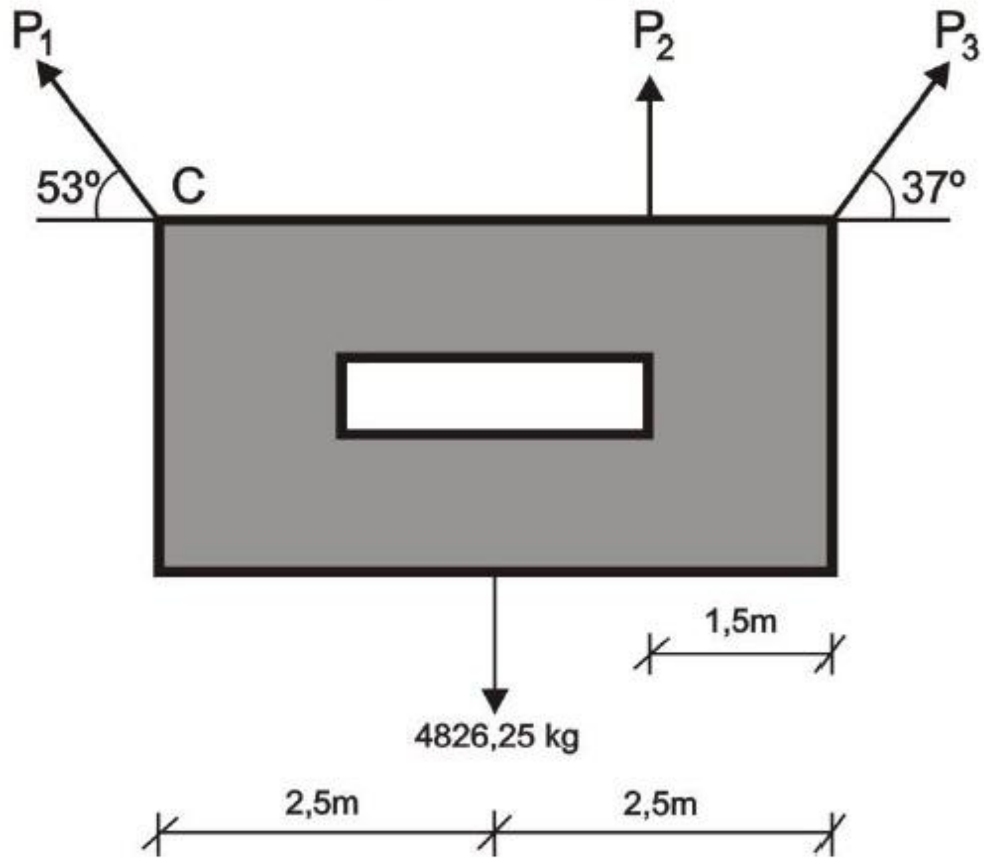
$$2{,}25P_1 + 3{,}5P_2 = 12065{,}625 \qquad \text{(c)}$$

Resolvemos (b) y (c), luego, reemplazamos en (a) y obtenemos:

$$P_1 = 2271{,}18\text{kg}$$

$$P_2 = 1987{,}28\text{kg}$$

$$P_3 = 1703{,}38\text{kg}$$



Ahora, calculamos el esfuerzo admisible de las barras:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{4200}{1,5} = 2800\text{kg}/\text{cm}^2$$

Calculamos las áreas de los cables y sus respectivos alargamientos:

CABLE 1:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

$$\frac{P_1}{A_1} \leq [\sigma]$$

$$A_1 \geq \frac{P_1}{[\sigma]} = \frac{2271,18}{2800} = 0,81\text{cm}^2$$

Asumimos:

$$A_{1,\text{mín}} = 0,81\text{cm}^2$$

El alargamiento será:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA_1} = \frac{2271,18.375}{2,1.10^6.0,81} = 0,50\text{cm} = 5\text{mm}$$

CABLE 2:

$$A_2 \geq \frac{P_2}{[\sigma]} = \frac{1987{,}28}{2800} = 0{,}71\text{cm}^2$$

$$A_{2,\text{mín}} = 0{,}71\text{cm}^2$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{EA_2} = \frac{1987{,}28.300}{2{,}1.10^6.0{,}71} = 0{,}40\text{cm} = 4\text{mm}$$

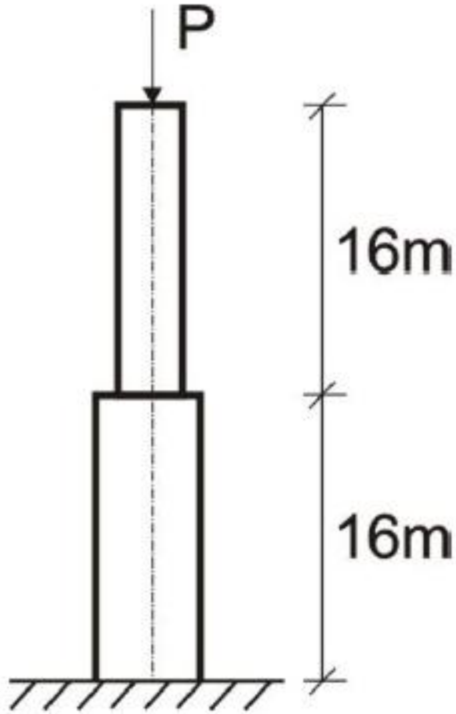
CABLE 3:

$$A_3 \geq \frac{P_3}{[\sigma]} = \frac{1703{,}38}{2800} = 0{,}61\text{cm}^2$$

$$A_{3,\text{mín}} = 0{,}61\text{cm}^2$$

$$\delta_3 = \frac{P_3 L_3}{EA_3} = \frac{1703{,}38.500}{2{,}1.10^6.0{,}61} = 0{,}66\text{cm} = 6{,}6\text{mm}$$

PROBLEMA 1.18 Un pilar de un puente consta de dos partes prismáticas, tal como se muestra en la figura y soporta una carga $P = 380T$. El peso específico del material es $\gamma = 2{,}2T/m^3$, el esfuerzo admisible por compresión es $[\sigma]_{comp} = 10kg/cm^2$ y el módulo de elasticidad $E = 24000kg/cm^2$. Determinar el acortamiento del pilar.



Solución:

Analizamos la parte superior del pilar y calculamos su área A_I:

$$\frac{380 + 2{,}2.A_I.16}{A_I} \leq 100$$

$$A_I \geq 5{,}86\mathrm{m}^2$$

Asumimos:

$$A_{I,\text{mín}} = 5{,}86\mathrm{m}^2$$

Ahora, analizamos la parte inferior del pilar, calculando su área A_{II}:

$$\frac{380 + 2{,}2.5{,}86.16 + 2{,}2.A_{II}.16}{A_{II}} \leq 100$$

$$A_{II} \geq 9{,}05\mathrm{m}^2$$

Asumimos:

$$A_{II,\text{mín}} = 9{,}05\mathrm{m}^2$$

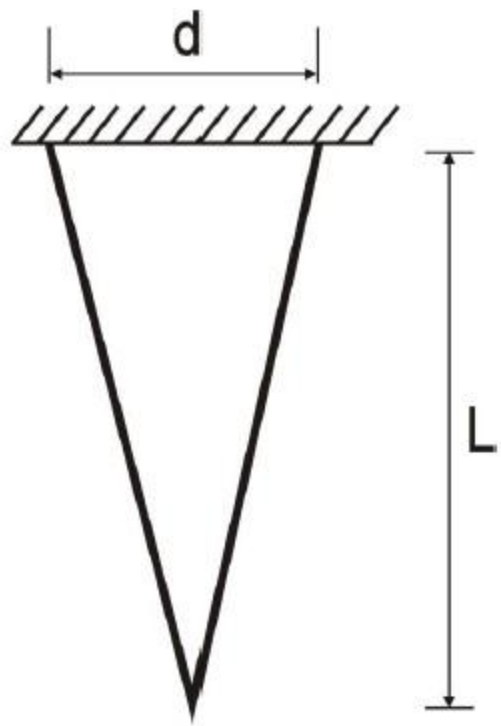
Para calcular el acortamiento total del pilar, aplicamos el Principio de Superposición de Cargas e integramos en el caso del peso propio por cada tramo, así como el efecto de que el peso propio de la parte superior después de su acción se convierte en carga puntual para el otro tramo.

$$\delta = \frac{380.16}{240000.5,86} + \frac{380.16}{240000.9,05} + \int_0^{16} \frac{2,2.5,86.xdx}{240000.5,86} + \frac{206,272.16}{240000.9,05} + \int_0^{16} \frac{2,2.9,05.xdx}{240000.9,05} = 13,33.10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\delta = 13,33\mathrm{mm}$$

Nótese que el valor de 206,272kg es el resultado del peso propio total de la parte superior, que se ha convertido en puntual para el tramo inferior.

