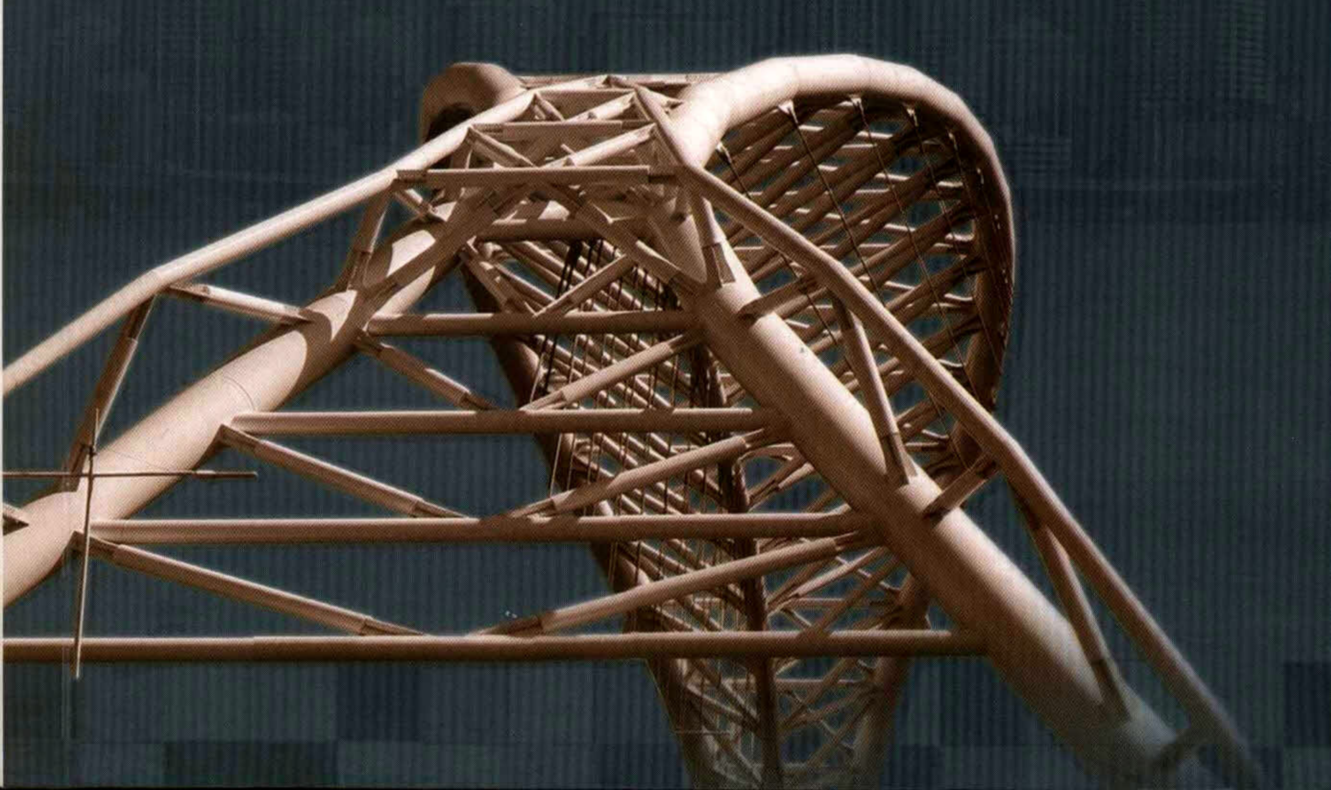
Ing. Luis Eduardo Gamio Arisnabarreta

EDITORIAL
MACRO®

RESISTENCIA DE MATERIALES

Teoría y aplicaciones

Información inédita: Tablas de flechas máximas en vigas con diversos tipos de apoyo y cargas



ÍNDICE

RESISTENCIA DE MATERIALES

INTRODUCCIÓN

Este libro sale a la luz tras veintiocho años de experiencia docente en la Universidad Nacional de Ingeniería, y se basa en los apuntes de clase del curso Resistencia de Materiales.

El texto contiene información conocida y también inédita, como las tablas de flechas máximas en vigas con diversos tipos de apoyo y cargas, que se logró a partir de una intensa búsqueda de información, investigación y consulta de una amplia bibliografía.

El curso es obligatorio en la mayoría de las carreras de Ingeniería; según el plan curricular, se desarrolla en el tercer año de la carrera, siendo fundamental para el aprendizaje de la Ingeniería Estructural.

La presente publicación contiene los siguientes temas:

- Esfuerzo normal y cortante
- Deformación unitaria normal y cortante
- Deformaciones debido a carga axial
- Deformaciones debido al peso propio
- Deformaciones debido a la temperatura
- Esfuerzo y deformación en dos y tres direcciones
- Estado plano de esfuerzos
- Estado plano de deformaciones
- Esfuerzos en recipientes de pared delgada
- Torsión en secciones circulares y anulares
- Torsión en secciones macizas no circulares
- Torsión en secciones de pared delgada
- Torsión en bridas
- Torsión en ejes que transmiten potencia
- Diagramas de cortante y momento en vigas
- Esfuerzos por flexión en vigas
- Esfuerzos por corte en vigas
- Deformaciones en vigas: Método de integración
- Deformaciones en vigas: Método de área de momento
- Deformaciones en vigas: Método de viga conjugada
- Deformaciones en vigas: Método de superposición
- Tablas de flechas máximas en vigas
- Tablas de centro de gravedad de superficies planas
- Tablas de momento de inercia de superficies planas

Además, se incluyen 300 aplicaciones.

RESISTENCIA DE MATERIALES

Es la ciencia que estudia los materiales que son sometidos a esfuerzos, así como las deformaciones causadas por dichos esfuerzos.

Alfabeto griego

Es utilizado en el curso, y consta de las siguientes letras:

α	(Alfa) Ángulo, coeficiente térmico
β	(Beta) Ángulo
δ	(Delta) Deformación
ε	(Épsilon) Deformación unitaria normal
γ	(Gamma) Deformación unitaria cortante, peso específico
λ	(Lambda) Constante de Lamé
μ	(Mu) Módulo de Poisson
ω	(Omega) Velocidad angular
ϕ	(Phi) Ángulo
π	(Pi) Ángulo, número
ρ	(Rho) Radio
σ	(Sigma) Esfuerzo normal
τ	(Tau) Esfuerzo cortante
θ	(Theta) Ángulo

TIPOS DE UNIDADES

(Utilizadas en diversos textos)

Longitud

Milímetro	: mm
Centímetro	: cm
Metro	: m
1 pulgada	: 1´´
1pie	: 1´

1´´ < > 2.54 cm

1´ < > 12´´ < > 30.48 cm

PREFIJO	ABREVIATURA	SE MULTIPLICA POR
nano	n	10^{-9}
micro	µ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
KILO	K	10^{3}
MEGA	M	10^{6}
GIGA	G	10^{9}

Área

(Unidades de longitud)^2

Fuerza

Kilogramo	: kg
Libra	: lb
Tonelada	: T
Newton	: N

1T<> 10^3 kg

1kg <> 9.81 N

1kN <> 10^3 N

1Kip <> 1KLb <> 10^3 lb

Esfuerzo (Fuerza/Área)

Pascal	: Pa
Kilo Pascal	: KPa
Mega Pascal	: MPa
Giga Pascal	: GPa

kg/cm^2

lb/pulg^2

N/m^2

1 Pa < > 1N/m^2

1 KPa < > 10^3 N/m^2

1 MPa < > 10^6 N/m^2

1 GPa < > 10^9 N/m^2

1 lb/pulg^2 < > 1P.s.i.

1 KLb/pulg^2 < > 1K.s.i

1 lb/pie^2 < > 1P.s.f.

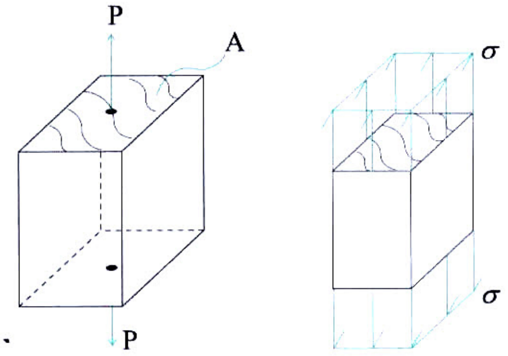
1 KLb/pie^2 < > 1 K.s.f.

CAPÍTULO 1

ESFUERZO

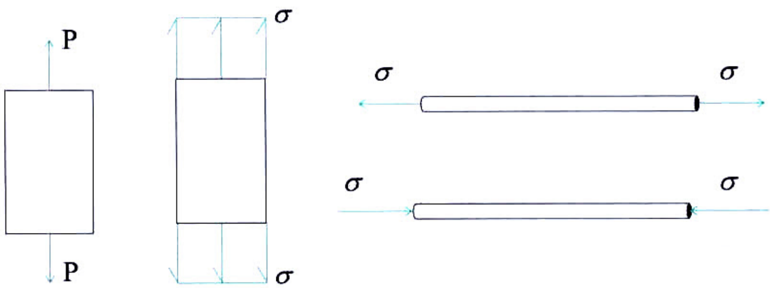
El esfuerzo es una fuerza distribuida en una superficie.

1.1 Esfuerzo normal (σ) $\sigma = \dfrac{P}{A}$



La fuerza P es perpendicular al área A.

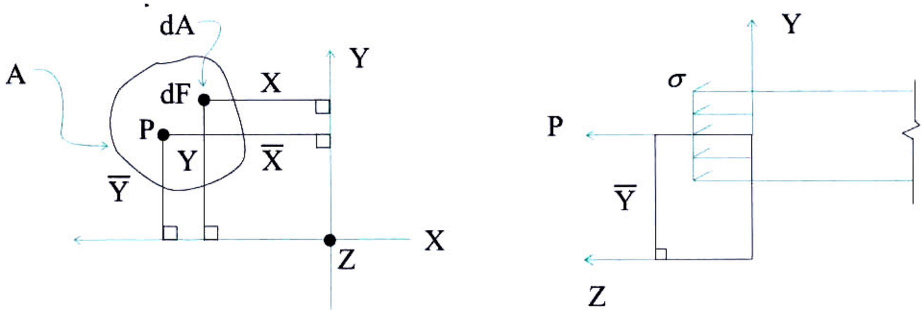
σ = Esfuerzo promedio



Esfuerzo normal de tracción

Esfuerzo normal de compresión

La fuerza P debe estar aplicada en el centro de gravedad del área (A) para que el esfuerzo normal (σ) sea uniforme.



$\sigma =$ Constante

$\sigma A = P$

$P = \int dF$

$dF = \sigma \; dA$

$$Mx = P\bar{y} = \int ydF = \int y\sigma dA$$

$$\sigma A\bar{y} = \sigma\int ydA \rightarrow \bar{y} = \frac{\int ydA}{A} --- (1)$$

Las expresiones 1 y 2 son las coordenadas del centro de gravedad del área A .

$$My = P\bar{x} = \int xdF = \int x\sigma dA$$

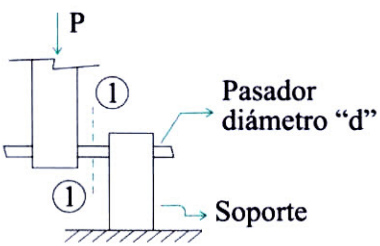
$$\sigma A\bar{x} = \sigma\int xdA \rightarrow \bar{x} = \frac{\int xdA}{A} --- (2)$$

1.2 Esfuerzo cortante (τ)

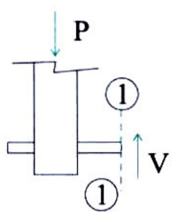
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

La fuerza P es paralela al área A.
El esfuerzo es promedio en toda la sección.

Corte simple



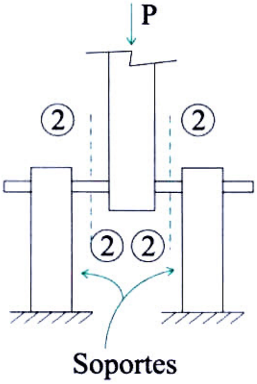
Sección 1 - 1



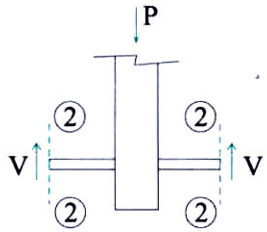
$$V = P$$

$$\sigma = \frac{P}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Corte doble



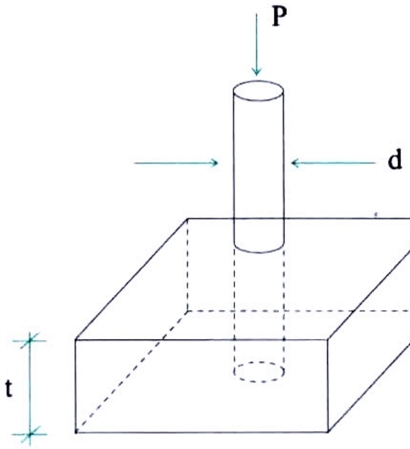
Sección 2 - 2



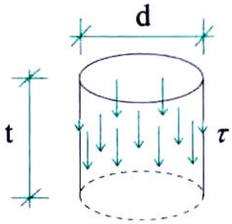
$$V = \frac{P}{2}$$

$$\sigma = \frac{P/2}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{2P}{\pi d^2}$$

Otra forma:

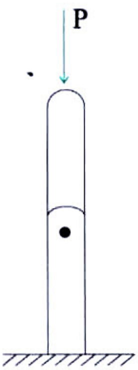


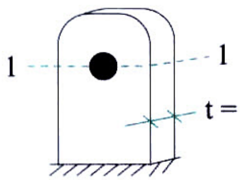
Superficie analizada:
Superficie lateral del cilindro



$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d t}$$

1.3 Esfuerzo de apoyo o de aplastamiento (σ)

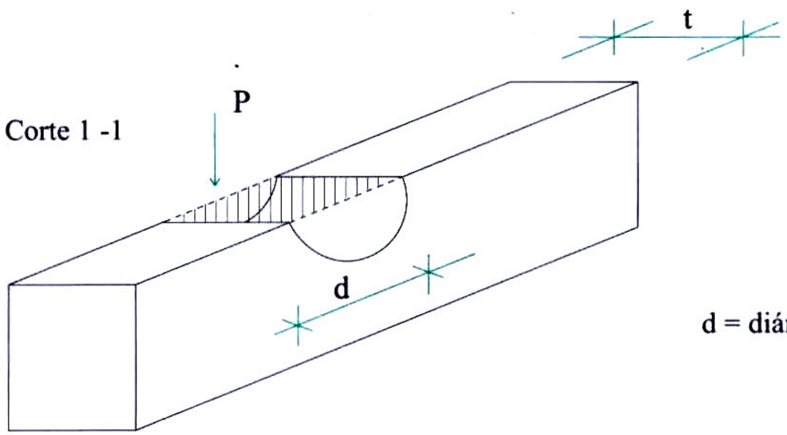




t = Espesor del soporte

$\sigma \rightarrow$ Esfuerzo promedio

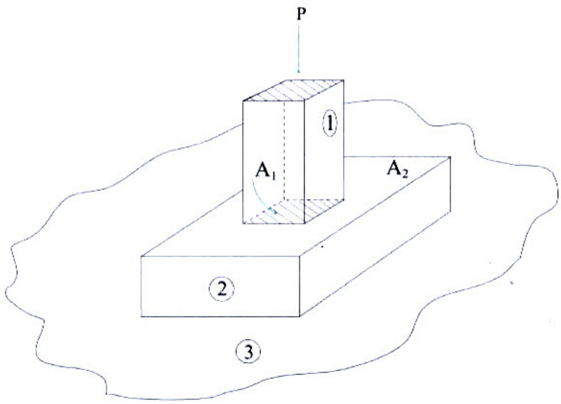
$\sigma = P/A$



$$\sigma = \frac{P}{td}$$

d = diámetro de pasador

El esfuerzo de apoyo tiene la característica de producirse cuando hay 2 superficies en contacto, y debido a las fuerzas actuantes una de las superficies se apoya en la otra.



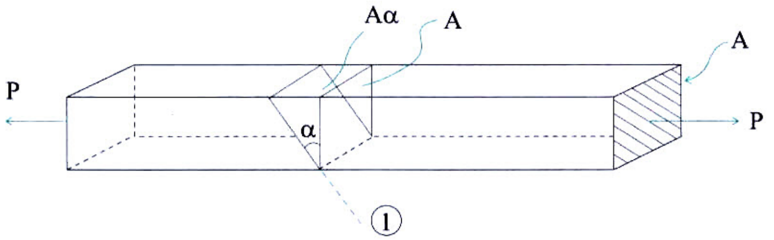
Entre (1) columna y (2) zapata, el área común de contacto es:

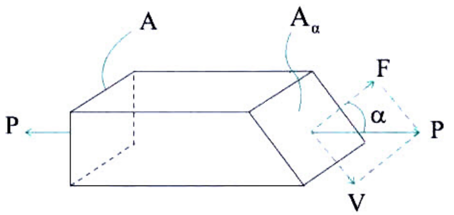
$$A_1 \quad \therefore \quad \sigma = P/A_1$$

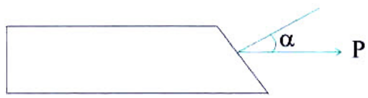
Entre (2) zapata y (3) suelo, el área común de contacto es A_2

$$\therefore \ \sigma = P/A_2$$

1.4 Esfuerzos en un plano inclinado







Con relación al plano inclinado:

Esfuerzo normal $\sigma = F / A\alpha$ ----(1)

Esfuerzo cortante $\tau = V / A\alpha$ ----(2)

$F = P \cos \alpha$ ----(3)

$V = P \operatorname{sen} \alpha$ ----(4)

$A\alpha \cos\alpha = A \rightarrow A\alpha = A / \cos\alpha$ ----(5)

Reemplazando las expresiones 3, 4 y 5 en 1 y 2:

Esfuerzo normal $\sigma = \frac{P}{A} \cos^2\alpha$

Esfuerzo cortante $\tau = \frac{P}{A}$ sen $\alpha \cos \alpha$

Observación:

1) σ máximo Si $\alpha = 0^{o} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$

2) τ máximo Si $\alpha = 45^{0} \rightarrow \tau = \frac{P}{2A}$

1.5 Esfuerzo admisible – Factor de seguridad

$$F.S. = \frac{\sigma u}{\sigma a} \qquad F.S. = \frac{\tau u}{\tau a} \qquad F.S. = \frac{Pu}{Pa}$$

*F.S. = Factor de seguridad F.S. > 1

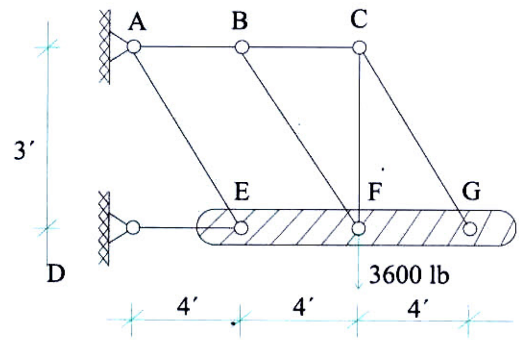
τ_u, σ_u = Esfuerzo último, esfuerzo de rotura o esfuerzo final.

σ_a, τ_a = Esfuerzo admisible $\rightarrow$ Es el máximo esfuerzo al que debe ser sometido un material, asegurándose así un desempeño seguro.

*Los factores de seguridad están especificados en las normas de diseño.

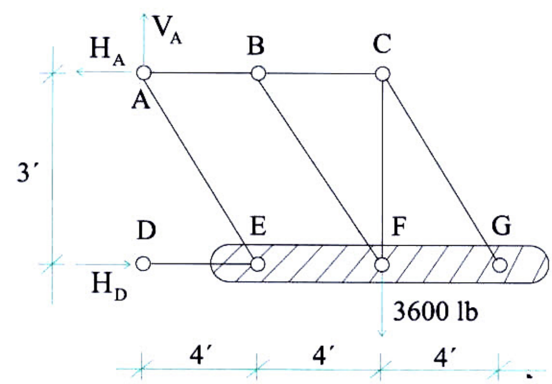
Problema 1

La barra rígida EFG está soportada por la armadura mostrada. Determinar el área de la sección transversal del elemento AE y DE, para la cual el esfuerzo normal en el elemento es de 15000 lb/pulg²



Solución:

Diagrama de cuerpo libre



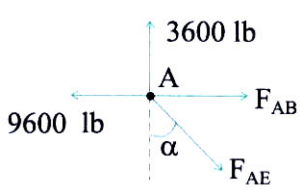
$\Sigma M_A = O \rightarrow H_D\ (3) = 3600\ (B) \rightarrow H_D = 9600$ lb

$\Sigma F_H = O \rightarrow H_D = H_A = 9600$ lb

$\Sigma F_V = O \rightarrow V_A = 3600$ lb

Nudo D: $= H_D = F_{DE} = 9600$ lb

Nudo A:



$\cos \propto = 3/5$

$\Sigma F_v = O\ ;\ F_{AE} \cos \propto = 3600$

$F_{AE} = 6000$ lb

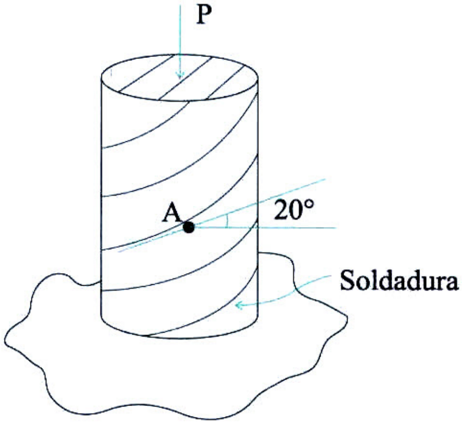
$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow A = \frac{P}{\sigma}\ ;\ A_{AE} = \frac{6000 \text{ lb}}{15000 \text{ lb}/\text{pulg}^2} = 0.4 \text{ pulg}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$A_{DE} = \frac{9600 \text{ lb}}{15000 \text{ lb}/\text{pulg}^2} = 0.64 \text{ pulg}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

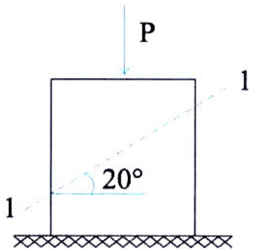
Problema 2

Un tubo de acero de 300 mm de diámetro exterior y de espesor de pared de 8 mm, es sometido a una carga axial P = 250 kN.

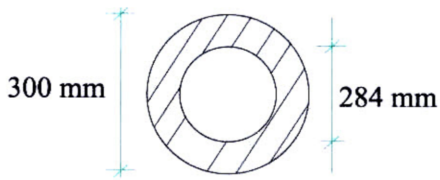
Hallar el esfuerzo normal y tangencial a la soldadura en el punto A.



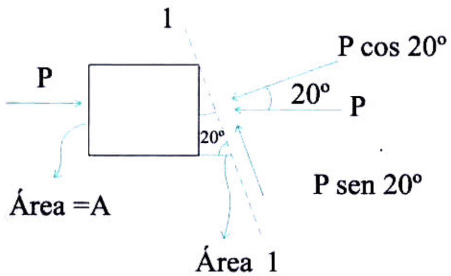
Solución:



Sección transversal



Corte 1-1:



$$A = \frac{\pi}{4}\left[(300)^2 - (284)^2\right] = 7\ 339\ \text{mm}^2$$

$$\text{Área} = \frac{A}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{A}{\cos 20^0}$$

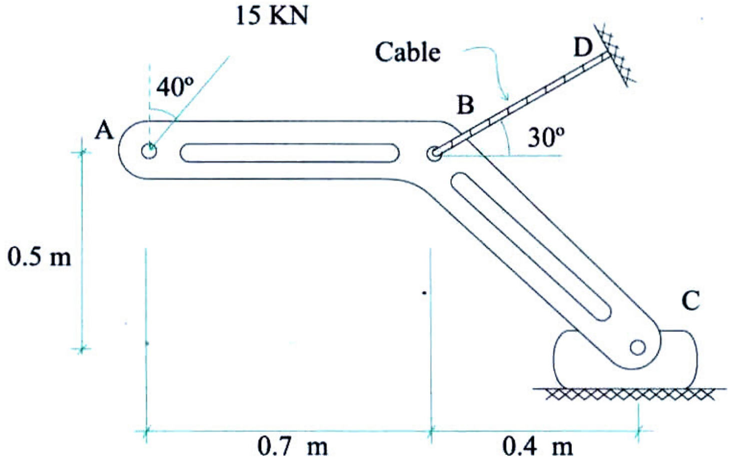
$$\sigma = \frac{P\cos 20^0}{A/\cos 20^0} = \frac{P}{A}\ \cos^2 20^0 = 30{,}1\,\text{MPa (Compresión)}$$ **Rpta.**

$$\sigma = \frac{P\operatorname{sen} 20^0}{A/\cos 20^0} = \frac{P}{A}\ \operatorname{sen} 20^0 \cos 20^0 = 10{,}95\ \text{MPa}$$ **Rpta.**

Problema 3

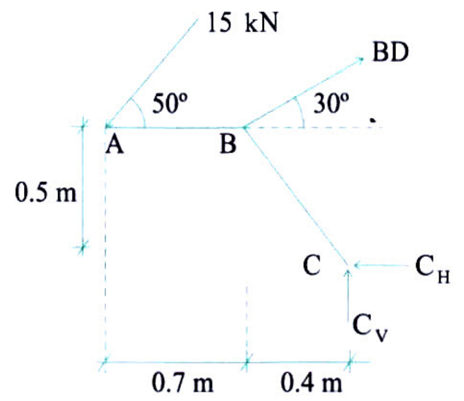
La resistencia a la rotura del cable BD es 100 kN.

- Hallar F.S. con respecto a la falla del cable para la carga dada.
- Si el esfuerzo admisible en el cable es 55 kN/ cm², hallar el área del cable.



Solución :

D.C.L.



$\sum M_C = 0$

$+ 15 \cos 50^\circ (0.5) + 15 \operatorname{sen} 50^\circ (1.1) =$

$BD \cos 30^\circ (0.5) + BD \operatorname{sen} 30^\circ (0.4)$

$0.633\ BD = 17.46$

$BD = 27.58\ kN$

$$F.S._{BD} = \frac{F_{BD}\ \text{Rotura}}{F_{BD}\ \text{Actuante}} = \frac{100}{27.58}$$

$F.S._{BD} = 3.63$ $\qquad$ $F.S._{BD} = 3.63$ **Rpta.**

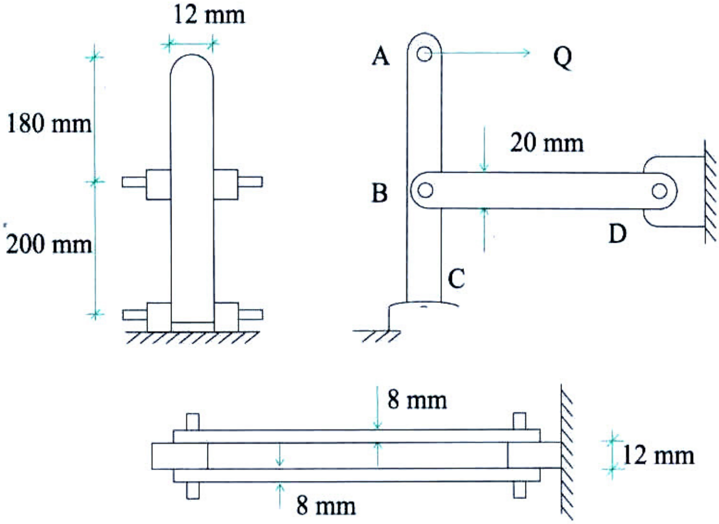
$$\sigma = \frac{F_{BD}}{A} = 55\frac{kN}{cm^2} = \frac{27.58\,kN}{A}$$

$$A = \frac{27.58 cm^2}{55} = 0.5\ cm^2$$ **Rpta.**

Problema 4

Se emplea un pasador en C de 10 mm y en B y D de 12 mm de diámetro. El esfuerzo cortante final es de 100 MPa en todas las conexiones, y el esfuerzo normal final de las barras articuladas BD es de 250 MPa.

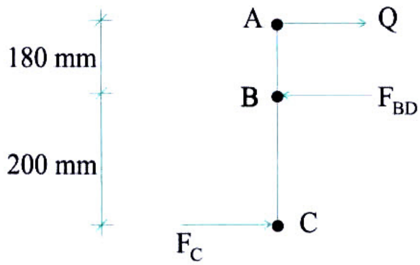
Hallar la carga Q para la cual el factor de seguridad es 3.0



Solución:

Conexiones : En B y D corte doble
En C corte doble

Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum M_C = 0, Q(380) = F_{BD} \ (200)$$

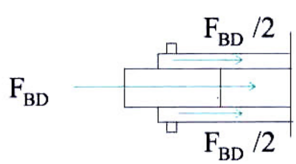
$$F_{BD} = 1.9\ Q$$

$$\sum F_H = 0, F_C = 0.9\ Q$$

$$\tau_B = \tau_D = \frac{100\ \text{MPa}}{3.0} = \frac{1.9\ Q/2}{\pi\dfrac{(12)^2}{4}\text{mm}^2} \times \frac{10^6\ \text{mm}^2}{1\ \text{m}^2} \times \frac{1\ \text{MPa}}{10^6\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}} \rightarrow Q = 3968\ \text{N}$$

$$\tau_C = \frac{100\ \text{MPa}}{3.0} = \frac{0.9\ Q/2}{\dfrac{\pi}{4}(10)^2\text{mm}^2} \times \frac{10^6\ \text{mm}^2}{1\text{m}^2} \times \frac{1\ \text{MPa}}{10^6\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}} \rightarrow Q = 5817\ \text{N}$$

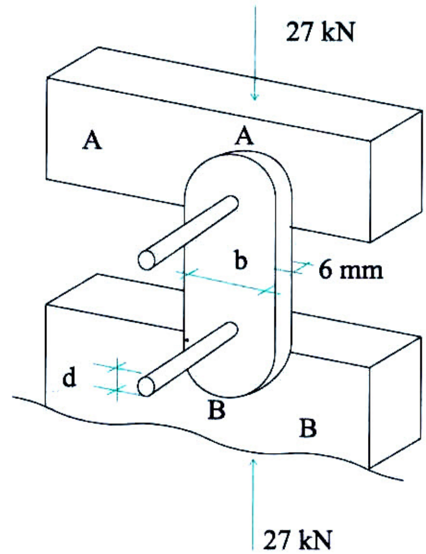
$$\sigma_{BD} = \frac{250\ \text{MPa}}{3.0} = \frac{1.9\,Q/2}{8 \times 20\text{mm}^2} \times \frac{10^6\ \text{mm}^2}{1\text{m}^2} \times \frac{1\ \text{MPa}}{10^6\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$



$Q = 14035\text{N}$

$\therefore Q = 3968$ **Rpta.**

Problema 5



Si la fuerza en la barra AB es 27 kN, hallar:

A) "d" del pasador si $\tau = 100$ MPa

B) "b" si $\sigma_{normal} = 120$ MPa

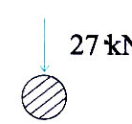
C) Esfuerzo de apoyo en la barra AB

Solución:

$$\tau = P/A$$

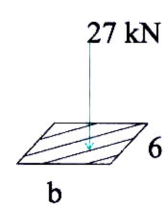
$$\text{A) } 100\text{ MPa}\ \frac{10^6 N/m^2}{1\text{ MPa}} \times \frac{1m^2}{10^6 mm^2} = \frac{27\text{ KN}}{\frac{\pi d^2}{4}} \times \frac{10^3 N}{1\text{ KN}}$$

$$d^2 = \frac{270}{\pi/4} \rightarrow d = 18.54\text{ mm}$$



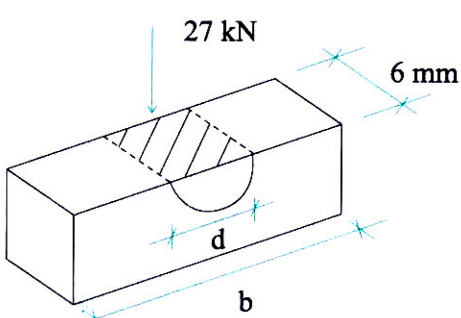
$A = \pi d^2/4$

$$\text{B) } \sigma = P/A\ ;\ \frac{120\text{ Mpa}}{1\text{ MPa}} \times \frac{10^6\ N/m^2}{} \times \frac{1m^2}{10^6 mm^2} = \frac{27\text{ KN}}{b \times 6} \times \frac{10^3 N}{1\text{KN}}$$



$b = 37.5$ mm **Rpta.**

C)



$$\sigma\text{ apoyo} = \frac{27\text{ KN}}{d \times 6} = \frac{27\text{ Kn}}{18.54 \times 6\text{ mm}^2}$$

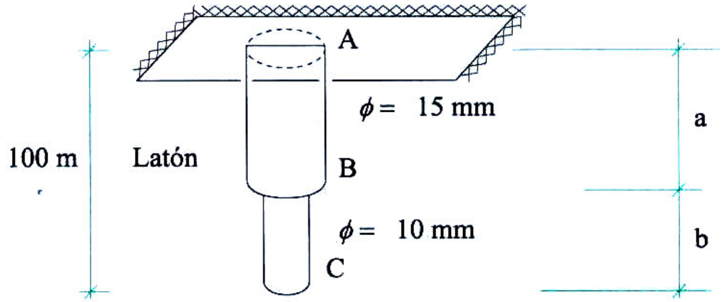
$\sigma\text{ apoyo}_{AB} = 243$ MPa **Rpta.**

Problema 6

Hallar la longitud AB, para la cual el esfuerzo normal máximo es mínimo.

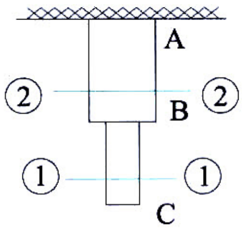
Luego, hallar el valor del esfuerzo normal máximo.

γ latón: 8500 kg/ m³



Solución:

$a + b = 100$ m --- (α)



Corte 1:

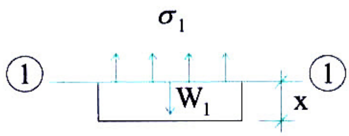
$\sum F_V = 0$

$\sigma_1 A_1 = W_1 = \gamma X A_1$

$\sigma_1 = \gamma X$

σ_1 es máximo para X =b

$\sigma_1 = \gamma b$ --- (1)



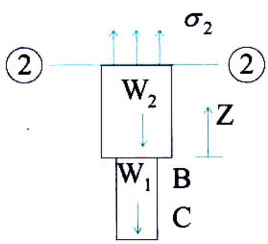
Corte 2:

$\sum F_v = 0$

$\sigma_2 A_2 = W_1 + W_2$

$\sigma_2 A_2 = \gamma A_1 b + \gamma Z A_2$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma\, A_1\, b}{A_2} + \gamma\, Z \rightarrow Z = 0 \rightarrow \sigma_B = \frac{\gamma\, A_1\, b}{A_2}$$



σ_2 es máximo para Z = a

$$\sigma_2 = \frac{\gamma\, A_1\, b}{A_2} + \gamma a$$

$\sigma_2 = 0.444\, \gamma b + \gamma a$ --- (2)

Para que el esfuerzo máximo sea el mínimo

$\sigma_2 = \sigma_1$, (1) = (2)

$a = 0.556\ b$ --- (β)

De (α) y (β) : $a = 35.74$ m

$b = 64.26$ m en (1):

σ máx = 5.35 MPa

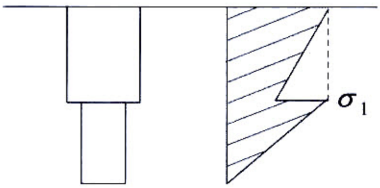
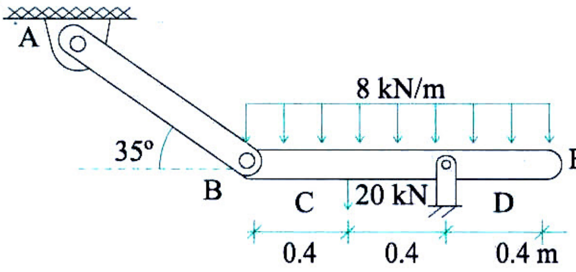


Diagrama de esfuerzos normales

Problema 7

El esfuerzo normal último que soporta la barra AB es 450 MPa, si se utiliza un factor de seguridad de 3.5. Determinar el área que debe darse a la barra AB.



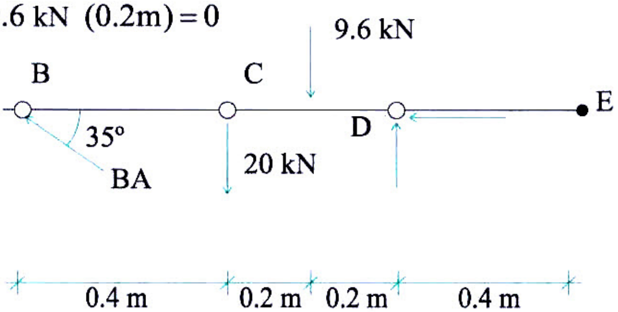
Solución:

Diagrama de cuerpo libre (D.C.L) de la barra BE.

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{BA}\ \text{sen}35°\ (0.8) - 20\ \text{kN}\ (0.4\text{m}) - 9.6\ \text{kN}\ (0.2\text{m}) = 0$$

$$F_{BA}\ \frac{12.4\ \text{kN}}{\text{sen}\ 35°} \quad --- \ (1)$$



$$\sigma_{adm.} = \frac{450\ \text{MPa}}{3.5} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{12.4\ \text{kN}}{A_{BA}\,\text{sen}35°}$$

$$A_{BA} = \frac{12.4\ \text{kN}\,(3.5)}{450\ \text{MPa}\ (\text{sen}\ 35°)} \times 10$$

↑ Factor de conversión

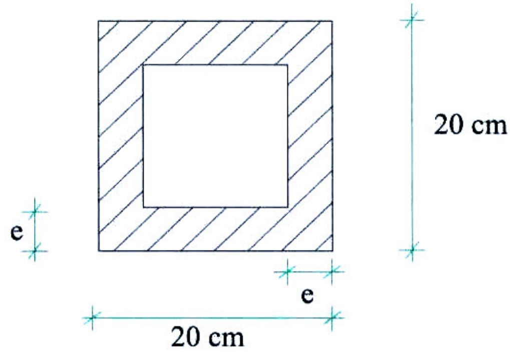
$A_{BA} = 1.68\ \text{cm}^2$ **Rpta.**

Factor de conversión: $\dfrac{1\ \text{kN}}{1\ \text{Mpa}} \times \dfrac{1\ \text{Mpa}}{10^3\ \text{kN}/\text{m}^2} \times \dfrac{104\ \text{cm}^2}{1\ \text{m}^2} = 10\ \text{cm}^2$

Problema 8

Una columna corta debe soportar una carga de 80 000 kg. El esfuerzo de rotura es de 2 500 kg/cm². Usar un factor de seguridad de 5 y encontrar el espesor de 'e' que debe darse a la columna.

Sección transversal de la columna:



Solución:

$P = 80\ 000 --- (1)$

$\sigma_r = 2\ 500 \,{}^{kg}\!/_{cm^2}$

$F.S. = 5$

$e = ?$

$$\sigma = \frac{\sigma_r}{F.S.} = \frac{2\ 500}{5} = 500 \text{ kg / cm}^2 --- (2)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma} \qquad --- (3)$$

$$A = (20)^2 - (20-2e)^2 = 400 - (400 + 4e^2 - 80e)$$

$$A = 80e - 4e^2 --- (4)$$

(1),(2) y (4) en (3):

$$80e - 4e^2 = \frac{80\ 000}{500} = 160$$

$$20e - e^2 = 40$$

$$e^2 - 20e + 40 = 0$$

$$e = 20 \pm \frac{\sqrt{(20)^2 - 4(40)}}{2} = \frac{20 \pm 15.49}{2}$$

$e = 17.74$ cm Se descarta por ser absurdo

$e = 2.255$ cm **Rpta.**

Problema 9

Hallar el máximo valor de P (admisible)

$\sigma = 1600 \ ^{kg}/_{cm^2}$

$\sigma_{ap} = 3\ 200 ^{kg}/_{cm^2}$

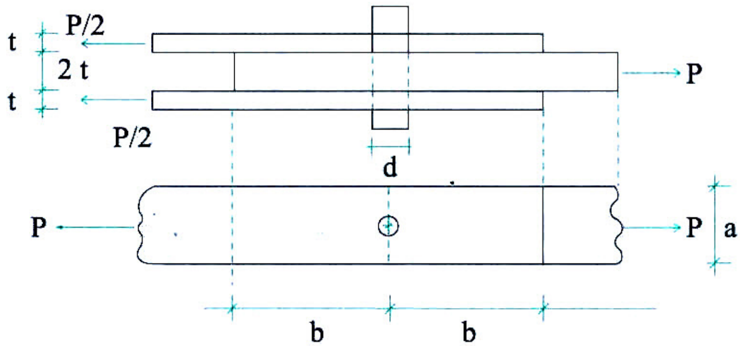
$\tau = 1\ 200 \ ^{kg}/_{cm^2}$

$a = 4.6$ cm

$b = 2.5$ cm

$d = 1.6$ cm

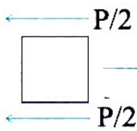
$t = 0.5$ cm



Solución:

Corte en el perno:

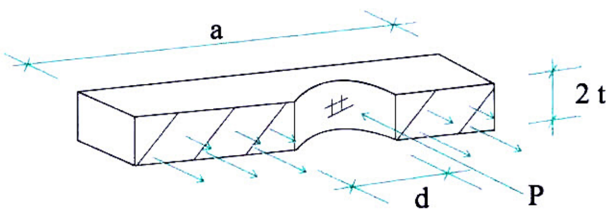
$$\tau = 1\ 200 = \frac{P}{2\pi\frac{d^2}{4}}$$



$P = 4\ 825$ kg

Aplastamiento :

$$\sigma = 3\ 200 = \frac{P}{2td}$$



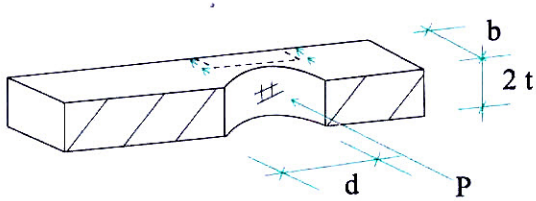
$P = 5\ 120$ kg

Esfuerzo normal:

$$\sigma = 1\ 600 = \frac{P}{2ta - 2td}$$

$P = 4\ 800$ kg

Corte:



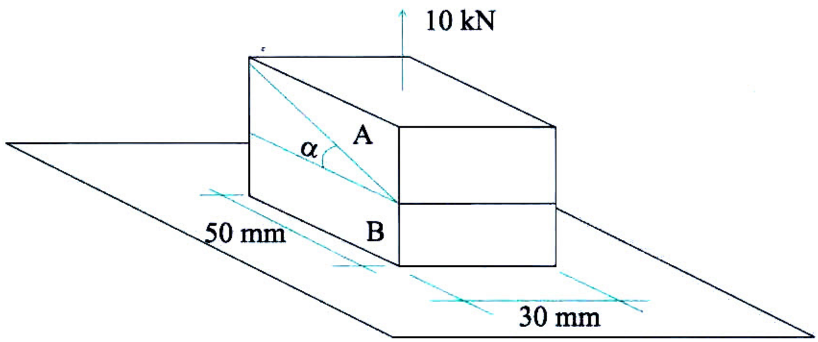
$$\tau = \frac{P}{2\ (b - \frac{d}{2})\ 2t} = 1200$$

$P = 4\ 080$ kg

$P = 4\ 080$ kg **Rpta.**

Problema 10

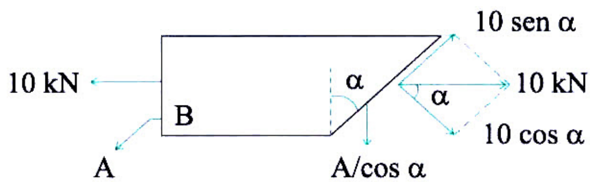
Las 2 porciones del elemento **AB** están pegadas a lo largo de un plano que forma un ángulo a con la horizontal. Si los esfuerzos finales en la junta son σ_u= 17 MPa y τ_u= 9 MPa, hallar el intervalo de valores de α entre los cuales el factor de seguridad es por lo menos igual a 3.0



Solución:

$$A = 50(30)\text{mm}^2 \times \frac{1\text{m}^2}{10^6\text{mm}^2} = 1.5\times10^{-3}\text{m}^2$$

$$\sigma_v = 17\times10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \;;\; \tau_V = 9\times10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$



$$\sigma_a = \frac{\sigma_u}{3} = 5.667\times10^6\ \text{N/m}^2 = \frac{10^4\cos^2\alpha}{1.5\times10^{-3}\text{m}^2} ---(1)$$

$$\tau_a = \frac{\tau_u}{3} = 3\times10^6\ \text{N/m}^2 = \frac{10^4 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1.5\times10^{-3}\text{m}^2} ---(2)$$

De (1): $\cos^2\alpha \le 0.8500 \rightarrow \alpha = 22.78^\circ$ o más

De (2): $\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha = 0.45$

$$\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = 0.45$$

Elevando al cuadrado: $\operatorname{sen}^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha) = 0.2025$

Se resuelve como ecuación de segundo grado y se obtiene:

$$\text{sen}^2\alpha = 0.7179 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0.8472$$

$$\alpha = 57.9^\circ$$

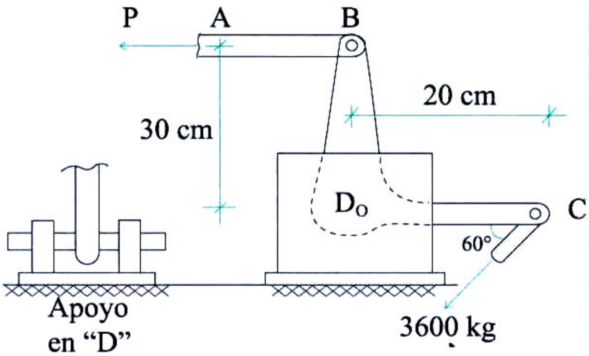
$$\text{sen}^2\alpha = 0.2821 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0.5311$$

$$\alpha = 32.07^\circ$$

$$\therefore\ 32.07^\circ \geq \alpha \geq 22.78^\circ$$

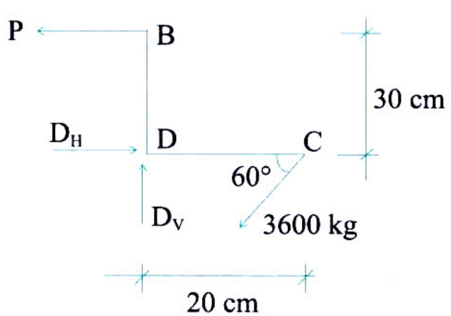
Problema 11

La palanca acodada mostrada en la figura está en equilibrio. Si el diámetro del pasador en "D" es de 2.5 cm, determinar el diámetro de la barra AB, si el esfuerzo normal en AB es los 4/3 del esfuerzo de corte en "D".



Solución:

D.C.L.



$$\sum M_D = 0$$

$$P(30) = (3600 \text{ sen } 60^\circ)20$$

$$P = 2078.46 \text{ kg}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$D_V = 3600 \text{ sen } 60^\circ = 3118 \text{ kg}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow D_H = 3600 \cos 60^\circ = 3878.46 \text{ kg}$$

Fuerza total en 'D': $D = \sqrt{Dv^2 + D_H^2} = 4976.4$ kg

En el apoyo 'D' se presenta corte doble:

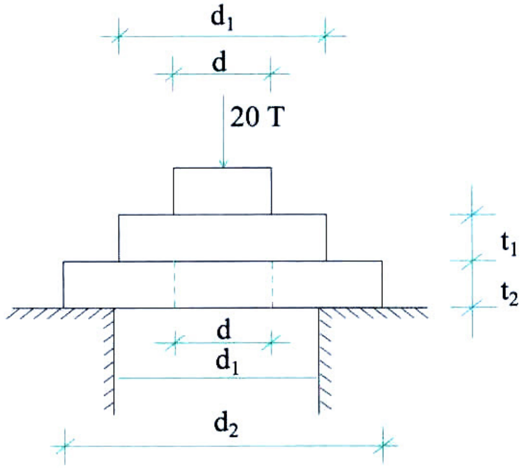
$$\tau_D = \frac{4976.4/2}{\frac{\pi}{4}(2.5)^2} = 506.89 \text{ kg/cm}^2$$

Por condición del problema: $\sigma_{AB} = \frac{4}{3}\tau_D = 675.85 \ ^{kg}\!/_{cm^2}$

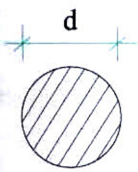
$$\sigma_{AB} = \frac{P}{\pi d^2/4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4P}{\pi\sigma_{AB}}} = 1.98 \text{ cm} \quad \textbf{Rpta.}$$

Problema 12

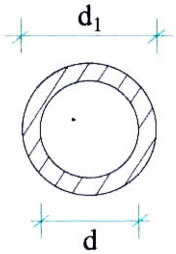
Se tiene 3 bloques circulares que resisten un esfuerzo de aplastamiento de σ = 1600 kg/cm² (igual que el apoyo inferior), y un esfuerzo de corte de τ = 800 kg/cm². Hallar las dimensiones mínimas: d, d_1, d_2, t_1, t_2 cuando se somete a los bloques a una carga axial de 20 T.



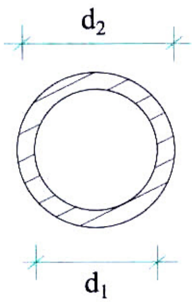
Solución:



$$1.6 \ ^{T}\!/_{cm^2} = \frac{20T}{\pi d^2/4} \rightarrow d = 4 \text{ cm} \quad \textbf{Rpta.}$$

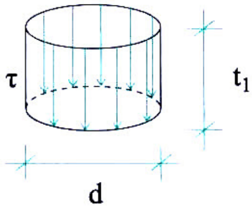


$$1.6 \ ^{T}\!/_{cm^2} = \frac{20T}{\frac{\pi}{4}\left[d_1^2 - (4)^2\right]} \rightarrow d_1 = 5.6 \text{ cm} \quad \textbf{Rpta.}$$



$$1.6 \ ^{T}\!/_{cm^2} = \frac{20T}{\frac{\pi}{4}\left[d_2 - (5.6)^2\right]} \rightarrow d_2 = 6.9 \text{ cm} \quad \textbf{Rpta.}$$

Esfuerzos de corte:
En el bloque intermedio

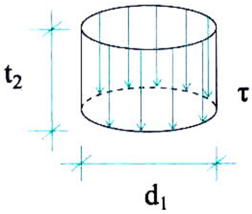


$$\text{Área} = \left(2\pi\frac{d}{2}\right)t_1$$

$$0.8\,{}^{T}\!/_{cm^2} = \frac{20\ T}{2\pi\frac{d}{2}t_1}$$

$t_1 = 2$ cm **Rpta.**

En el bloque inferior



$$\text{Área} = \left(2\pi\frac{d_1}{2}\right)t_2$$

$$0.8\,T/cm^2 = \frac{20\ T}{2\pi\frac{d_1}{2}t_2} \rightarrow t_2 = 1.4\ \text{cm}$$ **Rpta.**

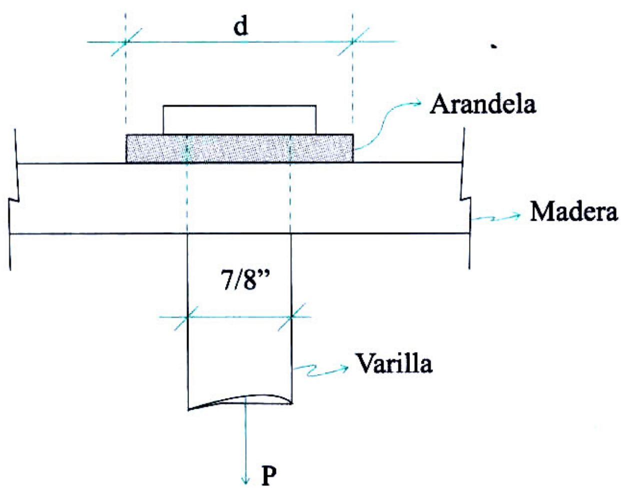
Problema 13

La arandela tiene un diámetro interior de 1". Calcular su diámetro exterior "d" si el esfuerzo de apoyo promedio entre la arandela y la madera no debe exceder de

$750\ {}^{lb}\!/_{pulg^2}$

La varilla está sometida a un esfuerzo normal de:

$5\,000\ {}^{lb}\!/_{pulg^2}$



Solución:

Varilla $\sigma = {}^{P}\!/_{A} \rightarrow P = \sigma A = 5\times10^3 \times \frac{\pi}{4}\left({}^{7}\!/_{8}\right)^2$

$P = 3006.6$ lb

$$A_{Arandela} = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - 1^2\right]$$

$$750 = \frac{3006.6}{\frac{\pi}{4}\left(d^2 - 1\right)}$$

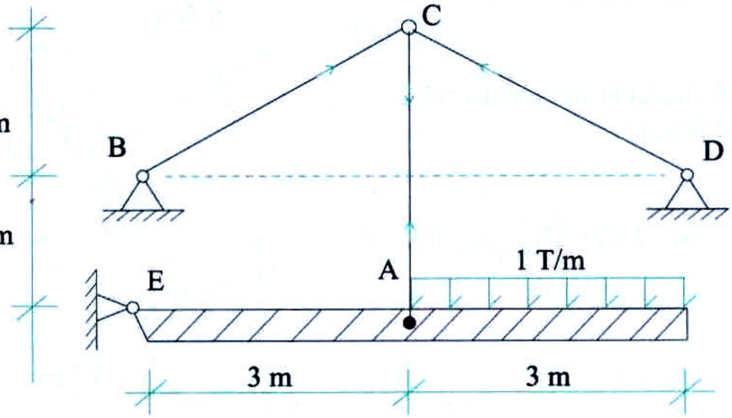
$$d^2 - 1 = 5.104$$

$d = 2.47$ pulg **Rpta.**

Problema 14

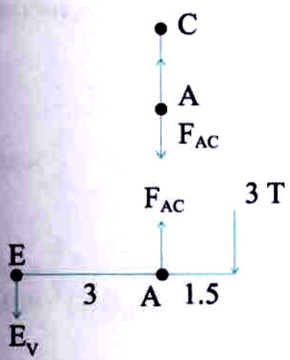
Calcular las áreas de las secciones transversales de los elementos elásticos del sistema mostrado.

$\sigma = 2000\ \text{kg/cm}^2$
(Esfuerzo admisible)



Solución:

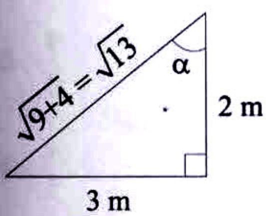
D.C.L.



$$\sum M_E = 0$$

$$3(4.5) = F_{AC}(3)$$

$$F_{AC} = 4.5\ \text{T}$$



$$F_{BC} = F_{CD} = F$$

$$\sum F_v = 0$$

$$2F\cos\alpha = 4.5$$

$$F = \frac{4.5}{2\cos\alpha} = \frac{4.5\sqrt{13}}{2\ (2)} = 4.056\ \text{T}$$

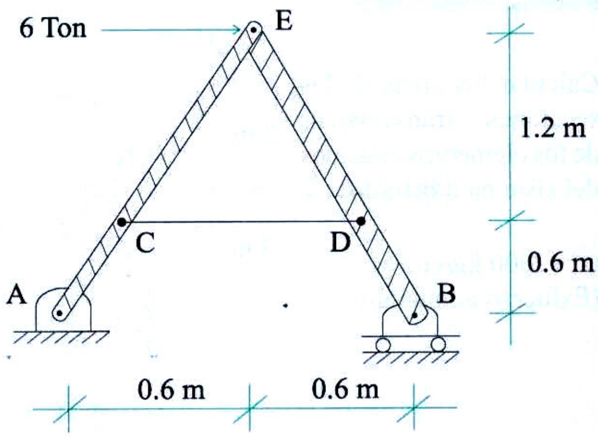
$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A_{BC=CD} = F/\sigma = \frac{4.056\times10^3}{2\times10^3} = 2.028\ \text{cm}^2 \quad \textbf{Rpta.}$$

$$A_{AC} = \frac{4.5\times10^3}{2\times10^3} = 2.25\ \text{cm}^2 \quad \textbf{Rpta.}$$

Problema 15

Calcular la sección del cable CD (cm^2)

$\sigma_{u=}$ 2 500 $^{kg}/_{cm^2}$; F.S.=2



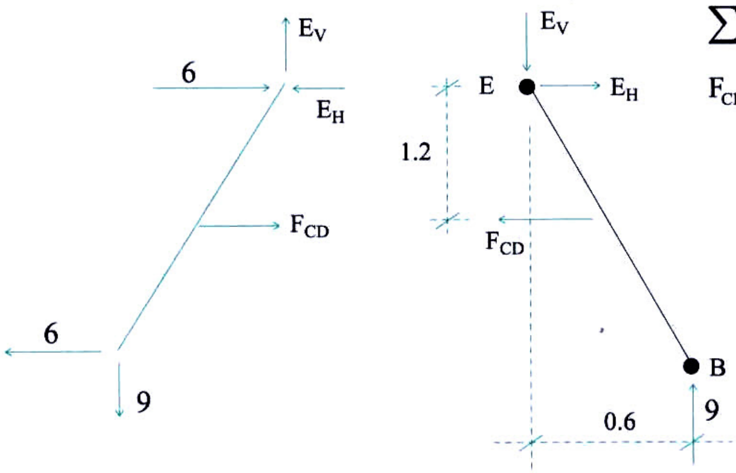
Solución:

$$\sum M_A = 0 \;\; 6(1.8m) - B(1.2) \rightarrow \uparrow B = 9T$$

$$\sum F_v = 0 \uparrow B - \downarrow A_v = 0 \rightarrow \downarrow A_v = 9T$$

$$\sum F_H = 0 \leftarrow A_H = 6T$$

D.C.L.



BE

$$\sum M_E = 0 = F_{CD}(1.2) - 9(0.6m)$$

$F_{CD} = 4.5^{ton}$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_v}{F.S.} = \frac{2500}{2} = 1250 \; \frac{kg}{cm2} = \frac{4\,500 \text{ kg}}{A_{CD}}$$

$A_{CD} = 3.6 \text{ cm}^2$ Rpta.

