

Gere-Timoshenko

MECÁNICA DE MATERIALES

Segunda edición

Grupo Editorial Iberoamérica



Conversión de unidades USCS a unidades SI

Unidad USCS	Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI	
	Exacto	Práctico		
Aceleración pie por segundo cuadrado pie/s ² pulgada por segundo cuadrado plg/s ²	0.3048*	0.305	metro por segundo cuadrado m/s ² metro por segundo cuadrado m/s ²	
Área pie cuadrado pie ² pulgada cuadrada plg ²	0.09290304* 645.16*	0.0929 645	metro cuadrado m ² milimetro cuadrado mm ²	
Densidad (masa) slug por pie cúbico slug/pie ³	515.379	515	kilogramo por metro cúbico kg/m ³	
Energía; trabajo libra-pie pie·lb kilowatt-hora kWh Unidad térmica británica Btu	1.35582 3.6* 1055.06	1.36 3.6 1055	joule J megajoule MJ joule J	
Fuerza libra lb kip (1000 libras) k	4.44822 4.44822	4.45 4.45	newton N kilonewton kN	
Intensidad de fuerza libras por pie lb/pie kip por pie k/pie	14.5939 14.5939	14.6 14.6	newton por metro N/m kilonewton por metro kN/m	
Longitud pie pie pulgada plg milla	0.3048* 25.4* 1.609344*	0.305 25.4 1.61	metro m milimetro mm kilómetro km	
Masa Slug	14.5939	14.6	kilogramo kg	
Momento de una fuerza; torque pie-libra pie·lb pulgada-libra plg·lb pie-kip pie·k pulgada-kip plg·k	1.35582 0.112985 1.35582 0.112985	1.36 0.113 1.36 0.113	newton metro N·m newton metro N·m kilonewton metro kN·m kilonewton metro kN·m	
Momento de inercia (masa) slug pie cuadrado	1.35582	1.36	kilogramo metro cuadrado kg·m ²	
Momento de inercia (segundo momento de área) pulgada a la cuarta potencia plg ⁴ pulgada a la cuarta potencia plg ⁴	416.231 0.416231 × 10 ⁻⁶	416,000 0.416 × 10 ⁻⁶	milimetro a la cuarta potencia mm ⁴ metro a la cuarta potencia m ⁴	

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

MECÁNICA DE MATERIALES

Segunda edición

James M. Gere

STANFORD UNIVERSITY

Stephen P. Timoshenko (†)

STANFORD UNIVERSITY

Traductor:

M. en I. JOSÉ GARCÍA GONZÁLEZ

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México (U.N.A.M.)

Revisor Técnico:

M. en C. CARLOS MAGDALENO DOMÍNGUEZ

Escuela Superior de

Ingeniería y Arquitectura (E.S.I.A.)

Instituto Politécnico Nacional (I.P.N.)

Grupo Editorial Iberoamérica

Río Atoyac 32 - 06900 México, DF - Tel. 213128



MECÁNICA DE MATERIALES — Segunda edición

Versión en español de la obra *Mechanics of Materials — Second Edition*,
por James M. Gere & Stephen P. Timoshenko.

Edición original en inglés publicada por PWS Publishers,

Copyright © 1984, en Estados Unidos de América.

ISBN 0-534-03099-8

D. R. © 1986 por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. y/o
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, Belmont, California 94002.

Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, archivada o transmitida
en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico,
de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro,
sin el previo y expreso permiso por escrito de Grupo Editorial Iberoamérica y/o
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, división de Wadsworth, Inc.

ISBN 968-7270-16-0

Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.

Productor: Oswaldo Ortiz R.

Cubierta: Jamie Sue Brooks

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Río Atoyac No. 32 - Col. Cuauhtémoc - 06500 México, D.F.

Apdo. 5-192 - Tels. 2113128, 5530798

Reg. CNIEM 1382

620.1
6367:2
L3

Prólogo

Un curso de mecánica de materiales ofrece la oportunidad de alcanzar dos objetivos: primero, enseñar a los estudiantes un tema básico de ingeniería y, segundo, desarrollar sus habilidades analíticas para resolver problemas. En la preparación de esta nueva edición tuve presente ambas metas. Los datos, teorías y metodologías se presentan en forma didáctica y de amena lectura, tratados en forma amplia y con numerosos ejemplos ilustrativos, de tal manera que los estudiantes puedan asimilarlos con facilidad. Igualmente, se destacan los conceptos fundamentales y el análisis de sistemas mecánicos y estructurales. Muchos ejemplos y problemas requieren la iniciativa de los estudiantes para su interpretación.

Este texto abarca todos los temas habituales de la mecánica de materiales y los presenta en el nivel adecuado para el curso introductorio de estudiantes de ingeniería. Además, se incluye abundante material de índole especializada y más avanzada. Por lo tanto, este libro puede utilizarse como texto y como referencia permanente.

Una revisión del contenido revelará los temas tratados y la forma en que se estructuraron. Los temas incluyen el análisis y diseño de miembros estructurales sometidos a cargas axiales, torsión y flexión, además de conceptos fundamentales como son esfuerzo, deformación, comportamiento elástico e inelástico, y energía de deformación. Otros temas de interés general son las transformaciones de esfuerzos y de deformaciones, deflexiones de vigas, comportamiento de columnas y métodos energéticos. Algunos aspectos más especializados son efectos térmicos y deformaciones previas, recipientes a presión, miembros no prismáticos, flexión asimétrica, centro de cortante, flexión inelástica y funciones de discontinuidad.

En el libro se incluye mucho más material del que puede cubrirse en un curso de duración normal, por lo que los maestros tienen la opción de seleccionar los temas que consideren fundamentales y más relevantes. Los maestros advertirán también los numerosos problemas nuevos (más de 1000 en total), disponibles para tareas fuera de clases y ejercicios en el aula.

En los ejemplos numéricos y problemas se usan tanto el Sistema Internacional de Unidades (SI) como el Sistema Inglés (U.S. Customary System, USCS). En el apéndice se proporcionan explicaciones de ambos sistemas y una tabla de factores de conversión.

En la parte final del libro se han recopilado referencias y notas biográficas. En ellas se incluyen las fuentes originales del material temático y notas biográficas acerca de los ingenieros, científicos y matemáticos pioneros quienes plantearon inicialmente los temas.

BIBLIOTECA CENTRAL (Universidad) Q. 30.36 17 MAY. 1990

47.H.C.

44303

(90)

v

Este libro es nuevo en el sentido de que presenta en una forma cabalmente novedosa la mecánica de materiales; no obstante, en otro sentido es un clásico ya que se deriva de libros previos del Profesor Stephen P. Timoshenko (1878-1972). El primer libro de Timoshenko sobre mecánica de materiales fue publicado en Rusia en 1908. Su primer libro americano sobre el tema fue publicado en dos volúmenes en 1930 por D. Van Nostrand Company con el título *Strength of Materials (Resistencia de Materiales)*; la segunda edición de éstos fue publicada en 1940 y 1941 respectivamente, y la tercera edición en 1955 el volumen I y 1956 el II. La primera edición de *Mechanics of Materials (Mecánica de Materiales)*, preparada por mí, pero basada en los libros mencionados, se publicó en 1972.

Esta segunda edición ha sido reescrita completamente con explicaciones ampliadas y de fácil lectura, mayor número de ejemplos y problemas, y varios temas de actualidad (incluyendo recipientes a presión, funciones de discontinuidad y pandeo inelástico). Se ha hecho el máximo esfuerzo por evitar erratas, pero es indudable que unas cuantas son inevitables. Si usted logra detectar alguna, por favor anótela y hágasela conocer al editor para así corregirla de inmediato en la siguiente impresión.

Reconocer la contribución de cada una de las personas que contribuyeron a la realización de este libro es evidentemente imposible, pero debo reconocer en gran medida a mis maestros de Stanford (aquellos gigantes de la mecánica, incluyendo el mismo Timoshenko, Wilhelm Flügge, James Norman Goodier, Miklós Hetényi, Nicholas J. Hoff y Donovan H. Young), de quienes aprendí mucho, e igualmente a mis colegas de Stanford (especialmente Ed Kavazanjian, Tom Kane, Anne Kiremidjian, Helmut Krawinkler, Jean Mayers, Cedric Richards, Hareesh Shah y Bill Weaver), quienes aportaron sugerencias para el libro e hicieron contribuciones durante su elaboración. Varios revisores y amigos (incluyendo a Jim Harp, Ian Johnston, Hugh Keedy y Aron Zaslavsky) proporcionaron valiosos comentarios, y dedicados estudiantes graduados (Thalia Anagnos, João Azevedo, Fouad Bendimerad y Hassan Hadidi-Tamjed), corrigieron las pruebas. El manuscrito fue cuidadosamente mecanografiado por Susan Gere Durham, Janice Gere, Lu Ann Hall y Laurie Yadon. La edición y producción fueron manejadas con gran esmero y espíritu de cooperación por Ray Kingman de Brooks/Cole y Mary Forkner de Publication Alternatives, Palo Alto. Mi esposa Janice me alentó permanentemente con gran paciencia durante todo el proyecto. Asimismo lo hicieron otros miembros de la familia —Susan y DeWitt Durham, Bill Gere y David Gere. A toda esta gente maravillosa me complazco en expresar mi gratitud.

James M. Gere

Contenido

Al estudiante	xiii
Lista de símbolos	xv

CAPÍTULO 1

Tensión, compresión y cortante	1
1.1 Introducción	1
1.2 Esfuerzo normal y deformación	3
1.3 Diagramas esfuerzo-deformación	9
1.4 Elasticidad y plasticidad	18
1.5 Elasticidad lineal y ley de Hooke	21
1.6 Esfuerzo cortante y deformación angular	25
1.7 Esfuerzos permisibles y cargas permisibles	30
Problemas	36

CAPÍTULO 2

Miembros cargados axialmente	49
2.1 Introducción	49
2.2 Deflexiones de miembros cargados axialmente	50
2.3 Diagrama de desplazamiento	56
2.4 Estructuras estáticamente indeterminadas (método de flexibilidades)	59
2.5 Estructuras estáticamente indeterminadas (método de rigideces)	66
2.6 Efectos de la temperatura y deformaciones previas	71
2.7 Esfuerzos sobre secciones inclinadas	81

2.8	Energía de deformación	88
*2.9	Carga dinámica	95
*2.10	Comportamiento no lineal	104
	Problemas	111

CAPÍTULO 3

Torsión		139
3.1	Introducción	139
3.2	Torsión de barras circulares	140
3.3	Torsión no uniforme	146
3.4	Cortante puro	150
3.5	Relación entre los módulos de elasticidad E y G	156
3.6	Transmisión de potencia por medio de flechas circulares	158
3.7	Miembros estáticamente indeterminados sujetos a torsión	161
3.8	Energía de deformación en cortante puro y torsión	165
3.9	Tubos de pared delgada	170
*3.10	Torsión no lineal de barras circulares	177
	Problemas	180

CAPÍTULO 4

Fuerza cortante y momento flexionante		193
4.1	Tipos de vigas	193
4.2	Fuerza cortante y momento flexionante	196
4.3	Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante	201
4.4	Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante	205
	Problemas	212

CAPÍTULO 5

Esfuerzos en vigas		219
5.1	Introducción	219
5.2	Deformaciones normales en vigas	222
5.3	Esfuerzos normales en vigas	226
5.4	Formas de sección transversal de vigas	236
5.5	Esfuerzos cortantes en vigas rectangulares	242
5.6	Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines	249
*5.7	Esfuerzos cortantes en vigas circulares	253
5.8	Vigas armadas	256

*5.9	Esfuerzos en vigas no prismáticas	259
*5.10	Vigas compuestas	266
5.11	Vigas con cargas axiales	276
	Problemas	282

CAPÍTULO 6

Análisis de esfuerzo y deformación	299	
6.1	Introducción	299
6.2	Esfuerzo plano	300
6.3	Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos	308
6.4	Círculo de Mohr para esfuerzo plano	316
6.5	Ley de Hooke para esfuerzo plano	325
6.6	Recipientes esféricos y cilíndricos sometidos a presión (esfuerzo biaxial)	329
6.7	Cargas combinadas (esfuerzo plano)	337
6.8	Esfuerzos principales en vigas	339
6.9	Esfuerzo triaxial	342
*6.10	Esfuerzo tridimensional	346
6.11	Deformación plana	350
	Problemas	362

CAPÍTULO 7

Deflexiones de vigas	377	
7.1	Introducción	377
7.2	Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión	377
7.3	Deflexiones mediante integración de la ecuación del momento flexionante	382
7.4	Deflexiones mediante integración de las ecuaciones de fuerza cortante y de carga	388
7.5	Método del área de momentos	392
7.6	Método de superposición	404
7.7	Vigas no prismáticas	409
7.8	Energía de deformación en flexión	412
*7.9	Funciones de discontinuidad	418
*7.10	Utilización de funciones de discontinuidad para obtener deflexiones de vigas	429
*7.11	Efectos de la temperatura	436
*7.12	Efectos de las deformaciones angulares	438
*7.13	Deflexiones grandes de vigas	445
	Problemas	449

CAPÍTULO 8

Vigas estáticamente indeterminadas	463
8.1 Vigas estáticamente indeterminadas	463
8.2 Análisis mediante las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión	465
8.3 Método del área de momentos	468
8.4 Método de superposición (método de flexibilidades)	473
8.5 Vigas continuas	481
*8.6 Efectos de la temperatura	488
*8.7 Desplazamientos horizontales en los extremos de una viga	490
Problemas	492

CAPÍTULO 9

Flexión asimétrica	503
9.1 Introducción	503
9.2 Vigas doblemente simétricas con cargas oblicuas	504
9.3 Flexión pura de vigas asimétricas	508
9.4 Teoría generalizada de flexión pura	516
9.5 Flexión de vigas mediante cargas laterales; centro de cortante	521
9.6 Esfuerzos cortantes en vigas de secciones transversales abiertas de pared delgada	525
9.7 Centros de cortante de secciones abiertas de pared delgada	531
*9.8 Teoría general para esfuerzos cortantes	538
Problemas	544

CAPÍTULO 10

Flexión inelástica	553
10.1 Introducción	553
10.2 Ecuaciones de flexión inelástica	554
10.3 Flexión plástica	555
10.4 Articulaciones plásticas	562
10.5 Análisis plástico de vigas	563
*10.6 Deflexiones	571
*10.7 Flexión inelástica	574
*10.8 Esfuerzos residuales	580
Problemas	582

CAPÍTULO 11

Columnas		591
11.1	Pandeo y elasticidad	591
11.2	Columnas con extremos articulados	593
11.3	Columnas con otras condiciones de apoyo	601
11.4	Columnas con cargas axiales excéntricas	608
11.5	Fórmula de la secante	612
*11.6	Imperfecciones en columnas	617
11.7	Comportamiento elástico e inelástico de columnas	619
*11.8	Pandeo inelástico	621
11.9	Fórmulas de diseño para columnas	627
	Problemas	633

CAPÍTULO 12

Métodos energéticos		643
12.1	Introducción	643
12.2	Principio del trabajo virtual	643
12.3	Método de la carga unitaria para calcular desplazamientos	648
12.4	Teoremas de reciprocidad	663
12.5	Energía de deformación y energía complementaria	670
12.6	Métodos de energía de deformación	682
12.7	Métodos de energía complementaria	692
12.8	Segundo teorema de Castigliano	703
*12.9	Deflexiones por cortante en vigas	708
	Problemas	713

Referencias y notas biográficas	723
--	------------

APÉNDICE A	Sistemas de unidades	736
	A.1 Introducción	736
	A.2 Unidades SI	737
	A.3 Unidades del Sistema Inglés	738
	A.4 Conversiones	742
APÉNDICE B	Digitos significativos	745
	B.1 Digitos significativos	745
	B.2 Redondeo de números	747

APÉNDICE C	Centroides y momentos de inercia de áreas planas	748
	C.1 Centroides de áreas	748
	C.2 Centroides de áreas compuestas	751
	C.3 Momentos de inercia de áreas	753
	C.4 Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia	756
	C.5 Momentos polares de inercia	759
	C.6 Productos de inercia	761
	C.7 Rotación de ejes	765
	C.8 Ejes principales	767
	Problemas	771
APÉNDICE D	Propiedades de áreas planas	775
APÉNDICE E	Propiedades de algunos perfiles estructurales de acero	780
APÉNDICE F	Propiedades de sección de madera estructural	786
APÉNDICE G	Deflexiones y pendientes de vigas	787
APÉNDICE H	Propiedades mecánicas de los materiales	793

	Respuestas a problemas seleccionados	799
	Índice onomástico	814
	Índice de materias	815

Al estudiante

Grupo Editorial Iberoamérica en su esfuerzo permanente de producir cada vez mejores textos, pone en tus manos esta nueva obra en la que se ha puesto la más alta calidad en los aspectos teórico y didáctico, así como en diseño y presentación, con el objetivo de proporcionarte la mejor herramienta, no sólo para facilitarte el aprendizaje sino también para hacerlo más estimulante.

Éste, como cualquiera de nuestros libros, ha sido cuidadosamente seleccionado para que encuentres en él un pilar de tu preparación y un complemento ideal a la enseñanza del maestro. Lo didáctico de la presentación de sus temas hace que lo consideres el mejor auxiliar, que llevas a todas partes.

Lo anterior es parte de nuestro propósito de ser partícipes en una mejor preparación de profesionales, contribuyendo así a la urgente necesidad de un mayor desarrollo de nuestros países hispanohablantes.

Sabemos que esta obra será fundamental en tu biblioteca y, tal vez, la más inmediata y permanente fuente de consulta.

Como uno de nuestros intereses principales es hacer mejores libros en equipo con profesores y estudiantes, agradeceremos tus comentarios y sugerencias o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de nuestras publicaciones.

*Grupo Editorial Iberoamérica
... presente en tu formación profesional*

Lista de símbolos

- A área, acción (fuerza o momento), constante
 a, b, c dimensiones, distancias, constantes
 C centroide, constante de integración, fuerza de compresión
 c distancia desde el eje neutro hasta la superficie externa de una viga
 D desplazamiento (traslación o rotación)
 d diámetro, dimensión, distancia
 E módulo de elasticidad, integral elíptica de segunda clase
 E_r módulo de elasticidad reducido
 E_t módulo de elasticidad tangencial
 e excentricidad, dimensión, distancia, cambio unitario de volumen (dilatación, deformación volumétrica)
 F fuerza, función de discontinuidad, integral elíptica de primera clase, flexibilidad
 f flujo de cortante, factor de forma para flexión plástica, flexibilidad, frecuencia (Hz)
 f_c factor de forma en cortante
 G módulo de elasticidad en cortante
 g aceleración de la gravedad
 H distancia, fuerza, reacción, caballos de potencia
 h altura, dimensión
 I momento de inercia (o segundo momento) de un área plana
 I_x, I_y, I_z momentos de inercia con respecto a los ejes x, y y z
 I_{xy} producto de inercia con respecto a los ejes x y y
 I_p momento polar de inercia
 I_1, I_2 momentos de inercia principales
 J constante torsional
 K módulo de elasticidad volumétrica, factor de longitud efectiva para una columna
 k constante de resorte, rigideces, símbolo para $\sqrt{P/EI}$
 L longitud, distancia, longitud del claro
 L_e longitud efectiva de una columna
 M momento flexionante, momento, masa
 M_p momento plástico para una viga

- M_r momento de fluencia para una viga
 m momento por unidad de longitud, masa por unidad de longitud
 N fuerza axial
 n factor de seguridad, número, relación, entero, revoluciones por minuto (rpm)
 O origen de coordenadas
 O' centro de curvatura
 P fuerza, carga concentrada, fuerza axial, potencia
 P_{perm} carga permisible (o carga de trabajo)
 P_{cr} carga crítica para una columna
 P_r carga de módulo reducido para una columna
 P_t carga de módulo tangencial para una columna
 P_u carga última
 P_f carga de fluencia
 p presión
 Q fuerza, carga concentrada, primer momento (o momento estático) de un área plana
 q intensidad de carga distribuida (carga por unidad de distancia), intensidad de torsión distribuida (torsión por unidad de distancia)
 q_u intensidad de carga última
 q_f intensidad de carga de fluencia
 R reacción, radio, fuerza
 r radio, distancia, radio de giro ($r = \sqrt{I/A}$)
 S módulo de sección de la sección transversal de una viga, centro de cortante, rigidez, fuerza
 s distancia, longitud de una línea curva
 T momento torsionante o torque, temperatura, fuerza de tensión
 T_u momento último
 T_f par de fluencia
 t espesor, tiempo
 U energía de deformación
 u densidad de energía de deformación (energía de deformación por unidad de volumen)
 u_r módulo de resiliencia
 u_t módulo de tenacidad
 U^* energía complementaria
 u^* densidad de energía complementaria (energía complementaria por unidad de volumen)
 V fuerza cortante, volumen
 v deflexión de una viga, velocidad
 $v', v'', \text{etc.}$ $dv/dx, d^2v/dx^2, \text{etc.}$
 W peso, trabajo

W^*	trabajo complementario
X	redundante estática
x, y, z	coordenadas rectangulares, distancias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	coordenadas del centroide
Z	módulo plástico de la sección transversal de una viga
α	ángulo, coeficiente de dilatación térmica, relación adimensional, constante de resorte, rigideces
α_s	coeficiente de cortante
β	ángulo, relación adimensional, constante de resorte, rigideces
γ	deformación angular, peso específico (peso por unidad de volumen)
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformaciones angulares en los planos xy , yz y zx
γ_θ	deformación angular para ejes inclinados
$\gamma_{x_1y_1}$	deformación angular en el plano x_1y_1
δ, Δ	deflexión, desplazamiento, alargamiento
ϵ	deformación normal
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	deformaciones normales en las direcciones x , y y z
ϵ_θ	deformación normal para ejes inclinados
$\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}$	deformaciones normales en las direcciones x_1 y y_1
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	deformaciones normales principales
ϵ_f	deformación de fluencia
θ	ángulo, ángulo de torsión por unidad de longitud, ángulo de rotación del eje de una viga
θ_p	ángulo a un plano principal o a un eje principal
θ_s	ángulo a un plano de esfuerzo cortante máximo
κ	curvatura ($\kappa = 1/\rho$)
κ_f	curvatura de fluencia
λ	distancia
ρ	radio, radio de curvatura, distancia radial en coordenadas polares, densidad de masa (masa por unidad de volumen, masa específica)
ν	relación de Poisson o módulo de Poisson
σ	esfuerzo normal
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	esfuerzos normales sobre planos perpendiculares a los ejes x , y y z
σ_θ	esfuerzo normal sobre secciones inclinadas
$\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}$	esfuerzos normales sobre planos perpendiculares a los ejes girados x_1y_1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	esfuerzos principales
σ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo)
σ_{cr}	esfuerzo crítico para una columna ($\sigma_{cr} = P_{cr}/A$)
σ_{sp}	esfuerzo para el límite de proporcionalidad
σ_r	esfuerzo residual
σ_u	esfuerzo último
σ_f	esfuerzo de fluencia

τ	esfuerzo cortante
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares a los ejes x, y y z y paralelos a los ejes y, z y x
τ_θ	esfuerzo cortante sobre secciones inclinadas
$\tau_{x_1y_1}$	esfuerzo cortante sobre un plano perpendicular al eje girado x_1 y paralelo al eje y_1
τ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo) en cortante
τ_u	esfuerzo último en cortante
τ_f	esfuerzo de fluencia en cortante
ϕ	ángulo, ángulo de torsión
ψ	relación adimensional
ω	velocidad angular, frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$)

* El asterisco indica una sección, ejemplo o problema difícil o complicado.

Alfabeto griego

A continuación se representa la escritura de cada una de las letras griegas. En la primera columna aparecen las mayúsculas; en la segunda y tercera aparecen dos maneras de escribir las minúsculas: la segunda de ellas es usada generalmente dentro del texto corrido, mientras que la otra se emplea en las fórmulas que están fuera del mismo.

A	α	α	Alpha	N	ν	ν	Nu
B	β	β	Beta	Ξ	ξ	ξ	Xi
Γ	γ	γ	Gamma	O	o	o	Omicron
Δ	δ	δ	Delta	Π	π	π	Pi
E	ϵ	ϵ	Epsilon	P	ρ	ρ	Rho
Z	ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	σ	Sigma
H	η	η	Eta	T	τ	τ	Tau
Θ	θ	θ	Theta	Υ	υ	υ	Upsilon
I	ι	ι	Iota	Φ	ϕ	ϕ	Phi
K	κ	κ	Kappa	X	χ	χ	Chi
Λ	λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	ψ	Psi
M	μ	μ	Mu	Ω	ω	ω	Omega

Tensión, compresión y cortante

1.1 INTRODUCCIÓN

La mecánica de materiales constituye una rama de la mecánica aplicada que estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a varios tipos de carga. Este campo del conocimiento tiene varias denominaciones, entre las que se incluyen "resistencia de materiales" y "mecánica de cuerpos deformables". Los cuerpos sólidos considerados en este texto comprenden miembros cargados axialmente, flechas (o ejes) sujetas a torsión, cascarones delgados, vigas y columnas, así como estructuras que forman parte de tales componentes. En general, los objetivos de este análisis serán la determinación de los esfuerzos, deformaciones y deflexiones producidos por las cargas. Si estas magnitudes pueden determinarse para todos los valores de carga, incluso hasta la carga de falla, entonces se tendrá un panorama completo del comportamiento mecánico del cuerpo.

Un conocimiento profundo del comportamiento mecánico es fundamental para el diseño confiable de cualquier estructura, como edificios y puentes, maquinaria y motores, submarinos y barcos o aviones y antenas. Por tanto, la mecánica de materiales constituye un tema básico en muchos campos de la ingeniería. Desde luego que la estática y la dinámica también son esenciales, pero tratan principalmente con fuerzas y movimientos relacionados con partículas y cuerpos rígidos. En mecánica de materiales es conveniente considerar los esfuerzos y deformaciones que presentan los cuerpos reales cuando se deforman bajo cargas. Se utilizan las propiedades físicas de los materiales (determinadas experimentalmente) así como numerosas leyes y conceptos técnicos, los cuales se explican en las siguientes secciones de este libro.

Los análisis teóricos y los resultados experimentales tienen funciones igualmente importantes en el estudio de la mecánica de materiales. A veces se realizan deducciones lógicas para establecer fórmulas y ecuaciones que predicen el comportamiento mecánico, pero se debe reconocer que tales fórmulas no pueden emplearse en forma realista a menos que se conozcan ciertas propiedades de los materiales. Estas propiedades son accesibles sólo mediante la realización de experimentos adecuados en el laboratorio. Asimismo, debido a que muchos problemas prácticos de gran impor-

tancia en ingeniería no pueden resolverse eficazmente mediante procedimientos teóricos, se requieren necesariamente las mediciones experimentales.

El desarrollo histórico de la mecánica de materiales constituye una combinación fascinante de teoría y experimentación; los experimentos, en ciertos casos, señalan el camino hacia resultados valiosos, mientras que la teoría lo hace en otros. Hombres célebres como Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642) realizaron experimentos para determinar la resistencia de alambres, barras y vigas, aunque no formularon ninguna teoría apropiada (conforme a las normas actuales) para explicar los resultados de sus pruebas. Tales teorías aparecieron mucho después. Como contraste, el famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló la teoría matemática de columnas y calculó la carga crítica teórica de una columna en 1744, mucho antes de que existiera alguna evidencia experimental que demostrara la relevancia de sus resultados. Así, a falta de pruebas apropiadas, los resultados de Euler permanecieron sin utilizarse durante muchos años, aunque actualmente constituyen las bases de la teoría de las columnas.*

Al estudiar mecánica de materiales en este libro se apreciará que la atención se concentra de modo natural en dos partes: primero, en comprender el ordenamiento lógico de los conceptos, y segundo, en aplicar tales conceptos a situaciones prácticas. Lo primero se logra mediante el estudio de las deducciones, discusiones y ejemplos, y lo segundo por medio de la resolución de problemas. Algunos de los ejemplos y problemas son de carácter numérico, y otros, algebraicos (o simbólicos). Una ventaja de los problemas numéricos es que los valores de todas las magnitudes son evidentes en cada etapa de los cálculos. Algunas veces tales valores son necesarios para asegurar que no se rebasen los límites prácticos (como los esfuerzos permisibles). Las soluciones algebraicas poseen también ciertas ventajas. Puesto que originan fórmulas, las soluciones algebraicas destacan las variables que afectan el resultado final. Por ejemplo, cierta magnitud podría cancelarse en la solución, hecho que no sería evidente en un problema numérico. También en las soluciones algebraicas se pone de manifiesto la forma en que las variables afectan los resultados, tal como la aparición de una variable en el numerador y otra en el denominador. Más aún, una solución simbólica permite verificar las magnitudes en cualquier etapa del cálculo. Finalmente, la razón más importante para lograr una solución algebraica es establecer una fórmula general que pueda programarse en una computadora y usarse para muchos problemas diferentes. Como contraste, una solución numérica sólo se aplica a un conjunto único de situaciones. Desde luego, se deben conocer ambas clases de soluciones, por lo que en este libro se encontrará una combinación de problemas numéricos y algebraicos.

Los problemas numéricos requieren que se trabaje con unidades específicas de medición. Este libro utiliza el Sistema Internacional de Unidades (SI) y el Sistema Usual de Unidades de Estados Unidos (USCS).¹ Una explicación de ambos sistemas de unidades se encuentra en el Apéndice A, donde también se presentan útiles tablas y factores de conversión. El tema de las cifras significativas, que es muy importante en ingeniería, se explica en el Apéndice B. Como allí se explica, los ejemplos de este libro se resuelven, por lo general, hasta con una precisión final de tres cifras significativas.

* La historia de la mecánica de materiales, que se inició con Leonardo y Galileo, se presenta en las Refs. 1-1, 1-2 y 1-3.

¹ USCS significa United States Customary System. (N. del T.)

1.2 ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACIÓN

Los conceptos fundamentales de esfuerzo y deformación pueden ejemplificarse si se considera una barra prismática cargada con fuerzas axiales P en los extremos, como se muestra en la Fig. 1-1. Una **barra prismática** es un miembro estructural recto con sección transversal constante en toda su longitud. En este ejemplo, las fuerzas axiales producen un alargamiento uniforme de la barra, por lo que se dice que se encuentra en **tensión**.

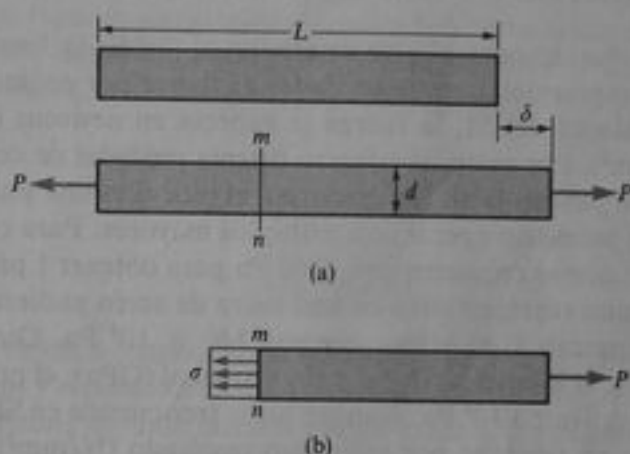


Fig. 1-1 Barra prismática sujeta a tensión

Para analizar los esfuerzos internos de la barra originados por las fuerzas axiales, se requiere efectuar un corte imaginario en la sección mn (Fig. 1-1a). Esta sección se toma perpendicularmente al eje longitudinal de la barra, por lo que se conoce como **sección transversal**. Enseguida se separa la porción de la barra a la derecha del corte como un cuerpo libre (Fig. 1-1b). La carga de tensión P actúa sobre el extremo derecho del cuerpo libre; en el otro extremo ocurren fuerzas que representan la acción de la parte izquierda de la barra sobre la parte aislada restante. Tales fuerzas se distribuyen de modo continuo sobre la sección transversal, en forma análoga a la distribución continua de la presión hidrostática sobre una superficie horizontal sumergida. La intensidad de la fuerza (esto es, la fuerza por unidad de área) se denomina **esfuerzo** y se denota comúnmente por la letra griega σ (sigma). Si se supone que el esfuerzo tiene una distribución uniforme sobre la sección transversal (véase Fig. 1-1b), podemos apreciar fácilmente que su resultante es igual a la intensidad σ multiplicada por el área de sección transversal A de la barra. Más aún, a partir del cuerpo en equilibrio mostrado en la Fig. 1-1b es también evidente que esta resultante debe ser de igual magnitud y de dirección opuesta a la carga aplicada P . De donde se obtiene

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

como la ecuación para el esfuerzo uniforme en una barra prismática de sección transversal de forma cualquiera, cargada axialmente. Cuando la barra se tensa por

las fuerzas P , como lo muestra la figura, los esfuerzos resultantes se denominan **esfuerzos de tensión**; si el sentido de las fuerzas se invierte, lo que ocasiona que la barra se comprima, se originan **esfuerzos de compresión**. Dado que el esfuerzo σ actúa en dirección perpendicular a la superficie del corte, se le conoce como **esfuerzo normal**. Por tanto, los esfuerzos normales pueden ser esfuerzos de tensión o de compresión. Posteriormente, encontraremos otro tipo de esfuerzo, llamado **esfuerzo cortante**, que actúa paralelo a la superficie.

Cuando se requieren **signos convencionales** para esfuerzos normales, se acostumbra definir como positivos los esfuerzos de tensión y como negativos los esfuerzos de compresión.

Dado que el esfuerzo normal σ se determina al dividir la fuerza axial entre el área de la sección transversal, detenta **unidades de fuerza por unidad de área**. Cuando se emplean unidades del SI, la fuerza se expresa en newtons (N) y el área en metros cuadrados (m^2). Por tanto, el esfuerzo detenta unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), o pascals (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad de esfuerzo tan pequeña que es necesario operar con múltiplos mayores. Para ejemplificar esto, se debe hacer notar que se requieren casi 7000 Pa para obtener 1 psi.* Por ejemplo, un esfuerzo de tensión representativo en una barra de acero pudiera tener una magnitud de 140 megapascals (140 MPa), que son 140×10^6 Pa. Otras unidades que pueden ser útiles son el kilopascal (kPa) y el gigapascal (GPa); el primero equivale a 10^3 Pa y el último equivale a 10^9 Pa. Aunque no se recomienda en SI, en ocasiones se expresa el esfuerzo en newtons por milímetro cuadrado (N/mm^2), que constituye una unidad idéntica al megapascal (MPa).

Cuando se utilizan unidades del Sistema Inglés, se acostumbra expresar los esfuerzos en libras por pulgada cuadrada ($lb/plg^2 = psi$) o en kips por pulgada cuadrada (ksi).** Por ejemplo, un esfuerzo típico en una barra podría ser 20,000 psi o 20 ksi.

A fin de que la ecuación $\sigma = P/A$ sea válida, el esfuerzo σ debe estar uniformemente distribuido sobre la sección transversal de la barra. Esta condición se cumple si la fuerza axial P actúa en el centroide del área de la sección transversal, como se demuestra en el Ejemplo 1. Cuando la carga P no actúa en el centroide se origina flexión en la barra y se requiere un análisis más complicado (véase Sección 5.11). De cualquier manera, en este libro se supone que todas las fuerzas axiales se aplican en el centroide de la sección transversal, a menos que se especifique lo contrario.

La condición de esfuerzo uniforme ilustrada en la Fig. 1-1b se presenta a lo largo del elemento, excepto cerca de los extremos. La distribución de esfuerzos en los extremos de la barra depende del detalle de aplicación real de la carga axial P . Si la carga misma se distribuye uniformemente sobre el extremo, entonces el patrón de esfuerzo será el mismo que en otras partes. Sin embargo, en general la carga se concentra sobre un área pequeña, lo que origina esfuerzos locales elevados y distribuciones de esfuerzo no uniformes en la vecindad de la carga. Conforme se aleja de los extremos, la distribución de esfuerzo se aproxima gradualmente a la distribución uniforme mostrada en la Fig. 1-1b. Por lo común es válido suponer que la fórmula $\sigma = P/A$ puede emplearse con bastante exactitud en cualquier punto que esté al menos a una distancia d de los extremos, donde d es la dimensión transversal mayor de

* Véase Tabla A-3 del Apéndice A para los factores de conversión entre Sistema Inglés (USCS) y Sistema Internacional.

** Un kip, o kilopound (kilolibra), es igual a 1000 lb. Se simboliza por k.

la barra (véase Fig. 1-1a). Desde luego, cuando el esfuerzo no es uniforme, la ecuación $\sigma = P/A$ determina el **esfuerzo normal medio**.

Una barra axialmente cargada sufre una variación en longitud: se alarga si está a tensión y se acorta si está a compresión. La variación total en longitud se denota por la letra griega δ (delta), y se muestra en la Fig. 1-1a para una barra sujeta a tensión. Este alargamiento constituye el resultado acumulativo del estiramiento del material sobre la longitud L de la barra. Supongamos que el material es el mismo en cualquier lugar de la barra. Entonces, si se considera la mitad de la misma, esta última sufrirá un alargamiento igual a $\delta/2$; asimismo, si se considera una longitud unitaria de la barra, sufrirá un alargamiento igual a $1/L$ veces el alargamiento total δ . De esta forma, hemos llegado al concepto de alargamiento por unidad de longitud, o **deformación unitaria**, denotada por la letra griega ϵ (epsilon) y determinada por la ecuación

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1-2)$$

Si la barra está sujeta a tensión la deformación unitaria se denomina **deformación unitaria a tensión**, y representa un alargamiento relativo del material. Si la barra está sujeta a compresión, la deformación corresponde a una **deformación unitaria a compresión** y la barra se acorta. La deformación unitaria a tensión se toma como positiva y la deformación unitaria a compresión como negativa. La deformación unitaria ϵ se denomina **deformación unitaria normal** porque se refiere a esfuerzos normales.

Debido a que la deformación unitaria normal ϵ es el cociente de dos longitudes, constituye una **cantidad adimensional**; esto es, no posee unidades. Por ello, la deformación unitaria se expresa como número absoluto, independiente de cualquier sistema de unidades. Los valores numéricos de la deformación unitaria suelen ser muy pequeños, especialmente para materiales estructurales, los cuales por lo general sólo sufren cambios pequeños en sus dimensiones. Como ejemplo, considérese una barra de acero con una longitud L de 2.0 m. Cuando se carga a tensión, la barra se alarga una cantidad δ igual a 1.4 mm. La deformación unitaria correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.0 \text{ m}} = 0.0007 = 700 \times 10^{-6}$$

En la práctica, las unidades originales de δ y L suelen vincularse a la deformación unitaria misma y entonces la deformación unitaria se denota en formas tales como mm/m, $\mu\text{m}/\text{m}$ y plg/plg. Por ejemplo, la deformación unitaria ϵ en el caso anterior pudo denotarse como $700 \mu\text{m}/\text{m}$ o 700×10^6 plg/plg.

Las definiciones de los esfuerzos normales y deformaciones unitarias se basan únicamente en consideraciones estáticas y geométricas, por lo que las Ecs. (1-1) y (1-2) pueden utilizarse para cargas de cualquier magnitud y para cualquier material. El requerimiento principal es que la deformación de la barra sea uniforme, lo cual a su vez requiere que la barra sea prismática, que las cargas actúen en los centroides de las secciones transversales y que el material sea **homogéneo** (esto es, el mismo en todas las partes de la barra). El estado resultante de esfuerzos y deformaciones unitarias se denomina **esfuerzo y deformación unitaria uniaxiales**. Posteriormente se

explicará el esfuerzo uniaxial, así como esfuerzos y deformaciones con direcciones diferentes a la dirección longitudinal de la barra. También se tratarán en capítulos posteriores distribuciones de esfuerzos más complicados, tales como esfuerzo biaxial y estado plano de esfuerzo.

Ejemplo 1

Demostrar que las fuerzas axiales P , que producen tensión o compresión uniforme en un miembro prismático (véase Fig. 1-1), deben actuar en el centroide de la sección transversal.

Supongamos que la sección transversal tiene el perfil cualquiera mostrado en la Fig. 1-2a, y como sistema de referencia tomemos cualquier conjunto de ejes coordenados xy en el plano de la sección transversal. Luego, el eje z será paralelo al eje longitudinal de la barra (Fig. 1-2b). Según se muestra en la Fig. 1-2b, suponemos que la distribución de esfuerzo sobre la sección transversal es un esfuerzo uniforme de tensión $\sigma = P/A$. La resultante de esta distribución de esfuerzos es la fuerza axial P .

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} de la línea de acción de la fuerza P se denotan por \bar{x} y \bar{y} en la figura. Para determinar estas coordenadas, se aprecia que los momentos M_x y M_y de la fuerza P en relación con los ejes x y y , respectivamente, deben ser iguales a los momentos correspondientes a los esfuerzos uniformemente distribuidos. Los momentos de la fuerza P son

$$M_x = P\bar{y} \quad M_y = -P\bar{x} \quad (a)$$

donde un momento se considera positivo cuando su vector (de acuerdo con la regla de la mano derecha) actúa en la dirección positiva del eje. Para determinar los momentos de los esfuerzos distribuidos se considera un elemento de área dA en la sección transversal (Fig. 1-2a) y se ad-

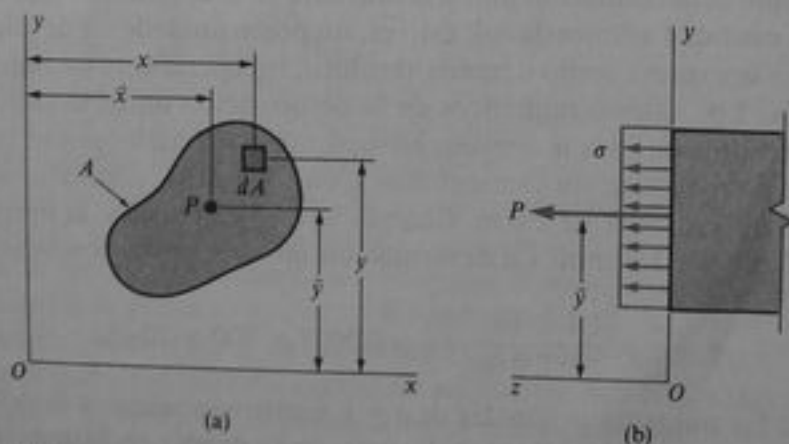


Fig. 1-2 Ejemplo 1. Fuerza axial P que actúa en el centroide de la sección transversal

vierte que la fuerza diferencial que actúa sobre este elemento es σdA . Los momentos de esta fuerza elemental respecto a los ejes x y y son $\sigma y dA$ y $-\sigma x dA$, respectivamente, donde x y y denotan las coordenadas del elemento dA . Los momentos totales pueden determinarse al integrar toda el área A de la sección transversal; por tanto, los momentos respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \int \sigma y dA \quad M_y = - \int \sigma x dA \quad (b)$$

A continuación, se igualan los momentos dados por las expresiones (a) y (b):

$$P\bar{y} = \int \sigma y dA \quad P\bar{x} = \int \sigma x dA$$

Si se advierte que la fuerza P es igual a σA y que el esfuerzo σ es una constante, a partir de las ecuaciones anteriores pueden obtenerse las fórmulas siguientes para las coordenadas \bar{y} y \bar{x} :

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

Estas ecuaciones demuestran que las coordenadas de la línea de acción de la fuerza resultante P son iguales a los momentos de primer orden del área de la sección transversal, divididos entre el área misma. Por lo que estas ecuaciones son idénticas a las que definen las coordenadas del centroide del área.*

Se establece, por tanto, una conclusión general importante. Para que ocurra tensión o compresión uniforme en una barra prismática, la fuerza axial debe estar aplicada en el centroide del área de la sección transversal.

Ejemplo 2

Una barra prismática con sección transversal rectangular (20×40 mm) y longitud $L = 2.8$ m está sometida a una fuerza de tensión axial de 70 kN (Fig. 1-3). El alargamiento medido de la barra es $\delta = 1.2$ mm. Calcular los esfuerzos de tensión y la deformación unitaria en la barra.



Fig. 1-3 Ejemplo 2. Barra prismática de sección transversal rectangular

Se supone que las fuerzas axiales actúan en los centroides de las secciones transversales de los extremos, y es posible emplear la Ec. (1-1) para calcular el esfuerzo:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{70 \text{ kN}}{(20 \text{ mm})(40 \text{ mm})} = 87.5 \text{ MPa}$$

Asimismo, la deformación unitaria (de la Ec. 1-2) es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.2 \text{ mm}}{2.8 \text{ m}} = 429 \times 10^{-6}$$

Las magnitudes σ y ϵ representan el esfuerzo a tensión y la deformación unitaria, respectivamente, en la dirección longitudinal de la barra.

Ejemplo 3

Una bomba de pozo profundo es operada por un cigüeñal que acciona un pistón hacia arriba y hacia abajo (Fig. 1-4). La biela de la bomba tiene un diámetro $d = 0.6$ plg y una longitud $L =$

* Los centroides de un área se explican en la Sección C.1 del Apéndice C.

320 pie. Está hecha de acero con un peso específico $\gamma = 490 \text{ lb/pie}^3$. La resistencia que soporta el pistón durante la carrera descendente es 200 lb, y durante la carrera ascendente es 2000 lb. Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la biela de la bomba, si sólo se consideran las fuerzas de resistencia y el peso de la biela.

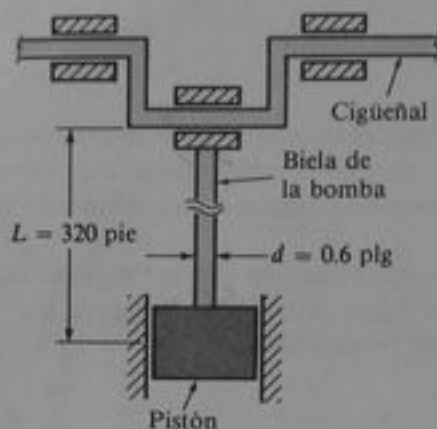


Fig. 1-4 Ejemplo 3. Biela de bomba de pozo profundo

Durante la carrera descendente la resistencia del pistón genera una fuerza de compresión $C = 200 \text{ lb}$ a lo largo de la biela, y durante la carrera ascendente origina una fuerza de tensión $T = 2000 \text{ lb}$. El peso de la biela produce una fuerza de tensión que varía desde cero en el extremo inferior hasta un máximo en el extremo superior. La fuerza máxima debida al peso es igual al peso total de la biela, determinado por la expresión

$$W = \gamma LA$$

donde γ es el peso específico del material, L es la longitud de la biela y A es el área de la sección transversal. Al sustituir en esta ecuación, se obtiene

$$W = (490 \text{ lb/pie}^3)(320 \text{ pie})\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{0.6 \text{ plg}}{12 \text{ plg/pie}}\right)^2 = 308 \text{ lb}$$

como la fuerza de tensión en el extremo superior debida al peso.

La fuerza de tensión máxima se presenta durante la carrera ascendente en el extremo superior de la biela de la bomba y es igual a $T + W$, o sea 2308 lb. El correspondiente esfuerzo máximo a tensión es

$$\sigma_t = \frac{P}{A} = \frac{2308 \text{ lb}}{\pi(0.6 \text{ plg})^2/4} = 8160 \text{ psi}$$

De modo semejante, se puede calcular el esfuerzo máximo a compresión, que se presenta en el extremo inferior durante la carrera descendente:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{200 \text{ lb}}{\pi(0.6 \text{ plg})^2/4} = 710 \text{ psi}$$

Estos cálculos proporcionan los esfuerzos axiales en la biela de la bomba debidos sólo a las cargas específicas bajo condiciones ideales. Otras consideraciones tales como flexión de la biela de la bomba y efectos dinámicos, no se toman en cuenta.

1.3 DIAGRAMAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las propiedades mecánicas de los materiales usuales en ingeniería se determinan mediante pruebas efectuadas sobre muestras pequeñas del material. Las pruebas se realizan en laboratorios de prueba de materiales dotados con equipo de prueba capaz de cargar los especímenes de diversas maneras, incluso carga estática y dinámica a tensión y compresión. Uno de tales aparatos se muestra en la Fig. 1-5. Ahí, un espécimen de prueba se coloca en medio del marco de carga y, a la izquierda, se encuentra la consola de control.



Fig. 1-5 Equipo de prueba para ensayos generales. (Cortesía de MTS Systems Corporation)

Con el fin de que los resultados de las pruebas se comparen fácilmente, el tamaño de las muestras y los métodos de aplicación de las cargas se tendrán que uniformar. Una de las principales organizaciones de estandarización es la *Sociedad Americana de Pruebas y Materiales (ASTM, por sus siglas en inglés: American Society for Testing and Materials)*, sociedad técnica que publica especificaciones y normas para materiales y pruebas. Otras organizaciones normativas son la *Sociedad Americana de Normas (ASA, por sus siglas en inglés: American Standards Association)* y el *Departamento Nacional de Normas (NBS: National Bureau of Standards)*.

El ensayo de materiales más común es la **prueba de tensión**, mediante la cual se aplican cargas de tensión a una muestra cilíndrica como la mostrada en la Fig. 1-6. Los extremos de la muestra, con mayor diámetro, se fijan en las mordazas del montaje, a fin de que la ruptura de la muestra se presente en la región central de diámetro uniforme, donde es sencillo calcular el esfuerzo, en lugar de ocurrir cerca de los extremos, donde la distribución de esfuerzo es más complicada. La figura muestra

un espécimen de acero fracturado por la acción de la carga. El dispositivo de la izquierda, sujeto mediante dos brazos a la muestra, es un **extensómetro** que mide el alargamiento durante la prueba.

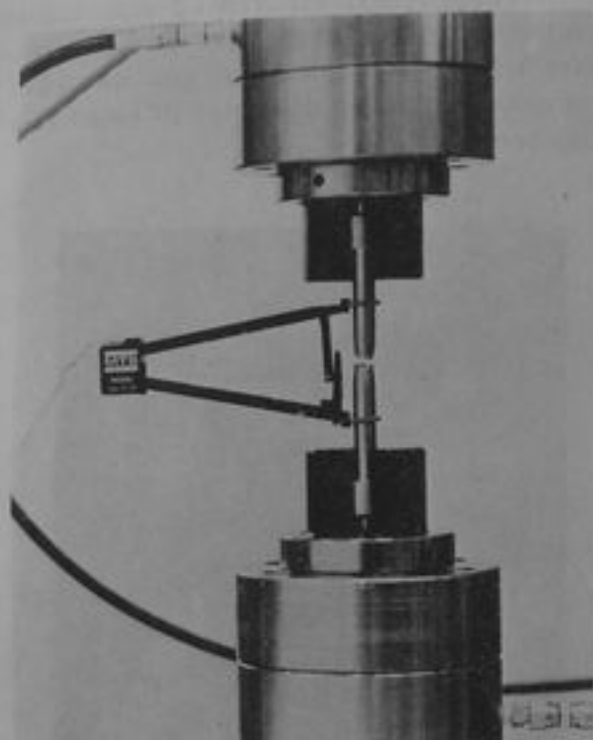


Fig. 1-6 Especimen característico para pruebas de tensión con un extensómetro acoplado; el espécimen se fracturó a tensión.
(Cortesía de MTS Systems Corporation)

La muestra estandarizada de la ASTM tiene un diámetro de 0.5 plg y una **longitud calibrada** de 2.0 plg entre las marcas de calibración, que son los puntos donde los brazos del extensómetro se sujetan a la muestra, como se ve en la Fig. 1-6. Conforme se tensiona la muestra, se mide y registra la carga de tensión P , ya sea de manera automática o mediante lectura de un medidor. El alargamiento sobre la longitud calibrada se mide en forma simultánea con las lecturas de carga, por lo común, mediante calibradores mecánicos similares al mostrado en la Fig. 1-6, aunque también se utilizan calibradores eléctricos de resistencia variable (*strain gages*). En una **prueba estática** la carga se aplica lentamente; sin embargo, en una **prueba dinámica** la variación de carga puede ser muy elevada y también debe medirse ya que afecta las propiedades de los materiales.

El esfuerzo axial σ en el espécimen de prueba se calcula dividiendo la carga P entre el área de la sección transversal A (véase Ec. 1-1). Cuando en este cálculo se emplea el área inicial de la barra, el esfuerzo resultante se denomina **esfuerzo nominal** (también conocido como *esfuerzo convencional* o *esfuerzo de ingeniería*). Se puede calcular un valor más exacto del esfuerzo axial, conocido como **esfuerzo real** mediante el área instantánea de la barra, que puede volverse mucho menor que el área inicial (como se muestra en la Fig. 1-6) en algunos materiales. El esfuerzo real se trata posteriormente en esta sección.

La deformación unitaria axial media se determina a partir del alargamiento medido δ entre las marcas de calibración, al dividir δ entre la longitud calibrada L (véase Ec. 1-2). Si se emplea la longitud calibrada inicial (por ejemplo, 2.0 plg), entonces se obtiene la **deformación (unitaria) nominal**. Por supuesto, la distancia entre las marcas aumenta según se aplica la carga de tensión. Si se emplea la longitud instantánea para el cálculo de la deformación, se obtiene la **deformación real** o **deformación natural**.

Las pruebas de compresión de metales se acostumbra realizarlas sobre especímenes en forma de cubos o cilindros circulares. Los cubos suelen medir 2.0 plg por lado y los cilindros en general tienen diámetros de alrededor de 1 plg, con longitudes de 1 a 12 plg. Deben medirse tanto la carga aplicada por la máquina como el acortamiento del espécimen. El acortamiento debe medirse en una longitud calibrada menor que la longitud total de la muestra, a fin de eliminar los efectos de los extremos. El concreto se prueba mediante compresión en cada proyecto de construcción importante para verificar que se logran las resistencias requeridas. La norma ASTM establece un espécimen para concreto de 6 plg de diámetro, 12 plg de longitud y 28 días de edad. (La edad del concreto es importante ya que éste adquiere resistencia según se "cura".)

Después de realizar una prueba de tensión o de compresión y de establecer el esfuerzo y la deformación para varias magnitudes de la carga, se puede trazar un diagrama de esfuerzo contra deformación. Tal **diagrama esfuerzo-deformación** es característico del material y proporciona información importante acerca de las propiedades mecánicas y el comportamiento típico del material.* El primer material que se analizará es el **acero estructural**, también conocido como acero dulce o acero de bajo carbono. El acero estructural es uno de los metales de más amplio uso, siendo el que más se utiliza en edificios, puentes, torres y muchos otros tipos de construcciones. Un diagrama esfuerzo-deformación representativo del acero estructural a tensión se muestra en la Fig. 1-7 (fuera de escala). La deformación se representa en el eje horizontal y el esfuerzo en el eje vertical. El diagrama empieza con una línea recta desde O hasta A . En esta región, el esfuerzo y la deformación son directamente proporcionales, y se dice que el comportamiento del material es **lineal**. Después del punto A ya no existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, por lo que el esfuerzo en el punto A se denomina **límite de proporcionalidad**. Para aceros de bajo carbono este límite se encuentra en el intervalo de 30 a 40 ksi, pero los aceros de alta resistencia (con mayor contenido de carbono y otros elementos de aleación) pueden tener límites de proporcionalidad de 80 ksi o más.

Al acrecentar la carga más allá del límite de proporcionalidad, la deformación empieza a aumentar más rápidamente para cada incremento en esfuerzo. La curva de esfuerzo-deformación asume luego una pendiente cada vez más pequeña, hasta que en el punto B la curva se vuelve horizontal. A partir de este punto se presenta un alargamiento considerable, con un incremento prácticamente inapreciable en la fuerza de tensión (desde B hasta C en el diagrama). Este fenómeno se conoce como **cedencia** o **fluencia** del material, y el esfuerzo en el punto B se denomina **esfuerzo de cedencia** o **punto de cedencia** (o bien, **esfuerzo de fluencia** o **punto de fluencia**). En la región desde B hasta C , el material se vuelve **perfectamente plástico**, lo que significa que puede deformarse sin un incremento en la carga aplicada. El alargamiento

* Los diagramas esfuerzo-deformación fueron creados por Jacob Bernoulli (1654-1705) y J. V. Poncelet (1788-1867); véase Ref. 1-4.

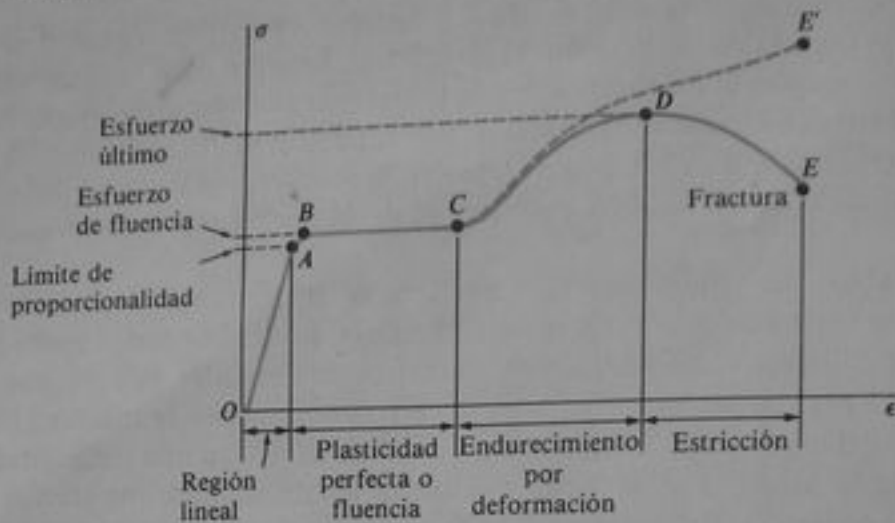


Fig. 1-7 Diagrama esfuerzo-deformación del acero estructural típico en tensión (fuera de escala)

de un espécimen de acero dulce en la región perfectamente plástica es en forma típica 10 a 15 veces mayor que el alargamiento que ocurre entre el inicio de la prueba y el límite de proporcionalidad.

Después de sufrir las grandes deformaciones que se presentan durante la fluencia en la región BC , el acero empieza a mostrar un **endurecimiento por deformación**. Durante este proceso, el material sufre cambios en sus estructuras cristalina y atómica, lo que origina un incremento en la resistencia del material a futuras deformaciones. Por tanto, un alargamiento adicional requiere de un incremento en la carga de tensión, y el diagrama esfuerzo-deformación toma una pendiente positiva desde C hasta D . Finalmente, la carga alcanza su valor máximo y el esfuerzo correspondiente (en el punto D) se denomina **esfuerzo último**. De hecho, el alargamiento posterior de la barra se acompaña de una reducción en la carga y finalmente se presenta la **fractura** en un punto E , tal como se indica en el diagrama.

Se presenta una **contracción lateral** de la muestra cuando se alarga, lo que origina una reducción en el área de la sección transversal, como se mencionó previamente. La reducción en el área es muy pequeña como para tener un efecto apreciable en el valor de los esfuerzos calculados antes del punto C , pero más allá de este punto la reducción comienza a modificar el perfil del diagrama. Desde luego, el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal debido a que se calcula con un área menor. En la cercanía del esfuerzo último, la disminución del área se aprecia claramente y ocurre un estrechamiento pronunciado de la barra, conocido como **estricción** (véanse Figs. 1-6 y 1-8). Si para el cálculo del esfuerzo se emplea el área de la sección transversal en la parte estrecha del cuello ocasionado por la estricción, la **curva real esfuerzo-deformación** seguirá la línea punteada CE' en la Fig. 1-7. La carga total que puede resistir la barra se ve efectivamente disminuida después de que se alcanza el esfuerzo



Fig. 1-8 Estricción de una barra en tensión

último (curva DE), pero esta disminución se debe al decremento en área de la barra y no a una pérdida de la resistencia misma del material. En realidad, el material soporta un aumento de esfuerzo hasta el punto de falla (punto E'). Sin embargo, con fines prácticos la curva esfuerzo-deformación convencional $OABCDE$, basada en el área transversal original de la muestra y que, por lo tanto, se calcula fácilmente, suministra información satisfactoria para emplearla en el diseño.

El diagrama de la Fig. 1-7 muestra las características generales de la curva esfuerzo-deformación para el acero dulce, pero sus proporciones no son realistas, ya que como se mencionó, la deformación que ocurre desde B hasta C puede ser 15 veces mayor que la deformación que ocurre desde O hasta A . Además, las deformaciones desde C hasta E son mucho mayores que las correspondientes al intervalo entre B y C . La Fig. 1-9 muestra un diagrama esfuerzo-deformación trazado a escala para acero dulce. En esta figura, las deformaciones desde O hasta A son tan pequeñas comparadas con las deformaciones desde A hasta E , que no se aprecian, y la parte lineal del diagrama aparenta ser una línea vertical.

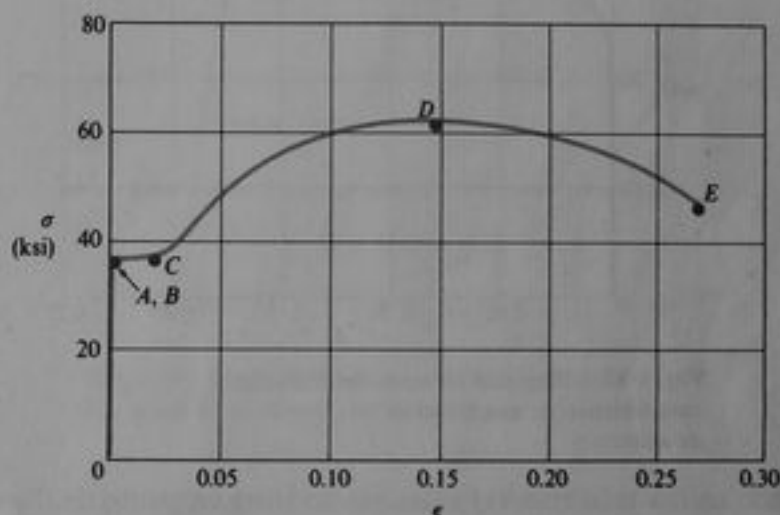


Fig. 1-9 Diagrama esfuerzo-deformación característico del acero estructural en tensión (dibujado a escala)

La presencia de un pronunciado punto de fluencia seguido de grandes deformaciones plásticas constituye una característica importante del acero dulce, que en ocasiones se utiliza en el diseño práctico (véase por ejemplo, el estudio de la flexión plástica en el Capítulo 10). Los materiales que soportan grandes deformaciones plásticas antes de su falla se clasifican como **dúctiles**. Una ventaja de la ductilidad es que pueden presentarse distorsiones visibles si las cargas se vuelven muy grandes, lo que permite tomar una acción correctiva antes de que ocurra la fractura. Asimismo, los materiales dúctiles son capaces de absorber grandes cantidades de energía antes de que acontezca la fractura, según se explica en las secciones 2.8 y 2.9. Los materiales dúctiles incluyen al acero dulce, aluminio y algunas de sus aleaciones, cobre, magnesio, plomo, molibdeno, níquel, latón, bronce, metal monel, nilón, teflón y muchos otros.

El acero estructural contiene alrededor de 0.2% de carbono en su aleación y se clasifica como acero de bajo carbono. Conforme se incrementa el contenido de

dicho elemento, el acero se vuelve menos dúctil, pero aumentan su esfuerzo de fluencia y su esfuerzo último. Las propiedades físicas del acero también se ven afectadas por tratamientos térmicos, la presencia de otros elementos de aleación, así como por procesos de fabricación como el rolado o laminado.

Muchas **aleaciones de aluminio** poseen considerable ductilidad, aunque carecen de un punto de fluencia claramente definido. En su lugar, muestran una transición gradual entre las regiones lineal y no lineal, como se indica en el diagrama esfuerzo-deformación de la Fig. 1-10. Las aleaciones de aluminio adecuadas para propósitos estructurales están disponibles con límites de proporcionalidad en el intervalo de 10 a 60 ksi y esfuerzos últimos en el intervalo de 20 a 80 ksi.

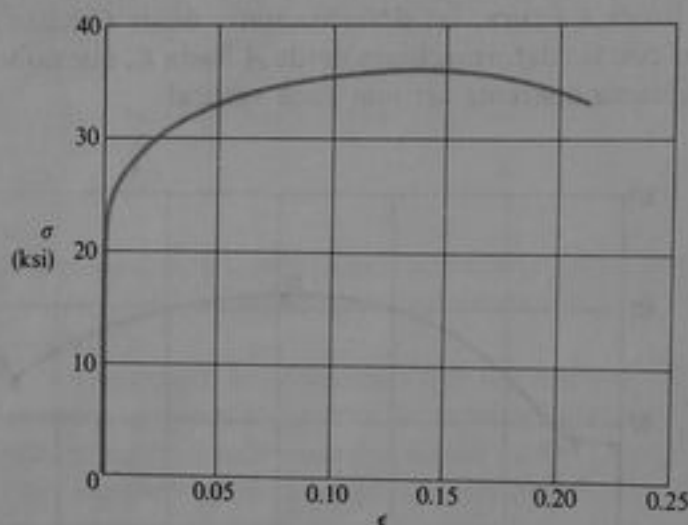


Fig. 1-10 Diagrama esfuerzo-deformación característico de una aleación de aluminio

Cuando un material como el aluminio no tiene un punto de fluencia definido y a pesar de ello soporta grandes deformaciones después de rebasarse el límite de proporcionalidad, puede determinarse un esfuerzo de fluencia arbitrario mediante el **método del corrimiento**. Se traza una recta paralela a la porción inicial rectilínea de la curva (véase Fig. 1-11) pero se corre o desplaza en un cierto valor normalizado de

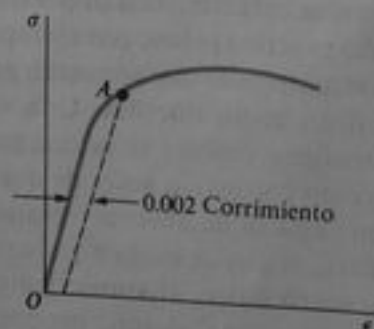


Fig. 1-11 Esfuerzo de fluencia arbitrario, determinado por el método del corrimiento

deformación, como 0.002 (o 0.2%). La intersección de la línea de corrimiento y la curva esfuerzo-deformación (punto *A* en la figura) define el esfuerzo de fluencia. Dado que este esfuerzo se determina mediante una regla arbitraria y no constituye una propiedad física inherente del material, se le conoce como **esfuerzo de fluencia aparente**. Para un material como el aluminio, este esfuerzo de fluencia es ligeramente superior al límite de proporcionalidad. En el caso del acero estructural, con su transición repentina desde la región lineal hasta la región de alargamiento plástico, el esfuerzo de fluencia anterior es esencialmente igual al esfuerzo de fluencia real y al límite de proporcionalidad.

El **caucho** (o **hule**) mantiene una relación lineal entre esfuerzo y deformación hasta deformaciones (unitarias) entre 0.1 o 0.2. Su comportamiento después de rebasar el límite de proporcionalidad depende del tipo de material (véase Fig. 1-12). Algunas

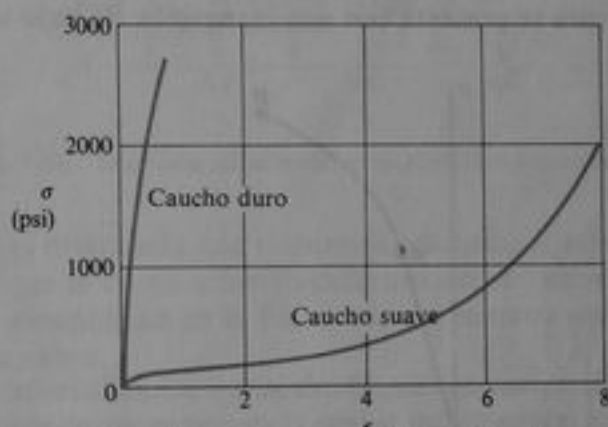


Fig. 1-12 Diagramas esfuerzo-deformación para dos clases de caucho (hule) en tensión

clases de caucho suave soportan grandes deformaciones sin fallar. Finalmente, el material presenta un incremento en resistencia a la carga y la curva esfuerzo-deformación se vuelve marcadamente ascendente antes de la falla. Se puede apreciar fácilmente este comportamiento característico cuando se estira una liga de goma.

La ductilidad de un material a tensión puede caracterizarse por su alargamiento total y por la disminución de área en la sección transversal donde ocurre la fractura. La **elongación (porcentual)** se define como sigue:

$$\text{Elongación} = \frac{L_f - L_o}{L_o} (100) \quad (1-3)$$

donde L_o es la longitud calibrada original y L_f es la distancia entre las marcas de calibración al ocurrir la fractura. Debido a que el alargamiento no es uniforme a lo largo del espécimen sino que se concentra en la región donde se presenta la estricción, la elongación (porcentual) depende de la longitud calibrada. Por ello, cuando se establece la elongación, también debe indicarse la longitud de calibración. Para una longitud calibrada de 2 plg el acero puede tener una elongación del orden de 10% a 40%, lo que depende de su composición; para acero estructural son comunes valores de 25% o 30%. En el caso de aleaciones de aluminio, la elongación varía desde 1% hasta 45%, dependiendo de su composición y tratamiento.

La **reducción (porcentual) de área** mide el valor de la estricción que se presenta y se define como sigue:

$$\text{Reducción de área} = \frac{A_o - A_f}{A_o} (100) \quad (1-4)$$

donde A_o es el área original de la sección transversal y A_f es el área final en la sección de la fractura. Para aceros dúctiles la reducción es alrededor del 50%.

Los materiales que fallan en tensión a valores relativamente bajos de deformación unitaria se clasifican como materiales **frágiles**. Algunos ejemplos son: concreto, piedra, hierro fundido, vidrio, materiales cerámicos y muchas aleaciones metálicas comunes. Estos materiales fallan con sólo pequeñas elongaciones después del límite de proporcionalidad (punto *A* en la Fig. 1-13) y el esfuerzo de fractura (punto *B*) es el mismo que el esfuerzo último. Los aceros de alto carbono se comportan en forma frágil; pueden presentar esfuerzos de fluencia elevados (más de 100 ksi en algunos casos), pero la fractura se presenta con una elongación de bajo valor porcentual.



Fig. 1-13 Diagrama esfuerzo-deformación característico de un material frágil

El **vidrio común** es una idealización muy cercana a un material frágil, dado que no presenta ductilidad. El diagrama esfuerzo-deformación para vidrio sujeto a tensión es esencialmente una línea recta, y la falla ocurre antes de que se presente fluencia. El esfuerzo último es alrededor de 10,000 psi para ciertas clases de vidrio laminado, aunque existe gran variación, lo que depende del tipo de vidrio, el tamaño del espécimen y la presencia de defectos microscópicos. Las fibras de vidrio pueden desarrollar enormes resistencias y se han alcanzado esfuerzos últimos superiores a 1,000,000 psi.

Los diagramas esfuerzo-deformación para **compresión** tienen formas diferentes a los de tensión. Los metales dúctiles como el acero, el aluminio y el cobre poseen límites de proporcionalidad en compresión muy cercanos a los que tienen en tensión, por lo cual las regiones iniciales de sus diagramas esfuerzo-deformación a compresión son muy similares a los diagramas a tensión. Sin embargo, cuando se inicia la fluencia, los diagramas son completamente diferentes. En una prueba a tensión, cuando el espécimen se alarga, puede ocurrir una estricción y finalmente se presenta la fractura. Cuando se comprime un pequeño espécimen de material dúctil, sus lados empiezan a abultarse y adopta la forma de un barril. Al incrementar la carga, el es-

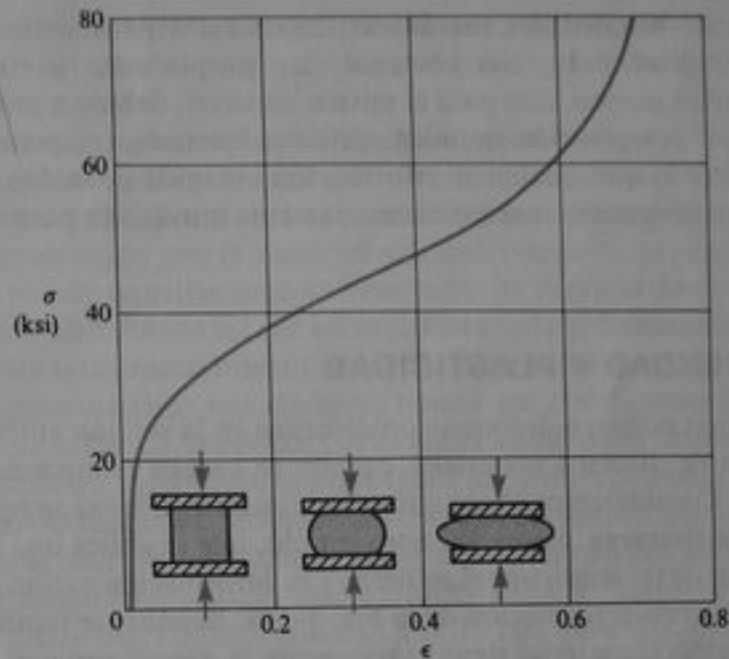


Fig. 1-14 Diagrama esfuerzo-deformación a compresión del cobre

pécimen se aplasta, ofreciendo una resistencia adicional al acortamiento adicional (lo que significa que la curva esfuerzo-deformación se vuelve ascendente). Estas características se ejemplifican en la Fig. 1-14, que muestra un diagrama esfuerzo-deformación para cobre.

De modo característico, los materiales frágiles en compresión tienen una región lineal inicial, seguida de una región en la cual se incrementa el acortamiento a un ritmo mayor que el de la carga. Entonces, el diagrama esfuerzo-deformación a compresión tiene un perfil similar al del diagrama a tensión. Sin embargo, los materiales frágiles suelen alcanzar esfuerzos últimos más elevados a compresión que a tensión. También, a diferencia de los materiales dúctiles en compresión (véase Fig. 1-14), los materiales frágiles se fracturan o rompen bajo la carga máxima. Los diagramas esfuerzo-deformación para un tipo particular de hierro fundido se presentan en la Fig. 1-15. Las curvas para otros materiales frágiles, como el concreto o la piedra, tienen forma similar pero valores numéricos diferentes.

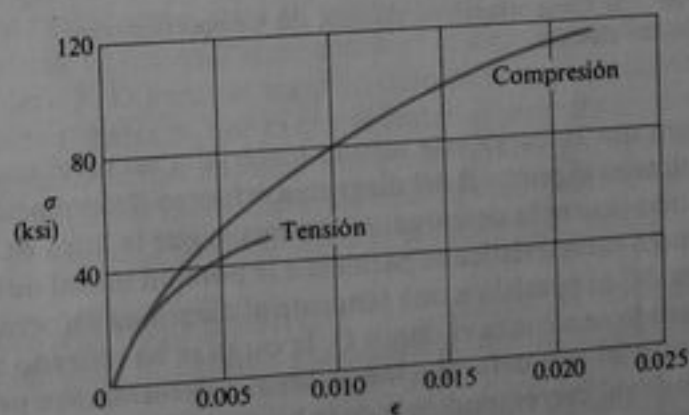


Fig. 1-15 Diagramas esfuerzo-deformación de hierro fundido sujeto a tensión y compresión

Una tabla de **propiedades mecánicas** importantes para varios materiales se incluye en el Apéndice H. No obstante, las propiedades y curvas esfuerzo-deformación varían mucho, aun para el mismo material, debido a procesos de fabricación diferentes, composición química, defectos internos, temperatura y muchos otros factores. Por lo que, cualquier información obtenida de tablas generales debe considerarse representativa, mas no necesariamente apropiada para una aplicación específica.

1.4 ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

Los diagramas esfuerzo-deformación descritos en la sección anterior ilustran el comportamiento de diversos materiales cuando se **cargan** estáticamente a tensión o a compresión. Consideremos ahora qué sucede cuando la carga se retira lentamente y el material se **descarga**. Suponga, por ejemplo, que se aplica una carga a un espécimen a tensión de tal modo que el esfuerzo y la deformación varían desde O hasta A en la curva esfuerzo-deformación de la Fig. 1-16a. Supóngase también que cuando la carga se retira, el material sigue exactamente la misma curva al regresar a O . Esta propiedad de un material mediante la cual recupera sus dimensiones originales al descargarse, se llama **elasticidad**, y el material se dice que es **elástico**. Nótese que la curva esfuerzo-deformación desde O hasta A no requiere ser lineal para que el material sea elástico.

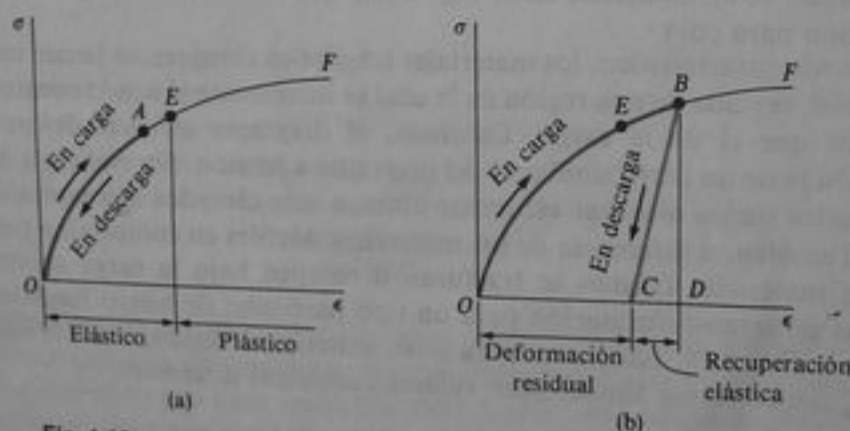


Fig. 1-16 (a) Comportamiento elástico. (b) Comportamiento parcialmente elástico

Suponga ahora que se carga este mismo material a un nivel mucho mayor, de forma tal que se alcanza el punto B del diagrama esfuerzo-deformación (Fig. 1-16b). En este caso, cuando ocurre la descarga, el material sigue la línea BC del diagrama. Esta línea de descarga característica es paralela a la porción inicial de la curva de carga; esto es, la línea BC es paralela a una tangente al diagrama esfuerzo-deformación en el punto O . Cuando se alcanza el punto C , la carga se ha retirado totalmente, pero persiste en el material una **deformación residual** o **deformación permanente** OC . El alargamiento residual correspondiente de la barra se denomina **alargamiento permanente**. De la deformación (unitaria) total OD ocasionada durante la carga del material desde O hasta B , la deformación CD se recuperó elásticamente y la defor-

mación *OC* persiste como deformación permanente. Así, durante la descarga la barra recupera parcialmente su forma original; en consecuencia, se dice que el material es **parcialmente elástico**.

Cuando se prueba una barra, la carga se incrementa desde cero hasta algún valor pequeño seleccionado y luego se retira. Si no existe alargamiento permanente (esto es, si esta alteración de la barra regresa a cero) entonces el material es elástico hasta el esfuerzo representado por el valor seleccionado de la carga. Este proceso de carga y descarga puede repetirse para valores cada vez mayores de la carga. Finalmente, se alcanzará un esfuerzo tal que no se recobra toda la deformación durante la descarga. Mediante este procedimiento es posible determinar el esfuerzo en el límite superior de la región elástica; por ejemplo, podría ser el del punto *E* de las Figs. 1-16a y 1-16b. Este esfuerzo se conoce como **límite elástico** del material.

Muchos materiales, incluyendo la mayoría de los metales, tienen regiones lineales al principio de sus diagramas esfuerzo-deformación (véanse Figs. 1-7 y 1-10). Según se explicó en la Sección 1.3, el límite superior de esta región lineal se define como el límite de proporcionalidad. El límite elástico suele ser ligeramente superior o muy cercano al límite de proporcionalidad. Por lo que para muchos materiales se asigna el mismo valor numérico a ambos límites. En el caso del acero dulce, el esfuerzo de fluencia también está muy próximo al límite proporcional, de modo que para fines prácticos el esfuerzo de fluencia, el límite elástico y el límite de proporcionalidad se consideran iguales. Es evidente que esta situación no se cumple para todos los materiales. El caucho representa un ejemplo notorio de un material que es elástico más allá del límite de proporcionalidad.

La característica de un material que le permite soportar deformaciones inelásticas superiores al límite elástico se conoce como **plasticidad**. Es así que sobre la curva esfuerzo-deformación de la Fig. 1-16a, se presenta una región elástica seguida de una región plástica. Cuando ocurren grandes deformaciones en un material dúctil cargado en la región plástica, se dice que el material experimenta un **flujo plástico**.

Si el material permanece dentro del margen elástico puede ser cargado, descargado y cargado nuevamente sin un cambio apreciable en su comportamiento. Sin embargo, cuando se carga en el margen plástico, la estructura interna del material se modifica y sus propiedades cambian. Por ejemplo, ya se ha observado que existe una deformación permanente en el espécimen después de descargarse en la región plástica (Fig. 1-16b). Supongamos ahora que el material se carga nuevamente después de la descarga (Fig. 1-17). El nuevo ciclo de carga empieza en el punto *C* del diagrama y continúa en ascenso hasta *B*, punto donde principió la descarga durante el ciclo de carga inicial. El material sigue entonces el diagrama esfuerzo-deformación original hacia el punto *F*. Durante el segundo ciclo de carga, el material se comporta en forma lineal desde *C* hasta *B*, por lo que el material presenta un límite de proporcionalidad y un esfuerzo de fluencia mayores que antes. Luego, al estirar un material se puede aumentar el punto de fluencia, aunque la ductilidad se reduzca debido a que la intensidad de fluencia desde *B* hasta *F* es menor que desde *E* hasta *F*.*

Escurrimiento o flujo plástico. Los diagramas esfuerzo-deformación antes descritos se obtienen de pruebas a tensión que involucran únicamente ciclos es-

* El estudio del comportamiento de un material bajo diversas condiciones ambientales y de carga constituye una rama importante de la mecánica aplicada. Para información más detallada respecto a materiales consulte un libro de texto especializado en este tema.

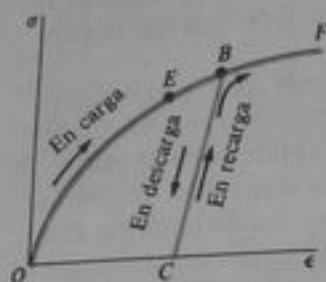


Fig. 1-17 Recarga de un material y ascenso del esfuerzo de fluencia

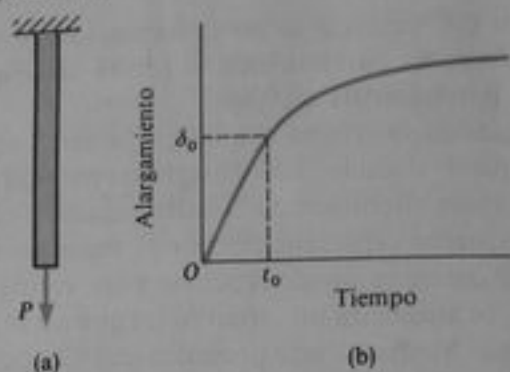


Fig. 1-18 Flujo plástico en una barra bajo carga constante

táticos de carga de los especímenes; por tanto, en el análisis no se consideró el tiempo. Sin embargo, en algunos materiales se presentan deformaciones adicionales durante largos periodos y se dice que **fluyen** o **escurren plásticamente**. Este fenómeno (en inglés, **creep**) puede manifestarse en diversas formas. Por ejemplo, supongamos que una barra vertical (Fig. 1-18a) está cargada con una fuerza constante P . Cuando la carga se aplica inicialmente la barra se alarga una cantidad δ_0 . Supongamos que esta carga y su alargamiento correspondiente se llevan a cabo durante un intervalo de tiempo de duración t_0 (Fig. 1-18b). Subsecuentemente al tiempo t_0 , la carga permanece constante. Sin embargo, debido al flujo plástico, la barra puede aumentar gradualmente su longitud como se muestra en la Fig. 1-18b, aunque la carga no cambie. Este comportamiento se presenta en muchos materiales aunque algunas veces el cambio es muy pequeño para ser tomado en cuenta.

Como un segundo ejemplo de flujo plástico considere un alambre que se estira entre dos apoyos fijos, de tal forma que tiene un esfuerzo inicial a tensión σ_0 (Fig. 1-19a). Nuevamente denotaremos el tiempo durante el cual el alambre se carga inicialmente como t_0 (Fig. 1-19b). Con el transcurso del tiempo el esfuerzo en el alambre disminuye gradualmente, y finalmente alcanza un valor constante aunque los apoyos en los extremos del alambre no se desplacen. Este proceso, que es una manifestación de flujo plástico, se denomina **relajación material**.

El flujo plástico es en general más importante a altas temperaturas que a temperaturas comunes; por tanto, debe considerarse en el diseño de motores, hornos y otras estructuras que operarán a elevadas temperaturas durante largos periodos. Sin

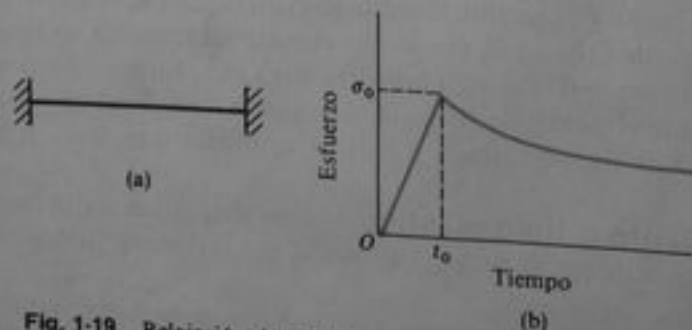


Fig. 1-19 Relajación de esfuerzo en un alambre bajo deformación constante

embargo, materiales como el acero, el concreto y la madera fluyen ligeramente aun a temperaturas atmosféricas. Por lo tanto, en ocasiones es necesario compensar efectos de flujo plástico en estructuras comunes. Por ejemplo, el flujo de concreto puede crear "olas" u ondulaciones en las calzadas de puentes debido al colgamiento entre los apoyos. Una solución es construir la cubierta con una curvatura hacia arriba (**contraflecha**) que constituye una deflexión inicial sobre la horizontal, de tal forma que cuando el flujo plástico ocurra, los claros o tramos desciendan a su posición de nivel.

1.5 ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE

La mayoría de materiales estructurales tiene una región inicial sobre el diagrama esfuerzo-deformación en la que el material se comporta tanto en forma elástica como lineal. Un ejemplo es la región desde el origen O hasta el límite de proporcionalidad en el punto A sobre la curva esfuerzo-deformación para acero estructural (véase Fig. 1-7). Otros ejemplos son las regiones bajo los límites de proporcionalidad y los límites elásticos en los diagramas de las Figs. 1-10 a 1-15. Cuando un material se comporta elásticamente y también presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, se dice que es **linealmente elástico**. Este tipo de comportamiento es sumamente importante en ingeniería ya que muchas estructuras y máquinas se diseñan para funcionar a bajos niveles de esfuerzo, a fin de evitar deformaciones permanentes debidas a fluencia o a flujo plástico. La elasticidad lineal es una propiedad de muchos materiales sólidos, incluso metales, madera, concreto, plástico y cerámicas.

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación para una barra sometida a tensión o compresión simple puede expresarse mediante la ecuación

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-5)$$

donde E es una constante de proporcionalidad conocida como el **módulo de elasticidad** del material. El módulo de elasticidad es la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación en la región linealmente elástica y su valor depende del material particular que se utilice. Las unidades de E son las mismas que las unidades de esfuerzo, ya que la deformación es adimensional. Por tanto, las unidades de E son psi o ksi en Sistema Inglés y pascals (o sus múltiplos) en Sistema Internacional.

La ecuación $\sigma = E\epsilon$ se conoce comúnmente como **ley de Hooke**, designada así en honor al célebre científico inglés Robert Hooke (1635-1703). Hooke fue el primero que investigó las propiedades elásticas de los materiales y realizó pruebas de materiales tan diversos como metales, madera, piedra, huesos y tendones. Determinó el alargamiento de alambres de longitud apreciable que soportaban pesos, y observó que estos cambios de longitud "siempre mantienen las mismas proporciones uno a otro, al igual que los pesos que los ocasionan" (Refs. 1-5 y 1-6). Así, Hooke estableció la relación lineal entre la carga aplicada y el alargamiento resultante.

La ecuación (1-5) se aplica únicamente a tensión y compresión simples; para estados de esfuerzo más complicados, se requiere una generalización de la ley de Hooke (véase Capítulo 6). Para fines de cálculo, los esfuerzos y deformaciones a tensión se consideran como positivos, y los esfuerzos y deformaciones a compresión como negativos.

El módulo de elasticidad E tiene valores relativamente grandes para materiales que son muy rígidos, tales como los metales estructurales. El acero tiene un módulo de aproximadamente 30,000 ksi o sea 200 GPa; para el aluminio, E es aproximadamente igual a 10,600 ksi, o sea 70 GPa. Los materiales más flexibles tienen módulos menores; un valor característico de la madera es 1,600 ksi, o sea 11 GPa. Algunos valores representativos de E se indican en la Tabla H-2, Apéndice H. Para muchos materiales, el valor de E en compresión es el mismo que en tensión.

El módulo de elasticidad suele denominarse también **módulo de Young**, en honor al científico inglés Thomas Young (1773-1829). En relación con un estudio sobre tensión y compresión de barras prismáticas, Young introdujo la idea de un "módulo o medida de la elasticidad". Sin embargo, su módulo no era el mismo que se utiliza actualmente, ya que implicaba propiedades de la barra así como del material (Refs. 1-7 y 1-8).

Relación de Poisson. Cuando una barra prismática se carga a tensión, el alargamiento axial va acompañado de una **contracción lateral** (perpendicular a la dirección de la carga aplicada). Esta variación en la forma se muestra en la Fig. 1-20, en la cual las líneas punteadas representan la forma de la barra antes de la carga y la línea continua indica la forma después de aplicar la carga. La contracción lateral se aprecia fácilmente en una banda o liga de goma estirada, pero en los metales las variaciones en las dimensiones laterales suelen ser muy pequeñas para apreciarse. No obstante, se pueden detectar fácilmente con aparatos de medición.

La **deformación (unitaria) lateral** es proporcional a la deformación axial en el margen elástico lineal, siempre y cuando el material sea homogéneo e isótropo. Un material es **homogéneo** si tiene la misma composición en todos los puntos del cuerpo; por lo que las propiedades elásticas son las mismas en cualquier punto del cuerpo. Sin embargo, nótese que las propiedades no necesariamente son las mismas en todas direcciones para que el material sea homogéneo. Por ejemplo, el módulo de elasticidad podría ser diferente en las direcciones axial y transversal. Los materiales **isótropos** tienen las mismas propiedades elásticas en todas direcciones. En consecuencia, el material debe ser homogéneo e isótropo para que las deformaciones laterales de una barra a tensión (Fig. 1-20) sean las mismas en cualquier punto. Muchos materiales estructurales cumplen con estos requerimientos.

El cociente de la deformación en dirección lateral entre la deformación en dirección axial se conoce como **relación de Poisson** y se denota por la letra griega ν (nu); entonces:

$$\nu = - \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}} \quad (1-6)$$

Para una barra a tensión, la deformación lateral representa una reducción en la anchura (deformación negativa) y la deformación axial representa un aumento en la longitud (deformación positiva). Para la compresión ocurre el caso contrario, la barra se acorta (deformación axial negativa) y se ensancha (deformación lateral positiva). Por lo tanto, la relación de Poisson (o módulo de Poisson) tiene un valor positivo para muchos materiales.

La relación de Poisson recibe ese nombre por el célebre matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1842), quien trató de calcular esta relación mediante una



Fig. 1-20 Alargamiento axial y contracción lateral de una barra en tensión

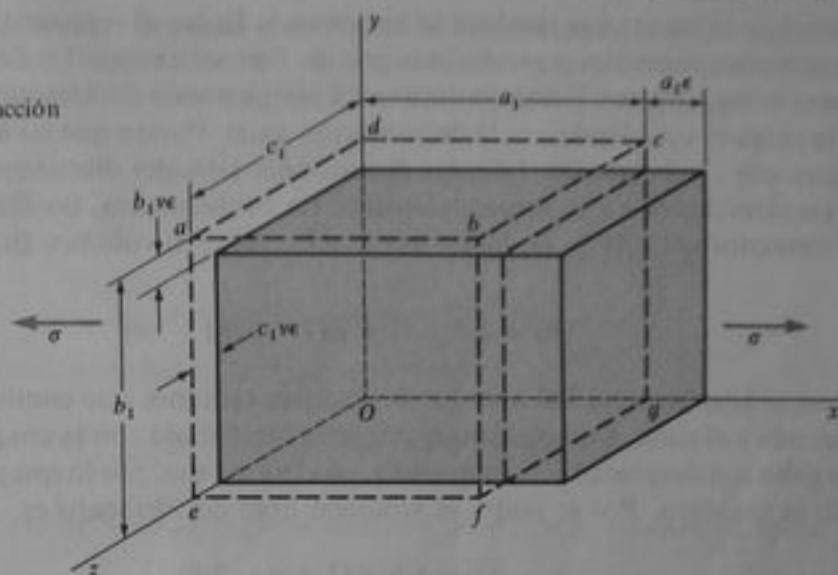


Fig. 1-21 Cambio de forma de un elemento en tensión

teoría molecular de los materiales (Ref. 1-9). Para materiales isotrópicos, Poisson determinó $\nu = 1/4$. Sin embargo, cálculos más recientes basados en un modelo de estructura atómica dan $\nu = 1/3$. Ambos valores son cercanos a los valores reales obtenidos, los cuales se encuentran en el margen de 0.25 a 0.35 para muchos metales y otros materiales. Entre los materiales con valores extremadamente bajos del módulo de Poisson se encuentra el corcho, para el cual ν es prácticamente cero,* y el concreto, para el cual ν oscila entre 0.1 y 0.2. Un límite superior teórico para la relación de Poisson es 0.5, como se explica en la subsección siguiente sobre cambios de volumen. El caucho se aproxima a este valor límite. Una tabla de valores del módulo de Poisson para diferentes materiales en el margen elástico se proporciona en el Apéndice H (véase Tabla H-2). Para muchos fines prácticos, el valor de ν puede considerarse el mismo, tanto para tensión como para compresión.

La contracción lateral de una barra en tensión, o la expansión de una barra en compresión, constituye un ejemplo de deformación sin el esfuerzo correspondiente. Aunque no existe esfuerzo normal en dirección transversal para una barra cargada axialmente, si ocurre deformación debido al efecto Poisson. Otro ejemplo común de deformación sin esfuerzo es la deformación térmica, la cual es producida por una variación de temperatura (véase Sección 2.6).

Cambio de volumen. Ya que las dimensiones de una barra a tensión o a compresión varían cuando se aplica la carga (véase Fig. 1-20), el volumen de la barra también cambia. El cambio de volumen se calcula a partir de las deformaciones axial y lateral. Consideramos un pequeño elemento de material extraído de una barra isotrópica sometida a tensión (Fig. 1-21). La forma original del elemento se indica mediante el paralelepípedo rectangular $abcdefgO$, con lados que miden a_1 , b_1 y c_1 en las direcciones x , y y z , respectivamente.** El eje x se considera en la dirección longi-

* De ahí su aplicabilidad como material para tapones.

** Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos; por tanto, un paralelepípedo tiene seis caras, cada una de las cuales es un paralelogramo. Las caras opuestas son paralelogramos paralelos e idénticos. Un paralelepípedo rectangular tiene todas sus caras en forma de rectángulos.

tudinal de la barra, que también se indica en la figura al representar la dirección de los esfuerzos normales σ producidos por las fuerzas axiales. La forma final del elemento se muestra con líneas continuas. El alargamiento del elemento en la dirección de la carga es $a_1\epsilon$, donde ϵ es la deformación axial. Puesto que las deformaciones laterales son $-\nu\epsilon$ (véase Ec. 1-6), las dimensiones laterales disminuyen en $b_1\nu\epsilon$ y $c_1\nu\epsilon$ en las direcciones y y z , respectivamente. En consecuencia, las dimensiones finales del elemento son $a_1(1 + \epsilon)$, $b_1(1 - \nu\epsilon)$ y $c_1(1 - \nu\epsilon)$, y el volumen final es

$$V_f = a_1 b_1 c_1 (1 + \epsilon)(1 - \nu\epsilon)(1 - \nu\epsilon)$$

Al desarrollar la expresión anterior se obtienen términos que contienen ϵ elevada al cuadrado y al cubo. Como ϵ es muy pequeña comparada con la unidad, su cuadrado y su cubo son despreciables comparados con la ϵ misma, por lo que pueden eliminarse de la ecuación. Por lo tanto, el volumen final del elemento es

$$V_f = a_1 b_1 c_1 (1 + \epsilon - 2\nu\epsilon)$$

y el cambio en volumen es

$$\Delta V = V_f - V_o = a_1 b_1 c_1 \epsilon (1 - 2\nu)$$

en donde V_o es el volumen original $a_1 b_1 c_1$. El **cambio unitario de volumen** e se define como el cambio en volumen dividido entre el volumen original, o sea

$$e = \frac{\Delta V}{V_o} = \epsilon(1 - 2\nu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) \quad (1-7)$$

La magnitud e se conoce como **deformación volumétrica**. La Ec. (1-7) puede utilizarse para calcular el incremento en volumen de una barra en tensión, bajo el supuesto de que se conocen la deformación unitaria axial ϵ (o el esfuerzo σ) y el módulo de Poisson ν . Esta ecuación también puede emplearse para compresión, en cuyo caso ϵ es una deformación negativa y disminuye el volumen de la barra.

De la Ec. (1-7) se aprecia que el máximo valor posible de ν para materiales comunes es 0.5, ya que cualquier valor mayor significa que el volumen disminuye cuando el material es tensado, lo que parece físicamente imposible. Como ya se indicó, para muchos materiales ν es alrededor de 1/4 o un 1/3 en la región elástica lineal, lo que significa que el cambio unitario de volumen está en el margen de 0.3ϵ a 0.5ϵ . En la región de comportamiento plástico no ocurre cambio de volumen, por lo que la relación de Poisson puede considerarse como 0.5.

Ejemplo

Una barra prismática de sección transversal circular se carga con fuerzas a tensión $P = 85$ kN (véase Fig. 1-20). La barra tiene una longitud $L = 3.0$ m y un diámetro $d = 30$ mm. Está hecha de aluminio con un módulo de elasticidad $E = 70$ GPa y un módulo de Poisson $\nu = 1/3$. Calcular el alargamiento δ , la disminución de diámetro Δd y el incremento en volumen ΔV de la barra.

El esfuerzo longitudinal σ en la barra puede obtenerse de la ecuación

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kN}}{\pi(30 \text{ mm})^2/4} = 120 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo probablemente es menor que el límite de proporcionalidad (véase Tabla H-3, Apéndice H), por lo que supondremos que el material se comporta en forma lineal y elástica. La deformación axial se determina mediante la ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{120 \text{ MPa}}{70 \text{ GPa}} = 0.00171$$

El alargamiento total es

$$\delta = \epsilon L = (0.00171)(3.0 \text{ m}) = 5.14 \text{ mm}$$

La deformación lateral se obtiene de la relación de Poisson:

$$\epsilon_{\text{lateral}} = -\nu\epsilon = -\frac{1}{3}(0.00171) = -0.000570$$

La reducción de diámetro es numéricamente igual al producto de la deformación lateral y el diámetro original:

$$\Delta d = \epsilon_{\text{lateral}} d = (0.000570)(30 \text{ mm}) = 0.0171 \text{ mm}$$

Finalmente, el cambio en volumen se calcula con la Ec. (1-7):

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_0 \epsilon (1 - 2\nu) \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\right) (30 \text{ mm})^2 (3.0 \text{ m}) (0.00171) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1210 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Puesto que la barra está sujeta a tensión, ΔV representa un incremento de volumen.

1.6 ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN ANGULAR

En las secciones anteriores se trató fundamentalmente con los efectos de esfuerzos normales producidos por fuerzas axiales. Ahora se considerará un tipo diferente de esfuerzo, conocido como **esfuerzo cortante**, que actúa **paralelo** o **tangencial** a la superficie.

Como ejemplo de una situación práctica en la que se presentan esfuerzos cortantes, considere la junta atornillada que se muestra en la Fig. 1-22a. Esta junta consiste en una barra plana A , una horquilla C y un tornillo B que pasa a través de barrenos en la barra y en la horquilla. Bajo la acción de las cargas de tensión P , la barra y la horquilla presionan al tornillo y generan **esfuerzos de contacto**, los cuales a su vez son resistidos por el tornillo. Un diagrama de cuerpo libre del tornillo (Fig. 1-22b) muestra tales esfuerzos de contacto. La distribución real de estos esfuerzos sobre el perno es difícil de determinar, así que por sencillez los esfuerzos se muestran como si su distribución fuese uniforme. Basados en la suposición de una distribución uniforme, podemos calcular un esfuerzo de contacto medio, al dividir la fuerza total entre el área de contacto. Esta área se considera como el área proyectada de la superficie curva de apoyo, que en este caso es un rectángulo.

El diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1-22b muestra que existe una tendencia a que el perno experimente un corte según las secciones transversales mn y pq . A partir de un diagrama de cuerpo libre de la porción $mnpq$ del tornillo (véase Fig. 1-22c), se

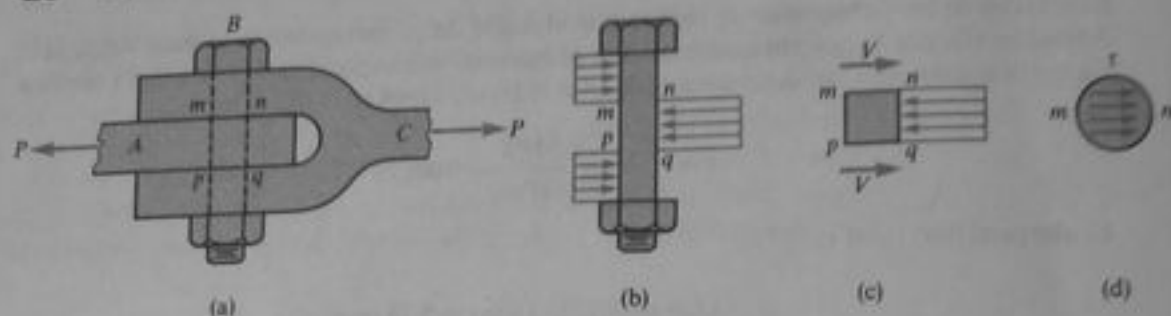


Fig. 1-22 Tornillo sometido a cortante directo

aprecia que actúan **fuerzas cortantes** V sobre las superficies cortadas del tornillo. En este ejemplo particular, cada fuerza cortante V es igual a $P/2$. Estas fuerzas de corte son las resultantes de los esfuerzos cortantes distribuidos sobre las secciones transversales del tornillo. Los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal mn se muestran mediante pequeñas flechas en la Fig. 1-22d. Se desconoce la distribución exacta de estos esfuerzos, pero son más elevados cerca del centro y se vuelven nulos en ciertos lugares de los extremos. Se acostumbra representar los esfuerzos cortantes por la letra griega τ (tau).

El esfuerzo cortante medio en la sección transversal del tornillo se determina dividiendo la fuerza cortante total V entre el área A sobre la que actúa:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{A} \quad (1-8)$$

En el ejemplo mostrado en la Fig. 1-22, la fuerza cortante es $P/2$ y el área A es el área de la sección transversal del tornillo. De la Ec. (1-8) se aprecia que los esfuerzos cortantes, al igual que los esfuerzos normales, representan intensidad de fuerza, o sea fuerza por unidad de área. Por lo que, las unidades de esfuerzo cortante son las mismas que para esfuerzo normal, a saber, psi o ksi en unidades del Sistema Inglés y pascals en unidades del Sistema Internacional.

El arreglo de carga mostrado en la Fig. 1-22a es un ejemplo de **cortante directo** o **cortante simple**, en el cual los esfuerzos cortantes son generados por una acción directa de las fuerzas que tienden a cortar el material. El cortante directo se presenta en el diseño de tornillos, pernos, remaches, cuñas, soldaduras y juntas pegadas. Los esfuerzos cortantes también aparecen de manera indirecta en miembros sujetos a tensión, torsión y flexión, según se explica en capítulos posteriores.

Para obtener una idea cabal de la acción de los esfuerzos cortantes, consideremos un pequeño elemento de material en forma de un paralelepípedo rectangular que tiene lados con longitudes Δx , Δy y Δz (Fig. 1-23a). Las caras frontal y posterior del elemento se consideran libres de cualquier esfuerzo. Ahora supongamos que un esfuerzo cortante τ está distribuido uniformemente sobre la cara superior del elemento. Entonces, para que esté en equilibrio en la dirección x , debe actuar un esfuerzo cortante de igual magnitud y sentido contrario en la cara inferior del elemento. Adviértase que la fuerza cortante total en la cara superior es $\tau \Delta x \Delta z$, y que esta fuerza está equilibrada por la fuerza de igual magnitud y sentido contrario de la cara

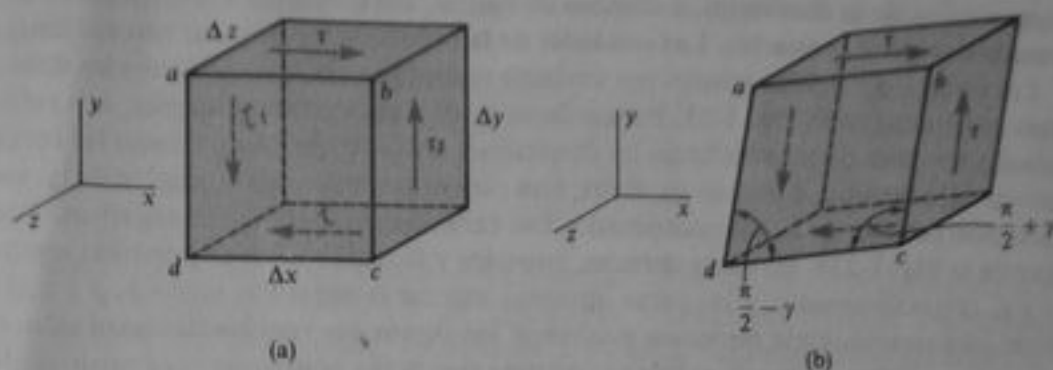


Fig. 1-23 Esfuerzo cortante y deformación angular

inferior. Estas dos fuerzas forman un par que tiene un momento respecto al eje z de magnitud $\tau \Delta x \Delta y \Delta z$ en el sentido de las manecillas del reloj en la figura. El equilibrio del elemento requiere que este momento se equilibre con otro momento igual y opuesto, resultante de esfuerzos cortantes que actúan en las caras laterales del elemento. Si se designan los esfuerzos en las caras laterales por τ_1 , se aprecia que las fuerzas cortantes verticales son $\tau_1 \Delta y \Delta z$ y que forman un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj de magnitud $\tau_1 \Delta x \Delta y \Delta z$. El equilibrio de momentos muestra que $\tau_1 = \tau$, y en consecuencia son iguales las magnitudes de los esfuerzos cortantes en las cuatro caras del elemento, como se muestra en la Fig. 1-23a. Por lo que se establecen las siguientes conclusiones:

1. Los esfuerzos cortantes en caras opuestas de un elemento son de igual magnitud y sentido contrario.
2. Los esfuerzos cortantes en caras perpendiculares de un elemento son iguales en magnitud y tienen sentidos tales que ambos esfuerzos apuntan hacia la línea de intersección de las caras sobre las que actúan, o en sentido opuesto.

Estas conclusiones referentes a esfuerzo cortante son válidas aun cuando actúen también esfuerzos normales sobre las caras del elemento.

Un elemento sometido únicamente a esfuerzos cortantes, como se ilustra en la Fig. 1-23a, se dice que está sujeto a **cortante puro**.* Bajo la acción de estos esfuerzos cortantes el material se deforma, lo que origina **deformaciones angulares** o **deformaciones por cortante**. A fin de visualizar dichas deformaciones, se advierte en primer lugar que los esfuerzos cortantes no tienden a alargar o acortar el elemento en las direcciones x , y y z ; en otras palabras, las longitudes de los lados del elemento no varían. En vez de ello, los esfuerzos cortantes provocan un cambio de forma del elemento, como se muestra en la Fig. 1-23b. El elemento original adquiere la forma de un paralelepípedo oblicuo** y la cara frontal $abcd$ del elemento se convierte en un romboide.† Los ángulos entre caras en los puntos b y d , que eran rectos (iguales a $\pi/2$) antes de la deformación, se reducen en un pequeño ángulo γ a $\pi/2 - \gamma$ (véase Fig. 1-23b). Al mismo tiempo, los ángulos en a y c se incrementan a $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ

* El cortante puro se explica con más detalle en la Sección 3.4.

** Un ángulo oblicuo puede ser agudo u obtuso, pero *no* recto.

† Un romboide es un paralelogramo con ángulos oblicuos y sus lados *no* son todos iguales. (Si los lados Δx y Δy del elemento son iguales, entonces la cara $abcd$ es un rombo, es decir un paralelogramo con ángulos oblicuos y sus cuatro lados iguales.)

es una medida de la distorsión, o cambio de forma, del elemento y se denomina **deformación angular (unitaria)**. Las unidades de la deformación angular son radianes.

Los esfuerzos y deformaciones por cortante se suponen positivos si tienen las direcciones mostradas en la Fig. 1-23. Para aclarar estos signos convencionales, nos referiremos a las caras orientadas hacia las direcciones positivas de los ejes como las caras positivas del elemento. En otras palabras, una cara es positiva si su normal se dirige en la dirección positiva de un eje coordenado. Las caras opuestas son caras negativas. Por lo que en la Fig. 1-23a, las caras derecha, superior y frontal son caras positivas según x , y y z , respectivamente, y las caras opuestas son caras negativas según x , y y z . Al utilizar esta terminología podemos establecer los **signos convencionales para esfuerzos cortantes** como sigue: un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento, es positivo si actúa en la dirección positiva de uno de los ejes coordenados y es negativo si actúa en la dirección negativa del eje. Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara negativa del elemento, es positivo si actúa en la dirección negativa de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección positiva. Por tanto, todos los esfuerzos cortantes mostrados en la Fig. 1-23a son positivos.

Los **signos convencionales para deformaciones angulares** se relacionan con los de los esfuerzos. La deformación angular de un elemento es positiva cuando se reduce el ángulo entre dos caras positivas (o entre dos caras negativas). La deformación angular es negativa cuando el ángulo entre dos caras positivas (o dos caras negativas) se incrementa. Por lo que las deformaciones mostradas en la Fig. 1-23b son positivas, y se aprecia que los esfuerzos cortantes positivos producen deformaciones angulares positivas.

Las propiedades de un material en cortante se determinan experimentalmente por pruebas de cortante directo o pruebas de torsión. Las pruebas de torsión se realizan torciendo tubos huecos de sección circular, con el fin de producir un estado de esfuerzo cortante puro, como se explica en el Capítulo 3. De los resultados de dichas pruebas pueden trazarse **diagramas esfuerzo-deformación en cortante**. Estos diagramas de τ contra γ tienen forma similar a los diagramas para pruebas a tensión (σ contra ϵ) para los mismos materiales. De los diagramas de cortante se pueden obtener propiedades en cortante tales como el límite de proporcionalidad, el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último. Estas propiedades en cortante suelen ser del orden de la mitad que las correspondientes en tensión. Por ejemplo, el esfuerzo de fluencia a cortante para acero estructural es 0.5 a 0.6 veces el esfuerzo de fluencia a tensión.

La porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación a cortante es una línea recta, análoga a la de tensión. Para esta región elástica lineal, el esfuerzo cortante y la deformación angular son directamente proporcionales y se cuenta con la siguiente ecuación para la **ley de Hooke en cortante**:

$$\tau = G\gamma$$

(1-9)

donde G es el **módulo de elasticidad a cortante** (también llamado *módulo de rigidez*). El módulo a cortante G presenta las mismas unidades que el módulo a tensión E , a saber, psi o ksi en unidades del Sistema Inglés y pascals en unidades del Sistema Internacional. Para acero dulce el valor característico de G es 11,000 ksi, o sea 75 GPa; para aluminio, el valor característico es 4,000 ksi o 28 GPa. Otros valores adicionales se indican en la Tabla H-2 del Apéndice H.

Los módulos de elasticidad a tensión y cortante (E y G) se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1-10)$$

donde ν es el módulo de Poisson. Esta relación, cuya obtención se detalla en la Sección 3.5, muestra que E , G y ν no constituyen propiedades elásticas independientes del material. Ya que el valor del módulo de Poisson para materiales comunes se encuentra entre cero y un medio ($0 < \nu < 1/2$), se aprecia de la Ec. (1-10) que G debe estar entre un tercio y un medio de E ($E/3 < G < E/2$).

Ejemplo 1

Un punzón con un diámetro de 0.75 plg se usa para troquelar un agujero en una placa de acero de 1/4 plg (Fig. 1-24). Para ello, se requiere una fuerza $P = 26,000$ lb. ¿Cuál es el esfuerzo cortante medio en la placa y cuál es el esfuerzo de compresión medio en el punzón?

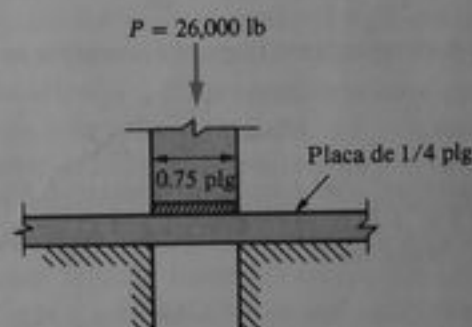


Fig. 1-24 Ejemplo 1

El esfuerzo cortante medio se determina al dividir la fuerza P entre el área que corta el punzón. Esta área es igual al producto de la circunferencia del agujero y el espesor de la placa:

$$A_s = \pi(0.75 \text{ plg})(0.25 \text{ plg}) = 0.589 \text{ plg}^2$$

Por tanto, el esfuerzo cortante medio es

$$\tau_{\text{med}} = \frac{P}{A_s} = \frac{26,000 \text{ lb}}{0.589 \text{ plg}^2} = 44,100 \text{ psi}$$

También, el esfuerzo de compresión medio en el punzón es

$$\sigma_c = \frac{P}{A_p} = \frac{26,000 \text{ lb}}{\pi(0.75 \text{ plg})^2/4} = 58,900 \text{ psi}$$

en donde A_p es el área de la sección transversal del punzón.

Ejemplo 2

Una almohadilla de apoyo consiste en un material flexible de espesor h cubierto por una delgada placa de acero de dimensiones $a \times b$ (Fig. 1-25a) y está sometida a una fuerza cortante horizontal V (Fig. 1-25b). Determinar el esfuerzo cortante medio y la deformación respectiva en la almohadilla, y el desplazamiento horizontal d de la placa.

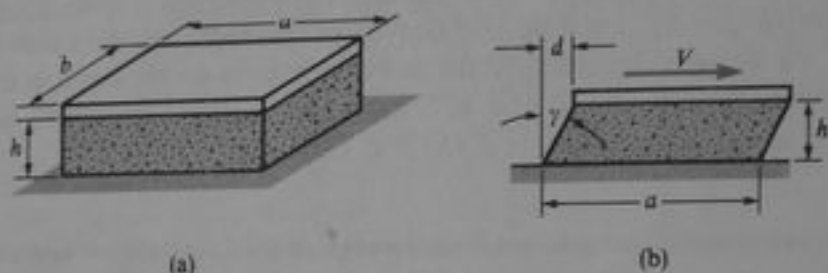


Fig. 1-25 Ejemplo 2

El esfuerzo cortante medio es igual a la fuerza V dividida entre el área sobre la que actúa:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{ab}$$

La deformación angular correspondiente (supuesta uniforme en toda la almohadilla) es

$$\gamma_{\text{med}} = \frac{\tau_{\text{med}}}{G} = \frac{V}{abG}$$

en donde G es el módulo de elasticidad a cortante del material. Finalmente, el desplazamiento d equivale a $h \tan \gamma$ (véase Fig. 1-25b). Sin embargo, si γ es un ángulo muy pequeño, se puede sustituir $\tan \gamma$ por γ y se obtiene así

$$d = h\gamma = \frac{hV}{abG}$$

como el desplazamiento horizontal de la placa.

1.7 ESFUERZOS PERMISIBLES Y CARGAS PERMISIBLES

Una importante consideración en el diseño de ingeniería es la capacidad del objeto que se diseña para resistir o transmitir cargas. Entre los objetos que deben soportar cargas se incluyen estructuras de edificios, maquinaria, aeronaves, vehículos, embarcaciones y una lista, al parecer interminable, de otras cosas hechas por el hombre. Por sencillez, nos referiremos a tales objetos como **estructuras**; por tanto, una estructura es cualquier objeto que debe resistir o transmitir cargas.

Si se desea evitar la falla de una estructura, las cargas que la misma puede realmente soportar deben ser mayores que las cargas que requerirá sostener cuando esté en servicio. La capacidad de una estructura para soportar cargas se denomina **resistencia**.

tencia, por lo que el criterio precedente puede replantearse como sigue: la resistencia real de una estructura debe rebasar la resistencia requerida. La relación entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina **factor de seguridad** n :

$$\text{Factor de seguridad } n = \frac{\text{resistencia real}}{\text{resistencia requerida}} \quad (1-11)$$

Desde luego, el factor de seguridad n debe ser mayor que 1.0 si se desea impedir la falla del material. De acuerdo con las circunstancias, se emplean factores de seguridad desde un poco más de 1.0 hasta 10.

La inclusión de factores de seguridad en el diseño no es un asunto sencillo ya que la resistencia y la falla del material denotan conceptos diferentes. La **falla del material**, o simplemente la **falla**, significa la ruptura o el colapso completo de una estructura, o bien que las deformaciones rebasan algún valor limitante, de tal modo que la estructura se vuelve incapaz de realizar sus funciones. Esta última clase de falla puede ocurrir con cargas mucho menores que aquellas que ocasionan el colapso. Para la determinación de un factor de seguridad se deben tomar en cuenta conceptos como los siguientes: probabilidad de sobrecarga accidental de la estructura; los tipos de cargas (estática, dinámica o repetitiva) y con qué precisión se conocen; la posibilidad de falla por fatiga; inexactitudes de construcción; calidad de fabricación; variaciones en propiedades de los materiales; deterioro debido a corrosión o a otros efectos ambientales; precisión de los métodos de análisis; si la falla es gradual (con amplias señales de peligro) o súbita (sin señales de peligro); consecuencias de la falla (daño menor o catástrofe) y otras consideraciones más. Si el factor de seguridad es muy bajo, el riesgo de falla será elevado y por tanto la estructura será inaceptable; si el factor es muy grande, la estructura desperdiciará material y puede volverse inadecuada para su función (por ejemplo, puede ser muy pesada). Debido a estas complejidades, se requiere el buen juicio y criterio del ingeniero al establecer los factores de seguridad. Estos factores suelen determinarlos grupos de ingenieros expertos que formulan los códigos y especificaciones utilizadas por otros diseñadores.

En la práctica, los factores de seguridad se definen e implantan en muchas formas. Para muchas estructuras es importante que el material permanezca en el margen elástico lineal a fin de evitar deformaciones permanentes cuando se retiran las cargas. Por lo que un método común de diseño consiste en emplear un factor de seguridad respecto de la fluencia de la estructura. La estructura alcanza la fluencia cuando algún punto de la misma alcanza su esfuerzo de fluencia. Mediante la aplicación de un factor de seguridad respecto del esfuerzo de fluencia, se obtiene un **esfuerzo permisible** o **esfuerzo de trabajo**, que no debe rebasarse en ninguna parte de la estructura. Así,

$$\text{Esfuerzo permisible} = \frac{\text{esfuerzo de fluencia}}{\text{factor de seguridad}}$$

o sea

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_f}{n} \quad (1-12)$$

donde se introduce la notación σ_{perm} y σ_f para los esfuerzos permisible y de fluencia, respectivamente. En el diseño de edificios un factor de seguridad n característico con respecto de la fluencia es 1.67; así, un acero dulce que tenga un esfuerzo de fluencia σ_f de 36 ksi tendrá un esfuerzo permisible σ_{perm} en tensión de 21.6 ksi.

Otro método de diseño es establecer el esfuerzo permisible al aplicar un factor de seguridad respecto del **esfuerzo último** en lugar del esfuerzo de fluencia. Este método es adecuado para materiales frágiles, como el concreto, y también se utiliza para la madera. El esfuerzo permisible se obtiene de la ecuación

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_u}{n} \quad (1-13)$$

donde σ_u es el esfuerzo último. El factor de seguridad normalmente es mucho mayor con respecto al esfuerzo último que con respecto al esfuerzo de fluencia. En el caso de acero dulce, un factor de seguridad de 1.67 respecto al esfuerzo de fluencia corresponde aproximadamente a un factor de 2.8 con respecto al esfuerzo último.

El último método que describiremos comprende la aplicación de factores de seguridad a cargas en vez de a esfuerzos. Utilizaremos el término **cargas últimas** para denotar las cargas que provocan el colapso o falla de la estructura. Las cargas que debe soportar la estructura en operación se denominan **cargas de servicio** o **cargas de trabajo**. El factor de seguridad es el cociente de las primeras entre las segundas:

$$\text{Factor de seguridad } n = \frac{\text{carga última}}{\text{carga de servicio}} \quad (1-14)$$

Dado que las cargas de servicio son cantidades conocidas, el procedimiento común de diseño es multiplicarlas por el factor de seguridad para determinar las cargas últimas. Luego, la estructura se diseña en forma tal que pueda soportar las cargas últimas de falla. Este método de diseño se conoce como **diseño por resistencia** o **diseño por carga última**, y el factor de seguridad se denomina **factor de carga** ya que es un multiplicador de las cargas de servicio:

$$\text{Carga última} = (\text{carga de servicio})(\text{factor de carga}) \quad (1-15)$$

Factores de carga característicos utilizados en el diseño de estructuras de concreto reforzado son 1.4 para **cargas muertas**, que constituye el peso mismo de la estructura, y 1.7 para **cargas vivas**, que son las cargas aplicadas a la estructura. Los métodos de diseño por resistencia se emplean comúnmente para estructuras de concreto reforzado y a veces para estructuras de acero. En la Sección 2.10 y en el Capítulo 10 se exponen métodos para determinar cargas últimas de algunas estructuras simples.

En diseño aeronáutico, se acostumbra hablar del margen de seguridad en lugar del factor de seguridad. El **margen de seguridad** se define como el factor de seguridad menos uno:

$$\text{Margen de seguridad} = n - 1 \quad (1-16)$$

Así, una estructura que tenga una resistencia última igual al doble de la resistencia requerida tiene un factor de seguridad de 2.0 y un margen de seguridad de 1.0. Cuando el margen de seguridad se reduce a cero o menos, la estructura (supuestamente) fallará.

Ejemplo 1

Un cilindro circular de hierro fundido, corto y hueco (Fig. 1-26), debe soportar una carga de compresión $P = 130 \text{ k}$. El esfuerzo último en compresión para el material es $\sigma_u = 35,000 \text{ psi}$.

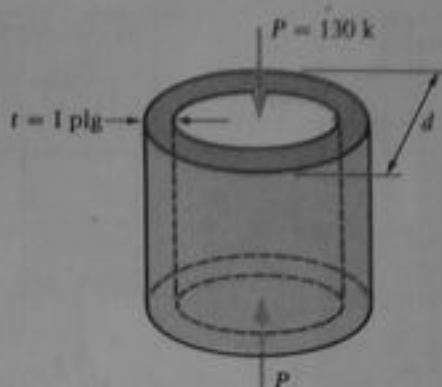


Fig. 1-26 Ejemplo 1

Se decide diseñar el cilindro con un espesor de pared t de 1 plg y un factor de seguridad de 3.0 con respecto de la resistencia última. Calcular el diámetro d exterior mínimo requerido del cilindro.

El esfuerzo permisible de compresión es igual al esfuerzo último dividido entre el factor de seguridad (Ec. 1-13):

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_u}{n} = \frac{35,000 \text{ psi}}{3} = 11,670 \text{ psi}$$

El área de la sección transversal requerida puede determinarse ahora:

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{130,000 \text{ lb}}{11,670 \text{ psi}} = 11.14 \text{ plg}^2$$

El área real de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi(d-2t)^2}{4} = \pi t(d-t)$$

donde d es el diámetro exterior y $d-2t$ el diámetro interior. Se despeja d y luego se sustituye $t = 1 \text{ plg}$ y $A = 11.14 \text{ plg}^2$, de lo que se obtiene

$$d = t + \frac{A}{\pi t} = 4.55 \text{ plg}$$

El diámetro exterior debe ser al menos de esa longitud a fin de tener el factor de seguridad deseado.

Ejemplo 2

Una barra de acero de sección transversal rectangular ($10 \times 40 \text{ mm}$) soporta una fuerza de tensión P y está articulada a un soporte por medio de un perno redondo de 15 mm de diámetro (Fig. 1-27). Los esfuerzos permisibles a tensión para la barra y a cortante para el perno son $\sigma_{\text{perm}} = 120 \text{ MPa}$ y $\tau_{\text{perm}} = 60 \text{ MPa}$, respectivamente. ¿Cuál es el valor máximo permisible de la carga P ?

El esfuerzo de tensión en la barra rectangular debe calcularse con el área neta en la sección transversal que tiene el barreno para el perno. Esta área es

$$A_{\text{net}} = (40 \text{ mm} - 15 \text{ mm})(10 \text{ mm}) = 250 \text{ mm}^2$$

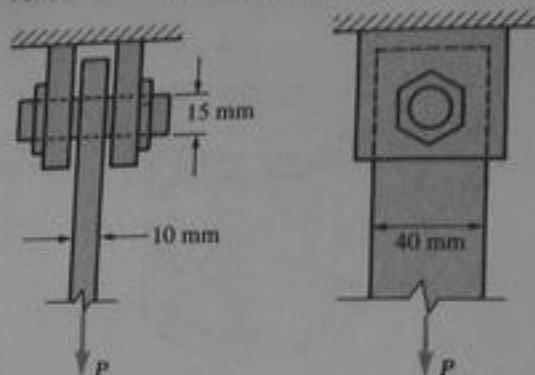


Fig. 1-27 Ejemplo 2

Por lo que la carga admisible P_1 basada en la tensión de la barra es

$$P_1 = \sigma_{\text{perm}} A_{\text{net}} = (120 \text{ MPa})(250 \text{ mm}^2) = 30 \text{ kN}$$

Este cálculo desprecia cualquier concentración de esfuerzos debida a la presencia del barreno.

Enseguida se calcula la carga permisible basada en el cortante del perno. El perno tiende a cortarse según dos secciones transversales, por lo que la fuerza total que puede resistir es

$$P_2 = \tau_{\text{perm}} (2A)$$

donde A es el área de la sección transversal del perno. Al sustituir valores numéricos se obtiene

$$P_2 = (60 \text{ MPa})(2) \left(\frac{\pi}{4} \right) (15 \text{ mm})^2 = 21.2 \text{ kN}$$

Al comparar los dos valores anteriores de P , se aprecia que rige el cortante en el perno y que

$$P_{\text{perm}} = 21.2 \text{ kN}$$

es el valor máximo permisible de la carga.

•Ejemplo 3

Determinar el radio r de una columna de sección transversal circular no uniforme y altura h , a fin de que el volumen de la columna sea mínimo, si el elemento soporta una carga de compresión P en su parte superior, así como su propio peso (Fig. 1-28a). Sea σ_c el esfuerzo permisible a compresión y sea γ el peso específico del material.

En la parte superior de la columna, el área de la sección transversal requerida A_0 y el radio correspondiente r_0 (Fig. 1-28b) son

$$A_0 = \frac{P}{\sigma_c} \quad r_0 = \left(\frac{A_0}{\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{P}{\pi \sigma_c} \right)^{1/2} \quad (1-17)$$

Para alturas inferiores se requiere un área mayor debido a que debe soportarse el peso de la porción de la columna que queda por encima de esas alturas. Para auxiliarnos en la evaluación

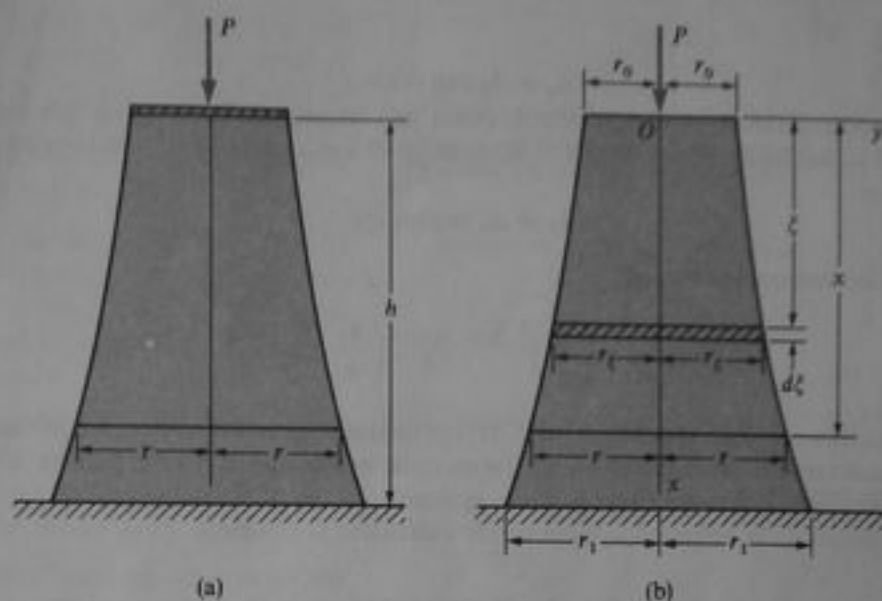


Fig. 1-28 Ejemplo 3. Columna de volumen mínimo

de este peso, se utilizan ejes xy como se muestra en la Fig. 1-28b. Luego, a una distancia ξ de la parte superior de la columna, el área requerida A_ξ es

$$A_\xi = \frac{P + W_\xi}{\sigma_c}$$

donde W_ξ es el peso de la columna entre secciones transversales en $x = 0$ y $x = \xi$. El área requerida a una distancia $\xi + d\xi$ es igual al área A_ξ más un área adicional dA_ξ debido al peso del pequeño elemento que se indica rayado en la Fig. 1-28b:

$$A_{\xi+d\xi} = A_\xi + dA_\xi = \frac{P + W_\xi}{\sigma_c} + \frac{\gamma A_\xi d\xi}{\sigma_c}$$

Así, el incremento dA_ξ en el área es

$$dA_\xi = \frac{\gamma A_\xi d\xi}{\sigma_c}$$

o sea

$$\frac{dA_\xi}{A_\xi} = \frac{\gamma d\xi}{\sigma_c}$$

Esta última expresión puede integrarse entre las secciones transversales para $\xi = 0$ y $\xi = x$. Por tanto, los límites de ξ son 0 y x , y los límites correspondientes a A_ξ son A_0 y A_x . Entonces se obtiene que

$$\int_{A_0}^{A_x} \frac{dA_\xi}{A_\xi} = \frac{\gamma}{\sigma_c} \int_0^x d\xi$$

Después de integrar y sustituir los límites, se obtiene*

$$\ln \frac{A_x}{A_0} = \frac{\gamma x}{\sigma_c}$$

* El símbolo \ln representa al logaritmo natural, y la notación $\exp(z)$ denota e^z , en donde e es la base de los logaritmos naturales.

o bien

$$A_x = A_0 \exp(\gamma x / \sigma_c) \quad (1-18)$$

Esta ecuación expresa el área requerida A_x como una función de la distancia x desde la parte superior de la columna. Note que si $x = 0$, A_x es igual a A_0 . En la base de la columna, el área requerida es

$$A_1 = A_0 \exp(\gamma h / \sigma_c) \quad (1-19)$$

Los radios correspondientes son

$$r = \left(\frac{A_x}{\pi}\right)^{1/2} \quad r_1 = \left(\frac{A_1}{\pi}\right)^{1/2} \quad (1-20)$$

Estas ecuaciones expresan las dimensiones de una columna óptima de volumen mínimo (y, en consecuencia, también peso mínimo), ya que en cada sección transversal el área de la columna es justo la suficiente para soportar la carga aplicada.

El volumen de la columna óptima puede calcularse si se desea:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A_x dx = \int_0^h A_0 \exp(\gamma x / \sigma_c) dx \\ &= \frac{A_0 \sigma_c}{\gamma} [\exp(\gamma h / \sigma_c) - 1] = \frac{P}{\gamma} [\exp(\gamma h / \sigma_c) - 1] \end{aligned} \quad (1-21)$$

Otra forma de esta ecuación es

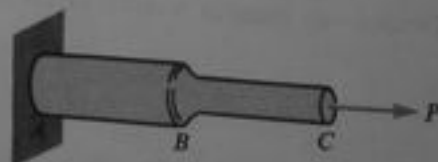
$$V = \frac{\sigma_c}{\gamma} (A_1 - A_0) \quad (1-22)$$

que expresa el volumen en función del área en los extremos.

Este ejemplo ilustra el concepto de **estructura óptima**, la cual constituye una estructura hipotética que satisface un cierto criterio, tal como volumen mínimo o peso mínimo. En la práctica, suele no ser factible construir una estructura que posea las propiedades de la estructura óptima "ideal". No obstante, el conocimiento de las propiedades de una estructura óptima puede desempeñar un papel importante en diseño, al comparar las propiedades de una estructura real con las de una estructura ideal, a fin de determinar el grado de eficiencia de la estructura real. Por ejemplo, las fórmulas obtenidas en este ejemplo indican que la estructura óptima difiere muy poco de una estructura prismática. En un caso típico, el área requerida A_1 en la base es sólo un pequeño porcentaje mayor que el área A_0 en la parte superior. (Así, la columna ilustrada en la Fig. 1-28 muestra una variación exagerada en radio desde la parte superior hasta la base.) Hemos aprendido de este ejemplo que una estructura prismática está muy cercana a una estructura óptima para estas características de carga, por lo que no vale la pena mejorarla con sección variable (véase Prob. 1.7-16).

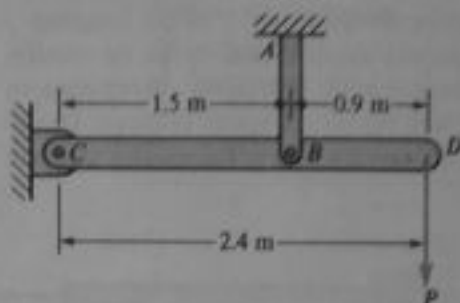
PROBLEMAS / CAPÍTULO 1

1.2-1 Una barra ABC que tiene dos secciones transversales de áreas diferentes está cargada por una fuerza axial $P = 95$ kip (véase figura). Ambas partes de la barra tienen sección transversal circular. Los diámetros de las porciones AB y BC de la barra son 4.0 plg y 2.5 plg, respectivamente. Calcular los esfuerzos normales σ_{AB} y σ_{BC} en cada porción de la barra.



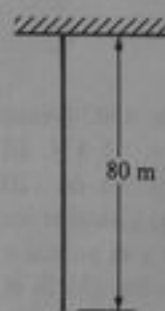
Prob. 1.2-1

1.2-2 Una barra horizontal CBD que tiene una longitud de 2.4 m, se sostiene y carga como se muestra en la figura. El miembro vertical AB tiene un área de sección transversal de 550 mm^2 . Determinar la magnitud de la carga P tal que produzca un esfuerzo normal igual a 40 MPa en el miembro AB .



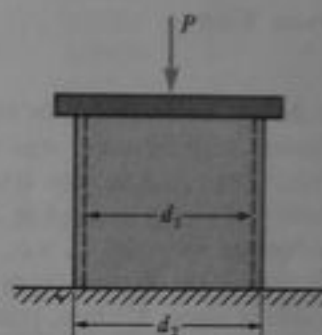
Prob. 1.2-2

1.2-3 Un alambre de aluminio de 80 m de longitud cuelga libremente bajo su propio peso (véase figura). Determinar el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en el alambre, si se supone que el aluminio tiene un peso específico $\gamma = 26.6 \text{ kN/m}^3$.



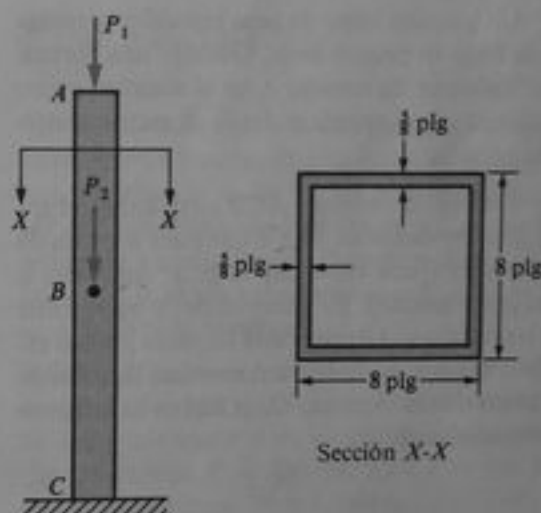
Prob. 1.2-3

1.2-4 Un tubo hueco de diámetro interior $d_1 = 4.0 \text{ plg}$ y diámetro exterior $d_2 = 4.5 \text{ plg}$ se comprime por una fuerza axial $P = 55 \text{ kip}$ (véase figura). Calcular el esfuerzo de compresión medio σ_c en el tubo.



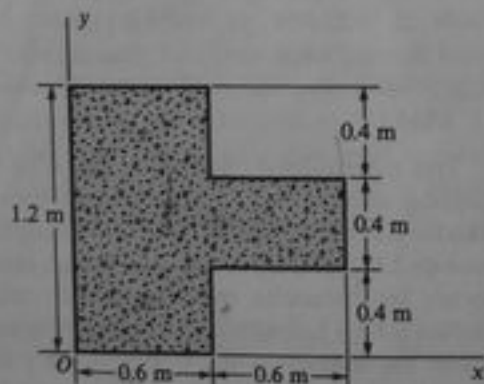
Prob. 1.2-4

1.2-5 Una columna ABC para un edificio de dos pisos se construye con un perfil cuadrado hueco (véase figura). Las dimensiones exteriores son $8 \text{ plg} \times 8 \text{ plg}$, y el espesor de pared es $5/8 \text{ plg}$. La carga del techo en la parte superior de la columna es $P_1 = 80 \text{ k}$ y la carga del piso a la mitad de la columna es $P_2 = 100 \text{ k}$. Determinar los esfuerzos de compresión σ_{ab} y σ_{bc} en ambas porciones de la columna debido a esas cargas.



Prob. 1.2-5

1.2-6 La figura muestra la sección transversal de un pedestal de concreto cargado a compresión. (a) Determinar las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del punto donde debe aplicarse la carga a fin de producir una distribución uniforme de esfuerzos. (b) ¿Cuál es la magnitud del esfuerzo de compresión σ_c si la carga es igual a 20 MN ?

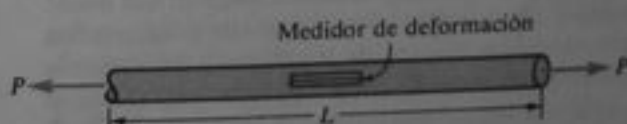


Prob. 1.2-6

1.2-7 Un alambre de acero de alta resistencia, empleado para presforzar una viga de concreto, tiene una longitud de 80 pie y se estira 3.0 plg . ¿Cuál es la deformación unitaria del alambre?

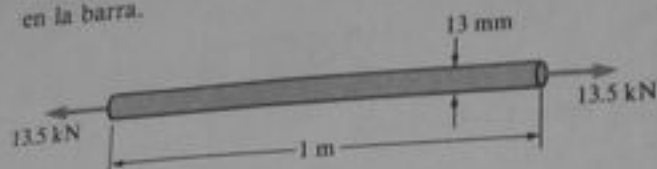
1.2-8 Una barra redonda de longitud $L = 1.5 \text{ m}$ se carga a tensión como se muestra en la figura. Una de-

formación unitaria normal $\epsilon = 2 \times 10^{-3}$ se mide por medio de un medidor de deformación (*strain gage*) colocado en la barra. ¿Qué alargamiento δ de la barra completa puede preverse bajo esta carga?



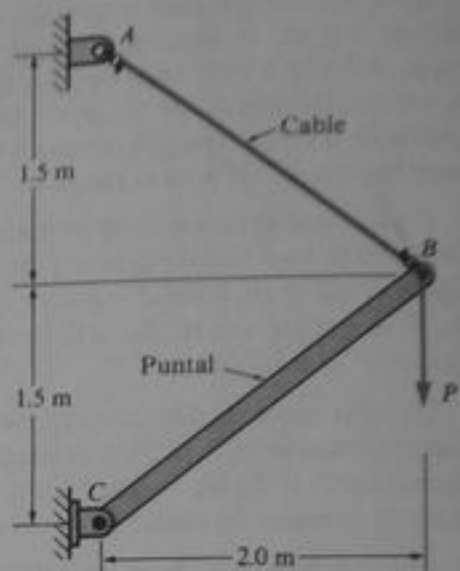
Prob. 1.2-8

1.2-9 Una barra de acero de 1 m de longitud y 13 mm de diámetro, soporta una carga de tensión de 13.5 kN (véase figura). La barra incrementa su longitud en 0.5 mm cuando se aplica la carga. Determinar el esfuerzo normal y la deformación unitaria en la barra.



Prob. 1.2-9

1.2-10 Un conjunto de puntal y cable ABC (véase figura) sostiene una carga vertical $P = 15$ kN. El cable tiene una sección transversal efectiva de 120 mm² y el puntal un área de 250 mm². (a) Calcular los esfuerzos normales σ_{ab} y σ_{bc} en el cable y el puntal e indicar si son de tensión o de compresión. (b) Si el cable se alarga 1.3 mm, ¿cuál es la deformación unitaria? (c) Si el puntal se acorta 0.62 mm, ¿cuál es su deformación unitaria?



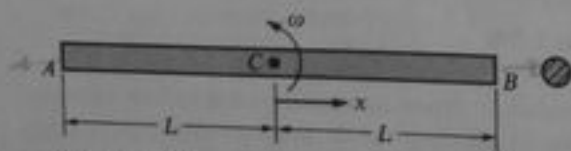
Prob. 1.2-10

1.2-11 Un alambre largo de peso específico γ cuelga libremente bajo su propio peso. Obtener una fórmula para el esfuerzo de tensión σ_x en el alambre como una función de la distancia y desde el extremo inferior (véase figura).



Prob. 1.2-11

1.2-12 Una barra redonda ACB cuya longitud total es $2L$ gira alrededor de un eje que pasa a través de su punto medio C con velocidad angular constante ω (radianes por segundo). El material de la barra tiene un peso específico γ . Obtener una fórmula para el esfuerzo de tensión σ_x en la barra como una función de la distancia x desde el punto C. ¿Cuál es el esfuerzo de tensión máximo?



Prob. 1.2-12

Datos de la prueba de tensión para el Problema 1.3-3

Carga (lb)	Alargamiento (plg)
1,000	0.0002
2,000	0.0006
6,000	0.0019
10,000	0.0033
12,000	0.0040
12,900	0.0043
13,400	0.0047
13,600	0.0054
13,800	0.0063
14,000	0.0090
14,400	0.0118
15,200	0.0167
16,800	0.0263
18,400	0.0380
20,000	0.0507
22,400	0.1108
25,400	fractura

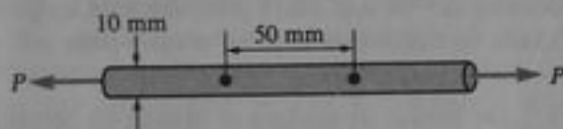
1.3-1 Un alambre largo cuelga verticalmente bajo su propio peso. ¿Cuál es la mayor longitud que puede alcanzar sin fluencia si está hecho de: (a) acero con un esfuerzo de fluencia de 36,000 psi y (b) aluminio con un esfuerzo de fluencia de 18,000 psi? (Nota: el peso específico del acero es 490 lb/pie³ y el del aluminio es 170 lb/pie³.)

1.3-2 Tres materiales diferentes A, B y C se prueban a tensión mediante el empleo de especímenes de tipo estándar con diámetros de 0.505 plg y longitudes calibradas de 2.0 plg. Después de que se fracturan los especímenes las distancias entre marcas de calibración resultan ser 2.13, 2.48 y 2.78 plg, respectivamente. También los diámetros son 0.484, 0.398 y 0.253 plg, respectivamente, en las secciones transversales de falla. Determinar la elongación (porcentual) y la

reducción (porcentual) de área de cada espécimen. También, clasifique los materiales como frágiles o dúctiles.

1.3-3 Los datos mostrados en la tabla se obtuvieron de una prueba a tensión de un acero de alta resistencia. El espécimen de prueba tenía un diámetro de 0.505 plg y se utilizó una longitud calibrada de 2.00 plg. El alargamiento total entre las marcas de calibración en la fractura fue 0.42 plg y el diámetro mínimo fue 0.370 plg. Trazar el diagrama nominal esfuerzo-deformación para el acero y determinar el límite de proporcionalidad, el esfuerzo de fluencia para una desviación de 0.1%, el esfuerzo último, la elongación porcentual en 2.00 plg y la reducción porcentual de área.

1.5-1 Se realiza una prueba de tensión sobre un espécimen de latón de 10 mm de diámetro y se utiliza una longitud calibrada de 50 mm (véase figura). Al aplicar una carga $P = 25$ kN se aprecia que la distancia entre marcas de calibración se incrementa en 0.152 mm. Calcular el módulo de elasticidad del latón.

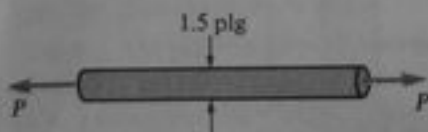


Prob. 1.5-1

1.5-2 Determinar la fuerza de tensión P necesaria para producir una deformación unitaria axial $\epsilon = 0.0007$ en una barra de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) de sección transversal circular cuyo diámetro es igual a 1 plg.

1.5-3 Los datos de la tabla anexa se obtuvieron de una prueba a tensión de un espécimen de aleación de aluminio. Grafique los datos y luego determine el módulo de elasticidad E y el límite de proporcionalidad σ_p para la aleación.

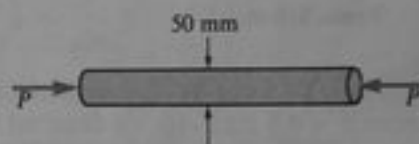
1.5-4 Una muestra de aleación de aluminio se prueba a tensión. La carga se incrementa hasta alcanzar una deformación unitaria de 0.0075; el esfuerzo correspondiente en el material es 443 MPa. Luego se retira la carga y se presenta una deformación permanente de 0.0013. ¿Cuál es el módulo de elasticidad E para el aluminio? (Sugerencia: véase Fig. 1-16b.)



Prob. 1.5-6

Datos de esfuerzo-deformación para el Problema 1.5-3

Esfuerzo (ksi)	Deformación
8	0.0006
17	0.0015
27	0.0024
35	0.0032
43	0.0040
50	0.0046
58	0.0052
62	0.0058
64	0.0062
65	0.0065
67	0.0073
68	0.0081



Prob. 1.5-8

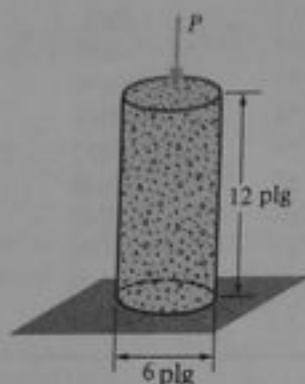
1.5-5 Dos barras, una de aluminio y otra de acero, se someten a fuerzas de tensión que producen esfuerzos normales $\sigma = 24$ ksi en ambas barras. ¿Cuáles son las deformaciones laterales ϵ_x y ϵ_y en las barras de aluminio y acero, respectivamente, si $E = 10.6 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.33$ para el aluminio, y $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$ para el acero?

1.5-6 Una barra redonda de 1.5 plg de diámetro se carga en tensión con una fuerza P (véase figura). Se mide la variación en el diámetro y resulta 0.0031 plg. Se supone $E = 400,000$ psi y $\nu = 0.4$. Determinar la fuerza axial P en la barra.

1.5-7 Un miembro compresible construido de tubo de acero ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.30$) tiene un diámetro exterior de 90 mm y un área de sección transversal de 1580 mm². ¿Qué fuerza axial P ocasionará un incremento del diámetro exterior igual a 0.0094 mm?

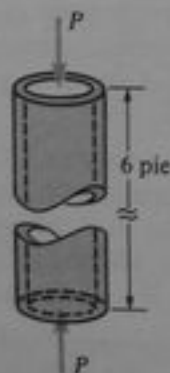
1.5-8 Una barra de acero de alta resistencia ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$) se comprime con una fuerza axial P (véase figura). Cuando no actúa carga axial, el diámetro de la barra es 50 mm. A fin de mantener cierta holgura, el diámetro de la barra no debe exceder de 50.02 mm. ¿Cuál es el mayor valor permisible de la carga P ?

1.5-9 Al probar a compresión un cilindro de concreto (véase figura), el diámetro original de 6 plg se incrementó en 0.0004 plg y la longitud original de 12 plg se redujo en 0.0065 plg bajo la acción de la carga de compresión $P = 52,000$ lb. Calcular el módulo de Poisson ν .



Prob. 1.5-9

1.5-10 Un tubo de acero de 6 pie de longitud, diámetro exterior $d = 4.5$ plg y espesor de pared $t = 0.3$ plg, se somete a una carga axial de compresión $P = 40$ k (véase figura). Se supone que $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.3$, determinar (a) el acortamiento δ del tubo, (b) el incremento del diámetro exterior Δd y (c) el incremento de espesor de pared Δt .

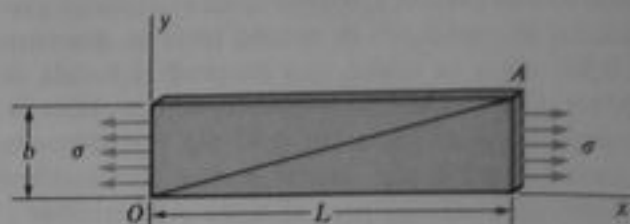


Prob. 1.5-10

1.5-11 Una placa metálica de longitud L y anchura b se somete a un esfuerzo uniforme de tensión σ en sus extremos (véase figura). Antes de cargarse la pendiente de la línea diagonal OA era b/L . ¿Cuál es la pendiente cuando actúa el esfuerzo σ ?

1.5-12 Una barra de acero de 2.5 m de longitud con una sección transversal cuadrada de 100 mm por lado se somete a cargas de tensión axial de 1300 kN (véase figura). Se supone que $E = 200$ GPa y $\nu = 0.3$,

determinar (a) el alargamiento de la barra, (b) la variación en las dimensiones de la sección transversal y (c) el cambio de volumen.

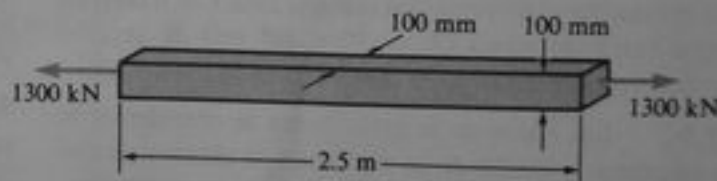


Prob. 1.5-11

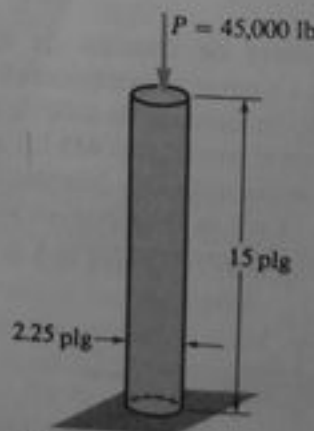
1.5-13 Una barra sólida circular de hierro fundido ($E = 12.5 \times 10^3$ ksi, $\nu = 0.30$) de 2.25 plg de diámetro y 15 plg de longitud, se comprime con una fuerza axial $P = 45,000$ lb (véase figura). (a) Determinar el incremento Δd en el diámetro de la barra. (b) Determinar la reducción de volumen ΔV de la barra.

*1.5-14 Determinar la fórmula para el incremento de volumen ΔV de una barra prismática de longitud L colgada verticalmente bajo su propio peso ($W =$ peso total de la barra).

1.6-1 Un bloque de madera se prueba en cortante directo mediante el espécimen de prueba mostrado en la figura. La carga P produce un corte en el espécimen.

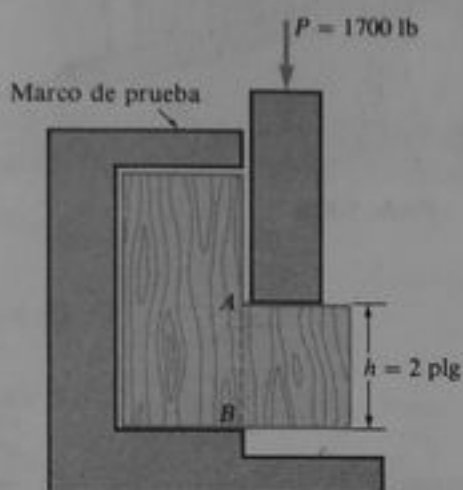


Prob. 1.5-12

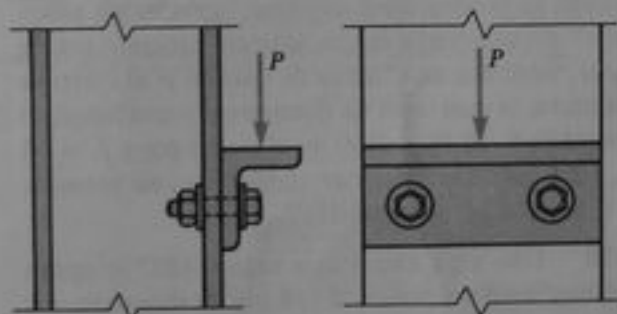


Prob. 1.5-13

men según el plano AB . El ancho del espécimen (perpendicular al plano del papel) es 2 plg y la altura h del plano AB es 2 plg. Para una carga $P = 1700$ lb, ¿cuál es el esfuerzo cortante medio τ_{med} en la madera?

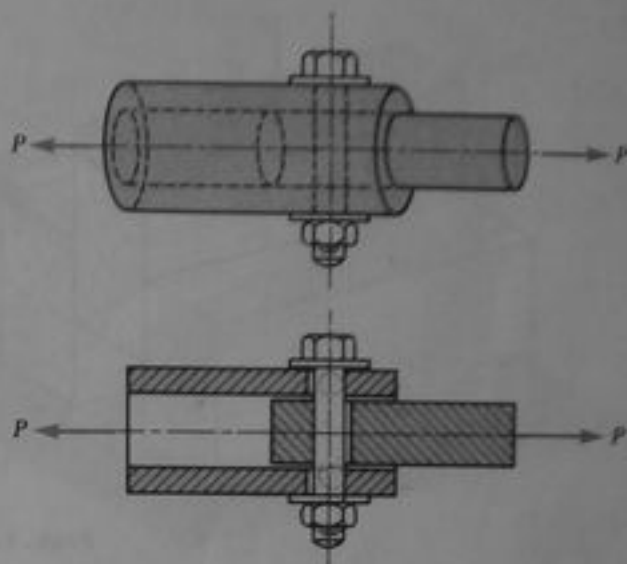
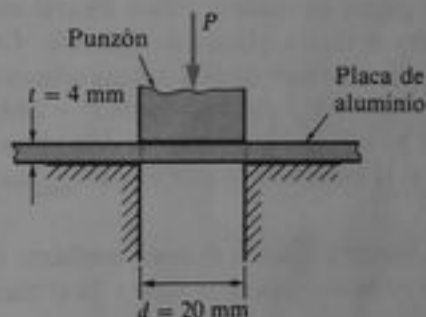
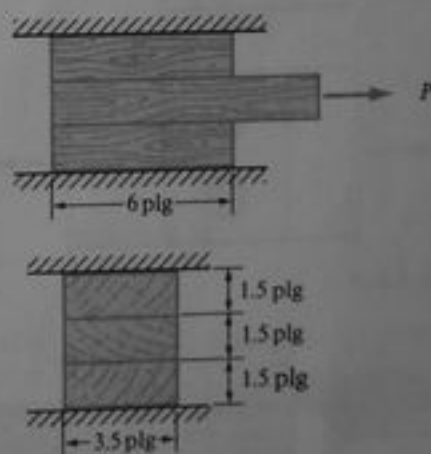

Prob. 1.6-1

1.6-2 Una ménsula de perfil estructural está fijada a una columna mediante dos tornillos de 16 mm de diámetro, como se muestra en la figura. La ménsula sostiene una carga $P = 35$ kN. Calcular el esfuerzo cortante medio τ_{med} en los tornillos, cuando se desprecia la fricción entre la ménsula y la columna.

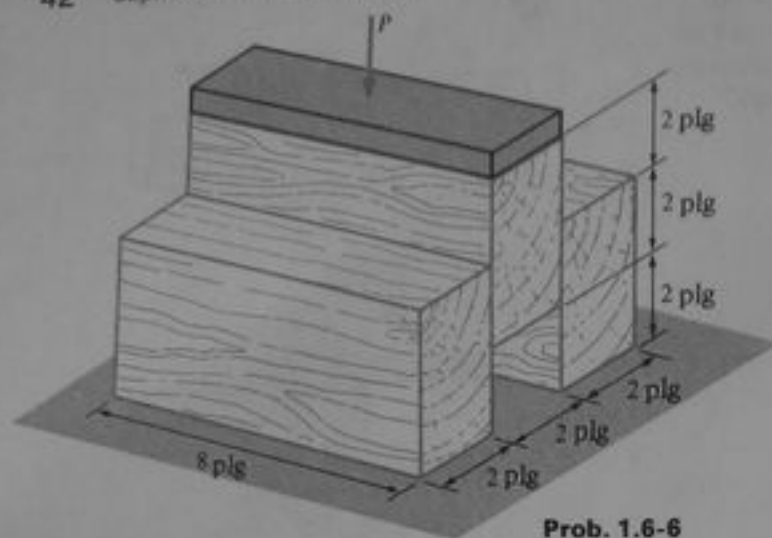

Prob. 1.6-2

1.6-3 Una barra circular maciza de aluminio ajusta holgadamente dentro de un tubo de cobre (véase figura). La barra y el tubo están unidos mediante un tornillo de 0.25 plg de diámetro. Calcular el esfuerzo cortante medio τ_{med} en el tornillo si las barras se cargan por fuerzas $P = 400$ lb.

1.6-4 Un punzón con diámetro $d = 20$ mm se utiliza para perforar una placa de aluminio de espesor $t = 4$ mm (véase figura). Si el esfuerzo cortante último para el aluminio es 275 MPa, ¿qué fuerza P se requiere para perforar la placa?


Prob. 1.6-3

Prob. 1.6-4

Prob. 1.6-5

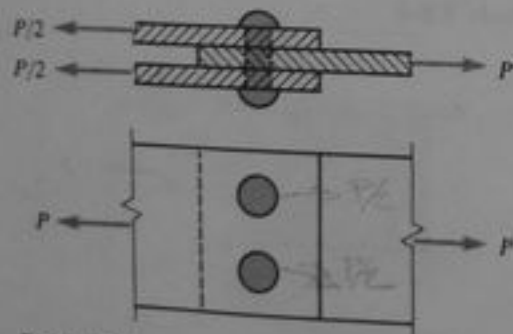
1.6-5 Tres piezas de madera están adheridas entre sí y sometidas a una fuerza $P = 3000$ lb, como se muestra en la figura. La sección transversal de cada miembro es 1.5×3.5 plg, y la longitud de las superficies es 6 plg. ¿Cuál es el esfuerzo cortante medio τ_{med} en las uniones?



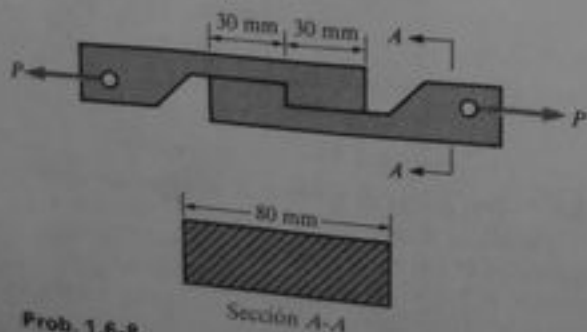
Prob. 1.6-6

1.6-6 Tres piezas de madera (véase figura) están adheridas entre sí en sus planos de contacto. Cada pieza tiene sección transversal de 2×4 plg (dimensiones reales) y longitud de 8 plg. Una carga $P = 2400$ lb se aplica a la pieza superior mediante una placa de acero. ¿Cuál es el esfuerzo cortante medio τ_{med} en las uniones?

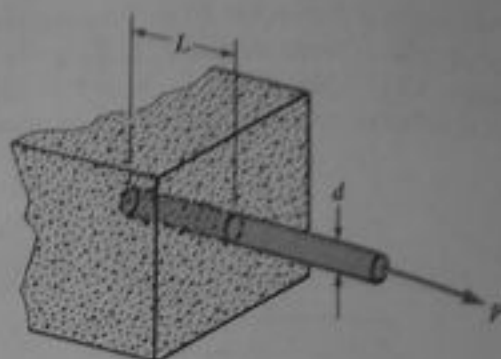
1.6-7 Tres placas de acero se unen mediante dos remaches, como se muestra en la figura. Si el diámetro



Prob. 1.6-7



Prob. 1.6-8



Prob. 1.6-9

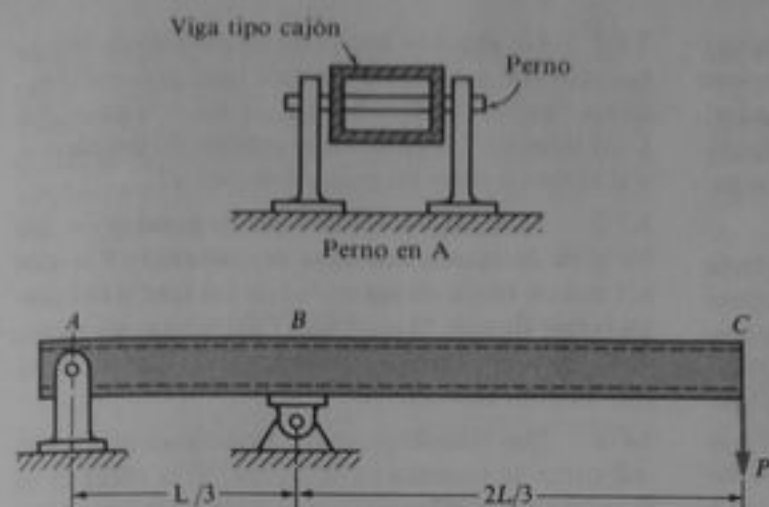
de los remaches es de 20 mm y el esfuerzo cortante último en los remaches es 210 MPa, ¿qué fuerza P se requiere para ocasionar la falla por cortante de dichos remaches?

1.6-8 Dos piezas de material se unen como se muestra en la figura, y se tensionan con fuerzas P . Si el esfuerzo cortante último para el material es 38 MPa, ¿qué fuerza P se requiere para fracturar a cortante las piezas?

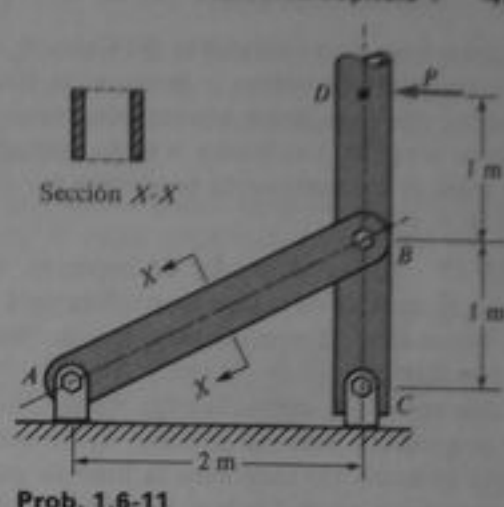
1.6-9 La adherencia entre barras de refuerzo y el concreto se prueba mediante una "prueba de adherencia" de una barra empotrada en concreto (véase figura). Se aplica una fuerza de tensión P al extremo de la barra, la cual tiene un diámetro d y una longitud empotrada L . Si $P = 4000$ lb, $d = 0.5$ plg y $L = 12$ plg, ¿qué esfuerzo cortante medio τ_{med} se presenta entre el acero y el concreto?

1.6-10 Una viga hueca tipo cajón ABC se apoya en A mediante un perno de $7/8$ plg de diámetro que pasa a través de la viga, como se muestra en la figura. Un apoyo de rodillo en B sostiene la viga a una distancia $L/3$ de A . Calcular el esfuerzo cortante medio τ_{med} en el perno si la carga P es igual a 3000 lb.

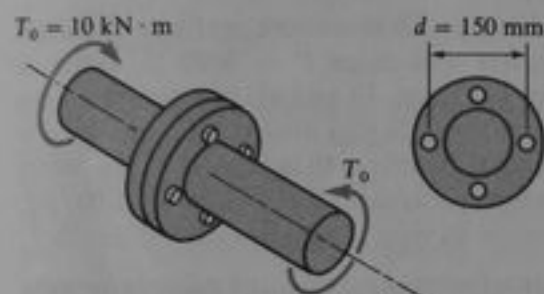
1.6-11 Un bastidor está hecho con un tubo vertical CD de 2 m y un brazo AB constituido por dos barras planas (véase figura). El bastidor se sostiene mediante conexiones atornilladas en los puntos A y C , separados 2 m. El brazo se fija al tubo en el punto B , que está 1 m por encima del punto C , mediante un tornillo de 20 mm de diámetro. Si en el punto D actúa una carga horizontal $P = 12$ kN, determinar el esfuerzo cortante medio τ_{med} en el tornillo B .



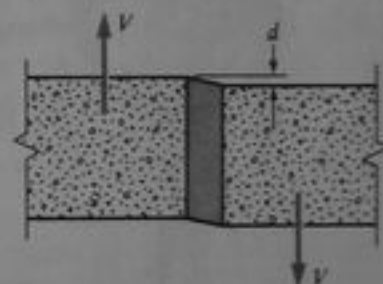
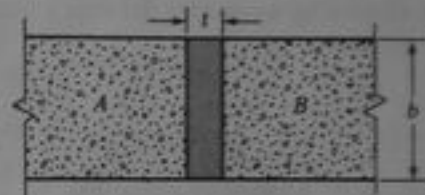
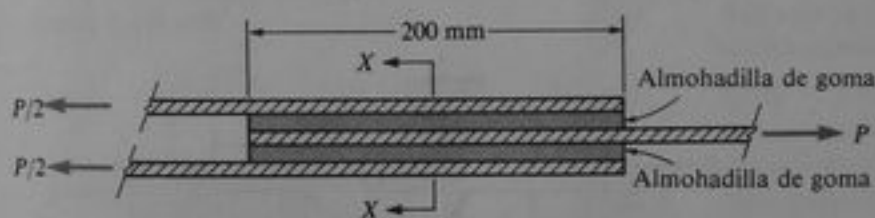
Prob. 1.6-10



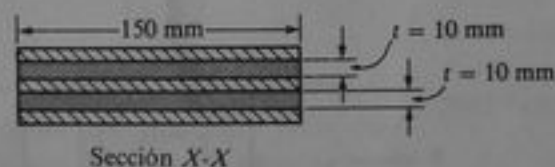
Prob. 1.6-11



Prob. 1.6-12



Prob. 1.6-13



Prob. 1.6-14

1.6-12 Un momento torsionante T_0 de $10\text{ kN}\cdot\text{m}$ es transmitido entre dos ejes (o flechas) con bridas, por medio de cuatro tornillos de 20 mm (véase figura). ¿Cuál es el esfuerzo cortante medio τ_{med} en cada tornillo si el diámetro d del círculo de tornillos es 150 mm ?

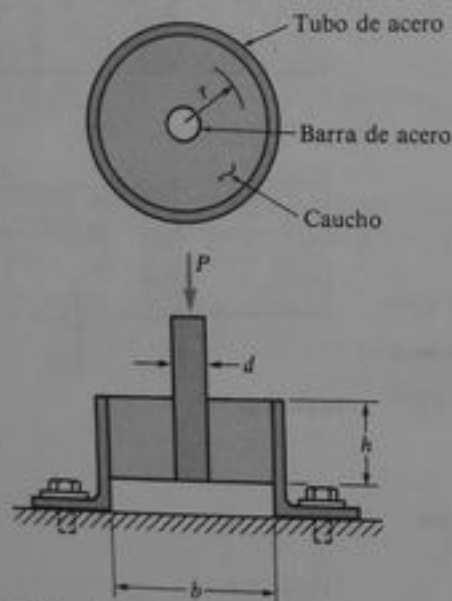
1.6-13 Un nudo entre dos losas de concreto A y B se llena con un epóxico flexible que se adhiere en forma segura al concreto (véase figura). El ancho del nudo es $b = 4.0\text{ plg}$, su longitud perpendicular al plano del papel es $L = 40\text{ plg}$ y su espesor es $t = 0.5\text{ plg}$. Bajo la acción de fuerzas cortantes V , las losas se

desplazan relativamente entre sí una distancia $d = 0.002\text{ plg}$. (a) ¿Cuál es la deformación angular media γ_{med} en el epóxico? (b) ¿Cuál es la magnitud de las fuerzas V si $G = 140,000\text{ psi}$ para el epóxico?

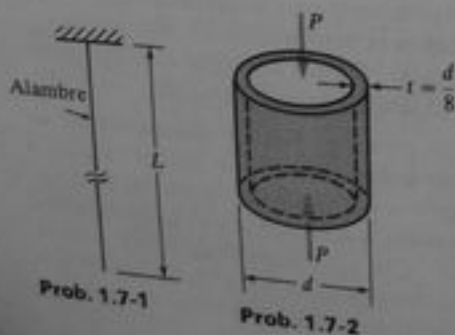
1.6-14 Una conexión flexible consistente en almohadillas de goma (espesor $t = 10\text{ mm}$) unidas a placas de acero se muestra en la figura. (a) Determinar la deformación angular media γ en el caucho o hule si la fuerza $P = 16\text{ kN}$ y el módulo de elasticidad a cortante para el hule es $G = 800\text{ kPa}$. (b) Determinar el desplazamiento horizontal relativo δ entre la placa

interior y las placas exteriores. (c) Calcular la rigidez k (o constante de resorte) de la conexión, si se supone que las placas de acero son completamente rígidas. (Nota: la rigidez k es igual a la carga aplicada dividida entre el desplazamiento producido por tal carga; así, $k = P/\delta$.)

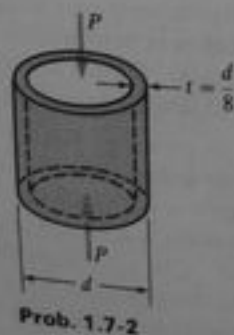
*1.6-15 Un amortiguador de impactos, diseñado como se muestra en la figura, se utiliza para sostener un instrumento. El montaje consiste en un tubo de acero con diámetro interior b , una barra central de acero de diámetro d que soporta la carga P y un cilindro hueco de caucho o hule (de altura h) fijo al tubo y a la barra de acero. (a) Determine la fórmula para el esfuerzo cortante τ en el hule en función del radio r medido desde el centro del montaje. (b) Determine la fórmula para el desplazamiento ascendente δ del extremo de la barra, si se supone que G es el módulo de elasticidad a cortante del hule y que el tubo de acero es rígido.



Prob. 1.6-15



Prob. 1.7-1



Prob. 1.7-2

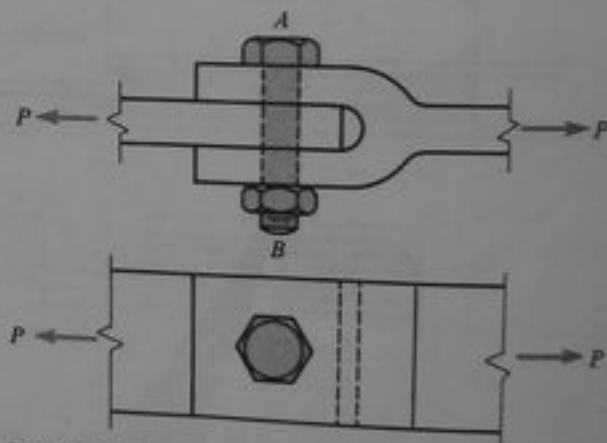
1.7-1 Un alambre largo está suspendido de uno de sus extremos y cuelga libremente bajo su propio peso (véase figura). ¿Cuál es la longitud máxima permisible L del alambre si el esfuerzo de tensión permisible es σ , y el material tiene un peso específico γ ?

1.7-2 Una pieza corta de tubo de acero ($\sigma_c = 270$ MPa) ha de soportar una carga de compresión $P = 1200$ kN con un factor de seguridad de 1.8 contra la fluencia (véase figura). Si el espesor t del tubo es un octavo de su diámetro exterior, determinar el diámetro exterior mínimo requerido d .

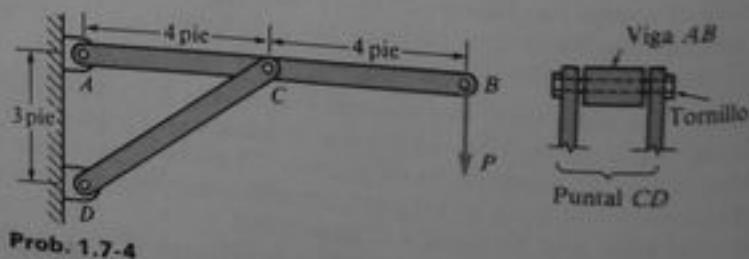
1.7-3 Dos miembros se unen mediante un tornillo AB como se muestra en la figura. Si la carga es de $P = 36$ kN y el esfuerzo cortante permisible en el tornillo es $\tau_{perm} = 90$ MPa, determinar el diámetro mínimo requerido d del tornillo.

1.7-4 Una viga AB se sostiene mediante un puntal CD y soporta una carga $P = 3000$ lb, como se muestra en la figura. El puntal, que consta de dos miembros, se une a la viga mediante un tornillo que atraviesa ambos miembros en la junta C . Si el esfuerzo cortante medio permisible en el tornillo es 15,000 psi, ¿qué diámetro mínimo se requiere para el tornillo?

1.7-5 Un cilindro que posee una cubierta hermética, formada por una placa circular y retenida por

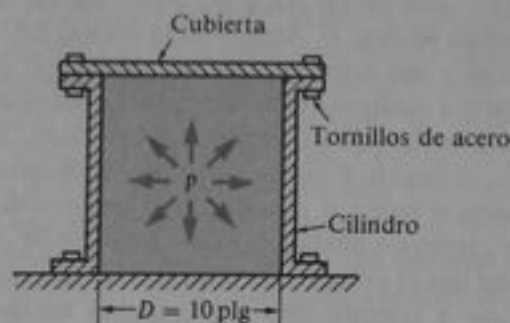


Prob. 1.7-3



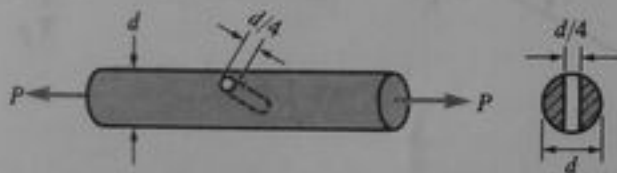
Prob. 1.7-4

pernos de acero, contiene un gas a presión p (véase figura). El diámetro d , de los tornillos es 0.5 plg y el esfuerzo permisible a tensión de los mismos es 10,000 psi. Si el diámetro interior D del cilindro es 10 plg y la presión p es 280 psi, determinar el número de tornillos n necesario para retener la cubierta.



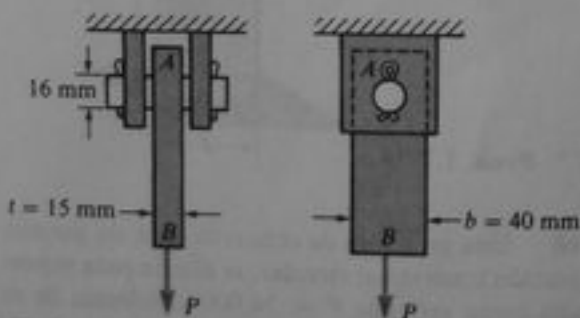
Prob. 1.7-5

1.7-6 Una barra maciza de sección transversal circular (diámetro $d = 1.5$ plg) tiene un pequeño barrenado dirigido lateralmente a través del centro de la barra (véase figura). El diámetro del barrenado es $d/4$. Si se supone que el esfuerzo de tensión medio permisible sobre la sección transversal neta de la barra en la perforación es $\sigma_{perm} = 10,000$ psi, determinar la carga permisible P que puede soportar la barra a tensión.



Prob. 1.7-6

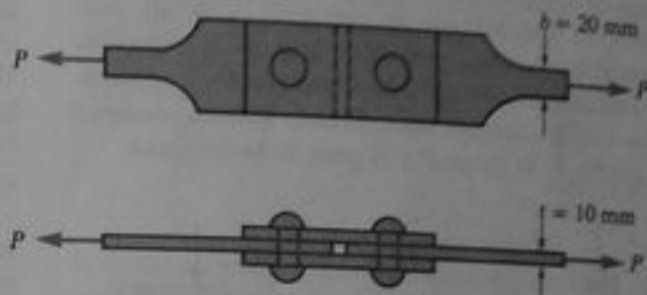
1.7-7 Una barra de aluminio AB está fijada a su soporte mediante un perno de 16 mm de diámetro en A (véase figura). El espesor t de la barra es 15 mm y su



Prob. 1.7-7

ancho b es 40 mm. Si el esfuerzo de tensión permisible en la barra es 150 MPa y el esfuerzo cortante permisible en el perno es 85 MPa, determinar la carga permisible P .

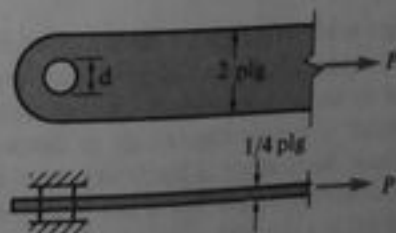
1.7-8 Dos barras planas cargadas con una fuerza de tensión P están empalmadas mediante dos re-



Prob. 1.7-8

maches de 15 mm de diámetro (véase figura). Las barras tienen un ancho $b = 20$ mm y un espesor $t = 10$ mm. Las barras están hechas de acero con un esfuerzo último igual a 400 MPa. El esfuerzo cortante último para el acero de los remaches es 180 MPa. Determinar la carga admisible P si se desea un factor de seguridad de 3.0 con respecto a la carga última que puede soportar la conexión. (Suponga que las barras no fallan a tensión en las secciones transversales a través de los remaches y desprecie la fricción entre las placas.)

1.7-9 Una barra plana de 2 plg de ancho y 1/4 plg de espesor se somete a una carga P (véase figura). Un agujero de diámetro d se perfora a través de la barra para insertar un perno para soporte. El esfuerzo permisible a tensión sobre la sección transversal neta de la barra es 21 ksi y el esfuerzo cortante permisible en el perno es 12 ksi. Determinar el diámetro d del perno para el cual la carga P es máxima.

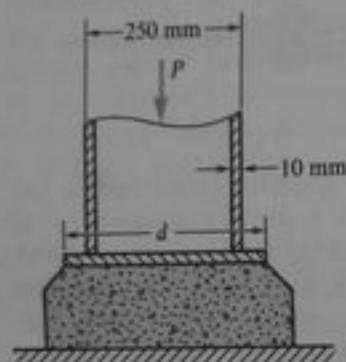


Prob. 1.7-9

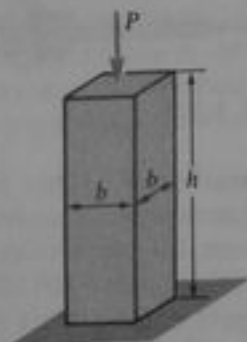
1.7-10 Una columna hecha de tubo de acero se apoya sobre una placa base circular y un pedestal de concreto (véase figura). El tubo tiene un diámetro exterior de 250 mm y un espesor de pared de 10 mm.

El esfuerzo medio permisible a compresión para el concreto es 15 MPa y para el acero 150 MPa. Determinar el diámetro mínimo requerido d de la placa base si debe apoyar la carga máxima P que será soportada por el tubo.

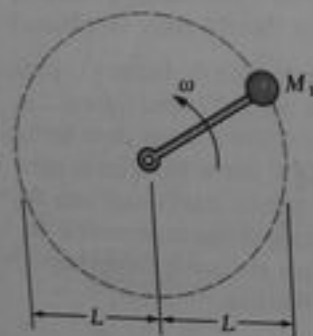
1.7-11 Una columna prismática de sección transversal cuadrada (dimensiones $b \times b$) se somete a una carga de compresión P en su parte superior (véase figura). El material de la columna tiene un peso específico γ y un esfuerzo de compresión permisible σ_c . Determinar la fórmula para la altura máxima permisible h de la columna, considerando simultáneamente la acción de la carga P y el peso de la columna.



Prob. 1.7-10

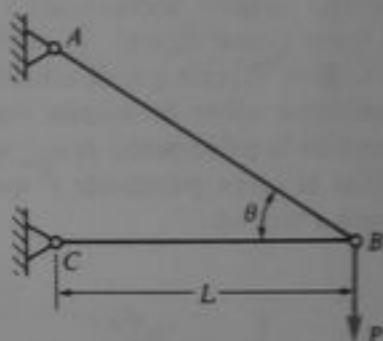
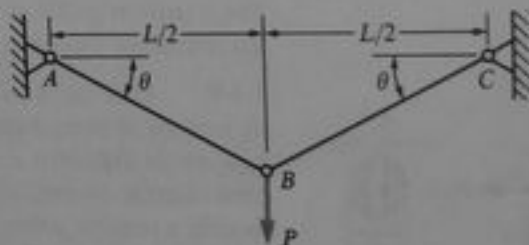


Prob. 1.7-11



Prob. 1.7-14

Probs. 1.7-12 y 1.7-13



Prob. 1.7-15

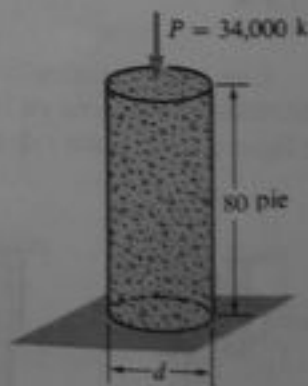
1.7-12 Una masa M_1 , sujeta a un brazo prismático de longitud L , gira sobre una superficie horizontal lisa alrededor de un pivote vertical, con velocidad angular constante ω (véase figura). Si se desprecia la masa del brazo, determinar la fórmula para el área de la sección transversal requerida A del brazo, si el esfuerzo permisible a tensión es σ .

1.7-13 Resolver el problema anterior si se considera la masa del brazo prismático. Suponga que la densidad del material del brazo es ρ .

1.7-14 Dos barras AB y BC soportan una carga vertical P (véase figura). La distancia L entre los

soportes permanece constante, pero el ángulo θ puede variarse al modificar la longitud de las barras. Se supone que ambas barras tienen las mismas áreas de sección transversal y que están completamente esforzadas al valor permisible en tensión; determinar el ángulo θ tal que la estructura tenga volumen mínimo. (Despreciar el peso de las barras.)

1.7-15 Dos barras AB y BC (véase figura) resisten una carga vertical P . Ambas están hechas del mismo material y sus áreas de sección transversal pueden ajustarse a cualquier valor deseado. La longitud L de la barra horizontal BC permanece constante. Sin embargo, el ángulo θ puede variar al desplazarse verticalmente el punto A y modificar la longitud de AB al valor correspondiente a la nueva posición de A . Si se supone que el esfuerzo permisible a tensión es el mismo que a compresión, y que ambas barras están completamente esforzadas a tal valor, determinar el ángulo θ tal que la estructura tenga volumen mínimo. (Despreciar el peso de las barras.)

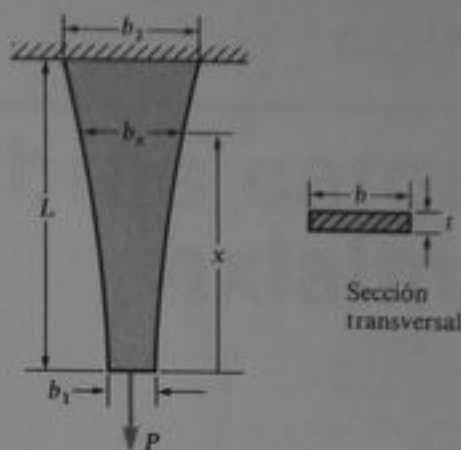


Prob. 1.7-16

1.7-16 Una gran pila de concreto para un puente, con sección transversal circular, se diseña para soportar una carga aplicada $P = 34,000$ k, además de su propio peso (véase figura). La pila tiene 80 pie de al-

tura y se construye de concreto con un esfuerzo de compresión permisible $\sigma_c = 2000$ psi. (a) Determinar el diámetro requerido d de la pila, si se supone que la misma es prismática y que el peso específico del concreto es 150 lb/pie^3 . (b) Comparar el volumen V_p de esta pila con el volumen V de una pila óptima (véase Ejemplo 3, Ec. 1-21).

1.7-17 Una barra larga de sección transversal rectangular cuelga de un soporte y sostiene una carga P en su extremo inferior, además de su propio peso (véase figura). El espesor t de la barra es constante, pero su ancho b varía con el largo. La longitud de la barra es L y el material tiene un peso específico γ . Determinar la fórmula para el ancho b_x de una sección transversal a una distancia x del extremo inferior, a fin de tener esfuerzo de tensión constante σ , en toda la barra. También determinar las anchuras b_1 y



Prob. 1.7-17

b_2 en los extremos inferior y superior de la barra, respectivamente, y determinar el volumen V de la misma.

Miembros cargados axialmente

2.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se ocupa del comportamiento de **elementos cargados axialmente**, que son miembros estructurales que tienen eje longitudinal recto y soportan únicamente fuerzas axiales (de tensión o de compresión). Los elementos de este tipo se presentan en formas diversas como diagonales en armaduras, bielas de motores, cables de puentes, columnas de edificios y puntales en montaje de motores de aviación. Sus secciones transversales pueden ser macizas, huecas o de pared delgada y abiertas (Fig. 2-1). Cuando se diseña un elemento para una estructura propuesta o cuando se analiza una estructura ya existente, a menudo se requiere determinar no sólo los esfuerzos máximos en el elemento (como se explicó en el Capítulo 1), sino también las deflexiones. Por ejemplo, las deflexiones pueden requerir conservarse dentro de ciertos límites, a fin de mantener ciertas holguras. El conocimiento de las deflexiones es necesario también en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, un amplio tema que se tratará en la Sección 2.4. Otros temas de este capítulo incluyen efectos de temperatura, esfuerzos en secciones oblicuas o inclinadas, energía de deformación, cargas dinámicas y comportamiento no lineal. Aunque en este capítulo consideraremos únicamente miembros con cargas axiales, posteriormente apreciaremos que estos temas son importantes para todo tipo de elementos estructurales. Cuando se traten tales temas se utilizará el material referente a tensión, compresión y cortante que se analizó en el Capítulo 1.

En lo que resta de este libro, las expresiones *análisis* y *diseño* aparecen frecuentemente. El término **análisis** se suele utilizar en mecánica para denotar el cálculo de magnitudes tales como esfuerzos, deformaciones, deflexiones y capacidad de carga. Cuando se analiza una estructura, o una parte de la misma, se supone que se conocen las dimensiones de la estructura y el material que la constituye. Por lo que se analiza una estructura a fin de determinar su comportamiento bajo cargas conocidas. Una tarea más ardua es la del **diseño**, que consiste en determinar la configuración geométrica de una estructura, a fin de que satisfaga completamente una función prescrita. Por ejemplo, se diseña una estructura para que soporte ciertas cargas dadas. Diseñar una estructura requiere invariablemente que se realicen análisis de la misma, a me-

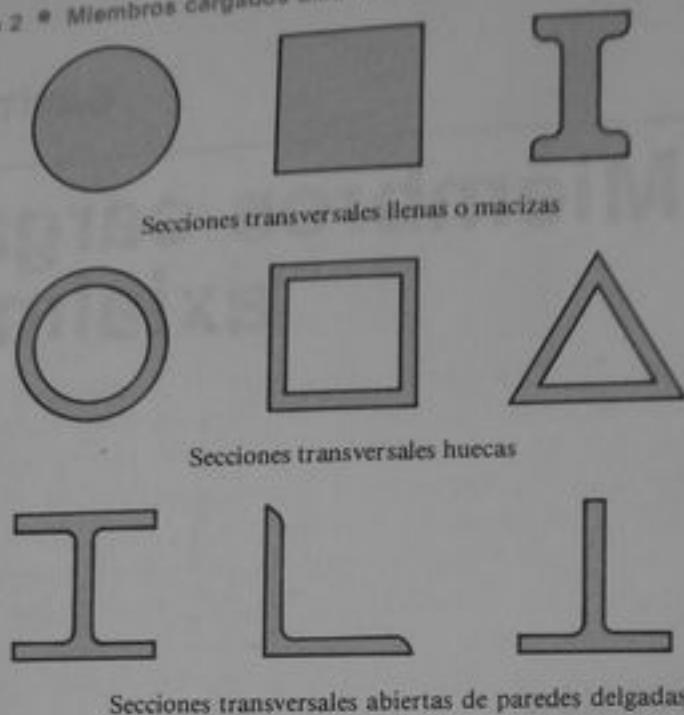


Fig. 2-1 Secciones transversales características de miembros estructurales

nudo más de una vez. Otro término común es **optimización**, que constituye parte del proceso de diseño. Optimización es la tarea de diseñar la "mejor" estructura para un fin particular, como por ejemplo una estructura de peso mínimo. Desde luego, la meta debe alcanzarse bajo ciertas restricciones; por ejemplo la meta puede ser el diseño de una estructura de peso mínimo pero la deflexión no debe rebasar un valor especificado. Así, análisis, diseño y optimización están íntimamente relacionados, como se establece en los ejemplos y problemas que aparecen en este capítulo y los subsecuentes.

2.2 DEFLEXIONES DE MIEMBROS CARGADOS AXIALMENTE

Una barra prismática de longitud L cargada a tensión por fuerzas axiales P se muestra en la Fig. 2-2. Si las fuerzas P actúan en el centroide de la sección transversal, el esfuerzo uniforme en la barra para secciones alejadas de los extremos se determina mediante la fórmula $\sigma = P/A$, donde A es el área de la sección transversal (véase Ec. 1-1). Además, si la barra está constituida de material homogéneo, la deformación (unitaria) axial es $\epsilon = \delta/L$, donde δ es el alargamiento total producido por las fuerzas

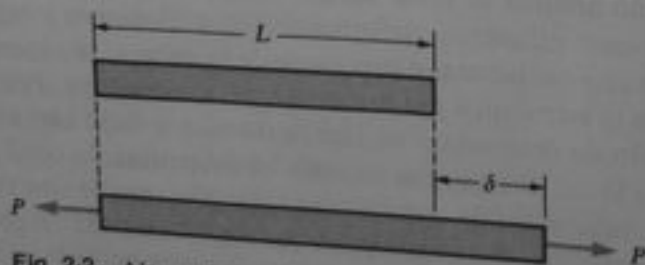


Fig. 2-2 Alargamiento de una barra prismática a tensión

axiales (véase Ec. 1-2). Ahora, supongamos que el material es linealmente elástico de tal modo que se cumple la ley de Hooke ($\sigma = E\epsilon$). Entonces las expresiones anteriores para σ y ϵ pueden combinarse para establecer la siguiente ecuación del **alargamiento** de la barra:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (2-1)$$

Esta ecuación señala que el alargamiento de una barra homogénea, constituida de material linealmente elástico, es directamente proporcional a la carga P y a la longitud L , e inversamente proporcional al módulo de elasticidad E y al área de la sección transversal A . El producto EA se conoce como **rigidez axial** de la barra. Por supuesto, la Ec. (2-1) también puede emplearse para un miembro en compresión, en cuyo caso δ representa el acortamiento de la barra. Cuando se precisan los **signos convencionales**, el alargamiento se considera positivo y el acortamiento se considera negativo.

De la Ec. (2-1) se aprecia que una barra en tensión es análoga a un resorte cargado axialmente (Fig. 2-3). Bajo la acción de la fuerza P , el resorte se alarga una cantidad δ , en forma tal que su longitud final resulta $L + \delta$, en donde L es la longitud original. La **constante del resorte** k se define como la fuerza requerida para producir un alargamiento unitario del resorte, esto es, $k = P/\delta$. La **deformabilidad** del resorte es el recíproco de la constante del resorte, o sea la deflexión producida por una carga de valor unitario. En el caso de una barra a tensión (Fig. 2-2) o cualquier otro miembro estructural, tal como una viga, es común aludir a rigideces y flexibilidades en lugar de constantes de resorte y deformabilidades.

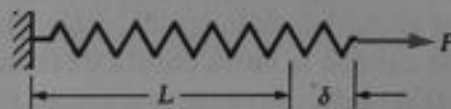


Fig. 2-3 Resorte elástico lineal en tensión

La **rigidez** k de una barra cargada axialmente se define como la fuerza requerida para producir una deflexión unitaria, por lo que de la Ec. (2-1) se aprecia que la rigidez de la barra de la Fig. 2-2 es

$$k = \frac{EA}{L} \quad (2-2)$$

En forma análoga, la **flexibilidad** f se define como la deflexión producida por una carga unitaria. Así, la flexibilidad de una barra cargada axialmente es

$$f = \frac{L}{EA} \quad (2-3)$$



Fig. 2-4 Barra con cargas axiales intermedias

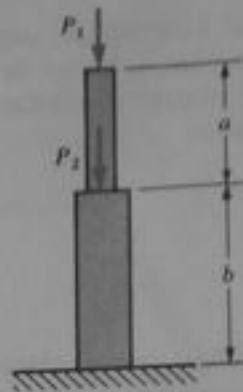


Fig. 2-5 Barra con cambios en sección transversal

que es el recíproco de la rigidez. La rigidez y la flexibilidad tienen una función importante en el análisis de muchos tipos de estructuras. Advierta que un incremento en la longitud de la barra significa una disminución en rigidez y un aumento en flexibilidad.

La variación en longitud de una barra prismática cargada únicamente en sus extremos puede determinarse sin dificultad mediante la Ec. (2-1). No obstante, la ecuación puede adaptarse para considerar situaciones más generales. Suponga, por ejemplo, que una barra se carga con una o más fuerzas axiales intermedias (Fig. 2-4). Entonces, se puede determinar la fuerza axial en cada parte de la barra (esto es, en las porciones *AB*, *BC* y *CD*) y calcular el alargamiento o acortamiento de cada parte en forma separada. Finalmente, estos cambios en longitudes pueden sumarse algebraicamente para obtener el cambio de longitud total de la barra completa. El mismo método puede utilizarse cuando la barra consta de secciones prismáticas de diferentes áreas transversales (Fig. 2-5).

En general, el alargamiento total δ de una barra consistente en varias partes con diferentes fuerzas axiales y secciones transversales de distintas áreas, puede determinarse mediante la ecuación

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \quad (2-4)$$

donde el subíndice i es un índice que designa las diferentes partes de la barra y n es el número de partes. El empleo de esta ecuación se representa en el Ejemplo 1 al final de esta sección.

Cuando la fuerza axial o el área de la sección transversal varía en forma continua a lo largo del eje de la barra, entonces la Ec. (2-4) no se cumple. En su lugar, el alargamiento puede determinarse al considerar un elemento diferencial de la barra y obtener una expresión para su alargamiento e integrar posteriormente sobre la longitud total de la barra. Esta idea se representa en la Fig. 2-6, que muestra una barra ahusada sometida a una carga axial distribuida en forma continua (tal como el peso de la barra suspendida verticalmente), que produce una fuerza axial variable sobre la

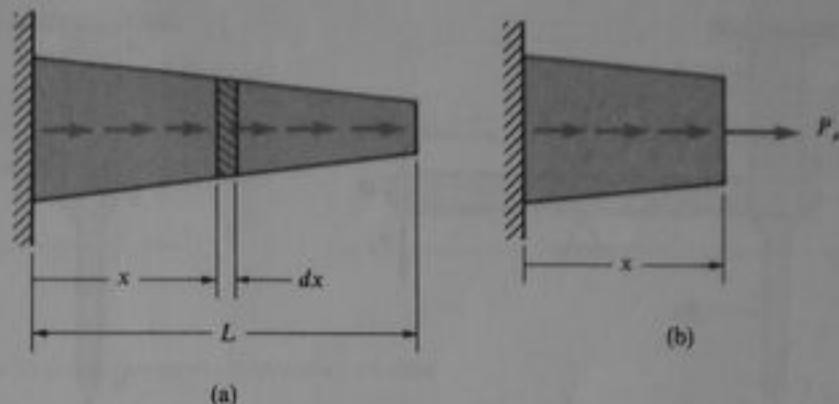


Fig. 2-6 Barra con sección transversal variable y fuerza axial variable

barra. Puede separarse de ésta un elemento de longitud dx , situado a una distancia x del extremo izquierdo de la misma. Tanto la fuerza axial P_x que actúa en la sección del corte (Fig. 2-6b) como el área de la sección transversal del elemento A_x , pueden expresarse como funciones de x . Por lo que, la ecuación para el alargamiento $d\delta$ del elemento resulta

$$d\delta = \frac{P_x dx}{EA_x}$$

y la elongación total de la barra es

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} \quad (2-5)$$

Si las expresiones para P_x y A_x no son muy complicadas, la integral puede evaluarse analíticamente y establecerse una fórmula para δ (véase Ejemplo 2). Sin embargo, si la integración es difícil o imposible, entonces puede emplearse un método numérico para evaluar la integral.

Debido a que la Ec. (2-5) se obtuvo a partir de la fórmula $\sigma = P/A$ para barras prismáticas, presentará resultados precisos para barras ahusadas sólo si el ángulo entre los lados de la barra es pequeño. Por ejemplo, si el ángulo entre dichos lados es 20° , el error máximo en el esfuerzo normal calculado con la expresión $\sigma = P/A$ es 3%, comparado con el esfuerzo exacto. Para ángulos más pequeños el error es menor. Si el ahusamiento de la barra es grande, será necesario emplear métodos de análisis más exactos (véase Ref. 2-1).

Ejemplo 1

Una barra vertical de acero ABC tiene una longitud L_1 y un área de sección transversal A_1 , desde A hasta B , y longitud L_2 y área A_2 desde B hasta C (Fig. 2-7a). En el punto C actúa una carga P_1 . Un brazo horizontal BD está articulado en B con la barra vertical y soporta una carga P_2 en D . Calcular la deflexión vertical δ en el punto C si $P_1 = 10$ kN, $P_2 = 26$ kN, $a = b$,

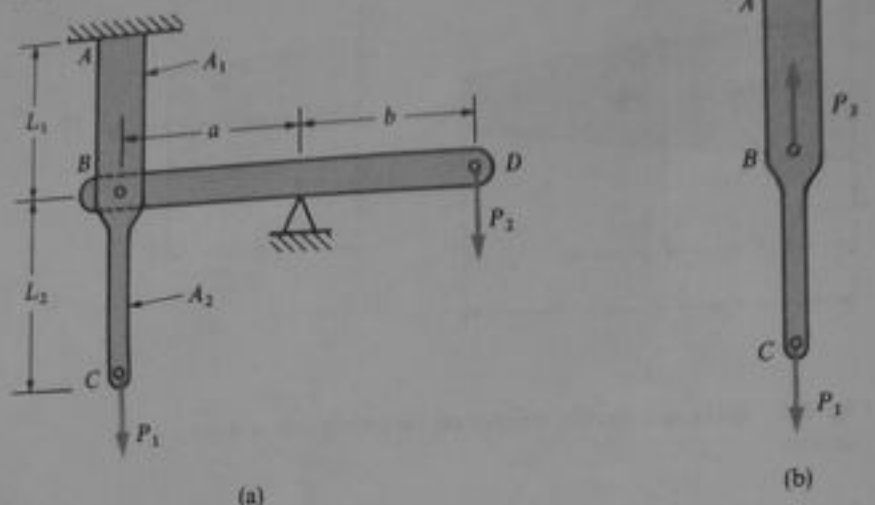


Fig. 2-7 Ejemplo 1

$L_1 = 0.5 \text{ m}$, $A_1 = 160 \text{ mm}^2$, $L_2 = 0.8 \text{ m}$, $A_2 = 100 \text{ mm}^2$ y $E = 200 \text{ GPa}$ para el acero. (Despreciar el peso de la barra.)

Del equilibrio de momentos del brazo BD , se aprecia que se transmite a través del perno en B una fuerza vertical $P_3 = P_2 b/a$. Esta fuerza actúa ascendente sobre la barra vertical ABC (Fig. 2-7b). En este ejemplo tenemos $a = b$, por lo que $P_3 = P_2 = 26 \text{ kN}$. La porción AB de la barra vertical está sometida a una fuerza axial $P_3 - P_1$, o sea 16 kN a compresión. La porción BC soporta una fuerza de tensión igual a P_1 , o sea 10 kN en tensión. Por lo tanto, si la fuerza de tensión se considera positiva, la Ec. (2-4) resulta

$$\begin{aligned}
 \delta &= \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \frac{(10 \text{ kN})(0.8 \text{ m})}{(200 \text{ GPa})(100 \text{ mm}^2)} - \frac{(16 \text{ kN})(0.5 \text{ m})}{(200 \text{ GPa})(160 \text{ mm}^2)} \\
 &= 0.400 - 0.250 = 0.150 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Ya que δ es positiva, representa un alargamiento, por lo que la deflexión del punto C es descendente.

Ejemplo 2

Una barra ligeramente ahusada AB de sección transversal circular y longitud L se sostiene en su extremo B y se somete a una carga P en su extremo libre (Fig. 2-8a). Los diámetros de la barra en los extremos A y B son, respectivamente, d_1 y d_2 . Determinar una fórmula para el alargamiento δ de la barra, debido a la carga P .

En este ejemplo actúa una fuerza axial constante en toda su longitud, pero varía el área de la sección transversal. Por lo que, el primer paso en la solución es formular una expresión para el área A , en cualquier sección transversal. Para simplificar la integración que debe realizarse, se prolongan los lados de la barra ahusada hasta su intersección en el punto O (Fig. 2-8b). Luego se utiliza este punto como origen para la distancia x . Las distancias L_1 y L_2 del origen a los extremos A y B , respectivamente, guardan la siguiente proporción:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad (a)$$

obtenida al considerar los triángulos semejantes de la Fig. 2-8b.

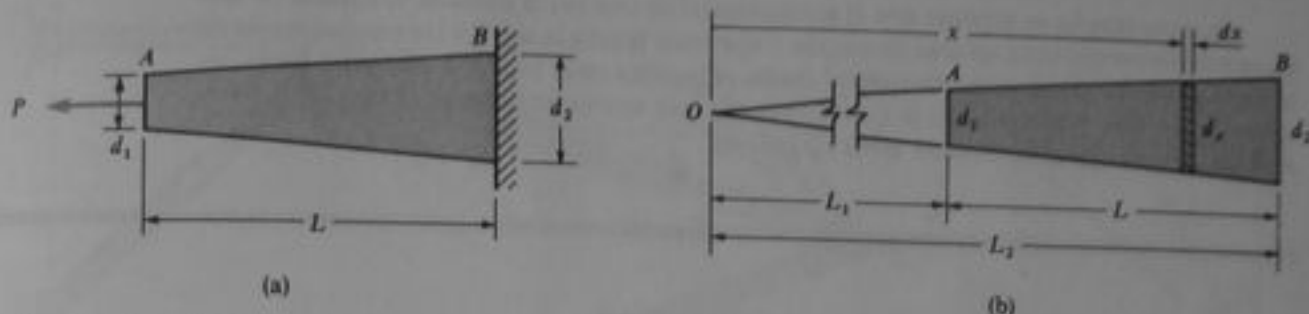


Fig. 2-8 Ejemplo 2. Barra ahusada de sección transversal circular

El diámetro d_x de la barra a una distancia x del origen (Fig. 2-8b) es

$$d_x = \frac{d_1 x}{L_1}$$

y el área de la sección transversal correspondiente es

$$A_x = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi d_1^2 x^2}{4L_1^2}$$

Ahora se sustituye en la Ec. (2-5) para δ y se obtiene

$$\delta = \int \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_{L_1}^{L_1+L} \frac{P dx (4L_1^2)}{E(\pi d_1^2 x^2)} = \frac{4PL_1^2}{\pi E d_1^2} \int_{L_1}^{L_1+L} \frac{dx}{x^2}$$

Al efectuar la integración y sustituir los límites, se obtiene

$$\delta = \frac{4PL_1^2}{\pi E d_1^2} \left[-\frac{1}{x} \right]_{L_1}^{L_1+L} = \frac{4PL_1^2}{\pi E d_1^2} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_1+L} \right)$$

Esta expresión para δ puede simplificarse si se considera que

$$\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_1+L} = \frac{L_1+L - L_1}{L_1(L_1+L)} = \frac{L}{L_1(L_1+L)}$$

Así, la ecuación para δ resulta

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_1^2} \left(\frac{L_1}{L_1+L} \right)$$

Finalmente, se sustituye $L_1/L_2 = d_1/d_2$ (véase Ec. a) y se obtiene

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_1 d_2} \quad (2-6)$$

Esta ecuación representa la fórmula requerida para el alargamiento de la barra ahusada. Como un caso especial, note que si la barra es prismática con $d_1 = d_2 = d$, la Ec. (2-6) se simplifica a

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d^2} = \frac{PL}{EA}$$

en la cual $A = \pi d^2/4$.

Un error común es suponer que el alargamiento de una barra ahusada es igual al de una barra prismática que tiene un área de sección transversal igual a la sección transversal media de la barra ahusada. (La sección transversal igual a la sección transversal media se localiza en el punto medio entre los extremos A y B .) Una inspección de la Ec. (2-6) revela que este no constituye el caso de la barra ahusada de este ejemplo, ni suele serlo en general.

2.3 DIAGRAMAS DE DESPLAZAMIENTO

En la sección anterior se describieron y ejemplificaron procedimientos para determinar cambios en longitudes de miembros cargados axialmente. El desplazamiento de cualquier punto de tales elementos puede calcularse fácilmente después de que se han determinado los cambios de longitud de las partes del elemento. Por ejemplo, el desplazamiento del extremo libre de la barra ilustrada en la Fig. 2-4, puede determinarse al sumar algebraicamente las variaciones en longitud de las tres porciones de la barra. Sin embargo, la determinación de los desplazamientos es mucho más complicada cuando la estructura consta de más de un miembro.

En esta sección se describirá un método geométrico para determinar desplazamientos cuando la estructura contiene dos miembros cargados axialmente que tienen conexiones articuladas en sus extremos. La forma más simple de tales estructuras es la **armadura**. Los diagramas empleados para determinar los **desplazamientos** (o **deflexiones**) de la armadura se denominan **diagramas de desplazamientos**. Estos diagramas se construyen geoméricamente después de que se han calculado los cambios de longitud de los elementos individuales.

Como representación del método geométrico para determinar desplazamientos, consideremos la Fig. 2-9a, que muestra una armadura formada por una barra horizontal AB y una barra inclinada BC . Nuestro objetivo es determinar la deflexión del nudo B debida a la carga vertical P . El procedimiento consiste en calcular las fuerzas en las barras, luego los cambios de longitud y finalmente el desplazamiento del punto B .

Las fuerzas axiales F_{ab} y F_{bc} en los miembros AB y BC , respectivamente, se derivan del equilibrio de fuerzas actuantes en el nudo B :

$$F_{ab} = P \cot \theta \quad F_{bc} = P \csc \theta$$

donde F_{ab} es una fuerza de tensión, F_{bc} es una fuerza de compresión y θ es el ángulo entre las barras. Los cambios de longitud resultantes en los miembros son

$$\delta_{ab} = \frac{PL_{ab} \cot \theta}{E_{ab}A_{ab}} \quad \delta_{bc} = \frac{PL_{bc} \csc \theta}{E_{bc}A_{bc}} \quad (2-7a, b)$$

En estas ecuaciones, los subíndices indican el elemento para el cual son aplicables las propiedades L , E y A . En la práctica los cambios en longitud suelen determinarse numéricamente, más bien que mediante fórmulas.

Para determinar el desplazamiento del nudo B , inicialmente se considera que los miembros están separados uno de otro en B . Luego, se supone que el AB se alarga una cantidad δ_{ab} , en forma tal que su extremo se traslada desde B hasta B_1 (Fig. 2-9b). Enseguida, el AB gira alrededor del punto A , tal que describe un arco con centro en A y radio igual a la distancia AB_1 . Debido a que el desplazamiento real de

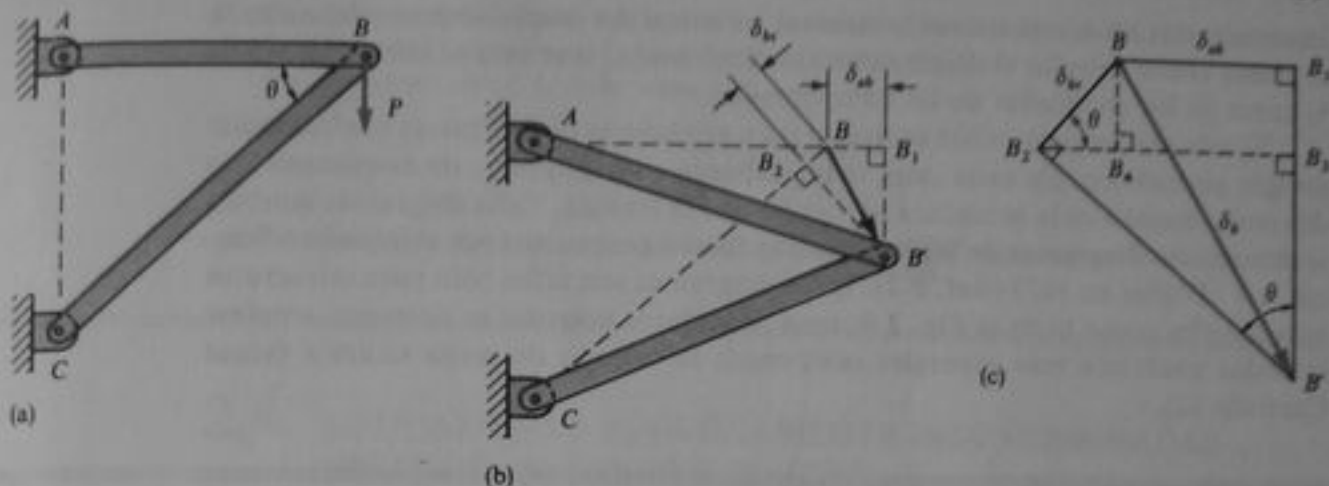


Fig. 2-9 Deflexiones de una armadura de dos barras

la junta B es muy pequeño, el arco puede reemplazarse por una línea recta que pase por B_1 y sea perpendicular al eje del miembro AB . La localización final del nudo B debe estar en algún punto de esta perpendicular (B_1B' en la Fig. 2-9b).

En forma similar, el miembro BC se acorta en una cantidad δ_{bc} , la cual traslada su extremo desde B hasta B_2 . Después, el miembro BC gira alrededor de C ; por ello describe otro arco, con centro en C y radio igual a la distancia CB_2 . Este arco se reemplaza por una línea recta a través de B_2 y perpendicular a BC ; la localización final del nudo B debe estar en algún punto de esta línea (B_2B'). La intersección de las dos perpendiculares (o de los dos arcos) es la localización final del nudo B . Este punto se designa B' en la figura. Así, el vector de B a B' representa el desplazamiento δ_b del nudo B de la armadura.

El desplazamiento δ_b puede calcularse geoméricamente de la Fig. 2-9b. No obstante, la tarea se facilita si se elabora un diagrama separado que muestre únicamente los desplazamientos, tal como se muestra en la Fig. 2-9c. La línea BB_1 representa el alargamiento δ_{ab} , y BB_2 representa el acortamiento δ_{bc} . Las líneas perpendiculares son B_1B' y B_2B' , que se cortan en B' . Dado que estas líneas son perpendiculares a AB y BC , respectivamente, el ángulo entre ellas es igual a θ . Por lo que, el diagrama de desplazamientos de la Fig. 2-9c es idéntico (excepto por la escala) a la porción de la Fig. 2-9b que indica los desplazamientos. Del diagrama de desplazamientos se calcula (o se mide, si el diagrama está dibujado a escala) el desplazamiento resultante δ_b de la junta B , y las componentes horizontal y vertical de tal desplazamiento. En esta ilustración, la componente horizontal δ_h es igual a δ_{ab} y se dirige hacia la derecha:

$$\delta_h = \frac{PL_{ab} \cot \theta}{E_{ab}A_{ab}} \quad (2-8)$$

La componente vertical δ_v es descendente y consta de dos partes en la figura (B_1B_2 y B_2B'). La distancia B_1B_2 , que equivale a la distancia BB_4 , es igual a $\delta_{bc} \sin \theta$. La distancia B_2B' puede determinarse a partir del triángulo B_2B_3B' , cuyo lado B_2B_3 es igual a $\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}$. Por lo tanto, la componente vertical de δ_b es

$$\begin{aligned} \delta_v &= B_1B' = \delta_{bc} \sin \theta + (\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}) \cot \theta \\ &= \delta_{bc} \csc \theta + \delta_{ab} \cot \theta \end{aligned} \quad (2-9)$$

Determinadas las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del nudo B , se puede ahora calcular el desplazamiento resultante δ , si se saca la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes.

El método descrito puede utilizarse para armaduras de dos barras con cualquier arreglo geométrico. En cada caso, debe elaborarse un diagrama de desplazamiento diferente, basado en la armadura particular que se analiza. Tales diagramas también se denominan **diagramas de Williot**, porque fueron propuestos por el ingeniero francés J. V. Williot en 1877 (Ref. 2-2). Estos diagramas son útiles sólo para estructuras muy simples como la de la Fig. 2-9; para armaduras mayores es necesario emplear métodos analíticos más generales tales como el método de carga unitaria (véase Capítulo 12).

Ejemplo

Determinar una fórmula para la deflexión δ , del nudo B de la armadura simétrica mostrada en la Fig. 2-10a. Suponga que ambas barras tienen un área de sección transversal A y un módulo de elasticidad E .

Se inicia el análisis al determinar las fuerzas de tensión F en los miembros:

$$F = \frac{P}{2 \cos \beta}$$

como lo establece el equilibrio de fuerzas en el nudo B . Advierta que la longitud L_1 de cada miembro es $L_1 = H/\cos \beta$, enseguida se determina el alargamiento δ_1 de cada barra:

$$\delta_1 = \frac{FL_1}{EA} = \frac{PH}{2EA \cos^2 \beta}$$

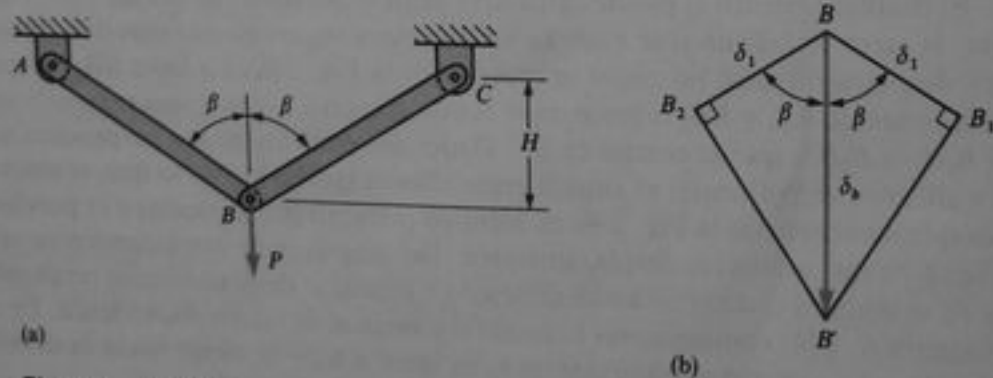


Fig. 2-10 Ejemplo

Finalmente, se traza el diagrama de desplazamientos. Se inicia en el punto B , que representa la posición original de la junta, se advierte que el miembro AB se alargaría desde B hasta B_1 si las dos barras se separasen. Una recta a través de B_1 y perpendicular a BB_1 , debe alojar a la posición final del nudo B . Puesto que la armadura y las cargas son simétricas no puede ocurrir desplazamiento horizontal de B . Por lo tanto, B debe desplazarse desde B hasta B' , que es el punto en el cual la perpendicular desde B_1 corta a una vertical que pasa por B . Al considerar el alargamiento del miembro BC , se obtiene una construcción similar en el lado izquierdo del diagrama.

ma. En este caso, B se traslada a B_2 conforme se alarga BC en una cantidad δ_1 ; una perpendicular a BB_2 determina entonces la posición final de la junta B , en B' .

La deflexión vertical δ_b de la junta B es

$$\delta_b = \frac{\delta_1}{\cos \beta} = \frac{PH}{2EA \cos^3 \beta} \quad (2-10)$$

según se determina por trigonometría del diagrama de desplazamientos.

2.4 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS (MÉTODO DE FLEXIBILIDADES)

En las explicaciones anteriores nos ocupamos de barras cargadas axialmente y otras estructuras simples que podían analizarse por equilibrio estático. En todos los ejemplos fue posible determinar las fuerzas axiales en los miembros y las reacciones en los soportes, mediante diagramas de cuerpo libre y la resolución de las ecuaciones de equilibrio. Tales estructuras se clasifican como **estáticamente determinadas**. Sin embargo, para muchas estructuras las ecuaciones del equilibrio estático no bastan para el cálculo de las fuerzas axiales y las reacciones; estas estructuras se denominan **estáticamente indeterminadas**. Las estructuras de este tipo pueden analizarse al complementar las ecuaciones de equilibrio estático con ecuaciones adicionales relativas a los desplazamientos de la estructura.

Los dos métodos generales para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas son el **método de las flexibilidades** y el **método de las rigideces**, descritos en esta sección y en la siguiente, respectivamente. Estos métodos son complementarios uno del otro, y cada uno tiene sus ventajas. Son adecuados para muchas clases de estructuras, siempre y cuando el material permanezca en el margen elástico lineal.

Para explicar el método de las flexibilidades, considere el análisis de la barra estáticamente indeterminada mostrada en la Fig. 2-11. La barra prismática AB está empotrada en sus dos extremos y cargada axialmente por la fuerza P en un punto intermedio C . Como consecuencia, se desarrollan reacciones R_a y R_b en los extremos de la barra.* Estas reacciones no pueden determinarse por estática únicamente, ya que sólo existe una ecuación independiente de equilibrio estático, como se indica a continuación:

$$R_a + R_b = P \quad (a)$$

Como esta ecuación contiene ambas reacciones desconocidas, no basta para su cálculo. Debe establecerse una segunda ecuación para las deflexiones de la barra.

Para iniciar el análisis, se designa una de las reacciones desconocidas como la **redundante estática**, o sea la fuerza que sobra de las que pueden determinarse por estática únicamente. Se elige R_a como la reacción redundante en este ejemplo. Si R_a puede determinarse, entonces la otra reacción R_b se puede obtener por equilibrio estático de la Ec. (a). Cuando la reacción desconocida R_a se retira de la estructura, el efecto equivalente es liberar el apoyo en el extremo A , lo que origina la estructura es-

* Para distinguir entre reacciones y cargas, las fuerzas reactivas se indicarán mediante una pequeña raya inclinada o diagonal sobre las flechas, como se ilustra en la Fig. 2-11a.

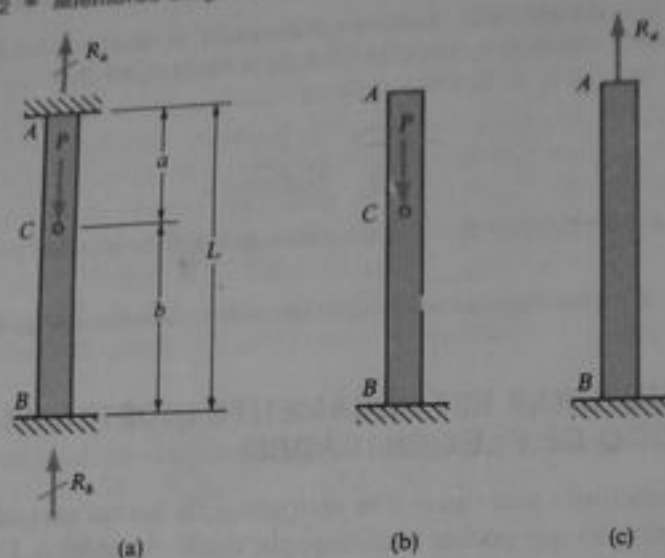


Fig. 2-11 Barra estáticamente indeterminada (análisis por el método de flexibilidades)

table y estáticamente determinada mostrada en la Fig. 2-11b. Así, desde el punto de vista de contar con una estructura capaz de soportar cargas, la reacción en el extremo A no es necesaria; esto es, es redundante. La estructura que resulta al retirar la redundante se denomina **estructura liberada** o **estructura primaria**.

Considere ahora el efecto de la carga P sobre el desplazamiento del punto A en la estructura liberada (Fig. 2-11b). Este desplazamiento es

$$\delta_P = \frac{Pb}{EA}$$

y es descendente. Enseguida, considere el efecto de la reacción redundante R_a sobre el desplazamiento del punto A (Fig. 2-11c). Advierta que, aunque es una cantidad desconocida, R_a se visualiza ahora como una carga que actúa sobre la estructura liberada. El desplazamiento ascendente del punto A debido a R_a es

$$\delta_R = \frac{R_a L}{EA}$$

El desplazamiento final δ del punto A debido a la acción simultánea de ambas cargas P y R_a se determina al combinar δ_P y δ_R . Así, al considerar positivos los desplazamientos descendentes, se obtiene

$$\delta = \delta_P - \delta_R$$

Dado que el desplazamiento real δ del punto A es igual a cero (Fig. 2-11a), la ecuación anterior se convierte en

$$\delta_R = \delta_P \quad (b)$$

o sea

$$\frac{R_a L}{EA} = \frac{Pb}{EA} \quad (c)$$

de la cual

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad (2-11)$$

Así, la reacción redundante se ha calculado mediante una ecuación relativa a los desplazamientos de la barra (Ec. b). Ahora que la redundante se ha determinado, se puede evaluar R_b por equilibrio al emplear la Ec. (a):

$$R_b = P - R_a = \frac{Pa}{L} \quad (2-12)$$

De esta manera, se determinan ambas reacciones para la barra.

El método antes mencionado para analizar la barra estáticamente indeterminada de la Fig. 2-11a puede resumirse como sigue. Primero, se selecciona como redundante una de las reacciones desconocidas, y luego se libera de la estructura cortando a lo largo de la barra y retirando el soporte. La estructura liberada, que es estable y estáticamente determinada, se carga entonces en forma separada por la carga real P y por la redundante misma. Se calculan los desplazamientos ocasionados por estas dos magnitudes y se combinan en una ecuación de **compatibilidad de desplazamientos** (Ec. b). Esta ecuación de compatibilidad expresa una condición relativa a la deflexión de la estructura original, es decir, que la deflexión δ en el extremo A es cero. Cuando se sustituyen las expresiones de los desplazamientos, la ecuación de compatibilidad toma la forma de la Ec. (c), la cual puede resolverse para determinar la fuerza redundante R_a (Ec. 2-11). Finalmente, la fuerza desconocida restante se determina por estática.

Este método de análisis se denomina **método de las flexibilidades**, porque las flexibilidades aparecen en la ecuación de compatibilidad. En este ejemplo, la ecuación de compatibilidad (Ec. c) contiene la flexibilidad L/EA (véase Ec. 2-3) como el coeficiente de la redundante desconocida R_a . Otra designación es **método de las fuerzas**, ya que las magnitudes desconocidas constituyen fuerzas. El método puede emplearse para diferentes tipos estructurales y para estructuras que contengan varias fuerzas redundantes. Sin embargo, en esta sección se considerarán únicamente estructuras indeterminadas elementales con una sola fuerza redundante. Como el método requiere de la suma de deflexiones ocasionadas por fuerzas diferentes, es válido únicamente cuando el material se comporta en forma elástica lineal.

Como ejemplificación adicional del método de las flexibilidades, analicemos la armadura plana de la Fig. 2-12a. Esta armadura consta de tres miembros sujetos a soportes articulados en A , B y C , y unidos entre sí por un perno en el nudo D , donde actúa una carga P con dirección vertical. Se supone que todas las barras tienen la misma rigidez axial EA . La armadura es estáticamente indeterminada porque existen tres fuerzas desconocidas en los miembros, pero sólo dos ecuaciones de equilibrio estático. Al sumar fuerzas con dirección horizontal, o al observar que la armadura es simétrica, se reconoce que las fuerzas de tensión en las dos barras externas son iguales. Luego, del equilibrio de fuerzas en dirección vertical se obtiene

$$2F_1 \cos \beta + F_2 = P \quad (d)$$

donde β es el ángulo entre las barras vertical e inclinada. Esta ecuación contiene dos fuerzas desconocidas (F_1 y F_2); en consecuencia, es necesaria una ecuación adicional. Esta ecuación se obtiene por compatibilidad de desplazamientos en el nudo D .

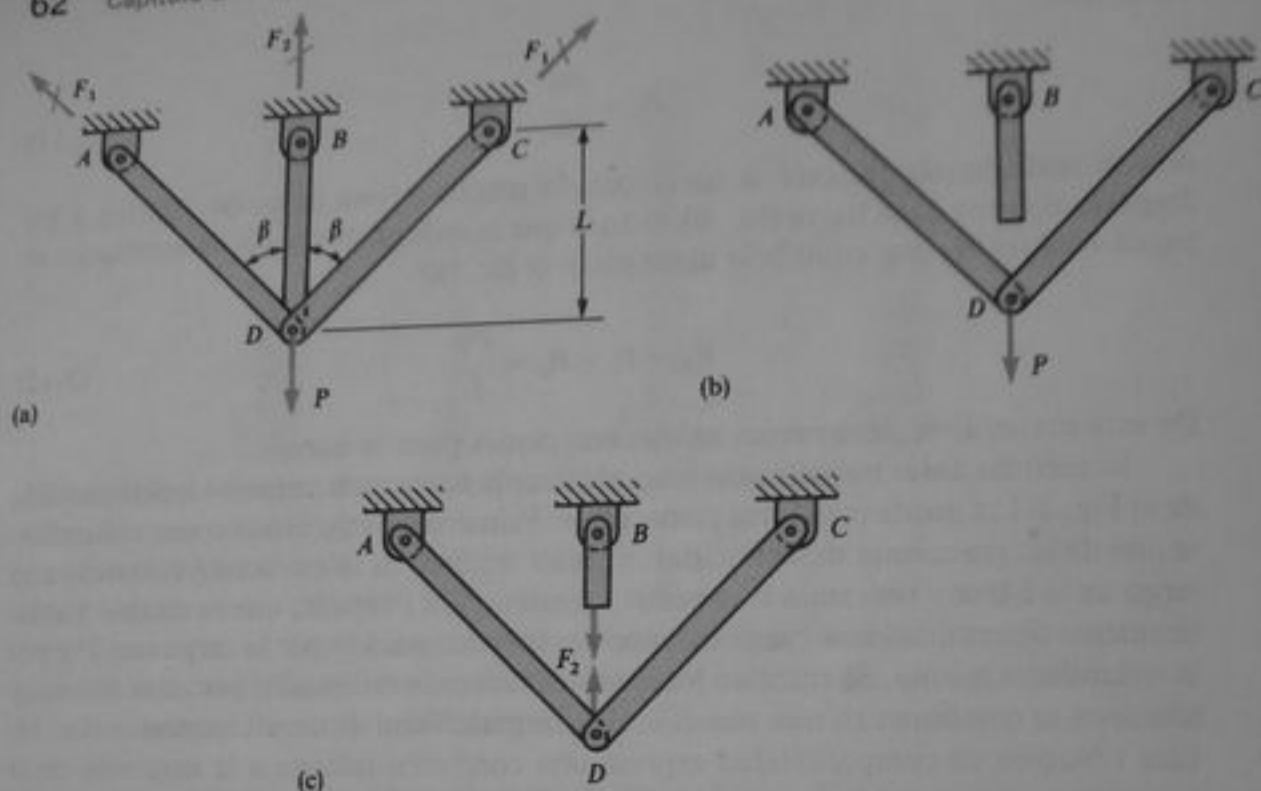


Fig. 2-12 Armadura estáticamente indeterminada (análisis por el método de flexibilidades)

En este ejemplo, seleccionamos arbitrariamente a la fuerza axial F_2 en el miembro BD como la fuerza redundante; por lo tanto, se corta el miembro BD en su extremo inferior a fin de retirar esta fuerza (Fig. 2-12b). Si se desea, la barra puede cortarse en otra sección transversal y los cálculos serán similares a los presentados aquí. Cuando la carga P actúa sobre la estructura liberada (Fig. 2-12b), el desplazamiento descendente del nudo D (determinado de la Ec. 2-10 de la sección anterior) es

$$\delta_p = \frac{PL}{2EA \cos^3 \beta} \quad (e)$$

donde L es la longitud de la barra vertical. Cuando la fuerza redundante F_2 actúa sobre la estructura liberada (Fig. 2-12c), la barra cortada BD se somete a tensión por la fuerza F_2 con acción descendente, mientras que el nudo D se desplaza de modo ascendente por una fuerza igual y opuesta. La última fuerza provoca un desplazamiento ascendente de la junta D , con magnitud

$$\delta_f = \frac{F_2 L}{2EA \cos^3 \beta} \quad (f)$$

(compare con la Ec. e). El desplazamiento descendente total del nudo D debido a la acción simultánea de P y F_2 es $\delta_p - \delta_f$. También se debe observar que la barra BD se alarga una cantidad $F_2 L / EA$. La condición de compatibilidad de los desplazamientos del nudo D denota el hecho de que el desplazamiento descendente del nudo D es igual al alargamiento de la barra BD ; por lo que,

$$\delta_p - \delta_f = \frac{F_2 L}{EA}$$

Al sustituir las Ecs. (e) y (f) en esta ecuación y despejar F_2 , se obtiene

$$F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-13)$$

Finalmente, de la ecuación de equilibrio (Ec. d), se obtiene

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-14)$$

En este ejemplo, la fuerza axial en la barra central es mayor que las fuerzas en las barras exteriores. También, como un caso límite, podemos asignar $\beta = 0$ y obtener $F_1 = F_2 = P/3$ como era de esperar.

Este ejemplo representa el método general de solución descrito previamente para el método de las flexibilidades. La fuerza desconocida F_2 se toma como la redundante, lo que presenta la estructura liberada de la Fig. 2-12b. Luego, la estructura liberada se somete primero a la carga P y después a la fuerza redundante misma. Los desplazamientos del nudo D ocasionados por estas fuerzas se determinan y combinan en una ecuación de compatibilidad. Se conoce el desplazamiento debido a P , mientras que la fuerza redundante y el desplazamiento que produce son desconocidos. Por supuesto, al resolver la ecuación de compatibilidad se obtiene el valor de la redundante. Posteriormente, la otra fuerza de la barra desconocida puede obtenerse por estática.

Como un paso adicional en el análisis de la armadura de la Fig. 2-12, se puede determinar ahora la deflexión vertical δ_d del nudo D . Simplemente notamos que esta deflexión es igual al alargamiento de la barra BD :

$$\delta_d = \frac{F_2 L}{EA} = \frac{PL}{EA(1 + 2 \cos^3 \beta)} \quad (2-15)$$

Obviamente, la deflexión horizontal del nudo D es cero debido a que la armadura y sus cargas son simétricas.

En los dos ejemplos previos del método de las flexibilidades, ha sido útil identificar una fuerza redundante y luego determinar las deflexiones de la estructura liberada (obtenida al eliminar la redundante). En algunos tipos de problemas, este paso es innecesario. En su lugar basta cortar la estructura, lo que revela las fuerzas desconocidas, y luego obtener una ecuación de compatibilidad con sólo examinar las condiciones de deflexión. Los dos ejemplos siguientes representan este procedimiento.

Ejemplo 1

Una barra horizontal AB , que se supone perfectamente rígida, está sostenida por dos alambres idénticos CE y DF (Fig. 2-13a). Si cada alambre tiene un área de sección transversal A , determinar los esfuerzos de tensión σ_1 y σ_2 en los alambres CE y DF , respectivamente.

Esta estructura es estáticamente indeterminada, ya que es imposible determinar por estática las fuerzas en los alambres. Por ejemplo, un diagrama de cuerpo libre de la barra rígida (Fig. 2-13b) conduce a la siguiente ecuación de equilibrio de momentos respecto del punto A :

$$F_1 b + 2F_2 b - 3Pb = 0 \quad \text{o} \quad F_1 + 2F_2 = 3P \quad (g)$$

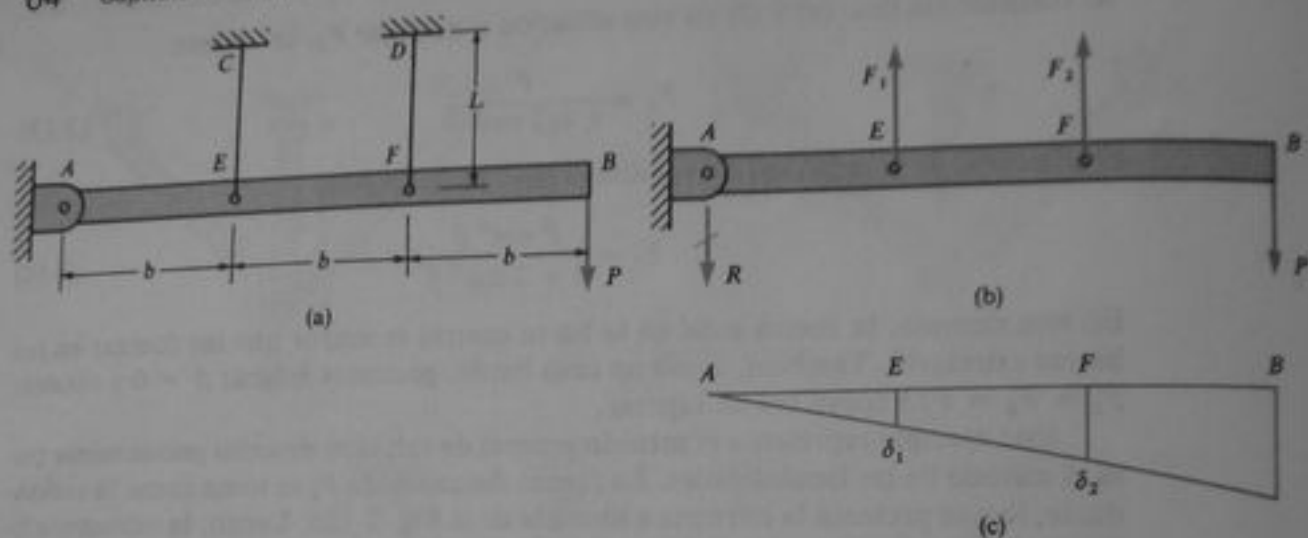


Fig. 2-13 Ejemplo 1. Estructura estáticamente indeterminada (análisis por el método de flexibilidades)

En esta ecuación, F_1 y F_2 son las fuerzas desconocidas en los alambres. La ecuación de equilibrio vertical introduce la reacción R como una nueva incógnita; por tanto, esta ecuación no sirve para determinar F_1 y F_2 . Se requiere una ecuación que implique las deformaciones de los alambres.

Cuando se aplica la carga P , la barra AB gira alrededor del soporte y se alargan ambos alambres. El diagrama de desplazamientos resultante se muestra en la Fig. 2-13c, en la cual δ_1 y δ_2 representan los alargamientos de los alambres CE y DF , respectivamente. La condición de compatibilidad es

$$\delta_2 = 2\delta_1$$

obtenida de la geometría del diagrama de desplazamientos. Los alargamientos de los alambres pueden expresarse en términos de las fuerzas desconocidas:

$$\delta_1 = \frac{F_1 L}{EA} \quad \delta_2 = \frac{F_2 L}{EA}$$

donde L representa la longitud y EA la rigidez axial de los alambres. Ahora al sustituir estas expresiones para δ_1 y δ_2 en la ecuación de compatibilidad, se obtiene

$$F_2 = 2F_1 \tag{h}$$

Finalmente, se combinan las Ecs. (g) y (h) para representar las fuerzas en los alambres:

$$F_1 = \frac{3P}{5} \quad F_2 = \frac{6P}{5}$$

Los esfuerzos de tensión correspondientes son

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{3P}{5A} \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{6P}{5A}$$

Si se conocen las fuerzas F_1 y F_2 , es posible determinar los alargamientos reales de los alambres, si se desea.

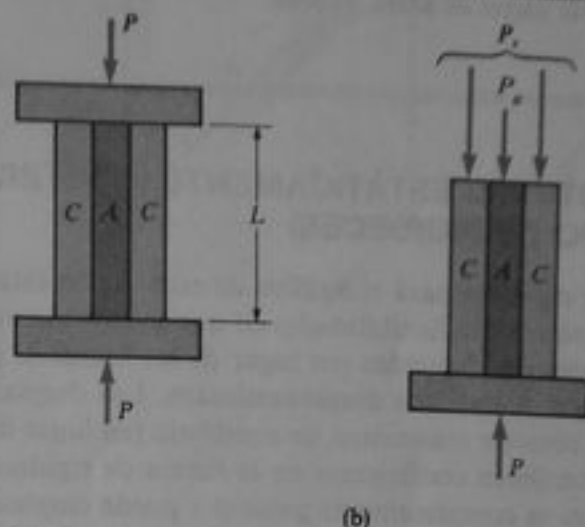


Fig. 2-14 Ejemplo 2. Estructura estáticamente indeterminada (análisis por el método de flexibilidades)

Ejemplo 2

Un cilindro circular macizo de acero y un tubo hueco de cobre (representados por A y C en la Fig. 2-14a) se comprimen entre las cabezas de una máquina de pruebas. Determinar los esfuerzos medios en el acero y en el cobre y la deformación unitaria de compresión media en la dirección vertical debida a la carga axial P .

Al emplear el método de flexibilidades, se retira la placa superior y obtenemos la estructura mostrada en la Fig. 2-14b. Las fuerzas desconocidas P_s y P_c representan las fuerzas axiales en el acero y el cobre, respectivamente, y se relacionan mediante la siguiente ecuación de equilibrio:

$$P_s + P_c = P \quad (i)$$

El acortamiento del cilindro de acero se expresa mediante $P_s L / E_s A_s$, en la cual $L / E_s A_s$ constituye la flexibilidad del cilindro de acero. Además, el acortamiento del tubo de cobre es $P_c L / E_c A_c$, en donde $L / E_c A_c$ constituye la flexibilidad del tubo. La ecuación de compatibilidad se obtiene a partir de que el cilindro de acero y el tubo de cobre se acortan la misma cantidad; así:

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \quad (j)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (i) y (j), se obtienen las dos fuerzas desconocidas:

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad (2-16a, b)$$

Estas ecuaciones señalan que las fuerzas en el acero y el cobre están en proporción a sus rigideces axiales.

El esfuerzo de compresión σ_s en el acero puede obtenerse al dividir P_s entre A_s , y el esfuerzo σ_c puede determinarse en forma similar. La deformación unitaria por compresión ϵ , que debe ser la misma para ambos materiales, puede entonces determinarse a partir de la ley de Hooke; el resultado es

$$\epsilon = \frac{P}{E_s A_s + E_c A_c} \quad (2-17)$$

Esta ecuación señala que la deformación es igual a la carga total dividida entre la suma de las rigideces axiales de las partes de acero y cobre.

2.5 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS (MÉTODO DE RIGIDECES)

El método de rigideces para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas difiere del método de flexibilidades en que se consideran los desplazamientos como las magnitudes desconocidas (en lugar de las fuerzas), por lo que el método también se denomina **método de desplazamientos**. Los desplazamientos desconocidos se obtienen al resolver ecuaciones de equilibrio (en lugar de ecuaciones de compatibilidad) que contienen coeficientes en la forma de rigideces (véase Ec. 2-2). El método de rigideces es completamente general y puede emplearse para una gran diversidad de estructuras. Sin embargo, está limitado al igual que el método de flexibilidades a estructuras que se comportan en forma lineal y elástica.

A fin de explicar el método de rigideces, analicemos nuevamente una barra prismática AB doblemente empotrada y en posición vertical (Fig. 2-15a). Las reacciones en los soportes se denotan por R_a y R_b , como antes. En esta nueva solución, el desplazamiento vertical δ_c del punto C , que es el empalme de las dos porciones de la barra, se toma como la cantidad desconocida. Las fuerzas axiales R_a y R_b en las porciones superior e inferior de la barra pueden expresarse en términos de δ_c , como sigue:

$$R_a = \frac{EA}{a} \delta_c \quad R_b = \frac{EA}{b} \delta_c \quad (a)$$

Al formular estas ecuaciones se ha supuesto que δ_c es descendente positivo, por lo que produce tensión en la parte superior de la barra y compresión en la parte inferior.

El siguiente paso es aislar el punto C de la barra como un cuerpo libre (Fig. 2-15b). Sobre el cuerpo libre actúan la carga descendente P , la fuerza de tensión R_a en la parte superior y la fuerza de compresión R_b en la parte inferior. Del equilibrio estático, se obtiene entonces

$$R_a + R_b = P \quad (b)$$

o, al sustituir las Ecs. (a),

$$\frac{EA}{a} \delta_c + \frac{EA}{b} \delta_c = P \quad (c)$$

lo cual conduce a

$$\delta_c = \frac{Pab}{EAL} \quad (d)$$

(puesto que $a + b = L$). Si se conoce el desplazamiento δ_c , se puede determinar ahora R_a y R_b de las Ecs. (a):

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad R_b = \frac{Pa}{L} \quad (e)$$

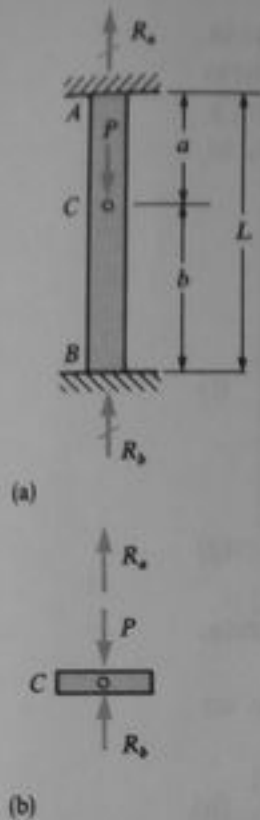


Fig. 2-15 Barra estáticamente indeterminada (análisis por el método de rigideces)

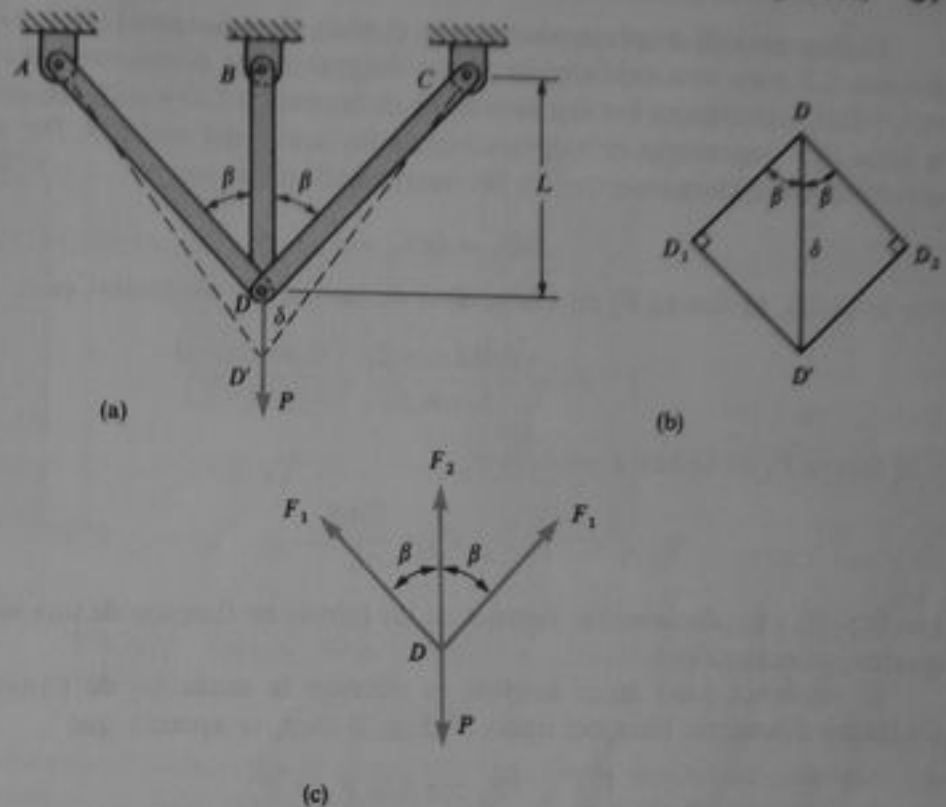


Fig. 2-16 Armadura estáticamente indeterminada (análisis por el método de rigideces)

Los resultados son, por supuesto, los mismos que los obtenidos en la Sección 2.4 (véanse Ecs. 2-11 y 2-12).

Resumamos ahora el procedimiento para el método de análisis por rigideces. El primer paso es seleccionar un desplazamiento conveniente como la cantidad desconocida. Un desplazamiento será conveniente si las fuerzas en las partes individuales de la estructura pueden expresarse en términos de tal desplazamiento (véanse Ecs. a). Luego se relacionan las fuerzas mediante una ecuación de **equilibrio**, tal como la Ec. (b) en el ejemplo anterior. Enseguida, se sustituyen en la ecuación de equilibrio las expresiones que representan las fuerzas en términos del desplazamiento desconocido, lo que conduce a una ecuación con el desplazamiento seleccionado como única incógnita (Ec. c). Advierta que los coeficientes de δ_c en esta ecuación representan rigideces. Esta ecuación se resuelve para el desplazamiento desconocido (Ec. d) y, finalmente, se determinan las fuerzas a partir del desplazamiento (Ecs. e). Así, el método de rigideces proporciona todos los resultados deseados.

Como un segundo ejemplo del método de rigideces, considere el análisis de la armadura plana mostrada en la Fig. 2-16a (esta misma estructura se analizó en la sección anterior). La barra vertical tiene longitud L , las barras inclinadas tienen longitud $L/\cos \beta$ y las tres barras tienen la misma rigidez axial EA . Una carga vertical P actúa en el nudo D . Así, la armadura y sus cargas son simétricas y no ocurre desplazamiento horizontal del nudo D . El desplazamiento vertical δ de dicho nudo D es la distancia DD' en la figura. Las líneas punteadas AD' y CD' muestran la configuración desplazada de la armadura.

El diagrama de desplazamiento para el nudo D se tiene en la Fig. 2-16b (véase la Sección 2.3 para una explicación de los diagramas de desplazamiento). Las líneas DD_1 y DD_2 representan los alargamientos de las barras CD y AD , respectivamente, y la línea DD' representa el desplazamiento vertical δ del nudo D . Del diagrama, se aprecia que los alargamientos de las barras inclinadas son

$$DD_1 = DD_2 = \delta \cos \beta$$

Por lo tanto, la fuerza F_1 en cualquiera de las barras inclinadas es

$$F_1 = \frac{EA(\delta \cos \beta)}{L/\cos \beta} = \frac{EA\delta \cos^2 \beta}{L} \quad (f)$$

y la fuerza F_2 en la barra vertical es

$$F_2 = \frac{EA\delta}{L} \quad (g)$$

Las Ecs. (f) y (g) denotan las fuerzas en las barras en función de una sola incógnita, a saber, la deflexión δ .

El siguiente paso en el análisis es obtener la ecuación de equilibrio. De un diagrama de cuerpo libre del nudo D (Fig. 2-16c), se aprecia que

$$2F_1 \cos \beta + F_2 = P \quad (h)$$

Al sustituir las expresiones de F_1 y F_2 (véanse Ecs. f y g) en esta ecuación, se obtiene

$$\frac{2EA\delta \cos^3 \beta}{L} + \frac{EA\delta}{L} = P \quad (i)$$

Esta ecuación contiene como incógnita a la deflexión δ , por lo que al despejar ésta se tiene:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (j)$$

El último paso en el análisis es determinar las fuerzas en las barras F_1 y F_2 , sustituyendo esta expresión para δ en las Ecs. (f) y (g); así, se obtiene

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (k)$$

Estos resultados son los mismos que los obtenidos previamente por el método de flexibilidades (véanse Ecs. 2-13, 2-14 y 2-15).

Ejemplo

Un pedestal de concreto reforzado de altura h y sección transversal cuadrada ($b = 0.5$ m para cada lado) se construye con 12 varillas (o barras) de refuerzo de acero (Figs. 2-17a y b). Cada varilla tiene un diámetro $d = 25$ mm. El pedestal soporta una carga de compresión P aplicada a través de una placa de apoyo rígida. Si se supone un comportamiento elástico lineal, calcular el valor máximo permisible de P si los esfuerzos permisibles en el acero y el concreto son 70 MPa y 8 MPa, respectivamente. Despreciar el peso propio del pedestal. (Suponga que el módulo de elasticidad para acero es $E_s = 200$ GPa, y para el concreto es $E_c = 25$ GPa.)

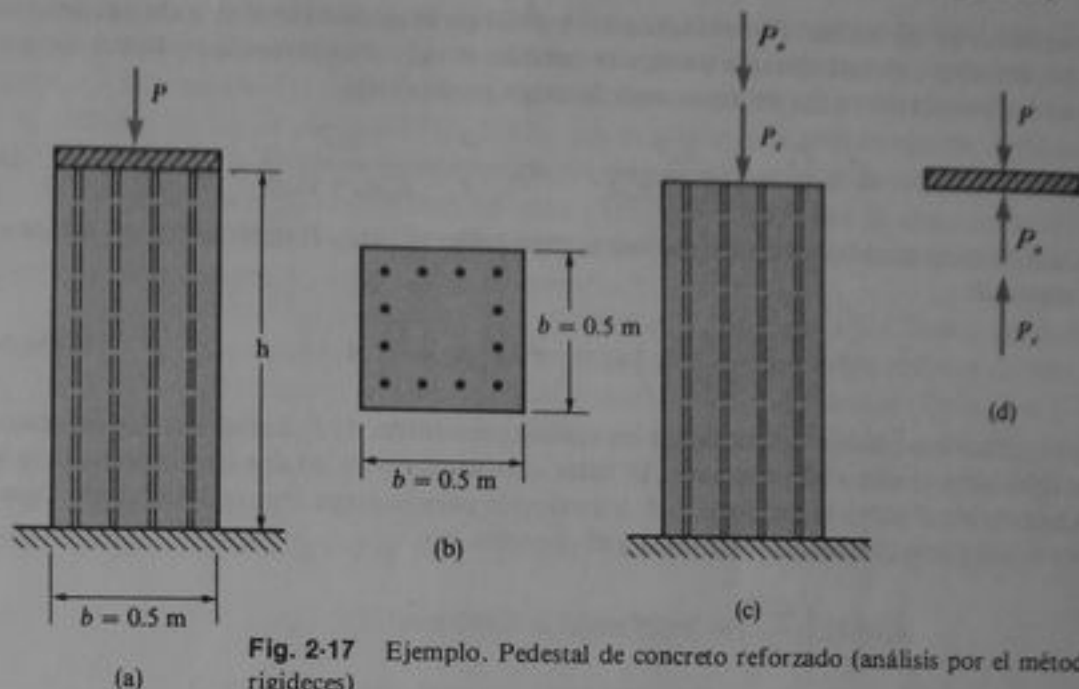


Fig. 2-17 Ejemplo. Pedestal de concreto reforzado (análisis por el método de rigideces)

Para analizar esta estructura mediante el método de rigideces, se retira la placa rígida y se reemplaza su acción sobre el pedestal por dos fuerzas P_s y P_c , que representan las cargas soportadas por el acero y el concreto, respectivamente (Fig. 2-17c). El pedestal es estáticamente indeterminado, porque no podemos calcular dichas fuerzas a partir del equilibrio estático únicamente (véase el diagrama de cuerpo libre de la placa rígida en la Fig. 2-17d). Por lo tanto, se elige como desplazamiento desconocido la deflexión vertical del extremo superior del pedestal. Como esta deflexión es la misma que el acortamiento del pedestal, se pueden expresar las fuerzas P_s y P_c en términos de δ como sigue:

$$P_s = \frac{E_s A_s \delta}{h} \quad P_c = \frac{E_c A_c \delta}{h} \quad (l)$$

en la cual A_s y A_c representan las áreas de sección transversal del acero y del concreto, respectivamente. La ecuación de equilibrio (de la Fig. 2-17d) es

$$P_s + P_c = P \quad (m)$$

o, cuando se sustituyen las Ecs. (l),

$$\frac{E_s A_s \delta}{h} + \frac{E_c A_c \delta}{h} = P \quad (n)$$

de la cual se determina

$$\delta = \frac{Ph}{E_s A_s + E_c A_c} \quad (2-18)$$

Al sustituir esta expresión de δ en las Ecs. (l) se obtienen las siguientes fórmulas para las fuerzas axiales

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad (2-19a, b)$$

$$P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P$$

Se determinan así las fuerzas y desplazamientos y concluye el análisis por el método de rigideces.

Sin embargo, en este ejemplo particular también se requiere obtener los esfuerzos σ_s y σ_c en el acero y concreto (a fin de determinar la carga permisible):

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{E_c P}{E_s A_s + E_c A_c} \quad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{E_s P}{E_s A_s + E_c A_c} \quad (o)$$

Cada una de estas ecuaciones puede resolverse para hallar la carga P en términos del esfuerzo en el material:

$$P = \left(A_s + \frac{E_c}{E_s} A_c \right) \sigma_s \quad P = \left(A_c + \frac{E_s}{E_c} A_s \right) \sigma_c \quad (2-20a, b)$$

De estas ecuaciones pueden determinarse los valores permisibles de P , basados en los esfuerzos permisibles para el acero y el concreto. El valor más pequeño de las dos cargas constituye la carga permisible P sobre el pedestal. Así, los cálculos para la carga P se realizan como sigue. Las áreas del acero (12 barras o varillas) y el concreto son

$$A_s = 12 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = 3\pi(25 \text{ mm})^2 = 5,890 \text{ mm}^2$$

$$A_c = b^2 - A_s = (0.5 \text{ m})^2(1,000)^2 - 5,890 = 244,100 \text{ mm}^2$$

También, el cociente de los módulos de elasticidad es

$$\frac{E_s}{E_c} = 8$$

Al sustituir estos valores, así como los esfuerzos permisibles, en las Ecs. (2-20a y b) se obtienen dos valores de la carga P :

$$P = \left(A_s + \frac{E_c}{E_s} A_c \right) \sigma_s = \left(5,890 \text{ mm}^2 + \frac{244,100}{8} \text{ mm}^2 \right) (70 \text{ MPa})$$

$$= 2.55 \text{ MN}$$

$$P = \left(A_c + \frac{E_s}{E_c} A_s \right) \sigma_c = (244,100 \text{ mm}^2 + 8 \times 5,890 \text{ mm}^2) (8 \text{ MPa})$$

$$= 2.33 \text{ MN}$$

El primer resultado se basa en el esfuerzo permisible del acero, y el segundo se basa en el del concreto. La carga permisible P constituye el más pequeño de los dos valores:

$$P_{\text{perm}} = 2.33 \text{ MN}$$

Con esta carga, el esfuerzo en el concreto es 8 MPa (el esfuerzo permisible) y el esfuerzo en el acero, que está por debajo de su valor permisible porque prevalece el esfuerzo en el concreto, es $(2.33/2.55)(70 \text{ MPa}) = 64.0 \text{ MPa}$.

En el caso de estructuras elementales estáticamente indeterminadas del tipo analizado en este capítulo, la elección entre los métodos de desplazamientos y de rigideces es un poco arbitraria porque las diferencias que hay entre los dos métodos son escasas en términos de la dificultad de cálculo. (Desde luego, existen diferencias fundamentales entre los métodos en términos de los procedimientos y puntos de vista.)

Sin embargo, en estructuras más complicadas, un método puede requerir significativamente menos cálculos que el otro. Como un ejemplo, suponga que la armadura simétrica mostrada en las Figs. 2-12 y 2-16 es más compleja (pero aún simétrica) debido a la adición de varias barras (Fig. 2-18). La solución por el método de rigideces se realiza en la forma descrita y es muy simple, mientras que una solución por el método de flexibilidades se vuelve mucho más compleja y requiere la resolución de tres ecuaciones simultáneas. En otros ejemplos, la situación se invierte y el método de flexibilidades aporta la solución más sencilla.*

Desde un punto de vista histórico, parece que Euler en 1774 fue el primero en analizar un sistema estáticamente indeterminado; él estudió el problema de una mesa rígida con cuatro patas sostenidas por una cimentación elástica (Refs. 2-4 y 2-5). El siguiente trabajo lo realizó el matemático e ingeniero francés L. M. H. Navier, quien en 1825 puntualizó que las reacciones estáticamente indeterminadas podían determinarse tomando en cuenta únicamente la elasticidad de la estructura (Ref. 2-6). Navier resolvió una armadura similar a la mostrada en la Fig. 2-16a.

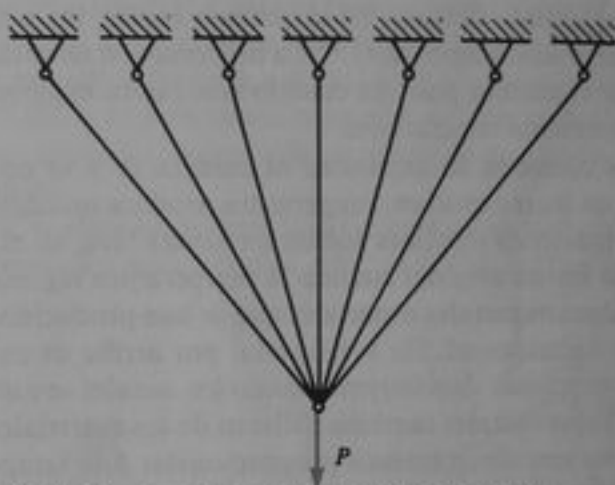


Fig. 2-18 Armadura estáticamente indeterminada

2.6 EFECTOS DE LA TEMPERATURA Y DEFORMACIONES PREVIAS

Un cambio en la temperatura de un objeto tiende a producir una variación en sus dimensiones. Una representación simple de este efecto se presenta en la Fig. 2-19, que muestra un bloque de material isótropo y homogéneo que puede expandirse libremente en todas direcciones. Si el material se calienta uniformemente, los lados del bloque incrementarán su longitud. Por lo que al considerar la esquina *A* como punto de referencia, el bloque adoptará la configuración mostrada por las líneas punteadas. El material experimenta una **deformación térmica uniforme** ϵ , representada por la expresión

$$\epsilon_t = \alpha(\Delta T) \quad (2-21)$$

* Cuando se elaboran programas de computadora para análisis estructural, generalmente se prefiere el método de rigideces; véase, por ejemplo, Ref. 2-3.

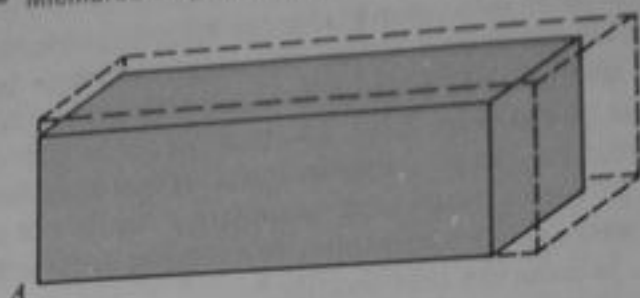


Fig. 2-19 Bloque con incremento de temperatura uniforme

donde α constituye el **coeficiente de dilatación térmica** y ΔT es el incremento en temperatura. El coeficiente α es una propiedad del material* y tiene unidades iguales al recíproco del cambio de temperatura. Por lo que, en unidades del Sistema Internacional, el coeficiente α tiene la dimensión de $1/K$ (el recíproco de kelvin), o $1/^\circ C$ (el recíproco de grados Celsius), ya que un *cambio* en temperatura es numéricamente el mismo en kelvin que en grados Celsius. En el Sistema Inglés, las magnitudes de α son $1/^\circ F$ (el recíproco de grados Fahrenheit).** La deformación térmica ϵ , es una cantidad adimensional que se considera positiva cuando representa expansión o dilatación y negativa cuando representa contracción.

Los materiales comunes se expanden al calentarse y se contraen cuando se enfrían; por lo que un incremento en temperatura produce una deformación térmica positiva. Las deformaciones térmicas suelen ser reversibles, en el sentido de que el elemento recobra su forma original cuando la temperatura regresa a su valor original. Sin embargo, algunos metales especiales que se han producido recientemente no se comportan en la forma usual. En vez de ello, por arriba de ciertos márgenes de temperatura, sus dimensiones disminuyen cuando los metales se calientan y aumentan cuando se enfrían. Estos metales también difieren de los materiales comunes en que las deformaciones no son directamente proporcionales a la temperatura y en ocasiones son irreversibles, ya que la estructura interna del material se altera. (Otro material que no cumple con el comportamiento usual es el agua, que se dilata al calentarse a temperaturas arriba de $4^\circ C$, pero también se dilata al enfriarse a temperaturas inferiores a $4^\circ C$. Por lo que el agua alcanza su densidad máxima a $4^\circ C$.)

Los cambios en las dimensiones del bloque de material mostrado en la Fig. 2-19 pueden calcularse al multiplicar las dimensiones originales por la deformación térmica. Si, por ejemplo, una de las dimensiones es L , entonces tal dimensión aumentará en una cantidad igual a

$$\delta_t = \epsilon_t L = \alpha(\Delta T)L \quad (2-22)$$

en la cual δ , representa el alargamiento debido al incremento de temperatura ΔT . La Ec. (2-22) se emplea para calcular cambios en longitud de miembros estructurales, tal como la barra mostrada en la Fig. 2-20, la cual está empotrada en su extremo izquierdo y su otro extremo puede desplazarse libremente. Las dimensiones transver-

* En la Tabla H-4 del Apéndice H, se enumeran valores típicos del coeficiente de expansión o dilatación térmica α .

** Para una explicación de las unidades y escalas de temperatura, véanse las secciones A.2 y A.3 del Apéndice A.

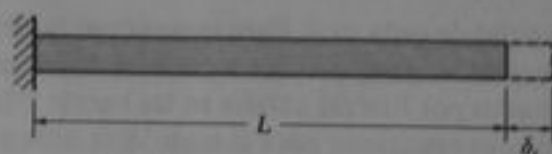


Fig. 2-20 Alargamiento de una barra debida a un aumento en la temperatura (Ec. 2-22)

sales de la barra también cambian, pero como tales cambios no suelen tener efecto sobre las fuerzas que transmite el elemento, no se muestran en la figura.

En general, los cambios de longitud debidos a deformaciones térmicas pueden calcularse con la Ec. (2-22), siempre y cuando los miembros estructurales puedan expandirse o contraerse libremente, situación que ocurre en estructuras estáticamente determinadas. En consecuencia, no se generan esfuerzos en una estructura estáticamente determinada cuando uno o más miembros experimentan un cambio de temperatura. Por otro lado, un cambio de temperatura en una estructura estáticamente indeterminada en general producirá esfuerzos en los miembros, denominados **esfuerzos térmicos**. Tales esfuerzos también pueden ocurrir cuando un miembro se calienta de manera no uniforme, independientemente de que la estructura sea determinada o indeterminada.

Para ejemplificar algunas de estas ideas acerca de los esfuerzos térmicos, considere la armadura simétrica de dos barras ABC de la Fig. 2-21a y suponga que la tem-

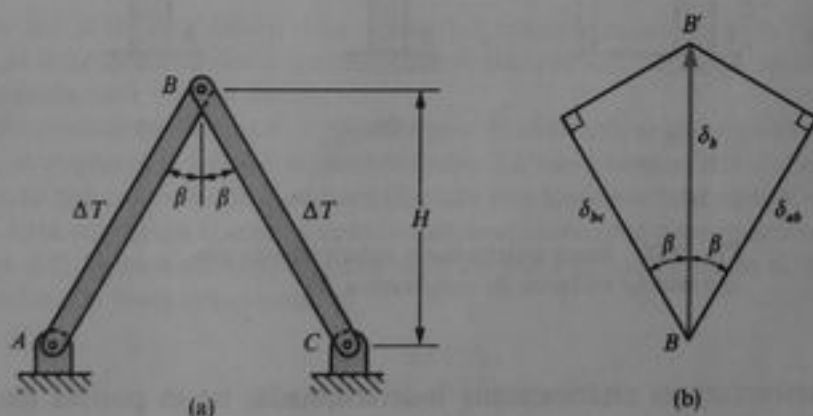


Fig. 2-21 Incremento uniforme de temperatura ΔT , en los miembros de una armadura

peratura aumenta en ΔT . Como la armadura es estáticamente determinada las barras pueden alargarse libremente, lo que produce una deflexión vertical en el nudo B . (Si la armadura no fuese simétrica, o no se tuviera el mismo cambio de temperatura para ambas barras, el nudo B experimentaría un desplazamiento horizontal además del desplazamiento vertical.) Los alargamientos de las barras se obtienen de la Ec. (2-22):

$$\delta_{ab} = \delta_{bc} = \frac{\alpha(\Delta T)H}{\cos \beta}$$

donde $H/\cos \beta$ es la longitud de cada una. Para determinar la deflexión del nudo B , podemos tratar los cambios de longitud debidos a cambios de temperatura de igual forma que si fueran ocasionados por fuerzas axiales en las barras (véase Sección 2.3). El diagrama de desplazamientos resultante para el nudo B se muestra en la Fig. 2-21b. La deflexión vertical δ_b puede medirse a partir de un diagrama trazado a escala o calcularse directamente de la figura:

$$\delta_b = \frac{\delta_{ab}}{\cos \beta} = \frac{\alpha(\Delta T)H}{\cos^2 \beta} \quad (2-23)$$

Esta deflexión es ascendente si ΔT es positivo (calentamiento) y descendente si es negativo (enfriamiento). Aunque el nudo B experimenta un desplazamiento, no existen esfuerzos en las barras ni se generan reacciones en los apoyos. Por lo que se advierte que los cambios de temperatura pueden originar deformaciones en una estructura estáticamente determinada sin producir esfuerzos correspondientes.

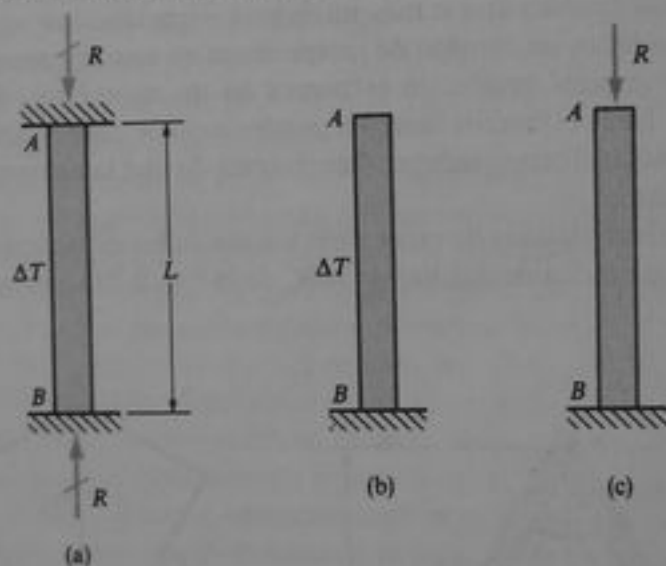


Fig. 2-22 Barra estáticamente indeterminada con incremento uniforme de temperatura ΔT

Si una estructura es estáticamente indeterminada, no es posible tener dilataciones o contracciones libres. Un ejemplo lo constituye una barra AB sostenida entre soportes fijos, como se muestra en la Fig. 2-22a. Si la temperatura aumenta uniformemente en ΔT , se producirá en la barra una fuerza axial de compresión R . Esta fuerza puede calcularse por cualquiera de los métodos descritos en las secciones 2.4 y 2.5. Al emplear el método de flexibilidades, se corta la barra a través de su extremo superior y se retira el soporte (Fig. 2-22b). El cambio de temperatura ΔT origina un alargamiento de esta estructura liberada, lo que provoca un desplazamiento ascendente δ_T del punto A igual a $\alpha(\Delta T)L$. La fuerza R que actúa sobre la estructura liberada (Fig. 2-22c) produce un desplazamiento descendente δ_R igual a RL/EA . Dado que el desplazamiento real del extremo de la barra es cero (Fig. 2-22a), se obtiene la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\delta_T - \delta_R = \alpha(\Delta T)L - \frac{RL}{EA} = 0 \quad (a)$$

De esta ecuación, se obtiene la reacción R :

$$R = EA\alpha(\Delta T) \quad (2-24)$$

Note que R no depende de la longitud de la barra. Enseguida, se obtiene el esfuerzo de compresión en la barra:

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha(\Delta T) \quad (2-25)$$

el cual no depende del área de la sección transversal.

El ejemplo anterior muestra cómo los cambios de temperatura pueden producir esfuerzos en un sistema estáticamente indeterminado aun cuando no existan cargas. Además, la barra de este ejemplo tiene desplazamiento longitudinal nulo, no sólo en los extremos fijos sino en cualquier sección transversal. Entonces, no ocurren deformaciones axiales en esta barra y se presenta una situación que implica esfuerzos sin deformaciones. En un caso más general, tal como una barra que conste de dos porciones de diferente área de sección transversal, habrá simultáneamente esfuerzos y deformaciones axiales debidos a un cambio de temperatura (véanse Probs. 2.6-12 y 2.6-13).

Ejemplo 1

Considérese una armadura simétrica de tres barras, como la mostrada en la Fig. 2-23a, y suponga que se incrementa uniformemente la temperatura en ΔT . Suponga también que E , A y α son las mismas para las tres barras.

Para determinar las fuerzas F_1 y F_2 en los miembros de esta armadura estáticamente indeterminada, se empleará el método de flexibilidades. La barra vertical BD se corta en su extremo inferior, lo que conduce a la estructura liberada estáticamente determinada mostrada en la Fig. 2-23b. Esta estructura liberada puede deformarse libremente cuando ocurre el cambio de temperatura ΔT . El desplazamiento descendente del nudo D , que ocasiona el cambio de temperatura en las dos barras exteriores, es

$$\delta_1 = \frac{\alpha(\Delta T)L}{\cos^2 \beta}$$

(véase Ec. 2-23). El alargamiento de la barra vertical es

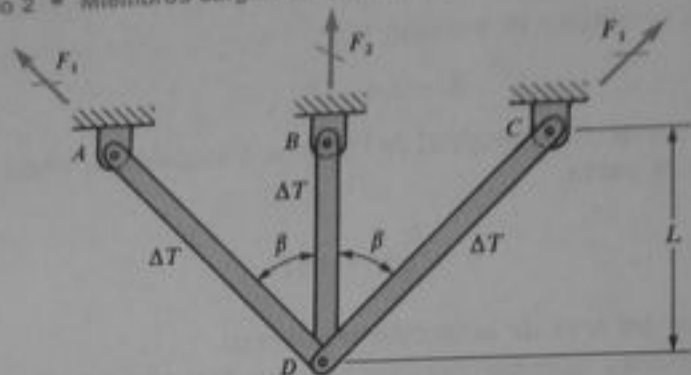
$$\delta_2 = \alpha(\Delta T)L$$

Enseguida, se considera la estructura liberada sometida a la fuerza redundante F_2 que actúa en la sección cortada de la barra BD (Fig. 2-23c). Esta fuerza produce un desplazamiento ascendente del nudo D igual a

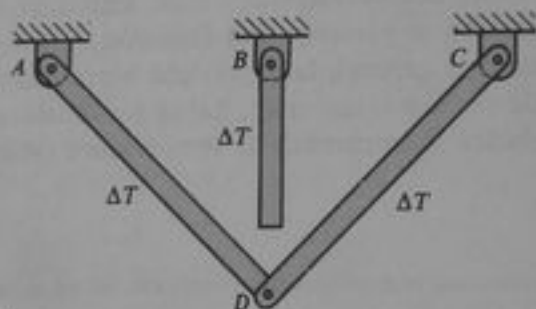
$$\delta_3 = \frac{F_2 L}{2EA \cos^3 \beta}$$

(véase Ec. 2-10) y un alargamiento de BD igual a

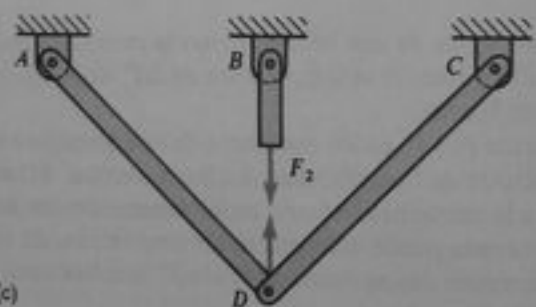
$$\delta_4 = \frac{F_2 L}{EA}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 2-23 Ejemplo 1. Armadura estáticamente indeterminada con incremento uniforme de temperatura

El desplazamiento descendente del nudo D es $\delta_1 - \delta_3$, y el alargamiento total de la barra BD es $\delta_2 + \delta_4$. La igualdad de estas deflexiones representa la condición de compatibilidad de desplazamientos en el nudo D :

$$\delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$$

$$\frac{\alpha(\Delta T)L}{\cos^2 \beta} - \frac{F_2 L}{2EA \cos^3 \beta} = \alpha(\Delta T)L + \frac{F_2 L}{EA}$$

(b)

Esta ecuación se resuelve fácilmente para la fuerza F_2 en la barra vertical:

$$F_2 = \frac{2EA\alpha(\Delta T) \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-26)$$

Esta fuerza es de tensión si ΔT es positiva (esto es, si la temperatura se incrementa).

La fuerza F_1 en las barras inclinadas se determina del equilibrio de fuerzas actuantes sobre la armadura (Fig. 2-23a):

$$2F_1 \cos \beta + F_2 = 0 \quad (c)$$

o

$$F_1 = -\frac{EA\alpha(\Delta T) \operatorname{sen}^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-27)$$

El signo negativo indica que F_1 es una fuerza de compresión cuando la temperatura se incrementa.

El desplazamiento descendente δ_d del nudo D se obtiene al sustituir la expresión para F_2 de la Ec. (2-26) en cada miembro de la ecuación de compatibilidad (Ec. b); por lo que,

$$\delta_d = \delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 = \frac{\alpha(\Delta T)L(1 + 2 \cos \beta)}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-28)$$

Esta expresión muestra que δ_d es descendente (positivo) siempre y cuando ΔT sea positivo.

Ejemplo 2

Un tornillo se coloca dentro de un casquillo en forma de un tubo de longitud L y se asegura mediante una tuerca que se aprieta de modo que no presione en exceso (Fig. 2-24a). El casquillo y el tornillo están hechos de diferentes materiales. Si la temperatura del ensamble se eleva en una cantidad ΔT , ¿qué fuerzas se originan en el casquillo y en el tornillo?

Puesto que el casquillo y el tornillo son de diferentes materiales, sus alargamientos serían diferentes si se dilataran libremente. Sin embargo se mantienen unidos por el ensamble, por lo que se producen esfuerzos térmicos. El sistema es estáticamente indeterminado ya que los esfuerzos no pueden evaluarse mediante el equilibrio estático únicamente. Como ejemplo, se determinarán los esfuerzos por los dos métodos: el de flexibilidades y el de rigideces.

En el método de flexibilidades se principia por cortar el ensamble en forma tal que se obtenga una estructura liberada estáticamente determinada. Una forma sencilla de lograr esto es quitar la cabeza del tornillo, como se muestra en la Fig. 2-24b. Luego se supone que ocurre el cambio de temperatura ΔT , lo que produce alargamientos δ_1 y δ_2 del casquillo y el tornillo, respectivamente:

$$\delta_1 = \alpha_c(\Delta T)L \quad \delta_2 = \alpha_t(\Delta T)L$$

donde α_c y α_t son los coeficientes de dilatación térmica. Al trazar la figura, se considera arbitrariamente que δ_1 es mayor que δ_2 (esto es, $\alpha_c > \alpha_t$).

Las fuerzas existentes en el casquillo y el tornillo en el ensamble original deben ser tales que acorten el casquillo y alarguen al tornillo, a fin de que los alargamientos finales del casquillo y el tornillo sean las mismas. Estas fuerzas se muestran en la Fig. 2-24c, donde P , denota la

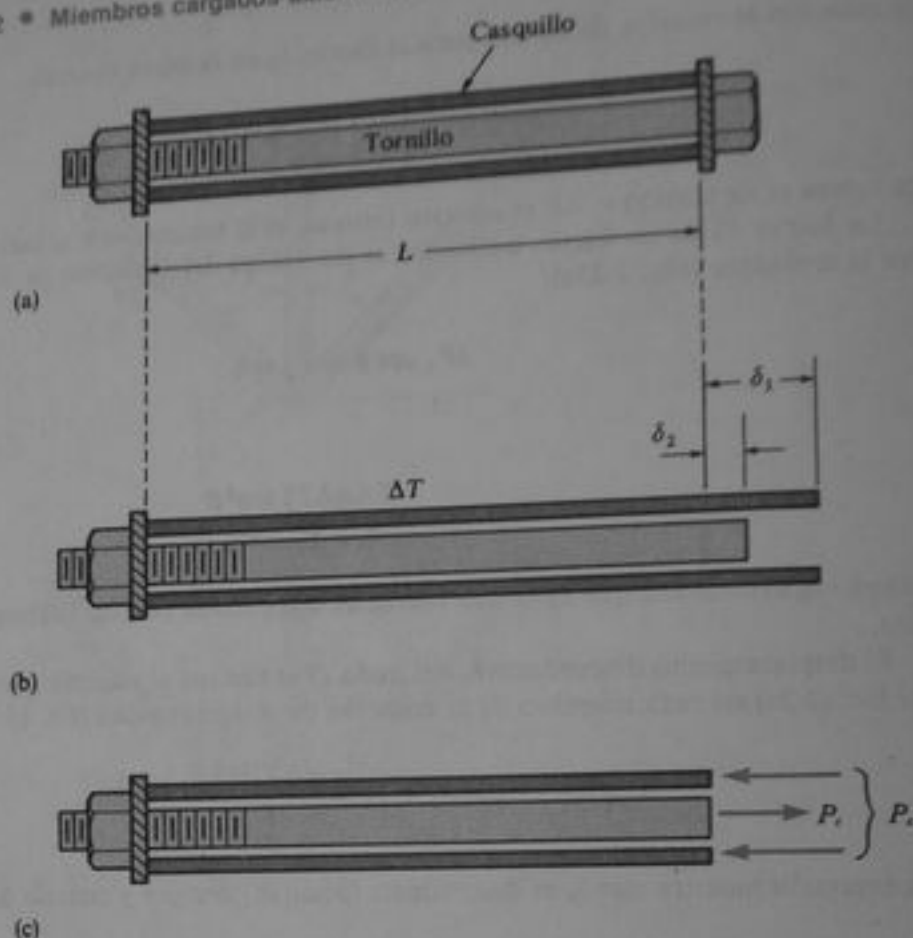


Fig. 2-24 Ejemplo 2. Ensamblaje de casquillo y tornillo con incremento uniforme de temperatura ΔT

fuerza de compresión en el casquillo y P_t denota la fuerza de tensión en el tornillo. El acortamiento correspondiente δ_1 del casquillo y el alargamiento δ_2 del tornillo son

$$\delta_1 = \frac{P_c L}{E_c A_c} \quad \delta_2 = \frac{P_t L}{E_t A_t}$$

donde $E_c A_c$ y $E_t A_t$ constituyen las rigideces axiales respectivas.

Ahora podemos expresar una ecuación de compatibilidad que exprese el hecho de que el alargamiento final es el mismo para ambas barras. El alargamiento del casquillo es $\delta_1 - \delta_3$ y el del tornillo es $\delta_2 + \delta_4$; por lo tanto,

$$\delta = \delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 \quad (d)$$

$$\delta = \alpha_c (\Delta T) L - \frac{P_c L}{E_c A_c} = \alpha_c (\Delta T) L + \frac{P_t L}{E_t A_t} \quad (e)$$

Una segunda ecuación para las fuerzas axiales se obtiene del equilibrio estático (véase Fig. 2-24c):

$$P_c = P_t \quad (f)$$

Esto es, la fuerza de compresión en el casquillo es igual a la fuerza de tensión en el tornillo. Al combinar las Ecs. (e) y (f) se obtienen las fuerzas en el ensamble original (Fig. 2-24a) sometido al cambio de temperatura:

$$P_c = P_t = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T}{\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s}} \quad (2-29)$$

Si α_c es mayor que α_s , la fuerza P_c es de compresión y P_t es de tensión. Advierta también que las fuerzas son independientes de la longitud L .

El alargamiento final del sistema se determina al sustituir la Ec. (2-29) en la Ec. (e), lo que origina

$$\delta = \frac{(\alpha_c E_c A_c + \alpha_s E_s A_s)(\Delta T)L}{E_c A_c + E_s A_s} \quad (2-30)$$

Un caso especial se presenta cuando ambas barras son del mismo material y $\alpha_c = \alpha_s$; entonces $P_c = P_t = 0$ y $\delta = \alpha_s(\Delta T)L$, como era de esperarse.

Ahora considere el análisis de este ensamble por el método de rigideces. En este caso, se considera como incógnita el desplazamiento δ de la cabeza del tornillo y se representan las fuerzas en ambas partes en términos de tal desplazamiento. Luego se formula una ecuación de equilibrio para las fuerzas y se despeja el desplazamiento δ .

Dado que las barras se alargan una cantidad igual al desplazamiento final δ , parte del cual se origina por el cambio de temperatura y parte por la fuerza en la barra, se pueden formular las ecuaciones siguientes que relacionan las fuerzas con el desplazamiento:

$$P_c = -\frac{E_c A_c}{L} [\delta - \alpha_c(\Delta T)L] \quad P_t = \frac{E_s A_s}{L} [\delta - \alpha_s(\Delta T)L] \quad (g)$$

En estas ecuaciones los términos entre corchetes representan sólo los cambios en longitud producidos por las fuerzas P_c y P_t . El signo negativo se coloca en la primera ecuación porque se supone que P_c es positiva a compresión. Estas expresiones para P_c y P_t , se sustituyen en la ecuación de equilibrio, $P_c = P_t$, para obtener

$$-\frac{E_c A_c}{L} [\delta - \alpha_c(\Delta T)L] = \frac{E_s A_s}{L} [\delta - \alpha_s(\Delta T)L]$$

de donde se obtiene el desplazamiento:

$$\delta = \frac{(\alpha_c E_c A_c + \alpha_s E_s A_s)(\Delta T)L}{E_c A_c + E_s A_s}$$

Este resultado es el mismo que el determinado mediante el método de flexibilidades (Ec. 2-30). Al sustituir esta expresión para δ en las Ecs. (g) se obtienen las fuerzas P_c y P_t ; nuevamente, los resultados son los mismos que los obtenidos por el método de flexibilidades (Ec. 2-29).

Deformaciones previas. Suponga que accidentalmente se construye un miembro de una estructura con una longitud que difiere de su longitud teórica. El efecto es similar al de un cambio de temperatura, aunque la causa del cambio en longitud es diferente. Por tanto, el efecto sobre una estructura estáticamente determinada será una desviación de la configuración teórica, aunque no se generen deformaciones ni es-

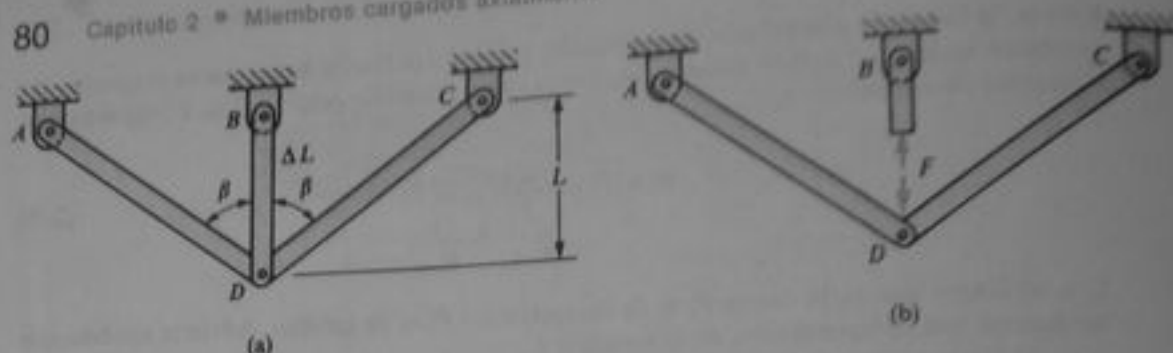


Fig. 2-25 Armadura con deformación previa ΔL en el miembro vertical

fuerzos. Sin embargo, en una estructura estáticamente indeterminada se producirán deformaciones internas, ya que la estructura no puede adaptarse espontáneamente al cambio de longitud en un miembro. Estas deformaciones existen al tiempo que se construye la estructura y antes de aplicar alguna carga, por lo que se denominan **deformaciones previas**. Tales deformaciones provocan una condición **presforzada** en la estructura. Algunas veces las estructuras son presforzadas deliberadamente a fin de lograr condiciones de esfuerzo más favorables bajo carga. Ejemplos comunes de este tipo son las vigas de concreto presforzado, piezas de maquinaria montadas por contracción y rayos presforzados en ruedas de bicicleta (los cuales podrían colapsarse si no se presforzaran).

El análisis de una estructura estáticamente indeterminada con deformaciones previas se realiza en la misma forma que para cambios de temperatura. Para ejemplificar esto, considere nuevamente una armadura de tres barras, como la mostrada en la Fig. 2-25a, y suponga que la longitud libre de la barra vertical es $L + \Delta L$ en lugar de L . Luego, las barras pueden ensamblarse en la armadura sólo después de comprimir la barra vertical y de estirar las barras inclinadas. F denota la fuerza de compresión en la barra vertical (Fig. 2-25b). Esta fuerza produce un desplazamiento descendente δ_1 del nudo D (véase Ec. 2-10):

$$\delta_1 = \frac{FL}{2EA \cos^3 \beta}$$

se supone que L es la longitud del miembro vertical y que todas las barras tienen la misma rigidez axial EA . El acortamiento del miembro vertical debido a la fuerza F es

$$\delta_2 = \frac{FL}{EA}$$

La condición de compatibilidad del nudo D establece que el desplazamiento descendente del nudo D es igual al incremento de longitud inicial ΔL de la barra vertical, menos su acortamiento debido a F . Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad es

$$\delta_1 = \Delta L - \delta_2$$

o bien

$$\frac{FL}{2EA \cos^3 \beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA} \quad (h)$$

Al resolver esta ecuación para la fuerza F se obtiene

$$F = \frac{2EA(\Delta L) \cos^3 \beta}{L(1 + 2 \cos^3 \beta)} \quad (2-31)$$

Esta fuerza es de compresión cuando ΔL es positiva (esto es, cuando ΔL representa un incremento en longitud). Si se conoce la fuerza F en la barra vertical, se pueden determinar fácilmente las fuerzas en las barras inclinadas a partir del equilibrio estático.

Este ejemplo demuestra que el análisis de deformaciones previas de una estructura estáticamente indeterminada, esencialmente es el mismo que para cambios de temperatura. Los resultados de tales análisis pueden convertirse fácilmente de un caso al otro. Por ejemplo, suponga que la armadura de la Fig. 2-25a se somete a un cambio de temperatura ΔT en la barra vertical, pero las barras inclinadas permanecen a temperatura constante. El efecto resultante sobre las fuerzas en las barras es el mismo que si la barra vertical tuviera un exceso de longitud ΔL , cuando se iguala ΔL al alargamiento térmico que ocurriría si la barra pudiera dilatarse libremente. Por lo tanto, en la Ec. (2-31) se reemplaza ΔL por $\alpha(\Delta T)L$ a fin de obtener la fuerza F en la barra vertical debida al cambio de temperatura.

2.7 ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

En las explicaciones previas de tensión y compresión en una barra, únicamente se consideraron los esfuerzos normales que actúan sobre secciones transversales, tales como la sección transversal mn de la barra AB mostrada en la Fig. 2-26a. Revisemos ahora los esfuerzos que actúan en secciones como pq (Fig. 2-26a), que está inclinada respecto al eje.

Para iniciar el estudio cabe recordar que los esfuerzos normales que actúan sobre la sección mn pueden calcularse a partir de la fórmula $\sigma = P/A$, si se supone una distribución de esfuerzo uniforme en toda el área de la sección transversal. Según se explicó previamente, esta condición ocurre si la barra es prismática, el material es homogéneo, la fuerza axial actúa en el centroide del área de la sección transversal y la sección transversal está alejada de los extremos de la barra donde puedan presentarse grandes esfuerzos concentrados. Suponga que la barra de la Fig. 2-26a cumple todas estas condiciones, de forma tal que la distribución de los esfuerzos normales en la sección transversal mn es uniforme. Por supuesto, en esta sección no actúan esfuerzos cortantes, ya que ha sido cortada en ángulos rectos respecto al eje longitudinal.

Una forma conveniente de representar los esfuerzos en la barra es aislar un pequeño elemento del material, tal como el elemento C de la Fig. 2-26a, y luego indicar los esfuerzos que actúan sobre todos los lados de este elemento. Nos referiremos a tal elemento como **elemento esforzado**. El elemento esforzado del punto C tiene la forma de un paralelepípedo rectangular y su cara derecha (o sea la cara x positiva) está en la sección transversal mn . Desde luego, se supone que las dimensiones de un elemento esforzado son infinitesimalmente pequeñas, pero por claridad dibujaremos el elemento amplificado, como en la Fig. 2-27a. Las aristas del elemento son paralelas a los ejes x , y , z , y los únicos esfuerzos que actúan en el elemento son esfuerzos normales sobre las caras x , designados por σ_x . Por conveniencia, a menudo usaremos sólo un esquema bidimensional del elemento, como el mostrado en la Fig. 2-27b.

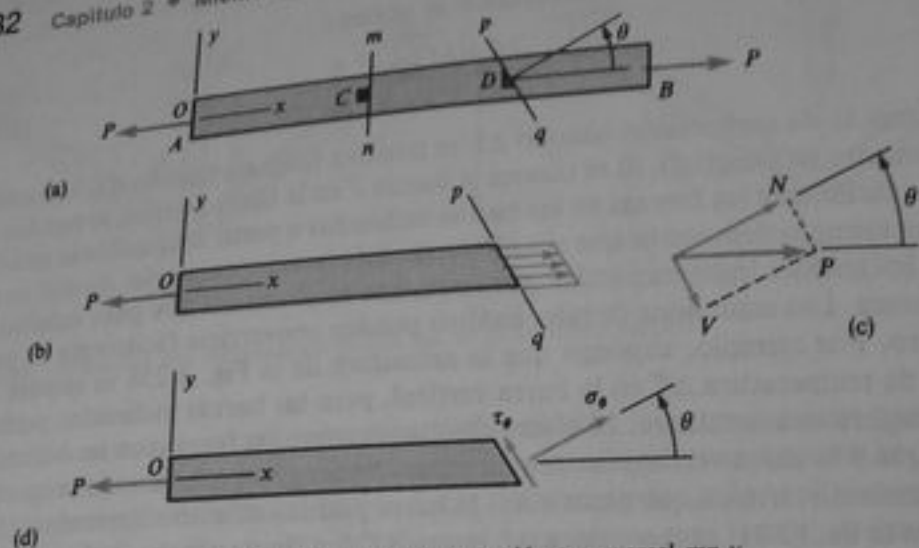


Fig. 2-26 Barra prismática en tensión con sección transversal mn y sección inclinada pq

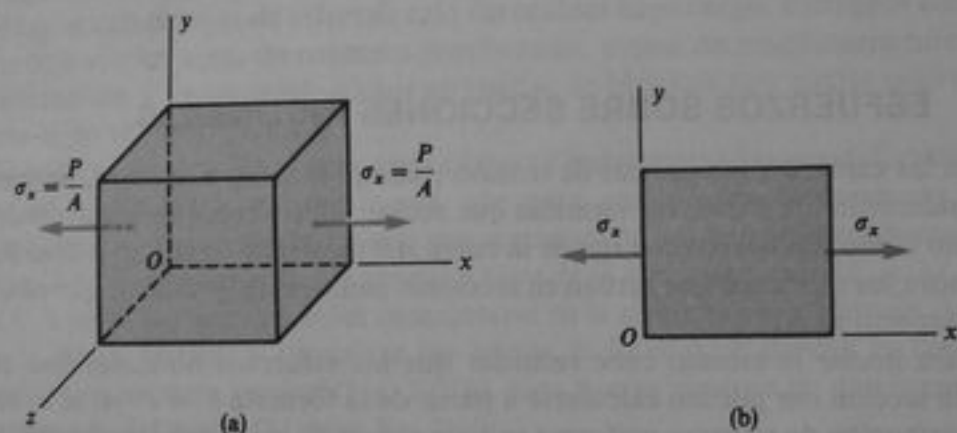


Fig. 2-27 Elemento esforzado en el punto C de la barra mostrada en la Fig. 2-26a: (a) vista tridimensional del elemento y (b) representación bidimensional del elemento

La sección inclinada pq se corta a través de la barra a un ángulo θ entre el eje x y la normal al plano (Fig. 2-26a). Así, la sección transversal mn tiene un ángulo θ igual a cero, y una sección longitudinal tendría un ángulo θ igual a 90° o $\pi/2$ radianes. Ya que todas las partes de la barra tienen las mismas deformaciones axiales, los esfuerzos que actúan sobre la sección pq deben ser uniformemente distribuidos (Fig. 2-26b). La resultante de estos esfuerzos debe ser una fuerza de igual magnitud que la fuerza P a fin de mantener el equilibrio de la porción izquierda de la barra. Esta resultante puede resolverse en dos componentes, una fuerza normal N y una fuerza cortante V (Fig. 2-26c), que son normal y tangencial, respectivamente, al plano inclinado pq . Estas componentes son

$$N = P \cos \theta \quad V = P \operatorname{sen} \theta \quad (2-32a, b)$$

Con las fuerzas N y V se relacionan los esfuerzos normales σ_x y los esfuerzos cortantes τ_x , respectivamente (véase Fig. 2-26d), que se distribuyen uniformemente sobre la

sección inclinada. Estos esfuerzos se muestran cuando actúan en sus direcciones positivas; esto es, σ_θ es positivo en tensión, y τ_θ es positivo cuando tiende a producir un giro del material en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Como el área A_1 de la sección inclinada es $A/\cos \theta$, donde A es el área de la sección transversal, se aprecia que los esfuerzos σ_θ y τ_θ se representan por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (2-33a)$$

$$\tau_\theta = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (2-33b)$$

donde $\sigma_x = P/A$ es el esfuerzo normal sobre una sección transversal.

Las ecuaciones anteriores para σ_θ y τ_θ pueden obtenerse también al considerar el equilibrio de un elemento esforzado en el punto D de la barra de la Fig. 2-26a. En este ejemplo el elemento tiene forma de cuña con una de sus caras a lo largo de la sección inclinada pq . El elemento se muestra nuevamente en la Fig. 2-28a, con los esfuerzos σ_θ y τ_θ que actúan sobre la cara inclinada y el esfuerzo σ_x actuando en la cara del lado izquierdo. No ocurren esfuerzos en las otras caras del elemento. De nuevo, un esquema bidimensional del elemento es útil para muchos propósitos (Fig. 2-28b). Para obtener σ_θ y τ_θ , se considera el equilibrio del elemento. Las fuerzas que actúan

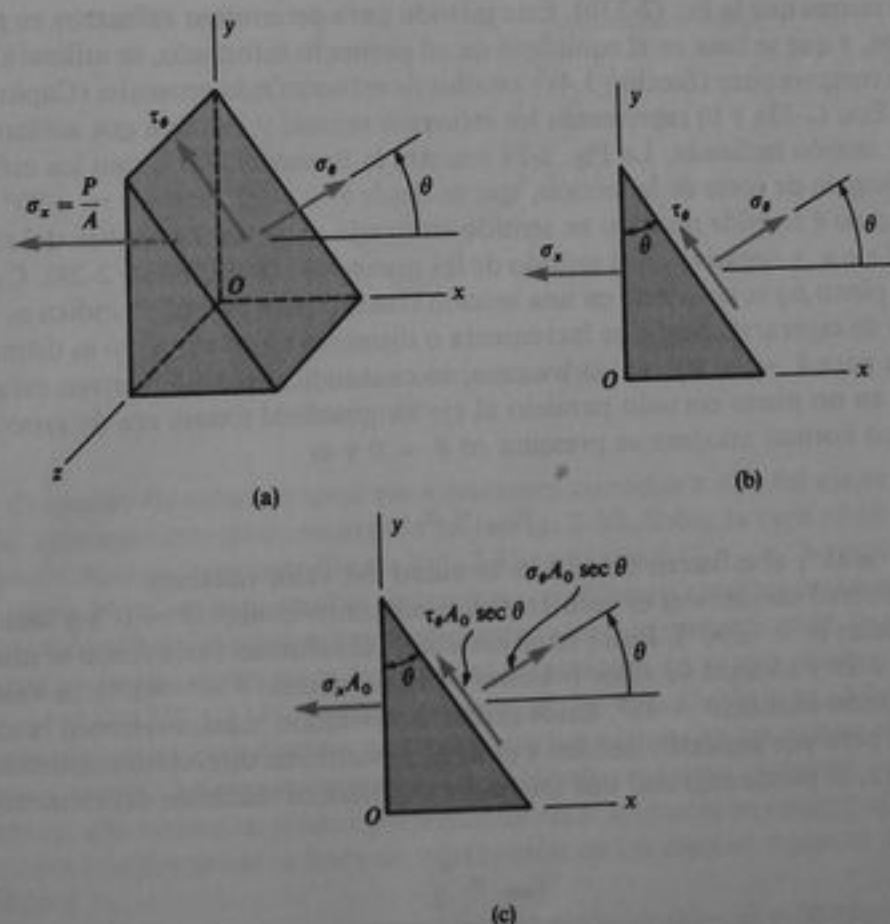


Fig. 2-28 Elemento esforzado en el punto D de la barra mostrada en la Fig. 2-26a

sobre las caras se obtienen al multiplicar los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan (esto es, por el área de las caras). Por ejemplo, la fuerza en la cara izquierda es igual a $\sigma_x A_0$ (Fig. 2-28c), donde A_0 es el área de la cara. Esta fuerza actúa en la dirección y negativa. Como el espesor del elemento es constante, el área de la cara inclinada es $A_0 \sec \theta$. Por lo tanto, las fuerzas normal y cortante sobre esta cara son $\sigma_\theta A_0 \sec \theta$ y $\tau_\theta A_0 \sec \theta$, respectivamente (Fig. 2-28c). La fuerza $\sigma_\theta A_0$ sobre la cara izquierda puede definirse en componentes que son perpendicular y paralela a la cara inclinada; la componente perpendicular es $\sigma_\theta A_0 \cos \theta$ y la componente paralela es $\sigma_\theta A_0 \sin \theta$. Ahora se pueden formular dos ecuaciones de equilibrio estático para el elemento, una para cada una de las direcciones mencionadas. La primera ecuación se obtiene sumando fuerzas perpendiculares a la cara inclinada (esto es, en la dirección de σ_θ):

$$\sigma_\theta A_0 \sec \theta - \sigma_x A_0 \cos \theta = 0$$

o

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

que es la misma que la Ec. (2-33a). La segunda ecuación se obtiene al sumar fuerzas en la dirección de τ_θ :

$$\tau_\theta A_0 \sec \theta + \sigma_x A_0 \sin \theta = 0$$

o

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

que es la misma que la Ec. (2-33b). Este método para determinar esfuerzos en planos inclinados, y que se basa en el equilibrio de un elemento esforzado, se utilizará en estudios de cortante puro (Sección 3.4) y estados de esfuerzo más generales (Capítulo 6).

Las Ecs. (2-33a y b) representan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier sección inclinada. La Fig. 2-29 muestra la forma en que varían los esfuerzos según el ángulo de corte de la sección, que va desde $\theta = -90^\circ$ hasta $\theta = +90^\circ$. Note que el ángulo θ se mide positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje x , y negativo en el sentido de las manecillas (Figs. 2-26 y 2-28). Cuando $\theta = 0$, el plano pq se convierte en una sección transversal y la gráfica indica $\sigma_\theta = \sigma_x$, como era de esperarse. Según se incrementa o disminuye θ , el esfuerzo σ_θ disminuye hasta que para $\theta = \pm 90^\circ$ se vuelve cero, lo cual indica que no ocurren esfuerzos normales en un plano cortado paralelo al eje longitudinal (como era de esperarse). El esfuerzo normal máximo se presenta en $\theta = 0$ y es

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \quad (2-34)$$

Para $\theta = \pm 45^\circ$, el esfuerzo normal es la mitad del valor máximo.

El esfuerzo cortante τ_θ es cero en secciones transversales ($\theta = 0^\circ$) y secciones longitudinales ($\theta = \pm 90^\circ$). Entre estos extremos, el esfuerzo varía como se muestra en la Fig. 2-29 y alcanza su valor máximo positivo cuando $\theta = -45^\circ$ y su valor negativo máximo cuando $\theta = 45^\circ$. Estos esfuerzos cortantes máximos tienen la misma magnitud, pero por supuesto tienden a girar al elemento en direcciones opuestas. De esta manera, se puede expresar que los valores numéricos máximos del esfuerzo cortante son

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (2-35)$$

y se presentan en planos a 45° del eje.

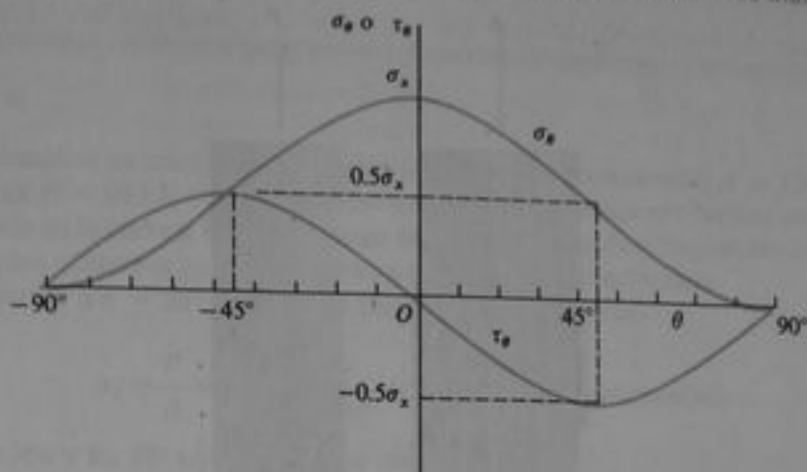


Fig. 2-29 Gráfica del esfuerzo normal σ_θ y el esfuerzo cortante τ_θ versus el ángulo θ de la sección inclinada pq (véase Fig. 2-26a)

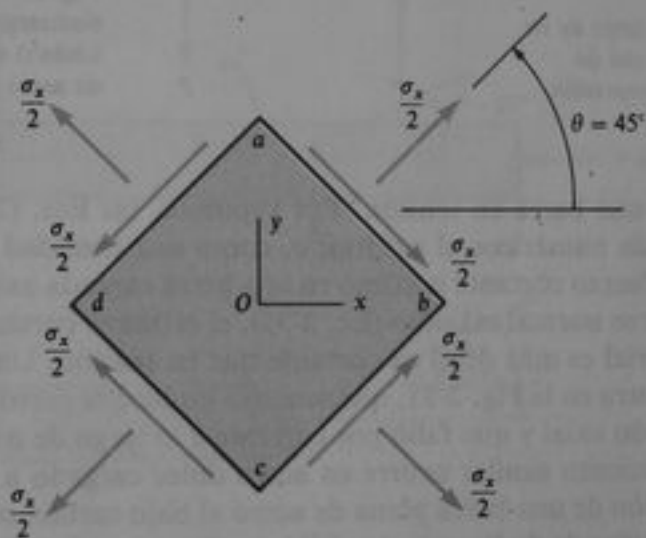


Fig. 2-30 Elemento esforzado para $\theta = 45^\circ$ de una barra en tensión

El estado de esfuerzo total para secciones cortadas a 45° del eje se representa por el elemento esforzado mostrado en la Fig. 2-30. Sobre la cara ab ($\theta = 45^\circ$) los esfuerzos normal y cortante (de las Ecs. 2-33a y b) son $\sigma_x/2$ y $-\sigma_x/2$, respectivamente. Por tanto, el esfuerzo normal es de tensión y el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj sobre el elemento, como se muestra en la figura. Los esfuerzos en las caras restantes bc , cd y ad se obtienen en forma similar, al sustituir $\theta = -45^\circ$, -135° y 135° , respectivamente, en las Ecs. (2-33a y b). Advierta que en este caso especial los esfuerzos normales son los mismos en las cuatro caras del elemento y que los esfuerzos cortantes tienen el valor máximo. Además, los esfuerzos cortantes que actúan en planos perpendiculares son iguales en magnitud y tienen direcciones hacia o desde la línea de intersección de los planos, según se explicó en la Sección 1.6.

Si una barra se carga a compresión en vez de tensión, el esfuerzo σ_x tendrá un valor negativo y los esfuerzos que actúan sobre el elemento tendrán direcciones

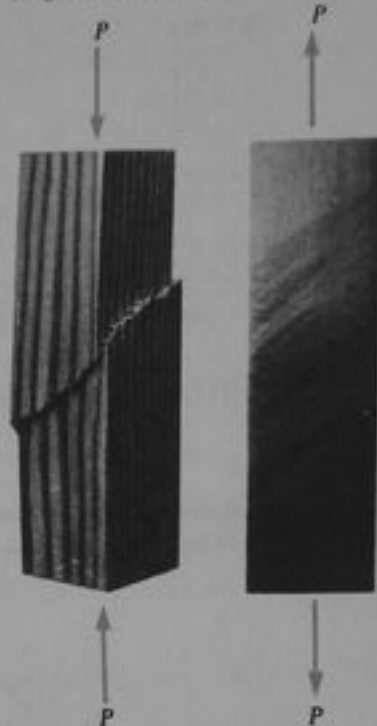


Fig. 2-31 Falla a lo largo de un plano a 45° de un bloque de madera cargado en compresión

Fig. 2-32 Bandas de deslizamiento (o bandas de Lüders) en un espécimen pulido de acero sometido a tensión axial

opuestas a las de una barra en tensión. Por supuesto, las Ecs. (2-33a y b) pueden usarse para cálculos numéricos al sustituir σ_c como una cantidad negativa.

Aunque el esfuerzo cortante máximo en una barra cargada axialmente es igual a la mitad del esfuerzo normal máximo (Ec. 2-35), el esfuerzo cortante puede ser el limitante si el material es más débil en cortante que en tensión. Un ejemplo de falla por cortante se ilustra en la Fig. 2-31, que muestra un bloque corto de madera que se carga en compresión axial y que falló por cortante a lo largo de un plano a 45° . Un tipo de comportamiento similar ocurre en acero dulce cargado a tensión. Durante una prueba a tensión de una barra plana de acero al bajo carbón con superficies pulidas, aparecen **bandas de deslizamiento** visibles en las caras de la barra aproximadamente a 45° del eje (Fig. 2-32). Estas bandas indican que el material falla a cortante a lo largo de planos en los que el esfuerzo cortante es máximo. Tales bandas fueron observadas inicialmente por G. Piobert en 1842 y W. Lüders en 1860 (véanse Refs. 2-7 a 2-10), y actualmente se denominan como *bandas de Lüders* o *bandas de Piobert*. Empiezan a aparecer cuando se alcanza el esfuerzo de fluencia en la barra (punto B en la Fig. 1-7).

El estado de esfuerzos descrito en esta sección se designa **esfuerzo uniaxial**, porque la barra se somete únicamente a tensión o a compresión simple y, en consecuencia, un elemento esforzado orientado con el eje de la barra está afectado únicamente por esfuerzos en una sola dirección (Fig. 2-27). Es obvio que las orientaciones más importantes de elementos esforzados para esfuerzos uniaxiales son $\theta = 0$ (Fig. 2-27) y $\theta = 45^\circ$ (Fig. 2-30); la primera contiene al esfuerzo normal máximo y la última contiene al esfuerzo cortante máximo. Si las secciones se cortan a través de la barra a otros ángulos, los esfuerzos que actúan sobre las caras de los elementos esforzados correspondientes pueden determinarse con las Ecs. (2-33a y b), como se ilustra en el siguiente ejemplo. El esfuerzo uniaxial es un caso especial de un estado de esfuerzos más general conocido como *esfuerzo plano*, el cual se describe en detalle en el Capítulo 6.

Ejemplo

Una barra prismática en compresión tiene un área de sección transversal $A = 1200 \text{ mm}^2$ y soporta una carga $P = 90 \text{ kN}$ (Fig. 2-33a). Determinar los esfuerzos que actúan sobre un plano de corte a través de la barra a $\theta = 25^\circ$. Luego indique el estado de esfuerzos total para $\theta = 25^\circ$ al determinar los esfuerzos en todas las caras de un elemento esforzado.

Los esfuerzos a $\theta = 25^\circ$ se calculan rápidamente al sustituir

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{90 \text{ kN}}{1200 \text{ mm}^2} = -75 \text{ MPa} \quad (\text{compresión})$$

en las Ecs. (2-33a y b). De esta manera, se obtiene

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = (-75 \text{ MPa})(\cos 25^\circ)^2 = -61.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = (75 \text{ MPa})(\sin 25^\circ)(\cos 25^\circ) = 28.7 \text{ MPa}$$

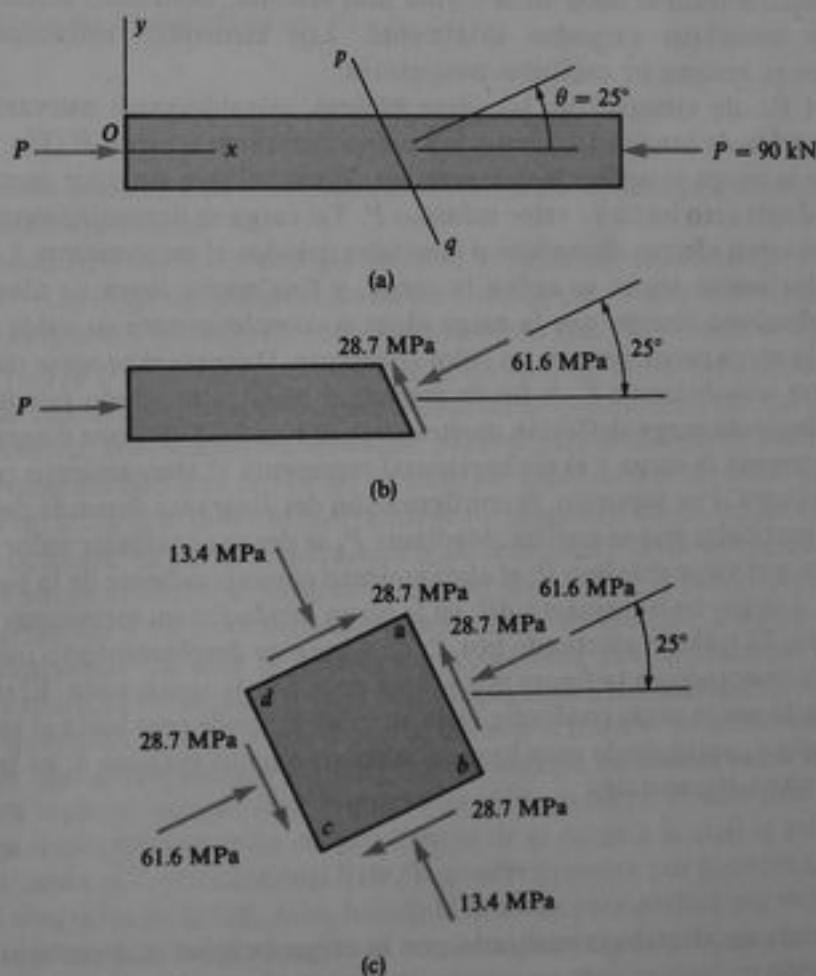


Fig. 2-33 Ejemplo

La Fig. 2-33b muestra estos esfuerzos que actúan sobre el plano inclinado en sus direcciones verdaderas.

La Fig. 2-33c muestra los esfuerzos que actúan en las caras laterales de un elemento esforzado orientado a $\theta = 25^\circ$. La cara ab tiene la misma orientación que el plano inclinado mostrado en la Fig. 2-33b, por lo que los esfuerzos son los mismos. Los esfuerzos sobre la cara cd son los mismos que los de la cara ab , lo que puede verificarse al sustituir $\theta = 25^\circ + 180^\circ = 205^\circ$ en las Ecs. (2-33a y b). Para las caras bc y ad se sustituye $\theta = -65^\circ$ y $\theta = 115^\circ$, respectivamente. Ya que estas caras están en lados opuestos del elemento, los valores de σ_x y τ_{xy} son los mismos para ambas caras.

2.8 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

El concepto de **energía de deformación** es de fundamental importancia en la mecánica aplicada, y los principios de la energía de deformación se utilizan ampliamente para determinar la respuesta de maquinaria y estructuras a cargas estáticas y dinámicas. Esta sección trata el tema en la forma más sencilla, utilizando como ejemplos únicamente miembros cargados axialmente. Los elementos estructurales más complicados se revisan en capítulos posteriores.

Con el fin de ejemplificar las ideas básicas, consideremos nuevamente una barra prismática de longitud L , sometida a una fuerza de tensión P (Fig. 2-34). Se supone que la carga se aplica lentamente, en forma tal que su valor aumenta gradualmente desde cero hasta su valor máximo P . Tal carga se denomina **carga estática** ya que no ocurren efectos dinámicos o inerciales debidos al movimiento. La barra se alarga gradualmente según se aplica la carga, y finalmente logra su alargamiento máximo δ al mismo tiempo que la carga alcanza completamente su valor P . Posteriormente, la carga permanece en un valor constante. Durante el proceso de carga, la carga recorre una distancia δ . A fin de evaluar el trabajo realizado por la carga se emplea el **diagrama carga-deflexión** mostrado en la Fig. 2-35. En este diagrama el eje vertical representa la carga y el eje horizontal representa el alargamiento correspondiente de la barra. Por supuesto, la configuración del diagrama depende del material de la barra particular que se analiza. Mediante P_1 se denota cualquier valor de la carga entre cero y el valor máximo P ; el alargamiento correspondiente de la barra se denota por δ_1 . Luego, un incremento dP_1 en la carga producirá un incremento $d\delta_1$ en el alargamiento. El trabajo efectuado por P_1 durante este desplazamiento incremental es $P_1 d\delta_1$, representado en la figura por el área de la franja sombreada. El trabajo total W realizado por la carga conforme varía su valor P_1 desde cero hasta el valor máximo P , y según δ_1 varía desde cero hasta el desplazamiento máximo δ , es la suma de todas las franjas elementales:

$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (2-36)$$

En otras palabras, el trabajo realizado por la carga es igual al área bajo la curva carga-deflexión.

La aplicación de la carga produce deformaciones en la barra. El efecto de esas deformaciones es incrementar el nivel de energía de la barra misma. Por lo que una nueva cantidad, llamada **energía de deformación**, se define como la energía absorbida por la barra durante el proceso de carga. Esta energía de deformación, denotada

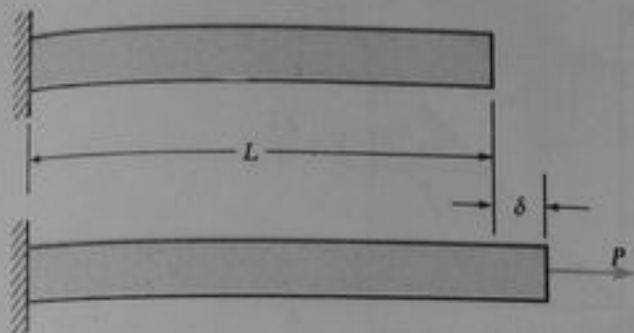


Fig. 2-34 Barra prismática sometida a carga estáticamente aplicada

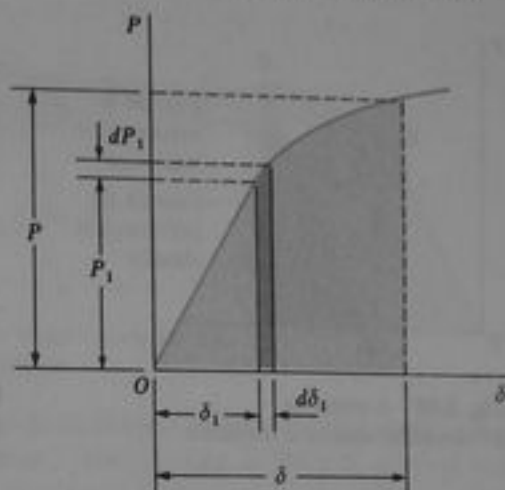


Fig. 2-35 Diagrama carga-deflexión

por la letra U , es igual al trabajo efectuado por la carga cuando no se agrega ni se pierde energía en forma de calor. Por lo tanto,

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (2-37)$$

Algunas veces la energía de deformación se refiere como **trabajo interno** para distinguirla del trabajo externo W .

La unidad de trabajo y energía en SI es el joule (J) que equivale a un newton metro ($1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$). En unidades del Sistema Inglés el trabajo y la energía se expresan en pie-libras (pie·lb), pie-kips (pie·k), pulgada-libras (plg·lb) y pulgada-kips (plg·k).*

Si la fuerza P se retira lentamente de la barra (Fig. 2-34), ésta se acortará y recobrará parcial o totalmente su longitud original, lo que depende de si se rebasó o no el límite elástico. Así, durante la descarga, parte o toda la energía de deformación de la barra puede recuperarse en forma de trabajo. Este comportamiento está plasmado en la Fig. 2-36, que muestra nuevamente un diagrama carga-deflexión. Durante el proceso de carga, el trabajo realizado es igual al área bajo la curva, o área $OABCO$. Cuando la carga se retira, el diagrama sigue la línea BD si el punto B está más allá del límite elástico y subsiste un alargamiento permanente OD . De esta manera, la energía recuperada durante la descarga se representa por el triángulo sombreado BCD ; esta energía recuperable se denomina **energía de deformación elástica**. El área $OABDO$ representa la energía que se pierde durante el proceso de deformación permanente de la barra; esta energía se conoce como **energía de deformación inelástica**.

Ahora suponga que la carga P que actúa sobre la barra se mantiene por debajo de la carga límite elástica (esto es, por debajo de la carga a la cual el esfuerzo en el material alcanza el límite elástico). Esta carga se representa por la ordenada del punto A en el diagrama de la Fig. 2-36. Mientras la carga permanezca por debajo de este valor, toda la energía de deformación se recupera durante la descarga y no permanece nada en la barra. Por lo que, la barra actúa como un resorte elástico que almacena y libera energía según se aplique o retire la carga.

Si el material de la barra es elástico y cumple con la ley de Hooke, entonces el diagrama carga-deflexión conforma una línea recta (Fig. 2-37). En este caso, la

* En la Tabla A-3 del Apéndice A se indican factores de conversión para trabajo y energía.

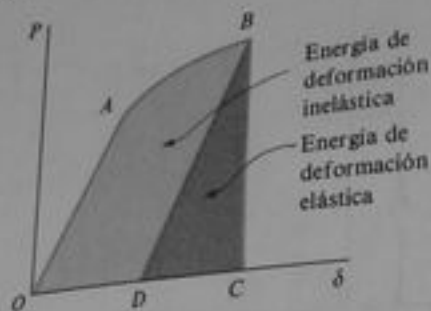


Fig. 2-36 Energía de deformación elástica e inelástica

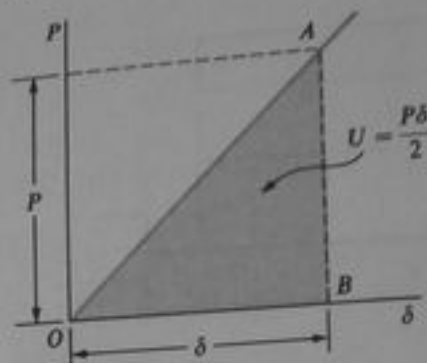


Fig. 2-37 Diagrama carga-deflexión para una barra de material linealmente elástico

energía de deformación U almacenada en la barra (igual al trabajo total W realizado por la carga P) es

$$U = W = \frac{P\delta}{2} \quad (2-38)$$

que es el área del triángulo sombreado OAB en la figura.* Como sabemos que $\delta = PL/EA$ para una barra prismática, podemos sustituir en la Ec. (2-38) y representar la energía de deformación en cualquiera de la siguientes formas:

$$U = \frac{P^2 L}{2EA} \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (2-39a, b)$$

La primera de estas ecuaciones expresa la energía de deformación de la barra como una función de la carga P y la segunda la expresa como una función del alargamiento δ . Las mismas ecuaciones son aplicables a un resorte elástico lineal si la rigidez EA/L para una barra prismática se reemplaza por la rigidez k del resorte (véase Ec. 2-2).

La energía de deformación de una barra no prismática o de una barra con una fuerza axial variable (Fig. 2-38) puede obtenerse al aplicar la Ec. (2-39a) al elemento diferencial (mostrado sombreado) e integrar posteriormente:

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2 dx}{2EA_x} \quad (2-40)$$

En esta expresión P_x y A_x son la fuerza axial y el área de la sección transversal a una distancia x del extremo de la barra.

A menudo es conveniente utilizar una cantidad conocida como la **densidad de energía de deformación** u , la cual es la energía de deformación por unidad de volu-

* El principio que establece que el trabajo de las cargas externas es igual a la energía de deformación (para el caso de comportamiento lineal) fue originalmente propuesto por el ingeniero francés B. P. E. Clapeyron (1799-1864) y se conoce como *teorema de Clapeyron* (Ref. 2-11).

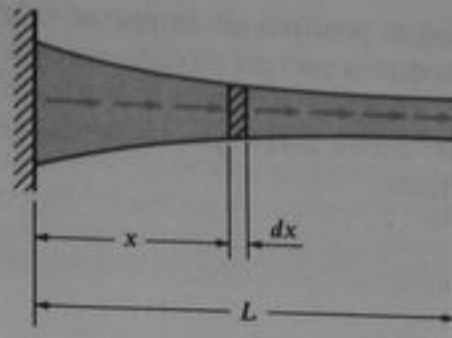


Fig. 2-38 Barra no prismática con fuerza axial variable

men del material. Las expresiones para u en el caso elástico lineal pueden obtenerse al dividir la energía total de deformación U (véanse Ecs. 2-39a y b) entre el volumen AL de la barra, ya que la densidad de energía de deformación es uniforme en todo el volumen en este ejemplo; así,

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$u = \frac{E\epsilon^2}{2}$$

(2-41a, b)

donde $\sigma = P/A$ y $\epsilon = \delta/L$ son el esfuerzo y la deformación normales, respectivamente. La densidad de energía de deformación es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación desde el origen hasta el punto de la curva que representa el esfuerzo σ y la deformación ϵ .

La densidad de energía de deformación tiene unidades de energía divididas entre volumen. De esta manera, las unidades de u en el Sistema Internacional son joules por metro cúbico (J/m^3) y en el Sistema Inglés son pie-libras por pie cúbico, pulgada-libras por pulgada cúbica u otras unidades similares. Todas estas unidades equivalen a las unidades de esfuerzo; en consecuencia, se pueden emplear también pascals o psi como unidades de u (véanse Ecs. 2-41a y b).

Cuando el material se esfuerza hasta el límite de proporcionalidad, la densidad de energía de deformación correspondiente se denomina **módulo de resiliencia** u_r . Se determina mediante la sustitución del esfuerzo límite de proporcionalidad σ_{ip} en la Ec. (2-41a):

$$u_r = \frac{\sigma_{ip}^2}{2E} \quad (2-42)$$

Como ejemplo, un acero dulce que tiene $\sigma_{ip} = 30,000$ psi y $E = 30 \times 10^6$ psi tiene un módulo de resiliencia $u_r = 15$ psi (o sea 103 kPa). Advierta que el módulo de resiliencia es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación hasta el límite de proporcionalidad. La **resiliencia** representa la capacidad del material para absorber energía en el margen elástico. Otra cantidad llamada **tenacidad** se refiere a la capacidad del material para absorber energía sin fracturarse. En consecuencia, el **módulo de tenacidad** u_t es la densidad de energía de deformación cuando el material se esfuerza hasta el punto de falla. Es igual al área bajo toda la curva del diagrama esfuerzo-deformación.

Las explicaciones anteriores de la energía de deformación para un miembro a tensión son aplicables también para un miembro en compresión. Como el trabajo

efectuado por la fuerza axial es positivo sin importar si la fuerza produce tensión o compresión, se comprende que la energía de deformación es una cantidad positiva siempre. Esta conclusión es también evidente a partir de las expresiones para la energía de deformación (Ecs. 2-39 a 2-41), que son todas positivas ya que los términos algebraicos son cuadráticos.

Ejemplo 1

Tres barras de sección circular que tienen la misma longitud L pero formas diferentes se muestran en la Fig. 2-39. La primera barra tiene un diámetro d a lo largo de toda su longitud, la segunda tiene este diámetro en la cuarta parte de su longitud y la tercera en un octavo de su longitud. Las tres barras se someten a la misma carga P . Comparar las cantidades de energía de deformación almacenada en las barras, si se supone comportamiento elástico lineal.

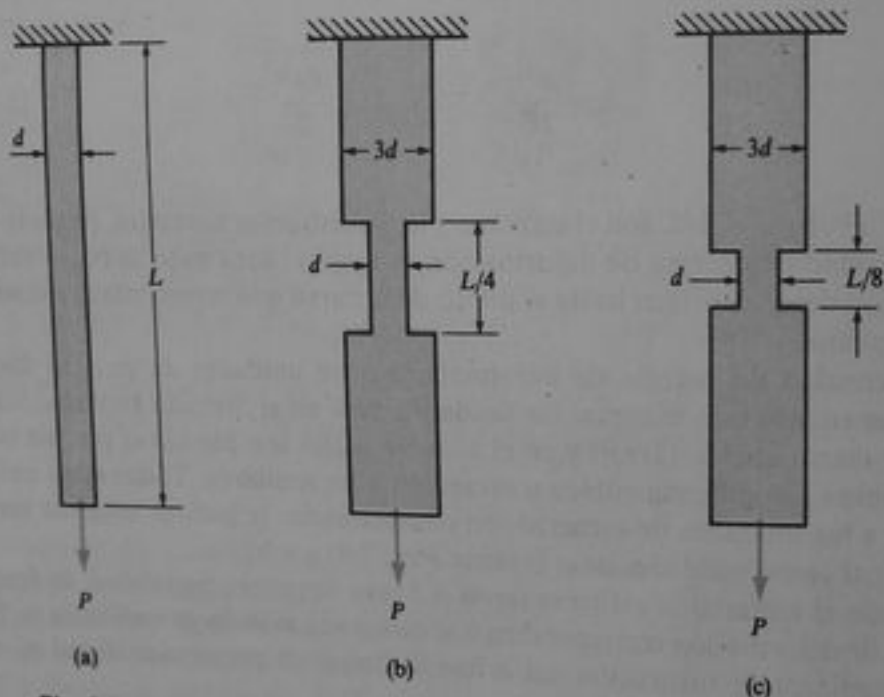


Fig. 2-39 Ejemplo 1

La energía de deformación de la primera barra (de la Ec. 2-39a) es

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2EA}$$

donde $A = \pi d^2/4$. Al suponer que la distribución de esfuerzo es uniforme sobre cada sección transversal, encontramos que la energía de deformación de la segunda barra es

$$U_2 = \frac{P^2(L/4)}{2EA} + \frac{P^2(3L/4)}{2E(9A)} = \frac{P^2 L}{6EA} = \frac{U_1}{3}$$

Para la tercera barra encontramos

$$U_3 = \frac{P^2(L/8)}{2EA} + \frac{P^2(7L/8)}{2E(9A)} = \frac{P^2 L}{9EA} = \frac{2U_1}{9}$$

La comparación de estos resultados muestra que la energía de deformación decrece según se incrementa el volumen de la barra, aunque las tres barras detentan el mismo esfuerzo máximo. Así, la tercera barra tiene menor capacidad de absorción de energía que las otras dos. Por lo tanto, sólo requiere una pequeña cantidad de trabajo elevar el esfuerzo de tensión a un valor mayor en una barra con una garganta, y mientras más estrecha sea la garganta más severa es la situación. Cuando las cargas son de carácter dinámico y la capacidad para absorber energía es significativa, la presencia de gargantas o ranuras es muy perjudicial. Por supuesto, para cargas estáticas son más importantes en diseño los esfuerzos máximos que la capacidad para absorber energía.

Ejemplo 2

Determinar la energía de deformación almacenada en una barra prismática suspendida de uno de sus extremos (Fig. 2-40) debido a su propio peso, si se supone comportamiento elástico lineal.

Empezamos por considerar un elemento de la barra de longitud dx (mostrado sombreado en la figura). La fuerza axial P_x , que actúa sobre este elemento es igual al peso de la porción de la barra que queda por debajo del mismo:

$$P_x = \gamma A(L - x) \quad (a)$$

donde γ es el peso específico del material y A es el área de la sección transversal de la barra. Al sustituir en la Ec. (2-40) e integrar se tiene que la energía de deformación total es:

$$U = \int_0^L \frac{[\gamma A(L - x)]^2 dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E} \quad (2-43)$$

Este mismo resultado puede obtenerse al integrar la densidad de energía de deformación. A cualquier distancia x del soporte, el esfuerzo es

$$\sigma = \frac{P_x}{A} = \gamma(L - x)$$

y, por lo tanto, la densidad de energía de deformación (véase Ec. 2-41a) es

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\gamma^2(L - x)^2}{2E}$$

La energía de deformación total se determina ahora al integrar u sobre el volumen de la barra:

$$U = \int u dV = \int_0^L u(A dx) = \int_0^L \frac{\gamma^2 A(L - x)^2 dx}{2E} = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$$

Este resultado concuerda con la Ec. (2-43).



Fig. 2-40 Ejemplo 2. Barra que cuelga bajo su propio peso

Ejemplo 3

Determinar la energía de deformación en una barra prismática suspendida de un extremo si, adicionalmente a su propio peso, sostiene una carga P en su extremo inferior (Fig. 2-41).

En este caso, la fuerza axial P , que actúa sobre el elemento sombreado mostrado en la figura es

$$P_x = \gamma A(L - x) + P$$

(véase Ec. a). De la Ec. (2-40) se obtiene ahora

$$U = \int_0^L \frac{[\gamma A(L - x) + P]^2 dx}{2EA}$$

$$= \frac{\gamma^2 AL^3}{6E} + \frac{\gamma PL^2}{2E} + \frac{P^2 L}{2EA} \quad (2-44)$$



Fig. 2-41 Ejemplo 3. Barra que cuelga bajo su propio peso y soporta una carga P

Al examinar este resultado, se aprecia que el primer término es el mismo que el indicado en la Ec. (2-43) para la energía de deformación de una barra que cuelga bajo su propio peso. También, el último término es el mismo que la energía de deformación de una barra sometida únicamente a una fuerza axial P (Ec. 2-39a). El término central contiene a γ y a P , lo que indica que depende simultáneamente del peso de la barra y de la magnitud de la carga aplicada.

La conclusión importante del ejemplo anterior es que no se puede obtener la energía de deformación de una estructura, debida a más de una carga, simplemente con sumar las energías de deformación de las cargas individuales que actúan separadamente. La explicación es que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas (véase Ec. 2-40), no una función lineal.

Deflexiones ocasionadas por una carga única. Considere una estructura linealmente elástica sometida a una carga única concentrada P . Entonces, el trabajo W realizado por esta carga, igual a la energía de deformación U almacenada en la estructura, se representa por la Ec. (2-38):

$$U = W = \frac{P\delta}{2}$$

donde δ es la deflexión a través de la cual se desplaza la fuerza P . Esta ecuación suministra un método sencillo para encontrar la deflexión δ si la energía de deformación puede determinarse. No obstante, deben tenerse en cuenta las limitaciones del método: (1) sólo debe actuar una carga en la estructura, y (2) la única deflexión que puede determinarse por este método es la deflexión en el punto de aplicación de la carga misma. El siguiente ejemplo representa el procedimiento.

Ejemplo 4

Determinar la deflexión vertical δ , del nudo B de la armadura de la Fig. 2-42. Note que la única carga que actúa en la armadura es una carga vertical P en la junta B . Suponga que ambos miembros tienen la misma rigidez axial EA .

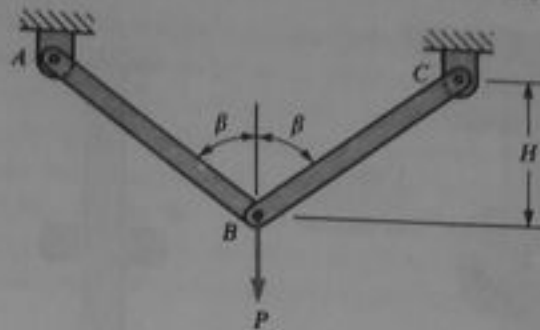


Fig. 2-42 Ejemplo 4

En este ejemplo la deflexión se determina al igualar el trabajo de la carga con la energía de deformación almacenada en los miembros. La fuerza F en ambas barras es

$$F = \frac{P}{2 \cos \beta}$$

de acuerdo con el equilibrio del nudo B . También, la longitud de cada barra es $L_1 = H/\cos \beta$. Así, al emplear la Ec. (2-39), se obtiene la energía de deformación de las dos barras:

$$U = \frac{F^2 L_1}{2EA} (2) = \frac{P^2 H}{4EA \cos^3 \beta}$$

El trabajo de la carga P es

$$W = \frac{P\delta_b}{2}$$

Al igualar U y W , se obtiene la deflexión del nudo B :

$$\delta_b = \frac{PH}{2EA \cos^3 \beta}$$

Este resultado es el mismo que el obtenido previamente de un diagrama de desplazamiento (véase Ec. 2-10).

*2.9 CARGA DINÁMICA

Las **cargas dinámicas** difieren de las cargas estáticas en que las primeras varían con el tiempo. Una carga estática se aplica lentamente, se incrementa en forma gradual desde cero hasta su valor máximo; posteriormente, la carga permanece constante. Sin embargo, las cargas dinámicas pueden aplicarse de modo súbito, lo que provoca vibraciones en la estructura, o pueden cambiar de magnitud conforme transcurre el tiempo. Algunos ejemplos son las cargas de impacto, como cuando dos objetos chocan o cuando un objeto que cae golpea una estructura, y las cargas cíclicas originadas por maquinaria rotatoria. Otros ejemplos son las cargas provocadas por tráfico urbano, ráfagas de viento, agua, olas, temblores (sismos) y procesos de manufactura, todas las cuales son de carácter dinámico. Para auxiliar en la comprensión de la naturaleza de tales cargas, consideramos en esta sección el tipo más básico de carga dinámica, a saber, una **carga de impacto**.

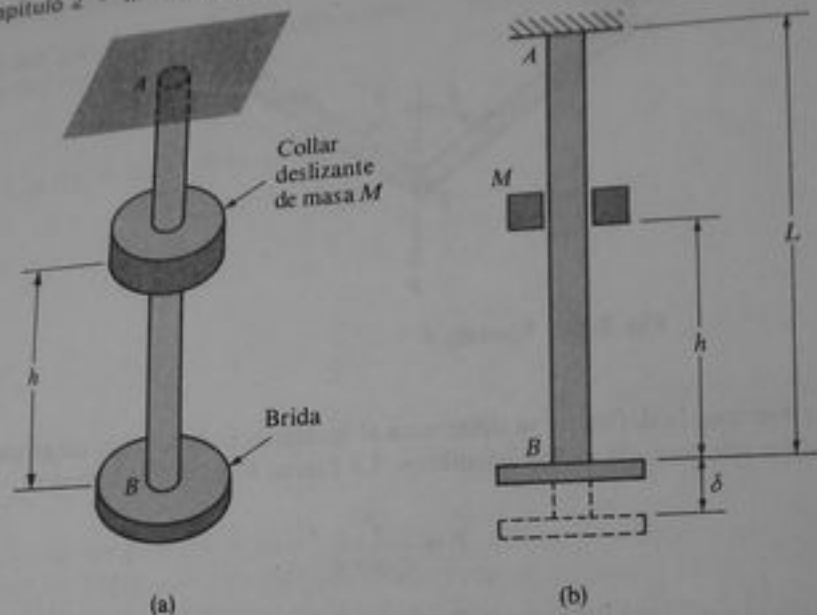


Fig. 2-43 Carga de impacto sobre una barra prismática debida a una masa que cae

Como un ejemplo de una carga de impacto, considere el arreglo simple mostrado en la Fig. 2-43. Un collar de masa M , inicialmente en reposo, cae desde una altura h sobre una brida en el extremo inferior de la barra AB . Cuando el collar golpea la brida, la barra empieza a alargarse, lo que origina esfuerzos y deformaciones axiales en la misma. En un intervalo muy corto, la brida habrá descendido hasta su posición de máxima deflexión. Luego, la barra empieza inmediatamente a acortarse y se presentan vibraciones longitudinales en ella. La situación es análoga al saltar sobre un bastón elástico (*pogo stick*) o al dejar caer una masa sobre un resorte. Después cesan las vibraciones debido a efectos de amortiguamiento y la barra vuelve al reposo con la masa M sostenida sobre la brida. El comportamiento de este sistema bajo la acción del collar que cae, obviamente es muy complicado, y un análisis completo requiere del empleo de avanzadas técnicas matemáticas. No obstante, se puede realizar un análisis aproximado mediante el concepto de energía de deformación y de efectuar algunas suposiciones simplificativas.

La energía potencial de la masa M con respecto al nivel de la brida es Mgh , donde g es la aceleración de la gravedad.* Esta energía potencial se transforma en energía cinética conforme cae la masa. En el instante que la masa golpea la brida, su energía potencial (con respecto al nivel de la brida) se ha vuelto cero y su energía cinética es $Mv^2/2$, donde $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad de la masa. La energía cinética de ésta en descenso se transforma entonces en otras formas de energía. Parte de ella se transforma en energía de deformación de la barra estirada. Parte de ella se disipa en forma de calor, parte se disipa al ocasionar deformaciones plásticas locales en la brida y la barra, y algo permanece como energía cinética de la masa (que aún continúa en descenso o rebota hacia arriba). Suponga que la masa M se "adhiera" a la brida y descende con ella. Esta suposición es válida sólo si la masa del objeto en descenso es muy grande comparada con la masa de la brida y la barra. Además, se desprecian las pérdi-

* En unidades del Sistema Internacional, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; en Sistema Inglés, $g = 23.2 \text{ pie/s}^2$. Para valores más precisos de g , así como para una explicación sobre masa y peso, véase el Apéndice A.

das de energía y se supone que toda la energía cinética de la masa en descenso se transforma en energía de deformación de la barra. Esta segunda suposición es conservadora en el sentido de que conduce a esfuerzos mayores en la barra que los que se producirían de otra manera. Adicionalmente, se desprecia cualquier cambio de energía potencial en la barra misma. Finalmente, se supone que los esfuerzos en la barra permanecen en el margen elástico lineal y que la distribución de esfuerzos es la misma que para carga estática. Basados en estas suposiciones, podemos calcular el esfuerzo de tensión máximo y el alargamiento máximo de la barra debidos a la carga de impacto.

El alargamiento máximo δ de la barra (Fig. 2-43b) puede obtenerse al igualar la pérdida de energía potencial de la masa en descenso con la energía de deformación adquirida por la barra. La energía potencial perdida es $W(h + \delta)$, donde $W = Mg$ es el peso del collar y $h + \delta$ es la distancia que recorrió éste. La energía de deformación de la barra es $EA\delta^2/2L$, donde EA es la rigidez axial y L es la longitud de la barra (véase Ec. 2-39b). Así, obtenemos la siguiente ecuación del principio de conservación de energía:

$$W(h + \delta) = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (2-45)$$

Esta ecuación es cuadrática en δ y puede resolverse para su raíz positiva; el resultado es

$$\delta = \frac{WL}{EA} + \left[\left(\frac{WL}{EA} \right)^2 + \frac{2WLh}{EA} \right]^{1/2} \quad (2-46)$$

Note que el alargamiento de la barra se incrementa si la masa o la altura de caída se incrementa y disminuye si la rigidez EA/L se incrementa. La ecuación anterior puede formularse en forma más sencilla mediante la notación

$$\delta_{est} = \frac{WL}{EA} \quad (2-47)$$

para la deflexión estática de la barra debida al peso W . Entonces, la Ec. (2-46) se convierte en

$$\delta = \delta_{est} + (\delta_{est}^2 + 2h\delta_{est})^{1/2} \quad (2-48)$$

Si la deflexión estática es muy pequeña comparada con la altura h , podemos simplificar adicionalmente la ecuación anterior a lo siguiente:

$$\delta \approx \sqrt{2h\delta_{est}} \quad (2-49)$$

Esta ecuación aproximada determina deflexiones que siempre son menores que las obtenidas de la Ec. (2-48). Por ejemplo, si $h = 40\delta_{est}$, la ecuación aproximada determina $\delta = 8.9\delta_{est}$, que es 0.89 veces la deflexión de $10\delta_{est}$ obtenida de la Ec. (2-48).