PROBLEMA 1.20 Obtener una fórmula para el alargamiento δ y la energía potencial de deformación U de una barra cónica de sección transversal circular bajo la acción de su propio peso, si la longitud de la barra es L, el peso específico por unidad de volumen es γ y el módulo de elasticidad es E.



Solución:

Analizamos el valor del diámetro a una distancia "x" del extremo libre:

$$d_x = \frac{dx}{L}$$

Luego:

$$V_x = \int_0^x A_x dx = \int_0^x \frac{\pi}{4} d_x^2 dx = \int_0^x \frac{\pi}{4}\left(\frac{dx}{L}\right)^2 dx = \frac{\pi d^2}{4L^2}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{\pi d^2 x^3}{12L^2}$$

Además:

$$P_x = \gamma V_x = \frac{\gamma \pi d^2 x^3}{12L^2}$$

En consecuencia, el alargamiento será:

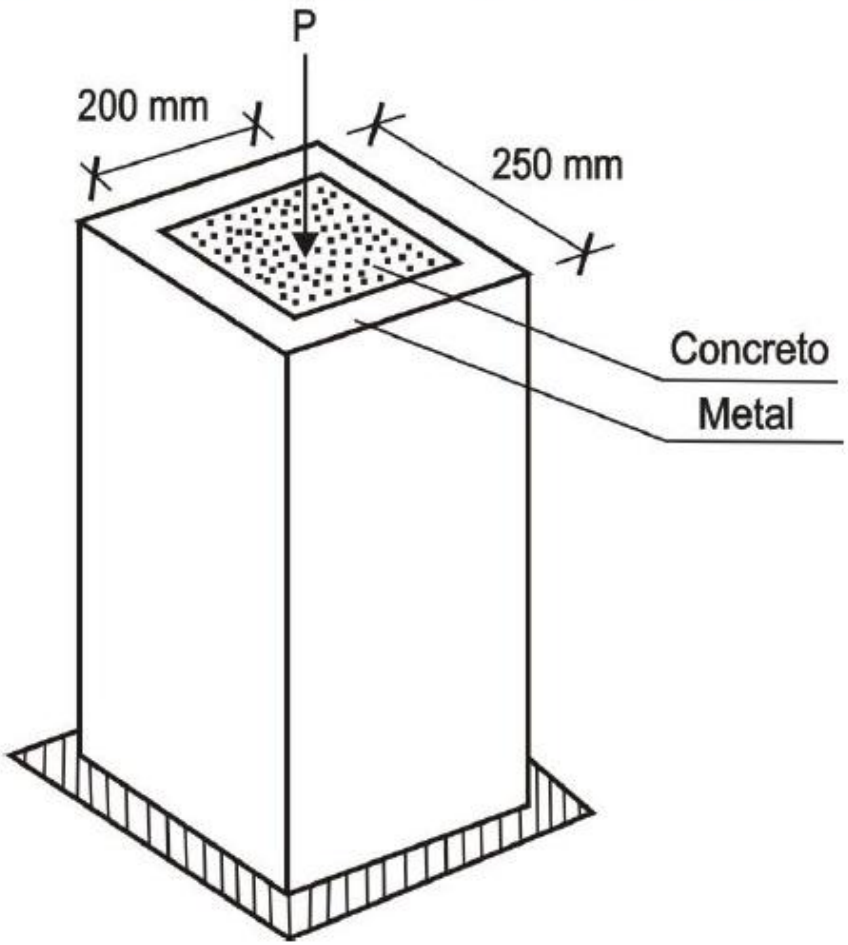
$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_0^L \frac{(\gamma \pi d^2 x^3 / 12L^2) dx}{E(\pi d^2 x^2 / 4L^2)} = \frac{\gamma}{E}\int_0^L \frac{x dx}{3} = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

La energía potencial de deformación se obtendrá mediante la siguiente fórmula:

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2 dx}{2EA_x} = \int_0^L \frac{(\gamma \pi d^2 x^3 / 12L^2)^2 dx}{2E(\pi d^2 x^2 / 4L^2)} = \frac{\gamma^2 \pi d^2}{72EL^2}\int_0^L x^4 dx = \frac{\gamma^2 \pi d^2 L^3}{360E}$$

1.3 ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

PROBLEMA 1.22 Una columna cuadrada se forma por una cubierta metálica de 25mm de espesor (dimensiones exteriores 250mm x 250mm y dimensiones interiores 200mm x 200mm) llena de concreto. La cubierta tiene un módulo elástico $E_1 = 84GPa$ y el relleno de concreto tiene un módulo de elasticidad $E_2 = 14GPa$. Determinar la máxima carga permisible P sobre la columna si los esfuerzos permisibles en el metal y en el concreto son 42MPa y 5,6MPa, respectivamente. Considerar que los esfuerzos en el metal y en el concreto están uniformemente distribuidos.



Solución:

Resolvemos en forma análoga al problema anterior:

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 + P_2 = P \qquad \text{(a)}$$

Donde:

P_1 - carga que soporta el metal

P_2 - carga que soporta el concreto

Además:

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} P_2 \qquad \text{(b)}$$

Reemplazamos (b) en (a):

$$P_2 \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \right) = P$$

$$P_2 = \frac{E_2A_2P}{E_1A_1 + E_2A_2}$$

En consecuencia:

$$P_1 = \frac{E_1A_1P}{E_1A_1 + E_2A_2}$$

Para el caso del metal, se tendrá:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_1$$

$$\frac{E_1P}{E_1A_1 + E_2A_2} \leq [\sigma]_1$$

De donde:

$$P \leq [\sigma]_1 \left(\frac{E_1A_1 + E_2A_2}{E_1} \right)$$

$$P \leq 42.10^6 \left(\frac{84.10^9.0{,}0225 + 14.10^9.0{,}04}{84.10^9} \right) = 1225000\text{N}$$

$$P \leq 1225\text{kN}$$

Siendo:

$$A_1 = \left(250^2 - 200^2\right)10^{-6}\text{m}^2 = 0{,}0225\text{m}^2$$

$$A_2 = 200^2.10^{-6}\text{m}^2 = 0{,}04\text{m}^2$$

Ahora analizamos el caso del concreto:

$$\sigma_2 \le [\sigma]_2$$

$$\frac{E_2P}{E_1A_1 + E_2A_2} \le [\sigma]_2$$

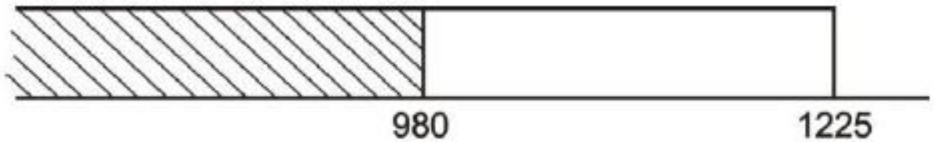
$$P \le [\sigma]_2\left(\frac{E_1A_1 + E_2A_2}{E_2}\right)$$

$$P \le 5{,}6.10^6\left(\frac{84.10^9.0{,}0225 + 14.10^9.0{,}04}{14.10^9}\right) = 980000N$$