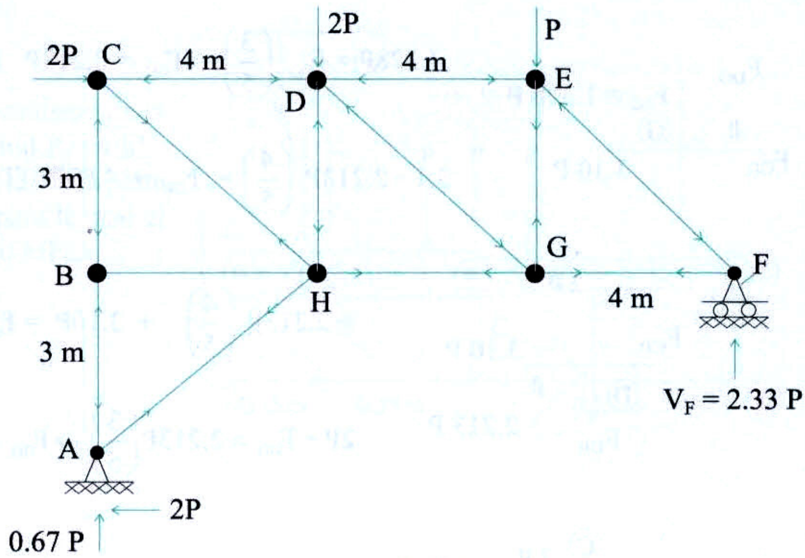
Problema 16

$\sigma_t \leq 200 \ \mathrm{kg/cm^2}$

$\sigma_c \leq 100 \ \mathrm{kg/cm^2}$

$A_{varillas} = 5\mathrm{cm}^2$

$P_{máximo} = ?$ (En kg)

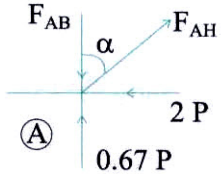


Solución:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow \quad V_F(12) - P(8) - 2P(4) - 2P(6) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow V_F = 2.33P$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$$

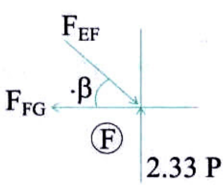


$$F_{AH}\left(\frac{4}{5}\right) = 2P \rightarrow F_{AH} = 2.5P \quad (T)$$

$$0.67P + 2.5P\left(\frac{3}{5}\right) = F_{AB} = 2.17P = F_{BC} \qquad (C)$$

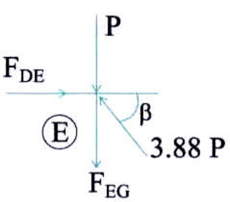
$$\cos\beta = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$$



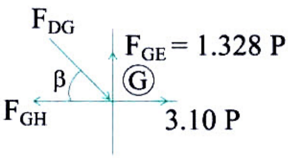
$$F_{EF}\frac{3}{5} = 2.33P \rightarrow F_{EF} = 3.88P \quad (C)$$

$$3.88\left(\frac{4}{5}\right) = F_{FG} = 3.10P \quad (T)$$



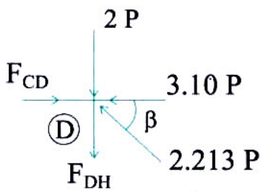
$$3.88P\left(\frac{4}{5}\right) = F_{DE} = 3.10P \quad (C)$$

$$3.88\left(\frac{3}{5}\right)P - P = F_{EG} = 1.328P \quad (T)$$



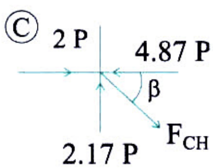
$$1.328P = F_{DG}\left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow F_{DG} = 2.213P \quad (C)$$

$$3.1 + 2.213P\left(\frac{4}{5}\right) = F_{GH} = 4.87P \quad (T)$$



$$+\,2.213P\left(\frac{4}{5}\right) + 3.10P = F_{CD} = 4.87P \quad (C)$$

$$2P + F_{DH} = 2.213P\left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow F_{DH} = -0.672P \quad (C)$$



$$F_{CH} = \left(\frac{3}{5}\right) = 2.17P \rightarrow F_{CH} = 3.616P \quad (T)$$

BARRA	FUERZA	TIPO
AH	2.s P	TENSIÓN
AB	2.17 P	COMPRESIÓN
BC	2.17 P	C
EF	3.88 P	C
FG	3.10 P	T
DE	3.10 P	C
EG	1.328 P	T
DG	2.213 P	C
GH	4.87 P	T
CD	4.87 P	C
DH	0.672 P	C
CH	3.616 P	T
BH	0	

$$\sigma_t = 200 = \frac{4.87P}{5}$$

$$P = 205.3 \text{ kg}$$

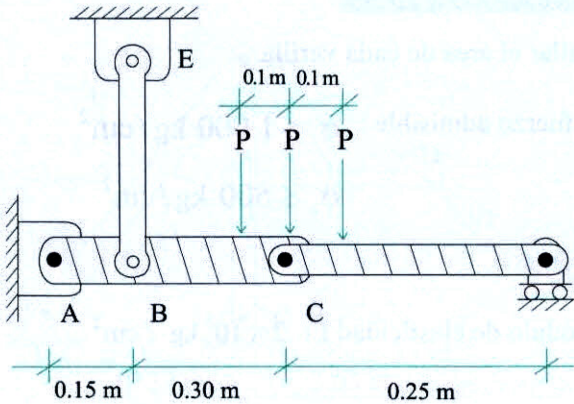
$$\sigma_C = 100 = \frac{4.87P}{5}$$

$$P = 102.6 \text{ kg}$$

$$\therefore P_{máximo} = 102.6 \text{ kg}$$ **Rpta.**

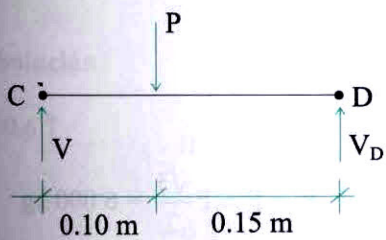
Problema 17

Se aplican 3 fuerzas al mecanismo de la figura, cada una de magnitud P = 4 kN. Determinar el área transversal de la parte uniforme de la barra BE, para la çual el esfuerzo normal es de +100 MPa.



Solución:

D.C.L.

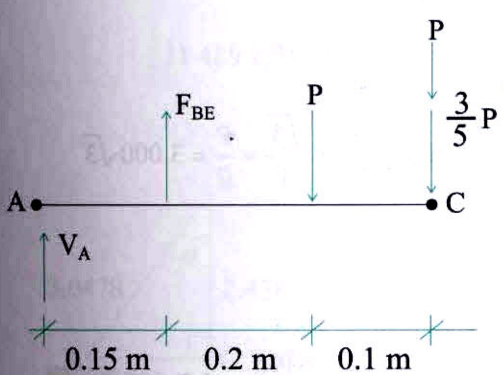


$$\sum M_D = 0$$

$$V(0.25) - P(0.15) = 0$$

$$\uparrow V = \frac{3}{5}P$$

D.C.L.



$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{8}{5}P(0.45) + P(0.35) - F_{BE}(0.15) = 0$$

$$F_{BE} = 7.13P = 28.5 \text{ kN}$$

$$A_{BE} = \frac{F_{BE}}{\sigma_{BE}} = \frac{28.5 \text{ kN}}{100\cancel{\text{MPa}}} \cdot \frac{10^6 \text{mm}^2 / 1\cancel{\text{m}}^2}{\dfrac{10^3 \text{ kN m}^2}{1\cancel{\text{MPa}}}}$$

$$A_{BE} = 285 \text{ mm}^2 \ \boxed{\text{Rpta.}}$$

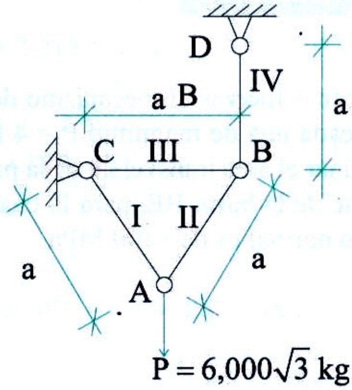
Problema 18

Hallar el área de cada varilla.

Esfuerzo admisible : $\sigma_t \leq 1\,000\ \text{kg/cm}^2$

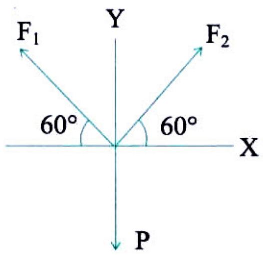
$\sigma_c \leq 500\ \text{kg/cm}^2$

Módulo de elasticidad E: $2 \times 10^5\ \text{kg}\ /\ \text{cm}^2$



Solución:

Nudo: (A)



$$\sum F_X = 0$$

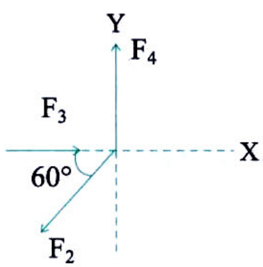
$$F_1 = F_2$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$2F_1 \ \text{sen}\,60^\circ = P$$

$$F_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = P \quad \Big| \quad F_2 = F_1 = P\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\,000\ \text{kg}$$

Nudo: (B)



$$\sum F_x = 0$$

$$F_3 = F_2 \ \cos 60^\circ$$

$$F_3 = \frac{P\sqrt{3}}{6} = 3\,000\ \text{kg}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_4 = F_2 \ \text{sen}\ 60^\circ$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ P\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{P}{2} = 3\,000\sqrt{3}$$

$$A_1 = A_2 = \frac{P\sqrt{3}}{3\sigma} = \frac{6\,000}{1\,000} = 6\ \text{cm}^2 \ \textbf{Rpta.}$$

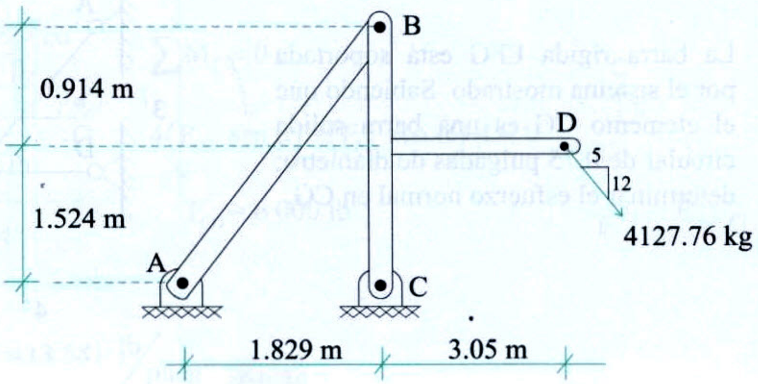
$$A_3 = \frac{P\sqrt{3}}{6\sigma} = \frac{3\,000}{500} = 6\ \text{cm}^2 \ \textbf{Rpta.}$$

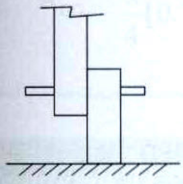
$$A_4 = \frac{P}{2\sigma} = \frac{5196}{1\,000} = 5.2\ \text{cm}^2 \ \textbf{Rpta.}$$

Problema 19

El pasador en C es sometido a un $\tau = 703.1\ kg/cm^2$.
Calcular su sección.

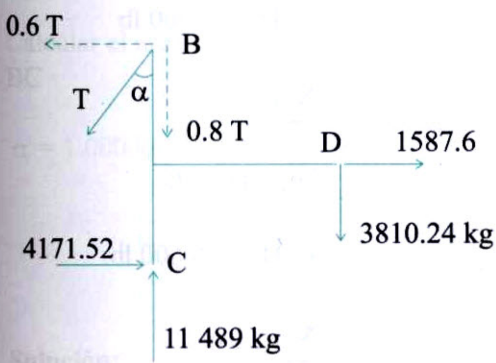
El tirante AB se encuentra sometido a un $\sigma = 1556.82\ kg/cm^2$.
Calcular su sección.





Soporte: C

Solución:

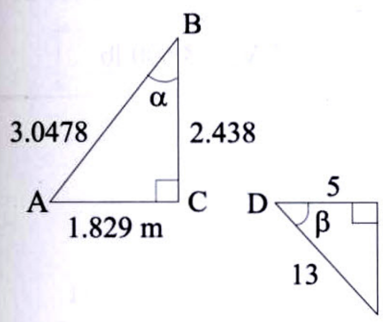


$$\sum M_C = 3\ 810.24(3.05) +$$

$$1\ 587.6\ (1.524) - 0.6T(2.438) = 0$$

$$T = 9\ 598.53\ kg$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow A_{BA} = \frac{P}{\sigma} = 6.17\ cm^2$$ **Rpta.**



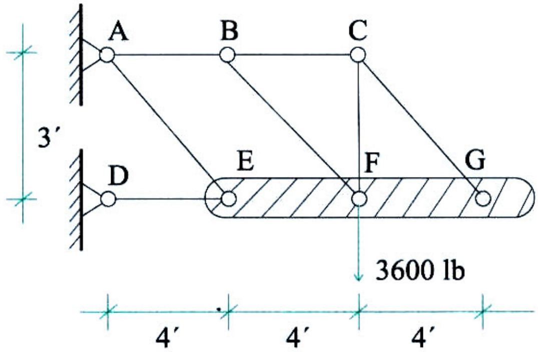
$$C = \sqrt{(4\ 171.52)^2 + (11\ 489)^2}$$

$$C = 12\ 222.87\ kg$$

$$\tau = \frac{P}{A} \rightarrow A_C = \frac{P}{\tau} = 17.38\ cm^2$$ **Rpta.**

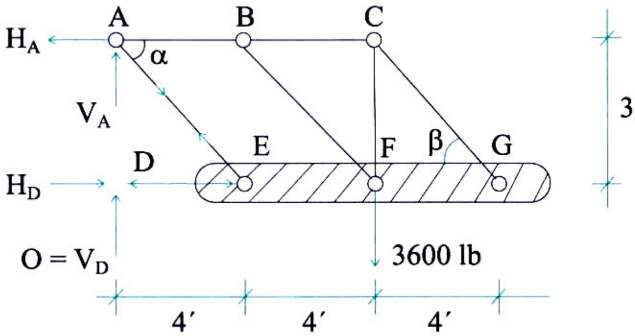
Problema 20

La barra rígida EFG está soportada por el sistema mostrado. Sabiendo que el elemento CG es una barra sólida circular de 0.75 pulgadas de diámetro; determinar el esfuerzo normal en CG.



Solución:

D.C.L.



$$\sum M_A = 0$$

$$H_D(3) - 3600(8) = 0$$

$$\rightarrow H_D = 9\,600 \text{ lb}$$

$$\sum F_H = 0$$

$$H_D - H_A = 0$$

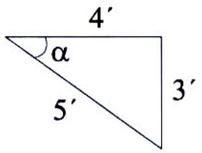
$$\leftarrow H_A = 9\,600 \text{ lb}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$V_A - 3\,600 \text{ lb} = 0$$

$$\uparrow V_A = 3\,600 \text{ lb}$$

Nudo: (A)

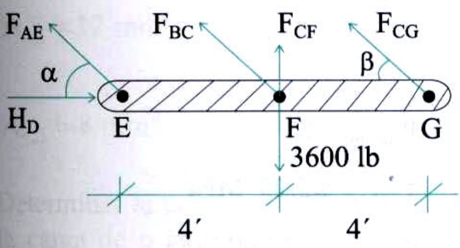


$$\sum F_v = 0$$

$$F_{AE} \ \text{sen}\alpha = 3\,600$$

$$F_{AE} = 6\,000 \text{ lb}$$

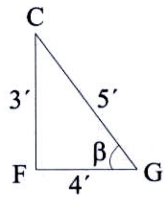
D.C.L. BARRA EG



$$\sum M_F = 0$$

$$4(F_{CG}\ \text{sen}\,\beta)-(F_{AE}\ \text{sen}\,\alpha)\ 4 = 0$$

$$F_{CG} = 6\ 000\ \text{lb}$$

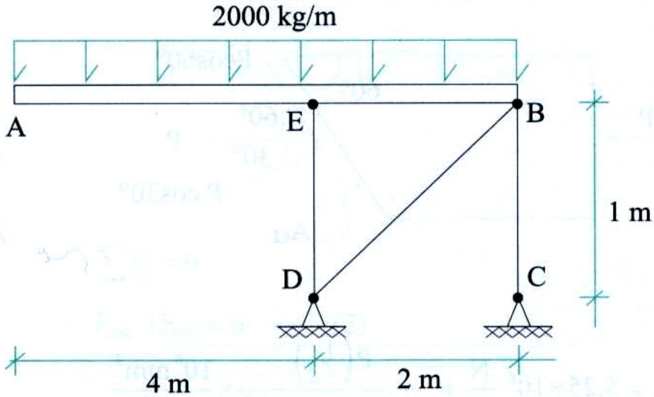


$$\sigma_{CG} = \frac{F_{CG}}{A_{CG}} = \frac{6\ 000\ \text{lb}}{\frac{\pi}{4}(0.75\ \text{pulg})^2} = 13\ 581\ {}^{\text{lb}}\!/_{\text{pulg}^2}$$ **Rpta.**

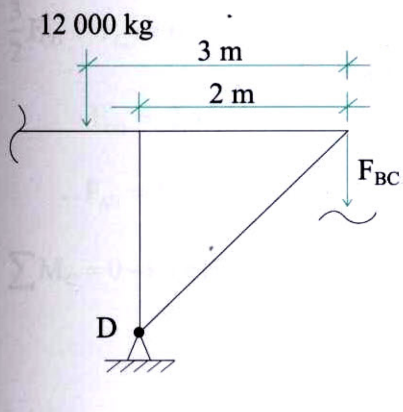
Problema 21

Calcular el área de la varilla BC

$\sigma = 1\ 000\ \text{kg/cm}^2$



Solución:



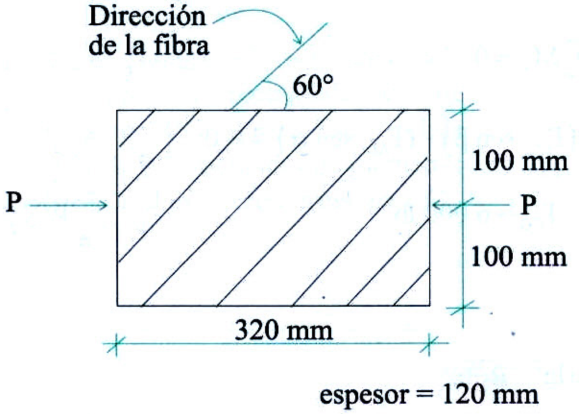
$$\sum M_D = 0$$

$$F_{BC}(2) = 1200\ (1)$$

$$F_{BC} = 6\ 000\ \text{kg}$$

$$A = \frac{F_{BC}}{\sigma} = 6\ \text{cm}^2$$ **Rpta.**

Problema 22



$P_{máximo} = ?$

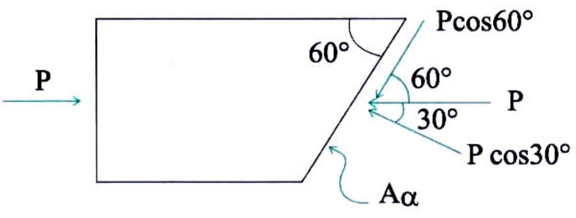
$\tau_{//\,fibra} \leq 5.25$ MPa

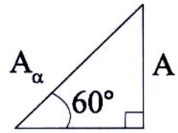
$\sigma_{\perp\,fibra} \leq 13.60$ MPa

$\tau_{máximo} \leq 8.75$ MPa

Solución:

$$\text{Área} = A = 200 \times 120 = 24 \times 10^3 \text{ mm}^2$$





$$A_\alpha \text{ sen } 60° = A$$

$$A_\alpha = 27\,712.81 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{//} = 5.25 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{P\left(\frac{1}{2}\right)}{27\,712.81 \text{ mm}^2} \times \frac{10^6 \text{mm}^2}{1\text{m}^2}$$

$$P = 290\,984.5\text{N} <> 290.98 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\perp} = 13.60 = \frac{P\sqrt{3}}{2 \times 27\,712.81} \rightarrow P = 43\,5199.9 \text{ N} <> 435.19 \text{ kN}$$

$$\tau_{máximo} = 8.75 = \frac{P}{2 \times 2\,4000} \rightarrow P = 420\,000 \text{ N} <> 420 \text{ kN}$$

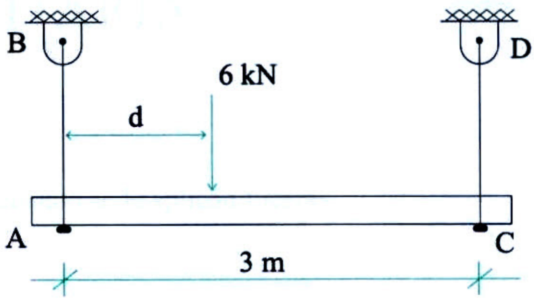
$\therefore$ $P_{máximo} = 290.98$ kN **Rpta.**

Problema 23

$A_{AB} = 12\ mm^2$

$A_{CD} = 8\ mm^2$

Determinar la posición "d" de la carga de 6 kN, para que el esfuerzo normal promedio en ambas barras sea el mismo.

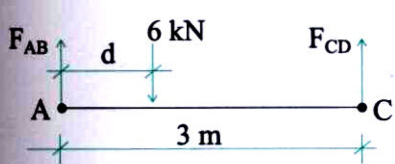


Solución:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{12} = \frac{F_{CD}}{8} = \sigma_{CD}$$

$$F_{AB} = \frac{3}{2}F_{CD} \quad ---(1)$$

D.C.L.



$$\sum F_v = 0$$

$$F_{AB} + F_{CD} = 6 \quad ---(2)$$

(1) en (2):

$$\frac{3}{2}F_{CD} + F_{CD} = 6$$

$$F_{CD} = 2.4\ kN$$

$$\therefore F_{AB} = 3.6\ kN$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow 3.6(3) - 6(3-d) = 0$$

$$10.8 - 18 + 6d = 0$$

$d = 1.2\ m$ **Rpta.**

CAPÍTULO

2 DEFORMACIÓN UNITARIA

2.1 Deformación (δ)

Es el cambio en forma y tamaño de un cuerpo cuando se le aplican fuerzas.

2.2 Desplazamiento

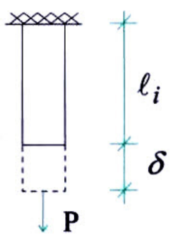
Es una magnitud vectorial que se usa para medir el movimiento de una partícula o punto de una posición a otra.

2.3 Deformación unitaria axial (Normal) (ε)

Es el alargamiento o acortamiento de un segmento de línea por unidad de longitud.

2.4 Deformación unitaria axial promedio (ε)

Se obtiene al dividir la deformación axial δ entre la longitud original de la barra ℓ_i.



$$\varepsilon = \frac{\delta}{\ell_i}$$

$\delta = \Delta\ell \rightarrow$ Variación de longitud

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_i}$$

ε es adimensional. Se expresa como una relación de longitudes: pulg/pulg, mm/mm.

2.5 Variación de longitud ($\Delta\ell$)

$$\boxed{\Delta\ell = \ell_f - \ell_i}$$

ℓ_f = longitud final

ℓ_i = longitud inicial

$$\ell_f = \ell_i + \Delta\ell = \ell_i + \ell_i\,\varepsilon = \ell_i\,(1 + \varepsilon)$$

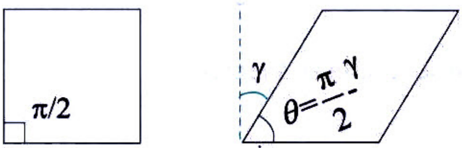
En ingeniería, la mayoría de los diseños presentan aplicaciones para las cuales se permiten deformaciones muy pequeñas.

$$\therefore \varepsilon <<< 1$$

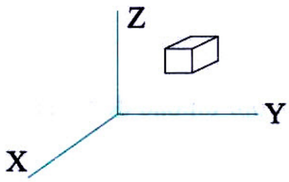
2.6 Deformación angular (Deformación unitaria cortante) (γ)

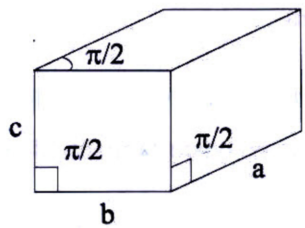
Es el cambio en el ángulo que ocurre entre dos segmentos de línea que originalmente era perpendiculares entre sí.

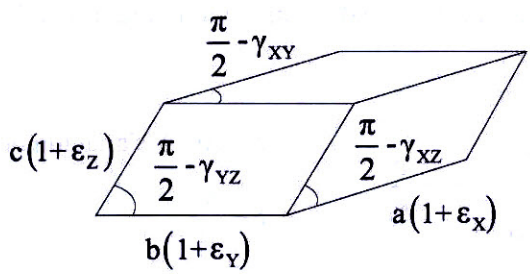
(γ) → Radianes



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$





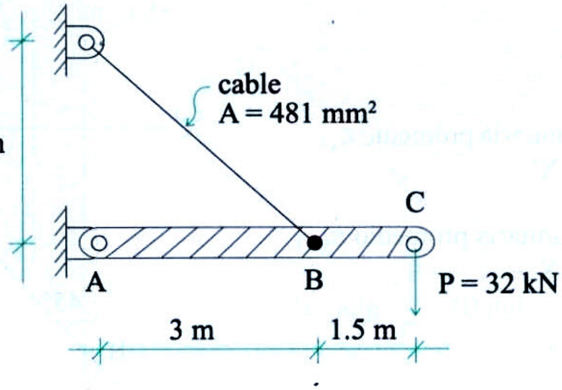


- Las deformaciones unitarias axiales o normales causan un cambio en el volumen de un cuerpo.
- Las deformaciones unitarias cortantes o deformaciones angulares causan un cambio en la forma del cuerpo.

Problema 24

A) Calcular el esfuerzo promedio de tensión en el cable (MPa).

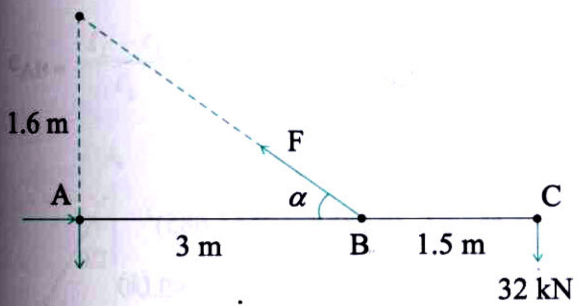
B) Si el cable se reduce en 5.1 mm, calcular la deformación unitaria promedio.



Solución:

a) $\ell = \sqrt{(3)^2 + (1.6)^2} = 3.40\text{m}$

D.C.L.



$$\Sigma M_A = 0 = 32(4.5\text{ m}) - F\left(\frac{1.6}{3.4}\right)3\text{m}$$

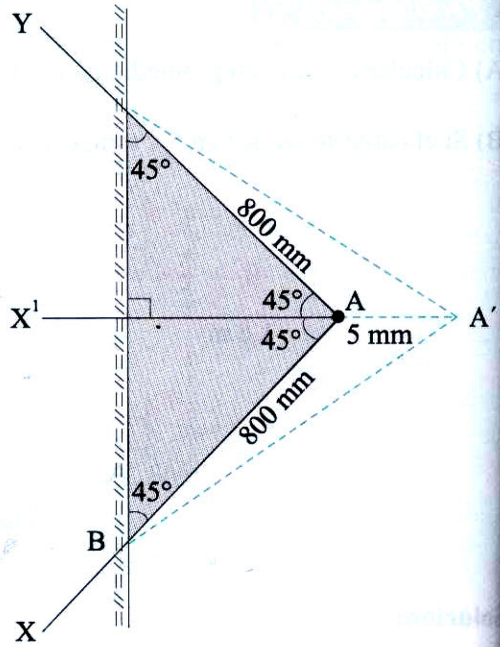
$$F = 102 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{102 \times 10^3}{481} = 212 \text{ MPa} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

b) $\varepsilon = \dfrac{5.1}{3400} = 1.5 \times 10^{-3}$ $\boxed{\text{Rpta.}}$

Problema 25

La placa triangular está empotrada en su base y su vértice A recibe un desplazamiento horizontal de 5 mm.



Determinar:

a) La deformación unitaria promedio ε_{x^1} a lo largo del eje X¹

b) La deformación unitaria promedio ε_x a lo largo del eje X

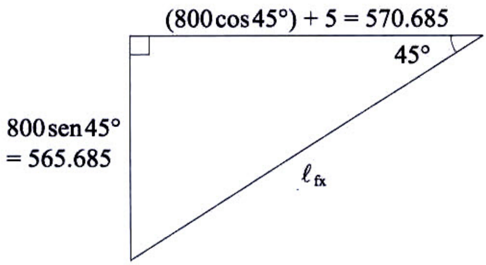
c) γ_{XY}

Solución:

a) $\varepsilon_{x^1} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_i} = \dfrac{5\text{ mm}}{800\cos 45^\circ} = +0.008838\ ^{mm}/_{mm}$ **Rpta.**

b) $\varepsilon_x = \dfrac{\ell_{fx} - \ell_{i_x}}{\ell_{i_x}}$ - - - (1)

$\ell_{i_x} = 800\text{ mm}$ - - - en (1)

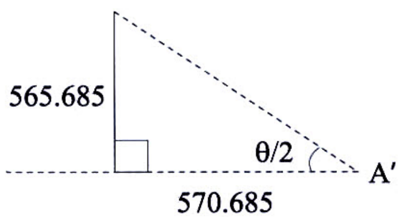


$\ell^2_{fx} = (570.685)^2 + (565.685)^2$

$\ell_{fx} = 803.5427\text{ mm}$ - - - en (1)

$\varepsilon_x = \dfrac{3.5427\text{mm}}{800\text{mm}} = 0.00443\ ^{mm}/_{mm}$ **Rpta.**

c)



$\tan \theta/_2 = 0.991238$

$\theta/_2 = 44.747^\circ$

$\theta = 89.496^\circ <> 1.5619$ radianes

$\gamma_{xy} = \dfrac{\pi}{2} - \theta = 0.00885$ radianes **Rpta.**

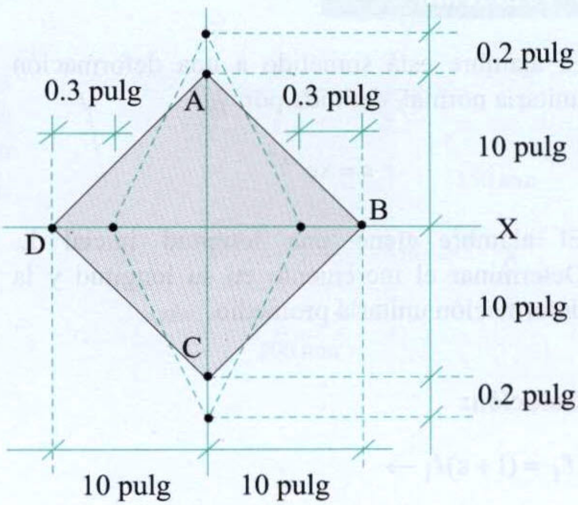
Problema 26

Las esquinas de la placa cuadrada reciben los desplazamientos indicados. Determinar las deformaciones unitarias normales promedio ε_X, ε_Y a lo largo de los ejes X e Y.
Adicionalmente calcular:

$\varepsilon_{AB} = ?$

$\gamma_A = ?$

$\gamma_B = ?$



Solución:

$$\varepsilon_{DB} = \varepsilon_X = \frac{-0.3''}{10''} = -0.03 \text{ pulg./pulg.} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_Y = \frac{+0.2''}{10''} = +0.02 \text{ pulg. /pulg.} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

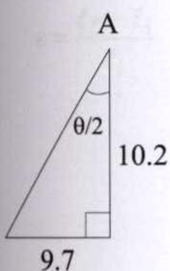
$$\varepsilon_{AB} = \frac{\ell_f - \ell_i}{\ell_i}$$

<u>AB</u>

$$\ell_i = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 14.142135''$$

$$\ell_f = \sqrt{(10.2)^2 + (9.7)^2} = 14.075865''$$

$$\varepsilon_{AB} = -0.004686 \text{ pulg. / pulg.}$$

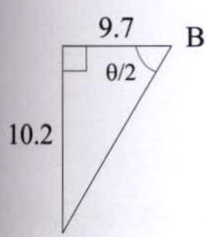


$$\tan \theta/2 = 0.95098$$

$$\theta/2 = 43.56\,° <> 0.760243 \text{ rad}$$

$$\theta = 1.520486 \text{ rad}$$

$$\gamma_A = \frac{\pi}{2} - \theta = 0.050264 \text{ radianes} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$



$$\tan \theta/2 = 1.051546$$

$$\theta/2 = 46.44\,° <> 0.810507 \text{ rad}$$

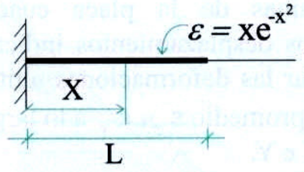
$$\theta = 1.621014 \text{ rad}$$

$$\gamma_B = \frac{\pi}{2} - \theta = -0.050264 \text{ radianes} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 27

El alambre está sometido a una deformación unitaria normal, definida por:

$$\varepsilon = xe^{-x^2}$$

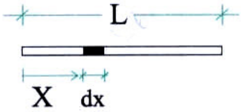


El alambre tiene una longitud inicial L. Determinar el incremento en su longitud y la deformación unitaria promedio.

Solución:

$\ell_f = (1+\varepsilon)\ell_i \rightarrow$

$$dx^1 = (1 + xe^{-x^2})dx$$



$$x^1 = \int_{x=0}^{L} dx + \int_{x=0}^{L} xe^{-x^2} dx = ⓐ + ⓑ$$

ⓐ $\Rightarrow$ Resultado : L

ⓑ $\Rightarrow u = -x^2$

$du = -2xdx$ $\int e^u \, du = e^u$

$$-\frac{1}{2}\int -2x \; e^{-x^2} \; dx = \left[-\frac{1}{2}\; e^{-x^2}\right]_0^L = -\frac{1}{2}e^{-L^2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^1 = L + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-L^2} = \ell_f$$

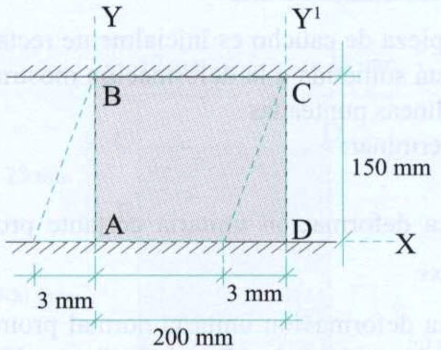
$$L = \ell_i$$

$$\Delta\ell = \ell_f - \ell_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-L^2}$$ **Rpta.**

$$\varepsilon_{x_{prom}} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-L^2}\right)$$ **Rpta.**

Problema 28

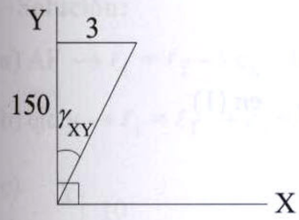
La placa rectangular está sometida a la deformación mostrada por las líneas punteadas. Determinar la deformación unitaria cortante promedio γ_{XY} de la placa.



Además, calcular:

$\varepsilon_{AC} = ?$ $\varepsilon_{AB} = ?$

Solución:



$$\gamma_{xy} = \tan \gamma_{xy} = \frac{3}{150} = 0.02 \text{ radianes} \quad \text{Rpta.}$$

$$\varepsilon_{AB} \rightarrow \ell_i = 150 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \frac{\ell_f - \ell_i}{\ell_i}$$

$$\ell_f = \sqrt{(3)^2 + (150)^2} = 150.029997 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{AB} = 0.000199 \text{ mm / mm} \quad \text{Rpta.}$$

$$\varepsilon_{AC} \rightarrow \ell_i = \sqrt{(150)^2 + (200)^2} = 250 \text{ mm}$$

$$\ell_f = \sqrt{(203)^2 + (150)^2} = 252.406418 \text{ mm}$$

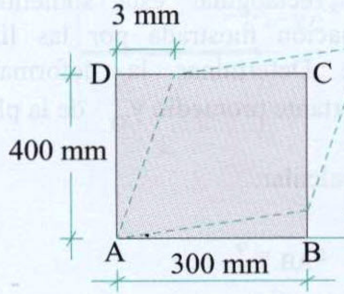
$$\varepsilon_{ac} = 0.009625 \text{ mm/mm} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 29

La pieza de caucho es inicialmente rectangular y está sometida a la deformación mostrada por las líneas punteadas.
Determinar:

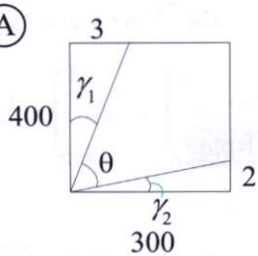
a) La deformación unitaria cortante promedio γ_{XY}

b) La deformación unitaria normal promedio a lo largo del lado AD y de la diagonal DB.



Solución:

Ⓐ



$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad ---(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = \tan\gamma_1 = 3/400 = 0.007500 \\ \gamma_2 = \tan\gamma_2 = 2/300 = 0.006666 \end{array}\right\} \text{ en (1)}$$

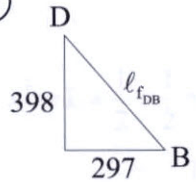
$$\gamma_{xy} = 0.01416 \text{ radianes}$$

$$\varepsilon_{AD} = (\ell_f - \ell_i)/\ell_i, \ell_i = 400 \text{ mm}$$

$$\ell_f = \sqrt{(400)^2 + (3)^2} = 400.011240$$

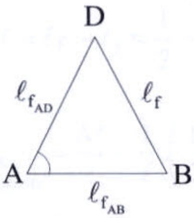
$\varepsilon_{AD} = 0.0000281$ mm/mm **Rpta.**

Ⓑ



$$\varepsilon_{DB} = (\ell_f - \ell_i)/\ell_i \;---(1),\; \ell_i = 500 \text{ mm} \;---\; \text{en (1)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} = 1.55663 \text{ radianes}$$



$$\ell^2_{fAD} = (3)^2 + (400)^2 \rightarrow \ell_{fAD} = 400.0112 \text{ mm}$$

$$\ell^2_{fAB} = (2)^2 + (300)^2 \rightarrow \ell_{fAD} = 300.0066 \text{ mm}$$

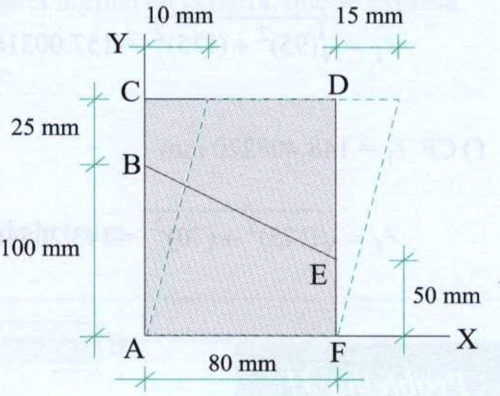
Ley de cosenos : $\ell^2_{fDB} = \ell^2_{fAD} + \ell^2_{fAB} - 2\,\ell_{fAD}\,\ell_{fAB}\cos\theta$

$\ell_{fDB} = 496.60144$ mm $- - -$ en (1) $\varepsilon_{DB} = -0.006797$ mm / mm **Rpta.**

Problema 30

El material se distorsiona y toma la forma indicada por las líneas punteadas.
Determinar:

a) Deformación unitaria normal ε_X a lo largo de X
b) Deformación unitaria normal ε_Y a lo largo de Y
c) Deformación unitaria cortante γ_{XY}
d) Deformación unitaria normal a lo largo de la línea BE
e) ε_{AD}
f) ε_{CF}

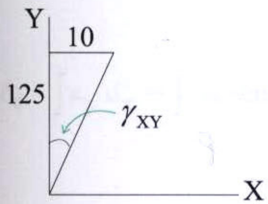


Solución:

a) AF $\rightarrow \ell_i = \ell_f \rightarrow \varepsilon_x = 0$ **Rpta.**

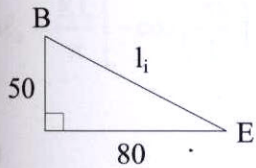
b) eje y $\rightarrow \ell_i = \ell_f \rightarrow \varepsilon_y = 0$ **Rpta.**

c)



$$\gamma_{xy} = \tan\gamma_{xy} = \frac{10}{125} = 0.08 \text{ radianes}$$ **Rpta.**

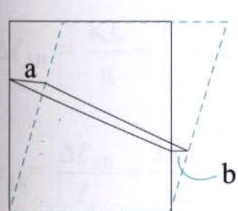
d)

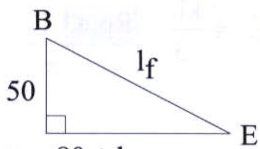


$$\ell^2_i = (50)^2 + (80)^2$$

$$\ell_i = 94.33981 \text{ mm} \quad --- \text{en (1)}$$

$$\varepsilon_{BE} = \frac{\ell_f - \ell_i}{\ell_i} \quad --- \quad (1)$$



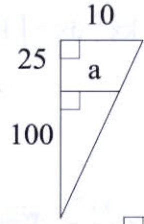


80 + b - a
= 78 mm

$$\ell^2_f = (50)^2 + (78)^2$$

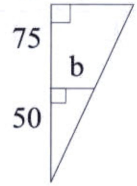
$$\ell_f = 92.64987 \text{ mm} \quad --- \text{en (1)}$$

$$\varepsilon_{BE} = -0.01791 \text{ mm/mm}$$ **Rpta.**



$$\frac{a}{100} = \frac{10}{125}$$

a = 8 mm



$$\frac{b}{50} = \frac{15}{125}$$

b = 6 mm

e) AD $\ell_i = \sqrt{(80)^2 + (125)^2} = 148.408220$ mm

$\ell_f = \sqrt{(95)^2 + (125)^2} = 157.003184$mm

$\varepsilon_{AD} = +\ 0.057914$ mm/mm **Rpta.**

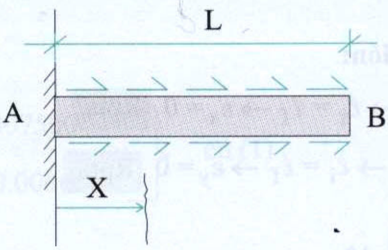
f) CF $\ell_i = 148.408220$ mm

$\ell_f = \sqrt{(125)^2 + (70)^2} = 143.265487$mm

$\varepsilon_{CF} = -\ 0.034652$ mm/mm **Rpta.**

Problema 31

La carga no uniforme genera una deformación unitaria normal en la barra que se expresa como $\varepsilon_x = Kx^2$, donde K es una constante. Determinar:



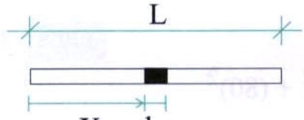
a) El desplazamiento del extremo B

b) La deformación unitaria normal promedio en la barra

Solución:

a)

$\Delta\ell = \varepsilon_x\ \ell_i \rightarrow$



$$\Delta\ell = \int \varepsilon_X\ d_X = \int kx^2\ dx = \left[\ k\frac{x^3}{3}\ \right]_0^L = \frac{kL^3}{3}$$ **Rpta.**

b)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\ell}{\ell_i} = \frac{kL^3/_3}{L} = \frac{kL^2}{3}$$ **Rpta.**

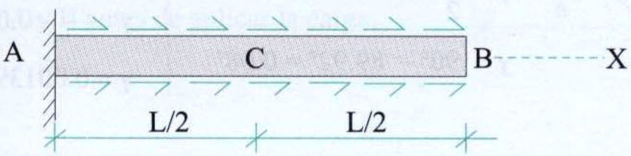
Problema 32

La carga no uniforme genera una deformación unitaria normal en la barra, que se expresa como $\varepsilon_x = K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, donde K es una constante.

Determinar:

a) El desplazamiento del centro C.

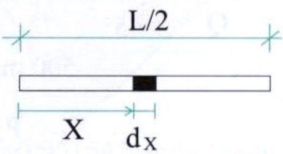
b) La deformación unitaria normal promedio en toda la barra.



Solución:

a)

$\Delta\ell_c = \varepsilon_x \, \ell_i \rightarrow$



$$\Delta\ell_c = \int \varepsilon_x \, d_x = \int K \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} dx = K\frac{L}{\pi}\int\frac{\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} dx \; ; \; \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u$$

$$\Delta\ell_c = \frac{KL}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^{L/2} = \frac{KL}{\pi} \quad \text{Rpta.}$$

b)

$$\Delta\ell_{AB} = \frac{KL}{\pi} = \left[-\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^{L} = \frac{2KL}{\pi}$$

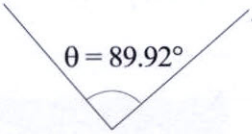
$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta\ell_{AB}}{\ell_i} = \frac{2KL}{\pi L} = \frac{2K}{\pi} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 33

Se encontró que unos ejes mutuamente perpendiculares entre sí, en un miembro libre de esfuerzo, estaban orientados a 89.92° cuando el miembro se sujetó a esfuerzos.

Determinar la deformación angular asociada con estos ejes en el miembro sujeto a esfuerzos.

Solución:



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\gamma = 90^\circ - 89.92^\circ = 0.08^\circ$$

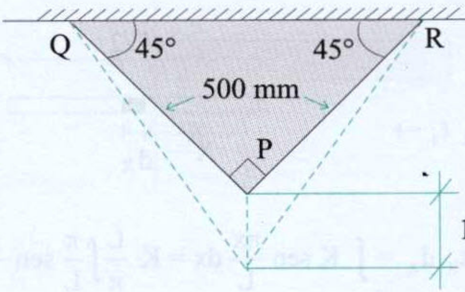
$$2\pi \;---\; 360^\circ$$

$$\gamma \;---\; 0.08^\circ$$

$\gamma = 0.001396$ radianes **Rpta.**

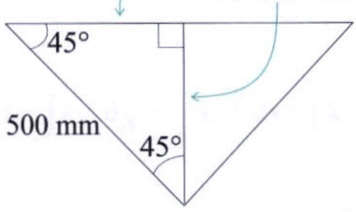
Problema 34

Una placa triangular delgada se deforma uniformemente, tal como se muestra en la figura. Determinar la deformación angular en P.



Solución:

Sin deformación

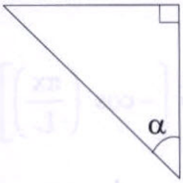


$$\tan \alpha = 0.97249$$

$$\alpha = 44.20^\circ$$

$$2\alpha = 88.40^\circ$$

Con deformación



$$\gamma = 90^\circ - 2\alpha = \gamma = 90^\circ - 88.40^\circ = 1.6^\circ$$

$$2\pi \;---\; 360^\circ$$

$$\gamma \;---\; 1.6^\circ$$

$\gamma = 0.02792$ radianes **Rpta.**

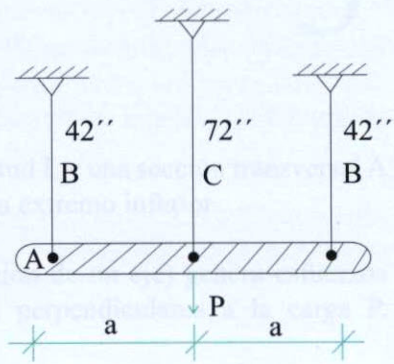
Problema 35

La placa de acero rígida A está sostenida por 3 varillas; después de aplicar la carga P, la deformación unitaria axial en la varilla C es 900 μ pulg/pulg.

Determinar:

a) ε_B

b) ε_B si hay un espacio libre de 0.006 pulg en las conexiones entre A y B antes de aplicar la carga.



Solución:

a) $\delta_C = \varepsilon_C \, \ell i_C$

$$\delta_B = \delta_C = 900 \times 10^{-6} \times 72$$

$$\delta_B = 0.0648" = \delta_C$$

$$\varepsilon_B = \frac{\delta_B}{\ell i_B} = \frac{0.0648"}{42"} = 0.001542 \text{ pulg / pulg}$$

ó 1542 μ pulg / pulg **Rpta.**

b) $0.006" + \delta_B = \delta_C = 0.0648"$

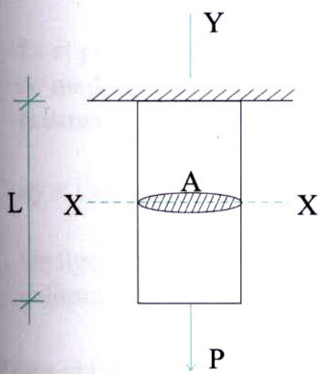
$$= \delta_B = 0.0588"$$

$$\varepsilon_B = \frac{\delta_B}{\ell i_B} = 0.0014 \text{ pulg / pulg}$$ **Rpta.**

CAPÍTULO

3

CARGA AXIAL

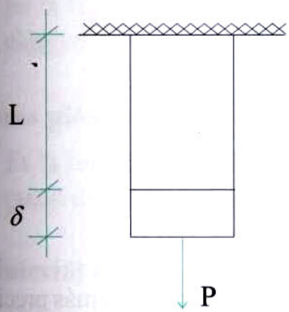


Se tiene una varilla de longitud L y una sección transversal A sometida a una carga P en su extremo inferior.

La carga axial P (en dirección de un eje) genera esfuerzos normales en las secciones perpendiculares a la carga P. (secciones transversales)

En el corte x - x

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{..................} \ (1)$$

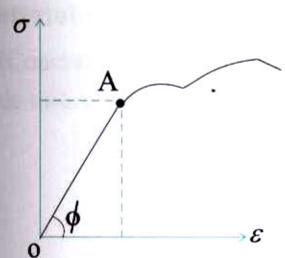


La carga P genera deformación en el cuerpo en dirección de la carga δ

Deformación unitaria normal promedio:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \text{..................} \ (2)$$

Experimentalmente se ha determinado una relación constante dentro de un cierto rango de valores entre el σ y la ε.



Entre O y A es constante la tan ϕ

$$\tan\phi = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad \text{...............} \ (3)$$

E → Módulo de elasticidad del material. (unidades de esfuerzo)
El punto A es el límite de proporcionalidad.

De las ecuaciones 1, 2 y 3 se deduce:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad \text{..............} \ (4)$$

En conclusión la carga axial produce esfuerzos normales σ los que a su vez generan deformaciones δ.

Si el cuerpo está compuesto de varios materiales (varía E), tiene secciones transversales diferentes (varía A) o está sometido a cargas constantes o variables en diferentes puntos, la ecuación (4) adopta las formas siguientes:

$$\delta = \Sigma \frac{\sigma L}{E}$$

$$\delta = \int \frac{\sigma \, dx}{E}$$

3.1 Módulo de elasticidad (E)

Material	E (GPa)
Acero estructural	200
Aluminio forjado	73
Latón	100
Bronce	100

Los valores pueden variar ampliamente; sin embargo, se puede obtener información más preci de los fabricantes.

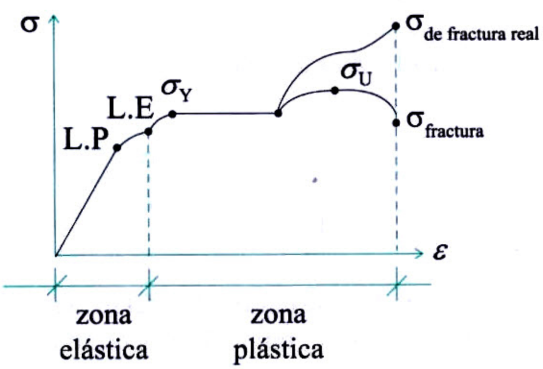


DIAGRAMA: ESFUERZO – DEFORMACIÓN
NORMAL UNITARIA

L.P = Límite de proporcionalidad:

Es el punto donde se produce el máximo esfuerzo durante el ensayo de tracción simple, de modo que el esfuerzo sea función lineal de la deformación.

L.E = Límite elástico:

Es el punto donde se produce el máximo esfuerzo durante un ensayo de tracción simple, de modo que no haya deformación permanente o residual cuando se suprime totalmente la carga.

σy = Esfuerzo de Fluencia:

Un ligero aumento en el esfuerzo más allá del límite elástico es el esfuerzo que causa una deformación permanente del material, este comportamiento se llama fluencia.

Zona elástica:

Es la región del gráfico Esfuerzo – Deformación que va desde el origen hasta el límite elástico.

Zona plástica:

Es la región del gráfico Esfuerzo – Deformación que va desde el límite elástico hasta el punto de rotura o fractura.

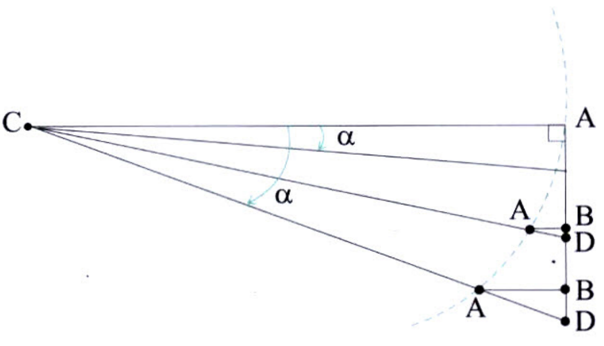
Material dúctil:

(Acero, Aluminio) Tiene un alargamiento a tracción relativamente grande hasta llegar al punto de rotura. Aproximadamente $\varepsilon \geq 0.05$ cm/cm.

Material frágil:

(Concreto) Tiene un alargamiento a tracción relativamente pequeño hasta llegar al punto de rotura, aproximadamente $\varepsilon < 0.05$ cm/cm.

3.2 Geometría de los pequeños desplazamientos



Si α es pequeño, AB y BD son de magnitud despreciable; entonces se traza l perpendicular en vez del arco de circunferencia para ubicar la posición final de la barr CA. Esta simplificación nos lleva a plantear geometrías sencillas donde se relacionan la deformaciones.

3.3 Casos estáticamente indeterminados

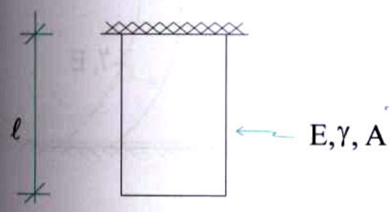
1. Cierto tipo de problemas se resuelven utilizando ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas interiores; estos son problemas estáticamente determinados.

2. Existen problemas donde no se pueden obtener las fuerzas interiores utilizando solo las ecuaciones de equilibrio; adicionalmente, hay que obtener relaciones entre deformaciones utilizando la geometría. Estos problemas se denominan estáticamente indeterminados o hiperestáticos.

3. Otro tipo de problemas hiperestáticos se resuelven por el método de superposición, que consiste en considerar separadamente las deformaciones causadas por las cargas dadas y las causadas por la reacción que causa la hiperestaticidad. Luego, se suman o superponen los resultados obteniendo así el valor de la reacción. Conocida la reacción se pueden calcular esfuerzos y deformaciones.

3.4 Peso propio

3.4.1 Esfuerzo por peso propio

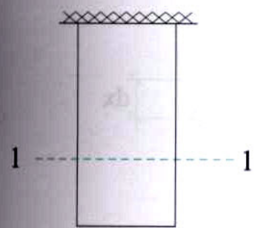


E = Módulo de elasticidad

γ = Peso específico

A = Sección transversal

ℓ = Longitud de la varilla

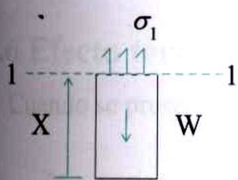


$$\Sigma F_V = 0$$

$$\sigma_1 A - W = 0$$

$$\sigma_1 A - \gamma\, xA = 0$$

$$\sigma_1 = \gamma\, x \text{ .... Esfuerzo normal variable}$$



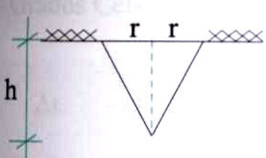
$$x = 0 \rightarrow \sigma = 0$$

$$x = \ell \rightarrow \sigma = \gamma\ell \text{ .... Esfuerzo normal máximo.}$$

3.4.2 Deformación por peso propio

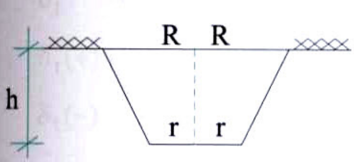
$$\delta_{TOTAL} = \int_{X=0}^{\ell} \frac{\sigma dx}{E} = \int_{X=0}^{\ell} \frac{\gamma x dx}{E} = \left[\frac{\gamma x^2}{2E}\right]_0^{\ell} = \frac{\gamma\ell^2}{2E}$$

3.4.3 Volumen del cono



$$V = \frac{1}{3} h\ A_{BASE}\ ;\ A_{BASE} = \pi r^2$$

3.4.4 Volumen del tronco de cono

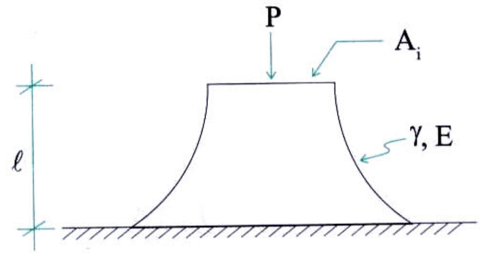


$$V = \frac{1}{3} h \left[A_1 + A_2 + \sqrt{A_1\, A_2}\right]$$

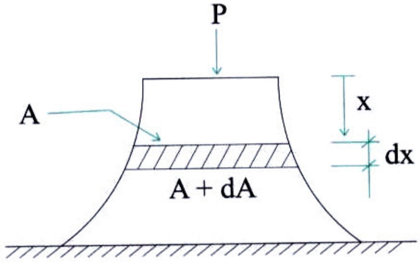
$$A_1 = \pi r^2\ ;\ A_2 = \pi R^2$$

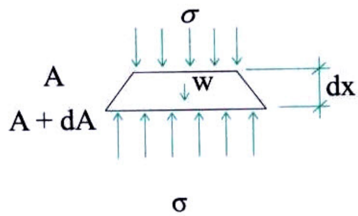
3.5 Sólido de igual resistencia a la compresión

"En cualquier sección transversal el esfuerzo normal es el mismo"



$$\sigma = \frac{P}{A_i}$$





$$\Sigma F_V = 0 = \sigma(A + dA) - \sigma A - \gamma\left(\frac{A + A + dA}{2}\right) dx = 0$$

$$\sigma dA - \gamma A dx - \frac{\gamma}{2}\underbrace{dAdx}_{\approx 0} = 0$$

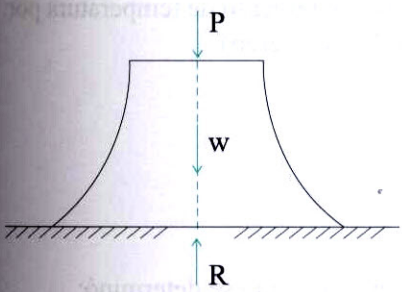
$$\int_{A_i}^{A}\frac{dA}{A} = \int_0^x \frac{\gamma}{\sigma}dx \rightarrow \operatorname{Ln} A - \operatorname{Ln} A_i = \frac{\gamma x}{\sigma}$$

$$\frac{A}{A_i} = e^{\gamma x/\sigma}$$

$A_x = A_i e^{\gamma x/\sigma}$ Sección transversal genérica

$A_\ell = A_i e^{\gamma \ell/\sigma}$ Sección transversal en la base

Volúmen



$$\Sigma F_V = 0$$

$$R = P + W = P + \gamma V \;................\; (\alpha)$$

$$\sigma = \frac{R}{A_\ell} \rightarrow R = \sigma A_\ell = \sigma A_i\, e^{\gamma \ell/\sigma} \;---\text{en } (\alpha)$$

$$P = \sigma A_i \;------\text{en } (\alpha)$$

$$\sigma A_i\, e^{\gamma \ell/\sigma} = \sigma A_i + \gamma v$$

$$V = \frac{\sigma A_i}{\gamma}\left(e^{\gamma \ell/\sigma} - 1\right)$$

$$V = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\gamma \ell/\sigma} - 1\right) \text{ Volumen total}$$

$$V_x = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\gamma x/\sigma} - 1\right) \text{ Volumen genérico}$$

3.6 Efecto térmico

Cuando se presentan variaciones de temperatura los materiales sufren deformaciones.

Δt = variación de temperatura

$\Delta t = t_f - t_i$

t_i = temperatura inicial

t_f = temperatura final

Δt se expresa comúnmente en:
Grados Celsius °C o grados Fahrenheit °F

$\Delta t \rightarrow (+)$ cuando $t_f > t_i$

$\Delta t \rightarrow (-)$ cuando $t_i > t_f$

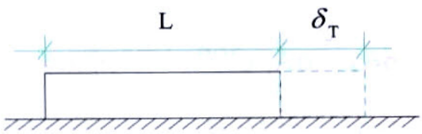
$\delta_t \rightarrow$ deformación por temperatura

$\delta_t(+) \rightarrow$ dilatación

$\delta_t(-) \rightarrow$ contracción

3.6.1 Primer caso

Se tiene una varilla libremente apoyada y se le somete a un incremento de temperatura por la cual la varilla se dilata sin que nada se lo impida. (No hay esfuerzo)



Experimentalmente se determinó:

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha\ \Delta t$$

$\varepsilon_T \rightarrow$ Deformación unitaria promedio térmica.