El esfuerzo máximo en la barra puede calcularse a partir del alargamiento máximo si suponemos que la distribución de esfuerzo es uniforme a lo largo de la barra. Por supuesto, esta condición es sólo una aproximación porque, en realidad, ocurren ondas longitudinales de esfuerzo en la barra (véanse Refs. 2-12 y 2-13). Sin embargo,

basados en la suposición de una distribución uniforme de esfuerzos, obtenemos las siguientes ecuaciones para el esfuerzo de tensión máximo (véase Ec. 2-46):

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \frac{W}{A} + \left[\left(\frac{W}{A} \right)^2 + \frac{2WhE}{AL} \right]^{1/2} \quad (2-50)$$

$$\sigma = \sigma_{est} + \left(\sigma_{est}^2 + \frac{2hE}{L} \sigma_{est} \right)^{1/2} \quad (2-51)$$

donde $\sigma_{est} = W/A$ es el esfuerzo cuando la carga actúa estáticamente. Al considerar nuevamente el caso en que la altura h es grande comparada con el alargamiento (véase Ec. 2-49), y observar también que $\sigma_{est} = W/A$ y $M = W/g$, se obtiene

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{2hE}{L}} \sigma_{est} = \sqrt{\left(\frac{Mv^2}{2} \right) \left(\frac{2E}{AL} \right)} \quad (2-52)$$

donde $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad de la masa M cuando golpea la barra. De este resultado, se aprecia que un incremento en la energía cinética $Mv^2/2$ de la masa en descenso ocasionará un incremento en el esfuerzo, mientras que un incremento en el volumen AL de la barra reducirá el esfuerzo. Esta situación es completamente diferente de la tensión estática de la barra, en cuyo caso el esfuerzo es independiente de la longitud L y del módulo de elasticidad E .

Las ecuaciones anteriores para la elongación máxima δ y el esfuerzo máximo σ se obtuvieron para una barra prismática. Si la barra no es prismática, los procedimientos para determinar δ y σ deben modificarse ligeramente. El procedimiento más simple implica la determinación de una rigidez equivalente de la barra k , mediante el cálculo de la relación entre una carga P_1 que actúa sobre la barra y la deflexión estática correspondiente δ_1 (note que $k = P_1/\delta_1$). Esta rigidez se emplea entonces en la Ec. (2-46) en lugar de EA/L , que es la rigidez de una barra prismática. Después de calcular la deflexión dinámica δ , la carga estática P que producirá la misma deflexión puede obtenerse de la ecuación $P = k\delta$. Finalmente, el esfuerzo máximo puede obtenerse al dividir P entre el área mínima de sección transversal de la barra. Esta técnica se representa en el Ejemplo 2.

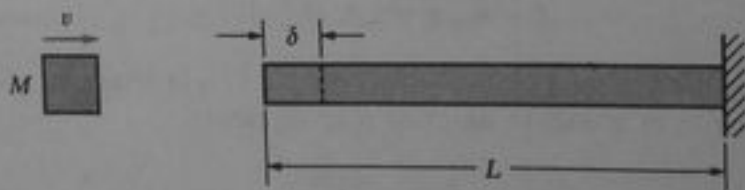


Fig. 2-44 Carga de impacto sobre una barra horizontal debida a una masa que se desplaza con velocidad v

Otro ejemplo de una carga de impacto es cuando un objeto que se desplaza horizontalmente golpea el extremo de una barra o resorte (Fig. 2-44). Si se supone que la masa M es muy grande comparada con la masa de la barra, se pueden emplear las mismas aproximaciones que para una masa que cae. En el instante del impacto, la energía cinética de la masa móvil es $Mv^2/2$. Si toda esta energía se transforma en energía de de-

formación de la barra, se puede formular la siguiente ecuación de conservación de energía:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

donde δ es la deflexión máxima del extremo de la barra. Por lo tanto,

$$\delta = \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} \quad (2-53)$$

El esfuerzo de compresión máximo correspondiente, supuesto uniforme a lo largo de la barra, es

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \sqrt{\frac{Mv^2E}{AL}} \quad (2-54)$$

Esta ecuación representa el mismo esfuerzo que la Ec. (2-52) y señala que, para una barra prismática, el esfuerzo se reduce al incrementar el volumen de la barra.

Carga aplicada súbitamente. Un caso particular del impacto ocurre cuando una carga se aplica súbitamente a una barra, pero sin una velocidad inicial. Para explicar este tipo de carga considere nuevamente la barra prismática vertical mostrada en la Fig. 2-43 y suponga que el collar deslizante se coloca suavemente sobre la brida y luego se suelta. Aunque en este caso no se presenta energía cinética al inicio de la extensión de la barra, el problema es completamente diferente del de carga estática de la barra. Para tensión estática, hemos supuesto que la carga se aplica gradualmente; consecuentemente, siempre existe equilibrio entre la carga aplicada y la fuerza de resistencia de la barra. El caso de la energía cinética de la barra no se aplica en el problema bajo tales condiciones. Sin embargo, en una aplicación súbita de la carga, el alargamiento de la barra y el esfuerzo en la barra son inicialmente cero, pero entonces la carga aplicada de modo súbito empieza a descender bajo la acción de su propio peso, alargando la barra conforme cae. Durante este desplazamiento la fuerza resistente de la barra se incrementa gradualmente hasta igualar a W , el peso del collar, en algún momento. En este mismo instante el desplazamiento de la barra es δ_{est} . Pero la masa tiene ahora una cierta energía cinética, adquirida durante el desplazamiento δ_{est} , por lo que continúa en descenso hasta que su velocidad se vuelve cero debido a la fuerza resistente en la barra. El alargamiento máximo para esta condición se obtiene de la Ec. (2-48) al igualar h a cero; así,

$$\delta = 2\delta_{est} \quad (2-55)$$

Por lo tanto, concluimos que una carga aplicada súbitamente produce el doble de deflexión que la ocasionada por una carga estática. Después de que la carga se aplica y de que se origina la deflexión $2\delta_{est}$, la barra vibrará hacia arriba y hacia abajo y finalmente regresa al reposo en deflexión estática, ya que la brida continúa con el peso del collar.*

* La Ec. (2-55) la obtuvo inicialmente el matemático y científico francés J. V. Poncelet (1788-1867); véase Ref. 2-14.

Efectos inelásticos y causas de falla. La explicación anterior de los efectos de las cargas de impacto se basa en la suposición de que el esfuerzo en la barra permanece bajo el límite proporcional. Más allá de este límite el problema se complica, ya que el alargamiento de la barra deja de ser proporcional a la fuerza axial. Si el diagrama de la prueba a tensión no depende de la razón de esforzamiento de la barra, el alargamiento más allá del límite elástico durante el impacto puede determinarse a partir de un diagrama carga-deflexión, como el mostrado en la Fig. 2-45. Para cualquier alargamiento máximo supuesto δ_1 , el área correspondiente $OABE$ representa la energía de deformación almacenada en la barra. Esta energía de deformación debe ser igual a la energía potencial perdida por el peso W cuando cae a lo largo de la distancia $h + \delta$ (véase Fig. 2-43). Por lo tanto, cuando $W(h + \delta)$ es igual o mayor que el área total $OABCD$ del diagrama carga-deflexión, el cuerpo que cae fracturará la barra. (En algunos materiales, incluso el acero dúctil, el punto de fluencia se eleva cuando la razón de esforzamiento de la barra es muy grande, por lo que la cantidad de trabajo necesario para producir la fractura es un poco mayor que en una prueba estática.)

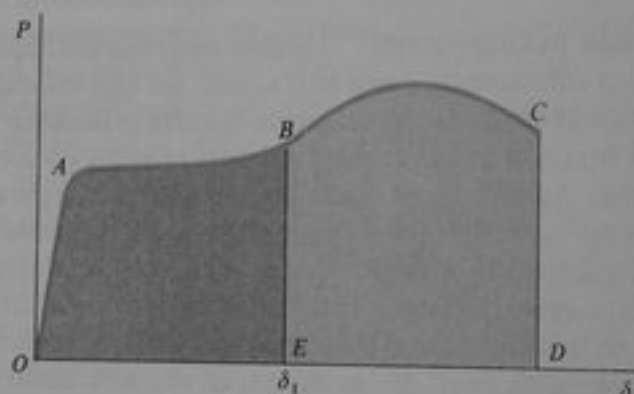


Fig. 2-45 Diagrama carga-deflexión de una barra prismática en tensión

De esta consideración se aprecia que cualquier cambio en la forma de la barra, tal que disminuya el área total $OABCD$ del diagrama carga-deflexión (Fig. 2-45), también disminuye la resistencia al impacto de la barra. En los especímenes con gargantas mostrados en las Figs. 2-39b y c, por ejemplo, el flujo plástico de metal se concentrará en las gargantas, por lo que el alargamiento total y el trabajo necesario para provocar la fractura serán mucho menores en las barras con gargantas que en la barra cilíndrica mostrada en la Fig. 2-39a. Tales especímenes con gargantas son muy débiles al impacto. Un choque ligero puede producir fractura, aunque el material en sí sea dúctil. Los elementos con agujeros o cualquier variación abrupta del perfil de la sección transversal son de modo similar débiles al impacto.

En general, los materiales dúctiles ofrecen mucha mayor resistencia a cargas de impacto que los materiales frágiles. La curva carga-deflexión de una barra de material frágil tendrá un área bajo la misma mucho menor que la curva de una barra de material dúctil, aun cuando los esfuerzos últimos para los dos materiales puedan ser aproximadamente iguales.

Al comparar δ_u con δ_v , vemos que su relación es

$$\frac{\delta_u}{\delta_v} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \quad (g)$$

También, la relación de las cargas es

$$\frac{P_u}{P_v} = \frac{1 + 2 \cos \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (h)$$

Por ejemplo, si $\beta = 45^\circ$, obtenemos $\delta_u/\delta_v = 2$ y $P_u/P_v = \sqrt{2}$.

Cuando la carga está entre los valores P_v y P_u (región AB del diagrama carga-deflexión), la fuerza F_2 permanece constante e igual a $\sigma_y A$. Por lo que, las fuerzas F_1 en las barras inclinadas pueden obtenerse del equilibrio estático del nudo D :

$$F_1 = \frac{P - \sigma_y A}{2 \cos \beta} \quad (i)$$

La deflexión de la armadura en la región AB del diagrama varía linealmente, ya que la fuerza F_2 es constante y la fuerza F_1 es una función lineal de P , como se muestra en la Ec. (i). Sin embargo, la pendiente del diagrama carga-deflexión es menor en la región AB que en la región elástica (línea OA), porque sólo las barras inclinadas permanecen elásticas y son las que resisten en forma eficaz la carga incrementada P .

De este ejemplo, se aprecia que el cálculo de la carga última P_u de una estructura estáticamente indeterminada requiere únicamente emplear la estática, porque todos los miembros han alcanzado la fluencia y, en consecuencia, se sabe que sus fuerzas axiales son iguales a $\sigma_y A$. En contraste, el cálculo de P_v implica un análisis indeterminado, que requiere se satisfagan el equilibrio estático y la compatibilidad de deflexiones.

Después de alcanzarse la carga última, la estructura continúa en deformación. Finalmente se presenta endurecimiento por deformación y entonces la estructura es capaz de soportar una carga adicional. Por supuesto, la presencia de deflexiones muy grandes significa que la estructura ha fallado en sentido utilitario. En consecuencia, la carga P_u efectivamente es la carga última para muchos fines y su determinación es de considerable interés para los ingenieros diseñadores.

Esta explicación se ha ocupado del comportamiento de estructuras para las cuales la carga se aplica por vez primera. Si la carga se retira antes de alcanzar la carga de fluencia P_v , la estructura se comportará elásticamente y regresará a su condición original libre de esfuerzos. Sin embargo, si se rebasa la carga P_v , una porción de la estructura retendrá una deformación permanente al retirarse la carga. Consecuentemente, una estructura estáticamente indeterminada tendrá **esfuerzos residuales** remanentes en ella, aunque no existan cargas externas. Bajo una segunda aplicación de la carga, la estructura se comportará de manera diferente.

Ejemplo

Determinar la carga de fluencia P_v y la carga última P_u para la estructura mostrada en la Fig. 2-53a si la barra horizontal AB es rígida y los dos alambres verticales están hechos de un material elastoplástico. También, determinar la carga permisible P_{perm} para la estructura con un

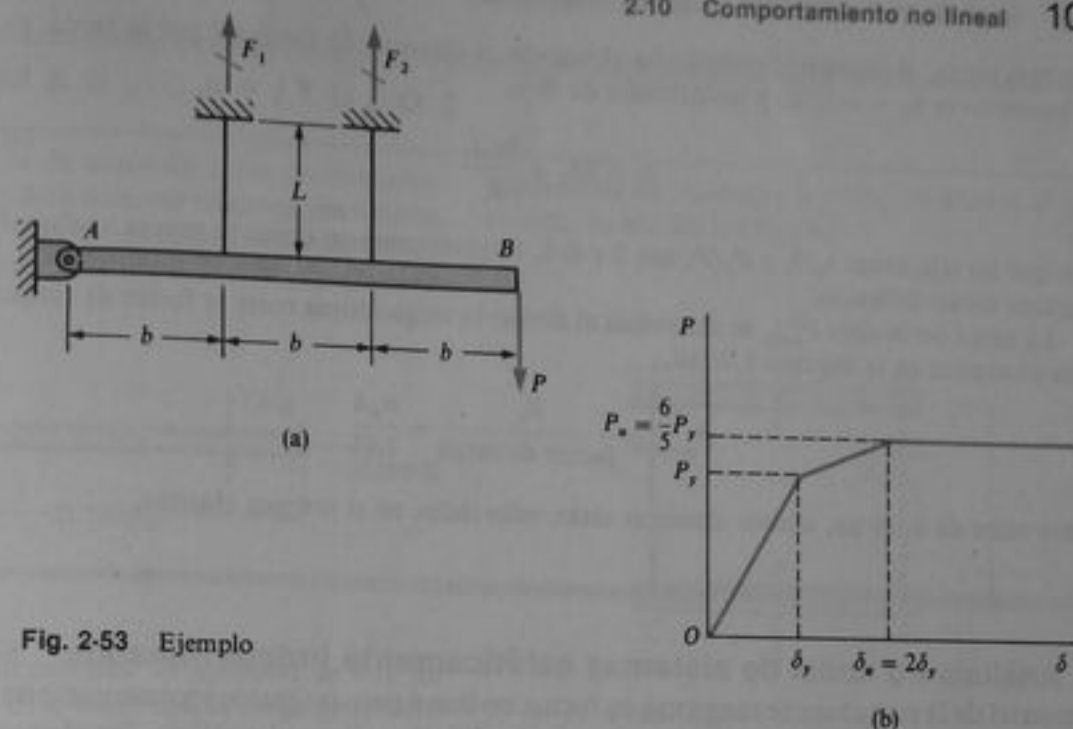


Fig. 2-53 Ejemplo

factor de carga de 1.85. (Suponga que ambos alambres tienen la misma área de sección transversal A .)

Del equilibrio, al considerar momentos alrededor del extremo A de la barra, puede obtenerse una relación entre las fuerzas F_1 y F_2 en los alambres y la carga P :

$$3P = F_1 + 2F_2 \quad (j)$$

Como esta ecuación se basa únicamente en la estática, es válida para cualquier valor de la carga P desde cero hasta la carga última. También, puede apreciarse de la figura que el alargamiento del alambre al lado derecho es siempre el doble que la del alambre al lado izquierdo. Por lo tanto, bajo condiciones elásticas tenemos $F_2 = 2F_1$ y se aprecia que la fuerza F_2 será la primera en alcanzar el valor de fluencia $\sigma_y A$. En ese momento, la fuerza F_1 será igual a $\sigma_y A/2$. Por lo tanto, la carga de fluencia P_y determinada de la Ec. (j) es

$$P_y = \frac{5\sigma_y A}{6} \quad (k)$$

El alargamiento correspondiente del alambre derecho es $\delta_2 = \sigma_y L/E$, en donde L es la longitud de los alambres. La deflexión en el punto B es

$$\delta_y = \frac{3\delta_2}{2} = \frac{3\sigma_y L}{2E} \quad (l)$$

En el diagrama carga-deflexión (Fig. 2-53b) están indicadas P_y y δ_y .

Cuando se alcanza la carga última P_u , ambas fuerzas F_1 y F_2 serán iguales a $\sigma_y A$. Así, de la Ec. (j) se obtiene

$$P_u = \sigma_y A \quad (m)$$

Para esta carga, el alambre izquierdo ha alcanzado el esfuerzo de fluencia; por lo tanto, su alargamiento es $\delta_1 = \sigma_y L/E$, y la deflexión de B es

$$\delta_2 = 3\delta_1 = \frac{3\sigma_y L}{E} \quad (n)$$

Note que las relaciones δ_2/δ_1 y P_2/P_1 son 2 y 6/5, respectivamente, como se muestra sobre el diagrama carga-deflexión.

La carga permisible P_{perm} se determina al dividir la carga última entre el factor de carga, según se explica en la Sección 1.7; así,

$$P_{perm} = \frac{P_u}{\text{factor de carga}} = \frac{\sigma_y A}{1.85}$$

A este valor de la carga, ambos alambres están esforzados en el margen elástico.

Análisis no lineal de sistemas estáticamente indeterminados. Si el material de la estructura se comporta en forma no lineal pero no puede representarse como un material elastoplástico, entonces es más difícil realizar el análisis. En el caso general, es necesario un procedimiento de ensayo y error. Para ejemplificar el método, refirámonos nuevamente a la armadura simétrica de la Fig. 2-51a, pero ahora supondremos que el material tiene un diagrama esfuerzo-deformación general como el mostrado en la Fig. 2-49a. Podemos iniciar el análisis al suponer un valor de prueba para la deflexión vertical δ del nudo D . Entonces, a partir de un diagrama de desplazamiento del nudo D , podemos obtener los correspondientes alargamientos de las barras y así asegurar que se satisface la condición de compatibilidad del nudo. Enseguida debe verificarse el equilibrio de fuerzas en el nudo. Las deformaciones en las barras pueden determinarse a partir de los alargamientos y los esfuerzos pueden determinarse del diagrama esfuerzo-deformación. Si se conocen los esfuerzos en las barras, se pueden calcular las fuerzas en las mismas y verificar si se satisface el equilibrio en el nudo D . Si se consideró inicialmente el valor verdadero de δ , se apreciará que se satisface el equilibrio de fuerzas en el nudo D . De lo contrario, se verá que las fuerzas no están en equilibrio y por lo tanto debe seleccionarse un nuevo valor de prueba para δ y repetir el proceso. Finalmente, llegaremos a un valor de δ tal que se satisfagan simultáneamente la compatibilidad y el equilibrio en el nudo D . Las fuerzas correspondientes en las barras, así como la deflexión δ , tendrán sus valores verdaderos.

Un procedimiento optativo de ensayo y error se inicia con nuestra suposición de un valor para una de las fuerzas en las barras, por decir, la fuerza F_2 en la barra vertical. Entonces, mediante equilibrio de fuerzas en el nudo D , podemos calcular las fuerzas en las otras barras. Enseguida podemos determinar los esfuerzos (a partir de las fuerzas), luego las deformaciones (del diagrama esfuerzo-deformación) y luego los alargamientos (a partir de las deformaciones). Finalmente, del diagrama de desplazamientos del nudo D podemos determinar si los alargamientos de las tres barras son compatibles entre sí. Si lo son, entonces el valor de prueba de F_2 era el correcto y se concluye el análisis. De lo contrario, debe elegirse un nuevo valor de prueba para F_2 y repetir el proceso hasta que se satisfagan simultáneamente el equilibrio y la compatibilidad.

Ejemplo 1

Una barra redonda de acero prismática, de longitud $L = 2.0$ m y diámetro $d = 15$ mm, cuelga verticalmente de un soporte en su extremo superior (Fig. 2-46). Un collar deslizante de masa $M = 20.0$ kg cae de una altura $h = 50$ mm sobre la brida situada en la parte inferior de la barra. Determinar el alargamiento máximo δ y el máximo esfuerzo de tensión σ en la barra debidos al impacto. (Suponga $E = 200$ GPa para el acero.)

Antes de empezar a calcular la deflexión y el esfuerzo, determinaremos las masas relativas del collar deslizante y de la barra misma, ya que nuestras fórmulas obtenidas previamente son aplicables únicamente si la masa del collar es mucho mayor que la masa de la barra. De lo contrario, el collar rebotará hacia arriba en lugar de descender con el extremo de la barra. La masa M_b de la barra es ρAL , en donde ρ es la densidad de masa, A es el área de la sección transversal y L es la longitud. Así que,

$$M_b = \rho AL = (7850 \text{ kg/m}^3) \left(\frac{\pi}{4} \right) (15 \text{ mm})^2 (2.0 \text{ m}) = 2.77 \text{ kg}$$

Esta masa es mucho menor que la del collar deslizante, y en consecuencia, podemos utilizar las fórmulas obtenidas en esta sección.

La deflexión máxima δ producida por la masa M que cae puede calcularse directamente de la Ec. (2-48). Empezamos por determinar la deflexión estática de la barra debida a la masa (la cual tiene un peso $W = Mg$):

$$\delta_{est} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EA} = \frac{(20.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})}{(200 \text{ GPa})(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 0.0111 \text{ mm}$$

Esta deflexión se sustituye en la Ec. (2-48):

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_{est} + (\delta_{est}^2 + 2h\delta_{est})^{1/2} \\ &= 0.0111 \text{ mm} + [(0.0111 \text{ mm})^2 + 2(50 \text{ mm})(0.0111 \text{ mm})]^{1/2} = 1.06 \text{ mm} \end{aligned}$$

En este ejemplo podemos calcular también la deflexión δ de la fórmula aproximada (Ec. 2-49), porque δ_{est} es pequeña comparada con la altura h . Así que,

$$\delta = \sqrt{2h\delta_{est}} = [2(50 \text{ mm})(0.0111 \text{ mm})]^{1/2} = 1.05 \text{ mm}$$

La relación de δ a δ_{est} , llamada **factor de impacto**, es $1.06/0.0111 = 95$.

El esfuerzo máximo en la barra puede obtenerse de la Ec. (2-50), como sigue:

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \frac{(200 \text{ GPa})(1.06 \text{ mm})}{2.0 \text{ m}} = 106 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo dinámico puede compararse con el esfuerzo estático:

$$\sigma_{est} = \frac{W}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{(20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 1.11 \text{ MPa}$$

La relación de σ a σ_{est} es $106/1.11 = 95$, la cual es la misma que la relación correspondiente a las deflexiones.

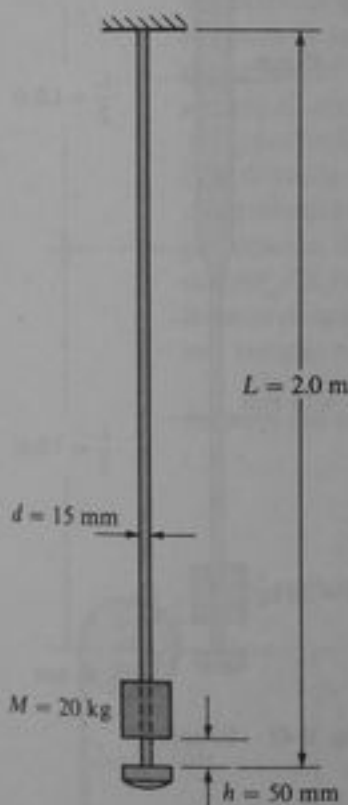


Fig. 2-46 Ejemplo 1

Ejemplo 2

Este ejemplo es similar al Ejemplo 1, excepto que la barra tiene un mayor diámetro $3d$ en la mitad superior de su longitud (Fig. 2-47). Como en el ejemplo anterior, la barra tiene una longitud total $L = 2.0$ m, la mitad inferior de la barra tiene un diámetro $d = 15$ mm y $E = 200$ GPa. El collar deslizante tiene una masa $M = 20.0$ kg y cae desde una altura $h = 50$ mm. Nuevamente, se desea calcular la deflexión máxima δ y el esfuerzo de tensión máximo σ ocasionados por el impacto.

Como la barra no es prismática, no se puede sustituir directamente en las fórmulas obtenidas en esta sección. En vez de ello, empezaremos por calcular una rigidez equivalente k para la barra. Si una carga estática P_1 actúa en el extremo libre de la barra, el alargamiento resultante δ_1 es

$$\delta_1 = \frac{P_1(L/2)}{EA} + \frac{P_1(L/2)}{E(9A)} = \frac{5P_1L}{9EA}$$

donde $A = \pi d^2/4$ es el área de la sección transversal de la mitad inferior de la barra. De esta ecuación podemos obtener la rigidez equivalente k :

$$k = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{9EA}{5L} = \frac{9(200 \text{ GPa})(\pi/4)(15 \text{ mm})^2}{5(2.0 \text{ m})} = 31.8 \text{ MN/m}$$

Enseguida, el valor de k se sustituye en la Ec. (2-47) en lugar de EA/L a fin de obtener la deflexión estática producida por la masa M :

$$\delta_{\text{est}} = \frac{W}{k} = \frac{Mg}{k} = \frac{(20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{31.8 \text{ MN/m}} = 0.00617 \text{ mm}$$

Luego se emplea la Ec. (2-48) para obtener la deflexión dinámica:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_{\text{est}} + (\delta_{\text{est}}^2 + 2h\delta_{\text{est}})^{1/2} \\ &= 0.00617 \text{ mm} + [(0.00617 \text{ mm})^2 + 2(50 \text{ mm})(0.00617 \text{ mm})]^{1/2} \\ &= 0.792 \text{ mm} \end{aligned}$$

Advierta que esta deflexión es menor que la deflexión de la barra prismática del Ejemplo 1. Sin embargo, el factor de impacto es $0.792/0.00617 = 128$, que es mayor que el factor de impacto para la barra prismática.

La carga estática P que producirá la misma deflexión δ es

$$P = k\delta = (31.8 \text{ MN/m})(0.792 \text{ mm}) = 25.2 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo σ es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25.2 \text{ kN}}{(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 143 \text{ MPa}$$

y se presenta en la mitad inferior de la barra. Al comparar este esfuerzo con el esfuerzo máximo de 106 MPa calculado en el Ejemplo 1, se aprecia que el esfuerzo en la barra no prismática es 35% mayor que el esfuerzo en la barra prismática. Concluimos entonces, que el ensanchar la barra sobre una porción de su longitud va en detrimento del punto óptimo de resistencia de la barra a una carga de impacto, porque se reduce la capacidad de absorción de energía de la barra, como se apuntó previamente en el Ejemplo 1 de la Sección 2.8. En general, las barras que de-

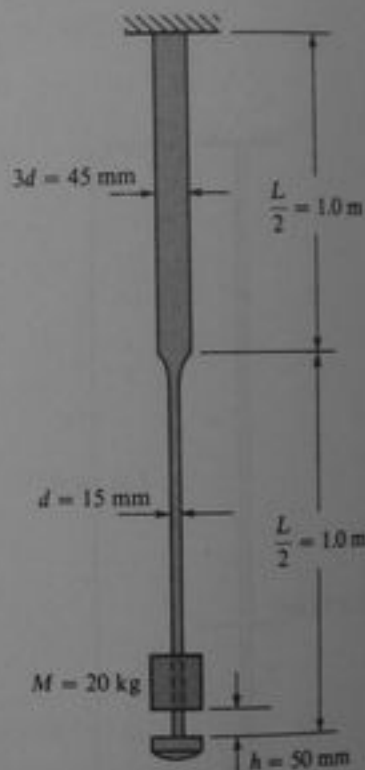


Fig. 2-47 Ejemplo 2

ben resistir cargas dinámicas deben ser prismáticas a fin de que la distribución de esfuerzos sea uniforme en toda su longitud.

•Ejemplo 3

Una cabina de elevador de peso W se sostiene mediante un cable que desciende con velocidad constante v (Fig. 2-48). ¿Qué esfuerzo máximo se produce en el cable cuando el tambor se asegura súbitamente?

Este ejemplo difiere significativamente de los anteriores. En los ejemplos previos, las barras impactadas no estaban esforzadas antes del impacto, en consecuencia no tenían energía de deformación antes del choque. Sin embargo, el cable de este ejemplo sostiene el peso W , por lo que el cable almacena energía de deformación antes de que el tambor se asegure. Por lo tanto, no podemos emplear las ecuaciones obtenidas anteriormente; debemos formular una nueva ecuación de conservación de energía.

Supongamos que no existen pérdidas de energía cuando el tambor se asegura; en consecuencia, la energía total del sistema (energía cinética más energía potencial) justo antes de la detención es igual a la energía total en el instante en que el cable alcanza su alargamiento máximo δ . Antes de la detención, la energía cinética del elevador móvil es $Wv^2/2g$. Despreciaremos en este ejemplo la energía cinética del cable, ya que es demasiado pequeña comparada con la energía cinética del elevador. La energía potencial del peso W respecto a su posición más baja es $W\delta_1$, donde δ_1 es la distancia que recorre hacia abajo el peso después que el tambor se asegura. Esta distancia es igual a $\delta - \delta_{est}$, donde δ es el alargamiento total del cable y δ_{est} es el alargamiento del cable sometido a la carga W . Por supuesto, el cable se alarga en la cantidad δ_{est} anteriormente al aseguramiento del tambor; por lo que, la energía de deformación del cable antes de la detención es $EA\delta_{est}^2/2L$ (véase Ec. 2-39b), en donde EA/L es la rigidez del cable. Después de la detención, y en el instante en que el cable adquiere su máximo alargamiento, su energía de deformación es $EA\delta^2/2L$. En este instante no existe energía cinética ya que la velocidad es cero.

De acuerdo con el principio de conservación de la energía y al igualar las energías antes y después del aseguramiento del tambor, obtenemos

$$\frac{Wv^2}{2g} + W(\delta - \delta_{est}) + \frac{EA\delta_{est}^2}{2L} = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (a)$$

Esta ecuación puede resolverse para determinar el alargamiento máximo del cable δ de la manera siguiente. Primero, se aprecia que la deflexión estática es

$$\delta_{est} = \frac{WL}{EA} \quad (b)$$

de la cual $W = EA\delta_{est}'/L$. A continuación, sustituimos esta expresión para W en el segundo término de la Ec. (a) y se obtiene

$$\frac{Wv^2}{2g} + \frac{EA\delta_{est}'}{L}(\delta - \delta_{est}) = \frac{EA}{2L}(\delta - \delta_{est})^2$$

o, al recomodar términos,

$$\frac{Wv^2}{2g} = \frac{EA}{2L}(\delta - \delta_{est})^2$$

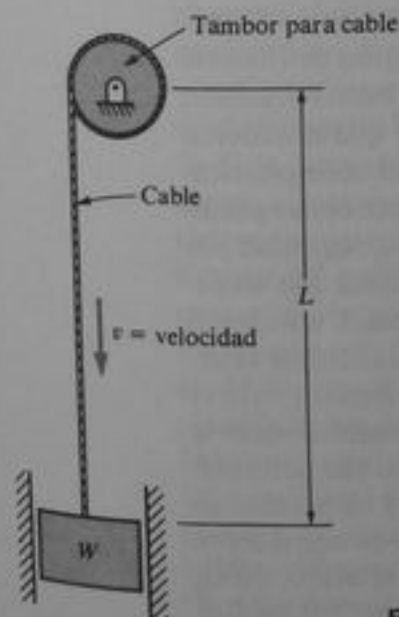


Fig. 2-48 Ejemplo 3

Ahora, resolvemos esta ecuación para evaluar el alargamiento máximo del cable:

$$\delta = \delta_{est} + \sqrt{\frac{Wv^2L}{gEA}} \quad (c)$$

Finalmente, obtenemos el esfuerzo máximo en el cable:

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \frac{W}{A} \left(1 + \sqrt{\frac{v^2EA}{gWL}} \right) \quad (d)$$

El término entre paréntesis, que es el factor de impacto, puede ser mucho mayor que la unidad. Por lo que el esfuerzo dinámico en el cable puede ser mucho mayor que el esfuerzo estático W/A . Note que, si $v = 0$, la Ec. (d) expresa el esfuerzo estático, como era de esperarse.

*2.10 COMPORTAMIENTO NO LINEAL

En las secciones anteriores hemos analizado estructuras estáticamente determinadas y estructuras estáticamente indeterminadas mediante la suposición de que el material cumplía con la ley de Hooke. Consideremos ahora el comportamiento de estructuras cargadas axialmente cuando los esfuerzos rebasan el límite de proporcionalidad. En tales casos, es necesario utilizar el diagrama esfuerzo-deformación del material. A veces, el diagrama se obtiene a partir de una prueba real del material, pero se emplea más a menudo un **diagrama esfuerzo-deformación ideal**. La ley de Hooke es un ejemplo de tales diagramas ideales. Otros ejemplos se muestran en la Fig. 2-49.

La Fig. 2-49a muestra un diagrama que consiste en una región inicial donde se cumple la ley de Hooke, seguida de una región no lineal definida por alguna función matemática apropiada. El aluminio es un material que tiene un diagrama de esta forma (véase Fig. 1-10). Para fines de análisis matemático, a veces se emplea una función matemática para el diagrama completo.

La Fig. 2-49b representa un diagrama que se utiliza bastante para acero estructural. El material tiene una región lineal elástica, seguida por una región de fluencia considerable (véase Fig. 1-7); en consecuencia, puede idealizarse con buena precisión mediante dos líneas rectas, como se muestra en la figura. Se supone que el material sigue la ley de Hooke hasta el esfuerzo de fluencia, a partir del cual cede plásticamente bajo esfuerzo constante; este último comportamiento se conoce como **plasticidad perfecta**. El esfuerzo de fluencia y la deformación de fluencia se denotan por σ_y y ϵ_y , respectivamente. La región perfectamente plástica continúa hasta que las deformaciones son varias veces mayores que la deformación de fluencia. Un material con un diagrama de esta clase se denomina **material elastoplástico**. Conforme la deformación se incrementa al máximo, la curva esfuerzo-deformación alcanza valores superiores al esfuerzo de fluencia debido al endurecimiento por deformación, según se explicó en la Sección 1.3. Pero, para cuando se inicia el endurecimiento por deformación, las deflexiones son tan grandes que probablemente la estructura ha perdido su utilidad. Por lo que se ha vuelto práctica común analizar estructuras de acero sobre la base del diagrama elastoplástico mostrado en la Fig. 2-49b. Para el acero, puede emplearse el mismo diagrama tanto para tensión como para compresión. Un análisis

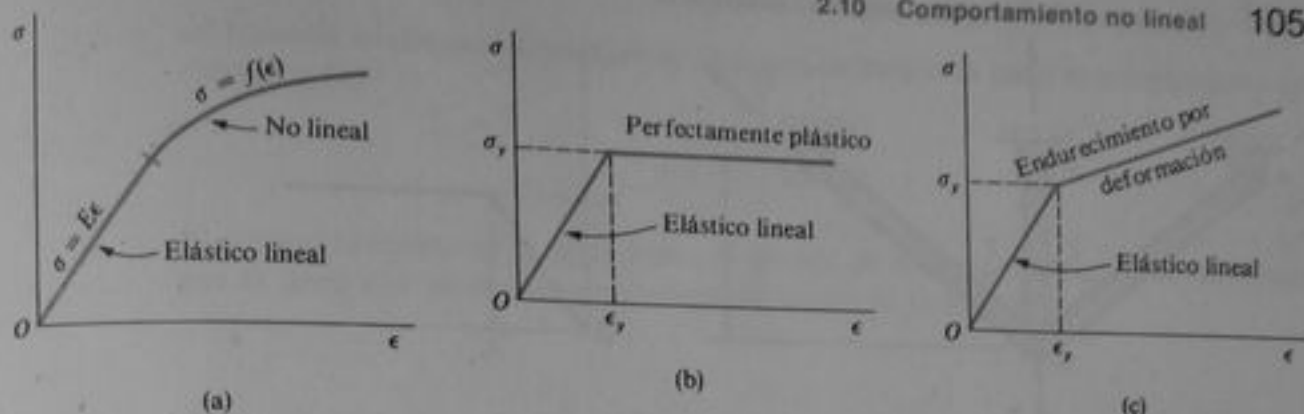


Fig. 2-49 Tipos de diagramas idealizados esfuerzo-deformación no lineales: (a) diagrama elástico no lineal; (b) diagrama elastoplástico; y (c) diagrama bilineal

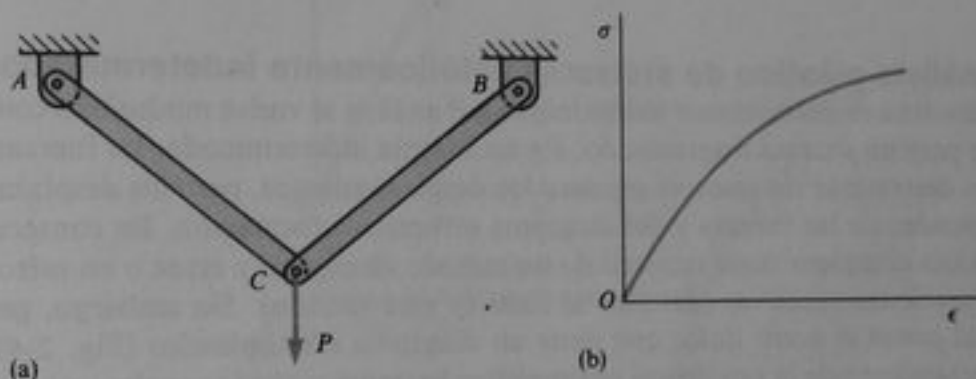


Fig. 2-50 Armadura estáticamente determinada y diagrama esfuerzo-deformación no lineal

realizado con estas suposiciones usualmente se denomina **análisis plástico**, aunque el término *análisis elastoplástico* es más preciso.

La Fig. 2-49c muestra un diagrama constituido por dos líneas de pendiente diferente, llamado **diagrama bilineal**. Este diagrama a veces se emplea para representar un material con endurecimiento por deformación, o puede utilizarse como una aproximación a un diagrama del perfil general mostrado en la Fig. 2-49a.

Consideremos ahora el análisis de un sistema estáticamente determinado cargado en el margen no lineal. Suponga por ejemplo, que se desea conocer la deflexión del nudo C de la armadura mostrada en la Fig. 2-50a y se asume que el material tiene el diagrama esfuerzo-deformación mostrado en la Fig. 2-50b. Como la estructura es estáticamente determinada, podemos determinar las fuerzas axiales en los elementos a partir del equilibrio sin considerar las propiedades del material, bajo la suposición de que los alargamientos de dichos elementos son pequeños. Podemos obtener entonces los esfuerzos al dividir las fuerzas axiales entre las áreas de sección transversal. Enseguida determinamos las deformaciones mediante el diagrama esfuerzo-deformación, y a partir de las deformaciones se determinan los alargamientos de ambas barras. Finalmente, determinamos la deflexión del nudo C a partir de los cambios en longitud de los miembros. Este procedimiento debe modificarse si los cambios en longitud son grandes, de forma tal que alteren la configuración de la armadura. En tal caso, el análisis debe realizarse paso a paso, o sea con el procedimiento incremental, y se utilizan las nuevas dimensiones de la armadura a cada paso.

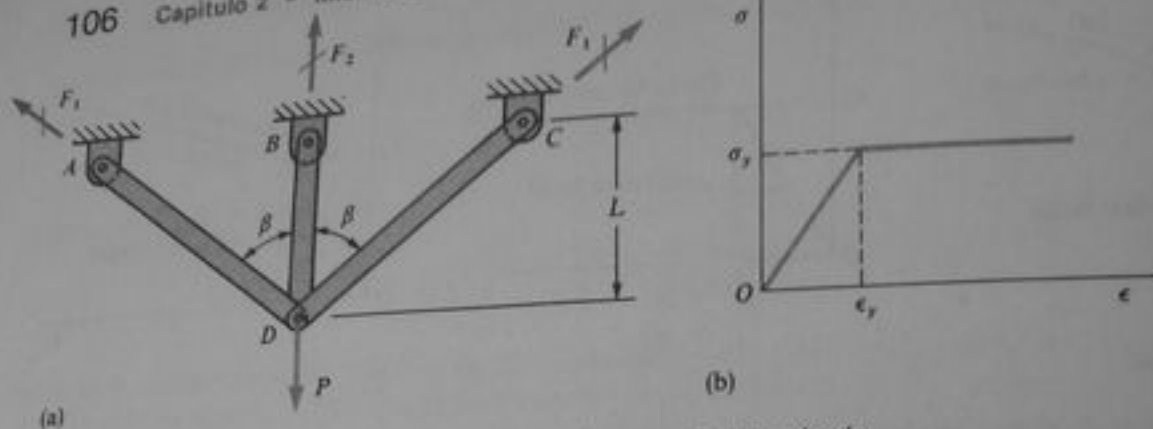


Fig. 2-51 Análisis plástico de una armadura estáticamente indeterminada

Análisis plástico de sistemas estáticamente indeterminados. Si una estructura es estáticamente indeterminada, el análisis se vuelve mucho más complicado que para un sistema determinado. En un sistema indeterminado, las fuerzas no se pueden determinar sin conocer primero los desplazamientos, pero los desplazamientos dependen de las fuerzas y del diagrama esfuerzo-deformación. En consecuencia un análisis completo suele requerir de un método de ensayo y error o un método de aproximaciones sucesivas (descrito al final de esta sección). Sin embargo, para un material como el acero dulce que tiene un diagrama elastoplástico (Fig. 2-49b), el comportamiento de la estructura se simplifica bastante y puede usualmente realizarse un análisis plástico sin dificultad.

Para ejemplificar las técnicas del análisis plástico, consideremos nuevamente una armadura simétrica de tres barras, como la mostrada en la Fig. 2-51a. Suponga que las barras están hechas de acero estructural y tienen un diagrama esfuerzo-deformación elastoplástico (Fig. 2-51b). Cuando la carga P es pequeña, los esfuerzos en las tres barras serán menores que el esfuerzo de fluencia σ_y ; en consecuencia, las fuerzas en las barras pueden determinarse por un análisis elástico mediante el método de flexibilidades o el de rigideces (secciones 2.4 y 2.5). Conforme se incrementa gradualmente la carga P , los esfuerzos en las barras aumentan hasta que finalmente una o más barras alcanzan el esfuerzo de fluencia σ_y . Si suponemos que las barras tienen áreas de sección transversal iguales A , entonces las fuerzas F_1 y F_2 en las barras bajo condiciones elásticas se obtienen de las Ecs. (2-14) y (2-13):

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (a)$$

Ya que la fuerza F_2 es mayor que F_1 , la barra central alcanzará primero el esfuerzo σ_y , lo que ocurre cuando la fuerza F_2 es igual a $\sigma_y A$. El valor correspondiente de la carga P se denomina **carga de fluencia** P_y . Podemos obtener P_y al considerar F_2 (véanse Ecs. a) igual a $\sigma_y A$ y resolver para la carga:

$$P_y = \sigma_y A (1 + 2 \cos^3 \beta) \quad (b)$$

Así, mientras P sea menor que P_y , la estructura se comporta elásticamente y las fuerzas en las barras se calculan con las Ecs. (a). La deflexión δ , del nudo D bajo la carga

de fluencia se obtiene al considerar que esta deflexión es igual al alargamiento del elemento BD :

$$\delta_y = \frac{F_2 L}{EA} = \frac{\sigma_y L}{E} \quad (c)$$

El comportamiento de la armadura por debajo de la carga de fluencia se representa por la línea OA en el diagrama carga-deflexión de la Fig. 2-52.

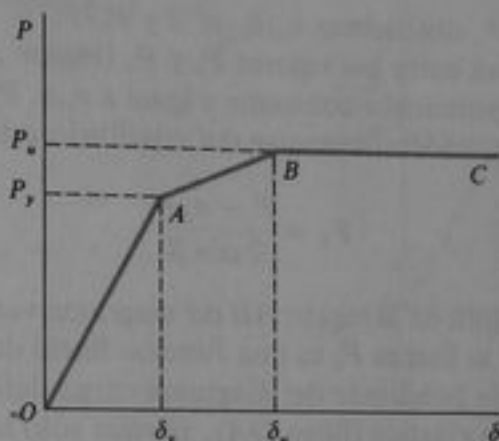


Fig. 2-52 Diagrama carga-deflexión de la armadura mostrada en la Fig. 2-51

Con un incremento posterior en la carga P , también se incrementan las fuerzas F_1 en las barras inclinadas, pero la fuerza F_2 permanece constante e igual a $\sigma_y A$, debido a que la barra central se ha vuelto perfectamente plástica (véase Fig. 2-51b). Finalmente, las fuerzas F_1 alcanzan el valor $\sigma_y A$ y las barras inclinadas también se vuelven plásticas. En ese momento la estructura no podrá cargar fuerza adicional. En lugar de ello, las tres barras continúan deformándose con este valor constante (y máximo) de la carga, que se denomina **carga última** P_u . Esta carga se representa por el punto B del diagrama carga-deflexión; la línea horizontal BC representa la región de deformación plástica continua de la estructura.

La carga última P_u puede calcularse a partir del equilibrio de fuerzas en el nudo D . Las fuerzas en las barras para la carga última son

$$F_1 = F_2 = \sigma_y A \quad (d)$$

En consecuencia, del equilibrio obtenemos

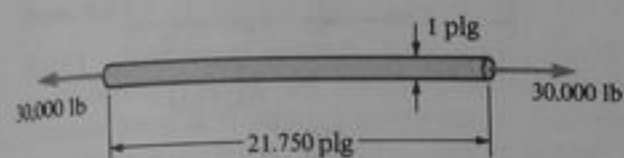
$$P_u = \sigma_y A(1 + 2 \cos \beta) \quad (e)$$

La deflexión correspondiente δ_u se determina al observar que las barras inclinadas se han alargado una cantidad $\delta_1 = \epsilon_y L_1$, donde $L_1 = L/\cos \beta$ es la longitud de una barra inclinada. Como $\epsilon_y = \sigma_y/E$, el alargamiento de cada barra inclinada es $\delta_1 = \sigma_y L/E \cos \beta$. A partir de este alargamiento, se puede determinar la deflexión vertical de la junta por medio de un diagrama de desplazamientos (véase Fig. 2-10b); el resultado es

$$\delta_u = \frac{\delta_1}{\cos \beta} = \frac{\sigma_y L}{E \cos^2 \beta} \quad (f)$$

PROBLEMAS / CAPÍTULO 2

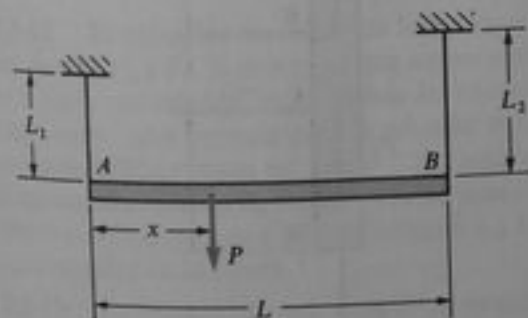
2.2-1 Una varilla de acero de 1 plg de diámetro ($E = 30 \times 10^6$ psi) debe soportar una carga en tensión de 30,000 lb (véase figura). Si la longitud inicial de la porción esforzada de la varilla es 21.750 plg, ¿cuál es su longitud final?



Prob. 2.2-1

2.2-2 Una barra redonda de aluminio de 8 m de longitud ($E = 70$ GPa) soporta una carga de tensión de 720 kN. ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido d para la barra si el máximo alargamiento permisible es 10 mm?

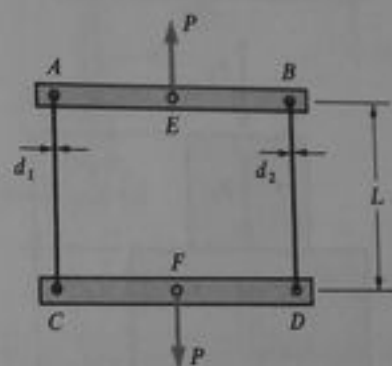
2.2-3 Una barra uniforme AB de longitud L se suspende en una posición horizontal bajo su propio peso, mediante dos alambres verticales fijos a sus extremos (véase figura). Ambos alambres están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero las longitudes son L_1 y L_2 . Obtenga una fórmula para la distancia x (desde el extremo A) al punto sobre la barra donde debe aplicarse una carga P , para que la barra permanezca horizontal.



Prob. 2.2-3

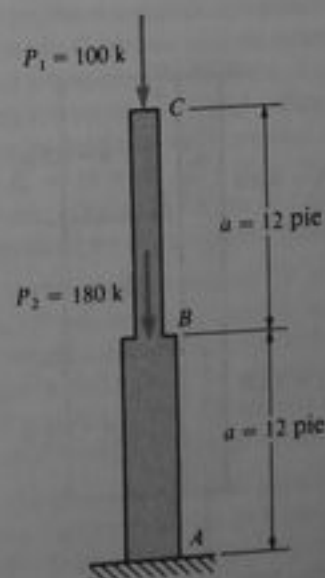
2.2-4 Dos barras rígidas horizontales AB y CD se unen mediante alambres como se muestra en la figura. Los alambres tienen longitud L , módulo de elasticidad E y diámetros d_1 y d_2 . En los puntos medios de las barras E y F actúan cargas verticales P . ¿Cuál es el

incremento de distancia δ entre los puntos E y F cuando se aplican las cargas?



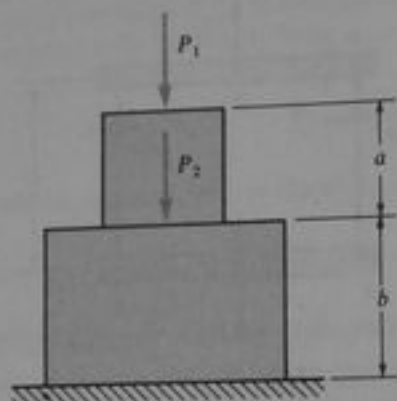
Prob. 2.2-4

2.2-5 Un edificio de dos niveles tiene columnas AB en el primer nivel y BC en el segundo (véase figura). Las columnas se cargan como se muestra en la figura, con la carga del techo $P_1 = 100$ k y la carga P_2 aplicada en el segundo nivel igual a 180 k. Las áreas de sección transversal de las columnas superior e inferior son 5.9 plg² y 17.1 plg², respectivamente, y cada columna tiene una longitud $a = 12$ pie. Si se supone que $E = 30 \times 10^6$ psi, determinar el acortamiento de cada columna debido a las cargas aplicadas.



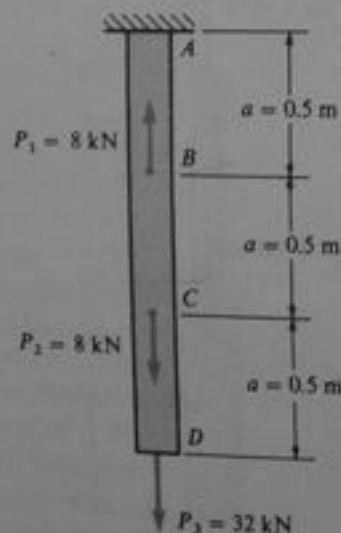
Prob. 2.2-5

2.2-6 Un pedestal de concreto (véase figura) de sección transversal circular tiene una parte superior de 0.5 m de diámetro y altura $a = 0.5$ m, y una parte inferior de 1.0 m de diámetro y altura $b = 1.2$ m. Se somete a cargas $P_1 = 7$ MN y $P_2 = 18$ MN. Si se supone $E = 25$ GPa, calcular la deflexión δ de la cima del pedestal.



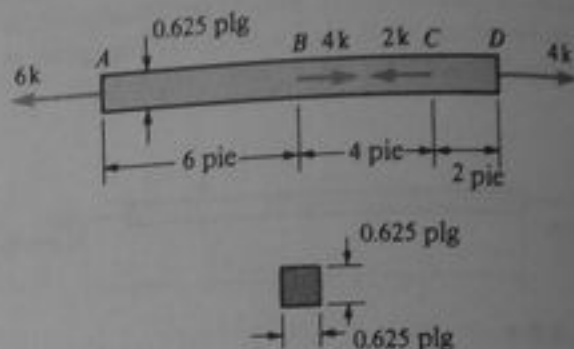
Prob. 2.2-6

2.2-7 Una barra prismática $ABCD$ se somete a cargas P_1 , P_2 y P_3 como se muestra en la figura. La barra está hecha de acero con módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y área de sección transversal $A = 225$ mm². Determinar la deflexión δ del extremo inferior de la barra debido a las cargas P_1 , P_2 y P_3 . ¿La barra se alarga o se acorta?



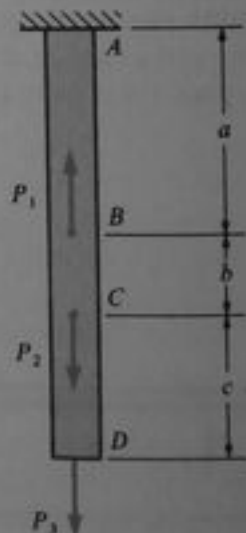
Prob. 2.2-7

drada de 0.625 plg por lado. La barra se carga con fuerzas axiales como se muestra en la figura. Si se supone $E = 30 \times 10^6$ psi, calcular el cambio de longitud de la barra debido a las cargas. ¿La barra se alarga o se acorta?



Prob. 2.2-8

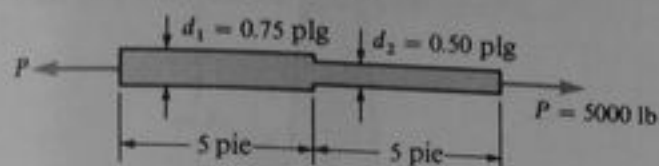
2.2-9 Una barra de acero ($E = 200$ GPa) se sostiene y carga como se muestra en la figura. El área de sección transversal de la barra es 250 mm². Asimismo, sus dimensiones son las siguientes: $a = 0.50$ m, $b = 0.20$ m y $c = 0.30$ m. Si se supone que $P_2 = 15$ kN y $P_3 = 9$ kN, determinar la fuerza P_1 tal que el extremo inferior D de la barra no se mueva verticalmente cuando se aplican las cargas.



Prob. 2.2-9

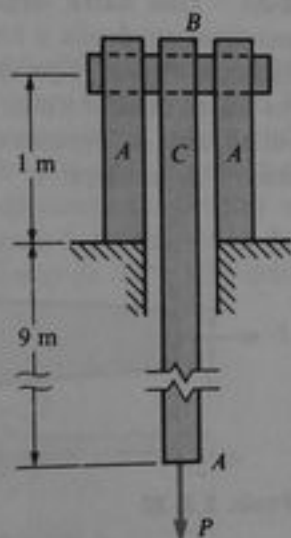
2.2-10 Una barra de acero de 10 pie de longitud tiene una sección transversal de diámetro $d_1 = 0.75$ plg en una de sus mitades y una de diámetro $d_2 = 0.50$ plg en la otra mitad (véase figura). (a) ¿Cuánto se alargará la barra bajo una carga de tensión $P = 5000$

lb? (b) Si el mismo volumen de material se usa para construir una barra de diámetro d y longitud 10 pie, ¿cuál será el alargamiento bajo la misma carga P ? (Suponga $E = 30 \times 10^6$ psi.)



Prob. 2.2-10

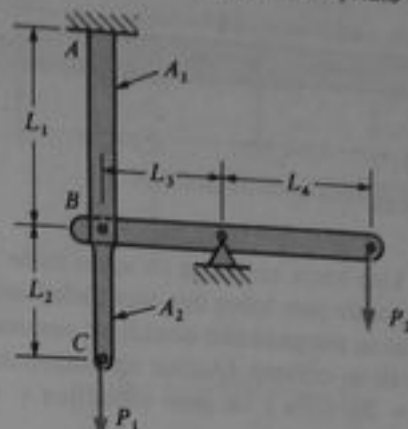
2.2-11 Una barra de cobre AB sometida a una carga de tensión $P = 500$ kN, cuelga de un perno sostenido por dos pilares de acero (véase figura). La barra de cobre tiene una longitud de 10 m, área transversal de 8100 mm² y módulo de elasticidad $E_c = 103$ GPa. Cada pilar de acero tiene una altura de 1 m, área transversal de 7500 mm² y módulo de elasticidad $E_a = 200$ GPa. Determinar el desplazamiento δ del punto A .



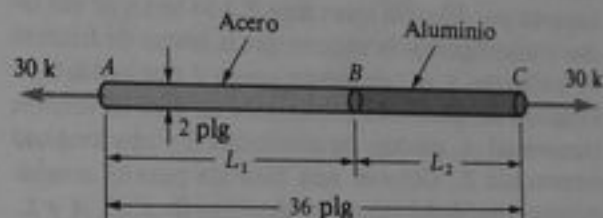
Prob. 2.2-11

2.2-12 El ensamble mostrado en la figura se carga por fuerzas P_1 y P_2 . Si se supone que ambas porciones de la barra vertical ABC están hechas del mismo material, obtener una fórmula para la relación P_2/P_1 , tal que la deflexión vertical del punto C sea igual a cero. (Expresar el resultado en términos de las áreas de sección transversal A_1 y A_2 y las dimensiones L_1 , L_2 , L_3 y L_4 mostradas en la figura.)

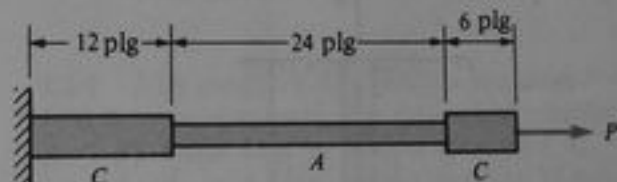
2.2-13 La barra ABC está compuesta de dos materiales y tiene una longitud total de 36 plg y un diámetro de 2 plg (véase figura). La parte AB es de acero ($E_a = 30 \times 10^6$ psi) y la parte BC es de aluminio ($E_a = 10 \times 10^6$ psi). La barra se somete a una fuerza de tensión de 30 k. (a) Determinar las longitudes L_1 y L_2 para las partes de acero y aluminio, respectivamente, a fin de que ambas partes tengan el mismo alargamiento. (b) ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?



Prob. 2.2-12



Prob. 2.2-13

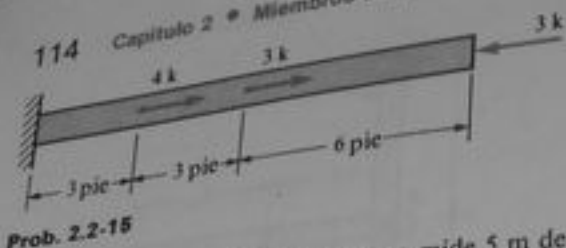


Prob. 2.2-14

2.2-14 Una barra compuesta se construye de dos secciones de cobre C con un área de sección transversal $A_c = 2$ plg² y una sección de acero A con un área de sección transversal $A_a = 1$ plg² (véase figura). Si se supone que los módulos de elasticidad para el cobre y acero son $E_c = 16 \times 10^6$ psi y $E_a = 30 \times 10^6$ psi, respectivamente, calcular la fuerza de tensión P necesaria para producir un alargamiento total $\delta = 0.06$ plg.

2.2-15 Un tubo de acero de 12 pie de longitud ($E = 30 \times 10^6$ psi) se carga como se muestra en la figura. La sección transversal del tubo es 2.8 plg². (a) Calcular la deflexión δ del extremo libre. (b) Determinar la distancia x desde el soporte izquierdo hasta el punto en el cual la deflexión es cero.

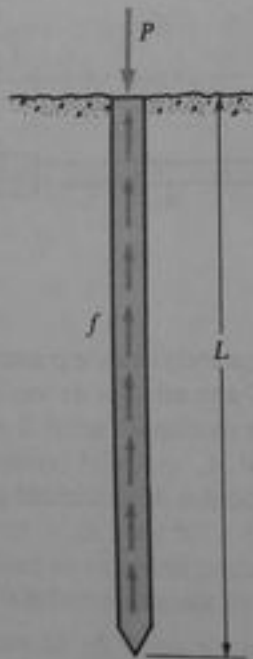
2.2-16 Obtener una fórmula para el alargamiento total de una barra prismática de longitud L y área de sección transversal A que cuelga verticalmente bajo su propio peso. (Suponga $W =$ peso total de la barra y $E =$ módulo de elasticidad.)



Prob. 2.2-15

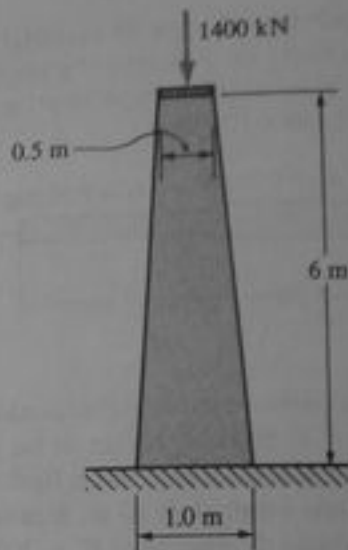
2.2-17 Una barra uniforme de acero mide 5 m de longitud cuando yace sobre una superficie horizontal. Determinar su alargamiento cuando se suspende verticalmente de un extremo. (Asumir un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y un peso específico $\gamma = 77.0$ kN/m³.)

2.2-18 Un pilote de concreto clavado en el suelo soporta por fricción una carga P a lo largo de sus lados (véase figura). Se supone que la fuerza de fricción es uniforme y se representa como f por unidad de longitud del pilote. El pilote tiene un área de sección transversal A , módulo de elasticidad E y una longitud empotrada L . Obtener una fórmula para el acortamiento total δ del pilote en términos de f , E , A y L .



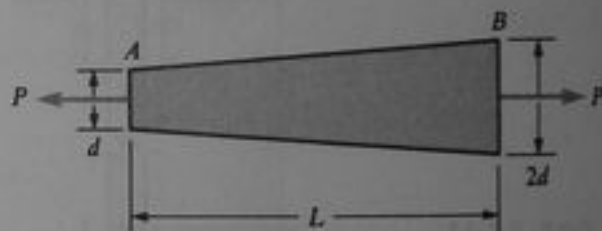
Prob. 2.2-18

2.2-19 Una pila de concreto de sección cuadrada tiene 6 m de altura (véase figura). Los lados convergen desde un ancho de 1.0 m en la base hasta 0.5 m en la parte superior. Determinar el acortamiento del pilar bajo una carga de compresión $P = 1400$ kN (desprecie el peso propio de la pila). Supóngase que el módulo de elasticidad del concreto es 24 GPa.



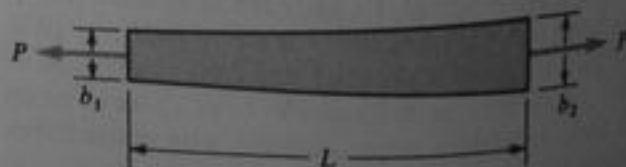
Prob. 2.2-19

2.2-20 Una barra larga ahusada AB de sección transversal cuadrada y longitud L se somete a una carga axial P (véase figura). Las dimensiones transversales varían desde $d \times d$ en el extremo A hasta $2d \times 2d$ en el extremo B . Obtener una fórmula para el alargamiento δ de la barra.



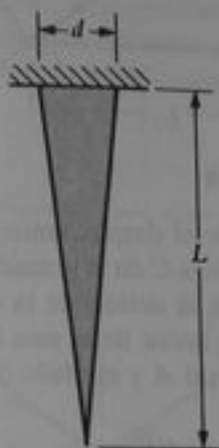
Prob. 2.2-20

2.2-21 Una barra plana de sección transversal rectangular y espesor constante t se somete a tensión por fuerzas P (véase figura). El ancho de la barra varía linealmente desde b_1 en el extremo izquierdo hasta b_2 en el extremo derecho. (a) Obtener una fórmula para el alargamiento δ de la barra. (b) Calcular el alargamiento si $b_1 = 4$ plg, $b_2 = 6$ plg, $L = 60$ plg, $t = 1$ plg, $P = 8000$ lb y $E = 30 \times 10^6$ psi.



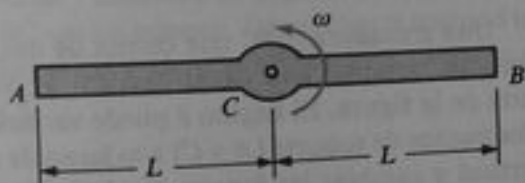
Prob. 2.2-21

2.2-22 Obtener una fórmula para el alargamiento δ de una barra cónica de sección transversal circular (véase figura) bajo la acción de su propio peso si la longitud de la barra es L , el peso por unidad de volumen es γ y el módulo de elasticidad es E .



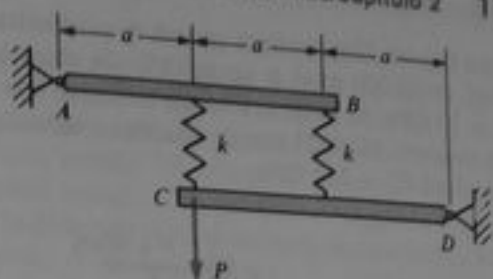
Prob. 2.2-22

*2.2-23 La barra ACB gira alrededor de un eje en C con velocidad angular constante ω (véase figura). Cada mitad de la barra tiene una longitud L . El material de la barra tiene un módulo de elasticidad E y una densidad ρ (masa por unidad de volumen). Obtener una fórmula para el alargamiento δ de una mitad de la barra (esto es, el alargamiento de AC o CB) debida a los efectos centrífugos.

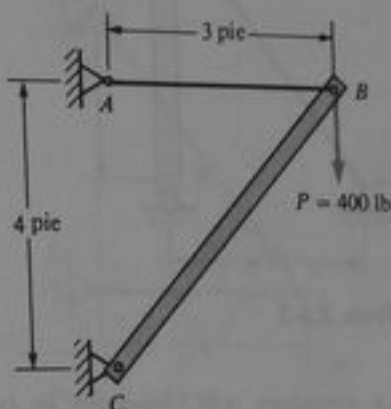


Prob. 2.2-23

*2.2-24 Dos barras rígidas AB y CD están unidas por resortes elásticos lineales de rigidez k y sustentadas en A y D por soportes articulados (véase figura). Cuando no actúan cargas, las barras están horizontales y los resortes no están esforzados. Determinar la deflexión vertical δ en el punto C cuando se aplica la carga P .

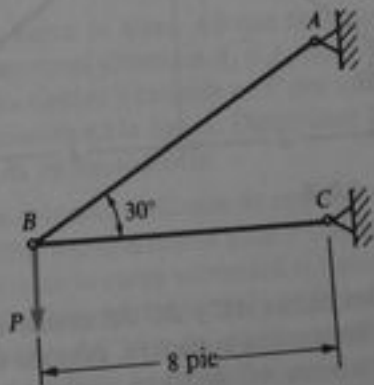


Prob. 2.2-24



Prob. 2.3-1

2.3-2 Una armadura ABC sostiene una carga $P = 3000$ lb como se muestra en la figura. Los miembros AB y BC tienen áreas de sección transversal $A_{AB} = 1.4$ plg² y $A_{BC} = 4.1$ plg², respectivamente. El material es aluminio con $E = 10,000,000$ psi. Determinar la deflexión horizontal δ_x y la deflexión vertical δ_y del nudo B .

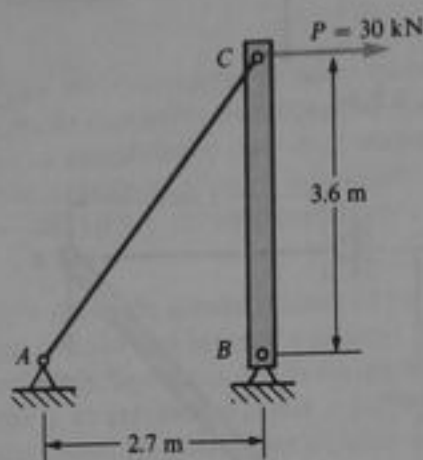


Prob. 2.3-2

2.3-1 Determinar las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del nudo B de la armadura mostrada en la figura debido a la fuerza $P = 400$ lb, si el miembro AB es un alambre de acero ($E_s = 30 \times 10^6$ psi) de 0.125 plg de diámetro y el miembro BC es un puntal de madera ($E_m = 1.5 \times 10^6$ psi) de sección transversal cuadrada de 1 plg de lado.

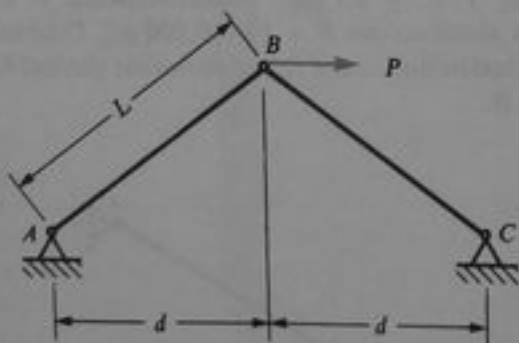
2.3-3 Calcular las deflexiones horizontal y vertical δ_x y δ_y , respectivamente, de la parte superior del poste de madera, debidas a la carga horizontal $P = 30$ kN

(véase figura). El poste tiene un área de sección transversal de $32,000 \text{ mm}^2$ y un módulo de elasticidad $E_m = 10 \text{ GPa}$. El poste se sostiene mediante una varilla de acero AC de 25 mm de diámetro y módulo de elasticidad $E_s = 210 \text{ GPa}$.



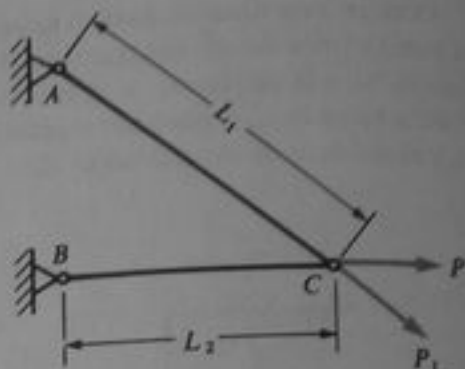
Prob. 2.3-3

2.3-4 La armadura ABC mostrada en la figura consta de dos barras idénticas (longitud L , área de sección transversal A y módulo de elasticidad E). Obtener fórmulas para las componentes horizontal y vertical δ_x y δ_y , respectivamente, de la deflexión del nudo B debida a la carga horizontal P .



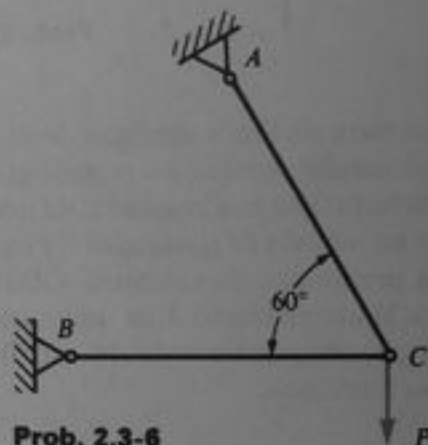
Prob. 2.3-4

2.3-5 Dos barras AC y BC del mismo material se unen para formar una armadura, como se muestra en la figura. La barra AC tiene una longitud L_1 y área de sección transversal A_1 ; la barra BC tiene una longitud L_2 y área de sección transversal A_2 . Las cargas P_1 y P_2 actúan en la junta C en las direcciones de los miembros AC y BC , respectivamente. ¿Cuál debe ser la relación P_1/P_2 de las cargas para que el nudo C no presente deflexión vertical?



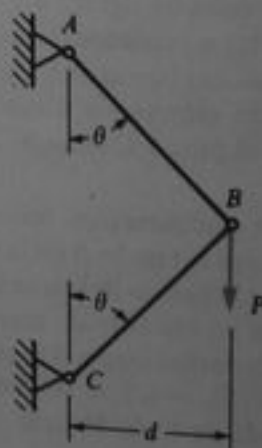
Prob. 2.3-5

2.3-6 Determinar el desplazamiento horizontal δ_x y vertical δ_y de la junta C de la armadura mostrada en la figura, debidos a la acción de la carga vertical P . (Suponer que cada barra tiene una longitud L , área de sección transversal A y módulo de elasticidad E .)



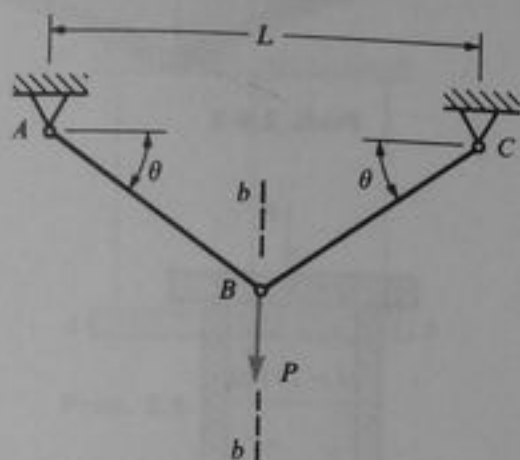
Prob. 2.3-6

2.3-7 Una armadura ABC que consta de dos barras idénticas, soporta una carga vertical P como se muestra en la figura. El ángulo θ puede variarse al mover los puntos de soporte (A y C) a lo largo de una recta vertical y cambiar las longitudes de las barras adecuadamente; el nudo B permanece a una distancia d de la recta vertical que une los apoyos. Determinar el ángulo θ tal que la deflexión del nudo B sea mínima.



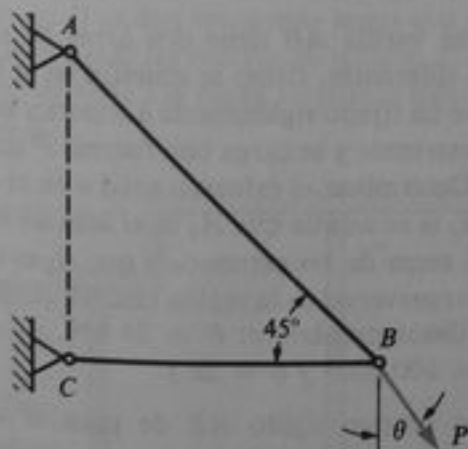
Prob. 2.3-7

2.3-8 Una armadura ABC se diseña para sostener una carga vertical P (véase figura) mediante dos barras idénticas AB y BC . La distancia L entre los puntos de soporte es fija, pero el nudo B puede situarse en cualquier punto a lo largo de la recta vertical bBb . Las áreas de sección transversal de las barras son tales que están esforzadas completamente al máximo esfuerzo permisible en tensión. ¿Cuál debe ser el ángulo θ a fin de minimizar la deflexión del nudo B cuando se aplica la carga P ?



Prob. 2.3-8

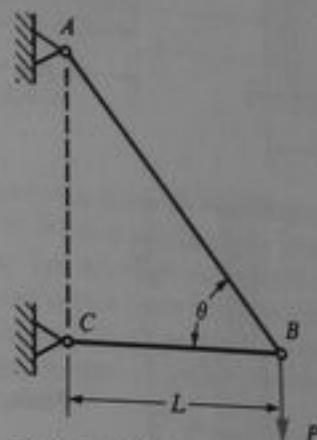
***2.3-9** La armadura ABC mostrada en la figura soporta en el nudo B una fuerza P que actúa según un ángulo θ respecto a la vertical. Las áreas de sección transversal y módulos de elasticidad de los miembros AB y BC son los mismos. Determinar el ángulo θ tal que la deflexión del nudo B tenga la misma dirección que la fuerza P .



Prob. 2.3-9

***2.3-10** La armadura ABC mostrada en la figura se construye con una barra horizontal de acero BC

que tiene 4.0 plg^2 de área de sección transversal y longitud L y una varilla tensora de acero AB de 0.5 plg^2 de área. El ángulo θ puede ajustarse a cualquier valor deseado al variar la longitud de la varilla tensora y la posición vertical del soporte A , pero sin cambiar la longitud inicial L . Determinar el ángulo θ a fin de que la deflexión vertical del nudo B sea mínima bajo la acción de la carga P .



Prob. 2.3-10

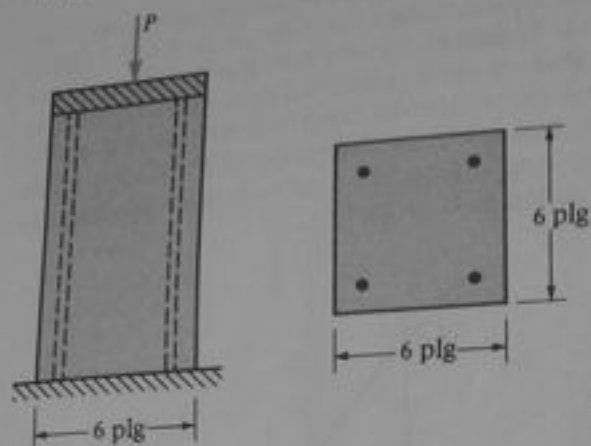
Los problemas de la Sección 2.4 deben resolverse por el método de flexibilidades.

2.4-1 Un pedestal de concreto de sección transversal cuadrada ($6 \times 6 \text{ plg}$) se refuerza con cuatro barras de acero de $3/4 \text{ plg}$ de diámetro (véase figura). Calcular la máxima carga permisible P basada en que los esfuerzos permisibles en el acero y el concreto son de $18,000 \text{ psi}$ y $2,000 \text{ psi}$, respectivamente. (Suponer $E_s = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ y $E_c = 3.5 \times 10^6 \text{ psi}$.)

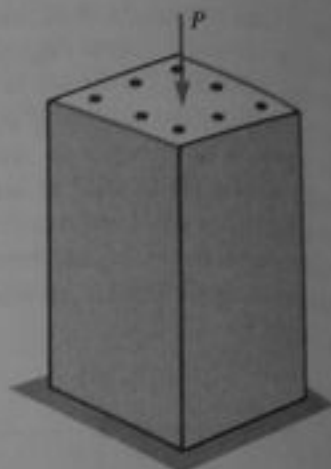
2.4-2 Una barra de acero AB que tiene dos áreas de sección transversal diferentes A_1 y A_2 está confinada entre soportes rígidos y cargada en C por una fuerza P como se muestra en la figura. Determinar las reacciones R_a y R_b en los soportes.

2.4-3 Una columna cuadrada de concreto reforzado se comprime con una fuerza axial P (véase figura). ¿Qué fracción de la carga soportará el concreto si el área de sección transversal total de las barras de acero es un décimo del área de sección transversal del concreto y el módulo de elasticidad del acero es diez veces el del concreto?

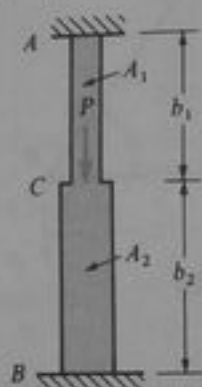
2.4-4 Una columna cuadrada se forma por una cubierta metálica de 25 mm de espesor (dimensiones exteriores $250 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ y dimensiones interiores $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$) llena de concreto (véase figura). La cubierta tiene un módulo elástico $E_1 = 84 \text{ GPa}$ y



Prob. 2.4-1

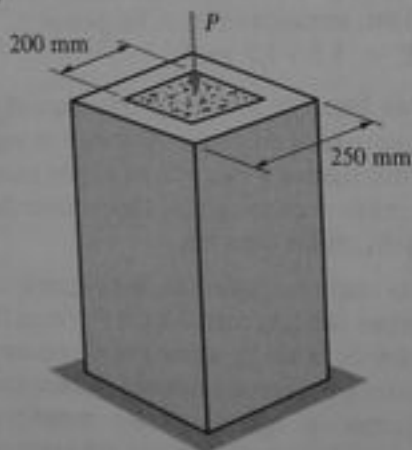


Prob. 2.4-3



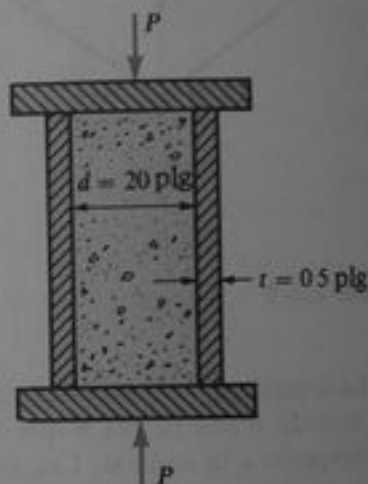
Prob. 2.4-2

el relleno de concreto tiene un módulo de elasticidad $E_2 = 14 \text{ GPa}$. Determinar la máxima carga permisible P sobre la columna si los esfuerzos permisibles en el metal y en el concreto son 42 MPa y 5.6 MPa , respectivamente. (Suponer que los esfuerzos en el metal y en el concreto están uniformemente distribuidos.)



Prob. 2.4-4

2.4-5 Un tubo redondo de acero de diámetro interior $d = 20 \text{ plg}$ y espesor de pared $t = 0.5 \text{ plg}$ se llena de concreto y se comprime entre placas rígidas (véase figura). Si los esfuerzos permisibles para el acero y el concreto son $16,000 \text{ psi}$ y $1,200 \text{ psi}$, respectivamente,

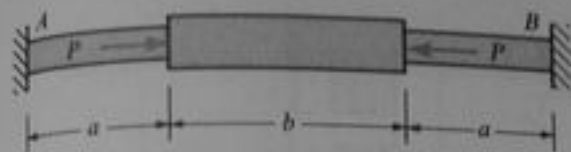


Prob. 2.4-5

determinar la carga máxima permisible P . (Suponer $E_s = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$ y $E_c = 2 \times 10^3 \text{ ksi}$.)

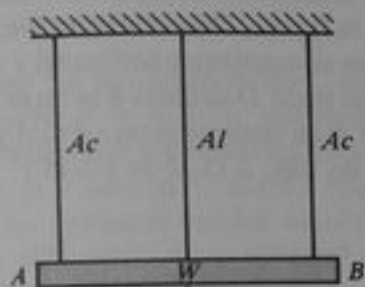
2.4-6 Una varilla AB tiene dos áreas de sección transversal diferentes, como se muestra en la figura. La varilla se ha fijado rigidamente a soportes inmóviles en sus extremos y se carga con fuerzas P iguales y opuestas. Determinar el esfuerzo axial σ en el centro de la barra, si se asume que A_1 es el área de sección transversal cerca de los extremos y que A_2 es el área de sección transversal en la región central. (Utilice los siguientes datos numéricos: $P = 24 \text{ kN}$, $A_1 = 400 \text{ mm}^2$, $A_2 = 600 \text{ mm}^2$ y $b = 2a$.)

2.4-7 Un bloque rígido AB de peso W cuelga de tres alambres verticales igualmente espaciados, dos de acero y uno de aluminio (véase figura). Los alambres también sostienen una carga P que actúa en el centro del bloque. El diámetro de los alambres de acero es $1/8 \text{ plg}$ y el del alambre de aluminio es $3/16 \text{ plg}$. ¿Qué carga P puede sostenerse si el esfuerzo per-



Prob. 2.4-6

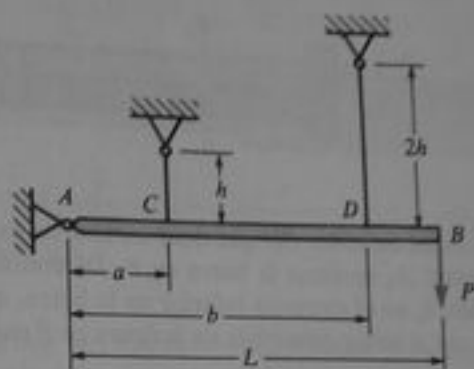
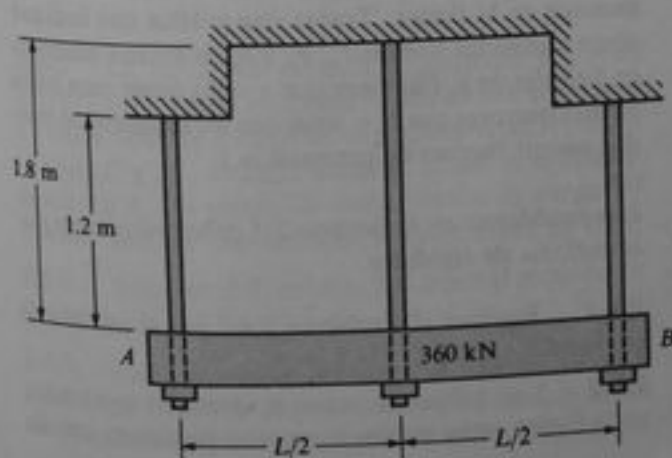
¿Cuál es el esfuerzo permisible en los alambres de acero es 20,000 psi y en el alambre de aluminio es 12,000 psi? (Suponer $W = 80$ lb, $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi y $E_{al} = 10 \times 10^6$ psi.)



Prob. 2.4-7

2.4-8 Cada barra vertical del aparato mostrado en la figura está hecha de acero y tiene área de sección transversal de 1200 mm^2 . Determinar el esfuerzo de tensión σ en la barra central si la placa rígida AB pesa 360 kN.

2.4-9 Una barra rígida AB de longitud L está articulada a una pared en A y soportada por dos alambres verticales unidos a los puntos C y D (véase figura). Los alambres están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero el alambre en D es dos veces más largo que el alambre en C. Determinar las fuerzas de tensión T_c y T_d en los alambres debidas a la carga vertical P que actúa en el extremo B.

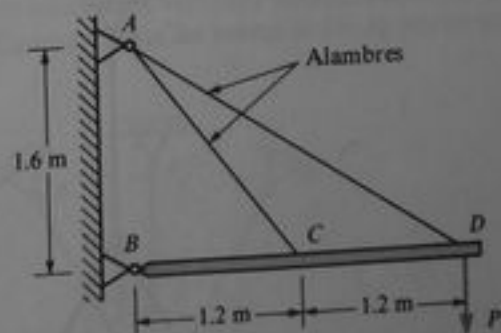


Prob. 2.4-9

2.4-10 Una barra rígida BD está sostenida por una articulación en B y por dos alambres unidos en C y D (véase figura). Los alambres son idénticos excepto en longitud y están tensos (pero libres de esfuerzos) antes de aplicarse la carga P . Determinar las fuerzas de tensión T_c y T_d producidas en los alambres por una carga $P = 5000 \text{ N}$.

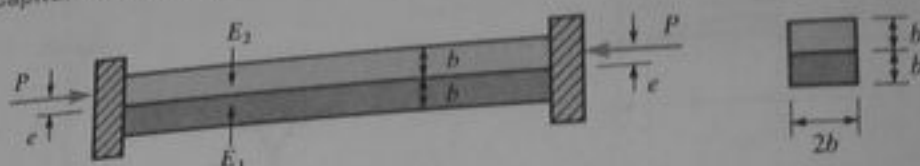
2.4-11 Una barra compuesta de sección transversal cuadrada se construye con dos materiales diferentes que tienen módulos de elasticidad E_1 y E_2 (véase figura). Ambas partes de la barra tienen las mismas dimensiones en sus secciones transversales. Si se supone que las placas de los extremos son rígidas, obtener una fórmula para la excentricidad e de la carga P tal que cada parte de la barra se esfuerce uniformemente en compresión. Bajo estas condiciones, ¿qué parte de la carga P soporta cada material?

2.4-12 Una barra de acero ABC ($E = 30 \times 10^6$ psi) tiene un área de sección transversal A_1 desde A hasta B y un área de sección transversal A_2 desde B hasta C (véase figura). La barra se sostiene en el extremo A y se somete a una carga P igual a 12,000 lb en el extremo



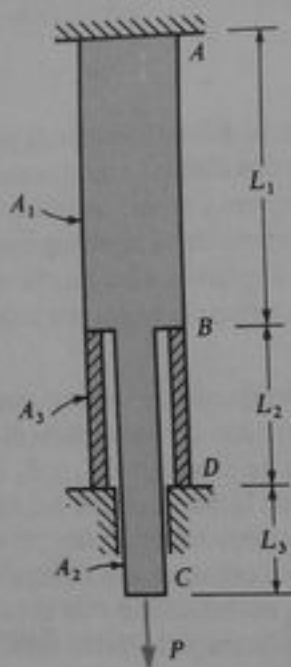
Prob. 2.4-10

Prob. 2.4-8



Prob. 2.4-11

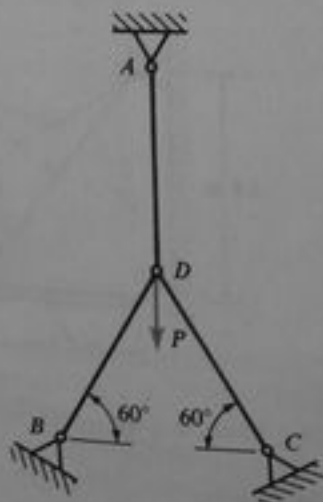
C. Un collar de acero BD que tiene un área de sección transversal A_3 sostiene la barra en B . Determinar la deflexión δ , en el extremo inferior de la barra, al suponer que el collar ensambla sin holgura en B cuando



Prob. 2.4-12

no existe carga. (Asumir $L_1 = 2L_2 = 10$ plg, $L_3 = 4$ plg, $A_1 = 2A_3 = 1.6$ plg² y $A_2 = 0.5$ plg².)

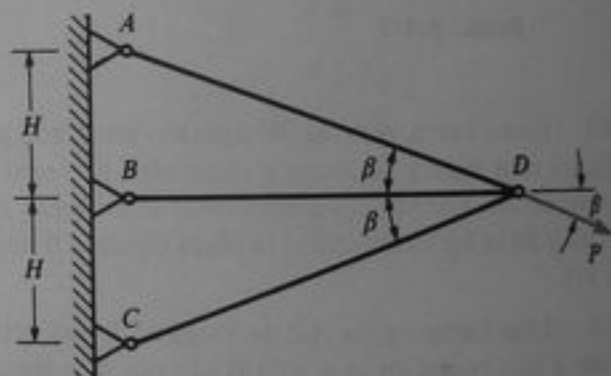
2.4-13 La armadura $ABCD$ mostrada en la figura consta de tres barras de igual longitud L que sustentan una carga vertical P . Determinar las fuerzas F_a ,



Prob. 2.4-13

F_b y F_c en las barras y la deflexión vertical δ del nudo D , si se supone que el módulo de elasticidad E y el área de sección transversal A son los mismos para las tres barras.

2.4-14 Tres barras AD , BD y CD que tienen la misma rigidez axial EA forman una armadura como se muestra en la figura. Determinar las fuerzas en las tres barras y las componentes horizontal y vertical de la deflexión del nudo D debidas a la carga P . (Sugerencia: definir P en componentes vertical y horizontal y emplear las Ecs. 2-13, 2-14 y 2-15.)



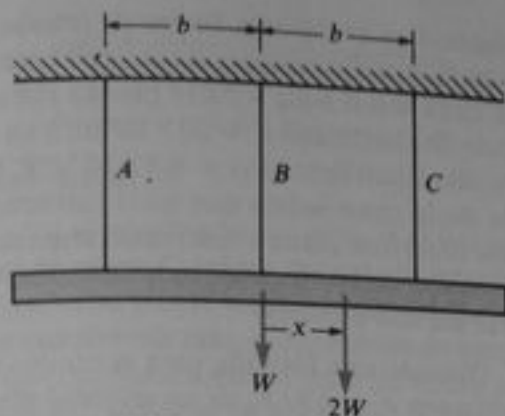
Prob. 2.4-14

2.4-15 Tres alambres idénticos A , B y C sostienen un bloque rígido (peso = W) al cual se aplica una carga $2W$ a una distancia x del centro, como se muestra en la figura. Trazar una gráfica que indique cómo varían las fuerzas F_a , F_b y F_c en los tres alambres en función de x . (Suponer que x varía desde cero hasta valores mayores que b , y notar que los alambres no pueden resistir fuerzas de compresión.)

Los problemas de la Sección 2.5 deben resolverse por el método de rigideces.

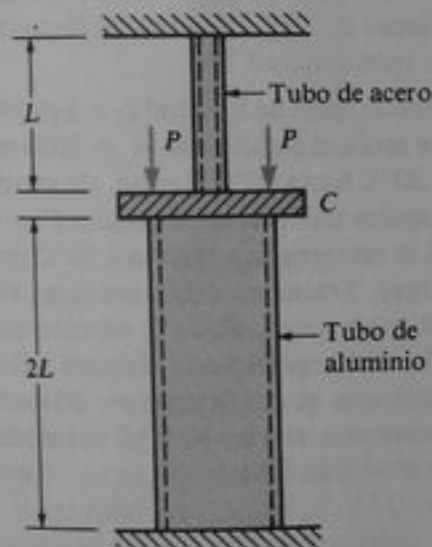
2.5-1 Resolver el Problema 2.4-2 por el método de rigideces.

2.5-2 Los tubos de acero y aluminio mostrados en la figura están unidos a soportes rígidos en uno de

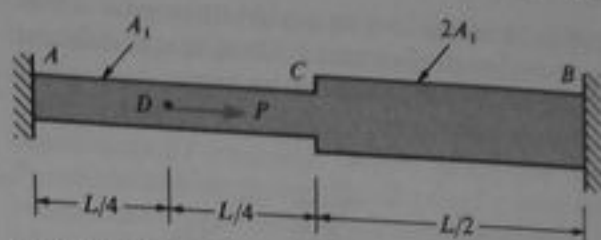


Prob. 2.4-15

sus extremos y a una placa rígida C en el otro. Dos cargas iguales P se aplican simétricamente sobre la placa. Determinar los esfuerzos axiales σ_{al} y σ_{ac} en los tubos de aluminio y acero, respectivamente. (Emplear los siguientes valores numéricos. $P = 48$ kN, $A_{al} = 6000$ mm², $A_{ac} = 600$ mm², $E_{al} = 70$ GPa y $E_{ac} = 200$ GPa.)

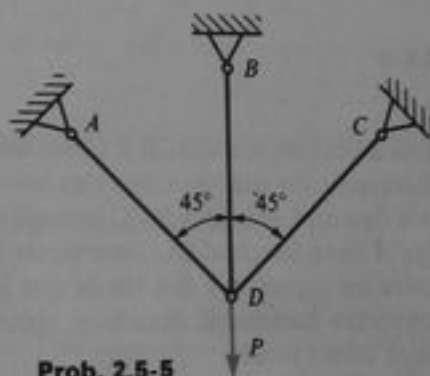


Prob. 2.5-2



Prob. 2.5-3

carga con una fuerza vertical P (véase figura). Determinar la deflexión vertical δ de la junta D y las fuerzas F_a , F_b y F_c en las barras.



Prob. 2.5-5

2.5-6 Resolver el Problema 2.4-13 por el método de rigideces.

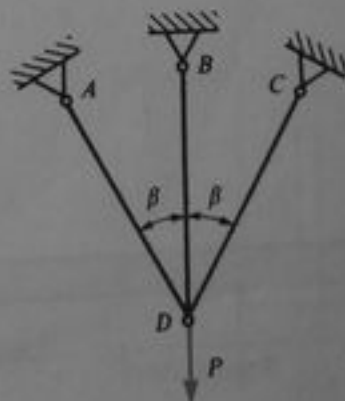
2.5-7 Una armadura $ABCD$ que consta de tres barras que tienen la misma longitud L y la misma rigidez axial EA se carga por una fuerza vertical P aplicada en el nudo D (véase figura). Determinar la deflexión δ del nudo D y las fuerzas F_a , F_b y F_c en las barras.

2.5-8 Una armadura simétrica de cinco barras se carga por una fuerza vertical P aplicada en la junta F (véase figura). Todas las barras tienen la misma lon-

2.5-3 La barra AB cargada axialmente y que se muestra en la figura está empotrada en sus extremos. La barra tiene un área de sección transversal A_1 desde A hasta C y $2A_1$ desde C hasta B . ¿Cuál es el desplazamiento δ_d del punto D donde actúa la carga P ? ¿Cuáles son las reacciones en los soportes A y B ?

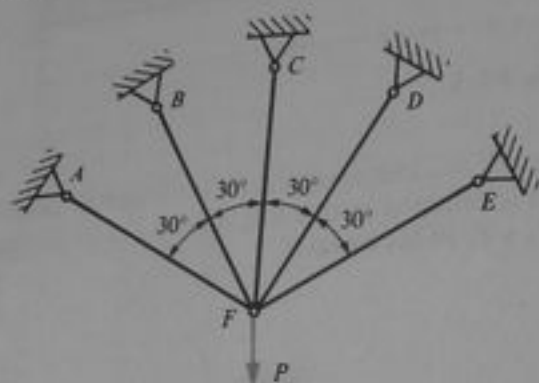
2.5-4 Resolver el Problema 2.4-8 por el método de rigideces.

2.5-5 Una armadura $ABCD$ que consta de tres barras que tienen la misma longitud L , igual área de sección transversal A e igual módulo de elasticidad E , se



Prob. 2.5-7

gitud L , la misma área de sección transversal A y el mismo módulo de elasticidad E . Determinar la deflexión δ del nudo D y las fuerzas en las barras.

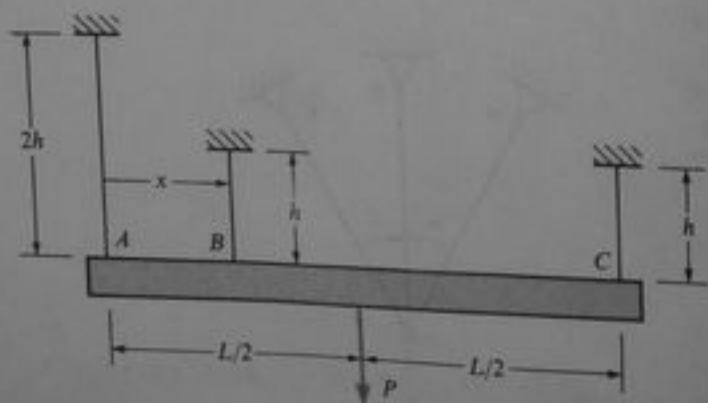


Prob. 2.5-8

2.5-9 Tres barras de acero A , B y C que tienen la misma rigidez axial EA sostienen una viga horizontal rígida (véase figura). Las barras B y C tienen longitud h y la barra A tiene longitud $2h$. Determinar la distancia x entre las barras A y B a fin de que la viga rígida permanezca horizontal cuando se aplica una carga P en su punto medio.

2.6-1 Un tubo de aluminio tiene una longitud de 50 m a una temperatura de 18°C . Un tubo adyacente de acero, a la misma temperatura, es 10 mm más largo que el tubo de aluminio. ¿A qué temperaturas la diferencia en longitudes de los tubos será igual a 15 mm? (Suponer que los coeficientes de dilatación térmica del aluminio y del acero son $\alpha_{al} = 23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, respectivamente.)

2.6-2 Una cinta de medición de acero colocada sobre un pavimento plano, se utiliza para medir la distancia entre dos puntos A y B . La lectura de la cinta es 85.49 pie cuando la temperatura de la superficie

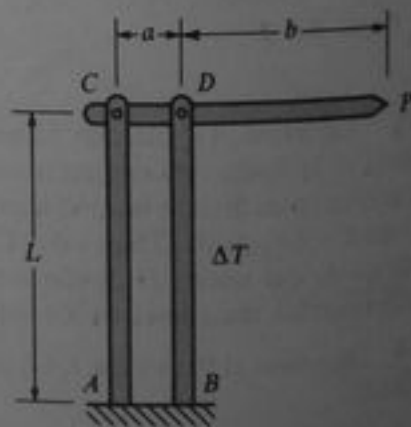


del pavimento es 112°F y la fuerza de tensión en la cinta es 20 lb. Las dimensiones de la sección transversal de la cinta son $0.3 \text{ plg} \times 0.014 \text{ plg}$. La cinta tiene un módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ y un coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$. La calibración de la cinta indica que mide correctamente sobre una superficie plana a una temperatura de 68°F y a una tensión de 10 lb. ¿Cuál es la distancia correcta d entre los dos puntos?

2.6-3 Obtener una fórmula para el cambio unitario de volumen $e = \Delta V/V_0$ de un material sometido a un incremento uniforme de temperatura ΔT . Supóngase que el material tiene un coeficiente de dilatación térmica α y es capaz de expandirse libremente.

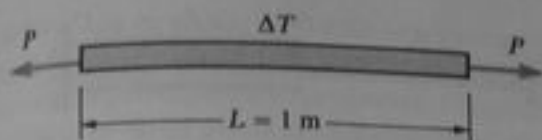
2.6-4 El aparato mostrado en la figura está construido de una barra de tungsteno AC y una barra de magnesio BD unidas a un marcador CDP mediante pernos en C y D . Sean los coeficientes de dilatación térmica para el magnesio y el tungsteno α_m y α_t , respectivamente. Obtener una fórmula para el desplazamiento vertical δ (ascendente positivo) del punto P en función de un incremento uniforme de temperatura ΔT y las dimensiones a , b y L . ¿Podría tal dispositivo emplearse como termómetro?

2.6-5 Una barra de acero de longitud $L = 1 \text{ m}$ (véase figura) y área de sección transversal $A = 1600 \text{ mm}^2$ se calienta desde 20°C hasta 80°C . Luego, sin variar la temperatura, se aplica una fuerza de tensión $P = 160 \text{ kN}$. Finalmente, la temperatura regresa a 20°C (pero permanece la carga). Trazar un diagrama carga-alargamiento para la barra que indique la relación entre la fuerza axial P y el alargamiento δ durante todo el proceso. (Suponer que el coeficiente de dilatación térmica para el acero es $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y el módulo de elasticidad es $E = 200 \text{ GPa}$.)

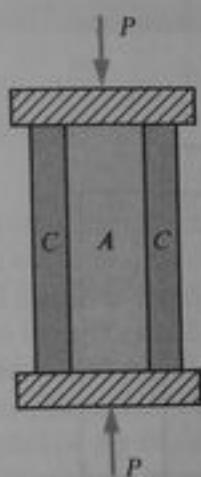


Prob. 2.6-4

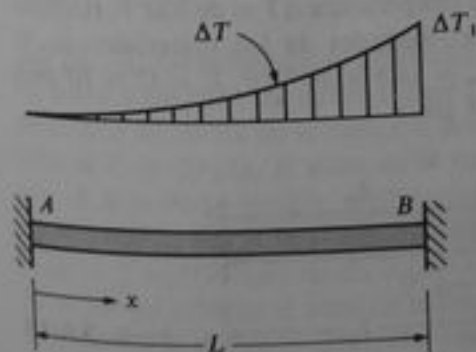
Prob. 2.5-9


Prob. 2.6-5

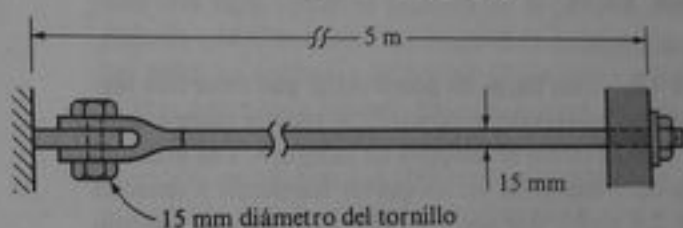
2.6-6 Un cilindro macizo de acero A se introduce en un tubo de cobre C (véase figura). El ensamble se comprime entre placas rígidas mediante fuerzas P . Obtener una fórmula para el incremento de temperatura ΔT que ocasionará que el tubo de cobre soporte toda la carga. (Representar por α_a , α_c , E_a , E_c , A_a y A_c los coeficientes de expansión térmica, módulos de elasticidad y áreas de sección transversal, respectivamente, del acero y el cobre.)


Prob. 2.6-6

2.6-7 Una barra metálica AB de longitud L se retiene entre soportes rígidos y se calienta en forma no uniforme de tal manera que el incremento de temperatura ΔT a una distancia x del extremo A se representa por la expresión $\Delta T = \Delta T_1 x^2 / L^2$ (véase figura). Determinar el esfuerzo de compresión σ_c en la barra. (Suponer que el material tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de dilatación térmica α .)


Prob. 2.6-7

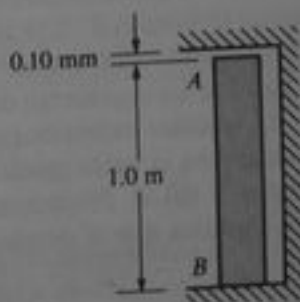
2.6-8 Una varilla de acero de 15 mm de diámetro y 5 m de longitud se retiene sin holgura (pero sin esfuerzos iniciales) entre paredes fijas mediante el arreglo mostrado en la figura. Calcular el aumento de temperatura ΔT (en grados Celsius) para el cual el esfuerzo cortante medio en el tornillo de 15 mm de diámetro resulta ser 60 MPa. (Para acero, emplear $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $E_s = 200$ GPa.)


Prob. 2.6-8

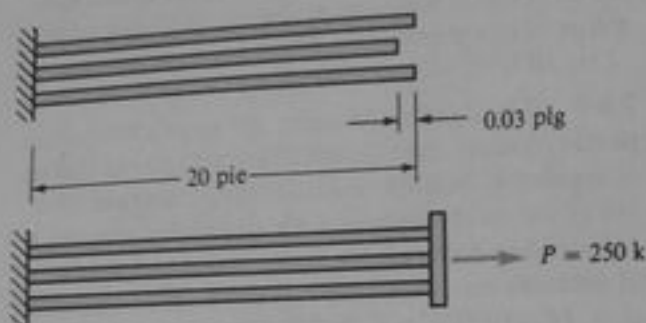
Prob. 2.6-9

2.6-10 Una barra de cobre AB de 1.0 m de longitud a temperatura ambiente se coloca separada 0.10 mm entre su extremo A y una pared rígida (véase figura). Calcular el esfuerzo de compresión axial σ en la barra si la temperatura aumenta 40°C . (E emplear para el cobre: $\alpha = 17 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $E = 110$ GPa.)

2.6-11 Tres barras de acero adyacentes y paralelas ($E = 30 \times 10^6$ psi) soportarán conjuntamente una carga en tensión $P = 250$ k (véase figura). El área de sección transversal de cada barra es 6 plg² y la longitud es 20 pie. Si la barra central accidentalmente es 0.03

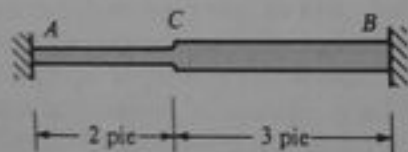

Prob. 2.6-10

plg más corta que las otras dos, ¿cuál será el esfuerzo final σ en la barra central cuando se aplica la carga? (Suponer que los extremos de las barras se traccionan para alinearlas cuando se aplica la carga.)



Prob. 2.6-11

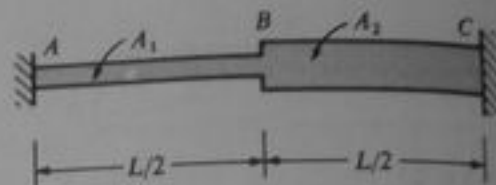
2.6-12 Una barra de acero ACB que tiene dos secciones transversales diferentes, se retiene entre soportes rígidos como se muestra en la figura. Las áreas de sección transversal en las partes izquierda y derecha son 2.0 plg^2 y 3.0 plg^2 , respectivamente. El módulo de elasticidad E es $30 \times 10^6 \text{ psi}$ y el coeficiente de dilatación térmica α es $0.0000065/^\circ\text{F}$. La barra se somete a un incremento uniforme de temperatura de 75°F . Calcular las siguientes cantidades: (a) la fuerza axial P en la barra; (b) el máximo esfuerzo axial σ ; y (c) el desplazamiento δ del punto C .



Prob. 2.6-12

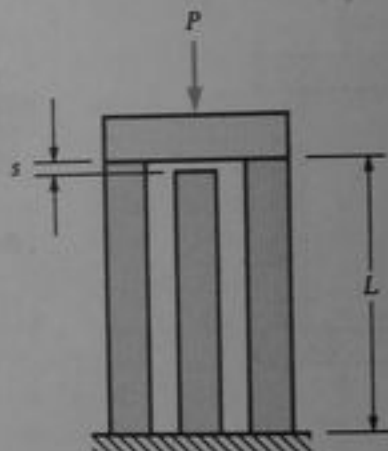
2.6-13 Una barra no prismática ABC de longitud L se retiene entre soportes fijos (véase figura). La mitad izquierda de la barra tiene un área de sección transversal A_1 , y la mitad derecha tiene un área de sección transversal A_2 . El módulo de elasticidad es E y el coeficiente de expansión térmica es α . Si se supone que la barra se somete a un cambio uniforme de temperatura ΔT (ΔT positivo significa un incremento de temperatura) y que $A_2 > A_1$, obtener expresiones para: (a) el mayor esfuerzo axial σ en la barra (positivo significa esfuerzo de tensión) y (b) el desplazamiento δ del punto B (positivo significa que el desplazamiento es hacia la derecha).

2.6-14 Una placa rígida de acero se sostiene mediante tres postes de concreto de alta resistencia, cada



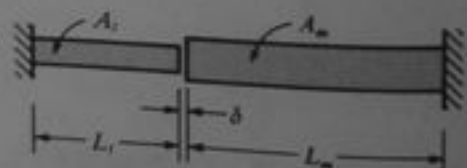
Prob. 2.6-13

uno con sección transversal cuadrada de $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ y longitud $L = 2 \text{ m}$ (véase figura). Antes de aplicarse la carga P el poste central es más corto que los otros en una cantidad $s = 1.0 \text{ mm}$. Determinar la carga máxima permisible P si el módulo de elasticidad del concreto es $E_c = 30 \text{ GPa}$ y el esfuerzo permisible en compresión es $\sigma_{\text{perm}} = 18 \text{ MPa}$.



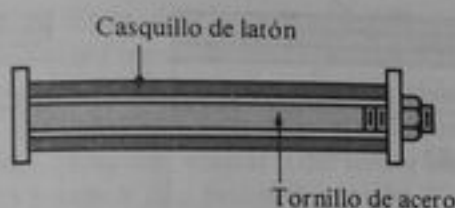
Prob. 2.6-14

2.6-15 El elemento térmico bimetalico mostrado en la figura está construido de una barra de latón (longitud $L_l = 0.75 \text{ plg}$ y área de sección transversal $A_l = 0.10 \text{ plg}^2$) y de una barra de magnesio (longitud $L_m = 1.30 \text{ plg}$ y área de sección transversal $A_m = 0.20 \text{ plg}^2$). Las barras se disponen de tal modo que la separación entre sus extremos libres es $\delta = 0.0040 \text{ plg}$ a temperatura ambiente. Calcular las siguientes cantidades: (a) el incremento de temperatura ΔT (sobre la temperatura ambiente) para el cual las barras hacen contacto, y (b) el esfuerzo σ en la barra de magnesio cuando el incremento de temperatura ΔT es de 300°F . (Utilizar las siguientes propiedades de los materiales: $\alpha_l = 10 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$, $\alpha_m = 14.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$, $E_l = 15 \times 10^6 \text{ psi}$ y $E_m = 6.5 \times 10^6 \text{ psi}$.)



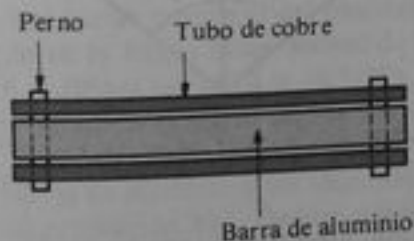
Prob. 2.6-15

2.6-16 Un casquillo de latón se monta sobre un tornillo de acero (véase figura) y la tuerca se gira hasta que asienta perfectamente sin apretar. El tornillo tiene un diámetro de 25 mm y el casquillo tiene diámetros interior y exterior de 26 mm y 36 mm, respectivamente. Calcular el incremento de temperatura ΔT que se requiere para producir en el casquillo un esfuerzo de compresión de 30 MPa. (Emplear las siguientes propiedades de los materiales: para el latón, $\alpha_l = 20 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $E_l = 100 \text{ GPa}$; para el acero, $\alpha_a = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $E_a = 200 \text{ GPa}$.)



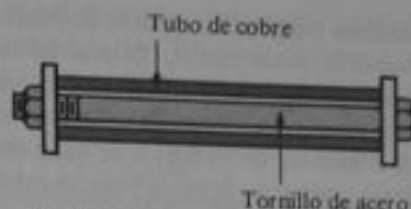
Prob. 2.6-16

2.6-17 Una barra circular maciza de aluminio se introduce en un tubo de cobre de la misma longitud (véase figura). El diámetro exterior del tubo de cobre es 2 plg, el diámetro interior es 1.80 plg y el diámetro de la barra de aluminio es 1.75 plg. En cada extremo del ensamble se insertan, perpendicularmente al eje de la barra, dos pernos de 1/4 plg de diámetro que atraviesan ambas barras. Determinar el esfuerzo cortante medio en los pernos si la temperatura aumenta 40°F . (Para el aluminio, $E_a = 10 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\alpha_a = 13 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$; para el cobre $E_c = 17 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\alpha_c = 9.3 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$.)



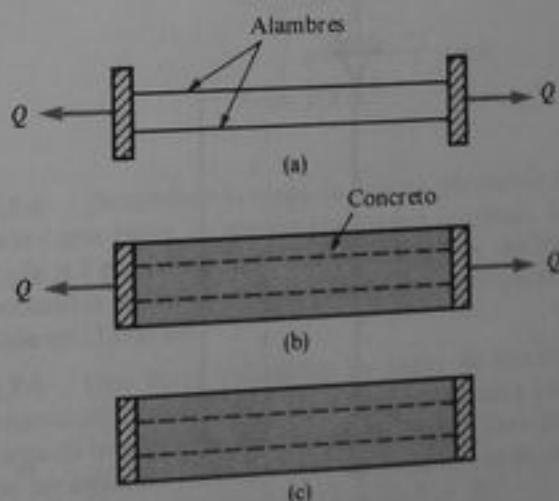
Prob. 2.6-17

2.6-18 ¿Qué esfuerzos se producirán en un tornillo de acero y un tubo de cobre (véase figura) debido a un cuarto de vuelta de la tuerca si la longitud del tornillo es $L = 30 \text{ plg}$, el paso de la rosca es $p = 1/8 \text{ plg}$, el área de la sección transversal del tornillo es $A_s = 1 \text{ plg}^2$, y el área de la sección transversal del tubo es $A_t = 2 \text{ plg}^2$? (Suponer $E_s = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ y $E_t = 16 \times 10^6 \text{ psi}$.) (Nota: el paso de la rosca es la distancia que avanza la tuerca al girar una vuelta completa.)



Prob. 2.6-18

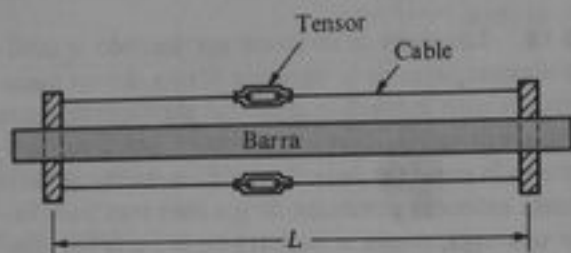
2.6-19 Las vigas de concreto presforzado se fabrican algunas veces de la siguiente forma. En un mecanismo de gato hidráulico se estiran alambres de acero de alta resistencia, bajo una fuerza Q , como se representa en la parte (a) de la figura. El concreto se vacía o cuele entonces alrededor de los alambres para formar una viga, como se muestra en la parte (b). Después de que el concreto ha fraguado adecuadamente, los gatos se sueltan y la fuerza Q desaparece (véase última parte de la figura). De esta manera, la viga está sometida a una condición presforzada, con los alambres en tensión y el concreto en compresión. Supongamos que la carga de presfuerzo Q produce en los alambres de acero un esfuerzo inicial $\sigma_0 = 820 \text{ MPa}$. Si los módulos de elasticidad del acero y el concreto guardan una proporción 8:1 y las áreas de sección transversal guardan una relación 1:30, ¿cuáles son los esfuerzos finales σ_s y σ_c en los dos materiales?



Prob. 2.6-19

2.6-20 La barra mostrada en la figura tiene longitud L , módulo de elasticidad E_s y área de sección transversal A_s . Dos cables con tensores se fijan a pernos robustos que atraviesan los extremos de la barra.

Cada cable tiene longitud L , módulo de elasticidad E , y área de sección transversal A_c . El paso de las roscas de los tensores de doble acción es p (esto es, una vuelta del tensor acorta el cable en $2p$). Obtener una fórmula para el número de vueltas n de cada tensor requeridas para presforzar la barra bajo un esfuerzo de compresión uniforme σ_0 .



Prob. 2.6-20

2.6-21 Un cable vertical AB (véase figura) se presforza a una tensión inicial de 4 kN. Subsecuentemente, se suspende del cable un peso $W = 6$ kN a una altura h de la base. Determinar las fuerzas de tensión P_1 y P_2 en las dos porciones del cable según varía h desde cero hasta L . (Observe que el cable no puede soportar fuerzas de compresión.)



Prob. 2.6-21

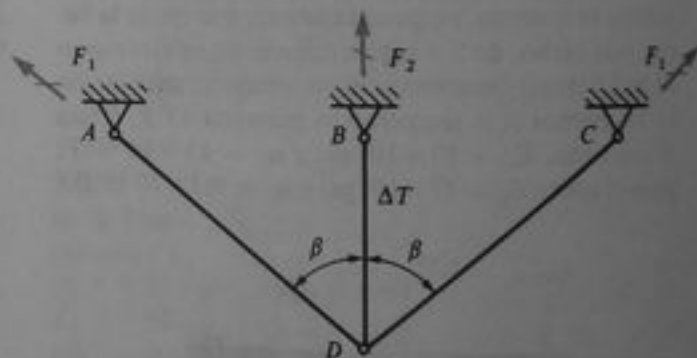
2.6-22 Una barra bimetalica que consiste en un núcleo de cobre unido firmemente a dos tiras de acero (véase figura) se calienta uniformemente en una

cantidad ΔT . Si se supone que el ancho de la barra es b , la longitud es L y el espesor de cada placa es t , determinar los esfuerzos σ_s y σ_c en el acero y el cobre, respectivamente. También, dibujar diagramas de cuerpo libre de las tres placas. (Nota: los coeficientes de dilatación térmica para el acero y el cobre son α_s y α_c , respectivamente y $\alpha_s > \alpha_c$. Los módulos de elasticidad son E_s y E_c .)



Prob. 2.6-22

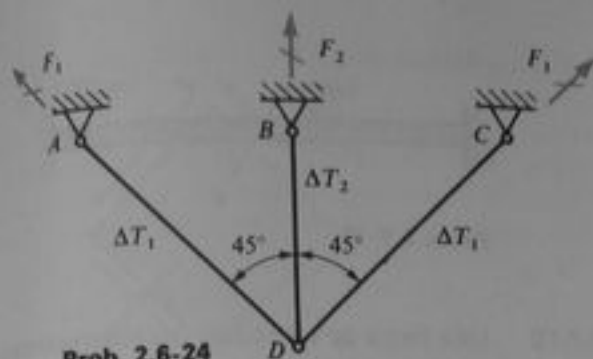
2.6-23 Determinar las fuerzas axiales F_1 y F_2 en las barras de la armadura simétrica mostrada en la figura si la temperatura de la barra central se incrementa en ΔT pero las barras externas no experimentan cambio en su temperatura. (Suponer que E , A y α son iguales para todas las barras.)



Prob. 2.6-23

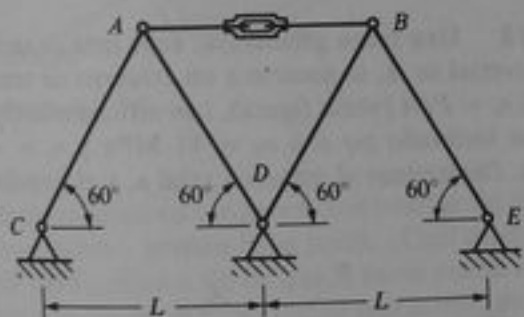
2.6-24 Una armadura simétrica de tres barras $ABCD$ (véase figura) experimenta un incremento de temperatura $\Delta T_1 = 20^\circ\text{C}$ en las dos barras exteriores y $\Delta T_2 = 70^\circ\text{C}$ en la barra central. Calcular las fuerzas F_1 y F_2 en las barras, si se supone (para todas las barras) que $E = 200$ GPa, $\alpha = 14 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ y $A = 900$ mm².

2.6-25 Cada barra de la armadura mostrada en la figura tiene una longitud $L = 5$ pie y un área de sección transversal $A = 0,50$ in². Las barras están hechas de acero con módulo de elasticidad $E = 29 \times 10^6$ psi. En la barra AB está integrado un tensor. Este tensor es de doble efecto, con rosca de 32 hilos por pul-



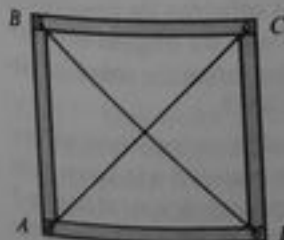
Prob. 2.6-24

gada. (Esto es, el paso de la rosca es $p = 1/32$ plg; por lo que una vuelta del tensor acorta la barra en $1/16$ plg.) La armadura está ensamblada con el tensor ajustado en forma tal que todas las barras están inicialmente libres de esfuerzos. ¿Cuántas vueltas n del tensor son necesarias para producir una fuerza de tensión $T = 4000$ lb en la barra AB ?



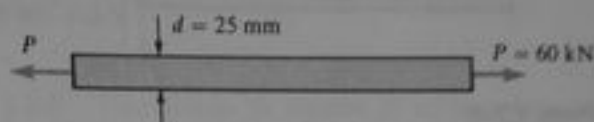
Prob. 2.6-25

2.6-26 Las barras exteriores del bastidor cuadrado mostrado en la figura están hechas de aluminio ($E_{al} = 10.6 \times 10^6$ psi, $\alpha_{al} = 13 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$), y las diagonales son alambres de acero ($E_{ac} = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_{ac} = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$). Las áreas de sección transversal de las barras de aluminio y los alambres de acero guardan una proporción 20:1. Determinar el esfuerzo σ_{ac} en los alambres de acero, si la temperatura del bastidor completo se incrementa 80°F .



Prob. 2.6-26

2.7-1 ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo τ_{max} en una barra circular (véase figura) de diámetro $d = 25$ mm sometida a una carga de tensión axial $P = 60$ kN?



Prob. 2.7-1

2.7-2 Una muestra para prueba a tensión de acero dulce presenta una lectura de elongación de 0.00200 plg sobre una longitud calibrada de 2 plg. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{max} en el material si se supone que $E = 30 \times 10^6$ psi.

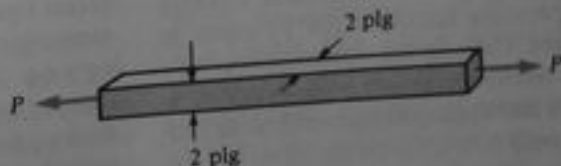
2.7-3 Un cilindro de prueba de concreto (véase figura) que tiene un diámetro $d = 150$ mm se somete a fuerzas de compresión axiales P en una máquina de pruebas. Si el esfuerzo cortante máximo en el concreto no debe exceder 14×10^6 Pa, ¿cuál es la carga axial máxima permisible P ?



Prob. 2.7-3

2.7-4 Determinar la carga de tensión permisible P sobre una barra de sección transversal cuadrada de 2 plg \times 2 plg (véase figura) si el esfuerzo de tensión permisible es $20,000$ psi y el esfuerzo cortante permisible es $13,000$ psi.

2.7-5 Una barra prismática de acero de sección transversal cuadrada de 3 plg \times 3 plg se somete a una carga de tensión $P = 135$ kips (véase figura). Determinar los esfuerzos normales y cortantes en las cuatro caras de un elemento girado un ángulo $\theta = 45^\circ$.



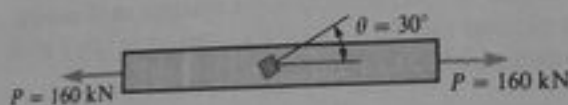
Prob. 2.7-4



Prob. 2.7-6

2.7-6 Resolver el problema anterior si la carga P es una carga de compresión en lugar de una carga de tensión.

2.7-7 Una barra prismática en tensión tiene un área de sección transversal $A = 1600 \text{ mm}^2$ y soporta una carga $P = 160 \text{ kN}$ (véase figura). Determinar los esfuerzos que actúan en todas las caras de un elemento girado un ángulo $\theta = 30^\circ$.



Prob. 2.7-7

2.7-8 Resolver el problema anterior si la carga P es una carga de compresión en lugar de una carga de tensión.

2.7-9 Resolver el Problema 2.7-7 para el ángulo $\theta = 75^\circ$.

2.7-10 Un alambre de latón de diámetro $d = 1/16 \text{ plg}$ se estira entre puntos fijos de forma tal que se encuentra bajo una fuerza de tensión $T = 32 \text{ lb}$ (véase figura). Si la temperatura del alambre subsecuentemente disminuye 50°F , ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en el material? El coeficiente de expansión térmica para el alambre es $\alpha_t = 10.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ y el módulo de elasticidad es $E_t = 15 \times 10^6 \text{ psi}$.



Prob. 2.7-10

2.7-11 Una barra metálica se coloca entre soportes rígidos a la temperatura ambiente (68°F) como se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre la sección inclinada pq si la temperatura se incrementa a 200°F . (Suponer $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ y $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$.)



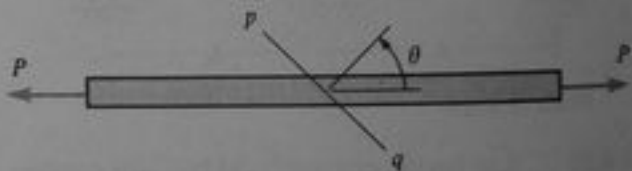
Prob. 2.7-11

2.7-12 Una barra de cobre con sección transversal rectangular se sitúa entre soportes rígidos (véase figura), después de lo cual la temperatura de la barra se incrementa 60°C . Determinar los esfuerzos en todas las caras de los elementos A y B e indicar tales esfuerzos sobre esquemas de los elementos. (Suponer $\alpha = 0.000017/^\circ\text{C}$ y $E = 120 \text{ GPa}$.)



Prob. 2.7-12

2.7-13 Una barra prismática, cuya área de sección transversal es A , se somete a un esfuerzo de tensión axial $\sigma_x = P/A$ (véase figura). Los esfuerzos sobre un plano inclinado pq son $\sigma_s = 81 \text{ MPa}$ y $\tau_s = -27 \text{ MPa}$. Determinar el esfuerzo axial σ , y el ángulo θ .

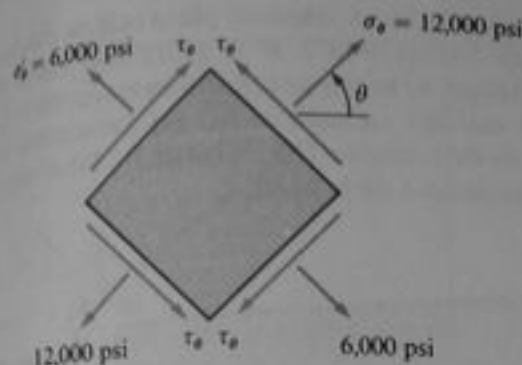


Prob. 2.7-13

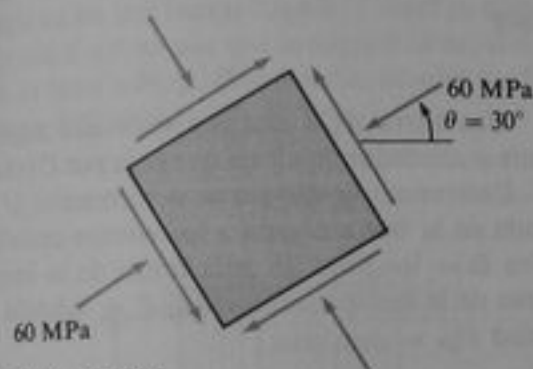
2.7-14 Sobre las caras de un elemento cortado de una barra en esfuerzo uniaxial, actúan esfuerzos normales de $12,000 \text{ psi}$ y $6,000 \text{ psi}$ (véase figura). Determinar el ángulo θ y el esfuerzo cortante τ_s . También, determinar el esfuerzo normal máximo σ , y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$.

2.7-15 Una barra prismática se somete a una fuerza axial, lo que ocasiona un esfuerzo de compresión de 60 MPa sobre un plano con un ángulo $\theta = 30^\circ$ (véase figura). ¿Cuáles son los esfuerzos sobre un elemento girado un ángulo de 45° ?

*2.7-16 Un miembro a tensión se construye al unir con pegamento dos piezas de material a lo largo de la línea pq (véase figura). Por razones prácticas el ángulo θ se limita al intervalo de 0° a 60° . El esfuerzo permisible



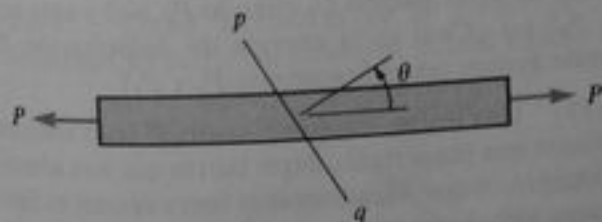
Prob. 2.7-14



Prob. 2.7-15

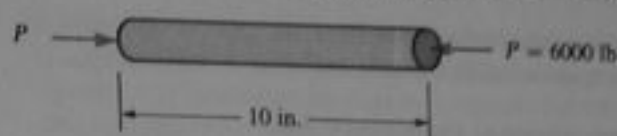
en la junta unida en cortante es tres cuartos del esfuerzo permisible a tensión en la junta. ¿Cuál debe ser el valor del ángulo θ a fin de que la barra pueda soportar la máxima carga P ? (Suponer que la resistencia de la junta pegada controla el diseño.)

2.7-17 Resolver el problema anterior si los esfuerzos permisibles en la junta son 2000 psi y 1000 psi en tensión y cortante, respectivamente. Determinar también la carga máxima permisible P si el área de la sección transversal de la barra es 1.5 plg^2 .



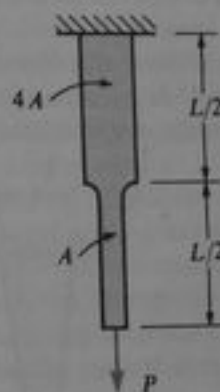
Probs. 2.7-16 y 2.7-17

2.8-1 Una barra prismática de acero de 10 plg de longitud se comprime con una fuerza $P = 6000 \text{ lb}$ (véase figura). Si se asume $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, calcular la cantidad de energía de deformación U almacenada en la barra si su área de sección transversal es $A = 4 \text{ plg}^2$.



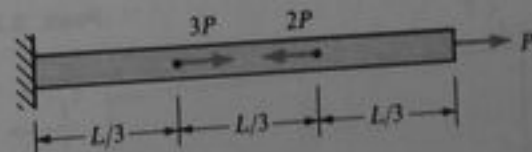
Prob. 2.8-1

2.8-2 Una fuerza de tensión P actúa sobre una barra que tiene dos diferentes áreas de sección transversal A y $4A$ como se muestra en la figura. (a) Obtener una fórmula para la energía de deformación U almacenada en la barra si se asume que E es el módulo de elasticidad del material. (b) ¿Cuál es el incremento en energía de deformación si la carga P se duplica a un valor $2P$?



Prob. 2.8-2

2.8-3 Obtener una fórmula para la energía de deformación U almacenada en la barra mostrada en la figura si el área de sección transversal es A y el módulo de elasticidad es E .



Prob. 2.8-3

2.8-4 Una columna de un edificio de tres niveles se somete a las cargas de piso como se muestra en la figura. La columna se restringe adecuadamente para prevenir pandeo. Calcular la cantidad de energía de deformación almacenada en la columna, si se asume $P = 150 \text{ kN}$, $H = 3 \text{ m}$, $A = 7500 \text{ mm}^2$ y $E = 200 \text{ GPa}$.

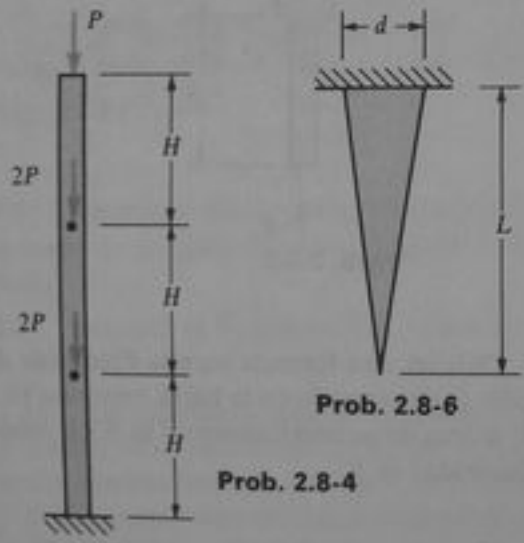
2.8-5 Calcular la energía de deformación por unidad de volumen (psi) y la energía de deformación por unidad de peso (plg) que puede almacenarse en cada uno

de los siguientes materiales sin exceder el límite de proporcionalidad (véase tabla).

Datos para el Problema 2.8-5

Material	Peso específico γ (lb/plg ³)	Módulo de elasticidad E (ksi)	Límite de proporcionalidad σ_p (psi)
Acero dulce	0.284	30,000	36,000
Acero para herramientas	0.284	30,000	120,000
Aluminio	0.0984	10,500	50,000
Caucho (suave)	0.040	0.300	200

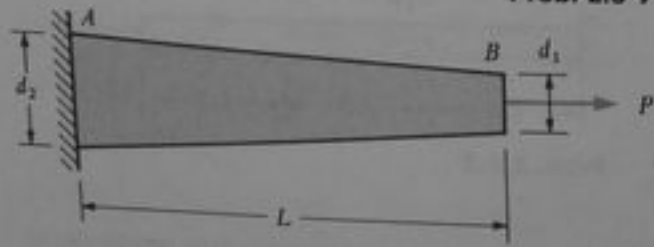
2.8-6 Una barra cónica con un diámetro d en el soporte y longitud L cuelga verticalmente bajo su propio peso (véase figura). Obtener una fórmula para la energía de deformación U de la barra. (Sea γ = peso específico y E = módulo de elasticidad del material.)



Prob. 2.8-4

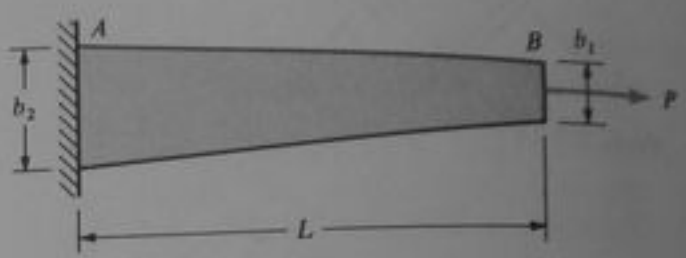
Prob. 2.8-6

Prob. 2.8-7



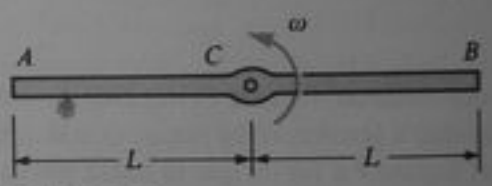
2.8-7 Una barra troncocónica AB de sección transversal circular se somete a una carga P en su extremo libre, como se indica en la figura. Los diámetros en los extremos son d_1 y d_2 , la longitud es L y el módulo de elasticidad es E . (a) Obtener una fórmula para la energía de deformación U de la barra. (b) Determinar el alargamiento δ de la barra debida a la carga P .

2.8-8 A una barra trapecial plana AB de espesor constante t y longitud L se le aplica una fuerza P (véase figura). El ancho de la barra en el soporte es b_2 y en el extremo cargado es b_1 . (a) Determinar la energía de deformación U en la barra. (b) Determinar el alargamiento δ de la barra.



Prob. 2.8-8

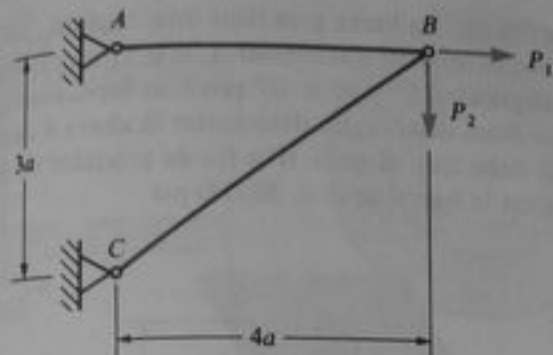
2.8-9 Una barra ACB gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje que pasa por C (véase figura). Determinar la energía de deformación U almacenada en la barra debida a los efectos centrifugos. (Sea L = longitud de cada brazo de la barra, A = área de la sección transversal, E = módulo de elasticidad y ρ = densidad.)



Prob. 2.8-9

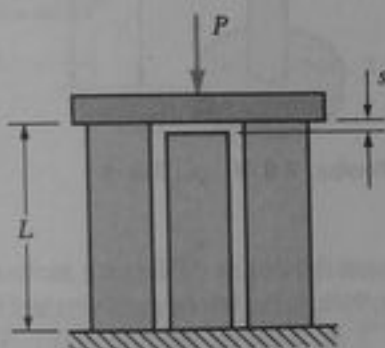
2.8-10 La armadura ABC mostrada en la figura soporta una carga horizontal P_1 y una carga vertical P_2 . Las barras tienen la misma rigidez axial EA . (a) ¿Cuál es la energía de deformación U_1 de la armadura cuando $P_2 = 0$ y sólo actúa P_1 ? (b) ¿Cuál es la energía de deformación U_2 cuando $P_1 = 0$ y sólo actúa P_2 ? (c) ¿Cuál es la energía de deformación U cuando actúan simultáneamente P_1 y P_2 ?

2.8-11 Una carga de compresión P se transmite mediante una placa rígida a tres barras que son idénticas excepto en que inicialmente la barra central es ligeramente menor que las otras dos barras (véase figura). Las dimensiones y propiedades del ensamble son las siguientes: $L = 1$ m, el área de sección transversal de cada barra es $A = 3000$ mm², módulo de elasticidad $E = 45$ GPa y la separación $s = 1$ mm. (a) Calcular el valor de la carga P necesario para cerrar el claro. (b) Evaluar la deflexión total descendente δ de la placa rígida cuando P tiene su valor máximo de 400 kN.



Prob. 2.8-10

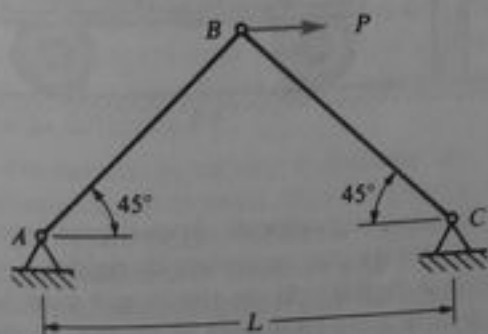
(c) Determinar la energía de deformación U almacenada en las tres barras cuando P tiene su máximo valor. (d) Explicar por qué la energía de deformación U no es igual a $P\delta/2$. (Sugerencia: dibujar un diagrama carga-deflexión.)



Prob. 2.8-11

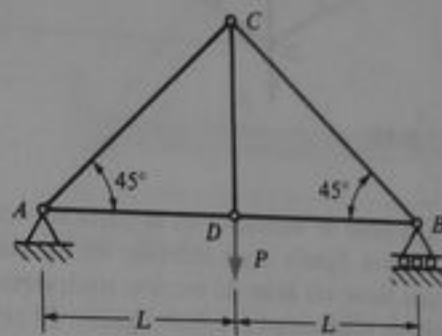
2.8-12 Cada una de las barras AB y BC de la armadura mostrada en la figura tiene un área de sección transversal A y un módulo de elasticidad E . (a) Determinar la energía de deformación U en la armadura debida a la carga horizontal P . (b) Determinar la deflexión horizontal δ del nudo B .

2.8-13 Todas las barras de la armadura plana mostrada en la figura tienen la misma rigidez axial



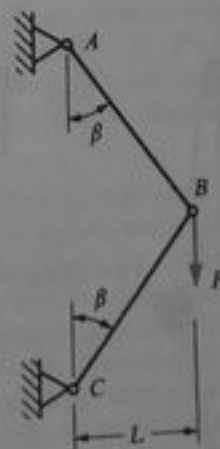
Prob. 2.8-12

EA . (a) Determinar la energía de deformación total U almacenada en la armadura debida a la carga P . (b) Mediante esta expresión para la energía de deformación, determinar la deflexión vertical δ de la junta D .



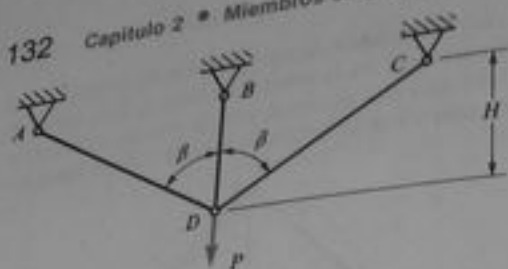
Prob. 2.8-13

2.8-14 Una armadura ABC soporta una carga vertical P como se muestra en la figura. Las dos barras AB y BC son idénticas con módulo de elasticidad E y área de sección transversal A . El ángulo β puede variarse al cambiar las longitudes de las barras pero el nudo B debe mantenerse a una distancia L de la pared vertical. (a) Evaluar la energía de deformación U de la armadura. (b) Determinar el ángulo β para el cual la energía de deformación es mínima. (c) Determinar la deflexión vertical correspondiente δ de la junta B .



Prob. 2.8-14

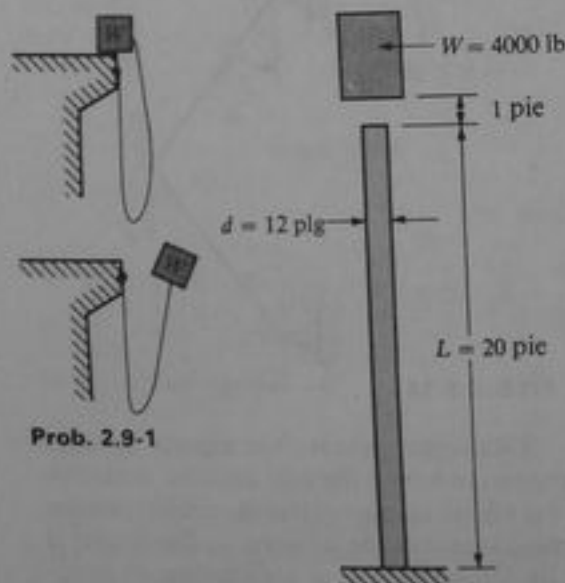
2.8-15 Una carga vertical P se soporta mediante tres alambres del mismo material (módulo de elasticidad E) y el mismo diámetro (área de sección transversal A) como se muestra en la figura. (a) Determinar la energía de deformación U de los alambres en términos de la deflexión vertical δ_D de la junta D mediante el empleo de la ecuación $U = EA\delta^2/2L$ para la energía de deformación. (b) Determinar la deflexión δ_D al igualar la energía de deformación al trabajo realizado por la carga P .



Prob. 2.8-15

2.9-1 Un peso W descansa en la parte superior de un muro y está fijado a un extremo de un alambre flexible que tiene un área de sección transversal A y un módulo de elasticidad E (véase figura). El otro extremo del alambre está firmemente atado al muro. En ese momento se empuja el peso fuera de la pared y cae libremente una altura igual a la longitud total del alambre. Obtener una fórmula para el esfuerzo máximo σ en el alambre, si se supone que el alambre se estira elásticamente al detener la caída del cuerpo.

2.9-2 Un peso $W = 4000$ lb cae desde una altura $h = 1$ pie sobre un poste vertical de madera de 20 pie de longitud y 12 plg de diámetro, que se supone completamente fijo en su extremo inferior (véase figura). Determinar el máximo esfuerzo de compresión σ en el poste si $E = 1.5 \times 10^6$ psi y el peso no rebota del poste.

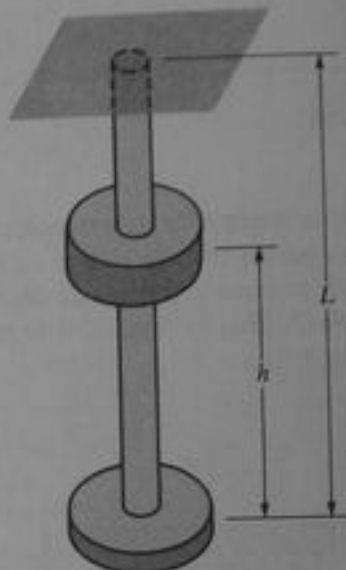


Prob. 2.9-1

Prob. 2.9-2

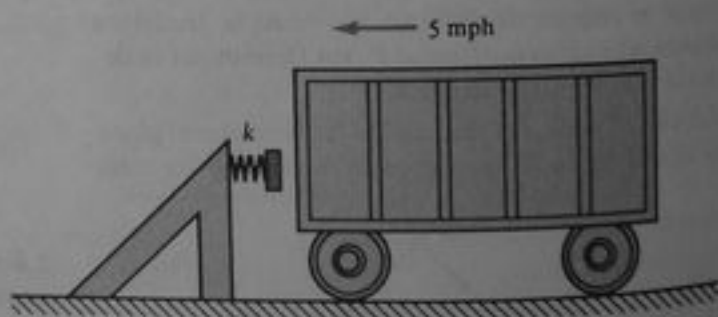
2.9-3 Un collar deslizante de peso $W = 100$ lb cae sobre una brida en la parte inferior de la barra guía

(véase figura). La barra guía tiene una longitud $L = 6$ pie, área de sección transversal $A = 0.5$ plg² y módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi. Si se supone que no hay pérdidas de energía, determinar la altura h desde la cual debe caer el peso W a fin de producir un esfuerzo en la barra de $\sigma = 30,000$ psi.



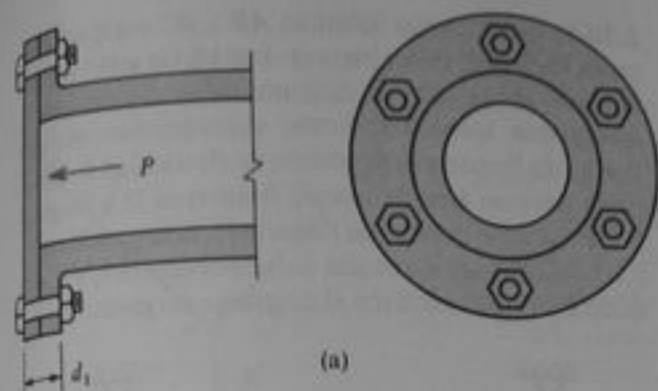
Probs. 2.9-3 y 2.9-4

2.9-4 La masa del collar deslizante mostrado en la figura es $M = 90$ kg. La barra guía vertical tiene una longitud $L = 3$ m, área de sección transversal $A = 340$ mm² y módulo de elasticidad $E = 170$ GPa. La masa se eleva hasta una altura h por encima de la brida y luego se suelta. Si se supone que no hay pérdidas de energía, calcular la altura h requerida para producir un esfuerzo $\sigma = 400$ MPa en la barra.

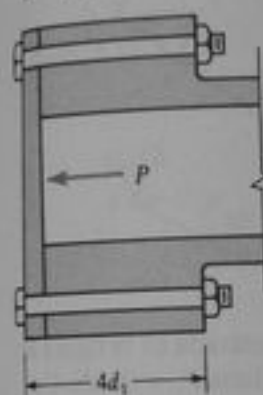


Prob. 2.9-5

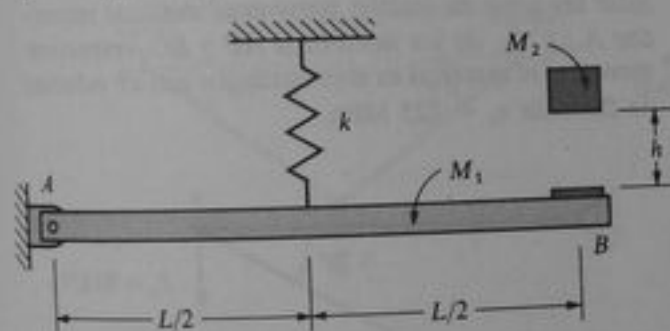
2.9-5 Un amortiguador de choques para vagones de mina se construye con un resorte de rigidez $k = 1000$ lb/plg (véase figura). Si un vagón que pesa 1500 lb viaja a 5 mph cuando golpea el resorte, ¿cuál es la deflexión máxima δ de éste?



(a)



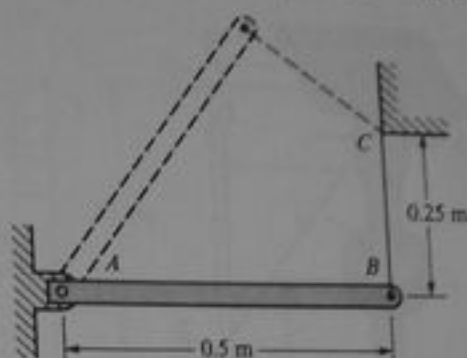
(b) Prob. 2.9-6



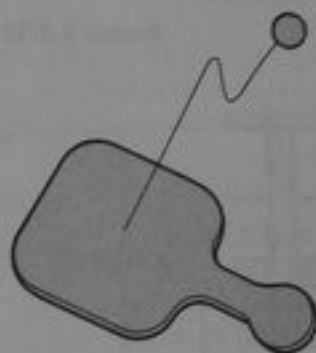
Prob. 2.9-7

2.9-6 La tapa plana de un recipiente cilíndrico se fija a una brida por medio de seis tornillos, como se muestra en la parte (a) de la figura. La longitud de presión de los tornillos es la distancia d_1 . Bajo una cierta carga dinámica P se desarrolla en los tornillos un esfuerzo de tensión máximo σ_1 . Suponga que la conexión se rediseña con herrajes para los tornillos que aumentan su longitud de presión a $4d_1$, como se muestra en la parte (b) de la figura. ¿Qué esfuerzo de tensión σ_2 se desarrolla ahora en los tornillos bajo la misma carga dinámica P ?

2.9-7 Un resorte de rigidez k sostiene una barra rígida prismática AB de masa M_1 y longitud L (véase figura). Un objeto pesado de masa M_2 cae sobre la barra desde una altura h . Obtener una fórmula para la deflexión máxima δ del punto B , si se supone que no hay pérdidas de energía durante el impacto. (Esta suposición es lógica si M_2 es mucho mayor que M_1 .)



Prob. 2.9-8

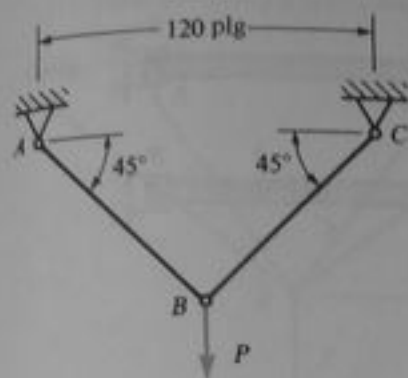


Prob. 2.9-9

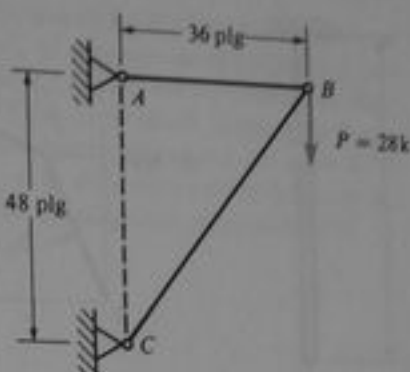
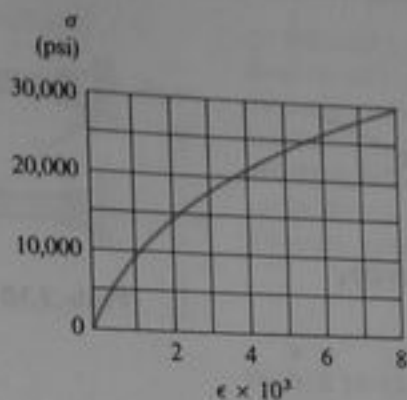
2.9-8 Una barra rígida AB que tiene una masa $M = 1.0$ kg está articulada en A y sustentada en B por una cuerda de nilón BC que tiene un área de sección transversal $A = 30$ mm² y $E = 2.1$ GPa (véase figura). Si la barra se levanta hasta su máxima altura y luego se suelta, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ en la cuerda?

2.9-9 Una pequeña pelota de hule (peso $W = 1$ onza) se ata a una paleta de madera mediante una tira o banda de caucho (véase figura). La longitud libre de la tira es $L = 12$ plg, su área de sección transversal es $A = 0.0025$ plg² y su módulo de elasticidad es $E = 300$ psi. ¿Cuál es la velocidad v de la pelota cuando abandona la paleta (después de haber sido golpeada por ésta) si la liga de caucho se estira a una longitud total $4L$ (o 48 plg). Supóngase un comportamiento elástico lineal de la liga, y despreciar la energía potencial debida al cambio de elevación de la pelota.

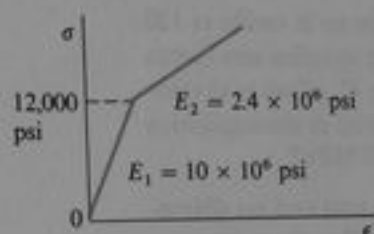
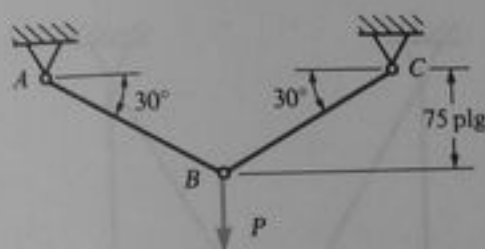
2.9-10 Un collar deslizante de masa M cae desde una altura h sobre el extremo inferior de una barra no prismática (véase figura). La parte superior de la barra tiene diámetro d_2 y la parte inferior tiene diámetro d_1 . Las longitudes de las dos partes son L_2 y L_1 , respectivamente. El material de la barra permanece linealmente elástico con módulo de elasticidad E . Determinar la deflexión máxima δ y el esfuerzo de



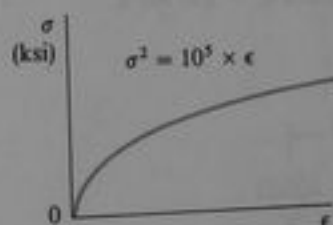
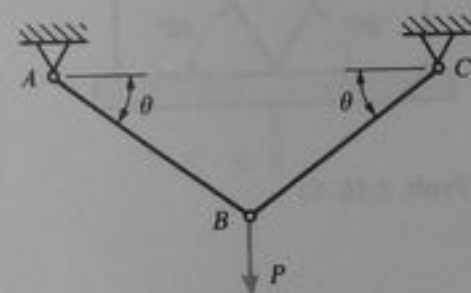
Prob. 2.10-3



Prob. 2.10-5



Prob. 2.10-4



Prob. 2.10-6

da uno de los siguientes valores de la carga: $P = 8$ k, 16 k, 24 k, 32 k y 40 k. A partir de estos resultados trazar un diagrama carga-deflexión para la estructura.

2.10-5 Una armadura simple ABC sostiene una carga $P = 28$ k (véase figura). El material de las barras tiene el diagrama esfuerzo-deformación bilineal mostrado en el problema anterior; el mismo diagrama puede utilizarse para tensión y compresión. Las áreas de sección transversal de las barras AB y BC son 1.5 plg^2 y 3.5 plg^2 , respectivamente. Determinar las componentes horizontal y vertical δ_x y δ_y de la deflexión del nudo B de la armadura.

2.10-6 La armadura simétrica ABC mostrada en la figura sostiene una carga vertical P . Las barras AB y BC son idénticas con área de sección transversal A y longitud L . Asumir que la relación entre esfuerzo y deformación está dada por la ecuación $\sigma^m = k\epsilon$, donde m y k son constantes para un material particular. (a) Obtener una fórmula para la deflexión vertical δ_y de la junta B en términos de P , A , L , θ , m y k . Trazar un

diagrama carga-deflexión (P versus δ_y) al emplear las siguientes unidades y valores numéricos: $m = 2$, $k = 10^6$, σ tiene unidades de ksi, ϵ es adimensional, $A = 1 \text{ plg}^2$, $L = 80 \text{ plg}$ y $\theta = 45^\circ$.

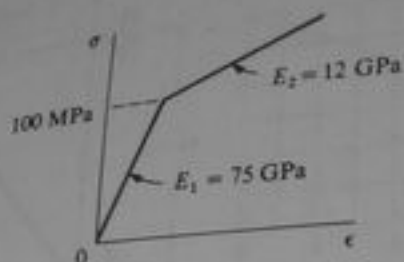
2.10-7 Obtener una expresión para el alargamiento δ de una barra vertical colgada de su extremo superior y debida a su propio peso si la relación esfuerzo-deformación para el material es $\sigma^m = k\epsilon$, donde m y k son constantes. (Expresar δ como una función de la longitud L de la barra, el peso unitario γ del material y las constantes m y k .)

2.10-8 Una varilla larga que cuelga verticalmente soporta una carga P en su extremo inferior (véase figura). El material tiene el diagrama esfuerzo-deformación bilineal mostrado en la figura. Determinar el alargamiento δ de la barra, debida a su propio peso y la fuerza P si el peso unitario $\gamma = 28 \text{ kN/m}^3$, el área de sección transversal $A = 960 \text{ mm}^2$, $L = 360 \text{ m}$ y $P = 92 \text{ kN}$.

2.10-9 Una varilla de acero AB de 12 mm de diámetro se estira severamente entre dos soportes en

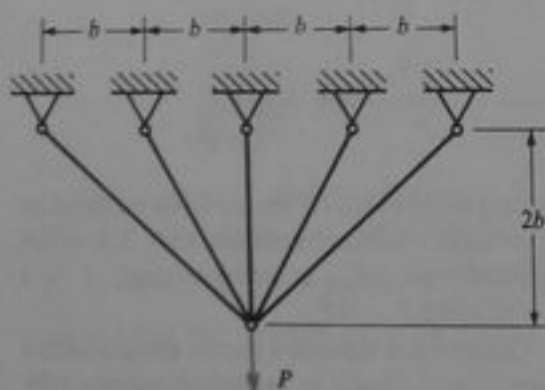


Prob. 2.10-8



forma tal que el esfuerzo de tensión en la varilla es 120 MPa (véase figura). En ese instante se aplica una fuerza P a la varilla en un sitio intermedio C . ¿Cuál es el valor último P_u de esta carga si el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 250$ MPa?

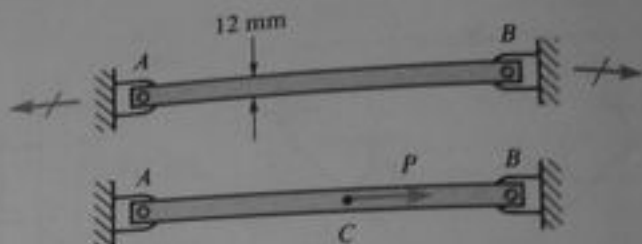
2.10-10 Cinco alambres, cada uno con un diámetro de 10 mm, soportan una carga P como se muestra en la figura. Determinar la carga última P_u si el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 290$ MPa.



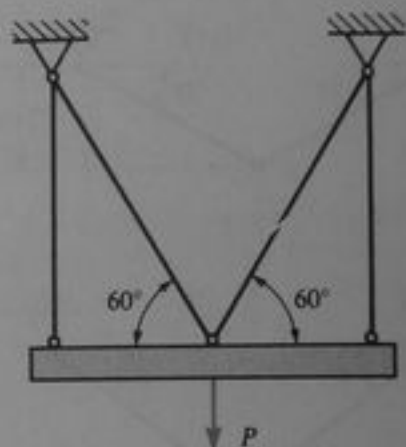
Prob. 2.10-10

2.10-11 Una fuerza P es cargada por una viga horizontal y a ésta la soporta el arreglo simétrico de cuatro varillas que se muestra en la figura. Cada varilla tiene un área de sección transversal A y está hecha de un material elastoplástico que tiene un esfuerzo de fluencia σ_y . Determinar la carga última P_u .

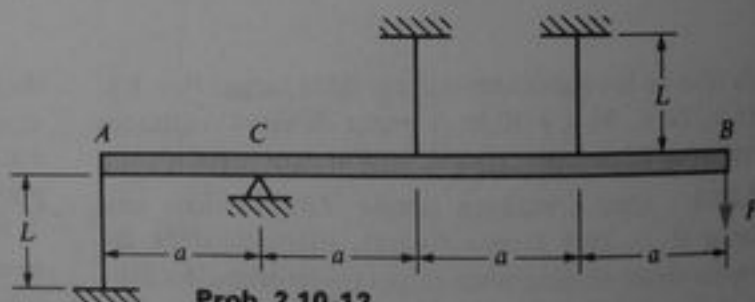
***2.10-12** Una barra rígida AB está soportada por un fulcro en C y cargada por una fuerza P en su extremo B (véase figura). Tres alambres idénticos hechos de un material elastoplástico (esfuerzo de fluencia σ_y y módulo de elasticidad E) soportan la



Prob. 2.10-9



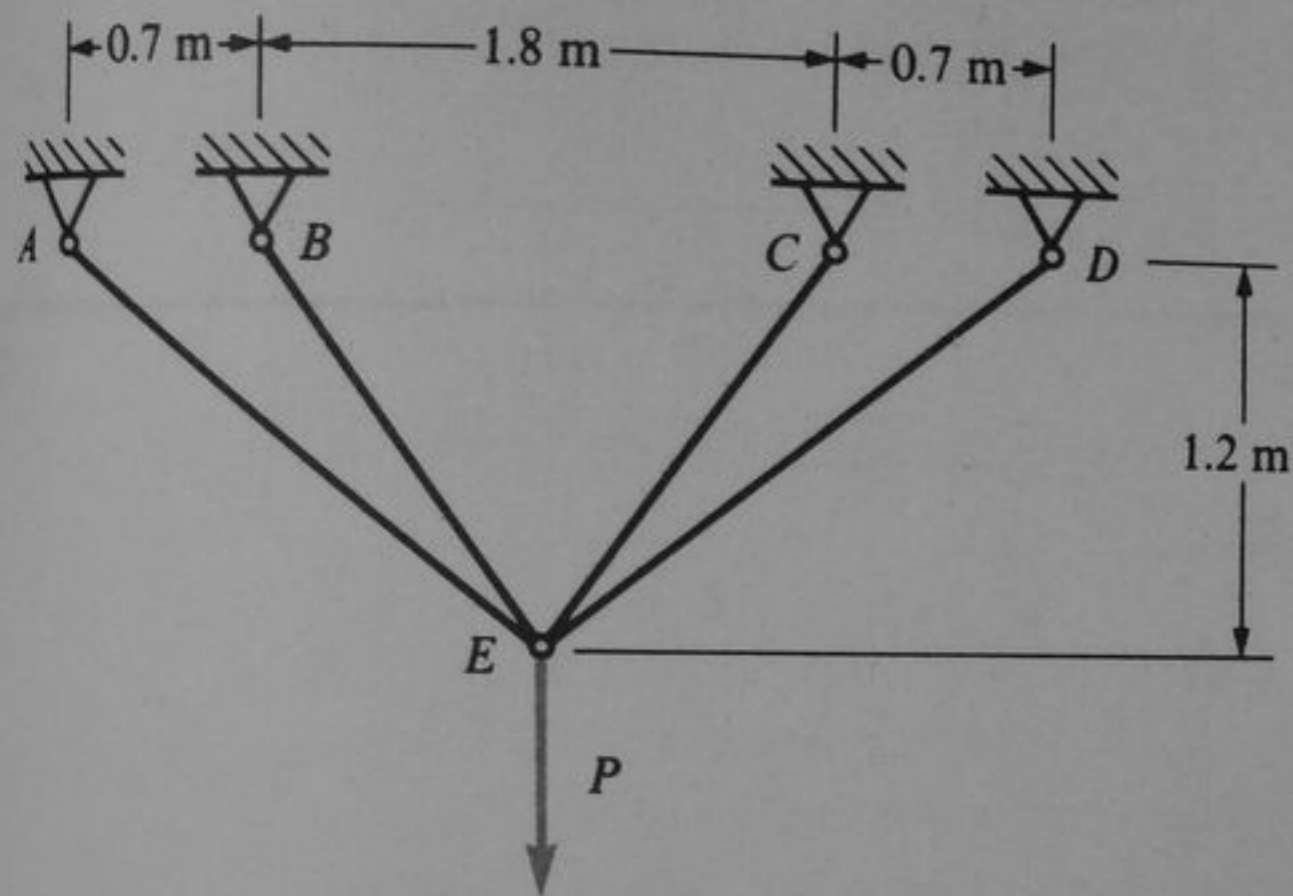
Prob. 2.10-11



Prob. 2.10-12

barra rígida. Cada alambre tiene un área de sección transversal A y longitud L . Determinar la carga de fluencia P_y , la deflexión de fluencia correspondiente δ_y del punto B , la carga última P_u y la deflexión δ_u del punto B cuando la carga alcanza el valor P_u . Dibujar también el diagrama carga-deflexión que muestra la fuerza P contra la deflexión δ del punto B .

***2.10-13** La armadura simétrica $ABCDE$ mostrada en la figura se construye con cuatro barras y soporta una carga P en la junta E . Cada una de las dos barras exteriores tiene un área de sección transversal



de 200 mm^2 y cada una de las dos barras interiores un área de 400 mm^2 . El material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 240 \text{ MPa}$ y módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$. Determinar la carga de fluencia P_y , la deflexión correspondiente δ_y del nudo E , la carga última P_u y la deflexión correspondiente δ_u . Después, construir un diagrama carga-deflexión.

Prob. 2.10-13

Torsión

3.1 INTRODUCCIÓN

La torsión se refiere al torcimiento de un miembro estructural cuando se carga con momentos que producen rotación alrededor de su eje longitudinal. Este tipo de carga se representa en la Fig. 3-1a, que muestra una barra recta, empotrada en un extremo y cargada con dos pares de fuerzas. Cada pareja de fuerzas forma un par que tiende a girar la barra alrededor de su eje longitudinal. El momento de un par de fuerzas es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia entre sus líneas de acción; así que, el primer par tiene un momento $T_1 = P_1 d_1$ y el segundo tiene un momento $T_2 = P_2 d_2$.

Por conveniencia en la representación de pares se indicará el momento de un par mediante un vector con doble punta de flecha (Fig. 3-1b). La flecha es perpendicular al plano que contiene al par, y el sentido del par se indica mediante la regla de la mano derecha para vectores de momentos. Una representación opcional es el empleo de una flecha curva que indica el sentido del giro (Fig. 3-1c). Los pares que producen torcimiento de una barra, tales como T_1 y T_2 de la Fig. 3-1, se denominan **momentos torsionantes, pares de torsión o torques**.

En este capítulo se plantearán fórmulas para los esfuerzos y deformaciones producidos en barras circulares sometidas a torsión. Constituyen ejemplos de tales barras los ejes y árboles (o flechas) de transmisión de maquinaria. También se consi-

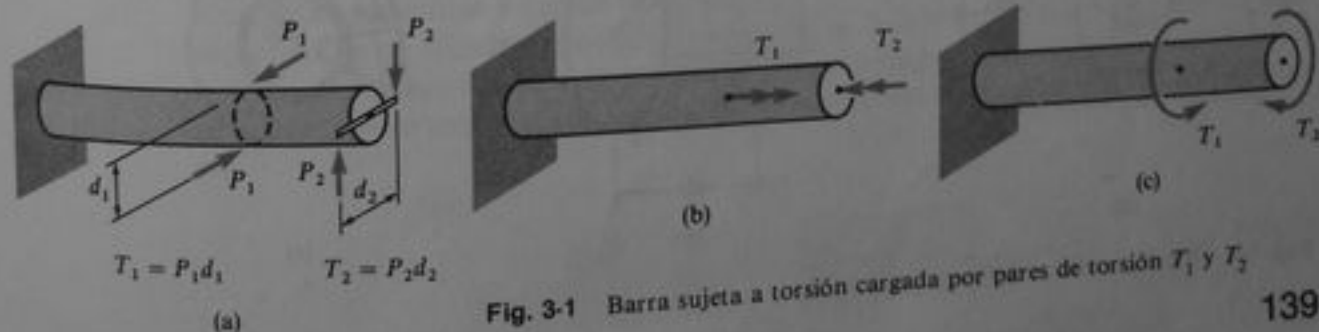


Fig. 3-1 Barra sujeta a torsión cargada por pares de torsión T_1 y T_2

derarán miembros tubulares de pared delgada del tipo utilizado en estructuras aero-espaciales y en otras aplicaciones. Por supuesto, el análisis de configuraciones más complicadas requiere el empleo de métodos más avanzados que los presentados aquí.

3.2 TORSIÓN DE BARRAS CIRCULARES

Consideremos una barra o eje de sección transversal circular sujeta a torsión por pares T aplicados en sus extremos (Fig. 3-2a). Una barra cargada en esta forma se considera sometida a **torsión pura**. Si se considera la simetría, se demuestra que las secciones transversales de la barra circular giran como cuerpos rígidos alrededor del eje longitudinal, los radios permanecen rectos y la sección transversal permanece plana y circular. También, si el ángulo de torsión total es pequeño, no variarán la longitud de la barra ni su radio.

Durante la torsión ocurrirá una rotación alrededor del eje longitudinal, de un extremo de la barra respecto al otro. Por ejemplo, si se fija el extremo izquierdo de la barra, entonces el extremo derecho girará un pequeño ángulo ϕ con respecto al extremo izquierdo (Fig. 3-2a). El ángulo ϕ se conoce como **ángulo de torsión**. Además, una línea longitudinal en la superficie de la barra, tal como la línea nn , girará un pequeño ángulo a la posición nn' . Debido a esta rotación, un elemento infinitesimal rectangular sobre la superficie de la barra, tal como el elemento de longitud dx señalado en la figura, adquiere la forma de un romboide. Este elemento se indica nuevamente en la Fig. 3-2b, donde la porción discoide se separa del resto de la barra. La configuración original del elemento se designa por $abcd$. Durante la torsión la sección transversal derecha gira con respecto a la cara opuesta, y los puntos b y c se trasladan a b' y c' , respectivamente. Las longitudes de los lados del elemento no cambian durante esta rotación, pero los ángulos de las esquinas ya no miden 90° . Así, se aprecia que el elemento está en un estado de **cortante puro** (véase Sección 1.6) y la magnitud de la deformación por cortante γ es igual a la disminución en el ángulo recto en a . Esta reducción en el ángulo es

$$\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

La distancia bb' es la longitud de un arco pequeño de radio r subtendido por el ángulo $d\phi$, que es el ángulo de rotación de una sección transversal con respecto a la otra. De esta manera, se determina que $bb' = r d\phi$. Además, la distancia ab es igual

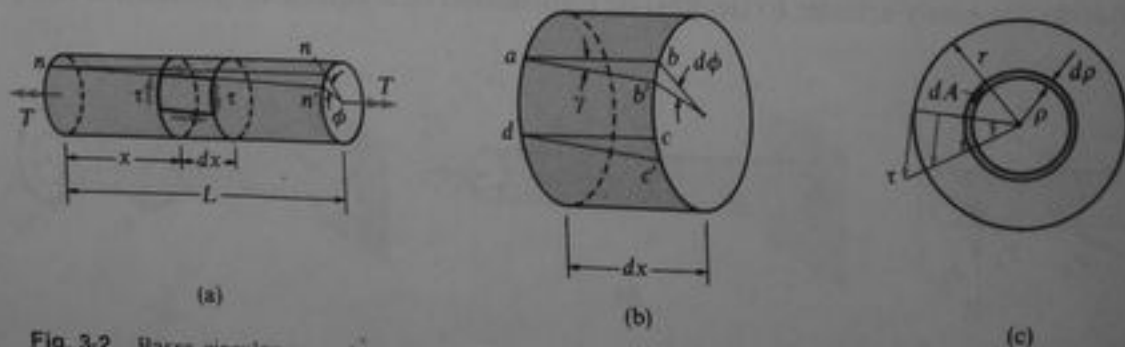


Fig. 3-2 Barra circular sometida a torsión pura

a dx , la longitud del elemento. Al sustituir estas cantidades en la ecuación anterior, se obtiene

$$\gamma = \frac{r d\phi}{dx}$$

como la expresión para la deformación por cortante.

La cantidad $d\phi/dx$ representa la razón de cambio del ángulo de torsión ϕ . En general, tanto ϕ como $d\phi/dx$ son funciones de x . Se indicará la cantidad $d\phi/dx$ mediante el símbolo θ y se referirá como **ángulo de torsión por unidad de longitud**. Así,

$$\gamma = \frac{r d\phi}{dx} = r\theta \quad (3-1)$$

En el caso especial de torsión pura, la razón de cambio $d\phi/dx$ es constante en toda la longitud de la barra, ya que cada sección transversal está sometida al mismo par. Por lo tanto, se obtiene $\theta = \phi/L$, donde L es la longitud de la barra y la Ec. (3-1) resulta

$$\gamma = r\theta = \frac{r\phi}{L} \quad (3-2)$$

para la torsión pura. Advierta que las ecuaciones anteriores se basan únicamente en conceptos geométricos y son válidas para una barra circular de cualquier material, tanto elástico como inelástico, lineal o no lineal.

El esfuerzo cortante τ en la barra circular tiene los sentidos mostrados en la Fig. 3-2a. Para un material linealmente elástico, esos esfuerzos cortantes se relacionan con las deformaciones angulares por medio de la Ley de Hooke en cortante (Ec. 1-9); por lo tanto, de la Ec. (3-1) se obtiene

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \quad (3-3)$$

donde G es el módulo de elasticidad en cortante. Las Ecs. (3-1) y (3-3) relacionan las deformaciones y los esfuerzos, para un elemento en la superficie de la flecha, con el ángulo de torsión por unidad de longitud.

Las deformaciones y esfuerzos en el interior de la barra pueden determinarse en forma similar a la empleada para un elemento en la superficie de la misma. Dado que los radios de las secciones transversales de la barra permanecen rectos y sin alteración durante la torsión, se aprecia que lo explicado previamente para un elemento $abcd$ de la superficie exterior sirve también para un elemento similar situado en la superficie de un cilindro interior de radio ρ (Fig. 3-2c). Por lo tanto, tal elemento interior también se encuentra en un estado de cortante puro con su deformación angular y su esfuerzo cortante correspondientes representados por las ecuaciones siguientes:

$$\gamma = \rho\theta$$

$$\tau = G\rho\theta$$

(3-4a, b)

Estas ecuaciones establecen que la deformación angular y el esfuerzo cortante en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro, y tienen sus valores máximos para un elemento de la superficie externa. La distribución de esfuerzo sobre la sección transversal de la barra se ilustra en la Fig. 3-2c mediante el diagrama de esfuerzo triangular.

Los esfuerzos cortantes que actúan en el plano de la sección transversal se acompañan de esfuerzos cortantes de la misma magnitud que actúan sobre planos longitudinales de la barra (véase Fig. 3-3). Este resultado proviene del hecho de que siempre existen esfuerzos cortantes iguales en planos mutuamente perpendiculares, como se explicó en la Sección 1.6. Si un material es más frágil en cortante sobre planos longitudinales que sobre planos de secciones transversales, como en el caso de una barra circular hecha de madera, las primeras fracturas debidas a la torsión aparecerán sobre la superficie en dirección longitudinal.

El estado de esfuerzo cortante puro en la superficie de la flecha (Fig. 3-2a) equivale a esfuerzos de tensión y compresión iguales sobre un elemento girado un ángulo de 45° , como se explica en la Sección 3.4. Por lo tanto, un elemento rectangular con lados a 45° respecto al eje de la flecha estará sometido a los esfuerzos de tensión y compresión señalados en la Fig. 3-4. Si una barra sujeta a torsión está hecha de un material que es más frágil en tensión que en cortante, la falla ocurrirá por tensión a lo largo de una hélice a 45° respecto al eje. Es fácil demostrar este tipo de falla si se tuerce un pedazo de tiza o gis ordinario.

La relación entre el par aplicado T y el ángulo de torsión ϕ (Fig. 3-2a) puede determinarse si se parte de la condición de que el momento resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal (Fig. 3-2c) debe ser estáticamente equivalente al par aplicado T . La fuerza cortante que actúa sobre un elemento de área dA (porción sombreada en la figura) es τdA , y el momento de esta fuerza respecto al eje de la barra es $\tau\rho dA$. Mediante la Ec. (3-4b) se establece que este momento es igual a $G\theta\rho^2 dA$. El momento torsionante total T constituye la suma, sobre toda el área de la sección transversal, de tales momentos elementales; así,

$$T = \int G\theta\rho^2 dA = G\theta \int \rho^2 dA = G\theta I_p \quad (a)$$

en la cual

$$I_p = \int \rho^2 dA \quad (3-5)$$

es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular. Para un círculo de radio r y diámetro d , el momento polar de inercia (véase Apéndice D, Caso 9) es

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3-6)$$



Fig. 3-3 Esfuerzos cortantes longitudinales en una barra circular



Fig. 3-4 Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a 45° del eje longitudinal

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \quad (3-7)$$

la cual muestra que θ , el ángulo de torsión por unidad de longitud, es directamente proporcional al momento torsionante T e inversamente proporcional al producto GI_p , conocido como la **rigidez torsional total** de la barra. El ángulo de torsión total ϕ , igual a θL , es

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} \quad (3-8)$$

El ángulo de torsión ϕ se mide en radianes. Si se emplean unidades del Sistema Internacional, el momento torsionante T debe expresarse en newton metros (N·m), la longitud L en metros (m), el módulo de elasticidad en cortante G en pascals (Pa) y el momento polar de inercia I_p en metros a la cuarta potencia (m⁴). Asimismo, si se emplean unidades del Sistema Inglés, T debe expresarse en pulgada-libras (plg·lb), L en pulgadas (plg), G en libras por pulgada cuadrada (psi) e I_p en pulgadas a la cuarta potencia (plg⁴).

La cantidad GI_p/L es la **rigidez torsional** (unitaria) de una barra circular, y representa el momento requerido para producir un ángulo de rotación unitario de un extremo con respecto al otro. También, la **flexibilidad torsional** se define como el recíproco de la rigidez torsional, o sea L/GI_p , y es igual a la rotación producida por un momento unitario. Las expresiones anteriores son análogas a la de rigidez axial EA/L y de flexibilidad axial L/EA (véanse Ecs. 2-2 y 2-3).

La Ec. (3-8) se utiliza para determinar el módulo de elasticidad en cortante G para varios materiales. Por medio de la realización de una prueba de torsión sobre un espécimen circular, puede determinarse el ángulo de torsión ϕ producido por un momento torsionante T conocido. Luego puede calcularse la magnitud de G mediante la Ec. (3-8).

El **esfuerzo cortante máximo** τ_{\max} en una barra circular sometida a torsión puede determinarse al sustituir la expresión para θ (Ec. 3-7) en la expresión para r (Ec. 3-3); así,

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_p} \quad (3-9)$$

Esta ecuación, que se conoce como **fórmula de torsión**, establece que el máximo esfuerzo cortante es proporcional al momento de torsión aplicado T y al radio r , e inversamente proporcional al momento polar de inercia de la sección transversal. Al sustituir $r = d/2$ e $I_p = \pi d^4/32$, se obtiene

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (3-10)$$

como la fórmula para el esfuerzo cortante máximo en una barra sólida. El esfuerzo cortante a una distancia ρ del centro es

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p} \quad (3-11)$$

la cual se obtiene de la Ec. (3-4b). Las unidades del esfuerzo cortante son pascals (Pa) si se emplean unidades del Sistema Internacional, y libras por pulgada cuadrada (psi) o kips por pulgada cuadrada (ksi) si se emplean unidades del Sistema Inglés.*

Barras circulares huecas. Las barras huecas son mucho más eficaces para resistir cargas torsionales que las barras macizas. Como se explicó en los párrafos anteriores, los esfuerzos cortantes en una barra circular enteramente sólida son máximos en el perímetro de la sección transversal y nulos en el centro. Por lo tanto, mucho del material en una barra eje no hueca se esfuerza considerablemente por debajo del esfuerzo cortante permisible. Si son importantes una reducción de peso y un ahorro de material, entonces se aconseja utilizar barras huecas.

El análisis de la torsión de una barra circular hueca es casi idéntico al de una barra sólida. Las deducciones presentadas anteriormente para una barra maciza no cambian esencialmente si la barra es hueca. Por lo que pueden emplearse las mismas expresiones básicas para la deformación angular γ y el esfuerzo cortante τ (véanse Ecs. 3-4a y b). Por supuesto, la distancia radial ρ que aparece en tales expresiones se limita al margen de r_1 a r_2 , donde r_1 es el radio interior y r_2 es el radio exterior de la barra circular (Fig. 3-5).

La relación entre el momento aplicado T y el ángulo de torsión por unidad de longitud θ se representa por la Ec. (a), excepto que los límites sobre la integral para el momento polar de inercia I_p (véase Ec. 3-5) son $\rho = r_1$ y $\rho = r_2$. Luego I_p , que es el momento polar de inercia del área anular indicada en la Fig. 3-5, es

$$I_p = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \quad (3-12)$$

Si el tubo es muy delgado (esto es, si su espesor t es pequeño comparado con su radio), entonces pueden emplearse las siguientes fórmulas aproximadas (véase Caso 10 en el Apéndice D):

$$I_p \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \quad (3-13)$$

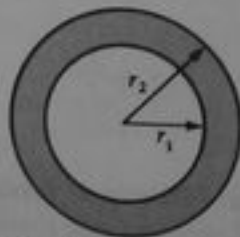


Fig. 3-5 Barra circular hueca

* La teoría de la torsión para barras circulares se originó con el trabajo del célebre científico francés C. A. de Coulomb (1736-1806); Thomas Young y A. Duleau (véase Ref. 3-1) realizaron desarrollos posteriores. La teoría general de la torsión (para barras de cualquier perfil) se debe al más connotado analista de la elasticidad de todos los tiempos, Barré de Saint-Venant (1797-1886); véase Ref. 3-2.

donde r y d son el radio y el diámetro medios, respectivamente. Las ecuaciones para θ , ϕ y τ obtenidas para una barra circular (véanse Ecs. 3-7 a 3-9) pueden utilizarse para una barra hueca cuando I_p se evalúa de acuerdo con la Ec. (3-12) o, si procede, con la Ec. (3-13). Por supuesto, el espesor de pared de una barra hueca debe ser suficiente para evitar la posibilidad de arrugamiento o pandeo de la pared.

Ejemplo 1

Una barra eje maciza (flecha) de acero de 60 mm de diámetro se diseña mediante un esfuerzo cortante permisible $\tau_{perm} = 40$ MPa y un ángulo de torsión admisible por unidad de longitud $\theta = 1^\circ$ por metro. Determinar el par de torsión máximo permisible T que debe aplicarse a la barra, si se supone que $G = 80$ GPa.

El par permisible T_1 basado en el esfuerzo cortante permisible se obtiene de la fórmula de torsión $\tau_{m\acute{a}x} = 16T/\pi d^3$ (véase Ec. 3-10). Así, obtenemos

$$T_1 = \frac{\pi d^3 \tau_{perm}}{16} = \frac{\pi}{16} (0.060 \text{ m})^3 (40 \text{ MPa}) = 1700 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Con base en el ángulo de torsión permisible por unidad de longitud, obtenemos el par permisible T_2 de la Ec. (3-7):

$$T_2 = GI_p \theta = (80 \text{ GPa}) \left(\frac{\pi}{32} \right) (0.060 \text{ m})^4 \left(1 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} \right) \left(\frac{1}{1.0 \text{ m}} \right) = 1780 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El par máximo permisible de torsión es el más pequeño de estos valores; luego, $T = 1700$ N·m.

Ejemplo 2

Una barra hueca y una barra maciza construidas del mismo material tienen la misma longitud y el mismo radio exterior r (Fig. 3-6). El radio interior de la primera es $0.6r$. Si se supone que ambos elementos se someten al mismo momento torsionante, comparar los esfuerzos cortantes máximos desarrollados en las flechas. También, comparar los pesos de las dos barras y sus ángulos de rotación.

Los esfuerzos cortantes máximos son proporcionales a $1/I_p$ (véase Ec. 3-9) puesto que los pares T y los radios r son los mismos. Para la barra maciza, tenemos

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = 0.5\pi r^4$$

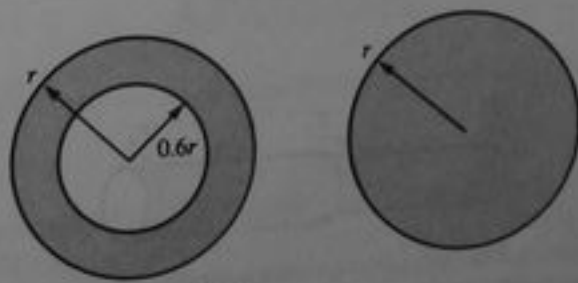


Fig. 3-6 Ejemplo 2

y para la barra hueca

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} - \frac{\pi(0.6r)^4}{2} = 0.4352\pi r^4$$

Por lo tanto, la relación entre el esfuerzo cortante máximo en la flecha hueca y el mismo en la flecha maciza es $0.5/0.4352$, o sea 1.15. Los ángulos de rotación guardan la misma proporción que los esfuerzos (véase Ec. 3-3).

Los pesos de las barras o flechas son proporcionales a las áreas de la sección transversal, por lo que, el peso de la flecha maciza es proporcional a πr^2 y el peso de la hueca es proporcional a

$$\pi r^2 - \pi(0.6r)^2 = 0.64\pi r^2$$

Por lo tanto, el peso de esta última es 64% del peso de la primera.

Estos resultados muestran la superioridad inherente de las flechas huecas. En este ejemplo, la barra hueca tiene 15% más esfuerzo y ángulo de rotación, pero 36% menos peso. Por supuesto, estas proporciones serán diferentes para otras relaciones entre los radios interior y exterior.

3.3 TORSIÓN NO UNIFORME

Como se explicó en la sección anterior, *torsión pura* se refiere a la torsión de una barra prismática sometida a pares que actúan únicamente en los extremos. La **torsión no uniforme** difiere de la torsión pura en que la barra no requiere ser prismática y los pares aplicados pueden variar en toda la longitud. En tales situaciones, se suele analizar la barra mediante la aplicación de las fórmulas de torsión pura en forma especializada, como se muestra en los casos siguientes.

Un ejemplo de torsión no uniforme se representa en la Fig. 3-7, la cual muestra una barra constituida por dos segmentos de diferente diámetro y con pares aplicados en varias secciones transversales. Cada región de la barra entre cargas aplicadas o entre cambios en sección transversal se encuentra en torsión pura, por lo que las fórmulas obtenidas en la sección anterior pueden aplicarse a cada parte por separado. Para tal efecto, es necesario determinar la magnitud y sentido del par interno en cada región. Luego, a partir del par interno, el esfuerzo máximo y el ángulo de rotación para cada región pueden calcularse con las Ecs. (3-9) y (3-8), respectivamente. El **ángulo de torsión total**, de un extremo de la barra con respecto al otro, se obtiene por sumatoria mediante la fórmula general

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_{pi}} \quad (3-14)$$

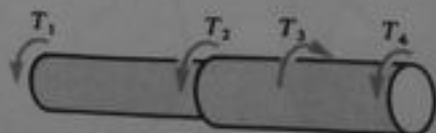


Fig. 3-7 Barra sujeta a torsión no uniforme

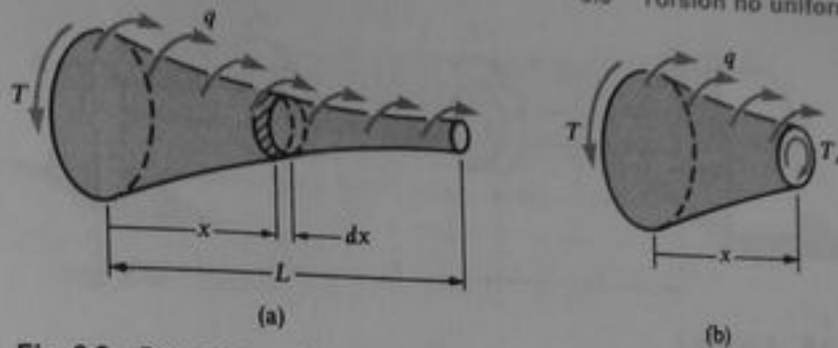


Fig. 3-8 Barra con sección transversal variable y momento torsionante variable

En esta ecuación el subíndice i es un índice numérico para las diferentes regiones de la barra y n es la cantidad total de regiones. En las secciones donde el diámetro cambia bruscamente se presentan grandes esfuerzos concentrados; sin embargo, estos esfuerzos tienen un efecto relativamente pequeño sobre el ángulo de torsión total ϕ , por lo que la Ec. (3-14) puede emplearse con precisión adecuada.

Si el par o la sección transversal cambian continuamente a lo largo del eje de la barra, entonces la fórmula de sumatoria debe reemplazarse por una fórmula de integración. Este caso se representa en la Fig. 3-8a, donde la barra ahusada se somete a un par de intensidad q por unidad de longitud a lo largo del eje geométrico de la barra. El par T_x en una sección localizada a una distancia x del extremo de la barra puede determinarse por estática (Fig. 3-8b). Entonces, si se supone que el ahusamiento es gradual, podemos calcular el esfuerzo cortante máximo en tal sección mediante la fórmula de torsión (Ec. 3-9). El ángulo de rotación diferencial para un elemento de longitud dx (Fig. 3-8a) es

$$d\phi = \frac{T_x dx}{GI_{px}}$$

donde I_{px} es el momento polar de inercia de la sección transversal a una distancia x del extremo. El ángulo de torsión total entre los extremos de la barra es

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T_x dx}{GI_{px}} \quad (3-15)$$

Esta integral puede evaluarse en forma analítica en algunos casos, pero en caso contrario debe evaluarse por métodos numéricos. Las Ecs. (3-14) y (3-15) pueden emplearse tanto para barras sólidas o macizas como para barras huecas de sección transversal circular.

Ejemplo 1

Una barra maciza de acero ABCD (Fig. 3-9) que tiene un diámetro $d = 3$ plg. gira libremente en una chumacera en D y está cargada en B y C por pares $T_1 = 20$ plg·k y $T_2 = 12$ plg·k. La flecha está conectada a una caja de engranes en A, los cuales están asegurados en forma temporal en posición fija. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada parte de la barra y el

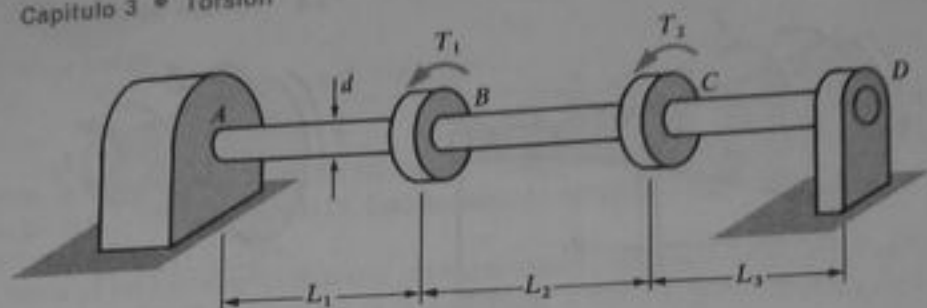


Fig. 3-9 Ejemplo 1

ángulo de torsión ϕ en el extremo D . (Suponer que $L_1 = 20$ plg, $L_2 = 30$ plg, $L_3 = 20$ plg y $G = 11,500$ ksi.)

Los esfuerzos cortantes máximos se determinan de la fórmula de torsión $\tau_{\max} = 16T/\pi d^3$ (Ec. 3-10), donde T representa el momento de torsión interno en cada parte de la flecha. El par es cero entre C y D porque no existe ninguna carga aplicada en D . De B a C el par es igual a T_2 y de A a B el par es la suma de T_1 y T_2 . Así, obtenemos

$$T_{ab} = T_1 + T_2 = 32 \text{ plg}\cdot\text{k} \quad T_{bc} = T_2 = 12 \text{ plg}\cdot\text{k} \quad T_{cd} = 0$$

Los esfuerzos máximos correspondientes se calculan como sigue:

$$\tau_{ab} = \frac{16T_{ab}}{\pi d^3} = \frac{16(32,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})}{\pi(3.0 \text{ plg})^3} = 6,040 \text{ psi}$$

$$\tau_{bc} = \frac{16T_{bc}}{\pi d^3} = \frac{16(12,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})}{\pi(3.0 \text{ plg})^3} = 2,260 \text{ psi}$$

$$\tau_{cd} = 0$$

El ángulo de torsión ϕ en el extremo D (con respecto al extremo A) se determina de la Ec. (3-14) como sigue:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G I_p} = \frac{1}{G I_p} (T_{ab} L_1 + T_{bc} L_2 + T_{cd} L_3) \\ &= \frac{1}{(11,500 \text{ ksi})(\pi/32)(3.0 \text{ plg})^4} [(32 \text{ plg}\cdot\text{k})(20 \text{ plg}) + (12 \text{ plg}\cdot\text{k})(30 \text{ plg}) + 0] \\ &= 0.0109 \text{ rad} = 0.627^\circ \end{aligned}$$

Los procedimientos representados en este ejemplo también pueden emplearse para flechas o barras ejes que tienen porciones de diferentes diámetros o incluso de diferentes materiales.

Ejemplo 2

Una barra sólida ahusada AB , de sección transversal circular, se tuerce mediante pares T aplicados en los extremos (Fig. 3-10). El diámetro de la barra varía uniformemente desde d_a en el extremo izquierdo hasta d_b en el derecho. Obtener una fórmula para el ángulo de torsión ϕ de la barra.

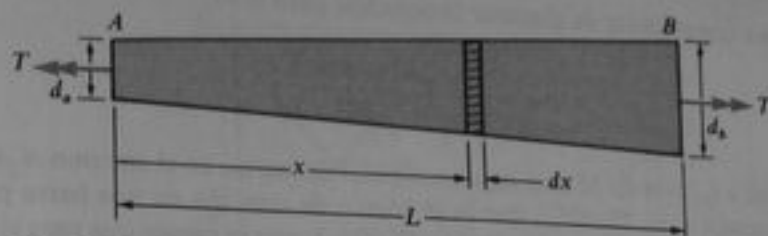


Fig. 3-10 Ejemplo 2

Dado que el momento polar de inercia de la sección transversal varía continuamente con la distancia x desde el extremo A , debemos emplear la Ec. (3-15) para determinar ϕ . Observamos primero que el diámetro d_x a una distancia x del extremo A es

$$d_x = d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x \quad (a)$$

Por lo que, el momento polar de inercia es

$$I_{px} = \frac{\pi d_x^4}{32} = \frac{\pi}{32} \left(d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x \right)^4 \quad (b)$$

También, el par T_x es constante e igual al par T aplicado en los extremos. Por lo tanto, la expresión para el ángulo de torsión (Ec. 3-15) resulta

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{G I_{px}} \quad (c)$$

donde L es la longitud de la barra, G el módulo de elasticidad a cortante del material e I_{px} se determina por la Ec. (b). Esta integral es de la forma

$$\int \frac{a dx}{(b + cx)^4}$$

en la cual

$$a = \frac{32T}{\pi G} \quad b = d_a \quad c = \frac{d_b - d_a}{L} \quad (d)$$

Con la ayuda de una tabla de integrales, se determina

$$\int \frac{a dx}{(b + cx)^4} = -\frac{a}{3c(b + cx)^3}$$

Ahora podemos concluir la evaluación de la integral al sustituir para x los límites 0 y L , y también sustituir en la Ec. (d) las expresiones para a , b y c . El resultado final es

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G(d_b - d_a)} \left(\frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3} \right) \quad (3-16)$$

El análisis anterior pudo realizarse en una forma matemática ligeramente diferente al considerar el origen de la distancia x en el vértice del cono que se forma al prolongar la superficie de la barra hacia la izquierda en la Fig. 3-10, como se hizo en la solución del Ejemplo 2 de la Sección 2.2.

Una forma conveniente de plantear la solución para ϕ es

$$\phi = \frac{TL}{GI_{pa}} \left(\frac{\beta^2 + \beta + 1}{3\beta^3} \right) \quad (3-17)$$

donde $\beta = d_b/d_a$ e $I_{pa} = \pi d_a^4/32$ es el momento polar de inercia en el extremo A . Por ejemplo, si $\beta = 1$, obtenemos $\phi = TL/GI_{pa}$, que es el ángulo de rotación de una barra prismática de diámetro d_a . Si $\beta = 2$, obtenemos $\phi = (7/24)(TL/GI_{pa})$, que es menor que para el caso de $\beta = 1$ ya que se incrementa la rigidez debido a un mayor diámetro en el extremo B .

3.4 CORTANTE PURO

Cuando una barra circular, sólida o hueca, se somete a torsión, actúan esfuerzos cortantes τ sobre las secciones transversales y sobre planos longitudinales, como se explicó en la Sección 3.2. Por lo que, un elemento esforzado $abcd$, pequeño y delgado, ubicado entre dos secciones transversales y dos planos longitudinales (Fig. 3-11) se encuentra en un estado de *cortante puro*, ya que los únicos esfuerzos que actúan sobre este elemento son los esfuerzos cortantes sobre las cuatro caras laterales. La dirección de estos esfuerzos depende de las direcciones de los pares aplicados T . En esta explicación supondremos que los pares giran el extremo derecho de la barra en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde la derecha (Fig. 3-11a), en consecuencia, los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento tienen las direcciones indicadas en la Fig. 3-11b. El mismo estado de esfuerzo existe para un elemento de forma similar ubicado en el interior de la barra, excepto que la magnitud de los esfuerzos cortantes será menor ya que el radio del elemento es más pequeño.

Los esfuerzos que actúan sobre planos inclinados respecto al eje de la barra pueden determinarse si se considera el elemento esforzado $abcd$, el cual se indica nuevamente en la Fig. 3-12a. La figura muestra la cara frontal del elemento, que está libre de esfuerzos, y los esfuerzos cortantes τ que actúan en las caras laterales. Para propósitos de referencia, en la figura se representa un sistema de ejes xy . Para obtener los esfuerzos sobre un plano inclinado, se corta al elemento a lo largo del plano pq , que es perpendicular al plano de la figura y cuya normal n está inclinada un ángulo θ respecto al eje x (Fig. 3-12a). Luego se separa como cuerpo rígido el elemento triangular resultante (Fig. 3-12b). Sobre las caras izquierda e inferior de este elemento actúan los esfuerzos cortantes τ . Sobre la cara inclinada deben actuar si-

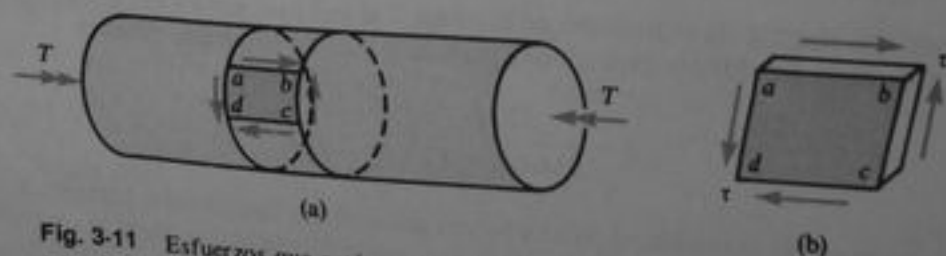


Fig. 3-11 Esfuerzos que actúan sobre un elemento para una barra sujeta a torsión

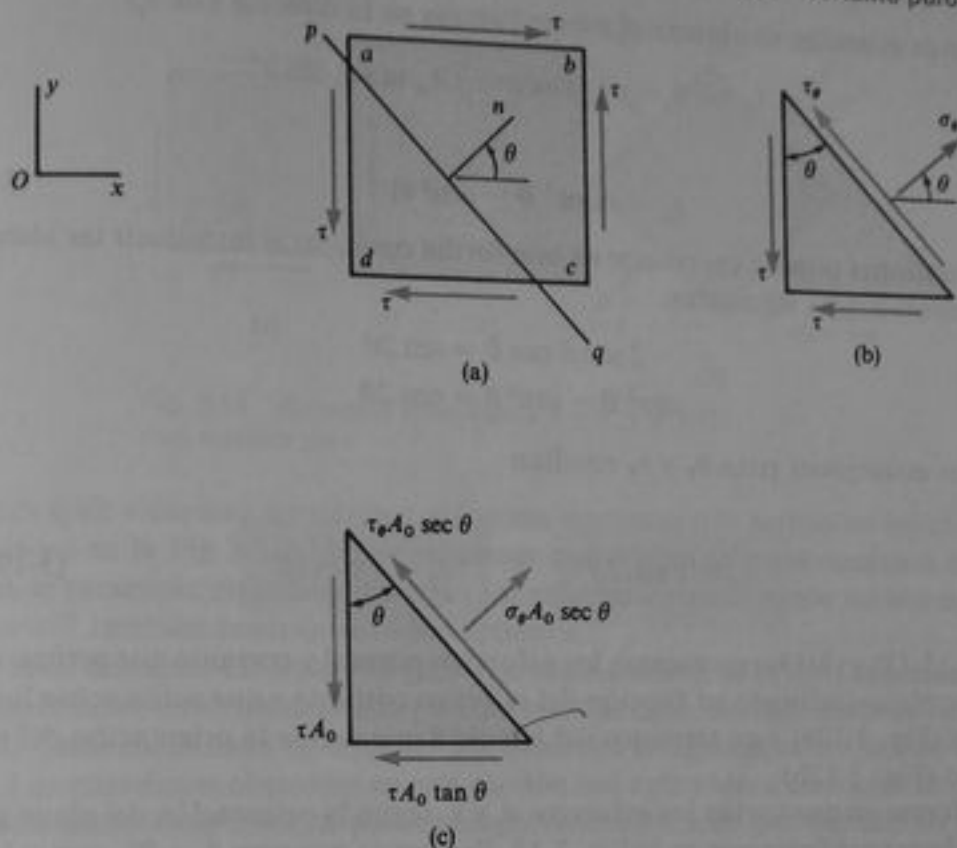


Fig. 3-12 Análisis de esfuerzos sobre planos inclinados para un elemento en cortante puro

multáneamente esfuerzos normales σ_θ y esfuerzos cortantes τ_θ , que en la figura se muestran actuando en sus direcciones positivas.

Los esfuerzos sobre el plano inclinado pueden determinarse a partir del equilibrio del elemento triangular (Fig. 3-12b), que está sometido a fuerzas en sus tres caras. Estas fuerzas pueden obtenerse al multiplicar los esfuerzos por las áreas de las caras sobre las que actúan. Por ejemplo, la fuerza en la cara izquierda es τA_0 , donde A_0 es el área de la cara; esta fuerza actúa en la dirección y negativa. Al denotar por A_0 el área de la cara izquierda y dado que el espesor del elemento en la dirección z es constante, el área de la cara inferior es $A_0 \tan \theta$ y el área de la cara inclinada es $A_0 \sec \theta$. Así, al multiplicar los esfuerzos por las áreas sobre las que éstos actúan, se obtienen las fuerzas que actúan sobre todas las caras del elemento (Fig. 3-12c). Las fuerzas que actúan sobre las caras izquierda e inferior del elemento pueden fácilmente definirse en componentes que actúan perpendiculares y paralelas a la cara inclinada (esto es, en las direcciones de σ_θ y τ_θ , respectivamente). Luego podemos formular dos ecuaciones de equilibrio estático para el elemento, una en cada una de estas direcciones. La primera ecuación, obtenida por la suma de fuerzas en la dirección de σ_θ , es

$$\sigma_\theta A_0 \sec \theta = \tau A_0 \sin \theta + \tau A_0 \tan \theta \cos \theta$$

o

$$\sigma_\theta = 2\tau \sin \theta \cos \theta$$

(3-18a)

La segunda ecuación se obtiene al sumar fuerzas en la dirección de τ_θ :

$$\tau_\theta A_0 \sec \theta = \tau A_0 \cos \theta - \tau A_0 \tan \theta \sin \theta$$

o

$$\tau_\theta = \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (3-18b)$$

Estas ecuaciones pueden expresarse en una forma opcional al introducir las identidades trigonométricas siguientes:

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones para σ_θ y τ_θ resultan

$$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau \cos 2\theta$$

(3-19a, b)

Las Ecs. (3-18) y (3-19) representan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier plano inclinado en función del esfuerzo cortante τ que actúa sobre los planos x y y (Fig. 3-12a) y en términos del ángulo θ que define la orientación del plano inclinado (Fig. 3-12b).

La forma en que varían los esfuerzos σ_θ y τ_θ según la orientación del plano inclinado se ilustra gráficamente en la Fig. 3-13. Se aprecia que para $\theta = 0^\circ$, que es la cara derecha, o cara x , del elemento esforzado de la Fig. 3-12a, la gráfica indica $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = \tau$, como era de esperarse. También para la parte superior, o cara y , del elemento ($\theta = 90^\circ$), obtenemos $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = -\tau$. El signo menos significa que el esfuerzo cortante actúa en la dirección τ_θ negativa. Estos son los máximos valores numéricos de los esfuerzos cortantes τ_θ que actúan en cualquier plano.

El esfuerzo normal σ_θ alcanza un valor máximo para $\theta = 45^\circ$, donde el esfuerzo de tensión es numéricamente igual al esfuerzo cortante τ . De modo semejante, σ_θ tiene su máximo valor negativo (esto es, compresión) a $\theta = -45^\circ$. Para estos mismos ángulos, el esfuerzo cortante τ_θ es igual a cero. Así, un elemento esforzado girado un ángulo de 45° está sometido a esfuerzos iguales de tensión y compresión en direcciones perpendiculares pero no se presentan esfuerzos cortantes (Fig. 3-14b). Las direcciones de los esfuerzos normales señalados en la Fig. 3-14b son las correspon-

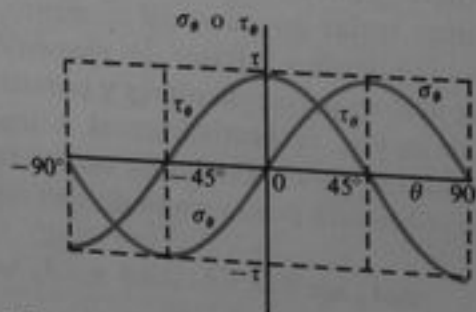


Fig. 3-13 Gráfica de esfuerzos normales σ_θ y esfuerzos cortantes τ_θ versus el ángulo θ del plano inclinado

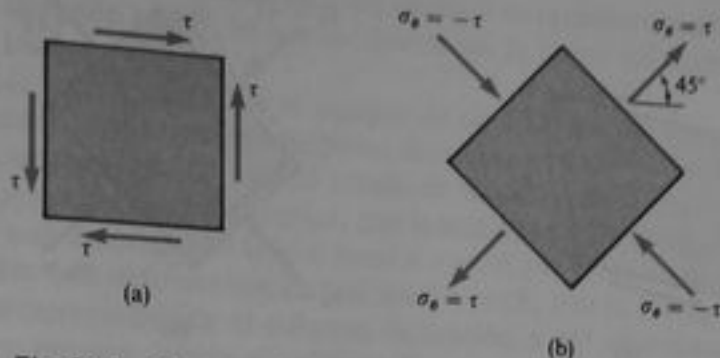


Fig. 3-14 Elementos esforzados a $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$ para cortante puro

dientes a un elemento sometido a esfuerzos cortantes que actúan en las direcciones indicadas en la Fig 3-14a. Si los esfuerzos que actúan sobre el elemento de la Fig. 3-14a se presentan en sentido inverso, los esfuerzos normales que actúan en los planos a 45° también tendrán sentidos opuestos.

Si un elemento esforzado se gira a un ángulo diferente de 45° , se presentarán simultáneamente esfuerzos normales y cortantes en las caras laterales, según las Ecs. (3-18) y (3-19). Estas condiciones de esfuerzo más generales se explican en el Capítulo 6.

Las ecuaciones obtenidas en esta sección son aplicables a cualquier elemento esforzado sometido a cortante puro, independientemente de que el elemento pertenezca a una barra sometida a torsión o a algún otro elemento estructural. También, dado que las Ecs. (3-18) y (3-19) se obtuvieron únicamente a partir del equilibrio, son válidas para cualquier material, tanto si es linealmente elástico como si no lo es.

La presencia de esfuerzos de tensión máximos en planos a 45° respecto al eje x explica el hecho de que los materiales frágiles que son débiles en tensión, fallan en torsión al fracturarse a lo largo de una superficie helicoidal a 45° (Fig. 3-15). Como se mencionó en la Sección 3.2, este tipo de falla es fácilmente perceptible si se tuerce una tiza o gis como los utilizados en el salón de clases.

Consideremos ahora las **deformaciones** (unitarias) que se presentan cuando un material se somete a cortante puro. El elemento esforzado ilustrado en la Fig. 3-14a experimenta deformaciones angulares γ , que distorsionan al elemento, como se muestra en la Fig. 3-16a y según se explicó previamente en la Sección 1.6. La deformación por cortante γ se mide como el cambio en ángulo entre dos planos que originalmente eran perpendiculares. Así, en la Fig. 3-16a, la reducción en el ángulo recto de la esquina inferior izquierda del elemento es la deformación por cortante γ , medida en radianes. Este mismo cambio en ángulo ocurre en la esquina superior de-

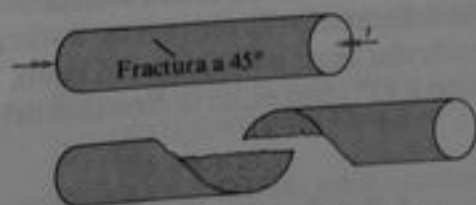


Fig. 3-15 Falla por torsión de un material frágil por agrietamiento a tensión a lo largo de una superficie helicoidal a 45°

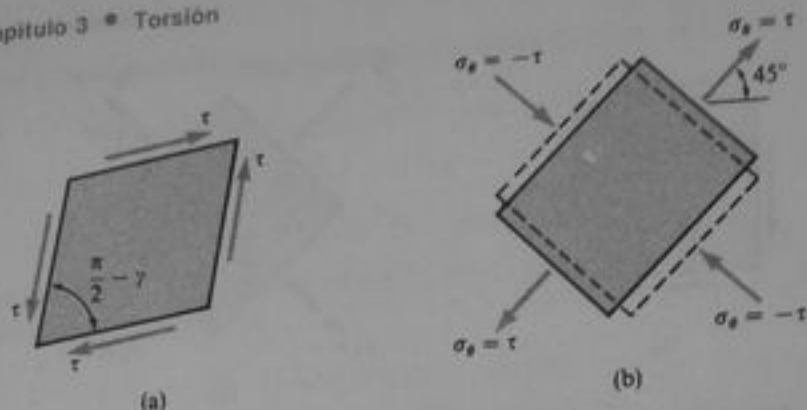


Fig. 3-16 Deformaciones en cortante puro: (a) elemento a $\theta = 0^\circ$, y (b) elemento a $\theta = 45^\circ$

recha, donde el ángulo se reduce, y en las otras dos esquinas, donde el ángulo se incrementa en una cantidad γ . Sin embargo, las longitudes de los lados del elemento, incluso el espesor perpendicular al plano de la página, no cambian. Por lo que, el elemento cambia su forma de paralelepípedo rectangular a paralelepípedo oblicuo; este cambio de forma se conoce como **distorsión por cortante**.

Consideremos ahora las deformaciones que se presentan en un elemento esforzado orientado a 45° (véase Fig. 3-14b). Los esfuerzos de tensión que actúan a 45° tienden a alargar el elemento en tal dirección y, debido al efecto de Poisson, tienden a acortarlo en la dirección perpendicular (es decir, en la dirección donde $\theta = 135^\circ$, o sea -45°). En forma similar, los esfuerzos de compresión que actúan a 135° tienden a acortar el elemento en la dirección a 135° y a alargarlo en la dirección a 45° , por lo que el elemento experimenta un cambio de dimensiones como se muestra en la Fig. 3-16b. No obstante, advierta que el elemento permanece como un paralelepípedo rectangular y no ocurre distorsión por cortante.

Si el material es linealmente elástico, la deformación angular del elemento para $\theta = 0^\circ$ (Fig. 3-16a) se relaciona con el esfuerzo cortante a través de la ley de Hooke en cortante:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3-20)$$

Para el elemento a $\theta = 45^\circ$ (Fig. 3-16b), podemos emplear la relación de Poisson y la ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales y así obtener las deformaciones normales. El esfuerzo de tensión $\sigma_\theta = \tau$ (para $\theta = 45^\circ$) ocasiona una deformación positiva igual a τ/E . También produce una deformación negativa en dirección perpendicular, igual a $-\nu\tau/E$, donde ν es el módulo de Poisson. En forma semejante, el esfuerzo $\sigma_\theta = -\tau$ (para $\theta = 135^\circ$) produce una deformación negativa igual a $-\tau/E$ y una deformación positiva en dirección perpendicular igual a $\nu\tau/E$. Por lo tanto, la deformación normal resultante ϵ en la dirección a 45° (esto es, en la dirección del esfuerzo normal positivo $\sigma_\theta = \tau$) es

$$\epsilon = \frac{\tau}{E} + \frac{\nu\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \quad (3-21)$$

la cual es positiva y representa un alargamiento. La deformación en la dirección perpendicular es una deformación negativa con el mismo valor. De este modo, se apre-

cia que el cortante puro ocasiona un alargamiento en la dirección a 45° y un acortamiento en la dirección a 135° , lo que concuerda con la forma del elemento deformado de la Fig. 3-16a.

Ya hemos mencionado que el espesor de un elemento en cortante puro (Fig. 3-16a) no cambia. Por supuesto, el espesor del elemento girado (Fig. 3-16b) tampoco cambia, ya que representa el mismo estado de esfuerzo. Esta observación coincide con la explicación del párrafo anterior, que señala que el esfuerzo $\sigma_x = \tau$ que actúa a 45° produce una deformación lateral igual a $-\nu\tau/E$ y el esfuerzo $\sigma_y = -\tau$ que actúa a 135° produce una deformación lateral igual a $\nu\tau/E$. Por lo tanto, la reducción de espesor del elemento debida al esfuerzo de tensión a 45° es contrarrestada por el incremento en espesor debido al esfuerzo de compresión a 135° .

En la siguiente sección se utilizará la geometría del elemento deformado representado en la Fig. 3-16a para relacionar las deformaciones γ y ϵ (Ecs. 3-20 y 3-21). Entonces podremos determinar la relación entre los módulos de elasticidad E y G .

Ejemplo

Una flecha circular hueca tiene un diámetro exterior de 100 mm y un diámetro interior de 80 mm (Fig. 3-17). Si la barra se somete a un par de torsión $T = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$, ¿cuánto valen los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante?

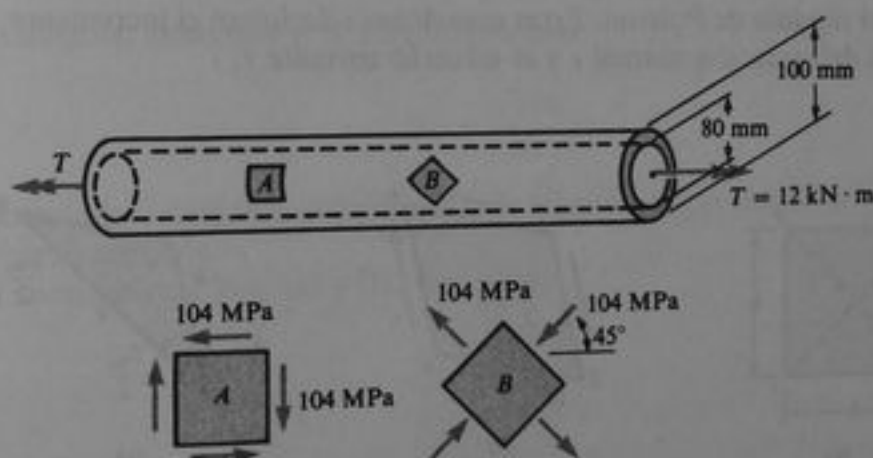


Fig. 3-17 Ejemplo

Los valores máximos de los tres esfuerzos son numéricamente iguales, aunque actúan en planos diferentes. Los valores máximos se determinan mediante la fórmula de torsión:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_p} = \frac{(12,000 \text{ N}\cdot\text{m})(0.050 \text{ m})}{(\pi/32)[(0.100 \text{ m})^4 - (0.080 \text{ m})^4]} = 104 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre la sección transversal y los planos longitudinales, como se indica en el elemento A de la Fig. 3-17, y los esfuerzos normales máximos actúan sobre planos a 45° respecto al eje (elemento B).

3.5 RELACIÓN ENTRE LOS MÓDULOS DE ELASTICIDAD E Y G

Ahora utilizaremos las ecuaciones obtenidas en la sección anterior para establecer una importante relación entre los módulos de elasticidad E y G . Para este propósito, considérese el elemento esforzado $abcd$ representado en la Fig. 3-18a. Se supone que la cara frontal del elemento es cuadrada y se designa por h la longitud de cada lado. Cuando este elemento se somete a cortante puro mediante esfuerzos τ , la cara frontal se deforma a un rombo (Fig. 3-18b), con lados de longitud h y con la deformación angular (o por cortante) $\gamma = \tau/G$, como se explicó en la Sección 3.4. Debido a la distorsión, la diagonal bd se alarga y la diagonal ac se acorta. El incremento Δ_{bd} en la longitud de la diagonal bd puede obtenerse al multiplicar su longitud inicial $\sqrt{2}h$ por la deformación normal ϵ en la dirección a 45° ; así,

$$\Delta_{bd} = \sqrt{2} h \epsilon \quad (a)$$

o, al emplear la Ec. (3-21) de la sección anterior,

$$\Delta_{bd} = \frac{\sqrt{2} h \tau}{E} (1 + \nu) \quad (b)$$

donde ν es el módulo de Poisson. Estas ecuaciones relacionan el incremento en longitud con la deformación normal ϵ y el esfuerzo cortante τ .

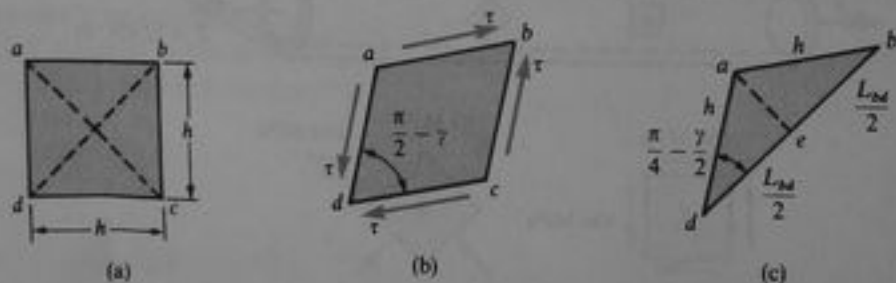


Fig. 3-18 Geometría de un elemento deformado en cortante puro

El incremento en longitud Δ_{bd} se relaciona también con la deformación angular γ si se utiliza la geometría del elemento distorsionado (Fig. 3-18b). Considérese el triángulo abd (Fig. 3-18c), que se obtiene de una mitad del rombo ilustrado en la Fig. 3-18b. El ángulo adb del triángulo es igual a la mitad del ángulo adc del rombo, o sea $\pi/4 - \gamma/2$, y los lados ad y ab del triángulo tienen longitud h . La longitud del lado restante bd del triángulo se designa por L_{bd} . Esta longitud es igual a la longitud inicial de la diagonal $\sqrt{2}h$ más la elongación Δ_{bd} ; luego,

$$L_{bd} = \sqrt{2} h + \Delta_{bd} \quad (c)$$

Una línea ae , perpendicular a la diagonal, se traza desde a , por lo que divide a la diagonal en dos partes iguales. Del nuevo triángulo ade , obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{L_{bd}}{2h}$$

o al emplear la Ec. (c),

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}h + \Delta_{bd}}{2h} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta_{bd}}{2h} \quad (d)$$

Mediante la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \right) \quad (e)$$

Al comparar las Ecs. (d) y (e), y también observando que γ es un ángulo pequeño (en consecuencia, $\cos \gamma/2 \approx 1$ y $\operatorname{sen} \gamma/2 \approx \gamma/2$), obtenemos

$$\Delta_{bd} = \frac{\sqrt{2}h\gamma}{2} \quad (f)$$

Adicionalmente, dado que $\gamma = \tau/G$, obtenemos

$$\Delta_{bd} = \frac{\sqrt{2}h\tau}{2G} \quad (g)$$

Estas ecuaciones relacionan el incremento de longitud con la deformación angular γ y el esfuerzo cortante τ .

Al comparar las Ecs. (a) y (f), vemos que

$$\epsilon = \frac{\gamma}{2} \quad (3-22)$$

para un elemento en cortante puro. También, si se comparan las Ecs. (b) y (g) obtenemos

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3-23)$$

Así, evidentemente E , G y ν no son propiedades independientes de un material linealmente elástico. En vez de ello, si se conocen dos de ellas, la tercera puede calcularse con la ecuación anterior. Algunos valores representativos de E , G y ν se enumeran en la Tabla H-2 del Apéndice H. (La Ec. 3-23 fue obtenida por Poisson al utilizar el valor $1/4$ para ν ; véase Ref. 3-3.)

3.6 TRANSMISIÓN DE POTENCIA POR MEDIO DE FLECHAS CIRCULARES

El empleo más importante de las flechas o barras ejes de sección circular es en la transmisión de potencia desde un mecanismo o máquina a otro, como en el árbol de transmisión de un automóvil, la flecha propulsora de la hélice de una embarcación o el eje de los pedales de una bicicleta. La potencia se transmite a través del movimiento rotatorio de la flecha, y la cantidad de potencia transmitida depende de la magnitud del momento de torsión y de la velocidad de giro. Un problema común de diseño es la determinación del tamaño requerido de una flecha, de forma tal que pueda transmitir una cierta potencia a una velocidad de giro especificada sin rebasar los esfuerzos permisibles para el material.

Supongamos que la flecha o eje de transmisión de un motor (Fig. 3-19) gira a una velocidad angular ω , medida en radianes por segundo (rad/s). La flecha transmite un par T . En general, el trabajo W realizado por cualquier par de magnitud constante T es igual al producto del par por el ángulo a través del cual gira dicho par; esto es,

$$W = T\phi$$

donde ϕ es la rotación angular en radianes. La potencia es la relación con el tiempo en el que se realiza el trabajo,* o

$$P = \frac{dW}{dt} = T \frac{d\phi}{dt}$$

donde P es el símbolo para la potencia y t representa el tiempo. La razón de cambio $d\phi/dt$ del desplazamiento angular ϕ es la velocidad angular ω ; por lo que,

$$P = T\omega \quad (\omega = \text{rad/s}) \quad (3-24)$$

Esta fórmula, que es muy conocida en física elemental, representa la potencia transmitida por una flecha rotatoria. Si T se expresa en newton metros, entonces la potencia resulta en watts (W). Un watt es igual a un newton metro por segundo (o un joule por segundo). Si T se expresa en pie-libras, entonces la potencia resulta en pie-libras por segundo.**

La velocidad angular también suele expresarse como la frecuencia de rotación f , o sea el número de revoluciones por unidad de tiempo. La unidad de frecuencia es el hertz (Hz), que es una revolución por segundo (s^{-1}). Por lo tanto,

$$\omega = 2\pi f$$



Fig. 3-19 Flecha o barra eje que transmite un par T a una velocidad angular ω

* La potencia puede definirse también como la rapidez con que se realiza un trabajo. (N. del T.)
 ** Véanse en el Apéndice A las unidades de potencia y factores de conversión.

ya que una revolución es igual a 2π radianes. La expresión para la potencia resulta entonces

$$P = 2\pi fT \quad (f = \text{Hz} = \text{s}^{-1}) \quad (3-25)$$

Otra unidad comúnmente empleada es el número de revoluciones por minuto (rpm), que se denota por la letra n . En consecuencia,

$$n = 60f$$

y

$$P = \frac{2\pi nT}{60} \quad (n = \text{rpm}) \quad (3-26)$$

en las Ecs. (3-25) y (3-26), P y T tienen las mismas unidades que en la Ec. (3-24); esto es, las unidades de P son watts si T está en newton metros, y P está en pie-libras por segundo si T se expresa en pie-libras.

En la práctica entre ingenieros, en Estados Unidos, la potencia se expresa a menudo en caballos de potencia (hp), unidad igual a 550 pie·lb/s. Así, los caballos de potencia transmitidos H son

$$H = \frac{2\pi nT}{60(550)} = \frac{2\pi nT}{33,000} \quad (n = \text{rpm}, T = \text{pie}\cdot\text{lb}, H = \text{hp}) \quad (3-27)$$

Un caballo de potencia es aproximadamente igual a 746 watts.*

Las ecuaciones anteriores relacionan la potencia transmitida con el par de torsión T en la flecha. Por supuesto, el par se relaciona con los esfuerzos cortantes, deformaciones angulares y ángulos de torsión a través de las fórmulas analizadas en las secciones 3.2 a 3.5.

Ejemplo 1

¿Cuál es el diámetro mínimo requerido d para una flecha circular sólida si debe transmitir 40 hp a 600 rpm sin rebasar un esfuerzo permisible de 4000 psi?

La relación entre los caballos de potencia H y el par de torsión T se representa mediante la Ec. (3-27). Con tal ecuación, obtenemos

$$T = \frac{33,000H}{2\pi n} = \frac{33,000(40 \text{ hp})}{2\pi(600 \text{ rpm})} = 350.1 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

como el par que debe transmitirse por la flecha.

El esfuerzo cortante máximo producido por el par T se obtiene de la fórmula de torsión (Ec. 3-10). Al resolver tal ecuación para el diámetro de la flecha y sustituir τ_{perm} por $\tau_{\text{máx}}$, obtenemos

$$d^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{\text{perm}}} = \frac{16(350.1 \text{ pie}\cdot\text{lb})(12 \text{ plg/pie})}{\pi(4000 \text{ psi})} = 5.35 \text{ plg}^3$$

* En los países que emplean aún el sistema métrico técnico suele emplearse también el caballo de vapor (cv) que equivale a 75 kilogrametros por segundo (75 kg·m/s), o sea aproximadamente 736 watts. (N. del T.)

de donde

$$d = 1.75 \text{ plg}$$

El diámetro de la flecha debe ser de al menos esta magnitud para no rebasar el esfuerzo cortante permisible.

Ejemplo 2

Una flecha de acero ABC (Fig. 3-20a) de 50 mm de diámetro es impulsada en A por un motor que transmite 50 kW a dicho eje a 10 Hz. Los engranes en B y C consumen 30 kW y 20 kW, respectivamente. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ en la flecha y el ángulo de torsión ϕ entre los extremos A y C .

La potencia transmitida entre A y B es 50 kW, en consecuencia el par T (de la Ec. 3-25) es

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{50 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 796 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Se supone que este par tiene el sentido mostrado en la Fig. 3-20b. El esfuerzo cortante y el ángulo de torsión para la porción AB de la flecha o barra eje son

$$\tau_{ab} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(796 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 32.4 \text{ MPa}$$

$$\phi_{ab} = \frac{TL}{GI_p} = \frac{(796 \text{ N}\cdot\text{m})(1.0 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})(\pi/32)(50 \text{ mm})^4} = 0.0162 \text{ rad}$$

donde se supuso que $G = 80 \text{ GPa}$.

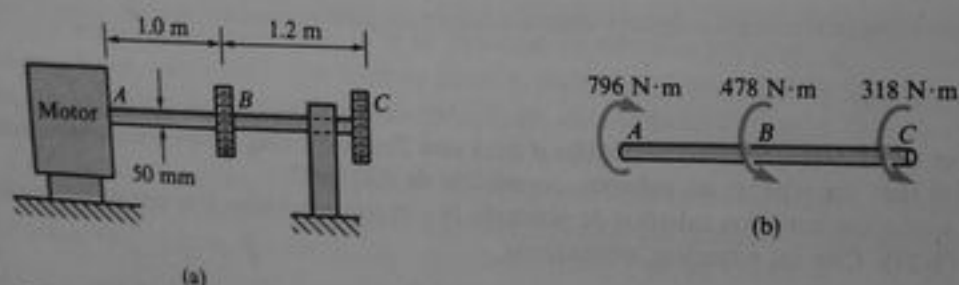


Fig. 3-20 Ejemplo 2

Para la otra parte BC de la flecha, la potencia transmitida es 20 kW; en consecuencia,

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{20 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 318 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El esfuerzo cortante y ángulo de torsión correspondientes son

$$\tau_{bc} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(318 \text{ N}\cdot\text{m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 13.0 \text{ MPa}$$

$$\phi_{bc} = \frac{TL}{GI_p} = \frac{(318 \text{ N}\cdot\text{m})(1.2 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})(\pi/32)(50 \text{ mm})^4} = 0.0078 \text{ rad}$$

Así, el esfuerzo cortante máximo es $\tau = 32.4 \text{ MPa}$, el cual ocurre en la porción AB . También, el ángulo de torsión total es

$$\phi = \phi_{ab} + \phi_{bc} = 0.0240 \text{ rad}$$

ya que ambas partes de la flecha se tuercen en el mismo sentido (Fig. 3-20b).

3.7 MIEMBROS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS SUJETOS A TORSIÓN

Debido al tipo de ejemplos de torsión estudiados en las secciones anteriores, los pares de torsión actuantes en todas las secciones transversales de los miembros podían obtenerse por equilibrio estático. En consecuencia, tales ejemplos mostraron únicamente miembros estáticamente determinados. Por supuesto, los miembros en torsión pueden ser estáticamente indeterminados si están restringidos por más soportes de los necesarios para suministrar el equilibrio estático. Los miembros a torsión de esta clase pueden analizarse al complementar las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones pertenecientes a los desplazamientos (esto es, por ecuaciones de compatibilidad). Los métodos de flexibilidades y de rigideces descritos en la Sección 2.4 para miembros cargados axialmente, pueden emplearse también para miembros a torsión. Sin embargo, para los problemas típicos de torsión que ocurren comúnmente sólo se requiere el método de flexibilidad, por lo que limitaremos nuestro estudio a tal método.

Para ejemplificar cómo se aplica el método de flexibilidades a las barras en torsión, consideraremos el miembro AB señalado en las Figs. 3-21a y b. Esta barra está fija en ambos extremos; por lo tanto es estáticamente indeterminada. El elemento tiene diámetros diferentes d_a y d_b en las partes AC y CB , respectivamente, y está cargado con un par T_0 en C . El material de la barra es el mismo en ambas porciones. Los objetivos de nuestro análisis son determinar los pares reactivos T_a y T_b en los extremos, los esfuerzos cortantes máximos y el ángulo de rotación ϕ en la sección donde se aplica T_0 .

Del equilibrio estático, obtenemos la siguiente ecuación que relaciona los pares (véase Fig. 3-21b):

$$T_a + T_b = T_0 \quad (a)$$

A fin de obtener una segunda ecuación entre T_a y T_b , debemos seleccionar un par redundante y luego analizar la estructura liberada correspondiente. Se selecciona a T_b como el redundante, en forma tal que la estructura liberada se obtenga al retirar el soporte B (Fig. 3-21c). Los dos pares T_0 y T_a actúan como cargas sobre esta estructura liberada. Originan un ángulo de torsión ϕ_b en el extremo B que es igual a la suma algebraica del ángulo de torsión de las dos porciones AC y CB . Así, obtenemos

$$\phi_b = \frac{T_0 a}{GI_{pa}} - \frac{T_a a}{GI_{pa}} - \frac{T_b b}{GI_{pb}}$$

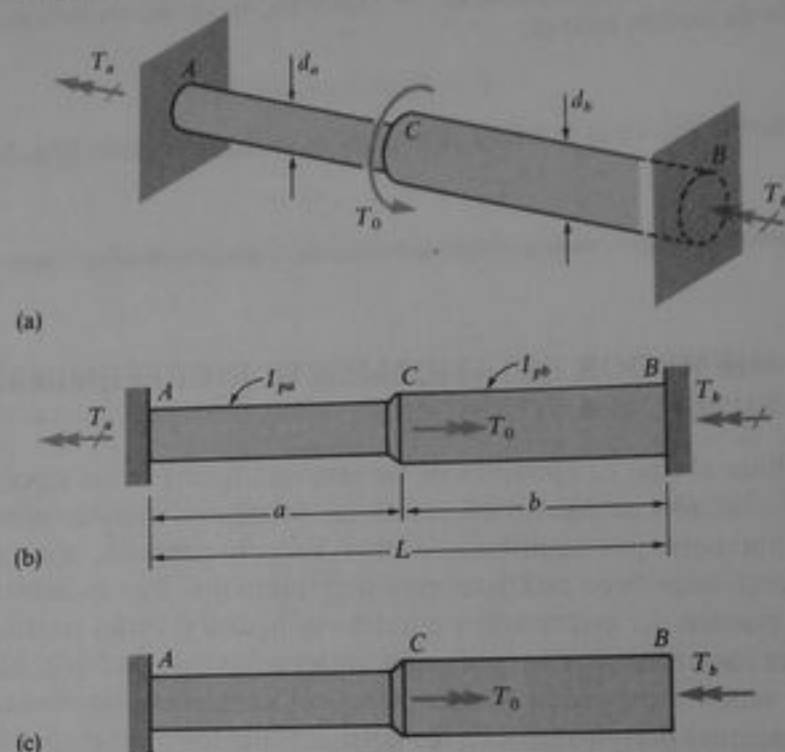


Fig. 3-21 Barra estáticamente indeterminada sujeta a torsión

donde I_{pa} e I_{pb} son los momentos polares de inercia de las porciones izquierda y derecha de la barra, respectivamente. Ya que el ángulo de rotación del extremo B en la barra original es igual a cero, la ecuación de compatibilidad es $\phi_b = 0$, o sea

$$\frac{T_0 a}{I_{pa}} - \frac{T_b a}{I_{pa}} - \frac{T_b b}{I_{pb}} = 0 \quad (b)$$

Esta ecuación puede resolverse para hallar el par redundante T_b , el cual luego se sustituye en la Ec. (a) a fin de obtener T_a . Los resultados son

$$T_a = T_0 \left(\frac{b I_{pa}}{a I_{pb} + b I_{pa}} \right) \quad T_b = T_0 \left(\frac{a I_{pb}}{a I_{pb} + b I_{pa}} \right) \quad (3-28a, b)$$

Si la barra tiene sección transversal constante, en forma tal que $I_{pa} = I_{pb} = I_p$, entonces estas ecuaciones se simplifican como sigue:

$$T_a = \frac{T_0 b}{L} \quad T_b = \frac{T_0 a}{L} \quad (3-29a, b)$$

Estas ecuaciones son análogas a las de una barra cargada axialmente con extremos fijos (véanse Ecs. 2-11 y 2-12).

Los esfuerzos cortantes máximos en cada parte de la barra se obtienen directamente de la fórmula de torsión; luego,

$$\tau_{ca} = \frac{T_a d_a}{2 I_{pa}} \quad \tau_{cb} = \frac{T_b d_b}{2 I_{pb}}$$

Al sustituir las Ecs. (3-28a y b) se obtiene

$$\tau_{ac} = \frac{T_0 b d_a}{2(aI_{pb} + bI_{pa})} \quad \tau_{cb} = \frac{T_0 a d_b}{2(aI_{pb} + bI_{pa})} \quad (3-30a, b)$$

Al comparar el producto $b d_a$ con el producto $a d_b$, podemos determinar inmediatamente qué región de la barra presenta el mayor esfuerzo.

Cuando ya se determinaron los pares T_a y T_b que actúan en las dos porciones de la barra, se puede obtener el ángulo de rotación ϕ_c en la sección C , cuando se aplica la carga (Fig. 3-21b). Este ángulo es igual al ángulo de rotación de cualquiera de las dos porciones de la barra, dado que ambas partes deben girar el mismo ángulo a fin de que se presente compatibilidad de rotaciones en C . Así, se obtiene

$$\phi_c = \frac{T_a a}{G I_{pa}} = \frac{T_b b}{G I_{pb}} = \frac{ab T_0}{G(aI_{pb} + bI_{pa})} \quad (3-31)$$

Se aprecia que si $a = b = L/2$ e $I_{pa} = I_{pb} = I_p$, el ángulo es

$$\phi_c = \frac{T_0 L}{4G I_p} \quad (c)$$

como se previó a partir de la simetría de la barra y de las cargas.

El ejemplo anterior representa el procedimiento que debe adoptarse cuando se analiza un sistema torsional estáticamente indeterminado por el método de flexibilidad. El método es completamente general y puede emplearse en una gran variedad de situaciones, otra de las cuales se presenta en el siguiente tema.

Barras compuestas. Una barra compuesta se constituye de barras torsionales circulares y concéntricas, firmemente unidas entre sí para actuar como un miembro simple. Un ejemplo se muestra en la Fig. 3-22, donde un tubo hueco B y un núcleo A se unen íntegramente para actuar como una barra sólida. Si las dos partes de la barra se construyen del mismo material, entonces la barra se comporta de la misma manera que si estuviera hecha de una sola pieza, y todas las fórmulas obtenidas en las secciones previas pueden emplearse directamente. Sin embargo, si el tubo

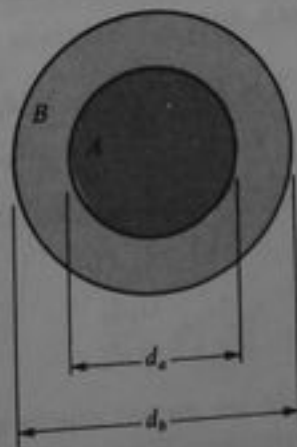


Fig. 3-22 Barra compuesta de dos materiales

y el núcleo tienen diferentes propiedades, la barra es estáticamente indeterminada y se requiere un análisis más detallado.

Con el fin de realizar tal análisis se utiliza la siguiente notación:

G_a, G_b = módulos de elasticidad a cortante para las partes interior y exterior, respectivamente.

d_a, d_b = diámetros de las partes interior y exterior, respectivamente.

I_{pa}, I_{pb} = momentos polares de inercia para las partes interior y exterior, respectivamente.

También, se supondrá que la barra compuesta está sometida a un momento torsionante total T , al que resisten los pares T_a y T_b originados en el núcleo y el tubo, respectivamente.

La primera ecuación se obtiene del equilibrio estático, como sigue:

$$T = T_a + T_b \quad (d)$$

Además, los ángulos de torsión ϕ deben ser los mismos para ambas partes, ya que están firmemente unidas entre sí y por tanto deben girar la misma cantidad. Por lo tanto, de la compatibilidad de rotaciones, se determina la segunda ecuación:

$$\phi = \frac{T_a L}{G_a I_{pa}} = \frac{T_b L}{G_b I_{pb}} \quad (e)$$

donde L es la longitud de la barra. Al resolver las Ecs. (d) y (e) se obtienen los pares en las dos partes de la barra:

$$T_a = T \left(\frac{G_a I_{pa}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} \right) \quad T_b = T \left(\frac{G_b I_{pb}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} \right) \quad (3-32a, b)$$

El ángulo de rotación ϕ ahora resulta

$$\phi = \frac{TL}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} \quad (3-33)$$

el cual se obtiene al sustituir las Ecs. (3-32a y b) en la Ec. (e).

Los esfuerzos cortantes en la barra pueden obtenerse al aplicar la fórmula de torsión a cada parte. Por ejemplo, los esfuerzos cortantes máximos τ_a y τ_b en el núcleo y el tubo, respectivamente, son

$$\tau_a = \frac{T_a (d_a/2)}{I_{pa}} \quad \tau_b = \frac{T_b (d_b/2)}{I_{pb}} \quad (3-34a, b)$$

Así, la relación del esfuerzo τ_b en el contorno exterior del tubo al esfuerzo τ_a en el contorno exterior del núcleo es

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{G_b d_b}{G_a d_a} \quad (3-35)$$

Obsérvese que esta relación puede ser menor que la unidad.

El esfuerzo cortante en el contorno interior del tubo no es el mismo que el esfuerzo cortante τ_a en el contorno exterior del núcleo. Aunque las deformaciones an-

gulares en ambas porciones deben ser las mismas donde están en contacto, los esfuerzos son diferentes ya que los materiales tienen diferentes módulos de elasticidad.

3.8 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN CORTANTE PURO Y TORSIÓN

Cuando un objeto se somete a una carga que se aplica en forma estática, ésta realiza un trabajo y el objeto absorbe energía de deformación. La evaluación de esta energía de deformación es importante en análisis dinámicos y en muchos aspectos de la teoría de estructuras (véase Capítulo 12). Si no se pierde energía en forma de calor, el trabajo W será igual a la energía de deformación U , como se explica en la Sección 2.8 para el caso de una barra en tensión. Esta igualdad entre el trabajo y la energía puede emplearse también para obtener expresiones para la energía de deformación almacenada en un elemento en cortante puro. Con este fin, se considera nuevamente un pequeño elemento de material sometido a esfuerzos cortantes τ sobre sus caras laterales (Fig. 3-23a). Por conveniencia, supondremos que la cara frontal del elemento es cuadrada y mide cada uno de sus lados una longitud h . El espesor del elemento (perpendicular a la página) se denota por t . Bajo la acción de los esfuerzos cortantes τ , el elemento se deforma en forma tal que la cara frontal adopta la forma romboidal mostrada en la Fig. 3-23b, en la que la deformación angular se denota por γ .

Las fuerzas cortantes V que actúan en las caras laterales del elemento (Fig. 3-23c) se determinan al multiplicar los esfuerzos por las áreas sobre las que éstos actúan:

$$V = \tau ht \quad (a)$$

Estas fuerzas producen trabajo según se deforma el elemento desde su forma inicial (Fig. 3-23a) a su configuración deformada (Fig. 3-23b). Para calcular este trabajo, necesitamos determinar las distancias relativas a través de las cuales se trasladan las fuerzas cortantes. Esta tarea se facilita si el elemento se gira como cuerpo rígido hasta que dos de sus caras se encuentren horizontales, como en la Fig. 3-23d. Durante la rotación como cuerpo rígido, el trabajo neto realizado por las fuerzas V es cero, porque las fuerzas se presentan en parejas y forman dos pares iguales y opuestos. Como puede apreciarse en la Fig. 3-23d, la cara superior del elemento se desplaza horizontalmente a lo largo de la distancia δ (con relación a la cara inferior). Según se incrementa gradualmente la fuerza cortante desde cero hasta su valor final V . El despla-

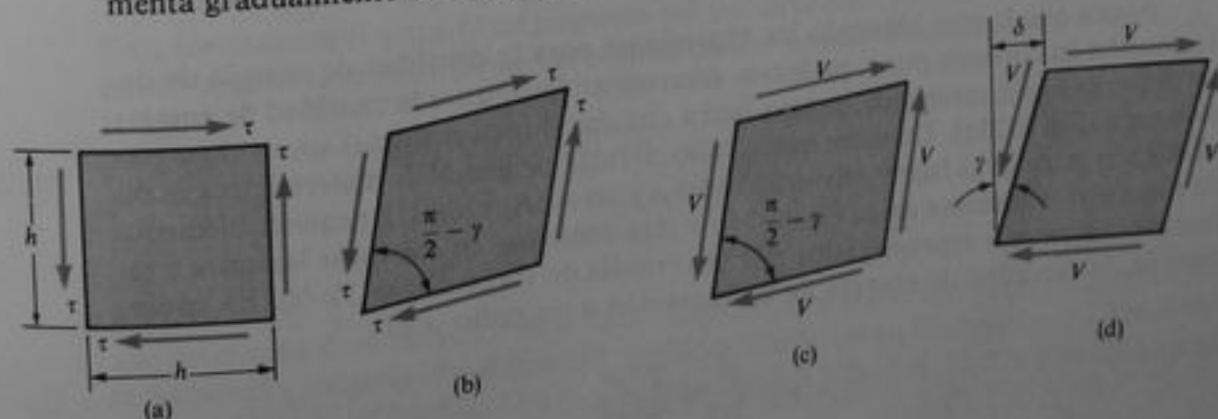


Fig 3-23 Elemento en cortante puro

zamiento δ es igual a la deformación angular γ (dado que es un ángulo pequeño) multiplicada por la dimensión vertical del elemento:

$$\delta = \gamma h \quad (b)$$

Si el material es linealmente elástico y cumple con la ley de Hooke, entonces el diagrama carga-deflexión es lineal (Fig. 3-24). La energía de deformación U almacenada en el elemento es igual al trabajo W realizado por la fuerza cortante, que es igual al área bajo la curva carga-deflexión:

$$U = W = \frac{V\delta}{2} \quad (c)$$

Las fuerzas sobre las caras laterales del elemento no se trasladan a lo largo de sus líneas de acción, en consecuencia no trabajan. Al sustituir las Ecs. (a) y (b) en la Ec. (c), se obtiene la energía de deformación total del elemento:

$$U = \frac{\tau\gamma h^2 t}{2}$$

Ya que el volumen del elemento es $h^2 t$, la densidad de energía de deformación (esto es, la energía de deformación por unidad de volumen) es

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} \quad (3-36)$$

Finalmente introducimos la ley de Hooke en cortante ($\tau = G\gamma$) y obtenemos las siguientes ecuaciones para la **densidad de energía de deformación**:

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad u = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (3-37a, b)$$

Estas ecuaciones son de forma similar a las obtenidas para esfuerzos uniaxiales (Ecs. 2-41a y b). La densidad de energía de deformación en cortante puro puede visualizarse como el área bajo la curva esfuerzo-deformación para cortante. Las unidades para u en el Sistema Internacional son joules por metro cúbico (J/m^3) y en el Sistema Inglés son pulgada-libras por pulgada cúbica (u otras unidades similares). Dado que estas unidades son las mismas que para los esfuerzos, podemos también expresar u en pascals o psi.

Ahora que hemos obtenido las expresiones para la densidad de energía de deformación en cortante puro, podemos determinar fácilmente la cantidad de energía de deformación almacenada en una barra circular (hueca o sólida) sometida a torsión pura (Fig. 3-25a). Considérese un tubo circular elemental de material, que se extiende a lo largo de la barra y tiene un radio ρ y un espesor $d\rho$. Un pequeño elemento de este tubo se muestra en la Fig. 3-25b y está sometido en sus caras laterales a esfuerzos cortantes τ representados por la fórmula de torsión $\tau = T\rho/I_p$. En consecuencia, la densidad de energía de deformación a un radio ρ es

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{T^2 \rho^2}{2GI_p^2}$$

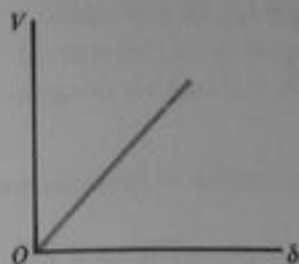


Fig. 3-24 Diagrama carga-deflexión para un material linealmente elástico

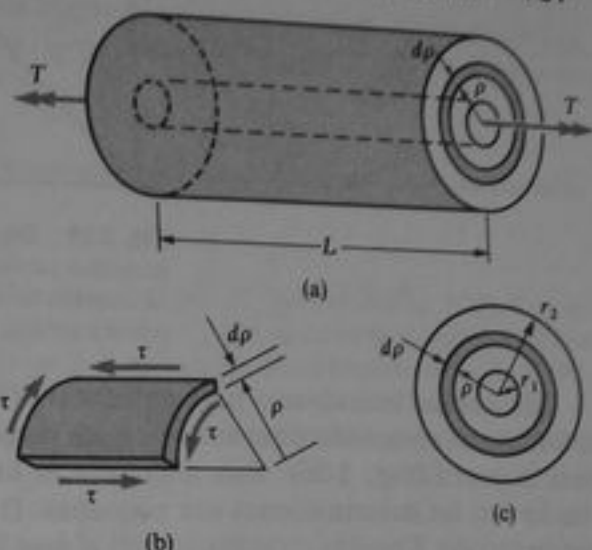


Fig. 3-25 Barra en torsión pura

La energía de deformación dU en el tubo elemental se determina al multiplicar la densidad u por el volumen del tubo:

$$dU = uL dA = \frac{T^2 L \rho^2 dA}{2GI_p^2}$$

donde $dA = 2\pi\rho d\rho$ es el área anular de la cara extrema del tubo elemental. Enseguida, la energía de deformación total de la barra puede obtenerse al integrar la expresión anterior para dU entre los límites $\rho = r_1$ y $\rho = r_2$ (Fig. 3-25c):

$$U = \int dU = \frac{T^2 L}{2GI_p^2} \int_{\rho=r_1}^{\rho=r_2} \rho^2 dA$$

Por supuesto, la integral en esta ecuación es el momento polar de inercia I_p . Por lo que, la **energía de deformación elástica** de una barra circular en torsión pura es

$$U = \frac{T^2 L}{2GI_p} \quad (3-38a)$$

Esta fórmula representa U en términos del par aplicado T . Una ecuación optativa puede obtenerse al sustituir de la fórmula para el ángulo de torsión ($\phi = TL/GI_p$); luego,

$$U = \frac{GI_p \phi^2}{2L} \quad (3-38b)$$

que determina U en términos de ϕ . Las unidades para U son joules (J) en Sistema Internacional y pulgada-libras (u otras unidades similares) en Sistema Inglés. Obsérvese la analogía entre las Ecs. (3-38a y b) para torsión y las Ecs. (2-39a y b) para carga uniaxial.

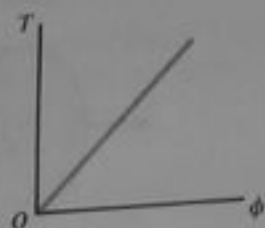


Fig. 3-26 Diagrama momento torsionante-ángulo de rotación de una barra sujeta a torsión pura

Un camino más directo para obtener las fórmulas anteriores para la energía de deformación en torsión pura es utilizar un **diagrama momento torsionante-rotación** para la barra (Fig. 3-26). Este diagrama es lineal si el material cumple la ley de Hooke y si las deformaciones son pequeñas. Durante el torcimiento de la barra, el par de torsión T realiza un trabajo igual al área bajo la línea del diagrama, por lo que la energía de deformación elástica correspondiente de la barra es

$$U = \frac{T\phi}{2} \quad (3-39)$$

Al combinar esta ecuación con la ecuación $\phi = TL/GI_p$ se obtienen las mismas expresiones para la energía de deformación (Ecs. 3-38a y b).

Torsión no uniforme. Si la barra tiene sección transversal circular de radio variable o si el par cambia a lo largo del eje de la barra (véanse Figs. 3-7 y 3-8), entonces debemos plantear fórmulas más generales para la energía de deformación en torsión. Para lograr este resultado, considérese un disco elemental de longitud dx a una distancia x de un extremo de la barra (Fig. 3-8). Si se considera que el par que actúa sobre este elemento es T_x y que el momento polar de inercia de su sección transversal es I_{px} , se obtiene de la Ec. (3-38a) la siguiente expresión para la energía de deformación del elemento:

$$dU = \frac{T_x^2 dx}{2GI_{px}}$$

Por lo tanto, la energía de deformación total de la barra es

$$U = \int_0^L \frac{T_x^2 dx}{2GI_{px}} \quad (3-40a)$$

Una expresión optativa para U se obtiene al aplicar la Ec. (3-38b) al elemento de longitud dx :

$$dU = \frac{GI_{px}(d\phi)^2}{2dx} = \frac{GI_{px}}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx$$

donde $d\phi$ es el ángulo de torsión del elemento y $d\phi/dx$ es el ángulo de torsión ϕ por unidad de longitud. La energía total resulta ahora

$$U = \int_0^L \frac{GI_{px}}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \quad (3-40b)$$

Cualquiera de las Ecs. (3-40a y b) puede emplearse para determinar la energía de deformación total en torsión no uniforme, lo que depende de si se considera el par o el ángulo de torsión como funciones de x .

Ejemplo 1

Una barra circular AB de longitud L está fija en su extremo A y libre en B (Fig. 3-27). Se consideran tres condiciones de carga diferentes: (a) Un par T_1 que actúa en el extremo B ; (b) un par T_1 que actúa en el punto medio C ; y (c) pares T_1 que actúan simultáneamente en B y C . Para cada caso de carga, determinar la energía de deformación U almacenada en la barra.

(a) Para el par T_1 que actúa en el extremo B , la energía de deformación se obtiene directamente de la Ec. (3-38a).

$$U_a = \frac{T_1^2 L}{2GI_p}$$

(b) Para el par T_1 que actúa en el punto medio C , aplicamos la Ec. (3-38a) a la porción AC de la barra:

$$U_b = \frac{T_1^2(L/2)}{2GI_p} = \frac{T_1^2 L}{4GI_p}$$

(c) Cuando actúan ambas cargas, el par en la sección CB es T_1 y en la sección AC es $2T_1$; luego,

$$U = \frac{T_1^2(L/2)}{2GI_p} + \frac{(2T_1)^2(L/2)}{2GI_p} = \frac{5T_1^2 L}{4GI_p}$$

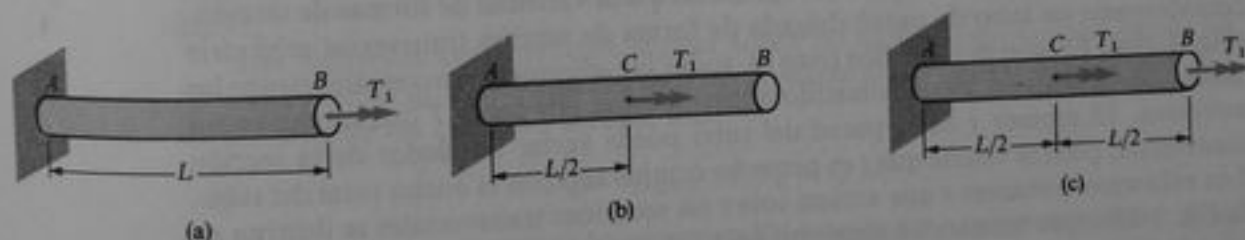


Fig. 3-27 Ejemplo 1

Es importante apreciar que la energía de deformación producida por la acción simultánea de las dos cargas no es igual a la suma de las energías de deformación debidas a la acción independiente de las cargas. Como se indicó en la Sección 2.8, la explicación radica en el hecho de que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas, y no una función lineal.

Ejemplo 2

Una barra circular AB , fija en un extremo y libre en el otro, se carga con un par distribuido de intensidad constante q por unidad de distancia, a lo largo del eje de la barra (Fig. 3-28). Obtener una fórmula para la cantidad de energía de deformación almacenada en la barra cuando se

aplica la carga. Evaluar también la energía de deformación para los siguientes valores numéricos: $L = 8 \text{ m}$, $I_p = 120 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $q = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ y $G = 78 \text{ GPa}$.

El par T_x que actúa a una distancia x del extremo libre de la barra se obtiene por estática:

$$T_x = qx$$

Al sustituir en la Ec. (3-40a), obtenemos

$$U = \int_0^L \frac{T_x^2 dx}{2GI_p} = \frac{1}{2GI_p} \int_0^L (qx)^2 dx = \frac{q^2 L^3}{6GI_p} \quad (3-41)$$

como la fórmula para la energía de deformación almacenada en la barra.

La energía de deformación puede evaluarse numéricamente de la Ec. (3-41), al sustituir los datos:

$$U = \frac{(5 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m})^2 (8 \text{ m})^3}{6(78 \text{ GPa})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 228 \text{ J}$$

Recuérdese que un joule es igual a un newton metro ($1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$).

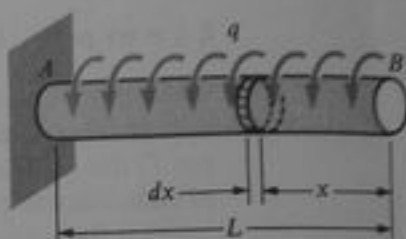


Fig. 3-28 Ejemplo 2

3.9 TUBOS DE PARED DELGADA

La teoría de la torsión descrita en las secciones anteriores es aplicable a barras de sección transversal circular, sólidas o huecas. Tales formas se emplean comúnmente para miembros sujetos a torsión, especialmente en maquinaria. Sin embargo, en estructuras ligeras, tales como aeronaves y naves espaciales, se requieren a menudo miembros tubulares de pared delgada y de formas no circulares, para soportar torsión. En esta sección se describe el análisis de miembros estructurales de este tipo.

Para obtener fórmulas que sean aplicables a una variedad de formas de sección, consideremos un tubo de pared delgada de forma de sección transversal arbitraria (Fig. 3-29a). El tubo es cilíndrico (esto es, todas las secciones transversales tienen las mismas dimensiones) y está sometido a torsión pura por pares T que actúan en los extremos. El espesor t de la pared del tubo puede variar alrededor de la sección transversal, pero se asume que t es pequeño comparado con el ancho total del tubo. Los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre las secciones transversales se ilustran en la Fig. 3-29b, que muestra un elemento del tubo recortado entre dos secciones transversales separadas una distancia dx . Los esfuerzos cortantes tienen direcciones paralelas a las orillas de la sección transversal, y "fluyen" alrededor del tubo. La intensidad de los esfuerzos cortantes varía tan ligeramente a través del espesor del tubo (porque se supuso que el tubo era delgado) que para muchos fines se considera que τ es constante a través del espesor. Por supuesto, la manera en que varía τ alrededor de la sección transversal debe determinarse de consideraciones de equilibrio.

Para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes, considérese un elemento rectangular obtenido al efectuar dos cortes longitudinales ab y cd (Figs. 3-29a y b). Este elemento se separa como un cuerpo libre en la Fig. 3-29c. Sobre la cara de la sección transversal bc actúan los esfuerzos τ mostrados en la Fig. 3-29b. Se supone que estos esfuerzos pueden variar en intensidad conforme se traslada a lo largo de la sección transversal desde b hasta c . Así que el esfuerzo cortante en b se denota por τ_b y en c se denota por τ_c . Según sabemos del equilibrio en la otra cara de la sección

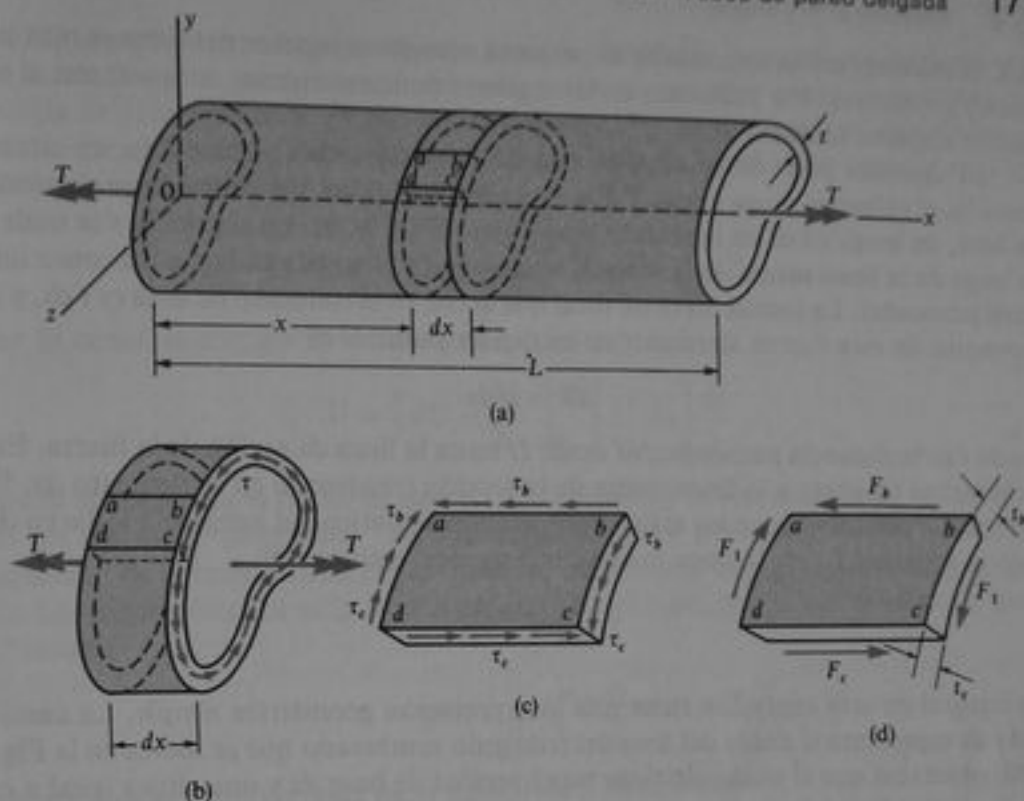


Fig. 3-29 Tubo de pared delgada con forma de sección transversal arbitraria

transversal ad , actúan esfuerzos cortantes idénticos, pero en dirección opuesta. Sobre las caras longitudinales ab y cd actuarán esfuerzos cortantes de la misma magnitud que aquéllos de las secciones transversales, ya que los esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares son de magnitudes iguales (véase Sección 1.6). Así, los esfuerzos cortantes constantes sobre las caras ab y cd son iguales a τ_b y τ_c , respectivamente.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras longitudinales producen fuerzas F_b y F_c (Fig. 3-29d) que pueden determinarse al multiplicar los esfuerzos por las áreas sobre las que éstos actúan; así,

$$F_b = \tau_b t_b dx \quad F_c = \tau_c t_c dx$$

en las cuales t_b y t_c representan los espesores del tubo en b y c , respectivamente. Además, se producen fuerzas F_1 debidas a los esfuerzos que actúan en las caras bc y ad . Pero estas fuerzas no se incluyen en nuestro estudio. A partir del equilibrio del elemento en la dirección x , se aprecia que $F_b = F_c$, o sea

$$\tau_b t_b = \tau_c t_c$$

Dado que la localización de los cortes longitudinales ab y cd se seleccionó arbitrariamente, se puede apreciar en la ecuación anterior que el producto del esfuerzo cortante τ y el espesor t del tubo es el mismo en cada punto de la sección transversal. Este producto se conoce como el **flujo de cortante** y se denota por la letra f :

$$f = \tau t = \text{constante}$$

(3-42)

Así, el máximo esfuerzo cortante se presenta cuando el espesor del tubo es más pequeño y viceversa. Por supuesto, en las regiones donde el espesor es constante, el esfuerzo cortante también lo es.

El siguiente paso del análisis es relacionar el flujo de cortante f (y, en consecuencia, el esfuerzo τ) con el par T que actúa sobre el tubo. Considérese un elemento de área, de longitud ds en la sección transversal (Fig. 3-30). La distancia s se mide a lo largo de la línea media de la sección transversal (mostrada en la figura como una línea punteada). La fuerza cortante total que actúa en el elemento de área es $f ds$, y el momento de esta fuerza alrededor de cualquier punto O es

$$dT = r f ds$$

donde r es la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de la fuerza. Esta última es tangente a la línea media de la sección transversal en el elemento ds . El par total T producido por los esfuerzos cortantes se obtiene al integrar a lo largo de toda la longitud L_m de la línea media de la sección transversal:

$$T = f \int_0^{L_m} r ds$$

La integral en esta expresión tiene una interpretación geométrica simple. La cantidad $r ds$ representa el doble del área del triángulo sombreado que se indica en la Fig. 3-30; obsérvese que el triángulo tiene una longitud de base ds y una altura igual a r . Por lo tanto, la integral representa el doble del área A_m limitada por la línea media de la sección transversal; así,

$$T = 2fA_m$$

De esta ecuación obtenemos

$$f = \tau t = \frac{T}{2A_m}$$

$$\tau = \frac{T}{2tA_m} \quad (3-43a, b)$$

A partir de estas ecuaciones pueden calcularse el flujo de cortante f y los esfuerzos cortantes τ para cualquier tubo de pared delgada.

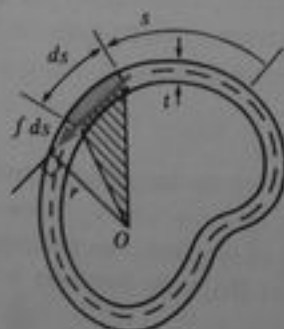


Fig. 3-30 Sección transversal de un tubo de pared delgada

El ángulo de torsión ϕ puede calcularse al considerar la energía de deformación del tubo. Ya que los elementos del tubo están en cortante puro, la densidad de energía de deformación es $\tau^2/2G$, según la Ec. (3-37a). Por lo que la energía de deformación de un pequeño elemento del tubo, con área de sección transversal $t ds$ (Fig. 3-30) y longitud dx (Fig. 3-29) es

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} t ds dx = \frac{\tau^2 t^2 ds}{2G t} dx = \frac{f^2 ds}{2G t} dx$$

Por lo tanto, la energía de deformación total del tubo es

$$U = \int dU = \frac{f^2}{2G} \int_0^{L_m} \left[\int_0^L dx \right] \frac{ds}{t}$$

donde se considera el hecho de que el flujo cortante f es una constante y puede salir de los signos de integrales. También notamos que t puede variar con la posición alrededor de la línea media, por lo que debe permanecer bajo el signo de integral con ds . La integral interior es igual a la longitud L del tubo, por lo que la ecuación para U resulta

$$U = \frac{f^2 L}{2G} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

Al sustituir el flujo cortante de la Ec. (3-43a), obtenemos

$$U = \frac{T^2 L}{8GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \quad (3-44)$$

como la ecuación para la energía de deformación del tubo en términos del par T .

La expresión para la energía de deformación puede formularse de manera más simple al introducir una nueva propiedad de la sección transversal que se conoce como la **constante de torsión** J . Para un tubo de pared delgada, la constante de torsión es

$$J = \frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}} \quad (3-45)$$

Con esta notación, la ecuación para la energía de deformación (Ec. 3-44) resulta

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (3-46)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación para la energía de deformación en una barra circular (véase Ec. 3-38a) excepto que la constante de torsión J ha reemplazado al momento polar de inercia I_p . En el caso especial de una sección transversal de espesor constante t , la expresión para J (Ec. 3-45) se simplifica a

$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m} \quad (3-47)$$

Obsérvese que J tiene unidades de longitud a la cuarta potencia.



Fig. 3-31 Tubo circular de pared delgada

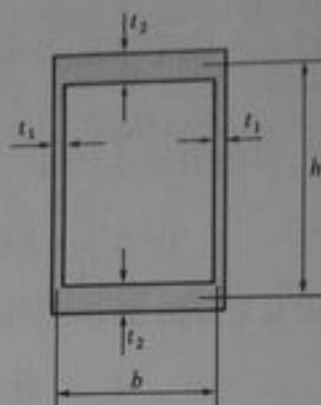


Fig. 3-32 Tubo rectangular de pared delgada

Para cada forma de sección transversal, podemos evaluar J con alguna de las ecuaciones anteriores (Ecs. 3-45 o 3-47). Por ejemplo, considérese un tubo circular de pared delgada (Fig. 3-31) de espesor t y radio r de la línea media. La longitud de la línea media y el área que limita son

$$L_m = 2\pi r \quad A_m = \pi r^2$$

En consecuencia, la constante de torsión es

$$J = 2\pi r^3 t \quad (3-48)$$

según se obtiene de la Ec. (3-47). La Fig. 3-32 muestra otro ejemplo; un tubo rectangular de pared delgada. El tubo tiene un espesor t_1 en los lados y t_2 en la cima y la base; la altura y el ancho (en la línea media de la sección transversal) son h y b , respectivamente. Para esta sección transversal, tenemos

$$L_m = 2(b + h) \quad A_m = bh$$

y

$$\int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = 2 \int_0^h \frac{ds}{t_1} + 2 \int_0^b \frac{ds}{t_2} = 2 \left(\frac{h}{t_1} + \frac{b}{t_2} \right)$$

Así, la constante de torsión es

$$J = \frac{2b^2 h^2 t_1 t_2}{bt_1 + ht_2} \quad (3-49)$$

según se obtiene de la Ec. (3-45).

El ángulo de torsión ϕ para un tubo de pared delgada puede determinarse al igualar el trabajo realizado por los pares aplicados T con la energía de deformación de la barra:

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 L}{2GJ}$$



Fig. 3-33 Secciones abiertas de pared delgada

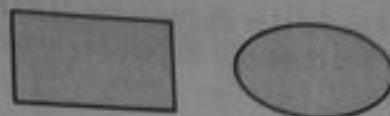


Fig. 3-34 Secciones macizas no circulares

de donde

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (3-50)$$

Nuevamente observamos que la ecuación es de la misma forma que la correspondiente a una barra circular (Ec. 3-8). Si se requiere el ángulo de torsión por unidad de longitud, θ , puede obtenerse al dividir ϕ por L ; así, $\theta = T/GJ$ (compárese con la Ec. 3-7).*

La cantidad GJ se conoce en general como la **rigidez torsional** de una barra. En el caso de una barra circular, la constante de torsión J es el momento polar de inercia; en el caso de un tubo de pared delgada, J está dada por la Ec. (3-45). Para otras formas de sección transversal, se requieren diferentes fórmulas para J . Por ejemplo, fórmulas de J para secciones abiertas de pared delgada (Fig. 3-33) y secciones sólidas no circulares (Fig. 3-34) pueden obtenerse por métodos de análisis más avanzados.

Tubos circulares de pared delgada. Consideremos nuevamente el tubo circular representado en la Fig. 3-31. El flujo de cortante y los esfuerzos cortantes en este tubo están dados por las fórmulas

$$f = \frac{T}{2\pi r^2} \quad \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \quad (3-51a, b)$$

que se obtienen de las Ecs. (3-43a y b), al sustituir $A_m = \pi r^2$. También, el ángulo de torsión (véanse Ecs. 3-50 y 3-48) es

$$\phi = \frac{TL}{2\pi Gr^3 t} \quad (3-52)$$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos de las ecuaciones derivadas anteriormente para una barra circular hueca (Sección 3.2). Si la barra hueca es de pared delgada, el momento polar de inercia (véase la Ec. 3-13) es aproximadamente

$$I_p = 2\pi r^3 t$$

que coincide con la Ec. (3-48) para J . Usando esta expresión para I_p en la fórmula de la torsión (Ec. 3-9) se determina la Ec. (3-51) para τ .

Si un tubo sometido a torsión tiene paredes muy delgadas, debe considerarse la posibilidad de pandeo de las paredes. Por ejemplo, un tubo circular largo construido de acero dulce se pandeará bajo esfuerzos de trabajo normales cuando la relación r/t

* La teoría de la torsión para tubos de pared delgada se debe al ingeniero alemán R. Bredt, quien la propuso en 1896 (Ref. 3-4).

(véase Fig. 3-31) es de alrededor de 60 (véase Ref. 3-5). Por lo que, en esta sección se supone que el espesor de pared es lo bastante grande como para evitar el pandeo por torsión.

Ejemplo 1

Comparar el esfuerzo cortante máximo en un tubo circular (Fig. 3-31) calculado de la Ec. (3-51b) para un tubo de pared delgada con el esfuerzo calculado de la fórmula de torsión (Ec. 3-9).

La fórmula para el esfuerzo cortante en un tubo de pared delgada establece

$$\tau_1 = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{2\pi t^3 \beta^2} \quad (a)$$

en la que se introduce la notación $\beta = r/t$. El esfuerzo cortante máximo exacto en el tubo está dado por la fórmula de torsión:

$$\tau_2 = \frac{T(r + t/2)}{I_p} \quad (b)$$

donde

$$I_p = \frac{\pi}{2} \left[\left(r + \frac{t}{2} \right)^4 - \left(r - \frac{t}{2} \right)^4 \right]$$

según se obtiene de la Ec. (3-12). Después de desarrollar y simplificar esta expresión para I_p se tiene

$$I_p = \frac{\pi r t}{2} (4r^2 + t^2)$$

de forma tal que la expresión para τ_2 (Ec. b) resulta

$$\tau_2 = \frac{T(2r + t)}{\pi r t (4r^2 + t^2)} = \frac{T(2\beta + 1)}{\pi t^3 \beta (4\beta^2 + 1)} \quad (c)$$

la relación τ_1/τ_2 es

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4\beta^2 + 1}{2\beta(2\beta + 1)} \quad (3-53)$$

que depende únicamente de la cantidad β (esto es, de la relación r/t). Para valores de β iguales a 5, 10 y 20, obtenemos de la Ec. (3-53) las relaciones $\tau_1/\tau_2 = 0.92, 0.95$ y 0.98 , respectivamente. Así, la Ec. (3-53) indica que la fórmula aproximada para los esfuerzos cortantes da resultados que son sólo ligeramente menores que los obtenidos a partir de la fórmula exacta y que la exactitud de la fórmula aproximada aumenta conforme el tubo se vuelve de espesor de pared relativamente más delgado.

Ejemplo 2

Un tubo de sección circular y un tubo de sección cuadrada (Fig. 3-35) están contruidos del mismo material. Ambos tubos tienen la misma longitud, espesor y área de sección transversal,

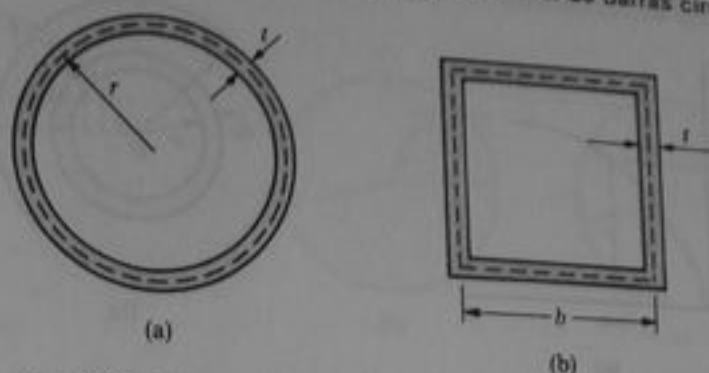


Fig. 3-35 Ejemplo 2

y están sometidos al mismo par de torsión. ¿Qué relación guardan los esfuerzos cortantes y los ángulos de torsión para los tubos? (Despreciar los efectos de concentraciones de esfuerzo en las esquinas del tubo cuadrado.)

Para el tubo circular, el área A_{m1} limitada por la línea media de la sección transversal es $A_{m1} = \pi r^2$, donde r es el radio de la línea media. También, el área de sección transversal del tubo circular es $A_1 = 2\pi r t$, y su constante de torsión es $J_1 = 2\pi r^3 t$ (Ec. 3-48).

Para el tubo cuadrado, el área de sección transversal es $A_2 = 4bt$, donde b es la longitud de un lado, medida a lo largo de la línea media. Dado que las áreas de sección transversal de ambos tubos son las mismas, obtenemos $b = \pi r/2$. También, el área limitada por la línea media de la sección transversal es $A_{m2} = b^2$, y su constante de torsión es $J_2 = \pi^3 r^3 t/8$ (obtenida de la Ec. 3-49).

La relación τ_1/τ_2 del esfuerzo cortante en el tubo circular al esfuerzo cortante en el tubo cuadrado (véase Ec. 3-43b) es

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \quad (d)$$

La relación de los ángulos de torsión (véase Ec. 3-50) es

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\pi^2}{16} = 0.617 \quad (e)$$

Estos resultados indican que el tubo circular no sólo tiene un esfuerzo cortante menor que el tubo cuadrado sino también una rigidez mayor respecto a rotación.

*3.10 TORSIÓN NO LINEAL DE BARRAS CIRCULARES

Las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores para la torsión de barras circulares, se aplican únicamente si el material cumple con la ley de Hooke. Consideremos ahora el comportamiento de las barras cuando los esfuerzos cortantes superan el límite de proporcionalidad. Para tales barras, se supone que si se considera la simetría, las secciones transversales circulares permanecen planas y que los radios permanecen rectos. Por lo tanto, la deformación angular γ a una distancia ρ del eje de la barra (véase Fig. 3-2c) se determina por la misma fórmula que para el caso de torsión elástica, a saber:

$$\gamma = \rho\theta \quad (3-54)$$

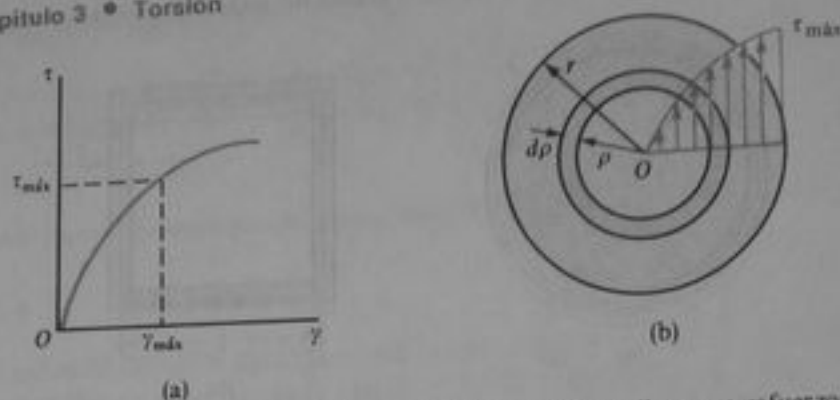


Fig. 3-36 Torsión no lineal de una barra circular: (a) diagrama esfuerzo-deformación debido a cortante, y (b) distribución de esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal

También, la deformación angular máxima, que ocurre en la orilla externa de la sección transversal r , es

$$\gamma_{\text{máx}} = r\theta \quad (3-55)$$

en donde r es el radio de la barra.

Para cualquier valor supuesto de θ , el esfuerzo cortante τ en cualquier punto de la barra puede determinarse si se conoce el diagrama esfuerzo-deformación del material (Fig. 3-36a). En la orilla externa de la sección transversal, la deformación es $\gamma_{\text{máx}}$, y el esfuerzo correspondiente $\tau_{\text{máx}}$ puede obtenerse del diagrama esfuerzo-deformación. Para puntos intermedios de la sección transversal puede emplearse el mismo procedimiento. Como resultado, la distribución de los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal (Fig. 3-36b) tendrá el mismo perfil que el diagrama esfuerzo-deformación.

El momento torsionante T que debe actuar sobre la barra a fin de producir el ángulo de torsión por unidad de longitud supuesto θ , puede obtenerse de una ecuación de estática (véase Fig. 3-36b):

$$T = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau d\rho \quad (3-56)$$

De la Ec. (3-54), obtenemos $\rho = \gamma/\theta$ y $d\rho = d\gamma/\theta$. Al sustituir estas relaciones en la Ec. (3-56) y cambiar también el límite de integración superior por $\gamma_{\text{máx}}$, obtenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{\gamma_{\text{máx}}} \tau\gamma^2 d\gamma \quad (3-57)$$

La integral en el segundo miembro de esta ecuación tiene una interpretación geométrica simple. Representa el momento de inercia con respecto al eje vertical (esto es, el eje τ) del área bajo la curva esfuerzo-deformación (Fig. 3-36a) entre el origen O y la deformación máxima $\gamma_{\text{máx}}$. Así, para cualquier valor supuesto de θ , podemos calcular $\gamma_{\text{máx}}$ y el momento de inercia correspondiente. Entonces, de la Ec. (3-57) podemos obtener el valor del par T . Al repetir este procedimiento para varios valores de θ , obtenemos una curva que representa la relación entre T y θ . Con tal curva, podemos determinar θ y $\tau_{\text{máx}}$ para cualquier valor dado de T .

Si el material de la barra tiene un esfuerzo de fluencia pronunciado τ_f , el diagrama esfuerzo-deformación puede idealizarse como se muestra en la Fig. 3-37a. El diagrama

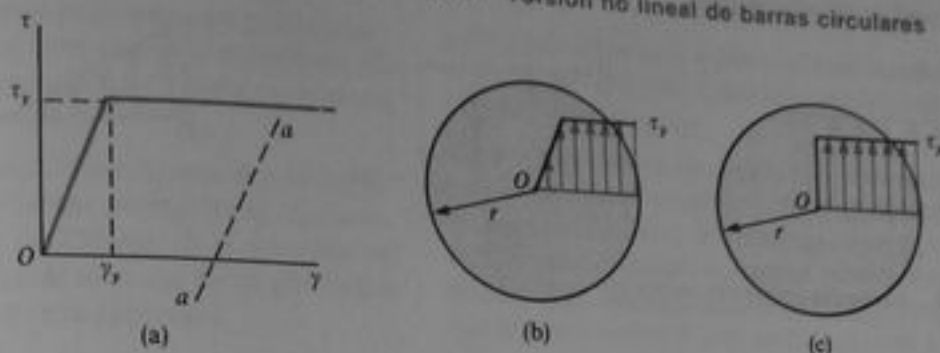


Fig. 3-37 Torsión de una barra circular de material elastoplástico

ma consiste en dos líneas rectas, la primera de las cuales representa comportamiento elástico lineal, y la segunda, comportamiento perfectamente plástico. Mientras la deformación máxima de la barra sea menor que la deformación de fluencia γ_y , la barra se comporta elásticamente y pueden utilizarse las fórmulas obtenidas en la Sección 3.2. Cuando la deformación en la orilla externa de la sección transversal supera γ_y , la distribución de esfuerzo sobre la sección transversal tendrá la forma mostrada en la Fig. 3-37b. La fluencia se inicia en la orilla externa de la barra y se desplaza progresivamente hacia el centro conforme se incrementan las deformaciones. Si las deformaciones se vuelven muy grandes, la región de fluencia se aproxima a la mitad de la barra y la distribución de esfuerzos se aproximará a la distribución uniforme mostrada en la Fig. 3-37c. El momento correspondiente T_u es el momento último para la barra, y su valor (de la Ec. 3-56) es

$$T_u = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau_y d\rho = \frac{2\pi r^3\tau_y}{3} \quad (3-58)$$

Cuando se alcanza este valor del par, se presentan torsiones adicionales de la barra sin incremento del par. Finalmente, los efectos de endurecimiento por deformación serán apreciables y entonces ocurrirán esfuerzos más grandes que τ_y .

El par de torsión T_y para el cual principia la fluencia en la barra se determina a partir de la fórmula de torsión (Ec. 3-9), al sustituir τ por τ_{max} :

$$T_y = \frac{\tau_y J_P}{r} = \frac{\pi r^3 \tau_y}{2} \quad (3-59)$$

Al comparar las Ecs. (3-58) y (3-59), se aprecia que la relación del par último al par de fluencia es

$$\frac{T_u}{T_y} = \frac{4}{3} \quad (3-60)$$

De este resultado observamos que, después de iniciarse la fluencia en la barra, ésta sólo soporta un tercio de incremento en el par hasta alcanzar su capacidad de carga última.

Esfuerzos residuales. Si una barra en torsión se carga más allá del límite elástico y luego se retira la carga, algunos esfuerzos permanecerán en la barra. Tales esfuerzos se conocen como **esfuerzos residuales**. Para ejemplificar su cálculo, supongamos que una barra circular sólida se carga hasta el momento torsionante último T_u , por lo que se origina la distribución de esfuerzo mostrada en la Fig. 3-37c, y

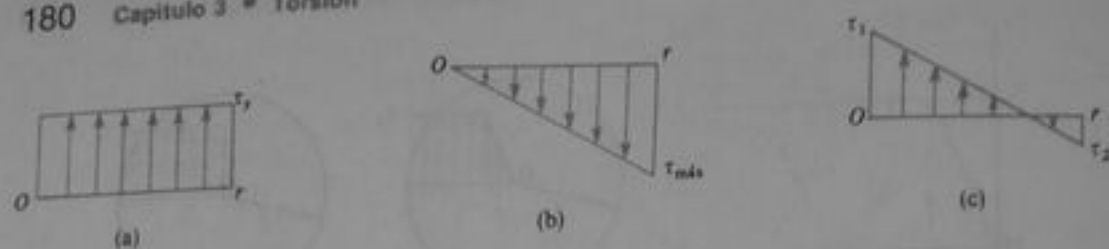


Fig. 3-38 Esfuerzos residuales en torsión

que en ese momento se retira el par completamente. Durante el proceso de descarga, el material conforma una línea recta sobre el diagrama esfuerzo-deformación (línea *a-a* en la Fig. 3-37a), paralela a la línea recta inicial que representa a la ley de Hooke. De esta manera, los esfuerzos producidos durante la descarga pueden obtenerse a partir de las ecuaciones para comportamiento elástico lineal (Ecs. 3-9 a 3-11).

La superposición de los esfuerzos producidos durante los procesos de carga y descarga se muestra en la Fig. 3-38. Los esfuerzos alcanzados durante el proceso de carga se muestran en la primera parte de la figura; el par correspondiente es $T_u = 2\pi r^3 \tau_y / 3$. Este mismo par se representa mediante el diagrama de esfuerzos de descarga mostrado en la Fig. 3-38b, excepto que ahora el par actúa en dirección opuesta y el comportamiento es linealmente elástico. El esfuerzo máximo es $\tau_{m\acute{a}x} = T_u r / J$, o sea $\tau_{m\acute{a}x} = 4\tau_y / 3$. Los esfuerzos residuales en la barra, obtenidos al superponer los esfuerzos causados por la carga y descarga, se muestran en la Fig. 3-38c. En el centro de la barra el esfuerzo residual es

$$\tau_1 = \tau_y \quad (3-61)$$

y, en la orilla externa de la sección transversal, el esfuerzo residual es

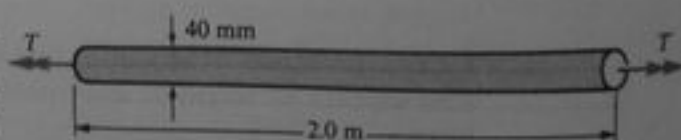
$$\tau_2 = \tau_{m\acute{a}x} - \tau_y = \frac{\tau_y}{3} \quad (3-62)$$

Este último esfuerzo actúa en dirección opuesta a τ_1 . Este mismo procedimiento para el cálculo de esfuerzos residuales puede emplearse con otros perfiles de diagramas esfuerzo-deformación.

PROBLEMAS / CAPÍTULO 3

3.2-1 Una barra sólida de acero de sección transversal circular se torsiona por medio de pares aplicados en los extremos (véase figura). Si el ángulo de rotación de la sección transversal en un extremo con respecto al otro extremo es 0.05 rad, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{m\acute{a}x}$ y la deformación angular máxima $\gamma_{m\acute{a}x}$ en la barra? (La barra tiene longitud $L = 2$ m, diámetro $d = 40$ mm y $G = 80$ GPa.)

3.2-2 Determinar la longitud de una flecha o barra maciza de acero ($G = 11.5 \times 10^6$ psi) de diámetro $d = 2$



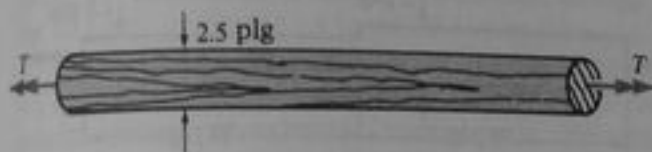
Prob. 3.2-1

plg si el esfuerzo cortante máximo es 13,500 psi cuando el ángulo de torsión ϕ es 3° .

3.2-3 ¿Qué longitud se requiere para una flecha maciza de acero de 12 mm de diámetro de forma tal

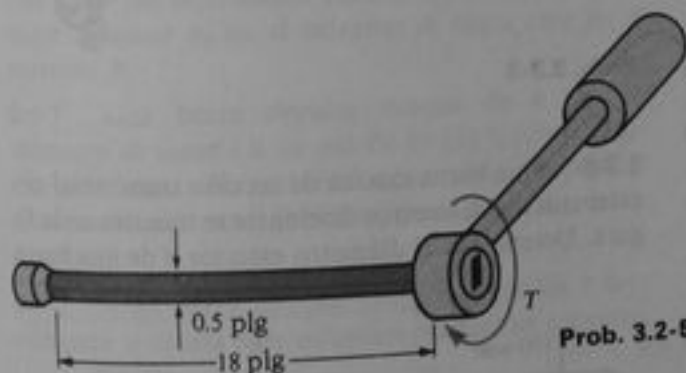
que la sección transversal en un extremo puede girarse 90° respecto a la del otro extremo, sin rebasar un esfuerzo cortante permisible de 70 MPa en la barra eje? (Asumir $G = 80$ GPa.)

3.2-4 Un eje redondo (véase figura) está hecho de roble, que tiene un esfuerzo permisible en cortante, paralelo a las fibras, de 250 psi. Si el eje tiene un diámetro de 2.5 plg, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible T que puede aplicarse?



Prob. 3.2-4

3.2-5 El eje de acero de una llave de matraca tiene 0.5 plg de diámetro y 18 plg de longitud (véase figura). Si el esfuerzo permisible en cortante es 9000 psi, ¿cuál es el par máximo permisible T que puede aplicarse con la llave? ¿A qué ángulo ϕ se torcerá la barra bajo la acción del par máximo? (Suponer $G = 11.8 \times 10^6$ psi.)



Prob. 3.2-5

gulo de rotación ϕ es 0.068 radianes cuando el par T es 650 N·m. Calcular el módulo de elasticidad a cortante G del material.

3.2-8 Una barra eje para la hélice de una pequeña embarcación está hecha de una barra maciza de acero de 4 plg de diámetro. El esfuerzo cortante permisible es 7200 psi y el ángulo de torsión admisible es de 1° en 60 plg. Si se asume que $G = 11.8 \times 10^6$ psi, determinar el par máximo T que puede aplicarse a la flecha.

3.2-9 ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido d para una barra circular maciza sometida a un par de torsión $T = 32,000$ plg·lb, si el esfuerzo cortante permisible es 10,000 psi y el ángulo de torsión permisible por unidad de longitud es 1° por 3 pie? (Suponer $G = 11 \times 10^6$ psi.)

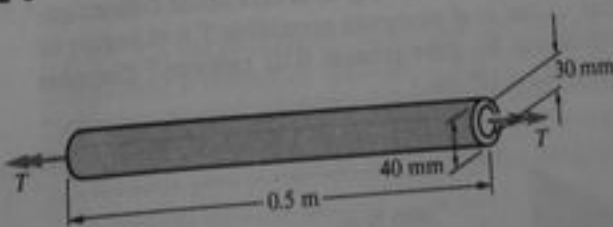
3.2-10 Una barra metálica maciza de 50 mm de diámetro y 2 m de longitud se tuerce en una máquina de pruebas hasta que uno de sus extremos gira un ángulo $\phi = 5^\circ$ respecto al otro extremo. Para este ángulo de torsión, se mide un par $T = 750$ N·m. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la flecha y el módulo de elasticidad a cortante G .



Prob. 3.2-6

3.2-6 Una flecha hueca tiene un diámetro exterior $d_2 = 100$ mm y un diámetro interior $d_1 = 70$ mm (véase figura). Calcular los esfuerzos cortantes τ_2 y τ_1 (véase figura). Dibujar un esquema que indique cómo varían los esfuerzos τ en magnitud a lo largo de una línea radial.

3.2-7 Un tubo metálico circular se somete a torsión mediante pares T aplicados en los extremos (véase figura). La barra tiene una longitud $L = 0.5$ m y los diámetros interior y exterior son 30 mm y 40 mm, respectivamente. Por medición, se determina que el ángulo



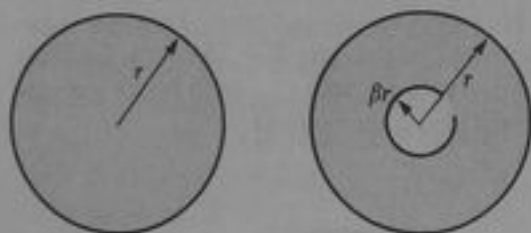
Prob. 3.2-7

3.2-11 Una barra hueca de aluminio ($G = 4,000,000$ psi) con un diámetro exterior de 4 plg y un diámetro interior de 3.5 plg tiene una longitud de 8 pie. (a) Si la flecha se tuerce mediante pares en los extremos, ¿cuál será el ángulo total de torsión ϕ cuando el esfuerzo cortante máximo sea 8000 psi? (b) ¿Qué diámetro d se requiere para

que una barra maciza soporte el mismo momento torsionante con el mismo esfuerzo cortante máximo?

3.2-12 Una barra eje circular hueca y una semejante pero maciza de idéntico material, se diseñan para transmitir el mismo par T con el mismo esfuerzo cortante máximo. Si el radio interior de la barra hueca es 0.8 veces el radio exterior, determinar (a) la relación del diámetro exterior de la flecha hueca al diámetro de la flecha maciza o sólida, y (b) la relación del peso de la flecha hueca al peso de la flecha sólida.

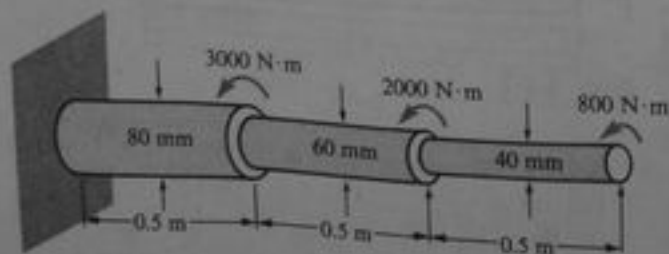
3.2-13 Una barra circular no hueca tiene inicialmente un radio r (véase figura). Se barrena longitudinalmente un agujero de radio βr . Obtener fórmulas para (a) el área porcentual extraída y (b) la reducción porcentual en la magnitud del par que puede aplicarse a la barra. Trazar una gráfica que muestre dichos porcentajes en función de β .



Prob. 3.2-13

3.3-1 Una barra de sección escalonada se somete a los pares indicados en la figura. La longitud de cada sección es 0.5 m y los diámetros son 80 mm, 60 mm y 40 mm. Si el material tiene un módulo de elasticidad a cortante $G = 80$ GPa, ¿cuál es el ángulo de torsión ϕ (en grados) en el extremo libre?

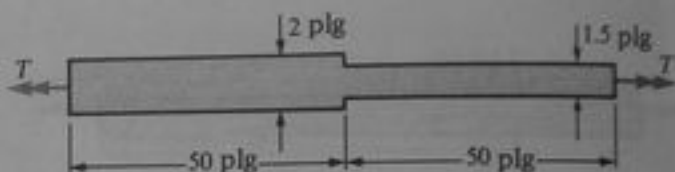
3.3-2 Una barra sujeta a torsión (longitud total 100 plg) tiene 2 plg de diámetro en una de sus mitades y un diámetro de 1.5 plg en la otra mitad (véase figura). ¿Cuál es el momento permisible T si el ángulo de torsión ϕ no debe rebasar 0.02 radianes? (Suponer $G = 12 \times 10^6$ psi.)



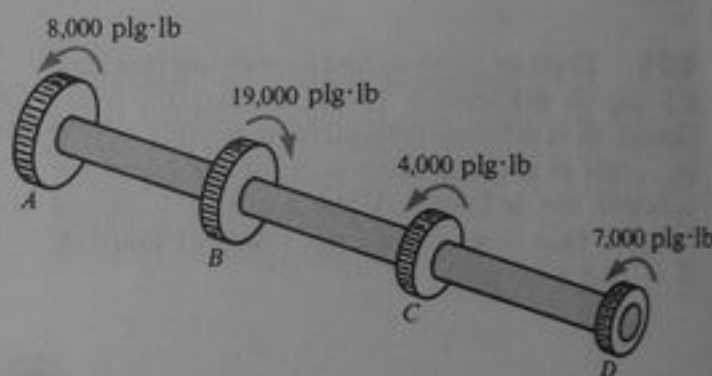
Prob. 3.3-1

3.3-3 Cuatro engranes están fijos a una barra maciza y transmiten los pares mostrados en la figura. Si se consideran únicamente los efectos de torsión, determinar los diámetros requeridos d_{AB} , d_{BC} y d_{CD} para cada porción de la barra si el esfuerzo permisible en cortante es 11,000 psi.

3.3-4 Resolver el problema anterior si se supone que la flecha o barra es hueca y que el diámetro interior es de 1.0 plg en toda la longitud de la misma.

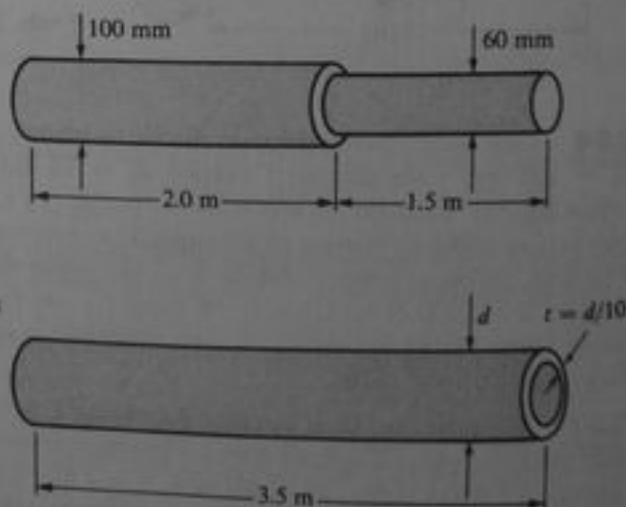


Prob. 3.3-2



Prob. 3.3-3

3.3-5 Una barra maciza de sección transversal circular con dos diámetros diferentes se muestra en la figura. Determinar el diámetro exterior d de una barra



Prob. 3.3-5

prismática hueca del mismo material y la misma longitud que tenga la misma rigidez torsional si el espesor de pared t de la barra hueca debe ser $d/10$.

3.3-6 Refiriéndose a la barra ahusada mostrada en la Fig. 3-10 y analizada en el Ejemplo 2 de la Sección 3.3, ¿para qué relación d_b/d_a el ángulo de torsión será igual a la mitad del ángulo de torsión ϕ correspondiente a una barra prismática de diámetro d_a ?

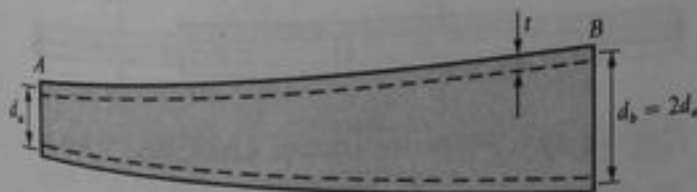
3.3-7 Un tubo cónico AB de sección transversal circular se muestra en la figura. El tubo tiene un espesor de pared constante t y longitud L . Los diámetros medios en los extremos son d_a y $2d_a$. Ya que la pared del tubo es relativamente delgada, el momento polar de inercia puede aproximarse mediante la fórmula $I_p = \pi d^3 t / 4$ (véase Ec. 3-13). Obtener una fórmula para el ángulo de torsión ϕ de este tubo, cuando se somete a pares T que actúan en sus extremos.

3.3-8 Una barra prismática AB de sección transversal circular sólida (rigidez torsional = GI_p) está fija en su extremo izquierdo (véase figura) y se somete a un par distribuido de intensidad constante q por unidad de longitud. Obtener una fórmula para el ángulo de rotación ϕ en el extremo libre B de la barra.

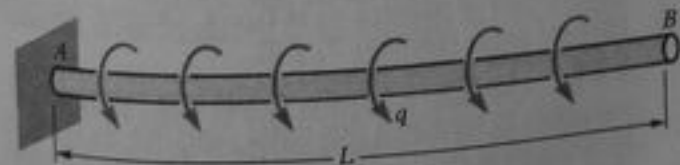
3.3-9 Resolver el problema anterior si la intensidad q del par distribuido varía linealmente desde un valor máximo q_0 en el extremo A hasta cero en el extremo B .

3.4-1 Una barra circular maciza de 4 plg de diámetro se somete a un par de 85 plg·k (véase figura). ¿Cuáles son los esfuerzos de tensión, compresión y cortante máximos? (Mostrar estos esfuerzos en esquemas.)

3.4-2 Una barra circular maciza sometida a torsión pura se diseña para esfuerzos permisibles a torsión,



Prob. 3.3-7



Prob. 3.3-8

compresión y cortante de 8000 psi, 20,000 psi y 10,000 psi, respectivamente. ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido d de la barra si debe transmitir un par de 5,000 plg·lb?

3.4-3 Una flecha circular hueca de aluminio ($G = 28$ GPa) se torsiona mediante un par T . Si se determina que el ángulo de torsión por unidad de longitud es $\theta = 0.04$ rad/m y la barra tiene un diámetro exterior de 100 mm y un diámetro interior de 50 mm, ¿cuál es el esfuerzo de tensión máximo σ_{max} en la flecha? ¿Cuál es la magnitud del par T aplicado?

3.4-4 Una barra circular hueca de acero ($G = 80$ GPa) se tuerce mediante un par T que produce una deformación angular máxima $\gamma_{max} = 800 \times 10^{-6}$ rad. La barra tiene radios exterior e interior de 75 y 60 mm, respectivamente. ¿Cuál es el esfuerzo de tensión máximo σ_{max} en la barra? ¿Cuál es la magnitud del par T aplicado?

3.5-1 Una barra hueca de diámetro exterior de 80 mm y diámetro interior de 50 mm está hecha de aluminio con un módulo de elasticidad en cortante $G = 27$ GPa. Cuando la barra se somete a un par $T = 4.8$ kN·m, ¿cuál es la deformación angular máxima γ y la deformación normal máxima ϵ en la barra?

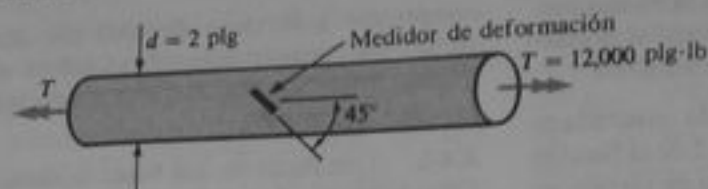
3.5-2 Un elemento esforzado en cortante puro se somete a esfuerzos cortantes $\tau = 20,000$ psi. Determinar la deformación angular γ si $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$.

3.5-3 Una barra circular sólida de diámetro $d = 2$ plg se somete a torsión en una máquina de prueba hasta que el par aplicado alcanza el valor $T = 12,000$ plg·lb (véase figura). Para este valor del par, un medidor de deformación (*strain gage*) orientado a 45° respecto del eje de la barra indica una lectura $\epsilon = 330 \times 10^{-4}$. Determinar el módulo de elasticidad a cortante G del material.

3.5-4 Un par de torsión T se aplica a una barra circular sólida o maciza de diámetro d y se mide la deformación normal máxima ϵ sobre la superficie de la barra (a 45° respecto a su eje longitudinal). Obtener una fórmula para el módulo de elasticidad a cortante G en función de T , d y ϵ .



Prob. 3.4-1



Prob. 3.5-3

3.5-5 Una barra circular se somete a un momento torsionante que produce un esfuerzo de tensión $\sigma = 56$ MPa a 45° del eje longitudinal. Determinar la deformación normal máxima ϵ y la deformación angular máxima γ en la barra, si se supone $E = 80$ GPa y $\nu = 0.30$.

3.6-1 ¿Cuánta potencia P puede transmitirse con una barra eje circular sólida de 80 mm de diámetro que gira a 0.75 Hz si el esfuerzo cortante no debe rebasar 30 MPa?

3.6-2 Una flecha circular sólida que tiene un diámetro de 4 plg gira a 75 rpm. ¿Cuál es la potencia máxima P que este elemento puede desarrollar sin exceder un esfuerzo permisible en cortante de 6000 psi?

3.6-3 La flecha propulsora de cierta embarcación es un tubo circular hueco que tiene un diámetro exterior de 18 plg y un diámetro interior de 10 plg. ¿Cuántos caballos de potencia H pueden transmitirse por la flecha si ésta gira a 100 rpm y el esfuerzo cortante máximo se limita a 4500 psi?

3.6-4 Una flecha circular sólida que gira a 2 Hz se requiere para transmitir 150 kW. ¿Cuál es su diámetro mínimo requerido d si el esfuerzo cortante permisible es 40 MPa?

3.6-5 Una flecha circular sólida que gira a 90 rpm debe transmitir 150 hp. Calcular el diámetro mínimo requerido d si el esfuerzo cortante permisible es 8000 psi.

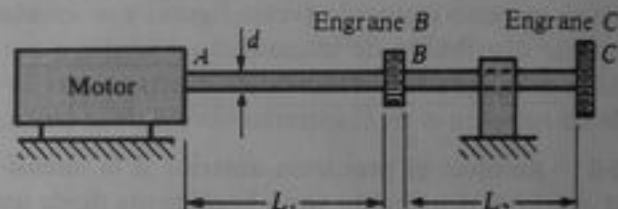
3.6-6 Una flecha circular hueca se diseña para transmitir 120 kW a 1.75 Hz. Su diámetro interior es igual a la mitad del diámetro exterior. Si se supone que el esfuerzo cortante permisible es 45 MPa, calcular el diámetro exterior mínimo requerido d .

3.6-7 Una flecha circular hueca se diseña con un diámetro interior igual a las tres cuartas partes del diámetro exterior. La barra eje debe transmitir 400 hp a 75 rpm sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 6000 psi. Determinar el diámetro exterior mínimo requerido d .

3.6-8 Un motor desarrolla 275 hp a 200 rpm y los transmite a una barra eje en A (véase figura). Los engranes en B y C absorben 125 y 150 hp, respectivamente. Determinar el diámetro d requerido de la flecha si el esfuerzo cortante permisible es 7200 psi y

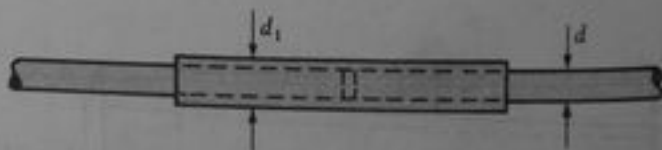
el ángulo de torsión entre el motor y el engrane C se limita a 1.5° . (Suponer $G = 11.5 \times 10^6$ psi, $L_1 = 6$ pie y $L_2 = 4$ pie.)

3.6-9 La flecha ABC mostrada en la figura se impulsa mediante un motor en A que desarrolla 300 kW a una velocidad rotacional de 3 Hz. Los engranes en B y C absorben 120 y 180 kW, respectivamente. Las longitudes de las dos porciones de ABC son $L_1 = 1.5$ m y $L_2 = 0.9$ m. Calcular el diámetro d requerido si el esfuerzo cortante permisible es 50 MPa, el ángulo de torsión permisible en la flecha entre los puntos A y C es 0.02 radianes, y $G = 75$ GPa.



Probs. 3.6-8 y 3.6-9

3.6-10 Un eje propulsor de sección transversal circular y diámetro d está empalmado por medio de un casquillo del mismo material, firmemente adherido a ambas partes de la flecha (véase figura). ¿Cuál debe ser el diámetro d_1 del casquillo a fin de que el empalme pueda transmitir la misma potencia que la flecha sólida?

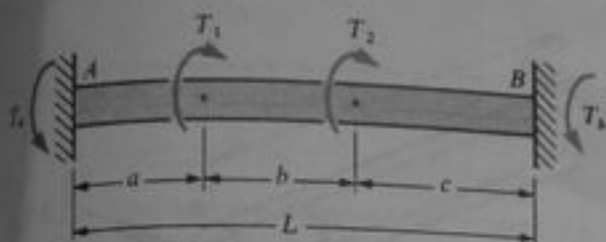


Prob. 3.6-10

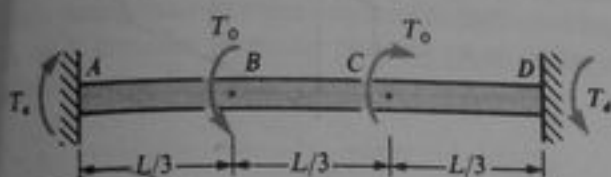
3.7-1 Una barra circular sólida con extremos empotrados se somete a los pares de torsión T_1 y T_2 localizados como se muestra en la figura. Obtener fórmulas para los pares reactivos T_a y T_b .

3.7-2 Una barra circular sólida con extremos empotrados se somete a dos pares opuestos T_0 como se muestra en la figura. Obtener fórmulas para los pares reactivos T_a y T_b , el ángulo de torsión ϕ , en la sección

3.7-1 ϕ y el ángulo de torsión ϕ_m en la sección media de la barra.

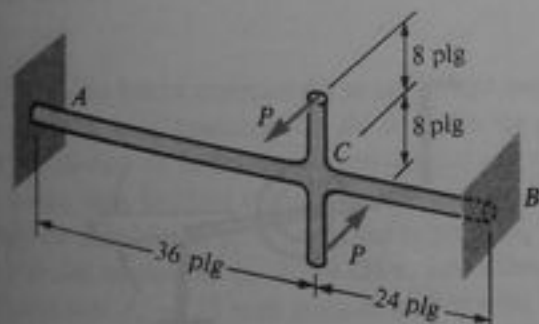


Prob. 3.7-1



Prob. 3.7-2

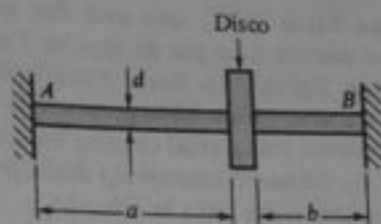
3.7-3 Una barra hueca de acero ACB con diámetro exterior de 2 plg y diámetro interior 1.5 plg, está empotrada en los extremos A y B (véase figura). En los extremos del brazo vertical se aplican fuerzas horizontales P . Determinar el valor permisible de las fuerzas P si el esfuerzo cortante máximo permisible en la barra es 12,000 psi.



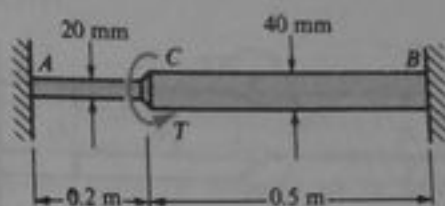
Prob. 3.7-3

3.7-4 Una barra circular sólida AB de diámetro d está fija en ambos extremos (véase figura). Un disco circular está unido a tal barra en el lugar indicado. Si el esfuerzo cortante permisible en la barra es τ_{perm} , y si $a > b$, ¿cuál es el ángulo de rotación máximo permisible ϕ del disco?

3.7-5 Una barra escalonada maciza de sección transversal circular (véase figura) está empotrada en los extremos. Si el esfuerzo permisible en cortante es 55 MPa, ¿cuál es el par de torsión permisible T que puede aplicarse a la flecha en C ?

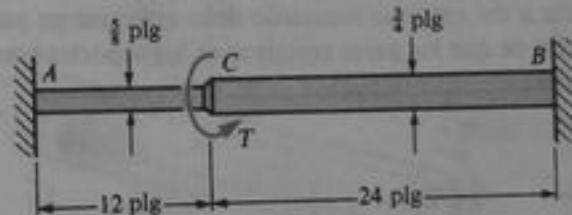


Prob. 3.7-4



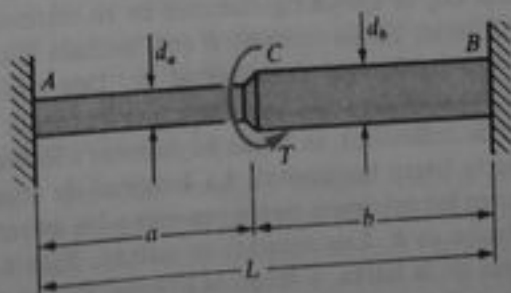
Prob. 3.7-5

3.7-6 Una barra circular sólida de acero AB , fija rigidamente en sus extremos, tiene dos diámetros diferentes (véase figura). Si se supone que el esfuerzo cortante máximo permisible es 10,000 psi, determinar el momento torsionante permisible T que puede aplicarse en la junta C .



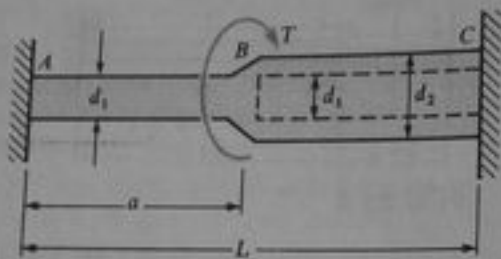
Prob. 3.7-6

3.7-7 Una barra circular sólida AB de longitud total L está empotrada en ambos extremos (véase figura). La barra tiene diámetros d_a y d_b en las porciones AC y CB , respectivamente. Un par torsionante T actúa en la sección C . ¿Cuáles deben ser las longitudes a y b para el diseño más económico del elemento?



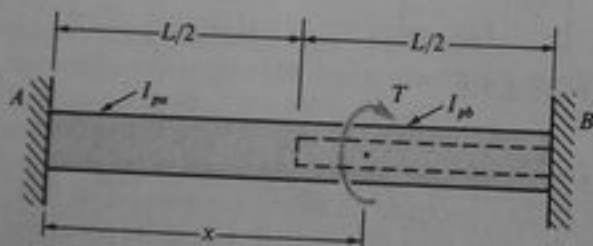
Prob. 3.7-7

3.7-8 Una barra ABC , que está fija en ambos extremos, se somete a un par de torsión T en la sección B (véase figura). La barra tiene una sección transversal circular sólida (diámetro = d_1) desde A hasta B , y sección transversal circular hueca (diámetro exterior d_2 , diámetro interior d_1) desde B hasta C . Obtener una expresión para la relación a/L tal que los pares reactivos en A y C sean numéricamente iguales.



Prob. 3.7-8

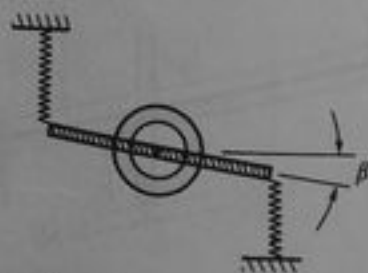
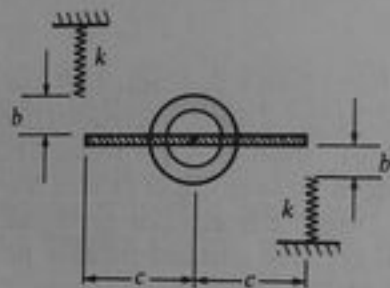
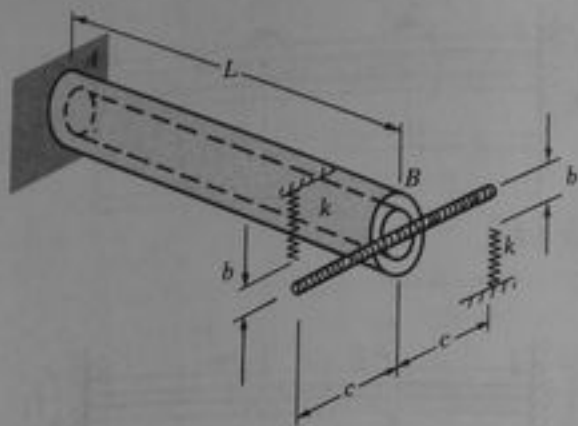
3.7-9 Una barra circular AB con extremos fijos está perforada axialmente hasta la mitad de su longitud (véase figura). Los momentos polares de inercia de las dos porciones de la barra son I_{ps} e I_{ph} . ¿A qué distancia x del extremo izquierdo debe aplicarse un par T a fin de que los pares reactivos en los soportes sean iguales?



Prob. 3.7-9

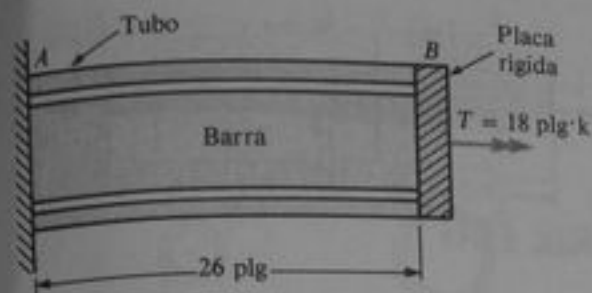
3.7-10 Un tubo hueco AB de longitud L y rigidez torsional GJ , se apoya rigidamente en su extremo A (véase figura). En su extremo B está soldada al tubo una barra horizontal de longitud $2c$. Dos resortes idénticos, cada uno con una constante k (fuerza por unidad de deflexión), se sitúan adyacentes a los extremos de la barra horizontal. La longitud de separación entre los extremos de los resortes y los extremos de la barra es b . Los resortes se estiran, fijos a los extremos de la barra, y luego se liberan, lo que ocasiona que dicha barra y el tubo giren un pequeño ángulo β (véase figura). Obtener una fórmula para el par T en el tubo.

gulo β (véase figura). Obtener una fórmula para el par T en el tubo.

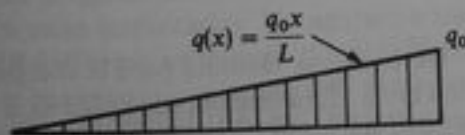
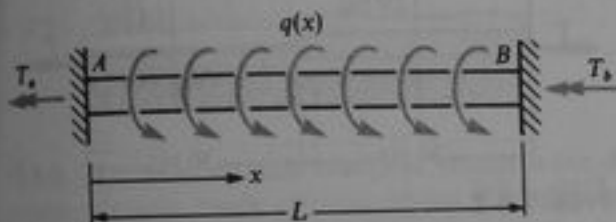


Prob. 3.7-10

3.7-11 Una barra circular sólida de acero de 2.0 plg de diámetro está rodeada por un tubo hueco también de acero, con diámetro exterior de 3.0 plg y diámetro interior de 2.5 plg (véase figura). Las dos barras están rigidamente empotradas en A y soldadas a una placa de acero en B . (a) Si se aplica a la placa un par $T = 18 \text{ plg}\cdot\text{k}$, ¿cuáles son los esfuerzos cortantes máximos τ_1 y τ_2 en el tubo y la barra, respectivamente? (b) ¿Cuál es el ángulo de rotación ϕ de la placa, si se supone $G = 11.5 \times 10^6 \text{ psi}$? (c) ¿Cuál es la rigidez torsional k del conjunto?

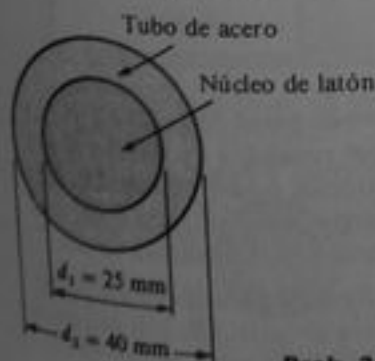


3.7-12 Una barra circular AB de momento polar de inercia I_p y longitud L está empotrada en ambos extremos (véase figura). Un par de torsión distribuido $q(x)$ actúa a lo largo de la longitud de la barra y varía linealmente en intensidad desde cero en A hasta q_0 en B . Obtener fórmulas para los pares en los empotramientos T_a y T_b .

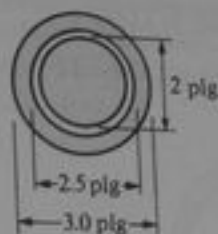


Prob. 3.7-12

3.7-13 Una barra compuesta se construye mediante el montaje por contracción de un tubo de acero sobre un núcleo de latón, en forma tal que ambos actúan como una unidad en torsión (véase figura). El módulo de elasticidad a cortante del tubo es $G_a = 75$ GPa y el del núcleo es $G_l = 39$ GPa. Los diámetros exteriores son $d_1 = 25$ mm para el núcleo y $d_2 = 40$ mm para el tubo. Calcular los esfuerzos cortantes máximos τ_a y τ_l en el acero y el latón, respectivamente, ocasionados por un par torsionante de 900 N·m.

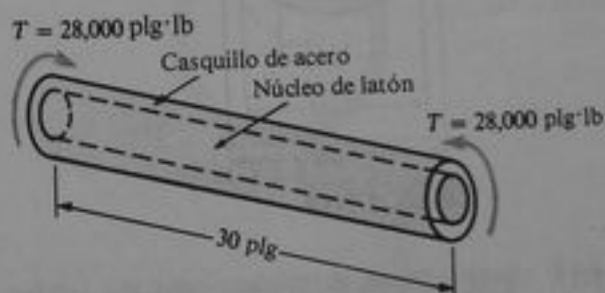


Prob. 3.7-13



Prob. 3.7-11

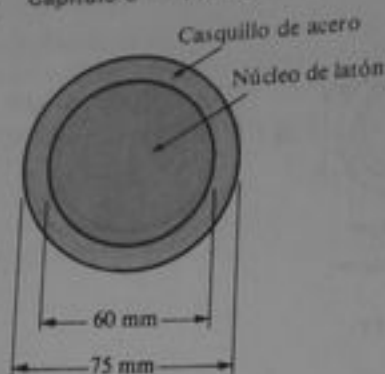
3.7-14 Un casquillo de acero se une a un núcleo de latón para constituir una barra compuesta de 30 plg de longitud, como se muestra en la figura. Los diámetros exteriores del casquillo y el núcleo son 2.5 plg y 2.0 plg, respectivamente. También los módulos de elasticidad a cortante para el acero y el latón son $G_a = 11,500$ ksi y $G_l = 5,600$ ksi, respectivamente. La barra se somete a un par $T = 28,000$ plg·lb. (a) Calcular los esfuerzos cortantes máximos τ_a y τ_l en las porciones de acero y latón. (b) Calcular el ángulo de torsión ϕ .



Prob. 3.7-14

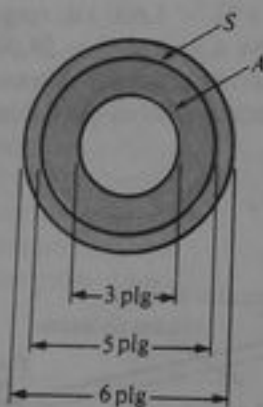
3.7-15 Una barra maciza está constituida por dos materiales, un casquillo exterior de acero ($G_a = 80$ GPa) y un núcleo interior de latón ($G_l = 36$ GPa), como se muestra en la figura. Los diámetros exteriores de las dos partes son 75 mm y 60 mm. Si se supone que los esfuerzos cortantes permisibles son $\tau_a = 82$ MPa y $\tau_l = 50$ MPa en el acero y latón, respectivamente, determinar el par máximo permisible T que puede aplicarse a la barra.

3.7-16 Un tubo de acero de alta resistencia S se ajusta por contracción sobre un tubo de aluminio A para formar una barra compuesta, como se indica en la figura. Los diámetros son 3 plg, 5 plg y 6 plg (véase figura). Los esfuerzos cortantes permisibles en el acero



Prob. 3.7-15

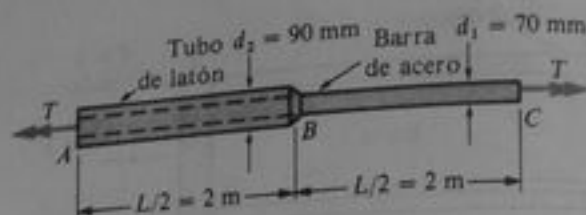
y el aluminio son $\tau_s = 20$ ksi y $\tau_a = 10$ ksi, respectivamente. Determinar el par de torsión permisible T que puede aplicarse a la flecha, suponiendo $G_s = 11,600$ ksi y $G_a = 4,000$ ksi.



Prob. 3.7-16

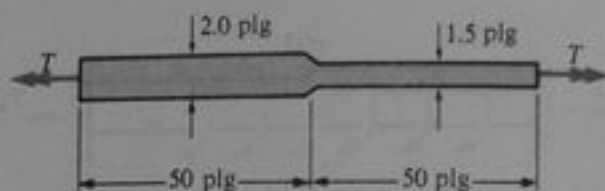
3.7-17 Una barra de acero ($G_s = 80$ GPa) de longitud total $L = 4.0$ m se recubre hasta la mitad de su longitud por un tubo de latón ($G_l = 40$ GPa) unido firmemente al acero (véase figura). Los diámetros de la barra y el tubo son $d_1 = 70$ mm y $d_2 = 90$ mm, respectivamente. (a) Determinar el par permisible T_1 si el ángulo de torsión ϕ entre los extremos A y C se limita a $\phi = 12^\circ$. (b) Determinar el par permisible T_2 si el esfuerzo cortante en el latón se limita a $\tau_l = 100$ MPa. (c) Determinar el par permisible T_3 si el esfuerzo cortante en el acero se limita a $\tau_s = 80$ MPa. (d) ¿Cuál es el par permisible T si deben satisfacerse las tres condiciones anteriores?

3.8-1 Una barra circular sólida de acero ($G = 80$ GPa) con longitud $L = 3.5$ m y diámetro $d = 120$ mm se somete a torsión pura por un par T . ¿Cuánta energía de deformación U se almacena en la barra cuando el esfuerzo cortante máximo es $\tau_{\max} = 60$ MPa?



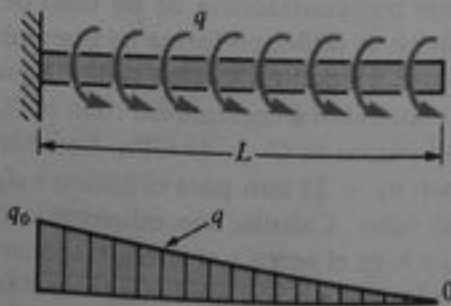
Prob. 3.7-17

3.8-2 ¿Cuánta energía de deformación U se almacena en la barra de acero mostrada en la figura, cuando el ángulo de torsión ϕ es igual a 0.01 radianes? (Obsérvese que la barra tiene secciones transversales circulares sólidas de dos diámetros diferentes. También, suponer $G = 11.8 \times 10^6$ psi.)



Prob. 3.8-2

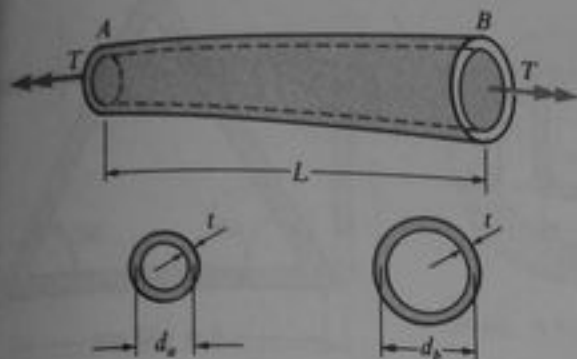
3.8-3 Obtener una fórmula para la energía de deformación de la barra circular mostrada en la figura. La intensidad q del par distribuido varía linealmente desde un valor máximo de q_0 en el empotramiento hasta cero en el extremo libre.



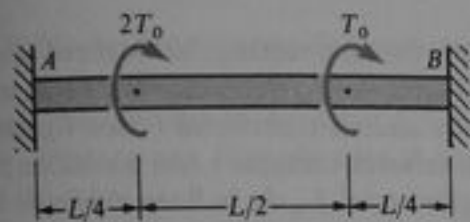
Prob. 3.8-3

3.8-4 Un tubo hueco de pared delgada AB de forma cónica tiene espesor constante t y diámetros medios d_a y d_b en los extremos (véase figura). Obtener una fórmula para la energía de deformación U del tubo cuando se somete a torsión pura mediante un par T .

3.8-5 Obtener una fórmula para la energía de deformación U de la barra circular AB , con extremos empotrados, mostrada en la figura.



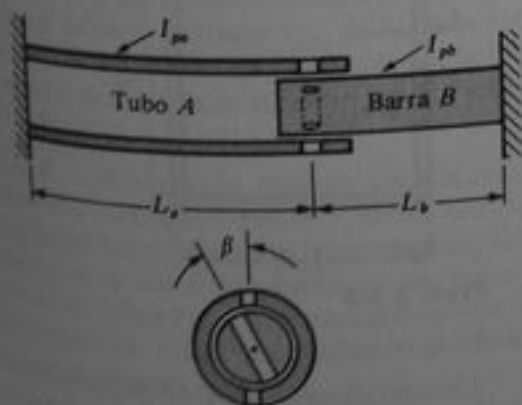
Prob. 3.8-4



Prob. 3.8-5

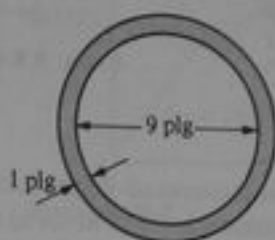
3.8-6 Un tubo circular hueco A encaja sobre el extremo de una barra circular sólida B , como se muestra en la figura. Los extremos restantes de ambas barras están empotrados. Un agujero a través de la barra B conforma un ángulo β (en radianes) con una recta que pasa a través de dos agujeros en la barra A . La barra B se tuerce hasta que los agujeros quedan alineados y luego se inserta un perno a través de los barrenos. Cuando el sistema regresa al equilibrio estático, ¿cuál es la energía de deformación total de las dos barras? (Representar los momentos polares de inercia de las barras A y B por I_{pa} e I_{pb} , respectivamente. El módulo de elasticidad a cortante G es el mismo para ambas barras.)

3.9-1 Un tubo circular hueco de 1 plg de espesor de pared y diámetro interior de 9 plg (véase figura) se



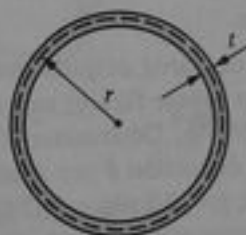
Prob. 3.8-6

somete a un par de torsión $T = 1500$ plg·kip. Determinar los esfuerzos cortantes máximos en el tubo mediante (a) la teoría aproximada de tubos de pared delgada (Ec. 3-51b) y (b) la teoría exacta de torsión (Ec. 3-9).



Prob. 3.9-1

3.9-2 Comparar el ángulo de torsión ϕ_1 , para un tubo circular de pared delgada (véase figura), calculado a partir de la ecuación aproximada (Ec. 3-52) con el ángulo de torsión ϕ_2 calculado con la ecuación exacta $\phi = TL/GI_p$ (Ec. 3-8). Expresar la relación ϕ_1/ϕ_2 en términos de la relación adimensional $\beta = r/t$.

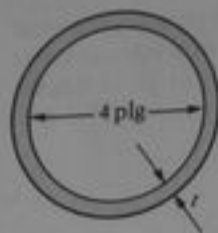


Prob. 3.9-2

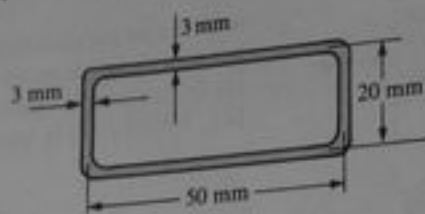
3.9-3 Un tubo circular de pared delgada y una barra circular sólida del mismo material, la misma área de sección transversal y la misma longitud, se someten a torsión. ¿Cuál es la relación de la energía de deformación U_1 en el tubo a la energía de deformación U_2 en la barra sólida si los esfuerzos cortantes máximos son los mismos en ambos casos?

3.9-4 Una barra tubular delgada de sección transversal circular (véase figura) con diámetro interior de 4 plg se somete a un par de 50,000 plg·lb. Si el esfuerzo cortante permisible es 13,000 psi, determinar el espesor de pared t requerido mediante (a) la teoría aproximada para un tubo de pared delgada, y (b) la teoría exacta de torsión.

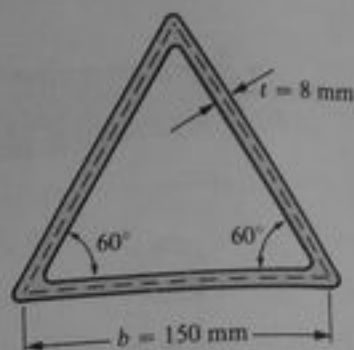
3.9-5 Un tubo hueco de pared delgada de sección transversal rectangular se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{max} en el tubo debido a un par $T = 120$ N·m.



Prob. 3.9-4



Prob. 3.9-5

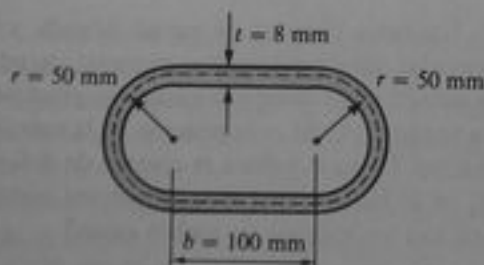


Prob. 3.9-6

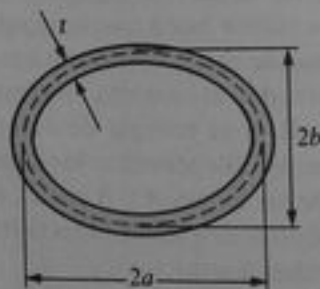
3.9-6 La sección transversal de un tubo de pared delgada de acero inoxidable ($G = 80 \text{ GPa}$) tiene la forma de un triángulo equilátero (véase figura). La longitud de cada lado a lo largo de la línea media es $b = 150 \text{ mm}$ y el espesor de pared es $t = 8 \text{ mm}$. Si el esfuerzo cortante permisible es 60 MPa , ¿cuál es el par de torsión máximo permisible T que puede actuar sobre el tubo? Para este valor del par, ¿cuál es el ángulo de torsión θ por unidad de longitud?

3.9-7 Calcular el esfuerzo cortante τ y el ángulo de torsión ϕ para un tubo de acero ($G = 76 \text{ GPa}$) que tiene la sección transversal mostrada en la figura. El tubo tiene una longitud $L = 1.5 \text{ m}$ y está sometido a un par $T = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

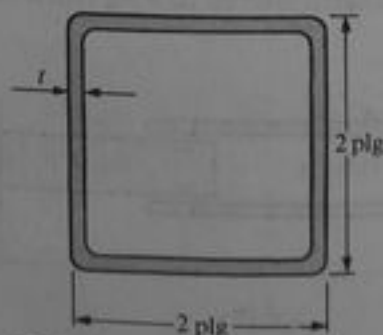
3.9-8 Un tubo de pared delgada que tiene sección transversal elíptica (véase figura) está sometido a un par $T = 50,000 \text{ plg}\cdot\text{lb}$. Determinar el esfuerzo cortante τ y el ángulo de torsión θ por unidad de longitud si $G = 12 \times 10^6 \text{ psi}$, $t = 0.2 \text{ plg}$, $r = 3 \text{ plg}$ y $b = 2 \text{ plg}$. (Nota: el área de una elipse es πab y su perímetro es aproximadamente $1.5 \pi(a + b) - \pi\sqrt{ab}$.)



Prob. 3.9-7



Prob. 3.9-8



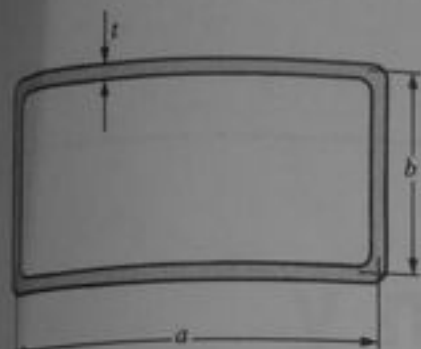
Prob. 3.9-9

3.9-9 Una barra tubular de aluminio ($G = 4 \times 10^6 \text{ psi}$) de sección transversal cuadrada (véase figura) con dimensiones exteriores $2 \text{ plg} \times 2 \text{ plg}$ debe resistir un par $T = 3,000 \text{ plg}\cdot\text{lb}$. Calcular el espesor de pared mínimo requerido t si el esfuerzo cortante permisible es 4000 psi y el ángulo de torsión θ por unidad de longitud permisible es 0.01 rad/plg .

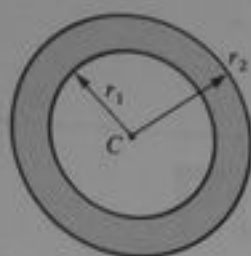
3.9-10 Un tubo rectangular de pared delgada tiene espesor uniforme t y dimensiones $a \times b$ en la línea media de la sección transversal (véase figura). ¿Cómo varía el esfuerzo cortante τ con la relación $\beta = a/b$ si la longitud total L_m de la línea media de la sección transversal y el par T permanecen constantes? A partir de los resultados demuestre que el esfuerzo cortante es mínimo cuando el tubo es cuadrado ($\beta = 1$).

3.9-11 Repetir el problema anterior para el ángulo de torsión θ por unidad de longitud, y demostrar que el ángulo de torsión mínimo ocurre cuando el tubo es cuadrado ($\beta = 1$).

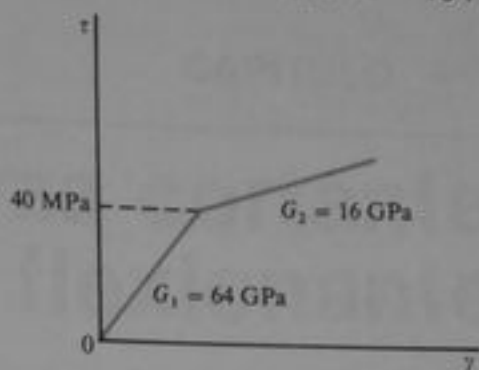
3.9-12 Un tubo ahusado largo AB de pared delgada y sección transversal circular (véase figura) se somete



Probs. 3.9-10 y 3.9-11

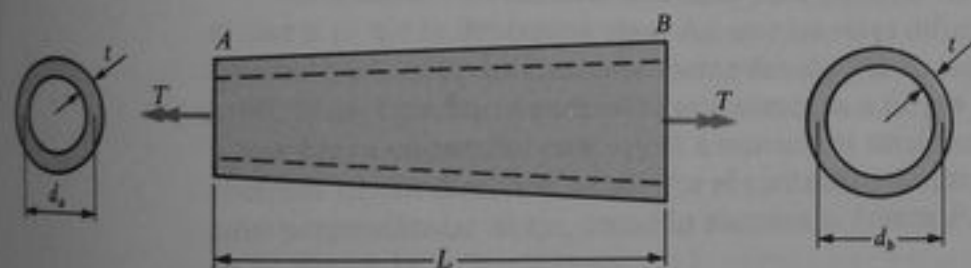


Prob. 3.10-3



Prob. 3.10-6

a un par T . El tubo tiene espesor de pared constante t y longitud L . Los diámetros en las líneas medias de las secciones transversales en A y B son d_a y d_b , respectivamente. Obtener una fórmula para el ángulo de torsión ϕ del tubo.



Prob. 3.9-12

3.10-1 Una barra sólida de sección transversal circular se construye de un material que cumple la ley de Hooke ($\tau = G\gamma$). Obtener la ecuación para el ángulo de torsión por unidad de longitud $\theta = T/GI_p$, mediante la Ec. (3-57) para torsión no lineal.

3.10-2 Una barra circular sólida (radio = r) sometida a un par de torsión T está compuesta de un material para el cual el diagrama esfuerzo-deformación en cortante está representado por la ecuación $\tau^n = B\gamma$, donde n y B son constantes. (a) Obtener una fórmula para el esfuerzo cortante τ_{\max} en la orilla externa de la sección transversal. (b) Verificar que la fórmula se reduce a la fórmula de torsión $\tau_{\max} = Tr/I_p$, cuando $n = 1$.

3.10-3 Obtener una fórmula para la relación del momento torsionante último T_u al de fluencia T_f , para una barra hueca de sección transversal circular (véase figura) si la barra está hecha de un material elastoplástico (véase Fig. 3-37a) para el diagrama esfuerzo-deformación). Trazar una gráfica de la relación T_u/T_f versus la relación r_1/r_2 .

cortantes que actúan sobre la sección transversal tienen la distribución mostrada en la Fig. 3-37b. Designar a la deformación angular en la orilla externa por γ_{\max} . (a) Obtener una fórmula para el par T en términos de γ_{\max} , γ_f y T_f . (b) Verificar que la fórmula se reduce a $T = T_f$, cuando $\gamma_{\max} = \gamma_f$, y que T se aproxima a T_u según γ_{\max} crece indefinidamente. (c) Trazar una gráfica T/T_f versus γ_{\max}/γ_f , para valores de γ_{\max}/γ_f entre 0 y 4.

3.10-5 Los esfuerzos residuales en una barra sometida a torsión no deben producir un par de torsión resultante después de que se ha retirado la carga. Verificar por estática (véase Ec. 3-56) que el par representado por los esfuerzos residuales en una barra de material elastoplástico es cero (véase Fig. 3-38c).

***3.10-6** Una barra circular sólida de radio $r = 35$ mm está construida de un material que tiene el diagrama bilineal de esfuerzo-deformación mostrado en la figura. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la barra cuando el par de torsión T es $5 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Fuerza cortante y momento flexionante

4.1 TIPOS DE VIGAS

Un miembro estructural diseñado para soportar fuerzas que actúan transversalmente a su eje se denomina **viga**. Así que las vigas difieren de las barras sometidas a tensión o a torsión fundamentalmente debido a la dirección de las cargas que operan sobre ellas. Una barra en tensión está sometida a cargas dirigidas a lo largo de su eje, y una barra en torsión está sujeta a momentos torsionantes (pares o torques) cuyos vectores tienen dirección axial. Por el contrario, las cargas en una viga tienen dirección perpendicular al eje, como lo muestra la fuerza P_1 que actúa sobre la viga AB de la Fig. 4-1a.

En este capítulo sólo se consideran los tipos de vigas más simples, como las que se representan en la Fig. 4-1. Tales vigas constituyen estructuras planas ya que todas las cargas operan en el plano de la figura y todas las deflexiones se presentan en el mismo plano, llamado **plano de flexión**. La viga de la Fig. 4-1a, la cual consta de un apoyo articulado en un extremo y un apoyo simple en el otro, se denomina **viga simplemente apoyada** o **viga simple**. La característica principal de un apoyo articulado es que impide simultáneamente el desplazamiento horizontal y vertical de la viga, sin impedir su rotación. De este modo, el extremo A de la viga no se desplaza, pero el eje longitudinal de la viga puede girar en el plano de la figura. Por tanto, un apoyo articulado es capaz de originar una fuerza reactiva con componentes vertical y horizontal, pero no un momento reactivo. En el apoyo simple B , se impiden los desplazamientos en la dirección vertical, pero no en la dirección horizontal; por lo que el apoyo puede soportar una fuerza vertical pero no una fuerza horizontal. Desde luego, el eje de la viga puede girar libremente en B al igual que en A . Las reacciones verticales en los apoyos de una viga simple pueden operar de modo ascendente o descendente, según se requiera para equilibrarla.

Al trazar el diagrama de una viga, se indica el tipo de apoyo mediante un diagrama convencional que indique la manera en que se fija la viga; por lo tanto, también indica la indole de las fuerzas reactivas. Sin embargo, los diagramas convencionales no pretenden representar la estructura física real. Por ejemplo, el extremo de una viga apoyado sobre un muro y atornillado fijamente para evitar su levantamiento se representa en un diagrama como una articulación, que en realidad no existe en el extremo de la viga.