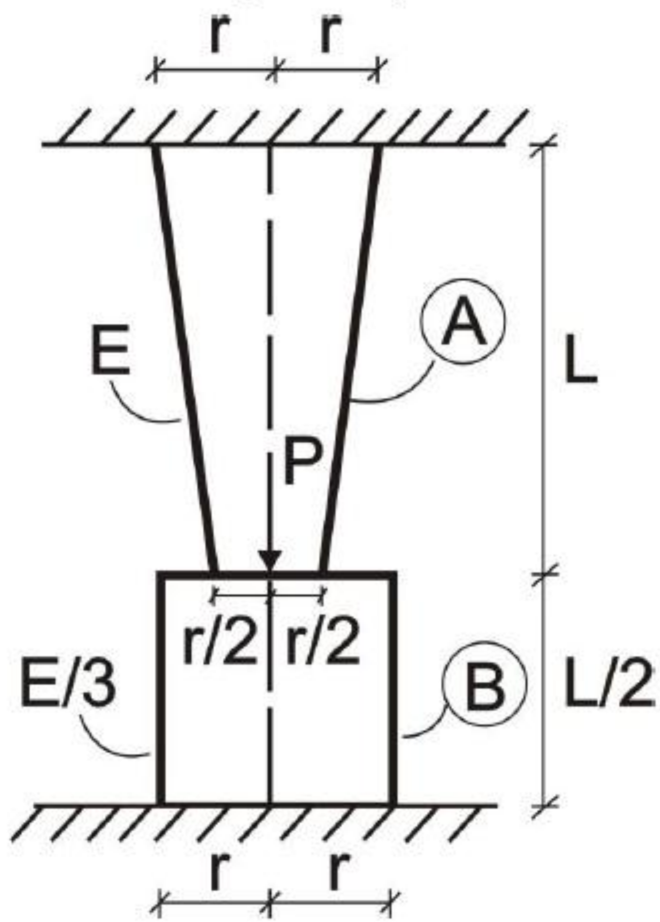
$$P \le 980kN$$

Luego, como solo existe una carga, debemos de ver el rango en el cual se cumple para ambos casos y de ahí se determina el valor admisible de la carga, que es:

$$P_{máx} = 980kN$$

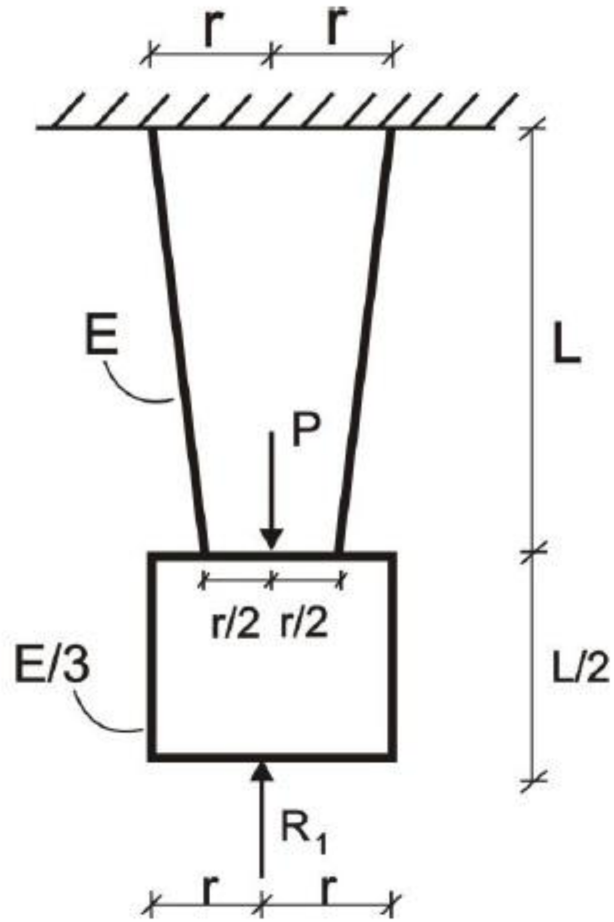


PROBLEMA 1.23 Para el sistema mostrado en la figura, determinar las reacciones en los empotramientos, graficar el diagrama de fuerza axial o normal, diagrama de esfuerzos y calcular la deformación de la barra B, indicando en el punto de aplicación de la carga la orientación de su desplazamiento. Considerar que la barra B es de sección circular de radio "r" y la barra A también es de sección circular, variando sus radios desde "r/2" hasta "r" en el empotramiento. Considerar que las barras A y B tienen módulos de elasticidad E y E/3 respectivamente.



Solución:

Eliminamos el empotramiento en la parte inferior y lo reemplazamos por su reacción R_1.



Ahora, analizamos la variación del diámetro en la barra de la parte superior:

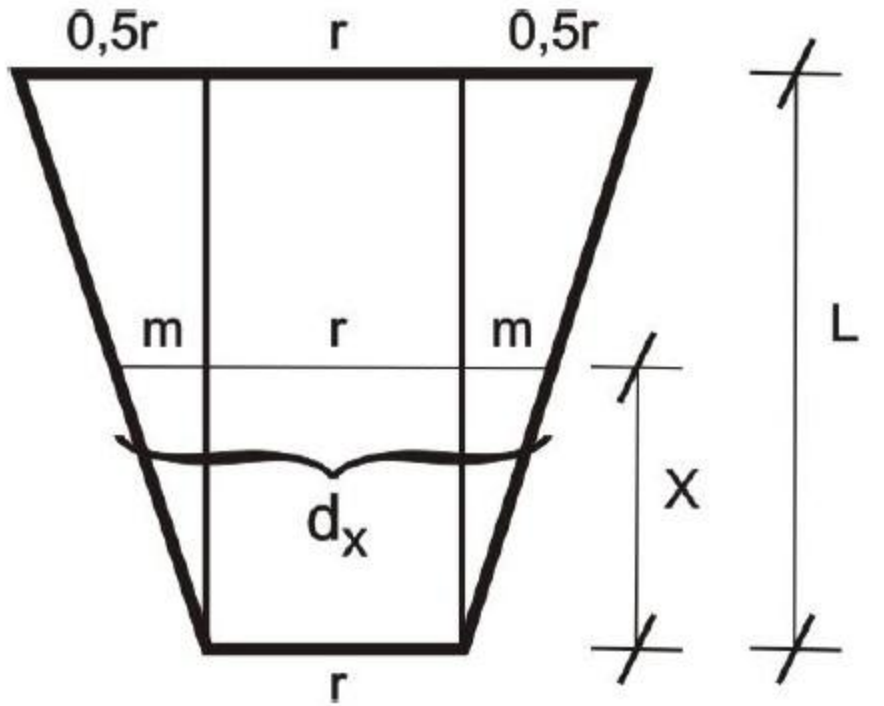


Fig. 1.46

$$\frac{m}{x} = \frac{0,5r}{L} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{0,5rx}{L}$$

Luego:

$$d_x = r + 2m = r + \frac{rx}{L} = r\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

Como en el empotramiento analizado se debe de cumplir que $\delta_1 = 0$, se tendrá:

$$-\frac{R_1(L/2)}{(E/3)(\pi/4)(2r)^2}-\int_0^L \frac{R_1 dx}{E(\pi/4)r^2(1+x/L)^2}+\int_0^L \frac{P dx}{E(\pi/4)r^2(1+x/L)^2}=0$$

Efectuando el proceso de integración obtenemos:

$$R_1 = \frac{4P}{7}\uparrow$$

$$R_2 = \frac{3P}{7}\uparrow$$

Con estos valores, graficamos el diagrama de fuerza axial o normal y el diagrama de esfuerzos en los puntos especiales.