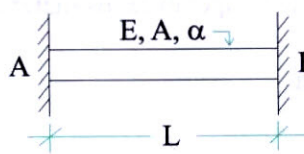
$\delta_t = \alpha\ \Delta t\ L$ _ _ _ (1)

α = Coeficiente térmico

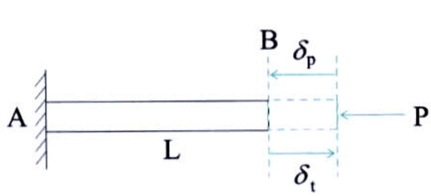
Unidades de α: $(°C)^{-1}$ o $(°F)^{-1}$

3.6.2 Segundo caso:

Se tiene una varilla fija a 2 apoyos rígidos (A y B) y se incrementa la temperatura.



3.6.3 Método de superposición:



Posición final

(α) .... $\delta_t = \alpha\ \Delta t\ L$ — Deformación por temperatura

(β) .... $\delta_p = \dfrac{PL}{EA}$ — Deformación por carga axial

$$\alpha = \beta \rightarrow \delta_t = \delta_P \rightarrow \alpha\ \Delta t\ L = \frac{PL}{EA}$$

$$P = \alpha\ \Delta t\ EA \quad ----(8)$$

$$\frac{P}{A} = \sigma = \alpha\ \Delta t\ E$$

$$\sigma = \varepsilon_T\ E \text{ Esfuerzo normal}$$

Primero se retiró un apoyo, dejando que se deforme libremente por temperatura (α).

Al tratar de dilatarse, los apoyos se lo impiden, generándose la fuerza P. Por ello, se calcula la deformación debido a la carga axial; como no se movió la varilla, ambas deformaciones son iguales. Esto nos permite calcular la fuerza P y el esfuerzo normal que se generó, debido a que no se pudo deformar la varilla.

3.7 Coeficiente térmico (α)

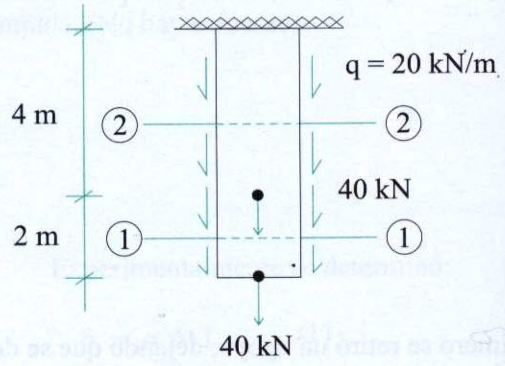
Material	α (10^{-6}/ºF)	α (10^{-6}/ºC)
Acero estructural	6.6	11.9
Aluminio forjado	12.5	22.5
Latón	9.8	17.6
Bronce	9.4	16.9

Los valores pueden variar ampliamente; sin embargo, se puede obtener información más precisa de los fabricantes.

Problema 36

Calcular el diagrama de esfuerzos normales.

$A = 1m^2$



Solución:

$\sigma_{1\text{-}1}$:

$0 \leq x \leq 2$

$\Sigma F_v = 0$

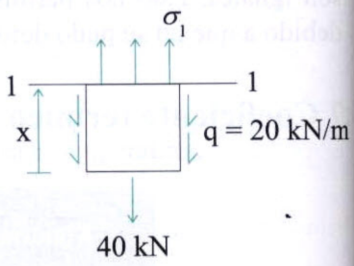
$40 + 20x = (1)\,\sigma_1$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 40 \ \ kN/m^2 = \sigma \\ x = 2 \rightarrow 80 \ \ kN/m^2 = \sigma \end{cases}$$

σ_{2-2}:

$2 \leq x \leq 6$

$\Sigma F_v = 0$



$40 + 40 + 20x = (1)\sigma_2$

$\sigma_2 = 80 + 20x$

$$\begin{cases} x = 2 \rightarrow 120 \ \ kN/\,m^2 = \sigma \\ x = 6 \rightarrow 200 \ \ kN/\,m^2 = \sigma \end{cases}$$

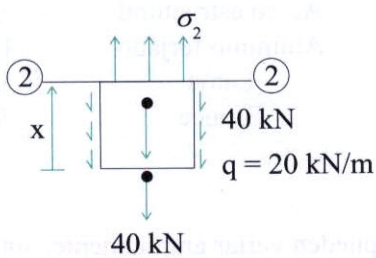
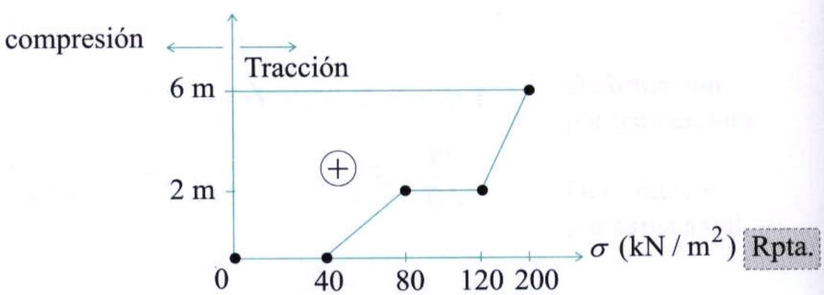


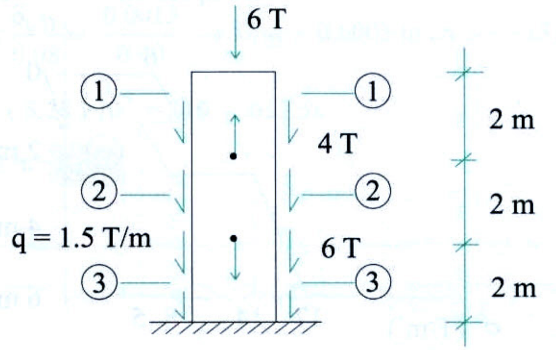
Diagrama de σ:



Problema 37

Calcular el diagrama de esfuerzos normales.

$A = 1\ m^2$



Solución:

Corte 1:

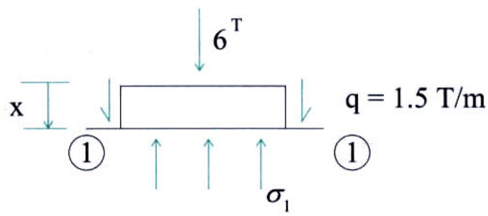
σ_{1-1}:

$0 \leq x \leq 2$

$\Sigma F_V = 0$

$\sigma_1(1) = 6 + 1.5\,x$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \sigma = 6\ T/m^2 \\ x = 2 \rightarrow \sigma = 9\ T/m^2 \end{cases}$$



Corte 2:

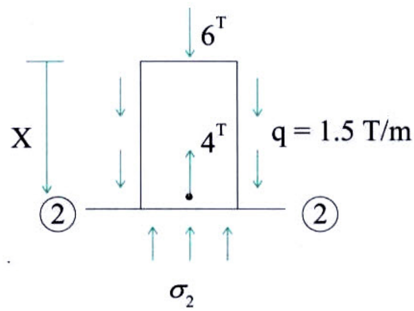
σ_{2-2}:

$2 \leq x \leq 4$

$\sigma_2(1) = 6 - 4 + 1.5x$

$\sigma_2 = 2 + 1.5x$

$$\begin{cases} x = 2 \rightarrow \sigma = 5\ T/m^2 \\ x = 4 \rightarrow \sigma = 8\ T/m^2 \end{cases}$$



Corte 3:

σ_{3-3}:

$4 \leq x \leq 6$

$\sigma_3(1) = 6 - 4 + 6 + 1.5x$

$\sigma_3 = 8 + 1.5x$

$$\begin{cases} x = 4 \rightarrow \sigma = 14\ T/m^2 \\ x = 6 \rightarrow \sigma = 17\ T/m^2 \end{cases}$$

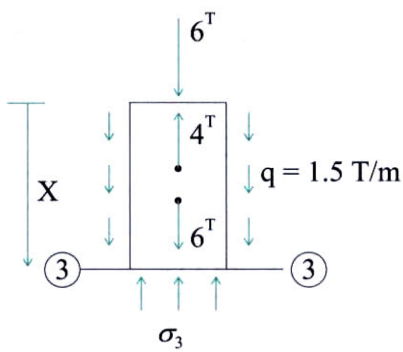
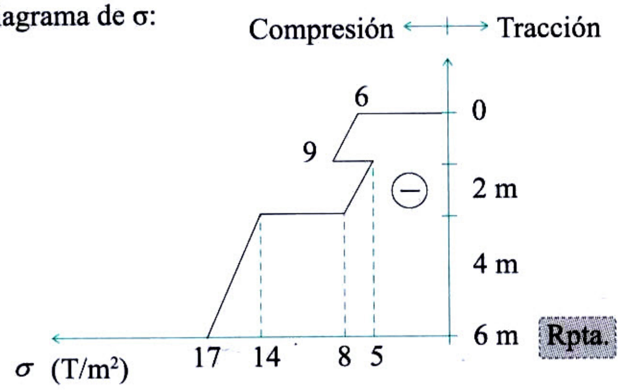


Diagrama de σ:

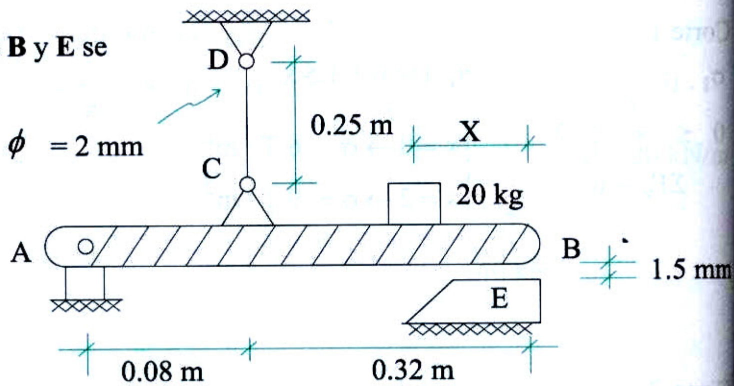


Rpta.

Problema 38

Hallar "x" para que los puntos **B** y **E** se pongan en contacto.

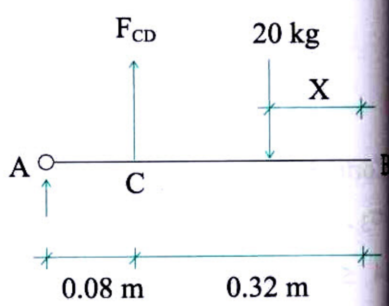
(E = 200 GPa)



Solución:

$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD} \text{ x } 0.25\text{m}}{200 \text{ x } 10^9 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \dfrac{\pi}{4}(0.002)^2 \text{m}^2} \quad --- (1)$$

D.C.L:



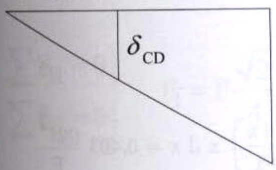
$$\Sigma M_A = 0 \; ; \; \frac{1\text{N}}{1\text{kg}} \, 9.8 \cdot (20\,\text{kg})(0.4 - x) = 0.08\, F_{CD}$$

$$F_{CD} = \frac{78.4 - 196x}{0.08} = 980 - 2\,450\,x \;\; ------(2)$$

(2) en (1):

$$\delta_{CD} = \frac{245 - 612.5x}{(6.28) \cdot 10^5} \; ---(3)$$

Deformaciones:



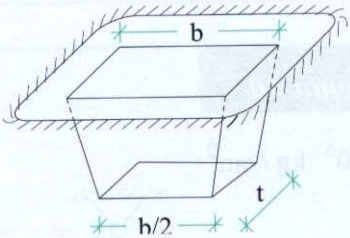
N de Δ_S : $\dfrac{\delta_{CD}}{0.08} = \dfrac{0.0015}{0.40} \rightarrow \delta_{CD} = 0.0003$ m en --- (3)

$3 \times 10^{-4}\ (6.28)\ 10^5 = 245 - 612.5x$

$x = 0.092$ m **Rpta.**

Problema 39

Un bloque de espesor constante "t" tiene una densidad ρ. Calcular la deformación total debida al peso propio.



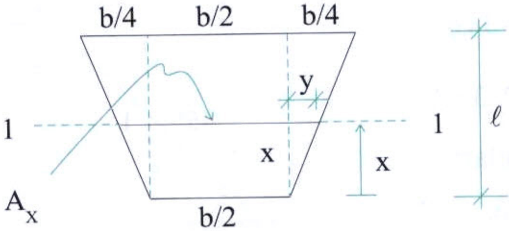
Solución:

$\rho \times g = \gamma$

N de Δ_S :

$$\frac{y}{\frac{b}{4}} = \frac{x}{\ell}$$

$$y = \frac{bx}{4\ell} \quad --- (1)$$



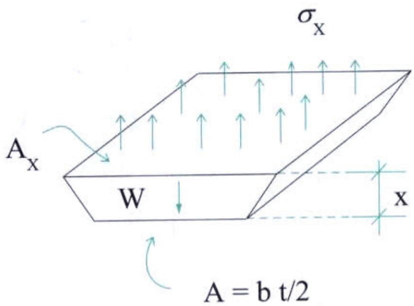
Corte 1−1:

$$\Sigma Fv = 0$$

$$\sigma_x A_x - \rho g\left(\frac{A + A_x}{2}\right) x = 0 \quad --- (2)$$

$$A = \frac{bt}{2}$$

$$A_x = \left(\frac{b}{2} + 2y\right) t \quad --- (3)$$



(1) en (3):

$$A_x = \frac{bt}{2}\left(1+\frac{x}{\ell}\right) \text{ en (2)}:$$

$$\sigma_x = \frac{\rho g x}{2}\left(\frac{2\ell + x}{\ell + x}\right) \quad --- (4)$$

$$\delta = \frac{1}{E}\int_{x=0}^{x=\ell} \sigma_x d_x \quad --- (5)$$

(4) en (5):

$$\delta = \frac{1}{E}\,\frac{\rho g}{2}\int_{x=0}^{x=\ell}\left(\frac{2\ell+x}{\ell+x}\right) x\, d x = 0.403\,\frac{\rho g \ell^2}{E}$$

Problema 40

$E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$

$P = 8$ ton

$\phi_I = 2$ cm

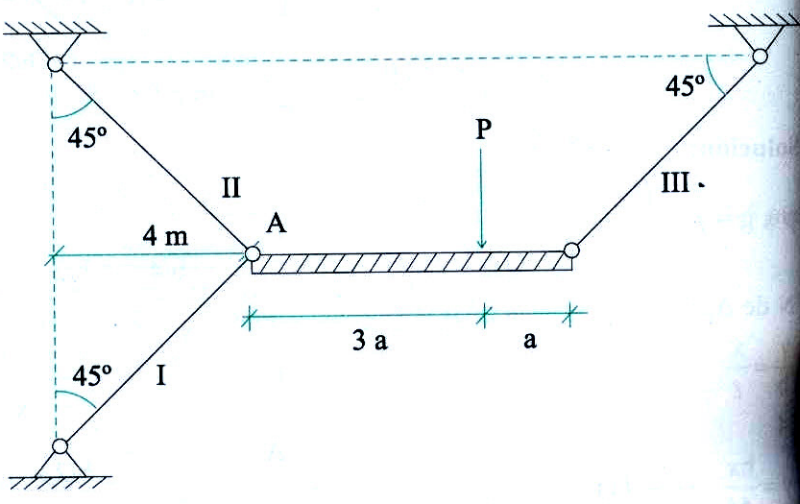
$\phi_{II} = 2$ cm

$\phi_{III} = 3$ cm

σ 1, 2, 3 = ?

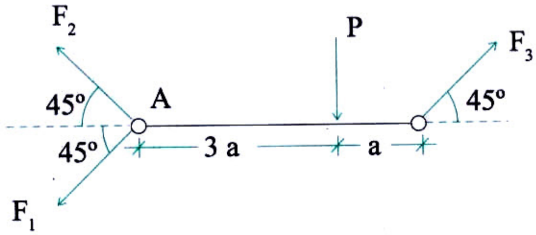
Calcular:

$\delta_{HA}, \delta_{VA} = ?$



Solución:

D.C.L:



$$\sum M_A = 0 \qquad F_3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}P \quad \text{Trac.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_H = 0\\ \sum F_V = 0\end{array}\right\} \quad F_1 = P\frac{\sqrt{2}}{4} \quad , \quad F_2 = \frac{P\sqrt{2}}{2} \quad \text{Trac.}$$

$$\sigma_1 = \frac{8\times10^3\sqrt{2}}{4\pi\frac{(2)^2}{4}} = 900 \text{ kg/cm}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\sigma_2 = \frac{8\times10^3\sqrt{2}}{2\pi\frac{(2)^2}{4}} = 1\,800 \text{ kg/cm}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\sigma_3 = \frac{8\times10^3\times3\sqrt{2}}{4\pi\frac{(3)^2}{4}} = 1\,200 \text{ kg/cm}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\delta_1 = 8\times10^3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{10^3\;\times\;4\sqrt{2}}{2\times10^6\,\pi\frac{(2)^2}{4}} = 2.54 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = 8\times10^3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}\times10^3}{2\times10^6\,\pi\frac{(2)^2}{4}} = 5.09 \text{ mm}$$

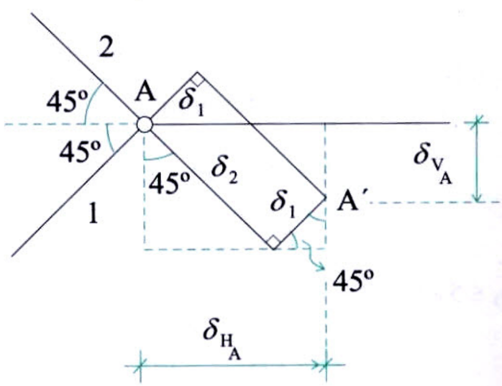
Deformaciones :

$\delta_{VA} = \delta_2 \cos\ 45° - \delta_1 \cos\ 45°$

$\delta_{VA} = 1.8$ mm $\boxed{\text{Rpta.}}$

$\delta_{HA} = \delta_2\ \cos 45° + \delta_1\ \cos 45°$

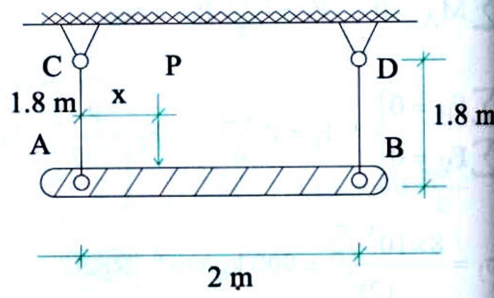
$\delta_{HA} =\ 5.4$ mm $\boxed{\text{Rpta.}}$



Problema 41

La barra rígida AB tiene 1000 kg de masa, y pende de 2 cables de área 400 m². Determinar la magnitud de P y su ubicación.

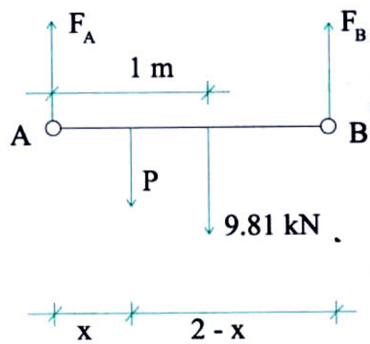
Los esfuerzos en los cables AC y BD tienen un límite de 100 MPa y 50 MPa respectivamente.



Solución:

$$1\,000\ \text{kg} \times 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9.81\ \text{kN}$$

D.C.L:



$$\Sigma F_V = 0\ :\ F_A + F_B = P + 9.81\ \text{kN} \ ---(1)$$

$$\Sigma M_A = 0\ :\ F_B(2) = PX + 9.81 \times 1$$

$$F_B = \frac{P}{2}x + 4.905 \text{ en } (1)$$

$$F_A = P + 9.81 - \frac{P}{2}x - 4.905$$

$$F_A = \frac{P}{2}(2-x) + 4.905$$

$$100\ \text{MPa} <> 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad ; \quad 50\ \text{MPa} <> 5\times10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{AC} \le 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{[P(2-x)1/2 + 4.905]}{400\ \text{mm}^2} \times \frac{10^6 \text{mm}^2}{1\ \text{m}^2}$$

$$70.19 = P(2-x) \ ---(2)$$

$$\sigma_{BD} \le 5\times10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{\frac{P}{2}x + 4.905}{400\ \text{mm}^2} \times \frac{10^6\ \text{mm}^2}{1\ \text{m}^2}$$

$$30.19 = PX \ ---(3)$$

De (3) y (2):

$$P = 50.19\ \text{kN}$$

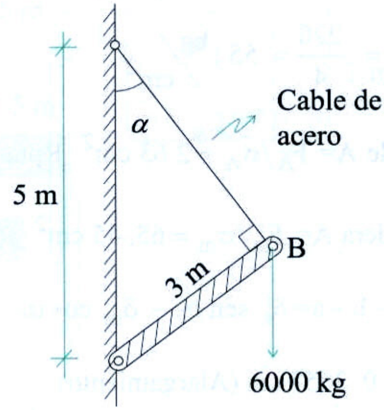
$$X = 0.601\ \text{m}$$ **Rpta.**

Problema 42

Diseñar el cable y el soporte de madera y determinar el desplazamiento del punto B.

Acero $\begin{cases} E_{AC} = 2\times10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_U = 4\ 200 \text{ kg/cm}^2 \\ 2.3 = \text{F. S} \end{cases}$

Madera $\begin{cases} E_m = 0.113\times10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_U = 220 \text{ kg/cm}^2 \\ 4 = \text{F. S} \end{cases}$



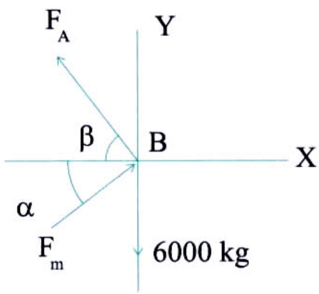
Solución:

$z_A = (500 \text{ cm})\cos\alpha = 500\frac{4}{5} = 400 \text{ cm}$

$\ell_m = 3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$

$\alpha = 36.87^\circ \quad \beta = 53.13^\circ$

D.L.C.:



$$\sum F_x = 0$$

$F_m \cos\alpha = F_A \cos\beta --- (1)$

$$\sum F_y = 0$$

$F_A \text{ sen }\beta + F_m \text{ sen }\alpha = 6\ 000 --- (2)$

De $(1)y(2) =$

$F_m = 3\ 600$ kg (compresión)

$F_A = 4\ 800$ kg (tracción)

Áreas :

$$\sigma_a = \frac{4\,200}{2.3} = 1\,826.09 \ \ {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

$$\sigma_m = \frac{220}{4} = 55 \ \ {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

Cable $A = F_A / \sigma_A = 2.63 \text{ cm}^2$ **Rpta.**

Madera $A = F_m / \sigma_m = 65.45 \text{ cm}^2$ **Rpta.**

$\delta_H = b - a = \delta_a \text{ sen } \alpha \ - \ \delta_m \cos \alpha$

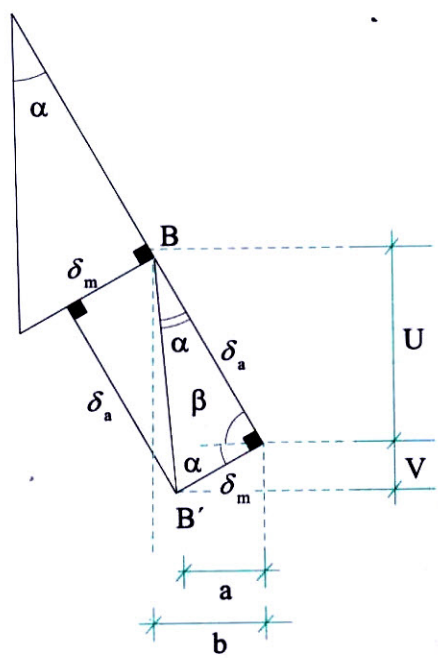
$\delta_a = 0.\,3652$ cm (Alargamiento)

$\delta_m = 0.\,1460$ cm (Acortamiento)

$\delta_H = 0.\,1023$ cm

$\delta_V = U + V = \delta_A \cos \alpha + \ \delta_M \text{ sen } \alpha$

$\delta_V = 0.3798$ cm **Rpta.**



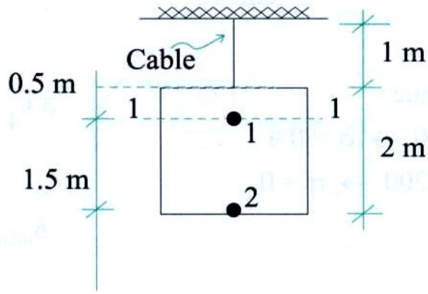
Problema 43

El bloque de concreto tiene un peso de 400 kg y A= 10^3 cm^2.

El bloque está suspendido de un cable de acero (E = 2 x 10^6 kg/cm^2) y A = 0.5 cm^2.

a) Determinar los desplazamientos de los puntos 1 y 2.
E concreto = 2 x 10^5 kg/cm^2.

b) Dibujar el diagrama de esfuerzo normal.



Solución:

a) $\delta_1 = \delta_{cable} + \delta \, \frac{1}{4} \text{ bloque}$

$\delta_2 = \delta_{cable} + \delta \text{ total bloque}$

$T_{cable} = 400$ kg

$$\delta_{cable} = \frac{4 \times 10^2 \times 10^2 \text{ kg . cm}}{2 \times 10^6 \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times \dfrac{1}{2} \text{ cm}^2} = 0.04 \text{ cm}$$

Corte 1 – 1:

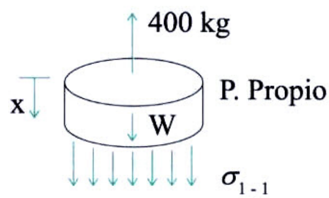
$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{400 \text{ kg}}{10^3 \text{ cm}^2 \times 2 \times 10^2 \text{ cm}} = 2 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$\sum F_v = 0$

$\sigma_1 A + \gamma V = 400$

$\sigma_1 \left(10^3\right) + 2 \times 10^{-3} \times 10^3 \text{ X} = 400$

$\sigma_1 = 0.4 - 0.002 \text{ X}$ (Tracción)



b) $\sigma_{cable} = 800\ \dfrac{kg}{cm^2}$

$$\delta_{1/4} = \frac{1}{E}\int_{X=0}^{50} \sigma_1\, dx = \frac{1}{2\times10^5}\int_{X=0}^{50} (0.4-0.002\,X)\,dX$$

Bloque:

$x = 0 \rightarrow \sigma = 0.4$

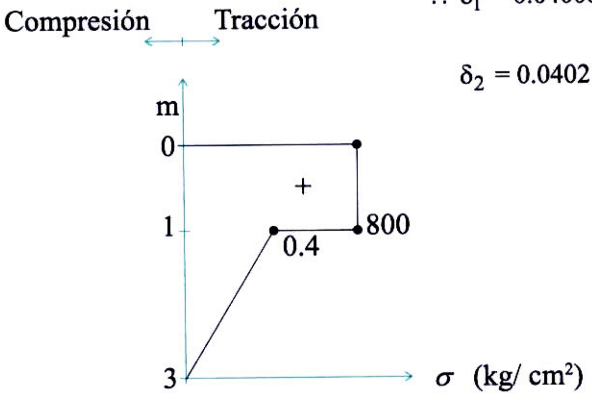
$x = 200 \rightarrow \sigma = 0$

$$\delta_{1/4} = \frac{1}{2\times10^5}\left[0.4\,X - 0.001\,X^2\right]_0^{50} = 0.0000875\ cm$$

$$\delta_{total} = \frac{1}{2\times10^5}\left[0.4\,X - 0.001\,X^2\right]_0^{200} = 0.0002\ cm$$

$\therefore\ \delta_1 = 0.0400875\ cm$ **Rpta.**

$\delta_2 = 0.0402\ cm$ **Rpta.**



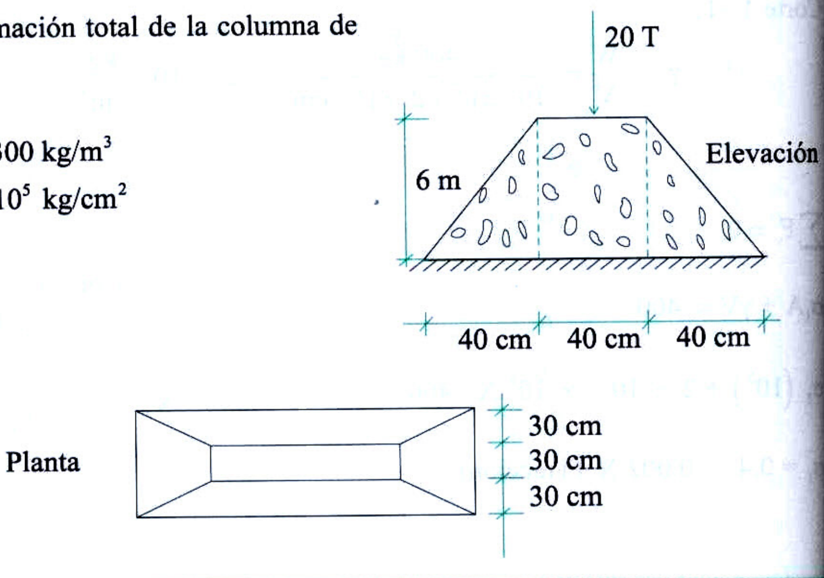
Diagrama

Problema 44

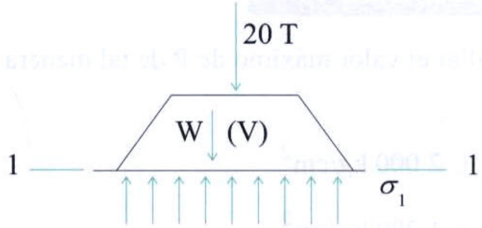
Determinar la deformación total de la columna de concreto si:

$\gamma = 2\ 300\ kg/m^3$

$E = 2\times10^5\ kg/cm^2$



Solución:

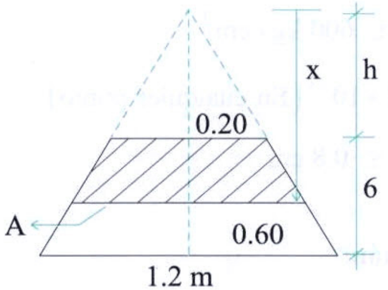


$\sum F_V = 0$

$\sigma_1 A = 20 + \gamma V - - - (1)$

$\gamma = 2\ 300\ \text{kg/cm}^3 <> 0.0023\ \text{kg/cm}^3 - - - (\alpha)$

$\sim \text{de } \nabla_S : \dfrac{h}{0.20} = \dfrac{h+6}{0.60} \rightarrow h = 3\ \text{m}$

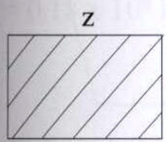


$V = \dfrac{1}{3} AX - \dfrac{1}{3}(40)(30)300$

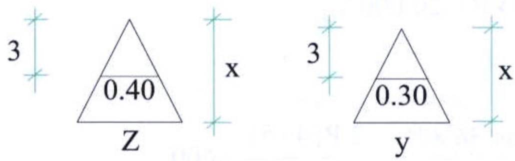
$V = \dfrac{1}{3}(XA - 360\ 000) - - - (\beta)$

(α) y (β) en (1)

$\sigma_1 = \dfrac{20\ 000}{A} + \dfrac{0.0023}{3}(XA - 360\ 000) - - - (2)$



y $\longrightarrow$ $A = Z\,y$



$\sim$ de Δ:

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{0.40}{3} = \dfrac{Z}{X} \rightarrow (3) \\ \\ \dfrac{0.30}{3} = \dfrac{y}{x} \rightarrow (4) \end{array}\right]$ $\quad (3) \times (4): \dfrac{0.12}{9} = \dfrac{ZY}{X^2}$

$A = ZY = \dfrac{0.12}{9} X^2$ en (2)

$\sigma_1 = 1\ 479\ 300\ X^{-2} + 0.00076\ X = \sigma_x$

$\delta = \dfrac{1}{E}\int_{300}^{900} \sigma_x\, d\,X = \int_{300}^{900} \dfrac{1}{2\times 10^5}\left[1\ 479\ 300\ X^{-2} + 0.00076\ X\right] d\,X$

$\downarrow \delta = 0.0178\ \text{cm}$ Rpta.

Problema 45

Hallar el valor máximo de **P** de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

$\sigma_t \leqq 2\,000 \text{ kg/cm}^2$

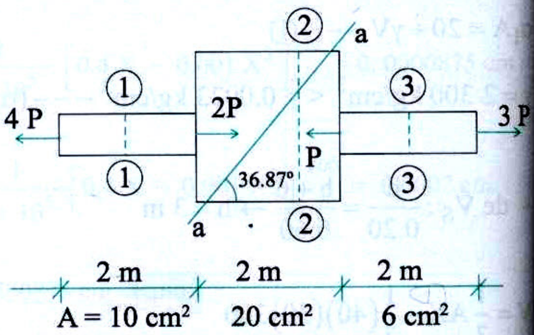
$\sigma_c \leqq 1\,200 \text{ kg/cm}^2$

$E = 2\times10^6 \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

$\tau_{a-a} \leq 600 \text{ kg/cm}^2$

$\varepsilon \leq 2\times10^{-3}$ (En cualquier punto)

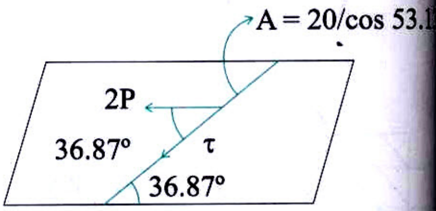
$\delta_{total} \leq 0.8 \text{ cm}$



Solución:

$$\sigma_t = \frac{4P}{10} \rightarrow P = 5\,000 \text{ kg},\ \sigma_t = \frac{3P}{6} \rightarrow P = 4\,000 \text{ kg}$$

$$\sigma_t = \frac{2P}{20} \rightarrow P = 20\,000 \text{ kg}$$



τ_{a-a}

$$\tau = \frac{2\,P\cos\,36.87°}{20/\cos\,53.13°} = \frac{2\,P(4/5)}{20/(3/5)} = 600$$

$P = 12\,500$ kg

(1–1)

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} = \frac{4P}{2\times10^6\times10} = 2\times10^{-3} \rightarrow P = 10\,000 \text{ kg}$$

(2–2)

$$\varepsilon = \frac{2\,P}{2\times10^6\times20} = 2\times10^{-3} \rightarrow P = 40\,000 \text{ kg}$$

3–3

$$\varepsilon = \frac{3\,P}{2\times10^{6}\times 6} = 2\times10^{-3} \rightarrow P = 8\,000 \text{ kg}$$

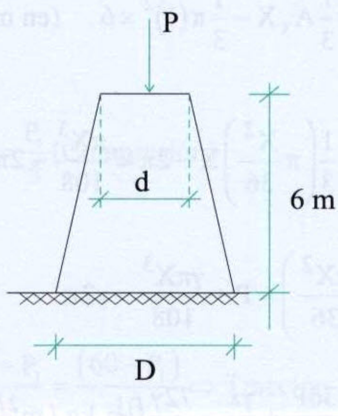
$$\delta_{total} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$\delta_{total} = \frac{4P\times200}{2\times10^{7}} + \frac{2P\times200}{2\times10^{6}\times20} + \frac{3P(200)}{2\times10^{6}\times6} = 0.8$$

$P = 8\,000$ kg ; $\therefore P_{máximo} = 4\,000$ kg Rpta.

Problema 46

Calcular la deformación total del tronco de cono.



$P = 20$ T

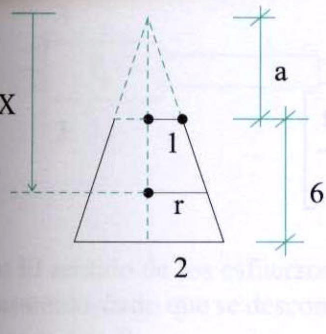
$\gamma = 2300$ kg/ m^3

$E = 0.18 \times 10^6$ kg/cm^2

$d = 2$m

$D = 4$ m

Solución:



~ de Δ_s :

$$\frac{a}{1} = \frac{a+6}{2}$$

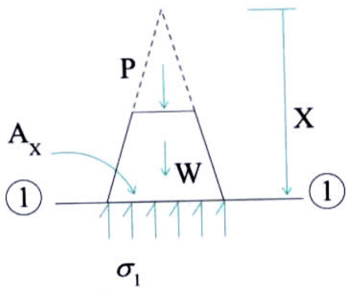
$$a = 6 \text{ m}$$

~ de Δ_s :

$$\frac{1}{6} = \frac{r}{x}$$

$$r = \frac{x}{6}$$

Corte 1-1



$$\Sigma F_v = 0$$

$$\sigma_1 A_x = P + W = P + \gamma V_x \text{ ----(1)}$$

$$V_x = V_{cono} - V_{conito}$$

$$V_x = \frac{1}{3} A_x X - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 6 \quad (\text{en m}^3)$$

$$V_x = \frac{1}{3}\left(\pi \frac{X^2}{36}\right) X - 2\pi = \frac{\pi X^3}{108} - 2\pi \text{ ----(2) en (1):}$$

$$\sigma_1\left(\frac{\pi X^2}{36}\right) = P + \frac{\gamma \pi X^3}{108} - \gamma 2\pi$$

$$\sigma_1 = \frac{36P}{\pi X^2} + \frac{\gamma x}{3} - \frac{72\gamma}{X^2}\left(\text{en kg / m}^2\right)$$

$$\delta = \frac{1}{E}\int_{x=6}^{12} \sigma_1 dx$$

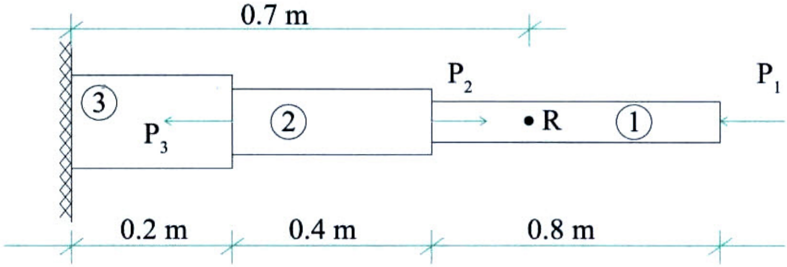
$$\delta = \frac{1}{0.18 \times 10^{10}} \int_6^{12} \left[\frac{36\left(20 \times 10^3\right)}{\pi x^2} + \frac{23 \times 10^2 x}{3} - \frac{72 \times 23 \times 10^2}{x^2}\right]$$

$\delta = 2.59 \times 10^{-5} \text{m} <> 0.0259 \text{ mm}$ **Rpta.**

Problema 47

Hallar el valor de P_1 para que el desplazamiento del punto R sea 0.3 mm hacia la derecha.

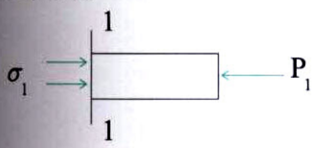
$E = 200$ GPa
$A_1 = 5\ cm^2$
$A_2 = 10\ cm^2$
$A_3 = 15\ cm^2$
$P_2 = 60$ kN
$P_3 = 120$ kN



Solución:

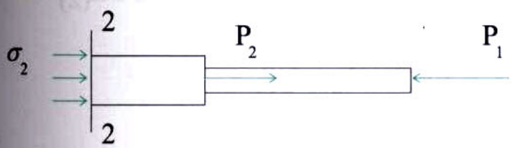
$$E = 200\times10^6\ \frac{kN}{m^2}\times\frac{1m^2}{10^4 cm^2} = 2\times10^4\ \ kN/\ cm^{\ 2}$$

Corte 1-1:



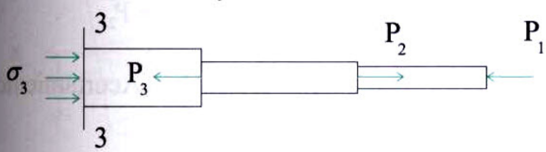
$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{P_1}{5}\text{(Compresión)}$$

Corte 2-2:



$$\sigma_2 = \frac{P_2 - P_1}{A_2} = \frac{(60 - P_1)}{10} \Rightarrow \text{Tracción}$$

Corte 3 − 3:



$$\sigma_3 = \frac{(P_3 + P_1 - P_2)}{A_3} = \frac{60 + P_1}{15}\text{(Compresión)}$$

$$\delta_R = \frac{-\sigma_3 l_3}{E} + \frac{\sigma_2 l_2}{E} - \frac{\sigma_1 (100\ mm)}{E} = 0.3\ mm$$

Nota: El sentido de los esfuerzos ha sido asumido, dado que se desconoce la magnitud de P_1.

$$-\frac{(60+P_1)200}{15\times2\times10^4} + \frac{(60-P_1)400}{10\times2\times10^4} - \frac{P_1 100}{5\times2\times10^4} = 0.3$$

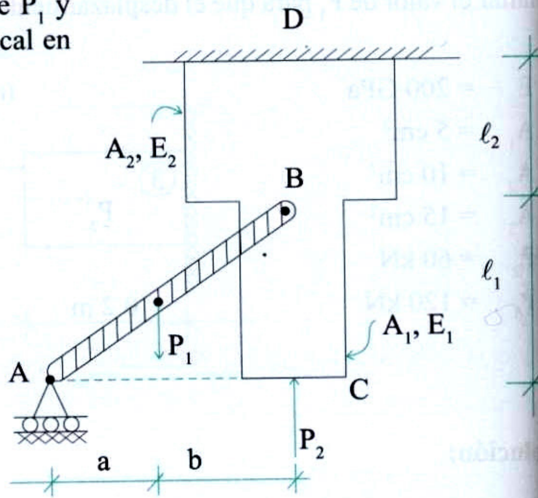
$P_1 = -60\,kN \qquad \therefore\rightarrow P_1 = 60\,kN$ **Rpta.**

Problema 48

En la figura mostrada hallar la relación entre P_1 y P_2 de tal manera que el desplazamiento vertical en C sea cero.

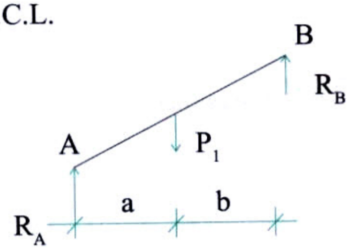
$$\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{l_1}{l_2}=2 \qquad \frac{P_1}{P_2}=? \qquad \frac{E_1}{E_2}=\frac{2}{3}$$



Solución:

D.C.L.



$$\sum M_B = 0$$

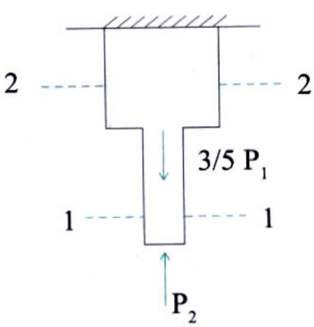
$$R_A(a+b) - P_1\, b = 0$$

$$R_A = P_1\, b/(a+b) ----(1)$$

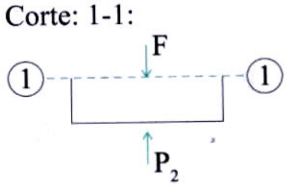
$$\sum F_V = 0$$

$$R_B = P_1 - R_A \quad En(1): R_B = P_1 a/(a+b) ----(2)$$

$$a=(3/2)b \qquad En(2): R_B = \frac{3}{5}P_1$$



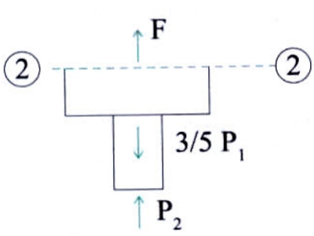
Corte: 1-1:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow F = P_2$$

$$\delta_{1-1} = -\frac{P_2 l_1}{E_1 A_1} \text{ (Acortamiento}$$

Corte: 2-2:



$$\sum F_V = 0$$

$$F = \frac{3}{5}P_1 - P_2$$

$$\delta_{2-2} = +\frac{\left(\frac{3}{5}P_1 - P_2\right) l_2}{E_2 A_2} \text{ (Alargamiento)}$$

$$\delta_c = 0 = \delta_{1-1} + \delta_{2-2} = -\frac{P_2 l_1}{E_1 A_1} + \frac{\left(\frac{3}{5}P_1 - P_2\right) l_2}{E_2 A_2} \; --- (3)$$

Reemplazando en (3) las relaciones dadas inicialmente: $\frac{P_1}{P_2} = 10$ Rpta.

Problema 49

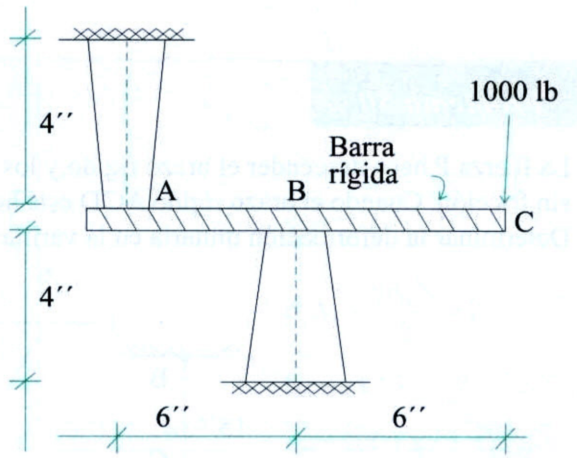
Para el sistema que se muestra en la figura, encontrar el desplazamiento del punto C.

$E = 30 \times 10^6$ lb/pulg²

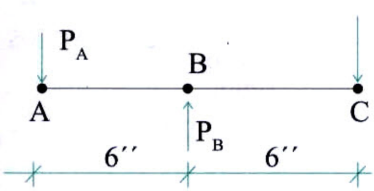
Diámetros de los troncos de cono:

Diámetro mayor: 1 pulg

Diámetro menor: ½ pulg



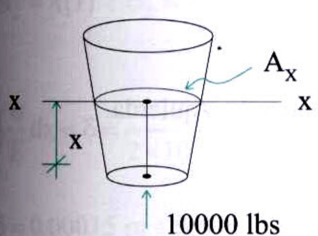
Solución:

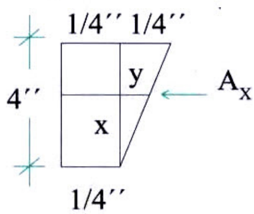


$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow P_B(6) = 10^3(12)$$

$$\rightarrow P_B = 2000 \text{ lbs}$$

$$\Sigma F_V = 0 \rightarrow P_A = 1000 \text{ lbs}$$





N de Δ_s :

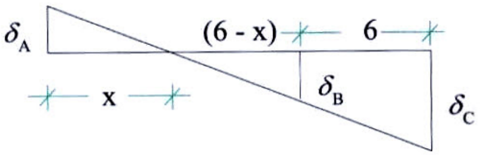
$$\frac{x}{y} = \frac{4}{1/4} \rightarrow y = \frac{x}{16}$$

$$\gamma_X = \frac{1}{4} + \frac{x}{16}$$

$$A_X = \pi\gamma_X^{\,2} = \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{16}\right)^2$$

$$\delta_A = \int \frac{\sigma_X dx}{E} = \int_{x=0}^{x=4} \frac{1000\, dx}{\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{16}\right)^2 E} = 3.39 \times 10^{-4} \text{ pulg.}$$

$\therefore \delta_B = 2\delta_A = 6.78 \times 10^{-4}$ pulg. (Por ser el mismo volúmen y la carga el doble)



$$N \text{ de } \Delta_S : \frac{\delta_A}{X} = \frac{\delta_B}{6-X}$$

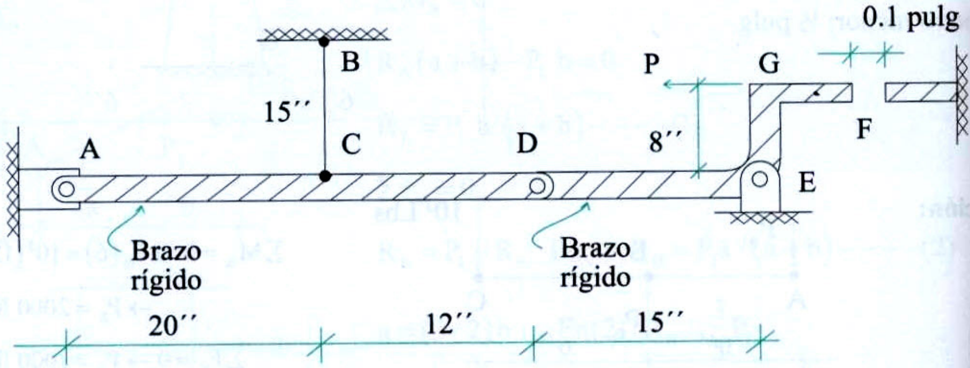
$$x = \frac{6\delta_A}{\delta_A + \delta_B} = \frac{6(3.39)}{10.17} = 2''$$

$$N \text{ de } \Delta_s : \frac{4}{\delta_B} = \frac{10}{\delta_C} \rightarrow \delta_C = \frac{10}{4}\delta_B = 16.95 \times 10^{-4} \text{ pul}$$

Rpta.

Problema 50

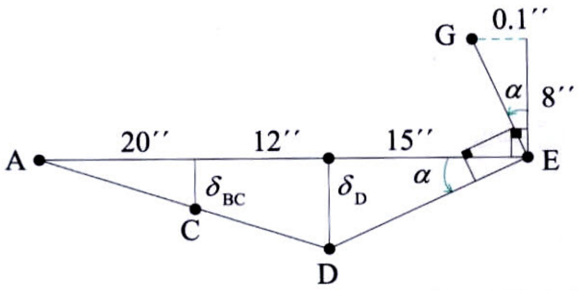
La fuerza P hace descender el brazo rígido,y los puntos D y E son articulaciones de pasador sin fricción. Cuando el brazo rígido ACD está horizontal, la abertura en el punto ´F´ es 0.1". Determinar la deformación unitaria en la varilla BC, cuando la abertura es 0.2 pulg.



Solución:

Cuando la abertura es 0.2 pulg el punto G se desplaza 0.1 pulg hacia la izquierda.

Deformaciones:



$$\tan\alpha = \frac{0.1}{8}$$

$$\delta_D = 15\tan\alpha = 0.187''$$

$$N \text{ de } \Delta_s : \frac{\delta_{BC}}{20} = \frac{\delta_D}{32} \rightarrow \delta_{BC} = 0.117''$$

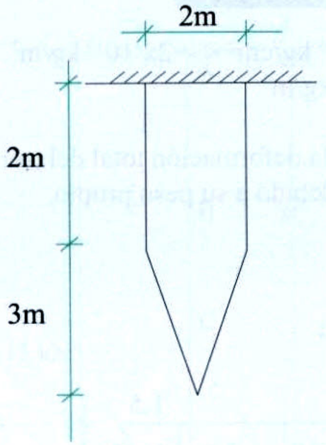
$$\varepsilon_{BC} = \frac{\delta_{BC}}{L_{BC}} = \frac{0.117''}{15''} = 7.8 \times 10^{-3}$$

Rpta.

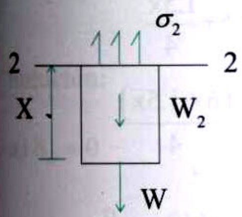
Problema 51

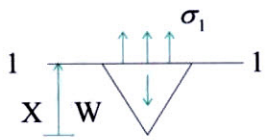
$E = 2000 \times 10^3$ kg/cm.^{2} < > 2×10^7 kg/m^2
$\gamma = 2000$ kg/m^3

Calcular la deformación total del cuerpo formado por un cilindro y un cono debido a su peso propio.



Solución:





$$\Sigma F_V = 0$$

$$\sigma_1 A_1 - \frac{\gamma A_1 X}{3} = 0$$

$$\sigma_1 = \gamma x / 3$$

$$\sigma_1 = 2000\ x / 3 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$W = \frac{1}{3}\pi(1)^2\, 3\gamma = 2000\pi \ ; \ \text{kg}$$

$$\Sigma F_V = 0 \rightarrow \sigma_2 A_2 - 2000\pi - 2000 X A_2 = 0$$

$$A_2 = \pi(1)^2 \ ; \ \sigma_2 = \frac{2000\pi}{\pi(1)^2} + 2000X = 2000 + 2000X; \left(\text{kg}/\text{m}^2\right)$$

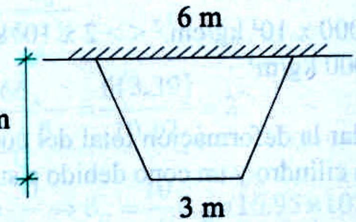
$$\int \frac{\sigma}{E} dx = \delta = \frac{1}{2\times 10^7} \int_{x=0}^{3} 200 \frac{x}{3}\, dX + \frac{1}{2\times 10^7} \int_{x=0}^{2} (2000 + 2000X)\, dX$$

$$\delta = 0.00015\ \text{m} + 0.00040\ \text{m} < \ > 0.55\ \text{mm} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

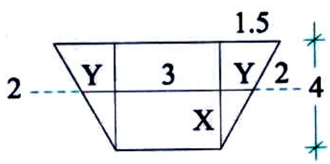
Problema 52

$E = 2x\ 10^6\ kg/cm^2 <> 2x\ 10^{10}\ kg/m^2$
$\gamma = 2500\ kg/m^3$

Calcular la deformación total del tronco de cono debido a su peso propio.



Solución:

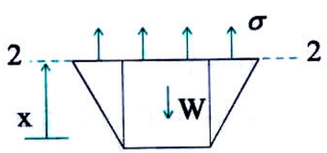


$$A_1 = \pi(1.5)^2$$

N de Δ_s :

$$\frac{y}{x} = \frac{1.5}{4}; y = \frac{1.5x}{4} \quad ; \ \gamma = 1.5 + \frac{1.5x}{4}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{16}(6+1.5x)^2 \ ; \gamma = \frac{(6+1.5x)}{4}$$



$$\Sigma F_V = 0 = \sigma A_2 - W = \sigma A_2 - \gamma Vol$$

$$\sigma A_2 = \gamma \frac{x}{3}\left[A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\right]$$

$$\sigma = \frac{\gamma x}{3}\left[\frac{A_1}{A_2} + 1 + \sqrt{A_1/A_2}\right]$$

$$\delta = \int_{x=0}^{4m} \frac{\sigma dx}{E} = \frac{1}{E}\int \frac{\gamma x}{3}\frac{16(1.5)^2 dx}{(6+1.5x)^2} + \frac{1}{E}\int \frac{\gamma}{3} x dx + \frac{1}{E}\int \frac{\gamma x}{3}\frac{4(1.5)dx}{(6+1.5x)}$$

$$\delta = 1.2876 \times 10^{-7} m + 3.333 \times 10^{-7} m + 2.0456 \times 10^{-7} m$$

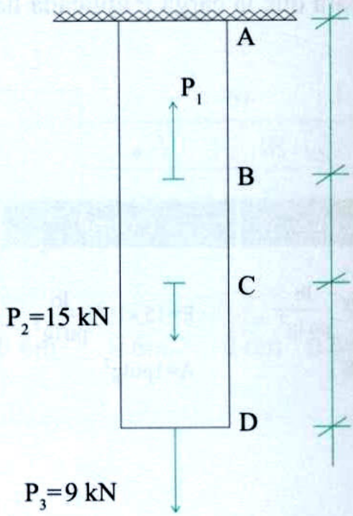
$$\delta_{total} = 6.666 \times 10^{-4} mm = 0.000666\ mm$$ **Rpta.**

Problema 53

Barra de acero
$A = 250\ mm^2$
$E = 200\ GPa$

a) Calcular P_1 (kN) si el extremo inferior "D" de la barra no se debe desplazar verticalmente cuando se aplican las cargas, ($\delta_D = 0$).

b) Calcular P_1 (kN) cuando $\delta_D = +0.2$ mm



Solución:

a) $\delta_D = 0$

$$\sigma_{CD} = \frac{P_3}{A} = \frac{9kN}{A} \rightarrow \delta_{CD} = \frac{9}{AE}(0.3)$$

$$\sigma_{CB} = \frac{P_3 + P_2}{A} = \frac{24\,kN}{A} \rightarrow \delta_{CB} = \frac{24}{AE}(0.2)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{P_3 + P_2 - P_1}{A} = \frac{24 - P_1}{A} \rightarrow \delta_{BA} = \frac{(24 - P_1)}{AE}0.5$$

$$\delta_D = 0 = \delta_{CD} + \delta_{CB} + \delta_{BA} = 2.7 + 4.8 + 12 - 0.5P_1 = 0$$

$$19.5 = 0.5P_1$$

$$39\ kN = P_1$$ **Rpta.**

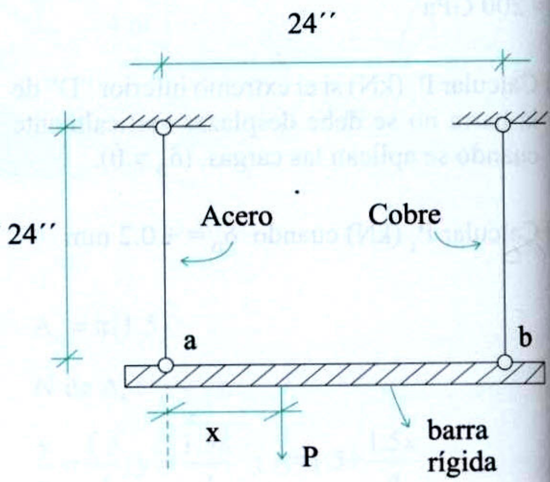
b) $$\frac{(2.7 + 4.8 + 12 - 0.5P_1)10^3}{250 \times 200} = 0.2$$

$$P_1 = 19\ kN$$ **Rpta.**

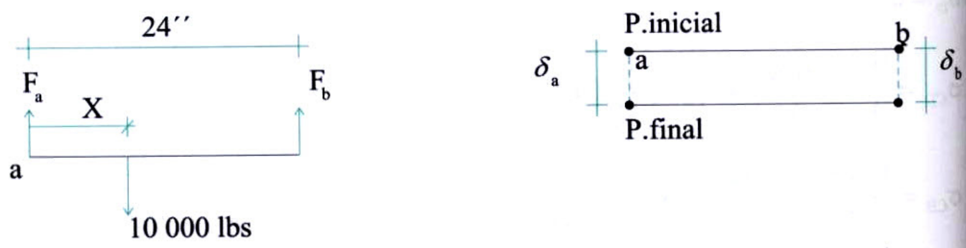
Problema 54

Hallar X para que la carga P aplicada haga que la barra se mantenga horizontal. P=10,000 libras.