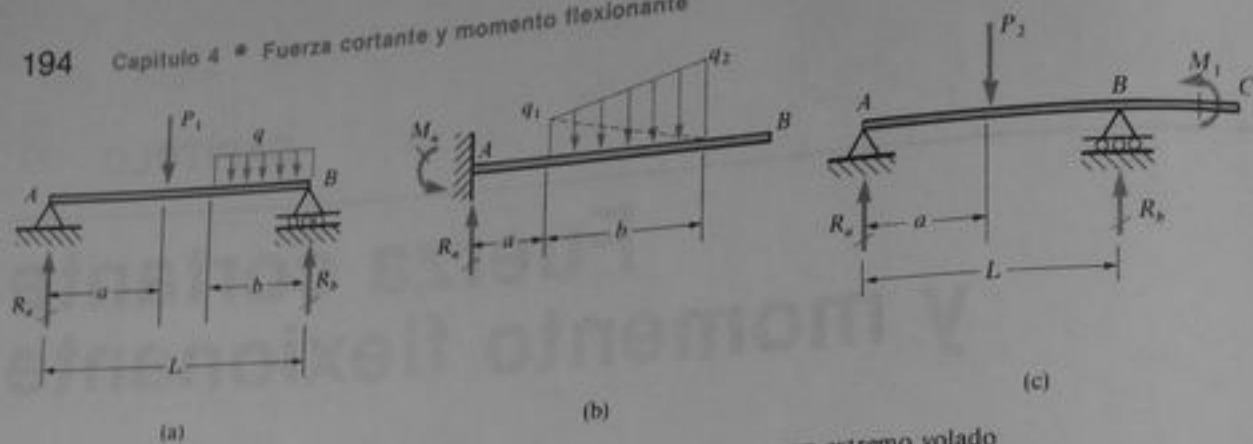


Fig. 4-1 Tipos de vigas: (a) viga simple, (b) viga en voladizo y (c) viga con un extremo volado

La viga que se muestra en la Fig. 4-1b, la cual está empotrada o fija totalmente en un extremo mientras que el otro se encuentra libre, se llama **viga en voladizo** (o cantiléver). La viga no puede desplazarse ni girar en el extremo fijo (o empotrado), mientras que sí puede hacerlo en el extremo libre. Por consiguiente, en el empotre fijo se generan simultáneamente fuerzas y momentos reactivos.

El tercer ejemplo de la figura es una viga con un extremo volado (Fig. 4-1c). Esta viga se apoya únicamente en A y B , pero sobresale del apoyo hasta el punto C , que es un extremo libre. Se pueden realizar muchas otras disposiciones de apoyos para vigas, lo que depende de las aplicaciones específicas. Sin embargo, los ejemplos mencionados bastan para ejemplificar los conceptos básicos.

Las cargas que operan en las vigas pueden ser de varias clases, como se muestra en la Fig. 4-1; P_1 y P_2 son **cargas concentradas**. Las **cargas distribuidas** actúan a lo largo de un tramo como lo indica la carga q de la Fig. 4-1a. Tales cargas se miden por su **intensidad**, la cual se expresa en unidades de fuerza por unidad de longitud a lo largo del eje de la viga (por ejemplo, newtons por metro o libras por pie). Una carga uniformemente distribuida, o **carga uniforme**, tiene una intensidad constante q por unidad de longitud. Una carga variable tiene una intensidad que varía con la longitud a lo largo del eje; por ejemplo, la **carga linealmente variada** de la Fig. 4-1b tiene una intensidad que varía desde q_1 hasta q_2 . Otra clase de carga es un **momento concentrado** señalado por el momento (par) M_1 que opera sobre la viga con un extremo volado (Fig. 4-1c).

Como se mencionó con anterioridad, en este contexto se supone que las cargas sobre las vigas actúan en el plano de la figura. Esta suposición implica que todas las fuerzas tengan sus vectores en el plano de la figura y que todos los momentos concentrados tengan sus vectores perpendiculares a dicho plano. Más aún, las vigas deben ser simétricas respecto al plano; esto es, el plano de flexión debe ser el plano de simetría de la viga. Por ello, la sección transversal de cada viga debe tener un eje vertical de simetría. En estas condiciones la viga sólo se deformará en el plano de flexión. Por lo contrario, si no se satisfacen las condiciones anteriores la viga se flexionará fuera de este plano y será necesario un análisis de flexión más general (véase Capítulo 9).

Las vigas que se muestran en la Fig. 4-1 son **estáticamente determinadas**, por lo que sus **reacciones** pueden determinarse mediante ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, en el caso de la viga simple AB de la Fig. 4-1a, inicialmente se advierte que las únicas reacciones son las fuerzas verticales R_a y R_b en los extremos. (Si actuara alguna carga horizontal sobre la viga se generaría también una reacción horizontal en

el apoyo A .) Mediante una suma de momentos respecto del punto B , es posible calcular la reacción en A , y viceversa. Los resultados son

$$R_a = \frac{P_1(L-a)}{L} + \frac{qb^2}{2L} \quad R_b = \frac{P_1a}{L} + \frac{qb(2L-b)}{2L}$$

Una ecuación de equilibrio de fuerzas en dirección vertical permite comprobar los resultados.

La viga en voladizo de la Fig. 4-1b está sometida a una carga distribuida de variación lineal, de ahí que el diagrama de intensidad de la carga sea trapecial. Esta carga se equilibra mediante una fuerza vertical R_a y un momento concentrado M_a que actúan en el apoyo fijo. Del equilibrio de fuerzas en dirección vertical se obtiene

$$R_a = \frac{(q_1 + q_2)b}{2}$$

donde se aplica el hecho de que la resultante de la carga distribuida es igual al área del diagrama de intensidad de carga. El momento reactivo M_a se determina por equilibrio de momentos. En este ejemplo conviene sumar los momentos con respecto al del punto A con el fin de eliminar R_a de la ecuación de momentos. Para obtener el momento de la carga distribuida respecto al punto A se divide el diagrama trapecoidal en dos triángulos, como lo señala la línea punteada en la Fig. 4-1b. Entonces, el momento respecto al del punto A de la porción triangular inferior de la carga es

$$\frac{1}{2}(q_1b)\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

donde $q_1b/2$ es la fuerza resultante (igual al área del diagrama triangular inferior de carga) y $a + b/3$ es el brazo de momento de la resultante. Se puede utilizar un procedimiento similar para obtener el momento de la porción triangular superior de la carga, el resultado final es

$$M_a = \frac{q_1b}{2}\left(a + \frac{b}{3}\right) + \frac{q_2b}{2}\left(a + \frac{2b}{3}\right)$$

Este momento reactivo actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura.

La viga con extremo volado (Fig. 4-1c) está sujeta a una fuerza vertical P_2 y a un momento concentrado M_1 . Tomando momentos respecto de los puntos B y A se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio estático (los momentos positivos tienen sentido contrario al de las manecillas del reloj):

$$-R_aL + P_2(L-a) + M_1 = 0 \quad \text{o bien} \quad R_a = \frac{P_2(L-a)}{L} + \frac{M_1}{L}$$

$$-P_2a + R_bL + M_1 = 0 \quad \text{o bien} \quad R_b = \frac{P_2a}{L} - \frac{M_1}{L}$$

Nuevamente, la sumatoria de fuerzas en dirección vertical permite una comprobación de tales resultados.

Los ejemplos anteriores muestran cómo pueden calcularse las reacciones (fuerzas y momentos) de vigas estáticamente determinadas a partir de las ecuaciones de

equilibrio. Desde luego, las reacciones de vigas estáticamente indeterminadas no pueden determinarse sólo con las condiciones de equilibrio; su cálculo requiere considerar las deflexiones ocasionadas por flexión. Este tema se trata en capítulos posteriores.

Los tipos de apoyo que se muestran en la Fig. 4-1 son idealizaciones de las condiciones reales que se encuentran en la práctica. Debido a la carencia de rigidez perfecta en las estructuras de apoyo o cimentaciones, puede existir un pequeño grado de desplazamiento en un apoyo articulado o un pequeño giro en un apoyo fijo. Asimismo, es raro encontrar una ausencia total de restricción contra el desplazamiento horizontal (como se supone en el apoyo simple); en su lugar, puede desarrollarse una fuerza pequeña debida a la fricción y a otros efectos. En la mayoría de los casos, especialmente en las vigas estáticamente indeterminadas, estas pequeñas desviaciones de las condiciones ideales tienen poco efecto en el comportamiento de la viga, por lo que pueden omitirse.

4.2 FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

¶ Cuando sobre una viga actúan fuerzas o momentos, se originan esfuerzos y deformaciones internos. Para determinarlos, primero se deben determinar las **fuerzas internas** y los **momentos internos** que se ejercen sobre las secciones transversales de la viga. Como ejemplo, considere una viga en voladizo sometida a la acción de una fuerza vertical P en su extremo libre (Fig. 4-2a). Ahora imagine que se corta la viga en la sección transversal mn localizada a una distancia x del extremo libre, y se separa la parte izquierda de la viga como un cuerpo libre (Fig. 4-2b). El cuerpo libre se mantiene en equilibrio por la fuerza P y por los esfuerzos que operan sobre la sección transversal del corte mn . Dichos esfuerzos representan la acción de la porción derecha de la viga sobre la porción izquierda. Desde luego, en esta etapa del análisis no se conoce la distribución de esfuerzos que actúan sobre la sección transversal; todo lo que se sabe es que la resultante de dichos esfuerzos debe ser tal que mantenga el equilibrio del cuerpo libre seleccionado.

¶ Es conveniente reducir la resultante a una **fuerza cortante** V , que se ejerce paralelamente a la sección transversal, y a un **par flexionante** de momento M . Debido a que P es una carga perpendicular al eje de la viga, en la sección transversal no existen fuerzas axiales. Tanto la fuerza cortante como el par flexionante actúan en el plano de la viga, lo que significa que el vector momento correspondiente al par concentrado es perpendicular al plano de la figura. Este momento concentrado se conoce como **momento flexionante** M . Debido a que las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes al igual que las fuerzas axiales en barras y los momentos torsionantes en ejes o barras ejes son las resultantes de esfuerzos distribuidos sobre la sección transversal, se les conoce a todos como **resultantes de esfuerzo**.

Las resultantes de esfuerzo en vigas estáticamente determinadas pueden calcularse mediante el equilibrio estático. ¶ Como ejemplo, considere nuevamente la viga en voladizo de la Fig. 4-2a. Del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 4-2b, obtenemos

$$V = P \quad M = Px$$

donde x es la distancia del extremo libre a la sección mn . Así, mediante la utilización de un diagrama de cuerpo libre y de las ecuaciones de equilibrio, se pueden calcular las

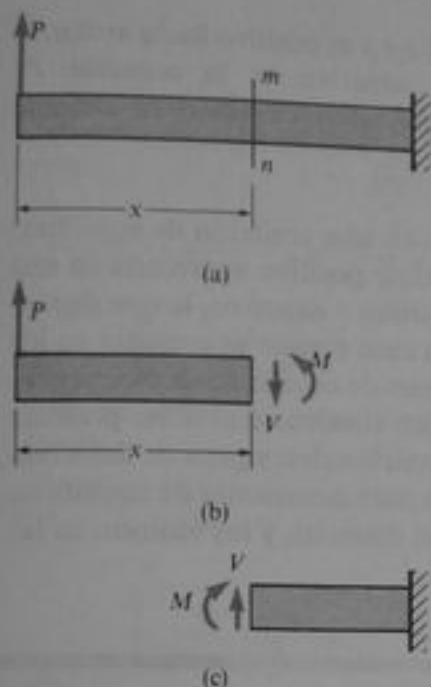
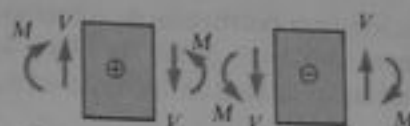
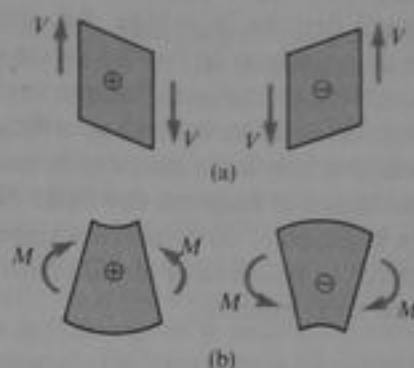
Fig. 4-2 Resultantes de esfuerzo V y M Fig. 4-3 Signos convencionales para fuerza cortante V y momento flexionante M 

Fig. 4-4 Deformaciones (sumamente exageradas) de un elemento ocasionadas: (a) por fuerzas cortantes y (b) por momentos flexionantes

resultantes de esfuerzo sin dificultad. En el capítulo siguiente, se tratará cómo determinar los esfuerzos internos relacionados con V y M .

La fuerza cortante y el momento flexionante se consideran positivos cuando operan sobre la parte izquierda de la viga en las direcciones y sentidos mostrados en la Fig. 4-2b. Si se observa la parte derecha de la viga (Fig. 4-2c), entonces se invierten las direcciones de dichas resultantes de esfuerzo. Por tanto, se advierte que el signo algebraico de una resultante de esfuerzo no depende de su dirección en el espacio, es decir, ascendente, descendente o en el sentido de las manecillas del reloj o en el contrario, sino más bien, el signo depende de la dirección y sentido de la resultante de esfuerzo con respecto al material sobre el cual opera. Para aclarar esto los **signos convencionales** para fuerzas cortantes y momentos flexionantes se reproducen en la Fig. 4-3, donde V y M se muestran cuando actúan sobre un elemento de viga limitado por dos secciones separadas en un pequeño intervalo.

Las deformaciones o distorsiones de un elemento ocasionadas por fuerzas cortantes y por momentos flexionantes tanto positivos como negativos se representan en forma esquemática en la Fig. 4-4. Se aprecia que una fuerza cortante positiva tiende a deformar el elemento cuando ocasiona que la cara derecha se desplace hacia abajo respecto de la cara izquierda, mientras que un momento flexionante positivo alarga la parte inferior de la viga y comprime la parte superior. Ya que los signos para V y M se relacionan con las deformaciones del material, los signos convencionales se denominan **signos para condiciones de deformación**. Previamente se utilizaron los signos para fuerzas axiales (positivo para la tensión, negativo para la compresión). Una clase diferente denominada **signos para condiciones de estática**, se utiliza en ecuaciones de equilibrio estático. Cuando se emplean estos últimos las fuerzas se consideran positivas al actuar en la dirección positiva de un eje coordenado.

Para ejemplificar los dos tipos de signos convencionales, escribamos las ecuaciones de equilibrio para las dos porciones de la viga mostradas en la Fig. 4-2. Nótese que V y M son positivas de acuerdo con los signos convencionales de defor-

mación para resultantes de esfuerzo. Sin embargo, si el eje y es positivo hacia arriba, la fuerza cortante V en la Fig. 4-2b tendrá signo negativo en la ecuación de equilibrio, la cual se formula de acuerdo con los signos convencionales de estática:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ o bien } P - V = 0$$

Desde luego, a V se le adjudicaría un signo positivo en una ecuación de equilibrio para la parte derecha de la viga. Así, una fuerza cortante positiva aparecería en una ecuación de equilibrio de fuerzas ya sea con signo positivo o negativo, lo que depende del diagrama de cuerpo libre que se considere. Un caso similar se presenta en los momentos flexionantes cuando se utilizan las ecuaciones de equilibrio de momentos. Los obstáculos con la asignación de los signos pueden eliminarse al tener presente que en mecánica se emplean dos tipos de signos convencionales: signos de deformación para resultantes de esfuerzo y signos de estática para ecuaciones de equilibrio. Los primeros se basan en el modo cómo se deforma el material, y los últimos, en las direcciones en el espacio.

Ejemplo 1

Una viga simple AB sostiene dos cargas, una fuerza P y un momento concentrado M_0 , que operan como se muestra en la Fig. 4-5a. Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M en las secciones transversales de la viga, localizados como sigue: (a) a una corta distancia a la izquierda del punto medio de la viga, y (b) a una corta distancia a la derecha de dicho punto.

El primer paso en el análisis de esta viga es determinar las reacciones R_a y R_b . Al tomar momentos respecto de los extremos A y B se obtienen dos ecuaciones de equilibrio, de las que encontramos que

$$R_a = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{L} \quad R_b = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{L}$$

A continuación, se corta la viga en una sección transversal justo a la izquierda de la parte media de la misma y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de las porciones de la viga. En este ejemplo, se elige la porción izquierda y el diagrama correspondiente se muestra en la Fig. 4-5b. La fuerza P y la reacción R_a aparecen en este diagrama junto con la fuerza cortante V y el momento flexionante M desconocidos, los cuales se muestran en sus direcciones positivas. El momento concentrado M_0 no aparece en este diagrama debido a que la viga fue cortada a la izquierda del punto de aplicación de M_0 . De la sumatoria de fuerzas en la dirección vertical se tiene

$$R_a - P - V = 0 \text{ o bien } V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

Este resultado muestra que cuando P y M_0 actúan en las direcciones mostradas en la Fig. 4-5a la fuerza cortante es negativa y opera en dirección contraria a la supuesta en la Fig. 4-5b. Al tomar momentos respecto de un eje que pasa por la sección transversal en donde la viga fue cortada (Fig. 4-5b), se obtiene

$$-R_a\left(\frac{L}{2}\right) + P\left(\frac{L}{4}\right) + M = 0 \text{ o bien } M = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2}$$

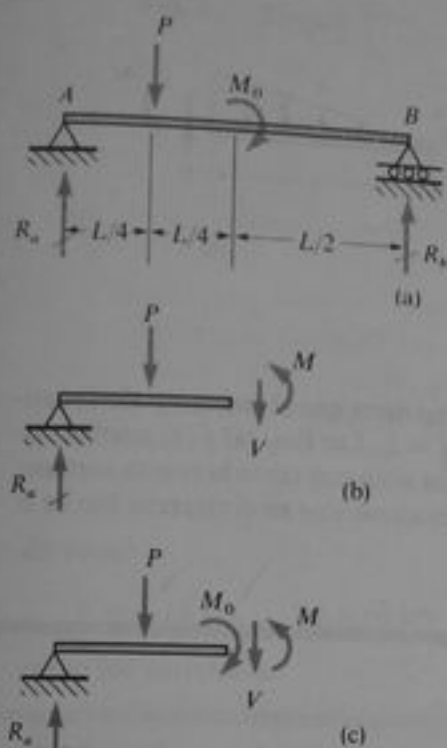


Fig. 4-5 Ejemplo 1

El momento flexionante M puede ser positivo o negativo, lo que depende de las magnitudes relativas de los términos en esta ecuación.

Para obtener las resultantes de esfuerzo en una sección transversal justo a la derecha del punto medio, se corta la viga en tal sitio y nuevamente se dibuja un diagrama de cuerpo libre (Fig. 4-5c). La diferencia entre este diagrama y el anterior es que el momento concentrado M_0 actúa ahora en la porción de la viga situada a la izquierda de la sección del corte. Al sumar nuevamente las fuerzas en la dirección vertical y además tomar momentos con respecto a un eje que pasa por la sección transversal, obtenemos

$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \quad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2}$$

De los resultados anteriores se observa que cuando la sección del corte se transfiere de la izquierda a la derecha del punto de aplicación del momento concentrado M_0 , la fuerza cortante no varía, pero el momento flexionante se incrementa algebraicamente en una cantidad igual a M_0 .

Ejemplo 2

Una viga en voladizo con su extremo libre en A y su apoyo fijo en B está sujeta a una carga distribuida de variación lineal q (véase Fig. 4-6a). La intensidad máxima de la carga se presenta en el apoyo fijo y se designa por q_0 . Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M a una distancia x del extremo libre.

Se empieza por cortar la viga a una distancia x del extremo libre y separar la porción izquierda de la misma como un cuerpo libre (Fig. 4-6b). Al igual que en el ejemplo anterior, la fuerza cortante V y el momento flexionante M desconocidos, se consideran positivos. La intensidad de la carga distribuida es $q = q_0x/L$; en consecuencia, la carga descendente sobre el cuerpo libre de la Fig. 4-6b equivale a $q_0x^2/2L$. Por lo tanto, del equilibrio de fuerzas con dirección vertical, encontramos que

$$V = -\frac{q_0x^2}{2L} \quad (a)$$

De esta ecuación se aprecia que en el extremo libre A ($x = 0$) la fuerza cortante es $V = 0$ y que en el extremo fijo B ($x = L$) la fuerza cortante es $V = -q_0L/2$.

Para determinar el momento flexionante en la viga, se formula una ecuación de equilibrio de momentos alrededor de un eje que pasa por la sección del corte y se despeja M :

$$M = -\frac{q_0x^3}{6L} \quad (b)$$

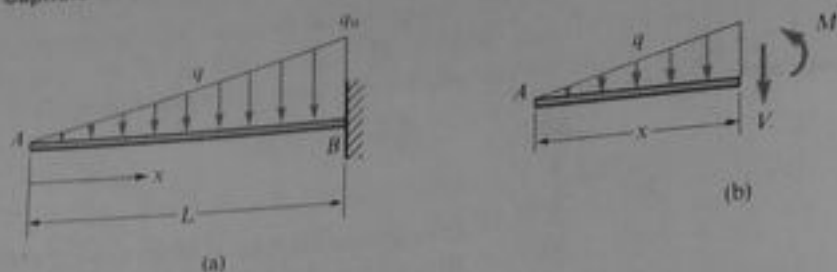


Fig. 4-6 Ejemplo 2

Nuevamente, se consideran ambos extremos de la viga y se advierte que el momento flexionante es igual a cero cuando $x = 0$, e igual a $-q_0L^2/6$ cuando $x = L$. Las Ecs. (a) y (b) pueden utilizarse para obtener V y M en cualquier punto de la viga, y se nota que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante alcanzan sus máximos valores numéricos en el extremo fijo de la viga.

Ejemplo 3

Una viga ABC con un extremo sostiene una carga uniforme de intensidad $q = 6 \text{ kN/m}$ y una carga concentrada $P = 28 \text{ kN}$ (Fig. 4-7a, página 201). Calcular la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección transversal D situada a 5 m del apoyo izquierdo.

Se comienza por calcular las reacciones mediante las ecuaciones de equilibrio de toda la viga. De esta manera al tomar momentos respecto del apoyo B , se obtiene

$$-R_A(8 \text{ m}) + (28 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (6 \text{ kN/m})(10 \text{ m})(3 \text{ m}) = 0$$

en donde $R_A = 40 \text{ kN}$. En forma similar, del equilibrio de momentos con respecto al apoyo A se obtiene $R_B = 48 \text{ kN}$. (También se observa que se satisface el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical.)

Enseguida, se efectúa un corte en la sección D y se traza un diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga (Fig. 4-7b). Al dibujar este diagrama suponemos que los esfuerzos resultantes desconocidos V y M son positivos. Las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 & \quad 40 \text{ kN} - 28 \text{ kN} - (6 \text{ kN/m})(5 \text{ m}) - V = 0 \\ \Sigma M = 0 & \quad -(40 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (28 \text{ kN})(2 \text{ m}) \\ & \quad + (6 \text{ kN/m})(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) + M = 0 \end{aligned}$$

de donde

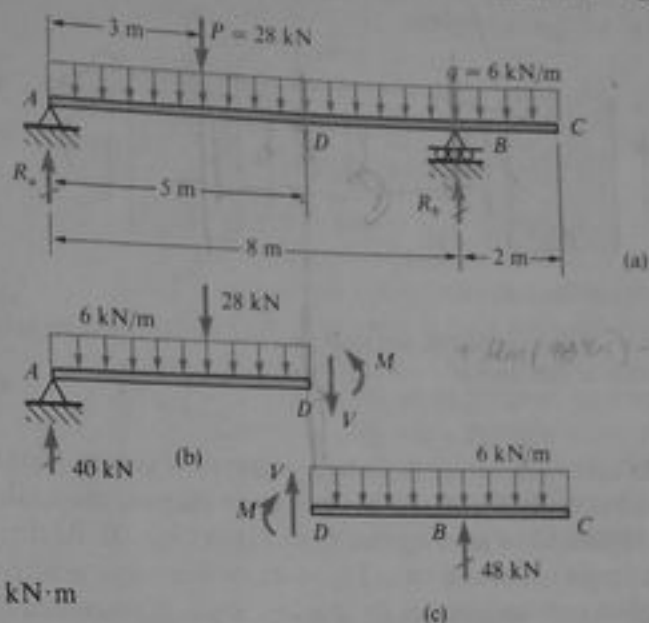
$$V = -18 \text{ kN} \quad M = 69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El signo negativo en el resultado de V significa que la fuerza cortante opera en la dirección negativa (contraria a la dirección indicada en la Fig. 4-7b).

Un método optativo de solución es obtener V y M de un diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga (Fig. 4-7c). Al dibujar este diagrama, nuevamente se considera que la fuerza cortante desconocida y el momento flexionante desconocido son positivos. En tal caso, las dos ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 & \quad V - (6 \text{ kN/m})(5 \text{ m}) + 48 \text{ kN} = 0 \\ \Sigma M = 0 & \quad -M - (6 \text{ kN/m})(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) + (48 \text{ kN})(3 \text{ m}) = 0 \end{aligned}$$

Fig. 4-7 Ejemplo 3



de donde

$$V = -18 \text{ kN} \quad M = 69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

como los anteriores.

4.3 RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

Ahora se tratarán algunas relaciones importantes entre las cargas que operan sobre una viga, la fuerza cortante V y el momento flexionante M . Dichas relaciones son muy útiles cuando se analizan la fuerza cortante y el momento flexionante a lo largo de la viga, y son especialmente convenientes para la elaboración de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante (véase Sección 4.4). Para obtener dichas relaciones consideremos un elemento de una viga cortada entre dos secciones separadas por una distancia dx (Fig. 4-8a). Sobre la cara izquierda del elemento se muestran la fuerza cortante V y el momento flexionante M , que actúan en sus direcciones positivas. En general, V y M son funciones de la distancia x medida a lo largo del eje de la viga; consecuentemente, en la cara derecha del elemento, tanto la fuerza cortante como el momento flexionante tendrán valores que difieren ligeramente de sus valores en la cara izquierda. Si se designan los incrementos de V y M por dV y dM , respectivamente, entonces las resultantes de esfuerzo en la cara derecha son $V + dV$ y $M + dM$.

La carga que actúa en la cara superior del elemento puede ser una carga distribuida, una carga concentrada o un momento. Supongamos primero que la carga es distribuida y de intensidad q , como se muestra en la Fig. 4-8a. Entonces, del equilibrio de fuerzas con dirección vertical, obtenemos

$$V - (V + dV) - q dx = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

(4-1)

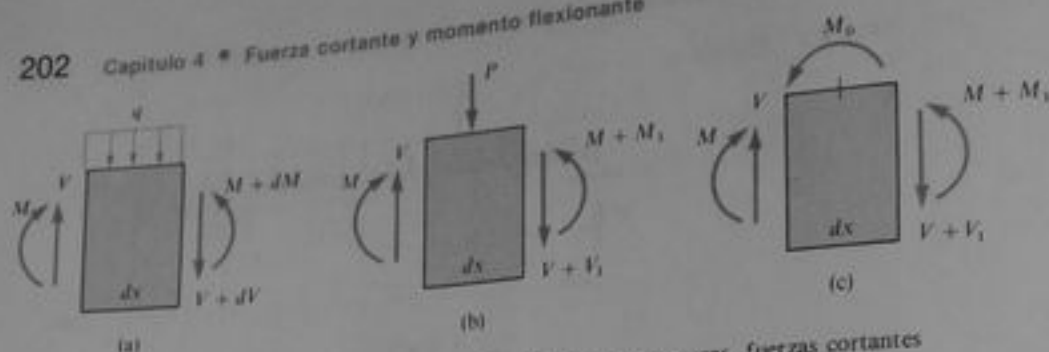


Fig. 4-8 Elemento de viga utilizado para obtener las relaciones entre cargas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes

Por lo tanto, al variar la fuerza cortante V con la distancia x , su razón de cambio con respecto de x es igual a $-q$. Como un caso especial, observe que la fuerza cortante es constante si la viga no tiene carga ($q = 0$). Al derivar la Ec. (4-1) se considera que la carga mostrada en la Fig. 4-8a es una carga positiva; por ello se han adoptado los signos convencionales de que *las cargas distribuidas son positivas cuando actúan de manera descendente y negativas cuando actúan de modo ascendente*.

Para ejemplificar el empleo de la Ec. (4-1), considérese la viga en voladizo con una carga linealmente variable que ya se trató en el Ejemplo 2 de la sección precedente (véase Fig. 4-6). La carga sobre la viga es

$$q = \frac{q_0 x}{L}$$

la cual se considera positiva cuando es descendente, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior. La fuerza cortante es

$$V = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

(véase la Ec. a, Sección 4.2). Al obtener la derivada dV/dx se tiene

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{q_0 x}{L} = -q$$

lo que concuerda con la Ec. (4-1).

La Ec. (4-1) puede integrarse a lo largo del eje de la viga para obtener una útil ecuación referente a las fuerzas cortantes que actúan en dos secciones transversales diferentes. Para obtener esta relación, se multiplican ambos miembros de la Ec. (4-1) por dx y luego se integra entre dos puntos A y B sobre el eje de la viga. El resultado es

$$\int_A^B dV = -\int_A^B q dx \quad (a)$$

El primer miembro de esta ecuación es igual a la diferencia $V_B - V_A$ de las fuerzas cortantes en las secciones B y A . La integral del segundo miembro representa el área

del diagrama de intensidad de la carga entre A y B , el cual también es igual a la resultante de la carga distribuida entre A y B . Por lo que,

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= -\int_A^B q \, dx \\ &= -(\text{Área del diagrama de intensidad de carga entre } A \text{ y } B) \end{aligned} \quad (4-2)$$

Debido a que la Ec. (4-1) se dedujo para un elemento de la viga sujeto sólo a una carga uniformemente distribuida (o sin carga alguna), no es posible utilizar la Ec. (4-1) en el punto de aplicación de una carga concentrada. De modo similar no se puede aplicar la Ec. (4-2) si una carga concentrada P actúa sobre la viga entre los puntos A y B , ya que la intensidad de la carga q está indefinida para una carga concentrada. Advertir que el área del diagrama de intensidad de carga puede ser positiva o negativa.

Al retomar el elemento de viga mostrado en la Fig. 4-8a, consideremos ahora el equilibrio mediante la sumatoria alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa a través de la cara derecha del elemento. Considerando positivos los momentos con sentido contrario al de las manecillas del reloj, se obtiene

$$-M - q \, dx \left(\frac{dx}{2} \right) - (V + dV) \, dx + M + dM = 0$$

Se prescinde de los productos de diferenciales por ser insignificantes en comparación con los demás términos, obteniéndose así la siguiente relación:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4-3)$$

Esta ecuación muestra que la razón de variación de M con respecto a x es igual a la fuerza cortante. Si la fuerza cortante es cero, el momento flexionante es constante. La Ec. (4-3) es aplicable sólo en regiones donde actúan cargas distribuidas en la viga. En el punto de aplicación de una carga concentrada, se origina un cambio súbito (o discontinuidad) en la fuerza cortante y la derivada dM/dx queda indefinida.

Al utilizar nuevamente la viga en voladizo de la Fig. 4-8a como ejemplo, se recuerda que el momento flexionante (véase Ec. b, Sección 4.2) es

$$M = -\frac{q_0 x^3}{6L}$$

La derivada dM/dx es

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

equivale a la misma fuerza cortante V que actúa en la viga; por lo tanto, se satisface la Ec. (4-3).

Al integrar la Ec. (4-3) entre dos puntos A y B sobre el eje de la viga se tiene

$$\int_A^B dM = \int_A^B V \, dx \quad (b)$$

La integral en el primer miembro de esta ecuación es igual a la diferencia $M_b - M_a$ de los momentos flexionantes en los puntos A y B . Para interpretar la integral del se-

gundo miembro se requiere considerar a V como una función de x y visualizar en un diagrama la forma de variación de V con respecto a x . Entonces apreciaremos que la integral del lado derecho representa el área bajo la curva entre A y B . En consecuencia, se puede expresar la Ec. (b) del modo siguiente:

$$M_b - M_a = \int_A^B V dx$$

= Área del diagrama de fuerza cortante entre A y B (4-4)

Esta ecuación puede utilizarse aun cuando actúan cargas concentradas sobre la viga entre los puntos A y B . Sin embargo, no vale utilizarla cuando actúa un momento concentrado entre A y B , ya que éste ocasiona un cambio súbito en el momento flexionante, y el lado izquierdo de la Ec. (b) no puede integrarse a través de una discontinuidad.

Ahora consideremos una carga concentrada P aplicada al elemento de viga (Fig. 4-8b). A fin de contar con signos convencionales para cargas concentradas, se consideran *positivas las cargas descendentes*. Al igual que antes, los esfuerzos resultantes en la cara izquierda se designan por V y M . En la cara derecha se designan por $V + V_1$ y $M + M_1$, donde V_1 y M_1 representan los posibles incrementos en la fuerza cortante y el momento flexionante. Del equilibrio de fuerzas con dirección vertical obtenemos

$$V_1 = -P \quad (4-5)$$

Es así que se presenta un cambio brusco de la fuerza cortante en el punto de aplicación de una carga concentrada. Conforme se pasa de izquierda a derecha a través del punto de aplicación de la carga, la fuerza cortante disminuye en una cantidad igual a la magnitud de la carga descendente. Del equilibrio de momentos (Fig. 4-8b) se obtiene

$$-M - P\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

o

$$M_1 = P\left(\frac{dx}{2}\right) + Vdx + V_1 dx$$

Ya que la longitud del elemento dx es infinitesimalmente pequeña, se observa en esta ecuación que el incremento M_1 en el momento flexionante también es infinitesimalmente pequeño. Por lo que se puede concluir que el momento flexionante no varía al transcurrir por el punto de aplicación de una carga concentrada.

A pesar de que el momento flexionante M no varía debido a una carga concentrada, su razón de cambio (derivada) dM/dx presenta un cambio brusco. En el lado izquierdo del elemento (Fig. 4-8b), la razón de cambio del momento flexionante (véase Ec. 4-3) es $dM/dx = V$. En el lado derecho, la razón de cambio es $dM/dx = V + V_1$. Por tanto, podemos concluir que en el punto de aplicación de una carga concentrada P , la razón del cambio dM/dx disminuye repentinamente en una cantidad igual a P .

El último caso consiste en una carga semejante a un momento concentrado M_0 , que se considera *positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj* (Fig. 4-8c). A partir del equilibrio del elemento en dirección vertical, se obtiene $V_1 = 0$, lo cual

muestra que la fuerza cortante no varía en el punto de aplicación de un momento concentrado. El equilibrio de momentos del elemento establece

$$-M + M_0 - (V + dV)dx + M + M_1 = 0$$

o, sin tomar en cuenta los términos que contienen diferenciales,

$$M_1 = -M_0 \quad (4-6)$$

Esta ecuación muestra que existe un decremento brusco en el momento flexionante de la viga debido al momento concentrado M_0 , según nos desplazamos de izquierda a derecha a través del punto de aplicación de la carga.

Las Ecs. (4-1) a (4-6) son útiles cuando se realiza un análisis cabal de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en una viga, como se ejemplifica en la sección siguiente.

4.4 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLEXIONANTE

Las fuerzas cortantes V y los momentos flexionantes M en una viga son funciones de la distancia x medida según el eje longitudinal. Cuando se diseña una viga es útil conocer los valores de V y M en todas las secciones transversales. Una forma conveniente de obtener esta información es trazar una gráfica que muestre la forma como varían V y M en función de x . Para el trazo de esta gráfica se toma como abscisa la sección transversal (esto es, la distancia x) y como ordenada el valor correspondiente ya sea de la fuerza cortante o del momento flexionante. Estas gráficas se denominan **diagramas de fuerza cortante** y **diagramas de momento flexionante**.

Para describir la construcción de los diagramas, consideremos una viga simple AB que soporta una carga concentrada P (Fig. 4-9a). Las reacciones para esta viga son

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad R_b = \frac{Pa}{L} \quad (a)$$

determinadas a partir del equilibrio de la viga completa. Ahora, se corta la viga a la izquierda de la carga P y a una distancia x del apoyo A . Luego, se construye un diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga, y del equilibrio se determina que

$$V = R_a = \frac{Pb}{L} \quad M = R_ax = \frac{Pbx}{L} \quad (b)$$

Estas ecuaciones muestran que la fuerza cortante es constante desde el apoyo A hasta el punto de aplicación de la carga P , y que el momento flexionante varía linealmente con x . Las expresiones de V y M se trazan directamente debajo del esquema de la viga (Fig. 4-9). En el caso del diagrama de fuerza cortante se inicia en el extremo de la viga con un cambio brusco en la fuerza cortante equivalente a la reacción R_a . Luego, la fuerza cortante permanece constante hasta $x = a$. En esta misma región el diagrama de momento flexionante es una línea recta que va desde $M = 0$ en el apoyo hasta $M = Pab/L$ en $x = a$.

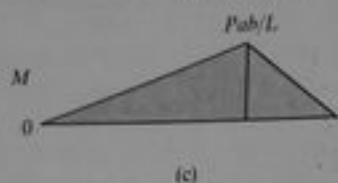
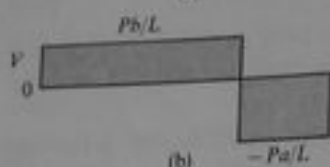
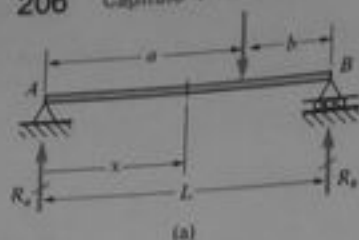


Fig. 4-9 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de una viga simple con una carga concentrada

Enseguida se corta la viga a la derecha de la carga P (es decir, en la región $a < x < L$), y a partir del equilibrio de la porción izquierda de la viga, se obtienen las expresiones siguientes:

$$V = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \quad (c)$$

$$M = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) = Pa \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (d)$$

De nuevo se aprecia que la fuerza cortante es invariable y que el momento flexionante es una función lineal de x . Para $x = a$, el momento flexionante es igual a Pab/L ; en $x = L$, se vuelve cero. Las Ecs. (c) y (d) de V y M también se trazan en los diagramas de la Fig. 4-9.

Al deducir las Ecs. (c) y (d) para la fuerza cortante y el momento flexionante a la derecha de la carga P , se consideró el equilibrio de la porción izquierda de la viga, sobre la que actúan ambas fuerzas R_1 y P . Hubiera sido más simple en este ejemplo considerar la porción derecha de la viga como cuerpo libre. Del equilibrio de la porción derecha, se obtienen las ecuaciones

$$V = -R_2 = -\frac{Pa}{L} \quad M = R_2(L-x) = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

que son los mismos resultados obtenidos de las Ecs. (c) y (d).

Observemos ahora ciertas características de los diagramas de la Fig. 4-9. Notamos en primer lugar que la pendiente dV/dx del diagrama de fuerza cortante es cero en las regiones $0 < x < a$ y $a < x < L$, lo que concuerda con la ecuación $dV/dx = -q$ (Ec. 4-1). Asimismo, en tales regiones, la pendiente dM/dx del momento flexionante es igual a V (Ec. 4-3). En el punto de aplicación de la carga P , ocurre un cambio correspondiente en la pendiente del diagrama de momento flexionante. A la izquierda de la carga P , la pendiente del diagrama de momento es positiva e igual a Pb/L ; a la derecha, es negativa e igual a $-Pa/L$.

Considere enseguida el área del diagrama de fuerza cortante (véase Ec. 4-4). Conforme se traslada desde $x = 0$ hasta $x = a$, el área del diagrama de fuerza cortante es $(Pb/L)a$, o Pab/L . Esta cantidad representa el incremento del momento flexionante entre tales puntos. Desde $x = a$ hasta $x = L$, el área del diagrama de fuerza cortante es $-Pab/L$, lo que significa que en esta región el momento flexionante decrece en dicha cantidad. Por tanto, el momento flexionante es cero en el extremo B de la viga, como era de esperarse. Si se considera todo el diagrama de fuerza cortante y se advierte que $M = 0$ en ambos extremos de la viga, entonces la Ec. (4-4) requiere que

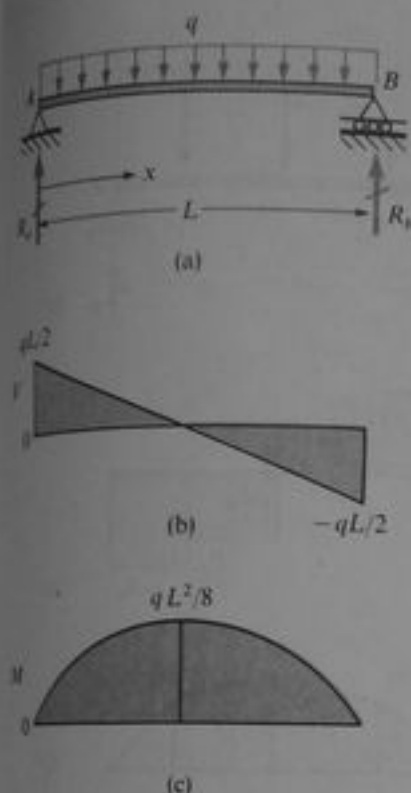


Fig. 4-10 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de una viga simple con carga uniforme

el área del diagrama entre los extremos de la viga sea cero. Esta conclusión no se aplicaría si la viga estuviera sujeta a una carga en forma de momento concentrado.

Los valores máximos o mínimos de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes son necesarios en el diseño de vigas. Para una viga simple con una sola carga concentrada, la fuerza cortante máxima se presenta en el extremo de la viga más cercano a la carga concentrada y el momento flexionante máximo se presenta bajo la misma carga.

Para ejemplificar aún más la elaboración de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, consideremos una viga simple con una carga uniformemente distribuida (Fig. 4-10a). En este caso las reacciones R_a y R_b son iguales a $qL/2$; por tanto, en una sección transversal situada a una distancia x del extremo izquierdo A , se obtiene

$$V = \frac{qL}{2} - qx \quad M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (e)$$

La primera de estas ecuaciones muestra que el diagrama de fuerza cortante es una recta inclinada cuyas ordenadas son $qL/2$ y $-qL/2$ en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente (Fig. 4-10b). La pendiente de esta recta es $-q$, como era de esperarse a partir de la ecuación $dV/dx = -q$ (Ec. 4-1). El diagrama de momento flexionante es una curva parabólica simétrica respecto al centro de la viga (Fig. 4-10c). En cada sección transversal, la pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante (véase Ec. 4-3):

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) = \frac{qL}{2} - qx = V$$

El valor máximo del momento flexionante se presenta en el punto en donde $dM/dx = 0$ (esto es, en la sección transversal donde la fuerza cortante es cero). Esta sección se encuentra en el centro de la viga en este ejemplo; por tanto se sustituye $x = L/2$ en la expresión M , obteniendo

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} \quad (f)$$

como lo indica el diagrama de momento flexionante.

El diagrama de intensidad de carga (Fig. 4-10a) tiene un área qL . De acuerdo con la Ec. (4-2), la fuerza cortante decrece en esta cantidad conforme se traslada a lo largo de la viga desde A hasta B . El área del diagrama de fuerza cortante entre $x = 0$ y $x = L/2$ es $qL^2/8$ y esta área representa el incremento en el momento flexionante

entre esos dos mismos puntos. De modo semejante, el momento de flexión decrece $qL^2/8$ conforme se traslada desde $x = L/2$ hasta $x = L$.

Si varias cargas concentradas actúan sobre una viga simple (Fig. 4-11a), se pueden determinar las expresiones de V y M para cada región de la viga entre los puntos de aplicación de la carga. De nuevo, al medir la distancia x desde el extremo A de la viga, se obtienen para la primera región de la misma ($0 < x < a_1$) las siguientes ecuaciones:

$$V = R_a \quad M = R_a x \quad (g)$$

Para la segunda región ($a_1 < x < a_2$) se obtiene

$$V = R_a - P_1 \quad M = R_a x - P_1(x - a_1) \quad (h)$$

Para la tercera sección de la viga ($a_2 < x < a_3$) es conveniente considerar la porción derecha de la viga en lugar de la izquierda, debido a que en el diagrama de cuerpo libre correspondiente actúan menos cargas. Por tanto, se obtiene

$$V = -R_b + P_3 \quad (i)$$

y

$$M = R_b(L - x) - P_3(L - b_3 - x) \quad (j)$$

Finalmente, para la cuarta porción de la viga se obtiene

$$V = -R_b \quad M = R_b(L - x) \quad (k)$$

Se aprecia en las Ecs. (g) a (k) que la fuerza cortante permanece invariable en cada región de la viga; por tanto, el diagrama de fuerza cortante tiene la forma ilustrada en la Fig. 4-11b. Asimismo, el diagrama de momento flexionante en cada porción de la viga es una función lineal de x ; en consecuencia, el diagrama correspondiente se representa mediante una recta inclinada. Para facilitar el trazo de estas líneas, se obtienen los momentos flexionantes bajo las cargas concentradas, al sustituir $x = a_1$, $x = a_2$ y $x = a_3$ en las Ecs. (g), (h) y (k), respectivamente. En esta forma se obtienen para los momentos flexionantes los valores

$$M_1 = R_a a_1 \quad M_2 = R_a a_2 - P_1(a_2 - a_1) \quad M_3 = R_b b_3 \quad (l)$$

A partir de estos valores se puede construir rápidamente el diagrama de momento flexionante (Fig. 4-11c), ya que el diagrama consta de líneas rectas que unen los puntos de carga.

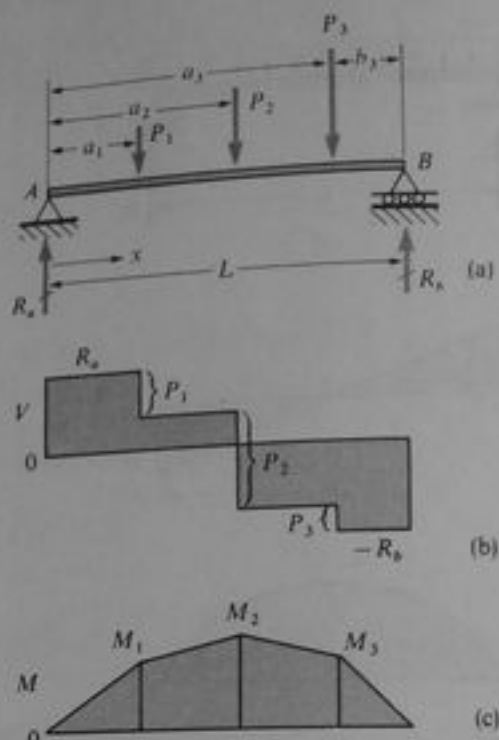


Fig. 4-11 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de una viga simple con varias cargas concentradas

Obsérvese que en cada punto donde actúa una carga concentrada, el diagrama de fuerzas cortantes varía repentinamente en una cantidad igual a la carga. Más aún, en cada interrupción de fuerza cortante, ocurre un cambio correspondiente en la pendiente dM/dx del diagrama de momento flexionante. También, la fluctuación en el momento flexionante entre dos puntos de carga es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre esos dos puntos (véase Ec. 4-4). Por ejemplo, la variación en el momento flexionante entre las cargas P_1 y P_2 es $M_2 - M_1$. Al sustituir de las Ecs. (1) se obtiene

$$M_2 - M_1 = (R_a - P_1)(a_2 - a_1)$$

que constituye el área del diagrama rectangular de fuerza cortante entre $x = a_1$ y $x = a_2$.

El momento flexionante máximo en una viga cargada sólo con fuerzas concentradas debe presentarse bajo una de las cargas o en una reacción. De la ecuación $dM/dx = V$, se aprecia que la pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante. Por lo que el momento flexionante tiene un valor máximo o mínimo en las secciones transversales donde la fuerza cortante cambia de signo, lo cual ocurre únicamente bajo una carga. Si conforme se recorre el eje x la fuerza cortante cambia de un valor positivo a uno negativo (como en la Fig. 4-11b), entonces la pendiente del diagrama de momento flexionante también cambia de positiva a negativa. Por tanto, debe ocurrir un momento flexionante máximo en esta sección transversal. A la inversa, un cambio en la fuerza cortante de un valor negativo a uno positivo indica un momento flexionante mínimo. El diagrama de fuerza cortante puede (por lo común no lo hace) cortar al eje horizontal en varios puntos. Correspondiente a cada punto de intersección, ocurre un máximo o mínimo particular en el diagrama de momento flexionante. Los valores de todos los máximos y mínimos particulares deben calcularse a fin de determinar los momentos flexionantes máximos absolutos positivo y negativo de la viga para su utilización en el diseño de la misma.

En general, los momentos flexionantes máximos, positivos o negativos, de una viga pueden presentarse en una carga concentrada (siempre y cuando esta carga provoque un cambio de signo en la fuerza cortante), en una reacción, en una sección transversal donde la fuerza cortante sea cero (véase Fig. 4-10), o en una sección donde se aplique un momento concentrado. Los análisis y ejemplos presentados en esta sección ejemplifican todas estas posibilidades.

Cuando varias cargas actúan sobre una viga, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante pueden obtenerse por superposición (o sumatoria) de los diagramas obtenidos para cada una de las cargas que actúan en forma individual. Por ejemplo, el diagrama de fuerza cortante de la Fig. 4-11b es realmente la suma de tres diagramas individuales, cada uno del tipo mostrado en la Fig. 4-9b para una carga concentrada única. Lo mismo se puede decir del diagrama de momento flexionante de la Fig. 4-11c. Estas conclusiones referentes a la superposición de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante resultan del hecho de que las fuerzas de corte y los momentos de flexión son funciones lineales de las cargas aplicadas.

Ejemplo 1

Determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de una viga simple con una carga uniforme de intensidad constante q que actúa sobre una porción del claro (Fig. 4-12a).

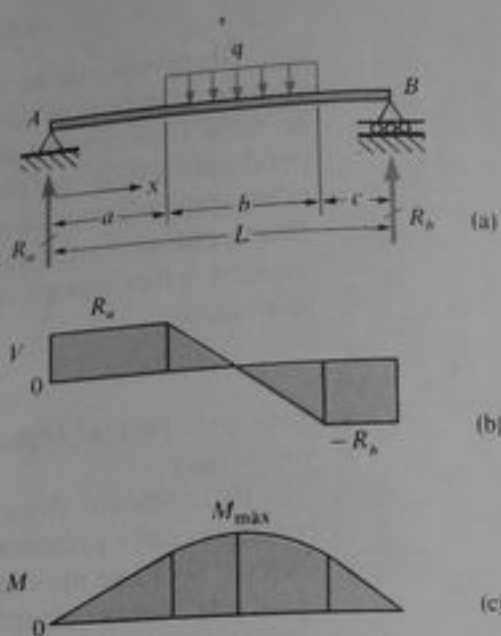


Fig. 4-12 Ejemplo 1

Se inicia el análisis determinando las reacciones para la viga:

$$R_a = \frac{qb}{L} \left(c + \frac{b}{2} \right) \quad R_b = \frac{qb}{L} \left(a + \frac{b}{2} \right) \quad (m)$$

Para obtener las fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se consideran en forma independiente las tres regiones de la viga. Para la porción izquierda ($0 < x < a$), se determina

$$V = R_a \quad M = R_a x \quad (n)$$

Para una sección transversal localizada en la porción cargada de la viga, la fuerza cortante se obtiene al restar de la reacción R_a la carga $q(x - a)$ que actúa sobre la viga a la izquierda de la sección transversal. El momento flexionante en esta misma región se obtiene restando al momento de la reacción R_a el momento de la carga que actúa a la izquierda de la sección transversal. De esta forma, se encuentra que

$$V = R_a - q(x - a) \quad (o)$$

$$M = R_a x - \frac{q(x - a)^2}{2} \quad (p)$$

Para la porción sin carga del extremo derecho de la viga, se obtiene

$$V = -R_b \quad M = R_b(L - x) \quad (q)$$

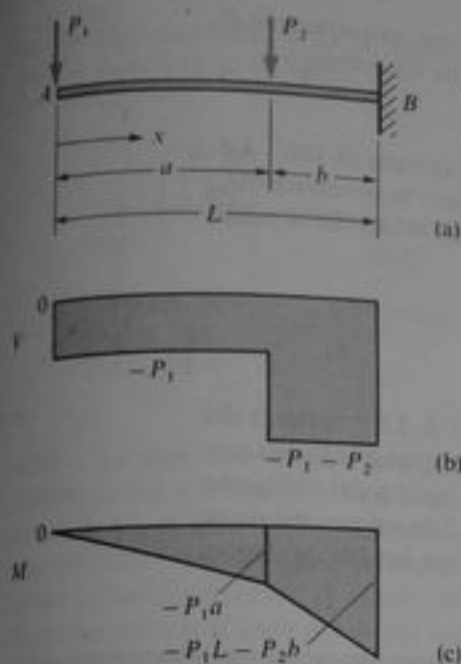
Mediante el empleo de las Ecs. (n) a (q), se pueden elaborar fácilmente los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

El diagrama de fuerza cortante (Fig. 4-12b) consiste en rectas horizontales en las regiones no cargadas de la viga y de una recta inclinada en la región con carga, como era de esperarse de la ecuación $dV/dx = -q$. El diagrama de momento flexionante (Fig. 4-12c) consta de dos rectas inclinadas en las regiones sin carga de la viga y de una curva parabólica en la porción cargada. Las líneas inclinadas tienen pendientes iguales a R_a y $-R_b$, respectivamente (véase Ec. 4-3). Cada una de estas rectas es tangente a la curva parabólica en el punto donde se encuentran. Esta conclusión proviene del hecho de que no existen cambios súbitos en la magnitud de la fuerza cortante en esos puntos. Por tanto, de la Ec. (4-3) se aprecia que la pendiente del diagrama de momento flexionante no puede variar repentinamente. El momento flexionante máximo se presenta cuando la fuerza cortante es igual a cero. Su valor puede determinarse igualando a cero la ecuación de fuerza cortante V (Ec. o), se despeja x y se sustituye tal valor de x en la expresión del momento flexionante (Ec. p).

Ejemplo 2

Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo mostrada en la Fig. 4-13a.

Fig. 4-13 Ejemplo 2



Nuevamente, al medir la distancia x a partir del primer extremo izquierdo de la viga y considerar lugar la región $0 < x < a$, se obtiene

$$V = -P_1 \quad M = -P_1x$$

Para la porción derecha de la viga ($a < x < L$) se obtiene

$$V = -P_1 - P_2 \quad M = -P_1x - P_2(x - a)$$

Los diagramas correspondientes de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en las Figs. 4-13b y c. La fuerza cortante es constante entre las cargas y alcanza su valor numérico máximo en el apoyo. El diagrama de momento flexionante consta de dos rectas inclinadas, cuyas pendientes son iguales a las fuerzas cortantes de las porciones respectivas de la viga en voladizo. El momento flexionante máximo se presenta en el apoyo ($x = L$), y es igual al área del diagrama de fuerza cortante, como era de esperarse de acuerdo con la Ec. (4-4).

Ejemplo 3

Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga con un extremo volado mostrada en la Fig. 4-14a. La viga está sujeta a una carga uniforme de intensidad constante $q = 1.0 \text{ k/pie}$ sobre la parte saliente y a un momento concentrado de sentido contrario al de las manecillas del reloj $M_0 = 12.0 \text{ pie}\cdot\text{k}$ que actúa en el punto medio entre los apoyos.

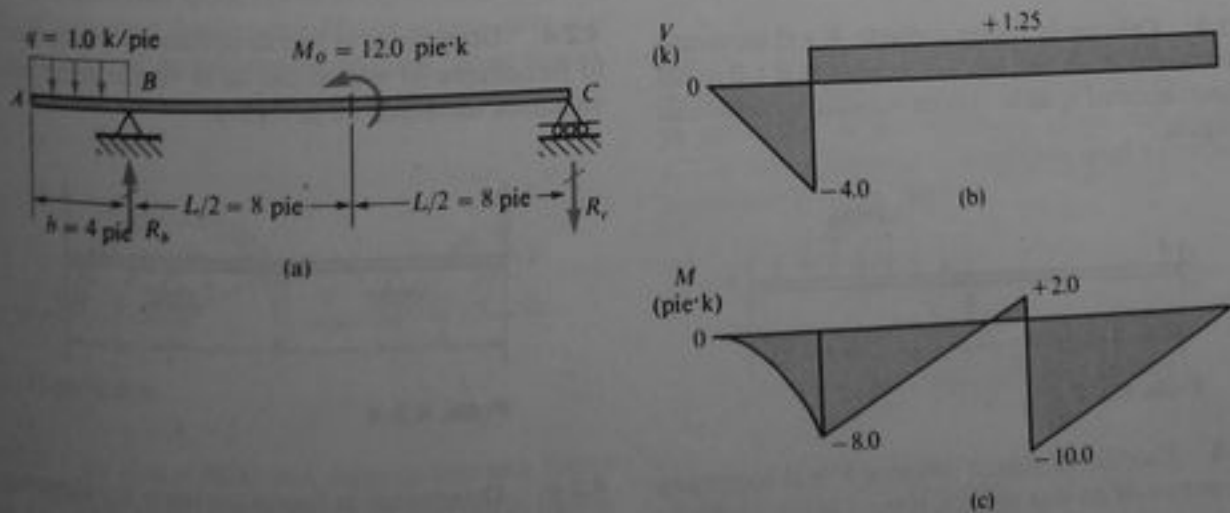


Fig. 4-14 Ejemplo 3

Se calculan las reacciones R_1 y R_2 y se determina que R_1 es ascendente, mientras que R_2 es descendente, como lo muestra la figura. Sus valores numéricos son los siguientes:

$$R_1 = 5.25 \text{ k} \quad R_2 = 1.25 \text{ k}$$

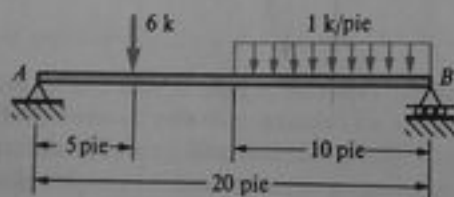
Mediante las técnicas ya descritas se dibuja ahora el diagrama de fuerza cortante (4-14b). Advierta que la fuerza cortante no varía en el punto de aplicación del momento concentrado M_0 . El diagrama de momento flexionante tiene el contorno delineado en la Fig. 4-14c. En el punto B , el momento es

$$M_B = \frac{qb^2}{2} = -\frac{1}{2}(1.0 \text{ k/pie})(4 \text{ ft})^2 = -8.0 \text{ pie-k}$$

el cual es también igual al área del diagrama de fuerza cortante entre A y B . La pendiente del diagrama de momento flexionante de B a C es 1.25 k (esto es, la pendiente es igual a la fuerza cortante), pero el momento flexionante varía repentinamente debido a la acción del momento concentrado M_0 . Observe que este cambio es igual a M_0 (véase Ec. 4-6). Los valores máximos o mínimos del momento flexionante se presentan cuando la fuerza cortante cambia de signo y en el punto de aplicación del momento concentrado.

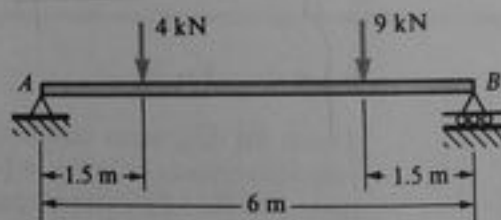
PROBLEMAS / CAPÍTULO 4

4.2-1 Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M a la mitad de la viga simple AB mostrada en la figura.



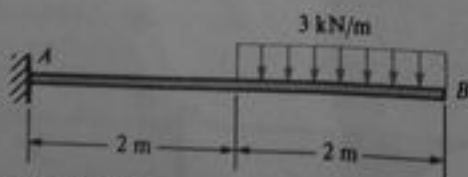
Prob. 4.2-1

la carga de 9 kN que actúa sobre la viga simple AB mostrada en la figura.



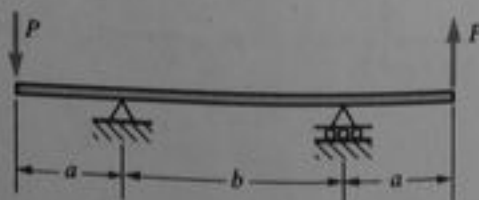
Prob. 4.2-3

4.2-2 Calcular la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección localizada a 1.0 m del empotramiento A de la viga en voladizo mostrada en la figura.



Prob. 4.2-2

4.2-4 Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M a la mitad de la viga con extremos voladizos mostrada en la figura.

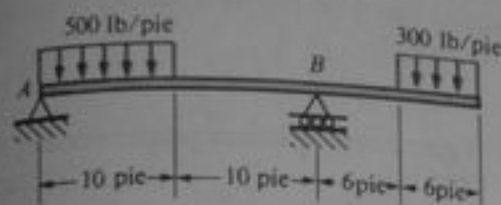


Prob. 4.2-4

4.2-3 Calcular la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección justo a la izquierda de

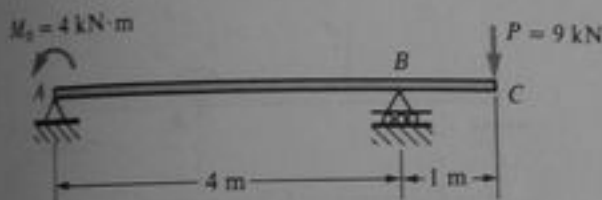
4.2-5 Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección localizada a 15 pie

del extremo izquierdo A de la viga con un extremo volado mostrada en la figura.



Prob. 4.2-5

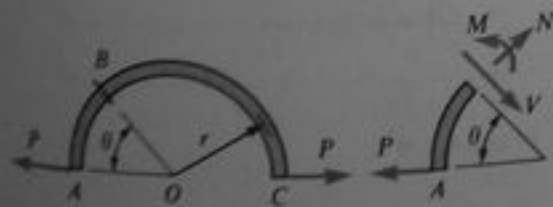
4.2-5 La viga mostrada en la figura tiene apoyos simples en A y B y está sometida a un momento concentrado $M_0 = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ en el punto A y una carga concentrada $P = 9 \text{ kN}$ en el límite del volado. Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección situada a 3 m del apoyo izquierdo.



Prob. 4.2-6

4.2-7 Un leñador que pesa 200 lb está de pie en el punto medio de un tronco flotante de 16 pie de longitud. ¿Cuál es el momento flexionante máximo en el tronco?

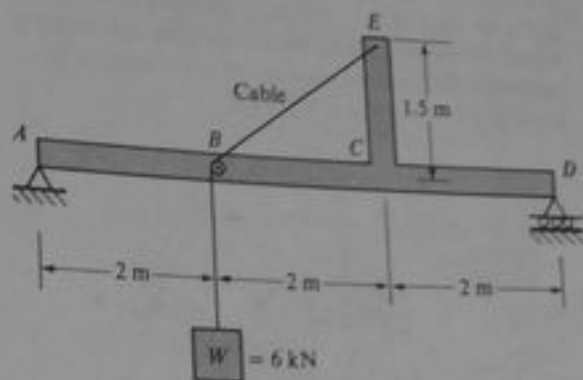
4.2-8 Una barra curva ABC está cargada con dos fuerzas iguales y opuestas P , como se muestra en la figura. El eje de la barra forma un semicírculo de radio r . Determinar la fuerza axial N , la fuerza cortante V y el momento flexionante M que actúan en la sección transversal definida por el ángulo θ (véase figura).



Prob. 4.2-8

4.2-9 La viga $ABCD$ está cargada con una fuerza $W = 6 \text{ kN}$ mediante el arreglo mostrado en la figura. El cable pasa a través de una pequeña polea sin fric-

ción en B , y está fijo al brazo vertical en E . Calcular la fuerza cortante V y el momento flexionante M en la sección C , la cual está justo a la izquierda del brazo vertical.



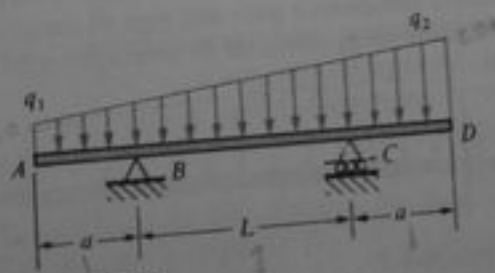
Prob. 4.2-9

4.2-10 La viga $ABCD$ se mantiene en equilibrio mediante las cargas uniformemente distribuidas de intensidades q_1 y q_2 como se muestra en la figura. Determinar la fuerza cortante V y el momento flexionante M en las siguientes secciones transversales de la viga: (a) sección transversal en el punto B y (b) sección transversal en el punto medio de la viga. (Suponer que $a = 4 \text{ pie}$, $b = 8 \text{ pie}$ y $q_1 = 3000 \text{ lb/pie}$.)



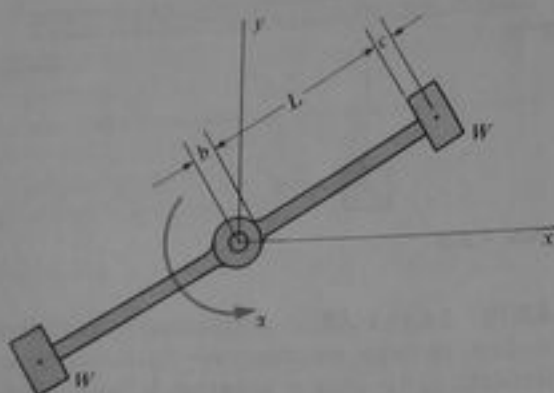
Prob. 4.2-10

4.2-11 La viga $ABCD$ mostrada en la figura tiene extremos volados y sostiene una carga distribuida cuya intensidad varía linealmente. ¿Para cuál relación a/L la fuerza cortante V es siempre igual a cero en el punto medio de la viga?



Prob. 4.2-11

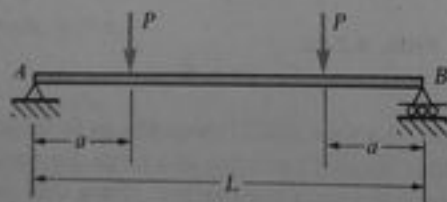
• 4.2-12 El elemento centrífugo mostrado en la figura gira en un plano horizontal (el plano xy) sobre una superficie lisa alrededor del eje z (que es vertical) con una aceleración angular α . Cada uno de los brazos tiene un peso w por unidad de longitud y soporta un peso $W = 5wL$ en su extremo libre. Determinar fórmulas para la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en los brazos, si se supone que $b = L/8$ y $c = L/10$.



Prob. 4.2-12

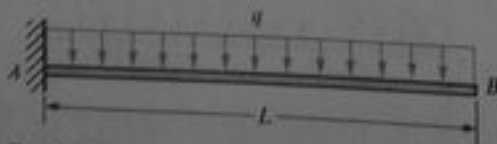
Al resolver los problemas 4.4-1 a 4.4-33, dibujar aproximadamente a escala los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, señalar todas las ordenadas importantes e incluir los valores máximo y mínimo.

4.4-1 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga de apoyo simple que sustenta dos cargas concentradas iguales (véase figura).



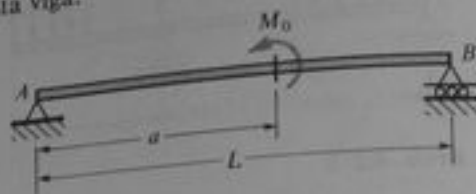
Prob. 4.4-1

4.4-2 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga en voladizo que soporta una carga uniforme de intensidad q (véase figura).



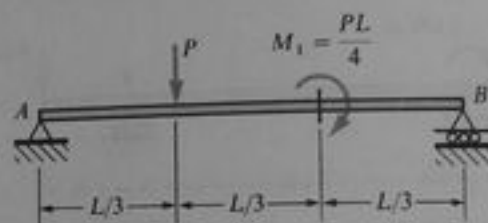
Prob. 4.4-2

4.4-3 Una viga simple AB está sometida a un momento concentrado M_0 que actúa a una distancia a del apoyo izquierdo (véase figura). Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



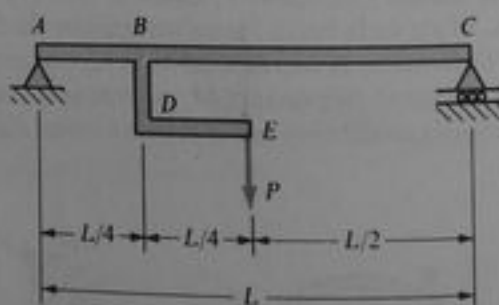
Prob. 4.4-3

4.4-4 La viga simple AB mostrada en la figura está sometida a una carga concentrada P y a un momento concentrado $M_1 = PL/4$ aplicados en los sitios indicados. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



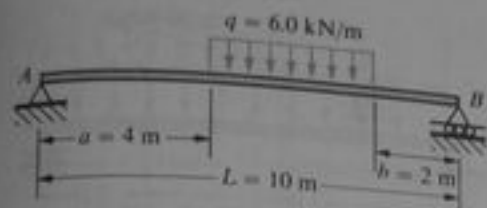
Prob. 4.4-4

4.4-5 Una viga simple ABC soporta una carga vertical P mediante una ménsula BDE (véase figura). Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



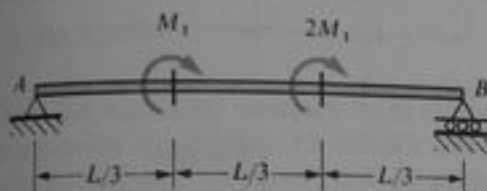
Prob. 4.4-5

4.4-6 Una viga simple AB sostiene una carga uniforme de intensidad $q = 6.0$ kN/m sobre un tramo del claro (véase figura). Suponer que $L = 10$ m, $a = 4$ m y $b = 2$ m, dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



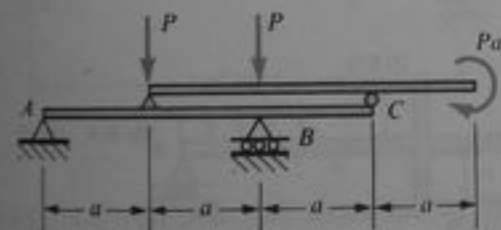
Prob. 4.4-6

4.4-7 Una viga simple AB sometida a dos momentos concentrados se muestra en la figura. Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



Prob. 4.4-7

4.4-8 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABC cargada como se muestra en la figura.



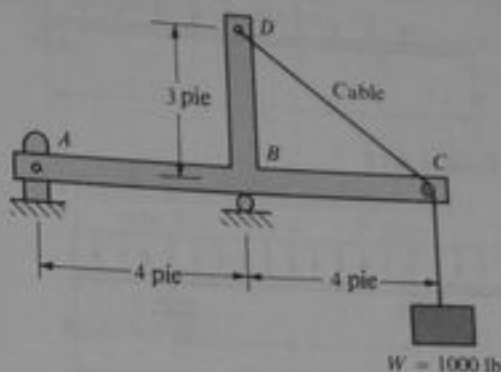
Prob. 4.4-8

4.4-9 La viga en voladizo AB soporta una fuerza y un momento concentrados como se muestra en la figura. Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



Prob. 4.4-9

se muestra en la figura. El cable pasa a través de una pequeña polea sin fricción en C y el peso es $W = 1000$ lb.



Prob. 4.4-10

4.4-11 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga simple del Problema 4.2-1.

4.4-12 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo del Problema 4.2-2.

4.4-13 Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga simple del Problema 4.2-3.

4.4-14 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga con extremos volados mostrada en el Problema 4.2-4.

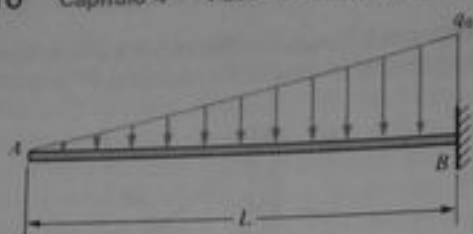
4.4-15 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga con un extremo volado del Problema 4.2-5.

4.4-16 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga con un extremo volado mostrada en el Problema 4.2-6.

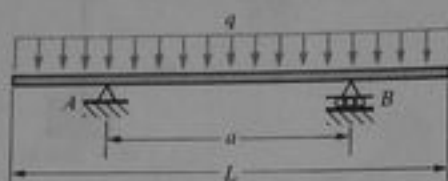
4.4-17 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo con una carga linealmente variada de intensidad máxima q_0 (véase figura).

4.4-18 Una viga con dos partes voladizas iguales (véase figura) y que soporta una carga uniforme de intensidad q , tiene una longitud total L . Determinar la distancia a entre los apoyos A y B , de tal modo que el momento flexionante máximo en la viga adquiera su mínimo valor numérico posible. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta situación.

4.4-10 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABC cargada como



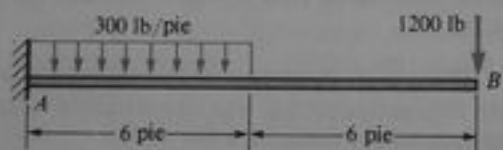
Prob. 4.4-17



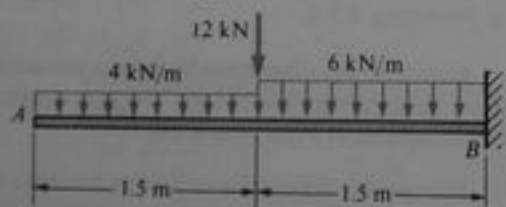
Prob. 4.4-18

4.4-19 Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABCD del Problema 4.2-9.

4.4-20 a 4.4-30 Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas mostradas en las figuras.



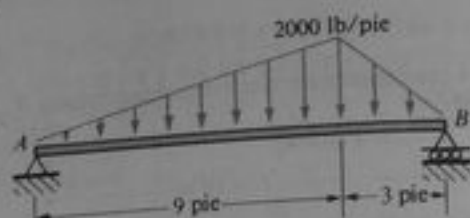
Prob. 4.4-20



Prob. 4.4-21



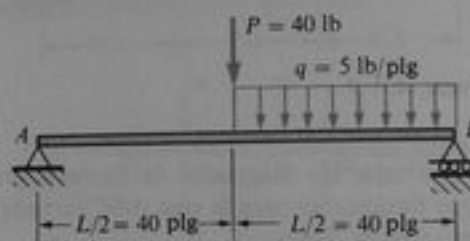
Prob. 4.4-22



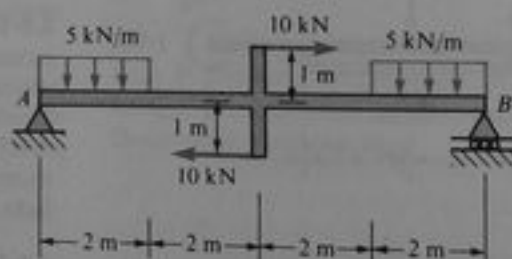
Prob. 4.4-23



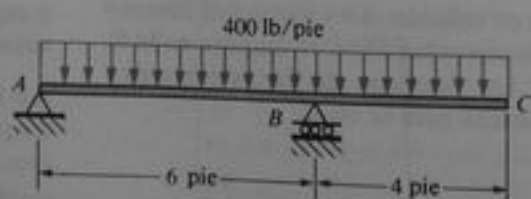
Prob. 4.4-24



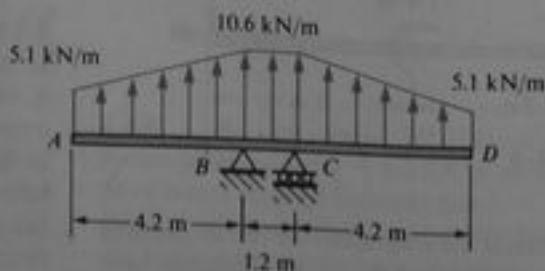
Prob. 4.4-25



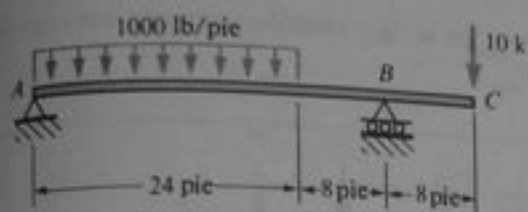
Prob. 4.4-26



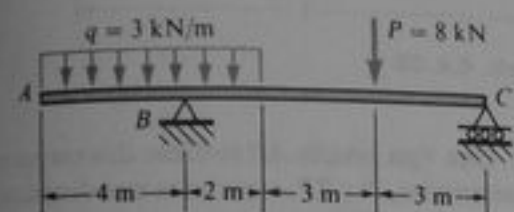
Prob. 4.4-27



Prob. 4.4-28

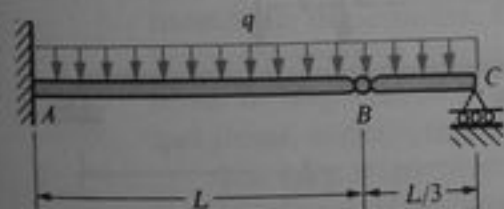


Prob. 4.4-29



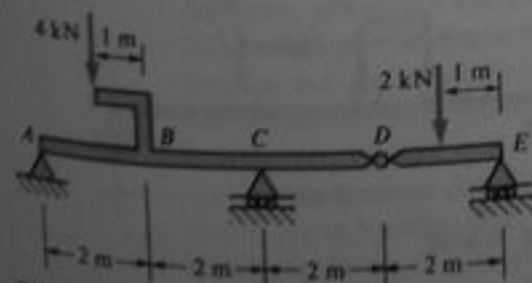
Prob. 4.4-30

4.4-31 La viga ABC mostrada en la figura consta de una porción en voladizo AB unida a otra porción simple BC mediante un perno en B . El perno puede transmitir fuerza cortante pero no puede transmitir momento flexionante. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



Prob. 4.4-31

4.4-32 La viga $ABCDE$ mostrada en la figura tiene apoyos simples en A , C y E , y una articulación en D . Una carga de 4 kN actúa en el extremo de la ménsula que se extiende desde la viga en B y una carga de 2 kN actúa en el punto medio de la porción DE . Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. (Note que la articulación en D puede transmitir fuerza cortante, pero no momento flexionante.)



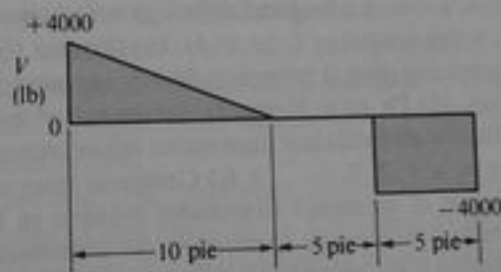
Prob. 4.4-32

4.4-33 La viga $ABCD$ sostiene una carga distribuida de intensidad linealmente variable (véase figura). Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.



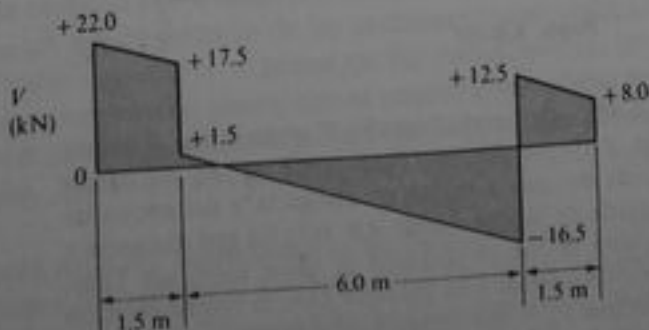
Prob. 4.4-33

4.4-34 La figura muestra el diagrama de fuerza cortante para una viga simple. Determinar las cargas sobre la viga y dibujar el diagrama de momento flexionante, si se supone que sobre la viga no actúan momentos concentrados. (Note que la fuerza cortante se especifica en libras.)



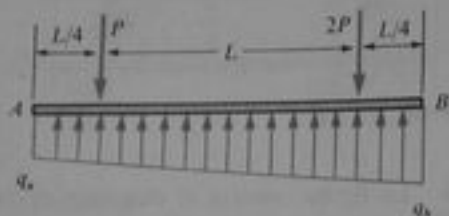
Prob. 4.4-34

4.4-35 El diagrama de fuerza cortante para una viga se muestra en la figura. Si se supone que sobre la viga no actúan momentos concentrados, trazar el diagrama de momento flexionante. (Note que la fuerza cortante se especifica en kilonewtons.)



Prob. 4.4-35

4.4-36 Una viga AB está sometida a cargas concentradas P y $2P$ como se muestra en la figura. La viga se sitúa sobre una cimentación que suministra una reacción continua y distribuida a dicha viga. Se supone que la reacción distribuida varía linealmente en intensidad desde A hasta B ; determinar las intensidades q_a y q_b de la reacción en los extremos A y B , respectivamente. Asimismo, construir el diagrama de momento flexionante para la viga.



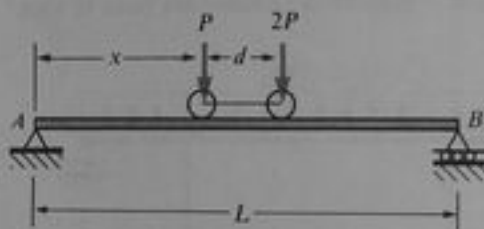
Prob. 4.4-36

nante $M_{máx}$ en la viga; también encontrar una expresión para $M_{máx}$.



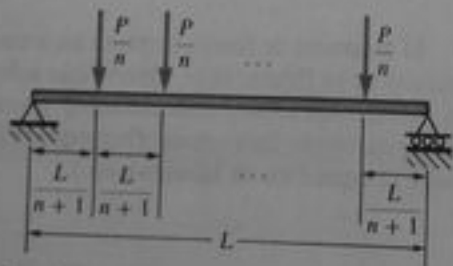
Prob. 4.4-38

4.4-39 Una viga simple AB sostiene dos cargas rodantes conectadas, P y $2P$, separadas una distancia d (véase figura). Las cargas pueden situarse a cualquier distancia x del apoyo izquierdo de la viga. Determinar la distancia x para: (a) la fuerza cortante máxima en la viga y (b) el momento flexionante máximo en la viga si $P = 6$ kN, $d = 1.6$ m y $L = 8$ m. Determinar también la fuerza cortante máxima $V_{máx}$ y el momento flexionante máximo $M_{máx}$.



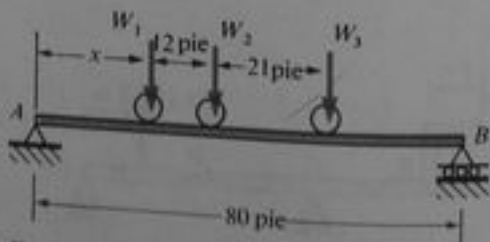
Prob. 4.4-39

***4.4-37** Las cargas sobre una viga simple consisten en n fuerzas igualmente espaciadas (véase figura). La carga total aplicada es P ; en consecuencia, cada fuerza es igual a P/n . La longitud de la viga es L ; luego el espacio entre cargas es $L/(n + 1)$. (a) Obtener fórmulas generales para el momento flexionante máximo en la viga. (b) De estas fórmulas, determinar el momento flexionante máximo para varios valores sucesivos de n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$). (c) Comparar estos resultados con el momento flexionante máximo en la viga debido a una carga uniformemente distribuida de intensidad q tal que $qL = P$.



Prob. 4.4-37

4.4-40 Tres cargas rodantes W_1 , W_2 y W_3 se desplazan a lo largo de una viga simplemente apoyada, como se muestra en la figura. Determinar la ubicación de las ruedas, definida por la distancia x desde el extremo A , tal que produzcan el máximo momento flexionante en la viga, al suponer que $W_1 = 4$ k y $W_2 = W_3 = 16$ k. Determinar también el momento flexionante máximo $M_{máx}$.



Prob. 4.4-40

4.4-38 Dos cargas iguales P están a una distancia fija d (véase figura). Esta combinación de cargas puede situarse a cualquier distancia x del apoyo izquierdo de la viga simple AB . (a) ¿En qué distancia x alcanza la fuerza cortante su valor máximo? También determinar una fórmula para la fuerza cortante máxima $V_{máx}$. (b) Obtener una fórmula para la distancia x tal que produzca el máximo momento flexio-

Esfuerzos en vigas

5.1 INTRODUCCIÓN

Una viga constituye un miembro estructural que se somete a cargas que actúan transversalmente al eje longitudinal, como se explicó en el capítulo anterior. Las cargas originan acciones internas, o resultantes de esfuerzo en forma de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. En este capítulo, se tratan los esfuerzos y deformaciones relacionados con las fuerzas cortantes y momentos flexionantes, y asimismo, diversos temas de importancia práctica en el diseño de vigas. Se consideran únicamente vigas que tienen inicialmente ejes longitudinales rectos.

Las cargas laterales que actúan sobre una viga, provocan flexión de la misma, lo que deforma el eje longitudinal de la viga en una línea curva. Un ejemplo se representa en la Fig. 5-1, que muestra una viga en voladizo AB sometida a una carga P en su extremo libre. Antes de que la carga se aplique, el eje longitudinal de la viga es una recta. Después de aplicar la carga, el eje se dobla hasta adquirir la forma de una curva (Fig. 5-1b), lo que se conoce como la **curva de flexión** (o **curva elástica**) de la viga.

Para fines de referencia, construimos un sistema de ejes coordenados con su origen en el empotramiento. El eje x positivo se dirige hacia la derecha a lo largo del eje longitudinal de la viga, y el eje y es positivo hacia abajo. El eje z , que no se muestra en esta figura, se dirige hacia atrás (esto es, en dirección contraria al observador), de tal modo que los ejes forman un sistema coordenado derecho.

Las vigas consideradas en este capítulo se suponen simétricas respecto del plano xy , lo que significa que el eje y es un eje de simetría de las secciones transversales. Además, se supone que todas las cargas actúan en el plano xy . En consecuencia, las deflexiones por flexión se presentan en este mismo plano, que se conoce como **plano de flexión**. Así, la curva de flexión AB de la viga indicada en la Fig. 5-1b, es una curva plana ubicada en el plano de flexión. Denotaremos la deflexión en la dirección y por la letra v .

Considérense ahora dos puntos m_1 y m_2 sobre la curva de flexión (Fig. 5-2); el punto m_1 se localiza a una distancia x del eje y , y el punto m_2 está situado a una pequeña distancia ds más adelante sobre la curva. En cada uno de estos puntos se traza una normal a la tangente de la curva de flexión. Estas normales se intersecan en el punto

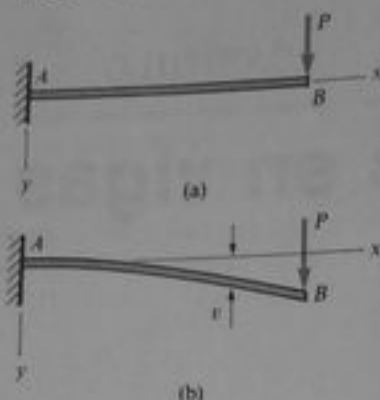


Fig. 5-1 Flexión de una viga en voladizo

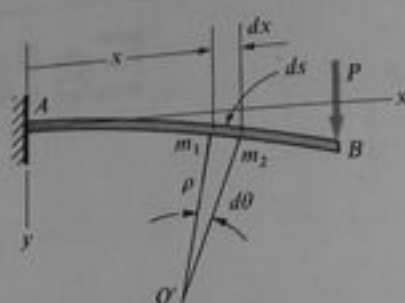


Fig. 5-2 Curvatura de una viga flexionada

O' , que constituye el **centro de curvatura** de la elástica a una distancia x del apoyo. La longitud de una normal (esto es, la distancia desde el centro de curvatura hasta la curva misma) se denomina **radio de curvatura** ρ (letra griega rho). Según se define en cálculo y geometría analítica, la **curvatura** κ (letra griega kappa) es el recíproco del radio de curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (a)$$

También, de la geometría de la figura obtenemos

$$\rho d\theta = ds \quad (b)$$

donde $d\theta$ es el pequeño ángulo entre las normales, y ds es la distancia a lo largo de la curva entre las normales. Si las deflexiones de la viga son pequeñas, lo que constituye el caso más común, entonces la curva de flexión es bastante plana, y la distancia ds a lo largo de la curva puede igualarse a su proyección horizontal dx (Fig. 5-2). Entonces obtenemos

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (5-1)$$

En general, la curvatura varía a lo largo del eje de la viga; es decir, κ es una función de x .

Los **signos convencionales para la curvatura** se refieren a la orientación de los ejes coordenados. Si el eje x es positivo hacia la derecha y el eje y es positivo hacia abajo, como se muestra en la Fig. 5-2, entonces la curvatura del eje de la viga es positiva cuando la viga es cóncava hacia abajo, y negativa cuando la viga es cóncava hacia arriba. Estos signos convencionales se representan en la Fig. 5-3. No se han elegido estos signos convencionales arbitrariamente; por lo contrario, se establecen matemáticamente a partir de las direcciones de los ejes coordenados, según se explica en la Sección 6.1.

La Ec. (5-1) se utilizará en la siguiente sección para determinar las deformaciones en una viga flexionada, y en el Capítulo 6 para establecer la ecuación de la curva elástica. Sin embargo, antes de iniciar un estudio de los esfuerzos y deformaciones por flexión necesitamos señalar la diferencia entre flexión pura y flexión no uniforme. La **flexión pura** se refiere a la flexión de una viga bajo un momento flexionante constante, lo que significa que la fuerza cortante es cero (ya que $V = dM/dx$; véase Ec. 4-3). En contraste, la **flexión no uniforme** se refiere a flexión en presencia de fuerzas cortantes, lo que significa que el momento flexionante varía a lo largo del eje de la viga. Para ejemplificar estas definiciones, considérese una viga simple cargada simétricamente por dos fuerzas P (Fig. 5-4a). Los diagramas correspondientes de fuerza

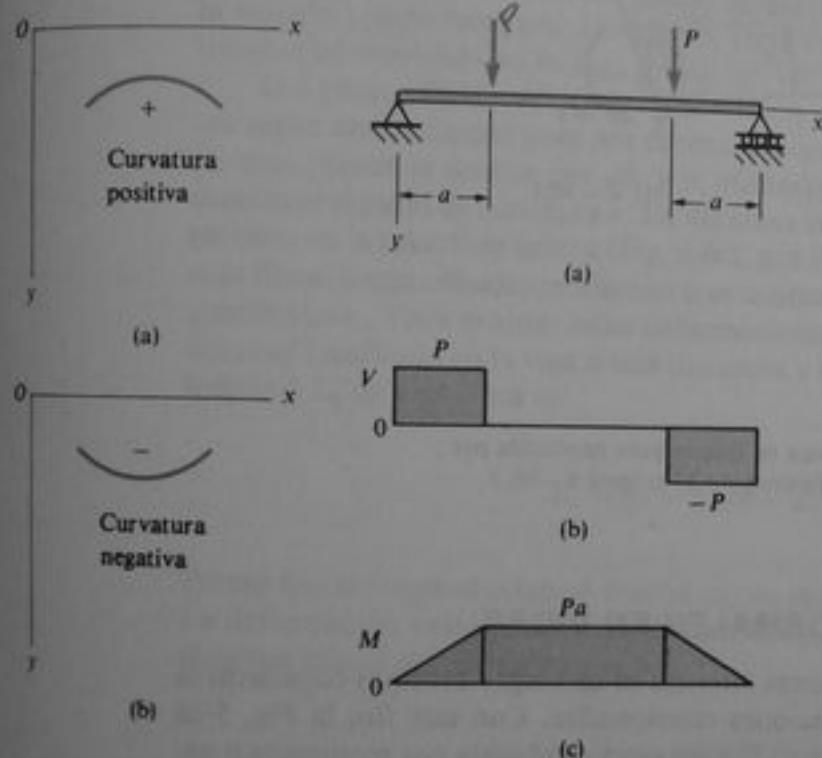


Fig. 5-3 Signos convencionales para curvatura

Fig. 5-4 Viga con su región central en flexión pura

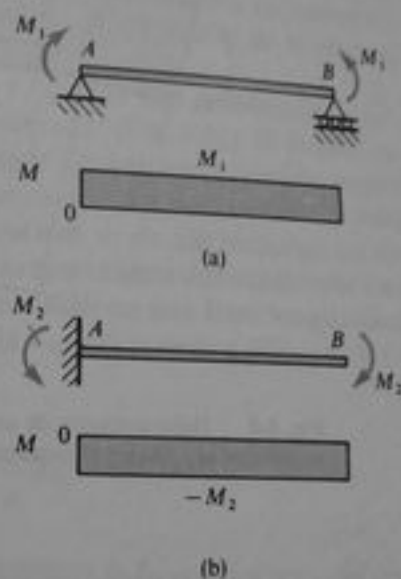


Fig. 5-5 Vigas en flexión pura: (a) viga simple sometida a momentos flexionantes positivos $M = M_1$, y (b) viga en voladizo sometida a momentos flexionantes negativos $M = -M_2$

cortante y momento flexionante se muestran en las Figs. 5-4b y c. En la región entre las cargas P no existe fuerza cortante, por lo que está sometida únicamente a un momento flexionante igual a Pa ; en consecuencia, la región central de esta viga está en flexión pura. Las regiones de longitud a cerca de los extremos están en flexión no uniforme, ya que el momento flexionante M no es constante y se presentan fuerzas cortantes. Otros ejemplos de flexión pura se muestran en la Fig. 5-5. En cada uno de estos últimos casos, la viga está cargada únicamente con momentos concentrados que originan momentos flexionantes constantes y no producen fuerzas cortantes. En las dos siguientes secciones, determinaremos las deformaciones y esfuerzos normales en flexión pura y después, en secciones posteriores, estudiaremos los esfuerzos cortantes en flexión no uniforme.

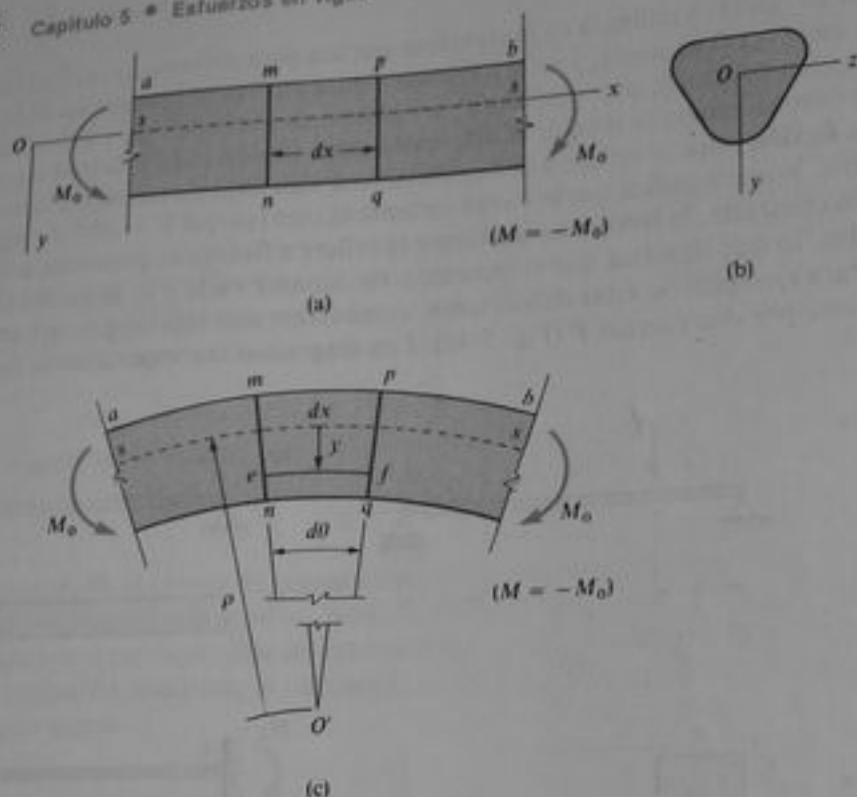


Fig. 5-6 Deformaciones de una viga en flexión pura producida por momentos M_0 . (Nota: el momento flexionante M es igual a $-M_0$.)

5.2 DEFORMACIONES NORMALES EN VIGAS

Para determinar las deformaciones internas en una viga, debemos considerar la curvatura de la viga y las deformaciones relacionadas. Con este fin, la Fig. 5-6a muestra una porción ab de una viga en flexión pura producida por momentos o pares M_0 . Las direcciones de los momentos M_0 se eligen en forma tal que produzcan curvatura positiva de la viga flexionada (véase Fig. 5-3a), aunque en realidad ocasionan momentos flexionantes negativos M (véanse Figs. 4-3 y 4-4). En consecuencia, el momento flexionante M es igual a $-M_0$, como se indica en la Fig. 5-6. La viga tiene inicialmente un eje longitudinal recto (el eje x), y la sección transversal puede tener cualquier forma que sea simétrica respecto al eje y (Fig. 5-6b). Bajo la acción de los momentos M_0 , la viga se deforma en el plano xy , y su eje se flexiona a una curva circular (Fig. 5-6c). Las secciones transversales de la viga tales como mn y pq , permanecen planas y perpendiculares a las líneas longitudinales, o fibras, de la viga. El hecho de que las secciones transversales de una viga en flexión pura permanezcan planas, puede establecerse experimentalmente mediante mediciones de deformación precisas, o demostrarse teóricamente por medio de principios de simetría. La simetría de la viga y sus cargas (Fig. 5-6a) requiere que todos los elementos de la viga (tal como el elemento $mnqp$) se deformen de manera idéntica, lo que únicamente es posible si la curva de flexión es circular (Fig. 5-6c) y si las secciones transversales permanecen planas durante el proceso de carga (Ref. 5-1). Estas conclusiones son válidas para

una viga de cualquier material (elástico o inelástico, lineal o no lineal); por supuesto, las propiedades del material deben ser simétricas respecto al eje y (Fig. 5-6b).

Como resultado de las deformaciones por flexión mostradas en la Fig. 5-6c, las secciones transversales mn y pq giran una con respecto a otra alrededor de ejes perpendiculares al plano xy . Las fibras longitudinales del lado convexo de la viga se alargan, mientras que las del lado cóncavo se acortan. Por lo que las fibras de la parte superior de la viga presentan tensión, mientras que las de la parte inferior están en compresión. En algún lugar entre la parte superior y la inferior de la viga se localiza una superficie en la que las fibras longitudinales no modifican su longitud. Esta superficie indicada por la línea punteada ss en las Figs. 5-6a y c, se denomina **superficie neutra** de la viga. Su intersección con cualquier plano normal se llama **eje neutro** de la sección transversal; por ejemplo el eje z constituye el eje neutro de la sección transversal mostrada en la Fig. 5-6b.

Los planos de las secciones transversales mn y pq de la viga deformada se cortan según una recta que pasa por el centro de curvatura O' (Fig. 5-6c). El ángulo entre esos planos se denota por $d\theta$, y la distancia desde O' hasta la superficie neutra constituye el radio de curvatura ρ . La distancia inicial dx entre los dos planos (Fig. 5-6a) no varía en la superficie neutra (Fig. 5-6c), por lo que $\rho d\theta = dx$. Sin embargo, las demás fibras longitudinales se alargan o se acortan, lo que origina deformaciones longitudinales ϵ_x . Para evaluar estas deformaciones, considérese una fibra longitudinal típica ef localizada en la viga a una distancia y de la superficie neutra (Fig. 5-6c). La longitud L_1 de esta fibra es

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho} dx$$

Puesto que la longitud original de ef es dx , su alargamiento es $L_1 - dx$, o sea $-y dx/\rho$. La deformación unitaria correspondiente es igual al alargamiento dividido entre la longitud inicial dx ; en consecuencia,

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (5-2)$$

donde κ es la curvatura. Esta ecuación establece que las deformaciones longitudinales en la viga son proporcionales a la curvatura y que varían linealmente con la distancia y desde la superficie neutra. Cuando una fibra está por debajo de la superficie neutra, la distancia y es positiva; si la curvatura también es positiva (como en la Fig. 5-6c), entonces ϵ_x será una deformación negativa y constituye un acortamiento. Cuando una fibra está por arriba de la superficie neutra, la distancia y es negativa; entonces, para curvatura positiva, ϵ_x será positiva, lo que constituye un alargamiento. Obsérvese que los signos convencionales de ϵ_x en la Ec. (5-2) son los mismos que se han utilizado en capítulos anteriores para las deformaciones normales.

Se obtuvo la Ec. (5-2) a partir solamente de la geometría de la viga deformada; las propiedades del material no intervinieron en la formulación. Por lo tanto, la ecuación es válida independientemente del perfil del diagrama esfuerzo-deformación del material.

Deformaciones transversales. Las deformaciones axiales ϵ_x , dadas por la Ec. (5-2) se acompañan por deformaciones laterales o transversales ϵ_z , debidas a los efectos de la relación de Poisson, según se explicó en la Sección 1.5. Las deformaciones ϵ_z , positivas por encima de la superficie neutra ss (Fig. 5-7a) van acompañadas por deformaciones transversales negativas, mientras que bajo el eje neutro las deformaciones transversales son positivas. Así que las deformaciones transversales son positivas y están dadas por la ecuación

$$\epsilon_z = -\nu\epsilon_x = \nu\kappa y \quad (5-3)$$

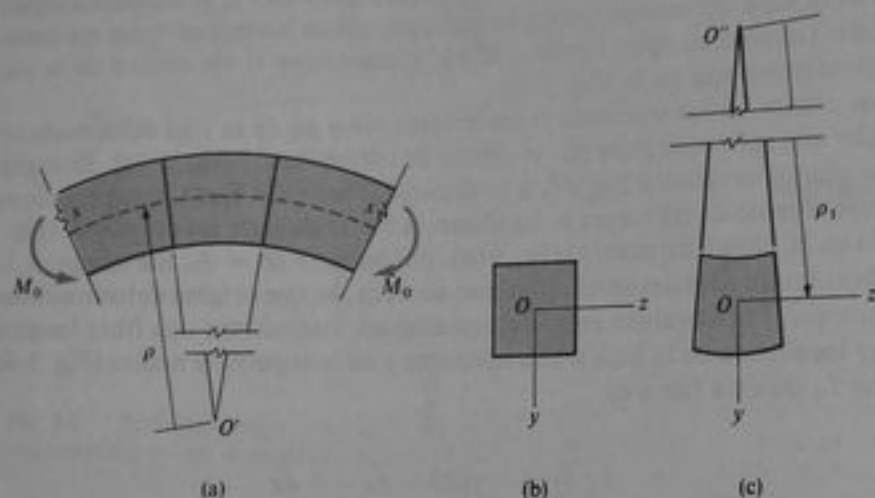


Fig. 5-7 Deformaciones transversales de una viga en flexión pura

donde ν es el módulo de Poisson. Como resultado de estas deformaciones, la forma de la sección transversal cambia. Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal rectangular (Fig. 5-7b). Las deformaciones ϵ_z , provocan que el ancho de la sección transversal se incremente por debajo del eje z y se reduzca por arriba del mismo. Dado que estos cambios en anchura son directamente proporcionales a y (Ec. 5-3), los lados de la sección transversal se inclinan uno con respecto del otro (Fig. 5-7c). También, todas las rectas en la sección transversal, que originalmente eran paralelas al eje z , resultan ligeramente curvadas de forma tal que permanecen normales a los lados de la sección. El centro de curvatura O' de estas líneas está por arriba de la viga, y el radio de curvatura transversal correspondiente ρ_1 es mayor que el radio de curvatura longitudinal ρ en la misma proporción en que ϵ_z es numéricamente mayor que ϵ_x , (véase Ec. 5-3); en consecuencia obtenemos

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\nu} \quad \kappa_1 = \nu\kappa \quad (5-4a, b)$$

donde $\kappa_1 = 1/\rho_1$ es la curvatura transversal.

La forma alterada de una viga rectangular en flexión pura sometida a momentos M_0 se muestra sumamente exagerada en la Fig. 5-8. La curvatura longitudinal en el plano xy es positiva, mientras que la curvatura transversal en el plano yz es negativa. Como resultado, la superficie superior de la viga adquiere la forma de una silla

de montar. Cuando una superficie tiene curvaturas de signos opuestos, como en el caso de una silla de montar se dice que tiene **curvatura anticlástica**. Por lo contrario, si las curvaturas son del mismo signo, como cuando la superficie tiene la forma de un domo o cúpula, la curvatura es **sinclástica**. De la Fig. 5-8 se aprecia que todos los planos de la viga, que inicialmente eran paralelos a la superficie neutra (el plano xz), originan curvatura anticlástica.

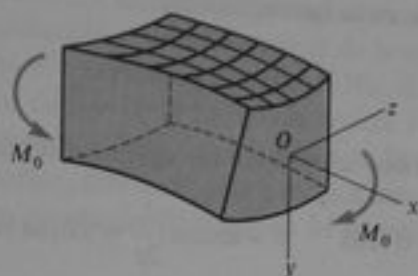


Fig. 5-8 Deformación de una viga de sección transversal rectangular en flexión pura, que muestra la curvatura anticlástica

Ejemplo

Una viga de acero simplemente apoyada AB (Fig. 5-9) de longitud $L = 12$ pie se flexiona mediante momentos M_0 que producen una deformación en la superficie superior de la viga igual a la deformación de fluencia del acero. La distancia desde la cara superior hasta la superficie neutra es 6 plg. Calcular el radio de curvatura ρ , la curvatura κ y la deflexión vertical δ en la mitad de la viga, si se supone que la deformación de fluencia es 0.0014.

La Ec. (5-2) relaciona ρ y κ con la deformación normal ϵ_x . Al sustituir en esa ecuación, y emplear únicamente valores absolutos, obtenemos

$$\rho = \frac{y}{\epsilon_x} = \frac{6 \text{ plg}}{0.0014} = 4286 \text{ plg} = 357 \text{ pie}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = 0.0028 \text{ pie}^{-1}$$

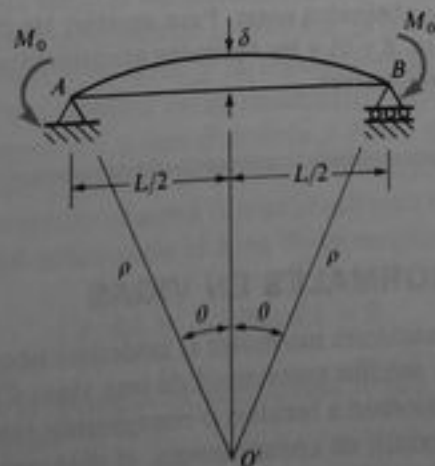


Fig. 5-9 Ejemplo

Estos resultados indican que, aun para deformaciones relativamente grandes del material, el radio de curvatura es extremadamente grande, y en consecuencia, la curva de flexión de la viga es muy aplanada.

Para destacar aún más este punto, calculemos ahora la deflexión δ en la mitad de la viga. Como la curva de flexión es un arco circular, apreciamos que la deflexión δ es

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta) \quad (a)$$

donde θ es el ángulo señalado en la figura; esto es,

$$\text{sen } \theta = \frac{L}{2\rho} \quad (b)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{L}{2\rho} = 0.0168 \quad \theta = \arcsen \frac{L}{2\rho} = 0.0168 \text{ rad}$$

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta) = (4286 \text{ plg})(1 - 0.9998589) = 0.605 \text{ plg}$$

Luego, la relación de la longitud de la viga a la deflexión en la mitad de la misma es

$$\frac{L}{\delta} = \frac{12 \text{ pie}}{0.605 \text{ plg}} = 238$$

lo que confirma que la curva de flexión es muy aplanada. Por supuesto, la deflexión δ mostrada en la figura está sumamente exagerada para mayor comprensión.

Dado que $L/2\rho$ es una cantidad pequeña y θ es un ángulo pequeño, podemos emplear las siguientes relaciones aproximadas:

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (c)$$

Así, las Ecs. (b) y (a) resultan

$$\theta \approx \frac{L}{2\rho} \quad \delta \approx \frac{\rho\theta^2}{2} = \frac{L^2}{8\rho} \quad (d)$$

Al sustituir nuevamente los valores numéricos, se obtiene

$$\theta = 0.0168 \quad \delta = 0.605 \text{ plg}$$

que son los mismos resultados obtenidos antes. Para apreciar las diferencias en los resultados entre las fórmulas exactas (Ecs. a y b) y las fórmulas aproximadas, debemos calcular con un mayor número de dígitos significativos.

5.3 ESFUERZOS NORMALES EN VIGAS

A partir de las deformaciones normales ϵ , podemos obtener los esfuerzos σ , que actúan perpendiculares a la sección transversal de una viga. Cada fibra longitudinal de la viga está sometida únicamente a tensión o compresión (esto es, las fibras están en un estado de esfuerzo uniaxial); en consecuencia, el diagrama esfuerzo-deformación para el material proporcionará la relación entre σ , y ϵ . Si el material es elástico, con

un diagrama lineal esfuerzo-deformación, podemos utilizar la ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales ($\sigma = E\epsilon$) y obtener

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -E\kappa y \quad (5-5)$$

(véase Ec. 5-2). Así, los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal varían linealmente con la distancia y medida a partir de la superficie neutra. Este tipo de distribución de esfuerzos se representa en la Fig. 5-10a, donde los esfuerzos son negativos (de compresión) por debajo de la superficie neutra y positivos (de tensión) por arriba de ella, cuando el momento aplicado M_0 actúa en la dirección señalada. Como se explicó en la sección anterior, este momento produce una curvatura positiva κ en la viga, aunque representa un momento flexionante M negativo.

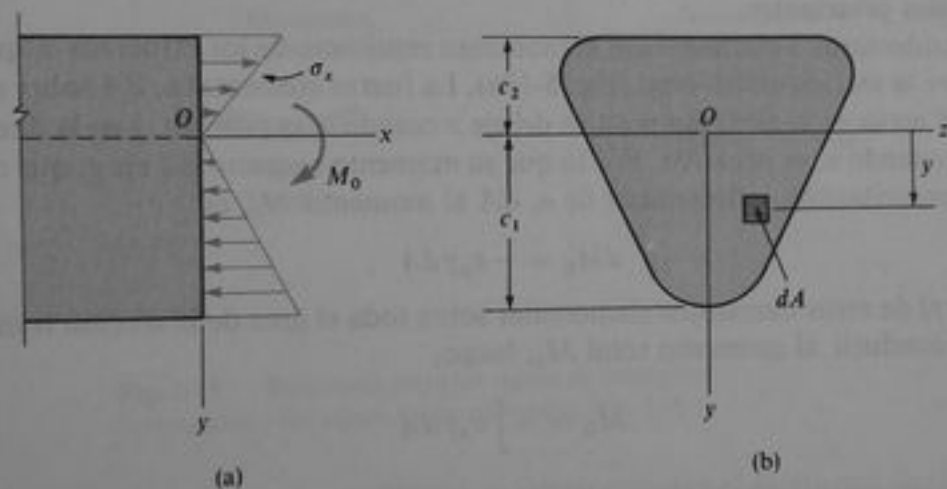


Fig. 5-10 Distribución de esfuerzos normales σ_x en una viga de material linealmente elástico

Consideremos ahora la resultante de los esfuerzos normales σ_x que actúan sobre la sección transversal. En general, esta resultante debe consistir en una fuerza horizontal en la dirección x y un momento que actúa alrededor del eje z . Sin embargo, dado que no actúan fuerzas axiales sobre la sección transversal, la única resultante es el momento M_0 . Así, obtenemos dos ecuaciones de la estática; la primera establece que la fuerza resultante en la dirección x es cero, y la segunda establece que el momento resultante es igual a M_0 . Para evaluar estas resultantes, considérese un elemento de área dA en la sección transversal a una distancia y desde el eje neutro (Fig. 5-10b). La fuerza que actúa sobre el elemento es normal a la sección transversal, y tiene una magnitud $\sigma_x dA$. Como no actúa ninguna fuerza resultante normal a la sección transversal, la integral de $\sigma_x dA$ sobre toda el área de la sección debe ser nula; luego,

$$\int \sigma_x dA = - \int E\kappa y dA = 0$$

Ya que la curvatura κ y el módulo de elasticidad E son constantes en la sección transversal, concluimos que

$$\int y dA = 0 \quad (5-6)$$

para una viga en flexión pura. Esta ecuación establece que el primer momento del área de la sección transversal con respecto del eje z es cero; en consecuencia, se aprecia que el eje z debe pasar por el centroide de la sección transversal. Dado que el eje z también es el eje neutro, concluimos que *el eje neutro pasa a través del centroide del área de la sección transversal* cuando el material de la viga cumple con la ley de Hooke. Esta propiedad puede emplearse para determinar la posición del eje neutro de una viga de cualquier perfil de sección transversal. Por supuesto, nuestro estudio se limita a vigas para las cuales el eje y es un eje de simetría, según se explicó previamente. Como consecuencia el eje y también debe pasar por el centroide; de aquí que *el origen de coordenadas O se localiza en el centroide de la sección transversal*. Además, la simetría de la sección respecto del eje y significa que el eje y es un eje principal (véase Sección C.8, Apéndice C, para una discusión de ejes principales). El eje z también constituye un eje principal ya que es perpendicular al eje y . Por lo tanto, cuando una viga de material linealmente elástico se somete a flexión pura, los ejes y y z son **ejes centroidales principales**.

Consideremos a continuación el momento resultante de los esfuerzos σ , que actúan sobre la sección transversal (Fig. 5-10a). La fuerza elemental $\sigma_x dA$ sobre el elemento dA actúa en la dirección positiva del eje x cuando σ_x es positivo, y en la dirección negativa cuando σ_x es negativo. Por lo que su momento respecto del eje z , que representa la contribución infinitesimal de $\sigma_x dA$ al momento M_0 , es

$$dM_0 = -\sigma_x y dA$$

La integral de estos momentos elementales sobre toda el área de la sección transversal debe conducir al momento total M_0 ; luego,

$$M_0 = -\int \sigma_x y dA$$

Al notar nuevamente que el momento flexionante M es igual a $-M_0$, y también sustituir σ_x de la Ec. (5-5), obtenemos

$$M = \int \sigma_x y dA = -\kappa E \int y^2 dA$$

Esta ecuación puede expresarse en forma más sencilla:

$$M = -\kappa EI \quad (5-7)$$

donde

$$I = \int y^2 dA \quad (5-8)$$

constituye el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje z (esto es, con respecto al eje neutro). Los momentos de inercia tienen dimensión de longitud a la cuarta potencia, y algunas unidades representativas son plg^4 , m^4 y mm^4 para cálculos de vigas.* La Ec. (5-7) puede reformularse como sigue:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (5-9)$$

* Los momentos de inercia de áreas se tratan en el Apéndice C.

Esta ecuación establece que la curvatura del eje longitudinal de una viga es proporcional al momento flexionante M e inversamente proporcional a la cantidad EI , que se conoce como **rigidez a flexión** de la viga.

El signo menos en la ecuación curvatura-momento (Ec. 5-9) es una consecuencia de los signos convencionales adoptados para momentos flexionantes. Comparando los signos convencionales para momentos (Fig. 4-3) con los de curvaturas (Fig. 5-3), se aprecia que *un momento flexionante positivo produce curvatura negativa y un momento flexionante negativo produce curvatura positiva*, como se representa en la Fig. 5-11. (Si se emplean signos convencionales opuestos para el momento flexionante, o si se considera al eje y positivo descendente, entonces el signo menos se omite en la Ec. 5-9.)

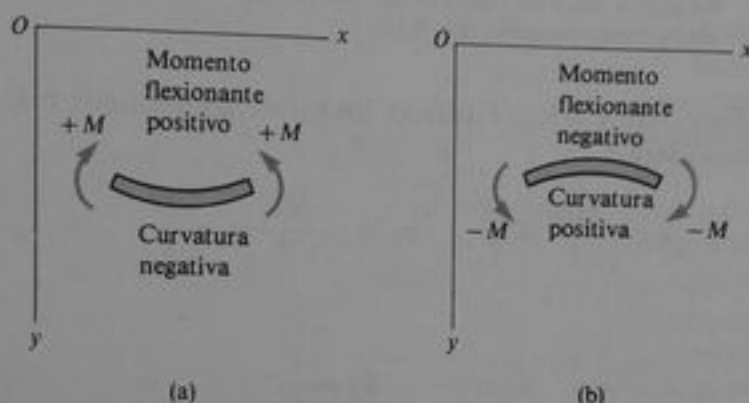


Fig. 5-11 Relaciones entre los signos de momentos flexionantes y los signos de las curvaturas (Ec. 5-9)

Los esfuerzos normales en la viga se relacionan con el momento flexionante al sustituir la expresión para la curvatura (Ec. 5-9) en la expresión para σ_x (Ec. 5-5), y se obtiene

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad (5-10)$$

Esta ecuación establece que los esfuerzos son proporcionales al momento flexionante M e inversamente proporcionales al momento de inercia I de la sección transversal. También, los esfuerzos varían linealmente con la distancia y desde el eje neutro. Si sobre la viga actúa un momento flexionante positivo, los esfuerzos son positivos (tensión) sobre la porción de la viga en la que y es positiva. Si actúa un momento negativo, se producen esfuerzos negativos (compresión) donde y es positiva. Estas relaciones se muestran en la Fig. 5-12. La Ec. (5-10) para los esfuerzos normales se denomina usualmente **fórmula de la flexión**. (Obsérvese que si se invierte el signo convencional de M , o si el eje y se supone positivo ascendente, se requiere un signo menos en la fórmula de la flexión.)

Los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga se presentan en los puntos más alejados del eje neutro. Denotemos por c_1 y c_2 las distancias desde el eje neutro hasta las fibras extremas en las direcciones y positiva y negativa, respectivamente.

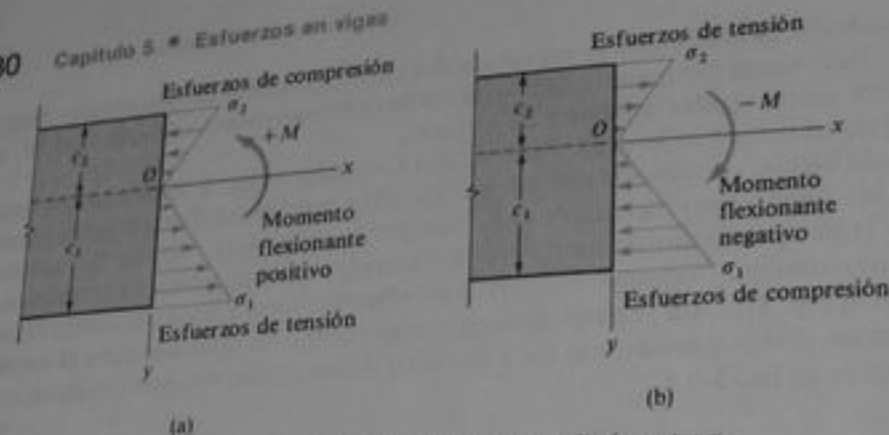


Fig. 5-12 Relaciones entre los signos de los momentos flexionantes y los signos de los esfuerzos normales (Ec. 5-10)

mente (véanse Figs. 5-10 y 5-12). Entonces los esfuerzos normales máximos (de la Ec. 5-10) son como sigue:

$$\sigma_1 = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} \quad \sigma_2 = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \quad (5-11a, b)$$

en donde

$$S_1 = \frac{I}{c_1} \quad S_2 = \frac{I}{c_2} \quad (5-12a, b)$$

Las cantidades S_1 y S_2 se conocen como **módulos de sección** del área transversal, y tienen dimensión de longitud a la tercera potencia (por ejemplo, plg^3 , m^3 y mm^3). Si el momento flexionante M es positivo el esfuerzo σ_1 es de tensión, y σ_2 , de compresión; si M es negativo, los esfuerzos se invierten (véase Fig. 5-12).

Si la sección transversal es simétrica respecto del eje z (sección transversal doblemente simétrica), entonces $c_1 = c_2 = c$ y los esfuerzos de tensión y compresión máximos son numéricamente iguales:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \quad (5-13)$$

donde

$$S = \frac{I}{c} \quad (5-14)$$

es el módulo de sección. Para una viga de sección transversal rectangular de ancho b y altura h (Fig. 5-13a), el momento de inercia y el módulo de sección son

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad S = \frac{bh^2}{6} \quad (5-15a, b)$$

Para una sección transversal circular de diámetro d (Fig. 5-13b), estas propiedades son

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad S = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5-16a, b)$$

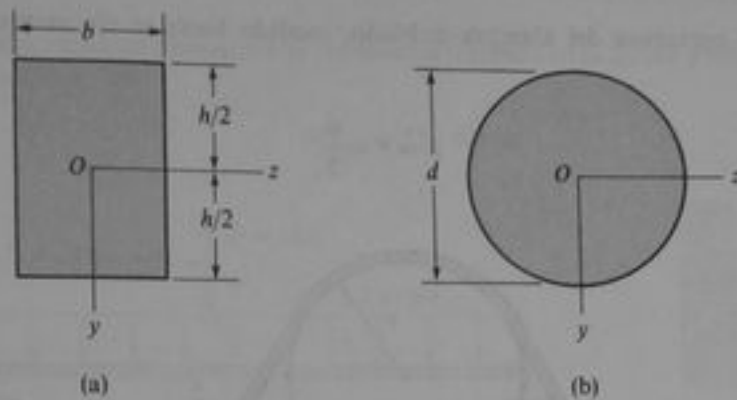


Fig. 5-13 Secciones transversales doblemente simétricas

Las propiedades de varias figuras planas se tienen en el Apéndice D. Para perfiles de sección transversal diferentes a los listados debemos obtener la localización del eje neutro, el momento de inercia y el módulo de sección mediante cálculo directo por las técnicas descritas en el Apéndice C. Las dimensiones y propiedades de las vigas disponibles comercialmente se indican en diversos manuales y en los apéndices E y F, según se explica con más detalle en la siguiente sección.

El análisis anterior de los esfuerzos normales en vigas es el concerniente a flexión pura, lo que significa que sobre las secciones transversales no actúan fuerzas cortantes. En el caso de flexión no uniforme, la presencia de fuerzas cortantes provoca alabeo de las secciones transversales; así, una sección que es plana antes de la flexión no es del todo plana después de ella. El alabeo debido a cortante complica enormemente el comportamiento de la viga, pero análisis más laboriosos demuestran que los esfuerzos normales σ_x calculados con la fórmula de la flexión no se alteran significativamente por la presencia de esfuerzos cortantes y el alabeo respectivo (Ref. 5-2). Por lo que se justifica emplear la teoría de la flexión pura en el cálculo de esfuerzos normales aun cuando no ocurra flexión uniforme. El cálculo de los esfuerzos cortantes se considera en la Sección 5.5.*

La fórmula de la flexión proporciona resultados exactos únicamente en las regiones de la viga donde la distribución de esfuerzos no se interrumpe por irregularidades en la forma de la viga o por discontinuidades de carga. Tales irregularidades pueden producir esfuerzos locales, llamados *concentraciones de esfuerzos*, que son mucho mayores que los esfuerzos obtenidos a partir de la fórmula de la flexión.

Ejemplo 1

Un alambre de acero de diámetro d se dobla sobre un tambor de radio r (Fig. 5-14). Calcular el esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} y el momento flexionante M en el alambre, si se supone $E = 200$ GPa, $d = 4$ mm y $r = 0.5$ m.

* La teoría de las vigas se inició con Galileo Galilei (1564-1642), quien estudió el comportamiento de diversos tipos de vigas. Su trabajo en mecánica de materiales está descrito en su famoso libro *Dos nuevas ciencias*, publicado por primera vez en 1638 (Ref. 5-3). Aunque Galileo realizó muchos descubrimientos importantes referentes a las vigas, no obtuvo correctamente la distribución de esfuerzos. Progresos posteriores fueron efectuados por Mariotte, Jacob Bernoulli, Euler, Parent, Saint-Venant y otros (Ref. 5-4).

El radio de curvatura del alambre doblado, medido hasta el eje neutro de la sección transversal, es

$$\rho = r + \frac{d}{2} \quad (a)$$



Fig. 5-14 Ejemplo 1

Enseguida, los esfuerzos de tensión y compresión máximos, que son numéricamente iguales, se obtienen de la Ec. (5-5) al sustituir $x = 1/\rho$ y $y = d/2$:

$$\sigma_{\max} = \frac{Ed}{2r + d} \quad (5-17)$$

Si el radio del tambor es grande comparado con el diámetro del alambre, el segundo término en el denominador puede omitirse.

Para calcular el esfuerzo máximo, sustituimos ahora los valores numéricos para E , d y r :

$$\sigma_{\max} = \frac{(200 \text{ GPa})(4 \text{ mm})}{2(500 \text{ mm}) + 4 \text{ mm}} = 797 \text{ MPa}$$

Si se desprecia d en el denominador, el resultado es $\sigma_{\max} = 800 \text{ MPa}$, que difiere del resultado anterior en menos de 1%.

El momento flexionante máximo en el alambre puede determinarse a partir de la ecuación $M = \sigma S$ (véase Ec. 5-13), donde σ se obtiene de la Ec. (5-17) y $S = \pi d^3/32$; luego,

$$M_{\max} = \sigma_{\max} S = \frac{\pi E d^4}{32(2r + d)} \quad (5-18)$$

Al sustituir nuevamente los valores numéricos, obtenemos $M_{\max} = 5.01 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Ejemplo 2

Una viga simple AB con un claro de longitud $L = 22$ pie (Fig. 5-15) soporta una carga uniforme de intensidad $q = 1.5$ k/pie y una carga concentrada $P = 12$ k. La viga está construida de madera laminada y pegada, con ancho $b = 8.75$ plg y altura $d = 27$ plg. Determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la viga ocasionados por la flexión.

Los esfuerzos por flexión máximos se presentan en la sección transversal con momento flexionante máximo. Para auxiliar en la localización de esta sección transversal, construimos el diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura. Vemos que la fuerza cortante cambia de signo bajo la carga concentrada; en consecuencia, el momento flexionante máximo se presenta

en ese sitio. El diagrama de momentos se representa también en la figura y entonces el momento flexionante máximo es

$$M_{\max} = 152 \text{ pie}\cdot\text{k}$$

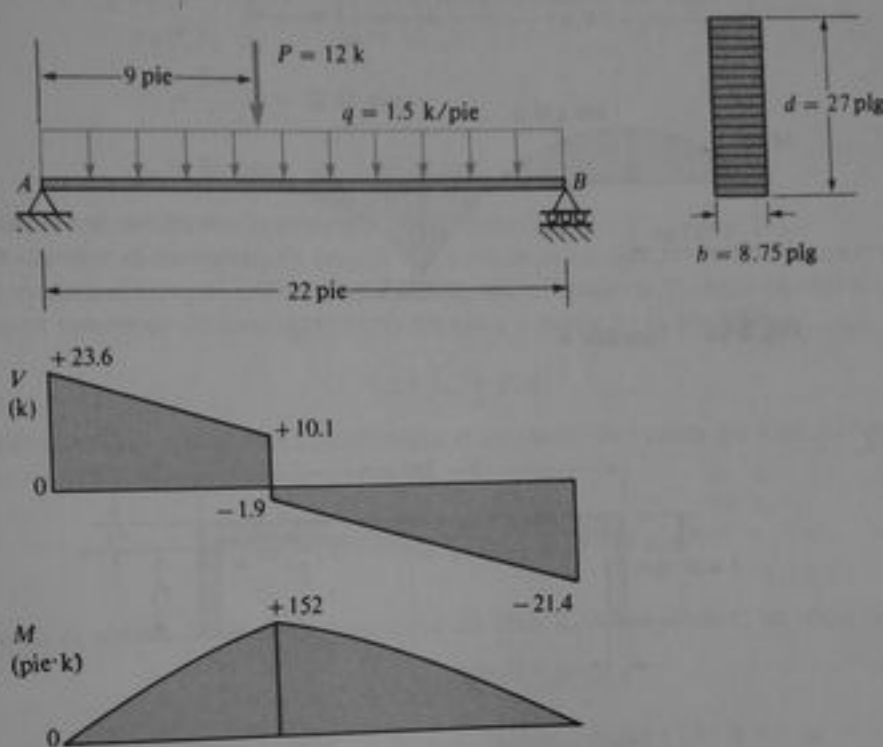


Fig. 5-15 Ejemplo 2

Enseguida, calculemos el módulo de sección del área de la sección transversal (Ec. 5-15b):

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6} (8.75 \text{ plg})(27 \text{ plg})^2 = 1063 \text{ plg}^3$$

Finalmente, los esfuerzos de tensión y compresión máximos σ_t y σ_c según la Ec. (5-13) son:

$$\sigma_t = \sigma_1 = \frac{M}{S} = \frac{152 \text{ pie}\cdot\text{k}}{1063 \text{ plg}^3} = 1720 \text{ lb/plg}^2$$

$$\sigma_c = \sigma_2 = -\frac{M}{S} = -1720 \text{ lb/plg}^2$$

En este ejemplo, el momento flexionante es positivo; por lo tanto, el esfuerzo de tensión máximo se presenta en la parte inferior de la viga (σ_1), y el esfuerzo de compresión máximo ocurre en la parte superior (σ_2).

Ejemplo 3

La viga ABC mostrada en la Fig. 5-16 está simplemente apoyada en A y B, y tiene un voladizo desde B hasta C. A lo largo de la longitud de la viga actúa una carga uniforme de intensidad $q = 3.0 \text{ kN/m}$. La viga se construye con placas de acero de 12 mm de espesor, soldadas para

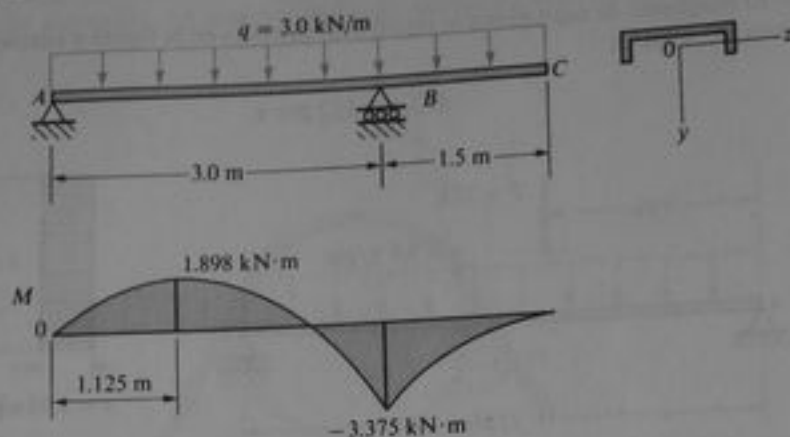


Fig. 5-16 Ejemplo 3

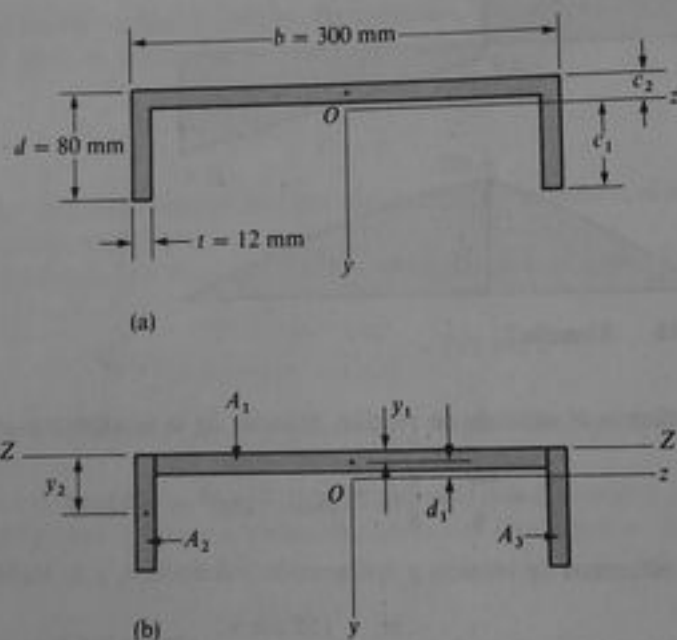


Fig. 5-17 Sección transversal de la viga analizada en el Ejemplo 3

formar una sección acanalada cuyas dimensiones se muestran en la Fig. 5-17a. Calcular los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la viga.

El diagrama de momento flexionante para esta viga puede obtenerse mediante los métodos descritos en el Capítulo 4. El diagrama resultante se muestra en la Fig. 5-16, y se aprecia que los momentos flexionantes máximos, positivo y negativo, son de $1.898 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y $-3.375 \text{ kN}\cdot\text{m}$, respectivamente.

La posición del eje neutro se determina al localizar el centroide del área de la sección transversal mostrada en la Fig. 5-17a. Mediante las técnicas descritas en el Apéndice C, Sección C.2, dividimos el área en tres partes, como se muestra en la Fig. 5-17b, y entonces consi-

deramos el eje $Z - Z$ en la parte superior de la sección como un eje de referencia. Los cálculos resultantes son los siguientes:

$$y_1 = 6 \text{ mm} \quad A_1 = (276 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 3312 \text{ mm}^2$$

$$y_2 = 40 \text{ mm} \quad A_2 = (12 \text{ mm})(80 \text{ mm}) = 960 \text{ mm}^2$$

$$y_3 = y_2 \quad A_3 = A_2$$

$$c_2 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = 18.48 \text{ mm}$$

$$c_1 = 80 \text{ mm} - c_2 = 61.52 \text{ mm}$$

De esta manera se determina la posición del eje neutro.

Para calcular el momento de inercia del área de la sección transversal respecto del eje neutro, se emplea el teorema de los ejes paralelos (véase Sección C.5). Se inicia con el área A_1 y se obtiene su momento de inercia respecto del eje z a partir de la ecuación

$$I_{z_1} = I_{z_c} + A_1 d_1^2 \quad (b)$$

(véase Apéndice C). La cantidad I_{z_c} representa el momento de inercia del área A_1 respecto de su propio eje centroidal; luego,

$$I_{z_c} = \frac{1}{12} (276 \text{ mm})(12 \text{ mm})^3 = 39,744 \text{ mm}^4$$

La distancia d_1 abarca desde el eje centroidal del área A_1 hasta el eje z ; en consecuencia,

$$d_1 = c_2 - 6 \text{ mm} = 12.48 \text{ mm}$$

Por lo tanto, el momento de inercia del área A_1 respecto al eje z (de la Ec. b) es

$$I_{z_1} = 39,744 \text{ mm}^4 + (3,312 \text{ mm}^2)(12.48 \text{ mm})^2 = 555,600 \text{ mm}^4$$

Si se procede en la misma forma para las áreas A_2 y A_3 , se obtiene

$$I_{z_2} = I_{z_3} = 956,600 \text{ mm}^4$$

y en consecuencia, el momento de inercia centroidal de toda el área es

$$I = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} = 2.469 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Los módulos de sección para las partes inferior y superior de la viga (véanse Ecs. 5-12a y b) son

$$S_1 = \frac{I}{c_1} = 40,100 \text{ mm}^3 \quad S_2 = \frac{I}{c_2} = 133,600 \text{ mm}^3$$

Determinadas estas propiedades, podemos proceder ahora a calcular los esfuerzos a partir de las Ecs. (5-11a y b).

En la sección de momento flexionante positivo máximo, el mayor esfuerzo de tensión se presenta en la base de la viga (σ_1) y el mayor esfuerzo de compresión ocurre en la parte superior (σ_2); por lo que,

$$\sigma_t = \sigma_1 = \frac{M}{S_1} = \frac{1.898 \text{ kN} \cdot \text{m}}{40,100 \text{ mm}^3} = 47.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_2 = -\frac{M}{S_2} = -\frac{1.898 \text{ kN} \cdot \text{m}}{133,600 \text{ mm}^3} = -14.2 \text{ MPa}$$

Similarmente, los mayores esfuerzos en la sección de momento negativo máximo son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{M}{S_2} = \frac{-3.375 \text{ kN}\cdot\text{m}}{133,600 \text{ mm}^3} = 25.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 = \frac{M}{S_1} = \frac{-3.375 \text{ kN}\cdot\text{m}}{40,100 \text{ mm}^3} = -84.2 \text{ MPa}$$

Una comparación de los cuatro esfuerzos anteriores muestra que el esfuerzo de tensión máximo en la viga es 47.3 MPa y el esfuerzo de compresión máximo es -84.2 MPa.

5.4 FORMAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL DE VIGAS

El proceso global de diseño de una viga requiere la consideración de numerosos factores, tales como tipo de construcción, materiales, cargas y condiciones ambientales. Sin embargo, en muchos casos, esta labor finalmente se reduce a la selección de una viga de forma o perfil y tamaño particulares, tales que los esfuerzos reales en la viga no excedan los esfuerzos permisibles. En este análisis consideraremos únicamente los esfuerzos por flexión (esto es, los esfuerzos obtenidos de la fórmula de la flexión, Ec. 5-10). Un diseño completo requiere también que los esfuerzos cortantes se mantengan por debajo de los valores permisibles (véase Sección 5.5) y que se consideren los efectos de pandeo y concentraciones de esfuerzos.

Con el fin de seleccionar una viga, es conveniente determinar el módulo de sección requerido S dividiendo el momento flexionante máximo entre el esfuerzo permisible en el material (véase Ec. 5-13):

$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{perm}}} \quad (5-19)$$

En esta ecuación, σ_{perm} es el esfuerzo normal máximo permisible, el cual se basa en las propiedades del material y la magnitud del factor de seguridad deseado. Para asegurar que no se rebasen los esfuerzos permisibles, la viga seleccionada debe tener un área de sección transversal que presente un módulo de sección al menos tan grande como el obtenido de la Ec. (5-19). Si los esfuerzos permisibles son los mismos a tensión que a compresión, entonces (para un momento flexionante particular M) es lógico escoger un perfil de sección transversal que sea doblemente simétrico y que tenga su centroide (y, en consecuencia, también su eje neutro) a media altura de la viga. Si los esfuerzos permisibles son diferentes para tensión y compresión, puede ser conveniente emplear una sección transversal asimétrica, tal que las distancias a las fibras extremas en tensión y compresión se aproximen a la misma relación que los esfuerzos permisibles respectivos. Por supuesto, para minimizar el peso de una viga y con ello ahorrar material, es práctica común seleccionar una viga que tenga no sólo el módulo de sección requerido sino también la menor área transversal.

Las vigas de *acero*, *aluminio* y *madera* se manufacturan en tamaños estándar. Las dimensiones y propiedades de estas vigas se describen en manuales de ingeniería co-

mo los publicados por el Instituto Americano de Construcción de Acero (AISC), la Asociación del Aluminio y la Asociación Nacional de Productos Forestales (véanse Refs. 5-5 a 5-9). Sin embargo, para el empleo en la solución de problemas en este libro, en los apéndices E y F se proporcionan algunas tablas abreviadas de secciones de acero estructural y madera. Estas tablas suministran las dimensiones de la sección transversal y propiedades importantes, tales como área, momento de inercia y módulo de sección.

Las secciones de acero estructural se presentan con una designación tal como W 30 × 211, que significa que la sección es de perfil W (también llamados perfiles de ala ancha) con un peralte de 30 plg y un peso de 211 lb por pie de longitud. Se usan análogas designaciones para los perfiles S (llamados también vigas I) y C (llamados canales), como se muestra en las tablas del Apéndice E. Las secciones ángulo (angulares), o perfiles L, se designan por medio de la longitud de los dos lados y el espesor; por ejemplo L 8 × 6 × 1 denota un ángulo de una pulgada de espesor y lados desiguales, uno de 8 plg de longitud y el otro de 6 plg. de longitud. Todas estas secciones, así como las otras descritas en el Manual AISC (Ref. 5-5), se manufacturan mediante procesos de laminado. En este proceso, un lingote caliente de acero se pasa a través de rodillos, hasta obtener el perfil deseado.

Las secciones estructurales de aluminio se fabrican mediante procesos de extrusión o estiramiento por presión, en el cual un lingote caliente se estira, o extruye a través de un dado de perfil. Ya que los dados son relativamente fáciles de fabricar, las vigas de aluminio pueden extruirse en casi cualquier perfil deseado. El Manual de Construcción de Aluminio (Ref. 5-7) presenta una lista de muchos perfiles estándar de vigas de patin ancho, vigas I, canales, ángulos y otras secciones, pero pueden fabricarse perfiles especiales a la medida.

Las vigas de madera tienen secciones transversales rectangulares que se denotan por sus dimensiones nominales, como 4 × 8 (pulgadas). Estas dimensiones representan el tamaño del corte bruto de la madera. Las dimensiones netas de una viga son menores si las superficies del tronco basto se cepillan o acaban para *alisarlas*. Así, una sección de 4 × 8 plg tiene un tamaño real de 3.5 × 7.25 plg después de cepillarse. Para madera acabada o cepillada deben emplearse en los cálculos las dimensiones netas.

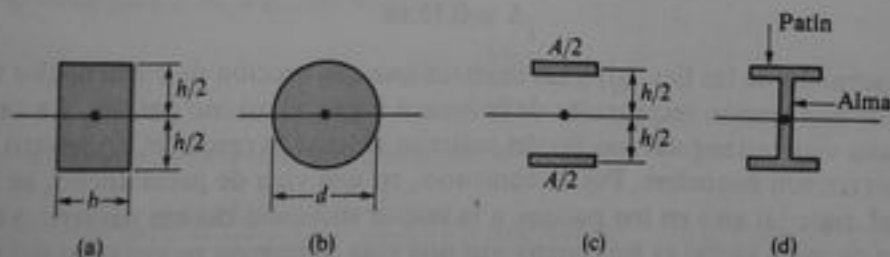


Fig. 5-18 Diversos perfiles de sección transversal de vigas

Comparemos ahora varios perfiles de sección transversal con respecto de su eficiencia en flexión. Considérese primero un rectángulo de ancho b y altura h (Fig. 5-18a). El módulo de sección (Ec. 5-15b) es

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167Ah \quad (a)$$

donde A denota el área de la sección transversal. Esta ecuación establece que una sección transversal rectangular de área dada, se vuelve más eficaz según se incrementa el peralte h . Sin embargo, este incremento tiene un límite, ya que la viga se vuelve lateralmente inestable cuando la relación de la altura al ancho es muy grande. Así, una viga de sección transversal muy reducida puede fallar debido a pandeo lateral más que a resistencia escasa del material (Ref. 5-10).

Para una sección transversal circular de diámetro d (Fig. 5-18b), tenemos

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0.125Ad \quad (b)$$

Al comparar una sección transversal circular y una sección transversal cuadrada de la misma área, se aprecia que el lado h del cuadrado será $h = d\sqrt{\pi/2}$, para el cual la Ec. (a) da

$$S = 0.148Ad$$

La comparación de este resultado con la Ec. (b) indica que una viga de sección transversal cuadrada es más eficiente que una circular de la misma área.

Al considerar la distribución de esfuerzo sobre el peralte de la sección transversal (Fig. 5-10a), llegamos a la conclusión de que para un diseño económico, el material de la viga debe localizarse tan lejos del eje neutro como sea posible. El caso más favorable para un área de sección transversal dada A y un peralte h sería distribuir cada mitad del área a una distancia $h/2$ del eje neutro, como se muestra en la Fig. 5-18c. Entonces

$$I = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4} \quad S = 0.5Ah \quad (c)$$

Este límite ideal puede aproximarse en la práctica con el empleo de una sección de patín ancho o una sección I, con la mayor parte del material en los patines (Fig. 5-18d). Debido a la necesidad de poner parte del material en el núcleo o alma de la viga, la condición límite (Ec. c) nunca puede realizarse. Para vigas estándar de patín ancho, el módulo de sección es aproximadamente

$$S \approx 0.35Ah \quad (d)$$

La comparación de las Ecs. (d) y (a) muestra que una sección de patín ancho es más eficaz que una sección rectangular de la misma área y el mismo peralte. La razón es que en una viga rectangular mucho del material se localiza cerca del eje neutro donde los esfuerzos son pequeños. Por lo contrario, en una viga de patín ancho, la mayor parte del material está en los patines a la mayor distancia del eje neutro. Además, una viga de patín ancho es más ancha que una viga de sección rectangular del mismo peralte y módulo de sección. Por supuesto, si el alma de una viga de patín ancho se hace muy delgada, será susceptible de pandearse o puede sobreesforzarse en cortante, según se explica en la sección siguiente.

Ejemplo 1

Un dique temporal de madera se construye con tablas horizontales A sostenidas mediante postes verticales B , que están enterrados en el suelo de forma tal que actúan como vigas en voladizo

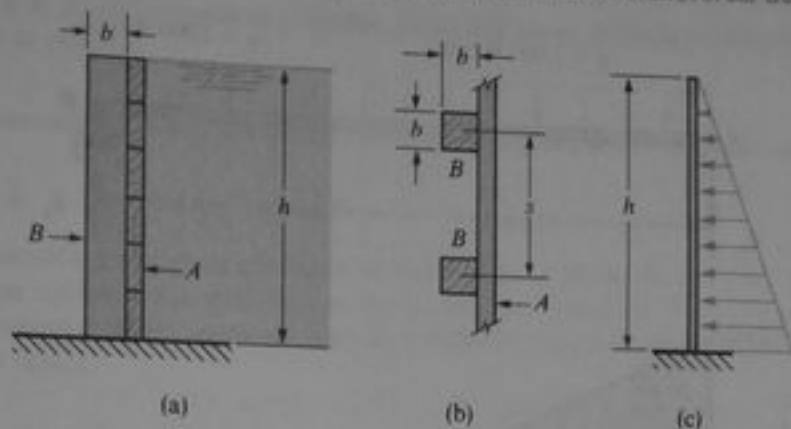


Fig. 5-19 Ejemplo 1

(Figs. 5-19a y b). Los postes son de sección transversal cuadrada (dimensiones $b \times b$) y están separados una distancia $s = 0.8$ m. El nivel del agua está a la altura total del dique $h = 2$ m. Determinar la dimensión b mínima requerida de los postes si el esfuerzo de flexión permisible de la madera es $\sigma_{perm} = 8$ MPa.

El diagrama de carga para uno de los postes es de forma triangular (Fig. 5-19c), y la intensidad máxima de la carga es

$$q_0 = \gamma hs$$

donde γ es el peso específico del agua. Por lo tanto, el momento flexionante máximo en un poste es

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 h}{2} \left(\frac{h}{3} \right) = \frac{\gamma h^3 s}{6}$$

y el módulo de sección requerida es

$$S = \frac{M_{m\acute{a}x}}{\sigma_{perm}} = \frac{\gamma h^3 s}{6\sigma_{perm}} \quad (c)$$

Para una viga de sección transversal cuadrada, el módulo de sección es $S = b^3/6$. Al sustituir esta expresión para S en la Ec. (c) se obtiene

$$b^3 = \frac{\gamma h^3 s}{\sigma_{perm}}$$

Luego, al sustituir valores numéricos, obtenemos

$$b^3 = \frac{(9.81 \text{ kN/m}^3)(2 \text{ m})^3(0.8 \text{ m})}{8 \text{ MPa}} = 0.007848 \text{ m}^3 \quad b = 199 \text{ mm}$$

Por lo que la dimensión mínima requerida b de los postes cuadrados es 199 mm. Cualquier dimensión mayor, tal como 200 mm, asegurará que el esfuerzo de flexión actual sea menor que el esfuerzo permisible.

Ejemplo 2

Una viga simple AB de 21 pie de longitud debe soportar una carga uniforme $q = 2,000$ lb/pie distribuida como se muestra en la Fig. 5-20. Determinar el módulo de sección requerido S si el

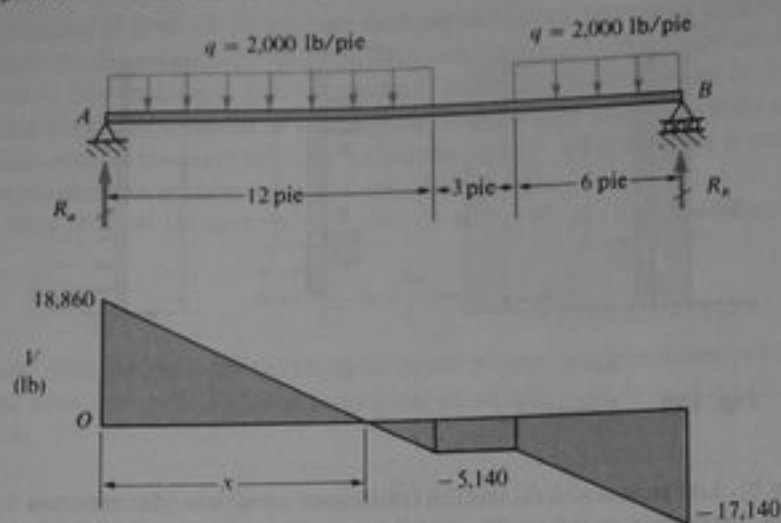


Fig. 5-20 Ejemplo 2

esfuerzo de flexión permisible es $\sigma_{perm} = 18,000$ psi. Enseguida, seleccionar una viga de patín ancho de la Tabla E-1 del Apéndice E y recalculer S al tomar en cuenta el peso de la viga misma. Seleccionar un nuevo tamaño de viga si es necesario.

Para localizar la sección de momento flexionante máximo, es conveniente construir el diagrama de fuerza cortante, como se muestra en la figura. Las reacciones en los apoyos son

$$R_a = 18,860 \text{ lb} \quad R_b = 17,140 \text{ lb}$$

La distancia x a la sección de cortante cero se obtiene de la ecuación

$$R_a - qx = 0$$

Al resolver esta ecuación obtenemos $x = R_a/q = 9.429$ pie. El momento flexionante máximo ocurre en esta misma sección y es

$$M_{máx} = R_a x - \frac{qx^2}{2} = 88,900 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

El módulo de sección requerido (si se omite el peso de la viga) es

$$S = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{88,900 \text{ pie}\cdot\text{lb}}{18,000 \text{ psi}} = 59.3 \text{ plg}^3$$

Debemos entrar ahora a la Tabla E-1 y seleccionar una viga de patín ancho que tenga un módulo de sección mayor que 59.3 plg^3 , porque sabemos que será necesario un valor de S ligeramente superior cuando se considere el peso de la viga. La viga más ligera que presenta el módulo de sección requerido es $W 12 \times 50$ ($S = 64.7 \text{ plg}^3$). Por supuesto, la tabla del Apéndice E está abreviada; de ahí que pueden existir disponibles comercialmente secciones más ligeras.

Cuando el peso de la viga ($50 \text{ pie}\cdot\text{lb}$) se toma en cuenta, la reacción R_a resulta $19,380 \text{ lb}$, la distancia x a la sección transversal de cortante nulo se incrementa a 9.455 pie y el momento flexionante máximo resulta $91,600 \text{ pie}\cdot\text{lb}$. En consecuencia, el módulo de sección requerido resulta

$$S = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{91,600 \text{ pie}\cdot\text{lb}}{18,000 \text{ psi}} = 61.1 \text{ plg}^3$$

y la viga $w 12 \times 50$ aún cumple su objetivo. Si no lo hiciera, debería seleccionarse una nueva viga y repetir el proceso.

Ejemplo 3

Una viga de sección transversal cuadrada se flexiona en el plano de una diagonal (Fig. 5-21). Demostrar que los esfuerzos máximos en la viga pueden reducirse si se elimina una pequeña cantidad de material de las esquinas superior e inferior, como se muestra por las áreas sombreadas en la figura.

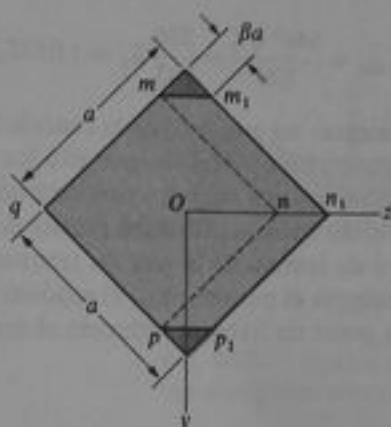


Fig. 5-21 Ejemplo 3

El momento de inercia y el módulo de sección de toda el área cuadrada respecto del eje z son, en ese orden,

$$I_1 = \frac{a^4}{12} \quad S_1 = \frac{I_1}{a/\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

donde a es la longitud de cada lado del cuadrado. Cortemos ahora las esquinas en forma tal que cada lado se acorte en βa , donde β es un número entre cero y uno. La nueva sección transversal consiste en un cuadrado $mnpq$, con lados $a(1 - \beta)$, y dos paralelogramos mm_1n_1n y nn_1p_1p . El momento de inercia del cuadrado se obtiene de la fórmula para I_1 al reemplazar a con $a(1 - \beta)$:

$$I_2 = \frac{a^4(1 - \beta)^4}{12}$$

El momento de inercia de un paralelogramo respecto del eje z está dado por la fórmula $bh^3/3$ donde b es el ancho de la base y h es la altura; luego,

$$I_3 = \frac{1}{3} (\beta a \sqrt{2}) \left[\frac{a(1 - \beta)}{\sqrt{2}} \right]^3 = \frac{a^4 \beta (1 - \beta)^3}{6}$$

Así, el momento de inercia de la sección transversal es

$$I = I_2 + 2I_3 = \frac{a^4}{12} (1 + 3\beta)(1 - \beta)^3$$

El módulo de sección de esta área es

$$S = \frac{I}{a(1-\beta)/\sqrt{2}} = \frac{a^3(1+3\beta)(1-\beta)^2\sqrt{2}}{12}$$

El valor de β que maximiza el módulo de sección se obtiene al igualar $dS/d\beta$ a cero y despejar β ; el resultado es

$$\beta = \frac{1}{9}$$

Al sustituir este valor de β en la expresión para S se obtiene el módulo de sección máximo:

$$S_{\max} = \frac{64a^3\sqrt{2}}{729} = \frac{256}{243} S_1 \approx 1.053 S_1$$

Este resultado muestra que el recortar las esquinas en la cantidad calculada incrementa el módulo de sección en casi 5%, lo que reduce también por ello los esfuerzos en un 5%.

Esta observación se explica fácilmente cuando consideramos que el módulo de sección es igual al momento de inercia dividido entre la mitad del peralte de la sección transversal. Al recortar las esquinas, el momento de inercia de la sección transversal se ve disminuido en una cantidad menor que la que disminuye el peralte. Así, el módulo de sección se incrementa y la viga se vuelve más resistente, a pesar de haberse reducido el área de la sección transversal.

5.5 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS RECTANGULARES

Cuando una viga se somete a flexión no uniforme, actúan simultáneamente momentos flexionantes M y fuerzas cortantes V sobre la sección transversal. Los esfuerzos normales σ , asociados con los momentos flexionantes se obtienen de la fórmula de la flexión, como se describió en la Sección 5.3. En esta sección y las siguientes, trataremos la distribución de esfuerzos cortantes asociados con la fuerza cortante V .

Empecemos con el caso más simple de una viga de sección transversal rectangular que tiene un ancho b y una altura h (Fig. 5-22a). Podemos suponer que probablemente los esfuerzos cortantes τ actúan paralelos a la fuerza cortante V (esto es, paralelos a los lados verticales de la sección transversal). Supongamos también que la distribución de los esfuerzos cortantes es uniforme a lo ancho de la viga. El empleo de estas dos suposiciones nos permitirá determinar completamente la distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal.

Un pequeño elemento de la viga puede recortarse entre dos secciones transversales adyacentes y entre dos planos que son paralelos a la superficie neutra, según se indica por el elemento mn en la Fig. 5-22a. De acuerdo con las suposiciones anteriores, los esfuerzos cortantes verticales τ están uniformemente distribuidos sobre las caras verticales de este elemento. También sabemos de las explicaciones sobre un elemento se acompañan por esfuerzos cortantes de igual magnitud que actúan sobre caras perpendiculares del elemento (Figs. 5-22b y c). Por lo que deben presentarse esfuerzos cortantes horizontales entre capas horizontales de la viga, así como esfuerzos

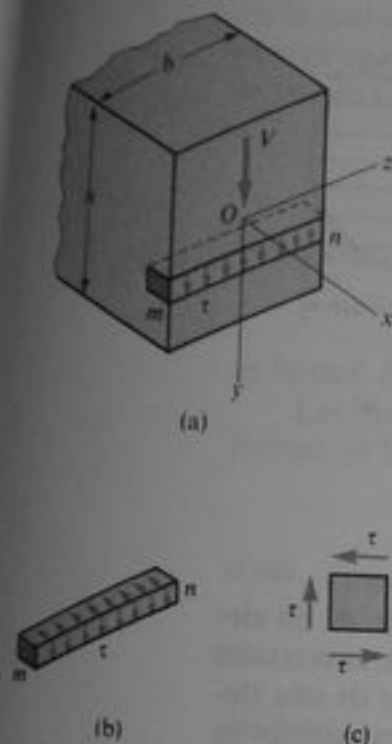


Fig. 5-22 Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular

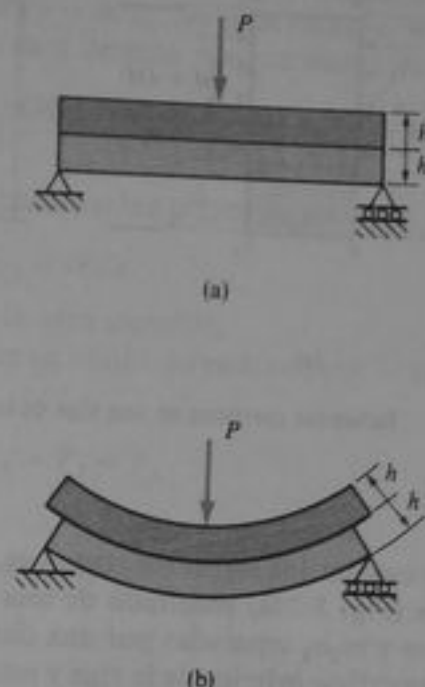


Fig. 5-23 Flexión de dos barras independientes sobrepuestas

cortantes transversales sobre las secciones transversales verticales. En algún punto de la viga estos esfuerzos cortantes complementarios son iguales en su magnitud.

Esta observación acerca de la igualdad en los esfuerzos cortantes horizontales y verticales nos lleva a una importante conclusión relativa a los esfuerzos cortantes en las partes superior e inferior de la viga. Si consideramos que el elemento mn mostrado en la Fig. 5-22 se sustrajo de la parte superior o de la parte inferior de la viga, es evidente que los esfuerzos cortantes horizontales deben ser nulos, porque no se presentan esfuerzos sobre las superficies externas de la viga. Por lo tanto, el esfuerzo cortante vertical τ también debe ser nulo en las partes superior e inferior de la viga (esto es, $\tau = 0$ cuando $y = \pm h/2$).

La existencia de los esfuerzos cortantes horizontales en una viga puede demostrarse mediante un experimento simple. Tómense dos barras rectangulares iguales de altura h y colóquense sobre soportes simples como se muestra en la Fig. 5-23a; luego cárguense con una fuerza P . Si no existe fricción entre las barras, la flexión de las mismas ocurrirá en forma independiente. Cada barra estará en compresión por encima de su eje neutro y en tensión por debajo del mismo, y se deforman como se muestra en la Fig. 5-23b. Las fibras longitudinales inferiores de la barra superior se deslizarán con respecto de las fibras superiores de la barra inferior. Si en lugar de las dos barras se tiene una barra sólida de altura $2h$, deben ocurrir esfuerzos cortantes a lo largo del plano neutro de tal magnitud que eviten el deslizamiento mostrado en la Fig. 5-23b. Debido a la presencia de los esfuerzos cortantes para impedir el deslizamiento, la barra simple de altura $2h$ es más rígida y más resistente que dos barras separadas, cada una de altura h .

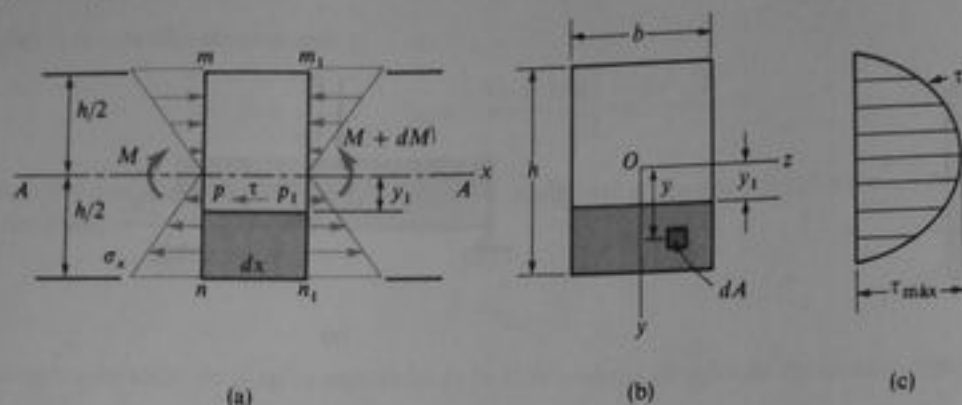


Fig. 5-24 Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular

A fin de evaluar los esfuerzos cortantes, consideremos el equilibrio de un elemento pp_1n_1n (Fig. 5-24a) recortado de una viga entre dos secciones transversales adyacentes mn y m_1n_1 separadas por una distancia dx . La cara inferior de este elemento es la superficie inferior de la viga y está libre de esfuerzos; su cara superior es paralela a la superficie neutra y se ubica a una distancia arbitraria y_1 desde dicha superficie. La cara superior está sometida al esfuerzo cortante τ existente en este nivel de la viga. Las caras extremas del elemento están sometidas a los esfuerzos normales de flexión σ_x producidos por los momentos flexionantes. Además existen esfuerzos cortantes verticales sobre las caras extremas, pero estos esfuerzos no intervienen en la ecuación de equilibrio del elemento en la dirección horizontal (la dirección x); por tal motivo, no se muestran en la Fig. 5-24a.

Si los momentos flexionantes en las secciones transversales mn y m_1n_1 son iguales (esto es, si la viga está en flexión pura), los esfuerzos normales σ_x que actúan sobre los lados np y n_1p_1 también serán iguales. En consecuencia, el elemento estará en equilibrio bajo la acción de estos esfuerzos; por lo tanto, el esfuerzo cortante τ debe ser igual a cero. Esta conclusión es obvia, ya que no existe fuerza cortante V si la viga está en flexión pura.

En el caso más general de un momento flexionante variable (flexión no uniforme), denotemos por M y $M + dM$ los momentos flexionantes que actúan en las secciones transversales mn y m_1n_1 , respectivamente. Si se considera un elemento de área dA a una distancia y del eje neutro (Fig. 5-24b), se aprecia que la fuerza normal que actúa sobre este elemento es $\sigma_x dA$, en la cual σ_x es el esfuerzo normal obtenido de la fórmula de la flexión (Ec. 5-10). Si el elemento de área está localizado en la cara izquierda pn del elemento, la fuerza normal es

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I} dA$$

Al sumar estas fuerzas elementales sobre el área de la cara pn del elemento macizo se obtiene la fuerza horizontal total F_1 que actúa sobre esa cara:

$$F_1 = \int \frac{My}{I} dA$$

en la cual se integra sobre el área sombreada de la sección transversal (esto es, sobre el área de la sección desde $y = y_1$ hasta $y = h/2$). De igual manera, se determina que la fuerza total F_2 que actúa sobre la cara derecha p_1n_1 del elemento macizo es

$$F_2 = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

Finalmente, la fuerza horizontal F_3 que actúa sobre la cara superior pp_1 del elemento es

$$F_3 = \tau b dx \quad (a)$$

en la cual $b dx$ constituye el área de la cara superior.

Las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 deben estar en equilibrio estático; por lo que, la suma de fuerzas en la dirección x da

$$F_3 = F_2 - F_1 \quad (b)$$

o sea,

$$\tau b dx = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA$$

de donde

$$\tau = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{Ib} \right) \int y dA$$

Al sustituir $V = dM/dx$ (véase Ec. 4-3), obtenemos ahora

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int y dA \quad (5-20)$$

La integral en esta ecuación representa el primer momento de la porción sombreada de la sección transversal (Fig. 5-24b) con respecto al eje neutro (el eje z); esto es, la integral es el primer momento del área de la sección transversal por debajo del nivel y_1 , en el cual actúa el esfuerzo cortante τ . Cuando y_1 se mide por encima del eje neutro, la integral representa el primer momento del área que se encuentre por encima del nivel para el cual se calcula el esfuerzo cortante. Si se denota el primer momento por Q , podemos plantear la Ec. (5-20) en la forma

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (5-21)$$

Esta ecuación, conocida como **fórmula del cortante**, puede emplearse para determinar el esfuerzo cortante τ en cualquier punto de la sección transversal. Para determinar cómo varía el esfuerzo, debemos examinar cómo varía Q , ya que V , I y b son constantes para una sección transversal rectangular dada.*

* En la derivación de la Ec. (5-21), Q constituye el primer momento del área sombreada de la sección transversal en la Fig. 5-24b, y esta área usualmente se utiliza para calcular Q . No obstante, podríamos tomar el primer momento del área restante de la sección transversal, porque también es igual a Q (excepto por el signo). Esto se debe a que el primer momento de toda la sección transversal es cero; en consecuencia el valor de Q para el área que está por debajo del nivel y_1 es el negativo de Q para el área por arriba de ese nivel.

El primer momento Q para el área sombreada de la Fig. 5-24b se obtiene al multiplicar el área por la distancia comprendida desde el centroide del área hasta el eje neutro; luego,

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (c)$$

Por supuesto, el primer momento también puede determinarse por integración:

$$\begin{aligned} Q &= \int y dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{y_1}^{h/2} y dy dz = \int_{y_1}^{h/2} yb dy \\ &= b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \end{aligned}$$

como se obtuvo antes. Ahora, al sustituir Q (Ec. c) en la fórmula de cortante (Ec. 5-21), obtenemos

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (5-22)$$

Esta ecuación muestra que el esfuerzo cortante en una viga rectangular varía cuadráticamente con la distancia y_1 desde el eje neutro; así, cuando se traza a lo largo de la altura de la viga, τ varía como se indica en la Fig. 5-24c. El esfuerzo es cero cuando $y_1 = \pm h/2$, y tiene su valor máximo en el eje neutro, donde $y_1 = 0$; luego,

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A} \quad (5-23)$$

donde $A = bh$ es el área de la sección transversal. Así, el esfuerzo cortante máximo es 50% mayor que el esfuerzo cortante medio (que es igual a V/A). Obsérvese que las ecuaciones anteriores para τ (Ecs. 5-20 a 5-23) pueden emplearse para calcular los esfuerzos cortantes verticales que actúan sobre secciones transversales o los esfuerzos cortantes horizontales que actúan entre capas horizontales de la viga. (El análisis presentado en esta sección fue realizado por el ingeniero ruso D. J. Jourawski; Refs. 5-11 y 5-12.)

Las fórmulas anteriores para esfuerzos cortantes fueron obtenidas sin considerar ninguna convención de signos particular para V y τ . Basta observar que la fuerza cortante es la resultante de los esfuerzos cortantes; en consecuencia, los esfuerzos actúan en la misma dirección que la fuerza. Para muchos propósitos, únicamente se emplean valores absolutos en las fórmulas de cortante, y las direcciones de los esfuerzos se determinan por inspección, como en la Fig. 5-22. Si utilizamos los signos convencionales para esfuerzos cortantes descritos en la Sección 1.6 (véase Fig. 1-23), entonces una fuerza cortante positiva (Fig. 5-22a) produce un esfuerzo cortante positivo sobre la cara derecha del elemento (Fig. 5-22c). Por lo tanto, se requiere un signo negativo en la fórmula de cortante a fin de uniformar estos signos convencionales.

Las fórmulas para esfuerzos cortantes en vigas rectangulares son válidas para vigas de proporciones usuales y están sujetas a las mismas restricciones que las empleadas en la obtención de la fórmula de la flexión; luego, las fórmulas son válidas únicamente para vigas de material linealmente elástico con deflexiones pequeñas. Las fórmulas pueden considerarse exactas para vigas delgadas (b mucho menor que h), pero se vuelven menos precisas cuando b se incrementa con respecto a h . Por

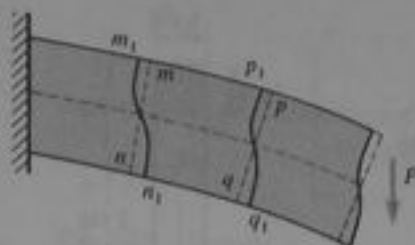


Fig. 5-25 Alabeo de la sección transversal de una viga debido al cortante

ejemplo, cuando $b = h$, el verdadero esfuerzo cortante máximo es alrededor de 13% mayor que el valor dado por la Ec. (5-23). Para una explicación de las limitaciones de la fórmula de cortante, véase Ref. 5-13.

Efecto de las deformaciones angulares. Dado que los esfuerzos cortantes τ varían parabólicamente desde la parte superior hasta la base de la viga, ello muestra que la deformación angular $\gamma = \tau/G$ debe variar en la misma forma. De esta manera, las secciones transversales de la viga que originalmente fueron superficies planas, resultan alabeadas. Este alabeo puede demostrarse flexionando una viga en la cual se trazan rectas verticales, como las líneas mn y pq en la Fig. 5-25. Tales líneas no permanecerán rectas, sino que se curvarán y se presentará la deformación angular máxima en el eje neutro. En los puntos m_1, p_1, n_1 y q_1 , la deformación angular es nula, y las curvas m_1n_1 y q_1p_1 permanecen perpendiculares a las superficies superior e inferior después de la flexión. En la superficie neutra, los ángulos entre las tangentes a las curvas m_1n_1 y p_1q_1 y las secciones normales mn y pq son iguales a la deformación angular $\gamma = \tau_{\max}/G$. Si la fuerza cortante V permanece constante a lo largo de la viga, el alabeo de todas las secciones transversales es el mismo, en forma tal que $m_1m = p_1p$ y $nn_1 = qq_1$. Luego, el alargamiento o acortamiento de las fibras longitudinales producidos por el momento flexionante, no se alteran por las deformaciones angulares, y la distribución de los esfuerzos normales σ es la misma que para flexión pura.

Un estudio más profundo de este problema muestra que el alabeo de las secciones transversales debido a las deformaciones angulares no afecta sustancialmente las deformaciones longitudinales, incluso si actúa sobre la viga una carga distribuida y la fuerza cortante varía continuamente a lo largo de la viga. Para cargas concentradas, la distribución de esfuerzos cerca de las cargas es más complicada, pero esas irregularidades están muy localizadas y no afectan apreciablemente la distribución global de esfuerzo en la viga. Luego, es completamente justificable emplear la fórmula de la flexión, obtenida para flexión pura (Ec. 5-10), en el caso de flexión no uniforme.

Ejemplo 1

Calcular los esfuerzos normal y cortante que actúan en el punto C en la viga de acero AB mostrada en la Fig. 5-26. La viga está simplemente apoyada con un claro $L = 3$ pie y tiene sección transversal rectangular de $1 \text{ plg} \times 4 \text{ plg}$. La carga uniforme total sobre la viga (incluido su

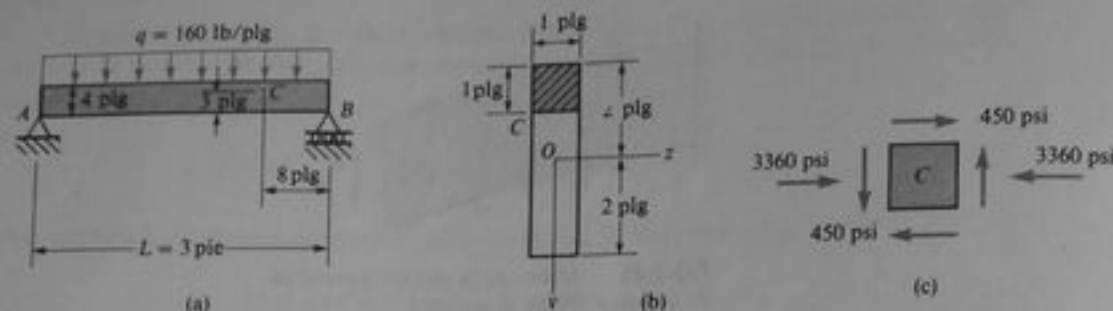


Fig. 5-26 Ejemplo 1

propio peso) es $q = 160 \text{ lb/plg}$. (La viga está adecuadamente apoyada en sus extremos para prevenir el pandeo lateral.)

A partir del equilibrio estático, el momento flexionante M y la fuerza cortante V en la sección transversal que pasa a través del punto C se aprecia que tienen los siguientes valores:

$$M = 17,920 \text{ plg}\cdot\text{lb} \quad V = -1,600 \text{ lb}$$

Los signos en estos términos están basados en la convención de signos para M y para V mostrada en la Fig. 4-3. El momento de inercia del área de la sección transversal es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} (1.0 \text{ plg})(4.0 \text{ plg})^3 = 5.333 \text{ plg}^4$$

Por lo tanto, el esfuerzo por flexión en el punto C , que está localizado en $y = -1.0 \text{ plg}$, es

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{(17,920 \text{ plg}\cdot\text{lb})(-1.0 \text{ plg})}{5.333 \text{ plg}^4} = -3,360 \text{ psi}$$

El signo menos indica un esfuerzo de compresión.

Para obtener el esfuerzo cortante, se requiere evaluar el primer momento Q del área de la sección transversal entre el punto C y la orilla de la sección transversal; esta área se muestra sombreada en la Fig. 5-26b. El primer momento de esta área respecto del eje z es igual al producto del área por su distancia centroidal desde el eje z ; luego,

$$Q = (1 \text{ plg})(1 \text{ plg})(1.5 \text{ plg}) = 1.5 \text{ plg}^3$$

Podemos ahora sustituir en la fórmula del cortante y obtener el esfuerzo cortante en C :

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(1,600 \text{ lb})(1.5 \text{ plg}^3)}{(5.333 \text{ plg}^4)(1.0 \text{ plg})} = 450 \text{ psi}$$

Como la fuerza cortante es negativa, actúa hacia arriba sobre la parte izquierda de la viga cuando la viga se corta por una sección a través de C ; por lo tanto, el esfuerzo cortante actúa en esta misma dirección. Una forma conveniente de mostrar las direcciones de los esfuerzos es representar un elemento esforzado en el punto C (véase Fig. 5-26c).

Ejemplo 2

Una viga simple AB cargada con dos fuerzas concentradas P (Fig. 5-27) tiene una sección transversal rectangular de ancho $b = 100 \text{ mm}$ y altura $h = 150 \text{ mm}$. La distancia a desde el extre-



Fig. 5-27 Ejemplo 2

mo de la viga hasta una de las cargas, es 0.5 m. Determinar el valor permisible de P si la viga se construye de madera con un esfuerzo de flexión permisible $\sigma_{perm} = 11$ MPa y un esfuerzo cortante horizontal permisible $\tau_{perm} = 1.2$ MPa. Despreciar el peso propio de la viga.

El momento flexionante máximo M y la fuerza cortante máxima V en la viga son

$$M = Pa \quad V = P$$

También, el módulo de sección S y el área de la sección transversal A son

$$S = \frac{bh^2}{6} \quad A = bh$$

Los esfuerzos normal y cortante máximos en la viga (de las Ecs. 5-13 y 5-23) son

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \quad \tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

Por lo tanto, los valores permisibles máximos de la carga P son

$$P = \frac{\sigma_{perm}bh^2}{6a} \quad \text{y} \quad P = \frac{2\tau_{perm}bh}{3}$$

Al sustituir los valores numéricos en estas fórmulas, obtenemos

$$P = 8.25 \text{ kN} \quad \text{y} \quad P = 12.0 \text{ kN}$$

Luego, los esfuerzos de flexión rigen el diseño, y la carga permisible es $P = 8.25$ kN.

5.6 ESFUERZOS CORTANTES EN EL ALMA DE VIGAS CON PATINES

Cuando una viga de patin ancho (Fig. 5-28a) se somete a una fuerza cortante V , se desarrollan esfuerzos cortantes en su sección transversal. Debido al perfil, la distribución de estos esfuerzos es mucho más complicada que en el caso de una viga rectangular. Por ejemplo, en los patines de la viga actúan esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales en las direcciones vertical y horizontal. Sin embargo, gran parte de la fuerza cortante V origina esfuerzos cortantes en el alma y podemos determinar tales esfuerzos (que incluyen el esfuerzo cortante máximo) mediante las mismas técnicas que empleamos para vigas rectangulares.

Empecemos por considerar los esfuerzos cortantes en la localización ef del alma de la viga (Fig. 5-28a). Haremos las mismas suposiciones que en el caso de una viga rectangular; a saber, los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y y están unifor-

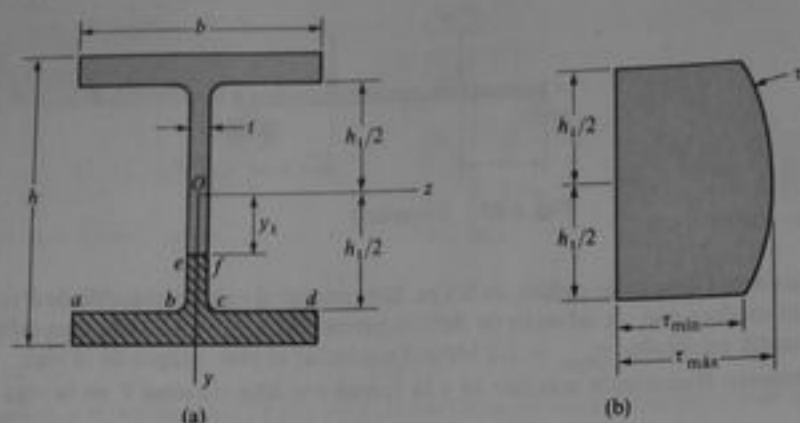


Fig. 5-28 Esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patin ancho

mamente distribuidos a través del espesor t del alma. Entonces, la derivación efectuada en la sección anterior permanece válida y la fórmula $\tau = VQ/Ib$ es aplicable en general. Sin embargo, el ancho b es ahora igual al espesor t del alma, y el área empleada para el cálculo del primer momento Q es igual al área entre ef y la orilla inferior de la sección transversal (esto es, el área sombreada de la Fig. 5-28a). Esta área consiste en dos rectángulos (si se omiten los efectos de los pequeños chaflanes en la unión del alma y el patin); el primer rectángulo es el patin, que tiene un área

$$A_f = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right)$$

El segundo rectángulo es la porción de alma entre ef y el patin, y tiene un área

$$A_w = t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right)$$

Los primeros momentos de estas áreas respecto del eje neutro se obtienen al multiplicar las áreas por las distancias desde el eje z a los centroides de las áreas; luego,

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right)$$

o, al simplificar,

$$Q = \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8} (h_1^2 - 4y_1^2)$$

Por lo tanto, el esfuerzo cortante τ en el alma de la viga es

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)] \quad (5-24)$$

De esta ecuación se aprecia que τ varía cuadráticamente a lo largo de la altura del alma, como se muestra en la gráfica de la Fig. 5-28b. Al introducir la siguiente expresión para el momento de inercia I ,

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)h_1^3}{12} = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3) \quad (5-25)$$

podemos replantear la Ec. (5-24) en la forma

$$\tau = \frac{3V(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2 - 4ty_1^2)}{2t(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)} \quad (5-26)$$

la cual expresa τ en términos de las dimensiones de la sección transversal.

El esfuerzo cortante máximo se presenta en el eje neutro ($y_1 = 0$), y el esfuerzo cortante mínimo en el alma ocurre en la unión con el patin ($y_1 = \pm h_1/2$). Luego, encontramos

$$\tau_{\max} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2) = \frac{3V(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2)}{2t(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)} \quad (5-27)$$

y

$$\tau_{\min} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2) = \frac{3Vb(h^2 - h_1^2)}{2t(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)} \quad (5-28)$$

De acuerdo con las dimensiones de la viga, el esfuerzo cortante máximo en el alma es en general de un 10% a un 60% mayor que el esfuerzo mínimo.

La fuerza cortante total soportada por el alma puede determinarse multiplicando el área del diagrama de esfuerzo (Fig. 5-28b) por el ancho t del alma misma. El área del diagrama de esfuerzo consiste en dos partes, un rectángulo de área $h_1\tau_{\min}$ y un segmento parabólico de área

$$\frac{2}{3}(h_1)(\tau_{\max} - \tau_{\min})$$

Luego, la fuerza cortante en el alma es

$$V_{\text{alma}} = h_1\tau_{\min}t + \frac{2}{3}(h_1)(\tau_{\max} - \tau_{\min})t = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\max} + \tau_{\min}) \quad (5-29)$$

Para vigas de proporciones normales, los esfuerzos cortantes en el alma soportan del 90% al 98% de la fuerza cortante total; el resto lo soporta el cortante en los patines.

En trabajo de diseño, es común calcular una aproximación del esfuerzo cortante máximo al dividir la fuerza cortante total entre el área del alma. Este esfuerzo representa un esfuerzo cortante medio en el alma:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{th_1} \quad (5-30)$$

Para vigas de patin ancho representativas, el esfuerzo cortante medio está en un rango de 10% (más o menos) del esfuerzo cortante máximo real.

La teoría elemental presentada en esta sección es bastante precisa cuando se utiliza para calcular esfuerzos cortantes en el alma. No obstante, cuando se considera la

distribución de esfuerzos cortantes en los patines, la hipótesis de esfuerzo cortante invariable a lo ancho b de los mismos no puede establecerse. Por ejemplo, se aprecia inmediatamente que para $y_1 = h_1/2$ el esfuerzo cortante sobre las superficies libres ab y cd (Fig. 5-28a) debe ser nulo, mientras que en la unión bc el esfuerzo es τ_{\min} . Esta observación indica que, en la unión del alma y el patín, la distribución de esfuerzos cortantes sigue una ley más complicada, que no puede tratarse en un análisis elemental. Los esfuerzos podrían volverse muy grandes en la junta si las esquinas internas fueran cuadradas; por lo que, se utilizan chafianes para atenuar los esfuerzos, como se muestra en la figura. Debido a la índole local de la distribución de esfuerzos, la fórmula de cortante no da resultados exactos para los esfuerzos cortantes verticales en el patín. Por supuesto, la fórmula puede emplearse para calcular los esfuerzos cortantes horizontales en el patín, según se analiza en la Sección 9.4.

Ejemplo

Determinar el esfuerzo cortante máximo en el alma de una viga con sección transversal en forma de T como la mostrada en la Fig. 5-29 si $b = 4$ plg, $t = 1$ plg, $h = 8$ plg, $h_1 = 7$ plg y $V = 10,000$ lb.

La distancia c al centroide de la sección transversal se determina como sigue:

$$\begin{aligned} c &= \frac{(3 \text{ plg})(1 \text{ plg})(0.5 \text{ plg}) + (8 \text{ plg})(1 \text{ plg})(4 \text{ plg})}{(3 \text{ plg})(1 \text{ plg}) + (8 \text{ plg})(1 \text{ plg})} \\ &= \frac{33.5 \text{ plg}^3}{11.0 \text{ plg}^2} = 3.045 \text{ plg} \end{aligned}$$

El momento de inercia I de la sección transversal respecto del eje neutro puede determinarse al obtener en primer lugar el momento de inercia respecto del eje nn , y después emplear el teorema de los ejes paralelos (véase Apéndice C). Los cálculos son los siguientes:

$$I = \frac{1}{3}(4 \text{ plg})(1 \text{ plg})^3 + \frac{1}{3}(1 \text{ plg})(7 \text{ plg})^3 - (11.0 \text{ plg}^2)(2.045 \text{ plg})^2 = 69.66 \text{ plg}^4$$

El esfuerzo cortante máximo se presenta en el eje neutro; el primer momento Q del área que se encuentra por debajo del eje neutro es

$$Q = (1 \text{ plg})(4.955 \text{ plg})^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 12.28 \text{ plg}^3$$

Ahora, al sustituir en la fórmula de cortante, obtenemos

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(10,000 \text{ lb})(12.28 \text{ plg}^3)}{(69.66 \text{ plg}^4)(1 \text{ plg})} = 1,760 \text{ psi}$$

que es el esfuerzo cortante máximo en la viga.

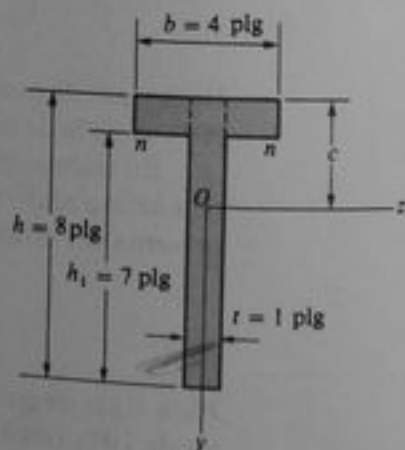


Fig. 5-29 Ejemplo

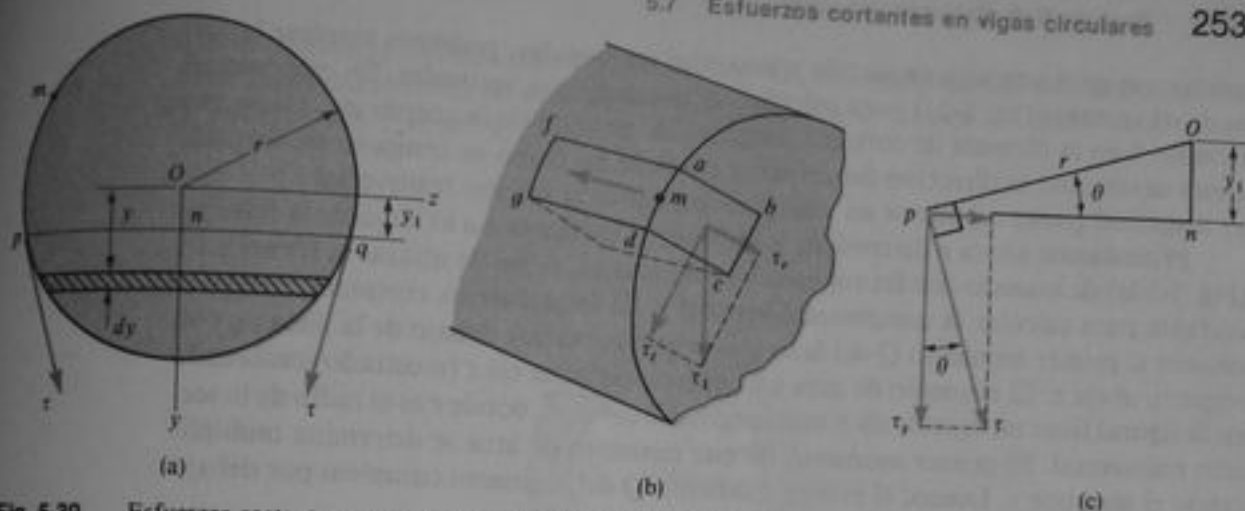


Fig. 5-30 Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal circular

*5.7 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CIRCULARES

Cuando una viga tiene sección transversal circular (Fig. 5-30a), no podemos suponer que todos los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y . Es posible señalar que, en un punto como m en el perímetro de la sección transversal, el esfuerzo cortante debe ser tangente al contorno. Para demostrar eso, considérese un elemento infinitesimal $abcdgf$ (Fig. 5-30b) en forma de un paralelepípedo rectangular con la cara $adgf$ sobre la superficie de la viga, y la cara $abcd$ en el plano de la sección transversal. Si el esfuerzo cortante que actúa sobre la cara $abcd$ del elemento tiene una dirección como la mostrada por el esfuerzo τ_1 , puede descomponerse en dos componentes perpendiculares, un esfuerzo τ_r en la dirección radial y un esfuerzo τ_t en la dirección tangencial al contorno. Ya hemos señalado (al considerar el equilibrio de un elemento) que, si actúa un esfuerzo cortante sobre una cara de un elemento, en una cara perpendicular actuará un esfuerzo cortante numéricamente igual. Al aplicar este concepto al elemento mostrado en la Fig. 5-30b, concluimos que si actúa un esfuerzo cortante τ_r sobre la cara $abcd$ en la dirección radial, un esfuerzo cortante numéricamente igual τ_r actuará sobre el lado $adgf$ del elemento. Pero, dado que la cara externa de la viga está libre de esfuerzos, se deduce que la componente radial τ_r del esfuerzo cortante τ_1 debe ser igual a cero. Por lo tanto, el esfuerzo τ_1 debe actuar en la dirección de la tangente al contorno de la sección transversal de la viga.

Mediante esta conclusión, estudiemos ahora los esfuerzos cortantes que actúan a lo largo de una cuerda pq a una distancia y_1 del eje neutro (Fig. 5-30a). Los esfuerzos cortantes τ en los extremos de la cuerda deben ser tangentes al contorno de la sección transversal, como se muestra en la figura. En el punto medio n de la cuerda, la simetría requiere que el esfuerzo cortante sea paralelo al eje y . Por lo que las líneas de acción de los esfuerzos cortantes en los puntos p y n se intersecarán en un punto sobre el eje y . Suponiendo que el esfuerzo cortante en cualquier otro punto sobre la línea pq también se dirige hacia este mismo punto, habremos definido de esta manera las direcciones de los esfuerzos cortantes restantes.

Para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes, se requiere otra suposición. Supongamos que las componentes verticales de los esfuerzos cortantes son iguales para todos los puntos a lo largo de la línea pq . Como esta suposición es la

misma que para una viga de sección transversal rectangular, podemos emplear la fórmula de cortante (Ec. 5-21) para calcular las componentes verticales. En este caso, el término b en la fórmula de cortante denotará la longitud de la cuerda pq . Dado que ahora se conocen la dirección del esfuerzo cortante así como su componente vertical, su magnitud puede calcularse en cualquier punto de la sección transversal.

Procedamos ahora a determinar los esfuerzos cortantes τ a lo largo de la línea pq (Fig. 5-30a) de acuerdo con las suposiciones anteriores. A fin de utilizar la fórmula de cortante para calcular la componente vertical τ_y de los esfuerzos cortantes, debemos obtener el primer momento Q del área que se encuentra por debajo de la línea pq con respecto al eje z . El elemento de área a una distancia y del eje z (mostrado sombreado en la figura) tiene un espesor dy y una longitud $2\sqrt{r^2 - y^2}$, donde r es el radio de la sección transversal. El primer momento de este elemento de área se determina multiplicando el área por y . Luego, el primer momento Q del segmento completo por debajo de la línea pq es

$$Q = \int_{y_1}^r 2y\sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2}{3}(r^2 - y_1^2)^{3/2}$$

También, el ancho b y el momento de inercia I son

$$b = 2\sqrt{r^2 - y_1^2} \quad I = \frac{\pi r^4}{4}$$

Por lo tanto, la componente vertical de los esfuerzos cortantes es

$$\tau_y = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3\pi r^4}(r^2 - y_1^2) \quad (a)$$

En el punto p sobre el contorno de la sección transversal, el esfuerzo cortante total τ se relaciona con su componente vertical τ_y (véase Fig. 5-30c) mediante la ecuación

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos \theta} = \frac{r\tau_y}{\sqrt{r^2 - y_1^2}}$$

Al sustituir τ_y de la Ec. (a), obtenemos

$$\tau = \frac{4V}{3\pi r^3} \sqrt{r^2 - y_1^2} \quad (5-31)$$

como la ecuación para el esfuerzo cortante en cualquier punto p sobre el contorno a una distancia y_1 del eje z . Conforme se traslada a lo largo de la línea pn (Fig. 5-30a), el esfuerzo cortante disminuye (ya se supuso constantes a las componentes verticales) y alcanzan un mínimo en el punto n , donde $\tau = \tau_y$ (Ec. a).

El esfuerzo cortante máximo se presenta en el eje neutro; luego, al sustituir $y_1 = 0$ en la Ec. (5-31), obtenemos

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A} \quad (5-32)$$

donde A es el área de la sección transversal. Esta ecuación establece que el esfuerzo cortante máximo en una viga circular es $4/3$ el esfuerzo cortante medio V/A .

En el eje neutro, los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y y tienen magnitud constante (igual a τ_{\max}) en la sección. Ya que estas mismas suposiciones se emplearon en

la obtención de la fórmula del cortante $\tau = VQ/Ib$, determinamos los esfuerzos en el eje neutro directamente de tal ecuación, como sigue. Para una sección transversal circular, obtenemos $I = \pi r^4/4$, $b = 2r$, y

$$Q = \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{2r^3}{3}$$

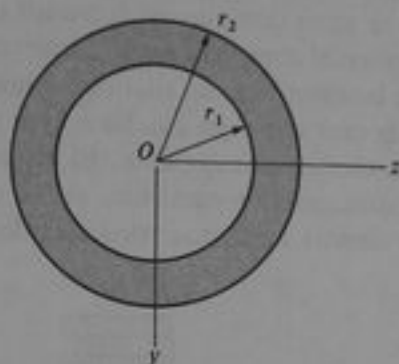


Fig. 5-31 Sección transversal circular hueca

(véase Caso 11, Apéndice D). Al sustituir estas expresiones para I , b y Q en la fórmula de cortante, obtenemos nuevamente los esfuerzos en el eje neutro:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A}$$

que es la misma Ec. (5-32).

La teoría aproximada descrita en esta sección da resultados razonablemente exactos para los esfuerzos cortantes en una viga circular maciza. Los resultados exactos obtenidos por la teoría de la elasticidad muestran que los esfuerzos no son constantes a lo largo del eje neutro (Refs. 5-13 y 5-14); sin embargo, los esfuerzos determinados mediante la solución aproximada sólo presentan un pequeño porcentaje de error.

Si una viga tiene una **sección transversal circular hueca** (Fig. 5-31) podemos suponer nuevamente con buena precisión que los esfuerzos cortantes a lo largo del eje neutro son verticales y uniformemente distribuidos. Por lo tanto, podemos obtener el esfuerzo máximo de la fórmula de cortante (Ec. 5-21). Las propiedades de la sección transversal son

$$Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \quad I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) \quad b = 2(r_2 - r_1)$$

y el esfuerzo máximo es

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \frac{r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \quad (5-33)$$

donde $A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ es el área de la sección hueca.

5.8 VIGAS ARMADAS

Una **viga armada** se compone de dos o más piezas de material unidas para integrar una viga entera. Tales vigas pueden construirse en una gran variedad de perfiles para satisfacer necesidades especiales o proporcionar secciones transversales mayores que las disponibles. La Fig. 5-32 muestra algunas secciones transversales características de vigas armadas. La parte (a) de la figura muestra una **viga cajón** de madera construida con dos tablones que sirven como patines, unidos mediante almas de madera laminada. Las piezas se unen con clavos, tornillos o pegadura; el diseño debe precisar que la sección transversal completa actúe como una unidad integrada. El segundo ejemplo es una viga laminar pegada (llamada **viga aglomerada**) hecha de tablas pegadas entre sí para formar una viga mucho mayor que la que puede obtenerse de un tronco de árbol como elemento individual. El último ejemplo es una trabe armada de acero soldada, comúnmente empleada en la construcción de puentes y constituida por tres placas unidas mediante cordones de soldadura.

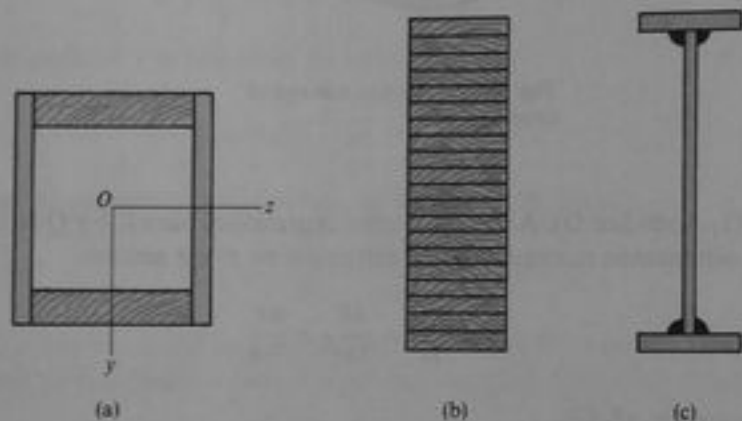


Fig. 5-32 Vigas armadas: (a) viga tipo cajón de madera; (b) viga laminada pegada; y (c) viga armada soldada

Una viga armada se diseña usualmente con la suposición de que las partes se unirán adecuadamente en forma tal, que la viga se comporte como un miembro entero. Luego, los cálculos de diseño implican dos fases. Primero, la viga se dimensiona como una viga maciza y se toman en cuenta los esfuerzos por flexión y los esfuerzos cortantes, según se explicó en las secciones anteriores. En la segunda fase, se diseñan los elementos de conexión (clavos, soldadura, tornillos, adhesivo) para precisar que la viga se comporte como una viga entera. Las cargas soportadas por los elementos de conexión son las fuerzas cortantes horizontales transmitidas entre las partes de la viga.

Una fórmula para las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre las partes se obtiene mediante la deducción de la fórmula del cortante (véase Fig. 5-24, Sección 5.5). En tal derivación supusimos que el esfuerzo de corte τ que actúa en la cara superior del elemento pp_1n_1n estaba uniformemente distribuido a lo ancho b de la viga. Sin embargo, en un caso más general, esta suposición puede no ser válida. Por lo tanto, en lugar de calcular los esfuerzos cortantes, calcularemos la fuerza horizontal total F_3 que actúa en la cara superior del elemento (véase Ec. a de la Sección 5.5). Esta fuerza puede expresarse como $F_3 = \int f dx$, donde f es la fuerza cortante por unidad de

distancia a lo largo del eje de la viga. (Cuando el esfuerzo de corte está distribuido uniformemente a lo ancho de la viga, como supusimos para una viga de sección transversal rectangular, entonces $f = \tau b$.) La magnitud f , llamada **flujo de cortante**, tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. Para evaluar el flujo de cortante procederemos como en la deducción de la fórmula del cortante. Se inicia con la Ec. (b) de la Sección 5.5, y tenemos

$$F_3 = f dx = F_2 - F_1$$

o, al sustituir F_2 y F_1 y despejar,

$$f = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{I} \right) \int y dA$$

Nuevamente, reemplazando dM/dx por V y la integral por Q ,

$$f = \frac{VQ}{I} \quad (5-34)$$

Esta ecuación representa el flujo de cortante f que actúa entre el elemento sombreado mostrado en la Fig. 5-24 y el resto de la viga. En la derivación de la Ec. (5-34), no se considera la distribución de los esfuerzos cortantes a lo ancho de la sección. Por supuesto, si la distribución de esfuerzo es uniforme, entonces $\tau = f/b$ y la Ec. (5-34) es igual a la fórmula del cortante (Ec. 5-21).

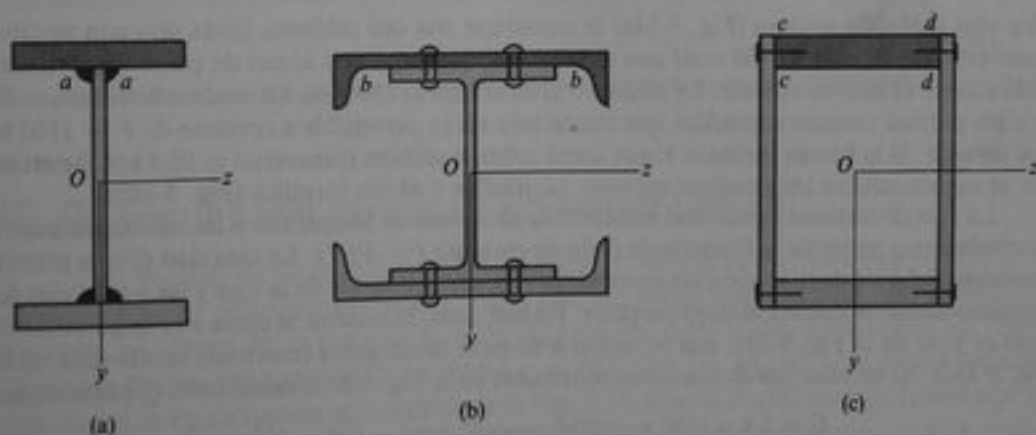


Fig. 5-33 Áreas utilizadas para calcular el flujo de cortante f

La fórmula para el flujo de cortante f no se limita a vigas de sección transversal rectangular; es válida para cualquier viga que tenga una sección transversal simétrica respecto del eje y . En la práctica, la cara de la sección transversal $p_1 n_1$ del elemento sombreado de la Fig. 5-24 puede tener una gran diversidad de formas. En tales casos, el flujo de cortante f es la fuerza por unidad de longitud que actúa a lo largo de la línea de la sección transversal que separa el área sombreada del resto de la viga. Para aclarar este punto, consideremos las secciones transversales mostradas en la Fig. 5-33. En el caso de la trabe armada de acero soldada (Fig. 5-33a) las soldaduras deben

transmitir la fuerza cortante horizontal entre los patines y el alma. Esta fuerza (por unidad de distancia) es el flujo de cortante a lo largo de la superficie de contacto aa . Este flujo puede calcularse a partir de la fórmula del flujo de cortante $f = VQ/I$, considerando a Q como el primer momento del área de la sección transversal que está por encima de la superficie de contacto aa . En otras palabras, Q es el primer momento del área del patin, mostrada sombreada en la figura. Por supuesto, el primer momento se calcula siempre respecto del eje z . Al calcular f de esta forma, debemos seleccionar entonces un tamaño de soldadura que sea adecuado para resistir la fuerza f por unidad de distancia (que actúa longitudinalmente).

Un segundo ejemplo es la viga de la Fig. 5-33b, la cual consiste en una viga de patin ancho que está reforzada por medio de secciones canal remachadas a cada patin. La fuerza cortante horizontal que actúa entre un canal y la viga principal debe transmitirse a través de los remaches. Esta fuerza se calcula a partir de la fórmula del flujo de cortante; se emplea Q como el primer momento de todo el canal (mostrado sombreado en la figura). El flujo de cortante resultante f es la fuerza longitudinal por unidad de distancia que actúa a lo largo de la superficie de contacto bb , y los remaches deben ser de tamaño y espaciamiento longitudinal adecuados para resistir esta fuerza. El ejemplo anterior (Fig. 5-33c) es semejante excepto que el flujo de cortante es la fuerza por unidad de distancia a lo largo de ambas superficies de contacto cc y dd ; Q se calcula para el área que se muestra sombreada. En este caso, el flujo de cortante f se resiste mediante la acción combinada de los clavos en ambos lados de la viga. Estos conceptos se representarán ahora por medio de un ejemplo.

Ejemplo

Una viga cajón de madera (Fig. 5-34a) se construye con dos tablones (cada uno con sección transversal de 40 mm \times 180 mm) que sirven como patines y dos almas de madera laminada, cada una de 15 mm de espesor. La altura total de la viga es 280 mm. La madera laminada se fija a los patines mediante tornillos que tienen una carga permisible a cortante de $F = 1100$ N por tornillo. Si la fuerza cortante V que actúa sobre la sección transversal es 10.5 kN, determinar el espaciamiento longitudinal máximo permisible s de los tornillos (Fig. 5-34b).

La fuerza cortante horizontal transmitida entre uno de los patines y las dos almas puede determinarse a partir de la fórmula de flujo de cortante $f = VQ/I$. La cantidad Q es el primer momento del área de la sección transversal entre la orilla exterior de la viga y las superficies de contacto donde se calcula el flujo cortante. En este caso, la sección se corta a lo largo de las líneas cc y dd de la Fig. 5-33c; por lo que el área es la de un patin (mostrada sombreada en la Fig. 5-33c). Al emplear las dimensiones mostradas en la Fig. 5-34a, calculamos Q como sigue:

$$Q = \bar{y}A = (120 \text{ mm})(180 \text{ mm})(40 \text{ mm}) = 864 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

También, el momento de inercia de toda el área de la sección transversal respecto del eje neutro es

$$I = \frac{1}{12}(210 \text{ mm})(280 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12}(180 \text{ mm})(200 \text{ mm})^3 = 264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ahora, al sustituir en la fórmula del flujo cortante, obtenemos

$$f = \frac{VQ}{I} = \frac{(10,500 \text{ N})(864 \times 10^3 \text{ mm}^3)}{264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 34.3 \text{ N/mm}$$

que es la fuerza cortante por unidad de longitud que deben soportar los tornillos.

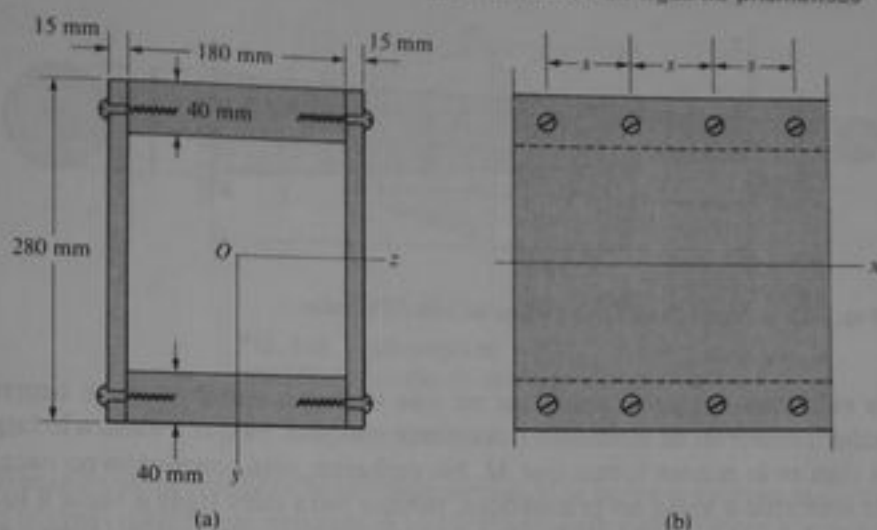


Fig. 5-34 Ejemplo

La capacidad de carga de los tornillos por unidad de longitud es $2F/s$, porque hay dos líneas de tornillos (una a cada lado del patín). Al igualar $2F/s$ con el flujo de cortante, y despejar s , obtenemos

$$s = \frac{2F}{f} = \frac{2(1100 \text{ N})}{34.3 \text{ N/mm}} = 64.1 \text{ mm}$$

Este valor representa el espaciamiento máximo permisible de los tornillos. Por conveniencia en la construcción, se selecciona un valor de espaciamiento $s = 60 \text{ mm}$.

*5.9 ESFUERZOS EN VIGAS NO PRISMÁTICAS

Los análisis de vigas presentados en las secciones previas de este capítulo, se restringen a vigas prismáticas (esto es, vigas con secciones transversales que permanecen iguales a lo largo de su longitud). A fin de analizar tales vigas, obtuvimos las fórmulas de la flexión y del cortante ($\sigma = My/I$, $\tau = VQ/Ib$ y $f = VQ/I$). Una viga no prismática, como la viga ahusada en voladizo de la Fig. 5-35, tendrá distribuciones de esfuerzo que difieren de las proporcionadas por estas fórmulas. En consecuencia, en esta sección trataremos algunas fórmulas aproximadas para obtener los esfuerzos en vigas no prismáticas y daremos algunas comparaciones con los resultados exactos.

Esfuerzos normales. Si las dimensiones del área de la sección transversal cambian gradualmente según nos trasladamos desde un extremo de la viga al otro, podemos calcular los esfuerzos normales σ a partir de la fórmula de la flexión $\sigma = My/I$ y obtener buena precisión. Por ejemplo, en la Fig. 5-35, si el ángulo entre la orilla superior de la viga y su eje horizontal es menor de 20° , el error en el cálculo de los esfuerzos normales es menor del 10% (véase discusión posterior de los resultados exactos). Por supuesto, para ángulos más pequeños, el error es menor.

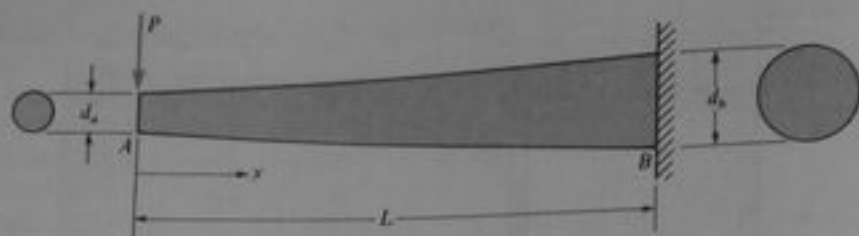


Fig. 5-35 Viga ahusada en voladizo de sección circular

Los esfuerzos normales máximos en una viga prismática siempre ocurren en una sección transversal de momento flexionante máximo, ya que σ varía a lo largo del eje de la viga en la misma forma que M . Sin embargo, esta conclusión no necesariamente es aplicable a vigas no prismáticas, porque para tales vigas σ varía a lo largo del eje no sólo proporcionalmente a M sino también en proporción inversa al momento de inercia I . Un ejemplo de esta situación es una viga ahusada en voladizo, como la mostrada en la Fig. 5-35. A fin de facilitar el análisis, supongamos que el extremo fijo B tiene el doble de diámetro que el del extremo libre A :

$$\frac{d_b}{d_a} = 2$$

Entonces, el diámetro d de la barra a una distancia x del extremo izquierdo es

$$d = d_a + (d_b - d_a) \frac{x}{L} = d_a \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

y el módulo de sección correspondiente es

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{32} d_a^3 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^3$$

De aquí que el esfuerzo normal máximo σ en cualquier sección transversal es

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{Px}{S} = \frac{32Px}{\pi d_a^3 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^3}$$

Al derivar $d\sigma/dx$ e igualar a cero, determinamos el valor de x para el cual σ es máximo; el resultado es $x = L/2$. El esfuerzo máximo correspondiente es

$$\sigma_{\max} = \frac{128PL}{27\pi d_a^3} = 4.741 \frac{PL}{\pi d_a^3}$$

En la sección de momento flexionante máximo (soporte B), el máximo esfuerzo es

$$\sigma_b = \frac{4PL}{\pi d_a^3}$$

Luego, en este ejemplo particular, el esfuerzo máximo ocurre en la parte media de la viga y es 19% mayor que el esfuerzo en el empotramiento, donde el momento flexio-

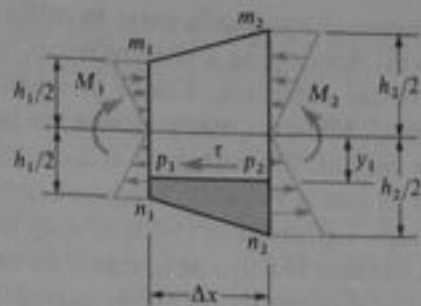


Fig. 5-36 Elemento de longitud Δx tomado de una viga no prismática

nante alcanza su valor máximo. Si el ahusamiento de la barra se reduce, la sección de esfuerzo normal máximo se desplazará hacia el soporte rígido. Para ahusamientos muy pequeños de la viga, el esfuerzo máximo ocurre en el extremo B , tal como ocurre en una viga prismática en voladizo.

Esfuerzos cortantes. Los esfuerzos cortantes en una viga no prismática son completamente diferentes de los de una viga prismática; por lo tanto, la fórmula de cortante $\tau = VQ/Ib$ no puede emplearse. En su lugar, obtendremos una nueva relación que incluye el efecto de la altura variable de la viga. Para este propósito consideremos un elemento de pequeña longitud Δx , determinado en una viga no prismática, como el mostrado en la Fig. 5-36. En la cara izquierda m_1n_1 de este elemento, el momento flexionante es M_1 ; en la cara derecha m_2n_2 , el momento es M_2 . Las alturas correspondientes de la viga se denotan por h_1 y h_2 , respectivamente, y y_1 es la distancia del eje neutro al punto donde actúa el esfuerzo cortante τ (compárese con la Fig. 5-24a para una viga prismática).

El flujo de cortante f que actúa a lo largo de la cara superior p_1p_2 del elemento sombreado $n_1p_1p_2n_2$ se obtiene de una ecuación de equilibrio estático para el elemento. Las fuerzas debidas a los esfuerzos normales por flexión que actúan en las caras izquierda y derecha del elemento son M_1Q_1/I_1 y M_2Q_2/I_2 , respectivamente (véanse las ecuaciones para F_1 y F_2 en la Sección 5.5). En estas expresiones I_1 e I_2 son los momentos de inercia de las dos secciones transversales, y Q_1 y Q_2 son los primeros momentos respecto del eje neutro, de las áreas laterales del elemento denominadas p_1n_1 y p_2n_2 , respectivamente. La fuerza total en la cara superior p_1p_2 del elemento es $f\Delta x$. Luego, la ecuación de equilibrio estático resulta

$$f\Delta x = \frac{M_2Q_2}{I_2} - \frac{M_1Q_1}{I_1} \quad (5-35)$$

Si el esfuerzo cortante τ es uniforme a través del ancho de la viga, entonces $f = \tau b$, donde b es el ancho de la viga. Para cualquier viga particular, la Ec. (5-35) puede emplearse para determinar el flujo de cortante medio entre las secciones transversales mediante la sustitución de los valores numéricos de M , Q , I y Δx . El procedimiento es como sigue: Selecciónese la sección transversal de la viga donde va a calcularse el flujo de cortante f . Enseguida tómesese una sección adyacente separada una distancia Δx ; por ejemplo, tómesese $\Delta x = L/100$. En cada una de estas secciones determinese lo siguiente: (1) el momento flexionante M , (2) el primer momento Q de la porción

del área de la sección transversal localizada entre la orilla externa de la viga y la línea en la sección transversal donde f va a determinarse, y (3) el momento de inercia I de la sección transversal completa. Luego se sustituyen estos valores en la Ec. (5-35) y se resuelve para f . Mientras más pequeña sea la distancia Δx , los resultados serán más exactos (en teoría). Sin embargo, si Δx es muy pequeño, la precisión numérica será inadecuada ya que la Ec. (5-35) requiere tomar la diferencia entre dos términos que son casi iguales. La ecuación (5-35) es muy general y es útil en muchas situaciones prácticas para obtener el flujo de cortante de una viga con sección transversal variable cuando no se dispone de fórmulas exactas.

Esfuerzos cortantes en vigas rectangulares. En el caso particular de una viga de sección transversal rectangular con ancho constante b y altura variable h , podemos convertir la Ec. (5-35) en una ecuación más exacta al hacer que Δx tienda a cero. También, observamos que en una viga rectangular, se puede suponer que los esfuerzos cortantes τ están uniformemente distribuidos a través del ancho b de la viga, por lo que $f = \tau b$ en la Ec. (5-35). Para obtener la fórmula deseada empezaremos por evaluar Q e I en las secciones 1 y 2, las cuales están separadas una distancia Δx :

$$Q_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \quad Q_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} \quad I_2 = \frac{bh_2^3}{12}$$

Ahora, si $h_2 = h_1 + \Delta h$, donde Δh es el incremento en h según nos trasladamos de la sección 1 a la sección 2, obtenemos de las ecuaciones anteriores

$$Q_2 = Q_1 + \frac{bh_1 \Delta h}{4} \quad I_2 = I_1 + \frac{bh_1^2 \Delta h}{4}$$

En la obtención de estas ecuaciones, se han eliminado los términos que contienen el cuadrado y el cubo de Δh ya que son pequeños comparados con los términos restantes. Al apreciar también que $M_2 = M_1 + \Delta M$, sustituimos ahora las expresiones para Q_2 , I_2 y M_2 en la Ec. (5-35):

$$\tau b \Delta x = \frac{(M_1 + \Delta M) \left(Q_1 + \frac{bh_1 \Delta h}{4} \right)}{I_1 + \frac{bh_1^2 \Delta h}{4}} - \frac{M_1 Q_1}{I_1}$$

A fin de simplificar esta ecuación, podemos multiplicar todos los términos por el denominador del segundo término y efectuar los productos restantes. El resultado es

$$\tau b I_1 \Delta x + \frac{\tau b^2 h_1^2}{4} \Delta h \Delta x = \frac{M_1 b h_1}{4} \Delta h + Q_1 \Delta M + \frac{b h_1}{4} \Delta h \Delta M$$

$$- \frac{M_1 Q_1}{4 I_1} b h_1^2 \Delta h$$

En esta ecuación, los términos que contiene el producto de dos cantidades pequeñas pueden despreciarse, y entonces la ecuación puede dividirse entre Δx . En el límite se-

gún Δx se vuelve más y más pequeña, el término $\Delta h/\Delta x$ resulta dh/dx , y el término $\Delta M/\Delta x$ resulta dM/dx , que es igual a la fuerza cortante V . Luego, la ecuación resulta

$$\tau b I_1 = \frac{M_1 b h_1}{4} \frac{dh}{dx} + Q_1 V - \frac{M_1 Q_1 b h_1^2}{4 I_1} \frac{dh}{dx}$$

Como paso final, dividimos todos los términos entre bI y retiramos el subíndice numérico, que ya no es necesario. Luego, la forma final de la expresión para el esfuerzo cortante τ en una viga no prismática de sección transversal rectangular es

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} + \frac{Mh}{4I} \left(1 - \frac{Qh}{I} \right) \frac{dh}{dx} \quad (5-36)$$

Esta ecuación es válida para una viga de ancho constante b y altura variable h . La altura puede cambiar en cualquier forma, siempre y cuando la variación sea gradual. Observamos que el esfuerzo cortante en cualquier sección transversal no depende únicamente de la fuerza cortante V , sino también del momento flexionante M y de la razón de cambio de h con respecto a x .

Como un ejemplo específico, analicemos la distribución de esfuerzos cortantes en la viga en voladizo de sección transversal rectangular mostrada en la Fig. 5-37a. La viga tiene alturas h_a y $h_b = 2h_a$ en sus extremos y un ahusamiento uniforme. Por lo tanto, la cantidad dh/dx es constante e igual a

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_b - h_a}{L} = \frac{h_a}{L}$$

En el extremo A , el momento flexionante es cero; en consecuencia, la Ec. (5-36) representa la misma distribución parabólica de esfuerzos cortantes que en una viga prismática. Esta distribución está trazada en la Fig. 5-37b. El esfuerzo cortante máximo se presenta en el eje neutro, y es igual a $1.5 P/bh_a$.

En la mitad de la viga se obtienen los siguientes valores:

$$V = P \quad h = 1.5h_a \quad Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad M = \frac{PL}{2} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Al sustituir en la Ec. (5-36) se obtiene

$$\tau = \frac{2P}{3bh_a}$$

lo cual está graficado en la Fig. 5-37c. En este caso particular, obtenemos el interesante resultado de que el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente sobre la altura de la viga. Entre el extremo izquierdo A de la viga y su mitad, ocurre un cambio gradual desde la distribución de esfuerzo cortante ilustrada en la Fig. 5-37b hasta la distribución uniforme mostrada en la Fig. 5-37c.

En el extremo derecho B de la viga ($x = L$), tenemos

$$V = P \quad h = 2h_a \quad Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad M = PL \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Al sustituir en la Ec. (5-36) se obtiene

$$\tau = \frac{3P}{8bh_a} \left(1 + \frac{y_1^2}{h_a^2} \right)$$

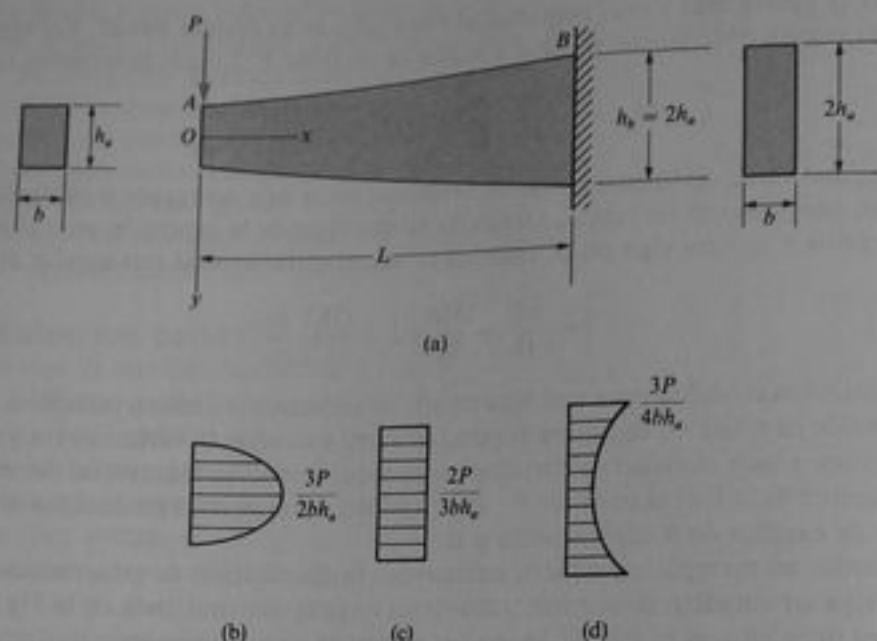


Fig. 5-37 Esfuerzos cortantes en una viga ahusada en voladizo de sección rectangular

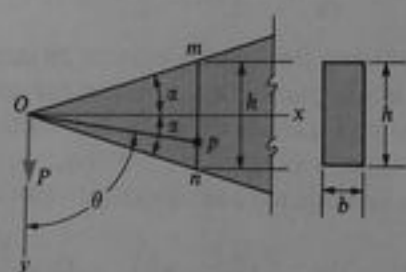


Fig. 5-38 Cuña en voladizo de sección rectangular

que está trazada en la Fig. 5-37d. Obsérvese que el esfuerzo cortante máximo sobre esta sección transversal, igual a $3p/4bh_s$, se presenta en las orillas externas de la viga. El esfuerzo mínimo, igual a la mitad del máximo se presenta en el eje neutro donde $y_1 = 0$.

Los esfuerzos cortantes en vigas rectangulares con una orilla horizontal y la otra orilla inclinada, pueden determinarse por métodos similares a los aquí descritos para una viga con ambos bordes inclinados. Una explicación de tales casos se encuentra en la Ref. 5-15.

Resultados exactos. Los esfuerzos en una cuña en voladizo de sección transversal rectangular (Fig. 5-38) se determinan mediante los métodos de la teoría de la elasticidad. Los esfuerzos normal y cortante en cualquier punto p en la sección transversal mn se representan por las siguientes fórmulas (Ref. 5-16):

$$\sigma = \frac{Pxy \operatorname{sen}^4 \theta}{bx^3(\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} \quad \tau = \frac{Py^2 \operatorname{sen}^4 \theta}{bx^3(\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)} \quad (a)$$

donde x y y son las coordenadas del punto p , θ es el ángulo entre la línea Op y el eje y , b es el espesor de la cuña (supuesto constante), y α es el ángulo que define el ahusamiento de la cuña. Estas ecuaciones pueden plantearse de modo más conveniente si se observa que el momento flexionante en la sección mn es $M = Px$, la altura h de la cuña en la misma sección transversal es $h = 2x \tan \alpha$, y el momento de inercia en la sección transversal mn es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2bx^3 \tan^3 \alpha}{3}$$

Al sustituir las expresiones para M , h e I en las Ecs. (a), encontramos

$$\sigma = -\frac{My}{I} \frac{2 \tan^3 \alpha \sin^4 \theta}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (5-37)$$

$$\tau = \frac{P}{bh} \frac{8y^2 \tan^3 \alpha \sin^4 \theta}{h^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (5-38)$$

El esfuerzo normal σ dado por la Ec. (5-37) es igual a cero en el eje neutro ($\theta = \pi/2$, $y = 0$), y alcanza un máximo en la orilla externa de la cuña. En la parte superior de la cuña ($y = -h/2$, $\theta = \alpha + \pi/2$), el esfuerzo es

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I} \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \beta \frac{Mh}{2I} \quad (5-39)$$

Para valores del ángulo α iguales a 0° , 5° , 10° , 15° y 20° , el factor β tiene los valores 1, 0.994, 0.976, 0.946 y 0.906, respectivamente. De tal modo, se aprecia que para ángulos de ahusamiento pequeños existe una pequeña diferencia entre los esfuerzos normales calculados a partir de la teoría exacta y los obtenidos con la fórmula de flexión $\sigma = My/I$.

Para los esfuerzos cortantes, se advierte que la Ec. (5-38) siempre da $\tau = 0$ en el eje neutro ($y = 0$). El esfuerzo máximo está en las orillas externas donde

$$\tau_{\max} = \frac{P}{bh} \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \gamma \frac{P}{bh} \quad (5-40)$$

Para valores de α iguales a 0° , 5° , 10° , 15° y 20° , el factor γ es igual a 3, 2.98, 2.93, 2.84 y 2.72, respectivamente. Luego, el esfuerzo cortante máximo es alrededor de tres veces el esfuerzo cortante medio P/bh , y se presenta en las orillas externas.

Si aplicamos la teoría aproximada para esfuerzos cortantes en una viga rectangular ahusada (véase Ec. 5-36) a la cuña ilustrada en la Fig. 5-38, obtenemos para la sección mn :

$$V = P \quad Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad M = Px \quad \frac{dh}{dx} = \frac{h}{x}$$

Al sustituir estas expresiones en la Ec. (5-36) y también observar que $y_1 = y$, obtenemos

$$\tau = \frac{12Py^2}{bh^3} \quad (5-41)$$

Esta ecuación da $\tau = 0$ en el eje neutro ($y = 0$), lo que concuerda con el resultado exacto de la Ec. (5-38). En las orillas externas, la Ec. (5-41) resulta $\tau_{\max} = 3P/bh$,

que está muy acorde con la Ec. (5-40) para ángulos de ahusamiento pequeños. Luego, concluimos que la teoría aproximada para esfuerzos cortantes en una viga no prismática es adecuada para propósitos de diseño. Por otro lado, la fórmula $\tau = VQ/Ib$ proporciona resultados bastante inexactos cuando se aplica a vigas no prismáticas.

Vigas completamente esforzadas. Para minimizar la cantidad de material en una viga, podemos variar las dimensiones de las secciones transversales en un intento por mantener el esfuerzo máximo permisible para cada sección. Una viga en estas condiciones se denomina **viga completamente esforzada**. Por supuesto, rara vez se alcanzan estas condiciones ideales, debido a los problemas prácticos de construcción de la viga y a la posibilidad de que las cargas sean diferentes a las supuestas en el diseño. Los resortes de hoja (muelles) de los automóviles y las traveses de puentes con cubreplacas son ejemplos bien conocidos de estructuras con dimensiones variables que se diseñan para mantener esfuerzos máximos constantes (hasta donde sea posible).

Una viga en voladizo con una carga concentrada P en su extremo (Fig. 5-39) servirá como un ejemplo sencillo de una viga completamente esforzada. La sección transversal de la viga se supone rectangular con ancho constante b . Se planea variar la altura h a fin de mantener un esfuerzo normal máximo constante σ_{perm} . En consecuencia, para cualquier sección transversal debe cumplirse la siguiente ecuación:

$$\sigma_{perm} = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6Px}{bh^2}$$

Por lo tanto, la altura h_1 de la viga en el soporte fijo es

$$h_1 = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_{perm}}}$$

y la altura en cualquier otra sección es

$$h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_{perm}}} = h_1 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Esta última ecuación muestra que la altura de la viga varía cuadráticamente con x ; luego, la viga tiene la forma mostrada en la Fig. 5-39. En el extremo cargado, el área de la sección transversal calculada debe ser cero, porque hemos considerado únicamente los esfuerzos normales debidos a la flexión. Por supuesto, también están presentes esfuerzos cortantes; por lo tanto, las secciones transversales de la viga (especialmente las cercanas al extremo libre) deben diseñarse para transmitir la fuerza cortante.

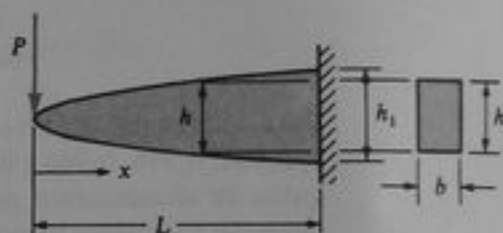


Fig. 5-39 Viga completamente esforzada con esfuerzo normal máximo constante (se omite el esfuerzo cortante)

*5.10 VIGAS COMPUESTAS

Las vigas que se construyen con más de un material se denominan **vigas compuestas**. Algunos ejemplos son las vigas bimetalicas, que consisten en dos materiales diferentes unidos entre sí, vigas de tipo emparedado ("sandwich") y vigas de concreto reforzado, como las mostradas en la Fig. 5-40. Las vigas compuestas pueden analizarse mediante la misma teoría de la flexión que se utilizó para vigas comunes (véanse las secciones 5.2 y 5.3), ya que la suposición de que las secciones transversales que eran planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión (véase

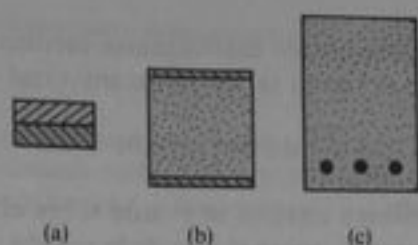


Fig. 5-40 Secciones transversales de vigas compuestas: (a) viga bimetalica, (b) viga tipo emparedado y (c) viga de concreto reforzado

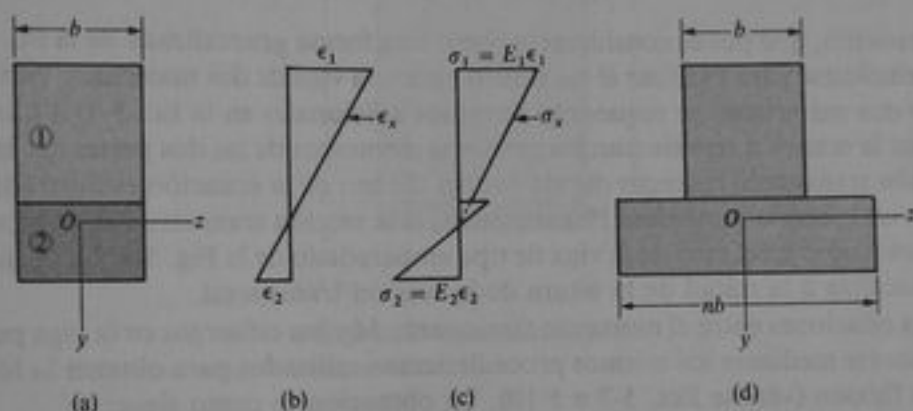


Fig. 5-41 Viga compuesta de dos materiales: (a) sección transversal, (b) distribución de deformaciones, (c) distribución de los esfuerzos y (d) sección transformada

Fig. 5-6) es válida en flexión pura sin importar el material. A partir de esta suposición se infiere que las deformaciones longitudinales ϵ_x varían linealmente desde la parte superior hasta la parte inferior de la viga (véase Ec. 5-2). Esta distribución de la deformación se muestra en la Fig. 5-41b para una viga compuesta hecha de dos materiales diferentes, designados como materiales 1 y 2 en el esquema de la sección transversal (Fig. 5-41a). En este caso, la posición del eje neutro no se localiza en el centroide del área de la sección transversal, según se explica posteriormente.

Los esfuerzos normales σ_x que actúan sobre la sección transversal pueden obtenerse de las deformaciones ϵ_x mediante las relaciones esfuerzo-deformación para los materiales. Supongamos que los materiales se comportan en forma linealmente elástica de forma tal que es válida la ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales. Entonces, los esfuerzos en cada uno de los materiales se obtienen multiplicando las deformaciones por el módulo de elasticidad apropiado. Si se denotan los módulos de elasticidad para los materiales 1 y 2 por E_1 y E_2 , respectivamente, y se supone también que $E_2 > E_1$, obtenemos el diagrama esfuerzo-deformación mostrado en la Fig. 5-41c. Los esfuerzos normales σ_x a cualquier distancia y desde el eje neutro se representan por las siguientes ecuaciones (comparar con la Ec. 5-5):

$$\sigma_{x_1} = -E_1 \kappa y \quad \sigma_{x_2} = -E_2 \kappa y \quad (5-42a, b)$$

en las cuales σ_{x_1} es el esfuerzo en el material 1 y σ_{x_2} es el esfuerzo en el material 2.

La posición del eje neutro puede determinarse mediante la condición de que la fuerza axial resultante que actúa en la sección transversal es cero; por lo tanto,

$$\int_1 \sigma_{x_1} dA + \int_2 \sigma_{x_2} dA = 0$$

donde se supone que la primera integral se evalúa sobre el área de la sección transversal del material 1, y la segunda, sobre el área de la sección transversal del material 2. Al reemplazar σ_{x_1} y σ_{x_2} en la ecuación anterior por sus expresiones de las Ecs. (5-42a y b), obtenemos

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad (5-43)$$

Esta ecuación, que puede considerarse como una forma generalizada de la Ec. (5-6), puede emplearse para localizar el eje neutro para una viga de dos materiales. (Si existen más de dos materiales, se requerirán términos adicionales en la Ec. 5-43.) Las integrales en la ecuación representan los primeros momentos de las dos partes del área de la sección transversal respecto del eje neutro. El uso de la ecuación es ilustrado después en un ejemplo numérico. Por supuesto, si la sección transversal es doblemente simétrica (como en el caso de la viga de tipo emparedado de la Fig. 5-40b), el eje neutro se localiza a la mitad de la altura de la sección transversal.

Las relaciones entre el momento flexionante M y los esfuerzos en la viga pueden determinarse mediante los mismos procedimientos utilizados para obtener la fórmula de la flexión (véanse Ecs. 5-7 a 5-10). La obtención es como sigue:

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_{x_1} y dA + \int_2 \sigma_{x_2} y dA \\ &= -\kappa E_1 \int_1 y^2 dA - \kappa E_2 \int_2 y^2 dA \\ &= -\kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned} \quad (5-44)$$

donde I_1 e I_2 son los momentos de inercia respecto del eje neutro de las áreas de sección transversal 1 y 2, respectivamente. Nótese que $I = I_1 + I_2$, donde I es el momento de inercia del área de toda la sección transversal respecto del eje neutro. La Ec. (5-44) puede resolverse para la curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (5-45)$$

El denominador en el término derecho puede considerarse como la rigidez a flexión de la viga compuesta.

Los esfuerzos en la viga se obtienen ahora al sustituir la expresión para la curvatura (Ec. 5-45) en las expresiones para σ_{x_1} y σ_{x_2} (Ecs. 5-42a y b); así, encontramos

$$\sigma_{x_1} = \frac{MyE_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \sigma_{x_2} = \frac{MyE_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (5-46a, b)$$

Estas expresiones, conocidas como las fórmulas de la flexión para una viga compuesta, representan los esfuerzos normales en los materiales 1 y 2, respectivamente. Por supuesto, si $E_1 = E_2 = E$, ambas ecuaciones se reducen a la fórmula de flexión pura para una viga de un material.

Ejemplo 1

Una viga compuesta que tiene las dimensiones de la sección transversal mostradas en la Fig. 5-42 se somete a un momento flexionante positivo $M = 30,000$ plg·lb. Calcular los esfuerzos máximo y mínimo en ambos materiales de la viga si se supone que $E_1 = 1,000,000$ psi y $E_2 = 20,000,000$ psi.

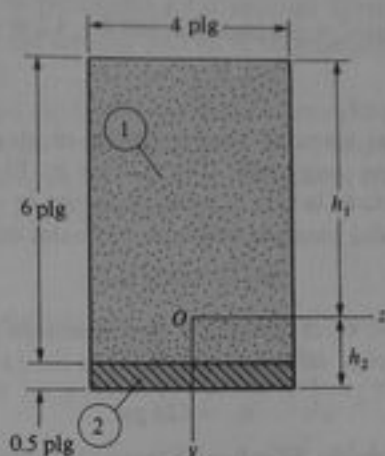


Fig. 5-42 Ejemplo 1. Viga compuesta

El primer paso en el análisis es localizar el eje neutro de la sección transversal. Supongamos que el eje neutro se localiza en el material 1, como se muestra en la figura, y denotemos las distancias desde este eje hasta las caras superior e inferior de la viga como h_1 y h_2 , respectivamente. Para obtener las distancias h_1 y h_2 empleamos la Ec. (5-43). Las integrales en esa ecuación pueden evaluarse al considerar los primeros momentos de las áreas de sección transversal 1 y 2 respecto del eje z , como sigue:

$$\int_1 y dA = -\frac{h_1}{2}(h_1)(4 \text{ plg}) + \frac{6 \text{ plg} - h_1}{2}(6 \text{ plg} - h_1)(4 \text{ plg})$$

$$= (24 \text{ plg}^2)(3 \text{ plg} - h_1)$$

$$\int_2 y dA = (6.25 \text{ plg} - h_1)(0.5 \text{ plg})(4 \text{ plg}) = (2 \text{ plg}^2)(6.25 \text{ plg} - h_1)$$

en donde h_1 tiene unidades de pulgadas. Al sustituir estas expresiones en la Ec. (5-43) se obtiene

$$(1 \times 10^6 \text{ psi})(24 \text{ plg}^2)(3 \text{ plg} - h_1) + (20 \times 10^6 \text{ psi})(2 \text{ plg}^2)(6.25 \text{ plg} - h_1) = 0$$

Luego, obtenemos

$$h_1 = 5.031 \text{ plg} \quad h_2 = 6.5 \text{ plg} - h_1 = 1.469 \text{ plg}$$

y queda establecida la posición del eje neutro.

Los momentos de inercia I_1 e I_2 respecto del eje neutro pueden determinarse mediante el teorema de los ejes paralelos (véase Sección C.5, Apéndice C). Iniciando con el área 1 (Fig. 5-42), planteamos

$$I_1 = \frac{1}{12}(4 \text{ plg})(6 \text{ plg})^3 + (4 \text{ plg})(6 \text{ plg})(h_1 - 3 \text{ plg})^2 = 171.0 \text{ plg}^4$$

Igualmente, obtenemos

$$I_2 = \frac{1}{12} (4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})^3 + (4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})(h_2 - 0.25 \text{ plg})^2 = 3.014 \text{ plg}^4$$

Para comprobar estos cálculos de los momentos de inercia, determinamos el momento de inercia I de toda el área de la sección transversal como sigue:

$$I = \frac{1}{3} (4 \text{ plg}) h_1^3 + \frac{1}{3} (4 \text{ plg}) h_2^3 = 169.8 + 4.2 = 174.0 \text{ plg}^4$$

que es igual a la suma de I_1 e I_2 .

Ahora podemos calcular los esfuerzos por flexión en los materiales 1 y 2 a partir de las fórmulas de flexión para vigas compuestas (Ecs. 5-46a y b). El esfuerzo de compresión máximo en el material 1 se presenta en la cara superior de la viga ($y = -h_1 = -5.031 \text{ plg}$). Al sustituir este valor en la Ec. (5-46a) para los esfuerzos normales en el material 1, obtenemos

$$\sigma_{c1} = -653 \text{ psi}$$

El mayor esfuerzo de tensión en el material 1 se presenta en la unión de ambos materiales ($y = h_2 - 0.5 \text{ plg} = 0.969 \text{ plg}$); en consecuencia, de la Ec. (5-46a),

$$\sigma_{t1} = 126 \text{ psi}$$

Todo el material 2 trabaja a tensión. El esfuerzo de tensión máximo σ_{t2} se presenta en la base de la viga ($y = h_2 = 1.469 \text{ plg}$); luego, de la Ec. (5-46b) obtenemos

$$\sigma_{t2} = 3810 \text{ psi}$$

El esfuerzo de tensión mínimo en el material 2 se obtiene en la unión de los dos materiales; este esfuerzo es 2510 psi.

Método de la sección transformada. El método de la sección transformada proporciona un procedimiento útil para analizar una viga compuesta. El método consiste en transformar la sección transversal constituida por más de un material, en una sección equivalente compuesta de un solo material. Esta última, denominada **sección transformada**, se analiza en la forma usual para una viga de un solo material.

La sección transformada debe tener la misma localización del eje neutro y la misma capacidad de resistencia a momentos que la viga original de la que es equivalente. A fin de apreciar cómo se logra esta equivalencia, refirámonos a la ecuación empleada para localizar el eje neutro (Ec. 5-43). Se emplea la notación

$$n = \frac{E_2}{E_1} \quad (5-47)$$

donde n es la **relación modular**; podemos reformular la Ec. (5-43) en la forma

$$\int_1 y dA + \int_2 yn dA = 0 \quad (5-48)$$

Esta ecuación señala que el eje neutro debe estar en la misma posición si cada elemento de área dA en el material 2 se multiplica por el factor n , dado que la distancia

y para cada elemento de área no cambia. Por lo tanto, podemos considerar la sección transversal como formada por dos partes: (1) área 1 cuyas dimensiones no cambian, y (2) área 2 con su ancho multiplicado por n . Así, tenemos una nueva sección transversal consistente en sólo un material, es decir, el material 1.

La sección transformada para la viga compuesta de la Fig. 5-41a se muestra en la Fig. 5-41d. Como se explicó en el párrafo anterior, el material 1 permanece inalterado, pero el ancho del material 2 se multiplica por n . (Supusimos en esta ilustración que $n > 1$, aunque no es necesario.) La sección transformada consta completamente del material 1 y su eje neutro está en la misma posición que el eje neutro de la viga original (Fig. 5-41a).

Además, la capacidad de momento flexionante de la sección transformada será la misma que la de la sección transversal original. Para establecer este resultado, observamos que los esfuerzos en la viga transformada, que consiste en sólo un material, están representados por la Ec. (5-5):

$$\sigma_x = -E_1 \kappa y$$

Por lo tanto, el momento flexionante M puede obtenerse como sigue (véase Fig. 5-41d):

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_x y dA + \int_2 \sigma_x y dA \\ &= -\kappa E_1 \int_1 y^2 dA - \kappa E_1 \int_2 y^2 dA \\ &= -\kappa(E_1 I_1 + E_1 n I_2) = -\kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned}$$

que es el mismo resultado que el de la Ec. (5-44). En consecuencia, concluimos que el momento flexionante no cambia entre la viga original y la viga transformada.

Los esfuerzos en la viga transformada pueden determinarse mediante la fórmula de flexión común para una viga de un material. Luego, los esfuerzos en la viga transformada a material 1 son

$$\sigma_{x_1} = \frac{M y}{I_1} \quad (5-49)$$

donde I_1 es el momento de inercia respecto del eje neutro de la sección transformada; esto es,

$$I_1 = I_1 + n I_2 = I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2 \quad (5-50)$$

Al sustituir la expresión para I_1 de la Ec. (5-50) en la Ec. (5-49) se obtiene

$$\sigma_{x_1} = \frac{M y E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (a)$$

la cual es la misma que la Ec. (5-46a). De ahí que observamos que los esfuerzos en el material 1 de la viga original son los mismos que los esfuerzos en la viga transformada. Esta conclusión proviene del hecho de que hemos transformado la viga al material 1. Sin embargo, los esfuerzos en el material 2 de la viga original no son los mismos que los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada. En vez de ello, los esfuerzos en la viga transformada (Ec. a) deben multiplicarse por la relación modular n para obtener los esfuerzos en el material 2 de la viga original (véase Ec. 5-46b).

También es posible transformar la viga original a una viga constituida enteramente de material 2. En tal caso, los esfuerzos en la viga original en el material 2 son los mismos que los esfuerzos en las partes correspondientes de la viga transformada. No obstante, los esfuerzos en el material 1 se obtienen al multiplicar los esfuerzos en la viga transformada por n , que ahora se define como

$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad (5-51)$$

El Ejemplo 3 ilustra estos conceptos.

El método de la sección transformada puede ampliarse a vigas compuestas de más de dos materiales. También es posible transformar la viga en un material que tenga cualquier valor arbitrario de E , en cuyo caso todas las partes de la viga deben transformarse al material ficticio. Por supuesto, es más simple y más común transformar a uno de los materiales originales cuya elección es arbitraria.

Ejemplo 2

La viga compuesta descrita en el Ejemplo 1 e ilustrada en la Fig. 5-42 se analizará mediante el método de la sección transformada. Transformemos la viga original en una viga de material 1 (Fig. 5-43a). Por lo tanto, la parte superior de la viga no se altera, pero el ancho de la parte inferior se multiplica por la relación modular, de lo que resulta

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{20,000,000 \text{ psi}}{1,000,000 \text{ psi}} = 20$$

Así, el ancho de la parte 2 resulta de 80 plg en la sección transformada.

Como la viga transformada es de un solo material, el eje neutro debe pasar a través del centroide del área de la sección transversal. Si se toma la orilla superior de la sección transversal como línea de referencia, calculamos la distancia centroidal h como sigue:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(3 \text{ plg})(4 \text{ plg})(6 \text{ plg}) + (6.25 \text{ plg})(80 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})}{(4 \text{ plg})(6 \text{ plg}) + (80 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})} \\ &= \frac{322 \text{ plg}^3}{64 \text{ plg}^2} = 5.031 \text{ plg} \end{aligned}$$

También, la distancia h_2 es

$$h_2 = 6.5 \text{ plg} - h_1 = 1.469 \text{ plg}$$

De este modo, queda determinada la posición del eje neutro.

Mediante el teorema de los ejes paralelos, calculamos el momento de inercia I , de toda el área de la sección transversal como sigue:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12} (4 \text{ plg})(6 \text{ plg})^3 + (4 \text{ plg})(6 \text{ plg})(h_1 - 3 \text{ plg})^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} (80 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})^3 + (80 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})(h_2 - 0.25 \text{ plg})^2 \\ &= 231.3 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

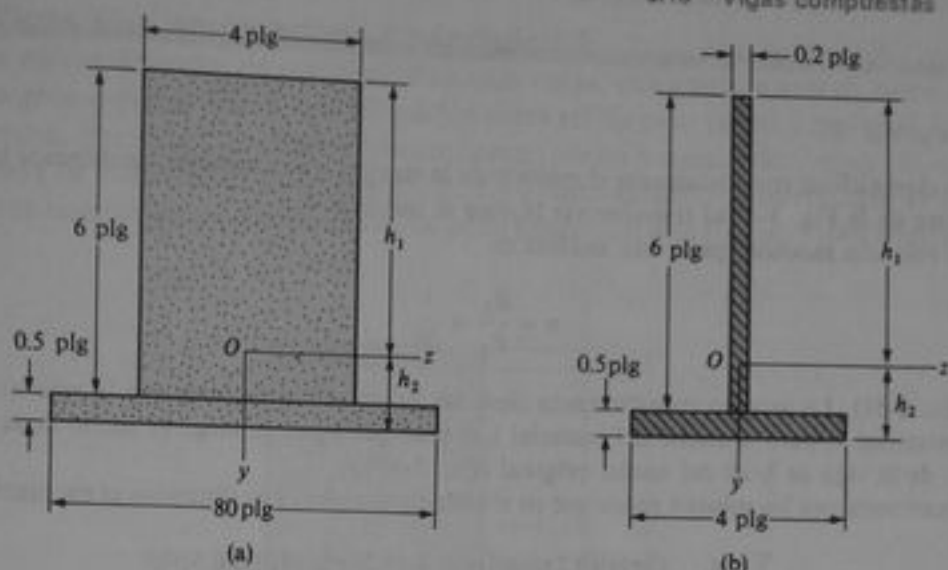


Fig. 5-43 Ejemplos 2 y 3. Viga compuesta del Ejemplo 1 transformada: (a) al material 1 y (b) al material 2

La fórmula de la flexión se emplea ahora para calcular los esfuerzos en la viga transformada en la parte superior, en la unión de las dos partes y en la base, respectivamente:

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(-5.031 \text{ plg})}{231.3 \text{ plg}^4} = -652.5 \text{ psi}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(0.969 \text{ plg})}{231.3 \text{ plg}^4} = 125.7 \text{ psi}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_t} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(1.469 \text{ plg})}{231.3 \text{ plg}^4} = 190.5 \text{ psi}$$

Los esfuerzos en la viga original son los mismos que en la viga transformada para el material 1; por lo tanto, el esfuerzo de compresión máximo en el material 1 es

$$\sigma_{e1} = -653 \text{ psi}$$

en la parte superior de la viga. También el máximo esfuerzo de tensión en el material 1 (en la junta) es

$$\sigma_{t1} = 126 \text{ psi}$$

Para el material 2, multiplicamos los esfuerzos en la viga transformada por n . El esfuerzo de tensión máximo ocurre en la base de la viga:

$$\sigma_{t2} = n(190.5 \text{ psi}) = 20(190.5 \text{ psi}) = 3810 \text{ psi}$$

También, la tensión en el material 2 en la junta es $20(125.7 \text{ psi})$, o sea 2510 psi. Todos estos resultados concuerdan con los determinados en el Ejemplo 1.

Ejemplo 3

A fin de ejemplificar completamente el método de la sección transformada, analicemos la viga compuesta de la Fig. 5-42 al transformar la viga al material 2.

La relación modular para este análisis es

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{20}$$

(véase Ec. 5-51). La sección transformada tiene las mismas dimensiones que la viga original para el material 2, pero el ancho del material 1 se multiplica por n ; luego el ancho de la parte superior de la viga es $1/20$ del ancho original (Fig. 5-43b).

Ahora seguimos los mismos pasos que en el ejemplo anterior. Las distancias al eje neutro son

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(3 \text{ plg})(0.2 \text{ plg})(6 \text{ plg}) + (6.25 \text{ plg})(4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})}{(0.2 \text{ plg})(6 \text{ plg}) + (4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})} \\ &= \frac{16.10 \text{ plg}^3}{3.2 \text{ plg}^2} = 5.031 \text{ plg} \\ h_2 &= 6.5 \text{ plg} - h_1 = 1.469 \text{ plg} \end{aligned}$$

El momento de inercia es

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{12} (0.2 \text{ plg})(6 \text{ plg})^3 + (0.2 \text{ plg})(6 \text{ plg})(h_1 - 3 \text{ plg})^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} (4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})^3 + (4 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})(h_2 - 0.25 \text{ plg})^2 \\ &= 11.56 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

Los esfuerzos en la sección transformada en la cara superior, la junta y la base son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{My}{I_r} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(-5.031 \text{ plg})}{11.56 \text{ plg}^4} = -13,060 \text{ psi} \\ \sigma &= \frac{My}{I_r} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(0.969 \text{ plg})}{11.56 \text{ plg}^4} = 2,510 \text{ psi} \\ \sigma &= \frac{My}{I_r} = \frac{(30,000 \text{ plg}\cdot\text{lb})(1.469 \text{ plg})}{11.56 \text{ plg}^4} = 3,810 \text{ psi} \end{aligned}$$

Para obtener los esfuerzos en la viga original, los esfuerzos en el material 1 se multiplican por n ; luego, en la cara superior de la viga y en la junta, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{s_1} &= n(-13,060 \text{ psi}) = -653 \text{ psi} \\ \sigma_{j_1} &= n(2,510 \text{ psi}) = 126 \text{ psi} \end{aligned}$$

Para el material 2, los esfuerzos en la viga original son los mismos que en la viga transformada (3,810 psi y 2,510 psi en la base y en la junta, respectivamente).

Los cálculos para los ejemplos 2 y 3 son muy similares, por lo que es evidente que no se obtiene ninguna ventaja al transformar a un material en lugar del otro.

Vigas tipo emparedado ("sandwich"). Una viga de este tipo consiste en dos placas delgadas de material, llamadas **caras**, colocadas a ambos lados de un **núcleo** grueso (véase Fig. 5-44). El núcleo suele ser de peso ligero y material de baja resistencia, que sirve fundamentalmente como relleno o espaciador, mientras que las caras son de material de alta resistencia. La construcción de emparedado se utiliza donde es necesaria una combinación de peso ligero con alta rigidez y alta resistencia.

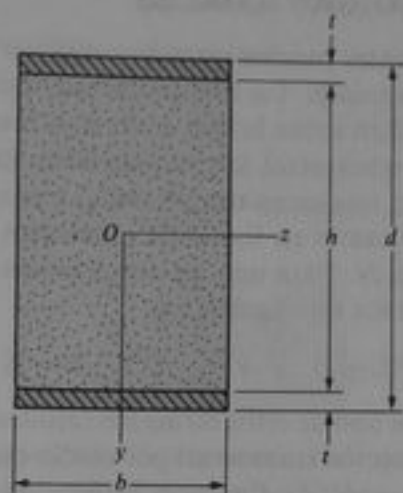


Fig. 5-44 Sección transversal de una viga tipo emparedado ("sandwich")

Las vigas de tipo emparedado pueden analizarse por flexión en la forma descrita para vigas de dos materiales. No obstante, se ha desarrollado una teoría aproximada para la flexión de vigas de emparedado, bajo la suposición de que las caras soportan todos los esfuerzos longitudinales de flexión. Este supuesto se utiliza cuando el núcleo tiene un módulo de elasticidad pequeño en la dirección longitudinal respecto al de las caras. Luego los esfuerzos normales en las orillas externas de la viga (véase Fig. 5-44) son

$$\sigma_x = \frac{Md}{2I_f} \quad (5-52)$$

donde d es la altura de la viga e I_f es el momento de inercia de las caras respecto del eje z , como sigue:

$$I_f = \frac{b}{12} (d^3 - h^3) \quad (5-53)$$

Si las caras son delgadas, podemos suponer que el núcleo resiste todos los esfuerzos cortantes; por lo tanto, el esfuerzo cortante medio y la deformación angular media en el núcleo son, respectivamente,

$$\tau = \frac{V}{bh} \quad \gamma = \frac{V}{bhG_c} \quad (5-54a, b)$$

donde h es la altura del núcleo, V es la fuerza cortante y G_c es el módulo de elasticidad a cortante para el material del núcleo.

También se han desarrollado teorías más exactas para la flexión de vigas de emparedado; por ejemplo, puede considerarse la flexión de las caras como vigas individuales. Para estudios más detallados de vigas de emparedado y otras formas de construcción compuesta, véanse las Refs. 5-17 y 5-18.

5.11 VIGAS CON CARGAS AXIALES

Los miembros estructurales pueden estar sometidos a la acción simultánea de cargas flexionantes y fuerzas axiales. Un ejemplo se muestra en la Fig. 5-45a, que representa a una viga en voladizo sobre la que actúa una fuerza inclinada P aplicada en el centroide de la sección transversal del extremo libre. La carga P puede descomponerse en dos componentes, una carga transversal Q y una carga axial S . Estas cargas producen esfuerzos resultantes en forma de momentos flexionantes M , fuerzas cortantes V y fuerzas axiales N . Para una sección transversal a una distancia x del empotramiento, estos esfuerzos resultantes son

$$M = Q(L - x) \quad V = -Q \quad N = S$$

Los esfuerzos debidos a cada uno de estos esfuerzos resultantes pueden determinarse para cualquier punto de la sección transversal por medio de las fórmulas apropiadas ($\sigma = My/I$, $\tau = VQ/Ib$, y $\sigma = N/A$). Entonces la distribución final de los esfuerzos puede obtenerse al combinar los esfuerzos asociados con cada esfuerzo resultante.

Cuando se determinan los esfuerzos en una barra debidos a la acción combinada de cargas flexionantes y fuerzas axiales, es importante diferenciar entre las dos posibles situaciones siguientes: (1) La viga es relativamente corta y rígida o robusta. Entonces las deflexiones laterales de la viga son muy pequeñas comparadas con la longitud, y la presencia de las deflexiones produce un cambio insignificante en la línea de acción de la carga axial S . En tal caso el momento flexionante M no depende de las deflexiones. (2) La viga es relativamente esbelta y flexible. Entonces las deflexiones por flexión (aunque pequeñas en magnitud) pueden ser lo suficientemente grandes para afectar los momentos flexionantes. La línea de acción de la fuerza axial S se desplaza en la dirección y , lo que origina un momento flexionante adicional en cada sección transversal igual al producto de la fuerza axial por la deflexión. En otras palabras, existe una interacción, o acoplamiento, entre los efectos axiales y los efectos de flexión. Este tipo de comportamiento de la viga se analiza en el Capítulo 11. En esta sección consideraremos únicamente que son relativamente rígidas y que satisfacen el primer conjunto de condiciones.

La distinción entre una viga robusta y una viga esbelta no está definida. En general, la única forma de saber si los efectos de interacción son importantes es analizar la viga con y sin los efectos de interacción, y luego considerar si los resultados difieren significativamente. Sin embargo, este procedimiento puede requerir un trabajo de cálculo considerable. Como una guía para usos prácticos, consideraremos que una viga es robusta cuando presenta una relación de longitud a peralte menor o igual a 10.

Volvamos ahora al análisis de los esfuerzos en la viga en voladizo de la Fig. 5-45a. Los esfuerzos resultantes que actúan en cualquier sección transversal se obtienen mediante la superposición de los esfuerzos normales debidos a la fuerza axial N y los debidos al momento flexionante M . La fuerza axial N origina una distribución uniforme de esfuerzos $\sigma = N/A$, trazada en la Fig. 5-45b, y el momento flexionante M

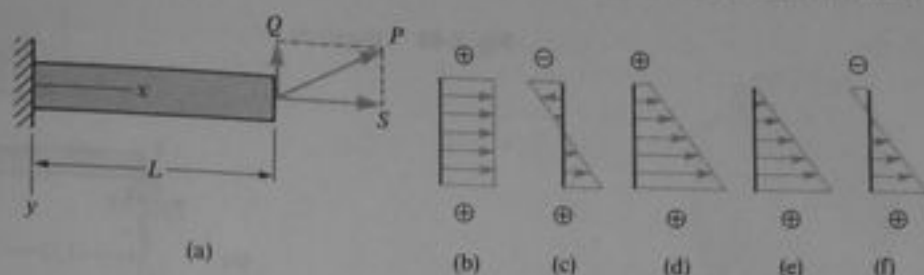


Fig. 5-45 Viga en voladizo sujeta simultáneamente a una carga flexionante y a una fuerza axial

produce un esfuerzo variable linealmente $\sigma = My/I$, trazado en la Fig. 5-45c. Los esfuerzos totales, mostrados en la Fig. 5-45d, pueden determinarse a partir de la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} \quad (5-55)$$

Obsérvese que N es positiva cuando origina tensión y que M es positivo de acuerdo con los signos convencionales para momentos flexionantes (un M positivo produce compresión en la parte superior de la viga; véase Fig. 4-3). Con estos signos convencionales, el signo de los esfuerzos normales σ en la Ec. (5-55) es positivo para tensión, y negativo para compresión, como era de esperarse. La distribución final de esfuerzos depende de los valores algebraicos relativos de los términos de la ecuación. La distribución de esfuerzos puede ser tal que toda la sección transversal esté en tensión, como se ve en la Fig. 5-45d. Otras posibilidades son que la distribución sea triangular (Fig. 5-45e), o que la sección esté parcialmente en tensión y parcialmente en compresión (Fig. 5-45f), o bien, puede estar completamente en compresión si la fuerza axial N es una fuerza de compresión en lugar de una fuerza de tensión.

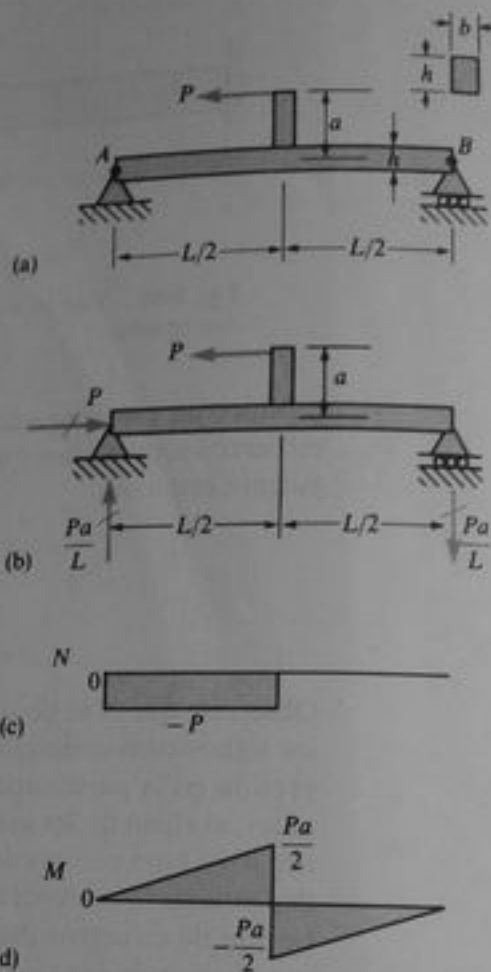
Cuando se combinan cargas flexionantes y axiales, el eje neutro (esto es, la línea de la sección transversal donde el esfuerzo normal es cero) no pasa por el centroide de la sección transversal. Según se muestra en las Figs. 5-45d, e y f, el eje neutro puede estar fuera de la sección transversal, en la orilla de la sección transversal o en cualquier lugar en la sección.

Ejemplo

Una viga simple AB que tiene una sección transversal rectangular (ancho b y altura h) y un claro de longitud L está cargada con una fuerza P que actúa en el extremo de un brazo de longitud a (véase Fig. 5-46a). Determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la viga.

Empezamos por determinar las reacciones de la viga, las cuales se muestran en el diagrama de fuerzas de la Fig. 5-46b. Enseguida, construimos los diagramas de fuerza axial y momento flexionante (Figs. 5-46c y d). El diagrama de fuerza axial muestra que esta fuerza en la mitad izquierda de la viga es de compresión e igual a P . El diagrama de momento flexionante indica que el momento máximo positivo se presenta justo a la izquierda de la mitad del claro, y el momento máximo negativo, justo a la derecha. Luego en una sección transversal localizada a una

Fig. 5-46 Ejemplo



pequeña distancia a la izquierda del punto medio de la viga, la fuerza axial y el momento flexionante son, respectivamente,

$$N = -P \quad M = \frac{Pa}{2}$$

Por lo tanto, encontramos de la Ec. (5-55) que los esfuerzos en las orillas inferior y superior de la viga ($y = h/2$ y $y = -h/2$, respectivamente), son los siguientes:

$$\sigma_b = -\frac{P}{bh} + \frac{3Pa}{bh^2} \quad \sigma_t = -\frac{P}{bh} - \frac{3Pa}{bh^2}$$

De igual manera, los esfuerzos en una sección transversal justo a la derecha del centro de la viga (donde $M = -Pa/2$ y $N = 0$) son

$$\sigma_b = -\frac{3Pa}{bh^2} \quad \sigma_t = \frac{3Pa}{bh^2}$$

Al comparar estos esfuerzos, apreciamos que el esfuerzo de tensión máximo en la viga ocurre en la cara superior a la derecha del punto medio, y el esfuerzo de compresión máximo ocurre en la cara superior a la izquierda del punto medio. Estos esfuerzos son, respectivamente,

$$\sigma_{\text{tens}} = \frac{3Pa}{bh^2} \quad \sigma_{\text{comp}} = -\frac{P}{bh} - \frac{3Pa}{bh^2}$$

Por lo que el esfuerzo de compresión es numéricamente mayor que el esfuerzo de tensión.

Carga axial excéntrica. Un caso importante de interés práctico ocurre cuando una barra se somete a una carga axial aplicada excéntricamente, como se ilustra en la Fig. 5-47. La carga de tensión P actúa perpendicular a la sección transversal extrema a una distancia e desde el eje z , que es un eje principal que pasa por el

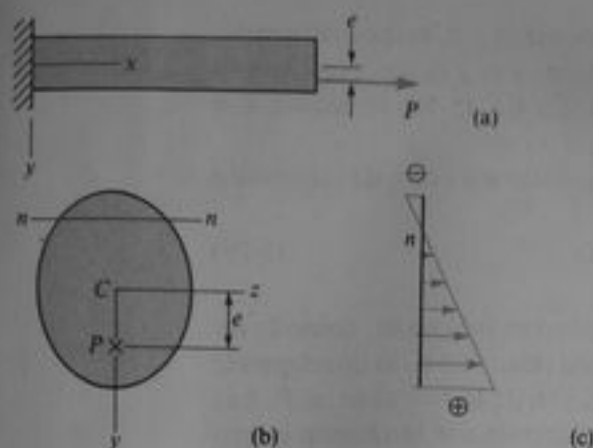


Fig. 5-47 Barra sujeta a una fuerza axial excéntrica

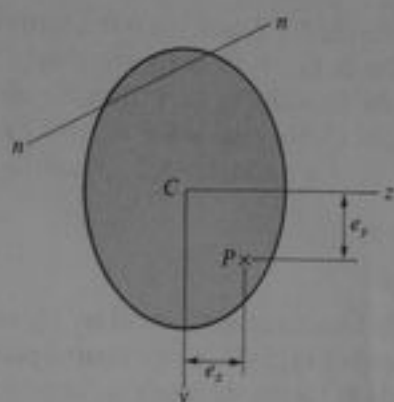


Fig. 5-48 Fuerza axial excéntrica P que produce flexión respecto de ambos ejes centroidales principales

centroide C . (Como en las explicaciones previas, el eje y es un eje de simetría.) La carga excéntrica P es estáticamente equivalente a una fuerza P aplicada en el centroide más un par Pe . Por lo tanto, el esfuerzo normal en cualquier punto de una sección transversal (de la Ec. 5-55) es

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{I} \quad (5-56)$$

Esta distribución de esfuerzo se muestra en la Fig. 5-47c. Si la carga axial es de compresión, el valor de P en la Ec. (5-56) es negativo.

La ecuación del eje neutro (línea nn en la Fig. 5-47b) puede obtenerse al igualar a cero el esfuerzo normal σ (Ec. 5-56) y así

$$y = -\frac{I}{Ae} \quad (5-57)$$

Esta ecuación define una recta en la sección transversal, paralela al eje z . El signo menos muestra que el eje neutro queda por encima del eje z cuando la carga axial P actúa por debajo del eje z . (Nótese que e es positiva cuando la carga actúa por debajo del eje z .) Si la excentricidad e se incrementa, el eje neutro se acercará al centroide; si e se reduce, el eje neutro se alejará del centroide. Por supuesto, el eje neutro puede quedar fuera de la sección transversal.

Cuando el punto de aplicación de la fuerza excéntrica P no se presenta sobre alguno de los ejes principales de la sección transversal, ocurrirá flexión simultáneamente respecto de ambos ejes centroidales principales. Si se denotan las coordenadas del punto de aplicación de P por e_y y e_z (véase Fig. 5-48), apreciamos que los momentos flexionantes respecto de los ejes y y z son numéricamente iguales a Pe_z y Pe_y , respectivamente. El esfuerzo normal resultante σ en cualquier punto de la sección transversal (un punto definido por las coordenadas y y z) resulta entonces

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{I_y} + \frac{Pe_y y}{I_x} \quad (5-58)$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia respecto de los ejes y y z , respectivamente. En la Ec. 5-58 la fuerza axial P es positiva si es de tensión, y e_y y e_z son positivas en las direcciones coordenadas mostradas en la Fig. 5-48. La Ec. (5-58) se reduce a la Ec. (5-56) cuando P se ubica sobre el eje y y e_z es igual a cero.

La ecuación del eje neutro puede determinarse al igualar σ a cero; de este modo

$$\frac{Ae_y}{I_x}y + \frac{Ae_z}{I_y}z + 1 = 0 \quad (5-59)$$

Esta ecuación es lineal en y y en z ; por lo que el eje neutro es una recta, como la nn en la Fig. 5-48. El eje neutro puede o no cortar a la sección transversal, lo que depende de la forma de ésta y de la posición del punto de aplicación de la fuerza axial P . Las intersecciones de la recta nn con los ejes y y z pueden determinarse igualando a cero z y y , respectivamente, en la Ec. (5-59) y resolver para determinar las intersecciones.

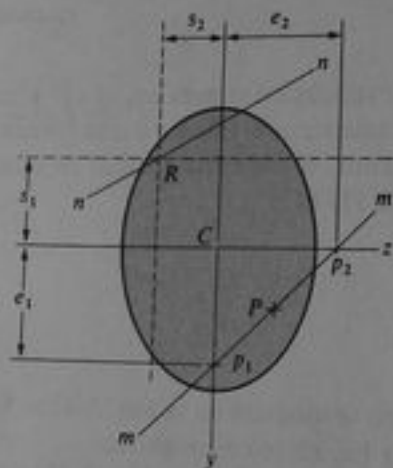


Fig. 5-49 Relación entre la posición de la carga P y el eje neutro nn

Existe una relación importante entre el punto de aplicación de la fuerza axial excentrica P y la posición del eje neutro nn . Si la fuerza P se traslada a lo largo de cualquier recta mm , el eje neutro gira alrededor de un punto fijo R (véase Fig. 5-49). Para demostrar este hecho, observemos primero que la fuerza P puede resolverse en dos componentes paralelas, una que actúa en p_1 , y otra que actúa en p_2 . La componente en p_1 actúa en un plano de flexión principal; en consecuencia, la línea de esfuerzo nulo correspondiente es paralela al eje z y se localiza a una distancia $s_1 = I_x/Ae_1$ desde el eje z (véanse Fig. 5-49 y Ec. 5-57). De igual modo, la componente en p_2 produce flexión alrededor del eje y , y la línea de esfuerzo nulo se localiza a una distancia $s_2 = I_y/Ae_2$ desde el eje y . El punto R , en la intersección de las dos líneas punteadas en la figura, estará siempre sobre el eje neutro cuando actúan simultáneamente ambas componentes de la carga. Por lo que, según la carga P se traslada a lo largo de la línea mm , el punto R permanece fijo en esa posición, y el eje neutro siempre pasa a través de él.

Núcleo de una sección transversal. Cuando la excentricidad e de la carga aplicada P (Fig. 5-47) es pequeña, el eje neutro quedará fuera de la sección

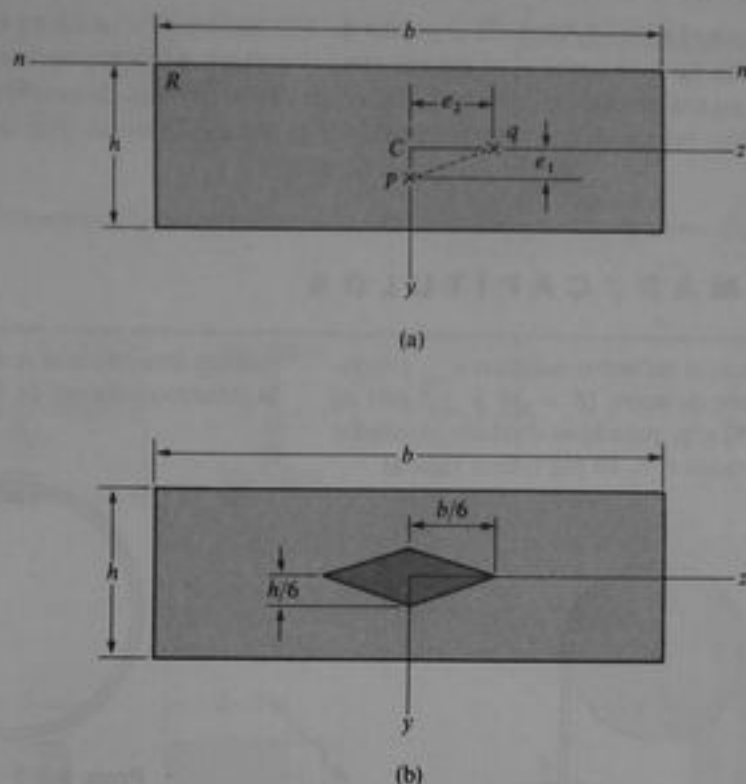


Fig. 5-50 Núcleo de una sección transversal rectangular

transversal y los esfuerzos normales tendrán el mismo signo en toda la sección transversal. Una condición de esta índole es importante cuando una carga de compresión actúa sobre un material que es muy frágil en tensión, tal como un material de cerámica o concreto. Para tales materiales puede ser necesario asegurar que la carga no produce tensión en ningún punto de la sección transversal. Esta condición ocurre cuando la carga permanece dentro de una pequeña región circunvecina al centroide. Una fuerza de compresión aplicada en esta región produce compresión sobre toda la sección transversal, y una fuerza de tensión produce tensión sobre toda la sección transversal. Esta región se denomina **núcleo** (o **corazón**) de la sección.*

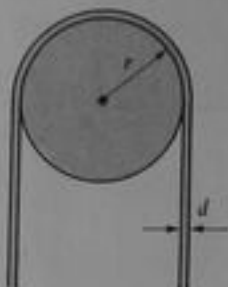
El núcleo de una sección transversal rectangular (Fig. 5-50a) puede determinarse de la siguiente manera. Si la carga se presenta a lo largo del eje positivo y , el eje neutro nn coincidirá con la orilla superior de la sección cuando la carga está en un punto p , a una distancia e_1 del centroide. La distancia e_1 puede determinarse a partir de la Ec. (5-57) al sustituir $y = -h/2$, $I = bh^3/12$, y $A = bh$; así, $e_1 = h/6$. De igual manera el eje neutro coincide con la orilla izquierda de la sección cuando la carga P actúa sobre el eje z positivo, en el punto q , a una distancia $e_2 = b/6$ desde el centroide. Según se traslada la carga a lo largo de una línea recta entre los puntos p y q , el eje neutro girará alrededor del punto R en la esquina de la sección transversal rectangular. En consecuencia, la línea pq es uno de los lados del núcleo; los otros tres lados pueden localizarse por simetría. Se aprecia que el núcleo es un rombo con diagonales

* El concepto del núcleo de una sección transversal fue establecido por el ingeniero francés J. A. C. Bresse en 1854; véase Ref. 5-19.

que miden $b/3$ y $h/3$ (Fig. 5-50b). Si el punto de aplicación de una carga de compresión P se presenta en este rombo, el eje neutro no cortará a la sección transversal, toda la sección estará en compresión. El núcleo de otros perfiles de sección transversal en compresión puede determinarse mediante el mismo método descrito para un rectángulo.

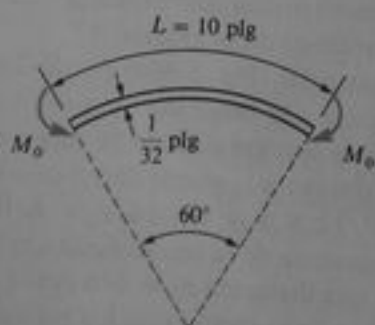
PROBLEMAS / CAPÍTULO 5

5.3-1 Determinar el esfuerzo máximo σ_{\max} producido en un alambre de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) de diámetro $d = 1/32$ plg, cuando es doblado alrededor de una polea de radio $r = 10$ plg (véase figura).



Prob. 5.3-1

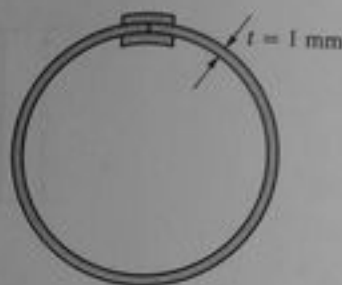
5.3-2 Una regla delgada de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) que tiene espesor de $1/32$ plg y longitud $L = 10$ plg, se flexiona mediante momentos M_0 en sus extremos y forma un arco circular que subtende un ángulo central de 60° (véase figura). ¿Cuál es el esfuerzo máximo σ_{\max} en la regla?



Prob. 5.3-2

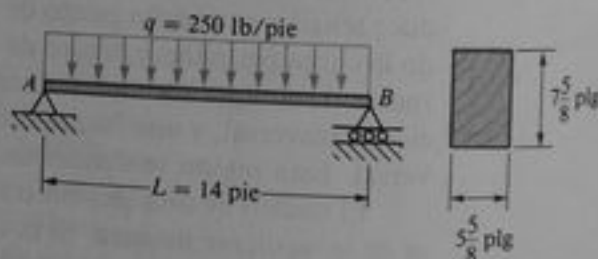
5.3-3 Un fleje delgado de cobre ($E = 120$ GPa), que tiene una longitud $L = 1.5$ m y un espesor $t = 1$ mm, se dobla y forma un círculo unido por los extremos

cuando éstos apenas se tocan (véase figura). Calcular el esfuerzo máximo de flexión σ_{\max} en el fleje.



Prob. 5.3-3

5.3-4 Una viga simple AB con claro $L = 14$ pie soporta una carga uniforme de intensidad $q = 250$ lb/pie (véase figura). Calcular el esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} debido a la carga q si la viga tiene sección transversal rectangular con un ancho $b = 5.5/8$ plg, y una altura $h = 7.5/8$ plg.

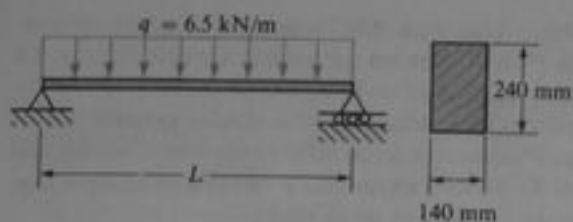
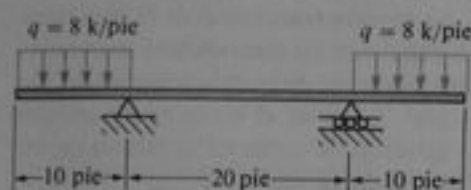
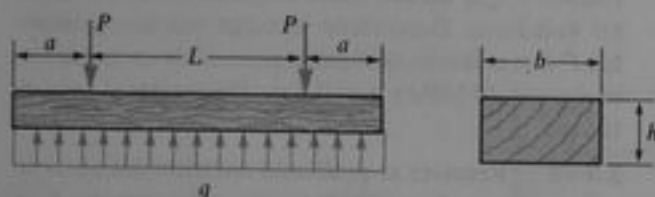


Prob. 5.3-4

5.3-5 Determinar la longitud del claro máxima permisible L para una viga simple (véase figura) de sección transversal rectangular (140 mm \times 240 mm) sometida a una carga uniformemente distribuida $q = 6.5$ kN/m, si el esfuerzo de flexión máximo permisible es 8.2 MPa. (El peso de la viga está incluido en la carga q .)

5.3-6 La viga mostrada en la figura está sometida a flexión pura mediante los momentos M_0 . Determinar la relación σ_t/σ_c de los esfuerzos de tensión y

Prob. 5.3-7
comp. triáng.
5.3-7 tipo de ladizo, una cada v de la se el esfuer la carga
5.3-8 rril está s lb, y actú q del bal mente dis cual tiene plg y $h =$ mo σ_{\max} e plg y $a =$
5.3-9 U construye c $t = 150$ ma rese que las

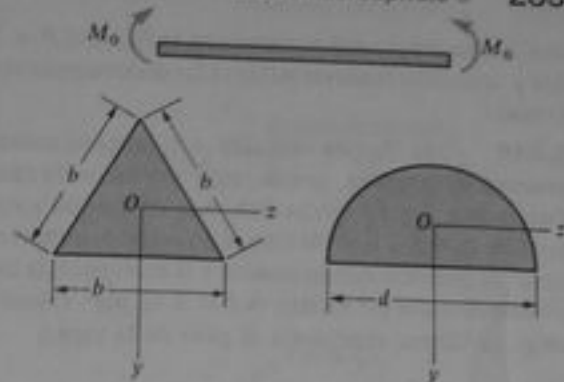
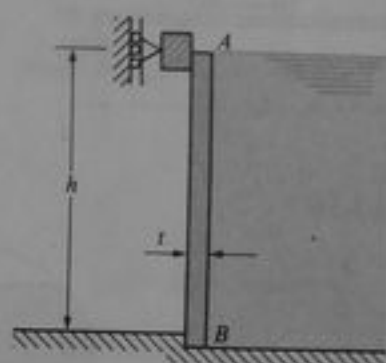

Prob. 5.3-5

Prob. 5.3-7

Prob. 5.3-8

compresión máximos si la sección transversal es (a) un triángulo equilátero, y (b) un semicírculo.

5.3-7 Una viga de acero de sección transversal del tipo de patin ancho está apoyada con extremos en voladizo, como se muestra en la figura. La viga soporta una carga uniforme de intensidad $q = 8 \text{ k/pie}$ sobre cada voladizo. Si se supone que el módulo de sección de la sección transversal es $S = 539 \text{ plg}^3$, determinar el esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} en la viga debido a la carga q .

5.3-8 Un travesaño (o durmiente) de vía de ferrocarril está sometido a dos cargas concentradas $P = 50,000 \text{ lb}$, y actúa como se muestra en la figura. La reacción q del balasto (o cascajo) puede suponerse uniformemente distribuida sobre la longitud del madero, el cual tiene dimensiones de sección transversal $b = 12 \text{ plg}$ y $h = 10 \text{ plg}$. Calcular el esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} en el durmiente, si se supone que $L = 57 \text{ plg}$ y $a = 19.5 \text{ plg}$.

5.3-9 Una pequeña presa de altura $h = 2.4 \text{ m}$ se construye con vigas de madera verticales AB de espesor $t = 150 \text{ mm}$, como se muestra en la figura. Considérese que las vigas están simplemente apoyadas en sus


Prob. 5.3-6

Prob. 5.3-9

partes superior e inferior. Determinar el esfuerzo por flexión máximo σ_{\max} en las vigas, si el peso específico del agua es $\gamma = 9.81 \text{ kN/m}^3$.

5.3-10 Una viga simple AB con una longitud entre apoyos $L = 24 \text{ pie}$ se somete a dos cargas rodantes separadas entre sí una distancia $d = 6 \text{ pie}$ (véase figura). Cada rueda transmite una carga $P = 3 \text{ k}$, y el conjunto puede ocupar cualquier posición sobre la viga. Determinar el esfuerzo por flexión máximo sobre la viga, σ_{\max} , debido a las cargas rodantes si la viga es un perfil I con un módulo de sección $S = 16.2 \text{ plg}^3$.

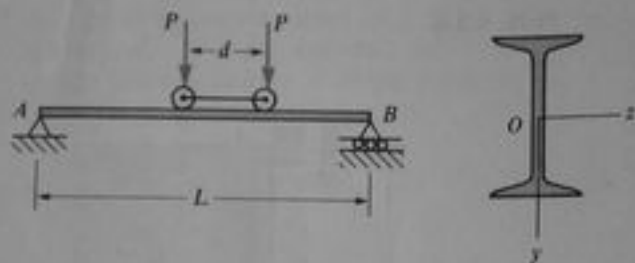
5.3-11 Determinar el momento flexionante máximo M_{\max} respecto del eje zz que puede permitirse para las secciones transversales mostradas en las figuras, si el esfuerzo de flexión permisible (tensión o compresión) es σ_{perm} .

5.3-12 Determinar el momento flexionante máximo M_{\max} respecto del eje zz que puede permitirse para las secciones transversales mostradas en la figura, si el esfuerzo de flexión permisible (tensión o compresión) es σ_{perm} .

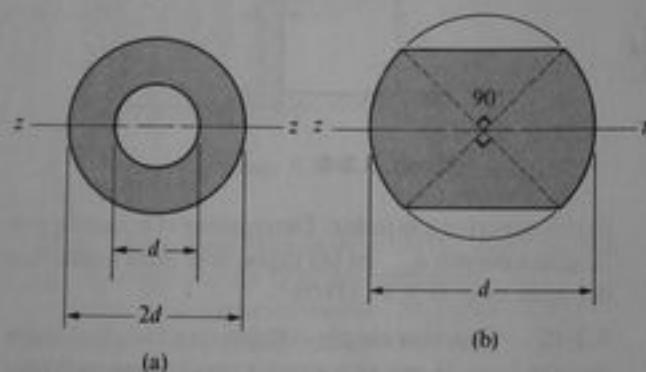
5.3-13 Determinar el esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} causado por la carga concentrada P que actúa so-

bre la viga simple AB mostrada en la figura si $P = 5.4$ kN y la sección transversal tiene las dimensiones mostradas.

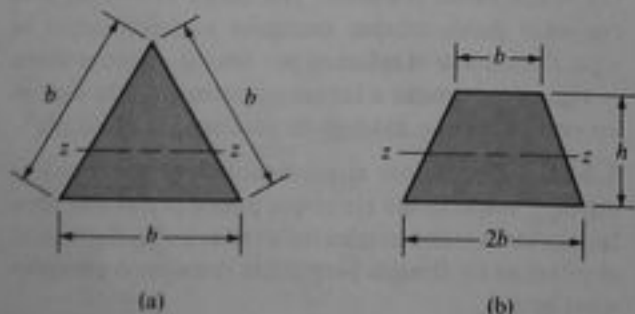
5.3-14 Una viga en voladizo AB , cargada como se muestra en la figura, se construye con un perfil canal. Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión debidos a la flexión si la sección transversal tiene las dimensiones indicadas y el momento de inercia respecto del eje neutro es $I = 2.81 \text{ plg}^4$. (Nota: la carga uniforme representa el peso de la viga.)



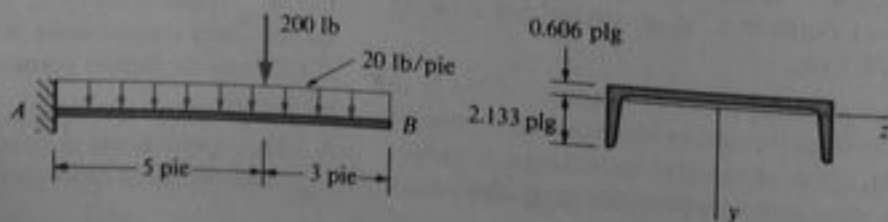
Prob. 5.3-10



Prob. 5.3-11



Prob. 5.3-12



Prob. 5.3-14

5.3-15 Una viga ABC soporta una carga concentrada P en el extremo del voladizo (véase figura). La sección transversal de la viga es un perfil T con las dimensiones mostradas. Calcular el valor permisible de la carga P si se consideran esfuerzos permisibles del material de 40 MPa en tensión y 70 MPa en compresión. (Despreciar el peso de la viga.)

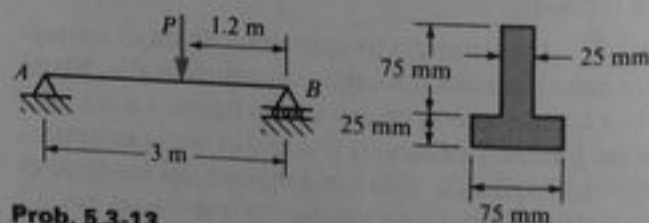
5.3-16 Una viga con un voladizo soporta una carga uniforme de 200 lb/pie a lo largo de su longitud (véase figura). La sección transversal de la viga tiene la forma de un canal con las dimensiones mostradas en la figura y un momento de inercia respecto del eje z igual a 5.14 plg^4 . Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga, debidos a la carga uniforme.

5.3-17 Una viga de madera de sección transversal rectangular de $100 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ está apoyada como se muestra en la figura. La viga está cargada por dos fuerzas P que actúan hacia abajo en los extremos de los voladizos. Determinar la carga máxima permisible P si el esfuerzo de flexión permisible en la madera es $\sigma_{\text{perm}} = 10 \text{ MPa}$ y $a = 0.6 \text{ m}$. Despreciar el peso de la viga.

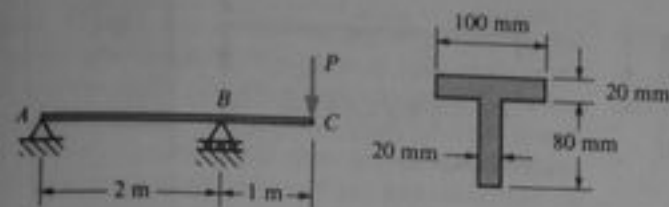
5.3-18 Resolver el problema anterior tomando en cuenta el peso de la viga de madera. (Suponer que $L = 2.5 \text{ m}$ y un peso específico de la madera $\gamma = 5.5 \text{ kN/m}^3$.)

5.3-19 Una viga canal que tiene el perfil de sección transversal mostrado en la figura está simplemente apoyada en los extremos (longitud del claro $L = 10$ pie), y soporta una carga concentrada P en su punto medio. Determinar la carga máxima permisible P si los esfuerzos permisibles en flexión son 20,000 psi para tensión y 12,000 psi para compresión. (Suponer $b = 24$ plg, $h = 10$ plg y $t = 2$ plg.)

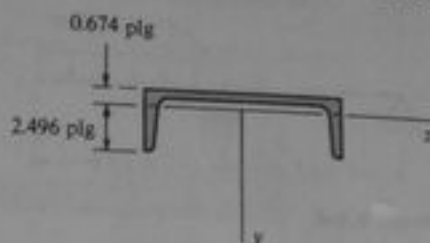
5.4-1 Una viga en voladizo de 6 pie de longitud soporta una carga uniforme $q = 200 \text{ lb/pie}$ y una carga



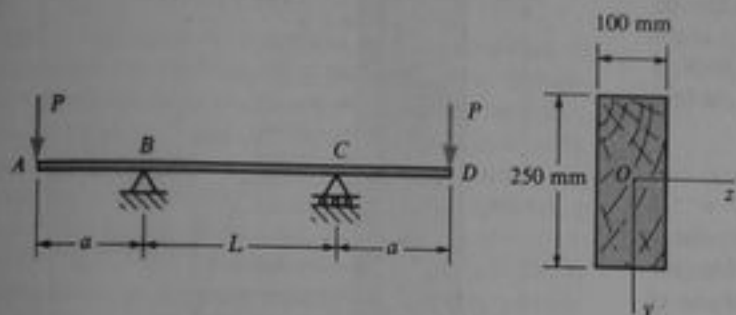
Prob. 5.3-13



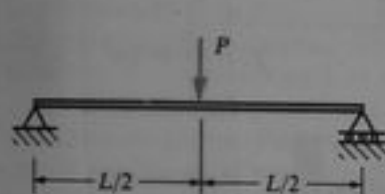
Prob. 5.3-15



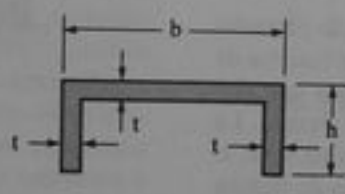
Prob. 5.3-16



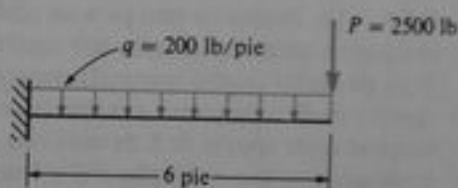
Prob. 5.3-17



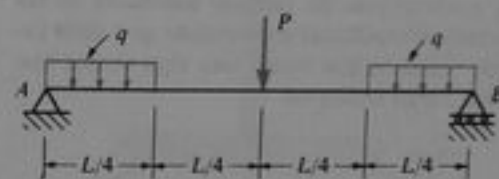
Prob. 5.3-19



Prob. 5.4-1



Prob. 5.4-2



Prob. 5.4-3

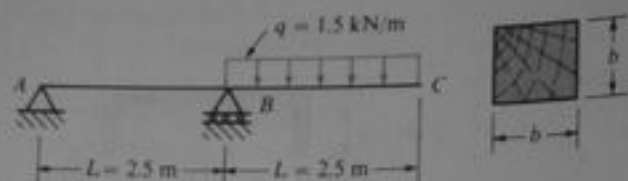
concentrada $P = 2,500$ lb en su extremo libre (véase figura). Calcular el módulo de sección requerido S si $\sigma_{perm} = 15,000$ psi. Seleccionar una viga de patín ancho (perfil W) adecuada, mediante los datos de la Tabla E-1, Apéndice E, y recalculer S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccionar un nuevo tamaño de viga si es necesario.

5.4-2 Una viga simple de 15 pie de longitud soporta una carga uniforme de 400 lb/pie en toda su longitud y una carga concentrada de 4,000 lb en el centro (véase figura). Si se supone $\sigma_{perm} = 16,000$ psi, calcular el módulo de sección requerido S . Seleccionar de la Tabla E-1 del Apéndice E, una viga adecuada de ala an-

cha (perfil W) y recalculer S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccionar un nuevo tamaño de viga si es necesario.

5.4-3 Una viga simple AB está cargada como se muestra en la figura. Calcular el módulo de sección requerido S si $\sigma_{perm} = 15,000$ psi, $L = 24$ pie, $P = 2,000$ lb y $q = 400$ lb/pie. De la Tabla E-2 del Apéndice E, seleccionar una viga I adecuada (perfil S) y recalculer S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccionar un nuevo tamaño de viga si es necesario.

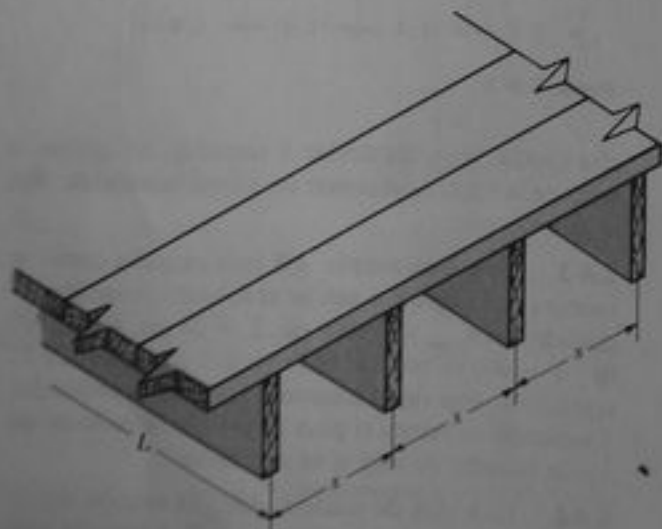
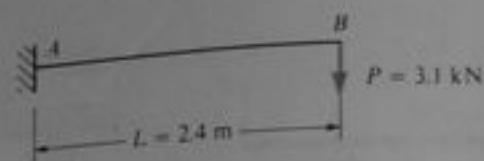
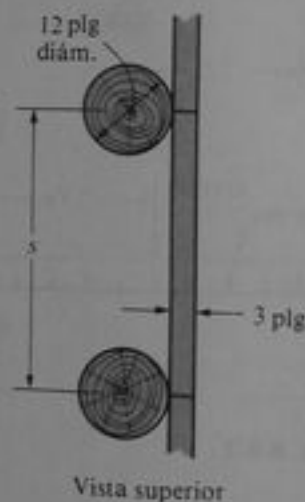
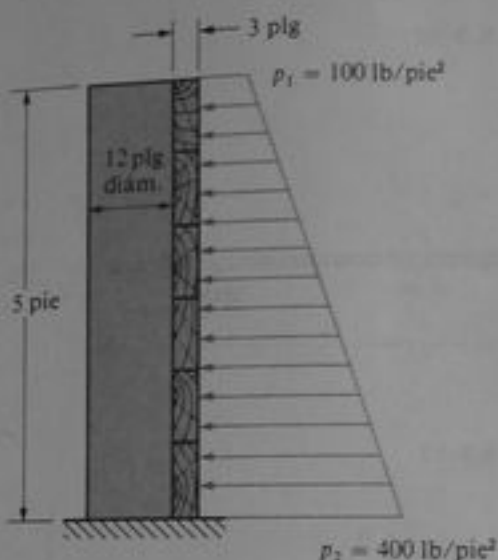
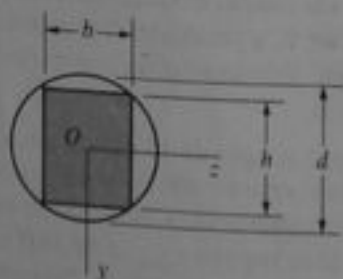
5.4-4 Una viga de madera ABC de sección transversal cuadrada se sustenta en A y B , y soporta una carga uniforme $q = 1.5$ kN/m sobre el voladizo BC


Prob. 5.4-4

(véase figura). Calcular las dimensiones requeridas de los lados b de la sección transversal cuadrada si se supone $L = 2.5$ m y $\sigma_{\text{perm}} = 12$ MPa. Incluir el peso de la viga y suponer que el peso específico de la madera es $\gamma = 5.5$ kN/m³.

5.4-5 Una viga en voladizo AB (véase figura) está hecha de una madera con peso específico $\gamma = 5.2$ kN/m³. La viga tiene sección transversal circular y una longitud $L = 2.4$ m; soporta una carga concentrada $P = 3.1$ kN en su extremo libre. Calcular el diámetro d requerido de la viga si el esfuerzo permisible es 8.2 MPa.

5.4-6 Un sistema de piso para un edificio pequeño consiste en tablas sustentadas por vigas de madera de 2 plg de ancho (ancho nominal), separados una distancia s medida de centro a centro (véase figura). La longitud entre apoyos de L de cada viga es 10.5 pie, el espaciamiento es $s = 16$ plg, y el esfuerzo de flexión permisible 1100 psi. La carga uniforme del piso es 95 lb/pie², que incluye una tolerancia para el peso del piso. Calcular el módulo de sección requerido S para las vigas, y seleccionar un tamaño adecuado de las mismas (madera cepillada) suponiendo que cada tablón puede representarse como una viga simple que soporta una carga uniforme.


Probs. 5.4-6 y 5.4-7

Prob. 5.4-5

Prob. 5.4-8

Prob. 5.4-9

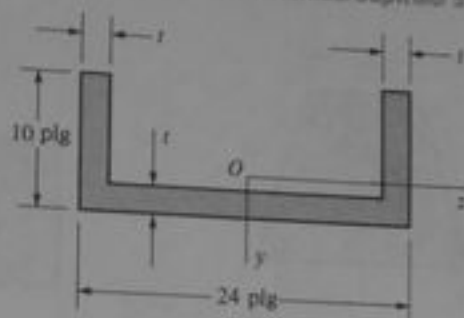
5.4-7 Las vigas de madera que soportan un piso (véase figura) tienen una sección de 2 plg \times 8 plg (dimensiones nominales de madera cepillada) y una longitud de claro $L = 14$ pie. La carga total del piso es 50 lb/plg², que incluye el peso de las vigas y el piso. Calcular el espaciamiento máximo permisible s de las vigas, suponiendo que cada viga puede representarse como una viga simple con carga uniforme y que tiene un esfuerzo de flexión permisible de 1200 psi.

5.4-8 Un muro de retención de 5 pie de altura se construye con tablones de 3 plg de espesor (dimensión real) que están sustentados por pilotes verticales de madera de 12 plg de diámetro (dimensión real), como se muestra en la figura. La presión lateral del suelo es $p_1 = 100$ lb/plg² en la parte superior del muro, y $p_2 = 400$ lb/plg² en la base. Si se supone que el esfuerzo permisible en el pilote es 1200 psi, calcular el espaciamiento máximo permisible s de los pilotes. (Indicación: obsérvese que el espaciamiento de los pilotes puede establecerse por la capacidad para soportar carga de los tablones o de los pilotes. Considérese que estos últimos actúan como vigas en voladizo sometidas a una distribución de carga trapezoidal, y considérese que los tablones actúan como vigas simples entre los pilotes. Para evitar errores, supóngase que la presión en el tablón inferior es uniforme e igual a la presión máxima.)

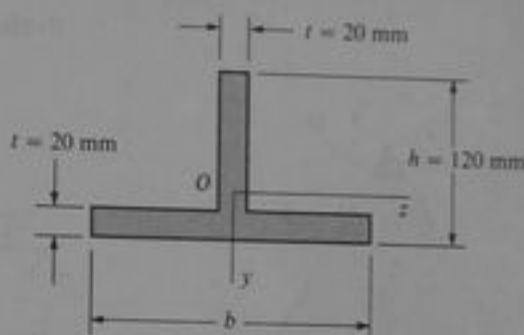
5.4-9 Una viga rectangular de madera va a recortarse de un tronco circular de diámetro d (véase figura). ¿Cuáles deben ser las dimensiones b y h a fin de obtener la viga más resistente?

5.4-10 Determinar la relación S_2/S_1 de los módulos de sección de dos vigas que tienen la misma área transversal si la primera viga (módulo de sección S_1) tiene una sección transversal circular maciza de diámetro d_1 , y la segunda viga (módulo de sección S_2) tiene una sección transversal circular hueca de diámetro exterior d_2 (véase figura).

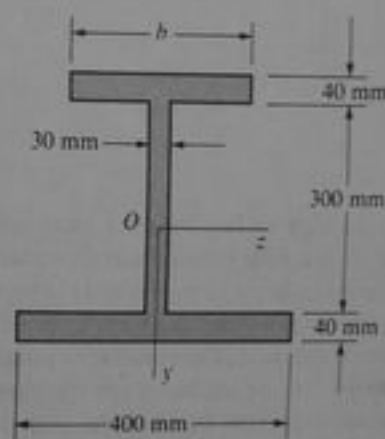
5.4-11 Una viga que tiene una sección transversal en forma de canal (véase figura) se somete a un momento flexionante que actúa respecto del eje z . Calcular el espesor t del canal a fin de que los esfuerzos por flexión en las partes superior e inferior de la viga estén en la relación 7:3.



Prob. 5.4-11



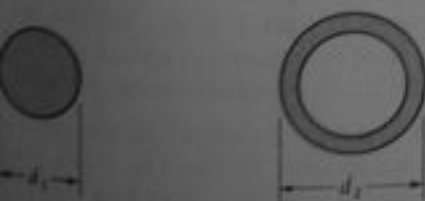
Prob. 5.4-12



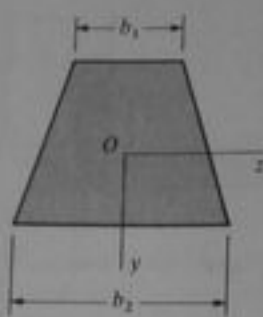
Prob. 5.4-13

5.4-12 Determinar el ancho b del patin de la viga T mostrada en la figura, tal que los esfuerzos normales en las partes superior e inferior de la viga estén en la relación 3:1, respectivamente. (Suponer $h = 120$ mm y $t = 20$ mm.)

5.4-13 Una viga con sección transversal en forma de una sección I asimétrica (véase figura) está sometida a un momento flexionante que actúa respecto del eje z . Determinar el ancho b del patin superior a fin de que los esfuerzos en las partes superior e inferior de la viga estén en la relación 4:3, respectivamente.



Prob. 5.4-10



Prob. 5.4-14



(1)

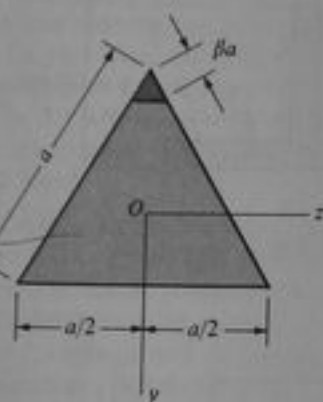


(2)

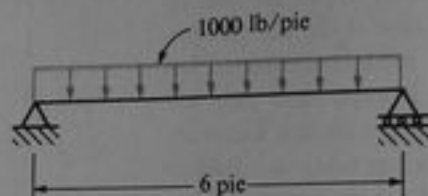


(3)

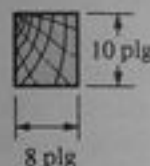
Prob. 5.4-15



Prob. 5.4-16



Prob. 5.5-2



5.4-14 Una viga en flexión pura tiene una sección transversal trapezoidal (véase figura), estando sometida a compresión la parte superior de la viga. Los esfuerzos permisibles en tensión y compresión guardan una relación $\sigma_t/\sigma_c = \alpha$. Determinar la relación b_1/b_2 de las dimensiones de las bases (en términos de α) a fin de que los esfuerzos en las caras superior e inferior de la viga tengan los máximos valores permisibles. ¿Cuál es el margen permisible de valores de α para la sección transversal trapezoidal?

5.4-15 Determinar las relaciones de los pesos de tres vigas que tienen la misma longitud, están hechas del mismo material, sometidas a momentos flexionantes máximos iguales y que tienen los mismos esfuerzos normales máximos, si sus secciones transversales son: (1) un rectángulo con altura igual al doble de su ancho; (2) un cuadrado, y (3) un círculo (véase figura).

***5.4-16** Determinar el parámetro β que define la pequeña área que debe retirarse de una sección transversal en forma de triángulo equilátero (véase figura) a fin de obtener la sección transversal más resistente a

flexión. ¿En qué porcentaje se incrementa el módulo de sección cuando se retira el área?

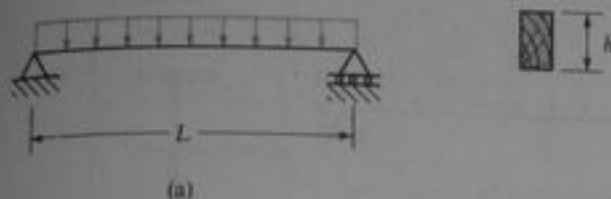
5.5-1 Los esfuerzos cortantes τ en una viga rectangular se representan por la Ec. (5-22):

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

(véase Fig. 5-24). Mediante la integración sobre el área de la sección transversal mostrar que la resultante de estos esfuerzos cortantes es la fuerza cortante V .

5.5-2 Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en una viga de madera simplemente apoyada (véase figura) que soporta una carga uniforme de 1000 lb/pie (se incluye el peso de la viga), si la longitud es 6 pie y la sección transversal es rectangular con un ancho de 8 plg y una altura de 10 plg (dimensiones reales).

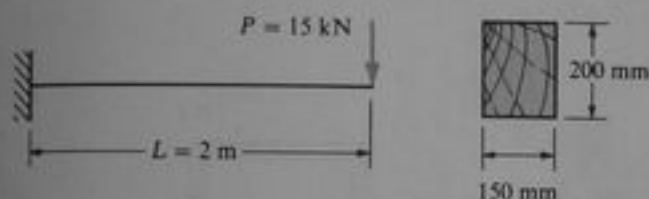
5.5-3 Refiriéndose a la viga simple AB analizada en el Ejemplo 2 de la Sección 5.3 (véase Fig. 5-15), ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en esta viga?



(a)



(b)

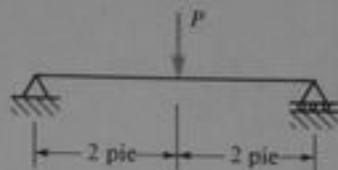
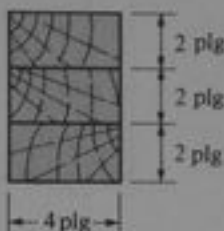
Prob. 5.5-5

Prob. 5.5-6

5.5-4 Suponer que los postes verticales B tratados en el Ejemplo 1 de la Sección 5.4 (véase Fig. 5-19) tienen sección transversal cuadrada con dimensiones $b = 200$ mm. Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en uno de los postes.

5.5-5 (a) Una viga simple de longitud L y sección transversal rectangular de altura h se somete a una carga uniforme (véase figura). Obtener una fórmula para el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la viga en términos del esfuerzo de flexión máximo σ_{\max} . (b) Repetir el inciso (a) para una viga en voladizo (véase figura).

5.5-6 Una viga en voladizo de longitud $L = 2$ m soporta una carga $P = 15$ kN (véase figura). La viga está hecha de madera con dimensiones de sección transversal 150 mm \times 200 mm. Calcular los esfuerzos cortantes debidos a la carga P en puntos localizados a distancias de 25 mm, 50 mm, 75 mm y 100 mm, desde la parte superior de la viga. A partir de estos resultados, trazar una gráfica que muestre la distribución de esfuerzos cortantes desde la cara superior hasta la cara inferior de la viga.

5.5-7 Una viga de madera simplemente apoyada de sección transversal rectangular y longitud de claro igual a 4 pie, soporta una carga concentrada P en su punto medio, además de su propio peso (véase figura).


Prob. 5.5-7

Prob. 5.5-10

La sección transversal tiene dimensiones nominales de 6 plg \times 10 plg (véase Apéndice F para dimensiones reales). Calcular el valor máximo permisible de la carga P si $\sigma_{\text{perm}} = 1000$ psi y $\tau_{\text{perm}} = 150$ psi.

5.5-8 Una viga de madera de sección transversal rectangular está simplemente apoyada y uniformemente cargada. La altura de la viga es 200 mm y los esfuerzos permisibles en flexión y en cortante son $\sigma_{\text{perm}} = 8.2$ MPa y $\tau_{\text{perm}} = 1.0$ MPa, respectivamente. Determinar la longitud del claro L_0 por debajo del cual el esfuerzo cortante determina la carga permisible, y por encima de la cual rige el esfuerzo por flexión.

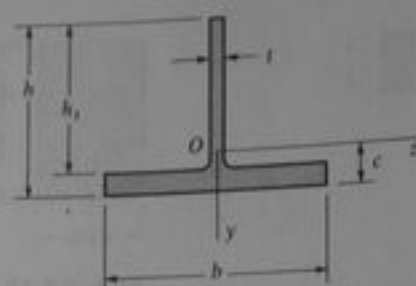
5.5-9 Una viga en voladizo de sección transversal rectangular soporta una carga uniforme. La altura de la viga es h y los esfuerzos permisibles en flexión y cortante son σ_{perm} y τ_{perm} , respectivamente. Obtener una fórmula para la longitud L_0 de la viga por debajo de la cual el esfuerzo cortante establece la carga permisible, y por encima de la cual rige el esfuerzo por flexión.

5.5-10 Una viga de madera laminada se construye uniendo entre sí tres tabloncillos de 2 plg \times 4 plg (dimensiones reales) para formar una viga compuesta con sección transversal de 4 plg \times 6 plg, como se muestra en la figura. El esfuerzo cortante permisible en las juntas adheridas es 50 psi. Si la viga está en voladizo con una longitud de 3 pie, ¿cuál es la carga permisible P en el extremo libre? ¿Cuál es el esfuerzo máximo por flexión correspondiente?

5.6-1 Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el alma de una viga de patin ancho (véase figura) si $b = 5$ plg, $t = 0.5$ plg, $h = 12$ plg, $h_1 = 10.5$ plg y $V = 30,000$ lb. Comparar este resultado con el esfuerzo cortante medio τ_{med} obtenido al dividir V entre el área del alma.



Probs. 5.6-1 y 5.6-2



Probs. 5.6-6 y 5.6-7

5.6-2 Una viga de patín ancho (véase figura) con sección transversal de dimensiones $b = 180$ mm, $t = 12$ mm, $h = 600$ mm y $h_1 = 570$ mm está sometida a una fuerza cortante $V = 275$ kN. (a) Calcular los esfuerzos cortantes máximo y mínimo τ_{\max} y τ_{\min} en el alma. (b) Comparar el esfuerzo cortante máximo con el esfuerzo medio τ_{med} obtenido al dividir V entre el área del alma. (c) Calcular la fuerza cortante total V_{alma} soportada por el alma.

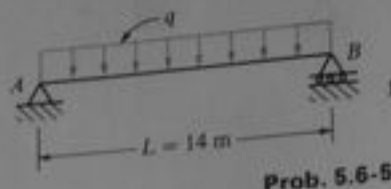
5.6-3 Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el alma de una viga de acero de patín ancho W 24 \times 94 debido a una fuerza cortante $V = 125$ k. Comparar este esfuerzo con el esfuerzo cortante medio τ_{med} obtenido al dividir V entre el área del alma.

5.6-4 Repetir el problema anterior para una viga W 8 \times 28 sometida a una fuerza cortante $V = 11.6$ k.

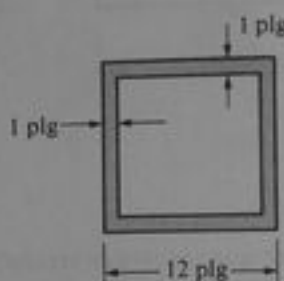
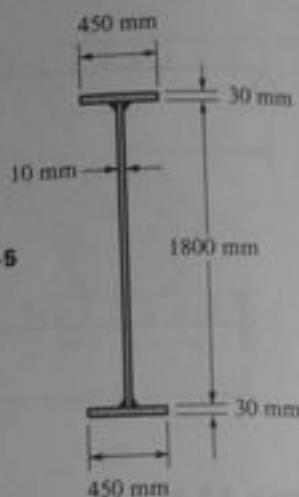
5.6-5 Una viga simple AB con una longitud de claro $L = 14$ m, soporta una carga uniforme q que incluye el peso de la viga (véase figura). La viga se construye con tres placas soldadas entre sí para formar la sección transversal mostrada. Determinar la carga máxima permisible q basada en flexión y en cortante, si los esfuerzos permisibles son $\sigma_{\text{perm}} = 110$ MPa y $\tau_{\text{perm}} = 70$ MPa.

5.6-6 Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el alma de la viga T mostrada en la figura si $b = 10$ plg, $t = 0.6$ plg, $h = 8$ plg, $h_1 = 7$ plg y la fuerza cortante $V = 6000$ lb.

5.6-7 La viga T mostrada en la figura tiene las siguientes dimensiones de sección transversal: $b = 220$ mm, $t = 15$ mm, $h = 300$ mm y $h_1 = 275$ mm. Determinar el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el alma si $V = 68$ kN.



Prob. 5.6-5



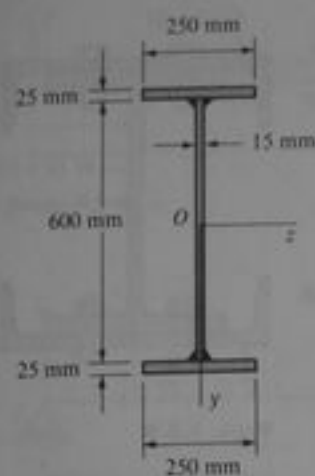
Prob. 5.6-8

5.6-8 Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la viga de cajón cuadrada de aluminio mostrada en la figura, si se somete a una fuerza cortante $V = 28$ k.

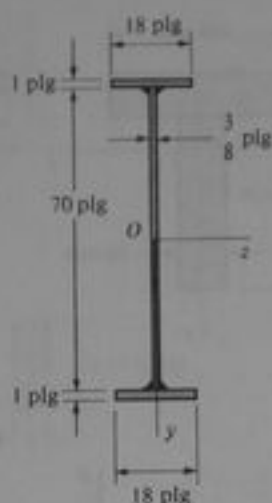
5.8-1 Una viga doble T armada por soldadura y que tiene la sección transversal mostrada en la figura, se construye con dos placas de patín de 25 mm \times 250 mm y una placa para el alma de 15 mm de espesor y 600 mm de peralte. Si la viga se somete a una fuerza cortante $V = 600$ kN, ¿qué fuerza F (por unidad de longitud de soldadura) debe ser transmitida por cada cordón?

5.8-2 La trabe de acero mostrada en la figura consiste en dos placas de patín de 1 plg \times 18 plg soldadas a una placa de 3/8 plg \times 70 plg, para el alma. Calcular la fuerza cortante permisible V si cada cordón de soldadura tiene una carga permisible en cortante de $F = 2400$ lb por pulgada de soldadura.

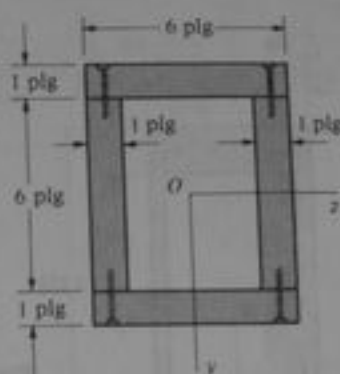
5.8-3 Una viga tipo caja construida con tabloncillos de 1 plg \times 6 plg (dimensiones reales) se muestra en la figura. Los tabloncillos están unidos por tornillos, para los cuales la carga permisible en cortante es $F = 250$



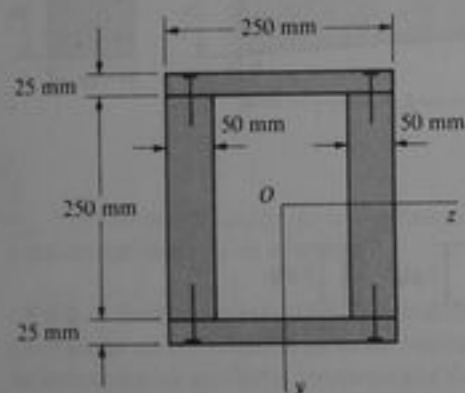
Prob. 5.8-1



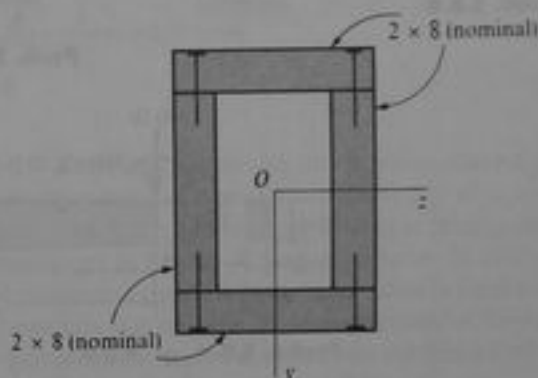
Prob. 5.8-2



Prob. 5.8-3



Prob. 5.8-4



Prob. 5.8-5

lb por cada uno. Calcular el espaciamiento longitudinal máximo permisible s de los tornillos, si la fuerza cortante V es 920 lb.

5.8-4 Una viga de madera se construye con dos tabloncillos de 50 mm \times 250 mm de sección transversal, unidos por dos tablas de 25 \times 250 mm (véase figura). Las tablas están clavadas a los tabloncillos con un espaciamiento longitudinal $s = 100$ mm. Si cada clavo tiene una fuerza cortante permisible $F = 1300$ N, ¿cuál es la fuerza cortante máxima permisible V ?

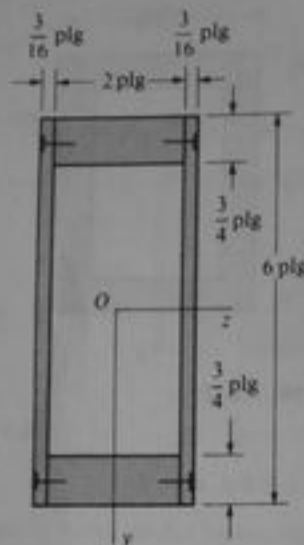
5.8-5 Una viga tipo caja de madera (véase figura) se construye con cuatro miembros de 2 plg \times 8 plg (dimensiones nominales). Si el espaciamiento longitudinal de los clavos es $s = 5$ plg y la carga permisible por clavo es $F = 400$ lb, calcular la fuerza cortante permisible V . (Nota: véanse en el Apéndice F las dimensiones reales de los miembros.)

5.8-6 Una viga hueca de madera con almas de madera laminada (triplay) tiene las dimensiones de sec-

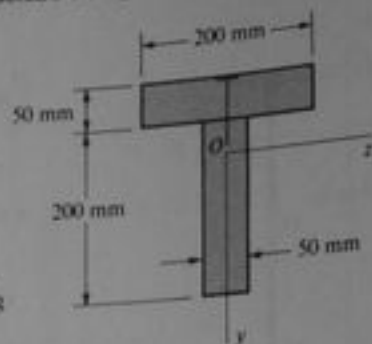
ción transversal mostradas en la figura. El triplay se fija a los listones por medio de pequeños clavos que tienen una carga permisible en cortante de 20 lb. Determinar el espaciamiento máximo permisible s de los clavos en secciones transversales donde la fuerza cortante es (a) 100 lb y (b) 200 lb.

5.8-7 Una viga de sección transversal en forma de T se construye al clavar dos tabloncillos que tienen las dimensiones mostradas en la figura. Si la fuerza cortante total V que actúa sobre la sección transversal es 1800 N y cada clavo puede resistir en cortante 800 N, ¿cuál es el espaciamiento máximo permisible s de los clavos?

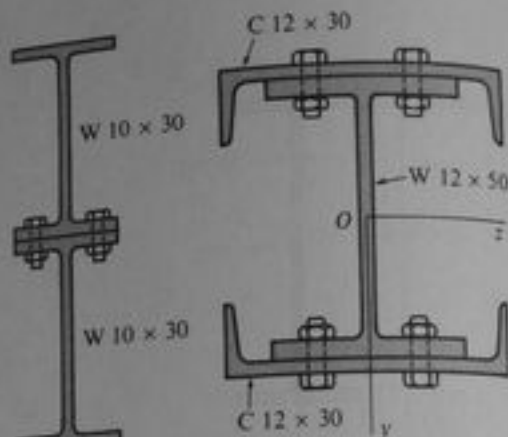
5.8-8 Dos vigas de acero de patín ancho W 10 \times 30 (véase Tabla E-1, Apéndice E) se atornillan una a otra para formar la viga compuesta mostrada en la figura. ¿Cuál es el espaciamiento máximo permisible s de los tornillos, si la fuerza cortante es $V = 20$ k y la



Prob. 5.8-6

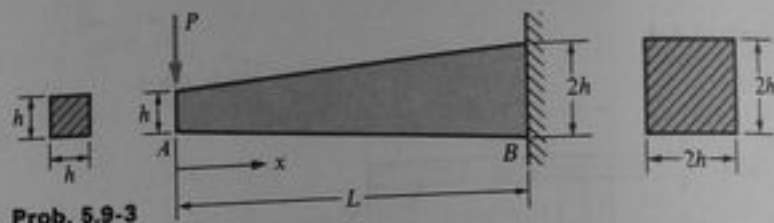


Prob. 5.8-7

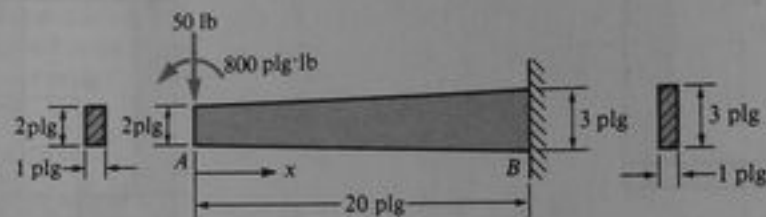


Prob. 5.8-8

Prob. 5.8-9



Prob. 5.9-3



Probs. 5.9-4 y 5.9-5

carga permisible en cortante sobre cada tornillo es $F = 3.1 \text{ k}$?

5.8-9 Una viga compuesta se construye con una sección de ala ancha $W 12 \times 50$ y dos secciones canal $C 12 \times 30$ (véase figura). Las secciones están unidas mediante pernos espaciados longitudinalmente 6 plg . ¿Cuál es la fuerza cortante máxima permisible V si cada perno puede soportar 2.4 k en cortante?

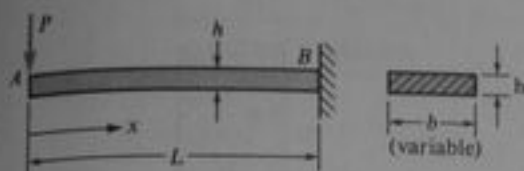
5.9-1 Una viga ahusada en voladizo AB de longitud L tiene secciones transversales circulares y soporta una carga concentrada P en su extremo libre (véase Fig. 5.35). El diámetro de la viga varía linealmente desde d_1 en el extremo libre, hasta d_2 en el extremo fijo. ¿A qué distancia x desde el extremo libre ocurre el esfuerzo máximo por flexión si $d_2/d_1 = 3$? ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo σ_{\max} ? ¿Cuál es la relación de este esfuerzo al máximo esfuerzo σ_s en el empotramiento?

5.9-2 ¿Para qué valores de la relación d_2/d_1 se presentará el esfuerzo normal máximo en el empotra-

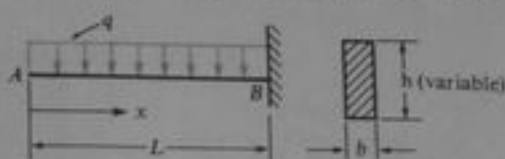
miento de la viga en voladizo mostrada en la Fig. 5-35?

5.9-3 Una viga ahusada en voladizo AB de longitud L tiene secciones transversales cuadradas y soporta una carga concentrada P en su extremo libre (véase figura). La anchura y altura de la viga varían linealmente desde h en el extremo libre hasta $2h$ en el extremo fijo. ¿Cuál es la distancia x desde el extremo libre a la sección de esfuerzo normal máximo debido a flexión? ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo σ_{\max} ? ¿Cuál es la relación de este esfuerzo al mayor esfuerzo σ_s en el empotramiento?

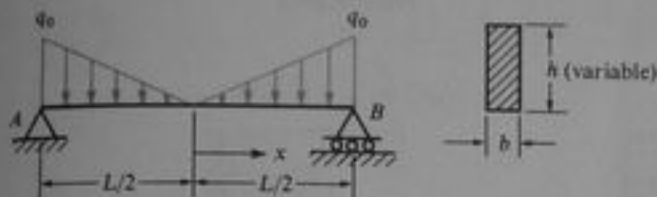
5.9-4 Una viga ahusada en voladizo AB de sección transversal rectangular está sometida a una carga concentrada y a un momento concentrado en su extremo libre, como se muestra en la figura. El ancho de la viga es constante e igual a 1 plg , pero la altura varía linealmente desde 2 plg en el extremo cargado hasta 3 plg en el soporte. ¿A qué distancia x desde el extremo libre ocurre el esfuerzo normal máximo σ_{\max} debido a la flexión? ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo



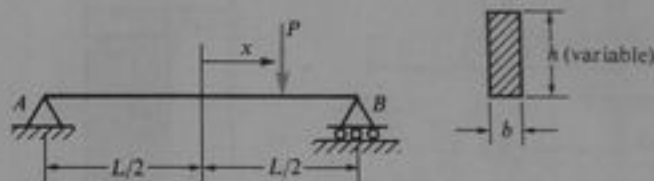
Prob. 5.9-6



Prob. 5.9-7



Prob. 5.9-8



Prob. 5.9-9

σ_{\max} ? ¿Cuál es la relación de este esfuerzo respecto al máximo esfuerzo σ_s en el apoyo?

5.9-5 Establecer los esfuerzos cortantes τ en la viga descrita en el problema anterior determinando los esfuerzos en las secciones transversales donde $x = 0$, 10 plg y 20 plg. Para cada una de estas secciones, trazar una gráfica que muestre cómo varía el esfuerzo cortante desde la parte superior hasta la parte inferior de la viga.

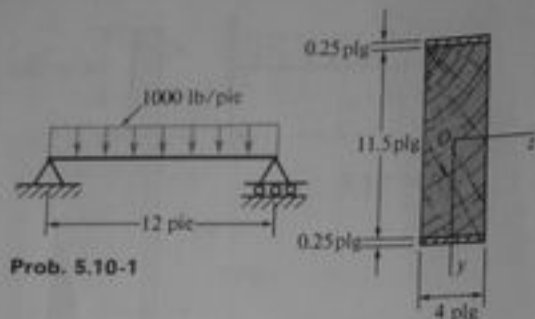
5.9-6 Una viga en voladizo AB de secciones transversales rectangulares con altura constante h y ancho variable b , se somete a una carga concentrada P en el extremo libre (véase figura). ¿Cómo debe variar el ancho b en función de x (medido desde el extremo libre de la viga) a fin de tener una viga completamente esforzada? (Considerar únicamente los esfuerzos normales debidos a flexión y suponer que el esfuerzo máximo permisible es σ_{perm} .)

5.9-7 Una viga en voladizo AB de secciones transversales rectangulares, con ancho constante b y altura variable h , se somete a una carga uniforme de intensidad q (véase figura). ¿Cómo debe variar la altura h en función de x (medida desde el extremo libre de la viga) a fin de tener una viga completamente esforzada? (Considerar únicamente los esfuerzos normales debidos a flexión, y suponer que el esfuerzo permisible es σ_{perm} .)

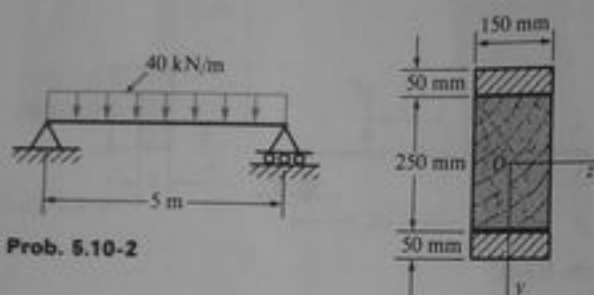
5.9-8 Una viga simple AB de secciones transversales rectangulares con ancho constante b y altura variable h , se somete al sistema de cargas triangulares mostrado en la figura. ¿Cómo debe variar la altura h en función de x (medida desde la mitad de la viga) a fin de tener una viga completamente esforzada? (Considerar únicamente los esfuerzos normales debidos a flexión y suponer que el esfuerzo permisible es σ_{perm} .)

5.9-9 Una viga simple AB que soporta una carga concentrada P (véase figura) tiene secciones transversales rectangulares con ancho constante b y altura variable h . La carga concentrada puede actuar en cualquier punto a lo largo del claro de la viga. ¿Cómo debe variar la altura h de la viga en función de x (medida desde el centro de la viga) a fin de minimizar el peso de la viga? (Considerar únicamente los esfuerzos normales debidos a flexión y suponer que el esfuerzo permisible es σ_{perm} .)

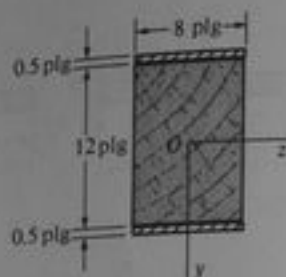
5.10-1 Una viga simple de 12 pie de longitud soporta una carga uniforme total de intensidad 1000 lb/pie (véase figura). La viga consiste en un miembro de madera de 4 plg \times 11.5 plg (dimensiones reales), reforzado por placas de acero de 0.25 plg de espesor en las caras superior e inferior. Los módulos de elasticidad para el acero y la madera son $E_s = 30 \times 10^6$ psi y $E_m = 1.5 \times 10^6$ psi, respectivamente. Calcular el esfuerzo máximo σ_s en las placas de acero y el esfuerzo máximo σ_m en el miembro de madera.



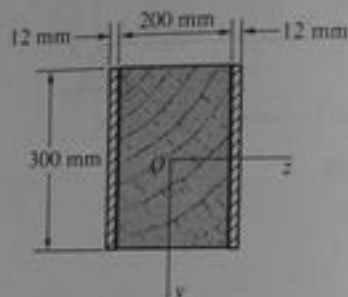
Prob. 5.10-1



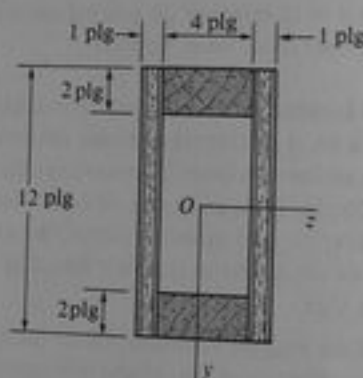
Prob. 5.10-2



Prob. 5.10-3



Prob. 5.10-4



Prob. 5.10-5

5.10-2 La viga compuesta mostrada en la figura está simplemente apoyada y soporta una carga uniforme total de 40 kN/m sobre una longitud de claro de 5 m. La viga se construye a partir de un miembro de madera que tiene dimensiones de sección transversal de 150 mm \times 250 mm y dos placas de acero de 50 mm \times 150 mm. Determinar los esfuerzos máximos σ_x y σ_y en el acero y la madera, respectivamente, si los módulos de elasticidad son $E_s = 209$ GPa y $E_w = 11$ GPa.

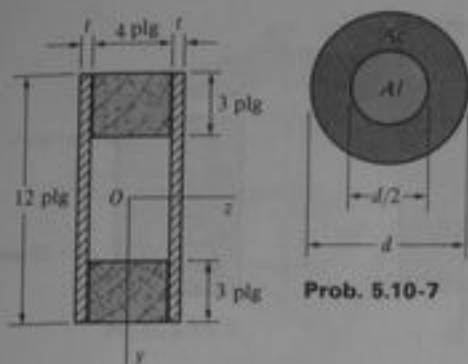
5.10-3 Una viga de madera de 8 plg de ancho y 12 plg de altura (dimensiones reales) se refuerza en ambas caras, superior e inferior, con placas de acero de 0.5 plg de espesor (véase figura). Determinar el momento flexionante permisible M_{\max} respecto del eje z , si el esfuerzo permisible en la madera es 1,000 psi y en el acero 16,000 psi. (Suponer que la relación entre los módulos de elasticidad del acero y la madera es 20.)

5.10-4 Una viga de madera de dimensiones 200 mm \times 300 mm se refuerza en sus costados por placas de acero de 12 mm de espesor (véase figura). Los módulos de elasticidad para el acero y la madera son $E_s = 204$ GPa y $E_w = 8.5$ GPa, respectivamente. También, los esfuerzos permisibles son $\sigma_s = 130$ MPa y $\sigma_w = 8$ MPa. Calcular el momento flexionante máximo permisible M_{\max} respecto del eje z .

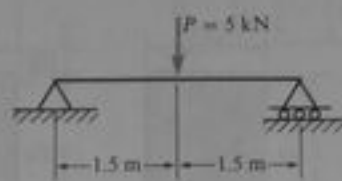
5.10-5 Una viga tipo cajón se construye con almas de triplay de abeto Douglas y patines de pino, como

se muestra en la figura. El triplay es de 1 plg de espesor \times 12 plg de ancho; los patines son de 2 plg \times 4 plg (tamaño real). El módulo de elasticidad para el triplay es 1,600,000 psi y para el pino 1,200,000 psi. Si los esfuerzos permisibles son 2,000 psi para el triplay y 1,700 psi para el pino, determinar el momento flexionante permisible M_{\max} para la viga.

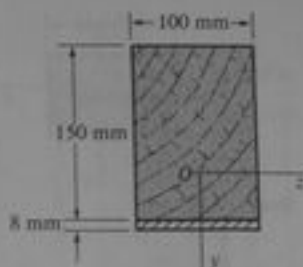
5.10-6 Una viga simple con un claro de 11 pie de longitud soporta una carga uniforme total de 3200 lb/pie. La sección transversal de la viga es del tipo cajón con patines de madera y almas de acero, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el espesor requerido t de las placas de acero si los esfuerzos permisibles son



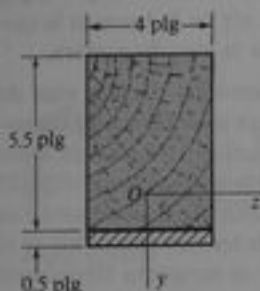
Prob. 5.10-7



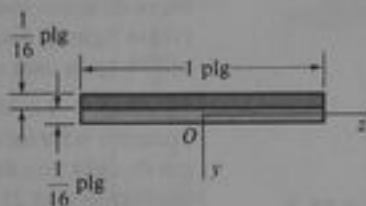
Prob. 5.10-8



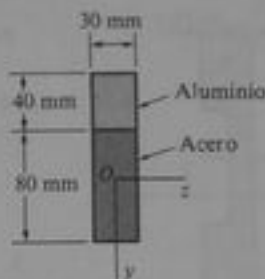
Prob. 5.10-6



Prob. 5.10-9



Prob. 5.10-10



Prob. 5.10-11

18,000 psi para el acero y 1,200 psi para la madera? (Suponer que los módulos de elasticidad para el acero y la madera son 30×10^6 y 1.5×10^6 psi, respectivamente.)

5.10-7 Un tubo redondo de acero con diámetro exterior d y un núcleo de aluminio de diámetro $d/2$, se unen para formar una viga compuesta, como se muestra en la figura. Obtener una fórmula para el momento flexionante permisible M que puede soportar la viga si se considera un esfuerzo permisible en el acero de σ_a . (Suponer que los módulos de elasticidad para el acero y el aluminio son E_a y E_{al} , respectivamente.)

5.10-8 Una viga compuesta simplemente apoyada de 3 m de longitud, soporta una carga $P = 5$ kN a la mitad del claro (véase figura). La viga se construye con un miembro de madera de 100 mm de ancho y 150 mm de altura, reforzado en su lado inferior por una placa de acero de 8 mm de espesor y 100 mm de ancho. Determinar los esfuerzos de flexión máximos σ_a y σ_m en el acero y la madera, respectivamente, debidos a la carga P si el módulo de elasticidad es $E_m = 10$ GPa para la madera y $E_a = 210$ GPa para el acero.

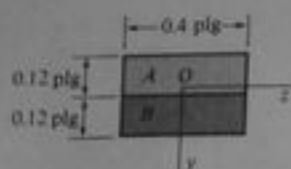
5.10-9 Una viga compuesta, hecha de madera y acero, tiene las dimensiones de sección transversal

mostradas en la figura. La viga está simplemente apoyada, tiene un claro de 10 pie de longitud y actúa en su punto medio una carga concentrada $P = 2000$ lb. Calcular los esfuerzos por flexión máximos σ_a y σ_m en el acero y la madera, respectivamente, debidos a la carga P si $E_a/E_m = 20$.

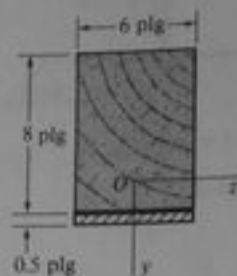
5.10-10 Una tira bimetalica empleada en un interruptor de control de temperatura consiste en dos láminas de aluminio y cobre unidas entre sí (véase figura). El ancho de la tira es de 1 plg y cada lámina tiene un espesor de $1/16$ plg. Bajo la acción de un momento flexionante $M = 10$ plg-lb, ¿cuáles son los esfuerzos máximos σ_a y σ_c en el aluminio y el cobre, respectivamente? (Suponer $E_a = 10,000,000$ psi y $E_c = 17,000,000$ psi.)

5.10-11 La sección transversal de una viga compuesta hecha de aluminio y acero se muestra en la figura. Los módulos de elasticidad son $E_{al} = 70$ GPa y $E_a = 210$ GPa. Bajo la acción de un momento flexionante que produce un esfuerzo máximo de 60 MPa en el aluminio, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_a en el acero?

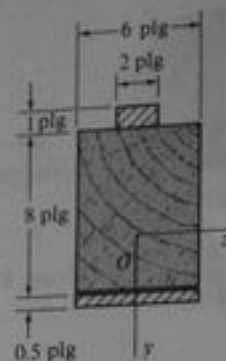
5.10-12 La sección transversal de una tira bimetalica se muestra en la figura. Si se supone que los módulos de elasticidad para los metales A y B son $E_a = 42 \times 10^6$ psi y $E_b = 21 \times 10^6$ psi, respectivamente, determinar los dos módulos de sección mínimos para la



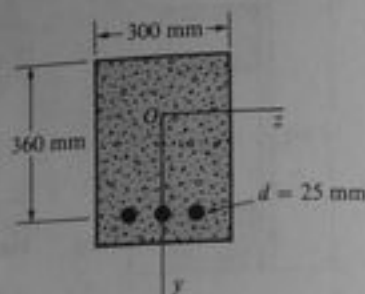
Prob. 5.10-12



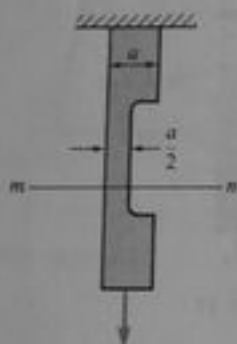
Prob. 5.10-13



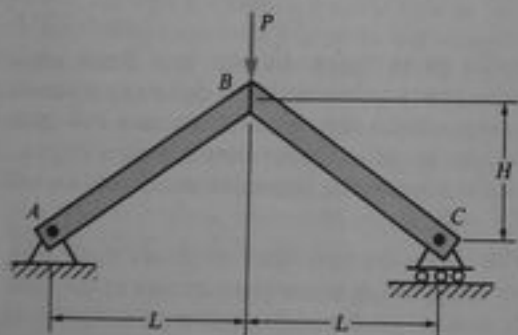
Prob. 5.10-14



Prob. 5.10-15



Probs. 5.11-1 y 5.11-2



Probs. 5.11-3 y 5.11-4

viga (esto es, la relación del momento flexionante al esfuerzo por flexión máximo). ¿En cuál material ocurre el esfuerzo máximo?

5.10-13 Una viga compuesta se construye de una viga de madera de 6 plg de ancho y 8 plg de altura (dimensiones reales), reforzada en la cara inferior por una placa de acero de $1/2$ plg \times 6 plg (véase figura). El módulo de elasticidad para la madera es $E_w = 1.5 \times 10^6$ psi y para el acero es $E_a = 30 \times 10^6$ psi. Determinar el momento flexionante permisible M_{\max} para la viga si el esfuerzo permisible en la madera es $\sigma_w = 2,000$ psi y en el acero es $\sigma_a = 16,000$ psi.

5.10-14 Resolver el problema anterior si se agrega un refuerzo en la cara superior de la viga en forma de una

barra de acero que tiene una sección de 1 plg \times 2 plg (véase figura). La cara de 2 plg de la barra es la que apoya en la cara superior de la viga de madera.

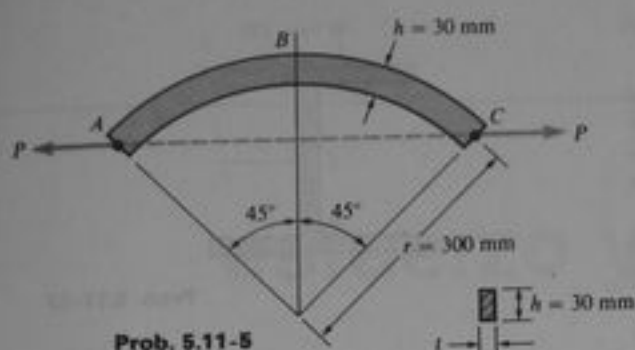
***5.10-15** La sección transversal de una viga de concreto reforzado se muestra en la figura. El diámetro de cada una de las tres varillas (o barras) de acero para refuerzo es 25 mm y la relación modular $n = 12$. El esfuerzo de compresión permisible en el concreto es $\sigma_c = 12$ MPa y el esfuerzo de tensión permisible en el acero es 110 MPa. Calcular el momento flexionante máximo permisible M_{\max} para esta viga. (Suponer que el concreto únicamente resiste compresión, y considerar que el área de las varillas de acero está concentrada en una línea horizontal a una distancia de 360 mm por debajo de la cara superior de la viga.)

5.11-1 El área transversal de una barra que tiene secciones cuadradas en los extremos, se reduce a la mitad en una zona cercana a su centro recortando una muesca, como se muestra en la figura. Determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos σ_t y σ_c , respectivamente, en la sección mn dentro de la sección reducida de la barra, debidos a una carga P que actúa en el centroide de la sección transversal extrema.

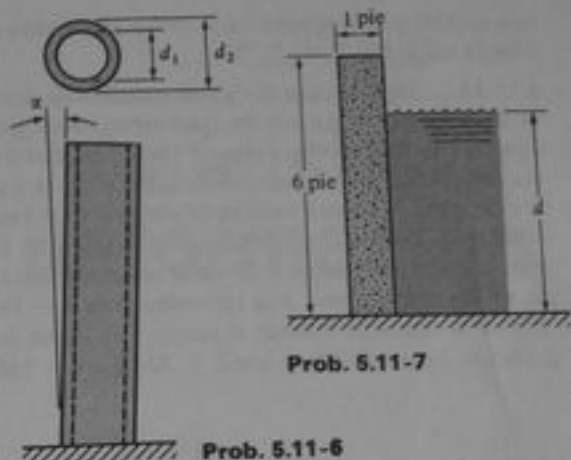
5.11-2 Resolver el problema anterior si la barra tiene una sección transversal circular de diámetro a en los extremos y una sección transversal semicircular cerca de su parte media.