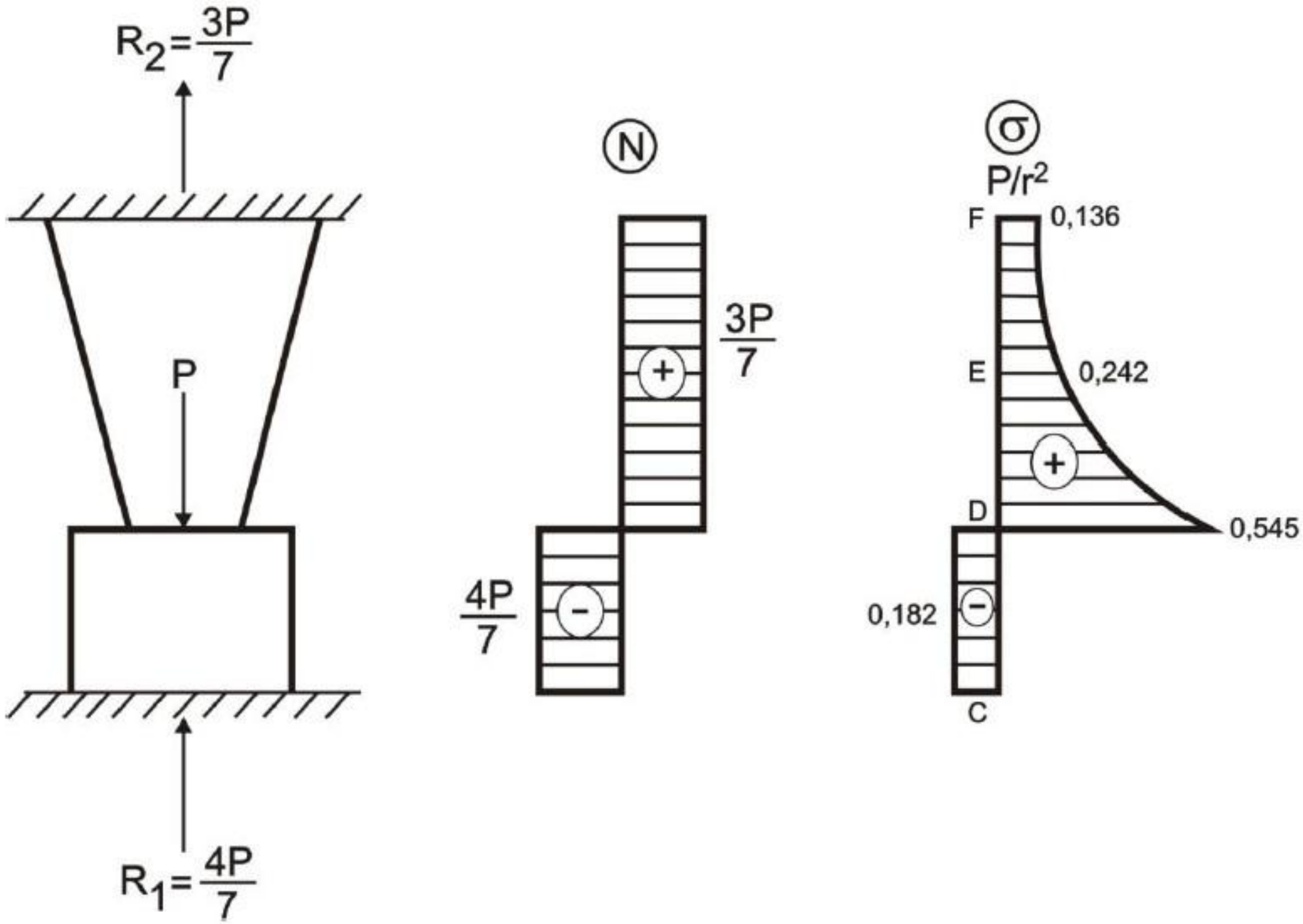
$$\sigma_C = \frac{(-4P/7)}{\pi r^2} = -0{,}182\frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_D^{(-)} = \frac{(-4P/7)}{\pi r^2} = -0{,}182\frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_D^{(+)} = \frac{(3P/7)}{\pi(r/2)^2} = 0{,}545\frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_E = \frac{(3P/7)}{\pi(3r/4)^2} = 0{,}242\frac{P}{r^2}$$

$$\sigma_F = \frac{(3P/7)}{\pi r^2} = 0{,}136\frac{P}{r^2}$$

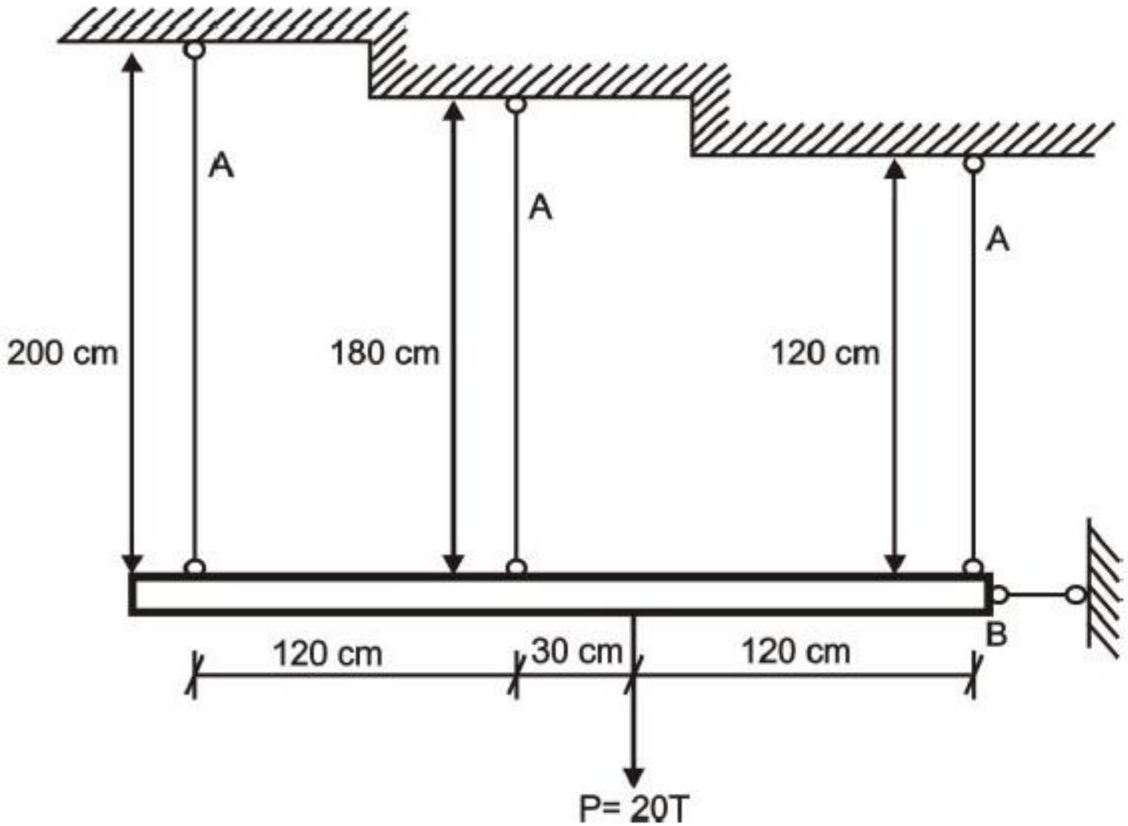


Ahora, calculamos el acortamiento que se produce en la barra CD del diagrama σ, obteniendo la dirección de orientación del punto de aplicación D de la carga; avanzando del extremo libre al empotramiento.

$$\delta_D = \frac{(-4P/7)(L/2)}{(E/3)\pi r^2} = -0{,}273\frac{PL}{Er^2} \downarrow$$

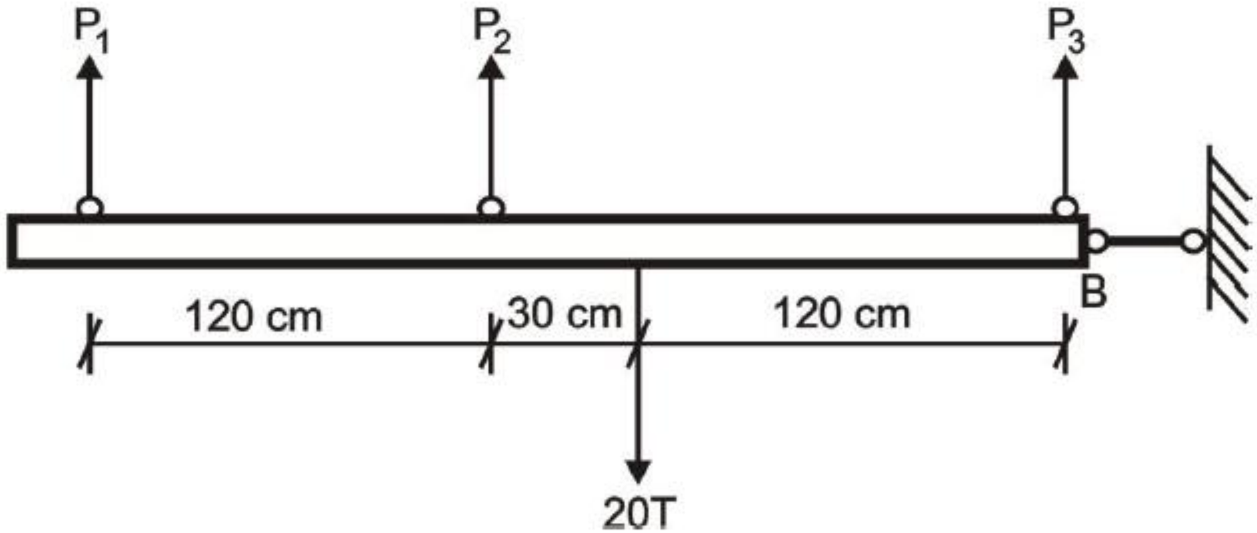
La dirección de la flecha indica el desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

PROBLEMA 1.24 Determinar el área de las secciones transversales de los cables que sostienen a la viga, si son de un mismo material y tienen la misma sección. Considerar $[\sigma]=1600\text{kgf}/\text{cm}^2$.