Acero	Cobre
$E=30\times10^6\ \frac{lb}{pulg^2}$ $A=1pulg^2$	$E=15\times10^6\ \frac{lb}{pulg^2}$ $A=1pulg^2$



Solución: D.C. L:



$$\Sigma M_a = 0$$

$$F_b(24) = 10\ 000x$$

$$F_b = 416.67x$$

$$\Sigma F_V = 0\ ;\ F_a = 10\ 000 - 416.67x$$

Deformaciones:

$$\delta_{ac} = \delta_a = \delta_b = \delta_{CU} \rightarrow \quad F_{ac} = 2F_{cu}$$

$$\frac{(10\ 000 - 416.67x)\cancel{24''}}{30\times\cancel{10^6}\ \frac{\cancel{lb}}{\cancel{pu}lg^2}\ \cancel{A}} = \frac{(416.67x)\cancel{24''}}{15\times\cancel{10^6}\ \frac{\cancel{lb}}{\cancel{pu}lg^2}\ \cancel{A}}$$

$$10\ 000 - 416.67 = 833.34x$$

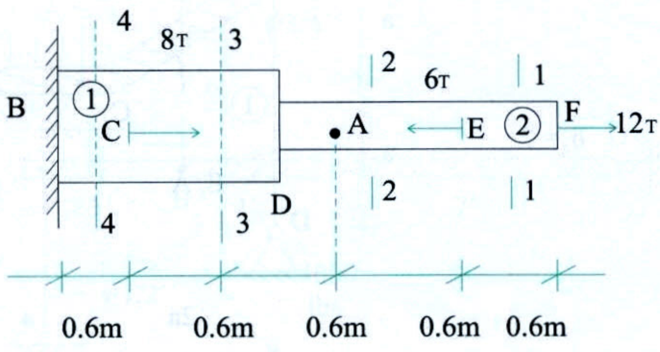
$$x = 8 \text{ pulg} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 55

Calcular:

1) La deformación total
2) El desplazamiento horizontal del punto A

$E = 10^6$ kg/cm²
$A1 = 36$ cm²
$A2 = 6.4$ cm²



Solución:

$\sigma_1 = 12/6.4 = 1875 \text{ kg/cm}^2 \ (\text{tracción})$

$\sigma_2 = 6/6.4 = 937.5 \text{ kg/cm}^2 \ (\text{tracción})$

$\sigma_3 = 6/36 = 166.67 \text{ kg/cm}^2 \ (\text{tracción})$

$\sigma_4 = 14/36 = 388.88 \text{ kg/cm}^2 \ (\text{tracción})$

1) $\delta_t = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \Sigma \sigma l / E$

$$\delta_t = \frac{1875(60) + 937.5(120) + 166.67(60) + 388.88(60)}{10^6}$$

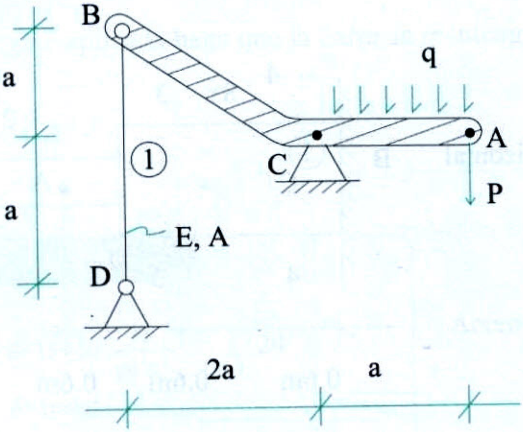
$\rightarrow \delta_t = 0.2583$ cm **Rpta.**

2) $\delta_A = \delta_4 + \delta_3 + \delta_{DA} = \dfrac{388.88(60) + 166.67(60) + 937.5(60)}{10^6}$

$\rightarrow \delta_A = 0.0895$ cm **Rpta.**

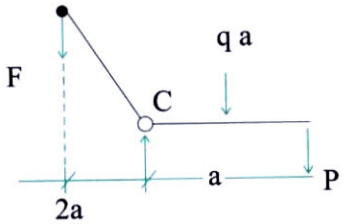
Problema 56

$\delta_A = ?$



Solución:

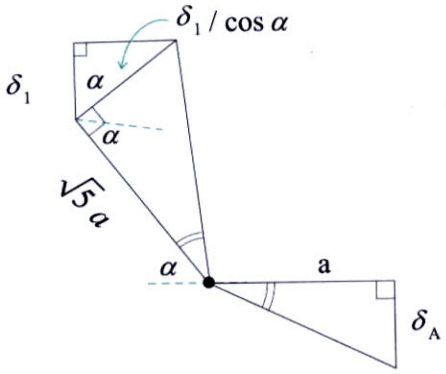
D.C.L.



$$\sum M_C = 0$$

$$F(2a) = Pa + q\frac{a^2}{2}$$

$$F = \frac{P}{2} + \frac{qa}{4}$$



$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{\delta_{V_A}}{\delta_1/\cos\alpha} = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{5}\,\cancel{a}} \; ---(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \left(\frac{P}{2} + \frac{qa}{4}\right)\frac{2a}{Ea} \\ \cos\alpha &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \text{en}(1)$$

$$\downarrow \delta_A = \frac{(2P + qa)a}{2EA.\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}.\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}(2P + qa)\frac{a}{EA}$$

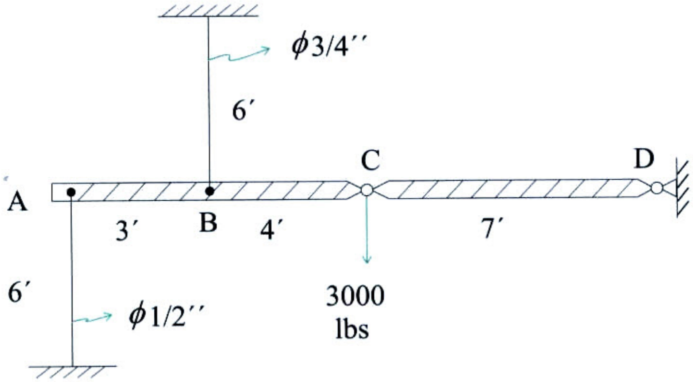
$$= \left(\frac{P}{2}a + \frac{qa^2}{4}\right)\frac{1}{EA} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 57

Calcular el desplazamiento vertical de "C".

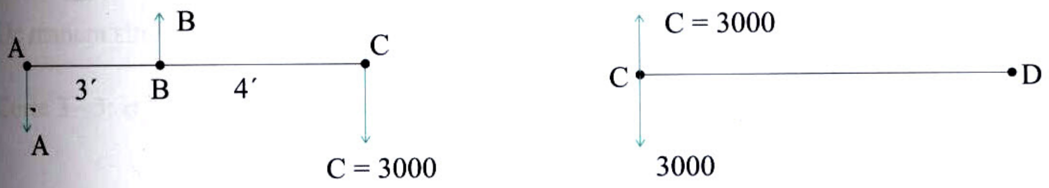
Ambas varillas:

$E = 30 \times 10^6 \ ^{lb}/_{pulg^2}$



Solución:

D.C.L.

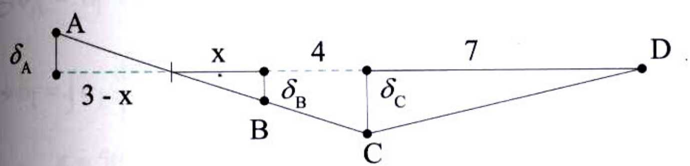


$$\sum M_A = 0 = 3000(7) - 3B$$

$\uparrow B = 7000$

$\downarrow A = 4000$

Deformaciones:



$$\delta_A = \frac{4000 \times 6 \times 12}{30 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.049''$$

$$\delta_B = \frac{7000 \times 6 \times 12}{30 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 0.038''$$

$$\sim \text{ de } \Delta_s : \frac{x}{0.038} = \frac{3 - x}{0.049} \rightarrow x = 1.31'$$

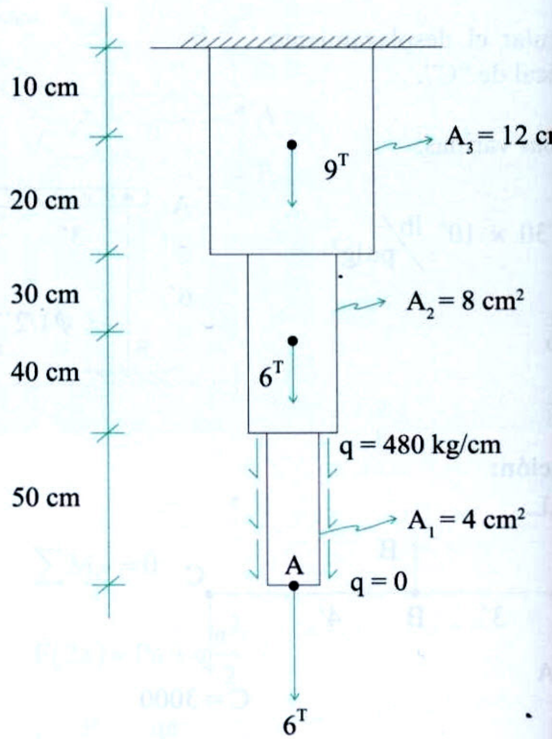
$$\sim \text{ de } \Delta_s : \frac{\delta_c}{5.31'} = \frac{0.038''}{1.31'}$$

$$\downarrow \delta_c = 0.154'' \ \boxed{\text{Rpta.}}$$

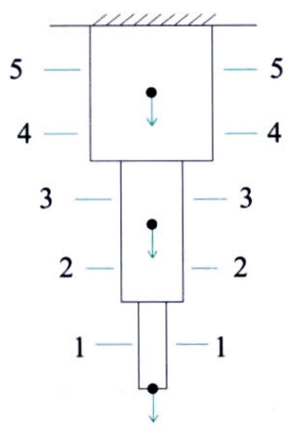
Problema 58

Hallar el desplazamiento del punto A.

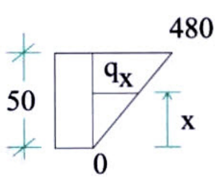
$E = 2 \times 10^5 \ ^{kg}/_{cm^2}$



Solución:



Carga distribuida



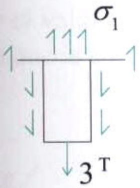
$\sim \Delta_s$:

$$\frac{q_x}{x} = \frac{480}{50} \rightarrow q_x = 9.6x$$

$F_x = \dfrac{1}{2}\ x\ (9.6x) = 4.8x^2 \rightarrow$ Fuerza a una altura x

Fuerza total: $4.8\ (50)^2 = 12\ 000$ kg

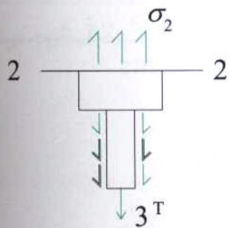
Corte 1-1:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow \sigma_1 A_1 - 3\,000 - 4.8x^2 = 0$$

$$\sigma_1 = 750 + 1.2\,x^2$$

Corte 2-2:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow \sigma_2 A_2 - 3\,000 - 12\,000 = 0$$

$$\sigma_2 = 1\,875 \ {}^{kg}\!/_{cm^2}$$ Rpta.

De manera similar se realizan los 3 cortes siguientes:

Corte 3 – 3: $\sigma_3\ A_2 - 3\,000 - 12\,000 - 6\,000 = 0 \rightarrow = \sigma_3 = 2\,625\ {}^{kg}\!/_{cm^2}$

Corte 4 – 4: $\sigma_4\ A_3 - 3\,000 - 12\,000 - 6\,000 = 0 \rightarrow \sigma_4 = 1\,750\ {}^{kg}\!/_{cm^2}$

Corte 5 – 5: $\sigma_5\ A_3 - 3\,000 - 12\,000 - 6\,000 - 9\,000 = 0 \rightarrow \sigma_5 = 2\,500\ {}^{kg}\!/_{cm^2}$

Los cinco esfuerzos serán de tracción; por lo tanto, las deformaciones serán alargamientos.

$$\therefore \delta_A = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \quad ---(1)$$

$$\downarrow \delta_1 = \int \sigma_1 \frac{dx}{E} = \int_0^{50} \left(750 + 1.2x^2\right)\frac{dx}{E} = 4.37 \text{ mm} \quad ---(2)$$

x = 50 x = 50

$$\downarrow \delta_2 = \frac{\sigma_2\ L_2}{E} = \frac{1\,875\ (40)}{2 \times 10^5} = 3.75 \text{ mm} \quad ---(3)$$

$$\downarrow \delta_3 = \frac{\sigma_3\ L_3}{E} = \frac{2\,625\ (30)}{2 \times 10^5} = 3.93 \text{ mm} \quad ---(4)$$

$$\downarrow \delta_4 = \frac{\sigma_4\ L_4}{E} = \frac{1\,750\ (20)}{2 \times 10^5} = 1.75 \text{ mm} \quad ---(5)$$

$$\downarrow \delta_5 = \frac{\sigma_5 \, L_5}{E} = \frac{2\,500\ (10)}{2\times10^5} = 1.25 \text{ mm} \quad ---(6)$$

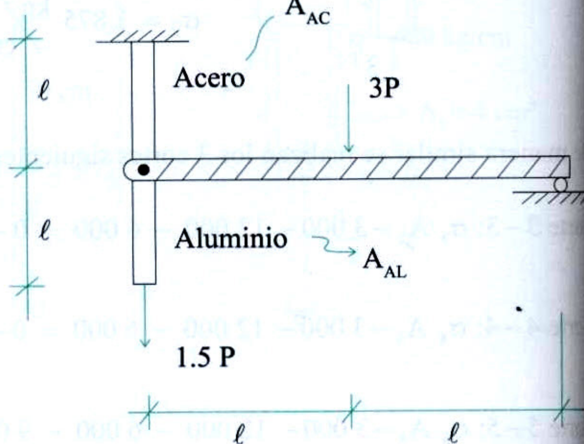
Reemplazando (2),(3),(4),(5) y (6) en (1):

$$\downarrow \delta_A = 15.05\text{mm} \quad \boxed{\textbf{Rpta.}}$$

Problema 59

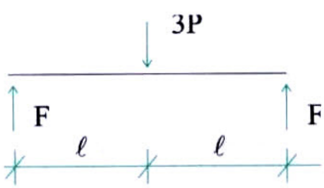
Hallar la relación del área de acero y la del aluminio si las longitudes se van a deformar igual.

$$E_{AC} = 3E_{AL}$$



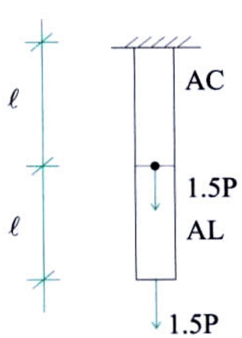
Solución:

D.C.L.



$$2F = 3P$$

$$F = 1.5P$$



$$\delta_{AL} = \frac{1.5\ P\ell}{A_{AL}\ E_{AL}} \quad ---(1)$$

$$\delta_{AC} = \frac{3\ P\ell}{A_{AC}\ E_{AC}} \quad ---(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\frac{1.5\ P}{A_{AL}} \frac{\ell}{E_{AL}} = \frac{3P\ell}{A_{AC}\ E_{AC}}$$

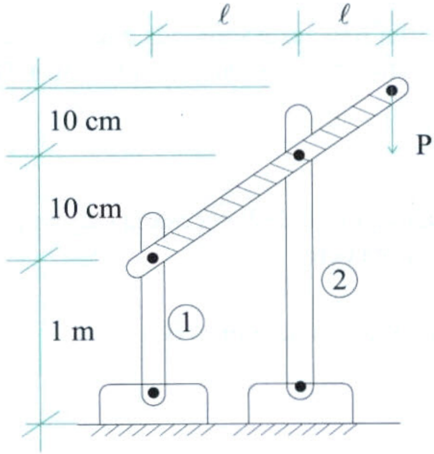
$$\frac{A_{AC}}{A_{AL}} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \quad \boxed{\textbf{Rpta.}}$$

Problema 60

Determinar el valor de P, de manera que la barra rígida quede en posición horizontal.

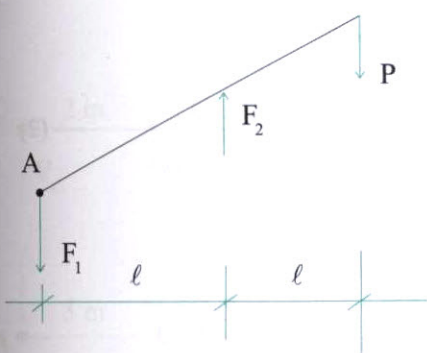
$E_1 = 10^6\ {}^{kg}\!/_{cm^2}$, $A_1 = 4\ cm^2$

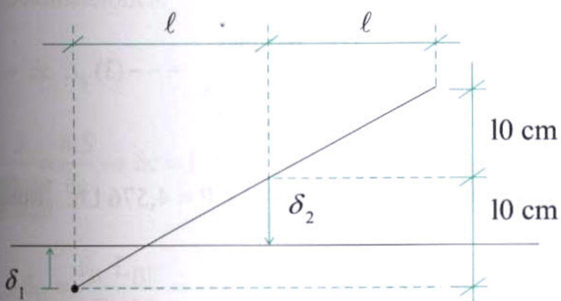
$E_2 = 2 \times 10^6\ {}^{kg}\!/_{cm^2}$, $A_2 = 3\ cm^2$



Solución:

D.C.L.





Por equilibrio:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_2 L = P(2L)$$

$$F_2 = 2P$$

$$\sum FV = 0 \rightarrow F_1 = P$$

Por deformaciones:

$$\delta_1 + \delta_2 = 10\ cm \ --- \ (1)$$

$$\frac{P \times 100}{10^6 \times 4} + \frac{2P \times 110}{2 \times 10^6 \times 3} = 10$$

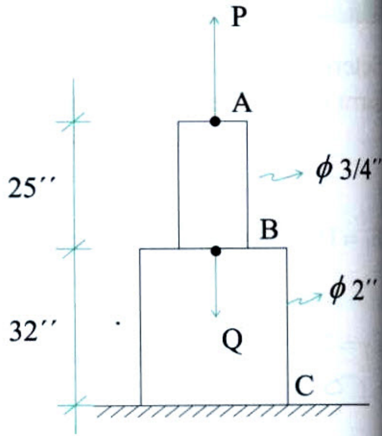
$$P \times 100 \times 3 + 4 \times 110P = 12 \times 10 \times 10^6$$

$$300P + 440P = 12 \times 10^7$$

$$P = \frac{12 \times 10^7}{740} = 162\ 162\ kg \quad \text{Rpta.}$$

Problema 61

La varilla ABC está sometida a una carga $Q = 30\ 000$ lb y una carga P si $E = 30 \times 10^6$ lb/ pulg^2.



Hallar:

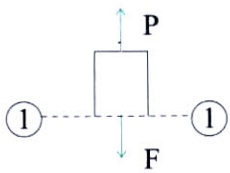
a) La magnitud de P necesaria para que la deflexión de A sea cero.

b) La deflexión del punto B.

Solución:

a) $\delta_A = 0 = \delta_{AB} + \delta_{BC}$ ---(1)

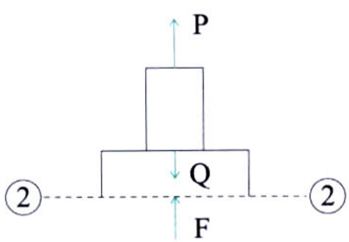
Corte 1-1:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow F = P$$

$$\delta_{AB} = \frac{P\,(25'')}{E\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ pulg}^2} \quad ---(2)$$

Corte 2-2:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow F + P = Q$$

$$F = Q - P$$

$$\delta_{BC} = \frac{(Q-P)(32'')}{E\,\frac{\pi}{4}(2'')^2 \text{ pulg}^2} \quad ---(3)$$

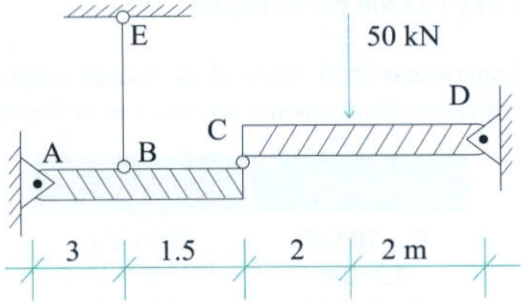
Ecuaciones (2) y (3) en (1): $P = 4{,}576$ Lb. **Rpta.**

b) $\delta_B = \delta_{BC}$, de la ecuación (3)

$$\delta_{BC} = \frac{(30\ 000 - 4\ 576)\ \text{lb} \times 32''}{3 \times 10^7 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\pi}{4}(2'')^2 \text{ pulg}^2} = -8.63 \times 10^{-3} \text{ pulg.}$$ **Rpta.**

Problema 62

Dos barras que se suponen absolutamente rígidas están articuladas en A y en D, y separadas en C mediante un rodillo.



En B una varilla de acero ayuda a soportar la carga de 50 kN. Hallar el desplazamiento vertical del rodillo situado en C.

Varilla:

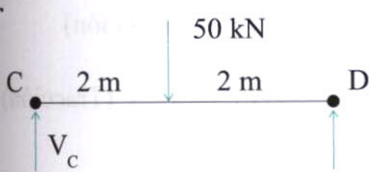
$L = 3\text{m}$

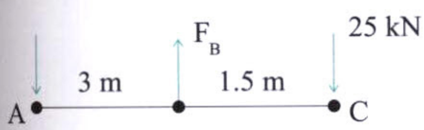
$A = 300\ \text{mm}^2$

$E = 200 \times 10^9\ \text{N}/\text{m}^2$

Solución:

D.C.L.





$$\sum M_D = 0$$

$$V_C \times (4) - 50\,(2) = 0 \rightarrow V_C = 25\ \text{kN}$$

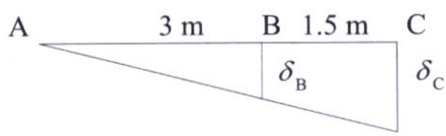
$$\sum M_A = 0$$

$$F_B(3) - 25\,(4.5) = 0$$

$$F_B = 37.5\ \text{kN}$$

Deformaciones:

~ de Δ_S :



$$\frac{3}{\delta_B} = \frac{4.5}{\delta c} \rightarrow \delta c = 1.5\ \delta_B \quad ---(1)$$

$$\downarrow \delta_B = \frac{F_B\ L_{BE}}{E\ A} = \frac{37.5 \times 10^3\ \text{N} \times 3\,000\ \text{mm}}{200 \times 10^9\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\ 300\ \text{mm}^2 \times \dfrac{1\text{m}^2}{10^6\,\text{mm}^2}} \quad \text{en (1)}$$

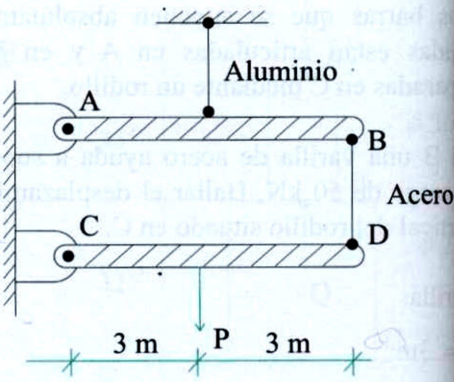
$\downarrow \delta_C = 2.81\ \text{mm}$ $\boxed{\text{Rpta.}}$

Problema 63

AB y CD son barras rígidas.

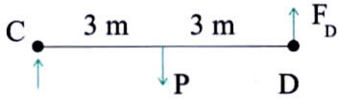
Determinar P Máximo si las barras pueden moverse verticalmente un máximo de 5 mm.

Aluminio	Acero
E = 70 GPa	200 GPa
L = 2m	2m
A = 500 M²	300 m²



Solución:

D.C.L. CD:



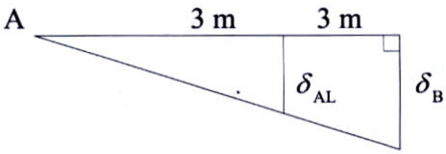
$$\sum M_C = 0$$

$$F_D(6)=P(3)$$

$$F_D = \frac{P}{2} \text{ (Tracción)}$$

$$\therefore F_{aluminio} = P \text{ (Tracción)}$$

Deformaciones



$$\frac{\delta_{AL}}{3} = \frac{\delta_B}{6}$$

$$\delta_B = 2\delta_{AL} = \frac{2 \times P \times 2 \times 10^3}{70 \times 10^9 \times \dfrac{1}{10^6} \times 500} = \frac{4P}{35\,000} \text{ (mm)}$$

$$\delta_{acero} = \frac{P}{2} \times 2 \times 10^3 . \frac{1}{2 \times 10^2 \times 10^9 . \dfrac{1}{10^6} .300} = \frac{P}{60\,000} \text{ (mm)}$$

$$\delta_B + \delta_{acero} \leq 5\text{mm}$$

$$\frac{4P}{35\,000} + \frac{P}{60\,000} = 5$$

$$\frac{48P + 7P}{420} = 5\,000$$

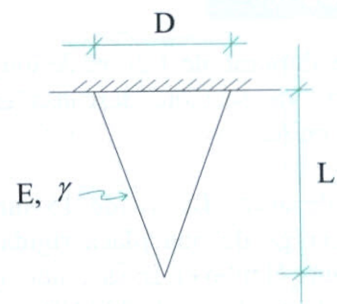
$$P = 2\,100\,000$$

$$P = 38\,181.8\text{N}$$

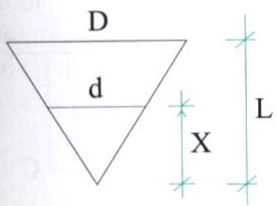
$$P = 38.18 \text{ kN}$$ **Rpta.**

Problema 64

Determinar el alargamiento de la barra cónica debido a su peso propio.



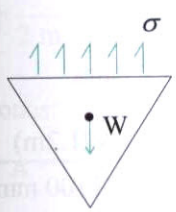
Solución:



$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{x}{\frac{d}{2}} = \frac{L}{\frac{D}{2}}$$

$$d = \frac{XD}{L}$$



$$\Sigma F_V = 0 \qquad \sigma_A = W = \gamma\ V$$

$$\sigma \frac{\pi d^2}{4} = \gamma\ V$$

$$\sigma \frac{\pi}{4}\ \frac{X^2\ D^2}{L^2} = \gamma\ \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2\ \frac{x}{3}$$

$$\sigma \frac{\pi}{4}\ \frac{X^2\ D^2}{L^2} = \gamma\ \frac{\pi}{4}\ \frac{X^2\ D^2}{L^2}\ \frac{x}{3}$$

$$\sigma = \gamma\ \frac{x}{3}$$

$$\downarrow \delta = \int_{x=0}^{L} \sigma \frac{dx}{E} = \frac{1}{E}\ \frac{\gamma}{3} \int_{x=0}^{L} x dx = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\gamma L^2}{6E} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

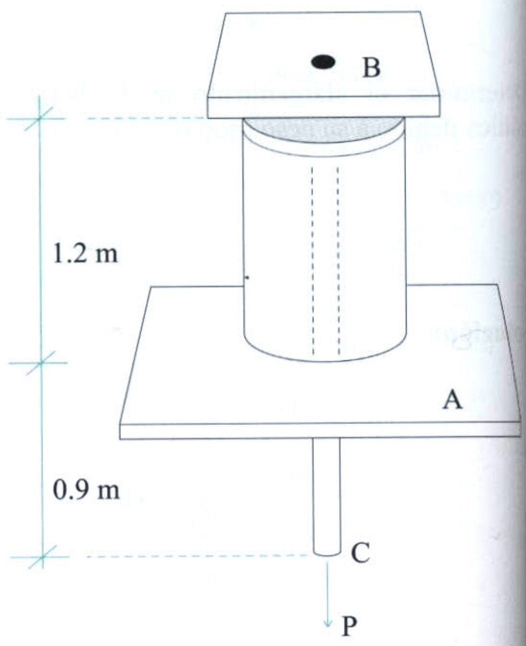
Problema 65

Un tubo de aluminio de 1.20 m de longitud y 1100 mm² de sección, descansa en un soporte fijo en A.

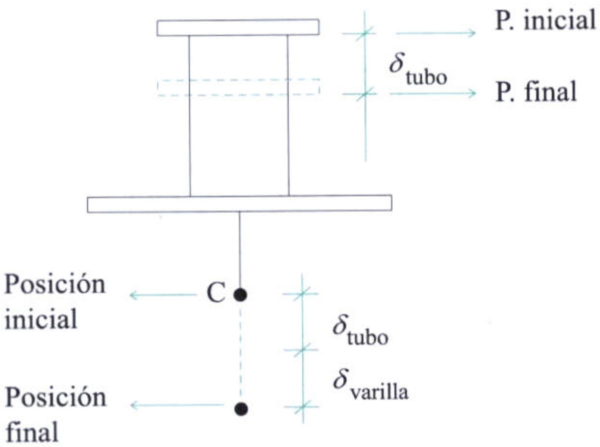
La varilla de acero BC es de 15 mm de diámetro, cuelga de una placa rígida que descansa sobre el tubo en B, sabiendo que el módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio.

Hallar la deflexión de C cuando:

P= 60 kN.



Solución:



$$\delta_c = \delta_{tubo} + \delta_{varilla}$$

$$\delta_{tubo} = \frac{60 \text{ kN } (1.2\text{m})}{70 \text{ GPa } (1100 \text{ mm}^2)}$$

$$\downarrow \delta_{tubo} = 0.935 \text{ mm}$$

$$\delta_{varilla} = \frac{60 \text{ kN } (1.2 + 0.9)\text{m}}{200 \text{ GPa } \frac{\pi}{4} \, (15 \text{ mm})^2}$$

$$\downarrow \delta_{varilla} = 3.565 \text{ mm}$$

$$\therefore \ \delta_c = 0.935 \text{ mm} + 3.565 \text{ mm}$$

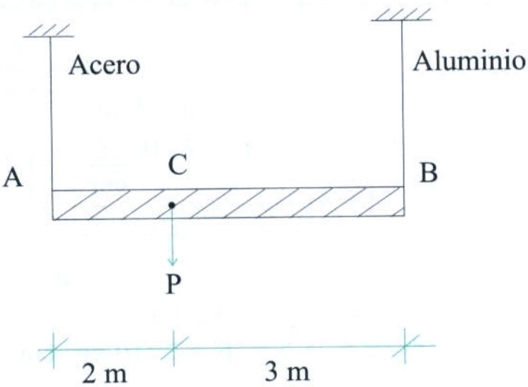
$$\downarrow \delta_c = 4.5 \text{ mm} \ \text{Rpta.}$$

Problema 66

La barra rígida está en posición horizontal antes de aplicar la carga.

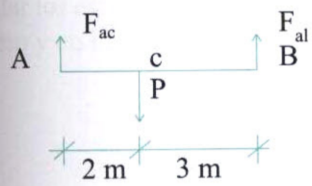
P. Si P = 50 kN

Determine el movimiento vertical del punto C.



Acero	Aluminio
L = 3 m	4 m
A = 300 m²	500 m²
E = 200 GPa	70 GPa

Solución:

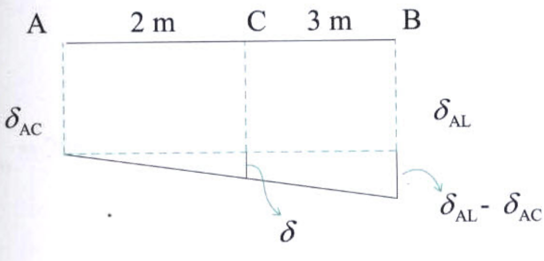


$$\sum F_V = 0 \rightarrow Fac + Fal = P = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow Fal\,(5) - P(2) = 0,\ \ Fal = \frac{2}{5}\,P = 20 \text{ kN}$$

$$\therefore\ F_{AC} = 30\,\text{kN}$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ_S:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\delta_{AL} - \delta_{AC}}{5}$$

$$\delta = \frac{2}{5}\left(\delta_{AL} - \delta_{AC}\right)$$

$$\delta_{AC} = \frac{F_{AC}\ L_{AC}}{E_{AC}\ A_{AC}} = \frac{30 \text{ kN} \times 3\text{m}}{200 \text{ GPa } 300 \text{ mm}^2} \times \frac{10^3 \text{ N}}{1 \text{ kN}} \times \frac{1\text{GPa}}{10^9\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}} \times \frac{10^9 \text{ mm}^3}{1 \text{ m}^3} = 1.5 \text{ mm}$$

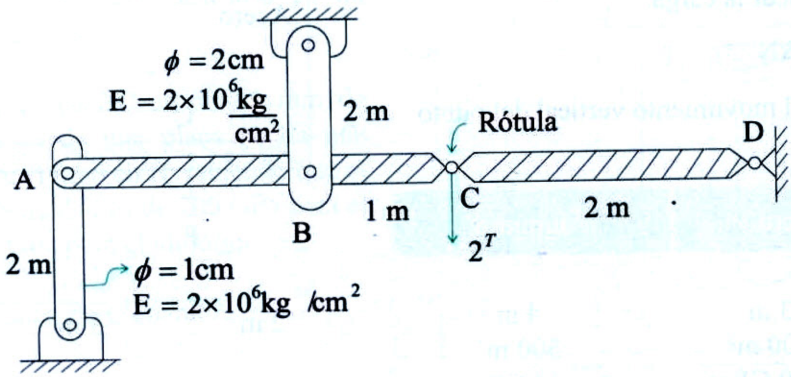
$$\delta_{AL} = \frac{F_{AL}\ L_{AL}}{E_{AL}\ A_{AL}} = \frac{20 \text{ kN} \times 4 \text{ m}}{70 \text{ GPa } 500 \text{ mm}^2} \times 10^3 = \frac{2 \times 4 \times 10}{7 \times 5} = \frac{16}{7} = 2.28 \text{ mm}$$

$$\delta = \frac{2}{5}\left(2.28 - 1.5\right) = 0.312 \text{ mm}$$

$$\downarrow \delta_c = \delta + \delta_{AC} = 1.812 \text{ mm} \ \ \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 67

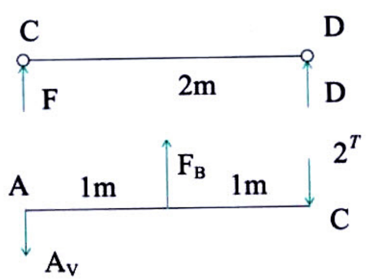
Determinar el desplazamiento vertical de la rótula en C.



Solución:

D.C.L.

$\sum M_D = 0 \rightarrow$ F= 0 =D



$\sum M_A = 0$

$2^T(2) = F_B(1)$

$F_B = 4$ Toneladas

$\sum F_V = 0$

$A_V = 2\text{ T}$

$\delta V_A = \dfrac{PL}{EA} = 0.2546\text{ cm}$

P= 2 000 kg

L= 200 cm

E= $2\times10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$

$A = \dfrac{\pi}{4}(1)^2\text{ cm}^2$

$\delta V_B = \dfrac{PL}{EA} = 0.1273\text{ cm}$

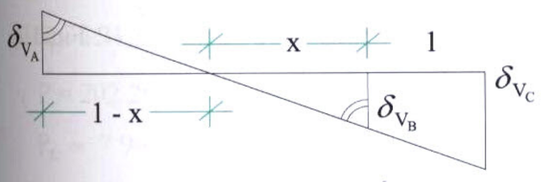
P= 4 000 kg

L= 200 cm

E= $2\times10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$

$A = \dfrac{\pi}{4}(2)^2\text{ cm}^2$

Gráfico de deformaciones:



$\sim \Delta_s$:

$$\frac{\delta V_B}{x} = \frac{\delta V_C}{x+1} \quad \downarrow \delta_{V_C} = 0.5092\ \text{cm} \quad \text{Rpta.}$$

$\sim \Delta_s$:

$$\frac{\delta V_B}{\delta V_A} = \frac{x}{1-x} = \frac{0,1273}{0.2546}$$

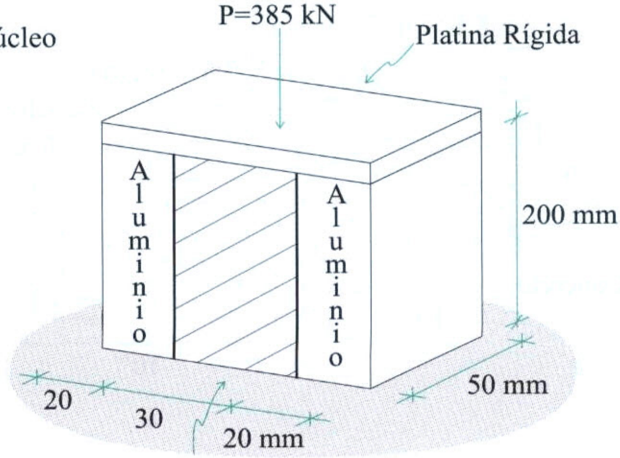
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2} \qquad 2x = 1-x$$

$$x = \tfrac{1}{3}\ \text{m}$$

$$1 - x = \tfrac{2}{3}\ \text{m}$$

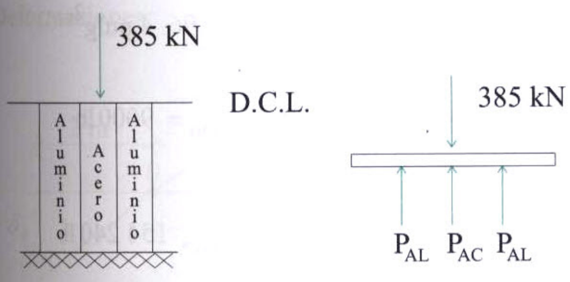
Problema 68

Calcular los esfuerzos normales en el núcleo de acero y en las placas de aluminio.



$E_{aluminio} = 70\text{GPa}$

Solución:

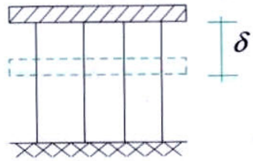


$$\sum F_V = 0;\ 2P_{AL} + P_{AC} = 385\,\text{kN} \quad ---(1)$$

$$\delta_{aluminio} = \delta_{varilla}$$

$$\frac{P_{AL}\,\ell}{E_{AL}\ A_{AL}} = \frac{P_{AC}\,\ell}{E_{AC}\ A_{AC}}$$

$$P_{AL} = P_{AC} \times \frac{70\,(20\times 50)}{200\,(30\times 50)} = \frac{7}{30}\; P_{AC} \text{ en } (1)$$



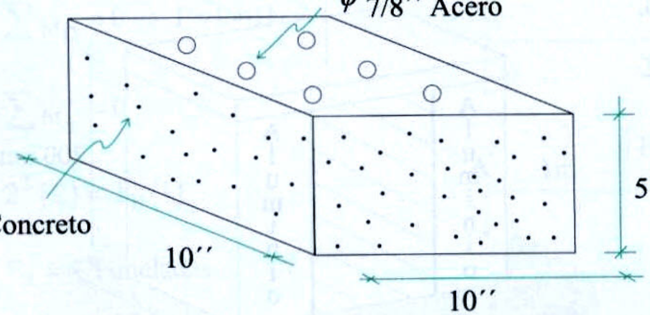
$$P_{AC} = 262.5\text{ kN},\; P_{AL} = 61.25\text{ kN}$$

$$\sigma_{ACERO}\;\frac{262.5\text{ kN}}{30\times 50\text{ mm}^2}\times\frac{10^3}{1\text{ kN}}\times\frac{10^6\text{ mm}^2}{1\text{ m}^2} = 175\text{ MPa (compresión)}$$ **Rpta.**

$$\sigma_{ALUMINIO} = \frac{61.\,25\text{ kN}}{20\times 50\text{ mm}^2} <> 61.\,3\text{ MPa (compresión)}$$ **Rpta.**

Problema 69

Hallar la carga axial máxima (P) que puede aplicarse si:



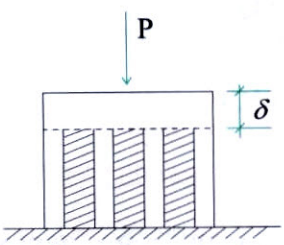
$$\sigma_{acero} = 15\times 10^3\;\text{lb/pulg}^2$$

$$\sigma_{concreto} = 1\,600\;\text{lb/pulg}^2$$

$$E_{AC} = 30\times 10^6\;\text{lb/pulg}^2$$

$$E_{CO} = 3.6\times 10^6\;\text{lb/pulg}^2$$

Solución :



$P_1 \to$ Carga que recibe el concreto

$6\,P_2 \to$ Carga que recibe el acero

$$(1\phi)\; A_{AC} = \frac{\pi}{4}(7/8'')^2 = 0.6\text{ pulg}^2$$

$$(6\phi) \to 3.\,6\text{ pulg}^2 = A_{AC}$$

$$A_{CO} = (10'')^2 - A_{AC} = 96.\,4\text{ pulg}^2$$

$$\sigma_{AC} = \frac{6\,P_2}{A_{AC}} \to P_{2\text{ máximo}} = 9000\text{ lb}$$

$$\sigma_{CO} = \frac{P_1}{A_{CO}} \to P_{1\text{ máximo}} = 154\,240\text{ lb}$$

Por equilibrio: $P = P_1 + 6P_2$ --- (1)

Si $P_1 = 154\,240$ lb

$\therefore P = 202\,209$ lb

$P_2 = 7\,999 \text{ lb} < P_2$ Máximo

Si $P_2 = 9\,000$ lb

$\therefore P = 227\,520$ lb

y $P_1 = 173\,547 \text{ lb} > P_1$ Máximo se descarta

$\therefore P = 202\,209$ lb Rpta.

Deformaciones:

$\delta_{CO} = \delta_{acero}$

$$\frac{P_1\,\ell}{E_{CO}\,A_{CO}} = \frac{P_2\,\ell}{E_{AC}\,A_{AC}}$$

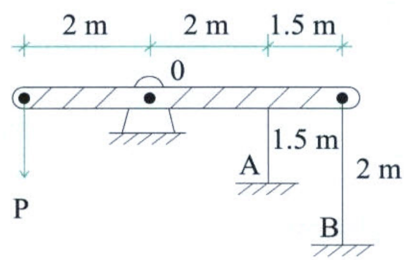
$P_1 = 19.28\,P_2$ ---(2) en (1):

$P = 25.28\,P_2$

$P = 1.311\,P_2$

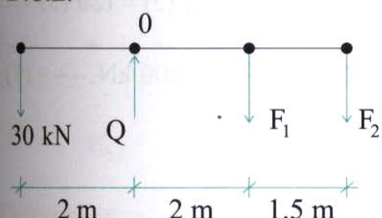
Problema 70

Una viga rígida de peso despreciable está articulada en O y sujeta mediante dos varillas de igual E, A. Determinar la carga en cada varilla si P = 30 kN.



Solución:

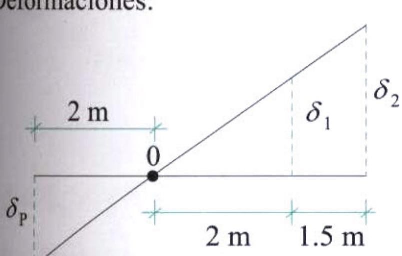
D.C.L.



$$\sum M_0 = 0$$

$$30\,(2) = F_1\,(2) + F_2\,(3.5) \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$$\sim \Delta_s:\ \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_2}{3.5}$$

$$\delta_1 = \frac{2}{3.5}\,\delta_2$$

$$\frac{F_1\,(1.5)}{EA} = \frac{2}{3.5}\,F_2\,\frac{(2)}{EA}$$

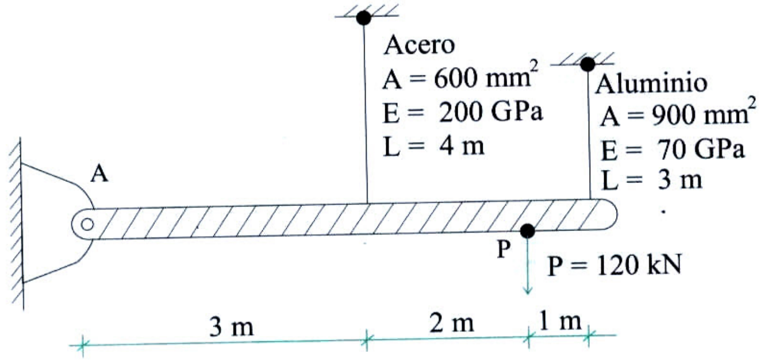
$F_1 = 0.76\,F_2$ en (1):

$F_2 = 11.95$ kN Rpta.

$F_1 = 9.08$ kN Rpta.

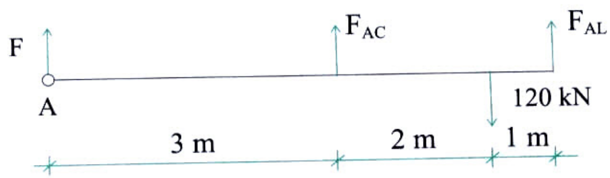
Problema 71

Hallar el desplazamiento vertical del punto P.

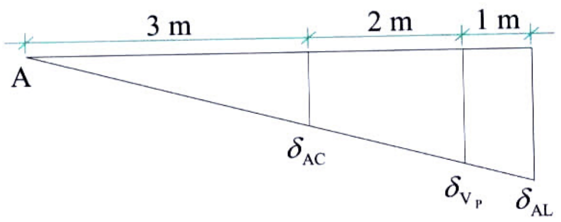


Solución:

D.C.L.:



Desplazamientos:



$$\sum M_A = 0$$

$$+ F_{AL}\ (6) = F_{AC}(3) = 120\ (5)$$

$$2\ F_{AL} + F_{AC} = 200\ \text{kN} \quad ---(1)$$

$$(2)---- \begin{cases} \delta_{AC} = \dfrac{1}{30} F_{AC} = \dfrac{F_{AC} \times 4 \times 10^{3}\,\text{mm}\,(10^{3}\ \text{N}/\text{kN})}{200 \times 10^{9}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 600\ \text{mm}^2 \times \dfrac{1\text{m}^2}{10^6\,\text{mm}^2}} \\ \\ \delta_{AL} = \dfrac{1}{21}\ F_{AL} \end{cases}$$

$$\sim \text{de}\ \Delta_s : \ \frac{\delta_{AL}}{\delta_{AC}} = \frac{6}{3} = 2 \ \rightarrow \ \delta_{AL} = 2\ \delta_{AC} \quad ---(3)$$

Reemplazando (2) en (3)

$$\frac{1}{21}F_{AL} = 2 \times \frac{1}{30}F_{AC}$$

$$F_{AL}\frac{21}{15} = F_{AC} \text{ en (1):}$$

$$\frac{42}{15}F_{AC} + F_{AC} = 200 \text{ kN} \rightarrow F_{AC} = 52.63 \text{ kN} \rightarrow \text{en (2);}$$

$$\delta_{AC} = 1.75 \text{ mm}$$

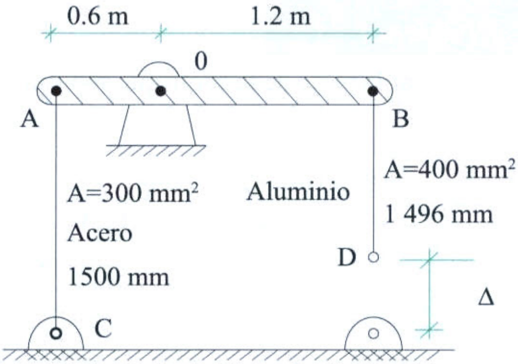
$$F_{AL} = 73.68 \text{ kN}$$

$\sim$ en $\Delta_{s:}$

$$\frac{\delta_{VP}}{5} = \frac{\delta_{AC}}{3} \rightarrow \delta_{VP} = \frac{5}{3}(1.75 \text{ mm}) = 2.92 \text{ mm} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 72

La barra rígida AB de peso despreciable está articulada en 0 y fija a las varillas de aluminio y de acero. Hay un claro Δ = 4 mm entre la punta inferior de la varilla de aluminio y su articulación en D.

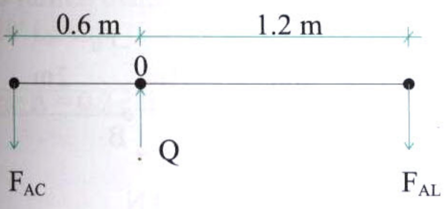


Calcular el esfuerzo en la varilla de acero, cuando la punta inferior de la varilla de aluminio se articula en el apoyo D.

E_{AC}= 200 GPa

E_{AL}= 70 GPa

Solución:

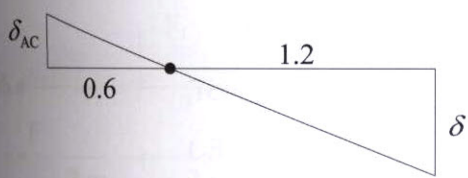


$$\sum M_0 = 0$$

$$F_{AL}(1.2) = F_{AC}(0,6)$$

$$F_{AC} = 2F_{AL} \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$$\sim \text{ de } \Delta_s: \frac{\delta}{1,2} = \frac{\delta_{AC}}{0,6}; \ \delta = 2\delta_{AC}$$

$$\Delta = \delta_D = \delta + \delta \text{ aluminio} = 2\delta_{AC} + \delta_{ALUMINIO} \quad ---(2)$$

δ = Descenso del punto B debido a la deformación del acero.

$$\delta_{ALUMINIO} = \frac{F_{AL} \times 1\,496 \text{ mm}}{70 \text{ GPa} \times 400 \text{ m}^2} \quad ---(3)$$

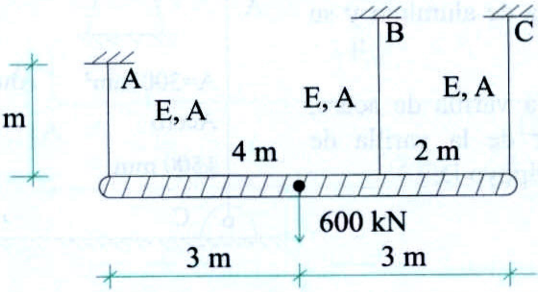
$$\delta_{AC} = \frac{F_{AC} \times 1\,500 \text{ mm}}{200 \text{ GPa} \times 300 \text{ m}^2} \quad ---(4)$$

Reemplazando (1), (3) y (4) en (2): $F_{AC} = 52\,141\text{N}$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{52\,141\text{N}}{300 \text{ mm}^2} < \; > 174 \text{ MPa}$$ **Rpta.**

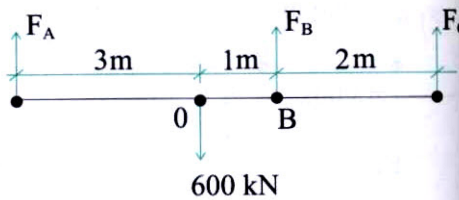
Problema 73

Determinar la parte de la carga que soporta cada varilla.



Solución:

Equilibrio de la barra:

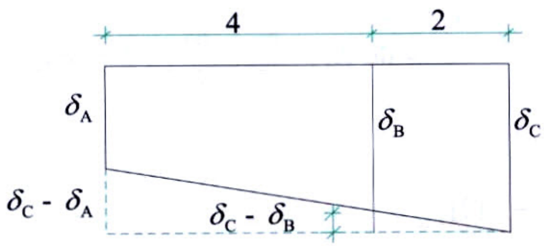


$$\sum M_B = 0$$

$$F_A\ (4) = 600 + 2\ F_C \}$$

$$F_A = 150 + 0.5\ F_C \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$$\sum M_0 = 0$$

$$3\ F_A = F_B + 3F_C$$

$$F_B = 3(F_A - F_C)$$

$$F_B = 3(150 - 0.5\ F_C)$$

$$F_B = 450 - 1.5\ F_C \quad ---(2)$$

$\sim \Delta_s$:

$$\frac{\delta_C - \delta_B}{2} = \frac{\delta_C - \delta_A}{6}$$

$$\delta_C - \delta_B = \frac{1}{3}\delta_C - \frac{1}{3}\delta_a$$

$$\frac{2}{3}\delta_C + \frac{1}{3}\delta_A = \delta_B \quad --- (3)$$

De (3):

$$\frac{2}{3}\frac{F_C\,\ell_C}{EA} + \frac{1}{3}\frac{F_A\,\ell_A}{EA} = \frac{F_B\,\ell_B}{EA} \quad --- (4)$$

Reemplanzando (1) y (2) en (4):

$$\frac{2}{3} \times 6 \times F_C + \frac{1}{3} \times 5 \times (150 + 0.5\,F_C) = (450 - 1.5F_C)\,6$$

$$4\,F_C + 250 + 0.83\,F_C = 2\,700 - 9\,F_C$$

$$13.83\,F_C = 2\,450$$

$F_C = 177.15$ kN

$F_B = 184.28$ kN

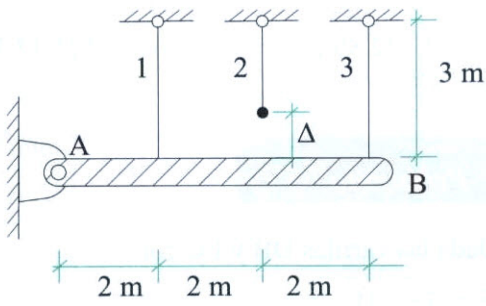
$F_A = 238.58$ kN **Rpta.**

Problema 74

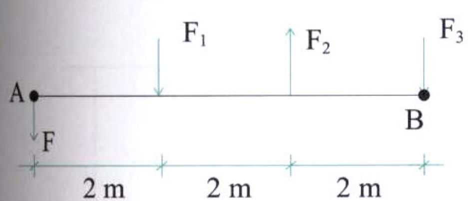
Hallar el esfuerzo en las varillas 1,2 y 3 cuando se une al extremo inferior de la varilla 2 a la barra rígida.

Todas las varillas tienen $A = 2\text{cm}^2$,
$E = 2 \times 10^6$ kg/cm^2

Considerar $\Delta = 0.2$ cm



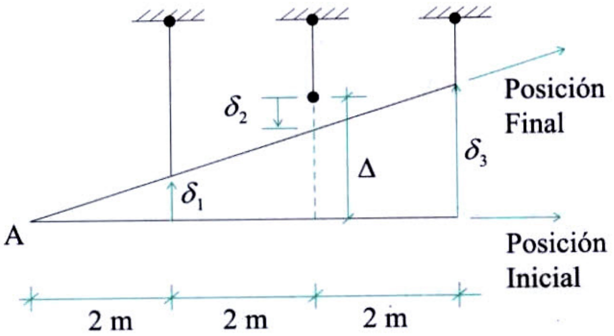
Solución:



$$\sum M_A = 0$$

$$F_2(4) - F_1(2) - F_3(6) = 0 \quad --- (1)$$

Deformaciones



$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{\Delta-\delta_2}{4}=\frac{\delta_1}{2}$$

$$\Delta-\delta_2=2\delta_1$$

$$0.2-\frac{F_2 \times 299.8}{2 \times 10^6 \times 2} = \frac{2F_1\ 300}{2 \times 10^6 \times 2} \text{ --- (2)}$$

En el gráfico se cumple:

$$\frac{\delta_1+\delta_3}{2}=\Delta-\delta_2$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{(F_1+F_3)\ 300}{2 \times 10^6 \times 2} = 0.2-\frac{F_2 \times 299.8}{2 \times 10^6 \times 2} \text{ --- (3)}$$

Resolviendo (1), (2) y (3):

$F_1 = 380.95$ kg $\qquad \sigma_1 = 190.47$ kg/ cm^2

$F_2 = 1\,904.75$ kg $\qquad \sigma_2 = 952.38$ kg / cm^2

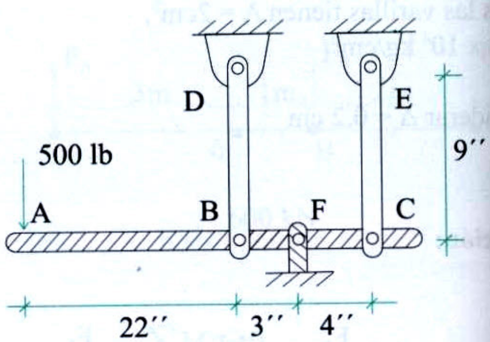
$F_3 = 1\,142.85$ kg $\qquad \sigma_3 = 571.42$ kg / cm^2 **Rpta.**

Problema 75

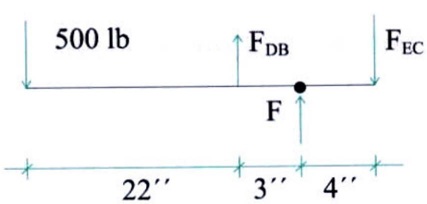
Dada las varillas DB y EC con:

$E = 15 \times 10^6$ lb/pulg^2

$A = 0.35$ pulg^2



Solución:



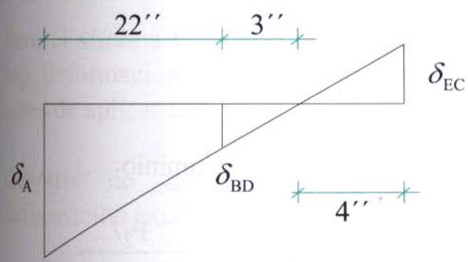
Por estática

$$\Sigma M_F = 0$$

$$-500 \text{ lb } (25") + F_{DB}\ (3") + F_{EC}(4") = 0$$

$$12500 = 3F_{DB} + 4F_{EC} \text{ --- (1)}$$

Deformaciones:



N de Δ_s :

$$\frac{\delta_A}{25} = \frac{\delta_{BD}}{3}$$

$$\delta_A = \frac{25}{3} \text{ x } \frac{1\,500 \text{ x } 9''}{15 \text{ x } 10^6 \text{ x } 0.35}$$

$$\delta_A = 0.021 \text{ pulg}$$

~ de Δ_s :

$$\frac{\delta_{BD}}{3} = \frac{\delta_{EC}}{4}$$

$$\frac{F_{DB} \text{ x } 9''}{15 \text{ x } 10^6 \text{ x } 0.35} = \frac{F_{EC} \text{ x } 9''}{EA} \text{ x } \frac{3}{4}$$

$$F_{DB} = \frac{3}{4} F_{EC} \quad \text{en} \quad (1):$$

$$12\,500 = \left(\frac{9}{4} + 4\right) F_{EC}$$

$$F_{EC} = 2\,000 \text{ lb}$$

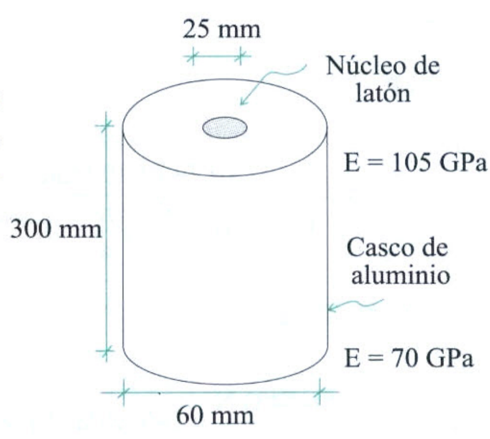
$$F_{DB} = 1\,500 \text{ lb}$$

Problema 76

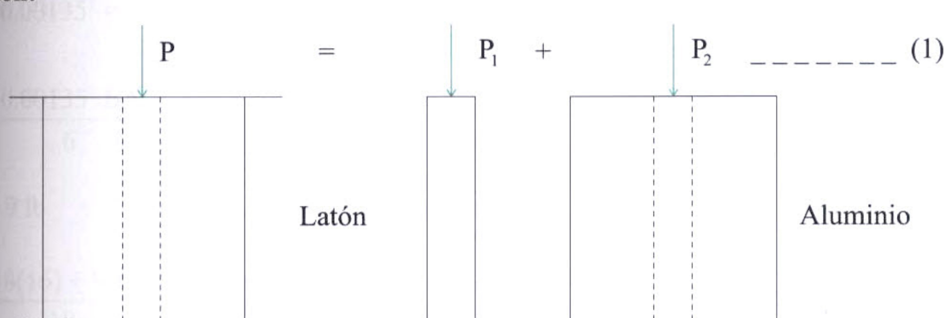
La longitud del conjunto mostrado disminuye en 0.40 mm cuando se le aplica una fuerza axial, por medio de placas rígidas en los extremos. Hallar:

a) La magnitud de la fuerza aplicada.

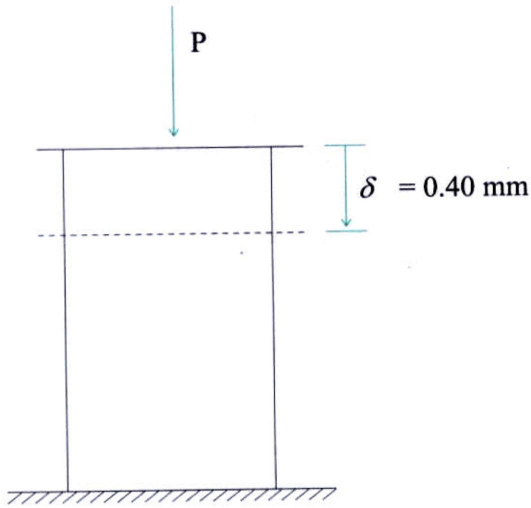
b) El esfuerzo correspondiente en el núcleo de latón.