5.11-3 Un bastidor ABC se construye soldando entre sí dos tubos de aluminio en B (véase figura). Cada tubo tiene un área de sección transversal $A = 16.1$ plg², momento de inercia $I = 212$ plg⁴ y diámetro exterior $d = 10.75$ plg. Determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos en el bastidor debidos a la carga P , si $P = 3000$ lb, $L = 6$ pie y $H = 4.5$ pie.

5.11-4 Dos tubos de acero se sueldan entre sí para formar un bastidor ABC , como se muestra en la figura.



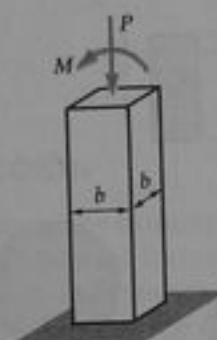
Prob. 5.11-5



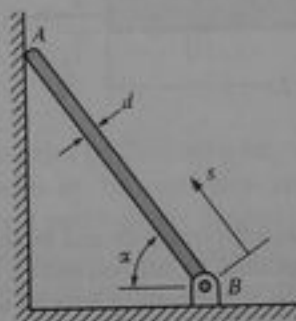
Prob. 5.11-6



Prob. 5.11-8



Prob. 5.11-9



Prob. 5.11-10

Cada tubo tiene un diámetro interior de 160 mm y un diámetro exterior de 200 mm. Si se supone $H = L = 1.4$ m y $P = 8$ kN, calcular los esfuerzos de tensión y compresión máximos en el bastidor debidos a la carga P .

5.11-5 Una barra curva ABC que tiene su eje circular (radio $r = 300$ mm) está cargada por fuerzas $P = 1600$ N, como se muestra en la figura. La sección transversal de la barra es rectangular con una altura $h = 30$ mm. Si el esfuerzo máximo en la barra se limita a 80 MPa, ¿cuál es el espesor mínimo t requerido?

5.11-6 Una torre cilíndrica circular con altura h , diámetro interior d_1 y diámetro exterior d_2 , empieza a inclinarse ligeramente (véase figura). ¿Cuál es el ángulo de inclinación máximo permisible α desde la vertical a fin de que no se produzca tensión en la torre? (Considerar que la única carga es el peso propio de la torre.)

5.11-7 Un muro plano de concreto de 6 pie de altura \times 1 pie de espesor, se apoya sobre una cimentación firme y sirve como una pequeña compuerta (véase figura). (a) Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la base del muro cuando el nivel del agua alcanza la cima de la compuerta ($d = 6$ pie).

Suponer que el concreto pesa 145 lb/pie³. (b) ¿Cuál es la altura máxima permisible del agua a fin de que no exista tensión en el concreto?

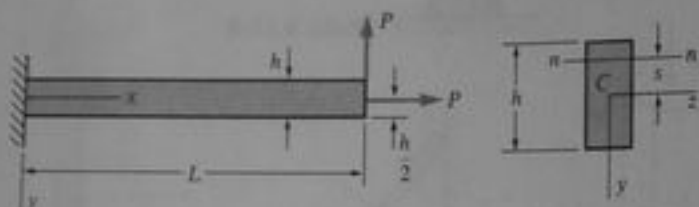
5.11-8 Una barra maciza de sección transversal circular está sometida a una fuerza axial de tensión $T = 6,000$ lb y a un momento flexionante $M = 28,000$ plg·lb (véase figura). Si se considera un esfuerzo de tensión permisible de 18,000 psi, ¿cuál es el diámetro requerido d de la barra?

5.11-9 Un pilar cuadrado está sometido a una fuerza de compresión $P = 3500$ kN y a un momento flexionante $M = 85$ kN·m (véase figura). ¿Cuál es la dimensión requerida b del pilar si los esfuerzos permisibles son 18 MPa en compresión y 6 MPa en tensión? (Despreciar el peso propio del pilar.)

5.11-10 Una barra circular maciza AB de diámetro d , está articulada en B y soportada por una superficie vertical lisa (sin fricción) en el extremo A , como se muestra en la figura. (a) Obtener una fórmula para la distancia s desde el punto B hasta la sección transversal en la cual el esfuerzo de compresión, debido al peso de la varilla, es máximo. (Sea $L =$ longitud de la varilla y $\alpha =$ ángulo entre el eje de la varilla y la horizontal.) (b) Para $L = 2$ m y $d = 0.2$ m, trazar

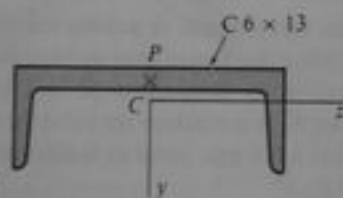
una gráfica que muestre cómo varía s en función del ángulo α .

5.11-11 Suponer que la viga en voladizo mostrada en la figura tiene una sección transversal rectangular de altura h . Cuando las cargas P tienen las direcciones mostradas en la figura, el eje neutro nn en cada sección transversal está localizado por encima del centroide de la sección transversal, como se muestra. Representar por s la distancia desde el centroide hasta el eje neutro. (a) Obtener una expresión para s en función de la distancia x desde el apoyo. (b) Trazar una gráfica de s para el caso en que $L = 30$ plg y $h = 3$ plg.



Prob. 5.11-11

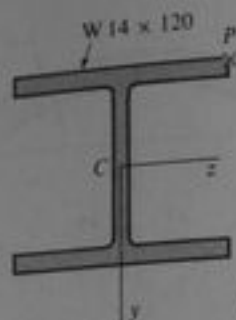
5.11-12 Un pequeño tramo de una sección canal $C 6 \times 13$ (véase Apéndice E) está sometido a una fuerza axial de compresión P que tiene su línea de acción en el punto medio del alma del canal (véase figura). Si se considera un esfuerzo de compresión permisible de 12,000 psi, determinar la carga máxima permisible P_{\max} .



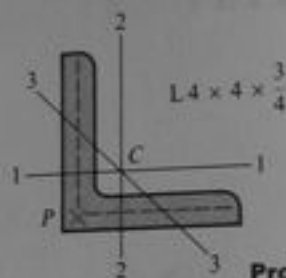
Prob. 5.11-12

5.11-13 Una columna corta construida con un perfil $W 14 \times 120$ (véase Apéndice E) está sometida a una carga de compresión $P = 60$ k, cuya línea de acción está situada en una de las esquinas externas de la sección transversal (véase figura). Determinar los esfuerzos de tensión y compresión máximos σ_t y σ_c en la columna.

5.11-14 Un miembro de tensión construido con una sección angular $L 4 \times 4 \times 3/4$ (véase Apéndice E), está sometido a una carga de tensión $P = 15$ k, que actúa a través del punto de intersección de las dos líneas medias de los brazos (véase figura). ¿Cuál es el esfuerzo de tensión máximo σ , en el elemento?



Prob. 5.11-13



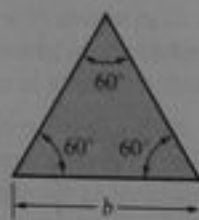
Prob. 5.11-14



Prob. 5.11-15



Prob. 5.11-16



Prob. 5.11-17

5.11-15 Demostrar que el núcleo de una sección transversal circular de radio r (véase figura) es un círculo concéntrico de radio $r/4$.

5.11-16 Demostrar que el núcleo de una sección circular hueca con radio exterior r_2 y radio interior r_1 (véase figura) es un círculo de radio $r = (r_2^2 + r_1^2)/4r_2$. Demostrar también que el valor límite del radio del núcleo conforme r_1 se aproxima a r_2 (y en consecuencia, según la sección transversal toma la forma de un aro delgado) es $r_2/2$.

5.11-17 Determinar el núcleo de una sección transversal en forma de triángulo equilátero con lados de longitud b (véase figura).

5.11-18 Determinar el núcleo de un perfil estructural de acero $W 16 \times 57$ (véase Apéndice E).

Análisis de esfuerzo y deformación

6.1 INTRODUCCIÓN

Los esfuerzos normales y cortantes en vigas, ejes (o flechas) y barras pueden derivarse a partir de las diversas fórmulas tratadas en los capítulos anteriores. Por ejemplo, los esfuerzos en vigas pueden calcularse a partir de las fórmulas de la flexión y el cortante ($\sigma = My/I$ y $\tau = VQ/Ib$). Los esfuerzos representados por estas fórmulas básicas actúan sobre las secciones transversales de los miembros. En este capítulo trataremos los métodos para determinar los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre secciones inclinadas de los miembros. Para los casos especiales de esfuerzo uniaxial y cortante puro, en las secciones 2.7 y 3.4, respectivamente, obtuvimos expresiones para los esfuerzos sobre planos inclinados. Se determinó que los esfuerzos cortantes máximos para una barra cargada axialmente ocurren en planos inclinados a 45° , y los esfuerzos de tensión y compresión máximos para una barra en torsión también ocurren sobre planos a 45° . En forma similar, secciones inclinadas a lo largo de la viga pueden estar sometidas simultáneamente a esfuerzos normales y cortantes, y estos esfuerzos pueden ser mayores que los esfuerzos que actúan en una sección transversal. Con análisis de este tipo, se necesita un procedimiento más general para determinar los esfuerzos en planos inclinados.

El procedimiento requiere de **elementos esforzados** para representar el estado de esfuerzo en un punto dado de un cuerpo. Los elementos esforzados se trataron previamente en un contexto especializado (secciones 2.7 y 3.4), pero ahora los emplearemos de manera más formal. Por ejemplo, asociaremos un conjunto de ejes coordenados con cada posición de un elemento esforzado. El objetivo es obtener las relaciones de transformación que proporcionan las componentes de esfuerzo para cualquier orientación de estos ejes. En otras palabras, deseamos determinar los esfuerzos que actúan sobre los lados de un elemento esforzado girado a cualquier posición deseada, si se supone que se conocen los esfuerzos para la posición de referencia. Este proceso se conoce con nombres como **transformación de ejes** o **transformación de esfuerzos**, aunque debe destacarse que en un punto determinado sólo existe un estado de esfuerzos intrínseco, independientemente del elemento de esfuerzo que se utilice para describir tal estado. Esto es, cuando un elemento se gira desde una posi-

ción a otra, los esfuerzos que actúan sobre las *caras* del elemento son diferentes, pero aún representan el mismo estado de esfuerzo, es decir, el esfuerzo en el punto considerado. La situación es análoga a la representación de un vector por sus componentes. La fuerza se representa por componentes diferentes cuando los ejes coordenados se giran a una nueva orientación, pero sin modificación de la fuerza misma. Sin embargo, el estado de esfuerzo en un punto de un cuerpo es una magnitud más compleja que una fuerza, y las relaciones de transformación para esfuerzos son más complicadas que para vectores. En términos matemáticos, el esfuerzo se conoce como un *tensor*; otras magnitudes tensoriales en mecánica son las deformaciones y los momentos de inercia. Las similitudes entre las ecuaciones de transformación para esfuerzos, deformaciones y momentos de inercia se indican posteriormente en este capítulo.

6.2 ESFUERZO PLANO

Las condiciones de esfuerzo existentes en barras cargadas axialmente, barras en torsión y vigas son ejemplos de un estado de esfuerzo llamado **esfuerzo plano**. Para analizar el esfuerzo plano, consideremos el elemento infinitesimal mostrado en la Fig. 6-1a. Este elemento es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son paralelas a los ejes x , y , z . Las caras de los elementos se designan considerando las direcciones de sus normales salientes, como se explicó previamente en la Sección 1.6. De esta manera, la cara derecha del elemento en esta figura se designa como la cara x positiva, y la cara izquierda (oculta para el observador) se designa como la cara x negativa. Similarmente, la cara superior es la cara y positiva y la cara frontal es la cara z positiva.

En esfuerzo plano, sólo las caras x y y del elemento están sometidas a esfuerzos, y todos los esfuerzos actúan paralelos a los ejes x y y (Fig. 6-1a). Los símbolos para los esfuerzos tienen los siguientes significados. Un esfuerzo normal σ tiene un subíndice que identifica la cara sobre la cual actúa el esfuerzo. Por supuesto, en caras opuestas del elemento actúan esfuerzos normales iguales, indicando tensión un esfuerzo positivo. Un esfuerzo cortante τ tiene dos subíndices; el primero denota la cara sobre la cual actúa el esfuerzo y el segundo indica la dirección en tal cara. Así, el esfuerzo τ_{xy} actúa en la cara x en la dirección del eje y , y el esfuerzo τ_{yx} actúa en la cara y en la dirección del eje x . Un esfuerzo cortante es positivo cuando actúa sobre una cara positiva del elemento en la dirección positiva de un eje, y negativo, cuando actúa sobre una cara positiva en la dirección negativa de un eje. Por lo tanto, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} mostrados en las caras positivas x y y (Fig. 6-1a) son esfuerzos cortantes positivos. Similarmente, sobre una cara negativa del elemento, el esfuerzo cortante es positivo en la dirección negativa de un eje, por lo que los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} mostrados sobre las caras negativas x y y del elemento en la figura, también son positivos. Estos **signos convencionales** para esfuerzos cortantes se memorizan fácilmente mediante la regla de que, cuando las direcciones asociadas con los subíndices son más-más o menos-menos, el esfuerzo es positivo; cuando las direcciones son más-menos, el esfuerzo es negativo.

Los signos convencionales anteriores para esfuerzos cortantes concuerdan con el equilibrio estático del elemento, ya que sabemos que los esfuerzos cortantes en caras opuestas de un elemento deben ser de igual magnitud y dirección opuesta. Por lo que de acuerdo con los signos convencionales, un esfuerzo positivo τ_{xy} actúa hacia arriba en la cara positiva (Fig. 6-1a), y hacia abajo en la cara negativa. En forma si-

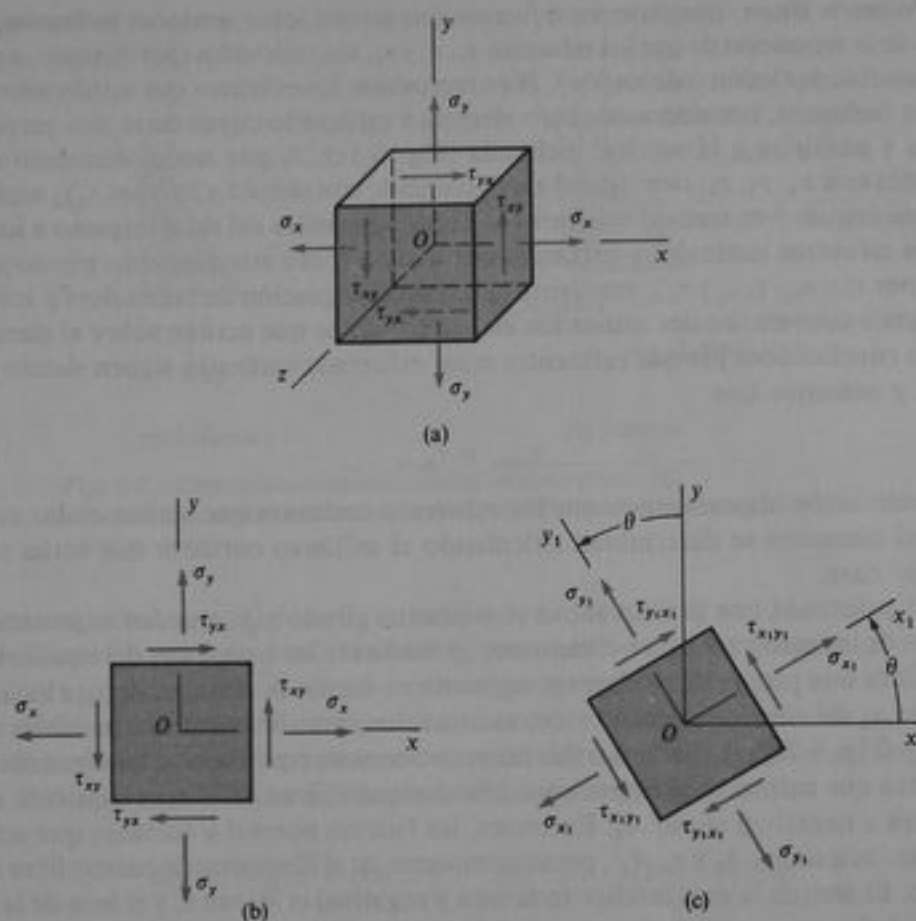


Fig. 6-1 Elementos en esfuerzo plano

milar, los esfuerzos τ_{yx} que actúan en las caras superior e inferior del elemento son positivos y tienen direcciones opuestas. Finalmente, cabe recordar que los esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares tienen la misma magnitud y direcciones tales que se dirigen a o se alejan de la línea de intersección de las caras. Dado que τ_{xy} y τ_{yx} son positivos en las direcciones mostradas en la figura, coinciden con esta observación. Por lo tanto, notamos que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (6-1)$$

Esta relación se obtuvo anteriormente a partir del equilibrio estático del elemento (véase Sección 1.6).

Por conveniencia en la esquematización de elementos esforzados planos, usualmente sólo se representa una vista bidimensional del elemento, como se muestra en la Fig. 6-1b. Aunque una figura de esta clase muestra claramente todos los esfuerzos que actúan sobre un elemento esforzado plano, debe siempre tenerse en cuenta que el elemento es un cuerpo sólido con un espesor constante y perpendicular al plano de la figura.

Podemos ahora considerar los esfuerzos que actúan sobre secciones inclinadas, partiendo de la suposición de que los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} son conocidos (por ejemplo, a partir de un análisis de flexión o de torsión). Para representar los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada, consideramos otro elemento esforzado cuyas caras son perpendiculares y paralelas a la sección inclinada (Fig. 6-1c). A este nuevo elemento están asociados ejes x_1 , y_1 , z_1 , tales que el eje z_1 coincide con el eje z y los ejes x_1, y_1 están girados un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a los ejes xy . Los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre este elemento girado se denotan por σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1y_1}$ y $\tau_{y_1x_1}$, mediante la misma designación de subíndices y los mismos signos convencionales utilizados en los esfuerzos que actúan sobre el elemento xy . Las conclusiones previas referentes a los esfuerzos cortantes siguen siendo aplicables, y notamos que

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{y_1x_1} \quad (6-2)$$

Una observación importante es que los esfuerzos cortantes que actúan en las cuatro caras del elemento se determinan calculando el esfuerzo cortante que actúa sobre cualquier cara.

Los esfuerzos que actúan sobre el elemento girado x_1y_1 pueden expresarse en términos de los esfuerzos sobre el elemento xy mediante las ecuaciones del equilibrio estático. Para este propósito se elige un segmento en forma de cuña, cuya cara inclinada es la cara x_1 del elemento girado y cuyas otras dos caras laterales son paralelas a los ejes x y y (Fig. 6-2a). A fin de escribir las ecuaciones de equilibrio se requiere obtener las fuerzas que actúan sobre estas caras. Se designa el área de la cara izquierda (esto es, la cara x negativa) como A_0 . Entonces, las fuerzas normal y cortante que actúan sobre esta cara son $\sigma_x A_0$ y $\tau_{xy} A_0$, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 6-2b. El área de la cara inferior (o la cara y negativa) es $A_0 \tan \theta$, y el área de la cara inclinada (o la cara x_1 positiva) es $A_0 \sec \theta$. Luego, las fuerzas normal y cortante que actúan sobre estas caras tienen las magnitudes y direcciones mostradas. Las cuatro fuerzas, que actúan sobre las caras izquierda e inferior, pueden resolverse ahora en componentes ortogonales que actúan en las direcciones x_1 y y_1 . Enseguida se suman las fuerzas con esas direcciones y se obtienen dos ecuaciones de equilibrio para el elemento. La primera ecuación, obtenida mediante la suma de fuerzas en la dirección x_1 , es

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} A_0 \sec \theta - \sigma_x A_0 \cos \theta - \tau_{xy} A_0 \sin \theta \\ - \sigma_y A_0 \tan \theta \sin \theta - \tau_{yx} A_0 \tan \theta \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

De igual manera, la suma de fuerzas en la dirección y_1 resulta

$$\begin{aligned} \tau_{x_1y_1} A_0 \sec \theta + \sigma_x A_0 \sin \theta - \tau_{xy} A_0 \cos \theta \\ - \sigma_y A_0 \tan \theta \cos \theta + \tau_{yx} A_0 \tan \theta \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Mediante la relación $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, y también al simplificar y reorganizando, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (6-3a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (6-3b)$$

Las Ecs. (6-3) proporcionan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el plano x_1 en función del ángulo de rotación θ y los esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy} que actúan sobre los planos x y y .

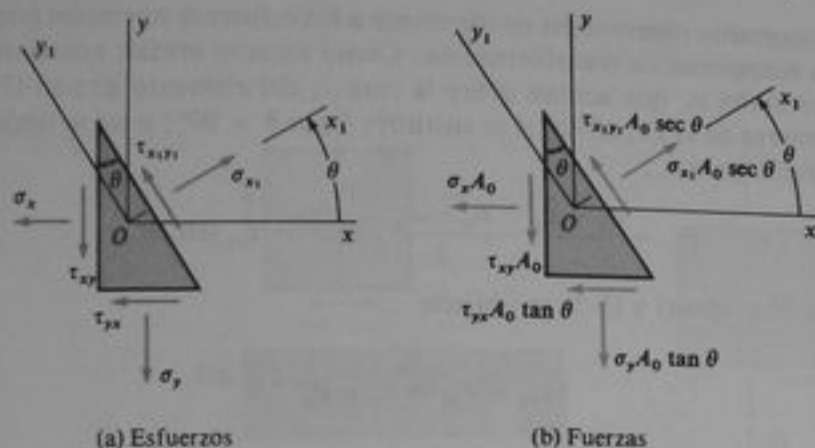


Fig. 6-2 Elemento en forma de cuña en esfuerzo plano: (a) esfuerzos que actúan sobre el elemento, y (b) fuerzas que actúan sobre el elemento

Para el valor especial $\theta = 0$, se nota que las Ecs. (6-3) resultan en $\sigma_{x_1} = \sigma_x$ y $\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy}$, como era de esperar. También, cuando $\theta = 90^\circ$, las ecuaciones resultan $\sigma_{x_1} = \sigma_y$ y $\tau_{x_1y_1} = -\tau_{xy}$. En el último caso, el eje x_1 es vertical, por lo que el esfuerzo $\tau_{x_1y_1}$ es positivo a la izquierda, lo que se opone a la dirección positiva de τ_{xy} .

Las Ecs. (6-3) pueden expresarse convenientemente, de modo optativo, en una forma útil introduciendo las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

Entonces, las ecuaciones resultan

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6-4a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6-4b)$$

Estas ecuaciones se utilizarán en la siguiente sección en la construcción del círculo de Mohr para esfuerzo plano.

Las ecuaciones para σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ se conocen como las **ecuaciones de transformación para esfuerzo plano**, porque transforman las componentes de esfuerzo de un conjunto de ejes a otro. Sin embargo, como se explicó previamente, el estado de esfuerzos intrínseco en el punto en consideración es el mismo, ya sea que se represente por los esfuerzos sobre el elemento xy o por el elemento girado x_1y_1 (Fig. 6-1). Las ecuaciones de transformación se obtuvieron únicamente de consideraciones de equilibrio; en consecuencia, son aplicables a esfuerzos en toda clase de material.

Una importante observación concerniente a los esfuerzos normales puede obtenerse de las ecuaciones de transformación. Como aspecto inicial, notamos que los esfuerzos normales σ_{y_1} que actúan sobre la cara y_1 del elemento girado (Fig. 6-1c) pueden obtenerse de la Ec. (6-4a) si se sustituye θ por $\theta + 90^\circ$; y así se obtiene la siguiente ecuación para σ_{y_1} :

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6-5)$$

Al sumar las Ecs. (6-4a) y (6-5) se obtiene

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y \quad (6-6)$$

Esta ecuación muestra que la suma de los esfuerzos normales que actúan sobre caras perpendiculares de un elemento bajo esfuerzo plano es constante, y por ende, independiente del ángulo θ .

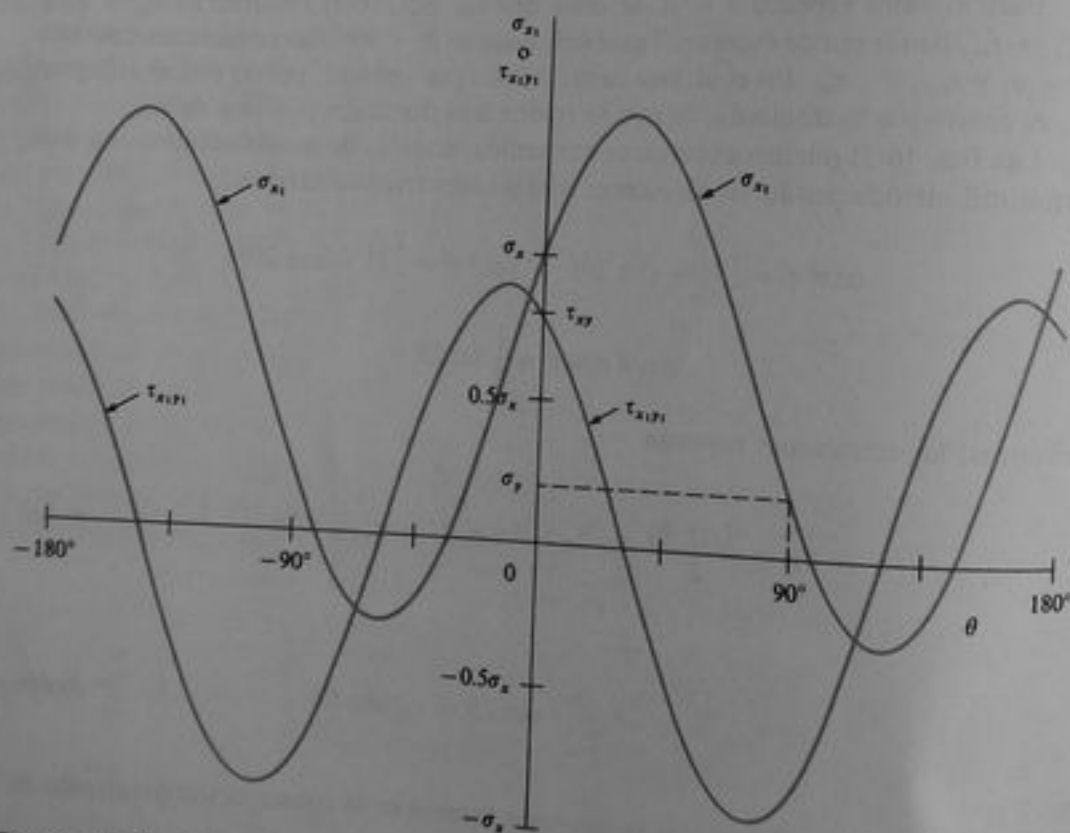


Fig. 6-3 Gráfica del esfuerzo normal σ_{x_1} y el esfuerzo cortante $\tau_{x_1y_1}$ en función del ángulo θ (para $\sigma_y = 0.2\sigma_x$ y $\tau_{xy} = 0.8\sigma_x$)

La forma general en que varían los esfuerzos normal y cortante se muestra en la Fig. 6-3, que es una gráfica de σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ en función del ángulo de rotación θ (Ecs. 6-3). La gráfica está trazada para el caso particular de $\sigma_y = 0.2\sigma_x$ y $\tau_{xy} = 0.8\sigma_x$. En ella se aprecia que los esfuerzos varían continuamente según se gira el elemento. Para

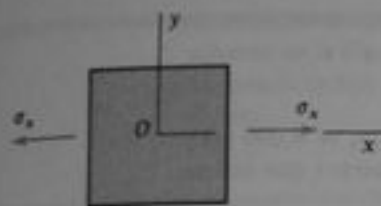


Fig. 6-4 Esfuerzo uniaxial

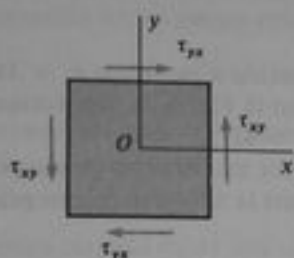


Fig. 6-5 Cortante puro

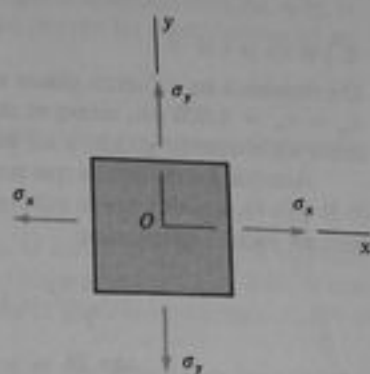


Fig. 6-6 Esfuerzo biaxial

ciertos ángulos de rotación, el esfuerzo normal alcanza valores máximo o mínimo; para otros valores se vuelve cero. De igual modo, el esfuerzo cortante tiene valores máximo, mínimo y nulo para ciertos ángulos. Un estudio más minucioso de estos valores especiales de los esfuerzos se realiza en la siguiente sección. Por supuesto, las curvas mostradas en la Fig. 6-3 se modifican si los valores relativos de los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} se alteran.

El caso general de esfuerzo plano se reduce a estados de esfuerzos más simples bajo condiciones especiales. Por ejemplo, si todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento xy (Fig. 6-1b) son nulos, con excepción del esfuerzo normal σ_x , entonces el elemento está en un estado de **esfuerzo uniaxial** (Fig. 6-4). Las ecuaciones de transformación correspondientes, obtenidas al igualar a cero σ_y y τ_{xy} en las Ecs. (6-3), son

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (6-7a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (6-7b)$$

Estas ecuaciones concuerdan con las obtenidas anteriormente en la Sección 2.7 (véanse Ecs. 2-33), excepto que ahora se emplea una notación más generalizada para los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado.

Otro caso especial es un estado de **esfuerzo cortante puro** (Fig. 6-5), cuyas ecuaciones de transformación se obtienen al sustituir $\sigma_x = 0$ y $\sigma_y = 0$ en las Ecs. (6-3):

$$\sigma_{x_1} = 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (6-8a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (6-8b)$$

Nuevamente, las ecuaciones corresponden a las obtenidas con anterioridad (véanse Ecs. 3-18 en la Sección 3.4).

El último caso especial es el estado de **esfuerzo biaxial**, una condición de esfuerzo en la que el elemento xy se somete a esfuerzos normales simultáneamente en las direcciones x y y , sin esfuerzos cortantes (Fig. 6-6). Las ecuaciones para esfuerzo biaxial se obtienen a partir de las Ecs. (6-3) o (6-4) eliminando los términos que contienen a τ_{xy} . El esfuerzo biaxial, que se presenta en recipientes de pared delgada sujetos a presión, se trata con mayor detalle en la Sección 6.6.

Ejemplo 1

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 16,000$ psi, $\sigma_y = 6,000$ psi y $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 4,000$ psi, como se muestra en la Fig. 6-7a. Determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado a un ángulo $\theta = 45^\circ$.

Aunque los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado pueden obtenerse de las Ecs. (6-3) o (6-4), usualmente es más conveniente la última para usos prácticos. Con los valores numéricos dados, obtenemos

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 11,000 \text{ psi} \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 5,000 \text{ psi}$$

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } 90^\circ = 1 \quad \text{cos } 2\theta = \text{cos } 90^\circ = 0$$

Al sustituir estos valores y $\tau_{xy} = 4,000$ psi en las Ecs. (6-4), obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen } 2\theta \\ &= 11,000 \text{ psi} + 5,000 \text{ psi}(0) + 4,000 \text{ psi}(1) = 15,000 \text{ psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{x_1y_1} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \text{cos } 2\theta \\ &= -5,000 \text{ psi}(1) + 4,000 \text{ psi}(0) = -5,000 \text{ psi} \end{aligned}$$

Adicionalmente, el esfuerzo σ_{y_1} puede obtenerse de la Ec. (6-5):

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \text{sen } 2\theta \\ &= 11,000 \text{ psi} - 5,000 \text{ psi}(0) - 4,000 \text{ psi}(1) = 7,000 \text{ psi} \end{aligned}$$

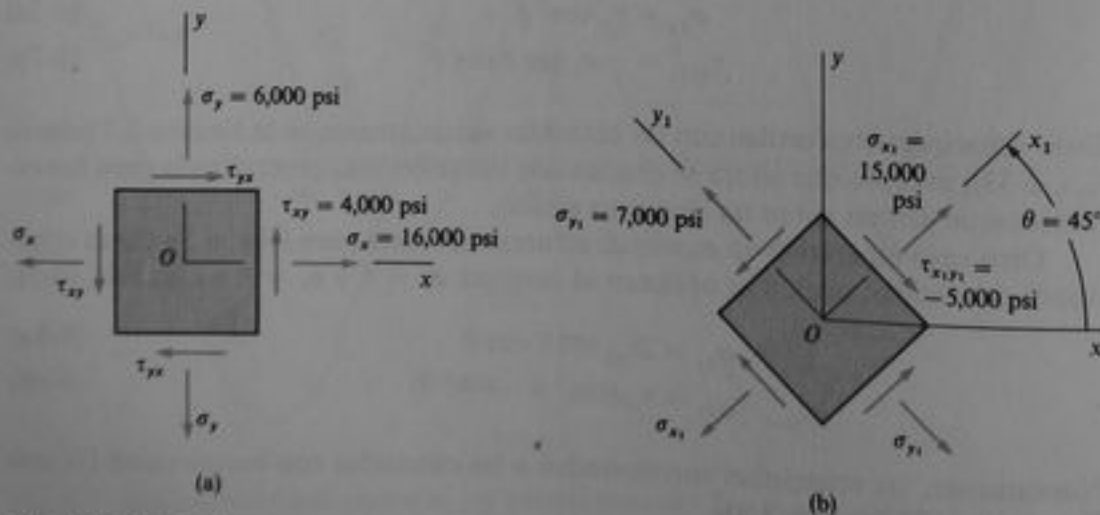


Fig. 6-7 Ejemplo 1

A partir de estos resultados, podemos obtener los esfuerzos que actúan sobre los lados de un elemento a $\theta = 45^\circ$, como se muestra en la Fig. 6-7b. Las flechas muestran las direcciones verdaderas en las cuales actúan los esfuerzos. Obsérvense especialmente las direcciones de los esfuerzos cortantes, todos los cuales tienen la misma magnitud. También, obsérvense que la suma

de los esfuerzos normales permanece constante e igual a 22,000 psi (Ec. 6-6). Las componentes de esfuerzo de la Fig. 6-7b representan el mismo estado de esfuerzo que el mostrado en la Fig. 6-7a; la diferencia radica en la orientación de los planos sobre los que actúan las componentes de esfuerzo.

Ejemplo 2

En un punto de una estructura cargada existe una condición de esfuerzo plano. Los esfuerzos tienen las magnitudes y direcciones mostradas en el elemento esforzado de la Fig. 6-8a. Calcular los esfuerzos que actúan sobre los planos obtenidos al girar el elemento un ángulo de 15° en el sentido de las manecillas del reloj.

Los esfuerzos que actúan sobre el elemento mostrado en la Fig. 6-8a tienen los valores siguientes:

$$\sigma_x = -46 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 12 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -19 \text{ MPa}$$

Un giro en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo de 15° sitúa al elemento en la posición mostrada en la Fig. 6-8b con el eje x_1 a un ángulo $\theta = -15^\circ$ respecto al eje x . (Oportativamente, el eje x_1 puede situarse a un ángulo $\theta = 75^\circ$.) Ahora podemos calcular fácilmente los esfuerzos sobre la cara x_1 del elemento girado mediante las Ecs. (6-4). Los cálculos se efectúan como sigue:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -17 \text{ MPa} \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -29 \text{ MPa}$$

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen}(-30^\circ) \quad \text{cos } 2\theta = \text{cos}(-30^\circ)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{cos } 2\theta + \tau_{xy} \text{sen } 2\theta \\ &= -17 \text{ MPa} - (29 \text{ MPa}) \text{cos}(-30^\circ) - (19 \text{ MPa}) \text{sen}(-30^\circ) \\ &= -32.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{x_1y_1} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \text{cos } 2\theta \\ &= (29 \text{ MPa}) \text{sen}(-30^\circ) - (19 \text{ MPa}) \text{cos}(-30^\circ) \\ &= -31.0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

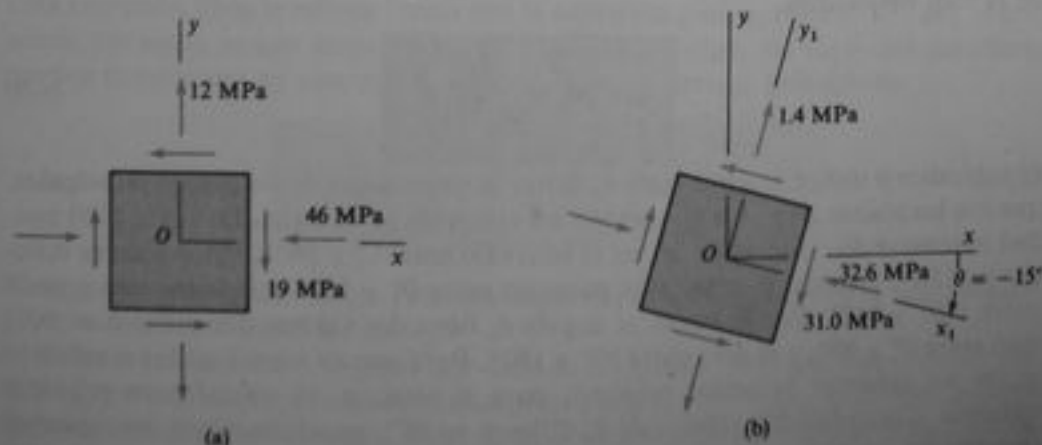


Fig. 6-8 Ejemplo 2

También, los esfuerzos normales que actúan sobre la cara y_1 (Ec. 6-5) son

$$\begin{aligned}\sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= -17 \text{ MPa} + (29 \text{ MPa}) \cos(-30^\circ) + (19 \text{ MPa}) \sin(-30^\circ) \\ &= -1.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Este esfuerzo puede calcularse también al sustituir $\theta = 75^\circ$ en la Ec. (6-4a). Nuevamente observamos que $\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$. Los esfuerzos que actúan sobre los planos inclinados se muestran en el elemento esforzado de la Fig. 6-8b, indicándose mediante flechas las direcciones verdaderas de los esfuerzos.

6.3 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS

Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano muestran que el esfuerzo normal σ_{x_1} y el esfuerzo cortante $\tau_{x_1 y_1}$ varían en forma continua según se gira el elemento un ángulo θ . Esta variación se ilustra en la Fig. 6-3 para una combinación de esfuerzos seleccionada. Con fines de diseño, usualmente son necesarios los valores máximos tanto positivos como negativos. Para determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo, que se conocen como **esfuerzos principales**, empezamos con la expresión para σ_{x_1} (Ec. 6-4a):

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6-4a)$$

repetida

Al tomar la derivada de σ_{x_1} con respecto a θ e igualarla a cero, obtenemos una ecuación que puede resolverse para los valores de θ para los cuales σ_{x_1} es máximo o mínimo. La ecuación se obtiene como sigue:

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad (a)$$

de la cual obtenemos

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6-9)$$

El subíndice p indica que el ángulo θ_p define la orientación de los **planos principales**, que son los planos sobre los que actúan los esfuerzos principales. De la Ec. (6-9) pueden obtenerse dos valores de $2\theta_p$ en el intervalo entre 0° y 360° . Estos valores difieren en 180° , estando el valor más pequeño entre 0° y 180° y el valor más grande entre 180° y 360° . Por lo tanto, el ángulo θ_p tiene dos valores que difieren en 90° , uno entre 0° y 90° , y el otro entre 90° y 180° . Para uno de estos ángulos el esfuerzo σ_{x_1} es un esfuerzo principal máximo; para el otro, σ_{x_1} es un esfuerzo principal mínimo. Como los dos valores de θ_p difieren en 90° , concluimos que *los esfuerzos principales ocurren en planos mutuamente perpendiculares*.

Los valores de los esfuerzos principales pueden calcularse fácilmente al sustituir cada uno de los dos valores de θ_p en la ecuación de transformación de esfuerzos (Ec. 6-4a) y despejar σ_x . Mediante este procedimiento podemos conocer también cuál de los dos esfuerzos principales se asocia a cada uno de los dos ángulos principales θ_p . Por supuesto, también es posible obtener fórmulas generales para los esfuerzos principales. Para hacerlo, de la Ec. (6-9) y la Fig. 6-9 se observa que

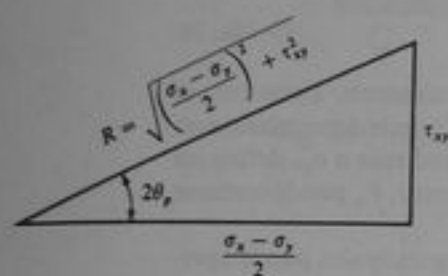


Fig. 6-9

$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad (6-10a,b)$$

$$\text{sen } 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

en donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6-11)$$

Cuando se calcula R , siempre se toma la raíz cuadrada positiva. Luego se sustituyen las expresiones para $\cos 2\theta_p$ y $\text{sen } 2\theta_p$ en la Ec. (6-4a) y se obtiene el valor algebraico mayor de los dos esfuerzos principales, denotado por σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

El más pequeño de los esfuerzos principales, denotado por σ_2 , puede determinarse a partir de la condición que

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \quad (6-12)$$

puesto que σ_1 y σ_2 actúan sobre planos perpendiculares. Al sustituir la expresión para σ_1 en la Ec. (6-12) y resolverla para obtener σ_2 , tenemos

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esta expresión tiene la misma forma que la expresión para σ_1 pero difiere por la presencia del signo menos antes de la raíz cuadrada. Luego, las fórmulas anteriores pueden combinarse en una sola fórmula para los esfuerzos principales:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6-13)$$

El signo positivo da el esfuerzo principal algebraicamente mayor σ_1 y el signo negativo, el esfuerzo principal menor σ_2 .

En resumen, los dos ángulos que definen los planos principales se denotan por θ_p y $\theta_{p'}$, correspondientes a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , respectivamente. Ambos ángulos pueden determinarse a partir de la ecuación para $\tan 2\theta_p$ (Ec. 6-9), pero de esa ecuación no es posible establecer cuál ángulo es $\theta_{p'}$, y cuál, θ_p . Un procedimiento

sencillo para determinarlo es tomar uno de los valores y sustituirlo en la ecuación para σ_n (Ec. 6-4a). El valor resultante de σ_n puede reconocerse como σ_1 o σ_2 , lo que así correlaciona los ángulos principales con los esfuerzos principales.

Otro método para correlacionar los ángulos y esfuerzos principales es mediante las Ecs. (6-10) para hallar θ_{p_1} , ya que el único ángulo que satisface ambas ecuaciones es θ_{p_1} . Luego, podemos replantear tales ecuaciones como sigue:

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad \text{sen } 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad (6-14a, b)$$

Sólo existe un ángulo entre 0° y 360° que satisface ambas ecuaciones. Entonces, el valor de θ_{p_1} correspondiente al esfuerzo principal máximo σ_1 , puede determinarse en forma única mediante las Ecs. (6-14). El ángulo θ_{p_2} , correspondiente a σ_2 , define un plano que es perpendicular al plano definido por θ_{p_1} . Por lo tanto, θ_{p_2} puede tomarse como 90° mayor o menor que θ_{p_1} .

Una característica importante concerniente a los planos principales puede apreciarse para los esfuerzos cortantes (Ec. 6-4b), la cual se repite aquí:

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6-4b) \text{ repetida}$$

Si igualamos a cero este esfuerzo (comparar con Ec. a) y resolvemos para el ángulo 2θ , obtenemos para $\tan 2\theta$ la misma expresión precedente (véase Ec. 6-9). Así, observamos que *los esfuerzos cortantes son nulos sobre los planos principales*.

Los planos principales para elementos en estados de esfuerzos axial y biaxial son los mismos planos x y y (Fig. 6-10), ya que $\tan 2\theta_p = 0$ (véase Ec. 6-9), y por consiguiente, los dos valores de θ_p son 0° y 90° .

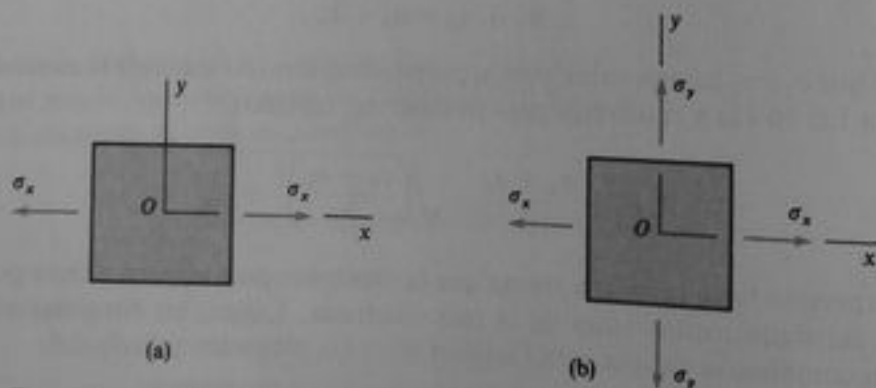


Fig. 6-10 Elementos en esfuerzo uniaxial y biaxial

Para un elemento en cortante puro (Fig. 6-11a), los planos principales están orientados a 45° respecto al eje x (Fig. 6-11b), ya que $\tan 2\theta_p$ es infinito y, por consiguiente, los dos valores de θ_p son 45° y 135° . Si τ_{xy} es positivo, los esfuerzos principales son $\sigma_1 = \tau_{xy}$ y $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ (véase Sección 3.4 para una explicación de cortante puro).

El estudio de esfuerzos principales anterior se refiere únicamente a la rotación del elemento esforzado en el plano xy (esto es, rotación alrededor del eje z) (Fig. 6-12a). Por lo tanto, los dos esfuerzos principales determinados a partir de la Ec. (6-13) algunas veces se denominan **esfuerzos principales en el plano**. No debemos pasar por

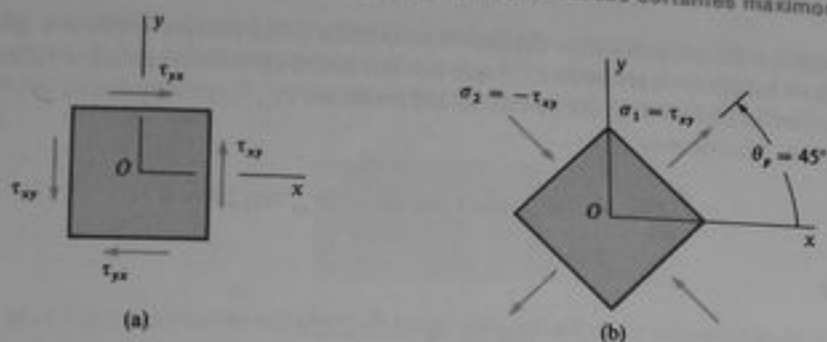


Fig. 6-11 Elemento en cortante puro

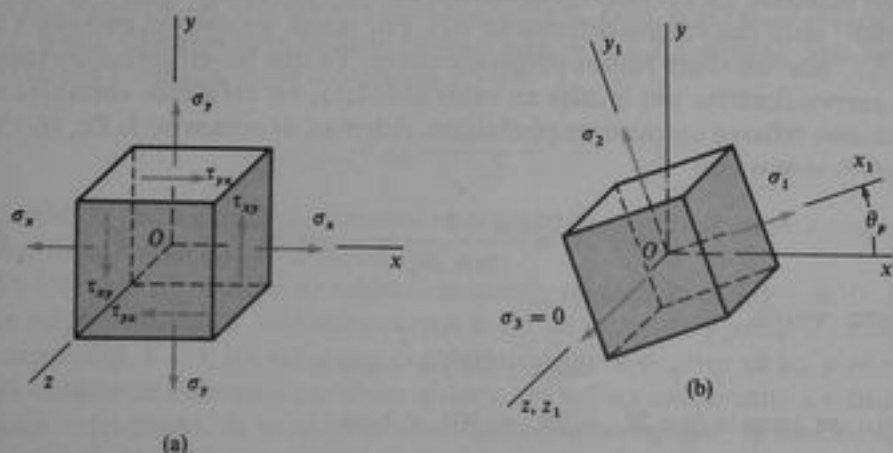


Fig. 6-12 Planos principales para un elemento en esfuerzo plano

alto que el elemento esforzado es, en realidad, tridimensional; consecuentemente, no tiene dos sino tres esfuerzos principales que actúan sobre tres planos mutuamente perpendiculares. Mediante un análisis tridimensional más completo, puede demostrarse que los tres planos principales para un elemento en esfuerzo plano son los dos planos principales que se han descrito, más la cara z del elemento. Estos planos principales se muestran en la Fig. 6-12b, donde el elemento esforzado de la Fig. 6-12a ha sido girado respecto al eje z un ángulo θ_p , que es uno de los dos ángulos determinados por la Ec. (6-9). Los esfuerzos principales son σ_1 , σ_2 y σ_3 , donde σ_1 y σ_2 resultan de la Ec. (6-13) y σ_3 es igual a cero. Por supuesto, σ_1 es algebraicamente mayor que σ_2 , pero σ_3 puede ser algebraicamente mayor o menor que σ_1 y/o σ_2 . Obsérvese nuevamente que no hay esfuerzos cortantes sobre los planos principales.*

Esfuerzos cortantes máximos. Ya determinados los esfuerzos normales máximos que actúan sobre un elemento en esfuerzo plano, ahora consideremos la

* La determinación de los esfuerzos principales es un ejemplo de un tipo de análisis matemático conocido como *análisis de los valores propios o valores característicos (eigenvalue)*, que se describe en textos de álgebra matricial (tales como en la Ref. 6-1). Las ecuaciones de transformación de esfuerzos y el concepto de esfuerzos principales se deben a los matemáticos franceses A. L. Cauchy (1789-1857) y Barré de Saint-Venant (1797-1886) y al científico e ingeniero escocés W. J. M. Rankine (1820-1872); véanse Refs. 6-2, 6-3 y 6-4, respectivamente.

determinación de los esfuerzos cortantes máximos y los planos sobre los que éstos actúan. Los esfuerzos cortantes $\tau_{x_1y_1}$, que actúan sobre elementos girados están representados por la Ec. (6-4b). Al tomar la derivada de $\tau_{x_1y_1}$, con respecto a θ y hacerla igual a cero, obtenemos

$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0 \quad (b)$$

de donde

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (6-15)$$

El subíndice s indica que el ángulo θ , define la orientación de los planos de esfuerzos cortantes máximos. La Ec. (6-15) proporciona un valor de θ , entre 0° y 90° , y otro entre 90° y 180° ; estos dos valores difieren en 90° . Por tanto, los valores máximo y mínimo de $\tau_{x_1y_1}$, ocurren sobre planos perpendiculares. Ya que los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares son iguales en valor absoluto, los esfuerzos cortantes máximo y mínimo difieren únicamente en el signo. Además, al comparar la Ec. (6-15) con la Ec. (6-9) vemos que

$$\tan 2\theta_s = -\frac{1}{\tan 2\theta_p} = -\cot 2\theta_p \quad (6-16)$$

Por trigonometría,

$$\tan(\alpha \pm 90^\circ) = -\cot \alpha$$

Por tanto, se aprecia que $2\theta_s = 2\theta_p \pm 90^\circ$, o bien

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ \quad (6-17)$$

Por tanto, podemos concluir que *los planos de esfuerzo cortante máximo ocurren a 45° de los planos principales.*

El plano del esfuerzo cortante algebraicamente máximo τ_{\max} está definido por el ángulo θ_{s_1} , para el cual podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\cos 2\theta_{s_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad \sin 2\theta_{s_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad (6-18a,b)$$

en donde R está dado por la Ec. (6-11). También, el ángulo θ_{s_1} , está relacionado con el ángulo θ_p , (véanse Ecs. 6-14) como sigue:

$$\theta_{s_1} = \theta_p - 45^\circ \quad (6-19)$$

El esfuerzo cortante máximo correspondiente se obtiene al sustituir las expresiones para $\cos 2\theta_{s_1}$, y $\sin 2\theta_{s_1}$, en la Ec. (6-4b), lo que resulta

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6-20)$$

El esfuerzo cortante algebraicamente mínimo τ_{\min} tiene la misma magnitud pero signo contrario.

Una expresión conveniente para el esfuerzo cortante máximo puede obtenerse a partir de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , los cuales resultan de la Ec. (6-13). Al restar la expresión para σ_2 de la expresión para σ_1 y comparar con la Ec. (6-20), se aprecia que

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (6-21)$$

Luego, el esfuerzo cortante máximo es igual a la mitad de la diferencia de los esfuerzos principales.

Sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos también actúan esfuerzos normales. El esfuerzo normal sobre el plano del esfuerzo cortante máximo puede evaluarse sustituyendo las expresiones para el ángulo θ_{s_1} (Ecs. 6-18) en la ecuación para σ_{s_1} (Ec. 6-4a). El esfuerzo resultante es igual a $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, que es el valor medio de los esfuerzos normales sobre los planos x y y :

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (6-22)$$

El esfuerzo σ_{med} actúa simultáneamente en el plano de esfuerzo cortante máximo y en el plano de esfuerzo cortante mínimo.

En los casos particulares de esfuerzo uniaxial y esfuerzo biaxial (Fig. 6-10), los planos de esfuerzo cortante máximo ocurren a 45° de los ejes x y y . En el caso de cortante puro (Fig. 6-11), los esfuerzos cortantes máximos ocurren en los planos x y y .

El análisis de esfuerzos cortantes anterior se refiere únicamente a esfuerzos localizados en el plano. Si se efectúa un **análisis tridimensional**, se puede establecer que existen tres posibles posiciones del elemento para esfuerzos cortantes máximos. Con referencia al elemento de esfuerzo plano de la Fig. 6-12b, que se ha girado a las direcciones principales, podemos obtener las tres posiciones mediante giros de 45° (no mostrados en la figura) respecto a los ejes x_1, y_1, z_1 . Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo correspondientes (véase Ec. 6-21) son

$$(\tau_{\max})_{x_1} = \pm \frac{\sigma_2}{2} \quad (\tau_{\max})_{y_1} = \pm \frac{\sigma_1}{2} \quad (\tau_{\max})_{z_1} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (6-23a,b,c)$$

Los valores algebraicos de σ_1 y σ_2 determinan cuál de estas expresiones da el esfuerzo cortante numéricamente máximo. Si σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo, entonces una de las dos primeras expresiones es numéricamente mayor; si tienen signos contrarios, entonces la última expresión proporciona el máximo valor.

Ejemplo

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 12,300$ psi, $\sigma_y = -4,200$ psi y $\tau_{xy} = -4,700$ psi, como se muestra en la Fig. 6-13a. (a) Determinar los esfuerzos principales y mostrarlos sobre un esquema de un elemento orientado adecuadamente. (b) Determinar los esfuerzos cortantes máximos y mostrarlos sobre un esquema de un elemento orientado adecuadamente. (Considerar únicamente los esfuerzos localizados en el plano.)

(a) *Esfuerzos principales.* Los ángulos principales θ_p que definen los planos principales pueden obtenerse mediante la Ec. (6-9):

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-4,700 \text{ psi})}{12,300 \text{ psi} - (-4,200 \text{ psi})} = -0.5697$$

de donde

$$2\theta_p = 150.3^\circ \quad \text{y} \quad \theta_p = 75.2^\circ$$

o

$$2\theta_p = 330.3^\circ \quad \text{y} \quad \theta_p = 165.2^\circ$$

Los esfuerzos principales se obtienen al sustituir los dos valores de $2\theta_p$ en la ecuación para σ_p , (Ec. 6-4a). Como cálculo preliminar, determinamos las siguientes cantidades:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{12,300 \text{ psi} - 4,200 \text{ psi}}{2} = 4,050 \text{ psi}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{12,300 \text{ psi} + 4,200 \text{ psi}}{2} = 8,250 \text{ psi}$$

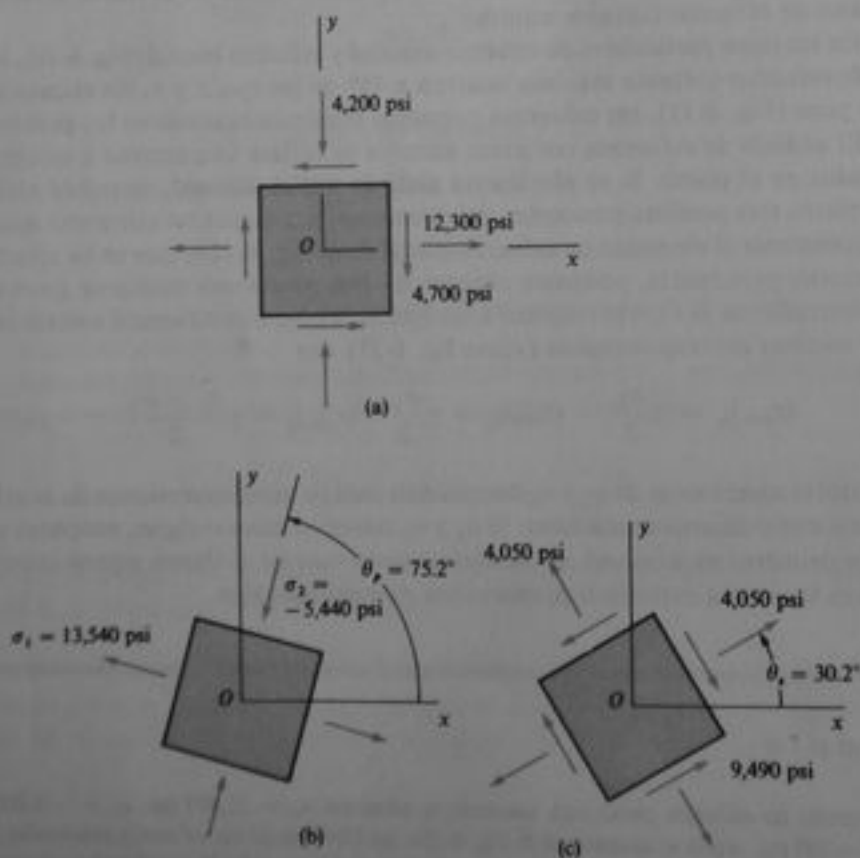


Fig. 6-13 Ejemplo. (a) Elemento en esfuerzo plano, (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos

Ahora, sustituyendo el primer valor de $2\theta_p$ en la Ec. (6-4a):

$$\begin{aligned}\sigma_{s_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= 4,050 \text{ psi} + (8,250 \text{ psi})(\cos 150.3^\circ) - (4,700 \text{ psi})(\sin 150.3^\circ) \\ &= -5,440 \text{ psi}\end{aligned}$$

En forma similar, sustituimos el segundo valor de $2\theta_p$ y obtenemos $\sigma_{s_1} = 13,540 \text{ psi}$. Luego, los esfuerzos principales y sus ángulos principales correspondientes son

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 13,540 \text{ psi} & \text{y} & \theta_{p_1} = 165.2^\circ \\ \sigma_2 &= -5,440 \text{ psi} & \text{y} & \theta_{p_2} = 75.2^\circ\end{aligned}$$

Nótese que θ_{p_1} y θ_{p_2} difieren en 90° y que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$. Los esfuerzos principales se muestran en la Fig. 6-13b actuando sobre un elemento esforzado girado. Por supuesto, sobre los planos principales no actúan esfuerzos cortantes.

Solución opcional. Los esfuerzos principales pueden calcularse directamente a partir de la Ec. (6-13):

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 4,050 \text{ psi} \pm \sqrt{(8,250 \text{ psi})^2 + (-4,700 \text{ psi})^2} \\ &= 4,050 \text{ psi} \pm 9,490 \text{ psi}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_1 = 13,540 \text{ psi} \quad \sigma_2 = -5,440 \text{ psi}$$

El ángulo θ_{p_1} del plano en que actúa σ_1 se obtiene de las Ecs. (6-14):

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_{p_1} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} = \frac{8,250 \text{ psi}}{9,490 \text{ psi}} = 0.8689 \\ \sin 2\theta_{p_1} &= \frac{\tau_{xy}}{R} = \frac{-4,700 \text{ psi}}{9,490 \text{ psi}} = -0.4950\end{aligned}$$

en donde hemos observado que el término R es la raíz cuadrada del cálculo anterior para σ_1 y σ_2 . El único ángulo entre 0° y 360° que satisface ambas condiciones es $2\theta_{p_1} = 330.3^\circ$, por lo que $\theta_{p_1} = 165.2^\circ$. Este ángulo está asociado con el esfuerzo principal algebraicamente mayor $\sigma_1 = 13,540 \text{ psi}$. El otro ángulo es 90° mayor o menor que θ_{p_1} ; en consecuencia, $\theta_{p_2} = 75.2^\circ$, con $\sigma_2 = -5,440 \text{ psi}$. Estos resultados concuerdan con los encontrados previamente.

(b) *Esfuerzos cortantes máximos.* Los esfuerzos cortantes máximos están dados por la Ec. (6-20):

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 9,490 \text{ psi}\end{aligned}$$

que ya se había calculado en la parte (a). El ángulo θ_s al plano que tiene el esfuerzo cortante máximo positivo se calcula con la Ec. (6-19):

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45^\circ = 165.2^\circ - 45^\circ = 120.2^\circ$$

316 Capítulo 6 • Análisis de esfuerzo y deformación

Resulta que el esfuerzo cortante negativo actúa sobre el plano para el cual $\theta_1 = 120.2^\circ - 90^\circ = 30.2^\circ$. Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos se calculan de la Ec. (6-22):

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 4,050 \text{ psi}$$

El elemento girado sometido a los esfuerzos cortantes máximos se muestra en la Fig. 6-13c.

Como un método optativo para determinar los esfuerzos cortantes máximos, podemos emplear la Ec. (6-15) para determinar los ángulos θ_1 y θ_2 , y entonces podemos utilizar la Ec. (6-4b) para obtener los esfuerzos cortantes correspondientes.

6.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO PLANO

Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (Ecs. 6-4) pueden representarse mediante una gráfica conocida como **círculo de Mohr**. Esta representación es extremadamente útil para apreciar las relaciones entre los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre ciertos planos inclinados en un punto del cuerpo esforzado. Para determinar el círculo de Mohr, reformulamos las Ecs. (6-4) como sigue:

$$\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6-4a)$$

repetida

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6-4b)$$

repetida

Estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de un círculo, con el ángulo 2θ como parámetro. Al elevar al cuadrado ambos lados de cada ecuación y sumarlos se elimina el parámetro; la ecuación resultante es

$$\left(\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (a)$$

Esta ecuación puede formularse en una forma más sencilla mediante la siguiente notación de la Sección 6.3:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6-24a,b)$$

La Ec. (a) resulta ahora

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{med}})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = R^2 \quad (6-25)$$

que es la ecuación de un círculo en coordenadas σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$. El círculo tiene radio R y su centro tiene coordenadas $\sigma_{x_1} = \sigma_{\text{med}}$ y $\tau_{x_1 y_1} = 0$.

Nuestra siguiente tarea es construir el círculo de Mohr a partir de las Ecs. (6-4) y (6-25). Para hacerlo, tomaremos σ_{x_1} como la abscisa y $\tau_{x_1 y_1}$ como la ordenada. Sin embargo, el círculo puede trazarse en dos formas diferentes. En la primera forma

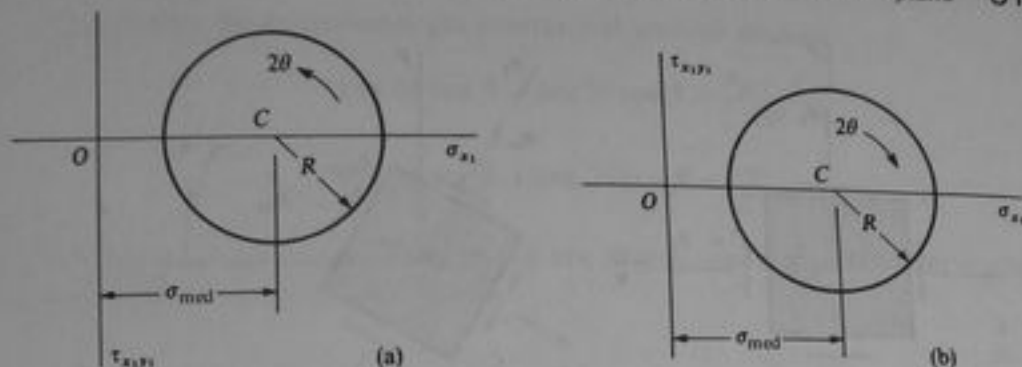


Fig. 6-14 Dos formas del círculo de Mohr: (a) $\tau_{x,y}$ es positivo hacia abajo y 2θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj; (b) $\tau_{x,y}$ es positivo hacia arriba y 2θ es positivo en el sentido de las manecillas del reloj. (Nota: la primera forma se utiliza en este libro.)

del círculo de Mohr, trazamos σ_x positivo a la derecha y $\tau_{x,y}$ positivo hacia abajo; entonces el ángulo 2θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj (Fig. 6-14a). En la segunda forma, $\tau_{x,y}$ es positivo hacia arriba y 2θ es positivo en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 6-14b). Ambas formas del círculo son matemáticamente correctas y concuerdan con las ecuaciones, por lo que elegir entre ellas es asunto de preferencias personales. Como el ángulo θ para el elemento esforzado es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase Fig. 6-1), podemos evitar errores adoptando la forma del círculo de Mohr en la que *el ángulo 2θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj* (sentido antihorario). Es así que optaremos por la primera forma del círculo de Mohr (Fig. 6-14a).

Se procede ahora a construir el círculo de Mohr para un elemento en esfuerzo plano (Figs. 6-15a y b). Los pasos son los siguientes: (1) Localizar el centro C del círculo en el punto de coordenadas $\sigma_x = \sigma_{med}$ y $\tau_{x,y} = 0$ (Fig. 6-15c). (2) Localizar el punto A , que es el punto sobre el círculo que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara x del elemento ($\theta = 0$); para este punto tenemos $\sigma_x = \sigma_x$ y $\tau_{x,y} = \tau_{xy}$. (3) Localizar el punto B , el cual representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara y del elemento ($\theta = 90^\circ$). Las coordenadas de este punto son $\sigma_x = \sigma_y$ y $\tau_{x,y} = -\tau_{xy}$, ya que cuando el elemento se gira un ángulo $\theta = 90^\circ$, el esfuerzo normal σ_x se vuelve σ_y y el esfuerzo cortante $\tau_{x,y}$ se vuelve el negativo de τ_{xy} . Obsérvese que una recta desde A hasta B pasa a través del centro C . Por lo que los puntos A y B , que representan los esfuerzos sobre planos a 90° uno del otro, están en los extremos opuestos del diámetro (separados 180° en el círculo). (4) Dibujar el círculo a través de los puntos A y B con centro en C .

Obsérvese que el radio R del círculo es la longitud de la recta CA . Para calcular esta longitud, observamos que las abscisas de los puntos C y A son $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ y σ_x , respectivamente. La diferencia en estas abscisas es $(\sigma_x - \sigma_y)/2$, como se muestra en la Fig. 6-15c. También, la ordenada del punto A es τ_{xy} . Por lo tanto, la recta CA representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un lado de longitud $(\sigma_x - \sigma_y)/2$, y otro lado de longitud τ_{xy} . Al calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los dos lados se obtiene R (véase Ec. 6-24b).

Determinemos ahora los esfuerzos que actúan sobre una cara inclinada del elemento orientado a un ángulo θ a partir del eje x (Fig. 6-15b). Sobre el círculo de Mohr, tomamos un ángulo 2θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del radio CA , ya que A es el punto para el cual $\theta = 0^\circ$. El ángulo 2θ ubica al

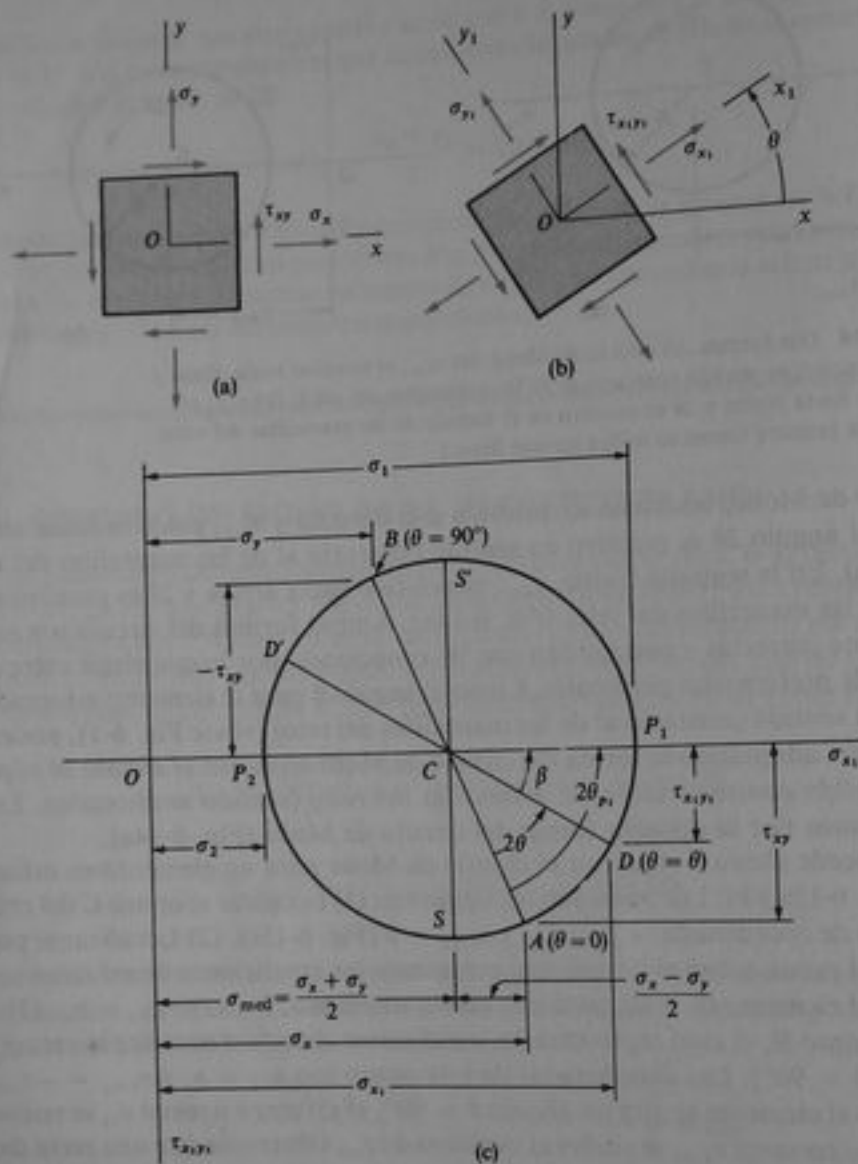


Fig. 6-15 Círculo de Mohr para esfuerzo plano

punto D sobre el círculo. Este punto tiene las coordenadas σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$, que representan los esfuerzos sobre la cara x_1 del elemento esforzado. Para demostrar que las coordenadas del punto D están dadas por las ecuaciones de transformación de esfuerzos (Ecs. 6-4), representamos por β el ángulo entre la línea radial CD y el eje σ_{x_1} . Luego, a partir de la geometría de la figura, obtenemos las cuatro relaciones siguientes:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos \beta \quad \tau_{x_1y_1} = R \operatorname{sen} \beta \quad (b)$$

$$\cos(2\theta + \beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad \operatorname{sen}(2\theta + \beta) = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Al desarrollar las expresiones del coseno y el seno se obtiene

$$\cos 2\theta \cos \beta - \sin 2\theta \sin \beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\sin 2\theta \cos \beta + \cos 2\theta \sin \beta = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Al multiplicar la primera ecuación por $\cos 2\theta$ y la segunda por $\sin 2\theta$, y sumar después ambas ecuaciones, obtenemos

$$\cos \beta = \frac{1}{R} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)$$

También, al multiplicar la primera ecuación por $\sin 2\theta$ y la segunda por $\cos 2\theta$ y luego restar, obtenemos

$$\sin \beta = \frac{1}{R} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right)$$

Cuando estas expresiones de $\cos \beta$ y $\sin \beta$ se sustituyen en las Ecs. (b), obtenemos las ecuaciones de transformación de esfuerzos (Ecs. 6-4). De este modo, hemos demostrado que el punto D sobre el círculo de Mohr, definido por el ángulo de 2θ , representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara x_1 del elemento esforzado, definido por el ángulo θ .

El punto D' , diametralmente opuesto al punto D , está localizado por un ángulo que es 180° mayor que el ángulo 2θ al punto D (véase Fig. 6-15c). Por lo tanto, el punto D' representa los esfuerzos sobre una cara del elemento esforzado a 90° desde la cara representada por el punto D ; en consecuencia, el punto D' proporciona los esfuerzos sobre la cara y_1 .

Según giramos el elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ (Fig. 6-15b), el punto correspondiente a la cara x_1 sobre el círculo de Mohr se traslada en sentido contrario al de las manecillas del reloj a través de un ángulo 2θ . De igual manera, si giramos el elemento en el sentido de las manecillas del reloj, el punto sobre el círculo se desplazará en este mismo sentido. En el punto P_1 sobre el círculo, los esfuerzos normales alcanzan su valor algebraico máximo y el esfuerzo cortante es cero. En consecuencia P_1 representa un plano principal. El otro plano principal, asociado con el valor algebraico mínimo del esfuerzo normal, está representado por el punto P_2 . A partir de la geometría del círculo, vemos que el esfuerzo principal mayor es

$$\sigma_1 = OC + CP_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

lo cual, al sustituir la expresión para R (Ec. 6-24b), concuerda con la Ec. (6-13). En forma similar, podemos verificar la expresión para σ_2 .

El ángulo principal θ_p , localizado entre el eje x y el plano del esfuerzo principal algebraicamente mayor para el elemento esforzado girado (Fig. 6-15b) es la mitad del ángulo $2\theta_p$, situado entre los radios CA y CP_1 sobre el círculo de Mohr. El coseno y el seno del ángulo $2\theta_p$, pueden determinarse mediante inspección a partir del círculo:

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad \text{sen } 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Estas expresiones concuerdan con las Ecs. (6-14). El ángulo $2\theta_{p_1}$, respecto al punto principal es 180° mayor que $2\theta_{p_2}$, por lo que $\theta_{p_2} = \theta_{p_1} + 90^\circ$.

Los puntos S y S' , que representan los planos de esfuerzos cortantes máximo y mínimo, están localizados sobre el círculo en ángulos de 90° respecto de los puntos P_1 y P_2 . Por lo tanto, los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales, según se explicó en la Sección 6.3. El esfuerzo cortante máximo es numéricamente igual al radio del círculo (compárese la Ec. 6-24b para R con la Ec. 6-20 para τ_{\max}). También, los esfuerzos normales sobre los planos de esfuerzo cortante máximo son iguales a la abscisa del punto C , que es el esfuerzo normal medio (véase Ec. 6-22).

De lo anterior, evidentemente se pueden determinar los esfuerzos sobre cualquier plano inclinado, así como los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, a partir del círculo de Mohr. El diagrama de la Fig. 6-15 se dibujó con σ_x y σ_y como esfuerzos positivos, pero se siguen los mismos procedimientos si uno o ambos esfuerzos son negativos. En tales casos, una parte o todo el círculo de Mohr se localizará a la izquierda del origen. Podemos observar también que el punto A , que representa los esfuerzos sobre el plano $\theta = 0^\circ$, puede situarse en cualquier lugar del círculo, lo que depende de los valores relativos de los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} . Sin embargo, el ángulo 2θ siempre se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del radio CA , sin importar dónde esté localizado el punto A .

También se puede utilizar el círculo de Mohr en forma inversa. Si conocemos los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} , que actúan sobre un elemento girado, así como el ángulo θ , podemos construir el círculo y determinar los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} para $\theta = 0$. El procedimiento es localizar los puntos D y D' a partir de los esfuerzos conocidos y luego dibujar el círculo empleando la línea DD' como diámetro. Al medir el ángulo 2θ en sentido negativo (esto es, en el sentido de las manecillas del reloj en vez de lo contrario) a partir del radio CD podemos localizar el punto A correspondiente a la cara x del elemento. Enseguida, localizamos el punto B trazando un diámetro desde A . Finalmente, empleamos las coordenadas de A y B para obtener los esfuerzos que actúan sobre todas las caras del elemento para el cual $\theta = 0$.

De hecho, es posible construir el círculo de Mohr a escala y, por medio del mismo, calcular los valores de esfuerzo; no obstante, es preferible efectuar cálculos numéricos para los esfuerzos mediante trigonometría y la geometría del círculo. El círculo de Mohr permite apreciar las relaciones entre los esfuerzos que actúan sobre planos a diversos ángulos y también sirve como recurso nemotécnico sencillo para obtener las ecuaciones de transformación de esfuerzos. Aunque muchas técnicas gráficas ya no se utilizan en el trabajo en ingeniería, el círculo de Mohr continúa siendo de gran valor porque proporciona una representación clara y simple de un análisis relativamente complicado. El círculo también es aplicable a transformaciones que involucran deformaciones bidimensionales y momentos de inercia de áreas planas, ya que estas magnitudes siguen las mismas leyes de transformación que los esfuerzos (véanse Sección 6.11 y Apéndice C, Sección C.7).*

* El círculo de Mohr recibe este nombre en honor al célebre ingeniero civil alemán Otto Christian Mohr (1835-1918), quien desarrolló tal círculo en 1882 (Ref. 6-5).

Ejemplo 1

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 15,000$ psi, $\sigma_y = 5,000$ psi y $\tau_{xy} = 4,000$ psi, como se muestra en la Fig. 6-16a. Mediante el círculo de Mohr, determinar (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 40^\circ$, (b) los esfuerzos principales, y (c) los esfuerzos cortantes máximos. Mostrar todos los resultados sobre esquemas de elementos orientados adecuadamente.

El centro C del círculo (Fig. 6-16b) se localiza sobre el eje σ_x , en el punto donde σ_x es igual a σ_{med} :

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{15,000 \text{ psi} + 5,000 \text{ psi}}{2} = 10,000 \text{ psi}$$

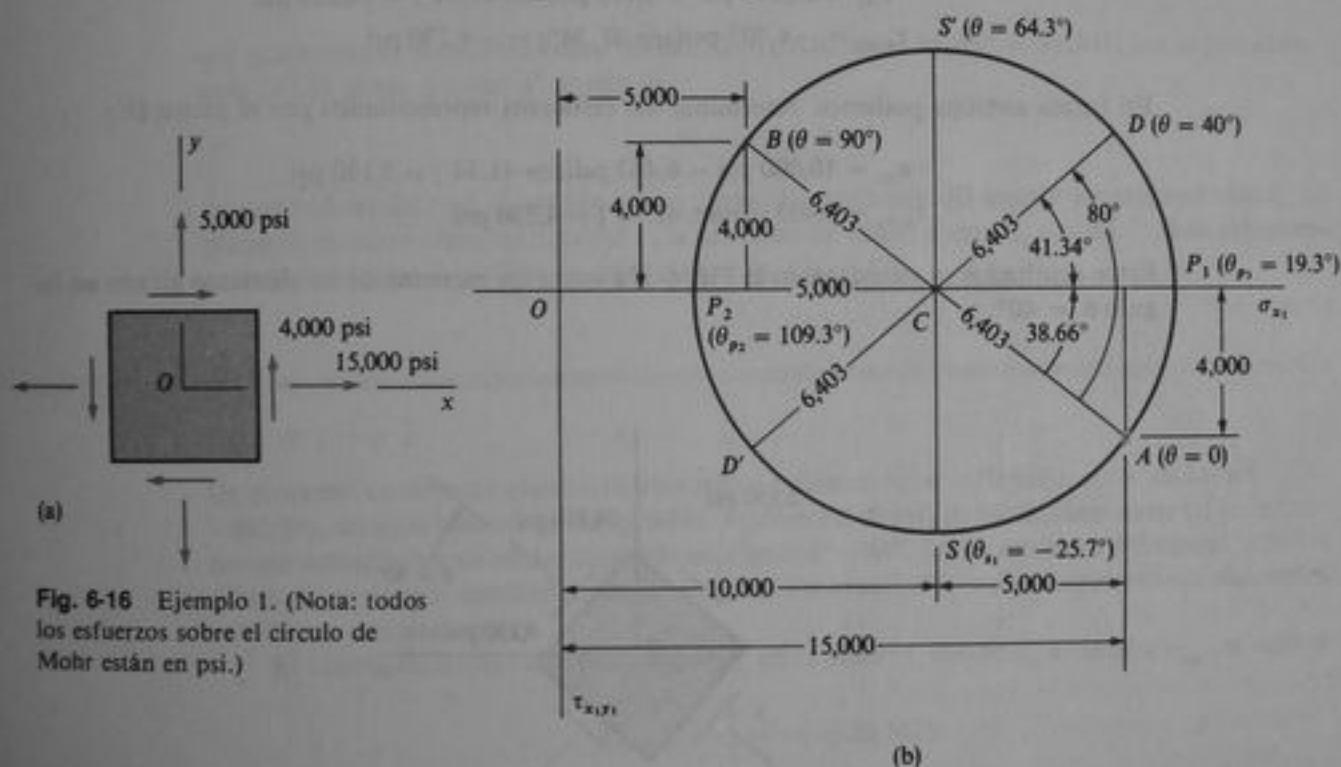


Fig. 6-16 Ejemplo 1. (Nota: todos los esfuerzos sobre el círculo de Mohr están en psi.)

El punto A , que representa los esfuerzos en la cara x del elemento, tiene coordenadas

$$\sigma_{x_1} = 15,000 \text{ psi} \quad \tau_{x_1y_1} = 4,000 \text{ psi}$$

De igual manera, las coordenadas del punto B , que representan los esfuerzos sobre la cara y , son

$$\sigma_{x_1} = 5,000 \text{ psi} \quad \tau_{x_1y_1} = -4,000 \text{ psi}$$

El círculo se dibuja ahora a través de los puntos A y B , con centro en C y radio

$$R = \sqrt{(5,000 \text{ psi})^2 + (4,000 \text{ psi})^2} = 6,403 \text{ psi}$$

El ángulo ACP_1 es el ángulo $2\theta_{p_1}$ desde el punto A hasta el punto P_1 , que representa el plano principal que tiene el esfuerzo principal mayor σ_1 ; este ángulo se obtiene como sigue:

$$\tan 2\theta_{p_1} = \frac{4,000 \text{ psi}}{5,000 \text{ psi}} = 0.8$$

de donde

$$2\theta_{p_1} = 38.66^\circ \quad \theta_{p_1} = 19.33^\circ$$

Luego, hemos calculado ahora los ángulos y esfuerzos importantes que determinan la geometría del círculo de Mohr.

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un plano a $\theta = 40^\circ$ están dados por el punto D , que se ubica en un ángulo $2\theta = 80^\circ$ a partir del punto A . Por lo tanto, el ángulo DCP_1 es

$$\text{Ángulo } DCP_1 = 80^\circ - 2\theta_{p_1} = 80^\circ - 38.66^\circ = 41.34^\circ$$

Este ángulo está ubicado entre la línea CD y el eje σ_{x_1} . Por lo tanto, mediante inspección de la figura apreciamos que las coordenadas del punto D son

$$\sigma_{x_1} = 10,000 \text{ psi} + 6,403 \text{ psi}(\cos 41.34^\circ) = 14,810 \text{ psi}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -6,403 \text{ psi}(\sin 41.34^\circ) = -4,230 \text{ psi}$$

En forma análoga podemos determinar los esfuerzos representados por el punto D' :

$$\sigma_{x_1} = 10,000 \text{ psi} - 6,403 \text{ psi}(\cos 41.34^\circ) = 5,190 \text{ psi}$$

$$\tau_{x_1y_1} = 6,403 \text{ psi}(\sin 41.34^\circ) = 4,230 \text{ psi}$$

Estos resultados se muestran en la Fig. 6-17a sobre un esquema de un elemento girado un ángulo $\theta = 40^\circ$.

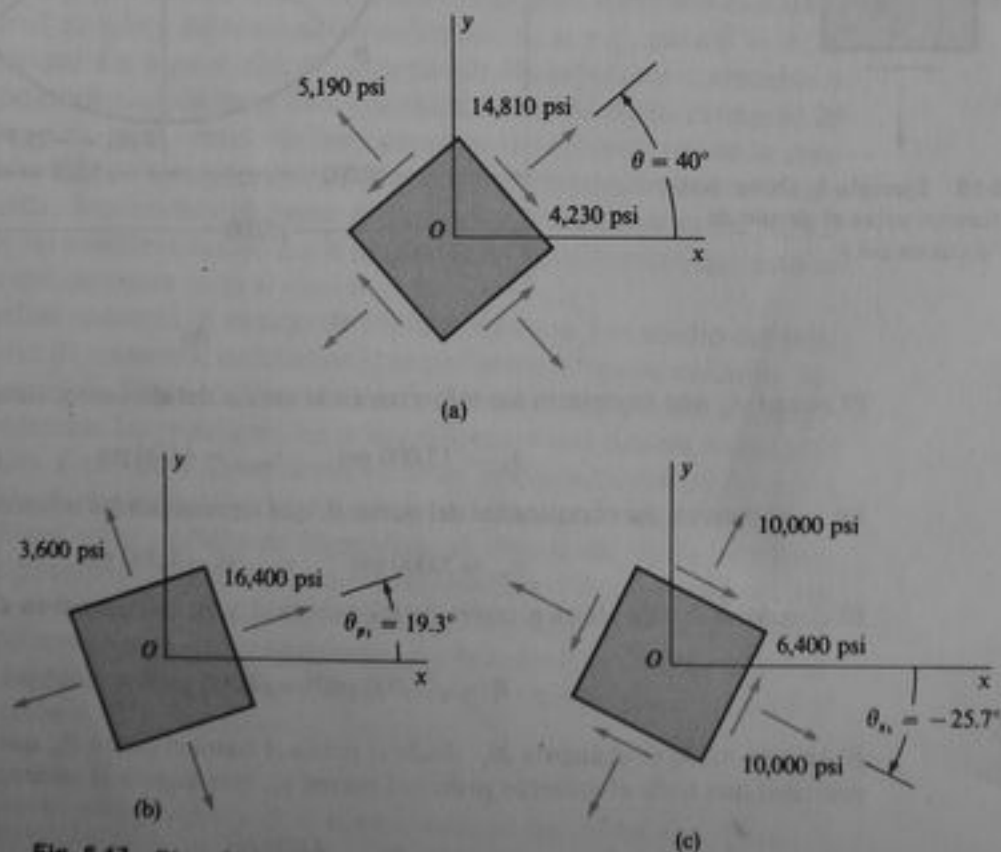


Fig. 6-17 Ejemplo 1 (continuación). (a) Esfuerzos sobre un elemento a $\theta = 40^\circ$; (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos

(b) Los esfuerzos principales se representan por los puntos P_1 y P_2 sobre el círculo de Mohr. El esfuerzo principal mayor (punto P_1) es

$$\sigma_1 = 10,000 \text{ psi} + 6,400 \text{ psi} = 16,400 \text{ psi}$$

como se aprecia mediante inspección del círculo. Este esfuerzo actúa sobre un plano definido por el ángulo $\theta_{p_1} = 19.3^\circ$. En forma similar, el esfuerzo principal menor es

$$\sigma_2 = 10,000 \text{ psi} - 6,400 \text{ psi} = 3,600 \text{ psi}$$

El ángulo $2\theta_{p_1}$ es $38.66^\circ + 180^\circ = 218.66^\circ$; así, el plano principal está definido por el ángulo $\theta_{p_1} = 109.3^\circ$. Los esfuerzos principales y los planos principales se muestran en la Fig. 6-17b.

(c) Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo están representados por los puntos S y S' ; por lo tanto,

$$\tau_{\max} = 6,400 \text{ psi}$$

que representa el radio del círculo. El ángulo ACS es $90^\circ - 38.66^\circ = 51.34^\circ$, por lo que el ángulo $2\theta_s$ al punto S sobre el círculo es

$$2\theta_s = -51.34^\circ$$

ya que está medido en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo correspondiente θ_s al plano de esfuerzo cortante máximo es la mitad de tal valor, o sea, $\theta_s = -25.7^\circ$. Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo se muestran en la Fig. 6-17c.

Ejemplo 2

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$ y $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$, como se muestra en la Fig. 6-18a. Mediante el círculo de Mohr, determinar (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 45^\circ$, (b) los esfuerzos principales, y (c) los esfuerzos cortantes máximos. Mostrar todos los resultados sobre esquemas de elementos orientados adecuadamente.

El centro del círculo está sobre el eje σ_x en el punto C donde σ_x es igual a σ_{med} , el cual es

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -20 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos sobre la cara x del elemento determinan las coordenadas del punto A :

$$\sigma_{x_1} = -50 \text{ MPa} \quad \tau_{x_1y_1} = -40 \text{ MPa}$$

Las coordenadas del punto B representan los esfuerzos sobre la cara y del elemento:

$$\sigma_{x_2} = 10 \text{ MPa} \quad \tau_{x_2y_2} = 40 \text{ MPa}$$

Estos puntos definen el círculo, que tiene radio

$$R = \sqrt{(30 \text{ MPa})^2 + (40 \text{ MPa})^2} = 50 \text{ MPa}$$

El ángulo ACP_2 es el ángulo $2\theta_{p_2}$ desde el punto A hasta el punto P_2 , y representa el plano principal que contiene al esfuerzo principal algebraicamente menor σ_2 . Este ángulo se determina considerando que

$$\tan 2\theta_{p_2} = \frac{40 \text{ MPa}}{30 \text{ MPa}} = \frac{4}{3}$$

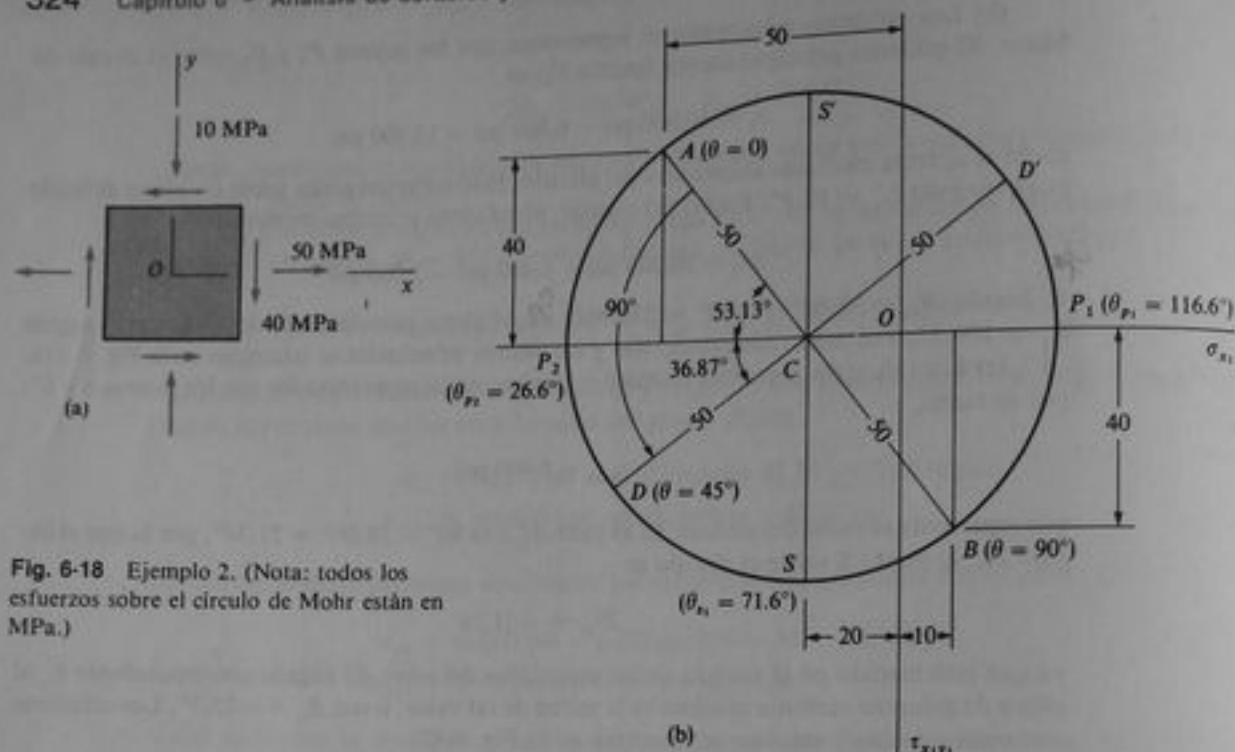


Fig. 6-18 Ejemplo 2. (Nota: todos los esfuerzos sobre el círculo de Mohr están en MPa.)

Por lo que,

$$2\theta_{p_2} = 53.13^\circ \quad \theta_{p_2} = 26.57^\circ$$

Así, se han obtenido todos los ángulos y esfuerzos requeridos, como se muestra sobre el círculo.

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un plano a $\theta = 45^\circ$ están representados por el punto D , localizado a un ángulo $2\theta = 90^\circ$ desde el punto A . El ángulo DCP_2 es

$$\text{Ángulo } DCP_2 = 90^\circ - 2\theta_{p_2} = 90^\circ - 53.13^\circ = 36.87^\circ$$

Este ángulo se encuentra entre la línea CD y el eje σ_{x_1} negativo; por lo tanto, por inspección obtenemos las coordenadas del punto D :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= -20 \text{ MPa} - 50 \text{ MPa}(\cos 36.87^\circ) = -60 \text{ MPa} \\ \tau_{x_1y_1} &= 50 \text{ MPa}(\sin 36.87^\circ) = 30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

En forma similar, las coordenadas del punto D' son

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= -20 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa}(\cos 36.87^\circ) = 20 \text{ MPa} \\ \tau_{x_1y_1} &= -50 \text{ MPa}(\sin 36.87^\circ) = -30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Estos esfuerzos, que actúan sobre un elemento a $\theta = 45^\circ$, se muestran en la Fig. 6-19a.

(b) Los esfuerzos principales están representados por los puntos P_1 y P_2 sobre el círculo. Sus valores son

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -20 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa} = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -20 \text{ MPa} - 50 \text{ MPa} = -70 \text{ MPa} \end{aligned}$$

según se obtiene mediante inspección a partir del círculo. El ángulo $2\theta_{p_1}$ sobre el círculo (medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj) desde A hasta P_1) es $53.1^\circ + 180^\circ = 233.1^\circ$,

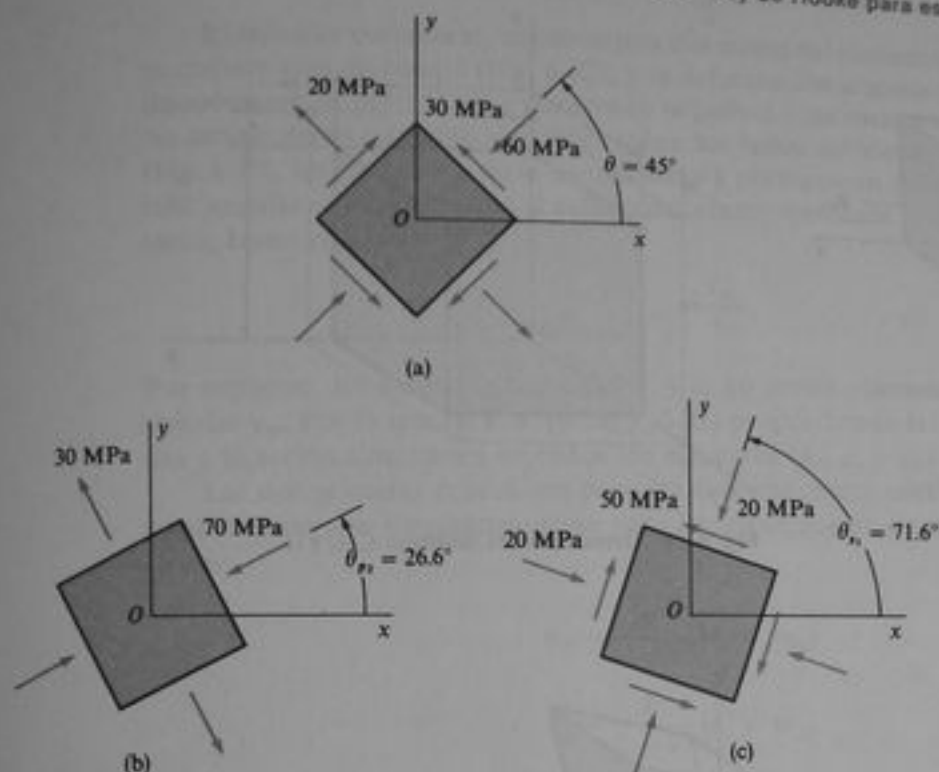


Fig. 6-19 Ejemplo 2 (continuación). (a) Esfuerzos sobre un elemento a 45° , (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos

por lo que $\theta_{p_1} = 116.6^\circ$. El ángulo al punto P_2 es $2\theta_{p_1} = 53.1^\circ$, o sea $\theta_{p_1} = 26.6^\circ$. Los planos principales y los esfuerzos principales se muestran en la Fig. 6-19b.

(c) Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo, representados por los puntos S y S' , son $\tau_{\max} = 50$ MPa y $\tau_{\min} = -50$ MPa. El ángulo ACS (igual a $2\theta_{s_1}$) es $53.13^\circ + 90^\circ = 143.13^\circ$, por lo que el ángulo $\theta_{s_1} = 71.6^\circ$. Los esfuerzos cortantes máximos se muestran en la Fig. 6-19c.

6.5 LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO

En las secciones anteriores se analizaron los esfuerzos que actúan sobre planos inclinados para un elemento en esfuerzo plano (Fig. 6-20). En tales temas se utilizó únicamente la estática; en consecuencia, no se consideraron las propiedades del material. Supóngase ahora que el material es homogéneo e isótropo; esto es, que el material es uniforme en todo el cuerpo y que tiene las mismas propiedades en todas direcciones. Además supóngase que satisface la ley de Hooke, lo que significa que el material se comporta en forma linealmente elástica. Mediante estas condiciones, podemos obtener fácilmente las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones en el cuerpo.

Empecemos por considerar las deformaciones normales ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z , las cuales se indican en la Fig. 6-21 como cambios dimensionales de un pequeño cubo infinitesimal que tiene aristas de longitud unitaria. Las tres deformaciones se muestran positivas en la figura. Tales deformaciones pueden expresarse en términos de los esfuerzos

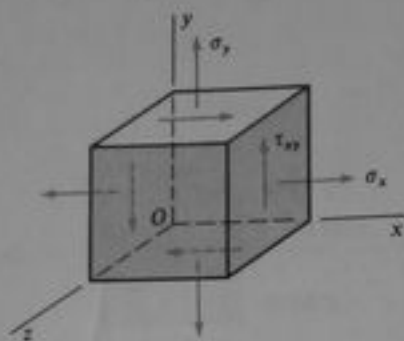


Fig. 6-20 Elemento en esfuerzo plano

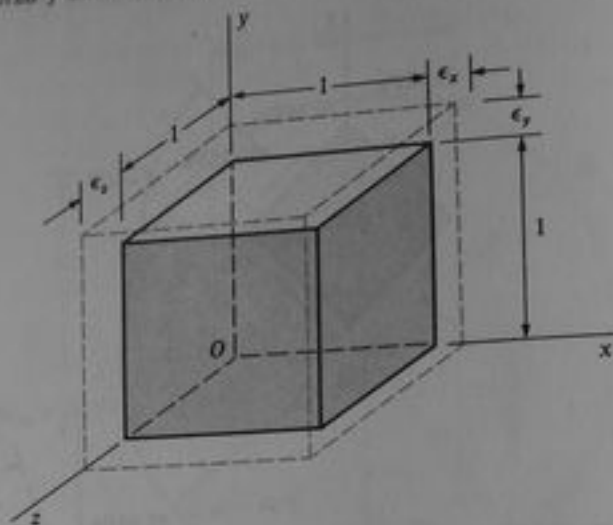


Fig. 6-21 Deformaciones normales ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z

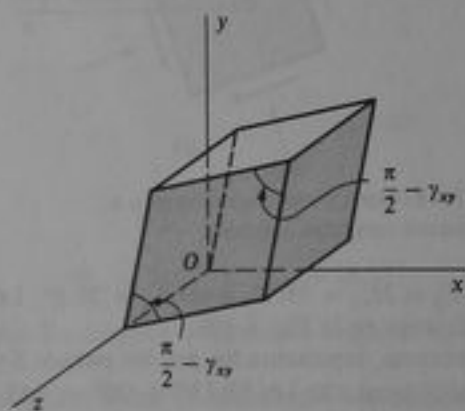


Fig. 6-22 Deformación angular γ_{xy}

(Fig. 6-20) mediante la superposición de los efectos de los esfuerzos individuales. Por ejemplo, el esfuerzo σ_x produce una deformación ϵ_x igual a σ_x/E y el esfuerzo σ_y produce una deformación ϵ_x igual a $-\nu\sigma_y/E$. Por supuesto, el esfuerzo cortante τ_{xy} no produce deformación normal en la dirección x . De esta manera, la deformación resultante ϵ_x es

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (6-26a)$$

En forma similar, obtenemos las deformaciones en las direcciones y y z :

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (6-26b)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (6-26c)$$

Estas ecuaciones pueden emplearse para determinar las deformaciones normales cuando se conocen los esfuerzos.

El esfuerzo cortante τ_{xy} ocasiona una distorsión del elemento tal que cada cara z se convierte en un rombo (Fig. 6-22), y la deformación angular γ_{xy} representa la reducción angular entre el eje x positivo (o negativo) y las caras y del elemento. Como no actúan otros esfuerzos cortantes sobre los lados del elemento esforzado plano (Fig. 6-20), las caras x y y no se distorsionan y permanecen cuadradas. La deformación angular se relaciona con el esfuerzo cortante mediante la ley de Hooke en cortante, como sigue:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (6-27)$$

Por supuesto, los esfuerzos normales σ_x y σ_y no tienen efecto sobre la deformación angular γ_{xy} . Por lo que las Ecs. (6-26) y (6-27) proporcionan las deformaciones debidas a la acción simultánea de todos los esfuerzos (σ_x , σ_y y τ_{xy}).

Las dos primeras ecuaciones para las deformaciones normales (Ecs. 6-26a y b) pueden resolverse simultáneamente para los esfuerzos en términos de las deformaciones:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (6-28a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (6-28b)$$

Adicionalmente, tenemos

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (6-29)$$

Estas ecuaciones pueden emplearse para determinar los esfuerzos cuando se conocen las deformaciones.

Las ecuaciones anteriores (Ecs. 6-26 a 6-29) se designan en forma colectiva como **ley de Hooke para esfuerzo plano**. Contienen tres constantes elásticas (E , G y ν), pero sólo dos de ellas son independientes debido a la relación $G = E/2(1 + \nu)$.

Cambio unitario de volumen. El cambio unitario de volumen en un punto de un cuerpo sometido a esfuerzo plano puede determinarse considerando nuevamente el elemento de la Fig. 6-21. El volumen original de este elemento es $V_0 = (1)(1)(1) = 1$, y su volumen final es

$$V_f = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

o, si se desprecia el producto de cantidades pequeñas,

$$V_f = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Por lo tanto, el cambio en volumen es

$$\Delta V = V_f - V_0 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

y el cambio unitario de volumen (o deformación volumétrica) resulta

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (6-30)$$

Esta ecuación es válida para cualquier material. Obsérvese que las deformaciones angulares no producen cambio de volumen.

Cuando el material satisface la ley de Hooke, podemos sustituir las Ecs. (6-26) en la Ec. (6-30) y obtener la siguiente expresión para el cambio unitario de volumen en esfuerzo plano:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (6-31)$$

Si $\sigma_y = 0$, esta ecuación se reduce a la Ec. (1-7) para el cambio unitario de volumen en esfuerzo uniaxial. Conociendo el valor de e , podemos determinar por integración el cambio total de volumen para cualquier cuerpo sometido a esfuerzo plano.

Densidad de energía de deformación. La densidad de energía de deformación u es la energía de deformación almacenada en un volumen unitario del material (véanse explicaciones previas en las secciones 2.8 y 3.8). Para un elemento en esfuerzo plano, podemos emplear el elemento de volumen unitario mostrado en las Figs. 6-21 y 6-22. Puesto que las deformaciones normal y angular ocurren en forma independiente, podemos sumar sus energías de deformación para obtener la energía total.

Empezando con las deformaciones normales (Fig. 6-21), observamos que la fuerza total que actúa sobre la cara x del elemento es algebraicamente igual a σ_x , puesto que el área de la cara es unitaria. Esta fuerza se mueve a lo largo de una distancia igual a ϵ_x , conforme se aplican los esfuerzos al elemento. Suponiendo que el material satisface la ley de Hooke, apreciamos que el trabajo realizado por esta fuerza es $\sigma_x \epsilon_x / 2$. De modo semejante, la fuerza σ_y sobre la cara y realiza un trabajo igual a $\sigma_y \epsilon_y / 2$. La suma de estos términos de trabajo, que es la misma que la densidad de energía de deformación, es

$$\frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y)$$

La densidad de energía de deformación asociada con los esfuerzos cortantes (Fig. 6-22) fue evaluada en la Sección 3.8 (véase Ec. 3-36) y es igual a $\tau_{xy} \gamma_{xy} / 2$. Al sumar las densidades de energía de deformación para las deformaciones normal y angular, obtenemos la siguiente fórmula para esfuerzo plano:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (6-32)$$

Al sustituir las deformaciones a partir de las Ecs. (6-26) y (6-27), obtenemos la densidad de energía de deformación sólo en términos de los esfuerzos:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad (6-33)$$

De igual manera, podemos sustituir los esfuerzos a partir de las Ecs. (6-28) y (6-29) para obtener la densidad de energía de deformación en términos de las deformaciones:

$$u = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} \quad (6-34)$$

Para el caso especial de esfuerzo uniaxial, sustituimos los valores

$$\sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad \epsilon_y = -\nu\epsilon_x \quad \gamma_{xy} = 0$$

en las Ecs. (6-33) y (6-34) y obtenemos

$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad y \quad u = \frac{E\epsilon_x^2}{2}$$

Estas ecuaciones concuerdan con las Ecs. (2-41) de la Sección 2.8.

6.6 RECIPIENTES ESFÉRICOS Y CILÍNDRICOS SOMETIDOS A PRESIÓN (ESFUERZO BIAxIAL)

Los recipientes a presión son estructuras cerradas que contienen líquidos o gases a presión. Algunos ejemplos conocidos son los tanques esféricos para almacenamiento de agua, los tanques cilíndricos para aire comprimido, tubos a presión y globos inflados. Las paredes curvas de los recipientes sujetos a presión a menudo son muy delgadas en relación con el radio y la longitud, y en tales casos se encuentran en la clase general de estructuras conocidas como **cascarones**. Otros ejemplos de estructuras de cascarón son los techos curvos, las cúpulas (o domos) y los fuselajes.

En esta sección, consideraremos únicamente recipientes de pared delgada de formas esférica y cilíndrica circular (Fig. 6-23). El término *de pared delgada* no es preciso, pero una regla general es que la relación del radio r al espesor de la pared t debe ser mayor que 10 a fin de que podamos determinar los esfuerzos en las paredes con exactitud razonable mediante únicamente la estática. Una segunda limitación es que la presión interna debe ser mayor que la externa; de lo contrario, el cascarón puede fallar por colapso debido al pandeo de las paredes.

Recipientes esféricos sometidos a presión. Un tanque de forma esférica es el recipiente ideal para resistir presión interna. Sólo se requiere observar las conocidas pompas de jabón para reconocer que una esfera es el perfil "natural" a este propósito. Para obtener los esfuerzos en la pared, cortemos la esfera sobre un plano diametral vertical y separemos la mitad del cascarón y su contenido, como un cuerpo libre (Fig. 6-24a). Sobre este cuerpo libre actúan los esfuerzos σ en la pared y la presión interna p . El peso del tanque y su contenido se omiten en este análisis. La presión actúa horizontalmente sobre el área circular plana formada por el corte, y la fuerza resultante es igual a $p(\pi r^2)$, donde r es el radio interior de la esfera. Obsérvese que la presión p es la presión interna neta, o presión manométrica (esto es, la presión por encima de la presión atmosférica, o presión externa).

El esfuerzo de tensión σ en la pared de la esfera es uniforme alrededor de la circunferencia del tanque, debido a la simetría del mismo y de su carga. Además, como la pared es muy delgada, podemos suponer con bastante exactitud que el esfuerzo es uniforme a través del espesor t . La exactitud de esta aproximación se incrementa según se vuelve más delgado el cascarón, y se reduce según se vuelve más grueso. La fuerza resultante obtenida a partir del esfuerzo normal es $\sigma(2\pi r_m t)$, donde t es el espesor y r_m es el radio medio del cascarón ($r_m = r + t/2$). Por supuesto, dado que nuestro análisis únicamente es válido para cascarones muy delgados, podemos con-

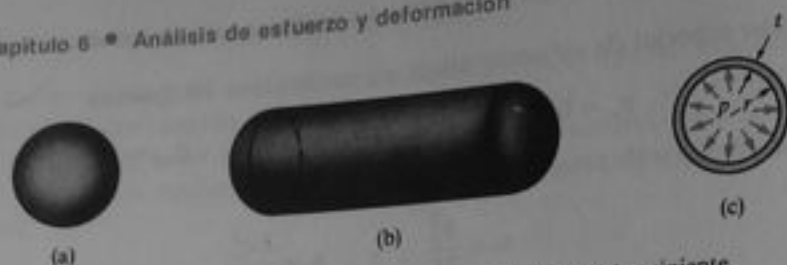


Fig. 6-23 Recipientes de pared delgada sujetos a presión: (a) recipiente esférico, (b) recipiente cilíndrico y (c) sección transversal que muestra la presión interna p

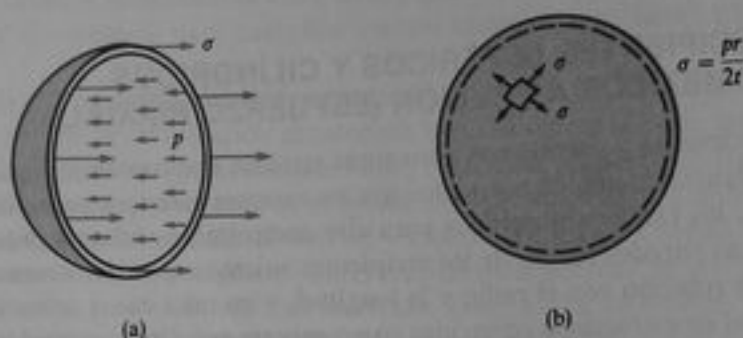


Fig. 6-24 Esfuerzos en un recipiente esférico a presión

siderar que $r_m = r$; entonces, la fuerza resultante se convierte en $\sigma(2\pi r t)$. El equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal da

$$\sigma(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

del cual obtenemos

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (6-35)$$

Como es evidente a partir de la simetría de un cascarón esférico, esta misma ecuación para el esfuerzo σ se obtendrá si se pasa un plano a través del centro de la esfera en cualquier dirección. Por lo tanto, concluimos que una esfera "presurizada" está sometida a esfuerzos uniformes de tensión σ en todas direcciones. Esta condición de esfuerzo se representa en la Fig. 6-24b por el pequeño elemento con esfuerzos σ que actúan en direcciones mutuamente perpendiculares. Los esfuerzos de este tipo, que actúan de modo tangencial (en vez de perpendicular) a la superficie curva, se conocen como **esfuerzos de membrana**. El nombre surge del hecho de que los esfuerzos de este tipo existen en membranas verdaderas, tales como películas de jabón o delgadas hojas de caucho o hule.

En la **superficie exterior** de un recipiente esférico a presión, no actúan esfuerzos normales a la superficie, por lo que la condición de esfuerzo es un caso especial de esfuerzo biaxial en el que σ_x y σ_y son iguales (Fig. 6-25a). Como no actúan esfuerzos cortantes sobre este elemento, obtenemos exactamente los mismos esfuerzos normales al girar el elemento un ángulo cualquiera alrededor del eje z . Así, el círculo de

Mohr para esta condición de esfuerzo se reduce a un punto, y cada plano inclinado es un plano principal. Los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (6-36)$$

También, el esfuerzo cortante máximo en el plano es cero. Sin embargo, según se trató en la Sección 6.3, debemos advertir que el elemento es tridimensional y que el tercer esfuerzo principal (en la dirección z) es cero. Por lo tanto, el esfuerzo cortante máximo absoluto, originado mediante una rotación a 45° del elemento respecto a cualquiera de los x o y , es

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = \frac{pr}{4t} \quad (6-37)$$

según se obtuvo de las Ecs. (6-23).

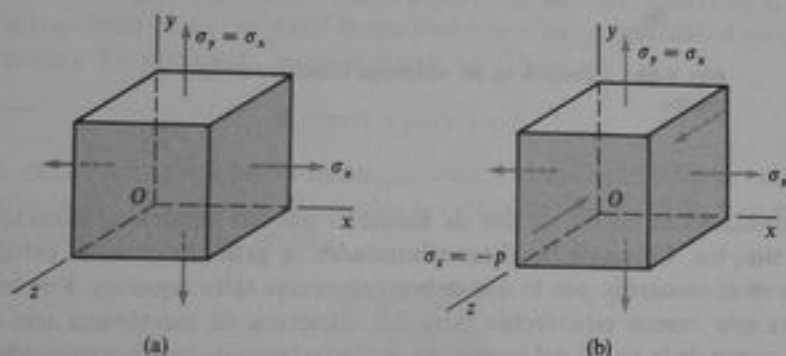


Fig. 6-25 Esfuerzos en un recipiente esférico a presión en (a) la superficie externa y (b) la superficie interna.

En la **superficie interior** de la pared del recipiente esférico, el elemento esforzado tiene los mismos esfuerzos de membrana (Ec. 6-35), pero, adicionalmente, actúa un esfuerzo de compresión en la dirección z , igual a p (Fig. 6-25b). Estos tres esfuerzos normales son los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \sigma_3 = -p \quad (6-38)$$

El esfuerzo cortante máximo en el plano es cero, pero el esfuerzo cortante máximo fuera del plano (producido mediante una rotación de 45° alrededor de cualquiera de los ejes x o y) es

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma + p}{2} = \frac{pr}{4t} + \frac{p}{2} \quad (6-39)$$

Si la relación r/t es suficientemente grande, el último término en esta ecuación puede omitirse. Entonces la ecuación se convierte en la misma Ec. (6-37), y se puede suponer que el esfuerzo cortante máximo es constante a través del espesor del cascarón.

Todo tanque esférico utilizado como recipiente a presión tendrá al menos una abertura en la pared, así como varios accesorios y soportes. Estas características ori-

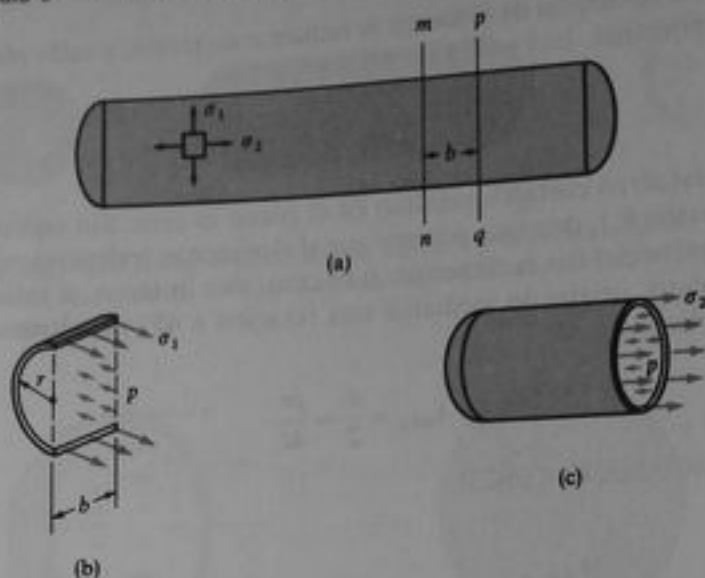


Fig. 6-26 Esfuerzos en un recipiente cilíndrico circular a presión

ginan distribuciones no uniformes de esfuerzo que no pueden analizarse mediante métodos simples. Cerca de las discontinuidades se generan grandes esfuerzos concentrados en el cascarón, por lo que deben reforzarse tales regiones. Por lo tanto, las ecuaciones que hemos establecido para los esfuerzos de membrana son válidas en cualquier punto de la pared del recipiente, excepto cerca de las discontinuidades. En el diseño de tanques intervienen otras consideraciones, incluyendo efectos de corrosión, impactos accidentales y efectos térmicos.

Recipientes cilíndricos sometidos a presión. Considérese ahora un tanque cilíndrico circular de pared delgada con extremos cerrados y presión interna p (Fig. 6-26a). En la figura se muestra un elemento esforzado cuyas caras son paralelas y perpendiculares al eje del tanque. Los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 , que actúan sobre las caras laterales de este elemento, representan los esfuerzos de membrana en la pared. Sobre las caras del elemento no actúan esfuerzos cortantes debido a la simetría del recipiente. Por lo tanto, los esfuerzos σ_1 y σ_2 son esfuerzos principales. Debido a su dirección, el esfuerzo σ_1 se denomina **esfuerzo circunferencial** o **esfuerzo tangencial** (esfuerzo de zuncho); en forma similar, σ_2 es el **esfuerzo longitudinal** o **esfuerzo axial**. Cada uno de estos esfuerzos puede calcularse a partir del equilibrio mediante el empleo de diagramas de cuerpo libre apropiados.

Para calcular el esfuerzo circunferencial σ_1 , se aísla un cuerpo libre mediante dos cortes (mn y pq) separados una distancia b y perpendiculares al eje longitudinal (Fig. 6-26a). También se efectúa un tercer corte en un plano vertical a través del propio eje; el cuerpo libre resultante se muestra en la Fig. 6-26b. Sobre la cara vertical longitudinal de este cuerpo libre actúan los esfuerzos σ_1 en la pared y la presión interna p . Sobre las caras transversales de este cuerpo libre también actúan esfuerzos y presiones, pero no se muestran en la figura ya que no intervienen en la ecuación de equilibrio que se utilizará. También, nuevamente se omite el peso del recipiente y su

contenido. Las fuerzas horizontales debidas al esfuerzo σ_1 y a la presión p actúan en direcciones opuestas, por lo que se tiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sigma_1(2bt) - p(2br) = 0$$

en la que t es el espesor de la pared y r es el radio interior del cilindro. A partir de la ecuación anterior, se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad (6-40)$$

como la fórmula para el esfuerzo circunferencial. Según se explicó previamente, este esfuerzo está distribuido uniformemente sobre el espesor de la pared siempre y cuando ésta sea muy delgada.

El esfuerzo longitudinal σ_2 se obtiene a partir de un cuerpo libre de la parte del tanque a la izquierda de un corte (tal como mn) que es perpendicular al eje longitudinal (Fig. 6-26c). En este caso, la ecuación de equilibrio es

$$\sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

en la que, como se explicó previamente, se utilizó el radio interior del cascarón en vez del radio medio (o principal) al calcular la fuerza debida al esfuerzo σ_2 . Al resolver la ecuación anterior para σ_2 , resulta

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (6-41)$$

que es el mismo esfuerzo de membrana que el de un cascarón esférico. Al comparar las Ecs. (6-40) y (6-41), se aprecia

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \quad (6-42)$$

Luego, el esfuerzo longitudinal en un cascarón cilíndrico es la mitad del esfuerzo circunferencial.

Los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 en la superficie exterior del cascarón se muestran en acción sobre un elemento esforzado en la Fig. 6-27a. El tercer esfuerzo principal, que actúa en la dirección z , es cero. Así que nuevamente tenemos esfuerzo biaxial. Los esfuerzos cortantes máximos localizados en el plano xy se generan cuando el elemento se gira 45° alrededor del eje z ; este esfuerzo es

$$(\tau_{\max})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{pr}{4t} \quad (6-43)$$

(véase Ec. 6-21). Los esfuerzos cortantes máximos obtenidos mediante rotaciones a 45° alrededor de los ejes x y y son, respectivamente,

$$(\tau_{\max})_x = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} \quad (\tau_{\max})_y = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t}$$

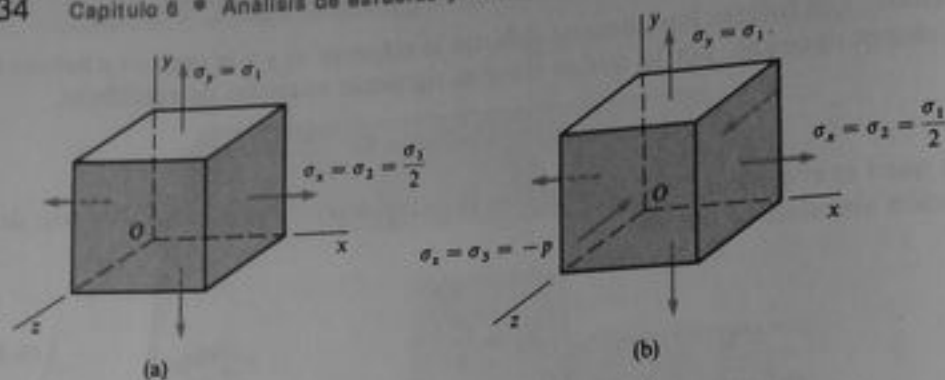


Fig. 6-27 Esfuerzos en un recipiente cilíndrico circular a presión en (a) la superficie exterior y (b) la superficie interior

Luego, el esfuerzo cortante máximo absoluto es

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} \quad (6-44)$$

y se presenta cuando el elemento se gira 45° respecto del eje x .

Las condiciones de esfuerzo en la **superficie interior** del cascarón se muestran en la Fig. 6-27b. Los esfuerzos normales principales son

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \sigma_3 = -p \quad (6-45)$$

Los tres esfuerzos máximos, originados mediante rotaciones de 45° alrededor de los ejes x , y y z , son

$$\begin{aligned} (\tau_{\max})_x &= \frac{\sigma_1 + p}{2} = \frac{pr}{2t} + \frac{p}{2} & (\tau_{\max})_y &= \frac{\sigma_2 + p}{2} = \frac{pr}{4t} + \frac{p}{2} \\ (\tau_{\max})_z &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t} \end{aligned} \quad (6-46)$$

El primero de estos esfuerzos es el mayor. Sin embargo, como se explicó en el estudio de esfuerzos cortantes en un cascarón esférico, se suele omitir el término adicional $p/2$ en estas expresiones y suponer que el esfuerzo cortante máximo es constante a través del espesor y está dado por la Ec. (6-44).

Las fórmulas de esfuerzo anteriores son válidas en las porciones del cilindro alejadas de cualquier discontinuidad. Una discontinuidad obvia existe en el extremo del cilindro donde se une a la cabeza. Otras ocurren en las aberturas del cilindro o donde se fijan objetos al cilindro.

Ejemplo 1

Un recipiente esférico sujeto a presión que tiene un diámetro interior de 18 plg y $1/4$ plg de espesor de pared, se construye soldando dos hemisferios (Fig. 6-28). Mediante pruebas, se determina que los esfuerzos último y de fluencia a tensión en la soldadura son 24 ksi y 16 ksi, respectiva-



Fig. 6-28 Ejemplo 1. Recipiente esférico a presión

mente. El tanque debe tener un factor de seguridad de 2.1 con respecto al esfuerzo último, y de 1.5 con respecto al esfuerzo de fluencia. ¿Cuál es la presión máxima permisible en el tanque? El esfuerzo permisible basado en el esfuerzo último σ_u es

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_u}{n} = \frac{24 \text{ ksi}}{2.1} = 11.43 \text{ ksi}$$

(véase Ec. 1-12). Basado en el esfuerzo de fluencia σ_y , el esfuerzo permisible (Ec. 1-12) es

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{16 \text{ ksi}}{1.5} = 10.67 \text{ ksi}$$

El último esfuerzo es menor y en consecuencia regula el diseño.

El esfuerzo de tensión máximo en el tanque está dado por la fórmula $\sigma = pr/2t$ (véase Ec. 6-36). Al resolver esta ecuación para la presión, obtenemos

$$p = \frac{2t\sigma_{perm}}{r} = \frac{2(0.25 \text{ plg})(10.67 \text{ ksi})}{9 \text{ plg}} = 592.8 \text{ psi}$$

Luego, la presión máxima permisible es $p_{max} = 592 \text{ psi}$. (Nótese que en un cálculo de este tipo, redondeamos hacia abajo y no hacia arriba.)

Ejemplo 2

Un recipiente cilíndrico sujeto a presión se construye con una soldadura helicoidal que forma un ángulo de 55° con el eje longitudinal (Fig. 6-29a). El tanque tiene un radio interior $r = 1.8 \text{ m}$ y un espesor de pared $t = 8 \text{ mm}$. La presión interna máxima es 600 kPa . Calcular las siguientes cantidades para la parte cilíndrica del tanque: (a) los esfuerzos circunferencial y longitudinal; (b) el esfuerzo cortante máximo, y (c) los esfuerzos normal y cortante que actúan perpendicular y paralelo a la soldadura, respectivamente.

(a) Los esfuerzos circunferencial y longitudinal se obtienen a partir de las Ecs. (6-40) y (6-42), respectivamente:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(600 \text{ kPa})(1.8 \text{ m})}{8 \text{ mm}} = 135 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} = 67.5 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos principales se muestran en el elemento esforzado biaxial de la Fig. 6.29b.

(b) El esfuerzo cortante máximo localizado en el plano se obtiene de la Ec. (6-43):

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = 33.8 \text{ MPa}$$

Sin embargo, el esfuerzo cortante máximo absoluto en la pared del cilindro es

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = 67.5 \text{ MPa}$$

según resulta de la Ec. (6-44).

(c) Un elemento girado un ángulo $\theta = 35^\circ$ en forma tal que sus lados sean paralelos y perpendiculares a la soldadura, se muestra en la Fig. 6-29c. Para obtener los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre las caras laterales de este elemento pueden emplearse las ecuaciones de transformación (Ecs. 6-4) o el círculo de Mohr. La construcción del círculo de Mohr se

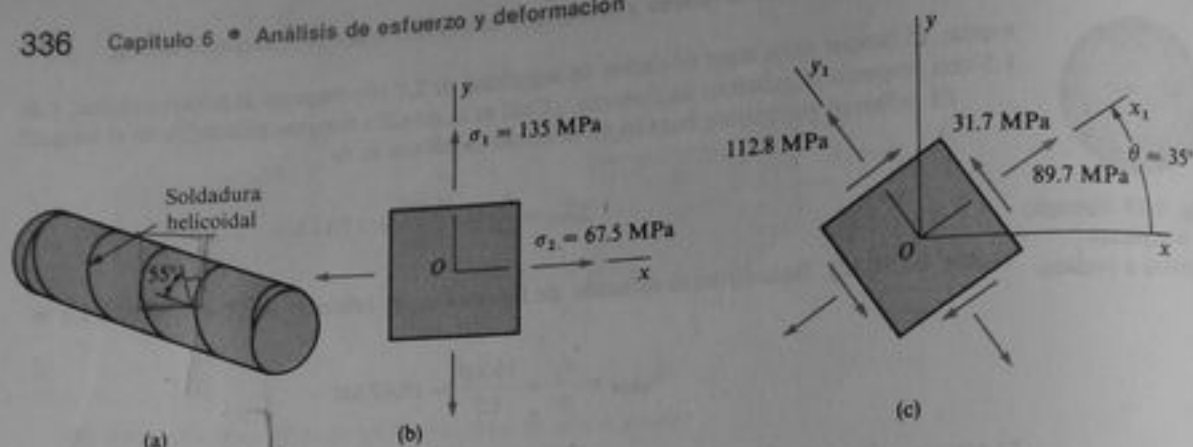


Fig. 6-29 Ejemplo 2. Recipiente cilíndrico a presión

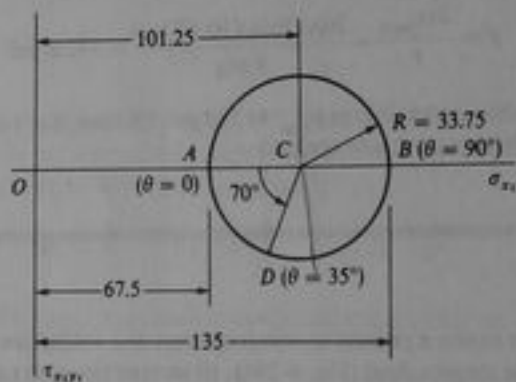


Fig. 6-30 Círculo de Mohr para el elemento biaxialmente esforzado de la Fig. 6-29. (Nota: todos los esfuerzos están en MPa.)

muestra en la Fig. 6-30. El punto A representa el esfuerzo σ_2 sobre la cara x ($\theta = 0^\circ$), y el punto B representa el esfuerzo σ_1 sobre la cara y ($\theta = 90^\circ$). Un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj $2\theta = 70^\circ$ sobre el círculo, localiza el punto D , que corresponde a los esfuerzos sobre la cara x_1 ($\theta = 35^\circ$). Dado que el radio del círculo es

$$R = \frac{135 \text{ MPa} - 67.5 \text{ MPa}}{2} = 33.75 \text{ MPa}$$

se aprecia que las coordenadas del punto D son

$$\sigma_{x_1} = 101.25 \text{ MPa} - (33.75 \text{ MPa}) \cos 70^\circ = 89.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = (33.75 \text{ MPa}) \sin 70^\circ = 31.7 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos actúan sobre la cara x_1 del elemento (Fig. 6-29c). El esfuerzo normal sobre la cara y_1 se determina a partir de la igualdad de la suma de los esfuerzos normales sobre planos perpendiculares:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_{x_1} = 135 \text{ MPa} + 67.5 \text{ MPa} - 89.7 \text{ MPa} \\ &= 112.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Luego, los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos paralelo y perpendicular a la soldadura son como se muestran en el elemento girado de la Fig. 6-29c. Se aprecia que el esfuerzo de tensión que actúa a través de la soldadura es 89.7 MPa y el esfuerzo cortante que actúa a lo largo de la soldadura es 31.7 MPa.

6.7 CARGAS COMBINADAS (ESFUERZO PLANO)

Los miembros estructurales a menudo requieren soportar más de un tipo de carga. Por ejemplo, una barra eje en torsión puede estar también sometida a flexión, o una viga puede estar sometida a la acción simultánea de momentos flexionantes y cargas axiales. El análisis de un miembro sometido a tales **cargas combinadas** puede realizarse usualmente mediante la superposición de los esfuerzos debidos a cada carga que actúa separadamente. La superposición es permisible si los esfuerzos son funciones lineales de las cargas y si no hay efectos interactivos entre las diferentes cargas (esto es, si los esfuerzos debidos a una carga no están afectados por la presencia de cualesquiera otras). El último requisito se satisface usualmente si las deflexiones y rotaciones de la estructura son pequeñas.

El análisis se inicia con la determinación de los esfuerzos debidos a las fuerzas axiales, pares, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Luego, tales esfuerzos se combinan para obtener los esfuerzos resultantes, después de lo cual pueden analizarse los esfuerzos que actúan en direcciones inclinadas mediante las ecuaciones de transformación o el círculo de Mohr. En particular, pueden calcularse los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos. De esta manera puede analizarse cualquier número de localizaciones críticas en el elemento, ya sea confirmando que el diseño es adecuado, o si los esfuerzos son muy grandes o muy pequeños, indicando que son necesarios algunos cambios en el diseño.

Para ejemplificar el método, considérese la barra maciza en voladizo mostrada en la Fig. 6-31a. La barra está cargada en su extremo libre por un par torsionante T y una fuerza lateral flexionante P . Estas cargas producen en cada sección transversal un momento de flexión M , una fuerza cortante V y un momento de torsión T , cada uno de los cuales produce esfuerzos que actúan sobre las secciones transversales. Si se separa un elemento esforzado A en la parte superior de la barra, se aprecia que está sometido a esfuerzos de flexión $\sigma_x = Mr/I$ y a esfuerzos cortantes $\tau = Tr/I_p$. En estas expresiones, r es el radio de la barra, I es el momento de inercia respecto al eje z (el eje neutro) e I_p es el momento polar de inercia. En la parte superior de la barra no hay esfuerzos cortantes asociados con la fuerza cortante V . Luego, el elemento en A está sometido a esfuerzo plano, como se muestra en la Fig. 6-31b. Si se supone que σ_x y τ se han calculado, se procede a determinar los esfuerzos sobre un elemento girado a cualquier ángulo deseado. Los esfuerzos normales máximo y mínimo en el punto A son los esfuerzos principales deducidos a partir de la Ec. (6-13):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

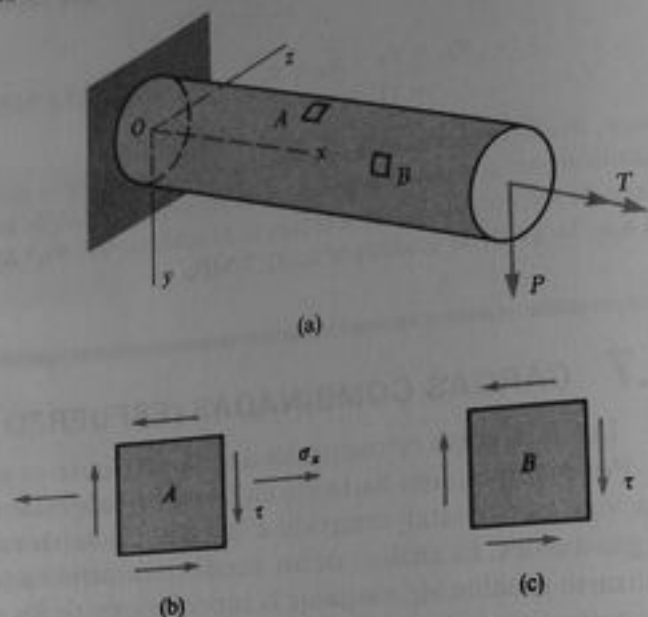


Fig. 6-31 Flexión y torsión combinadas

También, el esfuerzo cortante máximo localizado en el plano (de la Ec. 6-20) es

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

que es mayor que los esfuerzos cortantes fuera del plano. Estos esfuerzos máximos pueden compararse con los esfuerzos normal y cortante permisibles al verificar si la barra es adecuada. Por supuesto, los esfuerzos son mayores cuando el elemento *A* está localizado en el empotramiento de la viga, donde el momento flexionante *M* tiene su valor máximo. Por lo que la parte superior del empotramiento de la viga es uno de los puntos críticos donde deben analizarse los esfuerzos.

Otro punto crítico está sobre el costado de la barra en el eje neutro (punto *B* en la Fig. 6-31a). En este sitio, el esfuerzo por flexión σ_x es cero, pero el esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante *V* tiene su valor máximo. El elemento en *B* está en un estado de corte puro (Fig. 6-31c), y el esfuerzo de corte resultante τ consta de dos partes: primera, el esfuerzo cortante τ_1 debido al par *T* y obtenido a partir de la fórmula $\tau_1 = Tr/I_p$; y segundo, el esfuerzo cortante τ_2 debido a la fuerza cortante *V* (igual a la carga *P*) y obtenido a partir de la fórmula $\tau_2 = 4V/3A$ para una barra circular maciza (véase Ec. 5-32). Luego, el esfuerzo total que actúa sobre el elemento tienen las mismas magnitudes que el propio esfuerzo cortante:

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau$$

Por supuesto, el esfuerzo cortante máximo en *B* es el esfuerzo τ . Estos esfuerzos normal y cortante máximos deben compararse con los obtenidos para elementos en la parte superior y en la base de la barra, a fin de calcular los esfuerzos máximos absolutos que se emplean en diseño.

La explicación anterior pretende ejemplificar la técnica general para problemas que implican combinación de cargas. La diversidad de situaciones prácticas es al parecer interminable, tanto que no vale la pena obtener fórmulas específicas para emplearlas en diseño. En vez de ello, cada estructura se analiza en varios puntos críticos y se comparan los resultados. Cuando se seleccionan los puntos de análisis, se pueden elegir los sitios donde los esfuerzos normales o los esfuerzos cortantes son máximos. Mediante el buen juicio en la selección de los puntos, podemos tener la certeza suficiente de obtener los esfuerzos máximos absolutos sin analizar un gran número de elementos esforzados.

6.8 ESFUERZOS PRINCIPALES EN VIGAS

Los esfuerzos normal y cortante que actúan en cualquier punto de la sección transversal de una viga pueden obtenerse a partir de las fórmulas de flexión y de cortante ($\sigma = My/I$, $\tau = VQ/Ib$). El esfuerzo normal es máximo en los bordes externos de la viga y es nulo en el eje neutro, mientras que el esfuerzo cortante es nulo en los bordes externos y usualmente es máximo en el eje neutro. En muchos casos para diseñar la viga sólo son necesarios estos esfuerzos. No obstante, un estudio más detallado requiere que se calculen los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en varios sitios.

Para apreciar cómo varían los esfuerzos principales en una viga, examinemos los esfuerzos en una viga de sección transversal rectangular (Fig. 6-32a). Se eligen cinco puntos de la sección transversal que se denotan por *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. Los puntos *A* y *E* están en las superficies superior e inferior. El punto *C* está en la mitad de la altura de la viga y los puntos *B* y *D* están en una localización intermedia. Los esfuerzos en la sección transversal en cada uno de estos puntos pueden calcularse fácilmente si se conocen el momento flexionante y la fuerza cortante. Estos esfuerzos pueden ilustrarse actuando sobre elementos esforzados planos con caras horizontales y verticales (Fig. 6-32b). La condición de esfuerzo de la viga es uniaxial en las partes superior e inferior de la misma y de cortante puro en el eje neutro. En otros sitios actúan simultáneamente esfuerzos normales y cortantes sobre el elemento esforzado. Para determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en tales lugares, debemos emplear las ecuaciones de esfuerzo plano (Sección 6.3) o el círculo de Mohr (Sección 6.4). Las direcciones de los esfuerzos principales en cada punto se muestran esquemáticamente en la Fig. 6-32c, y los esfuerzos cortantes máximos se muestran en la Fig. 6-32d.

De los esquemas de la Fig. 6-32c, se puede apreciar cómo cambian los esfuerzos principales. En la parte superior de la viga, el esfuerzo principal de compresión actúa en la dirección horizontal. Conforme se desplaza hacia el eje neutro este esfuerzo principal se inclina respecto a la horizontal, y en el eje neutro (punto *C*) actúa a 45°. Según se aproxima a la base de la viga, la dirección del esfuerzo principal se acerca a la dirección vertical. La magnitud de este esfuerzo varía en forma continua desde la parte superior hasta la base de la viga (donde se vuelve cero). El máximo valor numérico de este esfuerzo (en una viga rectangular) usualmente ocurre en el punto *A*, aunque teóricamente es posible (para vigas esbeltas con cortante alto) que el valor máximo ocurra en un punto como *B*. Consideraciones análogas son aplicables para el esfuerzo principal de tensión, que también varía en magnitud y dirección según se traslada desde *A* hasta *E*.

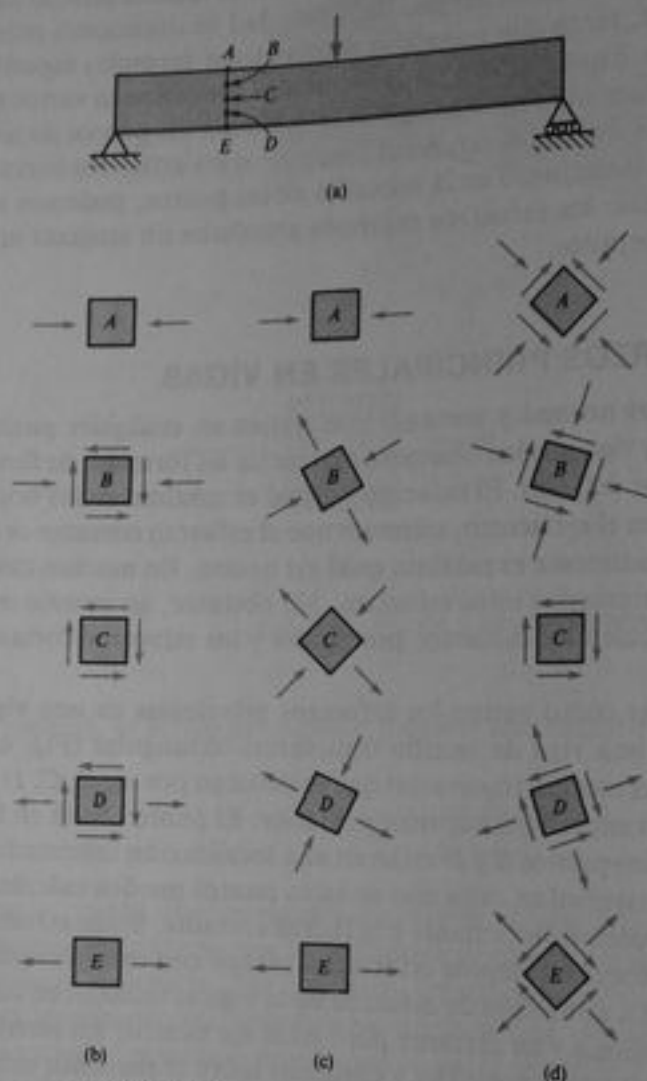


Fig. 6-32 Esfuerzos en una viga de sección transversal rectangular: (a) puntos *A*, *B*, *C*, *D*, y *E* en la sección transversal, (b) esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos horizontales y verticales, (c) esfuerzos principales, y (d) esfuerzos cortantes máximos

Al analizar los esfuerzos en muchas secciones transversales de la viga, se determina cómo varían los esfuerzos principales a través de la misma. Entonces se pueden elaborar dos sistemas de curvas ortogonales, denominadas *trayectorias de esfuerzo*, que proporcionan las direcciones de los esfuerzos principales. Dos ejemplos de trayectorias de esfuerzo para vigas rectangulares se muestran en la Fig. 6-33; la parte (a) muestra una viga en voladizo con una fuerza que actúa en el extremo libre, y la parte (b) muestra una viga simple con una carga uniforme. En la figura las líneas continuas indican los esfuerzos principales de tensión, y las líneas punteadas, los esfuerzos principales de compresión. En estas figuras sólo se consideran los esfuerzos obtenidos a partir de las fórmulas de flexión y cortante; se omiten los esfuerzos directos de compresión (o esfuerzos de aplastamiento) provocados por el contacto de

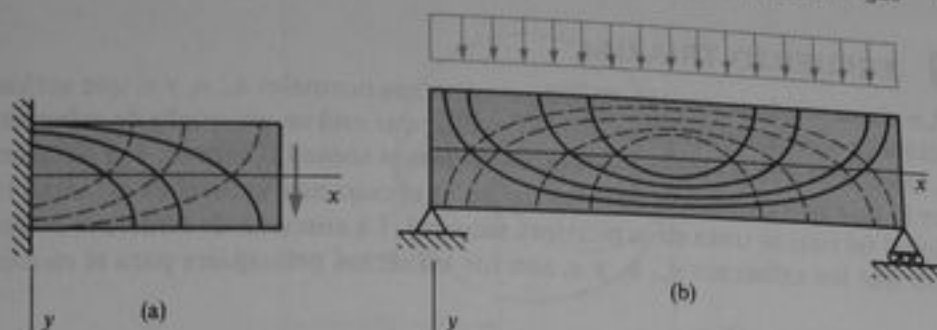


Fig. 6-33 Traectorias de esfuerzos principales para vigas de sección transversal rectangular; (a) viga en voladizo y (b) viga simple. (Las líneas continuas representan esfuerzos principales de tensión, y las líneas punteadas esfuerzos principales de compresión.)



Fig. 6-34 Contornos de esfuerzo típicos (solamente esfuerzos principales de tensión) para una viga en voladizo

la carga uniforme sobre la parte superior de la viga. Los dos conjuntos de curvas siempre se intersecan en ángulos rectos, y cada trayectoria cruza la superficie neutra a 45° . En las superficies superior e inferior de la viga, donde el esfuerzo cortante es cero, las trayectorias se vuelven horizontales o verticales.*

Otro tipo de curva que puede trazarse a partir de los esfuerzos principales es un *contorno de esfuerzo*, que es una curva que une puntos de esfuerzos principales iguales. Los contornos de esfuerzo para una viga en voladizo de sección transversal rectangular se muestran en la Fig. 6-34 (únicamente para esfuerzos principales de tensión).

Las vigas que tienen otros perfiles de sección transversal pueden analizarse para los esfuerzos principales en forma similar a la descrita para vigas rectangulares. El esfuerzo principal máximo en una viga I de patín ancho o en una viga I estándar usualmente se presenta en la parte superior o en la base, pero a veces puede ocurrir en el alma en la unión con el patín. En forma similar, el esfuerzo cortante máximo usualmente ocurre en el eje neutro, pero bajo condiciones extraordinarias de carga, puede ocurrir lejos del eje neutro. (La localización de los esfuerzos máximos tanto en vigas rectangulares como de patín ancho se trata detalladamente en la Ref. 6-10.)

Cuando se analiza una viga para los esfuerzos máximos, recuérdese que cerca de los apoyos ocurren altos esfuerzos (o concentraciones de esfuerzos), así como también en los puntos de aplicación de las cargas, chaflanes y agujeros. Tales esfuerzos están confinados en una región muy cercana a la discontinuidad, y no pueden calcularse por medio de las fórmulas elementales para vigas empleadas en este capítulo.

* Las trayectorias de esfuerzo fueron visualizadas originalmente por el ingeniero alemán Karl Culmann (1821-1881); véanse Refs. 6-8 y 6-9.

6.9 ESFUERZO TRIAXIAL

Un elemento de material sometido a esfuerzos normales σ_x , σ_y y σ_z que actúan en direcciones perpendiculares (Fig. 6-35a) se dice que está en un estado de **esfuerzo triaxial**. Obsérvese que no actúan esfuerzos cortantes sobre las caras x , y , z del elemento, por lo que esta condición de esfuerzo no es el caso más general de esfuerzo tridimensional (el cual se trata en la próxima sección). La ausencia de esfuerzos cortantes muestra que los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z son los **esfuerzos principales** para el elemento.

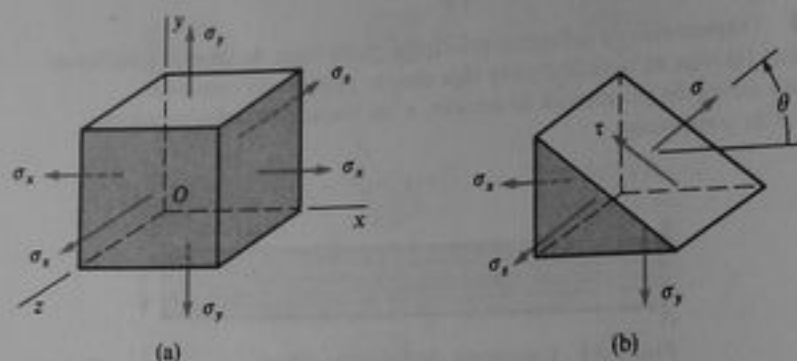


Fig. 6-35 Elemento en esfuerzo triaxial

Si a través del elemento se pasa un plano inclinado paralelo al eje z (Fig. 6-35b), los únicos esfuerzos sobre la cara inclinada son el esfuerzo normal σ y el esfuerzo cortante τ que actúan en el plano xy , por lo que estos esfuerzos son los mismos que los esfuerzos σ_x y $\tau_{x,y}$, referidos previamente al explicar el esfuerzo plano. Como estos esfuerzos se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el plano xy , son independientes del esfuerzo σ_z . Por tanto, se concluye que es posible utilizar las ecuaciones de transformación de esfuerzo plano, así como el círculo de Mohr, cuando se determinen los esfuerzos σ y τ . La misma conclusión es aplicable para los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos inclinados hechos pasar a través del elemento en direcciones paralelas a los ejes x y y .

A partir de las explicaciones previas de esfuerzo plano, se sabe que los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre planos orientados a 45° de los planos principales. Para obtener estos planos para un elemento en esfuerzo triaxial, se gira el elemento a través de ángulos de 45° respecto de los ejes x , y , z . Por ejemplo, consideremos una rotación de 45° alrededor del eje z ; entonces los **esfuerzos cortantes máximos** que actúan sobre este elemento son

$$(\tau_{\max})_z = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (6-47a)$$

En forma similar, si se gira el elemento mostrado en la Fig. 6-35a respecto al eje x un ángulo de 45° , se obtienen los siguientes esfuerzos cortantes máximos:

$$(\tau_{\max})_x = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \quad (6-47b)$$

Finalmente, al girar el elemento alrededor del eje y en un ángulo de 45° se obtienen los esfuerzos

$$(\tau_{\max})_y = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \quad (6-47c)$$

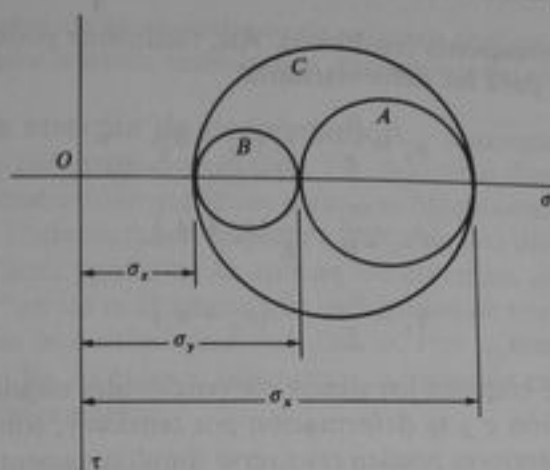


Fig. 6-36 Círculos de Mohr para un elemento en esfuerzo triaxial

El **esfuerzo cortante máximo absoluto** es el algebraicamente máximo de los esfuerzos determinados a partir de las Ecs. (6-47). Este esfuerzo es igual a la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo algebraicos de los tres esfuerzos principales.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos girados alrededor de los ejes x , y , z pueden apreciarse con la ayuda de círculos de Mohr. Para los elementos obtenidos mediante rotación respecto al eje z , el círculo correspondiente está identificado con una A en la Fig. 6-36; este círculo está dibujado para el caso en que $\sigma_x > \sigma_y$ y ambos, σ_x y σ_y , son esfuerzos de tensión. En forma similar, podemos construir los círculos B y C para elementos obtenidos mediante rotaciones respecto a los ejes x y y , respectivamente. Los radios de los círculos representan los esfuerzos cortantes máximos dados por las Ecs. (6-47), y el esfuerzo cortante máximo absoluto es igual al radio del círculo mayor. Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante máximo tienen magnitudes determinadas por las abscisas de los centros de los círculos.

En la explicación anterior, consideramos únicamente los esfuerzos que actúan sobre planos obtenidos mediante rotaciones del elemento alrededor de los ejes x , y , z . Así, cada uno de estos planos es paralelo a uno de los ejes. Por ejemplo, el plano indicado de la Fig. 6-35b es paralelo al eje z , y su normal es paralela al plano xy . Por supuesto, se puede cortar también el elemento en direcciones oblicuas, en forma tal que los planos inclinados resultantes tengan normales que sean oblicuas a los tres ejes coordenados. Los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre tales planos pueden obtenerse mediante un análisis tridimensional más complicado (véase Sección 6.10). Sin embargo, tales esfuerzos normales tienen valores intermedios entre los esfuerzos principales algebraicamente máximo y mínimo, y los esfuerzos cortantes son menores que el esfuerzo cortante máximo absoluto obtenido de las Ecs. (6-47).

Ley de Hooke para esfuerzo triaxial. Las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones normales en las direcciones x , y , z para esfuerzo triaxial pueden obtenerse, para un material que cumple con la ley de Hooke, mediante el mismo procedimiento que para esfuerzo plano (véase Sección 6.5). Las deformaciones producidas por los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z , que actúan en forma independiente, se superponen

para obtener las deformaciones resultantes. Así, fácilmente podemos determinar las siguientes ecuaciones para las deformaciones:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \quad (6-48a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x) \quad (6-48b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (6-48c)$$

En estas ecuaciones se emplean los signos convencionales estándar para σ y ϵ ; esto es, el esfuerzo de tensión σ y la deformación por tensión ϵ , son positivos.

Las ecuaciones anteriores pueden resolverse simultáneamente para los esfuerzos en términos de las deformaciones:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] \quad (6-49a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)] \quad (6-49b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] \quad (6-49c)$$

Las Ecs. (6-48) y (6-49) representan la ley de Hooke para esfuerzo triaxial.

Cambio unitario de volumen. El cambio unitario de volumen para un elemento en esfuerzo triaxial se obtiene en la misma forma que para esfuerzo plano (véase Sección 6.5). Si empezamos con un cubo de dimensiones unitarias (véase Fig. 6-21), se aprecia que su volumen inicial es $V_o = 1$ y su volumen final es

$$V_f = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \quad (a)$$

El cambio unitario de volumen se define como

$$e = \frac{\Delta V}{V_o} = \frac{V_f - V_o}{V_o} = \frac{V_f}{V_o} - 1 \quad (6-50)$$

el cual, una vez efectuada la sustitución de la Ec. (a), resulta

$$\begin{aligned} e &= (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \\ &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z \end{aligned} \quad (6-51)$$

Cuando las deformaciones son cantidades pequeñas, podemos despreciar los términos que contienen sus productos y obtener la siguiente expresión simplificada para el cambio unitario de volumen:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (6-52)$$

Al sustituir las deformaciones según las Ecs. (6-48), obtenemos

$$e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6-53)$$

como la expresión para el cambio unitario de volumen en el caso general de esfuerzo triaxial. (La cantidad e también se denomina **dilatación** o **deformación volumétrica**.)

Densidad de energía de deformación. Supongamos por conveniencia que el elemento esforzado triaxialmente de la Fig. 6-35 tiene dimensiones unitarias. Entonces, las fuerzas que actúan sobre sus caras son algebraicamente iguales a los esfuerzos respectivos. Cada fuerza se desplaza a través de una distancia igual a la deformación correspondiente conforme se aplican los esfuerzos al elemento. El trabajo realizado por estas fuerzas es el mismo que la densidad de energía de deformación u del elemento, ya que éste tiene volumen unitario. Por lo tanto, suponiendo que el material satisface la ley de Hooke, obtenemos la siguiente expresión para la densidad de energía de deformación:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) \quad (6-54)$$

Al sustituir las deformaciones de las Ecs. (6-48), obtenemos la densidad de energía de deformación en términos de los esfuerzos:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \quad (6-55a)$$

En forma similar, podemos expresar la densidad de energía de deformación en términos de las deformaciones:

$$u = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + 2\nu(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)] \quad (6-55b)$$

Al realizar cálculos con estas expresiones, debemos sustituir los esfuerzos y deformaciones con sus propios signos algebraicos.

Esfuerzo esférico. Un estado especial de esfuerzo triaxial, llamado **esfuerzo esférico**, se presenta cuando los tres esfuerzos normales son iguales (véase Fig. 6-37):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0 \quad (6-56)$$

En estas condiciones de esfuerzo, cualquier plano que pase a través del elemento está sometido al mismo esfuerzo normal σ_0 . Así, tenemos esfuerzos normales iguales en cualquier dirección y no existen esfuerzos cortantes. Cada plano es un plano principal, y los tres círculos de Mohr mostrados en la Fig. 6-36 se reducen a un solo punto.

Las deformaciones normales ϵ_0 en esfuerzo esférico también son las mismas en todas direcciones:

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}(1-2\nu) \quad (6-57)$$

según se obtiene de las Ecs. (6-48). Dado que no existen deformaciones angulares, un cubo cambia de tamaño pero continúa siendo un cubo. En general, cualquier cuerpo sometido a esfuerzo esférico mantendrá sus proporciones relativas, pero se expandirá o contraerá en volumen conforme σ_0 sea tensión o compresión.

La expresión para el cambio de volumen unitario puede obtenerse a partir de la Ec. (6-53) al sustituir los esfuerzos por σ_0 ; el resultado es

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1-2\nu)\sigma_0}{E} \quad (6-58a)$$

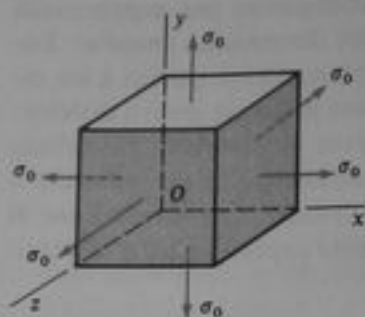


Fig. 6-37 Esfuerzo esférico

o sea

$$e = 3\epsilon_0 \quad (6-58b)$$

La Ec. (6-58) se suele simplificar introduciendo una nueva cantidad K denominada **módulo volumétrico de elasticidad** o **módulo de elasticidad de volumen**:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6-59)$$

Con esta notación, la expresión para la deformación volumétrica resulta

$$e = \frac{\sigma_0}{K} \quad (6-60)$$

y, por lo tanto,

$$K = \frac{\sigma_0}{e} \quad (6-61)$$

Luego, el módulo volumétrico K puede definirse como la relación del esfuerzo esférico a la deformación volumétrica, que es análogo a la definición del módulo E . Obsérvese que las fórmulas anteriores para e y K están basadas en la suposición de que las deformaciones son pequeñas.

De la Ec. (6-61) para K , vemos que si el módulo de Poisson es igual a $1/3$, los módulos K y E son iguales. Si $\nu = 0$, entonces K tiene el valor $E/3$. Cuando $\nu = 0.5$, K se vuelve infinito, lo que corresponde a un material rígido cuyo volumen no cambia. Así, el máximo valor teórico del módulo de Poisson es 0.5 .

Si el esfuerzo esférico σ_0 es una presión p , como en el caso de un objeto sumergido en un fluido, o una roca enterrada, el estado de esfuerzo se conoce como **esfuerzo hidrostático**.

* 6.10 ESFUERZO TRIDIMENSIONAL

En el caso más general de esfuerzo tridimensional, un elemento esforzado estará sometido a esfuerzos normales y cortantes sobre todas las caras (véase Fig. 6-38). Como se describió en la Sección 6.2 para esfuerzo plano, los esfuerzos cortantes tienen dos subíndices, el primero denota el plano sobre el que actúa el esfuerzo y el segundo identifica la dirección del esfuerzo en tal plano. En la Fig. 6-38 se muestran todos los esfuerzos actuando en sus direcciones positivas.

Del equilibrio del elemento puede demostrarse que los esfuerzos cortantes que actúan sobre planos perpendiculares y dirigidos perpendicularmente a la línea de in-

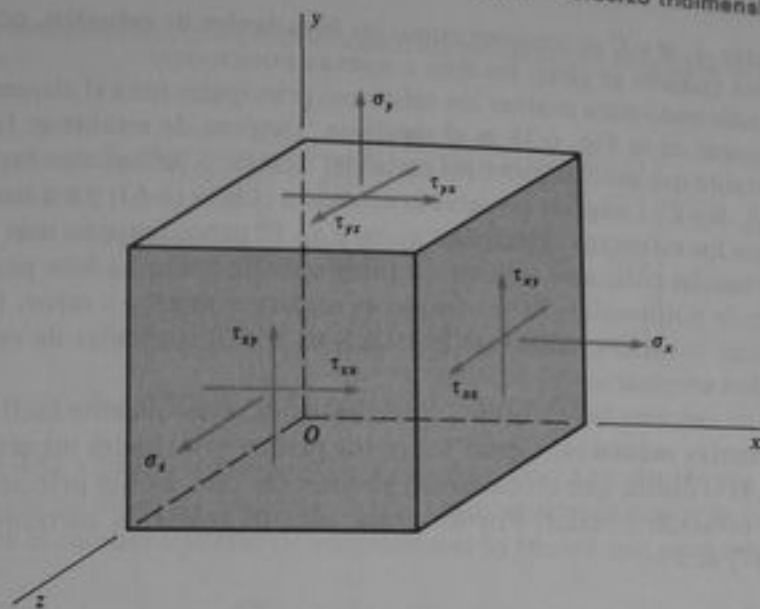


Fig. 6-38 Elemento sometido a esfuerzo tridimensional. (Únicamente se muestran los esfuerzos que actúan sobre las caras positivas. Sobre las caras negativas actúan esfuerzos en direcciones opuestas.)

tersección de los planos, son de igual magnitud. Por lo tanto, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (6-62)$$

Este concepto de igualdad de esfuerzos cortantes fue analizado previamente, y la primera de las Ecs. (6-62) se empleó en la explicación de esfuerzo plano (véase Ec. 6-1).

Los planos inclinados que pasan a través del elemento están sometidos a esfuerzos normales y cortantes, análogos a los esfuerzos σ_x y τ_{xy} , que actúan sobre planos inclinados en esfuerzo plano (véase Fig. 6-1). Por supuesto, en el caso tridimensional la normal al plano inclinado no necesariamente es paralela a alguno de los planos coordenados; esto es, puede ser oblicua a los tres ejes. No obstante, los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier plano inclinado pueden determinarse por equilibrio estático. Las fórmulas para estos esfuerzos son más largas y complicadas, por lo que aquí no se proporcionan. En vez de ello, consúltense libros de texto sobre teoría de la elasticidad (tal como la Ref. 2-1).

De particular importancia son los tres **esfuerzos principales**, que se obtienen como las tres raíces reales de la siguiente ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - A\sigma^2 + B\sigma - C = 0 \quad (6-63)$$

en la cual

$$\begin{aligned} A &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ B &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ C &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

Las cantidades A , B y C se conocen como las **invariantes de esfuerzo**, porque su valor no cambia cuando se giran los ejes a nuevas posiciones.

El procedimiento para evaluar los esfuerzos principales para el elemento esforzado tridimensional de la Fig. 6-38 es el siguiente. Después de establecer los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre las caras del elemento, se calculan las invariantes de esfuerzo A , B y C . Luego se resuelve la ecuación cúbica (6-63) para sus tres raíces; estas raíces son los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 . El procedimiento más simple para resolver la ecuación cúbica es utilizar un programa de computadora para la obtención de raíces de polinomios; otro método es mediante prueba y error. Las soluciones matemáticas formales, como las presentadas en los manuales de matemáticas, también pueden emplearse.

Después de calcular los esfuerzos principales, es relativamente fácil obtener los **esfuerzos cortantes máximos**. Como sobre los planos principales no actúan esfuerzos cortantes, ello indica que un elemento girado a las direcciones principales está en un estado de esfuerzo triaxial. Por lo tanto, los tres esfuerzos cortantes máximos (véase Ec. 6-47) son

$$\begin{aligned}(\tau_{\max})_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\(\tau_{\max})_2 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\(\tau_{\max})_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\end{aligned}\tag{6-64}$$

El esfuerzo cortante máximo absoluto es el esfuerzo numéricamente mayor de los esfuerzos determinados a partir de estas tres ecuaciones.

La ley de Hooke para esfuerzo tridimensional consiste en las tres ecuaciones triaxiales que relacionan los esfuerzos y deformaciones normales (Ecs. 6-48 y 6-49) y las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y deformaciones cortantes. Las últimas tienen la misma forma que las Ecs. (6-27) y (6-29) para esfuerzo plano, pero ahora hay tres conjuntos de ecuaciones de cortante en lugar de uno. Por tanto, las ecuaciones para esfuerzo tridimensional, que proporcionan las deformaciones en términos de los esfuerzos, son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\right\}\tag{6-65}$$

Las ecuaciones inversas, que proporcionan los esfuerzos en términos de las deformaciones, son

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (6-66)$$

Las Ecs. (6-65) y (6-66) a menudo se conocen como **Ley de Hooke generalizada**.

Dado que las deformaciones angulares no producen cambios de volumen, la expresión para el cambio unitario de volumen e es la misma que para esfuerzo triaxial:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \quad (6-67a)$$

o para deformaciones pequeñas,

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (6-67b)$$

Finalmente, la expresión para la densidad de energía de deformación (véanse Ecs. 6-32 y 6-54) es

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (6-68)$$

Mediante la sustitución de la ley de Hooke, podemos expresar u sólo en términos de los esfuerzos o las deformaciones; luego, en términos de esfuerzos,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned} \quad (6-69a)$$

y en términos de las deformaciones,

$$\begin{aligned} u &= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) \\ &\quad + 2\nu(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)] + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \end{aligned} \quad (6-69b)$$

Las ecuaciones de esfuerzo tridimensional usualmente no son necesarias en el estudio de la mecánica de materiales; sin embargo, las hemos dado como referencia en esta sección.

6.11 DEFORMACIÓN PLANA

Las deformaciones normal y cortante en un punto de un cuerpo varían con la dirección, en forma análoga a la de los esfuerzos. En esta sección se establecerán las ecuaciones que proporcionan las deformaciones en direcciones inclinadas en términos de las deformaciones en las direcciones de coordenadas. Estas relaciones son especialmente importantes en investigaciones experimentales, donde las deformaciones se miden por medio de medidores de deformación o deformímetros (*strain gages*). Los medidores se orientan en direcciones específicas, y usualmente es necesario calcular las deformaciones en otras direcciones.

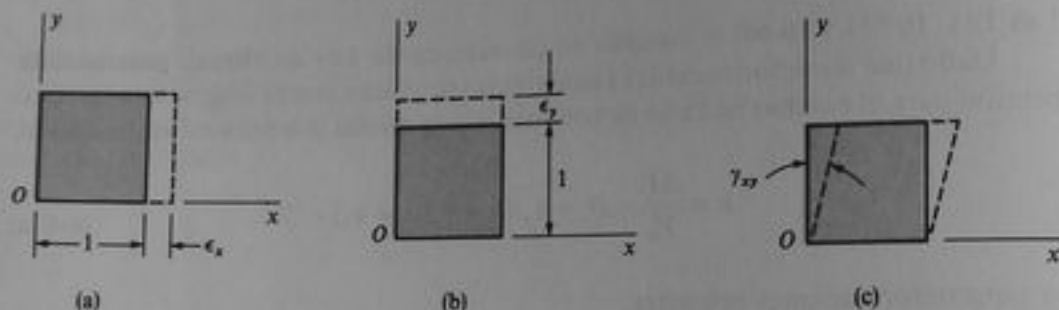


Fig. 6-39 Componentes de deformación ϵ_x , ϵ_y , y γ_{xy} en el plano xy

Recuérdese que en el plano xy pueden ocurrir tres componentes de deformación, como se muestra en las tres partes de la Fig. 6-39. Estas deformaciones son la deformación normal ϵ_x en la dirección x , la deformación normal ϵ_y en la dirección y , y la deformación angular (o deformación por cortante) γ_{xy} . Un elemento de material sometido a estas deformaciones se dice que está en estado de **deformación plana**. De donde resulta que un elemento en deformación plana no tiene deformación normal ϵ_z , ni tampoco deformaciones por cortante γ_{xz} y γ_{yz} , respectivamente. Luego, la deformación plana está definida por las siguientes condiciones:

$$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (6-70)$$

Las deformaciones restantes (ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy}) pueden tener valores diferentes de cero.

La definición anterior de deformación plana es análoga a la de esfuerzo plano. En esfuerzo plano, los siguientes esfuerzos deben ser cero:

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (6-71)$$

mientras que los esfuerzos restantes (σ_x , σ_y y τ_{xy}) pueden tener valores no nulos. En la Fig. 6-40 se presenta una comparación entre esfuerzo plano y deformación plana.

No debe inferirse, a partir de las similitudes en las definiciones de esfuerzo plano y de deformación plana, que ambos ocurren simultáneamente. En general, un elemento en esfuerzo plano experimenta una deformación en la dirección z (véase Fig. 6-40), de aquí que es claro que no está en deformación plana. También, muchos elementos sometidos a deformación plana tendrán esfuerzos σ_z , que actúan sobre ellos debido al requisito de que $\epsilon_z = 0$; nuevamente se aprecia que la deformación plana y el esfuerzo plano no ocurren simultáneamente. Se presenta una excepción cuando un elemento es-

tá sometido a esfuerzos normales iguales y opuestos (esto es, cuando $\sigma_x = -\sigma_y$). En este caso especial, no ocurre deformación normal en la dirección z ($\epsilon_z = 0$; véase Ec. 6-26c); por lo que el elemento está en un estado de deformación plana, así como de esfuerzo plano. Otro caso especial, aunque hipotético, es cuando un material tiene $\nu = 0$; entonces cada elemento esforzado plano está también en deformación plana, ya que $\epsilon_z = 0$ (véase Ec. 6-26c).*

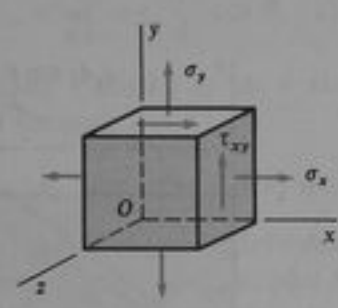
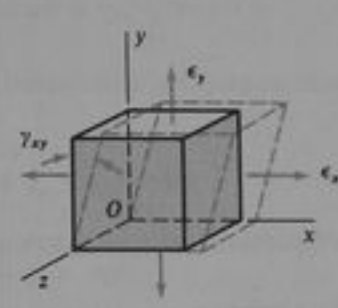
	Esfuerzo plano	Deformación plana
		
Esfuerzos	$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x, \sigma_y,$ y τ_{xy} pueden tener valores no nulos	$\tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$ y τ_{xy} pueden tener valores no nulos
Deformaciones	$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z,$ y γ_{xy} pueden tener valores no nulos	$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x, \epsilon_y,$ y γ_{xy} pueden tener valores no nulos

Fig. 6-40 Comparación de esfuerzo plano y deformación plana

Las ecuaciones de transformación de esfuerzos obtenidas para esfuerzo plano en el plano xy (véanse Ecs. 6-4) pueden emplearse también si está presente un esfuerzo normal σ_z . La causa es que el esfuerzo σ_z no interviene en las ecuaciones de equilibrio utilizadas para determinar los esfuerzos σ_x y τ_{xy} , que actúan sobre planos inclinados. Una situación análoga ocurre en la deformación plana. Se obtendrán las ecuaciones de transformación para el caso de deformación plana, pero las ecuaciones serán válidas aunque exista una deformación ϵ_z . Por lo tanto, las ecuaciones de transformación para deformación plana pueden emplearse para las deformaciones en el plano xy que ocurren en el caso de esfuerzo plano.

En la obtención de las ecuaciones de transformación para deformación plana, se utilizarán los ejes coordenados mostrados en la Fig. 6-41. Se supone que son co-

* En esta explicación no se consideran los efectos por cambios térmicos ni por deformaciones previas, ya que ambos producen deformaciones adicionales que podrían modificar algunos de nuestros comentarios.

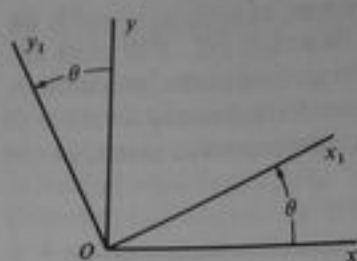
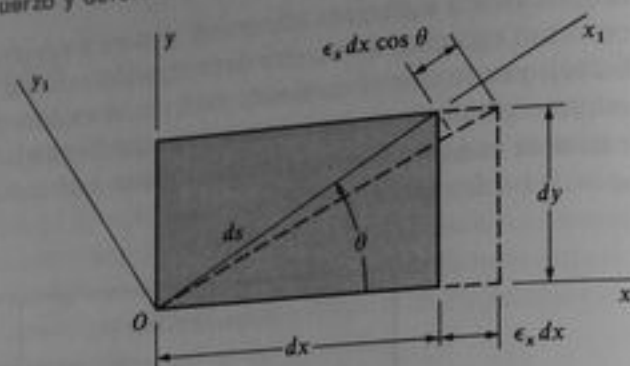
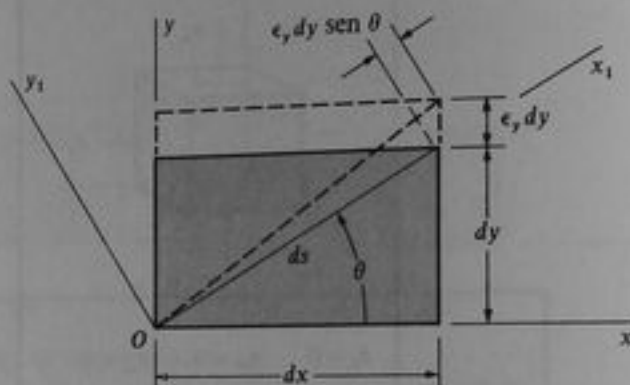


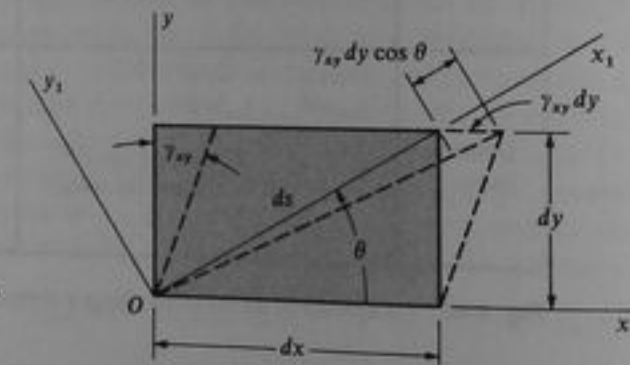
Fig. 6-41 Ejes girados x_1 y y_1



(a)



(b)



(c)

Fig. 6-42 Deformaciones de un elemento en deformación plana debidas a: (a) deformación normal ϵ_x , (b) deformación normal ϵ_y y (c) deformación angular γ_{xy} .

nocidas las deformaciones normales ϵ_x y ϵ_y y la deformación angular γ_{xy} asociadas con los ejes x y y (véase Fig. 6-39). El objetivo del análisis es determinar la deformación normal ϵ_{x_1} y la deformación angular $\gamma_{x_1 y_1}$, asociadas con los ejes $x_1 y_1$, los cuales están girados en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ a partir de los ejes xy . (No se requiere obtener una ecuación separada para la deformación normal ϵ_{y_1} , ya que ésta puede obtenerse a partir de la ecuación para ϵ_{x_1} , al sustituir θ por $\theta + 90^\circ$.)

La cara z positiva de un elemento deformado plano que tiene caras rectangulares, se muestra en la Fig. 6-42. La diagonal del rectángulo está en la dirección del eje x_1 , y los lados tienen longitudes dx y dy . Las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} en el plano xy producen un alargamiento del elemento en la dirección x igual a $\epsilon_x dx$ (Fig. 6-42a),

uno en la dirección y igual a $\epsilon_y dy$ (Fig. 6-42b) y un acortamiento en el ángulo entre las caras x y y igual a γ_{xy} (Fig. 6-42c). Estas deformaciones provocan que la diagonal se incremente en cantidades iguales a $\epsilon_x dx \cos \theta$, $\epsilon_y dy \sin \theta$ y $\gamma_{xy} dy \cos \theta$, respectivamente. El incremento total Δd en la longitud de la diagonal es la suma de estas tres expresiones:

$$\Delta d = \epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta$$

La deformación normal ϵ_{x_1} en la dirección x_1 es igual a este incremento en longitud, dividido entre la longitud inicial de la diagonal ds :

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\Delta d}{ds} = \epsilon_x \frac{dx}{ds} \cos \theta + \epsilon_y \frac{dy}{ds} \sin \theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \cos \theta$$

Al apreciar que $dx/ds = \cos \theta$ y $dy/ds = \sin \theta$, obtenemos la siguiente ecuación para la deformación normal:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (6-72a)$$

Como se mencionó previamente, la deformación normal ϵ_{y_1} en la dirección y_1 se obtiene a partir de esta ecuación, al sustituir θ por $\theta + 90^\circ$.

A continuación, considérese la deformación angular $\gamma_{x_1 y_1}$, asociada a los ejes girados. Esta deformación es igual a la reducción en ángulo entre las líneas del material que estaban inicialmente a lo largo de los ejes x_1 y y_1 . Para aclarar este concepto, supongamos que la línea Oa en la Fig. 6-43 representa una línea en el material que inicialmente estaba a lo largo del eje x_1 (esto es, sobre la diagonal del elemento). Las deformaciones indicadas en la Fig. 6-42 ocasionan que esta línea gire un ángulo α en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x_1 (Fig. 6-43). De igual modo, la línea Ob estaba originalmente a lo largo del eje y_1 , pero debido a las deformaciones gira un ángulo β en el sentido de las manecillas del reloj. La deformación angular $\gamma_{x_1 y_1}$ es la reducción total en el ángulo entre las dos líneas que originalmente formaban un ángulo recto; luego,

$$\gamma_{x_1 y_1} = \alpha + \beta$$

El ángulo α puede determinarse a partir de la Fig. 6-42 como sigue. La deformación ϵ_x (Fig. 6-42a) produce una rotación de la línea Oa en el sentido de las manecillas del reloj igual a la distancia $\epsilon_x dx \sin \theta$ dividida entre ds . Por lo tanto, la contribución de ϵ_x al ángulo α es $-\epsilon_x dx \sin \theta / ds$. De igual modo, la deformación ϵ_y produce una rotación de la línea Oa en sentido contrario al de las manecillas del reloj igual a $\epsilon_y dy \cos \theta$ dividido entre ds , y la deformación γ_{xy} produce una rotación en el sentido de las manecillas del reloj igual a $\gamma_{xy} dy \sin \theta$ dividida entre ds . Luego, la rotación resultante en sentido contrario al de las manecillas del reloj de la línea Oa es

$$\alpha = -\epsilon_x \frac{dx}{ds} \sin \theta + \epsilon_y \frac{dy}{ds} \cos \theta - \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \theta$$

o sea

$$\begin{aligned} \alpha &= -\epsilon_x \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta \\ &= -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

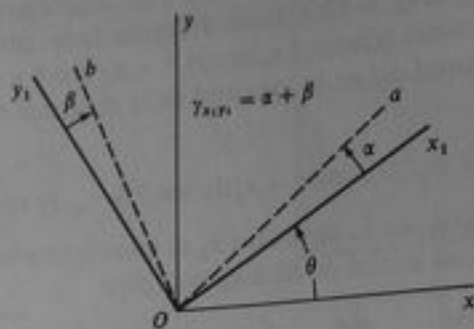


Fig. 6-43 Deformación angular $\gamma_{x_1 y_1}$ asociada con los ejes $x_1 y_1$.

La rotación de la línea Ob , que inicialmente estaba a 90° respecto de la línea Oa , puede determinarse al sustituir θ por $\theta + 90^\circ$ en la expresión para α . La expresión resultante es positiva en sentido contrario al de las manecillas del reloj, por lo que es igual al negativo del ángulo β , ya que β es una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}\beta &= (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin(\theta + 90^\circ) \cos(\theta + 90^\circ) + \gamma_{xy} \sin^2(\theta + 90^\circ) \\ &= -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta\end{aligned}$$

Al sumar α y β resulta la deformación angular $\gamma_{x_1 y_1}$:

$$\gamma_{x_1 y_1} = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Para definir la ecuación de modo más conveniente, se divide cada término entre 2 y se expresa la ecuación como sigue:

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (6-72b)$$

Las Ecs. (6-72) proporcionan las deformaciones normal y angular con respecto a ejes girados, en términos de las deformaciones orientadas con los ejes x y y . Estas ecuaciones tienen forma similar a la de las Ecs. (6-3) para esfuerzo plano, en las que ϵ_x corresponde a σ_x , $\gamma_{x_1 y_1}/2$ corresponde a $\tau_{x_1 y_1}$, ϵ_x corresponde a σ_x , ϵ_y corresponde a σ_y , y $\gamma_{xy}/2$ corresponde a τ_{xy} .

Las ecuaciones para deformación plana pueden expresarse en términos del ángulo 2θ mediante la sustitución de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

Esfuerzos	Deformaciones
σ_x	ϵ_x
σ_y	ϵ_y
τ_{xy}	$\gamma_{xy}/2$
σ_{x_1}	ϵ_{x_1}
$\tau_{x_1y_1}$	$\gamma_{x_1y_1}/2$

Tabla 6-1 Variables correspondientes en las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (Ecs. 6-3 y 6-4)^a y deformación plana (Ecs. 6-72 y 6-73)

Las ecuaciones de transformación para deformación plana resultan ahora

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (6-73a)$$

$$\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (6-73b)$$

Estas ecuaciones constituyen la contraparte de las Ecs. (6-4) para esfuerzo plano. Las variables correspondientes en los dos conjuntos de ecuaciones están listadas en la Tabla 6-1.

La analogía entre las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano y deformación plana muestra que todas las observaciones efectuadas en las secciones 6.2, 6.3 y 6.4, concernientes a esfuerzo plano, tienen sus contrapartes en deformación plana. Por ejemplo, la suma de las deformaciones normales en direcciones perpendiculares es constante:

$$\epsilon_{x_1} + \epsilon_{y_1} = \epsilon_x + \epsilon_y \quad (6-74)$$

Esta igualdad puede verificarse fácilmente al sustituir las expresiones para ϵ_{x_1} (Ec. 6-73a) y ϵ_{y_1} (obtenida a partir de la Ec. 6-73a con θ reemplazado por $\theta + 90^\circ$) en la Ec. (6-74).

Las **deformaciones principales** ocurren en direcciones perpendiculares determinadas con la siguiente ecuación (comparar con la Ec. 6-9):

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (6-75)$$

Las deformaciones principales se calculan a partir de la ecuación

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (6-76)$$

que corresponde a la Ec. (6-13) para los esfuerzos principales. En las direcciones de las deformaciones principales, las deformaciones angulares son cero. Las dos deformaciones principales pueden correlacionarse con las dos direcciones principales mediante las técnicas descritas en la Sección 6.3 para esfuerzos. (Nótese que la tercera deformación principal es $\epsilon_3 = 0$.)

Las **deformaciones angulares (o por cortante) máximas** en el plano xy están asociadas con ejes a 45° de las direcciones de los esfuerzos principales. La deformación angular algebraicamente máxima (en el plano xy) está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (6-77)$$

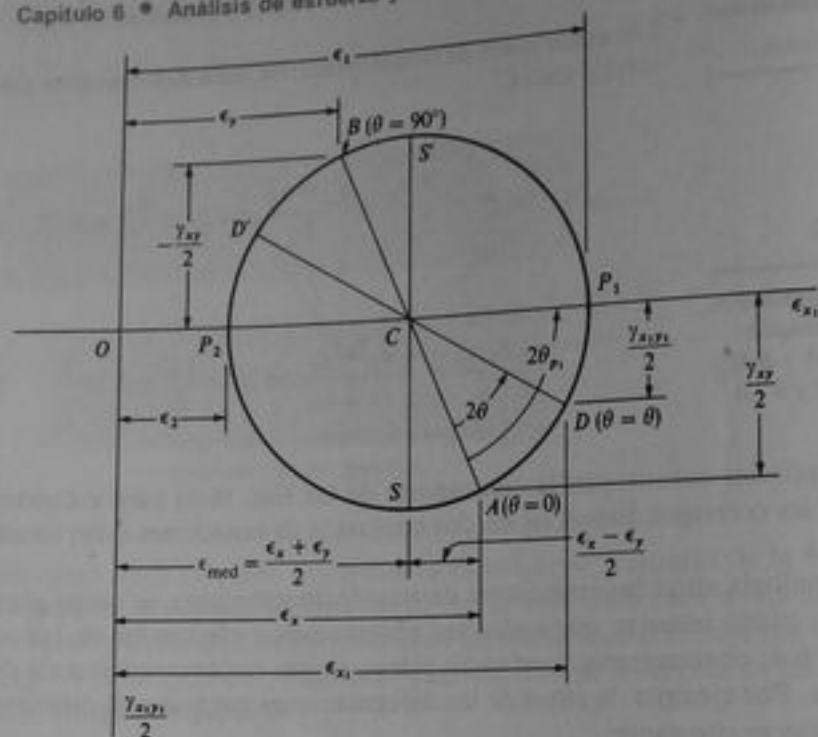


Fig. 6-44 Círculo de Mohr para deformación plana

La deformación angular mínima tiene la misma magnitud pero es negativa. En las direcciones de deformación angular máxima, las deformaciones normales son iguales a $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$.

Un elemento en esfuerzo plano que está orientado en las direcciones principales (véase Fig. 6-12b) no tiene esfuerzos cortantes actuando sobre sus caras. Por lo tanto, la deformación angular γ_{x_1, y_1} para este elemento también es cero. Esto muestra que las deformaciones normales en este elemento son las deformaciones principales. Luego, los planos principales son los mismos tanto para esfuerzo plano como para deformación plana.

El círculo de Mohr para deformación plana se construye en la misma forma general que para esfuerzo plano, como se muestra en la Fig. 6-44. Las deformaciones normales ϵ_x se llevan como abscisas, y las deformaciones angulares divididas entre dos ($\gamma_{x_1, y_1}/2$) se trazan hacia abajo como ordenadas. El centro C del círculo tiene una abscisa igual a $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$. El punto A , que representa las deformaciones asociadas con la dirección x ($\theta = 0$), tiene coordenadas ϵ_x y $\gamma_{xy}/2$. El punto B en el extremo opuesto de un diámetro desde A , tiene coordenadas ϵ_y y $-\gamma_{xy}/2$, que representa las deformaciones asociadas con un par de ejes girados en un ángulo $\theta = 90^\circ$. Las deformaciones asociadas con ejes a un ángulo θ están dadas por el punto D , que se localiza midiendo un ángulo 2θ desde el radio CA . Las deformaciones principales están representadas por los puntos P_1 y P_2 , y las deformaciones angulares máximas por los puntos S y S' . Todas estas deformaciones pueden determinarse directamente a partir del círculo o a partir de las ecuaciones dadas previamente.

Un empleo importante de las ecuaciones de transformación para deformaciones y del círculo de Mohr, es la interpretación de las mediciones mediante medidores de deformación (*strain gages*), lo cual se examinará posteriormente en el Ejemplo 2. No

obstante, deben consultarse otras referencias sobre análisis experimental de esfuerzo para obtener información detallada respecto a técnicas experimentales (véanse, por ejemplo, las Refs. 6-11 y 6-12).

Ejemplo 1

Un elemento de material sometido a deformación plana tiene deformaciones como sigue: $\epsilon_x = 340 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 110 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}$. Estas deformaciones se muestran sumamente exageradas en la Fig. 6-45a, que ilustra un elemento de dimensiones unitarias alineado con los ejes x y y . Dado que los bordes del elemento tienen longitudes unitarias, los cambios en dimensiones son iguales a las deformaciones normales. Por conveniencia, la deformación angular se muestra como el cambio angular en la esquina del elemento localizado en el origen.

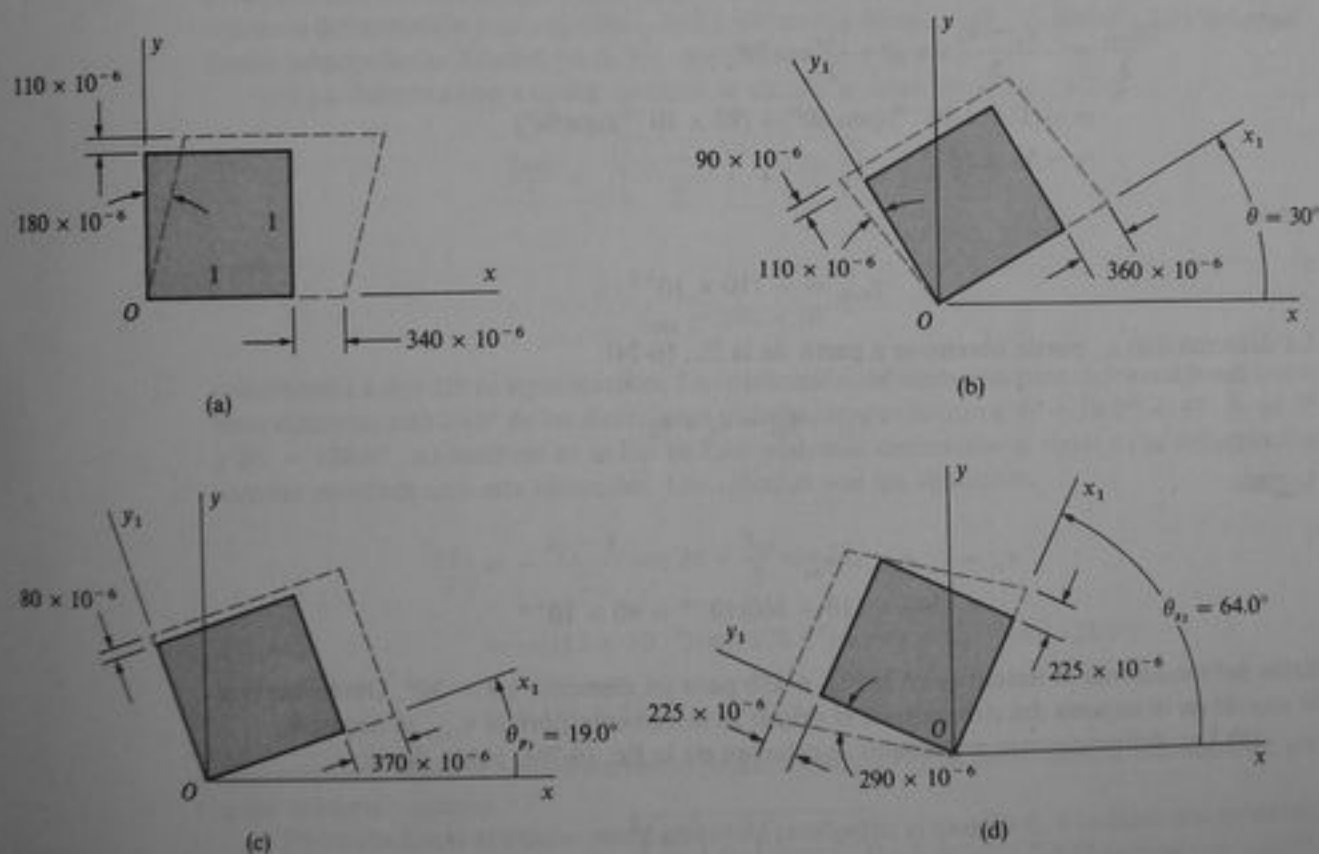


Fig. 6-45 Ejemplo 1. (a) Elemento en deformación plana, (b) elemento a $\theta = 30^\circ$, (c) deformaciones principales y (d) deformaciones angulares máximas. (Nota: los bordes de los elementos tienen longitudes unitarias.)

Calcular las siguientes cantidades: (a) las deformaciones para un elemento girado un ángulo $\theta = 30^\circ$, (b) las deformaciones principales, y (c) las deformaciones angulares máximas. (Considerar únicamente las deformaciones en el plano.)

(a) Las deformaciones para un elemento girado un ángulo de 30° se determinan a partir de las ecuaciones de transformación (Ecs. 6-73). Sin embargo, antes de sustituir en tales ecuaciones, efectuamos los siguientes cálculos preliminares:

$$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{(340 + 110)10^{-6}}{2} = 225 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \frac{(340 - 110)10^{-6}}{2} = 115 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = 90 \times 10^{-6}$$

Ahora sustituimos en las Ecs. (6-73) y obtenemos

$$\begin{aligned}\epsilon_{x_1} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ &= (225 \times 10^{-6}) + (115 \times 10^{-6})(\cos 60^\circ) + (90 \times 10^{-6})(\sin 60^\circ) \\ &= 360 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= -(115 \times 10^{-6})(\sin 60^\circ) + (90 \times 10^{-6})(\cos 60^\circ) \\ &= -55 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

o sea

$$\gamma_{x_1y_1} = -110 \times 10^{-6}$$

La deformación ϵ_{y_1} puede obtenerse a partir de la Ec. (6-74):

$$\epsilon_{x_1} + \epsilon_{y_1} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

Luego,

$$\begin{aligned}\epsilon_{y_1} &= \epsilon_x + \epsilon_y - \epsilon_{x_1} \\ &= (340 + 110 - 360)10^{-6} = 90 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Estas deformaciones se muestran en la Fig. 6-45b para un elemento a $\theta = 30^\circ$. Obsérvese que el ángulo en la esquina del elemento en el origen se incrementa porque $\gamma_{x_1y_1}$ es negativo.

(b) Las deformaciones principales se calculan de la Ec. (6-76), como sigue:

$$\begin{aligned}\epsilon_{1,2} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= 225 \times 10^{-6} \pm \sqrt{(115 \times 10^{-6})^2 + (90 \times 10^{-6})^2} \\ &= 225 \times 10^{-6} \pm 146 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\epsilon_1 = 370 \times 10^{-6} \quad \epsilon_2 = 80 \times 10^{-6}$$

Los ángulos a las direcciones principales pueden obtenerse de la Ec. (6-75):

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{180}{340 - 110} = 0.783$$

Por lo que los dos valores de $2\theta_p$ entre 0° y 360° son 38.0° y 218° , y los ángulos a las direcciones principales son

$$\theta_p = 19.0^\circ \text{ y } 109.0^\circ$$

Para determinar cuál valor de θ_p se asocia con cada deformación principal, sustituimos θ_p en la Ec. (6-73a) y resolvemos para la deformación. Así, mediante $\theta_p = 19.0^\circ$, obtenemos

$$\begin{aligned}\epsilon_{x_1} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ &= (225 \times 10^{-6}) + (115 \times 10^{-6})(\cos 38.0^\circ) + (90 \times 10^{-6})(\sin 38.0^\circ) \\ &= 370 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Este resultado muestra que la mayor deformación principal ϵ_1 está a un ángulo $\theta_{p_1} = 19.0^\circ$. Entonces la deformación más pequeña ϵ_2 está a 90° de esa dirección ($\theta_{p_2} = 109.0^\circ$). Las deformaciones principales se ilustran en la Fig. 6-45c.

(c) La deformación angular máxima se calcula a partir de la Ec. (6-77):

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 146 \times 10^{-6}$$

o sea

$$\gamma_{\max} = 290 \times 10^{-6}$$

redondeada a dos cifras significativas. La orientación del elemento para deformaciones angulares máximas está a 45° de las direcciones principales; por lo tanto, $\theta_s = 19.0^\circ + 45^\circ = 64.0^\circ$ y $2\theta_s = 128.0^\circ$. Al sustituir en la Ec. (6-73b) podemos determinar el signo de la deformación angular asociada con esta dirección. Los cálculos son los siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= -(115 \times 10^{-6})(\sin 128.0^\circ) + (90 \times 10^{-6})(\cos 128.0^\circ) \\ &= -146 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Este resultado muestra que un elemento girado un ángulo $\theta_s = 64.0^\circ$ tiene la deformación angular máxima negativa.

Podemos llegar al mismo resultado observando que el ángulo θ_s a la dirección de deformación angular máxima positiva siempre es 45° menor que θ_{p_1} . En consecuencia,

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45^\circ = 19.0^\circ - 45^\circ = -26.0^\circ$$

y

$$\theta_{s_2} = \theta_{s_1} + 90^\circ = 64.0^\circ$$

Las deformaciones angulares correspondientes son $\gamma_{\max} = 290 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{\min} = -290 \times 10^{-6}$, respectivamente.

Las deformaciones normales sobre un elemento que experimenta las deformaciones angulares máxima y mínima son

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 225 \times 10^{-6}$$

En la Fig. 6-45d se presenta un esquema de este elemento. Obsérvese que $\gamma_{\text{máx}}/2$ es igual a la mitad de la diferencia de las deformaciones principales.

En este ejemplo se decidió calcular las deformaciones mediante las ecuaciones de transformación. Sin embargo, todos los resultados pueden obtenerse también en forma sencilla mediante el círculo de Mohr.

Ejemplo 2

Un **medidor de deformación** (o deformímetro) de resistencia eléctrica es un pequeño dispositivo que se adhiere a la superficie de un objeto. El aparato contiene alambres que se estiran o se encogen cuando el objeto se deforma en ese punto. La resistencia eléctrica de los alambres se modifica cuando varía la longitud de los alambres. Este cambio de resistencia se mide y convierte en una medida de deformación. Estos medidores son extremadamente sensibles y pueden medir deformaciones tan pequeñas como 1×10^{-6} . Como cada medidor mide la deformación normal en una dirección única, a menudo es necesario emplear una combinación de tres deformímetros, y cada uno de ellos mide la deformación en una dirección diferente. A partir de estas tres mediciones es posible calcular las deformaciones en cualquier dirección sobre la superficie. Se denomina **roseta de deformación** a un conjunto de tres medidores colocados en una disposición particular. Como la roseta se monta sobre la superficie del cuerpo, en donde el material está en esfuerzo plano, podemos emplear las ecuaciones de transformación para deformación plana en el cálculo de las deformaciones en diferentes direcciones sobre la superficie.

Una roseta de deformación a 45° consta de tres deformímetros de resistencia eléctrica colocados como se muestra en la Fig. 6-46. Los medidores *A*, *B* y *C* miden las deformaciones normales ϵ_a , ϵ_b y ϵ_c en las direcciones de las rectas *Oa*, *Ob* y *Oc*, respectivamente. Mostrar cómo obtener las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes *xy*.

Como los medidores *A* y *C* están alineados con los ejes *x* y *y*, proporcionan directamente las deformaciones ϵ_x y ϵ_y :

$$\epsilon_x = \epsilon_a \quad \epsilon_y = \epsilon_c$$

Para obtener la deformación angular γ_{xy} , debemos utilizar la ecuación de transformación (6-73a) para la deformación ϵ_{x_1} :

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

Para el ángulo $\theta = 45^\circ$, se aprecia que $\epsilon_{x_1} = \epsilon_b$; por lo tanto, la ecuación anterior resulta

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} (\cos 90^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin 90^\circ)$$

Al despejar γ_{xy} , obtenemos

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c$$

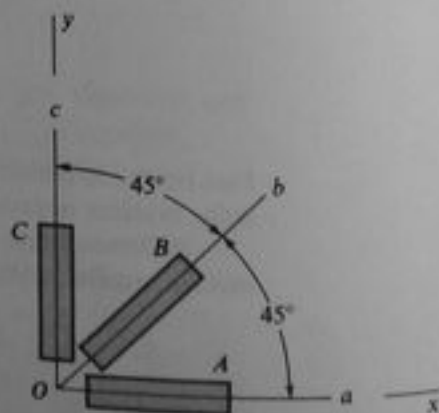


Fig. 6-46 Ejemplo 2. Roseta de deformación

Luego, las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} se determinan fácilmente a partir de las lecturas de los medidores de deformación. Conociendo estas deformaciones, podemos calcular las deformaciones en cualquier otra dirección mediante el círculo de Mohr o las ecuaciones de transformación, como se mostró en el ejemplo anterior. También, podemos calcular las deformaciones principales y las deformaciones angulares máximas en el material.

Ejemplo 3

Deducir las ecuaciones de transformación para deformación plana mediante las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano y la ley de Hooke.

Empecemos con el elemento esforzado plano mostrado en la Fig. 6-47a. Sobre este elemento actúan los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} . Cuando el elemento se gira un ángulo θ , los esfuerzos que actúan sobre él resultan ser σ_{x_1} , σ_{y_1} y $\tau_{x_1y_1}$ (Fig. 6-47b). Las ecuaciones de transformación para σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ (véanse Ecs. 6-4) son las siguientes:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

y la ecuación para σ_{y_1} (véase Ec. 6-5) es

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Las deformaciones ϵ_{x_1} y $\gamma_{x_1y_1}$ para el elemento girado (Fig. 6-47b) pueden expresarse en términos de estos esfuerzos mediante la ley de Hooke:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\sigma_{x_1}}{E} - \frac{\nu\sigma_{y_1}}{E} \quad \gamma_{x_1y_1} = \frac{\tau_{x_1y_1}}{G}$$

o, al sustituir σ_{x_1} , σ_{y_1} y $\tau_{x_1y_1}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right) \\ &\quad - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \right) \\ \gamma_{x_1y_1} &= \frac{1}{G} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right) \end{aligned}$$

Finalmente, se emplea de nuevo la ley de Hooke (véanse Ecs. 6-28 y 6-29) y se sustituyen en las dos últimas ecuaciones las expresiones para σ_x , σ_y y τ_{xy} en términos de las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} . Los resultados de esta sustitución son

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

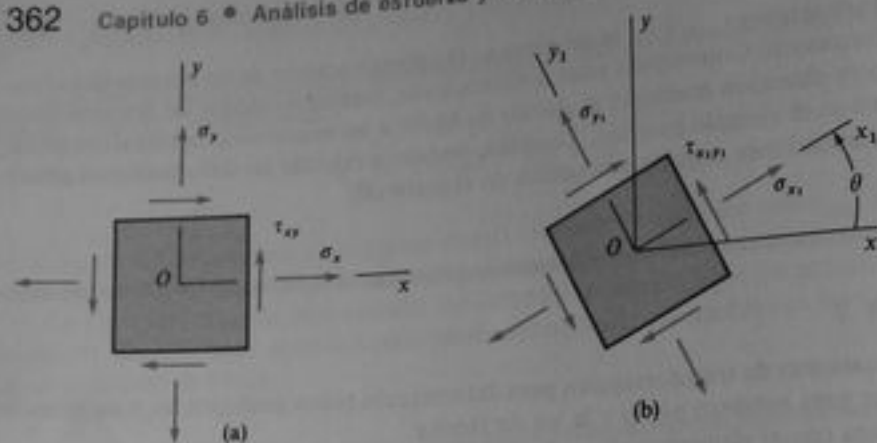


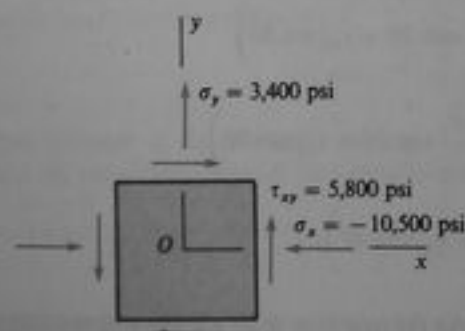
Fig. 6-47 Ejemplo 3

Estas ecuaciones representan las ecuaciones de transformación para deformación plana (Ecs. 6-73).

Esta deducción muestra que las deformaciones para un elemento en esfuerzo plano se transforman exactamente de la misma manera que los esfuerzos para un elemento en esfuerzo plano, siempre que las deformaciones se deban a los mismos esfuerzos (y no debido a otras causas, tales como deformaciones previas o efectos térmicos) y que se satisfaga la ley de Hooke.

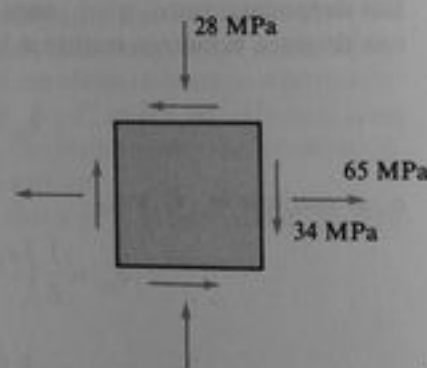
PROBLEMAS / CAPÍTULO 6

6.2-1 Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -10,500$ psi, $\sigma_y = 3,400$ psi y $\tau_{xy} = 5,800$ psi, como se muestra en la figura. Determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 60^\circ$ desde el eje x .



Prob. 6.2-1

6.2-2 Resolver el problema anterior para $\sigma_x = 65$ MPa, $\sigma_y = -28$ MPa, $\tau_{xy} = -34$ MPa y $\theta = 10^\circ$ (véase figura).

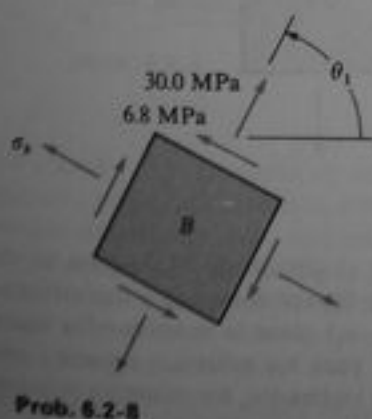
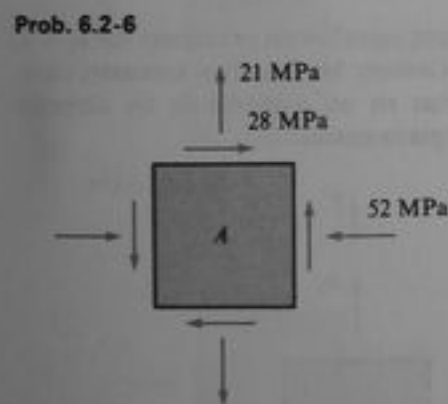
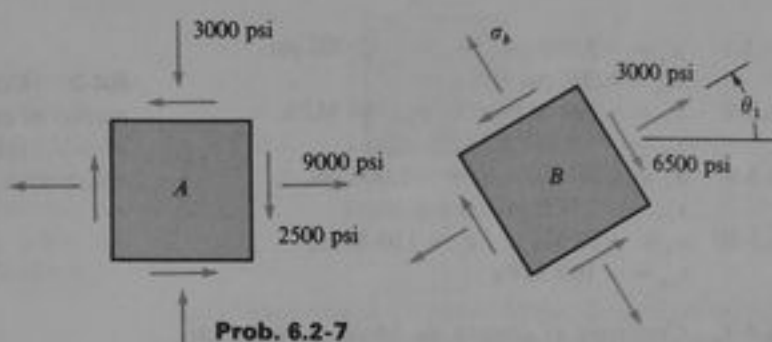
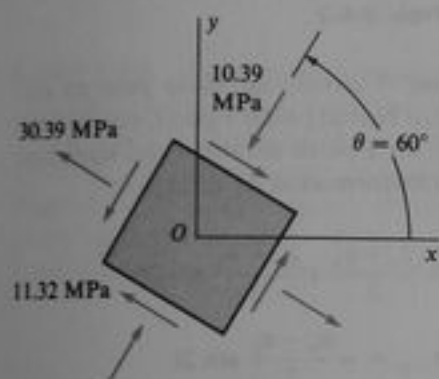
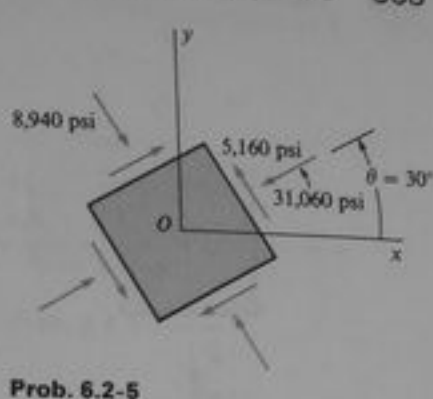
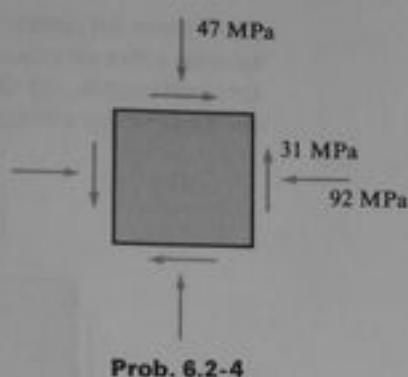
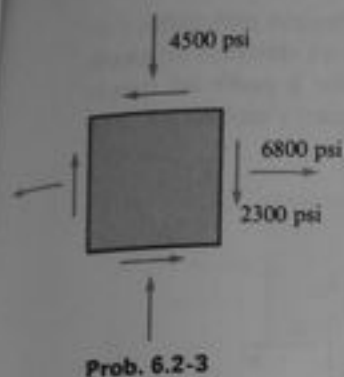


Prob. 6.2-2

6.2-3 Resolver el Problema 6.2-1 para $\sigma_x = 6800$ psi, $\sigma_y = -4500$ psi, $\tau_{xy} = -2300$ psi y $\theta = -30^\circ$ (véase figura).

6.2-4 Resolver el Problema 6.2-1 para $\sigma_x = -92$ MPa, $\sigma_y = -47$ MPa, $\tau_{xy} = 31$ MPa y $\theta = -40^\circ$ (véase figura).

6.2-5 y 6.2-6 Un elemento en esfuerzo plano se gira un ángulo conocido θ (véase figura). Sobre el elemento girado, los esfuerzos normales y cortantes tienen las magnitudes y direcciones mostradas en la figura. Determinar los esfuerzos normales y cortantes sobre un elemento cuyos lados son paralelos a los ejes xy ; esto es, determinar σ_x , σ_y y τ_{xy} .



6.2-7 y 6.2-8 En un punto de una estructura sometido a esfuerzo plano, los esfuerzos tienen las magnitudes y direcciones que se muestran sobre el elemento *A* en la primera parte de la figura. El elemento *B*, localizado en el mismo punto de la estructura, se gira un ángulo θ_1 de tal magnitud que los esfuerzos tienen los valores mostrados en la segunda parte de la figura. Calcular el esfuerzo normal σ_n y el ángulo θ_1 .

6.3-1 a 6.3-10 Un elemento en esfuerzo plano (véase figura) está sometido a esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} como se enumeran enseguida. (a) Determinar los esfuerzos principales y mostrarlos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente. (b) Determinar los esfuerzos cortantes máximos y mostrarlos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente. (Considerar únicamente los esfuerzos en el plano.)

6.3-1 $\sigma_x = 4,000$ psi, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -4,000$ psi

6.3-2 $\sigma_x = 60$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 60$ MPa

6.3-3 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 4,000$ psi, $\tau_{xy} = 2,000$ psi

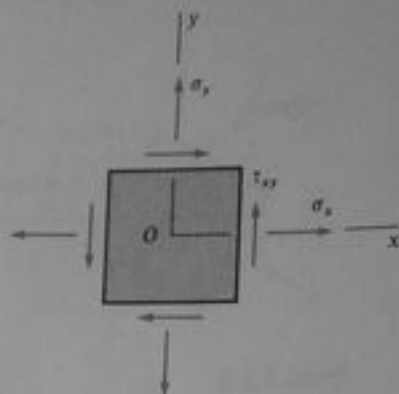
6.3-4 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -48$ MPa, $\tau_{xy} = 15$ MPa

6.3-5 $\sigma_x = 16,000$ psi, $\sigma_y = 6,000$ psi,

$\tau_{xy} = 4,000$ psi

6.3-6 $\sigma_x = -100$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa,

$\tau_{xy} = -50$ MPa



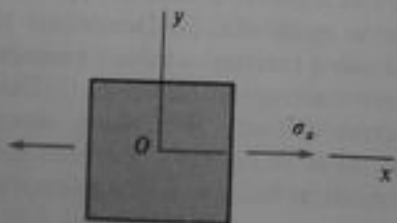
Probs. 6.3-1 a 6.3-10

- 6.3-7 $\sigma_x = -3,000$ psi, $\sigma_y = -12,000$ psi,
 $\tau_{xy} = 6,000$ psi
 6.3-8 $\sigma_x = -100$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa,
 $\tau_{xy} = -50$ MPa
 6.3-9 $\sigma_x = 3,000$ psi, $\sigma_y = -1,000$ psi,
 $\tau_{xy} = -2,000$ psi
 6.3-10 $\sigma_x = -50$ MPa, $\sigma_y = 150$ MPa,
 $\tau_{xy} = -100$ MPa

6.4-1 Construir el círculo de Mohr para un elemento en esfuerzo uniaxial (véase figura). (a) A partir del círculo, deducir las siguientes ecuaciones de transformación de esfuerzos:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

(b) Demostrar a partir del círculo que los esfuerzos principales son $\sigma_1 = \sigma_x$ y $\sigma_2 = 0$. (c) Obtener del círculo los esfuerzos cortantes máximos y señalarlos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente.

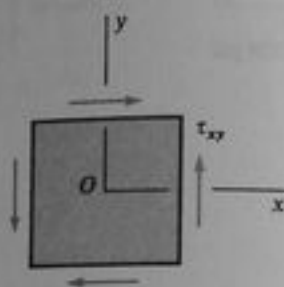


Prob. 6.4-1

6.4-2 Construir el círculo de Mohr para un elemento en cortante puro (véase figura). (a) A partir del círculo, obtener las siguientes ecuaciones de transformación de esfuerzos:

$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \tau_{x_1y_1} = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

(b) Obtener del círculo los esfuerzos principales y señalarlos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente. (c) Demostrar a partir del círculo que los esfuerzos cortantes máximo y mínimo son $\pm \tau_{xy}$.



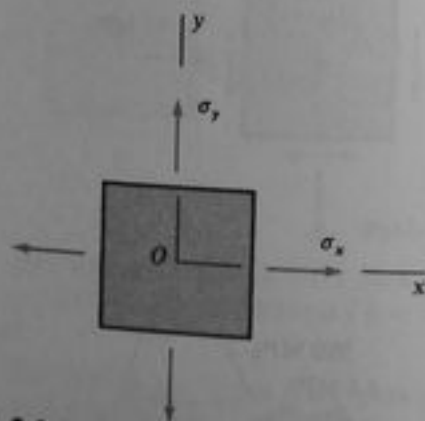
Prob. 6.4-2

6.4-3 Construir el círculo de Mohr para un elemento en esfuerzo biaxial (véase figura), suponiendo $\sigma_x > \sigma_y$. (a) Obtener a partir del círculo las siguientes ecuaciones de transformación de esfuerzos:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

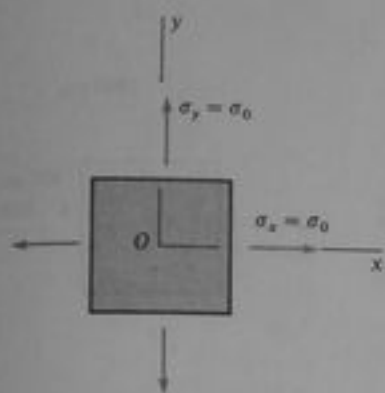
$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

(b) Demostrar que los esfuerzos principales son $\sigma_1 = \sigma_x$ y $\sigma_2 = \sigma_y$. (c) Obtener los esfuerzos cortantes máximos e ilustrarlos en un esquema de un elemento orientado apropiadamente.

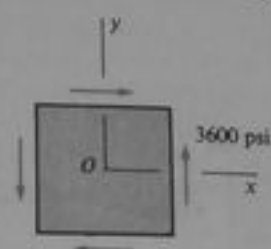


Prob. 6.4-3

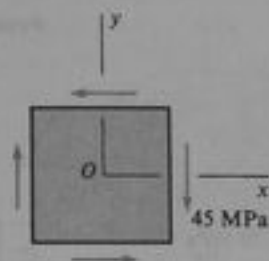
6.4-4 Construir el círculo de Mohr para un elemento en esfuerzo biaxial sometido a dos esfuerzos iguales ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$) como se muestra en la figura. Obtener fórmulas para los esfuerzos normal y cortante sobre planos inclinados, los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos.



Prob. 6.4-4

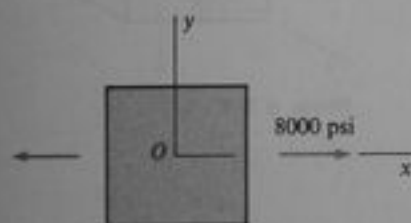


Prob. 6.4-7

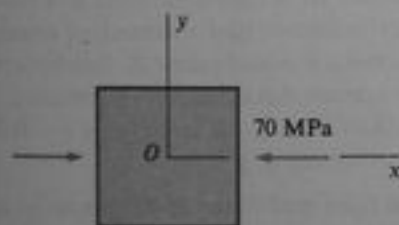


Prob. 6.4-8

6.4-5 y 6.4-6 Un elemento en esfuerzo uniaxial está sometido a esfuerzos σ , como se muestra en la figura. Mediante el círculo de Mohr, determinar (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 30^\circ$ desde el eje x , y (b) los esfuerzos cortantes máximos. Mostrar los resultados sobre esquemas de elementos orientados apropiadamente.



Prob. 6.4-5



Prob. 6.4-6

6.4-7 y 6.4-8 Un elemento en cortante puro está sometido a esfuerzos τ_{xy} , como se muestra en la figura. Mediante el círculo de Mohr determinar (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 75^\circ$ desde el eje x , y (b) los esfuerzos principales. Señalar los resultados sobre esquemas de elementos orientados apropiadamente.

6.4-9 y 6.4-10 Un elemento en esfuerzo biaxial está sometido a esfuerzos σ_x y σ_y , como se indica en la fi-

gura. Mediante el círculo de Mohr, determinar (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 22.5^\circ$ desde el eje x y (b) los esfuerzos cortantes máximos. Señalar los resultados sobre esquemas de elementos orientados apropiadamente.

6.4-11 Resolver el Problema 6.2-1 mediante el círculo de Mohr.

6.4-12 Resolver el Problema 6.2-2 mediante el círculo de Mohr.

6.4-13 Resolver el Problema 6.2-3 mediante el círculo de Mohr.

6.4-14 Resolver el Problema 6.2-4 mediante el círculo de Mohr.

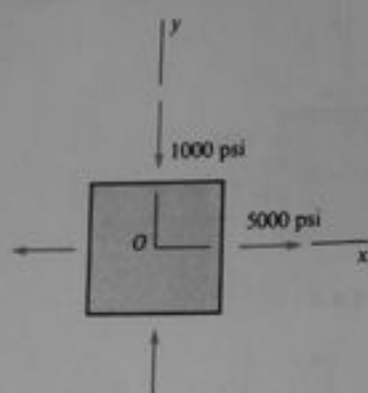
6.4-15 Resolver el Problema 6.2-5 mediante el círculo de Mohr.

6.4-16 Resolver el Problema 6.2-6 mediante el círculo de Mohr.

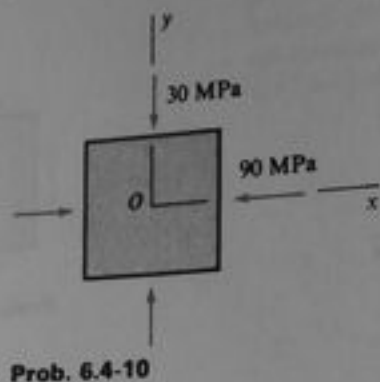
6.4-17 Resolver el Problema 6.2-7 mediante el círculo de Mohr.

6.4-18 Resolver el Problema 6.2-8 mediante el círculo de Mohr.

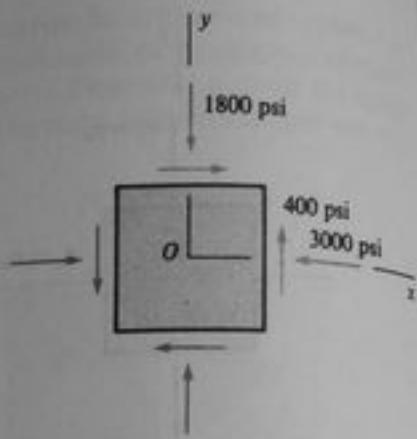
6.4-19 y 6.4-20 Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} , como se indica en la figura. Mediante el círculo de Mohr, determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento girado un ángulo $\theta = 20^\circ$. Señalar los resultados sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente.



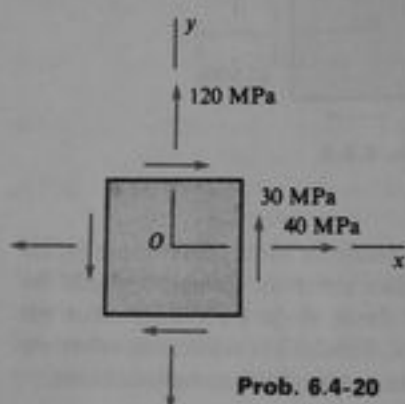
Prob. 6.4-9



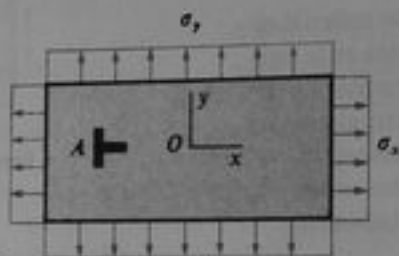
Prob. 6.4-10



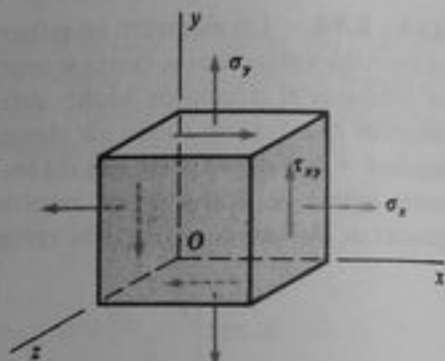
Prob. 6.4-19



Prob. 6.4-20



Probs. 6.5-1 y 6.5-2



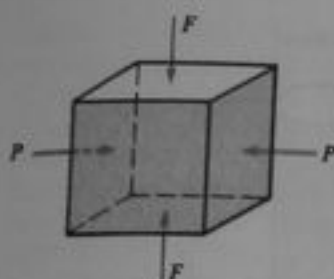
Prob. 6.5-3

- 6.4-21 Resolver el Problema 6.3-1 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-22 Resolver el Problema 6.3-2 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-23 Resolver el Problema 6.3-3 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-24 Resolver el Problema 6.3-4 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-25 Resolver el Problema 6.3-5 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-26 Resolver el Problema 6.3-6 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-27 Resolver el Problema 6.3-7 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-28 Resolver el Problema 6.3-8 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-29 Resolver el Problema 6.3-9 mediante el círculo de Mohr.
- 6.4-30 Resolver el Problema 6.3-10 mediante el círculo de Mohr.

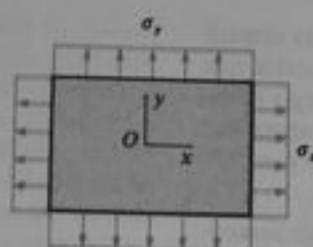
6.5-1 Una placa delgada, rectangular y de acero está sometida a esfuerzos normales uniformes σ_x y σ_y , como se indica en la figura. Se fijan a la placa medidores de deformación (deformímetros) orientados en las direcciones x y y en el punto A . Las lecturas de los medidores marcan deformaciones normales $\epsilon_x = 0.001$ y $\epsilon_y = -0.0007$. Si $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.3$, determinar los esfuerzos σ_x y σ_y .

6.5-2 Se fijan medidores de deformación en las direcciones x y y a una placa delgada rectangular de acero como se muestra en la figura. La placa está sometida a esfuerzos normales uniformes σ_x y σ_y . Los medidores de deformación proporcionan lecturas $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = 100 \times 10^{-6}$. Si $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, calcular los esfuerzos σ_x y σ_y .

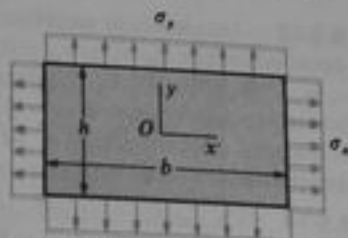
6.5-3 Las deformaciones normales ϵ_x y ϵ_y para un elemento en esfuerzo plano (véase figura) se miden con medidores de deformación. (a) Obtener una fórmula para la deformación normal ϵ_z en la dirección z en términos de ϵ_x , ϵ_y y el módulo de Poisson ν . (b) Si $\epsilon_x = 170 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 40 \times 10^{-6}$ y $\nu = 0.3$, ¿cuál es la deformación ϵ_z ?



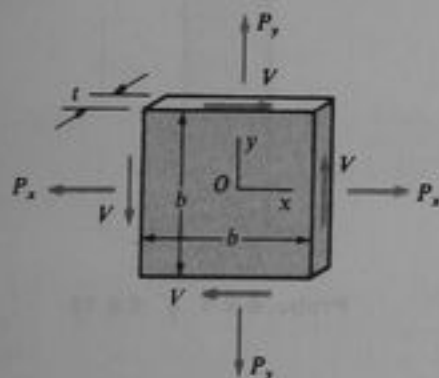
Prob. 6.5-4



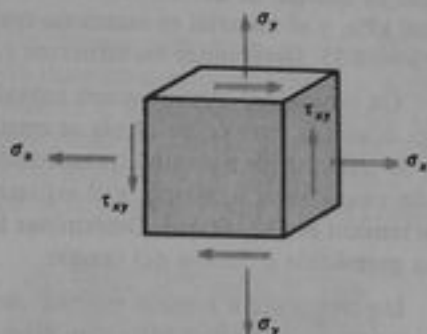
Probs. 6.5-5 y 6.5-6



Probs. 6.5-7 y 6.5-8



Probs. 6.5-11 y 6.5-12



Probs. 6.5-13 y 6.5-14

6.5-4 Un cubo de metal se comprime en dos caras opuestas por fuerzas de compresión uniformemente distribuidas de magnitud P (véase figura). ¿Qué fuerza de compresión F , también uniformemente distribuida, debe aplicarse a uno de los otros dos pares de caras, a fin de que tales caras permanezcan separadas la misma distancia?

6.5-5 Una placa delgada de acero sometida a esfuerzos normales uniformes $\sigma_x = 10$ ksi y $\sigma_y = 20$ ksi se indica en la figura. Calcular la deformación cortante máxima γ_{\max} en el material, si $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\nu = 0.3$.

6.5-6 Sobre una placa delgada de acero ($E = 200$ GPa y $\nu = 0.3$) actúan esfuerzos normales uniformes σ_x y σ_y , como se muestra en la figura. Calcular la deformación angular máxima γ_{\max} en el plano de la placa, si $\sigma_x = 90$ MPa y $\sigma_y = -20$ MPa.

6.5-7 Una placa rectangular de espesor t , ancho b y altura h está sometida a esfuerzos normales σ_x y σ_y , como se muestra en la figura. Calcular el cambio de espesor Δt y el cambio de volumen ΔV de la placa, si se suponen las siguientes dimensiones y esfuerzos: $t = 0.5$ plg, $b = 30$ plg, $h = 20$ plg, $\sigma_x = 12,000$ psi y $\sigma_y = -5,000$ psi. Suponer también que el material es aluminio con $E = 10,500$ ksi y $\nu = 0.33$.

6.5-8 Resolver el problema anterior suponiendo $t = 20$ mm, $b = 800$ mm, $h = 400$ mm, $\sigma_x = 60$ MPa, $\sigma_y = -18$ MPa. Suponer también que el material es acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.3$.

6.5-9 Un cubo de concreto de 4 plg de arista se comprime en dos direcciones perpendiculares mediante fuerzas $P = 16,000$ lb. Determinar el cambio en volumen ΔV del cubo y la energía de deformación total U almacenada en el cubo, si $E = 4 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.1$.

6.5-10 Un cubo de latón con 50 mm de lado se comprime en dos direcciones perpendiculares mediante fuerzas $P = 175$ kN. Calcular el cambio en volumen ΔV del cubo y la energía de deformación total U almacenada en el cubo, suponiendo $E = 100$ GPa y $\nu = 0.34$.

6.5-11 Una placa cuadrada de ancho b y espesor t está cargada por fuerzas normales P_x y P_y y fuerzas cortantes V como se muestra en la figura. Las fuerzas producen esfuerzos uniformemente distribuidos que actúan sobre las orillas de la placa. Calcular el cambio de volumen ΔV de la placa y la energía de deformación total U almacenada en la placa si las dimensiones son $b = 12$ plg y $t = 1$ plg, la placa está hecha de aluminio con $E = 10,600$ ksi y $\nu = 0.33$, y las fuerzas son $P_x = 90$ kips, $P_y = 20$ kips y $V = 15$ kips.

6.5-12 Resolver el problema anterior para una placa de magnesio con $b = 600$ mm, $t = 40$ mm, $E = 45$ GPa, $\nu = 0.35$, $P_x = 480$ kN, $P_y = 180$ kN y $V = 120$ kN.

6.5-13 Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} (véase figura) tales que $\sigma_x = -0.5\sigma_y$ y $\tau_{xy} = 0.5\sigma_y$. La densidad de energía de deformación del elemento es $u = 33$ psi. Si se supone que el material es acero con $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.3$, determinar los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} .

6.5-14 Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} (véase figura). Los esfuerzos se relacionan como sigue: $\sigma_y = -0.6\sigma_x$ y $\tau_{xy} = \sigma_x$. La densidad de energía de deformación del elemento es $u = 280$ kPa, y el material es magnesio con $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$. Determinar los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} .

6.6-1 Un tanque esférico de acero inoxidable que tiene un diámetro interior de 18 plg se emplea como tanque de combustible a presión (presurizado). El espesor del cascarón es 0.093 plg y el esfuerzo permisible en tensión es 130,000 psi. Determinar la presión máxima permisible p dentro del tanque.

6.6-2 Un recipiente a presión esférico de acero se diseña para una presión de 6 MPa y un diámetro interior de 600 mm. El esfuerzo de fluencia del acero es 400 MPa. ¿Cuál es el espesor mínimo requerido t para un factor de seguridad sobre fluencia de 2.5?

6.6-3 Un tanque esférico con 48 plg de diámetro interior y 2 plg de espesor de pared contiene aire comprimido a una presión de 2,500 psi. El tanque se construye uniendo por soldadura dos hemisferios. ¿Cuál es la carga de tensión f (en libras por pulgada de longitud) soportada por la soldadura?

6.6-4 Un cascarón esférico sometido a una presión interna $p = 500$ psi tiene un diámetro interior de 40 plg y un espesor de pared de 0.5 plg. (a) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo τ en el plano del cascarón? (b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo absoluto τ_{\max} ?

6.6-5 La presión interna en un tanque esférico es $p = 3.2$ MPa. El diámetro interior del tanque es 200 mm y el espesor de pared es 5 mm. (a) Determinar el esfuerzo cortante máximo τ en el plano de la pared del tanque. (b) Determinar el esfuerzo cortante máximo absoluto τ_{\max} .

6.6-6 Un tubo sin costura de aluminio extruido de 150 mm de diámetro interior y 10 mm de espesor de pared contiene líquido a una presión de 2 MPa. ¿Cuál es el esfuerzo de tensión máximo σ_{\max} en el tubo?

6.6-7 Una tubería de presión, de acero, que tiene un diámetro de 6 pie, está sometida a una presión por columna de agua de 500 pie. ¿Cuál es el espesor mínimo requerido t de la pared del tubo a fin de que el esfuerzo circunferencial no exceda 16,000 psi?



Probs. 6.6-9 y 6.6-10

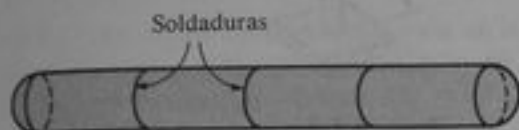
6.6-8 El diámetro interior y el espesor de pared de una tubería de presión son 1 m y 16 mm, respectivamente. La carga máxima de agua es 50 m. Si sólo se considera el esfuerzo circunferencial en el tubo, ¿cuál es el factor de seguridad n respecto a la fluencia si el esfuerzo de fluencia del acero es $\sigma_f = 300$ MPa?

6.6-9 Un depósito regulador vertical de acero de altura $h = 50$ pie y diámetro interior $d = 8$ pie se llena con agua (véase figura). Si sólo se considera el esfuerzo circunferencial, determinar el espesor de pared mínimo requerido t si el esfuerzo de tensión permisible en el acero es 10 ksi.

6.6-10 El tubo regulador mostrado en la figura tiene un diámetro interior $d = 2$ m y un espesor de pared $t = 10$ mm. ¿Qué altura de agua h producirá un esfuerzo circunferencial de 15 MPa en la pared del tubo?

6.6-11 Un tanque cilíndrico con cabezas hemisféricas se construye de secciones de acero que se sueldan circunferencialmente (véase figura). El diámetro del tanque es 4 pie, el espesor de pared es 0.75 plg y la presión interna máxima es 300 psi. (a) Determinar el esfuerzo de tensión máximo σ en las cabezas del tanque. (b) Determinar el esfuerzo circunferencial máximo σ_c en la parte cilíndrica del tanque. (c) Determinar el esfuerzo de tensión máximo σ , que actúa perpendicular a las juntas soldadas.

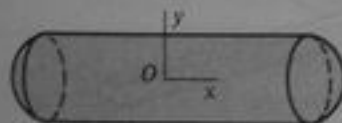
6.6-12 Un tanque cilíndrico de 300 mm de diámetro interior está sometido a una presión de gas interna máxima $p = 2.0$ MPa. El tanque está construido de secciones de aluminio que se sueldan circunferencialmente (véase figura). Las cabezas del tanque son hemisféricas. El esfuerzo de tensión permisible en la pared del tanque es 60 MPa, y el esfuerzo de tensión permisible perpendicular a una soldadura es 40 MPa. Si sólo se consideran los esfuerzos de membrana en el tanque, determinar el espesor mínimo requerido de (a) la parte cilíndrica del tanque y (b) las cabezas hemisféricas.



Probs. 6.6-11 y 6.6-12

6.6-13 Un tanque cilíndrico con extremos cerrados (véase figura) contiene aire comprimido a una presión máxima de 1,100 psi. El diámetro interior del tanque es 8 plg y el espesor de pared es 0.25 plg. (a) Calcular los esfuerzos de membrana principales en la pared del cilindro, y señalar estos esfuerzos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente. (b) Determinar los esfuerzos cortantes máximos en el plano y señalarlos sobre un esquema de un elemento orientado apropiadamente. (c) Calcular el esfuerzo cortante máximo absoluto en el cilindro.

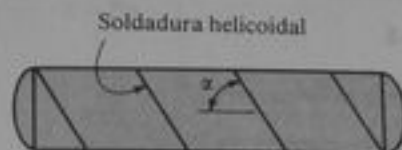
6.6-14 Resolver el problema anterior para un tanque de diámetro interior $d = 1.2$ m, espesor de pared $t = 10$ mm y presión interna $p = 800$ kPa.



Probs. 6.6-13 y 6.6-14

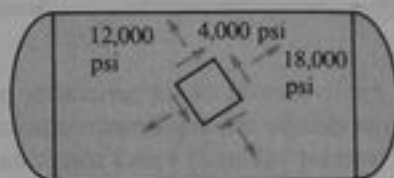
6.6-15 Un tanque cilíndrico a presión se construye con una soldadura helicoidal que forma un ángulo $\alpha = 75^\circ$ con el eje longitudinal (véase figura). El tanque tiene un radio interior $r = 20$ plg, espesor de pared $t = 0.6$ plg, y presión interna $p = 240$ psi. Determinar las siguientes cantidades para la parte cilíndrica del tanque: (a) los esfuerzos circunferencial y longitudinal, (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, (c) el esfuerzo cortante máximo absoluto, y (d) los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos perpendicular y paralelo a la soldadura.

6.6-16 Resolver el problema anterior para un tanque con $\alpha = 60^\circ$, $r = 0.5$ m, $t = 12$ mm y $p = 1.8$ MPa.



Probs. 6.6-15 y 6.6-16

6.6-17 Un tanque cilíndrico que contiene aire comprimido tiene un espesor de pared $t = 0.25$ plg y un radio interior $r = 10$ plg (véase figura). Los esfuerzos en la pared del tanque que actúan sobre un elemento girado tienen los valores mostrados en la figura. ¿Cuál es la presión de aire p en el tanque?



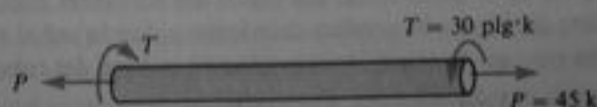
Prob. 6.6-17

6.6-18 Un tanque cilíndrico de pared delgada de radio interior r se somete simultáneamente a una presión de gas interna p y una fuerza de compresión F en los extremos (véase figura). ¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza F a fin de producir cortante puro en la pared del cilindro?

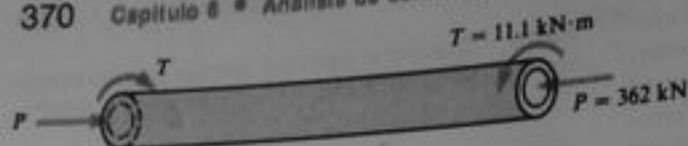


Prob. 6.6-18

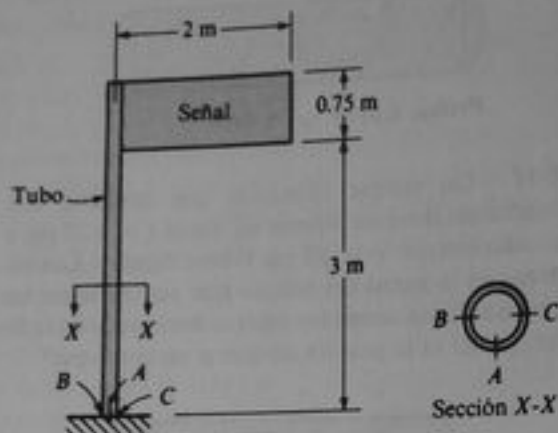
6.7-1 Una barra maciza de sección transversal circular (diámetro $d = 3$ plg) está sometida simultáneamente a una carga de tensión axial $P = 45$ k y a un par $T = 30$ plg·k (véase figura). Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_x , el esfuerzo de compresión máximo σ_c y el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la barra.



Prob. 6.7-1



Prob. 6.7-2

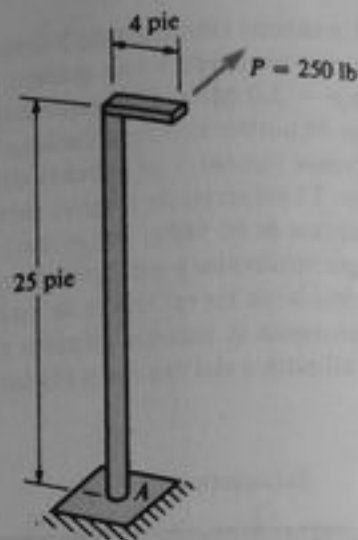


6.7-2 El eje (o flecha) de un generador posee sección transversal circular hueca (diámetro exterior 200 mm y diámetro interior 160 mm) y está sometida simultáneamente a un par $T = 11.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y a una fuerza de compresión axial $P = 362 \text{ kN}$ (véase figura). Determinar el esfuerzo de tensión máximo σ_t , el esfuerzo de compresión máximo σ_c , y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el eje.

6.7-3 Un poste que tiene una sección transversal circular hueca soporta una carga horizontal $P = 250 \text{ lb}$, que actúa en el extremo de un brazo de 4 pie de longitud (véase figura). La altura del poste es 25 pie y su módulo de sección es $S = 10 \text{ plg}^3$. (a) Calcular el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el punto A debido a la carga P. El punto A está localizado donde el esfuerzo normal, debido únicamente a flexión, es máximo. (b) Si el esfuerzo de tensión máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto A se limitan a 16,000 psi y 6,000 psi, respectivamente, ¿cuál es el mayor valor permisible de la carga P?

6.7-4 Una señal está sostenida por un tubo (véase figura) que tiene un diámetro exterior de 100 mm y 80 mm de diámetro interior. Las dimensiones de la señal son $2 \text{ m} \times 0.75 \text{ m}$ y su borde inferior está 3 m por encima del apoyo. La presión del viento sobre la señal es 1.5 kPa. Determinar los esfuerzos cortantes máximos debidos a la presión del viento sobre la señal en los puntos A, B y C, localizados en la base del tubo.

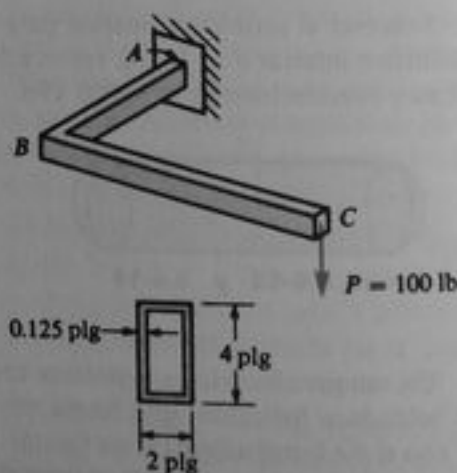
6.7-5 Una ménsula ABC en forma de L situada en un plano horizontal sostiene una carga $P = 100 \text{ lb}$



Prob. 6.7-3

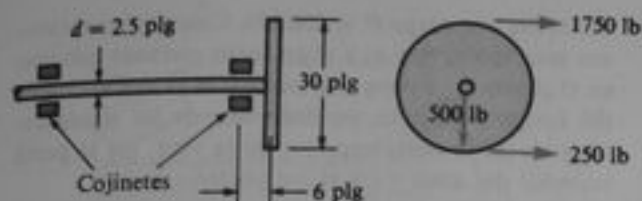
Prob. 6.7-4

(véase figura). La ménsula tiene una sección transversal rectangular hueca con dimensiones externas de $2 \text{ plg} \times 4 \text{ plg}$ y un espesor de pared de 0.125 plg. La longitud de la línea central del brazo AB es de 20 plg y la del brazo BC es de 30 plg. Si sólo se considera la fuerza P, calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_t , el esfuerzo de compresión máximo σ_c , y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el punto A, el cual está localizado en la parte superior del empotramiento de la ménsula.



Prob. 6.7-5

6.7-6 Un eje con diámetro $d = 2.5 \text{ plg}$ sostiene una polea de 30 plg de diámetro que pesa 500 lb (véase figura). Las tensiones de la banda (fuerzas horizontales) son 1750 lb y 250 lb. Determinar el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máxi-


Prob. 6.7-6

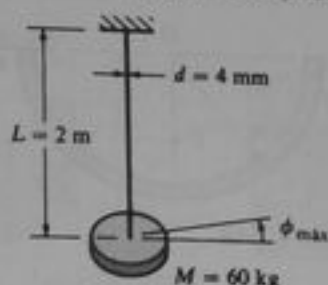
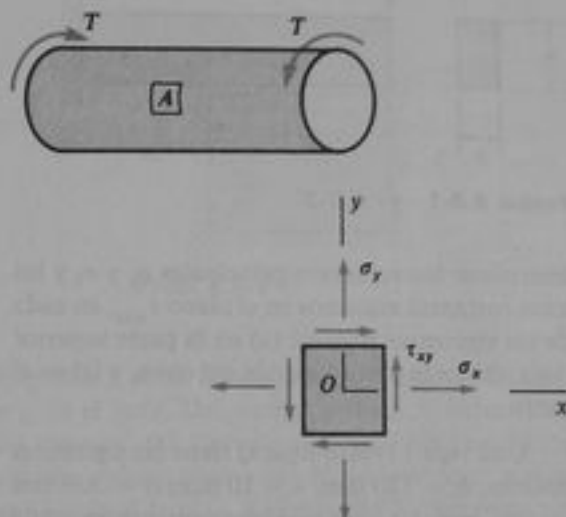
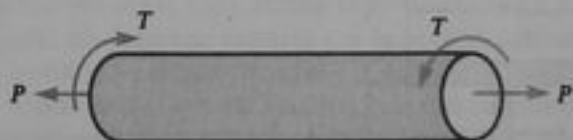
mo τ_{\max} en la barra eje en el primer cojinete, el cual está localizado a 6 plg de la polea. (Sugerencia: cambiar las fuerzas vertical y horizontal que actúan sobre la barra en una fuerza resultante simple.)

6.7-7 El péndulo torsional mostrado en la figura consta de un disco circular de masa $M = 60$ kg suspendido de un alambre de acero ($G = 80$ GPa) de longitud $L = 2$ m y diámetro $d = 4$ mm. Calcular el ángulo de rotación máximo ϕ_{\max} (esto es, la máxima amplitud de las vibraciones torsionales) que puede girar el disco sin exceder un esfuerzo permisible en tensión de 100 MPa y un esfuerzo permisible en cortante de 50 MPa en el alambre.

6.7-8 Un recipiente cilíndrico a presión que tiene un radio $r = 300$ mm y un espesor de pared $t = 15$ mm, está sometido a una presión interna $p = 2.5$ MPa. Adicionalmente, se aplica un par $T = 120$ kN·m a los extremos cerrados del cilindro (véase figura). (a) Determinar los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} que actúan sobre un elemento esforzado en el punto A de la pared del cilindro. (b) Determinar el esfuerzo de tensión máximo σ_{\max} y el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la pared del cilindro.

6.7-9 Un tanque cilíndrico a presión está cargado por pares T y fuerzas de tensión P (véase figura). El tanque tiene un radio $r = 2$ plg y un espesor de pared $t = 0.1$ plg. La presión interna es $P = 500$ psi y el par $T = 4,000$ plg·lb. ¿Cuál es el valor máximo permisible de las fuerzas P si el esfuerzo de tensión permisible en la pared del cilindro es 10,600 psi?

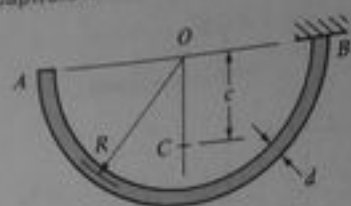
6.7-10 Una barra semicircular AB situada en un plano horizontal está sostenida en B (véase figura). La barra tiene un radio central de curvatura R y un peso q por unidad de longitud (el peso total de la barra es πqR). La sección transversal de la barra es circular con diámetro d . Obtener fórmulas para el esfuerzo de tensión máximo σ_x , el esfuerzo de compresión máximo σ_c , y el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la parte superior de la barra en el empotramiento debidos al peso de la barra. (Nota: el centro de gravedad de la barra está en el punto C , a una distancia $c = 2R/\pi$ desde el centro O .)


Prob. 6.7-7

Prob. 6.7-8

Prob. 6.7-9

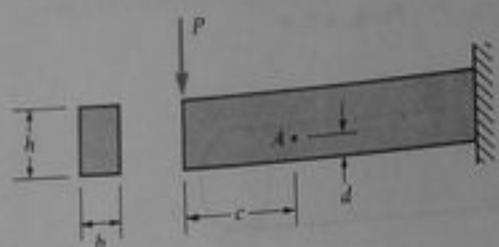
6.8-1 Una viga en voladizo de sección transversal rectangular se somete a una carga concentrada P en el extremo libre (véase figura). Calcular los esfuerzos cortantes máximos planos en el punto A, y señalar estos esfuerzos en esquemas de elementos orientados apropiadamente. Utilizar los siguientes valores: $P = 10,000$ lb, $b = 4$ plg, $h = 10$ plg, $c = 2$ pie y $d = 3$ plg.

6.8-2 Resolver el problema anterior para los siguientes valores: $P = 36$ kN, $b = 100$ mm, $h = 200$ mm, $c = 0.5$ m y $d = 150$ mm.

6.8-3 Una viga de patín ancho $W 12 \times 14$ (véase Tabla E-1, Apéndice E) está simplemente apoyada con una longitud de claro de 8 pie. La viga soporta una carga concentrada en su punto medio de 20 k. Para una sección localizada a 2 pie del apoyo izquier-



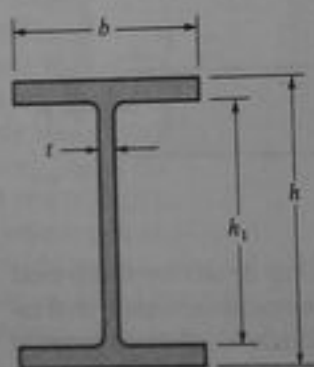
Prob. 6.7-10



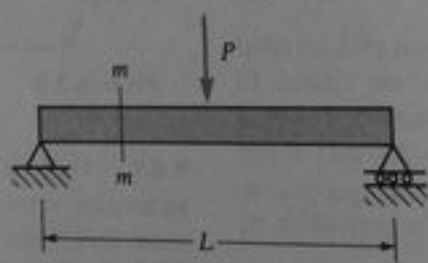
Probs. 6.8-1 y 6.8-2

do, determinar los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y los esfuerzos cortantes máximos en el plano τ_{\max} , en cada uno de los siguientes puntos: (a) en la parte superior de la viga, (b) en la parte superior del alma, y (c) en el eje neutro.

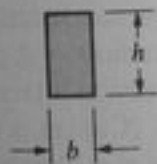
6.8-4 Una viga I (véase figura) tiene las siguientes dimensiones: $b = 120$ mm, $t = 10$ mm, $h = 300$ mm y $h_1 = 260$ mm. La viga está simplemente apoyada con un claro de longitud $L = 3.0$ m. En su punto me-



Prob. 6.8-4



Probs. 6.8-6 y 6.8-7



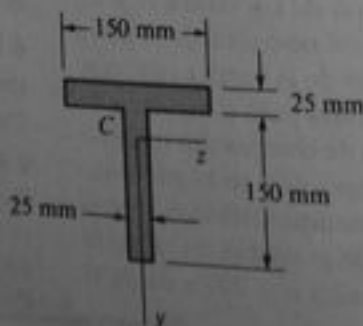
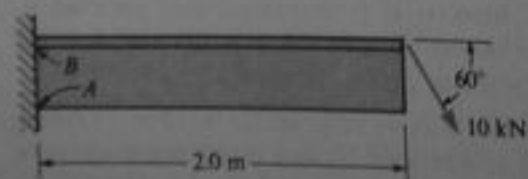
dio actúa una carga $P = 100$ kN. Calcular los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo en el plano τ_{\max} , para una sección localizada a 1.0 m del apoyo izquierdo, en cada uno de los siguientes puntos: (a) la parte superior de la viga, (b) la parte superior del alma y (c) el eje neutro.

6.8-5 Una viga en voladizo de sección en T está cargada por una fuerza inclinada de 10 kN como se muestra en la figura. Obtener los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo en el plano τ_{\max} en los puntos A y B en el alma de la viga.

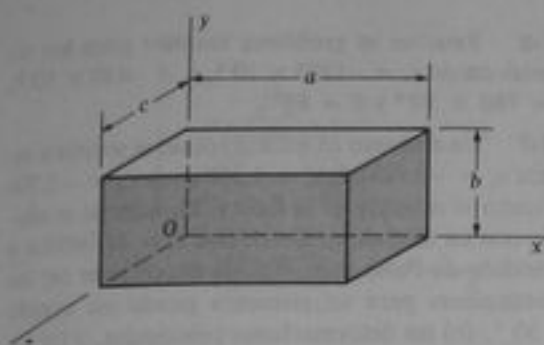
6.8-6 Una viga simple de sección transversal rectangular tiene un claro de longitud $L = 50$ plg y soporta una carga concentrada $P = 12$ k en el punto medio (véase figura). La altura de la viga es $h = 6$ plg y el ancho es $b = 2$ plg. La sección transversal mm está localizada a 14 plg del apoyo izquierdo. Trazar gráficas que muestren cómo varían los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo en el plano τ_{\max} , según la posición sobre la altura de la viga.

6.8-7 Resolver el problema anterior para una sección mm localizada a 0.15 m del apoyo si $L = 0.7$ m, $P = 140$ kN, $h = 120$ mm y $b = 30$ mm.

6.9-1 Un bloque de aluminio en forma de paralelepípedo rectangular (véase figura) de dimensiones $a = 6$ plg, $b = 4$ plg y $c = 3$ plg está sometido a esfuerzos triaxiales $\sigma_x = 12,000$ psi, $\sigma_y = -4,000$ psi y $\sigma_z = -1,000$ psi que actúan sobre las caras x , y , z , respectivamente. Calcular las siguientes cantidades: (a) el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el material; (b) los cambios Δa , Δb y Δc en las dimensiones del bloque; (c) el cam-



Prob. 6.8-5



Probs. 6.9-1 y 6.9-2

bio en el volumen ΔV ; y (d) la energía de deformación total U almacenada en el bloque. (Suponer $E = 10,400$ ksi y $\nu = 0.33$.)

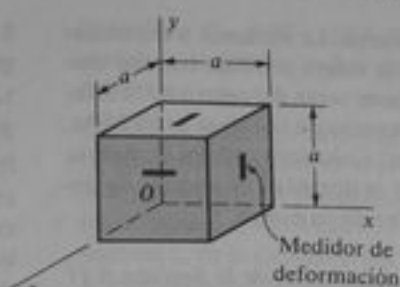
6.9-2 Resolver el problema anterior si el bloque es de acero ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.30$) con dimensiones $a = 300$ mm, $b = 150$ mm y $c = 150$ mm y los esfuerzos son $\sigma_x = -60$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa y $\sigma_z = -40$ MPa.

6.9-3 Un cubo de hierro fundido con lados de longitud $a = 4$ plg (véase figura) se prueba en un laboratorio bajo esfuerzo triaxial. Los medidores de deformación montados sobre las caras del bloque registran las siguientes deformaciones: $\epsilon_x = -225 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = \epsilon_z = -37.5 \times 10^{-6}$. Calcular las siguientes cantidades: (a) los esfuerzos normales σ_x , σ_y y σ_z que actúan sobre las caras x , y , z del elemento; (b) el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el material; (c) el cambio de volumen ΔV del bloque; y (d) la energía de deformación total U almacenada en el bloque. (Suponer $E = 14,000$ ksi y $\nu = 0.25$.)

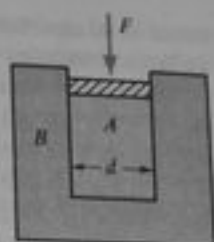
6.9-4 Resolver el problema anterior si el cubo es de granito ($E = 60$ GPa, $\nu = 0.25$) con dimensiones $a = 75$ mm y las deformaciones medidas son $\epsilon_x = -720 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = \epsilon_z = -270 \times 10^{-6}$.

6.9-5 Un cilindro de caucho o hule A de diámetro d se comprime dentro de un cilindro de acero B por una fuerza F (véase figura). (a) Obtener una fórmula para la presión lateral p entre el hule y el acero. Expresar p en términos de F , d y el módulo de Poisson ν para el hule. Despreciar la fricción entre el hule y el acero, suponer que el cilindro de acero es rígido. (b) Calcular la presión p si $F = 1000$ lb, $d = 2$ plg y $\nu = 0.45$.

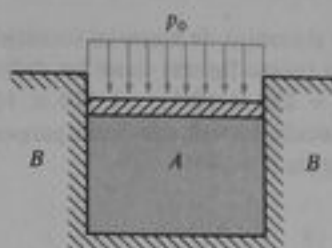
6.9-6 Un bloque A de hule duro está confinado entre paredes planas rígidas paralelas B (véase figura). El material no está confinado en la dirección perpendicular al plano del papel. Una presión uniformemente distribuida p_0 se aplica en la parte superior del bloque de hule. (a) Obtener una fórmula para la presión lateral p entre la goma y las paredes rígidas.



Probs. 6.9-3 y 6.9-4



Prob. 6.9-5



Prob. 6.9-6

Expresar p en términos de p_0 y el módulo de Poisson ν para el hule. Despreciar la fricción entre el hule y las paredes. (b) Obtener una fórmula para la deformación volumétrica o cambio de volumen unitario e en términos de p_0 , ν y el módulo E . Suponer que las deformaciones son cantidades pequeñas. (c) Obtener una fórmula para e sin suponer que las deformaciones son pequeñas. (d) Calcular la presión lateral p y el cambio de volumen unitario e si la presión aplicada $p_0 = 400$ psi y el hule tiene las siguientes propiedades: $E = 600$ psi, $\nu = 0.48$. Explicar por qué la fórmula para el cambio de volumen unitario basada en deformaciones pequeñas no es válida para el caucho.

6.9-7 Una esfera sólida de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi, $\nu = 0.3$) se somete a presión hidrostática p de forma tal que su volumen se reduce en 0.5%. (a) Calcular la presión p . (b) Calcular el módulo de elasticidad volumétrico K para el acero. (c) Calcular la energía de deformación U almacenada en la esfera si su diámetro es de 6 plg.

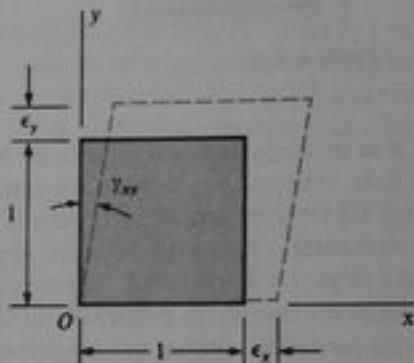
6.9-8 Un cubo de magnesio de 250 mm de lado se sumerge en el mar a una profundidad tal que la longitud de cada lado se acorta 0.05 mm. Se supone que $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$; calcular las siguientes cantidades: (a) la profundidad d a la que se sumerge el cubo y (b) el incremento porcentual en la densidad del magnesio.

6.9-9 Una esfera maciza de bronce (módulo de elasticidad volumétrico $K = 100$ GPa) se calienta súbita-

mente en su superficie externa. La tendencia a expandirse de la parte exterior de la esfera produce tensión uniforme en todas direcciones cerca del centro de la esfera. Si el esfuerzo en el centro de la esfera es 90 MPa, ¿cuál es la deformación? Calcular también el cambio unitario de volumen e y la densidad de energía de deformación u en el centro de la esfera.

Para la solución de los problemas de la Sección 6.11 considérense únicamente las deformaciones localizadas en el plano.

6.11-1 Un elemento de material sometido a deformación plana (véase figura) tiene las deformaciones siguientes: $\epsilon_x = 230 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 510 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}$. Calcular las deformaciones para un elemento girado un ángulo $\theta = 40^\circ$.



Probs. 6.11-1, 6.11-2, 6.11-3, 6.11-4, 6.11-5 y 6.11-6

6.11-2 Resolver el problema anterior para las siguientes deformaciones: $\epsilon_x = 430 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -170 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 310 \times 10^{-6}$.

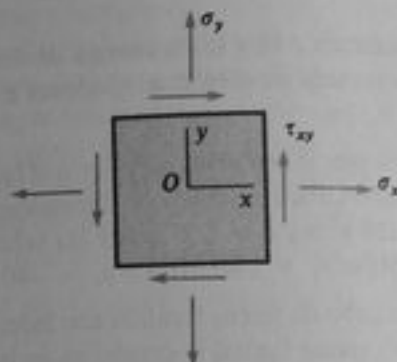
6.11-3 Las deformaciones para un elemento en deformación plana (véase figura) son como sigue: $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 140 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$. Determinar las deformaciones principales y las deformaciones angulares máximas.

6.11-4 Resolver el problema anterior para las siguientes deformaciones: $\epsilon_x = 120 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -570 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$.

6.11-5 Un elemento de material en deformación plana (véase figura) se somete a deformaciones $\epsilon_x = 480 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 70 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 470 \times 10^{-6}$. Determinar las siguientes cantidades: (a) las deformaciones para un elemento girado un ángulo $\theta = 80^\circ$, (b) las deformaciones principales, y (c) las deformaciones angulares máximas.

6.11-6 Resolver el problema anterior para los siguientes datos: $\epsilon_x = -1250 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -430 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = 780 \times 10^{-6}$ y $\theta = 50^\circ$.

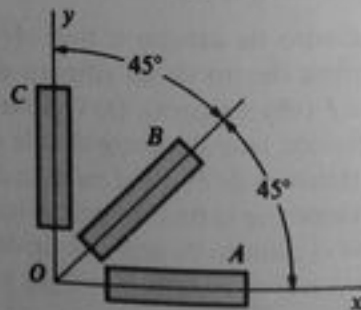
6.11-7 Un elemento en esfuerzo plano se somete a esfuerzos $\sigma_x = -9,500$ psi, $\sigma_y = 1,100$ psi, y $\tau_{xy} = -1,700$ psi, como se muestra en la figura. El material es aluminio con un módulo de elasticidad $E = 10,000$ ksi y un módulo de Poisson $\nu = 0.33$. Determinar (a) las deformaciones para un elemento girado un ángulo $\theta = 30^\circ$, (b) las deformaciones principales, y (c) las deformaciones angulares máximas.



Probs. 6.11-7 y 6.11-8

6.11-8 Resolver el problema anterior para los siguientes datos: $\sigma_x = -145$ MPa, $\sigma_y = -220$ MPa, $\tau_{xy} = -16$ MPa y $\theta = 60^\circ$. El material es latón con $E = 100$ GPa y $\nu = 0.34$.

6.11-9 Durante una prueba estática de un ala de avión, las lecturas de medidores de deformación de una roseta a 45° (véase figura) son como sigue: medidor A, 530×10^{-6} ; medidor B, 420×10^{-6} ; medidor C, -80×10^{-6} . Determinar las deformaciones principales y las deformaciones angulares máximas.

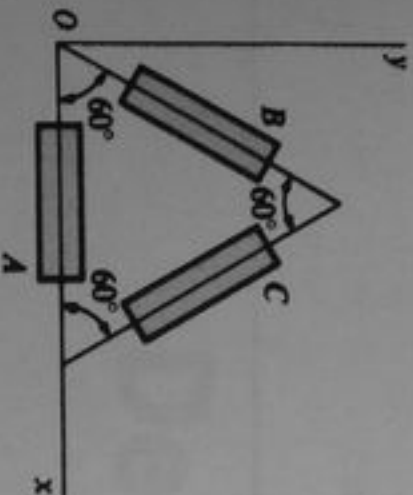


Probs. 6.11-9 y 6.11-10

6.11-10 Una roseta de deformación a 45° (véase figura) montada sobre la superficie de un bastidor de automóvil que está probándose, indica las siguientes lecturas: medidor A, 280×10^{-6} ; medidor B, 190×10^{-6} .

y medidor C , -160×10^{-6} . Determinar las deformaciones principales y las deformaciones angulares máximas.

6.11-11 Una roseta de deformación a 60° , o roseta en delta, consiste en tres medidores de deformación de resistencia eléctrica, con el arreglo mostrado en la figura. El medidor A registra la deformación normal ϵ_x en la dirección del eje x . Los medidores B y C miden las deformaciones ϵ_s y ϵ_c en las direcciones inclinadas mostradas. Obtener las ecuaciones para las deformaciones ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes xy .



Prob. 6.11-11

Deflexiones de vigas

7.1 INTRODUCCIÓN

Cuando una viga se carga, el eje longitudinal inicialmente recto se deforma en forma curva, llamada **curva de deflexión** de la viga. En este capítulo se explican métodos para formular la ecuación de la curva de deflexión y para determinar deflexiones en puntos específicos a lo largo del eje de la viga. El cálculo de deflexiones es esencial para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas, según se explica en el próximo capítulo. Además, a menudo deben calcularse las deflexiones a fin de comprobar que no exceden los valores máximos permisibles. Esta situación surge en el diseño de edificaciones donde usualmente existe un límite superior para deflexiones, ya que las grandes deflexiones se asocian con una fachada desagradable y con mucha flexibilidad en la estructura.

7.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN

Para obtener las ecuaciones generales de la curva de deflexión de una viga, se considera la viga en voladizo AB mostrada en la Fig. 7-1a. Se toma el origen de las coordenadas en el extremo fijo, con el eje x dirigido a la derecha y el eje y dirigido hacia abajo. Como en las explicaciones previas, se supone que el plano xy es un plano de simetría y que todas las cargas actúan en este plano; luego, el plano xy es el plano de flexión. La **deflexión** v^* de la viga en cualquier punto m_1 a una distancia x del origen (Fig. 7-1a) es la traslación (o desplazamiento) de ese punto en la dirección y , medida desde el eje x hasta la curva de deflexión. Así, para los ejes que hemos seleccionado, una deflexión hacia abajo es positiva y una deflexión hacia arriba es negativa. Cuando v se representa como una función de x , se tiene la ecuación de la curva de deflexión.

El **ángulo de rotación** θ del eje de la viga en cualquier punto m_1 es el ángulo entre el eje x y la tangente a la curva de deflexión (Fig. 7-1b). Este ángulo es positivo en el sentido de las manecillas del reloj, siempre y cuando los ejes x y y tengan las direcciones indicadas.

* La **deflexión** se representa con la letra *w*ve, cuya grafía puede ser v o bien w . La primera se emplea dentro del texto, mientras que la segunda aparece siempre en figuras y ecuaciones. (N. del E.)

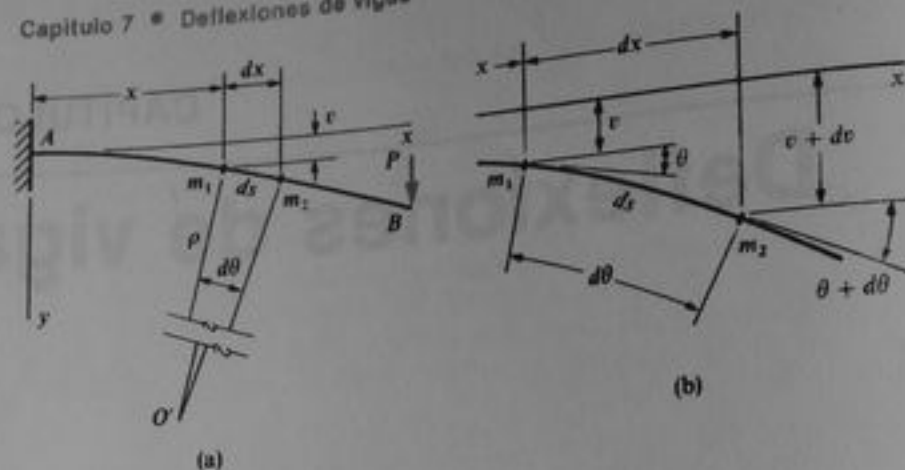


Fig. 7-1 Curva de deflexión de una viga

Considérese ahora un segundo punto m_2 , localizado sobre la curva de deflexión a escasa distancia ds más adelante sobre la curva y a una distancia $x + dx$ (medida paralela al eje x) desde el origen. La deflexión en este punto es $v + dv$, donde dv representa el incremento en deflexión conforme se pasa de m_1 a m_2 . También el ángulo de rotación en m_2 es $\theta + d\theta$, donde $d\theta$ es el incremento en el ángulo de rotación. En los puntos m_1 y m_2 , se pueden trazar líneas normales a las tangentes de la curva de deflexión. La intersección de estas normales representa el **centro de curvatura** O' , y la distancia desde O' a la curva es el **radio de curvatura** ρ . En la figura se aprecia que $\rho d\theta = ds$; por lo que, la **curvatura** κ (igual al recíproco del radio de curvatura) está dada por la siguiente ecuación:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (7-1)$$

Los signos convencionales para la curvatura se ilustran en la Fig. 5-3. Obsérvese que una curvatura positiva corresponde a un valor positivo de $d\theta/ds$, lo que significa que el ángulo θ se incrementa conforme se recorre longitudinalmente la viga en la dirección x positiva.

La **pendiente** de la curva de deflexión es la primera derivada dv/dx , según lo indica el cálculo. De la Fig. 7-1b, se aprecia que la pendiente es igual a la tangente del ángulo de rotación θ , ya que dx es infinitesimalmente pequeño; luego,

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \quad \text{o sea} \quad \theta = \arctan \frac{dv}{dx} \quad (7-2a,b)$$

Las Ecs. (7-1) y (7-2) están basadas en consideraciones geométricas; luego, son aplicables a una viga de cualquier material. Además, no hay restricción en las magnitudes de las pendientes y deflexiones.

Muchas vigas sufren únicamente pequeñas rotaciones cuando se cargan; por tanto, sus curvas de deflexión son muy planas con curvaturas extremadamente pequeñas. En estas condiciones, el ángulo θ es una cantidad muy pequeña, por lo que

se pueden hacer algunas aproximaciones que simplifiquen el trabajo. En la Fig. 7-1b se aprecia que

$$ds = \frac{dx}{\cos \theta}$$

Como $\cos \theta \approx 1$ cuando θ es pequeño, se obtiene

$$ds \approx dx \quad (a)$$

Por lo tanto, la Ec. (7-1) resulta

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (7-3)$$

También, dado que $\tan \theta \approx \theta$ cuando θ es una cantidad pequeña, se puede aproximar la Ec. (7-2a) como sigue:

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (b)$$

Luego, para pequeñas rotaciones de una viga, el ángulo de rotación y la pendiente son iguales. (Nótese que el ángulo de rotación se mide en radianes.) Tomando la derivada de θ con respecto a x , se obtiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (c)$$

Ahora, combinando esta ecuación con la Ec. (7-3), se obtiene

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7-4)$$

Esta ecuación relaciona la curvatura con la deflexión v de la viga. Es válida para una viga de cualquier material, siempre y cuando las rotaciones sean pequeñas.

Si el material de la viga es linealmente elástico y cumple con la ley de Hooke, la curvatura (véase Ec. 5-9) es:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (7-5)$$

donde M es el momento flexionante y EI es la rigidez a flexión de la viga. Nótese que la Ec. (7-5) es válida tanto para rotaciones grandes como pequeñas. Las relaciones entre los signos para momentos flexionantes y para curvaturas están plasmadas en la Fig. 5-11. Combinando la Ec. (7-4), que se limita a rotaciones pequeñas, con la Ec. (7-5) se obtiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (7-6)$$

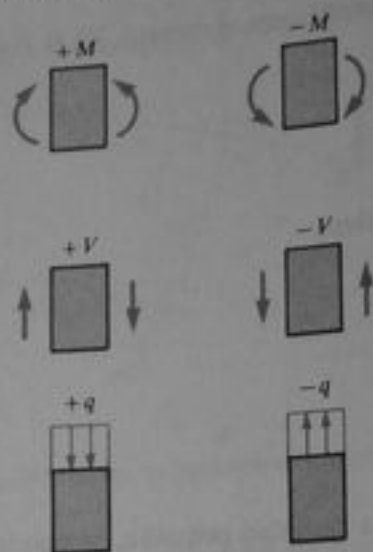


Fig. 7-2 Signos convencionales para momento flexionante M , fuerza cortante V e intensidad de carga distribuida q

que es básicamente la **ecuación diferencial de la curva de deflexión** de una viga. Esta ecuación puede integrarse en cada caso particular para determinar el ángulo de rotación θ o la deflexión v , siempre y cuando se conozca el momento flexionante M .

En resumen, los **signos convencionales** que deben emplearse en la Ec. (7-6) son como sigue: (1) los ejes x y y son positivos hacia la derecha y hacia abajo, respectivamente; (2) el ángulo de rotación θ es positivo en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x ; (3) la deflexión v es positiva hacia abajo; (4) el momento flexionante M es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga; y (5) la curvatura es positiva cuando la viga se dobla con concavidad hacia abajo. Si se cambian los signos para M , o si el eje y (y en consecuencia v) se considera positivo hacia arriba, entonces el signo menos de la Ec. (7-6) debe cambiarse por un signo positivo. Si ambos, M y y , se cambian de signo, la ecuación no se modifica.

Diferenciando la Ec. (7-6) con respecto a x y sustituyendo entonces las ecuaciones $q = -dV/dx$ y $V = dM/dx$ (véanse Ecs. 4-1 y 4-3), se obtiene:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad (7-7)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (7-8)$$

donde V es la fuerza cortante y q es la intensidad de carga distribuida. La deflexión v puede determinarse resolviendo cualquiera de las Ecs. (7-6) a (7-8), dependiendo de la conveniencia matemática y la preferencia personal. Los signos convencionales de M , V y q se repiten en la Fig. 7-2.

Por simplicidad de las explicaciones subsecuentes, a menudo utilizaremos **primas** para denotar diferenciación; luego,

$$\begin{aligned} v' &\equiv \frac{dv}{dx} & v'' &\equiv \frac{d^2v}{dx^2} \\ v''' &\equiv \frac{d^3v}{dx^3} & v'''' &\equiv \frac{d^4v}{dx^4} \end{aligned} \quad (7-9)$$

Mediante esta notación se pueden expresar las ecuaciones diferenciales que se indicaron, en la siguiente forma:

$$EIv'' = -M \qquad EIv''' = -V \qquad EIv'''' = q \qquad (7-10a,b,c)$$

En las secciones siguientes, se emplearán estas ecuaciones para determinar deflexiones de vigas. El procedimiento consiste en integraciones sucesivas de las ecuaciones, evaluando las constantes de integración resultantes a partir de las condiciones de frontera de la viga.

Al obtener las Ecs. (7-10) se aprecia que son válidas únicamente cuando el material satisface la ley de Hooke y cuando las pendientes de la curva de deflexión son muy pequeñas. También, debe tenerse en cuenta que las ecuaciones se obtuvieron considerando las deformaciones debidas a flexión pura y despreciando las deformaciones angulares. Estas limitaciones son satisfactorias para muchos fines prácticos, aunque en raras ocasiones puede ser necesario considerar las deflexiones adicionales debidas a efectos cortantes (véase Sección 7.12).

Expresión exacta para la curvatura. Si la curva de deflexión de una viga tiene grandes pendientes, no es posible emplear las aproximaciones dadas por las Ecs. (a) y (b). En vez de ello, se debe recurrir a las expresiones exactas para la curvatura (Ec. 7-1) y el ángulo de rotación (Ec. 7-2b). Al combinar tales expresiones, se obtiene

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx} \frac{dx}{ds}$$

Observando de la Fig. 7-1b que $ds^2 = dx^2 + dv^2$, se obtiene

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2}$$

También, mediante diferenciación, se obtiene

$$\frac{d}{dx} (\arctan v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación para la curvatura resulta

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \qquad (7-11)$$

Comparando esta ecuación con la Ec. (7-4), se aprecia que la suposición de pendientes pequeñas equivale a despreciar $(v')^2$ comparativamente con la unidad, es decir haciendo el denominador de la Ec. (7-11) igual a uno. La Ec. (7-11) debe emplearse para la curvatura cuando se resuelven problemas que impliquen grandes deflexiones de vigas (véase Sección 7.13).*

* La relación básica que establece que la curvatura de una viga es proporcional al momento flexionante (véase Ec. 7-5) fue determinada inicialmente por Jacob Bernoulli, aunque obtuvo un valor incorrecto para la constante de proporcionalidad. La relación fue utilizada posteriormente por Euler, quien resolvió la ecuación diferencial de la curva de deflexión tanto en deflexiones grandes (usando la Ec. 7-11 para la curvatura) como en deflexiones pequeñas (mediante la Ec. 7-6). Para la historia de curvas elásticas, véase Ref. 7-1.

7.3 DEFLEXIONES MEDIANTE INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOMENTO FLEXIONANTE

La ecuación de la curva de deflexión en términos del momento flexionante (Ec. 7-10a) puede integrarse para obtener la deflexión v como una función de x . Dado que la ecuación diferencial es de segundo orden, se requieren dos integraciones. El primer paso en la solución es formular las ecuaciones para el momento flexionante, empleando diagramas de cuerpo libre y equilibrio estático para obtener las ecuaciones.* Si la carga sobre la viga cambia repentinamente según se desplaza a lo largo del eje de la viga, habrá expresiones separadas para el momento flexionante, se sustituye la expresión de M en la ecuación diferencial. Entonces la ecuación puede integrarse para obtener la pendiente v' , introduciéndose una constante de integración mediante este proceso. Una segunda integración proporciona la deflexión v , introduciéndose otra constante de integración. Luego, hay dos constantes de integración para cada región de la viga. Estas constantes pueden evaluarse mediante condiciones de frontera pertenecientes a v y v' en los apoyos de la viga y mediante condiciones de continuidad sobre v y v' en los puntos donde coinciden las regiones de integración. Cada una de estas condiciones proporciona una ecuación que contiene una o más constantes de integración. Como el número de condiciones siempre coincide con el número de constantes, es posible resolver estas ecuaciones para las constantes. Entonces, las constantes evaluadas pueden sustituirse en las expresiones para v , obteniéndose las ecuaciones finales de la curva de deflexión. Este método para determinar las deflexiones se denomina, a veces, **método de integraciones sucesivas**. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para una viga simple y para una viga en voladizo.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB que soporta una carga uniforme de intensidad q (Fig. 7-3). También, determinar la deflexión máxima δ a la mitad de la viga y los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los apoyos.

Considerando el origen de las coordenadas en el apoyo izquierdo, la ecuación para el momento flexionante es

$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

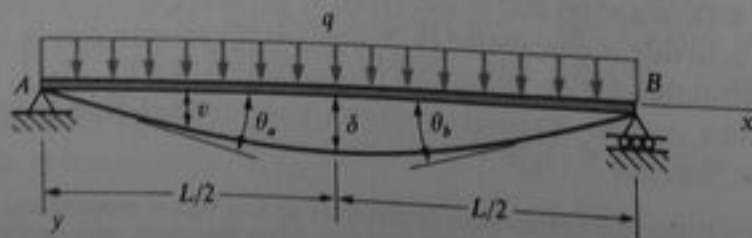


Fig. 7-3 Ejemplo 1. Deflexiones de una viga simple con una carga uniforme

* En este capítulo únicamente se consideran vigas estáticamente determinadas. El análisis de vigas estáticamente indeterminadas se presenta en el Capítulo 8.

Por lo que la ecuación diferencial de segundo orden (Ec. 7-10a) resulta

$$EIv'' = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por dx e integrando, se obtiene

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad (a)$$

donde C_1 es una constante de integración. Para evaluar esta constante, se observa que, por simetría, la pendiente v' de la curva de deflexión a la mitad del claro es cero. Luego, tenemos la condición

$$v' = 0 \quad \text{cuando } x = \frac{L}{2}$$

que puede abreviarse como

$$v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Aplicando esta condición a la Ec. (a) se obtiene

$$C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

y entonces la Ec. (a) resulta

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24} \quad (7-12)$$

Nuevamente, multiplicando ambos lados de la ecuación por dx e integrando, obtenemos

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2 \quad (b)$$

La constante de integración C_2 puede evaluarse a partir de la condición que $v = 0$ cuando $x = 0$, o sea

$$v(0) = 0$$

Aplicando esta condición a la Ec. (b) resulta $C_2 = 0$; por lo que la ecuación para la curva de deflexión es

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (7-13)$$

Esta ecuación proporciona la deflexión en cualquier punto a lo largo de la viga.

La deflexión máxima δ ocurre a la mitad del claro y se obtiene haciendo x igual a $L/2$ en la Ec. (7-13). El resultado es

$$\delta = v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (7-14)$$

Los ángulos de rotación máximos ocurren en los apoyos de la viga. En el extremo izquierdo, el ángulo θ_a es igual a la pendiente v' ; luego, sustituyendo $x = 0$ en la Ec. (7-12), se obtiene

$$\theta_a = v'(0) = \frac{qL^3}{24EI} \quad (7-15)$$

En forma similar, se obtiene el ángulo θ_b en el otro extremo:

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{qL^3}{24EI} \quad (7-16)$$

Dado que la viga y la carga son simétricas respecto al punto medio, los ángulos de rotación en los extremos son iguales. Obsérvese que los ángulos de rotación se consideran positivos cuando los extremos de la viga giran como se muestra en la Fig. 7-3. Por supuesto, el sentido positivo de la pendiente v' está determinado por las direcciones de los ejes coordenados. Para la viga de este ejemplo, v' es positiva en el apoyo A , negativa en B , y cero en el punto medio.

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB sometida a una carga uniforme de intensidad q (Fig. 7-4). También, determinar la deflexión δ_b y el ángulo de rotación θ_b en el extremo libre.

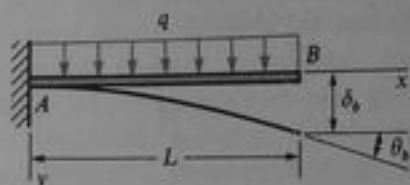


Fig. 7-4 Ejemplo 2. Deflexiones de una viga en voladizo con una carga uniforme

Nuevamente consideramos el origen de las coordenadas en el apoyo izquierdo. Entonces, la expresión para el momento flexionante es

$$M = -\frac{q(L-x)^2}{2}$$

y la ecuación diferencial (Ec. 7-10a) resulta

$$EIv'' = \frac{q(L-x)^2}{2}$$

La primera integración de esta ecuación resulta

$$EIv' = -\frac{q(L-x)^3}{6} + C_1$$

La constante de integración C_1 puede determinarse a partir de la condición de que la pendiente de la viga es cero en el empotramiento; luego, tenemos $v'(0) = 0$, lo cual resulta $C_1 = qL^3/6$. Por lo tanto,

$$v' = \frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2) \quad (7-17)$$

La integración de esta ecuación resulta

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) + C_2$$

La condición de frontera sobre la deflexión en el empotramiento es $v(0) = 0$, lo que muestra que $C_2 = 0$. Luego, la ecuación de la curva de deflexión es

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (7-18)$$

El ángulo de rotación θ_s y la deflexión δ_s en el extremo libre de la viga (Fig. 7-4) se encuentran fácilmente sustituyendo $x = L$ en las Ecs. (7-17) y (7-18), como sigue:

$$\theta_s = v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \quad \delta_s = v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \quad (7-19a,b)$$

Estas cantidades son el ángulo de rotación máximo y la deflexión máxima, respectivamente.

Ejemplo 3

Determinar las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple AB que soporta una carga concentrada P (Fig. 7-5). También, determinar los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los soportes, la deflexión máxima v_{\max} y la deflexión δ_c en el centro C de la viga. (Obsérvese que la posición de la carga P está definida por las distancias a y b desde los apoyos A y B , respectivamente.)

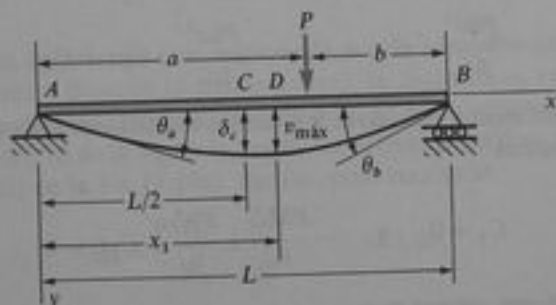


Fig. 7-5 Ejemplo 3. Deflexiones de una viga simple con una carga concentrada

Para obtener las deflexiones, debemos determinar primero la expresión para el momento flexionante en cada parte de la viga. Entonces debemos escribir la Ec. (7-10a) dos veces, una para cada parte de la viga, como sigue:

$$EIv'' = -\frac{Pbx}{L} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv'' = -\frac{Pbx}{L} + P(x - a) \quad (a \leq x \leq L)$$

La integración de estas ecuaciones da

$$EIv' = -\frac{Pbx^2}{2L} + C_1 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (c)$$

$$EIv' = -\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \quad (a \leq x \leq L) \quad (d)$$

Realizando una segunda integración, obtenemos

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_3 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (e)$$

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + C_4 \quad (a \leq x \leq L) \quad (f)$$

Las cuatro constantes de integración que aparecen en las ecuaciones anteriores se determinan a partir de las siguientes condiciones: (1) en $x = a$, las pendientes v' para las dos partes de la viga deben ser iguales; (2) en $x = a$, las deflexiones v para las dos partes de la viga deben ser iguales; (3) en $x = 0$, la deflexión es cero; y (4) en $x = L$, la deflexión es cero. De la primera condición vemos que las pendientes determinadas a partir de las Ecs. (c) y (d) deben ser iguales cuando $x = a$; luego,

$$-\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = -\frac{Pba^2}{2L} + C_2$$

de donde $C_1 = C_2$. La segunda condición indica que las deflexiones determinadas a partir de las Ecs. (e) y (f) deben ser iguales cuando $x = a$:

$$-\frac{Pba^3}{6L} + C_1a + C_3 = -\frac{Pba^3}{6L} + C_2a + C_4$$

lo cual da $C_3 = C_4$. Finalmente, cuando se aplican las condiciones (3) y (4) a las Ecs. (e) y (f), respectivamente, obtenemos

$$C_3 = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{PbL^2}{6} + \frac{Pb^3}{6} + C_2L = 0$$

De los resultados anteriores, vemos que

$$C_1 = C_2 = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L} \quad C_3 = C_4 = 0$$

Sustituyendo estos valores en las Ecs. (e) y (f) se obtienen las ecuaciones para la curva de deflexión:

$$EIv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (7-20a)$$

$$EIv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad (a \leq x \leq L) \quad (7-20b)$$

La primera de estas ecuaciones proporciona la curva de deflexión para la porción de la viga situada a la izquierda de la carga P , y la segunda proporciona la deflexión a la derecha de la carga.

Las pendientes para las dos porciones de la viga se determinan sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en las Ecs. (c) y (d), obteniéndose

$$EIv' = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (7-21a)$$

$$EIv' = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad (a \leq x \leq L) \quad (7-21b)$$

Mediante estas ecuaciones puede calcularse la pendiente de la curva de deflexión en cualquier punto.

Para obtener los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los extremos de la viga, sustituimos $x = 0$ en la Ec. (7-21a) y $x = L$ en la Ec. (7-21b), como sigue:

$$\theta_a = v'(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad (7-22a)$$

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{Pab(L+a)}{6LEI} \quad (7-22b)$$

El ángulo θ_b adquiere su valor máximo cuando $b = L/\sqrt{3}$.

La deflexión máxima de la viga ocurre en el punto D (Fig. 7-5) donde la curva de deflexión tiene una tangente horizontal. Si $a > b$, este punto está en la porción de la viga ubicada a la izquierda de la carga. Podemos localizar este punto igualando a cero la pendiente v' dada por la Ec. (7-21a). Denotando por x_1 la distancia desde el extremo A de la viga al punto de deflexión máxima, de la Ec. (7-21a) obtenemos la siguiente fórmula para x_1 :

$$x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (a \geq b) \quad (7-23)$$

A partir de esta ecuación apreciamos que, según se recorre la carga P desde la mitad de la viga ($b = L/2$) hasta el extremo derecho (b tiende a cero), la distancia x_1 varía desde $L/2$ hasta $L/\sqrt{3} = 0.577L$. Luego, la deflexión máxima ocurre en un punto muy cercano al centro de la viga y siempre entre el centro de la viga y la carga. La deflexión máxima se determina sustituyendo x_1 (de la Ec. 7-23) en la Ec. (7-20a), dando como resultado

$$v_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI} \quad (a \geq b) \quad (7-24)$$

La deflexión en el punto medio de la viga se obtiene sustituyendo $x = L/2$ en la Ec. (7-20a):

$$\delta_c = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (a \geq b) \quad (7-25)$$

Dado que la deflexión máxima ocurre siempre cerca del punto medio de la viga, la Ec. (7-25) proporciona una buena aproximación de la deflexión máxima. En el caso más desfavorable (cuando b tiende a cero), la diferencia entre la deflexión máxima y la deflexión en el punto medio es inferior al 3% de la deflexión máxima.

Un caso especial importante ocurre cuando la carga P actúa en el punto medio de la viga. Entonces $a = b = L/2$, y los resultados anteriores se simplifican a los siguientes:

$$v' = \frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (7-26)$$

$$v = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (7-27)$$

(7-28)

$$\theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

(7-29)

$$\delta_c = v_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}$$

En este caso la curva de deflexión es simétrica respecto al punto medio de la viga; sin embargo, las ecuaciones anteriores para v' y v son válidas únicamente para la mitad izquierda de la viga.

7.4 DEFLEXIONES MEDIANTE INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FUERZA CORTANTE Y DE CARGA

Las ecuaciones de la curva de deflexión en términos de la fuerza cortante V y de la carga q (Ecs. 7-10b y c, respectivamente) pueden utilizarse para obtener deflexiones de vigas. El procedimiento es similar al empleado para la ecuación de momento flexionante, excepto que se requieren más integraciones. Por ejemplo, si empezamos con la ecuación de carga, la cual es de cuarto orden, son necesarias cuatro integraciones a fin de obtener la ecuación de deflexión. Estos pasos añadidos introducen constantes de integración adicionales, pero estas constantes pueden obtenerse mediante condiciones de frontera y de continuidad. Las circunstancias incluyen ahora condiciones sobre las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, además de las de pendientes y deflexiones.

La elección entre las tres ecuaciones diferenciales depende de la conveniencia matemática y la decisión personal. Por ejemplo, si es fácil formular la expresión para la carga q , pero la expresión para el momento flexionante M no se obtiene fácilmente mediante el equilibrio estático a partir de diagramas de cuerpo libre, entonces puede emplearse la ecuación de carga. Los siguientes ejemplos ilustran las técnicas para realizar los análisis.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB que sustenta una carga triangularmente distribuida de intensidad máxima q_0 (Fig. 7-6). También, determinar la deflexión δ_a y el ángulo de rotación θ_a en el extremo libre.



Fig. 7-6 Ejemplo 1. Deflexiones de una viga en voladizo con una carga triangular

La intensidad de la carga distribuida está dada por la siguiente ecuación:

$$q = \frac{q_0(L-x)}{L}$$

Por lo que la ecuación diferencial de cuarto orden resulta

$$EIv'''' = \frac{q_0(L-x)}{L}$$

La primera integración resulta

$$EIv''' = \frac{q_0x}{2L}(2L-x) + C_1 \quad (a)$$

El miembro derecho de esta ecuación representa el negativo de la fuerza cortante V (véase la Ec. 7-10b). Como la fuerza cortante es cero en $x = L$, obtenemos la siguiente condición de frontera:

$$v'''(L) = 0$$

Mediante esta condición con la Ec. (a), obtenemos $C_1 = -q_0L/2$. Sustituyendo esta expresión para C_1 en la Ec. (a), se tiene

$$EIv''' = -\frac{q_0}{2L}(L^2 - 2Lx + x^2) = -\frac{q_0}{2L}(L-x)^2$$

Integrando por segunda vez, obtenemos

$$EIv'' = \frac{q_0}{6L}(L-x)^3 + C_2 \quad (b)$$

que es la ecuación de momento flexionante (Ec. 7-10a). Una segunda condición de frontera se obtiene en el extremo libre de la viga, donde el momento flexionante es cero:

$$v''(L) = 0$$

Aplicando esta condición a la Ec. (b), obtenemos $C_2 = 0$; por lo tanto,

$$EIv'' = \frac{q_0}{6L}(L-x)^3$$

La tercera y cuarta integraciones resultan

$$EIv' = -\frac{q_0}{24L}(L-x)^4 + C_3 \quad (c)$$

$$EIv = \frac{q_0}{120L}(L-x)^5 + C_3x + C_4 \quad (d)$$

A partir de las condiciones de frontera en el apoyo fijo, que son

$$v'(0) = 0 \quad v(0) = 0$$

obtenemos

$$C_3 = \frac{q_0L^3}{24} \quad C_4 = -\frac{q_0L^4}{120}$$

Sustituyendo estas expresiones para las constantes en las Ecs. (c) y (d), obtenemos las siguientes ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga:

$$v' = \frac{q_0x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3) \quad (7-30)$$

$$v = \frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3) \quad (7-31)$$

El ángulo de rotación θ , y la deflexión δ , en el extremo libre ($x = L$) se obtienen ahora fácilmente a partir de las Ecs. (7-30) y (7-31); los resultados son

$$\theta_b = \frac{q_0 L^3}{24EI} \quad \delta_b = \frac{q_0 L^4}{30EI} \quad (7-32a, b)$$

Luego, hemos determinado las deflexiones y pendientes requeridas de la viga mediante la resolución de la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión.

Ejemplo 2

Determinar las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple con un voladizo sometida a una carga concentrada P (Fig. 7-7). El claro principal tiene una longitud L y el voladizo tiene una longitud $L/2$.

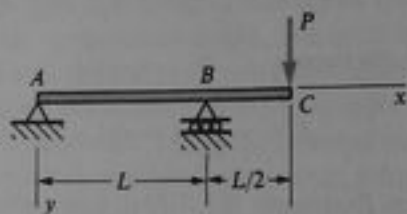


Fig. 7-7 Ejemplo 2. Deflexiones de una viga con un voladizo

Como las fuerzas reactivas actúan en los soportes A y B , debemos formular ecuaciones diferenciales separadas para las porciones AB y BC de la viga. Las fuerzas cortantes en tales partes son como sigue:

$$V = -\frac{P}{2} \quad (0 < x < L)$$

$$V = P \quad \left(L < x < \frac{3L}{2}\right)$$

según se encuentra del equilibrio. Luego, las ecuaciones diferenciales de tercer orden (véase Ec. 7-10b) son

$$EIv''' = \frac{P}{2} \quad (0 < x < L)$$

$$EIv''' = -P \quad \left(L < x < \frac{3L}{2}\right)$$

La integración de estas ecuaciones proporciona las siguientes ecuaciones de momento flexionante:

$$EIv'' = \frac{Px}{2} + C_1 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (e)$$

$$EIv'' = -Px + C_2 \quad \left(L \leq x \leq \frac{3L}{2}\right) \quad (f)$$

Los momentos flexionantes en los puntos A y C son cero, por lo que tenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$v''(0) = 0 \quad v''\left(\frac{3L}{2}\right) = 0$$

Mediante estas condiciones con las Ecs. (e) y (f), obtenemos

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{3PL}{2}$$

de donde

$$EIv'' = \frac{Px}{2} \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$EIv'' = \frac{P(3L - 2x)}{2} \quad \left(L \leq x \leq \frac{3L}{2}\right)$$

De la siguiente integración, obtenemos

$$EIv' = \frac{Px^2}{4} + C_3 \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$EIv' = \frac{Px(3L - x)}{2} + C_4 \quad \left(L \leq x \leq \frac{3L}{2}\right)$$

La única condición sobre la pendiente es la condición de continuidad en el apoyo B :

$$v'(L) \text{ para } AB = v'(L) \text{ para } BC$$

o

$$\frac{PL^2}{4} + C_3 = PL^2 + C_4$$

Esta ecuación elimina una constante de integración porque podemos expresar C_4 en términos de C_3 :

$$C_4 = C_3 - \frac{3PL^2}{4} \quad (g)$$

La tercera y última integración da

$$EIv = \frac{Px^3}{12} + C_3x + C_5 \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$EIv = \frac{Px^2(9L - 2x)}{12} + C_4x + C_6 \quad \left(L \leq x \leq \frac{3L}{2}\right)$$

Dado que las deflexiones en los puntos A y B son cero, obtenemos tres condiciones de frontera adicionales:

$$v(0) = 0 \quad v(L) \text{ para } AB = 0 \quad v(L) \text{ para } BC = 0$$

Las ecuaciones resultantes para las constantes son

$$C_5 = 0 \quad C_3 = -\frac{PL^2}{12}$$

$$C_4L + C_6 = -\frac{7PL^3}{12}$$

Combinando estas ecuaciones con la Ec. (g), obtenemos

$$C_4 = -\frac{5PL^2}{6} \quad C_6 = \frac{PL^3}{4}$$

Luego, las ecuaciones de deflexión para la viga son

$$v = -\frac{Px}{12EI}(L^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (7-33a)$$

$$v = \frac{P}{12EI}(3L^3 - 10L^2x + 9Lx^2 - 2x^3)$$

$$= \frac{P}{12EI}(3L - x)(L - x)(L - 2x) \quad \left(L \leq x \leq \frac{3L}{2}\right) \quad (7-33b)$$

De la Ec. (7-33b) determinamos la deflexión en el extremo del voladizo ($x = 3L/2$):

$$\delta_c = \frac{PL^3}{8EI} \quad (7-34)$$

Obsérvese que la deflexión de la viga es hacia abajo entre B y C y hacia arriba entre A y B .

7.5 MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

En esta sección se considera otro método para determinar deflexiones de vigas. Este método, conocido como **método del área de momentos**, utiliza las propiedades del área del diagrama de momentos flexionantes. El método es especialmente adecuado cuando únicamente se requiere la deflexión o el ángulo de rotación en un punto de la viga, porque es posible determinar tales cantidades sin encontrar primero la ecuación completa de la curva de deflexión.

Para explicar el método, consideremos un segmento AB de la curva de deflexión de una viga en una región donde la curvatura es positiva (Fig. 7-8, p. 393). En el punto A la tangente AB' a la curva de deflexión tiene un ángulo de rotación positivo θ_a a partir del eje x , y en el punto B la tangente $C'B$ tiene un ángulo θ_b . El ángulo entre las tangentes, denotado por θ_{ba} , es igual a la diferencia entre θ_b y θ_a :

$$\theta_{ba} = \theta_b - \theta_a \quad (7-35)$$

Luego, θ_{ba} representa el ángulo relativo de rotación de la tangente en B con respecto a la tangente en A . El ángulo relativo θ_{ba} es positivo cuando θ_b es mayor que θ_a , como se muestra en la figura.

Enseguida, considérense dos puntos m_1 y m_2 sobre el eje de la viga separados por una distancia ds . Las tangentes a la curva de deflexión en tales puntos se muestran en la

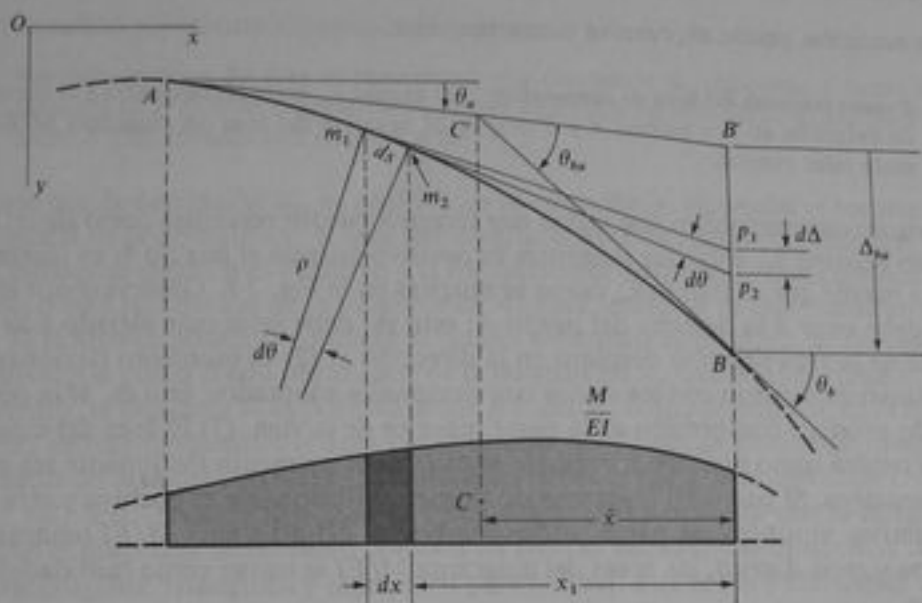


Fig. 7-8 Método del área de momentos

figura como las líneas m_1p_1 y m_2p_2 . Las normales a esas tangentes se intersectan en el centro de curvatura con un ángulo $d\theta$, que es igual a ds/ρ , donde ρ es el radio de curvatura. Por lo cual el ángulo entre las dos tangentes también es igual a $d\theta$. El ángulo $d\theta$ puede obtenerse a partir de la Ec. (7-6):

$$d\theta = -\frac{M dx}{EI} \quad (a)$$

donde M es el momento flexionante en la viga y EI es la rigidez a flexión.

La cantidad $M dx/EI$ tiene una interpretación geométrica simple. Directamente abajo de la viga en la Fig. 7-8, se dibuja el diagrama M/EI (esto es, un diagrama en el cual la ordenada en cualquier punto es igual al momento flexionante M dividido por la rigidez a flexión EI en tal punto). Luego, el diagrama M/EI tiene el mismo perfil que el diagrama de momento flexionante únicamente cuando EI es constante. El término $M dx/EI$ representa el área de la franja sombreada (Fig. 7-8) incluida en el diagrama M/EI .

Integremos ahora la Ec. (a) entre los puntos A y B :

$$\int_A^B d\theta = -\int_A^B \frac{M dx}{EI} \quad (b)$$

La integral de la izquierda es igual a $\theta_b - \theta_a$, que es el ángulo relativo θ_{ba} entre las tangentes en B y A . La integral de la derecha es igual al área del diagrama M/EI entre los puntos A y B . Obsérvese que el área del diagrama M/EI es una cantidad algebraica y que puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo del momento flexionante.

Podemos plantear ahora la Ec. (b) como sigue:

$$\theta_{ba} = -\int_A^B \frac{M dx}{EI} = -[\text{área del diagrama } M/EI \text{ entre } A \text{ y } B] \quad (7-36)$$

Esta ecuación puede expresarse como teorema:

Primer teorema del área de momentos: El ángulo θ_{ba} entre las tangentes a la curva de deflexión en dos puntos A y B es igual al negativo del área del diagrama M/EI entre tales puntos.

Los signos convencionales que utiliza este teorema pueden resumirse como sigue: (1) El ángulo relativo θ_{ba} entre las tangentes es positivo cuando el ángulo θ_b es algebraicamente mayor que el ángulo θ_a , como se muestra en la Fig. 7-8. Obsérvese que el punto B debe estar a la derecha del punto A ; esto es, debe estar más alejado a lo largo del eje de la viga según se desplaza en la dirección x . (2) El momento flexionante M es positivo de acuerdo con los signos convencionales adoptados; esto es, M es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga. (3) El área del diagrama M/EI tendrá signo positivo o negativo según que el momento flexionante sea positivo o negativo. Si parte del diagrama de momento flexionante es positiva y otra parte es negativa, entonces las partes correspondientes del diagrama M/EI tendrán esos mismos signos. Luego, las áreas del diagrama M/EI se tratan como cantidades algebraicas.

El primer teorema del área de momentos se emplea en el cálculo de deflexiones para relacionar los ángulos de rotación entre puntos seleccionados a lo largo del eje de la viga, como se ejemplifica posteriormente.

Como siguiente paso en el análisis, consideremos la desviación vertical Δ_{ba} entre el punto B sobre la curva de deflexión y el punto B' sobre la tangente en A (Fig. 7-8). Recordando que los ángulos de rotación θ_a y θ_b son cantidades muy pequeñas (y, en consecuencia, las tangentes en A y B son casi líneas horizontales), observamos de la figura que la distancia vertical $d\Delta$ (igual a $p_1 p_2$) es $x_1 d\theta$, donde x_1 es la distancia horizontal desde el elemento $m_1 m_2$ hasta el punto B . Dado que $d\theta = -M dx/EI$, podemos escribir

$$d\Delta = x_1 d\theta = -x_1 \frac{M dx}{EI} \quad (c)$$

La distancia $d\Delta$ representa la contribución de la flexión del elemento $m_1 m_2$ a la desviación total Δ_{ba} . La expresión $x_1 M dx/EI$ puede interpretarse geoméricamente como el primer momento del elemento sombreado de área ($M dx/EI$) del diagrama M/EI tomado respecto a una línea vertical a través de B . Integrando la Ec. (c) entre los puntos A y B , obtenemos

$$\int_A^B d\Delta = -\int_A^B x_1 \frac{M dx}{EI} \quad (d)$$

La integral de la izquierda es igual a Δ_{ba} , que es la desviación vertical del punto B desde la tangente en A . La integral de la derecha representa el primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B con respecto al punto B , por lo que podemos escribir la Ec. (d) como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta_{ba} &= -\int_A^B x_1 \frac{M dx}{EI} \\ &= -[\text{primer momento del área del diagrama } M/EI \\ &\quad \text{entre } A \text{ y } B, \text{ tomado con respecto a } B] \end{aligned}$$

Esta ecuación representa el segundo teorema:

Segundo teorema del área de momentos: La desviación $\Delta_{B,A}$ del punto B desde la tangente en A es igual al negativo del primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B , tomado con respecto a B .

Nótese que la desviación $\Delta_{B,A}$ es positiva en la dirección y . Si, según se recorre desde A hasta B en la dirección x , el área del diagrama M/EI es negativa, entonces el primer momento también es negativo y la desviación es positiva, lo que significa que el punto B está por debajo de la tangente en A . Esta situación se representa en la Fig. 7-8. Si el área es positiva, entonces el primer momento es positivo, la desviación es negativa, y el punto B está por encima de la tangente en A . Cuando se calcula el primer momento, la distancia x_1 es positiva desde B hacia A , como se muestra en la Fig. 7-8.

El primer momento del área del diagrama M/EI puede obtenerse tomando el producto del área del diagrama y la distancia \bar{x} desde el punto B al centroide C del área (Fig. 7-8). Este procedimiento comúnmente es más conveniente que la integración, porque el diagrama usualmente consiste en figuras geométricas conocidas tales como rectángulos, triángulos y segmentos parabólicos. Las áreas y distancias centroidales de tales figuras están indicadas en el Apéndice D.

El segundo teorema del área de momentos es útil para determinar deflexiones ya que relaciona la posición de un punto sobre la viga con la tangente en algún otro punto. Las técnicas a emplear se representan en los ejemplos subsecuentes.

En muchas vigas esto resulta obvio cuando la viga se deforma hacia arriba o hacia abajo y cuando el ángulo de rotación tiene el sentido de las manecillas del reloj. En tales casos, no es necesario adoptar los signos convencionales descritos para el método del área de momentos, los cuales a primera vista pueden parecer complicados. En lugar de ello, podemos hacer el cálculo con valores absolutos y determinar las direcciones por inspección.

Los teoremas del área de momentos son aplicables únicamente a vigas linealmente elásticas, ya que se basan en la Ec. (7-6). Posteriormente, en el Capítulo 10, aplicaremos teoremas de área-curvatura más generales que son aplicables a vigas inelásticas.*

Ejemplo 1

Determinar el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre B de una viga en voladizo AB que soporta una carga concentrada P (Fig. 7-9).

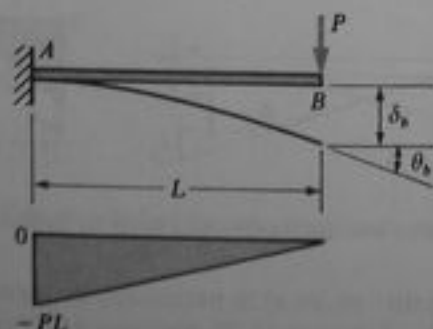


Fig. 7-9 Ejemplo 1. Viga en voladizo con una carga concentrada

* El método del área de momentos fue establecido por Saint-Venant (Refs. 7-6 y 7-7). El método fue desarrollado con mayor profundidad y alcance por Mohr (Refs. 7-8 y 7-9) y por Greene (Ref. 7-10).

El diagrama de momento flexionante para esta viga tiene forma triangular, como se muestra en la porción inferior de la figura. Ya que la rigidez a flexión EI es constante, el diagrama M/EI tiene la misma forma que el diagrama de momento flexionante. A partir del primer teorema del área de momentos, sabemos que el ángulo relativo de rotación θ_{ba} entre las tangentes en B y A es igual al negativo del área del diagrama M/EI . El área del diagrama es

$$A_1 = \frac{1}{2}(L)(-PL)\left(\frac{1}{EI}\right) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

y, por lo tanto,

$$\theta_{ba} = \theta_b - \theta_a = -A_1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

La tangente a la curva de deflexión en A es horizontal ($\theta_a = 0$); por lo que,

$$\theta_b = \frac{PL^2}{2EI} \quad (7-38)$$

El extremo de la viga gira en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura.

La deflexión δ_b en el extremo libre puede obtenerse a partir del segundo teorema. La desviación Δ_{ba} del punto B desde la tangente en A es la misma que la deflexión δ_b en este caso. El primer momento del área del diagrama M/EI , tomado con respecto al punto B , es

$$Q_1 = A_1\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Del segundo teorema del área de momentos, obtenemos $\delta_b = -Q_1$, o sea

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \quad (7-39)$$

Un valor positivo significa que tanto la desviación como la deflexión son hacia abajo.

Ejemplo 2

Determinar el ángulo de rotación θ_b y la deflexión δ_b en el extremo libre B de una viga en voladizo AB con una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre parte de la longitud (Fig. 7-10).

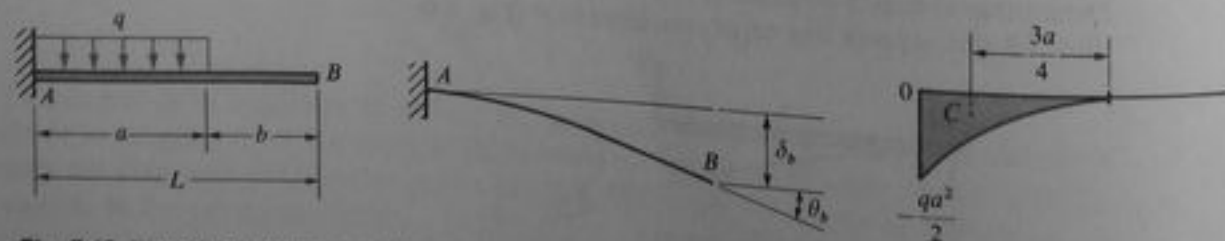


Fig. 7-10 Ejemplo 2. Viga en voladizo con una carga uniforme sobre una parte de su longitud

El diagrama de momento flexionante consiste en un arco parabólico de segundo grado (véase Caso 19, Apéndice D, para las propiedades de esta área). El diagrama M/EI tiene el mismo perfil, siempre y cuando EI sea constante. Obsérvese que el eje deformado de la viga es curvo en la región bajo la carga uniforme y recto en la porción sin carga.

El ángulo de rotación θ_b es igual al ángulo relativo $\theta_{b..}$, puesto que la tangente en A es horizontal. El área del diagrama M/EI es

$$A_1 = \frac{1}{3}(a) \left(\frac{qa^2}{2} \right) \left(\frac{1}{EI} \right) = -\frac{qa^3}{6EI}$$

Por lo que, a partir del primer teorema del área de momentos, obtenemos $\theta_b = -A_1$, o sea

$$\theta_b = \frac{qa^3}{6EI} \quad (7-40)$$

Este ángulo es igual a la pendiente de la viga a lo largo de la región sin carga.

La deflexión δ_b es igual a la desviación $\Delta_{b..}$ en este caso. En consecuencia, δ_b es igual al negativo del primer momento del área del diagrama M/EI , tomado con respecto a B . El centroide C del diagrama está a una distancia $3a/4$ a partir de la orilla de la carga, o a una distancia $b + 3a/4$ desde B . Luego, el primer momento es

$$Q_1 = A_1 \left(b + \frac{3a}{4} \right) = \left(-\frac{qa^3}{6EI} \right) \left(b + \frac{3a}{4} \right) = -\frac{qa^3}{24EI} (4L - a)$$

ya que $b = L - a$. La deflexión en el extremo es $\delta_b = -Q_1$, o sea

$$\delta_b = \frac{qa^3}{24EI} (4L - a) \quad (7-41)$$

Si $a = L$, esta ecuación resulta $\delta_b = qL^4/8EI$, que es la deflexión de una viga en voladizo cargada totalmente (Ec. 7-19b).

Ejemplo 3

Determinar el ángulo de rotación θ_b y la deflexión δ_b en el extremo libre B de una viga en voladizo AB , con una carga uniforme de intensidad q actuando sobre la mitad derecha de la viga (Fig. 7-11).

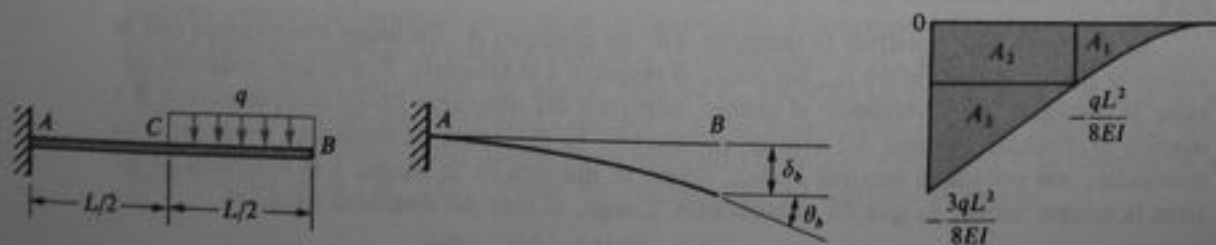


Fig. 7-11 Ejemplo 3. Viga en voladizo con una carga uniforme sobre la mitad de su longitud

El diagrama de momento flexionante consiste en una curva parabólica desde B hasta C y una línea recta desde C hasta A . El diagrama M/EI tiene el mismo perfil, ya que EI es constante. Para la evaluación del área y el primer momento del diagrama M/EI , es conveniente dividir

este diagrama en tres partes cuyas áreas son A_1 , A_2 y A_3 . Estas partes son un arco parabólico, un rectángulo y un triángulo, respectivamente, con las áreas siguientes:

$$A_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(-\frac{qL^2}{8EI} \right) = -\frac{qL^3}{48EI}$$

$$A_2 = \frac{L}{2} \left(-\frac{qL^2}{8EI} \right) = -\frac{qL^3}{16EI}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(-\frac{qL^2}{4EI} \right) = -\frac{qL^3}{16EI}$$

El ángulo de rotación θ_b es igual al negativo del área del diagrama M/EI :

$$\theta_b = -(A_1 + A_2 + A_3) = \frac{7qL^3}{48EI} \quad (7-42)$$

La deflexión δ_b es igual al negativo del primer momento del diagrama M/EI , tomado con respecto a B :

$$\delta_b = -(A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3)$$

donde \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 son las distancias horizontales desde B hasta los centroides de las áreas respectivas. Luego,

$$\delta_b = \frac{qL^3}{48EI} \left(\frac{3L}{8} \right) + \frac{qL^3}{16EI} \left(\frac{3L}{4} \right) + \frac{qL^3}{16EI} \left(\frac{5L}{6} \right) = \frac{41qL^4}{384EI} \quad (7-43)$$

Este ejemplo representa cómo el área y el primer momento de un diagrama M/EI complicado puede determinarse fácilmente dividiendo el diagrama en porciones de propiedades conocidas.

Ejemplo 4

Una viga simple AB soporta una carga concentrada P como se muestra en la Fig. 7-12. Determinar el ángulo de rotación θ_a en el soporte A , la deflexión δ bajo la carga P y la deflexión máxima δ_{\max} .

Empezamos por construir la tangente AB' en el apoyo A . Entonces observamos que la distancia BB' es la desviación Δ_{ba} del punto B respecto a la tangente. Por lo que podemos calcular la distancia BB' evaluando el primer momento del diagrama M/EI con respecto a B y usando el segundo teorema del área de momentos. El diagrama de momento flexionante es triangular, con ordenada máxima Pab/L , como se muestra en la figura, y el diagrama M/EI tiene la misma forma, ya que EI es constante. Luego, el área del diagrama M/EI es

$$A_1 = \frac{1}{2} (L) \left(\frac{Pab}{L} \right) \left(\frac{1}{EI} \right) = \frac{Pab}{2EI}$$

El centroide C de esta área está a una distancia $(L + b)/3$ desde B (véase Caso 3, Apéndice D). Por lo tanto, la desviación Δ_{ba} es

$$\Delta_{ba} = -A_1 \left(\frac{L + b}{3} \right) = -\frac{Pab}{6EI} (L + b)$$

El signo menos indica que la desviación es en la dirección *y* negativa, o hacia arriba; esto es, el punto *B* está por encima de la tangente. La distancia *BB'* es numéricamente igual a Δ_{aa} , como sigue:

$$BB' = \frac{Pab}{6EI}(L + b)$$

También se aprecia en la figura que el ángulo θ_a es igual a la distancia *BB'* dividida entre la longitud de la viga:

$$\theta_a = \frac{BB'}{L} = \frac{Pab}{6LEI}(L + b) \quad (7-44)$$

De esta manera, se ha determinado el ángulo de rotación en el apoyo *A*.

Según se aprecia en la Fig. 7-12, la deflexión δ bajo la carga *P* es igual a la distancia *D'D''* menos la distancia *D'D*. La distancia *D'D''* es igual a $a\theta_a$, y la distancia *D'D* puede determinarse a partir del segundo teorema del área de momentos. Esta última distancia es numéricamente igual a la desviación del punto *D* respecto a la tangente en *A*. En consecuencia, tomamos el primer momento del área del diagrama *M/EI* entre *A* y *D* con respecto a *D*. El área del diagrama es el área del triángulo izquierdo dividida entre *EI*:

$$A_2 = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{Pab}{L}\right)\left(\frac{1}{EI}\right) = \frac{Pa^2b}{2LEI}$$

Su primer momento respecto a *D* es

$$Q_1 = A_2\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

La desviación Δ_{aa} es el negativo de esta expresión; sin embargo, se requiere la distancia real *D'D*, que es igual a Q_1 :

$$D'D = \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

Luego, para la deflexión δ en el punto *D*, obtenemos

$$\delta = D'D'' - D'D = a\theta_a - \frac{Pa^3b}{6LEI} = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} \quad (7-45)$$

Las fórmulas anteriores para θ_a y δ son válidas para cualquier posición de la carga *P*.

Para determinar la deflexión máxima, supóngase que $a \geq b$, de forma tal que la deflexión máxima ocurre a la izquierda de la carga (o bajo ella en el caso especial cuando $a = b$). La deflexión máxima ocurre en el punto *E* (distancia x_1 desde el apoyo *A*), donde la curva de deflexión tiene una tangente horizontal. El ángulo relativo θ_{aa} entre las tangentes en *E* y *A* es igual al negativo del área del diagrama *M/EI* entre *A* y *E*, de acuerdo con el primer teorema del área de momentos. La porción del diagrama de momento flexionante entre *A* y *E* se muestra en la parte inferior de la Fig. 7-12. El área del diagrama *M/EI* correspondiente es

$$A_3 = \frac{1}{2}(x_1)\left(\frac{Pbx_1}{L}\right)\left(\frac{1}{EI}\right) = \frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

A partir del primer teorema, obtenemos ahora

$$\theta_{aa} = \theta_a - \theta_a = -A_3 = -\frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

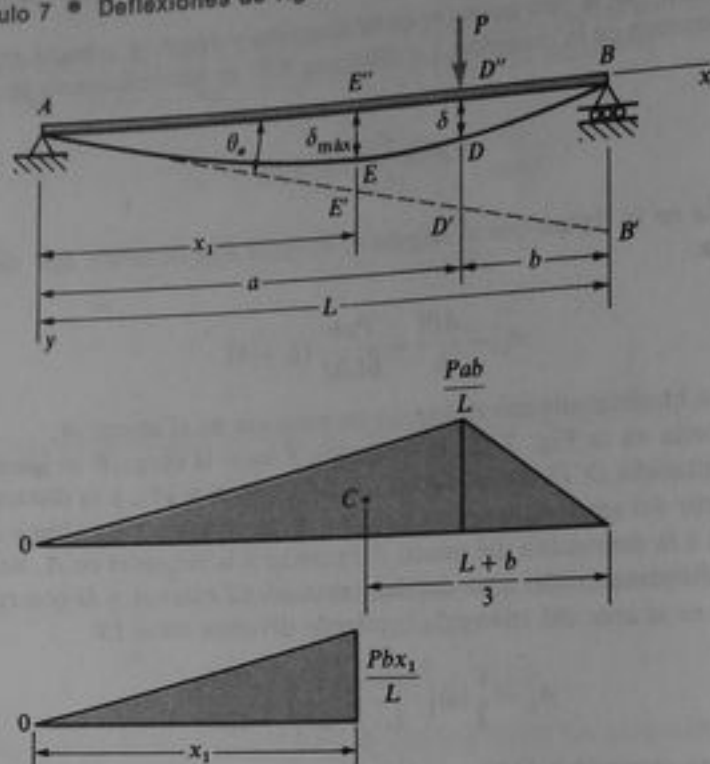


Fig. 7-12 Ejemplo 4. Viga simple con una carga concentrada

El ángulo θ_a es cero, y el ángulo θ_a está dado por la Ec. (7-44); sustituyendo estos valores, obtenemos una ecuación que puede resolverse para la distancia x_1 :

$$-\frac{Pab}{6LEI}(L+b) = -\frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

de donde

$$x_1 = \sqrt{\frac{a(2L-a)}{3}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (7-46)$$

De esta manera, se ha determinado la distancia al punto E .

La deflexión máxima δ_{\max} es igual a $E'E''$ menos $E'E$; la primera es igual a $x_1\theta_a$, y la última puede obtenerse a partir del segundo teorema del área de momentos en la misma forma en que se determinó la distancia $D'D$. El cálculo resultante es como sigue:

$$\delta_{\max} = x_1\theta_a - A_3\left(\frac{x_1}{3}\right) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}(L^2 - b^2)^{3/2} \quad (7-47)$$

Un esquema opcional y un poco más simple para determinar δ_{\max} es observar que δ_{\max} es numéricamente igual a la desviación del punto A desde la tangente en E . Por lo que podemos encontrar δ_{\max} determinando el primer momento del área del diagrama M/EI entre A y E con respecto a A :

$$\delta_{\max} = A_3\left(\frac{2x_1}{3}\right) = \frac{Pbx_1^3}{3LEI} \quad (7-48)$$

Sustituyendo para x_1 de la Ec. (7-46), obtenemos la misma expresión que antes (Ec. 7-47). Las Ecs. (7-46) a (7-48) son válidas cuando $a \geq b$.

Ejemplo 5

Una viga ABC está simplemente apoyada en A y B y tiene un voladizo desde B hasta C (Fig. 7-13). El claro entre A y B tiene una longitud de 10 m, y el voladizo tiene una longitud de 4 m. En el punto D , situado a 4 m del apoyo A , actúa una carga concentrada de 40 kN, y sobre el voladizo

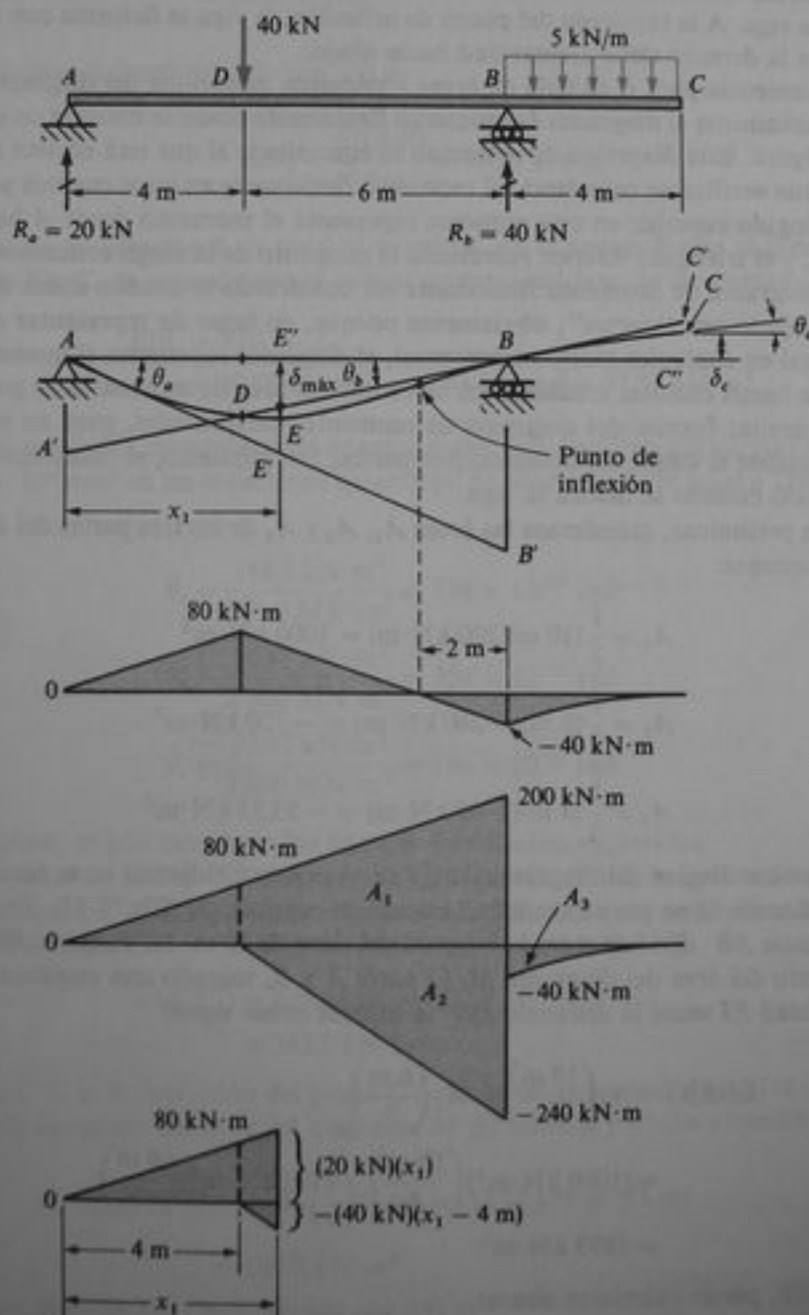


Fig. 7-13 Ejemplo 5. Viga con voladizo

zo actúa una carga de 5 kN/m. La viga es de acero con sección de patín ancho, con $E = 200$ GPa e $I = 1.28 \times 10^9 \text{ mm}^4$. (a) Calcular los ángulos de rotación θ_a , θ_b y θ_c en A , B y C , respectivamente, asumiendo que los ángulos son positivos como se muestra en la figura. (b) Calcular la deflexión δ_c en el extremo libre C . (c) Calcular la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ en el claro AB .

(a) Para determinar los diferentes ángulos de rotación y las deflexiones, se requiere el diagrama de momentos flexionantes. Del equilibrio estático, se elabora el diagrama mostrado debajo del esquema de la curva de deflexión. El momento flexionante bajo la carga concentrada es 80 kN·m y en el apoyo B es -40 kN·m. Entre estos puntos, el momento flexionante varía linealmente y se vuelve cero en un punto localizado a 2 m de B . En el punto de momento nulo, el momento flexionante cambia de signo, por lo que la curvatura también cambia de signo. Consecuentemente, hay un punto de curvatura nula, llamado **punto de inflexión**, o **punto de contraflexión**, en la curva de deflexión de la viga. A la izquierda del punto de inflexión, la viga se deforma con concavidad hacia arriba; a la derecha tiene concavidad hacia abajo.

Por conveniencia para el cálculo de áreas y primeros momentos del diagrama M/EI , se debe trazar nuevamente el diagrama de momento flexionante como se muestra en el cuarto esquemático. Este diagrama de momento es equivalente al que está encima de él, como puede fácilmente verificarse calculando el momento flexionante en unos cuantos puntos específicos. El triángulo superior en este esquema representa el momento desde A hasta B de la reacción en A , y el triángulo inferior representa el momento de la carga concentrada desde D hasta B . Un diagrama de momento flexionante así construido se conoce como diagrama de momentos dibujado por "partes", obviamente porque, en lugar de representar el momento flexionante total en cualquier sección transversal, el diagrama representa el momento en partes. Cuando se hacen cálculos mediante los teoremas del área de momentos se puede utilizar cualquiera de ambas formas del diagrama de momentos flexionantes, pero en este ejemplo es más fácil emplear el diagrama de momentos dibujado por partes. Por supuesto, el momento flexionante total es necesario cuando se diseña la viga.

En forma preliminar, calculemos las áreas A_1 , A_2 y A_3 de las tres partes del diagrama de momento flexionante:

$$A_1 = \frac{1}{2}(10 \text{ m})(200 \text{ kN}\cdot\text{m}) = 1000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(6 \text{ m})(-240 \text{ kN}\cdot\text{m}) = -720 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(4 \text{ m})(-40 \text{ kN}\cdot\text{m}) = -53.33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Las áreas correspondientes del diagrama M/EI se obtienen dividiendo estas áreas entre EI .

Ahora estamos listos para calcular el ángulo de rotación θ_a (Fig. 7-13). Este ángulo es igual a la distancia BB' dividida entre la longitud del claro de 10 m. La distancia BB' es igual al primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B , tomado con respecto a B . Por lo tanto, la cantidad EI veces la distancia BB' se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} EI(BB') &= A_1\left(\frac{10 \text{ m}}{3}\right) + A_2\left(\frac{6 \text{ m}}{3}\right) \\ &= (1000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{10 \text{ m}}{3}\right) - (720 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{6 \text{ m}}{3}\right) \\ &= 1893 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

La cantidad $EI\theta_a$ puede calcularse ahora:

$$EI\theta_a = \frac{EI(BB')}{10 \text{ m}} = 189.3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Obsérvese que, por conveniencia en los cálculos, se conserva EI como un factor común. Posteriormente, se sustituirán los valores numéricos para E e I y se determinará el valor de θ , en radianes.

El ángulo de rotación θ_a se determina en forma similar. Primero se encuentra la distancia AA' a partir del segundo teorema del área de momentos:

$$\begin{aligned} EI(AA') &= A_1 \left(\frac{2}{3} \right) (10 \text{ m}) + A_2 \left[4 \text{ m} + \frac{2}{3} (6 \text{ m}) \right] \\ &= (1000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2) \left(\frac{20 \text{ m}}{3} \right) + (720 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)(8 \text{ m}) \\ &= 906.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

Luego, el ángulo θ_a (multiplicado por EI) es

$$EI\theta_a = \frac{EI(AA')}{10 \text{ m}} = 90.67 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

El ángulo de rotación θ_c es igual al ángulo θ_a en el apoyo B más el área del diagrama M/EI entre B y C , de acuerdo con el primer teorema del área de momentos. Luego,

$$\begin{aligned} EI\theta_c &= EI\theta_a + A_3 \\ &= 90.67 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 + 53.33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 = 144 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Ahora es posible determinar los ángulos reales de rotación sustituyendo $E = 200 \text{ GPa}$ e $I = 1.28 \times 10^8 \text{ mm}^4$ en las ecuaciones anteriores. El producto EI es igual a $256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{90.67 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2} = 354 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ \theta_b &= \frac{90.67 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2} = 354 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ \theta_c &= \frac{144 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2} = 146 \times 10^{-6} \text{ rad} \end{aligned}$$

De esta manera, se han calculado los ángulos de rotación requeridos.

(b) A partir de la Fig. 7-13, se aprecia que la deflexión δ_c es igual a la distancia $C'C''$ menos la distancia $C'C$. La primera de estas distancias se obtiene multiplicando θ_b por la distancia desde B hasta C :

$$\begin{aligned} EI(C'C'') &= EI\theta_b(4 \text{ m}) = (90.67 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)(4 \text{ m}) \\ &= 362.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

La distancia $C'C$ es la desviación del punto C desde la tangente en B , la cual es igual al negativo del primer momento del área del diagrama M/EI entre B y C con respecto a C :

$$\begin{aligned} EI(C'C) &= -A_3 \left(\frac{3}{4} \right) (4 \text{ m}) = (53.33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)(3 \text{ m}) \\ &= 160.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la deflexión (multiplicada por EI) es

$$\begin{aligned} EI\delta_c &= EI(C'C'') - EI(C'C) \\ &= 362.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 - 160.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 = 202.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de EI , obtenemos

$$\delta_c = \frac{202.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2} = 0.792 \text{ mm}$$

Esta deflexión es hacia arriba, como se muestra en la figura.

(c) La deflexión máxima hacia abajo δ_{\max} ocurre en el claro AB en un punto E a localizar. Supóngase que este punto está entre D y B (si no lo está, los cálculos lo indicarán y entonces es posible iniciar nuevamente asumiendo que E está entre A y D). En el punto E , la curva de deflexión tiene una tangente horizontal; por lo tanto, el área del diagrama M/EI entre A y E debe ser igual al ángulo de rotación θ_a . Denotando por x_1 la distancia desde A hasta E , es posible formular la siguiente ecuación (véase la última parte de la Fig. 7-13):

$$\begin{aligned} EI\theta_a &= \frac{1}{2}(x_1)(20 \text{ kN})(x_1) - \frac{1}{2}(x_1 - 4 \text{ m})(40 \text{ kN})(x_1 - 4 \text{ m}) \\ &= x_1^2(-10 \text{ kN}) + x_1(160 \text{ kN}\cdot\text{m}) - 320 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

en donde x_1 tiene unidades de metros. Sustituyendo $EI\theta_a = 189.3 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ en esta ecuación, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para x_1 :

$$x_1^2 - 16x_1 + 50.93 = 0$$

Resolviendo mediante la fórmula cuadrática, obtenemos $x_1 = 4.385 \text{ m}$ (la otra raíz no tiene significado real en este problema). Ahora se ha determinado la posición del punto E entre D y B .

La deflexión máxima δ_{\max} es numéricamente igual a la desviación del punto A respecto a la tangente horizontal en E . Por lo tanto, es posible calcular δ_{\max} tomando el primer momento del área entre A y E con respecto a A (véase la última parte de la Fig. 7-13):

$$\begin{aligned} EI\delta_{\max} &= \frac{1}{2}(x_1)(20 \text{ kN})(x_1)\left(\frac{2x_1}{3}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1 - 4 \text{ m})(40 \text{ kN})(x_1 - 4 \text{ m})\left[4 \text{ m} + \frac{2}{3}(x_1 - 4 \text{ m})\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_1 = 4.385 \text{ m}$ en las expresiones anteriores, obtenemos

$$EI\delta_{\max} = 562.2 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 - 12.63 \text{ kN}\cdot\text{m}^3 = 549.6 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

Finalmente, calculamos δ_{\max} en términos numéricos:

$$\delta_{\max} = \frac{549.6 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2} = 2.15 \text{ mm}$$

De esta manera, se ha determinado la máxima deflexión hacia abajo.

En este ejemplo, nos apoyamos sobre la geometría de la curva de deflexión para obtener las relaciones deseadas entre los ángulos de rotación y las deflexiones. Tal procedimiento basado en el sentido común, a menudo es más eficaz que utilizar los signos convencionales apropiados que se asocian con los teoremas del área de momentos.

7.6 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión de una viga (Ecs. 7-10) son ecuaciones diferenciales lineales; esto es, todos los términos que contienen la deflexión v

y sus derivadas están elevadas a la primera potencia únicamente. Por lo tanto, las soluciones de las ecuaciones para varias condiciones de carga pueden superponerse. Luego, la deflexión de la viga causada por varias cargas diferentes que actúan simultáneamente puede determinarse mediante la superposición de las deflexiones ocasionadas por cada carga actuando en forma separada. Por ejemplo, si v_1 representa la deflexión debida a una carga q_1 y si v_2 representa la deflexión debida a una carga q_2 , la deflexión total producida por q_1 y q_2 actuando simultáneamente es $v_1 + v_2$.

Para ejemplificar esta idea, considérese la viga en voladizo mostrada en la Fig. 7-14. Esta viga soporta una carga uniforme de intensidad q sobre una porción del claro y una carga concentrada P que actúa sobre su extremo libre. Supóngase que se desea calcular la deflexión δ_b en el extremo libre. Cuando la carga P actúa sola, la deflexión en B es $PL^3/3EI$, como se muestra en el Ejemplo 1 de la sección anterior (Ec. 7-39). También, la deflexión debida a la acción de la carga uniforme es $qa^3(4L - a)/24EI$, según se obtuvo en el Ejemplo 2 de la sección anterior (Ec. 7-41). Por lo que la deflexión δ_b debida a la carga combinada es

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(4L - a)}{24EI} \quad (7-49)$$

La deflexión y el ángulo de rotación en cualquier punto de la viga pueden determinarse mediante este procedimiento.

El método de superposición es muy útil cuando el sistema de carga sobre la viga puede subdividirse en condiciones de carga que producen deflexiones que son ya conocidas, como las representadas en el ejemplo anterior. Para su uso conveniente en problemas de este tipo, en el Apéndice G se incluyen **tablas de deflexiones de vigas**. Mediante estas tablas y el método de superposición, podemos determinar deflexiones y ángulos de rotación para muchas condiciones de carga diferentes para vigas. Al final de esta sección se presentan algunos ejemplos adicionales de este tipo.

La superposición también puede emplearse para cargas distribuidas considerando un elemento de la carga distribuida como si fuera una carga concentrada e integrando a lo largo de la región de la carga. Este procedimiento puede entenderse fácilmente mediante el ejemplo mostrado en la Fig. 7-15. La carga sobre la viga simple AB está distribuida triangularmente sobre la mitad izquierda de la viga, y supongamos que se desea conocer la deflexión δ en el punto medio de la viga. Un elemento $q dx$ de la carga distribuida puede visualizarse como una carga concentrada. La deflexión en el punto medio, producida por una carga concentrada P que actúa a una distancia x del extremo izquierdo, es

$$\frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$$

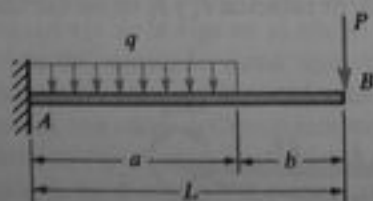


Fig. 7-14 Viga en voladizo con dos cargas

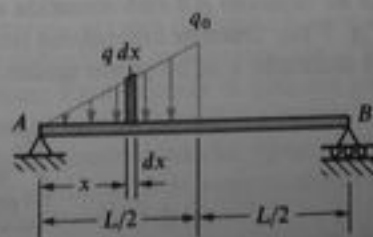


Fig. 7-15 Viga simple con una carga triangular

la cual se obtiene del Caso 5 de la Tabla G-2 en el Apéndice G. Sustituyendo $q dx$ por P en esta expresión, y observando que $q = 2q_0x/L$, obtenemos para la deflexión

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{L/2} \frac{qx dx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \\ &= \frac{q_0}{24LEI} \int_0^{L/2} (3L^2 - 4x^2)x^2 dx = \frac{q_0L^4}{240EI} \end{aligned} \quad (7-50)$$

Mediante este mismo procedimiento de superponer elementos de la carga distribuida, podemos calcular el ángulo de rotación θ_a en el extremo izquierdo de la viga. La expresión para este ángulo debido a una carga concentrada P (véase Caso 5 de la Tabla G-2) es

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

En esta expresión, debemos reemplazar P por $2q_0x dx/L$, a por x y b por $L - x$; luego

$$\theta_a = \int_0^{L/2} \frac{q_0x dx}{3L^2EI} (x)(L-x)(2L-x) = \frac{41q_0L^3}{2880EI} \quad (7-51)$$

Otra representación de esta técnica está dada en el Ejemplo 2.

En cada uno de los ejemplos anteriores, se ha utilizado el **principio de superposición** para determinar deflexiones de vigas. Este concepto es ampliamente usado en mecánica y es válido siempre y cuando la cantidad a ser determinada sea una función lineal de las cargas aplicadas. Bajo tales condiciones, la cantidad deseada puede determinarse debido a la acción separada de cada carga, y entonces los resultados pueden superponerse para obtener el valor total debido a la acción simultánea de todas las cargas. En el caso de deflexión de vigas, el principio de superposición es válido si el material cumple con la ley de Hooke y si las deflexiones y rotaciones de la viga son pequeñas. El requisito de rotaciones pequeñas asegura la linealidad de la ecuación diferencial de la curva de deflexión, y el requerimiento de deflexiones pequeñas asegura que las líneas de acción de las cargas y reacciones no varíen en forma significativa a partir de sus posiciones originales.

Los siguientes ejemplos proporcionan una representación adicional del empleo del principio de superposición para el cálculo de deflexiones de vigas.

Ejemplo 1

Una viga en voladizo AB está sometida a momentos concentrados M_0 y $2M_0$ en sus extremos (véase Fig. 7-16). Obtener expresiones para los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los extremos de la viga y la deflexión δ en su punto medio.

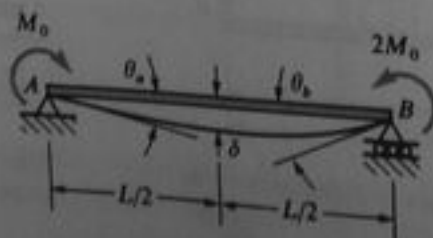


Fig. 7-16 Ejemplo 1. Viga simple con momentos que actúan en los extremos

Mediante el Caso 7 de la Tabla G-2, obtenemos por superposición

$$\theta_a = \frac{M_0 L}{3EI} + \frac{(2M_0)L}{6EI} = \frac{2M_0 L}{3EI}$$

$$\theta_b = \frac{M_0 L}{6EI} + \frac{(2M_0)L}{3EI} = \frac{5M_0 L}{6EI}$$

$$\delta = \frac{M_0 L^2}{16EI} + \frac{(2M_0)L^2}{16EI} = \frac{3M_0 L^2}{16EI}$$

De esta manera se han determinado las cantidades requeridas.

Ejemplo 2

Una viga en voladizo AB soporta una carga uniforme de intensidad q sobre la mitad derecha de su longitud, como se muestra en la Fig. 7-17. Determinar la deflexión δ_b y el ángulo de rotación θ_b en el extremo libre.

Empezamos por considerar un elemento $q dx$ de la carga situada a una distancia x del apoyo. Este elemento de carga produce una deflexión $d\delta$ y un ángulo $d\theta$ en el extremo libre iguales a

$$d\delta = \frac{(q dx)(x^2)(3L - x)}{6EI} \quad d\theta = \frac{(q dx)(x^2)}{2EI}$$

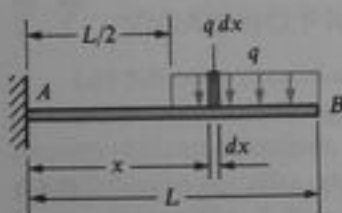


Fig. 7-17 Ejemplo 2. Viga en voladizo con una carga uniforme sobre la mitad de la longitud

según se determina del Caso 5 de la Tabla G-1. Por lo que, por integración, obtenemos

$$\delta_b = \frac{q}{6EI} \int_{L/2}^L x^2(3L - x) dx = \frac{41qL^4}{384EI} \quad (7-52)$$

$$\theta_b = \frac{q}{2EI} \int_{L/2}^L x^2 dx = \frac{7qL^3}{48EI} \quad (7-53)$$

Estos mismos resultados pueden obtenerse en forma más simple mediante las fórmulas del Caso 3 de la Tabla G-1 y sustituyendo $a = b = L/2$.

Ejemplo 3

Una viga simple con un voladizo está cargada como se muestra en la Fig. 7-18. Determinar la deflexión δ_c en el extremo del voladizo.