Solución:

Hacemos un corte en todos los cables y analizamos el equilibrio de la parte cortada:



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2{,}7P_1 + 1{,}5P_2 - 20.1{,}2 = 0$$

$$2{,}7P_1 + 1{,}5P_2 = 24 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = 20 \qquad \text{(b)}$$

Como podemos apreciar, tenemos tres incógnitas y solo dos ecuaciones, por ello, debemos de eliminar la indeterminación, a través del diagrama de desplazamientos de la estructura.

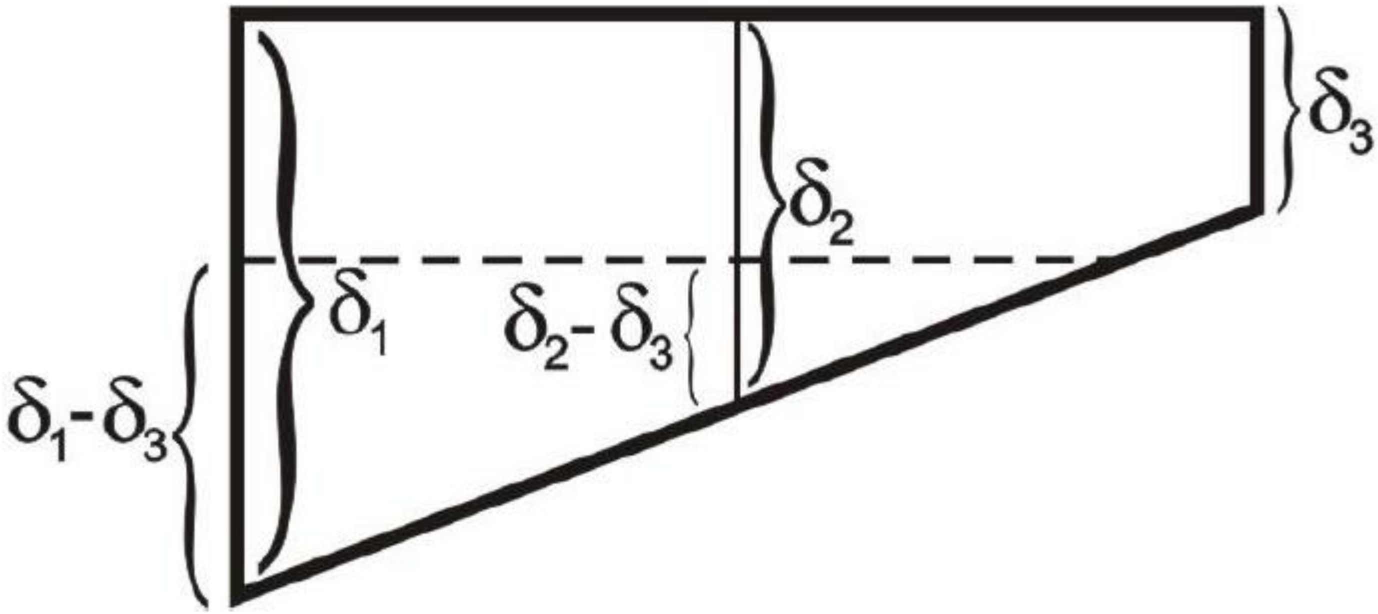
Por relación de triángulos, tendremos:

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{1{,}5} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2{,}7} \quad \Rightarrow \quad 1{,}5\delta_1 - 2{,}7\delta_2 + 1{,}2\delta_3 = 0$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$1{,}5\frac{P_1(2)}{EA}-2{,}7\frac{P_2(1{,}8)}{EA}+1{,}2\frac{P_3(1{,}2)}{EA}=0$$

$$3P_1-4{,}86P_2+1{,}44P_3=0 \qquad \text{(c)}$$



Resolvemos las ecuaciones (a), (b), (c) y obtenemos:

$$P_1=5{,}58T$$

$$P_2=5{,}95T$$

$$P_3=8{,}47T$$

Ahora, analizamos cada cable en forma separada:

CABLE 1:

$$\frac{5{,}58.10^3}{A} \leq 1600 \qquad \Rightarrow \qquad A \geq 3{,}49\text{cm}^2$$

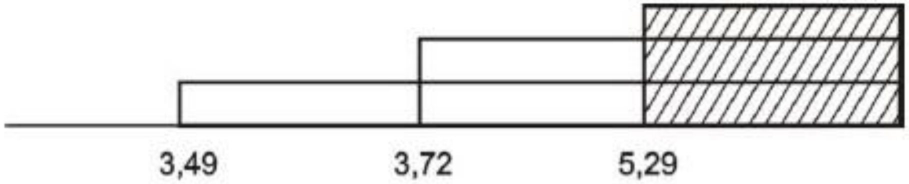
CABLE 2:

$$\frac{5{,}95.10^3}{A} \leq 1600 \qquad \Rightarrow \qquad A \geq 3{,}72\text{cm}^2$$

CABLE 3:

$$\frac{8{,}47.10^3}{A} \leq 1600 \qquad \Rightarrow \qquad A \geq 5{,}29\text{cm}^2$$

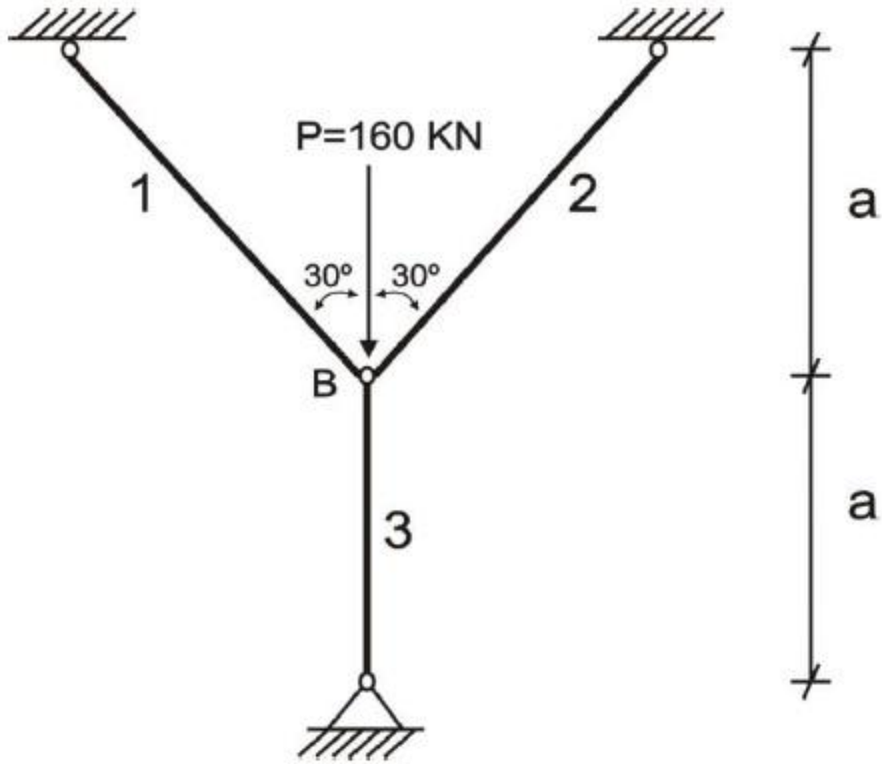
Como el área es la misma para los tres cables, entonces veremos el valor que cumpla con los tres casos, de acuerdo al siguiente intervalo:



De esta manera, asumimos que el área es:

$$A = 5{,}30\text{cm}^2$$

PROBLEMA 1.25 Determinar las áreas de las secciones transversales de la siguiente estructura, si $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = 2A$ y $[\sigma] = 140\text{MPa}$. Considerar que las tres barras son del mismo material.