Solución:



Deformaciones



$\delta Laton = \delta Aluminio$

$$\frac{P_1 \ell}{E_{LA} A_{LA}} = \frac{P_2 \ell}{E_{AL} A_{AL}}$$

$$P_1 = \frac{105\left[\pi(25)^2/4\right]P_2}{70\frac{\pi}{4}\left[(60)^2 - (25)^2\right]}$$

$P_1 = 0.315P_2$ --- (2) en (1) :

$P_1 = 0.24\ P$

$P_2 = 0.76\ P$

$$\delta_{\text{Latón}} = 0.40\ \text{mm} = \frac{(0.24\ P)\ 300\ \text{mm}}{105 \times 10^9\ \frac{N}{m^2} \times \frac{\pi}{4}(0.025)^2\ m^2}$$

$P = 286\ 343$ N **Rpta.**

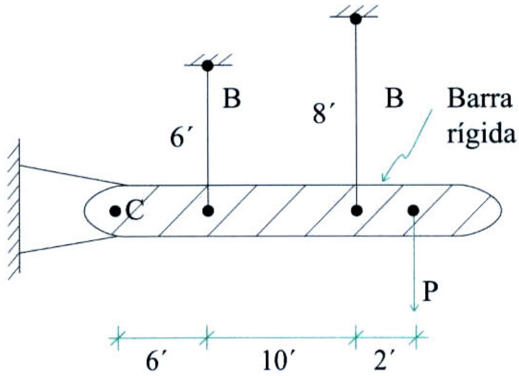
$$\sigma\text{Latón} = \frac{0.24\ (286\ 343)\ N}{\frac{\pi}{4}(0.025)^2\ m^2} = 140\ \text{MPa}$$ **Rpta.**

Problema 77

Para el sistema mostrado en la figura no hay deformación en las barras verticales antes de aplicar la carga P.

Después de aplicar la carga P, la deformación axial en la barra A es 0.0036′.

Determinar la deformación axial que se produce en la barra B y el valor de la fuerza P.

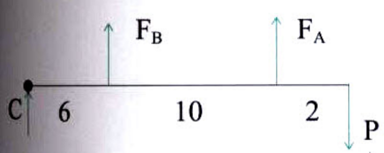


Varillas A y B: $A = 0.4 \text{pie}^2$

$E = 10^5 \text{ lb / pulg}^2$

Solución:

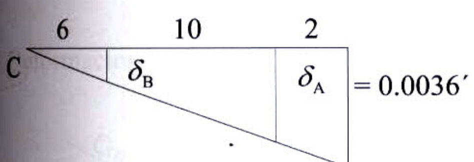
Por equilibrio:



$\Sigma M_C = 0$

$P(18) = F_A(16) + F_B(6) \quad --- \ (1)$

Deformaciones:



N de Δ_S :

$$\frac{0.0036'}{16} = \frac{\delta_B}{6} \qquad \delta_B = 0.00135' \ \text{Rpta.}$$

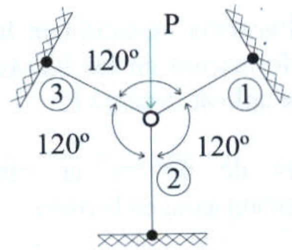
$$\delta_B = 0.00135' = \frac{F_B\ 6'}{EA} \quad , \quad \delta_A = 0.0036' = \frac{F_A\, 8'}{EA}$$

$$F_B = \frac{0.00135\ \ EA}{6} \quad , \quad F_A = \frac{0.0036\ \ EA}{8}$$

$F_B = 9 \text{ lb}$, $F_A = 18 \text{ lb}$ en (1)

$$P = \frac{18(16) + 9(6)}{18} = 19 \text{ lb} \ \text{Rpta.}$$

Problema 78



Determinar el esfuerzo normal en cada varilla y el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga.

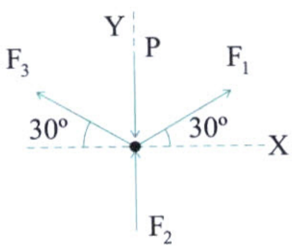
$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$

$E_1 = E_2 = E_3 = E$

$A_1 = A_2 = A_3 = A$

Solución:

Diagrama de cuerpo libre:

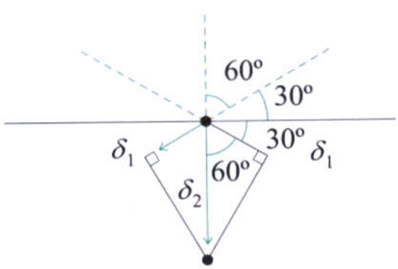


$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 = F_3$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2F_1 \text{ Sen } 30° + F_2 = P$

$F_1 + F_2 = P --- (1)$

Deformaciones:



$\delta_2 \cos 60° = \delta_1$

$\delta_2 = 2\delta_1$

$$\frac{F_2\ell}{EA} = \frac{2F_1\ell}{EA}$$

$F_2 = 2F_1 --- (2)$ en (1):

$3F_1 = P \rightarrow F_1 = P/3$ En (1):

$$F_2 = \frac{2}{3}P$$

$\therefore \sigma_1 = \sigma_3 = P/3A$ (Tracción) Rpta.

$\sigma_2 = \dfrac{2P}{3A}$ (Compresión) Rpta.

$\delta_V = \delta_2 = \dfrac{2\,P\ell}{3\,EA}$ Rpta.

Problema 79

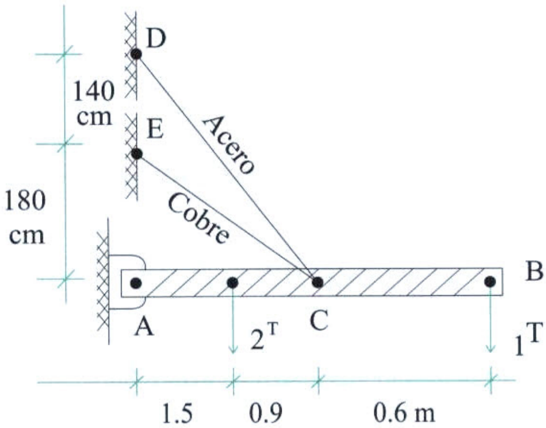
Determinar el esfuerzo en cada cable y la desviación vertical del punto ´B´

$E_{acero} = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$

$E_{cobre} = 0.7 \times 10^6 \ kg/cm^2$

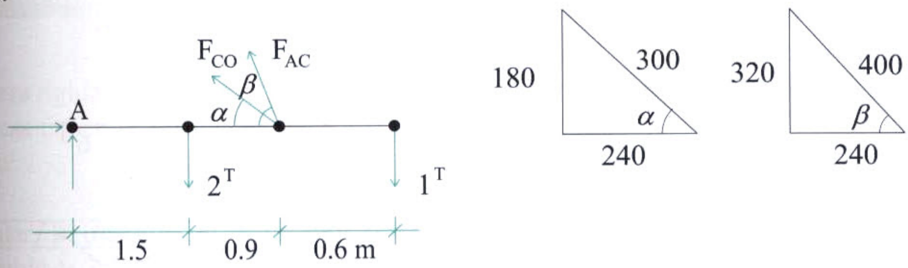
$A_{acero} = 4 \ cm^2$

$A_{cobre} = 6 \ cm^2$



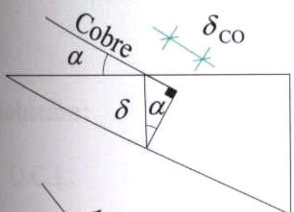
Solución:

D.C.L.

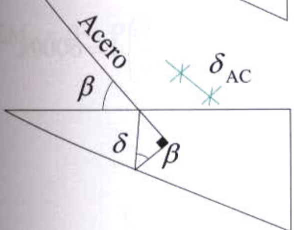


$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F_{AC} \ (2.4) \ \frac{320}{400} + F_{CO} \ (2.4) \ \frac{180}{300} = 2000 \ (1.5) + 1000 \ (3) \ --- \ (1)$$

Deformaciones:



$$\frac{\delta_{CO}}{\text{sen}\alpha} = \delta = \frac{F_{co} \ \ 300}{7 \times 10^5 \times 6} \left(\frac{300}{180}\right) --- \ (2)$$



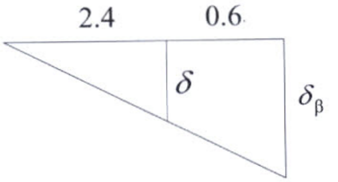
$$\frac{\delta_{AC}}{\text{sen}\beta} = \delta = \frac{F_{AC} \times 400}{2.1 \times 10^6 \times 4} \left(\frac{400}{320}\right) --- \ (3)$$

$$(2) = (3) \rightarrow F_{CO} = 0.5\ F_{AC} \quad \text{en (1)}: F_{AC} = 2272.7 \text{ Kg.}$$

$$F_{CO} = 1136.3 \text{ Kg.}$$

$$\text{En (2)} \rightarrow \delta = 0.135 \text{ cm.}$$

$$\therefore \sigma_{AC} = 568.1 \text{ Kg/cm}^2 \qquad \sigma_{CO} = 189.3 \text{ Kg/cm}^2$$



$$\delta_B = \frac{3\delta}{2.4} = 0.168 \text{ cm} \quad \textbf{Rpta.}$$

Problema 80

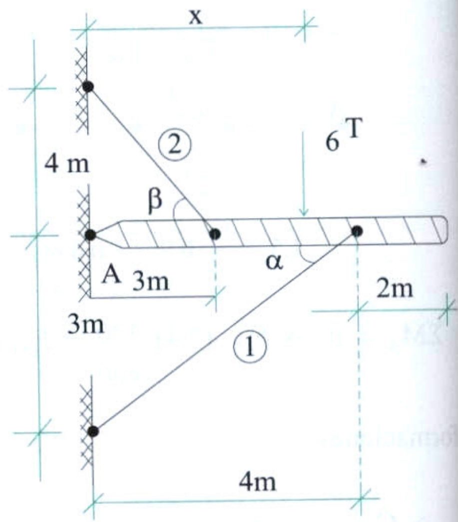
Determinar el valor mínimo de ´X´, de manera que no se superen los siguientes esfuerzos:

$\sigma_1 \leq 1800$ kg/cm²

$\sigma_2 \leq 1200$ kg/cm²

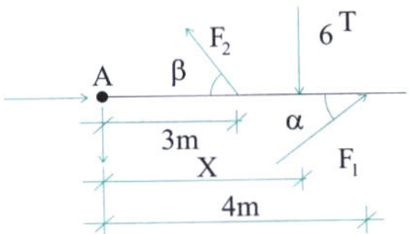
$A_1 = 2$ cm² $\quad E_1 = E_2 = 2 \times 10^6$ kg/cm²

$A_2 = 1$ cm²



Solución:

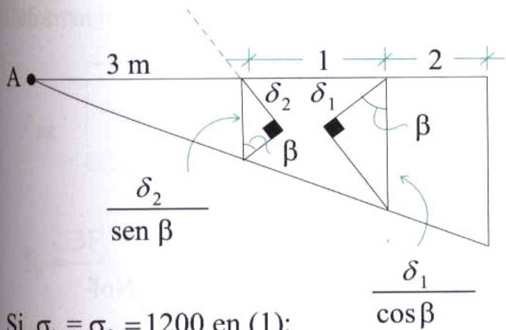
D.C.L.



$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow F_2\left(\frac{4}{5}\right)3 + F_1\left(\frac{3}{5}\right)4 = 6000x$$

$$F_2 + F_1 = 2\,500x$$

$$1\sigma_2 + 2\sigma_1 = 2\,500x \ --- \ (1)$$



Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1200$ en (1):

$3(1200) = 2500x$

$x = 1.44\text{m}$ Rpta.

$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{\delta_2}{(3)4/5} = \frac{\delta_1}{(4)3/5}$$

$$\delta_2 = \delta_1$$

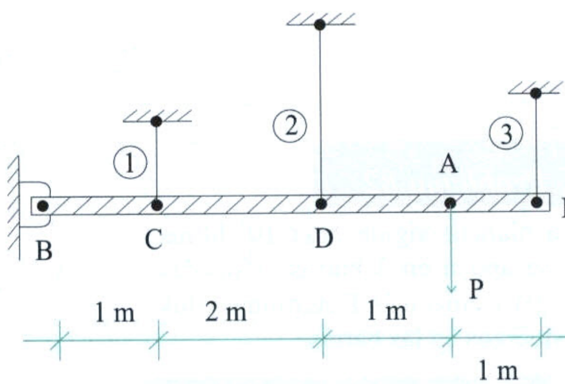
$$\frac{\sigma_2(5)}{E} = \frac{\sigma_1(5)}{E}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad --- (2)$$

Problema 81

La barra rígida pesa 2 T/m y las barras elásticas tienen el mismo $E = 2 \times 10^6$ kg/cm².

Calcular P máximo si el esfuerzo admisible es 3000 kg/cm².

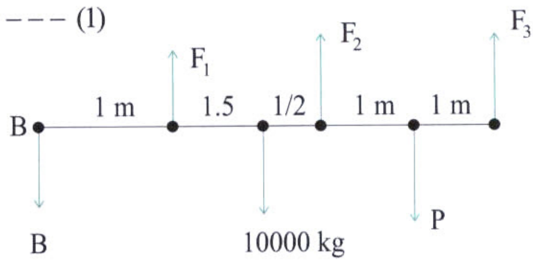


	①	②	③
ℓ =	3 m	6 m	4 m
A =	3 cm²	6 cm²	4.5 cm²

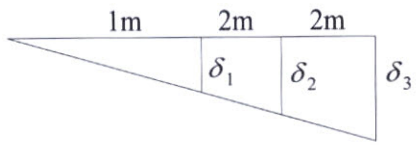
Solución:

D.C.L.

$\Sigma M_B = 0 = P(4) + 10\,000(2.5) - 5F_3 - 3F_2 - F_1 \quad --- (1)$



Deformaciones:



$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{\delta_3}{5} = \frac{\delta_2}{3} = \frac{\delta_1}{1}$$

$$\frac{F_3(4)}{5E(4.5)} = \frac{F_2(6)}{3E(6)} = \frac{F_1(3)}{E(3)}$$

$$\text{Si } \sigma_1 = 3000 \rightarrow F_1 = 9\,000 \rightarrow F_2 = 2\,700 \rightarrow \sigma_2 = 4\,500 > 3\,000 \qquad \text{¡No!}$$

$$\text{Si } \sigma_2 = 3000 \rightarrow F_2 = 18\,000 \rightarrow F_3 = 33\,750 \rightarrow \sigma_3 = 7\,500 > 3\,000 \qquad \text{¡No!}$$

$$\text{Si } \sigma_3 = 3000 \rightarrow F_3 = 13\,500 \rightarrow F_2 = 7\,200 \rightarrow \sigma_2 = 1\,200 < 3\,000$$

$$F_1 = 2\,400 \rightarrow \sigma_1 = 800 < 3\,000 \qquad \text{¡Si!}$$

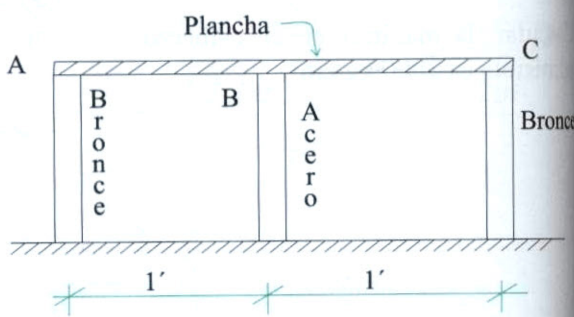
F_1, F_2 y F_3 – – – en (1)

P_{MAX} =16 625 kg **Rpta.**

Problema 82

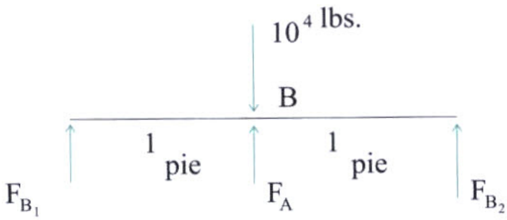
La plancha rígida pesa 10^4 libras y se apoya en 3 barras colocadas simétricamente. Determinar los esfuerzos en las barras.

Bronce	Acero
A = 3 pulg²	4
E = 15 x 10^6 psi	30 x 10^6
γ = 3 pies	3



Solución:

D.C.L.



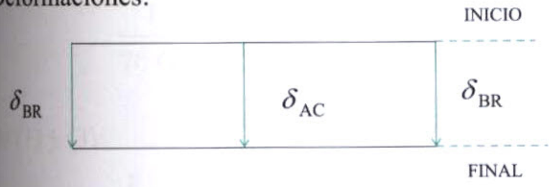
$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow F_{B_1}(1) = F_{B_2}(1)$$

$$F_{B_1} = F_{B_2} = F_B$$

$$\Sigma F_V = 0$$

$$2\,F_B + F_A - 10\,000 = 0 \quad --- (1)$$

Deformaciones:



$$\delta_{BR} = \delta_{AC}$$

$$\frac{F_B 3}{15 \times 10^6 \times 3} = \frac{F_A 3}{30 \times 10^6 \times 4}$$

$$F_B = \frac{3F_A}{8} \text{ --- en (1)}$$

$$\frac{7}{4}F_A = 10\ 000 \rightarrow F_A = 5\ 714.28 \text{ lb}$$

$$F_B = 2\ 142.85 \text{ lb}$$

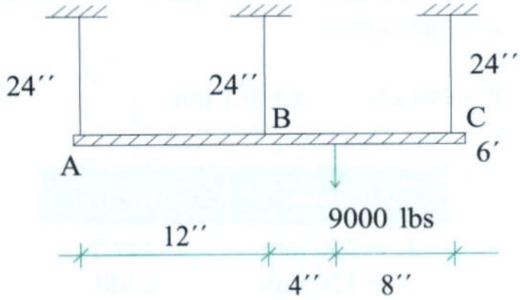
$$\sigma = F/A$$

$$\therefore \sigma_{acero} = 1\ 428.57 \text{ psi.}$$ **Rpta.**

$$\sigma_{bronce} = 714.28 \text{ psi.}$$ **Rpta.**

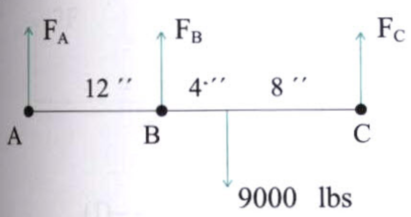
Problema 83

Las 3 barras son de acero E = 30 x 10[4] lb/pulg² y tienen el mismo diámetro. Si el esfuerzo normal no debe exceder de 20000 lb/pulg² en las barras, calcular el diámetro mínimo que se debe usar en las barras.



Solución:

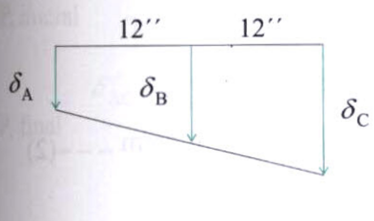
D.C.L.



$$\Sigma F_V = 0 = F_A + F_B + F_C - 9000 \text{ .... (1)}$$

$$\Sigma M_C = 0 = F_A(24) + F_B(12) - 9000(8) \text{ .... (2)}$$

Deformaciones:



$$\delta_B = \frac{\delta_C + \delta_A}{2}$$

$$F_B = \frac{F_C + F_A}{2} \text{ ---(3)}$$

De 1, 2 y 3: $F_A = 1\ 500$ lbs

$F_B = 3\ 000$ lbs

$F_C = 4\ 500$ lbs

$$F = \sigma A = 2 \times 10^4 \times \pi d^2/4$$

$\downarrow$

$1500 \rightarrow d = 0.30''$

$\downarrow$

$3000 \rightarrow d = 0.43''$

$\downarrow$

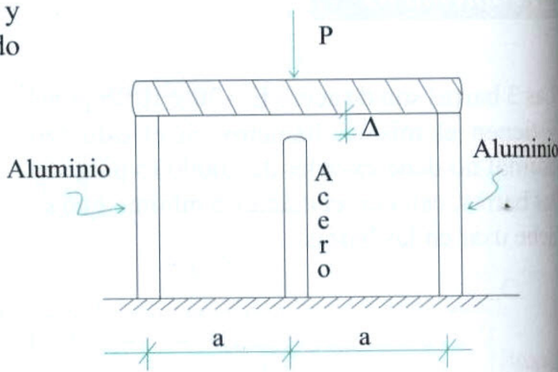
$4500 \rightarrow d = 0.53''$

$\therefore d_{min} = 0.53''$ **Rpta.**

Problema 84

Determinar el esfuerzo en la barra de acero y en el aluminio, una vez que se haya aplicado la carga central.

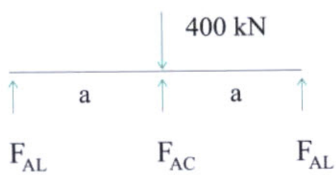
$P = 400$ kN $\quad \Delta = 0.1$ mm



Aluminio	Acero
L = 250 mm	249.9
A = 120 mm	2400
E = 70 GPa	200

Solución:

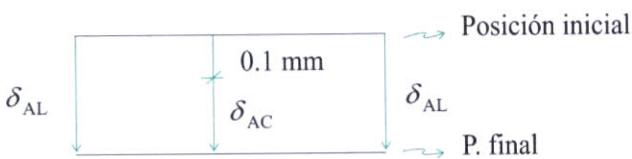
D.C.L.



$$\Sigma F_V = 0$$

$$2F_{AL} + F_{AC} = 400 \text{ kN} \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$$\delta_{Al} = \delta_{AC} + 0.1\text{mm} \quad ---(2)$$

De (2):

$$\frac{F_{AL}\ \text{x}\ 250\ \text{mm}}{70\ \text{GPa x}\ 120\ \text{mm}^2} = \frac{F_{AC}\ \text{x}\ 249.9\ \text{mm}}{200\ \text{GPa x}\ 2400\ \text{mm}^2} + 0.1\text{mm} ---(3)$$

De (1) y (3):

$$F_{AL} = 10\,000\ \text{N} <> 10\ \text{kN}$$

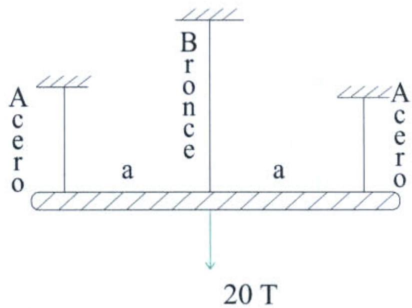
$$F_{AC} = 380\ \text{kN}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{380\ \text{kN}}{2\,400\text{mm}^2} <> 158.33\ \text{MPa}\ \boxed{\text{Rpta.}} \qquad \sigma_{AL} = \frac{10\ \text{kN}}{120\ \text{mm}^2} <> 83.33\ \text{MPa}\ \boxed{\text{Rpta.}}$$

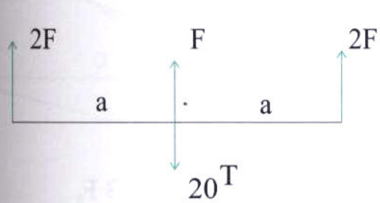
Problema 85

Calcular la longitud de la barra de bronce de manera que la fuerza total en cada barra de acero sea el doble de la que soporta aquella.

Acero	Bronce
$A = 6\ \text{cm}^2$	$9\ \text{cm}^2$
$E = 2.1 \times 10^6\ \text{kg/cm}^2$	$8.4 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2$
$L = 1\ \text{m}$	?



Solución: D.C.L.



$$\Sigma F_V = 0$$

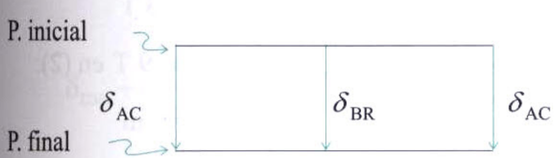
$$5F = 20$$

$$F = 4^T$$

$$F_{AC} = 8^T$$

$$F_{BR} = 4^T$$

Deformaciones:



$$\delta_{AC} = \delta_{BR}$$

$$\frac{8 \times 10^3 \times 100}{2.1 \times 10^6 \times 6} = \frac{4 \times 10^3 \times L}{8.4 \times 10^5 \times 9}$$

$$L = 120\ \text{cm}$$

$$L = 1.2\ \text{m}\ \boxed{\text{Rpta.}}$$

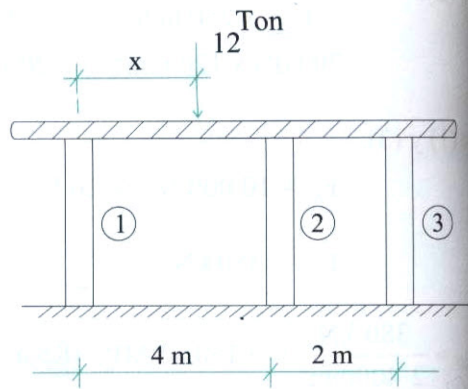
Problema 86

Determinar el rango de valores de "x" de manera que las 3 varillas de acero no sufran tensión.

$L_1 = L_2 = L_3 = L$

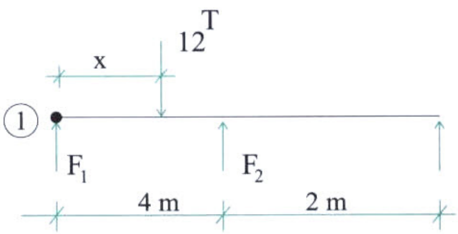
$A_1 = A_2 = A_3 = A$

$E_1 = E_2 = E_3 = E$



Solución:

D.C.L.



$$\sum F_V = 0$$

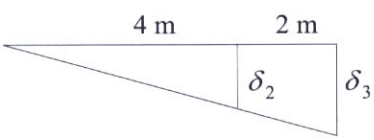
$$F_1 + F_2 + F_3 = 12 \quad ---(1)$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$6F_3 + 4F_2 = 12x \quad ---(2)$$

Deformaciones:

Primer caso:



$$\frac{\delta_2}{4} = \frac{\delta_3}{6}$$

$$\delta_3 = \frac{3}{2}\,\delta_2$$

$$\frac{F_3 L}{EA} = \frac{3\,F_2 L}{2\,EA}$$

$$F_3 = \frac{3}{2}\,F_2$$

$F_1 = 0$ en (1):

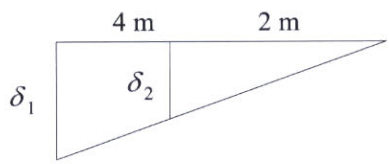
$$F_2 = 24/5$$

$$F_3 = 36/5$$

En (2)

$$x = 5.2 \text{ m}$$

Segundo caso:



$$\frac{\delta_1}{6} = \frac{\delta_2}{2}$$

$$\delta_1 = 3\,\delta_2$$

$$\frac{F_1 L}{EA} = \frac{3\,F_2 L}{EA}$$

$$F_1 = 3\,F_2$$

$F_3 = 0$ en (1):

$$F_2 = 3 \text{ T}$$

$F_1 = 9$ T en (2):

$$x = 1 \text{ m}$$

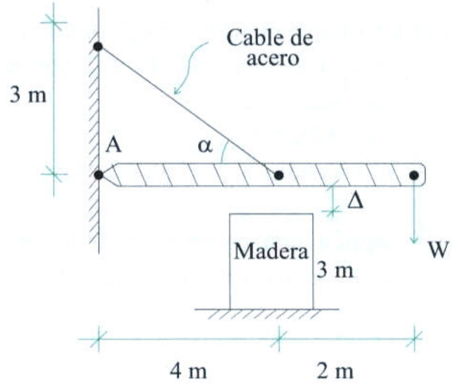
$\therefore\ 1 \leq x \leq 5.2\text{m}$ Rpta.

Problema 87

Determinar W si:

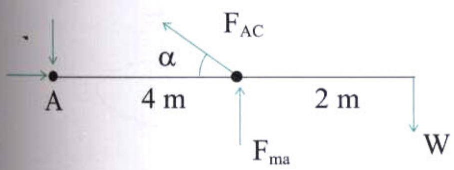
$$\delta_{AC} \leq 3\text{mm}$$
$$\delta_{mad} \leq 6\text{mm}$$
$$\Delta = 1\text{mm}$$

Madera	Acero
$A = 30\text{cm}^2$	0.712
$E = 10^5 \quad \text{kg/cm}^2$	$2 \text{ x } 10^6$



Solución:

D.C.L.



$$\Sigma M_A = 0$$

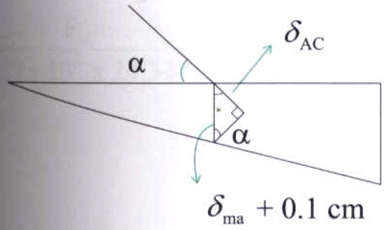
$$F_{AC}\,\frac{3}{5}(4) + F_{ma}(4) = 6W$$

En función de δ:

$$\delta_{AC} \text{ x } \frac{2 \text{ x } 10^6 \text{ x } 0.712}{500} \text{ x } \frac{3}{5}(4) +$$

$$+ \quad \delta_{ma} \text{ x } \frac{10^5 \text{ x } 30 \text{ x } 4}{300} = 6W \; ---(1)$$

Deformaciones:

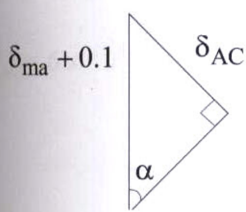


$$0.1\text{cm} + \delta_{ma} = \frac{\delta ac}{\text{sen } \alpha}$$

$$\delta_{AC} = 0.06 + 0.6\,\delta_{mad} \; ---(2)$$

De (2): Si $\delta_{AC} = 0.3\text{cm} \rightarrow \delta_{ma} = 0.4\text{cm}$ Sí!

Si $\delta_{mad} = 0.6 \text{ cm} \rightarrow \delta_{AC} = 0.42 \text{ cm} > 0.3\text{cm}$ No!



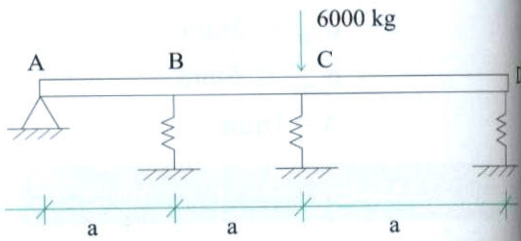
$$\left.\begin{aligned} \therefore \delta_{AC} &= 0.3 \text{ cm} \\ \delta_{ma} &= 0.4 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \text{ en (1):}$$

$W = 3\,008.4$ kg **Rpta.**

Problema 88

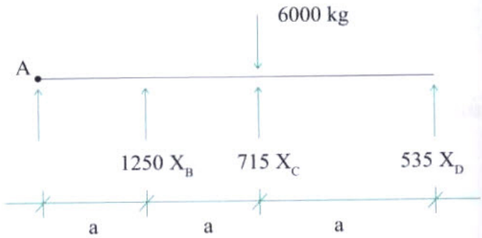
Una barra rígida AD es soportada en A por un soporte rígido y en B,C y D por resortes cuyas constantes son
$K_B = 1\,250$ kg/cm.
$K_C = 715$ kg/cm, $K_D = 535$ kg/cm

Si se aplica una carga de 6 000 kg. en C, calcular las reacciones en B, C y D.



Solución:

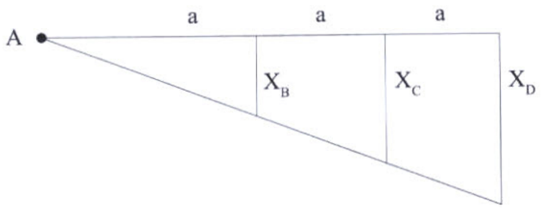
D.C.L.



$\Sigma M_A = 0$

$$535X_D(3a) + 715X_C(2a) + 1250X_B\,(a) - 6000\,(2a) = 0 - - - (1)$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ s:

$$\frac{X_B}{a} = \frac{Xc}{2a} = \frac{X_D}{3a}$$

$$\left.\begin{matrix} X_D = 3x_B \\ X_C = 2x_B \end{matrix}\right\rangle \rightarrow \text{en (1)}$$

$$X_D = \frac{3}{2}X_c$$

$$535\,(3x_B)\,(3a) + 715(2x_B)\,(2a) + 1250\,X_B\,(a) - 6000(2a) = 0$$

$$(4815 + 2860 + 1250\,)\,X_B - 12\,000 = 0$$

$$X_B = 1.344 \text{ cm}$$

$$\therefore\ X_C = 2.688 \text{ cm}$$

$$X_D = 4.032 \text{ cm}$$

$\therefore F_B = K_B X_B = 1\,680$ kg **Rpta.**

$F_C = K_C X_C = 1\,922$ kg **Rpta.**

$F_D = K_D X_D = 2\,157$ kg **Rpta.**

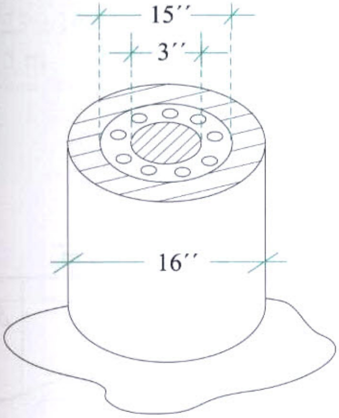
Problema 89

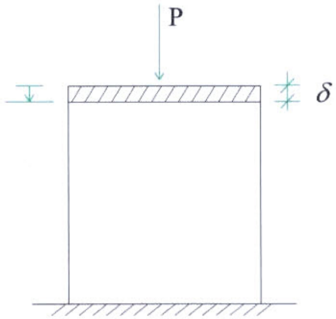
Un cilindro circular recto de hierro fundido de 3" de diámetro, se coloca concéntricamente dentro de un tubo de acero de 15" de diámetro interior y 16" de diámetro exterior, y el espacio entre ellos se rellena con concreto.

Determinar los esfuerzos en cada material, debido a una carga axial de 600 000 libras.

$$E_{hierro} = 15 \times 10^6 \ \text{lb/pulg}^2$$
$$E_{acero} = 29 \times 10^6 \ \text{lb/pulg}^2$$
$$E_{concreto} = 2 \times 10^6 \ \text{lb/pulg}^2$$

Solución:





$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_{AC} + F_{HI} + F_{CO} = 6 \times 10^5 \text{ Libras} ---(1)$$

$$\delta_{AC} = \delta_{CO} = \delta_{HI}$$

$$\frac{F_{AC}}{29 \times 10^6 \times 24.34} = \frac{F_{CO}}{2 \times 10^6 \times 169.64}$$

$$= \frac{F_{HI}}{15 \times 10^6 \times 7.06}$$

$$A_{AC} = \frac{\pi}{4}\left(16^2 - 15^2\right)$$

$$A_{AC} = 24.34 \text{ cm}^2$$

$$A_{HI} = \frac{\pi(3)^2}{4} = 7.06 \text{ cm}^2$$

$$A_{CO} = \frac{\pi}{4}\left(15^2 - 3^2\right)$$

$$A_{CO} = 169.64 \text{ cm}^2$$

$$\left.\begin{aligned} F_{co} &= 0.48\, F_{AC} \\ F_{HI} &= 0.15\, F_{AC} \end{aligned}\right\} \text{en } (1)$$

$$1.63\, F_{AC} = 6 \times 10^5 \text{ lb} \rightarrow F_{AC} = 368\ 098 \text{ lbs.}$$

$$F_{CO} = 176\ 687 \text{ lbs.}$$

$$F_{HI} = 55\ 215 \text{ lbs.}$$

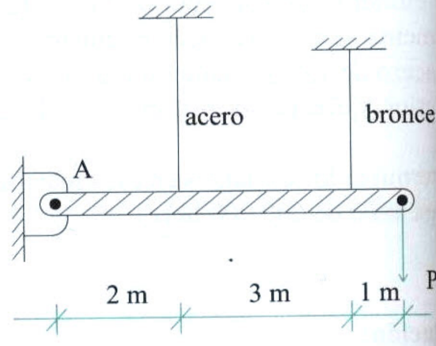
$$\sigma_{AC} = 15\ 123 \ \text{lb/pulg}^2$$ Rpta.

$$\sigma_{CO} = 1041 \ \text{lb/pulg}^2$$ Rpta.

$$\sigma_{HI} = 7820 \ \text{lb/pulg}^2$$ Rpta.

Problema 90

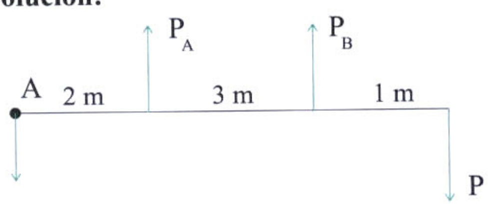
Una barra rígida de peso despreciable está articulada de un extremo, y suspendida de una varilla de acero y una de bronce.

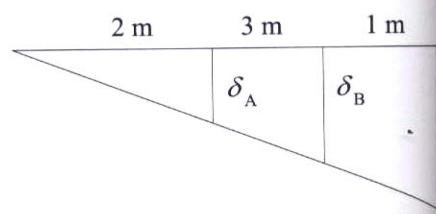


¿Cuánto vale la carga máxima P que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo en el acero de 120 MN/m² y en el bronce de 70 MN/m²?

Acero	Bronce
$A = 900\ mm^2$	$300\ mm^2$
$E = 200$ GPa	83 GPa
$L = 3$ m	2 m

Solución:





$$P_{A_{máximo}} = A\sigma_A = 120\frac{MN}{m^2} \text{ x } 900\ mm^2 \text{ x } \frac{1\ m^2}{10^6\ mm^2}\ \frac{10^6\ N}{1MN} = 108\ 000N$$

$$P_{B_{máximo}} = 70 \text{ x } 300 = 21\ 000N$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow P(6) - PB(5) - PA(2) = 0 - - -(1)$$

$$\frac{\delta_A}{2} = \frac{\delta_B}{5} \quad \frac{P_A\ \ L_A}{EA} = \frac{2}{5}\ \frac{P_B\ \ L_B}{EA}$$

$$P_A = \frac{2}{5}\ P_B \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{200}{83}\right)\ \frac{900}{300} = 1.927\ P_B$$

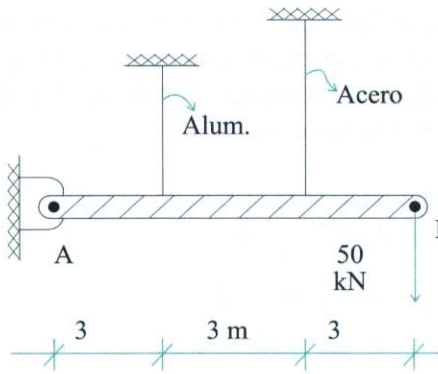
Si $P_B = 21\ 000 \rightarrow P_A = 40\ 467N < 108\ 000N$ en (1) ¡Sí!

Si $P_A = 108\ 000N \rightarrow P_B = 56\ 046 > 21\ 000$ ¡No!

$$P = \frac{P_B(5) + P_A\ (2)}{6} = 30\ 989N$$ **Rpta.**

Problema 91

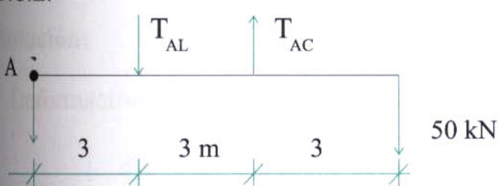
Se tiene una barra rígida AB sometida a una carga de 50 kN y sostenida por una varilla de aluminio y otra de acero. Si se incrementa la temperatura en 40 °C, hallar los esfuerzos en el aluminio y en el acero.



Aluminio	Acero
$A = 900\ mm^2$	600
$E = 70 \times 10^9 N/m^2$	2×10^{11}
$\alpha = 23 \times 10^{-6}/°C$	11.7×10^{-6}
$L = 3\ m$	4

Solución:

D.C.L.

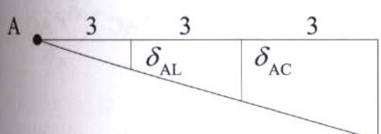


$$\Sigma M_A = 0$$

$$50 \times 10^3 \times 9 - T_{AC}\,(6) + T_{AL}\,(3) = 0$$

$$2\,T_{AC} - T_{AL} = 150\,000 \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ_s :

$$\frac{\delta_{AL}}{3} = \frac{\delta_{AC}}{6}$$

$$2\,\delta_{AL} = \delta_{AC} \quad ---(2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{AC} &= \delta_{t_{AC}} + \delta_{P_{AC}} \\ \delta_{AL} &= \delta_{t_{AL}} - \delta_{P_{AL}} \end{aligned}\right\} \text{En (2)}: \; 2\delta_{t_{AL}} - 2\delta_{P_{AL}} = \delta_{t_{AC}} + \delta_{P_{AC}}$$

$$2 \times 40 \times 23 \times 10^{-6} \times 3000 - \frac{2\,T_{AL} \times 3000}{7 \times 10^{10} \times 900} = 11.7 \times 10^{-6} \times 40 \times 4000 + \frac{T_{AC} \times 4000}{2 \times 10^{11} \times 600} \quad ---(3)$$

De (1) y (3) : $T_{AC} = 80\,129N$

$T_{AL} = 10\,258N$

$$\sigma_{ACERO} = \frac{80\,129N}{600\ mm2} <> \frac{133.5MPa}{(\text{tracción})} \; ; \qquad \sigma_{ALUMINIO} = \frac{10\,258N}{900\ mm2} <> \frac{11.39MPa}{(\text{compresión})}$$

Problema 92

Hallar los esfuerzos normales del poste de concreto mostrado en la figura, generados en el acero y en el concreto por un ascenso de temperatura de 90 °F.

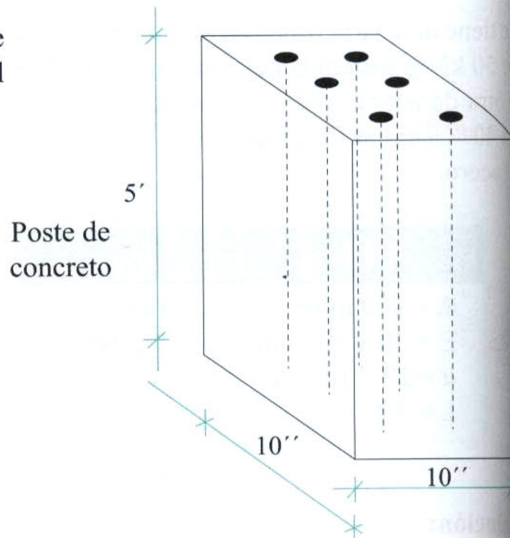
Dicho poste está reforzado con 6 barras de ϕ 7/8" c/u.

$\alpha_{acero} = 6.5 \times 10^{-6} / °F$

$\alpha_{concreto} = 5.5 \times 10^{-6} / °F$

$E_{acero} = 30 \times 10^{6} / pulg^2$

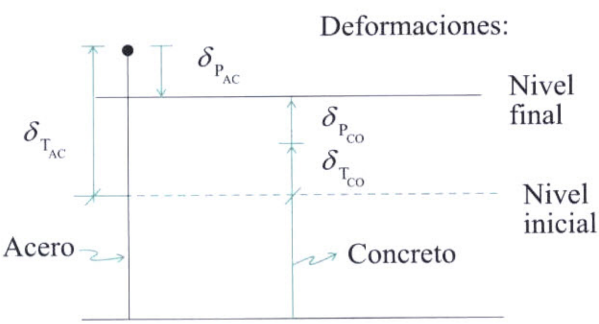
$E_{concreto} = 3.6 \times 10^{6} / pulg^2$



Solución:

α acero > α concreto

Deformaciones:



$$\delta_{tCO} + \delta_{PCO} = \delta_{tAC} - \delta_{PAC}$$

$$60" \times 5.5 \times 10^{-6} \times 90 + \frac{P\,(60")}{3.6 \times 10^{6} \times 96.4} = 60" \times 6.5 \times 10^{-6} \times 90 - \frac{P(60")}{6 \times 0.6 \times 3 \times 10^{7}}$$

$P = 7\ 431.75$ lb

$$\sigma_{concreto} = \frac{P}{100 - 3.6} = 77\ {}^{lb}\!/_{pulg^2}$$ (tracción) Rpta.

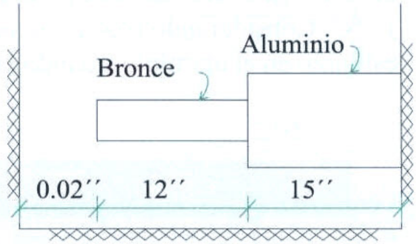
$$\sigma_{acero} = \frac{P}{6\frac{\pi}{4}\left({}^{7}\!/_{8}"\right)^2} = 2\ 064\ {}^{lb}\!/_{pulg^2}$$ (compresión) Rpta.

Problema 93

Calcular:

a) La fuerza de compresión en las barras mostradas, después de un aumento de temperatura de 200 °F.

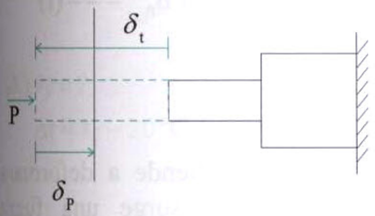
b) El cambio correspondiente de longitud de la barra de aluminio.



	Acero	Bronce
A =	2.5 pulg^2	3 pulg^2
E =	15×10^6 lb/pulg^2	10×10^6 lb/pulg^2
α =	10.1×10^{-6}/°F	12.8×10^{-6}/°F

Solución:

Deformaciones:



$$\delta_t = \delta_P + 0.02" \;---(1)$$

$$\delta_t = \ell_B \alpha_B \; \Delta t + \ell_A \; \alpha_A \; \Delta t$$

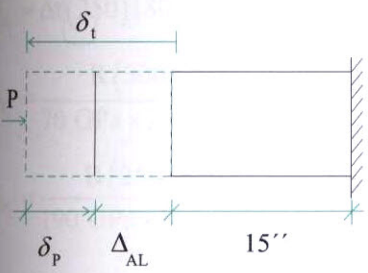
$$\delta_t = 12 \times 10.1 \times 10^{-6} \times 200 + 15 \times 12.8 \times 10^{-6} \times 200$$

$$\delta_t = 0.0626" \text{ en (1):}$$

$$\delta_P = 0.0426"$$

$$\delta_P = \frac{PL_B}{E_B A_B} + \frac{PL_A}{E_A A_A} = \frac{P(12)}{15 \times 10^6 \times 2.5} = \frac{P(15)}{10 \times 10^6 \times 3} = 0.0426"$$

$\therefore P = 51\,951$ lbs. Rpta.



Del gráfico: $\Delta_{AL} = \delta_t - \delta_P \;---(2)$

$$\delta_t = 15 \times 12.8 \times 10^{-6} \times 200 = 0.0384" \;---(3)$$

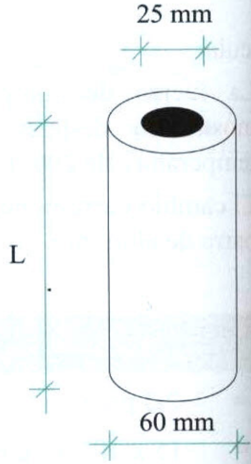
$$\delta_P = \frac{51\,951 \times 15}{10^7 \times 3} = 0.0259" \;---(4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2) :

$\Delta_{AL} = +\,0.0125"$ Rpta.

Problema 94

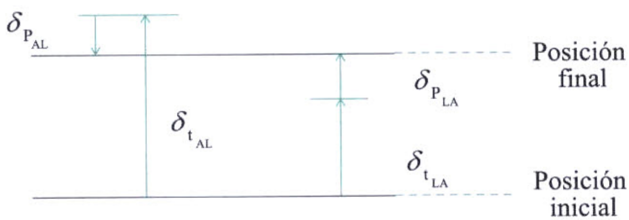
El casco de aluminio de la ilustración está completamente adherido al núcleo de latón, y el conjunto no está esforzado a 15 ºC. Considerando solo las deformaciones axiales, hallar el esfuerzo en el aluminio cuando la temperatura llega a 195 ºC.



Latón	Aluminio
$E = 105$ GPa	70 GPa
$\alpha = 19 \times 10^{-6}$ / ºC	23×10^{-6}/ ºC

Solución:

Deformaciones: $\alpha_{\text{Aluminio}} > \alpha_{\text{Latón}}$



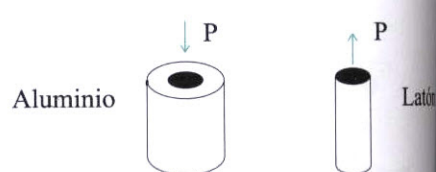
$$\delta_{t_{AL}} - \delta_{P_{AL}} = \delta_{t_{LA}} + \delta_{P_{LA}} \quad ---(1)$$

$$\delta_{t_{AL}} = 23\times10^{-6}(180)L \quad ---(2)$$

$$\delta_{t_{LA}} = 19\times10^{-6}(180)L \quad ---(3)$$

Como el aluminio tiende a deformarse más que el latón, surge una fuerza interna P que hace que se deformen igual ambos materiales (están completamente adheridos).

$$\delta_{P_{AL}} = \frac{PL}{70\ \text{GPa}\times\frac{\pi}{4}\left[(60)^2-(25)^2\right]\text{mm}^2} \quad ---(4)$$

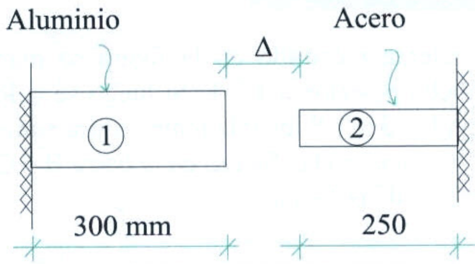


$$\delta_{P_{LA}} = \frac{PL}{105\ \text{GPa}\times\frac{\pi}{4}(25)^2\ \text{mm}^2} \quad ---(5)$$

$$\text{Reemplazando}(2),(3),(4),(5)\ \text{en}\ (1):\rightarrow P = 28\ ,214\ \text{N}$$

$$\sigma_{\text{ALUMINIO}} = \frac{28\ 214\ \text{N}}{\frac{\pi}{4}\left[(60)^2-(25)^2\right]\text{mm}^2} <> 12.08\ \text{MPa (Compresión)}\ \text{Rpta.}$$

Problema 95



Para $t_0 = 20$ °C
Existe un $\Delta = 0.5$ mm

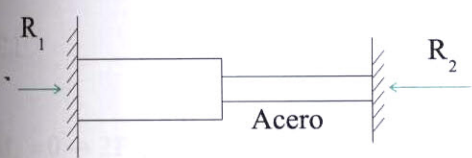
Hallar:

a) La temperatura a la cual el σ acero $= -150$ MPa

b) La longitud final de la varilla de acero.

Aluminio	Acero
$A = 2 \times 10^3$ mm²	800mm²
$E = 70$ GPa	190 GPa
$\alpha = 23 \times 10^{-6}$/°C	18×10^{-6}/°C

Solución:



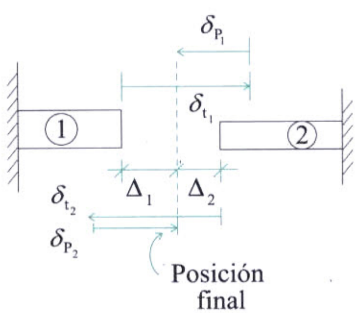
$R_1 = R_2 = R$

$$\sigma_{AC} = \frac{R}{A_{AC}} = 150 \text{ MPa} = \frac{R}{800 \text{ mm}^2}$$

$$R = 12 \times 10^4 \text{ N}$$

A) $t_f = ?$

$\Delta t = t_f - 20°C - - - (A)$



Del gráfico:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0.5 \text{ mm} - - - (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{t_1} - \delta_{P_1} \\ \Delta_2 &= \delta_{t_2} - \delta_{P_2} \end{aligned}\right\} - - - (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{t_1} &= \Delta t(300)23 \times 10^{-6} \\ \delta_{t_2} &= \Delta t(250)180 \times 10^{-6} \\ \delta_{P_1} &= \frac{R(300)\text{mm}}{70 \text{ GPa} \times 2 \times 10^3 \text{mm}^2} = 0.257 \text{ mm} \\ \delta_{P_2} &= \frac{R(250)\text{mm}}{190 \text{ GPa} \times 800 \text{ mm}^2} = 0.197 \text{ mm} \end{aligned}\right\}$$

(3) en (2) y (2) en (1)

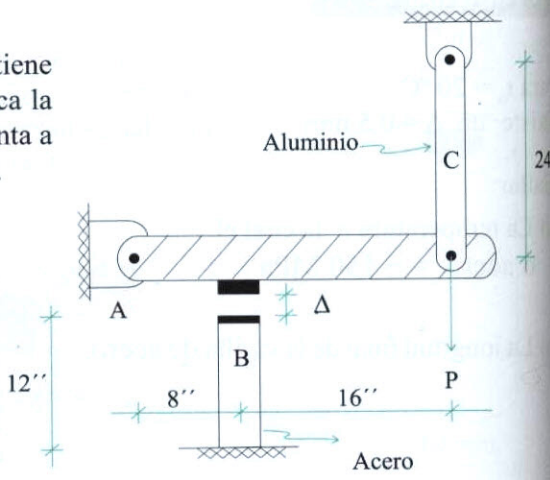
$\Delta t = 83.68°C$ en A:

$t_f = 103.68°C$ **Rpta.** $\therefore \delta t_2 = 0.376$ mm

B) $L_{f_{acero}} = L_{o_{acero}} + \delta_{t_2} - \delta_{P_2} = 250.179$ mm **Rpta.**

Problema 96

El sistema mostrado en la figura se mantiene en dicha posición a 15 ºF. Si luego se coloca la carga $P = 3 \times 10^4$ lbs y la temperatura aumenta a 55 ºF, calcular el esfuerzo en la barra B y C.
$\Delta = 2 \times 10^{-3}$ pulgadas.

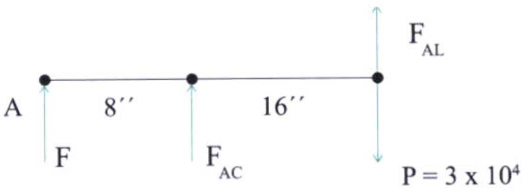


	Aluminio	Acero
E	30×10^6 lb/pulg^2	10×10^6
α	6.5×10^{-6}/ ºF	13×10^{-6}
A	2" x 2"	1.5 x 1.0

Solución:

$\Delta t = 40^\circ F$

D.L.C :

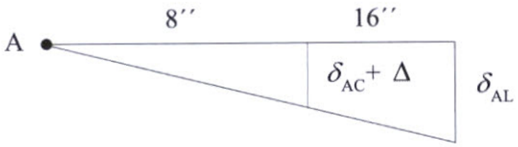


$$\sum M_A = 0$$

$$3 \times 10^4 \times 24 = 24F_{AL} + 8F_{AC}$$

$$9 \times 10^4 = 3F_{AL} + F_{AC} \;----(1)$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ_S :

$$\frac{\delta_{AC} + \Delta}{8} = \frac{\delta_{AL}}{24}$$

$$3\delta_{AC} + 3\Delta = \delta_{AL} \;----(2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{AC} &= \delta t_{AC} - \delta F_{AC} \\ \delta_{AL} &= \delta F_{AL} + \delta t_{AL} \end{aligned}\right\} \text{(3) en (2):}$$

$$3\delta t_{AC} - 3\delta F_{AC} + 3\Delta = \delta F_{AL} + \delta t_{AL} \;---(4)$$

Reemplazando (1) en (4)

$$3 \times 40 \times 6.5 \times 10^{-6} \times 12 - \frac{3(9 \times 10^4 - 3F_{AL})12}{30 \times 10^6 \times 4} + 3 \times 2 \times 10^{-3} = \frac{F_{AL} \times 24}{10^7 \times 1.5} + 40 \times 13 \times 10^{-6} \times 24$$

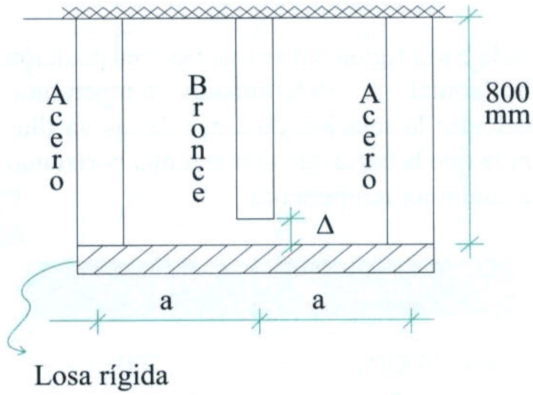
$F_{AL} = -34\ 457.14$ lb $\rightarrow \sigma_{AL} = 22\ 971$ lb/pulg^2 (comp.) **Rpta.**

$F_{AC} = +193\ 371.42$ lb $\rightarrow \sigma_{AC} = 48\ 343$ lb/pulg^2 (trac.) **Rpta.**

Problema 97

A una temperatura de 20° C hay un $\Delta = 0.2$mm entre el extremo inferior de la barra de bronce y la losa rígida suspendida de las 2 barras de acero.

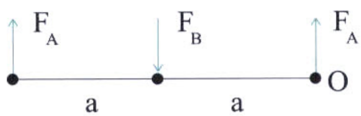
Determinar el esfuerzo en cada barra cuando la $t_f = 100°$ C.



Bronce	Acero
A = 600 mm²	400
E = 83 GPa	200
α = 18.9 x 10⁻⁶/°C	11.7x 10⁻⁶

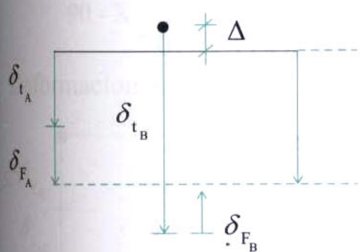
Solución:

D.C.L.



$\Sigma M_o = 0 \rightarrow 2F_A = F_B - - - (1)$

Deformaciones:



$$\delta_{t_B} - \Delta - \delta_{F_B} = \delta_{t_A} + \delta_{F_A} - - - (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$18.9\times10^{-6}\times80\times799.8 - 0.2 - \frac{2F_A(800)}{83\times10^{9}\times600\times10^{-6}}$$

$$= 11.7\times10^{-6}\times80\times800 + \frac{F_A 800}{2\times10^{11}\times4\times10^{2}\times10^{-6}}$$

$F_A = 6\ 184.65$ N

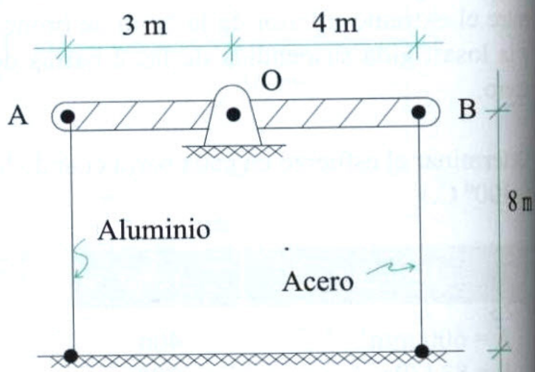
$F_B = 12\ 369.30$ N

$\therefore \sigma_{AC} = 15.46$ MPa **Rpta.**

$\sigma_{BR} = 20.61$ MPa **Rpta.**

Problema 98

Si la barra rígida AB se mantiene en posición horizontal a determinada temperatura, calcular la relación de áreas de las varillas para que la barra AB se mantenga horizontal a cualquier temperatura.