La deflexión del punto C se compone de dos partes: (1) una deflexión δ_1 causada por la rotación del eje de la viga en el apoyo B y (2) una deflexión δ_2 ocasionada por la flexión de la porción BC actuando como una viga en voladizo. Para obtener la primera parte de la deflexión, observamos que la porción AB de la viga está en la misma condición de una viga simple que soporta una carga uniforme sometida a un momento concentrado M_b (igual a $qa^2/2$) y una carga vertical (igual a qa) que actúa en el extremo derecho, como se muestra en la Fig. 7-18b. El ángulo θ_b en el extremo B (véanse casos 1 y 7 de la Tabla G-2) es:

$$\theta_b = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_b L}{3EI} = \frac{qL(4a^2 - L^2)}{24EI}$$

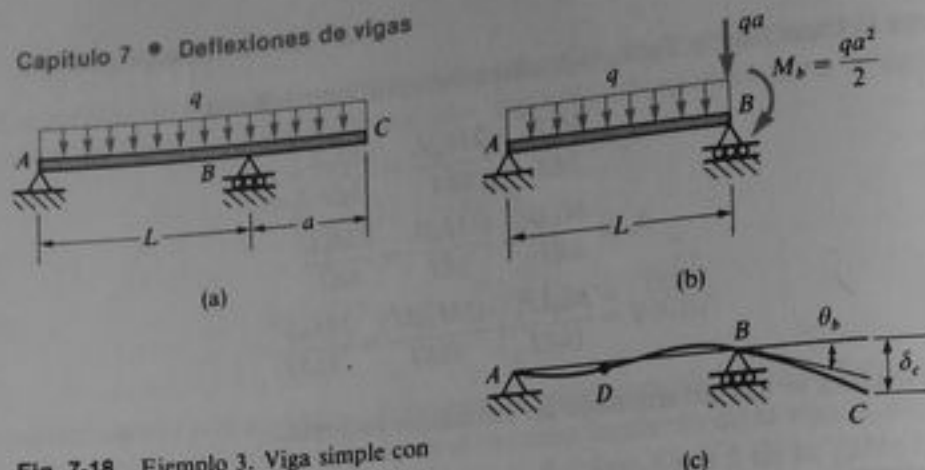


Fig. 7-18 Ejemplo 3. Viga simple con un voladizo

en donde la rotación en el sentido de las manecillas del reloj es positiva. La deflexión δ_1 del punto C, debida a la rotación en B, es igual a $a\theta_b$, o sea

$$\delta_1 = \frac{qaL(4a^2 - L^2)}{24EI}$$

Esta deflexión es positiva hacia abajo.

La flexión del voladizo mismo produce una deflexión hacia abajo δ_2 en C. Esta deflexión es igual a la deflexión de una viga en voladizo de longitud a (véase Caso 1 de la Tabla G-1):

$$\delta_2 = \frac{qa^4}{8EI}$$

La deflexión total del punto C, supuesta positiva hacia abajo, es

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = \frac{qa}{24EI} (3a^3 + 4a^2L - L^3) \quad (7-54)$$

A partir de este resultado podemos demostrar que, cuando a es menor que $L(\sqrt{13} - 1)/6$, o sea $0.434L$, la deflexión δ_c es negativa y el punto C deflexiona hacia arriba.

La forma de la curva de deflexión para la viga de este ejemplo se muestra en la Fig. 7-18c para el caso en que a es suficientemente grande ($a > 0.434L$) para producir una deflexión hacia abajo en C y suficientemente pequeña ($a < L$) para asegurar que la reacción en A sea hacia arriba. En estas condiciones la viga tiene un momento flexionante positivo desde A hasta un punto como D; luego, la curva de deflexión es convexa hacia abajo en esta porción de la viga. Desde D hasta C, el momento flexionante es negativo y la curva de deflexión es convexa hacia arriba. El punto D, en el cual la curvatura del eje de la viga es cero (porque el momento flexionante es cero), es un punto de inflexión. La curvatura de la curva de deflexión cambia de signo en este punto.

Ejemplo 4

Determinar la deflexión δ_b en la articulación B para la viga compuesta mostrada en la Fig. 7-19. Obsérvese que la viga se compone de dos partes: (1) una viga AB simplemente apoyada en A, y (2) una viga en voladizo BC, empotrada en C. Las dos vigas están unidas entre sí mediante una

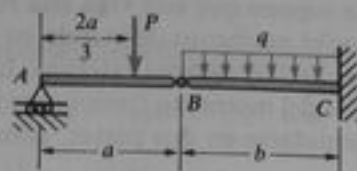


Fig. 7-19 Ejemplo 4. Viga compuesta con una articulación

Considerando la viga AB como cuerpo libre, se aprecia que tiene reacciones verticales $P/3$ y $2P/3$ en los extremos A y B , respectivamente. Por lo tanto, la viga BC está en la condición de una viga en voladizo sometida a una carga uniforme de intensidad q y a una carga concentrada en el extremo igual a $2P/3$. La deflexión del extremo de este voladizo, que es la misma que la deflexión de la articulación, es

$$\delta_b = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

según se determina a partir de los casos 1 y 4 de la Tabla G-1.

7.7 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Los métodos presentados en las secciones anteriores para el cálculo de deflexiones de vigas prismáticas (esto es, vigas con sección transversal constante en su longitud) pueden utilizarse también para determinar deflexiones de vigas no prismáticas. Tales vigas incluyen aquéllas con diferentes áreas de sección transversal en varias partes de la viga (véase Fig. 7-20 como ejemplo) y vigas ahusadas (véase Fig. 7-21). Cuando una viga varía súbitamente en las dimensiones de su sección transversal, ocurren concentraciones de esfuerzo locales en los puntos donde se presentan los cambios; sin embargo, estos esfuerzos locales no influyen de modo apreciable sobre el cálculo de deflexiones. Para una viga ahusada, la teoría de flexión establecida previamente para una viga prismática ofrece resultados satisfactorios siempre y cuando el ángulo de ahusamiento sea pequeño.

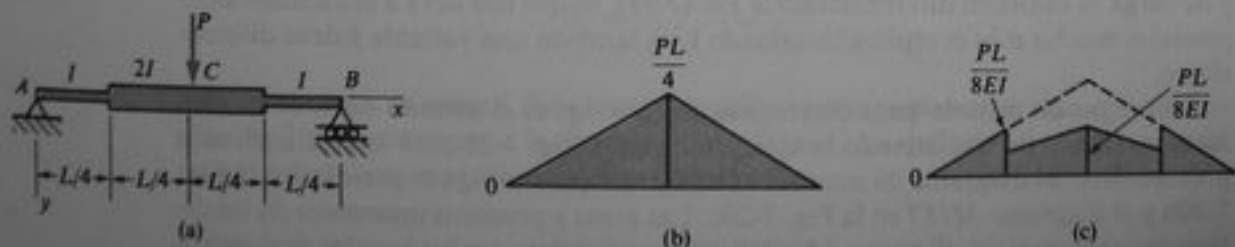


Fig. 7-20 Viga simple con dos momentos de inercia diferentes

El primer método para determinar deflexiones es integrar la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Para representar este método, considérese el ejemplo

ilustrado en la Fig. 7-20a. Se supone que esta viga está reforzada a lo largo de su región central de tal forma que el momento de inercia en esa porción de la viga es el doble del momento de inercia de las regiones externas. La ecuación diferencial de la curva de deflexión en términos del momento flexionante (Ec. 7-10a) para la mitad izquierda de la viga puede formularse en dos partes, como sigue:

$$EIv'' = -\frac{Px}{2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \quad (a)$$

$$E(2I)v'' = -\frac{Px}{2} \quad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (b)$$

Cada una de estas ecuaciones puede integrarse dos veces para obtener expresiones para las pendientes y deflexiones. Las cuatro constantes de integración pueden determinarse a partir de las siguientes condiciones: (1) en $x = 0$, $v = 0$; (2) en $x = L/2$, $v' = 0$; (3) en $x = L/4$, la pendiente de la viga obtenida a partir de la Ec. (a) es igual a la pendiente obtenida a partir de la Ec. (b); y (4) en $x = L/4$, la deflexión obtenida a partir de la Ec. (a) es igual a la deflexión obtenida de la Ec. (b). Habiendo determinado las constantes de integración a partir de estas condiciones, entonces conoceremos la curva de deflexión de la viga para cada una de las dos regiones bajo consideración.

El uso de la ecuación diferencial para determinar deflexiones es práctico sólo cuando la cantidad de ecuaciones por resolver se limita a una o dos y sólo si las integraciones pueden realizarse fácilmente, como en el ejemplo precedente. En el caso de una viga ahusada (Fig. 7-21), puede ser difícil (o hasta imposible) resolver matemáticamente la ecuación diferencial. La causa es que la expresión para el momento de inercia I como una función de x es a menudo complicada y produce una ecuación diferencial con coeficientes variables en lugar de coeficientes constantes.

El método de integración para vigas no prismáticas debe realizarse en muchos casos con la ecuación de momentos (Ec. 7-10a) preferentemente al uso de las ecuaciones de cortante y de carga (Ecs. 7-10b y c). Esto se debe a que la ecuación de momentos puede formularse en la siguiente forma simple:

$$v'' = -\frac{M}{EI_x} \quad (7-55)$$

donde I_x es el momento de inercia de la sección transversal a una distancia x desde el origen de coordenadas. Si el miembro derecho de la Ec. (7-55) puede integrarse, entonces es factible el método de integración. Sin embargo, las ecuaciones de cortante y de carga se obtienen diferenciando la Ec. (7-55), lo que nos lleva a ecuaciones diferenciales mucho más complicadas cuando I_x es también una variable y debe diferenciarse.

El segundo método para determinar deflexiones es el **método del área de momentos**. El uso de este método se ejemplifica en la Fig. 7-20 para la viga analizada previamente. El diagrama de momento flexionante para la viga se presenta en la Fig. 7-20b y el diagrama M/EI en la Fig. 7-20c. Las áreas y primeros momentos de las diferentes porciones del diagrama M/EI se usan para determinar los ángulos de rotación y las deflexiones. Por ejemplo, determinense el ángulo de rotación en el apoyo izquierdo y la deflexión en el punto medio. A partir de la simetría de la viga, sabemos que la tangente a la curva de deflexión en el centro C es horizontal. Del primer teorema del área de momentos se infiere que el ángulo de rotación θ_0 en el apoyo izquierdo es

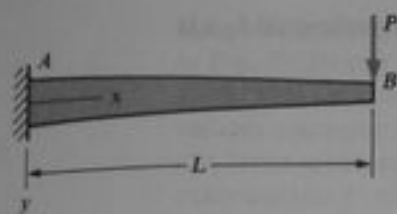


Fig. 7-21 Viga ahusada en voladizo

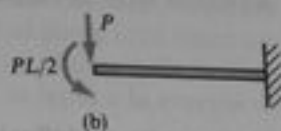
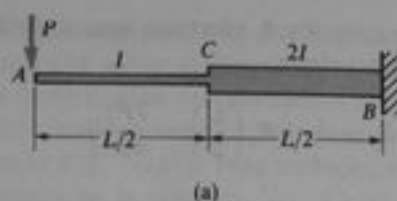


Fig. 7-22 Viga en voladizo con dos momentos de inercia diferentes

igual al área del diagrama M/EI entre los puntos A y C . Por lo tanto, este ángulo se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}\theta_c &= (\text{área del triángulo}) + (\text{área del trapecio}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL}{8EI} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{16EI} + \frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{5PL^2}{128EI}\end{aligned}\quad (c)$$

La desviación del punto A desde una tangente a la curva de deflexión en el punto C , la cual es igual a la deflexión δ_c en el punto medio de la viga, se obtiene tomando el primer momento del área del diagrama M/EI entre A y C respecto al punto A , de acuerdo con el segundo teorema del área de momentos. Luego,

$$\begin{aligned}\delta_c &= (\text{primer momento del triángulo}) + (\text{primer momento del trapecio}) \\ &= \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{PL^2}{64EI} \right) + \left(\frac{L}{4} + \frac{5L}{36} \right) \left(\frac{3PL^2}{128EI} \right) = \frac{3PL^3}{256EI}\end{aligned}\quad (d)$$

Este ejemplo muestra que el empleo del teorema del área de momentos para las vigas no prismáticas es similar al que se utiliza para vigas prismáticas.

Otro método para determinar deflexiones es el **método de superposición**. Para ejemplificar este método en una viga no prismática, considérese la viga en voladizo de la Fig. 7-22 y supóngase que deseamos calcular la deflexión δ_c en el extremo libre. Esta deflexión puede obtenerse en dos pasos. Primero, imaginemos que la viga está sostenida rígidamente en el punto C , de modo que no gira ni se deflexiona en tal punto. Entonces podemos calcular la deflexión de A debida a la flexión de AC como una viga en voladizo. Ya que esta viga tiene una longitud $L/2$ y un momento de inercia I , su deflexión δ_1 es

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

Adicionalmente, la parte CB de la viga también se comporta como viga en voladizo (Fig. 7-22b) y contribuye a la deflexión del punto A . La deflexión δ_c y el ángulo de rotación θ_c del extremo libre de este voladizo son

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2EI)} = \frac{5PL^3}{96EI} \\ \theta_c &= \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2EI} = \frac{3PL^2}{16EI}\end{aligned}$$

La deflexión δ_c y el ángulo de rotación θ_c efectúan una contribución adicional δ_2 a la deflexión bajo la carga P , como sigue:

$$\delta_2 = \delta_c + \theta_c \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{7PL^3}{48EI}$$

Por lo tanto, la deflexión total del extremo libre A es

$$\delta_a = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3PL^3}{16EI} \quad (e)$$

Luego, las técnicas del método de superposición pueden adaptarse fácilmente a ciertos tipos de vigas no prismáticas, como lo muestra este ejemplo. La elección del método a emplearse para determinar deflexiones de vigas no prismáticas y los detalles del procedimiento dependen del problema a resolverse y las preferencias del analista.

7.8 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN FLEXIÓN

El concepto de energía de deformación se explicó anteriormente en nuestras discusiones de miembros cargados axialmente y barras en torsión (véanse secciones 2.8 y 3.8, respectivamente). Ahora aplicaremos tales conceptos a la flexión de vigas. Sólo se consideran vigas que se comportan en forma linealmente elástica; en consecuencia, el material debe cumplir con la ley de Hooke y las deflexiones y rotaciones deben ser pequeñas.

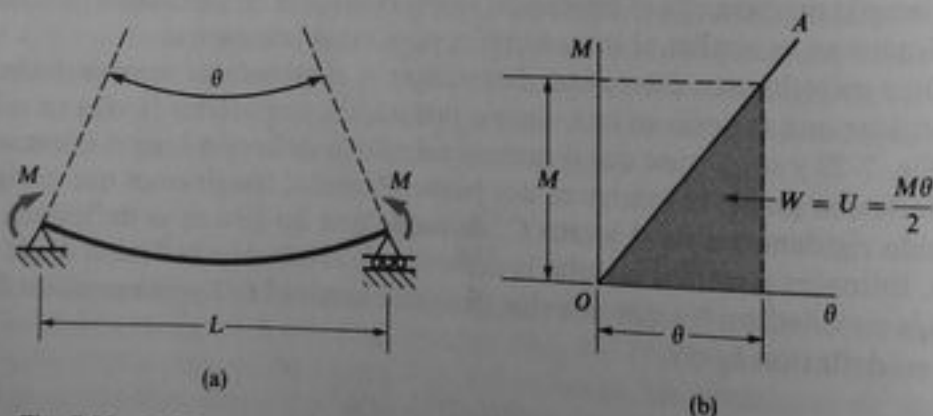


Fig. 7-23 (a) Viga en flexión pura mediante momentos M , y (b) diagrama que muestra la relación lineal entre el momento flexionante M y el ángulo de rotación θ

Empecemos con una viga en flexión pura sometida a momentos M (Fig. 7-23a). La curva de deflexión es un arco circular de curvatura constante $\kappa = -M/EI$ (véase Ec. 7-5). El ángulo θ subtendido por este arco es igual a L/ρ , donde L es la longitud de la viga y ρ es el radio de curvatura; luego, considerando únicamente los valores absolutos, obtenemos

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (7-56)$$

Esta relación lineal entre los momentos M y el ángulo θ se muestra gráficamente en la Fig. 7-23b por la línea OA sobre el diagrama momento-rotación. Conforme los momentos flexionantes incrementan gradualmente su magnitud desde cero hasta sus valores máximos M , ellos realizan trabajo W representado por el área bajo la línea OA (área sombreada en la Fig. 7-23b). Este trabajo, el cual es igual a la energía de deformación U almacenada en la viga, es

$$U = W = \frac{M\theta}{2} \quad (7-57)$$

Esta ecuación es análoga a las Ecs. (2-38) y (3-39) para las energías de deformación en carga axial y torsión, respectivamente.

Combinando las Ecs. (7-56) y (7-57), podemos expresar la energía de deformación almacenada en una viga bajo flexión en cualquiera de las siguientes formas:

$$U = \frac{M^2 L}{2EI} \quad U = \frac{EI\theta^2}{2L} \quad (7-58a, b)$$

La primera de estas ecuaciones expresa la energía de deformación en términos de la carga M y la segunda la expresa en términos del ángulo θ . Las ecuaciones tienen forma similar a la de las ecuaciones para la energía de deformación en carga axial y torsión (véanse Ecs. 2-39 y 3-38, respectivamente).

Si el momento flexionante M varía a lo largo de la longitud de la viga (flexión no uniforme), entonces debemos obtener la energía de deformación mediante la aplicación de las Ecs. (7-58) a un elemento de la viga e integrando en toda su longitud. Considerando un elemento de longitud dx sometido a un momento M (Fig. 7-24), observamos que el ángulo $d\theta$ entre los lados del elemento (véase Fig. 7-6) es

$$d\theta = \frac{d^2v}{dx^2} dx = \frac{M dx}{EI}$$

en donde sólo se han considerado los valores absolutos. Luego, la energía de deformación dU almacenada en el elemento (de la Ec. 7-58) es

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$dU = \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx$$

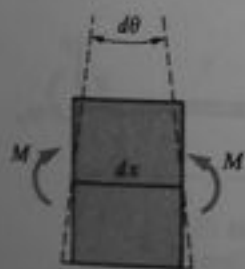


Fig. 7-24 Elemento de una viga

Integrando las ecuaciones anteriores, podemos expresar la energía de deformación total almacenada en la viga mediante cualquiera de las dos siguientes formas:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad U = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (7-59a, b)$$

donde las integraciones se efectúan sobre la longitud de la viga. La primera ecuación se utiliza cuando se conoce el momento flexionante, y la segunda cuando se conoce la ecuación de la curva de deflexión.

Las Ecs. (7-59) proporcionan la energía de deformación en una viga cuando sólo se toman en cuenta los efectos del momento flexionante. Adicionalmente a la energía de deformación por flexión, los elementos de la viga también almacenarán energía de deformación por cortante; esta energía de deformación se explicó en la Sección 7.12. Sin embargo, para las vigas de proporciones usuales con longitudes mucho mayores que las dimensiones transversales (es decir, $L/d > 6$), la energía de deformación por cortante es relativamente pequeña en comparación con la energía de deformación por flexión, y así puede despreciarse.

Los principios mecánicos basados en la energía de deformación tienen una función importante en análisis estructural y en el diseño de estructuras para resistir cargas dinámicas. Algunos de estos principios se estudian en el Capítulo 12. Sin embargo, en esta sección nos ocuparemos en forma primaria en evaluar la energía de deformación en vigas, y mediante el empleo de la energía de deformación, en resolver problemas de deflexión simple y de cargas de impacto. Por ejemplo, si una viga está sometida a una carga concentrada única P o a un momento M_0 , podemos determinar la deflexión δ o el ángulo de rotación θ en el punto de acción de la carga, en la dirección de la carga, igualando el trabajo realizado por la carga ($P\delta/2$ o $M\theta/2$) a la energía de deformación de la viga. Esta misma técnica se explicó en la Sección 2.8. No obstante, el método es de utilidad limitada porque sólo puede ocurrir una carga sobre la estructura y la única deflexión por determinar es la correspondiente a tal carga.

Ejemplo 1

Determinar la energía de deformación U almacenada en una viga en voladizo de longitud L que soporta una carga concentrada P en su extremo libre (Fig. 7-25a). Determinar también la deflexión vertical δ , en el extremo libre.

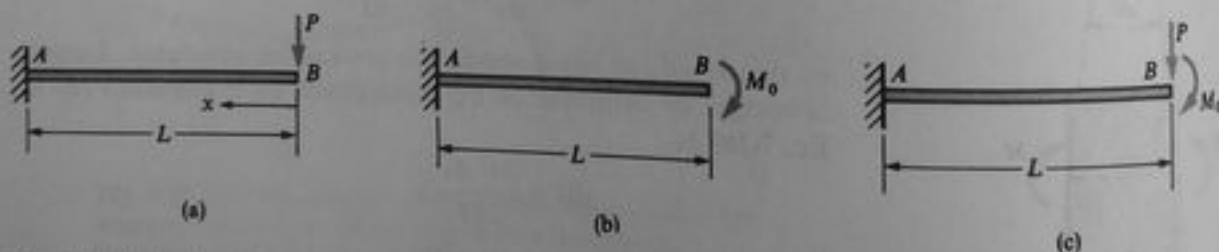


Fig. 7-25 Ejemplos 1, 2 y 3. Energía de deformación de una viga

El momento flexionante en una sección transversal situada a una distancia x del extremo libre es $M = -Px$. Sustituyendo esta expresión para M en la Ec. (7-59a) se obtiene

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI} \quad (a)$$

como la energía de deformación de la viga. Obsérvese que la energía de deformación siempre es una cantidad positiva y que la carga aparece elevada al cuadrado.

Para obtener la deflexión bajo la carga P , igualamos el trabajo realizado por la carga a la energía de deformación:

$$\frac{P\delta_b}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

de donde

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \quad (b)$$

Esta expresión concuerda con el resultado obtenido en el Ejemplo 1, Sección 7.5 (véase Ec. 7-39). Nuevamente, es importante observar que la única deflexión que podemos determinar en este ejemplo es la deflexión correspondiente a P (esto es, la deflexión hacia abajo en el extremo libre).

Ejemplo 2

La viga en voladizo mostrada en la Fig. 7-25b está sometida a un momento M_0 que actúa en el extremo libre. Determinar la energía de deformación U de la viga y el ángulo de rotación θ_b en el extremo libre.

En este caso el momento flexionante es constante e igual a $-M_0$; luego, de la Ec. (7-59a) obtenemos

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-M_0)^2 dx}{2EI} = \frac{M_0^2 L}{2EI} \quad (c)$$

El trabajo efectuado por el momento M_0 durante el proceso de carga de la viga es $M_0\theta_b/2$; luego,

$$\frac{M_0\theta_b}{2} = \frac{M_0^2 L}{2EI}$$

y

$$\theta_b = \frac{M_0 L}{EI} \quad (d)$$

El ángulo de rotación tiene el mismo sentido que el momento, esto es, en el sentido de las manecillas del reloj para esta viga.

Ejemplo 3

En este ejemplo la viga en voladizo se somete simultáneamente a una carga concentrada P y a un momento M_0 (Fig. 7-25c). Determinar la energía de deformación U de la viga.

El momento flexionante en la viga está dado por la expresión

$$M = -Px - M_0$$

donde x se mide desde el extremo libre. Por lo tanto, la energía de deformación es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px - M_0)^2 dx \quad (e)$$

$$= \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{PM_0 L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI}$$

El primer término de la última expresión proporciona la energía de deformación debida a la acción única de la fuerza P ($M_0 = 0$) y el último término representa la energía de deformación debida únicamente a M_0 ($P = 0$). Sin embargo, cuando actúan ambas cargas simultáneamente, aparece también el término del centro en la expresión para la energía de deformación. Este resultado muestra que *la energía de deformación en una estructura debida a dos o más cargas no puede determinarse mediante la suma de las energías de deformación causada por las cargas actuando separadamente*. La explicación es que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas, y no una función lineal; en consecuencia, no es aplicable el principio de superposición.

También observamos que no podemos calcular una deflexión para la viga de la Fig. 7-25c igualando el trabajo y la energía de deformación porque hay varias incógnitas en la ecuación para el trabajo:

$$W = \frac{P\delta_b}{2} + \frac{M_0\theta_b}{2}$$

Cuando esta expresión se iguala a U , tenemos una ecuación con dos incógnitas. Por lo que, aunque la ecuación es completamente correcta, no podemos derivar ninguna información útil de ella.

Ejemplo 4

La ecuación de la curva de deflexión para una viga simple con una carga uniforme de intensidad q (Fig. 7-26) es

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

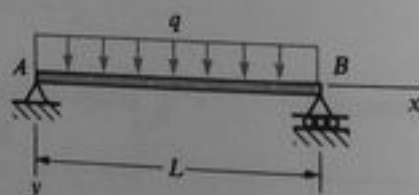


Fig. 7-26 Ejemplo 4. Energía de deformación de una viga

según el Caso 1 de la Tabla G-2. Mediante esta expresión, determinar la energía de deformación U almacenada en la viga.

Para obtener la energía de deformación, emplearemos la Ec. (7-59b), la cual contiene d^2v/dx^2 . Tomando las derivadas de la expresión para v , obtenemos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{qx}{2EI} (L - x)$$

Sustituyendo ahora en la Ec. (7-59b) e integrando, obtenemos

$$U = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[-\frac{qx}{2EI} (L-x) \right]^2 dx = \frac{q^2 L^5}{240EI} \quad (f)$$

como la cantidad de energía de deformación almacenada en la viga. Obsérvese nuevamente que la carga aparece elevada a la segunda potencia.

Deflexión producida por impacto. La deflexión dinámica de una viga sometida a una carga de impacto puede determinarse bajo ciertas condiciones simplificadas igualando el trabajo realizado por la carga a la energía de deformación almacenada en la viga. Este procedimiento se describió en la Sección 2.9 para cargas de impacto sobre una barra cargada axialmente. Las suposiciones descritas en dicha explicación también son aplicables a vigas; a saber, el peso que cae golpea a la viga y se desplaza con ella, no ocurren pérdidas de energía, la viga es linealmente elástica, la forma de la viga deformada es la misma tanto bajo una carga dinámica como bajo una carga estática, y la energía potencial de la viga debida a su cambio de posición es despreciable. En general estas suposiciones son adecuadas si la masa del objeto que cae es muy grande comparada con la masa de la viga. De lo contrario, este análisis aproximado no es válido, requiriéndose un análisis más avanzado (Refs. 2-12 y 2-13).

Como un ejemplo de esta técnica, considérese que una viga simple AB es golpeada en su centro por un cuerpo que cae y cuyo peso es W (Fig. 7-27). De acuerdo con las idealizaciones anteriores, podemos suponer que todo el trabajo realizado por el cuerpo durante su caída se transforma en energía de deformación elástica de la viga. Dado que la distancia a través de la cual cae el cuerpo es $h + \delta$, donde h es la altura inicial del cuerpo por encima de la viga y δ es la deflexión dinámica máxima de la viga, el trabajo realizado es

$$W(h + \delta) \quad (g)$$

Si P denota la fuerza ejercida sobre la viga cuando su deflexión es máxima, entonces la relación entre P y δ es

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad \text{o} \quad P = \frac{48EI\delta}{L^3}$$

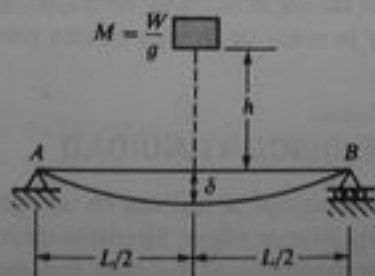


Fig. 7-27 Deflexión de una viga producida por una masa que cae

porque hemos supuesto que el perfil de deformación bajo una carga dinámica es el mismo que bajo una carga estática. Por lo tanto, la energía de deformación de la viga, igual al trabajo de la fuerza P , es

$$U = \frac{P\delta}{2} = \frac{24EI\delta^2}{L^3}$$

Igualando el trabajo realizado por la masa que cae (Ec. g) a la energía de deformación, se obtiene

$$W(h + \delta) = \frac{24EI\delta^2}{L^3}$$

Esta ecuación es cuadrática en δ y puede resolverse para su raíz positiva:

$$\delta = \frac{WL^3}{48EI} + \left[\left(\frac{WL^3}{48EI} \right)^2 + 2h \left(\frac{WL^3}{48EI} \right) \right]^{1/2} \quad (7-60)$$

Denotando la deflexión estática de la viga debida al peso W como δ_{st} :

$$\delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI} \quad (7-61)$$

Entonces, la Ec. (7-60) para la deflexión dinámica máxima puede formularse en una forma más simple, como sigue:

$$\delta = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{1/2} \quad (7-62)$$

De esta ecuación observamos que la deflexión dinámica siempre es mayor que la deflexión estática. Si la altura $h = 0$, lo que significa que la carga se aplica súbitamente sin ninguna caída libre, la deflexión dinámica es el doble de la deflexión estática. Si h es muy grande comparada con la deflexión, entonces predomina el término que contiene a h en la Ec. (7-62) y la ecuación puede simplificarse a

$$\delta = \sqrt{2h\delta_{st}} \quad (7-63)$$

Estas y otras observaciones son análogas a las encontradas previamente para impacto sobre una barra en tensión (Sección 2.9).

La deflexión δ calculada a partir de la Ec. (7-62) generalmente representa un límite superior, porque asumimos que no había pérdidas de energía durante el impacto. La deformación local de las superficies de contacto, la tendencia a rebotar hacia arriba de la masa que cae y la masa de la viga misma tienden a reducir la deflexión.

*7.9 FUNCIONES DE DISCONTINUIDAD

Las funciones de discontinuidad se utilizan en una gran variedad de aplicaciones de ingeniería, incluyendo análisis de vigas, circuitos eléctricos y transferencia de calor. Estas funciones son probablemente las más fáciles de emplearse y entenderse cuando se aplican a vigas, por lo que el estudio de la mecánica de materiales ofrece una excelente oportunidad para familiarizarse con ellas. Las funciones matemáticas

se describen en esta sección, y también veremos cómo se utilizan las funciones para representar cargas sobre vigas. Después, en la siguiente sección, las usaremos para determinar pendientes y deflexiones de vigas.

La única característica de las funciones de discontinuidad es que permiten la formulación de una función discontinua mediante una expresión simple, mientras que la aproximación convencional implica describir una función discontinua mediante una serie de expresiones, una para cada región en la que la función es diferente. Por ejemplo, si la carga sobre una viga consiste en una combinación de cargas concentradas y cargas distribuidas, es posible formular una ecuación simple con funciones de discontinuidad aplicable en toda la longitud, mientras que comúnmente formulamos ecuaciones separadas para cada segmento de la viga comprendido entre cambios de carga. De modo similar podemos expresar fuerzas cortantes, momentos flexionantes, pendientes y deflexiones de una viga, cada una con una ecuación, aunque ocurran varios cambios en las cargas a lo largo de la viga.

Estos resultados son factibles ya que las funciones mismas son discontinuas; esto es, tienen diferentes valores en diversas regiones de la variable independiente. En efecto, estas funciones pueden atravesar discontinuidades en una forma que no es posible con funciones continuas comunes. Sin embargo, ya que difieren significativamente de las funciones conocidas, las funciones de discontinuidad deben emplearse con cuidado y precaución.

En esta sección se analizarán dos clases de funciones, llamadas **funciones de Macaulay** y **funciones de singularidad**. Aunque estas funciones tienen diferentes definiciones y propiedades, juntas forman una familia de **funciones de discontinuidad**.*

Funciones de Macaulay. Las funciones de Macaulay se utilizan para representar cantidades que "empiezan" en algún punto particular sobre el eje x (tal como el punto $x = a$) y que tienen valor cero a la izquierda de tal punto. Por ejemplo, una de las funciones de Macaulay, denotada por F_1 , se define como sigue:

$$F_1(x) = \langle x - a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \leq a \\ x - a & \text{cuando } x \geq a \end{cases} \quad (7-64)$$

En esta ecuación, x es la variable independiente y a es el valor de x donde "empieza" la función. Los *paréntesis angulares* son el símbolo matemático para una función de discontinuidad. En el caso de la función F_1 , los paréntesis angulares nos dicen que la función tiene el valor cero cuando x es menor o igual a a (esto es, cuando la expresión entre paréntesis es negativa o cero), y un valor igual a $x - a$ cuando x es mayor o igual que a . Una gráfica de esta función, llamada **función rampa unitaria**, se representa en la Fig. 7-28.

En términos generales, las funciones de Macaulay se definen por las siguientes expresiones:

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \leq a \\ (x - a)^n & \text{cuando } x \geq a \end{cases} \quad (7-65)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

* Algunas veces ambos tipos de funciones de discontinuidad son llamados *funciones de singularidad*, pero tal denominación confunde las diferencias entre ambas funciones, las cuales obedecen leyes matemáticas diferentes. Más aún, las funciones de Macaulay no tienen singularidades.

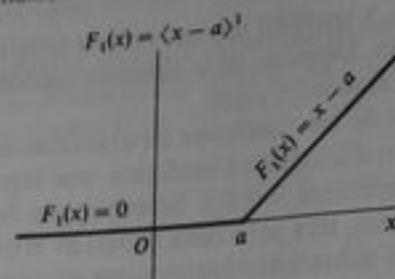


Fig. 7-28 Gráfica de la función de Macaulay F_1 (la función rampa unitaria)

A partir de esta definición apreciamos que las funciones de Macaulay tienen el valor cero a la izquierda del punto $x = a$ y el valor $(x - a)^n$ a la derecha de tal punto. Excepto para el caso $n = 0$, que se trata posteriormente, la función es igual a cero en $x = a$. Otra manera de expresar esta definición es la siguiente: si la cantidad $x - a$ incluida en los paréntesis angulares es negativa o cero, la función de Macaulay tiene valor cero; si la función $x - a$ es positiva o cero, la función de Macaulay tiene el valor obtenido al sustituir los paréntesis angulares por paréntesis curvos.

La definición anterior de las funciones de Macaulay es válida para valores de n iguales a enteros positivos y cero. Cuando $n = 0$, obsérvese que la función toma alguno de los siguientes valores especiales:

$$F_0(x) = \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \leq a \\ 1 & \text{cuando } x \geq a \end{cases} \quad (7-66)$$

Esta función tiene un "salto" vertical en el punto de discontinuidad $x = a$; luego, en $x = a$ la función tiene dos valores, cero y uno. La función F_0 , llamada **función escalón unitaria**, se representa en la Tabla 7-1 junto con otras funciones de Macaulay.*

Las funciones de Macaulay de grado superior pueden expresarse en términos de la función escalón unitaria, como sigue:

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = (x - a)^n \langle x - a \rangle^0 \quad (7-67)$$

Esta ecuación se comprueba con facilidad comparando las Ecs. (7-65) y (7-66).

Algunas de las operaciones algebraicas básicas, tales como la suma, resta y multiplicación por una constante, pueden realizarse sobre las funciones de Macaulay. En la Fig. 7-29 se presentan algunos ejemplos de estas operaciones elementales. Lo importante a observar de estos ejemplos es que una función y con diferentes expresiones algebraicas para diversas regiones a lo largo del eje x , puede escribirse como una ecuación simple mediante el empleo de las funciones de Macaulay. El lector debe comprobar cada una de las gráficas de la Fig. 7-29 a fin de familiarizarse con las funciones.

Las funciones de Macaulay pueden integrarse y diferenciarse de acuerdo con las fórmulas que aparecen en la última columna de la Tabla 7-1. Estas fórmulas pueden verificarse mediante diferenciación e integración comunes de las funciones en las dos regiones $x \leq a$ y $x \geq a$.

* La función escalón unitaria se conoce también como *función escalón de Heaviside*, denotada por $H(x - a)$, en honor a Oliver Heaviside (1850-1925), físico e ingeniero eléctrico inglés.

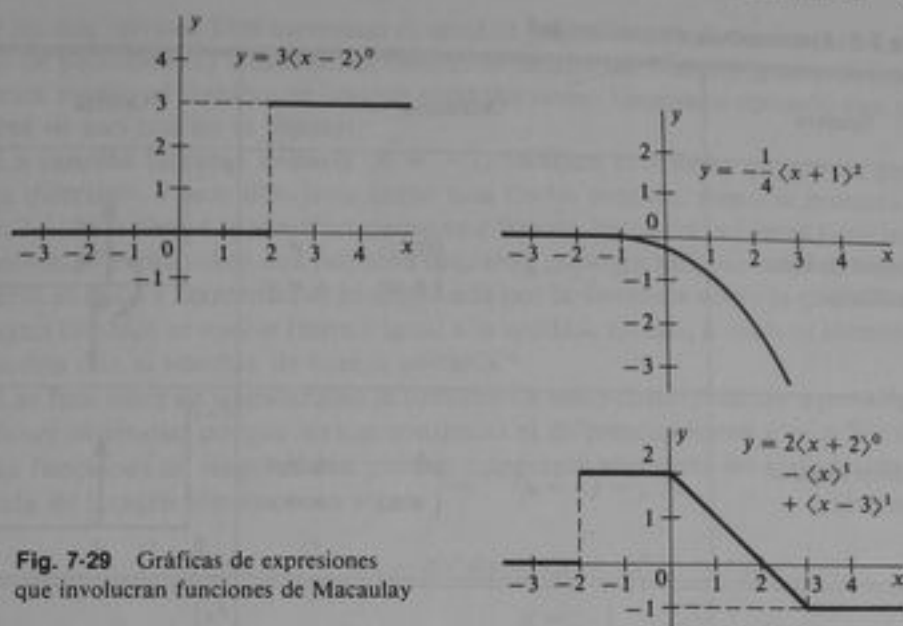


Fig. 7-29 Gráficas de expresiones que involucran funciones de Macaulay

Las **unidades** de las funciones de Macaulay son las mismas que las de x^n ; esto es, F_0 es adimensional, F_1 tiene unidades de x , F_2 tiene unidades de x^2 , y así sucesivamente.

El empleo de paréntesis especiales para funciones de discontinuidad fue introducido por el matemático inglés W. H. Macaulay en 1919 (Ref. 7-11), por lo que los paréntesis angulares a menudo se llaman *paréntesis de Macaulay*. Sin embargo, Macaulay utilizó llaves $\{\}$ para identificar las funciones; los paréntesis angulares $\langle \rangle$ de uso común actual fueron aplicados tiempo después. El concepto general de combinar dos o más expresiones en una sola expresión mediante el uso de un símbolo especial antecede al trabajo de Macaulay (véanse Refs. 7-12 a 7-15).

Funciones de singularidad. El segundo tipo de funciones de discontinuidad son las funciones de singularidad, definidas por las siguientes expresiones:

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x \neq a \\ \pm \infty & \text{cuando } x = a \end{cases} \quad (7-68)$$

$n = -1, -2, -3, \dots$

Obsérvese que las funciones de singularidad están definidas para valores enteros negativos de n , mientras que las funciones de Macaulay están definidas para enteros positivos y para cero. Los paréntesis angulares tienen diferentes significados en ambos casos (comparar Ecs. 7-65 y 7-68).

Las funciones de singularidad tienen un valor igual a cero en cualquier punto excepto en el punto característico $x = a$. Las singularidades surgen porque, cuando n es un entero negativo, la función $(x - a)^n$ puede formularse como una fracción mediante la expresión $x - a$ en el denominador; luego, cuando $x = a$ la función se vuelve infinita.

La indole de las singularidades depende del valor de n y los dos casos más importantes están representados en la Tabla 7-1. La **función doblote unitaria** ($n = -2$)

Tabla 7-1 Funciones de discontinuidad

		Nombre	Definición	Gráfica	Derivada e integral
Funciones de singularidad	Función doblete unitaria		$F_{-2} = \langle x - a \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \pm \infty & x = a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_{-2} dx = F_{-1}$
	Función impulso unitaria		$F_{-1} = \langle x - a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ +\infty & x = a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_{-1} dx = F_0$
Funciones de Macaulay	Función escalón unitaria		$F_0 = \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_0 dx = F_1$
	Función rampa unitaria		$F_1 = \langle x - a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ x - a & x \geq a \end{cases}$		$\frac{d}{dx} F_1 = F_0$ $\int_{-\infty}^x F_1 dx = \frac{F_2}{2}$
	Función unitaria de segundo grado		$F_2 = \langle x - a \rangle^2 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^2 & x \geq a \end{cases}$		$\frac{d}{dx} F_2 = 2F_1$ $\int_{-\infty}^x F_2 dx = \frac{F_3}{3}$
	Función general de Macaulay		$F_n = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^n & x \geq a \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$		$\frac{d}{dx} F_n = nF_{n-1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ $\int_{-\infty}^x F_n dx = \frac{F_{n+1}}{n+1}$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

tiene la singularidad de que puede representarse mediante dos flechas de extensión infinita, una hacia arriba y otra hacia abajo, estando infinitesimalmente cercanas la una de la otra. Por conveniencia, estas flechas pueden visualizarse como fuerzas, y entonces el doblete puede representarse mediante una flecha curva que es el momen-

to de las dos fuerzas. Este momento es igual al producto de una fuerza infinita y un brazo de palanca muy pequeño; el momento resulta ser finito e igual a la unidad. Por esta razón, el doblete se conoce también como **momento unitario** (un tercer nombre de uso común es **dipolo**).

La **función impulso unitaria** ($n = -1$) también es infinita en $x = a$, pero en forma diferente. Puede dibujarse como una flecha sencilla, como se muestra en la Tabla 7-1. Si la flecha se visualiza como una fuerza, entonces la fuerza tiene intensidad infinita y actúa sobre una pequeña distancia infinitesimal a lo largo del eje x . Esta fuerza es igual a la intensidad multiplicada por la distancia sobre la que actúa; este producto también se vuelve finito e igual a la unidad. Luego, a veces se identifica esta función con el nombre de **fuerza unitaria**.*

Las funciones de singularidad se nombran a veces como *funciones patológicas* o *funciones impropias* porque no son continuas ni diferenciables en $x = a$. Sin embargo, las funciones de singularidad pueden integrarse mediante las singularidades; la fórmula de integración es como sigue:

$$\int_{-\infty}^x F_n dx = \int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle^n dx = \langle x - a \rangle^{n+1} = F_{n+1} \quad (7-69)$$

$$n = -1, -2, -3, \dots$$

Obsérvese que esta fórmula no es la misma que la fórmula de integración para las funciones de Macaulay, la cual se presenta en la última línea de la Tabla 7-1. La Ec. (7-69) muestra que la integral de la función doblete unitaria es la función impulso unitaria, y la integral de la función impulso unitaria es la función escalón unitaria (véase la última columna de la Tabla 7-1).

Las **unidades** de las funciones de singularidad, al igual que las unidades de las funciones de Macaulay, son las mismas que las de x^n . Luego, la función doblete tiene unidades de $1/x^2$ y la función impulso tiene unidades de $1/x$.

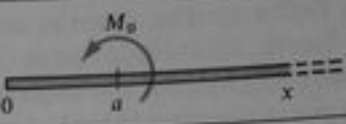
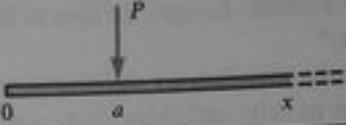
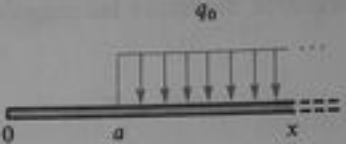
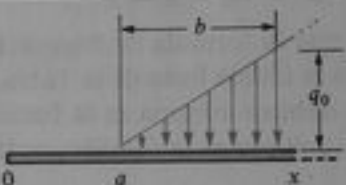
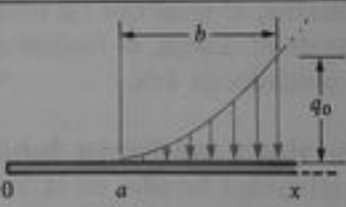
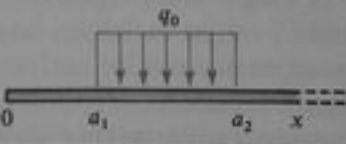
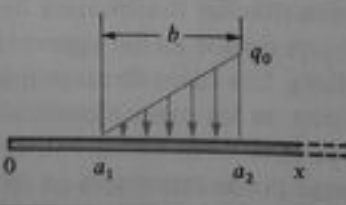
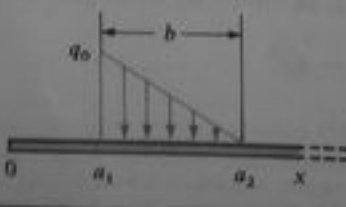
Representación de cargas sobre vigas mediante funciones de discontinuidad. Las funciones de discontinuidad listadas en la Tabla 7-1 son idealmente adecuadas para la representación de cargas sobre vigas, tales como momentos concentrados, fuerzas, cargas uniformes y cargas variables. Los perfiles de los diferentes diagramas de carga coinciden exactamente con los perfiles de las funciones correspondientes F_{-2} , F_{-1} , F_0 , F_1 , etcétera. Únicamente se requiere multiplicar las funciones dadas en la Tabla (que son las funciones unitarias) por las intensidades de carga apropiadas, a fin de obtener la representación matemática de las cargas. Muchos casos estándar de cargas, explicados con detalle en los siguientes párrafos, se listan en la Tabla 7-2 para referencia inmediata. Los casos de carga más complicados pueden resolverse mediante la superposición de los casos elementales.

Para explicar cómo se obtienen las expresiones de la Tabla 7-2, consideremos primero la carga uniforme del Caso 3. Esta carga puede expresarse en términos de la función escalón unitaria F_0 (véase Tabla 7-1), la cual está dada por la fórmula

$$F_0(x) = \langle x - a \rangle^0$$

* La terminología *función impulso unitaria* proviene del empleo de esta función en dinámica, en donde el eje x es el eje del tiempo. En física y matemáticas esta función se denota por $\delta(x - a)$ y es denominada *función delta de Dirac*, designada así en honor al físico teórico Paul A. M. Dirac (nacido en 1902), quien la desarrolló.

Tabla 7-2 Intensidad de carga representada por funciones de discontinuidad

Caso	Carga sobre la viga (signo positivo)	Intensidad $q(x)$ de la carga distribuida equivalente (positiva hacia abajo)
1		$q(x) = M_0 \langle x - a \rangle^{-2}$
2		$q(x) = P \langle x - a \rangle^{-1}$
3		$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0$
4		$q(x) = \frac{q_0}{b} \langle x - a \rangle^1$
5		$q(x) = \frac{q_0}{b^2} \langle x - a \rangle^2$
6		$q(x) = q_0 \langle x - a_1 \rangle^0 - q_0 \langle x - a_2 \rangle^0$
7		$q(x) = \frac{q_0}{b} \langle x - a_1 \rangle^1 - \frac{q_0}{b} \langle x - a_2 \rangle^1 - q_0 \langle x - a_2 \rangle^0$
8		$q(x) = q_0 \langle x - a_1 \rangle^0 - \frac{q_0}{b} \langle x - a_1 \rangle^1 + \frac{q_0}{b} \langle x - a_2 \rangle^1$

Esta función tiene el valor 0 para $x \leq a$ y el valor $+1$ para $x \geq a$. Si la función se multiplica por la constante q_0 , que representa la intensidad de la carga uniforme, resulta una expresión para la carga uniformemente distribuida sobre una viga:

$$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0 \quad (a)$$

La carga $q(x)$ definida por esta expresión tiene el valor 0 para $x \leq a$ y el valor q_0 para $x \geq a$. Luego, en $x = a$, la función es igual a cero si nos aproximamos por la izquierda y es igual a q_0 si nos aproximamos por la derecha. La Ec. (a) está indicada para el Caso 3 en la última columna de la Tabla 7-2. La dirección de la carga representada por la Ec. (a) puede ser ascendente o descendente, dependiendo del signo convencional que adoptemos para cargas distribuidas. Ya que previamente se supuso que una carga uniforme hacia abajo es positiva, la expresión para $q(x)$ representa la carga ilustrada en la columna central de la tabla. Con nuestros signos convencionales la cantidad q_0 es positiva para una carga hacia abajo y negativa para una carga hacia arriba.* Obsérvese que la carga uniforme q_0 continúa indefinidamente hacia la derecha a lo largo del eje x .

Los casos 4 y 5 de la Tabla 7-2 pueden explicarse en forma similar a la del Caso 3, mediante las funciones rampa y de segundo grado. Ambas funciones de carga continúan indefinidamente a la derecha. Para definir las funciones, debemos especificar un punto particular sobre cada gráfica. Una manera conveniente de hacerlo es ubicar la ordenada q_0 en algún punto seleccionado arbitrariamente y localizado a una distancia b del punto $x = a$, como se muestra en la tabla.

La carga en el Caso 6 es un segmento de carga uniforme que empieza en $x = a_1$ y termina en $x = a_2$. Esta carga puede expresarse como la superposición de dos cargas. La primera carga es una carga uniforme de intensidad q_0 que empieza en $x = a_1$ y continúa indefinidamente hacia la derecha (véase Caso 3); la segunda carga tiene intensidad $-q_0$, empieza en $x = a_2$, y también continúa indefinidamente hacia la derecha. Luego, la segunda carga cancela a la primera en la región a la derecha del punto $x = a_2$.

Las cargas de los casos 7 y 8 también constan de segmentos de cargas distribuidas y se obtienen mediante la combinación de varios patrones elementales de carga. El lector puede comprobar fácilmente las expresiones dadas en la última columna de la tabla para ambos casos. Los patrones de carga más complicados que involucran cargas distribuidas se obtienen mediante técnicas similares de superposición utilizando las funciones de Macaulay.

Las cargas en forma de momentos o fuerzas concentradas (casos 1 y 2) se resuelven mediante las funciones de singularidad, representándose un momento unitario mediante la función doblete unitaria y representándose una fuerza unitaria mediante la función impulso unitaria. Cuando la función doblete unitaria se multiplica por M_0 , representa un momento como una carga distribuida equivalente de intensidad $q(x)$. Las unidades de M_0 son fuerza por longitud, y las unidades de la función doblete unitaria son longitud elevada a la potencia -2 . Luego, su producto tiene unidades de fuerza dividida entre longitud, que son las unidades correctas para la intensidad $q(x)$ de la carga distribuida. El caso es similar para una carga concentrada; el producto de la fuerza P y la función impulso unitaria tiene unidades de in-

* Si hubiéramos supuesto que la carga es positiva hacia arriba, la ecuación para $q(x)$ sería la misma, pero q_0 sería positiva para una carga hacia arriba y negativa para una carga hacia abajo, ya que $\langle x - a \rangle^0$ es igual a 1 para $x \geq a$.

tensidad de carga. Las ecuaciones para $q(x)$ dadas en los casos 1 y 2 son expresiones matemáticas que definen las intensidades de carga equivalentes para un momento y para una fuerza. Sus signos tienen significado físico sólo cuando adoptamos signos contrarios para las cargas mismas. Asumiremos que las cargas en forma de momentos y fuerzas son positivas como se muestra en la tabla (esto es, positivas en el sentido de las manecillas del reloj y hacia abajo, respectivamente). Como antes, las cargas equivalentes $q(x)$ son positivas hacia abajo.

Ejemplo 1

La viga simple AB mostrada en la Fig. 7-30a soporta una carga concentrada y un momento concentrado M_0 . (a) Formular la expresión para la intensidad $q(x)$ de las cargas distribuidas equivalentes que actúan sobre la viga en la región entre los apoyos ($0 < x < L$). (b) Formular la expresión para la intensidad $q(x)$, incluyendo las reacciones ($0 \leq x \leq L$).

(a) Las cargas sobre la viga entre los apoyos son la carga concentrada P y el momento M_0 . Sus cargas distribuidas equivalentes se obtienen de los casos 2 y 1, respectivamente, de la Tabla 7-2. Luego, con el origen de coordenadas en el apoyo A , podemos formular por inspección la siguiente expresión:

$$q(x) = P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^{-1} + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-2} \quad (b)$$

Esta ecuación simple proporciona la carga distribuida equivalente en cualquier punto a lo largo del eje de la viga (excepto en los apoyos). Obsérvese que cada término del miembro derecho es cero excepto en el punto donde actúa la carga.

(b) A veces es deseable incluir las reacciones en la expresión para la carga $q(x)$; esta expresión es válida entonces para todos los puntos de la viga, incluyendo los puntos extremos. A fin de obtener la expresión para $q(x)$, empezamos por determinar las reacciones a partir del equilibrio estático y representándolas sobre un diagrama de cuerpo libre de la viga (Fig. 7-30b). Entonces, podemos formular la ecuación para $q(x)$ por inspección, mediante la Tabla 7-2:

$$q(x) = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) \langle x \rangle^{-1} + P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^{-1} + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-2} - \left(\frac{P}{3} - \frac{M_0}{L}\right) \langle x - L \rangle^{-1} \quad (c)$$

El último término en esta ecuación, conteniendo $\langle x - L \rangle^{-1}$, es cero en cada punto a lo largo de la viga excepto en el apoyo derecho. Por lo que no juega ningún papel en el cálculo de las deflexiones y puede omitirse.

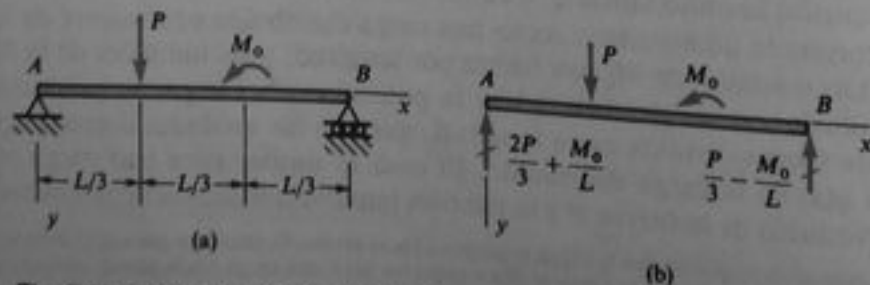


Fig. 7-30 Ejemplo 1. Representación de cargas mediante funciones de discontinuidad

En la siguiente sección, integraremos ecuaciones para la carga $q(x)$, tales como las Ecs. (b) y (c), para obtener sucesivamente las fuerzas cortantes, momentos flexionantes, pendientes y deflexiones de vigas en términos de funciones de discontinuidad.

Ejemplo 2

Una viga en voladizo AB soporta una carga distribuida de intensidad variable como se muestra en la Fig. 7-31a. (a) Formular la expresión para la intensidad $q(x)$ de la carga distribuida que actúa sobre la viga a la derecha del apoyo. (b) Formular la expresión para la intensidad $q(x)$, incluyendo las reacciones.

(a) Las cargas sobre la viga pueden dividirse en dos partes, una carga uniforme que actúa desde $x = L/3$ hasta $x = L$ y una carga triangular que actúa desde $x = 2L/3$ hasta $x = L$. Luego, empleando los casos 6 y 7 de la Tabla 7-2, obtenemos

$$q(x) = q_1 \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 - q_1 \langle x - L \rangle^0 + \frac{3(q_2 - q_1)}{L} \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^1 - \frac{3(q_2 - q_1)}{L} \langle x - L \rangle^1 - (q_2 - q_1) \langle x - L \rangle^0$$

Los tres términos que contienen $\langle x - L \rangle$ son cero en cada punto a lo largo del eje de la viga; de aquí que no tienen significado real y no afectan el cálculo de las deflexiones. Luego, tales términos pueden omitirse y la expresión para $q(x)$ resulta

$$q(x) = q_1 \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + \frac{3(q_2 - q_1)}{L} \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^1$$

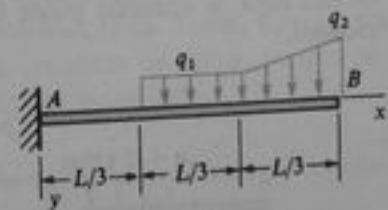
Como comprobación de esta expresión, podemos sustituir valores específicos de x y determinar la carga. Por ejemplo, si $x = L/6$, obtenemos $q(x) = 0$; si $x = L/2$, obtenemos $q(x) = q_1$; si $x = L$, obtenemos $q(x) = q_1 + (3/L)(q_2 - q_1)(L - 2L/3) = q_2$; etcétera.

(b) Para obtener una expresión para $q(x)$ que incluya las reacciones, dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7-31b. La reacción vertical R_a y el momento reactivo M_a en el apoyo A son

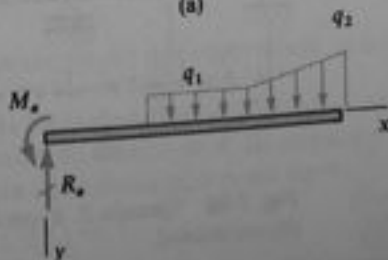
$$R_a = \frac{(3q_1 + q_2)L}{6}$$

$$M_a = \frac{4(2q_1 + q_2)L^2}{27}$$

(d)



(a)



(b)

Fig. 7-31 Ejemplo 2.
Representación de cargas mediante
funciones de discontinuidad

Mediante la Tabla 7-2, obtenemos la siguiente expresión para $q(x)$:

$$q(x) = -R_a \langle x \rangle^{-1} + M_a \langle x \rangle^{-2} + q_1 \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + \frac{3(q_2 - q_1)}{L} \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^1$$

Para disponer esta ecuación en su forma final, solamente sustituimos las expresiones para R_a y M_a a partir de las Ecs. (d).

Ejemplo 3

Una viga ABC con apoyos simples en A y B y un voladizo desde B hasta C (Fig. 7-32a) soporta una carga uniforme $q = 12 \text{ kN/m}$ sobre parte del claro y una carga concentrada $P = 15 \text{ kN}$ en el extremo libre. Formular la expresión para la intensidad $q(x)$ de las cargas distribuidas equivalentes que actúan sobre la viga.

Empezamos por calcular las reacciones de la viga, las cuales se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7-32b. También, tomamos el origen de las coordenadas en el apoyo A . Entonces podemos formular la expresión para $q(x)$ con la ayuda de la Tabla 7-2, como sigue:

$$q(x) = -(9 \text{ kN}) \langle x \rangle^{-1} + (12 \text{ kN/m}) (\langle x - 5 \text{ m} \rangle^0 - \langle x - 10 \text{ m} \rangle^0) - (66 \text{ kN}) \langle x - 10 \text{ m} \rangle^{-1} + (15 \text{ kN}) \langle x - 14 \text{ m} \rangle^{-1}$$

donde x tiene unidades de metros. El último término es igual a cero en todos los puntos a lo largo de la viga excepto en el extremo derecho, por lo que puede omitirse. También es engorroso escribir las unidades con cada término. Por ello, en forma práctica podemos escribir $q(x)$ como

$$q(x) = -9 \langle x \rangle^{-1} + 12 \langle x - 5 \rangle^0 - 12 \langle x - 10 \rangle^0 - 66 \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

y acompañar esta ecuación con la siguiente nota:

- x tiene unidades de metros
- $q(x)$ tiene unidades de kN/m

Sin esta nota, la ecuación puede fácilmente malinterpretarse y pueden obtenerse resultados erróneos.

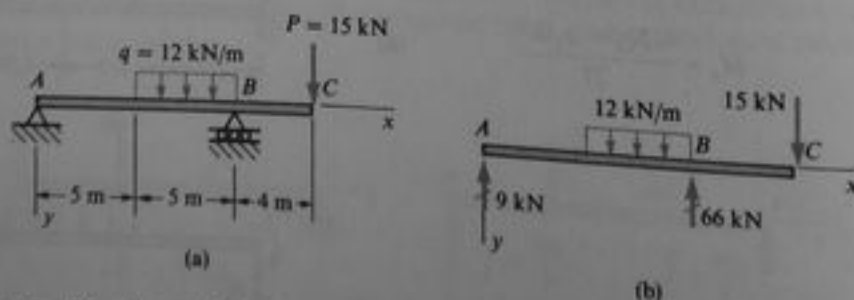


Fig. 7-32 Ejemplo 3. Representación de cargas mediante funciones de discontinuidad

*7.10 UTILIZACIÓN DE FUNCIONES DE DISCONTINUIDAD PARA OBTENER DEFLEXIONES DE VIGAS

En el método convencional de integración para determinar deflexiones de vigas (véanse Ecs. 7-10 y secciones 7.3 y 7.4), escribimos una expresión para la carga q , fuerza cortante V , o momento flexionante M para cada segmento de la viga entre los puntos donde cambia la carga. Estas expresiones son entonces integradas separadamente para cada segmento de la viga. A fin de evaluar las constantes de integración resultantes se requieren condiciones de continuidad y de frontera. Luego, este método de integración es completamente satisfactorio para cargas muy simples, pero puede volverse impráctico si el número de segmentos es superior a dos. El uso de funciones de discontinuidad hace posible formular una expresión que sea válida a lo largo de toda la longitud de la viga. Cuando se integra esta expresión, sólo aparece una constante de integración. Luego, en cierto tipo de problemas, el empleo de funciones de discontinuidad puede ser muy útil.

El procedimiento para el uso de **funciones de discontinuidad** es muy sencillo. Primero, escribimos la expresión para la carga distribuida equivalente $q(x)$, mediante las técnicas descritas en la sección anterior. Esta expresión se sustituye entonces en la ecuación diferencial de la curva de deflexión (Ec. 7-10c). Enseguida, se integra sucesivamente la ecuación diferencial para obtener la fuerza cortante V , el momento flexionante M , la pendiente v' y la deflexión v . Cada integración produce una constante de integración, la cual puede evaluarse mediante condiciones de frontera conocidas. Luego, finalmente se obtiene una expresión simple que proporciona la deflexión v en cada punto de la viga. No se requiere integrar una ecuación diferencial separada para cada segmento de la viga, porque el uso de funciones de discontinuidad permite integrar a través de discontinuidades y singularidades sin introducir condiciones de continuidad de pendientes y deflexiones. La continuidad de las pendientes y deflexiones se asegura automáticamente mediante el proceso de integración.

El método de discontinuidades para obtener deflexiones de vigas también se llama **método de Clebsch**, en honor al ingeniero alemán que lo desarrolló en 1883 (Refs. 7-12 a 7-15). Existen muchas variantes en los detalles del procedimiento, dependiendo de la viga particular bajo análisis así como de las preferencias personales del analista. Algunas de estas variaciones se ponen de manifiesto en los ejemplos que siguen; otras pueden hallarse en los problemas. El análisis puede iniciarse con la ecuación de carga, fuerza cortante o momento flexionante (Ecs. 7-10a, b, o c); sin embargo, en nuestros ejemplos empezaremos con la ecuación de carga, ya que entonces la solución incluye automáticamente las otras dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Obtener la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB que soporta una carga concentrada P y un momento M_0 (Fig. 7-33).

Empezamos por establecer la ecuación diferencial de la curva de deflexión en términos de la carga distribuida q (Ec. 7-10c). Con el origen de coordenadas en el extremo A , las cargas P y M_0 pueden expresarse en términos de una carga distribuida equivalente $q(x)$ como sigue:

$$q(x) = P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^{-1} + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-2} \quad (a)$$

(véase Ec. b del Ejemplo 1, Sección 7.9). Por lo tanto, la ecuación diferencial resulta

$$EIv'''' = q = P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^{-1} + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-2} \quad (b)$$

Integrando esta ecuación se tiene

$$EIv''' = -V = P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-1} + C_1 \quad (c)$$

La constante de integración se evalúa a partir de una condición sobre la fuerza cortante. Usamos la condición de cortante en el extremo izquierdo de la viga, a saber, cuando $x = 0$ (o, en forma más precisa, cuando x es ligeramente mayor que cero), la fuerza cortante es igual a la reacción R_a ; luego,

$$V(0) = R_a = \frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}$$

Aplicando esta condición a la Ec. (c), obtenemos

$$C_1 = -R_a = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)$$

De aquí, obtenemos

$$EIv''' = -V = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) + P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-1} \quad (d)$$

como la ecuación diferencial en términos de la fuerza cortante.

En vez de empezar con la Ec. (a), la cual representa únicamente las cargas aplicadas entre los apoyos, podemos iniciar el análisis con una expresión para $q(x)$ que contenga las reacciones adicionales a las cargas. Para la viga de la Fig. 7-33, esta expresión se obtuvo en la sección anterior (véase Ec. c en el Ejemplo 1, Sección 7.9). Utilizando tal expresión para $q(x)$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$EIv'''' = q = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) \langle x \rangle^{-1} + P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^{-1} + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-2} - \left(\frac{P}{3} - \frac{M_0}{L}\right) \langle x - L \rangle^{-1} \quad (e)$$

El último término de esta ecuación, que representa la reacción en el apoyo B , es cero para cada punto a lo largo del eje de la viga hasta el apoyo. Ya que este término no tendrá efecto sobre el cálculo de las fuerzas cortantes, momentos flexionantes, pendientes y deflexiones de la viga, puede omitirse. Entonces procedemos a integrar la Ec. (e) para obtener la ecuación de la fuerza cortante:

$$EIv''' = -V = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) \langle x \rangle^0 + P \left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + M_0 \left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-1} + C_1 \quad (f)$$

La constante de integración puede evaluarse a partir de la fuerza cortante conocida en cualquier punto de la viga; por variar, evaluémosla en un punto justo a la izquierda del apoyo B:

$$V(L) = R_A - P = \frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L} - P$$

Entonces, de la Ec. (f) se obtiene

$$-\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L} - P\right) = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) + P(1) + M_0(0) + C_1$$

de donde $C_1 = 0$. Podríamos haber previsto este resultado, porque, cuando la expresión para $q(x)$ incluye todas las fuerzas (tanto cargas como reacciones), no se requiere constante de integración. También, observamos que el término $\langle x \rangle^0$ en la Ec. (f) es igual a la unidad en cada punto a lo largo del eje de la viga. Por lo tanto, sustituyendo $\langle x \rangle^0$ por 1 y C_1 por 0 en la Ec. (f), obtenemos

$$Elv''' = -V = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right) + P\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^0 + M_0\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^{-1} \quad (g)$$

la cual es idéntica a la Ec. (d).

Luego, los dos métodos anteriores llevan a la misma ecuación para la fuerza cortante. Un método empieza con una ecuación para las cargas únicamente, después de la cual se evalúa la fuerza cortante mediante una condición de frontera; el otro método empieza con una ecuación que incluye las reacciones pero que no requiere condiciones de frontera. Ambos métodos difieren únicamente en los detalles, y la elección entre ellos es un asunto de preferencias individuales.

Examinemos ahora la Ec. (g) para la fuerza cortante. El primer término en el miembro derecho es la fuerza cortante debida a la reacción R_A , y el segundo término es la fuerza cortante debida a la carga P . En un análisis ordinario mediante diagramas de cuerpo libre, estos dos términos serían los únicos que aparecerían en una expresión para V . El tercer término, que involucra el momento M_0 , representa una singularidad en el diagrama de fuerza cortante. Este término se presenta porque la acción del momento M_0 , aplicado en un punto, debe producir concentraciones de fuerza cortante. Por supuesto, este término no tiene efecto sobre la construcción del diagrama de fuerza cortante; para todos los propósitos prácticos, puede despreciarse cuando se considera la fuerza cortante. No obstante, el término debe conservarse en la ecuación porque influye sobre la siguiente integración, la cual proporciona el momento flexionante.

Una segunda integración de la ecuación diferencial produce la ecuación para el momento flexionante M :

$$Elv'' = -M = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)x + P\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^1 + M_0\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^0 + C_2 \quad (h)$$

Podemos evaluar la constante C_2 a partir del momento flexionante conocido en cualquier extremo de la viga. En el extremo izquierdo tenemos $M(0) = 0$, de donde obtenemos $C_2 = 0$. Nuevamente pudimos haber anticipado este resultado, ya que, cuando la expresión para la fuerza cortante incluye los efectos de todas las cargas y reacciones (tanto fuerzas como momentos), no se requiere constante de integración.

Obsérvese que pudimos haber obtenido la Ec. (h) para el momento flexionante directamente a partir de diagramas de cuerpo libre y equilibrio estático; entonces pudimos iniciar el análisis de deflexión con la ecuación diferencial de segundo orden (Ec. 7-10a).

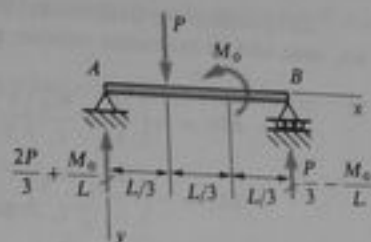


Fig. 7-33 Ejemplo 1. Funciones de discontinuidad

Las pendientes y deflexiones de la viga se obtienen mediante dos integraciones adicionales, cada una de las cuales requiere la introducción de una constante de integración:

$$EIv' = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{P}{2}\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^2 + M_0\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^1 + C_3 \quad (i)$$

$$EIv = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)\frac{x^3}{6} + \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^3 + \frac{M_0}{2}\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^2 + C_3x + C_4 \quad (j)$$

Las dos condiciones de frontera adicionales son

$$v(0) = 0 \quad y \quad v(L) = 0$$

de donde encontramos

$$C_4 = 0 \quad C_3 = \frac{5PL^2}{81} + \frac{M_0L}{9}$$

Por lo que las ecuaciones finales para la pendiente y la deflexión son

$$EIv' = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{P}{2}\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^2 + M_0\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^1 + \frac{5PL^2}{81} + \frac{M_0L}{9} \quad (k)$$

$$EIv = -\left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{L}\right)\frac{x^3}{6} + \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{L}{3} \right\rangle^3 + \frac{M_0}{2}\left\langle x - \frac{2L}{3} \right\rangle^2 + \left(\frac{5PL^2}{81} + \frac{M_0L}{9}\right)x \quad (l)$$

De estas ecuaciones podemos determinar la pendiente y deflexión en cualquier punto de la viga. Por ejemplo, en el soporte izquierdo ($x = 0$), la Ec. (k) resulta

$$\theta_a = v'(0) = \frac{5PL^2}{81EI} + \frac{M_0L}{9EI} \quad (m)$$

En el centro de la viga ($x = L/2$), el ángulo de rotación y la deflexión son, respectivamente,

$$\theta_c = v'\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5PL^2}{648EI} - \frac{M_0L}{72EI} \quad (n)$$

$$\delta_c = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{23PL^3}{1296EI} + \frac{5M_0L^2}{144EI} \quad (o)$$

De modo similar, podemos determinar cualesquiera otras deflexiones deseadas y ángulos de rotación. De esta manera, concluye el análisis de la viga mediante el uso de funciones de dis-

Ejemplo 2

Obtener la ecuación de la curva de deflexión para la viga en voladizo AB mostrada en la Fig. 7-34.

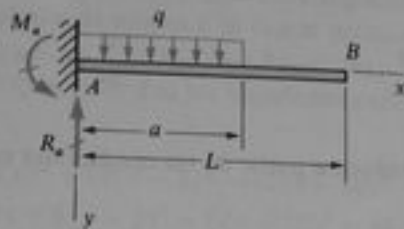


Fig. 7-34 Ejemplo 2. Funciones de discontinuidad

Empecemos por determinar las reacciones en el empotramiento:

$$R_a = qa \quad M_a = \frac{qa^2}{2} \quad (p)$$

Entonces podemos expresar la intensidad $q(x)$ de la carga distribuida equivalente como sigue:

$$q(x) = -R_a \langle x \rangle^{-1} + M_a \langle x \rangle^{-2} + q \langle x \rangle^0 - q \langle x - a \rangle^0 \quad (q)$$

Sustituyendo las Ecs. (p) en la Ec. (q), y empleando la ecuación diferencial en términos de la carga (Ec. 7-10c), obtenemos

$$EIv'''' = q = -qa \langle x \rangle^{-1} + \frac{qa^2}{2} \langle x \rangle^{-2} + q \langle x \rangle^0 - q \langle x - a \rangle^0 \quad (r)$$

Reemplazando $\langle x \rangle^0$ por la unidad e integrando, obtenemos

$$EIv''' = -V = -qa \langle x \rangle^0 + \frac{qa^2}{2} \langle x \rangle^{-1} + qx - q \langle x - a \rangle^1 \quad (s)$$

Como empezamos con la expresión completa para q , incluyendo las reacciones, no se requiere constante de integración. También nótese que el segundo término de la derecha proviene del momento reactivo; éste no tiene efecto sobre el diagrama de fuerza cortante, pero debe conservarse porque afecta el siguiente paso de la integración. También, un inconveniente de utilizar funciones de discontinuidad es evidente de la Ec. (s); para la porción derecha de la viga (donde $a < x < L$), la fuerza cortante V es igual a cero, pero esto no puede reconocerse a partir de la ecuación.

El siguiente paso es integrar la Ec. (s) para obtener el momento flexionante. Nuevamente reemplazamos $\langle x \rangle^0$ por la unidad antes de integrar:

$$EIv'' = -M = -qax + \frac{qa^2}{2} \langle x \rangle^0 + \frac{qx^2}{2} - \frac{q}{2} \langle x - a \rangle^2 \quad (t)$$

Como se conservaron todos los términos en la ecuación para V , incluyendo el término basado en el momento M_a , la ecuación anterior no necesita constante de integración. Ahora podemos reemplazar $\langle x \rangle^0$ por la unidad y realizar dos integraciones más:

$$EIv' = \frac{q}{6}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x) - \frac{q}{6}\langle x - a \rangle^3 + C_1 \quad (u)$$

$$EIv = \frac{q}{24}(x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2) - \frac{q}{24}\langle x - a \rangle^4 + C_1x + C_2 \quad (v)$$

Las constantes C_1 y C_2 se evalúan a partir de las condiciones en el empotramiento:

$$v'(0) = 0 \quad v(0) = 0$$

Estas condiciones dan $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, por lo que las ecuaciones finales para v' y v son

$$EIv' = \frac{qx}{6}(3a^2 - 3ax + x^2) - \frac{q}{6}\langle x - a \rangle^3 \quad (w)$$

$$EIv = \frac{qx^2}{24}(6a^2 - 4ax + x^2) - \frac{q}{24}\langle x - a \rangle^4 \quad (x)$$

Luego, hemos obtenido la ecuación de toda la curva de deflexión en términos de funciones de discontinuidad.

La pendiente y la deflexión en cualquier punto específico pueden obtenerse sustituyendo el valor apropiado de x en las Ecs. (w) y (x). Por ejemplo, en el punto $x = a$ obtenemos

$$v'(a) = \frac{qa^3}{6EI} \quad v(a) = \frac{qa^4}{8EI} \quad (y)$$

y en $x = L$ obtenemos

$$\theta_b = v'(L) = \frac{qa^3}{6EI} \quad \delta_b = v(L) = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \quad (z)$$

Obsérvese que la curva de deflexión es en realidad una línea recta en la porción no cargada de la viga.

Ejemplo 3

La viga ABC mostrada en la Fig. 7-35 consiste en un claro simple AB con un voladizo BC . Determinar las deflexiones verticales δ_c y δ_d en los puntos C y D , respectivamente. La viga tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y un momento de inercia $I = 118 \times 10^6$ mm⁴.

Las cargas y reacciones de esta viga fueron expresadas en términos de funciones de discontinuidad en el Ejemplo 3 de la sección anterior. Por lo tanto, podemos tomar la expresión para $q(x)$ de tal ejemplo:

$$q(x) = -9\langle x \rangle^{-1} + 12\langle x - 5 \rangle^0 - 12\langle x - 10 \rangle^0 - 66\langle x - 10 \rangle^{-1}$$

donde x tiene unidades de metros (m) y $q(x)$ tiene unidades de kilonewtons por metro (kN/m). Sustituyendo en la Ec. (7-10c), obtenemos la ecuación diferencial de la curva de deflexión:

$$Elv'''' = q = -9\langle x \rangle^{-1} + 12\langle x - 5 \rangle^0 - 12\langle x - 10 \rangle^0 - 66\langle x - 10 \rangle^{-1}$$

En esta ecuación, v tiene unidades de metros (m), E tiene unidades de kilonewtons por metro cuadrado (kPa), e / tiene unidades de metros a la cuarta potencia (m^4). (Obsérvese que v'''' tiene unidades de m^{-3} .)

La primera y segunda integraciones dan las ecuaciones para la fuerza cortante y el momento flexionante:

$$\begin{aligned} Elv''' &= -V = -9\langle x \rangle^0 + 12\langle x - 5 \rangle^1 - 12\langle x - 10 \rangle^1 - 66\langle x - 10 \rangle^0 \\ Elv'' &= -M = -9x + 6\langle x - 5 \rangle^2 - 6\langle x - 10 \rangle^2 - 66\langle x - 10 \rangle^1 \end{aligned}$$

Según se explicó previamente, no se requieren constantes de integración para V y M cuando se utiliza la expresión completa para $q(x)$, esto es, la expresión que incluye las reacciones y las cargas.

Las siguientes dos integraciones dan la pendiente y la deflexión:

$$\begin{aligned} Elv' &= -\frac{9x^2}{2} + 2\langle x - 5 \rangle^3 - 2\langle x - 10 \rangle^3 - 33\langle x - 10 \rangle^2 + C_1 \\ Elv &= -\frac{3x^3}{2} + \frac{1}{2}\langle x - 5 \rangle^4 - \frac{1}{2}\langle x - 10 \rangle^4 - 11\langle x - 10 \rangle^3 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera sobre la deflexión son

$$v(0) = 0 \quad v(10) = 0$$

de las cuales obtenemos

$$C_1 = \frac{475}{4} \quad C_2 = 0$$

Así, las expresiones finales para v' y v son

$$\begin{aligned} Elv' &= -\frac{9x^2}{2} + \frac{475}{4} + 2\langle x - 5 \rangle^3 - 2\langle x - 10 \rangle^3 - 33\langle x - 10 \rangle^2 \\ Elv &= -\frac{3x^3}{2} + \frac{475x}{4} + \frac{1}{2}\langle x - 5 \rangle^4 - \frac{1}{2}\langle x - 10 \rangle^4 - 11\langle x - 10 \rangle^3 \end{aligned}$$

en la cual las variables tienen las siguientes unidades:

- x tiene unidades de metros (m)
- v tiene unidades de metros (m)
- E tiene unidades de kilonewtons por metro cuadrado (kPa)
- I tiene unidades de metros a la cuarta potencia (m^4)

La deflexión δ_D en el punto D se determina sustituyendo los siguientes valores numéricos en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} x &= 5 \text{ m} & E &= 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \text{ kPa} \\ I &= 118 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 118 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

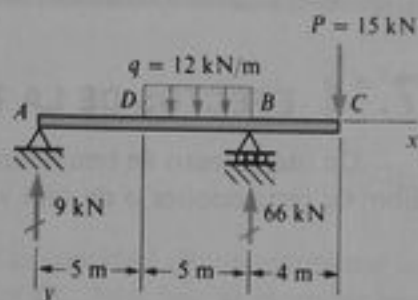


Fig. 7-35 Ejemplo 3. Funciones de discontinuidad

Los cálculos se efectúan como sigue:

$$EI\delta_d = EIt(5) = -\frac{3}{2}(5)^3 + \frac{475(5)}{4} = 406.25 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_d = \frac{406.25 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^6 \text{ kPa})(118 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 0.0172 \text{ m} = 17.2 \text{ mm}$$

De manera similar, calculamos la deflexión δ_c en el extremo del voladizo:

$$x = 14 \text{ m} \quad E = 200 \times 10^6 \text{ kPa} \quad I = 118 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$EI\delta_c = EIt(14) = -\frac{3}{2}(14)^3 + \frac{475(14)}{4} + \frac{1}{2}(14-5)^4$$

$$-\frac{1}{2}(14-10)^4 - 11(14-10)^3$$

$$= -5.00 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\delta_c = \frac{5.00 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{(200 \times 10^6 \text{ kPa})(118 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = -0.00021 \text{ m} = -0.21 \text{ mm}$$

El signo negativo significa que la deflexión es hacia arriba.

*7.11 EFECTOS DE LA TEMPERATURA

Un incremento de temperatura uniforme provoca que la longitud de una barra libre de restricciones o de una viga se incremente en una cantidad

$$\delta_t = \alpha(\Delta T)L \quad (7-70)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica,* ΔT es el incremento de temperatura y L es la longitud de la barra (véanse Fig. 2-20 y Ec. 2-22). Si una viga está apoyada en forma tal que la expansión longitudinal puede ocurrir libremente, como en el caso de las vigas consideradas en este capítulo, entonces un cambio de temperatura uniforme no producirá ningún esfuerzo en la viga. Tampoco ocurrirá ninguna deflexión lateral porque no existe tendencia a la flexión en tal viga.

El comportamiento de una viga es completamente diferente si la temperatura no es constante a través de su altura. Por ejemplo, supóngase que una viga simple, inicialmente recta y a una temperatura uniforme T_0 , cambia su temperatura a T_1 en su cara superior y a T_2 en su cara inferior, como se ilustra en la Fig. 7-36a. Si suponemos que la variación de temperatura entre la cara superior y la inferior es lineal, entonces la temperatura media de la viga es $T_{\text{med}} = (T_1 + T_2)/2$ y ocurre a la mitad de la altura. Cualquier diferencia entre esta temperatura media y la temperatura inicial T_0 origina un cambio de longitud de la viga, como se describió en el párrafo anterior. El diferencial de temperatura $T_2 - T_1$ entre la base y la cima de la viga ocasiona una curvatura del eje de la viga, lo que significa que se producen deflexiones laterales.

* En el Apéndice H, Tabla H-4, se proporcionan valores del coeficiente térmico α .

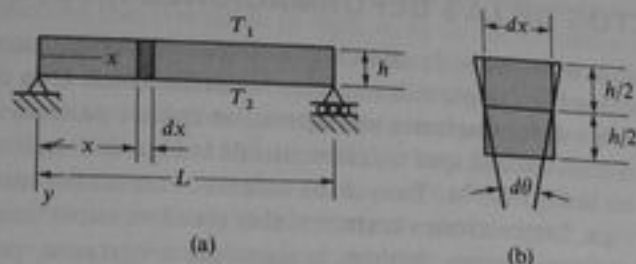


Fig. 7-36 Efectos térmicos en una viga

Para encontrar las deflexiones, consideremos la deformación de un elemento que tiene una longitud dx (Fig. 7-36b). Los cambios en longitud del elemento en las superficies inferior y superior, son $\alpha(T_2 - T_0)dx$ y $\alpha(T_1 - T_0)dx$, respectivamente. Si T_1 es mayor que T_2 , los lados del elemento giran el uno con respecto al otro formando un ángulo $d\theta$, como se muestra en la Fig. 7-36b. El ángulo $d\theta$ se relaciona con los cambios de dimensión mediante la siguiente ecuación, obtenida a partir de la geometría de la figura:

$$h d\theta = \alpha(T_1 - T_0)dx - \alpha(T_2 - T_0)dx$$

o sea

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (7-71)$$

donde h es la altura de la viga. Ya hemos visto que la cantidad $d\theta/dx$ representa la curvatura de la curva de deflexión de la viga (véase Ec. 7-4); por lo tanto, se encuentra la siguiente **ecuación diferencial** de la curva de deflexión:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (7-72)$$

Obsérvese que, cuando T_2 es mayor que T_1 , la curvatura es negativa y la viga flexiona con concavidad hacia arriba. La cantidad $\alpha(T_2 - T_1)/h$ es la contraparte de la cantidad M/EI , la cual aparece en la ecuación diferencial para la curva de deflexión que empleamos previamente (Ec. 7-6).

Ahora que se ha establecido la Ec. (7-72) como la ecuación diferencial básica para una viga sometida a un cambio de temperatura entre su cima y su base, podemos proceder a resolver esta ecuación mediante las mismas técnicas que ya se han descrito para los efectos de los momentos flexionantes. Esto es, podemos integrar la ecuación sucesivamente para obtener dv/dx y v , y entonces utilizar condiciones de frontera para evaluar las constantes de integración. Opcionalmente pueden emplearse los teoremas del método del área de momentos; todo lo que se requiere es reemplazar M/EI por $\alpha(T_2 - T_1)/h$ en tales teoremas.

*7.12 EFECTOS DE LAS DEFORMACIONES ANGULARES

En las secciones anteriores de este capítulo, sólo se consideraron los efectos de las deformaciones por flexión para determinar las deflexiones. Una deflexión adicional se produce por las **deformaciones angulares**, las cuales, para una viga de sección transversal rectangular, causan que un elemento de la viga de longitud dx se deforme como se muestra en la Fig. 7-37a. Ya que los esfuerzos cortantes varían con respecto a la altura de la viga, las secciones transversales resultan superficies curvas. La figura presenta las deformaciones debidas únicamente a cortante, por lo que las deformaciones por flexión y el momento flexionante que actúa sobre el elemento se han omitido en el esquema. La línea mn representa el eje original de la viga, supuestas las deformaciones angulares. Si los lados del elemento en los puntos m y n se supone que permanecen verticales, entonces las orillas superior e inferior de la viga serán paralelas a la línea mp , la cual forma un ángulo γ_c con la horizontal (γ_c es la deformación angular en el eje neutro). La deformación del elemento puede visualizarse fácilmente si se le divide en estratos delgados, cada uno de los cuales se supone que está en cortante puro (Fig. 7-37b). La deformación angular en la capa 1 es γ_c , mientras que en las capas 2 y 3 la deformación angular será menor que γ_c . En la capa externa 4, la deformación angular debe ser cero, por lo que los lados de esta capa permanecen como ángulos rectos.

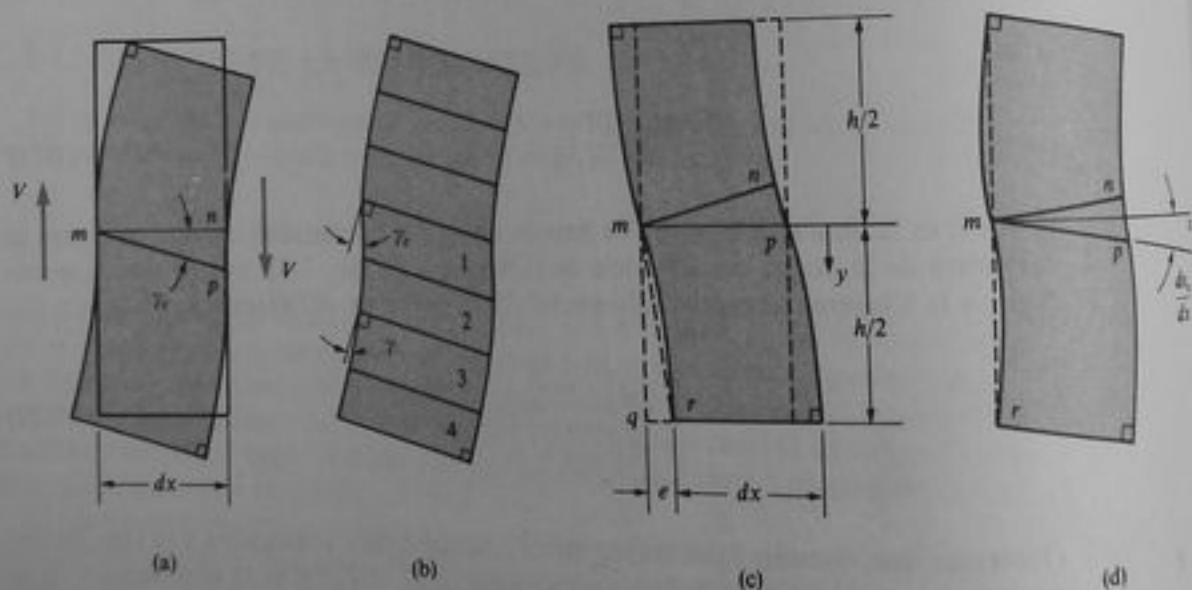


Fig. 7-37 Deformaciones por cortante en una viga

La pendiente de la curva de deflexión de la viga debida únicamente al cortante es aproximadamente igual a la deformación angular en el eje neutro (véase Fig. 7-37a). Luego, denotando por v , las deflexiones debidas únicamente al cortante, obtenemos la siguiente expresión para la pendiente:

$$\frac{dv_s}{dx} = \gamma_c = \frac{\alpha_s V}{GA} \quad (7-73)$$

donde V/A es el esfuerzo cortante medio obtenido dividiendo la fuerza cortante entre el área de la sección transversal de la viga, α , es un factor numérico (o **coeficiente de cortante**) por el que debe multiplicarse el esfuerzo cortante medio para obtener el esfuerzo cortante en el centroide de la sección transversal, y G es el módulo de elasticidad en cortante. Para una sección transversal rectangular $\alpha_s = 3/2$ (véase Ec. 5-23), para una sección transversal circular $\alpha_s = 4/3$ (véase Ec. 5-32), y para una viga I, α_s es aproximadamente igual a A/A_w , donde A_w es el área del alma de la viga. La cantidad GA/α_s se conoce como la **rigidez a cortante** de la viga.*

Cuando existe una carga distribuida en forma continua q actuando sobre la viga, la fuerza cortante V es una función continua que puede diferenciarse con respecto a x . Entonces, la curvatura causada por la acción única del cortante es

$$\frac{d^2v_s}{dx^2} = \frac{\alpha_s}{GA} \frac{dV}{dx} = -\frac{\alpha_s q}{GA} \quad (a)$$

La deflexión total v de la viga es la suma de la deflexión por flexión v_b , determinada como se explicó en las secciones anteriores de este capítulo y la deflexión angular o por cortante v_s ; luego, $v = v_b + v_s$. La curvatura total, por lo tanto, es

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v_b}{dx^2} + \frac{d^2v_s}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{\alpha_s q}{GA} \quad (7-74)$$

Esta ecuación puede resolverse mediante **integraciones sucesivas** para determinar las deflexiones de vigas en aquellos casos donde debe considerarse el efecto del cortante.

Las **condiciones de frontera** para la viga se emplean en la evaluación de las constantes de integración que aparecen en la solución de la Ec. (7-74). Por ejemplo, en un apoyo simple la deflexión es cero ($v = v_b = v_s = 0$). En un apoyo fijo la deflexión también es cero, pero la condición sobre la pendiente depende del tipo de retención de la viga. Si los lados del elemento en el eje neutro permanecen verticales (como en la Fig. 7-37a), entonces las condiciones para la pendiente son

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \gamma_s \quad (b)$$

porque, en esta situación, el eje de la viga en el apoyo tendrá pendiente nula debido a las deformaciones por flexión y una pendiente γ_s debida a las deformaciones por cortante. Si la viga se restringe de tal manera que la curva total de deflexión tenga pendiente cero en el extremo, entonces las condiciones son

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad (c)$$

y el extremo de la viga se orienta como se muestra en la Fig. 7-37c con la línea mp permaneciendo horizontal.

Otra posibilidad es que la cima y la base de la viga permanezcan en una línea vertical (Fig. 7-37d). En este caso, ni la línea mn o la línea mp permanecen horizontales. En vez de ello, la pendiente dv_s/dx puede determinarse girando al elemento de la Fig. 7-37c en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la línea mr sea verti-

* La rigidez a cortante de una viga determinada mediante el método del trabajo virtual es GA/f_s , donde f_s (llamado el **factor de forma para cortante**) puede ser diferente al coeficiente de cortante α_s ; véase Sección 12.9.

cal. El ángulo de rotación es el ángulo qmr , igual a e dividida entre $h/2$. La distancia e se aprecia que es

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy \quad (d)$$

donde γ es la deformación angular (Fig. 7-37b) a una distancia y (Fig. 7-37c) desde el eje neutro. Las condiciones de frontera para este caso son las siguientes:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h} \quad (e)$$

La cantidad e , dada por la Ec. (d), puede evaluarse para cualquier perfil de sección transversal particular. Para una viga de sección transversal rectangular con ancho b , tenemos

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{bG} \int_0^{h/2} \tau b dy = \frac{V}{2bG} \quad (f)$$

y las Ecs. (e) resultan

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA} \quad (g)$$

donde $A = bh$ es el área de la sección transversal. Para una viga I el alma carga la mayor parte de la fuerza cortante, y el esfuerzo cortante es aproximadamente uniforme respecto a la altura del alma; entonces tenemos

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{t_w G} \int_0^{h/2} \tau t_w dy \approx \frac{V}{2t_w G} \quad (h)$$

y las condiciones de frontera resultan

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_w} \quad (i)$$

donde $A_w = ht_w$ es el área del alma de la viga.

Para representar el cálculo de las deflexiones angulares, tomemos como primer ejemplo una viga simple con una carga uniforme q (véase Fig. 7-3). La ecuación para la curvatura de esta viga (véase Ec. 7-74) resulta:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{2EI}(xL - x^2) - \frac{\alpha_s q}{GA}$$

la cual, después de dos integraciones sucesivas, proporciona la deflexión v :

$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 2x^3L) - \frac{\alpha_s q}{2GA}x^2 + C_1x + C_2$$

En los extremos de la viga ($x = 0$ y $x = L$), la deflexión v es cero, lo cual proporciona los siguientes valores para C_1 y C_2 :

$$C_1 = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{\alpha_s qL}{2GA} \quad C_2 = 0$$

Por lo tanto, la curva de deflexión de la viga es

$$v = \frac{qL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} \right) \left(\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right) + \frac{\alpha_s qL^2}{2GA} \left(\frac{x}{L} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (7-75)$$

Esta ecuación tiene dos términos en su miembro derecho; el primero es la deflexión debida a flexión (comparar con la Ec. 7-13), y el segundo proporciona la deflexión adicional debida a las deformaciones angulares.

En el centro de la viga ($x = L/2$), la deflexión es

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{\alpha_s qL^2}{8GA} = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48\alpha_s EI}{5GAL^2} \right) \quad (7-76)$$

La importancia relativa de los efectos cortantes puede evaluarse mediante el examen del último término de esta ecuación. Si se desprecian las deformaciones angulares, el efecto es el mismo que si suponemos que la viga es infinitamente rígida a cortante ($GA/\alpha_s = \infty$); entonces el último término en la ecuación anterior resulta cero y sólo permanece la deflexión por flexión. Cuando se incluye el efecto cortante, la deflexión se incrementa. El último término tiene un valor que es pequeño comparado con la unidad para vigas sólidas, tales como vigas de sección transversal rectangular; pero en otras vigas, tales como vigas tipo emparedado, puede ser muy grande.

A fin de obtener algunos resultados numéricos, considérese una viga de sección transversal rectangular con altura h (luego, $\alpha_s = 1.5$ e $I/A = h^2/12$) y con $E/G = 2.5$. La deflexión central para este caso es

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + 3 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (7-77)$$

Si $L/h = 10$, el efecto de las deformaciones angulares es incrementar la deflexión en un 3%. Para relaciones de L/h más pequeñas (esto es, para vigas cortas en altura) el efecto del cortante se incrementa. Para vigas I los efectos son similares a los que se presentan en vigas rectangulares, excepto que la magnitud relativa de la deflexión por cortante es usualmente dos o tres veces mayor. Para vigas tipo emparedado, el incremento en deflexión debido al cortante puede ser tan alto como 50%.

La ecuación diferencial utilizada en la resolución de la deflexión por cortante fue obtenida bajo la suposición de que cada sección transversal de la viga puede alabearse libremente, como se ilustra en la Fig. 7-37a. La viga simple uniformemente cargada es un caso en el que esta suposición casi se satisface. En el punto medio de la viga, no puede haber alabeo de la sección transversal (por simetría). Sin embargo, dado que $V = 0$ en el centro, no existe tendencia al alabeo en esta sección. El alabeo se incrementa gradualmente desde el centro hasta los extremos de la viga, según lo hace la propia fuerza cortante. Luego, la deformación adicional producida por el alabeo tiene un efecto mínimo. En general, el efecto del alabeo tiende a reducir las deformaciones antes calculadas.

Mediante los métodos de la teoría de la elasticidad, ha sido determinada la curva de deflexión para una viga simple de sección transversal rectangular que soporta una carga uniforme (Ref. 7-18). Para el caso en que el módulo de Poisson es $\nu = 0.25$, la deflexión en el centro es

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + 2.2 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (7-78)$$

la cual proporciona una deflexión menor que la de la Ec. (7-77). El segundo término de la Ec. (7-78) toma en cuenta no sólo los efectos del cortante sino también los efectos de los esfuerzos σ , en la dirección vertical (debidos a la carga uniforme q que actúa en la parte superior de la viga).

El segundo ejemplo que consideraremos es una viga simple con una carga concentrada P en el centro. En la mitad izquierda de la viga, las expresiones para el momento flexionante, la fuerza cortante y la intensidad de carga son, respectivamente, $M = Px/2$, $V = P/2$ y $q = 0$. Por lo que las ecuaciones para las curvaturas debidas a flexión y a cortante resultan

$$\frac{d^2v_b}{dx^2} = -\frac{Px}{2EI} \quad \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

Estas dos ecuaciones deben integrarse separadamente, en vez de manera combinada como se hizo para el primer ejemplo, porque las condiciones de frontera asociadas con las deflexiones por flexión y por cortante son diferentes en el centro de la viga. Integrando sucesivamente dos veces la ecuación diferencial para v_b y utilizando como condiciones de frontera el hecho de que $dv_b/dx = 0$ en $x = L/2$ y que $v_b = 0$ en $x = 0$, se obtiene la deflexión por flexión:

$$v_b = \frac{PL^3}{48EI} \left(\frac{x}{L}\right) \left(3 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

Integrando la ecuación diferencial para v_s se obtiene

$$\frac{dv_s}{dx} = C_1$$

lo que muestra que la pendiente debida al cortante es constante a lo largo de la mitad izquierda de la viga. Esta pendiente es igual a $\alpha_s V/GA$, según la Ec. (7-73). Una segunda integración, combinada con la condición de que $v_s = 0$ cuando $x = 0$, proporciona la ecuación de deflexión debida únicamente al cortante:

$$v_s = \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

La deflexión total (para $0 \leq x \leq L/2$) es

$$v = v_b + v_s = \frac{PL^3}{48EI} \left(\frac{x}{L}\right) \left(3 - 4\frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad (7-79)$$

La deflexión en el punto medio de la viga es

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{12\alpha_s EI}{GAL^2}\right) \quad (7-80)$$

Nuevamente, puede determinarse la importancia relativa de las deformaciones angulares para cada caso particular evaluando numéricamente el último término en los paréntesis.

La solución anterior (Ec. 7-79) proporciona deflexiones muy grandes porque se omiten los efectos de alabeo, como se indicó previamente. De la simetría sabemos

que la sección transversal a la mitad de la viga debe permanecer plana y en ella no debe ocurrir alabeo. Sin embargo, las secciones adyacentes a la izquierda y a la derecha del centro cargan fuerzas cortantes $P/2$ y $-P/2$, respectivamente, por lo que debe ocurrir alabeo en esas secciones. Como tienden a elaborarse en direcciones opuestas, pero están restringidas para hacerlo, se desarrollan esfuerzos adicionales. La deformación adicional por alabeo tiende a resistir la deflexión de la viga, por lo que las deflexiones angulares reales serán menores que las determinadas arriba.

Para que una viga de sección transversal rectangular con $E/G = 2.5$, la deflexión central dada por la Ec. (7-80) es

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + 3.75 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (7-81)$$

lo cual puede compararse con el siguiente resultado más exacto obtenido mediante la teoría de la elasticidad para el caso cuando $\nu = 0.25$ y $E/G = 2.5$ (Ref. 7-19):

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + 2.78 \frac{h^2}{L^2} - 0.84 \frac{h^3}{L^3} \right) \quad (7-82)$$

Esta última ecuación proporciona una deflexión más pequeña que la de la Ec. (7-81) porque toma en cuenta los esfuerzos concentrados cerca de la mitad de la viga donde se aplica la carga.

El tercer ejemplo que se considerará es una viga en voladizo, fija en el extremo izquierdo y soportando una carga concentrada P en el extremo libre (véase Apéndice G, Tabla G-1, Caso 4). La deflexión por flexión v_x se presenta en el Apéndice G, por lo que sólo se explicará aquí la deflexión por cortante, v_s . Como la fuerza cortante es constante, la pendiente dv_s/dx de la viga debida al cortante también es constante. La magnitud de esta pendiente depende de la forma en que esté soportada la viga en su extremo izquierdo. Si los lados del elemento en el eje neutro permanecen verticales y el extremo de la viga está libre para alabearse (Fig. 7-37a), la pendiente es

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{\alpha_s P}{GA}$$

Por lo que la deflexión por cortante es

$$v_s = \frac{\alpha_s P}{GA} x \quad (j)$$

Si la curva de deflexión en el apoyo permanece horizontal y la sección transversal extrema se distorsiona como se muestra en la Fig. 7-37c, entonces $dv_s/dx = 0$, y no existe deflexión v_s . Finalmente, si las orillas superior e inferior de la viga permanecen verticalmente una sobre la otra en el apoyo y la viga se alabea como se muestra en la Fig. 7-37d, entonces la pendiente debida al cortante es

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h}$$

y la curva de deflexión debida únicamente al cortante es

$$v_s = \frac{2e}{h} x \quad (k)$$

La deflexión total en el extremo libre del voladizo se determina sustituyendo $x = L$ en las ecuaciones anteriores para v , y sumando el resultado a $PL^3/3EI$, que es la deflexión en el extremo libre debida únicamente a flexión.

La deflexión en el extremo libre de una viga en voladizo según se determina mediante los métodos de la teoría de la elasticidad puede obtenerse a partir de la fórmula antes indicada para una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en su punto medio (véase Ec. 7-82) reemplazando P por $2P$ y L por $2L$. La deflexión resultante es válida para una viga en voladizo cuyo extremo fijo sea capaz de evitar el alabeo (esto es, cuya sección transversal extrema se supone que permanece plana).*

En las derivaciones anteriores se ha utilizado el coeficiente de cortante α_s , definido como la relación del esfuerzo cortante (o deformación) en el eje neutro al esfuerzo cortante medio (o deformación) sobre la sección transversal. El valor de α_s , determinado de esta forma fue empleado para calcular la rigidez a cortante GA/α_s . Sin embargo, se han efectuado cálculos más precisos de la rigidez a cortante mediante el empleo de la teoría de la elasticidad. Las siguientes fórmulas para α_s , se tomaron de la Ref. 7-21, la cual también contiene una bibliografía sobre el tema del coeficiente de cortante. Para secciones sólidas rectangulares y circulares, respectivamente, los coeficientes son:

$$\alpha_s = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)} \quad \alpha_s = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)} \quad (7-83a, b)$$

Para el caso de $\nu = 0.3$, obtenemos de estas ecuaciones $\alpha_s = 1.18$ y $\alpha_s = 1.13$ para un rectángulo y un círculo, respectivamente. Mediante estos nuevos valores (en vez de los valores $3/2$ y $4/3$) en las ecuaciones obtenidas previamente para las deflexiones por cortante, obtenemos valores más pequeños para tales deflexiones. Por supuesto, siempre debe tenerse presente que, para problemas de deflexión estática, no se garantiza una gran precisión en el cálculo de la deflexión por cortante, porque representa sólo un pequeño porcentaje de la deflexión total.

Otro método para determinar las deflexiones por cortante de vigas es el método de la carga unitaria (véase Sección 12.9), el cual se basa en el principio del trabajo virtual. Este método generalmente proporciona resultados ligeramente más pequeños para las deflexiones por cortante de una viga rectangular que los obtenidos mediante la solución de la ecuación diferencial utilizando un coeficiente de cortante de $3/2$, pero que son muy cercanos a los resultados obtenidos mediante $\alpha_s = 1.18$.

En la obtención de las deflexiones para una **viga emparedado** o **viga sandwich** (véase Sección 5.10), usualmente es necesario tomar en cuenta los efectos de las deformaciones angulares, ya que G_c , el módulo de elasticidad a cortante del material del núcleo, usualmente es más pequeño y por ende la rigidez a cortante es pequeña. Los métodos ya descritos en esta sección pueden emplearse para calcular las deflexiones de tales vigas. La rigidez a flexión EI de la viga se reemplaza por la cantidad $E_c I_c$, donde E_c es el módulo de elasticidad de las caras e I_c su momento de inercia (véase Ec. 5-53). La rigidez a cortante GA/α_s resulta $G_c A_c$ porque podemos suponer que el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente sobre el área del núcleo A_c ; debido a la variedad de materiales utilizados en vigas emparedado, a menudo sucede

* El efecto cortante en las fórmulas para la deflexión de vigas fue establecido por Poncelet y Rankine (Ref. 7-20).

que las rigideces a flexión y a cortante no pueden obtenerse por cálculo, debido a la falta de datos exactos. En tales casos, las rigideces deben determinarse experimentalmente para los materiales particulares y los tipos de armado empleados.

Energía de deformación por cortante. Puede obtenerse fácilmente una expresión para la energía de deformación almacenada en una viga debido al efecto de la fuerza cortante V . De la Fig. 7-37a se aprecia que el trabajo realizado por la fuerza cortante, igual a la energía de deformación dU , almacenada en el elemento, es

$$dU_s = \frac{V\gamma_c dx}{2}$$

Mediante la Ec. (7-73), podemos reformular esta expresión a

$$dU_s = \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA}$$

Así, la energía de deformación almacenada en una viga debido al efecto único del cortante es

$$U_s = \int \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA} \quad (7-84)$$

La energía de deformación por cortante puede agregarse a la energía de deformación por flexión (Ecs. 7-59) para obtener la energía de deformación total. Por supuesto, en muchos casos la energía de deformación por cortante es despreciable comparada con la energía de deformación por flexión.*

*7.13 DEFLEXIONES GRANDES DE VIGAS

Las deflexiones de las vigas tratadas anteriormente en este capítulo se obtuvieron resolviendo las ecuaciones diferenciales para una viga con ángulos de rotación pequeños (Ecs. 7-10). Cuando las pendientes y deflexiones son grandes, debe emplearse la ecuación diferencial exacta de la curva de deflexión. Esta ecuación que también está basada en la suposición de que el material de la viga permanece linealmente elástico, es:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad (7-85)$$

(véanse Ecs. 7-1 y 7-5). La cantidad $d\theta/ds$, que es la curvatura de la viga, es la razón de cambio de θ (el ángulo de rotación de la curva de deflexión) con respecto a s (la distancia medida a lo largo de la curva misma). Cuando las rotaciones son muy pe-

* El método del trabajo virtual conduce a una expresión para la energía de deformación por cortante en una viga que es similar a la Ec. (7-84) excepto que el coeficiente de cortante α_s se reemplaza por el factor de forma f_s ; véase Sección 12.9.

queñas, la distancia s es igual a la distancia x y el ángulo de rotación θ resulta el mismo que la pendiente dv/dx , por lo que $d\theta/ds$ se aproxima mediante d^2v/dx^2 . Sin embargo, para deflexiones grandes estas simplificaciones no son válidas, y la Ec. (7-85) debe resolverse mediante la expresión exacta para la curvatura (Ec. 7-11). Luego, la ecuación diferencial de la curva de deflexión resulta

$$\frac{d^2v}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = -\frac{M}{EI} \quad (7-86)$$

El perfil exacto de la curva de deflexión elástica, determinado por medio de esta ecuación, se denomina **elástica**.

La resolución matemática del problema de la elástica se ha determinado para muchos tipos diferentes de vigas y de condiciones de carga. Como las resoluciones son extensas, no se desarrollan aquí. En vez de ello, daremos los resultados finales para una viga de interés práctico junto con las referencias que indican dónde pueden determinarse otras soluciones.*

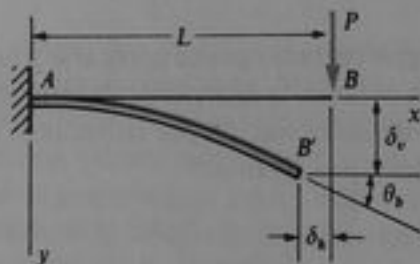


Fig. 7-38 Deflexiones grandes en una viga en voladizo

Consideremos la viga en voladizo AB mostrada en la Fig. 7-38. Se supone que la carga P produce grandes deflexiones en la viga, moviéndose el punto B a la nueva posición B' . El ángulo de rotación del extremo de la viga se denota por θ_b , y los desplazamientos horizontal y vertical son δ_h y δ_v , respectivamente. La longitud AB' de la curva de deflexión es igual a la longitud inicial L porque se desprecian los cambios de longitud axiales debidos a tensión directa. Como la viga es estáticamente determinada, la expresión para el momento M puede obtenerse fácilmente y sustituirse en la ecuación diferencial (Ec. 7-86). Entonces, después de una considerable manipulación de la ecuación, incluyendo un cambio en la variable dependiente, y también después de aplicar las condiciones de frontera apropiadas, la solución de la ecuación puede obtenerse en términos de funciones elípticas.** De esta solución, se obtienen expresio-

* El problema de la elástica fue investigado inicialmente por Jacob Bernoulli, Euler, Lagrange y Plana (Refs. 7-22 a 7-27). Las resoluciones al problema de la elástica pueden determinarse en las Refs. 7-28 a 7-31. Una referencia completa sobre deflexiones grandes de vigas está en el libro escrito por R. Frisch-Fay (Ref. 7-31), que contiene muchas referencias. Puede encontrarse bibliografía adicional en la Ref. 7-32.

** Las funciones elípticas se tratan en libros de texto y manuales de matemáticas avanzadas.

nes para θ_s , δ_s y δ_e en términos de integrales elípticas. Por ejemplo, la ecuación para determinar el ángulo θ_s es la siguiente:

$$F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (7-87)$$

Los términos en esta ecuación tienen las siguientes definiciones:

$$k = \sqrt{\frac{1 + \text{sen } \theta_s}{2}} \quad (a)$$

$$\phi = \text{arcsen} \frac{1}{k\sqrt{2}} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} F(k) &= \text{integral elíptica completa de primera clase} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t}} \quad (c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(k, \phi) &= \text{integral elíptica incompleta de primera clase} \\ &= \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t}} \quad (d) \end{aligned}$$

Las integrales elípticas pueden evaluarse mediante integración numérica utilizando una calculadora electrónica programable. También, los manuales de matemáticas contienen tablas que proporcionan valores numéricos de las integrales elípticas para varios valores del módulo k y la amplitud ϕ (por ejemplo, véase Ref. 7-33). Nótese que la diferencia entre las dos integrales elípticas de la Ec. (7-87) puede expresarse como una integral simple con límites desde ϕ hasta $\pi/2$.

Debido a la naturaleza trascendente de la Ec. (7-87), ésta debe resolverse por prueba y error para obtener θ_s . El procedimiento es el siguiente: (1) suponer un valor de θ_s entre 0 y 90°; (2) calcular k de la Ec. (a); (3) obtener el valor correspondiente de $F(k)$ de la Ec. (c); (4) calcular ϕ de la Ec. (b); (5) conociendo k y ϕ obtener el valor de $F(k, \phi)$ de la Ec. (d); y (6) calcular la carga P de la Ec. (7-87). Este proceso proporciona la carga P que corresponde al valor particular supuesto de θ_s . Repitiendo el cálculo para otros valores de θ_s podemos determinar el número de valores correspondientes de P y θ_s que se deseen. En la Tabla 7-3, que es una adaptación de la Ref. 7-34, se presenta una lista de valores determinados en esta forma.

La ecuación para la deflexión vertical en el extremo de la viga en voladizo es

$$\frac{\delta_e}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} [E(k) - E(k, \phi)] \quad (7-88)$$

donde

$$\begin{aligned} E(k) &= \text{integral elíptica completa de segunda clase} \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t} dt \quad (e) \end{aligned}$$

Tabla 7-3 Ángulo de rotación y deflexiones para una viga en voladizo con una carga concentrada (véase Fig. 7-38)

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\theta_b}{\pi/2}$	$\frac{\delta_v}{L}$	$\frac{\delta_h}{L}$
0	0	0	0
0.2	0.063	0.066	0.003
0.4	0.126	0.131	0.010
0.6	0.185	0.192	0.022
0.8	0.241	0.249	0.038
1.0	0.294	0.302	0.056
1.5	0.407	0.411	0.108
2	0.498	0.493	0.161
3	0.628	0.603	0.254
4	0.714	0.670	0.329
5	0.774	0.714	0.388
6	0.817	0.745	0.435
7	0.850	0.767	0.473
8	0.875	0.785	0.505
9	0.895	0.799	0.532
10	0.911	0.811	0.555
15	0.956	0.848	0.635
∞	1	1	1

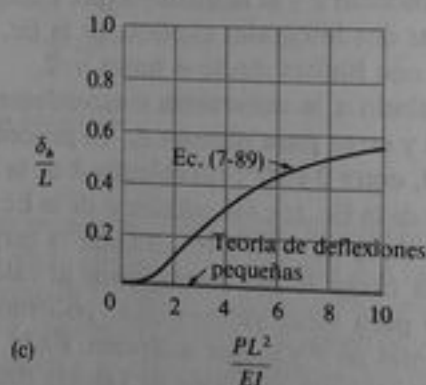
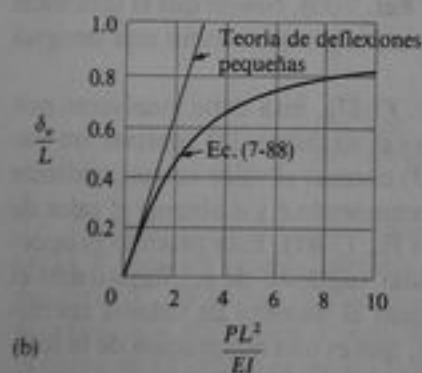
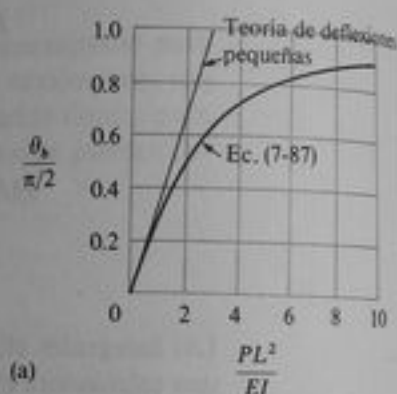


Fig. 7-39 Deflexiones grandes de una viga en voladizo con una carga concentrada P en el extremo libre (Fig. 7-38): (a) ángulo de rotación θ_b , (b) deflexión vertical δ_v , y (c) deflexión horizontal δ_h .

$E(k, \phi)$ = integral elíptica incompleta de segunda clase

$$= \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (f)$$

La Ec. (7-88) puede resolverse mediante los valores de θ_b , k , ϕ y PL^2/EI que se obtuvieron en la solución de la Ec. (7-87). El único paso adicional es determinar los valores de $E(k)$ y $E(k, \phi)$ y sustituirlos en la Ec. (7-88). Nuevamente observamos que

para propósitos de cálculo la diferencia entre las integrales elípticas de la Ec. (7-88) es igual al valor de una integral simple que tiene límites desde 0 hasta $\pi/2$. En la Tabla 7-3 se presentan algunos resultados numéricos.

Finalmente, podemos obtener la deflexión horizontal a partir de la ecuación

$$\frac{\delta_h}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI \operatorname{sen} \theta_b}{PL^2}} \quad (7-89)$$

Los resultados para este caso se muestran en la última columna de la Tabla 7-3. El ángulo de rotación θ_b y las deflexiones δ , y δ_h también se muestran gráficamente en las Figs. 7-39a, b y c, respectivamente. En cada caso, los resultados obtenidos mediante el análisis de deflexiones grandes coinciden con los obtenidos mediante la teoría de deflexiones pequeñas conforme la carga se aproxima a cero.

La resolución completa para una viga en voladizo con una carga vertical en el extremo (Fig. 7-38) se presenta en las Refs. 7-31, 7-35 y 7-36, y la deflexión de una viga en voladizo con una carga uniforme se presenta en la Ref. 7-37. Las resoluciones para vigas en voladizo pueden adaptarse a vigas simplemente apoyadas cargadas simétricamente considerando que la mitad de la viga simple es igual a una viga en voladizo. En la Ref. 7-31 se describen muchos otros casos de deflexiones grandes.

En el caso tridimensional general de una viga flexionada por momentos y fuerzas en los extremos, las ecuaciones diferenciales de la elástica tienen la misma forma que la de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo pesado desplazándose con respecto a un punto fijo. Esta analogía fue observada por Kirchhoff en 1859 y se conoce como **analogía dinámica de Kirchhoff** (Ref. 7-38). En el caso especial de fuerzas axiales únicas en los extremos de la barra, la ecuación diferencial para la elástica es la misma que para un péndulo ordinario que tiene ángulos de rotación grandes. La Ref. 7-39 debe consultarse para información respecto a la analogía de Kirchhoff entre sistemas elásticos y dinámicos.

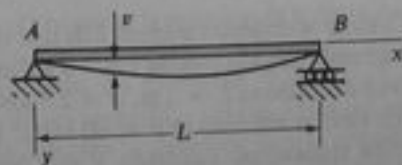
PROBLEMAS / CAPÍTULO 7

7.3-1 Mediante diferenciaciones sucesivas de la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple con una carga uniforme (véase Ec. 7-13 del Ejemplo 1), obtener expresiones para el momento flexionante M y la fuerza cortante V en la viga. Verifique sus resultados mediante equilibrio estático.

7.3-2 La ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB (véase figura) es

$$v = \frac{q_0 x^3}{360LEI} (7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

¿Cuál es la carga sobre la viga?



Probs. 7.3-2 y 7.3-3

7.3-3 La ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB (véase figura) es

$$v = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

¿Cuál es la carga sobre la viga?

7.3-4 Una viga de patín ancho ($W 14 \times 26$) que soporta una carga uniforme q (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1) tiene un claro de longitud $L = 16$ pie. Calcular la deflexión máxima δ y el ángulo de rotación θ en los apoyos si $q = 1.8$ k/pie y $E = 30 \times 10^6$ psi.

7.3-5 Una viga simple de sección transversal rectangular soporta una carga uniforme que provoca una deflexión de 12 mm en el punto medio de la viga (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1). La viga se reemplaza por una nueva viga del mismo material y también de sección transversal rectangular. Sin embargo, el ancho de la nueva viga es sólo la mitad del ancho de la viga original. ¿Cuál debe ser la altura h_2 de la nueva viga comparada con la altura h_1 de la viga original si la nueva viga sólo experimenta una deflexión de 3 mm bajo la misma carga?

7.3-6 Una viga en voladizo con carga uniforme (véanse Fig. 7-4 y Ejemplo 2) tiene una altura h igual a un décimo de la longitud L . La viga es de acero con sección de ala ancha y con $E = 30 \times 10^6$ psi y un esfuerzo permisible de 20,000 psi en tensión y en compresión. Calcular la relación δ/L entre la deflexión en el extremo libre y la longitud suponiendo que la viga soporta la carga máxima permisible.

7.3-7 ¿Cuál es la longitud del claro L para una viga simple uniformemente cargada (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1) de sección transversal de patín ancho si el esfuerzo máximo por flexión es 72 MPa, la deflexión máxima es de 3.0 mm, la altura de la viga es de 400 mm y el módulo de elasticidad es 200 GPa?

7.3-8 Una viga de ala ancha, de acero, cargada uniformemente y con apoyos simples (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1) tiene una deflexión de 5/16 plg en el punto medio y una pendiente de 0.01 radianes en los extremos. Calcular la altura h de la viga si el esfuerzo por flexión máximo σ es 18,000 psi y E es igual a 30×10^6 psi.

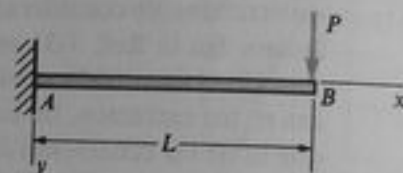
7.3-9 Calcular la deflexión máxima δ de una viga simple uniformemente cargada (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1) si la longitud del claro es $L = 2$ m, $q = 2.5$ kN/m y el esfuerzo de flexión máximo es $\sigma = 60$ MPa. La viga tiene sección transversal cuadrada y está hecha de aluminio con un módulo de elasticidad $E = 70$ GPa.

7.3-10 Una viga simple AB soporta una carga concentrada P como se muestra en la Fig. 7-5 y se refirió en el Ejemplo 3. Trazar una gráfica mostrando cómo varía la relación θ_1/θ_2 de los ángulos de rotación en los apoyos respecto a la relación a/L que define la posición de la carga P ($0 < a/L < 1$).

7.3-11 Obtener una fórmula para la relación δ_c/δ_{\max} de la deflexión en el punto medio a la deflexión máxima para una viga simple que soporta una carga concentrada P (véanse Fig. 7-5 y Ejemplo 3). De la fórmula, trazar una gráfica de δ_c/δ_{\max} versus la relación a/L que define la posición de la carga ($0.5 < a/L < 1$).

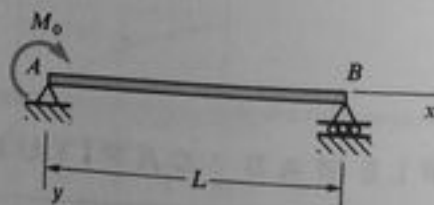
Los problemas 7.3-12 a 7.3-19 deben resolverse mediante la integración de la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación de momento flexionante).

7.3-12 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB que soporta una carga P en el extremo libre (véase figura). También, determinar la deflexión δ , y el ángulo de rotación θ , en el extremo libre.



Prob. 7.3-12

7.3-13 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB cargada por un momento M_0 en el extremo (véase figura). Determinar también la deflexión máxima v_{\max} .



Prob. 7.3-13

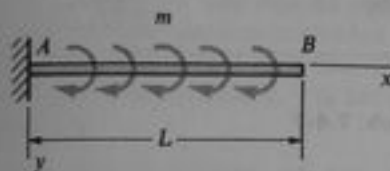
7.3-14 Una viga en voladizo AB que soporta una carga distribuida triangularmente de intensidad



Prob. 7.3-14

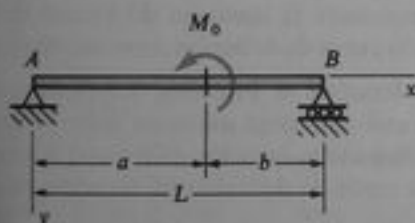
máxima q_0 se muestra en la figura. Obtener fórmulas para la deflexión δ , y el ángulo de rotación θ , en el extremo libre.

7.3-15 Una viga en voladizo AB está cargada por un momento uniformemente distribuido de intensidad m por unidad de distancia a lo largo del eje de la viga (véase figura). Obtener la ecuación de la curva de deflexión y encontrar fórmulas para la deflexión δ , y el ángulo de rotación θ , en el extremo libre.



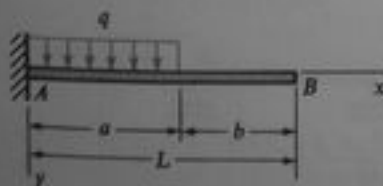
Prob. 7.3-15

7.3-16 Obtener las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple AB cargada por un momento M_0 que actúa a una distancia a del extremo izquierdo (véase figura).



Prob. 7.3-16

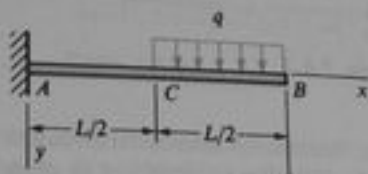
7.3-17 Determinar las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB que soporta una carga uniforme de intensidad q sobre una porción del claro (véase figura).



Prob. 7.3-17

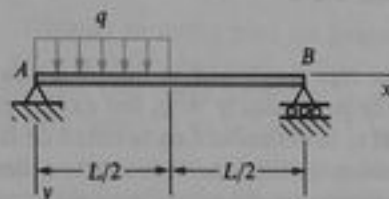
7.3-18 Obtener fórmulas para las deflexiones δ , y δ , en los puntos B y C , respectivamente, para la viga

en voladizo AB que soporta una carga uniforme de intensidad q sobre una de las mitades del claro (véase figura).



Prob. 7.3-18

7.3-19 Obtener las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple AB con una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre la mitad izquierda del claro (véase figura).



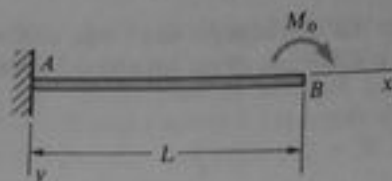
Prob. 7.3-19

7.4-1 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple que soporta una carga uniforme de intensidad q (véanse Fig. 7-3 y Ejemplo 1 de la Sección 7.3). Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).

7.4-2 Resolver el Problema 7.3-12 (una viga en voladizo con una carga concentrada en el extremo libre) empleando la ecuación diferencial de tercer orden de la curva de deflexión (la ecuación de fuerza cortante).

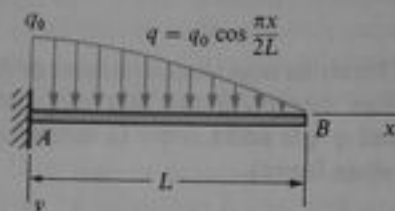
7.4-3 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB cuando en su extremo libre actúa un momento concentrado M_0 en el sentido de las manecillas del reloj (véase figura). Determinar también la deflexión δ , y la pendiente θ , en el extremo libre. Utilice la ecuación diferencial de tercer orden en la curva de deflexión (la ecuación de fuerza cortante).

7.4-4 La carga distribuida que actúa sobre una viga en voladizo tiene una intensidad q dada por la expresión $q_0 \cos \pi x/2L$, donde q_0 es la intensidad máxima de la carga (véase figura). Determinar la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión δ , en el extremo



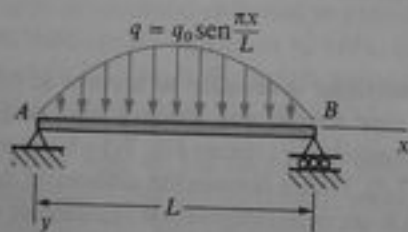
Prob. 7.4-3

libre. Utilizar la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).



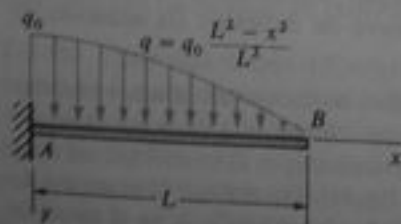
Prob. 7.4-4

7.4-5 Una viga simple AB se somete a una carga distribuida de intensidad $q = q_0 \sin \pi x/L$ (véase figura). ¿Cuál es la deflexión δ en la mitad de la viga? Emplear la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).



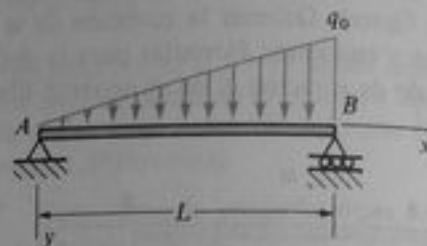
Prob. 7.4-5

7.4-6 Una viga en voladizo AB está sometida a una carga parabólicamente variable de intensidad $q = q_0(L^2 - x^2)/L^2$, como se muestra en la figura. Determinar la deflexión δ_0 y el ángulo de rotación θ_0 en el extremo libre. Utilizar la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).



Prob. 7.4-6

7.4-7 Obtener la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple que soporta una carga distribuida triangularmente de intensidad máxima q_0 (véase figura). Determinar también la deflexión máxima δ_{max} de la viga. Utilizar la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).



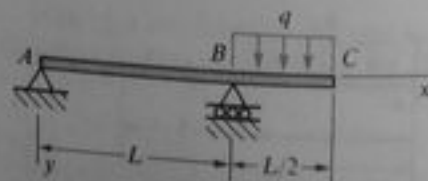
Prob. 7.4-7

7.4-8 Determinar las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple que soporta una carga concentrada P (véanse Fig. 7-5 y Ejemplo 3 de la Sección 7.3). Emplear la ecuación diferencial de tercer orden de la curva de deflexión (la ecuación de fuerza cortante).

7.4-9 Resolver el Problema 7.3-19 (una viga simple con una carga uniforme sobre la mitad izquierda del claro) empleando la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).

7.4-10 Resolver el Problema 7.3-18 (una viga en voladizo con una carga uniforme sobre la mitad del claro) utilizando la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).

7.4-11 Determinar las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga con un voladizo sometida a una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre el voladizo (véase figura). Obtener también las fórmulas para la deflexión δ_c y el ángulo de rotación θ_c en el extremo del voladizo. Emplear la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de carga).



Prob. 7.4-11

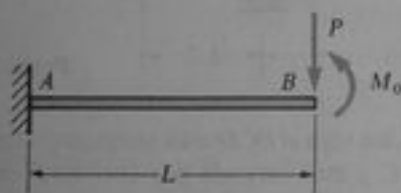
Los problemas para la Sección 7.5 deben resolverse por el método de área de momentos. Todas las vigas tienen rigidez a flexión constante EI .

7.5-1 Con referencia a la Fig. 7-8, la cual se utilizó para la obtención de los teoremas de áreas de momentos, demostrar que el punto C' , que es la intersección de las tangentes en A y B , está directamente por encima del centroide C del área del diagrama M/EI .

7.5-2 Una viga en voladizo está sometida a una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre toda su longitud (véase Fig. 7-4 del Ejemplo 2 en la Sección 7.3). Determinar el ángulo de rotación θ_a y la deflexión δ_a en el extremo libre.

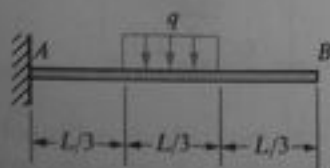
7.5-3 La carga sobre una viga en voladizo tiene una distribución triangular con intensidad máxima q_0 (véase Fig. 7-6 del Ejemplo 1 en la Sección 7.4). Determinar el ángulo de rotación θ_a y la deflexión δ_a en el extremo libre.

7.5-4 Una viga en voladizo AB está sometida a una carga concentrada P y a un momento M_0 que actúan en el extremo libre (véase figura). Obtener fórmulas para el ángulo de rotación θ_a y la deflexión δ_a en el extremo B .



Prob. 7.5-4

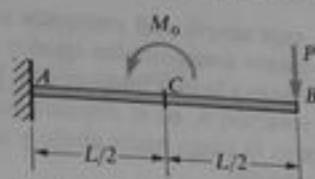
7.5-5 Determinar el ángulo de rotación θ_a y la deflexión δ_a en el extremo libre de una viga en voladizo AB con una carga uniforme q que actúa sobre el tercio medio de la longitud (véase figura).



Prob. 7.5-5

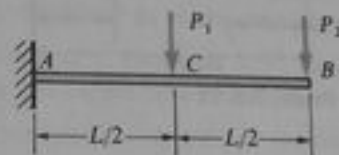
7.5-6 Calcular las deflexiones δ_a y δ_c en los puntos B y C , respectivamente, de la viga en voladizo mostrada en la figura. Suponer $M_0 = 36 \text{ plg} \cdot \text{k}$, $P = 3.8 \text{ k}$, $L = 8 \text{ pie}$ y $EI = 2.25 \times 10^8 \text{ lb} \cdot \text{plg}^2$.

7.5-7 Una viga en voladizo AB soporta dos cargas concentradas P_1 y P_2 como se muestra en la figura. Calcular las deflexiones δ_a y δ_c en los puntos B y C ,



Prob. 7.5-6

respectivamente. Suponer $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 5 \text{ kN}$, $L = 2.6 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$, e $I = 20.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$.



Prob. 7.5-7

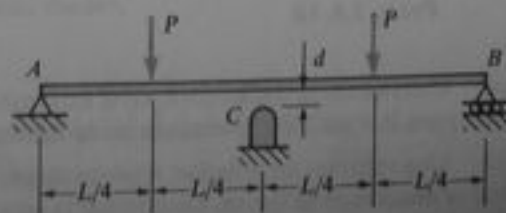
7.5-8 Obtener fórmulas para los ángulos de rotación θ_a y θ_b y la deflexión δ en el punto medio de la viga simple con una carga uniforme mostrada en la Fig. 7-3 del Ejemplo 1 en la Sección 7.3.

7.5-9 Una viga simple AB está sometida a una carga en forma de un momento M_0 que actúa en el extremo B (véase figura). Determinar los ángulos de rotación θ_a y θ_b y la deflexión máxima δ_{\max} .



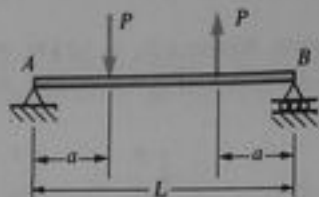
Prob. 7.5-9

7.5-10 Una viga simple AB soporta dos cargas concentradas P en las posiciones mostradas en la figura. Un apoyo C en el punto medio de la viga se sitúa a una distancia d por debajo de la viga antes de aplicarse las cargas. Suponiendo que $d = 0.5 \text{ plg}$, $L = 20 \text{ pie}$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, e $I = 396 \text{ plg}^4$, calcular la magnitud de las cargas P de tal forma que la viga toque el soporte en C .



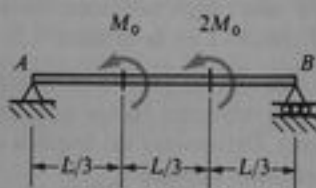
Prob. 7.5-10

7.5-11 La viga simple AB mostrada en la figura soporta dos cargas concentradas iguales P , una actuando hacia abajo y la otra hacia arriba. Determinar el ángulo de rotación θ_a en el extremo izquierdo, la deflexión δ_1 bajo la carga hacia abajo y la deflexión δ_2 en el punto medio.



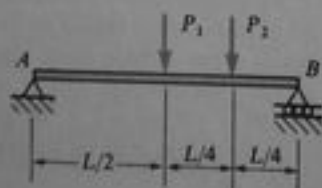
Prob. 7.5-11

7.5-12 Una viga simple AB se somete a momentos M_0 y $2M_0$ que actúan como se muestra en la figura. Determinar los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los extremos de la viga y la deflexión máxima δ_{max} .



Prob. 7.5-12

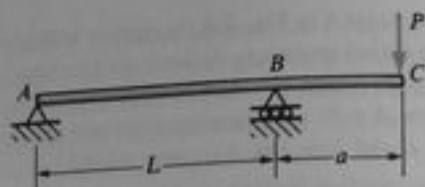
7.5-13 Una viga simple AB soporta dos cargas concentradas P_1 y P_2 como se muestra en la figura. Calcular la deflexión máxima δ_{max} de la viga, suponiendo $P_1 = 100$ kN, $P_2 = 200$ kN, $L = 10$ m, $E = 200$ GPa, e $I = 1.20 \times 10^8$ mm⁴.



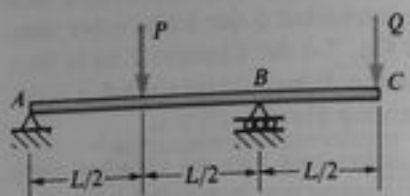
Prob. 7.5-13

7.5-14 Determinar la deflexión δ , en el extremo del voladizo para la viga ABC mostrada en la figura.

7.5-15 Una viga con un voladizo soporta cargas P y Q como se muestra en la figura. Determinar la relación P/Q que hace que la deflexión en C sea igual a cero.

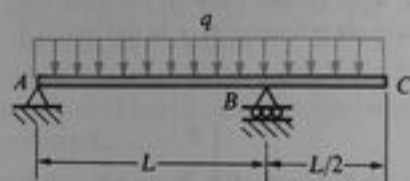


Prob. 7.5-14



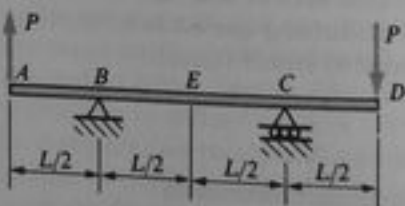
Prob. 7.5-15

7.5-16 Una viga ABC con un voladizo soporta una carga uniforme a lo largo de toda su longitud como se muestra en la figura. Determinar la deflexión δ , en el extremo libre.



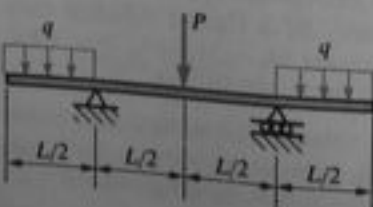
Prob. 7.5-16

7.5-17 Una viga $ABCD$ está simplemente apoyada en B y C y está cargada por fuerzas P en A y D (véase figura). (a) Determinar los ángulos de rotación θ_b y θ_c en los apoyos B y C , respectivamente. (b) Determinar las deflexiones δ_a y δ_d en los extremos de la viga. (c) Determinar la deflexión δ , en el punto medio de la viga.



Prob. 7.5-17

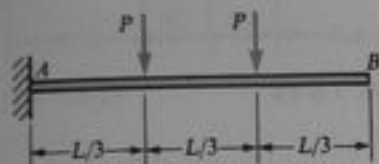
7.5-18 La viga mostrada en la figura tiene voladizos en ambos extremos y soporta una carga uniforme q en cada voladizo. ¿Cuál debe ser la carga P (en términos de qL) a fin de que no ocurra deflexión en el punto medio de la viga?



Prob. 7.5-18

Los problemas para la Sección 7.6 deben resolverse por el método de superposición.

7.6-1 Una viga en voladizo AB soporta dos cargas concentradas P como se muestra en la figura. Determinar la deflexión δ , del extremo libre.



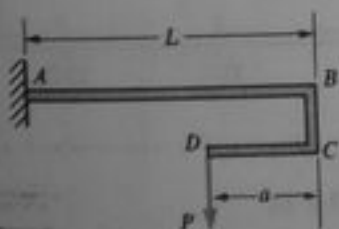
Prob. 7.6-1

7.6-2 ¿Cuál es la deflexión δ en el punto medio de una viga simple (véase figura) que soporta tres cargas iguales e igualmente espaciadas P ?



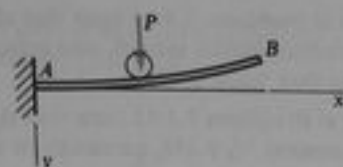
Prob. 7.6-2

7.6-3 La viga en voladizo AB mostrada en la figura tiene una ménsula BCD fija a su extremo libre. Una fuerza P actúa en el extremo de la ménsula. (a) Determinar la relación a/L a fin de que la deflexión vertical del punto B sea igual a cero. (b) Encontrar la relación a/L a fin de que la pendiente de la viga en el punto B sea igual a cero.



Prob. 7.6-3

7.6-4 ¿Cuál debe ser la ecuación $y = f(x)$ del eje de la viga curva AB (véase figura) antes de que la carga sea aplicada, a fin de que la carga P , que se mueve a lo largo de la barra, permanezca siempre en el mismo nivel?



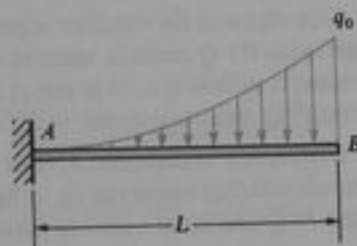
Prob. 7.6-4

7.6-5 Resolver el Problema 7.5-5 (una viga en voladizo con una carga uniforme actuando sobre el tercio medio de su longitud).

7.6-6 Resolver el Problema 7.5-6 (una viga en voladizo con un momento M_0 en su punto medio y una carga concentrada P en el extremo libre).

7.6-7 Resolver el Problema 7.5-7 (una viga en voladizo con dos cargas concentradas).

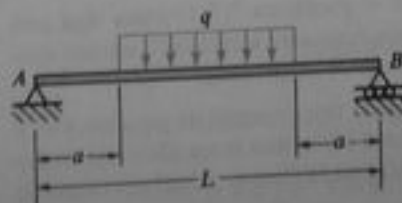
7.6-8 Determinar el ángulo de rotación θ , y la deflexión δ , en el extremo libre de una viga en voladizo AB que soporta una carga parabólica definida por la ecuación $q = q_0 x^2/L^2$ (véase figura).



Prob. 7.6-8

7.6-9 Dos vigas prismáticas del mismo material son geoméricamente similares entre sí; esto es, cada dimensión de la segunda viga es n veces la dimensión correspondiente de la primera viga. Ambas vigas están apoyadas en la misma forma, y las únicas cargas son sus propios pesos. Determinar la relación δ_2/δ_1 de la deflexión de la segunda viga a la deflexión correspondiente de la primera.

7.6-10 Una viga simple AB soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre la región media del claro (véase figura). Determinar el ángulo de rotación θ , en el apoyo izquierdo y la deflexión δ en el punto medio.

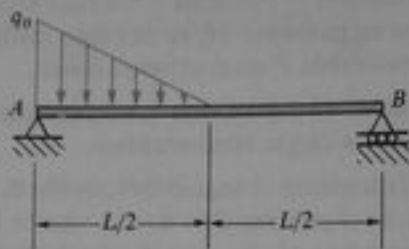


Prob. 7.6-10

7.6-11 Resolver el Problema 7.5-11 (una viga simple con dos cargas concentradas iguales, una actuando hacia abajo y la otra hacia arriba).

7.6-12 Resolver el Problema 7.5-12 (una viga simple sometida a momentos M_0 y $2M_0$ actuando en sus puntos tercios).

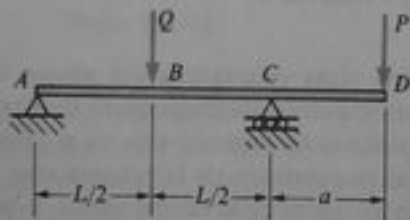
7.6-13 Determinar la deflexión δ en el punto medio de la viga simple AB mostrada en la figura.



Prob. 7.6-13

7.6-14 Una viga con un voladizo soporta dos cargas concentradas P y Q como se muestra en la figura. (a) Determinar la deflexión δ , en el punto B . (b) ¿Para qué relación P/Q será igual a cero la deflexión en B ?

7.6-15 Determinar la deflexión δ , en el punto D de la viga con un voladizo mostrada en la figura. ¿Para qué relación P/Q será igual a cero la deflexión en D ?



Probs. 7.6-14 y 7.6-15

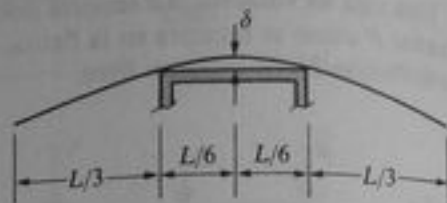
7.6-16 Determinar el ángulo de rotación θ , en el apoyo A de la viga con un voladizo y una carga uniforme referida en el Ejemplo 3 (véase Fig. 7-18).

7.6-17 Resolver el Problema 7.5-17 (una viga con voladizos en ambos extremos sometida a cargas concentradas).

7.6-18 Resolver el Problema 7.5-18 (una viga con voladizos en ambos extremos sometida a cargas uniformes y a una carga concentrada).

7.6-19 Una delgada tira de metal de peso total W y longitud L se dispone sobre una mesa plana de ancho $L/3$ como se muestra en la figura. ¿Cuál es el espacio

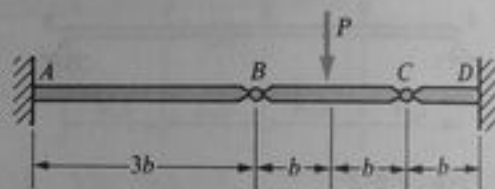
δ entre la tira y el punto medio de la mesa? (La tira de metal tiene una rigidez a flexión EI .)



Prob. 7.6-19

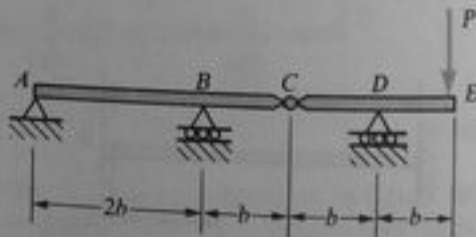
7.6-20 Determinar el ángulo de rotación θ , en el apoyo A de la viga compuesta con un perno referida en el Ejemplo 4 (Fig. 7-19) si $a = L$, $b = L/2$ y $P = 3qb$.

7.6-21 La viga compuesta mostrada en la figura tiene apoyos fijos en A y D y consta de tres miembros articulados en B y C . Determinar la deflexión δ bajo la carga P .



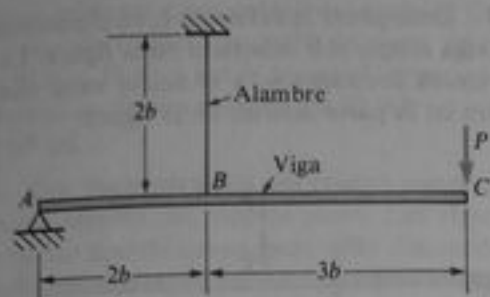
Prob. 7.6-21

7.6-22 Una viga compuesta, que consta de dos partes conectadas mediante una articulación, se muestra en la figura. Determinar la deflexión vertical δ , en el extremo libre E debida a la carga P .



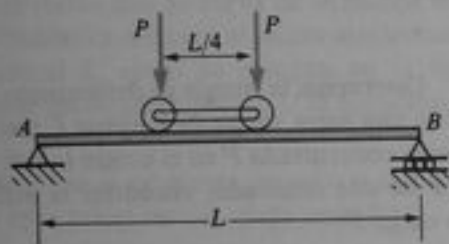
Prob. 7.6-22

7.6-23 Una viga de acero ABC está simplemente apoyada en A y retenida mediante un alambre de acero de alta resistencia en B (véase figura). Una carga $P = 200$ lb actúa en el extremo libre C . El alambre tiene rigidez axial $EA = 300 \times 10^3$ lb y la viga tiene una rigidez a flexión $EI = 30 \times 10^6$ lb·plg². Si $b = 10$ plg, ¿cuál es la deflexión δ , del punto C ?



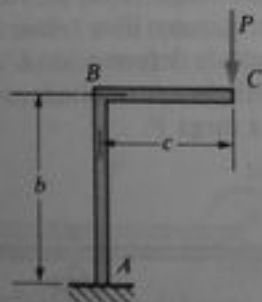
Prob. 7.6-23

7.6-24 Dos cargas rodantes iguales, separadas una distancia $L/4$, se mueven lentamente sobre una viga simple AB de longitud L (véase figura). Determinar el valor máximo de la deflexión δ_c en la mitad de la viga.



Prob. 7.6-24

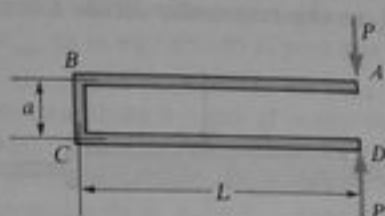
*7.6-25 Determinar la deflexión horizontal δ_h y la deflexión vertical δ_v en el extremo C del bastidor ABC mostrado en la figura, suponiendo que EI es la misma a través de todo el bastidor. (Despreciar los efectos de deformaciones axiales y considerar únicamente los efectos de flexión.)



Prob. 7.6-25

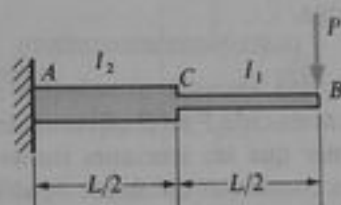
*7.6-26 El bastidor $ABCD$ mostrado en la figura está prensado por dos fuerzas P . ¿Cuál es la reducción δ en la distancia entre los puntos A y D cuando se aplican las cargas? (Suponer que EI es constante

en todo el bastidor y despreciar los efectos de deformaciones axiales.)



Prob. 7.6-26

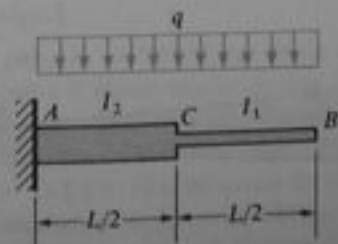
7.7-1 La viga en voladizo AB mostrada en la figura tiene momentos de inercia I_2 e I_1 en las porciones AC y CB , respectivamente. (a) Determinar la deflexión δ_b en el extremo libre debida a la carga P . (b) Determinar la relación r de la deflexión δ_b a la deflexión en B para una barra prismática en voladizo con un momento de inercia I_1 .



Prob. 7.7-1

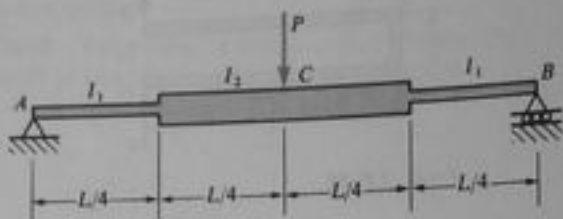
7.7-2 La viga en voladizo AB con dos momentos de inercia diferentes I_1 e I_2 soporta una carga uniforme de intensidad q (véase figura). Determinar la deflexión δ_b en el extremo libre B debida a la carga q suponiendo $I_1 = I$ e $I_2 = 2I$.

7.7-3 Determinar la deflexión δ_b en el extremo libre B de la viga en voladizo AB mostrada en la figura. La viga soporta una carga uniforme de intensidad q y tiene momentos de inercia I_2 e I_1 en las porciones AC y CB , respectivamente.



Probs. 7.7-2 y 7.7-3

7.7-4 La viga simple AB mostrada en la figura tiene dos momentos de inercia diferentes I_1 e I_2 . Determinar el ángulo de rotación θ_A en el apoyo A y la deflexión δ , en el punto medio debida a la carga P .



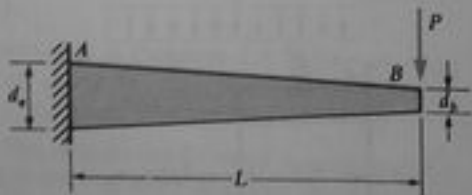
Prob. 7.7-4

7.7-5 Una viga simple AB tiene un momento de inercia I cerca de los apoyos y un momento de inercia $2I$ en la región media, como se muestra en la Fig. 7-20. Determinar el ángulo de rotación θ_A en el apoyo A y la deflexión δ , en el punto medio debida a una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre toda la longitud de la viga.

7.7-6 Una viga ahusada en voladizo AB soporta una carga concentrada P en el extremo libre (véase figura). Suponer que las secciones transversales son rectangulares con ancho constante b , altura d_A en el apoyo A y altura $d_B = d_A/2$ en el extremo libre B . Determinar la deflexión δ_B en B .

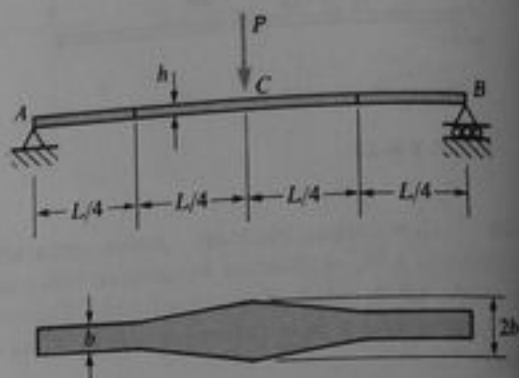
7.7-7 La viga ahusada en voladizo AB mostrada en la figura tiene secciones transversales rectangulares de ancho constante b . Las alturas de la viga en los extremos A y B son d_A y d_B , respectivamente. Determinar la deflexión δ_B en B .

7.7-8 Suponer que la barra ahusada en voladizo AB mostrada en la figura tiene una sección transversal circular hueca de pared delgada y espesor constante t . Los diámetros en los extremos A y B son d_A y $d_B = d_A/2$, respectivamente. Determinar la deflexión δ_B en el extremo libre de la viga.



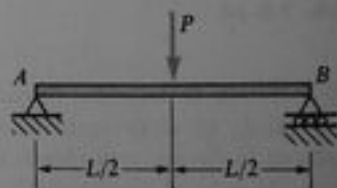
Probs. 7.7-6, 7.7-7 y 7.7-8

7.7-9 Determinar la deflexión δ , en el punto medio de la viga simple AB mostrada en la figura. La viga tiene altura constante h , y el ancho varía como se muestra en la parte inferior de la figura.



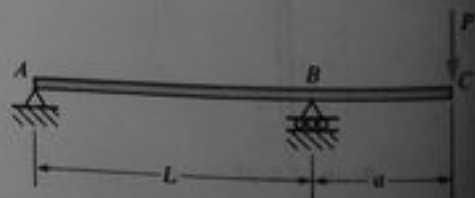
Prob. 7.7-9

7.8-1 Determinar la energía de deformación U almacenada en una barra simple de longitud L que soporta una fuerza concentrada P en el centro (véase figura). A partir de este resultado, encontrar la deflexión δ bajo la carga P .



Prob. 7.8-1

7.8-2 Una viga simple con un voladizo soporta una carga P en el extremo libre (véase figura). (a) Determinar la energía de deformación U almacenada en la viga. (b) A partir de este resultado, encontrar la deflexión δ_B bajo la carga P .



Prob. 7.8-2

7.8-3 ¿Cuánta energía de deformación U se almacena en una viga en voladizo de longitud L debida a

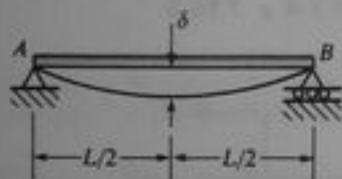
una carga uniforme q por unidad de longitud? Calcular el valor de U para un perfil de acero de patin ancho $W 8 \times 15$ de 6 pie de longitud cargado hasta un esfuerzo de flexión máximo de 20,000 psi y $E = 30 \times 10^6$ psi.

7.8-4 Dos vigas paralelas del mismo material soportan únicamente sus propios pesos. Las vigas tienen el mismo tipo de apoyo, pero cada dimensión de la segunda viga (incluyendo su dimensión longitudinal) es n veces la de la primera viga. ¿Cuál es la relación U_2/U_1 de sus energías de deformación?

7.8-5 Una viga simple uniformemente cargada de longitud L y sección transversal rectangular ($b =$ ancho, $h =$ altura) tiene un esfuerzo por flexión máximo σ_{\max} . Determinar la energía de deformación U almacenada en la viga.

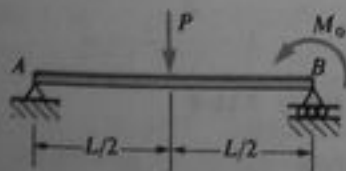
7.8-6 Una viga simple AB de longitud L está cargada de tal forma que su curva de deflexión es una parábola (simétrica respecto al punto medio) con deflexión central δ , como se muestra en la figura. ¿Cuánta energía de deformación U se almacena en la viga?

7.8-7 Resolver el problema anterior si la curva de deflexión es la mitad de una onda senoidal.



Probs. 7.8-6 y 7.8-7

7.8-8 Una viga simple que soporta una carga concentrada P en el centro y un momento M_0 en un extremo se muestra en la figura. Determinar la energía de deformación U almacenada en la viga.

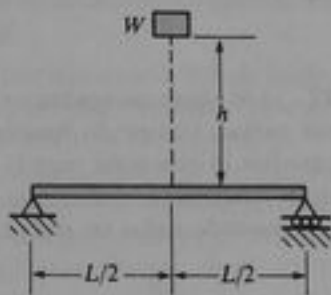


Prob. 7.8-8

7.8-9 Un objeto de peso W se deja caer desde una altura h sobre la mitad de una viga simple (véase figura). La viga tiene sección transversal rectangular de

área A . Suponiendo que h es grande comparada con la deflexión estática de la viga debida a W y que la masa del objeto es grande comparada con la masa de la viga, obtener una fórmula para el esfuerzo por flexión máximo σ_{\max} en la viga debido al peso que cae.

7.8-10 Un objeto muy pesado de peso W se deja caer desde una altura h sobre el centro de una viga simple (véase figura). Obtener una fórmula para el esfuerzo por flexión máximo σ_{\max} debido al peso que cae, en términos de h , σ_{\max} y δ_{\max} , donde σ_{\max} es el esfuerzo por flexión máximo y δ_{\max} es la deflexión cuando el peso W actúa como una carga estáticamente aplicada. Trazar una gráfica de la relación $\sigma_{\max}/\sigma_{\max}$ (esto es, la relación del esfuerzo dinámico al esfuerzo estático) versus la relación h/δ_{\max} (utilizar valores de h/δ_{\max} desde 0 hasta 10).



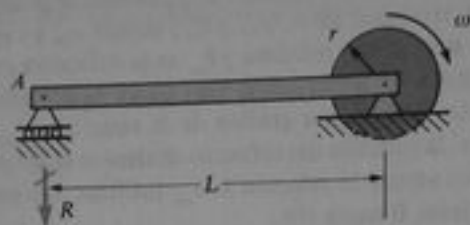
Probs. 7.8-9 y 7.8-10

7.8-11 Una viga en voladizo de longitud $L = 8$ pie se construye con una sección de ala ancha $W 8 \times 21$ ($E = 30 \times 10^6$ psi). Un peso $W = 2000$ lb cae desde una altura $h = 0.25$ plg sobre el extremo de la viga. Calcular la deflexión máxima δ_{\max} del extremo de la viga y el esfuerzo por flexión máximo σ_{\max} debidos al peso que cae.

7.8-12 Un peso $W = 4,000$ lb cae desde una altura $h = 0.5$ plg sobre el punto medio de una viga simple de longitud $L = 10$ pie. Suponiendo que el esfuerzo permisible a flexión en la viga es $\sigma_{\text{perm}} = 18,000$ psi y $E = 30 \times 10^6$ psi, seleccionar el perfil de ala ancha más ligero, entre los listados en la Tabla E-1 del Apéndice E, que sea satisfactorio. (Despreciar el peso propio de la viga.)

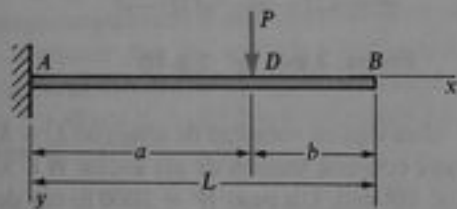
7.8-13 Un peso $W = 20$ kN cae desde una altura $h = 1.0$ mm sobre el punto medio de una viga simple de longitud $L = 3$ m. La viga está hecha de madera con sección transversal cuadrada (dimensión d en cada lado) y $E = 12$ GPa. Si el esfuerzo de flexión permisible en la madera es $\sigma_{\text{perm}} = 10$ MPa, ¿cuál es la dimensión mínima requerida d ? (Despreciar el peso propio de la viga.)

*7.8-14 Un volante pesado en forma de disco circular sólido de radio r está fijo mediante un rodamiento al extremo de una viga simplemente apoyada cuya rigidez a flexión es EI y cuya longitud es L (véase figura). El volante tiene un peso W y gira a una velocidad angular ω . Si el rodamiento se atasca súbitamente, ¿cuál será la reacción R en el apoyo A ? (Despreciar el peso propio de la viga.)

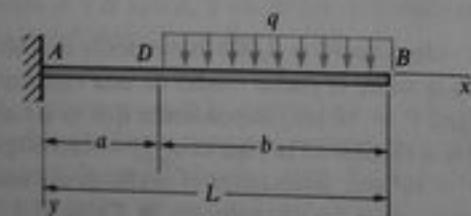


Prob. 7.8-14

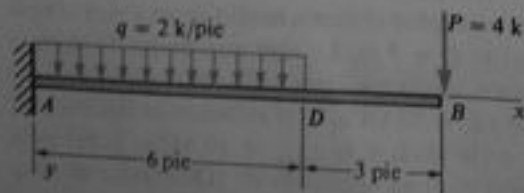
7.9-1 a 7.9-12 Las vigas mostradas en las figuras soportan varias cargas. Utilizando funciones de discontinuidad, escribir la expresión para la intensidad $q(x)$ de la carga distribuida equivalente que actúa sobre la viga, incluyendo todas las reacciones.



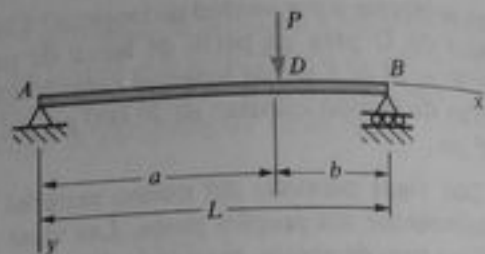
Probs. 7.9-1 y 7.10-1



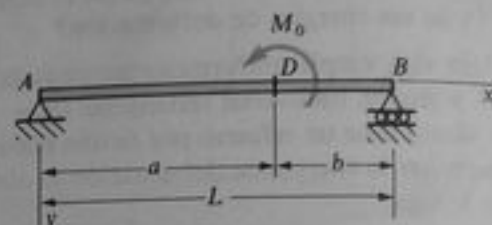
Probs. 7.9-2 y 7.10-2



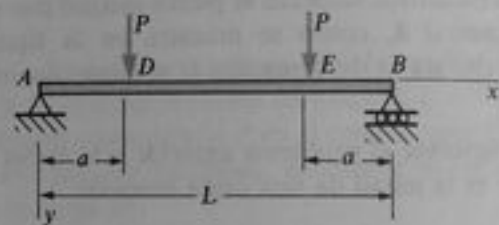
Probs. 7.9-3 y 7.10-3



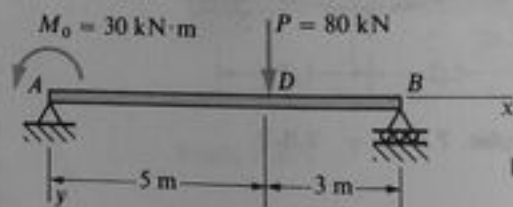
Probs. 7.9-4 y 7.10-4



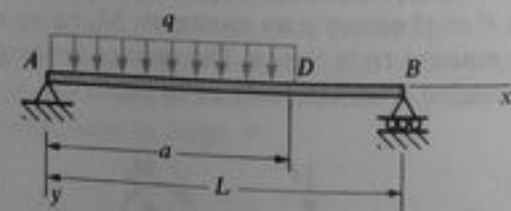
Probs. 7.9-5 y 7.10-5



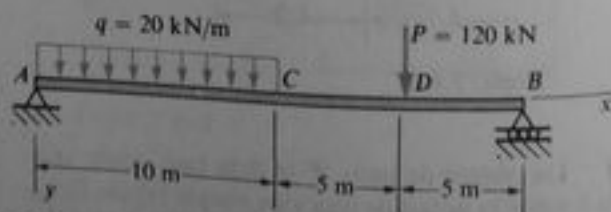
Probs. 7.9-6 y 7.10-6



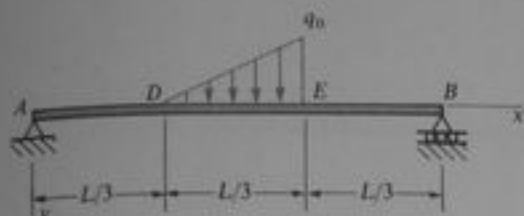
Probs. 7.9-7 y 7.10-7



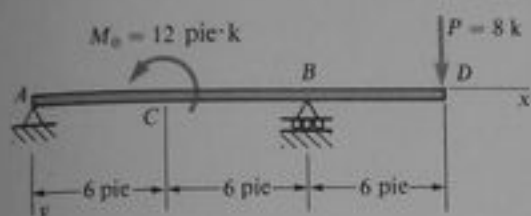
Probs. 7.9-8 y 7.10-8



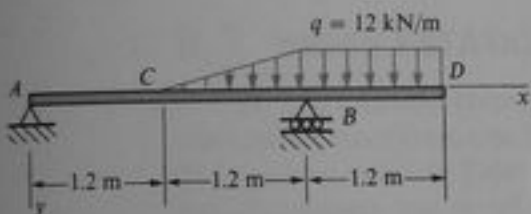
Probs. 7.9-9 y 7.10-9



Probs. 7.9-10 y 7.10-10



Probs. 7.9-11 y 7.10-11



Probs. 7.9-12 y 7.10-12

Los problemas de la Sección 7.10 deben resolverse mediante funciones de discontinuidad

7.10-1, 7.10-2 y 7.10-3 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para la viga en voladizo AB mostrada en la figura. Obtener también el ángulo de rotación θ_x y la deflexión δ_x en el extremo libre. (Para la viga del Problema 7.10-3, suponer $E = 10 \times 10^3$ ksi e $I = 480$ plg⁴.)

7.10-4, 7.10-5, 7.10-6 y 7.10-7 Determinar la ecuación de la curva de deflexión para la viga simple AB mostrada en la figura. Obtener también el ángulo de rotación θ_x en el apoyo izquierdo y la deflexión δ_x en el punto D . (Para la viga del Problema 7.10-7, suponer $E = 210$ GPa e $I = 305 \times 10^6$ mm⁴.)

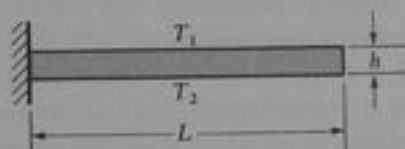
7.10-8, 7.10-9 y 7.10-10 Obtener la ecuación de la curva de deflexión para la viga simple AB (véase figura). Determinar también el ángulo de rotación θ_x en el apoyo derecho (positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj) y la deflexión δ_x en el punto D . (Para la viga del Problema 7.10-9, suponer $E = 200$ GPa e $I = 2.50 \times 10^9$ mm⁴.)

7.10-11 Una viga simple AB con un voladizo BD se muestra en la figura. Obtener la ecuación de la curva de deflexión para la viga. Determinar también las deflexiones δ_x y δ_x en los puntos C y D , respectivamente. (Suponer $E = 30 \times 10^6$ psi e $I = 250$ plg⁴.)

7.10-12 La viga con un voladizo mostrada en la figura está apoyada en A y B . Obtener la ecuación de la curva de deflexión y las deflexiones δ_x y δ_x en los puntos C y D , respectivamente. (Suponer $E = 200$ GPa e $I = 12 \times 10^6$ mm⁴.)

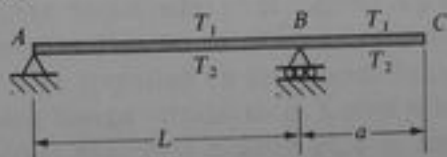
7.11-1 Una viga simple de longitud L y altura h experimenta un cambio de temperatura tal que la base de la viga está a una temperatura T_2 y la parte superior a una temperatura T_1 (véase Fig. 7-36a). Determinar la ecuación de la curva de deflexión de la viga, el ángulo de rotación θ en los apoyos, y la deflexión δ en el centro.

7.11-2 Una viga en voladizo de longitud L y altura h se somete a un cambio de temperatura tal que la temperatura sobre la superficie superior es T_1 y en la superficie inferior es T_2 . Obtener las expresiones para el ángulo de rotación θ (positivo en el sentido de las manecillas del reloj) y la deflexión δ (supuesta positiva hacia abajo) en el extremo libre.



Prob. 7.11-2

7.11-3 Una viga con un voladizo ABC , de altura h , se calienta a una temperatura T_1 sobre su cima y T_2 sobre su base (véase figura). Determinar la deflexión δ_x (supuesta positiva hacia abajo) en el extremo del voladizo.



Prob. 7.11-3

7.11-4 Una viga simple de longitud L y altura h (véase Fig. 7-36a) se calienta en forma no uniforme de modo tal que la diferencia de temperatura $T_2 - T_1$ entre la cima y la base varía linealmente a lo largo de la viga; esto es, $T_2 - T_1 = T_0 x$, donde T_0 es una constante. Determinar la deflexión máxima δ_{max} de la viga.

Vigas estáticamente indeterminadas

8.1 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

En este capítulo consideraremos el análisis de vigas que presentan una mayor cantidad de reacciones que las que se pueden determinar por medio de las ecuaciones de equilibrio estático. Tales vigas se dice que son **estáticamente indeterminadas**, y su análisis requiere que se calculen las deflexiones. En los capítulos anteriores sólo se consideraron vigas estáticamente determinadas y en cada caso era posible obtener en forma inmediata las reacciones de la viga resolviendo las ecuaciones de equilibrio estático. Conociendo las reacciones se podía entonces obtener los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes, lo que posibilitaría determinar los esfuerzos y deflexiones. Sin embargo, cuando la viga es estáticamente indeterminada no se pueden determinar las fuerzas sólo mediante el equilibrio. En vez de ello, se deben tomar en cuenta las deflexiones de la viga y obtener ecuaciones de compatibilidad para completar las ecuaciones de equilibrio. Este mismo procedimiento se explicó en el Capítulo 2 para estructuras estáticamente indeterminadas que involucraban miembros en tensión y compresión.

En la Fig. 8-1 se representan varios tipos de vigas estáticamente indeterminadas. La viga de la parte (a) de la figura está fija (o empotrada) en el soporte A y está simplemente apoyada en B ; tal viga se denomina **viga en voladizo apuntalada** o **viga simple empotrada**. Las reacciones de la viga consisten en una fuerza horizontal y otra vertical en A , un momento en A y una fuerza vertical en B . Como sólo existen tres ecuaciones independientes basadas en el equilibrio estático para la viga, no es posible calcular las cuatro reacciones mediante la estática. El número de reacciones excedentes respecto al de ecuaciones de equilibrio es llamado **grado de indeterminación estática**.^{*} Luego, la viga representada en la Fig. 8-1a se dice que es estáticamente indeterminada en primer grado. Cualquier reacción excedente respecto al número necesario para soportar la estructura en forma estáticamente determinada se denomina **redundante estática** y el número de tales redundantes necesariamente es el mismo que el grado de indeterminación estática. Por ejemplo, la reacción R_1 mostrada en la

^{*} También se conoce como grado de hiperestaticidad. (N. del T.)

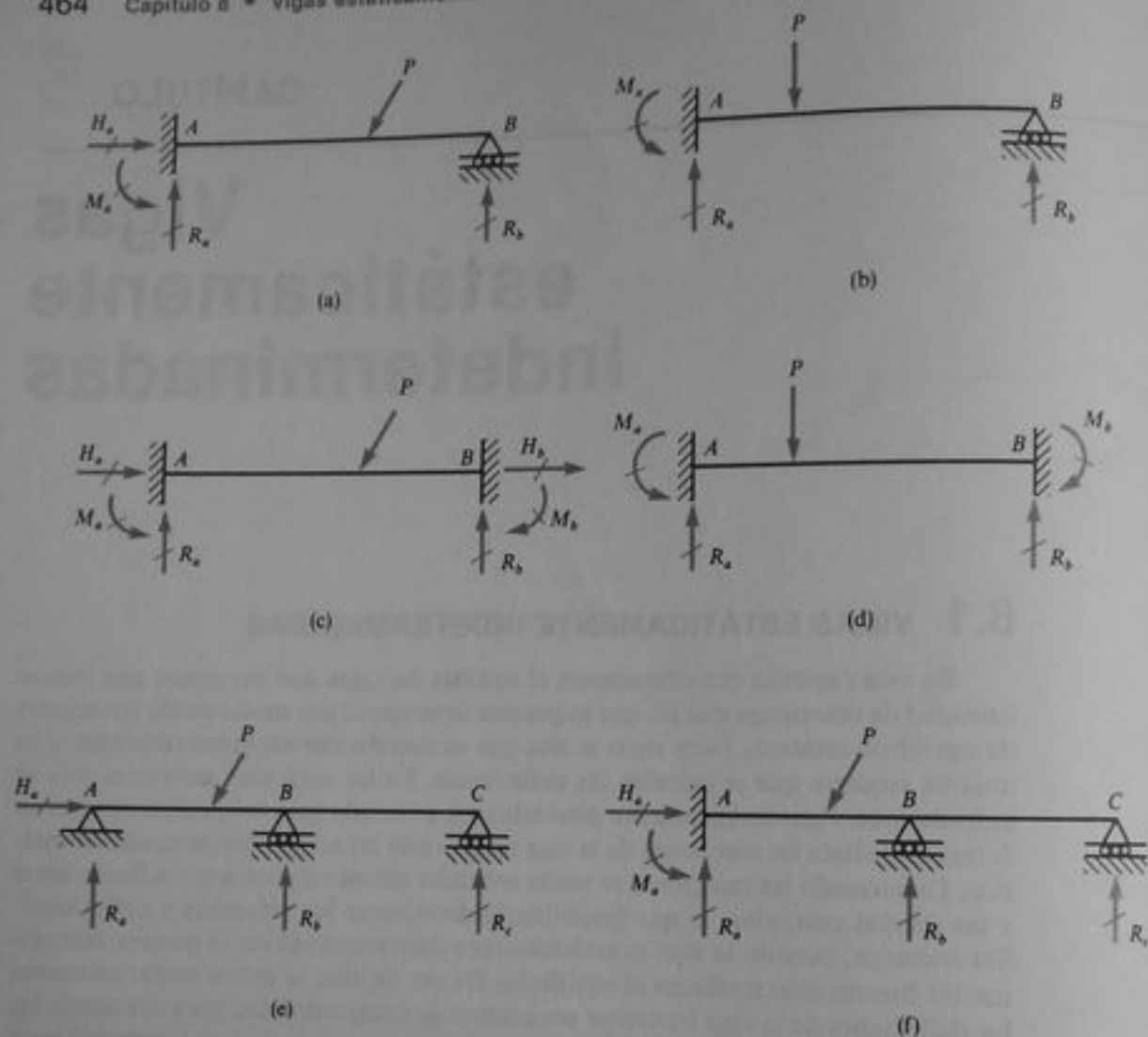


Fig. 8-1 Vigas estáticamente indeterminadas

Fig. 8-1a puede considerarse como una reacción redundante. Obsérvese que la estructura se convierte en una viga en voladizo cuando se retira el apoyo B . La estructura estáticamente determinada que se obtiene al retirar la redundante se designa **estructura liberada** o **estructura primaria**.

Otro planteamiento para la viga de la Fig. 8-1a es considerar el momento reactivo M_A como la redundante; si el momento reactivo es retirado, la estructura liberada es una viga simple con un soporte articulado en A y un soporte de rodillo en B .

Un caso especial ocurre si todas las cargas sobre la viga son verticales (Fig. 8-1b), ya que entonces desaparece la reacción horizontal. Sin embargo, la viga aún es estáticamente indeterminada en primer grado dado que existen ahora dos ecuaciones de equilibrio estático independientes y tres reacciones.

Una **viga de extremos fijos**, a veces llamada **viga doblemente empotrada**, o **viga fija**, se muestra en la Fig. 8-1c. En cada soporte existen tres cantidades reactivas; por lo cual, la viga tiene un total de seis reacciones desconocidas. Como existen tres ecuaciones de equilibrio, la viga es estáticamente indeterminada en tercer grado. Si

se consideran las reacciones en un extremo como las tres redundantes y se retiran de la estructura, se obtiene una viga en voladizo como estructura liberada. Si se retiran los dos momentos reactivos del extremo fijo y una reacción horizontal, la estructura liberada es una viga simple.

Considerando nuevamente el caso especial con cargas verticales únicamente (Fig. 8-1d), se encuentra que sólo deben determinarse cuatro reacciones. El número de ecuaciones de equilibrio estático es dos; por lo tanto, la viga es estáticamente indeterminada en segundo grado.

Las dos vigas restantes mostradas en la Fig. 8-1 son ejemplos de vigas continuas, llamadas así porque tienen más de un claro y son continuas sobre un apoyo. La viga mostrada en la Fig. 8-1e es estáticamente indeterminada en primer grado porque hay cuatro fuerzas reactivas y sólo tres ecuaciones de equilibrio estático. Si R_1 se elige como la redundante y se retira el apoyo B de la viga, se tendrá una viga simple estáticamente determinada AC . Si se selecciona R_2 como la redundante, la estructura liberada será una viga simple AB con un voladizo BC .

La última viga mostrada en la Fig. 8-1 es estáticamente indeterminada en segundo grado. Si se eligen R_1 y R_2 como las reacciones redundantes la estructura liberada es una viga en voladizo.

En las siguientes secciones trataremos diversos métodos para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas. El objetivo en cada caso es determinar las reacciones redundantes, ya que una vez conocidas, las demás reacciones pueden determinarse siempre mediante el equilibrio. Cuando se conocen las fuerzas es posible determinar los esfuerzos y deflexiones en cualquier punto mediante los métodos de análisis de vigas descritos en los capítulos anteriores.

8.2 ANÁLISIS MEDIANTE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN

Las vigas estáticamente indeterminadas pueden analizarse resolviendo una de las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. El procedimiento es esencialmente el mismo que para una viga determinada (véanse secciones 7.2, 7.3 y 7.4) y consiste en formular la ecuación diferencial, integrarla para obtener su solución general y aplicar entonces condiciones de frontera para evaluar las constantes de integración. Siempre habrá suficientes condiciones de frontera no sólo para obtener las constantes de integración, sino también para determinar las reacciones redundantes que aparecen en la solución. Pueden utilizarse la ecuación de segundo orden en términos de momento flexionante (Ec. 7-10a), la ecuación de tercer orden en términos de la fuerza cortante (Ec. 7-10b) o la ecuación de cuarto orden en términos de la intensidad de carga distribuida (Ec. 7-10c).

Debido a los inconvenientes de cálculo que surgen cuando es necesario evaluar un gran número de constantes, el método es aplicable sólo en casos de carga relativamente simple y para vigas de un solo claro. Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento.*

* El uso más antiguo de la ecuación diferencial para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas se encuentra en el libro de Navier sobre resistencia de materiales (Ref. 8-1).

Ejemplo 1

Una viga en voladizo apuntalada AB con una carga uniforme de intensidad q se muestra en la Fig. 8-2. Determinar las reacciones R_a , R_b y M_a para esta viga.

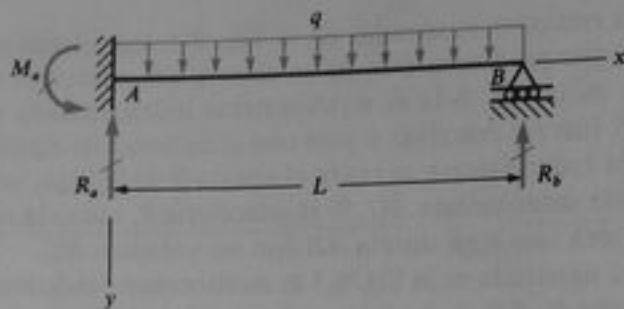


Fig. 8-2 Ejemplo 1. Viga en voladizo apuntalada o viga empotrada y apoyada

Empecemos con la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión. Entonces es necesario obtener una expresión para el momento flexionante M en cualquier sección transversal de la viga. Esta expresión estará no sólo en términos de la carga sino también de la reacción redundante. Por lo tanto, necesitamos seleccionar una reacción redundante y expresar las otras reacciones en términos de ella. Escojamos como reacción redundante a R_b ; entonces, de las ecuaciones de equilibrio estático obtenemos las reacciones en A en términos de R_b como sigue:

$$R_a = qL - R_b \quad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_bL \quad (a)$$

Ahora podemos obtener una expresión general para el momento flexionante en términos de R_b :

$$M = R_ax - M_a - \frac{qx^2}{2} = qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_bL - \frac{qx^2}{2}$$

La ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión es

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_bL + \frac{qx^2}{2}$$

y dos integraciones sucesivas dan

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_b Lx + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} - \frac{R_b Lx^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Hay tres cantidades desconocidas en estas ecuaciones (C_1 , C_2 y R_b) y tres condiciones de frontera:

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

Aplicando estas condiciones a las ecuaciones anteriores se obtiene $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, y

$$R_b = \frac{3qL}{8} \quad (8-1)$$

Con el valor de la redundante R_b ahora establecido, fácilmente podemos determinar las reacciones restantes a partir de las Ecs. (a):

$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (8-2a, b)$$

También, podemos ahora sustituir estas cantidades en las ecuaciones para la deflexión v , la pendiente v' y el momento flexionante M y así obtener un análisis completo de la viga.

Una forma optativa para analizar esta viga es considerar al momento M_a como la redundante. Entonces expresamos el momento flexionante M en términos de M_a , sustituimos la expresión resultante en la ecuación diferencial de segundo orden y resolvemos como antes. Otro procedimiento es empezar con la ecuación diferencial de cuarto orden, como se muestra en el siguiente ejemplo. Asimismo, las ecuaciones diferenciales pueden resolverse utilizando funciones de discontinuidad si se desea.

Ejemplo 2

Analizar la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig. 8-3 resolviendo la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión.

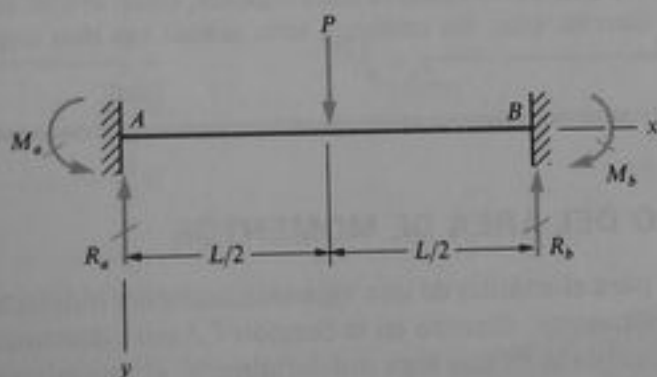


Fig. 8-3 Ejemplo 2. Viga doblemente empotrada

La carga concentrada P actúa en el punto medio de la viga; por lo que concluimos a partir de la simetría que $M_a = M_b$ y $R_a = R_b = P/2$. Luego, sólo se requiere determinar una cantidad redundante (M_a). En la región comprendida entre $x = 0$ y $x = L/2$, no actúa ninguna carga sobre la viga, por lo que la ecuación diferencial resulta

$$EIv'''' = 0$$

Integrando se obtiene

$$EIv''' = C_1 \quad (b)$$

$$EIv'' = C_1x + C_2 \quad (c)$$

$$EIv' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (d)$$

$$EIv = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (e)$$

Las condiciones de frontera aplicables a la mitad izquierda de la viga son las siguientes: primero, la fuerza cortante a lo largo de esta porción de la viga es igual a R_a ; luego, de la Ec. (b) obtenemos $C_1 = -P/2$. Enseguida, observamos que el momento flexionante en $x = 0$ es igual a $-M_a$; por lo tanto, de la Ec. (c) obtenemos $C_2 = M_a$. Las dos condiciones sobre la pendiente, esto es, que $v' = 0$ cuando $x = 0$ y cuando $x = L/2$ nos llevan a $C_3 = 0$ y

$$M_a = \frac{PL}{8} \quad (8-3)$$

De esta manera, se ha determinado el momento redundante M_a . Finalmente, tenemos la condición de que $v = 0$ cuando $x = 0$, lo que da $C_4 = 0$. Combinando estos resultados podemos formular la ecuación de la curva de deflexión:

$$v = \frac{Px^2}{48EI} (3L - 4x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (8-4)$$

Derivando esta ecuación podemos obtener por diferenciación las ecuaciones para la pendiente, el momento flexionante y la fuerza cortante.

Como observamos en este ejemplo, siempre existen suficientes condiciones de frontera para evaluar no sólo las constantes de integración sino también las reacciones redundantes. A veces es necesario obtener las ecuaciones diferenciales para más de una región de la viga y utilizar entonces las condiciones de continuidad entre regiones, como se hizo anteriormente para vigas estáticamente determinadas. Sin embargo, tales análisis son muy largos y tediosos.

8.3 MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

Otro método para el análisis de una viga estáticamente indeterminada es el método del área de momentos, descrito en la Sección 7.5 para determinar las deflexiones de una viga. En el caso de una viga indeterminada, el procedimiento consiste en utilizar los dos teoremas del área de momentos para obtener las ecuaciones adicionales que son necesarias para calcular las reacciones redundantes. Estas ecuaciones adicionales representan condiciones sobre las pendientes y deflexiones de la viga, y la cantidad de tales condiciones siempre será igual a la de redundantes.

El análisis de una viga estáticamente indeterminada mediante el método del área de momentos empieza con la selección de las reacciones redundantes. Entonces se retiran tales reacciones de la viga, obteniéndose una estructura liberada estáticamente determinada. A continuación se sitúan las cargas sobre la estructura liberada y se dibuja el diagrama correspondiente de momento flexionante dividido entre la rigidez a flexión (esto es, el diagrama M/EI). En forma similar, se aplican las redundantes como cargas que actúan sobre la estructura liberada y nuevamente se dibuja el diagrama M/EI . Finalmente, se aplican los teoremas del área de momentos que proporcionan las ecuaciones necesarias para el cálculo de las reacciones redundantes.

tes. Estas ecuaciones pertenecen a las áreas y primeros momentos de los diagramas M/EI ; las relaciones particulares que deben utilizarse dependen del tipo de viga y de la elección de redundantes. La técnica a emplear se representa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Mediante el método del área de momentos, determinar las reacciones para la viga en voladizo apuntalada AB mostrada en la Fig. 8-4a.

Esta viga es estáticamente indeterminada en primer grado, por lo que seleccionamos una reacción como la redundante. Si se selecciona R_b como la redundante y se retira de la viga, la estructura liberada es una viga en voladizo apoyada en A (Fig. 8-4b). Sobre esta viga se coloca a P y R_b como cargas, produciéndose el diagrama de momento flexionante mostrado en la Fig. 8-4c. Como la viga tiene una rigidez a flexión constante EI , el diagrama M/EI tiene la misma forma que el diagrama de momentos.

Ahora se pueden utilizar los teoremas del área de momentos. Ya que la pendiente de la curva de deflexión es cero en el empotramiento A (Fig. 8-4a), se observa que la tangente a la curva en el punto A pasa por B . En otras palabras, la desviación Δ_{ba} del punto B a partir de la tangente en A es cero. Por lo que, se deduce del segundo teorema del área de momentos que el primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B , tomado con respecto al punto B , debe ser igual a cero. Esta relación proporciona la ecuación

$$\frac{L}{2} \left(\frac{R_b L}{EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) - \frac{a}{2} \left(\frac{Pa}{EI} \right) \left(L - \frac{a}{3} \right) = 0$$

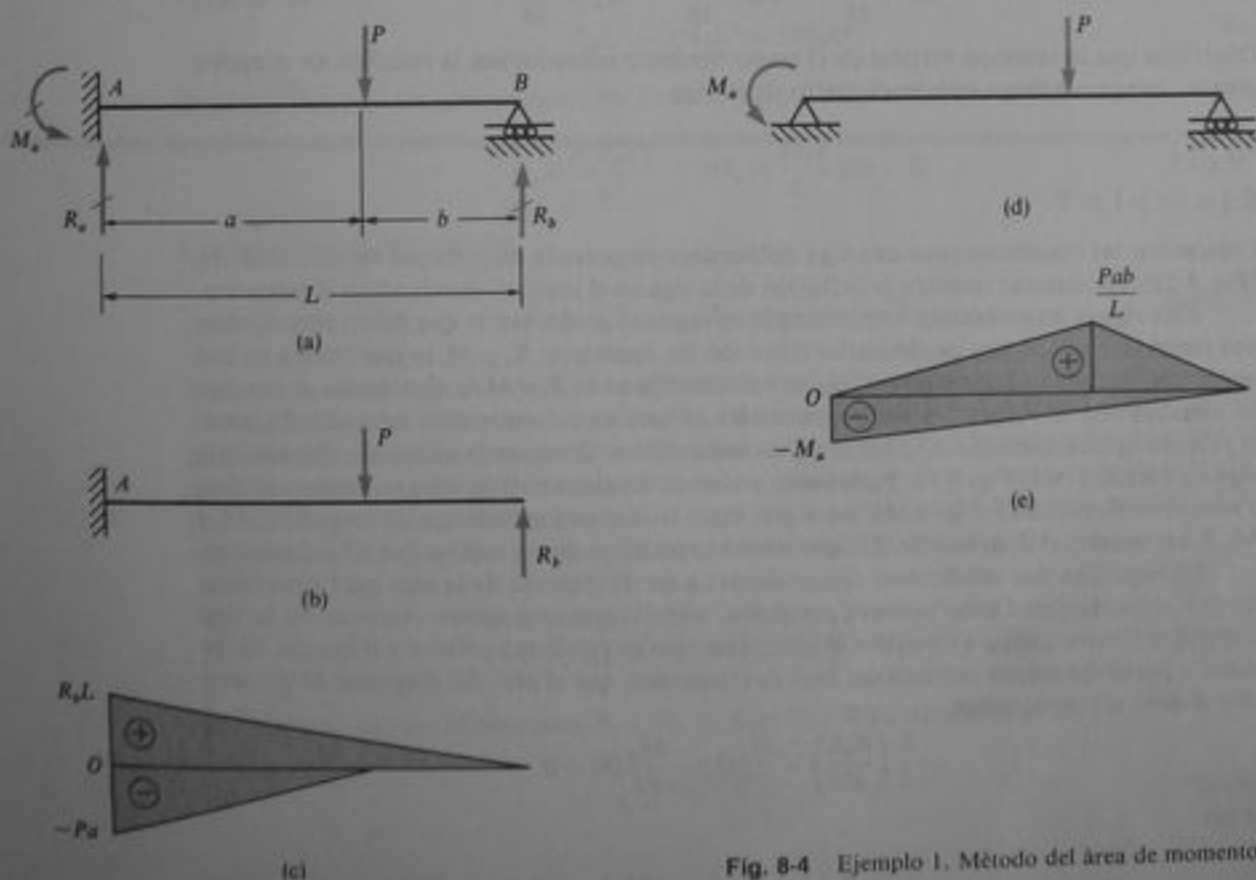


Fig. 8-4 Ejemplo 1. Método del área de momentos

de donde

$$R_b = \frac{Pa^2}{2L^3}(3L - a) \quad (8-5)$$

Conociendo esta reacción redundante podemos determinar las otras dos reacciones a partir del equilibrio estático; los resultados son

$$R_a = \frac{Pb}{2L^3}(3L^2 - b^2) \quad M_a = \frac{Pab}{2L^2}(L + b) \quad (8-6a, b)$$

Con todas las reacciones ya conocidas podemos proceder a calcular los esfuerzos y deflexiones según sea necesario.

Como una solución optativa podemos resolver este mismo problema considerando al momento reactivo M_a como la redundante. En tal caso, la estructura liberada es una viga simple (Fig. 8-4d), y el diagrama de momento flexionante correspondiente debido a P y a M_a se muestra en la Fig. 8-4e. Utilizando nuevamente el segundo teorema del área de momentos y tomando el primer momento del área del diagrama M/EI respecto al punto B , obtenemos

$$\frac{L}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) \left(\frac{L+b}{3} \right) - \frac{L}{2} \left(\frac{M_a}{EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos para M_a el mismo resultado que antes (véase Ec. 8-6b).

A partir de los resultados anteriores, obtenemos las reacciones para una viga con una carga concentrada en el centro sustituyendo $a = b = L/2$; luego,

$$R_a = \frac{11P}{16} \quad R_b = \frac{5P}{16} \quad M_a = \frac{3PL}{16} \quad (8-7a, b, c)$$

Obsérvese que la reacción vertical en el empotramiento sobreduplica la reacción en el apoyo simple, aunque la carga esté en el centro de la viga.

Ejemplo 2

Determinar las reacciones para una viga doblemente empotrada cargada por un momento M_0 (Fig. 8-5a). Determinar también la deflexión de la viga en el punto C donde actúa el momento.

Esta viga es estáticamente indeterminada en segundo grado, por lo que deben seleccionarse dos redundantes. Las tres posibilidades útiles son las siguientes: R_a y M_a lo que resulta en una estructura liberada en forma de una viga en voladizo fija en B ; R_b y M_b lo que resulta en una viga en voladizo fija en A ; y M_a y M_b lo que resulta en una viga simplemente apoyada. Elijamos la primera opción tomando R_a y M_a como las redundantes. Entonces la estructura liberada es la viga en voladizo de la Fig. 8-5b. Fácilmente podemos dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante (Fig. 8-5c), para esta viga, la cual está sometida a las cargas R_a , M_a y M_0 . Nuevamente, el diagrama M/EI tiene el mismo perfil, ya que se supone que EI es constante.

Se requieren dos condiciones concernientes a las deflexiones de la viga para determinar las dos redundantes. Como primera condición, observamos que ambos extremos de la viga tienen pendientes iguales a cero; por lo que, el cambio en pendiente entre A y B es cero. Se deduce, a partir del primer teorema del área de momentos, que el área del diagrama M/EI entre A y B debe ser cero; luego,

$$\frac{L}{2} \left(\frac{R_a L}{EI} \right) - \frac{M_a}{EI} (L) - \frac{M_0}{EI} (b) = 0$$

o sea

$$R_a L^2 - 2M_a L = 2M_0 b$$

(a)

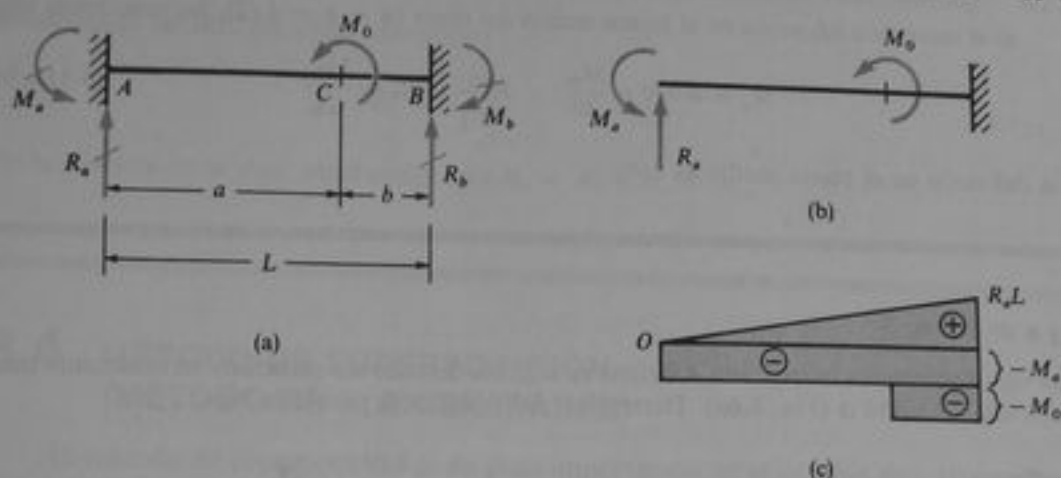


Fig. 8-5 Ejemplo 2. Método del área de momentos

La segunda condición se obtiene del hecho de que la tangente a la curva de deflexión en A pasa por el punto B , lo que significa que el primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B , tomada con respecto a B , es cero. La ecuación resultante es

$$\frac{L}{2} \left(\frac{R_a L}{EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - L \left(\frac{M_a}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) - b \left(\frac{M_0}{EI} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = 0$$

o sea

$$R_a L^3 - 3M_a L^2 = 3M_0 b^2 \quad (b)$$

Podemos resolver simultáneamente las Ecs. (a) y (b) y obtener las redundantes:

$$R_a = \frac{6M_0 ab}{L^3} \quad M_a = \frac{M_0 b}{L^2} (2a - b) \quad (8-8a, b)$$

Las otras dos reacciones son

$$R_b = -R_a \quad M_b = \frac{M_0 a}{L^2} (a - 2b) \quad (8-9a, b)$$

según se determina a partir de las ecuaciones del equilibrio estático.

La deflexión δ_c en el punto de aplicación del momento puede determinarse a partir del segundo teorema del área de momentos. Observamos que δ_c es igual a la desviación del punto C desde la tangente en A , porque la tangente en A es horizontal. Por lo tanto, δ_c es igual al primer momento del área del diagrama M/EI entre A y C , tomada con respecto al punto C . Como se indica en la Fig. 8-5c, se aprecia que esta deflexión se calcula como sigue:

$$\delta_c = \frac{a}{2} \left(\frac{a}{L} \right) \left(\frac{R_a L}{EI} \right) \left(\frac{a}{3} \right) - a \left(\frac{M_a}{EI} \right) \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{R_a a^3}{6EI} - \frac{M_a a^2}{2EI}$$

Sustituyendo las expresiones para R_a y M_a (véanse Ecs. 8-8), obtenemos

$$\delta_c = \frac{M_0 a^2 b^2 (b - a)}{2L^3 EI} \quad (8-10)$$

para la deflexión bajo la carga.

Si el momento M_0 actúa en el punto medio del claro ($a = b = L/2$), las reacciones son

$$M_a = -M_b = \frac{M_0}{4} \quad R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L} \quad (8-11a, b)$$

y la deflexión en el punto medio es cero.

Ejemplo 3

Una viga doblemente empotrada AB tiene su soporte derecho sin rotación, verticalmente más abajo una cantidad Δ (Fig. 8-6a). Determinar las reacciones para esta viga.

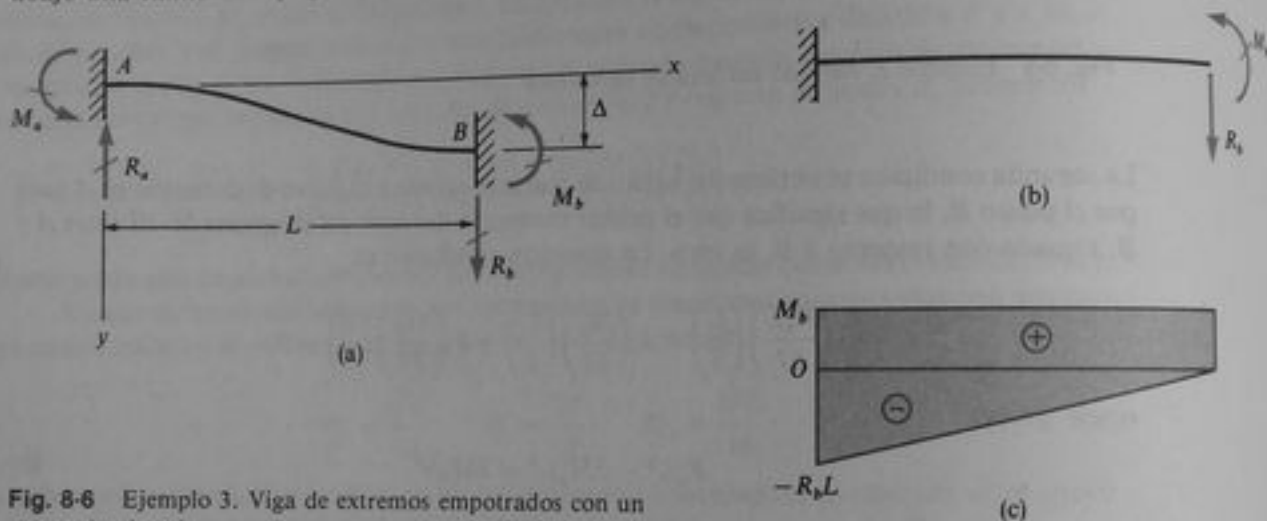


Fig. 8-6 Ejemplo 3. Viga de extremos empotrados con un apoyo desplazado

Seleccionemos las reacciones R_b y M_b en el apoyo B como las redundantes. La estructura liberada correspondiente, sometida a las cargas R_b y M_b , se muestra en la Fig. 8-6b. El diagrama de momentos flexionantes se muestra en la última parte de la figura.

Se requieren dos ecuaciones para determinar R_b y M_b . La primera ecuación representa la condición de que la pendiente de la viga es cero en ambos empotramientos. Por lo que el área del diagrama M/EI entre A y B es igual a cero (según el primer teorema del área de momentos):

$$L \left(\frac{M_b}{EI} \right) - \frac{L}{2} \left(\frac{R_b L}{EI} \right) = 0$$

o sea

$$2M_b = R_b L \quad (c)$$

La segunda condición se refiere a la desviación del punto B respecto a la tangente en A . Como esta desviación es Δ , se deduce a partir del segundo teorema del área de momentos que Δ es igual al negativo del primer momento del área del diagrama M/EI entre A y B , tomado con respecto a B :

$$\Delta = -L \left(\frac{M_b}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{L}{2} \left(\frac{R_b L}{EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right)$$

o sea

$$2R_b L - 3M_b = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (d)$$

Resolviendo las Ecs. (c) y (d), obtenemos

$$R_b = \frac{12EI\Delta}{L^3} \quad M_b = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (8-12a, b)$$

De la simetría de la viga, observamos que $R_a = R_b$ y $M_a = M_b$.

8.4 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN (MÉTODO DE FLEXIBILIDADES)

El método de superposición es de gran importancia en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Es aplicable a muchos tipos diferentes de estructuras, tales como armaduras y marcos, adicionalmente a las vigas que representan el objetivo fundamental de este capítulo. El método se ha utilizado previamente para el análisis de sistemas estáticamente indeterminados compuestos de miembros a tensión y compresión (véase Sección 2.4).

El fundamento del método de superposición puede describirse en términos sencillos. Empezamos por identificar las redundantes estáticas, según lo explicado en las secciones anteriores. Después se retiran las redundantes de la viga indeterminada, obteniéndose una estructura liberada estáticamente determinada. Los desplazamientos de la estructura liberada pueden determinarse mediante las técnicas descritas en el Capítulo 7. En particular se pueden determinar los desplazamientos (traslaciones o rotaciones) correspondientes a las redundantes y causados por las cargas. Después, las redundantes mismas se visualizan como cargas que actúan sobre la estructura liberada y se calculan los desplazamientos correspondientes. A partir del principio de superposición, sabemos que los desplazamientos finales debidos a las cargas reales y a las redundantes deben ser iguales a la suma de tales desplazamientos calculados separadamente. En el caso de apoyos redundantes, los desplazamientos correspondientes serán cero o tendrán cantidades conocidas, por lo que podemos formular ecuaciones de superposición para estas relaciones. Finalmente, estas ecuaciones se resuelven para los valores de las reacciones redundantes, después de lo cual se determinan las demás reacciones mediante equilibrio estático.

Los pasos descritos en el párrafo anterior se explican mediante una ilustración. Analicemos nuevamente una viga en voladizo apuntalada que soporta una carga uniforme (véase Fig. 8-7a). Si la reacción R_b se selecciona como la redundante estática y el apoyo correspondiente se retira, obtenemos una viga en voladizo como estructura liberada (Fig. 8-7b). La deflexión de esta viga en el extremo B debida a la carga uniforme se denota δ'_b , y la deflexión causada por la redundante se designa δ''_b (véase Fig. 8-7c). La deflexión total δ_b en la estructura original, obtenida mediante la superposición de las deflexiones δ'_b y δ''_b , debe ser cero. Esta conclusión nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\delta_b = \delta'_b - \delta''_b = 0 \quad (a)$$

El signo negativo aparece en esta ecuación porque δ'_b es hacia abajo mientras que δ''_b es hacia arriba. Las deflexiones δ'_b y δ''_b debidas a la carga uniforme q y a la redun-

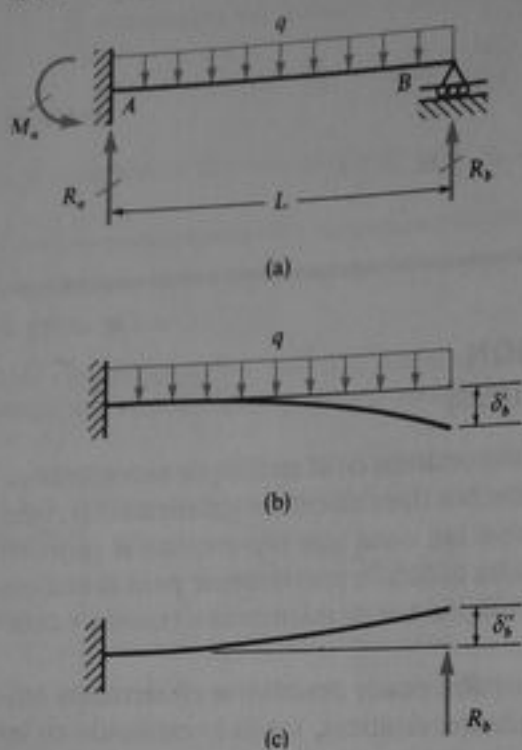


Fig. 8-7 Método de superposición

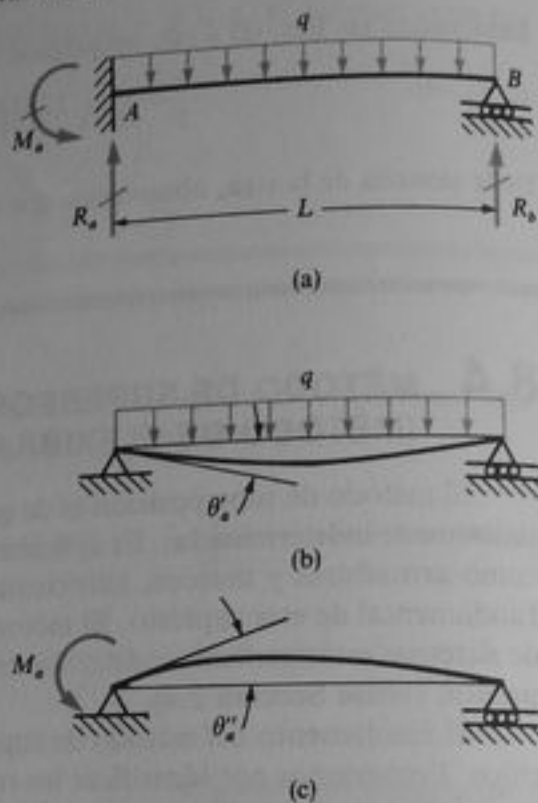


Fig. 8-8 Método de superposición

dante R_b se encuentran fácilmente con la ayuda de la Tabla G-1 del Apéndice G (véanse casos 1 y 4). Utilizando las fórmulas indicadas allí, obtenemos de la Ec. (a):

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_b L^3}{3EI} = 0$$

de donde

$$R_b = \frac{3qL}{8} \quad (8-13)$$

La reacción R_a y el momento M_a pueden determinarse ahora a partir del equilibrio de la viga; los resultados son

$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (8-14a, b)$$

Esta misma viga (Fig. 8-8a) pudo analizarse en forma diferente tomando como redundante al momento M_a ; en ese caso, la estructura liberada es una viga simple (Figs. 8-8b y c). El ángulo de rotación producido por la carga uniforme que actúa sobre la estructura liberada (Tabla G-2, Caso 1) es

$$\theta_a' = \frac{qL^3}{24EI}$$

y el ángulo correspondiente originado por la redundante M_a (Tabla G-2, Caso 7) es

$$\theta_a'' = \frac{M_a L}{3EI}$$

La ecuación de superposición, que establece que el ángulo de rotación en el apoyo A de la viga original es cero, resulta

$$\theta_a = \theta'_a - \theta''_a = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_a L}{3EI} = 0 \quad (b)$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $M_a = qL^2/8$, que concuerda con el resultado previo.

Después de resolver las reacciones de una viga estáticamente indeterminada, el cálculo de todos los esfuerzos resultantes (fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes) no presenta mayor dificultad ya que las ecuaciones de equilibrio estático bastan para este propósito. Además, las deflexiones y las pendientes pueden también obtenerse en cualquier punto, ya sea mediante la ecuación diferencial de la curva de deflexión o por el principio de superposición en conjunto con las fórmulas de deflexión listadas en el Apéndice G. En los ejemplos explicativos a continuación y también en los problemas, la atención debe enfocarse principalmente a determinar las reacciones, que es el paso esencial en la solución.

El método de análisis descrito en esta sección se denomina **método de flexibilidades** o **método de fuerzas**. La última designación surge de la utilización de cantidades de fuerza (fuerzas y momentos) como las redundantes; la primera denominación se usa porque los coeficientes de las incógnitas (términos tales como $L/3EI$ en la Ec. b) son **flexibilidades** (esto es, deflexiones producidas por una carga unitaria). Las ecuaciones de superposición que expresan condiciones impuestas sobre las deflexiones (véanse Ecs. a y b) se llaman usualmente **ecuaciones de compatibilidad**. El método de superposición, como el método del área de momentos y el de la ecuación diferencial de la curva de deflexión, sólo son aplicables a estructuras linealmente elásticas.

Ejemplo 1

Las reacciones para la viga continua de dos claros ABC mostrada en la Fig. 8-9a deben determinarse por el método de superposición. Obsérvese que la viga soporta una carga uniforme de intensidad q .

Seleccionando a la reacción central R_b como la redundante, se aprecia que la estructura liberada es una viga simple (Fig. 8-9b). Bajo la acción de la carga uniforme, la deflexión del punto B de la estructura liberada (véase Tabla G-2, Caso 1) es

$$\delta'_b = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

donde L es la longitud de cada claro. La deflexión en dirección hacia arriba producida por la redundante (véase Fig. 8-9c) es

$$\delta''_b = \frac{R_b(2L)^3}{48EI} = \frac{R_b L^3}{6EI}$$

según se obtiene de la Tabla G-2, Caso 4. La ecuación de compatibilidad perteneciente a la deflexión vertical en el punto B es

$$\delta_b = \delta'_b - \delta''_b = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_b L^3}{6EI} = 0$$

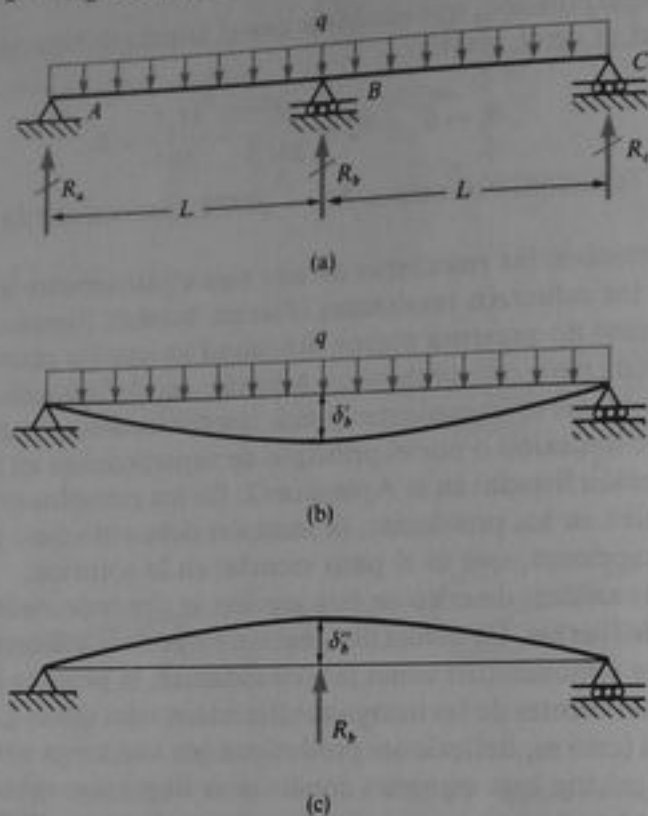


Fig. 8-9 Ejemplo 1. Viga continua de dos claros

de donde

$$R_b = \frac{5qL}{4} \quad (8-15)$$

Las otras reacciones tienen los valores $R_a = R_c = 3qL/8$, según se determina del equilibrio estático. Conocidas todas las reacciones, no tendremos dificultad en encontrar los esfuerzos y deflexiones.

Ejemplo 2

Una viga con extremos empotrados se carga mediante una fuerza P que actúa en la posición mostrada en la Fig. 8-10a. Determinar las fuerzas y momentos reactivos en los extremos de la viga.

Seleccionemos los momentos reactivos M_a y M_b para las redundantes, obteniéndose así una estructura liberada en forma de una viga simple (Fig. 8-10b). Los ángulos en los extremos producidos por la carga P se obtienen del Caso 5 de la Tabla G-2:

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

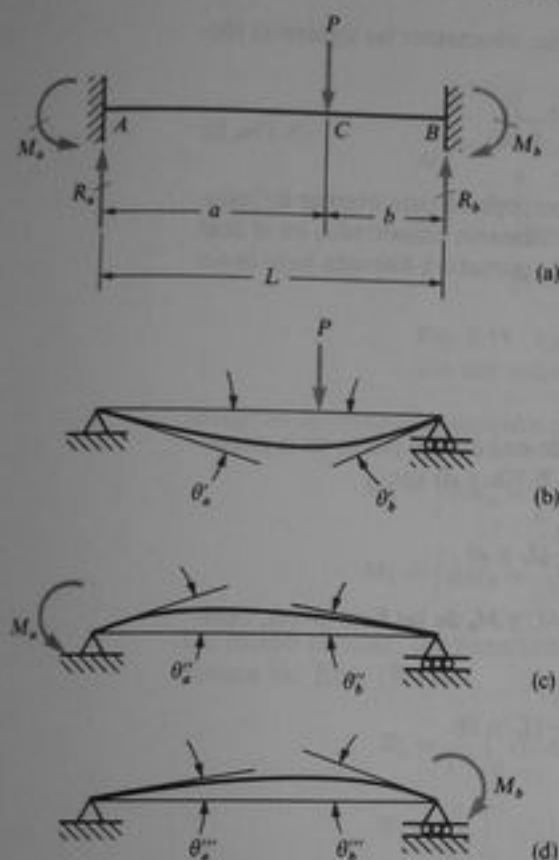


Fig. 8-10 Ejemplo 2. Viga doblemente empotrada con una carga concentrada

Ahora aplicamos los momentos redundantes M_a y M_b como si fueran cargas sobre la estructura liberada (Figs. 8-10c y d). Los ángulos en los extremos debidos a M_a son

$$\theta'_a = \frac{M_a L}{3EI} \quad \theta'_b = \frac{M_a L}{6EI}$$

y los debidos a M_b son

$$\theta''_a = \frac{M_b L}{6EI} \quad \theta''_b = \frac{M_b L}{3EI}$$

Como los ángulos de rotación en ambos extremos de la viga original son cero, tenemos dos ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_a = \theta'_a - \theta''_a - \theta'''_a = 0$$

$$\theta_b = \theta'_b - \theta'_b - \theta''_b = 0$$

Cuando se sustituyen en estas ecuaciones las diversas expresiones para los ángulos, resultan dos ecuaciones simultáneas cuyas incógnitas son M_a y M_b :

$$\frac{M_a L}{3EI} + \frac{M_b L}{6EI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{M_a L}{6EI} + \frac{M_b L}{3EI} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

Las soluciones son

$$M_a = \frac{Pab^2}{L^2} \quad (8-16a, b)$$

$$M_b = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

Mediante estos resultados y también las ecuaciones de equilibrio, obtenemos las siguientes fórmulas para las reacciones verticales:

$$R_a = \frac{Pb^2}{L^3}(L+2a) \quad R_b = \frac{Pa^2}{L^3}(L+2b) \quad (8-17a, b)$$

Para ejemplificar cómo puede utilizarse el principio de superposición para obtener deflexiones, calculemos ahora la deflexión del punto C de la viga doblemente empotrada, en el cual se aplica la carga (Fig. 8-10a). La deflexión de este punto en la estructura liberada bajo la acción de la carga P (Fig. 8-10b) es

$$\delta_c = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

según el Caso 5 de la Tabla G-2. Las deflexiones hacia arriba de este mismo punto en la estructura liberada debidas a los momentos M_a y M_b (véanse Figs. 8-10c y d) son

$$\delta_c'' = \frac{M_a ab}{6LEI}(L+b) \quad \delta_c''' = \frac{M_b ab}{6LEI}(L+a)$$

según el Caso 7 de la Tabla G-2. Sustituyendo los valores de M_a y M_b de las Ecs. (8-16), obtenemos

$$\delta_c'' = \frac{Pa^2b^3}{6L^3EI}(L+b) \quad \delta_c''' = \frac{Pa^3b^2}{6L^3EI}(L+a)$$

Por lo tanto, la deflexión total en el punto C es

$$\delta_c = \delta_c' - \delta_c'' - \delta_c''' = \frac{Pa^3b^3}{3L^3EI} \quad (8-18)$$

En el caso especial cuando la carga P está en medio de la viga, la deflexión en el centro es

$$\delta_c = \frac{PL^3}{192EI} \quad (8-19)$$

y las reacciones son

$$M_a = M_b = \frac{PL}{8} \quad R_a = R_b = \frac{P}{2} \quad (8-20a, b)$$

Ejemplo 3

Determinar las reacciones para una viga doblemente empotrada con una carga uniforme sobre una porción del claro (Fig. 8-11).

Aislamos un elemento $q dx$ de la carga a una distancia x desde el extremo izquierdo de la viga. Considerando a este elemento como una carga concentrada, podemos utilizar las fórmulas obtenidas en el ejemplo anterior. Empezando con las fórmulas para los momentos M_a y M_b (véanse Ecs. 8-16), podemos reemplazar P por $q dx$, a por x , y b por $L-x$; en consecuencia, los momentos en los empotramientos, debidos al elemento de carga son

$$dM_a = \frac{qx(L-x)^2 dx}{L^3} \quad dM_b = \frac{qx^2(L-x) dx}{L^3}$$

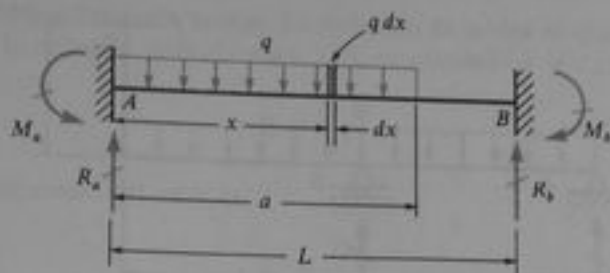


Fig. 8-11 Ejemplo 3. Viga doblemente empotrada con una carga uniforme sobre parte del claro

Integrando sobre la porción cargada de la viga se obtiene

$$M_a = \int dM_a = \frac{q}{L^2} \int_0^a x(L-x)^2 dx = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2) \quad (8-21)$$

$$M_b = \int dM_b = \frac{q}{L^2} \int_0^a x^2(L-x) dx = \frac{qa^3}{12L^2} (4L - 3a) \quad (8-22)$$

De modo similar, las reacciones verticales en los extremos pueden determinarse mediante las Ecs. (8-17):

$$R_a = \frac{q}{L^3} \int_0^a (L-x)^2(L+2x) dx = \frac{qa}{2L^3} (2L^3 - 2a^2L + a^3) \quad (8-23)$$

$$R_b = \frac{q}{L^3} \int_0^a x^2(3L-2x) dx = \frac{qa^3}{2L^3} (2L-a) \quad (8-24)$$

De esta manera, se han determinado los resultados deseados.

Si una viga doblemente empotrada tiene una carga uniforme sobre todo el claro (Fig. 8-12), podemos obtener las reacciones sustituyendo $a = L$ en las ecuaciones anteriores, lo que nos lleva a

$$M_a = M_b = \frac{qL^2}{12} \quad R_a = R_b = \frac{qL}{2} \quad (8-25a, b)$$

Las reacciones en los apoyos de una viga con extremos empotrados se denominan **momentos de empotramiento** y **fuerzas de empotramiento**. Estas reacciones desempeñan un papel importante en muchos métodos de análisis estructural.



Fig. 8-12 Ejemplo 3. Viga doblemente empotrada con una carga uniforme

Ejemplo 4

Una viga ABC (Fig. 8-13a) está simplemente apoyada en A y B y pende de un cable CD en el punto C . Antes de aplicar la carga uniforme q , no existe ninguna fuerza en el cable ni éste está

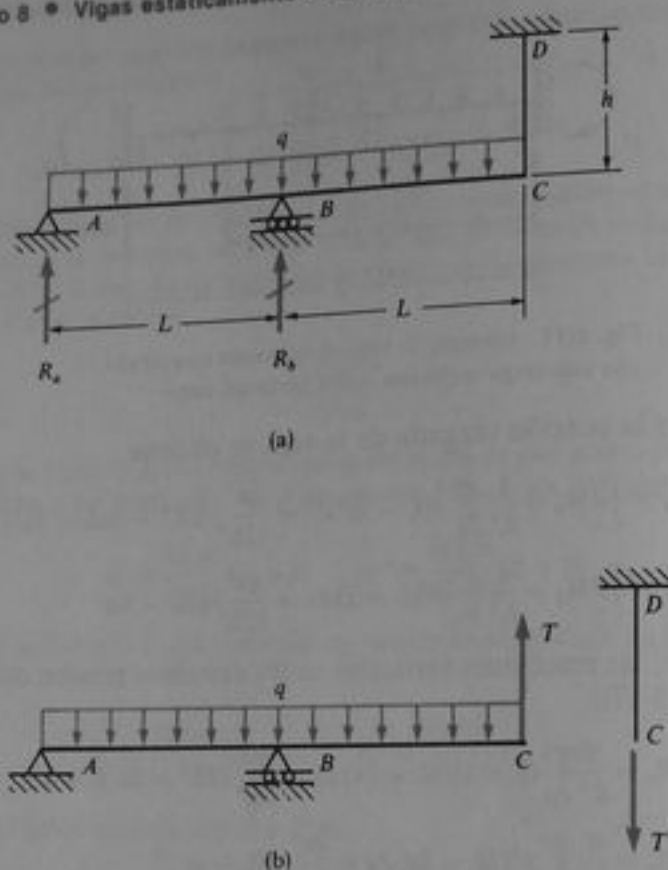


Fig. 8-13 Ejemplo 4. Viga soportada por un cable

flojo. Cuando se aplica la carga q la viga se deforma hacia abajo en C desarrollándose una fuerza de tensión T en el cable. Determinar la magnitud de esta fuerza.

En este análisis es conveniente seleccionar la fuerza desconocida T en el cable como la redundante y dividir la estructura en dos partes (Fig. 8-13b). La estructura liberada consiste entonces en la viga ABC y el cable CD como estructuras independientes, con la fuerza T actuando sobre la viga hacia arriba y hacia abajo sobre el cable. La deflexión en el punto C de la viga consistirá en dos partes, una deflexión hacia abajo δ_c' debida a la carga uniforme y una deflexión hacia arriba δ_c'' , debida a la fuerza T . Al mismo tiempo, el extremo del cable (punto C) se desplazará hacia abajo en una cantidad δ_c''' igual a la elongación del cable. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad que expresa el hecho de que el desplazamiento hacia abajo del extremo de la viga es igual a la elongación del cable, es

$$\delta_c' - \delta_c'' = \delta_c'''$$

Habiendo formulado esta ecuación, nos abocamos ahora a la tarea de evaluar los tres términos de deflexión.

La deflexión en el extremo del voladizo producida por la carga uniforme puede determinarse a partir de los resultados presentados en el Ejemplo 3 de la Sección 7.6. Mediante la Ec. (7-54) de tal ejemplo, y sustituyendo $a = L$, obtenemos

$$\delta_c' = \frac{qL^4}{4EI}$$

donde EI es la rigidez a flexión de la viga. La deflexión de la viga en C debida a la fuerza T puede tomarse de la respuesta al Problema 7.5-14, sustituyendo $a = L$; luego,

$$\delta_c'' = \frac{2TL^3}{3EI}$$

Finalmente, el estiramiento del cable es

$$\delta_c''' = \frac{Th}{EA}$$

donde h es la longitud del cable y EA su rigidez axial.

Sustituyendo las fórmulas de deflexión anteriores en la ecuación de compatibilidad y resolviendo para la fuerza T , obtenemos

$$T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 12hl} \quad (8-26)$$

Obsérvese que en este ejemplo la redundante se seleccionó como una fuerza interna en lugar de una reacción externa.

8.5 VIGAS CONTINUAS

Las vigas que son continuas sobre muchos apoyos (véase Fig. 8-14) se conocen como **vigas continuas** y comúnmente se encuentran en edificios, tuberías, puentes y varias clases de estructuras especializadas. Si las cargas sobre una viga continua son verticales y no existen deformaciones axiales, entonces todas las reacciones serán verticales. Para representar esquemáticamente este comportamiento, podemos considerar que uno de los apoyos es articulado y los demás son apoyos de rodillo, como se muestra en la figura. Entonces el número total de reacciones será el mismo que el de los apoyos y el grado de indeterminación estática será el número de apoyos menos dos. Luego, para la viga mostrada en la Fig. 8-14, hay cinco reacciones verticales, de las cuales tres son redundantes.

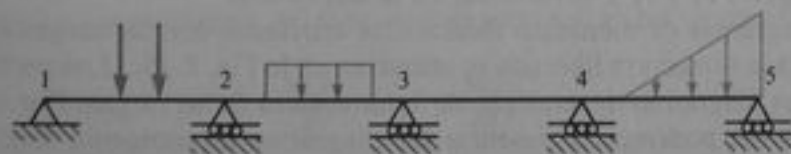


Fig. 8-14 Viga continua

Aunque podemos analizar una viga continua mediante cualesquiera de los métodos descritos en las secciones anteriores, sólo es práctico el método de superposición. Cuando se utiliza este método, una posibilidad es seleccionar como redundantes a las reacciones en los apoyos intermedios, lo que significa que la estructura liberada es una viga simple. Esta técnica se empleó en el Ejemplo 1 de la Sección 8.4 (véase Fig. 8-9) y es satisfactoria para vigas de sólo dos o tres claros. Cuando existen más de dos redundantes, es preferible seleccionar como redundantes a los momentos flexio-

nantes de la viga en los apoyos intermedios. Esta elección simplifica enormemente los cálculos ya que nos conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas en el que no aparecen más de tres incógnitas en cada ecuación, sin importar el número de redundantes.

Desarrollemos ahora con más detalle este procedimiento para analizar vigas continuas. Cuando los momentos flexionantes se retiran de la estructura, se interrumpe la continuidad de la viga en los apoyos, por lo que, la estructura liberada consiste en una serie de vigas simples. Cada una de tales vigas está sometida a las cargas externas que actúan normalmente sobre ella, junto con los dos momentos redundantes en sus extremos. Bajo la acción de estas cargas, podemos determinar los ángulos de rotación en los extremos de cada viga simple. Las ecuaciones de compatibilidad, que expresan el hecho de que en cada apoyo las vigas adyacentes deben tener el mismo ángulo de rotación, proporcionan las ecuaciones necesarias para calcular los momentos flexionantes desconocidos.

Considérese, por ejemplo, el tramo de una viga continua mostrado en la Fig. 8-15a. Los tres apoyos consecutivos se identifican como A , B y C , y las longitudes y momentos de inercia de los dos claros adyacentes se denotan por L_a , I_a y L_b , I_b , respectivamente. Sean M_a , M_b y M_c los momentos flexionantes en los tres apoyos. Las direcciones verdaderas de esos momentos dependerán de las cargas sobre la viga, pero para los propósitos de esta derivación se supondrá que son positivas (esto es, que causan compresión en la cima de la viga). La estructura liberada, consistente en vigas simples, se muestra en la Fig. 8-15b para los dos claros adyacentes. Cada claro está cargado por las cargas externas aplicadas más los dos momentos flexionantes redundantes. Estas cargas producen deflexiones y rotaciones de las dos vigas simples. El ángulo de rotación en el apoyo B de la viga izquierda se indica en la figura como θ'_b y la rotación de la viga derecha en este mismo apoyo es θ''_b . Estos ángulos se consideran positivos, como se muestra en la figura (esto es, con las mismas direcciones que las de los momentos flexionantes positivos M_b). Como el eje de la viga es continuo a través del apoyo B , la ecuación de compatibilidad es

$$\theta'_b = -\theta''_b \quad (8-27)$$

la cual expresa el hecho de que las pendientes de las dos vigas simples deben corresponderse mutuamente en B . El siguiente paso es desarrollar expresiones apropiadas para los ángulos θ'_b y θ''_b y sustituirlas en la Ec. (8-27).

Los diagramas de momento flexionante asociados con las cargas externas que actúan sobre la estructura liberada se muestran en la Fig. 8-15c. Los perfiles particulares de estos diagramas dependerán de la naturaleza de las cargas. Por supuesto, en todos los casos, podemos representar los diagramas de momento flexionante mediante sus áreas y distancias centroidales. Denotemos las áreas de los dos diagramas por A_a y A_b , respectivamente. También, la distancia desde el punto A hasta el centroide de A_a se denota por \bar{x}_a , y la distancia desde el punto C hasta el centroide de A_b se denota por \bar{x}_b . Podemos utilizar las propiedades de los diagramas de momento flexionante para evaluar los ángulos θ'_b y θ''_b . Observamos a partir del segundo teorema del área de momentos que la contribución de las cargas externas al ángulo θ'_b sobre la viga AB es

$$\frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a}$$

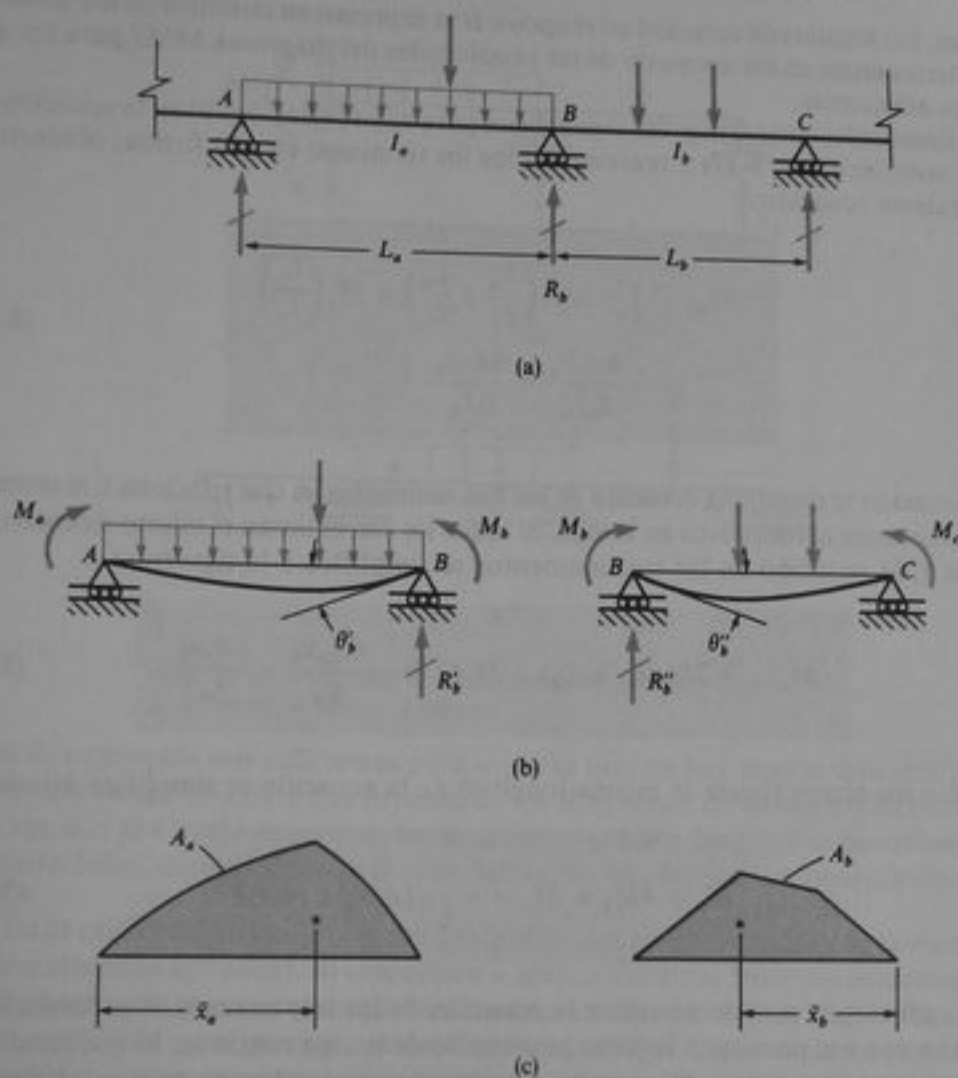


Fig. 8-15 Ecuación de los tres momentos

Adicionalmente, los momentos M_a y M_b contribuyen a θ_b' en las siguientes cantidades:

$$\frac{M_a L_a}{6EI_a} \quad \text{y} \quad \frac{M_b L_a}{3EI_a}$$

Luego, el ángulo θ_b' es

$$\theta_b' = \frac{M_a L_a}{6EI_a} + \frac{M_b L_a}{3EI_a} + \frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a} \quad (a)$$

Considerando el claro derecho BC obtenemos en forma análoga la siguiente ecuación para θ_b'' :

$$\theta_b'' = \frac{M_b L_b}{3EI_b} + \frac{M_c L_b}{6EI_b} + \frac{A_b \bar{x}_b}{EI_b L_b} \quad (b)$$

Luego, los ángulos de rotación en el apoyo B se expresan en términos de los momentos flexionantes en los apoyos y de las propiedades del diagrama M/EI para los dos claros adyacentes.

Enseguida, sustituimos las expresiones para θ_b^l y θ_b^r (Ecs. a y b) en la ecuación de compatibilidad (Ec. 8-27) y reacomodamos los términos; en esta forma, obtenemos la siguiente ecuación:

$$M_a \left(\frac{L_a}{I_a} \right) + 2M_b \left(\frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b} \right) + M_c \left(\frac{L_b}{I_b} \right) = -\frac{6A_a \bar{x}_a}{I_a L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{I_b L_b} \quad (8-28)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación de los tres momentos** ya que relaciona tres momentos flexionantes consecutivos en la viga. Si todos los claros tienen el mismo momento de inercia I , la ecuación de los tres momentos se simplifica a la siguiente:

$$M_a L_a + 2M_b(L_a + L_b) + M_c L_b = -\frac{6A_a \bar{x}_a}{L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{L_b} \quad (8-29)$$

Si todos los claros tienen la misma longitud L , la ecuación se simplifica aún más:

$$M_a + 4M_b + M_c = -\frac{6}{L^2} (A_a \bar{x}_a + A_b \bar{x}_b) \quad (8-30)$$

El procedimiento cuando se utiliza la ecuación de los tres momentos es formular la ecuación una vez para cada soporte intermedio de la viga continua, lo que resulta en tantas ecuaciones como momentos flexionantes redundantes existan. Entonces pueden resolverse simultáneamente estas ecuaciones para los momentos.

Los términos de los miembros derechos en las ecuaciones de los tres momentos pueden evaluarse a partir de las cargas sobre la viga. Por ejemplo, si en el claro AB actúa una carga uniforme de intensidad q , tenemos

$$A_a = \frac{2}{3} \left(\frac{qL_a^2}{8} \right) (L_a) = \frac{qL_a^3}{12} \quad \bar{x}_a = \frac{L_a}{2}$$

y, en consecuencia,

$$A_a \bar{x}_a = \frac{qL_a^4}{24} \quad (8-31)$$

Para una carga concentrada P en el centro del claro, los términos son

$$A_a = \frac{1}{2} \left(\frac{PL_a}{4} \right) (L_a) = \frac{PL_a^2}{8} \quad \bar{x}_a = \frac{L_a}{2}$$

y

$$A_a \bar{x}_a = \frac{PL_a^3}{16} \quad (8-32)$$

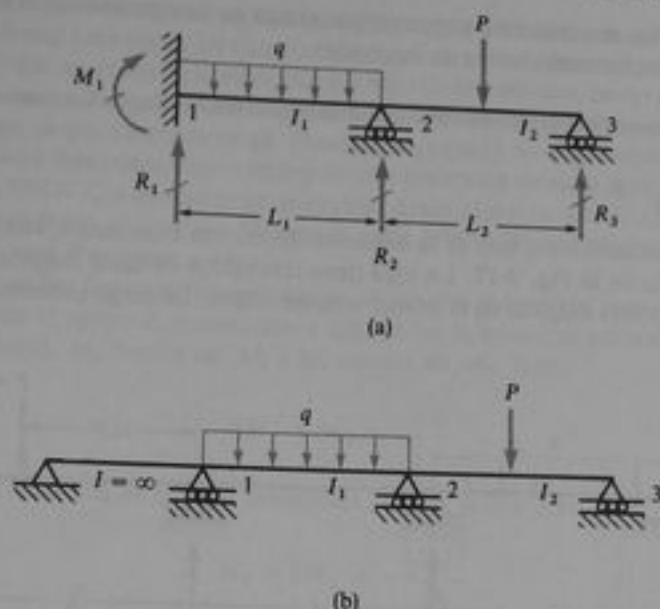


Fig. 8-16 Reemplazo de un empotramiento por un claro con momento de inercia infinito

Estos dos ejemplos son suficientes para mostrar que no hay mayor dificultad en la evaluación de los términos que involucran los diagramas de momento flexionante. Una vez que se efectúa este paso, las ecuaciones pueden formularse meramente representándolas, después de lo cual se resuelven los momentos flexionantes desconocidos.*

En la explicación anterior, se supuso que las dos orillas extremas de la viga estaban simplemente apoyadas. Si cualquiera o ambos extremos fuese un **empotramiento**, el número de momentos redundantes se incrementaría (véase Fig. 8-16a). Una forma sencilla de manejar esta situación es reemplazar el empotramiento por un claro adicional que tenga un momento de inercia infinito (Fig. 8-16b). El efecto de este claro extra de rigidez infinita es evitar la rotación en el apoyo 1, que es la misma condición impuesta por el empotramiento. Los momentos flexionantes determinados en los puntos 1, 2 y 3 de la viga continua mostrada en la Fig. 8-16b serán idénticos a los de la viga original. La longitud asignada al claro extra es irrelevante (excepto que debe ser mayor que cero), ya que siempre desaparece de la ecuación de los tres momentos.

Habiendo determinado los momentos flexionantes en los apoyos de una viga continua, no es difícil utilizar las ecuaciones del equilibrio estático para encontrar las reacciones. Reconsiderando los dos claros adyacentes (Fig. 8-15b), sean R'_1 y R'_2 las reacciones en B para las dos vigas simples AB y BC . La suma de estas reacciones da la reacción total R_1 en el apoyo B (Fig. 8-15a). La reacción R'_1 se compone de tres partes: la reacción de la viga simple debida a las cargas externas, la reacción debida a M_a (igual a M_a/L_1), y la reacción debida a M_b (igual a $-M_b/L_1$). Similarmente, la reacción R'_2 es igual a la reacción de viga simple debida a las cargas externas, más M_c/L_2 y $-M_b/L_2$. Combinando todos estos términos se obtiene la reacción total R_1 . Este mismo procedimiento se usa en cada apoyo hasta que se calculan todas las reaccio-

* La ecuación de los tres momentos fue desarrollada por los ingenieros franceses B. P. E. Clapeyron y H. Biot a mediados del siglo XIX (véase Ref. 8-3).

nes. Por supuesto, si actúa una carga concentrada en la viga sobre un apoyo, la carga se transmite directamente hacia la reacción.

Ejemplo 1

Como una representación del uso de la ecuación de los tres momentos, analizaremos la viga continua mostrada en la Fig. 8-17. La viga tiene tres claros de igual longitud y momento de inercia constante y está cargada en el primer y tercer claros. La carga concentrada P se supone igual a qL .

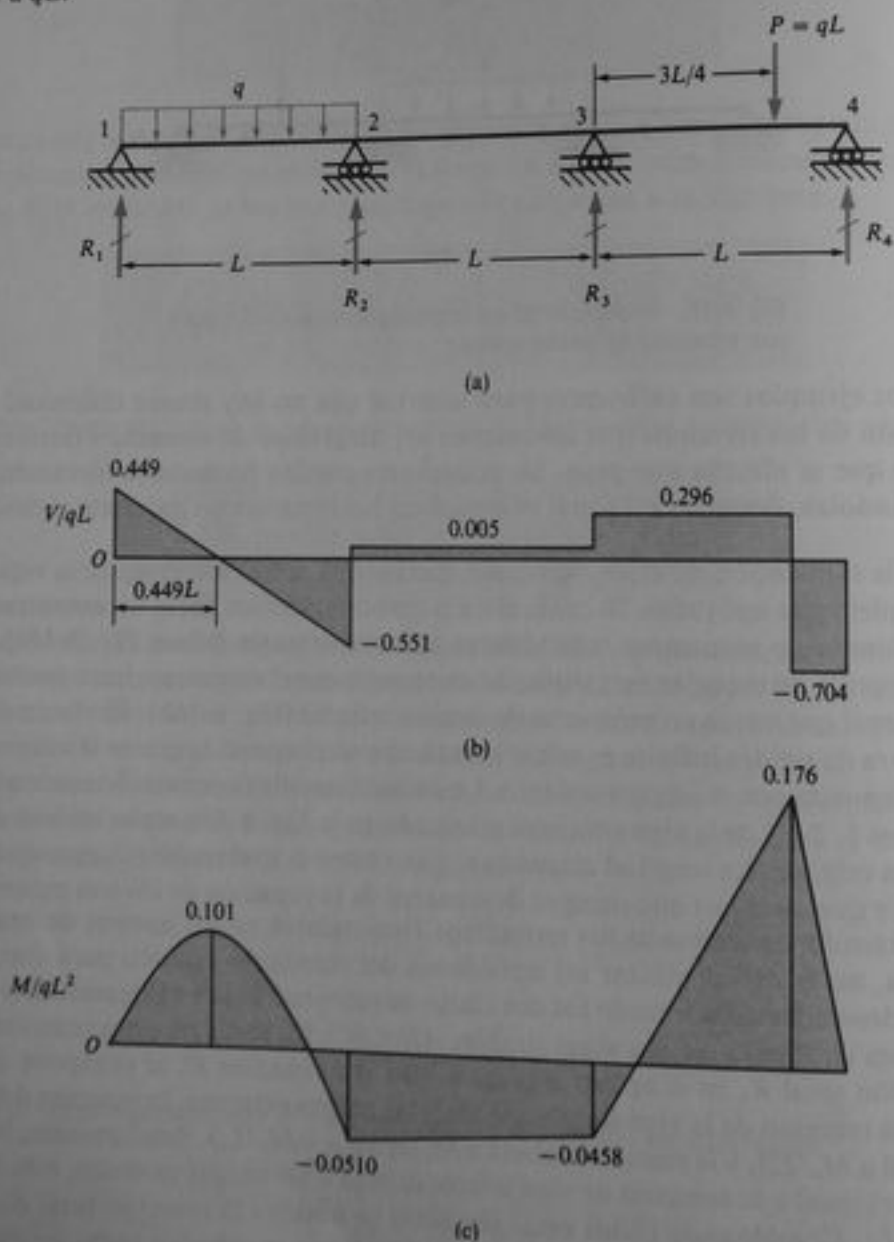


Fig. 8-17 Ejemplo 1. Ecuación de los tres momentos

La Ec. (8-30) puede utilizarse en este ejemplo porque los momentos de inercia y las longitudes son las mismas para todos los claros. Como primera tarea, determinaremos los términos de la forma $A\bar{x}$ que aparecen en el miembro derecho de la ecuación, para cada uno de los tres claros. Para el claro 1-2 este término es $qL^4/24$, según la Ec. (8-31). Para el claro 2-3 este término resulta cero ya que no existe carga. Finalmente, para el claro 3-4 observamos que el diagrama de momento flexionante es un triángulo con ordenada máxima igual a $3PL/16$. El área del triángulo es $3PL^2/32$ y su distancia centroidal desde el punto 4 es $5L/12$ (véase Apéndice D, Caso 3). Por lo tanto, el término $A\bar{x}$ tiene el valor $5PL^3/128$, que resulta $5qL^4/128$ debido a la suposición de que P es igual a qL .

Ahora se pueden formular las ecuaciones de los tres momentos para los apoyos interiores. Considerando el apoyo 2, reconocemos que M_2 en la ecuación general (Ec. 8-30) resulta ser M_1 (que es cero), M_2 resulta ser M_2 y M_3 resulta ser M_3 ; luego

$$4M_2 + M_3 = -\frac{qL^2}{4} \quad (c)$$

Similarmente, la ecuación de los tres momentos para el apoyo 3 es

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{15qL^2}{64} \quad (d)$$

Resolviendo las Ecs. (c) y (d), obtenemos los momentos flexionantes:

$$M_2 = -\frac{49qL^2}{960} \quad M_3 = -\frac{11qL^2}{240} \quad (e)$$

Dibujando los diagramas de cuerpo libre de cada una de las tres partes de la viga y formulando entonces las ecuaciones de equilibrio estático, obtenemos las reacciones:

$$R_1 = \frac{431qL}{960} \quad R_2 = \frac{89qL}{160} \quad R_3 = \frac{93qL}{320} \quad R_4 = \frac{169qL}{240} \quad (f)$$

Con esta información podemos elaborar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en las Figs. 8-17b y c.

Ejemplo 2

Supóngase que los apoyos de una viga continua no están al mismo nivel, ya sea porque se han asentado o por cualquier otra razón. ¿Cómo puede incorporarse este efecto en la ecuación de los tres momentos?

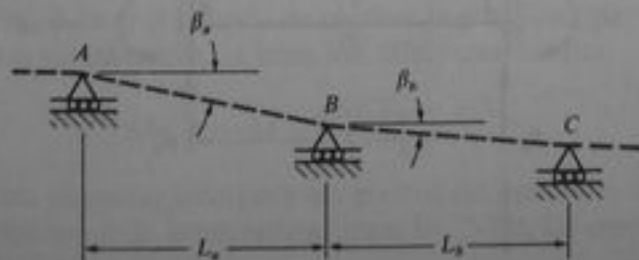


Fig. 8-18 Ejemplo 2. Apoyos en diferentes niveles

Supongamos que los tres apoyos consecutivos A , B y C están orientados como se muestra en la Fig. 8-18. Las líneas punteadas que unen los puntos A , B y C no representan el eje de la viga sino son únicamente líneas rectas entre los puntos de apoyo (compárese con la Fig. 8-15a); β_a y β_b representan los ángulos de inclinación de estas líneas, supuestos positivos cuando el apoyo derecho está más bajo que el apoyo izquierdo. Regresando a la Ec. (a) para θ'_b , observamos que los términos existentes permanecerán en esta ecuación, pero además debemos considerar el efecto del ángulo β_a . La presencia del ángulo β_a reduce el valor de θ'_b en forma tal, que en vez de la Ec. (a), obtenemos

$$\theta'_b = \frac{M_a L_a}{6EI_a} + \frac{M_b L_a}{3EI_a} + \frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a} - \beta_a \quad (g)$$

La ecuación para θ'_c (véase Ec. b) también se altera, como sigue:

$$\theta'_c = \frac{M_b L_b}{3EI_b} + \frac{M_c L_b}{6EI_b} + \frac{A_b \bar{x}_b}{EI_b L_b} + \beta_b \quad (h)$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad (Ec. 8-27) y reacomodando, obtenemos una forma más general de la ecuación de los tres momentos:

$$\begin{aligned} M_a \left(\frac{L_a}{I_a} \right) + 2M_b \left(\frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b} \right) + M_c \left(\frac{L_b}{I_b} \right) \\ = - \frac{6A_a \bar{x}_a}{I_a L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{I_b L_b} + 6E(\beta_a - \beta_b) \end{aligned} \quad (8-33)$$

Esta ecuación se utiliza en lugar de la Ec. (8-28) siempre que los apoyos estén en diferentes niveles.

*8.6 EFECTOS DE LA TEMPERATURA

Los cambios de temperatura en una viga estáticamente indeterminada producirán esfuerzos y deflexiones en la viga. Estas cantidades pueden determinarse mediante métodos similares a los ya descritos para las cargas sobre una viga. El método más útil probablemente es el método de superposición, que se ejemplifica considerando la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig. 8-19. Se supone que esta viga tiene una temperatura T_1 sobre la superficie superior y T_2 sobre la superficie inferior, con una variación lineal de temperatura sobre la altura.

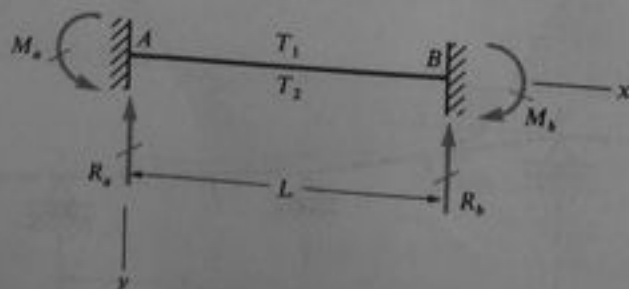


Fig. 8-19 Viga doblemente empotrada con un diferencial de temperatura

Cuando se utiliza el método de superposición, empezamos por retirar las redundantes a fin de obtener una viga estáticamente determinada. Si se considera a R_b y a M_b como las redundantes, la estructura liberada resulta ser una viga en voladizo. La deflexión y el ángulo de rotación en el extremo B de este voladizo debidos al diferencial de temperatura son

$$\delta_b' = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \quad \theta_b' = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h}$$

según se obtuvo en el Problema 7.11-2. En estas ecuaciones, α es el coeficiente de expansión térmica y h es la altura de la viga. Cuando T_2 es mayor que T_1 , la deflexión δ_b' es hacia arriba y el ángulo de rotación θ_b' es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La deflexión y la rotación en la estructura liberada debidas a R_b son

$$\delta_b'' = \frac{R_b L^3}{3EI} \quad \theta_b'' = \frac{R_b L^2}{2EI}$$

y debidas a M_b son

$$\delta_b''' = -\frac{M_b L^2}{2EI} \quad \theta_b''' = -\frac{M_b L}{EI}$$

donde las deflexiones hacia arriba y las rotaciones contrarias a las manecillas del reloj son positivas.

Ahora podemos formular las ecuaciones de compatibilidad como sigue:

$$\delta_b' + \delta_b'' + \delta_b''' = 0 \quad \theta_b' + \theta_b'' + \theta_b''' = 0$$

Sustituyendo las diversas deflexiones en estas ecuaciones y resolviendo, obtenemos

$$R_b = 0 \quad M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

El hecho de que R_b es cero pudo preverse a partir de la simetría de la viga; si este hecho se hubiera utilizado al principio, la solución anterior se habría simplificado porque sólo hubiera sido necesaria una ecuación de compatibilidad. Otra observación basada en la simetría es que el momento M_a es igual a M_b . Por lo tanto, las reacciones finales para la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig. 8-19 son como sigue:

$$R_a = R_b = 0 \quad M_a = M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (8-34)$$

Luego, la viga está sometida a flexión pura debida a los cambios de temperatura.

Otra técnica que puede utilizarse para analizar la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig. 8-19 es el método de resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Para este ejemplo, la ecuación diferencial resulta

$$EIv'' = -M - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (8-35)$$

Obsérvese que esta ecuación incorpora los efectos del momento flexionante (véase Ec. 7-10a) y los efectos de la temperatura (véase Ec. 7-72). La expresión para el momento flexionante en la viga es

$$M = R_a x - M_a$$

Por supuesto, como notamos con anterioridad, podemos apreciar que por la simetría de la viga no existen reacciones verticales; de modo que, podemos asignar R_x igual a cero y obtener

$$EIv'' = M_a - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

La primera integración de esta ecuación resulta

$$EIv' = M_a x - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} x + C_1$$

Las dos condiciones de frontera sobre la pendiente ($v' = 0$ cuando $x = 0$ y cuando $x = L$) dan $C_1 = 0$ y $M_a = \alpha EI(T_2 - T_1)/h$, que concuerda con la Ec. (8.34). Habiendo determinado el momento del empotramiento en esta forma, podemos considerar que el problema estáticamente indeterminado está resuelto ya que ahora se conocen todas las reacciones. Podemos también determinar rápidamente la pendiente v' y la deflexión v . Los resultados pueden ser desconcertantes pero son fácilmente explicables.

*8.7 DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN LOS EXTREMOS DE UNA VIGA

Supóngase que una viga AB está articulada en un extremo y libre para trasladarse horizontalmente en el otro (Fig. 8-20a). Cuando la viga se flexiona mediante cargas, el extremo B de la curva de deflexión se moverá horizontalmente a lo largo de una pequeña distancia λ desde B hasta B' . El desplazamiento λ es igual a la diferencia entre la longitud inicial L de la viga y la longitud de la cuerda AB' de la viga flexionada. Para determinar esta distancia, empezamos por considerar un elemento de longitud ds medida a lo largo del eje curvo de la viga. La proyección de este elemento sobre el eje x tiene una longitud dx . La diferencia entre la longitud ds y su proyección horizontal es

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx \quad (a)$$

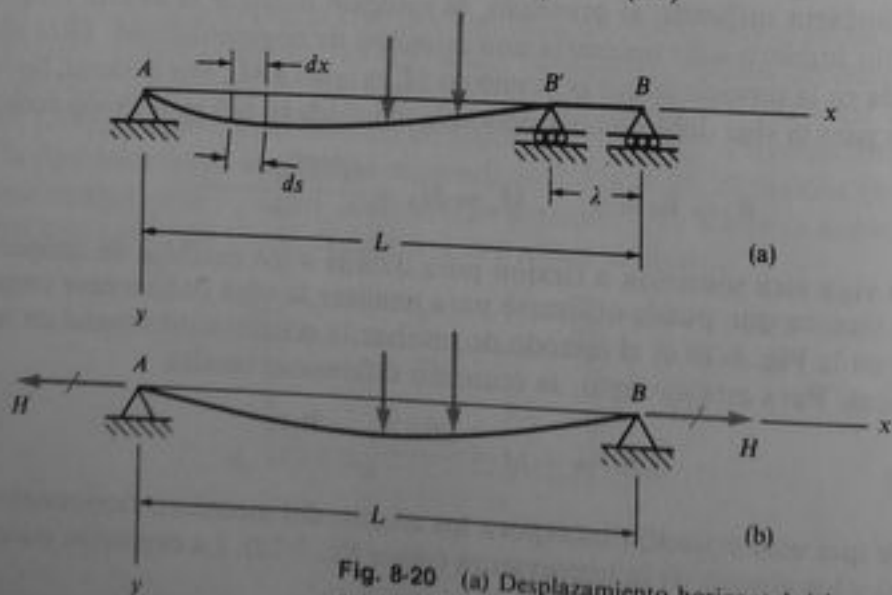


Fig. 8-20 (a) Desplazamiento horizontal del extremo de una viga, y (b) reacciones horizontales para una viga con apoyos inmóviles

donde v representa la deflexión de la viga. Introduzcamos ahora la siguiente serie binomial:

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \dots \quad (8-36)$$

que converge cuando t es numéricamente menor que uno. Si t es muy pequeño comparado con la unidad, podemos desprestigiar los términos de orden superior que involucran a t^2 , t^3 , etcétera, en comparación con los dos primeros términos y obtener

$$(1+t)^{1/2} \approx 1 + \frac{t}{2} \quad (8-37)$$

El término $(dv/dx)^2$ en la Ec. (a) es muy pequeño en vigas ordinarias; por lo que, utilizando la Ec. (8-37), podemos reformular la Ec. (a) así

$$ds - dx = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

Si esta expresión se integra sobre la longitud de la viga, obtenemos la diferencia λ entre la longitud total de la viga y la cuerda AB' :

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (8-38)$$

Luego, siempre que se conoce la ecuación de la curva de deflexión, podemos usar la Ec. (8-38) para obtener el desplazamiento horizontal λ .

Si los extremos de la viga se restringen respecto a la traslación horizontal como se muestra en la Fig. 8-20b, entonces se desarrollará una reacción horizontal H en cada extremo. Esta fuerza causará la elongación del eje de la viga conforme ocurre la flexión. Adicionalmente, la fuerza H misma tendrá un efecto sobre los momentos flexionantes en la viga y en consecuencia también sobre la curva de deflexión de la viga. En lugar de intentar un análisis exacto de este complicado problema, obtengamos una expresión aproximada para la fuerza H a fin de establecer su importancia. Una aproximación satisfactoria al perfil de la curva de deflexión de la viga es una parábola que tiene la ecuación

$$v = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2} \quad (b)$$

donde δ es la deflexión en el centro. La distancia λ correspondiente a este perfil de deflexión supuesto puede determinarse sustituyendo la Ec. (b) en la Ec. (8-38), lo que resulta

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L}$$

La fuerza H requerida para elongar la viga en esta cantidad es

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2}$$

y el esfuerzo de tensión axial correspondiente es

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \quad (c)$$

La deflexión δ a la mitad de la viga es, en general, muy pequeña comparada con la longitud; por ejemplo, la relación δ/L puede ser 1/500. Utilizando esta cifra y suponiendo también que el material es acero con $E = 30 \times 10^6$ psi, se aprecia de la Ec.

(c) que el esfuerzo σ es sólo 320 psi. Luego, el esfuerzo axial debido a H es muy pequeño comparado con el esfuerzo de flexión permisible en la viga. Además, en la práctica, los extremos de la viga no pueden fijarse rigidamente y siempre ocurre un pequeño movimiento horizontal, reduciendo así la fuerza axial calculada antes. Luego, concluimos que la práctica acostumbrada de despreciar los efectos de cualquier restricción horizontal y suponer que un extremo de la viga está sobre un apoyo rodante, está justificada. (Para un análisis más exacto de vigas con apoyos inmóviles, véase Ref. 8-6.)

PROBLEMAS / CAPÍTULO 8

Los problemas de la Sección 8.2 deben resolverse integrando la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

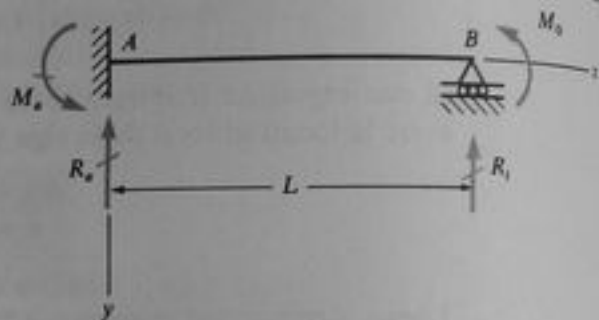
8.2-1 Determinar las reacciones para la viga en voladizo apuntalada AB mostrada en la Fig. 8-2 (Ejemplo 1) considerando el momento reactivo M_a como redundante y utilizando la ecuación diferencial de segundo orden. Obtener también la ecuación de la curva de deflexión y la magnitud y posición de la deflexión máxima δ_{\max} .

8.2-2 Partiendo de la ecuación diferencial de cuarto orden en términos de la intensidad de la carga distribuida, obtener las reacciones para la viga en voladizo apuntalada AB de la Fig. 8-2 (Ejemplo 1). Dibujar entonces los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga, indicando todas las ordenadas críticas incluyendo los valores máximo y mínimo.

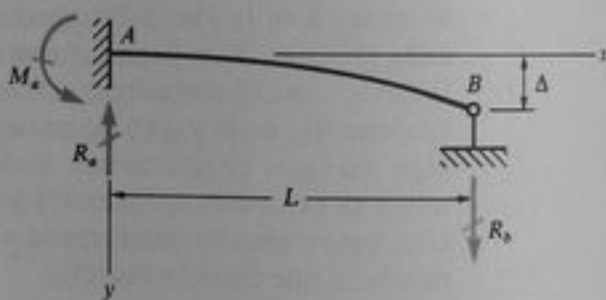
8.2-3 Determinar las reacciones para la viga doblemente empotrada con una carga concentrada P mostrada en la Fig. 8-3 (Ejemplo 2) partiendo de la ecuación diferencial de segundo orden en términos del momento flexionante. Determinar también la deflexión máxima δ_{\max} de la viga y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, indicando todas las ordenadas críticas incluyendo los valores máximo y mínimo.

8.2-4 Una viga en voladizo apuntalada AB se somete a un momento M_0 que actúa en el apoyo B (véase figura). Obtener la ecuación de la curva de deflexión y determinar las reacciones en los apoyos. Construir también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas.

8.2-5 Una viga en voladizo AB está empotrada en A (véase figura). En el extremo B , la viga se tracciona hacia abajo y se retiene mediante un alambre. Determinar la ecuación de la curva de deflexión en términos de la deflexión Δ en el extremo B . Determinar también las reacciones R_a , R_b y M_a en términos de Δ .

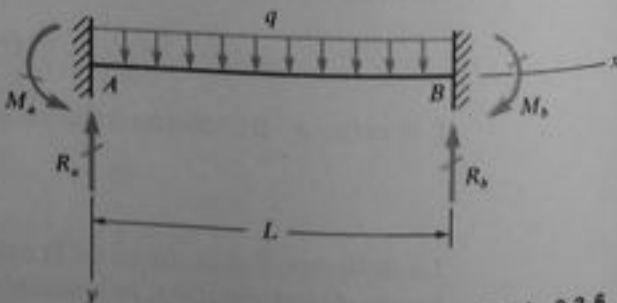


Prob. 8.2-4



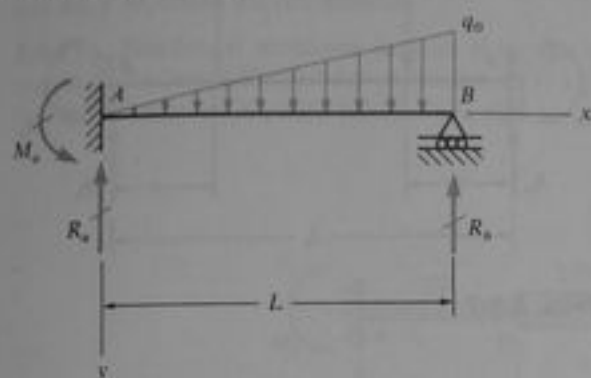
Prob. 8.2-5

8.2-6 Determinar la ecuación de la curva de deflexión y las reacciones para una viga doblemente empotrada AB sometida a una carga uniforme de intensidad q (véase figura).



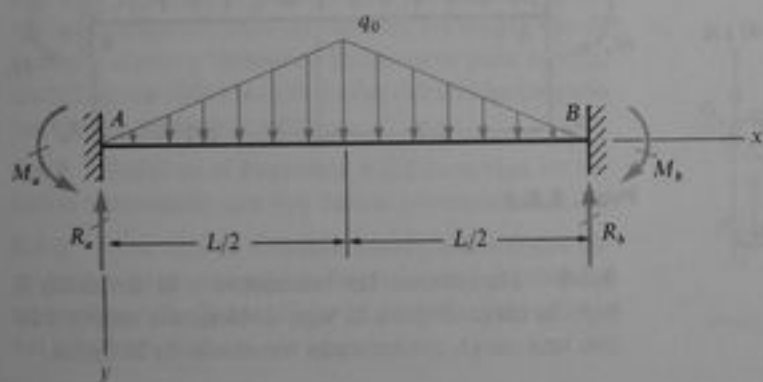
Prob. 8.2-6

8.2-7 Obtener la ecuación de la curva de deflexión y las reacciones para una viga en voladizo apuntalada AB que soporta una carga triangular de intensidad máxima q_0 (véase figura).



Prob. 8.2-7

8.2-8 Una viga doblemente empotrada AB se somete a una carga simétrica triangular de intensidad máxima q_0 como se muestra en la figura. Determinar todas las reacciones y la deflexión máxima δ_{\max} .



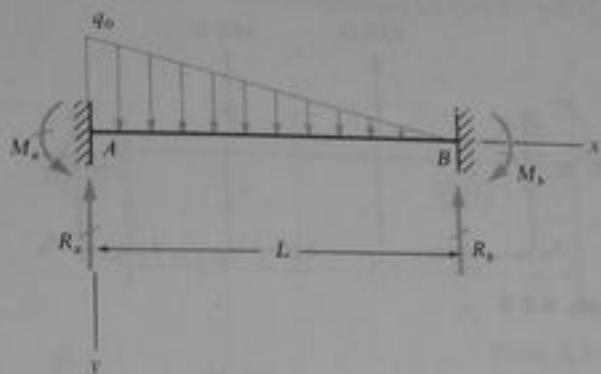
Prob. 8.2-8

8.2-9 Determinar las reacciones y la ecuación de la curva de deflexión para una viga doblemente empotrada con una carga triangular (véase figura).

Los problemas para la Sección 8.3 deben resolverse por el método del área de momentos.

8.3-1 Determinar las reacciones para la viga en voladizo apuntalada AB mostrada en la figura.

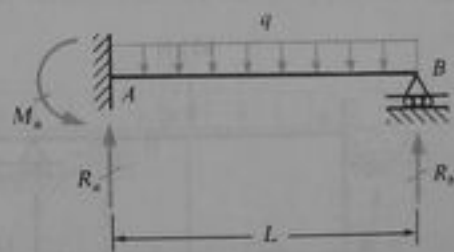
8.3-2 Dos cargas concentradas actúan sobre una viga en voladizo apuntalada como se muestra en la figura. Determinar las reacciones de la viga.



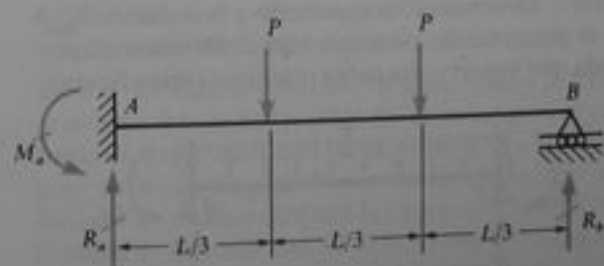
Prob. 8.2-9

8.3-3 Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo apuntalada AB mostrada en la figura.

8.3-4 La viga en voladizo apuntalada mostrada en la figura está sometida a un momento M_0 . Determinar las reacciones para esta viga. ¿A qué distancia a_1 desde el empotramiento debe actuar el momento a fin de que la curva de deflexión en el extremo B sea hori-

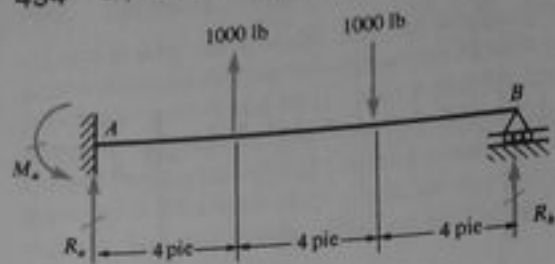


Prob. 8.3-1

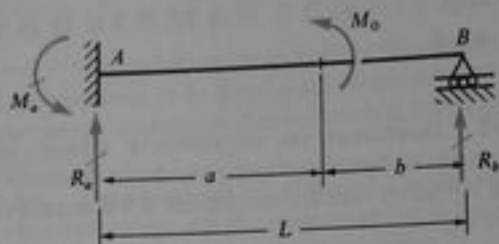


Prob. 8.3-2

zontal? ¿A qué distancia a_2 desde el empotramiento debe actuar el momento a fin de que no se desarrolle ningún momento reactivo en el empotramiento A ?

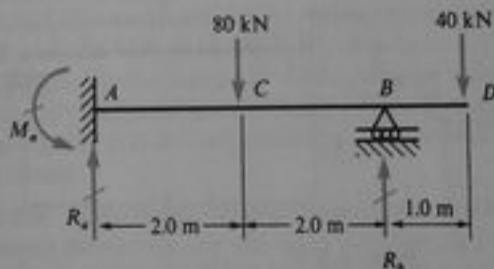


Prob. 8.3-3



Prob. 8.3-4

8.3-5 Calcular las reacciones para la viga empotrada y apuntalada con un voladizo (véase figura). Considérese la reacción R_B como la redundante.



Prob. 8.3-5

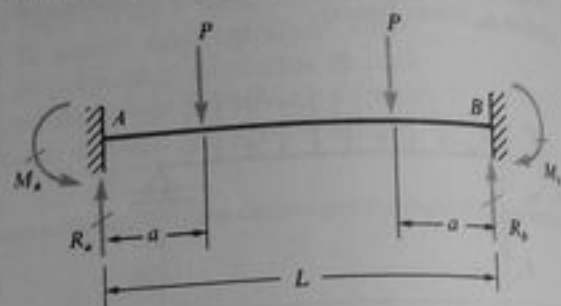
8.3-6 Determinar las reacciones y la deflexión δ_{\max} en el punto medio para una viga doblemente empotrada que soporta una carga uniforme (véase figura).



Prob. 8.3-6

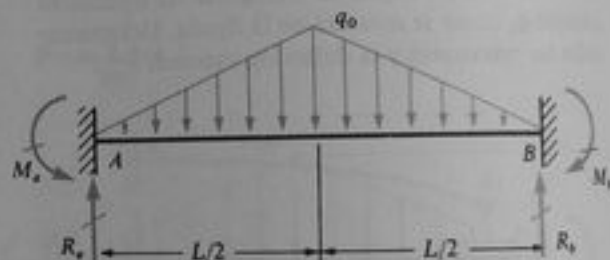
8.3-7 Determinar las reacciones para la viga doblemente empotrada AB cargada con dos fuerzas con-

centradas como se muestra en la figura. Determinar también la deflexión máxima δ_{\max} .



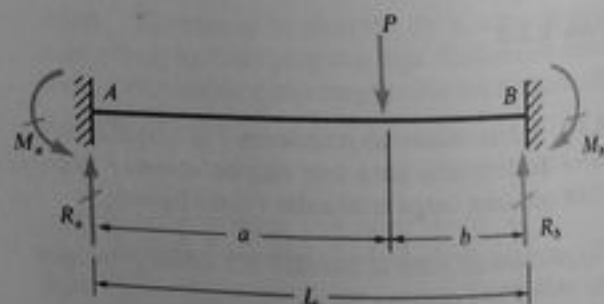
Prob. 8.3-7

8.3-8 Determinar las reacciones y la deflexión δ_{\max} en el punto medio para una viga doblemente empotrada con una carga triangular simétrica (véase figura). Considérense como redundantes los momentos reactivos en los empotramientos.



Prob. 8.3-8

8.3-9 Determinar las reacciones y la deflexión δ bajo la carga P para la viga doblemente empotrada con una carga concentrada mostrada en la figura.

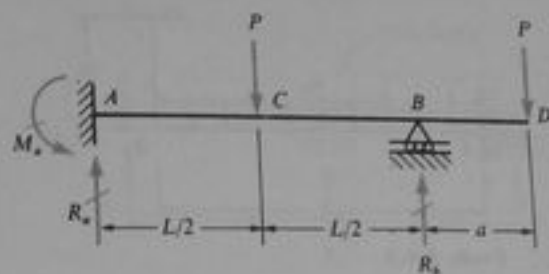


Prob. 8.3-9

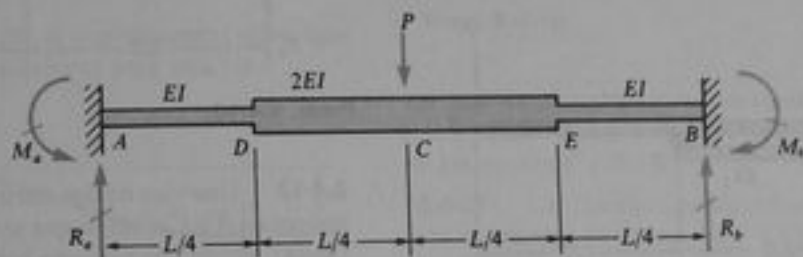
8.3-10 Una viga no prismática con extremos empotrados está sometida a una carga concentrada P en su

punto medio (véase figura). Determinar los momentos reactivos en los empotramientos y la deflexión δ_{\max} en su punto medio. (Considérense los momentos reactivos M_a y M_b como los redundantes.)

8.3-11 Resolver el problema anterior si la viga se somete a dos cargas P aplicadas en los puntos D y E . (No existe carga en el punto medio de la viga.)



Prob. 8.4-4



Prob. 8.3-10

Los problemas de la Sección 8.4 deben resolverse por el método de superposición.

8.4-1 Determinar las reacciones para la viga de dos claros ABC con una carga uniforme q mostrada en la Fig. 8-9a (Ejemplo 1), considerando la reacción R_c como la redundante. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, identificando todas las ordenadas críticas incluyendo los valores máximo y mínimo.

8.4-2 Resolver el Problema 8.3-2 (una viga en voladizo apuntalada con dos cargas concentradas).

8.4-3 Una viga en voladizo apuntalada AB que soporta una carga triangular de intensidad máxima q_0 se muestra en la figura. Determinar todas las reacciones para esta viga.

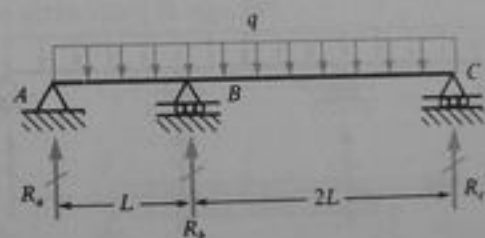


Prob. 8.4-3

8.4-4 Obtener las reacciones para la viga empotrada y apuntalada AB con un voladizo BD mostrada en la figura. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, identificando todas las ordenadas críticas.

8.4-5 Resolver el Problema 8.3-5 (una viga empotrada y apuntalada con un voladizo).

8.4-6 Una viga continua ABC con dos claros desiguales soporta una carga uniforme como se muestra en la figura. Determinar las reacciones para la viga.

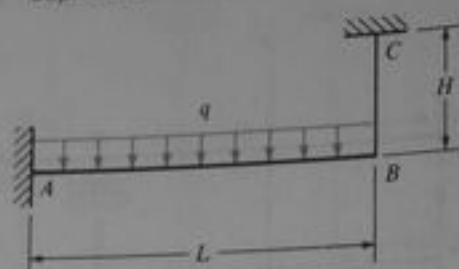


Prob. 8.4-6

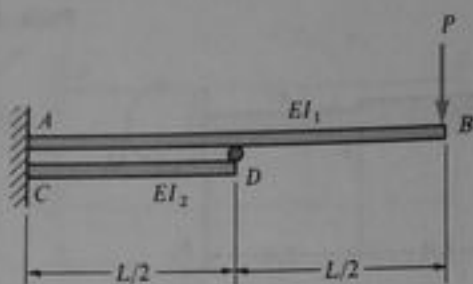
8.4-7 Resolver el Problema 8.3-7 (una viga doblemente empotrada con dos cargas concentradas).

8.4-8 La viga en voladizo AB mostrada en la figura está sustentada por el cable BC en su extremo libre. Antes de que se aplique la carga, el cable está estirado pero no existe ninguna fuerza en él. Determinar la fuerza T en el cable debida a la carga uniforme de intensidad q . Suponer que EI es la rigidez a flexión de la viga y EA es la rigidez axial del cable.

8.4-9 Dos vigas en voladizo AB y CD están soportadas como se muestra en la figura. En el punto D se encaja sin holgura un rodillo entre ambas vigas. La viga superior tiene una rigidez a flexión EI_1 y la viga inferior tiene una rigidez a flexión EI_2 . Determinar la fuerza F transmitida entre las vigas en D .

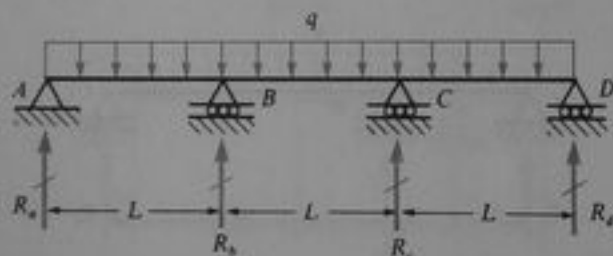


Prob. 8.4-8



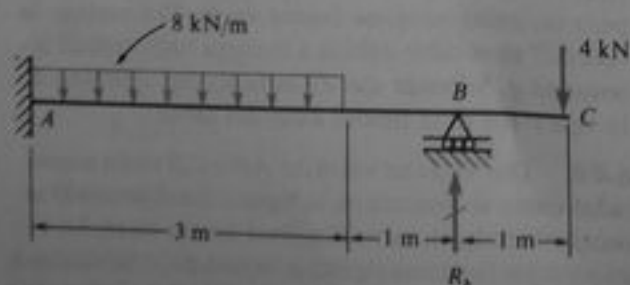
Prob. 8.4-9

8.4-10 Una viga continua de tres claros $ABCD$ con una carga uniforme se muestra en la figura. Determinar todas las reacciones de esta viga.



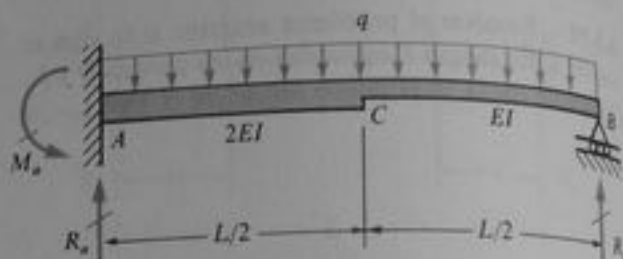
Prob. 8.4-10

8.4-11 La viga ABC mostrada en la figura tiene una rigidez a flexión $EI = 4.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$. Cuando se aplican las cargas, el apoyo B se asienta verticalmente una distancia de 3.0 mm . Calcular la reacción R_b en B .



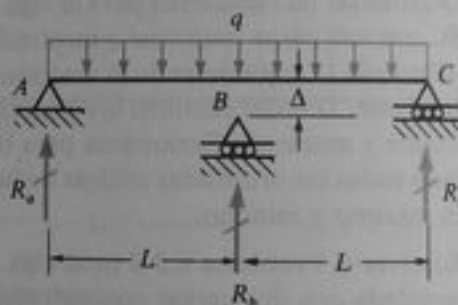
Prob. 8.4-11

8.4-12 La figura muestra una viga no prismática AB con rigidez a flexión $2EI$ desde A hasta C y EI desde C hasta B . Determinar las reacciones de la viga debidas a la carga uniforme de intensidad q .



Prob. 8.4-12

8.4-13 Una viga de dos claros ABC descansa sobre apoyos en A y C antes de que se aplique la carga (véase figura). Existe una pequeña holgura Δ entre la viga y el apoyo B . Cuando se aplica la carga uniforme a la viga, la holgura desaparece y se desarrollan reacciones en los tres apoyos. ¿Cuál debe ser la magnitud de la holgura Δ a fin de que las tres reacciones sean iguales?



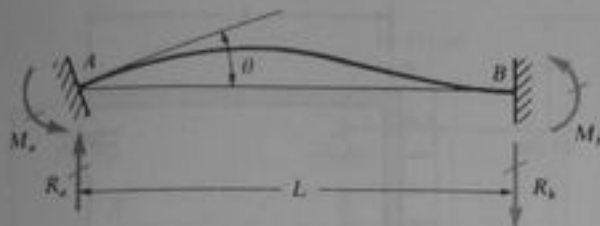
Prob. 8.4-13

8.4-14 Obtener las reacciones para la viga doblemente empotrada con una carga concentrada P mostrada en la Fig. 8-10a (Ejemplo 2) considerando a las reacciones R_a y M_a como redundantes. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, identificando todas las ordenadas críticas.

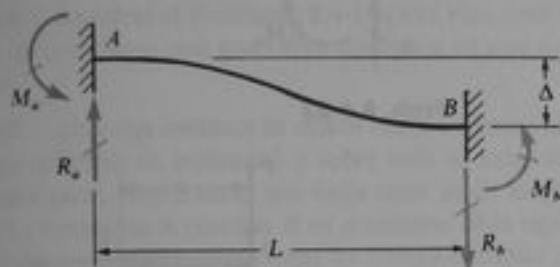
8.4-15 Determinar las reacciones para una viga doblemente empotrada con una carga uniforme sobre una porción del claro (véase Fig. 8-11, Ejemplo 3) considerando los momentos M_a y M_b como las redundantes.

8.4-16 Una viga doblemente empotrada tiene su empotramiento izquierdo girado un pequeño ángulo θ (véase figura). Determinar las reacciones para la viga.

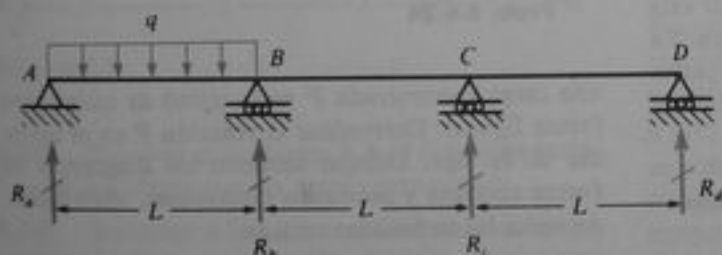
8.4-17 Un extremo de una viga doblemente empotrada AB se desplaza lateralmente a lo largo de una


Prob. 8.4-16

distancia Δ con respecto al otro extremo (véase figura). Determinar las reacciones para esta viga.

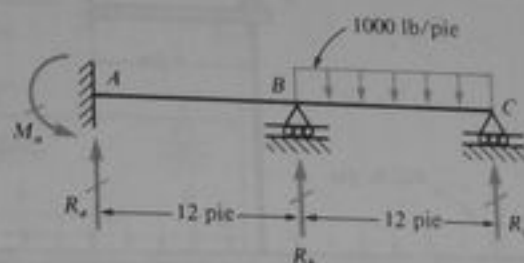

Prob. 8.4-17

8.4-18 Una viga continua de tres claros $ABCD$ soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre el claro extremo (véase figura). Determinar las reacciones para esta viga.


Prob. 8.4-18

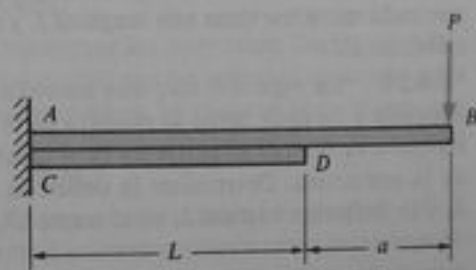
8.4-19 Determinar todas las reacciones para la viga continua de dos claros con un empotramiento mostrada en la figura. Construir también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas incluyendo los valores máximo y mínimo.

8.4-20 Una viga en voladizo AB se sitúa sobre otra viga en voladizo CD (véase figura). Las vigas son idénticas excepto por sus longitudes. Cuando no existe carga, las dos vigas están en contacto pero sin ninguna presión entre ellas. Cuando se aplica la carga P , ¿qué


Prob. 8.4-19

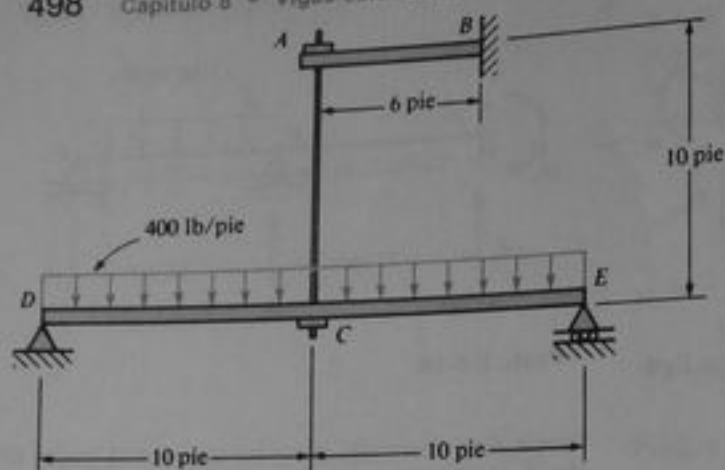
fuerza F se desarrolla entre las vigas en el punto D ? (Nota: demostrar que las vigas están en contacto sólo en los puntos C y D .)

***8.4-21** La viga en voladizo AB mostrada en la figura es una viga I de acero $S6 \times 17.25$ ($E = 30 \times 10^6$ psi). La viga simple DE es una viga de madera de 4 plg \times 12 plg de sección transversal ($E = 1.5 \times 10^6$ psi). Una varilla de acero AC de 0.25 plg de diámetro y 10 pie de longitud sirve como un retén que une ambas vigas; el retén encaja sin holgura entre las vigas antes de que se aplique la carga. Determinar la fuerza F en el retén y los momentos flexionantes máximos M_{AB} y M_{DE} en las dos vigas debido a la carga uniforme $q = 400$ lb/pie que actúa sobre la viga DE .

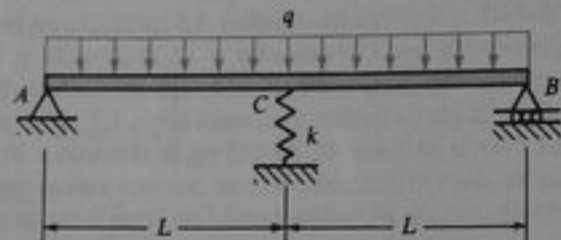

Prob. 8.4-20

***8.4-22** La viga ACB está simplemente apoyada en A y B y sustentada en su punto medio C sobre un resorte de rigidez k (fuerza por unidad de acortamiento). ¿Cuál debe ser la rigidez k del resorte a fin de que el momento flexionante máximo en la viga tenga el menor valor posible?

***8.4-23** Un marco continuo ABC está empotrado en A y sobre un apoyo rodante en C , teniendo todas las esquinas rígidas en B (véase figura). Determinar todas las reacciones para el marco. (Nota: despreciar las deformaciones axiales de los miembros y considerar



Prob. 8.4-21



Prob. 8.4-22

únicamente los efectos de flexión. Suponer también que cada miembro tiene una longitud L y una rigidez a flexión EI .)

*8.4-24 La viga AB con una ménsula BCD está apoyada y cargada como se muestra en la figura. La rigidez a flexión EI es la misma para todas las partes de la estructura. Determinar la deflexión horizontal δ_x y la deflexión vertical δ_y en el punto D .

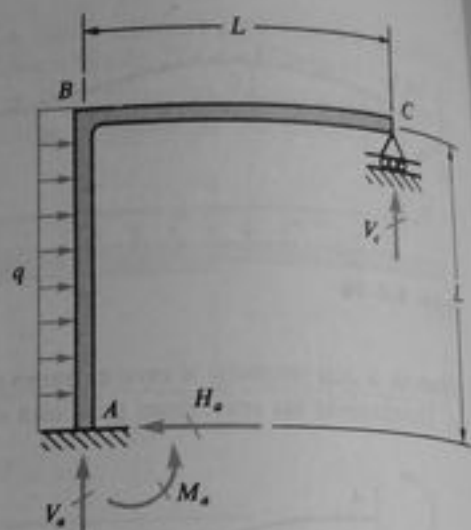
Los problemas de la Sección 8.5 deben resolverse mediante la ecuación de los tres momentos.

8.5-1 Resolver el Problema 8.4-6 (una viga continua de dos claros con una carga uniforme).

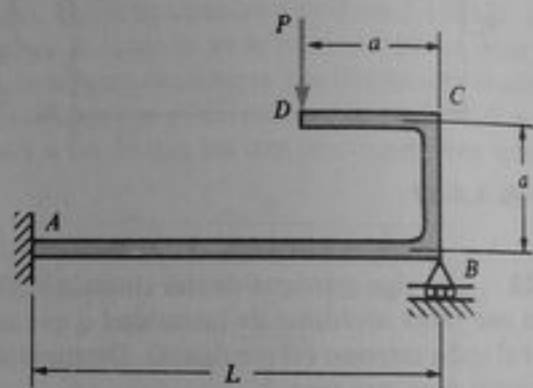
8.5-2 Resolver el Problema 8.4-10 (una viga continua de tres claros con una carga uniforme).

8.5-3 Una viga continua de dos claros está sometida a una carga uniforme de intensidad q a lo largo de su longitud. Ambos claros tienen la misma longitud L y la misma rigidez a flexión EI . Determinar el momento flexionante M en el apoyo central suponiendo que este apoyo cede verticalmente una distancia Δ cuando se aplica la carga q .

8.5-4 Una viga continua $ABCD$ de tres claros, cada uno de longitud L y rigidez a flexión EI , soporta

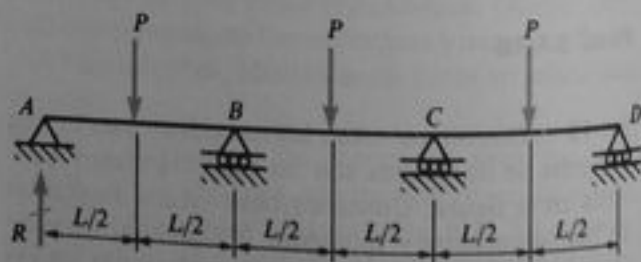


Prob. 8.4-23



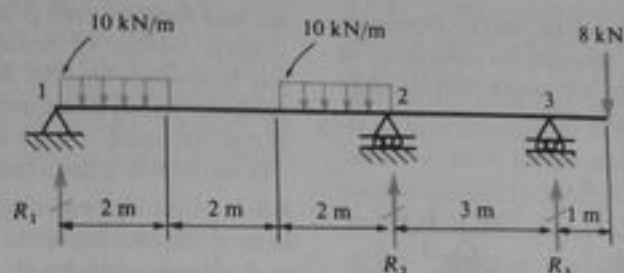
Prob. 8.4-24

una carga concentrada P en la mitad de cada claro (véase figura). Determinar la reacción R en el extremo de la viga. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas.



Prob. 8.5-4

8.5-5 La viga continua mostrada en la figura tiene un voladizo en un extremo. Calcular las reacciones para la viga. Dibujar también los diagramas de fuer-

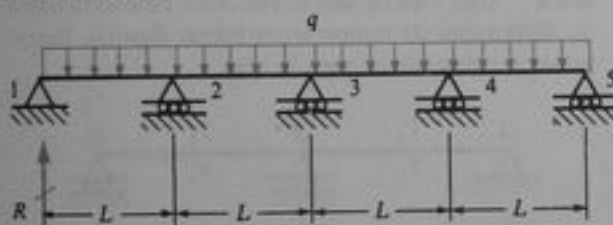


Prob. 8.5-5

za cortante y momento flexionante identificando todas las ordenadas críticas.

8.5-6 Resolver el Problema 8.4-18 (una viga continua de tres claros con una carga uniforme en uno de ellos).

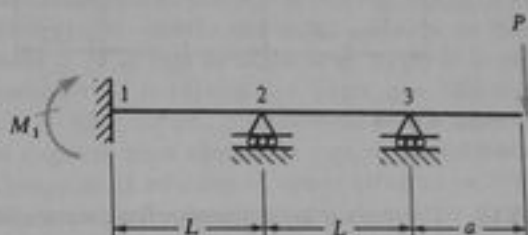
8.5-7 Una viga continua de cuatro claros soporta una carga uniforme de intensidad q sobre toda su longitud (véase figura). Suponiendo que cada claro es de longitud L , determinar la reacción R en el extremo de la viga. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas.



Prob. 8.5-7

8.5-8 Resolver el Problema 8.4-19 (una viga continua de dos claros con un apoyo empotrado).

8.5-9 Referirse a la viga continua con un apoyo empotrado ilustrada en la Fig. 8-16a y suponer que $L_1 = L_2 = L$, $I_1 = I_2$ y $P = 0$. Determinar los momentos flexionantes M_1 y M_2 causados por la carga q .



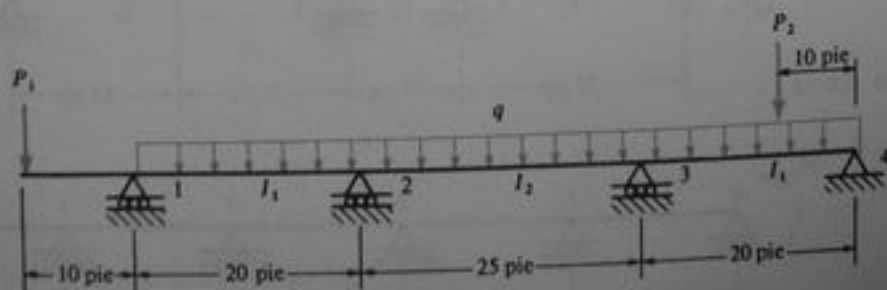
Prob. 8.5-11

8.5-10 La viga continua con un apoyo empotrado mostrada en la Fig. 8-16a tiene longitudes de claros $L_1 = 5$ m y $L_2 = 4$ m. También la rigidez a flexión EI es la misma para ambos claros. Las cargas son $q = 8$ kN/m y $P = 15$ kN. Determinar las reacciones M_1 , R_1 , R_2 y R_3 suponiendo que la carga P actúa en el centro del claro.

8.5-11 Determinar los momentos flexionantes M_1 , M_2 y M_3 para la viga con un voladizo mostrada en la figura. Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas.

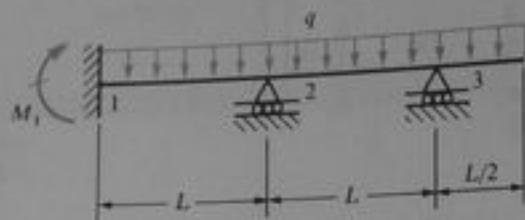
8.5-12 Una viga continua sobre cuatro apoyos tiene un voladizo en el extremo izquierdo como se muestra en la figura. Determinar los momentos flexionantes en los apoyos suponiendo que $P_1 = 1$ k, $q = 0.4$ k/pie, $P_2 = 3$ k, $I_1 = 112$ plg⁴ y $I_2 = 105$ plg⁴.

8.5-13 Suponer que la viga mostrada en la figura soporta una carga uniforme de intensidad q sobre to-



Prob. 8.5-12

da su longitud. Determinar los momentos flexionantes M_1 , M_2 y M_3 . Dibujar también los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante identificando todas las ordenadas críticas.

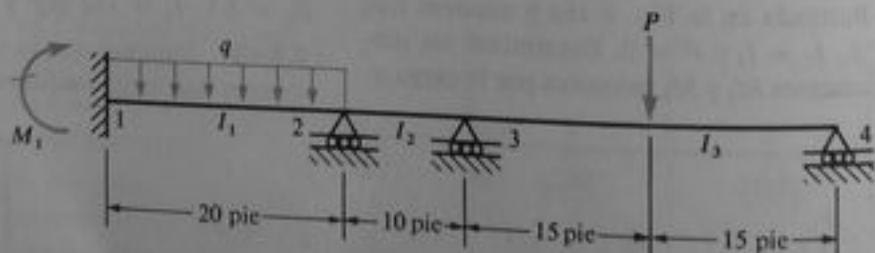


Prob. 8.5-13

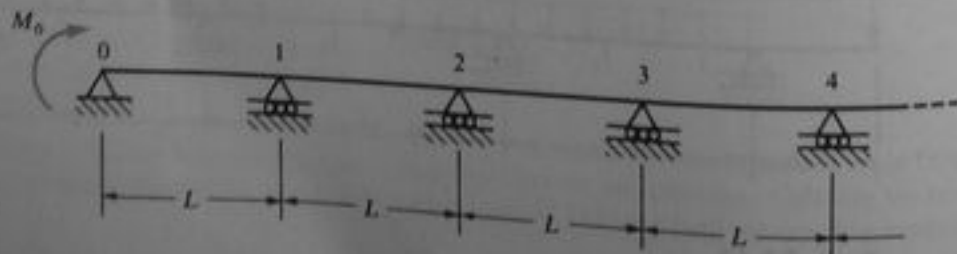
8.5-14 Determinar los momentos flexionantes M_1 , M_2, \dots, M_6 en los apoyos de una viga continua con siete claros de igual longitud L , cuando sólo está cargado el claro central con una carga uniforme de intensidad q .

8.5-15 La viga continua mostrada en la figura tiene un empotramiento en 1 y apoyos simples en 2, 3 y 4. Los momentos de inercia de los tres claros son $I_1 = 2400 \text{ plg}^4$, $I_2 = 1200 \text{ plg}^4$ y $I_3 = 7200 \text{ plg}^4$. La viga soporta una carga uniforme $q = 5 \text{ k/plg}$ y una carga concentrada $P = 10 \text{ k}$. Bajo la acción de estas cargas el apoyo 3 cede verticalmente en una cantidad $\Delta = 0.1 \text{ plg}$. Determinar los momentos flexionantes M_1 , M_2 y M_3 en la viga, suponiendo $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$.

*8.5-16 Una viga continua con claros iguales y rigidez a flexión constante EI se extiende infinitamente hacia la derecha, como se muestra en la figura. Los apoyos se numeran $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En el apoyo izquierdo ($n = 0$), se aplica un momento M_0 . Obte-



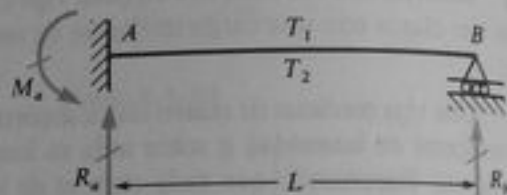
Prob. 8.5-15



Prob. 8.5-16

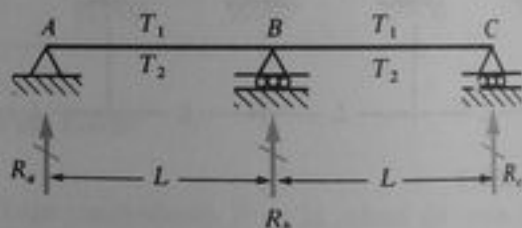
ner una fórmula para el momento flexionante M_n en el apoyo n -ésimo en términos de M_0 . (Nota: observe que la relación M_{n+1}/M_n del momento flexionante en cualquier apoyo al momento en el apoyo precedente es una constante. Luego aplíquese la ecuación de los tres momentos a dos claros consecutivos.)

8.6-1 Una viga en voladizo apuntalada, empotrada en el extremo izquierdo A y simplemente apoyada en el extremo derecho B , tiene una temperatura T_1 sobre su superficie superior y T_2 sobre su superficie inferior (véase figura). Determinar las reacciones para la viga.



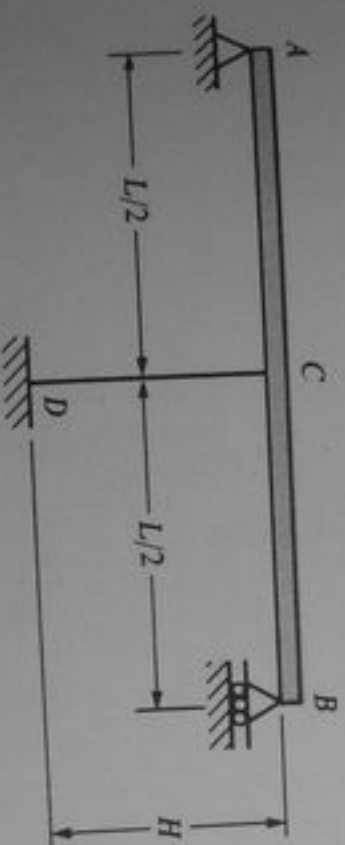
Prob. 8.6-1

8.6-2 Una viga de dos claros ABC está sometida a un diferencial de temperatura (véase figura). Determinar las reacciones para la viga.



Prob. 8.6-2

8.6-3 Una viga simple AB está unida a un cable CD que está tirante pero sin tensión inicial (véase figura). La longitud del cable es H y su área de sección transversal es A . Determinar la fuerza de tensión S en el cable cuando la temperatura decrece T grados, suponiendo que la viga y el cable están hechos del mismo material.



Prob. 8.6-3

8.7-1 Suponiendo que el perfil deformado de una viga con apoyos inmóviles (véase Fig. 8-20b) lo representa la ecuación $v = \delta \sin \pi x/L$, donde δ es la deflexión en el centro de la viga, determinar la fuerza horizontal H en los extremos. Si la viga está hecha de aluminio con $E = 10 \times 10^6$ psi, calcular el esfuerzo de tensión axial σ cuando la relación de la deflexión δ a la longitud L es $1/300$.

8.7-2 Obtener una fórmula para el desplazamiento horizontal λ de un extremo de una viga simple de longitud L que soporta una carga uniforme de intensidad q . Si la viga de acero tiene un perfil de patin ancho ($w 12 \times 14$) con $L = 10$ pie, $q = 1800$ lb/pie y $E = 30 \times 10^6$ psi, ¿qué esfuerzo axial uniforme σ_1 se requiere para elongar la viga en la cantidad λ ? Comparar el esfuerzo σ_1 con el esfuerzo de flexión máximo σ_2 en la viga simple uniformemente cargada.

Flexión asimétrica

9.1 INTRODUCCIÓN

Las teorías para flexión de vigas que se trataron en los capítulos anteriores se limitan a vigas que tienen un plano de simetría a través de su eje longitudinal. Una viga de esta clase se muestra en la Fig. 9-1a, donde el plano xy es un plano axial de simetría para la viga en voladizo. También se supone que las cargas laterales actúan en el plano de simetría, por lo que se deduce que la viga se deforma sólo en la dirección y . El plano xy también se conoce como **plano de flexión**. Como el eje y es un eje de simetría, representa un eje principal de la sección transversal (Fig. 9-1b). Además, el eje neutro (el eje z), que es perpendicular al eje y , también es un eje principal. Si el material de la viga es linealmente elástico, entonces el eje neutro pasa a través del centroide C . Luego, los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal (Fig. 9-1b). En estas condiciones, los esfuerzos normales por flexión que actúan sobre las secciones transversales varían linealmente con la distancia desde el eje neutro y se calculan mediante la fórmula de la flexión $\sigma_x = My/I$ (Ec. 5-10).

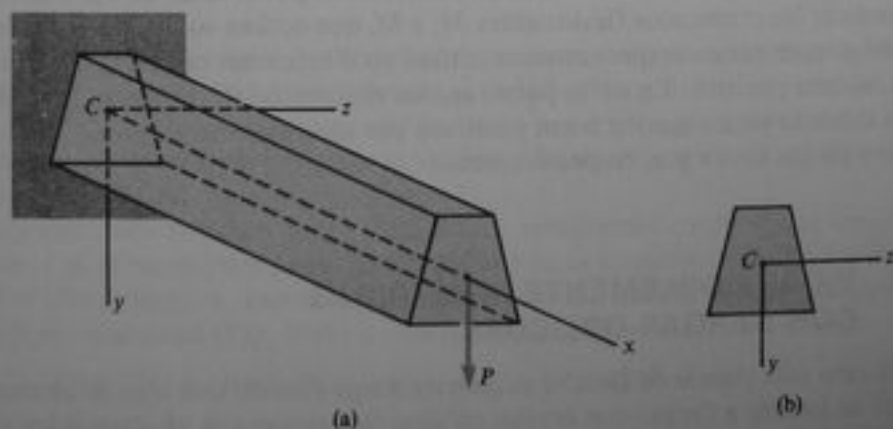


Fig. 9-1 Viga con un plano axial de simetría (el plano xy)

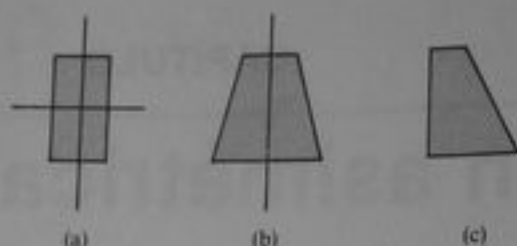


Fig. 9-2 Secciones transversales de vigas: (a) doblemente simétrica, (b) simplemente simétrica y (c) asimétrica

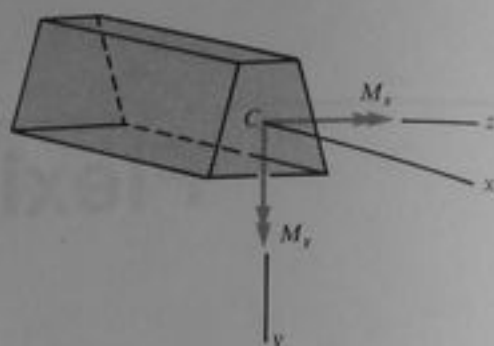


Fig. 9-3 Signos convencionales para los momentos flexionantes M_y y M_z . (Los momentos que actúan sobre la cara positiva de un elemento son positivos cuando sus vectores están dirigidos en el sentido positivo de un eje.)

En este capítulo se considera la **flexión asimétrica** de vigas, que ocurre cuando las secciones transversales no son simétricas o cuando las cargas no actúan en un plano de simetría. Se describe la sección transversal de una viga como doblemente simétrica, simplemente simétrica, o asimétrica de acuerdo con la existencia de dos, uno o cero ejes de simetría (Fig. 9-2).

Las vigas en flexión asimétrica generalmente están sometidas a momentos flexionantes que actúan respecto a ambos ejes principales de la sección transversal, por lo que se requiere establecer signos convencionales correspondientes a tales momentos. Debido a la índole de generalización de los análisis, se adoptarán **signos convencionales** más formalizados que los que se utilizaron previamente. Un segmento de viga sometido a momentos M_y y M_z que actúan en una sección transversal elegida arbitrariamente se muestra en la Fig. 9-3. Estos momentos se representan vectorialmente mediante flechas con doble punta y se consideran como positivos en el sentido positivo de los ejes y y z , como se muestra en la figura. Cuando se usa esta representación vectorial, la regla de la mano derecha indica el sentido del momento (esto es, el sentido de rotación del momento). Obsérvese que los momentos flexionantes positivos actúan sobre la cara positiva x del segmento de viga. (Recuérdese que una cara positiva es aquella cuya normal va hacia afuera en la dirección positiva de un eje.) Si es necesario indicar los momentos flexionantes M_y y M_z que actúan sobre una cara negativa x , se debe tener presente que entonces actúan en direcciones opuestas a los momentos en la cara positiva. En otras palabras, los momentos flexionantes M_y y M_z que actúan sobre la cara negativa x son positivos cuando sus vectores están en el sentido negativo de los ejes y y z , respectivamente.

9.2 VIGAS DOBLEMENTE SIMÉTRICAS CON CARGAS OBLICUAS

El caso más simple de flexión asimétrica surge cuando una viga doblemente simétrica se somete a cargas que actúan en direcciones que son oblicuas a los ejes de simetría, como se representa en la Fig. 9-4a mediante una viga en voladizo sometida a una carga P que actúa en su extremo libre. Esta carga puede resolverse en dos com-

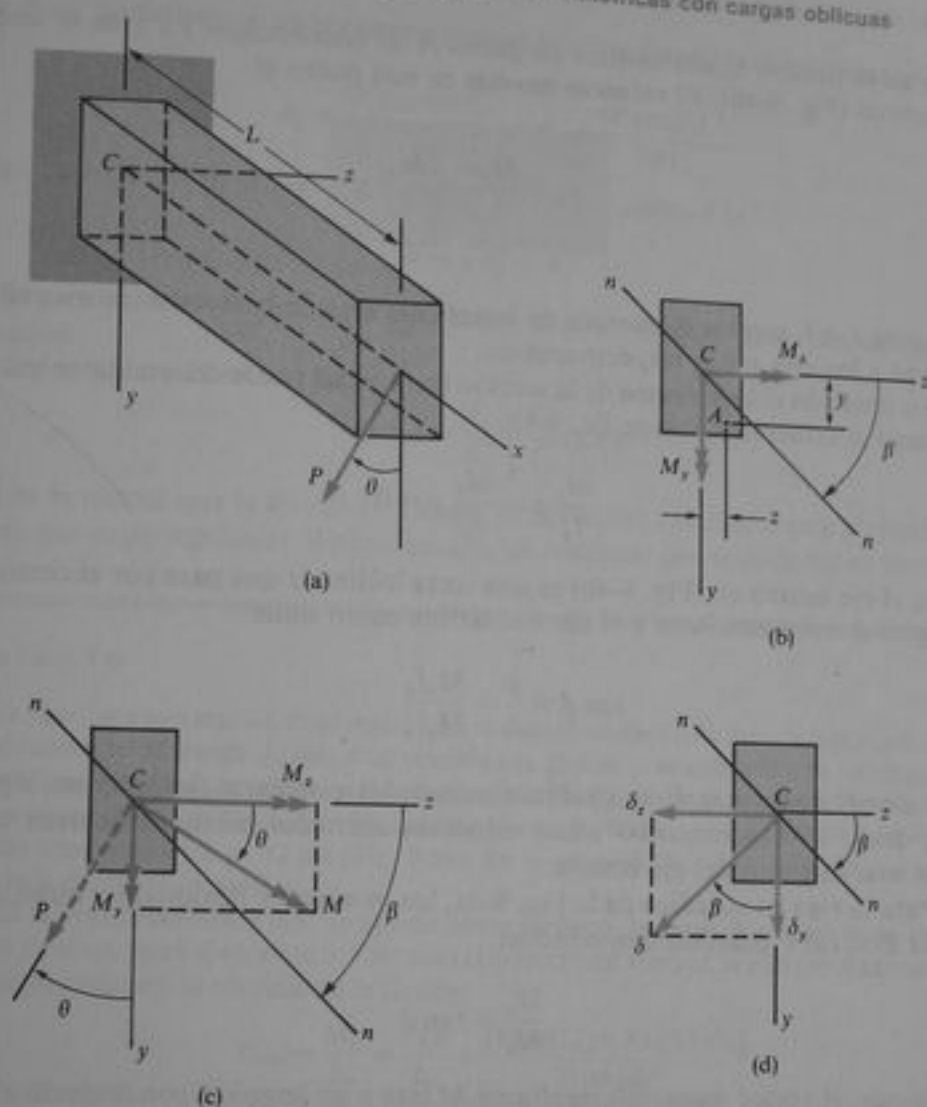


Fig. 9-4 Viga doblemente simétrica con una carga oblicua

ponentes, una en cada plano de simetría, pudiéndose realizar un análisis de flexión para cada componente en forma separada. Los esfuerzos y deflexiones finales de la viga se obtienen mediante la superposición de los resultados. Por supuesto, la carga debe estar aplicada en el centroide de la sección a fin de que no exista torsión respecto al eje longitudinal.

Para ejemplificar este método de análisis, estudiemos en detalle la viga de la Fig. 9-4a. Las componentes de carga son $P \cos \theta$ en la dirección y positiva y $P \sin \theta$ en la dirección z negativa. Por lo tanto, los momentos flexionantes que actúan sobre una sección transversal (Fig. 9-4b) a una distancia x del empotramiento son

$$M_z = (P \cos \theta)(L - x) \quad M_y = (P \sin \theta)(L - x) \quad (a)$$

donde L representa la longitud de la viga.

Como los momentos flexionantes M_y y M_z actúan en los planos de simetría de la viga, los esfuerzos de flexión correspondientes pueden obtenerse a partir de la fór-

mula de la flexión. Consideremos un punto A de coordenadas y y z en la sección transversal (Fig. 9-4b). El esfuerzo normal en este punto es

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (9-1)$$

en la cual I_y e I_z son los momentos de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes y y z , respectivamente.

La ecuación del eje neutro de la sección transversal puede determinarse igualando a cero el esfuerzo θ , (véase Ec. 9-1):

$$\frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0 \quad (9-2)$$

Luego, el eje neutro nn (Fig. 9-4b) es una recta inclinada que pasa por el centroide. El ángulo β entre esta línea y el eje z se define como sigue:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} \quad (9-3)$$

Dependiendo de las magnitudes y direcciones de los momentos flexionantes, β puede variar desde -90° hasta $+90^\circ$. Los esfuerzos normales máximos ocurren en los puntos más alejados del eje neutro.

Para la viga en voladizo de la Fig. 9-4a, los momentos flexionantes están dados por las Ecs. (a) y guardan una relación

$$\frac{M_y}{M_z} = \tan \theta \quad (9-4)$$

Por lo que, el vector momento resultante M está a un ángulo θ con respecto al eje z (Fig. 9-4c). Este vector es perpendicular al plano longitudinal que contiene a la fuerza P , y se muestra mediante una línea punteada. En este caso, el eje neutro se localiza como sigue:

$$\tan \beta = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (9-5)$$

De esta ecuación se aprecia que, en general, el ángulo β es diferente de θ , lo que significa que el eje neutro no es perpendicular al plano de la carga. Ocurren excepciones en tres casos especiales: (1) Si $\theta = 0$, la carga se ubica en el plano xy , y el eje z ($\beta = 0$) es el eje neutro. (2) Si $\theta = 90^\circ$, la carga está alojada en el plano xz , y el eje y ($\beta = 90^\circ$) es el eje neutro. (3) Si $I_x = I_y$, los momentos de inercia principales son iguales, por lo que todos los ejes que pasan por el centroide son ejes principales con el mismo momento de inercia. Luego, el plano de carga, sin importar su dirección, siempre es un plano principal, y el eje neutro siempre es perpendicular a él ($\beta = \theta$).

Las deflexiones de una viga doblemente simétrica con cargas oblicuas pueden determinarse para cada componente de la carga que actúa independientemente, y luego es posible superponerlas. Por ejemplo, en el caso de la viga en voladizo de la

Fig. 9-4a, las deflexiones en el extremo libre en las direcciones y positiva y z negativa son

$$\delta_y = \frac{(P \cos \theta)L^3}{3EI_z} \quad \delta_z = \frac{(P \sin \theta)L^3}{3EI_y}$$

como se muestra en la Fig. 9-4d. La deflexión resultante δ es

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (9-6)$$

El ángulo β entre la deflexión resultante y el eje y está dado por la siguiente ecuación:

$$\tan \beta = \frac{\delta_z}{\delta_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

que es la misma que la Ec. (9-5). Luego, la deflexión resultante está alojada en un plano que es perpendicular al plano neutro, un resultado que se pudo haber anticipado.

Ejemplo

Si una viga tiene una sección transversal para la cual el momento de inercia I_x es mucho mayor que el momento de inercia I_y , será muy sensible a la dirección de aplicación de las cargas. Para ejemplificar este punto, analicemos una viga en voladizo hecha de una sección I que es muy esbelta comparada con su altura. La viga seleccionada es una de sección S 24 \times 80 (véase Apéndice E), con una longitud $L = 12$ pie (Fig. 9-5a). En el extremo libre de la viga actúa una carga $P = 10$ k en dirección vertical.

Si la viga se construye con un alineamiento perfecto, la carga P actuará en la dirección del eje y y el eje z será el eje neutro. Entonces el esfuerzo máximo en la viga (en el extremo fijo) se obtiene mediante la fórmula de la flexión:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{Mc}{I_z} = \frac{PLc}{I_z} = \frac{(10 \text{ k})(12 \text{ pie})(12.00 \text{ plg})}{2100 \text{ plg}^4} \\ &= 8230 \text{ psi} \end{aligned}$$

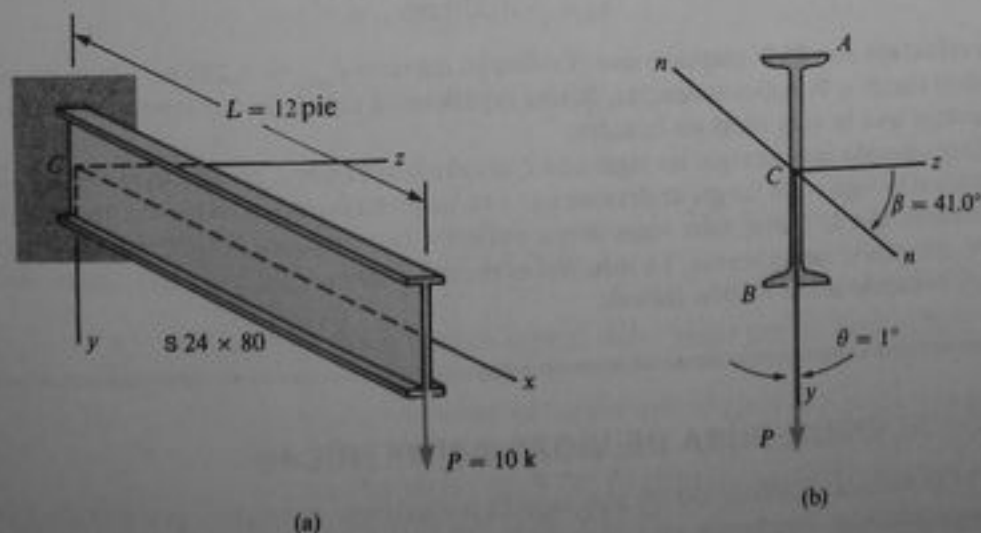


Fig. 9-5 Ejemplo. Viga en voladizo con un momento de inercia I_x mucho mayor que I_y .

Este esfuerzo ocurre en tensión en la parte superior de la viga y en compresión en la parte inferior de la misma.

Supongamos ahora que la viga está construida con una inclinación muy leve (Fig. 9-5b), en forma tal que el ángulo entre la carga P y el eje y es $\theta = 1^\circ$. Esta inclinación puede deberse a defectos de fabricación o a un pequeño desplazamiento de la estructura de soporte. El ángulo β que proporciona la orientación del eje neutro nn se obtiene a partir de la Ec. (9-5):

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{2100 \text{ plg}^4}{42.2 \text{ plg}^4} \tan(1^\circ) = 0.8686$$

y $\beta = 41.0^\circ$. Este cálculo muestra que, aunque el plano de la carga se inclina sólo 1° , el eje neutro se inclina 41° desde el eje z . La gran susceptibilidad de la posición del eje neutro al ángulo de la carga es una consecuencia de la gran relación I_z/I_y .

Los esfuerzos máximos en la viga ocurren en el empotramiento en los puntos A y B (Fig. 9-5b), los cuales se localizan muy alejados del eje neutro. En el empotramiento, los momentos flexionantes (Ec. a) son

$$\begin{aligned} M_x &= (P \cos \theta)L = (10 \text{ k})(\cos 1^\circ)(12 \text{ pie}) = 1440 \text{ plg}\cdot\text{k} \\ M_y &= (P \sin \theta)L = (10 \text{ k})(\sin 1^\circ)(12 \text{ pie}) = 25.13 \text{ plg}\cdot\text{k} \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto A son

$$z = 3.50 \text{ plg} \quad y = -12.0 \text{ plg}$$

Por lo que, el esfuerzo de tensión en A (véase Ec. 9-1) es

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_x y}{I_x} \\ &= \frac{(25.13 \text{ plg}\cdot\text{k})(3.50 \text{ plg})}{42.2 \text{ plg}^4} - \frac{(1440 \text{ plg}\cdot\text{k})(-12.0 \text{ plg})}{2100 \text{ plg}^4} \\ &= 2,084 \text{ psi} + 8,229 \text{ psi} = 10,310 \text{ psi} \end{aligned}$$

El esfuerzo en B tiene la misma magnitud pero es un esfuerzo de compresión:

$$\sigma_b = -10,310 \text{ psi}$$

Estos esfuerzos son 25% mayores que el esfuerzo máximo $\sigma_{\max} = 8,230 \text{ psi}$ obtenido para la viga ideal con $\theta = 0$. Adicionalmente, la viga experimenta una deflexión lateral en la dirección z , mientras que la viga ideal no la sufre.

Este ejemplo muestra que las vigas con I_z mucho mayor que I_y pueden desarrollar grandes esfuerzos si la viga o sus cargas se desvían aun una pequeña cantidad respecto a su alineamiento planeado. Por lo tanto, tales vigas deben utilizarse con cuidado, porque son muy susceptibles de encorvarse lateralmente. La solución es proporcionar un soporte lateral adecuado para la viga, evitando así la flexión lateral.

9.3 FLEXIÓN PURA DE VIGAS ASIMÉTRICAS

Si la sección transversal de una viga es asimétrica, el análisis por flexión resulta más complicado. Iniciemos con una explicación de la flexión pura para tales vigas, y entonces en secciones posteriores consideraremos los efectos de las cargas transver-

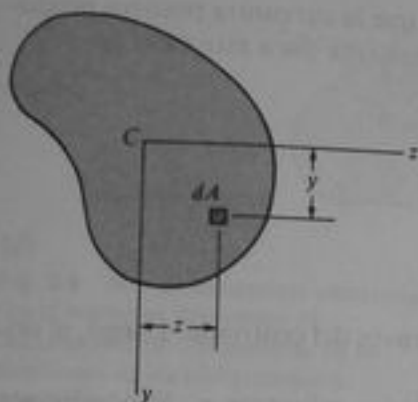


Fig. 9-6 Sección transversal asimétrica

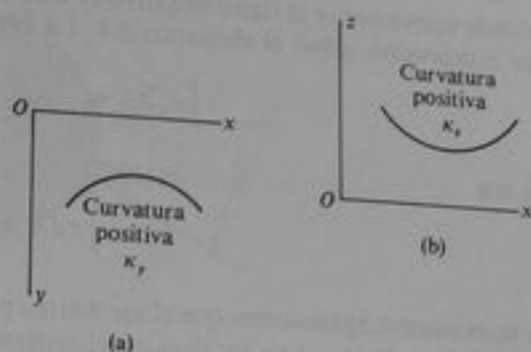


Fig. 9-7 Signos convencionales para las curvaturas κ_x y κ_y en los planos xy y xz , respectivamente

sales. Supóngase que una viga que tiene la sección transversal mostrada en la Fig. 9-6 está sometida a un momento flexionante M . Entonces consideramos dos ejes perpendiculares y y z en el plano de la sección transversal, y nuestra tarea es determinar qué condiciones deben cumplirse a fin de que esos ejes sean los ejes neutros para flexión bajo la acción del momento M .

Empezamos por suponer que la viga se flexiona de tal manera que el eje z es el eje neutro. Entonces, el plano xy es el plano de flexión, y la viga se deforma en tal plano. La curvatura κ_x de la viga flexionada en el plano xy es positiva o negativa de acuerdo con los signos convencionales representados en la Fig. 9-7a. El esfuerzo normal que actúa sobre un elemento de área dA a una distancia y del eje neutro (véanse Fig. 9-6 y Ec. 5-5) es

$$\sigma_x = -\kappa_x E y \tag{9-7}$$

El signo negativo es necesario ya que curvatura positiva significa que la posición de la viga por debajo del eje neutro está en compresión. La fuerza sobre el elemento de área es $\sigma_x dA$, y la fuerza resultante es la integral de esta fuerza elemental tomada sobre toda el área de la sección transversal. Como se considera flexión pura, la fuerza resultante debe ser cero; por lo que,

$$\int \sigma_x dA = -\kappa_x E \int y dA = 0$$

o sea

$$\int y dA = 0 \tag{a}$$

Esta ecuación muestra que el eje neutro (eje z) debe pasar por el centroide C de la sección transversal.

De manera optativa pudimos haber supuesto que el eje y era el eje neutro, en cuyo caso el plano xz es el plano de flexión. Los signos convencionales para la curvatura κ_y en el plano xz se muestran en la Fig. 9-7b. El esfuerzo normal correspondiente que actúa sobre el elemento de área dA (Fig. 9-6) es

$$\sigma_x = -\kappa_y E z \tag{9-8}$$

donde nuevamente el signo negativo es necesario ya que la curvatura positiva produce compresión sobre el elemento dA . La fuerza resultante para este caso es

$$\int \sigma_x dA = -\kappa_z E \int z dA = 0$$

o sea

$$\int z dA = 0 \quad (b)$$

y nuevamente apreciamos que el eje neutro pasa a través del centroide. Luego, el origen de los ejes y y z se localiza en el centroide C .

Consideremos ahora el momento resultante de los esfuerzos σ_x . Supondremos primero que la flexión tiene lugar respecto al eje z como el eje neutro, en cuyo caso, los esfuerzos σ_x se obtienen de la Ec. (9-7). Los momentos flexionantes correspondientes respecto a los ejes y y z son

$$M_z = -\int \sigma_x y dA = \kappa_y E \int y^2 dA = \kappa_y E I_z \quad (9-9a)$$

$$M_y = \int \sigma_x z dA = -\kappa_z E \int yz dA = -\kappa_z E I_{yz} \quad (9-9b)$$

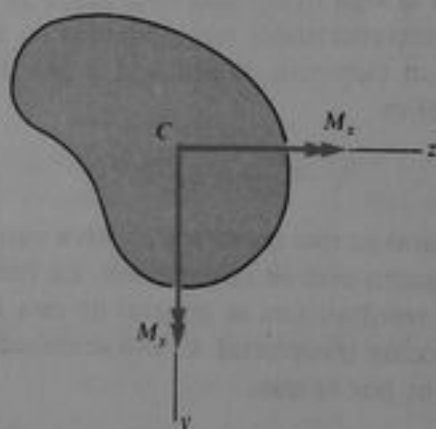


Fig. 9-8 Momentos flexionantes M_z y M_y respecto a los ejes y y z , respectivamente

en donde I_{yz} es el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes y y z . Las direcciones positivas de los momentos M_z y M_y se muestran en la Fig. 9-8. A partir de las Ecs. (9-9) podemos establecer ciertas conclusiones. Si el eje z se elige en una dirección arbitraria a través del centroide, representará el eje neutro sólo si existen momentos M_z y M_y que actúen respecto a ambos ejes y y z y sólo si tales momentos guardan la relación establecida por las Ecs. (9-9). Por supuesto, si el eje z es un eje principal, entonces $I_{yz} = 0$ y el único momento que actúa es M_z . En este caso, ocurre flexión en el plano xy y el momento M_z actúa en ese mismo plano. En otras palabras, la flexión se lleva a cabo de la misma manera que en una viga simétrica.

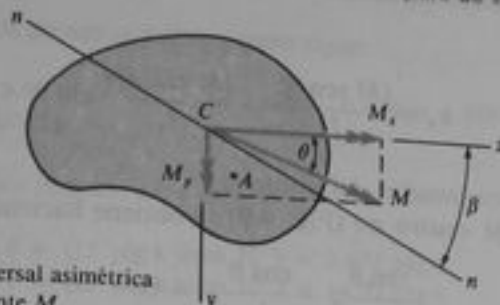


Fig. 9-9 Sección transversal asimétrica con el momento flexionante M descompuesto en componentes en las direcciones de los ejes centroidales principales

Obtenemos conclusiones similares si suponemos que el eje y es el eje neutro. En tal caso, los esfuerzos σ_x están dados por la Ec. (9-8), y los momentos flexionantes son

$$M_y = \int \sigma_x z \, dA = -\kappa_z E \int z^2 \, dA = -\kappa_z E I_y \quad (9-10a)$$

$$M_z = -\int \sigma_x y \, dA = \kappa_z E \int yz \, dA = \kappa_z E I_{yz} \quad (9-10b)$$

Nuevamente observamos que si el eje neutro (eje y) se orienta arbitrariamente, deben existir momentos M_y y M_z . Por supuesto, si el eje y es un eje principal, el único momento es M_z y tenemos flexión ordinaria en el plano xz .

Luego, hemos llegado a la siguiente conclusión importante. *Cuando una viga asimétrica está en flexión pura, el plano del momento flexionante es perpendicular a la superficie neutra sólo si los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal.* Entonces, si un momento flexionante actúa en uno de los planos principales, este plano será el plano de flexión (perpendicular al eje neutro), y es válida la teoría de la flexión usual.

La conclusión anterior sugiere un método directo para el análisis de una viga asimétrica sometida a cualquier momento flexionante M (Fig. 9-9). Empezamos por localizar los ejes centroidales principales y y z , utilizando las técnicas descritas en el Apéndice C. Entonces el momento aplicado M se descompone en componentes M_y y M_z , supuestas positivas en las direcciones mostradas en la figura. Estas componentes son

$$M_y = M \sin \theta \quad M_z = M \cos \theta \quad (9-11)$$

donde θ es el ángulo entre el vector M y el eje z . Cada una de estas componentes actúa en un plano principal y produce flexión pura en ese mismo plano. Luego, son aplicables las fórmulas usuales de esfuerzo y deflexión para flexión pura. Los esfuerzos y deflexiones obtenidos a partir de M_y y M_z , que actúan separadamente pueden superponerse para obtener las cantidades correspondientes debidas al momento flexionante original M . Por ejemplo, el esfuerzo de flexión resultante en cualquier punto A en la sección transversal es

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (9-12a)$$

o sea

$$\sigma_x = \frac{(M \operatorname{sen} \theta)z}{I_y} - \frac{(M \operatorname{cos} \theta)y}{I_z} \quad (9-12b)$$

donde y y z son las coordenadas del punto A .

La ecuación del eje neutro nn (Fig. 9-9) se obtiene haciendo σ_x igual a cero:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{I_y} z - \frac{\operatorname{cos} \theta}{I_z} y = 0 \quad (9-13)$$

El ángulo β entre esta recta y el eje z se obtiene como sigue:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (9-14)$$

Esta ecuación muestra que en general los ángulos β y θ no son iguales, por lo que el eje neutro no es perpendicular al plano en el que actúa el momento aplicado M . Las únicas excepciones son los tres casos especiales ($\theta = 0$, $\theta = 90^\circ$ e $I_x = I_y$) descritos en la sección anterior.

Las deflexiones producidas por los momentos flexionantes M_x y M_y pueden obtenerse a partir de las fórmulas usuales de deflexión. Estas deflexiones tienen lugar en los planos principales y pueden superponerse para obtener las deflexiones resultantes, las cuales están localizadas en un plano que es normal al eje neutro nn .

En la explicación anterior se han estudiado las vigas asimétricas (Fig. 9-9). Por supuesto, las vigas simétricas pueden visualizarse como casos especiales de vigas asimétricas. Si una viga es simplemente simétrica, uno de los ejes centroidales principales de la sección transversal es el eje de simetría; el otro eje principal es perpendicular al eje de simetría en el centroide. Si una viga es doblemente simétrica, los ejes centroidales principales son los ejes de simetría.

En esta sección hemos tratado únicamente flexión pura, lo que significa que no actúan cargas laterales sobre la viga. Cuando la flexión es producida por cargas laterales, surge la posibilidad de torsión alrededor del eje longitudinal. La torsión se impide cuando las cargas se aplican sobre el centro de cortante (véase Sección 9.5).

Otro método para determinar los esfuerzos en una viga asimétrica se describe en la siguiente sección. Este método tiene la ventaja de que no requiere la localización de los ejes principales; por supuesto, su uso no es conveniente si se pueden determinar las deflexiones.

Ejemplo 1

Una sección canal $C 10 \times 15.3$ está sometida a un momento flexionante $M = 15 \text{ plg}\cdot\text{k}$ teniendo su vector a un ángulo $\theta = 10^\circ$ con el eje z (Fig. 9-10). Calcular los esfuerzos σ_x y σ_y en los puntos A y B , respectivamente.

El centroide C está localizado sobre el eje de simetría (eje z) a una distancia $c = 0.634 \text{ plg}$ desde el alma del canal (véase Tabla E-3, Apéndice E). Entonces los ejes y y z son ejes centroidales principales con momentos de inercia

$$I_y = 2.28 \text{ plg}^4 \quad I_z = 67.4 \text{ plg}^4$$

Las coordenadas de los puntos A y B son como sigue:

$$\begin{aligned} y_a &= -5.00 \text{ plg} & z_a &= 2.600 - 0.634 = 1.966 \text{ plg} \\ y_b &= 5.00 \text{ plg} & z_b &= -0.634 \text{ plg} \end{aligned}$$

También, los momentos respecto a los ejes y y z son

$$\begin{aligned} M_y &= M \sin \theta = (15 \text{ plg}\cdot\text{k})(\sin 10^\circ) = 2.605 \text{ plg}\cdot\text{k} \\ M_z &= M \cos \theta = (15 \text{ plg}\cdot\text{k})(\cos 10^\circ) = 14.77 \text{ plg}\cdot\text{k} \end{aligned}$$

Podemos calcular ahora el esfuerzo en el punto A a partir de la Ec. (9-12a):

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{M_y z_a}{I_y} - \frac{M_z y_a}{I_z} \\ &= \frac{(2.605 \text{ plg}\cdot\text{k})(1.966 \text{ plg})}{2.28 \text{ plg}^4} - \frac{(14.77 \text{ plg}\cdot\text{k})(-5.00 \text{ plg})}{67.4 \text{ plg}^4} \\ &= 2246 \text{ psi} + 1096 \text{ psi} = 3340 \text{ psi} \end{aligned}$$

Mediante un cálculo similar obtenemos el esfuerzo en B :

$$\sigma_b = -1820 \text{ psi}$$

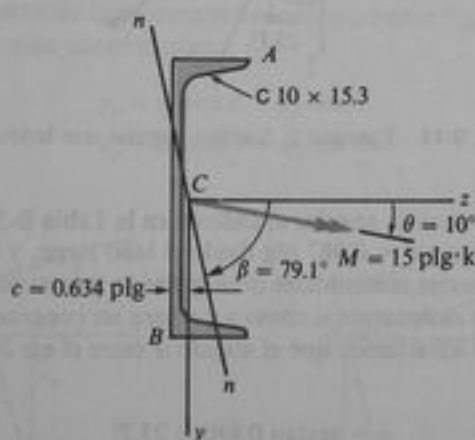


Fig. 9-10 Ejemplo 1. Sección canal

Estos esfuerzos son los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la sección transversal, porque están localizados a las distancias más alejadas del eje neutro nn (véase Fig. 9-10).

El ángulo β que localiza el eje neutro (véase Ec. 9-14) es

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta\right) = \arctan\left(\frac{67.4}{2.28} \tan 10^\circ\right) = 79.1^\circ$$

Este ángulo es mucho mayor que θ porque la relación I_z/I_y es grande. Como se explicó en el ejemplo de la Sección 9.2, las vigas cuya relación I_z/I_y es grande, son muy susceptibles a la dirección de la carga. En este ejemplo, el ángulo β respecto al eje neutro va desde 0° hasta 79.1° , mientras que el ángulo θ del vector momento va sólo de 0° a 10° . Luego, las vigas de este tipo deben estar provistas de soportes laterales para evitar deflexiones laterales excesivas.

Ejemplo 2

Una sección angular con lados desiguales ($L 6 \times 4 \times 1/2$) se muestra en la Fig. 9-11. La sección está sometida a un momento flexionante $M = 10 \text{ plg}\cdot\text{k}$ con su vector a lo largo del eje 1-1, que es paralelo al lado corto de la sección angular. Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga.

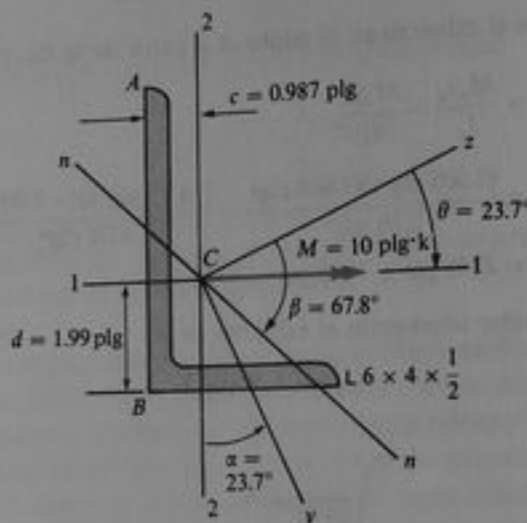


Fig. 9-11 Ejemplo 2. Sección angular con lados desiguales

Las propiedades de la sección angular se indican en la Tabla E-5, Apéndice E. El centroide está situado a una distancia $c = 0.987 \text{ plg}$ desde el lado largo, y a una distancia $d = 1.99 \text{ plg}$ desde el lado corto. Los ejes centroidales principales se muestran como ejes 3-3 y 4-4 en la Tabla E-5; sin embargo, los designaremos como y y z para ser congruentes con las explicaciones anteriores. De la Tabla E-5 apreciamos que el ángulo α entre el eje 2-2 y el eje principal 3-3 es

$$\alpha = \arctan 0.440 = 23.7^\circ$$

Este ángulo es el mismo que el ángulo entre el eje z y el eje 1-1 (Fig. 9-11). Dado que en nuestro problema particular el vector M está dirigido a lo largo del eje 1-1, esto implica que el ángulo θ entre el eje z y el vector M es igual a α :

$$\theta = \alpha = 23.7^\circ$$

Los momentos de inercia principales I_y e I_z pueden determinarse de la Tabla E-3. La tabla proporciona el radio de giro respecto al eje 3-3 (o eje y); por lo tanto,

$$I_y = A r_{\min}^2 = (4.75 \text{ plg}^2)(0.870 \text{ plg})^2 = 3.60 \text{ plg}^4$$

El otro momento de inercia principal se obtiene del hecho de que la suma de los momentos de inercia para ejes perpendiculares es una constante:

$$I_y + I_z = I_{11} + I_{22}$$

o sea

$$I_z = I_{11} + I_{22} - I_y = 17.4 + 6.27 - 3.60 = 20.1 \text{ plg}^4$$

Si no se dispusiera de una tabla de propiedades, sería necesario calcular la orientación de los ejes principales y los momentos de inercia principales mediante las ecuaciones de transformación referidas en el Apéndice C.

El eje neutro nn está orientado a un ángulo β desde el eje z ; este ángulo se determina como sigue (véase Ec. 9-14):

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta\right) = \arctan\left(\frac{20.1}{3.60} \tan 23.7^\circ\right) = 67.8^\circ$$

Por inspección de la figura, vemos que los puntos A y B son los más alejados del eje neutro; por lo tanto, el esfuerzo de compresión máximo ocurre en B y el esfuerzo de tensión máximo ocurre en A . (En realidad, el esfuerzo de tensión máximo ocurre en un punto situado sobre la superficie curva cerca de A . Por supuesto, no vale la pena situar con precisión este punto, por lo que consideraremos el esfuerzo en A como el máximo esfuerzo para fines prácticos.)

Las coordenadas de los puntos A y B son necesarias para determinar los esfuerzos. Desafortunadamente, las coordenadas con respecto a los ejes y y z no son fáciles de calcular. Para simplificar la tarea, obtendremos una fórmula general aplicable. En la Fig. 9-12a se muestran dos conjuntos de ejes (ejes 1-2 y ejes yz) con un ángulo θ entre ellos. El punto P tiene coordenadas d_1 y d_2 con respecto a los ejes 1-2, y deseamos determinar las coordenadas y_p y z_p con respecto a los ejes yz . A partir de la geometría de la figura (véase Fig. 9-12b), obtenemos las siguientes expresiones para esas coordenadas:

$$y_p = d_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta \quad (9-15a)$$

$$z_p = d_1 \cos \theta - d_2 \sin \theta \quad (9-15b)$$

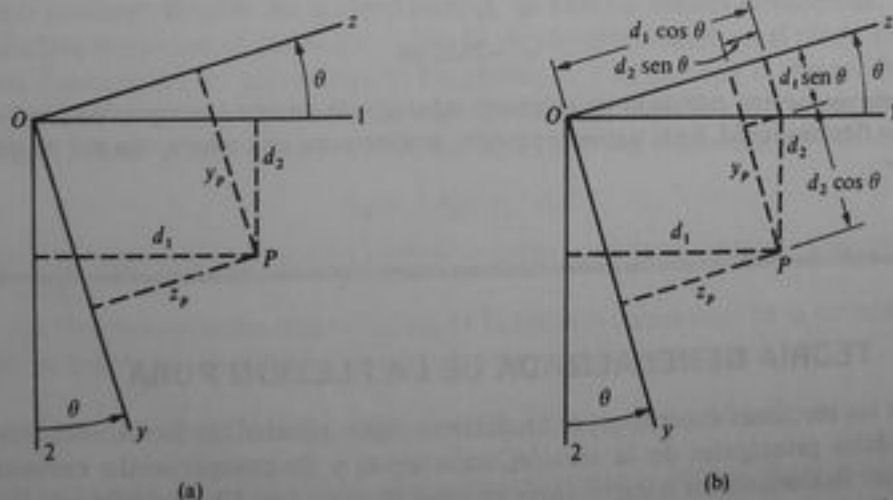


Fig. 9-12 Coordenadas del punto P con respecto a ejes yz y ejes 1-2

Luego, conociendo las coordenadas de un punto con respecto a los ejes 1-2, se utilizan las ecuaciones anteriores para obtener las coordenadas de los ejes yz .

Regresando ahora a la sección angular de la Fig. 9-11, obtenemos el par ordenado del punto A con respecto a los ejes 1-2 mediante las dimensiones referidas en la Tabla E-5:

$$d_1 = -0.987 \text{ plg} \quad d_2 = -(6.00 \text{ plg} - 1.99 \text{ plg}) = -4.01 \text{ plg}$$

Entonces, las coordenadas y y z de A se obtienen de las Ecs. (9-15):

$$\begin{aligned}y_a &= (-0.987 \text{ plg})(\text{sen } 23.7^\circ) + (-4.01 \text{ plg})(\text{cos } 23.7^\circ) \\ &= -4.07 \text{ plg} \\ z_a &= (-0.987 \text{ plg})(\text{cos } 23.7^\circ) - (-4.01 \text{ plg})(\text{sen } 23.7^\circ) \\ &= 0.71 \text{ plg}\end{aligned}$$

En forma similar, determinamos para el punto B las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned}d_1 &= -0.987 \text{ plg} & d_2 &= 1.99 \text{ plg} \\ y_b &= 1.43 \text{ plg} & z_b &= -1.70 \text{ plg}\end{aligned}$$

Un método optativo para determinar estas coordenadas es dibujar a escala la sección transversal del perfil angular y medir las distancias.

Las componentes del momento M respecto a los ejes y y z son

$$\begin{aligned}M_y &= M \text{ sen } \theta = (10 \text{ plg}\cdot\text{k})(\text{sen } 23.7^\circ) = 4.02 \text{ plg}\cdot\text{k} \\ M_z &= M \text{ cos } \theta = (10 \text{ plg}\cdot\text{k})(\text{cos } 23.7^\circ) = 9.16 \text{ plg}\cdot\text{k}\end{aligned}$$

El esfuerzo en el punto A (de la Ec. 9-12a) es

$$\sigma_a = \frac{M_y z_a}{I_y} - \frac{M_z y_a}{I_z}$$

Sustituyendo los valores numéricos, obtenemos

$$\sigma_a = 2650 \text{ psi}$$

Mediante un cálculo similar, obtenemos el esfuerzo σ_b :

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{M_y z_b}{I_y} - \frac{M_z y_b}{I_z} \\ &= -2550 \text{ psi}\end{aligned}$$

De esta manera se han calculado los esfuerzos máximos de tensión y compresión producidos por el par flexionante M . En la siguiente sección, analizaremos esta misma viga por un método diferente.

9.4 TEORÍA GENERALIZADA DE LA FLEXIÓN PURA

En las secciones anteriores, se analizaron vigas asimétricas localizando los ejes centroidales principales de la sección transversal y descomponiendo entonces al momento flexionante en componentes en tales direcciones. La conveniencia de este método es que se pueden utilizar todas las fórmulas estándar para esfuerzos y deflexiones porque la flexión se lleva a cabo en un plano principal. Sin embargo, el método no es conveniente cuando la orientación de los ejes principales no se obtiene mediante inspección (como cuando existe un eje de simetría) o a partir de tablas (como en el caso de secciones angulares estándar). Si es necesario calcular la orientación de los ejes principales y las magnitudes de los momentos de inercia principales, puede ser más simple trabajar con ejes en la sección transversal que no son ejes principales. Un

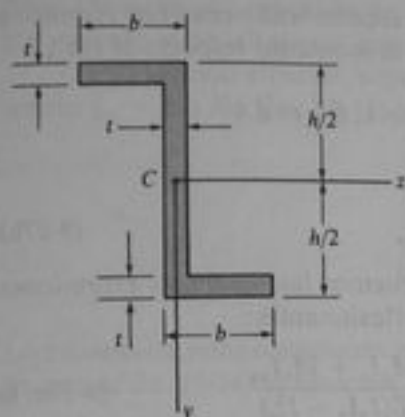


Fig. 9-13 Sección Z asimétrica con ejes centroidales no principales

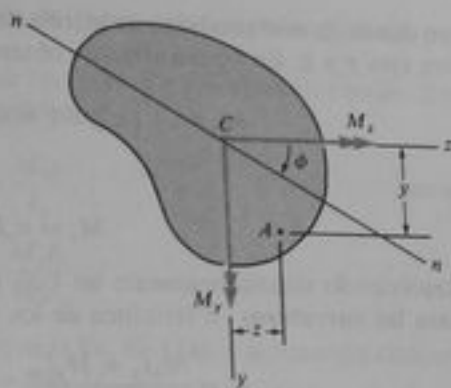


Fig. 9-14 Sección transversal asimétrica con ejes centroidales no principales

ejemplo es una sección Z (Fig. 9-13), para la cual deben situarse los ejes principales mediante cálculos. Los ejes y y z mostrados en la figura son **ejes centroidales no principales**, pero son convenientes para su uso en el cálculo, ya que son paralelos a los lados de la sección transversal.

Para obtener las ecuaciones de una **teoría generalizada de la flexión** (esto es, una teoría referida a ejes no principales en lugar de restringida a ejes principales), consideremos la sección transversal asimétrica de la Fig. 9-14. Los ejes y y z tienen su origen en el centroide pero no son ejes principales. En el caso más general, sobre la sección transversal actúan momentos flexionantes M_y y M_z , y la flexión de la viga ocurre en ambos planos xy y xz . (Como los planos xy y xz no son planos principales, cada momento produce flexión en ambos planos. Si fueran planos principales, sólo M_z produciría flexión en el plano xy , y sólo M_y produciría flexión en el plano xz .) Denotemos nuevamente las curvaturas en los planos xy y xz por κ_y y κ_z , respectivamente, con signos convencionales como se representa en la Fig. 9-7. Entonces el esfuerzo normal σ_x en el punto A , que tiene coordenadas y y z (véase Fig. 9-14), es

$$\sigma_x = -\kappa_y E y - \kappa_z E z \quad (9-16)$$

según está dado por las Ecs. (9-7) y (9-8) o como se obtiene mediante inspección de la Fig. 9-14.