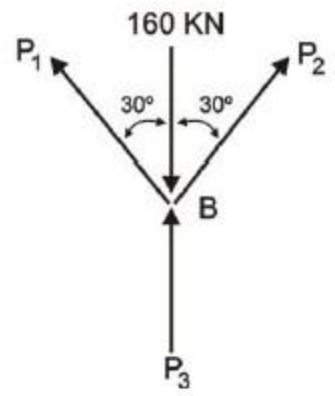
Solución:

Analizamos el equilibrio del nudo B:

$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = P_2$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (P_1 + P_2)\cos 30^0 + P_3 = 160$$

$$\sqrt{3}P_1 + P_3 = 160 \qquad \text{(a)}$$



Como existen dos incógnitas y una sola ecuación, porque la anterior igualdad $P_1 = P_2$ se utilizó en la obtención de la ecuación (a), debemos de analizar el diagrama de desplazamientos y resolver la indeterminación del sistema:

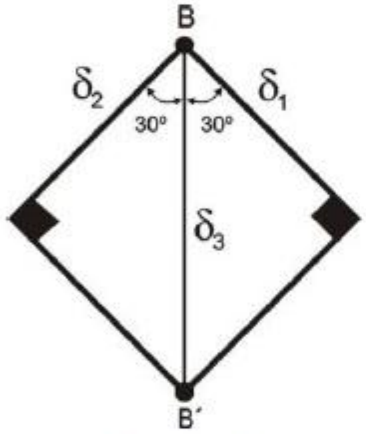


Fig. 1.54

$$\delta_3 \cos 30^0 = \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{P_3.a}{E.2A}\right] = \frac{P_1}{EA}\left(\frac{a}{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$P_1 = \frac{3}{8}P_3 \qquad \text{(b)}$$

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$P_1 = P_2 = 36{,}375\text{kN} \ \text{(TRACCION)}$$

$$P_3 = 97\text{kN} \ \text{(COMPRESION)}$$

Luego, analizamos en forma separada las barras 1, 2 y 3.

BARRAS 1 y 2:

$$\frac{36{,}375.10^3}{A} \leq 140.10^6 \quad \Rightarrow \quad A \geq 2{,}6.10^{-4}\,m^2$$

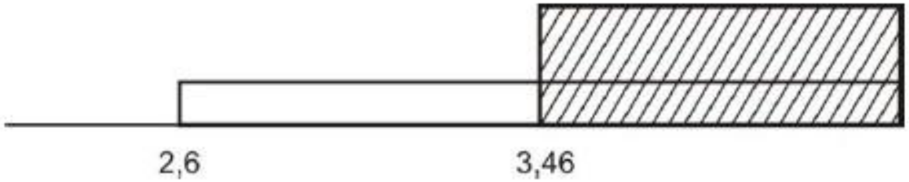
$$A \geq 2{,}6cm^2$$

BARRA 3:

$$\frac{97.10^3}{2A} \leq 140.10^6 \quad \Rightarrow \quad A \geq 3{,}46.10^{-4}\,m^2$$

$$A \geq 3{,}46cm^2$$

De donde:



Asumimos:

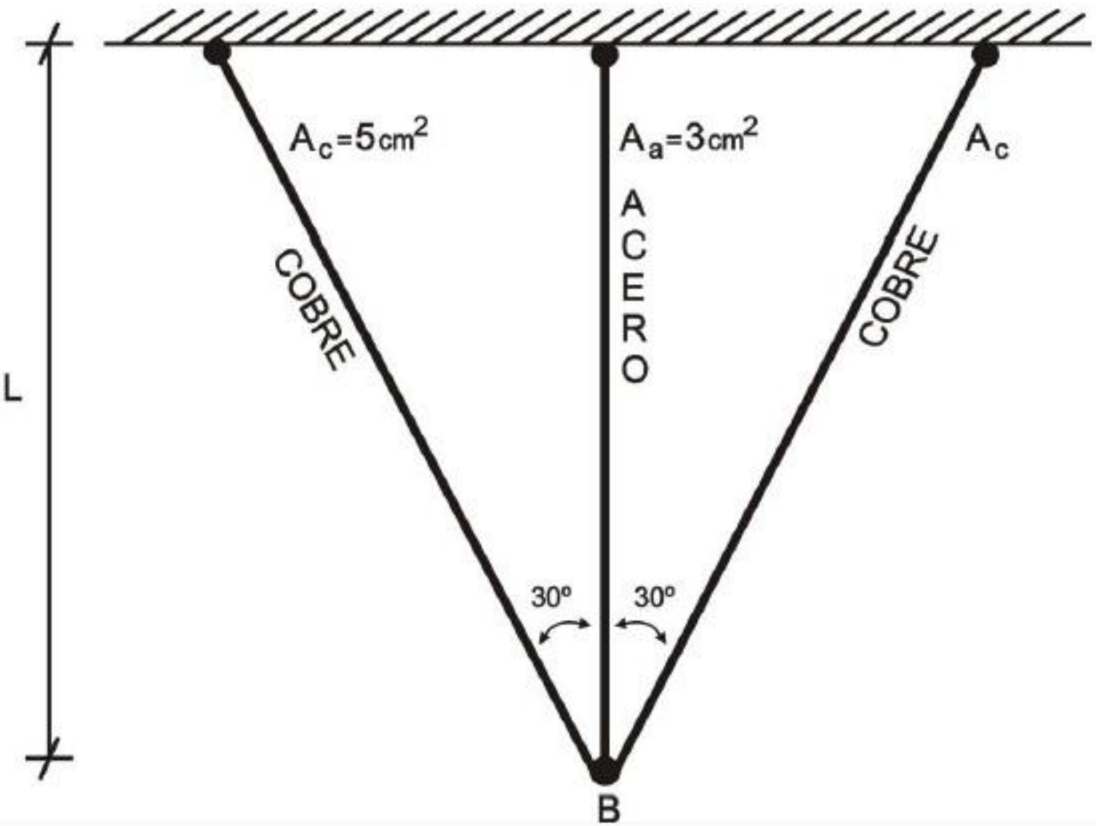
$$A_1 = A_2 = A = 3{,}46cm^2$$

$$A_3 = 2A = 6{,}92cm^2$$

1.4 ESFUERZOS DE TEMPERATURA

PROBLEMA 1.27 Determinar los esfuerzos que surgen en las barras del sistema estructural, si después de haber sido montado, fueron calentados a $\Delta T = 40^0 C$. Considerar que sus coeficientes de dilatación térmica y módulos de elasticidad para el acero y el cobre son respectivamente

$$\alpha_a = 125.10^{-7}\left(\frac{1}{^0C}\right),\ \alpha_c = 165.10^{-7}\left(\frac{1}{^0C}\right),\ E_a = 2.10^6 kgf/cm^2 \text{ y } E_c = 10^6 kgf/cm^2.$$



Solución:

Hacemos un corte y analizamos el equilibrio del nudo B:

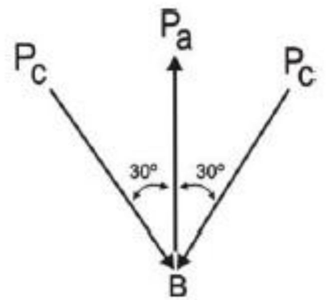
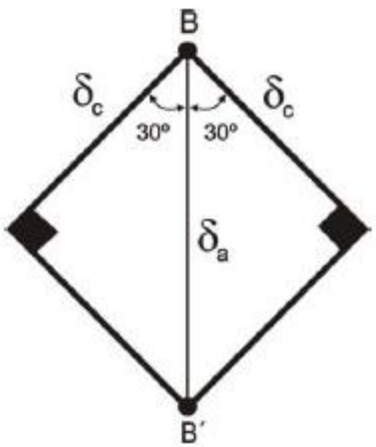


Fig. 1.57

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2P_c.\cos 30^0 = P_a$$

$$P_a = \sqrt{3}P_c$$

Efectuamos el diagrama de desplazamientos, para resolver la indeterminación del sistema, pero basándonos en el cambio de temperatura.



$$\delta_a \cos 30^0 = \delta_c$$

$$\left[\alpha_a.(\Delta T).L_a + \frac{P_a L_a}{E_a A_a}\right]\cos 30^0 = \alpha_c.(\Delta T).L_c - \frac{P_c L_c}{E_c A_c}$$

$$\left[125.10^{-7}.40.L + \frac{\sqrt{3}P_c.L}{2.10^6.3}\right]\frac{\sqrt{3}}{2} = 165.10^{-7}.40.\left(\frac{L}{\sqrt{3}/2}\right) - \frac{P_c}{10^6.5}\left(\frac{L}{\sqrt{3}/2}\right)$$