Aluminio	Acero
$E = 70$ GPa	200
$\alpha = 23 \times 10^{-6}/°C$	11.7×10^{-6}

Solución:

Por condición del problema:

$$\delta_{F_{AL}} = \delta_{t_{AL}} \quad ---(1)$$

$$\delta_{F_{AC}} = \delta_{t_{AC}} \quad ---(2)$$

De (1):

$$\frac{F_{AL} \times 8}{70 \times 10^9 A_{AL}} = 8\ \Delta t \times 23 \times 10^{-6}$$

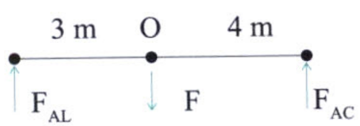
$$F_{AL} = 161 \times 10^4 \Delta t\ A_{AL} \quad ---(3)$$

De (2):

$$\frac{F_{AC} \times 8}{200 \times 10^9 A_{AC}} = 8\ \Delta t \times 11.7 \times 10^{-6}$$

$$F_{AC} = 234 \times 10^4 \Delta t\ A_C \quad ---(4)$$

D.C.L.



$$\Sigma M_o = 0$$

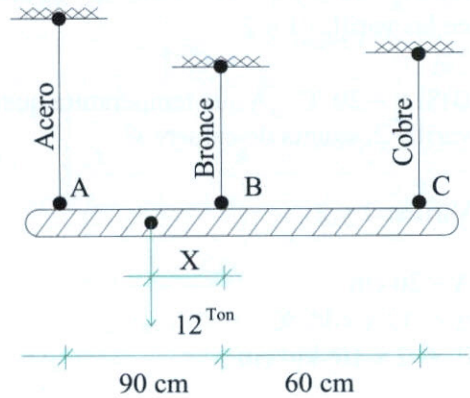
$$F_{AC} = \frac{3}{4} F_{AL} \quad ---(5)$$

$$(3) \text{y } (4) \text{ en } (5): 234 \times 10^4 \Delta t A_{AC} = \frac{3}{4} \times 161 \times 10^4 \Delta t A_{AL}$$

$$\therefore \frac{A_{\text{aluminio}}}{A_{\text{acero}}} = 1.937 \quad \text{Rpta.}$$

Problema 99

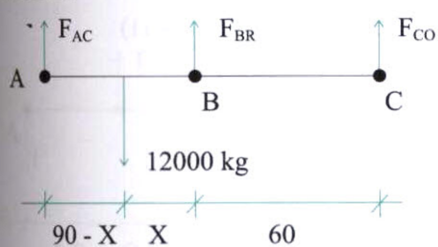
La temperatura de los 3 cables aumenta 14 ºC. Hallar el esfuerzo en cada cable y la posición de la carga aplicada para que la viga permanezca en horizontal.



Acero	Bronce	Cobre
$E=2.1\times10^6$ kg/cm^2	9.8×10^5	1.2×10^6
$\alpha=11\times10^{-6}$/ºC	17.7×10^{-6}	16×10^{-6}
$A=1.2$ cm^2	3.0	1.8
$L=25$ cm	15	20

Solución:

D.C.L.



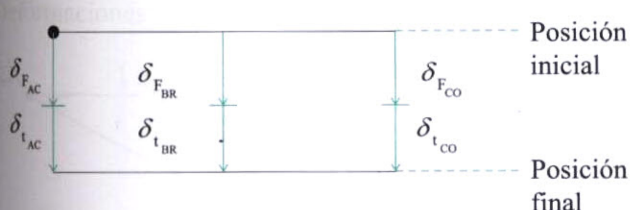
$$\sum F_V = 0$$

$$F_{AC} + F_{BR} + F_{CO} = 12\,000 \quad ---(1)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{CO}(150) + F_{BR}(90) = 12\,000(90 - x) \quad ---(2)$$

Deformaciones:



$$\delta_{F_{AC}} + \delta_{t_{AC}} = \delta_{F_{BR}} + \delta_{t_{BR}} \quad ---(3)$$

$$\delta_{F_{BR}} + \delta_{t_{BR}} = \delta_{F_{CO}} + \delta_{t_{CO}} \quad ---(4)$$

De (3): $F_{AC} = 0.514 F_{BR} - 13.407 \quad ---(5)$

De (4): $F_{CO} = 0.551\ F_{BR} - 82.48 \quad ---(6)$

(5) y (6) en (1): $F_{BR} = 5\,857.57$ kg $\rightarrow \sigma_{BR} = 1\,953$ kg/cm^2 **Rpta.**

$F_{AC} = 2\,997.38$ kg $\rightarrow \sigma_{AC} = 2\,498$ kg/cm^2 **Rpta.**

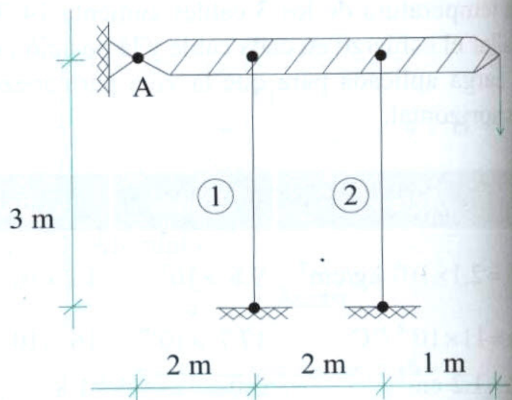
$F_{CO} = 3\,145$ kg $\rightarrow \sigma_{CO} = 1\,747$ kg/cm^2 **Rpta.**

De (2): $x = 6.75$ cm

Problema 100

A)Si t_0= 20ºC y t_f = 120 ºC, hallar los esfuerzos en las varillas 1 y 2.

B)Si t_0 = 20 ºC. ¿A qué temperatura quedará la varilla 2, exenta de esfuerzo?

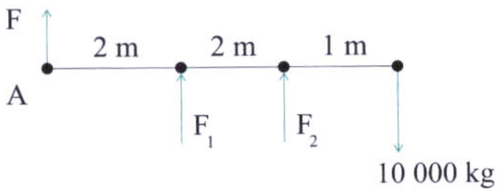


Varillas 1 y 2

$A = 20\ cm^2$
$\alpha = 12 \times 10^{-6}/\ ºC$
$E = 2 \times 10^6\ kg/\ cm^2$

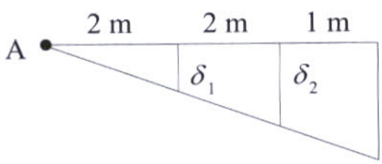
Solución:

A) $\Delta t = 100°C$ D.C.L.



$$\sum M_A = 0$$
$$25\ 000 = 2F_2 + F_1 \ ---(1)$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ_S :

$$\frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_2}{4} \rightarrow \delta_2 = 2\delta_1 \ ---(2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_2 &= \delta_{F_2} - \delta_t \ ---(3) \\ \delta_1 &= \delta_{F_1} - \delta_t \ ---(4) \end{aligned}\right\} \text{en } (2):$$

$$\delta_t = 2\delta_{F_1} - \delta_{F_2} \ ---(4')$$

$$\alpha \Delta t l = \frac{2F_1 l}{EA} - \frac{F_2 l}{EA}$$

$$\alpha \Delta t\ EA = 2F_1 - F_2 ---(5)$$

De (1) y (2):

$F_1 = 24\ 200\ kg \rightarrow \sigma_1 = 1210\ kg/cm^2$ **Rpta.**

$F_2 = 400\ kg \rightarrow \sigma_2 = 20\ kg/cm^2$ **Rpta.**

B) $F_2 = 0$, en (1):

$F_1 = 25\ 000\ kg$

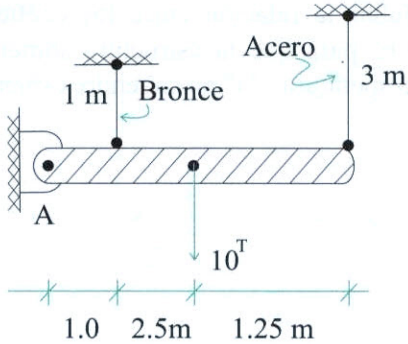
Deformaciones:

$\delta_{F_2} = 0 \rightarrow$ en (4'):

$\delta_t = 2\delta_{F_1} \rightarrow t_f = +124.16°C$ **Rpta.**

Problema 101

Determinar la variación de temperatura que debe experimentar el sistema para que la barra de bronce alcance un esfuerzo de 600 kg/cm².

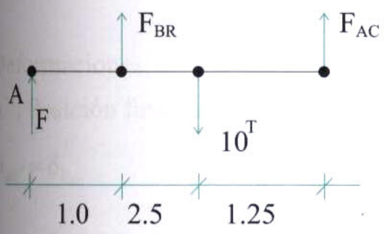


Bronce	Acero
$A = 12\ cm^2$	4
$E = 8.4 \times 10^5\ kg/cm^2$	2.1×10^6
$\alpha = 1.89 \times 10^{-5}/°C$	1.17×10^{-5}

Solución:

$$\sigma_{BR} = \frac{F_{BR}}{A} = \frac{F_{BR}}{12} = 600 \rightarrow F_{BR} = 7\ 200\ kg --- (1)$$

D.C.L.

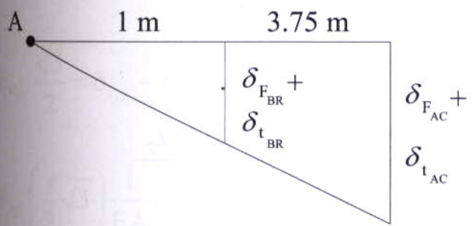


$$\sum M_A = 0$$

$$F_{AC}(4.75) = 10\ 000(3.5) - F_{BR}(1) --- (2)$$

$$(1)\ en\ (2): F_{AC} = 5\ 852.63\ kg\ --- (3)$$

Deformaciones:



$\sim$ de Δ_S :

$$\frac{\delta_{F_{BR}} + \delta_{t_{BR}}}{1} = \frac{\delta_{F_{AC}} + \delta_{t_{AC}}}{4.75} --- (4)$$

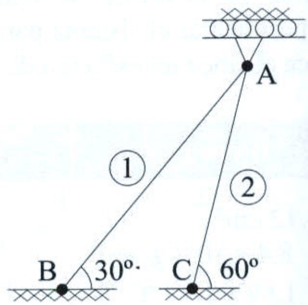
Reemplazando (1) y (3) en (4):

$$4.75\left[\frac{7200 \times 1}{8.4 \times 10^5 \times 12} + 1 \times 1.89 \times 10^{-5}\Delta t\right] = \frac{5852.63 \times 3}{2.1 \times 10^6 \times 4} + 3 \times 1.17 \times 10^{-5}\Delta t \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\Delta t\ =\ -23.82°C$$

Problema 102

Hallar la relación entre los coeficientes de dilación α_1 y α_2 para que la estructura sometida a un aumento de temperatura "Δt" no engendre esfuerzos de origen térmico.



Solución :

Condición del problema:

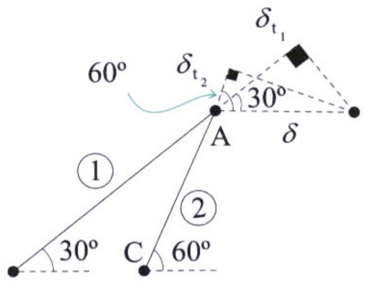
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$\therefore$ Las deformaciones serán por temperatura únicamente.

Si $L_{AB} = \ell$

$$L_{AC} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

Deformaciones:



$$\delta \cos\ 30° = \delta_{t_1}$$

$$\delta \cos\ 60° = \delta_{t_2}$$

$$\therefore \frac{\delta_{t_1}}{\cos 30°} = \frac{\delta_{t_2}}{\cos 60°}$$

$$\frac{\ell \Delta t \alpha_1}{\sqrt{3}/2} = \frac{\left(\ell\sqrt{3}/3\right)\Delta t \alpha_2}{1/2}$$

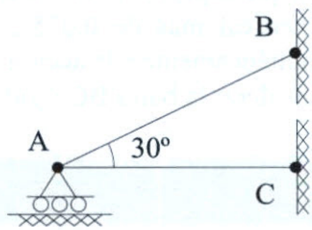
$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\therefore \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1 \quad \text{Rpta.}$$

Problema 103

Si al elemento AB se le incrementa la temperatura desde 60 °F hasta 104 °F, mientras que la temperatura del elemento AC permanece en 60 °F. ¿Qué esfuerzos se inducen en ellos, suponiendo que se conservan rectos?

$\alpha = 6 \times 10^{-6}/\ {}^\circ F$
$E = 30 \times 10^{6}$ lb/ pulg^2
$A = 2$ pulg^2

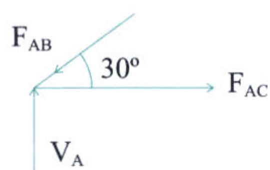


Solución:

$$\Delta t_{AB} = +44^\circ F$$
$$\Delta t_{AC} = 0^\circ F$$
$$\text{Si } L_{AB} = \ell$$
$$L_{AC} = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

Equilibrio en el nudo A

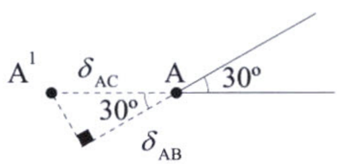
$$\sum F_H = 0 \rightarrow F_{AB}\cos 30^\circ = F_{AC}$$
$$F_{AB}\frac{\sqrt{3}}{2} = F_{AC} \ --- (1)$$



Deformaciones:

A^1: Posición final del punto A

$$\delta_{AC} = \delta_{F_{AC}}$$



$$\delta_{AB} = \delta_{t_{AB}} - \delta_{F_{AB}}$$

$$\delta_{AC}\cos 30^\circ = \delta_{AB}$$

$$\delta_{F_{AC}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \delta_{t_{AB}} - \delta_{F_{AB}}$$

$$F_{AC}\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right)\frac{1}{EA}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 44 \times 6 \times 10^{-6}\ell - \frac{F_{AB}\,\ell}{EA}$$

$$F_{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right)\frac{1}{EA}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 264 \times 10^{-6}\ell - \frac{F_{AB}\,\ell}{EA}$$

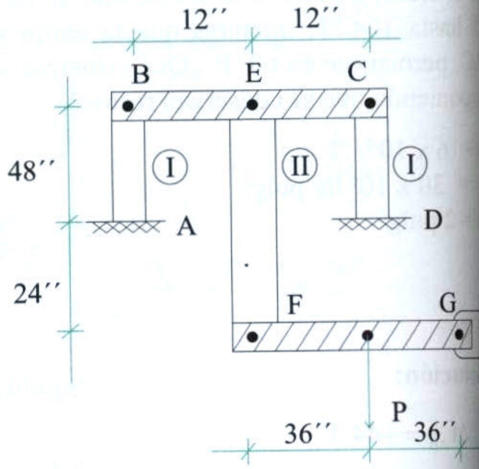
$$\therefore F_{AB} = 9605.82 \text{ lb} \rightarrow \text{en (1)}: F_{AC} = 8318.88 \text{ lb}$$

$$\therefore \sigma_{AC} = 4159.44 \text{ lb/pulg}^2 \ ; \sigma_{AB} = 4802.91 \text{ lb/pulg}^2$$ Rpta.

Problema 104

¿Qué variación de temperatura se requerirá para que el punto ´F´ no varíe su posición según la vertical más de 0.075", estando sometido simultáneamente a la acción de P = 20 000 lbs? Considerar la barra BC rígida y FG rígida.

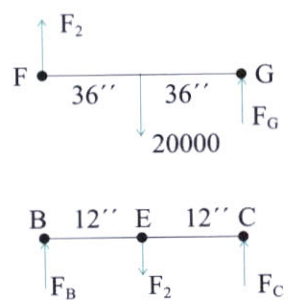
	I	II
A (pulg²)	0.5	2
E (lb / pulg²)	30×10^6	15×10^6
α (/ºF)	6.5×10^{-6}	9.2×10^{-6}



Solución:

Suponemos ΔT (+)

D.C.L.

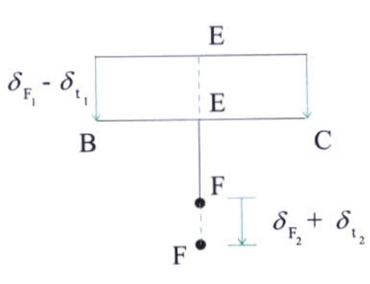


$$\sum M_G = 0 \rightarrow F_2 = 10\ 000 \text{ lb}$$

Por simetría : $F_B = F_C = F_1$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow F_1 = 5\ 000 \text{ lb}$$

Deformaciones:



Condición del problema:

$$\delta_{F_1} - \delta_{t_1} + \delta_{F_2} + \delta_{t_2} = 0.075" - - - (1)$$

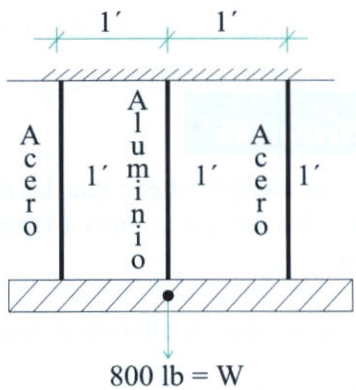
De (1):

$$\frac{5\times10^3\times48}{30\times10^6\times0.5} - 48\times6.5\times10^{-6}\Delta t + \frac{10\times10^3\times72}{15\times10^6\times2} + 72\times9.2\times10^{-6}\Delta t = 0.075"$$

$\Delta t = +99.88°F$ **Rpta.**

Problema 105

Diámetro de las 3 varillas: 1/8". ¿Con qué aumento de temperatura Δt (ºF), el peso W es soportado solo por las varillas de acero?

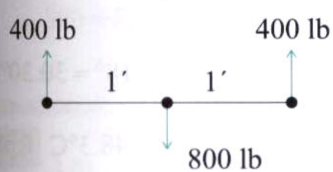


$$\text{Acero}: \begin{cases} E = 30\times10^6\,\text{psi} \\ \alpha = 6.5\times10^{-6}\,/\,°F \end{cases}$$

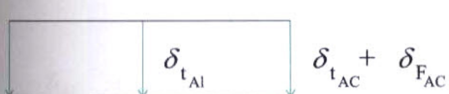
$$\text{Aluminio}: \alpha = 12\times10^{-6}\,/\,°F$$

Solución:

D.C.L.



Deformaciones:



$$\delta_{t_{AC}} + \delta_{F_{AC}} = \delta_{t_{Al}}$$

$$\alpha_{ac}\Delta t \cancel{l} + \frac{F_{AC}\cancel{l}}{E_{AC}A_{AC}} = \alpha_{al}\Delta t \cancel{l}$$

$$\frac{F_{AC}}{(\alpha_{Al} - \alpha_{AC})E_{AC}A_{AC}} = \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{400 \text{ lb}}{30\times 10^{6} \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \text{pulg}^2 (12-6.5)10^{-6}/°\text{F}}$$

$\Delta t = 197.55°\text{F}$ Rpta.

Problema 106

Un tubo de aluminio tiene una longitud de 60 m a una temperatura de 18 ºC. Un tubo de acero adyacente, a la misma temperatura es 5 mm mayor que la longitud del tubo de aluminio.

¿A qué temperatura la diferencia de longitud de los 2 tubos será de 15 mm?

$\alpha_{al} = 23 \times 10^{-6}/$ ºC

$\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6}/$ ºC

Solución:

$$\alpha_{al} > \alpha_{ac}$$

$$\therefore \delta_{t_{al}} - \delta_{t_{ac}} = 5 + 15 = 20 \text{ mm}$$

$$\Delta t = t_f - 18°\text{C}$$

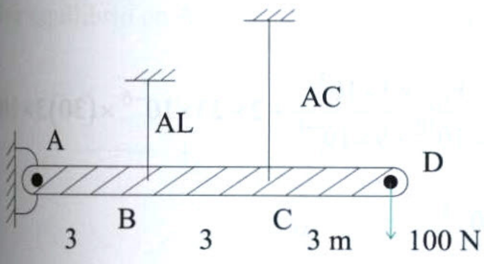
$$\alpha_{al}\Delta t\ l_{al} - \alpha_{ac}\Delta t\ l_{ac} = 20$$

$$23\times 10^{-6}(t_f - 18°)60\times 10^3 - 12\times 10^{-6}(t_f - 18°)60005 = 20$$

$$t_f - 18° = 30.30°\text{C}$$

$t_f = 48.3°\text{C}$ Rpta.

Problema 107



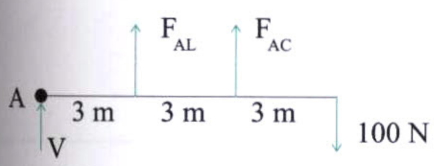
$\Delta t = 30\ ^\circ C$

$F_{AC} = ?$

$F_{AL} = ?$

Aluminio	Acero
$A = 9\times10^{-4} m^2$	$6\times10^{-4} m^2$
$E = 7\times10^{10}\ N/m^2$	$2\times10^{11}\ N/m^2$
$\alpha = 23\times10^{-6}\ /\ ^\circ C$	$11.7\times10^{-6}\ /\ ^\circ C$
$L = 3m$	$4m$

D.C.L.

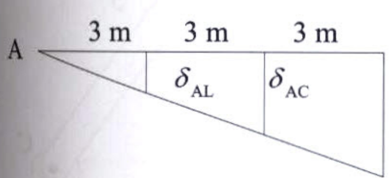


$$\Sigma M_A = 0$$

$$100(9) = 3F_{AL} + 6F_{AC}$$

$$300 = F_{AL} + 2F_{AC} \quad ---(1)$$

Deformaciones:



$$\frac{\delta_{AL}}{3} = \frac{\delta_{AC}}{6} \rightarrow 2\delta_{AL} = \delta_{AC}$$

$$\delta_{F_{AC}} + \delta_{t_{AC}} = 2\delta_{F_{AL}} + 2\delta_{t_{AL}}$$

$$\frac{F_{AC} \times 4 \times 10^3 \text{mm}}{2 \times 10^{11} \times 6 \times 10^{-4}} + 11.7 \times 10^{-6}(30)4 \times 10^3 = \frac{2F_{AL} \times 3 \times 10^3}{7 \times 10^{10} \times 9 \times 10^{-4}} + 2 \times 23 \times 10^{-6} \times (30)3 \times 10^3$$

$$0.333F_{AC} \times 10^{-4} = 0.0952F_{AL} \times 10^{-3} + 2736 \times 10^{-3}$$

$$0.333F_{AC} = 0.952F_{AL} + 27360 - - - (2)$$

$$\text{De 1 y 2}: 0.333F_{AC} = 285.6 - 1.904F_{AC} + 27360$$

$$2.237F_{AC} = 27645.6$$

$$\sigma_{AC} = 20.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Alum} = -27.1 \text{ MPa}$$

$F_{AC} = 12358.3$ N Rpta.

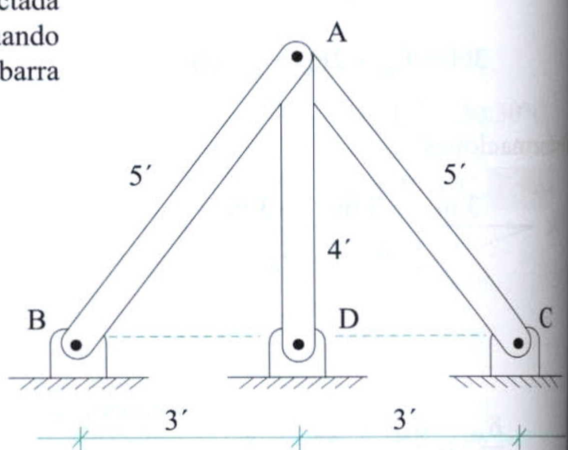
$F_{AL} = -24416.6$ N Rpta.

Problema 108

Las 3 barras son de Acero A – 36. E = 29 x 10^3 klb/pulg^2 y forman una armadura conectada por pasadores. Si esta se construye cuando t_1 = 50 ºF, determinar la fuerza en cada barra cuando t_2 = 110 ºF.

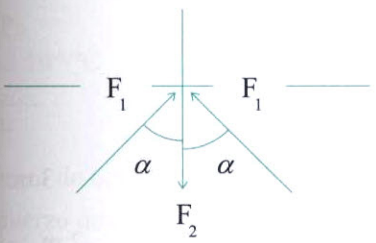
$\alpha = 6.6 \times 10^{-6}$/ ºF

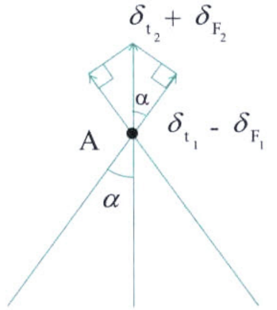
A = 2 pulg^2



Solución:

Por equilibrio en A: $\Delta T = 60^o$





$$\Sigma F_V = 0 \rightarrow 2F_1 \overbrace{\cos\alpha}^{4/5} = F_2 \; ---(1)$$

$$\left(\delta_{t_2} + \delta_{F_2}\right)\underset{\substack{\downarrow \\ 4/5}}{\cos\alpha} = \delta_{t_1} - \delta_{F_1} \; ---(2)$$

$$\delta_{t_2} = 48" \times 6.6 \times 10^{-6} \times 60 = 0.019"$$

$$\delta_{t_1} = 60" \times 6.6 \times 10^{-6} \times 60 = 0.02376"$$

$$\delta_{F_1} = \frac{F_1(60)}{2 \times 29 \times 10^3} = 1.0344 F_1 \times 10^{-3} \; ---(3)$$

$$\delta_{F_2} = \frac{F_2(48)}{2 \times 29 \times 10^3} = 0.8275 F_2 \times 10^{-3} \; ---(4)$$

(1), (3) y (4) en (2): $F_1 = 4.008$ KLb Rpta.

$\therefore F_2 = 6.541$ KLb Rpta.

Problema 109

Calcular Δt de manera que la varilla de bronce alcance un esfuerzo normal de 600 kg/cm² en tensión.

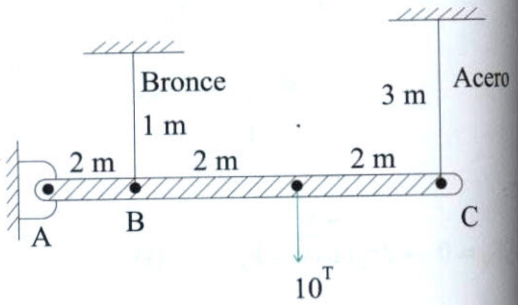
$\alpha_{acero} = 1.17 \times 10^{-5}\ /\ °C$

$\alpha_{bronce} = 1.89 \times 10^{-5}\ /\ °C$

$A_{AC} = 4cm^2, A_{BR} = 10cm^2$

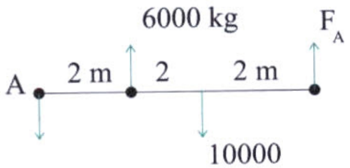
$E_A = 2.1 \times 10^6\ \text{kg/cm}^2$

$E_B = 8.4 \times 10^5\ \text{kg/cm}^2$



Solución:

D.C.L.



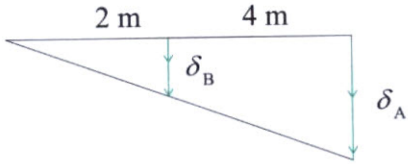
$F_B = \sigma A = 600(10) = 6000\ \text{kg}$

$\Sigma M_A = 0 = 10\ 000(4) - 6000\ (2) - 6F_A$

$F_A = 4666.67\ \text{kg}$

Deformaciones:

Suposición ΔT (+)



$\sim$ de Δ_s :

$: \dfrac{\delta_B}{2} = \dfrac{\delta_A}{6}$

$\delta_A = 3\delta_B$

$\delta_{F_A} + \delta_{t_A} = 3\delta_{F_B} + 3\delta_{t_B}$

$$\frac{4\ 666.67}{2.1 \times 10^6 \times 4} + 1.17 \times 10^{-5} \times 300 \times \Delta t = \frac{3 \times 6000 \times 100}{8.4 \times 10^5 \times 10} + 1.89 \times 10^{-5} \times 100 \times \Delta t(3)$$

$-216 \times 10^{-5} \times \Delta t = 0.21428 - 0.16666$

$\Delta t = -22.04°C$ La temperatura disminuye en esa magnitud. Rpta.

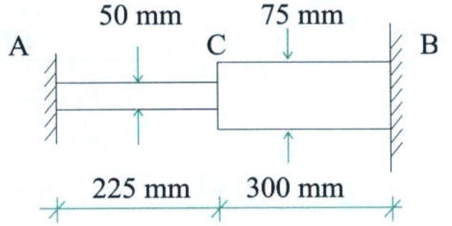
Problema 110

La barra de plástico es sometida a un incremento uniforme de temperatura de 30 °C.

E = 6 GPa
$\alpha = 100 \times 10^{-6}/°C$

Calcular:

a) La fuerza de compresión P (kN).
b) El esfuerzo de compresión σc (MPa) máximo.
c) El desplazamiento δc del punto C (mm).



Solución:

$$E = 6000\ N/mm^2 \qquad \delta_t = \delta_P \; ---(1)$$

$$\delta_t = \alpha\Delta t l = 100\times10^{-6}\times30\times525 = 1.575\ mm\; ---(2)$$

$$\delta_P = \frac{P\times300}{6000\times\frac{\pi}{4}(75)^2} + \frac{P\times225}{6000\times\frac{\pi}{4}(50)^2}\; ---(3)$$

$$(2)\ y\ (3)\ en\ (1): P = 51792\ N <> 51.792\ kN \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\sigma_C = \frac{51792\ N}{\frac{\pi}{4}(50)^2\ mm^2} = 26.38\ MPa \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

$$\delta_P = \frac{26.38\ MPa\times225\ mm}{6000\ MPa} = 0.98925\ mm \leftarrow$$

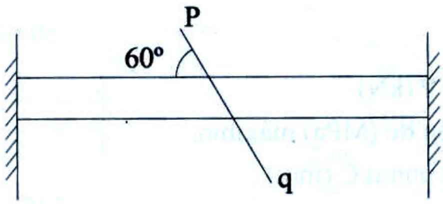
$$\delta_t = 100\times10^{-6}\times30\times225 = 0.6750\ mm \rightarrow$$

$$\leftarrow \delta_C = \delta_P - \delta_t = 0.314\ mm\ (\text{hacia la izquierda}) \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 111

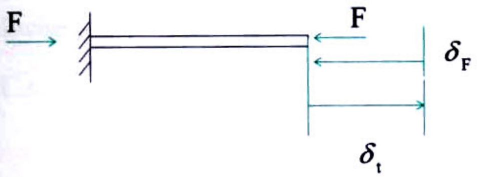
Una barra metálica se coloca entre soportes rígidos a la temperatura ambiente 68 °F. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre la sección inclinada "pq" si la temperatura se incrementa a 200 °F. Para la barra:

$\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F $E = 30 \times 10^{6}$ psi



Solución:

Superposición de efectos:



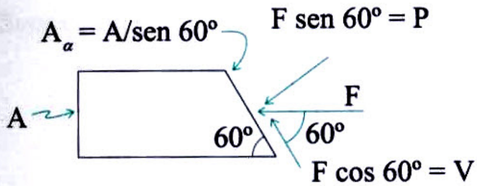
$$\delta_t = \delta_F$$

$$\alpha \Delta t l = \frac{Fl}{EA}$$

$$F = \alpha \Delta t E A$$

$$\Delta t = 132°F$$

$$F = 25740\ A$$



$$\sigma = \frac{F \text{ sen } 60°}{A / \text{sen } 60°} = 25740 \frac{A\left(\sqrt{3}\right)^2}{A(2)^2}$$

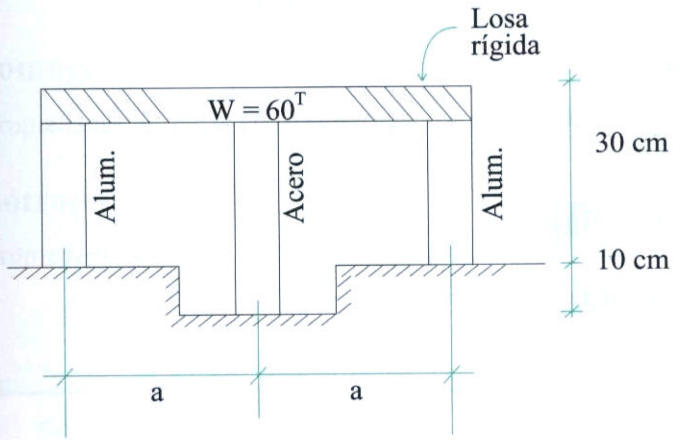
$$\sigma = 19305 \text{ lb/pulg}^2$$ **Rpta.**

$$\tau = \frac{F \cos 60°}{A / \text{sen} 60°} = \frac{25740 A (1/2)}{A / \left(\sqrt{3}/2\right)}$$

$$\tau = 11145.74 \text{ lb/pulg}^2$$ **Rpta.**

Problema 112

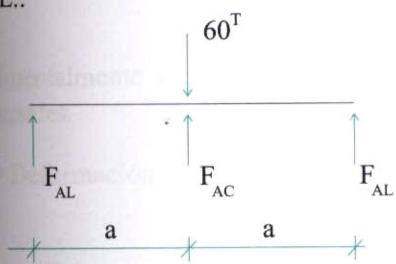
El sistema se encuentra a 18 °C. Determinar el esfuerzo en cada barra si la temperatura se eleva a 50 °C.



Acero	Aluminio
$\alpha = 1.17 \times 10^{-5}/\,°C$	$2.34 \times 10^{-5}/\,°C$
$A = 20\ cm^2$	$20\ cm^2$
$E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$	$7 \times 10^5\ kg/cm^2$

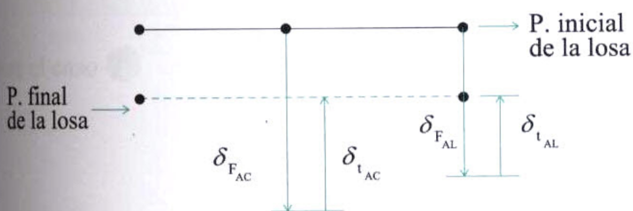
Solución:

D.C.L.:



$$\sum F_V \Rightarrow 2F_{AL} + F_{AC} = 60\,000\ kg \; --- (1)$$

Deformaciones:



$$\delta_{F_{AC}} - \delta_{t_{AC}} = \delta_{F_{AL}} - \delta_{t_{AL}} \; --- (2)$$

Ecuación : (1) en (2) :

$$\frac{(60\ 000-2F_{AL})40\ \text{cm}}{2\times10^{6}\times20}-32\times40\times1.17\times10^{-5}=\frac{F_{AL}.30\ \text{cm}}{7\times10^{5}\times20}-32\times30\times2.34\times10^{-5}$$

$F_{AL} = 16\ 300.48$ kg

$F_{AC} = 27\ 399.04$ kg

$\sigma_{aluminio} = 815\ \text{kg/cm}^2$ **Rpta.**

$\sigma_{acero} = 1370\ \text{kg/cm}^2$ **Rpta.**

CAPÍTULO

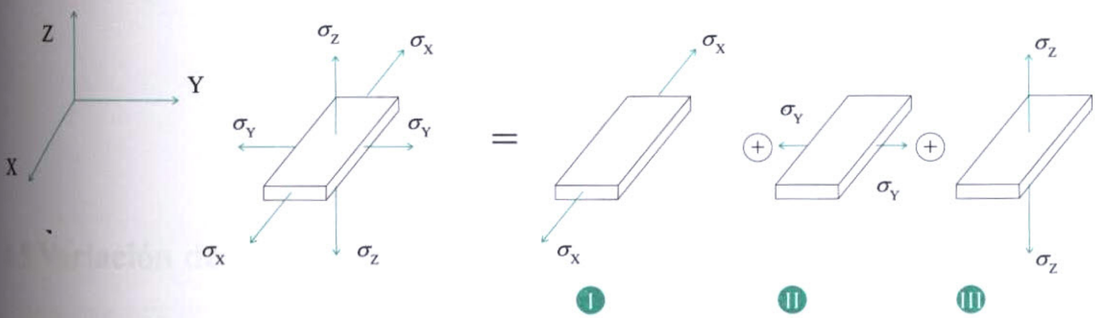
4 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN GENERALIZADA

4.1 Material homogéneo

Tiene las mismas propiedades elásticas (E, μ) en todos los puntos del cuerpo.

4.2 Material isótropo

Tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones en cada punto del cuerpo.



Para el caso I consideramos como eje longitudinal el eje donde está aplicado el esfuerzo, que en este caso es "X".

$$\varepsilon_l = \varepsilon_X = \frac{\sigma_X}{E} \rightarrow \text{Deformación unitaria longitudinal}$$

Experimentalmente se ha encontrado una relación entre las deformaciones longitudinales y transversales.

ε_T = Deformación unitaria transversal

$$-\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_l} = \mu \rightarrow$$ Módulo de Poisson, tiene un valor numérico único para un material particular que sea homogéneo e isótropo.

Para el caso I

$$\varepsilon_T = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = -\mu\varepsilon_l = -\mu\frac{\sigma_X}{E}$$

	ε_x	ε_y	ε_z
I	σ_x/E	$-\mu\sigma_x/E$	$-\mu\sigma_x/E$
II	$-\mu\sigma_y/E$	σ_y/E	$-\mu\sigma_y/E$
III	$-\mu\sigma_z/E$	$-\mu\sigma_z/E$	σ_z/E

Deformaciones unitarias totales en cada eje:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

A estas expresiones se les conoce como la Ley Generalizada de Hooke, y son válidas si el principio de superposición es aplicable, lo cual requiere una respuesta lineal elástica del material y las deformaciones deben ser pequeñas.

4.3 Valores del módulo Poisson (μ)

μ	Material
0.28	Hierro fundido
0.15	Concreto
0.34	Plástico
0.32	Acero estructural
0.35	Aluminio

4.4 Variación de área (ΔA)

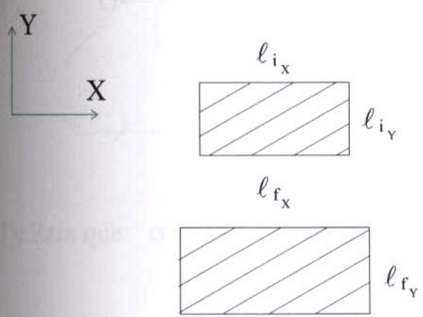
$\Delta A = A_f - A_i$

l_i = Longitud inicial

l_f = Longitud final

A_i = Área inicial

A_f = Área final



$$A_i = \ell_{ix}\,\ell_{iy}$$

$$A_f = \ell_{fx}\,\ell_{fy}$$

$$A_f = \ell_{ix}(1+\varepsilon_x)\,\ell_{iy}(1+\varepsilon_y)$$

$$A_f = A_i\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\underbrace{\varepsilon_x\varepsilon_y}_{\approx o}\right)$$

$$\frac{A_f}{A_i} = 1+\varepsilon_x+\varepsilon_y$$

$$\frac{A_f}{A_i} - 1 = \varepsilon_x+\varepsilon_y$$

$$\frac{A_f - A_i}{A_i} = \varepsilon_x+\varepsilon_y$$

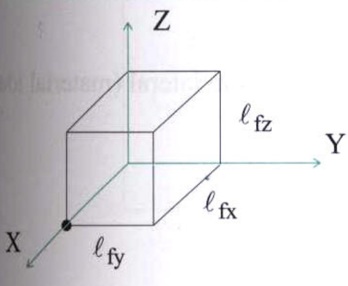
$$\Delta A = A_i(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

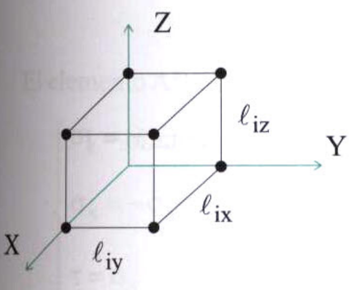
4.5 Variación de volumen (ΔV)

$\Delta V = V_f - V_i$

V_f = Volumen final

V_i = Volumen inicial





$$V_i = \ell_{ix}\ell_{iy}\ell_{iz}$$

$$V_f = \ell_{fx}\ell_{fy}\ell_{fz}$$

$$V_f = \ell_{ix}(1+\varepsilon_x)\ell_{iy}(1+\varepsilon_y)\ell_{iz}(1+\varepsilon_z)$$

$$V_f = V_i(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

$$V_f = V_i(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$\frac{V_f}{V_i} - 1 = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$\Delta V = V_i(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

Observación

$$\frac{\Delta V}{V_i} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e \rightarrow$$ Deformación volumétrica o cambio de volumen por unidad de volumen.

La variación de área y de volumen se producen debido a las deformaciones generadas por los esfuerzos normales.

4.6 Módulo de compresibilidad (K)

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Un cuerpo sometido a presión hidrostática uniforme:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P \qquad \Big| \qquad e = -3\frac{(1-2\mu)}{E}P$$

Haciendo: $K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ Módulo de Compresibilidad o módulo volumétrico

$$e = -\frac{P}{k}$$

Si $K = \infty \rightarrow e$ el material sería incompresible (material ideal, no existe).

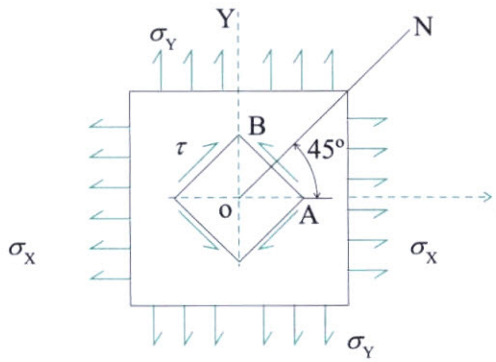
Si $K = \infty$

$\therefore 1 - 2\mu = 0 \rightarrow \mu = 1/2 \rightarrow \therefore \mu < 1/2$

Si (μ=0) el material puede ser estirado en una dirección sin contracción lateral (material ideal no existe).

$$\therefore \mu > 0 \qquad \therefore 0<\mu<1/2$$

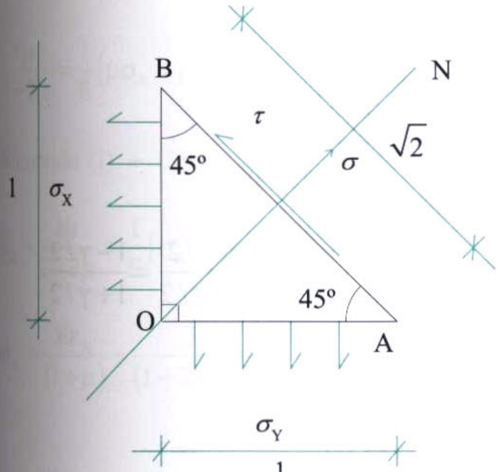
4.7 Estado de corte puro



Espesor pequeño unitario = 1

$\sigma_z = 0$

D.C.L: OAB



$$\sum F//\text{eje N} = 0$$

$$0 = \sigma\left(\sqrt{2}x1\right) - \sigma_x (1x1)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_y (1x1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{---(1)}$$

$$\sum F//\text{eje AB} = 0$$

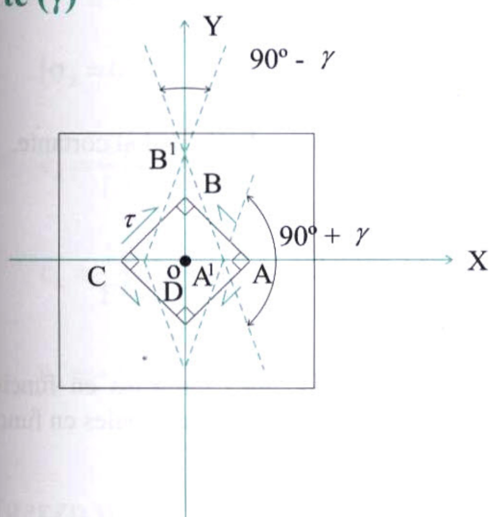
$$\tau\left(\sqrt{2}x1\right) + \sigma_x (1x1)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_y (1x1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{---(2)}$$

De (1): Para que $\sigma = 0 \rightarrow \sigma_x = -\sigma_y \rightarrow \text{en } (2): \tau = +\sigma_y$

$$\sigma_y = -\sigma_x$$

4.8 Relación entre el esfuerzo cortante (τ) y la deformación unitaria por corte (γ)



El elemento ABCD está en estado de corte puro.

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \sigma_x = -\sigma_y \\ \tau = \sigma_y \end{cases}$$

De la ley generalizada de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \cancel{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[-\tau - \mu\tau] = -\frac{\tau}{E}[1+\mu]$$

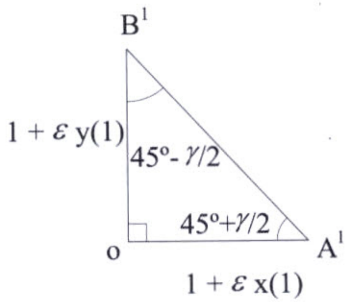
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \cancel{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\tau + \mu\tau] = \frac{\tau}{E}[1+\mu]$$

$$\operatorname{Tan}(45^\circ-\gamma/2)=\frac{1+\varepsilon_x}{1+\varepsilon_y}$$

$$\operatorname{Tan}(45^\circ-\gamma/2)=\frac{1-\frac{\tau}{E}(1+\mu)}{1+\frac{\tau}{E}(1+\mu)}$$



$$\operatorname{Tan}(45^\circ-\gamma/2)=\frac{\tan 45^\circ-\tan\gamma/2}{1+\tan 45^\circ\tan\gamma/2}=\frac{1-\gamma/2}{1+\gamma/2}$$

$$\frac{1-\gamma/2}{1+\gamma/2}=\frac{1-\frac{\tau}{E}(1+\mu)}{1+\frac{\tau}{E}(1+\mu)}$$

$$(2-\gamma)\left[E+\tau(1+\mu)\right]=(2+\gamma)\left[E-\tau(1+\mu)\right]$$

$$\text{Simplificando}: 4\tau+4\tau\mu=2\gamma E$$

$$\gamma=\frac{\tau}{\frac{E}{2(1+\mu)}}$$

Simplificando:

Llamando $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}\rightarrow$ Módulo de rigidez o Módulo de elasticidad al cortante.

$$\gamma=\frac{\tau}{G}$$

4.9 Fórmulas de Lamé

En la ley generalizada de Hooke, se tienen las deformaciones unitarias en función de l esfuerzos normales; en las fórmulas de Lamé, se tienen los esfuerzos normales en función de l deformaciones unitarias.

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]---(1)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]---(2)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]---(3)$$

Sumando 1, 2 y 3:

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=e=\frac{(1-2\mu)}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

$$\frac{e}{1-2\mu}=\frac{1}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)---(4)$$

Multiplicando la ecuación (4) por μ

$$\frac{e\mu}{1-2\mu}=\frac{1}{E}\left(\mu\sigma_x+\mu\sigma_y+\mu\sigma_z\right)---(5)$$

Sumando (1) + (5):

$$\varepsilon_x+\frac{e\mu}{1-2\mu}=\frac{1}{E}\left[\sigma_x+\mu\sigma_x\right]=\frac{\sigma_x}{E}(1+\mu)$$

$$\sigma_x=\frac{E\varepsilon_x}{(1+\mu)}+\frac{Ee\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)}---(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{donde haciendo}:\frac{E}{1+\mu}=2G\\&\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}=\gamma\end{aligned}\right\}\text{en }(6):\sigma_x=\lambda e+2G\varepsilon_x$$

$$\begin{matrix}\text{De manera similar}\\\text{se obtiene}\end{matrix}\begin{cases}\sigma_y=\lambda e+2G\varepsilon_y\\\sigma_z=\lambda e+2G\varepsilon_z\end{cases}$$

Fórmulas de Lamé

$\lambda, G \rightarrow$ Constantes de Lamé

$G \rightarrow$ Módulo de rigidez

4.10 Esfuerzo biaxial

En el plano la ley generalizada de Hooke se simplifica:

$$(\sigma_z=0)$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\sigma_x\right]$$

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}\left[\sigma_x+\sigma_y\right]$$

en el caso de los esfuerzos:

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)$$

y la deformación volumétrica:

$$e=\frac{\Delta V}{V_i}=\frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$$

4.11 Esfuerzo uniaxial

$$\left(\sigma_y=0,\sigma_z=0\right)$$

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\mu\frac{\sigma_x}{E}$$

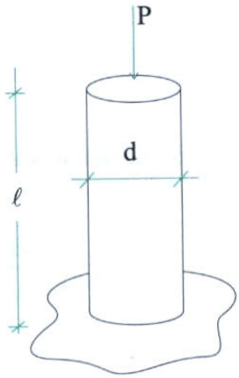
y la deformación volumétrica:

$$e=\frac{\Delta V}{V_i}=\frac{\sigma_x}{E}(1-2\mu)$$

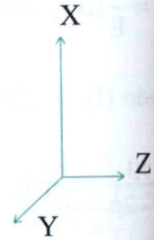
Problema 113

Calcular: $\Delta d = ?$

Dato:
E, μ



$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z \end{cases}$$



Solución:

$$\Delta d = d\varepsilon_y$$

$$\sigma_x = \frac{-P}{\frac{\pi d^2}{4}} \qquad \delta = \frac{-P\ell}{E\frac{\pi d^2}{4}}$$

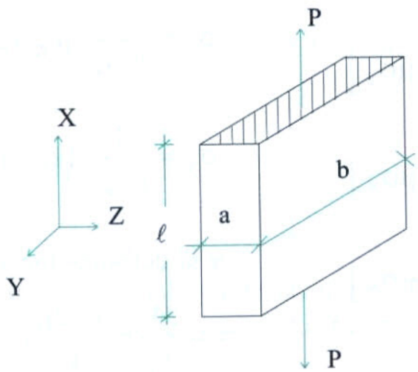
$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{\delta}{\ell} = \varepsilon_x = -\frac{4P}{E\pi d^2}$$

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = +\frac{\mu 4P}{E\pi d^2}$$

$$\Delta d = d\varepsilon_y = +\frac{\mu 4P}{E\pi d} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 114

Calcular: $\mu = ?$
Dato:
$E, \Delta b$



Solución:

$$\sigma_x = \frac{P}{ab} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\delta = \frac{P}{ab}\frac{\ell}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z$$

$$\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x = \frac{P}{abE}$$

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{P}{abE}$$

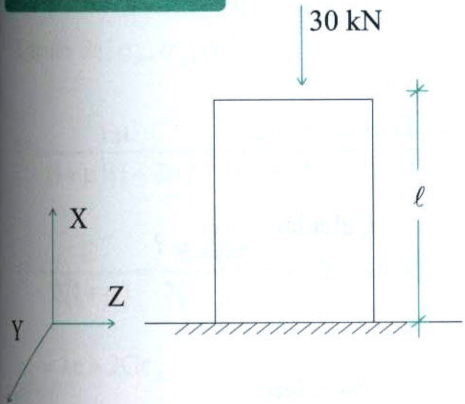
$$b\varepsilon_y = \Delta b$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{\mu P}{abE}$$

$$\mu = -\frac{aE\Delta b}{P}$$

NOTA: Δb es negativo con lo cual μ sale positivo.

Problema 115



$$E = 2x10^5 \, MN/m^2$$

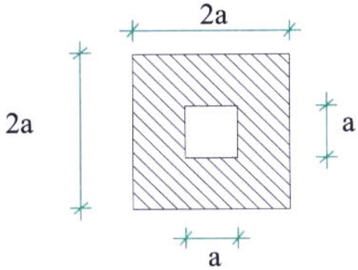
$$\mu = 0.3$$

$$\Delta A = A_i\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = ?$$

$$\Delta a = 10\varepsilon_y = ?$$

Sección:

a=`10 mm



$$E = 2x10^5 \, MN/m^2$$

$$\mu = 0.3$$

$$\Delta A = A_i\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = ?$$

$$\Delta a = 10\varepsilon_y = ?$$

Solución:

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z \end{cases}$$

$$A = (20)^2 - (10)^2 = 300 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_x = -\frac{30\times10^3 \text{N}}{\left[(20)^2-(10)^2\right]\text{mm}^2} = \frac{30\,0\cancel{00}}{3\cancel{00}} = -100\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{1} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{100\cancel{\text{N}}}{\cancel{\text{mm}^2}} \times \frac{1}{2x10^{11}}\frac{\text{m}^2}{\text{N}} \times \frac{10^6\cancel{\text{mm}^2}}{1\cancel{\text{m}^2}}$$

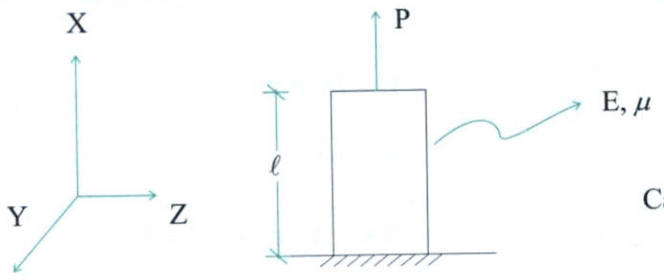
$$\varepsilon_x = -0.5\times10^{-3} = -0.0005 \text{ mm/mm}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = +0.00015 \text{ mm/mm}$$

$$\Delta A = 300 \text{ mm}^2\left[2\times0.00015\right] = 0.09 \text{ mm}^2$$

$$\Delta a = 10(0.00015) = 0.0015 \text{ mm} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

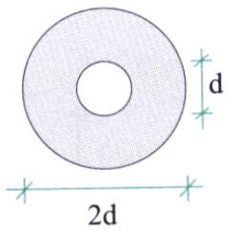
Problema 116



Calcular: $\frac{\Delta V}{V_i} = ?$

Solución:

Sección:



$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x$$

$$\pi\frac{(2d)^2}{4} - \pi\frac{(d)^2}{4} = A$$

$$\frac{\Delta V}{V_i} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x - 2\mu\varepsilon_x = \varepsilon_x(1-2\mu)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{4P}{3\pi d^2 E}$$

$$\frac{\Delta V}{V_i} = \frac{4P(1-2\mu)}{3\pi d^2 E}$$ Rpta.

Problema 117

Hallar las fuerzas que actúan en las caras del prisma recto.

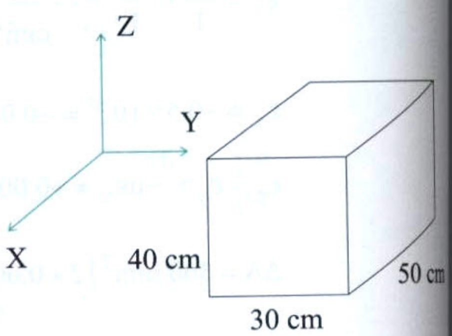
$\varepsilon_z = -\ 0.0003 = -3\times10^{-4}$

$\varepsilon_y = +\ 0.0002 = 2\times10^{-4}$

$\varepsilon_x = +\ 0.0002 = 2\times10^{-4}$

$\mu = 1/4$

$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$



Solución:

Cáculo de: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\times10^6\times1/4}{(1+1/4)(1-2/4)} = 800\ 000\ \text{kg/cm}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2\times10^6}{2(1+1/4)} = 800\ 000\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = +\ 0.0001$$

$$\sigma_x = 800{,}000\left(1\times10^{-4}\right) + 2\times8\times10^5\times2\times10^{-4} = 400\ \text{kg/cm}^2$$

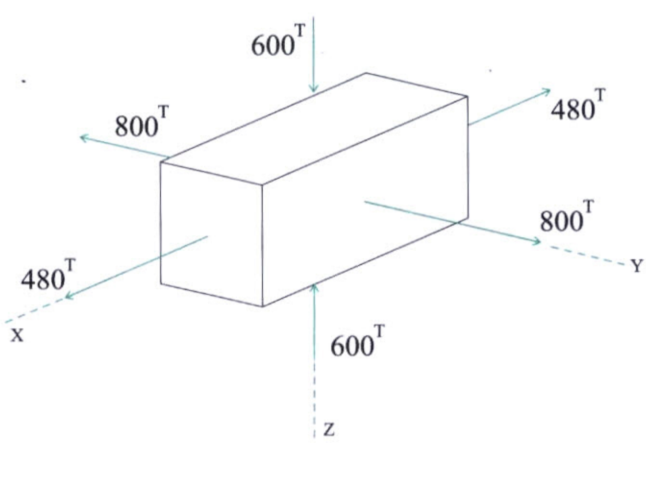
$$\sigma_y = 8\times10^5\times1\times10^{-4} + 2\times8\times10^5\times2\times10^{-4} = 400\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_z = 8\times10^5\times1\times10^{-4} + 2\times8\times10^5\left(-3\ \text{x}\ 10^{-4}\right) = -400\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_x A = F_x = 30\times40\ \text{cm}^2\times400\ \text{kg / cm}^2 \Rightarrow 480\ \text{T}$$

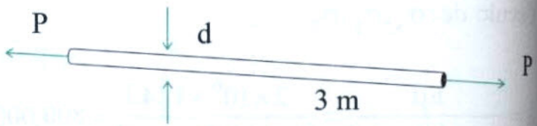
$$F_y = 40\times50\ \text{cm}^2\times400\ \text{kg/cm}^2 \Rightarrow 800\ \text{T}$$

$$F_z = 30\times50\text{cm}^2\left(-400\ \text{kg / cm}^2\right) \Rightarrow -600\ \text{T}$$



Problema 118

La barra tiene: L = 3 m; di = 30 mm. Está hecha de aleación de aluminio E = 73 GPa $\mu = 1/3$. Si la barra se alarga 7 mm, ¿cuánto se reduce el diámetro (mm)? ¿cuál es la carga P (kN)?



Solución:

$$\varepsilon_l = \frac{7}{3000} \Rightarrow \varepsilon_l = \mu\varepsilon_l \rightarrow \varepsilon_t = -7.777 \times 10^{-4}$$

$$d_f = d_i\left(1 + \varepsilon_t\right) = 29.97667 \text{ mm}$$

$$d_i\varepsilon_t = \Delta d = d_f - 30 = -0.02333 \text{ mm}$$

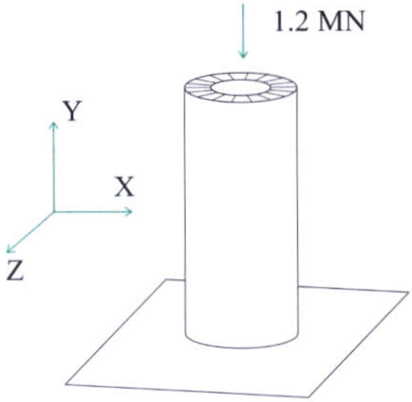
$$\frac{\delta_l}{L} = \varepsilon_l = \frac{P}{EA} \rightarrow P = \frac{7}{3000} \times 73 \times \frac{\pi}{4}(30)^2 = 120.4 \text{ kN} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 119

Un tramo de tubería de acero de 2 m de longitud y 273 mm de diámetro exterior, con un espesor de pared de 12.5 mm es utilizado como columna corta y debe soportar una carga axial centrada de 1.2 MN. Sabiendo que E=200 GPa y $\mu = 0.30$. Determinar:

a) El cambio de longitud de la tubería
b) El cambio en el diámetro exterior de la tubería
c) El cambio en el espesor de la misma

Solución:



a) $\Delta L = L.\varepsilon_y ---(1)$

$\phi_e = 273 \text{ mm}$

$\phi_i = 273 - 2(12.5) = 248\text{mm}$

$$\sigma_y = -\frac{1.2\times10^6}{\frac{\pi}{4}\left[(.273)^2-(.248)^2\right]} = -117.3\times10^6 \frac{N}{m^2}$$

$\sigma_x = \sigma_z = 0$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y) = \frac{1}{2\times10^{11}}\left[-117.3\times10^6\right]$$

$\varepsilon_y = 58.65\times10^{-5}$ en (1):

$\Delta L = 2\,000 \text{ mm}\left(-58.65\times10^{-5}\right) = -1.173 \text{ mm}$ Rpta.

b) $\Delta\phi_e = \phi_e\varepsilon_x ---(2)$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[-\mu\sigma_y\right] = \frac{1}{2\times10^{11}}\left[-0.3\left(-117.3\times10^6\right)\right]$$

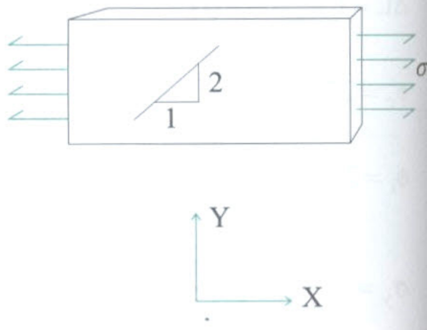
$\varepsilon_x = 17.595\times10^{-5}$ en (2): $\Delta\phi_e = 273 \text{ mm}\left(17.595\times10^{-5}\right)$

$\Delta\phi_e = +0.048 \text{ mm}$ Rpta.

c) $\Delta e = e.\varepsilon_x = 12.5 \text{ mm}\left(17.595\times10^{-5}\right) = +\ 0.00219 \text{ mm}$ Rpta.