La fuerza resultante que actúa sobre la sección transversal en la dirección x (esto es, la fuerza axial) puede ahora evaluarse e igualarse a cero:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad \text{o bien} \quad \kappa_y E \int y dA + \kappa_z E \int z dA = 0$$

Vemos que esta ecuación se satisface automáticamente porque el origen de los ejes está en el centroide del área de la sección transversal.

El momento M_y es el momento resultante de los esfuerzos respecto al eje y :

$$M_y = \int \sigma_x z dA = -\kappa_y E \int y z dA - \kappa_z E \int z^2 dA$$

o sea,

$$M_y = -\kappa_y E I_{yz} - \kappa_z E I_y \quad (9-17a)$$

en donde I_x es el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes y y z . En forma similar, obtenemos para el momento respecto al eje z

$$M_z = - \int \sigma_x y dA = \kappa_y E \int y^2 dA + \kappa_z E \int yz dA$$

o sea,

$$M_z = \kappa_y E I_z + \kappa_z E I_{yz} \quad (9-17b)$$

Resolviendo simultáneamente las Ecs. (9-17), obtenemos las siguientes expresiones para las curvaturas en términos de los momentos flexionantes:

$$\kappa_y = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \kappa_z = - \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad (9-18a, b)$$

Ahora sustituyendo estas expresiones de las curvaturas en la Ec. (9-16), obtenemos el esfuerzo normal σ_x :

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (9-19)$$

Esta ecuación es una fórmula generalizada de la flexión utilizable para calcular el esfuerzo por flexión en cualquier punto de una viga asimétrica cuando se conocen los momentos M_y y M_z . Estos momentos actúan respecto a los ejes y y z , los cuales son ejes centroidales perpendiculares, pero no necesariamente ejes principales.

La orientación del eje neutro nn (Fig. 9-14) se obtiene igualando σ_x a cero:

$$(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y = 0$$

A partir de esta ecuación encontramos

$$\tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{M_z I_y + M_y I_{yz}} \quad (9-20)$$

en donde ϕ es el ángulo entre el eje z y el eje neutro. Conocer la posición del eje neutro sirve para identificar los puntos de máximo esfuerzo. También, la orientación del eje neutro determina la dirección en que ocurren las deflexiones, porque el plano de flexión es perpendicular al eje neutro.

Si algún momento flexionante es cero, las fórmulas anteriores pueden simplificarse. Por ejemplo, si $M_y = 0$ obtenemos

$$\sigma_x = \frac{M_z(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (9-21a)$$

$$\tan \phi = \frac{I_{yz}}{I_y} \quad (9-21b)$$

Si $M_z = 0$, obtenemos

$$\sigma_x = \frac{M_y(I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (9-22a)$$

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_{yz}} \quad (9-22b)$$

Estas fórmulas son aplicables en muchos casos de interés práctico porque los ejes y y z a menudo están alineados con las cargas.

Como un caso especial, supongamos que los ejes y y z son ejes principales. Entonces $I_{yz} = 0$ y las Ecs. (9-19) y (9-20) se reducen a

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y}$$

La primera de estas ecuaciones es la misma que la Ec. (9-12a), y la segunda concuerda con la Ec. (9-14) si notamos que $\tan \theta = M_y/M_z$.

Ejemplo

Una sección angular con lados desiguales ($L 6 \times 4 \times 1/2$) está sometida a un momento flexionante $M_x = 10 \text{ plg}\cdot\text{k}$ que actúa en el plano xy (Fig. 9-15). Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga utilizando la fórmula generalizada de la flexión.

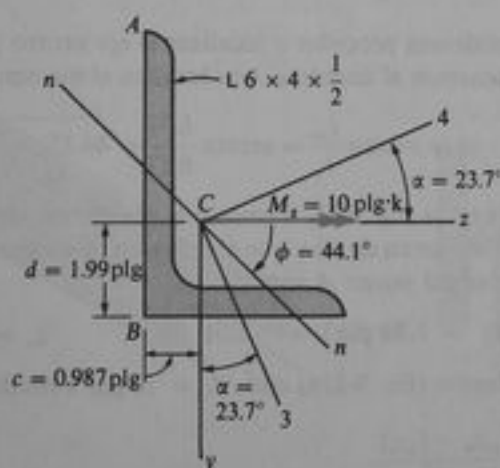


Fig. 9-15 Ejemplo. Sección angular con lados desiguales

Las propiedades de la sección angular se indican en el Apéndice E, Tabla E-5. Los ejes centroidales y y z están localizados a una distancia $c = 0.987 \text{ plg}$ desde el lado largo y a una distancia $d = 1.99 \text{ plg}$ desde el lado corto. Los momentos de inercia correspondientes son

$$I_y = 6.27 \text{ plg}^4 \quad I_z = 17.4 \text{ plg}^4$$

según se obtiene de la tabla.

A fin de utilizar la fórmula generalizada de la flexión, necesitamos también el producto de inercia I_{yz} . Como no es una cantidad tabulada, debemos calcular I_{yz} a partir de las otras propiedades. Un método es utilizar la fórmula de rotación de ejes para productos de inercia (Ec. C-15b, Apéndice C). Debemos aplicar esta fórmula a una rotación desde los ejes princi-

pales hasta los ejes yz , y entonces, como el producto de inercia es cero para los ejes principales, podemos resolver para I_{yz} . La orientación de los ejes principales 3-4 está indicada en la Tabla E-5 por el ángulo α . Para la sección angular en este problema, obtenemos

$$\alpha = \arctan 0.440 = 23.7^\circ$$

También, los momentos de inercia principales se obtienen de los datos tabulados, como sigue:

$$I_3 = Ar^2 = (4.75 \text{ plg}^2)(0.870 \text{ plg})^2 = 3.60 \text{ plg}^4$$

$$I_4 = I_x + I_y - I_3 = 6.27 \text{ plg}^4 + 17.4 \text{ plg}^4 - 3.60 \text{ plg}^4 = 20.1 \text{ plg}^4$$

La rotación desde los ejes principales 3-4 hasta los ejes yz es en sentido de las manecillas del reloj en la Fig. 9-15 (en lugar de sentido antihorario, como en la Fig. C-16 del Apéndice C) porque el eje y está hacia abajo en la Fig. 9-15. Luego, sustituyendo en la Ec. (C-15b) del Apéndice C, y convirtiendo a la notación de la Fig. 9-15, obtenemos

$$I_{yz} = \frac{I_4 - I_3}{2} \sin 2\alpha \quad (9-23)$$

Esta ecuación proporciona I_{yz} en términos de los momentos de inercia con respecto a los ejes principales 3-4 y el ángulo α con los ejes principales.

Para la sección angular en análisis, calculamos I_{yz} como sigue:

$$I_{yz} = \frac{20.1 \text{ plg}^4 - 3.6 \text{ plg}^4}{2} \sin 2(23.7^\circ) = 6.07 \text{ plg}^4$$

Ahora que se conoce I_{yz} , podemos proceder a localizar el eje neutro y calcular los esfuerzos.

De la Ec. (9-21b) obtenemos el ángulo ϕ que localiza el eje neutro nn :

$$\phi = \arctan \frac{I_{yz}}{I_y} = \arctan \frac{6.07}{6.27} = 44.1^\circ$$

El eje neutro nn se muestra en la Fig. 9-15. Vemos que el esfuerzo de tensión máximo ocurre en el punto A (o al menos muy cerca de él) y que el esfuerzo de compresión máximo ocurre en el punto B . Las coordenadas del punto A son

$$y_a = -(6.00 \text{ plg} - 1.99 \text{ plg}) = -4.01 \text{ plg} \quad z_a = -0.987 \text{ plg}$$

Entonces, la fórmula de flexión (Ec. 9-21a) con $M_x = 10 \text{ plg}\cdot\text{k}$ resulta

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{M_x(I_{yz}z_a - I_y y_a)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ &= \frac{(10 \text{ plg}\cdot\text{k})[(6.07 \text{ plg}^4)(-0.987 \text{ plg}) - (6.27 \text{ plg}^4)(-4.01 \text{ plg})]}{(6.27 \text{ plg}^4)(17.4 \text{ plg}^4) - (6.07 \text{ plg}^4)^2} \\ &= 2650 \text{ psi} \end{aligned}$$

Mediante un cálculo similar obtenemos el esfuerzo en B :

$$y_b = 1.99 \text{ plg} \quad z_b = -0.987 \text{ plg}$$

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_x(I_{yz}z_b - I_y y_b)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ &= \frac{(10 \text{ plg}\cdot\text{k})[(6.07 \text{ plg}^4)(-0.987 \text{ plg}) - (6.27 \text{ plg}^4)(1.99 \text{ plg})]}{(6.27 \text{ plg}^4)(17.4 \text{ plg}^4) - (6.07 \text{ plg}^4)^2} \\ &= -2560 \text{ psi} \end{aligned}$$

Estos esfuerzos son los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga. Dentro de los límites de precisión de los cálculos, concuerdan con los resultados obtenidos en el Ejemplo 2 de la sección anterior, donde se analizó el mismo perfil angular considerando flexión respecto a los ejes principales.

9.5 FLEXIÓN DE VIGAS MEDIANTE CARGAS LATERALES; CENTRO DE CORTANTE

En las secciones anteriores consideramos flexión pura de vigas asimétricas, por lo que sólo nos ocupamos de momentos flexionantes que actúan sobre las secciones transversales. Ahora consideraremos los efectos de cargas laterales que producen fuerzas cortantes adicionales a los momentos flexionantes. Para mostrar los efectos de las cargas laterales, consideremos una viga en voladizo de sección transversal simplemente simétrica que soporta una carga P en su extremo libre (Fig. 9-16a). La fuerza P actúa perpendicular al eje z , el cual es un eje de simetría de la sección transversal (Fig. 9-16b). El origen de coordenadas se toma en el centroide C de la sección transversal, por lo que los ejes y y z son ejes centroidales principales.

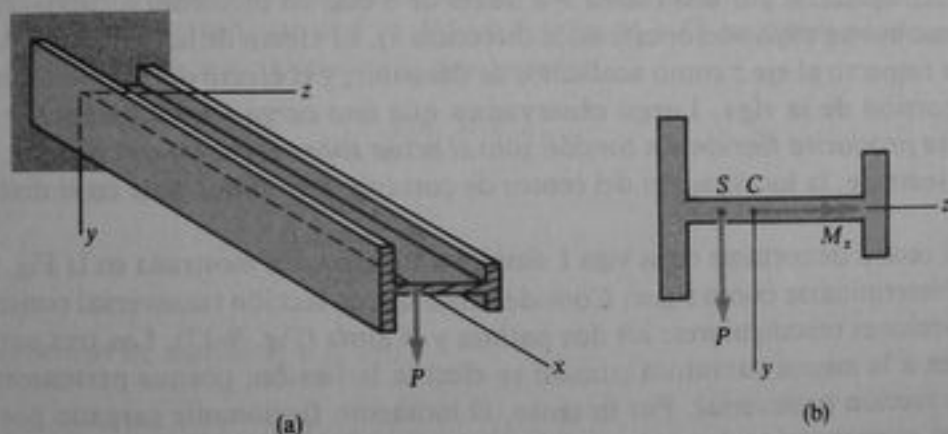


Fig. 9-16 Viga en voladizo con sección transversal simplemente simétrica: (a) viga con carga y (b) sección transversal de la viga mostrando el centroide C y el centro de cortante S

Supongamos que cuando actúa la carga P , la viga se flexiona con el eje z como eje neutro. Entonces, sobre cualquier sección transversal de la viga, existen dos resultantes de esfuerzo; estas resultantes son el momento flexionante M_z respecto al eje z y la fuerza cortante V_z (igual a P) que actúa en la dirección y (Fig. 9-16b). El momento M_z es la resultante de los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal, y la fuerza P es la resultante de los esfuerzos cortantes. Si el material satisface la ley de Hooke, los esfuerzos normales variarán linealmente con la distancia desde el eje neutro. Como obtenemos los esfuerzos cortantes a partir de los esfuerzos normales por medio del equilibrio estático, la distribución de los esfuerzos normales también determina la distribución de los esfuerzos cortantes. Luego, los esfuerzos

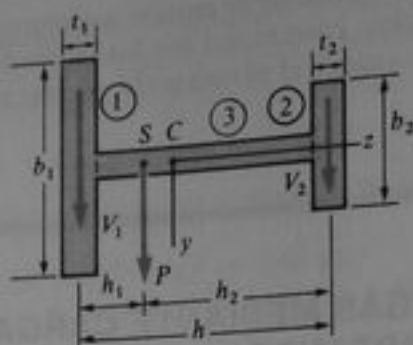


Fig. 9-17 Sección transversal de una viga I simplemente simétrica mostrando la localización del centro de cortante S

cortantes tienen una fuerza resultante específica P cuya línea de acción pasa por un punto S sobre el eje z (Fig. 9-16b). Este punto se conoce como el **centro de cortante** (o el **centro de flexión**) de la sección transversal. Este punto no coincide con el centroide C salvo en casos especiales que se mencionarán posteriormente.

A partir de esta explicación vemos que la carga P debe actuar a través del centro de cortante S si la única resultante de los esfuerzos cortantes debe ser la fuerza P misma. En estas condiciones, la flexión ocurre con el eje z como eje neutro, deformándose la viga con el plano xy como plano de flexión. Si P no está aplicada en S , puede reemplazarse por una fuerza P a través de S más un momento torsionante (esto es, un momento cuyo vector esté en la dirección x). El efecto de la fuerza es producir flexión respecto al eje z como acabamos de describir, y el efecto del momento es producir torsión de la viga. Luego observamos que *una carga lateral que actúa sobre una viga producirá flexión sin torsión sólo si actúa sobre el centro de cortante*. Consecuentemente, la localización del centro de cortante S es importante en el diseño de vigas.

El centro de cortante de la viga I simplemente simétrica mostrada en la Fig. 9-16b puede determinarse como sigue. Consideramos que la sección transversal consiste en tres porciones rectangulares: los dos patines y el alma (Fig. 9-17). Las tres partes se someten a la misma curvatura cuando se efectúa la flexión, porque pertenecen a la misma sección transversal. Por lo tanto, el momento flexionante cargado por cada porción es proporcional a su momento de inercia respecto al eje z :

$$\kappa = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} = \frac{M_3}{EI_3} \quad (\text{a})$$

en la cual M_1 , M_2 , M_3 son los momentos resistidos por las porciones 1, 2 y 3, respectivamente, e I_1 , I_2 , I_3 son sus respectivos momentos de inercia respecto al eje z . Si el alma es delgada, su momento de inercia I_3 será muy pequeño comparado con I_1 e I_2 . Entonces podemos desprestigiar el efecto del alma y suponer que todo el momento es resistido por los patines:

$$M_z = M_1 + M_2$$

También, de la Ec. (a) obtenemos

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos

$$M_1 = \frac{M_z I_1}{I_1 + I_2} \quad M_2 = \frac{M_z I_2}{I_1 + I_2} \quad (b)$$

Las fuerzas cortantes V_1 y V_2 en los patines están en la misma proporción que los momentos flexionantes (porque $V = dM/dx$); luego,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

También, la fuerza cortante total V_y (igual a P) es

$$V_y = V_1 + V_2$$

Comparando esta ecuación con las Ecs. (b), vemos que las fuerzas cortantes son

$$V_1 = \frac{V_y I_1}{I_1 + I_2} \quad V_2 = \frac{V_y I_2}{I_1 + I_2} \quad (c)$$

La línea de acción de la resultante de estas dos fuerzas cortantes determina la localización del centro de cortante S .

Para localizar S en términos de las dimensiones de la sección transversal, denotemos la distancia entre las líneas centrales de los patines por h , los anchos de los patines por b_1 y b_2 , y sus espesores por t_1 y t_2 (Fig. 9-17). Deseamos determinar las distancias h_1 y h_2 desde los centros de los patines hasta el centro de cortante S . En vista de que P es la resultante de V_1 y V_2 , las fuerzas V_1 y V_2 no deben producir momento resultante respecto al punto S ; por lo tanto,

$$V_1 h_1 = V_2 h_2$$

o, mediante las Ecs. (c),

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad (d)$$

Los momentos de inercia I_1 e I_2 son

$$I_1 = \frac{t_1 b_1^3}{12} \quad I_2 = \frac{t_2 b_2^3}{12}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (d), y observando también que $h = h_1 + h_2$, encontramos

$$h_1 = \frac{t_2 b_2^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} \quad (9-24a, b)$$

$$h_2 = \frac{t_1 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$$

Estas expresiones pueden utilizarse para localizar el centro de cortante S de una viga I simplemente simétrica. Obsérvese particularmente que h , h_1 y h_2 se miden a las líneas centrales de los patines. Si $b_1 > b_2$ y $t_1 \geq t_2$, o si $t_1 > t_2$ y $b_1 \geq b_2$, el centro de cortante se localiza a la izquierda del centroide C en la Fig. 9-17; esto es, está localizado entre C y el patin mayor.

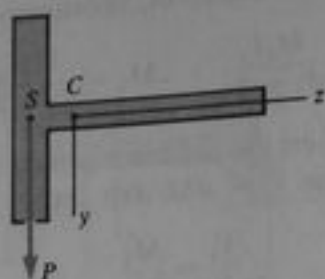


Fig. 9-18 Localización del centro de cortante S para una viga T

Un caso especial ocurre cuando la viga tiene únicamente un patín y es una viga T (Fig. 9-18). Para una viga de este perfil, sustituimos $b_2 = t_2 = 0$ en las Ecs. (9-24) y obtenemos

$$h_1 = 0 \quad h_2 = h$$

Este resultado muestra que el centro de cortante se localiza en la intersección de las líneas centrales del patín y el alma. Hubiéramos podido anticipar este resultado porque al obtenerlo se supuso que el alma era muy delgada, de forma tal que la fuerza cortante la soportaban por completo los patines.

Si la viga tiene dos patines idénticos, tenemos una viga I doblemente simétrica para la cual los ejes y y z son ejes de simetría. Entonces tenemos $t_1 = t_2$ y $b_1 = b_2$, y las Ecs. (9-24) resultan

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

Este resultado muestra que el centro de cortante coincide con el centroide. En general, el centro de cortante (como el centroide) está alojado en cualquier eje de simetría; por lo que, los dos puntos siempre coinciden para secciones transversales doblemente simétricas. Luego, cualquier carga transversal que actúa en el centroide de una sección transversal doblemente simétrica producirá flexión sin torsión. El método para determinar los esfuerzos y deflexiones de tales vigas se explicó en la Sección 9.2.

Si una viga es simplemente simétrica, tanto el centroide como el centro de cortante están alojados en el eje de simetría, como ya se mencionó. Entonces, si una carga transversal actúa en el centro de cortante en cualquier dirección (Fig. 9-19), puede descomponerse en dos componentes, una en la dirección del eje y y la otra paralela al eje z . La primera componente producirá flexión en el plano xy con el eje z como eje neutro. La segunda componente producirá flexión (sin torsión) en el plano xz con el eje y como eje neutro. Los esfuerzos y deflexiones producidos por estas cargas actuando separadamente, pueden superponerse para obtener los esfuerzos y deflexiones causados por la carga inclinada original P , según se describió en la Sección 9.3.

Si la carga transversal P no está aplicada en el centro de cortante (Fig. 9-20a), puede reemplazarse por un sistema estáticamente equivalente consistente en una fuerza paralela P aplicada en el centro de cortante y un par torsionante T (Fig. 9-20b). El par T tiene una magnitud igual al producto de la fuerza P y la distancia e entre la antigua línea de acción y la nueva. Los efectos de la carga P actuando en el

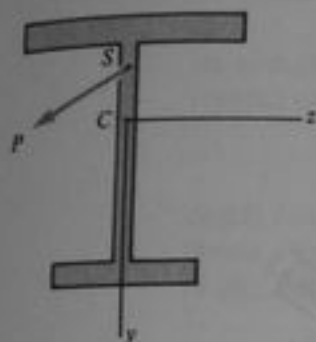


Fig. 9-19 Viga simplemente simétrica con una carga transversal P aplicada en el centro de cortante S

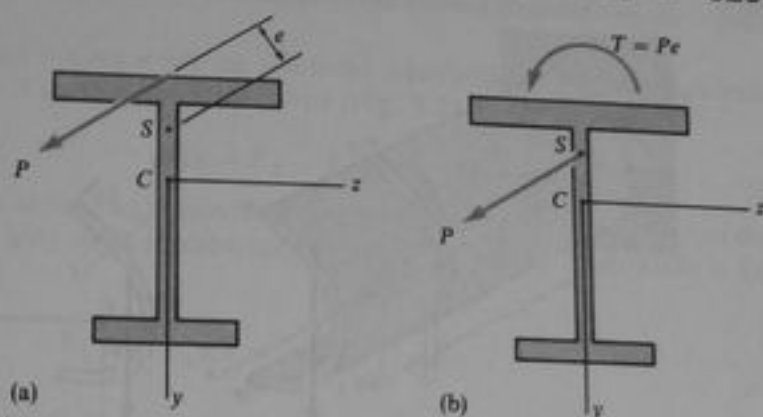


Fig. 9-20 Viga simplemente simétrica con una carga transversal P que no actúa a través del centro de cortante S

centro de cortante pueden determinarse según lo descrito en el párrafo anterior, y los efectos del par torsionante pueden manejarse mediante un análisis de torsión. Por supuesto, en esta explicación se supone que la viga puede deformarse lateralmente y torcerse con libertad. Si está soportada lateralmente, la flexión lateral y la torsión estarán restringidas y la acción de los soportes introducirá esfuerzos adicionales.

La localización del centro de cortante para secciones transversales simplemente simétricas o asimétricas no es siempre una tarea fácil. Para secciones macizas y para secciones huecas cerradas, usualmente está situado cerca del centroide. Tales secciones tienen altas rigideces torsionales; por lo que, se suelen despreciar los efectos de torsión si la carga se aplica en el centroide o cerca del mismo. Las vigas con secciones transversales abiertas de pared delgada (tales como canales, ángulos, vigas T y secciones Z) son muy débiles a la torsión; por lo tanto, es importante localizar los centros de cortante y tomar en cuenta los efectos de torsión. Las secciones transversales de este tipo se consideran en las siguientes secciones.

9.6 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE SECCIONES TRANSVERSALES ABIERTAS DE PARED DELGADA

Ya se describió la distribución de esfuerzos cortantes en vigas rectangulares y en las almas de vigas con patines (véanse secciones 5.5 y 5.6). En vigas con tales perfiles, los esfuerzos cortantes están dados por la fórmula del cortante

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (9-25)$$

bajo el supuesto de que los esfuerzos cortantes se distribuyen uniformemente a través del ancho b de la viga. Este requisito se satisface con buena precisión para vigas con sección transversal rectangular delgada, para las almas de vigas de patin ancho y para algunos otros perfiles.

Ahora se considerará un tipo especial de vigas, conocidas como vigas de sección transversal abierta de pared delgada, para las cuales es posible determinar los esfuer-

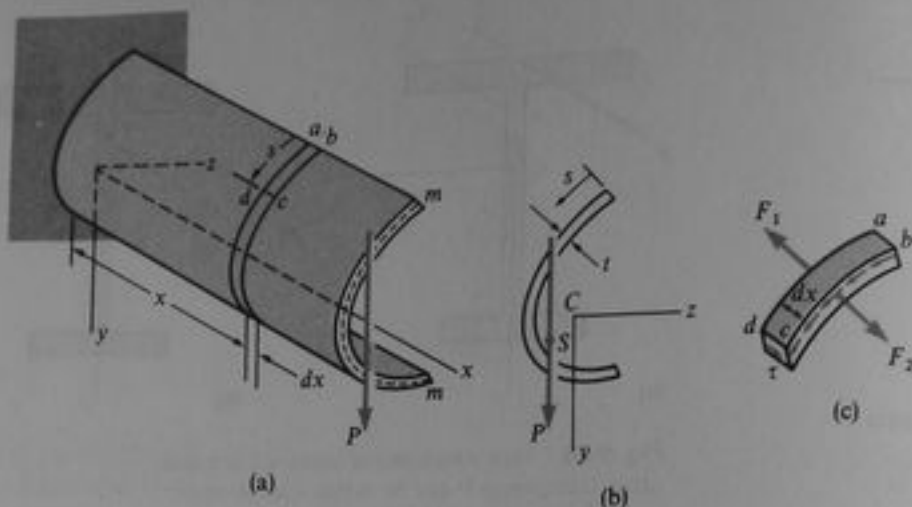


Fig. 9-21 Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal abierta de pared delgada. (Nota: los ejes y y z son ejes centroidales principales.)

zos cortantes por el mismo método utilizado para obtener la fórmula de cortante. Las vigas de este tipo tienen dos características: (1) La sección transversal tiene un espesor de pared que es pequeño comparado con su altura o ancho totales, y (2) la sección transversal es abierta, como en el caso de una viga I o una viga canal, en lugar de ser cerrada, como en el caso de una viga de cajón hueca. Las vigas de secciones abiertas de pared delgada se utilizan ampliamente en obras de ingeniería y también se denominan **secciones estructurales** o **perfiles**.

Empezaremos nuestro estudio de esfuerzos cortantes en secciones estructurales examinando una viga cuya línea central de la sección transversal mm es de forma arbitraria (Fig. 9-21a). Los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal, y la carga P actúa paralela al eje y (Fig. 9-21b). Si la carga P actúa en el centro de cortante S , no existirá torsión en la viga; la flexión ocurrirá en el plano xy y el eje z será el eje neutro. Los esfuerzos normales en cualquier punto en la viga están dados por

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \quad (9-26)$$

donde M_z es el momento flexionante respecto al eje z y y es la ordenada al punto en consideración.

Ahora consideremos un elemento $abcd$ cortado entre dos secciones transversales separadas una distancia dx , y que tiene una longitud s medida a lo largo de la línea central de la sección transversal (Fig. 9-21a). La resultante de los esfuerzos normales que actúan sobre la cara ad se denota por F_1 (Fig. 9-21c) y la resultante sobre la cara bc se denota por F_2 . Como el momento flexionante en la cara ad es mayor que en bc , la fuerza F_1 será mayor que F_2 ; por lo que, deben actuar esfuerzos cortantes τ a lo largo de la cara cd a fin de tener equilibrio estático del elemento. Estos esfuerzos cortantes deben ser paralelos a las superficies superior e inferior del elemento, las cuales están libres de esfuerzos, y deben estar acompañados por esfuerzos cortan-

tes complementarios que actúen sobre las secciones transversales ad y bc . Sumando fuerzas en la dirección x para el elemento $abcd$ (Fig. 9-21c), obtenemos

$$\tau t dx = F_1 - F_2 \quad (a)$$

donde t es el espesor de la sección transversal en cd ; esto es, t es el espesor a una distancia s desde la orilla libre de la sección transversal (Fig. 9-21b). Utilizando la Ec. (9-26), concluimos que

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^s y dA$$

donde dA es un elemento de área sobre el lado ad del elemento, y es la coordenada del elemento dA , y M_{z1} es el momento flexionante en esta sección transversal. Para la fuerza F_2 se obtiene una expresión análoga:

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^s y dA$$

Sustituyendo las expresiones para F_1 y F_2 , en la Ec. (a) obtenemos

$$\tau = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx} \frac{1}{I_z t} \int_0^s y dA$$

La cantidad $(M_{z2} - M_{z1})/dx$ es la razón de cambio del momento flexionante y es igual a $-V_y$, donde V_y es la fuerza cortante en la dirección y (igual a P en la Fig. 9-21). Por lo tanto, la ecuación para los esfuerzos cortantes es

$$\tau = -\frac{V_y}{I_z t} \int_0^s y dA$$

Esta ecuación proporciona los esfuerzos cortantes en cualquier punto de la sección transversal a una distancia s desde la orilla libre. La integral del lado derecho representa el momento con respecto al eje neutro (el eje z) del área de la sección transversal desde $s = 0$ hasta $s = s$. Denotando por Q_z este primer momento, y utilizando únicamente el valor absoluto del esfuerzo cortante, ya que su dirección puede determinarse por inspección, podemos formular la ecuación para los esfuerzos cortantes τ en la forma más simple

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} \quad (9-27)$$

la cual es análoga a la Ec. (9-25). Los esfuerzos cortantes τ están dirigidos a lo largo de la línea media de la sección transversal, paralelos a las orillas de la sección, y se supone que su intensidad es constante a través del espesor t de la pared. El espesor t mismo no necesariamente es constante, pero puede variar como función de s .

El **flujo de cortante** en cualquier punto de la sección transversal es igual al producto del esfuerzo cortante y el espesor en ese punto:

$$f = \tau t = \frac{V_y Q_z}{I_z} \quad (9-28)$$

Como V_x e I_x son constantes, se aprecia que el flujo de cortante es directamente proporcional a Q_x . En las orillas superior e inferior de la sección transversal, Q_x es cero y, en consecuencia, el flujo de cortante es cero. Tal flujo varía continuamente entre esos puntos extremos y alcanza su valor máximo cuando Q_x es máximo, lo que ocurre en el eje neutro.

Si la viga representada en la Fig. 9-21 se flexiona mediante cargas que actúan sobre el centro de cortante y paralelas al eje z , entonces el eje y será el eje neutro para la flexión. En tal caso, podemos repetir el mismo tipo de análisis y obtener las siguientes ecuaciones en lugar de las Ecs. (9-27) y (9-28):

$$\tau = \frac{V_z Q_y}{I_y t} \quad f = \tau t = \frac{V_z Q_y}{I_y} \quad (9-29a, b)$$

En estas ecuaciones, V_z es la fuerza cortante paralela al eje z y Q_y es el primer momento con respecto al eje y .

En resumen, hemos obtenido ecuaciones para los esfuerzos cortantes en vigas de sección transversal abierta de pared delgada, bajo el supuesto de que la fuerza cortante se aplique en el centro de cortante S y sea paralela a uno de los ejes centroidales principales. Si la fuerza cortante está inclinada con respecto a los ejes y y z (pero se aplica en el centro de cortante), puede descomponerse en componentes paralelas a los ejes principales. Entonces se pueden realizar dos análisis separados, y superponer los resultados.

Ejemplo

Determinar los esfuerzos cortantes en una viga de patin ancho cargada por una fuerza P que actúa en la dirección vertical en el plano del alma (Fig. 9-22a).

Empecemos por tomar una sección transversal intermedia de la viga (Fig. 9-22b) y por considerar los esfuerzos en la porción derecha del patin superior. La distancia s para esta parte de la viga se medirá desde el punto a , donde el esfuerzo cortante es cero, hacia la izquierda hasta la sección bb . El área de la sección transversal entre el punto a y la sección bb es st , donde t es el espesor del patin. La distancia desde el centroide de esta área hasta el eje neutro es $h/2$ (nótese que la h es la altura de la viga entre las líneas centrales de los patines). Luego, para la sección bb tenemos $Q_y = sth/2$; por lo tanto, el esfuerzo cortante en bb es

$$\tau = \frac{shP}{2I_x} \quad (9-30)$$

según se obtiene de la Ec. (9-27). La dirección de este esfuerzo puede determinarse considerando las fuerzas que actúan sobre un elemento cortado del patin entre el punto a y la sección bb (véase elemento A en la Fig. 9-22a). Este elemento está dibujado a mayor escala en la Fig. 9-22c, a fin de mostrar con claridad las fuerzas que actúan sobre él. Se aprecia inmediatamente que la fuerza de tensión F_1 es mayor que la fuerza F_2 , ya que el momento flexionante es mayor en la cara posterior que en la cara frontal del elemento. Ello muestra que para satisfacer el equilibrio, el esfuerzo cortante τ sobre la cara izquierda del elemento A debe actuar hacia el interior de la sección transversal; es decir, deben actuar hacia la izquierda. Regresando ahora a la Fig. 9-22b, se aprecia que hemos determinado por completo la magnitud y dirección del esfuerzo cortante en la sección bb . Esta sección puede tomarse en cualquier lugar entre el punto a y la unión del patin y el alma, por lo que a través de esta región el esfuerzo cortante es horizontal y hacia la

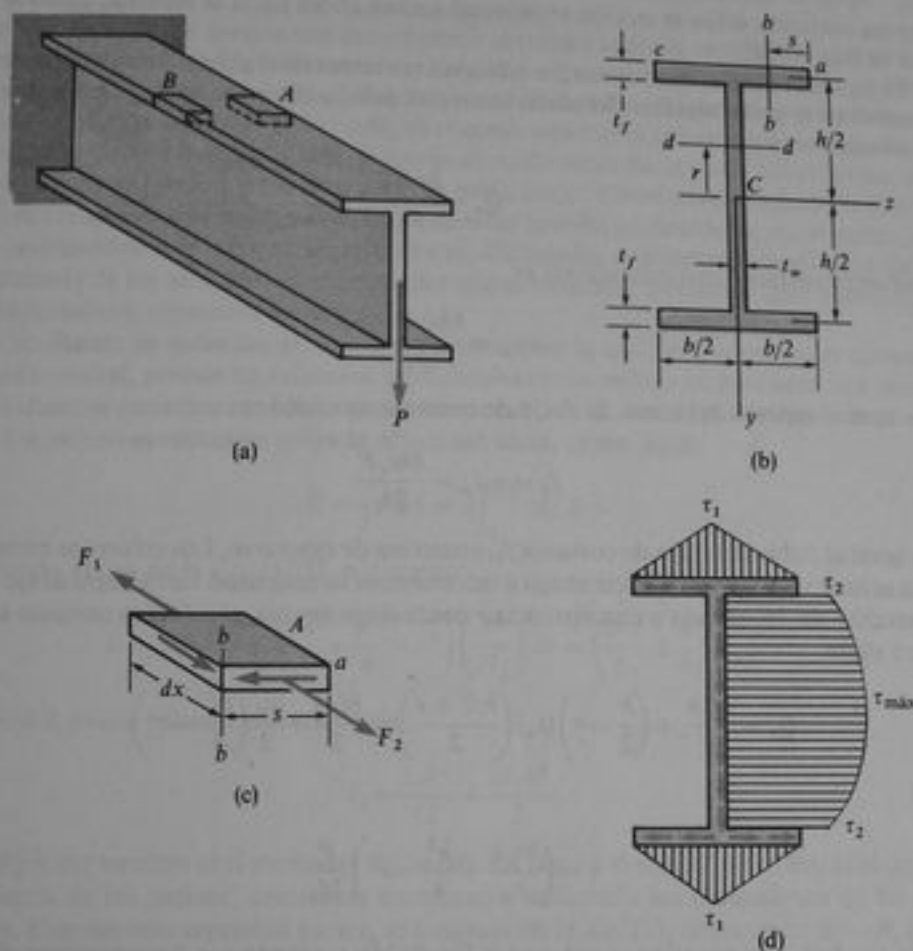


Fig. 9-22 Ejemplo. Esfuerzos cortantes en una viga de patin ancho

izquierda, y su magnitud está dada por la Ec. (9-30). De la Ec. (9-30) se aprecia que el esfuerzo se incrementa linealmente con la distancia s , como se muestra gráficamente en la Fig. 9-22d. El valor máximo τ_1 se alcanza cuando $s = b/2$, donde b es el ancho del patin; luego,

$$\tau_1 = \frac{bhP}{4I_z} \quad (9-31)$$

y el flujo de cortante correspondiente es

$$f_1 = \tau_1 t_f = \frac{bht_f P}{4I_z} \quad (9-32)$$

Obsérvese que se ha calculado el esfuerzo cortante en la unión de las líneas centrales del alma y el patin, sin tomar en cuenta el espesor de la sección transversal. Este procedimiento aproximado es satisfactorio para secciones de pared delgada.

Empezando en el punto c sobre la parte izquierda del patin superior (Fig. 9-22b) y midiendo s hacia la derecha, podemos repetir el mismo tipo de análisis. Encontraremos que la magnitud de los esfuerzos cortantes está dada nuevamente por las Ecs. (9-30) y (9-31). No obstante, recortando un elemento B (Fig. 9-22a) y considerando su equilibrio, se aprecia que los

esfuerzos cortantes sobre la sección transversal actúan ahora hacia la derecha, como se muestra en la Fig. 9-22d.

El siguiente paso es determinar los esfuerzos cortantes en el alma. Considerando un corte horizontal en la parte superior del alma, justo por debajo del patin, encontramos que el primer momento es

$$Q_2 = \frac{bt_f h}{2}$$

y el esfuerzo cortante correspondiente es

$$\tau_2 = \frac{bht_f P}{2I_z t_w} \quad (9-33)$$

donde t_w es el espesor del alma. El flujo de cortante asociado es

$$f_2 = \tau_2 t_w = \frac{bht_f P}{2I_z} \quad (9-34)$$

que es igual al doble del flujo de cortante f_1 , como era de esperarse. Los esfuerzos cortantes en el alma actúan verticalmente hacia abajo e incrementan su magnitud hasta llegar al eje neutro. En la sección dd , localizada a una distancia r desde el eje neutro, el esfuerzo cortante se calcula como sigue:

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r\right)(t_w) \left(\frac{h/2 + r}{2}\right) = \frac{bt_f h}{2} + \frac{t_w}{2} \left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

y

$$\tau = \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right) \frac{P}{2I_z} \quad (9-35)$$

Cuando $r = h/2$, esta ecuación se reduce a la Ec. (9-33); y cuando $r = 0$ proporciona el esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{\max} = \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h}{4}\right) \frac{Ph}{2I_z} \quad (9-36)$$

Nuevamente puede destacarse que se han realizado todos los cálculos basándose en las dimensiones de las líneas centrales de la sección transversal, lo que proporciona resultados convenientemente exactos para secciones delgadas. Sin embargo, por esta causa, los esfuerzos cortantes calculados para el alma de una viga de patin ancho mediante la Ec. (9-35) pueden diferir levemente de los obtenidos en el análisis previo (véase Ec. 5-24).

Los esfuerzos cortantes en el alma varían parabólicamente, como se muestra en la Fig. 9-22d, aunque la variación no es grande. Esto puede apreciarse a partir de la relación de τ_{\max} a τ_2 , la cual es

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_2} = 1 + \frac{ht_w}{4bt_f} \quad (9-37)$$

El segundo término usualmente es pequeño; por ejemplo, si tomamos valores representativos tales como $h = 2b$ y $t_f = 2t_w$, la relación es $\tau_{\max}/\tau_2 = 1.25$.

Finalmente, podemos determinar los esfuerzos cortantes en el patin inferior mediante el mismo método utilizado para el patin superior. Encontraremos que las magnitudes de los esfuerzos son las mismas que las del patin superior, pero tienen las direcciones mostradas en la Fig. 9-22d.

De la Fig. 9-22d se aprecia que los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal "fluyen" hacia adentro desde las orillas externas del patín superior, luego hacia abajo a través del alma y finalmente hacia afuera a las orillas del patín inferior. Este flujo siempre es continuo en cualquier sección estructural; por lo tanto, sirve como una forma conveniente para determinar las direcciones de los esfuerzos. Como la fuerza cortante actúa hacia abajo sobre la viga, sabemos que el flujo de cortante en el alma debe ser hacia abajo. Entonces, conociendo la dirección del flujo de cortante en el alma, inmediatamente sabemos también las direcciones en los patines, debido a la continuidad requerida en el flujo citado. Utilizando esta técnica simple para obtener las direcciones de los esfuerzos es más sencillo que el visualizar elementos tales como A (Fig. 9-22c) recortados y separados de la viga.

La resultante de todos los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal es claramente una fuerza vertical, porque los esfuerzos horizontales en los patines no producen una resultante. Los esfuerzos cortantes en el alma tienen una resultante R , la cual puede determinarse integrando los esfuerzos cortantes sobre la altura del alma, como sigue:

$$R = \int \tau dA = 2 \int_0^{h/2} \tau t_w dr$$

Sustituyendo ahora de la Ec. (9-35), obtenemos

$$R = 2t_w \int_0^{h/2} \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2 \right) \left(\frac{P}{2I_z} \right) dr = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{6} \right) \frac{h^2 t_w P}{2I_z} \quad (b)$$

El término I_z puede calcularse como sigue:

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bt_f h^2}{2} \quad (9-38)$$

donde el primer término es el momento de inercia del alma y el segundo término es el momento de inercia de los patines, calculados nuevamente utilizando las dimensiones de las líneas centrales. Cuando esta expresión para I_z se sustituye en la Ec. (b), obtenemos $R = P$, lo que establece el hecho de que la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal es igual a la fuerza vertical P . La resultante pasa a través del centroide C , que también es el centro de cortante para una viga doblemente simétrica.

9.7 CENTROS DE CORTANTE DE SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA

En la sección anterior se desarrollaron técnicas para determinar los esfuerzos cortantes en vigas de secciones transversales abiertas de pared delgada. Ahora utilizaremos tales técnicas para localizar los centros de cortante. Puesto que el centro de cortante es el punto a través del cual actúa la fuerza de corte resultante, llevaremos el análisis un paso más allá y no sólo evaluaremos los esfuerzos cortantes sino también localizaremos la línea de acción de la resultante de tales esfuerzos. Para ejemplificar el método, así como para obtener algunos resultados útiles, obtendremos fórmulas para localizar los centros de cortante de varias secciones comunes.

La primera viga que consideraremos es una **sección canal** (Fig. 9-23a) flexionada respecto al eje z y sometida a una fuerza cortante vertical V , que actúa paralela al eje y . La distribución de esfuerzos cortantes para el canal se muestra en la Fig.

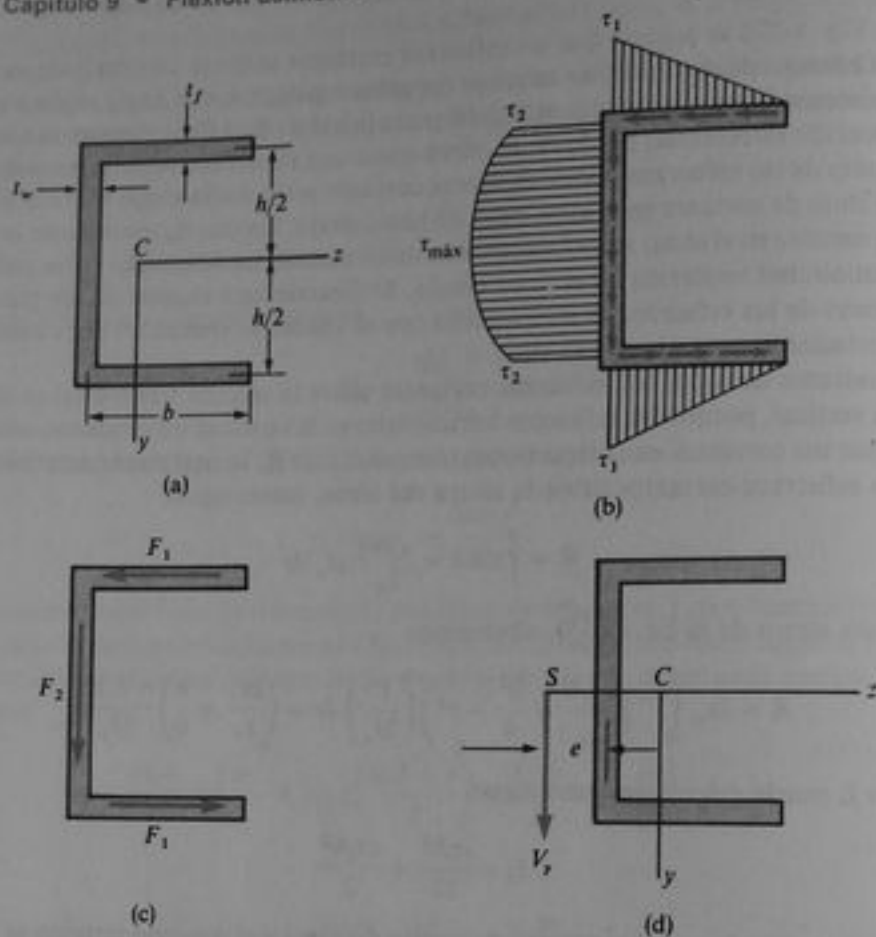


Fig. 9-23 Centro de cortante de una sección canal

9-23b. Para determinar el esfuerzo máximo τ_1 en el patín, se utiliza la Ec. (9-27) con Q_z igual al primer momento del área del patín respecto al eje z :

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2}$$

Luego, el esfuerzo cortante τ_1 en el patín es

$$\tau_1 = \frac{bhV_y}{2I_z} \quad (9-39)$$

En la misma forma, determinamos que el esfuerzo τ_2 en la parte superior del alma es

$$\tau_2 = \frac{bt_f hV_y}{2t_w I_z} \quad (9-40)$$

También, en el eje neutro el esfuerzo es

$$\tau_{\max} = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4} \right) \frac{hV_y}{2I_z} \quad (9-41)$$

Estos esfuerzos se muestran en la Fig. 9-23b.

La fuerza cortante total F_1 en cualquier patín (Fig. 9-23c) puede determinarse a partir de los diagramas triangulares de esfuerzo cortante. Cada fuerza es igual al

área del triángulo de esfuerzo multiplicada por el espesor del patin sobre el cual actúa el esfuerzo:

$$F_1 = \left(\frac{\tau_1 b}{2} \right) (t_f) = \frac{hb^2 t_f V_y}{4I_z} \quad (a)$$

La fuerza vertical F_2 en el alma debe ser igual a la fuerza cortante V_y , dado que las fuerzas en los patines son horizontales y no tienen componente vertical. Podemos comprobar fácilmente que $F_2 = V_y$ considerando el diagrama parabólico de esfuerzos de la Fig. 9-23b. Observamos que el diagrama consiste en dos partes: un rectángulo de dimensiones τ_2 y h , y un área parabólica igual a

$$\frac{2}{3} (\tau_{\max} - \tau_2) h$$

Luego, la fuerza cortante total, igual al área del diagrama de esfuerzo multiplicada por el espesor del alma, es

$$F_2 = \tau_2 h t_w + \frac{2}{3} (\tau_{\max} - \tau_2) h t_w$$

Sustituyendo las expresiones para τ_2 y τ_{\max} , obtenemos

$$F_2 = \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \right) \frac{V_y}{I_z}$$

Finalmente, observamos que la expresión para el momento de inercia es

$$I_z = \frac{t_p h^3}{12} + \frac{bh^2 t_p}{2} \quad (9-42)$$

en la cual nuevamente basamos los cálculos únicamente en las dimensiones de las líneas centrales. Sustituyendo esta expresión para I_z en la ecuación para F_2 , obtenemos

$$F_2 = V_y \quad (b)$$

como era de esperarse.

Las tres fuerzas que actúan sobre la sección transversal (véase Fig. 9-23c) deben ser estáticamente equivalentes a la fuerza resultante V_y que actúa a través del centro de cortante S (véase Fig. 9-23d). Por lo que el momento de la fuerza V_y respecto a cualquier punto de la sección transversal es igual al momento de las tres fuerzas respecto al mismo punto. Esta relación entre los momentos proporciona una ecuación a partir de la cual puede determinarse la distancia e al centro de cortante. Usualmente es conveniente seleccionar el centro de momentos en el centro de cortante S . Luego, para el canal que se analiza, la ecuación de momentos es

$$F_1 h - F_2 e = V_y(0) = 0$$

Sustituyendo las expresiones para F_1 y F_2 (Ecs. a y b) y despejando e , encontramos

$$e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_z} \quad (9-43)$$

Cuando se sustituye la expresión para I_x (Ec. 9-42), la Ec. (9-43) resulta

$$e = \frac{3b^2t_1}{ht_1 + 6bt_1} \quad (9-44)$$

Nótese que e es la distancia desde la línea central del alma hasta el centro de cortante. En lugar de tomar momentos respecto al centro de cortante, podemos utilizar un punto sobre la línea central del alma como centro de momentos. Entonces, la ecuación de momentos para la viga canal es

$$F_1 h = V_y e$$

de donde

$$e = \frac{b^2 h^2 t_1}{4I_x}$$

como antes. Esta elección optativa del centro de momentos a veces es conveniente, aunque no ofrece una reducción significativa en la tarea de cálculo.

Como se explicó en la Sección 9.5, una viga canal experimentará flexión simple siempre y cuando esté cargada mediante fuerzas que actúen a través del centro de cortante S . Si las cargas actúan paralelas al eje y pero se aplican en algún otro punto diferente al centro de cortante (por ejemplo, las cargas podrían actuar en el plano del alma), entonces se reemplazan por un sistema de cargas estáticamente equivalente consistente en fuerzas aplicadas en el centro de cortante y momentos torsionantes. Entonces tendremos una combinación de flexión y torsión de la viga. Si las cargas actúan en la dirección del eje z , a través de los puntos S y C , tendremos flexión simple respecto al eje y . Si las cargas actúan en direcciones oblicuas, pueden reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes paralelas a los ejes y y z .

El siguiente perfil que será considerado es una **sección angular de lados iguales** (Fig. 9-24a), el cual supondremos que está sometido a una fuerza cortante V_y . Cada lado del ángulo tiene longitud b y espesor t . A una distancia s de un extremo, el esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_x t} = \frac{3sV_y}{\sqrt{2} b^3 t} \left(b - \frac{s}{2} \right) \quad (c)$$

donde hemos utilizado las relaciones

$$Q_z = \frac{st}{\sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right)$$

y además

$$I_x = \frac{b^3 t}{3} \quad (9-45)$$

La Ec. (c) establece que τ varía cuadráticamente con s , y alcanza su valor máximo cuando $s = b$:

$$\tau_{\max} = \frac{3V_y}{2\sqrt{2}bt} \quad (d)$$

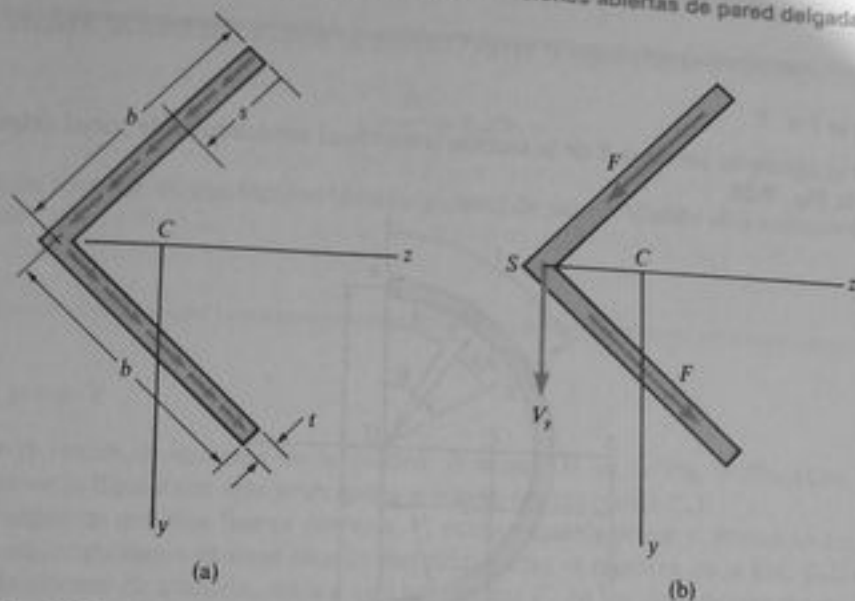


Fig. 9-24 Centro de cortante de una sección angular de lados iguales

La fuerza cortante total F en cada lado (véase Fig. 9-24b) es

$$F = \int_0^b \tau t \, ds = \frac{3V_y}{\sqrt{2}b^3} \int_0^b \left(bs - \frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{V_y}{\sqrt{2}} \quad (e)$$

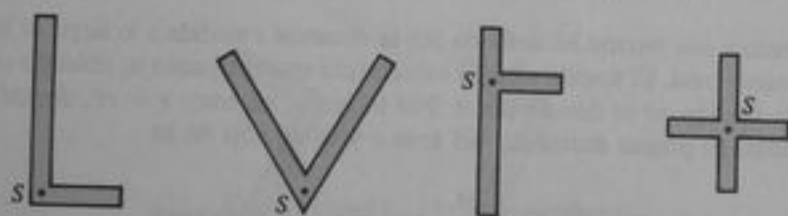


Fig. 9-25 Centros de cortante S de secciones consistentes en dos rectángulos angostos que se cruzan

Tomando las componentes verticales de las fuerzas F , vemos que la resultante de esas fuerzas es una fuerza vertical igual a V_y , como era de esperar. Además, vemos que esta fuerza resultante debe pasar a través del punto de intersección de las líneas de acción de las dos fuerzas F . Por lo que, el centro de cortante S de la sección angular se encuentra en la unión de ambos lados.

Para todas las secciones transversales que consisten en dos rectángulos angostos que se cruzan, como en los ejemplos de la Fig. 9-25, los esfuerzos cortantes tienen fuerzas resultantes que se cruzan en la unión de los rectángulos. Por lo tanto, el centro de cortante S se localiza en esta unión, como se muestra en la figura.

Las localizaciones de los centros de cortante para muchos perfiles estructurales se dan en esta sección, otros en las explicaciones anteriores así como en los ejemplos y problemas que siguen.*

* La primera determinación de un centro de cortante fue realizada por Timoshenko en 1913 (Ref. 9-1). Para información adicional y del desarrollo histórico del concepto del centro de cortante, véanse Refs. 9-1 a 9-20.

Ejemplo 1

Localizar el centro de cortante S de la sección transversal semicircular de pared delgada mostrada en la Fig. 9-26.

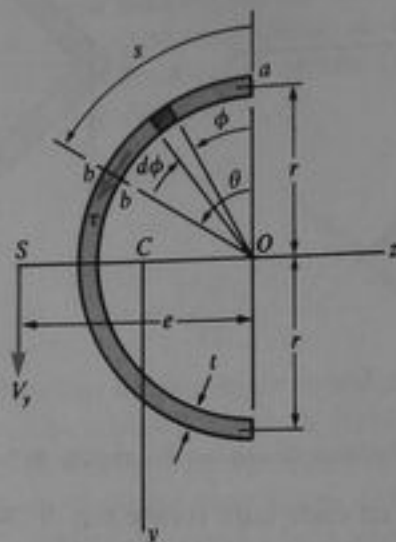


Fig. 9-26 Ejemplo 1. Centro de cortante de una sección semicircular de pared delgada

Consideremos una sección bb definida por la distancia s medida a lo largo de la línea media de la sección transversal. El ángulo central subtendido entre el punto a , ubicado en la orilla de la sección, y la sección bb se denota por θ . Por lo tanto, tenemos $s = r\theta$, donde r es el radio de la línea media. El primer momento del área a y la sección bb es

$$Q_z = \int y dA = \int_0^\theta (r \cos \phi)(rt) d\phi = r^2 t \sin \theta$$

donde t es el espesor de la sección. Luego, el esfuerzo cortante τ en la sección bb es

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{V_y r^2 \sin \theta}{I_z}$$

Sustituyendo $I_z = \pi r^3 t / 2$, obtenemos

$$\tau = \frac{2V_y \sin \theta}{\pi r t} \quad (9-46)$$

Cuando $\theta = 0$ o cuando $\pi = 0$, esta expresión resulta $\tau = 0$; y cuando $\theta = \pi/2$, proporciona el esfuerzo cortante máximo.

El momento respecto al centro O debido a los esfuerzos cortantes τ es

$$T = \int \tau r dA = \int_0^\pi \frac{2V_y r \sin \theta d\theta}{\pi} = \frac{4rV_y}{\pi}$$

el cual debe ser el mismo que el momento debido a la fuerza V_y , que actúa en el centro de cortante; así que

$$T = V_y e = \frac{4rV_y}{\pi}$$

De esta manera, la distancia e desde el punto O hasta el centro de cortante es

$$e = \frac{4r}{\pi} \approx 1.27r \quad (9-47)$$

El centro de cortante de una sección circular general de pared delgada está dado en el Problema 9.7-10.

Ejemplo 2

Localizar el centro de cortante de la sección Z mostrada en la Fig. 9-27a. (Los ejes y y z mostrados en la figura son ejes principales a través del centroide C .)

Supongamos que una fuerza cortante V_y actúa paralela al eje y . Entonces los esfuerzos cortantes en los patines y el alma estarán dirigidos como se muestra en la Fig. 9-27a. A partir de consideraciones de simetría, vemos que las fuerzas F_1 en los dos patines deben ser iguales entre sí (Fig. 9-27b). La resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la sección transversal (F_1 en los patines y F_2 en el alma) debe ser igual a la fuerza cortante V_y . Las fuerzas F_1 tienen una resultante $2F_1$ que actúa a través del centroide y es paralela a los patines. Esta fuerza se cruza con la fuerza F_2 en el centroide; en consecuencia, este punto debe ser el centro de cortante. La composición de las fuerzas $2F_1$ y F_2 en la fuerza cortante resultante V_y , se muestra en la Fig. 9-27b.

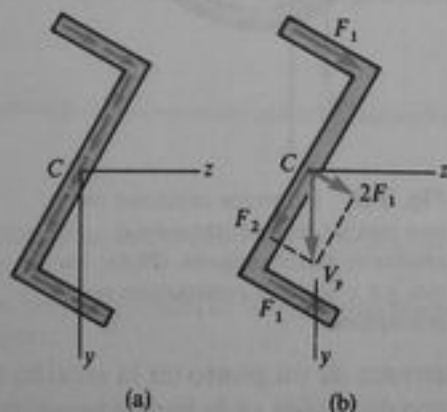


Fig. 9-27 Ejemplo 2. Centro de cortante de una sección Z

Si la viga está sometida a una fuerza cortante V_y paralela al eje z , llegamos a una conclusión similar, es decir, que el centro de cortante coincide con el centroide.

El cálculo de los esfuerzos cortantes en una sección Z resulta complicado si se utilizan ejes principales, por la causa evidente de que los patines y el alma son oblicuos respecto a los ejes. En la siguiente sección mostraremos cómo calcular los esfuerzos cortantes en una sección Z mediante ejes no principales que son paralelos al alma y a los patines.

*9.8 TEORÍA GENERAL PARA ESFUERZOS CORTANTES

En nuestras deducciones anteriores de fórmulas para los esfuerzos cortantes en vigas de sección transversal abierta de pared delgada llegamos a las Ecs. (9-27) a (9-29) para el caso en que los ejes y y z son ejes principales. Ahora derivaremos ecuaciones más generales referidas a ejes centroidales no principales y y z (Fig. 9-28).

Supongamos que las cargas sobre la viga son paralelas al eje y y que producen un momento flexionante M_x y una fuerza cortante V_y . Supongamos también que las fuerzas se aplican en el centro de cortante S . El momento flexionante M_x producirá flexión respecto a ambos ejes y y z ; los esfuerzos correspondientes están dados por la Ec. (9-21a):

$$\sigma_x = \frac{M_x(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

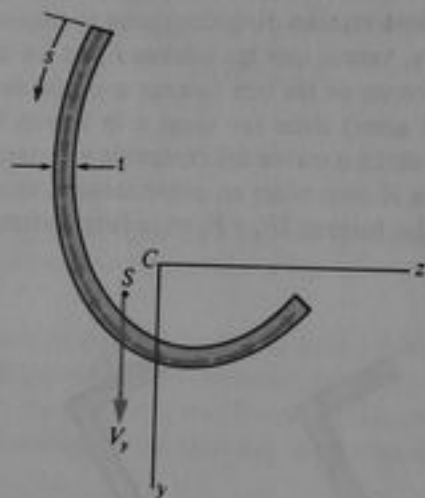


Fig. 9-28 Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal abierta de pared delgada. (Nota: los ejes y y z son ejes centroidales no principales.)

donde y y z son las coordenadas de un punto en la sección transversal. Procedemos ahora a recortar un elemento de la viga en la forma representada en la Fig. 9-21. Las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre el elemento (Fig. 9-21c) se determinan mediante el mismo procedimiento previo, excepto que para los esfuerzos normales debe utilizarse la ecuación anterior; luego,

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = \frac{M_{x1}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = \frac{M_{x2}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

y

$$\tau = \frac{M_{x1} - M_{x2}}{dx} \frac{1}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

Nuevamente observamos que la cantidad $(M_{x2} - M_{x1})/dx$ es igual a $-V_y$; por tanto

$$\tau = \frac{V_y}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s z dA - I_y \int_0^s y dA \right] \quad (9-48)$$

Esta ecuación es una **fórmula del cortante generalizada** que establece el esfuerzo cortante τ en una viga cuando la fuerza cortante V_y actúa paralela a un eje no principal.

Procediendo en la misma forma que antes, podemos obtener una fórmula para los esfuerzos cortantes causados por una fuerza cortante V_z que actúa en el centro de cortante y es paralela al eje z ; el resultado es

$$\tau = \frac{V_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s y dA - I_z \int_0^s z dA \right] \quad (9-49)$$

Obsérvese que, cuando los ejes y y z son ejes principales ($I_{yz} = 0$), las Ecs. (9-48) y (9-49) se reducen (con excepción del signo) a las Ecs. (9-27) y (9-29a). En la explicación previa, siempre se consideró a Q_x y Q_y como positivos y se obtuvieron las direcciones de los esfuerzos cortantes a partir de consideraciones físicas. Sin embargo, en las Ecs. (9-48) y (9-49) es necesario adoptar signos convencionales para los primeros momentos porque pueden ser positivos o negativos. Este refinamiento se logra fácilmente considerando a y y a z como cantidades algebraicas.

Habiendo obtenido las fórmulas generalizadas de cortante (Ecs. 9-48 y 9-49), podemos proceder ahora a determinar la distribución de los esfuerzos cortantes en cualquier viga particular. También, el centro de cortante de la sección puede localizarse determinando las líneas de acción de las fuerzas cortantes V_y y V_z y atendiendo a su punto de intersección. Estos procedimientos se representan en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Determinar los esfuerzos cortantes en una sección Z (Fig. 9-29a) debidos a fuerzas cortantes V_y y V_z (Figs. 9-29c y e).

Empezamos por calcular las propiedades de la sección sobre la base de las dimensiones de las líneas centrales, como sigue:

$$I_z = \frac{h^3 t_w}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \quad I_y = \frac{2b^3 t_f}{3} \quad I_{yz} = \frac{b^2 h t_f}{2} \quad (a)$$

en donde las dimensiones h , b , t_w y t_f se definen como se muestra en la figura. Debido a la fuerza cortante V_y , los esfuerzos cortantes en el patín superior (de la Ec. 9-48) son

$$\tau = \frac{V_y}{t_f(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s (s-b)t_f ds + I_y \int_0^s \frac{h}{2} t_f ds \right]$$

donde s se mide de izquierda a derecha a lo largo del patín. Efectuando las integraciones, encontramos que el término entre corchetes en la ecuación anterior es igual a

$$\frac{b^2 h t_f^2}{12} (3s^2 - 2bs)$$

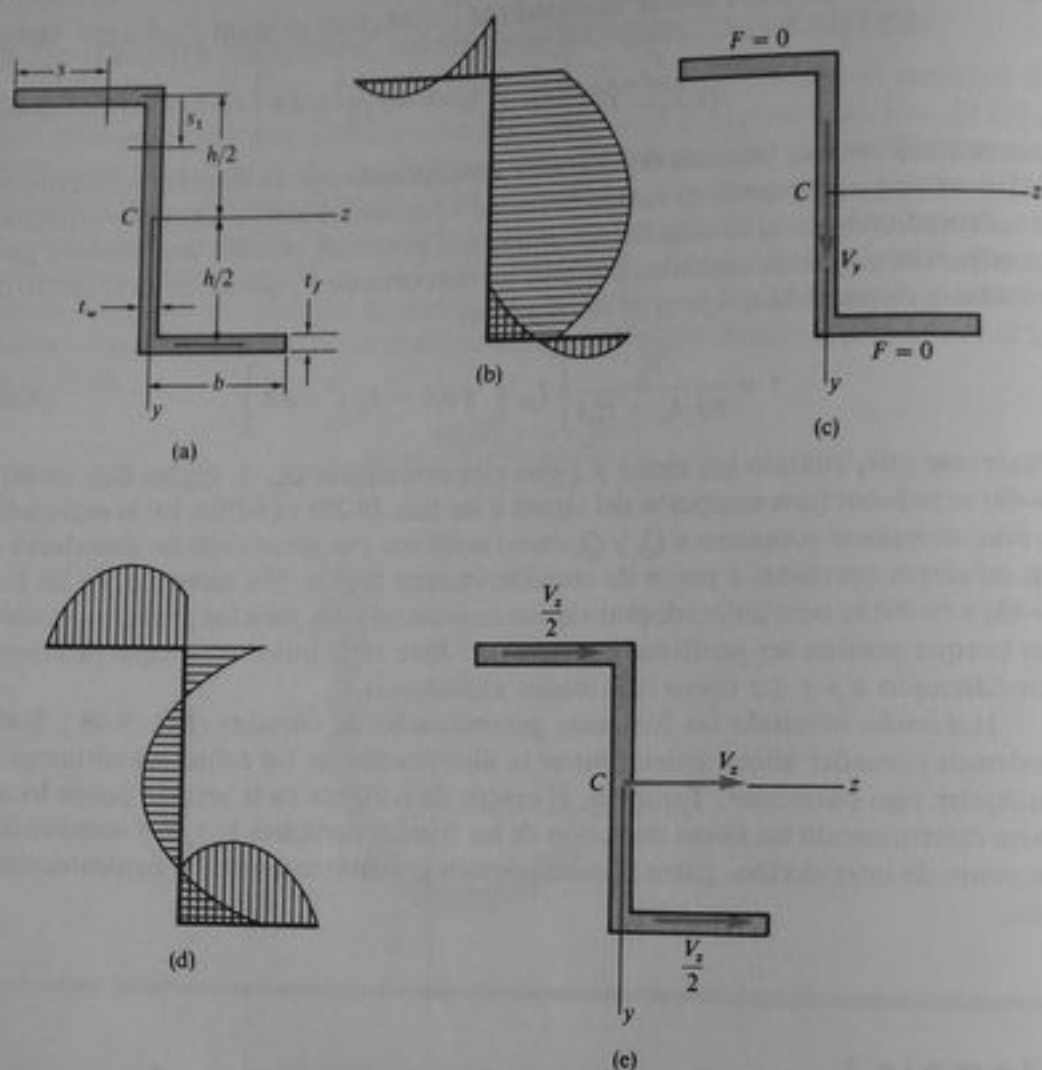


Fig. 9-29 Ejemplo 1. Esfuerzos cortantes en una sección Z

Sustituyendo esta expresión, así como las expresiones para I_y , I_x , e I_{xy} en la ecuación de τ , obtenemos la siguiente fórmula para los esfuerzos en el patín:

$$\tau = \frac{3V_z(3s^2 - 2bs)}{bh(2ht_w + 3bt_f)} \quad (0 \leq s \leq b) \quad (b)$$

Estos esfuerzos cortantes en el patín superior actúan hacia la izquierda cuando s es menor que $2b/3$; y se invierten y actúan hacia la derecha cuando s está entre $2b/3$ y b . La fuerza cortante resultante en el patín es

$$F = \int_0^b \tau t_f ds = 0$$

Una condición análoga existe en el patín inferior.

Los esfuerzos cortantes en el alma también pueden determinarse a partir de la Ec. (9-48), y se demuestra que la fuerza resultante en el alma es igual a V_z . En el eje neutro, el esfuerzo es

$$\tau_{\max} = \frac{3V_z(ht_w + bt_f)}{ht_w(2ht_w + 3bt_f)} \quad (c)$$

La distribución de los esfuerzos cortantes debidos a V , se muestra en la Fig. 9-29b, y las fuerzas resultantes en los patines y el alma se muestran en la Fig. 9-29c.

Consideremos ahora una fuerza cortante horizontal V , actuando sobre la sección transversal. Para el patín superior, utilizamos la Ec. (9-49), que resulta

$$\tau = \frac{V_z}{t_f(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[-I_{yz} \int_0^s \frac{h}{2} t_f ds + I_z \int_0^s (b-s) t_f ds \right]$$

Evaluando el término entre corchetes, obtenemos

$$\frac{h^2 t_f}{24} [bs(2ht_w + 6bt_f) - s^2(ht_w + 6bt_f)]$$

Por lo que, la expresión final para τ resulta

$$\tau = \frac{3V_z}{2b^3 t_f (2ht_w + 3bt_f)} [bs(2ht_w + 6bt_f) - s^2(ht_w + 6bt_f)] \quad (d)$$

Estos esfuerzos actúan hacia la derecha en el patín superior y tienen la distribución mostrada en la Fig. 9-29d. La fuerza resultante F en el patín es

$$F = \int_0^b \tau t_f ds = \frac{V_z}{2}$$

según se muestra en la Fig. 9-29e.

Los esfuerzos cortantes en el alma debidos a V , determinados a partir de la Ec. (9-49) son

$$\tau = \frac{3V_z(h^2 + 6s_1^2 - 6hs_1)}{2bh(2ht_w + 3bt_f)} \quad (e)$$

donde s_1 se mide desde la unión del patín y el alma (Fig. 9-29a). Este esfuerzo cortante invierte su dirección en la región media del alma (véase Fig. 9-29d), y la fuerza cortante resultante en el alma es cero.

Ejemplo 2

Localizar el centro de cortante S de la sección canal asimétrica mostrada en la Fig. 9-30a.

Empezamos por observar que los anchos de los patines son b_1 y b_2 para los patines superior e inferior, respectivamente, y que la altura de la sección es h . El espesor es constante e igual a t . Los ejes y y z pasan por el centroide C y son paralelos al alma y los patines, por lo que son ejes no principales. El centroide se localiza mediante las dimensiones c y d , las cuales son

$$c = \frac{h^2 + 2b_1 h}{2(h + b_1 + b_2)} \quad (f)$$

$$d = \frac{b_1^2 + b_2^2}{2(h + b_1 + b_2)}$$

El centro de cortante S se localiza mediante las distancias e_1 y e_2 desde los ejes centroidales, y estas distancias se determinarán a continuación.

Supongamos que se aplica en el centro de cortante S una fuerza cortante V_y (Fig. 9-30b). Los esfuerzos cortantes en el patin superior, determinados mediante la Ec. (9-48), son

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{V_y}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s (b_1 - d - s) t ds + I_y \int_0^s (h - c) t ds \right] \\ &= \frac{V_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[I_{yz} (b_1 - d) s + I_y (h - c) s - \frac{I_{yz} s^2}{2} \right]\end{aligned}\quad (g)$$

donde s se mide como se muestra en la figura. La fuerza total F_1 en el patin es

$$F_1 = \int_0^{b_1} \tau t ds = \frac{b_1^2 t V_y}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [I_{yz}(2b_1 - 3d) + 3I_y(h - c)] \quad (h)$$

Ya que no actúan fuerzas externas horizontales sobre la viga, la fuerza cortante en el patin inferior debe ser también igual a F_1 y la fuerza F_2 en el alma debe ser igual a V_y . Como el momento respecto a C de la fuerza V_y , actuando a través del centro de cortante debe ser igual al momento respecto a C de las tres fuerzas en los patines y el alma, obtenemos

$$V_y e_2 = F_2 d + F_1 h$$

o sea

$$e_2 = d + \frac{F_1 h}{V_y}$$

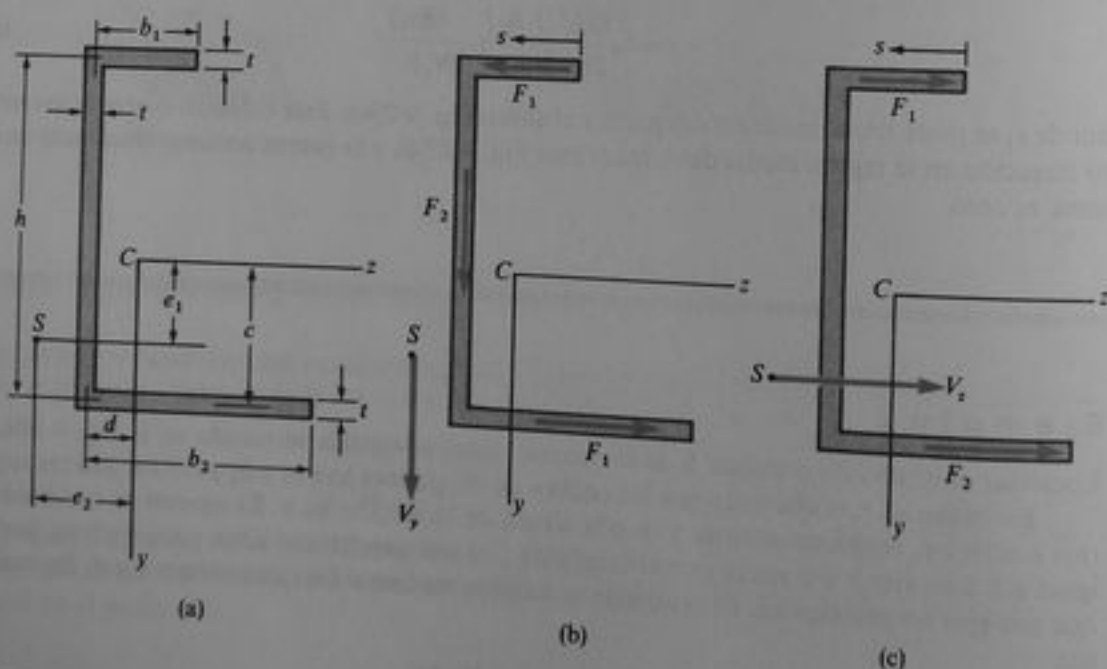


Fig. 9-30 Ejemplo 2. Centro de cortante de una sección canal asimétrica

Sustituyendo F_1 de la Ec. (h), obtenemos la siguiente ecuación para e_2 :

$$e_2 = d + \frac{b_1^2 h t}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [I_{yz}(2b_1 - 3d) + 3I_y(h - c)] \quad (9-50)$$

En el caso especial cuando los patines son iguales, los ejes y y z resultan ser ejes principales, y tenemos $I_{yz} = 0$, $c = h/2$ y $b_1 = b_2 = b$; entonces, de la Ec. (9-50), obtenemos

$$e_2 = d + \frac{b^2 h^2 t}{4I_z}$$

que concuerda con nuestro resultado anterior (Ec. 9-43).

Supongamos ahora que una fuerza cortante V_z actúa sobre la viga (Fig. 9-30c). En este caso, se utiliza la Ec. (9-49) para calcular los esfuerzos cortantes en el patín superior:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[I_{yz} \int_0^s (c-h)t ds - I_z \int_0^s (b_1 - d - s)t ds \right] \\ &= \frac{V_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[I_{yz}(c-h)s + I_z(d-b_1)s + \frac{I_z s^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (i)$$

La fuerza total F_1 en el patín es

$$F_1 = - \int_0^{b_1} \tau t ds = \frac{b_1^2 t V_z}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1 - 3d)] \quad (j)$$

donde hemos introducido el signo negativo en la ecuación porque τ es positivo hacia la izquierda en la Ec. (i) y preferimos considerar F_1 positivo hacia la derecha, como se muestra en la Fig. 9-30c. La fuerza resultante en el alma debe ser igual a cero porque no existe ninguna fuerza externa en la dirección y . La fuerza en el patín inferior se denota por F_2 , como se muestra en la figura. Tomando momentos respecto al patín inferior se obtiene la ecuación

$$V_z(c - e_1) = F_1 h$$

de la cual

$$e_1 = c - \frac{F_1 h}{V_z}$$

Sustituyendo F_1 de la Ec. (j), obtenemos la siguiente ecuación para e_1 :

$$e_1 = c - \frac{b_1^2 h t}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1 - 3d)] \quad (9-51)$$

Considerando nuevamente el caso especial de patines iguales, tenemos $I_{yz} = 0$, $c = h/2$, $b_1 = b_2 = b$, y $d = b^2/(h + 2b)$; por lo tanto,

$$e_1 = \frac{h}{2} - \frac{b^3 h t (b + 2h)}{6I_y (h + 2b)}$$

Ahora sustituyendo

$$I_y = \frac{b^3 t (b + 2h)}{3(h + 2b)}$$

que es el momento de inercia para un canal simétrico, obtenemos $e_1 = 0$, como era previsible.

Luego, en cualquier caso particular de un canal asimétrico, podemos sustituir las dimensiones y propiedades de la sección transversal en las Ecs. (9-50) y (9-51) y obtener la localización del centro de cortante. Como un ejemplo específico, consideremos las siguientes dimensiones:

$$b_1 = b \quad b_2 = 2b \quad h = 3b$$

Entonces determinamos

$$c = \frac{5b}{4} \quad d = \frac{5b}{12}$$

$$I_y = \frac{47}{24} b^3 t \quad I_z = \frac{69}{8} b^3 t \quad I_{yz} = \frac{13}{8} b^3 t$$

Sustituyendo en las Ecs. (9-50) y (9-51), obtenemos

$$e_1 = \frac{55b}{76} \quad e_2 = \frac{187b}{228}$$

como las distancias desde los ejes centroidales hasta el centro de cortante.

PROBLEMAS / CAPÍTULO 9

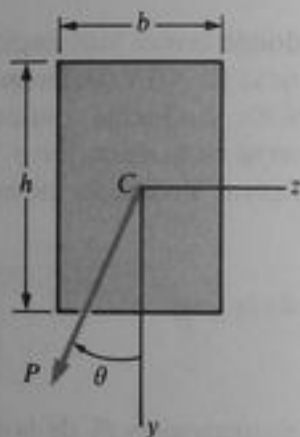
9.2-1 Una viga en voladizo de sección transversal rectangular (véase figura) soporta una carga inclinada P en su extremo libre. Demostrar que, si la carga P tiene su línea de acción a lo largo de una diagonal de la sección transversal, entonces el eje neutro se aloja en la otra diagonal.

9.2-2 Una viga de madera en voladizo de sección transversal rectangular (véase figura) soporta una carga inclinada P en su extremo libre. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_{\max} y la deflexión máxima δ en la viga debidos a la carga P . Los datos para la viga son los siguientes: $b = 75$ mm, $h = 150$ mm, $L = 1.5$ m, $P = 800$ N, $\theta = 29.52^\circ$ y $E = 12$ GPa.

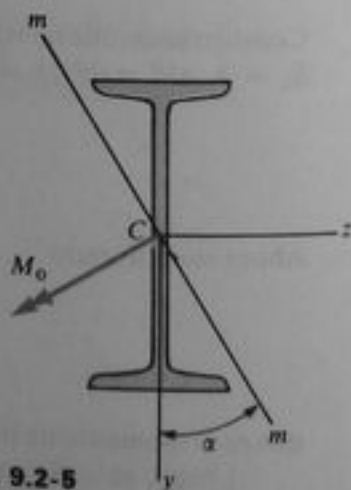
9.2-3 Resolver el problema anterior para una viga en voladizo con los siguientes datos: $b = 100$ mm, $h = 175$ mm, $L = 2$ m, $P = 2$ kN, $\theta = 45^\circ$ y $E = 12$ GPa.

9.2-4 Una viga en voladizo de sección transversal rectangular (véase figura) soporta una carga inclinada P en su extremo libre. ¿Qué curva describirá el extremo de la viga conforme el ángulo θ varía desde 0° hasta 360° ?

9.2-5 Una viga de acero de sección I (véase figura) está simplemente apoyada en los extremos. En los extremos de la viga actúan dos momentos flexionantes iguales y opuestos M_0 ; luego, la viga está en flexión pura. Los momentos actúan en el plano mm que está orientado a un ángulo α respecto al plano xy . Determinar el esfuerzo de tensión máximo τ_{\max} y la deflexión máxima δ de la viga debidos a los momentos M_0 . Los datos para la viga son los siguientes: sección 8×18.4 , $L = 12$ pie, $M_0 = 50$ plg·k, $\alpha = 30^\circ$ y $E = 30 \times 10^6$ psi.



Probs. 9.2-1, 9.2-2, 9.2-3 y 9.2-4



Prob. 9.2-5

9.2-6 Una viga en voladizo de sección transversal de patín ancho (véase figura) soporta una carga inclinada P en su extremo libre. Calcular el esfuerzo de

tensión máximo σ_{\max} y la deflexión máxima de la viga δ debidos a la carga P . Los datos para la viga son los siguientes: sección W 10 \times 45, $L = 7$ pie, $P = 3.5$ k, $\theta = 45^\circ$ y $E = 30 \times 10^6$ psi.

9.2-7 Resolver el problema anterior utilizando los siguientes datos: sección W 8 \times 28, $L = 6$ pie, $P = 2.0$ k, $\theta = 30^\circ$ y $E = 30 \times 10^6$ psi.

9.2-8 Una viga de patin ancho simplemente apoyada y con un claro de longitud L soporta una carga vertical concentrada P que actúa a través del centroide C en el punto medio del claro. La viga está fija a unos apoyos inclinados un ángulo θ respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos máximos en las esquinas externas de la sección transversal (puntos A , B , D y E) debidos a la carga P . Los datos para la viga son los siguientes: sección W 10 \times 30, $L = 8.5$ pie, $P = 5$ k y $\theta = 26.57^\circ$.

9.2-9 Resolver el problema anterior empleando los siguientes datos: sección W 8 \times 21, $L = 8$ pie, $P = 3.8$ k y $\theta = 20^\circ$.

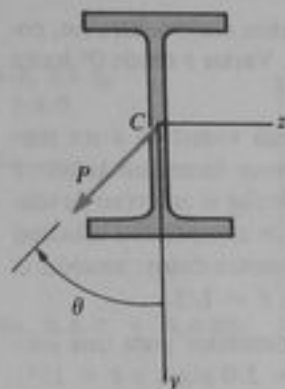
9.2-10 Una viga de madera de sección transversal rectangular (véase figura) está simplemente apoyada en los extremos. El eje longitudinal de la viga es horizontal, pero la sección transversal está inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal. La carga sobre la viga es una carga vertical uniformemente repartida de intensidad q que se supone actúa a través del centroide C . Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_{\max} y la deflexión vertical δ , en el punto medio si $b = 6$ plg, $h = 8$ plg, $L = 10$ pie, $\tan \theta = 1/3$, $q = 200$ lb/pie y $E = 1.5 \times 10^6$ psi.

9.2-11 Resolver el problema anterior utilizando los siguientes datos: $b = 250$ mm, $h = 75$ mm, $L = 3$ m, $\theta = 30^\circ$, $q = 1.5$ kN/m y $E = 11$ GPa.

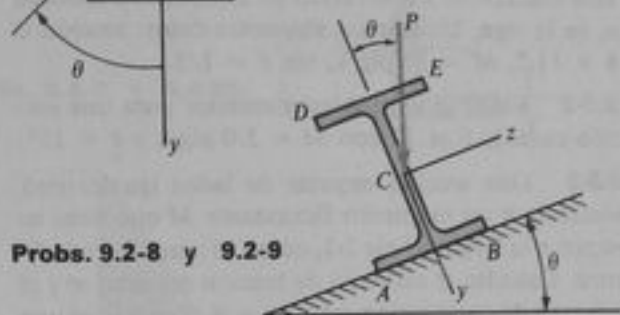
9.2-12 Una viga de patin ancho está soportada en posición inclinada como se muestra en la figura. La viga está simplemente apoyada con una longitud de claro igual a L . Calcular la deflexión vertical δ , y la deflexión horizontal δ_x del centroide C en el punto medio del claro debidas al peso de la viga. Emplear los siguientes datos: sección W 12 \times 35, $L = 14$ pie, $\theta = 30^\circ$ y $E = 30 \times 10^6$ psi.

9.2-13 Resolver el problema anterior utilizando los siguientes datos: sección W 8 \times 15, $L = 10$ pie, $\theta = 21.80^\circ$ y $E = 30 \times 10^6$ psi.

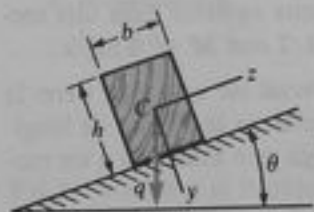
9.2-14 Una viga en voladizo de sección W 12 \times 14 y longitud $L = 9$ pie soporta una carga ligeramente inclinada $P = 500$ lb en su extremo libre (véase figura). (a) Trazar una gráfica del esfuerzo σ_x en el punto A como una función del ángulo θ . (b) Trazar una



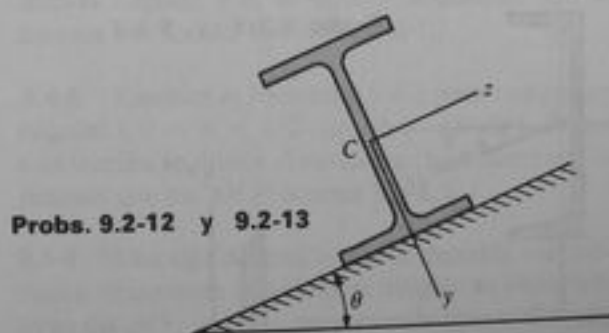
Probs. 9.2-6 y 9.2-7



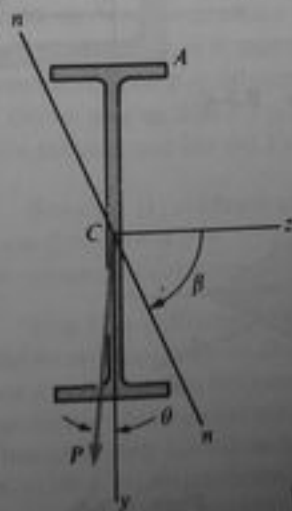
Probs. 9.2-8 y 9.2-9



Probs. 9.2-10 y 9.2-11



Probs. 9.2-12 y 9.2-13



Prob. 9.2-14

gráfica del ángulo β , que localiza el eje neutro nn , como una función del ángulo θ . Variar θ desde 0° hasta 10° .

9.3-1 Una sección canal está sometida a un momento flexionante M cuyo vector forma un ángulo θ con el eje z (véase figura). Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Utilizar los siguientes datos: sección C 8×11.5 , $M = 30 \text{ plg}\cdot\text{k}$, $\tan \theta = 1/3$.

9.3-2 Resolver el problema anterior para una sección canal C 6×13 con $M = 5.0 \text{ plg}\cdot\text{k}$ y $\theta = 15^\circ$.

9.3-3 Una sección angular de lados iguales está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a lo largo del eje 1-1, como se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c si el ángulo es una sección L $6 \times 6 \times 3/4$ y $M = 20 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.3-4 Resolver el problema anterior para una sección angular L $4 \times 4 \times 1/2$ con $M = 6 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.3-5 La sección transversal de una viga tiene la forma de un triángulo equilátero con lados de longitud b (véase figura). La viga está sometida a un mo-

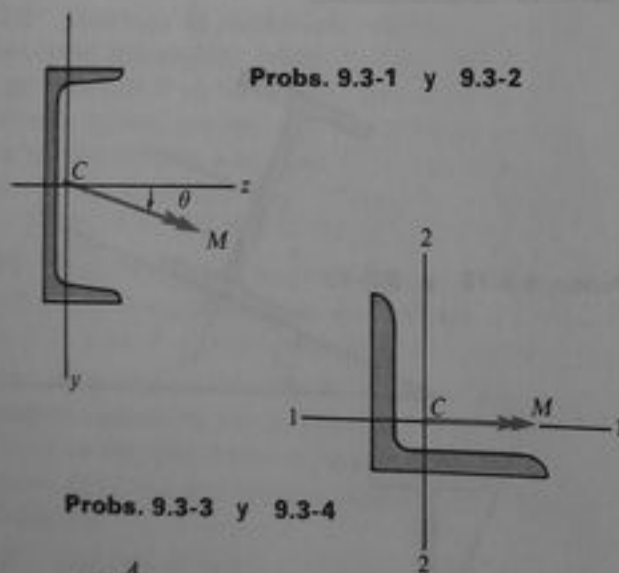
mento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ respecto al eje z . (a) Obtener fórmulas para los esfuerzos σ_a y σ_b en los puntos A y B , respectivamente, en términos de M , b y θ . (b) Trazar una gráfica del esfuerzo de tensión máximo σ_{\max} como una función del ángulo θ para una variación de θ desde 0° hasta 90° . Considerar la cantidad adimensional $\sigma_{\max} b^3/32M$ como ordenada de la gráfica.

***9.3-6** Una viga de sección transversal circular de radio r está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ respecto al eje z (véase figura). Determinar el esfuerzo de tensión máxima σ_{\max} en la viga para $\theta = 0^\circ$, 45° y 90° .

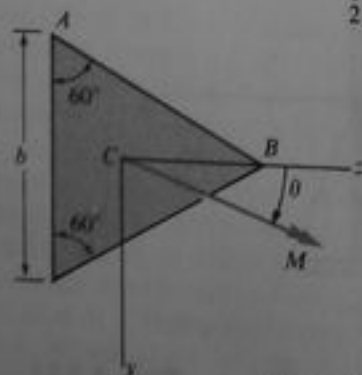
9.3-7 Una sección angular de lados desiguales está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a lo largo del eje 1-1, como se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga si el ángulo es una sección L $8 \times 6 \times 1$ y $M = 25 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.3-8 Resolver el problema anterior para una sección angular L $7 \times 4 \times 1/2$ con $M = 15 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

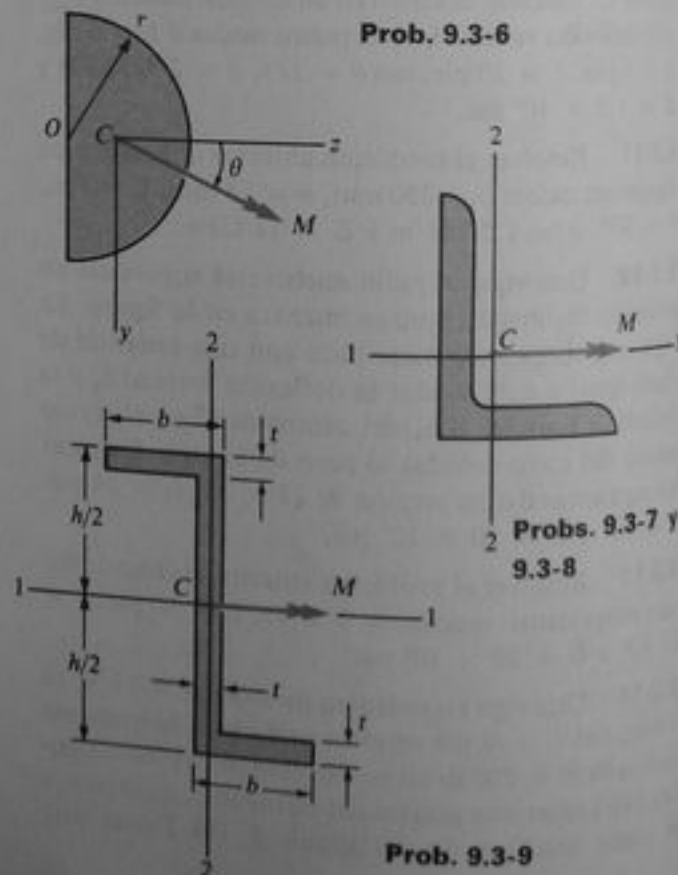
***9.3-9** Una viga de sección Z está sometida a un momento flexionante M que actúa en el plano 2-2, como se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c , si el momento $M = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y las dimensiones son $b = 90 \text{ mm}$, $h = 180 \text{ mm}$ y $t = 15 \text{ mm}$.



Probs. 9.3-3 y 9.3-4



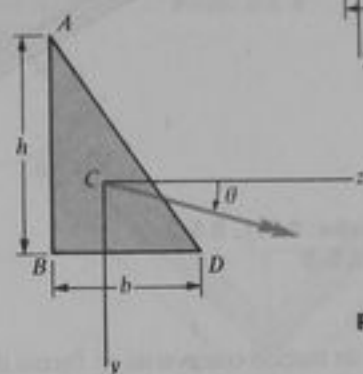
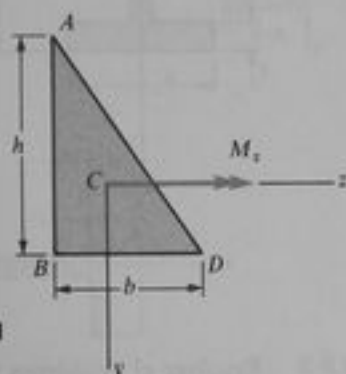
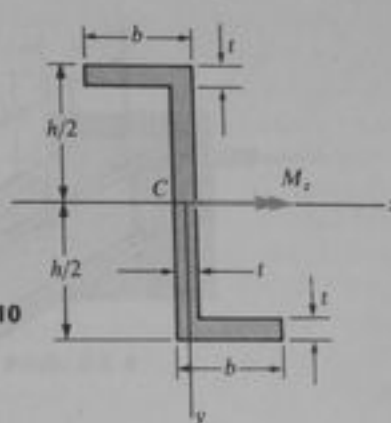
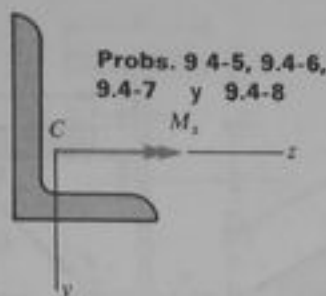
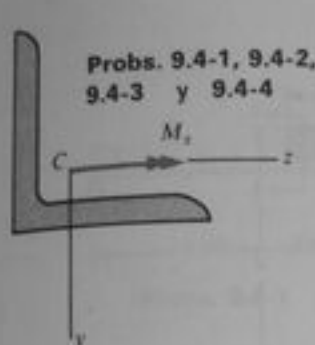
Prob. 9.3-5



Prob. 9.3-6

Probs. 9.3-7 y 9.3-8

Prob. 9.3-9



Prob. 9.4-11

Prob. 9.4-12

Los problemas de la Sección 9.4 deben resolverse mediante la fórmula generalizada de la flexión (Ec. 9-19).

9.4-1 Una sección angular de lados iguales está sometida a un momento flexionante M_x cuyo vector está dirigido a lo largo del eje z , como se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c , si el ángulo es una sección $L 8 \times 8 \times 3/4$ y $M_x = 50 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.4-2 Resolver el problema anterior para una sección angular $L 5 \times 5 \times 1/2$ con $M_x = 12 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.4-3 Resolver el Problema 9.4-1 para una sección angular $L 6 \times 6 \times 3/4$ con $M_x = 20 \text{ plg}\cdot\text{k}$. (Nota: esta sección angular y el momento flexionante son los mismos que los del Problema 9.3-3.)

9.4-4 Resolver el Problema 9.4-1 para una sección angular $L 4 \times 4 \times 1/2$ con $M_x = 6 \text{ plg}\cdot\text{k}$. (Nota: esta sección angular y el momento flexionante son los mismos que los del Problema 9.3-4.)

9.4-5 Una sección angular con lados desiguales está sometida a un momento flexionante M_x cuyo vector está dirigido a lo largo del eje z (véase figura). Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c , si el ángulo es una sección $L 6 \times 4 \times 3/4$ y $M_x = 20 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.4-6 Resolver el problema anterior para una sección angular $L 8 \times 6 \times 1/2$ con $M_x = 20 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

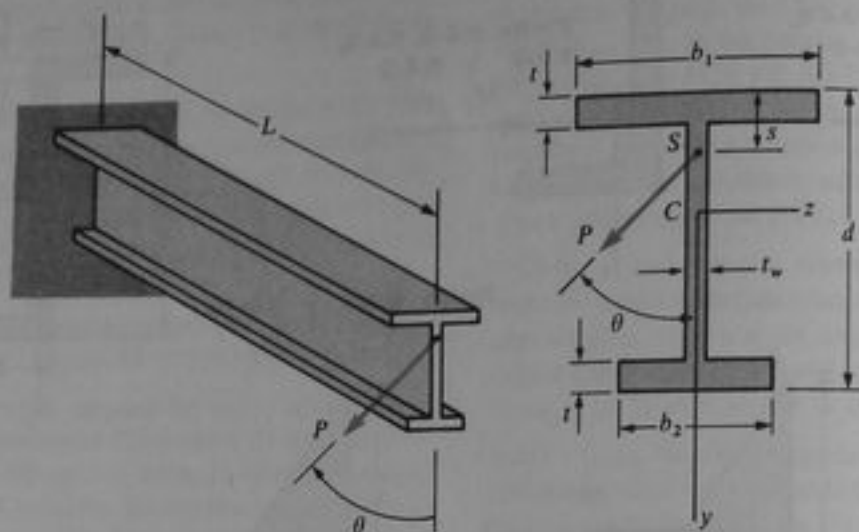
9.4-7 Resolver el Problema 9.4-5 para una sección angular $L 8 \times 6 \times 1$ con $M_x = 25 \text{ plg}\cdot\text{k}$. (Nota: esta sección angular y el momento flexionante son los mismos que los del Problema 9.3-7.)

9.4-8 Resolver el Problema 9.4-5 para una sección angular $L 7 \times 4 \times 1/2$ con $M_x = 15 \text{ plg}\cdot\text{k}$. (Nota: esta sección angular y el momento flexionante son los mismos que los del Problema 9.3-8.)

9.4-9 Una viga de sección Z está sometida a un momento flexionante M_x que tiene dirigido su vector a lo largo del eje z , como se muestra en la figura. Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ , y el esfuerzo de compresión máximo σ_c , si el momento $M_x = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y las dimensiones son $b = 90 \text{ mm}$, $h = 180 \text{ mm}$ y $t = 15 \text{ mm}$. (Nota: esta sección Z y el momento flexionante son los mismos que los del Problema 9.3-9.)

9.4-10 Resolver el problema anterior para una sección Z con dimensiones $b = 3.5 \text{ plg}$, $h = 6 \text{ plg}$ y $t = 0.5 \text{ plg}$ y un momento flexionante $M_x = 40 \text{ plg}\cdot\text{k}$.

9.4-11 Una viga con sección transversal en forma de triángulo rectángulo ($h =$ altura, $b =$ ancho) está sometida a un momento flexionante M_x que tiene dirigido su vector a lo largo del eje z (véase figura). Obtener fórmulas para los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z en los vértices A , B y D , respectivamente. Localizar también el eje neutro de la sección transversal.



**Probs. 9.5-1, 9.5-2
y 9.5-3**

***9.4-12** Una viga de sección transversal en forma de triángulo rectángulo (h = altura, b = ancho) está sometida a un momento flexionante M cuyo vector forma un ángulo θ respecto al eje z (véase figura). (a) Obtener fórmulas para los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z en los vértices A , B y D , respectivamente. (b) Obtener una fórmula para el ángulo ϕ entre el eje neutro y el eje z . (c) Para el caso particular de $h = 2b$, trazar una gráfica de los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z como funciones del ángulo θ para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Utilizar como ordenada para la gráfica la cantidad adimensional $\sigma b^3/6M$. (d) Para $h = 2b$, trazar una gráfica del ángulo ϕ como una función del ángulo θ para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

9.5-1 Una viga I simplemente simétrica de longitud L está soportada como un voladizo sometida a una carga transversal P en su extremo libre (véase figura). La carga actúa a un ángulo θ respecto al eje y . (a) ¿A qué distancia s desde la superficie superior de la viga (medida a lo largo de la línea central del alma) debe aplicarse la carga P a fin de que la viga se flexione sin torsión? (b) Suponiendo que no existe torsión, calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c , debidos a la flexión. (c) Calcular también la deflexión máxima δ del extremo de la viga. Utilizar los siguientes datos: $d = 20$ plg, $b_1 = 18$ plg, $b_2 = 8$ plg, $t = 2$ plg, $t_w = 1$ plg, $P = 10$ k, $\theta = 30^\circ$, $L = 12$ pie y $E = 30 \times 10^6$ psi.

9.5-2 Resolver el problema anterior para la siguiente viga y carga: $d = 600$ mm, $b_1 = 300$ mm, $b_2 = 200$ mm, $t = 30$ mm, $t_w = 20$ mm, $P = 20$ kN, $\theta = 20^\circ$, $L = 5$ m y $E = 200$ GPa.

9.5-3 Resolver el Problema 9.5-1 para la siguiente viga y carga: $d = 360$ mm, $b_1 = 320$ mm, $b_2 = 240$ mm, $t = 30$ mm, $t_w = 25$ mm, $P = 6$ kN, $\theta = 45^\circ$, $L = 3$ m y $E = 70$ GPa.

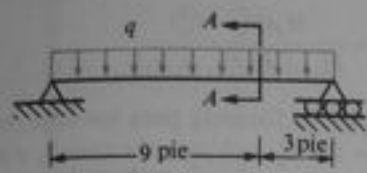
A menos que se indique otra cosa, todos los cálculos y derivaciones para los problemas de la Sección 9.6 deben realizarse utilizando dimensiones de las líneas centrales.

9.6-1 Una viga simple de sección I y un claro de longitud $L = 12$ pie soporta una carga uniforme $q = 3$ k/pie como se muestra en la figura. Las dimensiones de la sección transversal son $h = 11.5$ plg, $b = 8$ plg y $t_f = t_w = 0.5$ plg. (a) Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la sección transversal $A-A$ localizada a 3 pie del extremo de la viga. (b) Calcular el esfuerzo cortante τ_x en el punto B sobre la sección transversal $A-A$. El punto B se localiza a una distancia $a = 1$ plg desde la orilla del patin inferior.

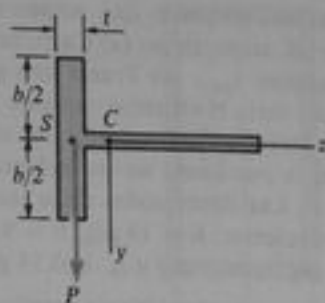
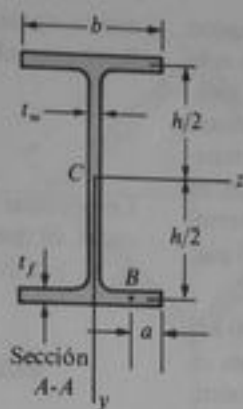
9.6-2 Resolver el problema anterior efectuando todos los cálculos con base en las dimensiones reales de la sección transversal en lugar de las dimensiones de las líneas centrales. Comparar los resultados obtenidos de las dos soluciones.

9.6-3 Una viga I simplemente simétrica está sometida a una fuerza cortante P que actúa a través del centro de cortante S y es paralela al eje y (véase figura). Obtener una fórmula para el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en la viga, suponiendo que $b_1 > b_2$.

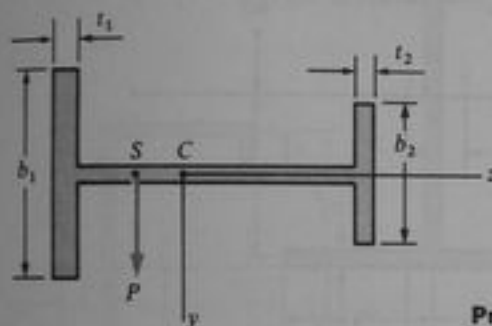
9.6-4 Una viga T está sometida a una fuerza cortante P que actúa a través del centro de cortante S y



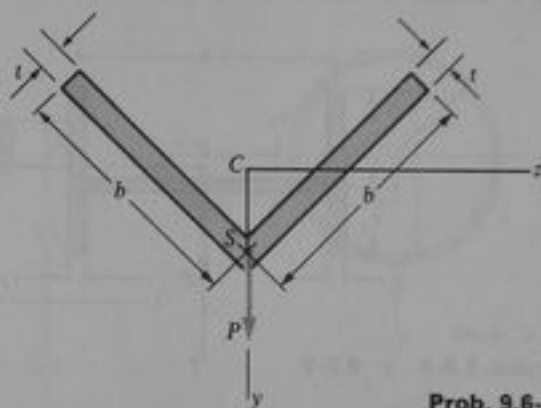
Probs. 9.6-1 y 9.6-2



Prob. 9.6-4



Prob. 9.6-3



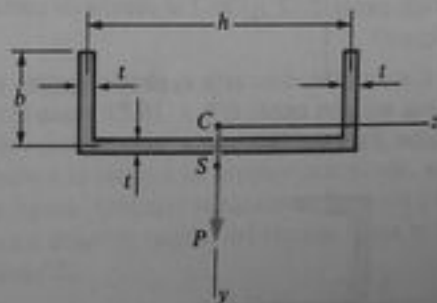
Prob. 9.6-5

es paralela al eje y (véase figura). El patín tiene un ancho b y un espesor t . Determinar los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal, como sigue: (a) Obtener una fórmula para el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} . (b) Trazar una gráfica que indique cómo varía el esfuerzo cortante τ respecto a la altura del patín. (c) Demostrar que la resultante de los esfuerzos cortantes es igual a P .

9.6-5 Una sección angular de lados iguales está sometida a una fuerza cortante P que actúa en la dirección del eje y , el cual es un eje de simetría (véase figura). Cada lado del ángulo tiene una longitud de línea central b y un espesor t . Determinar los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal, como sigue: (a) Obtener una fórmula para el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} en el ángulo. (b) Trazar una gráfica que indique cómo varía el esfuerzo cortante τ a lo largo de la línea central de la sección transversal. (c) Demostrar que la resultante de los esfuerzos cortantes es igual a P .

9.6-6 Una viga cuya sección transversal es un perfil canal está sometida a una fuerza cortante $P = 10$ k que actúa a lo largo del eje y , el cual es un eje de simetría (véase figura). Determinar los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal como sigue: (a) Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} . (b) Trazar gráficas que indiquen cómo varía el esfuerzo cortante τ sobre la altura b de los patines y a lo largo

de la longitud h del alma. (c) Demostrar que la resultante de los esfuerzos cortantes es igual a P . Las dimensiones de la sección transversal son las siguientes: $h = 18$ plg, $b = 6$ plg y $t = 1$ plg.



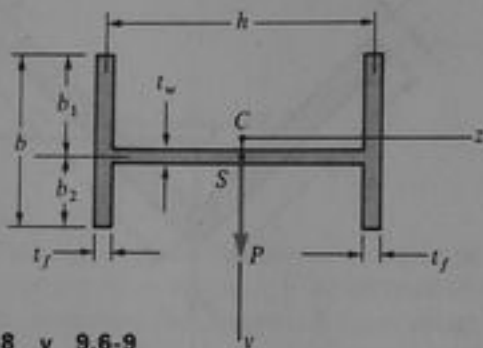
Probs. 9.6-6 y 9.6-7

9.6-7 Resolver el problema anterior si $P = 20$ kN y las dimensiones de la sección transversal son las siguientes: $h = 225$ mm, $b = 90$ mm y $t = 18$ mm.

9.6-8 Una sección transversal en forma de una viga I desbalanceada, se gira 90° y se somete a una fuerza cortante $P = 30$ k que actúa en la dirección del eje y , el cual es un eje de simetría (véase figura). Determinar

los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal, como sigue: (a) Calcular el esfuerzo cortante máximo τ_{\max} . (b) Trazar una gráfica que indique cómo varía el esfuerzo cortante τ sobre la altura b de los patines y la longitud h del alma. (c) Demostrar que la resultante de los esfuerzos cortantes es igual a P . Las dimensiones de la sección transversal son las siguientes: $h = 18$ plg, $b = 9$ plg, $b_1 = 6$ plg, $b_2 = 3$ plg, $t_f = 1$ plg y $t_w = 0.75$ plg.

9.6-9 Resolver el problema anterior si $P = 100$ kN y las dimensiones de la sección transversal son las siguientes: $h = 320$ mm, $b = 160$ mm, $b_1 = 120$ mm, $b_2 = 40$ mm, $t_f = 20$ mm y $t_w = 15$ mm.

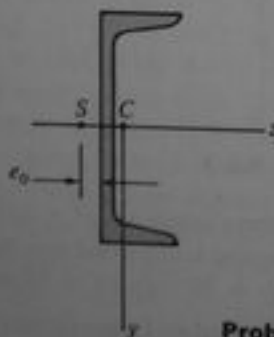


Probs. 9.6-8 y 9.6-9

Cuando se localicen los centros de cortante en los problemas para la Sección 9.7, supóngase que las secciones transversales son de pared delgada y utilícense las dimensiones de las líneas centrales para todos los cálculos y derivaciones.

9.7-1 Calcular la distancia e_0 desde la espalda de una sección canal C 12 \times 20.7 al centro de cortante S (véase figura).

9.7-2 Calcular la distancia e_0 desde la cara posterior de una sección canal C 8 \times 18.75 hasta el centro de cortante S (véase figura).



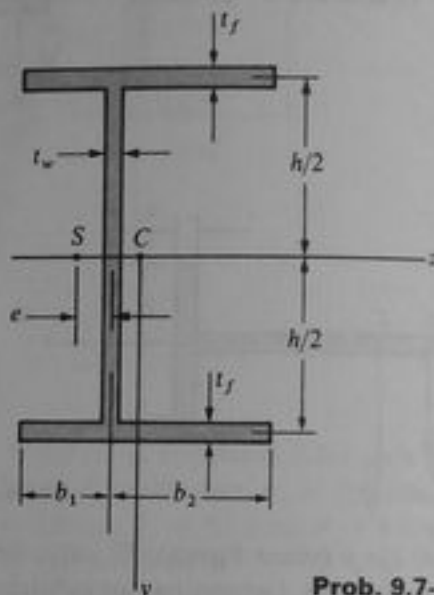
Probs. 9.7-1 y 9.7-2

9.7-3 En la figura se muestra una sección transversal con la forma de una viga I desbalanceada. Obte-

ner la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central del alma hasta el centro de cortante S :

$$e = \frac{3t_f(b_2^2 - b_1^2)}{ht_w + 6t_f(b_1 + b_2)}$$

Comprobar también la fórmula para los casos especiales en que $b_1 = 0$ y $b_2 = b$ (sección canal), y $b_1 = b_2 = b/2$ (viga I doblemente simétrica).



Prob. 9.7-3

9.7-4 En la figura se muestra la sección transversal de una viga canal con patines dobles y espesor constante en toda la sección. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central del alma hasta el centro de cortante S :

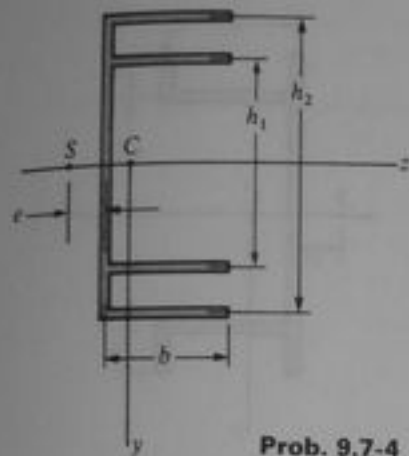
$$e = \frac{3b^2(h_1^2 + h_2^2)}{h_2^3 + 6b(h_1^2 + h_2^2)}$$

9.7-5 Una sección transversal de un tubo cuadrado cortado a lo largo y de espesor constante, se muestra en la figura. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la esquina de la sección transversal hasta el centro de cortante S :

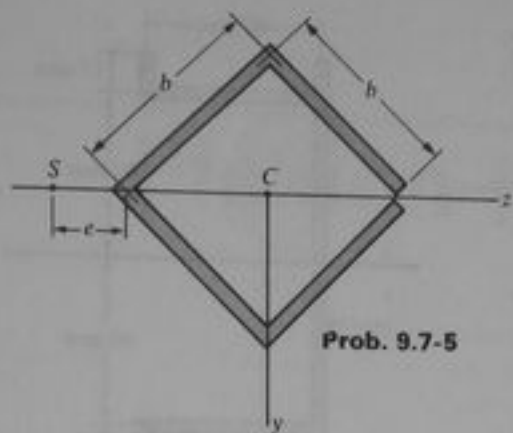
$$e = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

9.7-6 En la figura se muestra una sección transversal de un tubo rectangular cortado a lo largo, cuyo espesor es constante. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central de la pared del tubo hasta el centro de cortante S :

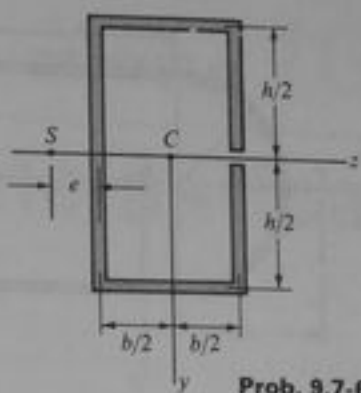
$$e = \frac{b(2h + 3b)}{2(h + 3b)}$$



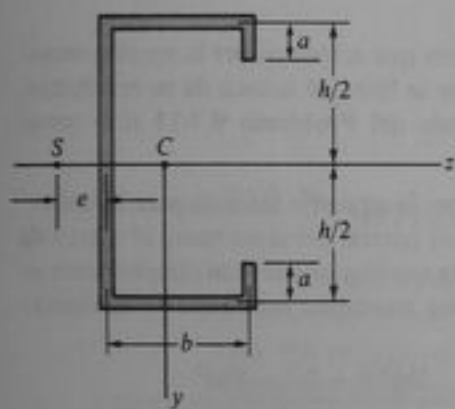
Prob. 9.7-4



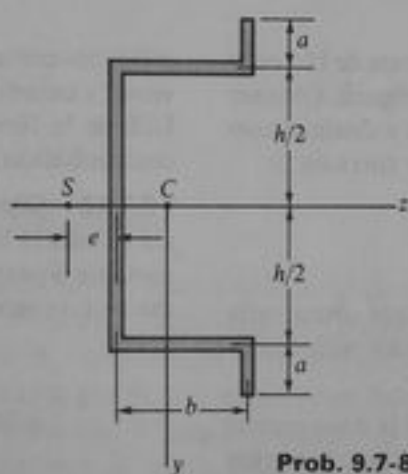
Prob. 9.7-5



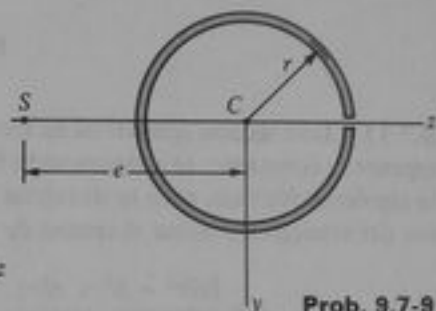
Prob. 9.7-6



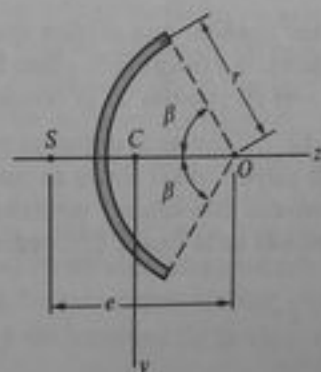
Prob. 9.7-7



Prob. 9.7-8



Prob. 9.7-9



Prob. 9.7-10

* 9.7-7 Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central de la pared hasta el centro de cortante S para la sección C de espesor constante mostrada en la figura:

$$e = \frac{3bh^2(b + 2a) - 8ba^3}{h^2(h + 6b + 6a) + 4a^2(2a + 3h)}$$

Verificar también la fórmula para los casos especiales en los que $a = 0$ (sección canal) y $a = h/2$ (tubo rectangular cortado a lo largo).

* 9.7-8 Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central de la pared hasta el centro de cortante S para la sección de "sombrero" de espesor constante mostrada en la figura:

$$e = \frac{3bh^2(b + 2a) - 8ba^3}{h^2(h + 6b + 6a) + 4a^2(2a + 3h)}$$

Verificar también la fórmula para el caso especial en el que $a = 0$ (sección canal).

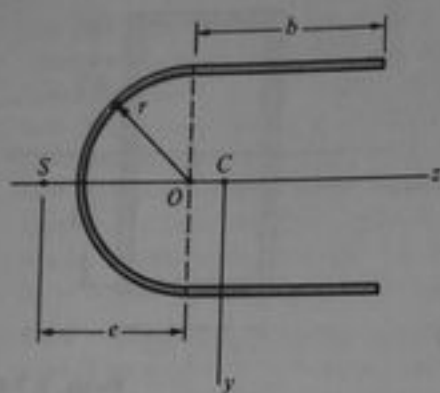
9.7-9 La sección transversal de un tubo circular cortado a lo largo y de espesor constante, se muestra en la figura. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde el centro del círculo hasta el centro de cortante S :

$$e = 2r$$

* 9.7-10 Una sección transversal en forma de arco circular de espesor constante se muestra en la figura. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde el centro del círculo hasta el centro de cortante S :

$$e = \frac{2r(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$$

Trazar también una gráfica que indique cómo varía la distancia e cuando β va de 0° a π .



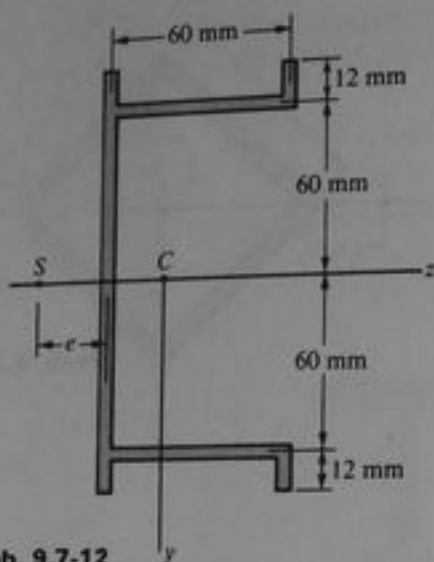
Prob. 9.7-11

9.7-11 Una sección transversal en forma de U y cuyo espesor es constante, se muestra en la figura. Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde el centro del semicírculo hasta el centro de cortante S :

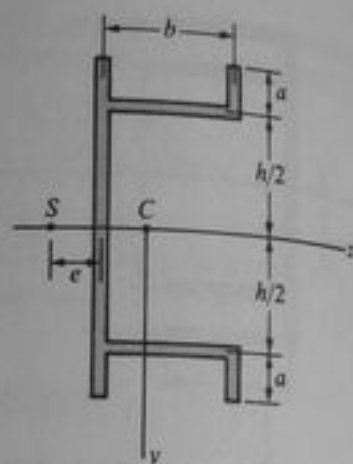
$$e = \frac{2(2r^2 + b^2 + \pi br)}{4b + \pi r}$$

Trazar también una gráfica que indique cómo varía la distancia e (expresada como la relación adimensional e/r) en función de la relación b/r .

9.7-12 Calcular la distancia e desde la línea central de la pared hasta el centro de cortante S para la sección transversal simplemente simétrica de espesor constante mostrada en la figura. (Procedimiento: determinar los



Prob. 9.7-12



Prob. 9.7-13

esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal y encontrar la línea de acción de su resultante. Utilizar la fórmula del Problema 9.7-13 sólo como comprobación.)

*** 9.7-13** Obtener la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central del alma hasta el centro de cortante S para la sección transversal simplemente simétrica de espesor constante mostrada en la figura:

$$e = \frac{3bh^2(b + 2a) - 8ba^3}{h^2(h + 6b) + 4a(3h^2 + 4a^2 + 6ah)}$$

Verificar también la fórmula para el caso especial en el que $a = 0$ (sección canal).

Flexión inelástica

10.1 INTRODUCCIÓN

La **flexión inelástica** se refiere a la flexión de vigas cuando el material no satisface la ley de Hooke. Pero ello ocurre siempre y cuando la viga se cargue de tal manera que los esfuerzos en la viga rebasen el límite de proporcionalidad del material. Por supuesto, el comportamiento de una viga en flexión inelástica depende del perfil del diagrama esfuerzo-deformación. El material puede ser aluminio, el cual tiene un diagrama esfuerzo-deformación que se curva más allá del límite de proporcionalidad, como se muestra en la Fig. 1-10, o el material puede ser acero, el cual manifiesta una fluencia prolongada y presenta el diagrama esfuerzo-deformación idealizado mostrado en la Fig. 1-7. En cualquier caso, si se conoce el diagrama esfuerzo-deformación, siempre es posible determinar los esfuerzos, deformaciones y deflexiones de la viga, como se indicará en este capítulo.

El análisis de una viga inelástica está basado en el hecho de que las secciones transversales planas de una viga permanecen planas bajo la flexión pura, condición que se cumple tanto en materiales inelásticos no lineales como para materiales linealmente elásticos (véase Sección 5.2). Por lo tanto, las deformaciones en una viga inelástica varían linealmente a lo largo de la altura de la viga. Entonces, con la ayuda del diagrama esfuerzo-deformación y de las ecuaciones de la estática, se puede determinar la magnitud de los esfuerzos. También se puede calcular la curvatura de la viga y las deflexiones.

Al efectuar un análisis inelástico de una viga se determina la capacidad de carga última, la cual usualmente es mucho mayor que la carga en el límite de proporcionalidad (esto es, la mayor carga que puede soportar la viga sin exceder el límite de proporcionalidad en ningún punto). Para propósitos de diseño, a menudo se necesita la carga última a fin de encontrar el factor de seguridad con respecto a la falla. Por supuesto, esta cantidad es mucho mayor que el factor de seguridad con respecto al límite de proporcionalidad. Los conceptos de diseño por carga última (véase Sección 1.7) se utilizan a menudo en el diseño de estructuras de concreto y de acero.

10.2 ECUACIONES DE FLEXIÓN INELÁSTICA

Para obtener las ecuaciones básicas de flexión inelástica, considérese una viga en flexión pura sometida a un momento flexionante positivo M (véase Fig. 10-1a). Los momentos flexionantes actúan en el plano xy , el cual se supone que es un plano de simetría de la sección transversal (Fig. 10-1b). Luego, la viga se deflexionará en este mismo plano, que es el plano de flexión. Podemos considerar al eje z como el eje neutro de la sección transversal, pero su localización queda pendiente.

A partir de las consideraciones de simetría se sabe que las deformaciones en la viga tienen una distribución lineal independientemente del tipo de material, según se explicó en la Sección 5.2. Por lo tanto, las deformaciones varían desde la parte superior hasta la base de la viga en la forma mostrada en la Fig. 10-1c, denotándose las deformaciones en las superficies inferior y superior por ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente. Denotando por ρ al radio de curvatura de la curva de deflexión, se aprecia que la deformación a una distancia y desde la superficie neutra (véase Ec. 5-2) es

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (10-1)$$

en donde $\kappa = 1/\rho$ es la curvatura. Las deformaciones en las superficies exteriores son

$$\epsilon_1 = -\kappa h_1 \quad \epsilon_2 = \kappa h_2 \quad (10-2a, b)$$

donde h_1 y h_2 son las distancias desde el eje neutro hasta las superficies inferior y superior, respectivamente. A partir de estas ecuaciones se observa que las deformaciones pueden determinarse con facilidad conociendo la curvatura y la posición del eje neutro.

La localización del eje neutro puede determinarse utilizando el diagrama esfuerzo-deformación del material, y una ecuación de estática que exprese el hecho de que es igual a cero la fuerza resultante horizontal debido a los esfuerzos normales σ que actúan sobre cualquier sección transversal de la viga; luego,

$$\int \sigma dA = 0 \quad (10-3)$$

donde dA es un elemento de área de la sección transversal y la integración se realiza en toda la sección transversal.

La curvatura puede obtenerse utilizando una segunda ecuación de la estática, es decir, una ecuación que establezca que la resultante de los momentos de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal es igual al momento flexionante M :

$$\int \sigma y dA = M \quad (10-4)$$

Por supuesto, las Ecs. (10-3) y (10-4) son las mismas que se usaron previamente en el análisis de vigas de material linealmente elástico (véase Sección 5.3). En este capítulo emplearemos estas ecuaciones para resolver problemas de flexión inelástica.

Una vez que se ha calculado la curvatura de la viga, es posible determinar las deflexiones de la viga igualando la curvatura a d^2v/dx^2 (véase Ec. 7-4) y despejando luego la deflexión v . En la flexión inelástica pueden utilizarse algunas de las técnicas desarrolladas anteriormente para determinar deflexiones de vigas elásticas; sin

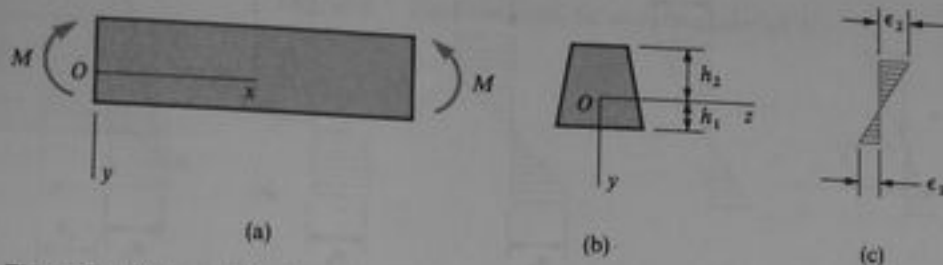


Fig. 10-1 Flexión inelástica de una viga

embargo, es necesario emplear expresiones más complicadas para la curvatura en lugar de la cantidad M/EI , como se describe en la Sección 10.6.

10.3 FLEXIÓN PLÁSTICA

El caso más simple de flexión inelástica es la **flexión plástica**, la cual ocurre cuando el material de la viga es elastoplástico. Tal material cumple con la ley de Hooke hasta el esfuerzo de fluencia, y después cede plásticamente bajo esfuerzo constante. En la Fig. 10-2 se muestra el diagrama esfuerzo-deformación de un material elastoplástico con el mismo esfuerzo de fluencia σ_y y el mismo módulo de elasticidad E a tensión y a compresión. Se aprecia que un material elastoplástico tiene una región de **elasticidad lineal** entre regiones de **plasticidad perfecta**. Por esta razón, a menudo se aplica el término *material perfectamente plástico* a un material elastoplástico.

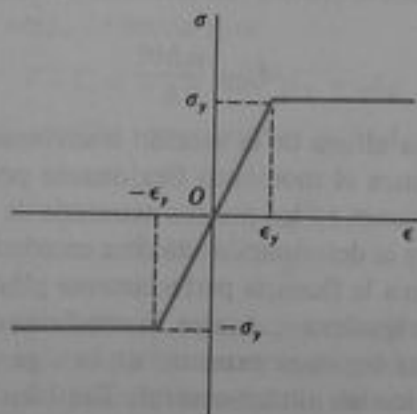


Fig. 10-2 Diagrama esfuerzo-deformación para un material elastoplástico

Los aceros estructurales pueden idealizarse como materiales elastoplásticos porque poseen puntos de fluencia bien definidos y experimentan grandes deformaciones durante la fluencia. La suposición de plasticidad perfecta después de alcanzarse el esfuerzo de fluencia significa que se desprecian los efectos del endurecimiento por deformación, pero como este efecto proporciona un incremento en la resistencia del acero, generalmente es seguro despreciarlo.

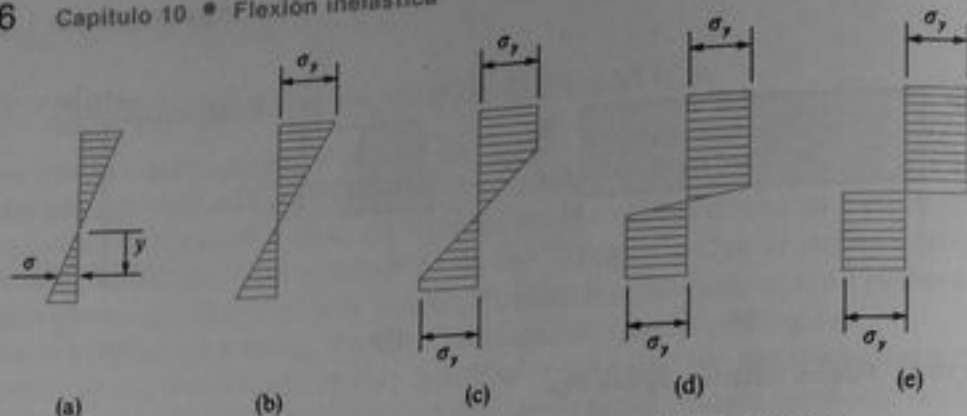


Fig. 10-3 Distributions de esfuerzo en una viga de material elastoplástico

Consideremos ahora una viga de material elastoplástico sometida a flexión pura (Fig. 10-1). Cuando los momentos flexionantes aplicados M son pequeños, el esfuerzo máximo en la viga es menor que el esfuerzo de fluencia σ_y ,* y la viga está en la condición de flexión elástica ordinaria con una distribución lineal de esfuerzos, como se muestra en la Fig. 10-3a. En estas condiciones se deduce de las Ecs. (10-1) a (10-4) que el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal, que el esfuerzo normal es $\sigma = My/I$, y que la curvatura es $-M/EI$. Estos resultados son válidos hasta que el esfuerzo en la viga en el punto más alejado del eje neutro alcanza el esfuerzo de fluencia (Fig. 10-3b). El momento correspondiente que actúa sobre la viga se denomina el **momento flexionante de fluencia** M_y :

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \sigma_y S \quad (10-5)$$

en donde S es el menor de los dos módulos de sección de la sección transversal.

Como ejemplo, el momento flexionante de fluencia para una viga de sección transversal rectangular es

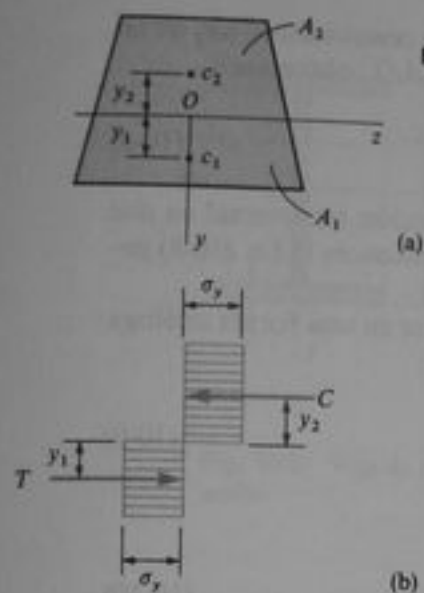
$$M_y = \frac{\sigma_y b h^2}{6} \quad (10-6)$$

donde b es el ancho y h la altura de la sección transversal.

Si ahora incrementamos el momento flexionante por encima del momento de fluencia M_y , las deformaciones en los puntos extremos de la sección transversal continuarán incrementándose y la deformación máxima excederá a la deformación de fluencia ϵ_y . Sin embargo, debido a la fluencia perfectamente plástica, los esfuerzos máximos permanecerán constantes e iguales a σ_y . Luego, la condición de esfuerzo será la representada en la Fig. 10-3c. Las regiones externas de la viga se habrán vuelto plásticas mientras permanece elástico un núcleo central. También cambia la posición del eje neutro, a menos que la sección transversal sea doblemente simétrica. Sin embargo, este cambio en el eje neutro es muy pequeño para representarse en la Fig. 10-3.

Según se incrementa el momento flexionante, la región plástica se extiende hacia adentro desde el punto más alejado hacia el eje neutro, hasta alcanzar la condición mostrada en la Fig. 10-3d. En este momento, las deformaciones en las fibras extremas son quizás 10 o 15 veces la deformación de fluencia ϵ_y , y el núcleo elástico casi ha desaparecido. Así, para fines prácticos, la viga ha alcanzado su capacidad última de resistencia a momento, y es posible idealizar la distribución de esfuerzos última co-

* El subíndice y proviene de *yielding* = fluencia en inglés. Se conserva por su amplio uso en publicaciones especializadas. (N. del E.)

Fig. 10-4 Determinación del momento plástico M_p .

mo consistente en dos porciones rectangulares (Fig. 10-3e). El momento flexionante correspondiente a esta distribución de esfuerzos idealizada se denomina **momento flexionante plástico** M_p , y representa el momento máximo que puede soportar una viga de material elastoplástico.

La determinación del momento plástico obviamente tiene gran importancia, porque es el momento limitante o momento máximo de la viga. A fin de encontrar M_p , empezamos por localizar el eje neutro de la sección transversal (Fig. 10-4a). Por encima del eje neutro cada elemento en la sección transversal tiene un esfuerzo de compresión igual a σ_y (Fig. 10-4b); por debajo del eje neutro, el esfuerzo es de tensión y también es igual a σ_y . La fuerza de tensión total T es igual a $\sigma_y A_1$, donde A_1 es el área de la sección transversal por debajo del eje neutro. De manera que la fuerza de compresión C es $\sigma_y A_2$, en donde A_2 es el área de la sección transversal por encima del eje neutro. Según se muestra mediante la Ec. (10-3), la fuerza resultante sobre la sección transversal debe ser cero, de modo que

$$T - C = 0 \quad \text{o sea} \quad A_1 = A_2 \quad (a)$$

Dado que el área total de la sección transversal es $A = A_1 + A_2$, de la ecuación anterior es evidente que

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \quad (10-7)$$

y concluimos que *el eje neutro divide a la sección transversal en dos áreas iguales*. Luego, en general, el eje neutro del momento plástico M_p tiene una localización diferente de la correspondiente a la deflexión linealmente elástica. Por ejemplo, para una sección transversal trapezoidal que es más angosta en su parte superior que en su base, como se muestra en la Fig. 10-4a, el eje neutro está levemente más abajo para el caso plástico que para el caso elástico. Por supuesto, si la sección transversal es doblemente simétrica, como para una viga rectangular o una viga de patin ancho, el eje neutro tendrá la misma posición tanto para el caso plástico como para el caso elástico.

El momento plástico M_p puede encontrarse ahora a partir de la Ec. (10-4) mediante integración o mediante el procedimiento equivalente de simplemente tomar los momentos respecto al eje neutro de las fuerzas T y C mostradas en la Fig. 10-4b; así, obtenemos

$$M_p = T y_1 + C y_2$$

donde y_1 y y_2 son las distancias desde el eje neutro hasta los centroides c_1 y c_2 de las áreas A_1 y A_2 , respectivamente. Sustituyendo T y C por $\sigma_y A/2$, obtenemos

$$M_p = \frac{\sigma_y A(y_1 + y_2)}{2} \quad (10-8)$$

El procedimiento para cada viga particular es dividir la sección transversal en dos áreas iguales, localizar el centroide de cada mitad y utilizar entonces la Ec. (10-8) para calcular M_p .

La expresión para el momento plástico puede formularse en una forma análoga a la del momento de fluencia (véase Ec. 10-5), como sigue:

$$M_p = \sigma_y Z \quad (10-9)$$

en donde

$$Z = \frac{A(y_1 + y_2)}{2} \quad (10-10)$$

es el **módulo plástico de sección** para la sección transversal. El módulo plástico puede interpretarse geoméricamente como el primer momento (tomado respecto al eje neutro) del área de la sección transversal por encima del eje neutro más el primer momento del área por debajo del eje neutro.

La razón del momento plástico de una viga a su momento de fluencia es función sólo del perfil de la sección transversal y se denomina **factor de forma f** :

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \quad (10-11)$$

Si tomamos una viga de sección transversal rectangular (b = ancho, h = altura), el módulo plástico (véase Ec. 10-10) resulta

$$Z = \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{4} \quad (10-12)$$

Recordando que el módulo de sección es $S = bh^2/6$, se aprecia que el factor de forma para una viga rectangular es

$$f = \frac{3}{2} \quad (10-13)$$

Luego, el momento plástico para una viga rectangular es 50% mayor que el momento de fluencia.

En el caso de una viga de patin ancho (véase Fig. 10-5), el módulo plástico se calcula fácilmente tomando el primer momento de un patin y la porción del alma por encima del eje neutro, y multiplicando por 2; así,

$$Z = bt(h - t_r) + t_r \left(\frac{h}{2} - t_r \right)^2 \quad (10-14)$$

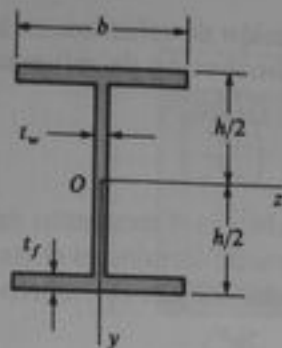


Fig. 10-5 Viga de patín ancho

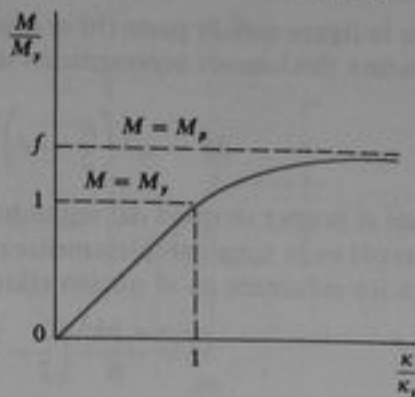


Fig. 10-6 Diagrama momento-curvatura para una viga de material elastoplástico

en donde el primer término del segundo miembro representa la contribución de los patines, y el segundo término, la del alma. En el manual AISC (Ref. 5-5) están tabulados los valores de Z para perfiles estándares de vigas de patín ancho. El factor de forma f para vigas de patín ancho normalmente está en el intervalo de 1.1 a 1.2, dependiendo de las proporciones de la sección transversal.

Relación momento-curvatura. Ya se ha observado que para valores del momento flexionante menores que el momento de fluencia M_y , la curvatura κ es $-M_y/EI$. Si se denota por κ_y la **curvatura de fluencia** (esto es, la curvatura cuando M es igual a M_y), tenemos

$$\kappa_y = -\frac{M_y}{EI} \quad (10-15)$$

Por lo que la relación momento-curvatura para una viga en el intervalo linealmente elástico puede expresarse en forma adimensional como sigue:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\kappa}{\kappa_y} \quad (0 \leq M \leq M_y) \quad (10-16)$$

Esta ecuación está representada por la porción recta del diagrama momento-curvatura mostrado en la Fig. 10-6.

Cuando el momento se vuelve mayor que M_y , parte de la viga se volverá completamente plástica, según se explicó anteriormente en relación con la Fig. 10-3c. La relación momento-curvatura se convierte entonces en no lineal, como se muestra en la Fig. 10-6. Ya que la zona plástica penetra desde el punto más lejano hacia el eje neutro de la viga, la curva en la Fig. 10-6 se aplanan y aproxima asintóticamente a una recta horizontal. Esta asíntota representa el momento plástico M_p ; luego, la ordenada a la asíntota es el factor de forma f . La ecuación de la curva dependerá naturalmente del perfil de la sección transversal.

Consideremos nuevamente el caso de una viga de sección transversal rectangular (Fig. 10-7a), y representemos por e la distancia desde el eje neutro hasta la orilla del núcleo elástico. La zona completamente plástica se muestra más oscura en la par-

te (a) de la figura y en la parte (b) se muestra la distribución de esfuerzos en la viga. El momento flexionante representado mediante esta distribución de esfuerzos es

$$M = \sigma_y b \left(\frac{h}{2} - e \right) \left(\frac{h}{2} + e \right) + \sigma_y b \left(\frac{2e^2}{3} \right) \quad (b)$$

en la cual el primer término del segundo miembro es el momento debido a los esfuerzos en la zona completamente plástica, y el segundo término es el momento debido a los esfuerzos en el núcleo elástico. Simplificando la Ec. (b), obtenemos

$$M = \frac{\sigma_y b h^2}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) = M_y \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) \quad (c)$$

Obsérvese que cuando $e = h/2$, de la Ec. (c) obtenemos $M = M_y$; y cuando $e = 0$, obtenemos $M = 3M_y/2$, que es igual al momento plástico M_p para una sección transversal rectangular.

La curvatura de la viga rectangular mostrada en la Fig. 10-7 puede determinarse fácilmente mediante la aplicación de la ecuación $\kappa = -\epsilon/y$ (véase Ec. 10-1) a un punto situado en la orilla externa del núcleo elástico. En tal punto tenemos $\epsilon = \sigma_y/E$ y $y = e$, tal que

$$\kappa = -\frac{\sigma_y}{Ee} \quad (d)$$

Esta ecuación puede expresarse en forma adimensional introduciendo la siguiente expresión para la curvatura de fluencia κ_y para una viga rectangular:

$$\kappa_y = -\frac{M_y}{EI} = -\frac{2\sigma_y}{Eh} \quad (e)$$

Combinando las Ecs. (d) y (e), obtenemos

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{h}{2e} \quad (f)$$

Podemos ahora eliminar e/h entre las Ecs. (c) y (f) y obtener la ecuación momento-curvatura en la siguiente forma adimensional:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{\kappa_y^2}{2\kappa^2} \quad (M_y \leq M \leq M_p) \quad (10-17)$$

Resolviendo la Ec. (10-17) para la curvatura en términos del momento, obtenemos

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2M/M_y}} \quad (M_y \leq M \leq M_p) \quad (10-18)$$

En la Fig. 10-8 se presenta una gráfica de la relación momento-curvatura para una viga rectangular (a partir de la Ec. 10-17 o de la Ec. 10-18).

Para otras secciones transversales puede adoptarse un procedimiento similar para obtener las ecuaciones momento-curvatura. En la Fig. 10-8 se muestran también las gráficas de esas ecuaciones para una viga romboidal, una circular y viga típica de patín ancho. En cada caso el diagrama consiste en una recta que representa la región linealmente elástica, seguida por una línea curva que representa la región donde la viga es parcialmente plástica y parcialmente elástica. En la última región del diagrama puede ocurrir una fluencia adicional en la zona plástica sin un incremento en el

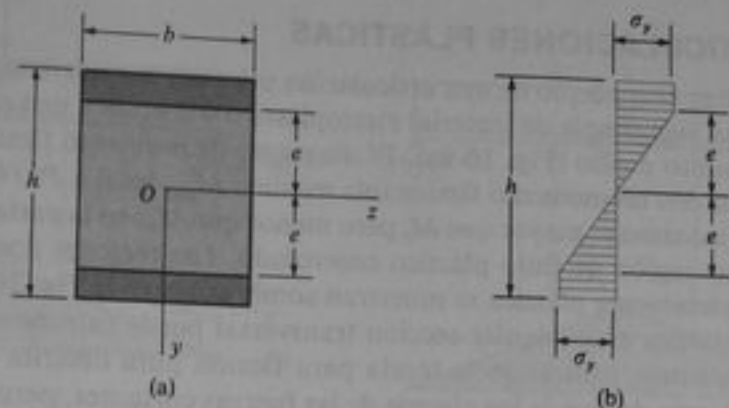


Fig. 10-7 Distribución de esfuerzos en una viga de sección transversal rectangular

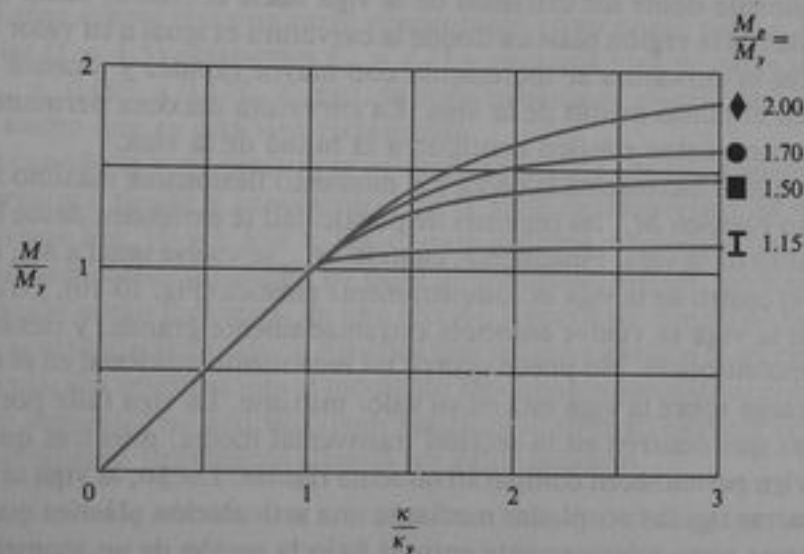


Fig. 10-8 Diagramas momento-curvatura para vigas de material elastoplástico

esfuerzo; mientras que en la zona central elástica de la viga, una deformación adicional ocurre simultáneamente con un incremento en esfuerzo. Luego, la deformación de la viga está controlada por la zona elástica; este tipo de comportamiento se denomina a veces *flujo plástico controlado*. Cuando la curvatura se vuelve muy grande, cada curva de la Fig. 10-8 se aproxima a una asíntota horizontal. En este instante la viga continúa deformándose sin ningún incremento en el momento flexionante aplicado. Se tiene entonces la condición de un *flujo plástico incontrolado*, y el momento flexionante correspondiente es el momento plástico M_p . La presencia de un flujo plástico incontrolado nos lleva al concepto de una articulación plástica, como se describe en la siguiente sección.

10.4 ARTICULACIONES PLÁSTICAS

Para explicar el concepto de una articulación plástica, consideremos el comportamiento de una viga simple de material elastoplástico sometida a una carga concentrada P en el punto medio (Fig. 10-9a). El diagrama de momento flexionante es de forma triangular con un momento flexionante máximo M_{\max} igual a $PL/4$ (Fig. 10-9b). Si el momento máximo es mayor que M_p , pero menor que M_p , en la parte central de la viga existirá una región de flujo plástico controlado. Las regiones donde la viga se ha vuelto completamente plástica se muestran sombreadas en la Fig. 10-9a. La altura de la zona elástica en cualquier sección transversal puede calcularse a partir del momento flexionante, utilizando la teoría para flexión pura descrita en la sección anterior. Esta teoría desprecia los efectos de las fuerzas cortantes, pero estos efectos usualmente son muy pequeños. También, en este ejemplo se desprecia el peso de la viga y se consideran únicamente los momentos flexionantes producidos por la carga aplicada. Con estas limitaciones se pueden calcular las dimensiones de la zona plástica para cualesquiera viga y carga específicas.

La curvatura de la viga varía como se muestra en la Fig. 10-9c. La curvatura aumenta linealmente desde los extremos de la viga hacia el centro, hasta que se alcanzan las orillas de la región plástica donde la curvatura es igual a su valor de fluencia κ_p . Entonces la curvatura se incrementa con mayor rapidez y alcanza un valor máximo κ_{\max} en el punto medio de la viga. La curvatura máxima permanece finita mientras exista un núcleo elástico continuo a la mitad de la viga.

A medida que se incrementa la carga y el momento flexionante máximo se aproxima al momento plástico M_p , las regiones de plasticidad se extienden desde las orillas hacia el eje neutro de la viga. Finalmente, cuando M_{\max} se vuelve igual a M_p , la sección transversal en el centro de la viga es completamente plástica (Fig. 10-10). La curvatura en el centro de la viga se vuelve entonces extremadamente grande, y tiene lugar un flujo plástico incontrolado. No puede ocurrir un incremento adicional en el momento máximo, y la carga sobre la viga está en su valor máximo. La viga falla por las rotaciones excesivas que ocurren en la sección transversal media, mientras que las dos mitades de la viga permanecen comparativamente rígidas. Luego, la viga se comporta como dos barras rígidas acopladas mediante una **articulación plástica** que permite que las dos barras giren relativamente entre sí bajo la acción de un momento constante M_p .

La longitud L_p de la zona plástica que circunda la articulación plástica (Fig. 10-10) puede calcularse fácilmente a partir del hecho de que el momento flexionante en la orilla de la zona es igual a M_p . Por lo tanto, tenemos

$$M_p = \frac{P}{2} \left(\frac{L - L_p}{2} \right) \quad (a)$$

Además, sabemos que el momento máximo $PL/4$ es igual a M_p , de modo que la carga sobre la viga es

$$P = \frac{4M_p}{L} \quad (b)$$

Sustituyendo la Ec. (b) en la Ec. (a) y despejando L_p , obtenemos

$$L_p = L \left(1 - \frac{M_p}{M_p} \right) = L \left(1 - \frac{1}{f} \right) \quad (10-19)$$

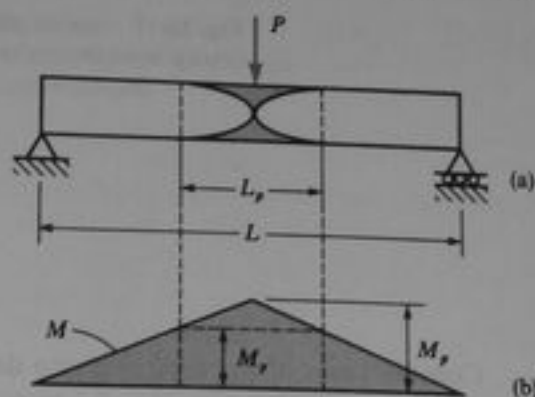
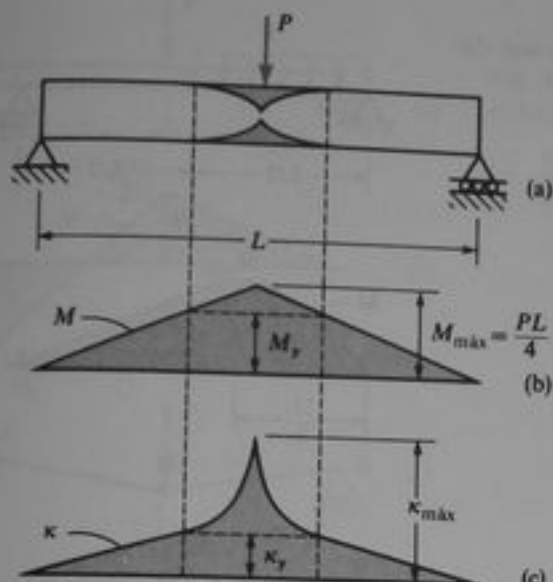


Fig. 10-10 Articulación plástica

Fig. 10-9 Viga parcialmente plástica:
 (a) zona plástica, (b) diagrama de momento flexionante, y (c) diagrama de curvatura

para una viga simple con una carga concentrada en su punto medio. Para una viga rectangular ($f = 1.5$) obtenemos $L_p = L/3$ y para una viga de patin ancho ($f = 1.1$ a 1.2), $L_p = 0.09L$ a $0.17L$. Luego, la zona plástica es mucho menor en una viga de patin ancho que en una viga rectangular.

Aun cuando la zona plástica se extiende sobre una longitud apreciable de la viga, la curvatura tiende a concentrarse en la sección transversal de la articulación plástica (véase Fig. 10-9c). Por lo tanto, para muchos propósitos podemos considerar que una articulación plástica no tiene dimensiones; esto es, podemos considerar la articulación como localizada en una sección transversal simple de la viga. La presencia de la articulación plástica significa que la viga girará en la sección transversal de la articulación mientras que el momento flexionante permanece constante e igual a M_p . Por supuesto, las articulaciones plásticas se forman siempre en las secciones donde el momento flexionante alcanza un valor máximo.

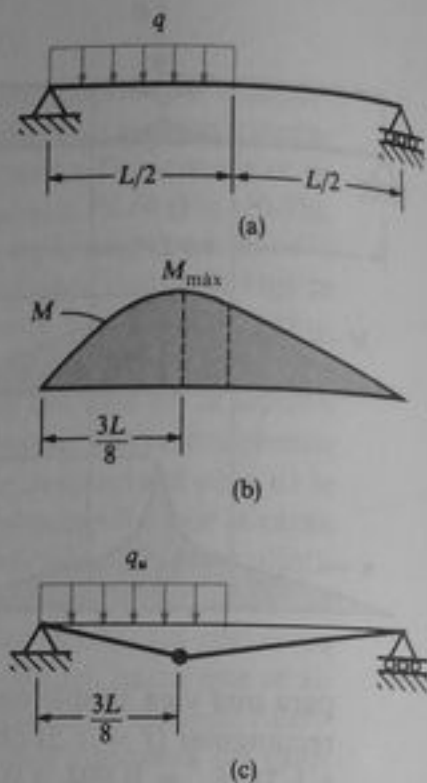
10.5 ANÁLISIS PLÁSTICO DE VIGAS

El concepto de articulaciones plásticas proporciona un método útil para determinar la carga máxima que puede soportar una viga elastoplástica. Ya hemos observado en relación con la explicación de la sección anterior, que la presencia de una articulación plástica permite que ocurra una rotación ilimitada. Por lo tanto, si la viga es estáticamente determinada, la formación de una articulación simple es suficiente para producir la falla. La magnitud de la carga requerida para desarrollar la articulación (esto es, la **carga última**) puede calcularse a partir del equilibrio estático. Por ejemplo, la carga última P_u para la viga ilustrada en la Fig. 10-10a es

$$P_u = \frac{4M_p}{L}$$

según se encuentra de la Ec. (b) de la sección anterior. La tarea de calcular las cargas últimas y localizar las articulaciones plásticas para vigas elastoplásticas se conoce como **análisis plástico**.

Fig. 10-11 Análisis plástico de una viga estáticamente determinada



Consideremos ahora otro ejemplo de una viga estáticamente determinada. La viga mostrada en la Fig. 10-11a tiene una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre la mitad izquierda. El diagrama de momento flexionante se muestra en la parte (b) de la figura y encontramos que el momento máximo es $M_{\text{máx}} = 9qL^2/128$. Obsérvese que el diagrama de momento flexionante para una viga estáticamente determinada se halla a partir del equilibrio estático y es independiente de si el material de la viga es elástico o inelástico.

Según se incrementa gradualmente la carga q , encontramos fluencia inicial cuando el momento máximo se vuelve igual al momento de fluencia M_f para la viga; la carga correspondiente se denomina **carga de fluencia**. Luego, la carga de fluencia para esta viga es

$$q_f = \frac{128M_f}{9L^2}$$

Con un incremento posterior en la carga, se formará eventualmente una articulación plástica en la sección de momento flexionante máximo indicada por el punto oscuro en la Fig. 10-11c. La carga última correspondiente es

$$q_u = \frac{128M_p}{9L^2}$$

donde M_p es el momento plástico de la viga. Después de haberse formado la articulación, la viga puede considerarse formada por dos barras unidas entre sí por la unión articulada. Una viga en estas condiciones forma un **mecanismo** que puede continuar deflectándose bajo la carga última. Los términos *mecanismo de colapso* y *mecanismo de falla* se utilizan para describir esta condición.

La relación de la carga última con la carga de fluencia para una viga estáticamente determinada es M_p/M_f , que es igual al factor de forma f para la sección transversal. Por supuesto, para vigas estáticamente indeterminadas esta relación varía con el tipo de viga y su carga.

Para demostrar el comportamiento de vigas estáticamente indeterminadas, tomaremos como ejemplo una viga en voladizo apuntalada que soporta en el centro una carga concentrada P (Fig. 10-12a). Para cualquier valor de la carga menor que la carga de fluencia P_f , el diagrama de momento flexionante tiene la forma mostrada

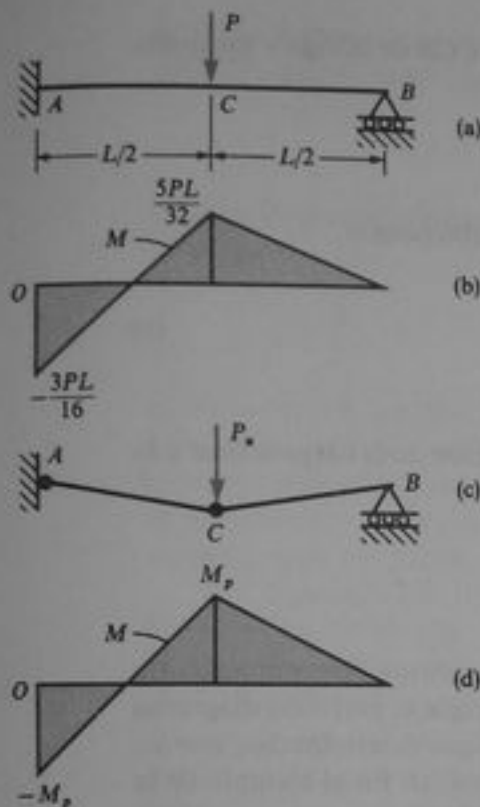


Fig. 10-12 Análisis plástico de una viga estáticamente indeterminada

en la Fig. 10-12b. El momento flexionante máximo ocurre en el extremo fijo A y es numéricamente igual a $3PL/16$; luego, la carga de fluencia es

$$P_f = \frac{16 M_p}{3L}$$

Si P se incrementa más allá del valor P_f , en la sección A ocurre una fluencia adicional. Entonces, para una carga mayor que P_f , la fluencia se inicia también en la sección C donde hay un vértice en el diagrama de momento flexionante. Si continuamos incrementando la carga, se formará una articulación plástica en el extremo A de la viga. Sin embargo, esta articulación simple no causará una falla completa de la viga. En lugar de ello, la viga se comportará como una viga simple estáticamente determinada que soporta la fuerza P en la sección C , y por un momento M_p en el extremo A . Luego, la estructura resistirá incrementos posteriores de la carga P hasta que finalmente el momento flexionante en C alcance también el valor del momento plástico M_p . En esta etapa, se habrán desarrollado articulaciones plásticas en A y C , por lo que la estructura ha formado un mecanismo de falla (Fig. 10-12c). Ocurre ahora una deflexión ilimitada, y no es posible un incremento posterior en la carga; así que se ha alcanzado el valor de la carga última P_u .

Para determinar esta carga última, no necesitamos verificar en detalle el comportamiento de la viga desde su carga inicial hasta el colapso, como se describió en el párrafo anterior. En vez de ello, podemos referirnos directamente a la condición de falla mostrada en la Fig. 10-12c y calcular P_u a partir del equilibrio estático. Como los momentos flexionantes en las articulaciones plásticas son iguales a M_p , el diagrama de momento flexionante para la condición de falla se conoce inmediatamente (véase Fig. 10-12d). Luego, la carga P_u puede determinarse a partir de consideraciones de equilibrio. Por ejemplo, podemos determinar la reacción R_b en el apoyo B a partir de un diagrama de cuerpo libre de toda la viga. Tomando momentos respecto a A (Fig. 10-12c), obtenemos

$$M_p - \frac{P_u L}{2} + R_b L = 0 \quad \text{o bien} \quad R_b = \frac{P_u}{2} - \frac{M_p}{L}$$

Después, mediante un diagrama de cuerpo libre de la parte CB de la viga y tomando momentos respecto a C , obtenemos

$$-M_p + \frac{R_b L}{2} = 0$$

Combinando esta ecuación con la ecuación precedente, obtenemos

$$P_u = \frac{6M_p}{L} \quad (b)$$

como la carga última para la viga.

A partir de las Ecs. (a) y (b) obtenemos ahora la relación de la carga última a la carga de fluencia:

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{9M_p}{8M_y}$$

la cual es mayor que la relación M_p/M_y para vigas estáticamente determinadas. La causa de este incremento puede apreciarse fácilmente. Aunque el perfil del diagrama de momento flexionante siempre permanece igual para vigas determinadas, con vigas indeterminadas se suscita una *redistribución de momentos*. En el ejemplo de la viga mostrada en la Fig. 10-12, el diagrama inicial de momentos tiene un valor máximo en la sección A (Fig. 10-12b). Después de que se forma una articulación en tal sección transversal, el momento flexionante permanece constante ahí, aunque los momentos continúen aumentando en cualquier otro lugar hasta alcanzar la condición mostrada en la Fig. 10-12d. Esta redistribución de momentos incrementa la resistencia última de una estructura estáticamente indeterminada en comparación con la de una estructura determinada, porque tan pronto como una sección falla las demás partes de la estructura empiezan a soportar carga adicional.

Una de las conveniencias del análisis plástico es la facilidad con la que puede calcularse la carga última a partir del equilibrio. Un análisis puramente estático es por lo común más simple que el análisis estáticamente indeterminado requerido para el margen elástico lineal. Además, los resultados obtenidos mediante análisis plástico no son susceptibles a imperfecciones en las condiciones de frontera. Una pequeña rotación de un empotramiento o un ligero asentamiento de un apoyo simple, no tiene efecto sobre la carga última, mientras que el mismo tipo de imperfecciones tendrán efecto apreciable sobre el comportamiento elástico de la estructura.

Cuando se calcula la carga última mediante la estática, se utiliza el **principio de desplazamientos virtuales**. Este principio establece que si un sistema de cuerpos rígidos está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, entonces el trabajo realizado por tales fuerzas durante un pequeño desplazamiento virtual del sistema debe ser cero. Apliquemos este principio a la viga mostrada en la Fig. 10-12. Consideramos que el mecanismo de falla consiste en dos barras AC y CB con articulaciones plásticas en A y C , como se muestra en la Fig. 10-13. Es posible introducir un desplazamiento virtual girando la barra AC un pequeño ángulo θ . Durante este desplazamiento, la barra CB girará el mismo ángulo θ , y el punto C se moverá hacia abajo una distancia $\theta L/2$. El trabajo efectuado por la fuerza P_u es positivo e igual a P_u multiplicado por $\theta L/2$. El trabajo realizado por los momentos plásticos M_p es negativo porque se oponen al gi-

ro de las barras; en la sección A el trabajo es $-M_p\theta$, y en la sección C el trabajo es $-M_p(2\theta)$. Por lo tanto, la ecuación del trabajo virtual para la viga es

$$\frac{P_u\theta L}{2} - M_p\theta - 2M_p\theta = 0$$

Obsérvese que se elimina de la ecuación el ángulo θ . Despejando la carga última, obtenemos

$$P_u = \frac{6M_p}{L}$$

como antes. La conveniencia de utilizar el principio de desplazamientos virtuales estriba en su sencillez; solamente se introduce el desplazamiento virtual y luego una ecuación para el trabajo virtual. En contraste, la técnica estática más común requiere elaboración de diagramas de cuerpo libre, no sólo para toda la estructura, sino también para sus partes.

En el ejemplo anterior sólo había una forma posible de ubicar las articulaciones plásticas; en consecuencia, sólo tenía que considerarse un mecanismo de falla. Sin embargo, a menudo habrá varios mecanismos posibles diferentes, y puede no ser evidente cuál es el correcto. En tal caso debemos considerar independientemente cada mecanismo y calcular el valor de la carga (o cargas) correspondientes; naturalmente, el mecanismo de falla correcto es aquel que ocurre con el menor valor de la carga. Esta es la verdadera carga última para la estructura.



Fig. 10-13 Aplicación del principio de desplazamientos virtuales

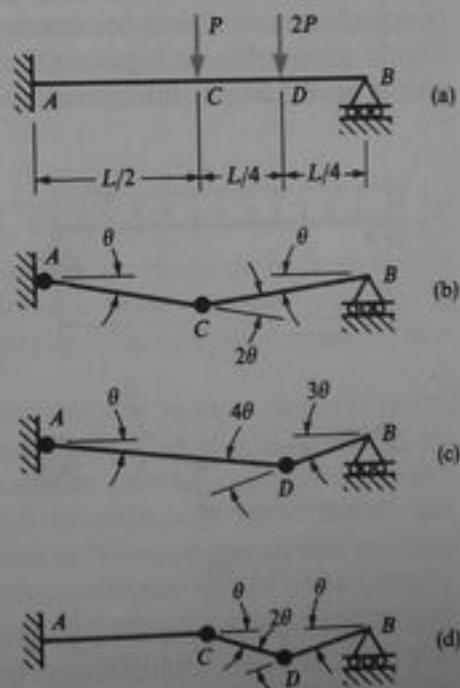


Fig. 10-14 Ejemplo que ilustra posibles mecanismos de falla

Para explicar la elección apropiada del mecanismo de falla, tomemos como ejemplo la viga AB mostrada en la Fig. 10-14a. Esta viga soporta dos cargas concentradas que actúan en las secciones C y D . Los valores críticos del momento flexionante en tal viga ocurrirán en las secciones transversales donde actúan cargas o reacciones (esto es, en A , C o D). Se formará un mecanismo de falla si existen articulaciones plásticas

en dos de esas tres secciones transversales, y las tres posibilidades se muestran en la Fig. 10-14b, c y d. La magnitud de la carga P para cada uno de los mecanismos su- puestos se calcula fácilmente a partir del principio de los desplazamientos virtuales. Luego, para el mecanismo mostrado en la Fig. 10-14b, obtenemos

$$P\left(\frac{\theta L}{2}\right) + 2P\left(\frac{\theta L}{4}\right) - M_p\theta - M_p(2\theta) = 0$$

o sea, $P = 3M_p/L$. En forma semejante la carga P correspondiente al mecanismo mostrado en la Fig. 10-14c se encuentra que es $5M_p/2L$ y la correspondiente a la Fig. 10-14d es $6M_p/L$. Comparando estos tres resultados, concluimos que la carga última para la viga mostrada en la Fig. 10-14a es

$$P_u = \frac{5M_p}{2L}$$

y el mecanismo de colapso tiene articulaciones plásticas en las secciones A y D .

Como otro ejemplo de análisis plástico, examinemos una viga en voladizo apuntalada sobre la que actúa una carga uniforme (Fig. 10-15a). El momento flexionante máximo negativo en la viga ocurre en el empotramiento A , y el momento máximo positivo ocurre en algún lugar cercano al centro de la viga. Luego el mecanismo de colapso tendrá articulaciones plásticas en A y C , como se representa en la Fig. 10-15b. Si se introduce un desplazamiento virtual de este mecanismo y se denota por θ el ángulo de rotación de la parte AC , entonces el desplazamiento vertical de la articulación en C será θb , donde b es la distancia a la articulación. Asimismo, el ángulo de rotación de la parte CB resulta $\theta_1 = \theta b/(L - b)$. De modo que el trabajo virtual realizado por los momentos plásticos M_p en las articulaciones es

$$-M_p\theta - M_p(\theta + \theta_1) \quad (c)$$

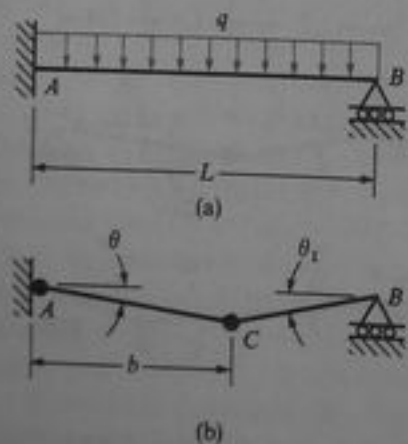


Fig. 10-15 Análisis plástico de una viga con carga uniforme

El trabajo efectuado por la carga aplicada q puede determinarse tomando un elemento $q dx$ de la carga, multiplicando por el desplazamiento virtual a través del cual se mueve aquella, y luego integrando a lo largo de la viga. Debido a que q es constante, el resultado es igual al producto de q y al área del diagrama de desplazamientos mostrado en la Fig. 10-15b. Luego, el trabajo virtual de la carga q es

$$q\left(\frac{L}{2}\right)(\theta b) \quad (d)$$

La ecuación del trabajo virtual se obtiene sumando las expresiones (c) y (d) e igualando a cero la suma; despejando la ecuación resultante, obtenemos

$$q_u = \frac{2M_p}{bL} \left(\frac{2L - b}{L - b} \right) \quad (e)$$

Esta ecuación proporciona la carga última en términos de la distancia b , la cual es una cantidad desconocida. Por supuesto, ya hemos observado que cuando se consideran varios mecanismos de falla posibles, el mecanismo correcto es el que proporciona el valor más bajo para la carga última. Aplicando este concepto al problema presente, concluimos que la distancia b debe ser tal que haga mínimo a q_u . Por lo tanto, podemos tomar la derivada de q_u con respecto a b , igualarla a cero, y despejar b . El resultado es

$$b = L(2 - \sqrt{2}) \quad (f)$$

Un procedimiento optativo es formular una expresión para el momento flexionante en la viga con articulaciones, y determinar luego la ubicación del momento máximo; este punto será la localización de la articulación plástica. Por supuesto, este tipo de cálculos (ya sea minimizar q_u o localizar el punto de momento máximo) son sólo posibles en los problemas más simples donde los pasos matemáticos son fáciles de efectuar. En situaciones más complicadas es más sencillo obtener una solución numérica suponiendo varias posiciones de la articulación plástica, y calculando entonces la carga correspondiente q a cada caso mediante el uso del principio de los desplazamientos virtuales. A partir de tales cálculos pueden determinarse con buena precisión tanto la carga q_u más pequeña como la localización de la articulación.

Volviendo al problema que nos ocupa, sustituyendo la distancia b de la Ec. (f) en la expresión de q_u (véase Ec. e), se obtiene

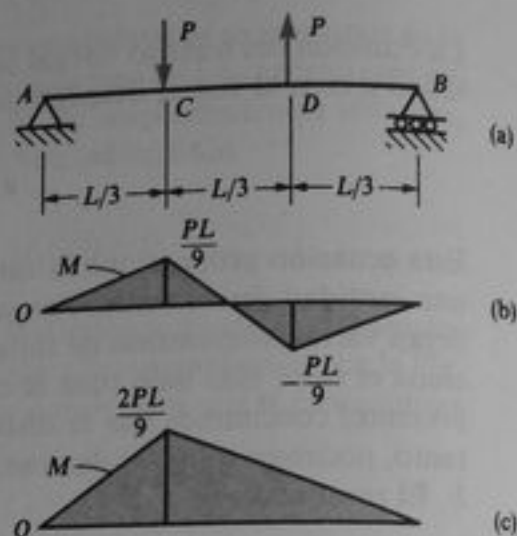
$$q_u = \frac{2M_p}{L^2} (3 + 2\sqrt{2}) \approx \frac{11.66M_p}{L^2} \quad (g)$$

como la expresión para la carga última sobre la viga. La razón de la carga última q_u a la carga de fluencia $q_f = 8M_p/L^2$ puede calcularse fácilmente para esta viga; la relación es $1.46 M_p/M_p$, la cual es 46% mayor que para una viga estáticamente determinada.

El análisis plástico de vigas doblemente empotradas y de vigas continuas se realiza en forma análoga a la descrita en los ejemplos anteriores. Una viga de extremos empotrados se convertirá en un mecanismo cuando se formen tres articulaciones; usualmente, habrá una articulación en cada empotramiento, más una en algún lugar intermedio. Las vigas continuas se colapsan cuando se forma un mecanismo en algún claro. Para un claro interior se requieren tres articulaciones: una en cada extremo del claro y otra en algún sitio intermedio. Para un claro extremo con apoyos simples se requieren dos articulaciones: una en el primer apoyo interior y otra en el mismo claro.

Las aplicaciones más importantes del análisis plástico están en el diseño de marcos planos. Tales marcos forman mecanismos cuando se alcanza la carga última, pero su análisis es mucho más complicado que el de las vigas. El lector interesado en esto puede estudiar algunas de las referencias generales (véanse Refs. 10-1 a 10-8) para mayor información sobre métodos de análisis plástico.

Cuando se analiza una viga u otra estructura en el intervalo inelástico, debemos tener presente que el principio de superposición no es aplicable y que el comportamiento



de la estructura depende no sólo de los valores finales de las cargas, sino también del orden en que éstas se aplican. Para explicar este aspecto, considérese la viga AB con dos cargas P que actúan como se muestra en la Fig. 10-16a. Si ambas cargas se aplican simultáneamente, el diagrama de momento flexionante tiene la forma mostrada en la porción (b) de la figura, y la carga de fluencia es $P_c = 9M_p/L$. Supongamos ahora que la carga que actúa en el punto C se aplica primero, y después se aplica la carga en D . Cuando sólo actúa la carga en C el diagrama de momento flexionante tiene la forma mostrada en la Fig. 10-16c. El momento máximo tiene el doble del valor que para el caso anterior; por ello, la sola carga P que actúa en C puede producir comportamiento plástico, aunque es menor que la carga P_c calculada antes. Este comportamiento plástico no desaparecerá cuando se aplique la otra carga P en el punto D ; por lo que es evidente que la condición final de la viga difiere del caso en el que las cargas se aplican simultáneamente.

Por esta razón siempre se supondrá en las explicaciones que las fuerzas se aplican simultáneamente a la estructura y que la relación entre las cargas permanece constante durante el proceso de carga.

Diseño plástico. El diseño de estructuras de acero sobre la base de su capacidad de carga última se conoce como **diseño plástico**, **diseño por carga última** o **diseño al límite**. En el diseño plástico establecemos primero las cargas de operación de la estructura y luego se multiplican tales cargas por un **factor de carga**, tal como 1.7, para obtener las cargas últimas. La estructura se diseña para condiciones de carga última, utilizando los conceptos del análisis plástico. Esta técnica contrasta con el más conocido **diseño elástico** o **diseño por esfuerzos permisibles**, en el que se aplica un factor de seguridad al esfuerzo de fluencia para obtener un esfuerzo permisible, después de lo cual se diseña la estructura (empleando los conceptos del análisis elástico) de forma tal que no se rebase al esfuerzo permisible.

La diferencia esencial entre los dos métodos de diseño es que el diseño plástico produce una estructura con un factor de seguridad más o menos uniforme respecto a la falla de todas sus partes, mientras que una estructura diseñada elásticamente tiene un factor de seguridad uniforme respecto a la fluencia. De la explicación anterior acerca de la redistribución de los momentos flexionantes en una estructura durante la acción inelástica, podemos entender fácilmente que las estructuras diseñadas mediante estos dos métodos tendrán diferentes proporciones relativas en sus partes.

*10.6 DEFLEXIONES

Las deflexiones de vigas inelásticas pueden determinarse mediante métodos similares a los utilizados para vigas elásticas. No obstante, los cálculos usualmente son mucho más complicados debido a las relaciones no lineales entre los momentos flexionantes y las curvaturas. Empezamos con la relación básica entre la curvatura y la deflexión (véase Ec. 7-4):

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (10-20)$$

Como esta ecuación se obtuvo únicamente a partir de consideraciones geométricas, es válida para una viga de cualquier material. Las principales limitaciones de la ecuación son que sólo es válida para deflexiones pequeñas, y que se desprecian los efectos del cortante. Sin embargo, la ecuación es suficientemente adecuada para los fines usuales.

Para utilizar la Ec. (10-20) en la determinación de deflexiones, debemos conocer la curvatura κ , la cual es igual a $-M/EI$ para una viga de material linealmente elástico. En el caso de una viga inelástica, debe emplearse la expresión adecuada para la curvatura (tal como la de la Ec. 10-18) en lugar de $-M/EI$. Una vez que se conoce la curvatura, podemos resolver la Ec. (10-20) para las deflexiones mediante alguno de los mismos métodos descritos en el Capítulo 7 para vigas elásticas. Por ejemplo, podemos utilizar el método de integraciones sucesivas e integrar dos veces la Ec. (10-20); no obstante, existen dificultades prácticas para efectuar las integraciones en la mayoría de los problemas.

Otro método es una versión generalizada del método del área de momentos (Sección 7.5), que podemos denominar **método del área de curvaturas**. Este método se basa en las propiedades del diagrama de curvaturas en lugar del diagrama M/EI , y en consecuencia, emplea los siguientes **teoremas del área de curvaturas**:

1. El ángulo θ_{AB} entre las tangentes a la curva de flexión en dos puntos A y B es igual al área del diagrama de curvaturas con signo negativo, entre tales puntos.
2. La desviación Δ_{AB} del punto B desde la tangente en A es igual al primer momento del área del diagrama de curvaturas con signo negativo, entre A y B , tomado con respecto a B .

Estos teoremas sirven para determinar las pendientes y las deflexiones de vigas inelásticas, en la misma forma que los teoremas del área de momentos utilizados para vigas elásticas.

Como el diagrama de curvaturas usualmente no se expresa en términos de funciones simples, generalmente se requieren técnicas numéricas para encontrar las deflexiones. Por ejemplo, la curvatura se calcula en una serie de puntos discretos a lo largo del eje de la viga y se trazan las ordenadas del diagrama de curvaturas en cada uno de tales puntos. Estas ordenadas se unen mediante rectas para obtener una aproximación al diagrama exacto. Luego se determinan numéricamente las áreas y los primeros momentos del diagrama aproximado; a continuación se determinan las deflexiones y las pendientes a partir de los teoremas del área de curvaturas. Por estos métodos sólo pueden resolverse problemas muy sencillos, y estos procedimientos, en sentido estricto, sólo son válidos para vigas con secciones transversales doblemente simétricas y para materiales con el mismo diagrama esfuerzo-deformación, tanto en tensión

como en compresión. Para mayor información sobre la determinación de deflexiones pueden consultarse las referencias.

Cuando se calculan las deflexiones, debemos tener presente que el principio de superposición no es aplicable a ninguna viga cuyo límite de proporcionalidad haya sido excedido. Por lo tanto, no se utiliza el citado método cuando se determinan las deflexiones de vigas inelásticas.

Ejemplo

Una viga en voladizo AB que soporta una carga concentrada P en su extremo libre (Fig. 10-17a) se construye con un material elastoplástico. Determinar el ángulo de rotación θ y la deflexión δ en el extremo libre de la viga desde el inicio de la aplicación de la carga hasta la falla, suponiendo que la viga tiene sección transversal rectangular.

Empecemos por trazar un esquema del diagrama de momento flexionante para la viga (Fig. 10-17b). Vemos así que el momento máximo es igual a PL , y mientras este valor sea menor que el momento de fluencia M_y , la viga es completamente elástica. Para el intervalo elástico tenemos

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI} \quad \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

La carga de fluencia P_y que produce la fluencia de la viga está dada por la ecuación

$$P_y = \frac{M_y}{L} \quad (a)$$

El ángulo θ , y la deflexión δ , causados por esta carga son

$$\theta_y = \frac{P_y L^2}{2EI} \quad \delta_y = \frac{P_y L^3}{3EI} \quad (b)$$

En forma adimensional, se expresa el ángulo de rotación y la deflexión para todo el intervalo elástico mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P}{P_y} \quad \frac{\delta}{\delta_y} = \frac{P}{P_y} \quad \left(0 \leq \frac{P}{P_y} \leq 1 \right) \quad (c)$$

Cuando el momento máximo en la viga excede M_y , la viga tendrá dos regiones: (1) una región de comportamiento completamente elástico y (2) una región de comportamiento elastoplástico, como se indica en el diagrama de curvaturas de la Fig. 10-17c. En la región 1 la curvatura es

$$\kappa = \frac{Px}{EI} \quad (d)$$

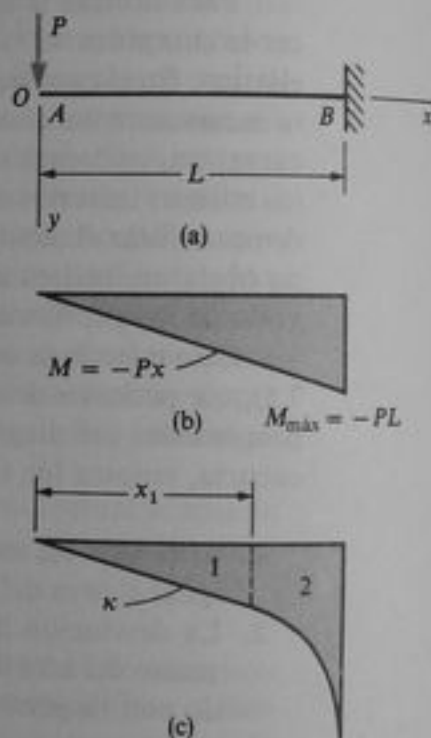


Fig. 10-17 Ejemplo. Deflexiones en una viga elastoplástica de sección transversal rectangular

y en la región 2 (véase Ec. 10-18) es

$$\kappa = \frac{\kappa_y}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}} \quad (e)$$

donde $\kappa_y = M_y/EI$. La longitud x_1 de la región elástica se encuentra a partir de la ecuación $Px_1 = M_y$, tal que

$$x_1 = \frac{M_y}{P} \quad (f)$$

El ángulo en el extremo de la viga, a partir del primer teorema del área de curvaturas, es igual al área total del diagrama mencionado:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{x_1} \frac{Px \, dx}{EI} + \int_{x_1}^L \frac{\kappa_y \, dx}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}} \\ &= \frac{Px_1^2}{2EI} + \frac{\kappa_y M_y}{P} \left[\sqrt{3 - 2Px_1/M_y} - \sqrt{3 - 2PL/M_y} \right] \end{aligned}$$

Si sustituimos κ_y por M_y/EI , x_1 por M_y/P y M_y por $P_y L$, la ecuación anterior resulta

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P_y}{P} \left[3 - 2\sqrt{3 - 2P/P_y} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2} \right) \quad (g)$$

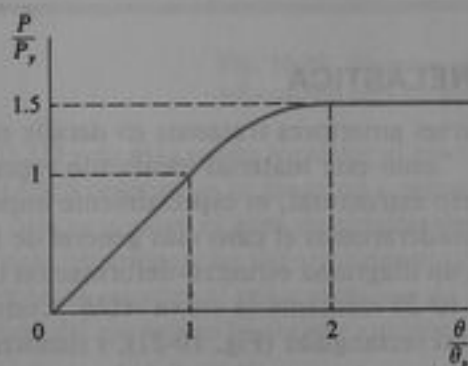


Fig. 10-18 Carga en función del ángulo de rotación para la viga en voladizo ilustrada en la Fig. 10-17

en la cual θ , está dada por la Ec. (b). Esta ecuación es válida hasta que el momento máximo en la viga resulta igual al momento plástico M_p , el cual corresponde a $P/P_y = 3/2$. En el instante en que P/P_y alcanza este valor, el ángulo de rotación es $\theta/\theta_y = 2$. Luego, este ángulo aumenta indefinidamente. En la Fig. 10-18 se muestra una gráfica de la carga P/P_y versus el ángulo de rotación θ/θ_y .

La deflexión en el extremo de la viga se calcula a partir del segundo teorema del área de curvaturas, como sigue:

$$\delta = \int_0^{x_1} \frac{Px^2 \, dx}{EI} + \int_{x_1}^L \frac{\kappa_y x \, dx}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}}$$

Evaluando estas integrales y efectuando las mismas sustituciones que para la Ec. (g), obtenemos

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{P}{P_y}\right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_y}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2}\right) \quad (h)$$

en la cual δ_y está dada por la Ec. (b). Cuando P/P_y es igual a $3/2$, la deflexión es $\delta/\delta_y = 20/9$. El diagrama carga-deflexión está graficado en la Fig. 10-19.

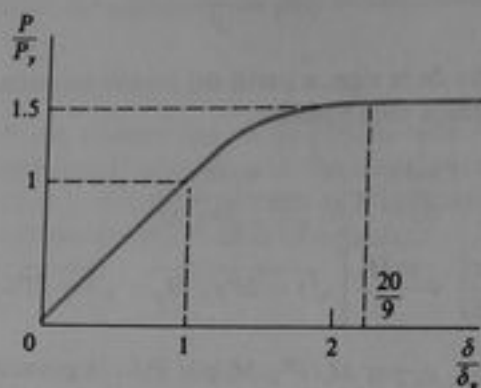


Fig. 10-19 Carga en función de la deflexión para la viga en voladizo ilustrada en la Fig. 10-17

*10.7 FLEXIÓN INELÁSTICA

En las cuatro secciones anteriores tratamos en detalle el caso particular de un material elastoplástico. Como este material idealizado representa con precisión el comportamiento del acero estructural, es especialmente importante en el campo de la ingeniería. Ahora consideraremos el caso más general de flexión inelástica, en la que el material presenta un diagrama esfuerzo-deformación de un perfil cualquiera, representado en la Fig. 10-20 mediante la curva AOB . Consideremos también una viga de sección transversal rectangular (Fig. 10-21), y denotemos por h_1 y h_2 las distancias desde el eje neutro hasta las superficies inferior y superior de la viga, respectivamente. Estas distancias son iguales sólo si el diagrama esfuerzo-deformación tiene la misma forma en tensión y en compresión.

A fin de localizar el eje neutro de la viga rectangular, se utilizan las Ecs. (10-1) y (10-3). De la Ec. (10-1) obtenemos

$$y = -\rho\epsilon \quad dy = -\rho d\epsilon \quad (a)$$

Sustituyendo en la Ec. (10-3), obtenemos

$$\int \sigma dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma b dy = -\rho b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son las deformaciones en la base y en la parte superior, respectivamente (véase Fig. 10-1). Obsérvese que estas deformaciones también están indicadas sobre la curva esfuerzo-deformación de la Fig. 10-20, suponiendo que la curvatura es ne-

gativa y que la base de la viga está en tensión. La ecuación anterior muestra que la posición del eje neutro es tal que

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0 \quad (10-21)$$

Denotemos ahora por ϵ_n la suma de los valores absolutos de las deformaciones positivas y negativas en la viga:

$$\epsilon_n = \epsilon_1 - \epsilon_2 = -\kappa h_1 - \kappa h_2 = -\kappa h \quad (10-22)$$

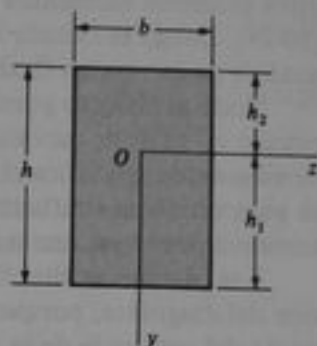
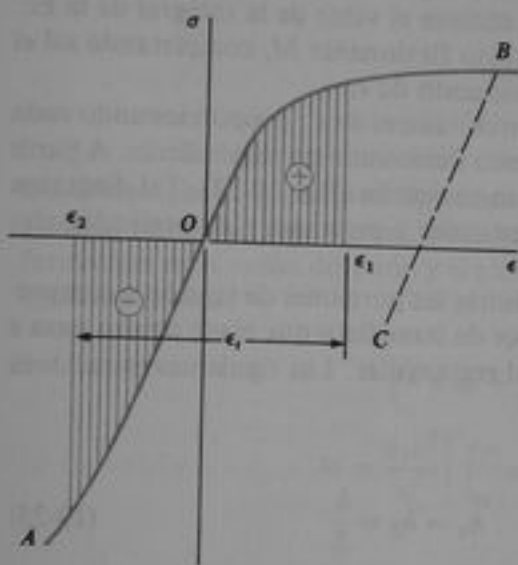


Fig. 10-21 Viga inelástica de sección transversal rectangular

Fig. 10-20 Diagrama esfuerzo-deformación para un material inelástico

Para satisfacer la Ec. (10-21) y de este modo localizar el eje neutro, empezamos por suponer un valor de ϵ_n . Luego marcamos la longitud ϵ_n sobre el eje horizontal en la Fig. 10-20, en tal forma que se igualen el área de tensión del diagrama y el área de compresión. De esta manera obtenemos las deformaciones ϵ_1 y ϵ_2 en las fibras extremas; estas deformaciones corresponden al valor supuesto de la deformación total ϵ_n . La posición correspondiente del eje neutro se obtiene entonces a partir de la Ec. (10-2) como sigue:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{-\epsilon_2} = \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right| \quad (10-23)$$

Como las deformaciones ϵ son lineales respecto de la distancia desde el eje neutro (véase Fig. 10-1c), concluimos que el diagrama esfuerzo-deformación AOB en la Fig. 10-20 representa la distribución de los esfuerzos de flexión en la altura de la viga, si se sustituye ϵ por la distancia h . Luego, para un valor supuesto de ϵ_n , conocemos ahora la posición del eje neutro y los esfuerzos y deformaciones con la altura de la viga. A partir de la Ec. (10-22) conocemos también la curvatura de dicha viga.

El siguiente paso es determinar el momento flexionante M mediante la Ec. (10-4). Sustituyendo de las Ecs. (a), podemos plantear la Ec. (10-4) en la forma

$$\int \sigma y dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y b dy = \rho^2 b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon = M \quad (b)$$

Observando de la Ec. (10-22) que $\rho = 1/x = -h/\epsilon_1$, podemos escribir la Ec. (b) en la forma

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_1^2} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon \quad (10-24)$$

La integral en esta expresión representa el primer momento con respecto al eje vertical del área bajo la curva esfuerzo-deformación (el área rayada) en la Fig. 10-20. Obsérvese que los primeros momentos de ambas áreas son positivos, porque σ y ϵ son ambos positivos a la derecha del eje vertical y negativos a la izquierda. Evaluando estos primeros momentos y sumándolos, se obtiene el valor de la integral de la Ec. (10-24). Luego se calcula fácilmente el momento flexionante M , completando así el análisis de la viga en flexión para el valor supuesto de ϵ_1 .

Todo el proceso puede repetirse para otros valores de ϵ_1 , proporcionando cada cálculo un valor de curvatura y uno de momento flexionante correspondiente. A partir de esos datos se grafica el diagrama momento-curvatura (Fig. 10-22). Tal diagrama es para una curva esfuerzo-deformación particular y para una viga particular con sección transversal rectangular.

Los cálculos se simplifican si son las mismas las porciones de tensión y compresión del diagrama, porque entonces se conoce de inmediato que el eje neutro pasa a través del centroide de la sección transversal rectangular. Las siguientes ecuaciones se aplican en este caso:

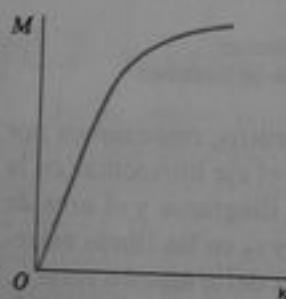


Fig. 10-22 Diagrama momento-curvatura para flexión inelástica

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \quad (10-25)$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\epsilon_t}{2} \quad (10-26)$$

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_1^2} \int_0^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon \quad (10-27)$$

A partir de la última de estas ecuaciones, se calcula M para cualquier valor supuesto de ϵ_1 , y la curvatura correspondiente puede determinarse a partir de la Ec. (10-22).

En el caso particular de una viga rectangular de material linealmente elástico, tenemos $\sigma = E\epsilon$, y la Ec. (10-27) da

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_1^2} \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon^2 d\epsilon = \frac{2bh^2 E \epsilon_1^3}{3\epsilon_1^2} \quad (c)$$

Sustituyendo ahora $\epsilon_1 = 2\epsilon_1$ y $\sigma_{\max} = E\epsilon_1$ en la Ec. (c), obtenemos

$$M = \frac{\sigma_{\max} bh^2}{6} = \sigma_{\max} S \quad (d)$$

donde σ_{\max} es el esfuerzo en la base de la viga. También, si se sustituye $\epsilon_1 = 2\epsilon_1$ y $\epsilon_2 = -x/h/2$ en la Ec. (c), obtenemos

$$\kappa = -\frac{M}{Ebh^3/12} = -\frac{M}{EI} \quad (e)$$

Las Ecs. (d) y (e) son las ya conocidas de la flexión elástica lineal.

Si en lugar de un rectángulo tenemos algún otro perfil de sección transversal para la cual el ancho b es variable (véase Fig. 10-1b, por ejemplo), entonces en lugar de las Ecs. (10-21) y (10-24) obtenemos

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma b d\epsilon = 0 \quad (10-28)$$

$$M = \frac{h^2}{\epsilon_1^2} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma b \epsilon d\epsilon \quad (10-29)$$

Obsérvese que el ancho b se ha conservado dentro del signo de la integral. Como ejemplo específico consideremos una sección T (Fig. 10-23). Denotando por ϵ_3 la deformación en la unión del patin y el alma, se formulan las ecuaciones anteriores en la siguiente forma:

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3} \sigma d\epsilon + \int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1} \sigma \frac{b_1}{b_2} d\epsilon = 0 \quad (f)$$

$$M = \frac{b_2 h^2}{\epsilon_1^2} \left[\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3} \sigma \epsilon d\epsilon + \int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1} \sigma \frac{b_1}{b_2} \epsilon d\epsilon \right] \quad (g)$$

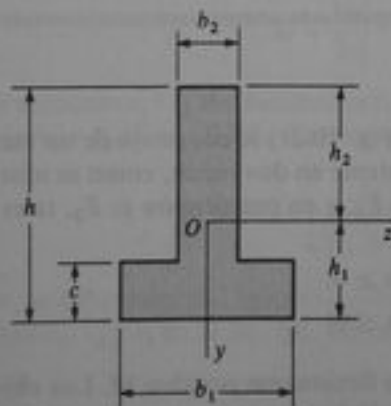


Fig. 10-23 Viga inelástica de sección T

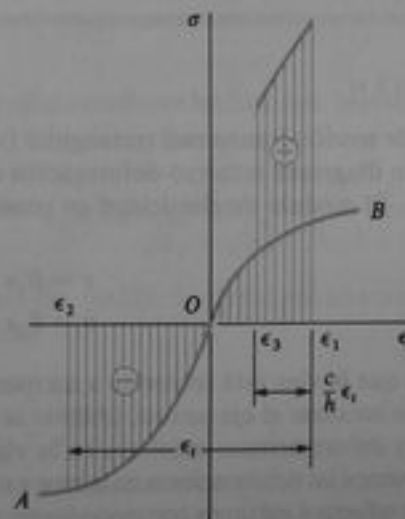


Fig. 10-24 Diagrama esfuerzo-deformación modificado

De estas ecuaciones se aprecia que las ordenadas del diagrama esfuerzo-deformación en la región correspondiente al patin de la sección transversal deben amplificarse en la relación b_1/b_2 (véase Fig. 10-24). En la determinación de la posición del eje neutro, procedemos como en el caso anterior y marcamos, sobre el eje horizontal de la

Fig. 10-24, la posición de la distancia supuesta ϵ_1 , tal que las dos áreas sombreadas sean numéricamente iguales. La posición se determina, por supuesto, mediante prueba y error. Para cada posición de prueba, la deformación ϵ_3 en la unión del alma y el patín se obtiene de la ecuación

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1} = \frac{c}{h} \quad (h)$$

Procediendo en esta forma, se obtienen las deformaciones ϵ_1 y ϵ_2 en las fibras extremas.

Habiendo localizado el eje neutro a partir de la Ec. (f), se determina ahora el momento flexionante a partir de la Ec. (g). Observamos que las dos integrales entre los corchetes representan los primeros momentos de las áreas hachuradas en la Fig. 10-24 con respecto al eje vertical que pasa a través del origen O . Calculando este primer momento y sustituyendo entonces en la Ec. (g), obtenemos el momento flexionante M correspondiente al valor supuesto de ϵ_1 . Se determina también la curvatura correspondiente κ a partir de la Ec. (10-22), y luego se construye el diagrama momento-curvatura para la viga de sección T. Un procedimiento análogo se utiliza para una viga de patín ancho.

La descripción anterior del análisis de una viga en flexión inelástica es completamente general, y se emplea para cualquier curva esfuerzo-deformación y cualquier perfil de sección transversal. Sin embargo, la curva esfuerzo-deformación algunas veces puede aproximarse mediante un planteamiento analítico; en tal caso es posible determinar los esfuerzos, las deformaciones y la curvatura mediante cálculo directo. Este procedimiento sólo es factible en casos relativamente simples, como se expone en el siguiente ejemplo para una viga de sección transversal rectangular.

Ejemplo

Una viga de sección transversal rectangular (véase Fig. 10-21) se construye de un material que presenta un diagrama esfuerzo-deformación consistente en dos rectas, como se muestra en la Fig. 10-25. El módulo de elasticidad en tensión es E_1 , y en compresión es E_2 , tales que

$$\sigma = E_1 \epsilon \quad (\epsilon \geq 0) \quad (i)$$

$$\sigma = E_2 \epsilon \quad (\epsilon \leq 0) \quad (j)$$

Se supone que la viga está sometida a un momento flexionante positivo M . Los objetivos del análisis son localizar el eje neutro, obtener la expresión momento-curvatura, y determinar los esfuerzos y deformaciones máximos en la viga.

Denotemos las deformaciones en la base y en la parte superior de la viga como ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente. Los esfuerzos máximos correspondientes son σ_1 y σ_2 . Estos esfuerzos y deformaciones se indican en la Fig. 10-25. Para localizar el eje neutro, observamos que las dos áreas rayadas en el diagrama esfuerzo-deformación deben ser iguales, y tales que

$$\frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} \quad (k)$$

De las Ecs. (i) y (j) sabemos que

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 \quad \sigma_2 = E_2 \epsilon_2 \quad (l)$$

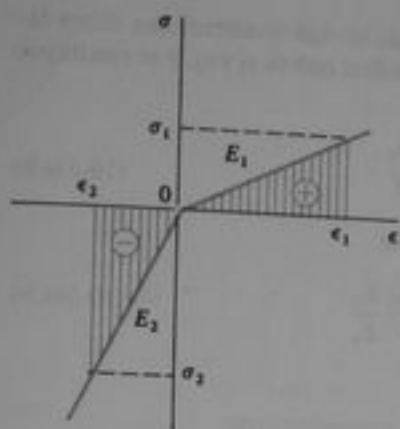


Fig. 10-25 Ejemplo. Diagrama esfuerzo-deformación consistente en dos rectas

También, tenemos las relaciones

$$\epsilon_1 = -\kappa h_1 \quad \epsilon_2 = \kappa h_2 \quad (m)$$

Sustituyendo de las Ecs. (l) y (m) en la Ec. (k), tenemos

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2 \quad (n)$$

como la primera ecuación que relaciona h_1 con h_2 . Además se tiene la ecuación

$$h = h_1 + h_2 \quad (o)$$

Las distancias h_1 y h_2 se determinan ahora mediante la solución simultánea de las Ecs. (n) y (o), resultando

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (10-30a,b)$$

De esta manera se determina la posición del eje neutro.

A continuación calculamos el momento flexionante sustituyendo de las Ecs. (i) y (j) en la Ec. (10-24); así,

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_1^2} \left[\int_{\epsilon_2}^0 E_2 \epsilon^2 d\epsilon + \int_0^{\epsilon_1} E_1 \epsilon^2 d\epsilon \right]$$

que resulta en

$$M = \frac{bh^2}{3\epsilon_1^2} [-E_2 \epsilon_2^3 + E_1 \epsilon_1^3] \quad (p)$$

Las deformaciones ϵ_1 y ϵ_2 se relacionan con la curvatura mediante las Ecs. (m). Introduciendo los valores de h_1 y h_2 (Ecs. 10-30), obtenemos

$$\epsilon_1 = -\kappa h \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad \epsilon_2 = \kappa h \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}$$

También, la deformación ϵ , es igual a $-\kappa h$ (véase Ec. 10-22). Se sustituyen ahora estas expresiones para ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ , en la Ec. (p), obteniendo así

$$M = -\frac{4E_1 E_2 I \kappa}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (q)$$

en donde $I = bh^3/12$. Finalmente, introduzcamos la notación

$$E_r = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (10-31)$$

de tal forma que la Ec. (q) resulta $M = -E_r I \kappa$, en consecuencia, la curvatura es

$$\kappa = -\frac{M}{E_r I} \quad (10-32)$$

La cantidad E_r se denomina *módulo de elasticidad reducido* y tiene un valor entre E_1 y E_2 . En el caso especial en que ambos módulos son iguales a E , el módulo reducido E_r también es igual a E .

Los esfuerzos y deformaciones en las fibras extremas de la viga se determinan ahora fácilmente en términos del momento flexionante. Se toman las Ecs. (m) de ϵ_1 y ϵ_2 , y se sustituyen en la Ec. (10-32) de la curvatura, resultando así

$$\epsilon_1 = \frac{Mh_1}{E_r I} \quad \epsilon_2 = -\frac{Mh_2}{E_r I} \quad (10-33a,b)$$

Enseguida, las ecuaciones esfuerzo-deformación (Ecs. l) dan

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{I} \frac{E_1}{E_r} \quad \sigma_2 = -\frac{Mh_2}{I} \frac{E_2}{E_r} \quad (10-34a,b)$$

y concluye el análisis de la viga.

Deflexiones. Las deflexiones de una viga inelástica estáticamente determinada pueden encontrarse si se conoce el diagrama momento-curvatura. Las técnicas para efectuar los cálculos se explicaron en la Sección 10.6. Sin embargo, en el caso de una viga estáticamente indeterminada, el análisis es mucho más complicado porque no es posible utilizar el principio de superposición para encontrar las reacciones redundantes. Consideremos un ejemplo simple para exponer el método de análisis.

Supongamos que se tiene una viga inelástica empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro. El momento reactivo en el empotramiento puede obtenerse mediante prueba y error en la forma siguiente. Se supone un valor de prueba de este momento, y se construye el diagrama de momento flexionante correspondiente. A continuación se traza el diagrama de curvaturas para la viga utilizando la relación momento-curvatura. A partir del diagrama de curvatura, podemos calcular el ángulo de rotación en el empotramiento. Si el valor de prueba del momento redundante se eligió correctamente, este ángulo sería cero. Mediante pruebas repetidas, al final se obtiene el valor verdadero del momento redundante. Técnicas similares se utilizan para analizar cualquier viga indeterminada.

*10.8 ESFUERZOS RESIDUALES

Cuando una viga se flexiona inelásticamente y después se retira la carga, se produce una deformación permanente de la viga, y ésta no recobra su configuración original. Aquellas fibras de la viga que fueron esforzadas más allá del límite elástico tendrán una deformación permanente, e impedirán que las fibras esforzadas elásticamente recobren sus longitudes originales después de la descarga. Por ello, existirán algunos **esfuerzos residuales** en la viga.

El patrón de los esfuerzos residuales en una viga no es difícil de obtener si se conocen los esfuerzos debidos a la flexión inelástica inicial. Supóngase que la distribución de esfuerzos en una viga debida a un esfuerzo flexionante positivo M está representada por el diagrama mostrado en la Fig. 10-26a. Por sencillez hemos supuesto que la sección transversal de la viga tiene dos ejes de simetría, y que el material tiene las mismas propiedades tanto en tensión como en compresión; esto significa que el eje neutro está a la mitad de la altura de la viga, y que los esfuerzos de tensión y compresión máximos (iguales a σ_1) son numéricamente iguales. La descarga de esta viga es

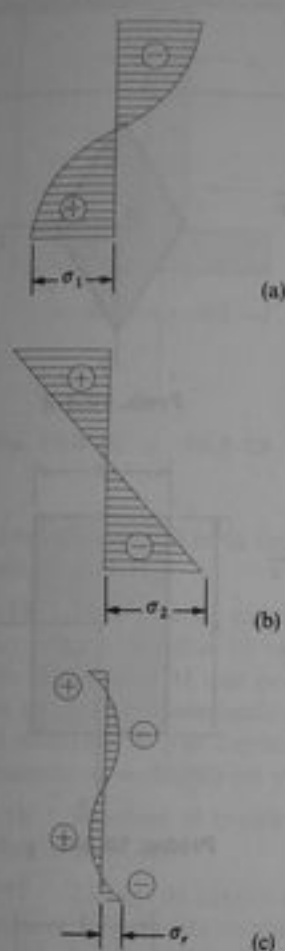


Fig. 10-26 Esfuerzos residuales en la flexión inelástica

equivalente a la flexión de la viga mediante un momento flexionante negativo e igual a M . Durante la descarga de la viga se supone que el material de la viga misma se comporta elásticamente de acuerdo con la ley de Hooke, como se representa por la línea BC en el diagrama esfuerzo-deformación de la Fig. 10-20. Por lo tanto, la distribución de esfuerzos que se superpone durante la descarga es lineal (Fig. 10-26b); así, estos esfuerzos se obtienen de la fórmula $\sigma = My/I$. El máximo esfuerzo de descarga es $\sigma_2 = M/S$.

La superposición de los esfuerzos de flexión inelástica y los esfuerzos de descarga lineal proporcionará los esfuerzos que permanecen en la viga después de ser retirada la carga. Estos esfuerzos residuales se muestran en la Fig. 10-26c y se calculan fácilmente mediante la suma algebraica de los esfuerzos mostrados en las Figs. 10-26a y b. Por ejemplo, en la orilla inferior de la viga, el esfuerzo residual es $\sigma_r = \sigma_1 + \sigma_2$. Para el caso representado, σ_2 es negativo y es numéricamente mayor que σ_1 ; por lo que σ_r también será negativo.

Supongamos ahora que se aplica nuevamente el momento flexionante positivo original M a la viga que presenta los esfuerzos residuales mostrados en la Fig. 10-26c. Cada fibra de la viga permanecerá elástica cumpliendo la ley de Hooke hasta que su esfuerzo alcance el valor original que tenía antes de que se efectuara la descarga. Por lo tanto, el momento flexionante M que se aplica ahora, producirá esfuerzos cuya relación es lineal, y la viga se comportará en forma linealmente elástica mientras el momento aplicado no exceda el valor M . Los esfuerzos debidos a M serán iguales que los mostrados en la Fig. 10-26b, pero en dirección contraria, y los esfuerzos finales serán como los indicados en la Fig. 10-26a. Por ello, el efecto de la flexión inelástica inicial, acompañada de sus esfuerzos residuales debidos a la descarga, es producir una viga que se comporte en forma linealmente elástica, siempre y cuando se preserve el sentido de la flexión y que el momento no exceda el momento inicial.

Según implica esta explicación, los esfuerzos residuales son esfuerzos que subsisten después de que una estructura es cargada y descargada. Otro tipo de esfuerzos residuales se presenta en perfiles estructurales laminados debido al proceso de manufactura. La operación de rolado y calentamiento y enfriamiento irregulares de la sección, ocasiona la producción de esfuerzos en la viga estructural que suministre el fabricante. Tales esfuerzos, llamados a menudo esfuerzos residuales o **esfuerzos iniciales**, pueden ser del orden de 10 o 15 ksi. Para información sobre esfuerzos residuales en vigas estructurales, véanse las Refs. 10-8 a 10-10.

PROBLEMAS / CAPÍTULO 10

Los problemas de la Sección 10.3 deben resolverse considerando la suposición de que el material es elastoplástico.

10.3-1 Determinar el factor de forma f para una sección transversal circular maciza (véase figura).

10.3-2 Determinar el factor de forma f para una sección transversal rómbica (véase figura).

10.3-3 (a) Determinar el factor de forma f para una sección transversal circular hueca (véase figura). (b) En el caso particular de una sección muy delgada, ¿cuál es el factor de forma f ?

10.3-4 Una viga de sección transversal rectangular (véase figura) con una altura $h = 4$ plg y un ancho $b = 2$ plg, se construye de acero con un esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 33,000$ psi y $E = 30,000,000$ psi. Calcular el momento de fluencia M_y , el momento plástico M_p y el módulo plástico Z para esta viga. Trazar también a escala el diagrama momento-curvatura.

10.3-5 Resolver el problema anterior para una viga rectangular con $h = 100$ mm, $b = 40$ mm, $\sigma_y = 250$ MPa y $E = 210$ GPa.

10.3-6 Calcular el momento plástico M_p , el módulo plástico Z y el factor de forma f para la viga de patín ancho mostrada en la figura. Suponer $h = 400$ mm, $b = 150$ mm, $t_f = 12$ mm, $t_w = 8$ mm y $\sigma_y = 290$ MPa.

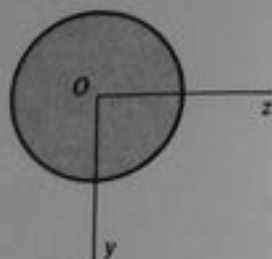
10.3-7 Resolver el problema anterior para una viga de patín ancho con $h = 320$ mm, $b = 160$ mm, $t_w = 15$ mm, $t_f = 8$ mm y $\sigma_y = 250$ MPa.

10.3-8 Determinar el módulo plástico Z y el factor de forma f para una sección W 12 \times 150 (véase Apéndice E). (Nota: obtener estas propiedades mediante cálculo utilizando las dimensiones de la sección transversal.)

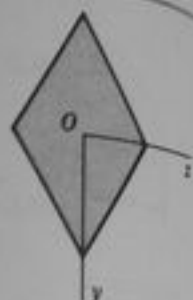
10.3-9 Resolver el problema anterior para una sección W 10 \times 30.

10.3-10 Una sección de tipo caja doblemente simétrica con altura $h = 16$ plg, ancho $b = 10$ plg y espesor de pared constante $t = 0.75$ plg, se muestra en la figura. La viga se construye de acero con un esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 36,000$ psi. Calcular el momento plástico M_p , el módulo plástico Z y el factor de forma f .

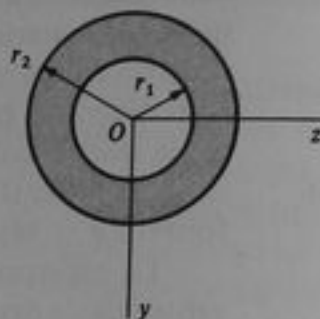
10.3-11 Resolver el problema anterior para una viga cajón con dimensiones $h = 0.5$ m, $b = 0.3$ m y $t = 25$ mm. (Suponer $\sigma_y = 230$ MPa.)



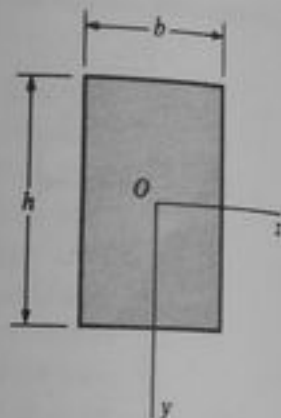
Prob. 10.3-1



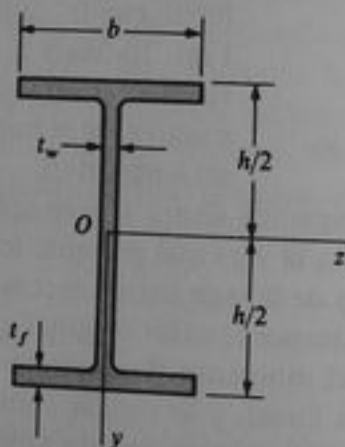
Prob. 10.3-2



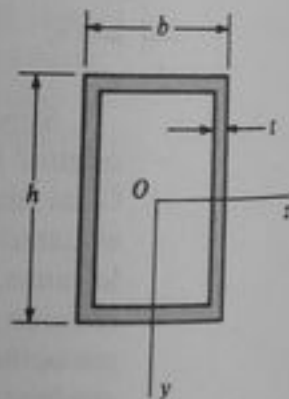
Prob. 10.3-3



Probs. 10.3-4 y 10.3-5



Probs. 10.3-6 y 10.3-7

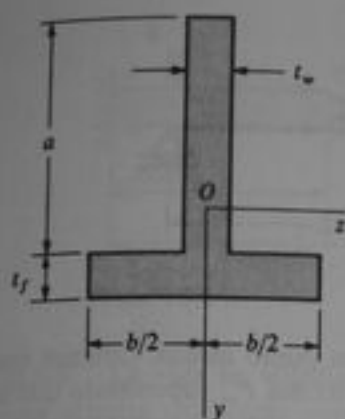


Probs. 10.3-10 y 10.3-11

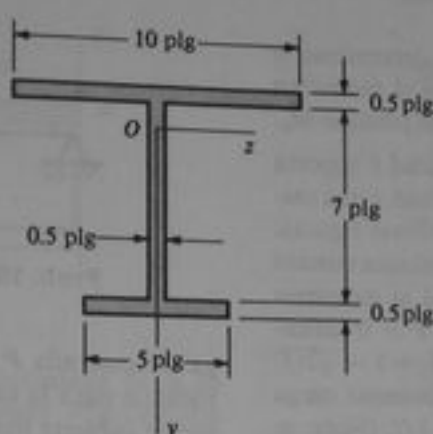
10.3-12 Una viga simplemente simétrica de sección T (véase figura) tiene dimensiones $b = 6$ plg, $a = 8$ plg, $t_w = 2$ plg y $t_f = 2$ plg. Calcular el módulo plástico Z y el factor de forma f .

10.3-13 Resolver el problema anterior para una viga T con dimensiones $b = 120$ mm, $a = 200$ mm, $t_w = 20$ mm y $t_f = 25$ mm.

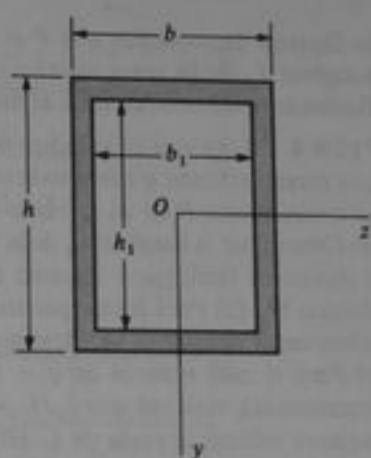
10.3-14 Una viga de acero de patín ancho simplemente simétrica ($\sigma_y = 36,000$ psi) tiene la sección



Probs. 10.3-12 y 10.3-13



Prob. 10.3-14



Probs. 10.3-17 y 10.3-18

transversal mostrada en la figura. Determinar el momento plástico M_p .

10.3-15 Una viga de acero W 14 × 26 de patín ancho (véase Apéndice E) está sometida a un momento flexionante M que produce fluencia plástica en los patines, permaneciendo elástica el alma. Calcular el momento M y la curvatura correspondiente κ , suponiendo $\sigma_y = 36,000$ psi y $E = 30 \times 10^6$ psi.

10.3-16 Resolver el problema anterior para una sección W 12 × 35.

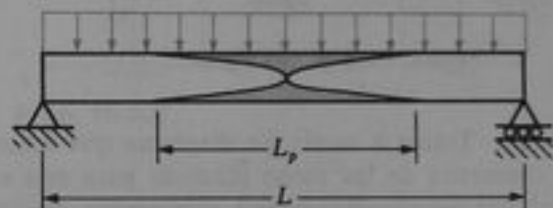
10.3-17 La viga de tipo caja doblemente simétrica mostrada en la figura está sometida a un momento flexionante M , de tal magnitud que los patines ceden a fluencia pero las almas permanecen elásticas. Calcular las relaciones M/M_p y κ/κ_p , suponiendo $h = 15$ plg, $h_1 = 13.5$ plg, $b = 8$ plg y $b_1 = 7$ plg. Calcular también el factor de forma $f = M_p/M_e$. (Obsérvese que M/M_e debe estar entre 1 y f para esta viga.)

10.3-18 Resolver el problema anterior para una viga de tipo cajón con dimensiones $h = 400$ mm, $h_1 = 360$ mm, $b = 200$ mm y $b_1 = 180$ mm.

* **10.3-19** Obtener la relación momento-curvatura en forma adimensional (esto es, la ecuación que relaciona a M/M_p con κ/κ_p , para una viga elastoplástica que tiene sección transversal rómbica (véase figura del Problema 10.3-2).

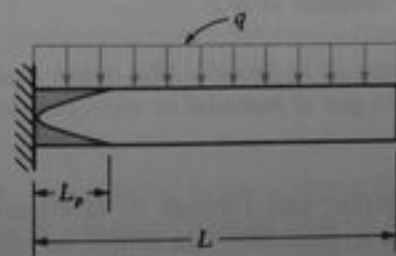
** **10.3-20** Obtener la relación momento-curvatura en forma adimensional (esto es, la ecuación que relaciona M/M_p con κ/κ_p) para una viga elastoplástica de sección transversal circular.

10.4-1 Una viga simple con una longitud de claro L soporta una carga uniformemente distribuida que actúa en toda la longitud de la viga. Determinar la longitud L_p de la zona plástica en medio de la viga cuando el momento flexionante máximo es igual al momento plástico M_p (véase figura).



Prob. 10.4-1

10.4-2 Una viga en voladizo de longitud L soporta una carga uniforme q sobre toda su longitud (véase figura). Determinar la longitud L_p de la zona plástica cuando el momento flexionante máximo es igual al momento plástico M_p .



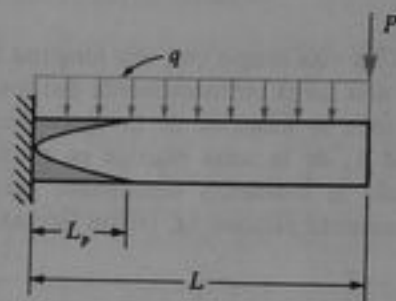
Prob. 10.4-2

10.4-3 Una viga en voladizo de longitud L soporta una carga uniforme q sobre toda su longitud, así como una carga concentrada P en su extremo libre (véase figura).

Los problemas de la Sección 10.4 deben resolverse suponiendo que el material es elastoplástico.

se figura). Suponiendo que $P = 3qL$, determinar la longitud L_p de la zona plástica cuando el momento flexionante máximo es igual al momento plástico M_p .

*10.4-4 Una viga en voladizo de longitud L soporta una carga uniforme q sobre toda su longitud y una carga concentrada P en su extremo libre (véase figura). (a) Determinar la longitud L_p de la zona plástica cuando el momento flexionante máximo es igual al momento plástico M_p . (b) Para el caso particular de $P = 0$ (únicamente carga uniforme), verificar que $L_p/L = 1 - \sqrt{1/f}$. (c) Para el caso especial de $q = 0$ (únicamente carga concentrada), verificar que $L_p/L = 1 - 1/f$. (Nota: se requiere utilizar la regla de L'Hôpital.)



Probs. 10.4-3 y 10.4-4

10.4-5 Trazar a escala un diagrama que muestre los contornos de las zonas plásticas para una viga simple de sección transversal rectangular, con una carga concentrada en su parte media, suponiendo que se ha formado una articulación plástica (véase Fig. 10-10a).

10.4-6 Trazar a escala un diagrama que muestre los contornos de las zonas plásticas para una viga en voladizo de sección transversal rectangular que soporta una carga uniforme, suponiendo que se ha formado en el apoyo una articulación plástica (véase la figura del Problema 10.4-2).

Los problemas de la Sección 10.5 deben resolverse considerando que el material es elastoplástico.

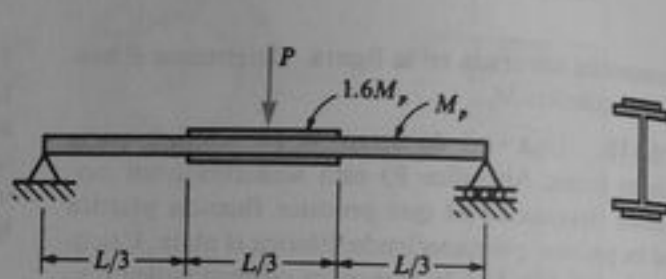
10.5-1 Obtener una fórmula de la intensidad de carga última q_u para una viga simple de longitud L que soporta una carga distribuida de intensidad linealmente variable, con intensidad máxima q (véase figura).

10.5-2 Una viga simple de sección transversal de patín ancho se refuerza mediante dos placas sobre el tercio medio del claro (véase figura). La viga soporta una car-



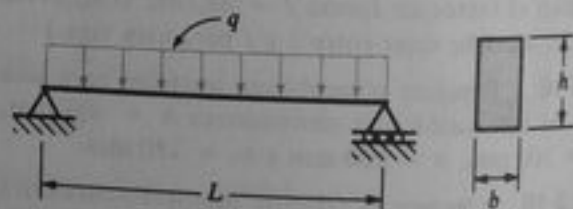
Prob. 10.5-1

ga concentrada P en su punto medio. Obtener una fórmula para la carga última P_u , suponiendo que la región cubierta por la placa tiene un momento plástico que es 1.6 veces el momento plástico M_p de la zona no reforzada.



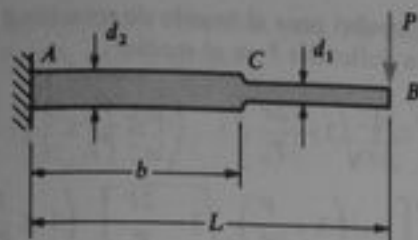
Prob. 10.5-2

10.5-3 Calcular la intensidad de carga última q_u para una viga simple de sección transversal rectangular que soporta una carga uniforme que actúa sobre todo el claro (véase figura). Utilizar los siguientes datos: $L = 1.5$ m, $h = 100$ mm, $b = 50$ mm y $\sigma_y = 250$ MPa.



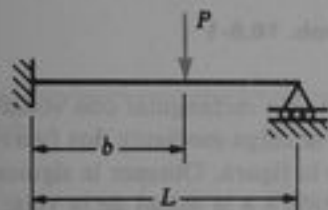
Prob. 10.5-3

10.5-4 Una viga en voladizo AB de sección transversal circular tiene dos diámetros diferentes d_1 y d_2 , como se muestra en la figura. En el extremo libre actúa una carga P . (a) Determinar la relación d_1/d_2 de los diámetros a fin de que se formen simultáneamente articulaciones plásticas en las secciones A y C cuando la carga alcanza su valor último P_u . (b) Determinar la distancia b a fin de tener la viga más ligera que soportará la carga última P_u . ¿Cuál es la relación de diámetros correspondiente?



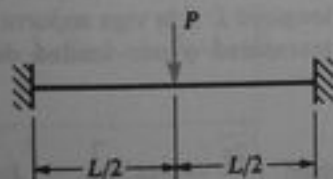
Prob. 10.5-4

10.5-5 La viga en voladizo apuntalada de la figura soporta una carga concentrada P a una distancia b del empotramiento. (a) Calcular la carga última P_u para esta viga. (b) Suponiendo que la carga puede colocarse en cualquier sitio a lo largo del claro, ¿cuál debe ser la distancia b a fin de tener la condición de carga última más severa? ¿Cuál es el valor correspondiente de P_u ?



Prob. 10.5-5

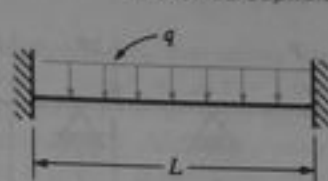
10.5-6 Una viga doblemente empotrada soporta en el punto medio una carga concentrada P , como se muestra en la figura. (a) Determinar la carga última P_u . (b) ¿Cuál es la relación P_u/P , de la carga última a la carga de fluencia para esta viga?



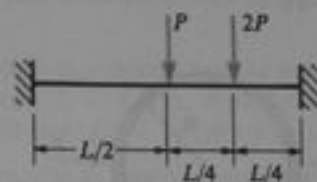
Prob. 10.5-6

10.5-7 Una viga doblemente empotrada soporta en el punto medio una carga concentrada P , como se muestra en la figura. (a) Determinar la carga última P_u . (b) ¿Cuál es la relación q_u/q , de la carga última a la carga de fluencia?

10.5-8 Una viga de extremos empotrados soporta dos cargas concentradas como se muestra en la figura. Determinar la carga última P_u .

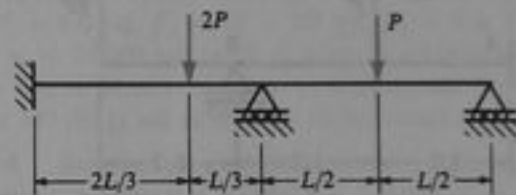


Prob. 10.5-7



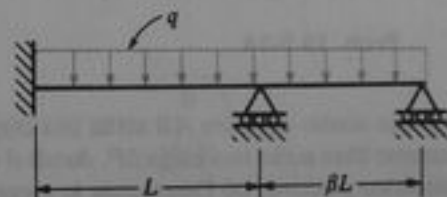
Prob. 10.5-8

10.5-9 Determinar la carga última P_u para la viga de dos claros cargada como se muestra en la figura.



Prob. 10.5-9

10.5-10 Determinar la carga última q_u para la viga de dos claros mostrada en la figura: (a) si $\beta = 2/3$, y (b) si $\beta = 1$.

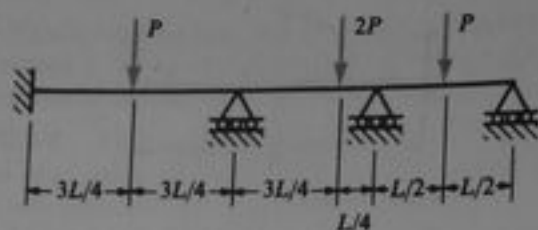


Prob. 10.5-10

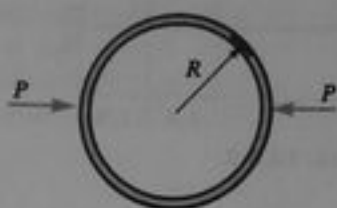
10.5-11 Determinar la carga última P_u para la viga continua de tres claros cargada como se muestra en la figura.

10.5-12 Determinar la carga última P_u para el aro delgado de radio medio R sometido a dos fuerzas colineales, como se muestra en la figura.

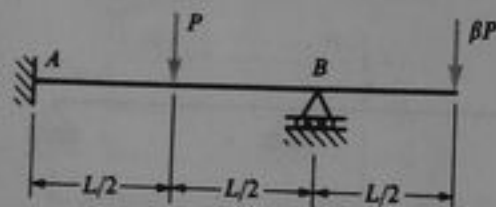
*10.5-13 La viga con un voladizo mostrada en la figura está empotrada en A y simplemente apoyada en



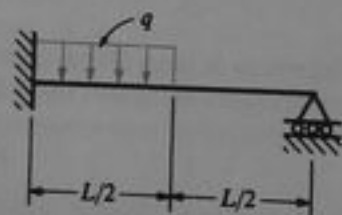
Prob. 10.5-11



Prob. 10.5-12



Prob. 10.5-13



Prob. 10.5-14

B. En el punto medio del claro *AB* actúa una carga P , y en el extremo libre actúa una carga βP , donde β es un factor numérico positivo. (a) Determinar la carga última P_u para esta viga. (b) ¿Para qué valor de β será máxima la carga última sobre la viga?

***10.5-14** La viga en voladizo apuntalada mostrada en la figura soporta una carga uniforme de intensidad q sobre una mitad del claro. Determinar la carga última q_u para esta viga.

Los problemas de la Sección 10.6 deben resolverse suponiendo que el material es elastoplástico.

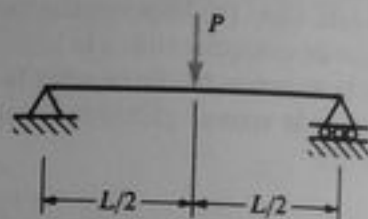
10.6-1 Una viga simple de longitud L y sección transversal rectangular soporta una carga concentrada P en su punto medio (véase figura). Obtener las si-

guientes fórmulas para el ángulo de rotación θ en los apoyos y la deflexión δ en el medio:

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P_y}{P} \left[3 - 2 \sqrt{3 - \frac{2P}{P_y}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \left(\frac{P_y}{P} \right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{P}{P_y} \right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_y}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

en donde $\theta_y = P_y L^2 / 16EI$, $\delta_y = P_y L^3 / 48EI$ y $P_y = 4M_y / L$. (Nota: utilizar las fórmulas del ejemplo de la Sección 10.6 y aplicarlas a una mitad de la viga.)



Prob. 10.6-1

10.6-2 Una viga rectangular con voladizos en ambos extremos se carga mediante dos fuerzas P , como se muestra en la figura. Obtener la siguiente fórmula para la deflexión δ a la mitad de la viga:

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \left(3 - \frac{2P}{P_y} \right)^{-1/2} \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

en donde $\delta_y = P_y c L^2 / 8EI$ y $P_y = M_y / c$. Trazar también a escala una gráfica de P/P_y en función de δ/δ_y .

10.6-3 Obtener las siguientes expresiones para el ángulo de rotación θ y la deflexión δ en el extremo libre de una viga en voladizo de sección transversal rectangular y longitud L si la viga soporta una carga uniforme de intensidad q por unidad de longitud (véase figura):

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \sqrt{\frac{9q_y}{2q}} \left[\arcsen \sqrt{\frac{2q}{3q_y}} - 0.4839 \right] \quad \left(1 \leq \frac{q}{q_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y} = \frac{q_y}{q} \left[3 - 2 \sqrt{3 - \frac{2q}{q_y}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{q}{q_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

en donde $\theta_y = q_y L^3 / 6EI$, $\delta_y = q_y L^4 / 8EI$ y $q_y = 2M_y / L^2$. Trazar también a escala las gráficas de q/q_y versus θ/θ_y y q/q_y versus δ/δ_y .

***10.6-4** Una viga simple *AB* de longitud L y sección transversal rectangular está sometida a un momento M_0 que actúa en uno de sus extremos (véase figura).

Obtener las siguientes fórmulas para los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los apoyos:

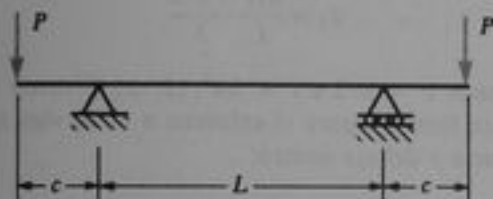
$$\frac{\theta_a}{\theta_{av}} = 2 \left(\frac{M_y}{M_o} \right)^2 \left[\frac{9M_o}{2M_y} - 5 + \sqrt{\left(3 - \frac{2M_o}{M_y} \right)^2} \right]$$

$$\left(1 \leq \frac{M_o}{M_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{\theta_b}{\theta_{bv}} = \left(\frac{M_y}{M_o} \right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{M_o}{M_y} \right) \sqrt{3 - \frac{2M_o}{M_y}} \right]$$

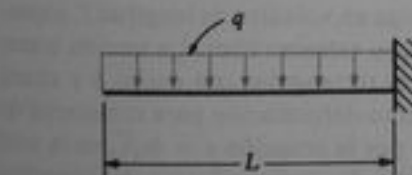
$$\left(1 \leq \frac{M_o}{M_y} \leq \frac{3}{2} \right)$$

en donde $\theta_{av} = M_y L / 6EI$ y $\theta_{bv} = M_y L / 3EI$. Trazar también a escala las gráficas de M_o/M_y versus θ_a/θ_{av} y M_o/M_y versus θ_b/θ_{bv} .

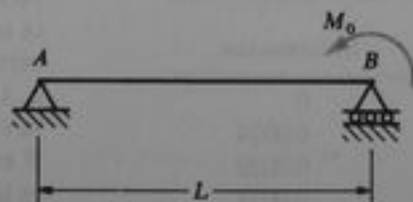


Prob. 10.6-2

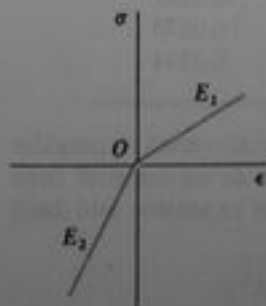
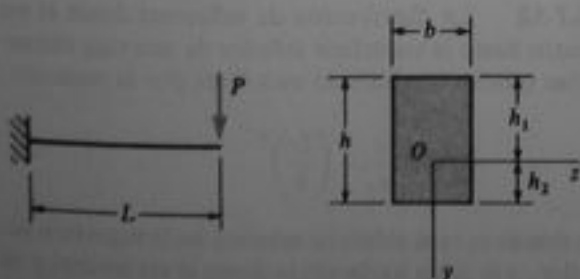
10.7-1 Una viga en voladizo de sección transversal rectangular y longitud L soporta una carga concentrada P en su extremo libre (véase figura). El material de la viga tiene un módulo de elasticidad en tensión



Prob. 10.6-3



Prob. 10.6-4



Probs. 10.7-1 y 10.7-2

E_1 , y uno en compresión E_2 . Los valores numéricos son los siguientes: $L = 5$ pie, $P = 1$ k, $b = 2$ plg, $h = 6$ plg, $E_1 = 10 \times 10^6$ psi y $E_2 = 40 \times 10^6$ psi. (a) Determinar las distancias h_1 y h_2 desde el eje neutro hasta las superficies en tensión y compresión, respectivamente. (b) Calcular el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c debidos a la flexión. (c) Calcular la deflexión δ en el extremo libre de la viga.

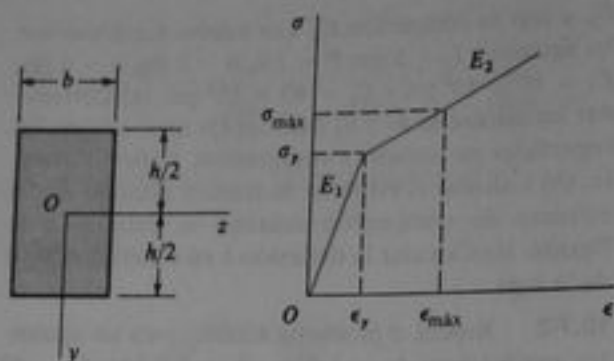
10.7-2 Repetir el problema anterior para las siguientes condiciones: $L = 1.0$ m, $P = 1.0$ kN, $b = 40$ mm, $h = 100$ mm, $E_1 = 30$ GPa y $E_2 = 50$ GPa.

10.7-3 Una viga de sección transversal rectangular está hecha de un material cuyas propiedades pueden representarse mediante el diagrama esfuerzo-deformación bilineal mostrado en la figura. Los módulos de elasticidad son E_1 y E_2 , y las propiedades son las mismas tanto en tensión como en compresión. Los siguientes valores numéricos son aplicables a esta viga: $b = 2.0$ plg, $h = 6.0$ plg, $E_1 = 10 \times 10^6$ psi, $E_2 = 4 \times 10^6$ psi y $\sigma_y = 24,000$ psi. (a) Si el esfuerzo máximo σ_{max} en la viga es 30,000 psi, ¿cuál es el momento flexionante M ? (b) ¿Cuál es el radio de curvatura ρ ?

10.7-4 Resolver el problema anterior utilizando los siguientes datos: $b = 40$ mm, $h = 120$ mm, $E_1 = 70$ GPa, $E_2 = 30$ GPa, $\sigma_y = 160$ MPa y $\sigma_{max} = 200$ MPa.

*10.7-5 Determinar el esfuerzo máximo σ_{max} en la viga del Problema 10.7-3 si el momento flexionante es $M = 320$ plg·k.

*10.7-6 Determinar el esfuerzo máximo σ_{max} en la viga del Problema 10.7-4 si el momento flexionante es $M = 18$ kN·m.



Probs. 10.7-3, 10.7-4, 10.7-5, 10.7-6 y 10.7-7

*10.7-7 Obtener la siguiente ecuación momento-curvatura para una viga de sección transversal rectangular que tiene un diagrama esfuerzo-deformación bilineal (véase figura):

$$\frac{M}{M_y} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) \left(3 - \frac{\kappa_y^2}{\kappa^2} \right) + \frac{2E_2\kappa}{E_1\kappa_y} \right] \quad \left(\frac{M}{M_y} \geq 1 \right)$$

en donde $M_y = \sigma_y S = \sigma_y bh^2/6$, y $\kappa_y = 2\epsilon_f/h = 2\sigma_y/E_1h$. Trazar también una gráfica de M/M_y versus κ/κ_y .

10.7-8 Una viga de sección transversal rectangular con ancho $b = 3.0$ plg y altura $h = 6.0$ plg, se construye de un acero de alta resistencia que tiene un diagrama esfuerzo-deformación definido por los datos numéricos listados en la tabla anexa. El diagrama es el mismo para tensión y compresión. Calcular el valor del momento flexionante M si el esfuerzo máximo en la viga es 107,500 psi.

Datos esfuerzo-deformación para el Problema 10.7-8

Esfuerzo (ksi)	Deformación
0	0
70	0.0024
75	0.0030
80	0.0038
90	0.0063
100	0.0105
110	0.0170
120	0.0274

10.7-9 Una viga de sección transversal rectangular (ancho b , altura h) está hecha de un material cuyo diagrama esfuerzo-deformación en tensión está dado por la ecuación

$$\sigma = B_1\epsilon - B_2\epsilon^2$$

en donde B_1 y B_2 son constantes. El diagrama en compresión es el mismo que en tensión. Obtener una fórmula para el momento resistente M de la viga si la deformación máxima es ϵ_1 .

10.7-10 La ley esfuerzo-deformación en tensión para el material de una viga se supone que es de la forma $\sigma = B\epsilon^n$, en donde B y n son constantes ($0 \leq n \leq 1$). El diagrama esfuerzo-deformación es el mismo para compresión que para tensión. La sección transversal de la viga es rectangular con ancho b y altura h . (a) Obtener la siguiente fórmula para la relación momento-curvatura de esta viga:

$$M = \frac{bh^{n+2}B\kappa^n}{2^{n+1}(n+2)}$$

(b) Obtener la siguiente fórmula para el esfuerzo máximo en la viga:

$$\sigma_1 = \frac{Mc}{I} \frac{n+2}{3}$$

en donde $c = h/2$ e $I = bh^3/12$. (c) Obtener la siguiente fórmula para el esfuerzo σ en la viga a una distancia y del eje neutro:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 - \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^n$$

Trazar una gráfica que muestre la distribución de esfuerzos en la viga para varios valores de n . (Por conveniencia, trazar σ/σ_1 versus $2y/h$ y escoger $n = 1, 1/2, 1/4, 0$.) (d) Para todos los resultados anteriores, determinar e interpretar los casos especiales cuando $n = 1$ y $n = 0$.

10.7-11 Una viga en voladizo de longitud L soporta una carga P en su extremo libre. La sección transversal de la viga es rectangular con ancho b y altura h . La curva esfuerzo-deformación para el material de la viga está dado por la ecuación $\sigma = b\sqrt{\epsilon}$, en la cual B es una constante. La curva esfuerzo-deformación es la misma a tensión y a compresión. Determinar el ángulo de rotación θ y la deflexión δ en el extremo libre de la viga.

10.7-12 La distribución de esfuerzos desde el eje neutro hasta la superficie inferior de una viga rectangular (ancho b , altura h) está dada por la ecuación

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left(\frac{2y}{h} \right)^m$$

en donde σ_1 es el esfuerzo máximo en la superficie inferior, y se mide hacia abajo desde el eje neutro, y m

es una constante ($m \geq 1$). El eje neutro está a la mitad de la altura de la viga, y la distribución de esfuerzos para la mitad superior de la viga es la misma (excepto por el signo) que para la mitad inferior. (a) Determinar el momento flexionante M para esta viga. (b) Trazar una gráfica que muestre la distribución de esfuerzos en la viga para diversos valores de m . (Por conveniencia trazar σ/σ_1 versus $2y/h$, y sea $m = 1, 2, 4, 10$.)

10.8-1 Una viga de sección transversal rectangular se construye de un material elastoplástico cuyo esfuerzo de fluencia es σ_f . La viga está sometida a un momento flexionante positivo que alcanza justamente el momento plástico M_p y después se retira. (a) Trazar un diagrama que muestre los esfuerzos residuales en la viga. (b) ¿Cuál es el esfuerzo residual en la parte superior de la viga? (c) ¿Cuál es el esfuerzo residual justo por encima del punto medio de la sección transversal? (d) Si

la viga con esfuerzos residuales se carga nuevamente mediante un momento flexionante positivo, ¿cuál es el mayor valor de este momento que puede aplicarse a la viga para mantener un comportamiento linealmente elástico? ¿Cuál es la relación de este momento al momento de fluencia en el instante de carga inicial?

10.8-2 Se aplica un momento flexionante positivo M a una viga que tiene sección transversal doblemente simétrica, y está hecha de un material elastoplástico con un esfuerzo de fluencia σ_f . El momento M está entre el momento de fluencia M_f y el momento plástico M_p para la viga. Al retirar el momento M , se encuentra que en la fibra más alejada de la viga existe un esfuerzo residual de tensión $\beta\sigma_f$. (a) ¿Cuál es el valor del momento M ? (b) ¿Cuáles son los límites para el factor numérico β ?

Columnas

11.1 PANDEO Y ESTABILIDAD

Las estructuras y maquinaria pueden fallar en una gran variedad de formas, dependiendo de los materiales, tipos de carga y condiciones de apoyo. Por ejemplo, los miembros dúctiles pueden estirarse o flexionarse excesivamente cuando son sobrecargados ocasionando que la estructura se deforme o se colapse. Las fracturas ocurren debido a ciclos repetidos de carga (falla por fatiga) o por la sobrecarga de miembros frágiles. Muchos de estos tipos de falla se evitan diseñando los miembros en forma tal que sus esfuerzos y deflexiones máximos permanezcan dentro de límites tolerables. Luego, la **resistencia** y **rigidez** de un miembro son los criterios importantes en el diseño. Estos temas se consideraron en los capítulos previos.

Otro tipo de falla es el **pandeo**, que constituye el tema de este capítulo. Se considerará específicamente el pandeo de **columnas** (esto es, los miembros estructurales largos y esbeltos cargados axialmente en compresión) (Fig. 11-1a). Si el miembro es esbelto, entonces en lugar de fallar por compresión directa, puede flexionarse y presentar una deflexión lateral (Fig. 11-1b) y se dice que la columna se ha pandeado. Con una carga axial creciente, las deflexiones laterales se incrementan también, y finalmente la columna puede colapsarse por completo. Por supuesto, el pandeo puede ocurrir en diferentes tipos de estructuras y puede asumir diversos aspectos. Cuando usted se para sobre una lata vacía de aluminio, las delgadas paredes cilíndricas se pandean bajo su peso; y cuando cierto largo puente se colapsó hace unos cuantos años se debió al pandeo de una placa plana de acero que se contrajo bajo esfuerzos de compresión.

A fin de explicar el fenómeno del pandeo de manera elemental, se considerará la **estructura idealizada** que se muestra en la Fig. 11-2a. El miembro AB es una barra rígida articulada en su base y sustentada mediante un resorte elástico de rigidez β localizado en su cima. (La rigidez β también se conoce como la *constante del resorte*.) La barra soporta una carga centralmente aplicada P que está perfectamente alineada con el eje de la barra, por lo que el resorte no ejerce sobre él ninguna fuerza inicial. Supóngase ahora que la barra se altera debido a alguna fuerza externa que provoca que la barra gire levemente un pequeño ángulo θ respecto al apoyo A (Fig. 11-2b). Si

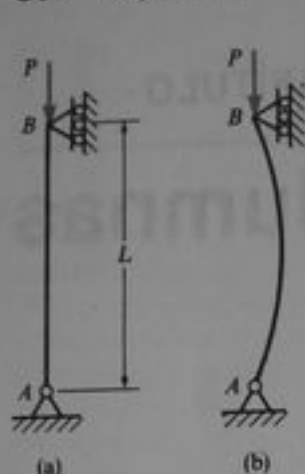


Fig. 11-1 Pandeo de una columna debido a una carga axial de compresión P

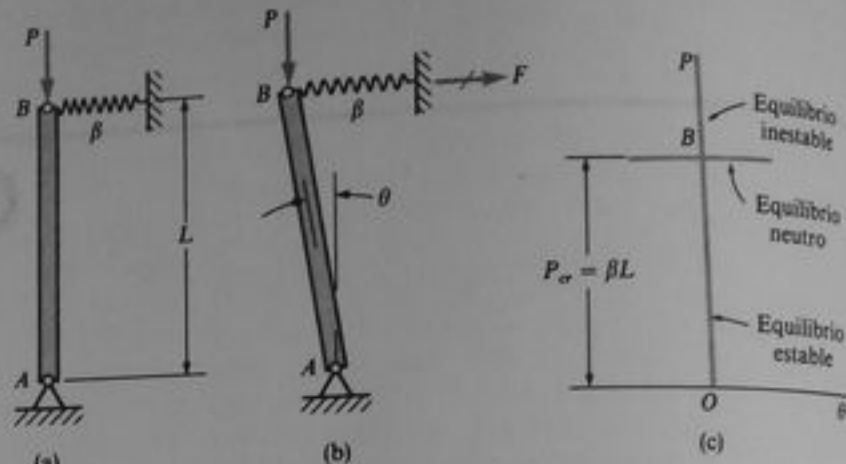


Fig. 11-2 Pandeo de una barra rígida soportada por un resorte

la fuerza P es pequeña, el sistema barra-resorte es **estable** y regresará a su posición inicial al retirar la fuerza perturbadora. Pero si la fuerza P es muy grande, la barra continuará girando y se colapsará el sistema; luego, para una fuerza grande, el sistema es **inestable** y se pandea al experimentar grandes giros de la barra.

Es posible analizar el sistema barra-resorte con más detalle considerando su equilibrio estático. Cuando la barra se gira levemente (Fig. 11-2b), el resorte se elonga una cantidad igual a θL , donde L es la longitud de la barra. La fuerza correspondiente F en el resorte es

$$F = \beta \theta L$$

Esta fuerza origina un momento en el sentido de las manecillas del reloj respecto al punto A igual a FL , o sea $\beta \theta L^2$. La tendencia de este momento es regresar la barra a su posición original, por lo que se designará a $\beta \theta L^2$ como el **momento restaurador**. La fuerza P genera un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto de A que tiende a sobregirar la barra; luego, el **momento de vuelco** es $P\theta L$. Si el momento restaurador supera al momento de vuelco, el sistema es estable y la barra regresa a la posición vertical inicial; si el momento de vuelco excede al momento restaurador, el sistema es inestable y la barra se colapsa girando en grandes ángulos. Por lo tanto, se presentan las siguientes condiciones:

- Si $P\theta L < \beta \theta L^2$, o sea $P < \beta L$, el sistema es estable.
 Si $P\theta L > \beta \theta L^2$, o sea $P > \beta L$, el sistema es inestable.

La transición de un sistema estable a uno inestable ocurre cuando $P\theta L = \beta \theta L^2$, o sea $P = \beta L$; este valor de la carga se denomina **carga crítica**:

$$P_{cr} = \beta L \quad (11-1)$$

Se observa que el sistema es estable cuando $P < P_{cr}$ y es inestable cuando $P > P_{cr}$. Mientras P sea menor que P_{cr} , el sistema regresa a su posición inicial y $\theta = 0$. En otras palabras, la barra está en equilibrio sólo cuando $\theta = 0$. Cuando P es mayor que P_{cr} , la barra permanece en equilibrio cuando $\theta = 0$ (ya que la barra está en compresión directa y no hay fuerza en el resorte), pero el equilibrio es inestable y no

puede conservarse. La menor alteración ocasionará el colapso de la barra. En carga crítica, los momentos restaurador y de vuelco son iguales para cualquier valor pequeño de θ (obsérvese que θ se elimina en la ecuación de equilibrio). Luego, la barra está en equilibrio para cualquier pequeño ángulo θ ; esta situación se conoce como **equilibrio neutro** o equilibrio indiferente.

Estas relaciones de equilibrio se muestran en la gráfica de P versus θ (Fig. 11-2c), en la que las dos líneas gruesas representan las condiciones de equilibrio. El punto B , donde se ramifica el diagrama de equilibrio, se llama **punto de bifurcación**. La línea horizontal del equilibrio neutral se extiende hacia la izquierda y hacia la derecha del eje vertical debido a que el ángulo θ puede ser en el sentido de las manecillas del reloj, o contrario a ellas. Sin embargo, la línea sólo se extiende una distancia corta, ya que este análisis se basa en la suposición de que θ es un ángulo pequeño. Por supuesto, esta suposición es completamente válida, porque θ en realidad es pequeño cuando empieza el colapso y la barra primero se aleja de la posición vertical. (Si θ se incrementa, la línea de equilibrio se curva alejándose de la horizontal.)

El equilibrio de la barra descrito en la Fig. 11-2 es análogo al de una pelota situada sobre una superficie (Fig. 11-3). Si la superficie es cóncava hacia arriba, como el interior de un cuenco, el equilibrio es estable y la pelota siempre regresa al punto inferior; si es convexa hacia arriba, como un domo, entonces teóricamente la pelota puede estar en equilibrio en la cima de la superficie, pero el equilibrio es inestable y en realidad la pelota rueda hacia abajo. Cuando se coloca sobre una superficie plana, la pelota está en equilibrio neutro y permanece en cualquier lugar donde se ubique.

Como se verá en la siguiente sección, el comportamiento de una columna elástica ideal es análogo al del sistema barra-resorte representado en la Fig. 11-2. Además, muchos tipos de problemas de pandeo y estabilidad se adecuan a este modelo en sistemas tanto estructurales como mecánicos.



Fig. 11-3 Pelota en equilibrio estable, inestable y neutro

11.2 COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

Para estudiar el comportamiento y la estabilidad de las columnas, inicialmente se considerará una columna esbelta con extremos articulados (Fig. 11-4a). La columna está cargada por una fuerza vertical P que se aplica en el centroide de la sección transversal y que está alineada en el eje longitudinal de la columna. La columna misma es perfectamente recta y está hecha de un material linealmente elástico que satisface la ley de Hooke. Por lo tanto, se analizará el comportamiento de una **columna ideal**. El plano xy es un plano de simetría, y se supone que cualquier flexión de la columna se lleva a cabo en tal plano (Fig. 11-4b).

Cuando la carga axial P tiene un valor pequeño, la columna permanece recta y sólo experimenta compresión axial. Los esfuerzos uniformes de compresión se obtienen de la ecuación $\sigma = P/A$. Esta forma recta de equilibrio es **estable**, lo cual sig-

nifica que la columna regresa a su posición recta después de una modificación. Por ejemplo, si se aplica una pequeña carga lateral que ocasione flexión en la columna, la deflexión desaparecerá y la columna regresará a su posición original cuando se retire la carga. Según se incrementa gradualmente la carga P , se llega a una situación de **equilibrio neutro** en la que la columna puede adoptar una forma flexionada. El valor correspondiente de la carga es la **carga crítica** P_{cr} . Para esta carga la columna ideal puede sufrir pequeñas deflexiones laterales sin ningún cambio en la fuerza axial, y una pequeña carga lateral producirá una forma flexionada que no desaparece cuando se retire la carga lateral. Luego, la carga crítica mantiene a la columna en equilibrio estático, ya sea en la posición recta o en una posición levemente flexionada. Para valores mayores de la carga, la columna es **inestable** y se colapsará por flexión. Para el caso ideal que se considera, la columna está en equilibrio en la posición recta aun cuando la carga P sea mayor que P_{cr} . No obstante, el equilibrio es inestable y el disturbio más pequeño causa la deflexión lateral de la columna; las deflexiones se incrementarán rápidamente y la columna se colapsará. El caso es análogo a tratar de equilibrar un lápiz sobre su punta. En teoría, el lápiz está en equilibrio cuando se conserva vertical, pero la posición no puede mantenerse.

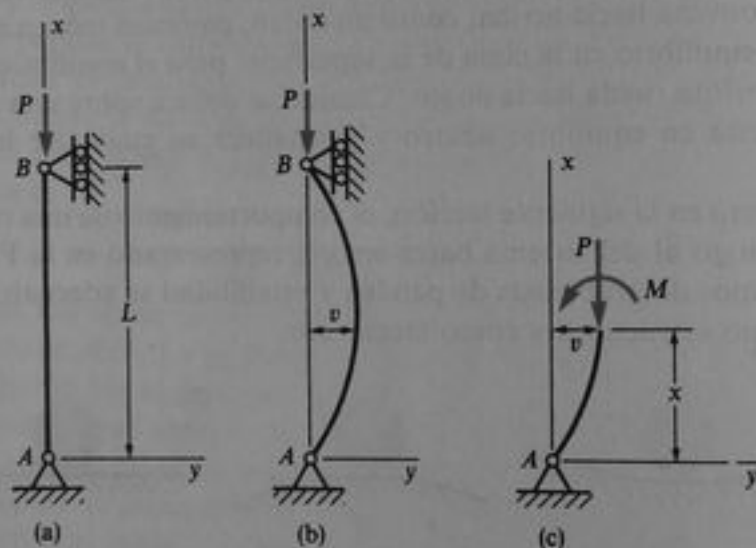


Fig. 11-4 Columna con extremos articulados: (a) columna ideal, (b) perfil pandeado y (c) diagrama de cuerpo libre de una parte de la columna

El comportamiento de una columna ideal comprimida por una fuerza axial P (Fig. 11-4) puede resumirse como sigue:

- Si $P < P_{cr}$, la columna está en equilibrio estable en la posición recta.
- Si $P = P_{cr}$, la columna está en equilibrio neutro en la posición recta o en la posición levemente flexionada.
- Si $P > P_{cr}$, la columna está en equilibrio inestable en la posición recta, y por lo tanto se pandea.

Por supuesto, las columnas reales no se comportan en esta forma idealizada porque siempre existen imperfecciones. No obstante, se empezará por estudiar columnas ideales ya que representan una introducción al comportamiento de las columnas reales.

Para determinar la carga crítica y el perfil deflexionado de la columna pandeada (Fig. 11-4b), se utiliza una de las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión de una viga (véanse Ecs. 7-10). Estas ecuaciones son aplicables a una columna porque, cuando ocurre el pandeo, se desarrollan momentos flexionantes en la columna, la cual se flexiona como si fuera una viga. Aunque para el análisis de columnas es adecuada la ecuación diferencial de cuarto grado en términos de la intensidad de carga q y la ecuación diferencial de tercer grado en términos de la fuerza cortante V , se utilizará la ecuación diferencial de segundo grado en términos del momento flexionante M porque su solución general es la más sencilla. Esta ecuación (Ec. 7-10a) es

$$EIv'' = -M \quad (11-2)$$

en la que v es la deflexión lateral en la dirección y . En una columna se orientan los ejes x y y como se muestra en la Fig. 11-4b, que corresponde a una viga AB que ha sido girada 90° a partir de la horizontal. El momento flexionante M a una distancia x desde el extremo A de la columna pandeada puede obtenerse del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 11-4c. Se corta la columna a una distancia x desde el apoyo A y se observa del equilibrio estático que en la sección transversal del corte deben actuar una fuerza vertical P y un momento flexionante M (igual a Pv). Por lo tanto, la ecuación diferencial resulta

$$EIv'' = -M = -Pv$$

o sea

$$EIv'' + Pv = 0 \quad (11-3)$$

La cantidad EI es la rigidez a flexión para la flexión en el plano xy , el cual se supone es el plano de pandeo.

La solución de la Ec. (11-3), la cual es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo grado con coeficientes constantes, proporciona la deflexión v como una función de x . Por conveniencia en la formulación de la solución general de la ecuación, se utiliza la notación

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (11-4)$$

Entonces podemos replantear la Ec. (11-3) en la forma

$$v'' + k^2v = 0 \quad (11-5)$$

La solución general de esta ecuación es

$$v = C_1 \text{ sen } kx + C_2 \text{ cos } kx \quad (11-6)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que deben evaluarse a partir de las condiciones de frontera (o condiciones de extremos) de la columna. Obsérvese que el número de constantes arbitrarias (dos en este caso) debe concordar con el grado de la ecuación diferencial. También, el hecho de que la Ec. (11-6) representa la solución

general de la Ec. (11-5) puede verificarse fácilmente sustituyendo la expresión de v en la ecuación diferencial y observando que se satisface la ecuación.

Para evaluar las constantes de integración, se emplean las condiciones de frontera en los extremos:

$$v(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(L) = 0$$

La primera condición da $C_2 = 0$, y la segunda da

$$C_1 \operatorname{sen} kL = 0 \quad (\text{a})$$

De esta ecuación se concluye que $C_1 = 0$ o sea que $\operatorname{sen} kL = 0$. Si $C_1 = 0$, la deflexión v es cero y la columna permanece recta. En tal caso, la Ec. (a) se satisface para cualquier valor de la cantidad kL . Por lo tanto, la carga axial P puede tener también cualquier valor (véase Ec. 11-4). Esta solución de la ecuación diferencial (llamada a menudo *solución trivial*) se representa mediante el eje vertical del diagrama carga-deflexión mostrado en la Fig. 11-5. Esta solución corresponde a una columna ideal que esté en equilibrio (estable o inestable) bajo la acción de la carga de compresión P .

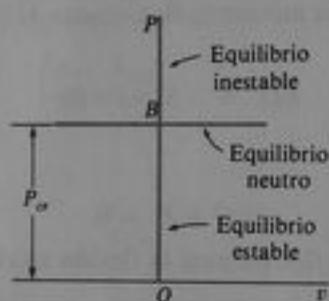


Fig. 11-5 Diagrama carga-deflexión para una columna elástica ideal

La otra posibilidad para satisfacer la Ec. (a) es satisfacer la siguiente condición:

$$\operatorname{sen} kL = 0 \quad (\text{b})$$

Esta ecuación se satisface cuando $kL = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Como $kL = 0$ significa que $P = 0$, esta solución no es de interés. Por lo tanto, las soluciones que se considerarán son

$$kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{c})$$

o sea

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{d})$$

(véase Ec. 11-4). Esta ecuación proporciona los valores de P que satisfacen la Ec. (a) y en consecuencia proporcionan soluciones (diferentes a la solución trivial) a la ecuación diferencial. Luego, la ecuación de la curva de deflexión es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{e})$$

Únicamente cuando P tiene uno de los valores dados por la Ec. (d) es teóricamente posible que la columna tenga una forma flexionada; para todos los demás valores de P , la columna está en equilibrio sólo si permanece recta. Por lo tanto, los valores de P dados por la Ec. (d) son las **cargas críticas** para la columna.

La menor carga crítica para la columna se obtiene cuando $n = 1$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11-7)$$

La forma pandeada correspondiente (a veces llamada *forma modal* o modo de pandeo) es

$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (11-8)$$

como se muestra en la Fig. 11-6b. La constante C_1 representa la deflexión en el punto medio de la columna y puede ser positiva o negativa. Por lo tanto, la porción del diagrama carga-deflexión que corresponde a P_{cr} es una línea recta horizontal (Fig. 11-5). La deflexión para esta carga es indefinida, aunque debe permanecer pequeña ya que se utilizó la ecuación diferencial para deflexiones pequeñas. El punto de bifurcación B está en la carga crítica; encima del punto B el equilibrio es inestable y por debajo de él es estable. El pandeo de una columna de extremos articulados en el primer modo ($n = 1$) se denomina **caso fundamental** de pandeo de columnas.

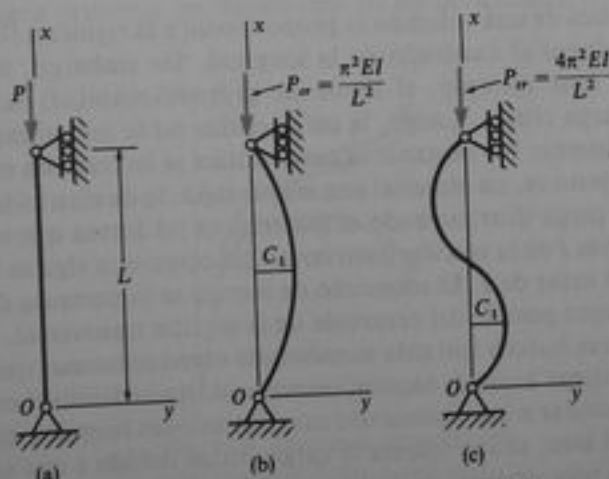


Fig. 11-6 Perfiles pandeados para una columna ideal con extremos articulados: (a) columna inicialmente recta, (b) perfil pandeado para $n = 1$ y (c) perfil pandeado para $n = 2$

La carga crítica para una columna elástica ideal también se conoce como **carga de Euler**. El célebre matemático Leonhard Euler (1707-1783), a quien muchos consideran el más grande matemático de todos los tiempos, fue el primero que estudió la flexión de una columna esbelta y determinó su carga crítica (en 1744); véanse Refs. 1-1 a 1-3 y 11-1 a 11-7. Para información resumida respecto a la obra y vida de Euler, véase la nota de la Ref. 11-3.

Al considerar valores más altos del índice n en las Ecs. (d) y (e), se obtiene un número infinito de cargas críticas y formas modales correspondientes. La forma modal para $n = 2$ se representa en la Fig. 11-6c; la carga crítica correspondiente es cuatro veces mayor que la del caso fundamental. Se aprecia que las magnitudes de las cargas críticas son proporcionales al cuadrado de n y el número de semiondas en la forma pandeada es igual a n . Tales formas pandeadas no suelen tener aplicación práctica ya que la columna siempre se pandeará cuando la carga P alcance su menor valor crítico (Ec. 11-7). La única forma de obtener modos de pandeo más altos es suministrar soporte lateral a la columna en los puntos de inflexión (nodos o puntos nodales).

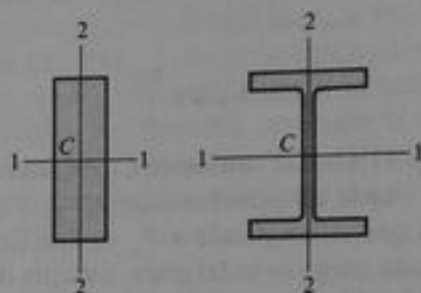


Fig. 11-7 Secciones transversales de columnas que muestran los ejes centroidales principales con $I_1 > I_2$

La carga crítica de una columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud. Sin embargo, la resistencia del propio material (por ejemplo, el límite de proporcionalidad) no aparece en la ecuación de la carga crítica. Luego, la carga crítica no se incrementa utilizando un material más resistente. No obstante la carga crítica se incrementa mediante un material más rígido (esto es, un material con mayor módulo de elasticidad E). También, se incrementa la carga distribuyendo el material en tal forma que se incremente el momento de inercia I de la sección transversal, tal como una viga se hace más rígida incrementando el valor de I . El momento de inercia se incrementa distribuyendo el material lo más lejos posible del centroide de la sección transversal. Por lo que, los miembros tubulares huecos son más económicos como columnas que los miembros sólidos con las mismas áreas de sección transversal. Reduciendo el espesor de pared de un miembro tubular e incrementando sus dimensiones laterales, mientras se conserva constante el área, se incrementa la carga crítica debido a que se incremente I . Sin embargo, este proceso tiene un límite práctico, ya que finalmente la pared misma se vuelve inestable. Entonces ocurre pandeo local en forma de pequeñas ondulaciones o arrugas. Luego, se debe distinguir entre el pandeo total de una columna, como se muestra en la Fig. 11-6, y el pandeo local en sus partes. Este último requiere de estudios más detallados, como los que se tratan en libros referentes al pandeo y estabilidad (Refs. 11-1, 11-2, 11-8, 11-9 y 11-10). En este capítulo sólo se considerará el pandeo total de las columnas.

En el análisis anterior se supuso que el plano xy era un plano de simetría de la columna y que el pandeo ocurre en tal plano (Fig. 11-6). La última suposición se satisface si la columna tiene soportes laterales perpendiculares al plano de la figura, de

tal forma que la columna se restringe al pandeo en el plano xy . Si la columna está soportada únicamente en sus extremos, de tal forma que esté libre para pandearse en cualquier dirección, entonces la flexión ocurrirá respecto al eje centroidal principal con el menor momento de inercia. Por ejemplo, considérense las secciones rectangular y de patín ancho mostradas en la Fig. 11-7. En cada caso, el momento de inercia I_1 es mayor que I_2 ; luego, la columna se pandeará en el plano 1-1, y deberá usarse en la fórmula para la carga crítica el menor momento de inercia I_2 . Si la sección transversal es cuadrada o circular, todos los ejes centroidales tienen el mismo momento de inercia y el pandeo puede ocurrir en cualquier plano longitudinal.

Efectos de grandes deformaciones, imperfecciones y comportamiento inelástico. La ecuación para la carga crítica se obtuvo para una columna ideal en la que las deflexiones son pequeñas, la construcción es perfecta y el material satisface la ley de Hooke. Como consecuencia, se encuentra que las magnitudes de las deflexiones en el pandeo eran indefinidas.* Luego, para $P = P_{cr}$, la columna puede presentar una deflexión pequeña, condición representada mediante la línea horizontal A en el diagrama carga-deflexión de la Fig. 11-8. (En esta figura, se muestra únicamente la mitad derecha del diagrama, pero las dos mitades son simétricas respecto al eje vertical.) La teoría se limita a deflexiones pequeñas ya que se utilizó v'' para la curvatura. Un análisis más preciso basado en la expresión exacta de la curvatura (véase Ec. 7-11) muestra que no hay indefinición en las magnitudes de las deflexiones por pandeo. En lugar de ello, para una columna elástica ideal, el diagrama carga-deflexión va hacia arriba de acuerdo con la curva B de la Fig. 11-8. Luego, después de que una columna elástica empieza a pandearse, se requiere una carga más y más grande para provocar un incremento en las deflexiones.

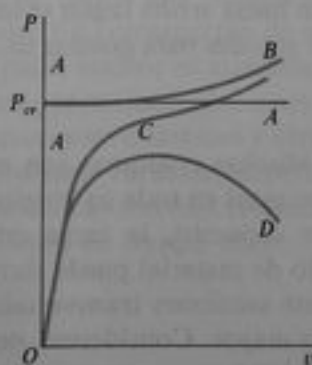


Fig. 11-8 Diagramas carga-deflexión para columnas: líneas A , columna elástica ideal con deflexiones pequeñas; curva B , columna elástica ideal con deflexiones grandes; curva C , columna elástica con imperfecciones; curva D , columna inelástica con imperfecciones

* Mediante notación matemática, se resolvió un problema lineal de valores característicos. La carga crítica es un valor característico y la forma modal pandeada correspondiente es una función característica.

Supóngase ahora que la columna no está construida perfectamente; por ejemplo, puede tener una imperfección en forma de una leve curvatura inicial, de forma tal que la columna sin carga no es perfectamente recta. Tales imperfecciones producen deflexiones desde el inicio del proceso de carga, como se muestra mediante la curva *C* en la Fig. 11-8. Para deflexiones pequeñas, la curva *C* se aproxima a la línea *A*; conforme aumentan las deflexiones, se aproxima a la curva *B*. A mayores imperfecciones, la curva *C* se desplaza hacia la derecha. Si la columna se construye con bastante precisión, la curva *C* se aproxima en forma más estrecha a las líneas rectas *A* (una vertical y otra horizontal). De las líneas *A*, *B* y *C* se observa que la carga crítica representa la máxima capacidad de carga de una columna elástica para fines prácticos, ya que las grandes deflexiones usualmente son inaceptables.

Finalmente, consideremos qué pasa cuando el esfuerzo excede el límite de proporcionalidad y el material de la columna no satisface la ley de Hooke. Por supuesto, el diagrama carga-deflexión no cambia hasta el punto en el que se excede el límite de proporcionalidad. Entonces la curva del comportamiento inelástico (curva *D*) se aparta de la curva elástica, continúa hacia arriba, alcanza un máximo y regresa hacia abajo. Naturalmente, los perfiles detallados de estas curvas dependen de las propiedades del material y de las dimensiones de la columna, pero la característica general del comportamiento está representada por las curvas mostradas.

Sólo las columnas extremadamente esbeltas permanecen elásticas por encima de la carga crítica P_{cr} . Las columnas más resistentes se comportan inelásticamente y siguen una curva como la *D*. Es importante reconocer que la carga máxima *P* puede ser soportada por una columna inelástica considerablemente menor que la carga crítica P_{cr} . Además, la porción descendente de la curva *D* representa un colapso desastroso, porque requiere de cargas más y más pequeñas para mantener deflexiones cada vez mayores. Por lo contrario, las curvas para columnas elásticas son completamente estables, porque continúan hacia arriba según se incrementa la deflexión; esto es, se requieren cargas más y más grandes para generar un incremento en la deflexión.

Columnas óptimas. Muchas columnas son miembros prismáticos; esto es, tienen la misma sección transversal en toda su longitud. En este capítulo sólo se analizarán tales columnas. Por supuesto, la carga crítica de una columna que se compone de un volumen dado de material puede incrementarse ahusando la columna en forma tal que presente secciones transversales mayores en las regiones donde el momento flexionante es mayor. Considérese, por ejemplo, una columna de sección transversal circular sólida con extremos articulados. La columna con "forma de submarino" con sección transversal apropiadamente variable (Fig. 11-9a) tendrá una carga crítica mayor que si el mismo volumen de material se conforma en una columna prismática. Por supuesto, no es práctico construir tal columna, pero las columnas prismáticas a veces se refuerzan en porciones de su longitud (Fig. 11-9b) a fin de aproximarlas a las condiciones óptimas.

Considérese ahora una columna prismática con extremos articulados que puede pandearse con libertad en cualquier dirección (Fig. 11-10a). Considérense también sólo secciones transversales sólidas convexas, tales como un círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo o hexágono (Fig. 11-10b). Para un área de sección transversal dada, ¿cuál de esos perfiles hace la columna más eficiente? O, en términos más precisos, se desea conocer cuál sección transversal proporciona la mayor carga crítica, considerando

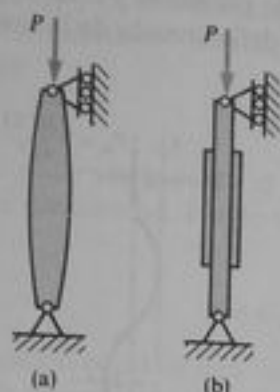


Fig. 11-9 Columnas con secciones transversales variables

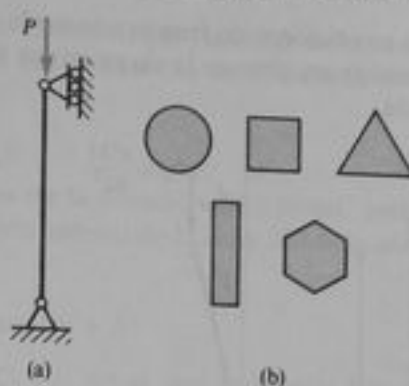


Fig. 11-10 ¿Cuál es el perfil óptimo para una columna prismática?

que la carga crítica se calcula a partir de la fórmula $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ empleando el menor momento de inercia para la sección transversal. Para muchas personas la intuición sugiere que el perfil circular es el mejor. Sin embargo, se puede comprobar fácilmente que una sección transversal en forma de un triángulo equilátero proporciona una carga crítica 21% mayor que la de una sección transversal circular de la misma área (véase Problema 11.2-10). El triángulo equilátero proporciona también cargas mayores que cualesquiera de los demás perfiles, por lo cual es la sección transversal óptima. (Para un análisis matemático de perfiles óptimos en columnas, véase Ref. 11-11.)

En la práctica, las columnas a menudo se restringen al pandeo en un solo plano, por lo que debe elegirse de tal forma que proporcione un momento de inercia a la flexión mayor en dicho plano. En construcción de acero, se usan comúnmente para columnas las secciones de patín ancho; en construcciones de concreto reforzado y en construcciones de madera, se utilizan secciones rectangulares y circulares. Los perfiles empleados en estructuras aeronáuticas y aeroespaciales, así como las usadas en diseño de maquinaria, son muy variadas, dependiendo de la aplicación particular. En general, las secciones huecas son más eficientes que las secciones sólidas porque proporcionan un momento de inercia mayor para la misma área de sección transversal.

11.3 COLUMNAS CON OTRAS CONDICIONES DE APOYO

El pandeo de una columna con extremos articulados a menudo se denomina caso fundamental de pandeo. Sin embargo, muchas otras condiciones, tales como extremos empotrados, soportes elásticos y extremos libres, se encuentran en la práctica. Las cargas críticas para columnas con varios tipos de apoyos se determinan a partir de la ecuación diferencial de la curva de deflexión, en forma similar a la de una columna articulada. Se empieza por dibujar los diagramas de cuerpo libre de la columna a fin de obtener expresiones para el momento flexionante M . Entonces se resuelve la ecuación diferencial en términos del momento flexionante. Para evaluar las constantes arbitrarias y algunas otras incógnitas que aparecen en la solución, se

usan las condiciones de frontera como la deflexión v y la pendiente v' . La solución final consiste en obtener la carga crítica P_{cr} y la forma deflectada de la columna pandeada.

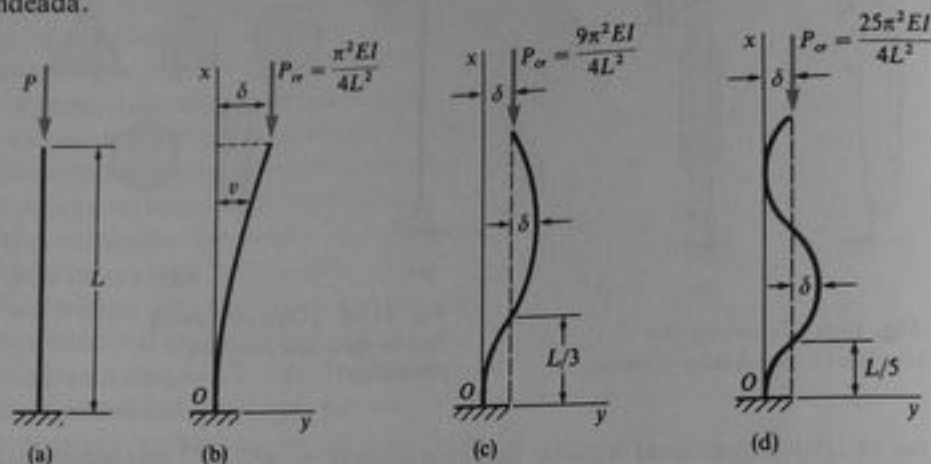


Fig. 11-11 Columna ideal empotrada en la base y libre en el extremo superior: (a) columna inicialmente recta, (b) forma pandeada para $n = 1$, (c) forma pandeada para $n = 3$ y (d) forma pandeada para $n = 5$

Para explicar este procedimiento, analicemos una columna elástica ideal empotrada en su base, libre en su otro extremo, y sometida a una carga axial vertical P (Fig. 11-11a). Esta columna en particular es de importancia histórica ya que representa la primera columna analizada por Euler en 1744. La columna deflectada se muestra en la Fig. 11-11b, y de esta figura se aprecia que el momento flexionante a una distancia x desde la base es

$$M = -P(\delta - v)$$

donde δ es la deflexión en el extremo libre. La ecuación diferencial de la curva de deflexión (Ec. 11-2) resulta entonces

$$EIv'' = -M = P(\delta - v) \quad (a)$$

donde I es el momento de inercia para pandeo en el plano xy .

Utilizando la notación $k^2 = P/EI$ (véase Ec. 11-4), podemos escribir la Ec. (a) en la forma

$$v'' + k^2v = k^2\delta \quad (b)$$

Esta ecuación es otra ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes constantes. Sin embargo, es más complicada que la ecuación para una columna con extremos articulados (véase Ec. 11-5) porque tiene un término diferente de cero en el miembro del lado derecho. Su solución general consta de dos partes: (1) la *solución homogénea*, que es la solución de la ecuación homogénea correspondiente obtenida igualando a cero el segundo miembro, y (2) la *solución particular*, la cual es una solución de la ecuación que origina el miembro del lado derecho real. La solución homogénea v_H (también llamada *solución complementaria*) es la misma que la solución de la Ec. (11-5); luego,

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (c)$$

en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Cuando v_H se sustituye en el miembro del lado izquierdo de la ecuación diferencial (Ec. b), resulta cero. La solución particular es

$$v_p = \delta \quad (d)$$

Cuando v_p se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, genera el miembro del derecho. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es la suma de v_H y v_p :

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx + \delta \quad (e)$$

Esta ecuación contiene tres incógnitas, C_1 , C_2 y δ ; luego, son necesarias tres condiciones de frontera para obtener la solución.

En la base empotrada de la columna, tenemos dos condiciones:

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 0$$

La primera condición da

$$C_2 = -\delta \quad (f)$$

Para emplear la segunda condición diferenciamos primero la Ec. (e) para obtener la pendiente:

$$v' = C_1 k \operatorname{cos} kx - C_2 k \operatorname{sen} kx$$

Entonces la segunda condición da $C_1 = 0$. Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la solución general, obtenemos la ecuación de la curva de deflexión:

$$v = \delta(1 - \operatorname{cos} kx) \quad (g)$$

Esta ecuación proporciona la forma de la curva de deflexión pero está indefinida la amplitud de la deflexión.

La tercera condición de frontera está en el extremo superior de la columna donde la deflexión v es igual a δ :

$$v(L) = \delta$$

Usando esta condición con la Ec. (g), obtenemos

$$\delta \operatorname{cos} kL = 0 \quad (h)$$

de donde se concluye que $\delta = 0$ o que $\operatorname{cos} kL = 0$. Si $\delta = 0$, no se presenta deflexión en la barra, y por tanto no ocurre pandeo (Fig. 11-11a). En tal caso, la Ec. (h) se satisfará con cualquier valor de la cantidad kL . Por lo tanto, la carga P también puede tener cualquier valor. Este resultado está representado por el eje vertical del diagrama carga-deflexión mostrado en la Fig. 11-5.

La otra posibilidad es que $\operatorname{cos} kL = 0$. En este caso, la Ec. (h) se satisface sin importar el valor de la deflexión δ ; luego, δ está indefinida y puede tener cualquier valor (pequeño). La condición $\operatorname{cos} kL = 0$ requiere que

$$kL = \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (i)$$

La fórmula correspondiente para las cargas críticas es

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (11-9)$$

También, las formas modales de pandeo (véase Ec. g) están dadas por la siguiente ecuación:

$$v = \delta \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2L} \right) \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (11-10)$$

La carga crítica más pequeña ($n = 1$) es la única carga de interés práctico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (11-11)$$

La forma pandeada correspondiente es

$$v = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (11-12)$$

la cual se muestra en la Fig. 11-11b. Como se mencionó previamente, la deflexión δ está indefinida; luego, obtenemos una línea horizontal en el diagrama carga-deflexión (Fig. 11-5).

Tomando valores más altos del índice n , se obtiene un número infinito de cargas críticas a partir de la Ec. (11-9). Las formas modales de pandeo correspondientes tienen más y más ondas en ellos. Cuando $n = 3$, P_{cr} es nueve veces mayor que para $n = 1$, y la forma pandeada se muestra en la Fig. 11-11c. De modo semejante, el perfil para $n = 5$ se muestra en la parte (d) de la figura.

Longitudes efectivas de columnas. Las cargas críticas para columnas con varias condiciones de apoyo pueden relacionarse con la carga crítica de columna de extremos articulados mediante el concepto de la **longitud efectiva**. Para explicar esta idea, obsérvese el perfil deformado de una columna fija en su base y libre en su cima (Fig. 11-12a). Esta columna se pandea en una curva que es la cuarta parte de una onda senoidal completa. Si se amplía la curva de deflexión (Fig. 11-12b), se observa que resalta la curva de deflexión para una columna de extremos articulados, o la mitad de una onda senoidal. La longitud efectiva L_e es la longitud de la columna de extremos articulados equivalente, o la distancia entre los puntos de inflexión en la curva de deflexión. Luego, para la columna empotrada con un extremo libre, la longitud efectiva es

$$L_e = 2L \quad (j)$$

Como la longitud efectiva es la longitud de una columna de extremos articulados equivalente, se puede escribir una fórmula general para la carga crítica como sigue:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (11-13)$$

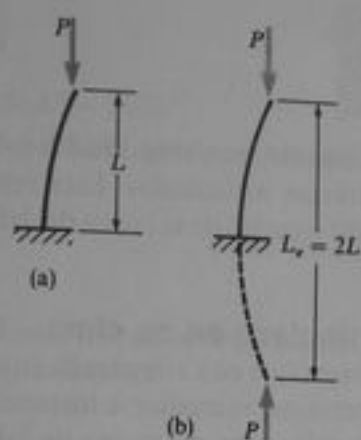


Fig. 11-12 Longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en la cima

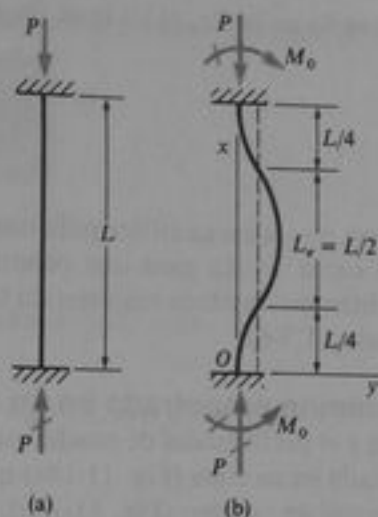


Fig. 11-13 Longitud efectiva para una columna con ambos extremos empotrados para evitar rotación

Sustituyendo $L_e = 2L$, obtenemos la carga crítica para una columna empotrada con un extremo libre (Ec. 11-11).

La longitud efectiva se expresa a menudo en términos de un factor de longitud efectiva K :

$$L_e = KL \quad (11-14)$$

Luego, la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (11-15)$$

El factor K es igual a 2 para una columna empotrada en su base y libre en su cima y es igual a 1 para una columna de extremos articulados.

Columna con extremos empotrados. Considérese ahora una columna con ambos extremos empotrados para evitar rotaciones (Fig. 11-13a). Supóngase que los extremos de la columna pueden desplazarse libremente entre sí. Entonces, cuando se aplica la carga axial P en la parte superior, se desarrolla en la base una fuerza reactiva igual. Cuando ocurre el pandeo, en los empotramientos se desarrollan también momentos reactivos M_0 (Fig. 11-13b). La curva de deflexión para el primer modo de pandeo es una curva trigonométrica que tiene puntos de inflexión a una distancia $L/4$ desde los extremos. Luego, la longitud efectiva, igual a la distancia entre los puntos de inflexión, es

$$L_e = \frac{L}{2} \quad (k)$$

Sustituyendo en la Ec. (11-13) se obtiene la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (11-16)$$

Se observa que la carga crítica para una columna con extremos empotrados es cuatro veces la carga crítica para una columna con extremos articulados. Este resultado puede obtenerse también resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión (Problema 11.3-6).

Columna empotrada en su base y articulada en su cima. La carga crítica y el perfil modal de pandeo para una columna que está empotrada en su base y articulada en su cima (Fig. 11-14a) no puede determinarse mediante inspección del perfil modal de pandeo (Fig. 11-14b), ya que la localización del punto de inflexión no es evidente. Luego, se debe resolver la ecuación diferencial a fin de encontrar P_{cr} .

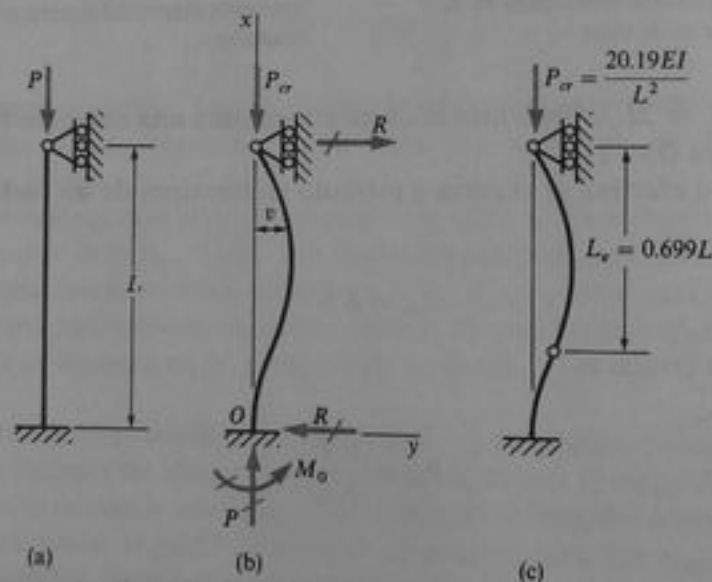


Fig. 11-14 Columna fija en la base y articulada en la cima

Cuando la columna se pandea se desarrollan fuerzas reactivas horizontales R en los apoyos, así como un momento reactivo M_o en la base (Fig. 11-14b). Del equilibrio estático se sabe que las fuerzas horizontales son de igual magnitud y dirección opuesta, de tal forma que

$$M_o = RL$$

El momento flexionante en la columna pandeada, a una distancia x desde la base, es

$$M = Pv - R(L - x)$$

Procediendo como en los análisis anteriores, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$v'' + k^2v = \frac{R}{EI}(L - x) \quad (l)$$

en donde $k^2 = P/EI$.

La solución general de la ecuación diferencial es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx + \frac{R}{P}(L - x) \quad (m)$$

la cual tiene tres constantes desconocidas (C_1 , C_2 y R). Las tres condiciones de frontera requeridas son

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

Aplicando estas condiciones a la Ec. (m) se obtiene

$$C_2 + \frac{RL}{P} = 0 \quad C_1k - \frac{R}{P} = 0 \quad C_1 \tan kL + C_2 = 0 \quad (n)$$

Las tres ecuaciones se satisfacen si $C_1 = C_2 = R = 0$, en cuyo caso tenemos la solución trivial y la deflexión es cero. A fin de obtener la solución para pandeo, se deben resolver las ecuaciones en una forma más general. Un método de solución es eliminar R de las dos primeras ecuaciones, obteniéndose

$$C_1kL + C_2 = 0$$

o sea $C_2 = -C_1kL$. Ahora sustituimos C_2 por esta expresión en la tercera de las Ecs. (n) y obtenemos la ecuación de pandeo:

$$kL = \tan kL \quad (o)$$

La solución de la ecuación de pandeo representa la carga crítica.

Dado que la ecuación de pandeo es una ecuación trascendente, * no puede resolverse explícitamente. Sin embargo, el valor de kL puede determinarse mediante prueba y error o por medio de una calculadora con programa para determinar raíces de ecuaciones. El valor de kL más pequeño y distinto de cero que satisface la Ec. (o) es

$$kL = 4.4934 \quad (p)$$

La carga crítica correspondiente es

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} = \frac{2.046\pi^2EI}{L^2} \quad (11-17)$$

* Una función trascendente no puede expresarse mediante un número finito de operaciones algebraicas; luego, son trascendentes las funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales y algunas otras.

la cual está entre los valores de las cargas críticas para columnas con extremos articulados y las de columnas con extremos empotrados (véanse Ecs. 11-7 y 11-16). La longitud efectiva para la columna se obtiene comparando las Ecs. (11-17) y (11-13); luego, se determina

$$L_e = 0.699L \approx 0.7L \quad (q)$$

Esta longitud representa la distancia desde el extremo articulado de la columna hasta el punto de inflexión en el perfil pandeado (Fig. 11-14c).

La ecuación del perfil modal de pandeo se obtiene sustituyendo $C_2 = -C_1 kL$ y $R/P = kC_1$ en la solución general (Ec. m):

$$v = C_1 [\text{sen } kx - kL \cos kx + k(L - x)] \quad (11-18)$$

en la cual $k = 4.4934/L$. El término entre corchetes proporciona la forma modal para la deflexión de la columna pandeada, pero la amplitud de la deflexión está indefinida porque C_1 puede tener cualquier valor (con la limitación de que v debe permanecer pequeña).

11.4 COLUMNAS CON CARGAS AXIALES EXCÉNTRICAS

En las secciones anteriores se analizaron columnas ideales para las cuales la carga axial P actuaba en el centroide de la sección transversal. En tales casos la columna permanecía recta hasta alcanzarse la carga crítica. Ahora se supondrá que la carga se aplica con una pequeña excentricidad e respecto al eje de la columna (Fig. 11-15a).

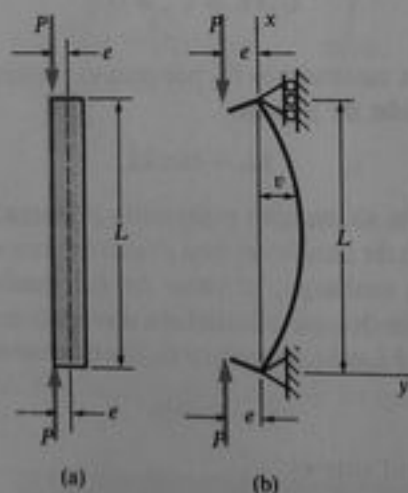


Fig. 11-15 Columna con cargas axiales excéntricas

Como consecuencia de la excentricidad, la carga P produce flexión en la columna aun cuando la carga es pequeña. Por lo tanto, la columna se deforma desde el inicio del proceso de carga, y la deflexión se vuelve cada vez mayor conforme se incremen-

ta la carga P . En este caso la carga permisible para la columna puede determinarse mediante la magnitud de la deflexión o de los esfuerzos de flexión, en lugar de hacerlo mediante la carga crítica.

Para analizar la columna, se la representa mediante la columna de extremos articulados idealizada mostrada en la Fig. 11-15b; esto es, se supone que el plano xy es un plano de simetría, la columna es inicialmente recta y el material es linealmente elástico. El momento flexionante en la columna a una distancia x desde el extremo inferior es

$$M = P(e + v)$$

donde v es la deflexión medida desde el eje de la columna. La ecuación diferencial de la curva de deflexión es

$$EIv'' = -M = -P(e + v)$$

o sea

$$v'' + k^2v = -k^2e \quad (a)$$

en la cual $k^2 = P/EI$, como antes. La solución general de esta ecuación es la suma de las soluciones homogénea y particular, como sigue:

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx - e \quad (b)$$

en la cual C_1 y C_2 son constantes en la solución homogénea y $-e$ es la solución particular.

Las condiciones de frontera de las cuales obtenemos C_1 y C_2 resultan de la deflexión v en los extremos de la columna:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

Estas condiciones dan

$$C_2 = e \quad C_1 = \frac{e(1 - \operatorname{cos} kL)}{\operatorname{sen} kL} = e \tan \frac{kL}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la curva de deflexión es

$$v = e \left(\tan \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx + \operatorname{cos} kx - 1 \right) \quad (11-19)$$

Para una columna con una carga P y una excentricidad e conocidas se utiliza esta ecuación para calcular la deflexión en cualquier punto. Luego, la condición de la columna es completamente diferente a la que se trató cuando se hizo referencia a cargas críticas; en tales casos, la magnitud de la deflexión es cero o está indefinida, ya que para la carga crítica la columna está en equilibrio neutro. Sin embargo, ahora cada valor de la carga P produce un valor definido de la deflexión. Por supuesto, los resultados aún se limitan a deflexiones pequeñas.

La deflexión máxima δ ocurre en el punto medio de la columna y se obtiene haciendo $x = L/2$ en la Ec. (11-19):

$$\delta = v_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right) \quad (11-20)$$

Como casos especiales, obsérvese que obtenemos $\delta = 0$ si $e = 0$ o si $P = 0$.

De la Ec. (11-20) puede trazarse un diagrama carga-deflexión para la columna. Se elige un valor particular de la excentricidad e_1 y se calculan entonces los valores correspondientes de P y δ . El diagrama resultante se muestra en la Fig. 11-16 mediante la curva designada $e = e_1$. Observamos inmediatamente que la deflexión δ se incrementa según crece P , pero la relación no es lineal. Luego, no es posible utilizar el principio de superposición para calcular las deflexiones debidas a más de una carga. No obstante, la deflexión δ es lineal con e , de modo tal que la curva para $e = e_2$ tiene la misma forma que la curva para e_1 pero las abscisas se incrementan en la relación e_2/e_1 .

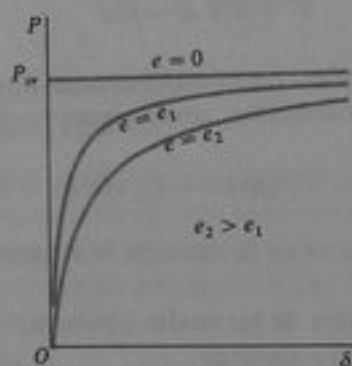


Fig. 11-16 Diagrama carga-deflexión para una columna con cargas axiales excéntricas (Fig. 11-15)

Según la carga P se aproxima a la carga crítica ($P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$), el valor de kL se aproxima a π y el término secante en la Ec. (11-20) tiende a infinito. Por lo tanto, la deflexión δ se incrementa ilimitadamente conforme la carga se aproxima a P_{cr} . Por tanto, la línea horizontal correspondiente a $P = P_{cr}$ en la Fig. 11-16 es una asíntota para las curvas. En el límite, conforme e se vuelve cada vez más pequeña y se aproxima a cero, la curva del diagrama se aproxima a dos líneas rectas, una vertical y otra horizontal. Luego, una columna ideal con una carga centralmente aplicada es el caso límite de una columna con una carga excéntrica. Las curvas trazadas en la Fig. 11-16 son matemáticamente correctas, pero nuevamente debe recordarse que la ecuación diferencial sólo es válida para deflexiones pequeñas. Por lo que, para grandes valores de δ , las curvas deben modificarse para tomar en cuenta la presencia de deflexiones grandes o los efectos de flexión inelástica (véase Fig. 11-8).

El origen de la relación no lineal entre la carga y la deflexión, aun cuando las deflexiones son pequeñas y que se cumple la ley de Hooke, puede entenderse si se observa que las cargas axiales P (Fig. 11-15b) son equivalentes a cargas centralmente

aplicadas P más momentos Pe que actúan en los extremos. Si los momentos Pe actuaran solos, producirían deflexiones de la columna por flexión en la misma forma que para una viga. En una viga, la presencia de las deflexiones no modifica la acción de las cargas, y los momentos flexionantes son los mismos existan o no las deflexiones. Sin embargo, cuando una carga axial actúa sobre el miembro, la presencia de las deflexiones incrementa los momentos flexionantes producidos por las fuerzas axiales (debido a los momentos adicionales Pv). Cuando los momentos se incrementan, las deflexiones también se incrementan, por lo que los momentos se incrementan aún más, y así sucesivamente. Luego, los momentos flexionantes dependen de las deflexiones y su determinación es parte del análisis de deflexión. Este comportamiento genera una relación no lineal entre las cargas axiales y las deflexiones.

Cuando la carga axial P es muy pequeña comparada con la carga crítica, la relación carga-deflexión puede aproximarse mediante una línea recta cerca del origen (Fig. 11-16). Las curvas tienen una inclinación casi vertical cerca del origen, pero la pendiente es finita. Para determinar la ecuación de la porción inicial de las curvas, se utiliza el desarrollo de la serie para la secante:

$$\sec t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5t^4}{4!} + \dots$$

En este caso, la cantidad $kL/2$ corresponde a t (véase Ec. 11-20). Cuando la carga axial es muy pequeña comparada con la carga crítica (y en consecuencia kL es muy pequeña), se pueden omitir los términos de potencias superiores en la serie y usar sólo los dos primeros términos:

$$\sec \frac{kL}{2} = 1 + \frac{k^2 L^2}{8}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (11-20) se obtiene

$$\delta = \frac{k^2 L^2 e}{8} = \frac{P e L^2}{8EI} \quad (c)$$

Esta ecuación proporciona la deflexión en el punto medio de una viga simple cargada por momentos Pe en sus extremos (véase Caso 10, Tabla G-2, Apéndice G). También proporciona la pendiente de las curvas carga-deflexión en el origen:

$$\text{Pendiente en el origen} = \frac{P}{\delta} = \frac{8EI}{eL^2} \quad (d)$$

Si $e = 0$, la pendiente resulta infinita, como era de esperarse.

El momento flexionante máximo en la columna cargada excéntricamente (Fig. 11-15b) ocurre en el punto medio donde la deflexión es máxima; está dado por la ecuación

$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec \frac{kL}{2} \quad (11-21)$$

La forma en la cual varía M_{\max} como una función de la carga axial P se muestra en la Fig. 11-17. Cuando P es pequeña, el momento máximo es igual a Pe , lo cual significa que el efecto de las deflexiones es despreciable. Según crece P , el momento flexionante crece en forma no lineal y teóricamente resulta muy grande según se aproxima P a la carga crítica. Sin embargo, como se explicó anteriormente, estas ecuaciones

no son válidas cuando las deflexiones se vuelven grandes, volviéndose importantes otros efectos.

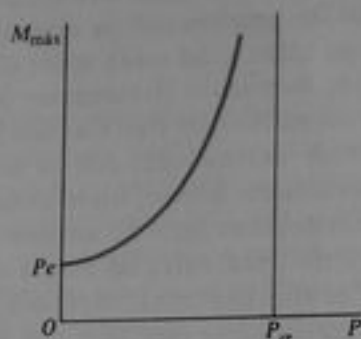


Fig. 11-17 Gráfica de momento flexionante máximo para una columna con cargas axiales excéntricas (Fig. 11-15)

11.5 FÓRMULA DE LA SECANTE

En la sección anterior se analizó una columna sometida a cargas axiales excéntricas P (Fig. 11-15), y se determinó el momento flexionante máximo M_{\max} en la columna (Ec. 11-21). Los esfuerzos de la columna son de dos tipos: primero, los esfuerzos normales uniformemente distribuidos producidos por la carga axial, y segundo, los esfuerzos normales producidos por el momento flexionante. Como se supone que el material de la columna satisface la ley de Hooke, los esfuerzos debidos al momento flexionante varían linealmente a través de la sección y se obtienen a partir de la fórmula de flexión. Luego el esfuerzo de compresión máximo en la columna (en el lado cóncavo) es

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} \quad (\text{a})$$

donde A es el área de la sección transversal y S es el módulo de sección. Obsérvese que para una columna se supone que los esfuerzos de compresión son positivos. Sustituyendo la expresión para M_{\max} (véase Ec. 11-21) se obtiene

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad (\text{b})$$

Esta ecuación se modifica a una forma más útil efectuando tres sustituciones. Primero, el módulo de sección S se reemplaza por I/c , donde c es la distancia desde el eje centroidal hasta la fibra extrema sobre el lado cóncavo de la columna. Segundo, se introduce la notación

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

(11-22)

para el radio de giro de la sección transversal en el plano de flexión. Tercero, sustituimos k por $\sqrt{P/EI}$. Con estas sustituciones la Ec. (b) resulta

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (11-23)$$

Esta ecuación se conoce como **fórmula de la secante** para una columna cargada excentricamente. La ecuación proporciona el esfuerzo de compresión máximo en la columna como una función del esfuerzo de compresión medio P/A y dos relaciones adimensionales, denominadas **relación de excentricidad** y **relación de esbeltez**:

$$\text{Relación de excentricidad} = \frac{ec}{r^2} \quad (11-24)$$

$$\text{Relación de esbeltez} = \frac{L}{r} \quad (11-25)$$

La primera de estas relaciones es una medida de la excentricidad de la carga comparada con las propiedades de la sección transversal, y la segunda representa el grado en el que la columna es larga y esbelta. Una relación de esbeltez de 200 es extremadamente grande para una columna.

La fórmula de la secante relaciona el esfuerzo máximo en la columna con el esfuerzo medio P/A . Si se asigna un límite al esfuerzo máximo (por ejemplo, podríamos asignar σ_{\max} igual al esfuerzo de fluencia σ_y), entonces se calcula el valor correspondiente de P a partir de la fórmula de la secante. Como la ecuación es trascendente, debe resolverse mediante prueba y error. Para auxiliar en el uso de la fórmula, se trazan gráficas tales como la mostrada en la Fig. 11-18. Esta gráfica se trazó para un esfuerzo máximo $\sigma_{\max} = 36$ ksi y para acero con un módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^3$ ksi. La abscisa es la relación de esbeltez L/r y la ordenada es el esfuerzo de compresión medio P/A . Las curvas se trazaron para varios valores de la relación de excentricidad ec/r^2 . Por supuesto, la fórmula de la secante sólo es válida cuando el esfuerzo máximo es menor que (o a lo mucho, igual a) el límite de proporcionalidad del material, ya que la fórmula se obtuvo utilizando la ley de Hooke.

Cuando la excentricidad e es cero, la fórmula de la secante no es aplicable. En lugar de ello, se tiene una columna ideal con una carga aplicada centralmente; por lo que, la carga máxima es la carga crítica ($P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$), y el esfuerzo crítico correspondiente es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (11-26)$$

Esta ecuación muestra que el esfuerzo crítico es inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez. La Ec. (11-26) es válida mientras σ_{cr} no exceda el límite de proporcionalidad del material.

Dado que la Ec. (11-26) relaciona el esfuerzo medio P/A con la relación de esbeltez L/r , se puede trazar también sobre la gráfica mostrada en la Fig. 11-18. La curva correspondiente se designó como **curva de Euler** para distinguirla de las traza-

das mediante la fórmula de la secante.* Sin embargo, las curvas trazadas a partir de la fórmula de la secante se aproximan a la curva de Euler según e se aproxima a cero. Como ya se mencionó, la curva de Euler sólo es válida si el esfuerzo P/A es menor que el límite de proporcionalidad. En este caso, se supone que el esfuerzo máximo es 36 ksi y que este valor no excede el límite de proporcionalidad. Luego, para este valor de esfuerzo, se construye sobre el diagrama una línea horizontal; la línea horizontal y la curva de Euler representan los límites de la fórmula de la secante según la excentricidad e tiende a cero.

Tanto la fórmula de la secante (Ec. 11-23) como la ecuación para el esfuerzo crítico (Ec. 11-26) pueden usarse con columnas que tengan otras condiciones de apoyo en sus extremos, sustituyendo la longitud L por la longitud efectiva L_e (descrita en la Sección 11.3).

De la Fig. 11-18 se aprecia que la capacidad de carga de una columna se reduce significativamente al incrementarse la relación de esbeltez L/r , particularmente en la región media de los valores L/r . Luego, las columnas largas y esbeltas son mucho menos estables que las columnas cortas y gruesas. La gráfica también muestra que la capacidad de carga se reduce al incrementarse la excentricidad, y este efecto es relativamente mayor para columnas cortas que para las largas.

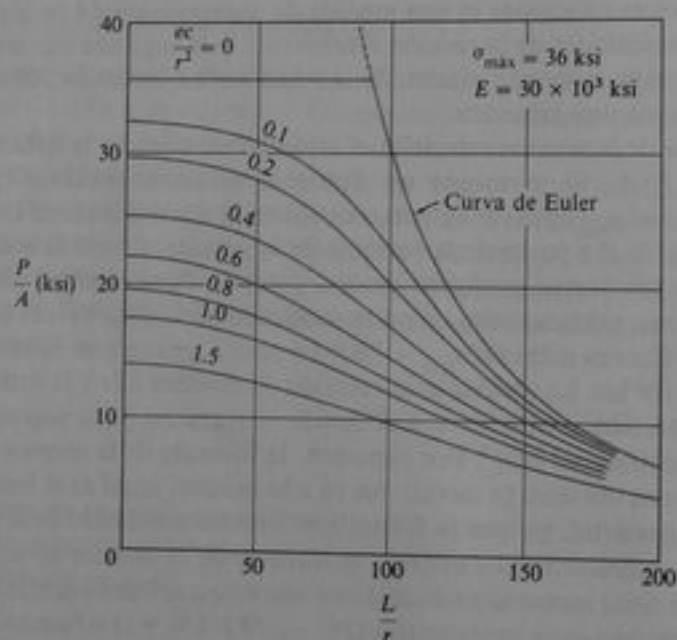


Fig. 11-18 Gráfica de la fórmula de la secante (Ec. 11-23) para $\sigma_{\max} = 36 \text{ ksi}$ y $E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$

La carga P en la fórmula de la secante es la carga que produce el esfuerzo máximo σ_{\max} en condiciones ideales linealmente elásticas. En diseño usualmente se asigna a σ_{\max} un valor limitante de esfuerzo, tal como el esfuerzo de fluencia σ_y . Entonces el valor correspondiente de P es la carga axial que producirá tal esfuerzo máximo. La car-

* La curva de Euler no es un perfil geométrico común. A veces se le denomina erróneamente hipérbola, pero las hipérbolas son trazos de ecuaciones polinomiales de segundo grado en dos variables, mientras que la curva de Euler es el trazo de una ecuación de tercer grado en dos variables.

ga permisible P_{perm} se obtiene dividiendo P por un factor de seguridad n . Aunque la fórmula de la secante proporciona una excelente descripción teórica del comportamiento de una columna, surgen dificultades cuando se la usa en diseño práctico ya que no puede conocerse con exactitud la excentricidad e de la carga.

Consideremos ahora una columna real, la cual difiere inevitablemente de una columna ideal debido a imperfecciones tales como curvatura inicial del eje, condiciones de apoyo imperfectas, y no homogeneidad del material. Además, aun cuando se supone que la carga está centralmente aplicada, existirán excentricidades imprevisibles en su dirección y punto de aplicación. La magnitud de estas imperfecciones y excentricidades varía de una columna a otra y provoca una dispersión en los resultados de las pruebas a las columnas. Por supuesto, todas estas imperfecciones tienen el efecto de someter a la columna a la flexión y además a la compresión directa, por lo que las columnas reales con cargas centralmente aplicadas se alejan del comportamiento idealizado descrito en las secciones 11.2 y 11.3. Es razonable suponer que el comportamiento de una columna imperfecta, cargada centralmente, es similar al de una columna ideal cargada excéntricamente. Luego, es razonable usar la fórmula de la secante para el diseño de columnas supuestamente rectas, cargadas centralmente, eligiendo un valor apropiado de la relación de excentricidad ec/r^2 para tomar en cuenta los efectos de todas las imperfecciones. Sin embargo, el valor de ec/r^2 debe estar basado en los resultados de pruebas porque no hay una forma teórica para saber qué imperfecciones existen. Por ejemplo, un valor usado comúnmente para la relación de excentricidades en columnas con extremos articulados en diseño de acero estructural es $ec/r^2 = 0.25$. El empleo de la fórmula de la secante en esta forma para columnas con cargas centralmente aplicadas proporciona un medio racional de tomar en cuenta los efectos de las imperfecciones, en lugar de permitirles simplemente incrementando el factor de seguridad.

El método para analizar una columna con una carga centralmente aplicada por medio de la fórmula de la secante puede resumirse como sigue. Supóngase un valor de la relación de excentricidad ec/r^2 basado en resultados de pruebas y otras experiencias. Sustitúyase este valor en la fórmula de la secante, junto con los valores de L/r , A y E . Asígnese un valor a σ_{max} que representa el esfuerzo de fluencia σ , del material (o utilícese el límite de proporcionalidad). Resuélvase entonces la fórmula de la secante para la carga P , que produce el esfuerzo σ , en la columna. Esta carga siempre es menor que la carga crítica P_c para la columna. La carga permisible sobre la columna es igual a la carga P , dividida entre un factor de seguridad n . Un valor pertinente de n es 2.

Ejemplo

Una columna de acero de patin ancho de sección $w 14 \times 82$ (Fig. 11-19) con extremos articulados tiene 25 pie de longitud. Soporta una carga centralmente aplicada $P_1 = 320$ k y una carga aplicada excéntricamente $P_2 = 40$ k; la carga excéntrica actúa sobre el eje 2-2 a una distancia de 13.5 plg del centroide (Fig. 11-19b). El pandeo ocurre en el plano 2-2. (a) Usando la fórmula de la secante, calcular el esfuerzo de compresión máximo en la columna. (b) Si el esfuerzo de fluencia para el acero es $\sigma_s = 42,000$ psi, ¿cuál es el factor de seguridad con respecto a la fluencia inicial del acero?

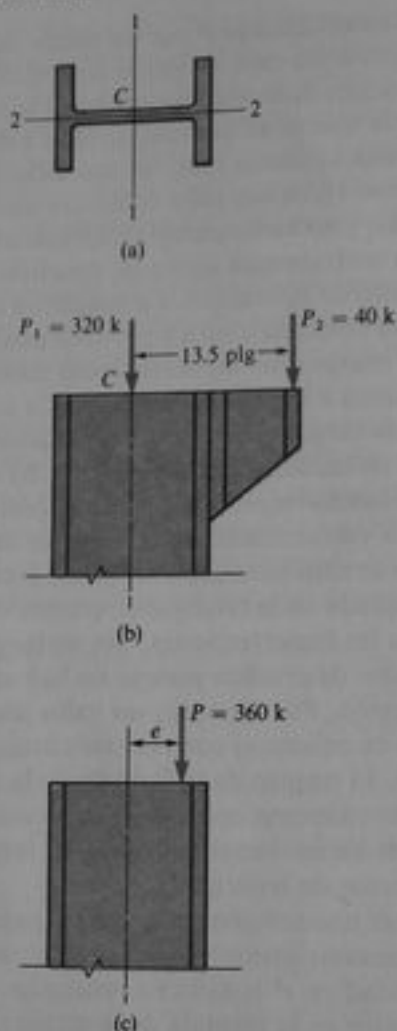


Fig. 11-19 Ejemplo. Utilización de la fórmula de la secante para una columna con cargas axiales excéntricas

(a) Las dos cargas P_1 y P_2 que actúan como se muestra en la Fig. 11-19b son estáticamente equivalentes a una carga simple $P = 360$ k que actúa con una excentricidad $e = 1.5$ plg (Fig. 11-19c). Usando las propiedades de una sección W 14 \times 82 del Apéndice E encontramos

$$\frac{P}{A} = \frac{360 \text{ k}}{24.1 \text{ plg}^2} = 14.94 \text{ ksi} \quad \frac{L}{r} = \frac{25 \text{ pie}}{6.05 \text{ plg}} = 49.59$$

$$\frac{ec}{r^2} = \frac{eA}{S} = \frac{(1.5 \text{ plg})(24.1 \text{ plg}^2)}{123 \text{ plg}^3} = 0.2939$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la secante, y usando también $E = 30 \times 10^3$ ksi, obtenemos

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] = 20.10 \text{ ksi}$$

Luego, este esfuerzo es el mayor esfuerzo de compresión en la columna.

(b) Se pretende determinar ahora la carga P que llevará al esfuerzo máximo por encima del esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 42$ ksi. Dado que este valor de la carga basta para producir la fluencia inicial del material, lo denotaremos por P_y . Obsérvese que no podemos determinar P_y multiplicando P por la relación $\sigma_y/\sigma_{m\acute{a}x}$; la causa por supuesto es que se trata de una relación no lineal entre la carga y el esfuerzo. En lugar de ello, se sustituye $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_y = 42$ ksi en la fórmula de la secante y se resuelve mediante prueba y error para la carga correspondiente P_y . Luego, tenemos que encontrar el valor de P , que satisface la siguiente ecuación:

$$42 \text{ ksi} = \frac{P_y}{24.1 \text{ plg}^2} \left[1 + 0.2939 \sec \left(24.79 \sqrt{\frac{P_y}{(30,000 \text{ ksi})(24.1 \text{ plg}^2)}} \right) \right]$$

o sea

$$1012 = P_y [1 + 0.2939 \sec(0.02915\sqrt{P_y})]$$

en la cual P_y tiene unidades de kips. El resultado es

$$P_y = 716 \text{ k}$$

Dado que la carga real P es 360 k, obtenemos

$$n = \frac{P_y}{P} = \frac{716 \text{ k}}{360 \text{ k}} = 1.99$$

como el factor de seguridad con respecto a la fluencia de la columna.

*11.6 IMPERFECCIONES EN COLUMNAS

En la explicación al final de la sección anterior describimos cómo cuantificar los efectos de las imperfecciones en la construcción de la columna y las excentricidades en la línea de aplicación de la carga mediante la fórmula de la secante con un valor supuesto de la relación de excentricidad. Otro procedimiento es suponer que las inexactitudes son equivalentes a una deflexión inicial, o sinusoidal, de la columna. Para una columna con extremos articulados, podemos suponer que la deflexión inicial v_0 de la columna es una semionda de una curva senoidal con deflexión máxima igual a a (Fig. 11-20a):

$$v_0 = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (a)$$

Esta ecuación proporciona una forma inicial que es una buena aproximación de cualquier forma real que pueda experimentar un miembro. El momento flexionante en la columna cuando la carga axial P se aplica centralmente (Fig. 11-20b) resulta entonces

$$M = P(v_0 + v)$$

donde v es la deflexión adicional de la columna debida a la flexión. Esta expresión para M puede sustituirse en la ecuación diferencial de la curva de deflexión, la cual

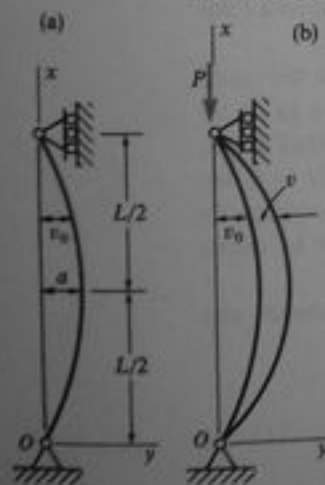


Fig. 11-20
Columna con
deflexión
inicial v_0

puede entonces resolverse en la forma descrita previamente. La expresión resultante para la deflexión a la mitad de la columna es

$$\delta_{\max} = a + v_{\max} = \frac{a}{1 - \alpha} \quad (11-27)$$

donde α es la relación de la carga axial P a la carga crítica para la columna:

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \quad (11-28)$$

La Ec. (11-27) muestra que la carga axial ocasiona que la deflexión inicial de la columna se incremente en un factor $1/(1 - \alpha)$. Como $\alpha < 1$, este factor siempre es mayor que la unidad. Obsérvese que cuando $\alpha = 0$ la deflexión máxima es a , y cuando $\alpha = 1$ la deflexión máxima se vuelve infinitamente grande, como era de esperarse.

El momento flexionante máximo en la columna es

$$M_{\max} = P\delta_{\max} = \frac{Pa}{1 - \alpha} \quad (b)$$

y el esfuerzo de compresión máximo es

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ac}{r^2(1 - \alpha)} \right]$$

en la cual $r^2 = I/A$. Sustituyendo α de la Ec. (11-28), obtenemos

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{\frac{ac}{r^2}}{1 - \frac{P}{\pi^2 EA} \left(\frac{L}{r} \right)^2} \right] \quad (11-29)$$

en la cual ac/r^2 es la **relación de imperfección**. Se procede ahora como con la fórmula de la secante (Sección 11.5) y se asigna un límite sobre el esfuerzo máximo σ_{\max} , de la Ec. (11-29) para calcular el valor correspondiente de P/A para cualquiera relación ac/r^2 dada.

La Ec. (11-29) puede representarse gráficamente en forma similar a la utilizada en la fórmula de la secante. La gráfica de la Ec. (11-29) es casi idéntica a la de tal fórmula (Fig. 11-18) excepto que el término ac/r^2 sustituye a la excentricidad ec/r^2 . Cuando $L/r = 0$, ambas fórmulas dan el mismo valor de P/A . Cuando $L/r > 0$, las curvas obtenidas a partir de la Ec. (11-29) están siempre levemente por encima de las de la fórmula de la secante. Además siempre están por debajo de la curva de Euler (excepto en el caso límite cuando $a = 0$).

Para propósitos de cálculo, la Ec. (11-29) puede replantearse como una ecuación cuadrática con P/A como incógnita:

$$b_1 \left(\frac{P}{A} \right)^2 - b_2 \left(\frac{P}{A} \right) + \sigma_{\max} = 0 \quad (11-30)$$

en la cual

$$b_1 = \frac{1}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \quad b_2 = 1 + \frac{ac}{r^2} + \frac{\sigma_{\max}}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{r} \right)^2$$

Luego, si se conoce σ_{\max} se despeja P/A de la Ec. (11-30). (Úsese el menor de los dos valores obtenidos de la fórmula cuadrática.) Si se conoce P/A , se despeja σ_{\max} de la Ec. (11-29). Desde luego, P debe ser menor que la carga crítica P_{cr} . También, las Ecs. (11-29) y (11-30) sólo son válidas para comportamiento elástico lineal del material.

La deflexión inicial a para columnas usualmente está en el intervalo de $L/1000$ a $L/400$. Si a puede estimarse, entonces puede calcularse ac/r^2 y es posible usar la Ec. (11-29) para obtener el esfuerzo máximo σ_{\max} para cualquier carga dada P . A la inversa, si el esfuerzo máximo está dado, podemos resolver por prueba y error para la carga correspondiente P . (Para estudios adicionales de los efectos de las imperfecciones, véanse las Refs. 11-1, 11-2, 11-8 y 11-12.)

11.7 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO E INELÁSTICO DE COLUMNAS

En las secciones anteriores se estudió el comportamiento de columnas cuando el material satisface la ley de Hooke. Inicialmente se considera una columna ideal sometida a una carga aplicada centralmente, y llegamos al concepto de una carga crítica P_{cr} . El comportamiento de una columna ideal se representa mediante la **curva de Euler** sobre un diagrama de esfuerzo de compresión medio P/A versus la relación de esbeltez L/r (Fig. 11-21). Esta curva sólo es válida en la región CD por debajo del

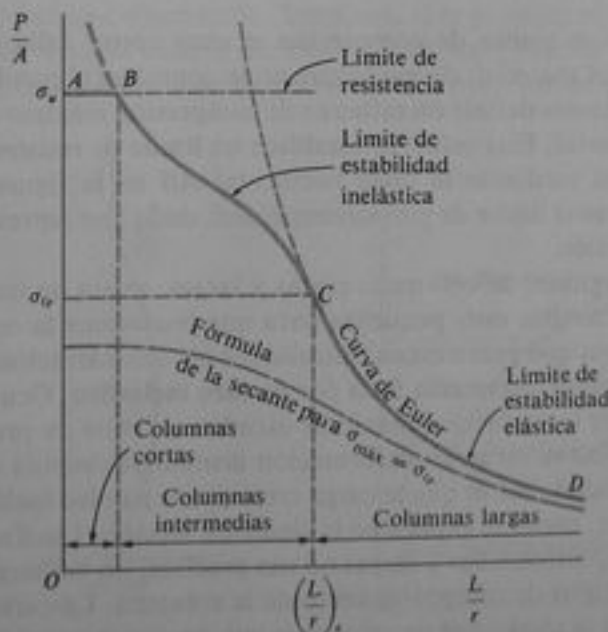


Fig. 11-21 Diagrama de esfuerzo de compresión medio P/A versus relación de esbeltez L/r .

límite de proporcionalidad σ_p del material. El valor de la relación de esbeltez por encima del cual es aplicable la curva de Euler se obtiene asignando σ_c igual a σ_p en la Ec. (11-26) y despejando L/r ; luego, si $(L/r)_c$ representa el valor crítico de la relación de esbeltez, obtenemos

$$\left(\frac{L}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \quad (11-31)$$

Como ejemplo, considérese acero con $\sigma_p = 36$ ksi y $E = 30,000$ ksi; entonces $(L/r)_c = 90.7$.

Si tomamos en cuenta los efectos de las excentricidades en carga o las imperfecciones de la columna y todavía se supone que el material satisface la ley de Hooke, entonces obtenemos una curva tal como la denominada **fórmula de la secante** en la Fig. 11-21. Esta curva está trazada para un esfuerzo máximo igual al límite de proporcionalidad σ_p . Luego, cuando comparamos la curva para la fórmula de la secante con la curva de Euler, se deben tener presentes las diferencias entre ellas. En el caso de la curva de Euler, el esfuerzo P/A no sólo es proporcional a la carga aplicada P sino también es el esfuerzo máximo en la columna cuando ocurre el pandeo. Luego, según nos movemos desde C hasta D , tanto la carga P como el esfuerzo máximo disminuyen en las mismas proporciones. Sin embargo, para la fórmula de la secante, la carga P disminuye según nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la curva, pero el esfuerzo máximo no varía.

De la curva de Euler, se aprecia que las columnas cuya relación de esbeltez es grande se pandean a bajos valores del esfuerzo de compresión P/A . Esta condición no puede evitarse usando un material de alta resistencia, ya que el colapso es por inestabilidad de la columna y no por falla del propio material. El esfuerzo crítico puede incrementarse reduciendo L/r o mediante un material con mayor módulo de elasticidad E .

Cuando un miembro de compresión es muy corto, falla por fluencia o por aplastamiento del material, de modo que no se considera el pandeo o la estabilidad. En tal caso, podemos definir un esfuerzo de compresión máximo σ_u como el esfuerzo de falla del material. Este esfuerzo establece un **límite de resistencia** para la columna, representado mediante la línea horizontal AB en la figura. Este esfuerzo es mucho mayor que el límite de proporcionalidad, dado que representa el esfuerzo último en compresión.

Entre las regiones de columnas cortas y largas, existe un margen de relaciones de esbeltez intermedias muy pequeñas para que predomine la estabilidad elástica y muy grandes para que prevalezcan únicamente las consideraciones de esfuerzo. Tal columna de longitud intermedia falla por **pandeo inelástico**. Ocurre inestabilidad de la columna, pero los esfuerzos máximos exceden el límite de proporcionalidad. La pendiente de la curva esfuerzo-deformación disminuye después de rebasar el límite de proporcionalidad, por lo que la carga crítica para pandeo inelástico es menor que la carga de Euler, como se explica en la siguiente sección. Las líneas divisorias entre columnas largas, intermedias y cortas no son precisas; sin embargo, es útil distinguir entre estos tres tipos de comportamiento de la columna. La curva $ABCD$ de la Fig. 11-21 representa la capacidad de carga máxima de una columna típica. El diagrama es aplicable a columnas con cualesquiera condiciones de apoyo en los extremos si la longitud L se reemplaza por la longitud efectiva L_e .

Las pruebas de columnas muestran una concordancia apropiada con la curva $ABCD$. Cuando los resultados de las pruebas se trazan sobre el diagrama, generalmente forman una banda que queda justo por debajo de la curva $ABCD$. Es de esperarse una gran dispersión en los resultados de las pruebas a columnas, ya que son sensibles a la precisión de construcción, al alineamiento de las cargas y a las condiciones de apoyo. Para cuantificar esta variabilidad, obtenemos los esfuerzos permisibles para una columna dividiendo el esfuerzo máximo (curva $ABCD$) entre un factor de seguridad adecuado, que tiene a menudo un valor aproximado de 2. Como las imperfecciones suelen incrementarse al volverse más larga una columna, a veces se utiliza un factor de seguridad variable (que se incrementa al crecer L/r). En la Sección 11.9 proporcionaremos algunas fórmulas típicas para esfuerzos permisibles.

*11.8 PANDEO INELÁSTICO

La carga crítica (o carga de Euler) para pandeo elástico es válida sólo para columnas largas, según se explicó en la sección anterior. Para columnas ideales, de longitudes intermedias, el esfuerzo en la columna excede el límite de proporcionalidad antes de que se inicie el pandeo (Fig. 11-21). De modo que se requiere una teoría de pandeo inelástico para el cálculo de cargas críticas en este margen de relaciones de esbeltez.

Consideremos nuevamente una columna ideal de extremos articulados sometida a una fuerza axial P (Fig. 11-22a). La columna tiene una relación de esbeltez L/r que es menor que $(L/r)_e$, por lo que el esfuerzo axial P/A alcanza el límite de proporcionalidad antes de que se alcance la carga crítica elástica (véase Fig. 11-21). El diagrama esfuerzo-deformación o compresión para el material de la columna se muestra en la Fig. 11-23. Supongamos que el esfuerzo σ_e en la columna está por encima del límite de proporcionalidad, de tal forma que estamos en un punto como el A sobre el diagrama esfuerzo-deformación. Entonces, si se produce un pequeño incremento en esfuerzo, la relación entre el incremento de la deformación correspondiente está dada por la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación en el punto A . Esta

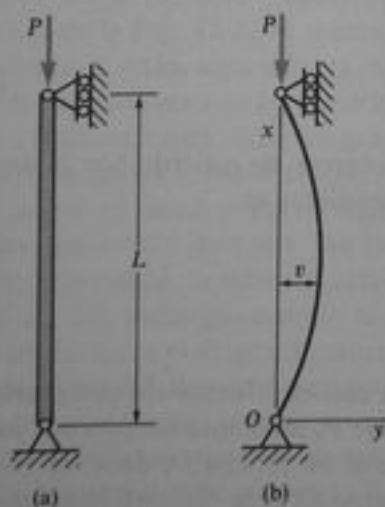


Fig. 11-22 Columna ideal que se pandea inelásticamente

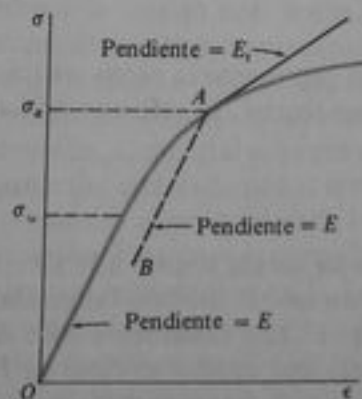


Fig. 11-23 Diagrama esfuerzo-deformación

pendiente, igual a la pendiente de la línea tangente en A , se denomina **módulo tangencial** y se denota por E_t ; luego,

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (11-32)$$

El módulo tangencial es una propiedad variable del material que se reduce según se incrementa el esfuerzo más allá del límite de proporcionalidad. Cuando el esfuerzo está por debajo del límite de proporcionalidad, E_t es el mismo que el módulo de elasticidad E .

De acuerdo con la **teoría del módulo tangencial** de pandeo inelástico, la columna mostrada en la Fig. 11-22a permanece recta hasta que se alcanza la carga crítica. A ese valor de la carga la columna puede experimentar una pequeña deflexión lateral (Fig. 11-22b). Los esfuerzos de flexión resultantes se superponen con los esfuerzos de compresión axiales σ_c . Dado que la columna empieza a flexionarse a partir de la posición recta, los esfuerzos de flexión representan inicialmente sólo un pequeño incremento de esfuerzo. Por lo tanto, la relación entre los esfuerzos y deformaciones por flexión está dada por el módulo tangencial E_t . Dado que las deformaciones varían linealmente a través de la sección, los esfuerzos de flexión iniciales también varían linealmente y las expresiones para la curvatura son las mismas que para flexión elástica excepto que E , reemplaza a E_t :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{E_t I} \quad (11-33)$$

Como el momento flexionante $M = Pv$, la ecuación diferencial de la curva de deflexión es

$$E_t I v'' + Pv = 0 \quad (11-34)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la de la ecuación para pandeo elástico (véase Ec. 11-3) excepto que E_t aparece en lugar de E . Por lo tanto, podemos resolver la ecuación de la misma manera que antes y obtener la siguiente ecuación para la **carga del módulo tangencial**:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (11-35)$$

Esta carga representa la carga crítica para la columna de acuerdo con la teoría del módulo tangencial. El esfuerzo crítico correspondiente es

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (11-36)$$

el cual es de forma similar a la Ec. (11-26).

Puesto que el módulo tangencial E_t varía con el esfuerzo de compresión $\sigma = P/A$ (Fig. 11-23), usualmente debe determinarse P_t mediante un proceso iterativo. Se empieza por estimar el valor de P_t ; este valor de prueba P_1 debe ser levemente mayor que $\sigma_p A$, que es la carga cuando el esfuerzo alcanza el límite de proporcionalidad. Conociendo P_1 , se puede calcular el esfuerzo axial correspondiente $\sigma_1 = P_1/A$ y determinar el módulo tangencial E_t del diagrama esfuerzo-deformación. Ense-

guida se utiliza la Ec. (11-35) para obtener una segunda estimación de P_1 . Se designa P_2 a este valor. Si P_2 es suficientemente cercano a P_1 , entonces se debe tomar la carga P_2 como la carga de módulo tangencial P_1 . Sin embargo, es más factible que se requerirán ciclos de iteración adicionales hasta que se alcance una carga calculada que concuerde estrechamente con la carga de prueba. De esta forma, se obtiene un valor para la carga de módulo tangencial.

En la Fig. 11-24 se muestra un diagrama que señala la forma en que el esfuerzo crítico σ_c , calculado a partir de la carga de módulo tangencial, varía con el radio de esbeltez para una columna metálica representativa. Las fórmulas del módulo tangencial pueden emplearse para columnas con otras condiciones de apoyo usando para L la longitud efectiva L_e .

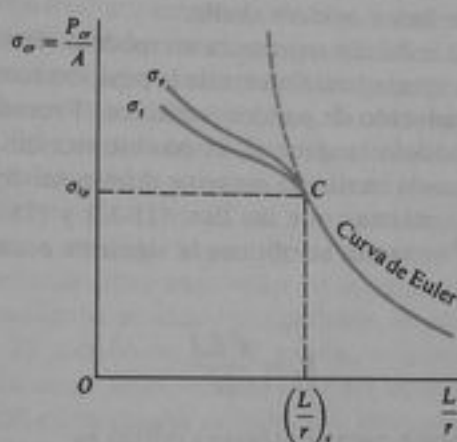


Fig. 11-24 Diagrama de esfuerzo crítico versus relación de esbeltez.

La teoría del módulo tangencial se distingue por su sencillez y fácil aplicación. No obstante, es deficiente conceptualmente ya que no define cabalmente el comportamiento de la columna, como se explica a continuación. Cuando la columna mostrada en la Fig. 11-22 se aparta primero de la posición recta, las fibras sobre el lado cóncavo están sometidas a esfuerzos de compresión por flexión y las fibras sobre el lado convexo están sometidas a esfuerzos de tensión por flexión. Estos esfuerzos se superponen sobre los grandes esfuerzos de compresión preexistentes $\sigma_c = P/A$ en el punto A sobre el diagrama esfuerzo-deformación (Fig. 11-23). Luego, las fibras sobre el lado cóncavo han incrementado sus esfuerzos de compresión, mientras que las del lado convexo los han disminuido. Cuando el esfuerzo en el punto A se incrementa, la relación esfuerzo-deformación está dada por el módulo tangencial E_t . Sin embargo, cuando el esfuerzo se reduce, el material sigue la línea de descarga AB sobre el diagrama esfuerzo-deformación. Esta línea es paralela a la parte lineal inicial del diagrama y su pendiente es igual al módulo elástico E . Luego, durante la flexión inicial, la columna se comporta como si estuviera hecha de dos materiales diferentes, un material de módulo E , sobre el lado cóncavo y un material de módulo E sobre el lado convexo. Puede efectuarse un análisis de flexión de tal columna empleando la teoría para una viga de dos materiales (véase Sección 5.10). Los resultados de tales análisis muestran que la columna se flexiona como si tuviera un

módulo de elasticidad intermedio entre los valores de E y E_r . Este módulo efectivo se conoce como **módulo reducido** E_r , y su valor depende no sólo de la magnitud del esfuerzo (ya que E_r depende de la magnitud del esfuerzo) sino también del perfil de la sección transversal de la columna. Luego, es más difícil determinar E_r que E_r . De modo que no se plantearán aquí fórmulas para E_r , sino, en lugar de ello, se dará como ejemplo un resultado. Si una columna tiene una **sección transversal rectangular**, la ecuación para el módulo reducido es

$$E_r = \frac{4EE_r}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_r})^2} \quad (11-37)$$

En las Refs. 11-1, 11-2 y 11-10 se presentan estudios adicionales del módulo reducido, al cual también se le llama *módulo doble*.

Dado que el módulo reducido representa un módulo efectivo que rige la flexión de la columna cuando se aparta inicialmente de la posición recta, se puede establecer una **teoría del módulo reducido** de pandeo inelástico. Procediendo de igual forma que para la teoría del módulo tangencial, es posible escribir una ecuación para la curvatura y entonces se puede escribir la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Estas ecuaciones son las mismas que las Ecs. (11-33) y (11-34) excepto que aparece E_r en lugar de E_r . Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación para la carga de módulo reducido:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (11-38)$$

La ecuación correspondiente para el esfuerzo crítico es

$$\sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \quad (11-39)$$

Para determinar la carga de módulo reducido P_r , debe emplearse el procedimiento de prueba y error, porque E_r depende de E_r . El esfuerzo crítico de acuerdo con la teoría del módulo reducido se muestra también en la Fig. 11-24. Obsérvese que la curva para σ_r está por encima de la curva para σ_r , porque E_r siempre es mayor que E_r .

La teoría del módulo de elasticidad reducido es difícil de aplicar debido a que E_r depende del perfil de la sección transversal así como de la curva esfuerzo-deformación y debe evaluarse para cada columna particular. (La única excepción es una sección transversal rectangular para la cual se dispone de la Ec. 11-37.) Más aún, esta teoría también presenta un defecto conceptual. A fin de que el módulo de elasticidad reducido E_r sea aplicable, las fibras sobre el lado convexo de la columna deben experimentar una reducción en esfuerzo. Pero tal reducción no puede ocurrir sino hasta que se inicia la flexión. Por lo tanto, la carga P_r aplicada a una columna ideal recta, nunca puede alcanzar la carga de módulo reducido P_r ; para lograr tal carga se requeriría que ya exista flexión, lo cual es una contradicción.

Luego, ni la teoría del módulo tangencial ni la teoría del módulo reducido son adecuadas por sí mismas para explicar el fenómeno de pandeo inelástico, aunque es necesario entender ambas teorías para desarrollar una teoría más completa y lógicamente congruente. Tal teoría fue desarrollada por F. R. Shanley (véase la nota histórica que sigue), y se denomina **teoría de Shanley para pandeo inelástico**. Esta teoría supera las dificultades que enfrentan las teorías de los módulos tangencial y reduci-

do reconociendo que no es posible tener pandeo del tipo Euler cuando la columna se vuelve inelástica. En el pandeo de Euler, se alcanza una carga crítica para la cual la columna está en equilibrio neutro, representado por una línea horizontal sobre el diagrama carga-deflexión (Fig. 11-25). Como ya se explicó, ni la carga de módulo tangencial P_t , ni la carga de módulo reducido P_r , pueden representar este tipo de comportamiento; en ambos casos se llega a contradicciones si se trata de asociar esas cargas con una condición de equilibrio neutro. En lugar de ello se debe considerar qué columna tiene una carga axial siempre creciente. Cuando la carga alcanza P_t , la flexión se inicia *siempre y cuando la carga continúe incrementándose*. En estas condiciones, la flexión ocurre simultáneamente con un incremento en carga, originando una disminución en la deformación sobre el lado convexo de la columna. Luego, el módulo efectivo del material a través de la sección transversal se vuelve mayor que E , y por lo tanto es factible un incremento en carga. Sin embargo, el módulo efectivo no es tan grande como E , ya que E está basado en una deformación revertida completa sobre el lado convexo de la columna. En otras palabras, E se basa en el aumento de deformación invertida que existe si la columna se flexiona sin un cambio en la fuerza axial, mientras que la presencia de una fuerza axial creciente significa que la reducción en deformación no es tan grande. Luego, en lugar de equilibrio neutro, donde la relación entre la carga y la deformación está indefinida, se tiene ahora una relación definida entre cada valor de la carga y la deflexión correspondiente. Este comportamiento se muestra mediante la curva designada *teoría de Shanley* en la Fig. 11-25. Obsérvese que el pandeo empieza en la carga de módulo tangencial; entonces, la carga se incrementa pero no alcanza la carga de módulo reducido hasta que la deflexión resulta infinita. No obstante, según se incrementa la deflexión se vuelven importantes otros efectos, y en realidad la curva finalmente desciende como se indica mediante la línea punteada.

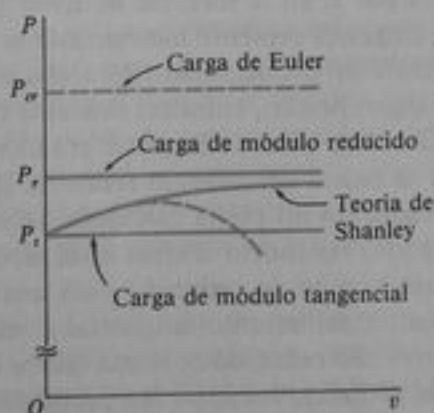


Fig. 11-25 Diagrama carga-deflexión para pandeo elástico e inelástico

El concepto de flexión inelástica de Shanley ha sido verificado por numerosos investigadores y mediante numerosas pruebas. Sin embargo, la carga máxima lograda en columnas reales (véase la curva punteada en la Fig. 11-25) está sólo levemente por encima de la carga de módulo tangencial P_t . Por suerte, la carga de módulo tangencial es muy fácil de calcular y para fines prácticos es conveniente considerar la

carga de módulo tangencial como la carga crítica para pandeo inelástico de una columna.

Las explicaciones anteriores de pandeo elástico e inelástico están basadas en condiciones ideales. Los conceptos teóricos son importantes para entender el comportamiento de columnas, pero el diseño de columnas reales debe tomar en cuenta factores adicionales no considerados en la teoría. Por ejemplo, las columnas de acero siempre contienen esfuerzos residuales, del proceso de laminado. Debido a esos esfuerzos, que varían considerablemente en diversas partes de la sección transversal, el nivel de esfuerzo requerido para producir la fluencia también varía sobre la sección transversal. Por tales motivos, para el diseño de columnas se utilizan una gran variedad de fórmulas de diseño empíricas. En la siguiente sección se incluyen algunas de las fórmulas de uso más común.

Nota histórica. Las fórmulas de carga crítica para pandeo elástico se originaron con Euler en 1744, como se explicó en la nota a la Ref. 11-3. Durante siglos sólo se hicieron progresos adicionales muy pequeños. Entonces, en 1845, A. H. E. Lamarle apuntó que la fórmula de Euler debía emplearse sólo para relaciones de esbeltez más allá de cierto límite y que los datos experimentales debían aplicarse en relaciones pequeñas (Ref. 11-13). En 1889, el ingeniero francés A. Considère realizó una serie de 32 pruebas sobre columnas (Ref. 11-14). Él observó que los esfuerzos sobre el lado cóncavo de la columna se incrementaban con E , y los esfuerzos sobre el lado convexo se reducían con E . Luego señaló por qué la fórmula de Euler no era aplicable a pandeo inelástico, y estableció que el módulo efectivo estaba entre E y E_r . Aunque no pretendía evaluar el módulo efectivo, es responsable de establecer la teoría del módulo reducido. En el mismo año, y en forma completamente independiente, el ingeniero alemán F. Engesser sugirió la teoría del módulo tangencial (Ref. 11-15). Él designó el módulo tangencial mediante el símbolo T (igual a $d\sigma/d\epsilon$) y propuso que T se sustituyera por E en la fórmula de Euler para la carga crítica. Más tarde, en marzo de 1895, Engesser presentó nuevamente la teoría del módulo tangencial (Ref. 11-16), obviamente sin conocimiento del trabajo de Considère. Tres meses después F. Jasinsky, de origen polaco, entonces profesor en San Petersburgo, apuntó que la teoría del módulo tangencial de Engesser era incorrecta, destacó el trabajo de Considère y presentó la teoría del módulo reducido (Ref. 11-17). Él estableció también que el módulo reducido no podía calcularse teóricamente. En respuesta y sólo un mes después, Engesser reconoció el error en el módulo tangencial aproximado y señaló cómo obtener el módulo reducido para cualquier sección transversal (Ref. 11-18). Luego, la teoría del módulo tangencial a veces se denomina *teoría de Engesser* y la teoría del módulo reducido se llama *teoría de Considère-Engesser*.

La teoría del módulo reducido también fue propuesta por el célebre científico Theodore von Kármán en 1908 y 1910 (Refs. 11-19 y 11-20), en apariencia independientemente de las investigaciones anteriores. En la última publicación, él obtuvo fórmulas para E_r para secciones rectangulares y de patín ancho idealizadas (esto es, sin alma). Amplió su teoría para incluir los efectos de las excentricidades sobre la carga de pandeo, y mostró que la carga máxima se reduce rápidamente según se incrementa la excentricidad. El investigador en elasticidad inglés R. V. Southwell presentó también la teoría del módulo de elasticidad reducido. En una publicación en 1912 (Ref. 11-22), obtuvo la teoría pero usó una longitud modificada para la columna en lugar de un módulo reducido para el material. Su trabajo parece ser inde-

pendiente de los otros, aunque los conceptos básicos son los mismos. La teoría del módulo reducido fue la teoría de pandeo inelástico aceptada hasta 1946, cuando el profesor e ingeniero aeronáutico estadounidense F. R. Shanley señaló las paradojas lógicas de ambas teorías. En una notable divulgación científica de sólo una página (Ref. 11-23), Shanley no sólo explicó el error de las teorías generalmente aceptadas sino también propuso su propia teoría que resolvió las paradojas. En un segundo informe, cinco meses después suministró análisis adicionales para apoyar su teoría inicial y proporcionó resultados de pruebas sobre columnas (Ref. 11-24). Otros investigadores han confirmado y ampliado el concepto de Shanley (Refs. 11-25 a 11-31). El fundamento de las teorías de pandeo inelástico se describe en las Refs. 11-1, 11-2 y 11-8. Para estudios del problema de pandeo de columnas, véase la detallada divulgación realizada por Hoff (Refs. 11-6 y 11-32); y para una reseña histórica, véase la publicación por Johnston (Ref. 11-7).

11.9 FÓRMULAS DE DISEÑO PARA COLUMNAS

En las secciones anteriores se trató la capacidad de carga de columnas basada únicamente en consideraciones teóricas. El siguiente paso es determinar las cargas permisibles sobre columnas considerando no sólo los resultados teóricos, sino también el comportamiento de columnas reales observado en pruebas de laboratorio. Un procedimiento común es emplear fórmulas de diseño empíricas que se ajusten a los datos de pruebas del comportamiento de columnas en el margen inelástico (bajos valores de la relación de esbeltez) y usar la fórmula de Euler para la carga crítica en el margen elástico (altos valores de la relación de esbeltez). Para obtener cargas permisibles a partir de las cargas máximas debe aplicarse un factor de seguridad (o bien para obtener los esfuerzos permisibles a partir de los esfuerzos máximos). El uso de fórmulas de diseño empíricas es completamente satisfactorio dentro de límites para los cuales han sido establecidas, a partir de datos experimentales. Luego, deben observarse las siguientes restricciones cuando se use una fórmula para el diseño de columnas: (1) La fórmula sólo es válida para un material determinado. (2) La fórmula sólo es válida para un margen especificado de relaciones de esbeltez. (3) La fórmula puede especificar el esfuerzo permisible o puede especificar el esfuerzo máximo; en este último caso, debe aplicarse un factor de seguridad para obtener el esfuerzo permisible.

Los siguientes ejemplos de fórmulas de diseño para columnas son aplicables a columnas cargadas centralmente. Por supuesto, muchos otros factores, además de los aquí explicados, intervienen en el diseño de columnas, por lo que deben consultarse otras referencias antes de diseñar una columna para una aplicación específica.

El diseño de columnas mediante estas fórmulas implica cálculos de prueba y error. Conociendo la carga axial de compresión empezamos por estimar el esfuerzo permisible σ_{perm} y calcular aproximadamente el área de sección transversal requerida. Entonces se selecciona una sección a partir de tablas adecuadas. Esta sección se verifica mediante las fórmulas de diseño apropiadas para comprobar si es adecuada para soportar la carga. Si no lo es, se selecciona una sección mayor y se repite el proceso; si la sección aparenta estar sobrediseñada, se selecciona y verifica una sección más pequeña.

Acero estructural. Para el diseño de columnas de acero estructural cargadas centralmente, el Structural Stability Research Council (SSRC) propuso fórmulas de diseño que actualmente son de uso común.* La fórmulas SSRC proporcionan el esfuerzo máximo o el esfuerzo crítico en la columna (esto es, el esfuerzo obtenido dividiendo la carga máxima supuesta que puede soportar la columna entre el área de la sección transversal).

Cuando la relación de esbeltez L/r es grande, el esfuerzo máximo se basa en la carga de Euler:

$$\sigma_{\max} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (a)$$

en donde se emplea la longitud efectiva KL (véanse Ecs. 11-14 y 11-15) a fin de que la fórmula pueda ser aplicable a una gran variedad de condiciones de apoyo. La Ec. (a) es válida sólo cuando los esfuerzos en la columna no exceden el límite de proporcionalidad σ_{ip} , según se refirió previamente (véase Fig. 11-21). Para acero estructural, normalmente suponemos que el límite de proporcionalidad es igual al esfuerzo de fluencia σ_y . Sin embargo, las secciones laminadas (tales como secciones de patin ancho) tienen grandes esfuerzos residuales en ellas; los esfuerzos residuales de compresión pueden ser tan grandes como la mitad del esfuerzo de fluencia. Luego, para tales columnas el límite de proporcionalidad es

$$\sigma_{ip} = \sigma_y - \sigma_{rc} = 0.5\sigma_y \quad (b)$$

en donde σ_{rc} representa los esfuerzos residuales de compresión en la columna y se supone igual a $0.5\sigma_y$.