De donde:

$$P_c = 684{,}27\text{kgf} \quad \text{(COMPRESION)}$$

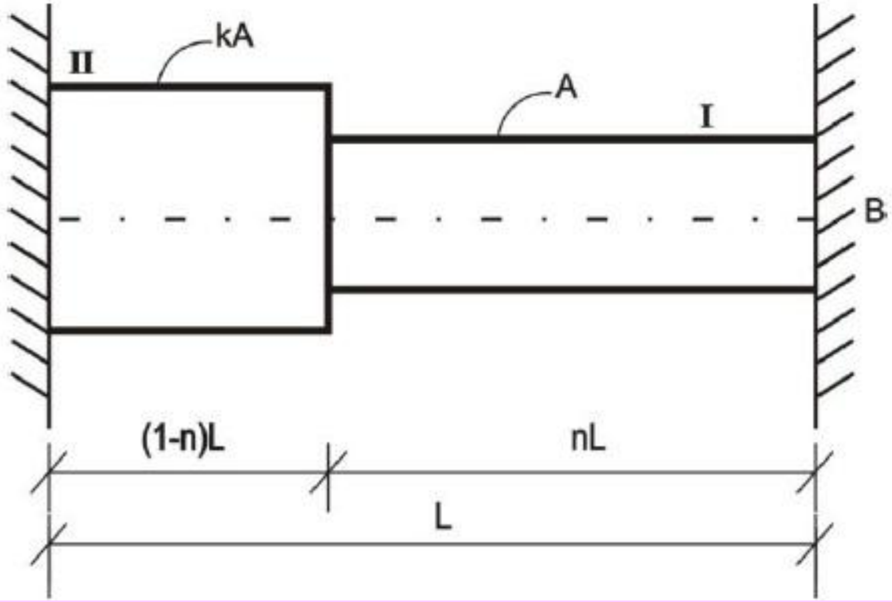
$$P_a = 1185{,}19\text{kgf} \quad \text{(TRACCION)}$$

Luego:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{1185{,}19}{3} = 395{,}06\text{kgf}/\text{cm}^2$$

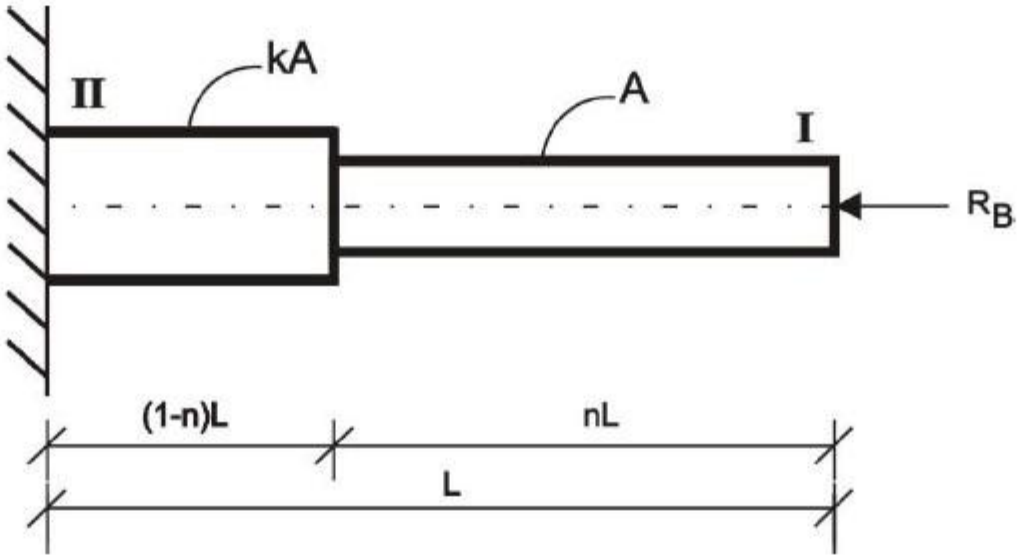
$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = -\frac{684{,}27}{5} = -136{,}85\text{kgf}/\text{cm}^2$$

PROBLEMA 1.28 Para la barra escalonada doblemente empotrada, determinar los esfuerzos σ_I y σ_{II}, debido al calentamiento en ΔT, si su módulo de elasticidad del material es E y el coeficiente de dilatación térmica es α.



Solución:

Eliminamos el empotramiento en B y lo reemplazamos por su reacción R_B.



Por ser un empotramiento, el desplazamiento en dicho punto es cero, luego:

$$\alpha.(\Delta T).L - \frac{R_B.(nL)}{EA} - \frac{R_B.(1-n)L}{EkA} = 0$$

Por ser un empotramiento, el desplazamiento en dicho punto es cero, luego:

$$\alpha.(\Delta T).L - \frac{R_B.(nL)}{EA} - \frac{R_B.(1-n)L}{EkA} = 0$$

De donde:

$$R_B = \frac{\alpha.(\Delta T).EA}{n + \frac{1-n}{k}} \text{ (COMPRESION)}$$

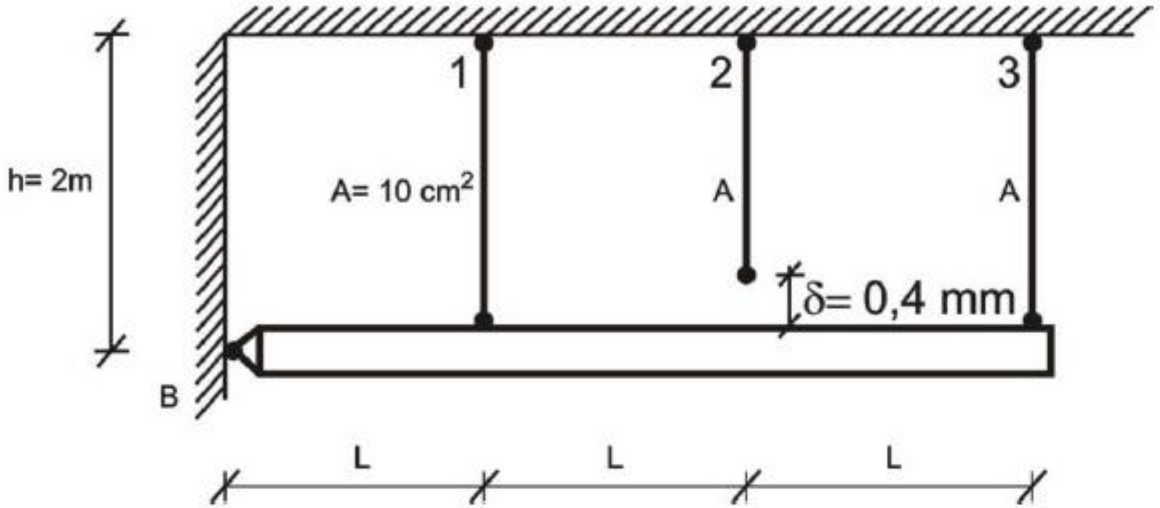
En consecuencia:

$$\sigma_I = -\frac{R_B}{A} = -\frac{\alpha.(\Delta T).E}{n + \frac{1-n}{k}}$$

$$\sigma_{II} = -\frac{R_B}{kA} = -\frac{\alpha.(\Delta T).E}{kn + 1 - n} = -\frac{\alpha.(\Delta T).E}{n.(k-1)+1}$$

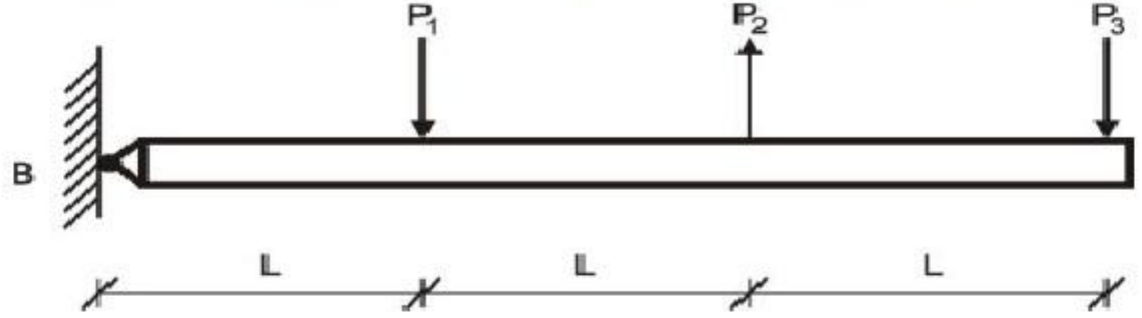
1.5 ESFUERZOS DE MONTAJE

PROBLEMA 1.29 Determinar los esfuerzos que surgen en las barras de acero, después de haberse efectuado el montaje del sistema estructural, si la barra 2 fue fabricada en $\delta = 0{,}4\text{mm}$ menor de lo proyectado. Considerar $E_a = 2.10^6 \text{kgf}/\text{cm}^2$.