Problema 120

Una placa de aluminio está sometida a una carga axial que produce un esfuerzo normal σ. Sabiendo que antes de la carga se trazó una línea con pendiente 2:1. Determinar la pendiente de la línea cuando $\sigma = 18$ KLb/pulg^2. Para el aluminio, use E= 10×10^6 lb/pulg^2 y $\mu = 0.33$.



Solución:

$$\sigma_x = +\,18\ \text{KLb/ pulg}^2$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{18\times10^3}{10\times10^6} = +\ 0.0018$$

$$\varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_x}{E} = -0.33\times0.0018 = -0.000594$$

$$l_{ox} = 1, l_{oy} = 2$$

$$l_{fx} = l_{ox}\left(1+\varepsilon_x\right) = 1(1.0018) = 1.0018$$

$$l_{fy} = l_{oy}\left(1+\varepsilon_y\right) = 2(1-0.000594) = 1.998812$$

$$\text{Pendiente}: \frac{l_{fy}}{l_{fx}} = 1.995220 \quad \text{Rpta.}$$

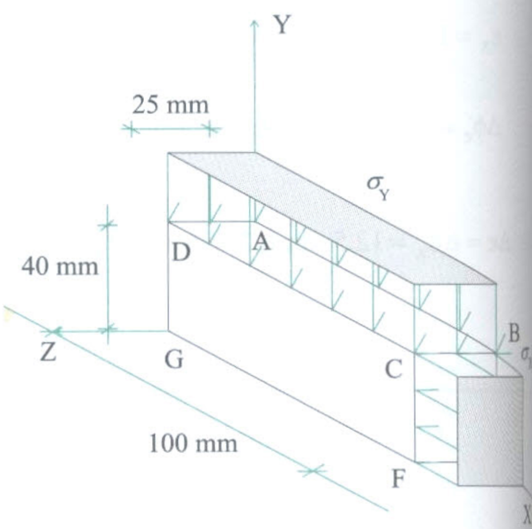
Problema 121

El bloque de la figura es de una aleación de magnesio, para la cual E = 50 GPa. y $\mu = 1/3$ Hallar:

a) La magnitud σ_y, para la cual el cambio de altura del bloque será cero

b) El cambio correspondiente en el área de la cara ABCD

c) El cambio correspondiente en el volumen del bloque



Solución:

a) $\sigma_x = -180\text{MPa} \quad \varepsilon_y = 0$

$\sigma_y = ?$

$\sigma_z = 0$

$$\cancel{\varepsilon_y}^{0} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \cancel{\sigma_z}^{0}\right)\right]$$

$$\sigma_y = \mu\sigma_x = \frac{1}{3}(-180) = -60\text{MPa} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

b) $\Delta A = A_0(\varepsilon_x + \varepsilon_z)$

$A_0 = 100(25) = 2\ 500\ \text{mm}^2$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \cancel{\sigma_z}^{0}\right)\right] = \frac{1}{50\times10^3\,\text{MPa}}\left[-180 - \frac{1}{3}(-60)\right]$$

$\varepsilon_x = -\ 0.0032$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_z}^{0} - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{50\times10^3}\left[-\frac{1}{3}(-180 - 60)\right]$$

$\varepsilon_z = +\ 0.0016$

$$\therefore \Delta A = 2500(-\ 0.0032 + 0.0016) = -\ 4\ \text{mm}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

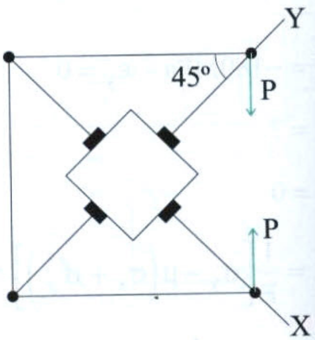
c) $\Delta V = V_0\left(\varepsilon_x + \cancel{\varepsilon_y}^{0} + \varepsilon_z\right) = 25 \text{ x } 40 \text{ x } 100(-\ 0.0032 + 0.0016)$

$$\Delta V = -\ 160\,\text{mm}^3 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

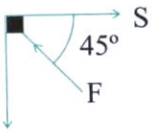
Problema 122

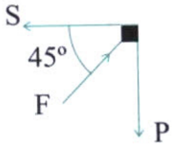
Se muestra un dispositivo para comprimir un bloque cúbico de concreto. Hallar el valor de "P" que originará una disminución volumétrica de 0.05 cm3. Todas las varillas son de acero.

Bloque E= 2 x 10^5 kg/cm², u bloque = 1/5. Lado del cubo = 10 cm.



Solución:





$$V_i = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = -0.05 = 1000\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)$$

$$F \text{ sen } 45^\circ = P$$

$$F = \frac{P}{\sqrt{2}/2} = P\sqrt{2}$$

$$\sigma_x = -\frac{P\sqrt{2}}{100} = \sigma_y$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\times10^5}\left[-\frac{P\sqrt{2}}{100} + \frac{1}{5}\frac{P\sqrt{2}}{100}\right] = -\frac{2P\sqrt{2}}{5\times10^7}$$

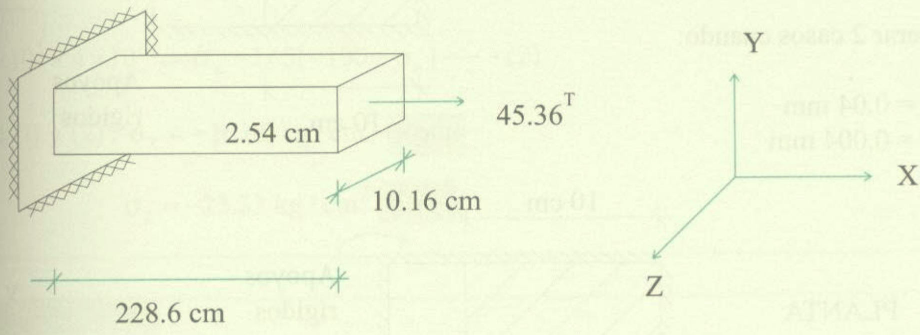
$$\varepsilon_y = \frac{1}{2\times10^5}\left[-\frac{P\sqrt{2}}{100} + \frac{1}{5}\frac{P\sqrt{2}}{100}\right] = -\frac{2P\sqrt{2}}{5\times10^7}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\times10^5}\left[-\frac{1}{5}\left(-\frac{P\sqrt{2}}{100} - \frac{P\sqrt{2}}{100}\right)\right] = \frac{P\sqrt{2}}{5\times10^7}$$

$$-0.05 = 1000\frac{\left(-3\sqrt{2}P\right)}{5\times10^7} \rightarrow P = 589.26 \text{ kg} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 123

Una carga axial de 45.36 toneladas se va aplicando lentamente a una barra de sección rectangular de 2.54 cm x 10.16 cm y 228.6 cm de longitud. Cuando se encuentra cargada los 10.16 cm de uno de los lados de sección miden 10.1564 cm y la longitud ha aumentado en 0.2286 cm. Calcular u y E.



Solución:

$\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\sigma_x = \frac{45\,360 \text{ kg}}{(2.54)(10.16)\text{cm}^2} = 1757.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Datos}\begin{cases}\Delta l_{oz} = 10.1564 - 10.16 = -\ 0.0036 \text{ cm}\\ \Delta l_{ox} = 0.2286 \text{ cm}\end{cases}$$

$$\Delta l_{oz} = l_{oz}\varepsilon_z \rightarrow \varepsilon_z = -\frac{0.0036}{10.16} = -3.54\times10^{-4}$$

$$\Delta l_{ox} = l_{ox}\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{0.2286}{228.6} = 1\times10^{-3}$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu\left(\cancel{\sigma}^{0}_y + \cancel{\sigma}^{0}_z\right)$$

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{1\,757.7}{1\times10^{-3}} = 1\,757\,700 \text{ kg/cm}^2$$

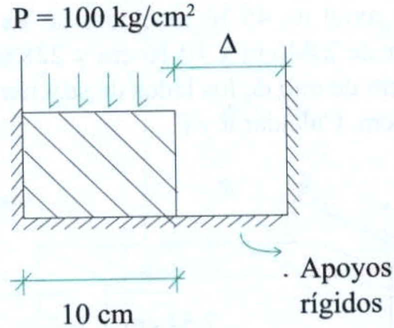
$$\mu = \frac{-\varepsilon\text{transv.}}{\varepsilon\text{longit.}} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = 0.354 \quad \text{Rpta.}$$

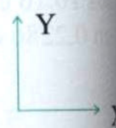
Problema 124

Hallar los esfuerzos en las direcciones x,y,z.

$E = 2 \times 10^5$ kg/cm²
$\mu = 1/5$

ELEVACIÓN

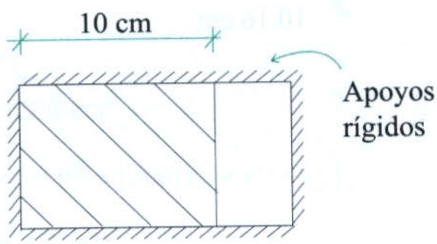


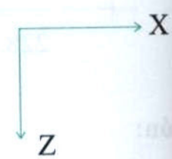


Considerar 2 casos cuando:

A) $\Delta = 0.04$ mm
B) $\Delta = 0.004$ mm

PLANTA





Solución:

A) Suponemos que $l_{ox}\varepsilon_x < \Delta \qquad \therefore \sigma_x = 0$

$$\sigma_y = -100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$o = \frac{1}{E}\left[0 - 1/5\left(-100 + \sigma_z\right)\right] \rightarrow \sigma_z = -20 \text{ kg/cm}^2 \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

Comprobación

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\times10^5}\left[0 - 1/5\left(-100 - 20\right)\right] = \frac{12}{10^5}$$

$$\Delta_x = l_{ox}\varepsilon_x = 0.0012 \text{ cm} \Leftrightarrow 0.012 \text{ mm} < 0.04 \text{ mm}$$

B) $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta_x}{l_x} = \dfrac{0.004\ \text{mm}}{100\ \text{mm}} = 4\times10^{-5}$; $\sigma_y = -100\ \text{kg/cm}^2$

$$\varepsilon_z = 0 \rightarrow \sigma_z = \frac{1}{5}(\sigma_x - 100) --- (1)$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$2\times10^5 \times 4\times10^{-5} = \sigma_x - 1/5(-100 + \sigma_z) --- (2)$$

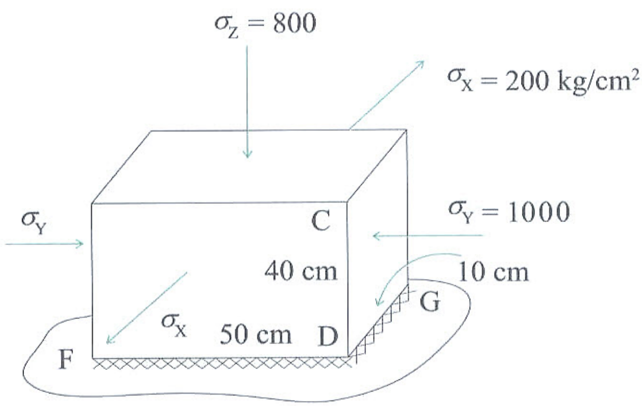
De (1) y (2): $\sigma_x = -16.66\ \text{kg/cm}^2$ Rpta.

$\sigma_z = -23.33\ \text{kg/cm}^2$ Rpta.

Problema 125

Un cuerpo prismático de acero está sometido a esfuerzos normales, tal como se ve en la figura.

Si $E = 2 \times 10^6$ kg/cm^2 y $u = 1/4$. Calcular las longitudes finales de sus lados.



Solución:

$\sigma_x = 200$, $\sigma_y = -1.000$, $\sigma_z = -800$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\times10^6}\left[200 - \frac{1}{4}(-1000 - 800)\right] = 0.000325$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2\times10^6}\left[-1000 - \frac{1}{4}(200 - 800)\right] = -0.000425$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\times10^6}\left[-800 - \frac{1}{4}(200 - 1\,000)\right] = -0.000300$$

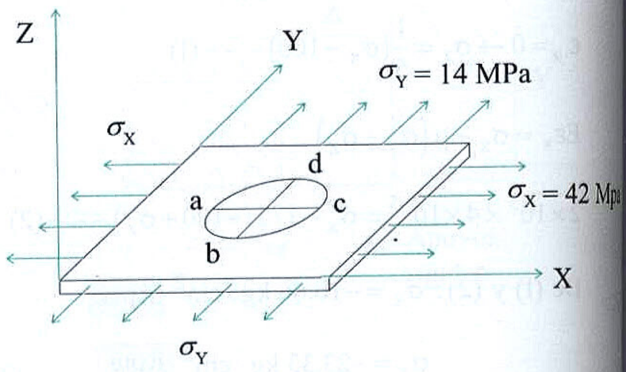
$Lf_{DG} = L_i(1 + \varepsilon_x) = 10.00325$ cm Rpta.

$Lf_{FD} = L_i(1 + \varepsilon_y) = 49.97875$ cm Rpta.

$Lf_{CD} = L_i(1 + \varepsilon_z) = 39.988$ cm Rpta.

Problema 126

Un círculo de diámetro 200 mm está grabado sobre una placa de latón.
Dimensiones de la placa 400 x 400 x 20 mm.



E = 100 GPa
u = 0.34

Calcular:

a) Δ ac c) Δt
b) Δ bd d) ΔV

Solución:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) = 37.24\times10^{-5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = -0.28\times10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -19.04\times10^{-5}$$

$$V_i = 32\times10^5\ \text{mm}^3$$

$\Delta ac = 200\varepsilon_x = 0.07448$ mm Rpta.

$\Delta bd = 200\varepsilon_y = -0.00056$ mm Rpta.

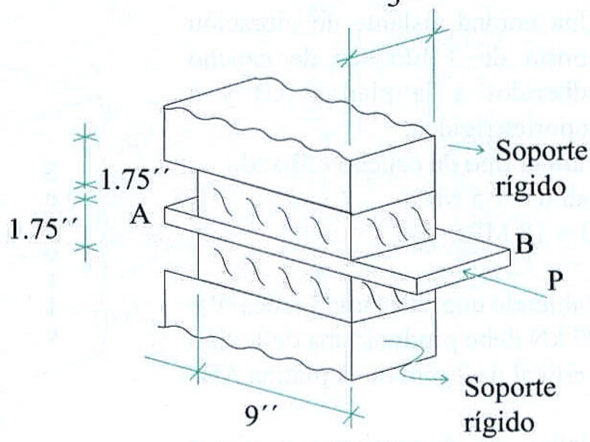
$\Delta t = 20\varepsilon_z = -0.003808$ mm Rpta.

$\Delta V = V_i\,\dfrac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = +573.44\ \text{mm}^3$ Rpta.

Problema 127

Dos bloques de caucho están pegados a soportes rígidos y a una placa móvil AB.

Sabiendo que una fuerza P = 7000 lb origina una deflexión δ = 0.125 pulg. Hallar el módulo de rigidez del caucho.

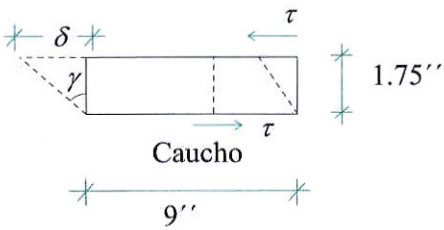


Solución:

$G = ?$

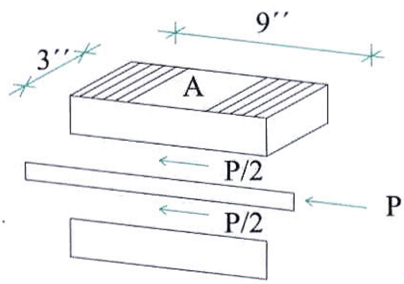
$P = 7000$ lb

$\delta = 0.125''$



Para deformaciones pequeñas:

$$\gamma = \tan\gamma = \frac{\delta}{1.75''} = \frac{0.125''}{1.75''}$$



Deformación de corte:

$$\gamma = 0.07142$$

$$\tau = \frac{P/2}{\text{Área}}$$

$$\tau = \frac{7\,000/2 \text{ lb}}{9'' \times 3''} = 129.63 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}$$

Módulo de rigidez:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{129.63 \text{ lb/pulg}^2}{0.07142}$$

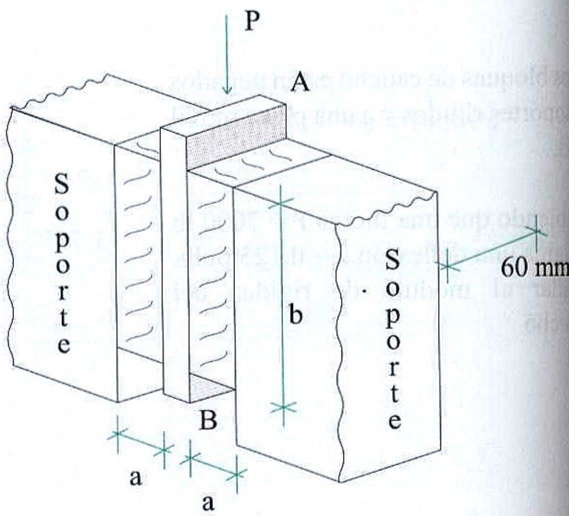
$$G = 1815 \text{ lb/pulg}^2$$

Problema 128

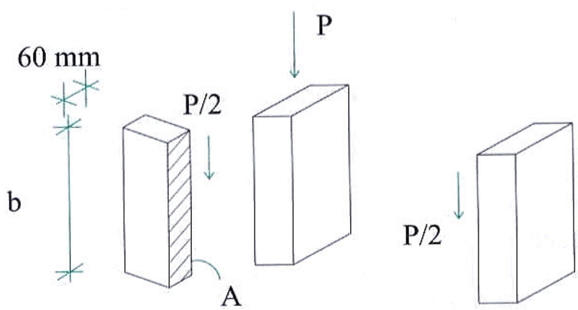
Una unidad aislante de vibración consta de 2 bloques de caucho adheridos a la platina AB y a soportes rígidos.
Para el tipo de caucho utilizado.
τadm = 1.5 MPa
G = 18 MPa

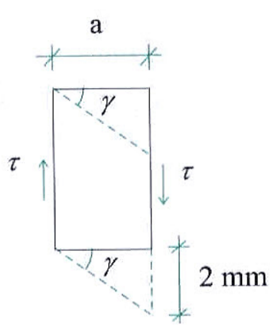
Sabiendo que una carga vertical P = 27 kN debe producir una deflexión vertical de 2 mm de la platina AB.

Hallar las dimensiones mínimas "a" y "b" de los bloques.



Solución:





$$\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{27\times10^3\,N/2}{b(60\ mm)} = 1.5\,\cancel{MPa}\times\frac{\cancel{10^6}\,N/\cancel{m^2}}{\cancel{1MPa}}\times\frac{\cancel{1m^2}}{\cancel{10^6}\,mm^2}$$

$b = 150$ mm Rpta.

$$\gamma = \frac{2}{a} \text{ ---(1)}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1.5\ MPa}{18\ MPa} = 0.08333 \text{ en (1)}$$

$$0.08333 = \frac{2}{a}$$

$a = 24$ mm Rpta.

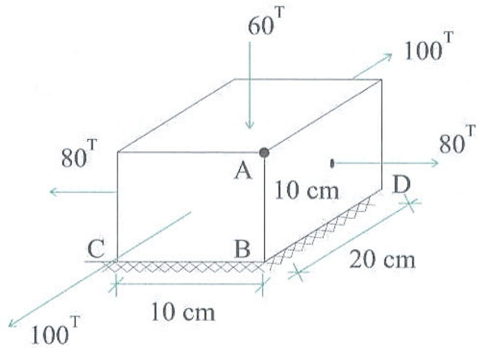
Problema 129

El paralelepípedo rectangular ABCD está sometido a fuerzas aplicadas en los centros de gravedad de sus caras.

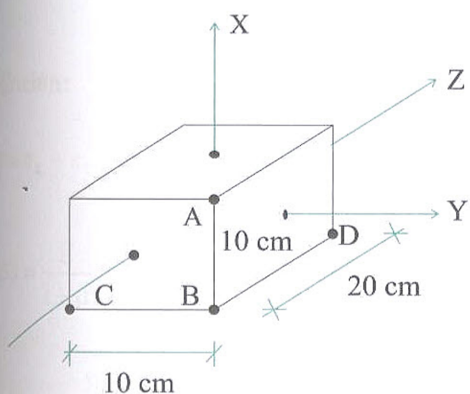
$E = 2x\ 10^6$ kg/cm²

$\mu = 1/4$

Hallas las nuevas dimensiones.



Solución:



$$\sigma_x = -\frac{60\times 10^3}{200} = -300\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{100\ \text{x}\ 10^3}{100} = 1\ 000\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{80\ \text{x}\ 10^3}{200} = 400\ \text{kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[-300 - \mu(1400)\right] = -325\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[400 - \mu(700)\right] = 112.5\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[1000 - \mu(100)\right] = 487.5\times 10^{-6}$$

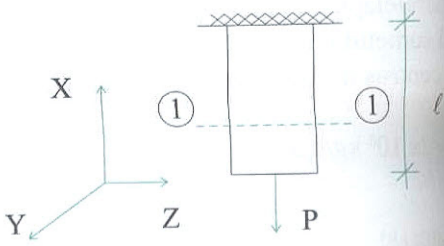
$$l_{fAB} = l_{oAB}(1+\varepsilon_x) = 10\left(1 - 325\times 10^{-6}\right) = 9.99675\ \text{cm}$$ Rpta.

$$l_{fBC} = l_{oBC}(1+\varepsilon_y) = 10\left(1 + 112.5\times 10^{-6}\right) = 10.001125\ \text{cm}$$ Rpta.

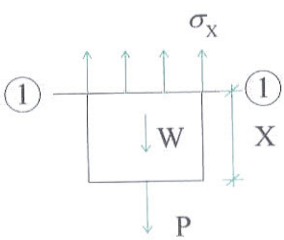
$$l_{fBD} = l_{oBD}(1+\varepsilon_z) = 20\left(1 + 487.5\times 10^{-6}\right) = 20.00975\ \text{cm}$$ Rpta.

Problema 130

Una barra prismática de sección recta A y longitud ℓ fija en extremo, cuelga verticalmente por la acción de su peso y de una fuerza de tracción P aplicada en el otro extremo. Calcular el aumento de volumen de la barra, si se dan:
E, u, γ.



Solución:

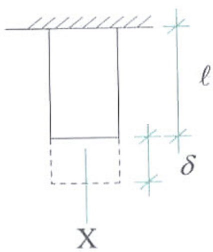


$$\sum F_v = 0$$

$$\sigma_x A = P + W$$

$$\sigma_x A = P + \gamma X A$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \gamma X$$



$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{\ell}$$

$$\delta = \int_{x=0}^{x=l} \frac{\sigma_x d_x}{E} = \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{P}{A} + \gamma x\right)\frac{dx}{E} = \left(\frac{P}{A} + \frac{\gamma\ell}{2}\right)\frac{\ell}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{P}{A} + \frac{\gamma\ell}{2}\right) --- (2)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$V_0 = Al --- (1)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = \frac{-\mu}{E}\left(\frac{P}{A} + \frac{\gamma\ell}{2}\right) --- (3)$$

$$\Delta V = V_0\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) --- (4)$$

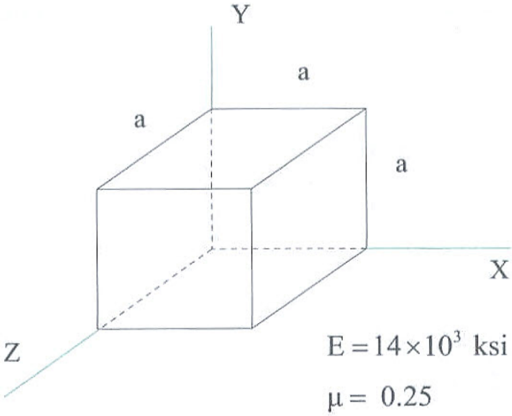
Reemplazando 1, 2, 3 en 4:

$$\Delta V = V_0\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = V_0 \varepsilon_x (1 - 2\mu)$$

$$\Delta V = (1 - 2\mu)\frac{\ell}{2E}(2P + \gamma\ell A) \quad \text{Rpta.}$$

Problema 131

Un cubo de hierro fundido de lado a = 3" se prueba en un laboratorio sometiéndolo a esfuerzo triaxial. Los extensómetros muestran que las deformaciones unitarias son:



$\varepsilon_x = -350\mu$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -65\mu$

$E = 14\times10^3$ ksi

$\mu = 0.25$

*Calcular: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (p.s.i)

$\Delta V(\text{pulg}^3)$

Solución:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -480\mu \qquad V_i = (3)^3 = 27 \text{ pulg}^3$$

$$2G = \frac{E}{1+\mu} = \frac{14\times10^6}{1+0.25} = 11.2\times10^6 \text{psi}$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{14\times10^6(0.25)}{(1.25)(0.5)} = 5.6\times10^6 \text{psi}$$

$$\Delta V = V_i(e) = -0.01296 \text{ pulg}^3$$

Fórmulas de Lamé :

$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x = -6608$ psi **Rpta.**

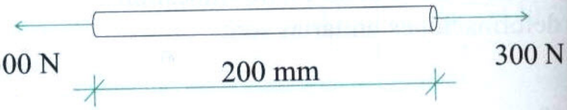
$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y = -3416$ psi **Rpta.**

$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z = -3416$ psi **Rpta.**

Problema 132

Una barra de plástico acrílico tiene un diámetro de 15 mm.

Calcular:



Variación de su longitud
Variación de su diámetro

$E = 2.7$ GPa
$\mu = 0.4$

Solución:

Ⓐ $\Delta l = 200\varepsilon_1 --- (1)$

$$\varepsilon_1 = \frac{P}{EA} = \frac{300\cancel{N}}{2.7\times10^9\ \frac{\cancel{N}}{\cancel{m^2}} \times \frac{1\cancel{m^2}}{10^6\ \cancel{mm^2}} \times \frac{\pi(15)^2}{4}\ \cancel{mm^2}}$$

$\varepsilon_1 = 0.00062877 ---$ en (1)

$\Delta l = +\ 0.1257$ mm $\boxed{\text{Rpta.}}$

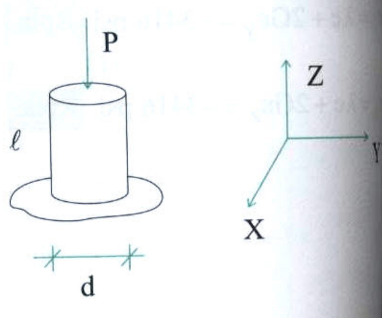
Ⓑ $\Delta d = 15\varepsilon_t --- (2)$

$\varepsilon_t = -\mu\varepsilon_1 = -(0.4)(0.000628) = -0.000251 ---$ en (2)

$\Delta d = -0.003768$ mm $\boxed{\text{Rpta.}}$

Problema 133

En el ensayo de un cilindro de hormigón a la compresión, el diámetro original d=15.24 cm resultó aumentado en 0.00127 cm y la longitud original $l = 30.48$ cm disminuyó en 0.02794 cm, bajo una carga total de compresión $P = 23587$ kg.



Calcular los valores de "E" y "μ".

Solución:

$d = 15.24$ cm $\qquad \Delta l = -0.02794$ cm

$\Delta d = 0.00127$ cm $\qquad P = 23\ 587$ kg

$\ell = 30.48$ cm

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{23587}{\frac{\pi(15.24)^2}{4}}$$

$$\sigma_z = -129.3 \text{ kg / cm}^2$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0.00127}{15.24} = 8.33 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{-0.02794}{30.48} = -9.166 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} = \left[\cancel{\sigma_y}^{0} - \mu\left(\cancel{\sigma_x}^{0} + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\cancel{\sigma_x}^{0} + \cancel{\sigma_y}^{0}\right)\right] \rightarrow E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$$

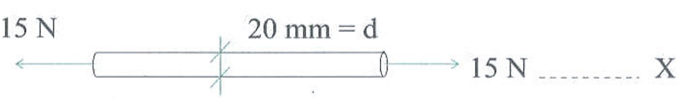
$E = 141\ 064.8 \text{ kg/cm}^2$ **Rpta.**

$-\varepsilon_y E / \sigma_z = \mu = 0.0908$ **Rpta.**

Problema 134

Una varilla tiene 10 mm de radio. Se somete a una carga axial de 15 N tal que la deformación unitaria axial es $\varepsilon_x = 2.75 \times 10^{-6}$.

Determinar el módulo de elasticidad (GPa) y la variación de su diámetro (mm); considerar $\mu = 0.23$



Solución:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{\ell} = \frac{P}{EA} \rightarrow E = \frac{P}{A\varepsilon_x} = \frac{\overbrace{15 \times 10^{-3}}^{\text{Factor de conversión}}}{\frac{\pi}{4}(20)^2 \times 2.75 \times 10^{-6}}$$

$$\frac{\cancel{N}}{\cancel{mm^2}} \times \frac{GPa}{10^9 \frac{\cancel{N}}{\cancel{m^2}}} \times \frac{10^6 \cancel{mm^2}}{1 \cancel{m^2}} = \underbrace{10^{-3}}_{\text{Factor de conversión}}$$

$E = 17.36$ GPa **Rpta.**

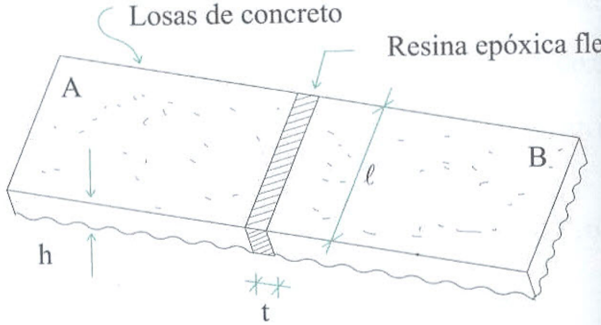
$$\Delta d = d\varepsilon_t = 20\begin{pmatrix} -0.23 \times 2.75 \times 10^{-6} \\ -\mu \quad \times \varepsilon_x \end{pmatrix}$$

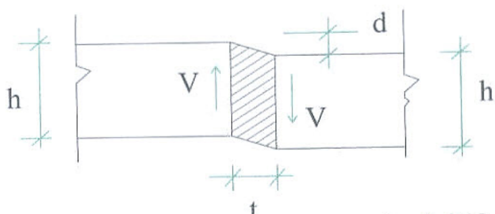
$\Delta d = -12.65 \times 10^{-6}$ mm **Rpta.**

Problema 135

Bajo la acción de las fuerzas cortantes V, las losas se desplazan verticalmente en relación con la otra.

$\ell = 1$ m
h = 100 m
t = 12 mm



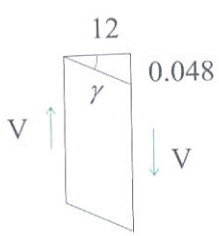


d = 0.048 mm

a) ¿Cuál es la deformación unitaria cortante promedio de la resina epóxica?

b) ¿Cuál es la magnitud de las fuerzas V (kN) si G = 960 MPa?

Solución:



$\gamma = \tan\gamma = 0.048/12 = 0.004$ radianes Rpta.

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{V}{100(1000)}$$

$$\frac{\tau}{\gamma} = G = 960 = \frac{V}{10^5(0.004)}$$

$$V = 384 \times 10^3 \text{ N}$$

$V = 384$ kN Rpta.

Problema 136

Una esfera sólida de acero: E = 210 GPa, $\mu = 0.3$ está sometida a una presión hidrostática P tal que su volumen se reduce en 0.4%.

Calcular:

a) La presión P (MPa)

b) Módulo volumétrico de elasticidad K (GPa) para el acero.

Solución:

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \quad ; \quad \varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\varepsilon$$

$$\Delta V=-0.004V_i---(1)$$

$$\Delta V=V_i 3\varepsilon---(2)$$

$$\sigma=-P$$

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\left[\sigma-\mu(\sigma+\sigma)\right]=\frac{\sigma}{E}(1-2\mu)=-\frac{P}{E}(1-2\mu)--- \text{ en (2)}$$

$$\Delta V=3V_i\left[-\frac{P}{E}(1-2\mu)\right]---(3)$$

$$(1)=(3)$$

$$-0.004=\frac{-3P(1-0.6)}{210\times 10^3}$$

$$P=700 \text{ MPa} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

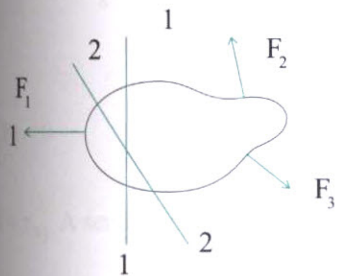
$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)}=175 \text{ GPa} \quad \boxed{\text{Rpta.}}$$

CAPÍTULO

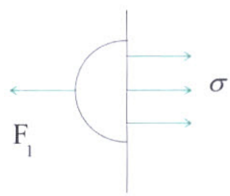
5

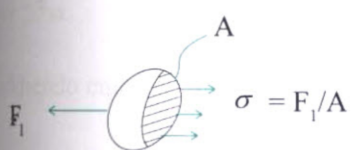
ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

5.1 Variación del esfuerzo con la orientación del elemento

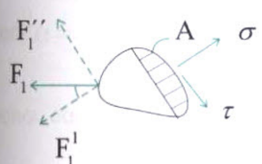


Corte 1-1 :





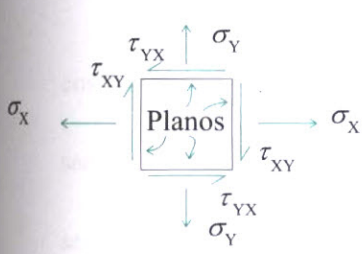
Corte 2-2 :

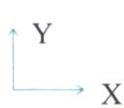


Para el mismo punto, los esfuerzos varían con la orientación que tenga el plano.

El objetivo es determinar en qué planos se presentan los esfuerzos máximos, y calcular sus magnitudes.

5.1.1 Esfuerzo en un punto



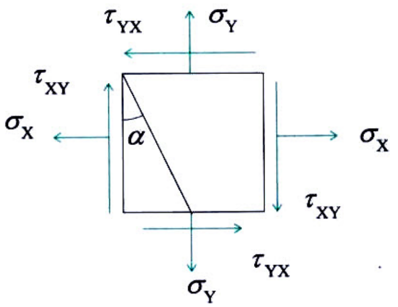


$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

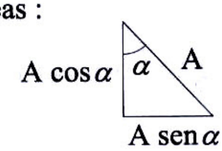
Signos : $\sigma_x, \sigma_y (+)$ TRACCIÓN

τ_{xy} + Sentido horario

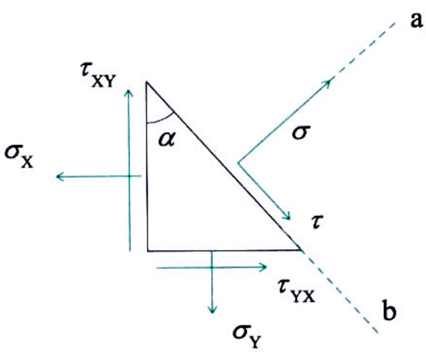
5.1.2 Estado inicial de esfuerzo



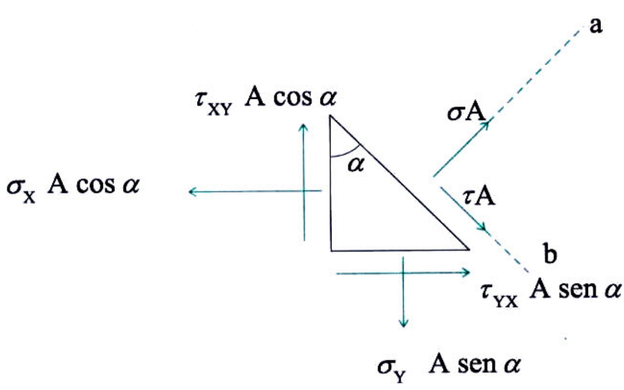
Áreas :



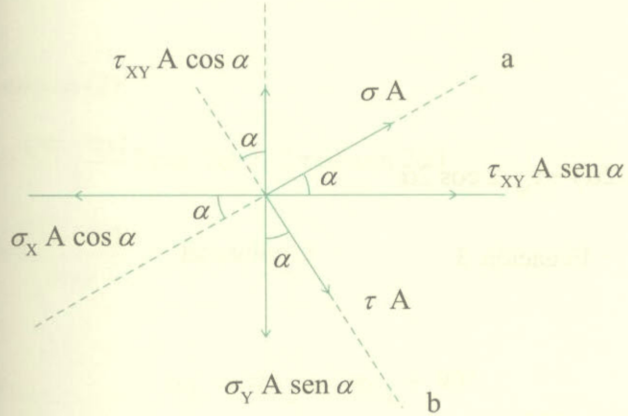
5.1.3 Esfuerzos en el prisma triangular



5.1.4 Fuerzas en el prisma triangular



5.1.5 Diagrama de las fuerzas en un punto



$\sum Fa = 0$

$$\sigma A + \tau_{xy}\, A\, \text{sen}\alpha\, \cos\alpha + \tau_{xy}\, A \cos\alpha\, \text{sen}\alpha - \sigma_y\, A\, \text{sen}\alpha\, \text{sen}\alpha - \sigma_x A \cos\alpha \cos\alpha = 0$$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Dividiendo entre A: $\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y\, \text{sen}^2\alpha - 2\, \tau_{xy}\, \text{sen}\alpha\, \cos\alpha$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \text{sen}^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \text{sen}\alpha\, \cos\alpha &= \frac{1}{2}\text{sen}\ 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos\ 2\alpha - \tau_{xy}\ \text{sen}\ 2\alpha$$

Ecuación 1

$\Sigma F_b = 0$

$$\tau A + \tau_{xy}\, A\, \text{sen}\alpha\, \text{sen}\alpha + \sigma_y\, A\, \text{sen}\alpha\, \cos\alpha - \tau_{xy}\, A \cos\alpha \cos\alpha - \sigma_x\, A \cos\alpha\, \text{sen}\alpha = 0$$

Dividiendo entre A: $\tau = \sigma_x\, \text{sen}\alpha\, \cos\alpha - \sigma_y\, \text{sen}\alpha\, \cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \text{sen}^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \text{sen}\alpha\, \cos\alpha &= \frac{1}{2}\ \text{sen}\ 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\ \text{sen}\ 2\alpha + \tau_{xy}\ \cos\ 2\alpha$$

Ecuación 2

5.1.6 Ubicación de los planos donde se producen el máximo y el mínimo esfuerzo normal

En la ecuación (1)

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\alpha} = 0 = \frac{(\sigma x - \sigma y)}{2}\ 2(-\text{sen }2\alpha) - \tau_{xy}\ 2\cos 2\alpha$$

$$\tan\ 2\alpha = \frac{-2\ \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \text{Ecuación 3}$$

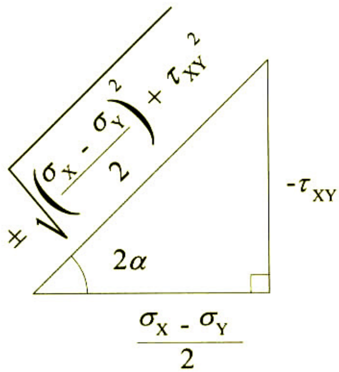
α_1 y α_2

$$\alpha_1 = \alpha_{P_1} \qquad \alpha_2 = \alpha_{P_2} = \alpha_{P_1} + 90^\circ$$

5.1.7 Magnitud de los esfuerzos principales

Son esfuerzos normales a los planos principales y el esfuerzo cortante es nulo.

De la ecuación (3)



$$\left.\begin{aligned} \text{sen}2\alpha &= \frac{-\tau xy}{\pm\sqrt{\ }} \\ \cos 2\alpha &= \frac{(\sigma x - \sigma y)/2}{\pm\sqrt{\ }} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{En la ecuación 1} \\ &\text{En la ecuación 2} \\ &\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma = \left(\frac{\sigma x + \sigma y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau xy^2} \qquad \text{Ecuación 4}$$

$\sigma_1 = \sigma_{P_1}$ y $\sigma_2 = \sigma_{P_2}$

5.1.8 Ubicación de los planos donde se producen el máximo y mínimo esfuerzo cortante

En la ecuación (2):

$$\frac{\delta\tau}{\delta\alpha}=0=\frac{(\sigma x-\sigma y)}{2}2\cos\ 2\alpha+\ 2\ \tau xy(\text{-sen}\ 2\alpha)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{(\sigma x-\sigma y)}{2\tau xy} \qquad \text{Ecuación 5}$$

α_1 y α_2

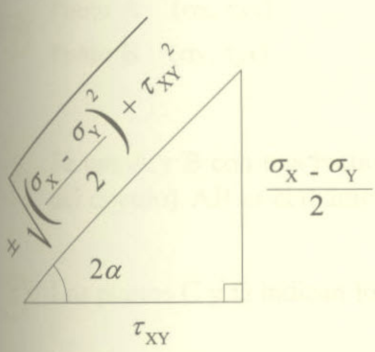
$$\alpha_1\ =\ \alpha_{C_1} \qquad\qquad \alpha_2\ =\ \alpha_{C_2}=\ \alpha_{C_1}+\ 90^{\circ}$$

Comparando la ecuación (3) con la ecuación (5):

$$\tan\ 2\alpha_C=\frac{-1}{\tan\ 2\alpha_P}$$

5.1.9 Magnitud de los esfuerzos cortantes máximo y mínimo

De la ecuación (5)



$$\left.\begin{aligned}\text{Sen}\ 2\alpha&=\frac{(\sigma x-\sigma y)/2}{\pm\sqrt{\ }}\\ \text{Cos}\ 2\alpha&=\frac{\tau xy}{\pm\sqrt{\ }}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{En la ecuación 2}\\ &\text{En la ecuación 1}\end{aligned}$$

$$\sigma=(\sigma_X+\sigma_Y)/2 \qquad \text{Ecuación (6')}$$

$$\tau=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma x-\sigma y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} \qquad \text{Ecuación 6}$$

$$\tau_1=\tau_{C_1}\quad \text{y}\quad \tau_2=\tau_{C_2}$$

A) Invariantes

De la ecuación 4: $\sigma_{P_1}+\sigma_{P_2}=\sigma_x+\sigma_y$ Ecuación 7

De la ecuación 6: $\tau_{C_1}+\tau_{C_2}=0$ Ecuación 8

B) Fórmula alternativa

Ecuación 1^2 + ecuación 2^2 :

$$\left[\sigma-\left(\frac{\sigma x+\sigma y}{2}\right)\right]^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma x-\sigma y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2 \qquad \text{Ecuación 9}$$

5.2 Resumen

5.2.1 Esfuerzos en un plano arbitrario

$$\sigma = \frac{(\sigma x + \sigma y)}{2} + \frac{(\sigma x - \sigma y)}{2} \cos 2\alpha - \tau xy \text{ sen } 2\alpha \quad --- (1)$$

$$\tau = \frac{(\sigma x - \sigma y)}{2} \text{ sen } 2\alpha + \tau xy \cos 2\alpha \quad --- (2)$$

5.2.2 Esfuerzos principales

$$\tan 2\alpha_P = \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma x - \sigma y)} \quad --- (3)$$

$$\sigma = \left(\frac{\sigma x + \sigma y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad --- (4)$$

5.2.3 Esfuerzo cortante máximo en el plano

$$\tan 2\alpha_C = \frac{(\sigma x - \sigma y)}{2\tau_{xy}} \quad --- (5)$$

$$\tau = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad --- (6)$$

$$\sigma = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} \quad --- (6`)$$

5.2.4 Invariantes

$$\sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} = \sigma_x + \sigma_y \quad --- (7)$$

$$\tau_{C_1} + \tau_{C_2} = 0 \quad --- (8)$$

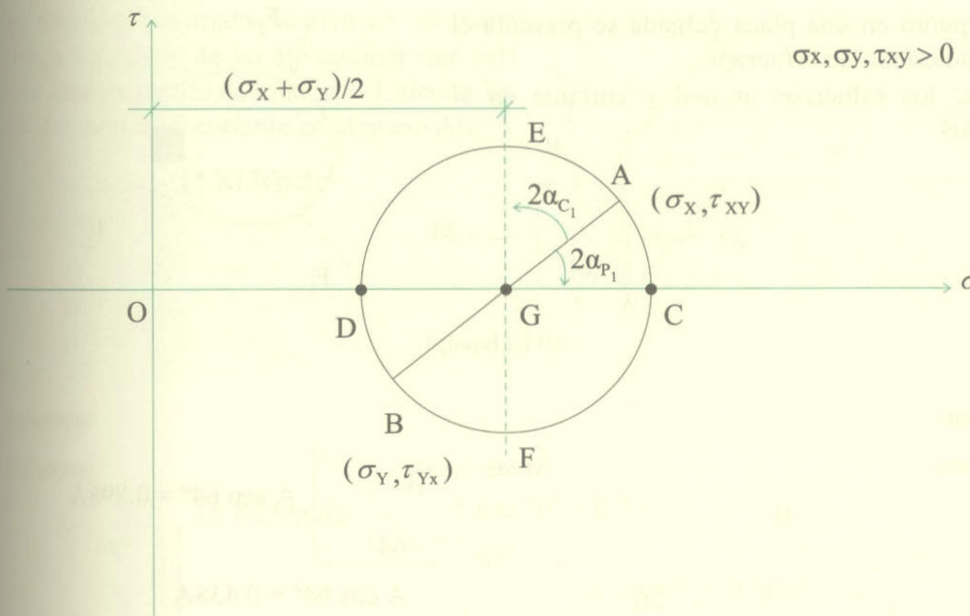
5.2.5 Convención de signos

$$\alpha \begin{cases} (+) \text{ antihorario} \\ (-) \text{ horario} \end{cases}$$

$$\tau xy \begin{cases} (+) \text{ horario} \\ (-) \text{ antihorario} \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} (+) \text{ tracción} \\ (-) \text{ compresión} \end{cases}$$

5.3 Círculo de Mohr



(1°) Punto A $(\sigma x, \tau xy)$
Punto B $(\sigma y, \tau yx)$

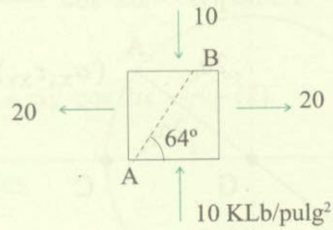
(2°) Se une A y B con una recta que cruza al eje horizontal en G (centro del círculo). AB es el diámetro del círculo.

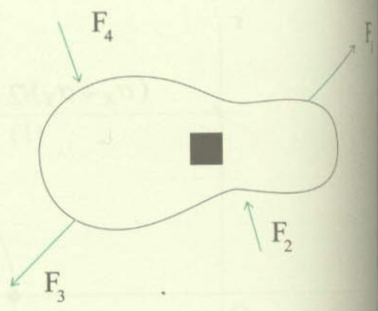
(3°) Los puntos C y D indican los esfuerzos principales ($\tau = 0$)

(4°) Los puntos E y F indican los esfuerzos cortantes máximo y mínimo.

Problema 137

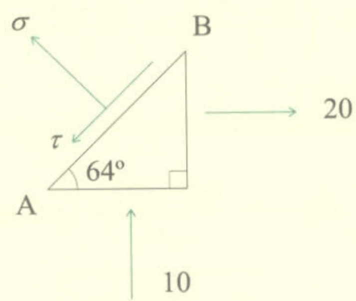
En un punto en una placa delgada se presenta el siguiente estado de esfuerzos.
Calcular los esfuerzos normal y cortante en el plano AB.



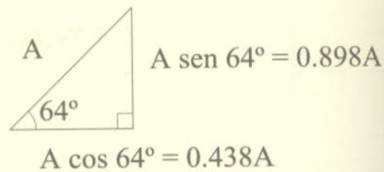


Solución:

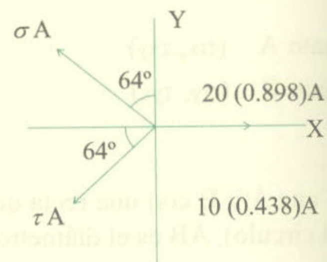
Esfuerzos



Áreas



Fuerzas



$$\sum F_X = 0 \rightarrow 20\,(0.898)A - \sigma A \underbrace{\text{sen } 64^\circ}_{0.898} - \tau A \underbrace{\cos 64^\circ}_{0.438} = 0$$

$$17.96\ A - \sigma A(0.898) - \tau A(0.438) = 0$$

$$17.96 - 0.898\ \sigma - 0.438\tau = 0\ \ ---(1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 10\,(0.438)A + \sigma A \underbrace{\cos 64^\circ}_{0.438} - \tau A \underbrace{\text{sen } 64^\circ}_{0.898} = 0$$

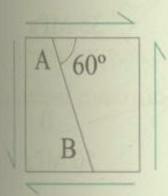
$$4.38 + 0.438\ \sigma - \tau(0.898)\ \ ---(2)$$

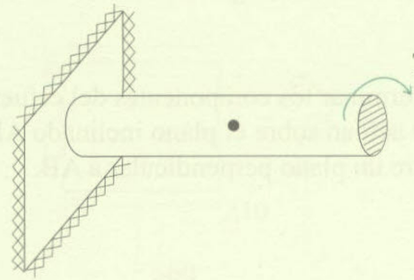
De 1 y 2: $\sigma = 14.23$ KLb/pulg^2 (Tracción) Rpta.

$\swarrow \tau = 11.82$ KLb/pulg^2 Rpta.

Problema 138

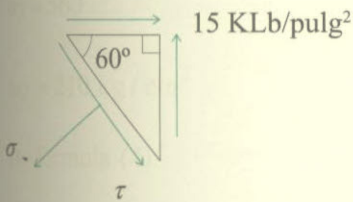
Los esfuerzos mostrados actúan en un punto sobre la superficie de un eje circular que está sujeto a un momento de torsión T. Calcular los esfuerzos normal y cortante en el plano AB



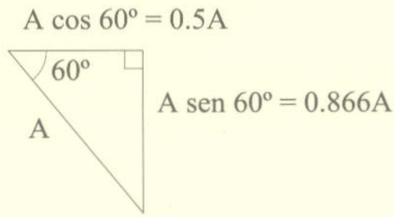


Solución:

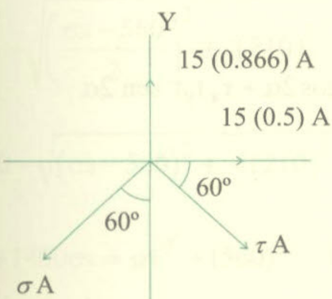
Esfuerzos



Áreas



Fuerzas



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \tau A \underbrace{\cos 60^o}_{0.5} + 15(0.5)A - \sigma A \underbrace{\operatorname{sen} 60^o}_{0.866} = 0$$

$$0.5\tau + 7.5 - 0.866\sigma = 0 \quad ---(1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 15\,(0.866)A - \sigma A \underbrace{\cos 60^o}_{0.5} - \tau A \underbrace{\operatorname{sen} 60^o}_{0.866} = 0$$

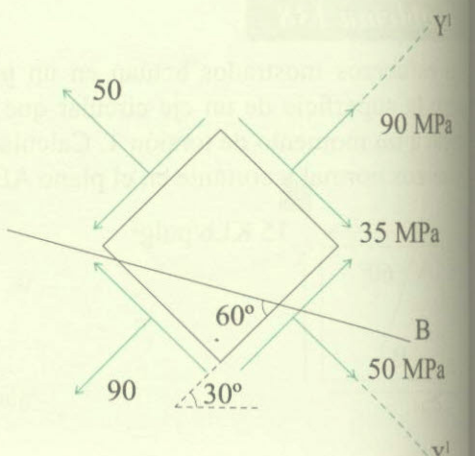
$$12.99 - 0.5\,\sigma - 0.866\tau = 0 \quad ---(2)$$

De 1 y 2: $\sigma = 12.99$ KLb/pulg^2 (Tracción) Rpta.

$\searrow \tau = 7.5$ KLb/pulg^2 Rpta.

Problema 139

Determinar los componentes del esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado AB y sobre un plano perpendicular a AB.



Solución:

$\sigma_{x}1 = 50$ MPa

$\sigma_{y}1 = 90$

$\tau_{x}1_{y}1 = +35$

$\alpha = 120^{\circ}$

De fórmula 1: $\sigma = \dfrac{\sigma_{x}1 + \sigma_{y}1}{2} + \dfrac{(\sigma_{x}1 - \sigma_{y}1)}{2}\cos 2\alpha + \tau_{x}1_{y}1 \text{ sen } 2\alpha$

$\sigma_1 = 70 + (-20)\cos 240^{\circ} + 35 \text{ sen} 240^{\circ}$

$\sigma_1 = 49.69$ MPa

De fórmula 7: $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x}1 + \sigma_{y}1$

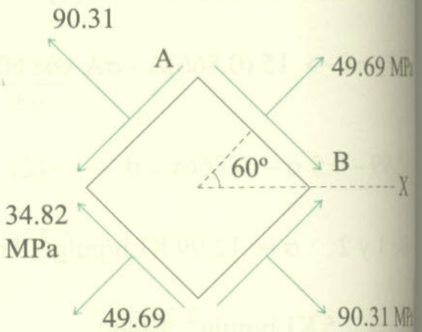
$\sigma_2 = 90.31$ MPa

De fórmula 2: $\tau = \dfrac{-(\sigma_{x}1 - \sigma_{y}1)}{2} \text{ sen } 2\alpha + \tau_{x}1_{y}1 \cos 2\alpha$

$\tau_1 = 20 \text{ sen} 240^{\circ} + 35 \cos 240^{\circ}$

$\tau_1 = -34.82$ MPa

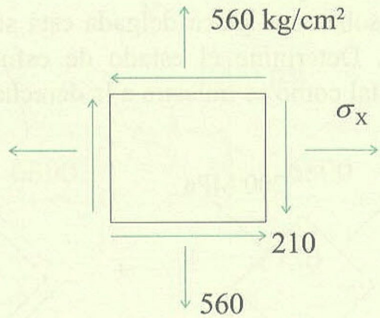
De fórmula 8: $\tau_1 + \tau_2 = 0 \rightarrow \tau_2 = 34.82$ MPa



Problema 140

Para el estado plano de esfuerzos ⟷ se conoce el esfuerzo principal mínimo: -70 kg/cm².

Calcular: σ_x, el esfuerzo ⟷ principal máximo, $\tau_{máximo}$



Solución:

$\sigma y = 560$

$\tau xy = 210 \text{ kg} / \text{cm}^2$

De fórmula (4):

$$-70 = \frac{\sigma x + 560}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma x - 560}{2}\right)^2 + (210)^2}$$

$$-140 = \sigma x + 560 - \sqrt{(\sigma x - 560)^2 + 4(210)^2}$$

$$(700)^2 + \cancel{\sigma x^2} + 1400\sigma x = \cancel{\sigma x^2} + (560)^2 - 1120\sigma x + 4(210)^2$$

$$2520\sigma x = 4(210)^2 + (560)^2 - (700)^2$$

$\sigma x = 0$ Rpta.

De fórmula (7):

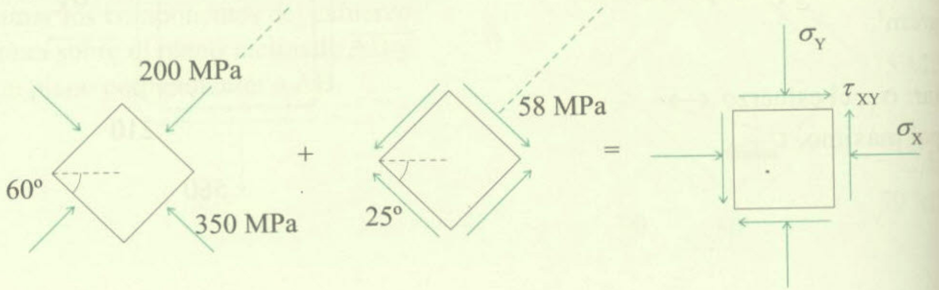
$$0 + 560 = -70 + \sigma_{máximo}$$

$\sigma^P_{máximo} = 630 \text{ kg} / \text{cm}^2$ Rpta.

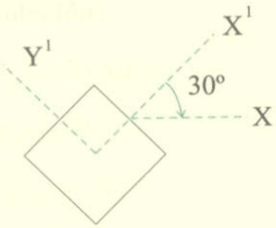
$\tau_{máximo} = \sqrt{\left(\frac{560}{2}\right)^2 + (210)^2} = 350 \text{ kg} / \text{cm}^2$ Rpta.

Problema 141

Un punto sobre una placa delgada está sometido a los dos estados sucesivos de esfuerzo mostrados. Determine el estado de esfuerzo resultante representado sobre el elemento orientado, tal como se muestra a la derecha:



Solución:



$\sigma_x 1 = -200$ MPa

$\sigma_y 1 = -350$

$\tau_{x} 1_{y} 1 = 0$

$\alpha = -30º$

En fórmula 1:

$\sigma_1 = -275 + 75\cos(-60º) + 0$

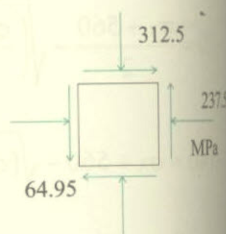
$\sigma_1 = -237.5$ MPa

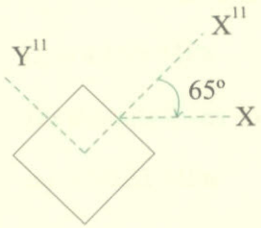
En fórmula 7:

$-237.5 + \sigma_2 = -200 - 350$

$\sigma_2 = -312.5$ MPa

En fórmula 2: $\tau = \pm\ 75\ \text{sen}(-60º) + 0 = -64.95$ MPa





$\sigma_x 11 = \sigma_y 11 = 0$

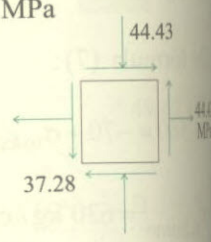
$\tau_x 11_y 11 = +\ 58$ MPa

$\underbrace{\alpha = -65º}$

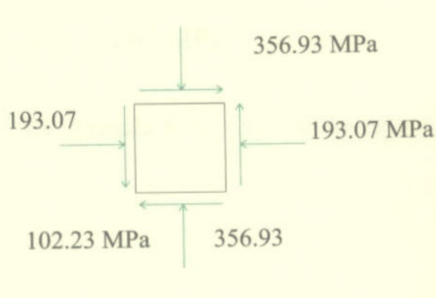
En fórmula 1: $\sigma_1 = 0 + 0 - 58\ \text{sen}\ (-130º) = 44.43$ MPa

En fórmula 7: $44.43 + \sigma_2 = 0 + 0 \rightarrow \sigma_2 = -44.43$ MPa

En formúla 2: $\tau = 0 \pm 58\cos(-130º) = -37.28$ MPa



Conclusión:



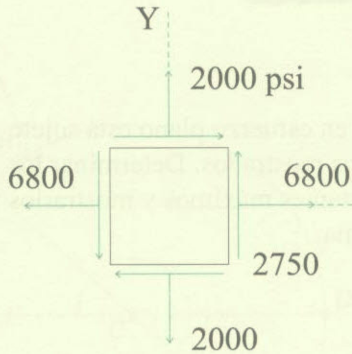
$\therefore \sigma_x = -193.07$ MPa (compresión)

$\sigma_y = -356.93$ MPa (compresión)

$\tau_{xy} = -102.23$ MPa **Rpta.**

Problema 142

Un elemento en esfuerzo plano está sujeto a los esfuerzos mostrados. Determinar los esfuerzos principales y mostrarlos en un diagrama.