Para determinar la relación de esbeltez mínima para la cual es aplicable la Ec. (a), se hace σ_{\max} igual a σ_{ip} (Ec. b) y se despeja el valor correspondiente de KL/r , denotado por $(KL/r)_c$:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (11-40)$$

Si la relación de esbeltez efectiva es mayor o igual que $(KL/r)_c$, puede utilizarse la fórmula de Euler para el esfuerzo crítico (Ec. a). Esta ecuación se expresa en forma adimensional conveniente dividiendo entre el esfuerzo de fluencia σ_y y además sustituyendo la Ec. (11-40):

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y \left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)_c^2}{2 \left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-41)$$

Esta ecuación se grafica en la Fig. 11-26, designada como *curva de Euler*.

* El Structural Stability Research Council (Consejo de Estabilidad Estructural) se fundó en 1944 como el Column Research Council (CRC). Publicó la *Guía para criterios de estabilidad y diseño para estructuras metálicas* (Ref. 11-8), el cual debe ser consultado por cualquier diseñador de columnas metálicas.

Para la región de pandeo inelástico, esto es, la región donde $KL/r \leq (KL/r)_c$, el esfuerzo máximo se representa mediante una curva parabólica:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_y} = 1 - \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2\left(\frac{KL}{r}\right)_c^2} \quad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-42)$$

Esta fórmula empírica también se grafica en la Fig. 11-26. La curva tiene una tangente horizontal en $KL/r = 0$, en donde el esfuerzo máximo es igual a σ_y . Para $KL/r = (KL/r)_c$, la curva se une con la de Euler (ambas curvas tienen la misma pendiente en el punto donde se conectan).

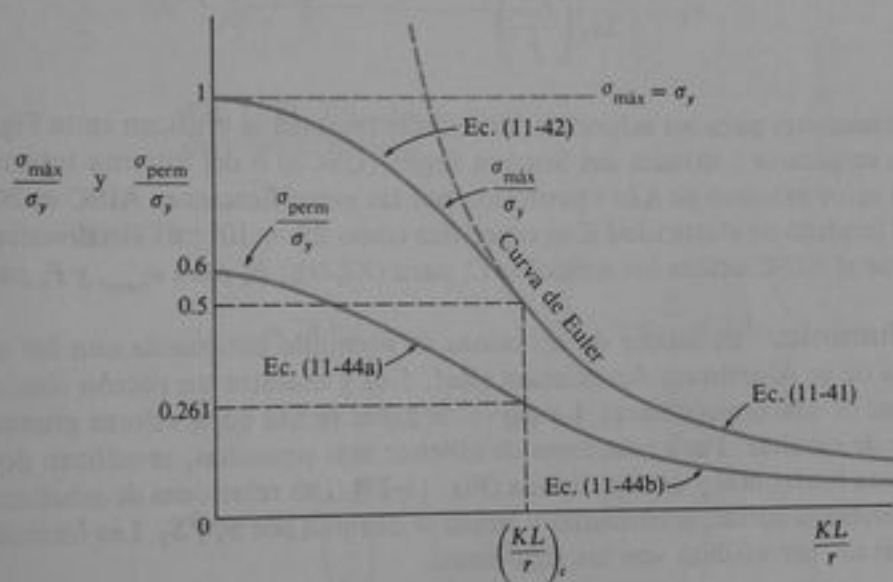


Fig. 11-26 Fórmulas de diseño para columnas de acero estructural

El AISC (American Institute of Steel Construction), una organización que establece especificaciones para diseño de acero estructural, ha adoptado las fórmulas para σ_{\max} propuestas por el SSRC.* Para determinar esfuerzos permisibles, el AISC especifica que los esfuerzos máximos se dividen entre los siguientes factores de seguridad:

$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3\left(\frac{KL}{r}\right)}{8\left(\frac{KL}{r}\right)_c} - \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^3}{8\left(\frac{KL}{r}\right)_c^3} \quad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-43a)$$

$$n_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92 \quad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-43b)$$

* Las especificaciones del AISC se indican en la Ref. 5-5.

Luego, el factor de seguridad es $5/3$ cuando $KL/r = 0$ y se incrementa gradualmente hasta $23/12$ cuando $KL/r = (KL/r)_c$. Para relaciones de esbeltez mayores, el factor de seguridad permanece constante en tal valor. Las fórmulas AISC para los esfuerzos permisibles se obtienen dividiendo los esfuerzos máximos σ_{\max} entre los factores de seguridad apropiados; luego,

$$\frac{\sigma_{\text{perm}}}{\sigma_y} = \frac{1}{n_1} \left[1 - \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}{2\left(\frac{KL}{r}\right)_c^2} \right] \quad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-44a)$$

$$\frac{\sigma_{\text{perm}}}{\sigma_y} = \frac{\left(\frac{KL}{r}\right)_c^2}{2n_2\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \quad (11-44b)$$

Estas ecuaciones para los esfuerzos permisibles también se grafican en la Fig. 11-26. Pueden emplearse unidades del Sistema Inglés (USCS) o del Sistema Internacional (SI). El valor máximo de KL/r permitido por las especificaciones AISC es 200; también, el módulo de elasticidad E se especifica como 29×10^6 psi. Finalmente, se observa que el AISC utiliza los símbolos C_c para $(KL/r)_c$, F_c para σ_{perm} , y F_y para σ_y .

Aluminio. El diseño de columnas de aluminio concuerda con las especificaciones de la Aluminum Association (Ref. 5-6) y muestra un patrón similar al de columnas de acero estructural. La curva de Euler se usa para valores grandes de la relación de esbeltez. Para relaciones de esbeltez más pequeñas, se utilizan dos líneas rectas; una horizontal y otra inclinada (Fig. 11-27). Las relaciones de esbeltez que separan columnas cortas, intermedias y largas se denotan por S_1 y S_2 . Las fórmulas para los esfuerzos permisibles son las siguientes:

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_y}{k_c n_y} \quad 0 \leq \frac{L}{r} \leq S_1 \quad (11-45a)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{1}{n_u} \left(B_c - D_c \frac{L}{r} \right) \quad S_1 \leq \frac{L}{r} \leq S_2 \quad (11-45b)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\pi^2 E}{n_u \left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad S_2 \leq \frac{L}{r} \quad (11-45c)$$

En estas ecuaciones, la longitud L se define como la distancia entre puntos de soporte lateral, o como el doble de la longitud de una columna en voladizo. Luego, L puede interpretarse como la longitud efectiva. El esfuerzo σ_y es el esfuerzo de fluencia a compresión (0.2% de desviación), k_c es una constante, n_y es el factor de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia, n_u es el factor de seguridad con respecto al esfuerzo último y B_c , D_c , S_1 y S_2 son constantes. Los valores de estas cantidades varían de acuerdo con la aleación, temple y uso. Se dispone de numerosas aleaciones de aluminio con diversos temples, de tal forma que la Aluminum Association proporciona tablas de las diferentes constantes de acuerdo con el material. Como

ejemplos, las siguientes son algunas fórmulas típicas para las aleaciones usadas en edificios y estructuras similares

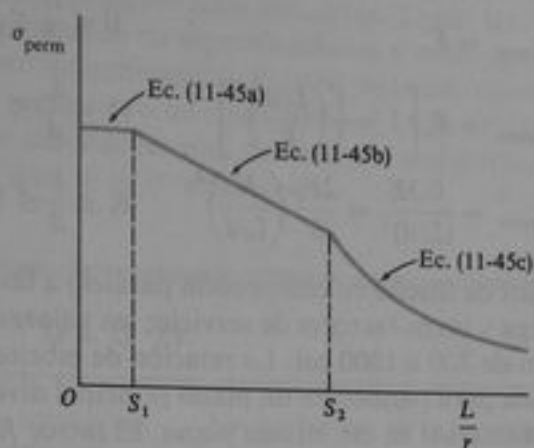


Fig. 11-27 Fórmulas de diseño para columnas de aluminio

1. Aleación 2014-T6

$$\sigma_{\text{perm}} = 28 \text{ ksi} \quad 0 \leq \frac{L}{r} \leq 12 \quad (11-46a)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = 30.7 - 0.23 \left(\frac{L}{r} \right) \text{ ksi} \quad 12 \leq \frac{L}{r} \leq 55 \quad (11-46b)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{54,000 \text{ ksi}}{\left(\frac{L}{r} \right)^2} \quad 55 \leq \frac{L}{r} \quad (11-46c)$$

2. Aleación 6061-T6

$$\sigma_{\text{perm}} = 19 \text{ ksi} \quad 0 \leq \frac{L}{r} \leq 9.5 \quad (11-47a)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = 20.2 - 0.126 \left(\frac{L}{r} \right) \text{ ksi} \quad 9.5 \leq \frac{L}{r} \leq 66 \quad (11-47b)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{51,000 \text{ ksi}}{\left(\frac{L}{r} \right)^2} \quad 66 \leq \frac{L}{r} \quad (11-47c)$$

Estas fórmulas proporcionan los esfuerzos permisibles, por lo que incluyen los factores de seguridad, que varían desde 1.65 hasta 2.20.

Madera. El diseño de miembros estructurales de madera, se rige por la *National Design Specification for Wood Construction*, publicada por la National Forest Products Association (Ref. 5-8). Las fórmulas para los esfuerzos permisibles en

columnas rectangulares de madera, para columnas cortas, intermedias y largas son las siguientes:

$$\sigma_{perm} = F_c \quad 0 \leq \frac{L}{d} \leq 11 \quad (11-48a)$$

$$\sigma_{perm} = F_c \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/d}{K} \right)^4 \right] \quad 11 < \frac{L}{d} \leq K \quad (11-48b)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{0.3E}{(L/d)^2} = \frac{2F_c}{3} \left(\frac{K}{L/d} \right)^2 \quad K \leq \frac{L}{d} \leq 50 \quad (11-48c)$$

El esfuerzo F_c es el valor de diseño en compresión paralelo a las fibras y modificado por la duración de carga y otros factores de servicio; los valores comunes de F_c para madera estructural son de 700 a 1800 psi. La relación de esbeltez L/d es la longitud efectiva L de la columna para pandeo en un plano principal dividida entre la dimensión d de la sección transversal en ese mismo plano. El factor K es la relación de esbeltez que separa las columnas intermedias de las columnas largas:

$$K = \sqrt{\frac{0.45E}{F_c}} \quad (11-49)$$

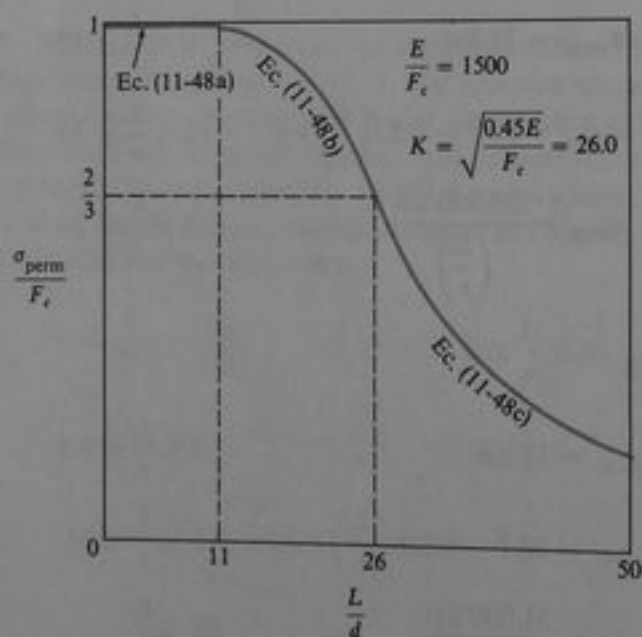


Fig. 11-28 Fórmulas de diseño para columnas rectangulares de madera con $E/F_c = 1500$

Los valores de K usualmente son de 18 a 30. El módulo de elasticidad E , como el esfuerzo de compresión F_c , varían con los tipos y el grado, pero los valores típicos están en el intervalo de 1×10^6 a 1.8×10^6 psi. En la Fig. 11-28 se muestra una gráfica de las Ecs. (11-48a, b y c) para $E/F_c = 1500$. En las Ecs. (11-48) pueden utilizarse unidades USCS o SI.

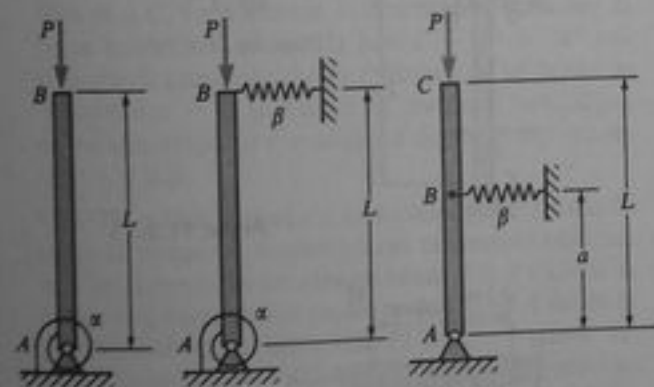
Las fórmulas para columnas de acero, aluminio y madera indicadas en esta sección se aplican en la solución de problemas, pero no deben emplearlas personas inexpertas para el diseño de columnas reales, porque representan sólo una pequeña parte de todo el proceso de diseño para columnas. Todas las fórmulas de diseño establecidas en los reglamentos de especificaciones y construcción requieren para su uso un criterio bien documentado. Existen muchos casos de estructuras que "cumplieron con el reglamento de construcción" y no obstante se derrumbaron o fallaron en funcionar adecuadamente. Además, los códigos especifican muchas limitaciones adicionales que no se describen aquí.

PROBLEMAS / CAPÍTULO 11

Los problemas de la Sección 11.1 deben resolverse aplicando las suposiciones de que las barras son rígidas, los resortes son elásticos y las deflexiones y ángulos de rotación son pequeños.

11.1-1 Determinar la carga crítica P_{cr} para el sistema barra-resorte mostrado en la figura. La barra está libre en B y apoyada en A por un resorte torsional de rigidez α ; esto es, $M = \alpha\theta$ en donde M es el momento que actúa sobre el resorte y θ es el ángulo de rotación.

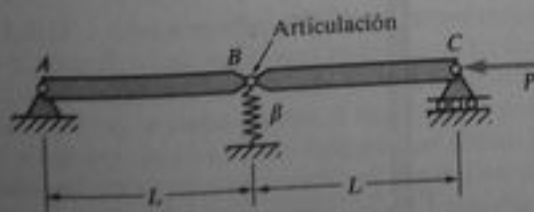
11.1-2, 11.1-3, 11.1-4 y 11.1-5 Determinar la carga crítica P_{cr} para el sistema barra-resorte mostrado en la figura.



Prob. 11.1-1

Prob. 11.1-2

Prob. 11.1-3



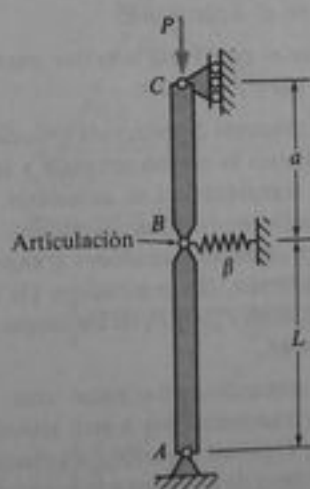
Prob. 11.1-4

Los problemas de la Sección 11.2 deben resolverse aplicando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas prismáticas y elásticas. El pandeo ocurre en el plano de la figura a menos que se indique otra cosa.

11.2-1 Calcular la carga crítica para una columna de acero W 10 x 45 que tiene una longitud $L = 14$ pie y $E = 30 \times 10^6$ psi. Suponer que la columna tiene extremos articulados y puede pandearse en cualquier dirección.

11.2-2 Resolver el problema anterior para una columna de acero W 12 x 87 con una longitud $L = 24$ pie.

11.2-3 Una columna de extremos articulados soporta una carga axial $P = 230$ k con un factor de seguridad $n = 2.5$ con respecto al pandeo. La columna



Prob. 11.1-5

tiene una longitud $L = 14$ pie y puede pandearse en cualquier dirección. Seleccionar de la Tabla E-1 en el Apéndice E, la sección de acero de patín ancho más ligera ($E = 30 \times 10^6$ psi) que soportará la carga.

11.2-4 Resolver el problema anterior para una columna con $P = 280$ k y $L = 16$ pie.

11.2-5 Un puntal de aluminio de extremos articulados ($E = 73$ GPa) con longitud $L = 2$ m se construye con un tubo circular de diámetro exterior $d = 50$ mm. El puntal debe resistir una carga axial $P = 14$ kN con un factor de seguridad $n = 2$ con respecto al pandeo. Determinar el espesor requerido t del tubo.

11.2-6 Resolver el problema anterior para una sección tubular de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) con longitud $L = 24$ pie, diámetro exterior $d = 5.5$ plg y $P = 28$ k.

11.2-7 La sección transversal de una columna construida con dos vigas I de acero (S 6 \times 12.5) se muestra en la figura. Las secciones están conectadas mediante barras espaciadoras (representadas mediante líneas punteadas) para asegurar que actúan juntas como una simple columna. La columna tiene extremos articulados y puede pandearse en cualquier dirección. Suponiendo $E = 30 \times 10^6$ psi y $L = 13$ pie, calcular la carga crítica P_{cr} para la columna.

11.2-8 Una sección angular de brazos iguales de longitud $L = 10$ pie se usa como puntal de extremos articulados. El ángulo está apoyado sólo en los extremos, por lo que puede pandearse en cualquier dirección. La carga axial sobre el ángulo es $P = 18$ k y se requiere un factor de seguridad $n = 2.5$ respecto al pandeo. Seleccionar la sección angular de acero más ligera ($E = 30 \times 10^6$ psi) que sea satisfactoria a partir de la Tabla E-4 en el Apéndice E.

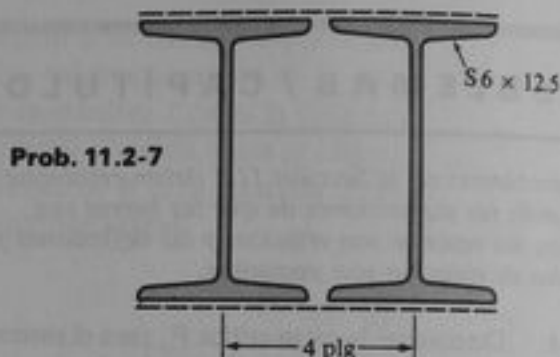
11.2-9 Resolver el problema anterior para un ángulo con $L = 8$ pie y $P = 20$ k.

11.2-10 Tres columnas de extremos articulados del mismo material tienen la misma longitud y la misma área de sección transversal. Las columnas pueden pandearse libremente en cualquier dirección. Las columnas tienen las siguientes secciones transversales: (1) triángulo equilátero, (2) cuadrado y (3) círculo. Determinar las razones $P_1:P_2:P_3$ de las cargas críticas para estas columnas.

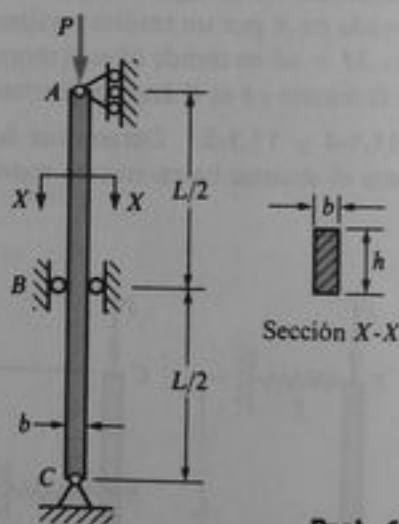
11.2-11 Una columna rectangular con dimensiones de sección transversal b y h está articulada en los extremos A y C (véase figura). La columna está restringida en el plano de la figura a la mitad de su altura, pero puede deformarse libremente en el plano perpendicular al de la figura (excepto en los extremos

A y C). Determinar la relación h/b tal que la carga crítica sea la misma para el pandeo en los dos planos principales de la columna.

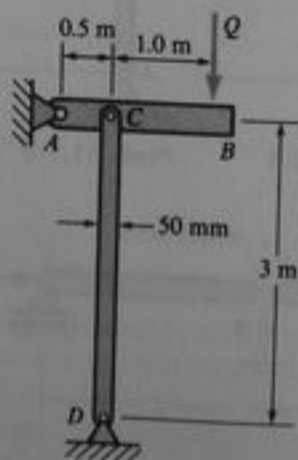
11.2-12 Una barra horizontal AB está soportada por una columna de extremos articulados CD como se muestra en la figura. La columna es una barra de acero ($E = 200$ GPa) de sección transversal cuadrada (50 mm de cada lado). Calcular la carga permisible Q si el factor de seguridad con respecto al pandeo de la columna es $n = 3$.



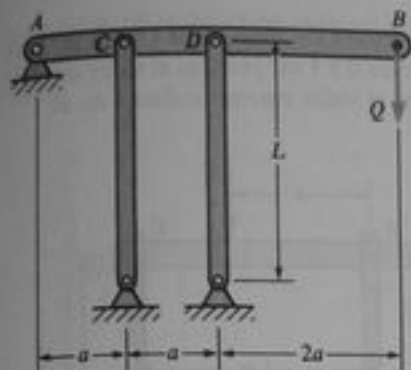
Prob. 11.2-7



Prob. 11.2-11



Prob. 11.2-12



Prob. 11.2-13

11.2-13 Una barra horizontal AB está articulada en el extremo A y soporta una carga Q en el extremo B , como se muestra en la figura. Está apoyada en C y D mediante dos columnas idénticas de extremos articulados de longitud L . Cada columna tiene una rigidez a flexión EI . ¿Para qué carga Q se colapsa el sistema por pandeo de las columnas?

11.2-14 Una barra esbelta AB con extremos articulados se retiene entre soportes inmóviles (véase figura). ¿Qué incremento de temperatura ΔT en la barra producirá pandeo?

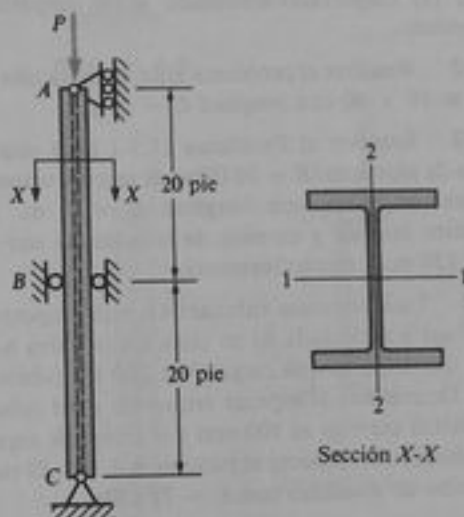
11.2-15 Una columna larga y esbelta ABC está articulada en los extremos A y C y comprimida por una fuerza axial P (véase figura). En el punto medio B , se tiene un soporte lateral para evitar deflexión en el plano de la figura. Sin embargo, la deflexión en el plano perpendicular a la figura se impide sólo en los extremos A y C . La columna es una sección de acero de patín ancho ($w 14 \times 82$) con $E = 30 \times 10^6$ psi. Calcular la carga permisible P utilizando un factor de seguridad $n = 2$, tomando en cuenta la posibilidad de pandeo respecto a cualquiera de los ejes principales 1-1 o 2-2.

11.2-16 Una armadura articulada ABC (véase figura) se compone de dos barras del mismo material con secciones transversales idénticas. En el nudo B se aplica una carga P que presenta un ángulo θ desde la prolongación de la línea AB . El ángulo θ puede variarse desde 0 hasta 90° . Suponiendo que el colapso ocurre por pandeo de las barras, obtener una fórmula para el ángulo θ tal que la carga P sea máxima.

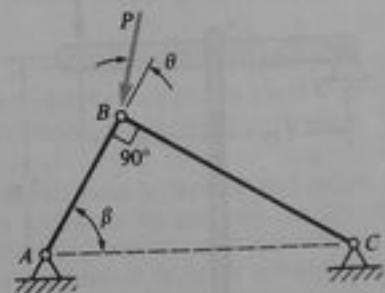
* 11.2-17 Una armadura ABC soporta una carga W en el nudo B , como se muestra en la figura. La longitud L_1 del miembro AB es fija pero la longitud del puntal BC varía según cambia el ángulo θ . El puntal BC tiene una sección transversal circular sólida. Suponiendo que el colapso ocurre por pandeo del puntal, determinar el ángulo θ para un peso mínimo del puntal.



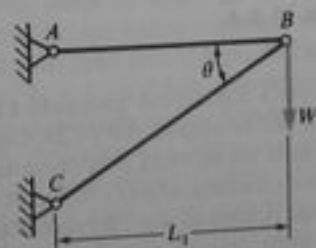
Prob. 11.2-14



Prob. 11.2-15



Prob. 11.2-16



Prob. 11.2-17

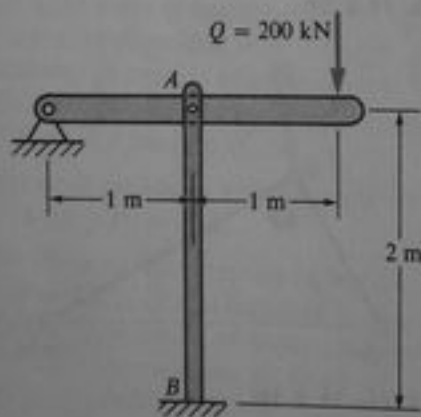
Los problemas para la Sección 11.3 deben resolverse aplicando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y elásticas. El pandeo ocurre en el plano de la figura a menos que se indique lo contrario.

11.3-1 Una columna de acero de patin ancho ($E = 30 \times 10^6$ psi) de perfil W 12 \times 87 tiene una longitud $L = 30$ pie. Está soportada únicamente en los extremos y puede pandearse en cualquier dirección. Calcular la carga crítica P_{cr} para las siguientes condiciones de apoyo: (1) articulado-articulado, (2) empotrado-libre, (3) empotrado-articulado y (4) empotrado-empotrado.

11.3-2 Resolver el problema anterior para una sección W 10 \times 60 con longitud $L = 25$ pie.

11.3-3 Resolver el Problema 11.3-1 para una columna de aluminio ($E = 70$ GPa) de sección transversal circular hueca con longitud $L = 3$ m. Los diámetros interior y exterior de la columna son 130 mm y 150 mm, respectivamente.

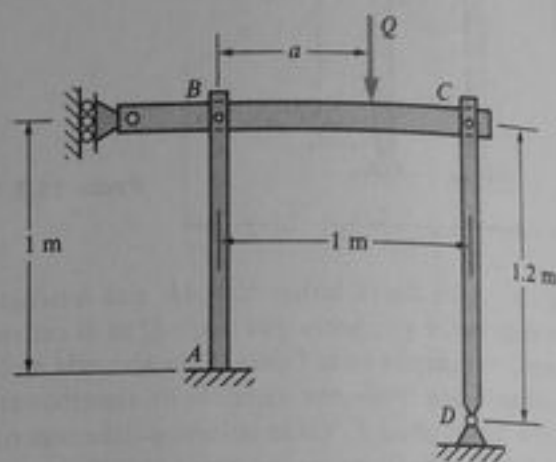
11.3-4 Una columna tubular AB está empotrada en su base y articulada en su cima a una barra horizontal que soporta una carga $Q = 200$ kN (véase figura). Determinar el espesor requerido t del tubo si su diámetro exterior es 100 mm y el factor de seguridad deseado con respecto al pandeo es $n = 3$. El tubo está hecho de aluminio con $E = 72$ GPa.



Prob. 11.3-4

11.3-5 La barra horizontal mostrada en la figura está soportada por columnas AB y CD . Cada columna está articulada en su cima a la barra horizontal, pero el apoyo A está empotrado y el apoyo D está articulado. Ambas columnas son barras sólidas de acero ($E = 200$ GPa) de sección transversal cuadrada con un ancho igual a 15 mm. (a) Si la distancia $a = 0.4$

m, ¿cuál es el valor crítico de la carga Q ? (b) Si la distancia a varía entre 0 y 1 m, ¿cuál es el valor máximo de Q_{cr} ? ¿Cuál es el valor correspondiente de a ?



Prob. 11.3-5

11.3-6 Determinar la carga crítica P_{cr} y la ecuación de la forma modal de pandeo para una columna con extremos empotrados (véase Fig. 11-13) resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

***11.3-7** Resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión, obtener la siguiente ecuación de pandeo para una columna que está empotrada en la base y apoyada en su cima por un resorte elástico lineal de rigidez β (véase figura):

$$\tan kL - kL + k^3 L^3 \left(\frac{EI}{\beta L^3} \right) = 0$$

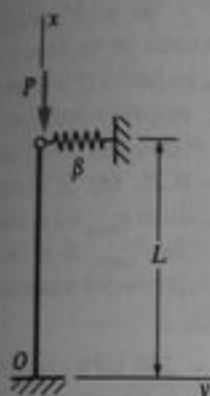
Para el caso particular de $\beta = 3EI/L^3$, calcular la carga crítica P_{cr} .

Los problemas para la Sección 11.4 son para resolverse aplicando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y elásticas. La flexión ocurre en el plano de la figura a menos que se especifique lo contrario.

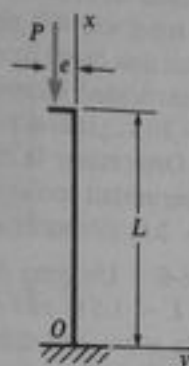
11.4-1 Obtener la ecuación para el momento flexionante M en la columna con cargas axiales excéntricas mostrada en la Fig. 11-15b. Enseguida trazar un diagrama de momento flexionante para la columna con una carga axial $P = 0.25 P_{cr}$.

11.4-2 La columna mostrada en la figura está empotrada en su base y libre en su extremo superior. En la cima de la columna actúa una carga de compresión P con una excentricidad e desde el eje de la columna. Empezando con la ecuación diferencial, obtener fór-

más para: (a) la deflexión máxima δ de la columna y (b) el momento flexionante máximo M_{\max} en la columna.



Prob. 11.3-7



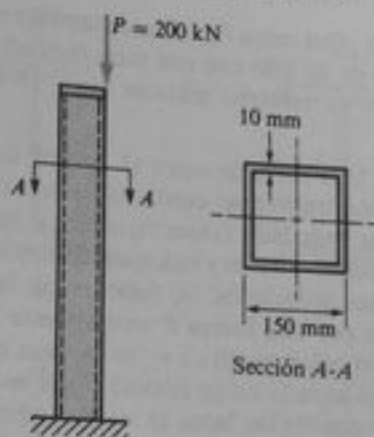
Prob. 11.4-2

11.4-3 Una barra de acero de sección transversal cuadrada (50 mm \times 50 mm) y longitud $L = 2$ m se comprime excéntricamente mediante cargas axiales $P = 60$ kN (véase Fig. 11-15a). Las fuerzas se aplican sobre la orilla de la sección transversal a la mitad de un lado. Calcular la deflexión δ de la barra y el momento flexionante máximo M_{\max} , suponiendo $E = 210$ GPa.

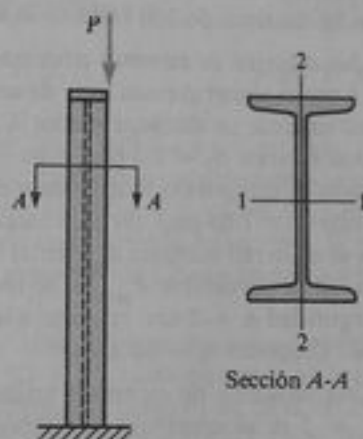
11.4-4 Una barra de aluminio de sección transversal rectangular (30 mm \times 60 mm) y longitud $L = 1.0$ m se comprime excéntricamente mediante cargas axiales $P = 15$ kN (véase Fig. 11-15a). Las fuerzas se aplican a la mitad de la orilla más larga de la sección transversal. Calcular la deflexión máxima δ de la barra y el momento flexionante máximo M_{\max} , suponiendo $E = 70$ GPa.

11.4-5 Una columna hueca tipo cajón, de aluminio, con sección transversal cuadrada está empotrada en la base y libre en la cima (véase figura). Una carga $P = 200$ kN actúa sobre la orilla externa de la columna en el punto medio de un lado. ¿Cuál es la mayor longitud L que puede tener la columna si la deflexión en la cima no debe exceder 120 mm? (Suponer $E = 70$ GPa.)

11.4-6 Una viga I de acero (sección S 8 \times 23) utilizada como una columna, soporta una carga P aplicada sobre el eje 1-1 en la posición mostrada en la figura. La columna está fija en la base y libre en la cima y tiene 14 pie de longitud. Suponiendo $E = 30 \times 10^3$ ksi, determinar la carga P que producirá un momento flexionante máximo de 40 plg \cdot k en la columna.



Prob. 11.4-5



Probs. 11.4-6 y 11.4-7

11.4-7 Resolver el problema anterior para una columna de 16 pie de longitud de perfil S 10 \times 35 si el momento flexionante máximo es 70 plg \cdot k.

Los problemas para la Sección 11.5 deben resolverse aplicando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y elásticas. La flexión ocurre en el plano de la figura a menos que se especifique lo contrario.

11.5-1 Una barra de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) tiene una sección transversal cuadrada de ancho $b = 2$ plg sobre cada lado (véase figura). La barra tiene una longitud $L = 6$ pie y está apoyada como columna de extremos articulados. (a) Suponer que la barra se comprime mediante una fuerza centralmente aplicada P . ¿Cuál es el esfuerzo crítico σ_{cr} en la barra cuando la carga P alcanza la carga crítica? (b) Si actúa una carga $P = 10$ k en el punto medio de un lado ($e = 1$ plg), ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{\max} en la

barra? (c) ¿Qué carga P_1 , aplicada también en el punto medio de un lado con una excentricidad de 1 plg, producirá un esfuerzo máximo $\sigma_1 = 15$ ksi en la barra?

11.5-2 Una barra de acero ($E = 200$ GPa) tiene una sección transversal cuadrada de ancho $b = 40$ mm sobre cada lado (véase figura). La barra tiene una longitud $L = 1.5$ m y está apoyada como columna de extremos articulados. (a) Suponer que la barra se comprime por una fuerza P centralmente aplicada. ¿Cuál es el esfuerzo crítico σ_{cr} en la barra cuando la carga P alcanza la carga crítica? (b) Si en el punto medio de uno de los lados ($e = 20$ mm) actúa una carga $P = 20$ kN, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{max} en la barra? (c) ¿Qué carga P aplicada en el punto medio de un lado con una excentricidad de 20 mm, producirá un esfuerzo máximo de 100 MPa en la barra?

11.5-3 Una columna de extremos articulados de longitud $L = 5$ pie se construye con tubo de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) teniendo un diámetro interior $d_1 = 2.0$ plg y un diámetro exterior $d_2 = 2.2$ plg (véase figura). Se aplica una carga de compresión P en el punto medio de la pared del tubo ($e = 1.05$ plg). (a) Si la carga $P = 2.5$ k, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{max} en el tubo? (b) ¿Cuál es la carga permisible P_{perm} si se requiere un factor de seguridad $n = 2$ con respecto a la fluencia del material? (Suponer $\sigma_y = 36$ ksi.)

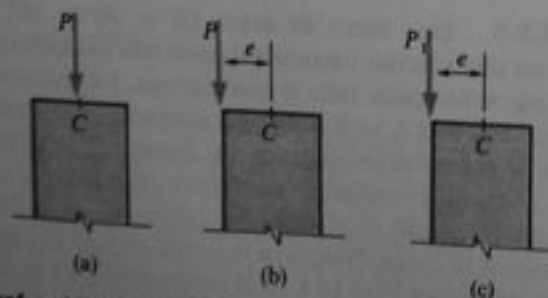
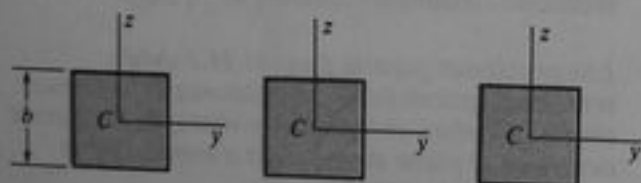
11.5-4 Una columna de extremos articulados de longitud $L = 2$ m se construye con tubo de acero ($E = 210$ GPa) con un diámetro interior $d_1 = 60$ mm y un diámetro exterior $d_2 = 71$ mm (véase figura). Se aplica una carga de compresión P a la mitad de la pared del tubo ($e = 32.5$ mm). (a) Si la carga $P = 12$

kN, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{max} en el tubo? (b) ¿Cuál es la carga permisible P_{perm} si se requiere un factor de seguridad $n = 2$ con respecto a la fluencia del material? (Suponer $\sigma_y = 250$ Mpa.)

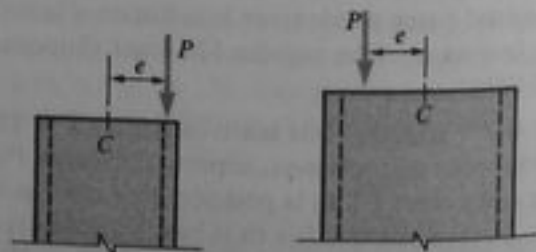
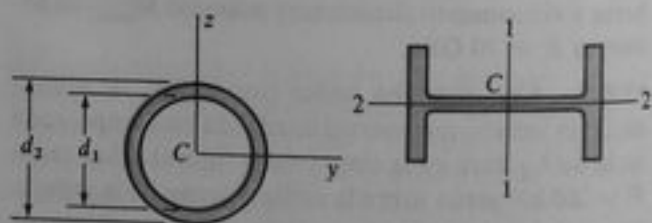
11.5-5 Un tubo de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) de longitud $L = 12$ pie está empotrado en la base y articulado en la cima. Los diámetros interior y exterior del tubo son 3.0 plg y 3.5 plg, respectivamente. Se aplica una carga de compresión P con una relación de excentricidad estimada $ec/r^2 = 0.25$. (a) Si la carga $P = 20$ k, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{max} en el tubo? (b) Determinar la carga permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia del material es $n = 2.0$. (Suponer $\sigma_y = 36$ ksi.)

11.5-6 Un tubo de acero ($E = 200$ GPa) de longitud $L = 3.5$ m está empotrado en la base y articulado en la cima. Los diámetros interior y exterior son 75 mm y 90 mm, respectivamente. Se aplica una carga de compresión P con una relación de excentricidad estimada $ec/r^2 = 0.5$. (a) Si la carga $P = 100$ kN, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_{max} en el tubo? (b) Determinar la carga permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia del material es $n = 2.5$. (Suponer $\sigma_y = 250$ MPa.)

11.5-7 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) con extremos articulados y longitud $L = 16$ pie se construye con una sección de patin ancho $W 8 \times 35$ (véase figura). Sobre el eje 2-2 actúa una fuerza axial de compresión P con una excentricidad $e = 2.5$ plg. (a) Si $P = 100$ k, determinar el esfuerzo de compresión máximo σ_{max} en la columna. (b) ¿Qué carga P , producirá la fluencia del material si $\sigma_y = 36$ ksi?

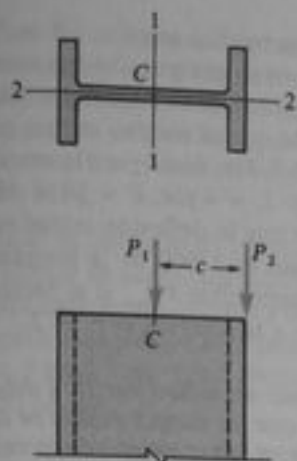


Probs. 11.5-1 y 11.5-2



Probs. 11.5-3 y 11.5-4

Probs. 11.5-7 y 11.5-8



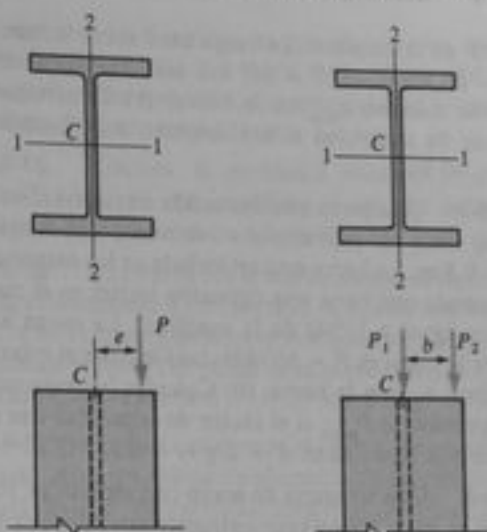
Probs. 11.5-9 y 11.5-10

11.5-8 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) que está empotrada en su base y libre en su cima se construye de una sección de patín ancho W 10 \times 60 (véase figura). La columna tiene 12 pie de longitud. Sobre el eje 2-2 actúa una fuerza axial de compresión con una excentricidad $e = 2.0$ plg. (a) Si $P = 120$ k, determinar el esfuerzo de compresión máximo σ_{\max} en la columna. (b) Determinar la carga permisible P_{perm} si $\sigma_y = 42$ ksi y el factor de seguridad con respecto a la fluencia del material es $n = 2.0$.

11.5-9 Una columna de extremos articulados con longitud $L = 30$ pie se construye de una sección de patín ancho W 14 \times 53 de acero con $E = 30 \times 10^3$ ksi (véase figura). La columna está sometida a una carga centralmente aplicada $P_1 = 150$ k y a una carga excéntrica $P_2 = 60$ k que actúa sobre el eje 2-2 en la orilla de la columna. (a) Calcular el esfuerzo de compresión máximo σ_{\max} en la columna. (b) ¿Cuál es el factor de seguridad respecto a la fluencia del material si $\sigma_y = 36$ ksi?

11.5-10 Una columna de extremos articulados con longitud $L = 32$ pie se construye de una sección de patín ancho W 12 \times 50 de acero con $E = 30 \times 10^3$ ksi (véase figura). La columna está sometida a una carga centralmente aplicada $P_1 = 140$ k y a una carga excéntrica $P_2 = 50$ k que actúa sobre el eje 2-2 en la orilla de la columna. (a) Calcular el esfuerzo de compresión máximo σ_{\max} en la columna. (b) ¿Cuál es el factor de seguridad con respecto a la fluencia del material si $\sigma_y = 42$ ksi?

11.5-11 Una sección de acero W 16 \times 57 se utiliza como una columna de extremos articulados. Carga una fuerza excéntrica $P = 200$ k que actúa sobre el eje 1-1 en forma tal que el pandeo ocurre en el plano 1-1 (véase figura). El acero tiene un módulo de elasti-



Prob. 11.5-11

Prob. 11.5-12

cidad $E = 30 \times 10^3$ ksi y un esfuerzo de fluencia $\sigma_y = 36$ ksi. También, se supone que la relación de excentricidad es $cr/r^2 = 0.2$. ¿Cuál es la mayor longitud L que puede tener la columna si se requiere un factor de seguridad de 2.0 con respecto a la fluencia?

11.5-12 Una columna de acero (sección de patín ancho W 12 \times 87) tiene extremos articulados y soporta dos cargas; la carga P_1 actúa en el centroide C y la carga P_2 actúa sobre el eje 1-1 a una distancia $b = 7.5$ plg del centroide (véase figura). La columna tiene una longitud $L = 16$ pie, $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 42$ ksi. Si $P_1 = 160$ k, ¿cuál es el mayor valor permisible de P_2 a fin de mantener un factor de seguridad de 2.5 con respecto a la fluencia?

Los problemas de la Sección 11.6 deben resolverse aplicando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y elásticas, con una deflexión inicial dada por la mitad de una curva senoidal. La flexión ocurre en el plano de la figura a menos que se indique otra cosa.

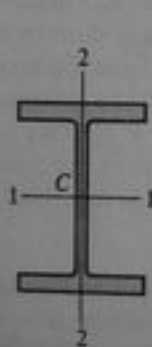
11.6-1 Considerar una columna de extremos articulados con una deflexión inicial en forma de una mitad de curva senoidal (véanse Fig. 11-20a y Ec. a). Obtener la Ec. (11-27) para la deflexión máxima δ_{\max} de esta columna resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

11.6-2 Una barra circular sólida de aluminio de diámetro $d = 2$ plg y longitud $L = 40$ plg está articulada en los extremos. Se supone que la barra tiene una deflexión inicial a en el punto medio igual a

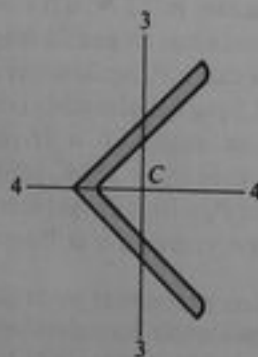
1/800 de la longitud. La carga axial sobre la barra es $P = 20$ k y $E = 10 \times 10^3$ ksi. (a) Determinar el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Determinar el factor de seguridad n con respecto a la fluencia si $\sigma_y = 40$ ksi.

11.6-3 Una barra circular sólida de acero ($E = 200$ GPa) tiene un diámetro $d = 40$ mm y una longitud $L = 0.8$ m. La barra está articulada en los extremos y se supone que tiene una deflexión inicial en el punto medio igual a 1/500 de la longitud. La carga axial sobre la barra es $P = 100$ kN. (a) Calcular el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Calcular la carga máxima permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$ y $\sigma_y = 290$ MPa.

11.6-4 Una columna de acero con sección $W 10 \times 45$ ($E = 30 \times 10^3$ ksi) con extremos articulados y longitud $L = 15$ pie soporta una carga axial $P = 150$ k. La columna está apoyada sólo en los extremos, por lo que se pandea por flexión respecto al eje 2-2 (véase figura). Suponer que la columna tiene una deflexión inicial en el punto medio igual a 1/900 de su longitud ($L/a = 900$). (a) Determinar el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra. (b) Determinar el factor de seguridad n con respecto a la fluencia si $\sigma_y = 36$ ksi.



Probs. 11.6-4 y 11.6-5



Prob. 11.6-6

11.6-5 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) con sección $W 8 \times 35$ de extremos articulados y longitud $L = 12$ pie soporta una carga axial $P = 100$ k. La columna está apoyada sólo en los extremos de modo que se pandea por flexión respecto al eje 2-2 (véase figura). Suponer que la columna tiene una deflexión inicial en el punto medio de 0.3 plg. (a) ¿Cuál es el esfuerzo máximo σ_{\max} en la barra? (b) ¿Cuál es la carga máxima permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2.2$ y $\sigma_y = 36$ ksi?

11.6-6 Una sección angular $L 3 \times 3 \times 1/4$ se usa como miembro de compresión con extremos articulados (véase figura). Está soportada sólo en los extremos de modo que el pandeo ocurre por flexión respecto al eje 3-3. Los datos para la sección angular son los siguientes: $L = 4$ pie, $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 36$ ksi. Suponer que la deflexión inicial en el punto medio del ángulo es 1/800 de la longitud. Calcular la carga axial permisible P_{perm} si el factor de seguridad con respecto a la fluencia es $n = 2$.

Los problemas de la Sección 11.9 deben resolverse suponiendo que las cargas axiales se aplican centralmente en los extremos de la columna. Las columnas están soportadas únicamente en sus extremos y pueden pandearse en cualquier dirección.

11.9-1 Determinar la carga axial permisible P para una columna de patin ancho $W 10 \times 45$ de acero con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 8$ pie, 16 pie, 24 pie y 32 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 36$ ksi.)

11.9-2 Determinar la carga axial permisible P para una columna de acero de patin ancho $W 10 \times 60$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 10$ pie, 20 pie, 30 pie y 40 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 36$ ksi.)

11.9-3 Calcular la carga axial permisible P para una columna de acero de patin ancho $W 12 \times 50$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 8$ pie, 16 pie, 24 pie y 32 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 50$ ksi.)

11.9-4 Calcular la carga axial permisible P para una columna de acero de patin ancho $W 12 \times 87$ con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 10$ pie, 20 pie, 30 pie y 40 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 50$ ksi.)

11.9-5 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados que tiene un diámetro exterior de 4.5 plg y un espesor de pared de 0.237 plg para cada una de las siguientes longitudes: $L = 6$ pie, 12 pie, 18 pie y 24 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 36$ ksi.)

11.9-6 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados con diámetro exterior de 6.625 plg y espesor de pared 0.432 plg para cada una de las siguientes longitudes: $L = 8$ pie, 16 pie, 24 pie y 32 pie. (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_y = 36$ ksi.)

11.9-7 Calcular la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados cuyo diámetro exterior es 140 mm y su espesor de pared 7 mm para cada una de las siguientes longitudes: $L = 2$ m, 4 m, 6 m y 8 m. (Suponer $E = 200$ GPa y $\sigma_c = 250$ MPa.)

11.9-8 Calcular la carga axial permisible P para una columna tubular de acero con extremos articulados con diámetro exterior de 220 mm y espesor de pared de 12 mm para cada una de las siguientes longitudes: $L = 2.5$ m, 5 m, 7.5 m y 10 m. (Suponer $E = 200$ GPa y $\sigma_c = 250$ MPa.)

11.9-9 Una columna tubular de acero con extremos articulados soporta una carga axial $P = 21$ k. Los diámetros exterior e interior del tubo son 3.5 plg y 2.9 plg, respectivamente. ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_c = 36$ ksi?

11.9-10 Una columna de acero de patin ancho w 8×28 con extremos articulados soporta una carga axial P . ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $P = 50$ k y $P = 100$ k? (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_c = 36$ ksi.)

11.9-11 Una columna de acero de patin ancho w 8×35 con extremos articulados soporta una carga axial P . ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la columna si $P = 75$ k y si $P = 150$ k? (Suponer $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_c = 36$ ksi.)

11.9-12 ¿Cuál es el menor diámetro permisible d de una columna sólida de acero de sección transversal circular con extremos articulados y longitud 2 m si debe soportar una carga axial $P = 800$ kN? (Suponer $E = 200$ GPa y $\sigma_c = 250$ MPa.)

11.9-13 ¿Cuál es el menor ancho permisible b de una columna sólida de acero de sección transversal cuadrada con extremos articulados y longitud $L = 1.5$ m si debe soportar una carga axial $P = 250$ kN? (Suponer $E = 200$ GPa y $\sigma_c = 250$ MPa.)

11.9-14 Determinar la carga axial permisible P para una columna tubular de aluminio (aleación 2014-

T6) con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 4$ pie, 8 pie, 12 pie y 16 pie. La columna tiene un diámetro exterior de 5.563 plg y un diámetro interior 4.813 plg.

11.9-15 Resolver el problema anterior para un tubo de aluminio con un diámetro exterior de 6.625 plg y un diámetro interior de 6.065 plg.

11.9-16 Una barra cuadrada de aluminio de ancho 2 plg está cargada a compresión mediante una fuerza P . La barra tiene extremos articulados y se construye de aleación 2014-T6. ¿Cuál es la mayor longitud permisible L de la barra si $P = 90$ k y si $P = 30$ k?

11.9-17 ¿Cuál es el menor diámetro permisible d de una columna sólida de aluminio de sección transversal circular con extremos articulados y longitud 24 plg si debe soportar una carga axial $P = 12$ k? (Suponer que la aleación es 2014-T6.)

11.9-18 Determinar la carga axial permisible P para una columna de madera de 4 plg \times 8 plg (dimensiones reales 5.5 plg \times 5.5 plg; véase Apéndice F) con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 5$ pie, 10 pie, 15 pie y 20 pie. (Suponer $E = 1.8 \times 10^6$ psi y $F_c = 1200$ psi.)

11.9-19 Determinar la carga axial permisible P para una columna de madera de 4 plg \times 8 plg (dimensiones reales 3.5 plg \times 7.25 plg; véase Apéndice F) con extremos articulados para cada una de las siguientes longitudes: $L = 6$ pie, 8 pie, 10 pie y 12 pie. (Suponer $E = 1.6 \times 10^6$ psi y $F_c = 1000$ psi.)

11.9-20 Una columna cuadrada de madera de lado de 120 mm (dimensiones reales) está soportada con extremos articulados. Determinar la mayor longitud permisible L de la columna para cada una de las siguientes cargas axiales: $P = 90$ kN, 60 kN y 30 kN. (Suponer $E = 12$ GPa y $F_c = 8$ MPa.)

11.9-21 ¿Cuál es el ancho mínimo permisible b de una columna cuadrada de madera con extremos articulados y longitud 3 m si debe soportar una carga axial $P = 150$ kN? (Suponer $E = 12$ GPa y $F_c = 9$ MPa.)

Métodos energéticos

12.1 INTRODUCCIÓN

Los conceptos de trabajo y energía de deformación se explicaron en los capítulos anteriores, donde se obtuvieron fórmulas para la energía de deformación almacenada en estructuras linealmente elásticas sometidas a cargas axiales, a torsión y a flexión. Ahora se considerarán algunos conceptos adicionales, incluyendo trabajo virtual y energía complementaria. El principio del trabajo virtual conduce al método de la carga unitaria, el cual es un método efectivo para determinar desplazamientos (o deflexiones) de estructuras de todo tipo.* La energía de deformación y la energía complementaria proporcionan métodos para el análisis de estructuras lineales y no lineales, tanto estáticamente determinadas como indeterminadas. En este capítulo consideraremos sólo armaduras simples, vigas y bastidores, pero los conceptos son aplicables a estructuras más complejas. Luego, este capítulo proporciona una introducción a los principios de la mecánica aplicada que son fundamentales para el análisis estructural avanzado.

12.2 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio de los desplazamientos virtuales y el principio del trabajo virtual se tratan usualmente en el estudio de la estática, en la cual se utilizan para resolver problemas de equilibrio estático. La palabra *virtual* indica que las cantidades son hipotéticas y no existen en sentido real o físico. Luego, un **desplazamiento virtual** es un desplazamiento imaginario que se impone arbitrariamente a un sistema estructural o mecánico; no es un desplazamiento real, tal como lo es la deflexión producida por una carga que actúa sobre una estructura. El trabajo realizado por las fuerzas reales durante un desplazamiento virtual se denomina **trabajo virtual**.

Cuando una partícula simple es sometida a un conjunto de fuerzas en equilibrio estático (véase Fig. 12-1a), se puede impartir a la partícula un desplazamiento en

* Una deflexión es la traslación de un punto de una estructura deformable. Sin embargo, un desplazamiento es una cantidad más general que incluye no sólo traslaciones sino también rotaciones.

cualquier dirección. Durante este desplazamiento virtual el trabajo virtual realizado por las fuerzas debe ser cero porque las fuerzas están en equilibrio. Este enunciado simple es el **principio de los desplazamientos virtuales**. Según se demuestra en el estudio de la estática, este principio puede usarse en lugar de las más conocidas ecuaciones de equilibrio, con el fin de resolver problemas de estática.

El principio de los desplazamientos virtuales también es aplicable a un cuerpo rígido que se mantiene en equilibrio mediante la acción de un conjunto de cargas que pueden incluir fuerzas, momentos y cargas distribuidas (Fig. 12-1b). Al cuerpo rígido puede impartirse un desplazamiento virtual consistente en una traslación en cualquier dirección, una rotación respecto a cualquier eje, o una combinación de traslación y rotación. En todos los casos el trabajo virtual realizado por las fuerzas será cero si el cuerpo está en equilibrio. Usualmente se debe restringir el desplazamiento virtual a un desplazamiento muy pequeño a fin de que las líneas de acción de las fuerzas no se alteren durante el desplazamiento virtual.*

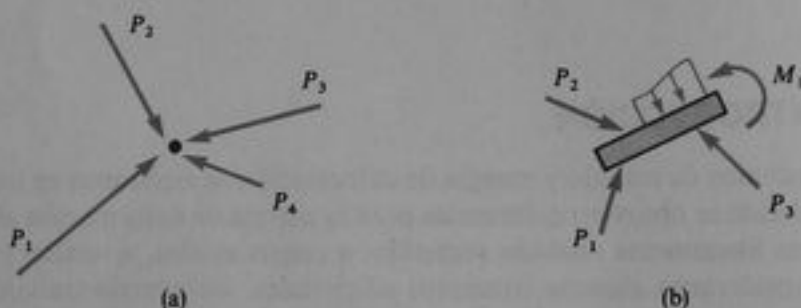


Fig. 12-1 Principio de desplazamientos virtuales para: (a) una partícula y (b) un cuerpo rígido

Para su uso en la búsqueda de desplazamientos de estructuras deformables, debemos ampliar el principio de los desplazamientos virtuales para tomar en cuenta no sólo el trabajo virtual de las fuerzas externas, o cargas, sino también el trabajo virtual asociado a las fuerzas internas, o resultantes de esfuerzo. Para mostrar cómo se logra esto, considérese la viga mostrada en la Fig. 12-2a, aunque podría usarse cualquier otra estructura. Se supone que tal estructura está cargada en forma general mediante fuerzas, momentos flexionantes, momentos torsionantes y cargas distribuidas. La estructura se halla en reposo y equilibrio con la acción de estas cargas. En cualquier sección transversal de la estructura, pueden existir resultantes de esfuerzo en forma de una fuerza axial N , un momento flexionante M , una fuerza cortante V y un momento torsionante T , como se muestra sobre la cara izquierda de un elemento de longitud dx separado del miembro estructural (Fig. 12-2b). En la cara opuesta del elemento, las resultantes de esfuerzo pueden haber cambiado en pequeñas cantidades, por lo que se muestran como $N + dN$, $M + dM$, $V + dV$ y $T + dT$.

Supóngase ahora que se suministra a la viga (Fig. 12-2a) una pequeña deformación virtual consistente en un pequeño cambio en su perfil deflexionado. Esta deformación virtual se impone a la viga de alguna forma no especificada, y es completamente independiente del hecho de que la estructura ya se ha sometido a deflexiones reales producidas por las cargas que actúan sobre ella. Tales deflexiones reales tienen magnitudes definidas por la característica de las cargas y de la estructura. Sin embargo,

* El principio de los desplazamientos virtuales fue formulado inicialmente por Johann Bernoulli, 1667-1748 (véase Ref. 7-1).

la deformación virtual representa una deformación adicional que se imparte arbitrariamente a la estructura. La única restricción sobre la deformación virtual es que debe representar un perfil deformado que podría ocurrir de hecho, físicamente; esto es, el cambio de forma virtual debe ser compatible con las condiciones de apoyo para la estructura y debe mantener la continuidad entre los elementos de la misma. Como consecuencia de la deformación virtual de la viga, los puntos sobre el eje de la misma experimentarán desplazamientos virtuales, tales como deflexiones en la dirección vertical.

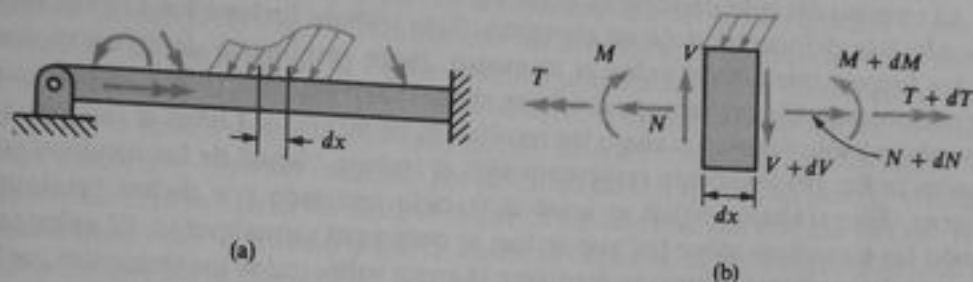


Fig. 12-2 Deducción del principio del trabajo virtual

Durante la deformación virtual cada elemento de la viga se desplazará a una nueva localización y también se deformará. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre un elemento (esfuerzos resultantes y cargas externas, como se muestra en la Fig. 12-2b) realizarán un trabajo virtual. Denotemos la magnitud total de este trabajo virtual por dW_e . Este trabajo puede considerarse compuesto de dos partes: (1) el trabajo dW_r , debido al desplazamiento (traslación y rotación) del elemento como cuerpo rígido, y (2) el trabajo dW_d , asociado a la deformación del elemento. En consecuencia,

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

Como el elemento está en equilibrio, el trabajo virtual dW_r , realizado por las fuerzas (externas e internas) durante el desplazamiento del elemento como cuerpo rígido debe ser cero, por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$dW_e = dW_d \quad (a)$$

Esta ecuación establece que el trabajo virtual total realizado por todas las fuerzas durante su desplazamiento virtual es igual al trabajo virtual realizado por esas mismas fuerzas sólo durante la deformación virtual del elemento. Integrando los términos de trabajo virtual en la Ec. (a) para todos los elementos de la estructura, obtenemos

$$\int dW_e = \int dW_d \quad (b)$$

en donde se entiende que las integraciones se realizan para la estructura completa.

Las integrales en la Ec. (b) pueden interpretarse con facilidad. La integral del primer miembro de la ecuación es el trabajo virtual total realizado durante la deformación virtual de la estructura debida a todas las fuerzas, tanto cargas como resultantes de esfuerzo, que actúan sobre todas las caras de los elementos, de los cuales el elemento mostrado en la Fig. 12-2b es típico. Observamos, no obstante, que los lados de cada elemento están en contacto directo con los lados de elementos adyacentes. Por lo

tanto, el trabajo virtual de las resultantes de esfuerzo que actúan sobre un elemento cancelan exactamente el trabajo virtual de las resultantes de esfuerzo iguales y opuestas que actúan sobre elementos adyacentes. El único trabajo virtual restante es el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre las fronteras externas de los elementos (tales como la parte superior y la base del elemento en la Fig. 12-2b). Así pues, concluimos que la integral sobre el lado izquierdo de la Ec. (b) es igual al trabajo virtual de las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. Nos referiremos a esta cantidad como el **trabajo virtual externo** y lo designaremos por W_{ext} .

El término del lado derecho de la Ec. (b) se obtuvo integrando el trabajo virtual asociado a la deformación de un elemento. Este trabajo incluye los efectos de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento, tanto resultantes de esfuerzo como fuerzas externas. Sin embargo, cuando un elemento se deforma (por ejemplo, cuando se alarga) sólo realizan trabajo las resultantes de esfuerzo. Luego el segundo término en la Ec. (b) realmente representa sólo el trabajo virtual de las resultantes de esfuerzo. Este trabajo virtual es igual al trabajo realizado por dichas resultantes cuando los elementos sobre los que actúan se deforman virtualmente. El valor total de este trabajo virtual, obtenido mediante la suma sobre todos los elementos, se llama **trabajo virtual interno** y se denota por W_{int} . Luego, la Ec. (b) resulta en

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \quad (12-1)$$

Esta ecuación representa el **principio del trabajo virtual**, y puede establecerse como sigue:

Si se considera una pequeña deformación virtual en una estructura deformable en equilibrio originada por la acción de un sistema de cargas, entonces el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas (o cargas) es igual al trabajo virtual realizado por las fuerzas internas (o resultantes de esfuerzo).

El principio del trabajo virtual es extremadamente general y tiene muchas aplicaciones en análisis estructural y en mecánica aplicada. En la siguiente sección se utilizará para obtener el método de carga unitaria para determinar deflexiones. No obstante, antes de proceder a la aplicación del principio, es importante enfatizar algunas de sus características. Primero, la deformación virtual, o desplazamiento virtual, debe ser compatible con los apoyos de la estructura y mantener la continuidad de la misma. Segundo, la deformación y los desplazamientos deben ser lo bastante pequeños para que la geometría de la estructura no se altere, permitiendo que todos los cálculos se basen en la configuración de la estructura. Con excepción de estas restricciones, el cambio virtual de forma puede imponerse arbitrariamente sobre el sistema estructural. Sin embargo, las deformaciones virtuales no deben confundirse con la deformación de la estructura ocasionada por las cargas reales. Finalmente, una revisión del desarrollo del principio mostrará que las propiedades del material de la estructura nunca intervienen en su obtención. Por lo tanto, el principio del trabajo virtual se aplica a todas las estructuras sin importar si el material se comporta linealmente o no, o bien elásticamente o inelásticamente.

Consideremos ahora la evaluación de los términos para el trabajo virtual externo e interno que aparecen en la Ec. (12-1). El trabajo externo W_{ext} es el trabajo realizado por las cargas que actúan sobre la estructura durante el desplazamiento virtual. Dado que estas cargas actúan en forma total cuando se impone el desplazamiento

virtual, el trabajo virtual que realizan es simplemente el producto de la carga y el desplazamiento. En particular, el trabajo virtual de una carga concentrada es el producto de la fuerza y el desplazamiento virtual de su punto de aplicación. En tal caso la dirección positiva del desplazamiento debe tomarse en la misma dirección positiva de la fuerza. Si la carga es un momento concentrado, entonces el trabajo virtual es el producto del momento y el ángulo de rotación virtual en el que gira.

La evaluación del trabajo interno W_{int} de las resultantes de esfuerzo es más complicada. El trabajo virtual realizado por las resultantes de esfuerzo que actúan sobre un elemento (Fig. 12-2b) depende de la deformación del mismo durante el desplazamiento virtual. En la Fig. 12-3 se muestran los diversos tipos de pequeñas deformaciones virtuales. La parte (a) de la figura muestra una deformación virtual consistente en una deformación axial uniforme en el elemento; luego, la longitud del elemento se incrementa en una cantidad denotada por $d\delta$. Esta deformación virtual origina un trabajo virtual $(N + dN)d\delta$ realizado por la fuerza axial (Fig. 12-2b), pero ni el momento flexionante, ni la fuerza cortante ni el par de torsión realizan trabajo virtual. Nuevamente debe notarse que no importa ahora la causa de la deformación virtual $d\delta$; es evidente que no es ocasionada por la propia fuerza axial N .

El siguiente tipo de desplazamiento virtual es una deformación por flexión consistente en una rotación relativa $d\theta$ entre dos lados del elemento (Fig. 12-3b). Durante tal deformación virtual, la única resultante de esfuerzo que realiza trabajo es el momento flexionante y su trabajo virtual es $(M + dM)d\theta$. En las Figs. 12-3c y d se muestran una deformación virtual por cortante y una deformación torsional virtual, respectivamente. La primera consiste en una traslación lateral $d\lambda$ de un lado del elemento con respecto al otro, y la segunda, en una rotación relativa $d\phi$ respecto al eje longitudinal. Los términos de trabajo virtual asociados con estas deformaciones virtuales son $(V + dV)d\lambda$ y $(T + dT)d\phi$.

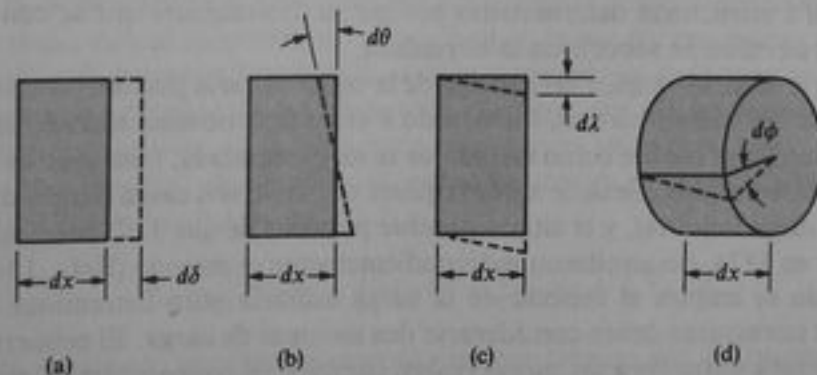


Fig. 12-3 Deformaciones virtuales de un elemento de una estructura: (a) axial, (b) por flexión, (c) por cortante y (d) torsional

Cada una de las cuatro expresiones anteriores para el trabajo virtual interno puede simplificarse omitiendo el producto de dos diferenciales (tal como $dN d\delta$) en comparación con el producto del término finito y el diferencial (tal como $N d\delta$). Luego, la expresión para el trabajo virtual interno realizado por las resultantes de esfuerzo que actúan sobre un elemento de la estructura resulta

$$N d\delta + M d\theta + V d\lambda + T d\phi$$

Integrando en todos los elementos de la estructura se obtiene la expresión completa para el trabajo virtual interno:

$$W_{int} = \int N d\delta + \int M d\theta + \int V d\lambda + \int T d\phi \quad (12-2)$$

En esta expresión las resultantes de esfuerzo N , M , V y T son las resultantes reales en la estructura debidas a las cargas también reales, mientras que las deformaciones $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ y $d\phi$ son las deformaciones ficticias asociadas con el desplazamiento virtual de la estructura. En la siguiente sección desarrollaremos un método para determinar los desplazamientos de estructuras con base en las Ecs. (12-1) y (12-2).

12.3 MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS

La determinación de desplazamientos en estructuras es una parte esencial del análisis y el diseño estructurales. En la Sección 2.3 y en el Capítulo 7 se trataron métodos para determinar deflexiones de armaduras y vigas, respectivamente. Sin embargo, tales métodos se limitan a estructuras que contienen relativamente pocos miembros. En esta sección se utilizará el principio de trabajo virtual para establecer el **método de la carga unitaria**, de uso generalizado para determinar desplazamientos de estructuras. Este método puede aplicarse no sólo para vigas y armaduras, sino también en estructuras muy complicadas con muchos miembros. Además, el método de la carga unitaria es adecuado para encontrar todo tipo de desplazamientos, incluyendo la deflexión de un punto en la estructura, la rotación del eje de un miembro y el desplazamiento relativo entre dos puntos. Teóricamente puede utilizarse para estructuras estáticamente determinadas o indeterminadas, aunque para fines prácticos el método se limita a estructuras determinadas porque su uso requiere que se conozcan las resultantes de esfuerzo sobre toda la estructura.

Como la ecuación básica del método de la carga unitaria puede obtenerse a partir del principio del trabajo virtual, tal método a veces se denomina **método del trabajo virtual**. También se conoce como **método de la carga simulada**, o **método de Maxwell-Mohr**. El primer nombre se debe a que requiere el uso de una carga ficticia o simulada (esto es, la carga unitaria), y el último nombre proviene de que J. C. Maxwell en 1864 y O. Mohr en 1874, desarrollaron independientemente el método (Refs. 12-1 y 12-4).

Cuando se emplea el método de la carga unitaria para determinar desplazamientos de estructuras deben considerarse dos sistemas de carga. El primero consiste en la estructura sometida a las cargas reales, cambios de temperatura, u otras causas que producen el desplazamiento a calcular. El segundo sistema consiste en una carga unitaria que actúa sola en la estructura. La carga unitaria es una carga ficticia, o simulada, que se considera solamente con el propósito de calcular un desplazamiento Δ de la estructura debido a las cargas reales. La carga unitaria debe **corresponder** al desplazamiento deseado Δ . La carga que corresponde a un desplazamiento es una que actúa sobre la estructura en el punto donde va a determinarse el desplazamiento y tiene su dirección positiva en la misma dirección de un desplazamiento positivo. Como se mencionó previamente, el término *desplazamiento* se usa en sentido generalizado; luego, el desplazamiento Δ puede ser una rotación, una traslación, un desplazamiento relativo o una rotación relativa. Si el desplazamiento por calcular es

una traslación, entonces la carga unitaria correspondiente es una fuerza que actúa en el punto donde ocurre la traslación, y su dirección positiva coincide con la dirección positiva de la traslación. Si el desplazamiento a calcular es una rotación, entonces la carga unitaria es un momento que actúa sobre la estructura donde ocurre la rotación; el sentido positivo del momento unitario debe ser igual al sentido positivo de la rotación. Si el desplazamiento es la traslación relativa de dos puntos a lo largo de la línea que los une, la carga unitaria consistirá en dos fuerzas colineales y opuestas que actúan en los dos puntos. Cada una de estas posibilidades se explicará con ejemplos.

La carga unitaria que actúa sobre la estructura produce reacciones en los apoyos y resultantes de esfuerzo en los miembros. Designemos estas resultantes con los símbolos N_u , M_u , V_u y T_u . Estas cantidades, en combinación con la carga unitaria y las reacciones, constituyen un sistema de fuerzas que está en equilibrio. De acuerdo con el principio del trabajo virtual, si la estructura experimenta una pequeña deformación (o cambio de forma) virtual, entonces el trabajo virtual de las fuerzas externas es igual al trabajo virtual de las fuerzas internas (véase Ec. 12-1). Ahora estamos en el paso esencial en el desarrollo del método de la carga unitaria; es decir, debemos efectuar la selección apropiada de la deformación virtual. Consideremos las deformaciones reales de la estructura causadas por el primer sistema de carga como las deformaciones virtuales que se impondrán al segundo sistema (la estructura con la carga unitaria). Durante esta deformación virtual el único trabajo virtual externo es el trabajo realizado por la carga unitaria misma, ya que es la única carga externa que actúa sobre la estructura. Este trabajo virtual es el producto de la carga unitaria por el desplazamiento Δ a través del cual se mueve; luego,

$$W_{\text{ext}} = 1 \cdot \Delta \quad (a)$$

donde Δ representa el desplazamiento de la estructura debido a las cargas reales (recuérdese que la carga unitaria se seleccionó intencionalmente como correspondiente a Δ).

El trabajo virtual interno es el trabajo realizado por las resultantes de esfuerzo (N_u , M_u , V_u y T_u) cuando los elementos de la estructura se deforman virtualmente. Sin embargo, las deformaciones virtuales se escogen por ser las mismas deformaciones reales que ocurren en la estructura que soporta las cargas reales. Denotando tales deformaciones por $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ y $d\phi$, como se muestra en la Fig. 12-3, obtenemos para el trabajo interno (véase Ec. 12-2)

$$W_{\text{int}} = \int N_u d\delta + \int M_u d\theta + \int V_u d\lambda + \int T_u d\phi \quad (b)$$

Finalmente, igualando los trabajos externo e interno (véanse Ecs. a y b), obtenemos la ecuación del método de la carga unitaria:

$$\Delta = \int N_u d\delta + \int M_u d\theta + \int V_u d\lambda + \int T_u d\phi \quad (12-3)$$

En esta ecuación, Δ representa el desplazamiento a calcularse, el cual puede ser una traslación, una rotación o un desplazamiento relativo; las resultantes de esfuerzo N_u , M_u , V_u y T_u representan la fuerza axial, el momento flexionante, la fuerza cortante y el momento torsionante causados por la carga unitaria correspondiente a Δ ; y $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ y $d\phi$ son deformaciones provocadas por las cargas reales. Como la carga unitaria se ha separado en el lado izquierdo y pasado al lado derecho de la Ec. (12-3) como divisor,

dejando únicamente el término Δ , es necesario considerar las cantidades N_u , M_u , V_u y T_u con dimensiones de fuerza, o momento, por unidad de la carga unitaria aplicada.

La ecuación del método de la carga unitaria (Ec. 12-3) es completamente general y no está sujeta a ninguna restricción respecto al comportamiento lineal del material o a la estructura. En otras palabras, el principio de superposición no necesariamente es válido a fin de utilizar la Ec. (12-3). Sin embargo, las deformaciones $d\delta$, $d\theta$, etc., deben ser pequeñas para no modificar la geometría de la estructura, según se explicó en la sección anterior.

La situación más común ocurre cuando el material de la estructura satisface la ley de Hooke y la estructura se comporta linealmente. En este caso podemos obtener fácilmente expresiones para las deformaciones $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ y $d\phi$ causadas por las cargas reales que actúan sobre la estructura. Si denotamos las resultantes de esfuerzo en la estructura debidas a las cargas reales, como N_L , M_L , V_L y T_L , entonces las deformaciones de un elemento son

$$d\delta = \frac{N_L dx}{EA} \quad d\theta = \frac{M_L dx}{EI} \quad d\lambda = \frac{\alpha_s V_L dx}{GA} \quad d\phi = \frac{T_L dx}{GI_p} \quad (c)$$

La primera de estas ecuaciones proporciona el alargamiento de un elemento (Fig. 12-3a) debido a la fuerza axial N_L . De igual manera, los tres términos restantes proporcionan las deformaciones asociadas con flexión, cortante y torsión (Figs. 12-3b, c y d). Estas expresiones están basadas en las ecuaciones obtenidas en capítulos anteriores (véanse Ecs. 2-1, 7-6, 7-73 y 3-8). Sustituyendo estas cuatro expresiones en la Ec. (12-3) se obtiene la ecuación del método de la carga unitaria para **estructuras linealmente elásticas** en la siguiente forma:

$$\Delta = \int \frac{N_u N_L dx}{EA} + \int \frac{M_u M_L dx}{EI} + \int \frac{\alpha_s V_u V_L dx}{GA} + \int \frac{T_u T_L dx}{GI_p} \quad (12-4)$$

Esta ecuación puede emplearse para determinar el desplazamiento Δ en cualquier punto de una estructura cuando el material es linealmente elástico y es válido el principio de superposición. Cada integral en la ecuación representa la contribución de un tipo de deformación al desplazamiento total. Luego, la primera integral proporciona la contribución al desplazamiento Δ por los efectos de deformaciones axiales; el segundo término proporciona la contribución por las deformaciones por flexión, y así sucesivamente para los términos restantes.

Los **signos convencionales** utilizados para las resultantes de esfuerzo que aparecen en la Ec. (12-4) deben ser congruentes; luego, las fuerzas axiales N_u y N_L deben obtenerse de acuerdo con los mismos signos convencionales, así como M_u y M_L , V_u y V_L , y T_u y T_L . Sólo en estas condiciones el desplazamiento Δ tendrá el mismo sentido positivo que la carga unitaria.

El procedimiento para calcular un desplazamiento por medio del método de la carga unitaria utilizando la Ec. (12-4) puede resumirse como sigue: (1) determinar las resultantes de esfuerzo N_L , M_L , V_L y T_L en la estructura debidas a las cargas reales; (2) aplicar sobre la estructura una carga unitaria correspondiente al desplazamiento Δ por determinar; (3) evaluar las resultantes de esfuerzo N_u , M_u , V_u y T_u debidas a la carga unitaria; (4) formar los términos mostrados en la Ec. (12-4) e integrar

cada uno sobre toda la estructura; y (5) sumar los resultados para obtener el desplazamiento Δ . Estos pasos se explican en los ejemplos que se proporcionan más adelante.

Dependiendo del tipo de estructura, podemos anticipar que no se requieren algunos de los términos de la Ec. (12-4). Por ejemplo, si una armadura con nudos articulados tiene cargas que actúan únicamente en los nudos, entonces no habrá deformaciones por flexión, por cortante ni por torsión en los miembros, y únicamente se requiere el primer término en la Ec. (12-4). Además, las fuerzas axiales en los miembros serán constantes sobre la longitud; de modo que, si los miembros son prismáticos, la integración sobre uno de ellos da $N_v N_L L / EA$, donde L es la longitud del miembro. Entonces una sumatoria sobre todos los miembros nos lleva a la siguiente ecuación para una **armadura**:

$$\Delta = \sum \frac{N_v N_L L}{EA} \quad (12-5)$$

Esta ecuación muestra que la deflexión Δ en cualquier junta de la armadura puede evaluarse mediante el siguiente procedimiento: (1) determinar las fuerzas axiales N_v y N_L en todos los miembros debidas a la carga unitaria y a las cargas reales, respectivamente; (2) formar la expresión $N_v N_L L / EA$ para cada miembro; y (3) sumar estas expresiones de todos los miembros a fin de obtener la deflexión.

Sólo las deformaciones por flexión son de importancia para una viga en una estructura plana. Por lo tanto, la ecuación de la carga unitaria para una **viga** es

$$\Delta = \int \frac{M_v M_L dx}{EI} \quad (12-6)$$

Esta expresión puede integrarse para cada miembro estructural, y los términos resultantes se suman para todos los miembros de la estructura.

En general, es posible calcular desplazamientos de estructuras mediante cualquier combinación apropiada de términos de la Ec. (12-4), dependiendo del tipo de estructura y del tipo de carga.

Efectos de temperatura. Si los desplazamientos son producidos por causas diferentes de las cargas, tales como cambios de temperatura, entonces deben emplearse expresiones apropiadas para $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ y $d\phi$ en lugar de las expresiones dadas en las Ecs. (c), las cuales son únicamente para los efectos de cargas. Por ejemplo, un incremento de temperatura produce un incremento en longitud (véase Fig. 12-3a) dado por la ecuación

$$d\delta = \alpha(\Delta T) dx$$

en donde α es el coeficiente de dilatación térmica y ΔT es el incremento de temperatura (véase Ec. 2-22). Entonces la ecuación de carga unitaria (Ec. 12-3) adopta la forma

$$\Delta = \int N_v \alpha(\Delta T) dx \quad (12-7)$$

Esta ecuación puede emplearse aun cuando el cambio de temperatura ΔT varíe a lo largo de los ejes de los miembros; sólo es necesario expresar ΔT como función de x y después integrar. Sin embargo, para el caso común en el que el cambio de temperatura es constante en la longitud de cada miembro, podemos sustituir la expresión en la Ec. (12-7) por una sumatoria que incluya a todos los miembros:

$$\Delta = \sum N_v \alpha L (\Delta T) \quad (12-8)$$

en donde L es la longitud de un elemento. Así, el término $N_v \alpha L (\Delta T)$ debe evaluarse para cada miembro estructural, y luego estos términos se sumarán para obtener el desplazamiento.

Cuando la temperatura varía linealmente desde la parte superior hasta la base de un miembro, pero es constante sobre la longitud, la deformación es del tipo ilustrado en la Fig. 12-3b, en la cual la deformación $d\theta$ es

$$d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1) dx}{h}$$

según la Ec. (7-71), siendo h la altura de la viga, T_2 la temperatura en la superficie inferior y T_1 la temperatura en la superficie superior. Luego, en estas condiciones obtenemos

$$\Delta = \int \frac{M_v \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} \quad (12-9)$$

En esta ecuación $d\theta$ se supone positivo cuando las fibras superiores de la viga se acortan y las inferiores se alargan, como se muestra en la Fig. 12-3b. Por lo tanto, el momento flexionante M_v debe considerarse como positivo para las mismas condiciones; esto significa que M_v es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga.

Evaluación de integrales que contienen productos. Cuando se evalúan las integrales de la Ec. (12-4), usualmente se consideran miembros para los cuales las propiedades del material y las dimensiones de la sección transversal son constantes de un extremo al otro. Por lo tanto, las rigideces EA , EI , GA/α_s , y GI_p pueden colocarse fuera de los signos de integración. Las integrales restantes son la forma de producto, como

$$\int M_v M_L dx \quad (12-10)$$

Estas integrales que contienen productos deben evaluarse en la longitud de cada miembro y luego sumarse para todos los miembros. Para cualquier miembro particular, cada cantidad (tal como M_v o M_L) es una función de la distancia x medida a lo largo del eje del miembro; específicamente, la cantidad puede ser constante en toda la longitud, puede variar linealmente con la longitud, o puede ser una función de grado superior, tal como cuadrática o cúbica. Para ahorrar tiempo en la realización de cálculos, estas integrales con productos pueden evaluarse previamente y tabularse los resultados para su disponibilidad. En la Tabla 12-1 se presenta una compilación de integrales con productos que muestran las funciones de uso más común. La tabla se presenta en términos de las funciones M_v y M_L , pero lógicamente estas funciones pueden

reemplazarse por otras como V_v y V_L o T_v y T_L . En algunos de los ejemplos se explica el uso de las tablas.

Ejemplo 1

La armadura mostrada en la Fig. 12-4a está sometida a cargas P y $2P$ en el nudo A . Se supone que todos los miembros de la estructura son prismáticos y tienen la misma rigidez axial EA . Calcular las deflexiones horizontal y vertical de la junta B de la armadura, mediante el método de la carga unitaria.

Tabla 12-1 Valores de integrales que contienen productos $\int_0^L M_v M_L dx$

	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{L}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{2L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (M_1 + 2M_2) M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{a}{L}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (2M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{b}{L}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{3} M_1 M_3$
	$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1 (2M_3 + M_4) + \frac{L}{6} M_2 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{b}{L}\right) M_1 M_3 + \frac{L}{6} \left(1 + \frac{a}{L}\right) M_1 M_4$	$\frac{L}{3} M_1 (M_3 + M_4)$
	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{c}{L}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{d}{L}\right) M_1 M_3 + \frac{L}{6} \left(1 + \frac{c}{L}\right) M_2 M_3$	Para $c \leq a$: $\frac{L}{3} M_1 M_3 - \frac{L(a-c)^2}{6ad} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} \left(1 + \frac{cd}{L^2}\right) M_1 M_3$
	$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{3} \left(1 + \frac{ab}{L^2}\right) M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$
	$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12} (M_1 + 3M_2) M_3$	$\frac{L}{12} \left(1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2}\right) M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$

Nota: Todas las curvas son parábolas de segundo grado con vértices representados por puntos gruesos

Como las cargas actúan únicamente en los nudos, la fuerza axial es constante a lo largo de cada uno de los miembros. Por lo tanto, se puede emplear la Ec. (12-5) para determinar las deflexiones deseadas. Es útil realizar los cálculos en forma sistemática, como se muestra en la Tabla 12-2. Las dos primeras columnas de la tabla identifican los miembros de la armadura y su longitud. Las fuerzas axiales N_L , obtenidas mediante un análisis del equilibrio estático de la armadura mostrada en la Fig. 12-4a, se listan en la columna 3 de la tabla (las fuerzas de tensión son positivas).

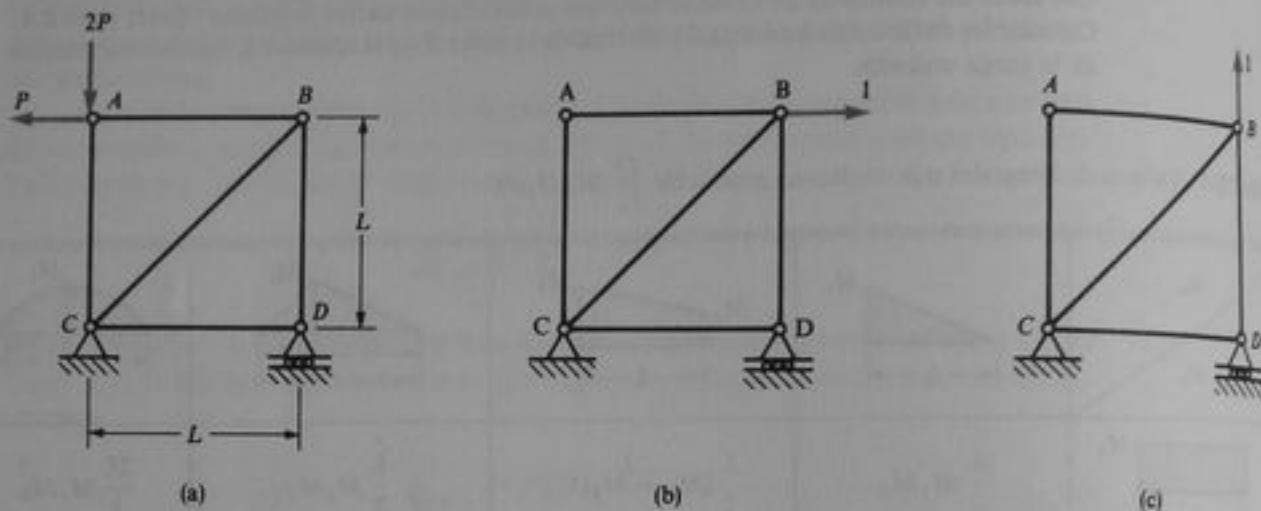


Fig. 12-4 Ejemplo 1. Desplazamientos de una armadura mediante el método de la carga unitaria

Para determinar la deflexión horizontal δ_h del nudo B , se aplica una carga unitaria horizontal sobre la estructura en B (véase Fig. 12-4b). Las fuerzas axiales N_U producidas por esta carga unitaria se indican en la columna 4 de la tabla; nuevamente, las fuerzas de tensión son positivas. A continuación, se calculan los productos $N_U N_L L$ para cada miembro y se suman (columna 5). Dividiendo este resultado entre EA se obtiene el desplazamiento buscado (véase Ec. 12-5):

$$\delta_h = -3.828 \frac{PL}{EA}$$

El signo negativo en esta expresión significa que la deflexión es en dirección opuesta a la dirección de la carga unitaria; esto es, la deflexión es hacia la izquierda.

El mismo procedimiento general se emplea para determinar la deflexión vertical δ_v del nudo B . La carga unitaria correspondiente (tomada como positiva hacia arriba) se ilustra en la Fig. 12-4c, y las fuerzas axiales N_U para esta condición de carga se listan en la columna 6 de la tabla. En la última columna, se calculan y suman los productos $N_U N_L L$. Finalmente, dividiendo entre EA se obtiene

$$\delta_v = \frac{PL}{EA}$$

Como este resultado es positivo, sabemos que la deflexión vertical en el nudo B , producida por las cargas P y $2P$, es hacia arriba.

En este ejemplo se supone por simplicidad que todas las barras tienen la misma área de sección transversal. Si no fuera este el caso, sería necesario incluir una columna adicional en la Tabla 12-2 para listar las áreas. Entonces, en lugar de calcular $N_U N_L L$ en las columnas 5 y 7,

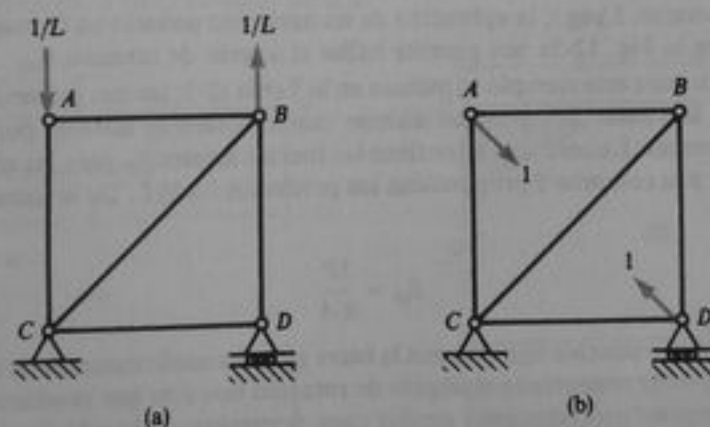
Tabla 12-2 Cálculos para el Ejemplo 1

(1) Miembro	(2) Longitud	(3) N_L	(4) N_V	(5) $N_V N_L L$	(6) N_V	(7) $N_V N_L L$
AB	L	P	0	0	0	0
AC	L	$-2P$	0	0	0	0
BD	L	P	-1	$-PL$	1	PL
CD	L	0	0	0	0	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2.828PL$	0	0
				$-3.828PL$		PL

calculáramos $N_V N_L L / A$. Asimismo, es posible considerar con igual facilidad, módulos de elasticidad diferentes para los miembros.

Ejemplo 2

En este ejemplo consideraremos nuevamente la armadura mostrada en la Fig. 12-4a. Sin embargo, en lugar de encontrar la deflexión de un nudo, determinemos el ángulo de rotación del miembro AB y el cambio de distancia entre los nudos A y D .


Fig. 12-5 Ejemplo 2

La carga unitaria correspondiente a una rotación es un momento unitario. En este ejemplo creamos un momento unitario que consiste en dos fuerzas iguales y opuestas que actúan en los extremos del miembro AB (véase Fig. 12-5a). Cada fuerza tiene una magnitud igual al momento unitario dividido entre la longitud de la barra AB . Se puede fácilmente demostrar que el desplazamiento correspondiente a este momento es la rotación de la barra AB en sentido contrario al de las manecillas del reloj; únicamente necesitamos observar que el trabajo externo realizado por estas dos fuerzas durante la deformación virtual de la armadura es

$$W_{ext} = \frac{1}{L} (\delta_a) + \frac{1}{L} (\delta_b) = \frac{1}{L} (\delta_a + \delta_b) \quad (d)$$

Tabla 12-3 Cálculos para el Ejemplo 2

(1) Miembro	(2) Longitud	(3) N_L	(4) N_V	(5) $N_V N_L L$	(6) N_V	(7) $N_V N_L L$
AB	L	P	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
AC	L	$-2P$	$-1/L$	$2P$	$-1/\sqrt{2}$	$1.414PL$
BD	L	P	$1/L$	P	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
CD	L	0	0	0	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	0	0	1	$-2PL$
				$3P$		$-2PL$

en donde δ_a es la deflexión hacia abajo del nudo A y δ_b es la deflexión hacia arriba del nudo B . Las unidades de los términos que aparecen en la Ec. (d) son congruentes, pues cada "1" representa el momento unitario y tiene unidades de longitud por fuerza. La suma de las dos deflexiones δ_a y δ_b cuando se divide entre la longitud L del miembro, es el ángulo de rotación de AB :

$$\theta_{ab} = \frac{\delta_a + \delta_b}{L} \quad (e)$$

De las Ecs. (d) y (e), obtenemos

$$W_{ext} = 1 \cdot \theta_{ab} \quad (f)$$

como era de esperarse. Luego, la aplicación de un momento unitario en forma de las dos fuerzas mostradas en la Fig. 12-5a nos permite hallar el ángulo de rotación θ_{ab} .

Los cálculos para este ejemplo se indican en la Tabla 12-3; las tres primeras columnas son iguales a las de la Tabla 12-1, pero las últimas cuatro columnas difieren porque se calculan deflexiones diferentes. La columna 4 contiene las fuerzas axiales N_V para las cargas mostradas en la Fig. 12-5a, y la columna 5 proporciona los productos $N_V N_L L$. De la suma de tales términos obtenemos

$$\theta_{ab} = \frac{3P}{EA}$$

en donde un resultado positivo significa que la barra gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Luego, se ha encontrado el ángulo de rotación buscado que producen las cargas P y $2P$. Puede seguirse un procedimiento similar para determinar el ángulo de rotación de cualquier otro miembro.

A continuación, consideremos el cambio de distancia entre los puntos A y D de la armadura mostrada en la Fig. 12-4a. En otras palabras, deseamos determinar la traslación relativa δ_{ad} de los nudos A y D a lo largo de la línea que los une. La carga unitaria correspondiente consiste en dos fuerzas iguales y opuestamente dirigidas a lo largo de la recta que une A y D (véase Fig. 12-5b). Las fuerzas axiales resultantes N_V en la armadura se listan en la columna 6 de la Tabla 12-3, y los productos $N_V N_L L$ se listan en la columna 7. Luego, la traslación relativa de los nudos A y D es

$$\delta_{ad} = -\frac{2PL}{EA}$$

en donde el signo negativo indica que la distancia entre los puntos A y D se ha incrementado (esto es, la traslación relativa es opuesta al sentido de las cargas unitarias).

Ejemplo 3

Consideremos los efectos de un cambio uniforme de temperatura en una de las barras de la armadura mostrada en la Fig. 12-14a. Suponer que el miembro BD ha incrementado de modo uniforme su temperatura en una cantidad ΔT , de forma que su longitud se incrementa en $\alpha(\Delta T)L$. Se desea calcular la deflexión horizontal del nudo B de la armadura.

Para obtener la deflexión de un nudo se utiliza la Ec. (12-8). Sin embargo, como sólo una barra de la armadura tiene un cambio de longitud debido al cambio de temperatura, sólo hay un término en la sumatoria. Para determinar la deflexión horizontal del nudo B debida al cambio de temperatura, se emplea la carga unitaria mostrada en la Fig. 12-4b, y por lo tanto se utiliza N_v de la columna 4 de la Tabla 12-2. Luego, la fuerza en la barra BD es $N_v = -1$, y la deflexión horizontal (de la Ec. 12-8) es

$$\delta_h = -\alpha L(\Delta T)$$

en donde el signo negativo indica que la deflexión es hacia la izquierda (esto es, opuesta a la dirección de la carga unitaria). Mediante un procedimiento similar podemos calcular fácilmente cualesquiera otros desplazamientos ocasionados por el cambio de temperatura.

Ejemplo 4

Una viga prismática en voladizo AB , que soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre una porción del claro, se muestra en la Fig. 12-6a. Se desea determinar la deflexión δ y el ángulo de rotación θ en el extremo libre B .

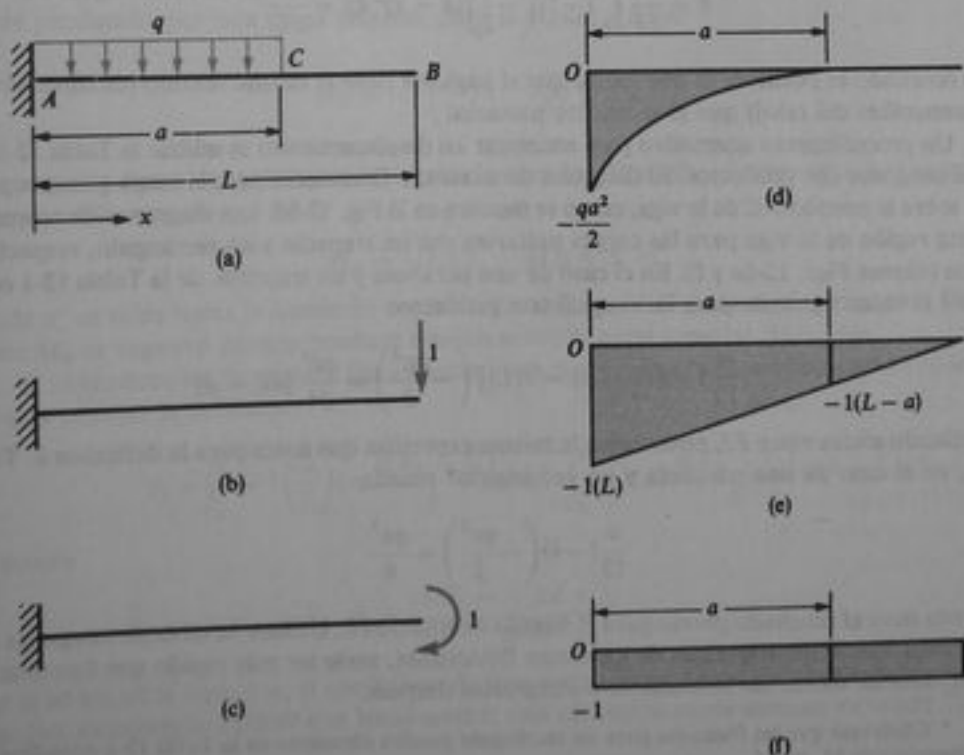


Fig. 12-6 Ejemplo 4. Desplazamientos de una viga mediante el método de la carga unitaria

Para evaluar las deflexiones de vigas, se emplea la forma de la ecuación de carga unitaria que considera únicamente los efectos de deformaciones por flexión (Ec. 12-6). Si tomamos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo A y medimos x hacia la derecha (Fig. 12-6a), entonces las ecuaciones para el momento flexionante M_x debido a la carga son

$$M_x = -\frac{q}{2}(a-x)^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M_x = 0 \quad (a \leq x \leq L)$$

en las cuales un momento flexionante positivo ocasiona compresión sobre la parte superior de la viga.

La carga unitaria correspondiente a una deflexión δ hacia abajo se muestra en la Fig. 12-6b; esta carga produce el momento flexionante siguiente:

$$M_v = -1(L-x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

Sustituyendo M_v y M_x en la Ec. (12-6) e integrando, obtenemos la deflexión del punto B :

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^a (-1)(L-x) \left(-\frac{q}{2} \right) (a-x)^2 dx = \frac{qa^3}{24EI} (4L-a)$$

Este resultado es positivo, por lo que la deflexión es hacia abajo.

El procedimiento para determinar el ángulo de rotación θ es similar, excepto que la carga unitaria es un momento unitario, como se muestra en la Fig. 12-6c. El momento flexionante debido a esta carga es

$$M_v = -1 \quad (0 \leq x \leq L)$$

y la ecuación de carga unitaria resulta

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^a (-1) \left(-\frac{q}{2} \right) (a-x)^2 dx = \frac{qa^3}{6EI}$$

Este resultado es positivo, lo que indica que el ángulo θ tiene el mismo sentido (en dirección de las manecillas del reloj) que el momento unitario.

Un procedimiento alternativo para encontrar los desplazamientos es utilizar la Tabla 12-1 para las integrales con productos. El diagrama de momento flexionante para la carga q es una parábola sobre la porción AC de la viga, como se muestra en la Fig. 12-6d. Los diagramas de momento en esta región de la viga para las cargas unitarias son un trapecio y un rectángulo, respectivamente (véanse Figs. 12-6e y f). En el caso de una parábola y un trapecio, de la Tabla 12-1 obtenemos el valor siguiente para la integral con producto:

$$\frac{a}{12} [-1(L-a) - 3(L)] \left(-\frac{qa^2}{2} \right) = \frac{qa^3}{24} (4L-a)$$

Dividiendo ahora entre EI , obtenemos la misma expresión que antes para la deflexión δ . También, en el caso de una parábola y un rectángulo* resulta

$$\frac{a}{12} (-4) \left(-\frac{qa^2}{2} \right) = \frac{qa^3}{6}$$

que nos lleva al resultado previo para el ángulo de rotación θ . Utilizar la tabla de integrales con productos junto con diagramas de momento flexionante, suele ser más rápido que formular las ecuaciones de momento flexionante e integrarlas después.

* Obsérvese que las fórmulas para un rectángulo pueden obtenerse de la Tabla 12-1 considerando un trapecio con $M_1 = M_2$.

Ejemplo 5

Una viga ABC con claro L y un voladizo de longitud b (Fig. 12-7a), experimenta un cambio de temperatura tal que la superficie superior de la viga tiene una temperatura T_1 mientras que la superficie inferior está a una temperatura T_2 . Calcular la deflexión δ , en el extremo de la porción en voladizo de la viga.

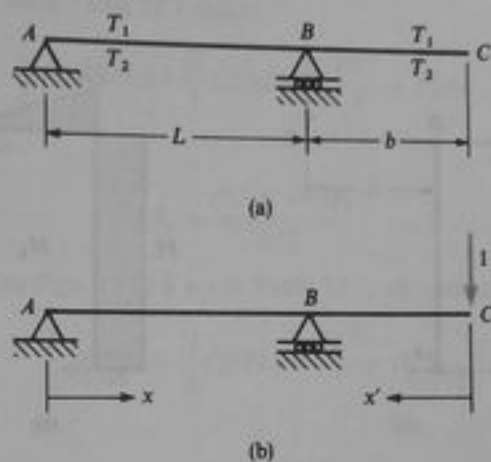


Fig. 12-7 Ejemplo 5. Viga con una diferencia de temperatura

La carga unitaria correspondiente a δ , se representa en la Fig. 12-7b. El momento flexionante producido por esta carga unitaria, para la región AB , es

$$M_v = -1\left(\frac{b}{L}\right)x \quad (0 \leq x \leq L)$$

donde x es la distancia medida desde A hacia la derecha. También, el momento flexionante en la región BC es

$$M_v = -1(x') \quad (0 \leq x' \leq b)$$

donde x' se mide hacia la izquierda desde C . En ambas partes de la viga el momento flexionante M_v es negativo porque produce tensión sobre la parte superior de la viga.

Si se conocen los momentos flexionantes, podemos sustituir ahora directamente en la Ec. (12-9) y obtener la deflexión:

$$\delta_c = \int_0^L -1\left(\frac{b}{L}\right)(x) \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx + \int_0^b -1(x') \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx'$$

de donde

$$\delta_c = \frac{\alpha b(T_1 - T_2)(L + b)}{2h} \quad (g)$$

h es la altura de la viga, y α , el coeficiente de dilatación térmica. Si el valor calculado de δ , es negativo, entonces la deflexión es hacia arriba; esta condición existe siempre y cuando T_2 sea mayor que T_1 .

Ejemplo 6

La armazón plana ABC mostrada en la Fig. 12-8a está empotrada en el punto A y soporta una carga vertical P en el extremo libre C . Los miembros AB y BC están rigidamente unidos en B , y ambos miembros de la armazón tienen rigidez flexional constante EI . Determinar la deflexión horizontal δ_h , la deflexión vertical δ_v , y el ángulo de rotación θ en el punto C .

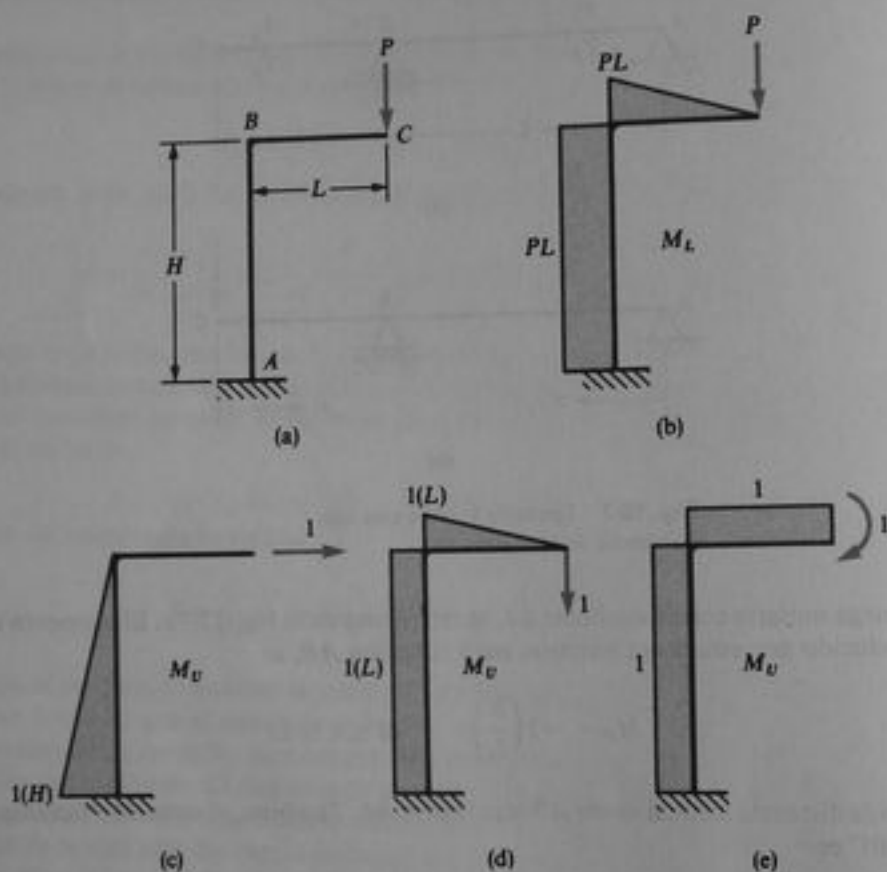


Fig. 12-8 Ejemplos 6 y 7. Desplazamientos de una armazón plana

Los momentos flexionantes M_L producidos por la carga P se muestran en la Fig. 12-8b, en la cual los diagramas de momento flexionante se trazaron sobre los lados sometidos a tensión de los miembros. Las cargas unitarias correspondientes a la deflexión horizontal, a la deflexión vertical y al ángulo de rotación en el punto C se muestran en las tres últimas porciones de la figura. En cada caso también se muestra el diagrama completo de momento flexionante para M_v , trazado nuevamente sobre los lados a tensión de los miembros.

Conociendo los momentos flexionantes, podemos obtener ahora las deflexiones, ya sea por integración (véase Ec. 12-6) o mediante las fórmulas para integrales con producto listadas en la Tabla 12-1. La última técnica parece más sencilla en este caso. Por ejemplo, para encontrar δ_h , tomamos M_v de la Fig. 12-8c y M_L de la Fig. 12-8b. Entonces, mediante la Tabla 12-1 obtenemos

$$\frac{H}{2} (1)(H)(PL)$$

Dividiendo esta expresión entre EI , obtenemos

$$\delta_h = \frac{PLH^2}{2EI} \quad (h)$$

para la deflexión horizontal del punto C .

La deflexión vertical se calcula en forma similar a partir de los diagramas de las Figs. 12-8b y d. Para el miembro BC tenemos el caso de dos triángulos y para el miembro AB el caso de dos rectángulos; luego, de la Tabla 12-1 resulta

$$\frac{L}{3}(1)(L)(PL) + \frac{H}{2}(2L)(PL) = \frac{PL^3}{3} + PL^2H$$

y la deflexión vertical es

$$\delta_v = \frac{PL^2(L + 3H)}{3EI} \quad (i)$$

Finalmente, utilizando las Figs. 12-8b y e y la Tabla 12-1, obtenemos

$$\frac{L}{2}(PL)(1) + \frac{H}{2}(2)(PL) = \frac{PL^2}{2} + PLH$$

de donde

$$\theta = \frac{PL(L + 2H)}{2EI} \quad (j)$$

De esta manera, se han determinado los desplazamientos deseados de la armazón.

Ejemplo 7

Con referencia al marco o armazón plana descrita en el Ejemplo 6, determinemos las contribuciones adicionales a los desplazamientos δ_h , δ_v y θ , causadas por deformaciones axiales en los miembros. Supóngase que ambos tienen una rigidez flexional constante EA .

Los desplazamientos adicionales se determinarán mediante la Ec. (12-5). Las fuerzas axiales N_L en esa ecuación son las causadas por la carga P mostrada en la Fig. 12-8a; la única de tales fuerzas es $N_L = -P$ en el miembro AB . Para hallar la deflexión horizontal δ_h , tomamos las fuerzas axiales N_v de la Fig. 12-8c. La única fuerza es $N_v = 1$ en BC ; por lo tanto, se concluye que la deflexión horizontal δ_h no es afectada por la presencia de deformaciones axiales.

Para obtener la deflexión vertical δ_v , observamos de la Fig. 12-8d que la única fuerza axial causada por la carga unitaria es $N_v = -1$ para el miembro AB . Luego, la deflexión vertical debida a deformaciones axiales (de la Ec. 12-5) es

$$\sum \frac{N_v N_L L}{EA} = \frac{(-1)(-P)(H)}{EA} = \frac{PH}{EA}$$

Esta cantidad puede sumarse al resultado anterior obtenido en el Ejemplo 6 para evaluar la deflexión vertical total del nudo C :

$$\delta_v = \frac{PL^2(L + 3H)}{3EI} + \frac{PH}{EA} \quad (k)$$

Cuando se sustituyen valores numéricos en esta expresión, se encuentra que el último término, que representa los efectos de las deformaciones axiales, es extremadamente pequeño comparado con el primer término. Por esta razón es práctica común considerar únicamente los efectos de deformaciones por flexión cuando se analizan armazones planas y omitir completamente la contribución de las deformaciones axiales.

Para completar este ejemplo, consideramos el ángulo de rotación θ y observamos que la carga unitaria correspondiente (Fig. 12-8e) no produce fuerzas axiales en los miembros. Luego, θ no se afecta por la presencia de deformaciones axiales.

Ejemplo 8

Una barra curva AB tiene la forma de un cuadrante de círculo con radio R , como se muestra en la Fig. 12-9a. La barra está empotrada en A y soporta una carga vertical P en su extremo libre B . Obtener una expresión para la deflexión horizontal δ_h del punto B .

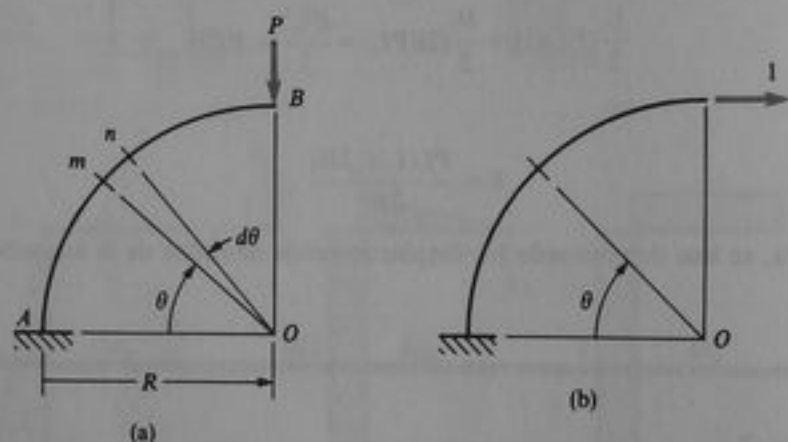


Fig. 12-9 Ejemplo 8. Deflexión de una barra curva

La ecuación de carga unitaria para determinar los desplazamientos de la barra curva puede expresarse en la forma general

$$\Delta = \int \frac{M_v M_L ds}{EI} \quad (12-11)$$

en donde ds , que es igual a $R d\theta$, es la longitud de un elemento mn de la barra. Se supone que la barra es delgada comparada con el radio R , de manera que se utiliza la fórmula anterior, aunque fue obtenida originalmente para la flexión de una barra recta. También, en la Ec. (12-11) sólo se consideran los efectos de deformaciones por flexión.

El momento flexionante M_L causado por la carga P es $M_L = -PR \cos \theta$, donde se supone que un momento flexionante positivo causa compresión en el lado externo de la barra curva. También, el momento flexionante M_v debido a una carga unitaria horizontal (Fig. 12-9b) es $M_v = -R(1 - \sin \theta)$. Sustituyendo M_v y M_L en la Ec. (12-11) e integrando, obtenemos

$$\delta_h = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (-R)(1 - \sin \theta)(-PR \cos \theta)R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

De esta manera se determina la deflexión horizontal del punto B mediante el método de la carga unitaria.

12.4 TEOREMAS DE RECIPROCIDAD

Los teoremas de reciprocidad son conceptos importantes en mecánica aplicada y análisis estructural. Son aplicables sólo a estructuras linealmente elásticas (esto es, estructuras para las cuales es válido el principio de superposición). Luego deben satisfacerse dos condiciones básicas: (1) el material debe satisfacer la ley de Hooke, y (2) los desplazamientos deben ser lo bastante pequeños como para que todos los cálculos se basen en la configuración no deformada de la estructura. Se utilizarán los conceptos de trabajo y energía de deformación para deducir los teoremas.

Teorema de los desplazamientos recíprocos. Para ilustrar este teorema tomemos como ejemplo una viga en voladizo AB sometida a una carga concentrada P en su extremo libre (Fig. 12-10a). La deflexión se obtiene en el punto medio C de esta viga mediante las fórmulas del Apéndice G; por tanto,

$$\delta_{cb} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

La notación de subíndices empleada con el símbolo δ se basa en el siguiente esquema: el primer subíndice denota el punto en el que ocurre la deflexión, y el segundo subíndice denota el punto de aplicación de la carga. Luego, el símbolo δ_{cb} identifica la deflexión en el punto C producida por una carga que actúa en B .

Consideremos ahora la misma viga en voladizo sometida a una carga P que actúa en su punto medio C (Fig. 12-10b). En este caso deseamos hallar la deflexión en el extremo libre B , denotada por el símbolo δ_{bc} . Refiriéndonos nuevamente a las fórmulas del Apéndice G, encontramos

$$\delta_{bc} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

Luego, observamos que la deflexión en C debida a la carga que actúa en B es igual a la deflexión en B debida a la carga que actúa en C . Este enunciado es un ejemplo del **teorema de los desplazamientos recíprocos**.

Para probar el teorema en términos más generales, consideremos una estructura de cualquier tipo (esto es, una armadura, viga, cuerpo tridimensional de forma arbitraria, etc.). Por conveniencia, se analizará una viga simple (véase Fig. 12-11), pero cualquier otra estructura sería satisfactoria. Consideremos también dos estados de carga actuando sobre la estructura. En el primer estado de carga, una fuerza P actúa en cualquier punto A (Fig. 12-11a); en el segundo estado, la misma carga P actúa en cualquier otro punto B (Fig. 12-11b). Las deflexiones en los puntos A y B para el primer estado de carga se denotan δ_{aa} y δ_{ba} , respectivamente, de acuerdo con la notación de subíndices ya descrita. De manera análoga, las deflexiones para el segundo estado de carga se identifican como δ_{ab} y δ_{bb} .

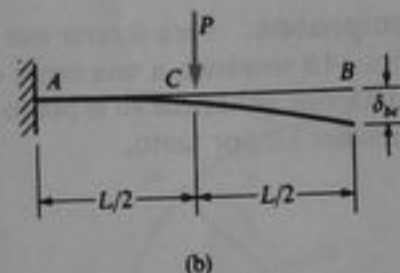
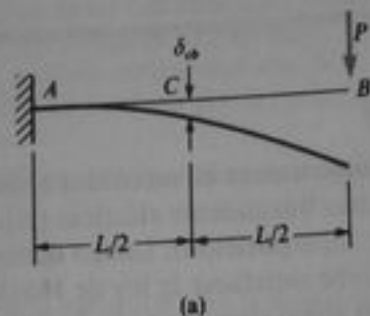


Fig. 12-10 Teorema de los desplazamientos recíprocos

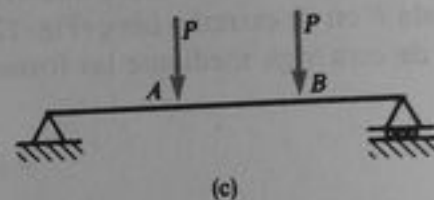
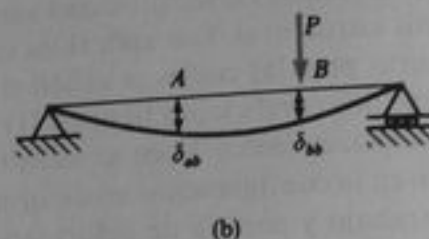
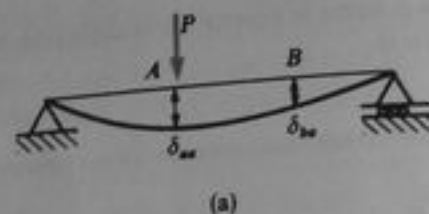


Fig. 12-11 Teorema de los desplazamientos recíprocos

Las deflexiones de la viga pueden describirse mediante el concepto de correspondencia entre cargas y desplazamientos (véase Sección 12.3). Por ejemplo, las deflexiones δ_{aa} y δ_{ab} corresponden ambas a la carga P que actúa en A (Fig. 12-11a). Para comprender esto, recuérdese que el desplazamiento que corresponde a una fuerza consiste en una deflexión en el punto donde actúa la fuerza; esta deflexión se mide a lo largo de la línea de acción de la fuerza y es positiva en la dirección de la misma. Sin embargo, la deflexión no necesariamente es producida por la fuerza a la que corresponde. La deflexión δ_{aa} es causada por la fuerza P a partir del primer estado de carga, y la deflexión δ_{ab} lo es por la fuerza P a partir del segundo estado de carga. No obstante, ambas deflexiones corresponden a la carga P de la Fig. 12-11a. Asimismo, las deflexiones δ_{ba} y δ_{bb} corresponden ambas a la carga P del segundo estado de carga, aunque δ_{ba} es producida por la primera carga y δ_{bb} es causada por la segunda carga. Este concepto de correspondencia como medio de identificación de un desplazamiento será muy útil en las explicaciones subsecuentes.

Regresando ahora a la obtención del teorema del desplazamiento recíproco, supongamos que ambas fuerzas P actúan simultáneamente sobre la viga (Fig. 12-11c). Si el material de la viga es linealmente elástico y si las deflexiones son pequeñas, se utiliza el principio de superposición para obtener las deflexiones. La deflexión correspondiente a la carga P que actúa en A es $\delta_{aa} + \delta_{ab}$, y la deflexión correspondiente a la carga P que actúa en B es $\delta_{ba} + \delta_{bb}$. Conociendo estas deflexiones se calcula fácilmente el trabajo realizado por las dos cargas P conforme se aplican

lenta y simultáneamente a la viga. Este trabajo, igual a la energía de deformación total U de la viga, es

$$U = \frac{1}{2} P(\delta_{aa} + \delta_{ab}) + \frac{1}{2} P(\delta_{ba} + \delta_{bb}) \quad (a)$$

según se obtiene a partir del teorema de Clapeyron (Ec. 2-38).

La energía de deformación total de la viga sometida a dos cargas (Fig. 12-11c) no depende del orden en que se apliquen las mismas. Como la viga se comporta elásticamente, la energía de deformación debe ser la misma cuando se aplican simultáneamente las dos cargas, que cuando se aplica una después de la otra. El estado final de la viga es el mismo en ambos casos. Supóngase que se aplica primero la carga en A , seguida por la carga en B . Entonces la energía de deformación de la viga durante la aplicación de la primera carga es

$$\frac{1}{2} P\delta_{aa} \quad (b)$$

debido a que esta carga causa la deflexión δ_{aa} , mostrada en la Fig. 12-11a. Cuando se aplica la segunda carga, resulta una deflexión adicional en B igual a δ_{bb} , por lo que la segunda carga realiza un trabajo igual a

$$\frac{1}{2} P\delta_{bb} \quad (c)$$

y una cantidad igual de energía de deformación se desarrolla en la viga. Sin embargo, no debe pasar inadvertido el hecho de que, mientras se aplica la carga en B , la carga P que actúa en A experimenta una deflexión adicional δ_{ab} . La cantidad de trabajo correspondiente realizado por tal carga es

$$P\delta_{ab} \quad (d)$$

Es así que se produce esta energía de deformación adicional. La Ec. (d) no contiene el factor $1/2$ ya que la fuerza P permanece constante durante el tiempo en que ocurre la deflexión adicional δ_{ab} . Sumando las Ecs. (b), (c) y (d), obtenemos la energía de deformación total para el caso en que se aplique una carga antes que la otra:

$$U = \frac{1}{2} P\delta_{aa} + \frac{1}{2} P\delta_{bb} + P\delta_{ab} \quad (e)$$

Esta cantidad de energía debe ser igual a la energía producida cuando se aplican simultáneamente las dos cargas (Ec. a). Igualando las dos expresiones para la energía de deformación se obtiene el siguiente resultado:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (12-12)$$

Esta ecuación representa el **teorema de los desplazamientos recíprocos**, que puede enunciarse como sigue:

La deflexión en A debida a una carga que actúa en B es igual a la deflexión en B debida a la misma carga cuando actúa en A .

Las direcciones positivas de las deflexiones se consideran iguales a las de las cargas correspondientes.

El teorema del desplazamiento recíproco también es aplicable cuando una carga es una fuerza y la otra es un momento, o si ambas cargas son momentos. Para explicar la primera posibilidad, considérese de nuevo una viga simple sometida a dos estados de carga (Fig. 12-12). El primer estado de carga consiste en un momento M que actúa en el punto A (Fig. 12-12a). El desplazamiento correspondiente a M en la primera viga es el ángulo de rotación θ_{aa} , y en la segunda viga es el ángulo θ_{ab} . El segundo estado de carga es la fuerza P aplicada en B . Repitiendo los mismos pasos anteriores obtenemos la siguiente expresión para la energía de deformación de la viga cuando se aplican simultáneamente las dos cargas M y P :

$$U = \frac{1}{2} M(\theta_{aa} + \theta_{ab}) + \frac{1}{2} P(\delta_{ba} + \delta_{bb})$$

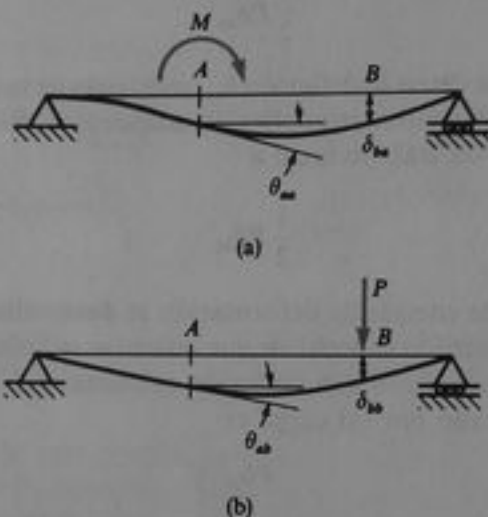


Fig. 12-12 Teorema de los desplazamientos recíprocos

Cuando se aplica primero el momento M , seguido por la fuerza P , la energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2} M\theta_{aa} + \frac{1}{2} P\delta_{bb} + M\theta_{ab}$$

Igualando estas dos expresiones para la energía de deformación se obtiene

$$M\theta_{ab} = P\delta_{ba} \quad (12-13)$$

Si las cargas M y P son numéricamente iguales, entonces θ_{ab} y δ_{ba} también serán numéricamente iguales. Por lo tanto, para este caso podemos establecer el teorema de los desplazamientos recíprocos como sigue:

El ángulo de rotación en A debido a una fuerza que actúa en B es numéricamente igual a la deflexión en B debida a un momento que actúa en A si la fuerza y el momento son numéricamente iguales.

Por supuesto, deben emplearse unidades compatibles para todas las cantidades.

Si las dos cargas que actúan sobre la estructura consisten en pares o momentos M (Fig. 12-13), entonces se tiene

$$\theta_{ab} = \theta_{ba} \quad (12-14)$$

En esta situación el teorema es como sigue:

El ángulo de rotación en A debido a un momento que actúa en B es igual al ángulo de rotación en B debido al mismo momento cuando actúa en A.

Los sentidos positivos de los ángulos se consideran iguales a los sentidos positivos de los momentos correspondientes.

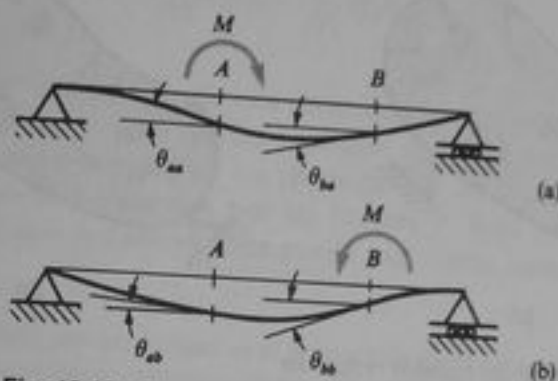


Fig. 12-13 Teorema de los desplazamientos recíprocos

En las deducciones anteriores del teorema de los desplazamientos recíprocos se utilizó una viga simple con fines explicativos. Pudo haberse empleado cualquier otro tipo de estructura, tal como una armadura, marco o cuerpo masivo, ya que la deducción se basó únicamente en consideraciones de energía de deformación y el principio de superposición. Luego, el teorema es completamente general y aplicable a estructuras que tengan deformaciones axiales, por flexión, por cortante o torsionales. La única restricción sobre el uso del teorema es que debe cumplirse el principio de superposición, lo cual implica que la estructura sea linealmente elástica. El teorema fue obtenido inicialmente por J. C. Maxwell y publicado en 1864 (véase Ref. 12-1); por ello, suele denominarse también **teorema de reciprocidad de Maxwell**.

Teorema de los trabajos recíprocos. Este teorema es mucho más general que el teorema de los desplazamientos recíprocos, e incluye a este último como caso especial. Para obtener el teorema consideremos cualquier cuerpo linealmente elástico para el cual se satisface el principio de superposición (Fig. 12-14). Este cuerpo puede representar una viga, una armadura, un marco u otro tipo de estructura. Deben considerarse dos estados de carga. En el primer estado (Fig. 12-14a) hay m cargas: P_1, P_2, \dots, P_m ; en el segundo estado (Fig. 12-14b) hay n cargas: Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Las deflexiones en el primer estado se designan mediante el símbolo δ con el subíndice que identifica la carga particular a la que corresponde cada deflexión. Por ejemplo, δ_{Q_2} representa la deflexión correspondiente a la fuerza Q_2 , por lo que esta deflexión debe medirse en la dirección de la fuerza Q_2 , aunque ello no implica que el punto de aplicación de Q_2 se mueva únicamente en la dirección de Q_2 . Este punto puede tener también una componente de desplazamiento normal a la direc-

ción de δ_{Q2} , pero tal componente no se considera en esta explicación porque no corresponde a Q_2 .

En el segundo estado de carga (Fig. 12-14b), la situación es similar; las cargas Q ocasionan desplazamientos, algunos de los cuales corresponden a las fuerzas P y otros corresponden a las fuerzas Q . Estos desplazamientos se denotan mediante el símbolo δ' , y además los subíndices denotan las fuerzas a las que corresponden las deflexiones.

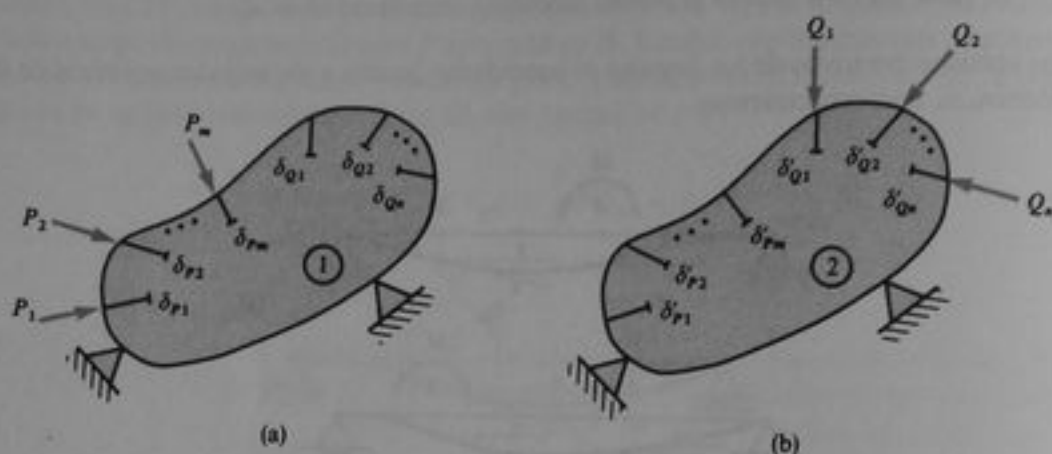


Fig. 12-14 Teorema de los trabajos recíprocos

Para obtener el teorema de los trabajos recíprocos, se utilizan los mismos conceptos respecto a la energía de deformación que los empleados en la obtención del teorema de los desplazamientos recíprocos. Si se aplican simultáneamente al cuerpo ambos sistemas de cargas P y Q , la energía de deformación (igual al trabajo realizado por las fuerzas) es

$$U = \frac{1}{2} P_1(\delta_{P1} + \delta'_{P1}) + \frac{1}{2} P_2(\delta_{P2} + \delta'_{P2}) + \cdots + \frac{1}{2} P_m(\delta_{Pm} + \delta'_{Pm}) \\ + \frac{1}{2} Q_1(\delta_{Q1} + \delta'_{Q1}) + \frac{1}{2} Q_2(\delta_{Q2} + \delta'_{Q2}) + \cdots + \frac{1}{2} Q_n(\delta_{Qn} + \delta'_{Qn}) \quad (f)$$

Esta energía de deformación debe ser igual a la obtenida inicialmente cuando se aplicó todo el sistema de cargas P y después todo el sistema de cargas Q . Cuando se aplican sólo las cargas P , la energía de deformación es

$$\frac{1}{2} P_1 \delta_{P1} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{P2} + \cdots + \frac{1}{2} P_m \delta_{Pm} \quad (g)$$

Cuando se aplica el segundo conjunto de cargas, obtenemos la siguiente cantidad de energía de deformación debida al trabajo realizado por las cargas Q :

$$\frac{1}{2} Q_1 \delta'_{Q1} + \frac{1}{2} Q_2 \delta'_{Q2} + \cdots + \frac{1}{2} Q_n \delta'_{Qn} \quad (h)$$

Al mismo tiempo, obtenemos la siguiente cantidad adicional de energía de deformación debida al trabajo realizado por las cargas P :

$$P_1 \delta'_{P1} + P_2 \delta'_{P2} + \cdots + P_m \delta'_{Pm} \quad (i)$$

Por lo tanto, la energía de deformación total (para el caso en que las cargas P se aplican primero, seguidas de las cargas Q) es la suma de las expresiones (g), (h) e (i). Igualando esta suma con la energía de deformación asociada con la aplicación simultánea de las cargas (véase Ec. f) se obtiene

$$P_1 \delta'_{P1} + P_2 \delta'_{P2} + \cdots + P_m \delta'_{Pm} = Q_1 \delta_{Q1} + Q_2 \delta_{Q2} + \cdots + Q_n \delta_{Qn}$$

o sea,

$$\sum_{i=1}^m P_i \delta'_{Pi} = \sum_{j=1}^n Q_j \delta_{Qj} \quad (12-15)$$

La expresión en el lado izquierdo de esta ecuación es la suma de los productos de las fuerzas P y sus desplazamientos correspondientes causados por las fuerzas Q . Sobre el lado derecho aparece la suma de los productos de las fuerzas Q y sus desplazamientos correspondientes causados por las fuerzas P . Esta ecuación representa el **teorema de los trabajos recíprocos**, que puede enunciarse como sigue:

El trabajo realizado por las fuerzas en el primer estado de carga cuando se mueven según sus desplazamientos correspondientes en el segundo estado de carga, es igual al trabajo realizado por las fuerzas en el segundo estado de carga cuando se mueven según sus desplazamientos correspondientes en el primer estado de carga.

El teorema de los trabajos recíprocos es aplicable tanto a fuerzas como a momentos. Por ejemplo, P_i puede representar una fuerza o un momento, y entonces el desplazamiento correspondiente δ_{Pi} es una deflexión o un ángulo de rotación, respectivamente.

Aunque en la obtención del teorema de los trabajos recíprocos se representaron los dos conjuntos de fuerzas actuando en puntos diferentes de la estructura (véase Fig. 12-14), esto no es necesario. La fuerza Q_1 , por ejemplo, podría actuar sobre el cuerpo en el mismo punto que una de las fuerzas P_i ; incluso podría actuar en la misma dirección y tener la misma magnitud. En otras palabras, no existe ninguna restricción en las fuerzas P o Q , respecto al número de ellas, la localización de sus puntos de aplicación o sus direcciones. Esta generalización hace del teorema de los trabajos recíprocos un principio muy útil en mecánica estructural. Como en el caso del teorema de los desplazamientos recíprocos, el teorema de los trabajos recíprocos sólo es válido en estructuras para las que puede emplearse el principio de superposición. El teorema fue obtenido por E. Betti (Ref. 12-5) y Lord Rayleigh (Refs. 12-6 y 12-8), por lo que a menudo se le llama también **teorema de reciprocidad de Betti-Rayleigh**.

Es evidente que el teorema de los desplazamientos recíprocos es un caso especial del teorema de los trabajos recíprocos. Por ejemplo, podemos aplicar el teorema de los trabajos recíprocos a los dos casos de carga mostrados en las Figs. 12-11a y b; entonces obtenemos $P\delta_{ab} = P\delta_{ba}$, lo que inmediatamente nos lleva a la Ec. (12-12) para el teorema de los desplazamientos recíprocos. Asimismo, la aplicación del teorema a las dos condiciones de carga mostradas en la Fig. 12-12 da $M\theta_{ab} = P\delta_{ba}$, que es igual a la Ec. (12-13). Finalmente, se obtiene la Ec. (12-14) aplicando el teorema de los trabajos recíprocos a los dos estados de carga mostrados en la Fig. 12-13.

12.5 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN Y ENERGÍA COMPLEMENTARIA

Los conceptos duales de energía de deformación y energía complementaria proporcionan las bases de algunos métodos de análisis extremadamente efectivos. En su forma más general, estos métodos son aplicables a estructuras lineales y no lineales. La técnica consistirá en describir los conceptos para estructuras no lineales y considerar entonces estructuras lineales como un caso especial. Este procedimiento se utilizó cuando se explicó el método de la carga unitaria en la Sección 12.3, donde primero se obtuvo la Ec. (12-3) para estructuras no lineales, y luego se particularizó en estructuras lineales como la Ec. (12-4).

Las no linealidades en el comportamiento de una estructura obedecen a dos causas primarias. La causa más obvia es cuando un material tiene una curva esfuerzo-deformación no lineal; en este caso se dice que la estructura tiene **no linealidades materiales**. La segunda causa de no linealidad es un cambio en la geometría de la estructura. Esta situación ocurre siempre que los desplazamientos en la misma alteran la acción de las cargas aplicadas o de las reacciones. Un ejemplo es una columna con carga axial excéntrica (Sección 11.4), para la cual observamos que las deflexiones laterales de la columna tienen un efecto significativo sobre las deflexiones y momentos flexionantes en la columna. Otro ejemplo es una viga con grandes deflexiones, como se describió en la Sección 7.13. En ambos ejemplos, se supuso que el material de la viga cumplía la ley de Hooke, pero debido a la cambiante geometría de la estructura, se determinó que las deflexiones y resultantes de esfuerzo se relacionaban no linealmente con las cargas aplicadas. Estos ejemplos explican las **no linealidades geométricas**. Cuando se analiza una estructura no lineal, es importante recordar que el principio de superposición no es aplicable salvo en formas muy especiales.

Independientemente de si están presentes no linealidades de materiales o de configuración geométrica, se supondrá que el material de la estructura es **elástico**. Este requisito es necesario a fin de que sean válidos los diversos principios energéticos, incluyendo la conservación de la energía.

Para ejemplificar los conceptos energéticos, consideremos una barra prismática sometida a una carga axial P que produce un esfuerzo uniformemente distribuido $\sigma = P/A$ (Fig. 12-15a). La deformación de la barra es $\epsilon = \delta/L$, en donde δ es el alargamiento de la barra y L es la longitud. Se supone que el material de la barra tiene la curva esfuerzo-deformación no lineal mostrada en la Fig. 12-15b. El diagrama carga-deflexión (Fig. 12-15c) tiene la misma forma que la curva esfuerzo-deformación.

El trabajo hecho por la carga P durante el proceso de carga de la barra es

$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1$$

En esta ecuación, P_1 representa cualquier valor de la carga axial entre cero y el valor máximo P ; δ_1 es el alargamiento correspondiente, y δ es el alargamiento máximo. Como la barra se comporta elásticamente y como se omiten cualesquiera pérdidas de energía durante los procesos de carga y descarga (en otras palabras, se trata de un sistema conservativo), todo el trabajo realizado por la carga se almacenará en la barra en forma de energía de deformación elástica, que se recobra durante la descarga. Por lo tanto, la **energía de deformación** es igual al trabajo W , como sigue:

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (12-16)$$

La integral en esta ecuación puede interpretarse geoméricamente como el área bajo la curva carga-deflexión mostrada en la Fig. 12-15c.

La **densidad de energía de deformación** u (esto es, la energía de deformación por unidad de volumen de material) se obtiene considerando un elemento de volumen diferencial de dimensiones unitarias sometido a un esfuerzo σ_1 y a una deformación ϵ_1 ; luego,

$$u = \int_0^{\epsilon} \sigma_1 d\epsilon_1 \quad (12-17)$$

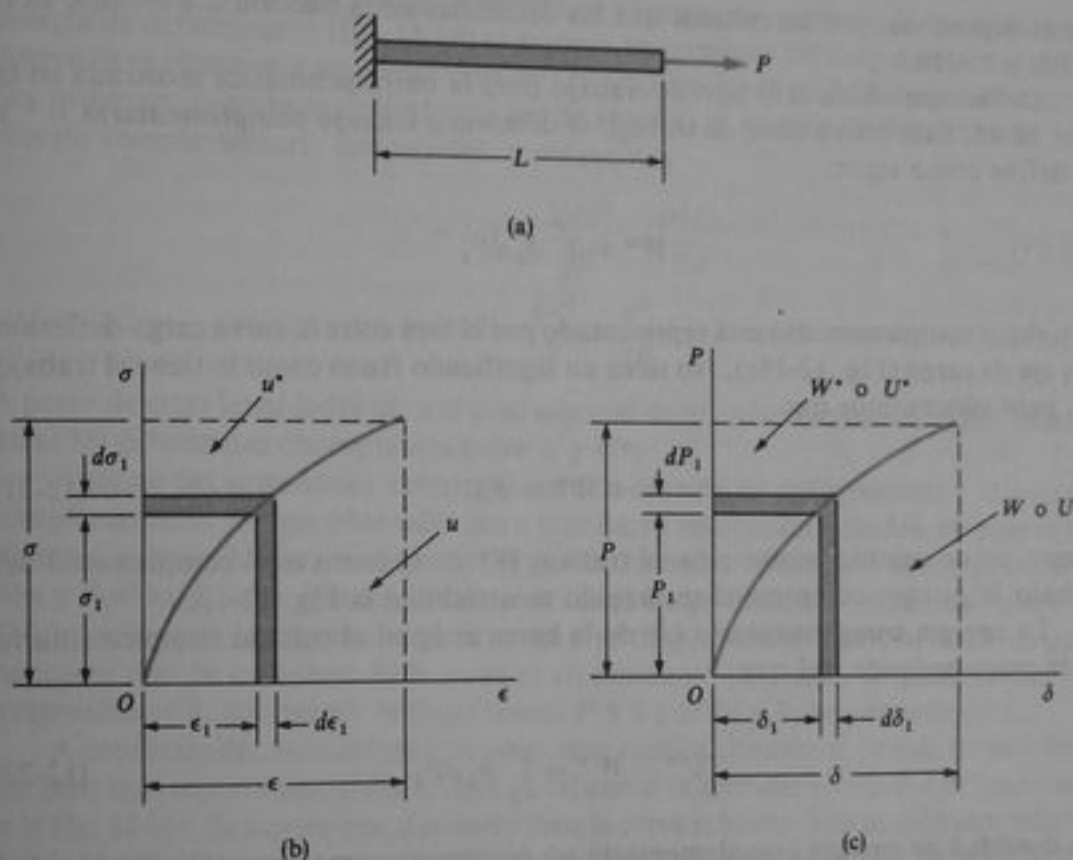


Fig. 12-15 Energía de deformación y energía complementaria

en donde $\epsilon = \delta/L$ es la deformación máxima. La integral de la Ec. (12-17) representa un área bajo la curva esfuerzo-deformación en la Fig. 12-15b. Esta misma expresión para u puede obtenerse a partir de la expresión para la energía de deformación total (Ec. 12-16) dividiendo entre el volumen V de la barra (igual a AL) y observando que $\sigma_1 = P_1/A$ y $d\epsilon_1 = d\delta_1/L$. A la inversa, la energía de deformación total U puede obtenerse a partir de la densidad de energía de deformación integrando como sigue:

$$U = \int u dV \quad (12-18)$$

en donde dV es un elemento de volumen y la integración se realiza para todo el volumen de la barra.

En el caso especial cuando la curva esfuerzo-deformación sigue la ley de Hooke, de modo que $\sigma_1 = E\epsilon_1$ (y en consecuencia $P_1 = EA\delta_1/L$), las expresiones para U y u (Ecs. 12-16 y 12-17) resultan

$$U = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (12-19)$$

$$u = \frac{E\epsilon^2}{2} \quad (12-20)$$

Estas expresiones son las mismas que las deducidas en la Sección 2.8 (véanse Ecs. 2.39b y 2.41b).

Definamos ahora otro tipo de trabajo para la barra prismática mostrada en la Fig. 12-15. Esta nueva clase de trabajo se denomina **trabajo complementario** W^* y se define como sigue:

$$W^* = \int_0^P \delta_1 dP_1$$

El trabajo complementario está representado por el área entre la curva carga-deflexión y el eje de carga (Fig. 12-15c). No tiene un significado físico como lo tiene el trabajo W , pero observamos que

$$W + W^* = P\delta \quad (12-21)$$

Luego, en un sentido geométrico, el trabajo W^* de la barra es el complemento del trabajo W porque completa el rectángulo mostrado en la Fig. 12-15c.

La **energía complementaria** U^* de la barra es igual al trabajo complementario de la carga aplicada, tal que

$$U^* = W^* = \int_0^P \delta_1 dP_1 \quad (12-22)$$

La **densidad de energía complementaria** u^* (o energía complementaria por unidad de volumen) se obtiene considerando un volumen elemental sometido al esfuerzo σ_1 y a la deformación ϵ_1 , en forma análoga a la empleada para definir la densidad de energía de deformación; luego,

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon_1 d\sigma_1 \quad (12-23)$$

La densidad de energía complementaria es igual al área entre la curva esfuerzo-deformación y el eje de esfuerzo (Fig. 12-15b). También, la energía complementaria total de la barra puede obtenerse por integración a partir de u^* :

$$U^* = \int u^* dV \quad (12-24)$$

A veces la energía complementaria es llamada **energía de esfuerzo** a fin de mantener la analogía con la energía de deformación.

Considerando nuevamente el caso de un material que satisface la ley de Hooke ($\epsilon_1 = \sigma_1/E$ y $\delta_1 = P_1L/EA$), sustituimos en las Ecs. (12-22) y (12-23) para obtener las siguientes expresiones de U^* y u^* :

$$U^* = \frac{P^2L}{2EA} \quad (12-25)$$

$$u^* = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (12-26)$$

Obsérvese que la energía complementaria se expresa en términos de la carga, y la energía de deformación (Ec. 12-19) se expresa en términos del desplazamiento. Esta diferencia es inherente a las definiciones de U y U^* (Ecs. 12-16 y 12-22, respectivamente). Sin embargo, cuando es aplicable la ley de Hooke, la energía de deformación y la energía complementaria son iguales, y obtenemos

$$U = U^* = \frac{EA\delta^2}{2L} = \frac{P^2L}{2EA} \quad (12-27)$$

$$u = u^* = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (12-28)$$

A pesar de estas igualdades para el caso especial de un miembro lineal, deben mantenerse las diferencias conceptuales entre U y U^* .

Aunque las ecuaciones anteriores para la energía de deformación y la energía complementaria fueron obtenidas para una barra en tensión, pueden ampliarse fácilmente para incluir otros casos de carga de una barra tales como compresión, torsión y flexión. Luego, se considera que la curva carga-deflexión mostrada en la Fig. 12-15c representa la relación entre la carga y su desplazamiento correspondiente para cualquier tipo de miembro. Si la carga es un momento M con un desplazamiento correspondiente θ , solamente reemplazamos P y δ por M y θ , respectivamente.

A continuación, considérese una estructura elástica compuesta de más de un miembro pero que soporta una carga simple P , tal como la armadura simple ABC mostrada en la Fig. 12-16a. Se supone que el material tiene la curva esfuerzo-deformación mostrada en la Fig. 12-15b. Consecuentemente, el diagrama de la carga P en función de la deflexión correspondiente δ (o sea, la deflexión vertical del nudo B) también será no lineal (Fig. 12-16b). En este diagrama carga-deflexión se muestran el trabajo W y el trabajo complementario W^* de la carga P . Estas cantidades son iguales, respectivamente, a la energía de deformación U y a la energía complementaria U^* de la estructura.

Consideremos ahora los miembros individuales del sistema estructural. Cada miembro tiene tanta energía de deformación como energía complementaria; estas cantidades pueden determinarse fácilmente porque conocemos la fuerza axial en cada miembro (del equilibrio estático), así como la relación esfuerzo-deformación. La suma U_m de las energías de deformación para los miembros es igual al trabajo W de la carga P , por el principio de conservación de la energía para una estructura elástica (luego, $U_m = U$). Esta conclusión se cumple aun cuando la estructura sea geoméricamente no lineal; por ejemplo, se cumple cuando las deflexiones son grandes. Sin embargo, la suma U_m^* de las energías complementarias de los miembros es igual al trabajo complementario W^* de la carga P sólo si la estructura es geoméricamente lineal (Ref. 12-14). Luego, la energía complementaria se conserva y $U_m^* = U^*$ cuando están presentes no linealidades materiales, pero no cuando existen no linealidades geométricas.

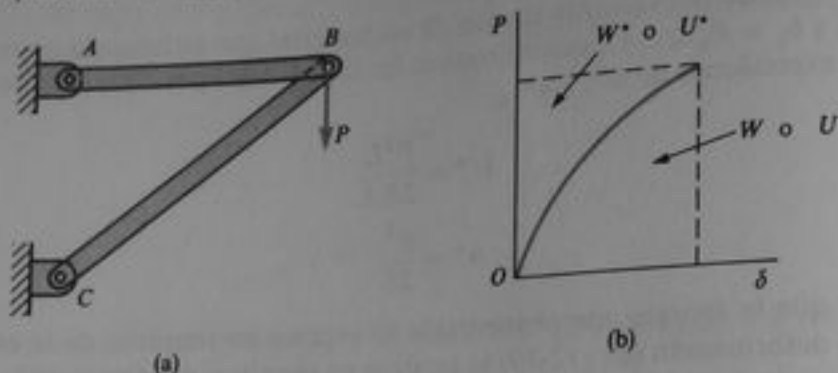


Fig. 12-16 Armadura con no linealidad material

Una condición necesaria para la linealidad geométrica es que las deflexiones sean pequeñas, pero esta condición no es suficiente, como se muestra en el Ejemplo 2 al final de la sección. Si están presentes no linealidades geométricas, definimos la energía complementaria U^* de la estructura como igual al trabajo complementario W^* , pero esta energía es mayor que la energía complementaria total U_m^* de los miembros individuales. Luego, bajo estas condiciones, la energía complementaria no se conserva y cierta cantidad se "pierde" durante el proceso de carga.

Cuando en la estructura actúa más de una carga, el trabajo total realizado por las cargas puede obtenerse por sumatoria. Las cargas deben aplicarse simultáneamente y mantenerse en las mismas proporciones una con otra durante el proceso de carga. El trabajo y el trabajo complementario de las cargas individuales pueden adicionarse para obtener el trabajo total W y el trabajo complementario total W^* , como sigue:

$$W = \sum_{i=1}^n \int_0^{\delta_i} P d\delta \quad W^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{P_i} \delta dP \quad (12-29a, b)$$

En estas ecuaciones, P_i y δ_i son los valores máximos de la carga i -ésima y su desplazamiento correspondiente, respectivamente; P y δ representan valores intermedios de esas mismas cantidades (entre cero y los valores máximos); y n es el número total de cargas. El trabajo W dado por la Ec. (12-29a) es igual a la energía de deformación U de la estructura; también es igual a la suma U_m de las energías de deformación de los miembros individuales, sin importar si la estructura es material y geoméricamente no lineal. El trabajo complementario W^* (Ec. 12-29b), que es igual a la energía complementaria U^* de la estructura, equivale a la suma U_m^* de las energías complementarias de los miembros sólo cuando no existen no linealidades geométricas, como se estableció previamente. Suponiendo que se pueden obtener las relaciones carga-deflexión, se sustituye en las Ecs. (12-29) y se evalúan W y W^* . La primera cantidad se expresará en términos de los desplazamientos, y la última, en términos de las cargas. Sin embargo, dado que las relaciones entre las cargas y sus deflexiones correspondientes, usualmente no se conocen hasta que se ha complementado el análisis de la estructura, el procedimiento usual es evaluar la energía de deformación y la energía complementaria considerando miembro por miembro (mediante las Ecs. 12-16 y 12-22) y sumar entonces las energías para obtener U y U^* de toda la estructura. Este método para obtener U es válido en el caso de estructuras con cualquier tipo de no linealidad, pero para U^* sólo se permiten no linealidades materiales.

Si la estructura se comporta linealmente, el trabajo W y el trabajo complementario W^* de las cargas son iguales. Además, cada uno de estos términos de trabajo es igual a la energía de deformación y a la energía complementaria de la estructura ($W = W^* = U = U^*$). Dado que el trabajo de la carga i -ésima es $P_i \delta_i / 2$, obtenemos la siguiente ecuación para U y U^* :

$$U = U^* = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \delta_i}{2} = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \cdots + \frac{P_n \delta_n}{2} \quad (12-30)$$

Esta ecuación expresa U y U^* en términos de las cargas aplicadas y sus desplazamientos correspondientes.

Podemos expresar también U y U^* en términos de los desplazamientos únicamente, o sólo en términos de las cargas, simplemente sustituyendo una cantidad en términos de la otra. Demostremos simbólicamente este proceso a fin de mostrar las características de las expresiones resultantes. Como la estructura se comporta linealmente, las cargas pueden expresarse como combinaciones lineales de los desplazamientos, en la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11} \delta_1 + a_{12} \delta_2 + \cdots + a_{1n} \delta_n \\ P_2 &= a_{21} \delta_1 + a_{22} \delta_2 + \cdots + a_{2n} \delta_n \\ &\dots \\ P_n &= a_{n1} \delta_1 + a_{n2} \delta_2 + \cdots + a_{nn} \delta_n \end{aligned} \quad (12-31)$$

en donde los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ son constantes que dependen únicamente de las propiedades de la estructura. Si estas relaciones se sustituyen en la Ec. (12-30), las energías de deformación y complementaria se expresan como una función de los desplazamientos únicamente. La forma general de la ecuación resultante es como sigue:

$$\begin{aligned} U = U^* &= b_{11} \delta_1^2 + b_{12} \delta_1 \delta_2 + \cdots + b_{1n} \delta_1 \delta_n \\ &\quad + b_{21} \delta_2 \delta_1 + b_{22} \delta_2^2 + \cdots + b_{2n} \delta_2 \delta_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + b_{n1} \delta_n \delta_1 + b_{n2} \delta_n \delta_2 + \cdots + b_{nn} \delta_n^2 \end{aligned} \quad (12-32)$$

donde las letras b son nuevas constantes obtenidas a partir de las constantes a . La expresión del lado derecho se denomina **forma cuadrática**, la cual es un polinomio homogéneo de segundo grado.

Además de expresar las cargas en términos de los desplazamientos podemos expresar también los desplazamientos como combinaciones lineales de las cargas:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= c_{11} P_1 + c_{12} P_2 + \cdots + c_{1n} P_n \\ \delta_2 &= c_{21} P_1 + c_{22} P_2 + \cdots + c_{2n} P_n \\ &\dots \\ \delta_n &= c_{n1} P_1 + c_{n2} P_2 + \cdots + c_{nn} P_n \end{aligned} \quad (12-33)$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse a partir de las Ecs. (12-31) resolviendo éstas simultáneamente, por lo que las letras c representan constantes que dependen úni-

camente de las propiedades de la estructura. Cuando las Ecs. (12-33) se sustituyen en la Ec. (12-30), obtenemos otra forma cuadrática para U y U^* ; luego,

$$\begin{aligned}
 U = U^* = & d_{11}P_1^2 + d_{12}P_1P_2 + \cdots + d_{1n}P_1P_n \\
 & + d_{21}P_2P_1 + d_{22}P_2^2 + \cdots + d_{2n}P_2P_n \\
 & \cdots \\
 & + d_{n1}P_nP_1 + d_{n2}P_nP_2 + \cdots + d_{nn}P_n^2
 \end{aligned} \quad (12-34)$$

donde las letras d son constantes obtenidas a partir de las constantes c . Estos resultados muestran que, en el caso de una estructura elástica lineal, la energía de deformación y la energía complementaria pueden expresarse ya sea como una función cuadrática de los desplazamientos, o como una función cuadrática de las cargas. (En las Refs. 12-14 y 12-15 se proporcionan explicaciones adicionales de la energía de deformación y de la energía complementaria, con muchos ejemplos.)

Ejemplo 1

Suponer que cierta estructura con no linealidades materiales se somete a una carga P que produce un desplazamiento correspondiente δ dado por la ecuación $\delta = CP^2$, en donde C es una constante (véase Fig. 12-17). Determinar la energía de deformación y la energía complementaria para esta estructura.

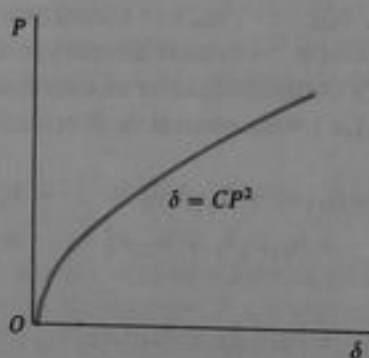


Fig. 12-17 Ejemplo 1. Curva carga-deflexión no lineal

La energía de deformación se encuentra a partir de la Ec. (12-16) sustituyendo $P_1 = \sqrt{\delta_1/C}$; luego,

$$U = \int_0^{\delta} \sqrt{\frac{\delta_1}{C}} d\delta_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\delta^3}{C}} \quad (12-35)$$

La energía complementaria de la Ec. (12-22) es

$$U^* = \int_0^P CP_1^2 dP_1 = \frac{CP^3}{3} \quad (12-36)$$

Obsérvese que la energía de deformación se expresa en términos del desplazamiento, y la energía complementaria, en términos de la carga. Estas formas para las energías son congruentes con la naturaleza de las definiciones de U y U^* ; además, se apreciará en las secciones subse-

cuentes que estas formas son las más útiles cuando se buscan deflexiones y se analizan estructuras. Por supuesto, en algunos casos es completamente posible expresar energía de deformación en términos de cargas, y energía complementaria en términos de desplazamientos. Tal resultado puede lograrse para este ejemplo sustituyendo la relación original carga-deflexión $\delta = CP^2$ en las Ecs. (12-35) y (12-36). Obsérvese también que U y U^* no son iguales para esta estructura no lineal (en este ejemplo particular, $U = 2U^*$).

Ejemplo 2

Una estructura que consta de dos barras horizontales AC y CB , cada una de longitud L , se muestra en la Fig. 12-18a. Las barras tienen extremos articulados y están unidas en C . El material de las barras es linealmente elástico y cada barra tiene rigidez axial constante EA . Si se aplica en C una carga vertical P , las barras deben girar ya que son incapaces de soportar la carga cuando están horizontales. Luego, el nudo C se desplaza hacia abajo desarrollándose fuerzas de tensión en las barras. Cuando se alcanza una posición de equilibrio, la estructura tiene una deflexión δ en el nudo C (Fig. 12-18b). Determinar la energía de deformación y la energía complementaria para esta estructura, suponiendo que la deflexión δ permanece pequeña.

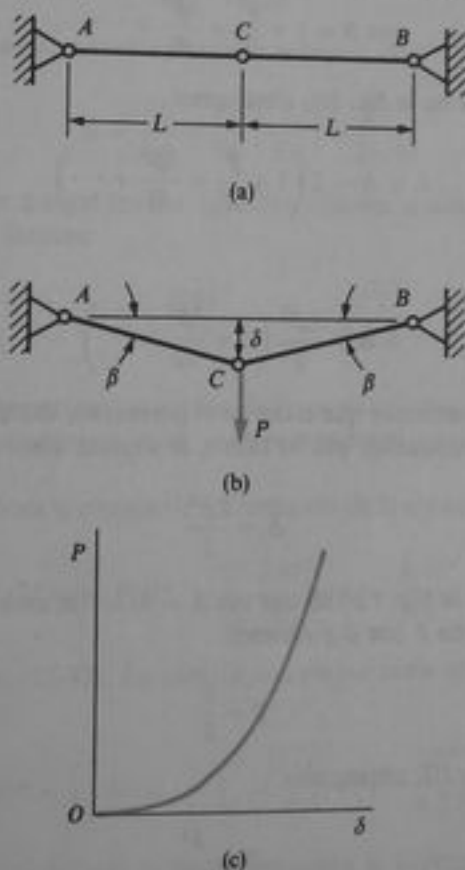


Fig. 12-18 Ejemplo 2. Estructura con no linealidad geométrica

Para determinar la energía de deformación U , obtendremos la energía de deformación en un miembro y después multiplicaremos por 2. Tal energía de deformación (dado que se satisface la ley de Hooke para el material) se obtiene de la fórmula $EA\Delta^2/2L$ (véase Ec. 12-19), en

donde Δ es el alargamiento y L' es la longitud del miembro. Para hablar de la longitud L' , de la Fig. 12-18b observamos que

$$L' = \frac{L}{\cos \beta} \quad (a)$$

en donde β es el pequeño ángulo mostrado en la figura. La expresión en serie para $\cos \beta$ es

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \dots \quad (b)$$

Dado que β es una cantidad pequeña, podemos despreciar (comparados con la unidad) todos los términos que tienen potencias de β . Luego se considera $\cos \beta$ igual a 1 y L' igual a L . Para obtener el alargamiento Δ en términos de la deflexión δ , se sigue un procedimiento similar. Primero, observamos que

$$L' = L + \Delta = \frac{L}{\cos \beta} = L \sec \beta \quad (c)$$

La expresión en serie para $\sec \beta$ es

$$\sec \beta = 1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{5\beta^4}{4!} + \dots \quad (d)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (c), obtenemos

$$L + \Delta = L \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{5\beta^4}{4!} + \dots \right)$$

o sea,

$$\Delta = \frac{L\beta^2}{2} \left(1 + \frac{5\beta^2}{12} + \dots \right)$$

Podemos omitir todos los términos que están en el paréntesis, excepto el primero, puesto que el ángulo β tiene un valor pequeño; por lo tanto, se supone que

$$\Delta = \frac{L\beta^2}{2} \quad (e)$$

Enseguida, observamos de la Fig. 12-18b que $\tan \beta = \delta/L$. Sin embargo, para ángulos pequeños podemos reemplazar $\tan \beta$ por β y obtener

$$\beta = \frac{\delta}{L} \quad (f)$$

Combinando las Ecs. (e) y (f), obtenemos

$$\Delta = \frac{\delta^2}{2L} \quad (g)$$

Luego, la energía de deformación total de los miembros es

$$U_m = (2) \frac{EA\Delta^2}{2L'} = \frac{EA\delta^4}{4L^3} \quad (12-37)$$

Este análisis es válido mientras δ permanezca pequeño en comparación con la longitud L .

La energía complementaria de los miembros es igual a la energía de deformación de los miembros porque el material cumple con la ley de Hooke:

$$U_m^* = \frac{EA\delta^4}{4L^3} \quad (h)$$

Sin embargo, esta estructura es geoméricamente no lineal porque la deflexión de la estructura modifica la acción de las fuerzas, por lo que U_m^* no representa la energía complementaria total U^* . Para demostrar este hecho obtengamos la ecuación carga-deflexión para la estructura y evaluemos entonces tanto U como U^* a partir del trabajo de la carga P (véanse Ecs. 12-16 y 12-22). Del equilibrio estático en el nudo C (Fig. 12-18b), obtenemos las fuerzas de tensión T en los miembros:

$$T = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \beta}$$

Reemplazando $\operatorname{sen} \beta$ por β (porque β es un ángulo pequeño), y utilizando también la Ec. (f), obtenemos

$$T = \frac{PL}{2\delta}$$

El alargamiento Δ de una barra se relaciona con la fuerza axial T como sigue:

$$\Delta = \frac{TL}{EA} = \frac{PL}{2\delta} \left(\frac{L}{EA} \right) = \frac{PL^2}{2EA\delta} \quad (i)$$

Ahora podemos eliminar Δ entre las Ecs. (g) e (i) y obtener la relación carga-deflexión en cualquiera de las siguientes formas:

$$P = \frac{EA\delta^3}{L^3} \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}} \quad (12-38a, b)$$

En la Fig. 12-18c se esquematiza una gráfica de estas ecuaciones. Es importante observar que la estructura es geoméricamente no lineal, aunque el material siga la ley de Hooke y las deflexiones sean pequeñas.

Podemos calcular ahora la energía de deformación de la estructura a partir de la Ec. (12-16):

$$U = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{EA\delta_1^3}{L^3} d\delta_1 = \frac{EA\delta^4}{4L^3} \quad (12-39)$$

que concuerda con la Ec. (12-37). La energía complementaria se encuentra a partir de la Ec. (12-22):

$$U^* = \int_0^P \delta_1 dP_1 = \int_0^P \sqrt[3]{\frac{P_1 L^3}{EA}} dP_1 = \frac{3P^{4/3}L}{4\sqrt[3]{EA}} \quad (12-40)$$

Obsérvese nuevamente que la energía de deformación se expresa en términos del desplazamiento y la energía complementaria se expresa en términos de la carga.

A fin de comparar la energía complementaria U^* con la energía complementaria U_m^* de los miembros (Ec. h), sustituimos la Ec. (12-38a) en la Ec. (12-40), obteniéndose una expresión opcional para la energía complementaria:

$$U^* = \frac{3EA\delta^4}{4L^3} \quad (12-41)$$

Este resultado es mayor que U^* , lo cual demuestra que cuando una estructura tiene no linealidades geométricas, la energía complementaria no se conserva.

Ejemplo 3

Una viga en voladizo de longitud L y sección transversal rectangular (ancho b , altura h) soporta una carga concentrada P en el extremo libre (véase Fig. 12-19). La curva esfuerzo-deformación del material en tensión está representada por la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante; la curva tiene el mismo perfil en compresión. Determinar la energía de deformación y la energía complementaria para esta viga.

En este ejemplo los esfuerzos y deformaciones varían a través del volumen de la viga, por lo cual es necesario determinar la densidad de energía de deformación u y la densidad de energía complementaria u^* e integrar entonces para obtener U y U^* . Estas cantidades pueden determinarse si conocemos el esfuerzo σ_1 y la deformación ϵ_1 en cada punto de la viga, lo que a su vez implica conocer la curvatura de la viga.

La curvatura puede hallarse mediante las técnicas descritas en la Sección 10.7 para flexión inelástica de vigas. Empezamos observando que la curvatura es

$$\kappa = -\frac{\epsilon_1}{h} \quad (j)$$

en donde ϵ_1 es el doble de la deformación en la superficie inferior de la viga (véase Ec. 10-22). También, de la Ec. (10-27), con $\epsilon_1 = \epsilon/2$, obtenemos la siguiente expresión para el momento flexionante M en cualquier sección transversal:

$$M = \frac{2bh^2}{\epsilon_1^2} \int_0^{\epsilon_1/2} \sigma \epsilon \, d\epsilon$$

Sustituyendo $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ e integrando, hallamos

$$M = \frac{Bbh^2\sqrt{\epsilon_1}}{5\sqrt{2}}$$

o sea

$$\epsilon_1 = \frac{50M^2}{B^2b^2h^4} \quad (k)$$

La curvatura puede encontrarse eliminando ϵ_1 entre las Ecs. (j) y (k), sustituyendo el momento flexionante M por Px y utilizando sólo valores absolutos:

$$\kappa = \frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5} \quad (l)$$

Esta ecuación proporciona la curvatura como una función de la distancia x medida a lo largo del eje de la viga (Fig. 12-19a).

La deformación ϵ_1 en cualquier punto de cualquier sección transversal de la viga es

$$\epsilon_1 = -\kappa y = -\frac{50P^2x^2y}{B^2b^2h^5} \quad (m)$$

según resulta de la Ec. (10-1). La distancia y se mide como se muestra en la Fig. 12-19b. El esfuerzo puede hallarse a partir de la deformación empleando la relación esfuerzo-deformación:

$$\sigma_1 = B\sqrt{\epsilon_1} \quad (n)$$

Por supuesto, la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$ es para la parte en tensión de la curva esfuerzo-deformación, lo que corresponde a la mitad superior de la viga en la Fig. 12-19 (donde y es negativa). Por lo tanto, sustituimos la Ec. (m) en la Ec. (n) y usamos nuevamente sólo valores absolutos:

$$\sigma_1 = \frac{5\sqrt{2}Py^{1/2}x}{bh^{3/2}} \quad (o)$$

Luego, tenemos ahora expresiones para el esfuerzo y la deformación en cualquier punto de la viga.

La densidad de la energía de deformación (Ec. 12-17) es

$$u = \int_0^{\epsilon} \sigma_1 d\epsilon_1 = \int_0^{\epsilon} B\sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \frac{2B\epsilon^{3/2}}{3}$$

Sustituyendo en la deformación ϵ (véase Ec. m), y utilizando únicamente valores absolutos, obtenemos

$$u = \frac{500\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3B^2b^3h^{15/2}} \quad (p)$$

Esta expresión proporciona la densidad de la energía de deformación como una función de las coordenadas x y y . La energía de deformación U de toda la viga se encuentra integrando u a través del volumen de la viga. Para establecer la integral, variemos x desde 0 hasta L y y desde 0 hasta $h/2$; luego multiplicaremos por 2 para tomar en cuenta ambas mitades de la viga. Luego, la ecuación para la energía de deformación U es

$$U = \int u dV = 2 \int_0^L \left[\int_0^{h/2} ub dy \right] dx$$

Sustituyendo u de la Ec. (p), obtenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1000\sqrt{2}P^3}{3B^2b^2h^{15/2}} \int_0^L \left[\int_0^{h/2} y^{3/2} dy \right] x^3 dx \\ &= \frac{25P^3L^4}{3B^2b^2h^5} \end{aligned} \quad (12-42)$$

El trabajo W realizado por la carga P está dado por esta misma expresión.

La densidad de energía complementaria (Ec. 12-23) es

$$u^* = \int_0^{\sigma} \epsilon_1 d\sigma_1 = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma_1^2}{B^2} d\sigma_1 = \frac{\sigma^3}{3B^2}$$

Sustituyendo en el esfuerzo σ (véase Ec. o), obtenemos

$$u^* = \frac{250\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3B^2b^3h^{15/2}} \quad (q)$$

que expresa la densidad de energía complementaria como una función de x y y . Ahora se integra a través del volumen de la viga, en la misma forma que para la energía de deformación:

$$U^* = \int u^* dV = 2 \int_0^L \left[\int_0^{h/2} u^* b dy \right] dx$$

Sustituyendo u^* de la Ec. (q) se obtiene

$$U^* = \frac{500\sqrt{2} P^3}{3B^2 b^2 h^{15/2}} \int_0^L \left[\int_0^{h/2} y^{3/2} dy \right] x^3 dx$$

$$= \frac{25P^3 L^4}{6B^2 b^2 h^5} \quad (12-43)$$

Luego, tenemos expresiones para la energía de deformación y la energía complementaria de esta viga. Obsérvese que la energía de deformación es el doble de la energía complementaria, porque el área bajo la curva esfuerzo-deformación (Fig. 12-19c) es el doble del área entre la curva y el eje vertical.

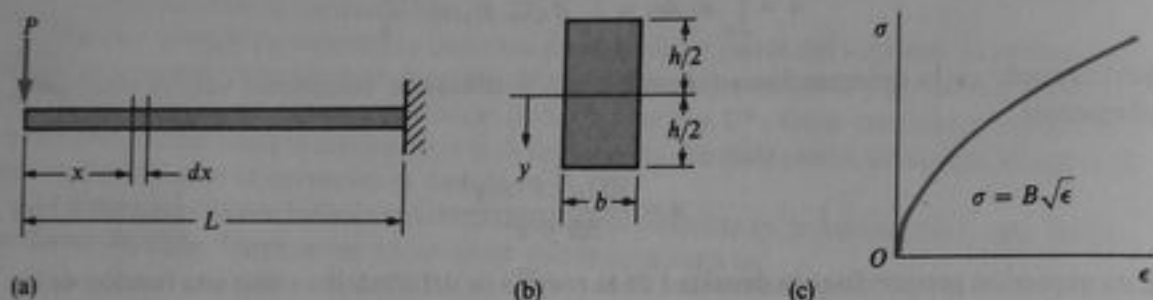


Fig. 12-19 Ejemplo 3. Viga en voladizo con no linealidad material

12.6 MÉTODOS DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Desarrollaremos ahora un teorema de energía de deformación que es importante en el análisis estructural. Considérese una estructura sometida a n cargas P_1, P_2, \dots, P_n , que produce desplazamientos correspondientes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Como en las explicaciones previas, se entiende que P y δ representan fuerzas y desplazamientos correspondientes en un sentido generalizado, incluyendo así la posibilidad de una fuerza y una traslación, un momento y una rotación, un par de fuerzas y un desplazamiento relativo, o un par de momentos y una rotación relativa. Se comprende también que la estructura puede comportarse no linealmente, lo que significa que la relación entre cualquier fuerza P_i y el desplazamiento correspondiente δ_i , se representa mediante el diagrama carga-desplazamiento de la Fig. 12-15c.

La energía de deformación U de la estructura es igual al trabajo W realizado por las cargas durante su aplicación, según se estudió en la sección anterior. Teóricamente cada fuerza P_i puede expresarse como una función de su desplazamiento correspondiente δ_i mediante la relación carga-desplazamiento apropiada. Estas expresiones para las cargas pueden sustituirse en la expresión para el trabajo (véase Ec. 12-29a), obteniendo así la energía de deformación U como una función de los desplazamientos δ_i . Con U expresada en términos de estos desplazamientos, podemos evaluar el cambio en la energía de deformación cuando un desplazamiento δ_i se incrementa en una pequeña cantidad $d\delta_i$, mientras que los demás desplazamientos permanecen constantes. Este incremento en energía de deformación denotado por dU , está dado por la expresión

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

en donde la derivada parcial $\partial U/\partial \delta_i$, es la razón de cambio de la energía de deformación con respecto a δ_i . Observamos que, cuando el desplazamiento δ_i se incrementa en la pequeña cantidad $d\delta_i$, se realiza trabajo por la fuerza correspondiente P_i , pero no por ninguna de las demás fuerzas, ya que los otros desplazamientos no se modifican. Este trabajo, que es igual a $P_i d\delta_i$, equivale al incremento en energía de deformación almacenada en la estructura:

$$dU = P_i d\delta_i$$

Igualando las expresiones anteriores para dU se obtiene

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (12-44)$$

Esta ecuación establece que la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a cualquier desplazamiento δ_i es igual a la fuerza correspondiente P_i , siempre y cuando la energía de deformación se exprese como una función de los desplazamientos. La ecuación se llama **primer teorema de Castigliano**, en honor al ingeniero italiano quien obtuvo y aplicó el teorema en su célebre libro, publicado en 1879 (véanse Refs. 12-16 a 12-20). El teorema también puede obtenerse directamente a partir de la definición de energía de deformación (Ec. 12-16) tomando las derivadas de ambos lados de la ecuación.

Como explicación del primer teorema de Castigliano, consideremos la estructura no lineal descrita en el Ejemplo 1 de la sección anterior. La energía de deformación de la estructura es

$$U = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\delta^3}{C}}$$

según está dado por la Ec. (12-35). Obsérvese que esta ecuación proporciona U como una función del desplazamiento δ correspondiente a la carga P . Aplicando el primer teorema de Castigliano, obtenemos

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$$

de la cual $\delta = CP^2$, que representa la relación correcta entre la carga y la deflexión.

En forma similar, podemos aplicar el primer teorema de Castigliano a la estructura geoméricamente no lineal mostrada en la Fig. 12-18 y descrita en el Ejemplo 2 de la sección anterior. La energía de deformación de la estructura (en términos del desplazamiento δ) es

$$U = \frac{EA\delta^4}{4L^3}$$

(véanse Ecs. 12-37 y 12-39). Luego, el primer teorema de Castigliano da

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \frac{EA\delta^3}{L^3}$$

Este resultado concuerda con el análisis previo (véase Ec. 12-38a).

El primer teorema de Castigliano es la base para un método de análisis estructural basado en la energía de deformación. A fin de explicar el método, supongamos que se tiene una estructura no lineal con n desplazamientos de nudos desconocidos D_1, D_2, \dots, D_n . Se utiliza el símbolo D para estos desplazamientos y distinguirlos de los desplazamientos δ_i , que representan cantidades más generales. Mientras δ_i y P_i pueden representar cualesquier desplazamiento y fuerza correspondientes, los desplazamientos D son desplazamientos de nudos y representan las cantidades desconocidas en el análisis. Además, con fines prácticos es necesario que cada desplazamiento de nudo se incluya como una de las D . Una restricción adicional es que todas las cargas sobre la estructura deben actuar en los nudos. Luego, cada carga corresponde a un desplazamiento. Las cargas se denotarán por P_1, P_2, \dots, P_n correspondientes a D_1, D_2, \dots, D_n , respectivamente.

Como ya se explicó, teóricamente es posible expresar la energía de deformación U de la estructura en términos de los desplazamientos de nudos desconocidos D_1, D_2, \dots, D_n . Si U se expresa en esta forma, se puede aplicar el primer teorema de Castigliano con respecto a cada desplazamiento y obtener de este modo un conjunto de n ecuaciones simultáneas:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} \quad \dots \quad P_n = \frac{\partial U}{\partial D_n} \quad (12-45)$$

Si examinamos una ecuación típica, digamos la ecuación i -ésima, veremos que consta de términos, en el lado derecho, que contienen los n desplazamientos de nudos D_1, D_2, \dots, D_n como cantidades desconocidas. Como esos términos resumen la carga P_i misma, concluimos que la ecuación representa una condición de equilibrio para las fuerzas correspondientes a P_i . Luego, las Ecs. (12-45) son un conjunto de ecuaciones de equilibrio que pueden resolverse simultáneamente para los desplazamientos de nudos D_1, D_2, \dots, D_n en términos de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n . Conociendo los desplazamientos de nudos, podemos calcular otras cantidades, tales como reacciones y resultantes de esfuerzo, a partir de los desplazamientos. De esta manera se concluye el análisis de la estructura.

El método de energía de deformación descrito en el párrafo anterior utiliza desplazamientos de nudos como incógnitas e implica resolver las ecuaciones de equilibrio. Se denomina **método de desplazamiento** de análisis, y puede emplearse para analizar estructuras lineales y no lineales. En el caso de una estructura lineal, el método se llama **método de rigidez**.

Consideremos con más detalle el caso especial de una estructura lineal (esto es, una estructura para la cual es válido el principio de superposición). En este caso la energía de deformación U es una función cuadrática de los desplazamientos, según se explicó en la sección anterior. Por lo tanto, cuando hay n desplazamientos de nudos desconocidos D_1, D_2, \dots, D_n y n cargas correspondientes P_1, P_2, \dots, P_n , la forma general para la energía de deformación U es

$$\begin{aligned} U = & a_{11}D_1^2 + a_{12}D_1D_2 + \dots + a_{1n}D_1D_n \\ & + a_{21}D_2D_1 + a_{22}D_2^2 + \dots + a_{2n}D_2D_n \\ & \dots \\ & + a_{n1}D_nD_1 + a_{n2}D_nD_2 + \dots + a_{nn}D_n^2 \end{aligned}$$

en donde los coeficientes a_{11} , a_{12} , etcétera, son nuevas constantes que sólo dependen de las propiedades de la estructura. Aplicando el primer teorema de Castigliano (Ec. 12-44), obtenemos las ecuaciones de equilibrio (Ecs. 12-45) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial U}{\partial D_1} = S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n \\ P_2 &= \frac{\partial U}{\partial D_2} = S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \\ &\dots \\ P_n &= \frac{\partial U}{\partial D_n} = S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n \end{aligned} \quad (12-46)$$

En las cuales los coeficientes S_{11} , S_{12} , etc., son constantes que dependen de las a (estos, de las propiedades de la estructura). Estos coeficientes se conocen como **coeficientes de rigidez** o **rigideces**, y las Ecs. (12-46) son las **ecuaciones de equilibrio** del método de rigidez para el análisis.

Una relación importante entre la energía de deformación de la estructura y las rigideces puede obtenerse tomando derivadas parciales de las Ecs. (12-46), como sigue:

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_1} = S_{11} \quad \frac{\partial P_1}{\partial D_2} = S_{12} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_1}{\partial D_n} = S_{1n} \quad (a)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_1} = S_{21} \quad \frac{\partial P_2}{\partial D_2} = S_{22} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_2}{\partial D_n} = S_{2n} \quad (b)$$

y así sucesivamente para las demás ecuaciones. Puesto que P_1 es igual a $\partial U / \partial D_1$, las Ecs. (a) pueden escribirse como

$$S_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_1^2} \quad S_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_2 \partial D_1} \quad \cdots \quad S_{1n} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_n \partial D_1}$$

En forma similar, las Ecs. (b) resultan

$$S_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_1 \partial D_2} \quad S_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_2^2} \quad \cdots \quad S_{2n} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_n \partial D_2}$$

De la distribución de derivadas que resultan de estas expresiones, se concluye que los coeficientes de rigidez se relacionan con la energía de deformación mediante la siguiente ecuación general:

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i} \quad (12-47)$$

Luego, siempre que la energía de deformación U se expresa como una función cuadrática de los desplazamientos desconocidos D_1, D_2, \dots, D_n , podemos obtener de inmediato las rigideces para la estructura por medio del proceso de diferenciación. Además, el orden de diferenciación de U es indiferente, y por lo tanto podemos obtener el teorema de reciprocidad para rigideces:

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} = S_{ji} \quad (12-48)$$

Por supuesto, la explicación anterior de rigideces sólo es aplicable a estructuras linealmente elásticas. Para un estudio completo del método de rigidez, deben consultarse libros de texto sobre análisis estructural (por ejemplo, véase Ref. 12-22).

Ejemplo 1

La armadura ABC mostrada en la Fig. 12-20a soporta una carga vertical P en el nudo B . Las barras AB y BC tienen un área de sección transversal constante A . La relación esfuerzo-deformación para el material en tensión es $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante (véase Fig. 12-20b). El perfil de la curva esfuerzo-deformación es el mismo tanto en tensión como en compresión. Analizar esta armadura de material no lineal mediante el método de desplazamientos, utilizando el primer teorema de Castigliano.

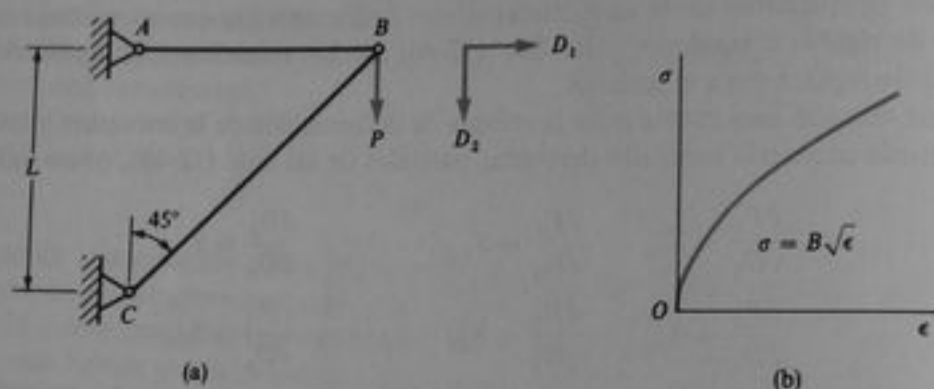


Fig. 12-20 Ejemplo 1. Armadura de material con una curva esfuerzo-deformación no lineal

Pueden identificarse dos desplazamientos desconocidos en el nudo B de esta estructura, un desplazamiento horizontal D_1 y un desplazamiento vertical D_2 (Fig. 12-20). La energía de deformación de la estructura debe expresarse en términos de esos desplazamientos a fin de obtener la ecuación de equilibrio mediante el primer teorema de Castigliano. Luego, la energía de deformación se determina como sigue. Considerando únicamente el desplazamiento D_1 , observamos que la barra AB se alarga en una cantidad igual a D_1 y la barra BC se alarga en una cantidad igual a $D_1/\sqrt{2}$. También, debido sólo al desplazamiento D_2 , la barra BC se acorta en una cantidad igual a $D_2/\sqrt{2}$, y la barra AB no cambia de longitud. Luego, el alargamiento total de la barra AB es D_1 y el acortamiento total de la barra BC es $(D_2 - D_1)/\sqrt{2}$. De aquí que las deformaciones en las barras son

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} \quad (\text{alargamiento}) \quad (c)$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} \quad (\text{acortamiento}) \quad (d)$$

La densidad de energía de deformación en cada barra puede determinarse de la Ec. (12-17):

$$u_{ab} = \int_0^{\epsilon_{ab}} \sigma_1 d\epsilon_1 = \int_0^{\epsilon_{ab}} B\sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \frac{2B}{3} \left(\frac{D_1}{L} \right)^{3/2}$$

$$u_{bc} = \int_0^{\epsilon_{bc}} \sigma_1 d\epsilon_1 = \int_0^{\epsilon_{bc}} B\sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \frac{2B}{3} \left(\frac{D_2 - D_1}{2L} \right)^{3/2}$$

Como el esfuerzo y la deformación son constantes en el volumen de cada barra, podemos obtener la energía de deformación total de cada barra multiplicando la densidad de energía de deformación por el volumen de la barra. Entonces esas energías de deformación se suman para obtener la energía de deformación total U de la estructura:

$$U = U_{ab} + U_{bc} = u_{ab}AL + u_{bc}AL\sqrt{2}$$

de lo cual

$$U = \frac{AB}{3\sqrt{L}} [2D_1^{3/2} + (D_2 - D_1)^{3/2}] \quad (12-49)$$

donde A es el área de la sección transversal de cada barra. Esta ecuación proporciona la energía de deformación en términos de los desplazamientos de nudos desconocidos D_1 y D_2 .

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen aplicando el primer teorema de Castigliano (véanse Ecs. 12-44 y 12-45). La cantidad P_1 en las Ecs. (12-45) representa la carga correspondiente a D_1 y es igual a cero, mientras que P_2 representa la carga correspondiente a D_2 y es igual a P . Luego, obtenemos

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} [2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2}] = 0$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} (D_2 - D_1)^{1/2} = P$$

Simplificando estas dos ecuaciones, obtenemos

$$2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2} = 0 \quad (c)$$

$$(D_2 - D_1)^{1/2} = \frac{2P\sqrt{L}}{AB} \quad (f)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, obtenemos los desplazamientos de los nudos:

$$D_1 = \frac{P^2L}{A^2B^2} \quad D_2 = \frac{5P^2L}{A^2B^2} \quad (12-50a, b)$$

Con este paso concluye la parte esencial del análisis mediante el método de desplazamientos, porque, ahora que se conocen D_1 y D_2 , podemos calcular todas las fuerzas en las barras y las reacciones.

Para explicar estos cálculos finales determinemos las fuerzas en las barras. Las deformaciones en las barras se obtienen sustituyendo D_1 y D_2 (Ecs. 12-50a y b) en las Ecs. (c) y (d):

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} = \frac{P^2}{A^2B^2} \quad (\text{alargamiento})$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} = \frac{2P^2}{A^2B^2} \quad (\text{acortamiento})$$

Enseguida se determinan los esfuerzos mediante la ley esfuerzo-deformación:

$$\sigma_{ab} = B\sqrt{\epsilon_{ab}} = \frac{P}{A} \quad (\text{tensión})$$

$$\sigma_{bc} = B\sqrt{\epsilon_{bc}} = \frac{\sqrt{2}P}{A} \quad (\text{compresión})$$

Finalmente, las fuerzas axiales N en las barras son

$$N_{ab} = \sigma_{ab} A = P \quad (\text{tensión})$$

$$N_{bc} = \sigma_{bc} A = \sqrt{2} P \quad (\text{compresión})$$

Estos resultados se verifican fácilmente mediante equilibrio estático.

En este ejemplo se han descrito intencionalmente todos los pasos en la solución, a fin de explicar los conceptos generales del método de desplazamiento y la aplicación del primer teorema de Castigliano, aunque la estructura es muy simple y podía haberse analizado mucho más fácilmente como una estructura estáticamente determinada. La aplicación del método de desplazamiento requirió resolver dos ecuaciones simultáneas ya que hay dos desplazamientos de nudos desconocidos. Sin embargo, como la estructura es estáticamente determinada, también pudo analizarse como sigue: (1) encontrar las fuerzas en las barras mediante el equilibrio estático, (2) hallar los esfuerzos en las barras dividiendo las fuerzas entre las áreas de sección transversal, (3) obtener las deformaciones en las barras mediante el diagrama esfuerzo-deformación, (4) determinar los alargamientos en las barras a partir de las deformaciones, y (5) construir un diagrama de Williot (véase Sección 2.3) para obtener los desplazamientos D_1 y D_2 del nudo B .

Ejemplo 2

Una armadura que consiste en cuatro barras que se unen en un nudo común E se muestra en la Fig. 12-21a. Todas las barras se construyen del mismo material linealmente elástico con módulo de elasticidad E . Cada barra tiene una longitud L y un área de sección transversal A , y el ángulo β es igual a 30° . Sobre la armadura se aplican cargas P_1 y P_2 en el nudo E . Analizar esta armadura estáticamente indeterminada mediante el primer teorema de Castigliano y el método de rigidez.

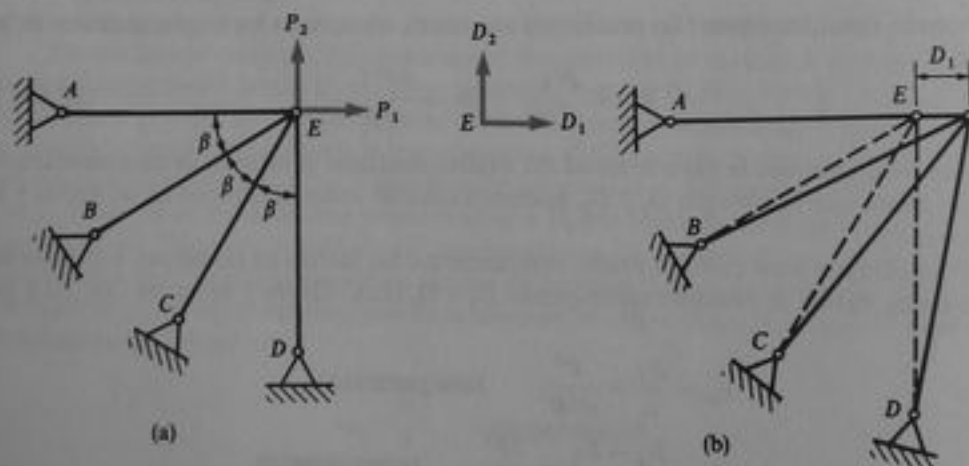


Fig. 12-21 Ejemplo 2. Armadura de un material que satisface la ley de Hooke

Esta armadura tiene dos desplazamientos de nudo desconocidos, a saber, las traslaciones horizontal y vertical D_1 y D_2 en el nudo E (Fig. 12-21a). Para expresar la energía de deformación U como una función de D_1 y D_2 se empieza por suponer que únicamente ocurre D_1 (Fig. 12-21b). En estas condiciones los alargamientos de las barras son como sigue:

$$\Delta_{ae} = D_1 \quad \Delta_{be} = \frac{\sqrt{3} D_1}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{D_1}{2} \quad \Delta_{de} = 0$$

como puede verificarse fácilmente a partir de la geometría de la figura. Cuando únicamente ocurre el desplazamiento D_2 , los alargamientos de los miembros son

$$\Delta_{ae} = 0 \quad \Delta_{be} = \frac{D_2}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{\sqrt{3}D_2}{2} \quad \Delta_{de} = D_2$$

Por lo tanto, los alargamientos de las barras cuando ocurren simultáneamente D_1 y D_2 son los siguientes:

$$\Delta_{ae} = D_1 \quad \Delta_{be} = \frac{\sqrt{3}D_1 + D_2}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{D_1 + \sqrt{3}D_2}{2} \quad \Delta_{de} = D_2 \quad (g)$$

La energía de deformación de cada barra puede evaluarse a partir de su alargamiento (véase Ec. 12-19), y entonces la energía de deformación total U de la armadura puede obtenerse mediante la suma de las energías para las cuatro barras:

$$U = \frac{EA}{2L} D_1^2 + \frac{EA}{2L} \left(\frac{\sqrt{3}D_1 + D_2}{2} \right)^2 + \frac{EA}{2L} \left(\frac{D_1 + \sqrt{3}D_2}{2} \right)^2 + \frac{EA}{2L} D_2^2$$

o sea

$$U = \frac{EA}{2L} (2D_1^2 + \sqrt{3}D_1D_2 + 2D_2^2) \quad (12-51)$$

Obsérvese que esta expresión proporciona la energía de deformación como una función cuadrática de los desplazamientos.

Aplicando el primer teorema de Castigliano, obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio (véanse Ecs. 12-46):

$$P_1 = \frac{2EA}{L} D_1 + \frac{\sqrt{3}EA}{2L} D_2 \quad (h)$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} D_1 + \frac{2EA}{L} D_2 \quad (i)$$

Estas ecuaciones se resuelven para los desplazamientos de nudos; los resultados son

$$D_1 = \frac{2L}{13EA} (4P_1 - \sqrt{3}P_2) \quad D_2 = \frac{2L}{13EA} (-\sqrt{3}P_1 + 4P_2)$$

Finalmente, se calculan las fuerzas axiales N en las barras de la armadura. El procedimiento es encontrar los alargamientos Δ de las barras sustituyendo los desplazamientos de nudos D_1 y D_2 en las Ecs. (g), y hallar entonces las fuerzas en las barras a partir de los alargamientos mediante la ecuación $N = EA\Delta/L$. Los resultados son

$$N_{ae} = \frac{8P_1}{13} - \frac{2\sqrt{3}P_2}{13} \quad N_{be} = \frac{3\sqrt{3}P_1}{13} + \frac{P_2}{13}$$

$$N_{ce} = \frac{P_1}{13} + \frac{3\sqrt{3}P_2}{13} \quad N_{de} = -\frac{2\sqrt{3}P_1}{13} + \frac{8P_2}{13}$$

De esta manera se concluye todo el análisis de la armadura estáticamente indeterminada mediante el método de rigidez.

Ejemplo 3

El bastidor estáticamente indeterminado ABC mostrado en la Fig. 12-22a está empotrado en A y articulado en C . La carga sobre la estructura es un momento M_0 que actúa en el nudo B . El material de la estructura satisface la ley de Hooke. Los miembros AB y BC tienen una longitud L y una rigidez a flexión EI . Determinar los ángulos de rotación D_1 y D_2 en los nudos B y C , respectivamente (Fig. 12-22b).

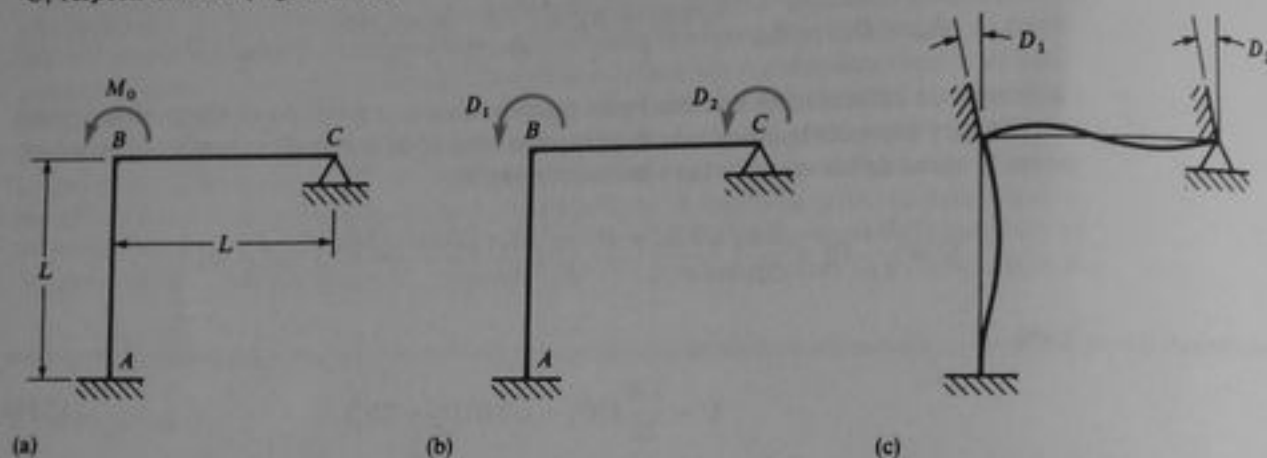


Fig. 12-22 Ejemplo 3. Bastidor de un material que satisface la ley de Hooke

Los únicos desplazamientos de nudo desconocidos para este bastidor son los ángulos de rotación D_1 y D_2 , puesto que se omiten los efectos de deformaciones axiales (y por lo tanto, las longitudes de los miembros no cambian). La energía de deformación del bastidor debe expresarse en términos de los desplazamientos desconocidos D_1 y D_2 . Para realizar este paso en un bastidor es útil imaginar que los desplazamientos de nudo desconocidos se imponen sobre la estructura incluyendo las restricciones correspondientes a tales desplazamientos (véase Fig. 12-22c). Entonces cada miembro del bastidor está en la misma condición como viga de extremos empotrados con rotaciones impuestas en los extremos. Si podemos obtener una fórmula para la energía de deformación almacenada en tal viga, es posible aplicar esta fórmula para obtener la energía de deformación del bastidor.

Considérese la viga AB mostrada en la Fig. 12-23. Los extremos A y B se supone que están girados a través de ángulos θ_1 y θ_2 , respectivamente. El objetivo es obtener una fórmula para la energía de deformación U de esta viga en términos de θ_1 y θ_2 . Un método es obtener la ecuación de la curva de deflexión resolviendo la ecuación diferencial de cuarto orden (Ec. 7-10c):

$$EIv'''' = q = 0$$

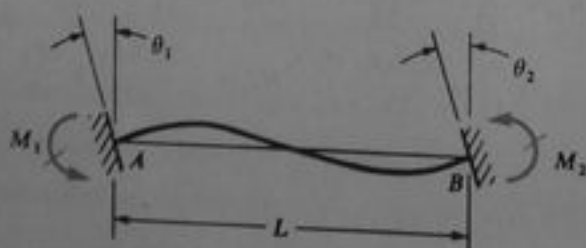


Fig. 12-23 Energía de deformación en una viga con rotaciones θ_1 y θ_2 en los extremos

Integrando sucesivamente cuatro veces esta ecuación se obtiene

$$EIv = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$v'(0) = -\theta_1 \quad v'(L) = -\theta_2 \quad v(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

Aplicando estas condiciones se obtiene la siguiente ecuación de la curva de deflexión:

$$v = -\frac{x^3}{L^2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{x^2}{L}(2\theta_1 + \theta_2) - \theta_1 x$$

La energía de deformación de la viga puede calcularse ahora (véase Ec. 7-59b):

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{2EI}{L} (\theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2) \quad (12-52)$$

Otra forma de hallar la energía de deformación de la viga es determinar el trabajo realizado por los momentos M_1 y M_2 que actúan en los extremos de la viga (véase Ec. 12-23). Cuando estos momentos actúan sobre una viga simple, los ángulos en los extremos son

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI} \quad \theta_2 = -\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{M_2 L}{3EI}$$

(véase Caso 7 de la Tabla G-2 del Apéndice G). Estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para M_1 y M_2 :

$$M_1 = \frac{2EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2) \quad M_2 = \frac{2EI}{L} (\theta_1 + 2\theta_2) \quad (12-53a, b)$$

La energía de deformación de la viga, de la Ec. (12-30), es

$$U = \frac{M_1 \theta_1}{2} + \frac{M_2 \theta_2}{2}$$

Sustituyendo de las Ecs. (12-53), obtenemos la misma expresión para U que la obtenida anteriormente (véase Ec. 12-52).

Ahora estamos listos para obtener la energía de deformación del bastidor mostrado en la Fig. 12-22 en términos de los desplazamientos D_1 y D_2 . El procedimiento es aplicar la Ec. (12-52) a cada miembro y sumar entonces los resultados. Para el miembro AB tenemos $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = D_1$, y para el miembro BC tenemos $\theta_1 = D_1$ y $\theta_2 = D_2$. Luego, la energía de deformación es

$$U = \frac{2EI}{L} (D_1^2) + \frac{2EI}{L} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) = \frac{2EI}{L} (2D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

Del primer teorema de Castigliano obtenemos ahora las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$M_0 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{2EI}{L} (4D_1 + D_2)$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{2EI}{L} (D_1 + 2D_2)$$

Estas ecuaciones se resuelven para los desplazamientos de los nudos D_1 y D_2 :

$$D_1 = \frac{M_0 L}{7EI} \quad D_2 = -\frac{M_0 L}{14EI}$$

De esta manera se han encontrado las rotaciones de nudos para el bastidor. Como paso final en la solución, podrían determinarse los momentos de los extremos de cada miembro mediante las Ecs. (12-53).

Este ejemplo es adecuado para utilizar la energía de deformación y el primer teorema de Castigliano, porque la carga M_0 corresponde a uno de los desplazamientos de nudo desconocidos. La otra única carga posible sobre la estructura es un momento correspondiente a D_2 , puesto que uno de los requisitos de este método de análisis es que cada carga debe corresponder a un desplazamiento de nudo desconocido. Este hecho implica la interrogante de cómo analizar una estructura cuando hay cargas en otros lugares, tal como una carga concentrada aplicada en el punto medio de un miembro. Una posibilidad es considerar cada punto de carga como un nudo de la estructura, introduciendo entonces desplazamientos de nudo desconocidos adicionales que correspondan a las cargas. La desventaja de este método es que incrementaría notablemente el número de ecuaciones de equilibrio que deben resolverse. Un método preferido por analistas estructuralistas es reemplazar cualesquiera cargas que actúan entre los nudos por un conjunto de cargas estáticamente equivalentes que actúen en los nudos. Por supuesto, el empleo de cargas de nudo equivalentes sólo es posible cuando procede el principio de superposición. La técnica para determinar las cargas equivalentes no es difícil de aplicar; sin embargo, no la aplicaremos aquí. En lugar de ello, los lectores deben consultar libros sobre análisis estructural para mayores detalles (por ejemplo, véase Ref. 12-22).

12.7 MÉTODOS DE ENERGÍA COMPLEMENTARIA

En la sección anterior tratamos varios principios importantes referentes a la energía de deformación. Ahora consideraremos algunos principios análogos relativos a la energía complementaria. Se destacó en explicaciones previas que la energía de deformación usualmente se expresa en función de desplazamientos, mientras que la energía complementaria suele expresarse en términos de fuerzas. Luego, es completamente natural que la energía de deformación se relacione con los métodos de análisis de desplazamiento y de rigidez, mientras que la energía complementaria se relaciona con los **métodos de fuerzas y de flexibilidad**, como se explica en las consideraciones siguientes.

Para obtener un teorema básico referente a la energía complementaria, consideremos nuevamente una estructura no lineal sometida a n cargas P_1, P_2, \dots, P_n , que producen desplazamientos correspondientes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Como en las explicaciones anteriores, se entiende que P y δ representan fuerzas y desplazamientos correspondientes en un sentido generalizado. La energía complementaria U^* de la estructura se define como igual al trabajo complementario W^* de las cargas (véase la explicación a la mitad de la Sección 12.5). Cuando se evalúa este trabajo, expresamos los desplazamientos en términos de las cargas y luego integramos, como se muestra en la Ec. (12-29b). La expresión resultante para U^* es una función de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n . Entonces, si imaginamos que una carga, digamos P_i , experimenta un pequeño incremento dP_i , mientras que las otras cargas no cambian, la energía complementaria se incrementará en una cantidad pequeña dU^* , dada por la siguiente ecuación:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i$$

Esta ecuación establece que el incremento en U^* es igual a la razón de cambio de U^* con respecto a P_i multiplicada por el incremento en P_i .

Otra forma de obtener una expresión para dU^* es considerar el trabajo complementario de las cargas cuando la fuerza P_i se incrementa en la cantidad dP_i . Este trabajo complementario es el mismo que el incremento dU^* en la energía complementaria de la estructura. La única carga que realiza cierto trabajo complementario es P_i , ya que las demás fuerzas no varían. Por lo tanto, el incremento en energía complementaria es el producto del desplazamiento δ_i por el incremento dP_i de la carga:

$$dU^* = \delta_i dP_i$$

Igualando las dos expresiones anteriores para dU^* , obtenemos

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad (12-54)$$

Esta ecuación establece que la derivada parcial de la energía complementaria con respecto a cualquier carga P_i es igual al desplazamiento correspondiente δ_i , siempre y cuando la energía complementaria se exprese como una función de las cargas. La ecuación se denomina **teorema de Crotti-Engesser** en honor al ingeniero italiano Francesco Crotti, quien la estableció en 1878 (Refs. 12-23 y 12-24), y al ingeniero alemán Friedrich Engesser, quien la obtuvo independientemente en 1889 (Ref. 12-25). El teorema también puede obtenerse directamente a partir de la definición de la energía complementaria (véanse Ecs. 12-22 y 12-29b), tomando las derivadas de ambos lados de las ecuaciones.

El teorema de Crotti-Engesser proporciona una analogía notable con el primer teorema de Castigliano (Ec. 12-44). En el caso del teorema de Crotti-Engesser, expresamos la energía complementaria como una función de las cargas y obtenemos entonces los desplazamientos correspondientes derivando con respecto a las cargas, mientras que, en el caso del primer teorema de Castigliano, expresamos la energía de deformación como una función de los desplazamientos y obtenemos entonces las cargas correspondientes derivando con respecto a los mismos. Ambos teoremas son muy generales y se aplican a estructuras que se comportan no linealmente. Sin embargo, según se explicó en la Sección 12.5, la energía complementaria U^* de la estructura debe obtenerse a partir del trabajo complementario de las cargas. Si no existen no linealidades geométricas, la energía complementaria U^* es igual a la suma de las energías complementarias de los miembros, por lo que pueden utilizarse las energías de los miembros para obtener U^* . Si existen no linealidades geométricas, entonces la energía complementaria de los miembros es menor que la energía complementaria U^* de la estructura.*

Para explicar el teorema de Crotti-Engesser, consideremos nuevamente la estructura materialmente no lineal descrita en el Ejemplo 1 de la Sección 12.5. La energía complementaria de la estructura (de la Ec. 12-36) es

$$U^* = \frac{CP^3}{3}$$

* En el caso especial de una estructura que se comporta linealmente, la energía complementaria es igual a la energía de deformación y el teorema de Crotti-Engesser se reduce al segundo teorema de Castigliano (véase Sección 12.8).

Obsérvese que esta ecuación expresa U^* como una función de la carga P correspondiente a la deflexión δ . Del teorema de Crotti-Engesser obtenemos

$$\delta = \frac{dU^*}{dP} = CP^2$$

que es la relación correcta entre la carga y la deflexión.

Como otro ejemplo considérese la estructura geoméricamente no lineal mostrada en la Fig. 12-18 y descrita en el Ejemplo 2 de la Sección 12.5. La energía complementaria de la estructura (en términos de la carga P) es

$$U^* = \frac{3P^{4/3}L}{4\sqrt{EA}}$$

(véase Ec. 12-40). Luego, del teorema de Crotti-Engesser se obtiene

$$\delta = \frac{dU^*}{dP} = \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}}$$

que concuerda con el análisis previo (véase Ec. 12-38b).

Un tercer ejemplo es la viga en voladizo materialmente no lineal del Ejemplo 3 de la Sección 12.5, para la cual la energía complementaria es

$$U^* = \frac{25P^3L^4}{6B^2b^2h^5}$$

(véase Ec. 12-43). Podemos determinar ahora la deflexión δ en el extremo de la viga:

$$\delta = \frac{dU^*}{dP} = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^5} \quad (12-55)$$

Obsérvese que esta deflexión varía no linealmente con la carga P .

Ejemplo 1

La armadura ABC mostrada en la Fig. 12-20a soporta una carga vertical P en el nudo B . El material de la armadura tiene una relación esfuerzo-deformación tanto en tensión como en compresión dada por la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante. Determinar la deflexión vertical δ , del nudo B .

El primer paso para determinar la deflexión mediante el teorema de Crotti-Engesser es obtener la energía complementaria de la estructura en términos de la fuerza P . Como la armadura carece de no linealidades geométricas, podemos obtener la energía complementaria total U^* sumando las energías de las dos barras:

$$U^* = U_{AB}^* + U_{BC}^* \quad (a)$$

La energía complementaria de una barra individual puede hallarse multiplicando la densidad de energía complementaria por el volumen de la barra, ya que el esfuerzo y la deformación permanecen constantes a través de la barra. Por lo tanto, tenemos

$$U_{AB}^* = u_{AB}^*AL \quad U_{BC}^* = u_{BC}^*AL\sqrt{2} \quad (b)$$

donde A es el área de la sección transversal de cada barra. La densidad de energía complementaria de cada barra se obtiene de la Ec. (12-23), como sigue:

$$u_{ab}^* = \int_0^{\sigma_{ab}} \epsilon_1 d\sigma_1 = \int_0^{\sigma_{ab}} \frac{\sigma_1^2}{B^2} d\sigma_1 = \frac{\sigma_{ab}^3}{3B^2} \quad (c)$$

$$u_{bc}^* = \int_0^{\sigma_{bc}} \epsilon_1 d\sigma_1 = \int_0^{\sigma_{bc}} \frac{\sigma_1^2}{B^2} d\sigma_1 = \frac{\sigma_{bc}^3}{3B^2} \quad (d)$$

donde σ_{ab} y σ_{bc} son los esfuerzos en las barras. Podemos obtener ahora la energía complementaria total de la armadura a partir de las Ecs. (a) a (d); el resultado es

$$U^* = \frac{AL}{3B^2} (\sigma_{ab}^3 + \sqrt{2}\sigma_{bc}^3) \quad (e)$$

La carga P que actúa sobre la armadura (Fig. 12-20a) produce esfuerzos en las barras que pueden encontrarse del equilibrio:

$$\sigma_{ab} = \frac{P}{A} \quad \sigma_{bc} = \frac{\sqrt{2}P}{A} \quad (f)$$

en donde se consideran únicamente los valores absolutos de los esfuerzos. Por lo tanto, la energía complementaria de la armadura (Ec. e) es

$$U^* = \frac{5P^3L}{3A^2B^2} \quad (12-56)$$

Esta ecuación expresa la energía complementaria como una función de la carga P .

El siguiente paso es aplicar el teorema de Crotti-Engesser para obtener el desplazamiento correspondiente a P , como sigue:

$$\delta_P = \frac{dU^*}{dP} = \frac{5P^2L}{A^2B^2} \quad (12-57)$$

Esta ecuación proporciona la deflexión vertical δ , del nudo B de la armadura.

Para encontrar la deflexión horizontal δ_h del nudo B , es necesario agregar una carga horizontal Q correspondiente a tal deflexión. Podemos repetir entonces el procedimiento para determinar la energía complementaria U^* , con la diferencia de que U^* es ahora una función de P y Q . Entonces obtenemos la deflexión horizontal δ_h aplicando el teorema de Crotti-Engesser y derivando con respecto a Q . La expresión resultante para δ_h contiene a P y a Q . Haciendo Q igual a cero genera la ecuación de la deflexión horizontal debida sólo a la carga P (véase Problema 12.7-2).

Método de la carga unitaria. El uso directo del teorema de Crotti-Engesser para encontrar desplazamientos de estructuras, como se explicó en el ejemplo anterior, requiere que se determine la energía complementaria de la estructura como una función de las cargas. Entonces las derivadas de la energía complementaria deben evaluarse a fin de obtener los desplazamientos buscados. Este procedimiento es muy extenso, pero afortunadamente se dispone de un método más práctico, como se explicará a continuación.

Para deducir el método en la forma más simple, nos referiremos a una armadura estructural en la cual las únicas resultantes de esfuerzo son las fuerzas axiales. Consi-

deremos un miembro individual de la armadura y supongamos que tiene una longitud L y un área de sección transversal A y que está sometido a una fuerza axial N . Entonces la energía complementaria U^* de este miembro es

$$U^* = \int_0^N \epsilon_1 L dN_1 \quad (g)$$

según se obtiene de la Ec. (12-22) con $\delta_1 = \epsilon_1 L$, en donde ϵ_1 es la deformación uniforme en la barra debida a la fuerza axial N_1 . Podemos observar que, según se incrementa la fuerza axial N_1 desde su valor inicial de cero hasta su valor máximo N , la deformación ϵ_1 se incrementa desde cero hasta un valor máximo ϵ . Asimismo, el esfuerzo σ_1 en la barra se incrementa desde cero hasta un valor máximo σ . La relación entre el esfuerzo σ_1 y la deformación ϵ_1 supuestamente está representada por un diagrama esfuerzo-deformación no lineal, como el que se muestra en la Fig. 12-15b.

Es conveniente definir una función F que represente la energía complementaria por unidad de longitud de la barra; luego, dividiendo la Ec. (g) entre la longitud L , obtenemos:

$$F = \int_0^N \epsilon_1 dN_1 \quad (h)$$

La cantidad F , que es una función de la fuerza axial N , puede evaluarse mediante la curva esfuerzo-deformación. (Nótese que la curva esfuerzo-deformación proporciona la relación entre ϵ_1 y σ_1 , pero, dado que $N_1 = \sigma_1 A$, también conocemos la relación entre ϵ_1 y N_1 . Luego, puede evaluarse la integral de la Ec. h.)

Considérese ahora una armadura compuesta de muchos miembros y sometida a cargas P_1, P_2, \dots, P_n que producen desplazamientos correspondientes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Consideremos también un elemento típico de la armadura entre dos secciones transversales separadas una distancia dx (Fig. 12-3a). La fuerza axial que actúa sobre este elemento es N , y el alargamiento correspondiente es $d\delta$ (igual a ϵdx). Por lo tanto, la energía complementaria del elemento es $dU^* = F dx$, donde F está dada por la Ec. (h). La energía complementaria de toda la estructura es

$$U^* = \int F dx \quad (i)$$

en donde se considera que la integración se extiende a lo largo de los ejes de todos los miembros de la estructura. Dado que U^* se obtiene sumando las energías complementarias de los miembros, estamos restringidos únicamente a estructuras con no linealidades materiales.

Para obtener el desplazamiento δ_i correspondiente a la carga P_i , aplicamos el teorema de Crotti-Engesser a la Ec. (i), obteniendo así

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[\int F dx \right]$$

Diferenciando bajo el signo integral, obtenemos

$$\delta_i = \int \frac{\partial F}{\partial P_i} dx$$

Considérese ahora la derivada $\partial F / \partial P_i$. La cantidad F es una función de la fuerza axial N , como ya se explicó en relación con la Ec. (h). La fuerza axial N es una función de

las cargas aplicadas P_1, P_2, \dots, P_n . Por lo tanto, F es una función de P , a través de la variable intermedia N . Por lo que podemos replantear la ecuación anterior en la forma

$$\delta_i = \int \frac{\partial F}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial P_i} dx \quad (j)$$

Cada una de las derivadas en esta expresión tiene una interpretación física simple. La derivada $\partial F/\partial N$ es igual a ϵ (véase Ec. h).^{*} La derivada $\partial N/\partial P_i$ representa el valor de la fuerza axial N producido por un valor unitario de la carga P_i . Luego, en la notación del método de la carga unitaria (Sección 12.3), esta derivada es igual a N_v , la cual se define como la fuerza axial debida a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento δ_i . Reemplazando las derivadas de la Ec. (j) con ϵ y N_v , respectivamente, obtenemos

$$\delta_i = \int \epsilon N_v dx = \int N_v d\delta \quad (k)$$

en donde $d\delta$, igual a ϵdx , es el alargamiento de un elemento (véase Fig. 12-3a). La ecuación anterior es la ecuación fundamental del método de la carga unitaria (Ec. 12-3) para el caso en el que sólo se consideran deformaciones axiales.

Una deducción similar puede hacerse si la estructura se somete a deformaciones por flexión (véase Fig. 12-3b), como en el caso de una viga o un marco. Empecemos por suponer que tenemos una viga de longitud L en flexión pura bajo la acción de momentos M . Estos momentos provocan una rotación relativa θ entre los dos extremos de la viga. La energía complementaria de la viga se obtiene de la Ec. (12-22) reemplazando P y δ por M y θ , respectivamente; luego,

$$U^* = \int_0^M \theta_1 dM_1 \quad (l)$$

en donde M es el valor máximo de los momentos M_1 . El ángulo θ_1 entre los extremos de la viga se incrementa desde cero hasta un valor máximo θ conforme se incrementan los momentos M_1 desde cero hasta M . También, la curvatura κ de la viga varía desde cero hasta un valor máximo $\kappa = \theta/L$. Reemplazando el ángulo θ_1 en la Ec. (l) por $\kappa_1 L$, obtenemos

$$U^* = \int_0^M \kappa_1 L dM_1$$

Definamos ahora una nueva función G que represente la energía complementaria por unidad de longitud de la viga:

$$G = \int_0^M \kappa_1 dM_1 \quad (m)$$

Esta cantidad es una función del momento flexionante M y puede evaluarse para cualquier viga particular mediante el diagrama esfuerzo-deformación.

Considérese ahora una viga o un marco plano sometido a cargas P_1, P_2, \dots, P_n que producen desplazamientos correspondientes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Un elemento tipi-

* Del cálculo diferencial e integral sabemos que

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = f(a)$$

Aplicando esta relación a la Ec. (h), tenemos $a = N$, $f(x) = \epsilon$, $dx = dN$, y $f(a) = \epsilon$.

co de esta estructura (véase Fig. 12-3b) está sometido a un momento flexionante M y experimenta una deformación por flexión $d\theta$ (igual a κdx). Basándonos en la Ec. (m), obtenemos la energía complementaria de este elemento como $dU^* = G dx$; por lo que la energía complementaria de toda la estructura es

$$U^* = \int G dx$$

en donde la integración incluye todos los elementos de la estructura. Enseguida obtenemos el desplazamiento δ_i de esta estructura a partir del teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[\int G dx \right] = \int \frac{\partial G}{\partial P_i} dx$$

Refiriéndonos a la última derivada de esta expresión, notamos que la cantidad G es una función del momento flexionante M (véase Ec. m) y que M es una función de las cargas. Por lo tanto, la ecuación anterior puede reformularse como

$$\delta_i = \int \frac{\partial G}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx \quad (n)$$

En esta ecuación, la derivada $\partial G/\partial M$ es igual a la curvatura κ (véanse Ec. m y la nota de pie de página previa), y la derivada $\partial M/\partial P_i$ es el momento flexionante en la viga debido a un valor unitario de la carga P_i . Luego, la Ec. (n) resulta

$$\delta_i = \int \kappa M_v dx = \int M_v d\theta \quad (o)$$

en la cual hemos aplicado la relación $d\theta = \kappa dx$. La cantidad M_v es el momento flexionante en la estructura debido a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento δ_i . Luego, la Ec. (o) es la misma que la ecuación fundamental del método de la carga unitaria (Ec. 12-3) cuando sólo se consideran deformaciones por flexión.

De igual manera se deduce que para estructuras en las que se consideran los efectos de deformaciones torsionales y por cortante. Por lo que, finalmente concluimos que la aplicación de la energía complementaria y del teorema de Crotti-Engesser conduce directamente al método de la carga unitaria según se expresa por la Ec. (12-3). El método es un medio muy eficiente para determinar desplazamientos y es válido para estructuras que tienen no linealidades materiales (pero no para no linealidades geométricas).*

Ejemplo 2

Una viga en voladizo de longitud L y sección transversal rectangular soporta una carga concentrada P en su extremo libre (véanse Fig. 12-19 y Ejemplo 3 de la Sección 12.5). La relación esfuerzo-deformación del material está representada por la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante. Determinar la deflexión δ en el extremo libre de la viga mediante el método de la carga unitaria.

Como sólo son importantes en esta viga las deformaciones por flexión, únicamente se utilizará el segundo término en la ecuación de carga unitaria (Ec. 12-3). El momento flexio-

* El caso de estructuras lineales se trata en la Sección 12.8.

nante M_v es el momento causado por una carga unitaria correspondiente a la deflexión δ ; por lo tanto, el momento M_v es numéricamente igual a $1 \cdot x$, en donde x es la distancia medida desde el extremo libre de la viga (Fig. 12-19a). La deformación $d\theta$ es numéricamente igual a $x \, dx$, en donde x es la curvatura. Para la viga considerada, la curvatura está dada por la Ec. (l) de la Sección 12.5, por lo que la deformación $d\theta$ es

$$d\theta = \frac{50P^2 x^2}{B^2 b^2 h^3} dx \quad (p)$$

Sustituyendo en la ecuación de la carga unitaria, obtenemos la siguiente expresión para la deflexión:

$$\delta = \int M_v d\theta = \int_0^L 1(x) \left(\frac{50P^2 x^2}{B^2 b^2 h^3} \right) dx = \frac{25P^2 L^4}{2B^2 b^2 h^3} \quad (q)$$

Este resultado concuerda con la deflexión determinada previamente (véase Ec. 12-55). Sin embargo, el método de la carga unitaria proporciona una solución más sencilla que el ejemplo anteriormente resuelto, porque no es necesario efectuar el largo proceso de evaluar la energía complementaria (véase la obtención de la Ec. 12-43).

Ejemplo 3

La armadura ABC mostrada en la Fig. 12-20a soporta una carga vertical P en el nudo B . El material de la armadura tiene una relación esfuerzo-deformación dada por la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante. Determinar la deflexión vertical δ , del nudo B mediante el método de la carga unitaria.

Dado que los únicos esfuerzos resultantes en la armadura son fuerzas axiales, se empleará únicamente el primer término de la Ec. (12-3). La carga unitaria correspondiente a la deflexión δ , es una carga vertical en el nudo B . Las fuerzas axiales correspondientes N_v en los dos miembros de la armadura son las siguientes:

$$(N_v)_{ab} = 1 \quad (N_v)_{bc} = -\sqrt{2}$$

Las deformaciones en las barras se obtienen de la relación esfuerzo-deformación:

$$\epsilon_{ab} = \frac{\sigma_{ab}^2}{B^2} \quad \epsilon_{bc} = -\frac{\sigma_{bc}^2}{B^2}$$

Los esfuerzos son $\sigma_{ab} = P/A$ y $\sigma_{bc} = -\sqrt{2}P/A$, según se obtiene del equilibrio. Sustituyendo estos esfuerzos en las expresiones para las deformaciones, obtenemos

$$\epsilon_{ab} = \frac{P^2}{A^2 B^2} \quad \epsilon_{bc} = -\frac{2P^2}{A^2 B^2}$$

Finalmente, se sustituyen los valores de N_v y $d\delta$ (igual a $\epsilon \, dx$) en la ecuación de la carga unitaria y se obtiene la deflexión:

$$\delta_v = \int N_v d\delta = \int_0^L (1) \left(\frac{P^2}{A^2 B^2} \right) dx + \int_0^{\sqrt{2}L} (-\sqrt{2}) \left(-\frac{2P^2}{A^2 B^2} \right) dx = \frac{5P^2 L}{A^2 B^2} \quad (r)$$

Esta deflexión es la misma que la deflexión obtenida anteriormente en el Ejemplo 1 de esta sección (véase Ec. 12-57). Sin embargo, nuevamente podemos observar la sencillez de la solución mediante el método de la carga unitaria. La ventaja de este método es mucho más pronuncia-

da si la deflexión por calcular no corresponde a una de las cargas reales sobre la estructura (véase Problema 12.7-2).

Método de las fuerzas. La aplicación de la energía complementaria y del teorema de Crotti-Engesser conducen a otro importante método para el análisis de estructuras. Este método, denominado *método de las fuerzas*, se fundamenta en el concepto de indeterminación estática y utiliza redundantes estáticas como cantidades desconocidas en el análisis. El hecho de que las cantidades desconocidas sean cantidades de fuerza (resultantes de esfuerzo y reacciones), es congruente con el requerimiento de que la energía complementaria debe expresarse como una función de las fuerzas a fin de aplicar el teorema de Crotti-Engesser.

Consideremos una estructura materialmente no lineal con n grados de indeterminación estática. Después de seleccionar las cantidades redundantes X_1, X_2, \dots, X_n , se retiran entonces esas redundantes de modo adecuado en la estructura. Por ejemplo, puede retirarse un apoyo si la redundante es una reacción, o puede insertarse un perno si la redundante es un momento flexionante. La estructura liberada resultante debe ser inmóvil y estáticamente determinada. A continuación, se considera la estructura liberada como sometida no sólo a las cargas reales sino también a las redundantes mismas. En otras palabras, las acciones redundantes deben tratarse como cargas que actúan sobre la estructura liberada. Entonces la energía complementaria U^* de la estructura liberada puede evaluarse en la forma usual. La única nueva característica radica en el hecho de que la energía complementaria de la estructura liberada es una función tanto de las cargas como de las redundantes. De acuerdo con el teorema de Crotti-Engesser, podemos obtener los desplazamientos de la estructura liberada correspondientes a las redundantes tomando las derivadas parciales de la energía complementaria con respecto a tales redundantes. Denotemos por los símbolos D_1, D_2, \dots, D_n los desplazamientos de la estructura original correspondientes a las redundantes X_1, X_2, \dots, X_n , respectivamente. Entonces el teorema de Crotti-Engesser (Ec. 12-54) proporciona n ecuaciones simultáneas, como sigue:

$$D_1 = \frac{\partial U^*}{\partial X_1} \quad D_2 = \frac{\partial U^*}{\partial X_2} \quad \dots \quad D_n = \frac{\partial U^*}{\partial X_n} \quad (12-58)$$

Cada una de estas ecuaciones tiene la misma forma general. Si examinamos la ecuación i -ésima, apreciamos que el lado derecho consiste en términos que contienen tanto las redundantes estáticas como las cargas, siendo las incógnitas las redundantes estáticas. Estos términos suman el desplazamiento verdadero D_i de la estructura original, el cual será cero siempre y cuando la redundante correspondiente X_i sea una resultante de esfuerzo o una reacción de un apoyo que no experimenta ningún desplazamiento. Luego, vemos que las Ecs. (12-58) realmente representan condiciones de compatibilidad para los desplazamientos correspondientes a las redundantes. Estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para las redundantes en términos de las cargas, y las reacciones y resultantes de esfuerzo restantes pueden entonces determinarse mediante equilibrio estático.

El método de análisis de la energía complementaria descrito en el párrafo anterior utiliza redundantes estáticas como incógnitas y requiere de la solución de ecuaciones de compatibilidad. Se denomina **método de las fuerzas** para el análisis, y es

aplicable a estructuras materialmente no lineales. En el caso de una estructura lineal, el método se conoce como **método de flexibilidad**.*

El método de las fuerzas, representado por las Ecs. (12-58), es análogo al método de los desplazamientos, representado por las Ecs. (12-45). En el método de las fuerzas se expresa la energía complementaria como una función de las redundantes estáticas, y entonces se utiliza el teorema de Crotti-Engesser para obtener las ecuaciones de compatibilidad que resuelven a las fuerzas redundantes. En el método de los desplazamientos se expresa la energía de deformación como una función de los desplazamientos de nudo desconocidos, y se emplea entonces el primer teorema de Castigliano para obtener las ecuaciones de equilibrio que resuelven a los desplazamientos de nudo.

Consideremos ahora el caso particular del método de las fuerzas en el cual no hay desplazamientos en la estructura original correspondiente a las redundantes estáticas. Como ya se mencionó, esta situación existirá si las redundantes son resultantes de esfuerzo o reacciones en soportes que no se mueven. En estas condiciones los desplazamientos D_1, D_2, \dots, D_n en las ecuaciones de compatibilidad (Ecs. 12-58) son nulos. Entonces las ecuaciones se simplifican a lo siguiente:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_n} = 0 \quad (12-59)$$

Estas ecuaciones representan las condiciones para un valor estacionario de la energía complementaria. Para una estructura en equilibrio estable el valor estacionario realmente es un valor mínimo, por lo que las Ecs. (12-59) representan el **principio de energía complementaria mínima**. Este principio establece que las redundantes estáticas X_1, X_2, \dots, X_n para una estructura estable tienen valores tales que la energía complementaria es un mínimo, siempre y cuando no haya desplazamientos correspondientes a las redundantes en la estructura original.**

Ejemplo 4

La armadura mostrada en la Fig. 12-24a se construye de un material que tiene una relación esfuerzo-deformación dada por la ecuación $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante. Determinar las fuerzas axiales en las tres barras aplicando la energía complementaria y el método de las fuerzas.

Suponiendo que la fuerza reactiva en el nudo B es la redundante estática X , obtenemos la estructura liberada mostrada en la Fig. 12-24b. Las fuerzas axiales en las barras de la estructura liberada, del equilibrio, son las siguientes:

$$N_{ad} = N_{cd} = \frac{P - X}{\sqrt{2}} \quad N_{bd} = X \quad (8)$$

* El método de flexibilidad se trata posteriormente en la Sección 12.8.

** El principio de energía complementaria mínima fue formulado primero por Crotti (Refs. 12-23 y 12-24) y después por Engesser (Ref. 12-25). Si la estructura se comporta linealmente, la energía complementaria y la energía de deformación son iguales; entonces el principio de energía complementaria mínima se reduce al principio de energía de deformación mínima (véase Sección 12.8).

Los métodos de energía complementaria han proporcionado las bases para un progreso significativo en mecánica estructural. El lector que se interese por un estudio adicional de los métodos debe consultar otras fuentes, tales como las Refs. 12-14, 12-15, 12-26 y 12-27. La historia de los métodos de energía complementaria fue compilada por Oravas y McLean (Ref. 2-5); otros comentarios cronológicos se proporcionan en las Refs. 12-15, 12-28 y 12-29.

Los esfuerzos correspondientes son

$$\sigma_{ad} = \sigma_{cd} = \frac{P - X}{\sqrt{2}A} \quad \sigma_{bd} = \frac{X}{A}$$

en donde A es el área de la sección transversal de cada barra.

La densidad de energía complementaria de la barra BD se obtiene como sigue (véase Ec. 12-23):

$$u_{bd}^* = \int_0^{\sigma_{bd}} \epsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_{bd}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{bd}^3}{3B^2} = \frac{1}{3B^2} \left(\frac{X}{A} \right)^3$$

La densidad de energía complementaria de las barras AD y CD puede obtenerse en forma similar; los resultados son

$$u_{ad}^* = u_{cd}^* = \frac{1}{3B^2} \left(\frac{P - X}{\sqrt{2}A} \right)^3$$

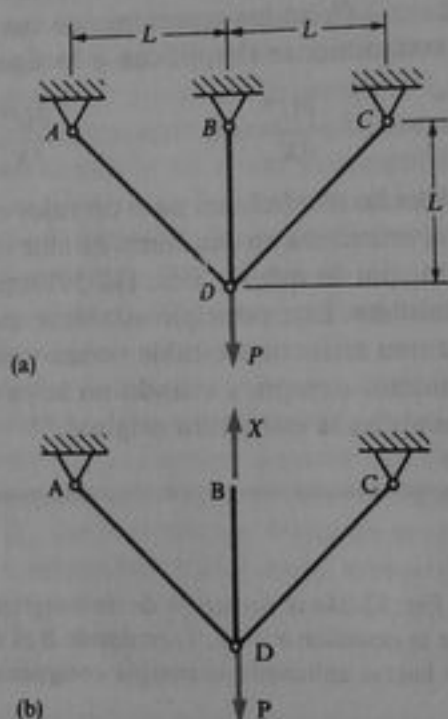


Fig. 12-24 Ejemplo 4. Método de las fuerzas

Finalmente, se multiplica la densidad de energía complementaria de cada barra por el volumen de la barra, y entonces se suman los resultados para obtener la energía complementaria total de la estructura liberada:

$$U^* = \frac{L}{3A^2B^2} [(P - X)^3 + X^3]$$

Esta expresión para U^* es una función no lineal tanto de la carga P como de la redundante X .

El desplazamiento en la estructura original correspondiente a la redundante X es cero, ya que no hay desplazamiento en el apoyo B . Por lo tanto, el teorema de Crotti-Engesser, cuando se aplica a la redundante X , proporciona la siguiente ecuación (véanse Ecs. 12-58 y 12-59):

$$\frac{dU^*}{dX} = \frac{L}{3A^2B^2} [3(P - X)^2(-1) + 3X^2] = 0$$

de la cual obtenemos $X = P/2$. Sustituyendo este valor de X en las Ecs. (s) se obtiene

$$N_{ed} = N_{ed} = \frac{P}{2\sqrt{2}} \quad N_{ed} = \frac{P}{2}$$

De esta manera se han encontrado, mediante el método de las fuerzas, las fuerzas axiales en las barras de esta armadura no lineal estáticamente indeterminada.

12.8 SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

En la sección anterior se trataron los métodos mediante los cuales puede aplicarse la energía complementaria para hallar deflexiones y para analizar estructuras. Se destacó que los métodos de la energía complementaria son aplicables a estructuras de comportamiento no lineal. Limitemos ahora esta explicación a estructuras que se comportan linealmente y para las cuales es aplicable el principio de superposición. En estas condiciones, la energía complementaria U^* y la energía de deformación U de la estructura son iguales.

Supóngase ahora que una estructura lineal se somete a cargas P_1, P_2, \dots, P_n y que esas cargas producen desplazamientos correspondientes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Entonces tanto U como U^* pueden expresarse como funciones cuadráticas de las cargas (véase Ec. 12-34). También, podemos reemplazar U^* por U en el teorema de Crotti-Engesser (Ec. 12-54) y obtener

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (12-60)$$

Esta ecuación se conoce como **segundo teorema de Castigliano**, y puede enunciarse como sigue: Para una estructura lineal la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a cualquier carga P_i es igual al desplazamiento correspondiente δ_i , siempre y cuando la energía de deformación se exprese como una función de las cargas. (Para la historia de este teorema, véanse Refs. 12-16 y 12-20.)

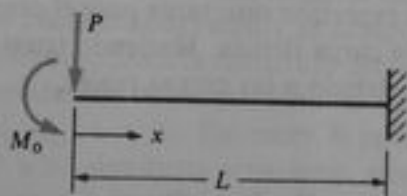


Fig. 12-25 Desplazamientos de una viga mediante el segundo teorema de Castigliano

Como una aplicación del segundo teorema de Castigliano, consideremos una viga en voladizo sometida a una carga P y a un momento M_0 que actúan en el extremo libre (Fig. 12-25). Esta viga se comporta linealmente y tiene una rigidez a flexión

constante EI . La energía de deformación de la viga puede encontrarse de la Ec. (7-59a), la cual se repite aquí:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (12-61)$$

En esta ecuación M representa el momento flexionante en cualquier sección transversal. Para la viga mostrada en la Fig. 12-25, el momento flexionante a una distancia x del extremo libre es $M = -Px - M_0$. Sustituyendo M por esta expresión en la Ec. (12-61), obtenemos

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px - M_0)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{PM_0 L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI} \quad (a)$$

Esta ecuación expresa la energía de deformación U como una función cuadrática de las cargas P y M_0 .

A fin de obtener la deflexión vertical δ en el extremo libre de la viga, aplicamos el segundo teorema de Castigliano y tomamos la derivada parcial de U con respecto a P ; luego,

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

De modo similar, se determina el ángulo de rotación θ en el extremo libre de la viga tomando la derivada parcial de U con respecto a M_0 :

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI}$$

Los signos convencionales para δ y θ son como sigue. Un signo positivo para δ significa que la deflexión es en la misma dirección que la carga P (esto es, hacia abajo) y un signo positivo para θ significa que el ángulo de rotación tiene el mismo sentido que el momento M_0 (esto es, sentido contrario a las manecillas del reloj). Como era de esperarse, tanto δ como θ son funciones lineales de las cargas.

Es evidente que el segundo teorema de Castigliano sólo se aplica para determinar desplazamientos que corresponden a cargas que actúan sobre la estructura, como en el caso del teorema de Crotti-Engesser. Si el desplazamiento deseado no corresponde a una carga, se debe asignar una carga ficticia a la estructura, correspondiente a tal desplazamiento. Entonces se puede calcular ese desplazamiento mediante el segundo teorema de Castigliano; la expresión resultante para el desplazamiento está en términos de las cargas reales y la carga ficticia. Haciendo igual a cero la carga ficticia, se obtiene el desplazamiento debido a las cargas reales.

Método de la carga unitaria. El proceso para determinar los desplazamientos mediante la aplicación directa del segundo teorema de Castigliano es engorroso si actúan más de dos cargas sobre la estructura. Ello se debe a que la evaluación de la energía de deformación y su cuadrado es muy extensa. Por ejemplo, supóngase que en vez de dos actúan cuatro cargas sobre la viga en voladizo mostrada en la Fig. 12-25. Entonces, la evaluación de la ecuación para la energía de deformación, análoga a la Ec. (a), requiere elevar al cuadrado una expresión de cuatro términos, y el resultado final para U contiene diez términos.

Se logra una simplificación considerable en la determinación de desplazamientos si aplicamos el segundo teorema de Castigliano *antes* de integrar la expresión para el momento flexionante. Para ejemplificar este punto, considérese una viga o marco sobre los cuales sólo son importantes las deformaciones por flexión; entonces, la energía de deformación U está dada por la Ec. (12-61). Para obtener la deflexión δ_i correspondiente a la carga P_i , debemos tomar la derivada parcial de U con respecto a P_i . Luego, diferenciando en la integral, obtenemos

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx \quad (b)$$

La derivada parcial $\partial M / \partial P_i$ representa el valor del momento flexionante M producido por un valor unitario de la carga P_i . Luego, esta derivada es igual a M_v , que es el momento flexionante en la estructura debido a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento deseado. El momento M que aparece bajo el signo integral en la Ec. (b) es el momento flexionante debido a las cargas reales sobre la estructura, por lo que este momento es igual a M_r . Aplicando esta notación, vemos que la Ec. (b) resulta

$$\delta_i = \int \frac{M_v M_r dx}{EI}$$

Esta ecuación es la ecuación de carga unitaria (véase Ec. 12-4) para el caso cuando sólo se consideran deformaciones por flexión.

Se efectúan deducciones similares para los efectos de deformaciones axiales, por cortante y torsionales. Por lo tanto, concluimos que el método de la carga unitaria aplicable a estructuras lineales (Ec. 12-4) puede obtenerse directamente del segundo teorema de Castigliano. Este resultado no es sorprendente dado que ya habíamos mostrado que la ecuación más general del método de la carga unitaria (Ec. 12-3), la cual es aplicable a estructuras no lineales, puede deducirse a partir del teorema de Crotti-Engesser. Como ya apuntamos, el método de la carga unitaria es un método eficiente para determinar desplazamientos de estructuras, y debe aplicarse en lugar del segundo teorema de Castigliano.

Método de las flexibilidades. En la sección anterior vimos cómo la energía complementaria y el teorema de Crotti-Engesser conducen al método de las fuerzas para análisis estructural. Un caso especial de método de las fuerzas, denominado **método de las flexibilidades**, ocurre cuando la estructura se comporta linealmente. En tales condiciones la energía de deformación de la estructura liberada, que es igual a la energía complementaria, puede expresarse como una función cuadrática tanto de las cargas como de las redundantes X_1, X_2, \dots, X_n . Entonces, la aplicación del segundo teorema de Castigliano conduce a las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} \quad D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} \quad \dots \quad D_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \quad (12-62)$$

en las cuales D_1, D_2, \dots, D_n representan los desplazamientos en la estructura original correspondientes a las redundantes. La forma general de cada una de estas ecuaciones es la misma. Los miembros del lado derecho consisten en términos que representan desplazamientos correspondientes a las redundantes; algunos de los desplazamientos se deben a las mismas redundantes y otros se deben a las cargas reales sobre la estruc-

tura. Estos términos suman los desplazamientos verdaderos en la estructura original, los cuales son cero siempre y cuando las redundantes correspondientes sean resultantes de esfuerzo o reacciones que no experimenten ningún desplazamiento. Por lo que concluimos que las Ecs. (12-62) son ecuaciones de compatibilidad que pueden resolverse simultáneamente para las redundantes en términos de las cargas. Luego, las Ecs. (12-62) son un caso especial de las ecuaciones de compatibilidad para el método de las fuerzas (Ec. 12-58), porque se puede aplicar la energía de deformación U en lugar de la energía complementaria U^* cuando una estructura se comporta linealmente. Las Ecs. (12-62) son las ecuaciones del método de las flexibilidades, el cual es la contraparte del método de las rigideces.*

Un caso especial surge siempre que las redundantes son resultantes de esfuerzo o reacciones que no experimentan ningún desplazamiento. En tales casos los desplazamientos en la estructura original correspondientes a las redundantes son cero; por ello, las ecuaciones del método de las flexibilidades (Ecs. 12-62) resultan

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (12-63)$$

Estas ecuaciones representan las condiciones para un valor estacionario de la energía de deformación. Si la estructura está en equilibrio estable, el valor estacionario es realmente un valor mínimo. Por lo tanto, las Ecs. (12-63) representan el **principio de energía de deformación mínima**, el cual establece que para una estructura lineal las cantidades redundantes X_1, X_2, \dots, X_n tienen valores tales que la energía de deformación es mínima, siempre que no ocurran desplazamientos correspondientes a las redundantes en la estructura original. El principio de energía de deformación mínima es un caso especial (para estructuras lineales) del principio más general de la energía complementaria mínima (Ecs. 12-59).**

A fin de mostrar con más detalle la forma general de las ecuaciones del método de las flexibilidades (Ecs. 12-62), consideremos un ejemplo específico. Supóngase que una cierta estructura es estáticamente indeterminada en segundo grado y que soporta dos cargas P_1 y P_2 . Entonces la energía de deformación de la estructura liberada, que es una función cuadrática de las dos redundantes X_1 y X_2 y de las cargas P_1 y P_2 , tendrá la siguiente forma general (véase Ec. 12-34):

$$\begin{aligned} U = & a_{11}X_1^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1P_1 + a_{14}X_1P_2 \\ & + a_{21}X_2X_1 + a_{22}X_2^2 + a_{23}X_2P_1 + a_{24}X_2P_2 \\ & + a_{31}P_1X_1 + a_{32}P_1X_2 + a_{33}P_1^2 + a_{34}P_1P_2 \\ & + a_{41}P_2X_1 + a_{42}P_2X_2 + a_{43}P_2P_1 + a_{44}P_2^2 \end{aligned}$$

en donde los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{44}$ son constantes que dependen únicamente de las propiedades de la estructura. La aplicación del segundo teorema de Castiglia-

* El método de las flexibilidades fue establecido originalmente por J. C. Maxwell en 1864 y O. Mohr en 1874 (Refs. 12-1, 12-13 y 12-30) y suele denominarse *método de Maxwell-Mohr*. Este método, de uso común en análisis estructural, se trata en detalle en libros de texto sobre análisis estructural (por ejemplo, véase Ref. 12-22).

** El principio de energía de deformación mínima también se conoce como *principio del trabajo mínimo*. Esta denominación fue utilizada por L. F. Ménébréa, quien estableció primero el principio en 1858 aunque sin una prueba satisfactoria, y por Castigliano, quien lo probó en 1873 (véanse Refs. 12-16 y Ref. 12-31).

no a la anterior expresión para U proporciona las ecuaciones de compatibilidad (Ecs. 12-62):

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + b_{11}P_1 + b_{12}P_2$$

$$D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + b_{21}P_1 + b_{22}P_2$$

en las cuales los coeficientes F y b son nuevas constantes que se obtienen de las constantes "a" y que dependen únicamente de las propiedades de la estructura. Las constantes F_{11} , F_{12} , F_{21} y F_{22} son coeficientes de las redundantes desconocidas y se denominan **coeficientes de flexibilidad** o **flexibilidades** de la estructura liberada. Los términos restantes dependen únicamente de las cargas P_1 y P_2 y de las propiedades de la estructura. Estos términos son los desplazamientos de la estructura liberada correspondientes a las redundantes y son producidos por las cargas.

Supóngase que tomamos ahora derivadas parciales adicionales de las ecuaciones anteriores, como sigue:

$$\frac{\partial D_1}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = F_{11} \qquad \frac{\partial D_1}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_2 \partial X_1} = F_{12}$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2} = F_{21} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = F_{22}$$

A partir de estas relaciones podemos interpretar fácilmente la siguiente ecuación general para las flexibilidades:

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_i} \qquad (12-64)$$

Esta ecuación muestra que las flexibilidades para la estructura liberada se obtienen a partir de la energía de deformación U mediante el proceso de diferenciación, siempre que la energía de deformación se exprese como una función cuadrática de las redundantes estáticas X_1, X_2, \dots, X_n . También, como el orden de la diferenciación es irrelevante, podemos escribir

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = F_{ji} \qquad (12-65)$$

De esta manera se establece el teorema de reciprocidad para flexibilidades a partir de consideraciones de energía de deformación.

Otros métodos de análisis estructural. Además del método de flexibilidades y del método de rigideces, muchos otros métodos de análisis estructural son de importancia para los ingenieros. Por ejemplo, los *métodos matriciales de análisis estructural* son de uso común. Los métodos matriciales consisten en los métodos de flexibilidades y rigideces con el refinamiento de que todas las ecuaciones se presentan en forma matricial y todas las derivaciones y cálculos se realizan mediante el álgebra matricial. La aplicación de matrices hace más sistemáticos los métodos, proporciona una presentación compacta, es ideal y adecuado para la programación de

computadoras.* El método más general para el análisis numérico de estructuras (incluyendo placas, cascarones y sólidos continuos) es el *método del elemento finito* (Ref. 12-32). Estos avanzados métodos de análisis requieren de un profundo conocimiento de la mecánica de materiales, incluyendo los conceptos de energía de deformación y energía complementaria.

*12.9 DEFLEXIONES POR CORTANTE EN VIGAS

Como los efectos de las deformaciones por cortante sobre las deflexiones de vigas son por lo común relativamente pequeños comparados con los efectos de las deformaciones por flexión, es práctica común omitirlos. Sin embargo, si se requiere una gran precisión, pueden determinarse las deflexiones por cortante y sumarse a las deflexiones por flexión. Este tema se trató en la Sección 7.12, en donde se realizó un análisis de deflexión mediante la ecuación diferencial de la curva de deflexión. El método consistía en sumar un nuevo término, que contenía el coeficiente de cortante α_c , a la ecuación diferencial. El coeficiente de cortante es la relación del esfuerzo cortante en el eje neutro de la viga al esfuerzo cortante medio (por ejemplo, para una viga rectangular, $\alpha_c = 3/2$). El coeficiente de cortante también aparece en la ecuación del método de la carga unitaria (Ec. 12-4).

Las deflexiones por cortante obtenidas ya sea resolviendo la ecuación diferencial o aplicando el método de la carga unitaria, son aproximadas al menos por dos motivos: primero, las deflexiones se basan en las deformaciones cortantes en el eje neutro, por lo que no consideran la variación en las deformaciones cortantes a través de la altura de la viga. Segundo, las deflexiones se basan en una teoría de flexión aplicable únicamente para el caso de flexión pura. Este último defecto puede remediarse sólo recurriendo a los métodos más exactos de la teoría de la elasticidad, algunos de cuyos resultados se proporcionan en la Sección 7.12, mientras que el primer defecto puede eliminarse aplicando el principio del trabajo virtual (Ec. 12-1) y obteniendo el trabajo interno mediante la integración a través del volumen de la viga. Esta técnica conduce a un nuevo factor en lugar del coeficiente de cortante α_c , como se explica en los párrafos siguientes.

El método de la carga unitaria para determinar deflexiones de vigas se basa en el principio del trabajo virtual (véanse secciones 12.2 y 12.3). El método requiere que se obtengan las expresiones para los trabajos virtuales externo e interno. Como la carga unitaria es la única carga sobre la estructura, la expresión para el trabajo externo es $W_{ext} = 1 \cdot \Delta$, según la Ec. (a) de la Sección 12.3. En esa ecuación, Δ representa la deflexión deseada debido a las cargas reales sobre la viga, y el 1 representa la carga unitaria correspondiente a tal deflexión.

El trabajo virtual interno es el trabajo realizado por los esfuerzos en la viga (los esfuerzos son producidos por la carga unitaria) conforme se mueven tales esfuerzos a través de las deformaciones producidas por las cargas reales. Previamente, consideramos cuatro posibles resultantes de esfuerzo: fuerza axial, momento flexionante, flexiones cortantes de vigas, omitiremos los efectos de las fuerzas axiales y de los momentos torsionantes. También, en la obtención previa obtuvimos el trabajo vir-

* Los métodos matriciales de análisis estructural se describen en libros de texto sobre teoría estructural (por ejemplo, véase Ref. 12-22). Un conocimiento operativo del álgebra matricial puede obtenerse de libros de matemáticas para ingenieros (por ejemplo, véase Ref. 6-1).

tual interno multiplicando cada resultante de esfuerzo por la cantidad de deformación apropiada para un elemento de viga; en esta forma obtuvimos la Ec. (b) de la Sección 12.3. Sin embargo, ahora trataremos directamente con los esfuerzos en la viga e integraremos sobre el volumen de la viga para obtener el trabajo virtual.

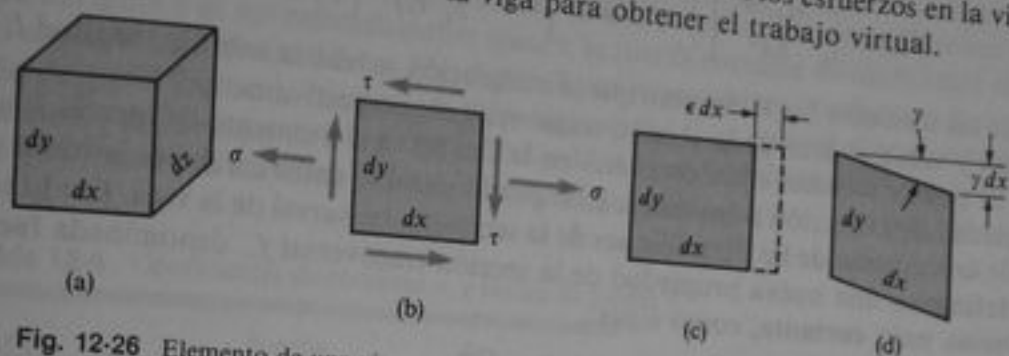


Fig. 12-26 Elemento de una viga

Consideremos un elemento diferencial de dimensiones dx , dy , dz (Fig. 12-26a) del interior de una viga sometida a una carga unitaria. Sobre los lados de este elemento actúan esfuerzos normales σ y esfuerzos cortantes τ (Fig. 12-26b) producidos por el momento flexionante M_v y la fuerza cortante V_v producidas por la carga unitaria. Estos esfuerzos se calculan a partir de las fórmulas de flexión y cortante:

$$\sigma = \frac{M_v y}{I} \quad \tau = \frac{V_v Q}{Ib}$$

Cuando se utiliza el método de la carga unitaria, las deformaciones virtuales impartidas al elemento se escogen iguales a las deformaciones causadas por las cargas reales. Estas cargas producen momentos flexionantes M_L y fuerzas cortantes V_L . Las deformaciones correspondientes consisten en una extensión (Fig. 12-26c), causada por el momento M_L , y una distorsión por cortante (Fig. 12-26d), causada por la fuerza cortante V_L . La deformación extensional ϵ y la deformación cortante γ asociadas con estas deformaciones son

$$\epsilon = \frac{M_L y}{EI} \quad \gamma = \frac{V_L Q}{GIb}$$

Por lo tanto, el trabajo interno virtual de los esfuerzos σ y τ que actúan sobre el elemento diferencial es

$$\begin{aligned} dW_{int} &= (\sigma dy dz)(\epsilon dx) + (\tau dy dz)(\gamma dx) \\ &= \frac{M_v M_L y^2}{EI^2} dx dy dz + \frac{V_v V_L Q^2}{GI^2 b^2} dx dy dz \end{aligned}$$

El trabajo interno total se obtiene integrando la expresión anterior a través del volumen de la viga; luego,

$$W_{int} = \int \frac{M_v M_L y^2}{EI^2} dx dy dz + \int \frac{V_v V_L Q^2}{GI^2 b^2} dx dy dz$$

Esta expresión puede simplificarse observando que, para una sección transversal dada de la viga, las siguientes cantidades son constantes: M_v , M_L , V_v , V_L , E , G e I . Por lo tanto, podemos separar cada una de las integrales anteriores en una integración

sobre el área de la sección transversal y una integración a lo largo del eje de la viga, como sigue:

$$W_{int} = \int_L \frac{M_V M_L}{EI^2} \left[\int_A y^2 dy dz \right] dx + \int_L \frac{V_V V_L}{GI^2} \left[\int_A \frac{Q^2}{b^2} dy dz \right] dx \quad (a)$$

donde los símbolos L y A denotan que la integración se realiza sobre la longitud L de la viga y sobre el área de la sección transversal A , respectivamente.

El primer término entre corchetes en la Ec. (a) es el momento de inercia I , una propiedad de la sección transversal. El segundo término entre corchetes también depende únicamente de las dimensiones de la sección transversal de la viga. Por lo tanto, definimos una nueva propiedad de la sección transversal f_s , denominada **factor de forma para cortante**, como sigue:

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \quad (12-66)$$

en donde $dA = dy dz$ representa un elemento de área en la sección transversal de la viga. El factor de forma es una cantidad adimensional que puede evaluarse para cada perfil particular de la viga, como se muestra posteriormente.

Reemplazando los dos términos entre corchetes en la Ec. (a) por I y $f_s I^2/A$, respectivamente, obtenemos la expresión para el trabajo virtual interno:

$$W_{int} = \int \frac{M_V M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_V V_L dx}{GA} \quad (b)$$

Finalmente, la **ecuación de carga unitaria** para la deflexión Δ se obtiene igualando el trabajo externo (igual a $1 \cdot \Delta$) con el trabajo interno (Ec. b):

$$\Delta = \int \frac{M_V M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_V V_L dx}{GA} \quad (12-67)$$

La Ec. (12-67) puede usarse para hallar deflexiones de vigas cuando se consideran los efectos de los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes. El primer término del miembro derecho de la ecuación es el mismo que el término de flexión obtenido previamente (véase Ec. 12-4). Sin embargo, el segundo término difiere levemente del término de cortante obtenido antes; la diferencia radica en la sustitución del coeficiente de cortante α , por el factor de forma f_s . Luego, la **rigidez a cortante** de una viga se define ahora como GA/f_s , en lugar de GA/α_s .

El factor de forma para cortante debe evaluarse para cada perfil particular de sección transversal. Por ejemplo, si la sección transversal es rectangular con un ancho b y una altura h , la expresión para el primer momento Q (véanse Fig. 5-24 y Ec. c de la Sección 5.5) es





$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

También, para una viga rectangular la cantidad A/I^2 es igual a $144/bh^5$. Por lo tanto, el factor de forma es

$$f_s = \frac{144}{bh^5} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)^2 b dy_1 = \frac{6}{5}$$

En forma análoga se calculan los factores de forma para otras secciones transversales. Por ejemplo, el factor de forma para una sección circular sólida es igual a 10/9 y para una sección tubular delgada es igual a 2. Para una viga I o para una viga cajón, podemos suponer que el esfuerzo cortante se distribuye uniformemente sobre la altura del alma y es aproximadamente igual a la fuerza cortante dividida entre el área del alma (véanse Sección 5.6 y Fig. 5-28). Estas suposiciones conducen a la conclusión de que el factor de forma para tales vigas es A/A_{alma} , una relación que está normalmente en el rango de 2 a 5. En la Tabla 12-4 se proporciona una lista de valores del coeficiente de cortante α , y del factor de forma f_s .

Tabla 12-4 Coeficientes de cortante α , y factor de forma f_s .

Sección	α	f_s
 Rectángulo	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
 Círculo	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
 Tubo delgado	2	2
 Sección I o sección cajón	$\frac{A}{A_{\text{alma}}}$	$\frac{A}{A_{\text{alma}}}$

Para ejemplificar la determinación de deflexiones por cortante en una viga mediante el método de la carga unitaria, obtengamos la deflexión en la mitad de una viga uniformemente cargada con apoyos simples. Con la distancia coordinada x medida desde el apoyo izquierdo de la viga, las expresiones para el momento flexionante y la fuerza cortante debidos a la carga real son

$$M_L = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad V_L = \frac{qL}{2} - qx$$

en donde L es la longitud de la viga y q es la intensidad de la carga uniforme. La carga unitaria que actúa a la mitad de la viga produce los siguientes momentos flexionantes y fuerzas cortantes:

$$M_U = \frac{1(x)}{2} \quad V_U = \frac{1}{2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

Sustituyendo las cantidades anteriores en la Ec. (12-67) se obtiene la siguiente expresión para la deflexión δ a la mitad de la viga:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} x \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{2f_s}{GA} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \left(\frac{qL}{2} - qx \right) dx \\ &= \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48f_s EI}{5GA L^2} \right) \end{aligned} \quad (12-68)$$

Este resultado concuerda con el obtenido mediante la resolución de la ecuación diferencial (véase Ec. 7-76), excepto que aparece el factor de forma f , en lugar del coeficiente de cortante α . Asimismo, si utilizamos el método de la carga unitaria para el caso de una carga concentrada P que actúa a la mitad de una viga simple, obtenemos para la deflexión a la mitad

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{12f_s EI}{GAL^2} \right) \quad (12-69)$$

la cual es la misma que la Ec. (7-80) si se reemplaza α , por f .

Para una viga en voladizo con una carga concentrada P en el extremo libre, el método de la carga unitaria conduce a

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{f_s PL}{GA} \quad (12-70)$$

como la deflexión en el extremo libre. Obsérvese que, en la obtención de este resultado mediante el método de la carga unitaria, no se estableció ninguna suposición respecto a los detalles de apoyo en el extremo fijo. Sin embargo, el segundo término del miembro derecho de la Ec. (12-70) es congruente con el ejemplo previo de la Sección 7.12 para el caso particular en el que se supuso que las condiciones de frontera en el empotramiento eran tales que el alabeo ocurría libremente y el lado vertical de un elemento localizado en el eje neutro permanecía vertical (véase Ec. j, Sección 7.12). Para otras condiciones en el empotramiento, el método de la Sección 7.12 da resultados diferentes (por ejemplo, véase la Ec. k de la Sección 7.12). Luego, las suposiciones acerca de las condiciones de frontera en un apoyo fijo están implícitas cuando se utiliza el método de la carga unitaria.

Energía de deformación por cortante. La energía de deformación por cortante en un elemento de una viga sometido a esfuerzos cortantes τ (véanse Figs. 12-26b y d) es igual a $u \, dx \, dy \, dz$, en donde u es la energía de deformación a cortante por unidad de volumen. La energía de deformación por unidad de volumen es $u = \tau^2/2G$, según la Ec. (3-37a). Luego, podemos expresar la energía de deformación por cortante dU_s , en términos del esfuerzo cortante τ como sigue:

$$dU_s = \frac{\tau^2}{2G} \, dx \, dy \, dz$$

Dado que el esfuerzo cortante τ es igual a VQ/Ib , la energía de deformación por cortante resulta

$$dU_s = \frac{V^2 Q^2}{2GI^2 b^2} \, dx \, dy \, dz$$

Integrando esta expresión a través del volumen de la viga se obtiene la energía de deformación total por cortante:

$$U_s = \int_L \frac{V^2}{2GI^2} \left[\int_A \frac{Q^2}{b^2} \, dy \, dz \right] dx$$

en donde, como antes, los símbolos L y A indican que las integrales se evalúan a lo largo de la longitud de la viga y sobre el área de la sección transversal, respectiva-

mente. El término entre corchetes es igual a $f_s P^2/A$, como se muestra por comparación con la Ec. (12-66). Por lo tanto, la expresión de U , se simplifica a

$$U_s = \int \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \quad (12-71)$$

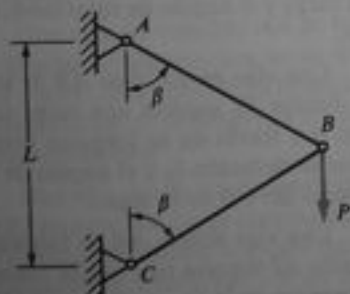
Esta ecuación proporciona la energía de deformación por cortante de una viga en términos de la fuerza cortante V . Es la misma ecuación que la obtenida anteriormente para la energía de deformación por cortante (Ec. 7-84), excepto que α_s se sustituye por f_s .

El factor de forma f_s tiene valores muy próximos a los valores obtenidos mediante los métodos más exactos de la teoría de la elasticidad (véanse Ecs. 7-83). Por lo tanto, recomendamos que se utilice el factor de forma f_s en lugar del coeficiente de cortante α_s , cuando se busquen deflexiones de vigas y se evalúe la energía de deformación debida a los efectos de cortante.

PROBLEMAS / CAPÍTULO 12

Los problemas de la Sección 12.3 deben resolverse mediante el método de la carga unitaria.

12.3-1 Una armadura ABC que consiste en dos miembros (véase figura) soporta una carga vertical P en el nudo B . Cada miembro tiene una rigidez axial EA . Suponiendo $\beta = 60^\circ$, determinar los siguientes desplazamientos: (a) la deflexión vertical δ_v del nudo B , (b) la deflexión horizontal δ_h del nudo B , y (c) el ángulo de rotación θ_{AB} del miembro AB .



Probs. 12.3-1, 12.3-2 y 12.3-3

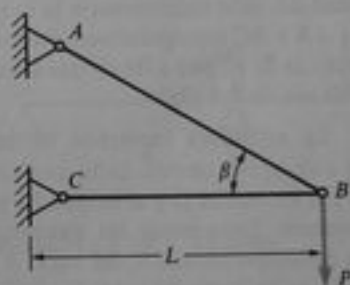
12.3-2 Resolver el problema anterior suponiendo que el miembro AB se somete a un incremento uniforme de temperatura ΔT y $P = 0$.

12.3-3 Resolver el Problema 12.3-1 para $\beta = 45^\circ$.

12.3-4 Determinar la deflexión vertical δ_v y la deflexión horizontal δ_h del nudo B de la armadura mos-

trada en la figura si ambos miembros tienen rigidez axial EA y $\beta = 30^\circ$.

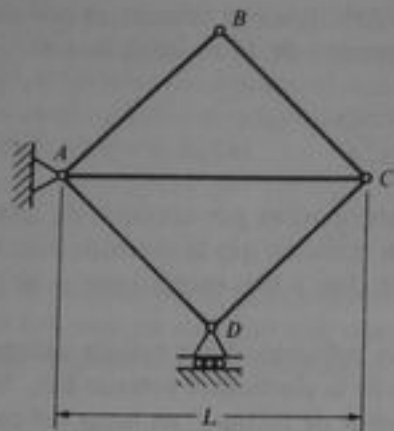
12.3-5 Resolver el problema anterior para $\beta = 45^\circ$.



Probs. 12.3-4 y 12.3-5

12.3-6 Las cuatro barras exteriores de la armadura cuadrada mostrada en la figura, disminuyen su temperatura en una cantidad ΔT . ¿Cuál es el cambio en distancia entre los nudos B y D ?

12.3-7 Una armadura simétrica $ABCD$ tiene una altura $H = 6$ pie y una longitud de claro $L = 16$ pie (véase figura). En el nudo D actúa verticalmente una carga $P = 24$ k. El área de la sección transversal de cada miembro a tensión es $A_t = 2.0$ plg² y la de cada miembro a compresión es $A_c = 5.0$ plg². La armadura está hecha de acero con $E = 30 \times 10^3$ ksi. Calcular la deflexión horizontal δ_h del nudo C y la deflexión vertical δ_v del nudo D .



Prob. 12.3-6

12.3-8 Resolver el problema anterior para una armadura con los siguientes datos: $H = 2$ m, $L = 4$ m, $P = 100$ kN, $A_1 = 1200$ mm², $A_2 = 2800$ mm² y $E = 210$ GPa.

12.3-9 Con referencia a la armadura $ABCD$ descrita en el Problema 12.3-7, suponga $P = 0$. A fin de eliminar el efecto de pandeo bajo carga, la armadura se construirá con una deflexión hacia arriba, llamada *contraflecha* (en inglés, *camber*), del nudo D . ¿En qué cantidad ΔL debe incrementarse la longitud de los miembros AB y BC (comparativamente con sus longitudes teóricas de 10 pie) a fin de que la contraflecha del nudo D sea de 0.5 plg?

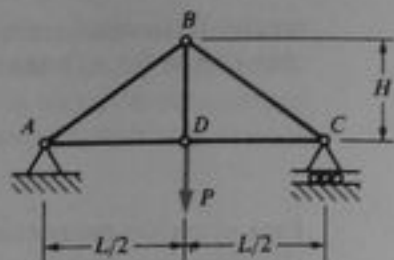
12.3-10 La armadura mostrada en la figura se construye con nueve barras, cada una tiene rigidez axial EA . En los nudos D y B actúan cargas P y $2P$, respectivamente. Determinar las siguientes cantidades: (a) la deflexión vertical δ , del nudo A y (b) el incremento δ_w en la distancia entre los nudos A y E .

12.3-11 Una armadura de acero soporta tres cargas P_1 , P_2 y P_3 como se muestra en la figura. Las áreas de sección transversal de los miembros son las siguientes:

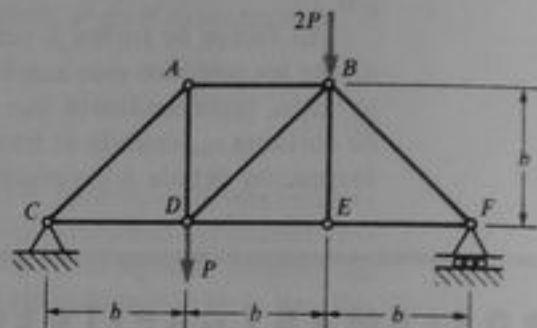
Miembros AB y CD :	Área = A_1
Miembros AE , EF , FG y GD :	Área = A_2
Miembro BC :	Área = A_3
Miembros BE , BF , CF y CG :	Área = A_4

Calcule las deflexiones horizontal y vertical δ_x y δ_y del nudo F . Utilice los siguientes datos: $P_1 = P_2 = 8$ k, $P_3 = 4$ k, $A_1 = 6$ plg², $A_2 = 3$ plg², $A_3 = 4$ plg², $A_4 = 2$ plg², $L = 50$ pie, $H = 16$ pie 8 plg, y $E = 30 \times 10^6$ psi.

12.3-12 Con referencia a la armadura descrita en el problema anterior, calcule el ángulo de rotación θ_w del



Probs. 12.3-7, 12.3-8 y 12.3-9



Prob. 12.3-10

miembro BC y la reducción δ_w en la distancia entre los nudos B y G .

12.3-13 Resolver el Problema 12.3-11 usando los siguientes datos: $P_1 = 30$ kN, $P_2 = 40$ kN, $P_3 = 20$ kN, $A_1 = 4000$ mm², $A_2 = 2000$ mm², $A_3 = 3000$ mm², $A_4 = 1200$ mm², $L = 16$ m, $H = 3$ m y $E = 200$ GPa.

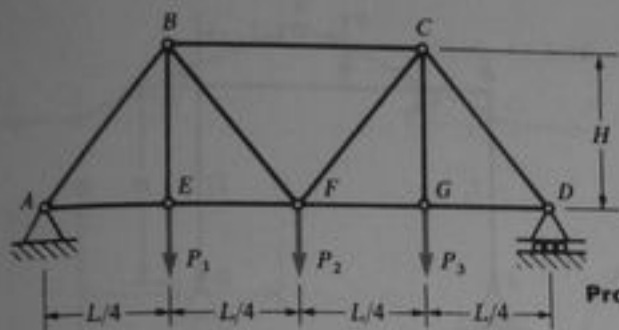
12.3-14 Una viga simple AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga concentrada P en el punto medio C (véase figura). Determine la deflexión δ_c bajo la carga y el ángulo de rotación θ_w en el apoyo izquierdo.

12.3-15 Una viga en voladizo AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga uniforme de intensidad q a través de su longitud (véase figura). Determine la deflexión δ_b y el ángulo de rotación θ_b en el extremo libre B de la viga.

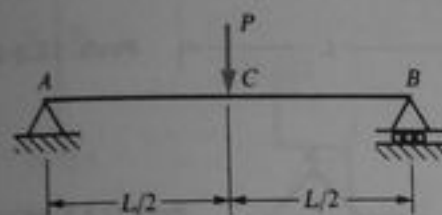
12.3-16 Una viga simple AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta tres cargas concentradas P como se muestra en la figura. Determine la deflexión δ , a la mitad de la viga.

12.3-17 Una viga en voladizo AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta dos cargas concentradas P como se muestra en la figura. Determine las deflexiones δ_c , δ_d y δ_b en los puntos C , D y B , respectivamente.

12.3-18 Una viga simple AB con un voladizo BC (véase figura) está sometida a una carga P en el extremo libre. La rigidez a flexión EI es la misma para am-



Probs. 12.3-11,
12.3-12 y
12.3-13



Prob. 12.3-14

bas partes de la viga. Determinar la deflexión δ_c y el ángulo de rotación θ_c en el punto de aplicación de la carga.

12.3-19 Con referencia a la viga descrita en el problema anterior (véase figura), determinar la deflexión δ en el punto medio del claro AB y el ángulo de rotación θ en el apoyo A .

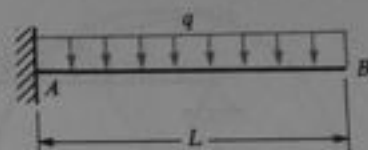
12.3-20 Una viga prismática $ABCD$ con voladizo en cada extremo se muestra en la figura. La viga experimenta un cambio de temperatura tal que la superficie superior de la viga está a una temperatura T_1 y la superficie inferior está a una temperatura T_2 . La altura de la viga es h . Determinar la deflexión δ en el punto medio del claro, el ángulo de rotación θ_a en el extremo libre A y el ángulo de rotación θ_b en el apoyo B .

12.3-21 Una viga en voladizo AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga uniforme de intensidad q sobre una mitad de la longitud (véase figura). Determine las deflexiones δ_b y δ_c en los puntos B y C , respectivamente.

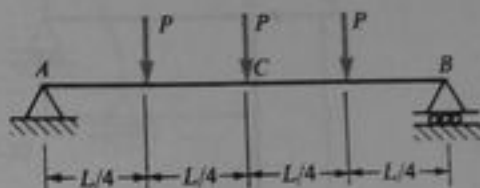
12.3-22 Una viga simple AB de longitud L y rigidez a flexión EI soporta una carga distribuida triangularmente de intensidad máxima q_0 (véase figura). Determine los ángulos de rotación θ_a y θ_b en los apoyos.

12.3-23 Un bastidor ABC tiene una articulación en A y un soporte rodante en C (véase figura). Los miembros AB y BC tienen, cada uno, longitud L y rigidez a flexión EI . En el nudo B actúa una carga horizontal P . Determine la deflexión horizontal δ en el nudo B .

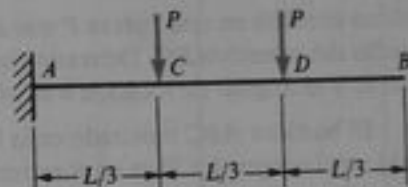
12.3-24 Un marco rectangular $ABCD$ tiene un apoyo rodante en A y un apoyo articulado en D (véase figura). La rigidez a flexión de los miembros verticales es EI_1 y la del miembro horizontal es EI_2 . La carga so-



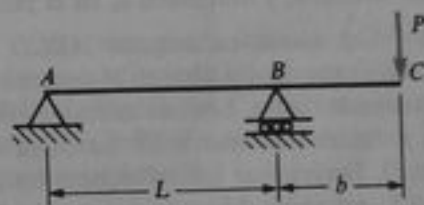
Prob. 12.3-15



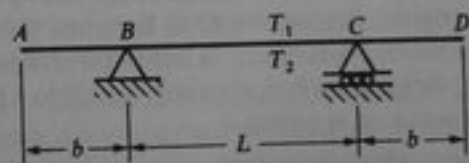
Prob. 12.3-16



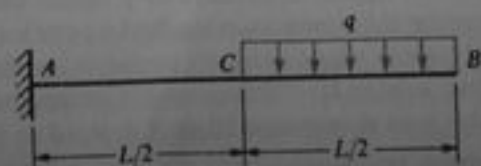
Prob. 12.3-17



Probs. 12.3-18 y 12.3-19



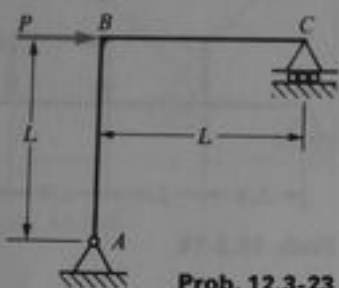
Prob. 12.3-20



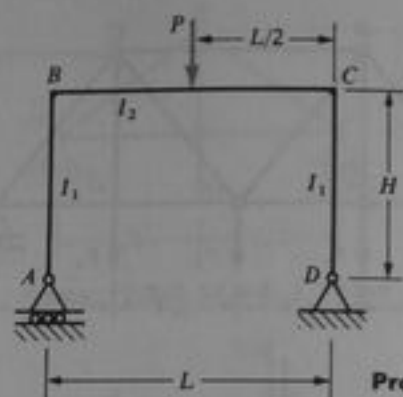
Prob. 12.3-21



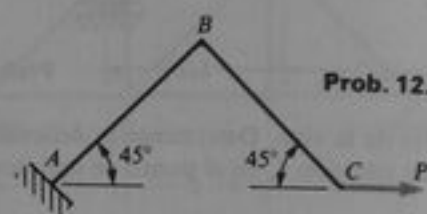
Prob. 12.3-22



Prob. 12.3-23



Prob. 12.3-24

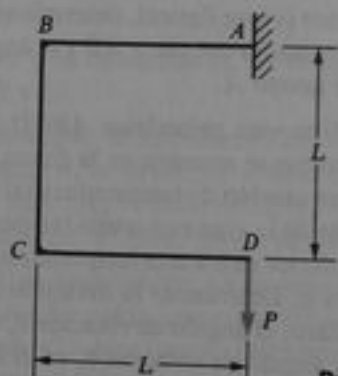


Prob. 12.3-25

bre el marco consiste en una fuerza P que actúa en el punto medio del miembro BC . Determine la deflexión horizontal δ_x y el ángulo de rotación θ en el punto A .

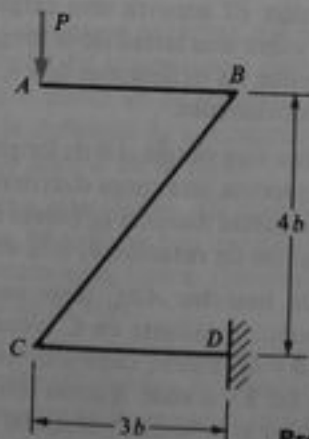
12.3-25 El bastidor ABC mostrado en la figura está empotrado en el apoyo A y libre en el extremo C . Los miembros AB y BC son perpendiculares entre sí, tienen una longitud L y una rigidez flexionante EI . La carga P es horizontal y actúa en C . Determinar las deflexiones vertical δ_y y horizontal δ_x en el punto C .

12.3-26 Un marco rectangular $ABCD$ está empotrado en el apoyo A y libre en el extremo D , como se muestra en la figura. Los tres miembros tienen longitud L y rigidez flexionante EI . La carga vertical P actúa en D . Determinar las deflexiones horizontal δ_x y vertical δ_y , así como el ángulo de rotación θ en el extremo libre.



Prob. 12.3-26

12.3-27 El bastidor de forma Z, $ABCD$, mostrado en la figura, está empotrado en el apoyo D y libre en el punto A . La rigidez flexionante EI es la misma para todos los miembros. Determinar la deflexión vertical δ , y el ángulo de rotación θ en el punto A , debido a la carga P que actúa en el punto A .



Prob. 12.3-27

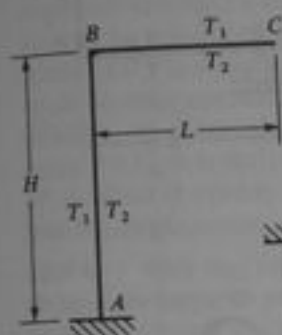
12.3-28 El bastidor ABC mostrado en la figura está cargado por las fuerzas P que actúan en los puntos A y C . Los miembros AB y BC son idénticos y tienen una longitud L , rigidez flexionante EI y rigidez axial EA . Determinar el incremento en longitud Δ entre los puntos A y C (debido a las fuerzas P); considere los efectos de flexión y axial en las deformaciones. Compruebe los resultados para el caso especial de $\beta = 0$ y $\beta = 90^\circ$.

12.3-29 Un marco ABC está empotrado en A y libre en C (véase figura). El marco experimenta un cam-

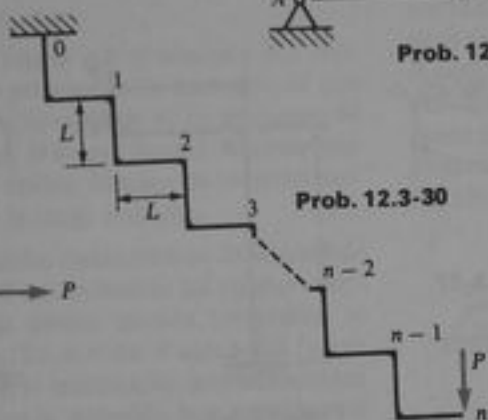
bio de temperatura tal que la temperatura sobre las superficies izquierda y superior se vuelve T_1 y sobre las superficies derecha e inferior se vuelve T_2 . Cada



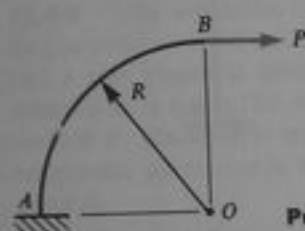
Prob. 12.3-28



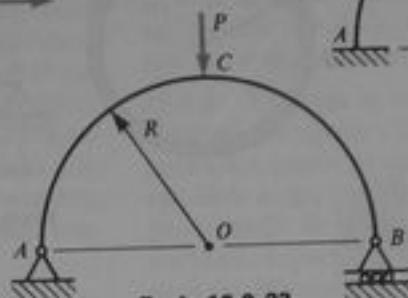
Prob. 12.3-29



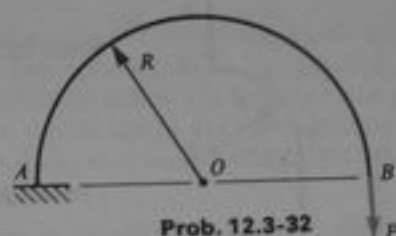
Prob. 12.3-30



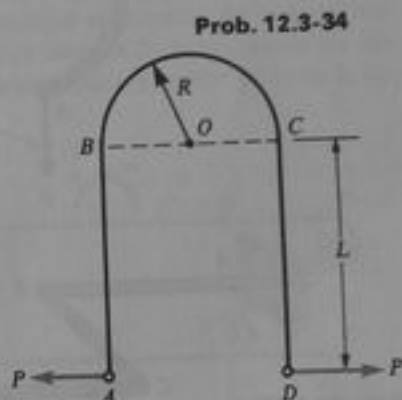
Prob. 12.3-31



Prob. 12.3-33



Prob. 12.3-32



Prob. 12.3-34

miembro tiene el mismo perfil de sección transversal (h = altura de la sección transversal) y está hecho del mismo material (α = coeficiente de dilatación térmica). Determine la deflexión horizontal δ_x , la deflexión vertical δ , y el ángulo de rotación θ en el punto C.

12.3-30 El bastidor de "escalera" mostrado en la figura está empotrado en su extremo superior y libre en el inferior. Cada miembro del bastidor tiene longitud L y rigidez a flexión EI . En el extremo libre actúa una carga vertical P . Determine la deflexión vertical δ en el extremo libre, suponiendo que hay n "escalones".

12.3-31 Una barra curva delgada AB tiene una línea de centros en forma de un cuadrante de círculo con radio R , como se muestra en la figura. La barra está empotrada en el apoyo A y libre en B , donde actúa una carga horizontal P . Determinar la deflexión horizontal δ_x , la deflexión vertical δ , y el ángulo de rotación θ en el extremo libre.

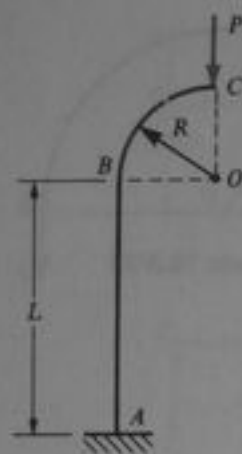
12.3-32 Una barra curva delgada AB de forma semicircular está empotrada en el apoyo A y libre en B (véase figura). En el extremo libre actúa una carga vertical P . Determine la deflexión horizontal δ_x , la deflexión vertical δ , y el ángulo de rotación θ en el extremo libre.

12.3-33 Una barra curva delgada ACB de forma semicircular está articulada en A y simplemente apoyada en B (véase figura). En C actúa una carga vertical P . Determine la deflexión vertical δ , en C y la deflexión horizontal δ_x en B .

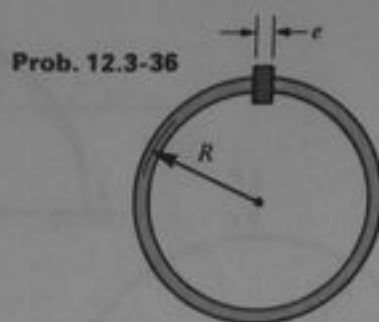
12.3-34 Un bastidor delgado $ABCD$ consiste en una porción semicircular BC de radio R y dos partes rectas AB y CD de longitud L (véase figura). Todas las partes tienen una rigidez a flexión EI . Determine el incremento Δ en la distancia entre los puntos A y D debido a las cargas P .

12.3-35 Una barra delgada ABC consiste en una parte recta AB y una parte BC , que es un cuadrante de círculo (véase figura). Ambas partes tienen rigidez a flexión EI . En C actúa una carga vertical P . Determine la deflexión horizontal δ_x , la deflexión vertical δ , y el ángulo de rotación θ en el punto C .

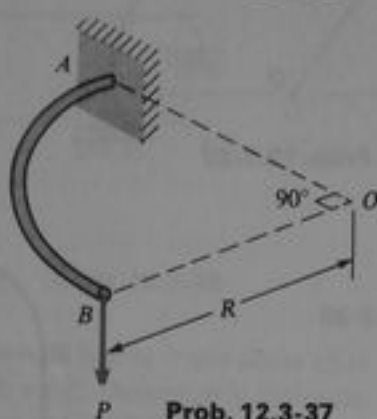
12.3-36 Un aro delgado de radio medio R y rigidez a flexión EI se corta en cierto punto y se separa, manteniéndose así mediante un pequeño bloque que se introduce en la separación (véase figura). Suponiendo que el ancho del bloque es e , hallar el momento flexionante máximo M_{max} en el aro.



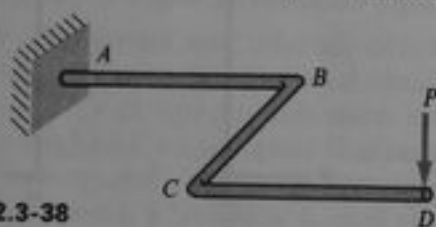
Prob. 12.3-35



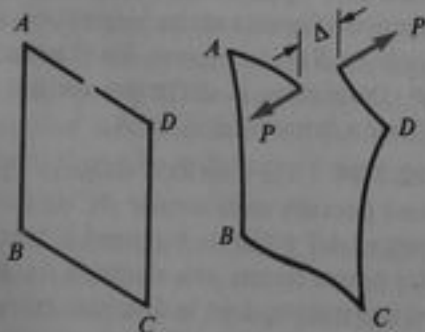
Prob. 12.3-36



Prob. 12.3-37



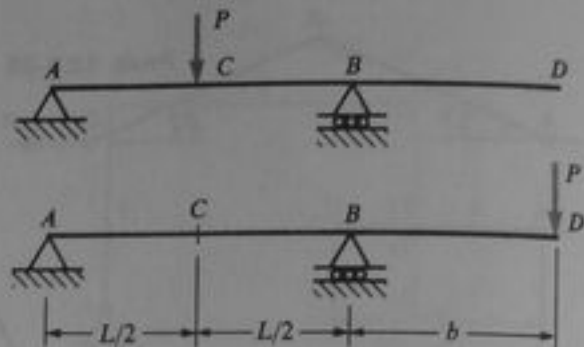
Prob. 12.3-38



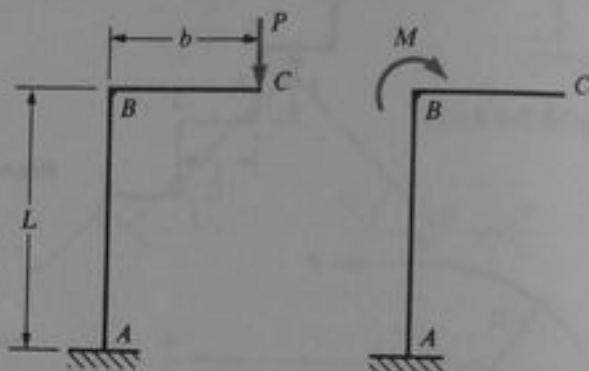
Prob. 12.3-39

12.3-37 Una barra curva esbelta AB alojada en un plano horizontal con su línea de centros formando un cuadrante circular de radio R se somete a una carga vertical P en el extremo libre B (véase figura). La barra tiene rigidez a flexión EI y rigidez torsional GI_t . Determine la deflexión vertical δ , y el ángulo de torsión ϕ en el extremo B .

12.3-38 Una ménsula horizontal $ABCD$ está empotrada en A y libre en el extremo D (véase figura). La ménsula se construye de tubo circular de sección transversal constante (EI = rigidez a flexión; GI_t = rigidez torsional). Denotemos por L la longitud de los miembros



Prob. 12.4-2



Prob. 12.4-3

bro AB y CD y denotemos por b la longitud del miembro BC . En el extremo libre D actúa una carga vertical P . (a) Determine la deflexión vertical δ , y el ángulo de torsión ϕ en D . (b) Calcular los valores numéricos para δ , y ϕ para un tubo de aluminio con los siguientes datos: $P = 1.0$ kN, $L = 1.5$ m, $b = 1.2$ m, $I = 3.0 \times 10^8$ mm⁴, $E = 70$ GPa y $G = 26$ GPa.

12.3-39 Un marco cuadrado $ABCD$ tiene un corte en la mitad del lado AD (véase figura). Cada lado del cuadrado tiene una longitud L , y cada miembro tiene una rigidez a flexión EI y una rigidez torsional GI_t . En los extremos cortados del marco se aplican dos fuerzas iguales y opuestas P , cuyas líneas de acción son perpendiculares al plano del marco. Determinar la separación Δ entre los extremos cortados (en la dirección perpendicular al plano del marco).

12.4-1 Deducir el teorema de desplazamientos recíprocos $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ (véase Ec. 12-12), aplicando el método de la carga unitaria (Ec. 12-6) a las vigas simples mostradas en las Figs. 12-11a y b. (Obsérvese que los puntos A y B pueden seleccionarse en cualquier lugar a lo largo de la viga.)

12.4-2 Una viga simple AB con un voladizo BD se somete a dos condiciones de carga (véase figura). La primera carga es una fuerza vertical P que actúa en C

y la segunda es una fuerza vertical P actuando en D . Mostrar que $\delta_{21} = \delta_{12}$ evaluando ambas deflexiones por el método de la carga unitaria.

12.4-3 Un bastidor ABC de sección transversal constante se somete a dos condiciones de carga (véase figura). La primera carga es una fuerza vertical P que actúa en C y la segunda es un momento M que actúa en B . Mostrar que $M\theta_{21} = P\delta_{12}$ (véase Ec. 12-13), en donde θ_{21} es el ángulo de rotación en B debido a la carga P y δ_{12} es la deflexión en C debida al momento M . (Utilizar el método de la carga unitaria para evaluar los desplazamientos.)

12.4-4 Una viga simple AB se somete a dos condiciones de carga: la primera es un momento M que actúa en el punto C y la segunda es un momento M que actúa en el punto D (véase figura). Mostrar que $\theta_{21} = \theta_{12}$ evaluando ambos ángulos de rotación mediante el método de la carga unitaria.

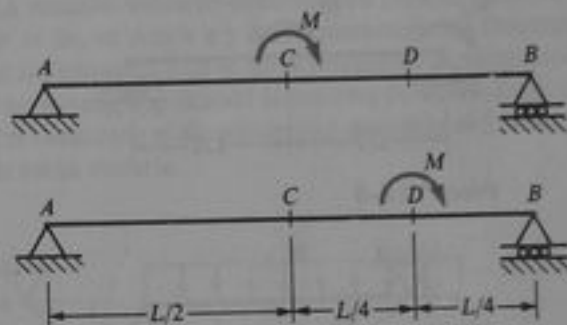
12.4-5 Una armadura estáticamente indeterminada que consiste en 12 barras hechas del mismo material y que tienen la misma sección transversal se muestra en la figura. En el nudo A actúa una fuerza vertical P . Mediante el teorema de desplazamientos recíprocos, determine la deflexión horizontal δ_x del nudo A .

12.4-6 Un marco estáticamente indeterminado $ABCDE$ se somete a una carga horizontal P (véase figura). Los miembros AB y DE son idénticos. Mediante el teorema de desplazamientos recíprocos, determine la deflexión vertical δ_y en el punto C . (Considerar únicamente los efectos de deformaciones por flexión.)

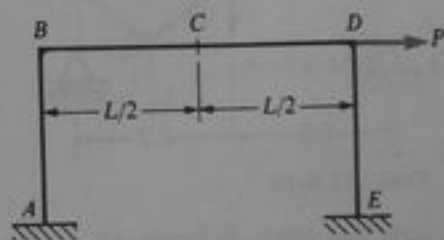
12.4-7 Una armadura de dos barras ABC (véase figura) se somete a dos condiciones de carga, una fuerza horizontal P que actúa en el nudo B y una fuerza verti-

cal P que actúa en el nudo B . Cada miembro tiene una rigidez axial EA . Demuestre que $\delta_{12} = \delta_{21}$, cuando δ_{12} es la deflexión horizontal debida a la fuerza vertical y δ_{21} es la deflexión vertical debida a la fuerza horizontal. (Aplicar el método de la carga unitaria para evaluar los desplazamientos.)

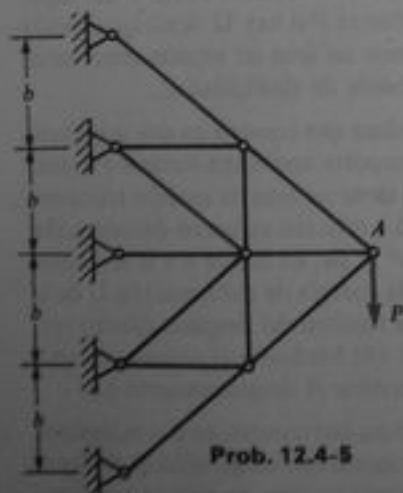
12.4-8 Una viga en voladizo de longitud L , fija en el extremo izquierdo y libre en el otro extremo, se somete a dos estados de carga (véase figura). En el primer estado de carga, una fuerza P_1 actúa hacia abajo en el punto medio de la viga y un momento M_1 actúa en sentido de las manecillas del reloj en el extremo libre. En el segundo estado, una fuerza P_2 actúa hacia abajo en el punto medio y una fuerza P_3 actúa hacia abajo en el extremo libre. Verifique el teorema del trabajo recíproco para estos dos casos de carga evaluando los desplazamientos en ambos casos y sustituyendo en la Ec. (12-15).



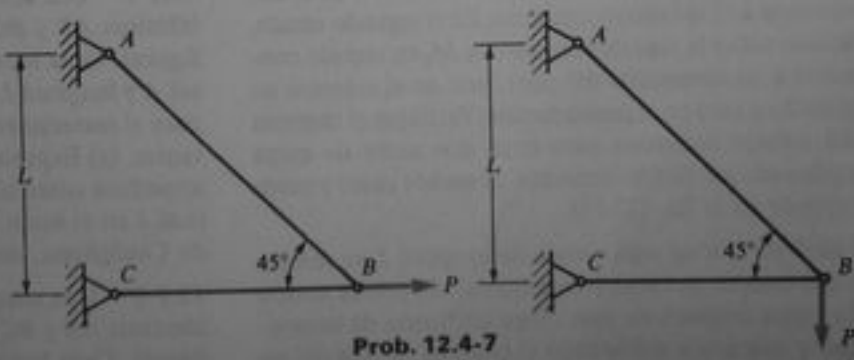
Prob. 12.4-4



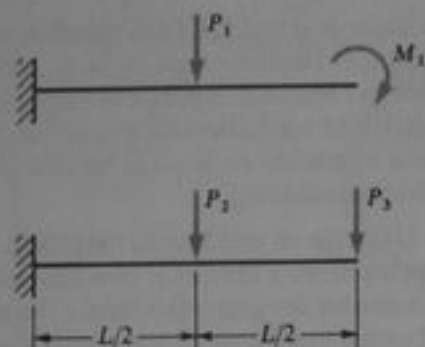
Prob. 12.4-6



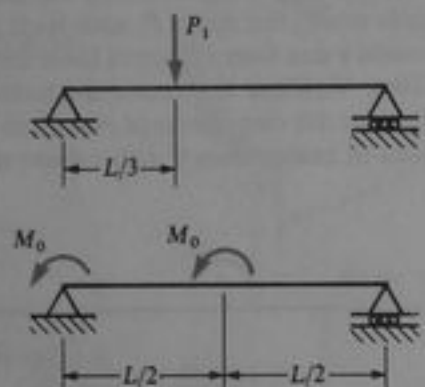
Prob. 12.4-5



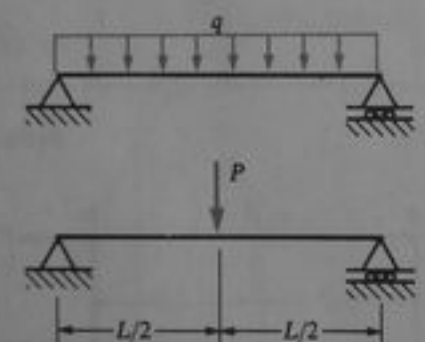
Prob. 12.4-7



Prob. 12.4-8



Prob. 12.4-9



Prob. 12.4-10

12.4-9 Una viga simple de longitud L está sometida a dos estados de carga (véase figura). En el primer estado de carga, una fuerza P_1 actúa hacia abajo a una distancia $L/3$ del apoyo izquierdo. En el segundo estado, actúan sobre la viga dos momentos M_0 en sentido contrario a las manecillas del reloj, uno en el extremo izquierdo y otro en el punto medio. Verifique el teorema del trabajo recíproco para estos dos casos de carga evaluando los desplazamientos en ambos casos y sustituyendo en la Ec. (12-15).

***12.4-10** Una viga simple de longitud L se somete a dos estados de carga (véase figura). El primer estado de carga consiste en una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre todo el claro de la viga. El se-

gundo estado consiste en una carga concentrada P que actúa en el punto medio de la viga. Verifique el teorema del trabajo recíproco para estos dos casos de carga evaluando los desplazamientos en ambos casos y sustituyendo en la Ec. (12-15). (Sugerencia: en el caso de una carga uniforme, el desplazamiento correspondiente es el área del diagrama de deflexión.)

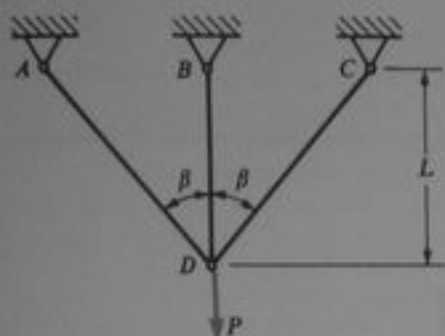
12.6-1 La armadura simétrica mostrada en la figura consiste en tres barras que se unen en el nudo D . Todas las barras tienen la misma rigidez axial EA y la barra central tiene una longitud L . La única carga sobre la armadura es la fuerza vertical P que actúa en D . (a) Expresar la energía de deformación U de la estructura como una función del desplazamiento vertical δ en el nudo D . (b) Mediante el primer teorema de Castigliano, determine el desplazamiento δ . (c) Determine las fuerzas axiales N_{ad} , N_{bd} y N_{cd} en las barras de la armadura.

12.6-2 Una armadura simple ABC se muestra en la figura. Suponga que ambas barras tienen la misma rigidez axial EA y que la longitud del miembro AB es L . Denote el desplazamiento horizontal del nudo B por D_1 (positivo hacia la derecha) y denote el desplazamiento vertical por D_2 (positivo hacia abajo). (a) Expresar la energía de deformación U de la estructura como una función de D_1 y D_2 . (b) Determine los desplazamientos D_1 y D_2 mediante el primer teorema de Castigliano.

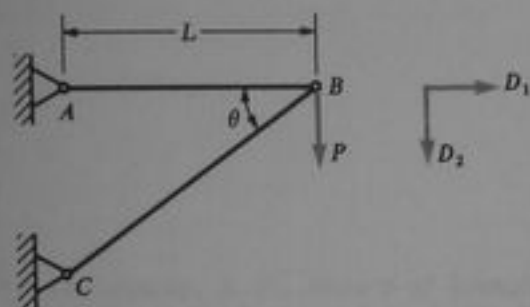
12.6-3 Las fuerzas en los rayos de una rueda de bicicleta que soporta una carga aplicada estáticamente pueden determinarse aproximadamente considerando que el aro es rígido y que los rayos son radiales (véase figura). Los rayos se preesfuerzan en tensión de tal forma que puedan cargar una carga de compresión (una carga de compresión únicamente reduce la tensión). Mediante el primer teorema de Castigliano, determine el desplazamiento hacia abajo δ del tapacubo debido a una fuerza P si hay 32 rayos igualmente espaciados, que tienen un área de sección transversal A , longitud L y módulo de elasticidad E .

12.6-4 Una armadura que consiste en dos miembros idénticos AB y BC soporta una carga vertical P (véase figura). Cada barra tiene un área de sección transversal A y longitud L . La relación esfuerzo-deformación para el material es $\sigma^n = B\epsilon$, en donde n y B son constantes. (a) Expresar la energía de deformación U de la armadura como una función del desplazamiento vertical δ en el nudo B . (b) Mediante el primer teorema de Castigliano, determine el desplazamiento δ .

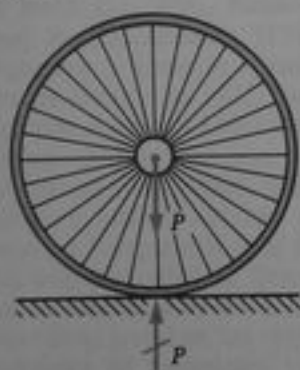
12.7-1 Una armadura que consiste en dos miembros idénticos AB y BC soporta una carga vertical P (véase figura). Cada barra tiene un área de sección transver-



Prob. 12.6-1



Prob. 12.6-2

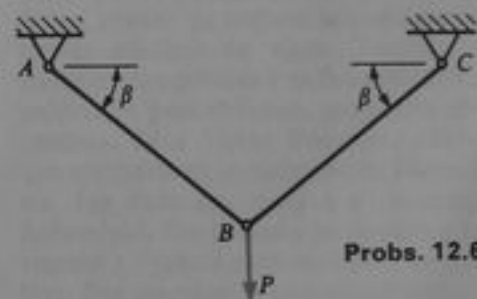


Prob. 12.6-3

sal A y longitud L . La relación esfuerzo-deformación para el material es $\sigma = B\epsilon$, en donde n y B son constantes. (a) Determine el desplazamiento vertical δ del nudo B evaluando la energía complementaria de la estructura y aplicando el teorema de Crotti-Engesser. (b) Determine el desplazamiento δ mediante el método de la carga unitaria.

12.7-2 La armadura ABC mostrada en la Fig. 12-20 soporta una carga vertical P en el nudo B . Cada barra tiene un área de sección transversal A . La relación esfuerzo-deformación para el material es $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, en donde B es una constante. (a) Determine el desplazamiento horizontal δ_x del nudo B evaluando la energía complementaria de la estructura y utilizando el teorema de Crotti-Engesser. (b) Determine el desplazamiento δ_x mediante el método de la carga unitaria.

12.7-3 Una barra prismática vertical de longitud L y peso por unidad de volumen γ cuelga de un extremo. La relación esfuerzo-deformación para el material es $\sigma = B\epsilon$, en donde n y B son constantes. (a) Determine el alargamiento δ de la barra evaluando la energía complementaria y aplicando el teorema de Crotti-Engesser. (b) Determine el alargamiento δ mediante el método de la carga unitaria.



Probs. 12.6-4 y 12.7-1

Referencias y notas biográficas

1-1 Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1983, 452 páginas (publicado originalmente por McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1953). (Nota: Stephen P. Timoshenko, 1878-1972, célebre científico, ingeniero y maestro. Nacido en Rusia, emigró a Estados Unidos en 1922. Fue investigador en el Westinghouse Research Laboratory, luego profesor en la Universidad de Michigan y después profesor en la Universidad de Stanford, donde se retiró en 1944. Timoshenko realizó muchas contribuciones originales, teóricas y experimentales al campo de la mecánica aplicada, y escribió 12 libros de texto que revolucionaron la enseñanza de la mecánica en Estados Unidos. Estos libros trataban los temas de estática, dinámica, mecánica de materiales, vibraciones, estructuras, estabilidad, elasticidad, placas y cascarones. Fueron publicados en 5 ediciones y traducidos a 35 idiomas.)

1-2 Todhunter, I., y Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vols. I y II, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1960 (publicado originalmente por la Cambridge University Press en 1886 y 1893). (Nota: Isaac Todhunter, 1820-1884, y Karl Pearson, 1857-1936, fueron matemáticos y educadores ingleses. Pearson en especial es conocido por sus diversas contribuciones originales a la estadística.)

1-3 Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4a. Ed., Dover Publications Inc., Nueva York, 1944, 643 páginas (publicado originalmente por Cambridge University Press en 1927); véase "Historical Introduction", pp. 1-31. (Nota: Augustus Edward Hough Love, 1863-1940, inglés, connotado conocedor de la elasticidad, educador en la Universidad de Oxford. Estudió las ondas

sísmicas superficiales, llamadas ahora *ondas de Love* en geofísica.)

1-4 Véanse Ref. 1-1, p. 88 y Ref. 1-2, Vol. I, pp. 10, 533 y 873. (Nota: Jacob Bernoulli, 1654-1705, es conocido también por los nombres James, Jacques y Jakob; la Ref. 1-2 indica James. Miembro de la célebre familia de matemáticos y científicos de Basilea, Suiza, realizó un trabajo importante en relación con curvas elásticas de vigas. También desarrolló las coordenadas polares y es renombrado por su trabajo teórico en probabilidad, geometría analítica y otros campos. Jean Victor Poncelet, 1788-1867, francés que combatió en la campaña de Napoleón contra Rusia, fue dado por muerto en el campo de batalla. Sobrevivió, fue tomado prisionero y posteriormente regresó a Francia para continuar su trabajo matemático. Sus principales contribuciones a las matemáticas son en geometría, mientras que en mecánica es bien conocido por su labor en propiedades de materiales y dinámica.)

1-5 Véanse Ref. 1-1, pp. 17-20 y Ref. 1-2, Vol. I, p. 5. (Nota: Robert Hooke, 1635-1703, científico inglés que realizó muchos experimentos con cuerpos elásticos y desarrolló métodos para perfeccionar la medición cronológica; formuló también leyes de gravitación independientemente de Newton, quien fue contemporáneo suyo. Al fundarse la Royal Society of London en 1662, él fue designado su primer director.)

1-6 Hooke, Robert, *De Potentiâ Restitutiva*, John Martyn, Londres, 1678.

1-7 Véanse Ref. 1-1, pp. 90-98 y Ref. 1-2, Vol. I, pp. 80-86. (Nota: Thomas Young, 1773-1829, destacado científico inglés quien realizó investigaciones originales en óptica, sonido, impacto y otros temas.)

- 1-8** Young, Thomas, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, Vols. 1 y 2, Londres, 1807.
- 1-9** Véanse Ref. 1-1, pp. 111-114; Ref. 1-2, Vol. I, pp. 208-318; y Ref. 1-3, p. 13. (Nota: Siméon Denis Poisson, 1781-1840, gran matemático francés. Realizó muchas contribuciones tanto en matemáticas como en mecánica y su nombre ha perdurado en diversos campos, además de la relación de Poisson. Por ejemplo, tenemos la ecuación de Poisson en ecuaciones diferenciales parciales y la distribución de Poisson en teoría de la probabilidad. Basado en su propia teoría acerca del comportamiento de los materiales, calculó la deformación lateral de una barra en tensión y halló que era la cuarta parte de la deformación longitudinal.)
- 2-1** Timoshenko, S. P., y Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3a. Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1970, p. 110. (Nota: James Norman Goodier, 1905-1969, bastante conocido por sus contribuciones e investigaciones en la teoría de la elasticidad, estabilidad, propagación de ondas en sólidos y otras ramas de la mecánica aplicada. Nació en Inglaterra, estudió en la Universidad de Cambridge y también en la Universidad de Michigan. Fue profesor en la Universidad de Cornell y después en la de Stanford, donde dirigió el programa en mecánica aplicada.)
- 2-2** Véase Ref. 1-1, p. 314. (Nota: Joseph Victor Williot, 1843-1907, fue un ingeniero francés.)
- 2-3** Weaver, W., Jr., y Gere, J. M., *Matrix Analysis of Framed Structures*, 2a. Ed., D. Van Nostrand Co., Nueva York, 1980.
- 2-4** Véanse Ref. 1-1, p. 36 y Ref. 2-5, p. 650. (Nota: Leonhard Euler, 1707-1783, célebre matemático suizo, quizá el más grande matemático de todos los tiempos. Véase Ref. 11-3 para información acerca de su vida.)
- 2-5** Oravas, G. A., y McLean, L., "Historical development of energetical principles in elastomechanics", *Applied Mechanics Reviews*, parte I, Vol. 19, No. 8, agosto de 1966, pp. 647-658 y parte II, Vol. 19, No. 11, noviembre de 1966, pp. 919-933.
- 2-6** Véanse Ref. 1-1, p. 75; Ref. 1-2, Vol. I, p. 146; y Ref. 2-5, p. 652. (Nota: Louis Marie Henri Navier, 1785-1836, conocido matemático e ingeniero francés, fue uno de los fundadores de la teoría matemática de la elasticidad. Contribuyó a la teoría de vigas, placas y cascarones, a la teoría de vibraciones y a la teoría de fluidos viscosos.)
- 2-7** Piobert, G., Morin A.-J., y Didion I., "Commission des Principes du Tir", *Mémorial de l'Artillerie*, Vol. 5, 1842, pp. 501-552. (Nota: Esta publicación describe experimentos hechos disparando proyectiles de artillería sobre placas de acero. En la página 505 aparece la descripción de las marcas que son las bandas de deslizamiento. La descripción es muy breve y no hay indicios de que los autores las atribuyeran a características inherentes del material. Guillaume Piobert, 1793-1871, fue un general y matemático francés quien hizo muchos estudios de balística; al realizar esta publicación él era capitán de artillería.)
- 2-8** Lüders, W., "Ueber die Äusserung der elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe Beobachtete Molecularbewegung", *Dingler's Polytechnisches Journal*, Vol. 155, 1860, pp. 18-22. (Nota: Esta publicación describe e ilustra claramente las bandas que aparecen sobre la superficie pulida de un espécimen de acero durante la fluencia. Por supuesto, estas bandas son únicamente la manifestación superficial de zonas de deformación tridimensionales; luego, las zonas podrían describirse más bien como "cuñas" en lugar de bandas. No obstante, el nombre *bandas de Lüders* es el que se da usualmente a las marcas, aunque a veces son llamadas *bandas de Piobert*. En las Refs. 2-9 y 2-10 pueden hallarse explicaciones adicionales de las bandas, con fotografías y bibliografía. Aún se busca más información respecto al propio Lüders.)
- 2-9** Fell, E. W., "The Piobert effect in iron and soft steel", *The Journal of the Iron and Steel Institute*, Vol. 132, No. 2, 1935, pp. 75-91.
- 2-10** Turner, T. H., y Jevons, J. D., "The detection of strain in mild steels", *The Journal of the Iron and Steel Institute*, Vol. 111, No. 1, 1925, pp. 169-189.
- 2-11** Véanse Ref. 1-1, pp. 118 y 288; Ref. 1-2, Vol. I, p. 578; y Ref. 1-2, Vol. II, p. 418. (Nota: Benoit Paul Emile Clapeyron, 1799-1864, célebre ingeniero estructural y diseñador de puentes francés; enseñó ingeniería en la Ecole des Ponts et Chaussées en París. Al parecer el teorema de Clapeyron, que establece que el trabajo de las cargas externas que actúan sobre un cuerpo linealmente elástico es igual a la energía de deformación, se publicó por vez primera en 1833.)
- 2-12** Timoshenko, S. P., Young, D. H., y Weaver, W., Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4a. Ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1974. (Nota: El impacto longitudinal sobre una barra se trata en las pp. 373-387, y el impacto lateral sobre una viga se estudia en las pp. 435-441.)
- 2-13** Goldsmith, W., *Impact*, Edward Arnold Ltd., Londres, 1960, 379 páginas.
- 2-14** Véase Ref. 1-1, p. 88. (Nota: Poncelet investigó las vibraciones horizontales de una barra debidas a cargas de impacto. Véase Ref. 1-4 para información adicional acerca de su vida y obra.)
- 3-1** Véanse Ref. 1-1, pp. 51-53, 82 y 92, y Ref. 1-2, Vol. I, p. 69. (Nota: La relación entre el par y el ángulo de torsión en el caso de una barra circular fue establecida correctamente en 1784 por Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806, un célebre cientifi-

co francés. Coulomb hizo contribuciones en elasticidad y magnetismo, viscosidad de fluidos, fricción, flexión de vigas, paredes y arcos de retención, torsión y vibraciones torsionales, y otros temas; véase Ref. 1-1, pp. 47-54. Thomas Young en su libro de 1807, Ref. 1-8, observó que el par aplicado está balanceado por los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal y que los esfuerzos cortantes son proporcionales a la distancia desde el eje. El ingeniero francés Alphonse J. C. B. Duleau, 1789-1832, realizó pruebas sobre barras en torsión y desarrolló también una teoría para barras circulares; véase Ref. 1-1, p. 82.)

3-2 Véanse Ref. 1-1, pp. 229-237 y Ref. 1-2, Vol. II, parte II, pp. 1-51. (Nota: La exposición de conclusiones de Saint-Venant sobre torsión, publicada en 1855, se describe en esas referencias. Barré de Saint Venant, 1797-1886, es reconocido generalmente como el estudioso de la elasticidad más sobresaliente de todos los tiempos. Nació cerca de París, estudió brevemente en la Ecole Polytechnique y después se graduó en la Ecole des Ponts et Chaussées. Su posterior carrera profesional fue obstaculizada en gran medida debido a su rechazo, por principios morales y políticos, de unirse a sus condiscípulos en los preparativos para la defensa de París en marzo de 1814, justo antes de la abdicación de Napoleón. Como consecuencia, sus méritos recibieron gran reconocimiento en otros lugares, no así en Francia. Algunas de sus más conocidas contribuciones son la formulación de las ecuaciones fundamentales de la elasticidad y el desarrollo de las teorías exactas de flexión y torsión. También desarrolló teorías para deformaciones plásticas y vibraciones. Su nombre completo era Adémar Jean Claude Barré, Count de Saint-Venant. Para información acerca de su vida y su obra, véanse Ref. 1-1, pp. 229-242 y Ref. 1-2, Vol. I, pp. 833-872, Vol. II, parte I, pp. 1-286.)

3-3 Véanse Ref. 1-1, p. 216 y la nota a la Ref. 1-9.

3-4 Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 40, 1896, pp. 785-790 y 813-817. (Nota: Rudolph Bredt, 1842-1900, fue un ingeniero alemán. Estudió en Karlsruhe y Zürich y después trabajó algún tiempo en Crewe, Inglaterra, en una fábrica de trenes, donde aprendió acerca del diseño y fabricación de grúas. Esta experiencia formó la base para su trabajo posterior como fabricante de grúas en Alemania. Su teoría de torsión fue desarrollada en relación con el diseño de vigas cajón para grúas.)

3-5 Timoshenko, S. P., y Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2a. Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961, pp. 500-509.

5-1 Fazekas, G. A., "A note on the bending of Euler Beams", *Journal of Engineering Education*, Vol. 57, No. 5, enero de 1967, pp. 393-394.

5-2 Véase Ref. 2-1, pp. 42 y 48.

5-3 Galilei, Galileo, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, traducido del italiano y latín al inglés por Henri Crew y Alfonso De Salvio, The Macmillan Company, Nueva York, 1933 (traducción publicada inicialmente en 1914). (Nota: *Two New Sciences* se publicó en 1638 por Louis Elzevir en Leida, ahora Leiden, Neerlanda. Este libro representó la culminación del trabajo de Galileo sobre dinámica y mecánica de materiales. Verdaderamente puede decirse que estos dos temas, como los conocemos ahora, se iniciaron con Galileo y la publicación de este libro.)

Galileo Galilei nació en Pisa en 1564. Realizó muchos experimentos y descubrimientos célebres, incluyendo los referentes a la caída de cuerpos y el péndulo, que iniciaron la ciencia de la dinámica. Galileo fue un orador elocuente y atrajo estudiantes de muchos países. Fue pionero en la astronomía y perfeccionó un telescopio con el que hizo muchos descubrimientos astronómicos, incluyendo las características montañosas de la luna, los satélites de Júpiter, las fases de Venus y las manchas solares. Como su interpretación científica del sistema solar era contraria a la teología, fue condenado a prisión y pasó los últimos años de su vida recluido en Florencia; durante este periodo escribió *Two New Sciences*. Galileo murió en 1642 y fue sepultado en Florencia.)

5-4 Véanse Ref. 1-1, pp. 11-47 y 135-141, y Ref. 1-2. (Nota: La historia de la teoría de vigas se describe en esas referencias. Edme Mariotte, 1620-1684, fue un físico francés que hizo descubrimientos en dinámica, hidrostática, óptica y mecánica. Realizó pruebas sobre vigas y desarrolló una teoría para calcular capacidades de carga; su teoría fue un perfeccionamiento del trabajo de Galileo, aunque todavía incorrecta. Jacob Bernoulli, 1654-1705, a quien se describe en la nota de la Ref. 1-4, determinó primero que la curvatura es proporcional al momento flexionante. Sin embargo, su constante de proporcionalidad era incorrecta. Leonhard Euler, 1707-1783, obtuvo la ecuación diferencial de la curva de deflexión de una viga y la aplicó para resolver muchos problemas de deflexiones pequeñas y grandes. Su vida y obra se describen en la nota de la Ref. 11-3. La primera persona en obtener la distribución de esfuerzos en una viga y relacionar correctamente los esfuerzos con el momento flexionante fue probablemente Antoine Parent, 1666-1716, un físico y matemático francés. Después Saint-Venant, 1797-1886, realizó una rigurosa investigación de las deformaciones y esfuerzos en vigas; véase la nota de la Ref. 3-2.)

5-5 *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., American Institute of Steel Construction, Inc., 400 North Michigan Avenue, Chicago, Illinois 60611, 1980.

5-6 *Aluminum Construction Manual*, 4a. Ed., Sección 1, "Specifications for Aluminum Structures", The Aluminum Association, Inc., 818 Connecticut

Ave., N. W., Washington, D.C. 20006, abril de 1982, 76 páginas.

5-7 *Aluminum Construction Manual*, 4a. Ed., Sección 3, "Engineering Data for Aluminum Structures", *Ibid.*, noviembre de 1981, 100 páginas.

5-8 *National Design Specification for Wood Construction*, Edición 1982, National Forest Products Association, 1619 Massachusetts Avenue, N. W., Washington, D.C., 20036, 81 páginas.

5-9 *Wood Structural Design Data*, Edición 1978, *Ibid.*, 240 páginas.

5-10 Véase Ref. 3-5, Capítulo 6, para el estudio del pandeo lateral de vigas.

5-11 Véanse Ref. 1-1, pp. 141-144 y Ref. 1-2, Vol. II, parte I, pp. 641-642. (Nota: D. J. Jourawski, 1821-1891, ingeniero ferroviario y de puentes ruso quien desarrolló la ahora ampliamente usada teoría aproximada para esfuerzos cortantes en vigas. Mientras que la teoría exacta para esfuerzos cortantes fue establecida por Saint-Venant, es útil sólo en muy pocos casos prácticos; por lo que parece que las observaciones críticas hechas por Todhunter y Pearson en la p. 642, acerca de la teoría de Jourawski, son injustificadas. La publicación de Jourawski sobre el tema de cortante en vigas se cita en la Ref. 5-12.)

5-12 Jourawski, D. J., "Sur la résistance d'un corps prismatique...", *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires et Documents, Serie 3a.*, Vol. 12, parte 2, 1856, pp. 328-351.

5-13 Zaslavsky, A., "On the limitations of the shearing stress formula", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 8, No. 1, 1980, pp. 13-19.

5-14 Véase Ref. 2-1, pp. 358-359.

5-15 Maki, A. C., y Kuenzi, E. W., "Deflection and stresses of tapered wood beams", Research Paper FPL 34, U.S. Forest Service, Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, septiembre de 1965, 54 páginas.

5-16 Véase Ref. 2-1, pp. 110-111.

5-17 Plantema, F. J., *Sandwich Construction*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1966.

5-18 Nicholls, R., *Composite Construction Materials Handbook*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1976, 580 páginas.

5-19 Véase Ref. 1-1, p. 147. (Nota: El ingeniero francés Jacques Antoine Charles Bresse, 1822-1883, es mejor conocido por su trabajo en barras curvas y arcos.)

6-1 Gere, J. M., y Weaver, W., *Matrix Algebra for Engineers*, 2a. Ed., Brooks/Cole Engineering Division, Monterey, California, 1983, 232 páginas.

6-2 Véase Ref. 1-1, pp. 107-111. (Nota: Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, fue uno de los más grandes matemáticos. Nació en París, ingresó a la Ecole

Polytechnique a la edad de 16 años, donde fueron sus maestros Lagrange, Laplace, Fourier y Poisson. Pronto fue reconocido por su notabilidad matemática, y a la edad de 27 años se volvió profesor de la Ecole y miembro de la Academy of Sciences. Sus principales trabajos en matemáticas puras fueron en teoría de grupos, teoría de números, series, integración, ecuaciones diferenciales y funciones analíticas. En matemáticas aplicadas introdujo el concepto de esfuerzo como se conoce actualmente, desarrolló las ecuaciones de la teoría de la elasticidad e introdujo la noción de esfuerzos principales y deformaciones principales. En la Ref. 1-2 se dedica todo un capítulo a su trabajo sobre la teoría de la elasticidad; véase Vol. I, pp. 319-376.)

6-3 Véase Ref. 1-1, pp. 229-242. (Nota: Saint-Venant fue un iniciador en muchos aspectos de la teoría de la elasticidad, y Todhunter y Pearson le dedicaron su libro, *A History of the Theory of Elasticity*, Ref. 1-2. Para mayor información acerca de Saint-Venant, véase la Ref. 3-2.)

6-4 Véanse Ref. 1-1, pp. 197-202, Ref. 1-2, Vol. II, parte I, pp. 86 y 287-322. (Nota: William John Macquorn Rankine, 1820-1872, nació en Edimburgo, Escocia, y enseñó ingeniería en la Glasgow University. Dedujo las ecuaciones de transformación de esfuerzos en 1852 e hizo muchas otras contribuciones a la teoría de la elasticidad y la mecánica aplicada. Sus temas de ingeniería incluyen arcos, muros de retención y teoría estructural. También obtuvo celebridad científica por su trabajo en fluidos, luz, sonido y comportamiento de cristales.)

6-5 Véanse Ref. 1-1, pp. 283-288, Ref. 6-6 y Ref. 6-7. (Nota: El célebre ingeniero civil alemán Otto Christian Mohr, 1835-1918, fue un diseñador tanto teórico como práctico. Profesor en el Stuttgart Polytechnikum y después en el Dresden Politechnikum. Desarrolló el círculo de esfuerzo en 1882, Ref. 6-6; también se describe en su libro, Ref. 6-7, pp. 187-219. Mohr hizo numerosas contribuciones a la teoría de estructuras, incluyendo el diagrama de Williot-Mohr para deflexiones de armaduras, el método del área de momentos para deflexiones de vigas, y el método de Maxwell-Mohr para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.)

6-6 Mohr, O., "Über die Darstellung des Spannungszustandes and des Deformationszustandes eines Körperelementes", *Zivilingenieur*, 1882, p. 113.

6-7 Mohr, O., *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Wilhelm Ernst and Sohn, Berlin, 1906, 459 páginas.

6-8 Véase Ref. 1-1, pp. 190-197. (Nota: Karl Culmann, 1821-1881. Destacado ingeniero ferroviario y de puentes alemán. En 1849-1850 pasó dos años viajando en Inglaterra y Estados Unidos para estudiar puentes y después escribió al respecto en Alema-

nia. Diseñó en Europa numerosas estructuras de puentes y en 1855 enseñó estructuras en el recién establecido Zürich Polytechnicum. Hizo muchos desarrollos en métodos gráficos y escribió el primer libro sobre estática gráfica, publicado en Zürich en 1866. Uno de los temas originales presentados en este libro lo es el de las trayectorias de esfuerzos. Para información adicional acerca de Culmann y la historia de puentes, véase la Ref. 6-9.)

6-9 Kuzmanovic, B. O., "History of the theory of bridge structures", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division*, Vol. 103, No. ST5, mayo de 1977, pp. 1095-1111.

6-10 Ranov, T., y Wolko, H. S., "The location of maximum principal stresses", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division*, Vol. 84, ST3, Publicación No. 1629, mayo de 1958.

6-11 Hetényi, M., Editor, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1950.

6-12 Dally, J. W., y Riley, W. F., *Experimental Stress Analysis*, 2a. Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1978, 571 páginas.

7-1 Véase Ref. 1-1, pp. 27 y 30-36. (Nota: Los trabajos de Jacob Bernoulli, Euler y muchos otros con respecto a curvas elásticas, también se tratan en la Ref. 1-2. En relación con esto, otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel Bernoulli, 1700-1782, propuso a Euler que obtuviera la ecuación diferencial de la curva de deflexión, minimizando la energía de deformación, cosa que Euler hizo. Daniel Bernoulli, sobrino de Jacob Bernoulli, es renombrado por su trabajo en hidrodinámica, teoría cinética de gases, vibración de vigas y otros temas. Su padre John Bernoulli, 1667-1748, hermano menor de Jacob, fue igualmente un famoso matemático y científico quien formuló primero el principio de los desplazamientos virtuales, resolvió el problema de los tensores de estructuras y estableció la regla para obtener el valor límite de una fracción cuando el numerador y el denominador tienden ambos a cero. Comunicó esta última regla a G. F. A. de L'Hôpital, 1661-1704, quien escribió el primer libro sobre cálculo e incluyó este teorema, que hoy conocemos como la *regla de L'Hôpital*; véase Ref. 7-2. El sobrino de Daniel, Jacob Bernoulli, 1759-1789, también conocido como James o Jacques, iniciador en la teoría de flexión de placas y vibraciones de placas. En los libros sobre historia de las matemáticas puede hallarse mucha información interesante acerca de los más prominentes miembros de la familia Bernoulli, así como de otros pioneros de la mecánica y las matemáticas; por ejemplo, véanse Refs. 7-3, 7-4 y 7-5.)

7-2 Struik, D. J., "The origin of L'Hôpital's rule", *The Mathematics Teacher*, Vol. 56, No. 4, abril de 1963, pp. 257-260.

7-3 Newman, J. R., *The World of Mathematics*, Vols. 1-4, Simon and Schuster, Nueva York, 1956, 2469 páginas.

7-4 Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 3a. Ed., Dover Publications, Inc., Nueva York, 1967, 195 páginas.

7-5 Cajori, F., *A History of Mathematics*, 3a. Ed., Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1980, 524 páginas.

7-6 Véase Ref. 1-1, p. 137.

7-7 Saint-Venant, Barré de, notas y apéndices a la tercera edición del libro por Navier, *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1a. parte, "De la Résistance des corps solides", Paris, 1864, p. 72.

7-8 Véase Ref. 1-1, p. 284.

7-9 Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen", *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, Vol. 14, 1868, pp. 19-51.

7-10 Greene, Charles E., *Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses*, D. Van Nostrand Co. Inc., Nueva York, 1875. (Nota: El método del área de momentos fue descubierto independientemente por Greene, un profesor de la Universidad de Michigan, en 1873. Empezó enseñándolo a sus alumnos en ese año. El método se describe con el nombre de *area-moment method* en las pp. 35-40 de este libro.)

7-11 Macaulay, W. H., "Note on the deflection of beams", *The Messenger of Mathematics*, Vol. XLVIII, mayo de 1918-abril de 1919, Cambridge, 1919, pp. 129-130. (Nota: William Herrick Macaulay, 1853-1936, fue un matemático inglés y miembro del King's College, Cambridge. En esta publicación él definió "por $f(x)$ ", una función de x que es cero cuando x es menor que a e igual a $f(x)$ cuando x es mayor o igual que a ". Después demostró cómo aplicar esta función para hallar deflexiones de vigas. Desafortunadamente, no proporcionó ninguna referencia al trabajo previo de Föppl y Clebsch; véanse Refs. 7-12 a 7-15.)

7-12 Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, B. G. Teubner, Leipzig, 1862, 424 páginas. (Traducido al francés y comentado por Saint-Venant, *Théorie de l'Elasticité des Corps Solides*, Paris, 1883. Los comentarios de Saint-Venant triplicaron el tamaño del libro de Clebsch.) (Nota: El método de hallar deflexiones de vigas integrando a través de puntos de discontinuidad fue presentado por vez primera en este libro; véanse Ref. 1-1, pp. 258-259, y Ref. 7-15. Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833-1872, fue un matemático y científico alemán. Profesor de ingeniería en el Karlsruhe Polytechnicum y más tarde profesor de matemáticas en la Göttingen University.)

7-13 Föppl, A., *Vorlesungen über technische Mechanik*, Vol. III: Festigkeitslehre, B. G. Teubner, Leipzig, 1897. (Nota: En este libro, Föppl amplía el método de Clebsch para encontrar deflexiones de vigas. August Föppl, 1854-1924, fue un matemático e ingeniero alemán. Profesor de la Universidad de Leipzig y después en el Instituto Politécnico de Munich. Para un interesante relato de su vida, véase Ref. 7-14.)

7-14 Oravas, G. A., *Introduction to Drang und Zwang*, por A. Föppl y L. Föppl, Vol. 1, 3a. Ed., Johnson Reprint Corporation, Nueva York, 1969 (reimpresión de la 3a. Ed., 1941, con nueva introducción biográfica por Oravas; la 1a. Ed. fue publicada por R. Oldenbourg Verlag, Munich, en 1920). (Nota: Carl Ludwig Föppl, 1887-1976, fue el hijo menor de August Föppl. Su hermano mayor, Otto Föppl, nacido en 1885, fue coautor de un libro con su padre. Ambos hermanos son bien conocidos por su trabajo en mecánica aplicada.)

7-15 Pilkey, W. D., "Clebsch's method for beam deflections", *Journal of Engineering Education*, Vol. 54, No. 5, enero de 1964, pp. 170-174. (Nota: Esta publicación describe el método de Clebsch, y proporciona una crónica histórica completa con muchas referencias. Para mayor información del método, véanse Refs. 7-16 y 7-17.)

7-16 Weissenburger, J. T., "Integration of discontinuous expressions arising in beam theory", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 2, No. 1, enero de 1964, pp. 106-108.

7-17 Wittrick, W. H., "A generalization of Macaulay's method with applications in structural mechanics", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 3, No. 2, febrero de 1965, pp. 326-330.

7-18 Véase Ref. 2-1, p. 49.

7-19 Véase Ref. 2-1, p. 121.

7-20 Véase Ref. 1-1, pp. 89 y 201.

7-21 Cowper, G. R., "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, No. 2, junio de 1966 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 88, Serie 3), pp. 335-340.

7-22 Véase Ref. 1-1, pp. 25, 30-36, 39-40. (Nota: La ecuación básica que relaciona la curvatura y el momento flexionante fue propuesta por Jacob Bernoulli, 1654-1705, aunque no evaluó correctamente la constante de proporcionalidad. Sin embargo, su trabajo debe considerarse como la primera contribución a la resolución de problemas de deflexiones grandes de vigas. Posteriormente, a sugerencia de Daniel Bernoulli, Euler dedujo nuevamente la ecuación diferencial de la curva de deflexión y procedió a resolver varios problemas de la elástica; véanse Ref. 1-1, p. 27; Ref. 1-2, Vol. 1, pp. 30 y 34; y Ref. 1-3, p.

3. La célebre publicación de Euler sobre curvas elásticas se cita en la Ref. 7-23. Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, fue un famoso matemático francés. Nació en Turín y tenía ascendencia francesa e italiana. Lagrange, el primero en formular el principio del trabajo virtual y quien hizo mayores contribuciones a la dinámica, fue evidentemente quien continuó la investigación de la elástica. Estudió la viga en voladizo con una carga en el extremo; véase Ref. 1-1, pp. 39-40 y Ref. 1-2, Vol. 1, pp. 58-61. La publicación de Lagrange se cita en la Ref. 7-24 y pueden hallarse breves biografías suyas en la Ref. 7-4, p. 132 y en la Ref. 7-5, p. 250. Otro investigador inicial de la teoría de la elasticidad fue Giovanni Antonio Amaedo Plana, 1781-1864, un sobrino de Lagrange, quien corrigió un error en la investigación de Lagrange acerca de la elástica; véase Ref. 1-2, Vol. 1, pp. 89-90; La publicación de Plana se cita en la Ref. 7-25, y en la Ref. 7-5 puede hallarse información biográfica. En su disertación, Max Born realizó una investigación de la elástica mediante métodos variacionales; véanse Ref. 2-5, pp. 927-928 y 932; Ref. 7-26 y Ref. 7-27, p. xxviii. Max Born, 1882-1970, fue el gran físico que estableció la moderna mecánica ondulatoria y realizó importantes investigaciones en mecánica cuántica y relatividad. En su disertación estableció nuevos principios variacionales en elasticidad.)

7-23 Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. . .", Apéndice I, "De curvis elasticis", Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (Traducción al inglés: Oldfather, W. A., Ellis, C. A., y Brown D. M., *Isis*, Vol. 20, 1933, pp. 72-160. Publicado nuevamente también en *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie 1, Vol. 24, 1952.)

7-24 Lagrange, J. L., "Sur la force des ressorts pliés", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, Vol. 25, 1771. (Reimpreso en "Oeuvres de Lagrange", Gauthier-Villars, Paris, Vol. 3, 1869, pp. 77-110.)

7-25 Plana, G. A. A., "Equation de la courbe formée par una lame élastique", *Memoirs of the Royal Society of Turin*, Vol. 18, 1809-1810, pp. 123-155.

7-26 Born, M., "Untersuchungen über der Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen", Disertación, Göttingen, 1906.

7-27 Oravas, G. A., "Historical Review of Extremum Principles in Elastomechanics", una sección introductoria (pp. xx-xlvi) del libro *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, por C. A. P. Castigliano, traducido por E. S. Andrews, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1966. (Nota: El libro de Castigliano se publicó originalmente en Turín en 1879; después se tradujo al alemán en 1886 y al inglés en 1919. La traducción al inglés hecha por E.

S. Andrews fue publicada con el título *Elastic Stresses in Structures* por Scott, Greenwood and Son, Londres. La edición de Dover es una reimpression de la traducción al inglés pero contiene nuevo material introductorio de índole histórica por Oravas; véanse Refs. 12-16 a 12-20.)

7-28 Véase Ref. 1-3, pp. 401-412.

7-29 Véase Ref. 3-5, pp. 76-82.

7-30 Southwell, R. V., *An Introduction to the theory of Elasticity*, 2a. Ed., Oxford University Press, Londres, 1941, pp. 429-436. (Nota: Richard Vynne Southwell, 1888-1970, fue un matemático, ingeniero y educador inglés. Desarrolló los métodos de relajación para resolver problemas en diversas áreas de la ingeniería, incluyendo mecánica aplicada.)

7-31 Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworth and Co., Ltd., 1962, 220 páginas.

7-32 Easley, J. G., "Nonlinear deformation of elastic beams, rings and strings", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 16, No. 9, septiembre de 1963, pp. 677-680.

7-33 Jahnke, E., y Emde, F., *Tables of Higher Functions*, 6a. Ed., revisada por F. Lösch, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1960, 318 páginas.

7-34 Rojahn, C., "Large deflections of elastic beams", tesis para el Grado de Ingeniero, Stanford University, junio de 1968.

7-35 Bisshopp, K. E., y Drucker, D. C. "Large deflection of cantilever beams", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, 1945, pp. 272-275.

7-36 Barten, H. J., "On the deflection of a cantilever beam", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 2, 1944, pp. 168-171, e *Ibid.*, Vol. 3, 1945, 275-276. (Nota: El segundo artículo corrige un error del primero.)

7-37 Rohde, F. V., "Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 11, 1953, pp. 337-338.

7-38 Kirchhoff, G. R., "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 56, 1859, pp. 285-313. (Nota: Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887, célebre físico alemán quien trabajó en circuitos eléctricos y teoría de flexión de placas.)

7-39 Véanse Ref. 3-5, p. 77; Ref. 1-3, pp. 23-24 y 399-402; Ref. 1-2, Vol. II, parte II, pp. 65-66; y Ref. 7-30, p. 431.

8-1 Navier, L. M. H., *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1a. Ed., 1826; 2a. Ed., 1833; 3a. Ed. (comentarios y apéndices por Saint-Venant), París, 1864. (Nota: Navier preparó las dos primeras ediciones; la tercera edición fue preparada por Saint-

Venant después de morir Navier. Las ediciones de Saint-Venant son diez veces el volumen del libro original. Para explicaciones sobre este célebre libro, véase Ref. 8-2.)

8-2 Véanse Ref. 1-1, pp. 73-77 y 232-233, y Ref. 1-2, Vol. I, pp. 144-146, Vol. II, parte I, pp. 105-135.

8-3 Véase Ref. 1-1, pp. 144-146. (Nota: B. P. E. Clapeyron, 1799-1864, ingeniero francés quien desarrolló la ecuación de los tres momentos en relación con su trabajo sobre puentes. También es conocido por sus teoremas sobre trabajo y energía de deformación; véase Ref. 2-11. La publicación de Clapeyron que presenta la ecuación de los tres momentos se cita en la Ref. 8-4. Bertot, otro ingeniero francés, fue el primero en publicar la ecuación de los tres momentos en su forma actual; véase su publicación citada en la Ref. 8-5. Aunque el documento de Bertot fue publicado antes que el de Clapeyron, parece que Clapeyron usó el método varios años antes y es el verdadero originador de la ecuación, como se indica en la Ref. 1-1.)

8-4 Clapeyron, B. P. E., "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés", *Comptes Rendus*, Vol. 45, 1857, pp. 1076-1080.

8-5 Bertot, H., *Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils*, Vol. 8, 1855, p. 278.

8-6 Zaslavsky, A., "Beams on immovable supports", *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol. 25, 1965, pp. 353-362.

9-1 Timoshenko, S. P., "Use of stress functions to study flexure and torsion of prismatic bars" (en ruso), San Petersburgo, 1913 (reproducido en el Vol. 82 de las *Memoirs of the Institute of Ways of Communication*, pp. 1-21). (Nota: En este documento, se determina el punto de la sección transversal de una viga sobre el que debe actuar una carga concentrada a fin de que no produzca rotaciones. Luego, parece que este trabajo contiene la primera determinación de un centro de cortante. Esta viga en particular de la investigación tenía una sección transversal semicircular maciza; véase Ref. 9-2. En 1909, C. Bach hizo pruebas en vigas canal y observó la torsión que ocurría cuando se aplicaba una carga paralela al plano del alma (Refs. 9-3 y 9-4). También observó que la rotación cambiaba según se trasladaba lateralmente la carga, pero evidentemente no localizó el centro de cortante. En 1917, A. A. Griffith y G. I. Taylor usaron el método de la membrana para investigar la flexión; localizaron el centro de cortante, al que llamaron *centro de flexión*, para varios perfiles de secciones estructurales (Ref. 9-5). La solución general aproximada para el centro de cortante de una barra de pared delgada de sección transversal abierta se debe a R. Maillart, quien explicó el significado práctico

del centro de cortante para perfiles estructurales; véase Ref. 9-6. Aparentemente Maillart también introdujo el nombre *centro de cortante*. En las Refs. 9-7 a 9-17 se describen contribuciones adicionales al desarrollo del concepto del centro de cortante. En la Ref. 9-18 se proporciona un estudio detallado acerca del centro de cortante, así como una presentación general del problema de flexión y torsión de vigas, y en las Refs. 9-19 y 9-20 se expresan algunos comentarios históricos concernientes al centro de cortante.)

9-2 Véase Ref. 2-1, pp. 371-373.

9-3 Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 53, No. 44, 1909, pp. 1790-1795.

9-4 Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Trägern mit [-förmigen Querschnitt", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 54, No. 10, 1910, pp. 382-387.

9-5 Griffith, A. A., y Taylor, G. I., "The problem of flexure and its solution by the soap-film method", *Technical Report of the Advisory Committee for Aeronautics*, 1917-1918, Vol. 3, publicado en 1921 por His Majesty's Stationery Office, Londres (Reports and Memoranda, No. 399, noviembre de 1917), pp. 950-969.

9-6 Maillart, R., "Zur Frage der Biegung", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 77, 1921, pp. 195-197; "Bemerkungen zur Frage der Biegung", *Ibid.*, Vol. 78, 1921, pp. 18-19; "Ueber Drehung und Biegung", *Ibid.*, Vol. 79, 1922, pp. 254-257; "Der Schubmittelpunkt", *Ibid.*, Vol. 83, 1924, pp. 109-111; "Zur Frage des Schubmittelpunktes", *Ibid.*, Vol. 83, 1924, pp. 176-177.

9-7 Weber C., "Biegung und Schub in geraden Balken", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 4, 1924, pp. 334-338.

9-8 Weber, C., "Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 6, 1926, pp. 85-97.

9-9 Schwalbe, W. L., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 15, 1935, pp. 138-143.

9-10 Trefftz, E., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 15, 1935, pp. 220-225.

9-11 Hill H. N., "Torsion of Flanged members with cross sections restrained against warping", *National Advisory Committee for Aeronautics*, Informe Técnico No. 888, marzo de 1943.

9-12 Osgood, W. R., "The center of shear again", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 10, No. 2, junio de 1943, pp. A-62 a A-64 (*Transactions of*

the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 65, 1943).

9-13 Mandel, J., "Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité", *Annales des Ponts et Chaussées*, Vol. 118, 1948, pp. 271-290.

9-14 Jacobs, J. A., "The centre of shear of aerofoil sections", *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 57, 1953, pp. 235-237.

9-15 Duncan, W. J., "The flexural centre or centre of shear", *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 57, 1953, pp. 594-597.

9-16 Koiter, W. T., "The flexural centre or centre of shear", *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 58, 1954, pp. 64-65.

9-17 Reissner, E. y Tsai, W. T., "On the determination of the centers of twist and of shear for cylindrical shell beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, No. 4, diciembre de 1972, pp. 1098-1102 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Serie E, Vol. 94, No. 4, 1972).

9-18 Timoshenko, S. P., "Theory of bending, torsion, and buckling of thin-walled members of open cross section", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 239, No. 3, marzo de 1945, pp. 201-219; No. 4, abril de 1945, pp. 249-268; y No. 5, mayo de 1945, pp. 343-361.

9-19 Véase Ref. 1-1, p. 401.

9-20 Nowinski, J. L., "Theory of thin-walled bars", *Applied Mechanics Surveys*, editado por Abramson, H. N., et al., Spartan Books, Washington, D.C., 1966, pp. 325-338.

10-1 Horne, M. R., *Plastic Theory of Structures*, 2a. Ed., Pergamon Press, Oxford, 1979, 179 páginas.

10-2 Massonnet, C. E., y Save, M. A., *Plastic Analysis and Design*, Vol. 1: Beams and Frames, Blaisdell Publishing Co., Nueva York, 1965, 379 págs.

10-3 Neal, B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, 3a. Ed., Chapman and Hall, Londres, 1977, 205 páginas.

10-4 Baker J. F., "A review of recent investigations into the behaviour of steel frames in the plastic range", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 31, No. 3, enero de 1949, pp. 188-224.

10-5 Baker, J. F., "The design of steel frames", *Structural Engineer*, Vol. 27, No. 10, octubre de 1949, pp. 397-431.

10-6 Symonds, P. S., y Neal, B. G., "Recent progress in the plastic methods of structural analysis", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 252, No. 5, noviembre de 1951, pp. 383-407; y No. 6, diciembre de 1951, pp. 469-492.

10-7 Greenberg, H. J., y Prager, W., "Limit design of beams and frames", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 117, 1952, pp. 447-458.

- 10-8 Beedle, L. S., y Tall, L., "Basic column strength", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 127, parte II, 1962, pp. 138-172.
- 10-9 Huber, A. W., y Beedle, L. S., "Residual stress and the compressive strength of steel", *Welding Journal*, Vol. 33, No. 12, diciembre de 1954, pp. 589-s a 614-s.
- 10-10 Yang, C. H., Beedle, L. S., y Johnston, B. G., "Residual stress and the yield strength of steel beams", *Welding Journal*, Vol. 31, No. 4, abril de 1952, pp. 205-s a 229-s.
- 11-1 Timoshenko, S. P., y Gere, J. M., *Theory of Elastic stability*, 2a. Ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1961, 541 páginas.
- 11-2 Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1952, 508 páginas.
- 11-3 Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. . .", Apéndice I, "De curvis elasticis", Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (Traducción al inglés: Oldfather, W. A., Ellis, C. A. y Brown, D. M., *Isis*, Vol. 20, 1933, pp. 72-160. También reproducido en *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie 1, Vol. 24, 1952.)

Nota: Leonhard Euler, 1707-1783, hizo muchas contribuciones notables a las matemáticas y a la mecánica. Fue quizás el matemático más fecundo de todos los tiempos (Ref. 7-4, p. 120) y Newman se refiere a él como "excelencia de las matemáticas" (Ref. 7-3, p. 150). Su nombre aparece reiteradamente en los libros de texto actuales; luego, en mecánica leemos acerca de las ecuaciones de Euler para el movimiento de un cuerpo rígido, los ángulos de Euler, las ecuaciones de Euler para el flujo de fluidos, la carga de Euler en pandeo de columnas, y mucho más, y en matemáticas encontramos la conocida constante de Euler, así como los números de Euler, las identidades de Euler ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, etc.) y la fórmula de Euler ($e^{\pi} + 1 = 0$), la ecuación diferencial de Euler, en la ecuación de Euler para un problema variacional, la fórmula de Euler para la cuadratura, la fórmula de la sumatoria de Euler, el teorema de Euler sobre funciones homogéneas, las integrales de Euler, y los cuadrados de Euler (raíces cuadradas de números que poseen ciertas propiedades).

En mecánica aplicada Euler fue el primero en obtener la fórmula para la carga crítica de pandeo de una columna ideal y esbelta y el primero en resolver el problema de la elástica. Según se citó, su trabajo fue publicado en 1744. Él trató de una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior. Después amplió su trabajo sobre columnas (Ref. 11-4). Los numerosos libros de Euler incluyen tratados sobre mecánica celeste, dinámica e hidromecánica, y sus trabajos también incluyen temas tales como vibraciones de vigas y placas.

En el campo de las matemáticas, Euler hizo destacadas contribuciones a la trigonometría, álgebra, teoría de números, cálculo diferencial e integral, series infinitas, geometría analítica, ecuaciones diferenciales, cálculo variacional y muchos otros temas. Fue el primero en concebir los valores trigonométricos como relaciones de números, y el primero en presentar la ecuación $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. En sus libros sobre matemáticas, algunos de los cuales fueron referencias clásicas para muchas generaciones posteriores, hallamos el primer desarrollo del cálculo variacional, además de aspectos interesantes como la demostración del "último teorema" de Fermat para $n = 3$ y $n = 4$. Asimismo resolvió el célebre problema de los siete puentes de Königsberg, un problema de topología, otro campo en el que fue pionero.