Solución:

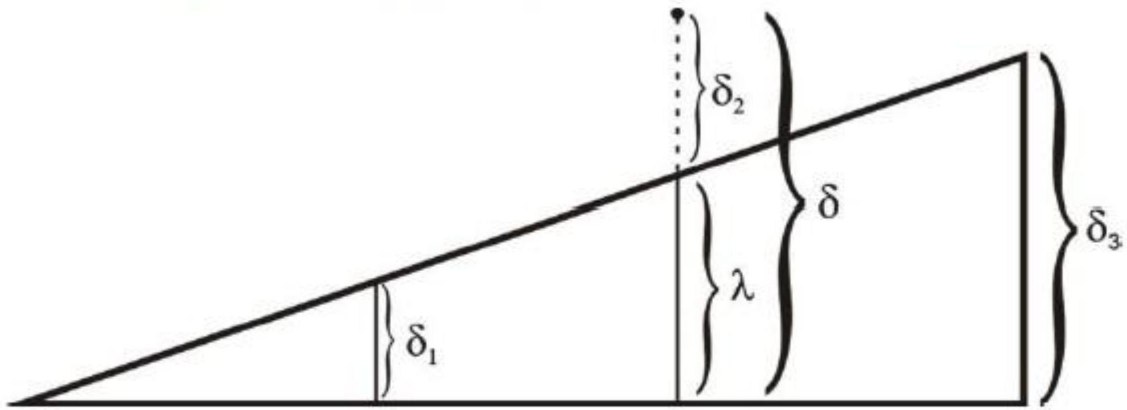
Efectuamos el montaje del sistema y hacemos un corte en todas las barras:



$$\sum M_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1(L) + P_3(3L) - P_2(2L) = 0$$

$$P_1 - 2P_2 + 3P_3 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Analizamos el diagrama de desplazamientos:



Del gráfico:

$$\lambda + \delta_2 = \delta \qquad \text{(b)}$$

Por relación de triángulos:

$$\frac{\delta_1}{L} = \frac{\lambda}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2\delta_1 \qquad \text{(c)}$$

Reemplazamos (c) en (b) y obtenemos:

$$2\delta_1 + \delta_2 = \delta$$

$$2\frac{P_1 h}{EA} + \frac{P_2 h}{EA} = \delta$$

$$2\frac{P_1.(200)}{2.10^6.10} + \frac{P_2.(200)}{2.10^6.10} = 0{,}04$$

$$2P_1 + P_2 = 4000 \qquad \text{(d)}$$

Además:

$$\frac{\delta_1}{L} = \frac{\delta_3}{3L} \qquad \Rightarrow \qquad 3\delta_1 = \delta_3$$

$$3\frac{P_1 h}{EA} = \frac{P_3 h}{EA}$$

$$P_3 = 3P_1 \qquad \text{(e)}$$

Reemplazamos (d) y (e) en la ecuación (a) y obtenemos:

$$P_1 = 571{,}43\text{kgf} \quad \text{(COMPRESION)}$$

$$P_2 = 2857{,}14\text{kgf} \quad \text{(TRACCION)}$$

$$P_3 = 1714{,}29\text{kgf} \quad \text{(COMPRESION)}$$

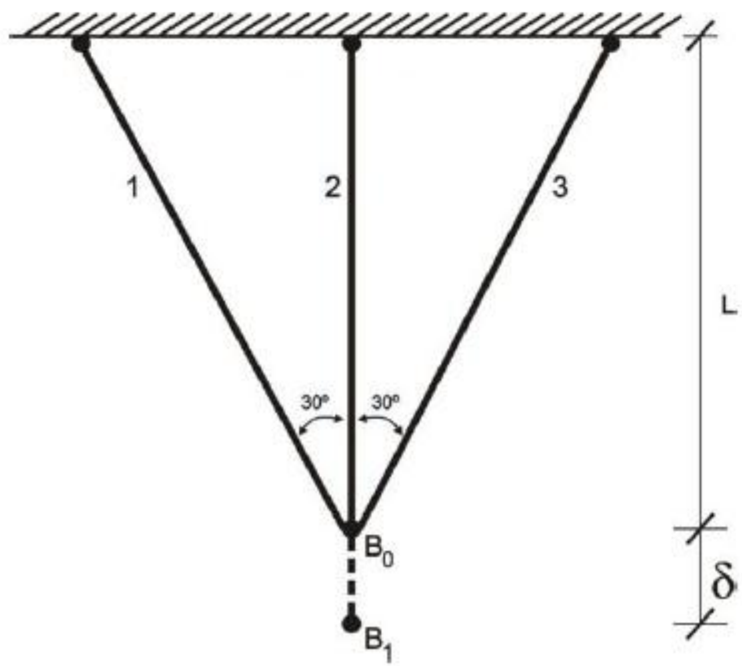
Luego:

$$\sigma_1 = -\frac{571{,}43}{10} = -57{,}143\text{kgf}/\text{cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{2857{,}14}{10} = 285{,}714\text{kgf}/\text{cm}^2$$

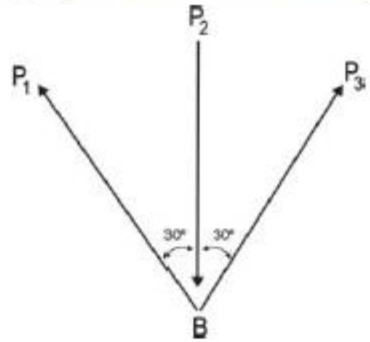
$$\sigma_3 = -\frac{1714{,}29}{10} = -171{,}429\text{kgf}/\text{cm}^2$$

PROBLEMA 1.30 En el sistema de barras de acero, la barra central fue fabricada mayor en $\delta = 7.10^{-4} L$ que su longitud proyectada. Determinar los esfuerzos en las barras después de efectuar el montaje de la estructura en B, con la condición de que son de áreas iguales. Considerar $E_a = 2.10^6 kgf / cm^2$.



Solución:

Se efectúa el montaje y analizamos el equilibrio del nudo B.



$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = P_3$$

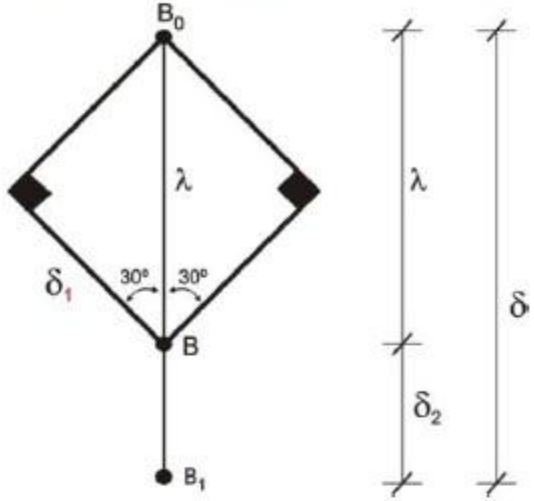
$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2P_1 \cos 30^0 = P_2$$

$$P_2 = \sqrt{3}P_1$$

Dividimos entre el área y obtenemos:

$$\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1 \qquad \text{(a)}$$

Ahora, analizamos el diagrama de desplazamientos:



Del gráfico tenemos:

$$\lambda = \frac{\delta_1}{\cos 30^0} \qquad \text{(b)}$$

Asimismo:

$$\delta = \delta_2 + \lambda$$

Reemplazamos (b) y obtenemos:

$$\delta = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\cos 30^0}$$

$$7.10^{-4}.L = \frac{P_2L}{E_aA} + \frac{P_1L}{E_aA\cos^2 30^0}$$

$$7.10^{-4}.2.10^6 = \sigma_2 + \frac{\sigma_1}{\cos^2 30^0}$$

Reemplazamos (a) en la expresión, obteniendo:

$$1400 = \sqrt{3}\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{0{,}75}$$

De donde:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 456{,}71\text{kgf} / \text{cm}^2 \quad \text{(TRACCION)}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1 = -791{,}04\text{kgf} / \text{cm}^2 \quad \text{(COMPRESION)}$$

¡MUCHAS GRACIAS!

_genner_vc@hotmail.com_