Solución:

$\sigma_x = 6800$

$\sigma_y = 2000$

$\tau_{xy} = -2750$

$(\sigma_x + \sigma_y)/2 = 4400$

$(\sigma_x - \sigma_y)/2 = 2400$

En fórmula (4):

$$\sigma = 4400 \pm \sqrt{(2400)^2 + (2750)^2}$$

$$\sigma = 4400 \pm 3650$$

$\sigma P_1 = 8050$

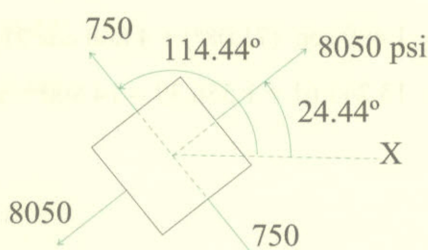
$\sigma P_2 = 750$

En fórmula (3): $\tan 2\alpha P_1 = \dfrac{-2(-2750)}{4800}$

$2\alpha P_1 = 48.88°$

$\alpha P_1 = 24.44°$

$\alpha P_2 = 114.44°$



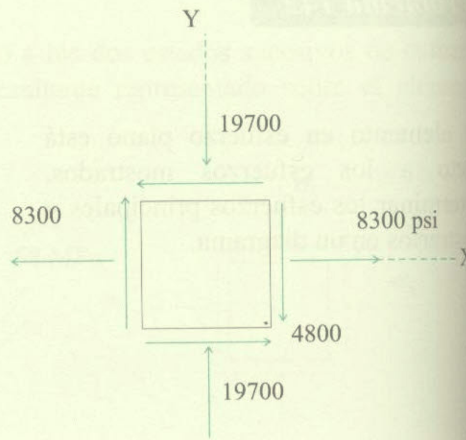
En fórmula (1):

$$\sigma = 4400 + 2400 \cos 48.88° + 2750 \operatorname{sen} 48.88°$$

$$\sigma = 4400 + 1578.33 + 2071.66 = 8050 = \sigma P_1$$

Problema 143

Un elemento en esfuerzo plano está sujeto a los esfuerzos mostrados. Determinar los esfuerzos cortantes máximos y mostrarlos en un diagrama.



Solución:

$\sigma_x = 8300$ $(\sigma_x - \sigma_y)/2 = 1400$

$\sigma_y = -19700$

$\tau_{xy} = 4800$

En fórmula (6): $\tau = \pm\sqrt{(14\,000)^2 + (4\,800)^2}$

$\tau C_1 = +14\,800$ $\tau C_2 = -14\,800$

En fórmula (6`): $\sigma = (8\,300 - 19\,700)/2 = -5\,700$

En fórmula (5): $\tan 2\alpha C_1 = \dfrac{28\,000}{2(4800)} = 2.91666$

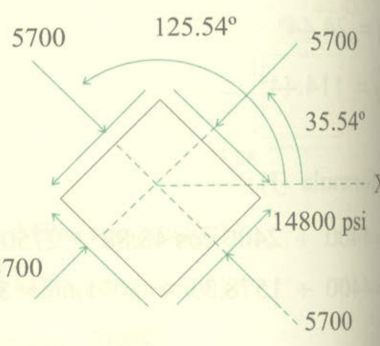
$2\alpha C_1 = 71.08°$ $\alpha C_1 = 35.54°$

$\alpha C_2 = 125.54°$

En fórmula (2):

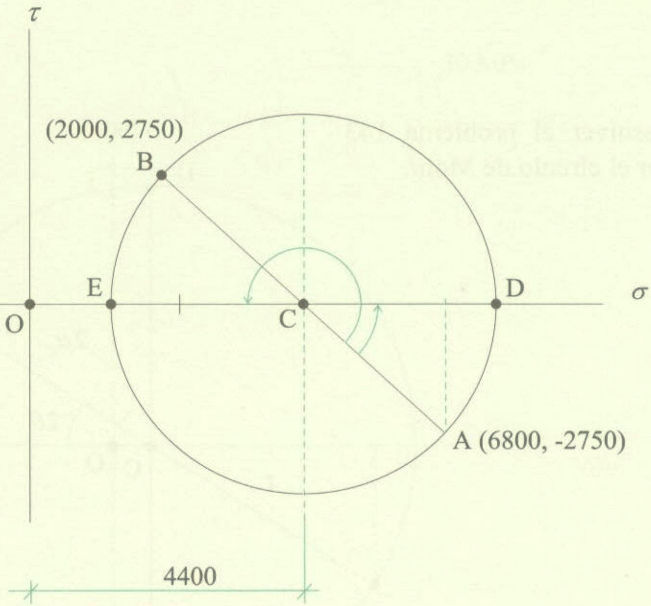
$\tau = 1\,400 \text{ sen } (71.08°) + 4\,800 \cos 71.08°$

$\tau = 13\,243.61 + 1\,556.39 = 14\,800 = \tau C_1$



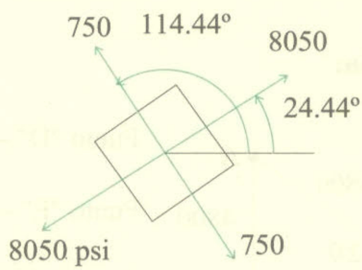
Problema 144

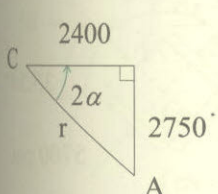
Resolver el problema 142 por el círculo de Mohr.



Solución:

$$\text{"A"}\begin{cases} \sigma x = 6800 \\ \tau xy = -2750 \end{cases} \qquad \text{"B"}\begin{cases} \sigma y = 2000 \\ -\tau xy = 2750 \end{cases}$$





$r = 3\ 650$

$\tan 2\alpha = 1.1458$

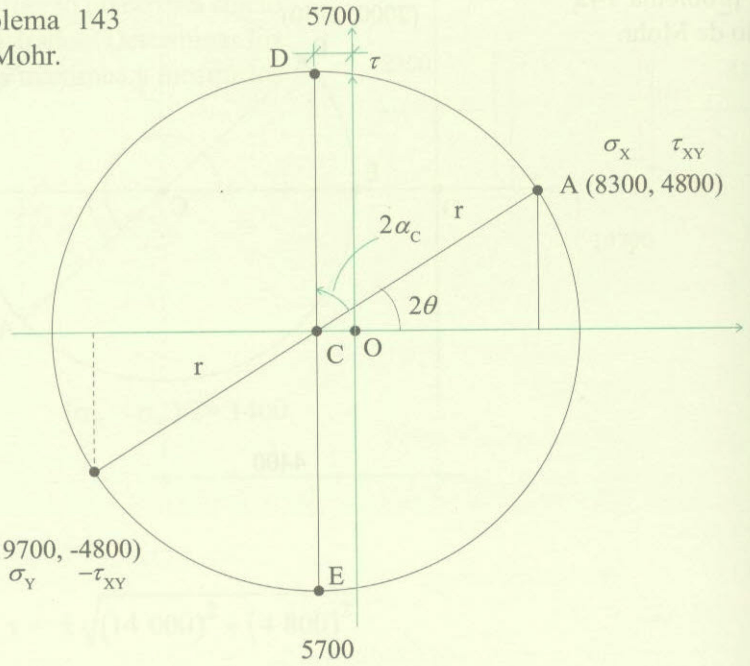
$2\alpha = 48.88$

Punto "D" $\rightarrow$ σ máx $= 4400 + r = 8050 = \sigma P_1$, $\alpha P_1 = 24.44°$

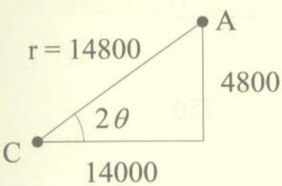
Punto "E" $\rightarrow$ σ mín $= 4400 - r = 750 = \sigma P_2$, $\alpha P_2 = 114.44°$

Problema 145

Resolver el problema 143 por el círculo de Mohr.



Solución:



Punto "D" $\rightarrow$ $\tau C_1 = +14\,800 = r$

Punto "E" $\rightarrow$ $\tau C_2 = -14\,800 = -r$

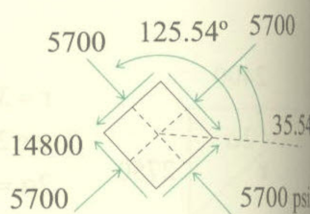
$\tan 2\theta = 0.3428$

$2\theta = 18.92°$

$2\theta + 2\alpha_C = 90° \rightarrow 2\alpha_{C_1} = 71.08°$

$\alpha_{C_1} = 35.54°$

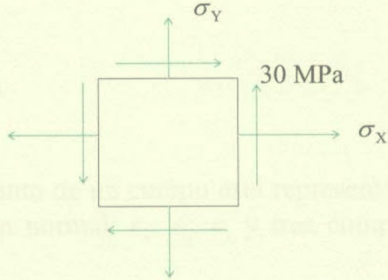
$\alpha_{C_2} = 125.54°$



Problema 146

Calcular

$\sigma x, \sigma y = ?$



Esfuerzos principales son: 20MPa

-80MPa

Solución: $\tau xy = -30MPa$

De fórmula(4) :

$$\begin{array}{l} (20 = A \pm B) \\ \underline{(-80 = A - B)} \\ -60 = 2A \end{array}$$

$$-30 = A = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} = -30$$

$$\sigma x + \sigma y = -60 \quad ---(1)$$

$$\begin{array}{l} (20 = A + B) - \\ \underline{(-80 = A - B)} \\ 100 = 2B \end{array}$$

$$50 = B = \sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 50$$

$$(\sigma x - \sigma y)^2 = (1600)4$$

$$(\sigma x - \sigma y) = +80 \quad ---(2)$$

$$(\sigma x - \sigma y) = -80 \quad ---(3)$$

De (1) y (2):

$$\begin{array}{r} \sigma x + \sigma y = -60 \\ \underline{\sigma x - \sigma y = +80} \\ 2\sigma x = +20 \end{array}$$

De (1) y (3):

$$\begin{array}{r} \sigma x + \sigma y = -60 \\ \underline{\sigma x - \sigma y = -80} \\ 2\sigma x = -140 \end{array}$$

Rpta. $\left\{\begin{array}{l} \sigma x = +10 \text{ MPa} \\ \sigma y = -70 \text{ MPa} \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l} \sigma x = -70 \text{ MPa} \\ \sigma y = +10 \text{ MPa} \end{array}\right\}$ Rpta.

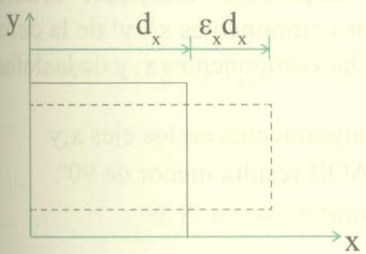
CAPÍTULO 6

ESTADO PLANO DE DEFORMACIONES

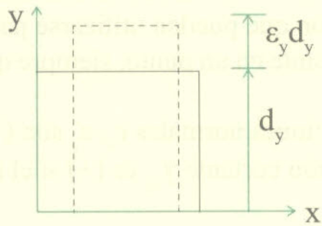
El estado general de deformación unitaria en un punto de un cuerpo está representado por una combinación de tres componentes de deformación normal: ε_x, ε_y, ε_z y tres componentes de deformación cortante γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Estas seis componentes tienden a deformar cada una de las caras de un elemento del material y, al igual que el esfuerzo, los componentes de las deformaciones normal y cortante en el punto variarán de acuerdo con la orientación del elemento.

En general, un elemento deformado en el plano se encuentra sometido a 2 componentes de deformación normal ε_x, ε_y y a un componente de deformación cortante γ_{xy}.

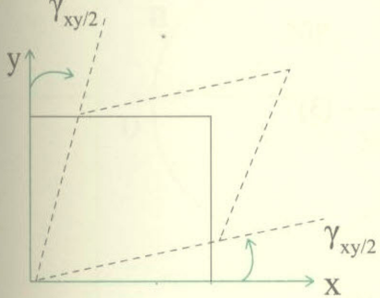


Deformación normal ε_x



Deformación normal ε_y

"Las deformaciones normales son el producto de cambios de longitud del elemento"

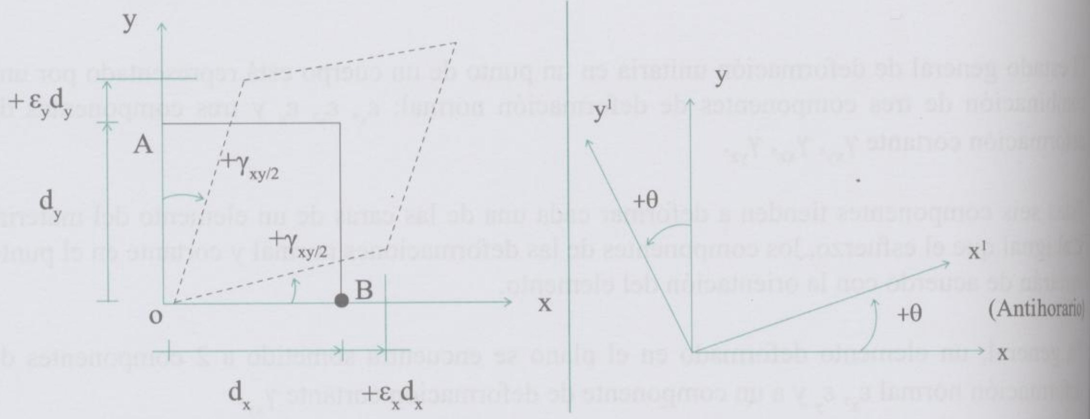


"La deformación cortante es el producto de la rotación relativa de dos lados adyacentes del elemento"

Los ingenieros deben transformar estos datos con el fin de obtener los componentes de la deformación en otras direcciones.

6.1 Ecuaciones generales de la transformación de la deformación unitaria plana

• Convención de signos



En el análisis de la deformación unitaria plana es importante establecer ecuaciones de transformación que puedan utilizarse para determinar las componentes x^1, y^1 de la deformación normal y cortante en un punto, siempre que se conozcan las componentes x, y de la deformación.

Las deformaciones normales ε_x, ε_y son (+) si generan alargamientos en los ejes x,y.
La deformación cortante γ_{xy} es (+) si el ángulo interno AOB resulta menor de 90º.

6.1.1 Deformaciones en un plano arbitrario

$$\varepsilon_{x^1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \quad ---(1)$$

$$\varepsilon_{x^1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \quad ---(2)$$

$$\frac{\gamma_{x^1y^1}}{2} = -\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \quad ---(3)$$

6.1.2 Deformaciones principales

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad ---(4)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad ---(5)$$

θ_{P1}

$\theta_{P2} = \theta_{P1} + 90^o$

6.1.3 Deformación unitaria cortante máxima en el plano

$$\frac{\gamma\text{máximo}}{2}=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}\quad ---(6)$$

$$\tan 2\theta_s=-\frac{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)}{\gamma xy}---(7)$$

θs_1

$\theta s_2=\theta s_1+90^o$

$$\varepsilon_{\text{promedio}}=\frac{(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}{2}---(8)$$

Invariante

$$\text{Ecuación}(1)+(2):\varepsilon_x{}^1+\varepsilon_y{}^1=\varepsilon_x+\varepsilon_y\ ---\ (9)$$

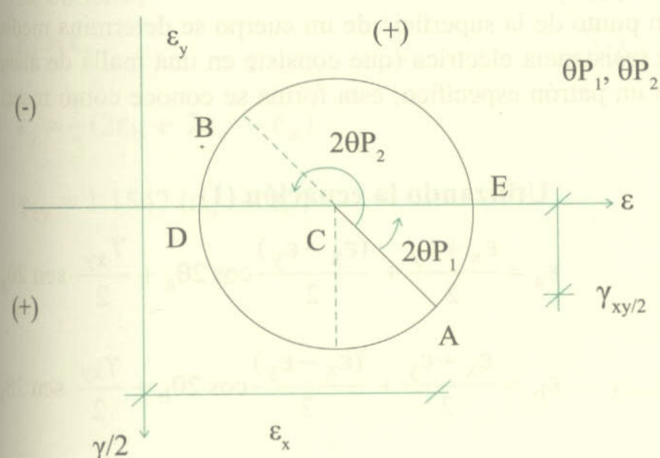
6.1.4 Círculo de Mohr

Suposiciones: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy/2}\rightarrow(+)$

$\varepsilon_x>\varepsilon_y$

$\theta, \beta, \alpha\ \rightarrow$ antihorario (+)

6.1.5 Deformaciones principales (E,D)



$\theta P_1, \theta P_2 \rightarrow (+)$

$A=(\varepsilon_x,\gamma_{xy}/2)$

$B=(\varepsilon_x,-\gamma_{xy}/2)$

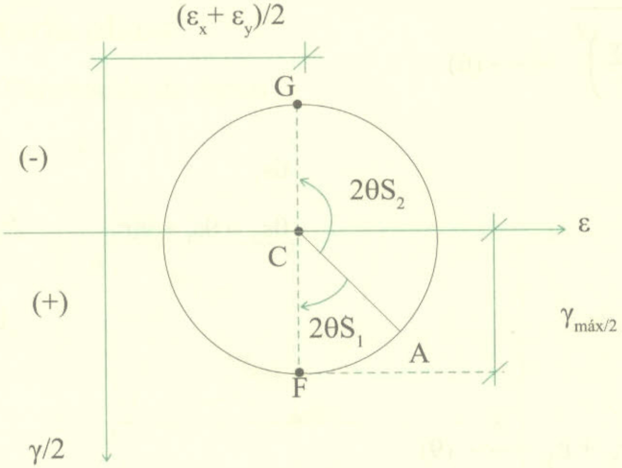
$$C=\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2},0\right)$$

$\overline{AC}\rightarrow$ radio

$E=(\varepsilon_1,0)$

$D=(\varepsilon_2,0)$

6.1.6 Deformación cortante máxima (F,G)



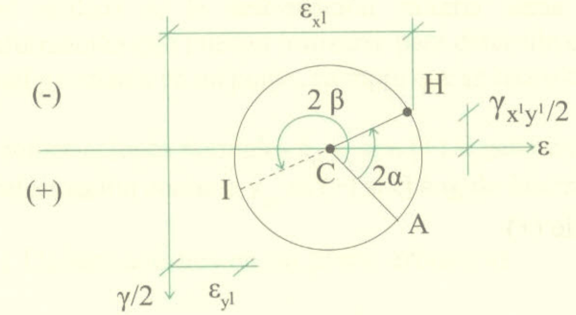
$\theta S_1 \rightsquigarrow (-)$

$\theta S_2 \rightsquigarrow (+)$

$$F = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, \frac{\gamma_{máx}}{2} \right)$$

$$G = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, -\frac{\gamma_{máx}}{2} \right)$$

6.1.7 Deformaciones en un plano arbitrario (H,I)



$\alpha, \beta \rightsquigarrow (+)$

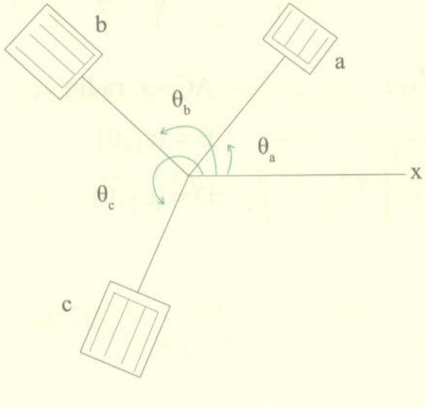
$$H = \left(\varepsilon_{x^1}, -\frac{\gamma_{x^1y^1}}{2} \right)$$

$$I = \left(\varepsilon_{y^1}, -\frac{\gamma_{x^1y^1}}{2} \right)$$

6.2. Rosetas de deformación unitaria

Las deformaciones normales en un punto de la superficie de un cuerpo se determina mediant tres medidores de deformación de resistencia eléctrica (que consiste en una malla de alambr u hoja metálica), dispuestos según un patrón específico; esta forma se conoce como roseta d deformación.

Caso general



Utilizando la ecuación (1)

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos 2\theta_a + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta_a$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos 2\theta_b + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta_b$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos 2\theta_c + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta_c$$

Al resolver las 3 ecuaciones se encuentra ε_x, ε_y

6.2.1 Rosetas de deformación dispuestas a 45º

En la ecuación (1)

$\theta_a = 0°$

$\theta_b = 45°$

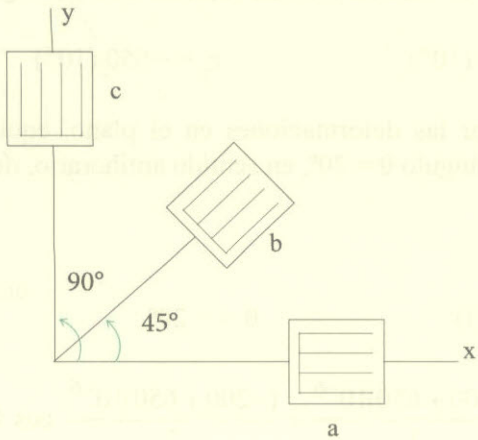
$\theta_c = 90°$

Se obtiene:

$\varepsilon_x = \varepsilon_a$

$\varepsilon_y = \varepsilon_c$

$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$



6.2.2 Rosetas de deformación dispuestas a 60º

En la ecuación (1)

$\theta_a = 0°$

$\theta_b = 60°$

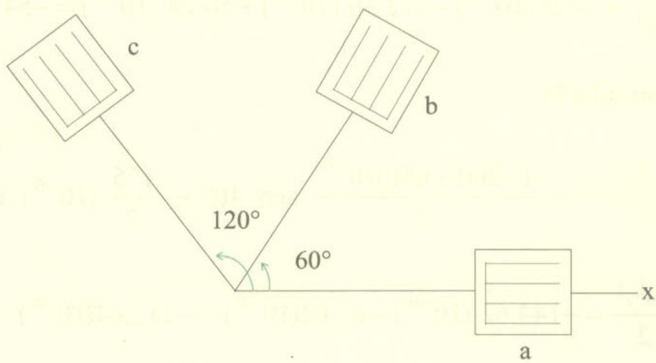
$\theta_c = 120°$

Se obtiene:

$\varepsilon_x = \varepsilon_a$

$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a)$

$\gamma_{xy} = 1.1547\,(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$



Problema 147

El estado de deformación en el punto tiene los siguientes componentes:

$\varepsilon_x = -200\ (10^{-6})$ $\quad\quad$ $\varepsilon_y = -650\ (10^{-6})$ $\quad\quad$ $\gamma_{xy} = -175\ (10^{-6})$

Determinar las deformaciones en el plano, equivalentes sobre un elemento orientado según un ángulo $\theta = 20^o$, en sentido antihorario, desde la posición original.

Solución:

Fórmula (1) $\quad\quad$ $\theta = +20^o$

$$\varepsilon_{x^1} = \frac{-(200+650)10^{-6}}{2} + \frac{(-200+650)10^{-6}}{2}\cos 40^o - \frac{175}{2}(10^{-6})\ \text{sen}\ 40^o$$

$$\varepsilon_{x^1} = -425\,(10^{-6}) + 172.36\ (10^{-6}) + 56.24\ (10^{-6}) = -308.88\ (10^{-6})$$

Fórmula(2)

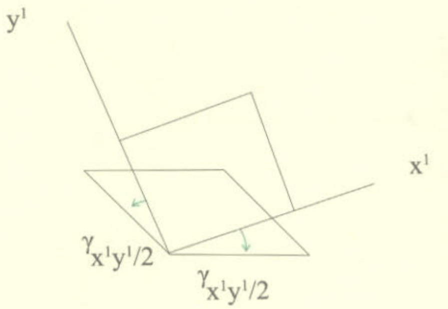
$$\varepsilon_{y^1} = -425\,(10^{-6}) - 172.36\ (10^{-6}) + 56.24\ (10^{-6}) = -541.12\ (10^{-6})$$

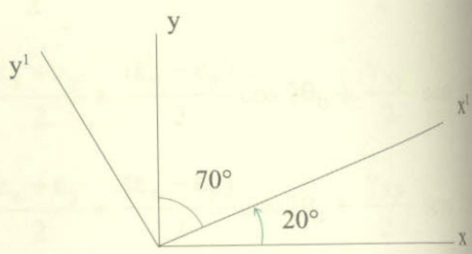
Fórmula(3)

$$\frac{\gamma_{x^1y^1}}{2} = -\ \frac{(-200+650)10^{-6}}{2}\ \text{sen}\ 40^o - \frac{175}{2}\ (10^{-6})\ \cos\ 40^o$$

$$\frac{\gamma_{x^1y^1}}{2} = -144.62\ (10^{-6}) - 67.02(10^{-6}) = -211.64(10^{-6})$$

$$\gamma_{x^1y^1} = -423.28\ (10^{-6})$$





Problema 148

El estado de deformación en el punto tiene los siguientes componentes:

$\varepsilon_x = 850\ (10^{-6})$
$\varepsilon_y = 480\ (10^{-6})$
$\gamma_{xy} = 650\ (10^{-6})$

Determinar:

- Deformaciones principales en el plano
- Deformación cortante máxima en el plano
- La deformación normal promedio

Solución:

Fórmula (4)

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{(850+480)10^{-6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(850\ -480)10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{650(10^{-6})}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 665\ (10^{-6}) \pm\ (10^{-6})\ 373.96$$

$$\varepsilon_1 = 1038.96\ (10^{-6})\quad \varepsilon_2 = 291.04\ (10^{-6})$$

Fórmula (5)

$$\tan 2\theta p = \frac{650}{850-480} = 1.7567$$

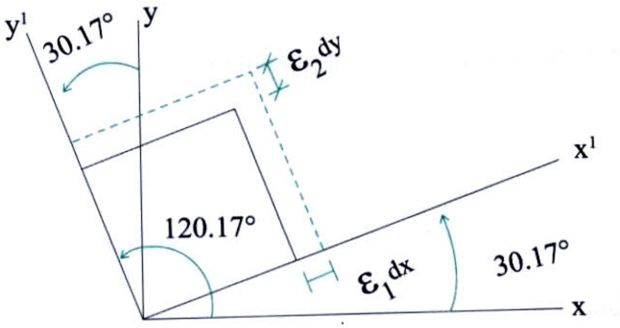
$$\theta p_1 = 30.17^\circ$$

$$\theta p_2 = 120.17^\circ$$

Fórmula (1)

$$\varepsilon_{x^1} = \frac{(850+480)}{2} + \frac{(850-480)}{2}\cos 60.34^\circ + \frac{650}{2}\ \text{sen}\ 60.34^\circ$$

$$\varepsilon_{x^1} = 665 + 91.54 + 282.41 = 1038.96 \times 10^{-6} = \varepsilon_1$$



$$\gamma_{x'y'} = 0$$

Fórmula (6)

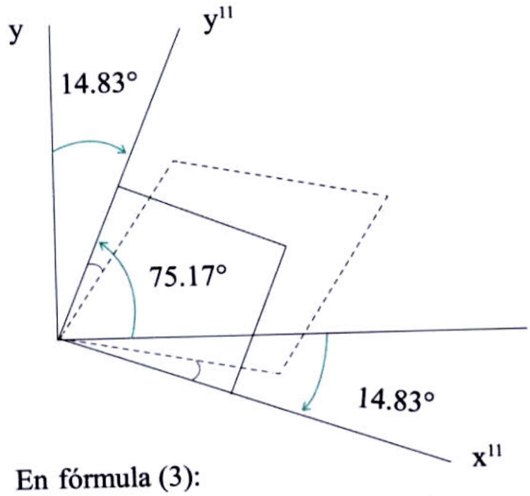
$$\frac{\gamma\ x''y''}{2} = 373.96\ (10^{-6}) \rightarrow \gamma_{x''y''\text{máx}} = 747.92\ \times\ 10^{-6}$$

Fórmula (7)

$$\tan 2\theta_s = \frac{1}{1.7567} = -0.5692 \rightarrow \theta_{s_1} = -14.83°$$

$$\theta_{s_2} = +75.17°$$

De (8) $\varepsilon_{\text{prom}} = 665(10^{-6})$



En fórmula (3):

ε_x, ε_y, γ_{xy}

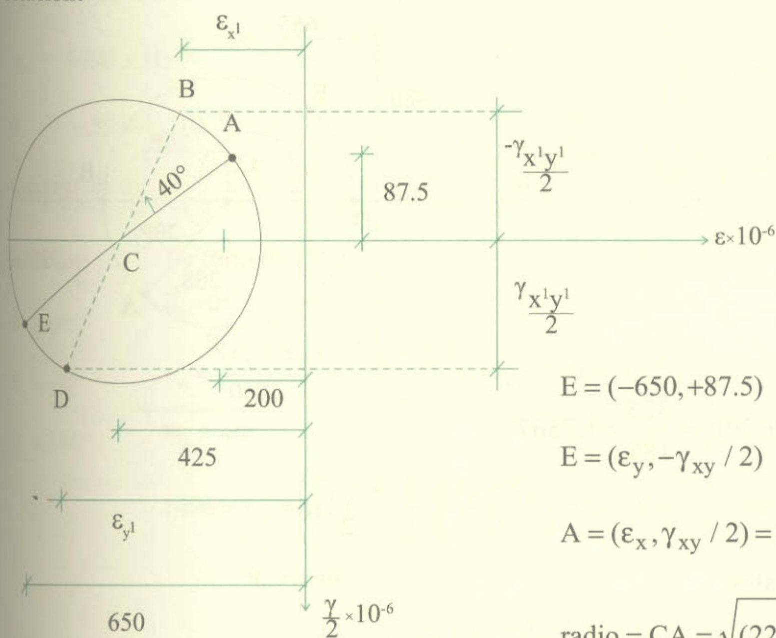
$2\theta_s$ = -29.66 °

$\gamma_{x^{r}y^{1}}$ = 747.92 x 10^{-6}

Problema 149

Resolver el problema147 por el círculo de Mohr.

Solución:



$E = (-650, +87.5)$

$E = (\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2)$

$A = (\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2) = (-200 - 87.5)$

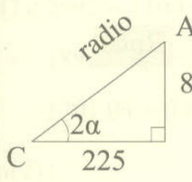
$$\text{radio} = CA = \sqrt{(225)^2 + (87.5)^2} = 241.41$$

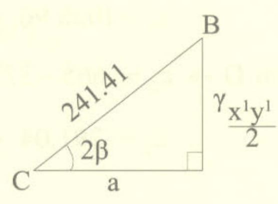
$\tan 2\alpha = 87.5 / 225$

$2\alpha = 21.25^{\circ}$

$2\beta = 61.25^{\circ}$

$$\operatorname{sen} 2\beta = \frac{\gamma x^1 y^1 / 2}{241.41}$$





$a = 241.41 \cos 2\beta = 116.11$

$\gamma x^1 y^1 = -423.3 \text{ x } (10^{-6})$

$\varepsilon_{x^1} = -\ (425 - 116.11) = -308.89 \text{ x } 10^{-6}$ Rpta.

$\varepsilon_{y^1} = -\ (425 + 116.11) = -541 \text{ x } 10^{-6}$ Rpta.

Problema 150

Resolver el problema 148 por el círculo de Mohr.

Solución:

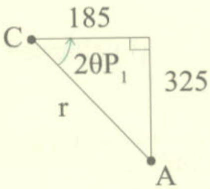
$E = (480, -325)$

$A = (850, 325)$

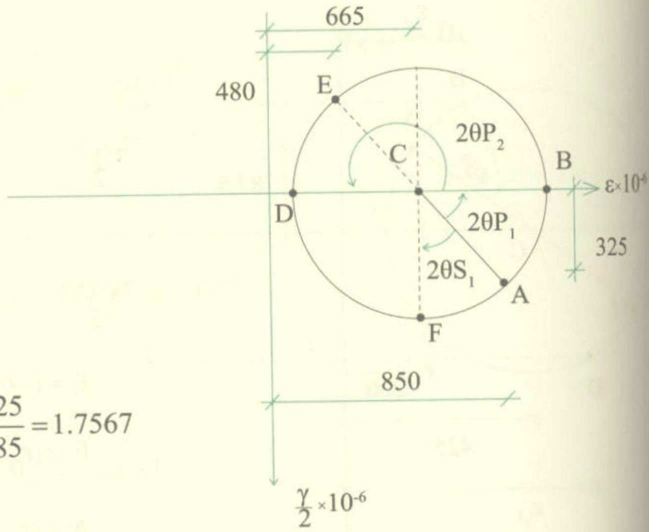
$C = (665, 0)$

$r = \sqrt{(325)^2 + (185)^2}$

$CA = r = 173.96$



$$\tan 2\theta P_1 = \frac{325}{185} = 1.7567$$



Deformaciones principales

En B $\rightarrow$ $\varepsilon_1 = 665 + 373.96$

$\varepsilon_1 = 1038.96 \times 10^{-6}$ Rpta.

En D $\rightarrow$ $\varepsilon_2 = 665 - 373.96$

$\varepsilon_2 = 291.04 \times 10^{-6}$ Rpta.

$2\theta P_1 = 60.34°$

$2\theta P_1 = 30.17°$

$\theta P_2 = 120.17°$ Rpta.

Deformación cortante máxima

$\varepsilon_{prom} = 665 \times 10^{-6}$

$2\theta_{P_1} + 2\theta s_1 = 90° \rightarrow 2\theta s_1 = 29.66° \rightarrow \theta s_1 = 14.83°$

Interpretando:

$\theta s_1 = -14.83°$ Rpta.

$\theta s_2 = 75.17°$ Rpta.

$$\frac{\gamma_{x^1y^1\,\text{máximo}}}{2} = 373.96 \times 10^{-6}$$

$\gamma_{x^1y^1\,\text{máximo}} = 747.92 \times 10^{-6}$ Rpta.

Problema 151

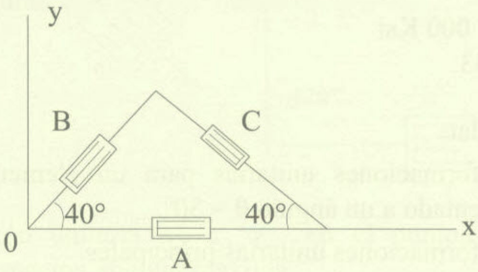
Las deformaciones unitarias sobre la superficie de un dispositivo experimental de aluminio puro (E = 70 GPa; u = 0.33) se midieron por medio de extensómetros donde:

$\varepsilon_a = 1100 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 1496 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_c = -39.44 \times 10^{-6}$

Calcular el σ_x



Solución:

$\theta_a = 0°$

$\theta_b = 40°$

$\theta_c = 140°$

De fórmula (1):

$\theta_a = 0°$

$$\varepsilon_a = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} = \varepsilon_x = 1100 \times 10^{-6}$$

$\theta_b = 40°$

$$1496 = \varepsilon_b = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos\ 80° + \frac{\gamma_{xy}}{2}\ \text{sen}\ 80° \quad ---(1)$$

$\theta_c = 140°$

$$-39.44 = \varepsilon_c = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos\ 280° + \frac{\gamma_{xy}}{2}\ \text{sen}\ 280° \quad ---(2)$$

En (1): $2992 = 1100 + \varepsilon_y + (1100 - \varepsilon_y)\,0.1736 + 0.9848\,\gamma_{xy}$

$$1892 = \varepsilon_y + 190.96 - 0.1736\,\varepsilon_y + 0.9848\,\gamma_{xy}$$

$$1701.04 = 0.8264\,\varepsilon_y + 0.9848\,\gamma_{xy} \quad ---(3)$$

En(2):

$$-78.88 = 1100 + \varepsilon_y + (1100 - \varepsilon_y)\,0.1736 - 0.9848\,\gamma_{xy}$$

$$-1369.84 = 0.8264\,\varepsilon_y - -0.9848\,\gamma_{xy} \quad ---(4)$$

(3) + (4)

$$331.2 = 1.6528\,\varepsilon_y$$

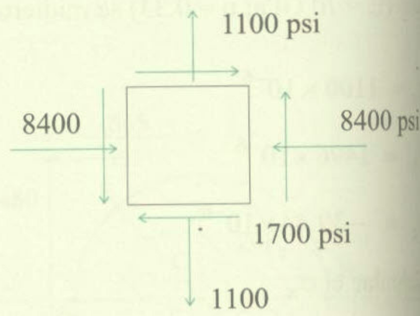
$$\varepsilon_y = 200.38 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - u^2}(\varepsilon_x + u\varepsilon_y) = \frac{70 \times 10^3\ \text{MPa}\left[(1100 + 0.33(200.38)\right]10^{-6}}{\left[1 - (0.33)^2\right]}$$

$$\sigma_x = \frac{70 \times 10^{-3}}{0.8911}(1166.12) = 91.6\ \text{MPa}\ \ \boxed{\text{Rpta.}}$$

Problema 152

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a los esfuerzos mostrados. El material es aluminio.



E= 10 000 Ksi
u= 0.33

Calcular:

a) Deformaciones unitarias para un elemento orientado a un ángulo $\theta = 30^o$.
b) Deformaciones unitarias principales.
c) Deformaciones unitarias cortantes máximas.

Solución:

$\sigma_x = -8400$ psi

$\sigma_y = 1100$ psi

$\tau_{xy} = -1700$ psi

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - u\sigma_y)1/E$$

$$\varepsilon_x = \frac{(-8400-(0.33)1100)}{10^7} = -876.3 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_x - u\sigma_y)1/E$$

$$\varepsilon_y = \frac{[1100+(0.33)8400]}{10^7} = +387.2 \times 10^{-6}$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$G = \frac{E}{2(1+u)} = \frac{10^7}{2(1+0.33)} = 3759398.5 \text{ psi}$$

$$\gamma_{xy} = -4.52 \times 10^{-4}$$

$\gamma_{xy} = -\ 0.0452 \times 10^{-6}$ radianes. Rpta.

a) $\theta = +30^o$

De fórmula (1): $\varepsilon_x{}^1 = -560.44 \times 10^{-6}$

De fórmula (9): $\varepsilon_y{}^1 = 71.34 \times 10^{-6}$

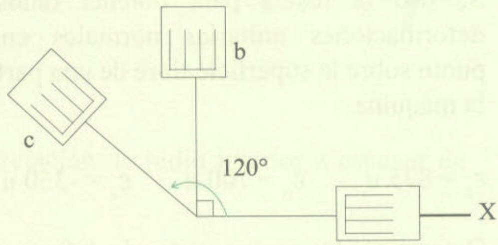
De fórmula (3): $\gamma_{x^1y^1} = 1094.16 \times 10^{-6}$

b) De fórmula (4) $\varepsilon_1 = 387.2 \times 10^{-6}$ $\qquad \varepsilon_2 = -876.3 \times 10^{-6}$

c) De fórmula (6) $\gamma_{máximo} = 631.75 \times 10^{-6}$ radianes. Rpta.

Problema 153

Se usó la roseta para obtener datos de las deformaciones unitarias normales en un punto sobre la superficie libre de una parte de la máquina.



$\varepsilon_a = 665 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 390 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_c = 870 \times 10^{-6}$

Determinar las componentes de deformación unitaria ε_x, ε_y, γ_{xy}, en el punto, las deformaciones unitarias principales y la deformación angular máxima.

Solución:

$\theta_a = 0^0 \qquad \theta_b = 90° \qquad \theta_c = 120°$

De fórmula (1):

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = \varepsilon_y \; --- (1)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = \varepsilon_y \; --- (2)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - 0.433\gamma_{xy} \; --- (3)$$

De (3) y (1) y (2):

$\gamma_{xy} = 0.5773\ (3\varepsilon_b + \varepsilon_a - 4\varepsilon_c) = -949.65 \times 10^{-6}$ radianes **Rpta.**

De (1) $\varepsilon_x = 665 \times 10^{-6}$ De (2) $\varepsilon_y = 390 \times 10^{-6}$

Fórmula (4):

$$\varepsilon = 527.5 \pm \sqrt{(137.5)2 + (474.82)2}$$

$\varepsilon = 527.5u \pm 494.33u$, $\varepsilon_1 = 1021.83 \times 10^{-6}$ **Rpta.**

$\varepsilon_2 = 33.17 \times 10^{-6}$ **Rpta.**

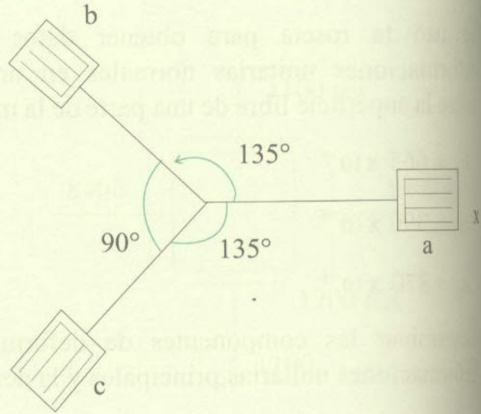
Fórmula (5): $\tan 2\theta P_1 = \dfrac{-949.65}{275} = -3.453$

$2\theta P_1 = -73.84° \qquad \theta P_1 = -36.92° \qquad \theta P_2 = 53.08°$

Fórmula (6): γ máximo $= 2(494.33) = 988.66u$ radianes **Rpta.**

Problema 154

Se usó la roseta para obtener datos de deformaciones unitarias normales en un punto sobre la superficie libre de una parte de la máquina.



$\varepsilon_a = 875$ u $\quad \varepsilon_b = 700$ u $\quad \varepsilon_c = -350$ u

Determinar las componentes de deformación unitaria εx, εy, γ_{xy} en el punto, las deformaciones unitarias principales y la deformación angular máxima.

Solución:

$\theta_a = 0^o \qquad \theta_b = 135^o \qquad \theta_c = 225^o$

$$\text{Formula de (1)}: \varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = \varepsilon_x \; --- (1)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \; --- (2)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \; --- (3)$$

De (2)y (3): $\varepsilon_y = \varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_a = -525 \text{ x } 10^{-6}$ Rpta.

$\gamma_{xy} = \varepsilon_c - \varepsilon_b = -1050$ u radianes. Rpta.

$\varepsilon_x = 875$ u Rpta.

$$\text{Fórmula(4)}: \varepsilon = 175 \pm \sqrt{(700)^2 + (525)2} = 175\text{u} \pm 875\text{u}$$

$\varepsilon_1 = 1050$ u $\qquad \varepsilon_2 = -700$ u Rpta.

$$\text{Fórmula(5)}: \tan 2\theta P_1 = \frac{-1050}{1400} = -075$$

$$2\theta P_1 = -36.86^o$$

$\theta P_1 = -18.43^o$ Rpta.

$\theta P_2 = 71.57^o$ Rpta. $\qquad$ Fórmula(6): $\gamma_{\text{máximo}} = 2(875)\text{u} = 1750\text{u}$ radianes Rpta.

CAPÍTULO

7

RECIPIENTES DE PARED DELGADA

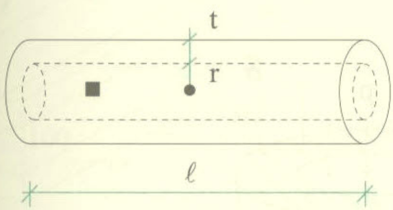
- Pared delgada se refiere a un recipiente con una relación de radio interior a espesor de pared de 10 o más:

$$\boxed{\frac{r}{t} \geq 10}$$

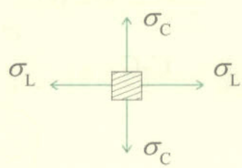
- La distribución del esfuerzo a través del espesor "t" de la pared no variará de manera significativa; por ello, se supondrá constante. (el esfuerzo es de tracción).
- La presión dentro del recipiente es la presión manométrica interna desarrollada por el gas o fluido contenido, puede ser constante o variar de manera continua.

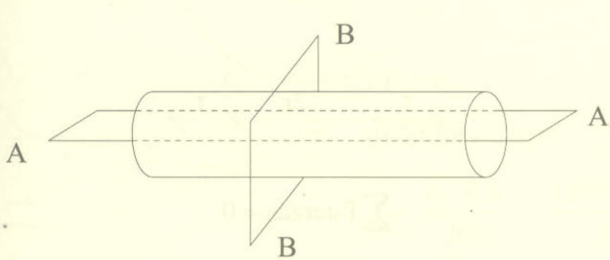
7.1 Esfuerzos en la pared del recipiente

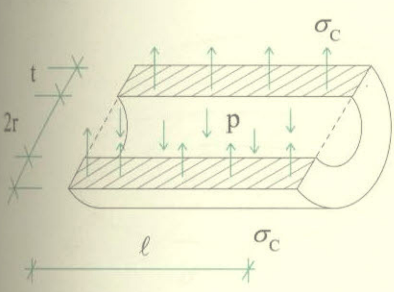
7.1.1 Recipientes cilíndricos



Presión interior: P







SECCIÓN A-A

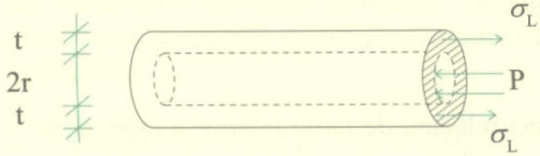
$$\sum F_v = 0$$

$$\sigma_c(\text{Área en que actúa}) = P(\text{Área proyectada})$$

$$2\sigma_c t\ell = p2r\ell$$

$$\sigma_c = \frac{pr}{t} \rightarrow \text{Esfuerzo circunferencial, anular o meridional.}$$

SECCIÓN B-B



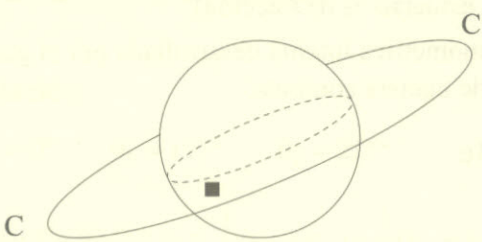
$$\sum F_H = 0$$

$$\sigma_L\,(\text{Área en que actúa}) = p(\text{Área proyectada})$$

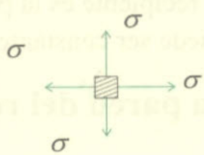
$$\sigma_L\, 2\pi r t = p\pi r^2$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \rightarrow \text{Esfuerzo longitudinal}$$

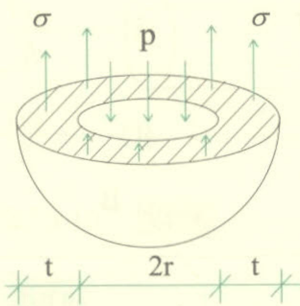
7.1.2 Recipientes esféricos



Presión interior: p



C-C



$$\sum \text{Fuerzas} = 0$$

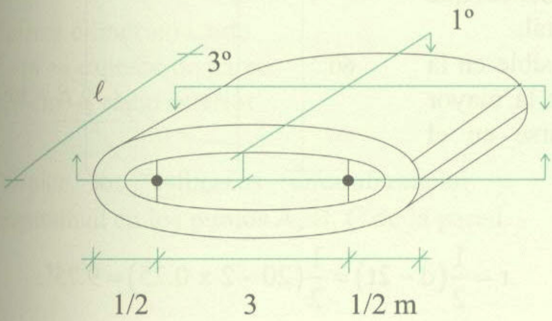
$$p(\text{Área proyectada}) = \sigma(\text{Área en que actúa})$$

$$p\pi r^2 = \sigma 2\pi r t$$

$$\boxed{\sigma = \frac{pr}{2t}}$$

Problema 155

¿Cuál será la máxima presión interna a la que puede estar sometido el depósito totalmente cerrado, el cual contiene un gas en su interior, sin exceder el esfuerzo indicado?

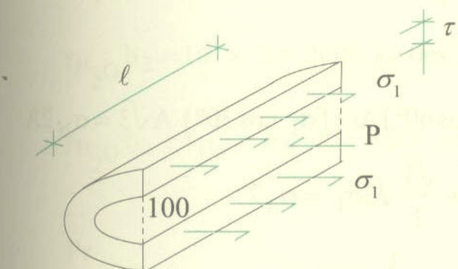


t = 6 mm

$\sigma \leq 1200$ kg/cm2

Solución:

1° corte



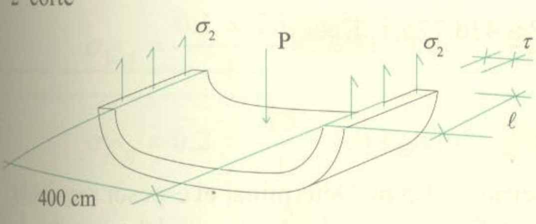
$$\Sigma F = 0$$

$$2\sigma_1 t l = p(100)\ \text{cm}\ 1$$

$$1200 = \sigma_1 = \frac{100p}{1.2}$$

$p \leq 14.4$ kg/cm^2 Rpta.

2° corte

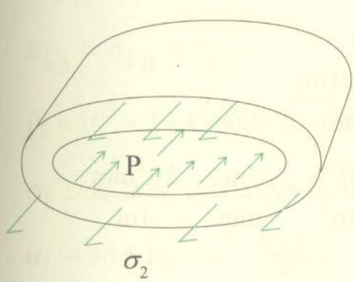


$$\Sigma F = 0$$

$$p(400)\ell = 2\sigma_2 t\ell$$

$$p = \frac{\sigma_2\ 0.6}{200} = \frac{1200 \times 0.6}{200} = 3.6\ \text{kg/cm}^2$$

3° corte



$$[\text{perímetro} \times t] = p\ (\text{Área})$$

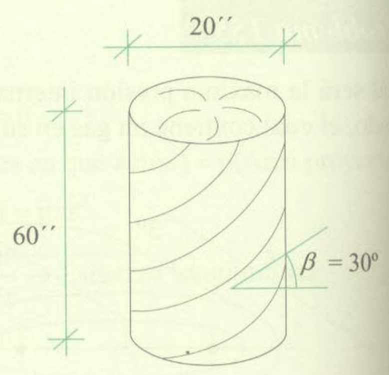
$$\sigma_L\left[(600 + 100\pi) \times 0.6\right] = p\left[300\ (100) + \pi(50)^2\right]$$

$$1200\ (548.49) = p[37\ 854]$$

$$p = 17.39\ \text{kg}/\text{cm}^2$$

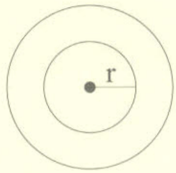
$\therefore\ p \leq 3.6$ kg/cm^2 Rpta.

Problema 156



La porción cilíndrica del tanque compresor de aire comprimido se ha fabricado con una placa de 0.25" de espesor, a lo largo de una hélice, que forma un ángulo β = 30º con la horizontal. Sabiendo que el esfuerzo normal admisible en la soldadura es de 10500 psi, determinar la mayor presión manométrica que puede usarse en el tanque.

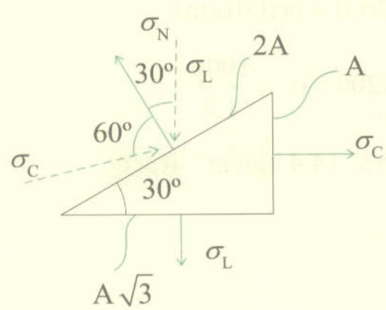
Solución:



$$r = \frac{1}{2}(d - 2t) = \frac{1}{2}(20 - 2 \text{ x } 0.25) = 9.75''$$

$$\sigma_c = \frac{Pr}{t} = \frac{P \text{ x } 9.75}{0.25} = 39P$$

$$\sigma_L = \frac{\sigma_c}{2} = 19.5 \text{ P}$$



$$\sum F_N = 0$$

$$(\sigma_c \cos 60^\circ)A + (\sigma_L \cos 30^\circ)\ A\sqrt{3} = \sigma_N 2A$$

$$\frac{1}{2}\sigma_c + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\sigma_L = \sigma_n 2$$

$$\frac{1}{4}(39p) + \frac{3}{4}(19.5P) = \sigma_N = 10\ 500 \text{psi}$$

$P \leq 430.77$psi Rpta.

Problema 157

Un tanque esférico para gas tiene un radio interno r = 1.5 m. Determinar el espesor requerido "t" si la presión interna será P = 300 KPa y el esfuerzo normal máximo no debe exceder de 12 MPa.

Solución:

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

$$12 = \frac{300\ (1.5)}{2t}$$

$t = 18.75$ mm. Rpta.

Unidades:

$$MPa = \frac{KPa\,(m)}{mm}$$

$$10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{10^3 N}{m^2} \times \frac{1m}{mm} \times \frac{10^3 mm}{1m}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ El factor de conversión de unidades es 1.

Problema 158

$\gamma_{agua} = 1\,000$ kg/m³

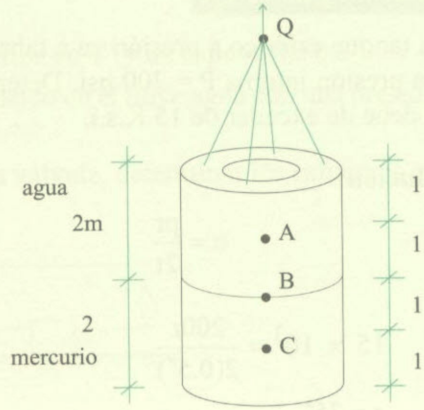
$\gamma_{mercurio} = 13\,600$ kg/m³

Recipiente cilíndrico izado

$t = 1$ cm → espesor de pared

$r_i = 25$ cm → radio interior

• Calcular los esfuerzos circunferencial y longitudinal en los puntos A, B, C de la pared.



Solución:

$$\gamma_{H_2O} h_1 = 10^3 \times 1 = 10^3 \text{kg}/\text{m}^2 <> 0.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma_{H_2O} h_2 = 10^3 \times 2 = 2000 \text{ kg}/\text{m}^2 <> 0.2 \text{ kg}/\text{cm}^2$$

$$\gamma_{H_2O} h_2 + \gamma_{Hg} \times h_3 = 10^3 \times 2 + 13600 \times 1 = 15600 \text{ kg/m}^2 <> 1.56 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{Pr}{t} = \sigma_c$$

$$\sigma_{C_A} = \frac{0.1 \times 25}{1} = 2.5 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Rpta.}$$

$$\sigma_{C_B} = 0.2 \times \frac{25}{1} = 5.0 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Rpta.}$$

$$\sigma_{C_C} = 1.56 \times \frac{25}{1} = 39 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Rpta.}$$

$$\sigma_{L_A} = \sigma_{L_B} = \sigma_{L_C}$$

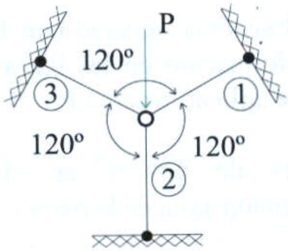
$$P_f = 10^3 \times 2 + 13600 \times 2 = 29200 \text{ kg}/\text{m}^2 <> 2.92 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_L 2\pi tr \rightarrow \sigma_L 2\pi(1)25 = 2.92\pi(25)^2$$

$$\sigma_L = 36.5 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Rpta.}$$

Problema 78

Determinar el esfuerzo normal en cada varilla y el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga.



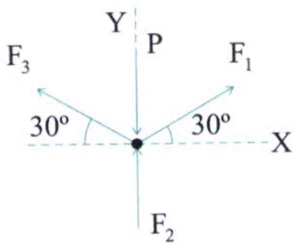
$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$

$E_1 = E_2 = E_3 = E$

$A_1 = A_2 = A_3 = A$

Solución:

Diagrama de cuerpo libre:

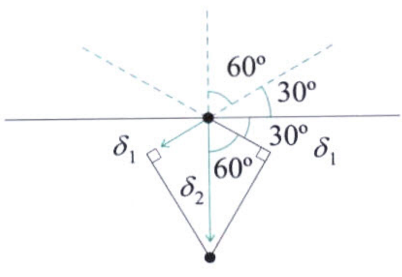


$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 = F_3$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2F_1 \text{ Sen } 30^\circ + F_2 = P$

$F_1 + F_2 = P --- (1)$

Deformaciones:



$\delta_2 \cos 60^\circ = \delta_1$

$\delta_2 = 2\delta_1$

$$\frac{F_2\ell}{EA} = \frac{2F_1\ell}{EA}$$

$F_2 = 2F_1 --- (2)$ en (1):

$3F_1 = P \rightarrow F_1 = P/3$ En (1):

$$F_2 = \frac{2}{3}P$$

$\therefore \sigma_1 = \sigma_3 = P/3A$ (Tracción) Rpta.

$\sigma_2 = \dfrac{2P}{3A}$ (Compresión) Rpta.

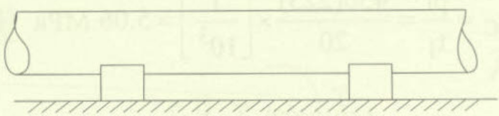
$\delta_V = \delta_2 = \dfrac{2\,P\ell}{3\,EA}$ Rpta.

Problema 161

La tubería de extremos abiertos tiene un diámetro interior de 4" y un espesor de 0.2".

a) Determinar los esfuerzos en las paredes del tubo cuando en él fluye agua con una presión de 60 p.s.i.

b) Si el flujo de agua se detiene debido al cierre de una válvula, determinar los esfuerzos en las paredes del tubo. (presión = 60 p.s.i.)



Solución:

a) $r = 2''$

$t = 0.2''$

$p = 60$ p.s.i

$\sigma_L = 0$

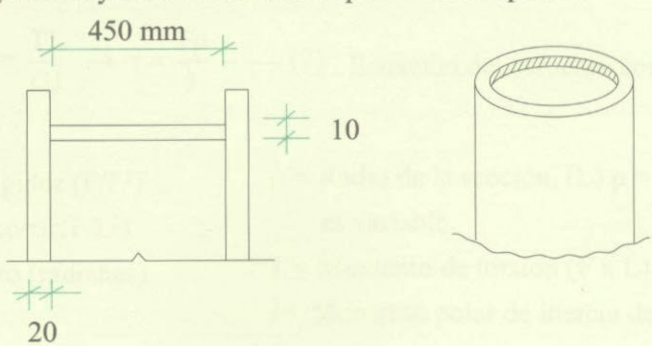
$$\sigma_C = \frac{pr}{t} = \frac{60(2)}{(0.2)} = 600 \text{ p.s.i} \quad \text{Rpta.}$$

b) $$\sigma_L = \frac{Pr}{2t} = \frac{60(2)}{(0.2)} = 600 \text{ p.s.i} \quad \text{Rpta.}$$

$$\sigma_L = \frac{Pr}{2t} = \frac{60(2)}{2(0.2)} = 300 \text{ p.s.i} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 162

La tapa de un recipiente a presión se fabrica uniendo con pegamento la placa circular al extremo del recipiente. La presión interna es 450 KPa. Determinar el esfuerzo cortante promedio en el pegamento y los esfuerzos en la pared del recipiente.



Solución:

En la pared

P= 450 kpa

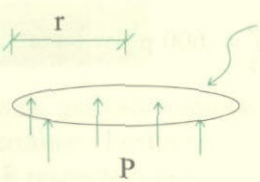
r= 225 mm

$t_1 = 20$ mm

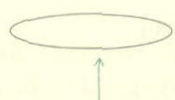
$$\sigma_C = \frac{pr}{t_1} = \frac{450(225)}{20} \times \left[\frac{1}{10^3}\right] = 5.06 \text{ MPa} \quad \text{Rpta.}$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t_1} = \frac{450(225)}{2(20)} \times \left[\frac{1}{10^3}\right] = 2.53 \text{ MPa} \quad \text{Rpta.}$$

En el pegamento

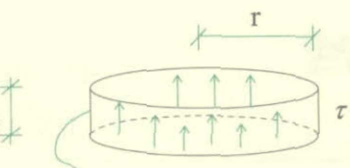


r = 225 mm P = 450 KPa



$F = PA_1 = P\pi r^2$

$t_2 = 10$ mm



$A_2 = 2\pi r t_2$

$$\uparrow F = P A_1 = p\pi r^2$$

$$\tau = \frac{F}{A_2} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r t_2} = \frac{pr}{2t_2}$$

$$\tau = \frac{450(225)}{2(10)} \times \left[\frac{1}{10^3}\right] = 5.06 \text{ MPa} \quad \text{Rpta.}$$