Euler nació cerca de Basilea, Suiza, y asistió a la Universidad de Basilea, donde tuvo por maestro a John Bernoulli (1667-1748). De 1727 a 1741 vivió y trabajó en San Petersburgo, donde adquirió gran notoriedad como matemático. En 1741 se trasladó a Berlín por invitación de Federico el Grande, Rey de Prusia. Continuó su investigación matemática en Berlín hasta el año de 1766, cuando regresó a San Petersburgo a solicitud de Catalina II, Emperatriz de Rusia. Euler continuó en actividad hasta su muerte en San Petersburgo a la edad de 76 años; durante este periodo final de su vida escribió más de 400 trabajos. El número de libros y publicaciones escritos durante toda su vida fue de 886; dejó muchos manuscritos al morir, los que continuaron publicándose por la Russian Academy of Sciences en San Petersburgo durante 47 años después. ;Todo esto a pesar de haber quedado ciego de uno de sus ojos en 1735 y del otro en 1766! La historia de su vida se relata en la Ref. 1-1, pp. 28-30 y en la Ref. 7-3, pp. 148-151; algunas de sus contribuciones a la mecánica se describen en la Ref. 1-1, pp. 30-36.

11-4 Euler, L., "Sur la force des colonnes", *Histoire de L'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 1757, publicado en las *Memoires* de la Academia, Vol. 13, Berlín, 1759, pp. 252-282. (Nota: Véase Ref. 11-5 para una traducción y discusión de esta publicación.)

11-5 Van den Broek, J. A., "Euler's classic paper 'On the strength of columns'", *American Journal of Physics*, Vol. 15, No. 4, julio-agosto de 1947, pp. 309-318.

11-6 Hoff, N. J., "Buckling and Stability", The Forty-First Wilbur Wright Memorial Lecture, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 58, enero de 1954, pp. 3-52.

11-7 Johnston, B. G., "Column buckling theory; historical highlights", *Journal of Structural Engineering*, Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 109, No. 9, septiembre de 1983, pp. 2086-2096.

- 11-8** Johnston, B. G., editor, *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 3a. Ed., John Wiley and Sons, Nueva York, 1976, 616 páginas.
- 11-9** Brush, D. O., y Almroth, B. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1975, 379 páginas.
- 11-10** Chajes, A., *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1974, 336 páginas.
- 11-11** Keller, J. B., "The shape of the strongest column", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, No. 4, 1960, pp. 275-285.
- 11-12** Young, D. H., "Rational design of steel columns", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 101, 1936, pp. 422-451. (Nota: Donovan Harold Young, 1904-1980, fue un destacado educador de ingeniería. Fue profesor de la Universidad de Michigan y después en la Universidad de Stanford. Sus cinco libros de texto en el campo de la mecánica aplicada, escritos con S. P. Timoshenko, fueron traducidos a muchos idiomas y usados en todo el mundo.)
- 11-13** Lamarle, A. H. E., "Mémoire sur la flexion du bois", *Annales des Travaux Publics de Belgique*, parte 1, Vol. 3, 1845, pp. 1-64, y parte 2, Vol. 4, 1846, pp. 1-36. (Nota: Véase Ref. 1-1, p. 208. Anatole Henri Ernest Lamarle, 1806-1875, fue un ingeniero y educador. Nació en Calais, estudió en París y fue profesor en la Universidad de Gand, o Ghent, Bélgica.)
- 11-14** Considère, A., "Résistance des Pièces comprimées", *Congrès International des Procédés de Construction*, París, septiembre 9-14 de 1889, memorias publicadas por Librairie Polytechnique, París, Vol. 3, 1891, p. 371. (Nota: Armand Gabriel Considère, 1841-1914, fue un ingeniero francés.)
- 11-15** Engesser, F., "Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe", *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, Vol. 35, No. 4, 1889, pp. 455-562. (Nota: Friedrich Engesser, 1848-1931, ingeniero ferroviario y de puentes alemán. Después fue profesor en el Karlsruhe Polytechnical Institute, donde realizó importantes avances en la teoría de estructuras, especialmente en pandeo y métodos energéticos. Véase Ref. 1-1, pp. 292 y 297-299.)
- 11-16** Engesser, F., "Knickfragen", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 25, No. 13, marzo 30 de 1895, pp. 88-90.
- 11-17** Jasinski, F., "Noch ein Wort zu den 'Knickfragen'", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 25, No. 25, junio 22 de 1895, pp. 172-175. (Nota: Félix S. Jasinski, 1856-1899, nació en Varsovia y estudió en Rusia. Fue profesor en el Institute of Engineers of Ways of Communication en San Petersburgo, hoy Leningrado.)
- 11-18** Engesser, F., "Ueber knickfragen", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 26, No. 4, julio 27 de 1895, pp. 24-26.
- 11-19** von Kármán, T., "Die Knickfestigkeit gerader Stäbe", *Physikalische Zeitschrift*, Vol. 9, No. 4, 1908, pp. 136-140. (Nota: Este documento también aparece en el Vol. I de la Ref. 11-21. Theodore von Kármán, 1881-1963, nació en Hungría y trabajó posteriormente en la Universidad de Göttingen en el campo de la aerodinámica. Llegó a Estados Unidos en 1929, donde estableció el Jet Propulsion Laboratory y fue pionero en problemas de aeronáutica y cohetes espaciales. Su investigación incluyó también pandeo inelástico de columnas y estabilidad de cascarones.)
- 11-20** von Kármán, T., "Untersuchungen über Knickfestigkeit", *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Verein Deutscher Ingenieure*, Berlin, Heft 81, 1910. (Nota: Este trabajo aparece también en la Ref. 11-21.)
- 11-21** *Collected Works of Theodore von Kármán*, Vols. I-IV, Butterworths Scientific Publications, Londres, 1956.
- 11-22** Southwell, R. V., "The strength of struts", *Engineering*, Vol. 94, agosto 23 de 1912, pp. 249-250.
- 11-23** Shanley, F. R., "Inelastic column theory", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 5, mayo de 1947, pp. 261-267. Reynolds Shanley, 1904-1968, fue profesor en la Universidad de California, Los Angeles.)
- 11-24** Shanley, F. R., "Inelastic column theory", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 5, mayo de 1947, pp. 261-267.
- 11-25** Duberg, J. E., y Wilder, T. W., "Column behavior in the plastic strength range", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17, No. 6, julio de 1950, pp. 323-327.
- 11-26** Duberg, J. E., y Wilder, T. W., "Inelastic column behavior", *National Advisory Committee for Aeronautics*, Informe Técnico No. 2267, enero de 1951.
- 11-27** Wilder, T. W., Brooks, W. A., Jr., y Matheuser, E. E., "The effects of initial curvature on the strength of an inelastic column", *National Advisory Committee for Aeronautics*, Informe Técnico No. 2872, enero de 1953.
- 11-28** Larsson, L. H., "Inelastic column buckling", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, septiembre de 1956, pp. 867-873.
- 11-29** Ylinen, A., "A method of determining the buckling stress and the required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range", *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol. 16, 1956, pp. 529-550.
- 11-30** Malvick, A. J., y Lee, L. H. N., "Buckling behavior of an inelastic column", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 131, 1966, pp. 692-693 (Documento 4372, Journal of the

Engineering Mechanics Division, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 91, No. EM-3, junio de 1965, pp. 113-127).

11-31 Huddleston, J. V., "Analysis of an inelastic column", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 131, 1966, p. 787 (Documento 3992, Journal of the Engineering Mechanics Division, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 90, No. EM-4, agosto de 1964, pp. 1-21).

11-32 Hoff, N. J., "The idealized column", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 28, 1959 (Festschrift Richard Grammel), pp. 89-98.

12-1 Maxwell, J. C., "On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames", *Philosophical Magazine*, serie 4, Vol. 27, 1864, pp. 294-299. (Reproducido en *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press, Vol. 1, 1890, pp. 598-604; véase Ref. 12-3.) (Nota: James Clerk Maxwell, 1831-1879, dedujo el método de la carga unitaria para determinar deflexiones de armaduras elásticas en este trabajo. También contiene el teorema de los desplazamientos recíprocos y el método de flexibilidades para hallar fuerzas redundantes en armaduras estáticamente indeterminadas. Diez años después Otto Mohr redescubrió el método de Maxwell para encontrar deflexiones, Ref. 12-4, y además su método para determinar fuerzas redundantes en estructuras estáticamente indeterminadas, Ref. 12-13. Maxwell realizó otros trabajos importantes en mecánica estructural, incluyendo descubrimientos en el método fotoelástico de análisis de esfuerzos. También hizo muchas investigaciones en teoría de la elasticidad. Para una descripción de su trabajo y una breve biografía, véase Ref. 1-1, pp. 202-208 y 268-275. Maxwell es mejor conocido, desde luego, por su trabajo científico en óptica, teoría cinética de los gases, electricidad y magnetismo. Para la biografía de este célebre matemático y físico, véase Ref. 12-2.)

12-2 Campbell, L., y Garnett, W., *The Life of James Clerk Maxwell*, Macmillan and Co., Londres, 1882.

12-3 Maxwell, J. C., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vols. 1 y 2, editado por W. D. Niven, Cambridge University Press, 1890.

12-4 Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Bogen fahwerksträger", *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, Vol. 20, No. 2, 1874, pp. 223-238. (Nota: Este documento presenta el método de la carga unitaria para determinar deflexiones de armaduras.)

12-5 Betti, E., "Teoria della Elasticità", *Il Nuovo Cimento*, serie 2, Vols. 7 y 8, 1872. (Nota: Enrico Betti, 1823-1892, fue un matemático e ingeniero italiano.)

12-6 Rayleigh, Lord, "Some general theorems relating to vibrations", *Proceedings of the London*

Mathematical Society, Vol. 4, 1873, pp. 357-368. (Reproducido en *Scientific Papers*, por John William Strutt, Vol. 1, Cambridge University Press, 1899, pp. 170-181.)

Nota: En esta publicación Lord Rayleigh presentó el teorema de reciprocidad para el caso de un sistema vibratorio sometido a la acción de fuerzas armónicamente variables, en dos puntos diferentes. Obtuvo el teorema estático del desplazamiento recíproco, para el caso de dos fuerzas, asignando un periodo de las fuerzas infinitamente grande. En un documento publicado en 1874 y 1875 (Ref. 12-7), Rayleigh obtuvo el teorema de reciprocidad para flexibilidad y rigideces, aunque no aplicó esta terminología. Posteriormente, en su libro *The Theory of Sound*, publicado inicialmente en 1877 (véase Ref. 12-8), proporcionó un enunciado y una deducción explícitos del teorema de los trabajos recíprocos para dos conjuntos de fuerzas y desplazamientos correspondientes, conteniendo cada conjunto cualquier número de fuerzas.

Lord Rayleigh (1842-1919), cuyo nombre era John William Strutt, célebre físico británico. Su labor más conocida corresponde a sonido, luz y electricidad, y su libro *The Theory of Sound* es un clásico que aún se usa ampliamente. Sus trabajos científicos ocupan seis volúmenes y se han reeditado dos veces (véanse Refs. 12-9 y 12-10). Lord Rayleigh estudió en el Trinity College, Cambridge University, siendo sus maestros los matemáticos E. J. Routh y G. G. Stokes. Realizó mucho trabajo experimental adicional a sus estudios teóricos. Fue profesor en el Cavendish Laboratory en Cambridge en 1879, y después trabajó como profesor de filosofía natural en la Royal Institution of Great Britain. Contribuyó a organizar el National Physical Laboratory y fue presidente del Advisory Committee on Aeronautics desde sus inicios en 1909 hasta su muerte. Además, Lord Rayleigh fue presidente de la Royal Society desde 1905 hasta 1908 y Rector de la Universidad de Cambridge desde 1908 hasta su muerte. Recibió muchas distinciones, incluyendo la Orden al Mérito en 1902 y el Premio Nobel de Física en 1904, este último por su trabajo conjunto con Sir William Ramsay en el descubrimiento del primer gas raro (o inerte), el argón, en 1895. Entre sus muy importantes descubrimientos, debe destacarse que Lord Rayleigh fue el primero en explicar el color azul del cielo. Rayleigh visitó dos veces Estados Unidos, la segunda vez en 1884 cuando asistió a las célebres "conferencias de Baltimore" de Lord Kelvin. En las Refs. 1-1, 12-8, 12-11 y 12-12 se encontrará la biografía de Lord Rayleigh.

12-7 Rayleigh, Lord, "A statical theorem", *Philosophical Magazine*, 4a. serie, Vol. 48, 1874, pp. 452-456; 4a. serie, Vol. 49, 1875, pp. 183-185. (Reproducido en *Scientific Papers*, por John William Strutt, Vol. 1, Cambridge University Press, 1899, pp. 223-229.)

12-8 Strutt, John William (Barón de Rayleigh), *The Theory of Sound*, Vols. 1 y 2, 2a. Ed., Dover Publications, Inc., 1945. (Nota: Esta reproducción contiene una introducción histórica y una reseña biográfica por Robert Bruce Lindsay. La primera edición fue publicada originalmente como sigue: Vol. 1, 1877; Vol. 2, 1878. La segunda edición fue publicada originalmente como sigue: Vol. 1, 1894; Vol. 2, 1896; ambas ediciones por Macmillan and Co., Ltd., Londres.)

12-9 Strutt, John William (Barón de Rayleigh), *Scientific Papers*, Cambridge University Press, Vol. 1, 1899, Vol. 2, 1900; Vol. 3, 1902; Vol. 4, 1903; Vol. 5, 1912; Vol. 6, 1920. (Reproducido en 1964 por Dover Publications, Inc.; véase Ref. 12-10.)

12-10 Rayleigh, Lord, *Scientific Papers*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1964. (Una reproducción de los seis volúmenes publicados originalmente por la Cambridge University Press de 1899 a 1920; sin embargo, está encuadernado en tres volúmenes.)

12-11 Strutt, Robert John (Cuarto Barón de Rayleigh), *John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, Edward Arnold and Co., Londres, 1924, 403 páginas. (Biografía de Lord Rayleigh por su hijo mayor.)

12-12 Strutt, Robert John (Cuarto Barón de Rayleigh), *Life of John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, University of Wisconsin Press, 1968, 439 páginas. (Esta reproducción de la biografía publicada originalmente en 1924 por Edward Arnold and Co., contiene comentarios del autor y prólogo de John N. Howard.)

12-13 Mohr, O., "Beitrag zur Theorie des Fachwerks", *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, Vol. 20, No. 4, 1874, pp. 509-526, y Vol. 21, No. 1, 1875, pp. 17-38. (Nota: Este documento presenta el método de flexibilidad para armaduras estáticamente indeterminadas.)

12-14 Charlton, T. M., *Energy Principles in Theory of Structures*, Oxford University Press, Londres, 1973, 118 páginas.

12-15 Gregory, M. S., *An Introduction to Extremum Principles*, Butterworth and Co., Londres, 1969, 196 páginas.

12-16 Castigliano, A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, A. F. Negro, Turin, 1879, 480 páginas. (Nota: En este libro Castigliano presentó en forma muy completa numerosos conceptos y principios del análisis estructural. Aunque Castigliano era italiano escribió este libro en francés a fin de contar con mayor respaldo para su trabajo. Fue traducido al alemán y al inglés, Refs. 12-17 y 12-18. La traducción al inglés fue reproducida en 1966 por Dover Publications y tiene valor especial debido al material introductorio por Gunhard A. Oravas; véanse Refs. 12-19 y 7-27.)

El primero y segundo teoremas de Castigliano aparecen en las pp. 15-16 de la edición de 1966 de su libro. Los identificó como Parte 1 y Parte 2 del "Teorema de los coeficientes diferenciales del trabajo interno". Sus enunciados del teorema son los siguientes:

"Parte 1. Si el trabajo interno de la estructura de un marco se expresa como una función de los desplazamientos relativos de las fuerzas externas aplicadas a sus nudos, la expresión resultante es tal que sus coeficientes diferenciales con respecto a esos desplazamientos proporcionan los valores de las fuerzas correspondientes.

"Parte 2. Si por lo contrario, el trabajo interno de la estructura de un marco se expresa como una función de las fuerzas externas, la expresión resultante es tal que sus coeficientes diferenciales proporcionan los desplazamientos relativos de sus puntos de aplicación."

Actualmente estas proposiciones usualmente se llaman primero y segundo teoremas de Castigliano, en lugar de partes 1 y 2 de un solo teorema. Después de establecer sus teoremas, Castigliano procede en este libro a deducirlos y aplicarlos a muchas situaciones. En forma matemática, aparecen en este libro como

$$F_p = \frac{dW_i}{dr_p} \quad \text{y} \quad r_p = \frac{dW_i}{dF_p}$$

donde W_i es el trabajo interno (o la energía de deformación), F_p representa cualquiera de las fuerzas externas, y r_p es el desplazamiento del punto de aplicación de F_p .

Castigliano no reclamó la autoría completa del primer teorema, aunque estableció en el prólogo de este libro que su presentación y demostración eran más generales que cualquier otra publicada previamente. El segundo teorema fue original suyo y formó parte de su tesis para el grado de ingeniero civil en el Polytechnic Institute of Turin en 1873; véase Ref. 12-20.

El "principio del trabajo mínimo" fue demostrado por Castigliano en su tesis publicada en 1873 y también aparece en este libro. La referencia de la controversia entre Castigliano y Ménabréa respecto a la autoría de este principio se describe en la introducción de Oravas a la edición de 1966, Ref. 12-19.

Carlos Alberto Pio Castigliano nació de una familia pobre en Asti en 1847, y murió inesperadamente de neumonía en 1884, en la cumbre de su productividad. Su biografía es narrada por Oravas en la introducción de la edición de 1966 y también presenta bibliografía de los trabajos de Castigliano y una lista de sus premios y distinciones. Sus contribuciones también están citadas en las Refs. 2-5, 1-1 y 12-21.

Firmaba sus escritos con el nombre de Alberto Castigliano.)

12-17 Hauff, E., *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung*, Carl Gerold's Sohn, Viena, 1886. (Traducción del libro de Castigliano, Ref. 12-16.)

12-18 Andrews, E. S., *Elastic Stresses in Structures*, Scott, Greenwood and Son, Londres, 1919. (Traducción del libro de Castigliano, 12-16.)

12-19 Castigliano C. A. P., *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, traducido por E. S. Andrews con una nueva introducción y semblanza biográfica por G. A. Oravas, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1966. (Una reproducción de la Ref. 12-18.)

12-20 Castigliano, A., "Intorno ai sistemi elastici", tesis presentada a la Reale Scuola d'Applicazione degli Ingegneri en Torino para el grado de ingeniería civil en 1873, publicado por Vincenzo Bona, Turín, 1873, 52 páginas.

12-21 Grüning, M., "Theorie der Baukonstruktionen", *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft*, Leipzig, Vol. 4, parte 4, 1907-1914, pp. 419-534.

12-22 Weaver, W., Jr., y Gere, J. M., *Matrix Analysis of Framed Structures*, 2a. Ed., D. Van Nostrand, Co., Nueva York, 1980, 492 páginas.

12-23 Crotti, F., "Esposizione del Teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell' elasticità", *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Milano*, Vol. 11, secc. 4, parte 2, 1878, p. 225. (Publicado también en *Il Politecnico*, Vol. 27, 1879, p. 45.) (Nota: Francesco Crotti, 1839-1896, fue un ingeniero ferroviario italiano y amigo de Castigliano. En este documento obtuvo primero el teorema de Crotti-Engesser, aunque sus investigaciones posteriores referentes a la energía complementaria no fueron muy extensas. Crotti formuló todos los teoremas básicos y principios relativos a la energía complementaria en una serie de artículos que se inició en 1877 y culminaron en un importante tratado en 1888, Ref. 12-24. El trabajo de Crotti se describe en las pp. 922-925 de la Ref. 2-5 y en las pp. xxv-xxvii de la Ref. 7-27. En la p. xliii de la Ref. 7-27, Oravas proporciona una información breve acerca de la vida de Crotti.)

12-24 Crotti, F., *La Teoria dell' elasticità né suoi*

Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni, Ulrico Hoepli, Milán, 1888.

12-25 Engesser, F., "Ueber statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungs-Gesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit", *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, Vol. 35, 1889, pp. 733-744. (Nota: En este artículo Friedrich Engesser, 1848-1931, introdujo el término *trabajo complementario* y derivó el teorema de Crotti-Engesser. Evidentemente desconocía el método más general de Crotti; véanse pp. 925-926 de la Ref. 2-5 y p. xxvii de la Ref. 7-27.)

12-26 Oden, J. T., y Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2a. Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1981.

12-27 Hoff, N. J., *The Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956, 493 páginas.

12-28 Westergaard, H. M., "On the method of complementary energy", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 107, 1942, pp. 765-793.

12-29 Westergaard H. M., "One hundred fifty years advance in structural analysis", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 94, 1930, pp. 226-240.

12-30 Charlton, T. M., "Maxwell, Jenkin and Cotterill and the theory of statically-indeterminate structures", *Notes and Records of the Royal Society of London*, Vol. 26, No. 2, diciembre de 1971, pp. 233-246.

12-31 Ménabréa, L. F., "Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques", *Comptes Rendus*, Vol. 46, 1858, pp. 1056-1060. (Nota: En este artículo Ménabréa enunció el concepto de que las fuerzas redundantes en las barras de una armadura tienen valores tales que hacen que la energía de deformación sea mínima, pero no demostró correctamente la idea; véanse Ref. 7-27, p. xxii; Ref. 2-5, p. 655 y Ref. 1-1, p. 289. Luigi Federico Ménabréa, 1809-1896, fue un noble, general e ingeniero italiano. Su biografía se encuentra en la p. xl de la Ref. 7-27.)

12-32 Weaver, W., Jr., y Johnston, P. R., *Finite Elements for Structural Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1984, 403 páginas.

Sistemas de unidades

A.1 INTRODUCCIÓN

A través del tiempo se han ideado innumerables sistemas de medida, pero actualmente sólo dos son de importancia en la ingeniería y el trabajo científico. Ellos son el Sistema Internacional de Unidades (Système International d'Unités), abreviado SI, y el Sistema Inglés (U.S. Customary System, USCS) o Sistema Británico. El Sistema Internacional está basado en la masa, longitud y tiempo, como magnitudes fundamentales. Se le llama **sistema absoluto** de unidades porque la medición de las tres cantidades fundamentales es independiente del sitio donde se hagan las mediciones. Por lo contrario, el Sistema Inglés se basa en la fuerza, longitud y tiempo. La unidad de fuerza (libra) en este sistema se define como el peso de cierta masa estándar; como el peso depende de la atracción gravitacional y varía con el lugar, el USCS es llamado **sistema gravitacional**. En un sistema absoluto, la fuerza es una cantidad derivada (obtenida a partir de la masa mediante la aplicación de la segunda ley de Newton, $F = Ma$); en un sistema gravitacional, la situación se invierte, siendo la masa la cantidad derivada.

El término *sistema métrico* se aplica a menudo con referencia al SI, pero en un sentido estricto este uso es incorrecto. Muchas de las unidades del antiguo sistema métrico son las mismas que las del SI, pero el SI tiene nuevas características importantes que no formaban parte de ningún sistema métrico. Luego, el SI es un sistema métrico perfeccionado y modernizado.

La unidad fundamental de masa en el SI es el **kilogramo**, y la unidad de fuerza correspondiente es el **newton**.* Un newton se define como la fuerza requerida para impartir una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a una masa de un kilogramo. En el Sistema Inglés (USCS), la unidad fundamental de fuerza es la **libra**, y la unidad de masa correspondiente es el **slug**. Esta última unidad se define como la

* El peso de una manzana pequeña es aproximadamente un newton.

masa que será acelerada un pie por segundo al cuadrado cuando actúe sobre ella la fuerza de una libra.

A.2 UNIDADES SI

El Sistema Internacional de Unidades tiene varias **unidades básicas** a partir de las cuales se derivan las demás. Las unidades básicas de importancia en mecánica son el kilogramo (kg) para la masa, el metro (m) para la longitud, el segundo (s) para el tiempo y el kelvin (K) para la temperatura. Otras unidades necesarias en mecánica se obtienen a partir de las unidades básicas. Por ejemplo, a partir de la ecuación $F = Ma$, podemos obtener la unidad de fuerza:

$$1 \text{ newton} = (1 \text{ kilogramo})(1 \text{ metro/segundo}^2)$$

Luego, el newton (N) está dado en términos de unidades básicas por la fórmula

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Los símbolos y fórmulas para las unidades SI de importancia en mecánica están listadas en la Tabla A-1. Obsérvese que algunas unidades derivadas tienen nombres especiales; por ejemplo, la fuerza se mide en newtons (N) y la presión en pascals (Pa). Las unidades de otras cantidades, tales como el área y el momento, no tienen nombres especiales y deben expresarse en términos de las unidades básicas y otras unidades derivadas.

El **peso** de un objeto es la fuerza de la gravedad que actúa sobre ese objeto, de modo que el peso se mide en newtons. Desafortunadamente, el término *peso* tiene otros significados de uso popular, y por ello su significado no siempre es claro. Por ejemplo, leemos que un astronauta queda "sin peso" en órbita y que un cuerpo "pesa menos" cuando se sumerge en agua que si está en el aire. Sin embargo, la fuerza de gravedad aún actúa sobre el astronauta y es la misma sobre un cuerpo, sin importar si éste está en el aire o bajo el agua. Incluso se advierte que "peso" se usa comúnmente como sinónimo de "masa". Por lo tanto, para evitar confusiones, en el trabajo de ingeniería siempre utilizaremos el término *peso* para denotar **fuerza de gravedad**. Dado que esta fuerza depende de la localización del objeto con respecto a la Tierra, el peso es una propiedad variable. Por lo contrario, la masa de un objeto no cambia con la posición.*

La **aceleración de la gravedad**, denotada por la letra g , varía con la altitud y la latitud sobre la Tierra, pero para fines prácticos podemos suponer el siguiente valor:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad (\text{A-1})$$

en cualquier lugar sobre la superficie de la Tierra. El peso y la masa de un cuerpo se relacionan mediante la ecuación

$$W = Mg \quad (\text{A-2})$$

* Recuérdese que en Física, la masa de un objeto se define como la cantidad de materia que posee el objeto. (N. del T.)

donde W es el peso en newtons, M es la masa en kilogramos y g está dada por la Ec. (A-1). Por lo tanto, un cuerpo que tiene una masa de 1 kilogramo tiene un peso de 9.81 newtons.

Para formar múltiplos y submúltiplos se anexan **prefijos** a las unidades SI (véase Tabla A-2). El uso de prefijos evita los números demasiado grandes o pequeños. Por ejemplo, puede ser conveniente expresar el diámetro de una barra en milímetros (mm) y una carga concentrada sobre una viga en kilonewtons (kN).

La **temperatura** se expresa en el SI mediante una unidad llamada kelvin (K), pero comúnmente se utiliza el grado Celsius ($^{\circ}\text{C}$). El intervalo de temperatura es el mismo para kelvins que para grados Celsius (esto es, un kelvin es igual a un grado Celsius), pero las escalas tienen diferentes puntos de origen. El origen de la escala Kelvin está en la temperatura del cero absoluto, mientras que el origen de la escala Celsius (anteriormente llamada escala centígrada en Estados Unidos) está en el punto de congelación del agua. La escala Celsius registra 100 en el punto de ebullición del agua en condiciones estándar. La relación entre las escalas se define como sigue:

$$\text{Temperatura en grados Celsius} = \text{temperatura en kelvins} - 273.15$$

o bien

$$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15 \quad (\text{A-3})$$

donde T denota la temperatura. Cuando se trabaja únicamente con intervalos (o incrementos) de temperatura, puede usarse cualquier escala.*

A.3 UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS

El sistema de unidades utilizado en Estados Unidos procede del sistema británico tradicional. Estas unidades nunca fueron oficialmente adoptadas por el gobierno en forma legal; de modo que, a falta de otro nombre mejor, se les llama unidades "de uso común". En este sistema, las unidades básicas importantes en la mecánica son la libra (lb) para fuerza, el pie (pie) para longitud, el segundo (s) para tiempo, y el grado Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) para temperatura. La unidad de masa puede obtenerse de la ecuación $M = F/a$:

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ libra}}{1 \text{ pie/s}^2}$$

De modo que, el slug está dado en términos de unidades básicas mediante la fórmula

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

* El SI está regido por muchas reglas y recomendaciones muy detalladas; para información completa, consúltense las siguientes fuentes: *ASTM Standard for Metric Practice*, Publicación E 380-79, American Society for Testing and Materials, 1916 Race Street, Philadelphia, Pennsylvania 19103; y Milton, H. J., *Recommended Practice for the Use of Metric (SI) Units in Building Design and Construction*, publicación técnica 938, National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1977, 39 páginas (disponible en U.S. Government Printing Office, Washington D.C. 20402, Número de control 003-003-01761-2).

Tabla A-1 UNIDADES PRINCIPALES USADAS EN MECÁNICA

Cantidad	Sistema Internacional (SI)			Sistema Inglés (U.S. Customary System, USCS)		
	Unidad	Símbolo	Fórmula	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado		rad/s ²	radián por segundo cuadrado		rad/s ²
Aceleración lineal	metro por segundo cuadrado		m/s ²	pie por segundo cuadrado		pie/s ²
Área	metro cuadrado		m ²	pie cuadrado		pie ²
Densidad (masa)	kilogramo por metro cúbico		kg/m ³	slug por pie cúbico		slug/pie ³
Energía	joule	J	N·m	pie-libra		pie·lb
Fuerza	newton	N	kg·m/s ²	libra	lb	(unidad básica)
Frecuencia	hertz	Hz	s ⁻¹	hertz	Hz	s ⁻¹
Impulso angular	newton metro segundo		N·m·s			pie·lb·s
Impulso lineal	newton segundo		N·s	libra-segundo		lb·s
Intensidad de fuerza	newton por metro		N/m	libra por pie		lb/pie
Longitud	metro	m	(unidad básica)	pie	pie	(unidad básica)
Masa	kilogramo	kg	(unidad básica)	slug		lb·s ² /pie
Momento de una fuerza; torque	newton metro		N·m	pie-libra		pie·lb
Momento de inercia (masa)	kilogramo metro cuadrado		kg·m ²	slug pie cuadrado		slug·pie ²
Momento de inercia (segundo momento de área)	metro a la cuarta potencia		m ⁴	pulgada a la cuarta potencia		plg ⁴
Potencia	watt	W	J/s	pie-libra por segundo		pie·lb/s
Presión	pascal	Pa	N/m ²	libra por pie cuadrado	psf	lb/pie ²
Módulo de sección	metro a la tercera potencia		m ³	pulgada a la tercera potencia		plg ³
Peso específico (densidad de peso)	newton por metro cúbico		N/m ³	libra por pie cúbico	pcf	lb/pie ³
Esfuerzo	pascal	Pa	N/m ²	libra por pulgada cuadrada	psi	lb/plg ²

(continúa)

Tabla A-1 (Continuación)

Cantidad	Sistema Internacional (SI)			Sistema Inglés (U.S. Customary System, USCS)		
	Unidad	Símbolo	Fórmula	Unidad	Símbolo	Fórmula
Tiempo	segundo	s	(unidad básica)	segundo	s	(unidad básica)
Velocidad angular	radián por segundo		rad/s	radián por segundo		rad/s
Velocidad lineal	metro por segundo		m/s	pie por segundo	fps	pie/s
Volumen (líquidos)	litro	L	10^{-3} m^3	galón	gal	231 plg ³
Volumen (sólidos)	metro cúbico		m^3	pie cúbico	cf	pie ³
Trabajo	joule	J	N·m	pie-libra		pie·lb

Nota 1. Relaciones entre varias unidades SI:

- 1 joule (J) = 1 newton metro (N·m) = 1 watt segundo (W·s)
- 1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo (cps)
- 1 watt (W) = 1 joule por segundo (J/s)
- 1 pascal (Pa) = 1 newton por metro cuadrado (N/m²)
- 1 litro (L) = 0.001 metros cúbicos (10^{-3} m^3) = 1000 centímetros cúbicos (1000 cm³)

Nota 2. Relaciones entre algunas unidades métricas de uso común y unidades SI:

- 1 hectárea (ha) = 10,000 metros cuadrados (m²)
- 1 erg = 10^{-7} joules (J)
- 1 dina = 10^{-5} newtons (N)
- 1 kilowatt-hora (kWh) = 3.6 megajoules (MJ)
- 1 centímetro (cm) = 10^{-2} metros (m)
- 1 gramo (g) = 10^{-3} kilogramos (kg)
- 1 tonelada métrica (t) = 1 megagramo (Mg) = 1000 kilogramos (kg)
- 1 watt (W) = 10^7 ergs por segundo (erg/s)
- 1 gal = 1 centímetro por segundo cuadrado (cm/s²); por ejemplo, $g = 981 \text{ gals}$

Nota 3. Otras unidades USCS:

- 1 pulgada (plg) = 1/12 pie (pie)
- 1 yarda (yd) = 3 pie (pie)
- 1 milla = 5280 pie (pie)
- 1 kip (k) = 1000 libras (lb)
- 1 onza (oz) = 1/16 libras (lb)
- 1 ton = 2000 libras (lb)
- 1 kilowatt-hora (kWh) = 2,655,220 pie-libras (pie·lb)
- 1 unidad térmica británica (Btu) = 778.171 pie-libras (pie·lb)
- 1 caballo de potencia mecánica (hp) = 550 pie-libras por segundo (pie·lb/s)
- 1 kilowatt (kW) = 737.562 pie-libras por segundo (pie·lb/s)
= 1.34102 caballos de potencia (hp)
- 1 libra por pulgada cuadrada (psi) = 144 libras por pie cuadrado (psf)
- 1 revolución por minuto (rpm) = $2\pi/60$ radianes por segundo (rad/s)
- 1 milla por hora (mph) = 22/15 pie por segundo (fps)
- 1 cuarto (qt) = 1/4 galón (gal)
- 1 pie cúbico (cf) = 576/77 galones = 7.48052 galones (gal)

Nota 4. El símbolo internacional para el litro es la letra minúscula l, pero para evitar confusiones con el número 1, el National Bureau of Standards recomienda usar en Estados Unidos la mayúscula L.

Tabla A-2 PREFIJOS DEL SI

Prefijo	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
mega	M	$10^6 = 1\,000\,000$
kilo	k	$10^3 = 1\,000$
hecto	h	$10^2 = 100$
deca	da	$10^1 = 10$
deci	d	$10^{-1} = 0.1$
centi	c	$10^{-2} = 0.01$
mili	m	$10^{-3} = 0.001$
micro	μ	$10^{-6} = 0.000\,001$
nano	n	$10^{-9} = 0.000\,000\,001$
pico	p	$10^{-12} = 0.000\,000\,000\,001$

Nota: En el SI no se recomienda utilizar los prefijos hecto, deca, deci y centi, porque las potencias de 10 no son múltiplos de 3.

A fin de obtener la masa de un objeto cuyo peso es conocido, observamos primero que la **aceleración de la gravedad** en la superficie de la Tierra en el USCS es

$$g = 32.2 \text{ pie/s}^2 \quad (\text{A-4})$$

Enseguida, replanteamos la Ec. (A-2) en la forma

$$M = \frac{W}{g} \quad (\text{A-5})$$

donde M es la masa en slugs, W es el peso en libras y g está dada por la Ec. (A-4). De estas dos ecuaciones, concluimos que un objeto con masa de 1 slug pesará 32.2 libras en la superficie de la Tierra. Otra unidad de masa es la libra masa (lb masa), que es la masa de un objeto que pesa 1 libra. Luego, 1 libra masa es igual a $1/32.2$ slug.

Los símbolos y fórmulas para varias unidades USCS se listan en la Tabla A-1. Una de las unidades mencionadas en la Nota 3 de la tabla tiene origen métrico, esto es, el kilopound, o kip, igual a 1000 libras.

La unidad de uso común para **temperatura** es el grado Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). La escala Fahrenheit marca 32 en el punto de congelación del agua y 212 en el punto de ebullición. Luego, cada grado Fahrenheit es $5/9$ de un kelvin o de un grado Celsius. Las fórmulas de conversión entre las escalas de temperatura son las siguientes:

$$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} T(^{\circ}\text{C}) + 32 \quad (\text{A-6})$$

$$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} T(\text{K}) - 459.67 \quad (\text{A-7})$$

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9} [T(^{\circ}\text{F}) - 32] \quad (\text{A-8})$$

$$T(\text{K}) = \frac{5}{9} [T(^{\circ}\text{F}) - 32] + 273.15 \quad (\text{A-9})$$

Al igual que antes, T denota la temperatura en la escala apropiada.

A.4 CONVERSIONES

Las cantidades establecidas en cualquiera de los sistemas de unidades pueden convertirse fácilmente al otro sistema por medio de los **factores de conversión** listados en la Tabla A-3. Si el número dado tiene unidades USCS, puede convertirse a unidades SI multiplicando por el factor de conversión. Por ejemplo, de la primera fila de la tabla vemos que una aceleración de un pie por segundo cuadrado se convierte en 0.3048 metros por segundo cuadrado. Si la aceleración que estamos manejando es 12.9 pie por segundo cuadrado, entonces la conversión se realiza como sigue:

$$(12.9 \text{ pie/s}^2)(0.3048) = 3.93 \text{ m/s}^2$$

Para invertir el proceso (esto es, para convertir de unidades SI a unidades USCS), el número en unidades SI se divide entre el factor. Como ejemplo, supóngase que la aceleración es 9.81 metros por segundo cuadrado. Para convertir a unidades USCS, se procede como sigue:

$$\frac{(9.81 \text{ m/s}^2)}{0.3048} = 32.2 \text{ pie/s}^2$$

El factor 0.3048 es exacto, pero en muchos casos el factor de conversión listado en la tabla se redondea a seis cifras significativas en la primera columna y a tres en la segunda.

La Tabla A-4 proporciona unas cuantas **propiedades físicas** tanto en unidades SI como en unidades USCS.

Tabla A-3 CONVERSIÓN DE UNIDADES USCS A UNIDADES SI

Unidad USCS	Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI
	Exacto	Práctico	
Aceleración			
pie por segundo cuadrado pie/s ²	0.3048*	0.305	metro por segundo cuadrado m/s ²
pulgada por segundo cuadrado plg/s ²	0.0254*	0.0254	metro por segundo cuadrado m/s ²
Área			
pie cuadrado pie ²	0.09290304*	0.0929	metro cuadrado m ²
pulgada cuadrada plg ²	645.16*	645	milímetro cuadrado mm ²
Densidad (masa)			
slug por pie cúbico slug/pie ³	515.379	515	kilogramo por metro cúbico kg/m ³
Energía; trabajo			
pie-libra pie·lb	1.35582	1.36	joule J
kilowatt-hora kWh	3.6*	3.6	megajoule MJ
Unidad térmica británica Btu	1055.06	1055	joule J

(continúa)

Tabla A-3 (continuación)

Unidad USCS		Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI	
		Exacto	Práctico		
Fuerza					
libra	lb	4.44822	4.45	newton	N
kip (1000 libras)	k	4.44822	4.45	kilonewton	kN
Intensidad de fuerza					
libras por pie	lb/pie	14.5939	14.6	newton por metro	N/m
kip por pie	k/pie	14.5939	14.6	kilonewton por metro	kN/m
Longitud					
pie	pie	0.3048*	0.305	metro	m
pulgada	plg	25.4*	25.4	milímetro	mm
milla		1.609344*	1.61	kilómetro	km
Masa					
slug		14.5939	14.6	kilogramo	kg
Momento de una fuerza; torque					
pie-libra	pie·lb	1.35582	1.36	newton metro	N·m
pulgada-libra	pie·lb	0.112985	0.113	newton metro	N·m
pie-kip	pie·k	1.35582	1.36	kilonewton metro	kN·m
pulgada-kip	pie·k	0.112985	0.113	kilonewton metro	kN·m
Momento de inercia (masa)					
slug pie cuadrado		1.35582	1.36	kilogramo metro cuadrado	kg·m ²
Momento de inercia (segundo momento de área)					
pulgada a la cuarta potencia	plg ⁴	416,231	416,000	milímetro a la cuarta potencia	mm ⁴
pulgada a la cuarta potencia	plg ⁴	0.416231×10^{-6}	0.416×10^{-6}	metro a la cuarta potencia	m ⁴
Potencia					
pie-libra por segundo	pie·lb/s	1.35582	1.36	watt	W
pie-libra por minuto	pie·lb/min	0.0225970	0.0226	watt	W
caballo de potencia (550 pie-libras por segundo) hp		745.701	746	watt	W
Presión; esfuerzo					
libra por pie cuadrado	psf	47.8803	47.9	pascal (N/m ²)	Pa
libra por pulgada cuadrada	psi	6894.76	6890	pascal	Pa
kip por pie cuadrado	ksf	47.8803	47.9	kilopascal	kPa
kip por pulgada cuadrada	ksi	6894.76	6890	kilopascal	kPa
Módulo de sección					
pulgada a la tercera potencia	plg ³	16,387.1	16,400	milímetro a la tercera potencia	mm ³
pulgada a la tercera potencia	plg ³	16.3871×10^{-6}	16.4×10^{-6}	metro a la tercera potencia	m ³

(continúa)

Tabla A-3 (continuación)

Unidad USCS	Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI	
	Exacto	Práctico		
Peso específico (densidad de peso)				
libra por pie cúbico	lb/plg ³	157.087	157	newton por metro cúbico N/m ³
libra por pulgada cúbica	lb/pie ³	271.447	271	kilonewton por metro cúbico kN/m ³
Velocidad				
pie por segundo	pie/s	0.3048*	0.305	metro por segundo m/s
pulgada por segundo	plg/s	0.0254*	0.0254	metro por segundo m/s
milla por hora	mph	0.44704*	0.447	metro por segundo m/s
milla por hora	mph	1.609344*	1.61	kilómetro por hora km/h
Volumen				
pie cúbico	pie ³	0.0283168	0.0283	metro cúbico m ³
pulgada cúbica	plg ³	16.3871 × 10 ⁻⁶	16.4 × 10 ⁻⁶	metro cúbico m ³
pulgada cúbica	plg ³	16.3871	16.4	centímetro cúbico cm ³
galón	gal	3.78541	3.79	litro L
galón	gal	0.00378541	0.00379	metro cúbico m ³

* Factor de conversión exacto

Nota: Para convertir de SI a USCS, *divida* entre el factor de conversión.

Tabla A-4 PROPIEDADES FÍSICAS EN UNIDADES SI Y USCS

Propiedad	SI	USCS
Agua (fresca)		
peso específico	9.81 kN/m ³	62.4 lb/pie ³
densidad de masa	1000 kg/m ³	1.94 slugs/pie ³
Agua de mar		
peso específico	10.0 kN/m ³	63.8 lb/pie ³
densidad de masa	1020 kg/m ³	1.98 slugs/pie ³
Aluminio		
peso específico	26.6 kN/m ³	169 lb/pie ³
densidad de masa	2710 kg/m ³	5.26 slugs/pie ³
Acero		
peso específico	77.0 kN/m ³	490 lb/pie ³
densidad de masa	7850 kg/m ³	15.2 slugs/pie ³
Concreto reforzado		
peso específico	23.6 kN/m ³	150 lb/pie ³
densidad de masa	2400 kg/m ³	4.66 slugs/pie ³
Aceleración de la gravedad (sobre la superficie de la Tierra)		
Valor recomendado	9.81 m/s ²	32.2 pie/s ²
Valor estándar internacional	9.80665 m/s ²	32.1740 pie/s ²
Presión atmosférica (al nivel del mar)		
Valor recomendado	101 kPa	14.7 psi
Valor estándar internacional	101.325 kPa	14.6959 psi

Dígitos significativos

Un importante aspecto de los cálculos en ingeniería es la precisión relativa de todos los valores numéricos. Como muchos cálculos se realizan mediante calculadoras electrónicas y computadoras, existe la posibilidad de que los valores numéricos se presenten con una precisión que no es justificable. Como ejemplo supóngase que un cálculo produce el resultado $R = 6287.46$ lb para la reacción de una viga. Presentar el resultado en esta forma es engañoso, porque implica que la reacción se conoce con aproximación a 1/100 de libra aunque la magnitud es mayor de 6000 libras. Luego, implica una exactitud de aproximadamente 1/600,000 y una precisión de 0.01 lb, ninguna de las cuales se justifica. La exactitud de la reacción calculada depende de qué tan exactas se conocen las cargas, dimensiones y otros datos usados en el cálculo. En realidad, la exactitud puede ser 1/1000 o bien 1/100 en este ejemplo. De modo que la reacción se conocería con aproximación a 10 libras o quizás a 100 libras y deberían expresarse como 6290 o bien 6300 lb. En estas circunstancias, los últimos dígitos en el número original no tienen justificación; por ejemplo, el cuarto dígito en el resultado original puede ser un 9 o un 7. A fin de determinar qué tan exacto debe expresarse cierto valor numérico, se acostumbra utilizar los dígitos significativos, según se describe en la siguiente sección.

B.1 DÍGITOS SIGNIFICATIVOS

En la práctica diaria, la exactitud de un número se indica por los dígitos significativos utilizados para expresar el valor. El dígito significativo es un número del 1 al 9 o un cero no usado para señalar la posición del punto decimal; por ejemplo, los números 316, 7.23, 3.70 y 0.00347 tienen cada uno tres dígitos significativos. Sin embargo, la exactitud de un número tal como 52,000 no es evidente. Puede tener dos dígitos significativos, sirviendo los tres ceros sólo para localizar el punto decimal, o puede tener tres, cuatro o cinco dígitos significativos si uno o más de los ceros son exactos. Usando potencias de diez, la exactitud de un número tal como 52,000 puede aclararse. Cuando se escribe como 52×10^3 , se entiende que el número tiene dos

dígitos significativos; cuando se escribe como 520×10^2 o bien 52.0×10^3 , tiene tres dígitos significativos.

Como regla general, la precisión de un número es más o menos un medio de la unidad correspondiente al último dígito significativo. Luego, el número 316 se entiende que tiene una precisión de ± 0.5 y 7.23 tiene una precisión de ± 0.005 .

Cuando se obtiene un número mediante un cálculo, su exactitud depende de la exactitud de los números usados al realizar los cálculos. Una regla práctica que sirve para cálculos que involucran multiplicación o división es la siguiente: El número de dígitos significativos en el resultado calculado es el mismo que el menor número de dígitos significativos en cualquiera de los números intervinientes en el cálculo. Como ejemplo, considérese el producto $(2743.1)(31.6)$. Cuando se multiplica en una calculadora, el resultado es 86,681.960 cuando se presenta con ocho dígitos. Sin embargo, escribir este número con ocho dígitos es erróneo, ya que implica mucha más exactitud que la garantizada por los números originales. Puesto que el número 31.6 tiene tres dígitos significativos, la forma propia de escribir el resultado es 86,700 o bien 86.7×10^3 .

Para cálculos que implican adición o sustracción de una columna de números, el último dígito significativo en el resultado se encuentra en la última columna de dígitos que tiene dígitos significativos de todos los números que se están sumando o restando; esto es, el último dígito significativo en el resultado corresponde al último dígito en el número con mínima precisión. Para aclarar esta idea, considérense los siguientes ejemplos:

	142.734	127.58	945,000
	+ 9.8	- 6	+ 11,230
De la calculadora:	152.534	121.58	956,230
Se expresa como:	152.5	122	956,000

En el primer ejemplo, el número 142.734 tiene seis dígitos significativos y el número 9.8 tiene dos. Cuando se suman, el resultado tiene cuatro dígitos significativos porque todos los dígitos del resultado que están a la derecha de la columna que contiene el 8 carecen de significado. En el segundo ejemplo, se supone que el número 6 es exacto sólo con un dígito significativo (esto es, no es un número exacto). Por lo tanto, el resultado final es exacto a tres dígitos significativos, y se expresa como 122. En el tercer ejemplo, el número 945,000 se supone que es exacto a tres dígitos significativos, de modo que cualesquier números a la derecha de la coma carecen de significado.

En los problemas de ingeniería los cálculos intermedios pueden efectuarse a cualquier grado deseado de precisión numérica en una calculadora (la cual usualmente usa ocho o más dígitos), siempre y cuando el usuario reconozca que muchos de los dígitos son innecesarios y no tienen significado físico. Cuando se obtiene el resultado final de una calculadora, el número de dígitos debe limitarse a los que son significativos. En mecánica de materiales, los datos para un problema (tales como cargas y dimensiones) son usualmente exactos a dos o tres dígitos significativos, y por tanto los resultados finales deben expresarse con esa misma exactitud.

Por lo general, en este libro la mayoría de los ejemplos se resuelve suponiendo que los datos son exactos a tres dígitos significativos. Por lo tanto, usualmente utilizamos cuatro dígitos en los cálculos intermedios y expresamos las respuestas con tres dígitos significativos.

Aunque el uso de dígitos significativos es conveniente en el trabajo de ingeniería, debe reconocerse que no proporcionan una forma precisa de indicar la exactitud de un número. Para ilustrar este punto, considérense los números 999 y 101, cada uno de los cuales tiene tres dígitos significativos. En el primer caso, el número tiene una exactitud de $1/999$, o bien 0.1% ; en el segundo caso, la exactitud es $1/101$, o bien 1.0% . Si es importante conocer la exactitud verdadera de un resultado calculado, debemos tener en cuenta la exactitud de cada número usado en los cálculos.

Algunos de los números que intervienen en un cálculo típico de ingeniería son exactos (por ejemplo, el número 48 en la fórmula $PL^3/48EI$ para la deflexión de una viga). Los números exactos puede considerarse que tienen un número infinito de dígitos significativos, por lo que no afectan la exactitud del resultado calculado.

B.2 REDONDEO DE NÚMEROS

El proceso de eliminar los dígitos no significativos y conservar únicamente los significativos se denomina redondeo. Para ilustrar el proceso supongamos que un número se redondea a tres dígitos significativos. Entonces se aplican las siguientes reglas: (a) Si el cuarto dígito es menor que 5, los primeros tres dígitos se mantienen sin cambios y todos los siguientes se eliminan o se hacen iguales a cero. Por ejemplo, 22.34 se redondea a 22.3 y 576,234 se redondea a 576,000. (b) Si el cuarto dígito es mayor que 5, o si el cuarto dígito es 5 y está seguido al menos por otro dígito diferente de cero, entonces el tercer dígito se incrementa en 1 y todos los dígitos subsecuentes se eliminan o se hacen iguales a cero. Por ejemplo, 31.56 se redondea a 31.6; 28,172 se redondea a 28,200; y 1.755001 se redondea a 1.76. (c) Finalmente, si el cuarto dígito es exactamente 5, entonces redondeamos al dígito par. Por ejemplo, 22.45 se redondea a 22.4 y 67.75 se redondea a 67.8. Como la ocurrencia de números pares o impares es más o menos aleatoria, el uso de la regla anterior significa que redondeamos hacia arriba tan a menudo como redondeamos hacia abajo, reduciendo así las posibilidades de acumular errores de redondeo. (En lugar de la regla "par" anterior, muchas calculadoras redondean hacia arriba cuando el último dígito es exactamente 5.)

Las reglas ilustradas anteriormente para redondeo a tres dígitos significativos se aplican de igual forma cuando se redondea a cualquier otra cantidad de dígitos significativos.

Centroides y momentos de inercia de áreas planas

C.1 CENTROIDES DE ÁREAS

La localización del **centroide** de un área plana es una importante propiedad geométrica del área.* Para definir las coordenadas del centroide, refirámonos al área A y al sistema de ejes coordenados xy mostrado en la Fig. C-1. Un elemento diferencial de área dA , con coordenadas x y y , se muestra en la figura. El área total A se define como la siguiente integral:

$$A = \int dA \quad (C-1)$$

Además, los **primeros momentos** del área con respecto a los ejes x y y , respectivamente, son

$$Q_x = \int y dA \quad Q_y = \int x dA \quad (C-2)$$

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C (Fig. C-1) son iguales a los primeros momentos divididos entre el área misma:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{Q_y}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{Q_x}{A} \quad (C-3)$$

* De acuerdo con la terminología común, usamos el término "área" para significar *superficie plana*. En sentido estricto, área es una medida del tamaño de una superficie y no es la misma que la superficie en sí.

Si los contornos del área se definen mediante expresiones matemáticas simples, podemos evaluar las integrales que aparecen en las Ecs. (C-3) en forma particular y obtener así fórmulas para \bar{x} y \bar{y} . En el Apéndice D se proporciona una tabla de fórmulas obtenidas de esta manera.

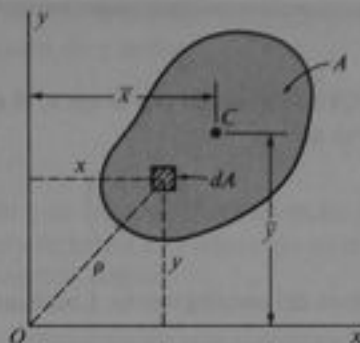


Fig. C-1 Área plana A con centroide C

Si un área es **simétrica respecto a un eje**, el centroide estará en tal eje ya que el primer momento respecto a un eje de simetría es igual a cero. Por ejemplo, el centroide del área simplemente simétrica mostrado en la Fig. C-2 debe estar en el eje x , que es el eje de simetría, por lo que sólo debe calcularse una distancia a fin de localizar a C . Si un área tiene dos ejes de simetría, como en el caso de la sección mostrada en la Fig. C-3, la posición del centroide puede determinarse mediante inspección, porque se aloja en la intersección de los ejes de simetría. Un área del tipo mostrado en la Fig. C-4 es **simétrica respecto a un punto**. No tiene ejes de simetría, pero hay un punto (llamado *centro de simetría*) tal que cualquier línea del área que pase por ese punto será simétrica respecto al mismo. Por supuesto, el centroide coincide con el centro de simetría, y por lo tanto el centroide puede localizarse mediante inspección.

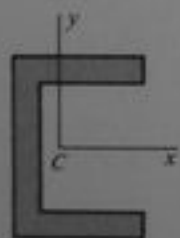


Fig. C-2 Área con un eje de simetría

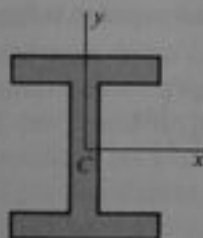


Fig. C-3 Área con dos ejes de simetría

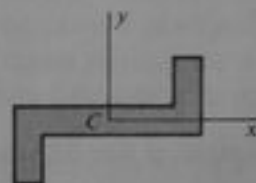


Fig. C-4 Área que es simétrica respecto a un punto

Si las fronteras del área son curvas irregulares no definidas por expresiones matemáticas, entonces podemos evaluar las integrales de las Ecs. (C-3) mediante métodos numéricos aproximados. El procedimiento más simple es dividir el área en pequeños elementos de un área ΔA , y reemplazar las integrales por sumatorias:

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i, \quad Q_x = \sum_{i=1}^n y_i \Delta A_i, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i, \quad (C-4)$$

en las cuales n es el número total de elementos de área, y_i es la coordenada y del centroide del área ΔA_i , y x_i es la coordenada x del centroide del área ΔA_i . La exactitud de los cálculos para \bar{x} y \bar{y} depende de qué tanto llenan el área real los elementos de área seleccionados.

Ejemplo

Un semisegmento parabólico OAB está limitado por el eje x , el eje y y una curva parabólica (Fig. C-5). La ecuación de la curva es

$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (a)$$

en la cual b es la base y h es la altura del semisegmento. Localizar el centroide C del semisegmento.

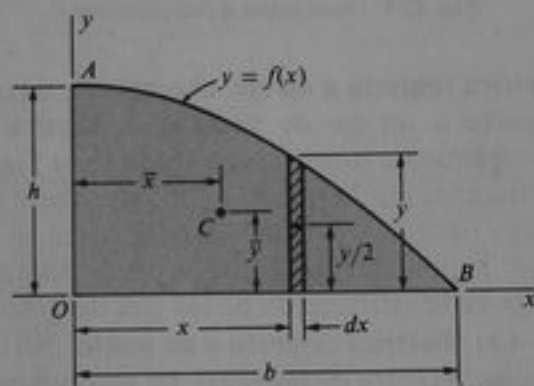


Fig. C-5 Ejemplo. Centroide de un semisegmento parabólico

Para efectuar este análisis, seleccionaremos un elemento de área dA en forma de una franja vertical delgada de ancho dx y altura y , como se muestra en la figura. El área de este elemento es

$$dA = y dx = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx$$

y, por lo tanto, el área del semisegmento es

$$A = \int dA = \int_0^b h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx = \frac{2bh}{3} \quad (b)$$

El primer momento del elemento de área respecto a cualquier eje puede obtenerse multiplicando el área del elemento por la distancia desde su centroide hasta el eje. Dado que las coordenadas x y y del centroide del elemento son x y $y/2$, respectivamente, los primeros momentos son

$$Q_x = \int \frac{y}{2} dA = \int_0^b \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^2 dx = \frac{4bh^2}{15}$$

$$Q_y = \int x dA = \int_0^b hx \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx = \frac{b^2h}{4}$$

Podemos ahora determinar las coordenadas del centroide C como sigue:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{2h}{5} \quad (c)$$

Este problema puede resolverse también tomando un elemento del área dA en forma de una franja horizontal de altura dy y ancho

$$x = b \sqrt{1 - \frac{y}{h}}$$

el cual se obtuvo despejando x de la Ec. (a) en términos de y . Otra posibilidad es considerar el elemento como un rectángulo de ancho dx y altura dy ; en este caso, las expresiones para A , Q_x y Q_y , tienen la forma de integrales dobles.

C.2 CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS

En el trabajo de ingeniería con frecuencia necesitamos localizar el centroide de un área compuesta de varias partes, cada parte teniendo un perfil geométrico conocido (tal como un rectángulo, un triángulo o una sección de patin ancho). Ejemplos de tales **áreas compuestas** son las secciones transversales de vigas, que a menudo se componen de áreas rectangulares (por ejemplo, véanse Figs. C-2, C-3 y C-4). El área y los primeros momentos de un área compuesta pueden calcularse mediante la suma de las propiedades correspondientes de sus partes:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad Q_x = \sum_{i=1}^n y_i A_i \quad Q_y = \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad (C-5)$$

en las cuales A_i es el área de la porción i -ésima, x_i y y_i son las coordenadas del centroide de la porción i -ésima, y n es el número de porciones. Obsérvese que es posible considerar la ausencia de un área como un "área negativa"; por ejemplo, este concepto es útil cuando existe un hueco en alguna otra figura regular. Habiendo encontrado A , Q_x y Q_y , por medio de las Ecs. (C-5), podemos determinar las coordenadas del centroide mediante las Ecs. (C-3).

Para ilustrar el procedimiento, consideremos el caso especial de un área compuesta que puede dividirse convenientemente en dos partes. El área en forma de L mostrada en la Fig. C-6 es de este tipo, porque puede dividirse en dos rectángulos de áreas A_1 y A_2 . Estos rectángulos tienen centroides C_1 y C_2 con coordenadas conocidas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , respectivamente. Luego, obtenemos las siguientes ecuaciones a partir de las Ecs. (C-5):

$$A = A_1 + A_2 \quad Q_x = y_1 A_1 + y_2 A_2 \quad Q_y = x_1 A_1 + x_2 A_2$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide C con

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} \quad (C-6)$$

(véanse Ecs. C-3). Cuando un área se divide sólo en dos partes, el centroide C del área total se aloja en la línea que une los centroides C_1 y C_2 de las partes, como se muestra en la figura.

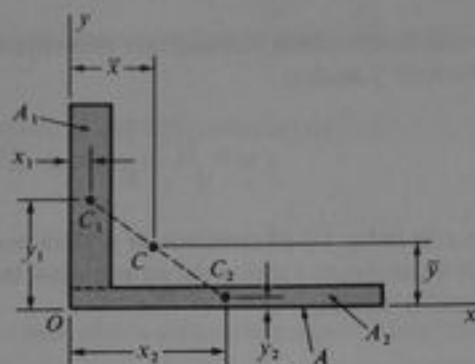


Fig. C-6 Centroide de un área compuesta consistente en dos partes

Ejemplo

En la Fig. C-7 se muestra una viga construida con una sección $W 18 \times 71$ con una placa de $6 \times \frac{1}{2}$ plg soldada al patín superior y una sección canal $C 10 \times 30$ soldada al patín inferior. Localizar el centroide C del área de la sección transversal.

Denotemos los centroides de las áreas de sección transversal de la placa, la sección de patín ancho y la sección canal como C_1 , C_2 y C_3 , respectivamente. También, las áreas correspondientes son

$$A_1 = (6 \text{ plg})(0.5 \text{ plg}) = 3.0 \text{ plg}^2$$

$$A_2 = 20.8 \text{ plg}^2 \quad A_3 = 8.82 \text{ plg}^2$$

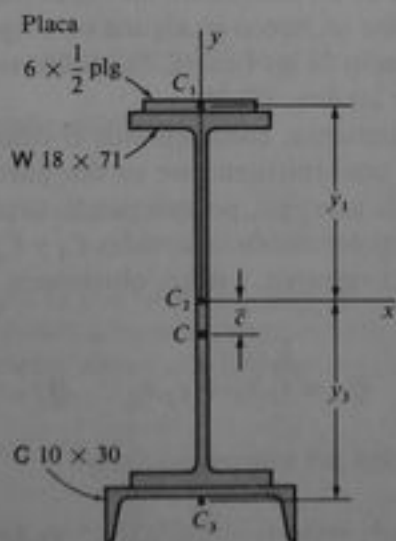


Fig. C-7 Ejemplo

donde las áreas A_2 y A_3 se obtuvieron de las tablas E-1 y E-3, Apéndice E. Si el origen de los ejes x y y se sitúa en el punto C_2 , las distancias centroidales para las tres áreas son

$$y_1 = \frac{18.47 \text{ plg}}{2} + \frac{0.5 \text{ plg}}{2} = 9.485 \text{ plg}$$

$$y_2 = 0 \quad y_3 = \frac{18.47 \text{ plg}}{2} + 0.649 \text{ plg} = 9.884 \text{ plg}$$

donde las dimensiones pertinentes de las secciones también se obtienen de las tablas E-1 y E-3. El área A y el primer momento Q_x de toda la sección transversal son

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 32.62 \text{ plg}^2$$

$$Q_x = y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3$$

$$= (9.485 \text{ plg})(3.0 \text{ plg}^2) + 0 - (9.884 \text{ plg})(8.82 \text{ plg}^2)$$

$$= -58.72 \text{ plg}^3$$

La coordenada \bar{y} al centroide C se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{-58.72 \text{ plg}^3}{32.62 \text{ plg}^2} = -1.80 \text{ plg}$$

Dado que \bar{y} es positiva en la misma dirección que el eje y positivo, el signo negativo significa que el centroide C se localiza por debajo del eje x (véase figura). Luego, la distancia \bar{c} entre el eje x y el centroide C es

$$\bar{c} = -\bar{y} = 1.80 \text{ plg}$$

Obsérvese que la localización seleccionada para el eje x fue arbitraria (pero muy conveniente).

C.3 MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

Los momentos de inercia de un área plana (véase Fig. C-1) con respecto a los ejes x y y , respectivamente, se definen mediante las integrales

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (\text{C-7})$$

en las cuales x y y son las coordenadas del elemento diferencial del área dA . Como dA está multiplicado por el cuadrado de la distancia, los momentos de inercia son también llamados **segundos momentos** del área.

Para ilustrar cómo se obtienen los momentos de inercia mediante integración, consideremos el rectángulo mostrado en la Fig. C-8. Los ejes x y y tienen su origen en el centroide C . Por conveniencia, usamos un elemento de área en forma de una

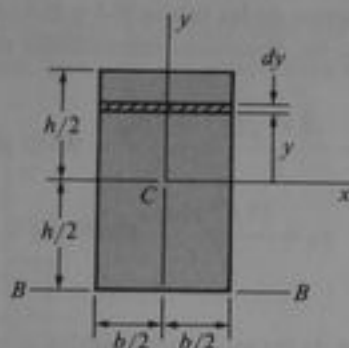


Fig. C-8 Momentos de inercia de un rectángulo

franja delgada de ancho b y altura dy , de tal forma que $dA = b dy$. Entonces el momento de inercia con respecto al eje x es

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{a})$$

En forma similar, podemos usar un elemento de área dA en forma de una franja vertical y obtener el momento de inercia con respecto al eje y :

$$I_y = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12} \quad (\text{b})$$

Si se seleccionan diferentes ejes, entonces los momentos de inercia tendrán diferentes valores. Por ejemplo, consideremos el eje BB en la base del rectángulo. En ese caso, definimos y como la distancia desde el eje BB hasta el elemento de área dA . Entonces los cálculos para el momento de inercia se efectúan como sigue:

$$I_{BB} = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3} \quad (\text{c})$$

Obsérvese que el momento de inercia es mayor con respecto al eje BB que con respecto al eje centroidal x . En general, el momento de inercia se incrementa según se aleja del centroide el eje de referencia. Sin importar los ejes seleccionados, los momentos de inercia siempre son cantidades positivas ya que las coordenadas x y y están elevadas al cuadrado (véanse Ecs. C-7).

El momento de inercia de un área compuesta con respecto a un eje particular es la suma de los momentos de inercia de sus partes con respecto al mismo eje. Un ejemplo es la sección cajón hueca mostrada en la Fig. C-9a. El eje x es un eje de simetría a través del centroide C . El momento de inercia con respecto al eje x es igual a la diferencia entre los momentos de inercia de los dos rectángulos:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} \quad (\text{d})$$

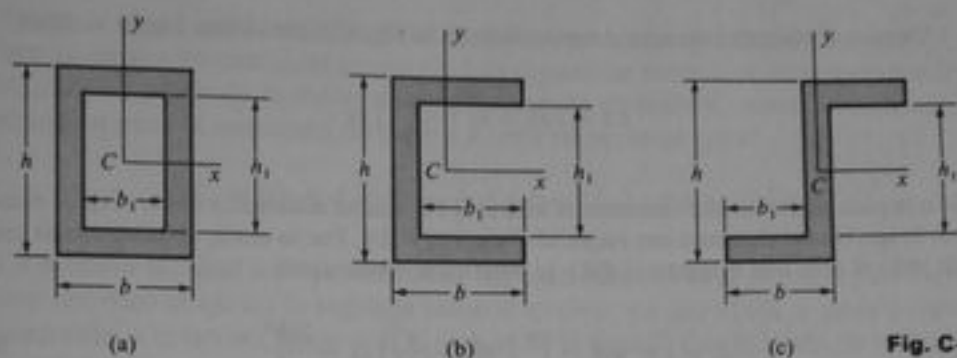


Fig. C-9

Esta misma fórmula es aplicable a la sección canal y a la sección Z mostradas en las partes (b) y (c), respectivamente, de la figura. La misma técnica puede utilizarse para obtener el momento de inercia I_x de la sección cajón hueca. Sin embargo, en el caso de la sección canal y la sección Z, I_x se obtiene más fácilmente usando el teorema de los ejes paralelos, que se describe en la siguiente sección.

En el Apéndice D están tabulados los momentos de inercia para varias áreas comunes. La aplicación de las fórmulas de la tabla conjuntamente con el teorema de los ejes paralelos (Sección C.4) hace posible obtener momentos de inercia para muchos otros perfiles. Sin embargo, si un área es de forma irregular, es posible obtener sus momentos de inercia mediante métodos numéricos. El procedimiento es dividir el área en pequeños elementos de área ΔA , multiplicar cada una de tales áreas por el cuadrado de su distancia desde el eje y después sumar los productos.

Radio de giro. En mecánica se usa ocasionalmente una distancia conocida como el **radio de giro** de un área, la cual se define como la raíz cuadrada del momento de inercia dividido entre el área misma; luego,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (C-8)$$

donde r_x y r_y denotan los radios de giro con respecto a los ejes x y y , respectivamente. Dado que I tiene unidades de longitud a la cuarta potencia y A tiene unidades de longitud a la segunda potencia, el radio de giro tiene unidades de longitud. Podemos considerar al radio de giro de un área como la distancia desde el eje para la cual toda el área podría concentrarse y tener aún el mismo momento de inercia que el área original.

Ejemplo

Determinar los momentos de inercia I_x e I_y para el semisegmento parabólico OAB mostrado en la Fig. C-5. La ecuación del contorno parabólico es

$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

según está dado en el ejemplo de la Sección C.1.

Usemos el elemento de área dA mostrado en la Fig. C-5 como una franja vertical:

$$dA = y dx = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx$$

Dado que cada punto de este elemento de área está a la misma distancia x desde el eje y , el momento de inercia del elemento con respecto al eje y es $x^2 dA$. Por lo tanto, el momento de inercia de toda el área con respecto al eje y se determina como sigue:

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx = \frac{2hb^3}{15} \quad (e)$$

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje x , observamos que el elemento de área dA tiene un momento de inercia igual a

$$\frac{1}{3} (dx)y^3$$

con respecto al eje x (véase Ec. c). Por lo que, el momento de inercia de toda el área es

$$I_x = \int_0^b \frac{y^3}{3} dx = \int_0^b \frac{h^3}{3} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3 dx = \frac{16bh^3}{105} \quad (f)$$

Estos mismos resultados pueden obtenerse usando un elemento en forma de una franja horizontal, o utilizando un elemento rectangular de área $dA = dx dy$ y realizando una doble integración.

C.4 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA

El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en el plano del área se relaciona con el momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo mediante el **teorema de los ejes paralelos**. Para deducir este teorema extremadamente útil, consideraremos el área mostrada en la Fig. C-10. Supóngase que los ejes $x_c y_c$

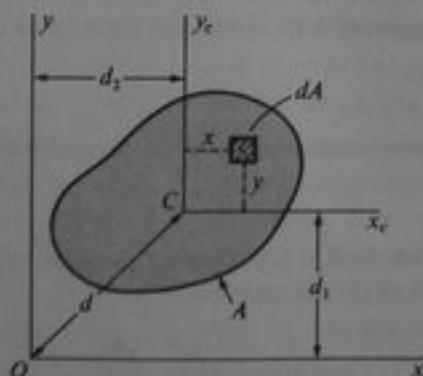


Fig. C-10 Dedución de los teoremas de ejes paralelos

tienen su origen en el centroide C del área. Los ejes xy son paralelos a los ejes $x_c y_c$, y tienen su origen en cualquier punto O . Las distancias entre ejes correspondientes son d_1 y d_2 . A partir de la definición del momento de inercia, obtenemos la siguiente ecuación para el momento de inercia I_x con respecto al eje x :

$$I_x = \int (y + d_1)^2 dA = \int y^2 dA + 2d_1 \int y dA + d_1^2 \int dA$$

La primera integral sobre el miembro del lado derecho es el momento de inercia I_{x_c} con respecto al eje x_c ; la segunda integral es cero, ya que el eje x_c pasa a través del centroide; y la tercera integral es el área A de la figura. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \quad (\text{C-9a})$$

Procediendo de igual manera para el eje y , obtenemos

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \quad (\text{C-9b})$$

Las Ecs. (C-9) representan el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia: *El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje alojado en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.*

Del teorema de los ejes paralelos, vemos que el momento de inercia se incrementa según se aleja el eje paralelamente a sí mismo del centroide. Por lo que, el momento de inercia respecto a un eje centroidal es el momento de inercia mínimo del área (para una dirección dada de los ejes).

El teorema de los ejes paralelos es extremadamente útil para encontrar momentos de inercia, especialmente para áreas compuestas. Cuando se usa el teorema, debemos tener presente que uno de los dos ejes paralelos debe ser un eje centroidal. Para ilustrar este punto, considérese nuevamente el rectángulo mostrado en la Fig. C-8. Sabiendo que el momento de inercia respecto al eje x_c , que pasa a través del centroide, es igual a $bh^3/12$ (véase Ec. a de la Sección C.3), podemos rápidamente determinar el momento de inercia I_{BB} respecto a la base del rectángulo:

$$I_{BB} = I_{x_c} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

Este resultado concuerda con el obtenido previamente mediante integración (Ec. c de la Sección C.3).

Si es necesario hallar el momento de inercia I_1 respecto a un eje no centroidal cuando se conoce el momento de inercia I_2 respecto a otro eje no centroidal (y paralelo), debemos aplicar el teorema de los ejes paralelos dos veces. Primero, utilizamos el teorema para hallar el momento de inercia centroidal a partir del momento de inercia conocido I_2 . Después usamos por segunda vez el teorema para encontrar I_1 a partir del momento de inercia centroidal.

En el caso de un área compuesta, podemos hallar el momento de inercia (con respecto a un eje particular) de cada parte del área y sumar entonces esos momentos de inercia para obtener I para toda el área. Por ejemplo, considérese la sección Z mostrada en la Fig. C-9c y supóngase que se desea calcular I_y . Entonces podemos dividir el área en tres rectángulos, cada uno de los cuales tiene un centroide que puede localizarse por inspección. Los momentos de inercia de los rectángulos, con respecto a ejes paralelos al eje y y que pasan por sus centroides, pueden obtenerse a partir de la fórmula general $I = bh^3/12$. Entonces se aplica el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia con respecto al eje y . Sumando esos momentos de inercia, obtenemos I_y para toda el área.

Ejemplo 1

Determinar los momentos de inercia centroidales I_x e I_y para el semisegmento parabólico OAB mostrado en la Fig. C-11. El área del semisegmento es $2bh/3$, y el centroide C tiene coordenadas $\bar{x} = 3b/8$ y $\bar{y} = 2h/5$; también, los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y son

$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \quad I_y = \frac{2hb^3}{15}$$

(véase Caso 18, Apéndice D).

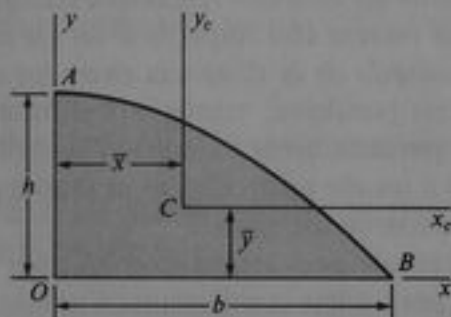


Fig. C-11 Ejemplo 1. Teorema de los ejes paralelos

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje x_c , escribimos el teorema de los ejes paralelos como sigue:

$$I_x = I_{x_c} + A\bar{y}^2$$

Por lo tanto, el momento de inercia I_x es

$$I_{x_c} = I_x - A\bar{y}^2 = \frac{16bh^3}{105} - \frac{2bh}{3} \left(\frac{2h}{5}\right)^2 = \frac{8bh^3}{175}$$

En forma similar, obtenemos el momento de inercia con respecto al eje y_c :

$$I_{y_c} = I_y - A\bar{x}^2 = \frac{2hb^3}{15} - \frac{2bh}{3} \left(\frac{3b}{8}\right)^2 = \frac{19hb^3}{480}$$

Luego, se han encontrado los momentos de inercia centroidales solicitados.

Ejemplo 2

Determinar el momento de inercia I_c con respecto a un eje horizontal que pase a través del centroide C de la sección transversal de la viga descrita en el ejemplo de la Sección C.2 y mostrada en la Fig. C-7. (Este momento de inercia se requiere para el cálculo de esfuerzos y deflexiones de la viga.)

Para hallar el momento de inercia centroidal I_c del área compuesta, consideramos el área en tres partes: (1) la placa superior, (2) la sección de patin ancho, y (3) la sección canal. También, tomamos del ejemplo de la Sección C.2 las siguientes propiedades y dimensiones:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3.0 \text{ plg}^2 & A_2 &= 20.8 \text{ plg}^2 & A_3 &= 8.82 \text{ plg}^2 \\ y_1 &= 9.485 \text{ plg} & y_2 &= 9.884 \text{ plg} & c &= 1.80 \text{ plg} \end{aligned}$$

Los momentos de inercia de las tres partes con respecto a sus propios centroides son los siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} (6.0 \text{ plg})(0.5 \text{ plg})^3 = 0.063 \text{ plg}^4 \\ I_2 &= 1170 \text{ plg}^4 & I_3 &= 3.95 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

donde I_2 e I_3 se obtienen de las tablas E-1 y E-3, respectivamente.

Podemos aplicar ahora el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia respecto a un eje que atraviesa C por las tres partes de la sección transversal.

$$\begin{aligned} I_{c1} &= I_1 + A_1(y_1 + \bar{c})^2 = 0.063 + 3.0(11.28)^2 = 382 \text{ plg}^4 \\ I_{c2} &= I_2 + A_2\bar{c}^2 = 1170 + 20.8(1.80)^2 = 1237 \text{ plg}^4 \\ I_{c3} &= I_3 + A_3(y_3 - \bar{c})^2 = 3.94 + 8.82(8.084)^2 = 580 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

La suma de esos momentos de inercia es

$$I_c = I_{c1} + I_{c2} + I_{c3} = 2200 \text{ plg}^4$$

que es el momento de inercia centroidal de toda la sección transversal.

C.5 MOMENTOS POLARES DE INERCIA

Los momentos de inercia considerados en las secciones anteriores se calculan con respecto a ejes alojados en el plano del área misma, tales como los ejes x y y en la Fig. C-1. Consideremos ahora un eje perpendicular al plano del área y que corta al plano en el origen O . El momento de inercia con respecto a este eje se llama **momento polar de inercia** I_p ; y se define como la integral

$$I_p = \int \rho^2 dA \quad (\text{C-10})$$

en la cual ρ es la distancia desde el punto O hasta el elemento de área dA (véase Fig. C-1). Puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2$, donde x y y son las coordenadas rectangulares del elemento dA , obtenemos la siguiente expresión para I_p :

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA$$

Por lo tanto, obtenemos

$$I_p = I_x + I_y \quad (\text{C-11})$$

Esta ecuación muestra que el momento polar de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura en el punto O es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a cualesquiera dos ejes perpendiculares x y y que pasen a través de ese mismo punto y se alojen en el plano de la figura. Por simplicidad, usualmente nos referiremos a I_p como el momento polar de inercia con respecto al punto O .

El cálculo de momentos polares de inercia con respecto a diversos puntos se facilita enormemente mediante el **teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia**. Podemos deducir este teorema refiriéndonos nuevamente a la Fig. C-10. Denotemos los momentos polares de inercia respecto al origen O y al centroide C por I_p e I_{p_c} , respectivamente; entonces podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$I_p = I_x + I_y \quad I_{p_c} = I_{x_c} + I_{y_c} \quad (\text{a})$$

(véase Ec. C-11). Enseguida, introduzcamos los teoremas de los ejes paralelos deducidos en la Sección C.4 (véanse Ecs. C-9):

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \quad I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \quad (\text{b})$$

Sumando las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

Ahora, sustituyendo las Ecs. (a), y observando también que $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ (véase Fig. C-10), obtenemos

$$I_p = I_{p_c} + Ad^2 \quad (\text{C-12})$$

Esta ecuación representa el teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia: *El momento polar de inercia de un área con respecto a cualquier punto O en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide C más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C .*

Para ilustrar la determinación de momentos polares de inercia, considérese un círculo de radio r (Fig. C-12). Tomemos un elemento de área diferencial dA en forma de un aro delgado de radio ρ y espesor $d\rho$; luego, $dA = 2\pi\rho d\rho$. Dado que cada punto en este elemento está a la misma distancia ρ del centro C del círculo, el mo-

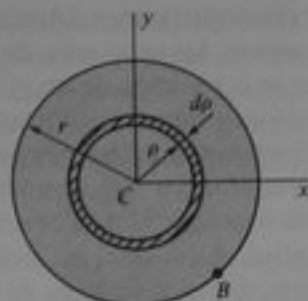


Fig. C-12 Momento polar de inercia de un círculo

mento polar de inercia del elemento con respecto a C es $\rho^2 dA$, o bien $2\pi\rho^3 d\rho$. Para obtener el momento polar de inercia para todo el círculo, integramos como sigue:

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} \quad (c)$$

El momento polar de inercia con respecto a cualquier punto B sobre la circunferencia puede obtenerse del teorema de los ejes paralelos:

$$I_{p_b} = I_{p_c} + Ad^2 = \frac{\pi r^4}{2} + \pi r^2(r^2) = \frac{3\pi r^4}{2} \quad (d)$$

Dicho sea de paso, podemos obtener fácilmente el momento de inercia de un círculo con respecto a un diámetro usando la Ec. (C-11). Para el círculo de la Fig. C-12, obtenemos

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} \quad (e)$$

Obviamente un círculo es un caso especial en el cual el momento polar de inercia puede determinarse fácilmente por integración. Sin embargo, muchos de los perfiles comunes en el trabajo de ingeniería por sí mismos no se prestan al uso de esta técnica. En lugar de ello, el momento polar de inercia se obtiene usualmente sumando los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares (Ec. C-11). Estos últimos momentos de inercia se encuentran mediante los métodos descritos en las secciones C.3 y C.4.

C.6 PRODUCTOS DE INERCIA

El producto de inercia de un área plana es una propiedad que se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares alojados en el plano del área. Luego, refirámonos nuevamente al área A mostrada en la Fig. C-1, y definamos el **producto de inercia** con respecto a los ejes x y y como sigue:

$$I_{xy} = \int xy dA \quad (C-13)$$

De esta definición vemos que cada elemento de área dA se multiplica por el producto de sus coordenadas. Como consecuencia, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o cero, dependiendo de la posición de los ejes xy con respecto al área. Si el área está ubicada por completo en el primer cuadrante de los ejes (como en la Fig. C-1), entonces el producto de inercia es positivo porque cada elemento dA tiene coordenadas x y y positivas. Si el área se ubica por completo en el segundo cuadrante, el producto de inercia es negativo porque cada elemento tiene una coordenada y positiva y una coordenada x negativa. Asimismo, las áreas que se alojan por completo en el tercer y cuarto cuadrantes, tienen productos de inercia positivo o negativo, respectivamente. Cuando el área se aloja en más de un cuadrante, el signo del producto de inercia depende de la distribución del área en los cuadrantes.

Un caso especial surge cuando uno de los ejes es un eje de simetría del área. Como ejemplo, considérese el área mostrada en la Fig. C-13, la cual es simétrica respecto al eje y . Para cada elemento dA que tiene coordenadas x y y , existe otro elemento dA igual y simétricamente localizado teniendo la misma coordenada y pero una coordenada x de signo opuesto. Por lo tanto, los productos $xy dA$ se cancelan uno con otro y la integral en la Ec. (C-13) se vuelve cero. Luego, *el producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes es cero si alguno de los ejes es un eje de simetría*. Por ejemplo, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero para las áreas mostradas en las Figs. C-7, C-8, C-9a, C-9b, y C-12. Por contraste, el producto de inercia tiene un valor diferente de cero y positivo para las áreas mostradas en las Figs. C-6, C-9c y C-11. Estas conclusiones son válidas para productos de inercia con respecto a los ejes particulares xy mostrados en las figuras; por supuesto, el producto de inercia de un área cambia cuando los ejes se trasladan a otra posición.

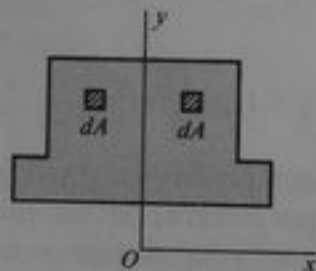


Fig. C-13 El producto de inercia es igual a cero cuando un eje es un eje de simetría

Los productos de inercia de un área con respecto a conjuntos de ejes paralelos se relacionan mediante un teorema de ejes paralelos análogo a los teoremas correspondientes para momentos de inercia y para momentos polares de inercia. Para obtener este teorema consideremos nuevamente el área mostrada en la Fig. C-10 y denotemos por $I_{x_c y_c}$ el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales $x_c y_c$. El producto de inercia I_{xy} con respecto a cualquier conjunto de ejes, paralelo a los ejes $x_c y_c$, es

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x + d_2)(y + d_1) dA \\ &= \int xy dA + d_1 \int x dA + d_2 \int y dA + d_1 d_2 \int dA \end{aligned}$$

en donde d_1 y d_2 son las coordenadas del centroide C con respecto a los ejes xy (luego, d_1 y d_2 pueden tener valores positivos o negativos). La primera integral en la última expresión es el producto de inercia $I_{x_c y_c}$ con respecto a los ejes centroidales; la segunda y tercera integrales se vuelven cero, ya que son los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; y la última integral es el área A . De modo que la ecuación anterior se reduce a

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2 \quad (\text{C-14})$$

Esta ecuación representa el **teorema de los ejes paralelos** para productos de inercia: *El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes alojados en su plano, es igual al producto de inercia con respecto a los ejes centroidales paralelos más el producto del área y las coordenadas del centroide con respecto al par de ejes.*

Para demostrar el uso del teorema de los ejes paralelos, determinemos el producto de inercia de un rectángulo con respecto a los ejes xy con el origen en una esquina (Fig. C-14). El producto de inercia con respecto a los ejes centroidales x_c y y_c es cero, porque son ejes de simetría. También, las coordenadas del centroide con respecto a los ejes xy son

$$d_1 = \frac{h}{2} \quad d_2 = \frac{b}{2}$$

Sustituyendo en la Ec. (C-14), obtenemos

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2 = 0 + bh \left(\frac{h}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{b^2 h^2}{4} \quad (\text{a})$$

El producto de inercia es positivo ya que toda el área está alojada en el primer cuadrante. Si los ejes xy se trasladan horizontalmente de tal forma que el origen se mueve al punto B en la esquina inferior derecha del rectángulo (Fig. C-14), toda el área queda alojada en el segundo cuadrante y el producto de inercia resulta $-b^2 h^2/4$.

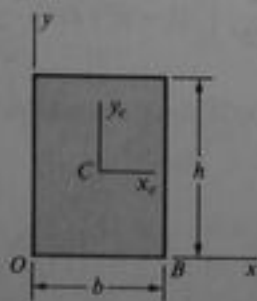


Fig. C-14 Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia

Ejemplo 1

Determinar el producto de inercia I_{xy} de un triángulo rectángulo (Fig. C-15) con respecto a ejes xy con el origen en el vértice de 90° , y determinar el producto de inercia $I_{x_c y_c}$ con respecto a los ejes centroidales paralelos.

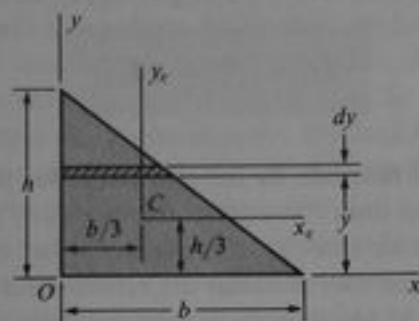


Fig. C-15 Ejemplo 1

Consideremos un elemento de área dA en forma de una franja horizontal delgada de altura dy y ancho igual a

$$\frac{(h-y)b}{h}$$

(véase Fig. C-15). El producto de inercia de esta franja (la cual puede considerarse como un rectángulo) con respecto a ejes que pasan a través de su propio centroide y son paralelos a los ejes xy es cero (por simetría). Por lo tanto su producto de inercia dI_{xy} con respecto a los ejes xy (del teorema de los ejes paralelos) es

$$dI_{xy} = dA d_1 d_2 = \left[\frac{(h-y)b dy}{h} \right] [y] \left[\frac{(h-y)b}{2h} \right] = \frac{b^2}{2h^2} (h-y)^2 y dy$$

El producto de inercia I_{xy} del triángulo se obtiene por integración:

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h-y)^2 y dy = \frac{b^2 h^2}{24} \quad (b)$$

El producto de inercia con respecto a los ejes centroidales paralelos puede determinarse ahora a partir del teorema de los ejes paralelos:

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A d_1 d_2 = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right) \left(\frac{b}{3} \right) = -\frac{b^2 h^2}{72} \quad (c)$$

Estos resultados se proporcionan en los casos 6 y 7 del Apéndice D.

Ejemplo 2

Determinar el producto de inercia I_{xy} de la sección Z mostrada en la Fig. C-9c.

Dividimos la sección en tres rectángulos, un rectángulo para el alma de ancho $b - b_1$ y altura h y dos rectángulos para dos patines de altura $(h - h_1)/2$ y ancho b_1 . El producto de inercia del rectángulo del alma es cero (por simetría). El producto de inercia $(I_{xy})_1$ del patin superior se determina usando el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_{xy})_1 = I_{x_1 y_1} + A d_1 d_2 = 0 + b_1 \left(\frac{h - h_1}{2} \right) \left(\frac{h + h_1}{4} \right) \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{bb_1}{16} (h^2 - h_1^2)$$

El producto de inercia del rectángulo del patin inferior es el mismo; de modo que el producto de inercia de toda la sección Z es

$$I_{xy} = \frac{bb_1}{8} (h^2 - h_1^2) \quad (d)$$

Obsérvese que este producto de inercia es positivo ya que los patines se alojan en el primer y tercer cuadrantes.

C.7 ROTACIÓN DE EJES

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición de los ejes de referencia. Además, para un origen dado, los momentos y productos de inercia varían según se giran los ejes respecto al origen. La forma en que varían, y las magnitudes de los valores máximo y mínimo, se consideran en esta sección y en la siguiente.

Consideremos el área plana mostrada en la Fig. C-16, y supongamos que los ejes xy son un par de ejes de referencia localizados arbitrariamente. Los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes $x_1 y_1$ son

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (a)$$

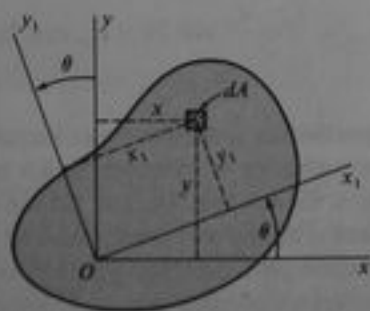


Fig. C-16 Rotación de ejes

donde x y y son las coordenadas de un elemento de área dA . Los ejes x_1y_1 tienen el mismo origen pero están girados un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a los ejes xy . Los momentos y producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 se denotan por I_{x_1} , I_{y_1} , e $I_{x_1y_1}$, respectivamente. Para obtener esas cantidades, necesitamos las coordenadas x_1 y y_1 del elemento dA ; estas coordenadas pueden expresarse en términos de las coordenadas xy y el ángulo θ , como sigue:

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y_1 = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (\text{b})$$

Entonces el momento de inercia con respecto al eje x_1 es

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int y_1^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA \end{aligned}$$

o bien, usando las Ecs. (a),

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{c})$$

Ahora introducimos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) & \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

Entonces la Ec. (c) resulta

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{C-15a})$$

En forma similar, podemos obtener el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 :

$$\begin{aligned} I_{x_1y_1} &= \int x_1y_1 dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA \\ &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Usando nuevamente las identidades trigonométricas, obtenemos

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (\text{C-15b})$$

Luego, las Ecs. (C-15) proporcionan el momento de inercia I_{x_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$, con respecto a los ejes girados en términos de los momentos y el producto de inercia para los ejes originales. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia**. Obsérvese que tienen la misma forma que las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (Ecs. 6-4, Sección 6.2), con I_x correspondiendo a σ_x , I_y correspondiendo a σ_y , I_{xy} correspondiendo a τ_{xy} , I_x correspondiendo a σ_x , I_y correspondiendo a σ_y , y $-I_{xy}$ correspondiendo a τ_{xy} . Por lo tanto, podemos analizar tam-

bién momentos y productos de inercia mediante el uso del círculo de Mohr (véase Sección 6.4).

El momento de inercia I_{y_1} se obtiene mediante el mismo procedimiento utilizado para I_x e I_{x_1} ; luego,

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int x_1^2 dA = \int (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2 dA \\ &= I_x \operatorname{sen}^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo las identidades trigonométricas, obtenemos

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (\text{C-16})$$

Tomando la suma de I_{x_1} e I_{y_1} , encontramos

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \quad (\text{C-17})$$

Esta ecuación muestra que la suma de los momentos de inercia con respecto a un par de ejes permanece constante según se giran los ejes respecto al origen. Esta suma es el momento polar de inercia del área con respecto al origen.

C.8 EJES PRINCIPALES

Las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia de un área fueron obtenidas en la sección anterior (véanse Ecs. C-15). Estas ecuaciones muestran cómo varían las cantidades de inercia según varía el ángulo de rotación θ . Son de especial interés los valores máximo y mínimo del momento de inercia; tales valores se conocen como **momentos de inercia principales**, y los ejes correspondientes se conocen como **ejes principales**.

Para hallar los valores del ángulo θ que hacen máximo o mínimo el momento de inercia I_{x_1} , tomamos la derivada con respecto a θ de la expresión sobre el lado derecho de la Ec. (C-15a) y la igualamos a cero:

$$(I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad (\text{a})$$

Despejando θ de esta ecuación, obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{C-18})$$

en la cual θ_p denota el ángulo que define un eje principal. Este mismo resultado se obtiene si tomamos la derivada de I_{y_1} (Ec. C-16). De la Ec. (C-18) se obtienen dos valores del ángulo $2\theta_p$ en el intervalo de 0 a 360° ; estos valores difieren en 180° . Los dos valores correspondientes de θ_p difieren en 90° y definen los dos ejes principales perpendiculares, uno de los cuales corresponde al momento de inercia máximo y el otro corresponde al momento de inercia mínimo.

Examinemos ahora la variación en el producto de inercia $I_{x'y'}$, según varía θ (véase Ec. C-15b). Si $\theta = 0$, obtenemos $I_{x'y'} = I_{xy}$, como era de esperarse. Si $\theta = 90^\circ$, obtenemos $I_{x'y'} = -I_{xy}$. Luego, durante una rotación de 90° el producto de inercia cambia de signo, lo cual significa que, para algunas orientaciones de los ejes, el producto de inercia se vuelve nulo. Para determinar otras orientaciones, hacemos $I_{x'y'}$ (Ec. C-15b) igual a cero:

$$(I_x - I_y) \sin 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Esta ecuación es la misma que la Ec. (a), la cual define el ángulo θ_p a los ejes principales. Por lo tanto, concluimos que *el producto de inercia es cero para los ejes principales*.

En la Sección C.6 mostramos que el producto de inercia de un área es cero con respecto a cualquier par de ejes, de los cuales uno de ellos es el de simetría. Ello muestra que, si un área tiene un eje de simetría, ese eje y cualquier eje perpendicular a él constituyen un conjunto de ejes principales.

Las observaciones anteriores pueden resumirse como sigue: (1) los ejes principales a través de un origen O son un par de ejes ortogonales para los cuales los momentos de inercia son un máximo y un mínimo; (2) la orientación de los ejes principales está dada por el ángulo θ_p obtenido de la Ec. (C-18); (3) el producto de inercia es cero para los ejes principales; y (4) un eje de simetría siempre es un eje principal.

Considérese ahora un par de ejes principales con su origen en un punto dado O . Si existe un par diferente de ejes principales a través de ese mismo punto, entonces ello muestra que cada par de ejes a través de ese punto es un conjunto de ejes principales. Además, el momento de inercia debe ser constante según varía el ángulo θ . Estas conclusiones surgen de las propiedades de la ecuación de transformación para I_x (Ec. C-15a). Como esta ecuación contiene funciones trigonométricas del ángulo 2θ , hay un valor máximo y un valor mínimo de I_x , según varía 2θ en un intervalo de 360° , o según varía θ en un intervalo de 180° . Si existe un segundo máximo, entonces la única posibilidad es que I_x permanezca constante, lo cual significa que cada par de ejes es un conjunto de ejes principales y que todos los momentos de inercia son los mismos.

Un ejemplo de esta situación es el rectángulo de ancho $2b$ y altura b mostrado en la Fig. C-17. Los ejes xy , con origen en el punto O , son ejes principales del rectángulo porque el eje y es un eje de simetría. Los ejes $x'y'$, con el mismo origen, también son ejes principales porque el producto de inercia $I_{x'y'}$ es igual a cero (ya que los triángulos están localizados simétricamente con respecto a los ejes x' y y'). Por lo tanto, cada par de ejes a través de O es un conjunto de ejes principales y cada momento de inercia es el mismo (e igual a $2b^4/3$).

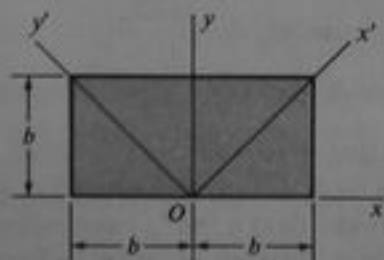


Fig. C-17 Ejemplo en el que cada eje a través del punto cero es un eje principal

Un útil corolario de la proposición descrita en los dos párrafos anteriores se aplica a ejes que pasan a través del centroide C de un área. Si un área tiene dos pares *diferentes* de ejes centroidales tales que al menos un eje en cada par es un eje de simetría, entonces cada eje centroidal es un eje principal y todos los momentos de inercia son los mismos. En la Fig. C-18 se muestran dos ejemplos, un cuadrado y un triángulo equilátero. En cada caso, los ejes xy son ejes principales porque al menos uno de los dos ejes es un eje de simetría. También, un segundo par de ejes (los ejes $x'y'$) tiene al menos un eje de simetría. Ello muestra que los ejes xy y $x'y'$ son ejes principales, y por lo tanto cada eje a través de C es un eje principal y tiene el mismo momento de inercia.

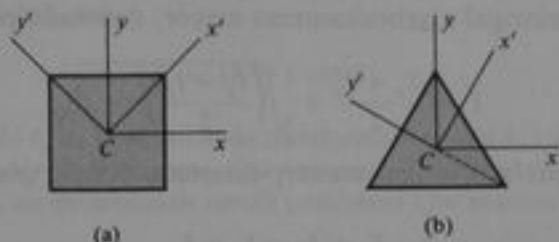


Fig. C-18 Áreas para las cuales cada eje centroidal es un eje principal: (a) un cuadrado, y (b) un triángulo equilátero

Si un área tiene tres diferentes ejes de simetría, las condiciones descritas en el párrafo anterior se satisfacen automáticamente. (Obsérvese que las condiciones se satisfacen para dos ejes de simetría diferentes sólo si los ejes no son perpendiculares.) De aquí concluimos que, si un área tiene tres o más ejes de simetría, todos los ejes centroidales son ejes principales y todos los momentos de inercia son iguales. Estas condiciones se llenan por completo para un círculo y para polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etcétera).

Consideremos ahora la determinación de los momentos de inercia principales, suponiendo que I_x , I_y e I_{xy} son conocidos. Un método es determinar los dos valores de θ_p (que difieren en 90°) de la Ec. (C-18) y sustituirlos entonces en la Ec. (C-15a) para $I_{x'}$. Los dos valores resultantes son los momentos de inercia principales, denotados por I_1 e I_2 . La ventaja de este método es que conocemos cuál de los dos ángulos principales θ_p corresponde a cada momento de inercia principal.

También es posible obtener fórmulas generales para los momentos de inercia principales. Observamos de la Ec. (C-18) y de la Fig. C-19 que

$$\cos 2\theta_p = \frac{I_x - I_y}{2R} \quad \text{sen } 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{R} \quad (\text{C-19a, b})$$

donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{C-20})$$

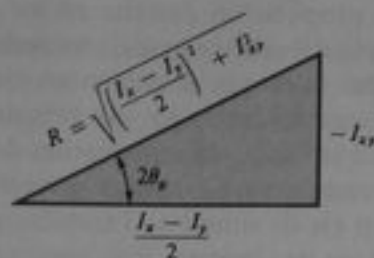


Fig. C-19

Cuando evaluamos R , siempre tomamos la raíz cuadrada positiva. Ahora sustituimos las expresiones para $\cos 2\theta_p$ y $\sin 2\theta_p$ en la Ec. (C-15a) y obtenemos el momento de inercia principal algebraicamente mayor, denotado por I_1 :

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{C-21a})$$

El momento de inercia principal menor, denotado por I_2 , puede obtenerse de la ecuación

$$I_1 + I_2 = I_x + I_y$$

(véase Ec. C-17). Sustituyendo la expresión para I_1 en esta ecuación y despejando I_2 , obtenemos

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{C-21b})$$

Las Ecs. (C-21) proporcionan una forma conveniente para calcular los momentos de inercia principales.

Ejemplo

Determinar las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes de los momentos de inercia centroidales principales para el área de sección transversal de la sección Z mostrada en la Fig. C-20. Usar los siguientes datos numéricos: $h = 16$ plg, $b = 7$ plg y $t = 1.1$ plg.

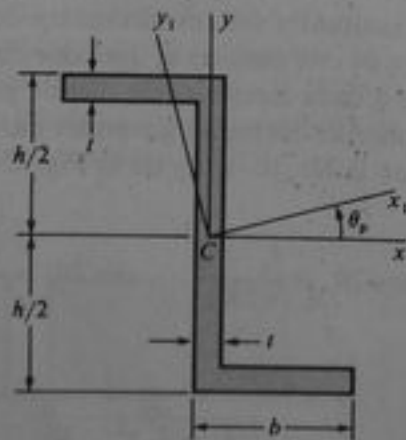


Fig. C-20 Ejemplo. Ejes principales de una sección Z

Usemos los ejes xy (Fig. C-20) como los ejes de referencia a través del centroide C . Los momentos y producto de inercia con respecto a esos ejes pueden obtenerse dividiendo el área en tres rectángulos y aplicando los teoremas de ejes paralelos. Los resultados de tales cálculos son los siguientes:

$$I_x = 1097 \text{ plg}^4 \qquad I_y = 198.4 \text{ plg}^4 \qquad I_{xy} = -338.5 \text{ plg}^4$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación para el ángulo θ_p (Ec. C-18), obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0.7534 \qquad 2\theta_p = 37.0^\circ \text{ y } 217.0^\circ$$

Luego, los dos valores de θ_p son

$$\theta_p = 18.5^\circ \text{ y } 108.5^\circ$$

Usando estos valores de θ_p en la ecuación de transformación para I_x (Ec. C-15a), hallamos $I_{x_1} = 1210 \text{ plg}^4$ y 85 plg^4 , respectivamente. Estos mismos valores se obtienen si sustituimos en las Ecs. (C-21). Luego, los momentos de inercia principales y los ángulos a los ejes correspondientes son:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1210 \text{ plg}^4 & \theta_{p1} &= 18.5^\circ \\ I_2 &= 85 \text{ plg}^4 & \theta_{p2} &= 108.5^\circ \end{aligned}$$

Los ejes principales se muestran en la Fig. C-20 como los ejes x_1y_1 .

PROBLEMAS / APÉNDICE C

Los problemas para la Sección C.1 deben resolverse por integración.

C.1-1 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un triángulo rectángulo cuya base es b y cuya altura es h (véase Caso 6, Apéndice D).

C.1-2 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un trapecoide que tiene bases a y b y altura h (véase Caso 8, Apéndice D).

C.1-3 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un semicírculo de radio r (véase Caso 11, Apéndice D).

C.1-4 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un arco parabólico de base b y altura h (véase Caso 19, Apéndice D).

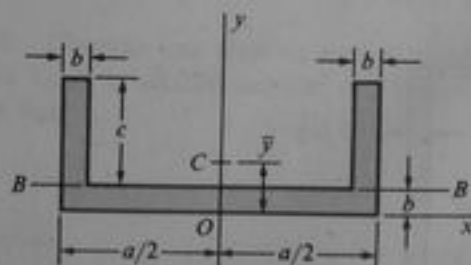
C.1-5 Determine las distancias \bar{x} y \bar{y} al centroide C de un semisegmento de grado n -ésimo con base b y altura h (véase Caso 20, Apéndice D).

Los problemas de la Sección C.2 deben resolverse aplicando las fórmulas para áreas compuestas.

C.2-1 Determine la distancia \bar{y} al centroide C de un trapecoide que tiene bases a y b y altura h (véase

Caso 8, Apéndice D) dividiendo el trapecoide en dos triángulos.

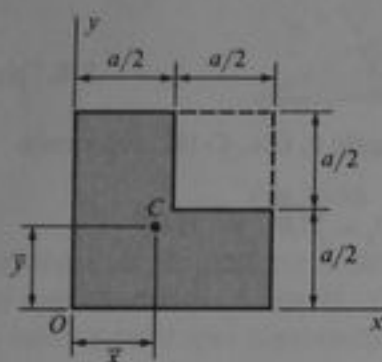
C.2-2 Calcule la distancia \bar{y} al centroide C de la sección canal mostrada en la figura si $a = 6 \text{ plg}$, $b = 1 \text{ plg}$ y $c = 2 \text{ plg}$.



Probs. C.2-2, C.2-3 y C.4-2

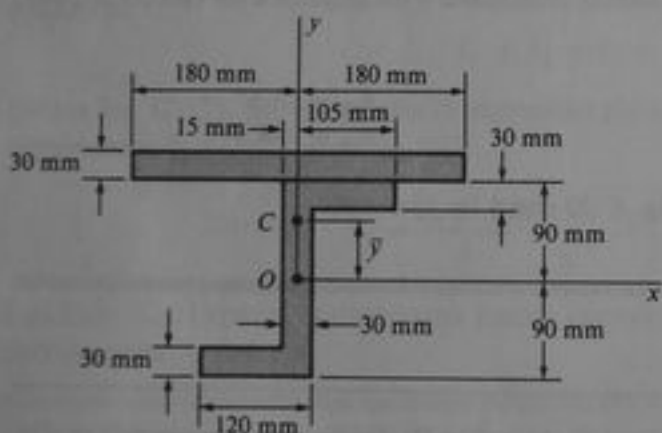
C.2-3 ¿Cuál debe ser la relación entre las dimensiones a , b y c de la sección canal mostrada en la figura a fin de que el centroide C quede alojado en la línea BB ?

C.2-4 Se recorta la cuarta parte de un cuadrado de lado a (véase figura). ¿Cuáles son las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área restante?



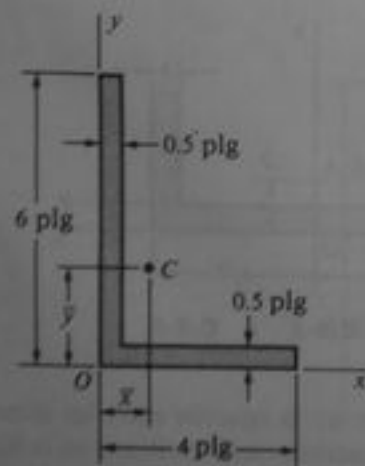
Probs. C.2-4 y C.4-4

C.2-5 Determine la distancia \bar{y} al centroide C del área mostrada en la figura.



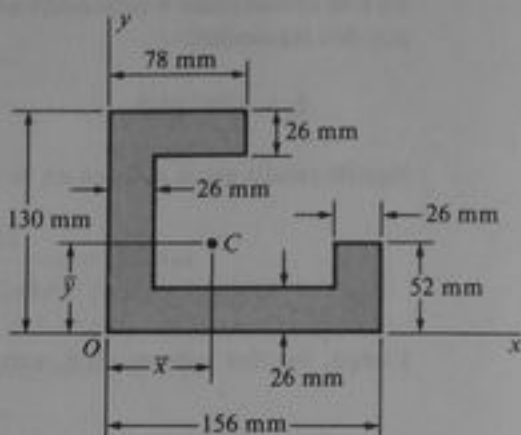
Probs. C.2-5, C.4-5 y C.6-5

C.2-6 Determine las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área con forma de L mostrada en la figura.



Probs. C.2-6, C.3-6, C.4-6 y C.6-6

C.2-7 Determine las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide C del área mostrada en la figura.



Probs. C.2-7, C.4-7 y C.6-7

Los problemas C.3-1 a C.3-4 deben resolverse por integración.

C.3-1 Determine el momento de inercia I_x de un triángulo de base b y altura h con respecto a su base (véase Caso 4, Apéndice D).

C.3-2 Determine el momento de inercia I_{nn} de un trapecoide que tiene bases a y b y altura h con respecto a la base b (véase Caso 8, Apéndice D).

C.3-3 Determine el momento de inercia I_x de un arco parabólico de base b y altura h con respecto a su base (véase Caso 19, Apéndice D).

C.3-4 Determine el momento de inercia I de un círculo de radio r con respecto a un diámetro (véase Caso 9, Apéndice D).

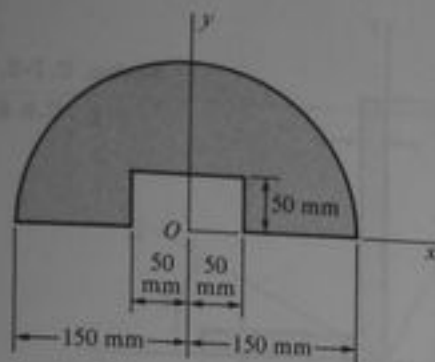
Los problemas C.3-5 a C.3-8 deben resolverse considerando que el área es un área compuesta.

C.3-5 Determine el momento de inercia I de un rectángulo que tiene lados de longitud a y b con respecto a una diagonal del rectángulo.

C.3-6 Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y , respectivamente, para el área con forma de L mostrada en la figura para el Problema C.2-6.

C.3-7 Un área semicircular de 150 mm de radio presenta un recorte rectangular de dimensiones 50 mm \times 100 mm (véase figura). Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y , respectivamente.

C.3-8 Calcule los momentos de inercia I_1 e I_2 de una sección W 16 \times 100 usando las dimensiones de la sección transversal dadas en la Tabla E-1 del Apéndice



Prob. C.3-7

ce E. (Omita las áreas de sección transversal de los chaflanes.)

Los problemas de la Sección C.4 deben resolverse aplicando el teorema de los ejes paralelos.

C.4-1 Calcule el momento de inercia I_x de una sección W 12 \times 50 con respecto a su base.

C.4-2 Calcule los momentos de inercia I_x e I_y para la sección canal descrita en el Problema C.2-2.

C.4-3 Calcule el momento de inercia I_x de una sección angular L 4 \times 4 \times 1/2 con respecto a un eje a lo largo del lado externo de un brazo del ángulo. (Use los datos de la Tabla E-4, Apéndice E.)

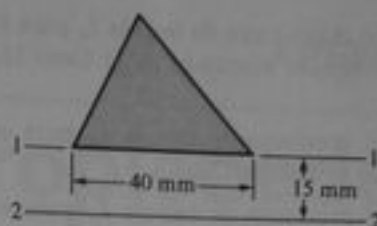
C.4-4 Determine el momento de inercia I_x con respecto a un eje a través del centroide C paralelo a uno de los lados para la figura descrita en el Problema C.2-4.

C.4-5 Calcule el momento de inercia I_x con respecto a un eje a través del centroide C paralelo al eje x para el área compuesta mostrada en el Problema C.2-5.

C.4-6 Calcule los momentos de inercia centroidales I_x e I_y con respecto a ejes que pasen por el centroide C y paralelos a los ejes x y y , respectivamente, para el área en forma de L mostrada en el Problema C.2-6.

C.4-7 Calcular los momentos de inercia I_x e I_y para el área mostrada en el Problema C.2-7.

C.4-8 El momento de inercia con respecto al eje 1-1 del triángulo mostrado en la figura es $90 \times 10^3 \text{ mm}^4$. Calcule su momento de inercia I_2 con respecto al eje 2-2.



Prob. C.4-8

C.5-1 Determine el momento polar de inercia I_p de un triángulo isósceles de base b y altura h con respecto a su vértice.

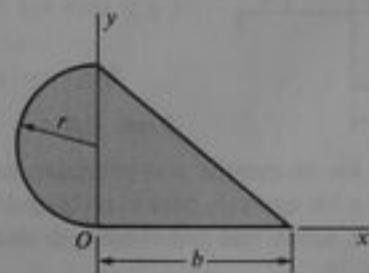
C.5-2 Determine el momento polar de inercia I_p de una sección W 8 \times 21 con respecto a una de sus esquinas exteriores.

C.5-3 Determine el momento polar de inercia I_p con respecto al centroide C para un arco de cuadrante de círculo (véase Caso 13, Apéndice D).

C.5-4 Determine el momento polar de inercia I_p con respecto al centroide C para un sector circular (véase Caso 14, Apéndice D).

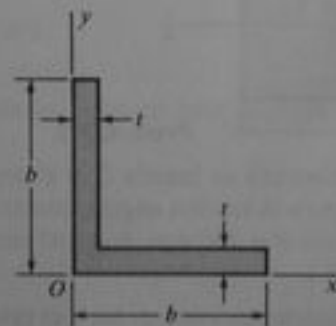
C.6-1 Determine el producto de inercia I_{xy} con respecto a los ejes centroidales para el semisegmento parabólico OAB mostrado en la Fig. C-11.

C.6-2 Halle la relación entre el radio r y la distancia b para el área compuesta mostrada en la figura a fin de que el producto de inercia I_{xy} sea cero.



Prob. C.6-2

C.6-3 Obtenga una fórmula para el producto de inercia I_{xy} de la sección angular con brazos iguales (véase figura).



Prob. C.6-3

C.6-4 Determine el producto de inercia I_{xy} para el arco de cuarto de círculo mostrado en el Caso 13, Apéndice D.

C.6-5 Calcule el producto de inercia I_{xy} para el área mostrada en el Problema C.2-5.

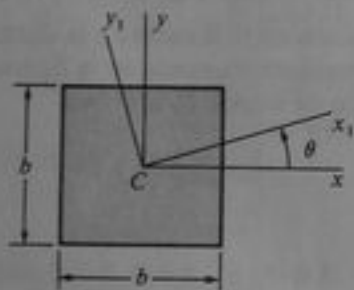
C.6-6 Calcule el producto de inercia I_{xy} para el área con forma de L mostrada en el Problema C.2-6.

C.6-7 Calcule el producto de inercia I_{xy} para el área mostrada en el Problema C.2-7.

C.6-8 Calcule el producto de inercia I_{12} con respecto a los ejes centroidales 1-1 y 2-2 para una sección angular L $6 \times 6 \times 1$ plg (véase Tabla E-4, Apéndice E). (Omita las áreas de sección transversal de los chaflanes.)

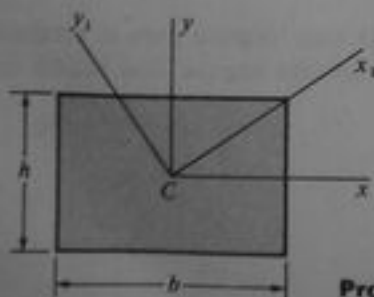
Los problemas de la Sección C.7 deben resolverse aplicando las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.

C.7-1 Determine los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1 y_1}$ para el cuadrado mostrado en la figura. Obsérvese que los ejes $x_1 y_1$ son ejes centroidales girados un ángulo θ con respecto a los ejes xy .



Prob. C.7-1

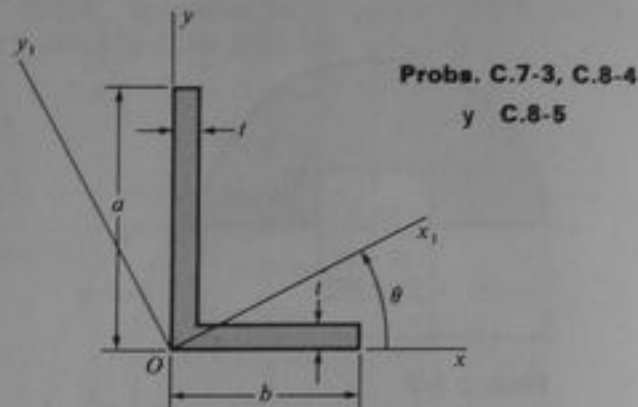
C.7-2 Determine los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes $x_1 y_1$ para el rectángulo mostrado en la figura. Obsérvese que el eje x_1 es una diagonal del rectángulo.



Prob. C.7-2

C.7-3 Calcule el momento de inercia I_x y el producto de inercia I_{xy} para la sección angular mostrada en la figura. (Suponer $a = 150$ mm, $b = 100$ mm, $t = 15$ mm y $\theta = 30^\circ$.)

C.8-1 Determine las orientaciones de los ejes principales a través del origen O para el triángulo rectán-



**Probs. C.7-3, C.8-4
y C.8-5**

gulo mostrado en la Fig. C-15 si $b = 60$ mm y $h = 80$ mm. Calcule también los momentos de inercia principales I_1 e I_2 .

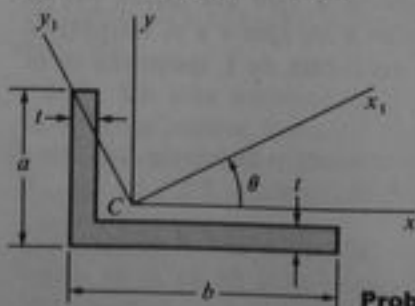
C.8-2 Determine las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes I_1 e I_2 de los momentos de inercia centroidales principales para el área de la sección transversal de la sección Z mostrada en la Fig. C-20, si $h = 10$ plg, $b = 5$ plg y $t = 1$ plg.

C.8-3 Determine las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes I_1 e I_2 de los momentos de inercia centroidales principales para el área de la sección transversal de la sección Z mostrada en la Fig. C-20, si $h = 200$ mm, $b = 130$ mm y $t = 20$ mm.

C.8-4 Determine las orientaciones de los ejes principales a través del origen O y las magnitudes I_1 e I_2 de los momentos de inercia principales para el área en forma de L mostrada en la figura, si $a = 6$ plg, $b = 4$ plg y $t = 1$ plg.

C.8-5 Resuelva el problema anterior, si $a = 140$ mm, $b = 120$ mm y $t = 20$ mm.

C.8-6 Determine las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes I_1 e I_2 de los momentos de inercia centroidales principales para el área en forma de L mostrada en la figura, si $a = 4$ plg, $b = 6$ plg y $t = 1$ plg.



Probs. C.8-6 y C.8-7

C.8-7 Resuelva el problema anterior si $a = 50$ mm, $b = 100$ mm y $t = 10$ mm.

Propiedades de áreas planas

Notación: A = área

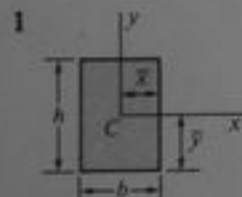
\bar{x}, \bar{y} = distancias al centroide C

I_x, I_y = momentos de inercia con respecto a los ejes x y y , respectivamente

I_{xy} = producto de inercia con respecto a los ejes x y y

$I_p = I_x + I_y$ = momento polar de inercia

I_{BB} = momento de inercia con respecto al eje $B-B$

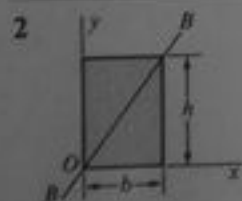


Rectángulo (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

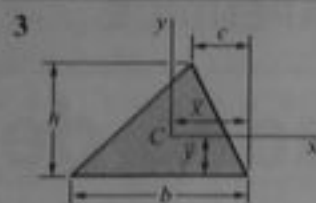
$$I_{xy} = 0 \quad I_p = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$



Rectángulo (Origen de los ejes en una esquina.)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \quad I_p = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2) \quad I_{BB} = \frac{b^3h^2}{6(b^2 + h^2)}$$

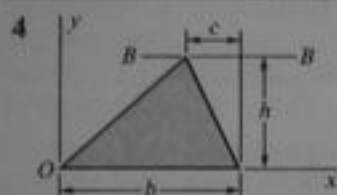


Triángulo (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

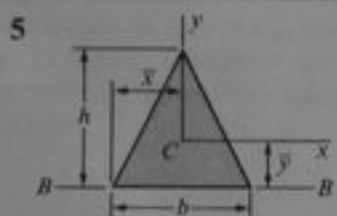
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \quad I_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$



Triángulo (Origen de los ejes en el vértice.)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \quad I_{nv} = \frac{bh^3}{4}$$



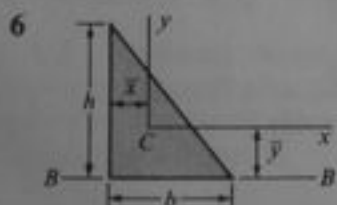
Triángulo isósceles (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{hb^3}{48} \quad I_{xy} = 0$$

$$I_p = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) \quad I_{nv} = \frac{bh^3}{12}$$

(Nota: Para un triángulo equilátero, $h = \sqrt{3}b/2$.)

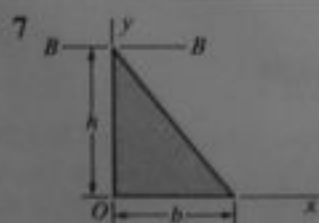


Triángulo rectángulo (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{hb^3}{36} \quad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

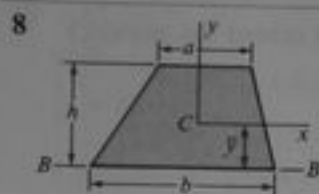
$$I_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2) \quad I_{nv} = \frac{bh^3}{12}$$



Triángulo rectángulo (Origen de los ejes en el vértice.)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

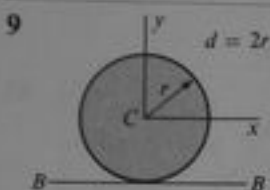
$$I_p = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \quad I_{nv} = \frac{bh^3}{4}$$



Trapezoide (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

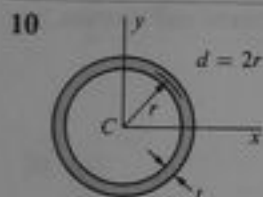
$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \quad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$



Círculo (Origen de los ejes en el centro.)

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

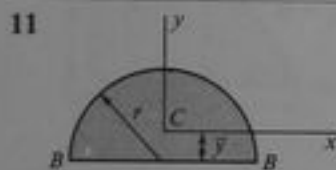
$$I_{xy} = 0 \quad I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$



Anillo circular (Origen de los ejes en el centro.)
Fórmulas aproximadas para el caso cuando t es pequeño.

$$A = 2\pi r t = \pi d t \quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_p = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

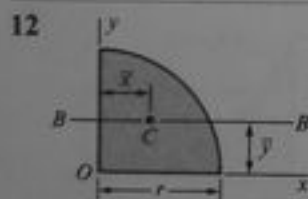


Semicírculo (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

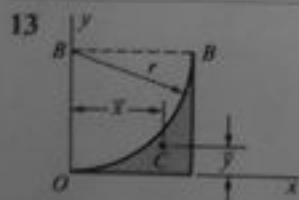


Cuadrante de círculo (Origen de los ejes en el centro del círculo.)

$$A = \frac{\pi r^2}{4} \quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16} \quad I_{xy} = \frac{r^4}{8}$$

$$I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0.05488r^4$$



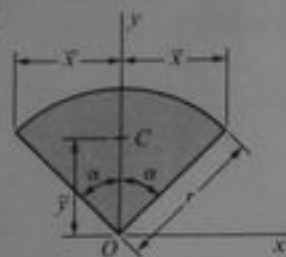
Arco de cuadrante de círculo (Origen de los ejes en el vértice.)

$$A = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2$$

$$\bar{x} = \frac{2r}{3(4-\pi)} \approx 0.7766r \quad \bar{y} = \frac{(10-3\pi)r}{3(4-\pi)} \approx 0.2234r$$

$$I_x = \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.01825r^4 \quad I_y = I_{BB} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.1370r^4$$

14



Sector circular (Origen de los ejes en el centro del círculo.)

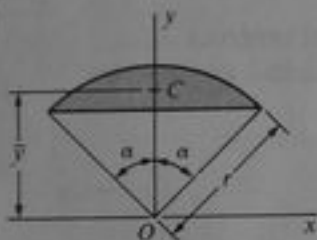
$$\alpha = \text{ángulo en radianes} \quad \left(\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A = \alpha r^2 \quad \bar{x} = r \sin \alpha \quad \bar{y} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \quad I_y = \frac{r^4}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_p = \frac{\alpha r^4}{2}$$

15



Segmento circular (Origen de los ejes en el centro del círculo.)

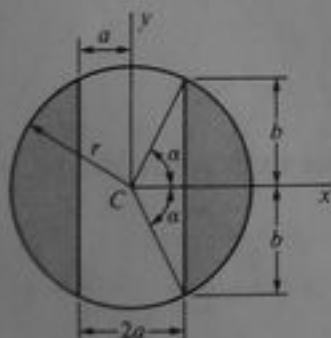
$$\alpha = \text{ángulo en radianes} \quad \left(\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A = r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \quad \bar{y} = \frac{2r}{3} \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha) \quad I_{xy} = 0$$

$$I_y = \frac{r^4}{12} (3\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha)$$

16



Círculo con núcleo removido (Origen de los ejes en el centro del círculo.)

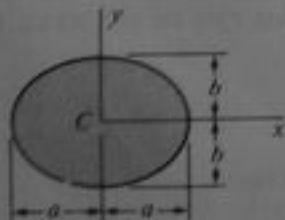
$$\alpha = \text{ángulo en radianes} \quad \left(\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\alpha = \arccos \frac{a}{r} \quad b = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$A = 2r^2 \left(\alpha - \frac{ab}{r^2} \right) \quad I_{xy} = 0$$

$$I_x = \frac{r^4}{6} \left(3\alpha - \frac{3ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4} \right) \quad I_y = \frac{r^4}{2} \left(\alpha - \frac{ab}{r^2} + \frac{2ab^3}{r^4} \right)$$

17



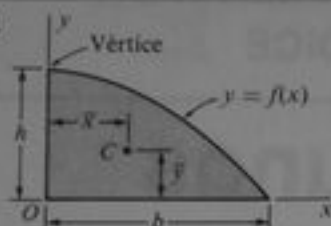
Elipse (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_p = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + a^2)$$

$$\text{Perímetro} \approx \pi [1.5(a + b) - \sqrt{ab}]$$

18


Semisegmento parabólico (Origen de los ejes en la esquina.)

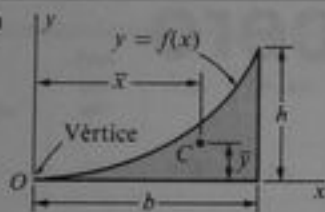
$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \quad I_y = \frac{2hb^3}{15} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

(Origen

19

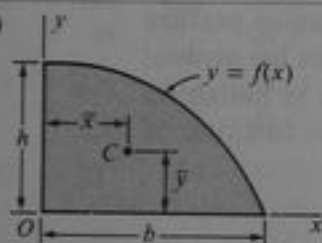

Arco parabólico (Origen de los ejes en el vértice.)

$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{4} \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{21} \quad I_y = \frac{hb^3}{5} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

20


Semisegmento de grado n-ésimo (Origen de los ejes en la esquina.)

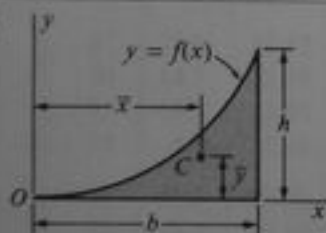
$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^n}{b^n} \right) \quad n > 0$$

$$A = bh \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)} \quad \bar{y} = \frac{hn}{2n+1}$$

$$I_x = \frac{2bh^3n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)}$$

$$I_y = \frac{hb^3n}{3(n+3)} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2n^2}{4(n+1)(n+2)}$$

21

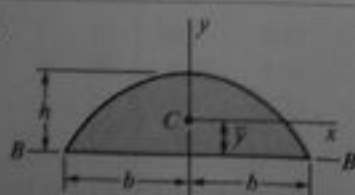

Arco de grado n-ésimo (Origen de los ejes en el vértice.)

$$y = f(x) = \frac{hx^n}{b^n} \quad n > 0$$

$$A = \frac{bh}{n+1} \quad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{n+2} \quad \bar{y} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)} \quad I_y = \frac{hb^3}{n+3} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4(n+1)}$$

22


Onda senoidal (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{4bh}{\pi} \quad \bar{y} = \frac{\pi h}{8}$$

$$I_x = \left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16} \right) bh^3 \approx 0.08659bh^3 \quad I_y = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3} \right) hb^3 \approx 0.2412hb^3$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{8bh^3}{9\pi}$$

Propiedades de algunos perfiles estructurales de acero

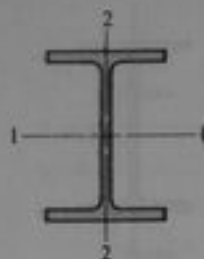
En las siguientes tablas, se presentan las propiedades de unos cuantos perfiles estructurales de acero, como una ayuda para el lector en la solución de los problemas del texto. Estas tablas se resumieron de las extensas tablas que se hallan en el *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., publicado por el American Institute of Steel Construction, Inc., 1980 (Ref. 5-5).

Notación:

I = momento de inercia

S = módulo de sección

$r = \sqrt{I/A}$ = radio de giro

**Tabla E-1 PROPIEDADES DE PERFILES W (SECCIONES DE PATÍN ANCHO)
(LISTA CONDENSADA)**


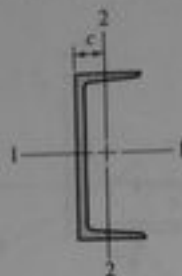
Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patin		Eje 1-1			Eje 2-2		
					Ancho	Epesor	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>r</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>r</i>
					plg	plg	plg ⁴	plg ³	plg	plg ⁴	plg ³	plg
lb	plg ²	plg	plg	plg	plg	plg ⁴	plg ³	plg	plg ⁴	plg ³	plg	
W 30 × 211	211	62.0	30.94	0.775	15.105	1.315	10300	663	12.9	757	100	3.49
W 30 × 132	132	38.9	30.31	0.615	10.545	1.000	5770	380	12.2	196	37.2	2.25
W 24 × 162	162	47.7	25.00	0.705	12.955	1.220	5170	414	10.4	443	68.4	3.05
W 24 × 94	94	27.7	24.31	0.515	9.065	0.875	2700	222	9.87	109	24.0	1.98
W 18 × 119	119	35.1	18.97	0.655	11.265	1.060	2190	231	7.90	253	44.9	2.69
W 18 × 71	71	20.8	18.47	0.495	7.635	0.810	1170	127	7.50	60.3	15.8	1.70
W 16 × 100	100	29.4	16.97	0.585	10.425	0.985	1490	175	7.10	186	35.7	2.51
W 16 × 77	77	22.6	16.52	0.455	10.295	0.760	1110	134	7.00	138	26.9	2.47
W 16 × 57	57	16.8	16.43	0.430	7.120	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
W 16 × 31	31	9.12	15.88	0.275	5.525	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
W 14 × 120	120	35.3	14.48	0.590	14.670	0.940	1380	190	6.24	495	67.5	3.74
W 14 × 82	82	24.1	14.31	0.510	10.130	0.855	882	123	6.05	148	29.3	2.48
W 14 × 53	53	15.6	13.92	0.370	8.060	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
W 14 × 26	26	7.69	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
W 12 × 87	87	25.6	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
W 12 × 50	50	14.7	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
W 12 × 35	35	10.3	12.50	0.300	6.560	0.520	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
W 12 × 14	14	4.16	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W 10 × 60	60	17.6	10.22	0.420	10.080	0.680	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57
W 10 × 45	45	13.3	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
W 10 × 30	30	8.84	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
W 10 × 12	12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W 8 × 35	35	10.3	8.12	0.310	8.020	0.495	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
W 8 × 28	28	8.25	8.06	0.285	6.535	0.465	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
W 8 × 21	21	6.16	8.28	0.250	5.270	0.400	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
W 8 × 15	15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876

Nota: Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

Tabla E-2 PROPIEDADES DE PERFILES S (SECCIONES DE VIGA I)
(LISTA CONDENSADA)

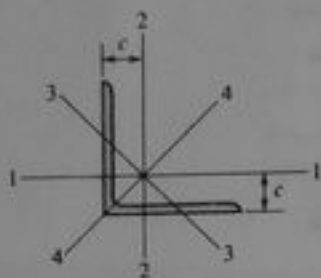
Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patin		Eje 1-1			Eje 2-2		
					Ancho	Espesor promedio	I	S	r	I	S	r
					plg	plg	plg ⁴	plg ³	plg	plg ⁴	plg ³	plg
S 24 × 100	100	29.3	24.00	0.745	7.245	0.870	2390	199	9.02	47.7	13.2	1.27
S 24 × 80	80	23.5	24.00	0.500	7.000	0.870	2100	175	9.47	42.2	12.1	1.34
S 20 × 96	96	28.2	20.30	0.800	7.200	0.920	1670	165	7.71	50.2	13.9	1.33
S 20 × 75	75	22.0	20.00	0.635	6.385	0.795	1280	128	7.62	29.8	9.32	1.16
S 18 × 70	70	20.6	18.00	0.711	6.251	0.691	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
S 18 × 54.7	54.7	16.1	18.00	0.461	6.001	0.691	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14
S 15 × 50	50	14.7	15.00	0.550	5.640	0.622	486	64.8	5.75	15.7	5.57	1.03
S 15 × 42.9	42.9	12.6	15.00	0.411	5.501	0.622	447	59.6	5.95	14.4	5.23	1.07
S 12 × 50	50	14.7	12.00	0.687	5.477	0.659	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
S 12 × 35	35	10.3	12.00	0.428	5.078	0.544	229	38.2	4.72	9.87	3.89	0.980
S 10 × 35	35	10.3	10.00	0.594	4.944	0.491	147	29.4	3.78	8.36	3.38	0.901
S 10 × 25.4	25.4	7.46	10.00	0.311	4.661	0.491	124	24.7	4.07	6.79	2.91	0.954
S 8 × 23	23	6.77	8.00	0.441	4.171	0.426	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
S 8 × 18.4	18.4	5.41	8.00	0.271	4.001	0.426	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
S 6 × 17.25	17.25	5.07	6.00	0.465	3.565	0.359	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
S 6 × 12.5	12.5	3.67	6.00	0.232	3.332	0.359	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
S 4 × 9.5	9.5	2.79	4.00	0.326	2.796	0.293	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
S 4 × 7.7	7.7	2.26	4.00	0.193	2.663	0.293	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581

Nota: Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

**Tabla E-3 PROPIEDADES DE SECCIONES CANAL (PERFILES C)
(LISTA CONDENSADA)**


Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patin		Eje 1-1			Eje 2-2			
					Ancho	Espesor promedio	I	S	r	I	S	r	c
					plg	plg	plg ⁴	plg ³	plg	plg ⁴	plg ³	plg	plg
C 15 × 50	50.0	14.7	15.00	0.716	3.716	0.650	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.798
C 15 × 40	40.0	11.8	15.00	0.520	3.520	0.650	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886	0.777
C 15 × 33.9	33.9	9.96	15.00	0.400	3.400	0.650	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904	0.787
C 12 × 30	30.0	8.82	12.00	0.510	3.170	0.501	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674
C 12 × 25	25	7.35	12.00	0.387	3.047	0.501	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780	0.674
C 12 × 20.7	20.7	6.09	12.00	0.282	2.942	0.501	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698
C 10 × 30	30.0	8.82	10.00	0.673	3.033	0.436	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669	0.649
C 10 × 25	25	7.35	10.00	0.526	2.886	0.436	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676	0.617
C 10 × 20	20.0	5.88	10.00	0.379	2.739	0.436	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692	0.606
C 10 × 15.3	15.3	4.49	10.00	0.240	2.600	0.436	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713	0.634
C 8 × 18.75	18.75	5.51	8.00	0.487	2.527	0.390	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599	0.565
C 8 × 13.75	13.75	4.04	8.00	0.303	2.343	0.390	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615	0.553
C 8 × 11.5	11.5	3.38	8.00	0.220	2.260	0.390	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625	0.571
C 6 × 13	13.0	3.83	6.00	0.437	2.157	0.343	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525	0.514
C 6 × 10.5	10.5	3.09	6.00	0.314	2.034	0.343	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529	0.499
C 6 × 8.2	8.2	2.40	6.00	0.200	1.920	0.343	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537	0.511
C 4 × 7.25	7.25	2.13	4.00	0.321	1.721	0.296	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450	0.459
C 4 × 5.4	5.4	1.59	4.00	0.184	1.584	0.296	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449	0.457

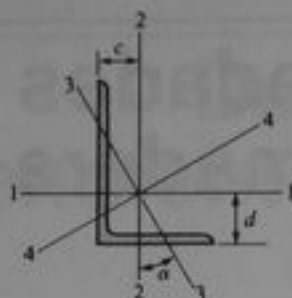
- Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.
 2. La distancia c se mide desde el centroide hasta la cara posterior del alma.
 3. Para el eje 2-2, el valor tabulado de S es el menor de los dos módulos de sección para este eje.

Tabla E-4 PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON BRAZOS IGUALES (PERFILES L) (LISTA CONDENSADA)


Designación	Peso por pie	Área	Eje 1-1 y Eje 2-2				Eje 3-3
			I	S	r	c	r_{min}
plg	lb	plg ²	plg ⁴	plg ³	plg	plg	plg
L 8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
L 8 × 8 × $\frac{3}{4}$	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
L 8 × 8 × $\frac{1}{2}$	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L 6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
L 6 × 6 × $\frac{3}{4}$	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
L 6 × 6 × $\frac{1}{2}$	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
L 5 × 5 × $\frac{7}{8}$	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973
L 5 × 5 × $\frac{1}{2}$	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
L 5 × 5 × $\frac{3}{8}$	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
L 4 × 4 × $\frac{3}{4}$	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
L 4 × 4 × $\frac{1}{2}$	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
L 4 × 4 × $\frac{3}{8}$	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
L 3½ × 3½ × $\frac{3}{8}$	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
L 3½ × 3½ × $\frac{1}{4}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L 3 × 3 × $\frac{1}{2}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
L 3 × 3 × $\frac{1}{4}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592

- Notas:
1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los brazos.
 2. La distancia c se mide desde el centroide hasta la cara posterior de los brazos.
 3. Para los ejes 1-1 y 2-2, el valor tabulado de S es el menor de los dos módulos de sección para esos ejes.
 4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
 5. El momento de inercia para el eje 3-3, el cual es el menor de los dos momentos de inercia principales, puede hallarse de la ecuación $I_{33} = Ar_{min}^2$.
 6. El momento de inercia para el eje 4-4, el cual es el mayor de los dos momentos de inercia principales, puede hallarse de la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

Tabla E-5 PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON BRAZOS DESIGUALES (PERFILES L) (LISTA CONDENSADA)



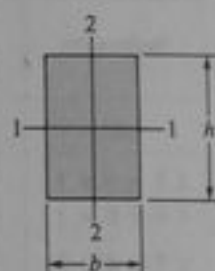
Designación	Peso por pie	Área	Eje 1-1				Eje 2-2				Eje 3-3	
			<i>I</i>	<i>S</i>	<i>r</i>	<i>d</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>r</i>	<i>c</i>	<i>r</i> _{min}	tan α
plg	lb	plg ²	plg ⁴	plg ²	plg	plg	plg ⁴	plg ²	plg	plg	plg	plg
L 8 × 6 × 1	44.2	13.00	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
L 8 × 6 × ½	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
L 7 × 4 × ¾	26.2	7.69	37.8	8.42	2.22	2.51	9.05	3.03	1.09	1.01	0.860	0.324
L 7 × 4 × ½	17.9	5.25	26.7	5.81	2.25	2.42	6.53	2.12	1.11	0.917	0.872	0.335
L 6 × 4 × ¾	23.6	6.94	24.5	6.25	1.88	2.08	8.68	2.97	1.12	1.08	0.860	0.428
L 6 × 4 × ½	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
L 5 × 3½ × ¾	19.8	5.81	13.9	4.28	1.55	1.75	5.55	2.22	0.977	0.996	0.748	0.464
L 5 × 3½ × ½	13.6	4.00	9.99	2.99	1.58	1.66	4.05	1.56	1.01	0.906	0.755	0.479
L 5 × 3 × ¾	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
L 5 × 3 × ½	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371
L 4 × 3½ × ¾	11.9	3.50	5.32	1.94	1.23	1.25	3.79	1.52	1.04	1.00	0.722	0.750
L 4 × 3½ × ½	6.2	1.81	2.91	1.03	1.27	1.16	2.09	0.808	1.07	0.909	0.734	0.759
L 4 × 3 × ¾	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	1.33	2.42	1.12	0.864	0.827	0.639	0.543
L 4 × 3 × ½	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551
L 4 × 3 × ¼	5.8	1.69	2.77	1.00	1.28	1.24	1.36	0.599	0.896	0.736	0.651	0.558

- Notas:
1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los brazos.
 2. Las distancias *c* y *d* se miden desde el centroide hasta la parte posterior de los brazos.
 3. Para los ejes 1-1 y 2-2, el valor tabulado de *S* es el menor de los dos módulos de sección para esos ejes.
 4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
 5. El momento de inercia para el eje 3-3, el cual es el menor de los dos momentos de inercia principales, puede hallarse de la ecuación $I_{33} = Ar_{min}^2$.
 6. El momento de inercia para el eje 4-4, el cual es el mayor de los dos momentos de inercia principales, puede hallarse de la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

Propiedades de sección de madera estructural

PROPIEDADES DE MADERA CEPILLADA (LISTA CONDENSADA)

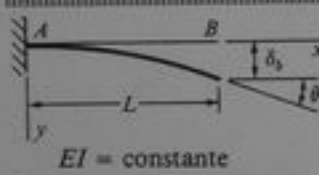
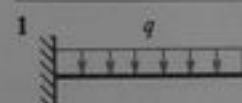
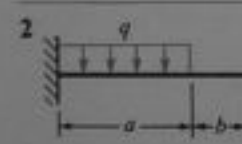
Dimensión nominal $b \times h$	Dimensiones netas $b \times h$	Área $A = bh$	Eje 1-1		Eje 2-2		Peso por pie lineal (Peso específico = 35 lb/pie ³)
			Momento de inercia $I_1 = \frac{bh^3}{12}$	Módulo de sección $S_1 = \frac{bh^2}{6}$	Momento de inercia $I_2 = \frac{b^3h}{12}$	Módulo de sección $S_2 = \frac{b^2h}{6}$	
plg	plg	plg ²	plg ⁴	plg ³	plg ⁴	plg ³	lb
2 × 4	1.5 × 3.5	5.25	5.36	3.06	0.98	1.31	1.3
2 × 6	1.5 × 5.5	8.25	20.80	7.56	1.55	2.06	2.0
2 × 8	1.5 × 7.25	10.88	47.63	13.14	2.04	2.72	2.6
2 × 10	1.5 × 9.25	13.88	98.93	21.39	2.60	3.47	3.4
2 × 12	1.5 × 11.25	16.88	177.98	31.64	3.16	4.22	4.1
3 × 4	2.5 × 3.5	8.75	8.93	5.10	4.56	3.65	2.1
3 × 6	2.5 × 5.5	13.75	34.66	12.60	7.16	5.73	3.3
3 × 8	2.5 × 7.25	18.13	79.39	21.90	9.44	7.55	4.4
3 × 10	2.5 × 9.25	23.13	164.89	35.65	12.04	9.64	5.6
3 × 12	2.5 × 11.25	28.13	296.63	52.73	14.65	11.72	6.8
4 × 4	3.5 × 3.5	12.25	12.51	7.15	12.51	7.15	3.0
4 × 6	3.5 × 5.5	19.25	48.53	17.65	19.65	11.23	4.7
4 × 8	3.5 × 7.25	25.38	111.15	30.66	25.90	14.80	6.2
4 × 10	3.5 × 9.25	32.38	230.84	49.91	33.05	18.89	7.9
4 × 12	3.5 × 11.25	39.38	415.28	73.83	40.20	22.97	9.6
6 × 6	5.5 × 5.5	30.25	76.3	27.7	76.3	27.7	7.4
6 × 8	5.5 × 7.5	41.25	193.4	51.6	104.0	37.8	10.0
6 × 10	5.5 × 9.5	52.25	393.0	82.7	131.7	47.9	12.7
6 × 12	5.5 × 11.5	63.25	697.1	121.2	159.4	58.0	15.4
8 × 8	7.5 × 7.5	56.25	263.7	70.3	263.7	70.3	13.7
8 × 10	7.5 × 9.5	71.25	535.9	112.8	334.0	89.1	17.3
8 × 12	7.5 × 11.5	86.25	950.5	165.3	404.3	107.8	21.0

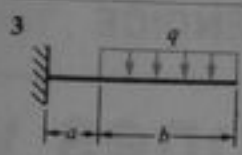


Nota: Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

Deflexiones y pendientes de vigas

Tabla G-1 DEFLEXIONES Y PENDIENTES DE VIGAS EN VOLADIZO

 <p>$EI = \text{constante}$</p>	<p>$v =$ deflexión en la dirección y $v' = dv/dx =$ pendiente de la curva de deflexión $\delta_b = v(L) =$ deflexión en el extremo derecho de la viga $\theta_b = v'(L) =$ ángulo en el extremo derecho de la viga</p>
<p>1</p> 	$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$ $v' = \frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_b = \frac{qL^3}{6EI}$
<p>2</p> 	$v = \frac{qx^2}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$ $v' = \frac{qx}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$ $v = \frac{qa^3}{24EI} (4x - a) \quad v' = \frac{qa^3}{6EI} \quad a \leq x \leq L$ <p>En $x = a$: $v = \frac{qa^4}{8EI} \quad v' = \frac{qa^3}{6EI}$</p> $\delta_b = \frac{qa^3}{24EI} (4L - a) \quad \theta_b = \frac{qa^3}{6EI}$



$$v = \frac{qbx^2}{12EI} (3L + 3a - 2x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{qbx}{2EI} (L + a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \quad a \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{q}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \quad a \leq x \leq L$$

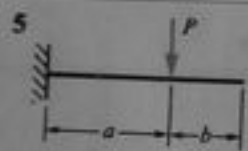
$$\text{En } x = a: \quad v = \frac{qa^2b}{12EI} (3L + a) \quad v' = \frac{qabL}{2EI}$$

$$\delta_b = \frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4) \quad \theta_b = \frac{q}{6EI} (L^3 - a^3)$$



$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x) \quad v' = \frac{Px}{2EI} (2L - x)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$



$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3a - x) \quad v' = \frac{Px}{2EI} (2a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI} (3x - a) \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \quad a \leq x \leq L$$

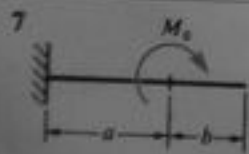
$$\text{En } x = a: \quad v = \frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_b = \frac{Pa^3}{6EI} (3L - a) \quad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$



$$v = \frac{M_0x^2}{2EI} \quad v' = \frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0L^2}{2EI} \quad \theta_b = \frac{M_0L}{EI}$$



$$v = \frac{M_0x^2}{2EI} \quad v' = \frac{M_0x}{EI} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{M_0a}{2EI} (2x - a) \quad v' = \frac{M_0a}{EI} \quad a \leq x \leq L$$

$$\text{En } x = a: \quad v = \frac{M_0a^2}{2EI} \quad v' = \frac{M_0a}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0a}{2EI} (2L - a) \quad \theta_b = \frac{M_0a}{EI}$$



$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI} (4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0 L^4}{30EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

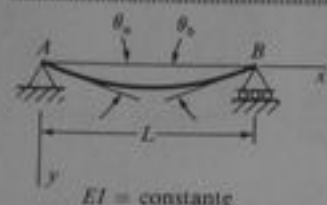


$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI} (20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI} (8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_b = \frac{11q_0 L^4}{120EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$

Tabla G-2 DEFLEXIONES Y PENDIENTES DE VIGAS SIMPLES



- v = deflexión en la dirección y
 $v' = dv/dx$ = pendiente de la curva de deflexión
 $\delta_c = v(L/2)$ = deflexión en el centro de la viga
 x_1 = distancia desde A hasta el punto de deflexión máxima
 $\delta_{\max} = v_{\max}$ = deflexión máxima
 $\theta_a = v'(0)$ = ángulo en el extremo izquierdo de la viga
 $\theta_b = -v'(L)$ = ángulo en el extremo derecho de la viga

1

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{qL^3}{24EI}$$

2

$$v = \frac{qx}{384EI} (9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{q}{384EI} (9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v = \frac{qL}{384EI} (8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{qL}{384EI} (24x^2 - 48Lx + 17L^2) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{768EI} \quad \theta_a = \frac{3qL^3}{128EI} \quad \theta_b = \frac{7qL^3}{384EI}$$

3

$$v = \frac{qx}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{q}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{qa^2}{24LEI} (-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \quad a \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{qa^2}{24LEI} (4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \quad a \leq x \leq L$$

$$\theta_a = \frac{qa^2}{24LEI} (2L - a)^2 \quad \theta_b = \frac{qa^2}{24LEI} (2L^2 - a^2)$$

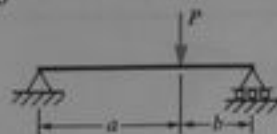
4

$$v = \frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{P}{16EI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

5



$$v = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{Pb}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{Si } a \geq b, \delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\text{Si } a \geq b, x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad \text{y} \quad \delta_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$

6



$$v = \frac{Px}{6EI} (3aL - 3a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{P}{2EI} (aL - a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa}{6EI} (3Lx - 3x^2 - a^2) \quad a \leq x \leq L - a$$

$$v' = \frac{Pa}{2EI} (L - 2x) \quad a \leq x \leq L - a$$

$$\theta_a = \theta_b = \frac{Pa(L-a)}{2EI} \quad \delta_c = \delta_{\max} = \frac{Pa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$$

7



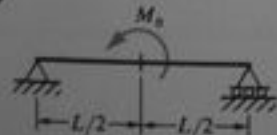
$$v = \frac{M_0x}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0L^2}{16EI} \quad \theta_a = \frac{M_0L}{3EI} \quad \theta_b = \frac{M_0L}{6EI}$$

$$x_1 = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{y} \quad \delta_{\max} = \frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8

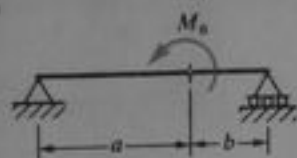


$$v = \frac{M_0x}{24LEI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI} (L^2 - 12x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = 0 \quad \theta_a = \frac{M_0L}{24EI} \quad \theta_b = -\frac{M_0L}{24EI}$$

9



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

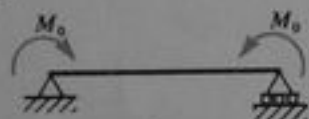
$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{En } x = a: v = \frac{M_0 ab}{3LEI} (2a - L)$$

$$\text{En } x = a: v' = \frac{M_0}{3LEI} (3aL - 3a^2 - L^2)$$

$$\theta_a = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2) \quad \theta_b = \frac{M_0}{6LEI} (3a^2 - L^2)$$

10



$$v = \frac{M_0 x}{2EI} (L - x)$$

$$v' = \frac{M_0}{2EI} (L - 2x)$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{M_0 L^2}{8EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{M_0 L}{2EI}$$

11



$$v = \frac{q_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2 x^2 + 3x^4)$$

$$v' = \frac{q_0}{360LEI} (7L^4 - 30L^2 x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_c = \frac{5q_0 L^4}{768EI} \quad \theta_a = \frac{7q_0 L^3}{360EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \quad \delta_{\max} = 0.00652 \frac{q_0 L^4}{EI}$$

12



$$v = \frac{q_0 x}{960LEI} (5L^2 - 4x^2)^2 \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{q_0}{192LEI} (5L^2 - 4x^2)(L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{q_0 L^4}{120EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{5q_0 L^3}{192EI}$$

Propiedades mecánicas de los materiales

Nota: Las propiedades de los materiales varían enormemente dependiendo de los procesos de manufactura, composición química, defectos internos, temperatura, dimensiones de las probetas de prueba y muchos otros factores. Luego, los datos tabulados son representativos del material pero no necesariamente adecuados para una aplicación específica. En algunos casos, en la tabla se proporciona un intervalo de valores con el fin de mostrar algunas de las posibles variaciones en propiedades. Salvo que se indique otra cosa, las propiedades mecánicas y los módulos de elasticidad son para materiales en tensión.

Tabla H-1 PESOS ESPECÍFICOS Y DENSIDADES DE MASA

Material	Peso específico γ		Densidad de masa ρ	
	lb/pie ³	kN/m ³	slugs/pie ³	Kg/m ³
Aluminio (puro)	169	26.6	5.26	2710
Aleaciones de aluminio	160-180	26-28	5.2-5.4	2600-2800
2014-T6	175	28	5.4	2800
6061-T6	170	26	5.2	2700
7075-T6	175	28	5.4	2800
Latón	520-540	82-85	16-17	8400-8600
Latón rojo (80% Cu, 20% Zn)	540	85	17	8600
Latón naval	525	82	16	8400
Ladrillo	110-140	17-22	3.4-4.4	1800-2200
Bronce	510-550	80-86	16-17	8200-8800
Bronce al manganeso	520	82	16	8300
Hierro fundido	435-460	68-72	13-14	7000-7400
Concreto				
Simple	145	23	4.5	2300
Reforzado	150	24	4.7	2400
Ligero	70-115	11-18	2.2-3.6	1100-1800
Cobre	556	87	17	8900
Vidrio	150-180	24-28	4.7-5.4	2400-2800
Magnesio (puro)	109	17	3.4	1750
Aleaciones	110-114	17-18	3.4-3.5	1760-1830
Monel (67% Ni, 30% Cu)	550	87	17	8800
Niquel	550	87	17	8800
Nylon	70	11	2.2	1100
Hule	60-80	9-13	1.9-2.5	960-1300
Acero	490	77.0	15.2	7850
Piedra				
Granito	165	26	5.1	2600
Piedra caliza	125-180	20-28	3.9-5.6	2000-2900
Mármol	165-180	26-28	5.1-5.6	2600-2900
Cuarzo	165	26	5.1	2600
Titanio	280	44	8.7	4500
Tungsteno	1200	190	37	1900
Madera (secada al aire)				
Fresno	35-40	5.5-6.3	1.1-1.2	560-640
Abeto rojo	30-35	4.7-5.5	0.9-1.1	480-560
Roble	40-45	6.3-7.1	1.2-1.4	640-720
Pino del sur	35-40	5.5-6.3	1.1-1.2	560-640
Hierro forjado	460-490	72-77	14-15	7400-7800

Tabla H-2 MÓDULOS DE ELASTICIDAD Y MÓDULOS DE POISSON

Material	Módulo de elasticidad E		Módulo de elasticidad a cortante G		Módulo de Poisson ν
	ksi	GPa	ksi	GPa	
Aluminio (puro)	10,000	70	3,800	26	0.33
Aleaciones de aluminio	10,000-11,400	70-79	3,800-4,300	26-30	0.33
2014-T6	10,600	73	4,000	28	0.33
6061-T6	10,000	70	3,800	26	0.33
7075-T6	10,400	72	3,900	27	0.33
Latón	14,000-16,000	96-110	5,200-6,000	36-41	0.34
Latón rojo (80% Cu, 20% Zn)	15,000	100	5,600	39	0.34
Latón naval	15,000	100	5,600	39	0.34
Ladrillo (compresión)	1,500-3,500	10-24			
Bronce	14,000-17,000	96-120	5,200-6,300	36-44	0.34
Bronce al manganeso	15,000	100	5,600	39	0.34
Hierro fundido	12,000-25,000	83-170	4,600-10,000	32-69	0.2-0.3
Hierro gris	14,000	97	5,600	39	0.25
Concreto (compresión)					0.1-0.2
Baja resistencia	2,600	18			
Resistencia media	3,600	25			
Alta resistencia	4,400	30			
Cobre (puro)	16,000-18,000	110-120	5,800-6,800	40-47	0.33-0.36
Cobre berilio (duro)	18,000	120	6,800	47	0.33
Vidrio	7,000-12,000	48-83	2,800-5,000	19-34	0.20-0.27
Magnesio (puro)	6,000	41	2,200	15	0.35
Aleaciones	6,500	45	2,400	17	0.35
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25,000	170	9,500	66	0.32
Níquel	30,000	210	11,400	80	0.31
Nylon	300-400	2.1-2.8			0.4
Hule	0.1-0.6	0.0007-0.004	0.03-0.2	0.0002-0.001	0.45-0.50
Acero	28,000-30,000	190-210	10,800-11,800	75-80	0.27-0.30
Piedra (compresión)					
Granito	6,000-10,000	40-70			0.2-0.3
Piedra caliza	3,000-10,000	20-70			0.2-0.3
Mármol	7,000-14,000	50-100			0.2-0.3
Titanio (puro)	15,500	110	5,800	40	0.33
Aleaciones	15,000-17,000	100-120	5,600-6,400	39-44	0.33
Tungsteno	50,000-55,000	340-380	21,000-23,000	140-160	0.2
Madera (flexión)					
Fresno	1,500-1,600	10-11			
Abeto rojo	1,600-1,900	11-13			
Roble	1,600-1,800	11-12			
Pino del sur	1,600-2,000	11-14			
Hierro forjado	28,000	190	10,800	75	0.3

Tabla H-3 PROPIEDADES MECÁNICAS

Material	Esfuerzo de fluencia σ_y		Esfuerzo último σ_u		Elongación porcentual (longitud calibrada 2 plg)
	ksi	MPa	ksi	MPa	
Aluminio (puro)	3	20	10	70	60
Aleación de aluminio	5-70	35-500	15-80	100-550	1-45
2014-T6	60	410	70	480	13
6061-T6	40	270	45	310	17
7075-T6	70	480	80	550	11
Latón	10-80	70-550	30-90	200-620	4-60
Latón rojo (80% Cu, 20% Zn); suave	70	470	85	590	4
Latón rojo (80% Cu, 20 Zn); suave	13	90	43	300	50
Latón naval; duro	60	410	85	590	15
Latón naval; suave	25	170	59	410	50
Ladrillo (compresión)			1-10	7-70	
Bronce	12-100	82-690	30-120	200-830	5-60
Bronce al manganeso; duro	65	450	90	620	10
Bronce al manganeso; suave	25	170	65	450	35
Hierro fundido (tensión)	17-42	120-290	10-70	69-480	0-1
Hierro gris	17	120	20-60	140-410	0-1
Hierro fundido (compresión)			50-200	340-1,400	
Concreto (compresión)			1.5-10	10-70	
Baja resistencia			2	14	
Resistencia media			4	28	
Alta resistencia			6	41	
Cobre					
Estirado en frío	48	330	55	380	10
Suave (no aleado)	8	55	33	230	50
Cobre berilio (duro)	110	760	120	830	4
Vidrio			5-150	30-1,000	
Placa de vidrio			10	70	
Fibra de vidrio			1,000-3,000	7,000-20,000	
Magnesio (puro)	3-10	20-70	15-25	100-170	5-15
Aleaciones	12-40	80-280	20-50	140-340	2-20
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25-160	170-1,100	65-170	450-1,200	2-50
Niquel	20-90	140-620	45-110	310-760	2-50
Nylon			6-10	40-70	50

(continúa)

Tabla H-3 (continuación)

Material	Esfuerzo de fluencia σ_y		Esfuerzo último σ_u		Elongación porcentual (longitud calibrada 2 pig)
	ksi	MPa	ksi	MPa	
Hule	0.2-1.0	1-7	1-3	7-20	100-800
Acero					
Alta resistencia	50-150	340-1,000	80-180	550-1,200	5-25
Máquina	50-100	340-700	80-125	550-860	5-25
Resorte	60-240	400-1,600	100-270	700-1,900	3-15
Inoxidable	40-100	280-700	60-150	400-1,000	5-40
Herramientas	75	520	130	900	8
Acero estructural	30-100	200-700	50-120	340-830	10-40
ASTM-A36	36	250	60	400	30
ASTM-A572	50	340	70	500	20
ASTM-A514	100	700	120	830	15
Alambre de acero	40-150	280-1,000	80-200	550-1,400	5-40
Piedra (compresión)					
Granito			10-40	70-280	
Piedra caliza			3-30	20-200	
Mármol			8-25	50-180	
Titanio (puro)	60	400	70	500	25
Aleaciones	110-130	760-900	130-140	900-970	10
Tungsteno			200-600	1,400-4,000	0-4
Madera (flexión)					
Fresno	6-10	40-70	8-14	50-100	
Abeto rojo	5-8	30-50	8-12	50-80	
Roble	6-9	40-60	8-14	50-100	
Pino del sur	6-9	40-60	8-14	50-100	
Madera (compresión paralela a la veta)					
Fresno	4-6	30-40	5-8	30-50	
Abeto rojo	4-8	30-50	6-10	40-70	
Roble	4-6	30-40	5-8	30-50	
Pino del sur	4-8	30-50	6-10	40-70	
Hierro forjado	30	210	50	340	35

Tabla H-4 COEFICIENTES DE DILATACIÓN TÉRMICA

Material	Coeficientes de dilatación térmica α	
	$10^{-6}/^{\circ}\text{F}$	$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Aluminio y sus aleaciones	13	23
Latón	10.6–11.8	19.1–21.2
Latón rojo	10.6	19.1
Latón naval	11.7	21.1
Ladrillo	3–4	5–7
Bronce	9.9–11.6	18–21
Bronce al manganeso	11	20
Hierro fundido	5.5–6.6	9.9–12.0
Hierro gris	5.6	10.0
Concreto	4–8	7–14
Resistencia media	6	11
Cobre	9.2–9.8	16.6–17.6
Cobre berilio	9.4	17.0
Vidrio	3–6	5–11
Magnesio (puro)	14.0	25.2
Aleaciones	14.5–16.0	26.1–28.8
Monel (67% Ni, 30% Cu)	7.7	14
Níquel	7.2	13
Nylon	40–60	75–100
Hule	70–110	130–200
Acero	5.5–9.9	10–18
Alta resistencia	8.0	14
Resistencia media (inoxidable)	9.6	17
Baja resistencia (estructural)	6.5	12
Piedra	3–5	5–9
Titanio (aleaciones)	4.5–5.5	8–10
Tungsteno	2.4	4.3
Hierro forjado	6.5	12

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

1.2-1 $\sigma_{sh} = 7.6$ ksi, $\sigma_{br} = 19.4$ ksi 1.2-2 $P = 13.8$ kN
 1.2-3 $\sigma_{max} = 2.13$ MPa 1.2-4 $\sigma_c = 16.5$ ksi
 1.2-5 $\sigma_{sh} = 4.34$ ksi, $\sigma_{br} = 9.76$ ksi 1.2-6 $\bar{x} = 0.45$ m,
 $\bar{y} = 0.6$ m, $\sigma_c = 20.8$ MPa 1.2-7 $\epsilon = 3.12 \times 10^{-3}$
 1.2-8 $\delta = 3.0$ mm 1.2-9 $\sigma = 102$ MPa,
 $\epsilon = 500 \times 10^{-6}$ 1.2-10 $\sigma_{sh} = 104$ MPa (tensión),
 $\sigma_{br} = 50$ MPa (compresión), $\epsilon_{sh} = 520 \times 10^{-6}$,
 $\epsilon_{br} = 248 \times 10^{-6}$ 1.2-11 $\sigma_x = \gamma y$

$$1.2-12 \sigma_x = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (L^2 - x^2), \sigma_{max} = \frac{\gamma \omega^2 L^2}{2g}$$

1.3-1 $L_{ur} = 10,600$ pie, $L_{ur} = 15,200$ pie
 1.3-2 (a) % elong. = 6.5%, % reduc. = 8.1%, frágil;
 (b) 24%, 38%, dúctil; (c) 39%, 75%, dúctil
 1.3-3 $\sigma_{sp} = 64,500$ psi, $\sigma_y = 68,000$ psi, $\sigma_u = 127,000$ psi,
 % elong. = 21%, % reduc. = 46% 1.5-1 $E = 105$ GPa
 1.5-2 $P = 16,500$ lb 1.5-3 $E = 10,700$ ksi, $\sigma_{sp} = 60$ ksi
 1.5-4 $E = 71.5$ GPa 1.5-5 $\epsilon_{ur} = 750 \times 10^{-6}$,
 $\epsilon_{ur} = 240 \times 10^{-6}$ 1.5-6 $P = 3650$ lb
 1.5-7 $P = 110$ kN 1.5-8 $P = 524$ kN
 1.5-9 $E = 3.40 \times 10^6$ psi, $\nu = 0.12$
 1.5-10 $\delta = 0.024$ plg, $\Delta d = 0.00045$ plg, $\Delta t = 0.000030$ plg

$$1.5-11 \text{ Pendiente} = \frac{b(1 - \nu\sigma/E)}{L(1 + \sigma/E)} \quad 1.5-12 \delta = 1.62 \text{ mm,}$$

$$\Delta = 0.020 \text{ mm, } \Delta V = 6500 \text{ mm}^3 \text{ (incremento)}$$

$$1.5-13 \Delta d = 0.00061 \text{ plg, } \Delta V = 0.022 \text{ plg}^3$$

$$1.5-14 \Delta V = \frac{WL(1 - 2\nu)}{2E} \quad 1.6-1 \tau_{med} = 425 \text{ psi}$$

$$1.6-2 \tau_{med} = 87.0 \text{ MPa} \quad 1.6-3 \tau_{med} = 4070 \text{ psi}$$

$$1.6-4 P = 69 \text{ kN} \quad 1.6-5 \tau_{med} = 71 \text{ psi}$$

$$1.6-6 \tau_{med} = 75 \text{ psi} \quad 1.6-7 P = 264 \text{ kN}$$

$$1.6-8 P = 91 \text{ kN} \quad 1.6-9 \tau_{med} = 212 \text{ psi}$$

$$1.6-10 \tau_{med} = 4990 \text{ psi} \quad 1.6-11 \tau_{med} = 43 \text{ MPa}$$

$$1.6-12 \tau_{med} = 106 \text{ MPa} \quad 1.6-13 \gamma_{med} = 0.004,$$

$$V = 89.6 \text{ kN} \quad 1.6-14 \gamma = 1/3, \delta = 3.33 \text{ mm,}$$

$$k = 4.8 \text{ MN/m} \quad 1.6-15 \tau = \frac{P}{2\pi rh}, \delta = \frac{P}{2\pi hG} \ln \frac{b}{d}$$

$$1.7-1 L = \sigma_i/\gamma \quad 1.7-2 d = 153 \text{ mm}$$

$$1.7-3 d = 16.0 \text{ mm} \quad 1.7-4 d = 0.66 \text{ plg} \quad 1.7-5 n = 12$$

$$1.7-6 P = 12,100 \text{ lb} \quad 1.7-7 P = 34.2 \text{ kN}$$

$$1.7-8 P = 21.2 \text{ kN} \quad 1.7-9 d = 0.62 \text{ plg}$$

$$1.7-10 d = 310 \text{ mm} \quad 1.7-11 h = \frac{b^2 \sigma_c - P}{\gamma b^2}$$

$$1.7-12 A = \frac{M_1 L \omega^2}{\sigma_i} \quad 1.7-13 A = \frac{2M_1 L \omega^2}{2\sigma_i - \rho L^2 \omega^2}$$

$$1.7-14 \theta = 45^\circ \quad 1.7-15 \theta = 54.7^\circ \quad 1.7-16 d = 12.6 \text{ pie,}$$

$$V_p = 1.02V \quad 1.7-17 b_x = \frac{P}{\sigma_{xt}} \exp\left(\frac{\gamma x}{\sigma_i}\right),$$

$$V = \frac{P}{\gamma} \left[\exp\left(\frac{\gamma L}{\sigma_i}\right) - 1 \right]$$

Capítulo 2

$$2.2-1 \text{ Longitud final} = 21,778 \text{ plg}$$

$$2.2-2 \text{ Min. } d = 103 \text{ mm} \quad 2.2-3 x = LL_1/(L_1 + L_2)$$

2.2-4 $\delta = \frac{PL}{\pi E} \left(\frac{1}{d_1^3} + \frac{1}{d_2^3} \right)$

2.2-5 $\delta_{superior} = 0.0814$ plg, $\delta_{inferior} = 0.0786$ plg

2.2-6 $\delta = 2.24$ mm 2.2-7 $\delta = 1.16$ mm alargamiento

2.2-8 $\delta = 0.053$ plg alargamiento 2.2-9 $P_1 = 39$ kN

2.2-10 (a) $\delta = 0.0736$ plg; (b) $\delta = 0.0627$ plg

2.2-11 $\delta = 6.16$ mm 2.2-12 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{L_2}{L_1} \left(1 + \frac{A_1 L_2}{A_2 L_1} \right)$

2.2-13 $L_1 = 27$ plg, $L_2 = 9$ plg, $\delta = 0.0172$ plg

2.2-14 $P = 44.0$ k 2.2-15 $\delta = -0.00086$ plg, $x = 10$ pie

2.2-16 $\delta = WL/2EA$ 2.2-17 $\delta = 0.0048$ mm

2.2-18 $\delta = fL^2/2EA$ 2.2-19 $\delta = 0.70$ mm

2.2-20 $\delta = PL/2Ed^2$ 2.2-21 (a) $\delta = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}$

(b) $\delta = 0.00324$ plg 2.2-22 $\delta = \gamma L^2/6E$

2.2-23 $\delta = \rho \omega^2 L^3/3E$ 2.2-24 $\delta = 20P/9k$

2.3-1 $\delta_x = 0.0293$ plg hacia la derecha,

$\delta_y = 0.0470$ plg hacia abajo

2.3-2 $\delta_x = 0.0122$ plg hacia la derecha,

$\delta_y = 0.116$ plg hacia abajo 2.3-3 $\delta_x = 4.24$ mm,

$\delta_y = 0.45$ mm 2.3-4 $\delta_x = PL^2/2d^2EA$, $\delta_y = 0$

2.3-5 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{A_1 L_2^2}{A_2 L_1^2}$ 2.3-6 $\delta_x = \frac{PL}{\sqrt{3}EA}$ hacia la izquierda,

$\delta_y = \frac{5PL}{3EA}$ hacia abajo 2.3-7 $\theta = \arctan(1/\sqrt{2}) = 35.3^\circ$

2.3-8 $\theta = 45^\circ$ 2.3-9 $2\theta = \arctan(-1/\sqrt{2})$, $\theta = 72.4^\circ$

2.3-10 $\theta = 55.65^\circ$ 2.4-1 $P = 98.8$ k

2.4-2 $R_a = \frac{b_2 A_1 P}{b_1 A_2 + b_2 A_1}$, $R_b = \frac{b_1 A_2 P}{b_1 A_2 + b_2 A_1}$

2.4-3 $P_1/P = 1/2$ 2.4-4 $P = 980$ kN

2.4-5 $P = 850$ k 2.4-6 $\sigma = 24$ MPa

2.4-7 $P = 595$ lb 2.4-8 $\sigma = 75$ MPa

2.4-9 $T_x = \frac{2PaL}{2a^2 + b^2}$, $T_y = \frac{PbL}{2a^2 + b^2}$

2.4-10 $T_1 = 5.36$ kN, $T_2 = 5.15$ kN

2.4-11 $e = \frac{h(E_2 - E_1)}{2(E_2 + E_1)}$, $P_1 = \frac{PE_1}{E_1 + E_2}$, $P_2 = \frac{PE_2}{E_1 + E_2}$

2.4-12 $\delta = 0.00845$ plg 2.4-13 $F_a = 2P/5$ (tensión),

$F_b = F_c = P\sqrt{3}/5$ (compresión), $\delta = 2PL/5EA$

2.4-14 $F_{ad} = \frac{P(1 + 4 \cos^2 \beta)}{2(1 + 2 \cos^2 \beta)}$ (tensión),

$F_{bd} = \frac{P \cos \beta}{1 + 2 \cos^2 \beta}$ (tensión),

$F_{cd} = -\frac{P}{2(1 + 2 \cos^2 \beta)}$ (compresión),

$\delta_x = \frac{PH \cos^2 \beta}{EA(\sin \beta)(1 + 2 \cos^2 \beta)}$ (hacia la derecha),

$\delta_y = \frac{PH}{2EA \sin^2 \beta}$ (hacia abajo)

2.4-15 Si $x = 0$: $F_a = F_b = F_c = W$; si $x = b$: $F_a = 0$, $F_b = W$, $F_c = 2W$; si $x = 3b/2$: $F_a = F_b = 0$, $F_c = 3W$

2.5-2 $\sigma_a = 10.2$ MPa, $\sigma_m = 58.2$ MPa

2.5-3 $\delta_2 = PL/6EA_1$, $R_a = 2R_b = 2P/3$

2.5-5 $\delta = PL/2EA$, $F_a = F_c = P/2\sqrt{2}$, $F_b = P/2$

2.5-7 $\delta = \frac{PL}{EA(1 + 2 \cos^2 \beta)}$, $F_a = F_c = \frac{P \cos \beta}{1 + 2 \cos^2 \beta}$

$F_b = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \beta}$ 2.5-8 $\delta = PL/3EA$, $F_a = F_c = P/6$,

$F_b = F_d = P\sqrt{3}/6$, $F_e = P/3$ 2.5-9 $x = L/4$

2.6-1 $T = 63.5^\circ C$ y $8.9^\circ C$ 2.6-2 $d = 85.52$ pie

2.6-3 $e = 3\alpha(\Delta T)$ 2.6-4 $\delta = (\Delta T)L \left[\alpha_m + (\alpha_m - \alpha_1) \frac{b}{a} \right]$

2.6-5 Posición final: $P = 160$ kN, $\delta = 0.500$ mm

2.6-6 $\Delta T = \frac{P}{E_c A_c (x_c - x_d)}$ 2.6-7 $\sigma_c = E\alpha(\Delta T_1)/3$

2.6-8 $\Delta T = 50^\circ C$ 2.6-9 $\sigma = 88.8$ MPa, $T = 30.2^\circ C$

2.6-10 $\sigma = 63.8$ MPa 2.6-11 $\sigma = 16.4$ ksi

2.6-12 $P = 36.6$ k, $\sigma = 18.3$ ksi (compresión).

$\delta = 0.0029$ plg (hacia la izquierda) 2.6-13 $\sigma = -\frac{2EA_2\alpha(\Delta T)}{A_1 + A_2}$

$\delta = \frac{\alpha(\Delta T)(L)(A_2 - A_1)}{2(A_1 + A_2)}$ 2.6-14 $P = 1.56$ MN

2.6-15 $\Delta T = 152^\circ F$, $\sigma = 13.0$ ksi (compresión),

2.6-16 $\Delta T = 56.1^\circ C$ 2.6-17 $\tau_{máx} = 10.8$ ksi

2.6-18 $\sigma_a = 16.1$ ksi (tensión), $\sigma_c = 8.1$ ksi (compresión)

2.6-19 $\sigma_a = 647$ MPa (tensión), $\sigma_c = 22$ MPa (compresión)

2.6-20 $n = \frac{\sigma_c L}{2PE_b} \left(1 + \frac{E_b A_b}{2E_c A_c} \right)$

2.6-21 Si $h/L = 0$: $P_a = 6$ kN, $P_b = 0$;
si $h/L = 1/3$: $P_a = 6$ kN, $P_b = 0$; si $h/L = 1$: $P_a = 10$ kN,

$P_b = 4$ kN 2.6-22 $\sigma_a = \frac{E_1 E_2 (x_1 - x_2) \Delta T}{E_1 + 2E_2}$ (tensión),

$\sigma_c = 2\sigma_a$ (compresión)

2.6-23 $F_1 = \frac{EA\alpha(\Delta T) \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^2 \beta}$ (tensión),

$$F_2 = -\frac{2EA\alpha(\Delta T)\cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta} \text{ (compresión)}$$

- 2.6-24 $F_1 = 22.1 \text{ kN}$ (tensión), $F_2 = -31.3 \text{ kN}$ (compresión) 2.6-25 $n = 1.32$ vueltas
 2.6-26 $\sigma_{\max} = 13.8 \text{ ksi}$ (tensión) 2.7-1 $\tau_{\max} = 61.1 \text{ MPa}$
 2.7-2 $\tau_{\max} = 15.0 \text{ ksi}$ 2.7-3 $P = 495 \text{ kN}$
 2.7-4 $P = 80 \text{ k}$ 2.7-5 $\sigma_a = 7.5 \text{ ksi}$, $\tau_a = -7.5 \text{ ksi}$
 2.7-6 $\sigma_a = -7.5 \text{ ksi}$, $\tau_a = 7.5 \text{ ksi}$ 2.7-7 $\sigma_a = 75 \text{ MPa}$,
 $\tau_a = -43.3 \text{ MPa}$ 2.7-8 $\sigma_a = -75 \text{ MPa}$,
 $\tau_a = 43.3 \text{ MPa}$ 2.7-9 $\sigma_a = 6.7 \text{ MPa}$, $\tau_a = -25 \text{ MPa}$
 2.7-10 $\tau_{\max} = 9.19 \text{ ksi}$ 2.7-11 $\sigma_a = -19.3 \text{ ksi}$,
 $\tau_a = 11.1 \text{ ksi}$ 2.7-12 (a) $\sigma_a = -122.4 \text{ MPa}$;
 (b) $\sigma_a = -61.2 \text{ MPa}$, $\tau_a = 61.2 \text{ MPa}$
 2.7-13 $\sigma_a = 90 \text{ MPa}$, $\theta = 18.4^\circ$ 2.7-14 $\theta = 35.3^\circ$,
 $\tau_a = -8,490 \text{ psi}$, $\sigma_a = 18,000 \text{ psi}$, $\tau_{\max} = 9,000 \text{ psi}$
 2.7-15 $\sigma_a = -40 \text{ MPa}$, $\tau_a = 40 \text{ MPa}$ 2.7-16 $\theta = 60^\circ$
 2.7-17 $\theta = 26.6^\circ$, $P = 3750 \text{ lb}$ 2.8-1 $U = 1.5 \text{ plg}\cdot\text{lb}$

$$2.8-2 U = \frac{5P^2L}{16EA}, \text{ Incremento} = \frac{15P^2L}{16EA}$$

$$2.8-3 U = P^2L/EA \quad 2.8-4 U = \frac{35P^2H}{2EA} = 788 \text{ J}$$

$$2.8-5 \text{ Acero dulce: } u_1 = 21.6 \text{ psi}, u_2 = 76.1 \text{ plg}$$

$$2.8-6 U = \frac{\pi d^2 \gamma^2 L^3}{360E} \quad 2.8-7 \delta = \frac{4PL}{\pi E d_1 d_2}$$

$$2.8-8 \delta = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1} \quad 2.8-9 U = \frac{2\rho^2 A \omega^4 L^5}{15E}$$

$$2.8-10 U = \frac{a}{2EA} \left(4P_1^2 + \frac{32}{3} P_1 P_2 + 21P_2^2 \right)$$

$$2.8-11 P = 270 \text{ kN}, \delta = 1.321 \text{ mm}, U = 243 \text{ J}$$

$$2.8-12 \delta = \frac{PL}{\sqrt{2}EA} \quad 2.8-13 \delta = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \left(\frac{PL}{EA} \right)$$

$$2.8-14 U = \frac{P^2L}{4EA \sin\beta \cos^3\beta}, \beta = 35.26^\circ, \delta = \frac{3\sqrt{3}PL}{4EA}$$

$$2.8-15 \delta_a = \frac{PH}{EA(1+2\cos^3\beta)}$$

$$2.9-1 \sigma = \frac{W}{A} \left[1 + \left(1 + \frac{2EA}{W} \right)^{1/2} \right] \quad 2.9-2 \sigma = 2340 \text{ psi}$$

$$2.9-3 h = 5.33 \text{ plg} \quad 2.9-4 h = 537 \text{ mm}$$

$$2.9-5 \Delta = 5.48 \text{ plg} \quad 2.9-6 \sigma_2 = \sigma_1/2$$

$$2.9-7 \delta = \frac{4M_{20}}{k} \left[1 + \left(1 + \frac{4h}{2M_{20}} \right)^{1/2} \right]$$

$$2.9-8 \sigma = 33.3 \text{ MPa} \quad 2.9-9 r = 59.0 \text{ pie/sec}$$

$$2.9-10 \delta = 0.289 \text{ mm}, \sigma = 178 \text{ MPa}$$

$$2.9-11 \delta = 0.0137 \text{ plg}, \sigma = 30.7 \text{ ksi}$$

$$2.9-12 \delta = 0.277 \text{ mm}, \sigma = 27.7 \text{ MPa}$$

$$2.10-1 P_y = P_x = 2\sigma_y A \sin\theta, \delta_y = \delta_x = \frac{\sigma_y L}{E \sin\theta}$$

$$2.10-2 A_{ab} = 693 \text{ mm}^2, A_{bc} = 800 \text{ mm}^2$$

$$2.10-3 \delta_b = 0.62 \text{ plg} \quad 2.10-4 \text{ Si } P = 24 \text{ k: } \delta_b = 0.36 \text{ plg}$$

$$\text{si } P = 40 \text{ k: } \delta_b = 1.36 \text{ plg} \quad 2.10-5 \delta_b = 0.0732 \text{ plg},$$

$$\delta_y = 0.130 \text{ plg} \quad 2.10-6 \delta_b = \frac{L}{k \sin\theta} \left(\frac{P}{2A \sin\theta} \right)^m;$$

$$\text{si } P = 40 \text{ k: } \delta_b = 0.905 \text{ plg} \quad 2.10-7 \delta = \frac{\gamma^m L^{m+1}}{k(m+1)}$$

$$2.10-8 \delta = 528 \text{ mm} \quad 2.10-9 P_x = 56.5 \text{ kN}$$

$$2.10-10 P_x = 95.7 \text{ kN} \quad 2.10-11 P_x = 3.73\sigma_y A$$

$$2.10-12 P_x = \frac{4}{3}P_y = \frac{4\sigma_y A}{3}, \delta_x = 2\delta_y = \frac{3\sigma_y L}{E}$$

$$2.10-13 P_y = 186 \text{ kN}, \delta_y = 2.25 \text{ mm}, P_x = 211 \text{ kN}, \delta_x = 4.00 \text{ mm}$$

Capítulo 3

$$3.2-1 \tau_{\max} = 40 \text{ MPa}, \gamma_{\max} = 0.0005 \text{ rad}$$

$$3.2-2 L = 44.6 \text{ plg} \quad 3.2-3 L = 10.8 \text{ m}$$

$$3.2-4 T = 767 \text{ plg}\cdot\text{lb} \quad 3.2-5 T = 221 \text{ plg}\cdot\text{lb}, \phi = 3.15^\circ$$

$$3.2-6 \tau_1 = 32.8 \text{ MPa}, \tau_2 = 46.9 \text{ MPa}$$

$$3.2-7 G = 27.8 \text{ GPa} \quad 3.2-8 T = 86.3 \text{ plg}\cdot\text{k}$$

$$3.2-9 d = 2.80 \text{ plg} \quad 3.2-10 \tau_{\max} = 30.6 \text{ MPa},$$

$$G = 28.0 \text{ GPa} \quad 3.2-11 \phi = 0.096 \text{ rad}, d = 2.98 \text{ plg}$$

$$3.2-12 \frac{d_H}{d_S} = 1.19, \frac{W_H}{W_S} = 0.51 \quad 3.2-13 \% \text{ área} = 100\beta^2,$$

$$\% \text{ par} = 100\beta^4 \quad 3.3-1 \phi = 2.44^\circ$$

$$3.3-2 T = 1810 \text{ plg}\cdot\text{lb} \quad 3.3-3 d_{ab} = 1.55 \text{ plg},$$

$$d_{bc} = 1.72 \text{ plg}, d_{cd} = 1.48 \text{ plg} \quad 3.3-4 d_{ab} = 1.63 \text{ plg},$$

$$d_{bc} = 1.78 \text{ plg}, d_{cd} = 1.57 \text{ plg} \quad 3.3-5 d = 81.3 \text{ mm}$$

$$3.3-6 \frac{d_b}{d_a} = 1.45 \quad 3.3-7 \phi = \frac{37L}{2\pi Gtd_a^2}$$

$$3.3-8 \phi = \frac{qL^2}{2GI_p} \quad 3.3-9 \phi = \frac{q_0L^2}{6GI_p}$$

$$3.4-1 \tau_{\max} = 6760 \text{ psi} \quad 3.4-2 d = 1.47 \text{ plg}$$

$$3.4-3 \sigma_{\max} = 56 \text{ MPa}, T = 10.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$3.4-4 \sigma_{\max} = 64 \text{ MPa}, T = 25.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$3.5-1 \gamma_{\max} = 2.09 \times 10^{-3}, \epsilon_{\max} = 1.04 \times 10^{-3}$$

$$3.5-2 \gamma = 0.00173 \quad 3.5-3 G = 11,600 \text{ ksi}$$

$$3.5-4 G = \frac{8T}{\pi d^3 \epsilon} \quad 3.5-5 \epsilon = 0.91 \times 10^{-3}$$

$$\gamma = 1.82 \times 10^{-3} \quad \mathbf{3.6-1} \quad P = 14.2 \text{ kW}$$

$$\mathbf{3.6-2} \quad P = 89.7 \text{ hp} \quad \mathbf{3.6-3} \quad H = 7400 \text{ hp}$$

$$\mathbf{3.6-4} \quad d = 115 \text{ mm} \quad \mathbf{3.6-5} \quad d = 4.06 \text{ plg}$$

$$\mathbf{3.6-6} \quad d = 110 \text{ mm} \quad \mathbf{3.6-7} \quad d = 7.47 \text{ plg}$$

$$\mathbf{3.6-8} \quad d = 4.12 \text{ plg} \quad \mathbf{3.6-9} \quad d = 122 \text{ mm}$$

$$\mathbf{3.6-10} \quad d_1 = 1.221d \quad \mathbf{3.7-1} \quad T_x = \frac{T_1(b+c) + T_2(c)}{L}$$

$$\mathbf{3.7-2} \quad T_x = T_y = \frac{T_0}{3}, \quad \phi_x = \frac{T_0 L}{9GI_p}, \quad \phi_y = 0$$

$$\mathbf{3.7-3} \quad P = 1340 \text{ lb} \quad \mathbf{3.7-4} \quad \phi = \frac{2br_{\text{perm}}}{Gd}$$

$$\mathbf{3.7-5} \quad T = 639 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \mathbf{3.7-6} \quad T = 976 \text{ plg}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{3.7-7} \quad a = \frac{d_1 L}{d_2 + d_1} \quad \mathbf{3.7-8} \quad \frac{a}{L} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

$$\mathbf{3.7-9} \quad x = \frac{L}{4} \left(3 - \frac{I_{pb}}{I_{pa}}\right) \quad \mathbf{3.7-10} \quad T = \frac{2GI_p bck}{GI_p + 2c^2 kL}$$

$$\mathbf{3.7-11} \quad \tau_x = 4750 \text{ psi}, \quad \tau_y = 3160 \text{ psi}, \quad \phi = 0.41^\circ$$

$$k = 2.52 \times 10^6 \text{ plg}\cdot\text{lb}/\text{rad} \quad \mathbf{3.7-12} \quad T_x = \frac{q_0 L}{6}, \quad T_y = \frac{q_0 L}{3}$$

$$\mathbf{3.7-13} \quad \tau_x = 77.3 \text{ MPa}, \quad \tau_y = 25.1 \text{ MPa}$$

$$\mathbf{3.7-14} \quad \tau_x = 11,600 \text{ psi}, \quad \tau_y = 4,500 \text{ psi}, \quad \phi = 1.39^\circ$$

$$\mathbf{3.7-15} \quad T = 5260 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \mathbf{3.7-16} \quad T = 562 \text{ plg}\cdot\text{k}$$

$$\mathbf{3.7-17} \quad T_1 = 12.9 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad T_2 = 19.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$T_3 = 5.39 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad T = 5.39 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{3.8-1} \quad U = 445 \text{ J}$$

$$\mathbf{3.8-2} \quad U = 4.46 \text{ plg}\cdot\text{lb} \quad \mathbf{3.8-3} \quad U = \frac{q_0^2 L^3}{40GI_p}$$

$$\mathbf{3.8-4} \quad U = \frac{T^2 L(d_a + d_b)}{\pi G d_a^2 d_b^2} \quad \mathbf{3.8-5} \quad U = \frac{19T_0^2 L}{32GI_p}$$

$$\mathbf{3.8-6} \quad U = \frac{\beta^2 GI_{pa} I_{pb}}{2(L_a I_{pa} + L_b I_{pb})} \quad \mathbf{3.9-1} \quad (\text{a}) \quad \tau_{\text{max}} = 9,550 \text{ psi};$$

$$(\text{b}) \quad \tau_{\text{max}} = 10,400 \text{ psi} \quad \mathbf{3.9-2} \quad \frac{\phi_1}{\phi_2} = 1 + \frac{1}{4\beta^2}$$

$$\mathbf{3.9-3} \quad \frac{U_1}{U_2} = 2 \quad \mathbf{3.9-4} \quad (\text{a}) \quad t = 0.143 \text{ plg}; \quad (\text{b}) \quad t = 0.147 \text{ plg}$$

$$\mathbf{3.9-5} \quad \tau = 20 \text{ MPa} \quad \mathbf{3.9-6} \quad T = 9.35 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$\theta = 0.0173 \text{ rad/m} \quad \mathbf{3.9-7} \quad \tau = 35.0 \text{ MPa}, \quad \phi = 0.0100 \text{ rad}$$

$$\mathbf{3.9-8} \quad \tau = 6630 \text{ psi}, \quad \theta = 0.233 \times 10^{-3} \text{ rad/plg}$$

$$\mathbf{3.9-9} \quad t = 0.140 \text{ plg} \quad \mathbf{3.9-10} \quad \tau = \frac{2T(1 + \beta)^2}{tL_0^2 \beta}$$

$$\mathbf{3.9-11} \quad \theta = \frac{4T(1 + \beta)^2}{GI_{pa} \beta^2} \quad \mathbf{3.9-12} \quad \phi = \frac{2TL(d_a + d_b)}{\pi G d_a^2 d_b^2}$$

$$\mathbf{3.10-2} \quad \tau_{\text{max}} = \frac{Tr}{I_p} \left(\frac{3n+1}{4n}\right) \quad \mathbf{3.10-3} \quad \frac{T_x}{T_y} = \frac{4(1 - \beta^3)}{3(1 - \beta^4)}$$

$$\beta = \frac{r_1}{r_2} \quad \mathbf{3.10-4} \quad T = \frac{T_y}{3} \left[4 - \left(\frac{\gamma_y}{\gamma_{\text{max}}}\right)^3\right]$$

$$\mathbf{3.10-6} \quad \tau_{\text{max}} = 64.5 \text{ MPa}$$

Capítulo 4

$$\mathbf{4.2-1} \quad V = 1.0 \text{ k}, \quad M = 40 \text{ pie}\cdot\text{k} \quad \mathbf{4.2-2} \quad V = 6 \text{ kN},$$

$$M = -12 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{4.2-3} \quad V = 1.25 \text{ kN}, \quad M = 11.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.2-4} \quad V = 2Pa/b, \quad M = 0 \quad \mathbf{4.2-5} \quad V = -2060 \text{ lb},$$

$$M = -5900 \text{ pie}\cdot\text{lb} \quad \mathbf{4.2-6} \quad V = -1.25 \text{ kN},$$

$$M = -7.75 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{4.2-7} \quad M_{\text{max}} = 400 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.2-8} \quad N = P \sin \theta, \quad V = P \cos \theta, \quad M = Pr \sin \theta$$

$$\mathbf{4.2-9} \quad V = 1.6 \text{ kN}, \quad M = 11.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.2-10} \quad (\text{a}) \quad V_b = 6,000 \text{ lb}, \quad M_b = 12,000 \text{ pie}\cdot\text{lb};$$

$$(\text{b}) \quad V_m = 0, \quad M_m = 24,000 \text{ pie}\cdot\text{lb} \quad \mathbf{4.2-11} \quad \frac{a}{L} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{4.2-12} \quad V = 27wL^2 x/4g, \quad M = 107wL^3 x/15g$$

$$\mathbf{4.4-1} \quad V_{\text{max}} = P, \quad M_{\text{max}} = Pa \quad \mathbf{4.4-2} \quad V_{\text{max}} = qL,$$

$$M_{\text{max}} = -qL^2/2 \quad \mathbf{4.4-3} \quad V_{\text{max}} = M_0/L, \quad M_{\text{pos}} = M_0 a/L,$$

$$M_{\text{neg}} = -M_0(1 - a/L) \quad \mathbf{4.4-4} \quad V_{\text{pos}} = 5P/12,$$

$$M_{\text{max}} = 7PL/36 \quad \mathbf{4.4-5} \quad V_{\text{max}} = P/2, \quad M_{\text{max}} = 3PL/8$$

$$\mathbf{4.4-6} \quad V_{\text{pos}} = 9.6 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = 46.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-7} \quad V_{\text{max}} = -3M_1/L, \quad M_{\text{pos}} = M_1$$

$$\mathbf{4.4-8} \quad V_{\text{max}} = P, \quad M_{\text{max}} = -Pa \quad \mathbf{4.4-9} \quad V_{\text{max}} = 4.0 \text{ kN},$$

$$M_{\text{max}} = -13.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{4.4-10} \quad V_{\text{pos}} = 400 \text{ lb},$$

$$M_{\text{max}} = -4000 \text{ pie}\cdot\text{lb} \quad \mathbf{4.4-11} \quad V_{\text{pos}} = 7.0 \text{ k},$$

$$M_{\text{max}} = 40.5 \text{ pie}\cdot\text{k} \quad \mathbf{4.4-12} \quad V_{\text{max}} = 6.0 \text{ kN},$$

$$M_{\text{max}} = -18.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{4.4-13} \quad V_{\text{pos}} = 5.25 \text{ kN},$$

$$M_{\text{max}} = 11.63 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \mathbf{4.4-14} \quad V_{\text{pos}} = 2Pa/b, \quad M_{\text{pos}} = Pa$$

$$\mathbf{4.4-15} \quad V_{\text{max}} = 2940 \text{ lb}, \quad M_{\text{pos}} = 8640 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.4-16} \quad V_{\text{max}} = 9.0 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = -9.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-17} \quad V = \frac{q_0 x^2}{2L}, \quad M = \frac{q_0 x^3}{6L}$$

$$\mathbf{4.4-18} \quad a = 0.586L, \quad V_{\text{max}} = 0.293qL, \quad M_{\text{max}} = 0.0214qL^2$$

$$\mathbf{4.4-19} \quad V_{\text{max}} = 4.0 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = 11.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-20} \quad V_{\text{max}} = 3,000 \text{ lb}, \quad M_{\text{max}} = -19,800 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.4-21} \quad V_{\text{max}} = -27.0 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = -38.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-22} \quad V_{\text{max}} = -q_0 L/3, \quad M_{\text{max}} = q_0 L^2/9\sqrt{3}$$

$$\mathbf{4.4-23} \quad V_{\text{max}} = -7,000 \text{ lb}, \quad M_{\text{max}} = 22,360 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.4-24} \quad V_{\text{max}} = q_0 L/6, \quad M_{\text{max}} = 0.01604q_0 L^2$$

$$\mathbf{4.4-25} \quad V_{\text{max}} = -170 \text{ lb}, \quad M_{\text{max}} = 2890 \text{ plg}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.4-26} \quad V_{\text{pos}} = 7.5 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = 20.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-27} \quad V_{\text{max}} = -1733 \text{ lb}, \quad M_{\text{pos}} = 556 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$\mathbf{4.4-28} \quad V_{\text{max}} = 32.97 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = 61.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{4.4-29} \quad V_{\text{max}} = 12.5 \text{ k}, \quad M_{\text{pos}} = 78.1 \text{ pie}\cdot\text{k}$$

$$\mathbf{4.4-30} \quad V_{\text{max}} = -12.0 \text{ kN}, \quad M_{\text{max}} = -24.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

- 4.4-31 $V_{\max} = 7qL/6$, $M_{\text{pos}} = qL^2/72$, $M_{\text{neg}} = -2qL^2/3$
 4.4-32 $V_{\max} = 2.5 \text{ kN}$, $M_{\max} = 5.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 4.4-33 $V_{\text{pos}} = 0.1857q_0L$, $V_{\text{neg}} = -0.3276q_0L$
 $M_{\max} = 0.05263q_0L^2$ 4.4-34 $M_{\max} = 20,000 \text{ pie}\cdot\text{lb}$
 4.4-35 $M_{\max} = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 4.4-36 $q_s = 5q_a = 10P/3L$

$M_{\max} = \frac{3PL}{16}$ 4.4-37 $M_{\max} = \frac{PL(n+2)}{8(n+1)}$ para n par.

$M_{\max} = \frac{PL(n+1)}{8(n)}$ para n impar

4.4-38 $V_{\max} = P\left(2 - \frac{d}{L}\right)$ con $x = 0$ o $x = L - d$

$M_{\max} = \frac{P}{2L}\left(L - \frac{d}{2}\right)^2$ con $x = \frac{L}{2} - \frac{d}{4}$

- 4.4-39 (a) $x = 6.4 \text{ m}$, $V_{\max} = 16.8 \text{ kN}$; (b) $x = 2.67 \text{ m}$,
 $M_{\max} = 31.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 4.4-40 $x = 24 \text{ pie}$, $M_{\max} = 535 \text{ pie}\cdot\text{k}$

Capítulo 5

- 5.3-1 $\sigma_{\max} = 46,800 \text{ psi}$ 5.3-2 $\sigma_{\max} = 49,100 \text{ psi}$
 5.3-3 $\sigma_{\max} = 251 \text{ MPa}$ 5.3-4 $\sigma_{\max} = 1350 \text{ psi}$
 5.3-5 $L = 3.68 \text{ m}$ 5.3-6 (a) 0.5; (b) 0.7374
 5.3-7 $\sigma_{\max} = 8910 \text{ psi}$ 5.3-8 $\sigma_{\max} = 1125 \text{ psi}$
 5.3-9 $\sigma_{\max} = 2.32 \text{ MPa}$ 5.3-10 $\sigma_{\max} = 20.4 \text{ ksi}$

5.3-11 (a) $M_{\max} = \sigma_{\text{perm}} \left(\frac{15\pi d^3}{64} \right)$

(b) $M_{\max} = \sigma_{\text{perm}} \left(\frac{\pi d^3 \sqrt{2}}{64} \right)$

5.3-12 (a) $M_{\max} = \sigma_{\text{perm}} \left(\frac{b^3}{32} \right)$

(b) $M_{\max} = \sigma_{\text{perm}} \left(\frac{13bh^2}{60} \right)$

- 5.3-13 $\sigma_{\max} = 73.2 \text{ MPa}$ (compresión)
 5.3-14 $\sigma_1 = 4,240 \text{ psi}$, $\sigma_2 = -14,900 \text{ psi}$
 5.3-15 $P = 3.25 \text{ kN}$ 5.3-16 $\sigma_1 = 8,190 \text{ psi}$,
 $\sigma_2 = -14,600 \text{ psi}$ 5.3-17 $P = 17.4 \text{ kN}$
 5.3-18 $P = 17.3 \text{ kN}$ 5.3-19 $P = 63.5 \text{ k}$
 5.4-1 $S = 14.9 \text{ plg}^3$, $w 8 \times 21$ 5.4-2 $S = 19.7 \text{ plg}^3$,
 $w 8 \times 28$ 5.4-3 $S = 15.4 \text{ plg}^3$, $s 10 \times 25.4$
 5.4-4 $b = 136 \text{ mm}$ 5.4-5 $d = 215 \text{ mm}$
 5.4-6 $S = 19.0 \text{ plg}^3$; usar vigas de $2 \times 10 \text{ plg}$
 5.4-7 $i = 12.9 \text{ plg}$ 5.4-8 $i = 72 \text{ plg}$ 5.4-9 $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$

$h = d \sqrt{\frac{2}{3}}$ 5.4-10 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2d_2^2 - d_1^2}{d_1 d_2}$ 5.4-11 $i = 2 \text{ plg}$

5.4-12 $b_s = 200 \text{ mm}$ 5.4-13 $b = 259 \text{ mm}$

5.4-14 $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2x-1}{2-x} \cdot \frac{1}{2} < \alpha < 2$ 5.4-15 1:1.260:1.408

5.4-16 $\beta = 0.1304$, 9.23% 5.5-2 $\tau_{\max} = 56.2 \text{ psi}$
 5.5-3 $\tau_{\max} = 150 \text{ psi}$ 5.5-4 $\tau_{\max} = 589 \text{ kPa}$

5.5-5 (a) $\tau_{\max} = \sigma_{\max} \left(\frac{h}{L} \right)$; (b) $\tau_{\max} = \sigma_{\max} \left(\frac{h}{2L} \right)$

5.5-6 $\tau_{\max} = 750 \text{ kPa}$ 5.5-7 $P = 6870 \text{ lb}$

5.5-8 $L_0 = 1.64 \text{ m}$ 5.5-9 $L_0 = \frac{\sigma_{\text{perm}}}{\tau_{\text{perm}}} \left(\frac{h}{2} \right)$

5.5-10 $P = 900 \text{ lb}$, $\sigma_{\max} = 1350 \text{ psi}$

5.6-1 $\tau_{\max} = 5.87 \text{ ksi}$, $\tau_{\text{med}} = 5.71 \text{ ksi}$

5.6-2 $\tau_{\max} = 45.2 \text{ MPa}$, $\tau_{\min} = 27.9 \text{ MPa}$,
 $\tau_{\text{med}} = 40.2 \text{ MPa}$, $V_{\text{alma}} = 270 \text{ kN}$ 5.6-3 $\tau_{\max} = 11.3 \text{ ksi}$,
 $\tau_{\text{med}} = 10.8 \text{ ksi}$ 5.6-4 $\tau_{\max} = 5.54 \text{ ksi}$, $\tau_{\text{med}} = 5.71 \text{ ksi}$

5.6-5 $q = 133 \text{ kN/m}$ 5.6-6 $\tau_{\max} = 1830 \text{ psi}$

5.6-7 $\tau_{\max} = 21.4 \text{ MPa}$ 5.6-8 $\tau_{\max} = 1.42 \text{ ksi}$

5.8-1 $F = 393 \text{ kN/m}$ 5.8-2 $V = 421 \text{ k}$

5.8-3 $s = 4.76 \text{ plg}$ 5.8-4 $V = 11.1 \text{ kN}$

5.8-5 $V = 1730 \text{ lb}$ 5.8-6 (a) $s = 2.8 \text{ plg}$; (b) $s = 1.4 \text{ plg}$

5.8-7 $s = 81 \text{ mm}$ 5.8-8 $s = 5.52 \text{ plg}$

5.8-9 $V = 15.7 \text{ k}$ 5.9-1 $x = \frac{L}{4}$, $\sigma_{\max} = \frac{64PL}{27\pi d_s^3}$

$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_b} = 2$ 5.9-2 $1 \leq \frac{d_b}{d_a} \leq 1.5$ 5.9-3 $x = \frac{L}{2}$

$\sigma_{\max} = \frac{8PL}{9h^3}$, $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_b} = \frac{32}{27}$ 5.9-4 $x = 8 \text{ plg}$

$\sigma_{\max} = 1250 \text{ psi}$, $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_b} = \frac{25}{24}$ 5.9-5 En $x = 0$,

$\tau_{\max} = 30 \text{ psi}$; en $x = 10 \text{ plg}$, $\tau_{\max} = 31.2 \text{ psi}$;

en $x = 20 \text{ plg}$, $\tau_{\max} = 30 \text{ psi}$ 5.9-6 $h = \frac{6Px}{h^2 \sigma_{\text{perm}}}$

5.9-7 $h = x \sqrt{\frac{3q}{h\sigma_{\text{perm}}}}$

5.9-8 $h = \left[\frac{q_0 L^2}{4b\sigma_{\text{perm}}} \left(1 - \frac{8x^3}{L^3} \right) \right]^{1/2}$

5.9-9 $h = \left[\frac{3PL}{2b\sigma_{\text{perm}}} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2} \right) \right]^{1/2}$

5.10-1 $\sigma_u = 13,700 \text{ psi}$, $\sigma_m = 660 \text{ psi}$

5.10-2 $\sigma_u = 62.3 \text{ MPa}$, $\sigma_m = 2.3 \text{ MPa}$

5.10-3 $M_{\max} = 911 \text{ plg}\cdot\text{k}$ 5.10-4 $M_{\max} = 63.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

5.10-5 $M_{\max} = 197 \text{ plg}\cdot\text{k}$ 5.10-6 $t = 0.585 \text{ plg}$

5.10-7 $M = \frac{\pi d^3 \sigma_c}{512} \left(15 + \frac{E_c}{E_s} \right)$ 5.10-8 $\sigma_c = 41.8 \text{ MPa}$

$\sigma_m = 5.6 \text{ MPa}$ 5.10-9 $\sigma_c = 8570 \text{ psi}$, $\sigma_m = 1530 \text{ psi}$

5.10-10 $\sigma_x = 3380 \text{ psi}$, $\sigma_z = 4430 \text{ psi}$

5.10-11 $\sigma_x = 122 \text{ MPa}$ 5.10-12 $S = 0.00317 \text{ plg}^3$

Metal A 5.10-13 $M_{\max} = 232 \text{ plg}\cdot\text{k}$

5.10-14 $M_{\max} = 307 \text{ plg}\cdot\text{k}$ 5.10-15 $M_{\max} = 49.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$

5.11-1 $\sigma_x = 8P/a^2$, $\sigma_z = -4P/a^2$ 5.11-2 $\sigma_x = 9.11P/a^2$

$\sigma_z = -6.36P/a^2$ 5.11-3 $\sigma_x = 2680 \text{ psi}$, $\sigma_z = -2800 \text{ psi}$

5.11-4 $\sigma_x = 11.8 \text{ MPa}$, $\sigma_z = -12.3 \text{ MPa}$

5.11-5 $t = 12.4 \text{ mm}$ 5.11-6 $\alpha = \arcsin\left(\frac{d_2^2 + d_1^2}{4hd_2}\right)$

5.11-7 (a) $\sigma_x = 88 \text{ psi}$, $\sigma_z = -100 \text{ psi}$; (b) $d = 28.9 \text{ plg}$

5.11-8 $d = 2.57 \text{ plg}$ 5.11-9 $b = 0.501 \text{ m}$

5.11-10 $s = \frac{L}{2} - \frac{d \tan \alpha}{8}$ 5.11-11 $x = \frac{h^2}{12(L-x)}$

5.11-12 $P_{\max} = 29.6 \text{ k}$ 5.11-13 $\sigma_x = 7.1 \text{ ksi}$

$\sigma_z = -10.5 \text{ ksi}$ 5.11-14 $\sigma_x = 13.1 \text{ ksi}$

5.11-17 Triángulo equilátero con el mismo centroide y lado de longitud $b/4$

5.11-18 Rombo con diagonales de longitud 11.0 y 1.44 plg

Capítulo 6

6.2-1 $\sigma_x = 4,950 \text{ psi}$, $\tau_{xy} = 3,120 \text{ psi}$

$\sigma_y = -12,050 \text{ psi}$ 6.2-2 $\sigma_x = 50.6 \text{ MPa}$

$\tau_{xy} = -47.9 \text{ MPa}$, $\sigma_x = -13.6 \text{ MPa}$

6.2-3 $\sigma_x = 5970 \text{ psi}$, $\tau_{xy} = 3740 \text{ psi}$, $\sigma_y = -3670 \text{ psi}$

6.2-4 $\sigma_x = -104 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -17 \text{ MPa}$

$\sigma_y = -35 \text{ MPa}$ 6.2-5 $\sigma_x = -30,000 \text{ psi}$

$\sigma_y = -10,000 \text{ psi}$, $\tau_{xy} = -7,000 \text{ psi}$

6.2-6 $\sigma_x = 30 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -12 \text{ MPa}$

6.2-7 $\sigma_x = 3000 \text{ psi}$, $\theta_1 = 33.7^\circ$

6.2-8 $\sigma_x = -61.0 \text{ MPa}$, $\theta_1 = 67.0^\circ$

6.3-1 $\sigma_1 = 6470 \text{ psi}$, $\sigma_2 = -2470 \text{ psi}$, $\theta_{p_1} = 148.3^\circ$

$\tau_{\max} = 4470 \text{ psi}$ 6.3-2 $\sigma_1 = 97.1 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -37.1 \text{ MPa}$, $\theta_{p_1} = 31.7^\circ$, $\tau_{\max} = 67.1 \text{ MPa}$

6.3-3 $\sigma_1 = 4830 \text{ psi}$, $\sigma_2 = -830 \text{ psi}$, $\theta_{p_1} = 67.5^\circ$

$\tau_{\max} = 2830 \text{ psi}$ 6.3-4 $\sigma_1 = 4.30 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -52.3 \text{ MPa}$, $\theta_{p_1} = 16.0^\circ$, $\tau_{\max} = 28.3 \text{ MPa}$

6.3-5 $\sigma_1 = 17,400 \text{ psi}$, $\sigma_2 = 4,600 \text{ psi}$, $\theta_{p_1} = 19.3^\circ$

$\tau_{\max} = 6,400 \text{ psi}$ 6.3-6 $\sigma_1 = 65.1 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -115.1 \text{ MPa}$, $\theta_{p_1} = 106.8^\circ$, $\tau_{\max} = 90.1 \text{ MPa}$

6.3-7 $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -15,000 \text{ psi}$, $\theta_{p_1} = 26.6^\circ$

$\tau_{\max} = 7,500 \text{ psi}$ 6.3-8 $\sigma_1 = -11.7 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -128.3 \text{ MPa}$, $\theta_{p_1} = 119.5^\circ$, $\tau_{\max} = 58.3 \text{ MPa}$

6.3-9 $\sigma_1 = 3830 \text{ psi}$, $\sigma_2 = -1830 \text{ psi}$, $\theta_{p_1} = 157.5^\circ$

$\tau_{\max} = 2830 \text{ psi}$ 6.3-10 $\sigma_1 = 191 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -91 \text{ MPa}$, $\theta_{p_1} = 112.5^\circ$, $\tau_{\max} = 141 \text{ MPa}$

6.4-5 $\sigma_{x_1} = 6000 \text{ psi}$, $\tau_{x_1y_1} = -3460 \text{ psi}$

$\sigma_{y_1} = 2000 \text{ psi}$, $\tau_{\max} = 4000 \text{ psi}$

6.4-6 $\sigma_{x_1} = -52.5 \text{ MPa}$, $\tau_{x_1y_1} = 30.3 \text{ MPa}$

$\sigma_{y_1} = -17.5 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 35 \text{ MPa}$

6.4-7 $\sigma_{x_1} = 1800 \text{ psi}$, $\tau_{x_1y_1} = -3120 \text{ psi}$

$\sigma_{y_1} = -1800 \text{ psi}$, $\sigma_1 = 3600 \text{ psi}$

$\sigma_2 = -3600 \text{ psi}$ 6.4-8 $\sigma_{x_1} = -22.5 \text{ MPa}$

$\tau_{x_1y_1} = 39.0 \text{ MPa}$, $\sigma_{y_1} = 22.5 \text{ MPa}$, $\sigma_1 = 45 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = -45 \text{ MPa}$ 6.4-9 $\sigma_{x_1} = 4120 \text{ psi}$

$\tau_{x_1y_1} = -2120 \text{ psi}$, $\sigma_{y_1} = -120 \text{ psi}$, $\tau_{\max} = 3000 \text{ psi}$

6.4-10 $\sigma_{x_1} = -81.2 \text{ MPa}$, $\tau_{x_1y_1} = 21.2 \text{ MPa}$

$\sigma_{y_1} = -38.8 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 30 \text{ MPa}$

6.4-19 $\sigma_{x_1} = -2600 \text{ psi}$, $\tau_{x_1y_1} = 690 \text{ psi}$, $\sigma_{y_1} = -2200 \text{ psi}$

6.4-20 $\sigma_{x_1} = 68.6 \text{ MPa}$, $\tau_{x_1y_1} = 48.7 \text{ MPa}$

$\sigma_{y_1} = 91.4 \text{ MPa}$ 6.5-1 $\sigma_x = 26,000 \text{ psi}$

$\sigma_y = -13,200 \text{ psi}$ 6.5-2 $\sigma_1 = 116 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 55 \text{ MPa}$

6.5-3 (a) $\epsilon_x = \frac{y}{1-y} (\epsilon_x + \epsilon_y)$; (b) $\epsilon_x = -90 \times 10^{-6}$

6.5-4 $F = vP$ 6.5-5 $\gamma_{\max} = 433 \times 10^{-6}$

6.5-6 $\gamma_{\max} = 715 \times 10^{-6}$ 6.5-7 $\Delta t = -0.00011 \text{ plg}^3$

$\Delta V = 0.0680 \text{ plg}^3$ 6.5-8 $\Delta t = -0.00126 \text{ mm}$

$\Delta V = 538 \text{ mm}^3$ 6.5-9 $\Delta V = -0.0256 \text{ plg}^3$

$U = 14.4 \text{ plg}\cdot\text{lb}$ 6.5-10 $\Delta V = -56 \text{ mm}^3$, $U = 4.04 \text{ J}$

6.5-11 $\Delta V = 0.0423 \text{ plg}^3$, $U = 373 \text{ plg}\cdot\text{lb}$

6.5-12 $\Delta V = 2640 \text{ mm}^3$, $U = 67 \text{ J}$

6.5-13 $\sigma_x = 30,000 \text{ psi}$, $\sigma_y = -15,000 \text{ psi}$

$\tau_{xy} = 15,000 \text{ psi}$ 6.5-14 $\sigma_x = 75 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -45 \text{ MPa}$

$\tau_{xy} = 75 \text{ MPa}$ 6.6-1 $p = 2680 \text{ psi}$ 6.6-2 $t = 5.63 \text{ mm}$

6.6-3 $f = 30,000 \text{ lb/plg}$ 6.6-4 $\tau = 0$, $\tau_{\max} = 5250 \text{ psi}$

6.6-5 $\tau = 0$, $\tau_{\max} = 17.6 \text{ MPa}$ 6.6-6 $\sigma_{\max} = 15 \text{ MPa}$

6.6-7 $t = 0.49 \text{ plg}$ 6.6-8 $n = 7.34$ 6.6-9 $t = 0.11 \text{ plg}$

6.6-10 $h = 15.3 \text{ m}$ 6.6-11 $\sigma = 4800 \text{ psi}$, $\sigma_1 = 9600 \text{ psi}$

$\sigma_2 = 4800 \text{ psi}$ 6.6-12 (a) $t = 5.00 \text{ mm}$; (b) $t = 3.75 \text{ mm}$

6.6-13 (a) $\sigma_1 = 17,600 \text{ psi}$, $\sigma_2 = 8,800 \text{ psi}$

(b) $\tau_{\max} = 4,400 \text{ psi}$; (c) $\tau_{\max} = 8,800 \text{ psi}$

6.6-14 (a) $\sigma_1 = 48 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 24 \text{ MPa}$

(b) $\tau_{\max} = 12 \text{ MPa}$; (c) $\tau_{\max} = 24 \text{ MPa}$

6.6-15 (a) $\sigma_1 = 8000 \text{ psi}$, $\sigma_2 = 4000 \text{ psi}$; (b) $\tau = 2000 \text{ psi}$

(c) $\tau = 4120 \text{ psi}$; (d) $\sigma_{x_1} = 4270 \text{ psi}$, $\tau_{x_1y_1} = 1000 \text{ psi}$

$\sigma_{y_1} = 7730 \text{ psi}$ 6.6-16 (a) $\sigma_1 = 75 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = 37.5 \text{ MPa}$; (b) $\tau = 18.8 \text{ MPa}$; (c) $\tau = 38.4 \text{ MPa}$

(d) $\sigma_{x_1} = 46.9 \text{ MPa}$, $\tau_{x_1y_1} = 16.2 \text{ MPa}$, $\sigma_{y_1} = 65.6 \text{ MPa}$

6.6-17 $p = 500 \text{ psi}$ 6.6-18 $F = 3\pi pr^2$

6.7-1 $\sigma_1 = 9680$ psi, $\sigma_2 = -3310$ psi, $\tau_{\max} = 6490$ psi

6.7-2 $\sigma_1 = 4.0$ MPa, $\sigma_2 = -36.0$ MPa, $\tau_{\max} = 20.0$ MPa

6.7-3 $\sigma_{\max} = 7550$ psi, $\tau_{\max} = 3800$ psi, $P = 395$ lb

6.7-4 $\tau_a = 68.3$ MPa, $\tau_b = 17.8$ MPa, $\tau_c = 21.0$ MPa

6.7-5 $\sigma_1 = 2460$ psi, $\sigma_2 = -1110$ psi, $\tau_{\max} = 1780$ psi

6.7-6 $\sigma_{\max} = 12,400$ psi, $\tau_{\max} = 8,370$ psi

6.7-7 $\phi_{\max} = 31.6^\circ$ **6.7-8** (a) $\sigma_x = 25.0$ MPa,

$\sigma_y = 50.0$ MPa, $\tau_{xy} = -14.1$ MPa; (b) $\sigma_{\max} = 56.4$ MPa,

$\tau_{\max} = 25.0$ MPa **6.7-9** $P = 1730$ lb

6.7-10 $\sigma_1 = 29.2qR^2/d^3$, $\sigma_2 = -8.8qR^2/d^3$,

$\tau_{\max} = 19.0qR^2/d^3$ **6.8-1** $\sigma_1 = 66$ psi, $\sigma_2 = -1510$ psi,

$\theta_{p_1} = 78.2^\circ$, $\tau_{\max} = 786$ psi **6.8-2** $\sigma_1 = 13.8$ MPa,

$\sigma_2 = -0.3$ MPa, $\theta_{p_1} = 8.3^\circ$, $\tau_{\max} = 7.05$ MPa

6.8-3 (a) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -16,100$ psi, $\tau_{\max} = 8,060$ psi;

(b) $\sigma_1 = 540$ psi, $\sigma_2 = -4,800$ psi, $\tau_{\max} = 4,800$ psi;

(c) $\sigma_1 = 4,800$ psi, $\sigma_2 = -4,800$ psi, $\tau_{\max} = 4,800$ psi

6.8-4 (a) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -68.9$ MPa, $\tau_{\max} = 34.4$ MPa;

(b) $\sigma_1 = 3.8$ MPa, $\sigma_2 = -63.4$ MPa, $\tau_{\max} = 33.6$ MPa;

(c) $\sigma_1 = 19.3$ MPa, $\sigma_2 = -19.3$ MPa, $\tau_{\max} = 19.3$ MPa

6.8-5 (a) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -96.2$ MPa, $\tau_{\max} = 48.1$ MPa;

(b) $\sigma_1 = 26.4$ MPa, $\sigma_2 = -0.3$ MPa, $\tau_{\max} = 13.3$ MPa

6.8-6 Parte superior: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -7000$ psi, $\tau_{\max} =$

3500 psi; N.A.: $\sigma_1 = 750$ psi, $\sigma_2 = -750$ psi, $\tau_{\max} =$

750 psi

6.8-7 Parte superior: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -146$ MPa, $\tau_{\max} =$

73.0 MPa; N.A.: $\sigma_1 = 29.2$ MPa, $\sigma_2 = -29.2$ MPa,

$\tau_{\max} = 29.2$ MPa

6.9-1 $\tau_{\max} = 8000$ psi, $\Delta u = 0.0079$ plg, $\Delta b = -0.0029$ plg,

$\Delta c = -0.0011$ plg, $\Delta V = 0.0165$ plg³, $U = 685$ plg²·lb

6.9-2 $\tau_{\max} = 10$ MPa, $\Delta u = -0.0540$ mm,

$\Delta b = -0.0075$ mm, $\Delta c = -0.0075$ mm,

$\Delta V = -1890$ mm³, $U = 50.0$ J **6.9-3** $\sigma_x = -4200$ psi,

$\sigma_y = -2100$ psi, $\sigma_z = -2100$ psi, $\tau_{\max} = 1050$ psi,

$\Delta V = -0.0192$ plg³, $U = 35.3$ plg²·lb

6.9-4 $\sigma_x = -64.8$ MPa, $\sigma_y = -43.2$ MPa,

$\sigma_z = -43.2$ MPa, $\tau_{\max} = 10.8$ MPa, $\Delta V = -532$ mm³,

$U = 14.8$ J **6.9-5** (a) $p = \frac{4vF}{\pi d^2(1-\nu)}$

(b) $p = 260$ psi (compresión) **6.9-6** (a) $p = \nu p_0$

(b) $e = -\frac{p_0}{E}(1+\nu)(1-2\nu)$

(c) $e = -\frac{p_0}{E}(1+\nu)\left[1-2\nu + \frac{\nu p_0}{E}(1-\nu^2)\right]$

(d) $p = 192$ psi (compresión), $e = -0.282$

6.9-7 $p = 125,000$ psi, $K = 25 \times 10^6$ psi,

$U = 35,300$ plg²·lb **6.9-8** $d = 3000$ m, incremento = 0.060°

6.9-9 $\epsilon_a = 300 \times 10^{-6}$, $\epsilon_c = 900 \times 10^{-6}$, $u = 40.5$ kPa

6.11-1 $\epsilon_{x_1} = 434 \times 10^{-6}$, $\gamma_{x_1y_1} = 307 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_{y_1} = 306 \times 10^{-6}$ **6.11-2** $\epsilon_{x_1} = 335 \times 10^{-6}$,

$\gamma_{x_1y_1} = -537 \times 10^{-6}$, $\epsilon_{y_1} = -75 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 157.5^\circ$,

6.11-3 $\epsilon_1 = 575 \times 10^{-6}$, $\epsilon_2 = 65 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 166.2^\circ$, $\gamma_{\max} = 778 \times 10^{-6}$,

$\gamma_{\max} = 510 \times 10^{-6}$ **6.11-4** $\epsilon_1 = 164 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_2 = -614 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 166.2^\circ$, $\gamma_{\max} = 778 \times 10^{-6}$,

6.11-5 (a) $\epsilon_{x_1} = 163 \times 10^{-6}$, $\gamma_{x_1y_1} = -582 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_{y_1} = 387 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = 587 \times 10^{-6}$, $\epsilon_2 = -37 \times 10^{-6}$,

$\theta_{p_1} = 24.5^\circ$; (c) $\gamma_{\max} = 624 \times 10^{-6}$

6.11-6 (a) $\epsilon_{x_1} = -385 \times 10^{-6}$, $\gamma_{x_1y_1} = 672 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_{y_1} = -1295 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = -274 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_2 = -1406 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 68.2^\circ$; (c) $\gamma_{\max} = 1130 \times 10^{-6}$,

6.11-7 (a) $\epsilon_{x_1} = -830 \times 10^{-6}$, $\gamma_{x_1y_1} = 995 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_{y_1} = 267 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = 459 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_2 = -1022 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 98.9^\circ$; (c) $\gamma_{\max} = 1480 \times 10^{-6}$,

6.11-8 (a) $\epsilon_{x_1} = -1641 \times 10^{-6}$, $\gamma_{x_1y_1} = -656 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_{y_1} = -768 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = -658 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_2 = -1751 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 168.4^\circ$; (c) $\gamma_{\max} = 1,093 \times 10^{-6}$,

6.11-9 $\epsilon_1 = 587 \times 10^{-6}$, $\epsilon_2 = -137 \times 10^{-6}$,

$\gamma_{\max} = 724 \times 10^{-6}$ **6.11-10** $\epsilon_1 = 316 \times 10^{-6}$,

$\epsilon_2 = -196 \times 10^{-6}$, $\gamma_{\max} = 511 \times 10^{-6}$

6.11-11 $\epsilon_c = \epsilon_a$, $\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)$

$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)$

Capítulo 7

7.3-2 $q = q_0 x/L$ **7.3-3** $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

7.3-4 $\delta = 0.361$ plg, $\theta = 0.00602$ rad **7.3-5** $h_2/h_1 = 2$

7.3-6 $\delta/L = 1/300$ **7.3-7** $L = 4.0$ m **7.3-8** $h = 4$ plg

7.3-9 $\delta = 14.3$ mm **7.3-10** $\frac{\theta_a}{\theta_b} = \frac{2 - \frac{a}{L}}{1 + \frac{a}{L}}$

7.3-11 $\frac{\delta_c}{\delta_{\max}} = \frac{3\sqrt{3}s}{16t^{3/2}}$ en donde $s = -1 + \frac{8a}{L} - \frac{4a^2}{L^2}$ y

$t = \frac{2a}{L} - \frac{a^2}{L^2}$ **7.3-15** $v = \frac{mx^2}{6EI} (3L - x)$, $\delta_b = \frac{mL^3}{3EI}$

$\theta_b = \frac{mL^2}{2EI}$ **7.3-18** $\delta_b = \frac{41qL^4}{384EI}$, $\delta_c = \frac{7qL^4}{192EI}$

7.4-4 $v = \frac{q_0 L^3}{3\pi^4 EI}$ en donde

$s = 48L^3 \cos \frac{\pi x}{2L} - 48L^3 + 3\pi^3 L x^2 - \pi^3 x^3$

$$7.4-5 \delta = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \quad 7.4-6 \delta_b = \frac{19q_0 L^4}{360EI}, \theta_b = \frac{q_0 L^3}{15EI}$$

$$7.4-11 \text{ Para } 0 \leq x \leq L: v = -\frac{qLx}{48EI}(L^2 - x^2)$$

$$\text{para } L \leq x \leq \frac{3L}{2}:$$

$$v = \frac{q}{48EI}(L-x)(7L^2 - 17L^2x + 10Lx^2 - 2x^3);$$

$$\delta_b = \frac{11qL^4}{384EI}, \theta_c = \frac{qL^3}{16EI} \quad 7.5-4 \theta_b = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{M_0L}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{M_0L^2}{2EI} \quad 7.5-5 \theta_b = \frac{7qL^3}{162EI}, \delta_b = \frac{23qL^4}{648EI}$$

$$7.5-6 \delta_b = 0.443 \text{ plg}, \delta_c = 0.137 \text{ plg} \quad 7.5-7 \delta_b = 11.8 \text{ mm}, \delta_c = 4.10 \text{ mm} \quad 7.5-10 P = 15.0 \text{ k}$$

$$7.5-11 \theta_a = \frac{Pa}{6LEI}(L-a)(L-2a), \delta_1 = \frac{Pa^2}{6LEI}(L-2a)^2,$$

$$\delta_2 = 0 \quad 7.5-12 \theta_a = \frac{M_0L}{6EI}, \theta_b = 0, \delta_{\max} = \frac{M_0L^2}{27EI}$$

$$7.5-13 \delta_{\max} = 20.72 \text{ mm} \quad 7.5-14 \delta_c = \frac{Pa^2}{3EI}(L+a)$$

$$7.5-15 \frac{P}{Q} = 4 \quad 7.5-16 \delta_c = \frac{qL^4}{128EI} \quad 7.5-17 \theta_b = \frac{PL^2}{12EI}$$

$$\delta_a = \frac{PL^3}{12EI}, \delta_c = 0 \quad 7.5-18 P = \frac{3qL}{4} \quad 7.6-1 \delta_b = \frac{2PL^3}{9EI}$$

$$7.6-2 \delta = \frac{19PL^3}{384EI} \quad 7.6-3 \text{ (a) } \frac{a}{L} = \frac{2}{3}; \text{ (b) } \frac{a}{L} = \frac{1}{2}$$

$$7.6-4 y = -\frac{Px^3}{3EI} \quad 7.6-8 \theta_b = \frac{q_0L^3}{10EI}, \delta_b = \frac{13q_0L^4}{180EI}$$

$$7.6-9 \frac{\delta_2}{\delta_1} = n^2 \quad 7.6-10 \theta_a = \frac{q}{24EI}(L^3 - 6La^2 + 4a^3),$$

$$\delta = \frac{q}{384EI}(5L^4 - 24L^2a^2 + 16a^4) \quad 7.6-13 \delta = \frac{3q_0L^4}{1280EI}$$

$$7.6-14 \delta_b = \frac{L^2}{48EI}(QL - 3Pa), \frac{P}{Q} = \frac{L}{3a}$$

$$7.6-15 \delta_a = \frac{Pa^2}{3EI}(L+a) - \frac{QL^2a}{16EI}, \frac{P}{Q} = \frac{3L^2}{16a(L+a)}$$

$$7.6-16 \theta_a = \frac{qL}{24EI}(L^2 - 2a^2) \quad 7.6-19 \delta = \frac{19WL^3}{31,104EI}$$

$$7.6-20 \theta_a = \frac{427qL^3}{3456EI} \quad 7.6-21 \delta = \frac{5Pb^3}{2EI}$$

$$7.6-22 \delta_c = \frac{5Po^3}{3EI} \quad 7.6-23 \delta_c = 0.183 \text{ plg}$$

$$7.6-24 \delta_c = \frac{39PL^3}{1024EI} \quad 7.6-25 \delta_b = \frac{Pcb^2}{2EI}$$

$$\delta_c = \frac{Pc^2}{3EI}(c+3b) \quad 7.6-26 \delta = \frac{PL^2}{3EI}(2L+3a)$$

$$7.7-1 \delta_b = \frac{PL^3}{24E}\left(\frac{7}{I_2} + \frac{1}{I_1}\right), r = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{7I_1}{I_2}\right)$$

$$7.7-2 \delta_b = \frac{17qL^4}{256EI} \quad 7.7-3 \delta_b = \frac{qL^4}{128EI_1}\left(1 + \frac{15I_1}{I_2}\right)$$

$$7.7-4 \theta_a = \frac{PL^2}{64EI_1} + \frac{3PL^2}{64EI_2}, \delta_c = \frac{PL^3}{384EI_1} + \frac{7PL^3}{384EI_2}$$

$$7.7-5 \theta_a = \frac{7qL^3}{256EI}, \delta_c = \frac{31qL^4}{4096EI} \quad 7.7-6 \delta_b = 6.542 \frac{PL^3}{Ebd_2^3}$$

$$7.7-7 \delta_b = \frac{6PL^3t}{Eb(d_b - d_c)^3} \text{ en donde}$$

$$t = \left(\frac{d_b}{d_c} - 3\right)\left(\frac{d_b}{d_c} - 1\right) + 2 \ln \frac{d_b}{d_c} \quad 7.7-8 \delta_b = 1.388 \frac{PL^3}{EId_c^3}$$

$$7.7-9 \delta_c = \frac{11PL^3}{64Ebh^3} \quad 7.8-1 U = \frac{P^2L^3}{96EI}$$

$$7.8-2 U = \frac{P^2a^2(L+a)}{6EI} \quad 7.8-3 U = 278 \text{ plg}\cdot\text{lb}$$

$$7.8-4 \frac{U_2}{U_1} = n^5 \quad 7.8-5 U = \frac{4bhL\sigma_{\max}^2}{45E}$$

$$7.8-6 U = \frac{32EI\delta^2}{L^3} \quad 7.8-7 U = \frac{\pi^4 EI\delta^2}{4L^3}$$

$$7.8-8 U = \frac{P^2L^3}{96EI} + \frac{PM_0L^2}{16EI} + \frac{M_0^2L}{6EI}$$

$$7.8-9 \sigma_{\max} = \sqrt{\frac{18WEh}{AL}} \quad 7.8-10 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{cul}}} = 1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta_{\text{cul}}}\right)^{1/2}$$

$$7.8-11 \delta = 0.707 \text{ plg}, \sigma_{\max} = 28,600 \text{ psi}$$

$$7.8-12 w_{14 \times 53} \quad 7.8-13 d_{\min} = 281 \text{ mm}$$

$$7.8-14 R = \sqrt{\frac{3EIVr^2e\sigma^2}{2qL^3}}$$

$$7.9-1 q = -P\langle x \rangle^{-1} + Pa\langle x \rangle^{-2} + P\langle x-a \rangle^{-1}$$

$$7.9-2 q = -qb\langle x \rangle^{-1} + \frac{qb}{2}(2a+b)\langle x \rangle^{-2} +$$

$$q\langle x-a \rangle^0 - q\langle x-L \rangle^0$$

7.9-3 $q = -16\langle x \rangle^{-1} + 864\langle x \rangle^{-2} + \frac{1}{6}\langle x \rangle^0 -$

$\frac{1}{6}\langle x - 72 \rangle^0 + 4\langle x - 108 \rangle^{-1}, x = \text{plg}, q = \text{k/plg}$

7.9-4 $q = -\frac{Pb}{L}\langle x \rangle^{-1} + P\langle x - a \rangle^{-1} - \frac{Pa}{L}\langle x - L \rangle^{-1}$

7.9-5 $q = -\frac{M_0}{L}\langle x \rangle^{-1} + M_0\langle x - a \rangle^{-2} + \frac{M_0}{L}\langle x - L \rangle^{-1}$

7.9-6 $q = -P\langle x \rangle^{-1} + P\langle x - a \rangle^{-1} +$
 $P\langle x - L + a \rangle^{-1} - P\langle x - L \rangle^{-1}$

7.9-7 $q = -33.75\langle x \rangle^{-1} + 30\langle x \rangle^{-2} +$
 $80\langle x - 5 \rangle^{-1} - 46.25\langle x - 8 \rangle^{-1}, x = \text{m}, q = \text{kN/m}$

7.9-8 $q = -\frac{qa}{2L}(2L - a)\langle x \rangle^{-1} + q\langle x \rangle^0 - q\langle x - a \rangle^0 -$

$\frac{qa^2}{2L}\langle x - L \rangle^{-1}$

7.9-9 $q = -180\langle x \rangle^{-1} + 20\langle x \rangle^0 - 20\langle x - 10 \rangle^0 +$
 $120\langle x - 15 \rangle^{-1} - 140\langle x - 20 \rangle^{-1}, x = \text{m}, q = \text{kN/m}$

7.9-10 $q = -\frac{2q_0L}{27}\langle x \rangle^{-1} + \frac{3q_0}{L}\langle x - \frac{L}{3} \rangle^1 -$

$\frac{3q_0}{L}\langle x - \frac{2L}{3} \rangle^1 - q_0\langle x - \frac{2L}{3} \rangle^0 - \frac{5q_0L}{54}\langle x - L \rangle^{-1}$

7.9-11 $q = 3\langle x \rangle^{-1} + 144\langle x - 72 \rangle^{-2} -$
 $11\langle x - 144 \rangle^{-1} + 8\langle x - 216 \rangle^{-1}, x = \text{plg}, q = \text{k/plg}$

7.9-12 $q = 2.4\langle x \rangle^{-1} + 10\langle x - 1.2 \rangle^1 - 10\langle x - 2.4 \rangle^1 -$
 $12\langle x - 2.4 \rangle^0 - 24\langle x - 2.4 \rangle^{-1} + 12\langle x - 2.4 \rangle^0 -$
 $12\langle x - 3.6 \rangle^0, x = \text{m}, q = \text{kN/m}$

7.10-1 $Elv = \frac{Px^2}{6}(3a - x) + \frac{P}{6}\langle x - a \rangle^3$

7.10-2 $Elv = \frac{qhx^2}{12}(3L + 3a - 2x) + \frac{q}{24}\langle x - a \rangle^4$

7.10-3 $Elv = \frac{1}{144}(x^4 - 384x^3 + 62,208x^2 - \langle x - 72 \rangle^4),$

$x = \text{plg}, v = \text{plg}, EI = 4.8 \times 10^6 (\text{k} \cdot \text{plg}^2), \theta_a = 0.00702$
 $\text{rad}, \delta_a = 0.544 \text{ plg}$

7.10-4 $Elv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P}{6}\langle x - a \rangle^3$

7.10-5 $Elv = \frac{M_0x}{6L}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) +$

$\frac{M_0}{2}\langle x - a \rangle^2$

7.10-6 $Elv = \frac{Px}{6}(3aL - 3a^2 - x^2) + \frac{P}{6}\langle x - a \rangle^3 +$

$\frac{P}{6}\langle x - L + a \rangle^3$

7.10-7 $Elv = -5.625x^3 + 15x^2 + 195x + \frac{40}{3}\langle x - 5 \rangle^3,$

$x = \text{m}, v = \text{m}, EI = 64,050 (\text{kN} \cdot \text{m}^2), \theta_a = 0.00304 \text{ rad},$
 $\delta_a = 10.1 \text{ mm}$

7.10-8 $Elv = \frac{qx}{24L}[a^2(2L - a)^2 -$

$2a(2L - a)x^2 + Lx^3] - \frac{q}{24}\langle x - a \rangle^4$

7.10-9 $Elv = 5625x - 30x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{5}{6}\langle x - 10 \rangle^4 +$

$20\langle x - 15 \rangle^3, x = \text{m}, v = \text{m}, EI = 500 \times 10^3 (\text{kN} \cdot \text{m}^2),$
 $\theta_a = 0.0111 \text{ rad}, \delta_a = 49.6 \text{ mm}$

7.10-10 $Elv = \frac{47q_0L^2x}{4860} - \frac{q_0Lx^3}{81} + \frac{q_0}{40L}\langle x - \frac{L}{3} \rangle^5 -$

$\frac{q_0}{40L}\langle x - \frac{2L}{3} \rangle^5 - \frac{q_0}{24}\langle x - \frac{2L}{3} \rangle^4,$

$\theta_a = \frac{101q_0L^3}{9720EI}, \delta_a = \frac{121q_0L^4}{43,740EI}$

7.10-11 $Elv = \frac{x^3}{2} - 12,960x + 72\langle x - 72 \rangle^2 -$

$\frac{11}{6}\langle x - 144 \rangle^3, x = \text{plg}, v = \text{plg}, EI = 7.5 \times 10^6 (\text{plg}^2 \cdot \text{k}),$

$\delta_c = 0.0995 \text{ plg (hacia arriba)}, \delta_d = 0.406 \text{ plg (hacia abajo)}$

7.10-12 $Elv = 0.4x^3 - 2.3904x + \frac{1}{12}\langle x - 1.2 \rangle^5 -$

$\frac{1}{12}\langle x - 2.4 \rangle^5 - 4\langle x - 2.4 \rangle^3, x = \text{m}, v = \text{m},$

$EI = 2400 (\text{kN} \cdot \text{m}^2), \delta_c = -0.9072 \text{ mm}, \delta_d = 3.989 \text{ mm}$

7.11-1 $v = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(x)(L - x)}{2h}, \theta = \frac{\alpha L(T_2 - T_1)}{2h},$

$\delta = \frac{\alpha L^2(T_2 - T_1)}{8h}$ 7.11-2 $\theta = -\frac{\alpha L(T_2 - T_1)}{h},$

$\delta = \frac{\alpha L^2(T_2 - T_1)}{2h}$ 7.11-3 $\delta_c = -\frac{\alpha a(L + a)(T_2 - T_1)}{2h}$

7.11-4 $\delta_{\text{máx}} = \frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANGELES DE LOS ANGELES
 BIBLIOTECA CONTROL

Capítulo 8

$$8.2-1 \quad v = \frac{qx^2}{48EI} (3L^2 - 5Lx + 2x^2)$$

$$\delta_{\max} = 0.005416 \frac{qL^4}{EI} \quad \text{en } x = 0.5785L$$

$$8.2-2 \quad V = \frac{5qL}{8} - qx, \quad M = \frac{5qLx}{8} - \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{2}$$

$$8.2-3 \quad \delta_{\max} = \frac{PL^3}{192EI}, \quad V_{\max} = \frac{P}{2}, \quad M_{\max} = -\frac{PL}{8}, \quad M_{\min} = \frac{PL}{8}$$

$$8.2-4 \quad v = \frac{M_0 x^2}{4LEI} (L - x), \quad R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L}, \quad M_a = \frac{M_0}{2}$$

$$8.2-5 \quad v = \frac{\Delta x^2}{2L^2} (3L - x), \quad R_a = R_b = \frac{3EI\Delta}{L^3}, \quad M_a = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

$$8.2-6 \quad v = \frac{qx^2}{24EI} (L - x)^2, \quad R_a = R_b = \frac{qL}{2}, \quad M_a = M_b = \frac{qL^2}{12}$$

$$8.2-7 \quad v = \frac{q_0 x^2}{240LEI} (7L^3 - 9L^2x + 2x^2), \quad R_a = \frac{9q_0L}{40}$$

$$R_b = \frac{11q_0L}{40}, \quad M_a = \frac{7q_0L^2}{120} \quad 8.2-8 \quad R_a = R_b = \frac{q_0L}{4}$$

$$M_a = M_b = \frac{5q_0L^2}{96}, \quad \delta_{\max} = \frac{7q_0L^4}{3840EI}$$

$$8.2-9 \quad R_a = \frac{7q_0L}{20}, \quad R_b = \frac{3q_0L}{20}, \quad M_a = \frac{q_0L^2}{20}, \quad M_b = \frac{q_0L^2}{30}$$

$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI} (3L^3 - 7L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$8.3-1 \quad R_a = \frac{5qL}{8}, \quad R_b = \frac{3qL}{8}, \quad M_a = \frac{qL^2}{8}$$

$$8.3-2 \quad R_a = 2R_b = \frac{4P}{3}, \quad M_a = \frac{PL}{3}$$

$$8.3-3 \quad R_a = -R_b = -370.4 \text{ lb}, \quad M_a = -444.4 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$8.3-4 \quad R_a = -R_b = \frac{3M_0 a}{2L^2} (L + b)$$

$$M_a = -\frac{M_0}{2L^2} (2L^2 - 6aL + 3a^2)$$

$$a_1 = \frac{2L}{3}, \quad a_2 = L \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$8.3-5 \quad R_a = 2R_b = 80 \text{ kN}, \quad M_a = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$8.3-6 \quad R_a = R_b = \frac{qL}{2}, \quad M_a = M_b = \frac{qL^2}{12}, \quad \delta_{\max} = \frac{qL^4}{384EI}$$

$$8.3-7 \quad R_a = R_b = P, \quad M_a = M_b = \frac{Pa}{L} (L - a)$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pa^2}{24EI} (3L - 4a) \quad 8.3-8 \quad R_a = R_b = \frac{q_0L}{4}$$

$$M_a = M_b = \frac{5q_0L^2}{96}, \quad \delta_{\max} = \frac{7q_0L^4}{3840EI}$$

$$8.3-9 \quad R_a = \frac{Pb^2}{L^2} (L + 2a), \quad M_a = \frac{Pab^2}{L^2}, \quad \delta = \frac{Pa^2b^3}{3L^2EI}$$

$$8.3-10 \quad M_a = M_b = \frac{5PL}{48}, \quad \delta_{\max} = \frac{11PL^3}{3072EI}$$

$$8.3-11 \quad M_a = M_b = \frac{PL}{6}, \quad \delta_{\max} = \frac{PL^3}{256EI}$$

$$8.4-3 \quad R_a = \frac{2q_0L}{5}, \quad R_b = \frac{q_0L}{10}, \quad M_a = \frac{q_0L^2}{15}$$

$$8.4-4 \quad R_a = \frac{P}{16L} (11L - 24a), \quad R_b = \frac{3P}{16L} (7L + 8a)$$

$$M_a = \frac{P}{16} (3L - 8a) \quad 8.4-6 \quad R_a = \frac{qL}{8}, \quad R_b = \frac{33qL}{16}$$

$$R_c = \frac{13qL}{16} \quad 8.4-8 \quad T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 24HI}$$

$$8.4-9 \quad F = \frac{5PI_2}{2(I_1 + I_2)} \quad 8.4-10 \quad R_a = R_b = \frac{2qL}{5}$$

$$R_c = R_d = \frac{11qL}{10} \quad 8.4-11 \quad R_b = 10.42 \text{ kN}$$

$$8.4-12 \quad R_a = \frac{31qL}{48}, \quad R_b = \frac{17qL}{48}, \quad M_a = \frac{7qL^2}{48}$$

$$8.4-13 \quad \Delta = \frac{7qL^4}{72EI} \quad 8.4-16 \quad R_a = R_b = \frac{6EI\theta}{L^2}$$

$$M_a = 2M_b = \frac{4EI\theta}{L} \quad 8.4-17 \quad R_a = R_b = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

$$M_a = M_b = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad 8.4-18 \quad R_a = \frac{13qL}{30}, \quad R_b = \frac{13qL}{20}$$

$$R_c = \frac{qL}{10}, \quad R_d = \frac{qL}{60} \quad 8.4-19 \quad R_a = -1,286 \text{ lb}$$

$$R_b = 8,143 \text{ lb}, \quad R_c = 5,143 \text{ lb}, \quad M_a = -5,143 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$V_{\max} = 6,857 \text{ lb}, \quad M_{\max} = 13,220 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$8.4-20 F = \frac{P}{4L}(2L + 3a) \quad 8.4-21 F = 2,911 \text{ lb}$$

$$M_{ca} = 17,470 \text{ pie}\cdot\text{lb}, M_{cb} = 8,093 \text{ pie}\cdot\text{lb}$$

$$8.4-22 k = 89.63 \frac{EI}{L^3} \quad 8.4-23 H_a = qL, V_a = -\frac{qL}{8}$$

$$M_a = \frac{3qL^2}{8}, V_c = \frac{qL}{8}$$

$$8.4-24 \delta_b = \frac{Pa^2}{4EI}(L + 2a) \text{ (hacia la izquierda)}$$

$$\delta_c = \frac{Pa^2}{12EI}(3L + 16a) \text{ (hacia abajo)}$$

$$8.5-3 M = \frac{qL^2}{8} + \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

$$8.5-4 R = \frac{7P}{20}, V_{\max} = \frac{13P}{20}, M_{\max} = \frac{7PL}{40}$$

$$8.5-5 R_1 = 17.63 \text{ kN}, R_2 = 24.44 \text{ kN}, R_3 = 5.93 \text{ kN}$$

$$V_{\text{pos}} = 17.63 \text{ kN}, V_{\text{neg}} = -22.37 \text{ kN}, M_{\text{pos}} = 15.54 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\text{neg}} = -14.22 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad 8.5-7 R = \frac{11qL}{28}, V_{\max} = \frac{17qL}{28}$$

$$M_{\text{pos}} = \frac{121qL^2}{1568}, M_{\text{neg}} = -\frac{3qL^2}{28}$$

$$8.5-9 M_1 = 3M_2 = -\frac{3qL^2}{28}$$

$$8.5-10 M_1 = -18.06 \text{ kN}\cdot\text{m}, R_1 = 20.84 \text{ kN}$$

$$R_2 = 30.13 \text{ kN}, R_3 = 4.03 \text{ kN}$$

$$8.5-11 M_1 = -\frac{Pa}{7}, M_2 = \frac{2Pa}{7}, M_3 = -Pa$$

$$8.5-12 M_1 = -10 \text{ pie}\cdot\text{k}, M_2 = -16.72 \text{ pie}\cdot\text{k}$$

$$M_3 = -26.47 \text{ pie}\cdot\text{k} \quad 8.5-13 M_1 = -\frac{5qL^2}{56}$$

$$M_2 = -\frac{qL^2}{14}, M_3 = -\frac{qL^2}{8} \quad 8.5-14 M_2 = M_3 = -\frac{qL^2}{284}$$

$$M_3 = M_a = \frac{qL^2}{71}, M_2 = M_5 = -\frac{15qL^2}{284}$$

$$8.5-15 M_1 = -185.0 \text{ pie}\cdot\text{k}, M_2 = -130.0 \text{ pie}\cdot\text{k}$$

$$M_3 = 80.2 \text{ pie}\cdot\text{k} \quad 8.5-16 M_2 = M_3\sqrt{3} - 2f$$

$$8.6-1 M_2 = R_2L = -R_1L = -\frac{3EI(T_2 - T_1)}{2h}$$

$$8.6-2 R_b = -2R_c = -2R_e = -\frac{3EI\alpha(T_2 - T_1)}{hL}$$

$$8.6-3 S = \frac{48EIAH\alpha T}{AL^3 + 48IH}$$

$$8.7-1 H = \frac{\pi^2 EA\delta^2}{4L^2}, \sigma = 274 \text{ psi}$$

$$8.7-2 \lambda = \frac{17q^2L^7}{40,320E^2I^2}, \sigma_1 = 120 \text{ psi}, \sigma_2 = 18,100 \text{ psi}$$

Capítulo 9

$$9.2-2 \sigma_{\max} = 7.92 \text{ MPa}, \delta = 7.66 \text{ mm}$$

$$9.2-3 \sigma_{\max} = 15.2 \text{ MPa}, \delta = 22.7 \text{ mm}$$

$$9.2-4 \text{ Elipse con semiejes igual a } \frac{PL^2}{3EI_x} \text{ y } \frac{PL^2}{3EI_y}$$

$$9.2-5 \sigma_{\max} = 16,400 \text{ psi}, \delta = 0.583 \text{ plg}$$

$$9.2-6 \sigma_{\max} = 19,800 \text{ psi}, \delta = 0.312 \text{ plg}$$

$$9.2-7 \sigma_{\max} = 15,970 \text{ psi}, \delta = 0.205 \text{ plg}$$

$$9.2-8 \sigma_a = -\sigma_c = 13,400 \text{ psi}, \sigma_b = -\sigma_d = -6,410 \text{ psi}$$

$$9.2-9 \sigma_a = -\sigma_c = 13,100 \text{ psi}, \sigma_b = -\sigma_d = -3,700 \text{ psi}$$

$$9.2-10 \sigma_{\max} = 642 \text{ psi}, \delta_x = 0.126 \text{ plg}$$

$$9.2-11 \sigma_{\max} = 7.32 \text{ MPa}, \delta_c = 12.6 \text{ mm}$$

$$9.2-12 \delta_y = 0.0129 \text{ plg (hacia abajo)}, \delta_b = 0.0163 \text{ plg}$$

$$\text{(hacia la izquierda)} \quad 9.2-13 \delta_c = 0.00657 \text{ plg (hacia abajo)}$$

$$\delta_b = 0.0106 \text{ plg (hacia la izquierda)}$$

$$9.2-14 \sigma_x = 45,420 \sin \theta + 3,630 \cos \theta \text{ (psi)}$$

$$\beta = \arctan(37.54 \tan \theta) \quad 9.3-1 \sigma_1 = 15,600 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = -7,600 \text{ psi} \quad 9.3-2 \sigma_1 = 2860 \text{ psi}, \sigma_2 = -1470 \text{ psi}$$

$$9.3-3 \sigma_1 = 3450 \text{ psi}, \sigma_2 = -3080 \text{ psi}$$

$$9.3-4 \sigma_1 = 3500 \text{ psi}, \sigma_2 = -3090 \text{ psi}$$

$$9.3-5 \sigma_a = \frac{16M}{b^3}(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta), \sigma_b = \frac{32M}{b^3} \sin \theta$$

$$9.3-6 \sigma_{\max} = 2.546 \frac{M}{r^3}, \sigma_{\text{med}} = 3.956 \frac{M}{r^3}, \sigma_{\min} = 5.244 \frac{M}{r^3}$$

$$9.3-7 \sigma_1 = 1840 \text{ psi}, \sigma_2 = -1860 \text{ psi}$$

$$9.3-8 \sigma_1 = 2950 \text{ psi}, \sigma_2 = -2930 \text{ psi}$$

$$9.3-9 \sigma_1 = -\sigma_2 = 39.2 \text{ MPa} \quad 9.4-1 \sigma_1 = 4820 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = -4010 \text{ psi} \quad 9.4-2 \sigma_1 = 4460 \text{ psi}, \sigma_2 = -3740 \text{ psi}$$

$$9.4-3 \sigma_1 = 3450 \text{ psi}, \sigma_2 = -3080 \text{ psi}$$

$$9.4-4 \sigma_1 = 3500 \text{ psi}, \sigma_2 = -3090 \text{ psi}$$

$$9.4-5 \sigma_1 = 3480 \text{ psi}, \sigma_2 = -3750 \text{ psi}$$

$$9.4-6 \sigma_1 = 2980 \text{ psi}, \sigma_2 = -2590 \text{ psi}$$

$$9.4-7 \sigma_1 = 1840 \text{ psi}, \sigma_2 = -1860 \text{ psi}$$

$$9.4-8 \sigma_1 = 2950 \text{ psi}, \sigma_2 = -2930 \text{ psi}$$

$$9.4-9 \sigma_1 = -\sigma_2 = 39.2 \text{ MPa}$$

9.4-10 $\sigma_x = -\sigma_y = 9730$ psi

9.4-11 $\sigma_x = -\sigma_y = \frac{24M_x}{bh^2}$, $\sigma_z = 0$

9.4-12 $\sigma_x = \frac{24M \cos \theta}{bh^2}$, $\sigma_y = -\frac{24M}{bh} \left(\frac{\cos \theta}{h} + \frac{\sin \theta}{b} \right)$

$$\sigma_z = \frac{24M \sin \theta}{hb^2}$$
, $\tan \phi = \frac{h(b + 2h \tan \theta)}{b(2b + h \tan \theta)}$

9.5-1 $s = 2.453$ plg, $\sigma_x = 8360$ psi, $\sigma_y = -6570$ psi,

$\delta = 0.172$ plg 9.5-2 $s = 145.3$ mm, $\sigma_x = 75.6$ MPa,

$\sigma_y = -60.5$ MPa, $\delta = 16.4$ mm 9.5-3 $s = 112.9$ mm,

$\sigma_x = 21.5$ MPa, $\sigma_y = -18.0$ MPa, $\delta = 4.79$ mm

9.6-1 $\tau_{\max} = 172$ psi, $\tau_x = 16$ psi 9.6-2 $\tau_{\max} = 172$ psi,

$\tau_x = 16$ psi 9.6-3 $\tau_{\max} = \frac{3Pb^2}{2(t_1 b_1^2 + t_2 b_2^2)}$

9.6-4 $\tau_{\max} = \frac{3P}{2bc}$, $\tau = \frac{3P(b^2 - 4x^2)}{2tb^3}$

9.6-5 $\tau_{\max} = \frac{3P}{2\sqrt{2}tb}$, $\tau = \frac{6Ps(b-s)}{\sqrt{2}tb^3}$

9.6-6 $\tau_{\max} = 1140$ psi 9.6-7 $\tau_{\max} = 8.40$ MPa

9.6-8 $\tau_{\max} = 2860$ psi 9.6-9 $\tau_{\max} = 26.2$ MPa

9.7-1 $e_0 = 0.87$ plg 9.7-2 $e_0 = 0.43$ plg

9.7-12 $e = 23.00$ mm

$\kappa = 184 \times 10^{-6}$ plg⁻¹ 10.3-16 $M = 1710$ plg·k

$\kappa = 209 \times 10^{-6}$ plg⁻¹ 10.3-17 $\frac{M}{M_y} = 1.067$, $\frac{\kappa}{\kappa_y} = 1.111$,

$f = 1.21$ 10.3-18 $\frac{M}{M_y} = 1.064$, $\frac{\kappa}{\kappa_y} = 1.111$, $f = 1.18$

10.3-19 $\frac{M}{M_y} = 2 - 2 \left(\frac{\kappa_y}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_y}{\kappa} \right)^3$

10.3-20 $\frac{M}{M_y} = \frac{2\kappa}{3\pi\kappa_y} \left[3 \arcsin \frac{\kappa_y + \kappa}{\kappa} \left(5 - \frac{2\kappa_y^2}{\kappa^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\kappa_y^2}{\kappa^2}} \right]$

10.4-1 $L_p = L\sqrt{1 - 1/f}$ 10.4-2 $L_p = L(1 - \sqrt{1/f})$

10.4-3 $L_p = L(4 - \sqrt{9 + 7/f})$

10.4-4 $L_p = L \left[1 + \frac{P}{qL} - \sqrt{\left(\frac{P}{qL} \right)^2 + 1} \left(1 + \frac{2P}{qL} \right) \right]$

10.5-1 $q_w = \frac{9\sqrt{3}M_p}{L^2}$ 10.5-2 $P_w = \frac{6M_p}{L}$

10.5-3 $q_w = 111$ kN/m 10.5-4 $\frac{d_1}{d_2} = \left(1 - \frac{b}{L} \right)^{1/3}$

$b = 0.535L$, $\frac{d_1}{d_2} = 0.775$ 10.5-5 $P_w = \frac{(2L - b)M_p}{b(L - b)}$

$b = 0.586L$, $P_w = \frac{5.83M_p}{L}$ 10.5-6 $P_w = \frac{8M_p}{L}$, $\frac{P_w}{P_y} = \frac{M_p}{M_y}$

10.5-7 $q_w = \frac{16M_p}{L^2}$, $\frac{q_w}{q_y} = \frac{4M_p}{3M_y}$ 10.5-8 $P_w = \frac{4M_p}{L}$

10.5-9 $P_w = \frac{9M_p}{2L}$ 10.5-10 $q_w = \frac{16M_p}{L^2}$, $q_w = \frac{11.66M_p}{L^2}$

10.5-11 $P_w = \frac{16M_p}{3L}$ 10.5-12 $P_w = \frac{4M_p}{R}$

10.5-13 $P_w = \frac{2M_p}{\beta L}$ para $\beta \geq \frac{1}{4}$; $P_w = \frac{6M_p}{(1 - \beta)L}$ para $\beta \leq \frac{1}{4}$

$\beta = \frac{1}{4}$ 10.5-14 $q_w = \frac{22.80M_p}{L^2}$ 10.7-1 $h_1 = 4.00$ plg,

$\sigma_x = 3750$ psi, $\sigma_y = -7500$ psi, $\delta = 0.113$ plg

10.7-2 $h_1 = 56.35$ mm, $\sigma_x = 13.3$ MPa, $\sigma_y = -17.2$ MPa,

$\delta = 2.62$ mm 10.7-3 $M = 413,700$ plg·lb, $\rho = 769$ plg

10.7-4 $M = 21.84$ kN·m, $\rho = 16.6$ m

10.7-5 $\sigma_{\max} = 25,180$ psi 10.7-6 $\sigma_{\max} = 173.6$ MPa

10.7-8 $M = 2600$ plg·k

10.7-9 $M = \frac{bh^2}{6} (B_1 \epsilon_1) \left(1 - \frac{3B_2 \epsilon_1}{4B_1} \right)$

10.7-11 $\theta = \frac{50P^2 L^3}{3B^2 b^2 h^5}$, $\delta = \frac{25P^2 L^4}{2B^2 b^2 h^5}$

Capítulo 10

10.3-1 $f = \frac{16}{3\pi} \approx 1.70$ 10.3-2 $f = 2$

10.3-3 $f = \frac{16r_2(r_2^3 - r_1^3)}{3\pi(r_2^4 - r_1^4)}$, $f = \frac{4}{\pi} \approx 1.27$

10.3-4 $M_x = 176$ plg·k, $M_y = 264$ plg·k, $Z = 8.00$ plg³;

$M = 264.0 - \frac{26.62 \times 10^{-6}}{\kappa^2}$, $M =$ plg·k, $\kappa =$ plg⁻¹

10.3-5 $M_x = 16.7$ kN·m, $M_y = 25.0$ kN·m,

$Z = 10^5$ mm³, $M = 25.00 - \frac{0.004724}{\kappa^2}$; $M =$ kN·m,

$\kappa =$ m⁻¹ 10.3-6 $M_p = 285$ kN·m, $Z = 981 \times 10^3$ mm³,

$f = 1.15$ 10.3-7 $M_p = 225$ kN·m, $Z = 900 \times 10^3$ mm³,

$f = 1.13$ 10.3-8 $Z = 70.7$ plg³, $f = 1.12$

10.3-9 $Z = 36.2$ plg³, $f = 1.13$

10.3-10 $M_p = 6960$ plg·k, $Z = 193$ plg³m $f = 1.23$

10.3-11 $M_p = 1.40$ MN·m, $Z = 6.09 \times 10^6$ mm³,

$f = 1.24$ 10.3-12 $Z = 74.0$ plg³, $f = 1.74$

10.3-13 $Z = 425 \times 10^3$ mm³, $f = 1.79$

10.3-14 $M_p = 1120$ plg·k, 10.3-15 $M = 1290$ plg·k,

$$10.7-12 \quad M = \frac{\sigma_1 b h^2}{6} \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)} \quad 10.8-1 \quad (b) \sigma_y/2;$$

$$(c) -\sigma_y; (d) M_y; 1.5 \quad 10.8-2 \quad (a) M = M_y(1 + \beta);$$

$$(b) 0 \leq \beta \leq \frac{M_r}{M_y} - 1$$

Capítulo 11

$$11.1-1 \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad 11.1-2 \quad P_{cr} = \beta L + \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$11.1-3 \quad P_{cr} = \frac{\beta a^2 EI}{L^2} \quad 11.1-4 \quad P_{cr} = \frac{\beta L^2 EI}{2}$$

$$11.1-5 \quad P_{cr} = \frac{\beta a L EI}{L^2 + a^2} \quad 11.2-1 \quad P_{cr} = 560 \text{ k}$$

$$11.2-2 \quad P_{cr} = 860 \text{ k} \quad 11.2-3 \quad W 12 \times 50$$

$$11.2-4 \quad W 10 \times 60 \quad 11.2-5 \quad t = 4.05 \text{ mm}$$

$$11.2-6 \quad t = 0.280 \text{ plg} \quad 11.2-7 \quad P_{cr} = 402 \text{ k}$$

$$11.2-8 \quad L 5 \times 5 \times \frac{3}{8} \quad 11.2-9 \quad L 4 \times 4 \times \frac{3}{8}$$

$$11.2-10 \quad 1.209:1.047:1 \quad 11.2-11 \quad \frac{h}{b} = 2$$

$$11.2-12 \quad Q = 12.7 \text{ kN} \quad 11.2-13 \quad Q = \frac{3\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$11.2-14 \quad \Delta T = \frac{\pi^2 I}{\alpha A L^2} \quad 11.2-15 \quad P = 380 \text{ k}$$

$$11.2-16 \quad \theta = \arctan(\cot^2 \beta) \quad 11.2-17 \quad \theta = 26.57^\circ$$

$$11.3-1 \quad P_1 = 551 \text{ k}, P_2 = 138 \text{ k}, P_3 = 1130 \text{ k}, P_4 = 2200 \text{ k}$$

$$11.3-2 \quad P_1 = 382 \text{ k}, P_2 = 95 \text{ k}, P_3 = 781 \text{ k}, P_4 = 1530 \text{ k}$$

$$11.3-3 \quad P_1 = 831 \text{ kN}, P_2 = 208 \text{ kN}, P_3 = 1700 \text{ kN},$$

$$P_4 = 3330 \text{ kN} \quad 11.3-4 \quad t = 12.2 \text{ mm}$$

$$11.3-5 \quad (a) Q_{cr} = 14.5 \text{ kN}; (b) Q_{cr} = 22.8 \text{ kN}, a = 0.253 \text{ m}$$

$$11.3-6 \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, v = C \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right)$$

$$11.3-7 \quad P_{cr} = 4.856 \frac{EI}{L^2}$$

$$11.4-1 \quad M = Pe \left(\tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx \right), M_{\max} = \sqrt{2} Pe$$

$$11.4-2 \quad \delta = e(\sec kL - 1), M_{\max} = Pe \sec kL$$

$$11.4-3 \quad \delta = 8.87 \text{ mm}, M_{\max} = 2.03 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$11.4-4 \quad \delta = 3.56 \text{ mm}, M_{\max} = 278 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$11.4-5 \quad L = 2.98 \text{ m} \quad 11.4-6 \quad P = 6.73 \text{ k}$$

$$11.4-7 \quad P = 9.97 \text{ k} \quad 11.5-1 \quad \sigma_{cr} = 19.0 \text{ ksi},$$

$$\sigma_{\max} = 11.4 \text{ ksi}, P_1 = 12.7 \text{ k} \quad 11.5-2 \quad \sigma_{cr} = 117 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\max} = 55.6 \text{ MPa}, P_1 = 33.3 \text{ kN}$$

$$11.5-3 \quad \sigma_{\max} = 12.6 \text{ ksi}, P_{\text{perm}} = 3.14 \text{ k}$$

$$11.5-4 \quad \sigma_{\max} = 38.3 \text{ MPa}, P_{\text{perm}} = 32.4 \text{ kN}$$

$$11.5-5 \quad \sigma_{\max} = 10.4 \text{ ksi}, P_{\text{perm}} = 27.8 \text{ k}$$

$$11.5-6 \quad \sigma_{\max} = 84.3 \text{ MPa}, P_{\text{perm}} = 97.4 \text{ kN}$$

$$11.5-7 \quad \sigma_{\max} = 18.8 \text{ ksi}, P_y = 181 \text{ k}$$

$$11.5-8 \quad \sigma_{\max} = 10.9 \text{ ksi}, P_{\text{perm}} = 200 \text{ k}$$

$$11.5-9 \quad \sigma_{\max} = 20.2 \text{ ksi}, n = 1.68$$

$$11.5-10 \quad \sigma_{\max} = 19.5 \text{ ksi}, n = 1.87 \quad 11.5-11 \quad L = 11.1 \text{ pie}$$

$$11.5-12 \quad P_2 = 34.4 \text{ k} \quad 11.6-2 \quad \sigma_{\max} = 8.53 \text{ ksi}, n = 2.17$$

$$11.6-3 \quad \sigma_{\max} = 114 \text{ MPa}, P_{\text{perm}} = 106 \text{ kN}$$

$$11.6-4 \quad \sigma_{\max} = 14.5 \text{ ksi}, n = 2.06$$

$$11.6-5 \quad \sigma_{\max} = 13.1 \text{ ksi}, P_{\text{perm}} = 113 \text{ k}$$

$$11.6-6 \quad P_{\text{perm}} = 17.8 \text{ k}$$

$$11.9-1 \quad P = 247 \text{ k}, 180 \text{ k}, 96.7 \text{ k}, 54.4 \text{ k}$$

$$11.9-2 \quad P = 328 \text{ k}, 243 \text{ k}, 134 \text{ k}, 75.3 \text{ k}$$

$$11.9-3 \quad P = 360 \text{ k}, 223 \text{ k}, 102 \text{ k}, 57.2 \text{ k}$$

$$11.9-4 \quad P = 664 \text{ k}, 496 \text{ k}, 278 \text{ k}, 156 \text{ k}$$

$$11.9-5 \quad P = 58.9 \text{ k}, 43.0 \text{ k}, 23.2 \text{ k}, 13.0 \text{ k}$$

$$11.9-6 \quad P = 159 \text{ k}, 122 \text{ k}, 72.9 \text{ k}, 41.0 \text{ k}$$

$$11.9-7 \quad P = 385 \text{ kN}, 300 \text{ kN}, 186 \text{ kN}, 104 \text{ kN}$$

$$11.9-8 \quad P = 1070 \text{ kN}, 906 \text{ kN}, 692 \text{ kN}, 438 \text{ kN}$$

$$11.9-9 \quad L = 13.9 \text{ pie} \quad 11.9-10 \quad L = 21.2 \text{ pie}, 14.4 \text{ pie}$$

$$11.9-11 \quad L = 24.2 \text{ pie}, 14.7 \text{ pie} \quad 11.9-12 \quad d = 99 \text{ mm}$$

$$11.9-13 \quad b = 53 \text{ mm} \quad 11.9-14 \quad P = 151 \text{ k}, 114 \text{ k}, 53.8 \text{ k},$$

$$30.3 \text{ k} \quad 11.9-15 \quad P = 144 \text{ k}, 116 \text{ k}, 73.3 \text{ k}, 41.2 \text{ k}$$

$$11.9-16 \quad L = 20.6 \text{ plg}, 49.0 \text{ plg} \quad 11.9-17 \quad d = 1.27 \text{ plg}$$

$$11.9-18 \quad P = 36.3 \text{ k}, 30.3 \text{ k}, 15.2 \text{ k}, 8.6 \text{ k}$$

$$11.9-19 \quad P = 22.5 \text{ k}, 16.2 \text{ k}, 10.4 \text{ k}, 7.2 \text{ k}$$

$$11.9-20 \quad L = 2.81 \text{ m}, 3.53 \text{ m}, 4.99 \text{ m}$$

$$11.9-21 \quad b = 143 \text{ mm}$$

Capítulo 12

$$12.3-1 \quad \delta_c = \frac{2PL}{EA} \quad (\text{hacia abajo}), \delta_b = 0,$$

$$\theta_{ob} = \frac{\sqrt{3}P}{EA} \quad (\text{en el sentido de las manecillas del reloj})$$

$$12.3-2 \quad \delta_c = \alpha L(\Delta T) \quad (\text{hacia abajo}),$$

$$\delta_b = \frac{\alpha L(\Delta T)}{\sqrt{3}} \quad (\text{hacia abajo}), \theta_{ob} = \frac{\alpha(\Delta T)}{\sqrt{3}} \quad (\text{en el sentido de las manecillas del reloj})$$

$$12.3-3 \quad \delta_c = \frac{PL}{\sqrt{2}EA} \quad (\text{hacia abajo}), \delta_b = 0,$$

$$\theta_{ob} = \frac{P}{\sqrt{2}EA} \quad (\text{en el sentido de las manecillas del reloj})$$

$$12.3-4 \quad \delta_c = 7.62 \frac{PL}{EA} \quad (\text{hacia abajo}),$$

$$\delta_b = 1.73 \frac{PL}{EA} \quad (\text{hacia la izquierda})$$

$$12.3-5 \delta_v = 3.83 \frac{PL}{EA} \text{ (hacia abajo), } \delta_h = \frac{PL}{EA} \text{ (hacia la izquierda)}$$

12.3-6 $\delta_{hd} = 2\alpha L(\Delta T)$; La distancia se reduce cuando disminuye la temperatura

$$12.3-7 \delta_h = 0.0512 \text{ plg (hacia la derecha),}$$

$$\delta_v = 0.0896 \text{ plg (hacia abajo)}$$

$$12.3-8 \delta_h = 0.794 \text{ mm (hacia la derecha),}$$

$$\delta_v = 1.672 \text{ mm (hacia abajo) } 12.3-9 \Delta L = 0.3 \text{ plg}$$

$$12.3-10 \delta_v = 6.22 \frac{Pb}{EA} \text{ (hacia abajo),}$$

$$\delta_{av} = 1.85 \frac{Pb}{EA} \text{ (incremento)}$$

$$12.3-11 \delta_v = 0.0862 \text{ plg (hacia abajo),}$$

$$\delta_h = 0.0275 \text{ plg (hacia la derecha),}$$

12.3-12 $\theta_w = 35.2 \times 10^{-6} \text{ rad}$ (sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$$\delta_{wv} = 1.39 \times 10^{-3} \text{ plg (reducción)}$$

$$12.3-13 \delta_v = 5.08 \text{ mm (hacia abajo)}$$

$$\delta_h = 1.27 \text{ mm (hacia la derecha) } 12.3-16 \delta_v = \frac{19PL^3}{384EI}$$

$$12.3-17 \delta_v = \frac{7PL^3}{162EI}, \delta_d = \frac{7PL^3}{54EI}$$

$$\delta_h = \frac{2PL^3}{9EI} \quad 12.3-18 \delta_v = \frac{Pb^2}{3EI} (L + b),$$

$$\theta_v = \frac{Pb}{6EI} (2L + 3b) \quad 12.3-19 \delta = \frac{PbL^2}{16EI}$$

$$\theta = \frac{PbL}{6EI} \quad 12.3-20 \delta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{8h}$$

$$\theta_a = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(L + 2b)}{2h}, \theta_b = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{2h}$$

$$12.3-21 \delta_h = \frac{41qL^4}{384EI}, \delta_v = \frac{7qL^4}{192EI} \quad 12.3-23 \delta = \frac{2PL^3}{3EI}$$

$$12.3-24 \delta_h = \frac{PHL^2}{8EI_2} \text{ (hacia la izquierda),}$$

$$\theta = \frac{PL^2}{16EI_2} \text{ (en el sentido de las manecillas del reloj) } 12.3-25 \delta_h = \frac{PL^3}{3EI} \text{ (hacia la derecha),}$$

$$\delta_v = \frac{PL^3}{2EI} \text{ (hacia arriba) } 12.3-26 \delta_h = \frac{PL^3}{EI} \text{ (hacia la izquierda),}$$

$$\delta_v = \frac{5PL^3}{3EI} \text{ (hacia abajo), } \theta = \frac{2PL^2}{EI} \text{ (en el sentido de las manecillas del reloj)}$$

$$12.3-27 \delta_v = \frac{33Pb^3}{EI} \text{ (hacia abajo),}$$

$$\theta = \frac{33Pb^2}{2EI} \text{ (sentido contrario al de las manecillas del reloj)}$$

$$12.3-28 \Delta = \frac{2PL^3 \sin^2 \beta}{3EI} + \frac{2PL \cos^2 \beta}{EA}$$

$$12.3-29 \delta_h = \frac{\alpha(T_2 - T_1)H^2}{2h} \text{ (hacia la izquierda),}$$

$$\delta_v = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(L)(L + 2H)}{2h} \text{ (hacia arriba),}$$

$$\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(L + H)}{h} \text{ (sentido contrario al de las manecillas del reloj)}$$

$$12.3-30 \delta = \frac{PL^3}{6EI} (n)(4n^2 + 3n + 1)$$

$$12.3-31 \delta_h = \frac{PR^3}{4EI} (3\pi - 8) \text{ (hacia la derecha),}$$

$$\delta_v = \frac{PR^3}{2EI} \text{ (hacia abajo), } \theta = \frac{PR^2}{2EI} (\pi - 2) \text{ (en el sentido de las manecillas del reloj)}$$

$$12.3-32 \delta_h = \frac{2PR^3}{EI} \text{ (hacia la izquierda),}$$

$$\delta_v = \frac{3\pi PR^3}{2EI} \text{ (hacia abajo), } \theta = \frac{\pi PR^2}{EI} \text{ (en el sentido de las manecillas del reloj)}$$

$$12.3-33 \delta_v = \frac{PR^3}{8EI} (3\pi - 8) \text{ (hacia abajo),}$$

$$\delta_h = \frac{PR^3}{2EI} \text{ (hacia la derecha)}$$

$$12.3-34 \Delta = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{PR}{2EI} (2\pi L^2 + 8LR + \pi R^2)$$

$$12.3-35 \delta_h = \frac{PR}{2EI} (L + R)^2 \text{ (hacia la derecha),}$$

$$\delta_v = \frac{PR^2}{4EI} (4L + \pi R) \text{ (hacia abajo),}$$

$$\theta = \frac{PR}{EI} (L + R) \text{ (en el sentido de las manecillas del reloj) } 12.3-36 M_{\max} = \frac{2EIe}{3\pi R^2}$$

$$12.3-37 \delta_v = \frac{\pi PR^3}{4EI} + \frac{(3\pi - 8)PR^3}{4GI_p}$$

$$\phi = \frac{\pi PR^2}{4EI} + \frac{(\pi - 4)PR^2}{4GI_p} \quad 12.3-38 \delta_v = 76.8 \text{ mm,}$$

$$\phi = 0.0150 \text{ rad } 12.3-39 \Delta = \frac{5PL^3}{6EI} + \frac{3PL^3}{2GI_p}$$

$$12.4-2 \delta_{hd} = \delta_{vd} = \frac{PbL^2}{16EI} \quad 12.4-3 M\theta_w = P\delta_{hd} = \frac{PMbL}{EI}$$

$$12.4-4 \theta_w = \theta_{ec} = \frac{ML}{96EI} \quad 12.4-7 \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{PL}{EA}$$

$$12.6-1 \delta = \frac{PL}{EA(1 + 2 \cos^3 \beta)}, N_{ax} = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

$$N_{ay} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad 12.6-2 D_1 = \frac{PL}{EA \tan \theta}$$

$$D_2 = \frac{PL(1 + \cos^2 \theta)}{EA(\cos \theta \sin^2 \theta)} \quad 12.6-3 \delta = \frac{PL}{16EA}$$

$$12.6-4 \delta = \left(\frac{L}{B \sin \beta} \right) \left(\frac{P}{2A \sin \beta} \right)^n$$

$$12.7-1 \delta = \left(\frac{L}{B \sin \beta} \right) \left(\frac{P}{2A \sin \beta} \right)^n \quad 12.7-2 \delta_b = \frac{P^2 L}{A^2 B^2}$$

$$12.7-3 \delta = \frac{r^2 L^{n+1}}{B(n+1)}$$

$$C.4-8 I_z = 405 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad C.5-1 I_p = \frac{bh}{48} (b^2 + 12h^2)$$

$$C.5-2 I_p = 233 \text{ plg}^4 \quad C.5-3 I_p = \frac{(176 - 84\pi + 9\pi^2)r^4}{72(4 - \pi)}$$

$$C.5-4 I_p = \frac{(9\alpha^2 - 8 \sin^2 \alpha)r^4}{18\alpha} \quad C.6-1 I_{x,y} = -\frac{b^2 h^2}{60}$$

$$C.6-2 b = 2r \quad C.6-3 I_{xy} = \frac{t^2}{4} (2b^2 - t^2)$$

$$C.6-4 I_{xy} = \frac{r^4}{24} \quad C.6-5 I_{xy} = 24.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C.6-6 I_{xy} = 3.23 \text{ plg}^4 \quad C.6-7 I_{xy} = 18.85 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C.6-8 I_{12} = -20.5 \text{ plg}^4 \quad C.7-1 I_{xx} = I_{yy} = \frac{b^4}{12}$$

$$I_{xxy} = 0 \quad C.7-2 I_{xx} = 2b^2 h^2 \alpha, I_{yy} = (b^4 + h^4)\alpha,$$

$$I_{xxy} = bh(h^2 - b^2)\alpha, \alpha = \frac{bh}{12(b^2 + h^2)}$$

$$C.7-3 I_{xx} = 12.44 \times 10^6 \text{ mm}^4, I_{xxy} = 6.03 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C.8-1 I_1 = 3.11 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_1} = 150.1^\circ$$

$$I_2 = 0.89 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_2} = 60.1^\circ \quad C.8-2 I_1 = 282.6 \text{ plg}^4,$$

$$\theta_{p_1} = 22.1^\circ, I_2 = 24.9 \text{ plg}^4, \theta_{p_2} = 112.1^\circ$$

$$C.8-3 I_1 = 65.0 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_1} = 31.6^\circ,$$

$$I_2 = 7.3 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_2} = 121.6^\circ \quad C.8-4 I_1 = 76.1 \text{ plg}^4,$$

$$\theta_{p_1} = 166.5^\circ, I_2 = 19.9 \text{ plg}^4, \theta_{p_2} = 76.5^\circ$$

$$C.8-5 I_1 = 20.0 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_1} = 157.5^\circ,$$

$$I_2 = 10.4 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_2} = 67.5^\circ \quad C.8-6 I_1 = 34.9 \text{ plg}^4,$$

$$\theta_{p_1} = 67.5^\circ, I_2 = 6.6 \text{ plg}^4, \theta_{p_2} = 157.5^\circ$$

$$C.8-7 I_1 = 1.50 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_1} = 75.7^\circ,$$

$$I_2 = 0.16 \times 10^6 \text{ mm}^4, \theta_{p_2} = 165.7^\circ$$

Apéndice C

$$C.2-2 \bar{y} = 1.1 \text{ plg} \quad C.2-3 2c^2 = ab \quad C.2-4 \bar{x} = \bar{y} = \frac{5a}{12}$$

$$C.2-5 \bar{y} = 52.5 \text{ mm} \quad C.2-6 \bar{x} = 0.99 \text{ plg}, \bar{y} = 1.99 \text{ plg}$$

$$C.2-7 \bar{x} = 59.0 \text{ mm}, \bar{y} = 51.0 \text{ mm}$$

$$C.3-5 I = \frac{a^3 b^3}{6(a^2 + b^2)} \quad C.3-6 I_x = 36.1 \text{ plg}^4,$$

$$I_y = 10.9 \text{ plg}^4 \quad C.3-7 I_x = I_y = 195 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C.3-8 I_1 = 1480 \text{ plg}^4, I_2 = 186 \text{ plg}^4 \quad C.4-1 I_x = 940 \text{ plg}^4$$

$$C.4-2 I_x = 19.3 \text{ plg}^4, I_y = 43.3 \text{ plg}^4 \quad C.4-3 I_x = 10.8 \text{ plg}^4$$

$$C.4-4 I_c = \frac{11a^4}{192} \quad C.4-5 I_c = 105.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C.4-6 I_{xx} = 17.4 \text{ plg}^4, I_{yy} = 6.3 \text{ plg}^4$$

$$C.4-7 I_x = 39.5 \times 10^6 \text{ mm}^4, I_y = 51.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Índice onomástico

- Abramson, H. N., 730
Almroth, B. O., 732
Andrews, E. S., 728-729, 735
- Bach, C., 730
Baker, J. F., 730
Barten, H. J., 729
Beedle, L. S., 731
Bernoulli, Daniel, 727, 728
Bernoulli, Jacob (1654-1705), 11, 231, 381, 446, 723, 725, 727, 728
Bernoulli, Jacob (1759-1789), 727
Bernoulli, John, 644, 727, 731
Bertot, H., 485, 729
Betti, E., 669, 733
Bisshopp, K. E., 729
Bleich, F., 731
Born, M., 728
Bredt, R., 175, 725
Bresse, J. A. C., 281, 726
Brooks, W. A., Jr., 732
Brown, D. M., 728, 731
Brush, D. O., 732
- Cajori, F., 727
Campbell, L., 733
Castigliano, C. A. P., 683, 706, 728, 734, 735
Cauchy, A. L., 311, 726
Chajes, A., 732
Charlton, T. M., 734, 735
Clapeyron, B. P. E., 90, 485, 724, 729
Clebsch, R. F. A., 429, 727
Considère, A. G., 626, 732
Cotterill, J. H., 735
Coulomb, C. A. de, 144, 724
Cowper, G. R., 728
Crew, H., 725
Crotti, F., 693, 701, 735
Culmann, K., 341, 726
- Dally, J. W., 727
Da Vinci, Leonardo, 2
De Salvio, A., 725
Didion, I., 724
Dirac, P. A. M., 423
Drucker, D. C., 729
Duberg, J. E., 732
Duleau, A. J. C. B., 144, 725
Duncan, W. J., 730
- Eisley, J. G., 729
Ellis, C. A., 728, 731
Elsevir, L., 725
Emde, F., 729
Engesser, F., 626, 696, 701, 732, 735
Euler, L., 2, 71, 231, 381, 446, 597, 602, 626, 724, 725, 727, 728, 731
- Fazekas, G. A., 725
Fell, E. W., 724
- Fermat, P., 731
Föppl, A., 728
Föppl, C. L., 728
Föppl, O., 728
Frisch-Fay, R., 446, 729
- Galilei, Galileo, 2, 231, 725
Garnett, W., 733
Gere, J. M., 724, 725, 726, 731, 735
Goldsmith, W., 724
Goodier, J. N., 724
Greenberg, H. J., 730
Greene, C. E., 395, 727
Gregory, M. S., 734
Griffith, A. A., 730
Gruning, M., 735
- Hauff, E., 735
Heaviside, O., 420
Hetényi, M., 727
Hill, H. N., 730
Hoff, N. J., 627, 731, 733, 735
Hooke, Robert, 21, 723
Horne, M. R., 730
Howard, J. N., 734
Huber, A. W., 731
Huddleston, J. V., 733
- Jacobs, J. A., 730
Jahnke, E., 729
Jasinski, F. S., 626, 732
Jenkin, F., 735
Jevons, J. D., 724
Johnston, B. G., 627, 731
Johnston, P. R., 735
Jourawski, D. J., 246, 726
- Keller, J. B., 732
Kelvin, Lord (William Thomson), 733
Kirchhoff, G. R., 449, 729
Koiter, W. T., 730
Kuenzi, E. W., 726
Kuzmanovic, B. O., 727
- Lagrange, J. L., 446, 728
Lamarle, A. H. E., 626, 732
Larsson, L. H., 732
Lee, L. H. N., 732
L'Hôpital, G. F. A. de, 727
Lindsay, R. B., 734
Löscher, F., 729
Love, A. E. H., 723
Lüders, W., 86, 724
- Macaulay, W. H., 421, 727
Maillart, R., 730
Maki, A. C., 726
Malvick, A. J., 732
Mandel, J., 730
Mariotte, E., 231, 725
Massonnet, C. E., 730
- Mathauser, E. E., 732
Maxwell, J. C., 648, 667, 706, 733, 735
McLean, L., 701, 724
Menabrea, L. F., 706, 735
Mohr, O. C., 320, 395, 648, 706, 726, 727, 733, 734
Morin, A.-J., 724
- Navier, L. M. H., 71, 465, 724, 727, 729
Neal, B. G., 730
Newman, J. R., 727, 730
Nicholls, R., 726
Niven, W. D., 733
Nowinski, J. L., 730
- Oden, J. T., 735
Oldfather, W. A., 728, 731
Oravas, G. A., 701, 724, 728, 734
Osgood, W. R., 730
- Parent, A., 231, 725
Pearson, K., 723, 726
Pilkey, W. D., 728
Piobert, G., 86, 724
Plana, G. A. A., 446, 728
Plantema, F. J., 726
Poisson, S. D., 22, 157, 724
Poncelet, J. V., 11, 99, 444, 723, 724
Prager, W., 730
- Ramsay, Sir William, 733
Rankine, W. J. M., 311, 444, 726
Ranov, T., 727
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 669, 733, 734
Reissner, E., 730
Riley, W. F., 727
Ripperger, E. A., 735
Rohde, F. V., 729
Rojahn, C., 729
Routh, E. J., 733
- Saint-Venant, Barré de, 144, 231, 311, 395, 725, 726, 727, 729
Save, M. A., 730
Schwalbe, W. L., 730
Shanley, F. R., 626, 627, 732
Southwell, R. V., 626, 729, 732
Stokes, G. G., 733
Struik, D. J., 727
Strutt, J. W. (véase Rayleigh, Lord)
Strutt, R. J., 734
Symonds, P. S., 730
- Tall, L., 731
Taylor, G. I., 730
Thomson, William (Lord Kelvin), 733
Timoshenko, S. P., 535, 723, 724, 725, 729, 731, 732

Todhunter, I., 723, 726
 Trefftz, E., 730
 Tsai, W. T., 730
 Turner, T. H., 724

Van den Broek, J. A., 731
 von Kármán, T., 626, 732

Weaver, W., Jr., 724, 726, 735
 Weber, C., 730
 Weissenburger, J. T., 728
 Westergaard, H. M., 735
 Wilder, T. W., 732
 Williot, J. V., 58, 724
 Wittrick, W. H., 728

Wolko, H. S., 727

Yang, C. H., 731
 Ylinen, A., 732
 Young, D. H., 724, 732
 Young, Thomas, 22, 144, 724, 725
 Zaslavsky, A., 726, 729

Índice de materias

- Abiertas, secciones transversales, 49, 525
 Aceleración de la gravedad, 731, 741, 744
 Acero, 11
 bandas de deslizamiento en el, 86
 columnas de, 628
 diagrama esfuerzo-deformación para, 11, 13
 dulce, 11, 13, 19
 estructural, 11, 13
 propiedades del, 793
 Acero, vigas de, 236
 tablas de, 780
 Aglomerada, viga, 256
 Ahusadas, barras. (Véase No prismáticas, barras)
 AISC (Instituto Americano de Construcción de Acero), 237, 629
 Alabeo de vigas, 231, 247, 441, 443
 Alargamiento,
 axial, 3, 22, 51
 permanente, 18
 Alargamientos de barras, 3, 5, 22, 51
 prismáticas, 52
 Aluminio, 13
 columnas de, 630
 diagramas esfuerzo-deformación para, 14
 propiedades del, 744, 793
 vigas de, 237
 Amortiguador de impactos, 44
 Análisis de los valores,
 característicos, 311, 599
 propios, 311
 Análisis estructural,
 mediante energía complementaria, 700
 métodos matriciales de, 707
 Análisis plástico, 105
 de armaduras, 105
 de vigas, 563
 desplazamientos virtuales para, 566
 Analogía dinámica de Kirchhoff, 449
 Angulares, deformaciones, 27, 28
 Angularares, deformaciones, (*continuación*)
 en direcciones inclinadas, 355
 en torsión, 140, 154
 en vigas, 247
 signos convencionales para, 28
 Angulares, secciones, 237
 centro de cortante de las, 535
 esfuerzos cortantes en, 535
 flexión asimétrica de, 514, 519
 tablas de, 784, 785
 Angulo,
 de torcimiento. (Véase Torsión)
 de torsión, 140, 146, 174
 oblicuo, 27
 Anticlástica, curvatura, 225
 Apoyos de vigas, 193, 196
 inmóviles, 490
 Apuntalada, viga en voladizo, 463
 Área,
 de momentos, método del, 392, 410, 468
 ejes principales de un, 767
 momentos de inercia de un, 753
 primer momento de un, 748
 reducción (porcentual) de, 16
 segundo momento de un, 753
 Areas, 748
 centroides de. (Véase Centroides de áreas)
 propiedades de, 748, 775
 tabla de, 775
 Armadas, vigas, 256
 Armaduras, 56
 análisis plástico de, 105
 carga de fluencia para, 106
 deflexiones de, 56, 651, 653
 deformaciones previas en, 80
 diagramas de Williot para, 58
 efectos de la temperatura en, 76, 651
 estáticamente indeterminadas, 62, 67, 688
 Articulaciones plásticas, 562
 ASA (Sociedad Americana de Normas), 9
 Asimétrica, flexión, 503, 516. (Véase también Flexión asimétrica)
 Asimétricas, vigas, 504
 centro de cortante de, 521, 531
 de patín ancho, 522, 550
 deflexiones de, 512
 esfuerzos cortantes en, 525, 537
 flexión pura de, 508
 plano de flexión para, 503
 Asociación Nacional de Productos Forestales, 273, 631
 ASTM (Sociedad Americana de Pruebas y Materiales), 9
 Axial,
 alargamiento, 3, 22, 51
 excéntrica, carga, 278, 608
 flexibilidad, 51
 rigidez, 51
 Axiales, cargas. (Véase Cargas axiales)
 Bandas,
 de deslizamiento en acero, 86
 de Lüders, 86
 de Piobert, 86
 Barra,
 con garganta, 93, 100
 prismática, 3, 50
 Barra-resorte, pandeo de sistemas, 592
 Barras (vigas),
 ahusadas. (Véase No prismáticas, barras)
 bimetalicas, 126, 163, 266
 compuestas, torsión de, 163
 contracción lateral de, 12, 22
 curvas, deflexiones de, 662
 de dos materiales, torsión de, 163
 huecas, torsión de, 144, 170
 no prismáticas. (Véase No prismáticas, barras)

- Bastidor de escalera, 717
 Bastidores planos, 690
 estáticamente indeterminados, 690
 Bastidores rígidos. (Véase Bastidores planos)
 Betti-Rayleigh, teorema de reciprocidad de, 669
 Biaxial, esfuerzo, 305, 310, 329
 Bifurcación, punto de, 593
 Bilineal, diagrama, 105
 Bimetálicas, barras, 126, 163, 266
 Bredt para la teoría de la torsión, fórmulas de, 175
 Bronce, propiedades del, 793
 Btu (unidad de energía), 740, 742
- C, tabla de perfiles, 783. (Véase también Vigas canal)
 Caballo de potencia, 740, 743
 Cajón, viga, 256
 Caliza, propiedades de la, 793
 Cambio de volumen. (Véase Volumen, cambio de)
 Canal, vigas, 237
 asimétricas, 541
 centro de cortante de, 531, 541
 esfuerzos cortantes en, 531, 542
 flexión asimétrica de, 512
 tablas de, 783
 Carga,
 aplicada súbitamente, 99, 418
 axial, impacto en, 95-96
 axial excéntrica, 278, 608
 de Euler, 597
 de fluencia para armaduras, 106
 de fluencia para vigas, 564
 dinámica, 10, 93, 95. (Véase también Impacto)
 estáticamente aplicada, 10, 88
 factor de, 32, 570
 Carga-deflexión, diagrama, 88, 100
 para columnas, 596, 599, 625
 para estructuras no lineales, 670, 677
 para flexión inelástica, 574
 Carga simulada, método de la, 648
 Carga unitaria, método de la, 648
 deflexiones de vigas por, 648, 657
 integrales que contienen productos para, 652, 653
 relación con la energía complementaria, 695
 relación con la energía de deformación, 704
 Cargas,
 combinadas, 337
 críticas, 592, 594, 597. (Véase también Críticas, cargas)
 de servicio, 32
 de trabajo, 32
 muertas, 32
 oblicuas, vigas con, 504
 permisibles, 30
 tipos de, 194
 vivas, 32
- Cargas, (continuación)
 y desplazamientos correspondientes, 648, 664
 Cargas axiales, 349
 excéntricas, columnas con, 608
 vigas con, 276, 278. (Véase también Columnas)
 Cargas últimas, 32
 de armaduras, 107
 de vigas, 563, 566
 diseño por, 32, 553, 570
 Cascarones, 329
 Caso fundamental de pandeo, 597
 Castigliano,
 primer teorema de, 683
 segundo teorema de, 703
 Causas de no linealidades, 670
 Celsius, escala, 738
 Centigrada, escala, 738
 Centro,
 de cortante. (Véase Cortante, centro de)
 de curvatura, 220, 378
 de flexión. (Véase Cortante, centro de)
 Centroides de áreas, 748, 751
 tabla de, 775
 Cilíndricos sometidos a presión, recipientes, 332
 Circulares, vigas, 231, 238
 esfuerzos cortantes en, 253
 Círculo de Mohr. (Véase Mohr, círculo de)
 Circunferencial, esfuerzo, 332
 Clapeyron, teorema de, 90
 Clebsch, método de, 429
 Cobre, 17
 diagrama esfuerzo-deformación para, 17
 propiedades del, 793
 Coeficiente,
 de cortante, 439, 444, 711
 de dilatación térmica, 72
 Colapso, mecanismo de, 564
 Columna,
 ideal, 593
 prismática, 600
 Columnas, 591-633
 cargas críticas para, 592, 594, 597
 con cargas axiales excéntricas, 608
 con deflexiones iniciales, 617
 con extremos articulados, 593
 con otras condiciones de apoyo, 601
 de acero estructural, 628
 de aluminio, 630
 de madera, 631
 deflexiones grandes de, 599
 diagramas carga-deflexión para, 596, 599, 625
 diseño para, 598, 614, 619, 627
 ecuación diferencial para, 595
 esfuerzos críticos en, 613
 esfuerzos permisibles en, 630
 falla de, 600
- Columnas, (continuación)
 fórmula de la secante para, 612, 620
 fórmulas de diseño para, 627
 imperfecciones en, 599, 617
 inelásticas, 600, 619, 621
 longitudes efectivas de, 604
 longitudes equivalentes de, 604
 óptimas, 600
 prismáticas, 600
 Combinadas, cargas, 337
 Compatibilidad, ecuaciones de, 61, 475, 700, 706
 Complementaria, solución, (de una ecuación diferencial), 602
 Complementario, trabajo, 672
 Completamente esforzadas, vigas, 266
 Completamente esforzado, diseño, 266
 Compresión, 4, 16
 diagramas esfuerzo-deformación para, 16
 Compuestas, vigas, 266
 Concentraciones de esfuerzos, 4, 231
 Concreto, 11
 propiedades del, 23, 793
 pruebas del, 11
 reforzado, vigas de, 266
 Constante,
 del resorte, 51
 torsión, 173
 Contacto, esfuerzos de, 25
 Continuas, vigas, 465, 481
 ecuación de los tres momentos para, 484
 Contorno de esfuerzos, 341
 Contracción lateral, 12
 de barras, 12, 22
 de vigas, 224
 Contraflecha, 21, 714
 Contraflexión, punto de, 402
 Controlado, flujo plástico, 561
 Convencional,
 diagrama esfuerzo-deformación, 10
 esfuerzo, 10
 Conversión de unidades, tabla, 742
 Corazón de una sección, 281
 Corcho, 23
 Correspondientes, cargas y desplazamientos, 648, 664
 Corrimiento para esfuerzo de fluencia, método del, 15
 Cortante, 25
 coeficiente de, 439, 444, 711
 curvatura debida a, 438
 deflexiones de vigas debidas a, 438, 708
 deflexiones debidas a, 438, 708
 diagramas de fuerza, 205
 diagramas esfuerzo-deformación en, 28
 directo, 26
 distorsión por, 154
 en vigas, deflexiones por, 438, 708
 energía de deformación por, 165, 445, 712

- Cortante, (continuación)**
 factor de forma para, 439, 710
 flujo de. (Véase Flujo de cortante)
 generalizada, fórmula del, 539
 horizontal en vigas, 242-243
 ley de Hooke en, 28
 rigidez a, 439, 710
- Cortante, centro de, 521, 531**
 de canales asimétricos, 541
 de secciones angulares, 534, 535
 de secciones canal, 531, 541
 de secciones de pared delgada, 531, 550
 de secciones macizas, 525
 de secciones Z, 537
 de vigas asimétricas, 521, 531
 de vigas canal, 531, 541
 de vigas de pared delgada, 531
 de vigas I asimétricas, 521, 550
 de vigas simétricas, 523
 de vigas T, 524, 535
- Cortante puro, 27, 150, 305**
 energía de deformación en, 165
- Cortantes,**
 esfuerzos, 26
 fuerzas. (Véase Fuerzas cortantes)
- Criticas, cargas, 592, 594, 597**
 para sistemas barra-resorte, 592
- Crotti-Engesser, teorema de, 693**
- Cuadrática, forma, 675**
- Cuarzo, propiedades del, 793**
- Cuña, esfuerzos en una, 264**
- Curva,**
 de deflexión, ecuaciones diferenciales de la, 380, 381
 de Euler, 613, 614, 619
 real esfuerzo-deformación, 12
- Curvas, deflexiones de barras, 662**
- Curvatura, 220, 229, 378**
 anticlástica, 225
 centro de, 220, 378
 de fluencia, 559
 de vigas inelásticas, 554, 559, 571, 576
 debida a cortante, 438
 debida a temperatura, 436
 en flexión asimétrica, 509, 518
 en flexión inelástica, 554, 559, 571, 577
 expresión exacta para, 381, 446
 método del área de, 571
 radio de, 220, 378
 sinclásica, 225
- Deflexión, curva de, 219, 377**
 ecuaciones diferenciales de la, 380, 381
- Deflexiones, 377, 693. (Véase también Deflexiones de vigas)**
 angulares, 438
 de armaduras, 56, 106, 651, 653, 686
 de barras curvas, 662
 de barras no prismáticas, 409
- Deflexiones, (continuación)**
 de bastidores planos, 660
 debidas a flexión plástica, 571
 debidas a impacto, 96, 417
 halladas mediante energía complementaria, 693
 iniciales, columnas con, 617
 por cortante, 708
 por cortante en vigas, 438, 708
 por el método de la carga unitaria, 648, 704
 por energía complementaria, 693
 por energía de deformación, 94, 412, 682, 703
 tablas de, 787, 790
- Deflexiones de vigas, 219, 377-461**
 asimétricas, 512
 debidas a cortante, 438, 708
 debidas a impacto, 417
 debidas a temperatura, 436, 488, 651
 efecto en la longitud de cuerda, 491
 grandes, 381, 445, 500
 inelásticas, 554, 571, 580
 mediante el método de carga unitaria, 648, 657
 mediante el método del área de momentos, 392, 410, 468
 mediante energía complementaria, 693
 mediante energía de deformación, 412, 703
 mediante funciones de discontinuidad, 418, 429
 mediante integraciones sucesivas, 382, 388, 410, 465
 mediante superposición, 404, 411
 para flexión asimétrica, 506, 512
 para vigas no prismáticas, 409
 tablas de, 787, 790
- Deflexiones grandes, 381, 445, 599**
 de columnas, 600
 de vigas, 381, 445
 de vigas en voladizo, 446
- Deflexiones inelásticas de vigas estáticamente indeterminadas, 580**
- Deformación, 5, 11. (Véase también Angulares, deformaciones)**
 círculo de Mohr para, 356
 de un resorte, 51
 en direcciones inclinadas, 353
 endurecimiento por, 12, 104
 energía de. (Véase Energía de deformación)
 esfuerzo sin, 75
 lateral, 22
 medidores de, (strain gages), 356, 360, 374
 mínima, energía complementaria mínima de, 706
 natural, 11
 nominal, 11
 normal (unitaria), 5
 permanente, 18
 principal, 355
 real, 11
- Deformación, (continuación)**
 residual, 18
 signos convencionales para, 197
 signos para condiciones de, 197
 sin esfuerzo, 23, 74
 térmica, 71
 volumétrica, 345
- Deformación de un resorte, 51**
 signos convencionales para, 197
- Deformación plana, 350**
 círculo de Mohr para, 356
- Deformaciones,**
 angulares. (Véase Angulares, deformaciones)
 círculo de Mohr para, 356
 en torsión, 140, 155, 157
 en vigas, 222, 223
 previas, 80
 previas en armaduras, 80
 principales, 355
 signos convencionales para, 197
 transformaciones para, 351, 355
- Densidad de energía complementaria, 672**
- Densidades de masa de materiales (tabla), 794**
- Descarga de un material, 18, 89**
- Desplazamiento, diagramas de, 56**
- Desplazamientos, 56, 643, 648. (Véase también Deflexiones)**
 horizontales en los extremos de una viga, 490
 método de, 66, 689
 recíprocos, teorema de los, 663
 virtuales. (Véase Virtuales, desplazamientos)
- Determinación estática, 463**
- Diagrama,**
 bilineal, 105
 carga-deflexión. (Véase Carga-deflexión, diagrama)
- Diagramas,**
 de desplazamiento, 56
 de momento flexionante, 205
 de Williot, 58
 esfuerzo-deformación. (Véase Esfuerzo-deformación, diagramas)
- Digitos significativos, 745**
- Dilatación, 345. (Véase también Volumen, cambio de)**
 térmica. (Véase Térmica, dilatación)
- Dina (unidad de fuerza), 740**
- Dinámica, carga, 10, 93, 95**
- Dipolo, 423**
- Dirac, función delta de, 423**
- Discontinuidad, funciones de, 418, 429**
 tabla de, 422
- Diseño, 49**
 al límite, 570
 completamente esforzado, 266
 de vigas, 236
 elástico, 31, 570
 para columnas, fórmulas de, 598, 615, 619, 627

- Diseño, (continuación)
 plástico, 570
 por carga última, 32, 553, 570
 por esfuerzos permisibles, 31, 570
 por resistencia, método de, 32
- Distorsión por cortante, 154
- Doblete unitaria, función, 421
- Ductilidad, 13
- Ecuación,
 de los tres momentos, 484
 de pandeo, 608
 diferencial (llamada a menudo Solución trivial), 596
 para columnas, 595
- Ecuaciones,
 de compatibilidad, 61, 475, 700, 706
 de equilibrio, 67, 685
- Ecuaciones diferenciales,
 de la curva de deflexión, 380, 381, 377
 para vigas estáticamente indeterminadas, 465
- Efectos de la temperatura, 71. (Véase también Temperatura, efectos de la)
- Eje neutro, 223, 228
 para flexión asimétrica, 506, 512, 518
 para flexión con cargas axiales, 277, 278
 para flexión inelástica, 554, 557, 574
 para vigas inelásticas, 554, 557, 574
- Ejes,
 centroidales no principales, flexión respecto a, 517
 no principales, fórmula de la flexión para, 517
 paralelos, teorema de los, 756, 760, 763
 principales de un área, 767
 principales de una sección Z, 770
- Elastica, 446
 energía de deformación, 89
- Elasticidad, módulo de, 21
 a cortante, 28, 156
 reducido, 579
 relación con el módulo a cortante, 29, 155
 tabla de, 795
 volumétrico, 346
- Elasticidad, 18, 21
 lineal, 21, 90
- Elastico,
 diseño, 31, 570
 límite, 19
- Elastoplástico, diagrama esfuerzo-deformación, 104, 105
- Elastoplástico, material, 104, 555
 vigas inelásticas de, 555
- Elemento finito, método del, 708
- Elementos esforzados, 81, 299
- Elípticas, funciones, 446
- Elongación porcentual, 15, 796
- Elongaciones de barras, 15
- Emparedado ("sandwich"), vigas tipo, 266, 275, 441, 444
- Empotrada, viga simple, 463
- Empotramiento, momentos de, 479
- Endurecimiento por deformación, 12, 105
- Energéticos, métodos, 643-713
 para vigas, 643
- Energía complementaria, 670, 672, 692
 análisis estructural mediante, 700
 deflexiones de vigas mediante, 693
 deflexiones halladas mediante, 693
 densidad de, 672
 relación con el método de la carga unitaria, 704
 relación con el método de las fuerzas, 700
- Energía complementaria mínima, 701
 de deformación mínima, 706
- Energía de deformación, 88, 670, 682, 703
 de barras no prismáticas, 90
 de vigas, 412
 determinación de deflexiones mediante la, 94, 97, 412, 682, 703
 elástica, 89
 en esfuerzo plano, 328
 en esfuerzo triaxial, 345
 en esfuerzo tridimensional, 346
 en flexión, 412
 en torsión, 165, 173
 inelástica, 89
 métodos de, 682
 mínima, principio de, 706
 por cortante, 165, 445, 712
 relación con el método de carga unitaria, 704
 relación con el método de flexibilidad, 705
 relación con el método de rigideces, 684
- Energía de deformación, densidad de, 90, 166, 671
 en esfuerzo plano, 328
 en esfuerzo triaxial, 345
 en esfuerzo tridimensional, 349
- Equilibrio,
 ecuaciones de, 67, 685
 estable, 593
 inestable, 594
 neutro (equilibrio indiferente), 593, 594
 tipos de, 592, 593, 594
- Equipo de prueba, 9
- Erg (unidad de energía), 740
- Esbetez, relación de, 613
- Escala,
 Celsius, 738
 centígrada, 738
 Fahrenheit, 741
 Kelvin, 738, 741
- Escalón unitaria, función, 420
- Esféricos,
 esfuerzos, 345
 sometidos a presión, recipientes, 329
- Esforzados, elementos, 81, 299
- Esfuerzo, 3, 10. (Véase también Esfuerzos cortantes)
 biaxial, 305, 310, 329
 círculo de Mohr para, 316
 circunferencial (tangencial), 332
 convencional, 10
 de fluencia. (Véase Fluencia, esfuerzo de)
 de zuncho, 332
 deformación sin, 23, 74
 en una cuña, 264
 energía de, 672
 esférico, 345
 estado general de, 347
 hidrostático, 346
 invariantes de, 348
 nominal, 10
 normal, 4
 real, 10
 relajación de, 20
 plano. (Véase Plano, esfuerzo)
 resultantes de, 196
 sin deformación, 75
 sobre secciones inclinadas, 81, 302
 trayectorias de, 340
 triaxial. (Véase Triaxial, esfuerzo)
 tridimensional, 346. (Véase también Tridimensional, esfuerzo)
 uniaxial, 5, 86, 87, 305
- Esfuerzo-deformación, diagrama, 9, 104
 bilineal, 105
 convencional, 10
 elastoplástico, 104-105
 en cortante, 28
 no lineales, 105
 para aluminio, 14
 para compresión, 16
 para el cobre, 17
 para el hierro fundido, 17
 para el hule (caucho), 15, 19
 real, 10, 11, 12
- Esfuerzo último, 12
 factor de seguridad para, 32
 tabla de, 796
- Esfuerzos,
 concentraciones de, 4, 231
 contorno de, 341
 cortantes, 26
 cortantes en vigas canal, 531, 542
 críticos en columnas, 613
 de contacto, 25
 de ingeniería, 10
 de membrana, 330
 de trabajo, 31
 en torsión, 141, 143
 en vigas, 226
 esféricos, 345
 iniciales, 80, 581

- Esfuerzos, (*continuación*)
 normales en vigas, 226
 permisibles. (Véase Permisibles, esfuerzos)
 relajación de, 20
 residuales en vigas, 580. (Véase también Residuales, esfuerzos)
 tangenciales. (Véase Esfuerzos cortantes)
 transformaciones para, 79, 143, 303
 trayectorias de, 340
- Esfuerzos cortantes, 25, 27
 en secciones angulares, 535
 en secciones Z, 540
 máximos, 311, 348
 signos convencionales para, 28, 300
 sobre secciones inclinadas, 82, 151
 sobre planos perpendiculares, 27, 301
- Esfuerzos cortantes en vigas, 242, 253, 555
 asimétricas, 525, 537
 canal, 531, 542
 circulares, 253
 de pared delgada, 525, 538
 de patin ancho, 249, 528
 I, 528
 no prismáticas, 261
 rectangulares, 242
 T, 253
- Esfuerzos principales, 308, 347
 en esfuerzo tridimensional, 346
 en vigas, 339
 para esfuerzo plano, 308
- Específicos, pesos, (tabla), 743
- Estabilidad. (Véase Pandeo; Columnas)
- Estable, equilibrio, 593,
- Estática,
 indeterminación, 59, 463
 redundante, 59, 463
 signos convencionales de, 198
 signos para condiciones de, 197
- Estáticamente aplicada, carga, 10, 88
- Estáticamente determinadas, estructuras, 59, 194
- Estáticamente indeterminadas, armaduras, 62, 67, 688
 estructuras, 59, 66, 463
- Estáticamente indeterminadas, vigas, 429. (Véase también Continuas, vigas)
 análisis plástico de, 563
 con apoyos inmóviles, 490
 de longitud infinita, 500
 deflexiones inelásticas de, 580
 ecuaciones diferenciales para, 465
 efectos de temperatura en, 488
 método de flexibilidad para, 473
 método del área de momentos para, 468
 método de superposición para, 473
 tipos de, 463, 464
- Estáticamente indeterminados, bastidores planos, 690
- Estáticamente indeterminados, (*continuación*)
 torsión de miembros, 161
- Estricción, 12
- Estructura,
 liberada, 60, 464
 primaria, 60, 464
- Estructural, acero, 11, 13
- Estructuras, 30
 estáticamente determinadas, 59, 194
 estáticamente indeterminadas, 59, 66, 463
 no lineales, diagramas carga-deflexión para, 670
 óptimas, 36, 50, 266
- Euler,
 carga de, 597
 curva de, 613, 614, 619
- Excentricidad, relación de, 613
- Extensómetro, 9, 10
- Externo, trabajo, 89, 646
- Extremos articulados, columnas con, 593
- Extremos fijos, viga de, 464
- Factor,
 de carga, 32, 570
 de forma para cortante, 439, 710
 de forma para flexión plástica, 558
 de impacto, 101
 de seguridad, 31, 615, 630. (Véase también Factor de carga)
- Fahrenheit, escala, 741
- Falla, 31, 100
 de columnas, 600
 de madera, 86
 mecanismo de, 564, 567
 por torsión, 142, 143, 153
 torsional de gis, 142, 153
 torsional de materiales frágiles, 153
- Físicas, propiedades, (tabla), 744, 793
- Flechas. (Véase Torsión)
- Flexibilidad, 51
 axial, 51
 torsional, 143
- Flexibilidad, método de, 701
 para vigas estáticamente indeterminadas, 473
- Flexibilidades, 475, 707
 método de las, 59, 473, 705
 relación con la energía de deformación, 707
 relación recíproca para, 707
 teoremas de reciprocidad para, 707
- Flexión, 219. (Véase también Plano de flexión; Plástica, flexión; Vigas)
 centro de. (Véase Cortante, centro de)
 de barras no prismáticas, 259
 de secciones Z, 517
 energía de deformación en, 412
 no uniforme, 221
 plano de. (Véase)
 plástica. (Véase)
 plástica, factor de forma para, 558
- Flexión, (*continuación*)
 rigidez a, 229
 torsión combinada con, 338
- Flexión asimétrica, 503, 516
 curvatura en, 509, 518
 de secciones angulares, 514, 519
 de vigas canal, 512
 deflexiones de vigas para, 506, 512
 eje neutro para, 506, 512, 518
 fórmula de la, 506, 511-512, 518
- Flexión, fórmula de la, 229
 generalizada, 518
 para ejes no principales, 518
 para flexión asimétrica, 506, 512, 518
- Flexión inelástica, 553-581
 curvatura en, 554, 559, 571, 577
 diagramas carga-deflexión para, 574
 esfuerzos residuales en, 580
 relación momento-curvatura para, 559, 576
- Flexión pura, 221
 de vigas asimétricas, 508
 teoría generalizada de, 516
- Flexionantes, momentos. (Véase Momentos flexionantes)
- Fluencia,
 carga de. (Véase Carga de fluencia)
 curvatura de, 559
 momento de, 556
 par de, 179
 punto de, 11
- Fluencia, esfuerzo de, 11
 factor de seguridad para, 31
 incremento del, 19
 método del corrimiento para, 15
 tabla de, 796
- Flujo (*Creep*), 19, 20
- Flujo de cortante, 171
 en torsión, 172
 en vigas, 257, 527
- Flujo plástico, 19, 20, 561
 controlado, 561
- Forma,
 cuadrática, 675
 pandeada (forma modal o moda de pandeo), 597
- Fórmula,
 de la flexión. (Véase Flexión, fórmula de la)
 de la secante, 612, 620
 de torsión, 143
 del cortante generalizada, 539
- Fórmulas,
 de Bredt para la teoría de la torsión, 175
 de diseño para columnas, 627
- Frágiles, materiales, 16
 falla torsional de, 153
- Fuerza,
 cortante, diagramas de, 205
 trabajo de una, 88, 165, 646
- Fuerzas cortantes, 26, 193-218
 signos convencionales para, 197, 380

- Fuerzas internas, 196
 Fuerzas, método de las, 61, 475, 700
 relación con la energía complementaria, 700
- Función,
 delta de Dirac, 423
 doblete unitaria, 421
 escalón de Heaviside, 420
 escalón unitaria, 420
 impulso unitaria, 423
 rampa unitaria, 419
 trascendente, 607
- Funciones,
 de discontinuidad, 418, 429
 de Macaulay, 419
 de singularidad, 419, 421
 elípticas, 446
- Gal (unidad de aceleración), 740
- Garganta, barra con, 93, 100
- Generalizada,
 fórmula de la flexión, 518
 fórmula del cortante, 539
 ley de Hooke, 349
- Geométricas, no linealidades, 670
- Giro, radio de, 755
- Gis, falla torsional de, 142, 153
- Granito, propiedades del, 793
- Gravedad, aceleración de la, 688, 692, 696
- Gravitacional de unidades, sistema, 687
- Heaviside, función escalón de, 420
- Hectárea (unidad de área), 740
- Hertz (unidad de frecuencia), 739, 740
- Hidrostático, esfuerzo, 346
- Hierro forjado, propiedades del, 793
- Hierro fundido, 17
 diagrama esfuerzo-deformación para, 17
 propiedades del, 793
- Homogénea, solución, (de una ecuación diferencial), 602
- Homogéneo, material, 5, 22
- Hooke, ley de, 21
 en cortante, 28
 generalizada, 349
 para esfuerzo plano, 325
 para esfuerzo triaxial, 343
 para esfuerzo tridimensional, 348
- Hule, 15
 diagramas esfuerzo-deformación para el, 15, 19
 propiedades del, 23, 742
- I, vigas, 522, 550
 asimétricas, 521, 550
 de ala ancha, 238
- I, vigas, (continuación)
 tabla de, 782. (Véase también Patin ancho, vigas de)
- Impacto, 95
 deflexiones de vigas debidas a, 417
 deflexiones debidas a, 96, 417
 en carga axial, 95-96
 factor de, 101
- Impactos, amortiguador de, 44
- Imperfección, relación de, 618
- Imperfecciones en columnas, 600, 617
- Impulso unitaria, función, 423
- Indeterminación estática, 59, 463
 grado de, 463
- Inelástica,
 energía de deformación, 89
 flexión, 553-581
- Inelásticas, vigas, 553-581
 curvatura de, 554, 559, 571, 576
 de material elastoplástico, 555
 deflexiones de, 554, 571, 580
 eje neutro para, 554, 557, 574
 esfuerzos residuales en, 580
- Inelástico, pandeo. (Véase Pandeo inelástico)
- Inercia,
 momento polar de, 759
 principales, momentos de, 767
 producto de, 761
 transformaciones de momentos de, 766
- Inestabilidad. (Véase Pandeo; Columnas)
- Inestable, equilibrio, 593, 594
- Inflexión, punto de, 402
- Ingeniería, esfuerzos de, 10
- Iniciales, esfuerzos, 80, 581
- Integraciones sucesivas, método de, 382, 388, 410, 465
- Integrales que contienen productos, 652
 por el método de la carga unitaria, 652-653
 tabla de, 653
- Internas, fuerzas, 196
- Interno, trabajo, 89, 646
- Invariantes de esfuerzo, 348
- Isótropos, materiales, 22
- Joule (unidad de trabajo y energía), 739, 740
- Kelvin, escala, 738, 741
- Kilogramo (unidad de masa), 736
- Kip (unidad de fuerza), 4, 740, 741
- Kirchhoff, analogía dinámica de, 449
- L, tablas de perfiles, 784, 785. (Véase también Angulares, secciones)
- Ladrillo, propiedades del, 793
- Lateral,
 contracción. (Véase Contracción lateral)
- Lateral, (continuación)
 deformación, 22
- Latón, propiedades del, 793
- Ley de Hooke. (Véase Hooke, ley de)
- Liberada, estructura, 60, 464
- Libra,
 unidad de fuerza, 736, 738
 unidad de masa, 738
- Limite,
 de proporcionalidad, 11
 diseño al, 570
 elástico, 19
- Lineal, elasticidad, 21, 90
- Linealmente elásticos, resortes, 51
- Longitud,
 de cuerda de una viga, 491
 infinita, vigas estáticamente indeterminadas de, 500
 total de la viga y la cuerda, 491
- Longitudes
 efectivas de columnas, 604
 equivalentes de columnas, 604
- Lüders, bandas de, 86
- Macaulay, funciones de, 419
- Madera,
 columnas de, 631, 632
 falla de, 86
 propiedades de la, 786, 793
 secciones de, 588. (Véase también Secciones de madera)
 vigas de, 236, 237
- Magnesio, propiedades del, 793
- Margen de seguridad, 32
- Mármol, propiedades del, 793
- Material,
 descarga de un, 18, 89
 elastoplástico, 104, 555
 homogéneo, 5, 22
 perfectamente plástico. (Véase Plástico, material perfectamente)
- Materiales,
 densidades de masa de, 794
 frágiles. (Véase Frágiles, materiales)
 isótropos, 22
 no linealidades, 670
 pesos de, (tabla), 744, 794
 propiedades de, (tabla), 744, 793
 vigas de dos, 266
- Máximos, esfuerzos cortantes, 311, 348
- Maxwell-Mohr, método de, 648, 706
- Maxwell, teorema de reciprocidad de, 667
- Mecánicas, propiedades, (tablas), 793
- Mecanismo de falla, 564, 567
- Mecanismos (para análisis plástico), 564
- Medidores de deformación (strain gages), 360, 356, 374
- Membrana, esfuerzos de, 330

- Método,
de carga simulada, 648
de Clebsch, 429
de corrimiento para esfuerzos de fluencia, 15
de desplazamiento, 66, 684
de diseño por resistencia, 32
de flexibilidad. (Véase Flexibilidad, método de)
de integraciones sucesivas, 382, 388, 465
de la carga unitaria. (Véase Carga unitaria, método de la)
de la sección transformada, 270
de las flexibilidades, 59, 473, 705
de las fuerzas. (Véase Fuerzas, método de las)
de Maxwell-Mohr, 648, 706
de rigideces, 66, 684
del elemento finito, 708
Método de superposición, 404, 411, 473
para vigas estáticamente indeterminadas, 473
Método del área de momentos, 392, 410, 468
para vigas estáticamente indeterminadas, 468
Métodos,
de energía de deformación, 682
energéticos, 643-713. (Véase también Energéticos, métodos)
matriciales de análisis estructural, 707
Métrico, sistema, 736
Mínimo, volumen, 34
Modular, relación, 270
Módulo,
de Poisson, 346
de resiliencia, 91
de rigidez, 28
de sección, 230
de tenacidad, 91
de Young, 22
plástico, 558
reducido, 579, 624
reducido, (pandeo inelástico), teoría del, 624
tangencial. (Véase Tangencial, módulo)
Módulo de elasticidad, 21, 795
a cortante, 28, 155, 156, 795
volumétrico, 346
Mohr, círculo de, 316
para deformaciones, 356
para esfuerzo, 316
para esfuerzo plano, 316
para momentos de inercia, 767
Momento,
flexionante de fluencia, 556
plástico, 557
polar de inercia, 759
Momento-curvatura, relación, 379
para flexión inelástica, 559, 576
Momento flexionante, 193-218
Momento flexionante, (continuación)
diagramas de, 205
signos convencionales para, 197, 380
Momentos,
de empotramiento, 479
método del área de, 392, 410, 468
redistribución de, 566
representación vectorial de, 139
vectores de, 139
Momentos de inercia,
círculo de Mohr para, 716
principales, 716
transformaciones de, 715
Momentos de inercia de un área, 753
principales, 767
tabla de, 775
Monel, propiedades del, 793
Muertas, cargas, 32
Natural, deformación, 11
NBS (Departamento Nacional de Normas), 9
Neutra, superficie, 223
Neutro,
eje. (Véase Eje neutro)
equilibrio, (equilibrio indiferente), 593, 594
Newton (unidad de fuerza), 736
Niquel, propiedades del, 793
No lineal,
diagrama esfuerzo-deformación, 105
torsión, 177
No linealidades,
causas de, 670
geométricas, 670
materiales, 670
No prismáticas, barras,
deflexiones de, 409
energía de deformación de, 90
flexión de, 259
torsión de, 146, 148
No prismáticas, vigas, 259, 409
deflexiones de, 409
esfuerzos cortantes en, 261
No uniforme,
flexión, 221
torsión, 146, 168
Nominal,
deformación, 11
esfuerzo, 10
Normal,
deformación, 5. (Véase también Deformación)
esfuerzo, 4. (Véase también Esfuerzo)
Núcleo de una sección, 280
Números, redondeo de, 747
Nylon, propiedades del, 793
Oblicuo, ángulo, 27
Óptimas,
columnas, 600
Óptimas, (continuación)
estructuras, 36, 50
Pandeada, forma, (forma modal o moda de pandeo), 597
Pandeo, 591-634. (Véase también Columnas)
caso fundamental de, 597
de sistemas barra-resorte, 592
ecuación de, 608
en torsión, 176
local, 598
Pandeo inelástico, 599, 600, 619, 621
teoría de Shanley para, 624
teoría del módulo reducido para, 624
teoría del módulo tangencial para, 622
Par de fluencia, 179
Paralelepípedo, 23
Pared delgada, torsión de tubos de, 170
Pared delgada, vigas de, 525
centro de cortante de, 531
esfuerzos cortantes en, 525, 538
Particular, solución, (de una ecuación diferencial), 602
Pascal (unidad de presión), 737, 739, 740
Patin ancho, vigas de, 237
asimétricas, 522, 550
esfuerzos cortantes en, 249, 528
tabla de, 781
Pendiente (de la curva de deflexión), 378
Perfiles, 526
C, tabla de, 783
de vigas, 236
estructurales, propiedades de, 780, 786
L, tabla de, 784, 785
S, tabla de, 782
W, tabla de, 781
Permanente,
alargamiento, 18
deformación, 18
Permisibles, cargas, 30
Permisibles, esfuerzos, 30, 236
diseño por, 31, 570
en columnas, 630
Peso, 737
Pesos específicos de materiales, (tabla), 744, 794
Piedra, propiedades de la, 793
Pilar de volumen mínimo, 34
Piobert, bandas de, 86
Plana, deformación. (Véase Deformación plana)
Plano de flexión, 193, 219
para vigas asimétricas, 503
Plano, esfuerzo, 300, 337, 350
cambio unitario de volumen en, 328
círculo de Mohr para, 316

- Plano, esfuerzo, (continuación)
 energía de deformación en, 328
 esfuerzos principales para, 308
 ley de Hooke para, 325
- Planos,
 perpendiculares, esfuerzos cortantes sobre, 27, 301
 principales, 308
- Plástica, flexión, 555
 de vigas rectangulares, 556, 558
 deflexiones debidas a, 571
 factor de forma para, 520
- Plástica, torsión, 179
- Plasticidad, 11, 18, 104
- Plástico,
 análisis. (Véase Análisis plástico)
 diseño, 570
 flujo, 19, 20, 561. (Véase también Flujo plástico)
 módulo, 558
 momento, 557
- Plástico, material perfectamente, 11, 104, 555
 torsión de barras de, 179
 vigas de, 556
- Poisson, relación de, 22
 en la región plástica, 24
 tabla de, 795
- Potencia,
 caballo de, 740, 743
 en torsión, 158
 transmitida en torsión, 158
- Presfuerzo, 80
- Presión,
 recipientes a, 329
 recipientes cilíndricos sometidos a, 332
 recipientes esféricos sometidos a, 329
- Previas, deformaciones, 79
- Primaria, estructura, 60, 464
- Primer,
 momento de un área, 748
 teorema de Castigliano, 683
- Principio,
 de desplazamientos virtuales, 566, 644
 de energía de deformación mínima, 706
 de superposición, 406
 de trabajo virtual, 643, 646
 del trabajo mínimo, 706
- Principales,
 deformaciones, 355
 esfuerzos, 308, 347
 planos, 308
- Prismática, barra, 3, 50
- Prismáticas, columnas, 600
- Producto de inercia, 761
- Productos, integrales que contienen. (Véase Integrales que contienen productos)
- Propiedades,
 de áreas, 748-774
- Propiedades, (continuación)
 de áreas, tabla, 775
 de materiales (tabla), 744, 793
 de perfiles estructurales, 780, 786
 físicas (tablas), 744, 793
 mecánicas (tablas), 793
- Proporcionalidad, límite de, 11
- Prueba,
 de tensión, 9
 equipo de, 9
- Pruebas del concreto, 11
- Puntal. (Véase Columnas)
- Punto,
 de bifurcación, 593
 de contraflexión, 402
 de fluencia, 11
 de inflexión, 402
- Radio,
 de curvatura, 220, 378
 de giro, 755
- Rampa unitaria, función, 419
- Reacciones, notación para, 59
 de vigas, 194
- Real,
 deformación, 11
 esfuerzo, 10
 esfuerzo-deformación, curva, 12
- Recipientes a presión, 329
 cilíndricos, 332
 esféricos, 329
- Reciprocidad, teoremas de, 663
 para flexibilidades, 707
 para rigideces, 685
- Rectangulares, vigas, 230, 237
 esfuerzos cortantes en, 242
 esfuerzos principales en, 339
 flexión plástica de, 556, 558
- Redistribución de momentos, 566
- Redondeo de números, 747
- Reducción (porcentual) de área, 16
- Reducido, módulo, 579, 624
 de pandeo inelástico, teoría del, 624
- Redundante estática, 59, 463
- Región plástica, relación de Poisson en la, 24
- Relación,
 con la energía de deformación para flexibilidades, 707
 de esbeltez, 613
 de excentricidad, 613
 de imperfección, 618
 de Poisson, 22
 entre la energía de deformación y las rigideces, 685
 modular, 270
 recíproca para flexibilidades, 707
 recíproca para rigideces, 685
- Relación momento-curvatura, 379
 para flexión inelástica, 559, 576
- Relajación de esfuerzo, 20
- Representación vectorial de momentos, 139
- Residual, deformación, 18
- Residuales, esfuerzos, 108
 en flexión inelástica, 580
 en torsión, 179
 en vigas inelásticas, 580
- Resiliencia, módulo de, 91
- Resistencia, 30-31
 método de diseño por, 32
- Resorte,
 constante del, 51
 deformación de un, 51
- Resortes linealmente elásticos, 51
- Resultantes de esfuerzo, 196
- Rigideces, 685
 método de, 66, 684
 relación con la energía de deformación, 685
 relación recíproca para, 685
 teorema de reciprocidad para, 685
- Rigidez, 51
 a cortante, 439, 710
 a flexión, 229
 axial, 51
 módulo de, 28
 torsional, 143, 175
- Rombo, 27
- Romboide, 27
- Rotación de ejes. (Véase Transformaciones)
- S, perfiles, tabla de, 782. (Véase también Patín ancho, vigas de)
- Secante, fórmula de la, 612, 620
 para columnas, 612, 620
- Sección,
 corazón de una, 281
 de "sombrero", 552
 módulos de, 230
 núcleo de una, 280
 transformada, método de la, 270
 transversal, 3, 50, 236
 Z. (Véase Z, sección.)
- Secciones,
 abiertas de pared delgada, vigas de, 525
 angulares. (Véase Angulares, secciones)
 de madera, tabla de, 786
 inclinadas, esfuerzos cortantes sobre, 84, 142
 transversales abiertas, 49, 525
- Secciones estructurales, 526
 tablas de, 780
- Segundo,
 momento de un área, 753
 teorema de Castigliano, 703
- Seguridad, factor de, 31, 615, 630.
 (Véase también Factor de carga)
 para esfuerzo de fluencia, 31
 para esfuerzo último, 32
- SI, unidades, 737
- Significativos, dígito@ 745
- Seguridad, margen de, 32

- Shanley, teoría de, (para pandeo inelástico), 624
- Signos,
para condiciones de deformación, 197
para condiciones de estática, 197
- Signos convencionales,
de estática, 197
para deformación, 197
para deformaciones angulares, 28
para esfuerzos cortantes, 28, 300
para fuerzas cortantes, 197, 380
para momentos flexionantes, 197, 380
- Sinclástica, curvatura, 225
- Singularidad, funciones de, 419, 421
- Sistema,
absoluto de unidades, 736
gravitacional de unidades, 736
métrico, 736
- Slug (unidad de masa), 736, 741
- Solución (de una ecuación diferencial),
complementaria, 602
homogénea, 602
particular, 602
trivial, 596
- "Sombrero", sección de, 551
- SSRC (Consejo de Estabilidad Estructural), 628
- Superficie neutra, 223
- Superposición, 404
método de, 404, 411, 473
principio de, 406
- T, vigas, 252
centro de cortante de, 535
esfuerzos cortantes en, 252
- Tabla,
de dilatación térmica, 798
de esfuerzo último, 796
de esfuerzo de fluencia, 796
de funciones de discontinuidad, 422
de integrales que contienen productos, 653
de módulos de Poisson, 795
de momentos de inercia de un área, 775
de vigas de patin ancho, 781
de vigas en voladizo, 787
de vigas I, 782
de vigas simples, 790
- Tablas,
de conversión para unidades, 742
de deflexiones, 786, 790
de deflexiones de vigas, 787, 790
de perfiles, 781-785
de secciones angulares, 784, 785
de secciones estructurales, 780
de vigas canal, 783
- Tangencial, módulo, 622
teoría del, (pandeo inelástico), 622
- Temperatura,
curvatura debida a, 436
- Temperatura, (continuación)
deflexiones de vigas debidas a, 436, 488, 651
unidades de, 738, 741
- Temperatura, efectos de la, 71
en armaduras, 76, 651
en vigas, 436, 488, 651
- Tenacidad, módulo de, 91
- Tensión, 3, 9
cambio de volumen en, 23
prueba de, 9
- Teorema,
de Clapeyron, 90
de Crotti-Engesser, 693
de los desplazamientos recíprocos, 663
de los trabajos recíprocos, 667
de reciprocidad de Betti-Rayleigh, 669
de reciprocidad de Maxwell, 667
de los ejes paralelos, 756, 760, 763
de reciprocidad. (Véase Reciprocidad, teoremas de)
- Teoría,
de Shanley (pandeo inelástico), 624
del módulo reducido (pandeo inelástico), 579, 624
del módulo tangencial (pandeo inelástico), 622
generalizada de flexión pura, 516
- Térmica, deformación, 71
- Térmica, dilatación, 72
coeficiente de, 72
tabla de, 798
- Térmicos, efectos. (Véase Temperatura, efectos de la)
- Titanio, propiedades del, 793
- Torcimiento. (Véase Torsión)
- Torques, 139
- Torsión, 139-191
ángulo de, 140, 146, 174
combinada con flexión, 338
constante, 173
de materiales perfectamente plásticos, 179
de miembros estáticamente indeterminados, 161
de tubos. (Véase Tubos, torsión de)
deformaciones angulares en, 141, 154
deformaciones en, 140, 155, 157
energía de deformación en, 165, 173
esfuerzos en, 141, 143
esfuerzos residuales en, 179
falla por, 142, 143, 153
flujo de cortante en, 172
fórmula de, 143
fórmulas de Bredt para la teoría de la, 175
no lineal, 177
no uniforme, 146, 167
pandeo por, 176
plástica, 179
potencia transmitida en, 158
- Torsión, (continuación)
para, 140
vigas con, 315
- Torsión de barras,
compuestas, 163
de dos materiales, 163
huecas, 144, 170
no prismáticas, 146, 149
- Torsional,
flexibilidad, 143
rigidez, 143, 175
- Trabajo, 89
cargas de, 32
complementario, 672
de una fuerza, 89, 165, 646
esfuerzos de, 31. (Véase también Permisibles, esfuerzos)
externo, 89, 646
interno, 89, 646
mínimo, principio del, 706
virtual. (Véase Virtual, trabajo)
- Trabajos recíprocos, teorema de los, 667
- Transformaciones, 81
para deformaciones, 351, 355
para esfuerzos, 81, 152, 303
para momentos de inercia, 766
- Transversal, sección, 3, 50, 236
- Trascendente, función, 607
- Trayectorias de esfuerzo, 340
- Tres momentos, ecuación de los, 484
- Triaxial, esfuerzo, 342
cambio de volumen en, 344
energía de deformación en, 345
ley de Hooke para, 343
- Tridimensional, esfuerzo, 346
cambio de volumen en, 349
energía de deformación en, 346
esfuerzos principales en, 348
ley de Hooke para, 349
- Trivial, solución, (de una ecuación diferencial), 596
- Tubos, torsión de, 143, 170
de pared delgada, 170
- Tungsteno, propiedades del, 793
- Últimas, cargas. (Véase Cargas últimas)
- Último,
esfuerzo, 12. (Véase también Esfuerzo último)
momento, 179
- Uniaxial, esfuerzo, 5, 86, 87, 305
- Unidades, 736-744
de temperatura, 738, 741
SI, 737
sistema absoluto de, 736
sistema gravitacional de, 736
tablas de conversión para, 742
- Valores, análisis de,
característicos, 311, 599
propios, 311
- Vectores de momentos, 139
- Vidrio, 16

Vigas, (continuación)
línea de, 16
propiedades del, 793

Viga,
aglomerada, 256
cubo, 256
de extremos fijos, 464
de volumen mínimo, 266
desplazamientos horizontales en los
extremos de una, 490
en voladizo. (Véase Voladizo, viga en
fija, 464
I de ala ancha (trabe armada), 256
simple empotrada, 463
Viga con un extremo volado, 194
Vigas, 193, 219, 377. (Véase también
Apoyos de vigas; Asimétricas,
vigas; Canal, vigas; Circulares, vi-
gas; Continuas, vigas; Deflexiones
de vigas; Estáticamente indetermina-
das, vigas; Flexión; Inelásticas,
vigas; Pared delgada, vigas
de; Patin ancho, vigas de; Rec-
tangulares, vigas; T, vigas)
alabeo de, 231, 247, 441-443
apoyos de. (Véase)
armadas, 256
asimétricas. (Véase)
canal. (Véase)
canal asimétricas, 541
carga de fluencia para, 564
circulares. (Véase)
completamente esforzadas, 266
compuestas, 266
con apoyos inmóviles, 490
con cargas axiales, 276, 278
con cargas oblicuas, 504
con forma de cuña (ahusadas), 246
con torsión, 315
continuas. (Véase)
contracción lateral de, 210

Vigas, (continuación)

cortante horizontal en, 242-243
de aluminio, 237
de concreto reforzado, 266
de dos materiales, 266
de extremos fijos, 464
de madera, 236, 237
de material perfectamente plástico,
555
de pared delgada. (Véase)
de patin ancho. (Véase)
de secciones abiertas de pared del-
gada, 525
de tipo emparedado ("sandwich"),
266, 275, 441, 444
deflexiones de. (Véase)
deflexiones grandes de, 445
deformaciones angulares en, 247
deformaciones en, 222, 229
diseño de, 236
efectos de la temperatura en, 436,
488, 651
energía de deformación de, 412
esfuerzos cortantes en, 242, 253,
255
esfuerzos en, 226
esfuerzos normales en, 226
esfuerzos principales en, 316
estáticamente indeterminadas. (Véase)
flujo de cortante en, 257, 528
I, tabla de, 731. (Véase también
Patin ancho, vigas de)
I asimétricas, 521, 550
inelásticas. (Véase)
métodos energéticos para, 643
no prismáticas, 259, 409
notación para reacciones de, 194
perfiles de, 236
rectangulares. (Véase)
T. (Véase)
tipos de, 193, 463, 464

Vigas simples, 193
tabla de, 790
Virtual, trabajo, 566, 567, 643, 648
principio del, 646
Virtuales, desplazamientos, 643, 644
para análisis plástico, 566
principio de los, 567, 644
Vivas, cargas, 32
Voladizo, viga en, 194
apuntalada, 463
deflexiones grandes de, 446
tabla de, 787
Volumen, cambio de,
en esfuerzo plano, 327
en esfuerzo triaxial, 344
en esfuerzo tridimensional, 349
en tensión, 23
Volumen mínimo, 35
columna de, 35
viga de, 266
Volumétrica, deformación, 345
W, tabla de perfiles, 781. (Véase tam-
bién Patin ancho, vigas de)
Watt (unidad de potencia), 739, 740
Williot, diagramas de, 58
para armaduras, 58
x, en todo el texto
Young, módulo de, 22
Z, sección,
centro de cortante de una, 537
ejes principales de una, 770
esfuerzos cortantes en una, 540
flexión de, 517
Zuncho, esfuerzo de, 332

Unidades principales usadas en mecánica

Cantidad	Sistema Internacional (SI)			Sistema Inglés (U.S. Customary System, USCS)		
	Unidad	Símbolo	Fórmula	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado		rad/s ²	radián por segundo cuadrado		rad/s ²
Aceleración lineal	metro por segundo cuadrado		m/s ²	pie por segundo cuadrado		pie/s ²
Área	metro cuadrado		m ²	pie cuadrado		pie ²
Densidad (masa)	kilogramo por metro cúbico		kg/m ³	slug por pie cúbico		slug/pie ³
Energía	joule	J	N·m	libra-pie		pie·lb
Fuerza	newton	N	kg·m/s ²	libra	lb	(unidad básica)
Frecuencia	hertz	Hz	s ⁻¹	hertz	Hz	s ⁻¹
Impulso angular	newton metro segundo		N·m·s	pie-libra-segundo		pie·lb·s
Impulso lineal	newton segundo		N·s	libra-segundo		lb·s
Intensidad de fuerza	newton por metro		N/m	libra por pie		lb/pie
Longitud	metro	m	(unidad básica)	pie	pie	(unidad básica)
Masa	kilogramo	kg	(unidad básica)	slug		lb·s ² /pie
Momento de una fuerza; torque	newton metro		N·m	pie-libra		pie·lb
Momento de inercia (masa)	kilogramo metro cuadrado		kg·m ²	slug pie cuadrado		slug·pie ²
Momento de inercia (segundo momento de área)	metro a la cuarta potencia		m ⁴	pulgada a la cuarta potencia		plg ⁴
Potencia	watt	W	J/s	pie-libra por segundo		pie·lb/s
Presión	pascal	Pa	N/m ²	libra por pie cuadrado	psf	lb/pie ²
Modulo de sección	metro a la tercera potencia		m ³	pulgada a la tercera potencia		plg ³
Peso específico (densidad de peso)	newton por metro cúbico		N/m ³	libra por pie cúbico	pcf	lb/pie ³
Esfuerzo	pascal	Pa	N/m ²	libra por pulgada cuadrada	psi	lb/plg ²
Tiempo	segundo	s	(unidad básica)	segundo	s	(unidad básica)
Velocidad angular	radián por segundo		rad/s	radián por segundo		rad/s
Velocidad lineal	metro por segundo		m/s	pie por segundo	fps	pie/s
Volumen (líquidos)	litro	l	10 ⁻³ m ³	galón	gal.	231 plg ³
Volumen (sólidos)	metro cúbico		m ³	pie cúbico	cf	pie ³
Trabajo	joule	J	N·m	pie-libra		pie·lb

Propiedades físicas en unidades SI y USCS

Propiedad	SI	USCS
Agua (fresca)		
peso específico	9.81 kN/m ³	62.4 lb/pie ³
densidad de masa	1000 kg/m ³	1.94 slugs/pie ³
Agua de mar		
peso específico	10.0 kN/m ³	63.8 lb/pie ³
densidad de masa	1020 kg/m ³	1.98 slugs/pie ³
Aluminio		
peso específico	26.6 kN/m ³	169 lb/pie ³
densidad de masa	2710 kg/m ³	5.26 slugs/pie ³
Acero		
peso específico	77.0 kN/m ³	490 lb/pie ³
densidad de masa	7850 kg/m ³	15.2 slugs/pie ³
Concreto reforzado		
peso específico	23.6 kN/m ³	150 lb/pie ³
densidad de masa	2400 kg/m ³	4.66 slugs/pie ³
Aceleración de la gravedad (sobre la superficie de la Tierra)		
Valor recomendado	9.81 m/s ²	32.2 pie/s ²
Valor estándar internacional	9.80665 m/s ²	32.1740 pie/s ²
Presión atmosférica (al nivel del mar)		
Valor recomendado	101 kPa	14.7 psi
Valor estándar internacional	101.325 kPa	14.6959 psi

Prefijos SI

Prefijo	Símbolo	Factor multiplicador
tera	T	10 ¹² = 1 000 000 000 000
giga	G	10 ⁹ = 1 000 000 000
mega	M	10 ⁶ = 1 000 000
kilo	k	10 ³ = 1 000
hecto	h	10 ² = 100
deca	da	10 ¹ = 10
deci	d	10 ⁻¹ = 0.1
centi	c	10 ⁻² = 0.01
mili	m	10 ⁻³ = 0.001
micro	μ	10 ⁻⁶ = 0.000 001
nano	n	10 ⁻⁹ = 0.000 000 001
pico	p	10 ⁻¹² = 0.000 000 000 001

Nota: El uso de los prefijos hecto, deca, deci y centi no se recomienda en SI.

Otros libros de Grupo Editorial Iberoamérica

La ciencia e Ingeniería de los materiales
Donald R. Askeland

Álgebra y trigonometría con geometría analítica
Earl W. Swokowski

Álgebra lineal
Stanley I. Grossman

Cálculo con geometría analítica
Earl W. Swokowski

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones
Dennis G. Zill

Análisis Numérico
Richard Burden/Douglas Faires

Estadística matemática con aplicaciones
Mendenhall/Scheaffer/Wackerly

Química
Charles E. Mortimer

Manual de Química
Donald Summers

Química Orgánica
Ralph J. Fessenden/Joan S. Fessenden

Grupo Editorial Ibero

Wadsworth Internacional/ib

U S A C

BIBLIOTECA CENTRAL
GUATEMALA



470135020

ISBN 068